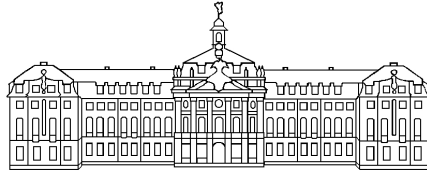


Diplomarbeit



**Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster**

**Angeregte Zustände im statischen
Quark-Antiquark-Potential in
dreidimensionaler $SU(2)$ -Eichtheorie**



Institut für
Theoretische Physik

Diplomarbeit
vorgelegt von:
Bastian Brandt

Betreuer:
Prof. Dr. O. Philipsen

MÜNSTER, den 08.01.2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
I Flussröhren und das statische $q\bar{q}$-Potential	3
1.1 Grundlagen der Quantenchromodynamik	3
1.2 Regge-Trajektorien und Flussröhren	4
1.2.1 Regge-Trajektorien	4
1.2.2 Flussröhren	6
1.3 Wilson-Loops und Flussröhren	6
1.4 Spektraldarstellung und Energiezustände	8
1.5 Feldtheorie auf dem Gitter und Confinement bei starker Kopplung	9
1.5.1 Raumzeitgitter und Erwartungswerte für reine $SU(N)$ -Eichtheorie	9
1.5.2 Confinement bei starker Kopplung	10
1.6 Dynamische Fermionen und String-Breaking	11
II Effektive Stringtheorie	13
2.1 Nambu-Stringtheorie	13
2.1.1 Die Nambu-Goto-Wirkung	13
2.1.2 Bewegungsgleichungen und orthonormale Koordinaten	14
2.1.3 Parametrisierung und Lösung der Bewegungsgleichungen	14
2.1.4 Klassische Energien	16
2.2 Quantisierung der transversalen Schwingungen	16
2.2.1 Kanonische Quantisierung und Fock-Raum	16
2.2.2 Effektiver Hamilton-Operator und Energiezustände	17
2.2.3 Die Weyl-Anomalie	18
2.2.4 Klassifizierung der Schwingungszustände in 2+1 Dimensionen	19
2.3 Dualität zwischen offenen und geschlossenen Strings	20
2.3.1 Duale Interpretation der Polyakov-Loop-Korrelationsfunktion	20
2.3.2 Dualität im Falle der Nambu-Stringtheorie	21
2.4 Lüscher-Weisz-Stringtheorie	22
2.4.1 Die effektive Wirkung	22
2.4.2 Die führende Ordnung – Der freie bosonische String	23
2.4.3 Dualität bis zur $\mathcal{O}(1/R^3)$ und Energieniveaus	23
2.5 Polchinski-Strominger-Stringtheorie	24
2.5.1 Die Polchinski-Strominger-Wirkung	24
2.5.2 Entwicklung um das Vakuum des langen geschlossenen Strings	25
2.5.3 Energie-Impuls Tensor und Zentralladung	25
2.5.4 Virasoro-Generatoren	26
2.5.5 Fock-Raum der Fluktuationen	27
2.5.6 Energiezustände	27
III Numerische Methoden	29
3.1 Monte-Carlo-Simulationen	29
3.1.1 Ensemble-Mittelwerte	29
3.1.2 Update-Algorithmen	29
3.1.3 Messfehler und Jackknife-Methode	30
3.2 Operatoren für angeregte String-Zustände	31
3.2.1 Die Operatorbasis und die Korrelationsmatrix	31
3.2.2 Die Eigenzustände der Korrelationsmatrix zur Operatorbasis $\{\mathbb{S}_j\}$	33

3.2.3	Berechnung der Energiezustände	33
3.2.4	Berechnung der Energiedifferenzen	34
3.2.5	Probleme bei großen Wilson-Loops	34
3.3	Der Lüscher-Weisz-Algorithmus	35
3.3.1	Lokalität und Untergitter	35
3.3.2	Berechnung von Erwartungswerten in mehreren Mittelungsstufen	36
3.3.3	Algorithmus	37
3.4	Anwendung des Algorithmus auf Wilson-Loops	38
3.4.1	Zerlegung von Wilson-Loops	39
3.4.2	Ursprüngliche und verbesserte Methode	40
3.4.3	Untergitter-Operatoren für die verbesserte Methode	41
IV	Parameter der Monte-Carlo-Simulationen	43
4.1	Die Gitter und die zugehörigen Skalen	43
4.2	Optimieren der Parameter des LW-Algorithmus	44
4.2.1	Zeitliche Ausdehnung der Untergitter der Zeitentwicklungsoperatoren .	44
4.2.2	Zahl der Updates der Untergitter	44
4.3	Simulationsparameter	46
V	Resultate der Simulationen	47
5.1	Der Grundzustand	47
5.2	Angeregte Zustände	49
5.2.1	Die totalen Energiewerte	49
5.2.2	Energiedifferenzen	51
5.3	Vergleich mit ähnlichen Simulationen	54
5.3.1	Offene Strings	55
5.3.2	Geschlossene Strings – Toleronen	55
	Zusammenfassung und Ausblick	57
	Anhang	59
A	Herleitungen	59
A.1	Orthonormalitätsbedingungen für die Fouriermoden	59
A.2	Ladungskonjugation und Parität bei Erzeugern und Vernichtern	60
A.3	Berechnung von $\langle X^2(\kappa) \rangle$ im Fock-Raum der transversalen Schwingungen	60
B	Aspekte der konformen Feldtheorie	61
B.1	Konforme Transformationen	62
B.2	Zwei Dimensionen, Operatorprodukte und die Zentralladung	62
B.3	Radiale Quantisierung, Operatorformalismus und Virasoro-Algebra . . .	63
B.4	Lagrange-Dichte und Energie-Impuls Tensor des Fluktuationfeldes der Polchinski-Strominger Stringtheorie	64
C	Details der numerischen Methoden	64
C.1	Berücksichtigung der angeregten Zustände bei den Gitterrechnungen . .	64
C.2	Ergebnisse der Simulationen	66
C.3	Test der verwendeten Fits	69
	Literatur	73

Einleitung

Als 1964 von *Zweig* und *Gell-Mann* das Quarkmodell vorgeschlagen wurde, führte dieses auf eine fundamentale Frage:

Wo sind die Quarks?

Die Quarks, welche nach diesem Modell die fundamentalen Bestandteile der mesonischen und baryonischen Materie bilden, tauchen in keinem Experiment isoliert auf, obwohl in Experimenten zu tiefinelastischer Leptonstreuung punktförmige Streuzentren mit Quarkeigenschaften gefunden wurden. Die Beobachtungen, dass Quarks scheinbar nicht isoliert in der Natur vorkommen, prägte den Begriff Quark-Confinement.

Quark-Confinement und die Beobachtung, dass sich die leichten Mesonen sowie Baryonen nach sogenannten Regge-Trajektorien (siehe auch Kapitel (1.2)) anordnen lassen, führte auf die Entwicklung naiver effektiver Modelle für die Bindungen zwischen den Quarks. Zu diesen Modellen gehört die effektive Stringtheorie für Mesonen, nach der die beiden im Meson enthaltenen Quarks durch einen Energiefaden mit konstanter Energiedichte, einem String, ähnlich einem Gummiband, verbunden sind. Die populärsten der verschiedenen Ansätze für diese effektiven Stringtheorien werden in Kapitel (II) behandelt.

Als dann die Quantenchromodynamik (QCD) (Für einen Überblick siehe [1].) zu Beginn der 70er Jahre als Kandidat für die starke Wechselwirkung eingeführt und schließlich aufgrund erfolgreicher Vorhersagen als grundlegende Theorie akzeptiert wurde, führte diese zu einem neuen Freiheitsgrad bei den Quarks, der sogenannten Farbe (*engl.*: *color*). Alle in den Experimenten beobachtbaren freien Teilchen tragen keine offene Farbladung, gehören also zu einem Farb-Singulett, was zu dem erweiterten Begriff des Farb-Confinements führte [2]:

Alle in der Natur vorkommenden Teilchen gehören zu einem Farb-Singulett!

Aufgrund der nichtverschwindenden Farbladung der Quarks ist Quark-Confinement in diesem Prinzip enthalten.

Da Farb-Confinement bei kleinen Energien, also im Bereich starker Kopplung, beobachtet wird, ist eine perturbative Behandlung nicht möglich. Aufgrund der Komplexität der QCD und des nichtabelschen Charakters der zugrundeliegenden lokalen $SU(3)$ -Eichinvarianz ist ein nicht-perturbativer, mathematischer Beweis des Farb-Confinements auf der Grundlage der QCD ebenfalls nicht möglich. Eine qualitative Erklärung liefert allerdings die, aus dem nichtabelschen Charakter der Theorie resultierende Selbstwechselwirkung der Austauschbosonen, der sogenannten Gluonen.

Betrachtet man den Grenzfall statischer Quarks, so kann man effektive Potentialmodelle für die Bindung eines solchen statischen Quark-Antiquark Paares entwickeln (Für einen Überblick siehe [3]). Durch die Selbstwechselwirkung der Gluonen können

die Feldlinien eines solchen Zustandes in einer Röhre endlicher Dicke gebündelt sein, einer Flussröhre mit konstanter Energiedichte. Diese Vorstellung liefert ein naives Modell für Mesonen. Für große Abstände zwischen den Quarks sollte sich diese Flussröhre effektiv wie ein String verhalten, was zu dem Anschluß an die effektive Stringtheorie führt. Anzumerken sei an dieser Stelle bereits, dass für diese Erklärung nur der nichtabelsche Charakter der Theorie entscheidend ist, nicht aber die Eichgruppe $SU(N)$ selber.

Eine Möglichkeit, um die Vorhersagen der effektiven Stringtheorien direkt mit Resultaten aus der QCD zu vergleichen, liefern numerische Gittersimulationen (siehe Kapitel (III)), die eine auf *Wilson* zurückgehende Darstellung der Feldtheorie auf Raumzeitgittern nutzt (Für einen Überblick siehe [4]).

Ziel dieser Arbeit ist es mithilfe von numerischen Simulationen zu untersuchen, in welchem Bereich mithilfe der effektiven Stringtheorien Aussagen bezüglich der QCD gemacht werden können. Insbesondere ist es in dieser Hinsicht auch wichtig herauszufinden, welche der möglichen effektiven Stringtheorien die besten Resultate liefert. Im Eichsektor der vollen QCD, d.h. in vierdimensionaler $SU(3)$ -Eichtheorie, sind die dazu notwendigen Gittersimulationen jedoch relativ rechenintensiv und es ist schwierig, die entscheidenden Resultate in akzeptabler Rechenzeit zu erhalten. In dieser Arbeit werden deshalb Gittersimulationen in dreidimensionaler $SU(2)$ -Eichtheorie durchgeführt. Dieses dimensionsreduzierte Modell sollte ein qualitativ ähnliches Verhalten zeigen wie die QCD, hat allerdings numerisch einige Vorteile. Zudem wird ein spezieller von *Lüscher* und *Weisz* (siehe Kapitel (3.3)) entwickelter Algorithmus verwendet, um den Messfehler bei den Simulationen zu reduzieren.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden zunächst die Grundlagen der effektiven Modelle und deren Anschluß an die QCD skizziert. Das zweite Kapitel beschäftigt sich dann explizit mit den effektiven Stringtheorien für große Abstände zwischen den Quarks, mit denen die Resultate der Gittersimulationen verglichen werden sollen. Im dritten Kapitel werden die grundlegenden Aspekte der Gittersimulationen diskutiert und der spezielle verwendete Lüscher-Weisz Algorithmus zur Fehlerreduktion vorgestellt, sowie dessen Anwendung auf die Berechnung von angeregten String-Zuständen erläutert. Im vierten Kapitel werden dann die Parameter der Gittersimulationen festgelegt und letztlich, im fünften Kapitel, die Resultate der Simulationen dargestellt und diskutiert.

I Flussröhren und das statische $q\bar{q}$ -Potential

Hier werden zunächst die Grundlagen zu den Betrachtungen in den Kapiteln (II) und (III) gelegt. Alle Betrachtungen beziehen sich auf eine beliebige nichtabelsche $SU(N)$ -Eichtheorie, sind also für den Eichsektor der QCD wie auch für die später in den Gittersimulationen betrachtete reine $SU(2)$ -Eichtheorie gültig. Die Ausnahme ist der erste Abschnitt, der sich speziell auf die QCD und somit auf $SU(3)$ -Eichtheorie bezieht. Die darin vorkommenden Ausdrücke lassen sich allerdings für eine beliebige $SU(N)$ -Eichtheorie übernehmen.

Der erste Abschnitt gibt einen kurzen Einblick in die für diese Arbeit wichtigen Grundlagen der QCD und erläutert Konventionen für die nächsten Abschnitte. Der zweite Abschnitt beschreibt den Grundgedanken der effektiven Stringtheorien und erläutert phänomenologisch den Zusammenhang zwischen Flussröhren und Strings. Die nächsten beiden Abschnitte beschäftigen sich dann mit den Observablen für das statische $q\bar{q}$ -Paar in Kontinuums-QCD. Der vierte Abschnitt dieses Kapitels erläutert kurz den Übergang vom Kontinuum zum Gitter und gibt einige Resultate der dort möglichen Starkkopplungsentwicklungen an, bei denen Flussröhren im Grenzfall starker Kopplung explizit untersucht werden können. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels beschäftigt sich schließlich mit den Problemen der effektiven Modelle.

1.1 Grundlagen der Quantenchromodynamik

Die QCD ergibt sich aus der Forderung nach lokaler $SU(3)$ -Eichinvarianz der zugehörigen Lagrangedichte (Für einen Überblick siehe [1]). Die dabei auftretende Ladung wird als Farbe [5] bezeichnet. Die Lagrangedichte der QCD lautet¹

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{q}_i(x) (i \gamma^\mu D_\mu - m_i) q_i(x) - \frac{1}{4} \text{Tr} (F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)), \quad (1.1)$$

wobei $D_\mu \equiv \partial_\mu - ig A_\mu(x)$ die kovariante Ableitung ist, die wegen der geforderten $SU(3)$ -Eichinvarianz eingeführt werden muss und über die die Quarks mit der Kopplungskonstanten g an das Eichfeld $A_\mu(x)$ koppeln. Das Eichfeld $A_\mu(x)$ ist ein Element der Lie-Algebra der Gruppe $SU(3)$ und besitzt somit acht unabhängige Freiheitsgrade, deren zugehörige Austauscheteilchen als Gluonen bezeichnet werden. Die fermionischen Felder $q_i(x)$ beschreiben die Quarks und $i = 1, \dots, N_f$ ist der Index, der die N_f verschiedenen Quarkarten unterscheidet. Die Felder $q_i(x)$ tragen zudem einen weiteren Farbindex, sowie einen Spinorindex, die hier unterdrückt werden.

Der letzte Term der Wirkung ist der übliche von *Yang* und *Mills* [6] betrachtete kinetische Term für die Eichfelder, wobei der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}(x)$ definiert ist über

¹Bei allen Formeln in dieser Arbeit werden natürliche Einheiten $\hbar \equiv c \equiv 1$ benutzt.

den Kommutator

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu]. \quad (1.2)$$

Die Lagrangedichte der QCD enthält, aufgrund des nichtabelschen Charakters der Theorie, über den kinetischen Term der Eichfelder kubische und quartische Selbstwechselwirkungsterme für diese, die unter Anderem verantwortlich für den hier betrachteten Effekt des Confinements sind.

Alternativ kann man die kovariante Ableitung auch mithilfe des Paralleltransporters

$$U_\mu(x) \equiv e^{i g A_\mu(x) \epsilon} = 1 + i g A_\mu(x) \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (1.3)$$

ausdrücken, der ein Element der Eichgruppe $SU(3)$ ist. ϵ ist dabei als infinitesimal klein anzusehen. Die kovariante Ableitung lautet dann²

$$D_\mu \psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{\mu}}{\epsilon} [\psi(x) - U_\mu(x - \epsilon \hat{\mu}) \psi(x - \epsilon \hat{\mu})]. \quad (1.4)$$

Der Paralleltransporter $U_\mu(x)$ beschreibt formal den chromoelektrischen Fluss zwischen den infinitesimal getrennten Raumzeitpunkten x und $x + \epsilon \hat{\mu}$. Der chromoelektrische Fluss entlang eines Weges \mathcal{C} lässt sich also schreiben als

$$U(\mathcal{C}) \equiv \hat{\mathcal{P}} \left(\prod_{(x,\mu) \in \mathcal{C}} U_\mu(x) \right), \quad (1.5)$$

wobei der Operator $\hat{\mathcal{P}}$ für die Pfadordnung sorgt. Nach (1.3) kann man (1.5) analog auch schreiben als

$$U(\mathcal{C}) = \exp \left[i g \int_{\mathcal{C}} A_\mu(x) dx^\mu \right], \quad (1.6)$$

wobei das Integral ein Linienintegral entlang des Weges \mathcal{C} in der vierdimensionalen Raumzeit bezeichnet. Die Beziehungen (1.1) bis (1.6) sind dabei ebenso für eine beliebige nichtabelsche $SU(N)$ -Eichtheorie gültig, wobei die QCD durch den Spezialfall $N \equiv 3$ gegeben ist.

1.2 Regge-Trajektorien und Flussröhren

1.2.1 Regge-Trajektorien

Trägt man bei den niederenergetischen Mesonen den Spin s gegen die quadrierte Masse m^2 auf (siehe Abbildung (1)), so erkennt man, dass sich die Punkte zu Gruppen zusammenfassen lassen, die auf Geraden mit nahezu gleicher Steigung α liegen, den linearen Regge-Trajektorien.

² $\hat{\mu}$ ist der Einheitsvektor in μ -Richtung.

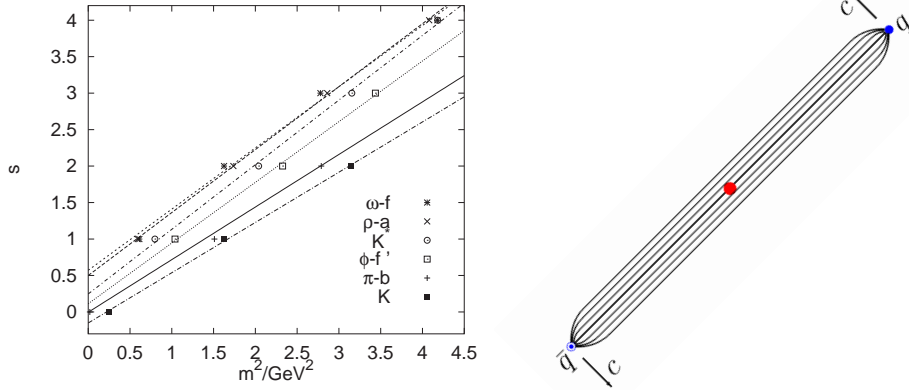


Abbildung (1): Links: Regge-Trajektorien für Mesonen, nach einer Abbildung aus [3]. **Rechts:** Eine um ihren Mittelpunkt rotierende Flussröhre.

Diese Eigenschaft der Mesonen lässt sich durch ein einfaches Modell erklären. Angenommen die Mesonen bestehen aus einem Paar masseloser Quarks und Antiquarks, verbunden durch ein gerades röhrenförmiges Objekt der Länge R mit der konstanten Energie pro Längeneinheit σ . Rotieren die Quarks an den Enden mit nahezu Lichtgeschwindigkeit um das Zentrum des Systems, wie in Abbildung (1) gezeigt, so ist die Energie des Systems gegeben durch

$$E = 2 \sigma \int_0^{R/2} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2(r)}} dr = \frac{\pi}{2} \sigma R \equiv m \quad (1.7)$$

und der innere Drehimpuls ist

$$L = 2 \sigma \int_0^{R/2} \frac{r v(r)}{\sqrt{1 - v^2(r)}} dr = \frac{\pi}{2} \sigma R^2 \equiv s. \quad (1.8)$$

Vergleicht man (1.7) und (1.8), so erkennt man den Zusammenhang

$$s = \alpha m^2 \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{2\pi \sigma}. \quad (1.9)$$

Dieses naive Modell liefert eine Erklärung für die Steigung der Geraden, hat allerdings einige Probleme. Z.B. haben die Geraden einen nichtverschwindenden y-Achsenabschnitt, der durch dieses Modell nicht erklärt werden kann, und die Quarks haben eine nichtverschwindende Masse.

1.2.2 Flussröhren

Das Modell stimmt mit der zugrundeliegenden nichtabelschen Eichtheorie überein wenn man annimmt, dass der chromoelektrische Fluss³ zwischen den Quarks durch nicht perturbative Effekte in einer Röhre endlicher Dicke, einer Flussröhre (*engl.: flux tube*), gebündelt wird, was sich qualitativ mit den bereits beschriebenen Selbstwechselwirkungen der Austauscheteilchen erklären lässt. Das Ausbilden einer Flussröhre bezeichnet man auch als chromoelektrischen Meissner-Effekt.

Wächst der Abstand R zwischen den Quarks an, so wird das Verhältnis zwischen Dicke und Länge der Flussröhre infinitesimal klein [9] und sie wird effektiv zu einem Energiefaden, einem String. Die Energie des Systems wächst dann linear mit steigendem Abstand R zwischen den Quarks an

$$E = \sigma R. \quad (1.10)$$

σ wird in diesem Kontext auch als String-Spannung bezeichnet.

Das Modell wird realistischer, wenn man auch Schwingungen für den String zulässt. In diesem Fall sind die String-Koordinaten die entscheidenden Freiheitsgrade des Systems für deren Dynamik man effektive Modelle entwickeln kann, während die Quarks als statisch angesehen werden, was durch den Limes $m_q \rightarrow \infty$ simuliert wird. Die Stärke des anziehenden Potentials zwischen diesen statischen Quarks wird nur noch durch das Wechselwirkungsfeld bestimmt und man spricht vom statischen QCD- oder Quark-Antiquark-Potential.

1.3 Wilson-Loops und Flussröhren

Motiviert durch die Betrachtungen aus Kapitel (1.2) wird das Verhalten eines statischen Quark-Antiquark Paares im Kontinuum untersucht. Zu diesem Zweck wird die Propagation eines statischen $q\bar{q}$ -Paares zwischen den euklidischen Zeiten⁴ $\tau = 0$ und $\tau = T$ betrachtet.

Das statische $q\bar{q}$ -Paar wird beschrieben durch den Operator⁵

$$\begin{aligned} \hat{Q}(R, \tau) &\equiv \bar{q}(\underline{x}_1, \tau) \left(\prod_{\underline{y}, j \in \mathcal{V}(\tau)} U_j(\underline{y}, \tau) \right) q(\underline{x}_2, \tau) \\ &\equiv \bar{q}(\underline{x}_1, \tau) \mathcal{F}(R, \tau) q(\underline{x}_2, \tau), \end{aligned} \quad (1.11)$$

mit dem Abstand $R = |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|$ zwischen den statischen Quarks. Der zugehörige Zustand im Hilbert-Raum lautet mit dem Vakuum-Zustand $|\Omega\rangle$

$$|\mathcal{Q}(R, \tau)\rangle = \hat{Q}(R, \tau) |\Omega\rangle. \quad (1.12)$$

³Der Einfachheit halber wird im folgenden immer von einer Farbladung der Quarks gesprochen, unabhängig von der betrachteten $SU(N)$ -Eichtheorie.

⁴D.h. es wurde eine Wick-Rotation $t \rightarrow -i\tau$ zu imaginären Zeiten durchgeführt (siehe [1]).

⁵Dreidimensionale Vektoren des Ortsraumes werden in dieser Arbeit unterstrichen.

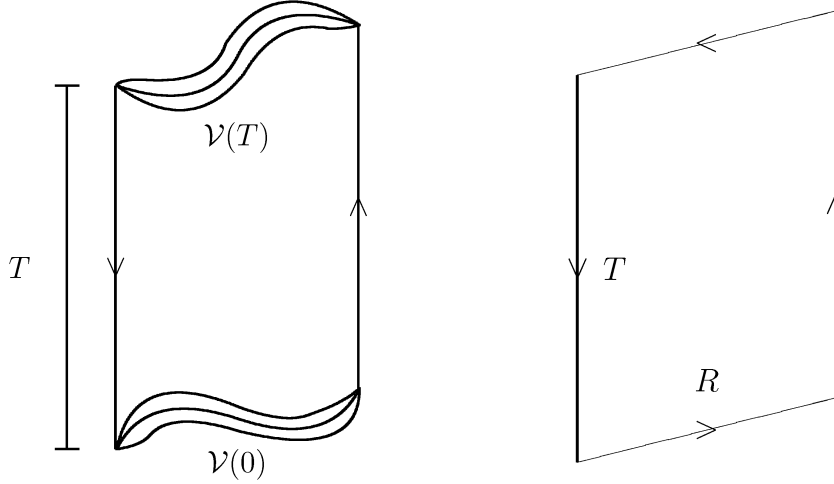


Abbildung (2): Links: Beispiel für einen Operator, dessen Erwartungswert proportional zur Korrelationsfunktion $\langle \mathcal{Q}(R, 0) \mathcal{Q}^+(R, T) \rangle$ ist. **Rechts:** Rechteckiger Wilson-Loop $\hat{W}(R, T)$. Der Operator zugehörig zum Grundzustand der Bindung des $q\bar{q}$ -Paares.

Der Operator $\mathcal{F}(R, \tau)$ beschreibt den chromoelektrischen Fluss zwischen den statischen Quarks, die sich zur Zeit τ im Abstand R befinden.

Die Propagation des statischen Quarks wird beschrieben über eine Wilson-Linie [7], eine gerade Linie chromoelektrischen Flusses in Zeitrichtung. Die Propagation des Antiquarks wird beschrieben über eine konjugierte Wilson-Linie. Insgesamt erhält man den Erwartungswert einer geschlossenen Kontur chromoelektrischen Flusses wie auf der linken Seite von Abbildung (2), wobei die verbreiterten Linien des Flusses den Operatoren $\mathcal{F}(R, 0)$, bzw. $\mathcal{F}^+(R, T)$ entsprechen.

Im Falle von großen Abständen zwischen den Quarks erwartet man nach Kapitel (1.2), dass die Feldlinien in einem infinitesimal dünnen Bereich gebündelt werden. In diesem Fall lässt sich der Operator $\mathcal{F}(R, \tau)$ durch den Operator für den Fluss entlang einer Verbindungslinie $\mathcal{C}(\tau)$ zwischen den Quarks ersetzen. Der Operator auf der linken Seite von Abbildung (2) wird dann zu einem Wilson-Loop $\hat{W}(\mathcal{C}(R, T)) \equiv U(\mathcal{C}(R, T))$, einer geschlossenen Linie chromoelektrischen Flusses entlang des Weges $\mathcal{C}(R, T)$. Es ergibt sich also für große R :

$$\langle \mathcal{Q}(R, 0) \mathcal{Q}^+(R, T) \rangle \sim \langle \hat{W}(\mathcal{C}(R, T)) \rangle \equiv W(\mathcal{C}(R, T)) \quad (1.13)$$

Nach der Erwartung entspricht der Grundzustand einer geraden Linie chromoelektrischen Flusses zwischen den Quarks, also einem geraden String. Der zugehörige rechteckige Wilson-Loop ist auf der rechten Seite von Abbildung (2) abgebildet.

1.4 Spektraldarstellung und Energiezustände

Die Grundzustandenergie des statischen Quark-Antiquark Paares entspricht dem statische Potential. Über die Spektraldarstellung der Korrelationsfunktion erhält man eine Verbindung zwischen diesem und dem Erwartungswert des Wilson-Loops, der in Monte-Carlo-Simulationen numerisch berechnet werden kann.

Mithilfe des euklidischen Zeitentwicklungsoperators $e^{-\hat{H}T}$ kann man den Propagator des statischen $q\bar{q}$ -Paares im Hilbert-Raum schreiben als

$$\langle \mathcal{Q}^+(R, 0) | \mathcal{Q}^+(R, T) \rangle = \langle \mathcal{Q}^+(R, 0) | e^{-\hat{H}T} | \mathcal{Q}^+(R, 0) \rangle, \quad (1.14)$$

wobei \hat{H} der zugehörige Hamilton-Operator ist. Die Zustände $|\mathcal{Q}^+(R, 0)\rangle$ sind i.a. keine Eigenzustände zum Hamilton-Operator. Man kann allerdings einen vollständigen Satz von Eigenfunktionen $|k\rangle$ zum Hamilton-Operator mit den zugehörigen, nach Größe geordneten Eigenenergien $E_k(R)$ einfügen und erhält dann

$$W(\mathcal{C}(R, T)) \stackrel{(1.13)}{\sim} \langle \mathcal{Q}(R, 0) | \mathcal{Q}^+(R, T) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle \mathcal{Q}^+(R, 0) | k \rangle|^2 e^{-E_k(R)T}. \quad (1.15)$$

Im Falle eines Wilson-Loops mit einem nichtverschwindenden Überlapp mit dem Grundzustand, also z.B. bei einem rechteckigen Wilson-Loop $\hat{W}(R, T)$ wie auf der rechten Seite in Abbildung (2), kann man die rechte Seite umschreiben und erhält

$$W(R, T) = \alpha(R) e^{-E_0(R)T} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(R) e^{-\Delta E_k(R)T} \right) \quad (1.16)$$

mit $\alpha(R) = c |\langle \mathcal{Q}^+(R, 0) | 0 \rangle|^2$, $\beta_k(R) = \frac{1}{\alpha} |\langle \mathcal{Q}^+(R, 0) | k \rangle|^2$ und $\Delta E_k(R) = E_k(R) - E_0(R)$.

Im Limes $T \rightarrow \infty$ werden alle Terme in der runden Klammer gegenüber dem ersten Term exponentiell gedämpft und für das statische Potential $V(R) \equiv E_0(R)$ ergibt sich der Ausdruck

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln [W(\mathcal{C}(R, T))]. \quad (1.17)$$

Im Fall schwacher Kopplung kann man über Gleichung (1.17) das statische Potential perturbativ berechnen [10]. Allerdings gibt es analytisch keine weitere Methode, die Energiezustände der Bindung zu untersuchen. Man verwendet deshalb die effektiven Stringtheorien um Vorhersagen über die angeregten Energiezustände zu machen.

