

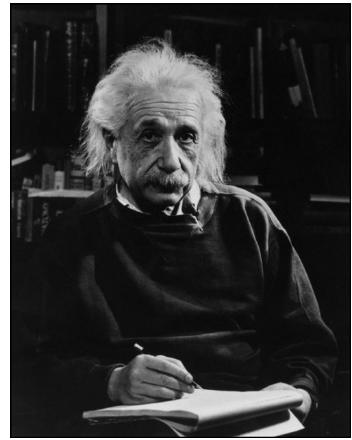


WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Die Untersuchung der Zerfallsrate und der  
Photonenpolarisation beim radiativen  
Neutronen- $\beta$ -Zerfall

als Diplomarbeit vorgelegt von  
Babak Alikhani

Februar 2007



*„Es gibt keine großen Entdeckungen und Fortschritte,  
solange es noch ein unglückliches Kind auf Erden gibt.“*

*Albert Einstein*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>4</b>
2.1 Schwache Wechselwirkung . . . . .	4
2.2 V-A-Theorie . . . . .	7
2.3 $\beta$ -Zerfall . . . . .	9
2.3.1 Feynman-Amplitude . . . . .	12
2.3.2 Zerfallsrate . . . . .	14
2.3.3 Untersuchung des nichtrelativistischen Limes für das Proton . . . . .	16
2.4 Radiativer $\beta$ -Zerfall . . . . .	18
2.4.1 Zerfallsrate . . . . .	19
2.4.2 Bestimmung der Integrationsgrenzen . . . . .	22
2.5 Die Feynman-Amplituden des radiativen $\beta$ -Zerfalls . . . . .	25
2.5.1 Zerfall eines Fermions in 3 Teilchen und Photon . . . . .	25
2.5.2 Die Kopplung des Photons am Elektron . . . . .	30
2.5.3 Die Kopplung des Photons am Proton . . . . .	32
2.5.4 Interferenzterm . . . . .	33
2.5.5 Das gesamte Matrixelement . . . . .	34
2.6 Helizitätsamplituden . . . . .	36
2.6.1 Anwendung der Helitzätsamplituden auf den radiativen $\beta$ -Zerfall .	38
<b>3 Numerische Auswertung</b>	<b>43</b>
3.1 Numerischer Vergleich für $ \mathcal{M} ^2$ . . . . .	43
3.2 Monte-Carlo Methode . . . . .	46
3.2.1 Zufallsgrößen . . . . .	46
3.2.2 Monte-Carlo Integration . . . . .	48
3.2.3 Vegas . . . . .	50

3.3 Auswertung . . . . .	53
<b>Zusammenfassung</b>	<b>57</b>
<b>A Dreiteilchenzerfall</b>	<b>58</b>
<b>B Feynman-Regeln der QED und der schwachen WW</b>	<b>61</b>
<b>C Die Dirac-Gleichung</b>	<b>64</b>
<b>D Kontraktions-Identitäten und Spur-Theoreme</b>	<b>66</b>
D.1 Kontraktions-Identitäten . . . . .	66
D.2 Spur-Theoreme . . . . .	67
<b>E Fortran-Programm zur Berechnung der differentiellen Zerfallsrate</b>	<b>70</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>79</b>
<b>Danksagung</b>	<b>81</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Eine der schönsten Seiten der Hochenergiephysik ist die Existenz des Neutrinos, des *Geisterteilchens*<sup>1</sup>. Sie spielen eine zentrale Rolle in der Physik der Wechselwirkungen. Obwohl die Existenz dieses Teilchens seit 50 Jahren durch das Experiment von *Reines* und *Cowan* nachgewiesen ist [12][13][15], ist seine Masse jedoch immer noch unbekannt und ihre Bestimmung ein aktuelles Thema der Hochenergiephysik. Viele Experimente haben gezeigt, dass die oberen Grenze der Ruhemassen der Neutrinos ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) viel kleiner als die Masse der zugehörigen geladenen Leptonen sind. Feste Werte sind jedoch unbekannt. Man kann kaum glauben, dass es ein Teilchen gibt, dessen Masse ungefähr 250-Mal kleiner (nach *Mainz-Troitsk-Experiment* [3]) als die Masse des Elektrons ist. Die Theorien im Standardmodel der Elementarteilchen basieren darauf, dass die Neutrinos masselos sind. Aufgrund der Oszillation-Experimenten ist man überzeugt, dass die Neutrinos Massen besitzen [3].

Es gibt verschiedene Methoden, mit deren Hilfe man die Neutrino-Masse bestimmen kann. Eine dieser Methoden ist die direkte Methode. In dieser Methode untersucht man das Energie-Spektrum von Elektronen des  $\beta$ -Zerfalls, um Informationen über die Masse des Neutrinos zu gewinnen, wobei die Masse des Neutrinos anhand der fehlenden Energie der Elektronen bestimmt werden kann. Es gab und gibt eine Reihe von Experimenten zu diesem Zweck. Ein aktuelles Experiment, das noch nicht in Betrieb ist, ist das *Katrin-Experiment* [3], mit dem man die Neutrino-Masse direkt aus Energie-Spektrum des  $\beta$ -Zerfalls bestimmen will. Da die Masse des Neutrinos sehr klein ist, muss man alle möglichen Faktoren, die die Form des Spektrums beeinflussen, berücksichtigen. Hierzu kann folgende Frage gestellt werden:

Wie ändert sich das Spektrum der Elektronen-Energie, wenn neben der Erzeugung des

---

<sup>1</sup> „Astronomie-Heute, Dez. 2004“

Elektrons und Neutrinos auch ein reelles Photon emittiert wird. Dieser radiative Zerfallsprozess erfolgt parallel zum normalen Zerfall, wobei sich die Zerfallsrate verändert. In der Kinematik des Zerfalls tritt ein zusätzlicher Phasenraum-Integration auf, die mit dem Photon verknüpft ist. Die mathematische Struktur der Zerfallsrate liefert dieselbe aber das Matrixelement des Zerfalls muss neu berechnet werden. Die Feynman-Amplitude des radiativen Zerfalls wird unter Berücksichtigung der Emission eines reellen Photons aufgestellt . Das Photon kann am Elektron, Proton oder schwachen Wechselwirkungs-Vertex gekoppelt werden. In den beiden ersten Fällen spricht man von der Bremsstrahlung.

In dieser Arbeit werden zuerst die Kinematik, das Matrixelement und die Zerfallsrate des normalen Prozesses kurz erläutert. Mit Hilfe der Feynman-Regel und Spur-Theoreme lässt sich das Matrixelement berechnen [1][6][9][10]. Beim normalen Neutronen-Zerfall handelt es sich um einen Dreikörper-Zerfall. Der Vorgang wird im folgenden im Ruhesystem (CMS) des Neutrons betrachten (s. Anhang A).

Im zweiten Teil werden die Zerfallsrate und das Matrixelement des radiativen  $\beta$ -Zerfalls analysiert. Die Berechnung der radiativen Zerfallsrate ist komplizierter, denn man muss eine zusätzliche Integration über die Phasenräumen der vier erzeugten Teilchen ausführen. Das Matrixelement wird durch zwei unabhängige Methoden berechnet. Die erste Methode ist die Anwendung der Spinsummen- und Polarisationssummen-Formalismus, durch den man auch das normale Matrixelement berechnet. Die zweite Methode ist die Helizitätsamplituden-Formalismus, der anders als die erste Methode ist, aber auf dasselbe Ergebnis führt. Diese Methode wird im Abschnitt (2.6) ausführlich erklärt.

Die beiden Methoden sind identisch, da sie diese physikalische Größe beschreiben. Man kann die Ergebnisse aus den beiden Methoden numerisch vergleichen. Im letzten Abschnitt wird der numerische Vergleich der beiden Methoden erklärt und es wird erwähnt, was zu diesem Vergleich berücksichtigt werden muss.

Die Untersuchung des  $\beta$ -Zerfalls spielt auch eine entscheidende Rolle in der Bestätigung des Standardmodell [SM] der Elementarteilchen [1]. Man kann durch das Studium der Zerfallsrate des Prozesses und des Polarisationverhaltens der Photonen die schwachen Kopplungskonstanten bestimmen. Das Energiespektrum des Photons des radiativen  $\beta$ -Zerfalls in führender Ordnung ist proportional zu  $g_V^2 + 3g_A^2$  und  $g_V^2 - g_A^2$ , wobei  $g_V$  und  $g_A$  die Kopplungskonstanten der schwachen Wechselwirkung sind.

Durch den Vergleich der experimentelllen Ergebnisse und der theoretischen Auswertungen könnte die Gültigkeit der V–A-Theorie bestätigt werden.

# Kapitel 2

## Theorie

### 2.1 Schwache Wechselwirkung

Zwischen Fermionen besteht eine Form der Wechselwirkung, die man als schwache Wechselwirkung bezeichnet<sup>1</sup>. Die beobachteten schwachen Wechselwirkungen können in drei Typen eingeteilt werden:

- Rein leptonische, z. B.

$$\mu^- \longrightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad . \quad (2.1)$$

- Semileptonische, z. B.

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (\beta\text{-Zerfall}) \quad . \quad (2.2)$$

- Nicht leptonische, z. B.

$$K^+ \longrightarrow \pi^0 + \pi^+ \quad . \quad (2.3)$$

Diese Wechselwirkung wurde zum ersten Mal beim  $\beta$ -Zerfall beobachtet. Bei weiteren Untersuchungen ist man auf zwei Überraschungen in Bezug auf den  $\beta$ -Zerfall getroffen

1. die Existenz eines neuen Teilchens, des *Neutrinos*
2. Paritätverletzung

---

<sup>1</sup>Es gibt noch weitere Wechselwirkungen zwischen den Fermionen, welche nicht hier besprochen wird.

Der  $\beta$ -Zerfall konnte zunächst gut durch die *Fermi-Theorie* beschrieben werden [4][12][13]. In dieser Theorie geht man von einer punktförmigen Wechselwirkung aus, in der vier Fermionen beteiligt sind. Kurz nach *Fermi* hat *Heisenberg* gezeigt, dass diese Theorie nur eine Näherung ist und sie erweitert werden muss [12]. Diese 4-Fermionen wechselwirken durch den Austausch eines schweren Teilchens, des  $W$ -Bosons. Da dieses Austausch-Boson sehr schwer ist, hat die Wechselwirkung nach der *Heisenbergschen Unschärfe-Relation* eine sehr kurze Reichweite und kann als punktförmige Wechselwirkung gesehen werden. Besonders bei niedrigen Energien ergibt sich eine effektive Punktwechselwirkung. Heute weiß man, dass es zwei geladene Bosonen  $W^\pm$  und ein neutrales Boson  $Z$  gibt, die als Austausch-Teilchen in der schwachen Wechselwirkung auftreten.

Was ist die Paritätverletzung? Man spricht von *Paritätserhaltung*, wenn die Beschreibung eines physikalischen Vorgangs und seines Spiegelbildes identisch sind. Bis 1957 galt die Parität als eine universelle Symmetrie. In diesem Jahr wurde jedoch von Frau *Wu* ein Experiment durchgeführt, mit dessen Ergebnissen man feststellen konnte, dass die Parität bei der schwachen Wechselwirkung nicht erhalten ist. Im übertragenen Sinne erhält man also verschiedene Ergebnisse, wenn man das Experiment im Spiegel durchführt. Der Grund liegt in der Helizität der Leptonen ( $e^-$ ,  $\bar{\nu}_e$ ). Die Helizität ist definiert als die Projektion des Spins in Impuls-Richtung des Teilchens

$$\mathcal{H} = \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad . \quad (2.4)$$

Ein Jahr später im Jahr 1958 ist es *Goldhaber* und seinen Mitarbeitern gelungen, durch ein sehr schönes und detailliertes Experiment die Helizität des Neutrinos zu messen [12][13]. Das Experiment hat gezeigt, dass die Neutrino-Helizität  $\mathcal{H} = -1$  ist. Dies bedeutet, dass in der Natur nur eine Spineinstellung des Neutrinos bzgl. seines Impulses in der schwachen Wechselwirkung auftritt, und zwar der Spin des Neutrinos steht immer entgegengesetzt gerichtet zu seinem Impuls. Nach heutigem Stand hat das Neutrino folgende Eigenschaften

- Die Helizität des Neutrino ist  $\mathcal{H} \approx -1$ .
- Das Neutrino hat den Spin  $\frac{1}{2}$ , also es ist ein Fermion.
- Neutrinos unterliegen der schwachen Wechselwirkung. Sie gehören zur Familie der Leptonen.
- Neutrinos sind sehr schwer nachzuweisen, denn sie sind sehr leicht, neutral und schwach wechselwirkend. Neutrinos besitzen außerordentlich kleine Wirkungsquerschnitte.
- Das Neutrino fliegt fast so schnell wie das Photon ( $v_{\bar{\nu}_e} \approx c$ ).

Die Untersuchung von zahlreichen Experimenten hat gezeigt, dass drei Familien von Neutrinos existieren. Zu jedem der Leptonen gibt es ein Neutrino. Diese drei Familien lauten

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}.$$

Die drei Neutrino-Sorten besitzen dieselben Eigenschaften. Nur ihre Massen sind unterschiedlich

$$m_{\nu_\tau} > m_{\nu_\mu} > m_{\nu_e}.$$

Neben diesen Familien stehen auch Familien der Antiteilchen. Zu jedem Lepton gibt es auch ein Antilepton, d.h.

$$\begin{pmatrix} e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mu^+ \\ \bar{\nu}_\mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau^+ \\ \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix}.$$

Das Neutrino ist ungeladen, aber sollte das Antineutrino auch ungeladen sein! Sind Neutrino und Antineutrino identisch? Ist das Neutrino ein Majorana-Teilchen <sup>2</sup>?

Die Antwort ist NEIN <sup>3</sup>! Obwohl das Antineutrino im übrigen dieselben Eigenschaften wie das Neutrino hat, besitzt es eine andere Helizität. Die Helizität des Antineutrinos ist  $\mathcal{H} = 1$ , d.h Spineinstellung und Impuls sind parallel. Der andere Grund dafür ist, dass das Neutrino und sein Antiteilchen verschiedene Reaktionen auslösen können. Obwohl das *Heidelberg-Moskau-Experiment* zeigen wollte, dass das Neutrino ein Majorana-Teilchen ist, ist ein solcher Beweis nicht eindeutig gelungen.

In den kommenden Abschnitten werden der  $\beta$ -Zerfall, und die Zerfallsrate und sowie das Matrixelement sowohl für den normalen als auch für den radiativen Zerfall berechnet.

---

<sup>2</sup>Die nach *Ettore Majorana* benannten Teilchen sind die Teilchen, die ihren Antiteilchen identisch sind. Er war der Meinung, dass das Neutrino und Antineutrino dasselbe Teilchen sind.

<sup>3</sup>Diese drei Neutrino-Sorten sind als *die leichten Neutrinos* bekannt. Es gibt vielleicht weitere Neutrino-Sorten, *die schweren Neutrinos*, die noch gesucht werden. Es kann sich sowohl um Majorana- als auch Dirac-Teilchen handeln.

## 2.2 V–A-Theorie

Die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkung sind die geladenen Vektorbosonen  $W^+$  und  $W^-$ , welche die geladenen Strom-Reaktionen (CC) vermitteln, und das neutrale Vektorboson  $Z^0$  für die neutralen Strom-Reaktionen. Fermi hat bereits 1933 vorgeschlagen, einen Wechselwirkungsmechanismus zu entwickeln, der analog zur elektromagnetischen Wechselwirkung abläuft. Bei der elektromagnetischen Wechselwirkung ist der Hamiltonian gegeben durch

$$H_{em} \sim \int \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) , \quad (2.5)$$

wobei  $e$  (die Elementarladung) die Kopplungskonstante,  $\vec{j}$  die Stromdichte und  $\vec{A}$  das Vektorpotential ist. Fermis Vorschlag für die Beschreibung der neuen Wechselwirkung war, entsprechende Vektorgrößen für Teilchen zusammen mit einer neuen Kopplungskonstante  $g_V$  zu verwenden („Vektorkopplung“). Der einfachste Ansatz für die Hamilton-Funktion für den  $\beta$ -Zerfall, die die vier beteiligten Teilchen enthält, ist gegeben durch

$$(\bar{\psi}_p \Omega \psi_n) (\bar{\psi}_e \Omega \psi_{\nu_e}) , \quad (2.6)$$

mit geeigneten Dirac-Operatoren  $\Omega$ . Diese Funktion entspricht einem Prozess, bei dem ein Neutrino in ein Elektron und gleichzeitig ein Neutron in ein Proton übergeht (s. Abb. 2.2). Als nächstes stellt sich die Frage, welche Dirac-Operatoren  $\Omega$  in Frage kommt. Dann kann

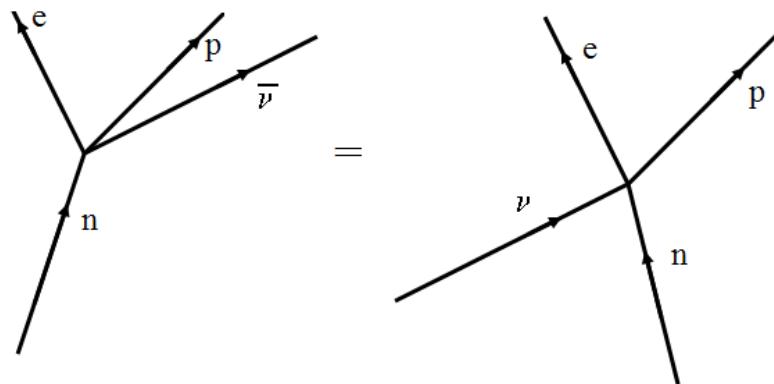


Abbildung 2.1: Feynman-Graph zum  $\beta$ -Zerfalls des Neutrons

man durch das Experiment feststellen, welche diese Operatoren überhaupt in der Natur auftreten. Da es 16 linear unabhängige  $4 \times 4$ -Dirac-Matrizen gibt, erhält man  $16^2 = 256$  mathematisch mögliche Bilinearformen. Unter der Forderung der Lorentz-Invarianz verbleiben nur fünf Operatoren. Diese fünf Operatoren lauten in der üblichen kovarianten

Schreibweise für die Dirac-Matrizen [13]

$$\begin{aligned}
 \Omega_S &= 1 && \text{Skalar}(S) \\
 \Omega_P &= \gamma_5 && \text{Pseudoskalar}(P) \\
 \Omega_V &= \gamma_\mu && \text{Vektor}(V) \\
 \Omega_A &= \gamma_5 \gamma_\mu && \text{Axialer Vektor}(A) \\
 \Omega_T &= \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu && \text{Tensor}(T)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Unter Voraussetzung einer Lorenz-invarianten linearen Punktwechselwirkung ergibt sich für die Hamiltonfunktion des Neutronen-Zerfalls

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sum_{j=S,P,V,A,T} g_j (\bar{\psi}_p \Omega_j \psi_n) (\bar{\psi}_e \Omega_j \psi_{\nu_e}) dv , \tag{2.8}$$

wobei  $g_j$  die Kopplungskonstanten jeder Wechselwirkungsformen sind. Die Integration erstreckt sich über das Volumen.

Welche der Wechselwirkungen vorliegt, kann theoretisch nicht entschieden werden. Experimentell hat man den freien Neutronen-Zerfall studiert und festgestellt, dass von den fünf möglichen Termen nur zwei beitragen, die V- und A-Wechselwirkung [12][13][14].

Aus dem *Goldhaber*-Experiment weiß man, dass die Neutrino immer mit nur einer Spinrichtung relativ zu ihrem Impuls, und zwar in entgegengesetzte Richtung, emittiert werden. Wenn man dies berücksichtigt, ergibt sich die Hamiltonfunktion<sup>4</sup> des freien Neutronen-Zerfalls

$$\begin{aligned}
 H &\sim \int \left[ g_V (\bar{\psi}_p \Omega_V \psi_n) \left( \bar{\psi}_e \Omega_V \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi_{\nu_e} \right) \right. \\
 &\quad \left. + g_A (\bar{\psi}_p \Omega_A \psi_n) \left( \bar{\psi}_e \Omega_A \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \psi_{\nu_e} \right) \right] dv \\
 &= \frac{1}{4} \int [g_V (\bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}) + g_A (\bar{\psi}_p \gamma_5 \gamma_\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_5 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e})] dv \\
 &= \frac{1}{4} \int [g_V (\bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}) - g_A (\bar{\psi}_p \gamma_5 \gamma_\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e})] dv \\
 &= \frac{g_V}{4} \int (\bar{\psi}_p \gamma_\mu (1 - \lambda \gamma_5) \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_5 \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}) , \tag{2.9}
 \end{aligned}$$

mit

$$\lambda = \frac{g_A}{g_V} \approx 1,267. \tag{2.10}$$

---

<sup>4</sup>Um diese Funktion zu berechnen, braucht man den Projektionsoperator. Dieser Projektionsoperator ist im Anhang C gegeben.

## 2.3 $\beta$ -Zerfall

Neben dem  $\alpha$ - und  $\gamma$ -Zerfall ist der  $\beta$ -Zerfall über 100 Jahren bekannt. Dieser Zerfall ist vielleicht der interessanteste unter allen, weil immer noch unbekannte Seiten dieses Zerfalls zu entdecken sind. Dieser Zerfall wird durch die schwache Wechselwirkung beschrieben. Eines der wichtigsten Forschungsgebiete, in welchem dem Neutrino aus dem  $\beta$ -Zerfall eine entscheidende Bedeutung zukommt, ist die Bestimmung der Masse des Neutrinos, die in den nächsten Abschnitten diskutieren wird.

Es gibt drei Arten des  $\beta$ -Zerfalls:  $\beta^-$ -Zerfall,  $\beta^+$ -Zerfall, Elektronen-Einfang ( $e^-$  – capture EC). Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung des  $\beta^-$ -Zerfalls und es wird kurz erläutert, wie die anderen Zerfälle ablaufen.

### 1. $\beta^-$ -Zerfall

Ein Neutron zerfällt in ein Proton, wobei ein Elektron und ein Antineutrino emittiert werden

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e . \quad (2.11)$$

### 2. $\beta^+$ -Zerfall

Ein Proton zerfällt in ein Neutron, wobei ein Positron<sup>5</sup> und ein Neutrino emittiert werden

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu_e . \quad (2.12)$$

Da ein freies Proton eine kleinere Masse als ein Neutron besitzt, kann ein Proton in ein Neutron unter Emission der anderen Teilchen umgewandelt werden (Energie-Erhaltung). Dieser Zerfall kann nur beim gebundenen Protonen im Kern geschehen.

### 3. Elektronen-Einfang

Beim Elektronen-Einfang wird ein Elektron der inneren Schalen (K, L, ...) eingefangen und reagiert mit einem Proton aus dem Kern. Durch diese Reaktion entstehen ein Neutron und ein Neutrino

$$p + e^- \longrightarrow n + \nu_e . \quad (2.13)$$

---

<sup>5</sup>Positron ist Antiteilchen des Elektrons. Es hat dieselben Eigenschaften wie Elektron, aber hat eine positive Ladung und seine Helizität ist positiv.

Am Anfang hat man den  $\beta$ -Zerfall so beschrieben, dass der Atomkern eines Elementes in ein Elektron und den Restkern zerfällt. Mit dieser Beschreibung hätte man einen eindeutigen Peak im Energiespektrum der Elektronen erwartet. Aber man hat den Peak nicht gesehen. Das Energiespektrum der Elektronen wurde zum ersten Mal von *James Chadwick* mit Hilfe eines Magnetspektrometers gemessen [12]. Es ist etwas überraschendes passiert. Er hat ein kontinuierliches Spektrum gemessen.

Die Energie des Elektrons variiert zwischen Null und zu einer Maximalenergie  $E_{max}$ .

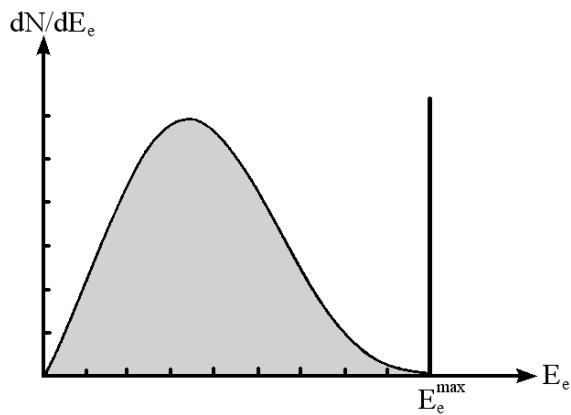


Abbildung 2.2: Das Energiespektrum der Elektronen im  $\beta$ -Zerfall [17]

Daraus kann man 2 Schlussfolgerungen ziehen

- Die Energie- und Impuls-Erhaltung ist im allgemeinen verletzt, oder
- es gibt ein weiteres Teilchen.

*Wolfgang Pauli* hat im Jahr 1930 die Existenz eines weiteren Teilchens postuliert, um die Gültigkeit der Energie- und Impuls-Erhaltung zu retten. Damit kann man das kontinuierliche Energiespektrum der Elektronen unter Energie- und Impuls-Erhaltung erklären. Es handelt sich um einen Dreikörperzerfall, wobei im Anhang A erklärt wird, welche Relationen zwischen den Energien und Impulsen der Teilchen stehen. Um den Ladungserhaltungssatz zu berücksichtigen, darf dieses Teilchen keine Ladung tragen. Deswegen hat Pauli den Namen *Neutrino* (das kleine Neutron) vorgeschlagen.

Aus der Spineinstellung des Neutrons und Protons unterscheidet man zwischen zwei Übergängen:

- Fermi-Übergang
- Gamow-Teller-Übergang

Beim Fermi-Übergang sind die Spins von Neutron und Proton parallel. Aus der Drehimpuls-Erhaltungssatz und der Tatsache, dass das Antineutrino Helizität  $\mathcal{H} = 1$  besitzt, steht der Spin des Elektrons antiparallel zum Spin des Neutrinos

$$n(\uparrow) \longrightarrow p(\uparrow) + e^-(\downarrow) + \bar{\nu}_e(\uparrow) \quad \text{oder} \quad n(\downarrow) \longrightarrow p(\downarrow) + e^-(\uparrow) + \bar{\nu}_e(\downarrow) .$$

Im Gegensatz zum Fermi-Übergang haben Neutron und Proton im Gamow-Teller-Übergang eine antiparallele Spineinstellung. Aus oben genannten Gründen kann man leicht sehen, dass Elektron und Neutrino eine parallele Spineinstellung besitzen:

$$n(\uparrow) \longrightarrow p(\downarrow) + e^-(\uparrow) + \bar{\nu}_e(\uparrow) \quad \text{oder} \quad n(\downarrow) \longrightarrow p(\uparrow) + e^-(\downarrow) + \bar{\nu}_e(\downarrow) .$$

Es stellt sich diese Frage, ob der  $\beta$ -Zerfall so abläuft, wie er in der Gleichung (2.11) dargestellt ist. Oder beschreibt diese nur einen Zerfall auf dem Kernniveau? Heute weiß man, dass das Proton und das Neutron eine Unterstruktur besitzen. Sie bestehen aus Quarks. Es gibt 6 Quarks (und 6 Antiquarks),  $u$ (Up),  $d$ (Down),  $s$ (Strange),  $c$ (Charm),  $b$ (Bottom) und  $t$ (Top), von denen nur zwei die Nukleonen (Protonen und Neutronen) zusammensetzen. Das Proton besteht aus zwei  $u$ -Quarks und einem  $d$ -Quark und das Neutron aus zwei  $d$ -Quarks und einem  $u$ -Quark

$$n = (u, d, d) , \quad p = (u, u, d).$$

Auf dem Elementarteilchen-Niveau läuft der  $\beta$ -Zerfall so ab, dass ein  $d$ -Quark in ein  $u$ -Quark umgewandelt wird und dabei ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino emittiert

$$d \longrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e . \quad (2.14)$$

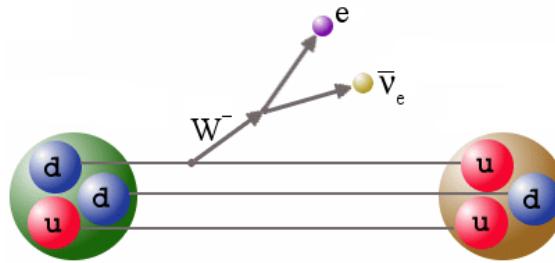


Abbildung 2.3:  $\beta$ -Zerfall auf der Elementarteilchen-Ebene

In den nächsten Abschnitten wird gezeigt, wie man die Zerfallsrate aus der Kinematik des Zerfalls und das Matrixelement des  $\beta$ -Zerfalls aus der Feynman Amplitude explizit berechnen kann.

