

WESTFÄLISCHE  
WILHELMS-UNIVERSITÄT  
MÜNSTER



## DIPLOMARBEIT

---

# Resummationsverfahren zur perturbativen Bestimmung des thermodynamischen Drucks der magnetischen Quantenchromodynamik

---

vorgelegt von  
DANIEL BIELETZKI

Betreuer:  
Professor Dr. O. PHILIPSEN

MÜNSTER, den 14. Februar 2009



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2 Quantenchromodynamik bei endlichen Temperaturen</b>	<b>7</b>
2.1 Das Standardmodell der Elementarteilchen . . . . .	7
2.1.1 Ein Quantum Geschicht . . . . .	7
2.1.2 Die Lagrangedichte und Eigenschaften der QCD . . . . .	8
2.2 Pfadintegraldarstellung thermischer Zustandssummen . . . . .	9
2.2.1 Grundlagen . . . . .	9
2.2.2 Bosonen und Fermionen . . . . .	10
2.2.3 Nicht-abelsche Eichtheorien . . . . .	11
<b>3 Perturbative Entwicklung des thermodynamischen Drucks</b>	<b>13</b>
3.1 Illustration der Eichinvarianz des thermodynamischen Drucks am Beispiel der QED . . . . .	13
3.1.1 Freies Photonengas . . . . .	13
3.1.2 Erste Korrektur . . . . .	15
3.2 Zusammenbruch der Störungstheorie in der QCD . . . . .	16
3.2.1 Impulsskalen des Quark-Gluon-Plasmas . . . . .	16
3.2.2 Ring-Diagramme . . . . .	16
3.2.3 Infrarot-Divergenzen . . . . .	17
<b>4 Dimensionale Reduzierung</b>	<b>19</b>
4.1 Dreidimensionale effektive Theorien . . . . .	19
4.1.1 Elektrostatische QCD . . . . .	20
4.1.2 Magnetostatische QCD . . . . .	20
4.2 Der thermodynamische Druck des Quark-Gluon-Plasmas . . . . .	21
4.2.1 Das Gesamtresultat . . . . .	21
4.2.2 Numerische Konvergenz . . . . .	23
<b>5 Massenerzeugung für Gluon-Felder in der MQCD</b>	<b>27</b>
5.1 Grundlagen der spontanen Symmetriebrechung . . . . .	27
5.2 Resummationsverfahren mit dem nichtlinearen $\sigma$ -Modell . . . . .	28
5.2.1 Eigenschaften des nichtlinearen $\sigma$ -Modells . . . . .	28
5.2.2 Vorgehensweise der Resummation . . . . .	29
5.2.3 Motivation . . . . .	29

<b>6 Perturbative Bestimmung des Koeffizienten <math>\beta_G</math></b>	<b>33</b>
6.1 Herleitung der resummierten effektiven Lagragedichte . . . . .	33
6.1.1 Grundlage für das nichtlineare $\sigma$ -Modell . . . . .	33
6.1.2 SU(2) . . . . .	34
6.1.3 SU( $N$ ) . . . . .	36
6.2 Berechnung der Schleifen-Diagramme . . . . .	40
6.2.1 Feynman-Regeln für Propagatoren . . . . .	40
6.2.2 Feynman-Regeln für Vertizes . . . . .	41
6.2.3 Schleifen-Ordnung $l^0$ . . . . .	44
6.2.4 Schleifen-Ordnung $l^1$ . . . . .	45
6.3 Das Gesamtresultat des Drucks der MQCD . . . . .	51
6.3.1 Der Koeffizient $\alpha_G$ . . . . .	53
6.3.2 Der Koeffizient $\beta_G$ . . . . .	53
<b>7 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>57</b>
<b>A Anhang</b>	<b>59</b>
A.1 Gruppentheoretische Relationen . . . . .	59
A.2 Feynman-Regeln der QED und Spurtheoreme über Dirac-Matrizen . . . . .	60
A.3 Koeffizienten des Drucks der QCD . . . . .	61
A.4 Standardintegrale . . . . .	62
A.5 Frequenzsummenintegrale . . . . .	63
A.6 Reduzierung von 2-Schleifen-Integrale auf Standardintegrale . . . . .	65
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>69</b>

# 1 Einleitung

Nach heutigem Verständnis bestand das Universum kurz nach dem Urknall aus einem Materiezustand ungebundener Quarks und Gluonen, dem sogenannten Quark-Gluon-Plasma (QGP). Bereits  $10^{-5}$  s nach dem Urknall erfolgten durch die abkühlende Entwicklung des Universums die Hadronisierung des Plasmas und der Übergang zur gebundenen Phase. Die Bestimmung der Natur dieses Phasenübergangs ist Gegenstand aktueller Forschung [1]. Experimentell ist die Region in der Umgebung der kritischen Temperatur und verschwindenden chemischen Potentials durch Experimente an den Teilchenbeschleunigern RHIC des Brookhaven National Laboratory und LHC am CERN zugänglich.

Die asymptotische Freiheit und das resultierende wechselwirkungsarme Verhalten von Quarks und Gluonen bei hohen Temperaturen ermöglichen eine perturbative Behandlung der thermischen Quantenchromodynamik (QCD) zur Untersuchung thermodynamischer Aspekte des QGPs [2]. Im Fokus dieser Arbeit steht der thermodynamische Druck des Plasmas, der durch Auswertung geschlossener Feynman-Diagramme berechnet wird. Die perturbative Herangehensweise zur Bestimmung des Drucks stößt jedoch infolge der Existenz von Infrarot-Divergenzen (IR-Divergenzen) an ihre Grenzen [3]. Durch die Bildung einer dimensional reduzierten effektiven Theorie, der magnetostatischen QCD (MQCD), können die IR-Divergenzen isoliert werden [4, 5]. Da die Berechnung des Drucks der MQCD bereits in führender Ordnung der effektiven Kopplungskonstante  $\frac{g^2 T}{m}$  mit IR-Divergenzen verknüpft ist, stellt die MQCD eine perturbativ nicht zugängliche Theorie dar. Um die IR-Divergenzen zu dämpfen, wird eine durch den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung eingeführte magnetische Masse  $m \sim g^2 T$  generiert. Damit die MQCD dennoch eine perturbative Behandlung zulässt, ist eine Umstrukturierung der perturbativen Entwicklung mittels einer Resummationsmethode [6, 7] notwendig. Unter Einführung eines Schleifen-Parameters  $l$  wird dabei ein massenerzeugender Term addiert und wieder subtrahiert. Das Resummationsverfahren begründet somit eine Störungstheorie, die nicht mehr Ordnung für Ordnung in die effektive Kopplungskonstante der Theorie eingeht, sondern in eine Potenzreihe in dem Schleifen-Parameter  $l$  resultiert.

Die Zielsetzung dieser Arbeit kann durch die folgende nicht-triviale Fragestellung zusammengefasst werden: Kann eine perturbative Behandlung des thermodynamischen Drucks der nicht-perturbativen MQCD durch eine Umstrukturierung der perturbativen Entwicklung mittels des Resummationsverfahrens realisiert werden? Das Resummationsverfahren wurde bereits bei der Auswertung sogenannter *gap*-Gleichungen bzw. von Selbstenergie-Diagrammen sowohl im Higgs-Modell, als auch im nichtlinearen  $\sigma$ -Modell (NL $\sigma$ M) zur Bestimmung des Koeffizienten der magnetischen Masse  $m = C g^2 T$  angewandt [6–9]. Da die Berechnungen zumindest auf 1-Schleifen-Niveau ein eichinvariantes Ergebnis erzielen, besteht die Erwartung, dass die Methode auch für den thermodynamischen Druck der MQCD ein zufriedenstellendes Resultat auf 2-Schleifen-Niveau liefert, denn dazu ist lediglich eine weitere Impulsintegration einzufügen, die einer Ver-

knüpfung der äußeren Beine eines Selbstenergie-Diagramms entspricht.

In Kapitel 2 werden die grundlegenden Kenntnisse zu thermischen Feldtheorien vorgestellt. Die Pfadintegraldarstellung thermischer Zustandssummen stellt dabei die Basis für die Berechnung des thermodynamischen Drucks von Vielteilchensystemen wie dem QGP dar. Die perturbative Entwicklung des thermodynamischen Drucks und der zu den IR-Divergenzen korrespondierende Zusammenbruch der Störungstheorie werden in Kapitel 3 behandelt. Da es sich bei dem Druck um eine physikalische Größe handelt, ist die Eichinvarianz dieser Größe zu fordern. Am Beispiel der Quantenelektrodynamik (QED) wird die Eichinvarianz des Drucks bis zur zweiten perturbativen Ordnung illustriert. Die Herleitung der Kette der dimensional reduzierten Theorien ( $\text{QCD} \rightarrow \text{EQCD} \rightarrow \text{MQCD}$ ) und die damit verbundene Isolation der IR-Divergenzen in die MQCD werden in Kapitel 4 aufgezeigt. Des Weiteren wird der Druck des QGPs bis zur perturbativ höchstmöglichen Ordnung  $g^6 \ln g$  präsentiert und die numerische Konvergenz in Abhängigkeit der IR-Beiträge aus den beiden dimensional reduzierten effektiven Theorien diskutiert [10]. In Kapitel 5 wird das Resummationsverfahren vorgestellt, welches eine perturbative Behandlung der MQCD zulässt. Dabei wird als massenerzeugender Term die Lagrangedichte des  $\text{NL}\sigma\text{Ms}$  verwendet, da die Dynamik des Eichfeldes in der ungebundenen Phase weitgehend unabhängig vom Higgs-Feld ist und daher durch das  $\text{NL}\sigma\text{M}$  approximiert werden kann [8]. Der gegenüber dem Higgs-Modell daraus resultierende Vorteil ist eine Reduzierung der Anzahl der Wechselwirkungsterme, wodurch eine perturbative Behandlung erheblich vereinfacht wird. In Kapitel 6 sind die Herleitung der resummierten effektiven Lagrangedichte und die zu den Wechselwirkungstermen korrespondierenden Berechnungen der Schleifen-Diagramme dargestellt. Abschließend werden die Ergebnisse bzw. die Koeffizienten des Drucks der MQCD vorgestellt und diskutiert. Nach einer Zusammenfassung in Kapitel 7 werden im Anhang unter anderem gruppentheoretische Relationen für  $\text{SU}(N)$ -Generatoren sowie Lösungswege der in der Rechnung vorkommenden Integrale zusammengestellt.

## 2 Quantenchromodynamik bei endlichen Temperaturen

In diesem Kapitel wird ein kurzer historischer Überblick zur Entwicklung des Standardmodells der Elementarteilchen gegeben und die Quantisierung von Feldtheorien mittels des Pfadintegralformalismus vorgestellt. Die Pfadintegraldarstellung einer Feldtheorie ermöglicht einen einfachen Zugang zur Beschreibung von Vierteilchensystemen und Berechnung ihrer thermodynamischen Größen.

### 2.1 Das Standardmodell der Elementarteilchen

Das in den 60er und 70er Jahren begründete Standardmodell beschreibt alle bekannten elementaren Teilchen und ihre Wechselwirkungen mit Ausnahme der Gravitation. Es berücksichtigt also drei der vier in der Natur beobachtbaren fundamentalen Kräfte: die elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung. Die Gravitation wird hingegen durch eine klassische Theorie, die Allgemeine Relativitätstheorie, beschrieben.

Die Formulierung von Quantenfeldtheorien als Eichtheorien, d. h. Theorien, deren Lagrangedichte invariant unter lokalen Eichtransformationen ist, bildet die Grundlage für das Standardmodell.

#### 2.1.1 Ein Quantum Geschichte

Yang und Mills [11] führten im Jahr 1954 die erste nicht-abelsche Eichtheorie ein, welche eine Erweiterung der in den 40er Jahren begründeten QED darstellt. Die QED ist ein Beispiel einer abelschen Eichtheorie und konstituierte die erste konsistente quantentheoretische Beschreibung eines physikalischen Feldes, d. h. des Photons als Eichboson bzw. Vermittler der elektromagnetischen Wechselwirkung. Die theoretischen Vorhersagen dieser Theorie korrespondieren in beeindruckender Präzision mit dem Experiment, wie insbesondere das  $(g - 2)$ -Experiment am Brookhaven National Laboratory zeigt.

Die Entdeckung der spontanen Symmetriebrechung durch Goldstone, Nambu und Jona-Lasinio [12, 13] ebnete im Jahr 1967 den Weg zu einer Vereinheitlichung der QED und der schwachen Wechselwirkung zum Glashow-Salam-Weinberg-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung [14, 15]. Die elektroschwache Wechselwirkung wird durch die  $U(1) \times SU(2)$ -Symmetriegruppe beschrieben und stellt einen der beiden Hauptbestandteile des Standardmodells dar.

Die QCD, die Theorie der starken Wechselwirkung, bildet den zweiten Hauptbestandteil des Standardmodells. Gell-Mann und Zweig gelang im Jahr 1964 mit dem statischen Quarkmodell [16] eine erste Klassifizierung von Hadronen, d. h. aus Konstituentenquarks zusammengesetzten Teilchen. Das statische Quarkmodell wird durch die  $SU(3)$ -Flavour-Symmetriegruppe beschrieben, die aufgrund der gegenüber der typischen Zerfallsdauer

für einen starken Zerfall um etwa 14 Größenordnungen höheren Lebensdauer des  $\Lambda$ -Teilchens ( $\tau_\Lambda \sim 10^{-10}s$ ) mit der Hypothese einer neuen Erhaltungsgröße, der Seltsamkeit, eingeführt wurde. Die total-symmetrischen Wellenfunktionen (Orts-, Spin- und Flavouranteil) der  $\Delta^{++}$ - und  $\Omega^-$ -Zustände in diesem Modell verletzen jedoch das Pauli-Prinzip, weil sie aus identischen Quarks aufgebaut sind. Durch Einführung einer lokalen  $SU(3)$ -Farb-Symmetriegruppe wurde das Problem gelöst. Dadurch war die Grundlage für die Formulierung der starken Wechselwirkung durch die QCD geschaffen.

Die Zusammensetzung des Glashow-Salam-Weinberg-Modells und der QCD repräsentiert das Standardmodell der Elementarteilchen, das durch die  $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ -Symmetriegruppe charakterisiert wird. Die Vereinheitlichung des Standardmodells und der Gravitationstheorie setzt eine quantentheoretische Beschreibung der Allgemeinen Relativitätstheorie voraus und ist daher eine der zur Zeit größten Herausforderungen der theoretischen Physik.

### 2.1.2 Die Lagrangedichte und Eigenschaften der QCD

Die QCD ist derzeit die etablierte Theorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung zwischen farbladungstragenden Quarks und Gluonen, die in der Natur nur in hadronischen farbneutralen Zuständen gebunden sind. Sie wird durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}(x)(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi(x) \quad (2.1)$$

formuliert, wobei  $m$  die Masse der Quarks und  $\gamma_\mu$  Dirac-Matrizen sind. Die Quark-Felder  $\psi(x) = (\psi_{\alpha,c,f}(x))$  tragen einen Flavourindex  $f$  für die sechs verschiedenen Quarksarten, einen Farbindex  $c$  und einen Spinorindex  $\alpha$ . Der erste Term in Gleichung (2.1) ist der von Yang und Mills postulierte Eichfeldterm, der aufgrund der Forderung nach Renormierbarkeit der einzige mögliche Ausdruck bei gegebener  $SU(N)$ -Symmetrie ist. Die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a, \quad (2.2)$$

in der die Gluonfelder  $A_\mu = A_\mu^a T^a$  wegen der geforderten lokalen  $SU(N)$ -Farbinvarianz auftreten und mit den Quarkfeldern koppeln, definiert den Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] \implies F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.3)$$

Die Generatoren  $T^a$  der Gruppe  $SU(N)$  mit  $a = 1, \dots, N^2 - 1$  unterliegen der Lie-Algebra und genügen der Vertauschungsrelation

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (2.4)$$

wobei die  $f^{abc}$  vollständig antisymmetrische Strukturkonstanten sind. Für  $SU(2)$  werden die Generatoren durch die drei  $2 \times 2$ -Pauli-Matrizen und für  $SU(3)$  durch die acht  $3 \times 3$ -Gell-Mann-Matrizen dargestellt. Einige nützliche gruppentheoretische Relationen für  $SU(N)$  Generatoren in der fundamentalen Darstellung sind im Anhang (Kap. A.1) aufgeführt.

Aufgrund der Form des Feldstärketensors bzw. der Selbstwechselwirkung der masselosen Gluonen kommt es zu Effekten wie dem Quarkeinschluss in farbneutrale Hadronen,

dem Confinement. Diese Eigenschaft impliziert, dass in der Natur keine freien Quarks existieren.

Das nahezu wechselwirkungsfreie Verhalten von Quarks und Gluonen bei kurzen Abständen bzw. hohen Impulsüberträgen wird als asymptotische Freiheit bezeichnet. Im Jahr 1973 veröffentlichten Politzer, Gross und Wilczek [17,18] die Entdeckung, dass die laufende Kopplungskonstante  $g^2$  der QCD bzw. die negative  $\beta$ -Funktion  $\alpha_s$  als Funktion der Impuls- bzw. Massenskala  $M$  logarithmisch gegen Null strebt:

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} = \frac{12\pi}{(11N - 2N_f) \ln\left(\frac{M^2}{\Lambda^2}\right)}. \quad (2.5)$$

$N$  bezeichnet die Anzahl der Farben,  $N_f$  die Anzahl der Quark-Flavour und  $\Lambda$  die Energieskala der QCD. In der thermischen QCD ist die Impuls- bzw. Massenskala eine Funktion proportional zur Temperatur, so dass infolge der asymptotischen Freiheit eine perturbative Behandlung der QCD insbesondere bei hohen Temperaturen, in der ungebundene Quarks und Gluonen erwartet werden, möglich ist. Wie in Kapitel 3 deutlich wird, kann durch das Auftreten von IR-Divergenzen die perturbative Berechnung des thermodynamischen Drucks dennoch nicht bis in beliebig hohe Ordnungen durchgeführt werden.

## 2.2 Pfadintegraldarstellung thermischer Zustandssummen

Um Vielteilchensysteme wie das Quark-Gluon-Plasma (QGP) beschreiben bzw. die Thermodynamik dieser Systeme untersuchen zu können, bedarf es der Quantisierung von Feldern. Neben der kanonischen Quantisierung existiert noch ein weiterer äquivalenter Zugang: die Pfadintegralquantisierung, die im Folgenden in Anlehnung an [19] vorgestellt wird (vgl. auch [2]).

### 2.2.1 Grundlagen

Das Verhalten aller Theorien bei endlichen Temperaturen und verschwindendem chemischen Potential  $\mu$  wird durch die kanonische Zustandssumme

$$Z = \text{Tr} [e^{-\beta H}] \quad (2.6)$$

beschrieben, wobei  $\beta = 1/T$  die inverse Temperatur und  $H$  die Hamilton-Funktion der Theorie kennzeichnen. Thermische Erwartungswerte von physikalischen Observablen  $O$  sind gegeben durch

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta H} O]. \quad (2.7)$$

Aus der Zustandssumme  $Z$  lassen sich alle thermodynamischen Eigenschaften eines Systems bestimmen, wie z. B. die freie Energie, Entropie oder der Druck

$$p = \frac{\partial}{\partial V} T \ln Z, \quad (2.8)$$

wobei  $T$  die Temperatur und  $V$  das Volumen des Systems sind. Für große, homogene Systeme entspricht der thermodynamische Druck der negativen freien Energie:

$$-f = \frac{T}{V} \ln Z = p. \quad (2.9)$$

Grundlage der Quantisierung von Feldern durch den Pfadintegralformalismus bei endlichen Temperaturen ist die Umformulierung eines Erwartungswertes in eine unendliche Summe über alle möglichen Pfade zwischen Anfangs- und Endzustand eines physikalischen Systems gewichtet mit dem Exponential ihrer euklidischen Wirkung  $S_E$ :

$$Z = \text{Tr}[e^{-\beta H}] = \int d\phi \langle \phi | e^{-\beta H} | \phi \rangle = \int [d\phi] e^{-S_E[\phi]}. \quad (2.10)$$

Das Funktionalintegral wird durch die Notation  $[d\phi]$  gekennzeichnet. Die in der euklidischen Raumzeit dargestellte Zustandssumme ist analog zur Zustandssumme eines kontinuierlichen statistischen Systems mit  $\beta H = S_E$ .

### 2.2.2 Bosonen und Fermionen

Die Zustandssumme bosonischer Felder  $\phi$  ist gegeben durch

$$Z = N \int_{\text{per.}} [d\phi] \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L} \right), \quad (2.11)$$

wobei die periodischen Randbedingungen  $\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}, \beta)$  explizit Berücksichtigung finden. Die Normierungskonstante  $N$  ist aufgrund des 3. Hauptsatzes der Thermodynamik irrelevant. Der Satz besagt, dass die Entropie für  $T = 0$  gegen einen festen Grenzwert geht. Demnach verändert eine Multiplikation der Zustandssumme mit einer temperaturunabhängigen Konstante die Thermodynamik nicht.

Aufgrund der endlichen zeitlichen Ausdehnung durch die Definition der Temperatur existieren in dieser Richtung nur diskrete Frequenzen, die sogenannten Matsubara-Frequenzen. Für Bosonen ergibt sich

$$\omega_n = 2n\pi T \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Die Zustandssumme fermionischer Felder  $\psi$  ist gegeben durch

$$Z = N \int_{\text{anti-per.}} [d\psi^*][d\psi] \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L} \right) \quad (2.13)$$

und berücksichtigt die anti-periodischen Randbedingungen  $\psi(\mathbf{x}, 0) = -\psi(\mathbf{x}, \beta)$ . Somit folgt für die Matsubara-Frequenzen

$$\omega_n = (2n + 1)\pi T \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.14)$$

Bei der Auswertung der Zustandssumme für Fermionen muss berücksichtigt werden, dass über Grassmann-Zahlen anstelle von komplexen Zahlen integriert wird. Für die

Gauß-Integration ergibt sich dadurch ein Faktor -2 im Exponenten der zu berechnenden Determinante gegenüber der Auswertung der Zustandssumme für Bosonen:

$$Z = \int [d\phi] \exp[-\frac{1}{2}(\phi D\phi)] \sim (\det D)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.15)$$

$$Z = \int [d\psi^*][d\psi] \exp[-(\psi^* D\psi)] \sim (\det D). \quad (2.16)$$

Für ein nichtwechselwirkendes Gas aus Bosonen oder Fermionen kann der Druck aus dem Logarithmus der Zustandssumme

$$\ln Z = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left( 1 \pm e^{-\beta(\omega-\mu)} \right)^{\pm 1} \quad (2.17)$$

berechnet werden, wobei das obere Vorzeichen der Fermi-Dirac- und das untere Vorzeichen der Bose-Einstein-Statistik entspricht.

Der thermodynamische Druck von masselosen skalaren Feldern ohne chemisches Potential ist:

$$p = -\frac{1}{2} \frac{T}{V} \sum_n \sum_p \ln \left( \beta^2 (\omega_n^2 + p^2) \right) = \frac{\pi^2}{90} T^4. \quad (2.18)$$

Die entsprechende Rechnung ist dem Anhang (Kap. A.5) zu entnehmen.

### 2.2.3 Nicht-abelsche Eichtheorien

Infolge der Eichinvarianz entsprechen nicht-abelsche Eichtheorien Systemen mit eingeschränkten dynamischen Variablen, d. h. es existieren Variablen, die keine tatsächlichen dynamischen Variablen sind. Um im Pfadintegralformalismus ein Überabzählen von Feldkonfigurationen, die zum selben physikalischen Zustand gehören, zu verhindern, ist eine Eichfixierung der Theorie erforderlich. Die Eichfixierung wird durch den Ansatz von Faddeev und Popov [20] umgesetzt, mit der die Zustandssumme der Yang-Mills-Eichtheorie in die folgende Form übergeht:

$$Z = \int [dA_\mu^a] \delta(G^b) \det \left( \frac{\delta G^c}{\delta \omega^d} \right) \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int d^3 x \mathcal{L}_{\text{YM}} \right). \quad (2.19)$$

$G^a$  bezeichnet eine beliebige Eichfixierungsfunktion und  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  die euklidische Yang-Mills-Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (2.20)$$

Durch eine spezielle Wahl der Eichfixierungsfunktion  $G^a = \partial_\mu A_\mu^a = 0$ , der sogenannten Lorenz-Eichung, und der Umformulierung der entsprechenden Determinante aus (2.19) in ein Pfadintegral über grassmannwertige Variablen ergibt sich:

$$Z = \int [dA_\mu^a] [d(c^a)^*] [dc^a] \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int d^3 x (\mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{gf}} + \mathcal{L}_{\text{FP}}) \right). \quad (2.21)$$

$\mathcal{L}_{\text{gf}}$  bezeichnet den Eichfixierungsterm und  $\mathcal{L}_{\text{FP}}$  die Lagrangedichte der Faddeev-Popov-Geistfelder  $c^a$ :

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = (\partial_\mu (c^a)^*) (\partial_\mu c^a) + g f^{abc} (c^a)^* c^b A_\mu^c. \quad (2.23)$$

Der Faddeev-Popov-Ansatz stellt eine Methode dar, um das unendlich-funktionale Volumen der Eichorbits herauszudividieren, d. h. durch die Einführung der Geistfelder und deren Kopplung an die Eichbosonen (2.23) werden die unphysikalischen Freiheitsgrade, die durch das Überabzählen von Feldkonfigurationen zustande kommen, abgezogen. Demnach sind die Faddeev-Popov-Geistfelder lediglich ein mathematisches Hilfsmittel und korrespondieren daher nicht zu reellen Teilchen.