Einige Versuche wurden unternommen, effektive Feldtheorien für die äußeren Freiheitsgrade der Flussröhre herzuleiten. Dabei wird der Propagator $\langle \mathcal{Q}(R, 0) | \mathcal{Q}^+(R, T) \rangle$ im Pfadintegralformalismus betrachtet und man versucht, über die Entwicklung der zugehörigen Wirkung um eine klassische Lösung die effektive Wirkung für die Fluktuationen der Flussröhre in den $d-2$ transversalen Dimensionen herzuleiten [11],[12],[13]. Für eine Zusammenfassung sei hier auf [14] verwiesen.

Da man im Eichsektor der vollen QCD selbst solche effektiven Wirkungen nicht direkt aus der zugrundeliegenden Feldtheorie herleiten kann, werden zumeist effektive String-Wirkungen benutzt, die unabhängig von der zugrundeliegenden Feldtheorie sind. *Lüscher* [15] gelang es dadurch zunächst, eine für nahezu alle effektiven Stringtheorien gültige universelle $1/R$ -Korrektur zusätzlich zum linearen Term des statischen Potentials herzuleiten, so dass sich das Potential in allen effektiven Stringtheorien schreiben lassen sollte als

$$V(R) = \sigma R + V_0 - \frac{\pi}{24} (d-2) \frac{1}{R} + \mathcal{O}(1/R^2). \quad (1.18)$$

Die Konstante V_0 absorbiert Abweichungen, die auftreten, wenn verschiedene Regularisierungen verwendet werden. Im Falle von Zeta-Funktions-Regularisierung, die auch im nächsten Kapitel bei den effektiven Stringtheorien verwendet wird, ist $V_0 = 0$. Bei der Gitterregularisierung, die bei den Simulationen verwendet wird, ist $V_0 \neq 0$ und die additive Konstante muss bei der Auswertung berücksichtigt werden.

1.5 Feldtheorie auf dem Gitter und Confinement bei starker Kopplung

1.5.1 Raumzeitgitter und Erwartungswerte für reine $SU(N)$ -Eichtheorie

Die Feldtheorie auf dem Gitter ist die Grundlage für numerische Simulationen von Quantenfeldtheorien und Kapitel (III) baut darauf auf. Es sollen deshalb im Folgenden kurz die Grundzüge dieser Theorie erläutert werden, wobei die Betrachtungen auf den Fall der reinen $SU(N)$ -Eichtheorie beschränkt bleiben, da die Quarks als statisch angesehen und die Simulationen in reiner $SU(2)$ -Eichtheorie in drei Dimensionen durchgeführt werden. Für eine ausführliche Darstellung sei auf [4] verwiesen.

Zunächst wird die d -dimensionale kontinuierliche Raumzeit mit den Ortsvektoren x diskretisiert, wobei die Gitterkonstanten a_μ mit $\mu = 0, \dots, d-1$ den Abstand zwischen zwei Gitterpunkten in der jeweiligen Richtung angeben. Im Folgenden sind nur symmetrische Gitter relevant, weshalb $a_0 \equiv a_1 \equiv \dots \equiv a_{d-1} \equiv a$ gesetzt werden. Die Raumzeitvektoren x zu den jeweiligen Gitterpunkten werden auf eine Zahl n abgebildet, so dass mit n der zugehörige Gittervektor x_n eindeutig definiert ist.

In reiner Eichtheorie auf dem Gitter sind beliebige Observablen $F[U]$ Funktionale der Paralleltransporter (1.3) auf dem Gitter, den Link-Variablen

$$U_\mu(n) = e^{i g a A_\mu(n)} \hat{=} n \bullet \longrightarrow \bullet n + a \hat{\mu}, \quad (1.19)$$

die zwischen den Gitterplätzen angesiedelt sind und die Freiheitsgrade des chromoelektrischen Feldes $A_\mu(n)$ repräsentieren. Der Erwartungswert einer beliebigen Observablen $F[U]$ ist gegeben über das Funktionalintegral [4]

$$\langle F[U] \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U F[U] e^{-S_G[U]}. \quad (1.20)$$

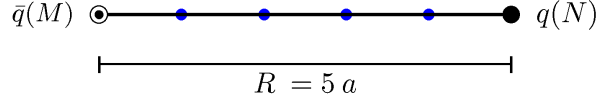


Abbildung (3): Der Grundzustand eines statischen Quark-Antiquark Paares auf dem Gitter im Grenzfall starker Kopplung.

Das Integrationsmaß ist dabei definiert als

$$\mathcal{D}U \equiv \prod_{n,\mu} dU_\mu(n), \quad (1.21)$$

wobei über alle Gruppenelemente der Eichgruppe integriert wird. $S_G[U]$ ist die übliche Wilson'sche Plakett-Wirkung

$$S_G[U] = \beta \text{Tr} \left(\sum_P \left[1 - \frac{1}{2N} (U_P + U_P^+) \right] \right) \quad (1.22)$$

mit $\beta \equiv \frac{2N}{g^2}$ und der unrenormierten Gitterkopplung g . U_P mit $P \equiv (n, \mu, \nu)$ bezeichnet die Plakette

$$n \begin{array}{c} \leftarrow \\ \square \\ \rightarrow \end{array} \hat{=} U_P \equiv U_\mu(n) U_\nu(n + a \mu) U_\mu^+(n + a \nu) U_\nu^+(n) \quad (1.23)$$

und die Summe über P läuft über alle Plaquetten des Gitters. Z ist der entsprechende Normierungsfaktor, der dafür sorgt, dass gilt $\langle \mathbf{1} \rangle = 1$.

1.5.2 Confinement bei starker Kopplung

Farb-Confinement wird im Falle niedriger Energien, also im Bereich starker Kopplung beobachtet, in dem die Störungstheorie der Kontinuums-QCD zusammenbricht. Bei der Feldtheorie auf dem Gitter geht die inverse Kopplung β in die Wirkung (1.22) ein, was dazu führt, dass eine Entwicklung im Grenzfall starker Kopplung möglich ist. Berechnet man den Erwartungswert eines rechteckigen Wilson-Loops mit den Seitenlängen R und T im Grenzfall starker Kopplung, so ergibt sich [4]

$$W(R, T) = \begin{cases} (\beta/4)^{RT} + \dots & \text{für } N = 2 \\ \left(\frac{\beta}{2N^2}\right)^{RT} + \dots & \text{für } N > 2. \end{cases} \quad (1.24)$$

Nach Gleichung (1.17) wächst das Potential also, wie nach Gleichung (1.10) erwartet, linear mit steigendem Abstand R zwischen den Quarks.

Der geeignete Formalismus, um Flussröhren direkt bei starker Kopplung zu betrachten, ist der Hamilton-Formalismus [16], bei dem die Zeit τ als kontinuierliche Variable

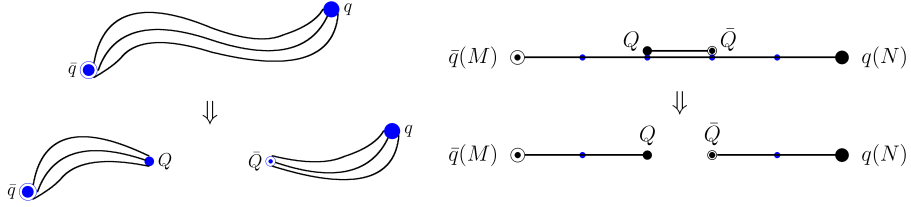


Abbildung (4): Links: String-Breaking bei einer Flussröhre zwischen den statischen Quarks q und \bar{q} durch $Q\bar{Q}$ -Paarbildung. **Rechts:** String-Breaking im Hamilton Formalismus durch Überlagerung einer Fermionenkorrektur mit der String-Anregung.

betrachtet wird, während die räumlichen Dimensionen diskretisiert sind.

Der Grundzustand in Anwesenheit eines statischen Quark-Antiquark Paares ist in diesem Fall wie erwartet eine gerade Linie zwischen den Quarks, wie in Abbildung (3) gezeigt. Die höheren angeregten Zustände entsprechen Abweichungen von dieser geraden Linie. Die resultierenden Energien zeigen ebenfalls den erwarteten linearen Anstieg.

1.6 Dynamische Fermionen und String-Breaking

Bei den bisherigen Betrachtungen zum Confinement wurden nur statische, d.h. unendlich schwere, Quarks berücksichtigt. In der Realität besitzen Quarks jedoch endliche Massen.

Da die Energie des Systems mit wachsendem Abstand nahezu linear anwächst, entspricht die Energie im System irgendwann der zweifachen Quarkmasse der leichtesten Quarks. In diesem Fall kann aus dem Vakuum ein weiteres Quark-Antiquark-Paar entstehen, welches zwei neue Bindungszustände dieser Quarks mit den statischen Quarks zulässt. Die Flussröhre wird geteilt, man spricht vom Brechen der Röhre bzw. des Strings (*engl.: string breaking*). Der Vorgang ist auf der linken Seite von Abbildung (4) dargestellt.

String-Breaking lässt sich bei starker Kopplung auch im Hamilton-Formalismus betrachten. In Anwesenheit von dynamischen Quarks treten dort zusätzliche Störungsterme in Form von Quark-Antiquark-Paaren auf. Überlappt ein solcher Störungsterm wie auf der rechten

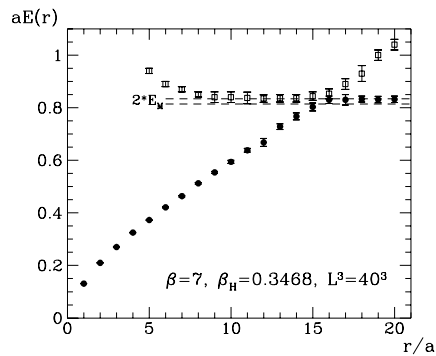


Abbildung (5): Die ersten beiden Energiezustände mit dynamischen fundamentalen Feldern aus [17]. String-breaking ist bei $R \approx 15a$ zu beobachten.

Seite von Abbildung (4) mit den angeregten Link-Variablen zwischen den statischen Quarks, so führt dies zum String-Breaking.

String-Breaking wurde bereits in mehreren numerischen Studien untersucht. Dabei werden verschiedene Operatoren für den gebrochenen und ungebrochenen Zustand benutzt und aus diesen eine Korrelationsmatrix gebildet, um die Bindungsenergien zu separieren. Dabei wurde zunächst das $SU(2)$ Higgs-Modell [17],[18] benutzt. Neueste Studien konnten String-Breaking auch in voller QCD mit zwei Quarkarten simulieren [19]. Ein Resultat der Berechnungen zum $SU(2)$ Higgs-Modell, bei dem String-Breaking zu erkennen ist, wird in Abbildung (5) gezeigt.

String-Breaking zeigt deutlich die Grenzen der effektiven Stringtheorie für das statische $q\bar{q}$ -Potential, da gerade in dem Bereich, in dem man erwartet, dass die Theorie exakt gültig wird, also im Bereich $R \rightarrow \infty$, String-Breaking auftritt. In einem intermediären Bereich, dessen Grenzen noch genauer zu bestimmen sind, besteht jedoch die Möglichkeit, dass sich das Verhalten der Flussröhre approximativ über eine effektive Stringtheorie beschreiben lässt.

II Effektive Stringtheorie

In den Kapiteln (2.1) und (2.2) wird die Nambu-Stringtheorie angewendet auf die Weltfläche des Wilson-Loops. Die Flussröhre, bzw. der String selbst wird weiter klassisch betrachtet auf der Basis der zugrundeliegenden Feldtheorie und die Quantisierung wird nur für die transversalen Schwingungen durchgeführt.

In Kapitel (2.1) wird die klassische Nambu-Stringtheorie dargestellt. Die Quantisierung der transversalen Schwingungen wird in Kapitel (2.2) im Fock-Raum der zugehörigen Fouriermoden durchgeführt. Das resultierende Potential wurde zunächst von Alvarez [20] im Grenzfall $d \rightarrow \infty$ hergeleitet und später im allgemeinen Fall von Arvis [21]. Hier wird eine eigene, leicht abgeänderte Herleitung verwendet. Die in Kapitel (2.2.4) diskutierte Klassifizierung der Eigenzustände in 2+1 Dimensionen ist für die spätere Identifizierung mit den Operatoren bei den Gitterrechnungen von Bedeutung. Die Weyl-Anomalie verhindert allerdings die Konsistenz der Nambu-Stringtheorie in quantisierter Form als effektive Stringtheorie für das statische $q\bar{q}$ -Potential.

In den Kapiteln (2.4) und (2.5) werden deshalb zwei weitere effektive Stringtheorien diskutiert, bei denen die Weyl-Anomalie nicht auftritt. Wichtig ist die Tatsache, dass das Spektrum beider Theorien bis zur Ordnung $1/R^3$ mit dem Spektrum der Nambu-Stringtheorie übereinstimmt. Höhere Ordnungen konnten in beiden Fällen bisher nicht berechnet werden.

2.1 Nambu-Stringtheorie

2.1.1 Die Nambu-Goto-Wirkung

Betrachtet man einen String, so überschreitet dieser eine Fläche $X^\mu(\kappa, \tau)$ in der Raumzeit, die hier parametrisiert wird über $\kappa \in [0, \pi]^6$ und $\tau \in \mathbb{R}$. Diese Fläche lässt sich im Falle des bosonischen Strings zwischen zwei statischen Quarks im Zeitintervall $[0, T]$ direkt mit der Fläche eines Wilson-Loops identifizieren.

Betrachtet wird die Nambu-Goto-Wirkung [22]

$$S_{NG} = -\sigma \int d\tau \int_0^\pi d\kappa \sqrt{\left(\dot{X}^\mu X'_\mu\right)^2 - \left(\dot{X}^\mu\right)^2 \left(X'^\mu\right)^2} \quad (2.1)$$

für einen bosonischen String, dessen Weltfläche mit dem Wilson-Loop identifiziert wird, wobei die Abkürzungen

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \equiv \dot{X}^\mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial X^\mu}{\partial \kappa} \equiv X'^\mu, \quad (2.2)$$

⁶Der räumliche Flächenparameter wird hier entgegen der üblichen Konvention mit κ statt mit σ bezeichnet, um eine Verwechslung mit der String-Spannung auszuschließen.

verwendet wurden. Die Wirkung ist invariant unter Reparametrisierungen von κ und τ , was dazu ausgenutzt werden kann die Bewegungsgleichungen zu vereinfachen. Außerdem ist zu bemerken, dass die Rechnungen hier nicht in euklidischer Zeit durchgeführt werden. Da allerdings nur die Energien mit den Gittersimulationen verglichen werden, ist dieser Unterschied nicht relevant.

2.1.2 Bewegungsgleichungen und orthonormale Koordinaten

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus dem Prinzip der extremalen Wirkung und eine kurze Rechnung liefert [22],[23]

$$\partial_\tau P_\tau^\mu + \partial_\kappa P_\kappa^\mu = 0, \quad (2.3)$$

mit den kanonisch konjugierten Impulsen

$$P_\tau^\mu = \sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}_\mu} \quad \text{und} \quad P_\kappa^\mu = \sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'_\mu}. \quad (2.4)$$

Aufgrund der Reparametrisierungsinvarianz der Wirkung (2.1) kann man nun zu orthonormalen Koordinaten übergehen [23], die darüber definiert sind, dass sie die Orthonormalitätsbedingungen

$$\dot{X}^\mu X'_\mu = 0 \quad \text{and} \quad (X'^\mu)^2 + (\dot{X}^\mu)^2 = 0 \quad (2.5)$$

erfüllen. Die kanonisch konjugierten Impulse lauten dann

$$P_\tau^\mu = \sigma \dot{X}^\mu \quad \text{und} \quad P_\kappa^\mu = \sigma X'^\mu \quad (2.6)$$

und aus den Bewegungsgleichungen (2.3) wird

$$[\partial_\tau^2 - \partial_\kappa^2] X^\mu(\kappa, \tau) = 0. \quad (2.7)$$

2.1.3 Parametrisierung und Lösung der Bewegungsgleichungen

Die Orthonormalitätsbedingungen (2.5) lassen weitere Reparametrisierungen der Form

$$\begin{aligned} \tau' &= \tau + f(\tau + \kappa) + f(\tau - \kappa) \\ \kappa' &= \kappa + f(\tau + \kappa) - f(\tau - \kappa) \end{aligned} \quad (2.8)$$

zu [23]. Diese Eigenschaft wird dazu genutzt, eine spezielle Parametrisierung zu wählen, die mit den Bedingungen (2.5) verträglich ist.

Gesucht ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (2.7) für einen String zwischen einem statischen Quark-Antiquark Paar. Der Einfachheit halber wird dabei eines der Quarks in den Ursprung gelegt und das andere im Abstand R zum Ursprung auf die x^1 -Achse. Demnach gelten die räumlichen Randbedingungen

$$X^1(\pi, \tau) = R \quad \text{und} \quad X^1(0, \tau) = X^i(0, \tau) = X^i(\pi, \tau) = 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \quad (2.9)$$

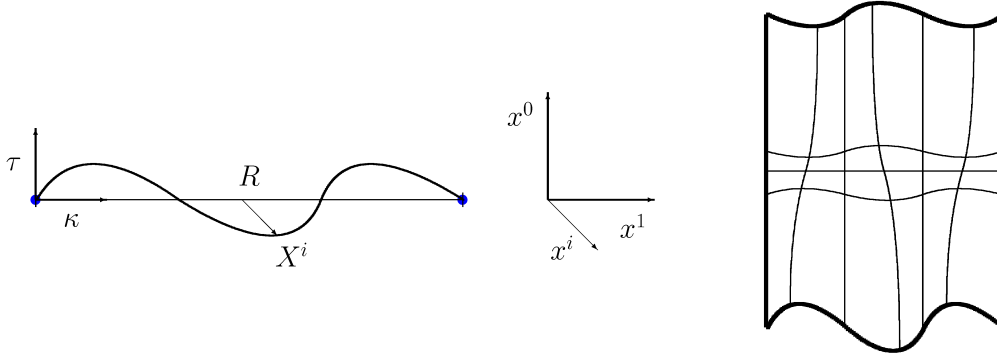


Abbildung (6): Links: Ein schwingender String mit fixierten Enden in physikalischer Eichung (2.10). **Rechts:** Weltfläche eines schwingenden Strings mit fixierten Enden. Die Weltfläche entspricht einem Wilson-Loop.

wobei $i = 2, \dots, d-1$ die transversalen räumlichen Komponenten durchnummeriert. Es ist sinnvoll, die verbleibende Parametrisierungsinvarianz (2.8) auszunutzen, um zur physikalischen Eichung überzugehen⁷, bei der

$$x^0 = \tau, \quad \kappa = x^1, \quad X^0 = p^0 \tau \quad \text{und} \quad X^1 = \frac{R}{\pi} \kappa \quad (2.10)$$

gesetzt wird. Der String wird also parametrisiert wie auf der linken Seite von Abbildung (6) und seine Weltfläche im Zeitintervall $[0, T]$ entspricht einem Wilson-Loop wie auf der rechten Seite. Die Eichung ist konsistent mit den Orthonormalitätsbedingungen (2.5).

In diesem Fall ist die Impulsdichte gegeben durch $P^\mu(\kappa, \tau) = P_\tau^\mu(\kappa, \tau)$ [23]. Entsprechend fordert man in Analogie zum relativistischen Punktteilchen für $i, j = 2, \dots, d-1$ die Poisson-Klammern

$$\begin{aligned} \{X^i(\kappa, \tau), P^j(\kappa', \tau)\} &= \delta^{ij} \delta(\kappa - \kappa') \\ \{X^i(\kappa, \tau), X^j(\kappa', \tau)\} &= \{P^i(\kappa, \tau), P^j(\kappa', \tau)\} = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die allgemeine Lösung für die transversalen Komponenten $X^i(\kappa, \tau)$ des Strings lässt sich als Fourier-Reihe schreiben

$$X^i(\kappa, \tau) = \sqrt{\frac{1}{\pi \sigma}} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{a_l^i(\tau)}{l} \sin(l \kappa) \quad \text{mit} \quad a_l^i(\tau) \equiv a_l^i(0) e^{-il\tau}. \quad (2.12)$$

Da das Feld X^μ reell ist, muss außerdem gelten

$$a_l^{i*} = a_{-l}^i. \quad (2.13)$$

⁷Es ist auch möglich *Arvis'* weg zu folgen und zunächst keine Eichung zu wählen. Selbst in diesem Fall muss allerdings die Eichung zu einem späteren Zeitpunkt spezifiziert werden.

Für die Fourier-Komponenten gelten dann die folgenden Poisson-Klammern:

$$\left\{ a_l^i, a_k^{j*} \right\} = -i l \delta_{lk} \delta^{ij} \quad \text{und} \quad \left\{ a_l^i, a_k^j \right\} = \left\{ a_l^{i*}, a_k^{j*} \right\} = 0 \quad (2.14)$$

2.1.4 Klassische Energien

Die klassische Energie ergibt sich durch das Integral über die 0-Komponente der Impulsdichte:

$$E = \int_0^\pi d\kappa P^0 \stackrel{(2.6),(2.10)}{=} \sigma \int_0^\pi d\kappa p^0 = \pi \sigma p^0 \quad (2.15)$$

Zu berechnen ist der Parameter p^0 , den man über die Orthonormalitätsbedingungen (2.5) erhält. Wie in Anhang (A.1) gezeigt, liefern diese für die Fourier-Komponenten die Relationen:

$$\sum_{\substack{l+k=m \\ m \neq 0}} \sum_{i=2}^{d-1} a_l^i(\tau) a_k^i(\tau) = 0 \quad (2.16)$$

$$p^{02} - \left(\frac{R}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{\pi \sigma} \sum_{i=2}^{d-1} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} a_{-l}^i(\tau) a_l^i(\tau) = 0 \quad (2.17)$$

Setzt man das Ergebnis (2.17) in Gleichung (2.15) ein, so ergeben sich mit (2.13) die Energien

$$E = \sigma R \sqrt{1 + \frac{\pi}{\sigma R^2} \sum_{i=2}^{d-1} \sum_{l=1}^{\infty} [a_l^{i*} a_l^i + a_l^i a_l^{i*}]}. \quad (2.18)$$

Die Fouriermoden $a_l^i(\tau)$ der transversalen Schwingungen sind nun die freien Parameter der Theorie und müssen gemäß des Korrespondenzprinzips quantisiert werden.

2.2 Quantisierung der transversalen Schwingungen

2.2.1 Kanonische Quantisierung und Fock-Raum

Im Rahmen der effektiven Stringtheorie wird die Flussröhre als klassischer bosonischer String betrachtet. Die transversalen Schwingungen, deren Fouriermoden a_l^i nun die Freiheitsgrade der Theorie sind, sollen quantisiert werden. Die Quantisierung lässt sich im Fock-Raum der Erzeuger und Vernichter a_l^{i+} und a_l^i durchführen. Nach dem Korrespondenzprinzip werden bei der kanonischen Quantisierung die Fourier-Moden a_l^i mit $l > 0$ zu Vernichtungsoperatoren und $a_{-l}^i = a_l^{i*}$ zu Erzeugungsoperatoren a_l^{i+} . Die Poisson-Klammern (2.14) werden zu den entsprechenden Kommutatoren:

$$\left[a_l^i(\tau), a_k^{j+}(\tau) \right] = l \delta_{lk} \delta^{ij} \quad \text{und} \quad \left[a_l^i(\tau), a_k^j(\tau) \right] = \left[a_l^{i+}(\tau), a_k^{j+}(\tau) \right] = 0 \quad (2.19)$$

Die Zustände des Fock-Raumes sind beliebige Produkte von Erzeugungsoperatoren a_l^{i+} , die auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ wirken, der definiert ist über $a_l^i |0\rangle = 0$ für alle l und i . Ein allgemeiner normierter angeregter Zustand des Fock-Raumes ist dann gegeben über

$$|\mathcal{N}_{li}\rangle \equiv \frac{1}{C(N_{li})} \prod_{l,i} (a_l^{i+})^{N_{li}} |0\rangle \quad \text{mit} \quad C(N_{li}) = \frac{1}{\sqrt{(N_{li})! l^{N_{li}}}}. \quad (2.20)$$

Der Ortsoperator der transversalen Schwingungen ergibt sich aus der Entwicklung (2.12). Die Ortserwartungswerte $\langle \mathcal{N}_{li} | X^i(\kappa) | \mathcal{N}_{li} \rangle$ verschwinden aufgrund der ungleichen Anzahl von Erzeugern und Vernichtern erwartungsgemäß. Ein qualitatives Bild der Form der Schwingungen liefert die mittlere quadratische Abweichung vom Grundzustand $\langle \mathcal{N}_{li} | (X^i(\kappa))^2 | \mathcal{N}_{li} \rangle$. Diese wird im allgemeinen Fall in Anhang (A.3) berechnet.

2.2.2 Effektiver Hamilton-Operator und Energiezustände

Die Energien der Zustände sind gegeben über Gleichung (2.18), wobei man die quantisierten Energien über den effektiven Hamilton-Operator berechnen kann, der sich aus der Entwicklung der Wurzel in Gleichung (2.18) nach $1/R^2$ ergibt. Der effektive Hamilton-Operator wird also definiert als:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{eff} &\equiv \sigma R \sqrt{1 + \frac{2\pi}{\sigma R^2} \hat{L}} \\ &= \sigma R + \frac{\pi}{R} \hat{L} - \frac{\pi^2}{2\sigma R^3} (\hat{L})^2 + \frac{\pi^3}{2\sigma^2 R^5} (\hat{L})^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

Dabei wurde der Operator

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{d-1} \sum_{l=1}^{\infty} [a_l^{i+} a_l^i + a_l^i a_l^{i+}] \quad (2.22)$$

eingeführt. In $\mathcal{O}(1/R)$ entspricht der effektive Hamilton-Operator dem Hamilton-Operator eines freien bosonischen Strings [22],[25].

Die Operatoren sind wie üblich in Normalordnung zu schreiben, insbesondere natürlich auch der Operator \hat{L} . Benutzt man die Kommutatoren (2.19) und führt in dem resultierenden Term ohne Fourier-Mode die Summe über die transversalen Freiheitsgrade direkt aus, so ergibt sich

$$\hat{L} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{d-1} a_l^{i+} a_l^i + \frac{(d-2)}{2} \sum_{l=1}^{\infty} l. \quad (2.23)$$

Der divergente zweite Term lässt sich über die Riemannsche Zeta-Funktion regularisieren [24]. Man benutzt dabei die Definition

$$\zeta(s) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} l^{-s} \quad \text{für} \quad s > 1 \quad \text{und somit} \quad \sum_{l=1}^{\infty} l \hat{=} \zeta(-1) \quad (2.24)$$

und verwendet die analytische Fortsetzung der Riemannschen Zeta-Funktion für $s \leq 1$, nach der gilt: $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. In regularisierter Form lautet der Operator \hat{L} also:

$$\hat{L} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{d-1} a_l^{i+} a_l^i - \frac{(d-2)}{24} \quad (2.25)$$

Lässt man den Operator \hat{L} auf einen beliebigen Zustand des Fock-Raumes wirken, so ergibt sich die Eigenwertgleichung

$$\hat{L} |\mathcal{N}_{li}\rangle = \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{d-1} N_{li} l - \frac{(d-2)}{24} \right) |\mathcal{N}_{li}\rangle. \quad (2.26)$$

Mit der Energiequantenzahl

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{d-1} N_{li} l \equiv n \in \mathbb{N} \quad (2.27)$$

ergeben sich dann die entarteten Energieniveaus

$$E_n = \sigma R \sqrt{1 + \frac{2\pi}{\sigma R^2} \left(n - \frac{1}{24} (d-2) \right)}. \quad (2.28)$$

Der Grundzustand E_0 entspricht dem statischen $q\bar{q}$ -Potential,

$$V(R) = \sigma R \sqrt{1 - \frac{\pi}{12 \sigma R^2} (d-2)}, \quad (2.29)$$

das von *Alvarez* und *Arvis* hergeleitet wurde. Das Potential reproduziert in $\mathcal{O}(1/R)$ den Lüscher Term aus (1.18).

Dieses besitzt einen kritischen Abstand $R_C = \sqrt{\frac{\pi}{12\sigma} (d-2)}$, bei dem das Potential und somit die Bindungsenergie imaginär wird. Dieser Effekt lässt sich interpretieren als Tachyon im Stringspektrum.

2.2.3 Die Weyl-Anomalie

Die hier verwendete Lösung mit der Eichung (2.10) ist nicht praktisch um die Weyl-Anomalie zu betrachten, da in diesem Fall die Rotationsinvarianz der Theorie durch die fixierten Enden explizit gebrochen ist. Um die Weyl-Anomalie betrachten zu können, müssen die Enden des Strings beweglich sein.

Die Weyl-Anomalie selbst wird deshalb hier nicht explizit betrachtet. Wichtig ist allerdings die Tatsache, dass die Forderung nach Lorentz-Invarianz im Fall von beweglichen Enden nur erfüllt wird, falls gilt [23]

$$d = 26 \quad \text{und somit} \quad \hat{L} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=2}^{25} a_l^{i+} a_l^i - 1. \quad (2.30)$$

Dies ist die Weyl-Anomalie, die das Hauptproblem der Nambu-Stringtheorie als effektive Stringtheorie für die Flussröhre darstellt, da eine konsistente Quantisierung der Theorie im wichtigen Fall $d = 4$ nicht möglich ist.

	(+, +)	(+, -)	(-, -)	(-, +)
E_0	1			
E_1		a_1^+		
E_2	$(a_1^+)^2$		a_2^+	
E_3		$(a_1^+)^3, a_3^+$		$a_2^+ a_1^+$
E_4	$(a_1^+)^4, a_1^+ a_3^+, (a_2^+)^2$		$(a_1^+)^2 a_2^+, a_4^+$	

Tabelle (1): Die Zustände des Fockraumes zugehörig zu den niedrigsten fünf Energieniveaus, sortiert nach (C, P) -Kanälen.

2.2.4 Klassifizierung der Schwingungszustände in 2+1 Dimensionen

Wichtig im Kontext dieser Arbeit, im Hinblick auf die Simulationen, ist das Modell in 2+1-Dimensionen, in dem es nur einen transversalen Freiheitsgrad mit den Erzeugern a_l^+ und Vernichtern und a_l gibt. Um eine differenzierte Kopplung an die niedrigsten vier Energieniveaus zu erreichen, kann man die Quantenzahlen bezüglich Ladungskonjugation und Parität (C, P) benutzen.