### 2.3.1 Feynman-Amplitude

Mit Hilfe der Feynman-Regeln, die im Anhang B aufgelistet sind, lässt sich die zugehörige Feynman-Amplitude für den Neutronen-Zerfall

$$n(p, s_n) \longrightarrow p(p', r_p) + e^-(l_e, r_e) + \bar{\nu}_e(l_{\bar{\nu}_e}, r_{\bar{\nu}_e}) \quad (2.15)$$

folgendermaßen schreiben

$$\mathcal{M} = \left( i \frac{g}{\sqrt{2}} \right)^2 \left[ \bar{u}(l_e) \gamma^\alpha \frac{(1 - \gamma^5)}{2} v(l_{\bar{\nu}_e}) \right] \cdot \frac{i(-g_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{m_W^2})}{k^2 - m_W^2 + i\epsilon} \cdot \left[ \bar{u}(p') \gamma^\beta \frac{(1 - \lambda\gamma^5)}{2} u(p) \right]. \quad (2.16)$$

Der Faktor  $\frac{(1 - \gamma^5)}{2}$  kommt dadurch zustande, dass die Teilchen an der schwachen Wechselwirkung mit der negativen Helizität (bzw. Antiteilchen mit der positiven Helizität) in der Reaktion teilnehmen.

Wie in den vorherigen Abschnitten erwähnt, finden im Neutronenzerfall zwei Übergänge, der Fermi-Übergang und der Gammow-Teller-Übergang, statt. Diese Übergänge treten mit verschiedenen Kopplungskonstanten  $g_V$  und  $g_A$  auf. Die Größe  $\lambda$  ist als das Verhältnis dieser beiden Konstanten definiert [1][12]

$$\lambda \equiv \frac{g_V}{g_A} \approx 1,267. \quad (2.17)$$

Da die Masse des W-Bosons sehr groß gegenüber seinem Impuls ist,  $m_W^2 \gg 1$ , reduziert sich der Ausdruck für  $\mathcal{M}$  auf

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{8m_W^2} [\bar{u}(l_e) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v(l_{\bar{\nu}_e})] \cdot [\bar{u}(p') \gamma_\alpha (1 - \lambda\gamma_5) u(p)]. \quad (2.18)$$

Man führt eine neue Konstante ein, die als *Fermi-Konstante* bekannt ist und durch folgenden Ausdruck definiert ist

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \equiv \frac{g^2}{8m_W^2}, \quad (2.19)$$

somit erhält man für die Feynman-Amplitude

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}(l_e) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v(l_{\bar{\nu}_e})] \cdot [\bar{u}(p') \gamma_\alpha (1 - \lambda\gamma_5) u(p)]. \quad (2.20)$$

Um das unpolarisierte Matrixelement  $|\mathcal{M}|^2$  zu erhalten, muss man über die Spins im Anfangszustand mitteln und über die Spins im Endzustand summieren [6][7][9][10]. Es

gilt

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_r \sum_s |\mathcal{M}|^2 \\
&= \frac{G_F^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \sum_r \sum_s | [\bar{u}(l_e) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v(l_{\bar{\nu}_e})] \cdot [\bar{u}(p') \gamma_\alpha (1 - \lambda \gamma_5) u(p)] |^2 \\
&= \frac{G_F^2}{4} \underbrace{\text{Tr} [(l_e + m_e) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) (l_{\bar{\nu}_e} - m_{\bar{\nu}_e}) \gamma^\beta (1 - \gamma^5)]}_{\equiv A^{\alpha\beta}, \text{leptonischer Anteil}} \\
&\quad \cdot \underbrace{\text{Tr} [(\not{p}' + m_p) \gamma_\alpha (1 - \lambda \gamma_5) (\not{p} + m_n) \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5)]}_{\equiv B_{\alpha\beta}, \text{hadronischer Anteil}} . \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Die erste Spur in dieser Gleichung ist

$$\begin{aligned}
A^{\alpha\beta} &= \text{Tr} [(l_e + m_e) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) (l_{\bar{\nu}_e} - m_{\bar{\nu}_e}) \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \\
&= \text{Tr} [l_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] - \text{Tr} [l_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) m_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \\
&\quad + \text{Tr} [m_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] - \text{Tr} [m_e m_{\bar{\nu}_e} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] . \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Wenn man die Spur-Theoreme, die im Anhang D vollständig bewiesen werden, auf  $A^{\alpha\beta}$  anwendet, kann man feststellen, dass die drei letzten Terme verschwinden. In diesen Termen tauchen die Spuren einer ungeraden Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen auf. Der leptonischer Anteil ist

$$\begin{aligned}
A^{\alpha\beta} &= \text{Tr} [l_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \\
&= \text{Tr} \left[ l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \overbrace{(1 - \gamma^5)^2}^{=2(1-\gamma_5)} \right] = \text{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \\
&= 2 \text{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta] - \text{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \gamma^5] . \tag{2.23}
\end{aligned}$$

Also

$$A^{\alpha\beta} = 2 \text{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta] - 2 \text{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \gamma^5] . \tag{2.24}$$

Analog berechnet man den Ausdruck für den hadronischen Anteil

$$\begin{aligned}
B_{\alpha\beta} &= (1 + \lambda^2) \text{Tr} [\not{p}' \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta] - 2\lambda \text{Tr} [\not{p}' \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \gamma_5] + m_n m_p (1 - \lambda^2) \text{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta] . \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Um das Quadrat der Feynman-Amplitude (das Matrixelement)  $|\mathcal{M}|^2$  zu finden, muss man die Kontraktion  $A^{\alpha\beta} \cdot B_{\alpha\beta}$  berechnen. Unter Anwendung der Relationen im Anhang D

ergibt sich für das unpolarisierte Matrixelement

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{G_F^2}{4} A^{\alpha\beta} \cdot B_{\alpha\beta} \\ &= 16G_F^2 \left\{ (1+\lambda)^2 (p' l_e) (p l_{\bar{\nu}_e}) + (1-\lambda)^2 (p' l_{\bar{\nu}_e}) (p l_e) - (1-\lambda^2) m_n m_p (l_e l_{\bar{\nu}_e}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aus kinematischen Überlegungen kann man zeigen, dass  $|\mathcal{M}|^2$  im Ruhesystem des Neutrons ( $p = m_n$ ) winkelunabhängig ist. Das Matrixelement berechnet sich im CMS vom Neutron zu

$$|\mathcal{M}|^2 = 16G_F^2 \left\{ (1+\lambda)^2 (p' l_e) (m_n E_{\bar{\nu}_e}) + (1-\lambda)^2 (p' l_{\bar{\nu}_e}) (m_n E_e) - (1-\lambda^2) m_n m_p (l_e l_{\bar{\nu}_e}) \right\}. \quad (2.27)$$

Die Skalarprodukte der Vierervektoren liefern die Winkel zwischen den Vektoren. Aus der Vierer-Impuls-Erhaltung jedoch kann man zeigen, dass diese Terme unabhängig von den Winkeln sind. Es gilt

$$p = p' + l_e + l_{\bar{\nu}_e}, \quad (2.28)$$

$$(p - l_{\bar{\nu}_e})^2 = (p' + l_e)^2 \Rightarrow p' l_e = \frac{1}{2} [m_n^2 - m_p^2 - m_e^2 + m_{\bar{\nu}_e}^2 - 2m_n E_{\bar{\nu}_e}], \quad (2.29)$$

$$(p - l_e)^2 = (p' + l_{\bar{\nu}_e})^2 \Rightarrow p' l_{\bar{\nu}_e} = \frac{1}{2} [m_n^2 - m_p^2 + m_e^2 - m_{\bar{\nu}_e}^2 - 2m_n E_e], \quad (2.30)$$

$$(p - p')^2 = (l_{\bar{\nu}_e} + l_e)^2 \Rightarrow l_e l_{\bar{\nu}_e} = \frac{1}{2} [m_n^2 + m_p^2 - m_e^2 - m_{\bar{\nu}_e}^2 - 2m_n E']. \quad (2.31)$$

Matrixelement des  $\beta$ -Zerfalls ist winkelunabhängig und kann, wie im nächsten Abschnitt, in den Winkel-Integrationen als eine Konstante behandelt werden.

### 2.3.2 Zerfallsrate

Aus der allgemeinen Formel, die im Anhang B steht, ergibt sich die differentielle Zerfallsrate für den Neutronen-Zerfall

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{(2\pi)^4}{2m_n} \cdot \delta^{(4)}(p - p' - l_e - l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} \cdot \frac{d^3 l_e}{(2\pi)^3 2E_e} \cdot \frac{d^3 l_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} \cdot |\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \cdot \frac{|\mathcal{M}|^2}{16m_n} \cdot \delta^{(4)}(p - p' - l_e - l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \frac{d^3 p'}{E'} \cdot \frac{d^3 l_e}{E_e} \cdot \frac{d^3 l_{\bar{\nu}_e}}{E_{\bar{\nu}_e}}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Zuerst wird im Ruhesystem des Neutrons über den Dreier-Impuls des Protons  $\vec{p}'$  integriert. Es gilt mit der relativistischen Energie-Impuls-Relation

$$\begin{aligned} d\Gamma = & \frac{1}{(2\pi)^5} \cdot \frac{|\mathcal{M}|^2}{16m_n} \cdot \delta(m_n - \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e})^2 + m_p^2} - E_e - E_{\bar{\nu}_e}) \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e})^2 + m_p^2}} \cdot \frac{d^3 l_e}{E_e} \cdot \frac{d^3 l_{\bar{\nu}_e}}{E_{\bar{\nu}_e}} . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Aus der 3-dimensionalen  $\delta$ -Funktion ergibt sich die Dreier-Impuls-Erhaltung im CMS des Neutrons, d.h.

$$\vec{0} = \vec{p}' + \vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} . \quad (2.34)$$

Man kann die Dreier-Impulse in Kugelkoordinaten transformieren und erhält dadurch

$$\begin{aligned} d\Gamma = & \frac{1}{(2\pi)^5} \cdot \frac{|\mathcal{M}|^2}{16m_n} \cdot \frac{\delta(E - \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e})^2 + m_p^2} - E_e - E_{\bar{\nu}_e})}{E_e E_{\bar{\nu}_e} \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e})^2 + m_p^2}} \\ & \cdot l_e^2 dl_e d\Omega_e \cdot l_{\bar{\nu}_e}^2 dl_{\bar{\nu}_e} d\Omega_{\bar{\nu}_e} . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Unter Anwendung der relativistischen Energie-Impuls-Relation

$$E^2 = |\vec{p}'|^2 + m^2 , \quad EdE = |\vec{p}'|dp \quad (2.36)$$

und Vernachlässigung der Masse des Neutrinos ergibt sich

$$\begin{aligned} d\Gamma = & \frac{1}{(2\pi)^5} \cdot \frac{|\mathcal{M}|^2}{16m_n} \cdot \frac{\delta(E - \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e})^2 + m_p^2} - E_e - E_{\bar{\nu}_e})}{E_e E_{\bar{\nu}_e} \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e})^2 + m_p^2}} \\ & \cdot l_e E_e dE_e d\Omega_e \cdot l_{\bar{\nu}_e} E_{\bar{\nu}_e} dE_{\bar{\nu}_e} d\Omega_{\bar{\nu}_e} . \end{aligned} \quad (2.37)$$

Bevor die letzte Integration über die Energie des Neutrinos ausgeführt wird, sei darauf hingewiesen, dass die Raumwinkel des Elektrons und des Neutrinos unabhängig voneinander sind. Durch Integrationen über  $d\Omega_e$  und  $d\Omega_{\bar{\nu}_e}$  ergibt sich ein Faktor  $4\pi$

$$\begin{aligned} d\Gamma = & \frac{1}{(2\pi)^5} \cdot \frac{|\mathcal{M}|^2}{16m_n} \cdot \frac{\delta(E - \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e})^2 + m_p^2} - E_e - E_{\bar{\nu}_e})}{E_e E_{\bar{\nu}_e} \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e})^2 + m_p^2}} \\ & \cdot (p_e E_e dE_e \underbrace{d\Omega_e}_{=4\pi}) (p_{\bar{\nu}_e} E_{\bar{\nu}_e} dE_{\bar{\nu}_e} \underbrace{d\Omega_{\bar{\nu}_e}}_{=4\pi}) \\ = & \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{|\mathcal{M}|^2}{4m_n} \cdot \frac{l_e E_{\bar{\nu}_e}}{(m_n - E_e - E_{\bar{\nu}_e})} dE_e . \end{aligned} \quad (2.38)$$

In der letzten Gleichung wurde angenommen, dass die Masse des Neutrinos gegenüber seinem Impuls verschwindet. Es ist zu bemerken, dass  $E_{\bar{\nu}_e}$  in dieser Gleichung ein Symbol für den folgenden Ausdruck ist

$$E_{\bar{\nu}_e} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - 2m_n E_e}{2[m_n - Ee + |\vec{l}_e| \cos \angle(\hat{l}_e, \hat{l}_{\bar{\nu}_e})]} , \quad (2.39)$$

der sich aus dem Argument in der  $\delta$ -Funktion

$$E_{\bar{\nu}_e} = m_n - Ee - \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e})^2 + m_p^2} \quad (2.40)$$

ergibt. Im CMS (Ruhesystem) vom Neutron soll gelten

$$E = m_n = E' + E_{e^-} + E_{\bar{\nu}_e} . \quad (2.41)$$

Nachdem man die Winkelintegrationen ausgeführt hat, wurde das Matrixelement überhaupt nicht berücksichtigt, ob es sich als winkelunabhängige Größe verhält. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass das Matrixelement winkelunabhängig ist und als Konstante bzgl. Winkelintegration betrachtet werden kann.

### 2.3.3 Untersuchung des nichtrelativistischen Limes für das Proton

Wie vorher erwähnt kann man den Neutronen  $\beta$ -Zerfall als Umwandlung des Neutrons in ein Proton unter der Erzeugung des Elektrons und Elektronenantineutrinos betrachten. Bei diesem Prozess wird die freigesetzte Energie, die der Massendifferenz von Neutron und Proton entspricht, in die Masse des erzeugten Elektrons und Elektronenantineutrinos, sowie der kinetischen Energien der beteiligten Teilchen umgewandelt

$$E_0 = m_n - m_p = E_e + E_{\bar{\nu}_e} + E'_{kin} \ll m_n, m_p . \quad (2.42)$$

Diese Gleichung ist genau dann richtig, wenn man den Impuls des Protons gegenüber seiner Masse vernachlässigen. Man weiß, dass die Masse des Protons viel größer ist als die freigesetzte Energie und daher kann die Geschwindigkeit des Protons gegenüber der Geschwindigkeit des Elektrons oder Antineutrinos vernachlässigt werden. Der Impuls ergibt sich aus dem Produkt der Masse und der Geschwindigkeit und kann nicht vernachlässigt werden. Wie kann die Gleichung (2.42) gelten? Um diese Relation zu beweisen, stellt man den Energie-Erhaltungs-Satz im Ruhesystem des Neutron auf

$$m_n = E' + E_e + E_{\bar{\nu}_e} . \quad (2.43)$$

Unter Anwendung der relativistischen Energie-Impuls-Relation lässt sich die obige Gleichung folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} m_n - E' &= E_e + E_{\bar{\nu}_e} \\ m_n - \sqrt{m_p^2 + p'^2} &= E_e + E_{\bar{\nu}_e} \\ m_n - m_p \sqrt{1 + \left( \frac{p'}{m_p} \right)^2} &= E_e + E_{\bar{\nu}_e} \quad . \end{aligned} \quad (2.44)$$

Da die kinetische Energie des Protons  $E'_{kin}$  im Vergleich zu seiner Masse sehr klein ist, entwickelt man in eine Taylor-Reihe

$$m_n - m_p \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{p'}{m_p} \right)^2 + O \left( \left( \frac{p'}{m_p} \right)^4 \right) \right] = E_e + E_{\bar{\nu}_e} \quad . \quad (2.45)$$

Man kann die Terme, welche größere Ordnungen als  $O \left( \left( \frac{p'}{m_p} \right)^4 \right)$  haben, weglassen, da diese Terme kleiner als  $O(10^{-6})$  sind. Auf diesem Grund erhält man

$$\begin{aligned} m_n - m_p - \frac{1}{2} \left( \frac{p'^2}{m_p} \right) &= E_e + E_{\bar{\nu}_e} \\ E_0 - E_p^{kin} &= E_e + E_{\bar{\nu}_e} \\ E_0 &= E_e + E_{\bar{\nu}_e} + E_p^{kin} \quad . \end{aligned} \quad (2.46)$$

## 2.4 Radiativer $\beta$ -Zerfall

Wie vorher erwähnt wurde, spielt das Neutrino in der Physik der Wechselwirkungen eine große Rolle. Daher ist es wichtig, seine Masse zu kennen. Da die Neutrinos der schwachen Wechselwirkung unterliegen, ist die Bestimmung ihrer Massen nicht einfach. Bei der direkten Methode zur Bestimmung der Elektronantineutrino-Masse untersucht man das Spektrum von  $\beta$ -Elektronen. Dazu beobachtet man den Endpunkt des Spektrums, wo die Energien der Elektronen maximal sind und kann aus der Energie-Erhaltung auf die Masse des Neutrinos schließen. Wie in der Abbildung 2.4 zu sehen ist, weist das Spektrum sehr kleine Abweichung auf, wenn die Masse des Neutrinos von Null verschieden ist. Da sich

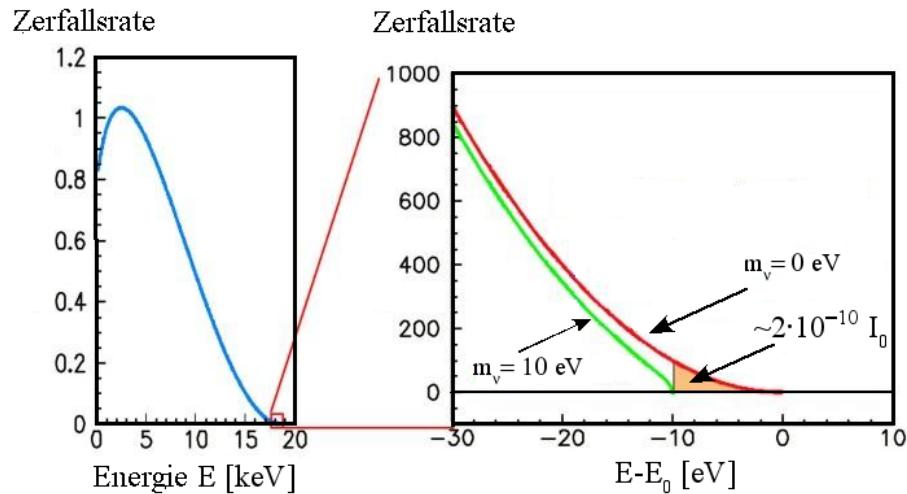


Abbildung 2.4: links:  $\beta$ -Spektrum aus dem Tritium- $\beta$ -Zerfall, rechts: Vergleich des Endpunktes für  $m_{\bar{\nu}_e} = 0$  eV und  $m_{\bar{\nu}_e} = 10$  eV [3]

das Spektrum so empfindlich verhält, muss man alle möglichen Störungen berücksichtigen, die das Spektrum beeinflussen können. Eine der Möglichkeiten ist die Beobachtung der radiativen  $\beta$ -Zerfall, wo es sich um einen Vierkörperzerfall handelt. In diesem Prozess wird zusätzlich ein Photon emittiert

$$n(p) \longrightarrow p(p') + e^-(l_e) + \bar{\nu}_e(l_{\bar{\nu}_e}) + \gamma(k) \quad . \quad (2.47)$$

Im diesem Abschnitt wird nur die Zerfallsrate dieses Prozesses berechnet und in den nächsten Abschnitten (2.5) und (2.6) wird das Matrixelement ausführlich mit Hilfe der Spin-Polarisation-Summen und Helizitätsamplituden-Formalismen hergeleitet.

### 2.4.1 Zerfallsrate

Die differentielle Zerfallsrate des radiativen Prozesses lässt sich analog zum normalen Prozess aus den Gleichungen im Anhang B herleiten. Die totale Zerfallsrate ergibt sich durch die Phasenraum-Integrationen über alle erzeugten Teilchen. Der Unterschied zum normalen Neutronen- $\beta$ -Zerfall ist, dass man für diesen Prozess auch über den Phasenraum des Photon integrieren muss. Die differentielle Zerfallsrate ist gegeben durch

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{(2\pi)^4}{2m_n} \cdot \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E'} \cdot \frac{d^3 l_e}{(2\pi)^3 2E_e} \cdot \frac{d^3 l_{\bar{\nu}_e}}{(2\pi)^3 2E_{\bar{\nu}_e}} \cdot \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \\ &\quad \cdot |\mathcal{M}|^2 \cdot \delta^{(4)}(p - p' - l_e - l_{\bar{\nu}_e} - k) \\ &= \frac{1}{32m_n(2\pi)^8} \cdot d^3 p' \cdot d^3 l_e \cdot d^3 l_{\bar{\nu}_e} \cdot d^3 k \cdot \frac{1}{E' E_e E_{\bar{\nu}_e} \omega} \\ &\quad \cdot |\mathcal{M}|^2 \cdot \delta^{(3)}(\vec{p}' + \vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k}) \delta^{(1)}(m_n - E' - E_e - E_{\bar{\nu}_e} - \omega) . \end{aligned} \quad (2.48)$$

Zuerst führt man die Integration über den Phasenraum des Protons aus. Zur Integration verwendet man die relativistische Energie-Impuls-Relation des Protons  $E' = \sqrt{|\vec{p}'|^2 + m_p^2}$  gilt

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{32m_n(2\pi)^8} \cdot d^3 l_e \cdot d^3 l_{\bar{\nu}_e} \cdot d^3 k \cdot \frac{1}{E_e E_{\bar{\nu}_e} \omega \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k})^2 + m_p^2}} \\ &\quad \cdot \delta^{(1)}(m_n - \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k})^2 + m_p^2} - E_e - E_{\bar{\nu}_e} - \omega) \cdot |\mathcal{M}|_{\vec{p}' = -(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k})}^2 . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Man kann die Phasenraum-Integrationen in Kugel-Koordinaten formulieren. Aus der Energie-Impuls-Relation lässt sich die Formel  $dE dE = |\vec{p}| dp$  durch partielle Ableitung herleiten. Damit vereinfacht sich die differentielle Zerfallsrate zu

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{32m_n(2\pi)^8} \cdot |\vec{l}_e| dE_e d\Omega_e \cdot |\vec{l}_{\bar{\nu}_e}| dE_{\bar{\nu}_e} d\Omega_{\bar{\nu}_e} \cdot |\vec{k}| dk d\Omega_k \cdot \frac{1}{\sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k})^2 + m_p^2}} \\ &\quad \cdot \delta^{(1)}(m_n - \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k})^2 + m_p^2} - E_e - E_{\bar{\nu}_e} - \omega) \cdot |\mathcal{M}|_{\vec{p}' = -(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k})}^2 . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Als letztes integriert man über die Energie des Neutrinos. Aus der  $\delta$ -Funktion ergibt sich eine selbstkonsistente Gleichung für die Energie des Neutrinos, also

$$\begin{aligned} E_{\bar{\nu}_e} &= m_n - E_e - \omega - \sqrt{(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k})^2 + m_p^2} \\ E_{\bar{\nu}_e} &= m_n - E_e - \omega - \sqrt{|\vec{l}_e|^2 + |\vec{l}_{\bar{\nu}_e}|^2 + |\vec{k}|^2 + \vec{l}_e \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{l}_e \cdot \vec{k} + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} \cdot \vec{k} + m_p^2} . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Bevor man diese selbstkonsistente Gleichung löst, vereinbart man, dass die Impuls-Richtung des Elektrons der z-Achse entspricht. Dies vereinfacht die obigen Gleichungen. Mit dieser

Vereinbarung führt man zwei nützliche Größen ein

$$\hat{l}_e \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e} = \cos \theta_{\bar{\nu}_e} \equiv x_{\bar{\nu}_e} \quad , \quad \hat{l}_e \cdot \hat{k} = \cos \theta_k \equiv x_k \quad . \quad (2.52)$$

Die selbstkonsistente Gleichung für  $E_{\bar{\nu}_e}$ , Gleichung (2.51) lässt sich mit mathematischen Umformungen lösen. Dazu löst man eine quadratische Gleichung nach  $E_{\bar{\nu}_e}$ . An dieser Stelle wird der Rechenweg nicht näher erläutert und nur das Ergebniss mit Hilfe der oben definierten Größen angegeben

$$E_{\bar{\nu}_e} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - 2m_n(E_e + \omega) + 2E_e\omega - 2\vec{l}_e \cdot \vec{k}}{2(m_n - E_e - \omega + |\vec{l}_e| x_{\bar{\nu}_e} + \vec{k} \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e})} \quad . \quad (2.53)$$

Nach der Integration über Energie des Neutrinos ergibt sich für die differentielle Zerfallsrate

$$d\Gamma = \frac{1}{32m_n(2\pi)^8} \cdot \omega d\omega \cdot |\vec{l}_e| dE_e \cdot d\Omega_e d\Omega_{\bar{\nu}_e} d\Omega_k \cdot \frac{E_{\bar{\nu}_e} |\mathcal{M}|_{p'=p-l_e-l_{\bar{\nu}_e}-k}^2}{m_n - E_e - \omega - E_{\bar{\nu}_e}} \quad . \quad (2.54)$$

*Bemerkung:*  $E_{\bar{\nu}_e}$  in der Gleichung (2.54) ist nur ein **Symbol** für  $E_{\bar{\nu}_e}$  aus der Gleichung (2.53).  $E_{\bar{\nu}_e}$  kommt in dieser Gleichung nicht mehr vor, da man über die Energie des Neutrinos schon integriert hat.