Die Eichfixierung führt auf einen modifizierten Propagator folgender Form:

$$D_{\mu\nu}^{ab} = \frac{\delta^{ab}}{p^2} \left( \delta_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right). \quad (2.24)$$

Die Eichinvarianz physikalischer Größen bzw. ihre Unabhängigkeit vom Eichparameter  $\xi$  ist eine notwendige Voraussetzung für den Erfolg einer Theorie. Die Eichfixierung nicht-abelscher Eichtheorien bricht allerdings die allgemeine lokale Eichsymmetrie. Es bleibt jedoch eine spezielle lokale Eichsymmetrie erhalten, die durch die sogenannten BRS-Transformationen ausgedrückt wird [21]. Die Existenz dieser eleganten, aber komplizierten Methode, die nach Becchi, Rouet und Stora benannt ist, stellt insbesondere die Eichinvarianz physikalischer Größen einer Eichtheorie sicher.

Da sich in der analytischen Rechnung in Kapitel 6 speziell die Frage nach der Eichinvarianz des thermodynamischen Drucks gestellt hat, wird im anschließenden Kapitel die Eichinvarianz des Drucks in der QED bis zur zweiten perturbativen Ordnung illustriert.

# 3 Perturbative Entwicklung des thermodynamischen Drucks

Die perturbative Behandlung einer Theorie, in der die Kopplungskonstante sehr klein gegenüber 1 ist, wird durch die Entwicklung der Zustandssumme in der Kopplungskonstante umgesetzt. Die Wirkung einer Theorie kann mit  $S = S_0 + S_I$  in einen freien Anteil  $S_0$  und einen Wechselwirkungsanteil  $S_I$  zerlegt werden. Die perturbative Entwicklung der Zustandssumme für ein skalares Feld  $\phi$  ergibt somit:

$$Z = \int [d\phi] e^{-(S_0 + S_I)} = \int [d\phi] e^{-S_0} \left( 1 - S_I + \frac{1}{2} S_I^2 - \dots \right). \quad (3.1)$$

Folglich tragen alle perturbativen Korrekturen, deren Wechselwirkungsterme mit geschlossenen Feynman-Diagrammen bzw. Schleifen-Diagrammen assoziiert werden, direkt zum Druck (2.8) bei.

Wegen der asymptotischen Freiheit von nicht-abelschen Eichtheorien ist eine perturbative Behandlung des QGP bzw. der QCD bei hohen Temperaturen möglich. In diesem Kapitel werden aufgrund des Auftretens von IR-Divergenzen die Grenzen der Störungstheorie aufgezeigt.

## 3.1 Illustration der Eichinvarianz des thermodynamischen Drucks am Beispiel der QED

Im Folgenden wird am Beispiel der QED die Eichinvarianz des thermodynamischen Drucks, die für jede Ordnung in der Störungstheorie gelten muss, in führender Ordnung und in  $O(g^2)$  explizit gezeigt, da in betreffenden Lehrbüchern [19] zur Vereinfachung stets Rechnungen in Feynman-Eichung durchgeführt werden. Die Kopplungskonstante der QED ( $e^2 = \alpha \approx \frac{1}{137}$ ) lässt dabei eine perturbative Behandlung zu.

### 3.1.1 Freies Photonengas

Die Zustandssumme des freien Photonengases in kovarianter Eichung  $G = \partial_\mu A_\mu = 0$  mit  $\rho$  als Eichfixierungsparameter ist gegeben durch

$$Z = \int [dA_\mu] \det(\partial^2) \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int d^3x (\mathcal{L}_0 + \frac{1}{2\rho} (\partial_\mu A_\mu)^2) \right), \quad (3.2)$$

$$\text{wobei } \mathcal{L}_0 = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \text{mit } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.3)$$

Die Determinante in (3.2) lässt sich nützlicherweise als Pfadintegral über grassmannwerte Felder darstellen, die in der QCD als Faddeev-Popov-Geistfelder bezeichnet werden.

In der QED dienen sie lediglich als mathematisches Hilfsmittel zur Auswertung folgender Gauß-Integrale, um zwei der vier Freiheitsgrade der Photonen zu eliminieren:

$$Z = \int [dA_\mu] \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ A_\mu \left( \delta_{\mu\nu} \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 \right) + (1 - \frac{1}{\rho}) \partial_\mu \partial_\nu \right) A_\nu \right] \right) \\ \cdot \int [d\bar{c}] [dc] \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[ \bar{c} \left( -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 \right) c \right] \right). \quad (3.4)$$

Unter Ausnutzung von (2.15) und (2.16) und  $\ln \det D = \text{Tr } \ln D$  folgt somit für den Logarithmus der Zustandssumme im Impulsraum:

$$\begin{aligned} \ln Z &= \ln \det D_1 - \frac{1}{2} \ln \det D_2 \\ &= \ln \left[ \prod_n \prod_p (\beta^2 (\omega_n^2 + p^2)) \right] - \frac{1}{2} \ln \left[ \prod_n \prod_p \left( \frac{\beta^8}{\rho} (\omega_n^2 + p^2)^4 \right) \right] \\ &= \sum_n \sum_p \left[ \frac{1}{2} \ln \rho - 2 \ln (\beta^2 (\omega_n^2 + p^2)) + \ln (\beta^2 (\omega_n^2 + p^2)) \right] \\ &= - \sum_n \sum_p \ln (\beta^2 (\omega_n^2 + p^2)) \quad (3.5) \\ \text{mit } D_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\xi} \omega_n^2 + p^2 & \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \omega_n p_1 & \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \omega_n p_2 & \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \omega_n p_3 \\ \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \omega_n p_1 & \omega_n^2 + p^2 - \frac{1}{\xi} p_1^2 & \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) p_1 p_2 & \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) p_1 p_3 \\ \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \omega_n p_2 & \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) p_1 p_2 & \omega_n^2 + p^2 - \frac{1}{\xi} p_2^2 & \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) p_2 p_3 \\ \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) \omega_n p_3 & \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) p_1 p_3 & \left( \frac{1}{\xi} - 1 \right) p_2 p_3 & \omega_n^2 + p^2 - \frac{1}{\xi} p_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei wurde der temperaturunabhängige Term wegen des Nernst'schen Theorems nicht berücksichtigt, wodurch für den Druck des freien Photonengases Eichinvarianz erzielt wird:

$$p_b = -\frac{T}{V} \sum_n \sum_p \ln (\beta^2 (\omega_n^2 + p^2)) \stackrel{(2.18)}{=} \frac{\pi^2}{45} T^4. \quad (3.6)$$

Der Unterschied zwischen diesem Ergebnis und dem für masselose skalare Felder (2.18) entspricht einem Faktor 2 und spiegelt die zwei Polarisationszustände des Photons wider. Die zwei zusätzlichen unphysikalischen Freiheitsgrade wurden durch die grassmannwertigen Felder eliminiert. Für die Elektronen ergibt sich folgender fermionischer Beitrag zum Druck der freien QED:

$$p_f = \frac{7\pi^2}{180} T^4. \quad (3.7)$$

Die Berechnung des Drucks des freien Gluonengases in der QCD erfolgt analog, allerdings unter der Berücksichtigung der Anzahl der Gluonen mit  $N^2 - 1$ . Die analoge Rechnung zu (3.5) ergibt den sogenannten Stefan-Boltzmann-Grenzwert des Drucks eines idealen Gluonengases:

$$p_{\text{SB}} = \frac{(N^2 - 1)\pi^2}{45} T^4. \quad (3.8)$$

### 3.1.2 Erste Korrektur

Da die QED eine abelsche Eichtheorie darstellt, existieren zwischen den Photonen keine Selbstwechselwirkungen. Der einzige Wechselwirkungsterm der vollen QED ist die Kopplung von Photonen und Elektronen mit der elektrischen Ladung bzw. Kopplungskonstante  $e$ :

$$\mathcal{L}_I = -e\bar{\psi}\mathcal{A}\psi. \quad (3.9)$$

Das dazu entsprechende Schleifen-Diagramm zur Berechnung der ersten Korrektur des Drucks bildet sich folgendermaßen ab:

$$-\frac{1}{2} \frac{T}{V} \text{ (Schleifen-Diagramm)} = -\frac{1}{2} e^2 \sum \sum \left[ \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu (\not{p} + m)(\not{q} + m)\gamma_\mu]}{(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)(p - q)^2} \right. \\ \left. + (\rho - 1) \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu (\not{p} + m)(p - q)_\mu (p - q)_\nu (\not{q} + m)\gamma_\nu]}{(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)(p - q)^4} \right]. \quad (3.10)$$

Das Minuszeichen resultiert aus dem fermionischen Charakter und der Faktor  $1/2$  steht für den Symmetriefaktor des Schleifen-Diagramms. Die Frequenzsummenintegrale werden üblicherweise mittels Kontur-Integration ausgewertet, die jedes reelle Teilchen automatisch auf seine Massenschale setzt. Wird die zweite Spur in (3.10) mit  $p^2 = m^2$  und  $q^2 = m^2$  ausgeführt, so liefert der Zähler, unabhängig von der Behandlung des singulären Charakters der Frequenzsummenintegrale mittels Kontur-Integration, keinen Beitrag. Daraus folgt, dass der eichabhängige Term insgesamt bei der Berechnung nicht berücksichtigt werden muss:

$$\text{Tr} [\gamma_\mu (\not{p} + m)(p - q)_\mu (p - q)_\nu (\not{q} + m)\gamma_\nu] |_{p^2=m^2; q^2=m^2} = 0. \quad (3.11)$$

Somit trägt nur der erste Term in (3.10) zum Druck bei, was einer Berechnung in Feynman-Eichung entspricht. Nach Auswertung der Spur für masselose Elektronen resultiert daher

$$-\frac{1}{2} \frac{T}{V} \text{ (Schleifen-Diagramm)} = -\frac{1}{2} e^2 \sum \sum \left[ \frac{\text{Tr} [\gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma_\mu]}{p^2 q^2 (p - q)^2} \right] \\ = -2e^2 \left[ (I_f(0))^2 + 2I_f(0)I_b(0) \right] = -\frac{5e^2}{288} T^4 \quad (3.12)$$

$$\text{mit } I_f(0) = \sum_{p_f} \frac{1}{p^2} = -\frac{T^2}{24}, \quad (3.13)$$

$$I_b(0) = \sum_{p_b} \frac{1}{p^2} = \frac{T^2}{12}, \quad (3.14)$$

$$\text{wobei } \sum = T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}.$$

Die Indizes  $f$  bzw.  $b$  bezeichnen die Integration über Impulse von Fermionen bzw. Bosonen. Sowohl die zugrunde liegenden Feynman-Regeln und benötigten Spurtheoreme über Dirac-Matrizen, als auch die Lösung der Frequenzsummenintegrale sind dem Anhang (Kap. A.2 und A.5) zu entnehmen.

Zusammenfassend stellt sich der Druck der QED bis zur zweiten perturbativen Ordnung folgendermaßen dar:

$$p_{\text{QED}} = \frac{\pi^2}{45} T^4 \left( 1 + \frac{7}{4} \right) - \frac{5e^2}{288} T^4. \quad (3.15)$$

## 3.2 Zusammenbruch der Störungstheorie in der QCD

### 3.2.1 Impulsskalen des Quark-Gluon-Plasmas

Die perturbative Behandlung des QGPs erscheint durch die asymptotische Freiheit möglich. Bei hohen Temperaturen ist die Kopplungskonstante der QCD  $g^2(T) \sim 1/\ln(T/\Lambda)$  sehr klein (vgl. 2.5), d. h. das QGP entspricht einem idealen Gas von Quarks und Gluonen. Daher lässt sich eine Hierarchie von Impulsskalen des QGPs angeben, die zur Erzeugung von dimensional reduzierten effektiven Theorien (Kap. 4) genutzt wird.

Es existieren drei Impulsskalen des QGPs:

- Die Skala der sogenannten *harten* Moden ( $\sim 2\pi T$ ) gibt die typische Impulsskala von massiven Quarks und energiereichen Gluonen wieder.
- Die Impulsskala der *weichen* Moden ( $\sim gT$ ) wird mit der Abschirmung durch *farb-elektrostatische* Felder  $A_0^a$  assoziiert und ist in der dimensional reduzierten Theorie der elektrostatischen QCD (EQCD) enthalten.
- Die Impulsskala der *ultra-weichen* Moden ( $\sim g^2 T$ ) wird mit der Abschirmung durch *farb-magnetostatische* Felder  $A_k^a$  assoziiert und ist in der dimensional reduzierten Theorie der nicht-perturbativen magnetostatischen QCD (MQCD) enthalten.

### 3.2.2 Ring-Diagramme

Die perturbative Entwicklung des Drucks der QCD ist keine übliche Potenzreihe in der Kopplungskonstante  $g^2$ , sondern bildet sich wie folgt ab, wobei  $c_k$  mit  $k = 1, \dots, 6$  numerische Koeffizienten sind:

$$p = T^4 \left[ c_1 + c_2 g^2 + c_3 g^3 + \left( c'_4 \ln \left( \frac{1}{g} \right) + c_4 \right) g^4 + c_5 g^5 + c'_6 g^6 \ln \left( \frac{1}{g} \right) + O(g^6) \right] \quad (3.16)$$

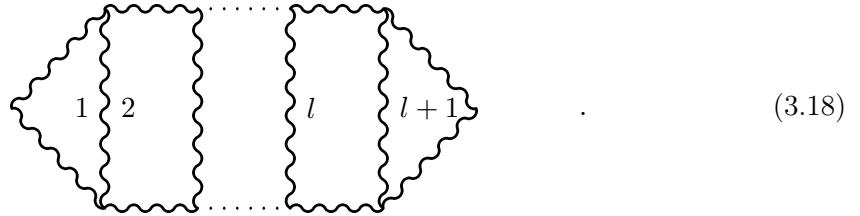
Die Ursache dafür stammt aus der Summe einer Reihe unendlich vieler Ring-Diagramme

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \text{ (Diagramm 1)} - \frac{1}{3} \text{ (Diagramm 2)} + \frac{1}{4} \text{ (Diagramm 3)} - \dots \right], \quad (3.17)$$

die für die Berechnung des Drucks benötigt werden, wobei  die Summe über alle Selbstenergien kennzeichnet, in der alle Wechselwirkungsterme der Lagragedichte aus (2.21) beachtet werden. Die gewellten Linien repräsentieren hier die Gluonen, wohingegen sie in der QED eine Abbildung für Photonen sind (vgl. 3.10).

### 3.2.3 Infrarot-Divergenzen

Aufgrund der asymptotischen Freiheit bzw. des Verhaltens des QGPs als nahezu idealem Gas bei sehr hohen Temperaturen liegt eine perturbative Herangehensweise nahe, die bis in beliebig hohe Ordnungen in der Kopplungskonstante angestrebt wird. Lindé [3] identifizierte jedoch eine Grenze, bei der infolge von IR-Divergenzen die Störungstheorie zusammenbricht. Zur Untersuchung der IR-Divergenzen wird folgendes  $(l+1)$ -Schleifen-Diagramm betrachtet:



Das Feynman-Diagramm besitzt  $3l$  Gluon-Propagatoren und  $2l$  3er-Gluon-Vertizes und leistet für den Druck den Beitrag

$$p \sim g^{2l} \left( T \int d^3 p \right)^{l+1} p^{2l} (p^2 + m^2)^{-3l}, \quad (3.19)$$

bei der ein eventueller *IR-cutoff* eingeführt wurde, d. h. eine effektive Masse des Gluons. Der erste und dritte Faktor in (3.19) stammen aus den Feynman-Regeln des Vertex, der zweite Faktor stammt aus der Schleifen-Integration und der letzte Faktor aus dem Gluon-Propagator. Aus Übersichtsgründen wird hier nur eine vereinfachte Darstellung gezeigt, die zur Illustration der Problemstellung vollkommen ausreichend ist.

In Abhängigkeit der Anzahl der Schleifen im aufgezeigten Diagramm (3.18) geht der Beitrag des Drucks in folgende Ordnungen der Kopplungskonstante ein:

$$\begin{aligned} g^{2l} &\text{ für } l = 1, 2, \\ g^6 T^4 \ln(T/m) &\text{ für } l = 3, \\ g^6 T^4 (g^2 T/m)^{l-3} &\text{ für } l > 3. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dabei wurde ein ultravioletter *cutoff*  $T$  in die Impulsintegration gesetzt. Eine perturbative Behandlung der QCD mit masselosen Gluonen bzw. mit einem Gluonpropagator aus (2.24) scheitert demnach, da für  $m = 0$  und  $l > 2$  das Diagramm infrarot divergiert. Ohne die Einführung einer effektiven Masse in den Gluonpropagator ist eine perturbative Behandlung also nicht möglich. Für die magnetische Masse  $m_{\text{magn.}} \sim g^2 T$  tragen alle Schleifen-Diagramme mit  $l > 3$  zu der Ordnung  $g^6$  bei, wonach die Berechnung unendlich vieler Diagramme nötig ist, um einen vollständigen Beitrag in dieser Ordnung zu erhalten. Die Wahl der Massenskalen der *harten* Moden  $m_{\text{hard}} \sim 2\pi T$  bzw. der *weichen* Moden  $m_{\text{el.}} \sim gT$  stellt im Gegensatz zur magnetischen Masse kein Problem in der perturbativen Entwicklung dar.

Ein ähnliches Problem taucht bei der Berechnung von Gluon-Selbstenergien auf, bei der die Störungstheorie bereits in der Ordnung  $g^4$  zusammenbricht. Die Isolierung des Problems auf einen Teilbereich der Theorie erfolgt unter Beachtung der Impulsskalenhierarchie mittels dimensionaler Reduzierung, worauf sich das nächste Kapitel bezieht.



# 4 Dimensionale Reduzierung

Alle perturbativen thermodynamischen Berechnungen in der QCD lassen sich wegen der IR-Divergenzen nur begrenzt ausführen. Da in der thermischen QCD mit einer effektiven Kopplungskonstante  $\frac{g^2 T}{m}$  und einem Gluon-Propagator mit  $m = 0$  (siehe 2.24) perturbativ entwickelt wird, wirkt die Einführung einer effektiven Masse in der Störungstheorie dämpfend auf die IR-Divergenzen. Die eichinvariante Einbindung einer effektiven Masse in eine dimensional reduzierte effektive Theorie ist Gegenstand des fünften Kapitels.

Im Folgenden wird zunächst die Bildung von zwei dimensional reduzierten effektiven Theorien behandelt, um eine Isolation der IR-Divergenzen in eine effektive Theorie, die MQCD, zu erzielen [4,5]. Die Konstruktion dieser effektiven Theorien setzt eine so kleine Kopplungskonstante  $g$  voraus, dass alle drei Skalen der QCD infolge der Impulsskalenhierarchie  $g^2 T < gT < 2\pi T$  umstandslos separiert werden können.

Der thermodynamische Druck des QGPs setzt sich schließlich aus der Summe der Beiträge der aus der Separation der Skalen resultierenden drei Teilbereiche der Theorie zusammen. Die dimensionale Reduzierung der QCD auf zwei effektive Theorien und die Berechnung des Drucks bis zur perturbativ höchstmöglichen Ordnung  $g^6 \ln(1/g)$  ist an Kajantie et al. [10] orientiert.

## 4.1 Dreidimensionale effektive Theorien

Die zeitliche Dimension euklidischer Feldtheorien ist kompaktifiziert und der zugehörige Radius entspricht der inversen Temperatur  $\beta = 1/T$ . Bei sehr hohen Temperaturen wird diese Größe beliebig klein, so dass die der Zeitrichtung zugeordneten Impulsfreiheitsgrade, d. h. die Matsubara-Moden, im Wesentlichen starr sind. Daher lassen sich viele Eigenschaften des QGPs aus einer einfacheren dreidimensionalen effektiven Theorie ableiten.

Die zentrale zu berechnende Größe ist der Druck des QGPs

$$p_{\text{QCD}}(T) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{T}{V} \ln \int \mathcal{D}A_\mu^a \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp(-S_{\text{QCD}}), \quad (4.1)$$

wobei die euklidische Wirkung der QCD in der  $SU(N)$ -Eichgruppe mit  $N_f$  masselosen Quarks den Ausgangspunkt bildet (ohne Eichfixierung):

$$S_{\text{QCD}} = \int_0^\beta d\tau \int d^d x \mathcal{L}_{\text{QCD}}, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi} \gamma_\mu D_\mu \psi. \quad (4.3)$$

Die Anzahl räumlicher Dimensionen der Theorie ist durch  $d$  gekennzeichnet. Die Längenskala  $\frac{1}{2\pi T}$  der *harten* QCD entspricht dem typischen Teilchenabstand im QGP.

### 4.1.1 Elektrostatische QCD

Die Bildung der sogenannten elektrostatischen QCD erfolgt durch die Ausintegration aller bosonischen und fermionischen Moden mit  $n \neq 0$ . Das elektrostatische Feld  $A_0^a$  wird zu einem adjungierten Higgs-Feld, wodurch sich die Theorie der EQCD mit einer dreidimensionalen effektiven super-renormierbaren Lagragedichte folgendermaßen darstellt:

$$p_{\text{QCD}}(T) = p_{\text{E}}(T) + \frac{T}{V} \ln \int \mathcal{D}A_k^a \mathcal{D}A_0^a \exp(-S_{\text{E}}), \quad (4.4)$$

$$S_{\text{E}} = \int d^d x \mathcal{L}_{\text{E}}, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{L}_{\text{E}} = \frac{1}{2} \text{Tr} F_{kl}^2 + \text{Tr} [D_k, A_0]^2 + m_{\text{E}}^2 \text{Tr} A_0^2 + \lambda_{\text{E}}^{(1)} (\text{Tr} A_0^2)^2 + \lambda_{\text{E}}^{(2)} \text{Tr} A_0^4, \quad (4.6)$$

$$F_{kl} = \frac{i}{g_{\text{E}}} [D_k, D_l], \quad D_k = \partial_k - i g_{\text{E}} A_k.$$

Dadurch resultiert eine effektive Theorie für bosonische Matsubara-Nullmoden. Alle höherdimensionalen Operatoren der Lagragedichte (4.6) müssen nicht berücksichtigt werden, weil nur alle bis zur Ordnung  $g^6$  im Druck relevanten Operatoren von Interesse sind.

Die EQCD besitzt fünf verschiedene Anpassungskoeffizienten, welche die Verbindung zur vollen vierdimensionalen Theorie herstellen. In führender Ordnung ergeben sie:

$$\begin{aligned} p_{\text{E}} &= \frac{\pi^2}{180} (4(N^2 - 1) + 7NN_f) T^4, \\ m_{\text{E}}^2 &= \frac{1}{3} \left( N + \frac{1}{2} N_f \right) g^2 T^2, \\ g_{\text{E}}^2 &= g^2 T, \\ \lambda_{\text{E}}^{(1)} &= \frac{(6 + N - N_f)}{24\pi^2} g^4 T, \\ \lambda_{\text{E}}^{(2)} &= \frac{(N - N_f)}{12\pi^2} g^4 T. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die Längenskala  $\frac{1}{gT}$  in der EQCD ist die durch Abschirmung der longitudinalen Anregungen der Gluonen dynamisch generierte Längenskala.

### 4.1.2 Magnetostatische QCD

Der Übergang zur magnetostatischen QCD erfolgt durch Ausintegration der adjungierten Higgs-Felder  $A_0^a$ :

$$\frac{T}{V} \ln \int \mathcal{D}A_k^a \mathcal{D}A_0^a \exp(-S_{\text{E}}) = p_{\text{M}}(T) + \frac{T}{V} \ln \int \mathcal{D}A_k^a \exp(-S_{\text{M}}), \quad (4.8)$$

$$S_{\text{M}} = \int d^d x \mathcal{L}_{\text{M}}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}_{\text{M}} = \frac{1}{2} \text{Tr} F_{kl}^2, \quad (4.10)$$

$$F_{kl} = \frac{i}{g_{\text{M}}} [D_k, D_l], \quad D_k = \partial_k - i g_{\text{M}} A_k.$$

Auch hier werden alle höherdimensionalen Operatoren der Lagragedichte (4.10) jenseits der Ordnung  $g^6$  nicht berücksichtigt. Die beiden Anpassungskoeffizienten der MQCD ergeben in führender Ordnung:

$$\begin{aligned} p_M &= \frac{1}{12\pi}(N^2 - 1)m_E^3 T, \\ g_M^2 &= g_E^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die Längenskala  $\frac{1}{g^2 T}$  in der dreidimensionalen reinen Eichtheorie ist die durch Abschirmung der transversalen Anregungen der Gluonen dynamisch generierte Längenskala.

Nach der Bildung der zweiten dimensionale effektiven Theorie bleibt der Druck  $p_G$  aus der MQCD übrig, dessen Beitrag in führender Ordnung aus dimensionalen Gründen folgendermaßen eingeht:

$$p_G(T) = \frac{T}{V} \ln \int \mathcal{D}A_k^a \exp(-S_M) \sim T g^6. \quad (4.12)$$

Diese Abhängigkeit in der Kopplungskonstante in führender Ordnung entspräche zu Beginn einer perturbativen Entwicklung der Berechnung von 4-Schleifen-Diagrammen (vgl. 3.20). Da allerdings genau ab dieser Ordnung wegen der IR-Divergenzen der Zusammenbruch der perturbativen Behandlung des Drucks eintritt, stellt die MQCD eine perturbativ nicht zugängliche Theorie dar.

