

SÖNKE WISSEL

**Die graphische Charakter- und
Hoppingparameterentwicklung der $N=1$
 $SU(2)$ -Super-Yang-Mills-Theorie in
 d Dimensionen**

Januar 2002

**Die graphische Charakter- und
Hoppingparameterentwicklung der N=1
SU(2)-Super-Yang-Mills-Theorie in
d Dimensionen**

als Diplomarbeit vorgelegt von
Sönke Wissel

Januar 2002



Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
Wilhelm-Klemm-Str.9, D-48149 Münster

Diese korrigierte Version unterscheidet sich nur geringfügig von derjenigen, welche dem Prüfungssekretariat vorgelegt wurde. Dies betrifft vor allem Tippfehler und einen Vorzeichenfehler in Gleichung (6.51).

Münster, im März 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Der historische Hintergrund	3
2 Einführung in die Supersymmetrie	11
2.1 Die \mathbb{Z}_2 -graduierte Poincaré-Algebra	11
2.1.1 Die graduierte Liealgebra	12
2.1.2 Die Poincaré-Superalgebra	12
2.2 SUSY-Teilchen und ihre Klassifizierung	14
2.2.1 Das Teilchenspektrum der Poincaré-Symmetrie	14
2.2.2 Das Teilchenspektrum der Poincaré-Supersymmetrie	14
2.2.3 Das chirale Supermultiplett	16
2.2.4 Das Vektor-Supermultiplett	16
2.3 Superraum und Superfelder	17
2.3.1 Allgemeine Superfelder	19
2.3.2 Eingeschränkte Superfelder	20
2.4 Supersymmetrische Lagrange-Dichten	22
2.4.1 Die abelschen SUSY-Eichtransformationen	22
2.4.2 Nicht-abelsche SUSY-Eichtheorien	24
2.5 Die Gluino-Masse und die Massenmultipletts	27
3 Die Grassmann-Algebra und ihre Anwendungen	29
3.1 Die komplexe Grassmann-Algebra	29
3.1.1 Differentiation nach Grassmann-Variablen	30
3.1.2 Integration über Grassmann-Variablen	31
3.1.3 Komplex-grassmannwertige Pfadintegrale in der freien Dirac-Theorie	34

3.2	Die reelle Grassmann-Algebra	36
3.2.1	Die reelle Grassmann-Algebra in der freien N=1 SUSY Yang-Mills-Theorie mit Majorana-Fermionen	38
4	Die N=1 supersymmetrische Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter	43
4.1	Die fermionische Gitterwirkung für Majorana-Fermionen (Wilson-Dirac-Wirkung)	44
4.1.1	Die Fermionenverdopplung	45
4.2	Gitter-Eichtheorie	47
4.2.1	Das Konzept der Paralleltransporter	48
4.2.2	Die Wilson-Wirkung	50
4.3	Majorana-Fermionen in der adjungierten Darstellung	52
4.4	Der Kontinuumsimes	56
5	Die Gruppe SU(N) und ihre Integration	59
5.1	Die Gruppe der SU(N)-Matrizen	59
5.2	Die Gruppenintegration der SU(N) in fundamentaler Darstellung	61
5.3	Die Gruppenintegration der SU(2) in adjungierter Darstellung	67
6	Die Hoppingparameter-Entwicklung	71
6.1	HPE der fermionischen Wirkung	72
6.1.1	Die Spitze	81
6.1.2	Subgraphen \mathcal{S} und ihre Windungszahlen	82
6.2	HPE der effektiven fermionischen Wirkung	83
7	Die freie Energie der SYM	89
7.1	Die freie Energie der Doppelentwicklung	93
7.2	Die freie Energie der reinen SU(2)-Eichtheorie	95
7.3	Die Doppelentwicklung in 0. Ordnung von β	96
7.4	Die Doppelentwicklung in β und K	98
7.4.1	Die Plaquettierung der Minimalflächen	98
7.4.2	Die äußere Plaquettierung	100
8	Die Gluino-Glueball Masse	113
8.1	Der Graph der führenden Ordnungen in K und β	113
8.2	Die ersten Korrekturen in β	116
8.3	Korrekturen in K	117

Zusammenfassung und Ausblick	119
A Die $SU(N_c)$ -Farbalgebra	121
A.1 Die fundamentale Darstellung	122
A.2 Die adjungierte Darstellung	123
B Das Momenten-Kumulanten Theorem	125
C Beweis II	127
D Die Gamma-Matrizen	129
E Höhere $SO(3)$ -Gruppenintegrale	131
Literaturverzeichnis	133
Danksagungen	139

Einleitung

Mit den Gitterfeldtheorien und den Monte-Carlo-Simulationen auf einer gitterregularisierten Raumzeit hat die Physik der letzten Jahrzehnte wertvolle Instrumente zur Analyse physikalischer Feldtheorien außerhalb des perturbativen Regimes und damit für praktisch beliebig starke Kopplungen in die Hand bekommen. Für eine wichtige Klasse von Modellsystemen, wie den nicht-abelschen Eichtheorien - den Yang-Mills-Theorien -, die unter anderem zur Beschreibung des stark wechselwirkenden Sektors des Standardmodells der Teilchenphysik benötigt werden, konnten damit die vorhergesagten Eigenschaften des Color-Confinement sowie die spontane chirale Symmetriebrechung erstmals numerisch bestätigt werden. Zusätzlich konnten mit immer leistungsfähigeren Parallelrechnern approximativ Werte der Massen der gebundenen, farbneutralen Zustände aus den niederenergetischen Massenmultipletts berechnet werden.

Nicht zuletzt auch durch diese Ergebnisse wird das Standardmodell (SM) der Elementarteilchen heute als das gültige Modell zur Beschreibung der Elementarteilchen und ihrer elektromagnetischen, schwachen und starken Wechselwirkungen angesehen. Seine Voraussagen konnten experimentell mit teilweise sehr hohen Genauigkeiten bestätigt werden. Dennoch besitzt es Unstimmigkeiten und es bleiben weiterhin Fragen auf dem Weg zu einer vereinheitlichten Theorie aller vier Wechselwirkungen, der „Theory of Everything“ (ToE), offen. Einen möglichen Lösungsansatz bietet die Supersymmetrie, nicht zuletzt, um auch die im SM noch fehlende Gravitationskraft mit den anderen Kräften zu vereinheitlichen.