Um die **totale** Zerfallsrate des Prozesses zu erhalten, muss man über die gebliebenen Phasenräume aller Teilchen integrieren. Es gilt

$$\Gamma = \frac{1}{32m_n(2\pi)^8} \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \omega d\omega \int_{m_e}^{E_e^{max}} |\vec{l}_e| dE_e \cdot \Omega \cdot \frac{E_{\bar{\nu}_e} |\mathcal{M}|_{p'=p-l_e-l_{\bar{\nu}_e}-k}^2}{m_n - E_e - \omega - E_{\bar{\nu}_e}} \quad , \quad (2.55)$$

mit dem Winkelanteil  $\Omega$

$$\Omega \equiv \int d\Omega_e d\Omega_k d\Omega_{\bar{\nu}_e} \quad . \quad (2.56)$$

Die Relationen (2.52) können ohne weitere Probleme erweitert werden zu

$$\begin{aligned} \cos \theta_k = x_k &\Rightarrow -\sin \theta_k d\theta_k = dx_k \quad , \\ \cos \theta_{\bar{\nu}_e} = x_{\bar{\nu}_e} &\Rightarrow -\sin \theta_{\bar{\nu}_e} d\theta_{\bar{\nu}_e} = dx_{\bar{\nu}_e} \quad . \end{aligned} \quad (2.57)$$

Man setzt diese Gleichungen in den Winkelanteil  $\Omega$  ein. Man hat hierbei vereinbart, dass als Flugrichtung des Elektrons die z-Achse gewählt wird. Damit erhält man für die Winkelintegration über das Elektron die Konstante  $4\pi$

$$\Omega = \underbrace{\int d\Omega_e \int dx_k d\varphi_k}_{=4\pi} \int dx_{\bar{\nu}_e} d\varphi_{\bar{\nu}_e} = 4\pi \int dx_k \int dx_{\bar{\nu}_e} \int d\varphi_k d\varphi_{\bar{\nu}_e} \quad . \quad (2.58)$$

Die Flugrichtung eines der verbleibenden Teilchen ( $\bar{\nu}_e$  oder  $\gamma$ ) kann bzgl. der Flugrichtung des Elektrons festgelegt werden und die Grenze für die  $\phi$ -und  $\theta$ -Winkel des anderen Teilchens in Abhängigkeit vom ersten Teilchen behandelt werden. Hier wird die

Neutrino-Flugrichtung festgehalten, wobei die Integrationsgrenzen für den Photonenanteil aus kinematischen Überlegungen ermittelt werden können.

$$\begin{aligned}\Omega &= 4\pi \int_{x_k^{min}}^{x_k^{max}} dx_k \int_1^{-1} dx_{\bar{\nu}_e} \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{\varphi_k}^{\varphi_k - 2\pi} d\varphi_{\bar{\nu}_e} \\ &= 2(2\pi)^2 \int_{x_k^{min}}^{x_k^{max}} dx_k \int_1^{-1} dx_{\bar{\nu}_e} \int_{\varphi_k}^{\varphi_k - 2\pi} d\varphi_{\bar{\nu}_e} .\end{aligned}\quad (2.59)$$

Führt man eine neue Größe genannt  $\phi^-$  ein, um die Integrationsgrenze im dritten Integral durch Konstanten zu ersetzen

$$\phi^- \equiv \varphi_k - \varphi_{\bar{\nu}_e} , \quad (2.60)$$

es ergibt sich

$$\Omega = 2(2\pi)^2 \int_{x_k^{min}}^{x_k^{max}} dx_k \int_1^{-1} dx_{\bar{\nu}_e} \int_0^{2\pi} d(-\phi^-) = 2(2\pi)^2 \int_{x_k^{min}}^{x_k^{max}} dx_k \int_{-1}^1 dx_{\bar{\nu}_e} \int_0^{2\pi} d\phi^- . \quad (2.61)$$

Damit ist auch der Winkelanteil bekannt. Jetzt erhält man für die totale Zerfallsrate des radiativen  $\beta$ -Zerfalls die folgende Gleichung

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{1}{16m_n(2\pi)^6} \int_{\omega^{min}}^{\omega^{max}} \omega d\omega \int_{m_e}^{E_e^{max}} |\vec{l}_e| dE_e \int_{x_k^{min}}^{x_k^{max}} dx_k \int_{-1}^1 dx_{\bar{\nu}_e} \int_0^{2\pi} d\phi^- \\ &\cdot \frac{E_{\bar{\nu}_e} |\mathcal{M}|_{p'=p-l_e-l_{\bar{\nu}_e}-k}^2}{m_n - E_e - \omega - E_{\bar{\nu}_e}} .\end{aligned}\quad (2.62)$$

In diesem Integral stehen fünf Inetgationsgrenzen, die noch unbekannt sind. Indem man  $\omega^{max}$  leicht berechnen kann, wird  $\omega^{min}$  nicht einfach bestimmen, da es von der Auflösung des Detektors abhängt. Wenn man den theoretischen Wert für die Auflösung des Gerätes nicht kennen würde, könnte man die totale Zerfallsrate nicht ausrechnen. Um das Problem zu beseitigen, kann man statt der totalen Zerfallsrate die differentielle Zerfallsrate nach der Energie des Photons  $d\Gamma/d\omega$  berechnen, wo keine der Integrationsgrenze  $\omega^{min}$  und  $\omega^{max}$  vorkommen. Die entsprechenden Grenzen werden statt dessen im nächsten Abschnitt aus der Kinematik des Zerfalls berechnet.

Vor Abschluß dieses Kapitels, wird noch gezeigt wie die Energie des Neutrino direkt aus der Vierer-Impuls-Erhaltung bestimmt werden kann. Es gilt

$$p = p' + l_e + l_{\bar{\nu}_e} + k . \quad (2.63)$$

Im CMS des Neutrons lassen sich die Energie- und Impulssätze folgendermaßen schreiben

$$m_n = E' + E_e + E_{\bar{\nu}_e} + \omega , \quad (2.64)$$

$$0 = \vec{p}' + \vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k} . \quad (2.65)$$

Man kann die Gleichung (2.63) umformen und erhält so

$$\begin{aligned} p - p' - l_{\bar{\nu}_e} &= l_e + k \\ (p - p' - l_\nu)^2 &= (l_e + k)^2 \\ m_n^2 + m_p^2 + m_{\bar{\nu}_e}^2 - 2pl_{\bar{\nu}_e} - 2pp' + 2p'l_{\bar{\nu}_e} &= m_e^2 + \underbrace{k^2}_{=0} + 2kl_e \\ m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - 2m_n(E_e + \omega) + 2E_e\omega - 2\vec{l}_e \cdot \vec{k} &= 2p'l_{\bar{\nu}_e} \quad . \end{aligned} \quad (2.66)$$

Das Skalarprodukt der letzten Zeile kann in folgenden Ausdruck entwickelt werden

$$2p'l_{\bar{\nu}_e} = 2E'E_{\bar{\nu}_e} - 2\vec{p}' \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e} \quad . \quad (2.67)$$

Die Energie und den Impuls des Protons  $E'$  ersetzt man aus der Gleichungen (2.64)

$$\begin{aligned} 2p'l_{\bar{\nu}_e} &= 2(m_n - E_e - E_{\bar{\nu}_e} - \omega)E_{\bar{\nu}_e} + 2(\vec{l}_e + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k}) \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e} \\ &= 2(m_n - E_e - \omega)E_{\bar{\nu}_e} - 2E_{\bar{\nu}_e}^2 + 2(\vec{l}_e + \vec{k}) \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + 2E_{\bar{\nu}_e}^2 \\ &= 2(m_n - E_e - \omega + \vec{l}_e \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k} \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e})E_{\bar{\nu}_e} \quad . \end{aligned} \quad (2.68)$$

Die Energie des Neutrinos wird durch Einsetzen der obigen Gleichung in die Gleichung (2.66) bestimmt, d.h.

$$E_{\bar{\nu}_e} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - 2m_n(E_e + \omega) + 2E_e\omega - 2\vec{l}_e \cdot \vec{k}}{2(m_n - E_e - \omega + \vec{l}_e \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{k} \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e})} \quad . \quad (2.69)$$

Dies ist mit der Gleichung (2.53) identisch, wenn man die Definitionen für  $x_k$  und  $x_{\bar{\nu}_e}$  verwendet.

*Bemerkung:* Bei der Herleitung aller Gleichungen in diesem Abschnitt wurde angenommen, dass die Masse des Neutrinos gegenüber seinem Impuls zu vernachlässigen ist, was mit der Relation  $E_{\bar{\nu}_e} = |\vec{p}_{\bar{\nu}_e}|$  identisch ist.

#### 2.4.2 Bestimmung der Integrationsgrenzen

An dieser Stelle werden die Integrationsgrenzen abgeleitet, die zur Berechnung der totalen oder differentiellen Zerfallsrate bekannt sein müssen. Zunächst wird die maximale Energie des Elektrons bestimmt. Ausgangspunkt ist die Vierer-Impuls-Erhaltung

$$\begin{aligned} p &= p' + l_e + l_{\bar{\nu}_e} + k \\ p - l_e - k &= p' + l_{\bar{\nu}_e} \\ m_n^2 + m_e^2 + \underbrace{k^2}_{=0} + 2kl_e - 2m_nE_e - 2m_n\omega &= m_p^2 + 2E'E_{\bar{\nu}_e} - 2\vec{p}' \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e} \quad . \end{aligned} \quad (2.70)$$

Dadurch findet man eine Relation für die Energie des Elektrons

$$E_e = \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - 2m_n\omega - 2(E'E_{\bar{\nu}_e} - \vec{p}' \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e})}{2(m_n - \omega + \omega \frac{|\vec{l}_e|}{E_e} \hat{l}_e \cdot \hat{k})} . \quad (2.71)$$

Der Term in der Klammer hat im Vergleich zur Masse des Protons einen kleinen Beitrag

$$\begin{aligned} m_p^2 + 2E'E_{\bar{\nu}_e} \left( 1 - \frac{|\vec{p}'|}{E'} \right) &\approx m_p^2 - 2E'E_{\bar{\nu}_e} = m_p^2 \left( 1 - 2 \frac{E'E_{\bar{\nu}_e}}{m_p^2} \right) \\ &\approx m_p^2 \left( 1 - 2 \frac{E_{\bar{\nu}_e}}{m_p} \right) \approx m_p^2 , \end{aligned} \quad (2.72)$$

da  $\frac{2E_{\bar{\nu}_e}}{m_p} \ll 1$  ist. Die frei werdende Energie, die zur Erzeugung des Elektrons, Neutrinos, Photons und ihrer Impulse verfügbar ist, beträgt  $E_0 = m_n - m_p$  und ist im Vergleich zur Masse des Protons geringer. Die Energie des Elektrons ist genau dann maximal, wenn sein Impuls den größtmöglichen Wert annimmt. In diesem Fall werden die andere drei Teilchen in eine dem Elektron entgegengesetzte Richtung emittiert. Für die maximale Energie erhält man

$$E_e^{max} = \frac{m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - 2m_n\omega}{2(m_n - \omega + \omega \beta_e^{max} \hat{l}_e \cdot \hat{k})} , \quad (2.73)$$

mit  $\beta_e^{max} = \frac{|\vec{l}_e|^{max}}{E_e^{max}}$ .

Die erste unbekannte Integrationsgrenze ist durch diese selbstkonsistente Gleichung für  $E_e^{max}$  mit vorgegebenem  $\omega$  bestimmt.

Um die differentielle Zerfallsrate  $d\Gamma/d\omega$  auszurechnen, muss man zuerst die Größe  $\hat{k} \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e}$ , die in der Gleichung für  $E_{\bar{\nu}_e}$  vorkommt, durch die Integrationsvariable darstellen. Dazu transformiert man die beiden Vektoren,  $\hat{k}$  und  $\hat{l}_{\bar{\nu}_e}$ , in Kugelkoordinaten und bildet ihr Skalarprodukt. Unter Anwendung der Additions-Theorem der trigonometrischen Funktionen ergibt sich

$$\hat{k} \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e} = \sqrt{(1 - x_{\bar{\nu}_e}^2)(1 - x_k^2)} \cos \phi^- + x_{\bar{\nu}_e} x_k . \quad (2.74)$$

Die Integrationsgrenze für die  $x_k$ -Integration folgt aus der Gleichung (2.53).  $E_{\bar{\nu}_e}$  ist eine positive Größe und somit ist auch der Nenner in der Gleichung (2.53) immer positiv<sup>6</sup>. Es ergibt sich für den Zähler in diesem Ausdruck folgende Ungleichung

$$m_n^2 + m_e^2 - m_p^2 - 2m_n(E_e + \omega) + 2E_e\omega - 2\vec{l}_e \cdot \vec{k} \geq 0 . \quad (2.75)$$

---

<sup>6</sup>Es ist zu beachten, dass die Energien der erzeugten Teilchen im MeV-Bereich, die Masse des Neutrons aber im GeV-Bereich liegen. Aufgrund dieses Arguments kann man sicher sein, dass der Nenner in der Gleichung (2.53) immer positiv ist.

Mit Hilfe der schon definierten Größe  $x_k$  folgt

$$x_k \leq \frac{1}{2|\vec{l}_e|\omega} [(m_n^2 + m_e^2 - m_p^2) + 2E_e\omega - 2m_n(E_e + \omega)] = x_k^{max} . \quad (2.76)$$

Die untere Grenze für  $x_k$  ist genauso wie die obere Grenze zu bestimmen. Zuerst setzt man die Gleichung (2.53) in Ungleichung

$$m_n - m_p - E_e - E_{\bar{\nu}_e} - \omega \geq 0 \quad (2.77)$$

ein. Man erhält so für  $x_k$

$$\begin{aligned} x_k \geq & \frac{1}{2|\vec{l}_e|\omega} [(m_n^2 + m_e^2 - m_p^2) + 2E_e\omega - 2m_n(E_e + \omega) \\ & - 2(m_n - m_p - E_e - \omega)(m_n - E_e - \omega + |\vec{l}_e|x_{\bar{\nu}_e} + \hat{k} \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e})] . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Die Terme  $x_{\bar{\nu}_e}$  und  $\hat{k} \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e}$  sind auf den Bereich -1 und 1 beschränkt, da folgende Beziehungen gelten

$$x_{\bar{\nu}_e} = \cos \theta_{\bar{\nu}_e} \in [-1, 1] , \quad \hat{k} \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e} = \cos \angle(\vec{k}, \vec{l}_{\bar{\nu}_e}) \in [-1, 1] . \quad (2.79)$$

Um den minimalen Wert von  $x_k$  zu erhalten, muss  $x_{\bar{\nu}_e}$  seinen maximalen Wert annehmen, d.h.  $x_{\bar{\nu}_e} = 1$ , und  $\hat{k} \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e}$  aus der Gleichung (2.74) mit  $x_{\bar{\nu}_e} = 1$  berechnet werden. Die selbstkonsistente Gleichung für  $x_k^{min}$  lässt sich folgendermaßen lösen

$$\begin{aligned} x_k^{min} = & \frac{1}{(2\omega(E_e - |\vec{l}_e| - m_n + m_p + \omega))} \cdot \\ & [2E_e^2 - m_e^2 + 2|\vec{l}_e|m_n + m_n^2 - 2l_e m_p - 2m_n m_p \\ & + m_p^2 - 2E_e(|\vec{l}_e| + m_n - m_p - \omega) - 2|\vec{l}_e|\omega - 2m_n\omega + 2m_p\omega + 2\omega^2] . \end{aligned} \quad (2.80)$$

Im vorherigen Abschnitt wurde erwähnt, dass der Wert  $\omega^{min}$  durch die Auflösung des Detektors bestimmt ist. Aber die maximale Energie des Photons ist aus der Vierer-Impuls-Erhaltung zu berechnen. Dieselben Gleichungen, die man für die Bestimmung der maximalen Energie des Elektrons  $E_e^{max}$  benutzt hat, werden hier gebraucht, um  $\omega^{max}$  zu finden. Aus diesen Gleichungen folgt für die Energie des Photons

$$\omega = \frac{(m_n - m_e)^2 - m_p^2 - 2m_n E_e}{2(m_n - E_e + |\vec{l}_e| \hat{l}_e \cdot \hat{k})} . \quad (2.81)$$

Das Photon hat seine maximale Energie bzw. seinen maximalen Impuls, wenn das Photon in eine Richtung und die anderen emmitierten Teilchen in entgegengesetzte Richtung fliegen. In diesem Fall muss man zusätzlich berücksichtigen, dass der Zähler seinen größtmöglichen Wert annimmt und der Nenner seinen kleinstmöglichen Wert. Mit dieser Begründung nimmt die Energie des Elektrons ihren kleinstmöglichen Wert  $m_e$  an

$$\omega^{max} = \frac{(m_n - m_e)^2 - m_p^2 - 2m_n m_e}{2(m_n - m_e)} . \quad (2.82)$$

## 2.5 Die Feynman-Amplituden des radiativen $\beta$ -Zerfalls

Aus den Feynman-Regeln kann man die Feynamn-Amplitude für den radiativen  $\beta$ -Zerfall

$$n(p, s_n) \longrightarrow p(p', r_p) + e^-(l_e, r_e) + \bar{\nu}_e(l_{\bar{\nu}_e}, r_{\bar{\nu}_e}) + \gamma(k, \varepsilon) \quad (2.83)$$

aufstellen, wobei  $k$  der Vierer-Impuls des Photons mit der Energie  $\omega$  und der Polarisation  $\varepsilon$  bezeichnet.

Das Photon kann nicht vom Neurino emmitiert werden, da die Neutrinos der schwachen und nicht der elektromagnetischen Wechselwirkung unterliegen. Es bleiben nur drei verschiedene Möglichkeiten. Das Photon kann entweder am Elektron oder am Proton als Bremsstrahlung oder am effektiven schwachen Wechselwirkung-Vertex gekoppelt werden. Der Anteil für den Bremsstrahlungsbeitrag lässt sich gemäß der QED-Regeln folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b \\ &= ieg_V \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{u}(l_e) \frac{2l_e \varepsilon^* + \not{\epsilon}^* \not{k}}{2(kl_e)} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \bar{u}(p') \gamma_\alpha (1 - \lambda \gamma_5) u(p) \right. \\ &\quad \left. - \bar{u}(l_e) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \bar{u}(p') \frac{2p' \varepsilon^* + \not{\epsilon}^* \not{k}}{2(kp')} \gamma_\alpha (1 - \lambda \gamma_5) u(p) \right\} . \end{aligned} \quad (2.84)$$

In der QED kann man die Photonen-Emission aus dem schwachen Wechselwirkungsvertex gegenüber der Bremsstrahlungsbeiträge vernachlässigen [1] und muss dabei nur Matrixelemente zweier Prozesse und ihren Interferenzbeitrag berechnen.

Im folgenden werden die Quadrate der Feynman-Amplituden für die Bremstrahlungen  $|\mathcal{M}_a|^2$ ,  $|\mathcal{M}_b|^2$  und der Mischungsterm  $\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b$  berechnet. Bevor die Bremsstrahlungsbeiträge und ihre Interferenzterme explizit berechnet werden, wird zuerst der Spin- und Polarisationssummen-Formalismus anhand eines Beispiels ausführlich demonstriert.

### 2.5.1 Zerfall eines Fermions in 3 Teilchen und Photon

Da man in dieser Arbeit öfter auf Feynman-Amplituden und ihre Quadrate trifft, ist es nützlich, einmal die komplette Herleitung anhand eines Beispiels darzustellen. Hier wird die Herleitung des Bremsstrahlungsbeitrags vorgeführt, der durch die Photonenkopplung am Elektron erzeugt wird. Hier wird dieser Beitrag auf der Elementarteilchenebene betrachtet. Auf dem Kernniveau steht in der Feynman-Amplitude des radiativen Zerfalls im hadronischen Anteil eine Konstante  $\lambda = 1,267$  [1]. Auf der Elementarteilchenebene ist  $\lambda = 1$ . Mit  $\lambda \neq 1$  tauchen zusätzliche Terme auf, die mit Relationen im Anhang D leicht auszurechnen sind. Hier betrachtet man den Zerfall des d-Quarks in das Elektron,

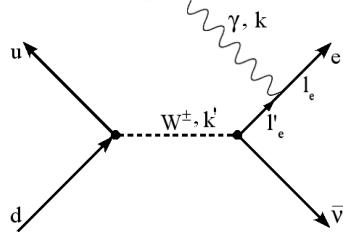


Abbildung 2.5: durch das Elektron erzeugte Bremsstrahlung

Elektronenantineutrino und u-Quark. Die Feynman-Amplitude dieses Prozesses ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a = & i \frac{g_V}{\sqrt{2}} \left[ \bar{u}(l_e) \cdot ie \not{\epsilon}^* i \cdot \frac{l'_e + m_e}{l'^2 - m_e^2} \gamma^\alpha \frac{(1 - \gamma^5)}{2} v(l_{\bar{\nu}_e}) \right] \\ & \cdot \frac{i(-g_{\alpha\beta} + \frac{k'_\alpha k'_\beta}{m_W^2})}{k'^2 - m_W^2 + i\varepsilon} \\ & \cdot i \frac{g_V}{\sqrt{2}} \left[ \bar{u}(p') \gamma^\beta \frac{(1 - \gamma^5)}{2} u(p) \right]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Da  $m_W^2 \gg 1$  ist, vereinfacht sich der letzte Ausdruck auf

$$\mathcal{M}_a = i \frac{g_V^2}{2} \left[ \bar{u}(l_e) \cdot ie \not{\epsilon}^* i \cdot \frac{l'_e + m_e}{l'^2 - m_e^2} \gamma^\alpha \frac{(1 - \gamma^5)}{2} v(l_{\bar{\nu}_e}) \right] \cdot \frac{ig_{\alpha\beta}}{m_W^2} \cdot \left[ \bar{u}(p') \gamma^\beta \frac{(1 - \gamma^5)}{2} u(p) \right]. \quad (2.86)$$

Am QED-Vertex gilt noch die Relation  $l_e = l'_e - k$ . Es ergibt sich

$$\mathcal{M}_a = ie \underbrace{\frac{g_V^2}{8m_W^2}}_{\frac{G_F}{\sqrt{2}}} \left\{ \bar{u}(l_e) \frac{\not{\epsilon}^*(l_e + m_e + \not{k})}{q_e^2 - m_e^2 + \underbrace{\not{k}^2}_{=0} + 2(l_e k)} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \bar{u}(p') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u(p) \right\}. \quad (2.87)$$

unter der Verwendung der Dirac-Gleichung  $\bar{u}(l_e)(-\not{l}_e + m_e) = 0$  und der Gleichung

$$\not{\epsilon}^* \not{l}_e = -\not{l}_e \not{\epsilon}^* + 2l_e \varepsilon^* \quad (2.88)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a = & ie \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{u}(l_e) \frac{2l_e \varepsilon^* + \not{\epsilon}^* \not{k}}{2(l_e k)} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) v(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \bar{u}(p') \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u(p) \right\} \\ = & ie \frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ \bar{u}(l_e) O_l v(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \bar{u}(p') O_h u(p) \}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

mit

$$O_l = \frac{2l_e \varepsilon^* + \not{\epsilon}^* \not{k}}{2(l_e k)} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \quad , \quad O_h = \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \quad . \quad (2.90)$$

Zur Berechnung von  $|\mathcal{M}_a|^2$  muss man die Methode der Spin- und Polarisationssummen anwenden. Es gilt

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}_a|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{Polarisation} \sum_{Spins} |\mathcal{M}_a|^2 \\
 &= \frac{e^2 G_F^2}{4} \sum_{\lambda} \sum_{Spins} |\{\bar{u}(l_e) O_l v(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \bar{u}(p') O_h u(p)\}|^2 \\
 &= \frac{e^2 G_F^2}{4} \sum_{\lambda} \sum_{Spins} \{\bar{u}(l_e) O_l v(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot u(p') O_h u(p)\} \{\bar{u}(p) \tilde{O}_l u(p') \cdot \bar{v}(l_{\bar{\nu}_e}) \tilde{O}_l u(l_e)\} \\
 &= \frac{e^2 G_F^2}{4} \sum_{\lambda} Tr [(J_e + m_e) O_l (J_{\bar{\nu}_e} - m_{\bar{\nu}_e}) \tilde{O}_l] Tr [\not{p} + m_n) O_h (\not{p}' + m_p) \tilde{O}_h] \\
 &= \frac{e^2 G_F^2}{4} A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} .
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

In der obigen Gleichung treten die Operatoren  $\tilde{O}_h$  und  $\tilde{O}_l$  auf. Gemäß der Definition lassen sich die beiden Operatoren umschreiben [6]

$$\begin{aligned}
 \tilde{O}_h &= \gamma_0 O_h^+ \gamma_0 = \gamma_0 (\gamma_\beta (1 - \gamma_5))^+ \gamma_0 \\
 &= \gamma_0 ((1 - \gamma_5)^+ \gamma_\beta^+) \gamma_0 = \gamma_0 ((1 - \gamma_5^+) \gamma_\beta^+) \gamma_0 = \gamma_0 ((1 - \gamma_5) \gamma_\beta^+) \gamma_0 \\
 &= (1 + \gamma_5) \gamma_0 \gamma_0 \gamma_\beta \gamma_0 \gamma_0 = (1 + \gamma_5) \gamma_\beta \\
 \tilde{O}_h &= \gamma_\beta (1 - \gamma_5) ,
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

und

$$\begin{aligned}
 \tilde{O}_l &= \gamma^0 O_l^+ \gamma^0 = \gamma^0 \left[ \left( \frac{2l_e \varepsilon^* + \not{k}}{2(k_e l_e)} \right) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right]^+ \gamma^0 \\
 &= \frac{1}{2k_e l_e} \gamma^0 (1 - \gamma^{5+}) \gamma^{\beta+} (2\varepsilon l_e + \not{k}^+ \not{\varepsilon}^{*+}) \gamma^0 \\
 &= \frac{1}{2k_e l_e} \gamma^0 (1 - \gamma^5) \gamma^0 \gamma^\beta \gamma^0 (2\varepsilon l_e + k_\mu \varepsilon_\nu \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0) \gamma^0 \\
 &= \frac{1}{2k_e l_e} (1 + \gamma^5) \gamma^\beta (2\varepsilon l_e + \not{k} \not{\varepsilon}) \\
 \tilde{O}_l &= \tilde{O}_l = \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \left( \frac{2\varepsilon l_e + \not{k} \not{\varepsilon}}{2(k_e l_e)} \right) .
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

Man kann mit Hilfe von  $O_l$  und  $\tilde{O}_l$  den Beitrag  $A^{\alpha\beta}$  berechnen. Hier wird jeder Schritt ausführlich erklärt, damit die Herleitung nachvollziehbar scheint

$$\begin{aligned}
A^{\alpha\beta} &= \sum_{\lambda} \text{Tr} \left[ (J_e + m_e) \frac{2l_e \varepsilon^* + \not{e}^* \not{k}}{2(kl_e)} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) (J_{\bar{\nu}_e} - m_{\bar{\nu}_e}) \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \frac{2\varepsilon l_e + \not{k} \not{e}}{2(kl_e)} \right] \\
&= \sum_{\lambda} \frac{1}{(2kl_e)^2} \left\{ \text{Tr} \left[ J_e (2l_e \varepsilon^* + \not{e}^* \not{k}) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) (2\varepsilon l_e + \not{k} \not{e}) \right] \right. \\
&\quad + \text{Tr} \left[ m_e (2l_e \varepsilon^* + \not{e}^* \not{k}) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) (2\varepsilon l_e + \not{k} \not{e}) \right] \\
&\quad - \text{Tr} \left[ m_e (2l_e \varepsilon^* + \not{e}^* \not{k}) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) m_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) (2\varepsilon l_e + \not{k} \not{e}) \right] \\
&\quad \left. - \text{Tr} \left[ J_e (2l_e \varepsilon^* + \not{e}^* \not{k}) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) m_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) (2\varepsilon l_e + \not{k} \not{e}) \right] \right\} . \quad (2.94)
\end{aligned}$$