Das Verhalten der Erzeuger und Vernichter unter Ladungskonjugation und Paritätstransformation wird in Anhang (A.2) behandelt. Die Operatoren zu den untersten fünf Energieniveaus sortiert nach (C, P) sind in Tabelle (1) aufgelistet und die mittlere quadratische Anweichung von der Stringachse der Grundzustände der Quantenzahlen $+-, --$ und $-+$ in Abbildung (7) gezeigt.

Die Zustände des Fock-Raumes können nun nach drei Quantenzahlen klassifiziert werden, ihrem Verhalten bezüglich (C, P) , was als Kanal $K = ++, +-, --, -+$ bezeichnet wird, und dem Energieniveau m im jeweiligen Kanal. Die entarteten Eigenzustände zu diesen Quantenzahlen werden bezeichnet mit $|S_m^K\rangle$ und die zugehörigen Energien mit E_m^K . Nach Tabelle (1) kann man identifizieren:

$$E_0^{++} = E_0, \quad E_0^{+-} = E_1, \quad E_0^{--} = E_2, \quad E_0^{-+} = E_3 \quad (2.31)$$

Betrachtet man Wilson-Loops mit speziellen Zuständen $|\mathcal{Q}^K(R, \tau)\rangle$ (vergl. Kapitel (1.3) und (1.4)), so gilt für deren Erwartungswerte $W^K(R, T)$ nach Gleichung (1.15)

$$W^K(R, T) = \sum_L \sum_{m=0}^{\infty} |\langle \mathcal{Q}^K(R, 0) | S_m^L \rangle|^2 e^{-E_m^L(R) T}, \quad (2.32)$$

wobei der effektive Hamilton-Operator (2.21) für die Zeitentwicklung verwendet wurde. Die erste Summe läuft über alle Kanäle L und die zweite Summe über die Energieniveaus m in den Kanälen, wobei eine Summation über die Entartung impliziert wird.

Entsprechen die Quantenzahlen des Operators $\hat{\mathcal{Q}}^K$ bezüglich (C, P) den Quantenzahlen des Kanals K , so erwartet man, dass approximativ gilt

$$|\langle \mathcal{Q}^K(R, 0) | S_m^L \rangle|^2 = |\langle \mathcal{Q}^K(R, 0) | S_m^K \rangle|^2 \delta^{KL}, \quad (2.33)$$

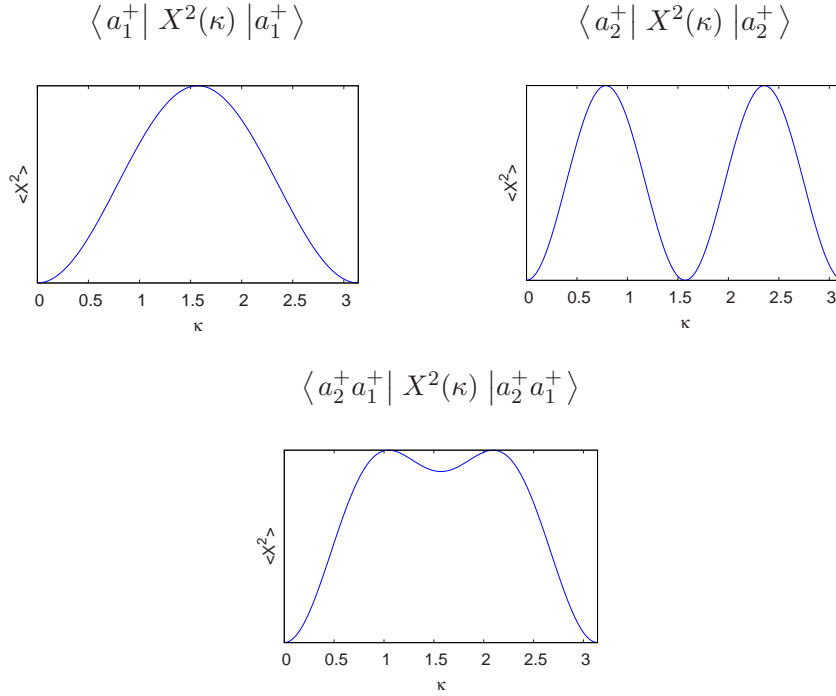


Abbildung (7): Die mittleren quadratischen Abweichungen $\langle X^2(\kappa) \rangle$ der Grundzustände der Kanäle $+-$, $--$ und $+-$.

und man kann in Analogie zu Gleichung (1.16) den Erwartungswert (2.32) schreiben als

$$W^K(R, T) = \alpha^K(R) e^{-E_0^K(R) T} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^K(R) e^{-\Delta E_m^K(R) T} \right). \quad (2.34)$$

Diese Zuordnung von Operatoren zu speziellen String-Kanälen ermöglicht den Vergleich von Gitterrechnungen mit den ersten vier Energieniveaus des Strings.

2.3 Dualität zwischen offenen und geschlossenen Strings

2.3.1 Duale Interpretation der Polyakov-Loop-Korrelationsfunktion

In Kapitel (1.4) wurde die Spektraldarstellung für Wilson-Loops hergeleitet und ihre Beziehung zum statischen Quark-Antiquark Potential. Eine vollkommen analoge Darstellung existiert auch für Polyakov-Loop-Korrelationsfunktionen $\langle P^+(0) P(R) \rangle$, wobei der Operator $P(L)$ eine Linie von Links im Abstand L in x^1 -Richtung zum Ursprung ist, die sich einmal um eine kompaktifizierte Zeitdimension x^0 der Länge T

wickelt. Deren Korrelationsfunktion lässt sich schreiben als [26]

$$\langle P^+(0) P(R) \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k e^{-E_k(R) T} \equiv \mathcal{Z}(R, T). \quad (2.35)$$

$\mathcal{Z}(R, T)$ ist die Zustandssumme der reinen Eichtheorie in Anwesenheit eines statischen $q\bar{q}$ -Paares mit dem Abstand R , die $E_k(R)$ sind wie bei den Wilson-Loops die Bindungsenergien des Zustandes.

Vollkommen analog kann man aber auch annehmen, dass statt der Zeitrichtung eine der räumlichen Dimensionen kompaktifiziert ist, z.B. die x^1 -Richtung mit der Länge R . In diesem Fall kann man Polyakov-Loop-Korrelationsfunktionen zwischen zwei Polyakov-Loops im Abstand T voneinander betrachten. Diese entsprechen dann dem Propagator eines geschlossenen Strings der Länge R im Zeitintervall T , der um die x^1 -Richtung gewickelt ist.

Nach *Lüscher* und *Weisz* (Siehe [26] und darin enthaltene Literaturangaben.) impliziert dies, dass sich die Korrelationsfunktion in einer Reihe von Bessel-Funktionen $K_m(x)$ entwickeln lässt nach

$$\langle P^+(0) P(T) \rangle = \sum_k^{\infty} \tilde{\beta}_k(T) \left(\frac{\tilde{E}_k(T)}{2\pi R} \right)^{\frac{1}{2}(d-1)} K_{\frac{1}{2}(d-3)}(\tilde{E}_k(T) R). \quad (2.36)$$

Ist eine solche Entwicklung auch für die Zustandssumme $\mathcal{Z}(R, T)$ möglich, so gibt es eine mögliche duale Beschreibung von offenen und geschlossenen Strings. Zu untersuchen ist im Einzelfall also, ob sich die Zustandssumme $\mathcal{Z}(R, T)$ für große R und T gemäß Gleichung (2.36) entwickeln lässt.

2.3.2 Dualität im Falle der Nambu-Stringtheorie

Eine Theorie, die die Dualität zwischen offenen und geschlossenen Strings erfüllt, ist die Nambu-Stringtheorie, wie zuerst von *Lüscher* und *Weisz* [26] und später auch von *Billó* und *Casselle* [13] gezeigt wurde.

Die zur Theorie gehörige Zustandssumme lässt sich nach (2.35) und (2.28) schreiben als

$$\mathcal{Z}(R, T) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k e^{-E_k(R) T} \quad \text{mit} \quad E_k = \sigma R \sqrt{1 + \frac{2\pi}{\sigma R^2} \left(k - \frac{1}{24} (d-2) \right)}. \quad (2.37)$$

Nach einer längeren Rechnung, die z.B. im Anhang von [26] skizziert wird, lässt sich diese Zustandssumme wie Gleichung (2.36) schreiben, wobei die Koeffizienten und Energien des geschlossenen Strings gegeben sind als

$$\tilde{\beta}_k(T) = \frac{\sigma T}{\tilde{E}_k} \left(\frac{\pi}{\sigma} \right)^{\frac{1}{2}(d-2)} \beta_k \quad \text{und} \quad \tilde{E}_k = \sigma T \sqrt{1 + \frac{8\pi}{\sigma T^2} \left(k - \frac{1}{24} (d-2) \right)}. \quad (2.38)$$

2.4 Lüscher-Weisz-Stringtheorie

2.4.1 Die effektive Wirkung

Analog zum Wilson-Loop ergibt sich auch bei der Polyakov-Loop Korrelationsfunktion das approximative Flächenverhalten

$$\mathcal{Z}_{\parallel}(R, T) = e^{-\sigma \mathcal{A}} = e^{-\sigma R T}, \quad (2.39)$$

wobei $\mathcal{A} = R T$ die Fläche zwischen den Polyakov-Loops ist. Um eine effektive Stringtheorie für die Korrelationsfunktion zu erhalten, wählt man deshalb den Ansatz

$$\mathcal{Z}(R, T) = \mathcal{Z}_{\parallel}(R, T) \int \mathcal{D}X e^{-S_{LW}[X^i]}. \quad (2.40)$$

Dabei wird der Polyakov-Loop in die $x^0 x^1$ -Ebene gelegt und die Fläche mit τ und κ analog zu (2.10) parametrisiert, wobei hier der Einfachheit halber $\kappa \in [0, R]$ gewählt wird. $X^i(\kappa, \tau)$ mit $i = 2, \dots, d-1$ sind die Felder der transversalen Freiheitsgrade und es gelten die Randbedingungen:

$$X^i(0, \tau) = X^i(R, \tau) = 0 \quad \text{und} \quad X^i(\kappa, \tau) = X^i(\kappa, \tau + T) \quad (2.41)$$

$S_{LW}[X^i]$ ist die von *Lüscher* und *Weisz* betrachtete Wirkung:

$$S_{LW} = \frac{1}{2} \int d\tau d\kappa [\partial_a X^i \partial_a X_i] \quad (2.42)$$

$$+ \frac{1}{4} b \int d\tau [\partial_\kappa X^i \partial_\kappa X_i|_{\kappa=0} + \partial_\kappa X^i \partial_\kappa X_i|_{\kappa=R}] \quad (2.43)$$

$$+ \frac{1}{4} \int d\tau d\kappa [c_1 \partial_a X^i \partial_a X_i \partial_b X^j \partial_b X_j + c_2 \partial_a X^i \partial_b X_i \partial_a X^j \partial_b X_j] \quad (2.44)$$

$$+ \dots$$

Sie ist eine Entwicklung nach Ableitungen des Feldes X^i , die alle Terme bis zu $\mathcal{O}(1/R^3)$ enthält, die bestimmten Symmetrien [15],[26] genügen. Für die Kopplungskonstanten ergeben sich durch die Forderung nach Dualität zwischen offenen und geschlossenen Strings bestimmte Einschränkungen.

Der Term in der ersten Zeile (2.42) korrespondiert mit einem freien bosonischen String und ist der Term führender Ordnung. Der Term in der zweiten Zeile (2.43) ist der Wechselwirkungsterm erster Ordnung, dessen Kopplungskonstante b die Dimension $[b] = [\text{Länge}]$ hat und der nur auf den Rändern des Polyakov-Loops wirkt. Die beiden Terme in der dritten Zeile (2.44) sind die Terme nächster Ordnung und die zugehörigen Kopplungskonstanten c_1 und c_2 haben die Dimension $[c_1] = [c_2] = [\text{Länge}]^2$. Die Punkte repräsentieren Terme höherer Ordnung, bei denen weitere Kopplungskonstanten auftauchen.

2.4.2 Die führende Ordnung – Der freie bosonische String

In führender Ordnung besteht die effektive Wirkung nur aus dem Term aus Zeile (2.42), was einem freien String entspricht. Das Funktionalintegral aus (2.40) lässt sich dann auswerten [28],[29] und man erhält in Zeta-Funktions-Regularisierung mit (2.39):

$$\mathcal{Z}_0(R, T) = e^{-\sigma R T} \left[\eta \left(e^{-\pi \frac{T}{R}} \right) \right]^{2-d} \quad (2.45)$$

Dabei ist $\eta(q)$ die Eta-Funktion, die definiert ist über

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k). \quad (2.46)$$

Entwickelt man (2.45) nach $e^{-\pi \frac{T}{R}}$, so ergeben sich im Vergleich mit (2.35) die Energien

$$E_k^0(R) = \sigma R + \frac{\pi}{R} \left(k - \frac{1}{24} (d-2) \right), \quad (2.47)$$

die mit den Energien der Nambu-Stringtheorie (2.28) in $\mathcal{O}(1/R)$ übereinstimmen. Die Dualität zwischen offenen und geschlossenen Strings ist gültig in führender Ordnung und liefert die Energien

$$\tilde{E}_k^0(T) = \sigma T + \frac{4\pi}{T} \left(k - \frac{1}{24} (d-2) \right) \quad (2.48)$$

für den zugehörigen geschlossenen String [26].

2.4.3 Dualität bis zur $\mathcal{O}(1/R^3)$ und Energieniveaus

Um die Dualität bis zur Ordnung $1/R^3$ zu untersuchen wird zunächst die Zustandssumme perturbativ ausgewertet und die resultierenden Terme mit der entsprechenden Entwicklung der Polyakov-Loop Korrelationsfunktion (2.36) verglichen. Für die Details sei auf [26] verwiesen.

Die Prozedur liefert in Ordnung $1/R^2$ einen Term proportional zu b , der nicht mit der Dualität zu vereinen ist, weshalb $b = 0$ zu setzen ist. In Ordnung $1/R^3$ ergibt sich die algebraische Beziehung

$$(d-2) c_1 + c_2 = \frac{d-4}{2\sigma} \quad (2.49)$$

zwischen den Kopplungskonstanten c_1 und c_2 .

Berechnet man das Energiespektrum mit diesen Einschränkungen, so erkennt man, dass die Entartung der Energiezustände bezüglich verschiedener Drehimpulsquantenzahlen der Rotationen um die Stringachse im Allgemeinen aufgehoben ist. Es ergeben sich nach [26] die Energien

$$\begin{aligned} E_{n,l} &= E_n^0 + \frac{\pi^2}{R^3} c_1 \left[n \left(\frac{1}{12} (d-2) - n \right) + \alpha_{n,l} (c_2 + 2 c_1) \right] \\ &+ \left(\frac{\pi}{24} \right)^2 \frac{d-2}{2 R^3} [2 c_1 + (d-1) c_2], \end{aligned} \quad (2.50)$$

wobei die Koeffizienten $\alpha_{n,l}$ die Entartung aufheben. Für die Koeffizienten selbst sei auf Tabelle 2 aus [26] verwiesen.

Für diese Arbeit ist, wie bereits beschrieben, der Fall mit $d = 2 + 1$ relevant. Es gibt dann nur ein transversales Feld X und die beiden Wechselwirkungsterme aus Zeile (2.44) der effektiven Wirkung sind äquivalent. In diesem Fall ist das Verhältnis zwischen c_1 und c_2 nicht festgelegt und man kann o.B.d.A $c_2 = -2 c_1$ setzen. Nach Gleichung (2.49) folgt dann $c_1 = \frac{1}{2\sigma}$ und für die Energien ergibt sich

$$E_n = \sigma R + \frac{\pi}{R} \left(n - \frac{1}{24} \right) - \frac{\pi^2}{2\sigma R^3} \left(n - \frac{1}{24} \right)^2 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{R^5} \right). \quad (2.51)$$

Diese Energien stimmen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(1/R^3)$ mit den Energien der Nambu-Stringtheorie (2.28) überein.

2.5 Polchinski-Strominger-Stringtheorie

2.5.1 Die Polchinski-Strominger-Wirkung

Um die Weyl-Anomaile zu vermeiden führte zunächst *Polyakov* [30] einen zusätzlichen Term mit einer intrinsischen Metrik in die Wirkung des freien bosonischen Strings ein. Dies verhinderte zwar das Auftauchen der Weyl-Anomalie, sorgte allerdings auch für einen zusätzlichen unphysikalischen Freiheitsgrad in Form einer Liouville-Mode.

Polchinski und *Strominger* [27] ersetzten die intrinsische Metrik durch die von der Parametrisierung κ^+ und κ^- induzierte Metrik $h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu$, mit $a, b = +, -$ und der Weltfläche $X^\mu(\kappa^+, \kappa^-)$ des Strings.

Die von *Polchinski* und *Strominger* betrachtete Wirkung lautet:

$$S_{PS} = \frac{1}{2\pi\alpha} \int d\kappa^+ d\kappa^- \left[H + \alpha\beta \frac{\partial_+^2 X^\mu \partial_- X_\mu \partial_+ X^\nu \partial_-^2 X_\nu}{H^2} \right] \quad (2.52)$$

Dabei wurden folgende Konventionen verwendet⁸:

$$\kappa^\pm \equiv \tau \pm \kappa, \quad \partial_\pm \equiv \partial_{\kappa^\pm}, \quad \alpha = \frac{1}{2\pi\sigma} \quad \text{und} \quad H \equiv \partial_+ X^\mu \partial_- X_\mu \quad (2.53)$$

Die Felder $X^\mu(\kappa^+, \kappa^-)$ sind Felder einer zweidimensionalen konformen Feldtheorie der String-Weltfläche in radialer Quantisierung mit den Parametern κ^\pm nach Anhang (B.3). Einige Aspekte konformer Feldtheorien werden in Anhang (B) behandelt. Für eine detaillierte Behandlung sei auf [31] verwiesen.

Die Wirkung (2.52) ist die führende Ordnung einer Reihenentwicklung in $1/R$, die alle Terme enthält, die konsistent mit den String-Symmetrien sind und die Weyl-Anomalie vermeiden. Dabei werden als einzige inverse Operatoren Terme der Form

⁸ κ^+ und κ^- werden häufig als Lichtkegel-Koordinaten (*engl.: ligh-cone*) bezeichnet.

H^{-n} zugelassen, da diese im Falle des Vakuums eines langen Strings einen hohen klassischen Erwartungswert haben. Außerdem werden keine Terme mit

$$\partial_+ \partial_- X^\mu \quad \text{und} \quad \partial_\pm X^\mu \partial_\pm X_\mu$$

berücksichtigt, da die Erwartungswerte des ersten Terms, Aufgrund der Bewegungsgleichung des freien Strings, genauso wie die des zweiten verschwinden.

Berücksichtigt man diese Bedingungen und, dass jede erste Ableitung $\partial_\pm X^\mu = \mathcal{O}(R)$, sowie jede höhere $\partial_\pm^n X^\mu = \mathcal{O}(1)$ ist, so lässt sich zeigen, dass die Wirkung (2.52) bis zur Ordnung $1/R^6$ alle möglichen Terme enthält [32].

2.5.2 Entwicklung um das Vakuum des langen geschlossenen Strings

Im Folgenden wird ein geschlossener String betrachtet, der um die kompaktifizierte Dimension x^1 der Länge R gewickelt ist. Für die Felder X^μ gilt dann allgemein

$$X^\mu(\tau, \kappa + 2\pi) = X^\mu(\tau, \kappa) + R \delta^{\mu 1}. \quad (2.54)$$

Die klassische Lösung der freien Bewegungsgleichung für den Grundzustand lautet in diesem Fall

$$X_{kl}^\mu = e_+^\mu \frac{R}{2\pi} \kappa^+ + e_-^\mu \frac{R}{2\pi} \kappa^-, \quad \text{mit} \quad (e_\pm^\mu)^2 = 0 \quad \text{und} \quad e_+^\mu e_{-\mu} = -\frac{1}{2} \quad (2.55)$$

und der zugehörige klassische Impuls ist

$$p_{kl}^\mu \equiv \frac{1}{\alpha} (\partial_+ X_{kl}^\mu + \partial_- X_{kl}^\mu) = \frac{1}{2\pi \alpha} R (e_+^\mu + e_-^\mu). \quad (2.56)$$

Nun wird das Fluktuationsfeld

$$\tilde{Y}^\mu(\kappa^+, \kappa^-) = X^\mu - X_{kl}^\mu \quad (2.57)$$

eingeführt, das Abweichungen von der klassischen Lösung beschreibt. Diese Abweichungen entsprechen den transversalen Freiheitsgraden der Theorie.

2.5.3 Energie-Impuls Tensor und Zentralladung

Die Wirkung (2.52) ist invariant unter den modifizierten konformen infinitesimalen Transformationen

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \epsilon^-(\kappa^-) \partial_- X^\mu + \epsilon^+(\kappa^+) \partial_+ X^\mu \\ &\quad - \frac{\beta \alpha}{4} \left(\partial_-^2 \epsilon^-(\kappa^-) \frac{\partial_+ X^\mu}{H} + \partial_+^2 \epsilon^+(\kappa^+) \frac{\partial_- X^\mu}{H} \right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Dabei sind ϵ^\pm die Erzeuger infinitesimaler konformer Transformationen.

Die übliche Prozedur liefert den Energie-Impuls-Tensor und eine Redefinition des Fluktuationsfeldes $\tilde{Y}^\mu \rightarrow Y^\mu$ führt auf die Lagrange-Dichte (B.11) und die Energie-Impuls-Tensoren (B.12) und (B.13). Für die Details der umfangreichen Rechnungen

sei auf [32] verwiesen. Die Theorie für Y^μ entspricht einer quasifreien Theorie, was dazu führt, dass die Operatorprodukte analog zum freien Fall berechnet werden können. Für den Energie-Impuls Tensor ergeben sich bis zur Ordnung $1/R^2$ die Operatorprodukte

$$T_{\pm\pm}(\kappa^\pm)T_{\pm\pm}(0) \sim \frac{12\beta + d}{2(\kappa^\pm)^4} + \frac{2T_{\pm\pm}(0)}{(\kappa^\pm)^2} + \frac{\partial_\pm T_{\pm\pm}(0)}{\kappa^\pm}. \quad (2.59)$$

Der Vergleich dieses Resultats mit (B.5) liefert die Zentralladung $c = 12\beta + d$. Die resultierende Virasoro-Algebra (B.8) muss die Zentralladung $c = 26$ besitzen, damit die Weyl-Anomalie vermieden wird. Die Kopplungskonstante β wird durch diese Bedingung fixiert und es gilt

$$\beta = \frac{26 - d}{12}. \quad (2.60)$$

2.5.4 Virasoro-Generatoren

Die primären Felder der Theorie sind hier die Ableitungen des Fluktuationfeldes, die man analog zu (B.6) entwickelt als

$$\partial_- Y^\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l^\mu e^{-il\kappa^-} \quad \text{und} \quad \partial_+ Y^\mu = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_l^\mu e^{-il\kappa^+}. \quad (2.61)$$

Dabei gilt für die Operatoren $a_{-l}^\mu \equiv a_l^{\mu+}$ und analog $\tilde{a}_{-l}^\mu \equiv \tilde{a}_l^{\mu+}$, außerdem ist der Impuls der Fluktuationen gegeben über

$$p_Y^\mu = \sqrt{\frac{1}{2\alpha}} (a_0 + \tilde{a}_0), \quad (2.62)$$

Die Operatoren $a_l^{\mu+}$ und a_l^μ sind d Generationen von Erzeugungs und Vernichtungsoperatoren, ebenso wie die Operatoren $\tilde{a}_l^{\mu+}$ und \tilde{a}_l^μ , und es gelten die Vertauschungsrelationen

$$[a_l^\mu, a_k^{\nu+}] = [\tilde{a}_l^\mu, \tilde{a}_k^{\nu+}] = l \delta^{\mu\nu} \delta_{lk}. \quad (2.63)$$

Alle anderen Kommutatoren verschwinden. Eine zu (B.7) analoge Entwicklung der Energie-Impuls-Tensoren (B.12) und (B.13) liefert die Virasoro-Generatoren (B.15) und (B.16). Die Virasoro-Nullmoden lauten also:

$$L_0 = \frac{R}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e_-^\mu a_{0\mu} + \frac{1}{2} (a_0^\mu)^2 + \sum_{l=1}^{\infty} a_l^{\mu+} a_{l\mu} + \frac{\beta}{2} + \mathcal{O}(1/R^3) \quad (2.64)$$

$$\tilde{L}_0 = \frac{R}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e_+^\mu \tilde{a}_{0\mu} + \frac{1}{2} (\tilde{a}_0^\mu)^2 + \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{a}_l^{\mu+} \tilde{a}_{l\mu} + \frac{\beta}{2} + \mathcal{O}(1/R^3) \quad (2.65)$$

2.5.5 Fock-Raum der Fluktuationen

In einer konformen Feldtheorie lässt sich der Fock-Raum stets durch einen bestimmten Eigenzustand $|k^\mu\rangle$ zu den Operatoren a_0^μ und \tilde{a}_0^μ aufbauen. Diese als Descendants bezeichneten Räume zum Zustand $|k^\mu\rangle$ sind geschlossen unter konformen Transformationen und Anwendung beliebiger, aus $a_l^\mu, a_l^{\mu+}, \tilde{a}_l^\mu$ und $\tilde{a}_l^{\mu+}$ aufgebauter Operatoren [31].

Als Grundzustand wird hier der Zustand mit

$$a_0^\mu |p\rangle = \tilde{a}_0^\mu |p\rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} p_Y^\mu |p\rangle \quad (2.66)$$

verwendet und für die Vernichter gilt die Relation

$$a_l^\mu |p\rangle = \tilde{a}_l^\mu |p\rangle \equiv 0 \quad \forall \mu, l > 0. \quad (2.67)$$

Angeregte Zustände werden durch Erzeuger gebildet, die auf den Grundzustand wirken, und für physikalische Zustände gelten die Forderungen (B.9) und (B.10). Für die Wirkung der Virasoro Nullmoden auf einen angeregten Zustand $|\psi\rangle$ mit $N_{l\mu}$ Erzeugern $a_l^{\mu+}$ und $\tilde{N}_{k\nu}$ Erzeugern $\tilde{a}_k^{\nu+}$ gilt dann nach (2.66) und den Kommutatorrelationen (2.63):

$$L_0 |\psi\rangle = \left[\frac{\alpha}{4} (p_Y^\mu)^2 + \frac{R}{2\pi} e_-^\mu p_{Y\mu} + \frac{\beta}{2} + \sum_{l,\mu} l N_{l\mu} + \mathcal{O}(1/R^3) \right] |\psi\rangle \quad (2.68)$$

$$\tilde{L}_0 |\psi\rangle = \left[\frac{\alpha}{4} (p_Y^\mu)^2 + \frac{R}{2\pi} e_+^\mu p_{Y\mu} + \frac{\beta}{2} + \sum_{k,\nu} l \tilde{N}_{k\nu} + \mathcal{O}(1/R^3) \right] |\psi\rangle \quad (2.69)$$

Nach (B.10) gilt dann mit $n \equiv \frac{1}{2} \sum_{l,\mu} l (N_{l\mu} + \tilde{N}_{l\mu})$ die Relation

$$\frac{\alpha}{2} (p_Y^\mu)^2 + \frac{R}{2\pi} (e_-^\mu + e_+^\mu) p_Y^\mu + \beta + 2n + \mathcal{O}(1/R^3) = 2. \quad (2.70)$$

n ist die jeweilige Energiequantenzahl des entarteten Energiezustandes. Die Bedingung des verschwindenden transversalen Impulses in der geschlossenen Richtung des Strings sowie die Bedingung (B.9) sorgen dafür, dass genau $d-2$ unabhängige Komponenten übrigbleiben [27]. Es tauchen demnach keine zusätzlichen Freiheitsgrade auf, was die Konsistenz der Theorie gewährleistet.

2.5.6 Energiezustände

Der Gesamtimpuls des geschlossenen Strings ist gegeben über

$$P^\mu = p_{kl}^\mu + p_Y^\mu = \frac{R}{2\pi\alpha} (e_-^\mu + e_+^\mu) + p_Y^\mu. \quad (2.71)$$

Die Energie des Strings lautet dann

$$E \equiv \sqrt{-(P^\mu)^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{2\pi\alpha}\right)^2 - (p_Y^\mu)^2 - \frac{R}{\pi\alpha} (e_+^\mu + e_-^\mu) p_Y^\mu}. \quad (2.72)$$

Ausnutzen der Relation (2.70) liefert mit (2.53) und (2.60) die Energiezustände

$$E_n = \sigma R \sqrt{1 + \frac{8\pi}{\sigma R^2} \left(n - \frac{1}{24}(d-2)\right) + \mathcal{O}(1/R^5)}. \quad (2.73)$$

Diese Energien stimmen mit den Energien des geschlossenen Strings der Nambu Stringtheorie (2.38) bis zur Ordnung $1/R^3$ überein.

Anzumerken sei, dass die Energiequantenzahl zunächst auch halbzahlig sein kann. Betrachtet man allerdings den Propagator eines geschlossenen Strings, der zu der Korrelationsfunktion von zwei um eine kompaktifizierte Dimension gewickelten Polyakov-Loops korrespondiert, so ergeben sich zusätzlich noch Dirichlet-Randbedingungen für die räumlichen Richtungen analog zu [13], die zu der zusätzlichen Bedingung

$$\left(L_0 - \tilde{L}_0\right) |\psi\rangle = 0 \quad (2.74)$$

für alle physikalischen Zustände $|\psi\rangle$ führen. Dies sorgt für die Bedingung $\tilde{N}_{l\mu} = N_{l\mu}$ und somit für stets ganzzahlige Energiequantenzahlen.

III Numerische Methoden

Da eine analytische Betrachtung nicht-pertubativer QCD nicht möglich ist, verwendet man Monte-Carlo Simulationen von Feldtheorien auf endlichen Raumzeitgittern, um Erwartungswerte von Observablen zu bestimmen. Dabei nutzt man die formale Analogie zwischen statistischer Mechanik und dem Pfadintegral in der euklidischen Feldtheorie.

In dieser Arbeit sind nur Monte-Carlo-Simulationen für reine Eichtheorie relevant, weshalb das nächste Kapitel auf diese beschränkt bleibt. Simulationen mit dynamischen Fermionen sind aufgrund der Grassmanwertigkeit der fermionischen Felder wesentlich komplizierter [4].