## 4.2 Der thermodynamische Druck des Quark-Gluon-Plasmas

### 4.2.1 Das Gesamtresultat

Im vorliegenden Abschnitt werden die einzelnen Beiträge des Drucks für die drei Impulsskalen bis zur Ordnung  $g^6$  zum vollständigen Druck des QGPs zusammengetragen:

$$p_{QCD}(T) = p_E(T) + p_M(T) + p_G(T). \quad (4.13)$$

Während die harte und die elektrostatische QCD perturbativ zugänglich sind, scheint eine Auswertung des Druckbeitrags für die Skala  $g^2 T$  der nicht-perturbativen MQCD nur numerisch möglich. Aus dimensionalen Gründen besitzt der Beitrag des Drucks nach [10] mit  $d_A = N^2 - 1$  und  $C_A = N$  folgende Form:

$$\frac{p_G(T)}{T \mu^{-2\epsilon}} = d_A C_A^3 \frac{g_M^6}{(4\pi)^4} \left[ \alpha_G \left( \frac{1}{\epsilon} + 8 \ln \frac{\bar{\mu}}{2m_M} \right) + \beta_G + O(\epsilon) \right]. \quad (4.14)$$

$\alpha_G$  und  $\beta_G$  kennzeichnen die zu bestimmenden Koeffizienten. Der  $\epsilon$ -Pol und der ultraviolette *cutoff*  $\bar{\mu}$  resultieren aus der dimensionalen Regularisierung.

Eine strikte Anwendung der dimensionalen Regularisierung zur Behandlung ultravioletter Divergenzen (UV-Divergenzen) ergibt zur Bestimmung von  $p_G$  bei der Berechnung von 4-Schleifen-Diagrammen keinen Beitrag, weil in der MQCD keine perturbative effektive Masse  $m_G$  enthalten ist. Eine einfache Einführung einer effektiven Masse in den Gluonpropagator der MQCD (vgl. [10]) führt auf ein eichabhängiges Ergebnis:

$$\frac{p_G(T)}{T \mu^{-2\epsilon}} = d_A C_A^3 \frac{g_M^6}{(4\pi)^4} \left[ \alpha_G \left( \frac{1}{\epsilon} + 8 \ln \frac{\bar{\mu}}{2m_G} \right) + \tilde{\beta}_G(\xi) + O(\epsilon) \right]. \quad (4.15)$$

Die dimensionale Regularisierung der räumlichen Integration ist in perturbativen Rechnungen eine übliche Methode, um alle UV-Divergenzen zu beheben, wobei die Impulsintegration durch eine analytische Fortsetzung nach  $d = 3 - 2\epsilon$  Dimensionen ausgedrückt wird:

$$\int_p = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} = \mu^{-2\epsilon} \left[ \bar{\mu}^{2\epsilon} \left( \frac{e^\gamma}{4\pi} \right)^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \right]. \quad (4.16)$$

Mit  $\bar{\mu} = \mu(e^\gamma/4\pi)^{-\frac{1}{2}}$  wird eine Impulsskala eingeführt, die ein Abschneiden der verbleibenden logarithmisch divergenten Integrale, die als  $\epsilon$ -Pole auftauchen, bewirkt. Die Einführung dieser Impulsskala entspricht im Übrigen dem Regularisierungsschema der Minimalen Subtraktion.

Der vollständige Druck des QGPs bis zur Ordnung  $g^6$  besitzt folgendes Gesamtresultat:

$$\begin{aligned} \frac{p_{\text{QCD}}(T)}{T^4 \mu^{-2\epsilon}} &= \frac{p_{\text{E}}(T) + p_{\text{M}}(T) + p_{\text{G}}(T)}{T^4 \mu^{-2\epsilon}} \\ &= g^0 \alpha_{\text{E}1} + g^2 \alpha_{\text{E}2} + \frac{g^3}{(4\pi)} \frac{d_A}{3} \alpha_{\text{E}4}^{3/2} \\ &\quad + \frac{g^4}{(4\pi)^2} \left[ \alpha_{\text{E}3} - d_A C_A \left( \alpha_{\text{E}4} \left( \frac{1}{4\epsilon} + \frac{3}{4} + \ln \frac{\bar{\mu}}{2gT\alpha_{\text{E}4}^{1/2}} \right) + \frac{1}{4} \alpha_{\text{E}5} \right) \right] \\ &\quad + \frac{g^5}{(4\pi)^3} \left[ d_A \alpha_{\text{E}4}^{1/2} \left( \frac{1}{2} \alpha_{\text{E}6} - C_A^2 \left( \frac{89}{24} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{11}{6} \ln 2 \right) \right) \right] \\ &\quad + \frac{g^6}{(4\pi)^4} \left[ \beta_{\text{E}1} - \frac{1}{4} d_A \alpha_{\text{E}4} \left( (d_A - 2) \beta_{\text{E}4} + \frac{2d_A - 1}{N_c} \beta_{\text{E}5} \right) \right. \\ &\quad \left. - d_A C_A \left( \frac{1}{4} (\alpha_{\text{E}6} + \alpha_{\text{E}5} \alpha_{\text{E}7} + 3 \alpha_{\text{E}4} \alpha_{\text{E}7} + \beta_{\text{E}2} + \alpha_{\text{E}4} \beta_{\text{E}3}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\alpha_{\text{E}6} + \alpha_{\text{E}4} \alpha_{\text{E}7}) \left( \frac{1}{4\epsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}}{2gT\alpha_{\text{E}4}^{1/2}} \right) \right) \right] \\ &\quad + d_A C_A^3 \left( \beta_{\text{M}} + \beta_{\text{G}} + \alpha_{\text{M}} \left( \frac{1}{\epsilon} + 8 \ln \frac{\bar{\mu}}{2gT\alpha_{\text{E}4}^{1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_{\text{G}} \left( \frac{1}{\epsilon} + 8 \ln \frac{\bar{\mu}}{2g^2 T C_A} \right) \right) \right] \\ &\quad + O(g^7) + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Koeffizienten  $\alpha_X$  sind bekannte Größen (vgl. [10] oder siehe Kapitel A.3). Die Bestimmung der bis dato unbekannten Koeffizienten  $\beta_X$  erfordert eine Berechnung des Drucks in der Ordnung  $g^6$ . Insbesondere die Berechnung des Koeffizienten  $\beta_G$  hat aufgrund der vorigen Betrachtungen in (4.12) und (3.20) eine Auswertung unendlich vieler Schleifen-Diagramme zur Folge.

Im Übrigen ist anzumerken, dass jeder Beitrag des Drucks  $p_E, p_M, p_G$  für sich eine skalarenabhängige Größe ist. In der Summe heben sich jedoch die Koeffizienten der  $\epsilon$ -Pole auf, so dass sich der vollständige Druck (4.17) als wohldefinierte thermodynamische Größe herausstellt. Es existieren also Korrekturen des Drucks bis einschließlich zur Ordnung  $g^6 \ln(1/g)$ .

Die Korrektur des Drucks in der Ordnung  $g^6 \ln(1/g)$  besitzt folgenden Wert:

$$\left. \frac{p_{\text{QCD}}(T)}{T^4 \mu^{-2\epsilon}} \right|_{g^6 \ln(1/g)} = g^6 \frac{d_A C_A}{(4\pi)^4} \left[ (\alpha_{E6} + \alpha_{E4}\alpha_{E7}) \ln(g\alpha_{E4}^{1/2}) - 8C_A^2 (\alpha_M \ln(g\alpha_{E4}^{1/2}) + 2\alpha_G \ln(gC_A^{1/2})) \right]. \quad (4.18)$$

In diesem von Kajantie et al. bestimmten Ergebnis sind zwei verschiedene Logarithmen mit unterschiedlichen nichtanalytischen Abhängigkeiten in gruppentheoretische Faktoren enthalten.

### 4.2.2 Numerische Konvergenz

Die perturbative Behandlung einer physikalischen Größe ist nur dann sinnvoll, wenn diese ein zufriedenstellendes Konvergenzverhalten bei Entwicklung nach der Kopplungskonstante aufweist. Zur Untersuchung der Konvergenz des thermodynamischen Drucks des QGPs ist eine graphische Darstellung nützlich. Die numerische Bedeutung der Ordnung  $g^6 \ln(1/g)$  aus (4.18) ist hier von besonderem Interesse. Unumgänglich sind dazu Annahmen über die noch unbestimmten Koeffizienten  $\beta_X$ , die eine vollständige Angabe des Drucks zur Ordnung  $g^6$  voraussetzen. Seitdem Arnold und Zhai [22] die Korrektur des Drucks in  $g^4$  bestimmt haben, ist bekannt, dass die perturbative Entwicklung des Drucks ein mangelhaftes Konvergenzverhalten aufweist. Die Berechnung der bis dato höchsten Ordnung  $g^6 \ln(1/g)$  in (4.18) ändert nichts an dieser Tatsache.

Den größten Anteil an diesem Verhalten besitzen die Beiträge des Drucks  $p_M$  und  $p_G$  aus den beiden dimensional reduzierten effektiven Theorien, da die effektive Kopplungskonstante dort nur  $\frac{g^2 T}{m_{\text{eff}}}$  beträgt. Im Gegensatz dazu besitzt die volle Theorie zur Bestimmung von  $p_E$  die Kopplungskonstante  $g^2$ , so dass dort ein gutes Konvergenzverhalten zu erwarten ist. Aus diesem Grund wird hier lediglich der dreidimensionale Beitrag des Drucks zur Untersuchung der Abhängigkeit des Ergebnisses aus (4.18) auf die unbekannten  $g^6$  Koeffizienten betrachtet.

Der Beitrag des Drucks zur Ordnung  $(g^6 \ln(1/g) + g^6)$  kann mit der Wahl  $\bar{\mu} = 2\pi T$  zu folgendem Ausdruck umformuliert werden:

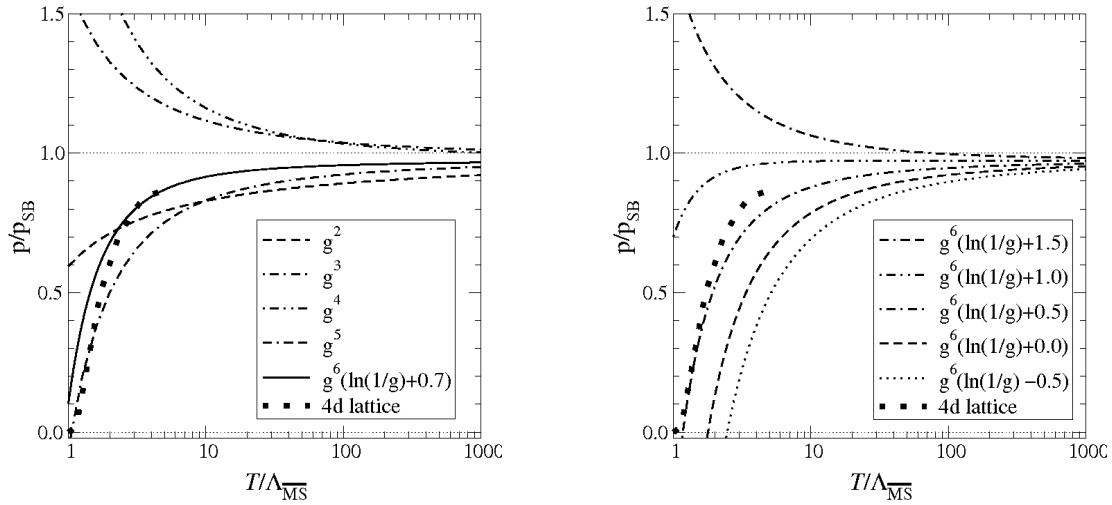
$$\delta \left[ \frac{p_{\text{QCD}}(T)}{T \mu^{-2\epsilon}} \right]_{g^6 \ln(1/g)} = 8d_A C_A^3 \frac{g_E^6}{(4\pi)^4} \left[ (\alpha_M + 2\alpha_G) \ln \frac{m_E}{g_E^2} + \delta \right]. \quad (4.19)$$

Für  $N = 3$  und  $N_f = 0$  ist in führender Ordnung  $m_E/g_E^2 \sim 1/g$ . Die Größe  $\delta$  enthält alle bis dato unbekannten Koeffizienten  $\beta_X$  aus (4.17). Der Koeffizient  $\beta_{E1}$  muss allerdings alle Beiträge der  $\epsilon$ -Pole aufheben und besitzt daher die folgende Struktur:

$$\beta_{E1} = d_A C_A (\alpha_{E6} + \alpha_{E4}\alpha_{E7}) \frac{1}{4\epsilon} - d_A C_A^3 (\alpha_M + \alpha_G) \frac{1}{\epsilon} + \beta_{E6}. \quad (4.20)$$

Alle übrigen Koeffizienten  $\beta_X$  sind endliche Größen, d. h. enthalten keine  $\epsilon$ -Pole.

In Abb. 4.1 sind die Ergebnisse von (4.19) für verschiedene Werte von  $\delta$  graphisch dargestellt. Aufgetragen ist jeweils der auf den Stefan-Boltzmann-Grenzwert eines idealen Gluonengases (siehe 3.8) normierte Druck der QCD mit  $N_f = 0$  und  $N = 3$  in Abhängigkeit der reduzierten Temperatur  $T/\Lambda_{\overline{\text{MS}}}$ . Abb. 4.1 stellt im linken Diagramm die Beiträge des Drucks bis zu den einzelnen Ordnungen der perturbativen Entwicklung dar,



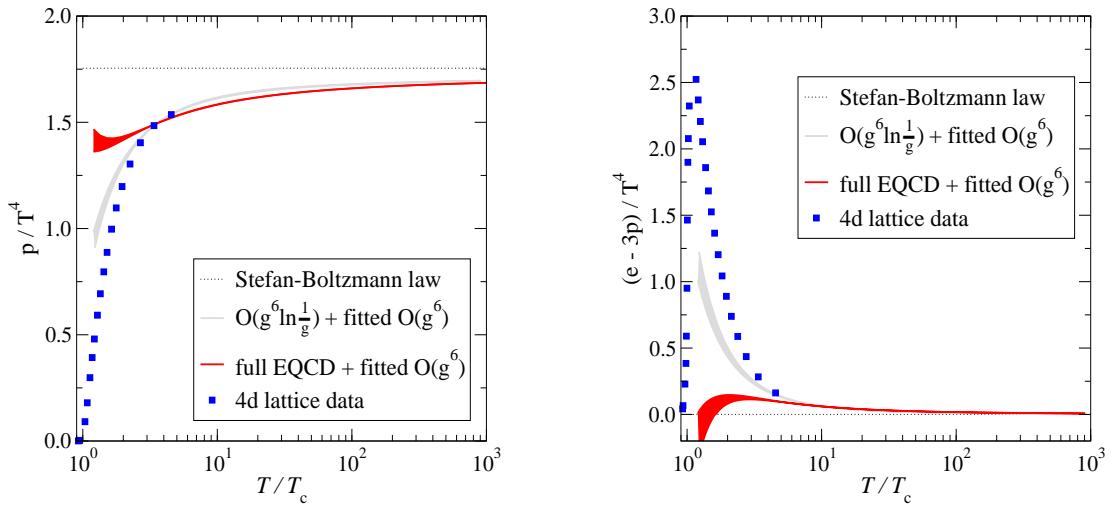
**Abbildung 4.1:** Der normierte Druck der QCD  $p_{QCD}/p_{SB}$  in Abhängigkeit der reduzierten Temperatur  $T/\Lambda_{\overline{MS}}$  mit [10]; *links*: Ergebnisse der einzelnen perturbativen Ordnungen einschließlich der Ordnung  $g^6$  mit einer optimalen Wahl des Koeffizienten  $\delta = 0, 7$ ; *rechts*: Abhängigkeit des  $g^6$ -Beitrags von  $\delta$ .

wobei für den Beitrag der Ordnung  $g^6$  die Wahl  $\delta = 0, 7$  getroffen wurde. Im rechten Diagramm ist die Abhängigkeit des Druckbeitrags zur Ordnung  $g^6$  von der Wahl des unbekannten Koeffizienten  $\delta$  aufgetragen.

Die erste positive Beobachtung ist das Erreichen des Stefan-Boltzmann-Grenzwertes bei sehr hohen Temperaturen. Die zweite wesentliche Erkenntnis ist, dass die Auswirkungen auf den Beitrag des Drucks zur Ordnung  $g^6$  in Abhängigkeit von  $\delta$  erheblich sind. Die Ergebnisse unterscheiden sich nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ voneinander (vgl. Abb. 4.1 links). Für die Wahl  $\delta = 0, 7$  stimmt das Ergebnis jedoch mit Gitterrechnungen in der vollen vierdimensionalen Theorie [23] gut überein (vgl. Abb. 4.1 rechts).

Eine konkrete Aussage betreffend der Übereinstimmung des Ergebnisses mit der Gitterrechnung ist nur durch die vollständige Bestimmung der Koeffizienten  $\beta_X$  gewährleistet. Es ist jedoch anzumerken, dass genau in dem Bereich für  $T/\Lambda_{\overline{MS}} \sim 2, \dots, 3$ , in der ein Vergleich mit den Gitterdaten möglich ist, die Impulsskalenhierarchie und somit die notwendige Bedingung für die Begründung der beiden dimensional effektiven Theorien verletzt wird. Daher könnte eine eventuelle vollständige Bestimmung der Koeffizienten zur Ordnung  $g^6$  nicht als sichere Prognose zum Vergleich herangezogen werden. Es liesse sich lediglich beobachten, ob ein glatter Übergang der Graphen aus dem Gültigkeitsbereich des Ergebnisses zu den Gitterdaten erfolgen würde.

In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit von Hietanen et al. [24] wurden Monte-Carlo-Simulationen für die EQCD bzw. der dreidimensionalen SU(3) adjungierten Higgs-Theorie aktualisiert, um eine genauere Abschätzung der IR-Beiträge des Drucks für die QCD zu bestimmen. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.2 dargestellt. Links ist der auf  $T^4$  normierte Druck in Abhängigkeit der Temperatur  $T/T_c$  abgebildet, wobei  $T_c$  die kritische Temperatur kennzeichnet. Der Vergleich des Resultats des Beitrags aus der EQCD mit Gitterdaten ist sehr ernüchternd. Deutlicher wird der Unterschied im rechten Diagramm, in dem die Differenz der Energiedichte  $\epsilon = \frac{T^2}{V} \frac{\partial \ln Z}{\partial V}$  und des Druck gegenüber



**Abbildung 4.2:** links: Der auf  $T^4$  normierte Druck in Abhängigkeit von  $T/T_c$ ; rechts: Die Differenz der Energiedichte und des Drucks normiert auf  $T^4$  [24].

der Temperatur abgebildet ist.



# 5 Massenerzeugung für Gluon-Felder in der MQCD

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Bestimmung von  $p_G$  bzw. des Koeffizienten  $\beta_G$  des Drucks der MQCD auf perturbative Weise. Die nicht-perturbative Natur der MQCD stellt dabei ein großes Problem dar. Ein erster Beitrag von  $\beta_G$  tritt erst in der 4-Schleifen-Ordnung auf (vgl. 4.12), dessen Berechnung direkt mit IR-Divergenzen verknüpft ist. Infolge der Behandlung der UV-Divergenzen durch dimensionale Regularisierung liefert der Druck  $p_G$  der MQCD sogar keinen Beitrag, da keine effektive Masse in der Theorie enthalten ist.

Gegenstand dieses Kapitels ist die eichinvariante Massenerzeugung für Gluon-Felder durch den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung im NL $\sigma$ M. Weiterhin wird das Resummationsverfahren vorgestellt, welches die perturbative Entwicklung umstrukturiert und eine perturbative Behandlung der aus der MQCD resultierenden effektiven Theorie realisiert.

## 5.1 Grundlagen der spontanen Symmetriebrechung

Wenn der Vakuumerwartungswert des Grundzustands eines quantenmechanischen Systems weniger Symmetrien aufweist als die zugehörigen Bewegungsgleichungen, ist die Symmetrie des Systems spontan gebrochen. Das Coleman-Theorem trifft eine analoge Aussage (vgl. z.B. [25]): Gegeben sei ein quantenmechanisches System mit einer Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  und einem Zustand minimaler Energie, dem Vakuumzustand. Wirkt eine definierte Transformation auf die Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  und auf den Vakuumzustand, treten folgende Fälle auf:

1. Vakuumzustand und  $\mathcal{L}$  sind jeweils invariant gegenüber dieser Transformation.  
Das System besitzt exakte Symmetrie.
2. Vakuumzustand ist nicht invariant und
  - $\mathcal{L}$  ist nicht invariant. Die Symmetrie des Systems ist explizit gebrochen.
  - $\mathcal{L}$  ist invariant. Die Symmetrie des Systems ist spontan gebrochen.

Die spontane Symmetriebrechung einer globalen kontinuierlichen Symmetrie bewirkt das Auftreten eines masselosen pseudoskalaren Teilchens, welches auch als Nambu-Goldstone-Boson bekannt ist. Wird eine Eichsymmetrie spontan gebrochen, so tritt das dazugehörige Nambu-Goldstone-Boson physikalisch nicht in Erscheinung, da das Eichboson den entsprechenden Freiheitsgrad absorbiert. Durch das Auftreten des sogenannten Higgs-Teilchens bzw. seiner Kopplung an alle Felder wird das Eichboson massiv.

## 5.2 Resummationsverfahren mit dem nichtlinearen $\sigma$ -Modell

### 5.2.1 Eigenschaften des nichtlinearen $\sigma$ -Modells

Eine alternative Beschreibung der spontanen Symmetriebrechung liefert das NL $\sigma$ M (vgl. [26, 27]). Es wird in dieser Arbeit als Mechanismus zur eichinvarianten Erzeugung von Massen für die in der MQCD vorkommenden Gluon-Felder genutzt.

In diesem Modell wird ein  $N$ -komponentiges skalares Feld  $\phi(x)$  betrachtet, das der orthogonalen Symmetriegruppe  $O(N)$  unterliegt und die Bedingung  $\phi^2(x) = 1$  erfüllt. Unter Beachtung der Symmetriebedingungen des Feldes besitzt die allgemeine Wirkung folgenden Ausdruck:

$$S(\phi) = \frac{1}{2} \int d^d x \partial_\mu \phi_i \cdot \partial_\mu \phi_i \quad \text{mit } i = 1, \dots, N. \quad (5.1)$$

Die perturbative Entwicklung dieser Theorie erfordert eine Parametrisierung des skalaren Feldes durch unabhängige Variablen. Eine für Renormierungszwecke geeignete Parametrisierung der Bedingung  $\phi^2(x) = 1$  ist die Wahl

$$\phi(x) = (\sigma, \pi_1, \dots, \pi_{N-1}) = (\sigma(x), \boldsymbol{\pi}(x)), \quad (5.2)$$

wobei  $\sigma$  eine nichtlineare Funktion des  $(N - 1)$ -komponentigen Feldes  $\boldsymbol{\pi}$  ist:

$$\sigma(x) = (1 - \boldsymbol{\pi}(x)^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.3)$$

Diese Theorie ist eine phänomenologische Beschreibung eines  $O(N)$ -symmetrischen Systems, die um den Vakuumerwartungswert des skalaren Feldes  $\langle \phi \rangle = 1$  spontan gebrochen ist. Jede Komponente  $\pi_k$  entspricht dabei einem Zustand gebrochener Symmetrie.

Für perturbative Zwecke wird die nichtlineare Realisierung der spontanen Symmetriebrechung (5.3) einer Taylor-Entwicklung unterzogen. Die Wirkung stellt sich wie folgt dar:

$$S(\boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{2} \int d^d x [(\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 + (\boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2 + \dots]. \quad (5.4)$$

Die Erzeugung der Gluonmassen für die MQCD, die der  $SU(N)$ -Symmetriegruppe unterliegt, erfolgt durch Addition von

$$\mathcal{L}_\Phi = \text{Tr} \left[ (D_i \Phi)^\dagger (D_i \Phi) \right] \quad (5.5)$$

zur Lagrangedichte aus (4.10) mit der kovarianten Ableitung  $D_i = \partial_i - ig_M A_i^a$ . Durch eine entsprechende Parametrisierung des skalaren Feldes  $\Phi$ , welches eine komplexe  $N \times N$ -Matrix darstellt, koppeln die sogenannten Goldstone-Bosonen  $\pi^a$  und das Higgs-Feld  $\sigma$  an das Eichfeld und bewirken somit eine effektive Masse  $m_G$  für die Gluon-Felder. Für  $SU(2)$  wird die Parametrisierung

$$\Phi = \frac{1}{2} (\sigma + i \tau^a \pi^a) \quad (5.6)$$

mit den  $2 \times 2$ -Pauli-Matrizen  $\tau^a$  verwendet.

### 5.2.2 Vorgehensweise der Resummation

Die Addition der Lagrangedichte aus (5.5) impliziert bei geeigneter Eichfixierung neue Felder und deren Kopplungen sowohl an das Eichfeld als auch untereinander, woraus das NL $\sigma$ M resultiert. Diese Methode dient zur eichinvarianten Erzeugung einer magnetischen Masse, um IR-Divergenzen zu regulieren.

Um das Ziel der perturbativen Berechnung des Drucks in der MQCD zu erreichen, muss ein Verfahren entwickelt werden, in der die addierte Lagrangedichte (5.5) effektiv wieder subtrahiert wird und dennoch der durch die magnetische Masse modifizierte Eichfeld-Propagator in die perturbative Entwicklung eingeht. Dazu ist eine Umstrukturierung der Störungstheorie mittels folgendem Resummationsschema notwendig:

$$\mathcal{L}_{\text{eff.}} = \frac{1}{l} \left[ \mathcal{L}_M(\sqrt{l}X) + \mathcal{L}_\Phi(\sqrt{l}X) - l\mathcal{L}_\Phi(\sqrt{l}X) \right]. \quad (5.7)$$

Ausgangspunkt ist die Lagrangedichte der MQCD (4.10). Die Lagrangedichte der skalaren Felder  $\Phi$  wird zu  $\mathcal{L}_M$  mittels der Einführung eines Schleifen-Parameters  $l$  addiert und wieder subtrahiert. Der Schleifen-Parameter  $l$  skaliert alle in dieser effektiven Theorie vorkommenden Felder  $X := A_\mu^a, \pi^a, \dots$  und reorganisiert die perturbative Berechnung des Drucks. Diese Berechnungen gehen nicht mehr Ordnung für Ordnung in die Kopplungskonstante  $g^2$  ein, sondern resultieren in einer Potenzreihe in  $l$ . Das ist insofern vorteilhaft, da der Druck der modifizierten MQCD, d. h. mit einer effektiven magnetischen Masse  $m_G$ , für jede Schleifen-Ordnung zu  $O(g^6)$  beiträgt (vgl. 3.20 und 4.12). Die Auswertung der freien effektiven Theorie geht in die Ordnung  $l^0$  ein, während die erste Korrektur bzw. die Berechnung von 2-Schleifen-Diagrammen zur Ordnung  $l^1$  beiträgt. Zudem tritt der subtrahierte Term in (5.7) erst eine Schleifen-Ordnung höher ein als der addierte Term.