Die Spur im zweiten Term besteht aus einer ungeraden Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen und verschwindet. Die beiden letzten Terme verschwinden auch, denn

$$(1 - \gamma^5)(1 + \gamma^5) = 1 - (\gamma^5)^2 = 1 - 1 = 0 . \quad (2.95)$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man

$$\begin{aligned}
A^{\alpha\beta} &= \frac{1}{(2kl_e)^2} \sum_{\lambda} \text{Tr} \left[ J_e (2l_e \varepsilon^* + \not{e}^* \not{k}) \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) (2\varepsilon l_e + \not{k} \not{e}) \right] \\
&= \frac{1}{(2kl_e)^2} \sum_{\lambda} \text{Tr} \left[ J_e (2l_e \varepsilon^* + \not{e}^* \not{k}) \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (2\varepsilon l_e + \not{k} \not{e}) \underbrace{(1 - \gamma^5)^2}_{=2(1-\gamma^5)} \right] \\
&= \frac{1}{2(kl_e)^2} \sum_{\lambda} \text{Tr} \left[ J_e (2l_e \varepsilon^* + \not{e}^* \not{k}) \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (2\varepsilon l_e + \not{k} \not{e}) (1 - \gamma^5) \right] \\
&= \frac{1}{2(kl_e)^2} \sum_{\lambda} \left\{ \text{Tr} \left[ J_e 2l_e \varepsilon^* \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta 2\varepsilon l_e (1 - \gamma^5) \right] + \text{Tr} \left[ J_e \not{e}^* \not{k} \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta 2\varepsilon l_e (1 - \gamma^5) \right] \right. \\
&\quad \left. + \text{Tr} \left[ J_e 2l_e \varepsilon^* \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \not{k} \not{e} (1 - \gamma^5) \right] + \text{Tr} \left[ J_e \not{e}^* \not{k} \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \not{k} \not{e} (1 - \gamma^5) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2(kl_e)^2} \sum_{\lambda} \left\{ 4l_e \mu \varepsilon^{*\mu} l_{e\nu} \varepsilon^{\nu} \text{Tr} \left[ J_e \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] + 2l_{e\nu} \varepsilon^{\nu} \varepsilon^{*\rho} \text{Tr} \left[ J_e \gamma_\rho \not{k} \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2l_{e\mu} \varepsilon^{*\mu} \varepsilon^{\tau} \text{Tr} \left[ J_e \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \not{k} \gamma_\tau (1 - \gamma^5) \right] + \varepsilon^{*\rho} \varepsilon^{\tau} \text{Tr} \left[ J_e \gamma_\rho \not{k} \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \not{k} \gamma_\tau (1 - \gamma^5) \right] \right\} . \quad (2.96)
\end{aligned}$$

Für das reelle Photon ( $k^2 = 0$ ) kann man  $\sum_{\lambda} \varepsilon^\sigma \varepsilon^\pi$  durch  $-g^{\sigma\pi}$  ersetzen [1][6][11]. Damit ergibt sich für  $A^{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned}
A^{\alpha\beta} &= \frac{-1}{2(kl_e)^2} \left\{ 4l_e^\mu l_{e\mu} \text{Tr} \left[ J_e \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] + 2l_e^\rho \text{Tr} \left[ J_e \gamma_\rho \not{k} \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \right. \\
&\quad \left. + 2l_e^\tau \text{Tr} \left[ J_e \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \not{k} \gamma_\tau (1 - \gamma^5) \right] + g^{\rho\tau} \text{Tr} \left[ J_e \gamma_\rho \not{k} \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \not{k} \gamma_\tau (1 - \gamma^5) \right] \right\} . \quad (2.97)
\end{aligned}$$

Wenn die Relationen

$$l_e^\mu l_{e\mu} = m_e^2 \quad , \quad \gamma_\tau l_e \gamma^\tau = -2l_e \quad (2.98)$$

in die letzte Gleichung eingesetzt werden, lässt sich diese umformen zu

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta} &= \frac{-1}{2(kl_e)^2} \left\{ 4m_e^2 \operatorname{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] + 2 \operatorname{Tr} [l_e l_e \not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \right. \\ &\quad + 2 \operatorname{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \not{l} l_e (1 - \gamma^5)] + \operatorname{Tr} [l_e \gamma_\tau \not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \not{k} \gamma_\tau (1 - \gamma^5)] \Big\} \\ &= \frac{-1}{2(kl_e)^2} \left\{ 4m_e^2 \operatorname{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] + 2m_e^2 \operatorname{Tr} [\not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \right. \\ &\quad + 2m_e^2 \operatorname{Tr} [\gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \not{k} (1 + \gamma^5)] + \operatorname{Tr} [\gamma_\tau l_e \gamma^\tau \not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \not{k} (1 + \gamma^5)] \Big\} \\ &= \frac{-1}{2(kl_e)^2} \left\{ 4m_e^2 \operatorname{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] + 2m_e^2 \operatorname{Tr} [\not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \right. \\ &\quad + 2m_e^2 \operatorname{Tr} [\not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] + (-2) \operatorname{Tr} [l_e \not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta \not{k} (1 + \gamma^5)] \Big\}. \quad (2.99) \end{aligned}$$

Für die Berechnung des letzten Termes kann man die Gleichungen aus dem Anhang D übernehmen. Es müssen nur die Operatoren in der Spur zyklisch vertauscht werden und die Formel  $\not{k} l_e = 2kl_e - l_e \not{k}$  benutzt werden. So erhält man mit  $\not{k} \not{k} = k^2 = 0$

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta} &= \frac{-1}{2(kl_e)^2} \left\{ 4m_e^2 \operatorname{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] + 4m_e^2 \operatorname{Tr} [\not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \right. \\ &\quad + (-2) \operatorname{Tr} [\not{k} l_e \not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \Big\} \\ &= \frac{-1}{2(kl_e)^2} \left\{ 4m_e^2 \operatorname{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] + 4m_e^2 \operatorname{Tr} [\not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \right. \\ &\quad - 4kl_e \operatorname{Tr} [\not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] + 2 \operatorname{Tr} [l_e \not{k} \not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \Big\}. \quad (2.100) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für  $A^{\alpha\beta}$

$$A^{\alpha\beta} = \frac{-2}{(kl_e)^2} \left\{ (m_e^2 - kl_e) \operatorname{Tr} [\not{k} \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] + m_e^2 \operatorname{Tr} [l_e \gamma^\alpha l_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \right\}. \quad (2.101)$$

Es gibt eine einfachere Herleitung für  $B_{\alpha\beta}$ , da in diesem Fall kein Photon mit dem u-Quark koppelt, und der Term mit Photonen-Polarisation wegfällt. Für diesen Term kann man folgenden Ausdruck ausrechnen

$$B_{\alpha\beta} = 2 \operatorname{Tr} [\not{k}_p \gamma_\alpha l_n \gamma_\beta (1 - \gamma_5)]. \quad (2.102)$$

Mit Hilfe der obigen Gleichungen kann man das Quadrat des Matrixelementes  $|\mathcal{M}_a|^2$  finden

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{M}_a|^2 &= \frac{e^2 G_F^2}{4} A^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{e^2 G_F^2}{4} 2 \frac{-2}{(kl_e)^2} \\
 &\cdot \left\{ (m_e^2 - kl_e) \operatorname{Tr} [\not{k} \gamma^\alpha \not{l}_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] + m_e^2 \operatorname{Tr} [\not{l}_e \gamma^\alpha \not{l}_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \right\} \\
 &\cdot \{ \operatorname{Tr} [\not{l}_p \gamma_\alpha \not{l}_n \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] \} \quad .
 \end{aligned} \tag{2.103}$$

Die Produkte können aus den Formeln, die am Ende vom Anhang D stehen, berechnet werden, d.h.

$$|\mathcal{M}_a|^2 = -64 G_F^2 \frac{e^2}{(kl_e)^2} [(m_e^2 - kl_e)(kp') + m_e^2(l_e p')] (l_{\bar{\nu}_e} p) \quad . \tag{2.104}$$

### 2.5.2 Die Kopplung des Photons am Elektron

Hier wird die Kopplung des Photons am Elektron betrachtet.

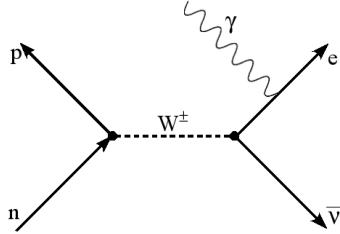


Abbildung 2.6: Kopplung des Photons am Elektron

Die Feynman-Amplitude für diesen Prozess ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_a &= i e g_V \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{u}(l_e) \underbrace{\frac{2l_e \epsilon^* + \not{\epsilon}^* \not{k}}{2(kl_e)} \gamma^\alpha (1 - \gamma^5)}_{\equiv H} v(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \underbrace{\bar{u}(p')}_{\equiv G} \gamma_\alpha (1 - \lambda \gamma_5) u(p) \right\} \\
 &= i e g_V \frac{G_F}{\sqrt{2}} \{ \bar{u}(l_e) H v(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \bar{u}(p') G u(p) \} \quad .
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

Um  $|\mathcal{M}_a|^2$  zu berechnen, muss man die Spinsummen, die im Abschnitt (2.3.1) erklärt wurden, und die Polarisationssummen des Photons anwenden

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_a|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{Polarisation} \sum_{Spins} |\mathcal{M}_a|^2 \\
&= \frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{4} \sum_{\lambda} \underbrace{\text{Tr} \left[ (J_e + m_e) H (J_{\bar{\nu}_e} - m_{\bar{\nu}_e}) \tilde{H} \right]}_{\equiv A^{\alpha\beta}} \cdot \underbrace{\text{Tr} \left[ (\not{p}' + m_p) G (\not{p} + m_n) \tilde{G} \right]}_{\equiv B_{\alpha\beta}}.
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Im Abschnitt (2.5.1) steht die vollständige Rechnung für die beiden Termen  $A^{\alpha\beta}$ , und  $B_{\alpha\beta}$ . Der Ausdruck für  $A^{\alpha\beta}$ , kann direkt aus dieser Rechnung übernommen werden. Im Vergleich mit der Rechnungen im Abschnitt (2.5.1) gibt es hier nur einen Unterschied, und zwar in der Rechnung für  $B_{\alpha\beta}$  ist  $\lambda \neq 1$ . Dies führt zu zusätzlichen Termen die mit Hilfe der Relationen im Anhang D leicht berechenbar sind. Man erhält für diese Terme

$$A^{\alpha\beta} = \frac{-2}{(kl_e)^2} \left\{ (m_e^2 - kl_e) \text{Tr} \left[ \not{k} \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] + m_e^2 \text{Tr} \left[ J_e \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \right\}, \tag{2.107}$$

und

$$B_{\alpha\beta} = (1 + \lambda^2) \text{Tr} \left[ \not{p}' \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \right] - 2\lambda \text{Tr} \left[ \not{p}' \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \gamma_5 \right] + m_n m_p (1 - \lambda^2) \text{Tr} \left[ \gamma_\alpha \gamma_\beta \right]. \tag{2.108}$$

Damit ist  $|\mathcal{M}_a|^2$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_a|^2 &= -\frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{2} \frac{1}{(kl_e)^2} \cdot \\
&\quad \left\{ (m_e^2 - kl_e) \text{Tr} \left[ \not{k} \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] + m_e^2 \text{Tr} \left[ J_e \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ (1 + \lambda^2) \text{Tr} \left[ \not{p}' \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \right] - 2\lambda \text{Tr} \left[ \not{p}' \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \gamma_5 \right] + m_p m_n (1 - \lambda^2) \text{Tr} \left[ \gamma_\alpha \gamma_\beta \right] \right\} \\
&= -\frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{2} \frac{32}{(kl_e)^2} \cdot \\
&\quad \left\{ (1 + \lambda)^2 \left[ (m_e^2 - kl_e) (kp') + m_e^2 (p'l_e) \right] (pl_{\bar{\nu}_e}) \right. \\
&\quad + (1 - \lambda)^2 \left[ (m_e^2 - kl_e) (pk) + m_e^2 (pl_e) \right] (p'l_{\bar{\nu}_e}) \\
&\quad \left. - (1 - \lambda^2) \left[ (m_e^2 - kl_e) (kl_{\bar{\nu}_e}) + m_e^2 (l_e l_{\bar{\nu}_e}) \right] (m_n m_p) \right\}. \tag{2.109}
\end{aligned}$$

Im CMS vom Neutron und unter der Berücksichtigung der Tatsache, dass der Rückstoß des entstandenen Protons gegenüber seiner Energie sehr klein ist, erhält man für  $|\mathcal{M}_a|^2$

mit dem der Vierer-Impuls des Photons  $k = (\omega, \vec{k})$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_a|^2 &= -\frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{2} \frac{32}{(kl_e)^2} \cdot m_n m_p \cdot \\ &\quad \left\{ \left[ (1+3\lambda^2) E_{\bar{\nu}_e} (\omega + E_e) + (1-\lambda^2) (\vec{k} \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} \cdot \vec{l}_e) \right] (m_e^2 - kl_e) \right. \\ &\quad \left. + \left[ (1+3\lambda^2) E_e E_{\bar{\nu}_e} + (1-\lambda^2) (\vec{l}_e \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e}) \right] (kl_e) \right\}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

### 2.5.3 Die Kopplung des Photons am Proton

Dieser Abschnitt handelt von der Photonen-Kopplung am Proton. Die Feynman-Amplitude

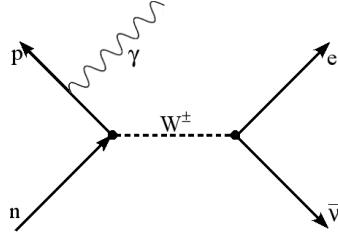


Abbildung 2.7: Kopplung des Photons am Proton

sieht der Feynamn-Amplitude aus dem vorherigen Abschnitt ähnlich. Der Term, der die Polarisation und den Vierer-Impuls des Photons enthält, steht hier jedoch im hadronischen Anteil

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_b &= -ie g_V \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[ \bar{u}(l_e) \underbrace{\gamma^\alpha (1 - \gamma^5)}_{\equiv E} v(l_{\bar{\nu}_e}) \right] \cdot \left[ \bar{u}(p') \underbrace{\frac{2p' \epsilon^* + \not{p}' \not{k}}{2(kp')} \gamma_\alpha (1 - \lambda \gamma_5)}_{\equiv F} u(p) \right] \\ &= ie g_V \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}(l_e) E v(l_{\bar{\nu}_e})] [\bar{u}(p') F u(p)]. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Für das Quadrat der Feynman Amplitude ergibt sich

$$|\mathcal{M}_b|^2 = \frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{4} \sum_{Pol.} Tr \left[ (J_e + m_e) E (J_{\bar{\nu}_e} - m_{\bar{\nu}_e}) \tilde{E} \right] \cdot Tr \left[ (\not{p}' + m_p) F (\not{p}_n + m_n) \tilde{F} \right]. \quad (2.112)$$

Um eine wiederholte Rechnung zu vermeiden, werden die einzelne Schritte, die bereits im Abschnitt (2.5.1) und im Abschnitt (2.5.2) stehen, weggelassen. Es gilt für  $|\mathcal{M}_b|^2$

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_b|^2 &= -\frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{2} \frac{32}{(kp')^2} \cdot \\ &\quad \left\{ (1+\lambda)^2 [(m_p^2 - kp') (kl_e) + m_p^2 (p' l_e)] (pl_{\bar{\nu}_e}) \right. \\ &\quad + (1-\lambda)^2 [(m_p^2 - kp') (kl_{\bar{\nu}_e}) + m_p^2 (p' l_{\bar{\nu}_e})] (pl_e) \\ &\quad \left. - (1-\lambda^2) [(m_p^2 - kp') (l_e l_{\bar{\nu}_e})] (m_n m_p) \right\}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Für den nichtrelativistischer Fall erhält man unter der Annahme, dass die Terme der Ordnung  $\left(\frac{1}{m_p}\right)$  kleiner gegenüber der anderen Termen vernachlässigt werden können, erhält man für  $|\mathcal{M}_b|^2$

$$|\mathcal{M}_b|^2 = -\frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{2} \frac{32}{m_p^2 \omega^2} \cdot m_n m_p^3 \cdot \left\{ (1 + 3\lambda^2) E_{\bar{\nu}_e} E_e + (1 - \lambda^2) \vec{l}_{\bar{\nu}_e} \cdot \vec{l}_e \right\} . \quad (2.114)$$

### 2.5.4 Interferenzterm

Wenn man das Quadrat der Feynman-Amplitude in der Gleichnung (2.84) bildet, erscheinen neben den  $|\mathcal{M}_a|^2$  und  $|\mathcal{M}_b|^2$ -Termen zwei zusätzliche Terme  $\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^*$  und  $\mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b$

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_b + \mathcal{M}_a)^2 &= (\mathcal{M}_b + \mathcal{M}_a)(\mathcal{M}_b + \mathcal{M}_a)^* \\ &= |\mathcal{M}_a|^2 + |\mathcal{M}_b|^2 + \underbrace{\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b}_{\text{Interferenzterm}} . \end{aligned} \quad (2.115)$$

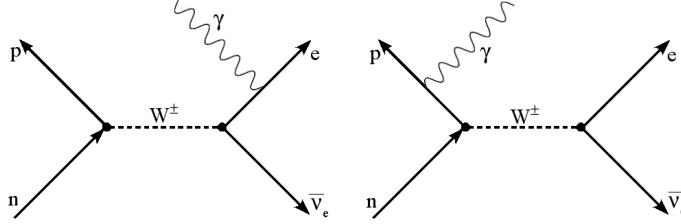


Abbildung 2.8: Interferenzterm

Es genügt, wenn man einen Term aus dem Mischungsterm auzurechnet, da

$$\mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* = (\mathcal{M}_a^* \mathcal{M}_b)^* . \quad (2.116)$$

Verwendet man die vorherigen Abkürzungen, die  $\gamma$ -Matrizen und die anderen zuvor eingeführten Operatoren, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* &= \frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{2} \frac{1}{2} \sum_{\text{Spin}} \sum_{\text{Pol.}} [\bar{u}(l_e) H v(l_{\bar{\nu}_e})] [\bar{u}(p') G u(p)] \cdot [\bar{u}(p) \tilde{F} u(p')] [\bar{v}(l_{\bar{\nu}_e}) \tilde{E} u(l_e)] \\ &= \frac{e^2 g_V^2 G_F}{4} \sum_{\text{Pol.}} \text{Tr} [(J_e + m_e) H (J_{\bar{\nu}_e} - m_{\bar{\nu}_e}) \tilde{E}] \cdot \text{Tr} [(\not{p}' + m_p) G (\not{p} + m_n) \tilde{F}] \\ &= \frac{e^2 g_V^2 G_F}{4} \sum_{\text{Pol.}} \Psi^{\alpha\beta} \Theta_{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (2.117)$$

Wie alle anderen Relationen aus den vorherigen Abschnitten und dem Abschnitt (2.5.1) sind folgende Terme zu erhalten

$$\Psi^{\alpha\beta} = \frac{1}{(kl_e)} \left\{ (2l_e \not{k}^*) \text{Tr} [J_e \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] + \text{Tr} [J_e \not{k}^* \not{k} \gamma^\alpha J_{\bar{\nu}_e} \gamma^\beta (1 - \gamma^5)] \right\} . \quad (2.118)$$

und

$$\begin{aligned}\Theta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2(kp')} \left\{ (2p' \not{\epsilon}) \operatorname{Tr} [\not{p}' \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta (1 - \lambda \gamma_5)^2] + \operatorname{Tr} [\not{p}' \gamma_\alpha \not{p} \gamma_\beta \not{k} \not{\epsilon} (1 - \lambda \gamma_5)^2] \right. \\ &\quad \left. + m_n m_p (1 - \lambda^2) ((2p' \not{\epsilon}) \operatorname{Tr} [\gamma_\alpha \gamma_\beta] + \operatorname{Tr} [\not{k} \not{\epsilon} \gamma_\alpha \gamma_\beta]) \right\} .\end{aligned}\quad (2.119)$$

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}^{mix}|^2 &= \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \mathcal{M}_b \mathcal{M}_a^* = \frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{4} \sum_{Pol.} (\Psi^{\alpha\beta} \Theta_{\alpha\beta} + (\Psi^{\alpha\beta} \Theta_{\alpha\beta})^*) \\ &= -\frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{2} \cdot \frac{1}{(kl_e)(kp')} \cdot 64 \cdot \\ &\quad \left\{ 2 (1 + \lambda)^2 (l_e p') (l_e p') (l_{\bar{\nu}_e} p) + 2 (1 - \lambda)^2 (l_e p') (l_e p) (l_{\bar{\nu}_e} p') \right. \\ &\quad - 2m_n m_p (1 - \lambda^2) (l_e p') (l_e l_{\bar{\nu}_e}) \\ &\quad [ (1 + \lambda)^2 (kl_e) (l_e p') (l_{\bar{\nu}_e} p) - (kp') (l_e l_e) (l_{\bar{\nu}_e} p) + (l_e p') (kl_e) (l_{\bar{\nu}_e} p) \\ &\quad + (1 - \lambda)^2 (kl_e) (l_e p) (l_{\bar{\nu}_e} p') - (kp') (l_e p) (l_{\bar{\nu}_e} l_e) + (l_e p') (kl_{\bar{\nu}_e}) (l_e p) ] \\ &\quad [ (1 + \lambda)^2 (kl_e) (l_e p') (l_{\bar{\nu}_e} p) - (kl_e) (p' p') (l_{\bar{\nu}_e} p) + (kp') (l_e p') (l_{\bar{\nu}_e} p) ] \\ &\quad + (1 - \lambda)^2 (kp) (l_e p') (l_{\bar{\nu}_e} p) - (kl_e) (pp') (l_{\bar{\nu}_e} p') + (kp') (l_e p) (l_{\bar{\nu}_e} p') ] \\ &\quad - m_n m_p (1 - \lambda^2) (l_e l_{\bar{\nu}_e}) (kl_e) \\ &\quad \left. - m_n m_p (1 - \lambda^2) [(l_e p') (kl_{\bar{\nu}_e}) - (kl_e) (p' l_{\bar{\nu}_e}) + (kp') (l_e l_{\bar{\nu}_e})] \right\} .\end{aligned}\quad (2.120)$$

Man kann jetzt untersuchen, was sich für (2.120) im nichtrelativistischen Fall im Ruhe-system des Neutrons ergibt. Der Impuls des Protons wird im Vergleich zu seiner Gesamtenergie vernachlässigt. Der Interferenz-Term ist

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}^{mix}|^2 &= \mathcal{M}_a \mathcal{M}_b^* + \mathcal{M}_b \mathcal{M}_a^* = -\frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{2} \cdot \frac{32}{m_p \omega (kl_e)} \cdot \\ &\quad \left\{ m_n m_p^2 \left[ (1 + 3\lambda^2) E_{\bar{\nu}_e} (2E_e^2 + E_e \omega - kl_e) + (1 - \lambda^2) \left( 2E_e \vec{l}_e \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + E_e \vec{k} \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. m_n m_p \left[ (1 + 3\lambda^2) E_e E_{\bar{\nu}_e} + (\vec{l}_e \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e}) \right] (m_p \omega) \right\} .\end{aligned}\quad (2.121)$$

### 2.5.5 Das gesamte Matrixelement

Wie im Abschnitt (2.5) erwähnt wurde, besteht das Matrixelement des  $\beta$ -Zerfalls aus drei Termen, welche bereits berechnet wurden. Im nichtrelativistischen Grenzfall ergibt sich das Matrixelement des  $\beta$ -Zerfalls

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 = & -\frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{2} 32 \cdot \\
& \left\{ \frac{m_n m_p}{(k l_e)^2} \cdot \left[ (1 + 3\lambda^2) E_{\bar{\nu}_e} (\omega + E_e) + (1 - \lambda^2) (\vec{k} \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + \vec{l}_{\bar{\nu}_e} \cdot \vec{l}_e) \right] (m_e^2 - k l_e) \right. \\
& + \frac{m_n m_p^3}{m_p^2 \omega^2} \cdot \left[ (1 + 3\lambda^2) E_{\bar{\nu}_e} E_e + (1 - \lambda^2) \vec{l}_{\bar{\nu}_e} \cdot \vec{l}_e \right] \\
& + \frac{m_n m_p^2}{m_p \omega (k l_e)} \cdot \left[ (1 + 3\lambda^2) E_{\bar{\nu}_e} (2E_e^2 + E_e \omega - k l_e) \right. \\
& \left. \left. + (1 - \lambda^2) (2E_e \vec{l}_e \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e} + E_e \vec{k} \cdot \vec{l}_{\bar{\nu}_e}) \right] \right\} . \\
& \quad (2.122)
\end{aligned}$$

## 2.6 Helizitätsamplituden

In diesem Abschnitt wird eine Methode erklärt, mit deren Hilfe man beliebige Feynman-Amplituden mit externen Fermionen und Vektorbosonen berechnen kann. Solche Amplituden können in Form der „*Fermionen-Kette*“ (engl. fermion string) ausgedrückt werden [2]

$$\bar{\psi}_1 P_\kappa \not{d}_1 \not{d}_2 \dots \not{d}_n \psi_2 \quad . \quad (2.123)$$

$a_i^\mu$  steht für beliebige Lorentz Vierer-Vektoren und  $\psi_i$  für allgemeine Vierer-Spinoren

$$\psi_i = u(p_i, \lambda_i) \quad \text{oder} \quad v(p_i, \lambda_i) \quad ,$$

wobei  $p_i$  der Vierer-Impuls und  $\lambda_i$  der Helizitätseigenwert ist. In (2.123) ist der Helizitätsoperator  $P_\kappa$  gegeben durch

$$P_\kappa = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \kappa \gamma_5) \quad , \quad \kappa = \pm \quad .$$

Für alle Spinoren und  $\gamma$ -Matrizen verwendet man die chirale Darstellung

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (2.124)$$

mit  $2 \times 2$ -Pauli-Matrizen

$$\sigma_\pm^\mu = (\underline{1}, \pm \sigma) = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad .$$

Führt man 2-komponentige Weyl-Spinoren ein, die gemäß

$$\psi_i = \begin{pmatrix} (\psi_i)_- \\ (\psi_i)_+ \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\psi}_i = ((\psi_i)_+^\dagger, (\psi_i)_-^\dagger) \quad (2.125)$$

definiert sind, und  $2 \times 2$ -Matrizen  $(\not{d})_\pm$  mit

$$\not{d} = a_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & (\not{d})_+ \\ (\not{d})_- & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.126)$$

Die  $(\not{d})_\pm$  lassen sich durch ihre Komponente umschreiben

$$(\not{d})_\pm = \begin{pmatrix} a^0 \mp a^3 & \mp(a^1 - ia^2) \\ \mp(a^1 + ia^2) & a^0 \pm a^3 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.127)$$

Die obige Relation ist leicht zu beweisen

$$\not{d} = a_\mu \gamma^\mu = a_\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_\mu \sigma_+^\mu \\ a_\mu \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\not{d})_+ \\ (\not{d})_- & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$(d)_{\pm} = a_{\mu} \sigma_{\pm}^{\mu} = a_0 \mathbf{1} - a_1 \sigma_{\pm}^1 - a_2 \sigma_{\pm}^2 - a_3 \sigma_{\pm}^3 = \begin{pmatrix} a^0 \mp a^3 & \mp(a^1 - ia^2) \\ \mp(a^1 + ia^2) & a^0 \pm a^3 \end{pmatrix}.$$

Wenn man den Helizitätsoperator auf Weyl-Spinoren anwendet

$$\bar{\psi}_i P_+ = (0, (\psi_i)_-^\dagger) , \quad \bar{\psi}_i P_- = ((\psi_i)_+^\dagger, 0) , \quad (2.128)$$

und diese in (2.123) einsetzen, erhält man eine neue Fermionen-Kette, in der statt der 4-komponentigen  $\psi_i$ -Spinoren die 2-komponentigen Weyl-Spinoren auftreten

$$\bar{\psi}_1 P_{-\kappa} d_1 d_2 \dots d_n \psi_2 = (\psi_1)_{\kappa}^\dagger [a_1, a_2, \dots, a_n]^{\kappa} (\psi_2)_{-\delta_n \kappa} . \quad (2.129)$$

Hierbei gilt

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]^{\kappa} = d_{\kappa} d_{-\kappa} \dots d_{-\delta_n \kappa} , \quad (2.130)$$

wobei die Definition  $\delta_n = (-1)^n$  verwendet wurde.