3.1 Monte-Carlo-Simulationen

In reiner Eichtheorie auf dem Gitter wird der Erwartungswert einer Observablen $F[U]$ berechnet über das Funktionalintegral (1.20). Dieses ist auf einem endlichen Gitter zwar endlich-dimensional, hat allerdings im Allgemeinen immer noch zu viele Freiheitsgrade, um einer direkten numerischen Integration zugänglich zu sein. Man benutzt deshalb Monte-Carlo-Simulationen um die Erwartungswerte zu berechnen.

3.1.1 Ensemble-Mittelwerte

Das Funktionalintegral (1.20) entspricht formal einem Erwartungswert der statistischen Mechanik mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(\{U\}) = e^{-S_G[\{U\}]} \quad (3.1)$$

der Feldkonfigurationen $\{U\}$ des Eichfeldes. Man ersetzt deshalb formal den Erwartungswert durch den Ensemblemittelwert eines Ensembles von N mit einem entsprechenden Algorithmus zufällig erzeugter Feldkonfigurationen $\{U\}_i$ mit der Verteilung $P(\{U\})$. Es gilt dann

$$\langle F[U] \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F[\{U\}_i]. \quad (3.2)$$

Der Algorithmus der die Feldkonfigurationen erzeugt, ist so zu wählen, dass die Verteilung der Feldkonfigurationen die Wahrscheinlichkeitsverteilung (3.1) approximiert und im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ mit dieser identisch ist.

3.1.2 Update-Algorithmen

Die Feldkonfiguration $\{U\}_i$ wird unmittelbar aus der vorherigen Konfiguration $\{U\}_{i-1}$ erzeugt, wobei die Konfiguration $\{U\}_{i-2}$ die neue Konfiguration nicht beeinflusst.

Einen solchen Prozess bezeichnet man als Markov-Prozess. Einen Algorithmus, der eine neue Feldkonfiguration $\{U\}_k$ aus einer alten $\{U\}_i$ mit der Übergangswahrscheinlichkeit P_{ik} erzeugt, bezeichnet man als Update-Algorithmus.

Damit durch diesen das entsprechende Ensemble generiert wird, ist zu fordern, dass jede Feldkonfiguration mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit aus der unmittelbar vorherigen erzeugt werden kann. Also muss für die Übergangswahrscheinlichkeiten gelten:

$$\sum_k P_{ik} = 1 \quad \text{und} \quad P_{ik} > 0 \quad \forall i, k \quad (3.3)$$

Da der Update-Formalismus die Verteilung (3.1) generieren soll, muss diese der einzige globale Fixpunkt des Update-Algorithmus sein.

Wählt man eine beliebige Anfangskonfiguration, so muss diese nicht notwendigerweise eine Konfiguration sein, deren Auftrittswahrscheinlichkeit in der Nähe des Maximums der Verteilung liegt. Da dies bei endlichen Messungen eine Rolle spielt, ist es deshalb sinnvoll die ersten Messungen nicht zur Berechnung des Mittelwertes zu benutzen, da diese andernfalls das Ergebnis beeinflussen können. Man spricht vom Thermalisieren des Gitters.

Für reine Eichtheorie ist der sogenannte Heatbath-Algorithmus [33] sehr effizient, der in einer optimierten Variante [34] auch bei den Simulationen in dieser Arbeit verwendet wird.

3.1.3 Messfehler und Jackknife-Methode

Bei Messungen mit N unkorrelierten Messergebnissen $\{f_i\}$ einer Observablen F berechnet sich der Messfehler u_F über

$$u_F \equiv \frac{\sigma_F}{\sqrt{N-1}} \quad \text{mit der Varianz} \quad \sigma_F^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [f_i - \langle F \rangle]^2. \quad (3.4)$$

Im Prinzip können die statistischen Daten aus Monte-Carlo-Simulationen als Messwerte angesehen werden, wobei die einzelnen Messwerte $f_i \equiv F[\{U\}_i]$ durch den Update-Algorithmus korreliert sind.

Eine typische Maß für die Korrelation die Autokorrelationszeit τ_F , die den exponentiellen Abfall der Autokorrelationsfunktion

$$\Gamma(i) \equiv \langle (f_i - \langle F \rangle) (f_0 - \langle F \rangle) \rangle \quad (3.5)$$

beschreibt. Für korrelierte Daten erhält man für die Fehlerabschätzung die modifizierte Varianz

$$\sigma_F^2 \equiv \frac{2\tau_F}{N} \sum_{i=1}^N [f_i - \langle F \rangle]^2. \quad (3.6)$$

Durch die Korrelation wird also die effektive Anzahl der Messwerte gemindert.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten den Fehler bei korrelierten Messwerten zu bestimmen. Die erste, die sogenannte Γ -Methode, bestimmt den Fehler direkt aus einer

Abschätzung für die Autokorrelationsfunktion [35]. Die zweite Methode ist die sogenannte Jackknife-Methode.

Bei dieser Methode fasst man zunächst die Messwerte in $\tilde{N} = N/M$ Blöcken aus $N - M$ Messwerten zusammen und benutzt die Mittelwerte

$$\bar{f}_k \equiv \frac{1}{N - M} \left(\sum_{i=1}^N f_i - \sum_{j=1}^M f_{[M(k-1)+j]} \right) \quad (3.7)$$

als neue Messwerte. Bei hinreichender Statistik und optimalem M können die neuen Messwerte als unkorreliert angesehen werden und der Messfehler berechnet sich als

$$u_F^2 = \frac{(\tilde{N} - 1)}{\tilde{N}} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} [\bar{f}_k - \langle F \rangle]^2. \quad (3.8)$$

Die Methode liefert auch die Möglichkeit, einen stabilen Messfehler für Observablen anzugeben, die nicht direkt von den Eichfeldern abhängen sondern vom Mittelwert einer Observablen $\langle F \rangle$. Der Messfehler u_G der Observablen $G[\langle F \rangle]$ lässt sich dann berechnen über

$$u_G^2 = \frac{(\tilde{N} - 1)}{\tilde{N}} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} [G[\bar{f}_k] - \langle G \rangle]^2 \quad \text{mit} \quad \langle G \rangle \equiv \frac{1}{\tilde{N}} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} G[\bar{f}_k]. \quad (3.9)$$

M lässt sich optimieren, indem man die Varianz der Observablen gegen die Größe der Blöcke aufträgt. Erreicht der Graph ein Plateau, so kann eine beliebiges M , dessen Messfehler auf dem Plateau liegt, gewählt werden.

3.2 Operatoren für angeregte String-Zustände

Nach Kapitel (I) ist der Wilson-Loop eine geeignete Observable um Flussröhren in Gitterrechnungen zu untersuchen. Dieser ist eine geschlossene Linie gluonischen Flusses und wird auf dem Gitter zu dem pfadgeordneten Produkt von Linkvariablen entlang einer geschlossenen Linie. Ein rechteckiger Wilson-Loop mit den Kantenlängen R und T auf dem Gitter ist in Abbildung (8) gezeigt.

Ziel ist es, mithilfe von Wilson-Loops die Energien der angeregten Zustände der Flussröhren in Monte-Carlo-Simulationen zu berechnen.

3.2.1 Die Operatorbasis und die Korrelationsmatrix

Rechteckige Wilson-Loops sind ähnlich wie Polyakov-Loop-Korrelationsfunktionen wirkungsvolle Observablen um den Grundzustand des statischen Potentials zu betrachten. Für die angeregten Zustände sind beide Observablen ungeeignet, da nach der Spektraldarstellung von Wilson-Loops (1.16) und Polyakov-Loop-Korrelationsfunktionen

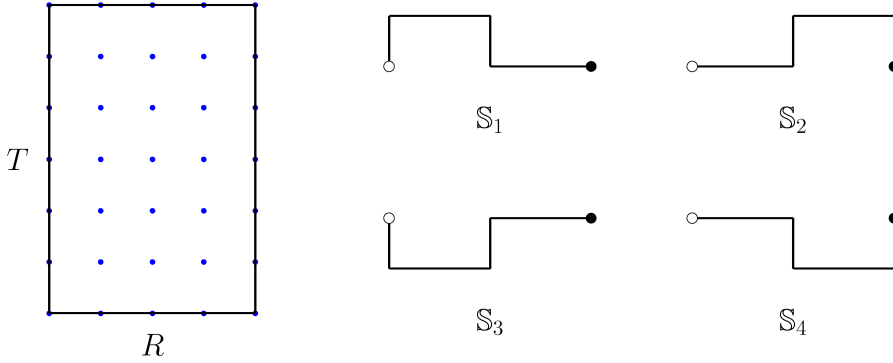


Abbildung (8): Links: Rechteckiger Wilson-Loop mit den Kantenlängen R und T auf dem Gitter. **Rechts:** Die bei den Simulationen dieser Arbeit verwendete Operatorbasis $\{\mathbb{S}_j\}$.

(2.35) der Beitrag der angeregten Zustände exponentiell unterdrückt wird.

Bessere Observablen sind Wilson-Loops, deren Operatoren $\mathbb{Q}^K(r, t)$ auf den räumlichen Linien definierte Quantenzahlen bezüglich Ladungskonjugation und Parität (C, P) besitzen. Dabei ist r die Länge der Operatoren in räumlicher Richtung und t die Zeitebene in der der Operator liegt, $K = ++, +-, --, -+$ bezeichnet die Kanäle. Der Erwartungswert eines Wilson-Loops zugehörig zum Kanal K wird definiert als

$$\mathbb{W}^K(R, T) \equiv \left\langle \text{Tr} \left[\mathbb{Q}^K(R, 0) \circ \mathcal{T}(R, T) \circ (\mathbb{Q}^K(R, T))^+ \circ \mathcal{T}^+(R, 0) \right] \right\rangle, \quad (3.10)$$

wobei $\mathcal{T}(r, t)$ das Produkt von zeitlichen Links entlang eine gerade Linie der Länge t im Abstand r vom Startpunkt des Wilson-Loops ist. R ist die räumliche Ausdehnung entlang der geraden Achse des Loops, T die zeitliche Ausdehnung. Für ihren Erwartungswert erwartet man eine Spektraldarstellung analog zu (2.34).

Die Operatoren \mathbb{Q}^K sind nicht direkt bekannt, weshalb eine Operatorbasis von mindestens vier Operatoren \mathbb{S}_j benutzt wird, die dem Produkt von Linkvariablen entlang gekrümmter Wege an den Enden des Wilson-Loops entsprechen. Die in dieser Arbeit verwendeten Basis-Operatoren sind auf der rechten Seite von Abbildung (8) gezeigt. Die Eigenzustände dieser Basis bezüglich den Quantenzahlen (C, P) entsprechen den Operatoren \mathbb{Q}^K .

Man erhält die Eigenzustände, indem man mit den Basisoperatoren eine Korrelationsmatrix \mathbb{K} bildet und diese diagonalisiert [25]. Die Eigenzustände der Korrelationsmatrix entsprechen in diesem Fall den Operatoren \mathbb{Q}^K . Die Elemente der Korrelationsmatrix sind Erwartungswerte von Wilson-Loops mit dem Basisoperator \mathbb{S}_i am unteren Ende und dem Basisoperator \mathbb{S}_j am oberen Ende, d.h.:

$$\mathbb{K}_{ij} \equiv \left\langle \text{Tr} \left[\mathbb{S}_i(R, 0) \circ \mathcal{T}(R, T) \circ (\mathbb{S}_j(R, T))^+ \circ \mathcal{T}^+(R, 0) \right] \right\rangle \quad (3.11)$$

3.2.2 Die Eigenzustände der Korrelationsmatrix zur Operatorbasis $\{\mathbb{S}_j\}$

Im Falle der in dieser Arbeit verwendeten Operatorbasis kann man die Eigenzustände bezüglich (C, P) analytisch erhalten und muss nicht jeweils einzeln die Korrelationsmatrix berechnen.

Konjugiert man die Ladung, so werden Quark und Antiquark vertauscht, was zu einer Spiegelung an der Ebene senkrecht zur räumlichen Loop-Achse führt. Unter dieser Operation gilt also für die Operatoren

$$\mathbb{S}_1 \xleftrightarrow{C} \mathbb{S}_2 \quad \text{und} \quad \mathbb{S}_3 \xleftrightarrow{C} \mathbb{S}_4. \quad (3.12)$$

Unter der Paritätstransformation wird die Bewegungsrichtung umgedreht, was zu einer Spiegelung an der Verbindungslinie zwischen den Endpunkten führt und somit zu

$$\mathbb{S}_1 \xleftrightarrow{P} \mathbb{S}_3 \quad \text{und} \quad \mathbb{S}_2 \xleftrightarrow{P} \mathbb{S}_4. \quad (3.13)$$

Mithilfe der Formeln (3.12) und (3.13) kann man die Eigenzustände durch einfache Superpositionen erhalten. Die Eigenzustände lauten:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^{++} &= \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3 + \mathbb{S}_4 & \mathbb{Q}^{+-} &= \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_3 - \mathbb{S}_4 \\ \mathbb{Q}^{--} &= \mathbb{S}_1 - \mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_3 + \mathbb{S}_4 & \mathbb{Q}^{-+} &= -\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 - \mathbb{S}_3 + \mathbb{S}_4 \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.2.3 Berechnung der Energiezustände

Bei den Simulationen sollen die Energien der Grundzustände der einzelnen Kanäle berechnet werden. Zu diesem Zweck werden die Erwartungswerte von Wilson-Loops $\mathbb{W}^K(R, T)$ nach Gleichung (3.10) mit den Operatoren \mathbb{Q}^K aus Gleichung (3.14) berechnet. In Spektraldarstellung lassen sich diese Erwartungswerte nach Gleichung (2.34) schreiben als

$$\mathbb{W}^K(R, T) = \alpha^K(R) e^{-E_0^K(R) T} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^K(R) e^{-\Delta E_m^K(R) T} \right). \quad (3.15)$$

Die Faktoren α^K und β_m^K sind dabei im Allgemeinen unbekannt und die Energiedifferenzen $\Delta E_m^K(R)$ werden größer mit steigendem m .

Um die formale Korrespondenz mit den angeregten Zuständen des Strings deutlich zu machen, werden die Kanäle im Folgenden durchnummeriert, wobei sich die jeweilige Nummer auf die Korrespondenz der Grundzustandsenergie des Kanals mit dem angeregten Stringzustand bezieht. Nach Gleichung (2.31) werden die Kanäle deshalb wie folgt nummeriert:

$$++ \equiv 0; \quad +- \equiv 1; \quad -- \equiv 2; \quad -+ \equiv 3 \quad (3.16)$$

Vernachlässigt man zunächst die höheren angeregten Zustände in den Kanälen, so ergeben sich die Energien über

$$\bar{E}_n(R) = -\frac{1}{T_2 - T_1} \ln \left[\frac{\mathbb{W}_n(R, T_2)}{\mathbb{W}_n(R, T_1)} \right]. \quad (3.17)$$

Die Energien $\bar{E}_n(R)$ werden im Folgenden als naive Energien bezeichnet. Im Limes $T_1, T_2 \rightarrow \infty$ ist (3.17) korrekt und es müssen keine Korrekturen berücksichtigt werden. Dieser Limes kann bei Gitterberechnungen allerdings nicht erreicht werden. Es ist deshalb wichtig, die Energiekorrekturen abzuschätzen. Um die Korrekturen in erster Näherung zu berücksichtigen werden deshalb die Energien über einen Fit der Form

$$E_n(R) = -\frac{1}{T_2-T_1} \ln \left[\frac{\mathbb{W}_n(R, T_2)}{\mathbb{W}_n(R, T_1)} \right] - \frac{1}{T_2-T_1} \left[\beta_{n,1} e^{-\Delta E_{n,1} T_1} (1 - e^{-\Delta E_{n,1} (T_2-T_1)}) \right] \quad (3.18)$$

bestimmt, wobei $E_n(R)$ als korrigierte Energien bezeichnet werden und $\beta_{n,1}$ und $\Delta E_{n,1}$ zusätzliche Fitparameter sind. Der Fit wird in Anhang (C.1) begründet.

Da es sich um Fits mit drei freien Parametern handelt, müssen Wilson-Loops mit mindestens drei verschiedenen Zeitausdehnungen berechnet werden. In diesem Fall werden Wilson-Loops mit vier verschiedenen Zeitausdehnungen berechnet um eine entsprechende Güte der Fits zu gewährleisten.

Die Fehler der korrigierten Energien sind mit der Jackknife-Methode zu bestimmen. Dabei wird für jeden der gebildeten Blöcke ein einzelner Fit durchgeführt und der resultierende Energiewert sowie der Fehler nach Gleichung (3.9) bestimmt.

3.2.4 Berechnung der Energiedifferenzen

Während bei den Energieniveaus der Kontinuumslices aufgrund einer unphysikalischen additiven Konstanten nicht eindeutig ist, ist es für die Energiedifferenzen, weshalb diese wichtige Observablen sind. Außerdem können bei den Simulationen Fluktuationen der Eichfelder auftreten, die bei allen Energiewerten zu einem korrelierten Anwachsen oder Absinken der Energien führen können. Betrachtet man die Energiedifferenzen, so fallen diese korrelierten Schwankungen heraus, was zu einer Reduktion des Messfehlers führt. Die Energiedifferenzen werden deshalb bei der Auswertung getrennt betrachtet.

Um etwaige Korrekturen bezüglich der angeregten Zustände zu berücksichtigen, die in Anhang (C.1) diskutiert werden, wird für die Differenz $\Delta E_{nm}(R) \equiv E_n(R) - E_m(R)$ ein Fit der Form

$$\Delta E_{nm}(R) = -\frac{1}{T_2-T_1} \ln \left[\frac{\mathbb{W}_n(R, T_2) \mathbb{W}_m(R, T_1)}{\mathbb{W}_n(R, T_1) \mathbb{W}_m(R, T_2)} \right] - \frac{1}{T_2-T_1} \left[(\beta_{n,1} - \beta_{m,1}) e^{-\Delta E_{n,1} T_1} (1 - e^{-\Delta E_{n,1} (T_2-T_1)}) \right] \quad (3.19)$$

mit den beiden weiteren Fitparametern $(\beta_{n,1} - \beta_{m,1})$ und $\Delta E_{n,1}$ durchgeführt. Der Fehler und die Energiedifferenz werden wiederum mit der Jackknife-Methode bestimmt.

3.2.5 Probleme bei großen Wilson-Loops

Damit die Grundzustände in den Kanälen und somit die angeregten Energiezustände und Energiedifferenzen möglichst genau bestimmt werden können, muss der Beitrag

der angeregten Zustände in den Kanälen möglichst gering gehalten werden. Da dieser exponentiell mit der Zeitausdehnung T des Wilson-Loops abnimmt, ist es wünschenswert, den Erwartungswert von Wilson-Loops mit möglichst großer Zeitausdehnung zu berechnen.

Zudem wird das zu betrachtende Modell besser mit steigender Länge R der Flussröhre, weshalb gleichzeitig Wilson-Loops mit großen räumlichen Ausdehnungen zu betrachten sind. Diese beiden Tatsachen führen darauf, dass die Wilson-Loops mit den besten Eigenschaften eine sehr große Fläche besitzen.

Für den Erwartungswert des Wilson-Loops gilt das approximative Flächenverhalten

$$W(R, T) \sim e^{-\sigma A} = e^{-\sigma R T}. \quad (3.20)$$

Bei sehr großen Loops wird deshalb das Verhältniss zwischen dem Signal des Wilson-Loops und dem statistischen Rauschen der Simulationen sehr schlecht, so dass der statistische Fehler unter Umständen größer ist als der Erwartungswert. Zudem ist das Signal des Erwartungswertes der Wilson-Loops zum Kanal n für $n > 0$ mit $(E_n - E_0)$ zusätzlich exponentiell gedämpft gegenüber dem Erwartungswert rechteckiger Wilson-Loops bzw. des Wilson-Loops zugehörig zum Grundzustand. Selbst bei der relativ wenig rechenintensiven $SU(2)$ -Eichtheorie in drei Dimensionen ist es deshalb nicht möglich den Erwartungswert von Wilson-Loops der benötigten Größe für die angeregten Zustände mit hinreichender Genauigkeit zu messen. Es ist also notwendig eine Möglichkeit zu finden den statistischen Fehler zu reduzieren. Eine solche Möglichkeit bietet der von *Lüscher* und *Weisz* entwickelte Algorithmus, der im nächsten Kapitel diskutiert wird.

3.3 Der Lüscher-Weisz-Algorithmus

Der 2001 von *Lüscher* und *Weisz* [36] vorgestellte Algorithmus nutzt die Lokalität der reinen Eichtheorie um den Messfehler von Observablen in Form großer Loops, wie Wilson-Loops und Polyakov-Loops, zu reduzieren. Die Lokalität kann allerdings nur im Falle reiner Eichtheorie genutzt werden, da Monte-Carlo-Simulationen mit Fermionen nicht-lokal sind.

3.3.1 Lokalität und Untergitter

Möchte man die Erwartungswerte von Observablen in reiner Gittereichtheorie berechnen, so lassen sich diese berechnen über das Funktionalintegral (1.20). Die Eichwirkung (1.22) entspricht der Summe über die Spuren aller Plaketten des Gitters und ist somit eine lokale Wirkung, d.h. in den einzelnen Summanden treten nur direkt benachbarte Links auf.

Diese Lokalität kann man sich zunutze machen, indem man alle raumartigen Plaketten

auf bestimmten Zeitebenen des Gitters fixiert⁹. Ein Beispiel ist in Abbildung (9) gezeigt, wobei die Verbindungslinien zwischen den Gitterpunkten fixierte Linkvariablen bezeichnen.

Aufgrund der beschriebenen Lokalität der Gitterwirkung sind die einzelnen Subgitter zwischen den fixierten Ebenen physikalisch vollkommen unabhängig voneinander. Dies führt dazu, dass die Wirkung, die nur noch von den nichtfixierten Links abhängig ist, sich in effektive Wirkungen für die Untergitter zerlegen lässt.

Es gilt also:

$$S_G^{fix} [U] = \sum_{s=1}^K S_s^{sub} [U] \quad (3.21)$$

Dabei ist S_G^{fix} die Wirkung bei fixierten Zeitebenen, $S_s^{sub} [U]$ die Wirkung auf dem Untergitter s , wobei die Einschränkung der Links U auf das Untergitter implizit und K die Anzahl der Untergitter ist.

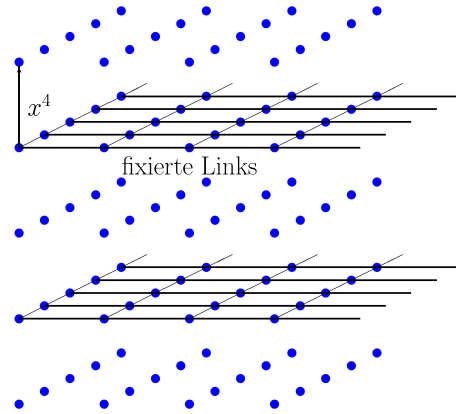


Abbildung (9): Fixierte Zeitebenen auf einem Gitter im Abstand $2a$.

3.3.2 Berechnung von Erwartungswerten in mehreren Mittelungsstufen

Betrachtet man eine Observable $F [U]$, so kann man diese in Operatoren auf den Untergittern zerlegen. Die Teile, die bei der Zerlegung auf den fixierten Zeitebenen liegen, bleiben konstant, solange die Links fixiert sind. Eine Observable kann man also schreiben als

$$F^{fix} [U] = \hat{T} \left[\prod_{s=1}^K F_s^{sub} [U] \right], \quad (3.22)$$

wobei \hat{T} der Zeitordnungsoperator ist, der dafür sorgt, dass die zur Observablen gehörigen Untergitteroperatoren in der richtigen Reihenfolge zusammengesetzt werden. Entscheidend ist die Wahl der Untergitteroperatoren, da diese gewährleisten, dass die Zeitordnung bei der Multiplikation ebenfalls die Pfadordnung der Observablen F garantiert. Anders gesagt: Gelingt es die Observable F so zu zerlegen, dass die einzelnen Operatoren nur noch zeitgeordnet aneinandermultipliziert werden müssen, so kann man aus diesen Operatoren die Untergitteroperatoren aufbauen. Für Wilson-Loops werden die entsprechenden Operatoren und das zugehörige Multiplikationsgesetz in Kapitel (3.4) behandelt.

Weiterhin muss darauf geachtet werden, dass die Translationsinvarianz, die es normalerweise ermöglicht, über alle räumlichen Startpunkte der Operatoren zu mitteln,

⁹Die fixierten Gitterebenen werden im Folgenden immer als Zeitebenen identifiziert. Ebensogut können sie allerdings auch als räumliche Ebenen angesehen werden.

im Falle von fixierten Zeitebenen aufgrund der Randbedingungen durch die fixierten Links gebrochen ist, solange der Operator auf mehreren Untergittern liegt. Liegen Teile des Operators auf den fixierten Ebenen, so werden diese nach der Mittelung über die Untergitter hinzugefügt.

Im Falle von fixierten Gitterebenen faktorisiert das Funktionalintegral (1.20) aufgrund von (3.21) und (3.22) und lässt sich schreiben als

$$\hat{F}^{fix} = \hat{T} \prod_{s=1}^K \left[\frac{1}{Z_s^{sub}} \int (\mathcal{D}U)_s^{sub} F_s^{sub} [U] e^{-S_s^{sub}[U]} \right], \quad (3.23)$$

wobei $(\mathcal{D}U)_s^{sub}$ das eingeschränkte Integrationsmaß des entsprechenden Untergitters ist. Die linke Seite wurde nicht als Erwartungswert von F geschrieben, da bei Rechnungen, bei denen die Zeitebenen fixiert bleiben, die Mittelung nicht notwendigerweise den gesuchten Erwartungswert bezüglich der Verteilung e^{-S_G} approximiert. Dies liegt daran, dass durch die fixierten Ebenen nicht jede beliebige Feldkonfiguration des Gitters mit nichtverschwindender Wahrscheinlichkeit erzeugt werden kann.

Der Erwartungswert auf den Untergittern wird definiert als

$$\langle F \rangle_s^{sub} \equiv \frac{1}{Z_s^{sub}} \int (\mathcal{D}U)_s^{sub} F_s^{sub} [U] e^{-S_s^{sub}[U]} \quad (3.24)$$

und es gilt

$$\hat{F}^{fix} = \hat{T} \left[\prod_{s=1}^K \langle F \rangle_s^{sub} \right]. \quad (3.25)$$

Um den Erwartungswert zu approximieren führt man zusätzlich zu den Mittelungen über die Untergitter noch Updates des gesamten Gitters durch und berechnet jeweils die Werte \hat{F}^{fix} , die dann als Messwerte benutzt werden. Der Erwartungswert von F ist also gegeben durch

$$\langle F \rangle = \langle \hat{F}^{fix} \rangle = \left\langle \hat{T} \left[\prod_{s=1}^K \langle F \rangle_s^{sub} \right] \right\rangle. \quad (3.26)$$

Dieser Schritt zu einer Mittelung über Mittelwerte von Untergittern überzugehen kann auch in diesen Untergittern iterativ angewendet werden, so dass mehrere Mittelungsstufen eingeführt werden können.

Dabei sollte stets darauf geachtet werden, dass genügend Messwerte \hat{F}^{fix} berechnet werden, da ansonsten eventuell der Einfluß der fixierten Zeitebenen das Ergebnis verfälscht, aufgrund des eben erwähnten Effektes.

3.3.3 Algorithmus

Im Folgenden wird kurz der Algorithmus zur Berechnung der faktorisierten Erwartungswerte angegeben:

- Zunächst wird das thermalisierte Gitter in K Untergitter mit der zeitlichen Ausdehnung t_s unterteilt. s ist dabei der Index des einzelnen Untergitters, d.h. die zeitliche Ausdehnung der einzelnen Untergitter muss nicht zwangsläufig gleich sein.
- Auf jedem dieser Untergitter wird der Mittelwert des entsprechenden Operators F_s^{sub} nach n_s Updates des jeweiligen Untergitters berechnet, wobei nicht alle n_s gleich sein müssen.
- Falls gewünscht, kann man nun schrittweise zu größeren Untergittern übergehen, wobei nur noch ein Teil der fixierten Zeitebenen festgehalten wird und bei der Mittelung nun die zuvor bestimmten Mittelwerte über die im größeren Untergitter enthaltenen Untergitter verwendet werden.
- Die Mittelwerte über die letzte Stufe der Unterteilung des Gitters werden dann genutzt um einen Messwert für die Observable zu erhalten.
- Nun werden einige Updates des gesamten Gitters durchgeführt. Die Zahl dieser Updates ist so zu wählen, dass die Korrelation der beiden Konfigurationen möglichst gering ist im Verhältnis zur benötigten Rechenzeit. Anschließend wird von vorne begonnen um einen weiteren Messwert für die Observable zu erhalten.

Dabei gibt es einige Parameter, die über die Effizienz des Algorithmus entscheiden. Diese müssen je nach der betrachteten Observablen, dem Update-Algorithmus und der Kopplung β neu optimiert werden.

Die entscheidenden Größen sind:

- die Zahl der Mittelungs-Ebenen des Algorithmus.
- die Zeitausdehnungen der Untergitter: t_{s_z}
(Dabei ist s_z der Index des jeweiligen Untergitters in der z -ten Stufe.)
- die Anzahl der Untergitter-Updates: n_{s_z}
- die Anzahl der Gesamtupdates: N

Die Optimierung erfolgt dabei typischerweise in der obigen Reihenfolge, d.h. bei einer vorgegeben Zahl von Mittelungs-Ebenen optimiert man die Zeitausdehnungen der jeweiligen Untergitter. Die wesentlich wichtigeren Größen sind n_{s_z} und N bei vorgegebenem Z und t_{s_z} . Ein Beispiel für die Optimierung der Größen bei Polyakov-Loop Korrelatoren ist [37].

3.4 Anwendung des Algorithmus auf Wilson-Loops

Relevant für diese Arbeit sind wie zuvor betont große Wilson-Loops, auf die der Lüscher-Weisz Algorithmus angewendet werden soll. Dazu muss zunächst der Wilson-Loop in einzelne Operatoren zerlegt werden, die auf den Untergittern lokalisiert sind.