Das Resummationsverfahren begründet also eine effektive Theorie durch die Addition und Subtraktion einer geeigneten Wahl des massenerzeugenden Terms  $\mathcal{L}_m$  mit

$$\mathcal{L}_{\text{eff.}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{int}} - \mathcal{L}_m, \quad (5.8)$$

wobei der modifizierte Wechselwirkungsterm  $\mathcal{L}_{\text{int}} - \mathcal{L}_m$  perturbativ entwickelt wird und der modifizierte Propagator sich aus  $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m$  ableiten lässt [6].

### 5.2.3 Motivation

Bei steigender Temperatur geht die uns bekannte hadronische Materie, in der Quarks und Gluonen in farbneutrale Hadronen eingeschlossen sind, in die ungebundene Phase der QCD bzw. das QGP über. Ein erster Schritt zur Untersuchung der Natur dieses Phasenübergangs liefert die Bestimmung des Koeffizienten  $C$  der magnetischen Masse  $m_G = Cg^2T$ , d. h. der Masse des Eichfeldes in der ungebundenen Phase.

Zur Untersuchung des elektroschwachen Phasenübergangs betrachteten Buchmüller und Philipsen [8] das dreidimensionale SU(2)-Higgs-Modell und berechneten die Massen des Higgs-Teilchens und des Eichfeldes mittels sogenannter *gap*-Gleichungen. Diese bilden selbst-konsistente Bedingungen für die entsprechenden Massen, die im Übrigen den exponentiellen Abfall der zugehörigen 2-Punkt-Funktionen der Felder mit  $\sim e^{-m|x-y|}$  bei größer werdendem Abstand bestimmen. Der Pol des transversalen Teils des Eichfeld-

Propagators sollte dabei für alle Schleifenordnungen auf der Massenschale bestehen bleiben:

$$D_{\text{trans.}}(p^2) = \frac{1}{p^2 + m^2 - \Pi_{\text{trans.}}(p^2)} \sim \frac{1}{p^2 + m^2} \quad \text{für } p^2 = -m^2. \quad (5.9)$$

Daraus ergibt sich folgende *gap*-Gleichung für die Selbstenergie einer Theorie:

$$\Pi_{\text{trans.}}(p^2 = -m^2) \left( 1 + \frac{\partial \Pi_{\text{trans.}}}{\partial p^2}(p^2 = -m^2) \right) = 0. \quad (5.10)$$

Auf 1-Schleifen-Niveau folgt die Bedingung  $\Pi_{\text{trans.}}(p^2 = -m^2) = 0$ .

Im Higgs-Modell bzw. linearen Sigma-Modell wird das Higgs-Teilchen im Gegensatz zu (5.3) linear um seinen Vakuumerwartungswert verschoben. Zudem treten weitere Terme in der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_\sigma = \text{Tr} \left[ (D_i \Phi)^\dagger (D_i \Phi) + \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + 2\lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right] \quad (5.11)$$

auf, die zu  $\mathcal{L}_M$  addiert werden.  $\lambda$  bezeichnet die Kopplung und  $\mu$  die Masse der skalaren Felder  $\Phi$ . Nach der Einbindung einer geeigneten Eichfixierung und der zugehörigen Faddeev-Popov-Geistfelder entstehen viele Wechselwirkungsterme, die in der perturbativen Berechnung berücksichtigt werden müssen. Buchmüller und Philipsen stellten fest, dass die Dynamik des Eichfeldes in der ungebundenen Phase weitgehend unabhängig vom Higgs-Feld ist und daher durch die effektive Lagrangedichte des NL $\sigma$ Ms approximiert werden kann. Der daraus resultierende Vorteil ist vor allem eine Reduzierung der Anzahl der Wechselwirkungsterme, wodurch eine perturbative Behandlung wesentlich vereinfacht wird.

Die nachfolgenden Berechnungen von Eberlein [7, 9] bestätigen diese Approximation. Eberlein behandelte das dreidimensionale SU(2)-NL $\sigma$ M unter Verwendung des Resummationsschemas (5.7) und wertete die *gap*-Gleichungen sowohl für das NL $\sigma$ M als auch für das Higgs-Modell bis zur zweiten Schleifen-Ordnung aus. Um die Anzahl der 2-Schleifen-Diagramme zur Berechnung der Selbstenergien im NL $\sigma$ M weiter zu reduzieren, folgte er dem Vorschlag von Jackiw und Pi [28], die eine exakte Ausintegration der Goldstone-Felder und Faddeev-Popov-Geister durchführten. Die resultierende effektive Lagrangedichte entspricht der resummierten massiven Yang-Mills-Theorie, welche auch als resummiertes NL $\sigma$ M in unitärer Eichung, d. h.  $\xi \rightarrow \infty$ , angesehen werden kann:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a + \frac{1}{2} m^2 A_i^a A_i^a - \frac{l}{2} m^2 A_i^a A_i^a. \quad (5.12)$$

Das Higgs-Modell und das NL $\sigma$ M stellen BRS-invariante Theorien dar, so dass daraus eichinvariante *gap*-Gleichungen und somit ein eichinvarianter Ausdruck für die magnetische Masse resultieren. Auf 1-Schleifen-Niveau wurde Eichinvarianz für beide Modelle erzielt [7, 8]. Allerdings ergab sich bei der Berechnung von 2-Schleifen-Diagrammen für die magnetische Masse im Higgs-Modell eine Abhängigkeit im Eichfixierungsparameter  $\xi$  [9]. Diese Abhängigkeit wiegt jedoch nicht schwer und ist ein Artefakt des Resummationsschemas, d. h. der Umstrukturierung der perturbativen Entwicklung. Bei der Berechnung höherer Ordnungen wird eine Annulierung dieser Abhängigkeiten erwartet.

Das Ergebnis für die magnetische Masse des SU(2)-Higgs-Modells ergibt sich auf 1-Schleifen-Niveau zu [8]:

$$m_{\text{BP}} = \frac{g_M^2}{\pi} \left[ \frac{63}{64} \ln 3 - \frac{3}{16} \right] = 0,28 g_M^2. \quad (5.13)$$

Der Vergleich mit einem anderen massenerzeugenden Verfahren von Alexanian und Nair ist erstaunlich, denn sie ermittelten einen Wert von  $m_{\text{AN}} = \frac{4}{3} m_{\text{BP}}$  [28] für die magnetische Masse.

Infolge dessen liegt die Vermutung nahe, dass aufgrund der Eichinvarianz des Ergebnisses (5.13) auch eine eichinvariante Berechnung des Drucks mit demselben Verfahren realisierbar ist. Dieses begründet sich, da sich die dafür auszuwertenden geschlossenen Feynman-Diagramme aus den Ergebnissen der Selbstenergie-Diagramme ableiten lassen. Dazu ist lediglich eine weitere Impulsintegration einzufügen, die einer Verknüpfung der äußeren Beine eines Selbstenergie-Diagramms entspricht.

Im folgenden Kapitel wird der Druck  $p_G$  der MQCD in einer mittels des NL $\sigma$ Ms resummierten effektiven Theorie perturbativ ausgerechnet. Infolge der Eichinvarianz in (5.13) wird ebenso ein eichinvariantes Ergebnis zur Ordnung  $l^1$ , d. h. auf 2-Schleifen-Niveau, für den Druck erwartet. Diese Berechnung wird in allgemeiner  $R_\xi$ -Eichung ausgeführt, um ein manifest eichinvariantes Ergebnis zu erzielen. Insbesondere lässt sich damit die Methode von Jackiw und Pi, d. h. die exakte Ausintegration aller unphysikalischen Felder, bestätigen.



# 6 Perturbative Bestimmung des Koeffizienten $\beta_G$

Eine perturbative Berechnung des Druckbeitrags aus der dimensionale reduzierten effektiven Theorie der MQCD ist aufgrund vorheriger Betrachtungen durchaus eine nicht-triviale Aufgabe. Im Grunde kann die MQCD lediglich nicht-perturbativ behandelt werden, da die auf IR-Divergenzen dämpfend wirkende Massenskala  $m \sim g^2 T$  der effektiven Theorie eine Auswertung unendlich vieler Schleifen-Diagramme zur Bestimmung des Drucks zur Ordnung  $g^6$  zur Folge hat (vgl. (3.20) und (4.12)). Das Resummationsverfahren aus Kap. 5.2.2 ermöglicht hingegen eine perturbative Behandlung der MQCD, da diese Methode die Störungstheorie auf eine Potenzreihe in dem Schleifen-Parameter  $l$  umstrukturiert.

Das Ziel dieser Arbeit stellt die perturbative Bestimmung des Drucks  $p_G$  der MQCD aus (4.12) bzw. die eichinvariante Berechnung des Koeffizienten  $\beta_G$  in (4.15) unter Anwendung der Resummationsmethode (5.7) dar:

$$\begin{aligned} p_G(T) &= \frac{T}{V} \ln \int \mathcal{D}A_k^a \exp \left( - \int d^d x \frac{1}{2} \text{Tr } F_{kl}^2 \right) \\ \Rightarrow \quad \frac{p_G(T)}{T\mu^{-2\epsilon}} &= d_A C_A^3 \frac{g_M^6}{(4\pi)^4} \left[ \alpha_G \left( \frac{1}{\epsilon} + 8 \ln \frac{\bar{\mu}}{2m_G} \right) + \beta_G + O(\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

In der nachstehenden Rechnung wird für die effektive Kopplungskonstante bzw. effektive magnetische Masse die Notation  $g_M \rightarrow g$  bzw.  $m_G \rightarrow m$  verwendet.

Die Herleitung der mit dem NL $\sigma$ M resummierten effektiven Lagrangedichte und der zugehörigen Feynman-Regeln wird zunächst für SU(2) skizziert und anschließend ausführlich für SU( $N$ ) dargestellt. Die Ergebnisse aus der Berechnung der Schleifen-Diagramme werden sowohl für SU(2) als auch für SU( $N$ ) bis zur zweiten Schleifen-Ordnung präsentiert und miteinander verglichen.

## 6.1 Herleitung der resummierten effektiven Lagrangedichte

### 6.1.1 Grundlage für das nichtlineare $\sigma$ -Modell

Ausgangspunkt ist die MQCD aus (4.10):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2} \text{Tr } F_{kl}^2, \\ F_{kl} &= \frac{i}{g} [D_k, D_l], \quad D_k = \partial_k - ig A_k. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Eine eichinvariante Methode Gluonen Masse anzuhängen erfolgt über die Addition des SU( $N$ )-Higgs-Modells durch die Lagrangedichte aus (5.11):

$$\mathcal{L}_\sigma = \text{Tr} (\mathcal{D}_i \Phi)^\dagger (\mathcal{D}_i \Phi) + \mu^2 \text{Tr} (\Phi^\dagger \Phi) + 2\lambda \text{Tr} (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (6.3)$$

Damit die MQCD nicht verändert wird, ist dieser massenerzeugende Term nach (5.8) zu behandeln und wird durch das folgende Resummationsschema unter Einführung des Schleifen-Parameters  $l$  addiert und subtrahiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff.}}(\sqrt{l}X) = & \frac{1}{l} \left[ \mathcal{L}_M(\sqrt{l}X) + \mathcal{L}_\sigma(\sqrt{l}X) + \mathcal{L}_{\text{gf}}(\sqrt{l}X) + \mathcal{L}_{\text{FP}}(\sqrt{l}X) \right. \\ & \left. - l\mathcal{L}_\sigma(\sqrt{l}X) - l\mathcal{L}_{\text{gf}}(\sqrt{l}X) - l\mathcal{L}_{\text{FP}}(\sqrt{l}X) \right]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dabei werden alle in der resummierten effektiven Theorie vorkommenden Felder  $X := A_\mu^a, \pi^a, \dots$  mit  $l$  skaliert. Der Eichfixierungsterm und der Faddeev-Popov-Geist-Term stellt sich wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gf}} + \mathcal{L}_{\text{FP}} &= \frac{1}{2\xi}(G^a)^2 - (c^a)^* M^{ab} c^b, \\ \delta G^a &= M^{ab} \omega^b. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die Matrix  $M^{ab}$  bezeichnet die infinitesimale Transformation der im Eichfixierungsterm  $G^a$  enthaltenden Felder. Aus später ersichtlichen Gründen wird in dieser Rechnung die  $R_\xi$ -Eichung gewählt:

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = \frac{1}{2\xi} (\partial_i A_i^a + \xi m \pi^a)^2. \quad (6.6)$$

Das Higgs-Modell geht schließlich mit  $\lambda, \mu \rightarrow \infty$  und einer nichtlinearen Parametrisierung der komplexen  $N \times N$ -Matrix bzw. des skalaren Feldes  $\Phi$  in Abhängigkeit der  $(N^2 - 1)$  pseudoskalaren Goldstone-Bosonen  $\pi^a$  in das NL $\sigma$ M über:

$$\mathcal{L}_\sigma = \text{Tr} (\mathcal{D}_i \Phi)^\dagger (\mathcal{D}_i \Phi). \quad (6.7)$$

### 6.1.2 SU(2)

Die Parametrisierung für SU(2) ist durch

$$\Phi = \frac{1}{2}(\sigma + i\tau^a \pi^a) \quad (6.8)$$

gegeben.  $\tau^a$  ist das Triplet der  $2 \times 2$ -Pauli-Matrizen und das Higgs-Feld  $\sigma$  wird im NL $\sigma$ M nichtlinear um den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert des skalaren Feldes  $\langle \Phi \rangle = v$  verschoben:

$$\sigma^2 = v^2 - (\pi^a)^2. \quad (6.9)$$

Diese aus dem NL $\sigma$ M geforderte Bedingung entspricht der spontanen Symmetriebrechung des Systems um ihren Vakuumerwartungswert. Das Gluonfeld erlangt somit die Masse:

$$m = \frac{gv}{2}. \quad (6.10)$$

Für die Summe aus (6.2) und (6.7) folgt mit (6.8):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{add.}} = & \frac{1}{4} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a)^2 + g \epsilon^{abc} A_i^a A_j^b \partial_i A_j^c + \frac{1}{4} g^2 \epsilon^{abe} \epsilon^{cde} A_i^a A_j^b A_i^c A_j^d \\ & + \text{Tr} \left[ \left( \left( \partial_i - ig \frac{\tau^a}{2} A_i^a \right) \left( \frac{1}{2}\sigma - i\frac{\tau^b}{2}\pi^b \right) \right)^\dagger \left( \left( \partial_i - ig \frac{\tau^c}{2} A_i^c \right) \left( \frac{1}{2}\sigma - i\frac{\tau^d}{2}\pi^d \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die Form des Feldstärketensors  $F_{ij}^a$  ergibt sich aus der Definition (6.2) und entspricht:

$$F_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + g\epsilon^{abc} A_i^b A_j^c. \quad (6.12)$$

Die total-antisymmetrische Strukturkonstante  $\epsilon^{abc}$  wird auch Levi-Civita-Tensor genannt.

Die Symmetriebruch-Bedingung (6.9) muss für perturbative Zwecke nach den pseudoskalaren Goldstone-Bosonen entwickelt werden. Dabei reicht die erste Ordnung der Taylor-Entwicklung aus, da lediglich Terme bis zur 2-Schleifen-Ordnung benötigt werden:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{v^2 - (\pi^a)^2} = v\sqrt{1 - \frac{(\pi^a)^2}{v^2}} \approx v - \frac{1}{2}\frac{(\pi^a)^2}{v} + O(\pi^4) \\ \Rightarrow \partial_i \sigma &= -\frac{1}{v}\pi^a \partial_i \pi^a + O(\pi^4). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Daraus folgt mit Hilfe der gruppentheoretischen Relationen im Anhang (Kap. A.1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{add.}} &= \frac{1}{2}\text{Tr } F_{ij}^2 + \frac{1}{2}(\partial_i \pi^a)^2 + \frac{g^2 v^2}{8} A_i^a A_i^a - \frac{gv}{2} A_i^a \partial_i \pi^a + \frac{1}{2} g\epsilon^{abc} \partial_i \pi^a A_i^b \pi^c \\ &\quad + \frac{1}{2v^2} (\pi^a \partial_i \pi^a)^2 + O(\pi^3 A, \pi^6). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Aus Symmetriegründen ergibt der Term der Ordnung  $O(\pi A^2)$  keinen Beitrag. Die Ordnung  $O(\pi^2 A^2)$  entfällt wegen der Jacobi-Identität. Durch die Addition von (6.7) erlangen die Gluon-Felder ihre Masse mit (6.10).

Die Wahl der Eichfixierung fällt auf die  $R_\xi$ -Eichung aus (6.6), damit der unphysikalische Mischterm  $m A_i^a \partial_i \pi^a$  eliminiert wird. Der korrespondierende Beitrag aus den Faddeev-Popov-Geistfeldern erfordert die infinitesimalen Eichtransformationen der Felder durch

$$\Phi \rightarrow U\Phi, \quad A_i \rightarrow \frac{i}{g} U \mathcal{D}_i U^\dagger \quad \text{mit} \quad U = \exp\left(-ig\frac{\tau^a}{2}\omega^a\right), \quad (6.15)$$

woraus folgt:

$$\delta A_i^a = \partial_i \omega^a - g\epsilon^{abc} \omega^b A_i^c, \quad (6.16)$$

$$\delta \pi^a = -\frac{1}{2}g\sigma \omega^a - \frac{1}{2}g\epsilon^{abc} \omega^b \pi^c. \quad (6.17)$$

Damit ergibt sich für die Eichfixierung und die Faddeev-Popov-Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{gf}} + \mathcal{L}'_{\text{FP}} &= \frac{1}{2\xi} (G^a)^2 - (c^a)^* M^{ab} c^b \\ &= \frac{1}{2\xi} (\partial_i A_i^a + \xi m \pi^a)^2 \\ &\quad - (c^a)^* \left( \partial_i (\partial_i \delta^{ab} - g\epsilon^{abc} A_i^c) - \xi m^2 \delta^{ab} - \frac{1}{2} g\epsilon^{abc} \xi m \pi^c + \frac{1}{8} g^2 \xi (\pi^c)^2 \delta^{ab} \right) c^b \\ &\quad + O(\pi^4 c^2). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Nun lässt sich der vollständige Ausdruck für die mit dem  $\text{NL}\sigma\text{M}$  resummierte effektive Lagrangedichte (6.4) in  $\text{SU}(2)$  angeben. Unter Beachtung des Schleifen-Parameters  $l$  folgt bis zur geforderten Ordnung  $l^1$  bzw. zur 2-Schleifen-Ordnung:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'_{\text{eff.}} = & \frac{1}{4} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a)^2 + \frac{1}{2\xi} (\partial_i A_i^a)^2 + \frac{1}{2} m^2 A_i^a A_i^a \\
 & + \frac{1}{2} (\partial_i \pi^a)^2 + \frac{1}{2} \xi m^2 \pi^a \pi^a + (\partial_i (c^a)^*) (\partial_i c^a) + \xi m^2 c^{a*} c^a \\
 & + g \sqrt{l} \epsilon^{abc} A_i^b A_j^c \partial_i A_j^a + \frac{1}{4} g^2 l \epsilon^{abe} \epsilon^{cde} A_i^a A_j^b A_i^c A_j^d \\
 & + \frac{1}{2} g \sqrt{l} \epsilon^{abc} (\partial_i \pi^a) A_i^b \pi^c + g \sqrt{l} \epsilon^{abc} (\partial_i (c^a)^*) A_i^b c^c - \frac{1}{2} g \sqrt{l} \xi m \epsilon^{abc} \pi^a c^b (c^c)^* \\
 & + \frac{1}{8} \frac{g^2 l}{m^2} \delta^{ab} \delta^{cd} \pi^a \pi^c \partial_i \pi^b \partial_i \pi^d - \frac{1}{8} g^2 l \xi \delta^{ad} \delta^{bc} (c^a)^* \pi^b \pi^c c^d \\
 & - \frac{1}{2\xi} l (\partial_i A_i^a)^2 - \frac{1}{2} m^2 l A_i^a A_i^a - \frac{1}{2} l (\partial_i \pi^a)^2 - \frac{1}{2} \xi m^2 l \pi^a \pi^a \\
 & - l (\partial_i (c^a)^*) (\partial_i c^a) - \xi m^2 l c^{a*} c^a + O(l^{3/2}, l^2). \tag{6.19}
 \end{aligned}$$

Das Resultat ist eine resummierte effektive Theorie mit einem modifizierten massiven Gluonpropagator, massiven Goldstone-Bosonen und Faddeev-Popov-Geistfeldern, die in die perturbative Entwicklung der durch die Resummation modifizierten Wechselwirkungsterme eingehen.

Die Berechnung des Drucks der freien effektiven Theorie erfolgt durch die Terme zur Ordnung  $l^0$ . Die erste Korrektur des Drucks erfordert die Auswertung aller Terme zur Schleifen-Ordnung  $l^{1/2}$  und  $l^1$ , wobei nun auch der subtrahierte Beitrag aus der Resummation in die Berechnung eingeht. Die daraus notwendige Betrachtung der sogenannten Gegenterme tragen wesentlich zur Auswertung der ersten Korrektur bei.

Im folgenden Abschnitt wird die Herleitung der resummierten effektiven Lagrangedichte für  $\text{SU}(N)$  dargestellt. Die  $\text{SU}(2)$ -Ergebnisse für die Koeffizienten  $\alpha_G, \beta_G$  des Drucks der MQCD können dadurch verallgemeinert werden. Insbesondere lässt sich feststellen, ob die Koeffizienten farbzahlenabhängige Größen sind. Bestätigt sich der Fall, dann wäre eine weiterführende perturbative Behandlung auf 3- und 4-Schleifen-Niveau mit der einfacheren  $\text{SU}(2)$ -Theorie vorteilhaft.

### 6.1.3 $\text{SU}(N)$

Zur Herleitung der  $\text{SU}(N)$  effektiven Lagrangedichte wird eine alternative Parametrisierung, die sich durch folgende Exponentialform ergibt, betrachtet (vgl. [29]):

$$\Phi = \frac{1}{2} (\sigma + i \tau^a \pi^a) = \frac{1}{2} v \exp \left( \frac{i \tau^a \pi'^a}{v} \right). \tag{6.20}$$

Die Felder  $\pi'^a$  müssen dabei eine Funktion der Felder  $\pi^a$  ergeben, damit die Äquivalenz der beiden Parametrisierungen erfüllt ist. Für den Real- und Imaginärteil der

Parametrisierungen gilt:

$$\frac{1}{2}\sigma = \frac{1}{2}v \cos\left(\frac{\tau^a \pi'^a}{v}\right), \quad (6.21)$$

$$\frac{1}{2}i\tau^a \pi^a = \frac{1}{2}vi \sin\left(\frac{\tau^a \pi'^a}{v}\right). \quad (6.22)$$

Zur Bestimmung der  $SU(N)$ -Parametrisierung wird der Imaginärteil mit den  $SU(N)$ -Generatoren  $T^a = \frac{1}{2}\tau^a$  in der fundamentalen Darstellung (Kap. A.1) untersucht:

$$\begin{aligned} T^a \pi^a &= \frac{1}{2}v \sin\left(\frac{2T^a \pi'^a}{v}\right) \\ &= T^a \pi'^a - \frac{2}{3v^2} T^a T^b T^c \pi'^a \pi'^b \pi'^c + \frac{2}{15v^4} T^a T^b T^c T^d T^e \pi'^a \pi'^b \pi'^c \pi'^d \pi'^e \\ &\quad - \frac{4}{315v^6} T^a T^b T^c T^d T^e T^f T^g \pi'^a \pi'^b \pi'^c \pi'^d \pi'^e \pi'^f \pi'^g + \dots \end{aligned} \quad (6.23)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} T^a \pi'^a &= T^a \pi^a + \frac{2}{3v^2} T^a T^b T^c \pi^a \pi^b \pi^c + \frac{6}{5v^4} T^a \dots T^e \pi^a \dots \pi^e + \frac{20}{7v^6} T^a \dots T^g \pi^a \dots \pi^g + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(2n+1)v^{2n}} (T^a \pi^a)^{2n+1}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Zur vollständigen Äquivalenz der Parametrisierungen muss die Bestimmung der Koeffizienten  $a_n$  sukzessiv weitergeführt werden. Die Annahme, dass

$$a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (6.25)$$

gilt, muss noch für alle  $n > 3$  bestätigt werden.