Jetzt will man eine Lorentz-Index-Kontraktion zwischen den verschiedenen Spinoren-Ketten durchführen. Zu diesem Zweck benutzt man die *Fierz-Identitäten* [2]

$$\begin{aligned} (\sigma_{\pm}^{\mu})_{ij} (\sigma_{\mp\mu})_{kl} &= 2\delta_{il}\delta_{kj} , \\ (\sigma_{\pm}^{\mu})_{ij} (\sigma_{\pm\mu})_{kl} &= 2[\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kj}] , \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$i, j, k, l = 1, 2 .$$

Mit Hilfe der Fierz-Identitäten ist man in der Lage die Fermionen-Kette

$$(\psi_1)_{\kappa}^\dagger [a_1, a_2, \dots, a_n]^{\kappa} (\psi_2)_{\eta} \quad (2.132)$$

auszuwerten. Um dies durchzuführen, verwendet man die Helizität-Eigenzustände  $\chi_{\pm}(p)$

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi_{\lambda}(p) = \lambda \chi_{\lambda}(p) , \quad p = (E, \vec{p}) , \quad (2.133)$$

als Basis der freien Spinoren  $u$  und  $v$

$$\begin{aligned} u(p, \lambda)_{\pm} &= \omega_{\pm\lambda}(p) \chi_{\lambda}(p) , \\ u(p, \lambda)_{\pm} &= \pm \lambda \omega_{\mp\lambda}(p) \chi_{-\lambda}(p) , \end{aligned} \quad (2.134)$$

mit

$$\omega_{\pm}(p) = \sqrt{E \pm |\vec{p}|} , \quad (2.135)$$

und

$$\begin{aligned}\chi_+(p) &= \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|(|\vec{p}|+p_z)}} \begin{pmatrix} |\vec{p}|+p_z \\ p_x+ip_y \end{pmatrix} , \\ \chi_-(p) &= \frac{1}{\sqrt{2|\vec{p}|(|\vec{p}|+p_z)}} \begin{pmatrix} -p_x+ip_y \\ |\vec{p}|+p_z \end{pmatrix} .\end{aligned}\quad (2.136)$$

Diese Eigenzustände gelten für den Fall  $|\vec{p}| \neq p_z$ . Falls  $|\vec{p}| = p_z$ , sind die  $\chi_{\pm}(p)$  gegeben durch

$$\chi_+(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \chi_-(p) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (2.137)$$

Die freien Spinoren  $u$  und  $v$  erfüllen die Dirac-Gleichung

$$\not{p}_{\pm} u(p, \lambda)_{\pm} = mu(p, \lambda)_{\mp} , \quad \not{p}_{\pm} v(p, \lambda)_{\pm} = -mv(p, \lambda)_{\mp} , \quad (2.138)$$

und sind wie folgt normiert

$$\bar{u}(p, \lambda)u(p, \lambda) = 2m , \quad \bar{v}(p, \lambda)v(p, \lambda) = -2m . \quad (2.139)$$

Eine Verwendung der Helizitätzzustände als Basis der freien Spinoren hat den Vorteil, dass sich die Spinoren durch ihre Vierer-Impulse ausdrücken lassen. Somit kann man die Spinoren-Kette (2.123) über die Vierer-Impulse  $p_i^{\mu}, p_j^{\mu}$  wie folgt ausdrücken

$$(\psi_i)^{\dagger}_{\kappa} [a_1, a_2, \dots, a_n]^{\kappa} (\psi_j)_{\eta} = C_i C_j \omega_{\kappa \lambda_i}(p_i) \omega_{\eta \lambda_j}(p_j) S(p_i, a_1, a_2, \dots, a_n, p_j)_{\lambda_i \lambda_j}^{\kappa} . \quad (2.140)$$

Die Koeffizienten  $C_i, C_j$  sind konstant und hängen davon ab, ob die Spinoren  $\psi_i, \psi_j$  Fermionen oder Antifermionen sind

$$C_k = \begin{cases} 1 & \text{für } (\psi_k)_{\tau} = u(p_k, \lambda_k)_{\tau} \\ -\lambda_k \tau & \text{für } (\psi_k)_{\tau} = v(p_k, -\lambda_k)_{\tau} \end{cases} . \quad (2.141)$$

Der Ausdruck  $S$  lässt sich einfach berechnen

$$S(p_i, a_1, \dots, a_n, p_j)_{\lambda_i \lambda_j}^{\kappa} = (\chi)^{\dagger}_{\lambda_i}(p_i) [a_1, a_2, \dots, a_n]^{\kappa} (\chi)_{\lambda_j}(p_j) . \quad (2.142)$$

### 2.6.1 Anwendung der Helizitätsamplituden auf den radiativen $\beta$ -Zerfall

Man kann diese Methode auf den radiativen  $\beta$ -Zerfall anwenden. Der Vorteil dieser Methode gegenüber den Spin- und Polarisationssummen besteht darin, dass man hier keine Spuren ausrechnen muss. Die Spuren aus vier  $\gamma$ -Matrizen sind einfach zu berechnen, bei sechs, acht und mehr  $\gamma$ -Matrizen muss man hingegen einen großen Aufwand betreiben um

sie auszurechnen. Der andere Vorteil ist, dass sich das Matrixelement mit verschiedenen Polarisationzuständen des Photons oder Spineinstellungen des Fermions leichter berechnen lässt. Die Feynman-Amplitude ist schon im Abschnitt (2.5) gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b \\ &= \frac{ieg_V G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{u}(l_e) \frac{2l_e \varepsilon^* + \not{\epsilon}^* \not{k}}{2(kl_e)} \gamma_\rho (1 - \gamma_5) v(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \bar{u}(p') \gamma^\rho (1 - \lambda \gamma^5) u(p) \right. \\ &\quad \left. - \bar{u}(l_e) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) v(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \bar{u}(p') \frac{2p' \varepsilon^* + \not{\epsilon}^* \not{k}}{2(kp')} \gamma^\rho (1 - \lambda \gamma^5) u(p) \right\} . \end{aligned} \quad (2.143)$$

Der Helizitätsoperator in der Fermionen-Kette hat die Form  $P_{-\kappa}$ , wobei  $\kappa = \pm$  ist. In der Feynman-Amplitude des hier betrachteten Prozesses hat der Helizitätsoperator nicht dieselbe Form. Durch eine einfache Überlegung kann man den Term  $(1 - \lambda \gamma^5)$  folgendermaßen zerlegen

$$1 - \lambda \gamma^5 = \alpha(1 - \gamma^5) + \beta(1 + \gamma^5) , \quad (2.144)$$

mit

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \lambda) , \quad \beta = \frac{1}{2}(1 - \lambda) . \quad (2.145)$$

Mit Hilfe dieser Methode wird die Feynman-Amplitude für die Kopplung des Photons am Elektron  $\mathcal{M}_a$  vollständig hergeleitet. Die Kopplung am Proton wird nicht weiter diskutiert, da dieselbe Rechnung durchzuführen ist. Es wird daher nur das Ergebnis angegeben. Man kann leicht sehen, wie sich diese Feynman-Amplitude durch  $S$ -Matrizen umformen lässt. Eine Anwendung der Gleichung (2.144) auf  $\mathcal{M}_a$  führt auf den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &= \frac{ieg_V G_F}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2(kl_e)} \{ [\bar{u}(l_e)(2l_e \varepsilon^* + \not{\epsilon}^* \not{k}) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) v(l_{\bar{\nu}_e})] \\ &\quad [ \beta \bar{u}(p') \gamma^\rho (1 + \gamma^5) u(p) + \alpha \bar{u}(p') \gamma^\rho (1 - \gamma^5) u(p) ] \} \\ &\equiv \frac{ieg_V G_F}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2(kl_e)} A \cdot B . \end{aligned} \quad (2.146)$$

Die Beiträge  $A$  und  $B$  können getrennt bestimmt werden. Um  $A$  zu bestimmen, muss man diesen Term in die Form der Gleichung (2.123) bringen. Dazu multipliziert man  $A$  mit einem beliebigen festen Vierer-Vektor  $a^\rho$ . Am Ende zieht man diesen Faktor wieder aus der erhaltenen Gleichung heraus

$$\begin{aligned} a^\rho &= a^\rho \bar{u}(l_e)(2l_e \varepsilon^* + \not{\epsilon}^* \not{k}) \gamma_\rho (1 - \gamma_5) v(l_{\bar{\nu}_e}) \\ &= \bar{u}(l_e)(2l_e \varepsilon^* + \not{\epsilon}^* \not{k}) \not{a} (1 - \gamma_5) v(l_{\bar{\nu}_e}) \\ &= (2l_e \varepsilon^* \bar{u}(l_e)) \not{a} (1 - \gamma_5) v(l_{\bar{\nu}_e}) + \bar{u}(l_e) \not{\epsilon}^* \not{k} \not{a} (1 - \gamma_5) v(l_{\bar{\nu}_e}) . \end{aligned} \quad (2.147)$$

Im Vergleich zum Helizitätsoperator fehlt hier ein Faktor  $\frac{1}{2}$ . Dies ist durch eine Erweiterung beider Terme um den Faktor 2 leicht zu beseitigen

$$\begin{aligned}
 a^\rho &= 2 (2l_e \varepsilon^*) \bar{u}(l_e) \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) d v(l_{\bar{\nu}_e}) + 2 \bar{u}(l_e) \left( \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \not{d}^* \not{d} v(l_{\bar{\nu}_e}) \\
 &= 2 (2l_e \varepsilon^*) (u)_-^\dagger(l_e) [a]^- (v)_-(l_{\bar{\nu}_e}) + 2 (u)_-^\dagger(l_e) [\varepsilon^*, k, a]^- (v)_-(l_{\bar{\nu}_e}) \\
 &= a^\rho 2 (2l_e \varepsilon^*) (u)_-^\dagger(l_e) \sigma_{-\rho} (v)_-(l_{\bar{\nu}_e}) + a^\rho 2 (u)_-^\dagger(l_e) [\varepsilon^*, k]^- \sigma_{-\rho} (v)_-(l_{\bar{\nu}_e}).
 \end{aligned} \tag{2.148}$$

Nun kann man wieder den Vierer-Vektor  $a^\rho$  weglassen

$$A = 2 (2l_e \varepsilon^*) (u)_-^\dagger(l_e) \sigma_{-\rho} (v)_-(l_{\bar{\nu}_e}) + 2 (u)_-^\dagger(l_e) [\varepsilon^*, k]^- (v)_-(l_{\bar{\nu}_e}) . \tag{2.149}$$

Eine ähnliche Rechnung führt für  $B$  auf den Ausdruck

$$B = 2 \beta (u)_+^\dagger(p') \sigma_+^\rho u_-(p) + 2 \alpha (u)_-^\dagger(p') \sigma_-^\rho (u)_-(p) . \tag{2.150}$$

Die beiden Terme  $A$  und  $B$  werden in die Gleichung (2.146) eingesetzt, um  $\mathcal{M}_a$  zu bestimmen

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_a &= \frac{i e g_V G_F}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2(kl_e)} A \cdot B \\
 &= \frac{i e g_V G_F}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{2(kl_e)} \cdot \\
 &\quad \left\{ (2l_e \varepsilon^*) (u)_-^\dagger(l_e) \sigma_{-\rho} (v)_-(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \beta (u)_+^\dagger(p') \sigma_+^\rho u_+(p) \right. \\
 &\quad + (2l_e \varepsilon^*) (u)_-^\dagger(l_e) \sigma_{-\rho} (v)_-(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \alpha (u)_-^\dagger(p') \sigma_-^\rho (u)_-(p) \\
 &\quad + (u)_-^\dagger(l_e) [\varepsilon^*, k]^- (v)_-(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \beta (u)_+^\dagger(p') \sigma_+^\rho u_+(p) \\
 &\quad \left. + (u)_-^\dagger(l_e) [\varepsilon^*, k]^- (v)_-(l_{\bar{\nu}_e}) \cdot \alpha (u)_-^\dagger(p') \sigma_-^\rho (u)_-(p) \right\} .
 \end{aligned} \tag{2.151}$$

Aus den *Fierz-Identitäten* (2.131) folgt

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_a &= \frac{i e g_V G_F}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{2(kl_e)} \cdot \\
 &\quad \left\{ \beta (2l_e \varepsilon^*) (u)_-^\dagger(l_e) (u)_+(p) \cdot (u)_+^\dagger(p') (v)_-(\bar{\nu}_e) \right. \\
 &\quad + \alpha (2l_e \varepsilon^*) (u)_-^\dagger(l_e) (v)_-(\bar{\nu}_e) \cdot (u)_-^\dagger(p') (u)_-(p) \\
 &\quad - \alpha (2l_e \varepsilon^*) (u)_-^\dagger(l_e) (u)_-(p) \cdot (u)_-^\dagger(p') (v)_-(\bar{\nu}_e) \\
 &\quad + \beta (u)_-^\dagger(l_e) [\varepsilon^*, k]^- (u)_+(p) \cdot (u)_+^\dagger(p') (v)_-(\bar{\nu}_e) \\
 &\quad + \alpha (u)_-^\dagger(l_e) [\varepsilon^*, k]^- (v)_-(\bar{\nu}_e) \cdot (u)_-^\dagger(p') (u)_-(p) \\
 &\quad \left. - \alpha (u)_-^\dagger(l_e) [\varepsilon^*, k]^- (u)_-(p) \cdot (u)_-^\dagger(p') (v)_-(\bar{\nu}_e) \right\} .
 \end{aligned}$$

Jetzt werden  $u$ 's,  $v$ 's und die Kommutaroren durch die  $S$ -Matrizen und andere Größen, die im letzten Abschnitt eingeführt wurden, identifiziert

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a = & \frac{ieg_V G_F}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{2(kl_e)} \cdot \left\{ \alpha \lambda_{\bar{\nu}_e} \omega_{-\lambda_e} \omega_{-\lambda_{\bar{\nu}_e}} \omega_{-\lambda_p} \omega_{-\lambda_n} \cdot \right. \\ & [(2l_e \varepsilon^*) (S(l_e, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_e \lambda_{\bar{\nu}_e}} \cdot S(p', p)_{\lambda_p \lambda_n} - S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}}) \\ & + \left( S(l_e, \varepsilon^*, k, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_e \lambda_{\bar{\nu}_e}}^- \cdot S(p', p)_{\lambda_p \lambda_n} - S(l_e, \varepsilon^*, k, p)_{\lambda_e \lambda_n}^- \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}} \right)] \\ & + \beta \lambda_{\bar{\nu}_e} \omega_{-\lambda_e} \omega_{-\lambda_{\bar{\nu}_e}} \omega_{+\lambda_p} \omega_{+\lambda_n} \cdot \\ & [(2l_e \varepsilon^*) S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}} \\ & \left. + S(l_e, \varepsilon^*, k, p)_{\lambda_e \lambda_n}^- \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}} \right] \} \quad . \end{aligned} \quad (2.152)$$

Analog gilt für  $\mathcal{M}_b$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_b = & \frac{ieg_V G_F}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{2(kp')} \cdot \left\{ \alpha \lambda_{\bar{\nu}_e} \omega_{-\lambda_e} \omega_{-\lambda_{\bar{\nu}_e}} \omega_{-\lambda_p} \omega_{-\lambda_n} \cdot \right. \\ & [(2p' \varepsilon^*) (S(l_e, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_e \lambda_{\bar{\nu}_e}} \cdot S(p', p)_{\lambda_p \lambda_n} - S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}}) \\ & + \left( S(l_e, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_e \lambda_{\bar{\nu}_e}} \cdot S(p', \varepsilon^*, k, p)_{\lambda_p \lambda_n}^- - S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', \varepsilon^*, k, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}} \right)] \\ & + \beta \lambda_{\bar{\nu}_e} \omega_{-\lambda_e} \omega_{-\lambda_{\bar{\nu}_e}} \omega_{+\lambda_p} \omega_{+\lambda_n} \cdot \\ & [(2p' \varepsilon^*) S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}} \\ & \left. + S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', \varepsilon^*, k, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}}^+ \right] \} \quad . \end{aligned} \quad (2.153)$$

Die gesamte Feynman-Amplitude ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \mathcal{M}_a - \mathcal{M}_b \\ = & \frac{ieg_V G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{4}{(kl_e)} \cdot \left\{ \alpha \lambda_{\bar{\nu}_e} \omega_{-\lambda_e} \omega_{-\lambda_{\bar{\nu}_e}} \omega_{-\lambda_p} \omega_{-\lambda_n} \cdot \right. \right. \\ & [(2l_e \varepsilon^*) (S(l_e, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_e \lambda_{\bar{\nu}_e}} \cdot S(p', p)_{\lambda_p \lambda_n} - S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}}) \\ & + \left( S(l_e, \varepsilon^*, k, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_e \lambda_{\bar{\nu}_e}}^- \cdot S(p', p)_{\lambda_p \lambda_n} - S(l_e, \varepsilon^*, k, p)_{\lambda_e \lambda_n}^- \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}} \right)] \\ & + \beta \lambda_{\bar{\nu}_e} \omega_{-\lambda_e} \omega_{-\lambda_{\bar{\nu}_e}} \omega_{+\lambda_p} \omega_{+\lambda_n} \cdot \\ & [(2l_e \varepsilon^*) S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}} \\ & \left. + S(l_e, \varepsilon^*, k, p)_{\lambda_e \lambda_n}^- \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}} \right] \} \\ + & \frac{4}{(kp')} \cdot \left\{ \alpha \lambda_{\bar{\nu}_e} \omega_{-\lambda_e} \omega_{-\lambda_{\bar{\nu}_e}} \omega_{-\lambda_p} \omega_{-\lambda_n} \cdot \right. \\ & [(2p' \varepsilon^*) (S(l_e, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_e \lambda_{\bar{\nu}_e}} \cdot S(p', p)_{\lambda_p \lambda_n} - S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}}) \\ & + \left( S(l_e, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_e \lambda_{\bar{\nu}_e}} \cdot S(p', \varepsilon^*, k, p)_{\lambda_p \lambda_n}^- - S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', \varepsilon^*, k, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}} \right)] \\ & + \beta \lambda_{\bar{\nu}_e} \omega_{-\lambda_e} \omega_{-\lambda_{\bar{\nu}_e}} \omega_{+\lambda_p} \omega_{+\lambda_n} \cdot \\ & [(2p' \varepsilon^*) S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}} \\ & \left. + S(l_e, p)_{\lambda_e \lambda_n} \cdot S(p', \varepsilon^*, k, l_{\bar{\nu}_e})_{\lambda_p \lambda_{\bar{\nu}_e}}^+ \right] \} \quad . \end{aligned} \quad (2.154)$$

Um das Matrixelement auszurechnen, muss man **zuerst** die Feynman-Amplitude  $\mathcal{M}$  quadrieren, d.h. man muss  $\mathcal{M}$  mit  $\mathcal{M}^*$  multiplizieren, und **dann** über alle möglichen Helizitäten der Teilchen und Polarisationszustände des Photons summieren

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_e, \lambda_{\bar{\nu}_e}, \lambda_p, \lambda_n, \varepsilon_{r.l}} \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^* . \quad (2.155)$$

Der Faktor  $\frac{1}{2}$  tritt auf, da man über den Spin im Anfangszustand mitteln muss. Die Polarisationsvektoren des Photons sind definiert durch [2]

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu(k, \lambda = 1) &= \frac{1}{|\vec{k}| \sqrt{(k_x^2 + k_y^2)}} (0, k_x k_z, k_y k_z, -(k_x^2 + k_y^2)) , \\ \varepsilon^\mu(k, \lambda = 2) &= \frac{1}{\sqrt{(k_x^2 + k_y^2)}} (0, -k_y, k_x, 0) . \end{aligned} \quad (2.156)$$

Es ist leicht zu beweisen, dass diese Polarisationsvektoren folgende Identitäten erfüllen

$$\begin{aligned} k_\mu \varepsilon^\mu(k, \lambda) &= 0 , \\ \varepsilon_\mu(k, \lambda) \varepsilon^\mu(k, \lambda') &= -\delta_{\lambda \lambda'} . \end{aligned} \quad (2.157)$$

Diese beiden Polarisationsvektoren bilden zusammen mit dem Impulsvektor des Photons  $\vec{k}$  ein kartesisches Dreibein. Über die Polarisationsvektoren kann man die zirkular polarisierten Zustände des Photons definieren. Sie sind gegeben durch

$$\varepsilon^\mu(k, \lambda = \frac{r}{l}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mp \varepsilon^\mu(k, \lambda = 1) - i \varepsilon^\mu(k, \lambda = 2)] . \quad (2.158)$$

## Kapitel 3

# Numerische Auswertung

### 3.1 Numerischer Vergleich für $|\mathcal{M}|^2$

Im letzten Kapitel wurde das Matrixelement des radiativen  $\beta$ -Zerfalls durch zwei verschiedene Methoden berechnet. Die beiden Ergebnisse beschreiben dieselbe physikalische Größe und sind daher identisch. Obwohl diese beiden Herleitungen nur auf mathematischen Umformungen und Ersetzungen beruhren, darf man nicht jeden beliebigen Vierer-Vektor zum Vergleich in die beiden Ausdrücke für das Matrixelement  $|\mathcal{M}|^2$  einsetzen. Es sind noch einige **Punkte** zu berücksichtigen

- Die relativistischen Ergebnisse für Spinsummen müssen verwendet werden, d.h. man darf nicht die nichtrelativistische Gleichungen im CMS des Neutrons benutzt.
- Die Vierer-Impuls-Erhaltung für jedes Zahlenbeispiel muss erfüllt sein .
- Die Vierer-Impulse müssen so zu konstruieren sein, dass die Massen der Teilchen reell und positiv sind.
- Der Vierer-Impuls des Photons muss so ausgewählt werden, dass seine Masse Null ist.

Man kann durch zwei unabhängige Verfahren untersuchen, ob diese beiden Methoden identisch sind. Zuerst wird  $|\mathcal{M}|^2$  aus der Spinsummen- und aus der Helizitätsamplituden-Methode verglichen. Das zweite Verfahren ist komplizierter. Man kann zwar jede Feynman-Amplitude getrennt vergleichen, d.h. man kann  $|\mathcal{M}_a|^2$ ,  $|\mathcal{M}_b|^2$  und den Interferenzterm aus der Spinsummen- und aus der Helizitätsamplituden-Methode vergleichen, aber man darf nicht die Ersetzung  $\sum \varepsilon^\sigma \varepsilon^\pi = -g^{\sigma\pi}$  durchführen. Der Grund liegt an der Eichinvarianz der Theorie. Die einzelnen Feynman-Amplituden sind im allgemeinen nicht eichinvariant,

während ihre Summe eichinvariant ist [6][11].

Man betrachte einen beliebigen Prozess mit einem reellen (externen) Photon. Die Feynman-Amplitude kann in der Form

$$\mathcal{M} = \varepsilon_\lambda^\alpha(\vec{k}) \mathcal{M}_\alpha(\vec{k}) \quad (3.1)$$

geschrieben werden. Die Polarisationsvektoren sind natürlich eichabhängig. Beispielseweise wird ein freies Photon in der Lorentz-Eichung durch die ebene Welle

$$A^\mu(x) = \text{konst. } \varepsilon_\lambda^\mu e^{\pm ikx} , \quad \text{mit} \quad \lambda = r, l \quad \text{Polarisationszustand} ,$$

beschrieben. Unter Eichtransformationen

$$A^\mu(x) \longrightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu f(x) , \quad \text{mit} \quad f(x) = \tilde{f}(k)e^{\pm ikx} , \quad (3.2)$$

verändert sich der Polarisationsvektor des freien Photons gemäß

$$\varepsilon_\lambda^\mu e^{\pm ikx} \longrightarrow \varepsilon_\lambda^\mu e^{\pm ikx} \pm ik^\mu \tilde{f}(k)e^{\pm ikx} . \quad (3.3)$$

Die Amplitude in der Gleichung (3.1) ist unter der obigen Transformation invariant, wenn folgende Beziehung erfüllt ist

$$k^\alpha \mathcal{M}_\alpha(\vec{k}) = 0 . \quad (3.4)$$

Damit ergibt sich für das Matrixelement

$$|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}_\alpha \mathcal{M}_\beta^* \sum_{\lambda=r,l} \varepsilon_\lambda^\alpha(\vec{k}) \varepsilon_\lambda^\beta(\vec{k}) . \quad (3.5)$$

Für ein reelles Photon, das keine Ruhemasse besitzt ( $k^2 = 0$ ) gilt

$$\sum_{\lambda=r,l} \varepsilon_\lambda^\alpha(\vec{k}) \varepsilon_\lambda^\beta(\vec{k}) = -g^{\alpha\beta} - \frac{1}{(kn)^2} \left[ k^\alpha k^\beta - (kn)(k^\alpha n^\beta + k^\beta n^\alpha) \right] , \quad (3.6)$$

mit  $n = (1, 0, 0, 0)$ . Dieser Vektor entspricht der zeitartigen Polarisierung [6][11]. Das Matrixelement des radiativen  $\beta$ -Zerfalls mit Kopplung des Photons am Elektron  $|\mathcal{M}_a|^2$  wird mit dieser Relation wieder neu berechnet. Bei der Berechnung von  $|\mathcal{M}_a|^2$  tauchen zusätzliche Terme auf, welche durch den zweiten Term in der Gleichung (3.6) entstehen. Das neue Matrixelement sieht komplizierter aus, da es einige zusätzliche Terme aufweist

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}_a|^2 = & -\frac{e^2 g_V^2 G_F^2}{2} \frac{32}{(kl_e)^2} \cdot \\
& \left\{ (1+\lambda)^2 [(m_e^2 - kl_e)(kp') + m_e^2(p'l_e)] (pl_{\bar{\nu}_e}) \right. \\
& + (1-\lambda)^2 [(m_e^2 - kl_e)(pk) + m_e^2(pl_e)] (p'l_{\bar{\nu}_e}) \\
& - (1-\lambda^2) [(m_e^2 - kl_e)(kl_{\bar{\nu}_e}) + m_e^2(l_el_{\bar{\nu}_e})] (m_n m_p) \\
& + (1+\lambda)^2 \left[ \xi(l_e p') + \left( \frac{1}{kn} \right) (np') - \chi(p'k) \right] (pl_{\bar{\nu}_e}) \\
& + (1-\lambda)^2 \left[ \xi(pl_e) + \left( \frac{1}{kn} \right) (kp) - \chi(pk) \right] (p'l_{\bar{\nu}_e}) \\
& \left. - (1-\lambda^2) \left[ \chi(l_el_{\bar{\nu}_e}) + \left( \frac{1}{kn} \right) (nl_{\bar{\nu}_e}) - \chi(kl_{\bar{\nu}_e}) \right] (m_n m_p) \right\} , \quad (3.7)
\end{aligned}$$

mit

$$\xi = \frac{1}{(kn)^2} - \frac{2(nl_e)}{(kl_e)(kn)} - \frac{1}{(kl_e)} , \quad (3.8)$$

$$\chi = \frac{(nl_e)}{(kl_e)(kn)} . \quad (3.9)$$

Dasselbe Verfahren kann zur Berechnung von  $|\mathcal{M}_b|^2$  angewendet werden.