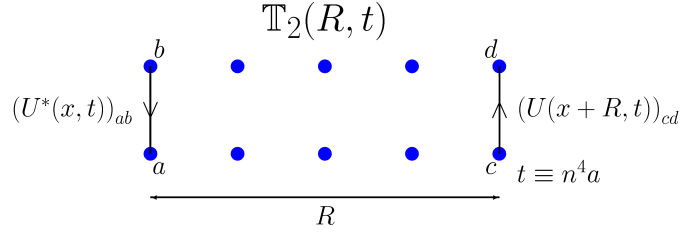


Abbildung (10): Der Zweilinkoperator $\mathbb{T}_2(R, t)$ ist definiert über das Tensorprodukt über die beiden Linkvariablen in Zeitrichtung.

3.4.1 Zerlegung von Wilson-Loops

Um Wilson-Loops auf die oben beschriebene Art zu zerlegen separiert man zunächst die räumlichen Operatoren $\mathbb{Q}_n(R, \tau)$ von der Zeitentwicklung, die nun über einen neuen Operator $\mathbb{T}(R, T)$ beschrieben wird. Ein Wilson-Loop $\hat{\mathbb{W}}_n(R, T)$ aus Gleichung (3.10) ($K \rightarrow n$) lässt sich dann schreiben als

$$\hat{\mathbb{W}}_n(R, T) = \text{Sp} [\mathbb{Q}_n(R, 0) \circ \mathbb{T}(R, T) \circ \mathbb{Q}_n^+(R, T)]. \quad (3.27)$$

Dieser Ansatz hat eine Korrespondenz zur Transfer-Matrix Darstellung von Streuprozessen, wobei $\mathbb{Q}_n(R, 0)$ dem einlaufenden Zustand entspricht und $\mathbb{Q}_n^+(R, T)$ dem auslaufenden. Die formale Korrespondenz mit dem Operator im Kontinuum wird deutlich, wenn man Gleichung (1.14) betrachtet. Die Operatoren $\mathbb{Q}_n(R, \tau)$ sind Superpositionen von Produkten von Links, also Tensoren zweiter Stufe, Operatoren mit zwei freien Indizes. Der Zeitentwicklungsoperator $\mathbb{T}(R, T)$ besteht aus zwei separierten Produkten von Linkvariablen und ist deshalb ein Tensor vierter Stufe.

Der Zeitentwicklungsoperator lässt sich als Produkt von sogenannten Zweilinkoperatoren $\mathbb{T}_2(R, t)$ schreiben [36]. Ein solcher Zweilinkoperator ist in Abbildung (10) abgebildet. Der Zweilinkoperator $\mathbb{T}_2(R, t)$ am Ort x zur Zeit t wird definiert über das Tensorprodukt

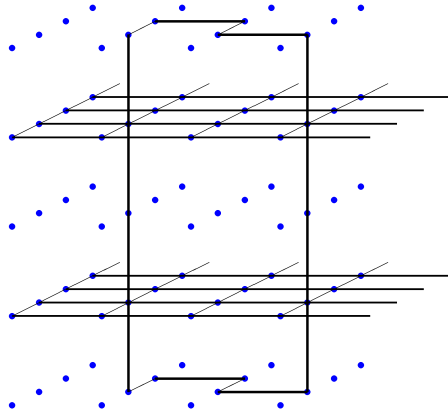
$$(\mathbb{T}_2(R, T))_{abcd} \equiv (U^*(x, t))_{ab} (U(x + R, t))_{cd}, \quad (3.28)$$

wobei der räumliche Startort x wie bei den Wilson-Loops nicht explizit aufgeführt wird und $x + R$ der Gitterplatz im Abstand R zu x entlang der Achse des Wilson-Loops ist. $U^*(x, t)$ ist der zu $U(x, t)$ komplex-konjugierte Link. Die Zweilinkoperatoren entsprechen dem Zeitentwicklungsoperator für den Zeitschritt $t \rightarrow t + a$. Der Operator für einen Zeitschritt $t \rightarrow t + 2a$ ist das Produkt aus den beiden Zweilinkoperatoren für die Zeitschritte $t \rightarrow t + a$ und $t + a \rightarrow t + 2a$. Für diese gilt das Multiplikationsgesetz

$$[\mathbb{T}_2(R, t) \circ \mathbb{T}_2(R, t + a)]_{abcd} = (\mathbb{T}_2(R, t))_{aicj} (\mathbb{T}_2(R, t + a))_{ibjd}. \quad (3.29)$$

Den Zeitentwicklungsoperator $\mathbb{T}(R, T)$ des Wilson-Loops, dessen unteres Ende in der Zeitebene t_0 liegt, kann man dann schreiben als

$$[\mathbb{T}(R, T)]_{abcd} = [\mathbb{T}_2(R, t_0) \circ \mathbb{T}_2(R, t_0 + a) \circ \cdots \circ \mathbb{T}_2(R, t_0 + a(T - 1))]_{abcd}. \quad (3.30)$$



β	5	
T	8	
R	4 – 12	
Lattice	24^3	
Dicke der Untergitter	2	
Updates der Untergitter	1000	(Alt)
	12000 : 1000	(Neu)
Messwerte	730	(Alt)
	50	(Neu)
Rechenzeit CPU	1100 min	
	AMD	
	2.2 GHz	

Abbildung (11): Links: Ein Wilson-Loop, dessen räumliche Operatoren \mathbb{S}_1 in der Mitte von Untergittern der Zeitausdehnung $2a$ liegen. **Rechts:** Parameter der Gittersimulationen des direkten Vergleiches zwischen dem alten und dem neuen Algorithmus bei gleicher Rechenzeit.

Das Multiplikationsgesetz für den Wilson-Loop (3.27) lautet dann:

$$\hat{W}_n(R, T) = (\mathbb{Q}_n(R, 0))_{ac} (\mathbb{T}(R, T))_{abcd} (\mathbb{Q}_n^*(R, T))_{bd} \quad (3.31)$$

Die Operatoren auf den Untergittern für Wilson-Loops werden aus den Operatoren $\mathbb{Q}_n(R, t)$ und $\mathbb{T}_2(R, t)$ aufgebaut.

3.4.2 Ursprüngliche und verbesserte Methode

Eine Methode zur Anwendung des Lüscher-Weisz Algorithmus, die in dem ursprünglichen Artikel [36] vorgeschlagen wurde ist es, die räumlichen Operatoren $\mathbb{Q}_n(R, t)$ auf fixierte Zeitebenen zu legen. Diese Form des Algorithmus wurde auch in [25] genutzt um die angeregten Zustände zu untersuchen. Die Erwartungswerte für die Untergitter liefern dann nur für den Zeitentwicklungsoperator eine Fehlerreduktion, nicht aber für die Operatoren der räumlichen Linien.

Statt die räumlichen Operatoren auf die fixierten Zeitebenen zu legen, ist es sinnvoller, diese in die Mitte eines Untergitters mit der Zeitausdehnung $2a$ zu legen. Ein Beispiel eines resultierenden Loops mit den räumlichen Operatoren \mathbb{S}_1 ist auf der linken Seite von Abbildung (11) abgebildet. Nun sorgen die Updates der Untergitter auch für eine Reduktion des Fehlers der räumlichen Operatoren. Dies ist besonders nützlich für die Berechnung von angeregten Zuständen, bei denen die Operatoren durch Linearkombinationen der Operatoren \mathbb{S}_i erhalten werden. Eine ähnliche Form des Algorithmus verwendeten auch *Kratochvila* und *de Forcrand* bei Rechnungen zum String-Breaking mit Quarks in adjungierter Darstellung [38].

R	$ER(\mathbb{W}_1)/\%$		$ER(\mathbb{W}_2)/\%$		$ER(\mathbb{W}_3)/\%$	
	Neu	Alt	Neu	Alt	Neu	Alt
4	0.44	0.15	2.7	7.0	9.2	100
5	0.63	0.21	2.7	8.3	8.6	100
6	0.86	0.28	2.7	4.5	8.8	100
7	1.1	0.35	2.9	7.3	8.8	100
8	1.4	0.45	3.1	5.5	9.5	100
9	1.7	0.56	3.6	10	11	100
10	2.1	0.74	4.2	11	14	100
11	2.7	1.0	5.8	27	22	100
12	3.5	1.7	8.6	88	44	100

Tabelle (2): Der relative Fehler der Erwartungswerte der Wilson-Loops \mathbb{W}_n angegeben in Prozent, berechnet mit dem alten und dem neuen Algorithmus.

Während der ursprüngliche Algorithmus für $\beta = 5$ lediglich in der Lage war, ein Signal für Wilson-Loops $\mathbb{W}_3(R, T)$ mit Zeitausdehnung $T = 8$ und räumlicher Ausdehnung $R = 12$ zu liefern [25], ist es mit dieser Modifikation möglich, Signale bis zu einer Zeitausdehnung von $T = 12$ zu erhalten.

Ein direkter Vergleich der relativen Messfehler für die Erwartungswerte der Wilson-Loops in $SU(2)$ -Eichtheorie bei gleicher Rechenzeit für beide Methoden ist in Tabelle (2) angegeben. Die zugehörigen Simulationsparameter finden sich in der Tabelle auf der rechten Seite von Abbildung (11).

An den Werten erkennt man, dass der neue Algorithmus den Fehler des Grundzustandes nicht reduziert, bei den angeregten Zuständen jedoch für eine starke Fehlerreduktion sorgt.

Eine weitere Reduktion des Messfehlers liefern Multihit-Links [39],[4]. Diese können auf alle Links für die Zeittransporter und auf bestimmte Links der räumlichen Operatoren angewendet werden.

3.4.3 Untergitter-Operatoren für die verbesserte Methode

Die räumlichen Operatoren liegen auf der mittleren Zeitebene in einem Untergitter mit der Zeitausdehnung $t_s = 2a$. Der zugehörige Operator auf dem Untergitter setzt sich also zusammen aus dem räumlichen Operator und einem Zweilinkoperator. Als Operatoren für die Untergitter die räumlichen Operatoren enthalten benutzt man deshalb

$$\begin{aligned}
(\mathbb{R}_n)_{ab} &\equiv (\mathbb{Q}_n(R, t_0))_{ij} (\mathbb{T}_2(R, t_0))_{iajb} \\
(\mathbb{R}_n^*)_{ab} &\equiv (\mathbb{T}_2(R, t_0 + T - a))_{aibj} (\mathbb{Q}_n(R, t_0))_{ij},
\end{aligned} \tag{3.32}$$

wobei \mathbb{R}_n jeweils der Operator im untersten Untergitter des Wilson-Loops ist und \mathbb{R}_n^* der Operator im obersten.

Der restliche Wilson-Loop wird in $(T-2)/(t_s)$ Untergitter unterteilt, wobei t_s die Zeit-

ausdehnung der Untergitter ist¹⁰. Der Zeitentwicklungsoperator für das Untergitter s ist gegeben über

$$\mathbb{T}_s \equiv \mathbb{T}_2(R, t_{u,s}) \circ \mathbb{T}_2(R, t_{u,s} + a) \circ \cdots \circ \mathbb{T}_2(R, t_{u,s} + (t_s - 1)a), \quad (3.33)$$

wobei $t_{u,s} = t_0 + a + (s - 1)t_s$ die untere fixierte Zeitebene des Untergitters ist. Dabei dürfen Multihit-Links für alle Links der Operatoren \mathbb{T}_s verwendet werden. Bei den Operatoren \mathbb{R}_n muss man dabei vorsichtig sein. Plaketten die einen Multihit-Link enthalten dürfen nämlich keinen weiteren Multihit-Link des Operators enthalten, da in diesem Fall die zugehörige Integration nicht mehr möglich ist. In dieser Arbeit werden deshalb Multihit-Links für alle räumlichen Links in Richtung der räumlichen Achse des Wilson-Loops verwendet, da dies die Zahl der Multihit-Links bei Loops mit großem R maximiert.

¹⁰Hier wird nur der Fall betrachtet indem die Zeitausdehnung aller Untergitter mit Zeitentwicklungsoperatoren aus Gleichung (3.33) gleich ist. Im allgemeinen muss dies nicht der Fall sein.

IV Parameter der Monte-Carlo-Simulationen

Im Rahmen dieser Arbeit wurden numerische Monte-Carlo-Simulationen in dreidimensionaler $SU(2)$ -Gittereichtheorie durchgeführt. Benutzt wurde die übliche Wilson'sche Plakett-Wirkung (1.22) und die Feldkonfigurationen wurden mit einem verbesserten Heatbath-Algorithmus [34] generiert. Bei den Rechnungen wurden Wilson-Loops $\mathbb{W}_n(R, T)$ der räumlichen Ausdehnung R und der zeitlichen Ausdehnung T berechnet, wobei zur Fehlerreduktion die in den Kapiteln (3.3) und (3.4) diskutierte verbesserte Version des Lüscher-Weisz Algorithmus mit einer Mittelungsebene verwendet wurde.

Simuliert wurde mit zwei verschiedenen Kopplungen $\beta = 5$ und $\beta = 7.5$. Die verwendeten Gitter, sowie die zugehörigen physikalischen Skalen werden in Kapitel (4.1) diskutiert. In Kapitel (4.2) werden die Parameter des Lüscher-Weisz Algorithmus optimiert, die resultierenden Parameter der Gittersimulationen werden in Kapitel (4.3) angegeben.

4.1 Die Gitter und die zugehörigen Skalen

Der physikalische Abstand zwischen den Quarks, ab dem erwartet wird, dass die effektive Stringtheorie das Verhalten der Flussröhre beschreibt, liegt bei etwa 1 Fermi. Bei kleineren Abständen werden Abweichungen von der effektiven Theorie erwartet. Um zu untersuchen, in welchem Bereich die effektive Stringtheorie gültig wird, werden in dieser Arbeit Wilson-Loops mit einer physikalischen räumlichen Ausdehnung von etwa 0.5 bis 1.5 Fermi betrachtet.

Die Längeneinheiten auf dem Gitter werden durch den Sommer Parameter r_0 festgelegt, für den gilt $r_0 = 0.5 fm$ [40]. Es werden dabei die bereits bekannten Werte für $\beta = 5, 7.5$ [41] für dreidimensionale $SU(2)$ -Eichtheorie benutzt:

$$r_0(\beta = 5) = 3.9536(3) \quad \text{und} \quad r_0(\beta = 7.5) = 6.2875(10). \quad (4.1)$$

Für $\beta = 5$ werden also Wilson-Loops mit $R = 4 - 12$ berechnet, wobei Loops mit den Zeitausdehnungen $T = 4, 6, 8$ und 12 mit hinreichender Genauigkeit berechnet werden konnten. Die Wilson-Loops mit $R = 4 - 9$ wurden auf 24^3 -Gittern berechnet, während für $R = 10 - 12$ bei diesen Gittern verfälschende Effekte durch die endliche Ausdehnung des Gitters auftreten können. Um dies zu verhindern wurden die Wilson-Loops mit $R = 10 - 12$ auf 48^3 -Gittern berechnet.

Für $\beta = 7.5$ sind Wilson-Loops mit $R = 7 - 20$ relevant. Um äquivalente physikalische Zeitausdehnungen zu benutzen werden dabei Wilson-Loops mit $T = 6, 10, 14$ und 18 berechnet. Das Programm läuft optimal wenn eine ganzzahlige Anzahl von Wilson-Loops in zeitlicher Richtung auf das Gitter passen, was dazu führt, dass in diesem Fall vier unterschiedliche Gitter betrachtet werden, nämlich 36^3 für $T = 6$, 40^3 für $T = 10$,

Parameter:	$ER(\mathbb{W}_n)/\%$	
	n	$ts = 2$ $ts = 4$
$\beta = 7.5$ $T = 10$ $R = 8$	1	6.3 2.8
#meas: 100 Lattice: 40^3	2	50 12

Tabelle (3): Parameter und Resultate des Testlaufes für die Dicke der Untergitter der Zeittransporter. $ER(\mathbb{W}_n)$ ist der relative Fehler des Erwartungswertes des Wilson-Loops zugehörig zum Kanal n . Es wurden 6000 Updates der Untergitter mit den räumlichen Operatoren und 2000 Updates der Untergitter der Zeitentwicklungsoperatoren durchgeführt.

42^3 für $T = 14$ und 54^3 für $T = 18$. Dabei werden alle räumlichen Ausdehnungen auf denselben Gittern berechnet.

4.2 Optimieren der Parameter des LW-Algorithmus

4.2.1 Zeitliche Ausdehnung der Untergitter der Zeitentwicklungsoperatoren

Zunächst ist die optimale zeitliche Ausdehnung ts der Untergitter der Zeitentwicklungsoperatoren zu bestimmen. Die Zeitausdehnung der Untergitter mit den räumlichen Operatoren beträgt 2a.

Bei $\beta = 5$ sollen Wilson-Loops der zeitlichen Ausdehnungen $T = 4, 6, 8$ und 12 berechnet werden. In diesem Fall ist es sinnvoll $ts = 2$ zu benutzen, da andernfalls Probleme bei Wilson-Loops mit $T = 4$ und 8 auftreten.

Bei $\beta = 7.5$ soll die physikalische Distanz etwa gleich bleiben und somit Wilson-Loops mit $T = 6, 10, 14$ und 18 berechnet werden. In diesem Fall ist es möglich Untergitter mit $ts = 2$ oder $ts = 4$ zu benutzen¹¹. Eine kurze Rechnung mit den Parametern aus Tabelle (3) liefert die relativen Fehler $ER(\mathbb{W}_i)$ des ersten und zweiten Kanals mit $ts = 2$ und $ts = 4$. Aus den Werten aus Tabelle (3) geht hervor, dass der Fehler mit $ts = 4$ geringer ist als der mit $ts = 2$.

Wir verwenden also:

$$\beta = 5 : \quad ts = 2 \quad \text{und} \quad \beta = 7.5 : \quad ts = 4 \quad (4.2)$$

4.2.2 Zahl der Updates der Untergitter

Nun gilt es die Zahl der Untergitterupdates für die einzelnen Operatoren zu finden. Für Polyakov-Loop Korrelationsfunktionen und die zugehörigen Zeitentwicklungsoperatoren lässt sich eine Norm finden, deren Wert korreliert ist mit dem Abfallen des Fehlers der Polyakov-Loop-Korrelationsfunktion [37].

¹¹Bei $ts = 6$ könnten nur Loops der Größen $T = 8, 14, 20$ und 26 berechnet werden, deren Signal zu stark verrauscht ist.

u_2	#meas	$ER(\mathbb{W}_0)/\%$		$ER(\mathbb{W}_1)/\%$		$ER(\mathbb{W}_2)/\%$	
		$R = 4$	$R = 5$	$R = 4$	$R = 5$	$R = 4$	$R = 5$
10	123445	0.011	0.15	0.46	1	1	1
100	19593	0.0016	0.012	0.18	0.34	1	1
1000	2136	0.0025	0.0044	0.24	0.36	1	1
2000	1080	0.0036	0.0056	1	0.28	1	1

Tabelle (4): Der relative Fehler $ER(\mathbb{W}_n)$ in Prozent für verschiedene Werte für u_2 . Dabei wurde mit $\beta = 3$ auf einem 24^3 -Gitter mit $ts = 2$, $u_1 = 1$, $R = 4, 5$ und $T = 8$, bei einer Rechenzeit von ca. 48 Stunden simuliert.

Eine ähnliche Norm für die Zeitentwicklungsoperatoren von Wilson-Loops zu finden ist wesentlich schwieriger. Benutzt man die in [37] verwendete Norm als Messgröße, so zeigt diese ein qualitativ anderes Verhalten als der tatsächliche Messfehler des Wilson-Loops. Ein ähnliches Problem erhält man bei möglichen Normen für die räumlichen Operatoren, wie etwa deren Spur oder deren Determinante.

Betrachtet werden muss also der absolute Fehler des Wilson-Loops in Abhängigkeit von der Zahl der Updates der Untergitter mit Zeittransportern und mit räumlichen Linien. Diese beiden Zahlen werden von nun an in der Größe $iupd = u_1 : u_2$ zusammengefasst, wobei u_1 die Zahl der Updates für die Untergitter mit räumlichen Operatoren und u_2 die Zahl der Updates der Untergitter mit Zeitentwicklungsoperatoren ist. Diese Methode erfordert selbstverständlich wesentlich mehr Rechenleistung als eine Optimierung mittels einer entsprechenden Norm.

Bei der tatsächlichen Optimierung tritt außerdem ein weiteres Problem auf. Es stellt sich nämlich heraus, dass bei Wilson-Loops dieser Art der Effekt der festgehaltenen Zeitebenen recht groß ist, d.h. die Erwartungswerte liefern erst nach etwa 1000 Gesamtmesswerten zuverlässige Resultate. Dies ist durch den in Kapitel (3.3.2) beschriebenen Effekt zu erklären, dass durch die festgehaltenen Zeitebenen nicht das gesamte Gleichgewichtsensemble simuliert wird. Dies macht eine normale Optimierung für $\beta = 5$ oder $\beta = 7.5$ enorm zeitaufwendig, unter Umständen sogar zeitaufwendiger als die gesamten Messungen. Deshalb wird die Abhängigkeit des Messfehlers von den Parametern bei $\beta = 3$ betrachtet. $\beta = 3$ weist im Gegensatz zu $\beta = 5$ und 7.5 noch viele Eigenschaften der starken Kopplung auf und es ist deshalb zu erwarten, dass in diesem Fall wesentlich weniger Updates für die Untergitter notwendig sind.

Zunächst wird der Effekt von u_2 untersucht und deshalb $u_1 = 1$ gesetzt. Dabei wurden alle Rechnungen in gleicher Rechenzeit von ungefähr 48 Stunden durchgeführt. Die relativen Unsicherheiten der Erwartungswerte sind in Tabelle (4) angegeben. Für $\beta = 3$ und einen Loop mit den Ausdehnungen $T = 8$ und $R = 4, 5$ resultiert daraus $100 \lesssim u_2 < 1000$ als optimaler Wert.

Nun wird der Effekt von u_1 untersucht. Dazu setzt man $u_2 = 100$ und variiert u_1 bei wiederum gleicher Simulationszeit von ca. 48 Stunden. Die Resultate für die relativen Fehler der Wilson-Loops sind in Tabelle (5) angegeben. Eine bemerkenswerte Tatsache ist das Signal für die Wilson-Loops \mathbb{W}_2 , das mit $u_1 = 1$ nicht zu sehen war.

u_1	#meas	$ER(\mathbb{W}_0)/\%$		$ER(\mathbb{W}_1)/\%$		$ER(\mathbb{W}_2)/\%$	
		$R = 4$	$R = 5$	$R = 4$	$R = 5$	$R = 4$	$R = 5$
10	10625	0.00083	0.0031	0.042	0.39	1	1
100	6293	0.00090	0.0024	0.016	0.079	0.32	0.52
1000	2111	0.0015	0.0040	0.024	0.15	0.72	1
2000	1111	0.0021	0.0055	0.032	0.16	0.73	1

Tabelle (5): Dieselben Werte wie in Tabelle (3) nur mit variierendem u_1 und $u_2 = 100$.

Wiederum scheint ein Wert von $100 \lesssim u_1 < 1000$ optimal zu sein.

Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die Tatsache, dass sich der optimale Wert für u_2 mit steigendem T etwa proportional zu diesem erhöht [37], während T auf den optimalen Wert für u_1 einen weit geringeren Einfluss hat.

Mit diesen Resultaten wird nun das Schema für die Untergitterupdates gebildet, das im folgenden Kapitel angegeben ist. Dabei bleibt anzumerken, dass die dort gewählten Werte wesentlich höher sind als die für $\beta = 3$ gefundenen. Dies hat verschiedene Gründe. Zunächst liegt $\beta = 3$ im Gegensatz zu $\beta = 5$ und 7.5 in einem Bereich der sich qualitativ anders verhält. Außerdem soll ein Wert für Wilson-Loops \mathbb{W}_3 erhalten werden, die wesentlich mehr Untergitter-Updates benötigen. Ein weiterer Grund sind die feineren Gitter und größeren Loops.

4.3 Simulationsparameter

β	R	T	ts	Lattice	$iupd$	#meas	
5	4 – 9	4	2	24^3	12000 : 1000	2000	
		6			12000 : 1500	2000	
		8			12000 : 2000	2000	
		12			12000 : 2500	2000	
	10 – 12	4	2	48^3	24000 : 1000	2000	
		6			24000 : 2000	2000	
		8			24000 : 6000	2000	
		12			24000 : 12000	2000	
7.5	7 – 20	6	4	36^3	36000 : 1500	4400	
		10			40^3	36000 : 3000	4400
		14			42^3	36000 : 9000	4400
		18			54^3	36000 : 18000	4400

V Resultate der Simulationen

Nun werden die Resultate der Simulationen mit den Parametern aus Kapitel (4.3) diskutiert, die zum Teil bereits in [42] veröffentlicht wurden.

In Kapitel (5.1) werden die Ergebnisse für den Grundzustand also das statische $q\bar{q}$ -Potential diskutiert. Dieses ist bereits in verschiedensten Simulationen untersucht worden und die hier erhaltenen Ergebnisse werden mit diesen Simulationen verglichen. In Kapitel (5.2) werden die Ergebnisse für die angeregten Zustände dargestellt und ebenfalls mit ähnlichen Simulationen verglichen. Dabei bleibt zu bemerken, dass Resultate mit Wilson-Loops der hier verwendeten zeitlichen Ausdehnungen bisher nicht existierten. In Kapitel (5.3) werden die Daten mit weiteren Ergebnissen von Gittersimulationen mit offenen und geschlossenen Strings in verschiedenen Eichtheorien verglichen.

5.1 Der Grundzustand

Eine Reihe von Studien beschäftigten sich mit den Eigenschaften des Grundzustandes [43], so dass dessen Verhalten recht bekannt ist. Da es in dieser Arbeit primär darum geht die angeregten Zustände mit den Vorhersagen der effektiven Stringtheorien zu vergleichen, wird das Potential der Nambu-Stringtheorie (2.29) benutzt, um die freien Parameter, die String-Spannung σ und ein Gitterartefakt in Form einer additiven Konstanten V_0 , zu bestimmen. Verwendet wird ein Fit der Form

$$E_0(R) = \sigma R \sqrt{1 - \frac{\pi}{12 \sigma R^2}} + V_0 \quad (5.1)$$

mit den Fitparametern σ und V_0 . Die Resultate aus den Gittersimulationen sind in Anhang (C.2) in Tabelle (9) angegeben und die resultierenden Fitparameter in Tabelle (7). Die String-Spannung σ stimmt im Falle von $\beta = 5$ gut mit dem Wert der Polyakov-Loop-Korrelationsfunktionen überein. Die Werte stimmen im Rahmen der Fehlergrenzen ebenfalls mit den Werten aus der sehr genauen Studie des Kontinuumslimites der Parameter des Grundzustandes [41] überein, wobei die Messfehler hier größer sind.

Um die Messwerte zwischen $\beta = 5$ und 7.5 direkt vergleichen zu können ist es sinnvoll,

$\beta = 5$		$\beta = 7.5$	
σ	V_0	σ	V_0
0.0973(3)	0.216(2)	0.03852(2)	0.1745(2)

Tabelle (7): Resultate für die freien Parameter.

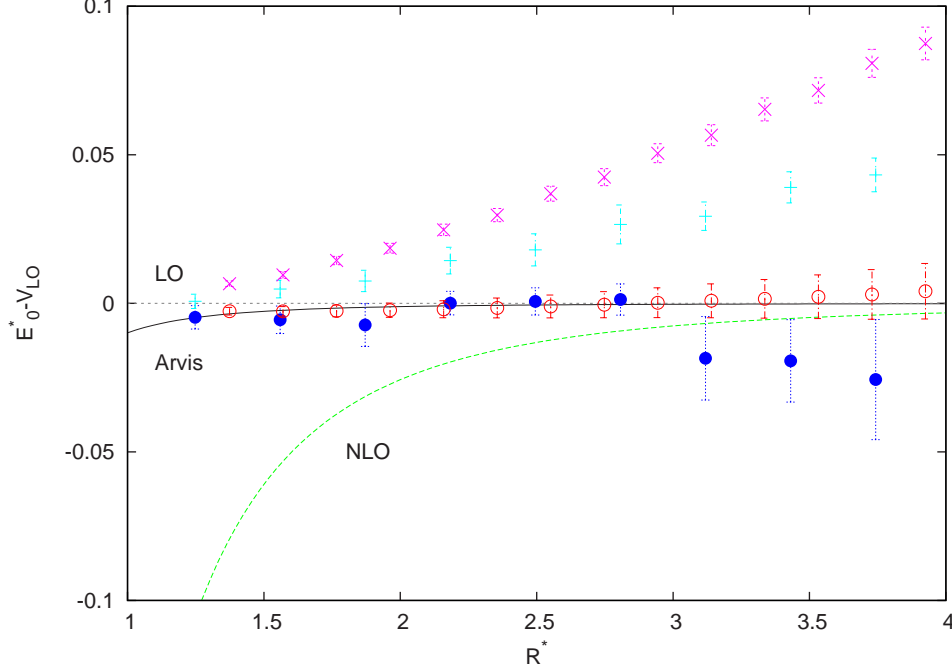


Abbildung (12): Plot der Messergebnisse für den Grundzustand normiert auf $V_{LO} = 0$. \bullet sind die korrigierten Energien $E_0^*(R^*)$ bei $\beta = 5$ und $+$ die zugehörigen Naiven, \circ die korrigierten Energien für $\beta = 7.5$ und \times die Naiven.

zu dimensionslosen Einheiten überzugehen mit

$$E_n^* = E_n / \sqrt{\sigma} \quad \text{und} \quad R^* = \sqrt{\sigma} R. \quad (5.2)$$

Das statische Potential in Nambu-Stringtheorie lautet dann nach Gleichung (2.29)

$$E_0^* \equiv V^*(R^*) = R^* \sqrt{1 - \frac{\pi}{12(R^*)^2}}. \quad (5.3)$$

Die kritische Distanz bei der das Potential imaginär wird, liegt in dieser Skala bei $R_C^* = 0.512$, also weit unterhalb der hier betrachteten Werte von R^* .