Die einfachste bekannte supersymmetrisch erweiterte reine Eichtheorie ist die $N=1$ $SU(2)$ Super-Yang-Mills-Theorie (SYM), die neben den drei Farb-Eichfeldern, den Eich-Bosonen¹, noch drei masselose Majorana-Fermionen in der adjungierten Darstellung, die Gauginos², enthält. In einer von G.CURCI und G.VENEZIANO vorgeschlagenen Version auf dem Gitter steht sie daher auch im Zentrum der numerischen Untersuchungen der DESY-Münster-Kollaboration. Diese sollte u.a. klären, ob mit einem solchen Ansatz die zunächst durch das Gitter noch gebrochene Supersymmetrie beim Übergang zum Kontinuum restauriert werden kann. Hierzu wurde in den Monte-Carlo-Simulationen ein von M.LÜSCHER zur Beschreibung von Gitterfermionfeldern entwickelter Multi-Bosonischer Algorithmus verwendet, der Rechnungen auch in „ungequenchter Approximation“ ermöglichte. Ein Nachteil dieser Rechnungen ist aber eine von null verschiedene Gluinomasse $m_{\tilde{g}}$, die neben einer weichen Supersymmetriebrechung auch noch die chirale Symmetrie bricht. Die vermuteten Folgen einer solchen Symmetriebrechung, wie die Aufspaltung der niederenergetischen Massenmultipletts sowie ein Phasenübergang für das Gluinokondensat im

¹(engl. Gauge-Boson), im Kontext der starken Wechselwirkung auch Gluonen genannt.

²supersymmetrischen Partnerteilchen der Gluonen (Gluinos)

Grenzfall $m_{\tilde{g}} \rightarrow 0$, wurden untersucht und konnten auch beobachtet werden.

Dennoch ist es wünschenswert, auch auf analytischem Wege die Ergebnisse für starke Kopplungen und große Gluino-Massen, also entfernt vom Kontinuumslimit, untermauern zu können. Dies ist eine wesentliche Aufgabe meiner Arbeit. Im Mittelpunkt steht dabei die approximative Berechnung der freien Energie der SYM, sowie die Masse des Gluino-Glueballs $m_{\tilde{g}g}$, eines aus der effektiven Wirkung von G.VENEZIANO und S.YANKIELOWICZ [VY] hervorgehenden Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens. Dazu werden zwei Verfahren, die als Hoch-Temperaturentwicklungen in der statistischen Physik schon lange bekannt sind, die Hoppingparameterentwicklung (HPE) und die Charakter-Entwicklung der SU(2)-Gruppe verwendet. Letztere hat sich schon erfolgreich in der reinen Eichtheorie ohne fermionische Freiheitsgrade bewährt. Die Untersuchungen sind eine Ergänzung der Doktorarbeit von S.LUCKMANN (2001).

Die Arbeit gliedert sich in die folgenden Teile: Nach einer historischen Einordnung des Themas wird im zweiten Kapitel eine Einführung in die Theorie der Supersymmetrie und ihre mathematische Beschreibung, hier speziell der SYM im Kontinuum, gegeben. Kapitel drei präsentiert dann mit dem Formalismus der reellen Grassmann-Algebra die Grundlage für die Rechnungen mit fermionischen Majorana-Feldern. Das vierte Kapitel entwickelt die Formulierung der SYM-Wirkung auf dem Gitter nach K.G.WILSON, G.CURCI und G.VENEZIANO, und I.MONTVAY mit den Gluino-Feldern in adjungierter Darstellung. Im Kapitel fünf werden die später benötigten SU(N)-Gruppenintegrale nach einem graphischen Verfahren von M.CREUTZ in fundamentaler und nach einem weiter entwickelten Verfahren in adjungierter Darstellung der SU(2) berechnet. In Kapitel sechs werden zwei äquivalente Formen einer Hoppingparameter-Entwicklung (HPE) der SYM formuliert, auf deren Grundlage dann im siebten Kapitel mit Hilfe der Charakter-Entwicklung und des Momenten-Kumulanten-Formalismus die freie Energie in achter Ordnung des Hoppingparameters K und der inversen Kopplung g^{-2} bzw. β berechnet wird. Im letzten Kapitel wird anhand eines Anwendungsbeispiels, der approximativen Bestimmung der Masse des Gluino-Glueballs, erneut die HPE und Charakter-Entwicklungen verwendet. Zum Schluss wird eine kurze Zusammenfassung der gewonnenen Ergebnisse und ein Ausblick auf weitere zukünftige Aufgabenstellungen gegeben.

Kapitel 1

Der historische Hintergrund

Von jeher ist der Mensch bestrebt, die Welt, in der er lebt, und das, was sie bewegt und im Inneren zusammenhält, zu untersuchen und zu verstehen. Und noch heute ist die Fülle an neueren Erkenntnissen aus allen Bereichen der modernen Wissenschaften schier unerschöpflich.

Diejenige Wissenschaft, die sich speziell mit den Bausteinen der Materie und den zwischen ihnen wirkenden Kräften beschäftigt, ist die Physik. Ihre Tradition geht zurück bis in die griechische Antike. So äußerte EMPEDOKLES (490-430 v.Chr.) die Vermutung, alle Dinge wären aus den vier Elementen Feuer, Wasser, Luft und Erde aufgebaut. Eine These, die sich über viele Jahrhunderte vor allem auch unter dem Einfluss der Kirchen, halten konnte. Eine Fortentwicklung dieser Elementenhypothese ist die atomistische Theorie des griechischen Naturphilosophen LEUKIPP um 440 v.Chr. und seinem Schüler DEMOKRITUS VON ABDERA (460-371 v. Chr.). Ihre Ideen, alle Körper seien aus unteilbaren Bausteinen zusammengesetzt, die sie Atome (atomos: unteilbar) nannten und die aufgrund ihrer unterschiedlichen Größe und Gestalt die charakteristischen Eigenschaften der makroskopischen Körper bestimmen sollten, konnten sich dagegen nicht durchsetzen. Erst die Chemiker des 17. Jahrhunderts, die durch genaue Wägungen der Massen von Reaktanden und Reaktionsprodukten bei chemischen Reaktionen herausfanden, dass ihre Ergebnisse am einfachsten erklärt werden könnten durch die Annahme, dass alle Stoffe aus Atomen bestehen, die sich zu Molekülen verbinden können, verhalfen der atomistischen Theorie zu ihrem eigentlichen Durchbruch.

Die Aufklärung der wahren Atomgröße von etwa 10^{-10}m gelang aber erst im 20. Jahrhundert. Durch viele unterschiedliche Experimente angeregt, setzte sich weiterhin die Vorstellung durch, die Atome seien doch nicht unteilbar, sondern selbst wieder aus elektrisch geladenen Teilchen, den negativen Elektronen und positiven Protonen, aufgebaut. H. HERTZ (1891) und P. LENARD (um 1900) konnten mit einem Strahl von Elektronen (Kathodenstrahlung) zeigen, dass diese Protonen im Atom konzentriert sein müssen und mit einer erheblichen Masse verbunden sind. Streuversuche mit den noch viel energiereicheren α -Teilchen von E. RUTHERFORD, H. GEIGER und E. MARSDEN in den Jahren 1906 bis 1913 und die Entdeckung des elektrisch neutralen Neutrons von J. CHADWICK 1931 vervollständigten zur damaligen Zeit das Bild über das Atom, das Rutherfordsche Atommodell. Danach sind die massenreichen Protonen und Neutronen, die Nuklide, im Atomkern mit einem Durchmesser von lediglich 10^{-14}m zentriert, während die relativ leichten Elektronen wie Kometen den Kern auf Parabelbahnen umlaufen und die fast

leere Hülle des Atoms bilden.