Diese Gleichungen lassen sich mit einem Mathematik-Programm, z.B. *Mathematica* oder *Maple*, numerisch ausgewerteten. Für den zweiten Formalismus, den Helizitätsamplituden-Formalismus, braucht man nur die Gleichung (2.154). Zur Auswertung kann man entweder ein Mathematik-Programm benutztten oder ein Programm zu diesem Zweck schreiben. Im Anhang E ist ein *Fortran*-Unterprogramm zur Auswertung des Matrixelementes durch den Helizitätsamplituden-Formalismus zu finden.

## 3.2 Monte-Carlo Methode

Monte-Carlo Techniken sind manchmal der einzige Weg, komplizierte Integrale numerisch auszuwerten. Die Monte-Carlo-Methode verwendet Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, um komplexe Probleme zumindest näherungsweise zu lösen. Bei Berechnungen der Zerfallsraten oder Wirkungsquerschnitte physikalischer Prozesse trifft man oft solche Integrale, welche über mehrere Phasenräume aufintegriert werden müssen. Daher ist die Monte-Carlo-Integration in der Hochenergiephysik ein wichtiges Hilfsmittel für die nummerischen Auswertungen und findet häufig Anwendung. Monte-Carlo-Methoden bestehen häufig aus folgenden wesentlichen Stufen:

- Für das ursprüngliche mathematische Modell muss ein stochastisches Modell gefunden werden, welches das Problem gut genug beschreibt.
- Es muss eine Folge von Zufallszahlen erzeugt werden, deren Folgenglieder mögliche reale Situationen simulieren.
- Aus den Realisierungen der Zufallsgrößen müssen Schätzwerte für das Ausgangsproblem ermittelt werden.

Der Vorteil der Monte-Carlo Methode ist, dass sie eine einfache Struktur des Rechenalgorithmus hat. Man stellt zuerst einen Algorithmus auf, um einen zufälligen Versuch zu realisieren. Dieser Versuch wird dann N-mal wiederholt. Da diese Versuche unabhängig voneinander sind, können ihre Ergebnisse statistisch ausgewertet werden.

Bevor die Technik der Monte-Carlo Integration für eindimensionale Integrale beschrieben wird, ist zunächst der Begriff *Zufallsgröße* zu definieren.

### 3.2.1 Zufallsgrößen

Der Kern von Monte-Carlo Methode ist das Erwürfeln von Zufallsgrößen.

*Zufallsgröße* oder *zufällige Größe* besagt, dass es nicht bestimmt ist, welchen konkreten Wert diese Größe annehmen wird. Es bedeutet, dass man nicht weiß, welchen Wert eine solche Größe in einem konkreten Fall annimmt, aber man weiß, welche Werte sie überhaupt annehmen kann und mit welcher Wahrscheinlichkeit aus bestimmten Mengen angenommen werden. Eine Zufallsgröße ist dadurch charakterisiert, welche Werte sie annehmen kann und wie groß die Wahrscheinlichkeit für jeden einzelnen dieser Werte ist. Um diese Zufallszahlen zu erzeugen, modelliert man eine Verteilung. Im folgenden werden solche Verteilungen beschrieben:

- Diskrete Zufallsgrößen: sie können eine diskrete Menge von Werten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  annehmen. Jedem Wert  $a_k$  ordnet man eine Wahrscheinlichkeit (Verteilungsdichte)  $p_k$  zu, die folgende Bedingungen erfüllt

$$p_k > 1 \quad , \quad \sum_{k=1}^n p_k = 1 \quad . \quad (3.10)$$

- Stetige Zufallsgrößen: sie können jeden Wert aus einem Intervall  $(a, b)$  annehmen. Eine stetige Zufallsgröße ist durch Angabe des Intervalls  $(a, b)$  und einer Dichtefunktion (Verteilungsdichte)  $p(x)$  bestimmt. Analog zur Wahrscheinlichkeit  $p_k$  für eine diskrete Zufallsgröße erfüllt  $p(x)$  folgende Beziehungen

$$p(x) > 1 \quad , \quad \int_a^b p(x) dx = 1 \quad . \quad (3.11)$$

- Normalverteilte (Gaußverteilte) Zufallsgrößen: sie können jeden reellen Wert aus dem Intervall  $(-\infty, \infty)$  annehmen. Die Verteilungsdichte ist gegeben durch

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad a, \sigma > 0 \quad . \quad (3.12)$$

Um diese Zufallsgrößen zu realisieren, unterscheidet man zwischen verschiedenen Verfahren. Hier werden zwei dieser Verfahren kurz erläutert.

## 1. Generatoren von Zufallszahlen

Echte physikalische Zufallszahlengeneratoren produzieren Zufallszahlen aus echt zufälligen Prozessen wie dem Fallen eines Spielwürfels oder dem Rauschen eines Widerstandes oder eines Elektronenrohrs. Die Erzeugung von Zufallszahlen durch das Rauschen eines Elektronenrohrs basiert auf der Erzeugung von Geräuschimpulsen durch das Rohr, welche innerhalb konstanter Intervalle mit Hilfe von Zähleinrichtungen in Zufallszahlen umgewandelt werden.

## 2. Das Prinzip der Pseudozufallszahlen

Manchmal ist es nicht wichtig, wie Zufallszahlen eigentlich produziert werden. Sie können nach einer gegebenen Formel berechnet werden. Zahlen, welche nach einer bestimmten Formel erzeugt werden und die Werte einer Zufallsgröße modellieren, heißen *Pseudozufallszahlen*. Sie werden durch einen deterministischen Algorithmus, den sogenannten Pseudozufallszahlengenerator, berechnet, aber sie sehen zufällig aus. Deterministisch bedeutet, dass bei jedem Start der Zufallszahlabrechnung mit gleichem Startwert die gleiche Zahlenfolge erzeugt wird.

### 3.2.2 Monte-Carlo Integration

Um eine Funktion durch Monte-Carlo Technik zu integrieren, wird diese an zufällig ausgewählten Punkten  $x_k$  ausgewertet.

Zunächst betrachtet man eine eindimensionale Riemann-integrierbare Funktion  $f(x)$ , die auf dem Intervall  $(a, b)$

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (3.13)$$

näherungsweise integriert werden soll. Es ist vorausgesetzt, dass das Integral absolut konvergiert, falls  $a$  oder  $b$  gegen  $\infty$  geht. Da  $f$  nach Voraussetzung Riemann-Integrierbar ist, gilt

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = I_{MC} \quad , \quad (3.14)$$

wobei  $n$  die Anzahl der ausgewerteten Punkte bezeichnet.  $x_k$  sind gleichverteilte Psedozufallszahlen aus dem Intervall  $(a, b)$ , die durch die Formel

$$x_k = a + \gamma_k(b - a) \quad (3.15)$$

gegeben sind. Die  $\gamma_k$  sind hierbei auch Zufallszahlen aus dem Intervall  $(0, 1)$ , die über einen Zufallszahlengenerator oder Pseudozufallszahlengenerator gewonnen werden. Die Varianz<sup>1</sup> der Monte-Carlo-Schätzung lautet

$$\begin{aligned} Var[I_{MC}] &= Var\left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)\right] \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \left[ \left\langle \left( \sum_{k=1}^n f(x_k) \right)^2 \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^n f(x_k) \right\rangle^2 \right] \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 Var\left[\sum_{k=1}^n f(x_k)\right] \\ &= \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^n Var[f(x_k)] \quad , \end{aligned} \quad (3.18)$$

---

<sup>1</sup>Die Varianz ist ein Maß für die mögliche Abweichung (Streuung) einer Einzelbeobachtung vom Mittelwert. Die Varianz ist gegeben durch

$$Var[x] = \sigma^2 \equiv \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad , \quad (3.16)$$

wobei  $\langle x \rangle$  als Mittelwert (oder Erwartungswert) der Zufallsvariablen  $x_k$  definiert ist durch

$$\langle x \rangle = \sum_{k=1}^n p(x_k)x_k \quad . \quad (3.17)$$

Hierbei bezeichnet  $p(x_k)$  die Wahrscheinlichkeitsdichte.

wobei im letzten Schritt die Tatsache benutzt wurde, dass die Varianz der Summe gleich der Summe der Varianten ist. Die Gleichung berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \text{Var}[I_{MC}] &= \frac{(b-a)^2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \text{Var}[f(x_k)] \\ &= \frac{(b-a)^2}{n} \text{Var}[\text{Var}[f(x_k)]] = \frac{(b-a)^2}{n} \text{Var}[f(x_k)] . \end{aligned} \quad (3.19)$$

*Bemerkung:* Die Varianz ist eine Zahl und die Varianz einer Konstante ist gleich der Konstante selbst. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Var}[x] &= a = \text{konst.} , \\ \text{Var}[\text{Var}[x]] &= \text{Var}[a] = a = \text{konst.} . \end{aligned}$$

Mit diesen Umformungen ergibt sich die Varianz der Monte-Carlo-Integration

$$\begin{aligned} \text{Var}[I_{MC}] &= \frac{(b-a)^2}{n} \left[ \frac{\sum_{k=1}^n (f(x_k))^2}{n} - \left( \frac{\sum_{k=1}^n f(x_k)}{n} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[ (b-a)^2 \cdot \frac{\sum_{k=1}^n (f(x_k))^2}{n} - I_{MC}^2 \right] . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Varianz nimmt bei einer anwachsenden Anzahl  $n$  der ausgewählten Punkte mit  $\frac{1}{n}$  ab. Der Fehler des Integrals,  $\sqrt{\text{Var}[I_{MC}]}$ , nimmt hingegen mit  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  ab.

Um zu einer besseren Konvergenz des Integrals zu gelangen, muss die Varianz schneller minimiert werden. Dadurch verringert sich die Rechenzeit, die notwendig ist, die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Eine Möglichkeit dazu ist die Verwendung der ***Importance Sampling Methode***. Mit dem *Importance Sampling* möchte man nun erreichen, dass möglichst viele Stützstellen in das Gebiet fallen, in dem  $f(x)$  groß ist, um die Varianz einer einzelnen Schätzung zu verringern. Dafür benötigt man eine Verteilungsdichte  $p(x)$ , die auf dem Intervall  $[a, b]$  die Bedingungen (3.11) erfüllt. Der Verlauf dieser Verteilungsdichte  $p(x)$  soll den Verlauf der Funktion  $f(x)$  möglichst gut nähern, so dass näherungsweise gilt

$$h(x) \equiv \frac{f(x)}{p(x)} \approx \text{konst.} \quad (3.21)$$

Mit der Definition von  $h(x)$  kann das Integral in der Gleichung (3.13) folgendermaßen geschrieben werden

$$I = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx = \int_a^b h(x) p(x) dx . \quad (3.22)$$

Man hat  $p(x)$  so gewählt, dass  $h(x)$  ungefähr konstant ist. Der Wert des Integrals hängt also stark von  $p(x)$  ab. Durch die Erzeugung von Zufallszahlen  $x_k$ , die mit  $p(x)$  verteilt

sind, ergibt sich nach der Auswertung von  $n$  Stellen

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n h(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{p(x_k)} , \quad (3.23)$$

und dabei variieren die Summanden jetzt weniger, denn der Verlauf der Funktion  $p(x)$  der Funktion  $f(x)$  ähnlich ist.

Die Varianz ist nun

$$Var [I_{MC}] = \frac{(b-a)^2}{n} \left[ \frac{\sum_{k=1}^n \left( \frac{f(x_k)}{p(x_k)} \right)^2}{n} - \left( \frac{\sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{p(x_k)}}{n} \right)^2 \right] . \quad (3.24)$$

Die Varianz sollte klein sein, wenn die Funktion  $h(x)$  ungefähr konstant ist. Nach Gleichung (3.23) benötigt man für das *Importance Sampling* Zufallszahlen, die nach der bestimmten Verteilungsdichte  $p(x)$  gewonnen werden können. Dazu beginnt man mit Zufallszahlen  $\gamma_k$  im Intervall  $[0, 1]$ , welche gemäß der gleichförmigen, normierten Verteilungsdichte  $\Gamma$  verteilt sind. Dann gilt

$$p(x)dx = \Gamma d\gamma , \quad (3.25)$$

und

$$\int_{-\infty}^x p(y)dy = P(x) = \gamma , \quad (3.26)$$

wobei  $P(x)$  die Stammfunktion von  $p(x)$  ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$x_k = P^{-1}(\gamma_k) . \quad (3.27)$$

Für das *Importance Sampling*-Verfahren wird vorausgesetzt, dass die Verteilungsdichte  $p(x)$  analytisch integrierbar und ihre Stammfunktion  $P(x)$  invertierbar ist.

Dasselbe Verfahren kann man auf ein n-dimensionales Integral anwenden.

Ein wichtiger Monte-Carlo-Integrator, der zur Reduktion der Varianz im *Importance Sampling*-Verfahren benutzt, ist **Vegas**. Er wird im nächsten Abschnitt beschrieben und wird erklärt, was man bei der Integration mit Hilfe von Vegas berücksichtigen muss.

### 3.2.3 Vegas

Der *Vegas*-Integrator verwendet ein iteratives *Importance Sampling* zur Reduktion der Varianz. Man beginnt mit einer Teilung des Intervalls, z.B. in  $N$  gleiche Teile und würfelt in jedem Teil gleich viele Zufallszahlen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Zahl für jeden beliebigen Teil ausgewählt wird, ist konstant und ist für alle Teile  $\frac{1}{N}$ . In jeder Iteration wird die Verteilungsdichte  $p(x)$  an den Integrand angepasst, indem die Breite der Teile

bei fester Anzahl  $N$  verändert wird, so dass die Dichte der Teile dort am größten bzw. am kleinsten wird, wo der Wert des Integranden am größten bzw. am kleinsten ist. Dadurch kann man mehr Punkte an diesen Stellen auswerten. Im letzten Schritt der Iteration wird die Monte-Carlo-Integration durchgeführt.

Bei allen Integrationsverfahren kann die Zerfallsrate der betrachteten Prozesse durch eine Integration über den Phasenraum bestimmt werden. Die zufälligen Phasenraumpunkte, die zur Berechnung des Integrales benutzt werden, können auch als einzelne Ereignisse verwendet werden. Im endgültigen Datensatz sollen die Ereignisse entsprechend ihrer Wahrscheinlichkeiten vertreten sein, damit die erhaltenen Verteilungen den physikalisch erwarteten entsprechen.

Der *Vegas*-Integrator kann über eine Funktion nur im Intervall  $[0, 1]$  integrieren. Dazu muss die Variable eines Integrals so substituiert werden, dass die Grenzen auf 0 bis 1 überführt werden. Im Allgemeinen ergibt sich für ein ein-dimensionales Integral

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx \quad (3.28)$$

durch die Substitution

$$z = \frac{x - a}{b - a} \quad (3.29)$$

das folgende Integral

$$F(b) - F(a) = \int_0^1 (b - a) \cdot f(z) dz . \quad (3.30)$$

Nun muss die komplizierte Zerfallsrate

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{1}{16m_n(2\pi)^6} \int_{\omega_{min}}^{\omega_{max}} \omega d\omega \int_{m_e}^{E_e^{max}} |\vec{l}_e| dE_e \int_{x_k^{min}}^{x_k^{max}} dx_k \int_{-1}^1 dx_{\bar{\nu}_e} \int_0^{2\pi} d\phi^- \\ & \cdot \frac{E_{\bar{\nu}_e} |\mathcal{M}|_{p'=p-l_e-l_{\bar{\nu}_e}-k}^2}{m_n - E_e - \omega - E_{\bar{\nu}_e}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

numerisch mit Hilfe des *Vegas*-Integrators ausgewertet werden. Dazu sind zwei Hinweise zu beachten:

- Die Grenzen für alle 5 Integrale werden ausgerechnet.
- Die Variablen werden so substituiert, dass der *Vegas*-Integrator anwendbar ist.

Der erste Punkt wurde ganz ausführlich im Abschnitt (2.4.2) besprochen. Die Grenzen wurden ebenfalls dort augerechnet. Für den zweiten Punkt müssen folgende Substitutionen

ausgeführt werden

$$\begin{aligned}
 E_e &= (E_e^{max} - m_e) x(1) + m_e , \\
 x_k &= (x_k^{max} - x_k^{min}) x(2) + x_k^{min} , \\
 x_{\bar{\nu}_e} &= 2x(3) - 1 , \\
 \phi^- &= 2\pi x(4) , \\
 \omega &= (\omega^{max} - \omega^{min}) x(5) + \omega^{min} .
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Dadurch erhält man für die totale Zerfallsrate

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{1}{16m_n(2\pi)^6} \int_0^1 [(\omega^{max} - \omega^{min}) x(5) + \omega^{min}] dx(5) \\
 &\quad \int_0^1 [\{(E_e^{max} - m_e) x(1) + m_e\}^2 + m_e^2]^{\frac{1}{2}} dx(1) \\
 &\quad \int_0^1 [(x_k^{max} - x_k^{min}) x(2) + x_k^{min}] dx(2) \\
 &\quad \int_0^1 [2x(3) - 1] dx(3) \int_0^1 [2\pi] dx(4) \\
 &\cdot \frac{E_{\bar{\nu}_e} |\mathcal{M}|_{p'=p-l_e-l_{\bar{\nu}_e}-k}^2}{m_n - [(E_e^{max} - m_e) x(1) + m_e] - [(\omega^{max} - \omega^{min}) x(5) + \omega^{min}] - E_{\bar{\nu}_e}} .
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

*Bemerkung:* Im Matrixelement  $|\mathcal{M}|^2$  müssen auch die alten Variablen durch die neuen Variablen  $x(i), i = 1, \dots, 5$ , ersetzt werden. Der  $\omega^{min}$ -Wert hängt von der Auflösung des Detektors ab. Man kann an dieser Stelle jedoch nicht mit einem unbekannten Wert  $\omega^{min}$  die totale Zerfallsrate ausrechnen. Das Problem kann beseitigt werden, indem die **differentielle** Zerfallsrate  $\frac{d\Gamma}{d\omega}$  (das Energiespektrum der Photonen) bei fester Energie des Photons ( $\omega = \text{konst.}$ ) ausgewertet wird. So erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Gamma}{d\omega} &= \frac{1}{16m_n(2\pi)^6} \cdot \omega \cdot \int_0^1 [\{(E_e^{max} - m_e) x(1) + m_e\}^2 + m_e^2]^{\frac{1}{2}} dx(1) \\
 &\quad \int_0^1 [(x_k^{max} - x_k^{min}) x(2) + x_k^{min}] dx(2) \int_0^1 [2x(3) - 1] dx(3) \int_0^1 [2\pi] d(4) \\
 &\cdot \frac{E_{\bar{\nu}_e} |\mathcal{M}|_{p'=p-l_e-l_{\bar{\nu}_e}-k}^2}{m_n - [(E_e^{max} - m_e) x(1) + m_e] - \omega - E_{\bar{\nu}_e}} ,
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

mit

$$E_{\bar{\nu}_e} = \frac{m_n + m_e^2 - m_p'^2 - 2m_n(E_e + \omega) + 2E_e\omega - 2\vec{l}_e \cdot \vec{k}}{2(m_n - E_e - \omega + x_{\bar{\nu}_e} \sqrt{E_e^2 - m_e^2} + \vec{k} \cdot \hat{l}_{\bar{\nu}_e})} , \tag{3.35}$$

wobei die Energie des Elektrons  $E_e$  durch  $(E_e^{max} - m_e) x(1) + m_e$  zu ersetzen ist. Es ist nochmals zu erwähnen, dass  $\omega$  in dieser Gleichung einen festen Wert hat.

### 3.3 Auswertung

Bevor in diesem Abschnitt die numerische Ergebnisse für die differentielle Zerfallsrate und Polarisation der emittierten Photonen präsentiert werden, müssen die Werte der Konstanten angegeben werden. Die Konstanten, die für eine numerische Auswertung gebraucht werden, sind gegeben durch [1]

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{137,03599976} ,$$

$$g_V = 0,985619 , G_F = 1,166639 \cdot 10^{-11} \frac{1}{(MeV)^2} ,$$

$$m_n = 939,56533 MeV , m_p = 939,27200 MeV , m_e = 0,510998902 MeV ,$$

$$\tau_n = 885,7 s \equiv \frac{885,7 s}{\hbar} = \frac{885,7 s}{6,58 \cdot 10^{22} MeV s} = 1,3461 \cdot 10^{24} \frac{1}{MeV} .$$

Somit erhält man für die maximale Photonenergie mit der in der Gleichung (2.82) gegebenen Formel

$$\omega^{max} = \frac{(m_n - m_e)^2 - m_p^2 - 2m_n m_e}{2(m_n - m_e)}$$

den Wert  $\omega^{max} = 0,781975 MeV$ .

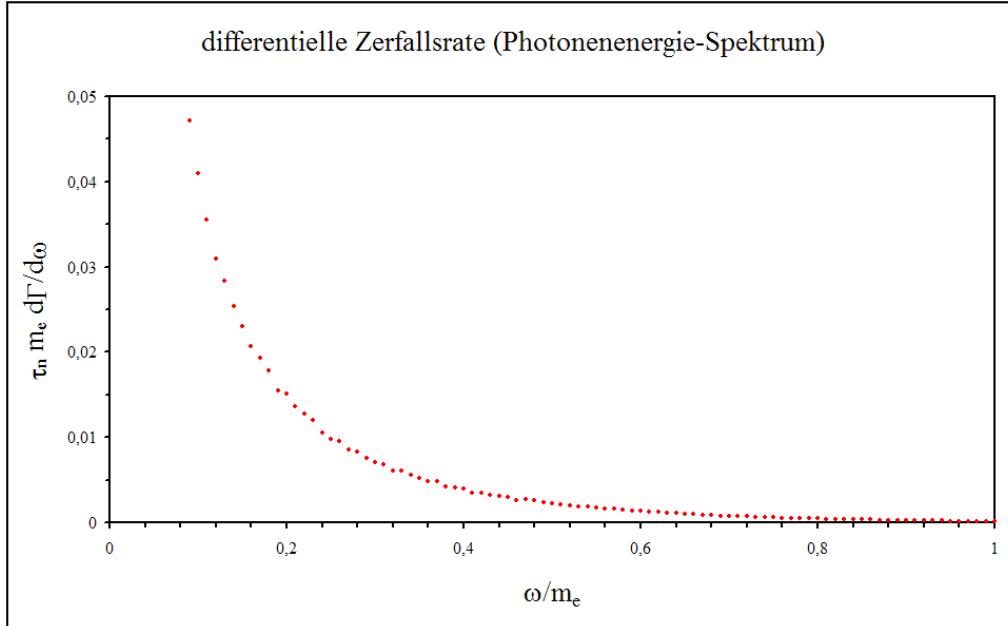


Abbildung 3.1: Das Spektrum der Photonenergie in der Abhängigkeit von  $\frac{\omega}{m_e}$

In der Abbildung (3.1) ist das Spektrum der Photonenergie  $\frac{d\Gamma}{d\omega}$  in Abhängigkeit von der

Photonenenergie  $\omega$  dargestellt. In dieser Abbildung ist die Energie der Photonen in Einheiten der Elektronenmasse angegeben. Für kleine  $\omega$ -Werte wächst die differentielle Zerfallsrate stark an. Daher wurde nur das Spektrum für die  $\omega$ -Werte, die größer als  $0,08 m_e$  sind, dargestellt. Je größer die  $\omega$ -Werte werden, umso schneller fällt das Spektrum. Im Falle  $\omega = m_e$  verschwindet die Photonenergie. Um dieses Diagramm darzustellen, wurde die Gleichung (2.155) für das Matrixelement und die Gleichung (2.62) für die Zerfallsrate dieses Prozesses verwendet. Man kann statt der Gleichung (2.155) die Gleichung (2.122) für das Matrixelement benutzen. Man muss aber beachten, dass in der Herleitung von dieser Gleichung die nichtrelativistische Näherung berücksichtigt wurde, während für die Herleitung der Gleichung (2.155) keine Näherung angenommen wurde.

Als nächstes betrachtet man die Photonpolarisation im radiativen Neutronen-Zerfall. Im Allgemeinen ist die Polarisation  $P$  definiert durch

$$P = \frac{\Gamma_r - \Gamma_l}{\Gamma_r + \Gamma_l} . \quad (3.36)$$

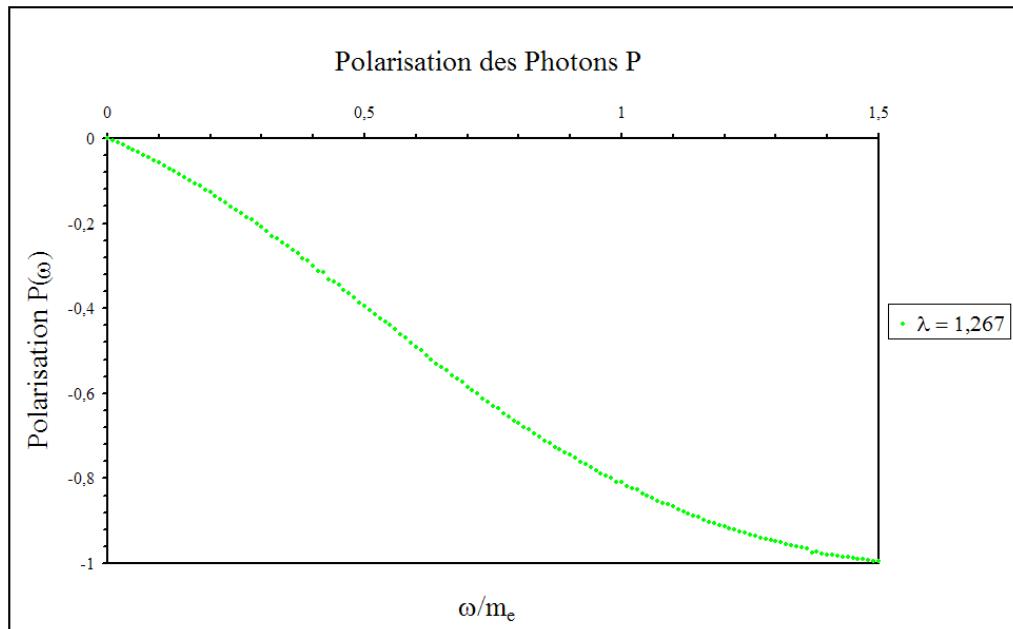


Abbildung 3.2: Die Polarisation des Photons in Abhängigkeit von der Energie des Photons im radiativen  $\beta$ -Zerfall

Da man hier die totale Zerfallsrate nicht berechnen kann, definiert man die Polarisation durch die Ersetzung von  $\Gamma_{r,l}$  mit  $d\Gamma_{r,l}$ . Abbildung (3.2) zeigt die Photonpolarisation in Abhängigkeit von der Photonenergie. Zur Darstellung dieses Diagramms wurde das po-

larisierte Matrixelement verwendet. Aus der Gleichung (2.155) kann man das polarisierte Matrixelement erhalten, indem man eine Summation über die links- bzw. rechthändigen Photonen durchführt. In Abbildung (3.2) ist zu sehen, dass die niederenergetischen Photonen unpolarisiert sind. Die hochenergetischen Photonen sind nahezu vollständig in einer Richtung und zwar linkshändig polarisiert. Unter Verwendung des Matrixelementes aus dem Spin-Summen-Formalismus, Gleichung (2.122), erhält man dasselbe Polarisationsverhalten der Photonen [1]. Nun kann man untersuchen, wie sich die Photonenpolarisation ändert, wenn man die  $\lambda$ -Werte variiert. Dazu berechnet man die Polarisation für  $\lambda = 0,9, 1,2, 1,5$ . Wie in der Abbildung (3.3) dargestellt wird, ändert sich die Polarisation für verschiedene Werte von  $\lambda$  nicht.