In Anbetracht der Resultate aus den Kapiteln (2.4) und (2.5), nach denen die Energiewerte bis zu $\mathcal{O}(1/R^3)$ in Nambu-, Polchinski-Strominger- und Lüscher-Weisz-Stringtheorie übereinstimmen, wird zudem das Potential in führender Ordnung in $1/R^*$, $V_{LO}^*(R^*)$ und das Potential in nächst höherer Ordnung $V_{NLO}^*(R^*)$ definiert über die Entwicklung der Wurzel aus (5.3) in $1/(R^*)^2$:

$$V_{LO}^*(R^*) \equiv R^* - \frac{\pi}{24} \frac{1}{R^*} \quad (5.4)$$

$$V_{NLO}^*(R^*) \equiv R^* - \frac{\pi}{24} \frac{1}{R^*} - \frac{\pi^2}{1152} \frac{1}{(R^*)^3} \quad (5.5)$$

Diese beiden Potentiale sind für die drei effektiven Stringtheorien aus Kapitel (II) gleichermaßen gültig.

In Abbildung (12) sind die Messergebnisse für den Grundzustand normiert auf die Kurve (5.4) gegen die Kurven (5.3) und (5.5) aufgetragen. Der Fehler, der bei der Skalierung mit den fehlerbehafteten Größen aus Tabelle (7) auftritt, wurde bei den Fehlerbalken berücksichtigt. Die oberen Punkte sind die naiven Messwerte und die unteren die zugehörigen durch den Fit der Form (3.19) korrigierten Werte.

Für den Grundzustand liegen die Arvis-Kurve und die LO-Kurve bei $R^* = 1.5$ bereits so dicht beieinander, dass beide die Daten im Rahmen der Fehlergrenzen beschreiben. Die NLO-Kurve erreicht die Daten für $\beta = 7.5$ bei etwa $R^* = 3.34$, oder $R/r_0 = 2.70$. Ein direkter Vergleich mit Werten aus [41] und [29] ist in diesem Fall schwierig, da die dort betrachtete Observable $c(R) \equiv \frac{R^3}{2} \frac{d^2V(R)}{dR^2}$, die für $R \rightarrow \infty$ in den Lüscher-Term $c = -\frac{\pi}{24}$ übergehen sollte, hier nicht betrachtet wird. In [41] erreicht $c(R)$ bei dreidimensionaler $SU(2)$ -Eichtheorie die Arvis-Kurve bei etwa $R/r_0 \approx 2.75$, wobei hier die Daten der Arvis-Kurve folgen und nicht von dieser abweichen. Ein möglicher Grund für diese Tatsache ist der verwendete Fit für den Grundzustand. Benutzt man für $\beta = 5$ allerdings die nicht von einem derartigen Fit abhängigen Methode aus [41] zur Berechnung der String-Spannung, so ergibt sich $\sigma = 0.09729(2)$. Die beiden String-Spannungen σ stimmen im Rahmen der Fehlergrenzen überein und das qualitative Verhalten der Fits wird dadurch nicht geändert.

Für $SU(3)$ -Eichtheorie mit $d = 3$, die in [29] betrachtet wird, erreicht $c(R)$ die Arvis-Kurve bei etwa $R/r_0 \approx 1.8$. Vergleichbare Resultate findet man auch für $d = 4$ [29],[44]. Gerechnet wurde dort allerdings auf einem sehr groben Gitter, wobei noch nicht von einem Kontinuumsverhalten ausgegangen werden kann.

5.2 Angeregte Zustände

5.2.1 Die totalen Energiewerte

Die Resultate der Gittersimulationen für die totalen Energiewerte sind ebenfalls wie die Werte für den Grundzustand in Tabelle (9) angegeben. Um direkt die Werte für $\beta = 5$ und $\beta = 7.5$ vergleichen zu können, werden die Werte wieder nach Gleichung (5.2) skaliert. Die zu den Energien $E_n(R)$ gehörigen Arvis-Kurven lauten nach (2.29):

$$E_n^*(R^*) = R^* \sqrt{1 + \frac{2\pi}{(R^*)^2} \left(n - \frac{1}{24}\right)} \quad (5.6)$$

Die LO-Kurven und NLO-Kurven werden analog zu (5.4) und (5.5) definiert als:

$$E_{LO,n}^*(R^*) \equiv R^* + \pi \left(n - \frac{1}{24}\right) \frac{1}{R^*} \quad (5.7)$$

$$E_{NLO,n}^*(R^*) \equiv R^* + \pi \left(n - \frac{1}{24}\right) \frac{1}{R^*} - \frac{\pi^2}{2} \left(n - \frac{1}{24}\right)^2 \frac{1}{(R^*)^3} \quad (5.8)$$

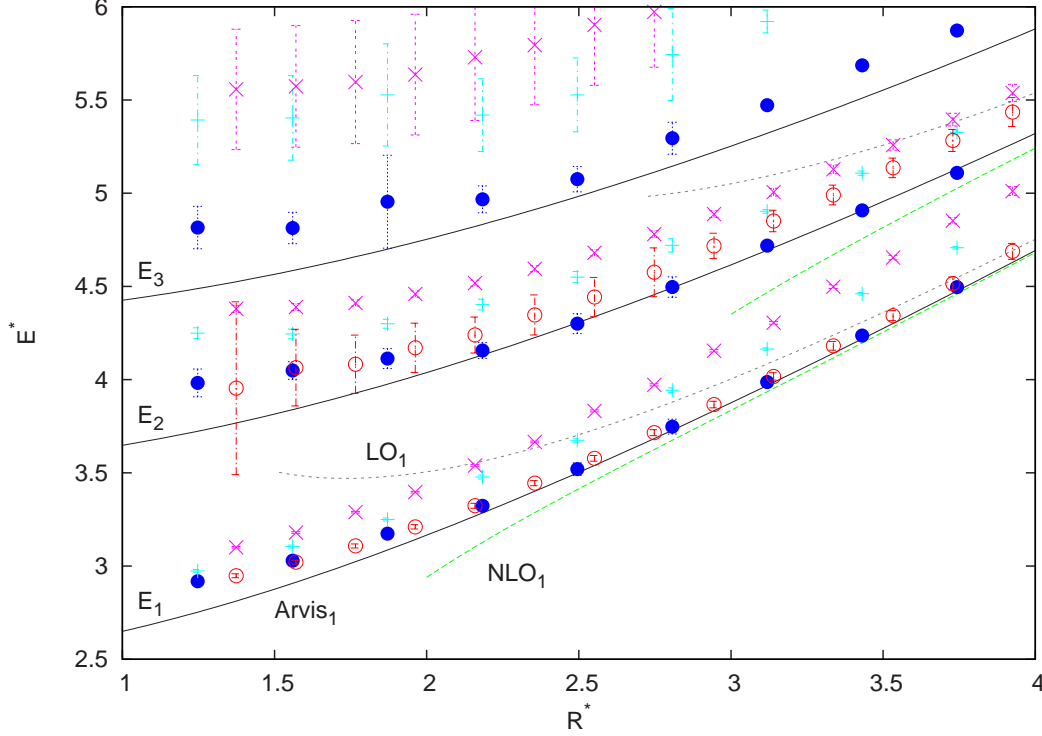


Abbildung (13): Plot der angeregten Energiezustände. \bullet sind jeweils die korrigierten Energien $E_0^*(R^*)$ bei $\beta = 5$ und $+$ die Naiven. \circ sind die korrigierten Energien für $\beta = 7.5$ und \times die Naiven. Die schwarzen durchgezogenen Kurven entsprechen (5.6), die grauen gestrichelten (5.7) und die grünen gestrichelten (5.8).

Das zusätzlich auftretende Gitterartefakt V_0 ist für alle Energieniveaus gleich und wurde durch den Fit für den Grundzustand bestimmt. V_0 wird nun direkt bei den Datenpunkten berücksichtigt und taucht deshalb nicht mehr in den Kurven auf. Die Resultate der Gittersimulationen sind in Abbildung (13) gegen die zugehörigen Kurven (5.6) bis (5.8) aufgetragen. Die Notwendigkeit, die Korrekturen der höheren Zustände zu berücksichtigen, wird daran deutlich, dass die unkorrigierten Werte des ersten angeregten Zustandes die LO-Kurve relativ früh kreuzen, während die korrigierten Messwerte sich deutlich der Arvis-Kurve annähern. Dieser Effekt wurde bereits in [25] ausführlich diskutiert. Das stetige Anwachsen der Korrekturen lässt sich darauf zurückführen, dass die Energiedifferenzen $\Delta E_{n,1}$ geringer werden mit steigendem R und somit $e^{-\Delta E_{n,1} T} \rightarrow 1$ strebt. Außerdem tragen durch das Abnehmen der Energieunterschiede für $R \rightarrow \infty$ immer mehr höhere angeregte Zustände zu den Korrekturen bei, die somit anwachsen. Die Größenordnung der Korrekturen scheint außerdem bei den höheren Zuständen zuzunehmen. Die korrigierten Energien E_1^* erreichen für $\beta = 5$ und $\beta = 7.5$ die Arvis-Kurve bei $R^* \approx 2.9$, oder $R/r_0 \approx 2.4$, also bei einem ähnlichen Wert, bei dem $c(R)$ in [41] die Arvis-Kurve erreicht. Dies entspricht etwa dem Bereich,

ab dem zu erwarten ist, dass das effektive Modell gute Vorhersagen liefert.

Es lässt sich weiterhin sagen, dass die Nambu Stringtheorie die Daten am ehesten beschreibt, obwohl sich die Daten der angeregten Zustände mit $n > 0$ für $\beta = 7.5$ für große R^* wieder von dieser Kurve zu entfernen scheinen und sich stattdessen der LO-Kurve annähern. Bislang ist allerdings noch nicht sicher, ob dieser Effekt physikalisch oder auf einen systematischen Fehler zurückzuführen ist. Die NLO-Kurve liegt unterhalb der jeweiligen Arvis-Kurve und ist deutlich zu niedrig um die Daten korrekt zu beschreiben.

5.2.2 Energiedifferenzen

Die Messwerte der Energiedifferenzen zwischen den Energiezuständen haben, wie bereits beschrieben, bessere Eigenschaften als die Gesamtenergien. In diesem Abschnitt werden diese deshalb separat ausgewertet. Die resultierenden Messwerte für die Energiedifferenzen $\Delta E_{nm} \equiv E_n - E_m$ sind in Tabelle (10) in Anhang (C.2) angegeben. Die mit den Werten zu vergleichenden Kurven sind hier definiert als:

$$\Delta E_{nm}^* = R^* \left[\sqrt{1 + \frac{2\pi}{(R^*)^2} \left(n - \frac{1}{24} \right)} - \sqrt{1 + \frac{2\pi}{(R^*)^2} \left(m - \frac{1}{24} \right)} \right] \quad (5.9)$$

$$\Delta E_{LO,nm}^* \equiv \pi (n - m) \frac{1}{R^*} \quad (5.10)$$

$$\Delta E_{NLO,nm}^* \equiv \pi (n - m) \frac{1}{R^*} + \frac{\pi^2}{2} \left[m^2 - n^2 + \frac{1}{12} (n - m) \right] \frac{1}{(R^*)^3} \quad (5.11)$$

Die entsprechend skalierten Daten der Energiedifferenzen ΔE_{10}^* und ΔE_{20}^* sind in Abbildung (14) gegen die jeweiligen Kurven aufgetragen und die Energiedifferenzen ΔE_{21}^* und ΔE_{30}^* in Abbildung (15). Für ΔE_{20}^* konnten die korrigierten Werte dabei nur aus einem Fit bezüglich Wilson-Loops mit den drei niedrigsten Zeitausdehnungen berechnet werden. Für ΔE_{21}^* funktionierte auch diese Methode nicht zuverlässig, so dass die hier gezeigten Daten der Differenz der korrigierten Energien entsprechen. Bei ΔE_{30}^* konnten selbst diese Differenzen mit einer entsprechenden Genauigkeit nur für $\beta = 5$ bestimmt werden.

Die naiven Energiedifferenzen nähern sich der LO-Kurve an, also den Vorhersagen eines freien bosonischen Strings, und kreuzen im Falle der Energiedifferenz ΔE_{10}^* die Kurve sogar. Ein analoges Verhalten wurde auch in einer Studie von *Juge, Kuti* und *Morningstar* [45] beobachtet. Dort wurden stark anisotrope Gitter und eine Reihe von Gitteroperatoren verwendet um die angeregten Zustände zu extrahieren. Dies erscheint merkwürdig, da die Daten für größere Abstände näher an die LO-Kurve rücken sollten, da die $1/R^3$ -Korrekturterme kleiner werden. Die korrigierten Werte zeigen tatsächlich ein qualitativ unterschiedliches Verhalten, sie nähern sich mit steigendem R der Vorhersage der Nambu Stringtheorie an.

In einem intermediären Bereich existieren bereits Daten für die Energiedifferenz ΔE_{10}^* aus einer älteren Arbeit [46] mit $\beta = 7.5$ und 10, mit denen die hier erhaltenen Werte kurz verglichen werden sollen. Die Werte sind zusammen mit den hier erhaltenen in

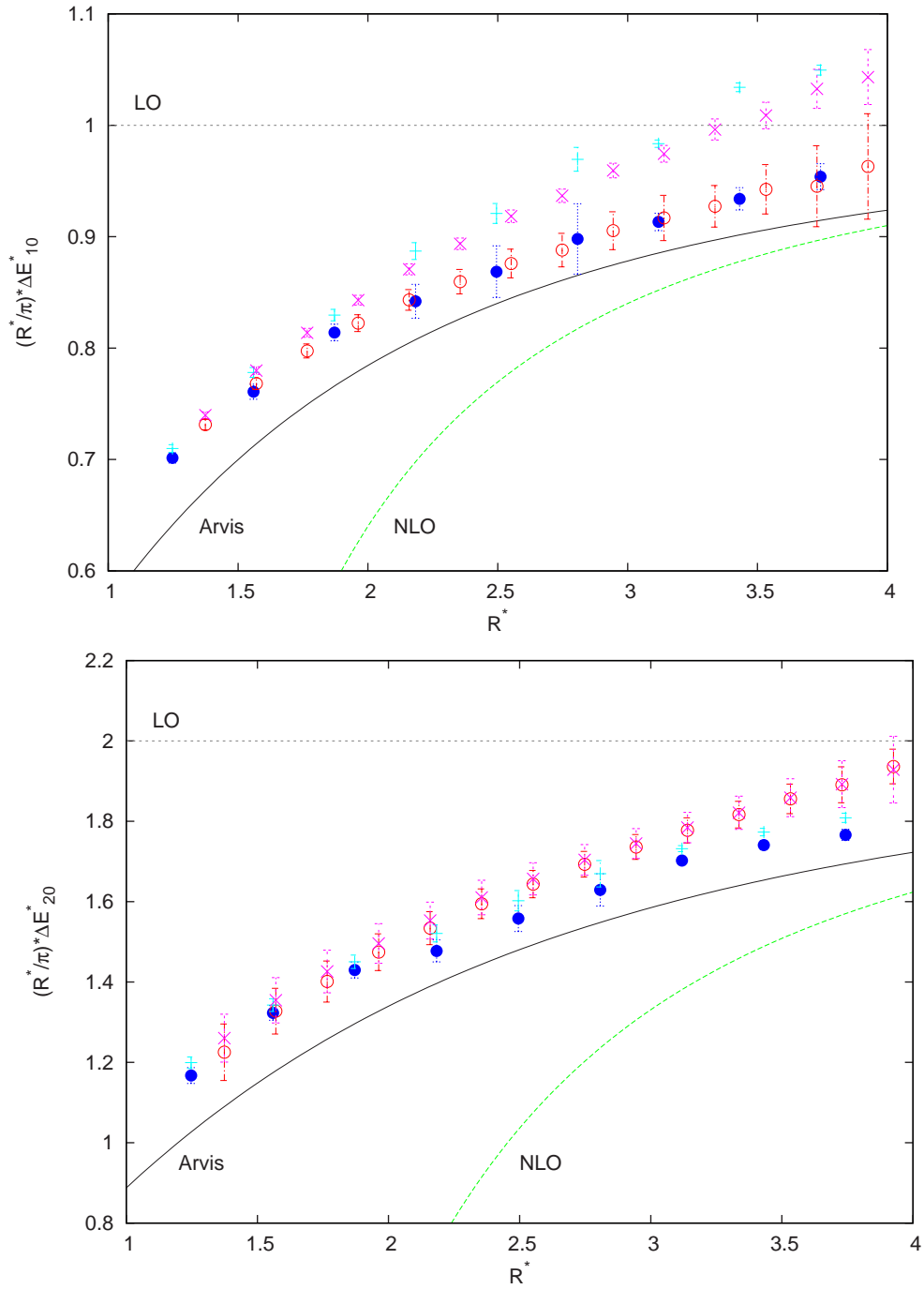


Abbildung (14): Die Messwerte der Energiedifferenzen $\frac{R^*}{\pi} \Delta E_{10}^*$ (oben) und $\frac{R^*}{\pi} \Delta E_{20}^*$ (unten). Die Zuordnung der Symbole und Kurven entspricht Abbildung (13).

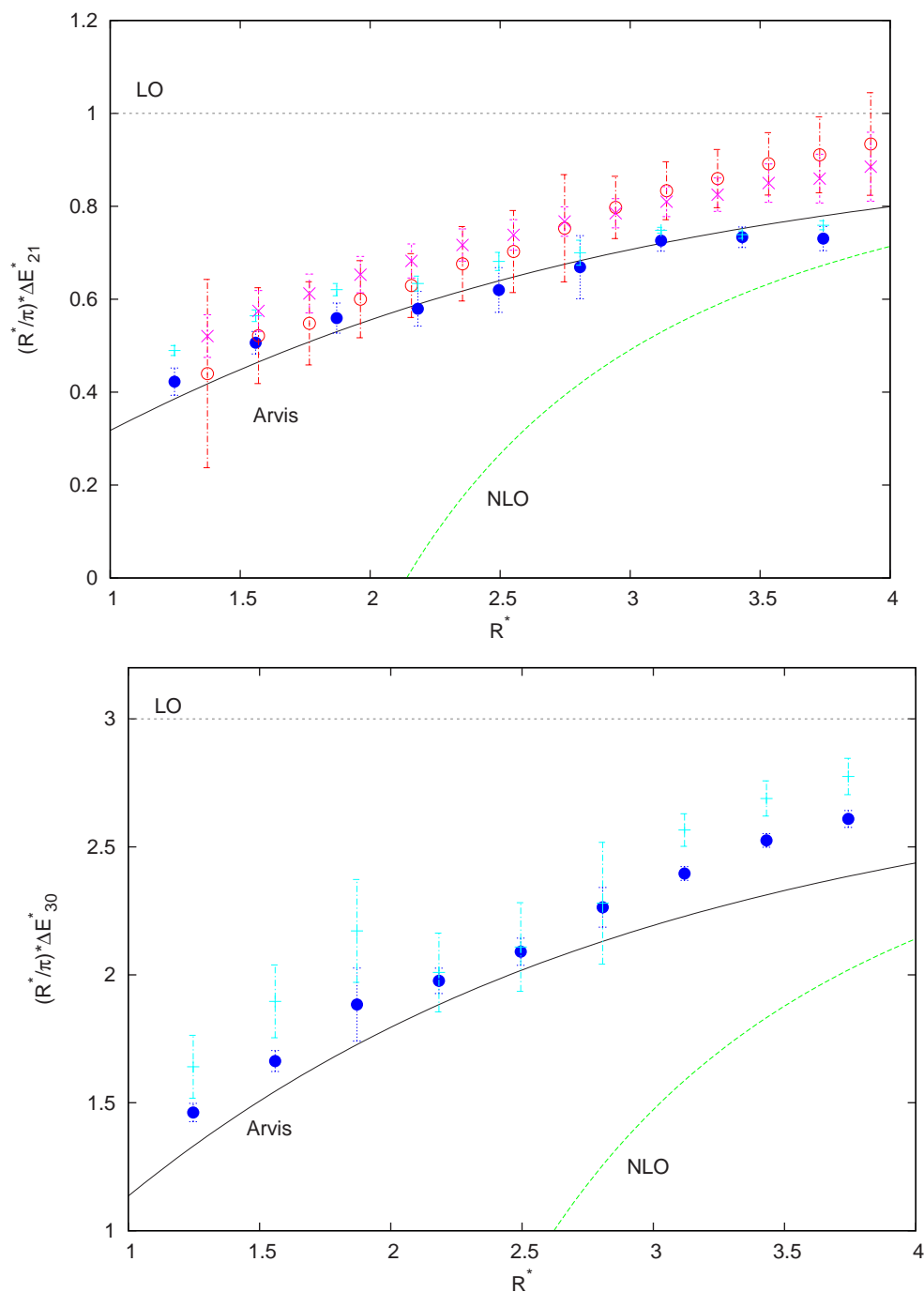


Abbildung (15): Die Messwerte der Energiedifferenz $\frac{R^*}{\pi} \Delta E_{21}^*$ (oben) und $\frac{R^*}{\pi} \Delta E_{30}^*$ (unten). Die Zuordnung der Symbole und Kurven entspricht Abbildung (13).

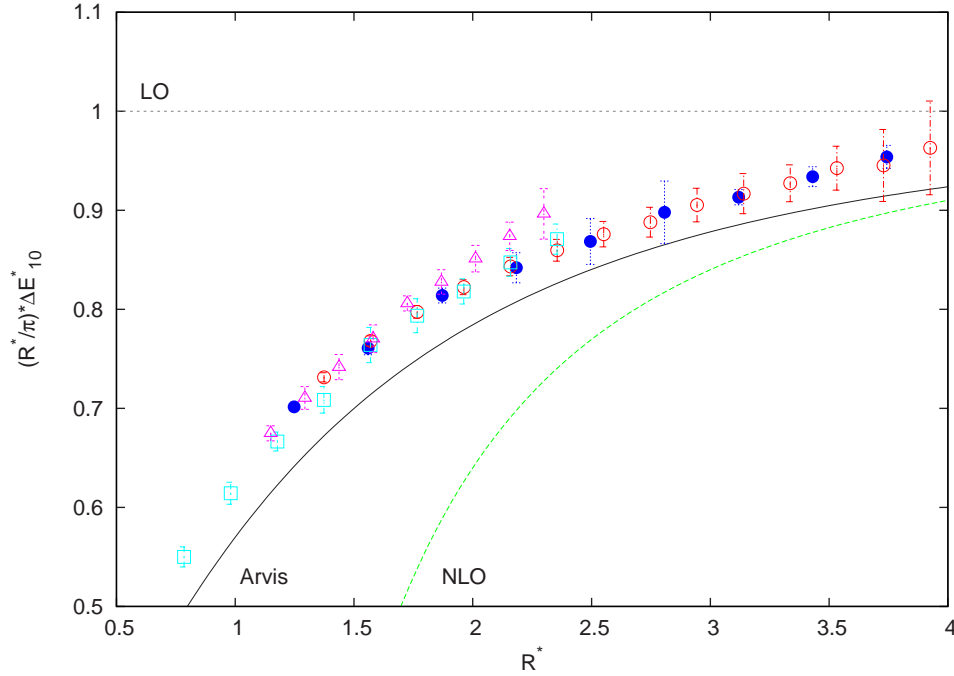


Abbildung (16): Vergleich zwischen den Daten [46] für ΔE_{10} und den im Rahmen dieser Arbeit erhaltenen Daten. \bullet sind die hier erhaltenen Daten für $\beta = 5$ und \circ für $\beta = 7.5$. \square sind die Daten für $\beta = 7.5$ aus [46] und \triangle für $\beta = 10$.

Abbildung (16) abgebildet. Man erkennt deutlich die Übereinstimmung der Werte für $\beta = 7.5$. An dem Vergleich erkennt man auch klar den Vorteil der neuen Version des Lüscher-Weisz-Algorithmus. Während für kleinere R^* -Werte die Daten für $\beta = 7.5$ aufeinander liegen, scheinen die alten Daten mit steigendem R^* von der Arvis-Kurve abzuweichen. Bei den neueren zuverlässigeren Daten ist dieser Effekt nicht mehr zu sehen. Die Daten folgen der Arvis-Kurve bis zu einem Wert von $R^* = 4$. Wie man an den alten Daten erkennt, ergibt sich wahrscheinlich für feinere Gitter ein Trend weg von der Arvis-Linie in Richtung der LO-Kurve.

5.3 Vergleich mit ähnlichen Simulationen

Hier werden die in (5.2) erhaltenen Ergebnisse mit den Resultaten aus Gittersimulationen anderer Eichtheorien verglichen, sowie mit Gittersimulationen, die das Spektrum von geschlossenen Strings, sogenannten Toleronen betrachten.

5.3.1 Offene Strings

Im Falle des Eichsektors der QCD, also in vierdimensionaler $SU(3)$ -Eichtheorie, wurden die angeregten Zustände ebenfalls in [45] berechnet. In vier Dimensionen ist eine Klassifikation der Strinzustände nur nach (C, P) und der Energiequantenzahl des jeweiligen Niveaus nicht mehr ausreichend um selbst die Grundzustände in den (C, P) -Kanälen zu bestimmen. Daher muss zusätzlich der zugehörige Drehimpuls bezüglich der Stringachse als Quantenzahl zur Klassifizierung verwendet werden. Die resultierenden Zustände weisen in Gittersimulationen eine komplizierte Feinstruktur auf. Allgemein zeigt sich qualitativ jedoch dasselbe Verhalten wie bei den Daten für die $SU(2)$ -Eichtheorie in drei Dimensionen.

Die Studie [45] beschäftigt sich ebenfalls mit dreidimensionaler $U(1)$ -Eichtheorie, für die analoge Resultate wie bei der $SU(2)$ -Eichtheorie in drei Dimensionen gefunden wurden.

Resultate in dreidimensionaler $Z(2)$ -Eichtheorie sind in [12] und [14], sowie in [48] angegeben. Das Verhalten entspricht in diesem Fall ebenfalls dem Verhalten in dreidimensionaler $SU(2)$ -Eichtheorie und zeigt zudem ein gutes Skalenverhalten für unterschiedliche Kopplungen.

Die Resultate für verschiedene Eichtheorien implizieren, dass die bosonische Stringtheorie ein guter Kandidat ist um die chromoelektrische Flussröhre zu beschreiben. Dabei scheint die volle Nambu Stringtheorie bessere Vorhersagen zu liefern als die Approximation in führender Ordnung. Ausgeschlossen werden kann diese aufgrund der Daten aber nicht, vor allem, da sich diese im Kontinuumslimit anscheinend von der Nambu-Kurve fortbewegen. Insgesamt sieht man, dass die Daten bezüglich der jeweiligen Flussröhre nicht, bzw. kaum, von der verwendeten Eichtheorie abzuhängen scheinen.

5.3.2 Geschlossene Strings – Toleronen

Neuere Studien beschäftigen sich mit geschlossenen Flussröhren, sogenannten Toleronen, indem sie Polyakov-Loop-Korrelatoren betrachten, die sich um kompaktifizierte räumliche Dimensionen winden. Durch verschiedene Operatoren ist es dann wiederum möglich, die angeregten Zustände zu betrachten.

Erste Studien zu Toleronen wurden in vierdimensionaler $Z(2)$ -Eichtheorie von *Kuti u.A.* [49] durchgeführt und nochmals in [14] diskutiert. Die dort erhaltenen Werte zeigen eher das Verhalten eines freien bosonischen Strings, als das Verhalten der Nambu-Stringtheorie.

Für dreidimensionale $SU(3)$ und $SU(6)$ wurde das Toleron-Spektrum von *Teper u.A.* [50] mit ähnlichen Methoden vermessen. Die dort erhaltenen Resultate weisen eine deutliche Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Nambu-Stringtheorie auf, wobei sich die Daten anders als hier näher an der NLO-Kurve als an der LO-Kurve liegen. Die Resultate für geschlossene Strings stimmen in etwa überein mit den hier diskutierten Resultaten für offene Strings. Nach [50] erreichen die Daten für geschlossene Strings die Arvis-Kurve bereits bei $R^* = 2$, ein Verhalten welches hier nicht beobachtet werden konnte. Unklar ist in beiden Fällen noch der Kontinuumslimites.

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Vorhersagen von effektiven Stringtheorien für das Potential eines statischen Quark-Antiquark Paares betrachtet und mit Simulationen der dreidimensionalen $SU(2)$ -Eichtheorie verglichen.

Im ersten Kapitel wurde gezeigt, wie sich Confinement im Rahmen von nichtabelschen Eichtheorien mithilfe von Flussröhren beschreiben lässt und im Grenzfall großer Abstände R der Anschluß an eine Beschreibung durch effektive Stringtheorien hergestellt. Außerdem wurde der Wilson-Loop als Operator eingeführt, um die angeregten Zustände auf dem Gitter untersuchen zu können.

Im zweiten Kapitel wurden die Resultate der effektiven Stringtheorien diskutiert. Zunächst wurde die Nambu-Stringtheorie dargestellt, die eine geschlossene Lösung für die Energiezustände der Flussröhre liefert. Allerdings tritt bei der Quantisierung der transversalen Schwingungen die Weyl-Anomalie auf, die eine konsistente Quantisierung in vier Dimensionen verhindert und somit die Nambu-Stringtheorie als mathematisch konsistente effektive Stringtheorie für die Flussröhre ausschließt.

Als nächstes wurde die effektive Stringtheorie von *Lüscher* und *Weisz* diskutiert, bei der bis zu $\mathcal{O}(1/R^3)$ in d -Dimensionen eine unbestimmte Kopplungskonstante auftritt. In drei Dimensionen wird diese Kopplungskonstante allerdings durch eine algebraische Gleichung, die aus der Dualität zwischen offenen und geschlossenen Strings resultiert, eliminiert, so dass sich bis zu $\mathcal{O}(1/R^3)$ dasselbe Spektrum wie bei der Nambu-Stringtheorie ergibt. Die effektive Stringtheorie von *Polchinski* und *Strominger*, die aus allen Termen besteht, welche die Weyl-Anomalie vermeiden, liefert ebenfalls dasselbe Spektrum bis zu $\mathcal{O}(1/R^3)$. Die dabei auftretende Kopplungskonstante wurde durch die Forderung nach Lorentz-Invarianz fixiert.

Im dritten Kapitel wurden die Grundlagen der Gittersimulationen dargestellt. Insbesondere wurde gezeigt, wie man mithilfe bestimmter Operatoren und einer Korrelationsmatrix die angeregten Zustände auf dem Gitter untersuchen kann. Zusätzlich wurde der Lüscher-Weisz-Algorithmus diskutiert und eine verbesserte, speziell auf die Operatoren für angeregten Zustände zugeschnittene, Version des Algorithmus präsentiert.