Aber auch Rutherfords Atommodell geriet schnell in eigentümliche Schwierigkeiten. So war es nicht einzusehen, warum alle Atome eines Elements mechanisch, chemisch und optisch völlig gleichartig sind, obwohl sie prinzipiell unterschiedliche Elektronenbahnen besitzen können. Außerdem müssten die kreisenden Elektronen durch die notwendigerweise emittierte elektromagnetische Strahlung (Hertz-Strahlung) kontinuierlich an Energie verlieren und unweigerlich in den Kern stürzen. N. BOHR tat 1913 mit seinem Modell den ersten Schritt zur Auflösung dieser Widersprüche, indem er zwei Postulate einführte, die der üblichen Mechanik und Elektrodynamik völlig fremd sind und erst später in der Quantenmechanik ihre tiefere Begründung fanden. Das erste Postulat fordert, dass Atome nicht alle Energien annehmen können, sondern nur in einer Reihe von diskreten, den stationären Energiezuständen, auftauchen. Beschreibt man das Elektron als Materiewelle, so muss zu einem solchen stationären Zustand des Atoms eine stehende Welle gehören. Durch diese Bedingung werden die Radien möglicher Kreisbahnen um den Kern gequantelt (1. Bohrsche Postulat). Eine elektromagnetische Energieabstrahlung des Atoms ist dann nur durch Sprünge des Elektrons auf niederenergetische Bahnen möglich, was so direkt zur Klärung der Atomspektren führte (2. Bohrsches Postulat).

Im Anschluss an die von J.C.MAXWELL 1865 formulierte Theorie des Elektromagnetismus, in der die Wirkungen von einem zum anderen Ort durch Felder übertragen wurden, formulierte P. DIRAC erstmals eine Wellengleichung, die es erlaubte, die Quantenmechanik mit der speziellen Relativitätstheorie A. EINSTEINS zu verbinden, und konnte damit die Existenz des Antiteilchens zum Elektron, genauer eines besetzten Zustandes im Spektrum negativer Energiezustände des freien Elektrons, voraussagen. Dieses Antiteilchen, das Positron, wurde dann 1932 tatsächlich von C.D.ANDERSON in der kosmischen Höhenstrahlung entdeckt und diente bald darauf J.-F.JOLIOT als ein Zerfallsprodukt zur Klärung gewisser Zerfälle künstlich radioaktiver Stoffe, der β -Zerfälle. Wesentlich länger dagegen hat es gedauert bis die theoretische Voraussage des Neutrinos 1931 von W.E.PAULI und E.FERMI experimentell bestätigt und damit die Energie-, Impuls- und Drehimpulsbilanz dieses Zerfalls in Ordnung gebracht werden konnte. Es folgten die Entdeckungen des Muons mit seinem Muon-Neutrino und des wesentlich schwereren Tauons mit seinem Neutrino. Elektron, Muon und Tauon zusammen mit ihren Neutrinos bilden die heute bekannten drei Familien (Generationen) der Leptonen. Sie unterscheiden sich in einer Eigenschaft, die man Flavour genannt hat.

Mit immer energiereicheren Beschleunigern erkannte man, dass auch die Protonen und Neutronen nicht einheitlich sind, sondern ihrerseits wieder aus neuen Teilchen, die man damals Partonen nannte, aufgebaut sein müssen. Um 1964 zeigten dann Y.NE'MAN, M.GELL-MANN und Z.V.ZWEIG, wie man die immer größer werdende Zahl von Teilchen - schon damals waren es mehr als 100 - auf lediglich drei Grundbausteine, die M.GELL-MANN Quarks¹ nannte, zurückführen konnte. Aber es schien, als habe sich das Quarkmodell mit der gleichen Krankheit infiziert, die es eigentlich heilen sollte, nämlich einer Wucherung der Anzahl verschiedener Teilchen. Schließlich hat man bis heute sechs verschiedene Quarks gefunden. Auch sie lassen sich, wie die Leptonen, in drei Generationen und sechs unterschiedlichen Flavour-Gruppen zusammenfas-

¹Ihr Name entstammt einem Buch von J. JOYCE

„Three quarks for muster Mark, sure he hasn't got much of a bark, and sure any he has it's all beside mark“.
(Zitat aus Finnegans Wake)

sen (siehe Tabelle 1.1). Darüberhinaus besitzt jedes Quark nach einer Idee von M.GELL-MANN, beschrieben durch die Theorie der starken Wechselwirkung, die **Q**uanten **C**hromo **D**ynamik, zusätzlich noch eine von drei Farbladungen (rot, grün, blau)².

Generationen		1		2		3	
Flavour		1	2	3	4	5	6
Quarks	r						
Color	g	u	d	s	c	b	t
	b						
Leptonen		e	ν_e	μ	ν_μ	τ	ν_τ

Tabelle 1.1: Die fermionischen Elementarteilchen (Materieteilchen)

Eine Eigenschaft dieser Quarks ist, dass man sie offenbar nicht isoliert beobachten kann, weil sie immer in farbneutralen Bindungszuständen, den sogenannten Hadronen, gefangen sind (Confinement). Ungeachtet dieser Eigenschaft gehen doch alle Rechnungen von ihrer Existenz aus und bestätigen tatsächlich die experimentellen Ergebnisse aus diesem Bereich.

Aber auch das theoretische Verständnis der Wechselwirkungen zwischen den Materieteilchen, den Quarks und den Leptonen, stammt aus dieser Zeit. Danach sind uns heute vier verschiedene fundamentale Wechselwirkungen bekannt. Zum einen die Gravitationskraft, die dafür sorgt, dass sich massive Körper anziehen, während die schon von J.C.MAXWELL beschriebene elektromagnetische Kraft lediglich auf geladene Teilchen wirkt. Neben diesen beiden schon früh bekannten Kräften gesellten sich noch die schon angesprochenen starken und die schwachen Wechselwirkungen hinzu, die mit ihren kurzen Reichweiten nur auf spezielle Teilchen wirken. So sorgt die starke Kraft für den Zusammenhalt der Quarks im Atomkern, während die schwache Kraft für den radioaktiven β -Zerfall einiger Atomkerne verantwortlich ist. Die charakteristischen Merkmale dieser Kräfte und ihrer Austauschteilchen zeigt Tabelle 1.2.