Die Koeffizienten  $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 20$  reichen aus, um die effektive Lagragedichte bis zur Ordnung  $t^3$  bzw. zur 4-Schleifen-Ordnung zu entwickeln. Die Transformation (6.24) erfüllt insbesondere die Äquivalenz des Realteils (6.21) mit

$$T^a T^b = \frac{1}{2N} \delta^{ab} \mathbb{1}_N + \frac{1}{2} (d^{abp} + i f^{abp}) T^p, \quad (6.26)$$

so dass für  $SU(2)$  mit (6.9) folgt:

$$\frac{1}{2} \sqrt{v^2 - (\pi^a)^2} = \frac{1}{2}v \cos\left(\frac{\tau^a \pi'^a}{v}\right) = \frac{1}{2}v - \frac{1}{4} \frac{(\pi^a)^2}{v} - \frac{1}{16} \frac{(\pi^a)^4}{v^3} - \dots \quad (6.27)$$

Die Herleitung der  $SU(N)$  effektiven Lagragedichte erfolgt schließlich mit der Parametrisierung des skalaren Feldes

$$\phi = \frac{1}{2}vV = \frac{1}{2}v \exp\left(\frac{2iT^a \pi'^a}{v}\right) \quad (6.28)$$

mit (6.24), wobei  $V$  eine unitäre Matrix kennzeichnet, d.h.  $V^\dagger V = \mathbb{1}_N$  mit der  $N$ -dimensionalen Einheitsmatrix  $\mathbb{1}_N$ .

Die zur MQCD zu addierende Lagrangedichte (6.7) lässt sich folgendermaßen ausdrücken:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\sigma &= \text{Tr} \left[ (\partial_i \Phi - ig A_i \Phi)^\dagger (\partial_i \Phi - ig A_i \Phi) \right] \\ &= \text{Tr} \left[ (\partial_i \Phi^\dagger)(\partial_i \Phi) + ig \Phi^\dagger A_i \partial_i \Phi - ig \partial_i \Phi^\dagger A_i \Phi + g^2 \Phi^\dagger A_i A_i \Phi \right].\end{aligned}\quad (6.29)$$

Die  $SU(N)$ -Parametrisierung des skalaren Feldes  $\Phi$  in (6.28) wird bis zur 2-Schleifen-Ordnung entwickelt:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{v}{2} \exp \left( i \frac{2}{v} T^a \pi'^a \right) \\ &= \frac{v}{2} + iT^a \pi'^a - \frac{1}{v} T^a T^b \pi'^a \pi'^b - \frac{2}{3v^2} T^a T^b T^c \pi'^a \pi'^b \pi'^c \\ &\quad + \frac{1}{3v^3} T^a T^b T^c T^d \pi'^a \pi'^b \pi'^c \pi'^d + O(\pi'^5) \\ &= \frac{v}{2} + iT^a \pi^a - \frac{1}{v} T^a T^b \pi^a \pi^b - \frac{1}{v^3} T^a T^b T^c T^d \pi^a \pi^b \pi^c \pi^d + O(\pi^6)\end{aligned}\quad (6.30)$$

$$\Rightarrow \partial_i \Phi = iT^a \partial_i \pi^a - \frac{1}{v} T^a T^b (\pi^a \partial_i \pi^b + \pi^b \partial_i \pi^a) + O(\pi^4).\quad (6.31)$$

Die Äquivalenz der Parametrisierung (6.30) für  $N = 2$  und der Parametrisierung (6.8) ist wiederum ersichtlich und bestätigt somit die Richtigkeit der Transformation (6.24).

Unter Benutzung der gruppentheoretischen Relationen für  $SU(N)$ -Generatoren und mit (6.10) folgt aus (6.29):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\sigma &= \frac{1}{2} (\partial_i \pi^a)^2 - m A_i^a \partial_i \pi^a + \frac{1}{2} m^2 A_i^a A_i^a + \frac{1}{2} g f^{abc} \partial_i \pi^a A_i^b \pi^c \\ &\quad + \frac{1}{8} \frac{g^2}{m^2} \left( \frac{2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} + d^{abe} d^{cde} \right) \pi^a \pi^c \partial_i \pi^b \partial_i \pi^d \\ &\quad + O(\pi^6, \pi^3 A, \pi^3 A^2).\end{aligned}\quad (6.32)$$

Die  $d^{abc}$  stellen total-symmetrische Strukturkonstanten dar und existieren für  $N = 2$  nicht. Die Terme der Ordnung  $O(\pi^3, A^2 \pi)$  verschwinden aus Symmetriegründen und der Term  $O(\pi^2 A^2)$  liefert wegen der Jacobi-Identität keinen Beitrag.

Zur Eliminierung des unphysikalischen Mischterms wird analog zum  $SU(2)$ -Fall die  $R_\xi$ -Eichung (6.6) verwendet. Der korrespondierende Beitrag der Faddeev-Popov-Geister unterliegt wiederum den infinitesimalen Eichtransformationen

$$\Phi \rightarrow U \Phi, \quad A_i \rightarrow \frac{i}{g} U \mathcal{D}_i U^\dagger \quad \text{mit} \quad U = \exp(-ig T^a \omega^a),\quad (6.33)$$

woraus folgt:

$$\delta A_i^a = \partial_i \omega^a - g f^{abc} \omega^b A_i^c,\quad (6.34)$$

$$\begin{aligned}\delta \pi^a &= -m \omega^a + \frac{1}{2} g f^{abd} \pi^b \omega^d \\ &\quad + \frac{1}{8} \frac{g^2}{m^2} \left( \frac{2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} \omega^d + d^{abe} d^{cde} \omega^d - f^{abe} f^{cde} \omega^d \right) \pi^b \pi^c.\end{aligned}\quad (6.35)$$

Damit ergibt sich für die Eichfixierung und die Faddeev-Popov-Lagragedichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{gf}} + \mathcal{L}_{\text{FP}} &= \frac{1}{2\xi} (G^a)^2 - (c^a)^* M^{ab} c^b \\ &= \frac{1}{2\xi} (\partial_i A_i^a + \xi m \pi^a)^2 \\ &\quad - (c^a)^* \left( \partial_i (\partial_i \delta^{ab} - g f^{abc} A_i^c) \right) c^b \\ &\quad - (c^a)^* \left( -\xi m^2 \delta^{ac} + \frac{1}{2} g f^{abc} \xi m \pi^b \right) c^c \\ &\quad - (c^a)^* \left( \frac{1}{8} g^2 \xi \pi^b \pi^c \left( \frac{2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} + d^{abe} d^{cde} - f^{abe} f^{cde} \right) \right) c^d \\ &\quad + O(\pi^4 c^2).\end{aligned}\tag{6.36}$$

Die mit dem  $SU(N)$ -NL $\sigma$ M resummierte effektive Lagragedichte besitzt unter Beachtung des Schleifen-Parameters  $l$  folgende Form:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{eff.}} &= \frac{1}{4} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a)^2 + \frac{1}{2\xi} (\partial_i A_i^a)^2 + \frac{1}{2} m^2 A_i^a A_i^a \\ &\quad + \frac{1}{2} (\partial_i \pi^a)^2 + \frac{1}{2} \xi m^2 \pi^a \pi^a + (\partial_i (c^a)^*) (\partial_i c^a) + \xi m^2 c^{a*} c^a \\ &\quad + g \sqrt{l} f^{abc} A_i^b A_j^c \partial_i A_j^a + \frac{1}{4} g^2 l f^{abe} f^{cde} A_i^a A_j^b A_i^c A_j^d \\ &\quad + \frac{1}{2} g \sqrt{l} f^{abc} (\partial_i \pi^a) A_i^b \pi^c + g \sqrt{l} f^{abc} (\partial_i (c^a)^*) A_i^b c^c - \frac{1}{2} g \sqrt{l} \xi m f^{abc} \pi^a c^b (c^c)^* \\ &\quad + \frac{1}{8} \frac{g^2 l}{m^2} \left( \frac{2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} + d^{abe} d^{cde} \right) \pi^a \pi^c \partial_i \pi^b \partial_i \pi^d \\ &\quad - \frac{1}{8} g^2 l \xi \left( \frac{2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} + d^{abe} d^{cde} - f^{abe} f^{cde} \right) (c^a)^* \pi^b \pi^c c^d \\ &\quad - \frac{1}{2\xi} l (\partial_i A_i^a)^2 - \frac{1}{2} m^2 l A_i^a A_i^a - \frac{1}{2} l (\partial_i \pi^a)^2 - \frac{1}{2} \xi m^2 l \pi^a \pi^a \\ &\quad - l (\partial_i (c^a)^*) (\partial_i c^a) - \xi m^2 l c^{a*} c^a + O(l^{3/2}, l^2).\end{aligned}\tag{6.37}$$

Die  $SU(N)$  effektive Lagragedichte  $\mathcal{L}_{\text{eff.}}$  lässt sich für  $N = 2$  auf die Form  $\mathcal{L}'_{\text{eff.}}$  in (6.19) durch folgende Ersetzung bringen:

$$f^{abc} \rightarrow \epsilon^{abc},\tag{6.38}$$

$$\epsilon^{abe} \epsilon^{cde} = \delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ad} \delta^{bc}.\tag{6.39}$$

Die total-symmetrischen Strukturkonstanten  $d^{abc}$  ergeben für  $N = 2$  keinen Beitrag. Die Äquivalenz der Ordnung  $O(\pi^4)$  in beiden Lagragedichten wird dadurch sofort ersichtlich. Mit (6.39) lässt sich der Term der Ordnung  $O(\pi^2 c^2)$  in (6.37) auf die Form in (6.19) zurückführen. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit die Ergebnisse der Schleifen-Berechnung für  $SU(N)$  angegeben. Die explizit durchgeföhrten Rechnungen in  $SU(2)$  wurden insbesondere durch die im Folgenden aufgezeichneten Rechnungen in  $SU(N)$  bestätigt.

## 6.2 Berechnung der Schleifen-Diagramme

Der Vergleich der Lagrangedichten für allgemeine  $N$  und für  $N = 2$  zeigt, dass für die  $SU(N)$ -Theorie keine zusätzlichen Vertizes auftauchen. Daher besitzen die Feynman-Regeln bis auf die Farbzahl-Vorfaktoren dieselbe Struktur. Natürlich lassen sich aus obigen Berachtungen die  $SU(N)$  Feynman-Regeln für  $N = 2$  direkt angeben. Diese korrespondieren selbstverständlich mit den Termen der  $SU(2)$ -Lagrangedichte. Im Folgenden wird daher der Fall für allgemeine  $N$  betrachtet.

### 6.2.1 Feynman-Regeln für Propagatoren

Zur Herleitung der Feynman-Regeln für die Propagatoren, Vertizes und Gegenterme wird die Fourier-Transformation der Felder in den entsprechenden Termen der Lagragedichte (6.37) betrachtet:

$$A_i^a = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} e^{-ipx} \tilde{A}_i^a(p) =: \int_p e^{-ipx} \tilde{A}_i^a(p). \quad (6.40)$$

Für die quadratischen Terme der Gluonen folgt somit:

$$\begin{aligned} - \int d^d x \mathcal{L}(A^2) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \tilde{A}_i^a [D_{ij}]^{-1} \tilde{A}_i^a, \\ [D_{ij}]^{-1} &= p^2 \delta_{ij} + (\xi^{-1} - 1) p_i p_j, \end{aligned} \quad (6.41)$$

wobei  $[D_{ij}]^{-1}$  den inversen Gluon-Propagator kennzeichnet. Nach Invertierung dieser Matrix folgt für den Gluon-Propagator  $D_{ij}^{ab}(p)$  in allgemeiner  $R_\xi$ -Eichung:

$$i, a \underset{p}{\sim\!\!\!\sim\!\!\!\sim} j, b \implies D_{ij}^{ab}(p) = \delta^{ab} \left[ \delta_{ij} - (1 - \xi) \frac{p_i p_j}{p^2 + \xi m^2} \right] \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (6.42)$$

$$= \delta^{ab} \left[ \frac{\delta_{ij} + \frac{p_i p_j}{m^2}}{p^2 + m^2} - \frac{\frac{p_i p_j}{m^2}}{p^2 + \xi m^2} \right] \quad (6.43)$$

$$= \delta^{ab} \left[ \frac{\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2}}{p^2 + m^2} + \frac{\xi \frac{p_i p_j}{p^2}}{p^2 + \xi m^2} \right] \quad (6.44)$$

$$\begin{aligned} &= \delta^{ab} \left[ D_T(p) \left( \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2} \right) + D_L(p) \frac{p_i p_j}{p^2} \right] \\ &= \delta^{ab} D_{ij}(p) \end{aligned}$$

$$D_T(p) = \frac{1}{p^2 + m^2}, \quad D_L(p) = \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2}.$$

Die Indizes  $T$  bzw.  $L$  kennzeichnen den transversalen und den longitudinalen Teil des Gluon-Propagators. Die analoge Behandlung der quadratischen Terme der Lagragedichte für die Goldstone-Bosonen und die Faddeev-Popov-Geistfelder resultieren in folgenden Propagatoren, wobei die gestrichelte Linie den Goldstone-Propagator  $\Delta_\pi^{ab}(p)$

und die gerichtete punktierte Linie den Faddeev-Popov-Geist-Propagator  $\Delta_c^{ab}(p)$  in allgemeiner  $R_\xi$ -Eichung darstellen:

$$a \underset{p}{\text{---}} b \implies \Delta_\pi^{ab}(p) = \delta^{ab} \frac{1}{p^2 + \xi m^2}, \quad (6.45)$$

$$a \underset{p}{\cdots \blacktriangleright \cdots} b \implies \Delta_c^{ab}(p) = \delta^{ab} \frac{1}{p^2 + \xi m^2}. \quad (6.46)$$

### 6.2.2 Feynman-Regeln für Vertizes

Bevor eine Auflistung der Feynman-Regeln für die Vertizes der korrespondierenden Terme der  $SU(N)$ -Lagrangedichte wiedergegeben wird, ist die Darstellung der Herleitung einer Feynman-Regel am Beispiel der Ordnung  $O(\pi^4)$  aufgezeichnet. Die detaillierte Illustration der Herleitung ist sinnvoll, da die Gültigkeit der Feynman-Regeln die Basis der anstehenden 2-Schleifen-Berechnungen bildet.

Aus dem Term der Ordnung  $O(\pi^4)$  in (6.37) folgt über die Fouriertransformation der Felder (6.40):

$$\begin{aligned} - \int d^d x \mathcal{L}(\pi^4) &= - \frac{1}{8} \frac{g^2 l}{m^2} \left( \frac{2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} + d^{abe} d^{cde} \right) \int d^d x \pi^a \pi^c \partial_i \pi^b \partial_i \pi^d \\ &= + \frac{1}{8} \frac{g^2 l}{m^2} \left( \frac{2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} + d^{abe} d^{cde} \right) \int_p \int_q \int_r \int_s q_i s_i \tilde{\pi}^a(p) \tilde{\pi}^b(q) \tilde{\pi}^c(r) \tilde{\pi}^d(s) \\ &\quad \cdot \delta(p + q + r + s). \end{aligned} \quad (6.47)$$

Unter Beachtung der Symmetrien ( $a \leftrightarrow c, b \leftrightarrow d$ ) ergeben sich für den folgenden Ausdruck elf weitere Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 12 \left( \frac{2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} + d^{abe} d^{cde} \right) q_i s_i &\rightarrow \left( \frac{2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} + d^{abe} d^{cde} \right) (p_i r_i + p_i s_i + q_i r_i + q_i s_i) \\ &\quad + \left( \frac{2}{N} \delta^{ac} \delta^{bd} + d^{ace} d^{bde} \right) (p_i q_i + p_i s_i + q_i r_i + r_i s_i) \\ &\quad + \left( \frac{2}{N} \delta^{ad} \delta^{bc} + d^{ade} d^{bce} \right) (p_i q_i + p_i r_i + q_i s_i + r_i s_i). \end{aligned}$$

Die Vertauschungsmöglichkeiten der vier Goldstone-Felder im Impulsraum erfordert schließlich die Multiplikation des Faktors  $4!$ , so dass für die Feynman-Regel des  $O(\pi^4)$ -Vertex folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma^{abcd}(\pi^4) = \frac{1}{4} \frac{g^2 l}{m^2} &\left[ \left( \frac{2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} + d^{abe} d^{cde} \right) (p_i r_i + p_i s_i + q_i r_i + q_i s_i) \right. \\ &\quad + \left( \frac{2}{N} \delta^{ac} \delta^{bd} + d^{ace} d^{bde} \right) (p_i q_i + p_i s_i + q_i r_i + r_i s_i) \\ &\quad \left. + \left( \frac{2}{N} \delta^{ad} \delta^{bc} + d^{ade} d^{bce} \right) (p_i q_i + p_i r_i + q_i s_i + r_i s_i) \right]. \quad (6.48) \end{aligned}$$

The figure displays six Feynman diagrams corresponding to different terms in the effective theory. Each diagram is followed by its mathematical expression.

- Diagram 1:** A four-point vertex with external lines labeled  $a, i$ ,  $b, j$ ,  $d, m$ , and  $c, l$ . Internal lines are labeled  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $s$ . The expression is:
 
$$\Gamma_{ijlm}^{abcd}(A^4) = -g^2 l \left[ f^{abe} f^{cde} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) + f^{ace} f^{bde} (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{im} \delta_{jl}) + f^{ade} f^{bce} (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{il} \delta_{jm}) \right]$$
- Diagram 2:** A three-point vertex with external lines labeled  $a, i$ ,  $b, j$ , and  $c, l$ . Internal lines are labeled  $p$ ,  $q$ , and  $r$ . The expression is:
 
$$\Gamma_{ijl}^{abc}(A^3) = -ig\sqrt{l} f^{abc} [(p-q)_l \delta_{ij} + (q-r)_i \delta_{jl} + (r-p)_j \delta_{il}]$$
- Diagram 3:** A two-point vertex with external lines labeled  $a, i$  and  $b$ . Internal lines are labeled  $p$  and  $q$ . The expression is:
 
$$\Gamma_i^{abc}(A\pi^2) = -\frac{1}{2} ig\sqrt{l} f^{abc} (r+q)_i$$
- Diagram 4:** A two-point vertex with external lines labeled  $a$  and  $b$ . Internal lines are labeled  $p$  and  $q$ . The expression is:
 
$$\Gamma_i^{abc}(Ac^2) = -ig\sqrt{l} f^{abc} r_i$$
- Diagram 5:** A two-point vertex with external lines labeled  $a$  and  $b$ . Internal lines are labeled  $p$  and  $q$ . The expression is:
 
$$\Gamma^{abc}(\pi c^2) = \frac{1}{2} g\sqrt{l} \xi m f^{abc}$$
- Diagram 6:** A four-point vertex with external lines labeled  $a$ ,  $b$ ,  $d$ , and  $c$ . Internal lines are labeled  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $s$ . The expression is:
 
$$\Gamma^{abcd}(\pi^4) = (6.48)$$
- Diagram 7:** A four-point vertex with external lines labeled  $a$ ,  $b$ ,  $d$ , and  $c$ . Internal lines are labeled  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $s$ . The expression is:
 
$$\Gamma^{abcd}(\pi^2 c^2) = \frac{1}{4} g^2 l \xi \left( \frac{2}{N} \delta^{ad} \delta^{bc} + d^{ade} d^{bce} - f^{ade} f^{bce} \right)$$

**Abbildung 6.1:** Feynman-Regeln der effektiven resummierten Theorie (6.37).

Alle weiteren Feynman-Regeln werden analog zu diesem Beispiel hergeleitet und sind in Abbildung 6.1 aufgelistet. Des Weiteren existieren wegen der Resummation im subtrahierten Teil der Lagrangedichte (6.37) drei Massenterme, die jeweils einen Vertex als Gegenterm darstellen:

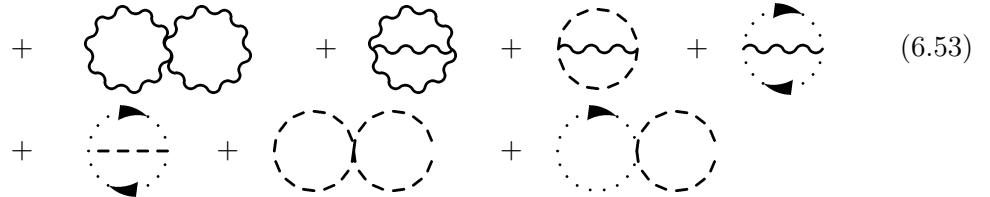
$$i, a \underset{p}{\sim\!\!\!-\!\!\!\times} j, b \implies \Gamma_{ij,m}^{ab}(A^2) = m^2 l \delta_{ij} \delta^{ab}, \quad (6.49)$$

$$a \underset{p}{\cdots \times \cdots} b \implies \Gamma_m^{ab}(\pi^2) = \xi m^2 l \delta^{ab}, \quad (6.50)$$

$$a \underset{p}{\cdots \times \cdots} b \implies \Gamma_m^{ab}(c^2) = \xi m^2 l \delta^{ab}. \quad (6.51)$$

Das Kreuz korrespondiert zu den Selbstenergien der Theorie, die zur Bestimmung der Masse ausgewertet werden müssen. Der genaue Wert der Masse ist für die Berechnung des Drucks bzw. der geschlossenen Feynman-Diagramme zunächst irrelevant. Die aus (6.49)-(6.51) resultierenden geschlossenen Schleifen-Diagramme gehen in die Auswertung der 2-Schleifen-Berechnung bzw. in die erste Korrektur zur Ordnung  $l^1$  ein.

Damit erfolgt die Auswertung folgender Feynman-Diagramme für die Bestimmung des Drucks bis zur Schleifen-Ordnung  $l^1$ :



Die ersten drei Schleifen-Diagramme tragen zur Ordnung  $l^0$  bei. Die Auswertung dieser Diagramme resultiert in die Bestimmung des Drucks der effektiven freien Theorie. Zur Berechnung der ersten Korrektur ist die Entwicklung der sieben 2-Schleifen-Diagramme und der drei Gegenterme notwendig. Diese tragen zur Schleifen-Ordnung  $l^1$  bei. Da das  $SU(N)$ -NL $\sigma$ M eine Eichtheorie darstellt, ist ein eichinvariantes Ergebnis für den Druck in den einzelnen Ordnungen zu erwarten, d. h. (6.52), (6.53) und (6.54) müssen jeweils ein eichinvariantes Ergebnis erzielen.

In den folgenden Abschnitten werden die Rechnungen der drei *Pakete* von Schleifen-Diagrammen skizziert und anschließend zu einem Gesamtresultat für  $l = 1$  zusammengefasst. Dadurch wird die Bestimmung der Koeffizienten  $\alpha_G$  und  $\beta_G$  ermöglicht.

### 6.2.3 Schleifen-Ordnung $l^0$

Der thermodynamische Druck der resummierten effektiven Theorie (6.37) zur Schleifen-Ordnung  $l^0$  ergibt sich zu:

$$p_{G,l^0}(T) = \frac{T}{V} \ln \int [dA_i^a][d\pi^a][d(c^a)^*][dc^a] \exp \left( - \int d^d x \mathcal{L}_{\text{eff.},l^0} \right), \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff.},l^0} = & \frac{1}{4} (\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a)^2 + \frac{1}{2\xi} (\partial_i A_i^a)^2 + \frac{1}{2} m^2 A_i^a A_i^a \\ & + \frac{1}{2} (\partial_i \pi^a)^2 + \frac{1}{2} \xi m^2 \pi^a \pi^a + (\partial_i (c^a)^*) (\partial_i c^a) + \xi m^2 c^a c^a. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Für die Zustandssumme folgt mit  $d = 3 - 2\epsilon$ :

$$\begin{aligned} Z = & \int [dA_i^a] \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^d x A_i^a [\delta_{ij}(-\partial_i^2 + m^2) + (1 - \xi^{-1}) \partial_i \partial_j] A_j^b \right) \\ & \cdot \int [d\pi^a] \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^d x \pi^a [-\partial_i^2 + \xi m^2] \pi^b \right) \\ & \cdot \int [d(c^a)^*][dc^a] \exp \left( -\frac{1}{2} \int d^d x (c^a)^* [-\partial_i^2 + \xi m^2] c^b \right) \cdot \exp(\delta^{ab}) \\ = & \prod_p [(p^2 + m^2)^2 (\xi^{-1} p^2 + m^2)]^{-1/2} \cdot \prod_p (p^2 + m^2)^{-1/2} \cdot \prod_p (p^2 + m^2)^{+1} \cdot \exp(\delta^{aa}) \\ = & \prod_p (p^2 + m^2)^{-1} \cdot \prod_p \xi^{1/2} \cdot \prod_p (p^2 + \xi m^2)^{-1/2} \cdot \prod_p (p^2 + \xi m^2)^{+1/2} \cdot \exp(\delta^{aa}). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Dabei wurde die Gauß-Integration aus (2.15) und (2.16) benutzt. Der dritte und vierte Faktor heben sich gegenseitig weg und der zweite Faktor trägt laut Nernst'schem Theorem nicht zur Thermodynamik bei, da er eine temperaturunabhängige Konstante ist. Die Summation über die Farbindizes ergibt  $\delta^{aa} = N^2 - 1$  und somit folgt für den Druck

$$\begin{aligned} p_{G,l^0}(T) = & (N^2 - 1) \frac{T}{V} \sum_p \ln(p^2 + m^2)^{-1} \\ = & -(N^2 - 1) T \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln(p^2 + m^2) \\ = & (N^2 - 1) T \frac{m^3}{6\pi} + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (6.58)$$

mit  $\sum_p = V \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$  und dem in dimensionaler Regularisierung ausgewerteten Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln(p^2 + m^2) = & \int_p \ln(p^2 + m^2) \\ = & -\frac{m^3}{6\pi} \left[ 1 + \epsilon \left( 2 \ln \left( \frac{\bar{\mu}}{2m} \right) + \frac{8}{3} \right) + O(\epsilon^2) \right], \end{aligned} \quad (6.59)$$

d. h. für  $\epsilon \rightarrow 0$  folgt  $\int_p \ln(p^2 + m^2) = -\frac{m^3}{6\pi}$ .

Die resummierte effektive Theorie liefert also bereits auf 1-Schleifen-Niveau einen eichinvarianten Beitrag zum Druck. Die Ursache hierfür liegt in der eichinvarianten Einbindung einer Gluon-Masse. Ist die effektive Masse der Theorie Null, so verschwindet der Beitrag.