In den Kapiteln Vier und Fünf wurden dann die Resultate aus den Gittersimulationen in dreidimensionaler $SU(2)$ -Eichtheorie präsentiert und mit den theoretischen Vorhersagen des zweiten Kapitels verglichen.

Schlussfolgerungen

Ziel dieser Arbeit war es, mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen, die Vorhersagen effektiver Stringtheorien bezüglich angeregter Zustände von Flussröhren mit den Resultaten aus der reinen Eichtheorie zu vergleichen. Insbesondere ist interessant, bei

welchem Abstand R zwischen den statischen Quarks Aussagen über das Verhalten der QCD mit den effektiven Stringtheorien gemacht werden können.

Die Resultate für $\beta = 5$ und $\beta = 7.5$ zeigen in allen Bereichen eine erstaunlich gute Übereinstimmung mit der Nambu-Stringtheorie. Die Daten des ersten angeregten Zustandes erreichen die zugehörige Kurve bei etwa $R/r_0 \approx 2.4$ oder $R \approx 1.2\text{fm}$, während die Daten des Grundzustandes im Rahmen der Fehlergrenzen mit den Vorhersagen der Nambu-Stringtheorie übereinstimmen. Die Kurven in führender Ordnung in $1/R$ sowie die Kurven in $\mathcal{O}(1/R^3)$ stimmen nicht mit den Daten überein und beschreiben die Daten erst bei sehr großen Abständen R , bei denen die Korrekturen der Nambu-Stringtheorie sehr klein werden.

Bei dieser Arbeit gab es zwei wesentliche Ziele:

Zum einen sollte eine verbesserte Fehlerreduktion mithilfe der neuen Version des Lüscher-Weisz-Algorithmus erzielt werden. Die Fehlerreduktion mit der neuen Methode wurde in Kapitel (3.4.2) diskutiert und konnte auch anhand des Vergleiches der neuen Daten mit den älteren Daten [46] gesehen werden. Zum anderen sollten die angeregten Zustände des statischen $q\bar{q}$ -Potentials betrachtet werden, was ausführlich in Kapitel (V) geschah. Beide Ziele wurden also im Rahmen dieser Arbeit erreicht.

Ausblick

Die bisherigen Simulationen sind nicht ausreichend um bereits eine Kontinuumsextrapolation zu erlauben. Zu diesem Zweck sind weitere Simulationen auf feineren Gittern notwendig. Diese Simulationen werden derzeit durchgeführt, so dass die Resultate hoffentlich bald vorliegen werden.

Ein Problem stellt der dritte angeregte Zustand dar, für den bereits bei $\beta = 7.5$ kein zuverlässiger Wert mehr berechnet werden konnte. Es mag sein, dass Operatoren mit einem größeren Überlapp zu diesem Zustand benötigt werden. Untersuchungen mit anderen Operatoren sind durchaus vorstellbar und über diese könnte man unter Umständen auch weitere angeregte Zustände untersuchen. Unklarheit besteht derzeit auch noch über die korrigierten Werte des zweiten angeregten Zustandes. Sobald jedoch mehr Statistik vorhanden ist, können die Werte erneut überprüft werden.

Es ist denkbar die Simulationen auf $SU(3)$ -Eichtheorie oder auf vier Dimensionen auszuweiten und so den vollen Eichsektor der QCD zu betrachten. Allerdings steigt in diesem Fall die benötigte Rechenleistung stark an, so dass mit der derzeitigen Fehlerreduktion exakte Ergebnisse nur unter Investition hoher Rechenzeiten erwartet werden dürfen.

Anhang

A Herleitungen

A.1 Orthonormalitätsbedingungen für die Fouriermoden

Ziel ist es aus den Orthonormalitätsbedingungen (2.5) Bedingungen für die Fouriermoden aus (2.12) herzuleiten. Die aus der Eichung (2.10) resultierenden Orthonormalitätsbedingungen für die transversalen räumlichen Komponenten lauten

$$\sum_{i=2}^{d-1} \dot{X}^i X^i = 0 \quad \text{und} \quad (p^0)^2 - \left(\frac{R}{\pi}\right)^2 - \sum_{i=2}^{d-1} \left[(\dot{X}^i)^2 + (X^i)^2 \right] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Nach Gleichung (2.12) folgt aus der ersten Bedingung

$$\sum_{i=2}^{d-1} \dot{X}^i X^i = \frac{1}{\pi \sigma} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\sum_{i=2}^{d-1} a_l^i a_k^i \right] [\sin(l \kappa) \cos(k \kappa) + \cos(l \kappa) \sin(k \kappa)] = 0.$$

Mit dem Additionstheorem

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

und Umbenennung der Indizees mit $m = l + k$ erhält man

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \left[\sum_{i=2}^{d-1} a_{m-k}^i a_k^i \right] \sin(m \kappa) = 0.$$

Koeffizientenvergleich liefert dann für alle m die Bedingung

$$\sum_{\substack{l+k=m \\ l,k,m \neq 0}} \sum_{i=2}^{d-1} a_l^i a_k^i = 0. \quad (\text{A.2})$$

Nach (2.12) gilt außerdem

$$\left(\dot{X}^i\right)^2 = -\frac{1}{\pi \sigma} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} a_l^i a_k^i \sin(l \kappa) \sin(k \kappa)$$

$$\left(X^i\right)^2 = \frac{1}{\pi \sigma} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \tilde{a}_l^i \tilde{a}_k^i \cos(l \kappa) \cos(k \kappa)$$

und mit dem Additionstheorem

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

sowie $m = l + k$ ergibt sich

$$\left(\dot{X}^i\right)^2 + \left(X^i\right)^2 = \frac{1}{\pi \sigma} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{l+k=m \\ l,k \neq 0}} a_l^i a_k^i \cos(m \kappa). \quad (\text{A.3})$$

Summiert man in (A.3) über i und zieht den Teil mit $m = 0$ aus der ersten Summe heraus, benutzt (A.2) und resubstituiert die Indizes, so ergibt sich

$$\sum_{i=2}^{d-1} \left[\left(\dot{X}^i\right)^2 + \left(X^i\right)^2 \right] = \frac{1}{\pi \sigma} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \sum_{i=2}^{d-1} a_{-l}^i a_l^i.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung von (A.1) liefert die Beziehung

$$\left(p^0\right)^2 - \left(\frac{R}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{\pi \sigma} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \sum_{i=2}^{d-1} a_{-l}^i a_l^i = 0. \quad (\text{A.4})$$

A.2 Ladungskonjugation und Parität bei Erzeugern und Vernichtern

Zur Klassifizierung der Eigenzustände des Fock-Raumes aus Kapitel (2.2) wird das Verhalten der Erzeuger und Vernichter a_l^{i+} und a_l^i benötigt.

Bei der Paritätstransformation wird die Bewegungsrichtung umgekehrt und es gilt $X^i(\kappa) \xrightarrow{P} -X^i(\kappa)$. Somit gilt für die Erzeuger und Vernichter nach Gleichung (2.12)

$$a_l^{i+} \xrightarrow{P} -a_l^{i+} \quad \text{und} \quad a_l^i \xrightarrow{P} -a_l^i. \quad (\text{A.5})$$

Bei der Ladungskonjugation werden Quark und Antiquark vertauscht und anschließend wird das System an der Ebene senkrecht zur Stringachse x^1 in der Mitte zwischen den Quarks gespiegelt. Der räumliche Parameter $\kappa \sim x^1$ wird also vom anderen Ende des Strings aus betrachtet, d.h. $X^i(\kappa) \xrightarrow{C} X^i(\pi - \kappa)$. Nach (2.4) gilt dann für die Erzeuger und Vernichter

$$a_l^{i+} \xrightarrow{C} (-1)^{l+1} a_l^{i+} \quad \text{und} \quad a_l^i \xrightarrow{C} (-1)^{l+1} a_l^i. \quad (\text{A.6})$$

A.3 Berechnung von $\langle X^2(\kappa) \rangle$ im Fock-Raum der transversalen Schwingungen

Ziel ist es den allgemeinen Erwartungswert $\langle \mathcal{N}_l | (X(\kappa))^2 | \mathcal{N}_l \rangle$ in Nambu Stringtheorie zu berechnen. Dabei wird der Einfachheit halber nur eine transversale Komponente $X(\kappa)$ betrachtet, da sich das Ergebnis trivial auf $(d - 2)$ Komponenten erweitern

lässt.

Der Ortsoperator der transversalen Schwingungen ist nach Gleichung (2.12) gegeben über

$$X(\kappa, \tau) = \sqrt{\frac{1}{\pi \sigma}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_k + a_k^+)}{k} \sin(k \kappa). \quad (\text{A.7})$$

In Normalordnung lautet der Operator $X^2(\kappa)$ demnach:

$$: X^2(\kappa) := \frac{1}{\pi \sigma} \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \frac{1}{k_1 k_2} \sin(k_1 \kappa) \sin(k_2 \kappa) \left[a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ + a_{k_1} a_{k_2} + 2 a_{k_1}^+ a_{k_2} \right] \quad (\text{A.8})$$

Die beiden ersten Terme in der eckigen Klammer des Operators (A.8) verschwinden in den Erwartungswerten aufgrund der Orthonormalität der Zustände $|\mathcal{N}_l\rangle$. Der Erwartungswert reduziert sich also zu

$$\langle \mathcal{N}_l | (X(\kappa))^2 | \mathcal{N}_l \rangle = \frac{1}{\pi \sigma} \sum_{k_1, k_2=1}^{\infty} \frac{2}{k_1 k_2} \sin(k_1 \kappa) \sin(k_2 \kappa) \langle \mathcal{N}_l | a_{k_1}^+ a_{k_2} | \mathcal{N}_l \rangle. \quad (\text{A.9})$$

Der Erwartungswert auf der rechten Seite lässt sich mithilfe der Kommutatorrelation (2.19) leicht berechnen und liefert

$$\langle \mathcal{N}_l | a_{k_1}^+ a_{k_2} | \mathcal{N}_l \rangle = N_{k_1} k_1 \delta_{k_1 k_2}, \quad (\text{A.10})$$

wobei N_{k_1} die Zahl der angeregten Zustände des Operators $a_{k_1}^+$ in $|\mathcal{N}_l\rangle$ ist. Setzt man dieses Ergebnis ein, so ergibt sich der allgemeine Ausdruck:

$$\langle \mathcal{N}_l | (X(\kappa))^2 | \mathcal{N}_l \rangle = \frac{1}{\pi \sigma} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2}{l} N_l \sin^2(l \kappa) \quad (\text{A.11})$$

Die Funktionen zugehörig zu den quadratischen Abweichungen aus Abbildung (7) lauten also:

$$\begin{aligned} \langle a_1 | (X(\kappa))^2 | a_1 \rangle &= \frac{2}{\pi \sigma} \sin^2(\kappa) \\ \langle a_2 | (X(\kappa))^2 | a_2 \rangle &= \frac{1}{\pi \sigma} \sin^2(2 \kappa) \\ \langle a_1 a_2 | (X(\kappa))^2 | a_1 a_2 \rangle &= \frac{2}{\pi \sigma} \sin^2(\kappa) + \frac{1}{\pi \sigma} \sin^2(2 \kappa) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

B Aspekte der konformen Feldtheorie

Hier werden kurz einige Aspekte der konformen Feldtheorie zusammengefasst, die für die Lösung der Polchinski-Strominger Stringtheorie von Bedeutung sind. Dabei wird kein Wert auf Vollständigkeit gelegt. Für eine detailliertere Diskussion sei auf [31] verwiesen, deren Darstellung hier gefolgt wird.

B.1 Konforme Transformationen

Konforme Transformationen sind per Definition Koordinatentransformationen $x \rightarrow x'$, die den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}(x)$ bis auf lokale Skalentransformationen mit der Skala $\Lambda(x)$ invariant lassen, also Transformationen, für die gilt

$$g_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (\text{B.1})$$

Die Menge aller konformen Transformationen wird als Konforme Gruppe bezeichnet und sie besitzt die Poincaré-Gruppe als Untergruppe mit $\Lambda(x) = 1$. Ein beliebiges Feld $\phi(x)$, welches das Transformationsgesetz

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\frac{h}{d}} \phi(x) \quad (\text{B.2})$$

unter konformen Transformationen erfüllt, wobei h die Skalendimension des Feldes ist, wird als quasi-primäres Feld bezeichnet. Für die Änderung der Wirkung S unter einer beliebigen infinitesimalen Translation $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$ gilt wie üblich

$$\delta S = \int d^d x T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu, \quad (\text{B.3})$$

wobei $T^{\mu\nu}(x)$ der zugehörige Energie-Impuls-Tensor ist, für den das Erhaltungsgesetz $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ gilt.

B.2 Zwei Dimensionen, Operatorprodukte und die Zentralladung

Im folgenden werden zweidimensionale konforme Feldtheorien betrachtet mit den konformen Variablen z^\pm , so dass für alle Felder gilt $\phi \equiv \phi(z^+, z^-)$.

Korrelationsfunktionen werden typischerweise singular, wenn die beiden Konstituenten am selben Ort betrachtet werden. Bei der Operatorproduktentwicklung drückt man einen beliebigen Erwartungswert, wobei die Klammern $\langle \dots \rangle$ weggelassen werden, durch diese Singularitäten aus, so dass eine beliebige Korrelationsfunktion bzw. der Operator innerhalb der Korrelationsfunktion geschrieben werden kann als

$$A(z_1^\pm) B(z_2^\pm) \sim \sum_{k=1}^N \frac{C_k(z_1^\pm)}{(z_1^\pm - z_2^\pm)^k}. \quad (\text{B.4})$$

Dabei drückt \sim aus, dass Terme, die sich regulär für $z_1^\pm \rightarrow z_2^\pm$ verhalten vernachlässigt werden und $C_k(z_1^\pm)$ an der Stelle z_1^\pm reguläre Operatoren sind.

Im Speziellen gelten für den Energie-Impuls-Tensor die Operatorprodukte:

$$T_{\pm\pm}(z_1^\pm) T_{\pm\pm}(z_2^\pm) \sim \frac{c}{2(z_1^\pm - z_2^\pm)^4} + \frac{2T_{\pm\pm}(z_1^\pm)}{(z_1^\pm - z_2^\pm)^2} + \frac{\partial_\pm T_{\pm\pm}(z_1^\pm)}{(z_1^\pm - z_2^\pm)} \quad (\text{B.5})$$

Dabei ist c die sogenannte Zentralladung, die proportional ist zur Casimir-Energie der Feldtheorie.

B.3 Radiale Quantisierung, Operatorformalismus und Virasoro-Algebra

Alle weiteren Betrachtungen werden in radialer Quantisierung mit Radius $\mathcal{R} = 1$ durchgeführt, d.h., man bildet die Theorie auf einen Zylinder mit dem Radius \mathcal{R} ab. Hier wird explizit $\kappa^+ = \tau + \kappa$ und $\kappa^- = \tau - \kappa$ benutzt, wobei τ mit einer Zeitkoordinate und κ mit einer 2π -periodischen räumlichen Koordinate assoziiert wird. Diese Quantisierung ist besonders geeignet um Stringtheorie zu betrachten, bei der wie in Kapitel (II) die räumliche Komponente der Weltfläche eine endliche Ausdehnung hat. Außerdem werden nur trivial-transformierende Felder mit $h = 0$ betrachtet.

Um den Hilbert-Raum der Theorie untersuchen zu können entwickelt man die Operatoren nach κ^+ bzw. nach κ^- . Man schreibt die primären Felder als

$$\phi(\kappa^-) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-ik\kappa^-} \quad \text{und} \quad \phi(\kappa^+) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{a}_k e^{-ik\kappa^+}, \quad (\text{B.6})$$

wobei Abhängigkeit von den Parametern als scheinbar entkoppelt angesehen wird. Die jeweilige Abhängigkeit vom anderen Parameter ist jedoch stets implizit vorhanden. $a_0 = \tilde{a}_0$ ist dabei proportional zum Impuls des Feldes ϕ . Die Operatoren a_k werden als Rechtsdreher (*engl.: right-mover*) und die Operatoren \tilde{a}_l als Linksdreher (*engl.: left-mover*) bezeichnet. Analog entwickelt man die beiden wichtigen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors nach

$$T_{--}(\kappa^-) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_k e^{-i(k+2)\kappa^-} \quad \text{und} \quad T_{++}(\kappa^+) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{L}_k e^{-i(k+2)\kappa^+}. \quad (\text{B.7})$$

Die Entwicklungsoperatoren L_k und \tilde{L}_k werden als Virasoro-Generatoren bezeichnet, denn sie generieren lokale konforme Transformationen. Wie sich zeigen lässt, erfüllen diese stets die Virasoro-Algebra

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m) L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1) \delta_{n,-m}; & [L_n, \tilde{L}_m] &= 0 \\ [\tilde{L}_n, \tilde{L}_m] &= (n-m) \tilde{L}_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2-1) \delta_{n,-m}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Speziell der Operator $L_0 + \tilde{L}_0$ generiert Translationen in der Zeit und kann deshalb als Hamilton-Operator $H = L_0 + \tilde{L}_0$ aufgefasst werden. Der Hilbert-Raum lässt sich über die Moden a_k und \tilde{a}_k , oder die Virasoro-Generatoren L_n und \tilde{L}_n aufspannen, wobei für physikalische Zustände $|\psi\rangle$ stets gelten muss

$$L_n |\psi\rangle = \tilde{L}_n |\psi\rangle = 0 \quad \text{für} \quad n \geq -1, \quad (\text{B.9})$$

damit der Erwartungswert $\langle T_{\pm\pm}(\kappa^\pm) \rangle$ endlich ist für $\kappa^\pm \rightarrow 0$. Weiterhin gelten die Bedingungen

$$(L_0 - 1) |\psi\rangle = (\tilde{L}_0 - 1) |\psi\rangle \equiv 0. \quad (\text{B.10})$$

B.4 Lagrange-Dichte und Energie-Impuls Tensor des Fluktuationfeldes der Polchinski-Strominger Stringtheorie

Nach der Umdefinition des Fluktuationfeldes $\tilde{Y}^\mu \rightarrow Y^\mu$, die im Detail in [32] diskutiert wird, erhält man aus der Wirkung (2.52) die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{PS} = -\frac{R^2}{16\pi\alpha} + \frac{1}{2\pi\alpha} \partial_+ Y^\mu \partial_- Y_\mu + \mathcal{O}(1/R^4). \quad (\text{B.11})$$

Die zugehörigen relevanten Komponenten des Energie-Impuls Tensors lauten:

$$\begin{aligned} T_{--} &= -\frac{R}{\pi\alpha} e_-^\mu \partial_- Y_\mu - \frac{1}{\alpha} \partial_- Y^\mu \partial_- Y_\mu - \frac{2\pi\beta}{R} e_+^\mu \partial_-^3 Y_\mu \\ &\quad - \frac{8\pi^2\beta}{R^2} [e_+^\mu \partial_-^3 Y_\mu e_+^\nu \partial_- Y_\nu - e_+^\mu \partial_-^2 Y_\mu e_+^\nu \partial_-^2 Y_\nu] + \mathcal{O}(1/R^3) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} T_{++} &= -\frac{R}{\pi\alpha} e_+^\mu \partial_+ Y_\mu - \frac{1}{\alpha} \partial_+ Y^\mu \partial_+ Y_\mu - \frac{2\pi\beta}{R} e_-^\mu \partial_+^3 Y_\mu \\ &\quad - \frac{8\pi^2\beta}{R^2} [e_-^\mu \partial_+^3 Y_\mu e_-^\nu \partial_+ Y_\nu - e_-^\mu \partial_+^2 Y_\mu e_-^\nu \partial_+^2 Y_\nu] + \mathcal{O}(1/R^3) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Die Wirkung (B.11) entspricht einer freien Theorie mit einem konstanten Zusatzterm. Das Operatorprodukt $Y^\mu Y^\nu$ ist deshalb gegeben über

$$Y^\mu(\kappa^+, \kappa^-) Y^\nu(0, 0) \sim -\frac{\alpha}{2} \ln(\kappa^+ \kappa^-) + \mathcal{Y}|_{\kappa^\pm=0}, \quad (\text{B.14})$$

wobei $\mathcal{Y} \sim 1/R^2$ ein irrelevanter zusätzlicher Term ist. Mithilfe dieses Operatorproduktes lassen sich die Operatorprodukte (2.59) berechnen.

Eine Entwicklung der Form (B.7) der Energie-Impuls Tensoren (B.12) und (B.13) liefert mit den Entwicklungen (2.61) die Virasoro-Generatoren:

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{R}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e_-^\mu a_{k\mu} + \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} : a_{k-l}^\mu a_{l\mu} : + \frac{\beta}{2} \delta_{k0} \\ &\quad - \frac{2\pi\beta k^2}{R} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} e_+^\mu a_{k\mu} - \frac{2\pi^2\beta\alpha n^2}{R^2} e_+^\mu e_+^\nu \sum_{l=-\infty}^{\infty} : a_{k-l}^\mu a_{l\mu} : + \mathcal{O}(1/R^3) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_k &= \frac{R}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} e_+^\mu \tilde{a}_{k\mu} + \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} : \tilde{a}_{k-l}^\mu \tilde{a}_{l\mu} : + \frac{\beta}{2} \delta_{k0} \\ &\quad - \frac{2\pi\beta k^2}{R} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} e_-^\mu a_{k\mu} - \frac{2\pi^2\beta\alpha n^2}{R^2} e_+^\mu e_+^\nu \sum_{l=-\infty}^{\infty} : a_{k-l}^\mu a_{l\mu} : + \mathcal{O}(1/R^3) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

... bezeichnet dabei wie üblich normalgeordnete Ausdrücke.

C Details der numerischen Methoden

C.1 Berücksichtigung der angeregten Zustände bei den Gitterrechnungen

Fit für die Energiewerte

Die naiven Energien (3.17) werden berechnet ohne die Beiträge der angeregten Zustände in den Kanälen zu berücksichtigen. Eine Möglichkeit dies zu tun ergibt sich über einen Dreiparameterfit, dessen Form nun kurz hergeleitet wird.

Dividiert man die Erwartungswerte zweier Wilson-Loops $\mathbb{W}_n(R, T_i)$ für die Zeiten T_2 und T_1 und bildet auf beiden Seiten der Gleichung den Logarithmus, so gilt nach Gleichung (3.15)¹² ($K \rightarrow n$):

$$\ln \left[\frac{\mathbb{W}_n(T_2)}{\mathbb{W}_n(T_1)} \right] = -(T_2 - T_1) E_n + \ln \left[1 + \sum_{k_1=1}^{\infty} \beta_{n,k_1} e^{-\Delta E_{n,k_1} T_2} \right] - \ln \left[1 + \sum_{k_2=1}^{\infty} \beta_{n,k_2} e^{-\Delta E_{n,k_2} T_1} \right]$$

Entwickelt man die Logarithmen $\ln(1+x)$ für kleine x und nimmt nur die linearen Terme mit, da alle anderen Terme mindestens $\mathcal{O}(e^{-2\Delta E_{n,1}})$ sind, und vernachlässigt alle Terme der Ordnung $\mathcal{O}(e^{-\Delta E_{n,k}})$ mit $k > 1$, so ergibt sich:

$$\ln \left[\frac{\mathbb{W}_n(T_2)}{\mathbb{W}_n(T_1)} \right] = -(T_2 - T_1) E_n + \beta_{n,1} e^{-\Delta E_{n,1} T_2} - \beta_{n,1} e^{-\Delta E_{n,1} T_1} + \text{h.O.}$$

Durch eine einfach Umformung erhält man dann:

$$E_n = -\frac{1}{T_2 - T_1} \ln \left[\frac{\mathbb{W}_n(T_2)}{\mathbb{W}_n(T_1)} \right] - \frac{\beta_{n,1}}{T_2 - T_1} e^{-\Delta E_{n,1} T_1} \left(1 - e^{-\Delta E_{n,1} (T_2 - T_1)} \right) + \text{h.O.} \quad (\text{C.1})$$

Diese Gleichung ist die Grundlage für den Fit (3.18).

Fit für die Energiedifferenzen

Eine analoge Gleichung lässt sich auch für die Energiedifferenzen herleiten. Zu diesem Zweck bildet man das Viererprodukt

$$\frac{\mathbb{W}_n(T_2) \mathbb{W}_m(T_1)}{\mathbb{W}_n(T_1) \mathbb{W}_m(T_2)} = e^{-(E_n - E_m) (T_2 - T_1)} + C_{nm}(T_2, T_1),$$

wobei $C_{nm}(T_2, T_1)$ das Viererprodukt aus den entsprechenden Korrekturtermen ist. Bildet man den Logarithmus dieser Gleichung, so ergibt sich ($\Delta E_{nm} \equiv E_n - E_m$)

$$\Delta E_{nm} = -\frac{1}{T_2 - T_1} \ln \left[\frac{\mathbb{W}_n(T_2) \mathbb{W}_m(T_1)}{\mathbb{W}_n(T_1) \mathbb{W}_m(T_2)} \right] + \frac{1}{T_2 - T_1} \ln [C_{nm}(T_2, T_1)]. \quad (\text{C.2})$$

Berücksichtigt man bei den Korrekturtermen wieder nur Terme der führenden Ordnung, so folgt

$$\ln [C_{nm}(T_2, T_1)] = -\beta_{n,1} e^{-\Delta E_{n,1} T_1} \left(1 - e^{-\Delta E_{n,1} (T_2 - T_1)} \right) + \beta_{m,1} e^{-\Delta E_{m,1} T_1} \left(1 - e^{-\Delta E_{m,1} (T_2 - T_1)} \right) + \text{h.O.} \quad (\text{C.3})$$

In führender Ordnung (Siehe freier bosonischer String, Kapitel (3.2.2).) sind die Energiedifferenzen $\Delta E_{n,1}$ und $\Delta E_{m,1}$ gleich. Dies führt zu der Annahme, dass die Korrekturen (C.3) mit $\Delta E_{n,1} = \Delta E_{m,1}$ zum Ausdruck

$$\ln [C_{nm}(T_2, T_1)] = -(\beta_{n,1} - \beta_{m,1}) e^{-\Delta E_{n,1} T_1} \left(1 - e^{-\Delta E_{n,1} (T_2 - T_1)} \right) \quad (\text{C.4})$$

¹²Die räumliche Ausdehnung wird dabei im Folgenden der Einfachheit halber unterdrückt.

R	$1/2 (\beta_{n,1} - \beta_{m,1})$	$\Delta E_{n,1}$	$\beta_{n,1}$	$\Delta E_{n,1}$	$-\beta_{m,1}$	$\Delta E_{m,1}$	ΔE_{10}
6	0.37(4)	0.34(6)	0.37(4)	0.34(6)	0.37(4)	0.34(6)	0.417(3)
7	0.50(4)	0.36(6)	0.50(7)	0.36(9)	0.50(7)	0.36(9)	0.371(4)
8	0.43(2)	0.30(6)	0.43(3)	0.29(7)	0.43(3)	0.29(7)	0.332(5)

Tabelle (8): Vergleich der Fitparameter eines Fünfparameter- und eines Dreiparameterfits für die Energiedifferenz ΔE_{10} bei $\beta = 5$. Anzumerken ist, dass die Daten aus einer Rechnung mit einer älteren Version des Algorithmus stammen als die restlichen Daten.

vereinfacht werden können. Diese Annahme lässt sich überprüfen, indem man für denselben Datensatz einen Dreiparameterfit, zugehörig zu den Energiedifferenzen (C.2) mit den Korrekturen (C.4), und einen Fünfparameterfit, zugehörig zu (C.2) mit (C.3), durchführt.

Für Wilson-Loops bei $\beta = 5$ auf einem 24^3 Gitter, mit $T = 4, 8, 12, 16$ und $R = 6, 7, 8$ sind die resultierenden Fitparameter für die Energiedifferenz ΔE_{10} in Tabelle (8) angegeben. Man erkennt deutlich die Übereinstimmung, die Annahme, dass (C.4) ein guter Korrekturterm für die Energiedifferenzen ist, ist im Rahmen der Messungenauigkeit bei den Messungen dieser Arbeit also korrekt.

Die Gleichungen (C.2) und (C.4) sind die Grundlage für den Fit (3.19).

C.2 Ergebnisse der Simulationen

In den Tabellen (9) und (10) sind die Ergebnisse der Gittersimulationen für die totalen Energiewerte und die Energiedifferenzen angegeben. Die Messfehler wurden über die Jackknife-Methode mit Blockgrößen von 80 Messwerten im Falle von $\beta = 5$ und 100 Messwerten im Falle von $\beta = 7.5$ berechnet. Bei den korrigierten Energiewerten wurde für jeden der Blöcke ein einzelner Fit nach den Formeln (3.18) und (3.19) durchgeführt. Der Messfehler ergibt sich aus diesen Blockwerten über die übliche Formel für Jackknife-Fehler. Alle Größen werden dabei in Gittereinheiten angegeben.