Wechselwirkung	Gravitation	Elektromagnetische	Starke	Schwache
Reichweite	∞	∞	$10^{-15}m$	$< 10^{-17}m$
Stärke (α)	10^{41}	$\frac{1}{137}$	1 – 10	10^{-14}
Austauschteilchen	Gravitonen ³	Photonen γ	Gluonen	W^\pm und Z^0 -Bosonen
Spin	2	1	1	1
WW zwischen	allen	elektr. Ladungen	Farbladungen, Hadronen	Leptonen und Hadronen

Tabelle 1.2: Die Reichweiten und Stärken der vier fundamentalen Wechselwirkungen und ihre Austauschteilchen (α Kopplungskonstante bei 0GeV)

²Diese sind ursprünglich eingeführt worden, um die scheinbare Verletzung des Pauli-Prinzips im Δ^{++} -Teilchen, einem Spin-3/2-Baryon aus drei u-Quarks im Grundzustand, zu erklären.

In der Quantenfeldtheorie können die elektromagnetische, die schwache und die starke Theorie zusammen mit den wechselwirkenden Materie-Teilchen mit Hilfe von Lagrangedichten von Feldern beschrieben werden, die invariant gegenüber kontinuierlichen Raum-Zeit- und inneren Feldtransformationen sind. Nach dem NOETHER-THEOREM existiert dann zu jeder dieser Symmetrietransformation ein erhaltener Strom und mit ihm eine bestimmte Erhaltungsgröße. Die Rolle der Symmetrie eines Modells hat dadurch weitreichende Konsequenzen für die Beschreibung der Teilchen.

So wurden z.B. in dem Isospin-Modell mit einer inneren $SU(2)$ -Symmetrie Protonen und Neutronen in einem gemeinsamen Multiplett beschrieben, da sie in ihren Eigenschaften bezüglich der starken Wechselwirkung identisch sind. Die Isospin-Transformation wandelt dann Protonen in Neutronen und Neutronen in Protonen um, wobei der Isospin ($I=\frac{1}{2}$) die zugehörige Erhaltungsgröße ist.

Im Gegensatz zu der Raum-Zeit-unabhängigen, globalen Isospin-Symmetrie von Proton und Neutron entstammt die Theorie des quantisierten elektromagnetischen Feldes, die **Quanten Elektro Dynamik**, der Symmetrie der Lagrangedichte bezüglich lokaler $U(1)$ -Eichtransformation. Das Prinzip der Eichinvarianz fordert in diesem Fall, dass die Art der mathematischen Beschreibung eines physikalischen Sachverhaltes eines Beobachters an einem Ort nicht von der eines anderen Beobachters an einem anderen Ort abhängen darf. Mit anderen Worten, man fordert, dass die Theorie auch dann invariant bleibt, wenn die Felder an jedem Raum-Zeit-Punkt mit verschiedenen Gruppenelementen transformiert werden. Die dazu notwendige Kovarianz der Ableitung im kinetischen Term wird durch neu eingeführte Eichfelder gesichert, die selbst wieder in die Dynamik eingebunden werden und im Fall der QED die Photonen repräsentieren. Die ursprünglich freie Theorie wird zu einer wechselwirkenden.

Während die Transformationen der QED vertauscht werden können, weshalb man auch von abelschen Eichtransformationen spricht, sind die $SU(3)$ -Transformationen der Feldtheorie der QCD nicht abelsch. Dadurch tragen die Eichfelder, die Gluonen, wie die Quarks selbst Farbladungen und können miteinander wechselwirken. Ihre Zahl entspricht der Zahl der acht Generatoren der $SU(3)$ -Gruppe.

Der reine Eichanteil der QCD ist ein Prototyp der nach C.N.YANG und R.L.MILLS (1954) benannten Yang-Mills-Theorien, welche im allgemeineren Fall aus der Forderung nach lokaler Eichinvarianz unter $SU(N)$ -Transformationen resultiert. Sie steht wie in dieser Arbeit im Mittelpunkt vieler Untersuchungen. Die mathematische Struktur dieser Theorie aber macht es schwierig, exakte Voraussagen aus ihr abzuleiten. Dennoch hofft man, mit ihr unter anderem das Confinement der Quarks erklären zu können. So zeigen Computersimulationen beim Versuch Quarks zu trennen, dass mit zunehmendem Abstand ihre Anziehungskraft untereinander linear anwächst. Anders als in der QED, in der die Ladungen durch das Medium, das Dielektrikum, abgeschirmt werden (Screening) und dadurch die Stärke der Wechselwirkung mit zunehmenden Abstand abnimmt, sorgen die Vakuumeffekte, Gluon-Selbstwechselwirkungen, für den entgegengesetzten Effekt (Anti-Screening).

Bei sehr großen Energien wird die Kopplung zwischen den Quarks klein und sie können sich frei bewegen (asymptotische Freiheit). Dies hat zur Folge, dass nur für große Impulsüberträge bzw. kleine Abstände ($\leq 1\text{fm}$) störungstheoretische Vorhersagen Sinn machen und experimentell

bestätigt werden konnten; für die interessanten starken Kopplungen bzw. Abstände, die die Ausdehnungen der Hadronen überschreiten, versagt hingegen die Störungstheorie und es werden nicht-störungstheoretische Ansätze benötigt.

Seit den siebziger Jahren (1974) existiert hierfür ein von K.G.WILSON entwickelter effektiver Zugang, bei dem die vierdimensionale Raumzeit auf einem hyperkubischen Gitter diskretisiert wird und die physikalischen Größen mit hoch-, aber dadurch endlichdimensionalen Pfadintegralen auf leistungsfähigen Computern berechnet werden können, die Gitter-Eichtheorie. Ein Nachteil dieses Zugangs ist, dass durch das Gitter die Raum-Zeit-Symmetrie des Kontinuums, die Poincaré-Symmetrie, speziell die Drehsymmetrie der Lorentz-Gruppe, zerstört wird und auf eine diskrete Untergruppe (kubische Gruppe) heruntergebrochen wird. Dies führt zu einer Aufspaltung der Massenmultipletts. Wenn man aber die Maschen dieses Gitters immer enger macht, so sollten die physikalischen Größen schließlich gegen diejenigen Werte konvergieren, welche die QCD für kontinuierliche Raum-Zeit-Achsen ergäbe. Natürlich haben diese numerischen Ergebnisse nicht das gleiche Gewicht wie eine mathematische Beweiskette, die sich aus den Grundannahmen der Theorie durch Deduktion ableiten lässt. Aber die numerischen Befunde liefern tatsächlich deutliche Hinweise auf den vermuteten Quark-Einschluss.