### 6.2.4 Schleifen-Ordnung $l^1$

Der Beitrag des Drucks der MQCD zur Schleifen-Ordnung  $l^1$  erfordert die Auswertung der insgesamt zehn 2-Schleifen-Diagramme aus (6.53) und (6.54). Die Schwierigkeit dieser Rechnung besteht in der Reduzierung der teils länglichen Schleifen-Integrale auf bekannte Standardintegrale. Die Struktur der aus den Schleifen-Diagrammen resultierenden Integrale wird je komplexer, desto umfangreicher die Impulsstruktur der Feynman-Regeln sich darstellt. Die Auswertung des Schleifen-Diagramms der Ordnung  $O(A^3)$  (vgl. die Feynman-Regel in Abb. 6.1) verlangt diesbezüglich größte Sorgfalt. Das Auftreten von zwei verschiedenen Massenskalen  $m^2$  und  $\xi m^2$  im Gluon-Propagator bereitet der analytischen Rechnung einen zusätzlichen Umstand. Im vorliegenden Abschnitt wird zunächst die Berechnung der drei Gegenterme aufgezeigt. Die Skizze der Berechnung des 2-Schleifen-Diagramms der Ordnung  $O(A^4)$  soll als Beispiel für alle übrigen Diagramme wiedergegeben werden, da sonst der Rahmen der Diplomarbeit gesprengt werden würde.

In der 2-Schleifen-Ordnung treten zwei Standardintegrale auf: das linear divergente Integral  $A(m^2)$  und das logarithmisch divergente Integral  $I(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$ . Die dimensionale Regularisierung erweist sich als geeignetes Schema zur Behandlung der divergenten Integrale (vgl. 4.16). Die zwei Standardintegrale besitzen folgende Lösungen (vgl. auch Kap. A.4):

$$A(m^2) = \int_p \frac{1}{p^2 + m^2} = -\frac{m}{4\pi} \left[ 1 + \epsilon \left( 2 \ln \frac{\bar{\mu}}{2m} + 2 \right) + O(\epsilon^2) \right], \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} I(m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= \int_p \int_q \frac{1}{(p^2 + m_1^2)(q^2 + m_2^2)((p-q)^2 + m_3^2)} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{4\epsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Die drei Gegenterme aus (6.54) ergeben den folgenden Beitrag zum Druck:

$$\begin{aligned} p_{G,CT}(T) &= T \left[ \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2} + \text{Diagramm 3} \right] \\ &= T \left[ \frac{1}{2} \int_p D_{ij}^{ab}(p) \Gamma_{ij,m}^{ab}(A^2) + \frac{1}{2} \int_p \Delta_\pi^{ab}(p) \Gamma_m^{ab}(\pi^2) - \int_p \Delta_c^{ab}(p) \Gamma_m^{ab}(c^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Der Vorfaktor  $1/2$  des Gluon- und Goldstone-Boson-Gegenterms spiegelt den Symmetriefaktor  $S = 2$  der beiden Diagramme wider, da weder der Gluon- noch der Goldstone-Boson-Propagator eine definierte Impulsrichtung besitzen. Für den Faddeev-Popov-Geist-Gegenterm muss hingegen lediglich das Vorzeichen aufgrund des fermionischen Charakters der Schleife berücksichtigt werden.

Mit (6.44)-(6.46) und (6.49)-(6.51) folgt somit:

$$\begin{aligned} p_{G,CT}(T) &= \frac{1}{2} m^2 l T \delta^{aa} \int_p \left[ \frac{d}{p^2 + m^2} - \frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2} + \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2} - 2 \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} m^2 l T (d-1)(N^2-1) A(m^2). \end{aligned} \quad (6.63)$$

Die räumliche Dimension wird dabei durch  $\delta_{ii} = d = 3 - 2\epsilon$  gekennzeichnet. Der Beitrag der Faddeev-Popov-Geistfelder eliminiert wie erwartet die Eichabhängigkeit bzw. die Abhängigkeit vom Eichfixierungsparameter  $\xi$ . Mit (6.60) ergibt sich folgendes Resultat:

$$p_{G,CT}(T) = -l(N^2 - 1) \frac{m^3}{4\pi} T + O(\epsilon). \quad (6.64)$$

Im Folgenden wird die Berechnung des Schleifen-Diagramms der Ordnung  $O(A^4)$  skizziert. Die Notation

$$\langle \text{Schleife} \rangle_n = \pm \frac{1}{S_n} \int_p \int_q \langle \text{Vert.} \rangle \dots \cdot \langle \text{Vert.} \rangle \cdot \langle \text{Prop.} \rangle \dots \cdot \langle \text{Prop.} \rangle \quad (6.65)$$

kennzeichnet den Ausgangspunkt der je  $n = 1, \dots, 7$  auszuwertenden Schleifen.  $S_n$  entspricht dem Symmetriefaktor des  $n$ -ten Schleifen-Diagramms und das Vorzeichen ist von der Existenz einer fermionischen Schleife abhängig. Die Integration erfolgt unter Verwendung der Feynman-Regeln für die Vertizes aus Abb. 6.1 und Propagatoren aus (6.42)-(6.46).

Das erste Schleifen-Diagramm liefert folgenden Beitrag:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagramm: } \text{Two circles connected by a horizontal line.} \\
 & = \frac{1}{8} \int_p \int_q \Gamma_{ijlm}^{abcd}(A^4) D_{ij}^{ab}(p) D_{lm}^{cd}(q) \\
 & = \frac{1}{8} \int_p \int_q \Gamma_{ijlm}^{aacc}(A^4) D_{ij}(p) D_{lm}(q) \\
 & = \frac{1}{8} g^2 l f^{ace} f^{cae} (\delta_{ij} \delta_{lm} - \delta_{jl} \delta_{im} - \delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{ij} \delta_{lm}) \int_p \int_q D_{ij}(p) D_{lm}(q) \\
 & = \frac{1}{8} g^2 l f^{ace} f^{cae} \int_p \int_q (2D_{ii}(p) D_{jj}(q) - 2D_{ij}(p) D_{ij}(q)) \\
 & = C_1 \int_p \int_q \left[ \left( \frac{d-1}{p^2 + m^2} + \frac{\xi}{p^2 + \xi m^2} \right) \left( \frac{d-1}{q^2 + m^2} + \frac{\xi}{q^2 + \xi m^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \left( \frac{\delta_{ij}}{p^2 + m^2} + \frac{p_i p_j}{m^2(p^2 + m^2)} - \frac{p_i p_j}{m^2(p^2 + \xi m^2)} \right) \right. \\
 & \quad \left. \cdot \left( \frac{\delta_{ij}}{q^2 + m^2} + \frac{q_i q_j}{m^2(q^2 + m^2)} - \frac{q_i q_j}{m^2(q^2 + \xi m^2)} \right) \right] \\
 & = C_1 [(d-1)^2 A^2(m^2) + \xi^2 A^2(\xi m^2) + 2(d-1)\xi A(\xi m^2) A(m^2)] \\
 & \quad - C_1 \int_p \int_q \left[ \frac{d + \frac{p^2}{m^2} + \frac{q^2}{m^2} + \frac{(p_i q_i)(p_j q_j)}{m^4}}{(p^2 + m^2)(q^2 + m^2)} - \frac{\frac{p^2}{m^2} + \frac{(p_i q_i)(p_j q_j)}{m^4}}{(p^2 + \xi m^2)(q^2 + m^2)} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\frac{q^2}{m^2} + \frac{(p_i q_i)(p_j q_j)}{m^4}}{(q^2 + \xi m^2)(p^2 + m^2)} + \frac{\frac{(p_i q_i)(p_j q_j)}{m^4}}{(p^2 + \xi m^2)(q^2 + \xi m^2)} \right], \\
 & C_1 = \frac{1}{4} g^2 l f^{ace} f^{cae} = -\frac{1}{4} g^2 l N(N^2 - 1).
 \end{aligned} \quad (6.66)$$

Die Kontraktionen der total-antisymmetrischen bzw. total-symmetrischen Tensoren sind im Anhang (Kap. A.1) aufgeführt. Die Umformulierung des Ausdrucks

$$\frac{p^2}{p^2 + m^2} = 1 - \frac{m^2}{p^2 + m^2} \quad (6.67)$$

ist zur Reduzierung auf das Standardintegral (6.60) vorteilhaft, da in dimensionaler Regularisierung  $\int_p 1 = 0$  ergibt. Außerdem gilt mit  $d = 3 - 2\epsilon$

$$(p_i q_i)(p_j q_j) = \frac{1}{d} p^2 q^2, \quad (6.68)$$

so dass für (6.66) das folgende Resultat erzielt wird:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= g^2 l N(N^2 - 1) \\ &\cdot \left[ A^2(m^2) \left( -\frac{1}{4} d^2 + \frac{3}{4} d - \frac{3}{4} + \frac{1}{4d} \right) \right. \\ &+ \xi A(\xi m^2) A(m^2) \left( -\frac{1}{2} d + 1 - \frac{1}{2d} \right) \\ &\left. + \xi^2 A^2(\xi m^2) \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4d} \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.69)$$

In Feynman-Eichung ( $\xi = 1$ ) und in unitärer Eichung ( $\xi \rightarrow \infty$ ) folgt:

$$\text{Diagram} \stackrel{(\xi=1)}{=} -\frac{1}{4} g^2 l N(N^2 - 1) d(d - 1) A^2(m^2), \quad (6.70)$$

$$\text{Diagram} \stackrel{(\xi \rightarrow \infty)}{=} g^2 l N(N^2 - 1) A^2(m^2) \left( -\frac{1}{4} d^2 + \frac{3}{4} d - \frac{3}{4} + \frac{1}{4d} \right). \quad (6.71)$$

Kontrollrechnungen in Feynman-Eichung und unitärer Eichung bestätigen das vorliegende Ergebnis.

Die Auswertung der nächsten Schleife der Ordnung  $O(A^3)$  ist mit größerem Aufwand verbunden. Beim Verbinden zweier Vertizes ist auf die korrekte Umbenennung der Impulse in den Feynman-Regeln zu achten. Für die Reduzierung der entstehenden Integrale auf die beiden Standardintegrale  $A^2(m^2)$  und  $I(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$  bieten sich folgende Umformulierungen an:

$$\begin{aligned} \frac{p^4}{p^2 + m^2} &= p^2 - m^2 + \frac{m^4}{p^2 + m^2}, \\ (p_i q_i) &= -\frac{1}{2}((p - q)^2 - p^2 - q^2). \end{aligned}$$

Alle in der 2-Schleifen-Berechnung auftauchenden Integrale und das Ergebnis ihrer Reduzierung auf die beiden Standardintegrale sind im Anhang (Kap. A.6) aufgelistet.

Das Schleifen-Diagramm der Ordnung  $O(A^3)$  liefert folgenden Beitrag:

$$\text{Diagram} = \frac{1}{12} \int_p \int_q \Gamma_{ijl}^{abc}(A^3) \Gamma_{mno}^{def}(A^3) D_{jm}^{bd}(p) D_{in}^{ae}(q) D_{lo}^{cf}(p-q).$$

Das Ausmaß dieser Berechnung wird offensichtlich, wenn dieser Ausdruck ausgeschrieben wird:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \frac{1}{12} g^2 l N(N^2 - 1) \\ &\cdot \int_p \int_q [(p+q)_l \delta_{ij} + (q-2p)_i \delta_{jl} + (p-2q)_j \delta_{il}] \\ &\cdot [(p+q)_o \delta_{mn} + (p-2q)_m \delta_{no} + (q-2p)_n \delta_{mo}] \\ &\cdot \left[ \frac{\delta_{jm}}{p^2 + m^2} + \frac{p_j p_m}{m^2(p^2 + m^2)} + \frac{p_j p_m}{m^2(p^2 + \xi m^2)} \right] \\ &\cdot \left[ \frac{\delta_{in}}{q^2 + m^2} + \frac{q_i q_n}{m^2(q^2 + m^2)} + \frac{q_i q_n}{m^2(q^2 + \xi m^2)} \right] \\ &\cdot \left[ \frac{\delta_{lo}}{(p-q)^2 + m^2} + \frac{(p-q)_l (p-q)_o}{m^2((p-q)^2 + m^2)} + \frac{(p-q)_l (p-q)_o}{m^2((p-q)^2 + \xi m^2)} \right]. \end{aligned}$$

Nach langer Rechnung ergibt sich folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= g^2 l N(N^2 - 1) \\ &\cdot \left[ A^2(m^2) \left( \frac{1}{4}d - \frac{3}{16} - \frac{1}{4d} \right) \right. \\ &\quad + A(\xi m^2) A(m^2) \left( \frac{1}{2}d\xi - \xi + \frac{1}{2d}\xi + \frac{1}{8} \right) \\ &\quad + A^2(\xi m^2) \left( \frac{1}{4}\xi^2 - \frac{1}{4d}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{16} \right) \\ &\quad + m^2 I(m^2, m^2, m^2) \left( -\frac{3}{4}d + \frac{15}{16} \right) \\ &\quad \left. + m^2 I(\xi m^2, \xi m^2, m^2) \left( -\frac{1}{4}\xi + \frac{1}{16} \right) \right], \quad (6.72) \end{aligned}$$

$$\text{Diagram} \stackrel{(\xi=1)}{=} \frac{3}{4} g^2 l N(N^2 - 1)(d - 1) [A^2(m^2) - m^2 I(m^2, m^2, m^2)], \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &\stackrel{(\xi \rightarrow \infty)}{=} g^2 l N(N^2 - 1) \left[ A^2(m^2) \left( \frac{1}{4}d - \frac{3}{16} - \frac{1}{4d} \right) \right. \\ &\quad \left. + m^2 I(m^2, m^2, m^2) \left( -\frac{3}{4}d + \frac{15}{16} \right) \right]. \quad (6.74) \end{aligned}$$

Kontrollrechnungen in Feynman-Eichung und unitärer Eichung bestätigen das vorliegende Ergebnis.

Die von Jackiw and Pi [28] angewandte Ausintegration aller unphysikalischen Felder impliziert die Durchführung der Rechnung in der effektiven massiven Yang-Mills-Theorie

bzw. im  $\text{NL}\sigma\text{M}$  in unitärer Eichung. Demnach würde die Auswertung der beiden reinen Gluon-Schleifen-Diagramme für  $\xi \rightarrow \infty$  ausreichen und die Summe aus (6.71) und (6.74) das Gesamtresultat reproduzieren. Das Ziel dieser Arbeit ein manifest eichinvariantes Ergebnis zu erzielen wird dadurch erreicht, dass alle eichabhängigen Terme der beiden Gluon-Schleifen durch die eichabhängigen Beiträge der übrigen fünf 2-Schleifen-Diagramme eliminiert werden. Die Ergebnisse dieser Schleifen-Diagramme werden im Folgenden aufgelistet:

$$\begin{aligned} \text{Diagramm 1: } &= \frac{1}{4} \int_p \int_q \Gamma_i^{abc}(A\pi^2) \Gamma_j^{def}(A\pi^2) \Delta_\pi^{bf}(p) \Delta_\pi^{ce}(q) D_{ij}^{ad}(p-q) \\ &= g^2 l N(N^2 - 1) \left[ \frac{1}{8} A(\xi m^2) A(m^2) + \left( \frac{1}{8} \xi - \frac{1}{16} \right) A^2(\xi m^2) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \xi \right) m^2 I(\xi m^2, \xi m^2, m^2) \right], \end{aligned} \quad (6.75)$$

$$\text{Diagramm 2: } \stackrel{(\xi=1)}{=} \frac{3}{16} g^2 l N(N^2 - 1) [A^2(m^2) - m^2 I(m^2, m^2, m^2)], \quad (6.76)$$

$$\begin{aligned} \text{Diagramm 3: } &= -\frac{1}{2} \int_p \int_q \Gamma_i^{abc}(Ac^2) \Gamma_j^{def}(Ac^2) \Delta_c^{bf}(p) \Delta_c^{ce}(q) D_{ij}^{ad}(p-q) \\ &= g^2 l N(N^2 - 1) \left[ -\frac{1}{4} A(\xi m^2) A(m^2) + \left( -\frac{1}{8} \xi + \frac{1}{8} \right) A^2(\xi m^2) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \xi \right) m^2 I(\xi m^2, \xi m^2, m^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \xi^2 m^2 I(\xi m^2, \xi m^2, \xi m^2) \right], \end{aligned} \quad (6.77)$$

$$\text{Diagramm 4: } \stackrel{(\xi=1)}{=} -\frac{1}{4} g^2 l N(N^2 - 1) [A^2(m^2) - m^2 I(m^2, m^2, m^2)], \quad (6.78)$$

$$\begin{aligned} \text{Diagramm 5: } &= -\frac{1}{2} \int_p \int_q \Gamma_i^{abc}(\pi c^2) \Gamma_j^{def}(\pi c^2) \Delta_c^{bf}(p) \Delta_c^{ce}(q) \Delta_\pi^{ad}(p-q) \\ &= \frac{1}{8} g^2 l N(N^2 - 1) \xi^2 m^2 I(\xi m^2, \xi m^2, \xi m^2), \end{aligned} \quad (6.79)$$

$$\text{Diagramm 6: } \stackrel{(\xi=1)}{=} \frac{1}{8} g^2 l N(N^2 - 1) m^2 I(m^2, m^2, m^2). \quad (6.80)$$

Diese drei Schleifen-Diagramme heben bereits den größten Anteil der Eichabhängigkeit auf. Die Summe über die ersten fünf Diagramme resultiert lediglich in einen eichabhängigen Restbeitrag von  $\frac{1}{8} g^2 l \xi N(N^2 - 1) A^2(\xi m^2)$ . Damit ist bereits ein eichinvarianter Beitrag zum Standardintegral  $I(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$  bzw. zum Koeffizienten des  $\epsilon$ -Pols, d. h.  $\alpha_G$ , erzielt worden.

Die letzten beiden Schleifen-Diagramme eliminieren den eichabhängigen Beitrag zum Standardintegral  $A^2(m^2)$ :



$$= \frac{1}{8} \int_p \int_q \Gamma^{abcd}(\pi^4) \Delta_\pi^{ad}(p) \Delta_\pi^{bc}(q) \\ = g^2 l \left( \frac{1}{8} \xi N(N^2 - 1) - \frac{1}{4} \xi \frac{N^2 - 1}{N} \right) A^2(\xi m^2), \quad (6.81)$$



$$\stackrel{(\xi=1)}{=} g^2 l \left( \frac{1}{8} N(N^2 - 1) - \frac{1}{4} \frac{N^2 - 1}{N} \right) A^2(m^2), \quad (6.82)$$



$$= -\frac{1}{2} \int_p \int_q \Gamma^{abcd}(\pi^2 c^2) \Delta_c^{ab}(p) \Delta_\pi^{cd}(q) \\ = g^2 l \left( -\frac{1}{4} \xi N(N^2 - 1) + \frac{1}{4} \xi \frac{N^2 - 1}{N} \right) A^2(\xi m^2), \quad (6.83)$$



$$\stackrel{(\xi=1)}{=} g^2 l \left( -\frac{1}{4} N(N^2 - 1) + \frac{1}{4} \frac{N^2 - 1}{N} \right) A^2(m^2). \quad (6.84)$$

Die Kontraktion über die total-symmetrischen Strukturkonstanten stellt sich dabei wie folgt dar:

$$d^{abc} d^{abc} = \frac{(N^2 - 4)(N^2 - 1)}{N}. \quad (6.85)$$

Die Summe über alle sieben 2-Schleifen-Diagramme ist eichinvariant und ergibt den folgenden Beitrag zum Druck:

$$p'_{G,l^1} = g^2 l T N (N^2 - 1) \left[ \left( -\frac{1}{4} d^2 + d - \frac{15}{16} \right) A^2(m^2) \right. \\ \left. + \left( -\frac{3}{4} d + \frac{15}{16} \right) m^2 I(m^2, m^2, m^2) \right]. \quad (6.86)$$

Der vollständige Beitrag des Drucks zur Schleifen-Ordnung  $l^1$  inklusive der Beiträge aus den Gegentermen ist mit (6.60) und (6.61):

$$p_{G,l^1} = g^2 l T N (N^2 - 1) \left[ \left( -\frac{1}{4} d^2 + d - \frac{15}{16} \right) A^2(m^2) \right. \\ \left. + \left( -\frac{3}{4} d + \frac{15}{16} \right) m^2 I(m^2, m^2, m^2) \right] \\ + \frac{1}{2} m^2 l (d - 1) (N^2 - 1) A(m^2). \quad (6.87)$$

Damit ist der Druck der MQCD  $p_G$  bis zur perturbativen Schleifen-Ordnung  $l^1$  gegeben. Ein Koeffizientenvergleich mit (6.1) ermöglicht schließlich die Bestimmung der Koeffizienten  $\alpha_G$  und  $\beta_G$ .

### 6.3 Das Gesamtresultat des Drucks der MQCD

Die in Kap. 6.2 durchgeführten Auswertungen der Schleifen-Diagramme wurden zunächst für die resummierte effektive Theorie in  $SU(2)$  (6.19) realisiert. Die  $SU(2)$ -Berechnungen stellten sich als ein erfolgreicher Test für das Resummationsverfahren (6.4) dar. Die Ergebnisse dieser Berechnungen wurden insbesondere durch eine Integrationsroutine mittels des sogenannten FORM-Pakets [30] bestätigt. Die Voraussetzung für die Gültigkeit der Ergebnisse besteht jedoch in der korrekten Herleitung der Feynman-Regeln (vgl. Abb. 6.1). Im Übrigen stimmen die  $SU(2)$ -Ergebnisse mit den in dieser Arbeit vorliegenden  $SU(N)$ -Ergebnissen überein, was als weiteres Indiz für die Äquivalenz der Parametrisierungen (6.8) und (6.28) bei gegebener Transformation (6.24) bzw. für die Äquivalenz der Lagrangedichten (6.19) und (6.37) gewertet werden kann.

Die in dieser Arbeit aufgezeichnete Darstellung der Berechnung in  $SU(N)$  sollte also zum einen die  $SU(2)$ -Ergebnisse bestätigen und zum anderen zeigen, ob eine Farbzahlabhängigkeit der Koeffizienten  $\alpha_G$  und  $\beta_G$  vorliegt. Bei Farbzahlabhängigkeit wäre dann eine weitere perturbative Entwicklung in höheren Schleifen-Ordnungen in der einfacher zu behandelbaren resummierten effektiven  $SU(2)$ -Theorie vorteilhaft.

Zur Bestimmung der Koeffizienten des Drucks der MQCD werden die vorliegenden Ergebnisse mit (6.1) verglichen:

$$\begin{aligned} p_G(T) &= \frac{T}{V} \ln \int \mathcal{D}A_k^a \exp \left( - \int d^d x \frac{1}{2} \text{Tr } F_{kl}^2 \right) \\ \Rightarrow \quad \frac{p_G(T)}{T \mu^{-2\epsilon}} &= N^3(N^2 - 1) \frac{g_M^6}{(4\pi)^4} \left[ \alpha_G \left( \frac{1}{\epsilon} + 8 \ln \frac{\bar{\mu}}{2m_G} \right) + \beta_G + O(\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Der Koeffizient des  $\epsilon$ -Pols bzw.  $\alpha_G$  ist bereits bekannt (vgl. [10]):

$$\alpha_G = \frac{43}{96} - \frac{157}{6144} \pi^2 \approx 0,195715. \quad (6.89)$$

Die Ergebnisse aus der 1-Schleifen-Berechnung (6.58) und der Auswertung der 2-Schleifen-Diagramme (6.86) und Gegensterme (6.63) sind im Folgenden zusammengefasst, wobei  $g_M$  die effektive Kopplungskonstante der MQCD und  $m_G$  die durch das NL $\sigma$ M eingebundene effektive Masse ist:

$$p_{G,l^0}(T) = -(N^2 - 1)TD(m_G^2), \quad (6.90)$$

$$p_{G,CT}(T) = \frac{1}{2}m_G^2 l T(d - 1)(N^2 - 1)A(m_G^2), \quad (6.91)$$

$$\begin{aligned} p'_{G,l^1} &= g_M^2 l T N (N^2 - 1) \left[ \left( -\frac{1}{4}d^2 + d - \frac{15}{16} \right) A^2(m_G^2) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{3}{4}d + \frac{15}{16} \right) m_G^2 I(m_G^2, m_G^2, m_G^2) \right]. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Die Resultate der insgesamt drei in dimensionaler Regularisierung ausgewerteten Integrale sind mit  $d = 3 - 2\epsilon$ :

$$D(m_G^2) = \int_p \ln(p^2 + m_G^2) = -\frac{m_G^3}{6\pi} \left[ 1 + \epsilon \left( 2 \ln \left( \frac{\bar{\mu}}{2m_G} \right) + \frac{8}{3} \right) + O(\epsilon^2) \right], \quad (6.93)$$

$$A(m_G^2) = \int_p \frac{1}{p^2 + m_G^2} = -\frac{m_G}{4\pi} \left[ 1 + \epsilon \left( 2 \ln \frac{\bar{\mu}}{2m_G} + 2 \right) + O(\epsilon^2) \right], \quad (6.94)$$

$$\begin{aligned} I(m_G^2, m_G^2, m_G^2) &= \int_p \int_q \frac{1}{(p^2 + m_G^2)(q^2 + m_G^2)((p-q)^2 + m_G^2)} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{4\epsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}}{3m_G} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Somit ergibt sich für den Druck

$$p_{G,l^0}(T) = (N^2 - 1)T \frac{m_G^3}{6\pi}, \quad (6.96)$$

$$p_{G,CT}(T) = -l(N^2 - 1) \frac{m_G^3}{4\pi} T, \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned} p'_{G,l^1} &= \mu^{-2\epsilon} T l N (N^2 - 1) g_M^2 \left[ -\frac{3}{16} \frac{m_G^2}{(4\pi)^2} - \frac{21}{16} \frac{m_G^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{1}{4\epsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}}{3m_G} + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \frac{m_G^2}{(4\pi)^2} + O(\epsilon) \right], \end{aligned} \quad (6.98)$$

wobei in (6.96) und (6.97) bereits  $\epsilon \rightarrow \infty$  gesetzt wurde. Mit  $m_G = Cg^2T$  und  $g_M^2 = g^2T$  (vgl. (4.7) und (4.11)) folgt

$$p_{G,l^0}(T) = C^3 (N^2 - 1) \frac{g^6}{6\pi} T^4, \quad (6.99)$$

$$p_{G,CT}(T) = -C^3 l (N^2 - 1) \frac{g^6}{4\pi} T^4, \quad (6.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{p'_{G,l^1}}{\mu^{-2\epsilon} T^4} &= C^2 l N (N^2 - 1) \frac{g^6}{(4\pi)^2} \left[ -\frac{21}{64} \left( \frac{1}{\epsilon} + 4 \ln \frac{\bar{\mu}}{2Cg^2T} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{16} - \frac{21}{32} - \frac{21}{16} \ln \frac{2}{3} + O(\epsilon) \right] \end{aligned} \quad (6.101)$$

mit z. B.  $C = 0,28$  für  $N = 2$  (vgl. 5.13).