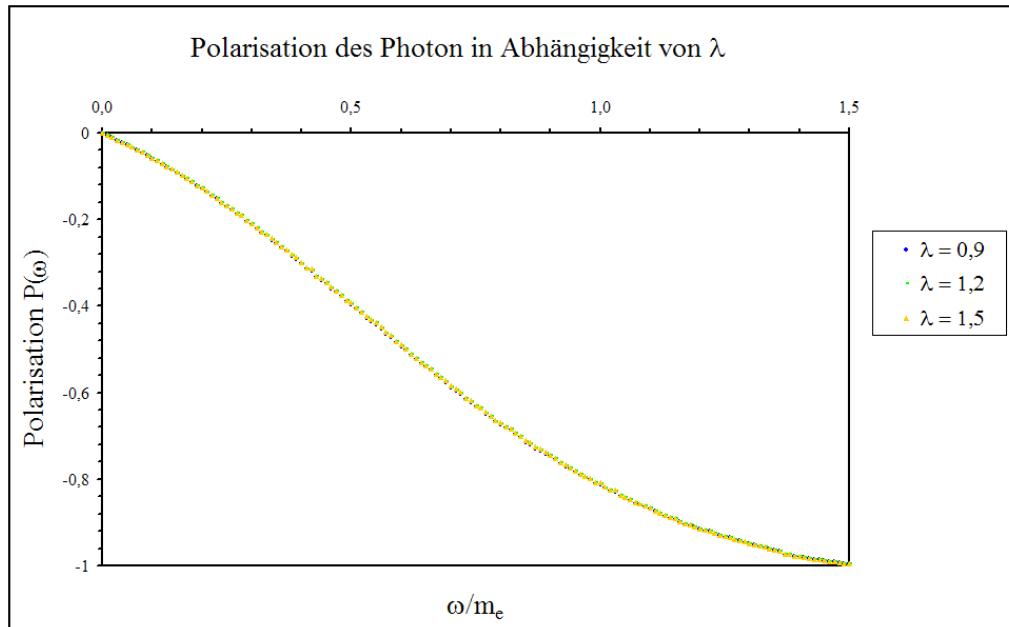


Abbildung 3.3: Die Polarisation des Photons für die verschiedenen Werten von  $\lambda$

In Abbildung (3.4) wird die Photonenpolarisation in Abhängigkeit von der Elektronenenergie  $E_e$  mit fest vorgegebenem  $\omega$  dargestellt. Wenn die Elektronen ihre Minimalenergie (die Ruhemasse des Elektrons  $m_e$ ) besitzen, d.h.  $|\vec{l}_e| = 0$ , sind die Photonen linkshändig polarisiert. Diese gilt für alle vorgegebenen  $\omega$ -Werte. Die Polarisation nimmt mit der steigenden Elektronenenergie ab. Je größer der  $\omega$ -Wert ist, desto stärker nimmt die Photonenpolarisation ab. Für  $\omega = 0,005 \text{ MeV}$  verschwindet die Photonenpolarisation, deren kollidierte Elektronen Energien  $E_e \gtrsim 0,55 \text{ MeV}$  besitzen, während die Photonen der Energie  $\omega = 0,1 \text{ MeV}$ , deren kollidierte Elektronen Energien  $E_e \approx 0,55 \text{ MeV}$  besitzen, zu ungefähr 90% linkshändig polarisiert sind. Es stellt sich noch die Frage, wie sich die

Polarisations-Spektren ändern, wenn man die Nukleon-Struktur-Effekte berücksichtigt. An dieser Stelle ist darauf hingewiesen, dass diese Effekte kaum großen Einfluss auf die Ergebnisse haben und vernachlässigt werden können [1].

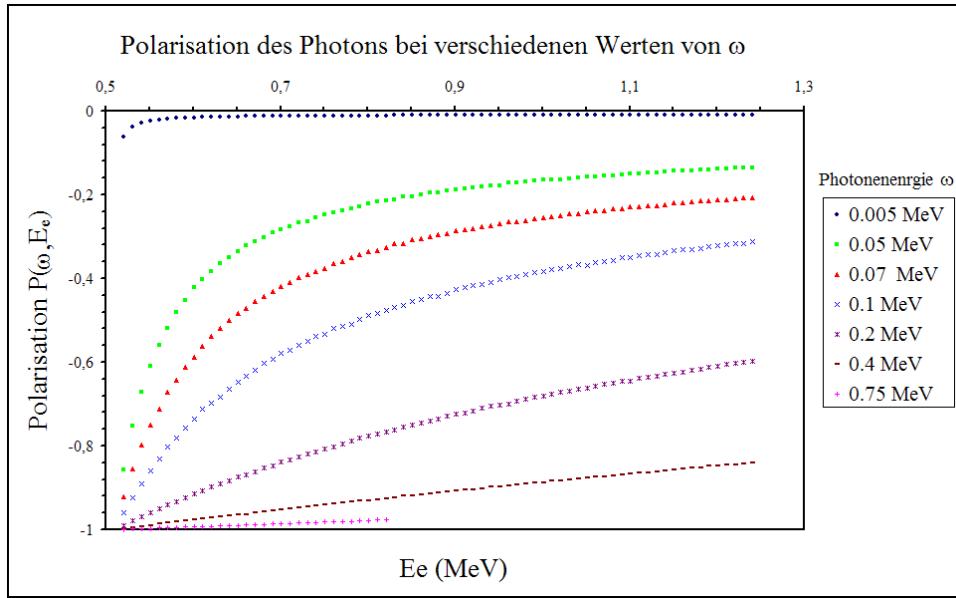


Abbildung 3.4: Die Polarisation des Photons in Abhängigkeit von der Energie des Elektron mit vorgegebenen  $\omega$

Die Ergebnisse können für die Bestimmung der Neutrinomasse verwendet werden. Bei der gegebenen Auflösung des Detektors kann man statt des Photonenergie-Spektrums das Elektronenspektrum im radiativen  $\beta$ -Zerfall berechnen. Aus dem Vergleich der Elektronenspektrten im normalen und radiativen  $\beta$ -Zerfall kann man ein genaueres Ergebniss für die Neutrinomasse finden.

Die Untersuchung der Photonpolarisation im radiativen Neutronen-Zerfall ist auch ein guter Test des Standardmodells. Diese Herleitungen basieren auf der V–A-Theorie im Standardmodell der Elementarteilchen. Die Aufgabe der Experimente, die zu Untersuchung der Photonpolarisation im radiativen Neutronen-Zerfall aufgebaut sind, besteht darin, Abweichungen von diesen theoretischen Ergebnissen zu messen.

Bemerkung: Wie im Abschnitt (2.4.2) gezeigt wurde, waren die Terme  $x_k^{max}$  und  $x_k^{min}$  die Grenze für  $x_k$ . In der numerischen Auswertung aber wurde festgestellt, dass diese Werte nur das *Supremum* und *Infimum* von  $x_k$  sind. Der Grund liegt daran, dass die Energie des Neutrinos  $E_{\bar{\nu}_e} \geq 0$  angenommen wurde, obwohl  $E_{\bar{\nu}_e} = 0$  physikalisch nichtrelevant ist. Dáher wurden die numerische Ergebnisse bzw. die Diagramme mit  $x_k^{max} = 1$  und  $x_k^{min} = -1$  berechnet. Diese Darstellungen stimmen mit den Ergebnissen in Ref. [1] überein.

# Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit war, das Photonenergie-Spektrum und die Photonenspolarisation des radiativen Neutronen-Zerfalls zu untersuchen. Zuerst wurde der normale  $\beta$ -Zerfall kurz besprochen und das Matrixelement und die differentielle Zerfallsrate dieses Prozesses hergeleitet. Um das Matrixelement zu berechnen, wurde der Spin-Summen-Formalismus verwendet. Aus der Kinematik des Zerfalls wurde die Winkelunabhängigkeit des Matrixelementes gezeigt.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wurde dieselbe Prozedur ausgeführt, um die Zerfallsrate und das Matrixelement des radiativen Neutronen-Zerfalls zu erhalten. Da es in diesem Fall um den Vierkörperzerfall ging, waren die Herleitungen relativ komplizierter und mühsamer. Besonders bei der Berechnung des Matrixelementes begegnet man Produkten aus 6 oder 8  $\gamma$ -Matrizen, die kaum vereinfacht werden können. Dieses Problem konnte dadurch beseitigt werden, dass für die Matrixelemente aller radiativen Prozesse die nichtrelativistischen Ausdrücke berechnet wurden. Mit Hilfe der Helizitätsamplituden ließen sich die relativistisch korrekten Formeln für alle vorkommenden Matrixelemente berechnen.

Im letzten Kapitel wurden die numerischen Ergebnisse präsentiert, die sich durch das *Vegas*-Programm ergaben. Das Energiespektrum der Photonen konnte durch die Zerfallsrate des radiativen Zerfalls und die Polarisationseigenschaften der Photonen ausgerechnet werden. Es konnte gezeigt werden, wie sich die nieder- und hochenergetischen Photonen verhalten. Es war hierbei leicht zu erkennen, dass die Polarisation der Photonen mit steigender Photonenergie zunahm und für eine feste Photonenergie  $\omega$  mit wachsender Elektronenergie abnahm.

Die Untersuchung des Polarisationsverhaltens der Photonen wird als Test des Standardmodells dienen.

## Anhang A

### Dreiteilchenzerfall

Die Untersuchung des Dreikörperzerfalls ist im Vergleich zum Zweikörperzerfall komplizierter. Im Falle des Zweikörperzerfalls haben die erzeugten Teilchen festgelegte Energien. Beim Dreikörperzerfall können die erzeugten Teilchen unterschiedliche Energien annehmen. Das Energiespektrum eines der Teilchen ist kontinuierlich. Der Dreiteilchenzerfall reduziert sich auf einen Zweiteilchenzerfall, indem man zwei von den erzeugten Teilchen als ein Teilchen mit dem Schwerpunkt  $S$  auffasst. Die

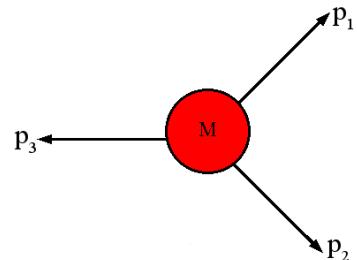


Abbildung A.1: Dreikörperzerfall  
zwei von den erzeugten Teilchen als ein Teilchen mit dem Schwerpunkt  $S$  auffasst. Die

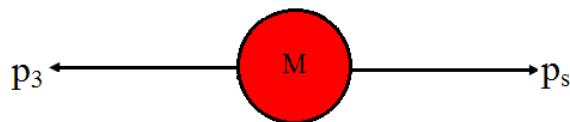


Abbildung A.2: Zweikörperzerfall

Vierer-Impuls-Erhaltung wird zu

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = q_s + q_3 \quad (\text{A.1})$$

umgeformt. Im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens  $M$  gilt

$$\begin{aligned} M &= E_3 + E_s \quad , \\ \vec{0} &= \vec{p}_3 + \vec{p}_s \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

und für die dem Schwerpunkt  $S$  zugeordnete Masse  $m_s$  gilt

$$\begin{aligned} m_s^2 &= E_s^2 - p_s^2 = (M - E_3)^2 - p_s^2 = M^2 + E_3^2 - 2ME_3 - p_s^2 \\ &= M^2 + p_3^2 + m_3^2 - 2ME_3 - p_3^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Man findet für die Energie und den Impuls der dritten Teilchen im Ruhesystem von  $M$

$$E_3 = \frac{M^2 + m_3^2 - m_s^2}{2M} , \quad (\text{A.4})$$

$$p_3 = \frac{\left[ (M^2 - (m_s + m_3)^2) (M^2 - (m_s - m_3)^2) \right]^{1/2}}{2M} . \quad (\text{A.5})$$

Der Ausdruck für  $p_3$  ist leicht zu beweisen

$$\begin{aligned} p_3^2 &= E_3^2 - m_3^2 = \frac{(M^2 + m_3^2 - m_s^2)^2 - (m_3 \cdot 2M)^2}{(2M)^2} \\ &= \frac{[(M^2 + m_3^2 - m_s^2 - 2m_3M)(M^2 + m_3^2 - m_s^2 + 2m_3M)]}{(2M)^2} \\ &= \frac{[(M^2 - (m_s + m_3)^2)(M^2 - (m_s - m_3)^2)]}{(2M)^2} . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$E_3$  bzw.  $p_3$  ist maximal, wenn  $m_s$  minimal ist. Im folgenden wird die Bedingung bestimmt, bei der  $m_s$  minimal wird

$$\begin{aligned} m_s^2 &= M^2 + m^2 - 3 - 2ME_3 = M^2 + E_3^2 - p_3^2 - 2ME_3 \\ &= (M - E_3)^2 - p_3^2 = (q - q_3)^2 , \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

wobei im letzten Schritt die Ausdrücke für die Vierer-Impulse im Ruhesystem von  $M$  verwendet worden sind

$$q = (E, \vec{p}) = (M, 0) , \quad q_3 = (E_3, \vec{p}_3) . \quad (\text{A.8})$$

Aus der Vierer-Impuls-Erhaltung folgt

$$m_s^2 = (q - q_3)^2 = (q_1 + q_2)^2 = q_1^2 + q_2^2 + 2q_1 \cdot q_2 = q_1^2 + q_2^2 + 2(E_1 E_2 - p_1 p_2 \cos \theta) . \quad (\text{A.9})$$

$m_s^2$  ist minimal, wenn  $\cos \theta$  maximal ist, d.h.  $\cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$ . Dies ist genau dann erfüllt, wenn die Teilchen 1 und 2 in gleicher Richtung fliegen während Teilchen 3 sich in entgegengesetzter Richtung bewegt. Im Ruhesystem von  $m_s$  gilt

$$\begin{aligned} m_s^2 &= (E_1 + E_2)^2 = m_1^2 + p_1^2 + m_2^2 + p_2^2 + 2E_1 E_2 \\ &\geq m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2 \\ &\geq m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 = (m_1 + m_2)^2 , \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$m_s \geq m_1 + m_2 \Rightarrow m_s^{\min} = m_1 + m_2 . \quad (\text{A.11})$$

Genauso wie in den Gleichungen für das dritten Teilchen gilt für die Energien und die Impulse von Teilchen 1 und 2 in CMS von  $m_s$

$$E_1^s = \frac{m_s^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m_s} , \quad (\text{A.12})$$

$$p_1^s = \frac{\left[ (m_s^2 - (m_1 + m_2)^2) (m_s^2 - (m_1 - m_2)^2) \right]^{1/2}}{2m_s} , \quad (\text{A.13})$$

$$E_2^s = \frac{m_s^2 + m_2^2 - m_1^2}{2m_s} , \quad (\text{A.14})$$

$$p_2^s = \frac{\left[ (m_s^2 - (m_2 + m_1)^2) (m_s^2 - (m_2 - m_1)^2) \right]^{1/2}}{2m_s} . \quad (\text{A.15})$$

Im Ruhesystem von  $M$  ist  $E_3$  maximal, wenn  $m_s = m_1 + m_2$ , d.h.

$$E_3^{\max} = \frac{M^2 + m_3^2 - (m_1 + m_2)^2}{2M} . \quad (\text{A.16})$$

Aber aus dieser Bedingung für  $m_s$  ergibt sich

$$p_1^s = p_2^s = 0 , \quad (\text{A.17})$$

bzw. die Geschwindigkeiten  $v_1^s$  und  $v_2^s$  im Ruhesystem von  $m_s$  sind gleich Null

$$v_1^s = v_2^s = 0 . \quad (\text{A.18})$$

Da  $S$  und  $M$  Inertialsysteme sind, sind die Geschwindigkeiten in den beiden Systemen gleich groß

$$v_1 = v_2 . \quad (\text{A.19})$$

Das Teilchen 3 hat im Ruhesystem von  $M$  seine Maximalenergie, wenn die Teilchen 1 und 2 in gleicher Richtung (in entgegengesetzter Richtung vom Teichen 3) und mit gleicher Geschwindigkeit fliegen.

Die obigen Resultate können für n-Körperzerfall verallgemeinert werden, indem man das n-Körperproblem mit Hilfe der Einführung eines „effektiven Teilchens“ auf Zwei- bzw. Dreiteilchenzerfall reduziert.

## Anhang B

# Feynman-Regeln der QED und der schwachen WW

Die Feynman-Amplitude  $\mathcal{M}$ , die einen Übergang vom  $|i\rangle$  in den  $|f\rangle$ -Zustand beschreibt, wird durch das entsprechende  $S$ -Matrixelement bestimmt

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \sum_{k=1}^N (p_f^k - p_i^k) \right) \mathcal{M} \quad . \quad (\text{B.1})$$

Der Term  $\delta^{(4)} \left( \sum_{k=1}^N (p_f^k - p_i^k) \right)$  erfüllt die Vierer-Imulserhaltung an jedem Wechselwirkungsvertex.

Die differentielle Zerfallsrate eines Teilchens mit Vierer-Impuls  $p = (E, \vec{p})$ , das in  $N$  Teilchen mit Vierer-Impulsen  $p'_k = (E'_k, \vec{p}'_k)$ ;  $k = 1, \dots, N$  zerfällt, ist aus der Gleichung für das  $S$ -Matrixelement herzuleiten [6][9][7]. Es lässt sich mit der Normierung

$$\sum_{\sigma} \bar{u}(p, \sigma) u(p, \sigma) = \not{p} + m \quad (\text{B.2})$$

zu

$$d\Gamma = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( \left( \sum_{k=1}^N p'_k \right) - p \right) \cdot \frac{1}{2E} \cdot \prod_{k=1}^N \frac{d^3 p'_k}{(2\pi)^3 2E'_k} \cdot |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{B.3})$$

schreiben. Um diese beiden Größen auszuwerten, muss man zuerst die Feynman-Amplitude bestimmen. Die anderen Unbekannten können aus der Kinematik des Problems geholt werden. Man erhält die Feynman-Amplitude  $\mathcal{M}$  aus den Feynman-Regeln. Die wichtigsten Feynman-Regeln werden im folgenden aufgelistet

1. Für jeden QED-Vertex schreibt man einen Faktor  $i e \gamma^\alpha$ .

2. Für jeden schwachen Wechselwirkungsvertex <sup>1</sup> schreibt man einen Faktor  $-ig\gamma^\alpha(1-\gamma_5)$ , wobei  $g$  eine dimensionlose Kopplungskonstante ist.
3. Propagatoren für die inneren Linien mit Vierer-Implus  $k$  (für Bosonen) und  $p$  (für Fermionen) lauten

- (a) Photon (mit dem Impuls  $k$ )

$$iD_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{-k^2 - i\varepsilon} \left[ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} (1 - \xi) \right] , \quad (\text{B.4})$$

- (b) Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (mit dem Impuls  $p$ )

$$iS_{\alpha\beta}(p) = \frac{-i(m + \not{p})_{\alpha\beta}}{m^2 - p^2 - i\varepsilon} , \quad (\text{B.5})$$

- (c) Vektorboson (mit dem Impuls  $k'$ )

$$i\Delta_{\mu\nu} = \frac{i(-g_{\mu\nu} + \frac{k'_\alpha k'_\beta}{m_{VB}^2})}{k'^2 - m_{VB}^2 + i\varepsilon} , \quad (\text{B.6})$$

wobei für Fermionen  $\alpha$  und  $\beta$  Dirac-Indizes, für Photonen oder massive Vektorbosonen  $\mu$  und  $\nu$  Polarisatoindizes und  $\xi$  als Eich-Parameter (in dieser Arbeit geht es um Feynman-Eichung, d.h.  $\xi=1$ ) stehen.

4. Für die äußeren Linien schreibt man einen der folgenden Faktoren
  - (a) Für jedes ausgehende Fermion mit dem Impuls  $p$  und Spin  $s$ :  $\bar{u}(\vec{p}, s)$ .
  - (b) Für jedes eingehende Fermion mit dem Impuls  $p$  und Spin  $s$ :  $u(\vec{p}, s)$ .
  - (c) Für jedes ausgehende Antifermion mit dem Impuls  $q$  und Spin  $r$ :  $v(\vec{q}, r)$ .
  - (d) Für jedes eingehende Antifermion mit dem Impuls  $q$  und Spin  $r$ :  $\bar{v}(\vec{p}, r)$ .
  - (e) Für jedes ausgehende Photon (Vektorboson) mit dem Impuls  $k$  und Polarisation  $\mu$ :  $\varepsilon_\mu(\vec{k})$ .
  - (f) Für jedes eingehende Photon (Vektorboson) mit dem Impuls  $k$  und Polarisation  $\mu$ :  $\varepsilon_\mu^*(\vec{k})$ .
5. Die Spinoren ( $\gamma$ -Matrizen,  $S_{\alpha\beta}(p)$ , Vierer-Spinoren) sortiert man in Reihenfolge der Pfeile des betrachteten Feynman-Graphen.

---

<sup>1</sup>Es gibt weitere schwache Wechselwirkungsverekte, die hier nicht besprochen wird [6][8] [9].

6. An jedem Vertex ist die Vierer-Impulserhaltung erfüllt. Man intergriert über jeden Vierer-Implus  $p, \int dp$ , der nicht durch Vierer-Impluserhaltung festgelegt ist, mit einem Gewicht  $\frac{1}{(2\pi)^4}$ .
7. Für jede geschlossene Fermionen-Schleife (engl. closed fermion loop) nimmt man die Spur und multipliziert mit (-1).

## Anhang C

# Die Dirac-Gleichung

Die Dirac-Gleichung beschreibt ein relativistisches Teilchen mit der Ruhemasse  $m$ , dem Impuls  $p$  und dem Spin  $\frac{1}{2}$ . Sie ist gegeben durch

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi = E\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi \quad , \quad (C.1)$$

wobei  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ , und  $\beta$  hermitische  $4 \times 4$ -Matrizen sind

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (C.2)$$

mit  $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ ,  $2 \times 2$ -Pauli-Matrizen. Durch die Einführung des Vierer-Impulses  $p = (E, \vec{p})$  und der  $4 \times 4$ -Dirac-Matrizen ( $\gamma$ -Matrizen), die folgendermaßen definiert sind

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta \cdot \alpha_i) \quad , \quad (C.3)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (C.4)$$

Die Dirac-Gleichung lässt sich in kovariante Form umschreiben

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad . \quad (C.5)$$

Die Gleichung (C.5) beschreibt ein freies, relativistisches Fermion. Ein Fermion, das unter elektromagnetischer Wechselwirkung steht, kann auch durch diese Gleichung beschrieben werden, aber man muss die Vierer-Ableitung  $\partial_\mu$  durch die kovariante Vierer-Ableitung  $(\partial_\mu - eA_\mu)$  ersetzen

$$(i\gamma^\mu (\partial_\mu - eA_\mu) - m)\psi = 0 \quad . \quad (C.6)$$

Die  $\gamma$ -Matrizen erfüllen die folgende Antikommutatorrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+ = 2g^{\mu\nu} \quad , \quad (C.7)$$

und die Hermizitätsbedingungen  $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ . Eine fünfte  $\gamma$ -Matrix, die im Spurtheorem wichtige Rolle spielt, ist definiert durch

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \gamma^5 \equiv \frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\pi}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\pi \quad , \quad (\text{C.8})$$

wobei  $\epsilon_{\mu\nu\rho\pi}$  das total antisymmetrisch alternierende Symbol ist

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\pi} = \begin{cases} +1, & \text{gerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \text{ für } (\mu, \nu, \rho, \pi,) \\ -1, & \text{ungerade Permutation von } (0, 1, 2, 3) \text{ für } (\mu, \nu, \rho, \pi,) \end{cases} . \quad (\text{C.9})$$

Man kann entsprechende  $\gamma$ -Matrizen mit unteren Indizes  $\gamma_\nu \equiv g_{\mu\nu}\gamma^\mu$  definieren. Mit Hilfe dieser Definition lässt sich einfach beweisen, dass  $\gamma_5 = \gamma^5$  ist.  $\gamma^5$  antikommutiert mit  $\gamma^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ , und hat die Eigenschaften

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\}_+ = 0 \quad , \quad (\gamma^5)^2 = 1 \quad , \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \quad . \quad (\text{C.10})$$

Es gibt weitere Eigenschaften von  $\gamma$ -Matrizen, die im Anhang D noch besprochen werden. Mit Hilfe der  $\gamma^5$ -Matrix kann man die Projektions-Operatoren für die masselosen Dirac-Teilchen definieren als

$$P_\pm \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5) \quad . \quad (\text{C.11})$$

## Anhang D

# Kontraktions-Identitäten und Spur-Theoreme

### D.1 Kontraktions-Identitäten

Unter Anwendung des Antikommutators, der im Anhang C besprochen wurde, kann man folgende algebraische Identitäten beweisen.

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \quad , \quad (D.1)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\mu = -2\gamma^\lambda \quad , \quad (D.2)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\delta \gamma^\mu = 4g^{\lambda\delta} \quad , \quad (D.3)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\delta \gamma^\rho \gamma^\mu = -2\gamma^\rho \gamma^\delta \gamma^\lambda \quad . \quad (D.4)$$

Diese Relationen erleichtern oft die Auswertung von den Spuren, die im nächsten Unterabschnitt vorgestellt werden.