Doch die alleinige Kenntnis des Teilchenspektrums, der Wechselwirkungen und ihrer jeweiligen formalen Beschreibungen ist für die theoretische Physik noch unbefriedigend. Ihr Ziel ist es vielmehr eine vereinheitlichte Theorie aller vier Wechselwirkungen zu finden, die „Theory of Everything“ (ToE). Einen großen Schritt hin zu einer vorläufigen Vereinheitlichung der elektromagnetischen, der starken und der schwachen Wechselwirkungen, der GUT (Grand Unified Theory), gelang in den 60er Jahren den Wissenschaftlern S.L.GLASHOW, S.WEINBERG und A.SALAM mit der Formulierung der nach ihnen benannten elektroschwachen (GWS-)Theorie, die die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung über eine gemeinsame Symmetrie, die $SU(2)_L \times U(1)_Y$, vereinheitlicht. Danach sind beide Kräfte lediglich das Produkt einer für niedrige Energien gebrochenen Symmetrie, wohingegen sie für große Energien äquivalent sind. Die Folgen dieser Symmetriebrechung sind die massiven W^- - und Z -Vektorbosonen sowie das noch verzweifelt gesuchte Higgs-Boson. Zusammen mit der Theorie der QCD und ihrer Symmetriegruppe der $SU(3)_C$ bildet sie das heutige SM der Elementarteilchen. In ihm werden die Teilchen durch die irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe charakterisiert (siehe Kapitel 2).

Doch auch wenn dieses Modell bis heute immer wieder erfolgreich angewendet werden und viele experimentell gefundene Daten bestätigen konnte - in dem QED-Sektor stimmen sie teilweise bis zur 10. Stelle hinter dem Komma mit den Experimenten überein -, so existieren dennoch einige Unstimmigkeiten und es bleiben noch viele Fragen offen. Hier nur ein Ausschnitt:

- Es existieren immer noch 19 offene Parameter, die nur durch Messungen bestimmt werden können.
- Warum gibt es drei Generationen von Leptonen und Quarks ?
- Existiert das durch den Higgs-Mechanismus der elektroschwachen Symmetriebrechung vorhergesagte Higgs-Boson, das vielen Teilchen des SM die Masse verleiht und wenn ja, wie schwer ist es?

- Wieso gibt es offensichtlich mehr Materie als Anti-Materie?
- Woraus besteht die aus der Beobachtung der Bewegung von Sterngalaxien geforderte dunkle Materie?
- Wie löst man das Massen-Hierarchieproblem des SMs?

Will man die Symmetriebrechung der elektroschwachen Theorie bei einer Energieskala von 100 GeV als auch die der GUT bei 10^{15} GeV durch den Higgs-Mechanismus über ein gemeinsames effektives Potential mit Higgs-Bosonen beschreiben, so müssen dort Parameterwerte in jeder störungstheoretischen Ordnung wiederholt unnatürlich mit einer relativen Genauigkeit von 10^{26} eingestellt werden (Finetuning).

- Warum konvergieren die laufenden Kopplungen nicht?

Die Kopplungen der drei Wechselwirkungen sind abhängig von der Energieskala, bei der sie gemessen werden, weshalb man auch von den laufenden Kopplungen spricht. So ist die elektromagnetische Kopplungskonstante bei 0 GeV $\alpha_{EM}(0) = \frac{1}{137}$, während sie für Energien von 90 GeV nur noch einen Wert von $\alpha_{EM}(90) = \frac{1}{128}$ besitzt [Wa]. Aus Zweischleifen-Renormierungsgruppengleichungen können ihre Werte für höhere Energien extrapoliert werden, wobei sich zeigt, dass sie in einem Energiebereich von $5 \cdot 10^{13}$ bis 10^{16} GeV ähnlich stark sind (Abb. 1.1). Die Tatsache, dass sie sich nicht exakt schneiden, lässt vermuten, dass das SM nicht aus einer vereinheitlichten Theorie mit nur einer gemeinsamen Kopplung entstanden sein kann.

- Wie kann die allgemeine Relativitätstheorie und damit die Gravitation mit dem SM vereinigt werden?

Eine mögliche Antwort auf all diese Fragen könnte die Supersymmetrie (SUSY) liefern. Ihr Name tauchte zum ersten Mal 1974 bei A.SALAM und J.STRATHDEE [SS] auf. In ihr ist mit dem Konzept der Graduierung die Poincaré-Algebra, die die Raum-Zeit-Symmetrie beschreibt, nichttrivial mit einer antikommutativen Algebra vereint. Fermionen und Bosonen, deren Spin sich um $\frac{1}{2}$ unterscheidet, werden zu Elementen gemeinsamer Multipletts, innerhalb derer sie durch eine oder mehrere SUSY-Transformationen ineinander überführt werden können.

$$Q|FERMION \rangle = |BOSON \rangle \quad ; \quad Q|BOSON \rangle = |FERMION \rangle \quad (1.1)$$

Danach besitzt jedes Teilchen des SM ein supersymmetrisches Partnerteilchen, das bis auf den Spin dieselben Eigenschaften besitzt⁴. Zu jedem Fermion gibt es ein Boson, gekennzeichnet durch den Präfix „s-“ (Squark, Slepton), und zu jedem Boson ein Fermion mit Suffix „-ino“ (Gluino, Gravitino), wodurch sich der Teilchengehalt des SM verdoppelt (Tabelle 1.3).

Die Folgen einer solchen Erweiterung lösen teilweise die offen gebliebenen Fragen des SM.

- Da eine wiederholte Anwendung der Boson-Fermion-Transformation ein Teilchen im Raum verschiebt, kann eine lokale Version der SUSY gravitative Wechselwirkungen in einer Supergravitationstheorie (SUGRA) implementieren und damit den Weg zu einer ToE ebnen.

⁴Da diese SUSY-Teilchen bis heute noch nicht entdeckt wurden, vermutet man, dass sie wesentlich schwerer sind als ihre Partner und die Supersymmetrie daher eine gebrochene Symmetrie ist.

Multiplett	Fermionen		Bosonen			
	Teilchen	Spin	Teilchen	Spin		
Chiral	Leptonen	$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \\ e_L^c \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	Sleptonen	$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \\ \tilde{e}_L^c \end{pmatrix}$	0
	Quarks	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ u_L^c \\ d_L^c \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	Squarks	$\begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \\ \tilde{u}_L^c \\ \tilde{d}_L^c \end{pmatrix}$	0
	Higgsino	$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1^+ \\ \tilde{\phi}_1^0 \\ \tilde{\phi}_2^0 \\ \tilde{\phi}_2^- \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	Higgs	$\begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \\ \phi_2^- \end{pmatrix}$	0
Vektor	Winos	$\begin{pmatrix} \tilde{W}^\pm \\ \tilde{W}^3 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{2}$	W-Bosonen	$\begin{pmatrix} \tilde{W}^\pm \\ W^3 \end{pmatrix}$	1
	Photino	\tilde{B}		Photon	B	
	Gluinos	\tilde{G}^a	$\frac{1}{2}$	Gluonen	G^a	1

Tabelle 1.3: Teilchenspektrum des MSSMs entnommen aus [Sp]. Jedes Teilchen tritt hier lediglich als links-chirales auf, so dass ein rechts-chirales Teilchen als sein links-chirales Antiteilchen erscheint. Die supersymmetrischen Partnerteilchen sind durch eine Tilde gekennzeichnet.