Der Beitrag des Drucks der resummierten MQCD trägt erwartungsgemäß für jede Schleifen-Ordnung  $l$  zur Ordnung  $g^6$  bei. Infolge der eichinvarianten Einbindung einer effektiven Masse existiert bereits ein physikalischer Beitrag ab der 1-Schleifen-Ordnung, d. h. der Koeffizient  $\beta_G$  ist mit der resummierten effektiven Theorie (6.37) perturbativ bestimmbar. Die Behandlung von UV-Divergenzen mittels dimensionaler Regularisierung führt auf einen Anteil zur Ordnung  $g^6 \ln g$  bzw. zum Koeffizienten  $\alpha_G$ . Im Folgenden werden die Koeffizienten durch den Vergleich der Resultate (6.99)–(6.101) mit (6.88) bestimmt und diskutiert.

### 6.3.1 Der Koeffizient $\alpha'_G$

Aus (6.101) lässt sich der Koeffizient des  $\epsilon$ -Pols direkt ablesen:

$$\begin{aligned}\alpha'_G &= -\frac{21}{4} \frac{C^2}{N^2} \pi^2 l \\ &\approx -1,015582l \quad \text{für z. B. } N = 2, C = 0,28.\end{aligned}\tag{6.102}$$

Es ist festzustellen, dass  $\alpha'_G$  nicht  $\alpha_G$  aus (6.88) entspricht. Zum einen ist die Relation des Koeffizienten des  $\epsilon$ -Pols zum Koeffizienten des Logarithmus über die UV-Divergenzen regulierende Impulsskala nicht äquivalent

$$\alpha'_G \left( \frac{1}{\epsilon} + 4 \ln \frac{\bar{\mu}}{2m_G} \right) \neq \alpha_G \left( \frac{1}{\epsilon} + 8 \ln \frac{\bar{\mu}}{2m_G} \right)\tag{6.103}$$

und zum anderen ist  $\alpha_G$  laut Kajantie et. al [10] eine farbzahlanhängige Größe. Zwar ist der Koeffizient der effektiven Masse  $C$  ebenfalls farbzahlabhängig, jedoch besitzt er aufgrund der dafür zu bestimmenden *gap*-Gleichungen bzw. Selbstenergie-Diagramme der resummierten effektiven Theorie (6.37) die Abhängigkeit  $C \sim N(N^2 - 1)$ , so dass  $\alpha'_G$  im Gegensatz zu (6.89) insgesamt einer farbzahlabhängigen Größe entspricht.

Da der Druck der QCD bis zur Ordnung  $g^6 \ln g$  bekannt ist, muss die resummierte MQCD nach der Auswertung unendlich vieler Korrekturen des Schleifen-Parameters  $l = 1$  den Wert aus (6.89) reproduzieren. Außerdem würde ein veränderter Wert des Koeffizienten ein  $\epsilon$ -Pol-abhängiges Resultat des QCD-Drucks (4.17) bedeuten, was zu einer unphysikalischen thermodynamischen Größe führen würde. Es besteht daher die Erwartung, dass bei der Auswertung der nächsten Schleifen-Ordnung  $l^2$ , in der infolge des resummierten Beitrags der Lagrangedichte 2-Schleifen-Gegenterme auftreten, der Koeffizient  $\alpha'_G$  aus (6.102) wieder subtrahiert wird und die Auswertung der darauf folgenden Schleifen-Ordnungen die korrekte Größe  $\alpha'_G$  mit einer numerisch vernachlässigbaren Farbzahlabhängigkeit liefert. Andernfalls wäre die Methode der Resummation zur Bestimmung des thermodynamischen Drucks der MQCD nicht haltbar.

### 6.3.2 Der Koeffizient $\beta_G$

Die Werte des endlichen Beitrags bzw. des Beitrags der Ordnung  $g^6$ , d. h. des Koeffizienten  $\beta_G$ , erschließen sich aus dem Vergleich der Resultate (6.99)-(6.101) mit (6.88):

$$\begin{aligned}\beta_{G,l^0} &= \frac{128}{3} \frac{C^3}{N^3} \pi^3 \\ &= 3,630132 \quad \text{für z. B. } N = 2, C = 0,28,\end{aligned}\tag{6.104}$$

$$\begin{aligned}\beta_{G,CT} &= -64l \frac{C^3}{N^3} \pi^3 \\ &= -5,445198l \quad \text{für z. B. } N = 2, C = 0,28,\end{aligned}\tag{6.105}$$

$$\begin{aligned}\beta'_{G,l^1} &= -\left(\frac{15}{2} + 21 \ln \frac{2}{3}\right) l \frac{C^2}{N^2} \pi^2 \\ &= 0,196301l \quad \text{für z. B. } N = 2, C = 0,28.\end{aligned}\tag{6.106}$$

Der vollständige mit (6.88) vergleichbare Ausdruck des Koeffizienten  $\beta_G$  ergibt sich aus der Summe der drei Teilergebnisse. Das Gesamtresultat entspricht schließlich dem Beitrag des Drucks der MQCD nach Abbruch der perturbativen Berechnung in der Schleifen-Ordnung  $l^1$ :

$$\begin{aligned}\beta_G|_{l=1} &= \beta_{G,l^0} + \beta_{G,CT} + \beta'_{G,l^1} \\ &= - \left( \frac{15}{2} + 21 \ln \frac{2}{3} \right) \frac{C^2}{N^2} \pi^2 - \frac{64}{3} \frac{C^3}{N^3} \pi^3 \\ &= -1,618765 \quad \text{für z. B. } N = 2, C = 0, 28.\end{aligned}\tag{6.107}$$

Damit ergibt der Druck der resummierten MQCD

$$\begin{aligned}\frac{p_G(T)}{\mu^{-2\epsilon} T^4}|_{l=1} &= \frac{p_{G,l^0}(T) + p'_{G,l^1}(T) + p_{G,CT}(T)}{\mu^{-2\epsilon} T^4}|_{l=1} \\ &= N^3(N^2 - 1) \frac{g^6}{(4\pi)^4} \left[ \alpha'_G \left( \frac{1}{\epsilon} + 4 \ln \frac{\bar{\mu}}{2m_G} \right) + \beta_G|_{l=1} + O(\epsilon) \right]\end{aligned}\tag{6.108}$$

mit  $\alpha'_G$  aus (6.102) und  $\beta_G|_{l=1}$  aus (6.107).

Zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens des Koeffizienten  $\beta_G$  in der resummierten effektiven Theorie ist der Vergleich der Werte aus dem Beitrag der Schleifen-Ordnung  $l^0$  und aus dem vollständigen Beitrag der Ordnung  $l^1$  sinnvoll:

$$\begin{aligned}\beta_{G,l^0} &= \frac{128}{3} \frac{C^3}{N^3} \pi^3 \\ &= 3,630132 \quad \text{für z. B. } N = 2, C = 0, 28,\end{aligned}\tag{6.109}$$

$$\begin{aligned}\beta_{G,l^1} &= \beta'_{G,l^1} + \beta_{G,CT} \\ &= - \left( \frac{15}{2} + 21 \ln \frac{2}{3} \right) l \frac{C^2}{N^2} \pi^2 - 64 l \frac{C^3}{N^3} \pi^3 \\ &= -5,248897 l \quad \text{für z. B. } N = 2, C = 0, 28.\end{aligned}\tag{6.110}$$

Betragsmäßig ist der Wert der ersten Korrektur etwa 150% größer als der Koeffizient der freien effektiven Theorie. Die Ursache ist der resumierte Beitrag (6.105), der natürlich dieselbe Größenordnung besitzt wie der Beitrag zur Ordnung  $l^0$  (6.104). Die Abhängigkeit des Koeffizienten in der Farbzahl  $N$  und somit entsprechend in den Koeffizienten der effektiven Masse  $C$  ändert wenig an diesem Umstand. Eine genauere Analyse des Konvergenzverhaltens von  $\beta_G$  ist allerdings erst nach weiterem Fortschreiten in der perturbativen Entwicklung möglich. Eine zufriedenstellende Analyse ist dann zu erwarten, wenn die nächsten Korrekturen in der resummierten effektiven Theorie so klein werden, dass  $\beta_G$  für  $l = 1$  gegen einen festen Grenzwert konvergiert. Es ist anzunehmen, dass der Beitrag der in der Schleifen-Ordnung  $l^2$  auszuwertenden 2-Schleifen-Gegenterme mit dem Beitrag der reinen 2-Schleifen-Diagramme (6.106) betragsmäßig zu vergleichen, d. h. klein gegenüber dem Beitrag der 1-Schleifen-Gegenterme ist, da die Werte (6.104) und (6.105) ebenfalls von derselben Größenordnung sind. Daher liegt die Vermutung nahe, dass die Korrektur in der Schleifen-Ordnung  $l^2$  insgesamt vom Betrag her kleiner sein wird als die erste Korrektur in  $l^1$ . Der Beitrag der reinen 3-Schleifen-Diagramme könnte

daher bereits Aufschluß über das weitere Konvergenzverhalten in der nächsten Ordnung  $l^3$  geben.

Die Tatsache, dass die erste Korrektur des Drucks der MQCD betragsmäßig größer ist als der Beitrag der freien Theorie, ist der Resummation geschuldet. Die Annahme, dass diese Korrektur gleichzeitig den größten Beitrag zum Koeffizienten  $\beta_G$  liefert bzw. die weitere perturbative Behandlung ein zufriedenstellendes Konvergenzverhalten erzielt, kann möglicherweise durch die Auswertung der nächsten beiden Schleifen-Ordnungen  $l^2$  und  $l^3$  bestätigt werden. Diese Berechnungen müssen dabei für allgemeine  $N$  durchgeführt werden, da die Koeffizienten (6.102) und (6.107) farbzahlabhängige Größen darstellen. Ist die Farbzahlabhängigkeit des Koeffizienten  $\beta_G$  schließlich numerisch gering, so kann das in dieser Arbeit angewandte Resummationsverfahren als großen Erfolg angesehen werden. Dazu ist allerdings auch die Kenntnis des Koeffizienten  $C$  nötig, die eine Auswertung der *gap*-Gleichungen für allgemeine  $N$  bis zur entsprechenden perturbativen Ordnung erfordert.

Nach der eventuellen Feststellung einer zufriedenstellenden Konvergenz des Koeffizienten  $\beta_G$  und seiner geringen numerischen Abhängigkeit in der Farbzahl  $N$  kann der mittels Resummation ausgerechnete Druck der MQCD (6.108) in den Gesamtdruck der QCD (4.17) eingegliedert und mit bekannten Gitterdaten verglichen werden (Kap. 4.2.2). Diese Analyse erfolgt nach einer hoffnungsvoll erfolgreichen Auswertung der beiden anstehenden Schleifen-Ordnungen  $l^2$  und  $l^3$ .



## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Im Fokus dieser Arbeit steht die perturbative Berechnung des thermodynamischen Drucks der MQCD. Die Umstrukturierung der perturbativen Entwicklung in eine Potenzreihe in dem Schleifen-Parameter  $l$  mittels des Resummationsverfahrens realisiert eine solche Behandlung und die Berechnungen in der resummierten effektiven Theorie erzielen für die Schleifen-Ordnungen  $l^0$  und  $l^1$  jeweils ein eichinvariantes Ergebnis für den Druck. Das Ziel dieser Arbeit konnte somit erreicht werden.

Grundlegende Betrachtungen in Kapitel 2 und 3 zeigen, unter welchen Voraussetzungen die Eichinvarianz einer physikalischen Größe gewährleistet ist. Insbesondere die nach der Eichfixierung nicht-abelscher Eichtheorien existierenden BRS-Transformationen garantieren die Unabhängigkeit vom Eichfixierungsparameter  $\xi$ . Des Weiteren werden die Besonderheiten der perturbativen Entwicklung durch die Betrachtung der Ring-Diagramme und der Zusammenbruch der Störungstheorie aufgrund der Existenz von IR-Divergenzen aufgezeigt. Für die magnetische Masse  $m \sim g^2 T$  tragen alle Schleifen-Diagramme mit  $l > 3$  zur Ordnung  $g^6$  bei, wonach die Berechnung unendlich vieler Diagramme nötig ist, um einen vollständigen Beitrag in dieser Ordnung zu erhalten.

In Kapitel 4 wird unter Ausnutzung der Impulsskalenhierarchie  $g^2 T < gT < 2\pi T$  eine Kette von dimensionale reduzierten effektiven Theorien hergeleitet, wobei die IR-Divergenzen in der MQCD isoliert werden. Da aus dimensionalen Gründen der führende Beitrag des Drucks der MQCD  $g^6$  ist und daher die entsprechenden Rechnungen direkt mit IR-Divergenzen konfrontiert werden, stellt sich die Theorie als rein nicht-perturbativ dar. Das Gesamtresultat für den Druck der QCD, das sich aus der Summe der Beiträge der drei effektiven Theorien zusammensetzt, wird bis zur perturbativ höchstmöglichen Ordnung  $g^6 \ln g$  vorgestellt. Das schlechte Konvergenzverhalten in Abhängigkeit des unbekannten Beitrags zur Ordnung  $g^6$  ist den beiden dimensionale effektiven Theorien geschuldet, da die effektive Kopplungskonstante der thermischen QCD  $\frac{g^2 T}{m}$  beträgt.

Die eichinvariante Einbindung einer effektiven Gluon-Masse durch die Lagragedichte des NL $\sigma$ Ms unter Anwendung des Resummationsverfahrens wird in Kapitel 5 vorgestellt und ermöglicht eine perturbative Behandlung der MQCD. Durch das Resummationsverfahren wird unter Einführung des Schleifen-Parameters  $l$  eine effektive Theorie durch die Addition und Subtraktion der Lagragedichte des NL $\sigma$ Ms aufgestellt, in der die resultierenden modifizierten Wechselwirkungsterme in die Auswertung der korrespondierenden Schleifen-Diagramme eingehen.

Die Herleitung der resummierten effektiven Lagragedichte und der zugrunde liegenden Feynman-Regeln wird in Kapitel 6 behandelt. Die Äquivalenz der SU(2)- und SU( $N$ )-Parametrisierung des skalaren Feldes unter einer geeigneten Transformation der Felder  $\pi^{a'} \rightarrow \pi^a$  erlaubt direkt eine Auswertung für die allgemeine SU( $N$ )-Theorie. Die Berechnungen in den Schleifen-Ordnungen  $l^0$  und  $l^1$  liefern jeweils ein eichinvariantes Resultat für den thermodynamischen Druck der MQCD. Diese Tatsache ist bereits als Erfolg des Resummationsverfahrens zu werten.

Die resultierenden Koeffizienten  $\alpha'_G$  und  $\beta_G|_{l=1}$  sind farbzahlabhängige Größen. Wie in Kapitel 6.3.1 festzustellen ist, entspricht der Koeffizient  $\alpha'_G$  nicht dem bereits bekannten Beitrag zur Ordnung  $g^6 \ln g$ , d. h. dem Koeffizienten  $\alpha_G$ . Die resummierte MQCD muss nach der Auswertung unendlich vieler Korrekturen im Schleifen-Parameter  $l = 1$  den erwarteten Wert ergeben. Da diese Größe jedoch keine Farbzahlabhängigkeit besitzt, ist nach der Auswertung genügend vieler Schleifen-Ordnungen eine numerisch vernachlässigbare Farbzahlabhängigkeit des Koeffizienten  $\alpha'_G$  zu erwarten. Dieselbe Erwartung gilt für den Koeffizienten  $\beta_G|_{l=1}$ , der sich ebenfalls als farbzahlabhängige Größe herausstellt.

Ein interessanter Aspekt wird das Konvergenzverhalten des Koeffizienten  $\beta_G|_{l=1}$  sein. Der zum Beitrag der effektiven freien Theorie relativ kleine Beitrag der reinen 2-Schleifen-Auswertung (ohne Gegenterme) lässt hoffnungsvoll auf die anstehende Auswertung der 3- und 4-Schleifen-Diagramme blicken. Erst die Ergebnisse der Beiträge der Ordnungen  $l^2$  und  $l^3$  können eine gesicherte Aussage über das Konvergenzverhalten der perturbativen Entwicklung einerseits und über die numerische Bedeutung der Farbzahlabhängigkeit der Koeffizienten andererseits liefern.

# A Anhang

## A.1 Gruppentheoretische Relationen

Einige nützliche gruppentheoretische Relationen für  $SU(N)$ -Generatoren  $T^a$  in der fundamentalen Darstellung sind im Folgenden angegeben (vgl. auch [31]). Die Generatoren  $T^a$  mit  $a = 1, \dots, N^2 - 1$  sind hermitesch, spurlos und genügen der Lie-Algebra

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (\text{A.1})$$

mit den total-antisymmetrischen Strukturkonstanten  $f^{abc}$ . Der Anti-Kommutator der Generatoren definiert die total-symmetrischen Strukturkonstanten  $d^{abc}$ :

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N} \delta^{ab} \mathbb{1}_N + d^{abc} T^c. \quad (\text{A.2})$$

Damit kann das Produkt zweier Generatoren mittels beider Typen von Strukturkonstanten formuliert werden:

$$T^a T^b = \frac{1}{2N} \delta^{ab} \mathbb{1}_N + \frac{1}{2} (d^{abc} + i f^{abc}) T^c. \quad (\text{A.3})$$

Die für die Herleitung der Lagrangedichten (6.19) und (6.37) benutzten Spur-Theoreme über die  $SU(N)$ -Generatoren  $T^a$  sind:

$$\text{Tr } T^a = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Tr } T^a T^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Tr } T^a T^b T^c = \frac{1}{4} (d^{abc} + i f^{abc}), \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Tr } T^a T^b T^c T^d = \frac{1}{4N} \delta^{ab} \delta^{cd} + \frac{1}{8} \left[ d^{abe} d^{cde} - f^{abe} f^{cde} + i (d^{abe} f^{cde} + f^{abe} d^{cde}) \right]. \quad (\text{A.7})$$

Die Jacobi-Identität der total-antisymmetrischen Strukturkonstanten ist:

$$f^{abe} f^{cde} + f^{ace} f^{bde} + f^{ade} f^{bce} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Einige Kontraktionen der Strukturkonstanten sind im Folgenden aufgelistet:

$$f^{aae} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$d^{aae} = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$f^{ace} f^{bce} = N \delta^{ab}, \quad (\text{A.11})$$

$$d^{ace} d^{bce} = \frac{N^2 - 4}{N} \delta^{ab}, \quad (\text{A.12})$$

$$f^{ace} d^{bce} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Für die SU(2)-Generatoren  $\tau^a = 2T^a$  gelten analoge Relationen mit

$$f^{abc} \rightarrow \epsilon^{abc}, \quad (\text{A.14})$$

$$d^{abc} = 0 \quad (\text{A.15})$$

und dem Levi-Civita-Tensor  $\epsilon^{abc}$ :

$$\epsilon^{abe} \epsilon^{cde} = \delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ad} \delta^{bc}. \quad (\text{A.16})$$

Die Verallgemeinerung von (A.16) auf  $SU(N)$  ist:

$$f^{abe} f^{cde} = \frac{2}{N} \left( \delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ad} \delta^{bc} \right) + \left( d^{ace} d^{bde} - d^{ade} d^{bce} \right). \quad (\text{A.17})$$

## A.2 Feynman-Regeln der QED und Spurtheoreme über Dirac-Matrizen

Die Feynman-Regeln für den Photon-Elektron-Vertex  $\Gamma$ , den Fermion-Propagator  $\mathcal{G}$  und den Photon-Propagator  $\mathcal{D}_{\mu\nu}$  bilden sich wie folgt ab:

$$\mu \sim_{p} \nu \implies \mathcal{D}_{\mu\nu} = \frac{1}{p^2} \left[ \delta_{\mu\nu} + (\rho - 1) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right], \quad (\text{A.18})$$

$$\begin{array}{ccc} \text{---} \nearrow \not{p} & \implies & \mathcal{G} = \frac{1}{\not{p} - m}, \end{array} \quad (\text{A.19})$$

$$\begin{array}{ccc} \text{---} \nearrow \not{\mu} & \implies & \Gamma = -e \gamma_\mu. \end{array} \quad (\text{A.20})$$

Damit ergibt sich für das 2-Schleifen-Diagramm:

$$-\frac{1}{2} \frac{T}{V} \text{---} \circlearrowleft = -\frac{1}{2} e^2 \sum \sum \text{Tr} [\gamma^\mu \mathcal{G}(p) \mathcal{G}(q) \mathcal{D}_{\mu\nu}(p-q) \gamma^\nu]. \quad (\text{A.21})$$

Die Dirac-Matrizen bzw.  $\gamma$ -Matrizen erfüllen die Anti-Kommutator-Relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.22})$$

mit  $\mu = 0, \dots, 3$  und den Komponenten der Minkowski-Metrik  $g^{\mu\nu}$ . Die für die Berechnung des 2-Schleifen-Diagramms benötigten Spur-Theoreme über die  $\gamma$ -Matrizen sind im Folgenden aufgelistet:

$$\text{Tr } \gamma^\mu = 0, \quad (\text{A.23})$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4g^{\mu\nu} \Rightarrow \text{Tr } \not{a} \not{b} = 4a \cdot b, \quad (\text{A.24})$$

$$\text{Tr } \not{a} \gamma^\mu \not{b} \gamma^\nu = 4(a^\mu b^\nu - (a \cdot b) g^{\mu\nu} + a^\nu b^\mu), \quad (\text{A.25})$$

$$\text{Tr } \not{a} \not{b} \not{c} \not{d} = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]. \quad (\text{A.26})$$

Hierbei wird  $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$  mit dem Vierervektor  $a_\mu$  gekennzeichnet.

### A.3 Koeffizienten des Drucks der QCD

Zur Vollständigkeit des Gesamtresultats des Drucks der QCD (4.17) für  $SU(N)$  und  $N_f$  masselosen Quarks werden in diesem Abschnitt alle bekannten Koeffizienten  $\alpha_X$  aufgelistet. Damit ist der Druck der QCD bis zur Ordnung  $g^6 \ln g$  bekannt:

$$\alpha_{E1} = \frac{\pi^2}{180} (4d_A + 7d_F), \quad (\text{A.27})$$

$$\alpha_{E2} = -\frac{d_A}{144} \left( C_A + \frac{5}{2} T_F \right), \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{E3} = & \frac{d_A}{144} \left[ C_A^2 \left( \frac{12}{\epsilon} + \frac{194}{3} \ln \frac{\bar{\mu}}{4\pi T} + \frac{116}{5} + 4\gamma + \frac{220}{3} \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} - \frac{38}{3} \frac{\zeta'(-3)}{\zeta(-3)} \right) \right. \\ & + C_A T_F \left( \frac{12}{\epsilon} + \frac{169}{3} \ln \frac{\bar{\mu}}{4\pi T} + \frac{1121}{60} - \frac{157}{5} \ln 2 + 8\gamma \right. \\ & \left. \left. + \frac{146}{3} \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} - \frac{1}{3} \frac{\zeta'(-3)}{\zeta(-3)} \right) \right. \\ & + T_F^2 \left( \frac{20}{3} \ln \frac{\bar{\mu}}{4\pi T} + \frac{1}{3} - \frac{88}{5} \ln 2 + 4\gamma + \frac{16}{3} \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} - \frac{8}{3} \frac{\zeta'(-3)}{\zeta(-3)} \right) \\ & \left. + C_F T_F \left( \frac{105}{4} - 24 \ln 2 \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\alpha_{E4} = \frac{1}{3} (C_A + T_F), \quad (\text{A.30})$$

$$\alpha_{E5} = \frac{2}{3} \left[ C_A \left( \ln \frac{\bar{\mu}}{4\pi T} + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} \right) + T_F \left( \ln \frac{\bar{\mu}}{4\pi T} + \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} \right) \right], \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{E6} = & C_A^2 \left( \frac{22}{9} \ln \frac{\bar{\mu} e^\gamma}{4\pi T} + \frac{5}{9} \right) + C_A T_F \left( \frac{14}{9} \ln \frac{\bar{\mu} e^\gamma}{4\pi T} - \frac{16}{9} \ln 2 + 1 \right) \\ & + T_F^2 \left( -\frac{8}{9} \ln \frac{\bar{\mu} e^\gamma}{4\pi T} - \frac{16}{9} \ln 2 + \frac{4}{9} \right) - 2C_F T_F, \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\alpha_{E7} = C_A \left( \frac{22}{3} \ln \frac{\bar{\mu} e^\gamma}{4\pi T} + \frac{1}{3} \right) - T_F \left( \frac{8}{3} \ln \frac{\bar{\mu} e^\gamma}{4\pi T} + \frac{16}{3} \ln 2 \right), \quad (\text{A.33})$$

$$\alpha_M = \frac{43}{32} - \frac{491}{6144} \pi^2, \quad (\text{A.34})$$

$$\alpha_G = \frac{43}{96} - \frac{157}{6144} \pi^2 \quad (\text{A.35})$$

mit  $d_A = N$ ,  $d_F = NN_f$ ,  $C_A = T_A = N^2 - 1$ ,  $C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}$  und  $T_F = \frac{N_f}{2}$ .