Hier wird eine von *Feynman* eingeführte Schreibweise verwendet

$$q = \gamma^\mu q_\mu = \gamma_\mu q^\mu \quad . \quad (D.5)$$

Hier steht  $q_\mu$  für einen beliebigen Vierer-Vektor. Mit Hilfe der Identitäten (D.2)-(D.4) und der von *Feynman* definierten Schreibweise folgen die Kontraktions-Identitäten

$$\gamma_\mu q \gamma^\mu = -2q \quad , \quad (D.6)$$

$$\gamma_\mu q \not{b} \gamma^\mu = 4a_\nu b^\nu = 4a^\nu b_\nu = 4a \cdot b \quad , \quad (D.7)$$

$$\gamma_\mu q \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2\not{b} q \quad . \quad (D.8)$$

Total antisymmetrischer Tensor  $\epsilon^{\mu\nu\rho\pi}$  erfüllt die Kontraktionsidentitäten

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\pi}\epsilon_{\mu\nu\rho\pi} = -24 \quad , \quad (\text{D.9})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\alpha}\epsilon_{\mu\nu\rho\beta} = -6g_{\beta}^{\alpha} \quad , \quad (\text{D.10})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\vartheta\alpha}\epsilon_{\mu\nu\omega\beta} = -2 \left( g_{\omega}^{\vartheta}g_{\beta}^{\alpha} - g_{\beta}^{\vartheta}g_{\omega}^{\alpha} \right) \quad . \quad (\text{D.11})$$

## D.2 Spur-Theoreme

Im folgenden werden einige sehr nützliche Relationen angegeben, die als Spur-Theoreme bekannt sind. Diese Relationen vereinfachen die Berechnung der Spuren, die aus den verschiedenen Kombinationen der  $\gamma$ -Matrizen bestehen. Bevor diese Theoreme aufgelistet werden, werden einige Regeln angegeben, die aus den Definitionen und Herleitungen im Anhang C einfach zu beweisen sind

$$\text{Tr} \left[ (\gamma^5)^2 \right] = \text{Tr} [\mathbf{1}] = 4 \quad , \quad (\text{D.12})$$

$$\text{Tr} [\gamma^5] = \text{Tr} [\gamma_5] = 0 \quad , \quad (\text{D.13})$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu] = \text{Tr} [\gamma_\mu] = 0 \quad , \quad (\text{D.14})$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^5] = -\text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu] = 0 \quad , \quad (\text{D.15})$$

$$\text{Tr} [XY] = \text{Tr} [YX] \quad , \quad X, Y \text{ beliebige } n \times n - \text{Matrizen} \quad . \quad (\text{D.16})$$

### Theorem 1

Die Spur des Produktes einer ungeraden Anzahl  $\gamma$ -Matrizen ist stets Null.

$$\text{Tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_n}] = \text{Tr} [\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \cdots \gamma_{\mu_n}] = 0 \quad , \quad n = 2k + 1, \quad k \in \mathbb{Z} \quad . \quad (\text{D.17})$$

*Beweis*

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_n}] &= \text{Tr} \left[ \underbrace{\gamma^5 \gamma^5}_{=1} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_n} \right] = (-1)^n \text{Tr} [\gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_n} \gamma^5] \\ &= (-1)^n \text{Tr} [\gamma^5 \gamma^5 \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_n}] = (-1)^n \text{Tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_n}] \quad . \end{aligned}$$

### Theorem 2

Die Spur des Produktes aus zwei oder vier  $\gamma$ -Matrizen ist

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4 g^{\mu\nu} \quad , \quad (\text{D.18})$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\pi \gamma^\nu] = 4 (g^{\mu\rho} g^{\pi\nu} - g^{\mu\pi} g^{\rho\nu} + g^{\mu\nu} g^{\rho\pi}) \quad . \quad (\text{D.19})$$

*Beweis* von ( D.18 )

$$\begin{aligned}
 \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+ &= 2 g^{\mu\nu} \\
 \Leftrightarrow \text{Tr} [\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}_+] &= \text{Tr} [2 g^{\mu\nu}] \quad \Leftrightarrow \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu] = 2 \text{Tr} [g^{\mu\nu}] \\
 \Leftrightarrow \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] + \text{Tr} [\gamma^\nu \gamma^\mu] &= 2 g^{\mu\nu} \text{Tr} [\mathbf{1}] \quad \Leftrightarrow 2 \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 8 g^{\mu\nu} \\
 \Leftrightarrow \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu] &= 4 g^{\mu\nu} .
 \end{aligned}$$

Man kann mit denselben Umformungen und Relationen die Gleichung (D.19) beweisen. Theorem (1) und (2) können auf das Produkt aus  $\gamma$ -Matrizen mit beliebigen Vierer-Vektoren (von *Feynman* eingeführten Symbol  $d$ ) erweitert werden

$$\text{Tr} [d\psi] = 4 a \cdot b , \quad (\text{D.20})$$

$$\text{Tr} [d\psi d\bar{\psi}] = 4 \{(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot b)(c \cdot d)\} . \quad (\text{D.21})$$

Für beliebige Vierer-Vektoren  $a_i$  gilt

für  $n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Tr} [d_1 d_2 \cdots d_{2n+1}] = 0 , \quad (\text{D.22})$$

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [d_1 d_2 \cdots d_{2n}] &= (a_1 \cdot a_2) \text{Tr} [d_3 d_4 \cdots d_{2n}] - (a_1 \cdot a_3) \text{Tr} [d_2 d_4 \cdots d_{2n}] \\
 &\quad + \cdots + (a_1 \cdot a_{2n}) \text{Tr} [d_2 d_3 \cdots d_{2n-1}] .
 \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

In vielen speziellen Fällen kann man die Spur einfacher berechnen. Es gibt noch eine sehr nützliche Relation, die man aus der Antikommunität der  $\gamma$ -Matrizen herleiten kann. Diese Relation ist

$$d\psi = 2(ab) - \psi d \quad , \quad d\bar{\psi} = a^2 . \quad (\text{D.24})$$

Falls  $a$  und  $b$  antikommutieren (bzw.  $(ab) = 0$ ), dann erhält man eine noch einfachere Relation

$$d\psi = -\bar{\psi}d . \quad (\text{D.25})$$

### Theorem 3

Für jedes Produkt von  $\gamma$ -Matrizen gilt

$$\text{Tr} [\gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \cdots \gamma^{\mu_k}] = \text{Tr} [\gamma^{\mu_k} \cdots \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_1}] , \quad (\text{D.26})$$

$$\text{Tr} [d_1 d_2 \cdots d_k] = \text{Tr} [d_k \cdots d_2 d_1] . \quad (\text{D.27})$$

Diese kann auch auf Produkte, welche  $\gamma^5$  enthalten, ausgedehnt werden. Hier stehen einige wichtige Formeln

$$\text{Tr} [\gamma^5] = \text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu] = \text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] = 0 , \quad (\text{D.28})$$

$$\text{Tr} [\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\pi] = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\pi} . \quad (\text{D.29})$$

Hier werden die wichtigsten Formeln, die oft in dieser Arbeit benutzt wurden, besonders bei der Berechnung von Matrixelementen, aufgelistet

$$Tr \left[ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \right] = 4 \left( g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu} \right) , \quad (D.30)$$

$$Tr \left[ d\gamma^\alpha \not{b} \gamma^\beta \right] = 4 \left( a^\alpha b^\beta - (a \cdot b) g^{\alpha\beta} + a^\beta b^\alpha \right) , \quad (D.31)$$

$$Tr \left[ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^5 \right] = -4 i g^{\mu\alpha\nu\beta} , \quad (D.32)$$

$$Tr \left[ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \cdot Tr [\gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\pi \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] = 64 g_\rho^\mu g_\pi^\nu , \quad (D.33)$$

$$Tr \left[ d\gamma^\alpha \not{b} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \cdot Tr [\not{c} \gamma_\alpha d\gamma_\beta (1 - \gamma_5)] = 64 (a \cdot c) (b \cdot d) , \quad (D.34)$$

$$Tr \left[ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \cdot Tr [\gamma_\rho \gamma_\alpha \gamma_\pi \gamma_\beta (1 - \gamma_5)] = 64 g_\rho^\mu g_\pi^\nu , \quad (D.35)$$

$$Tr \left[ d\gamma^\alpha \not{b} \gamma^\beta \right] \cdot Tr [\not{c} \gamma_\alpha d\gamma_\beta] = 32 [(a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)] , \quad (D.36)$$

$$Tr \left[ d\gamma^\alpha \not{b} \gamma^\beta \gamma^5 \right] \cdot Tr [\not{c} \gamma_\alpha d\gamma_\beta \gamma_5] = 32 [(a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)] , \quad (D.37)$$

$$Tr \left[ d\gamma^\alpha \not{b} \gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \cdot Tr [\not{c} \gamma_\alpha d\gamma_\beta (1 - \gamma_5)] = 64 (a \cdot c) (b \cdot d) , \quad (D.38)$$

$$Tr \left[ d\gamma^\alpha \not{b} \gamma^\beta \right] \cdot Tr [\not{c} \gamma_\alpha d\gamma_\beta \gamma^5] = 32 i a^\mu b^\nu c^\rho d^\pi \epsilon^{\rho\mu\pi\nu} , \quad (D.39)$$

$$Tr \left[ d\gamma^\alpha \not{b} \gamma^\beta \right] \cdot Tr [\gamma_\alpha \gamma_\beta] = -32 (a \cdot b) , \quad (D.40)$$

$$\begin{aligned} & Tr \left[ d\not{b} \not{c} \gamma^\alpha d\gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] + Tr \left[ \not{c} \not{b} d\gamma^\alpha d\gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] \\ &= 2(ab) \left[ \not{c} \gamma^\alpha d\gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] - 2(ca) \left[ \not{b} \gamma^\alpha d\gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right] + 2(bc) \left[ d\gamma^\alpha d\gamma^\beta (1 - \gamma^5) \right]. \end{aligned} \quad (D.41)$$

## Anhang E

# Fortran-Programm zur Berechnung der differentiellen Zerfallsrate

In diesem Anhang wird das Programm, mit dem man die differentielle Zerfallsrate (das Energiespektrum der Photonen) ausgerechnet hat, kurz vorgestellt:

```
PROGRAM numerik
INTEGER ndim, ncomp, flags, mineval, maxeval, neval, fail, & nstart, nincrease
PARAMETER (ndim = 4)
PARAMETER (ncomp = 1)
PARAMETER (mineval = 0)
PARAMETER (maxeval = 50000)
PARAMETER (nstart = 1000)
PARAMETER (nincrease = 500)
DOUBLE PRECISION epsrel, epsabs, integral, error(ncomp),
& prob(ncomp)
PARAMETER (epsrel = 1.D - 3)
PARAMETER (epsabs = 1.D - 12)
EXTERNAL integrand
REAL kappa
COMMON/diff/kappa
DO kappa = 0.1, 1.0, 0.1
CALL vegas(ndim, ncomp, integrand,
```

ANHANG E. FORTRAN-PROGRAMM ZUR BERECHNUGN DER DIFFERENTIELLEN ZERFALLS

```
&  epsrel, epsabs, verbose, mineval, maxeval,  
&  nstart, nincrease,  
&  neval, fail, integral, error, prob)  
PRINT '(D12.5, " + - ", D12.5, "p = ", F8.3)',  
&  integral, error(1), prob(1)  
ENDDO  
STOP  
END  
C*****  
SUBROUTINE integrand(ndim, x, ncomp, f)  
IMPLICIT NONE  
INTEGER ndim, ncomp  
DOUBLE PRECISION x(4), f(1)  
REAL om, betae, me, Eemax, Ee, le, xkmax, xkmin, xk,  
&  xnu, phi, klnu, Enu, mp, mn, pi, M, Ma, Mb, Mmix,  
&  lambda, e, Gf, gv, kappa, taun, beta, x1, x2  
COMMON/diff/kappa  
mp = 938.27200  
mn = 939.56533  
me = 0.510998902  
taun = 1.3461E + 24    =  $\tau_n$   
Gf = 1.16639E - 11  
gv = 0.985619  
e = 0.302822  
pi = 3.141592653589793  
lambda = 1.267  
om = kappa * me  
x1 = 0.6  
x2 = 1.5  
CALL isprob(x1, x2, Eemax)  
Ee = (Eemax - me) * x(1) + me  
le = sqrt(Ee ** 2 - me ** 2)  
xkmax = 1.0  
xkmin = -1.0  
xk = (xkmax - xkmin) * x(2) + xkmin
```

ANHANG E. FORTRAN-PROGRAMM ZUR BERECHNUGN DER DIFFERENTIELLEN ZERFALLS

```

IF (xkmin.gt.-1)THEN
write(*,*) xkmin,Ee,om,x(1)
ENDIF
xnu = 2*x(3)-1
phi = 2*pi*x(4)
klnu = Sqrt((1-xk**2)*(1-xnu**2))*cos(phi)+xk*xnu
Enu = (mn**2+me**2-mp**2-2*mn*(Ee+om)+2*Ee*om
& -2*le*om*xk)/(2*(mn-Ee-om-le*xnu+om*klnu))
Ma = (1/((Ee*om-le*om*xk)**2))*mn*mp*(me**2-Ee*om+le*om*xk)
& *((1+3*lambda**2)*Enu*(Ee+om)
& +(1-lambda**2)*(le*Enu*xnu+Enu*om*klnu))
Mb = (1/(mp*om)**2)*(mn*mp**3)*((1+3*lambda**2)*Enu*Ee
& +(1-lambda**2)*le*Enu*xnu)
Mmix = (1/(mp*om*(Ee*om-le*om*xk)))
& *mn*mp**2*((1+3*lambda**2)*Enu
& *(2*Ee**2+Ee*om-(Ee*om-le*om*xk))
& +(1-lambda**2)*(2*Ee*Enu*le*xnu+Ee*Enu*om*klnu))
M = -64*(Ma+Mb-Mmix)
f(1) = me*taun*(e**2*Gf**2*gv**2/2)*
& (mp/(4*(2*pi)**6))*om*le*(Eemax-me)*(xkmax-xkmin)
& *2*(2*pi)*Enu*M/(mn-Ee-om+le*xnu+om*klnu)
RETURN
END
C ****
Intervallschachtellungsmethode zur Bestimmung der Nullstelle  $x_0 \in [x_1, x_2]$  von  $g(x)$ 
SUBROUTINE isprob(x1,x2,x0)
IMPLICIT NONE
REAL x0,x1,x2,epsilon,fehler,g
epsilon = 0.000001
DO
fehler = abs(x2-x1)/2.0
IF (fehler.le.epsilon) exit
x0 = (x1+x2)/2.0
IF (g(x0)*g(x1).lt.0.0) THEN
x2 = x0

```

ANHANG E. FORTRAN-PROGRAMM ZUR BERECHNUGN DER DIFFERENTIELLEN ZERFALLS

```
ELSE
x1 = x0
fehler = 0.5 * fehler
ENDIF
ENDDO
x0 = (x1 + x2)/2.0
RETURN
END
C ****
FUNCTION g(x)
IMPLICIT NONE
REAL g,x
REAL mn,mp,me,om
REAL kappa
COMMON/diff/kappa
mp = 938.27200
mn = 939.56533
me = 0.510998902
om = kappa * me
g = x - (mn ** 2 + me ** 2 - mp ** 2 - 2 * mn * om) / (2 * (mn - om *
& (1 + (sqrt(x ** 2 - me ** 2) / x))))
RETURN
END
C ****
SUBROUTINE Msq(le,lnu,pp,p,k,b)
IMPLICIT NONE
REAL le(4),lnu(4),pp(4),p(4),k(4),ww(4),
& w(2),h(2),b,lambda,ndot(2),epsone(4),epstwo(4),kT,betk
INTEGER lambdae,lambdanu,lambdap,lambdan,lambdaeps
COMPLEX ss(4),sk(4),skp,eps(4),m(2),t,dot(2)
lambda = 1.267
b = 0
DO lambdae = -1,1,2
DO lambdanu = -1,1,2
DO lambdap = -1,1,2
```

ANHANG E. FORTRAN-PROGRAMM ZUR BERECHNUGN DER DIFFERENTIELLEN ZERFALLS

```
DO lambdan = -1, 1, 2
DO lambdaeps = -1, 1, 2  Polarisationssumme der Photonen
CALL epsil(k, eps, lambdaeps)
CALL cdot(le, eps, dot(1))
CALL cdot(pp, eps, dot(2))
CALL rdot(le, k, ndot(1))
CALL rdot(pp, k, ndot(2))
CALL omega(le, lambdae, ww(1))
CALL omega(lnu, lambdanu, ww(2))
CALL omega(pp, lambdap, ww(3))
CALL omega(p, lambdan, ww(4))
CALL omeg(pp, lambdap, w(1))
CALL omeg(p, lambdan, w(2))
CALL s1(le, lnu, lambdae, lambdanu, ss(1))
CALL s1(pp, p, lambdap, lambdan, ss(2))
CALL s1(le, p, lambdae, lambdan, ss(3))
CALL s1(pp, lnu, lambdap, lambdanu, ss(4))
CALL s2(le, eps, k, lnu, lambdae, lambdanu, sk(1))
CALL s2(le, eps, k, p, lambdae, lambdan, sk(2))
CALL s2(pp, eps, k, p, lambdap, lambdan, sk(3))
CALL s2(pp, eps, k, lnu, lambdap, lambdanu, sk(4))
CALL s3(pp, eps, k, lnu, lambdap, lambdanu, skp)
h(1) = ((1 + lambda)/2) * lambdanu * ww(1) * ww(2) * ww(3) * ww(4)
h(2) = ((1 - lambda)/2) * lambdanu * ww(1) * ww(2) * w(1) * w(2)
m(1) = (4/ndot(1)) * (h(1) * (2.0 * dot(1) * (ss(1) * ss(2) - ss(3) * ss(4)))
&   + (sk(1) * ss(2) - sk(2) * ss(4)))
&   + h(2) * (2.0 * dot(1) * ss(3) * ss(4) + sk(2) * ss(4)))
m(2) = (4/ndot(2)) * (h(1) * (2.0 * dot(2) * (ss(1) * ss(2) - ss(3) * ss(4)))
&   + (ss(1) * sk(3) - ss(3) * sk(4)))
&   + h(2) * (2.0 * dot(2) * ss(3) * ss(4) + ss(3) * skp))
t = m(1) - m(2)
b = b + t * CONJG(t)
ENDDO
ENDDO
ENDDO
```

ANHANG E. FORTRAN-PROGRAMM ZUR BERECHNUGN DER DIFFERENTIELLEN ZERFALLS

```
ENDDO
ENDDO
b = 0.5 * b
RETURN
END
C ****
SUBROUTINE s1(p1,p2,lambda1,lambda2,s)
IMPLICIT NONE
INTEGER lambda1,lambda2
REAL p1(4),p2(4)
COMPLEX chi1(2),chi2(2),s
CALL spinor(p1,lambda1,chi1)
CALL spinor(p2,lambda2,chi2)
s = CONJG(chi1(1)) * chi2(1) + CONJG(chi1(2)) * chi2(2)
RETURN
END
C ****
SUBROUTINE spinor(p,lambda,chi)
IMPLICIT NONE
INTEGER lambda
COMPLEX chi(2)
REAL anorm,absp,absval,p(4)
absp = absval(p)
anorm = SQRT(2 * absp * (absp + p(3)))
IF (absp + p(3).LT.1.0E - 6) THEN
IF (lambda.EQ.1)THEN
chi(1) = CMPLX(0.0,0.0)
chi(2) = CMPLX(1.0,0.0)
ELSE
chi(1) = CMPLX(-1.0,0.0)
chi(2) = CMPLX(0.0,0.0)
ENDIF
ELSE
IF (lambda.EQ.1) THEN
chi(1) = CMPLX(absp + p(3),0.0)/anorm
```

ANHANG E. FORTRAN-PROGRAMM ZUR BERECHNUGN DER DIFFERENTIELLEN ZERFALLS

```
chi(2) = CMPLX(p(1),p(2))/anorm
ELSE
chi(1) = CMPLX(-p(1),p(2))/anorm
chi(2) = CMPLX(absp + p(3),0.0)/anorm
ENDIF
ENDIF
RETURN
END
C ****
FUNCTION absval(p)
IMPLICIT NONE
REAL p(4)
REAL absval
absval = SQRT(p(1) * p(1) + p(2) * p(2) + p(3) * p(3))
RETURN
END
C ****
SUBROUTINE s2(p1,k1,k2,p2,lambda1,lambda2,s)
IMPLICIT NONE
INTEGER lambda1,lambda2
REAL p1(4),p2(4),k2(4)
COMPLEX chi1(2),chi2(2),v(2),k1(4),s
CALL spinor(p1,lambda1,chi1)
CALL spinor(p2,lambda2,chi2)
v(1) = (k2(4) - k2(3)) * chi2(1) + CMPLX(-k2(1),k2(2)) * chi2(2)
v(2) = CMPLX(-k2(1),-k2(2)) * chi2(1) + (k2(4) + k2(3)) * chi2(2)
chi2(1) = (k1(4) + k1(3)) * v(1) + (k1(1) - (0.0,1.0) * k1(2)) * v(2)
chi2(2) = (k1(1) + (0.0,1.0) * k1(2)) * v(1) + (k1(4) - k1(3)) * v(2)
s = CONJG(chi1(1)) * chi2(1) + CONJG(chi1(2)) * chi2(2)
RETURN
END
C ****
SUBROUTINE s3(p1,k1,k2,p2,lambda1,lambda2,s)
IMPLICIT NONE
INTEGER lambda1,lambda2
```

ANHANG E. FORTRAN-PROGRAMM ZUR BERECHNUGN DER DIFFERENTIELLEN ZERFALLS

```
REAL p1(4),p2(4),k2(4)
COMPLEX chi1(2),chi2(2),v(2),k1(4),s
CALL spinor(p1,lambda1,chi1)
CALL spinor(p2,lambda2,chi2)
v(1) = (k2(4) + k2(3)) * chi2(1) + CMPLX(k2(1), -k2(2)) * chi2(2)
v(2) = CMPLX(k2(1), k2(2)) * chi2(1) + (k2(4) - k2(3)) * chi2(2)
chi2(1) = (k1(4) - k1(3)) * v(1) + (-k1(1) + (0.0, 1.0) * k1(2)) * v(2)
chi2(2) = (-k1(1) - (0.0, 1.0) * k1(2)) * v(1) + (k1(4) + k1(3)) * v(2)
s = CONJG(chi1(1)) * chi2(1) + CONJG(chi1(2)) * chi2(2)
RETURN
END
C*****
SUBROUTINE omega(p,lambda,ww)
IMPLICIT NONE
INTEGER lambda
REAL p(4),ww
ww = SQRT((p(4) - lambda * SQRT(p(1) * p(1) + p(2) * p(2) + p(3) * p(3))))
RETURN
END
C*****
SUBROUTINE omeg(p,lambda,w)
IMPLICIT NONE
INTEGER lambda
REAL p(4),w
w = SQRT((p(4) + lambda * SQRT(p(1) * p(1) + p(2) * p(2) + p(3) * p(3))))
RETURN
END
C*****
SUBROUTINE cdot(p,q,pq)
IMPLICIT NONE
REAL p(4)
COMPLEX q(4),pq
pq = p(4) * q(4) - p(1) * q(1) - p(2) * q(2) - p(3) * q(3)
RETURN
END
```

ANHANG E. FORTRAN-PROGRAMM ZUR BERECHNUGN DER DIFFERENTIELLEN ZERFALLS

```
C*****  
SUBROUTINE rdot(p, q, pq)  
IMPLICIT NONE  
REAL p(4), q(4), pq  
pq = p(4) * q(4) - p(1) * q(1) - p(2) * q(2) - p(3) * q(3)  
RETURN  
END  
C*****  
SUBROUTINE epsil(k, eps, lambdaeps)  
IMPLICIT NONE  
INTEGER lambdaeps  
REAL k(4), epsone(4), epstwo(4), kT, betk  
complex eps(4)  
kT = sqrt(k(1) ** 2 + k(2) ** 2)  
betk = sqrt(k(1) ** 2 + k(2) ** 2 + k(3) ** 2)  
epsone(1) = k(1) * k(3) / (kT * betk)  
epsone(2) = k(2) * k(3) / (kT * betk)  
epsone(3) = -(k(1) ** 2 + k(2) ** 2) / (kT * betk)  
epsone(4) = 0.0  
epstwo(1) = -k(2) / kT  
epstwo(2) = k(1) / kT  
epstwo(3) = 0.0  
epstwo(4) = 0.0  
eps(1) = (-lambdaeps * epsone(1) - (0.0, 1.0) * epstwo(1)) / SQRT(2.0)  
eps(2) = (-lambdaeps * epsone(2) - (0.0, 1.0) * epstwo(2)) / SQRT(2.0)  
eps(3) = (-lambdaeps * epsone(3) - (0.0, 1.0) * epstwo(3)) / SQRT(2.0)  
eps(4) = (-lambdaeps * epsone(4) - (0.0, 1.0) * epstwo(4)) / SQRT(2.0)  
RETURN  
END  
C*****
```

# Literaturverzeichnis

- [1] Veronique Bernard,S. Gardner,Ulf-G. Meißner,C. Zhang: *Radiative neutron  $\beta$ -decay in effective field theory.* arXiv:hep-ph/0403241 v2 28 Apr 2004
- [2] K. Hagiwara und D. Zeppenfeld: *Helicity amplitudes for heavy lepton production in  $e^+e^-$  annihilation.* Nucl. Phys. B274 (1986)
- [3] Christian Weinheimer: *Direct neutrino mass search.* arXiv:hep-ex/0210050v2 3Dec 2002
- [4] E. Fermi: *Versuch einer Theorie der  $\beta$ -Strahlen* Zeitschrift für Physik 88(1934) 161-177
- [5] R.P. Feynman, M. Gell-Mann: *Theory of the Fermi Interaction.* Phys. Rev.,**Volume 109**,page 193, 1958
- [6] F. Mandl, G. Shaw: *Quantenfeldtheorie.* Aula-Verlag, 1. Auflage (1993)
- [7] O. Nachtmann: *Elementarteilchenphysik, Phänomene und Konzepte.* Vieweg-Verlag (1986)
- [8] Donald H. Peskin, Daniel V. Shroeder: *Introduktion to High Energy Physics.* Addison-Wesley Publishing Company (1972)
- [9] Franz Gross: *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory.* John Willey and Sons, INC. (1993)
- [10] M. E. Peskin, D. V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory.* Westview Press 1995
- [11] James D. Bjorken, Sidney D. Drell: *relativistische Quantentheorie.* Deutsche Übersetzung,Bibliographisches Institut. Mannheim 1967

- [12] K. Bethge, G. Walter, B. Wiedemann: *Kernphysik, Eine Einführung*. 2. Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2001)
- [13] Theo Mayer-Kuckuck: *Kernphysik, Eine Einführung*. 7. Auflage, Teubner-Verlag (2002)
- [14] Erick Lohrmann: *Hochenergiephysik*. 3. Auflage, Teubner-Verlag (1986)
- [15] J. Bienlein, R. Wiesendanger: *Einführung in die Struktur der Materie-Kerne, Teilchen, Moleküle, Festkörper*. 1. Auflage, Teubner-Verlag (2003)
- [16] Journal of Physics G: *Nuclear and Particle Physics*. Volume 33 July 2006
- [17] <http://www.unizar.es/lfnae/ipaginas/ip0300.html>
- [18] I. M. Sobol, *Die Monte-Carlo Methode*, 4. Auflage, Deutscher Verlag der Wissenschaften
- [19] Christian Theis, Winfried Kernbichler: *Grundlagen der Monte-Carlo Methoden*.  
<http://www.itp.tu-graz.ac.at/MML/Montecarlo/MCIntro.pdf>
- [20] Thomas Hahn: *Cuba-a library for multidimensional numerical integration*. arXiv:hep-ph/0404043 v2 26 Jan 2005

# Danksagung

Das gesamte Studium und das Schreiben dieser Arbeit war und ist für mich eine der schönsten Zeiten meines Lebens bis jetzt. Aber ich kann nicht sagen, dass es allein meine eigene Leistung gewesen war. Ich muss mich an dieser Stelle bei Vielen bedanken

- Herrn Prof. Dr. Owe Philipsen für das interessante Thema und die nette Betreuung.  
Ohne seine Hilfe wäre es mir nicht möglich gewesen, diese Arbeit zu schreiben,
- den Herren Mansour und Khosrow Alikhani, die mich während meines Studiums unterstützt haben,
- Herrn Alexander Gebel für schöne interessante physikalische Diskussionen, die zu einer Vertiefung und einem erweiterten Verständnis der Stoffs führten, und Herrn Rashid Jafari Vardani für seine Hilfe außerhalb des physikalischen Rahmens,
- Herrn Jens Langelage und Herrn Marcus Tassler, für die angenehme Atmosphäre in unserem Büro und Herrn Tassler für die sprachliche Korrektur.

Schließlich bedanke ich mich herzlich bei meinen Eltern, Hamed, Meysam und Imola, die ein Teil meines Lebens sind.

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit ohne fremde Hilfe angefertigt und nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Münster, Februar 2007