- SUSY löst das Hierarchieproblem durch das „non-renormalization-Theorem“, welches besagt, dass im MSSM das effektive Potential höchstens einmal durch Wellenfunktionsrenormierung oder endliche Beiträge renormiert werden muss. Dadurch reagiert das MSSM weniger sensibel auf Änderungen der Parameter, und die Hierarchie der Symmetriebrechungsskalen bleibt erhalten.
- SUSY fordert eine R-Paritätserhaltung, durch die in jedem Zerfallsprozess immer eine gerade Anzahl von SUSY-Teilchen beteiligt sein muss. Dadurch wird das leichteste supersymmetrische Teilchen (LSP) stabil sein, da es nicht in ein noch leichteres SUSY-Teilchen zerfallen kann. Aus anderen Erwägungen heraus schließt man, dass dieses Teilchen auch elektrisch neutral sein muss. Kandidaten für die LSPs sind das Photino oder das Neutralino und man vermutet, dass sie die **Weak Interacting Massive Particles** der dunklen Materie sind.
- In einer supersymmetrischen Version des SMs, des **Minimalen Supersymmetrischen Standard Modells**, treffen sich die drei laufenden Kopplungen bei einer gemeinsamen Energie von $2 \cdot 10^{16} \text{ GeV}$ (Abb. 1.1).

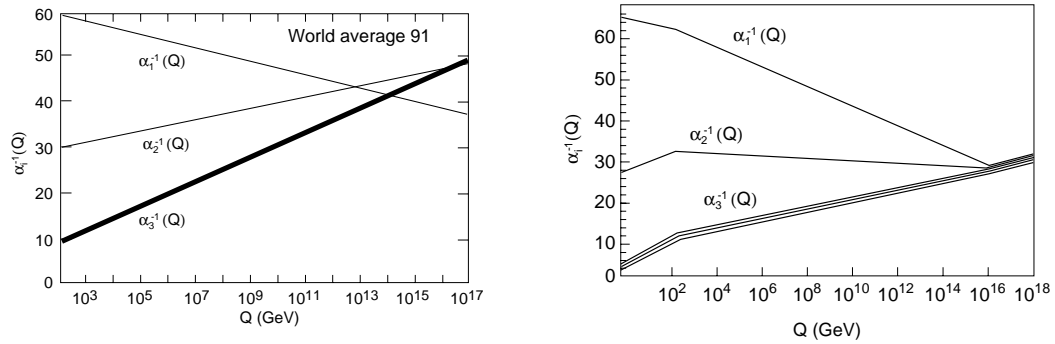


Abbildung 1.1: Die laufenden Kopplungen der U(1)-, $SU(2)_W$ - und $SU(3)_C$ -Eichtheorien des SM (links) und des MSSM (rechts)

- Supersymmetrisch erweiterte Theorien zeigen weniger Divergenzen. Zwar bleiben die ursprünglich divergenten Diagramme auch in der Erweiterung divergent. Da aber zu jedem Boson nun ein Fermion hinzukommt und umgekehrt, heben sich die Beiträge der jeweiligen Diagramme aufgrund eines dann umgekehrten Vorzeichens gerade auf.

Die $SU(5)$ -Theorie⁵ könnte eine attraktive GUT-Theorie sein, weil sie die Symmetriegruppe des SM enthält. In ihr werden Quarks und Leptonen in gemeinsamen Multipletts vereint. Die Zerfallszeit des Protons wird zusätzlich durch Lepto-Quarks-Eichbosonen, die Quarks in Leptonen umwandeln können, und der GUT-Skala von 10^{15} GeV bestimmt. Danach ergibt sich ein Wert, der deutlich unterhalb des Ergebnisses der Messungen des „Super-Kamiokande“-Detektors von Juni 1998 liegt. Eine supersymmetrische Version dieser $SU(5)$ -Theorie kann die Abweichungen durch zusätzliche Zerfallskanäle, nach denen man heute sucht, und durch die größere GUT-Skala von $2 \cdot 10^{16}$ GeV erklären. Überdies wären die dann möglicherweise beobachtbaren Zerfälle ein wichtiges Indiz für die Korrektheit dieser Theorie.

Einen weiteren Hinweis könnte das am Brookhaven National Laboratory gemessene anomale magnetische Moment ($g - 2$) des Myons [Br] geben. Da es sehr genau bestimmt werden kann und die Beiträge der drei Sektoren des SM störungstheoretisch berechenbar sind, könnten die Abweichungen, die zwischen Theorie und Experiment entstehen, durch zusätzliche supersymmetrische Beiträge erklärt werden.

Das erste supersymmetrische Modell ist das Wess-Zumino-Modell von J. WESS und B. ZUMINO [So],[WZ] aus dem Jahre 1974, das mit zwei reellen und einem Majorana-Spinorfeld dem chiralen Multiplett zugeordnet wird. Der Teilcheninhalt der hier behandelten supersymmetrischen $SU(2)$ -Eichtheorie entspricht dagegen dem des Vektorsupermultipletts, welches die Austauschbosonen, die Gluonen und ihre fermionischen SUSY-Partner, die Gluinos (Majorana-Fermionen in adjungierter Darstellung) enthält. Sie besitzt dabei formale Ähnlichkeiten mit der QCD, so dass man auch bei ihr die typischen Eigenschaften des Confinement und der chiralen Symmetriebrechung erwarten kann. Es liegt nahe, auch für dieses Modell die Möglichkeiten der Gitter-Eichtheorie zu verwenden.

⁵In der Literatur wird sie oft einfach die GUT-Theorie genannt.

Kapitel 2

Einführung in die Supersymmetrie

„Supersymmetry is still the best bet. The more standard physics looks like, the more probable supersymmetry is.“

(Pierre Binetruy in „Beyond the standard model“, HEP2001)

Die Supersymmetrie, deren Entdeckung in die frühen 70er Jahre des vergangenen 20. Jahrhunderts fällt, führt mit einem eleganten, aber nicht ganz einfachen mathematischen Formalismus zu einer Vereinheitlichung von Teilchen mit unterschiedlichen Spins in neue symmetrische Multipletts. Bisher gibt es allerdings noch keine direkten experimentellen Beweise und nur einige wenige indirekte theoretische und experimentelle Hinweise, die für die Gültigkeit dieser Theorie sprechen. Sollte es aber zukünftigen hochenergetischen Beschleunigern gelingen, die vorhergesagten supersymmetrischen Partnerteilchen nachweisen zu können, so wäre dies ein beachtlicher Erfolg des theoretischen Verständnisses über die Natur.

2.1 Die \mathbb{Z}_2 -graduierete Poincaré-Algebra

Der Übergang von der relativistischen quantenfeldtheoretischen Beschreibung der Natur hin zum Konzept der Supersymmetrie vollzieht sich gruppentheoretisch durch die Graduierung der Poincaré-Algebra. Während die relativistische Physik noch von der Invarianz physikalischer Gesetze unter den allgemeinen Poincaré-Transformationen ausgeht, wird diese Rolle in der Supersymmetrie von der durch eine \mathbb{Z}_2 -Graduierung erweiterten Poincaré-Algebra, der Poincaré-Superalgebra, eingenommen.