## A.4 Standardintegrale

Die in der Schleifen-Rechnung auftauchenden Standardintegrale werden mittels dimensionaler Regularisierung ausgewertet. Die dimensionale Regularisierung ist in perturbativen Berechnungen eine übliche Methode, um alle UV-Divergenzen zu beheben, wobei die Impulsintegration durch eine analytische Fortsetzung nach  $d = 3 - 2\epsilon$  Dimensionen ausgedrückt wird:

$$\int_p = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} = \mu^{-2\epsilon} \left[ \bar{\mu}^{2\epsilon} \left( \frac{e^\gamma}{4\pi} \right)^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \right]. \quad (\text{A.36})$$

Mit  $\bar{\mu} = \mu(e^\gamma/4\pi)^{-\frac{1}{2}}$  wird eine Impulsskala eingeführt, die ein Abschneiden der verbleibenden logarithmisch divergenten Integrale, die als  $\epsilon$ -Pole auftauchen, bewirkt. Für eine Funktion  $f(p)$  gelten folgende Eigenschaften:

1. Translation:  $\int_p f(p+q) = \int_p f(p),$
2. Dilatation:  $\int_p f(\lambda p) = |\lambda|^{-d} \int_p f(p),$
3. Faktorisierung:  $\int_p \int_q f(p)f(q) = \int_p f(p) \int_q f(q).$

Daraus folgt:  $\int_p 1 = 0, \quad \int_p \frac{1}{p^{2n}} = 0 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}.$

Es existieren drei Standardintegrale in der Rechnung:

$$D(m^2) = \int_p \ln(p^2 + m^2) = -\frac{m^3}{6\pi} \left[ 1 + \epsilon \left( 2 \ln \left( \frac{\bar{\mu}}{2m} \right) + \frac{8}{3} \right) + O(\epsilon^2) \right], \quad (\text{A.37})$$

$$A(m^2) = \int_p \frac{1}{p^2 + m^2} = -\frac{m}{4\pi} \left[ 1 + \epsilon \left( 2 \ln \frac{\bar{\mu}}{2m} + 2 \right) + O(\epsilon^2) \right], \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} I(m^2, m^2, m^2) &= \int_p \int_q \frac{1}{(p^2 + m^2)(q^2 + m^2)((p-q)^2 + m^2)} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[ \frac{1}{4\epsilon} + \ln \frac{\bar{\mu}}{3m} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Als Beispiel wird der Lösungsweg des Integrals  $A(m^2)$  aufgezeichnet:

$$\begin{aligned} A(m^2) &= \left( \frac{e^\gamma \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon \int \frac{d^{3-2\epsilon} p}{(2\pi)^{3-2\epsilon}} \frac{1}{p^2 + m^2} \\ &= \left( \frac{e^\gamma \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon \int \frac{d^{3-2\epsilon} p}{(2\pi)^{3-2\epsilon}} \int_0^\infty dt \exp(-t(p^2 + m^2)) \\ &= \left( \frac{e^\gamma \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon \int \frac{d^{3-2\epsilon} p}{(2\pi)^{3-2\epsilon}} \frac{1}{m^2} \int_0^\infty ds \exp\left(-\frac{s}{m^2} p^2\right) \exp(-s). \end{aligned}$$

Dabei wurde mit  $t = \frac{s}{m^2}$  substituiert. Es folgt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(m^2) &= \left( \frac{e^\gamma \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon \frac{1}{m^2} \frac{1}{(2\pi)^{3-2\epsilon}} \pi^{3/2-\epsilon} m^{3-2\epsilon} \int_0^\infty ds s^{-3/2+\epsilon} \exp(-s) \\ &= \left( \frac{e^\gamma \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon m \pi^{-3/2} 2^{-3} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \epsilon\right) \\ &= \left( \frac{e^\gamma \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon m \pi^{-3/2} 2^{-3} (-2) \sqrt{\pi} \quad \text{mit } \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Die  $\Gamma$ -Funktion ist wie folgt definiert:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} = \int_0^\infty dt t^{x-1} \exp(-t). \quad (\text{A.40})$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} A(m^2) &= -\frac{m}{4\pi} \left( \frac{e^\gamma \bar{\mu}^2}{4\pi} \right)^\epsilon \\ &= -\frac{m}{4\pi} \left[ 1 + \epsilon \left( 2 \ln \frac{\bar{\mu}}{2m} + 2 \right) + O(\epsilon^2) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Für Integrale des folgenden Typs erhält man analog:

$$A_k(m^2) = \int_p \frac{1}{(p^2 + m^2)^k} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(k - \frac{d}{2})}{\Gamma(k)} \frac{1}{(m^2)^{k-d/2}}. \quad (\text{A.42})$$

## A.5 Frequenzsummenintegrale

Die Formel (2.18) gibt den thermodynamischen Druck eines masselosen skalaren Feldes an:

$$p = -\frac{1}{2} \frac{T}{V} \sum_n \sum_p \ln (\beta^2 (\omega_n^2 + p^2)) = \frac{\pi^2}{90} T^4. \quad (\text{A.43})$$

Zum Beweis wird zunächst der massive Fall mit  $\omega^2 = p^2 + m^2$  und den bosonischen Matsubara-Moden  $\omega_n = 2\pi n T$  betrachtet:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2} \frac{T}{V} \sum_n \sum_p \ln (\beta^2 (\omega_n^2 + p^2)) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{T}{V} \sum_n \sum_p \ln ((2\pi n)^2 + \beta^2 \omega^2). \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow p &= -\frac{1}{2} \frac{T}{V} \sum_p \sum_n \left[ \int_1^{\beta^2 \omega^2} d\theta^2 \frac{1}{\theta^2 + (2\pi n^2)^2} + \ln (1 + (2\pi n)^2) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{T}{V} \sum_p \int_1^{\beta^2 \omega^2} d\theta^2 \frac{1}{\theta} \left( 1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{T}{V} \sum_p \int_1^{\beta \omega} d\theta \left( 1 + \frac{2}{e^\theta - 1} \right). \end{aligned}$$

Der zweite Term wird dabei wegen des Nernst'schen Theorems nicht berücksichtigt. Unter Vernachlässigung der Nullpunktenergie  $-\frac{1}{2}\beta\omega$  ergibt die Lösung des Integrals mit  $m = 0$  und  $\sum_p = V \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow p &= -T \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln (1 - e^{-\beta p}) \\ &= -T \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln (1 - e^{-\beta p}). \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Dieses Ergebnis wird im Übrigen auch durch die Betrachtung des harmonischen Oszillators erzielt. Die Zustandssumme des skalaren Feldes entspricht nämlich dem Produkt der Zustandssummen des harmonischen Oszillators. Die Impulsintegration muss schließlich partiell integriert werden und mit

$$\Gamma(4)\zeta(4) = \int_0^\infty dp \frac{p^3}{e^p - 1}, \quad (\text{A.45})$$

wobei  $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ ,  $\Gamma(4) = 6$

folgt:

$$p = -T \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln(1 - e^{-\beta p}) = \frac{\pi^2}{90} T^4. \quad (\text{A.46})$$

Die  $\Gamma$ - und die  $\zeta$ -Funktion sind wie folgt definiert:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = k^z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-kt} dt \quad \text{mit } k = \text{const.}, \quad (\text{A.47})$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (\text{A.48})$$

Zur Lösung der Frequenzsummenintegrale  $I_b(0)$  und  $I_f(0)$  aus der Auswertung der 2-Schleifen-Diagramme der QED betrachte man die Integrale

$$J_b(m^2) = \sum \left[ \frac{1}{2} \ln(\omega_n^2 + \omega^2) \right], \quad (\text{A.49})$$

$$I_b(m^2) = \sum \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2} = \frac{1}{m} \frac{d}{dm} J_b(m^2) \quad (\text{A.50})$$

mit  $w^2 = p^2 + m^2$ ,  $\omega_n = 2\pi n T$  und  $J_b(0) = -\frac{\pi^2 T^4}{90}$ . Die Summen-Notation kennzeichnet das Frequenzsummenintegral mit

$$\sum = T \sum_{\omega_n} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \quad \text{und } d = 3 - 2\epsilon. \quad (\text{A.51})$$

Die Lösung des Integrals  $I_b(m^2)$  erfordert eine Separation der Frequenzsumme in einen Beitrag mit der Matsubara-Nullmode und einen Anteil mit  $n \neq 0$ :

$$\sum = \sum_{\omega_n \neq 0} + T \int_p. \quad (\text{A.52})$$

Das Ergebnis des  $d$ -dimensionalen Integrals  $I_{n=0}$  ist bereits bekannt und entspricht dem Standardintegral  $A(m^2)$  aus (A.42) mit:

$$I_{n=0}(m^2) = T A_1(m^2). \quad (\text{A.53})$$

Damit bleibt das folgende Integral mit  $\omega_{n \neq 0}$  zu lösen:

$$\begin{aligned}
I_{n \neq 0}(m^2) &= T \sum_{\omega_{n \neq 0}} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega_n^2 + p^2 + m^2} \\
&= 2T \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{m^{2l}}{[(2\pi n T)^2 + p^2]^{l+1}} \\
&= 2T \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l m^{2l} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(l+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(l+1)} \frac{1}{(2\pi n T)^{2l+2-d}} \\
&= 2T \frac{1}{(4\pi)^{d/2} (2\pi T)^{2-d}} \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{-m^2}{(2\pi T)^2} \right) \frac{\Gamma(l+1-\frac{d}{2})}{\Gamma(l+1)} \zeta(2l+2-d). \quad (\text{A.54})
\end{aligned}$$

Dabei wurde Gleichung (A.42) ausgenutzt. Schließlich folgt:

$$\begin{aligned}
I_b(m^2) &= I_{n \neq 0}(m^2) + I_{n=0}(m^2) \\
&= \frac{T^2}{12} - \frac{mT}{4\pi} - \frac{2m^2}{(4\pi)^2} \left( \ln \frac{me^\gamma}{4\pi T} - \frac{1}{2} \right) + O\left(\frac{m^4}{T^2}\right). \quad (\text{A.55})
\end{aligned}$$

Die Lösung des fermionischen Frequenzsummenintegrals ergibt sich aus der Betrachtung der Relation der Frequenzsummen  $S(T) = T \sum_{\omega_n} f(\omega_n)$  mit  $\omega_n = 2\pi n T$  für Bosonen und  $\omega_n = (2n+1)\pi T$  für Fermionen:

$$S_f(T) = 2S_b\left(\frac{T}{2}\right) - S_b(T). \quad (\text{A.56})$$

Damit folgt:

$$I_f(m^2) = -\frac{T^2}{24} - \frac{2m^2}{(4\pi)^2} \left( \ln \frac{me^\gamma}{\pi T} - \frac{1}{2} \right) + O\left(\frac{m^4}{T^2}\right). \quad (\text{A.57})$$

Somit ergibt sich:

$$I_b(0) = \frac{T^2}{12}, \quad (\text{A.58})$$

$$I_f(0) = -\frac{T^2}{24}. \quad (\text{A.59})$$

## A.6 Reduzierung von 2-Schleifen-Integrale auf Standardintegrale

Aus Übersichtsgründen werden folgende Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned}
B(1, 1) &= \frac{1}{(p^2 + m^2)(q^2 + m^2)}, \\
B(\xi, 1) &= \frac{1}{(p^2 + \xi m^2)(q^2 + m^2)}, \\
C(1, 1, 1) &= \frac{1}{(p^2 + m^2)(q^2 + m^2)((p-q)^2 + m^2)}, \\
C(\xi, 1, 1) &= \frac{1}{(p^2 + \xi m^2)(q^2 + m^2)((p-q)^2 + m^2)}.
\end{aligned}$$

Im Folgenden ist eine Auflistung von Integralen dargestellt, die in den Auswertungen der 2-Schleifen-Diagramme (6.53) vorgekommen und auf die beiden Standardintegrale  $A(m^2)$  und  $I(m^2, m^2, m^2)$  reduziert worden sind:

$$\begin{aligned}
 \int_p \int_q B(1, 1) \cdot (p^2) &= -m^2 A^2(m^2), \\
 \int_p \int_q B(1, 1) \cdot (p^2 q^2) &= m^4 A^2(m^2), \\
 \int_p \int_q B(1, 1) \cdot (p^2 q^2 \cos^2 \theta) &= \frac{1}{d} B(1, 1) \cdot (p^2 q^2) = \frac{1}{d} m^4 A^2(m^2), \\
 \int_p \int_q B(1, 1) \cdot (pq \cos \theta) &= 0, \\
 \int_p \int_q B(\xi, 1) \cdot (p^2) &= -\xi m^2 A(\xi m^2) A(m^2), \\
 \int_p \int_q B(1, \xi) \cdot (p^2) &= -m^2 A(\xi m^2) A(m^2), \\
 \int_p \int_q B(\xi, 1) \cdot (p^2 q^2) &= \xi m^4 A(\xi m^2) A(m^2), \\
 \int_p \int_q B(\xi, \xi) \cdot (p^2) &= -\xi m^2 A^2(\xi m^2), \\
 \int_p \int_q B(\xi, \xi) \cdot (p^2 q^2) &= -\xi m^2 A^2(\xi m^2), \\
 \int_p \int_q C(1, 1, 1) \cdot (p^2) &= A^2(m^2) - m^2 I(m^2, m^2, m^2), \\
 \int_p \int_q C(\xi, \xi, 1) \cdot (p^2) &= A(\xi m^2) A(m^2) - \xi m^2 I(\xi m^2, \xi m^2, m^2), \\
 \int_p \int_q C(1, \xi, \xi) \cdot (p^2) &= A^2(\xi m^2) - m^2 I(m^2, \xi m^2, \xi m^2), \\
 \int_p \int_q C(1, 1, 1) \cdot (p^4) &= -3m^2 A^2(m^2) + m^4 I(m^2, m^2, m^2), \\
 \int_p \int_q C(\xi, \xi, \xi) \cdot (p^4) &= -3\xi m^2 A^2(\xi m^2) + \xi^2 m^4 I(\xi m^2, \xi m^2, \xi m^2), \\
 \int_p \int_q C(1, 1, \xi) \cdot (p^4) &= -(2 + \xi)m^2 A(\xi m^2) A(m^2) + m^4 I(m^2, m^2, \xi m^2), \\
 \int_p \int_q C(\xi, \xi, 1) \cdot (p^4) &= -(2\xi + 1)m^2 A(\xi m^2) A(m^2) + \xi^2 m^4 I(\xi m^2, \xi m^2, m^2), \\
 \int_p \int_q C(\xi, 1, 1) \cdot (p^4) &= -(2 + \xi)m^2 A^2(m^2) + \xi^2 m^4 I(\xi m^2, m^2, m^2), \\
 \int_p \int_q C(1, \xi, \xi) \cdot (p^4) &= -(2\xi + 1)m^2 A^2(\xi m^2) + m^4 I(m^2, \xi m^2, \xi m^2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_p \int_q C(1, 1, 1) \cdot (p^2 q^2) &= -2m^2 A^2(m^2) + m^4 I(m^2, m^2, m^2), \\ \int_p \int_q C(\xi, \xi, \xi) \cdot (p^2 q^2) &= -2\xi m^2 A^2(\xi m^2) + \xi^2 m^4 I(\xi m^2, \xi m^2, \xi m^2), \\ \int_p \int_q C(\xi, 1, 1) \cdot (p^2 q^2) &= -m^2 A^2(m^2) - \xi m^2 A(\xi m^2) A(m^2) + \xi m^4 I(\xi m^2, m^2, m^2), \\ \int_p \int_q C(1, 1, \xi) \cdot (p^2 q^2) &= -2m^2 A(\xi m^2) A(m^2) + m^4 I(m^2, m^2, \xi m^2), \\ \int_p \int_q C(\xi, \xi, 1) \cdot (p^2 q^2) &= -2\xi m^2 A(\xi m^2) A(m^2) + \xi^2 m^4 I(\xi m^2, \xi m^2, m^2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_p \int_q C(1, 1, 1) \cdot (p^6) &= \frac{25}{3} m^4 A^2(m^2) - m^6 I(m^2, m^2, m^2), \\ \int_p \int_q C(1, 1, \xi) \cdot (p^6) &= \left( \xi^2 + \frac{13}{3} \xi + 3 \right) m^4 A(\xi m^2) A(m^2) - m^6 I(m^2, m^2, \xi m^2), \\ \int_p \int_q C(1, \xi, \xi) \cdot (p^6) &= \left( \frac{16}{3} \xi^2 + 2\xi + 1 \right) m^4 A^2(\xi m^2) - m^6 I(m^2, \xi m^2, \xi m^2), \\ \int_p \int_q C(1, 1, 1) \cdot (p^2 q^2 (p - q)^2) &= 3m^4 A^2(m^2) - m^6 I(m^2, m^2, m^2), \\ \int_p \int_q C(\xi, 1, 1) \cdot (p^2 q^2 (p - q)^2) &= m^4 A^2(m^2) + 2\xi m^4 A(\xi m^2) A(m^2) - \xi m^6 I(\xi m^2, \dots), \\ \int_p \int_q C(\xi, \xi, 1) \cdot (p^2 q^2 (p - q)^2) &= \xi^2 m^4 A^2(\xi m^2) + 2\xi m^4 A(\xi m^2) A(m^2) - \xi^2 m^6 I(\dots),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_p \int_q C(1, 1, 1) \cdot (p^4 q^2) &= 4m^4 A^2(m^2) - m^6 I(\dots) + X, \\ \int_p \int_q C(1, 1, \xi) \cdot (p^4 q^2) &= (3 + \xi) m^4 A(\xi m^2) A(m^2) - m^6 I(\dots) + X, \\ \int_p \int_q C(1, \xi, 1) \cdot (p^4 q^2) &= m^4 A^2(m^2) + (\xi^2 + 2\xi) m^4 A(\xi m^2) A(m^2) - \xi m^6 I(\dots) + X, \\ \int_p \int_q C(\xi, 1, 1) \cdot (p^4 q^2) &= (2 + \xi) m^4 A^2(m^2) + \xi^2 m^4 A(\xi m^2) A(m^2) - \xi^2 m^6 I(\dots) + X, \\ \int_p \int_q C(1, \xi, \xi) \cdot (p^4 q^2) &= (2\xi^2 + \xi) m^4 A^2(\xi m^2) + m^4 A(\xi m^2) A(m^2) - \xi m^6 I(\dots) + X, \\ \int_p \int_q C(\xi, 1, \xi) \cdot (p^4 q^2) &= \xi^2 m^4 A^2(\xi m^2) + (2\xi + 1) m^4 A(\xi m^2) A(m^2) - \xi^2 m^6 I(\dots) + X,\end{aligned}$$

$$X = \int_p \int_q \frac{p^2}{q^2 + m^2}.$$



# Literaturverzeichnis

- [1] PHILIPSEN, O.: *Exploring the QCD phase diagram*. PoS, CPOD07:028, 2007.
- [2] GROSS, D. J.; PISARSKI, R. D. und YAFFE, L. G.: *QCD and Instantons at Finite Temperature*. Rev. Mod. Phys., 53:43, 1981.
- [3] LINDE, A. D.: *Infrared Problem in Thermodynamics of the Yang-Mills Gas*. Phys. Lett., B96:289, 1980.
- [4] APPELQUIST, T. und PISARSKI, R. D.: *High-Temperature Yang-Mills Theories and Three-Dimensional Quantum Chromodynamics*. Phys. Rev., D23:2305, 1981.
- [5] GINSPARG, P. H.: *First Order and Second Order Phase Transitions in Gauge Theories at Finite Temperature*. Nucl. Phys., B170:388, 1980.
- [6] PHILIPSEN, O.: *On the problem of the magnetic mass*. 1994. [[arXiv:hep-ph/9406307](#)].
- [7] EBERLEIN, F.: *Two-loop gap equations for the magnetic mass*. Phys. Lett., B439:130–136, 1998. [[arXiv:hep-ph/9804460](#)].
- [8] BUCHMÜLLER, W. und PHILIPSEN, O.: *Phase structure and phase transition of the SU(2) Higgs model in three-dimensions*. Nucl. Phys., B443:47–69, 1995. [[arXiv:hep-ph/9411334](#)].
- [9] EBERLEIN, F.: *The gauge-Higgs system in three dimensions to two-loop order*. Nucl. Phys., B550:303–328, 1999. [[arXiv:hep-ph/9811513](#)].
- [10] KAJANTIE, K. et al.: *The pressure of hot QCD up to  $g^6 \ln(1/g)$* . Phys. Rev., D67:105008, 2003. [[arXiv:hep-ph/0211321](#)].
- [11] YANG, C. N. und MILLS, R. L.: *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*. Phys. Rev., 96:191–195, 1954.
- [12] NAMBU, Y. und JONA-LASINIO, G.: *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity I*. Phys. Rev., 122:345–358, 1961.
- [13] NAMBU, Y. und JONA-LASINIO, G.: *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity II*. Phys. Rev., 124:246–254, 1961.
- [14] GLASHOW, S. L.: *Partial Symmetries of Weak Interactions*. Nucl. Phys., 22:579–588, 1961.
- [15] WEINBERG, S.: *A Model of Leptons*. Phys. Rev. Lett., 19:1264–1266, 1967.
- [16] GELL-MANN, M.: *A Schematic Model of Baryons and Mesons*. Phys. Lett., 8:214–215, 1964.

- [17] GROSS, D. J. und WILCZEK, F.: *Ultraviolet behaviour of non-abelian Gauge Theories*. Phys. Rev. Lett., 30:1343–1346, 1973.
- [18] POLITZER, H. D.: *Reliable perturbative results for strong interactions?* Phys. Rev. Lett., 30:1346–1349, 1973.
- [19] KAPUSTA, J. I. und GALE, C.: *Finite-Temperature Field Theory. Principles and Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2. Auflage, 2006. Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [20] FADDEEV, L. D. und POPOV, V. N.: *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*. Phys. Lett., B25:29–30, 1967.
- [21] BECCHI, C.; ROUET, A. und STORA, R.: *Renormalization of Gauge Theories*. Annals Phys., 98:287–321, 1976.
- [22] ARNOLD, P. und ZHAI, C.: *The Three loop free energy for pure gauge QCD*. Phys. Rev., D50:7603–7623, 1994. [[arXiv:hep-ph/9408276](#)].
- [23] BOYD, G. et al.: *Thermodynamics of  $SU(3)$  Lattice Gauge Theory*. Nucl. Phys., B469:419–444, 1996. [[arXiv:hep-lat/9602007](#)].
- [24] HIETANEN, A. et al.: *Three-dimensional physics and the pressure of hot QCD*. 2008. [[arXiv:hep-lat/08114664](#)].
- [25] KUGO, T.: *Eichtheorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [26] ZINN-JUSTIN, J.: *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, Oxford, New York, 2. Auflage, 1990. The International Series of Monographs on Physics.
- [27] PESKIN, M. E. und SCHROEDER, D. V.: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, Boulder, USA, 1995.
- [28] JACKIW, R. und PI, S.: *Seeking an even-parity mass term for 3-D gauge theory*. Phys. Lett., B403:297–303, 1997. [[arXiv:hep-th/9703226](#)].
- [29] DONOGHUE, J. F.; GOLOWICH E. und HOLSTEIN, B. R.: *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1992. Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology 2.
- [30] VERMASEREN, J. A. M.: *New features of FORM*. 2000. [[arXiv:math-ph/0010025](#)].
- [31] CUTLER, R. und SIVERS, D. W.: *Quantum Chromodynamic Gluon Contributions to Large  $p(T)$  Reactions*. Phys. Rev., D17:196, 1978.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, um mich bei allen Personen zu bedanken, die mich während meines Studiums unterstützt und insbesondere zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Ich bedanke mich bei:

- Professor Dr. Owe Philipsen für die interessante Themenstellung und die immerzu aufgebrachte Zeit, die er in die Betreuung meiner Diplomarbeit investiert hat.
- Dr. Hossein Malekzadeh für anregende Diskussionen bezüglich der Thematik der Diplomarbeit.
- Dr. York Schröder für die Bestätigung der SU(2)-Ergebnisse mittels der Integrationsroutine des FORM-Pakets.
- Lars Zeidlewicz, Marcus Tassler, Jens Langelage und Nina Gausmann für das Korrekturlesen meiner Diplomarbeit sowie viele nützliche Diskussionen.
- Janine Hüting und Nina Gausmann für die lebendige und zugleich sehr angenehme Büroatmosphäre sowie viele nützliche Diskussionen.
- meinen Kommilitonen und Freunden Carsten Hentschel, Martin Wilde und Johannes Sondhauß, die mir während meiner gesamten Studiendauer stets zur Seite standen.
- meinen Eltern Herbert und Miljka Bieletzki sowie meinem Bruder Swen Bieletzki für die unschätzbare Unterstützung während der gesamten Dauer meines Studiums.
- meiner Freundin Ina Bardelmeier für die unentbehrliche Unterstützung während der gesamten Dauer meines Studiums.



# Schlussserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Verwendung anderer als der hier angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Daniel Bieletzki  
Münster, 14. Februar 2009