R	\bar{E}_0	E_0	\bar{E}_1	E_1	\bar{E}_2	E_2	\bar{E}_3	E_3
	$\beta = 5$							
4	0.5725(3)	0.571(1)	1.143(2)	1.126(3)	1.541(9)	1.46(3)	1.90(8)	1.72(4)
5	0.6776(4)	0.674(2)	1.184(2)	1.161(3)	1.540(8)	1.48(2)	1.90(7)	1.72(3)
6	0.7801(6)	0.775(2)	1.230(2)	1.206(4)	1.557(8)	1.50(2)	1.94(9)	1.76(8)
7	0.8826(9)	0.8781(6)	1.300(3)	1.252(8)	1.589(9)	1.51(2)	1.91(6)	1.77(3)
8	0.983(2)	0.9779(8)	1.362(3)	1.31(2)	1.635(10)	1.56(2)	1.94(7)	1.80(3)
9	1.085(2)	1.077(1)	1.446(4)	1.38(2)	1.69(1)	1.62(2)	2.01(8)	1.87(3)
10	1.1847(4)	1.170(5)	1.5146(8)	1.459(3)	1.745(3)	1.688(6)	2.06(2)	1.923(7)
11	1.2862(4)	1.268(4)	1.6070(9)	1.537(4)	1.809(3)	1.747(5)	2.13(2)	1.989(7)
12	1.3858(5)	1.364(6)	1.684(1)	1.618(4)	1.877(4)	1.809(5)	2.19(2)	2.047(6)
	$\beta = 7.5$							
7	0.4267(2)	0.4249(3)	0.7830(9)	0.753(2)	1.034(4)	0.95(9)	1.27(7)	
8	0.4682(2)	0.4658(3)	0.7986(9)	0.767(2)	1.036(4)	0.97(4)	1.27(7)	
9	0.5095(3)	0.5061(4)	0.8200(9)	0.785(3)	1.040(4)	0.98(3)	1.27(7)	
10	0.5502(3)	0.5462(5)	0.8411(9)	0.805(3)	1.050(4)	0.99(3)	1.28(7)	
11	0.5912(4)	0.5859(6)	0.8692(9)	0.827(3)	1.061(4)	1.01(2)	1.30(7)	
12	0.6317(4)	0.6255(7)	0.8940(9)	0.851(3)	1.076(4)	1.03(3)	1.31(7)	
13	0.6724(5)	0.6650(8)	0.927(1)	0.877(3)	1.093(4)	1.05(3)	1.33(7)	
14	0.7128(6)	0.7043(9)	0.954(1)	0.904(4)	1.113(4)	1.07(3)	1.35(6)	
15	0.7535(6)	0.744(1)	0.990(2)	0.933(4)	1.134(4)	1.10(2)	1.37(7)	
16	0.7937(7)	0.783(2)	1.019(2)	0.963(4)	1.157(4)	1.13(2)	1.39(7)	
17	0.8345(8)	0.822(2)	1.057(2)	0.995(5)	1.181(5)	1.15(1)	1.42(9)	
18	0.8746(8)	0.861(2)	1.088(3)	1.027(6)	1.207(6)	1.18(1)	1.5(1)	
19	0.9153(9)	0.900(2)	1.127(4)	1.061(7)	1.233(7)	1.21(2)	1.5(2)	
20	0.956(1)	0.939(2)	1.158(5)	1.095(9)	1.261(9)	1.24(2)	1.6(3)	

Tabelle (9): Resultate der Gittersimulationen für die totalen Energiewerte mit den Simulationsparametern aus Kapitel (4.3) und $\beta = 5$, bzw. $\beta = 7.5$. \bar{E}_n sind die naiven Energien, berechnet durch Wilson-Loops mit $T = 4$ und 8 , und E_n die mit dem Fit (3.18) korrigierten Energien. Die korrigierten Energiezustände E_2 und E_3 konnten jeweils nur durch Fits mit den drei niedrigsten Zeitausdehnung der Wilson-Loops bestimmt werden. Bei den Fits für E_2 bei $\beta = 7.5$ unterhalb der Trennlinie gibt es möglicherweise noch systematische Fehler.

R	$\Delta\bar{E}_{10}$	ΔE_{10}	$\Delta\bar{E}_{20}$	ΔE_{20}	$\Delta\bar{E}_{21}$	ΔE_{21}	$\Delta\bar{E}_{30}$	ΔE_{30}
	$\beta = 5$							
4	0.558(3)	0.551(4)	0.94(2)	0.92(2)	0.384(9)	0.33(3)	1.29(10)	1.15(3)
5	0.489(3)	0.478(5)	0.844(10)	0.83(2)	0.355(8)	0.32(2)	1.19(9)	1.04(3)
6	0.434(3)	0.426(4)	0.759(9)	0.75(1)	0.325(7)	0.29(2)	1.1(1)	0.99(8)
7	0.398(4)	0.378(7)	0.683(10)	0.66(2)	0.284(8)	0.26(2)	0.90(7)	0.89(3)
8	0.362(3)	0.341(10)	0.629(10)	0.61(2)	0.268(8)	0.24(2)	0.83(7)	0.82(2)
9	0.338(4)	0.31(2)	0.58(2)	0.57(2)	0.244(10)	0.23(3)	0.80(9)	0.79(3)
10	0.309(1)	0.287(3)	0.544(3)	0.534(2)	0.235(2)	0.228(8)	0.81(2)	0.753(9)
11	0.295(1)	0.267(3)	0.506(3)	0.497(3)	0.211(3)	0.209(7)	0.77(2)	0.721(8)
12	0.275(2)	0.250(3)	0.474(3)	0.462(4)	0.199(3)	0.191(7)	0.73(2)	0.683(9)
	$\beta = 7.5$							
7	0.332(2)	0.328(3)	0.57(3)	0.55(4)	0.23(2)	0.20(9)		
8	0.306(2)	0.302(2)	0.53(3)	0.52(3)	0.23(2)	0.20(4)		
9	0.284(2)	0.278(3)	0.50(2)	0.49(2)	0.21(2)	0.19(4)		
10	0.265(2)	0.258(3)	0.47(2)	0.46(2)	0.21(2)	0.19(3)		
11	0.249(2)	0.241(3)	0.44(2)	0.44(2)	0.19(1)	0.18(2)		
12	0.234(2)	0.225(3)	0.42(2)	0.417(10)	0.188(9)	0.18(2)		
13	0.222(2)	0.212(4)	0.400(10)	0.397(9)	0.178(8)	0.17(3)		
14	0.210(2)	0.199(4)	0.382(9)	0.380(8)	0.172(7)	0.17(3)		
15	0.201(2)	0.190(4)	0.365(8)	0.364(7)	0.164(7)	0.17(2)		
16	0.191(2)	0.180(4)	0.350(8)	0.349(7)	0.159(7)	0.16(2)		
17	0.184(2)	0.171(4)	0.337(8)	0.336(7)	0.152(7)	0.16(2)		
18	0.176(2)	0.165(4)	0.324(9)	0.324(7)	0.148(8)	0.16(2)		
19	0.171(3)	0.156(6)	0.313(10)	0.313(8)	0.142(9)	0.15(2)		
20	0.164(4)	0.151(8)	0.30(2)	0.304(7)	0.14(2)	0.15(2)		

Tabelle (10): Resultate der Gittersimulationen für die Energiedifferenzen mit den Simulationsparametern aus Kapitel (4.3) und $\beta = 5$, bzw. $\beta = 7.5$. $\Delta\bar{E}_{nm} \equiv \bar{E}_n - \bar{E}_m$ sind die naiven Energiedifferenzen, berechnet mit Wilson-Loops mit $T = 4$ und 8 , und ΔE_n die nach mit dem Fit (3.18) korrigierten Energien. Bei ΔE_{10} konnten die Werte bei $\beta = 5$ oberhalb der Trennlinie, und bei $\beta = 7.5$ unterhalb der Trennlinie, nur aus Fits mit den niedrigsten drei Zeitausdehnungen berechnet werden. Bei ΔE_{20} wurden alle Werte aus Fits bezüglich der niedrigsten drei Zeitausdehnungen gewonnen. Dabei gibt es bei $\beta = 7.5$ unterhalb der Trennlinie, wie auch schon bei den Gesamtenergien, möglicherweise noch systematische Fehler. Die Werte für ΔE_{21} wurden aus den korrigierten Energien aus Tabelle (9) berechnet. Aufgrund der dort auftretenden Probleme sind auch hier die Werte unterhalb der Trennlinie nicht zuverlässig. Für $\beta = 7.5$ war aufgrund der hohen Fehler der Loops zugehörig zum dritten angeregten Zustand eine Auswertung der Energiedifferenzen nicht möglich.

C.3 Test der verwendeten Fits

Für die Schlußfolgerungen in Kapitel (V) sind vor allem die Fits (3.19) für die korrigierten Energien ΔE_{nm} relevant, da diese die finalen Messresultate sind. Die Fits müssen dementsprechend unter Kontrolle gehalten werden, sollen keine falschen Werte berücksichtigung finden.

Man kann die Fits mit einer recht einfachen Methode überprüfen. Zu diesem Zweck trägt man in einem Diagramm die Funktion

$$f_2 = f_1 \quad (\text{C.5})$$

mit

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{T_2 - T_1} [(\beta_{n,1} - \beta_{m,1}) e^{-\Delta E_{n,1} T_1} (1 - e^{-\Delta E_{n,1} (T_2 - T_1)})] \\ f_2 &= -\frac{1}{T_2 - T_1} \ln \left[\frac{\mathbb{W}_n(R, T_2) \mathbb{W}_m(R, T_1)}{\mathbb{W}_n(R, T_1) \mathbb{W}_m(R, T_2)} \right] - \Delta E_{nm} \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

auf, mit allen möglichen Werten von T_1 und T_2 , wobei Gleichung (C.5) dann dem Fit aus Gleichung (3.19) entspricht.

Liegen alle Messwerte auf dieser Geraden, so scheint der Fit zu funktionieren. Anzumerken ist dazu noch, dass f_1 einen Korrekturwert angibt und f_2 die jeweilige Abweichung des einzelnen Messwertes, zugehörig zu den unterschiedlichen T_1 und T_2 , von dem letztlichen extrapolierten Wert, so dass es nicht sinnvoll ist, bei diesen sehr große Werte zuzulassen. Hier werden deshalb nur Werte mit $f_1 < 0.15$ berücksichtigt, was bei allen vertrauenswürdigen Fits im allgemeinen auch erfüllt ist. Außerdem berücksichtigen wir nicht den Messwert mit dem höchsten T_2 und T_1 , also $T_2 = 12$ und $T_1 = 8$ bei $\beta = 5$ und $T_2 = 18$ und $T_1 = 14$ bei $\beta = 7.5$, aufgrund der sehr hohen Messfehler bei diesen Werten.

Die Resultate für die Fits zu ΔE_{10} mit allen vier Zeitausdehnungen der Wilson-Loops sind in Abbildung (17) gezeigt. Auch wenn natürlich sehr viele Messwerte in diesen Plots angegeben sind, erkennt man doch, dass diese alle auf der Geraden liegen. Die einzigen Ausnahmen bestehen bei $\beta = 5$ für $R < 7$, sowie $\beta = 7.5$ für $R > 16$, wo die Punkte zugehörig zu den höheren T -Werten von der Geraden abweichen. Dies sind die entsprechenden Werte, für die in Tabelle (10) die Messwerte als unzuverlässig angegeben werden.

In Abbildung (18) wird dann mit $\Delta E_{20}(R = 9)$ für $\beta = 7.5$ (oben) ein typisches Beispiel für den Fall gezeigt, bei dem ein Fit recht gut funktioniert, obwohl nur die niedrigsten drei Zeitausdehnungen der Wilson-Loops berücksichtigt wurden, während der untere Fit für $\Delta E_{20}(R = 17)$ nicht einhundertprozentig zuverlässig funktioniert, was an der relativ hohen Abweichung zweier Messwerte zu sehen ist, so dass der aus dem Fit resultierende Wert in Frage zu stellen ist.

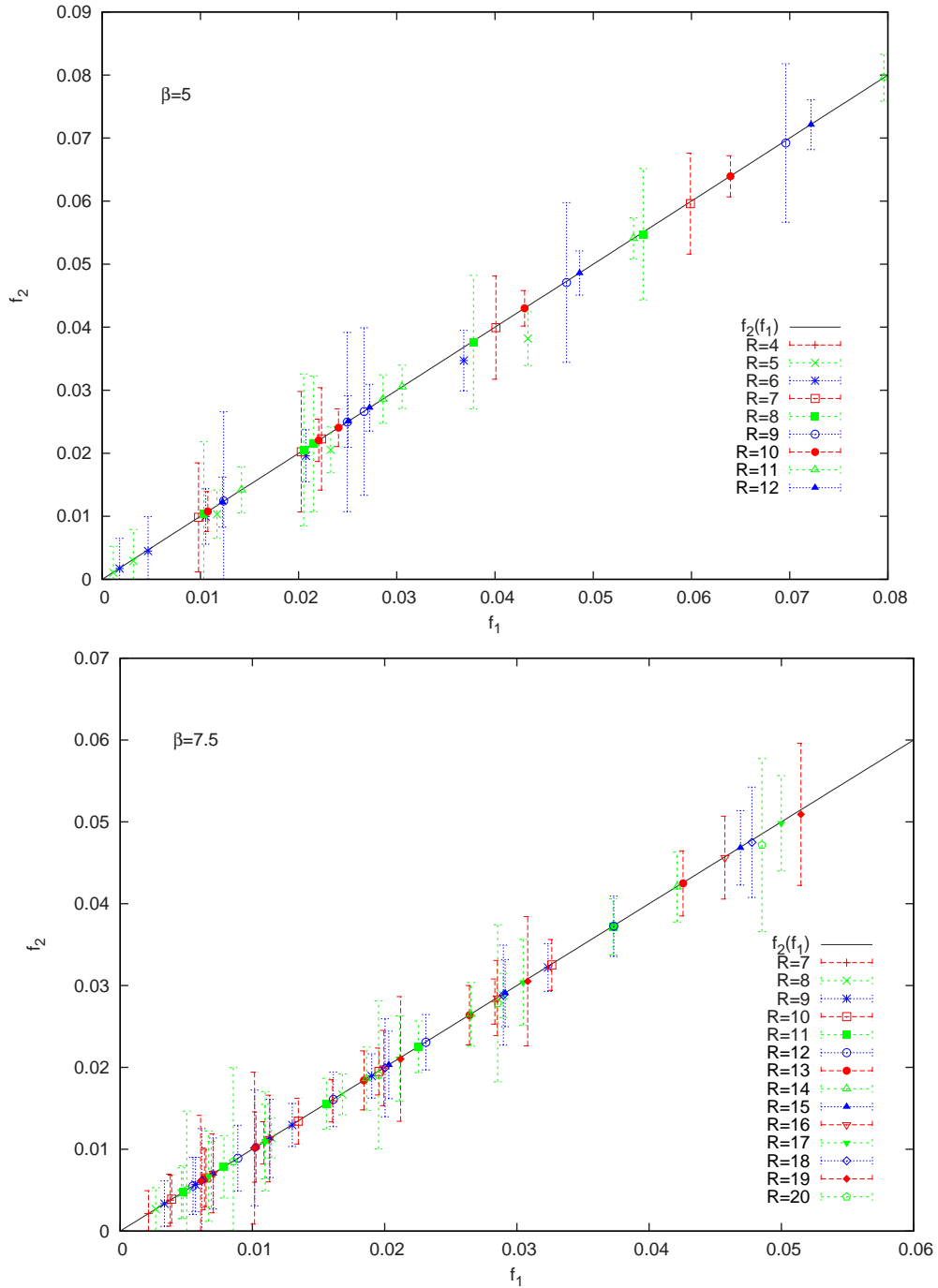


Abbildung (17): Oben: Abbildung von den Messwerten zu (C.5) für ΔE_{10} , $\beta = 5$ mit allen Werten für R . Dabei wurden bei dem Fit alle Wilson-Loops berücksichtigt.

Unten: Dieselbe Abbildung wie oben, nur für $\beta = 7.5$.

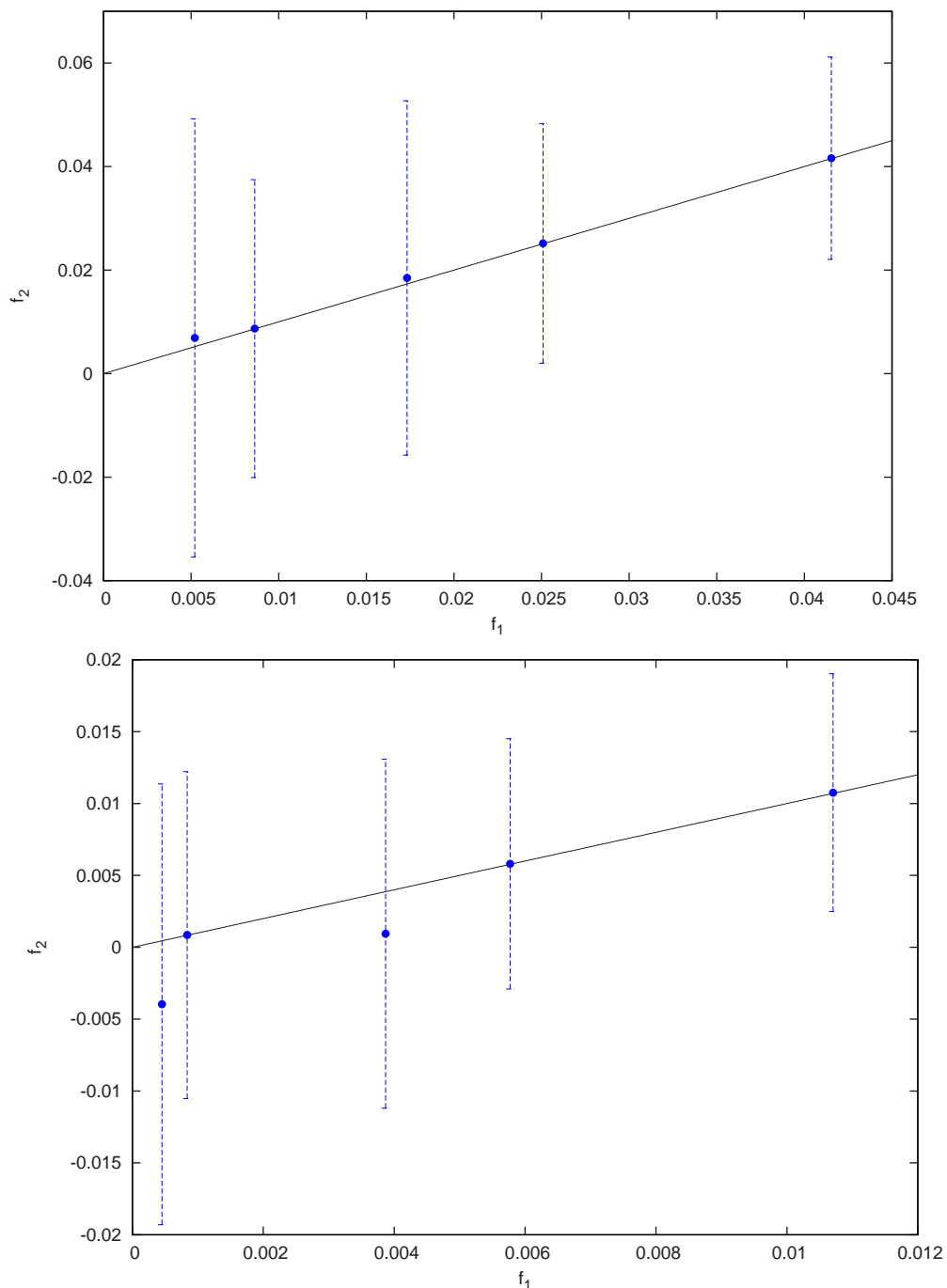


Abbildung (18): **Oben:** Abbildung der Messwerte zu (C.5) für $\beta = 7.5$ und $\Delta E_{20}(R = 9)$. Bei dem Fit wurden nur Wilson-Loops mit den niedrigsten drei Zeitausdehnungen berücksichtigt. **Unten:** Analog zur oberen Abbildung für $\Delta E_{20}(R = 17)$.

Literatur

- [1] L. Ryder, *Quantum field theory*,
Cambridge University Press, Cambridge, New York (1985), (second edition 1996)
M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*,
Westview Press (1995)
G. Dissertori, I. Knowles, M. Schmelling, *Quantum chromodynamics*,
Oxford University Press, Oxford (2003)
P. Becher, M. Böhm, H. Joos, *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung*,
B. G. Teubner, Stuttgart (1981)
- [2] J. Greensite, *The confinement problem in lattice gauge theory*,
arXiv:hep-lat/0301023 (2003)
- [3] G. Bali, *QCD forces and heavy quark bound states*,
Phys. Rept. **343** (2001) [hep-ph/0001312]
- [4] I. Montvay, G. Münster, *Quantum fields on a lattice*,
Cambridge University Press, Cambridge (1994)
H. Rothe, *Lattice gauge theories: An introduction*,
World Scientific, London (1992)
- [5] H. Fritsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler, *Advantages of the colour octet gluon picture*,
Phys. Lett. **47B** (1973)
- [6] C. Yang, R. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*,
Phys. Rev. **96** (1954)
- [7] L. McLerran, B. Svetitsky, *Quark liberation at high temperature: A monte carlo study of $SU(2)$ gauge theory*,
Phys. Rev. **D24** (1981)
- [8] C. Yang, R. Mills, *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*,
Phys. Rev., **96** (1954)
- [9] M. Lüscher, G. Münster, P. Weisz, *How thick are chromo-electric flux tubes?*,
Nucl. Phys. **B180** (1981)
- [10] Y. Schröder, *The static potential in QCD*,
Ph.D. Thesis, DESY-THESIS-1999-021 (1999)
- [11] H. Nielsen, P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*,
Nucl. Phys. **B61** (1973), 45

- [12] J. Juge, J. Kuti, C. Morningstar, *QCD string formation and the casimir energy*, hep-lat/0401032 (2004)
- [13] M. Billo, M. Caselle, *Polyakov loop correlators from D0-brane interactions in bosonic string theory*, hep-th/0505201 (2005)
- [14] J. Kuti, *Lattice QCD and string theory*, in proceedings of *Lattice 2005*, PoS(LAT2005)001
- [15] M. Lüscher, *Symmetry-breaking aspects of the roughening transition in gauge theories*, Nucl. Phys. **B180** (1980), 317
- [16] J. Kogut, L. Susskind, *Hamilton formulation of wilson's lattice gauge theories*, Phys. Rev. **D11** (1975), 395
J. Kogut, D. Sinclair, L. Susskind, *A quantitative approach to low-energy quantum chromodynamics*, Nucl. Phys. **B114** (1976), 199
- [17] O. Philipsen, H. Wittig, *String breaking in nonAbelian gauge theories with fundamental matter fields*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) [hep-lat/9807020]
- [18] F. Knechtli, R. Sommer, *String breaking in SU(2) gauge theory with scalar matter fields*, Phys. Lett. **B440** (1998) [hep-lat/9807022]
O. Philipsen, H. Wittig, *The static potential beyond screening in the 3-d SU(2) Higgs model*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73** (1999) [hep-lat/0409137]
F. Knechtli, R. Sommer, *String breaking as a mixing phenomenon in the SU(2) Higgs model*, Nucl. Phys. **B590** (2000) [hep-lat/0005021]
- [19] G.S. Bali, et. al., *String breaking with dynamical Wilson fermions*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **140** (2005) [hep-lat/0409137]
G.S. Bali, et. al., *Observation of string breaking in QCD*, Phys. Rev. **D71** (2005) [hep-lat/0505012]
- [20] O. Alvarez, *Static potential in string models*, Phys. Rev. **D24** (1981)
- [21] J. Arvis, *The exact $q\bar{q}$ -potential in Nambu string theory*, Phys. Lett. **127B** (1983)
- [22] C. Rebbi, *Dual models and relativistic quantum strings*, Phys. Lett. **C12** (1974)

- J. Scherk, *An introduction to the theory of dual models and strings*,
Rev. Mod. Phys. **47** (1975)
- [23] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, C. Thorn, *Quantum dynamics of a massless relativistic string*,
Nucl. Phys. **B56** (1973)
- [24] K. Dietz, T. Filk, *Renormalization of string functionals*,
Phys. Rev. **D27** (1982)
- [25] P. Majumdar, *The string spectrum from large Wilson loops*,
Nucl. Phys. **B664** (2002) [[hep-lat/0211038](#)]
- [26] M. Lüscher, P. Weisz, *String excitation energies in $SU(N)$ gauge theories beyond the free string approximation*,
JHEP **07** (2004) 014
- [27] J. Polchinski, A. Strominger, *Effective string theory*,
Phys. Rev. Lett. **67** (1991)
- [28] J. Ambjorn, P. Olesen, C. Peterson, *Three-dimensional lattice gauge theories and strings*,
Nucl. Phys. **B244** (1984)
M. Caselle, R. Fiore, F. Gliozzi, M. Hasenbusch, P. Provero, *String effects in the wilson loop*,
Nucl. Phys. **B486** (1997) [[hep-lat/9609041](#)]
- [29] M. Lüscher, P. Weisz, *Quark confinement and the bosonic string*
[hep-lat/0207003](#) (2002)
- [30] A. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*,
Phys. Lett. **103B** (1981)
- [31] P. di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal field theory*,
Springer-Verlag, New York (1997)
- [32] J. Drummond, *Universal subleading spectrum of effective string theory*,
[hep-th/0411017](#) (2006)
N.D. Hari Dass, P. Matlock, *Universal correction to Lüscher term in Polchinski-Strominger effective string theories*,
[hep-th/0606265](#) (2006)
J. Drummond, *Reply to hep-th/0608109*,
[hep-th/0608109](#) (2006)
- [33] M. Creutz, *Monte Carlo study of quantized $SU(2)$ gauge theory*,
Phys. Rev. **D21** (1980)
N. Cabibbo, E. Marinari, *A new method for updating $SU(N)$ matrices in computer simulations of gauge theories*,
Phys. Lett. **119B** (1982)

- [34] A. Kennedy, B. Pendleton, *Improved heathbath method for Monte Carlo calculations in lattice gauge theories*,
Phys. Lett. **156B** (1985)
- [35] U. Wolff, *Monte Carlo errors with less errors*,
hep-lat/0306017
- [36] M. Lüscher, P. Weisz, *Locality and exponential error reduction*,
JHEP **09** (2001) 010
- [37] P. Majumdar, *Experiences with the multi-level algorithm*,
hep-lat/0208068 (2002)
- [38] S. Kratochvila, P. de Forcrand, *Observing string-breaking with Wilson-loops*,
Nucl. Phys. **B671** (2003) [hep-lat/0306011]
- [39] G. Parisi, R. Petronzio, F. Rapuano, *A measurement of the string tension near the continuum limit*,
Phys. Lett. **B128** (1983)
- [40] R. Sommer, *A new way to set the scale in lattice gauge theories and its applications to the static force and alpha-s in SU(2) Yang-Mills theory*,
Nucl. Phys. **B411** (1994) [hep-lat/9310022]
- [41] N.D. Hari Dass, P. Majumdar, *Continuum limit of string formation in 3-d SU(2) LGT*,
hep-lat/0702019 (2007)
- [42] B. Brandt, P. Majumdar, *Lüscher-Weisz algorithm for excited states of the QCD flux tube*,
in proceedings of *Lattice 2007*, PoS(LATTICE2007)027 [arXiv:0709.3379]
- [43] L. Griffiths, C. Michael, P. Rakow, *Mesons with excited glue*,
Phys. Lett. **B129** (1983)
J. Stack, *Heavy quark potential in SU(2) lattice gauge theory*,
Phys. Rev. **D27** (1983)
N. Campbell, C. Michael, P. Rakow, *The string tension from lattice QCD*,
Phys. Lett. **B139** (1984)
Ph. de Forcrand, G. Schierholz, H. Schneider, M. Teper, *The string and its tension in SU(3) lattice gauge theory: towards definitive results*,
Phys. Lett. **B160** (1985)
N. Campbell, A. Huntley, C. Michael, *Heavy quark potentials and hybrid mesons from SU(3) lattice gauge theories*,
Nucl. Phys. **B306** (1987)
- [44] N.D. Hari Dass, P. Majumdar, *String-like behaviour of 4d SU(3) Yang-Mills flux tubes*,
hep-lat/0608024 (2006)

-
- [45] K. Juge, J. Kuti, C. Morningstar, *Excitations of the static quark-antiquark system in several gauge theories*,
hep-lat/0312019 (2003)
- [46] P. Majumdar, Bislang unveröffentlichte Daten von 2006
- [47] K. Juge, J. Kuti, C. Morningstar, *Fine structure of the QCD string spectrum*,
hep-lat/0207004
- [48] M. Billo, M. Caselle, M. Hasenbusch, M. Panero, *QCD string from D0 branes*,
in proceedings of *Lattice 2005*, PoS(LAT2005)309 [hep-lat/0511008]
- [49] K. Juge, J. Kuti, F. Maresca, C. Morningstar, M. Peardon, *Excitations of the toleron*
Nucl. Phys. Proc. Suppl. **129** (2004) [hep-lat/0309180]
- [50] A. Athenodorou, B. Bringoltz, M. Teper, *The spectrum of closed loops of fundamental flux in D=2+1 SU(N) gauge theories*,
in proceedings of *Lattice 2007*, PoS(LATTICE2007)288
B. Bringoltz, M. Teper, *Strings in SU(N) gauge theories in 2+1 dimensions: beyond the fundamental representation*,
in proceedings of *Lattice 2007*, PoS(LATTICE2007)291

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich einigen von mir hochgeschätzten Menschen meinen Dank aussprechen, die am Entstehen dieser Diplomarbeit entscheidend beteiligt waren. Mein Dank gilt:

- Dr. Pushan Majumdar, der sehr viel Arbeit und Geduld in die Betreuung meiner Arbeit investiert hat und außerdem das Manuskript korrekturgelesen hat.
- Herrn Professor Dr. Owe Philipsen, für die Betreuung der Diplomarbeit und die interessante Aufgabenstellung.
- Meinem Bürokollegen Lars Zeidlewicz, für die angenehme Arbeitsatmosphäre im Büro, dem Lesen von vielen Teilen des Manuskriptes und vielen nützliche Diskussionen.
- Marcus Tassler und Jens Langelage, für das Lesen von Teilen des Manuskriptes und vielen nützliche Diskussionen.
- Meinem Vater Dr. Werner Brandt, für das Lesen des gesamten Manuskriptes und natürlich der großen Unterstützung während des Studiums.

Außerdem möchte ich meiner gesamten Familie danken, für die Unterstützung während meines gesamten Studiums und auch davor, insbesondere natürlich meiner Mutter Gisela Brandt, die mich in besonderem Maße unterstützt hat.

Abschließend möchte ich mich noch bei den Instituten bedanken, auf deren Computer-Ressourcen die Simulationen durchgeführt wurden. Die Simulationen für $\beta = 5$ wurden mit dem Condor-System¹³ erhalten, über das die Simulationen auf die Computer der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster verteilt werden konnten. Die Simulationen für $\beta = 7.5$ wurden auf dem Linux-Cluster KABRU am Institute of Mathematical Sciences, Chennai (Indien), durchgeführt. Ich bin beiden Instituten dafür dankbar, mir diese Kapazitäten zur Verfügung gestellt zu haben.

¹³<http://www.cs.wisc.edu/condor>

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbst angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Bastian Brandt,
Münster, den 08.01.2008.