Anlass, über eine Graduierung der Poincaré-Algebra nachzudenken, war eine geniale, aber auch sehr komplizierte Arbeit von J.MANDULA und S.COLEMAN von 1967 [CM], nach der es nicht möglich ist, die allgemeine Poincaré-Gruppe P mit einer inneren Symmetrie I , gegeben durch eine Lie-Algebra, unter den folgenden Annahmen sinnvoll zu vereinigen:

- Es gibt nur eine endliche Anzahl von Teilchentypen unterhalb einer bestimmten Masse
- Streuung findet bis zu jeder beliebigen Energie statt
- die S-Matrix bleibt analytisch.

Das Ergebnis einer solchen Vereinigung ist entweder die triviale Gruppe $G = P \otimes I$ oder die Transformationen lassen die Nichtdiagonalelemente der S-Matrix, und somit die Streuamplituden, verschwinden. Aus diesem Grunde machten 1971 die russischen Wissenschaftler YU.A.GOL'FAND und E.P.LIKHTMAN [GL] den Vorschlag, die sogenannte Poincarésche Superalgebra zu konstruieren, in der die algebraischen Untersysteme, die Poincaré Algebra und die Innere Symmetrie, Strukturen besitzen, die jeweils von Kommutator- beziehungsweise durch Antikommutatorrelationen bestimmt werden. 1975 konnten dann die Wissenschaftler R. HAAG, M. SOHNIUS und J.T. LOPUSZANSKI [HSL] zeigen, dass diese neue Poincaré Superalgebra sogar die einzig mögliche graduierte Lie-Algebra ist, die gleichzeitig sowohl die Symmetrie der S-Matrix beschreibt und konsistent mit der relativistischen Quantenfeldtheorie ist.

2.1.1 Die graduierte Liealgebra

Eine Algebra \mathbb{L} , die aus einer direkten Summe von Unter-algebren \mathbb{L}_i gebildet wird,

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{L}_{n-1} \quad (2.1)$$

nennt man eine \mathbb{Z}_n graduierte Algebra, falls eine Verknüpfung \circ existiert mit der Eigenschaft

$$u_j \circ u_k \in \mathbb{L}_{j+k \bmod n} \quad \text{mit} \quad u_i \in \mathbb{L}_i. \quad (2.2)$$

Die Verknüpfung \circ heißt Graduierung. Im Falle einer \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2 graduierten Algebra \mathbb{L} gelten somit für die Teilräume: $\mathbb{L}_0 \circ \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_0$, $\mathbb{L}_0 \circ \mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_1 \circ \mathbb{L}_0 \subset \mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_1 \circ \mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_0$. Diese Algebra ist eine graduierte Lie-Algebra, wenn die Verknüpfung \circ noch zusätzliche Eigenschaften erfüllt:

$$\text{Supersymmetrie:} \quad x_i \circ x_j = -(-1)^{i \cdot j} x_j \circ x_i \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi-Identität:} \quad x_k \circ (x_l \circ x_m) (-1)^{k \cdot m} + x_l \circ (x_m \circ x_k) (-1)^{l \cdot k} \\ + x_m \circ (x_k \circ x_l) (-1)^{m \cdot l} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Hinsichtlich einer \mathbb{Z}_2 -graduierten Lie-Algebra ist \mathbb{L}_0 mit (2.3) tatsächlich eine Lie-Algebra, da die Verknüpfung antisymmetrisch ist und mit dem Kommutator $[\cdot, \cdot]$ identifiziert werden kann. Dies zeigt die bosonische Eigenschaft der Algebra. Verknüpfungen von Elementen innerhalb von \mathbb{L}_1 werden dagegen durch den Antikommutator $\{\cdot, \cdot\}$ beschrieben, was den fermionischen Charakter der Algebra sichtbar werden lässt. Außerdem kann man erkennen, dass eine solche Verknüpfung nicht wieder in \mathbb{L}_1 landet. Daher ist \mathbb{L}_1 selbst keine eigenständige Lie-Algebra.

2.1.2 Die Poincaré-Superalgebra

Dieses Konzept der Graduierung kann nun auf die Poincaré-Symmetrie mit ihren 10 Generatoren, den 6 Generatoren $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ der eigentlich-orthochronen Lorentzgruppe und den 4 Generatoren P_μ der Translationsgruppe und ihrer Lie-Algebra

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (2.5)$$

$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho) \quad (2.6)$$

$$[M^{\mu\sigma}, M^{\rho\sigma}] = -i(g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) \quad (2.7)$$

als Unteralgebra \mathbb{L}_0 angewandt werden. Die Elemente der Unteralgebra \mathbb{L}_1 sind nun die neuen SUSY-Generatoren Q_a mit $a = 1, \dots, 4N$, wobei im folgenden immer nur von der $N=1$ (einfachen) SUSY ausgegangen wird. Für $N \geq 1$ spricht man von einer N -fach erweiterten SUSY. Im Falle der Verknüpfung mit der Poincaré-Algebra wählt man

$$[P^\mu, Q_a] = 0 \quad (2.8)$$

$$[M^{\mu\nu}, Q_a] = -\Sigma_{ab}^{\mu\nu} Q_b \quad \text{mit} \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (2.9)$$

Diese Art der Verknüpfung ist keinesfalls die einzig mögliche. Die Strukturkonstante hängt darüberhinaus noch von der Wahl der Darstellung (hier: Dirac-Darstellung) ab. Zudem zeigt (2.9), dass sich die Generatoren Q_a unter Lorentz-Transformationen selbst wie Spinoreinträge transformieren. Daher macht es Sinn, die Q_a zu einem 4-Spinor Q zusammenzusetzen. Mit Hilfe der Jacobi Identität (2.4) findet man eindeutig die dritte Relation $\mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_0$ durch den Antikommutator [KS]:

$$\{Q_a, Q_b\} = -2(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu \quad \Leftrightarrow \quad \{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2\gamma_{ab}^\mu P_\mu \quad (2.10)$$

Um die Zahl der fermionischen Freiheitsgrade nach der Boson-Fermion-Regel (siehe Abschnitt 2.3.1) von den ursprünglich 8 aus den vier komplexen Einträgen eines Dirac-Spinors auf die gleiche Anzahl der bosonischen Freiheitsgrade zu halbieren, hat man Q als Majorana-Spinor definiert, für den gilt:

$$Q = C\bar{Q}^T \quad \text{bzw.} \quad \bar{Q} = Q^T C \quad (2.11)$$

Dabei ist C der Ladungskonjugationsoperator, der die darstellungsfreie Form $C = i\gamma^2\gamma^0$ hat. Die Beziehungen (2.8), (2.9) und (2.10) bilden zusammen die durch die 14 Generatoren aufgebaute Poincaré-Superalgebra.

In der Literatur ist es üblich, die Generatoren Q_a in die chirale Darstellung zu übertragen, in der Q aus den beiden links- und rechtschiralen Weyl-Spinoren Q_A und $\bar{Q}^{\dot{A}}$ zusammengesetzt ist.

$$Q = \begin{pmatrix} Q_A \\ \bar{Q}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Aus (2.10) folgt dann

$$\{Q_A, Q^B\} = \{Q^{\dot{A}}, Q_{\dot{B}}\} = 0 \quad (2.13)$$

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 2\sigma_{A\dot{B}}^\mu P_\mu \quad (2.14)$$

$$\{\bar{Q}^{\dot{A}}, Q^B\} = 2\tilde{\sigma}^{\mu\dot{A}B} P_\mu \quad (2.15)$$

$$\text{mit } \sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}) \quad \text{und} \quad \tilde{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma}). \quad (2.16)$$

2.2 SUSY-Teilchen und ihre Klassifizierung

2.2.1 Das Teilchenspektrum der Poincaré-Symmetrie

In dem SM werden Teilchen nach den irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Algebra bzw. nach den Eigenwerten der zugehörigen Casimir-Operatoren

$$P^2 = P_\mu P^\mu \quad \text{und} \quad W^2 = W_\mu W^\mu$$

Pauli-Lubanski-Vektor: $W_\mu = -m^2 S^2$ (im Ruhesystem) (2.17)

sortiert. In der Natur beobachtbar sind aber lediglich die Teilchen der

- massiven Darstellung:

$$P^2 = m^2 > 0, \quad P_0 > 0$$

$$W^2 = -ms(s+1) \quad , \quad s = 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (2.18)$$

Teilchen, die dieser Darstellung angehören, werden durch ihre Masse und ihren Spin charakterisiert. (Innerhalb dieser Darstellung unterscheiden sie sich dazu noch in der z -Komponente des Spins s_3 .)

Beispiele: Elektron mit Spin $\frac{1}{2}$ und $s_3 = +\frac{1}{2}$ (Spin up) oder $s_3 = -\frac{1}{2}$ (Spin down)
Pion mit Spin 0 und nur einem Freiheitsgrad.

- masselosen Darstellung:

$$P^2 = W^2 = 0 \quad \text{mit} \quad P_0 = +|\vec{\mathbf{P}}|$$

$$\Rightarrow W_\mu = \lambda P_\mu \quad \text{mit} \quad \lambda = \pm s, \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (2.19)$$

In dieser Darstellung übernimmt die Proportionalitätskonstante λ (Helizität) die Rolle der z -Komponente des Spins.

Beispiele: Photon mit Spin 1 und den Helizitäten ± 1

Neutrino mit Spin $\frac{1}{2}$ und den Helizitäten $+\frac{1}{2}$ für das Neutrino und $-\frac{1}{2}$ für das Antineutrino

- Andere Klassen von Darstellungen wie die $P_\mu P^\mu = 0$ Darstellung mit kontinuierlichem Spin $s \in \mathbb{R}$ oder die $P_\mu P^\mu < 0$ -Darstellung (Tachyonen) sind prinzipiell möglich, werden aber in der Natur nicht beobachtet.

2.2.2 Das Teilchenspektrum der Poincaré-Supersymmetrie

In der Superalgebra verliert das Quadrat des Pauli-Lubanski-Vektors seine Bedeutung als Casimir-Operator

$$[W^2, Q_a] \neq 0, \quad (2.20)$$

wodurch nun Teilchen mit unterschiedlichen Spins zu einem gemeinsamen Multiplett (Supermultiplett) gehören können. An seine Stelle tritt der Lorentzskalar

$$C^2 = C_{\mu\nu}C^{\mu\nu}, \quad (2.21)$$

welcher definiert wird durch

$$C_{\mu\nu} = Y_\mu P_\nu - Y_\nu P_\mu \quad (2.22)$$

$$Y_\mu = W_\mu + \frac{1}{4}X_\mu \quad (2.23)$$

$$X_\mu = \frac{1}{2}\bar{Q}\gamma_\mu\gamma_5 Q. \quad (2.24)$$

Darüberhinaus gehorcht \vec{Y} im Ruhesystem einer relativistische Drehimpulsalgebra

$$[Y_i, Y_j] = im\epsilon_{ijk}Y_k, \quad (2.25)$$

wodurch $\frac{1}{m}\vec{Y}$, der Superspin, die Rolle eines verallgemeinerten Drehimpulses übernimmt mit den bekannten Eigenwerten

$$\left(\frac{\vec{Y}}{m}\right)^2 = y(y+1) \quad \text{mit} \quad y = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad (2.26)$$

Wiederum unterscheidet man folgende Darstellungen:

- massive Darstellung:

$$C^2 = 2m^2Y^2 = -2m^4y(y+1) \quad \text{mit} \quad y = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (2.27)$$

Jede massive Darstellung wird eindeutig durch ihre Masse und ihren Superspin (m, y) charakterisiert. Innerhalb eines so vorgegebenen Multipletts können die Teilchen wiederum durch die Eigenwerte der z -Komponente von $\frac{1}{m}\vec{Y}$ mit $-y \leq y_3 \leq y$ und wegen $[Y^3, W^3] = 0$ zusätzlich noch durch die z -Komponente des Spins $\frac{1}{m}\vec{W}$ mit $s_3 \in \{y_3, y_3 + \frac{1}{2}, y_3 - \frac{1}{2}\}$ charakterisiert werden.

- masselose Darstellung:

$$P^2 = W^2 = 0 \quad (2.28)$$

In dieser Darstellung übernimmt die Helizität wieder die Rolle der z -Komponente des Spins s .

Eine graphische Veranschaulichung des allgemeinen Supermultipletts zeigt Abbildung 2.1.

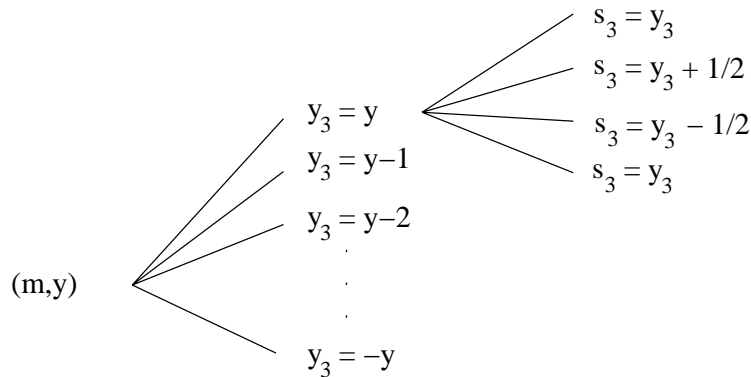


Abbildung 2.1: Das allgemeine Supermultiplett

2.2.3 Das chirale Supermultiplett

Das einfachste Supermultiplett ist das chirale Supermultiplett mit $y = 0$ (Abb. 2.2). Im massiven Fall besteht es aus drei Teilchen:

- einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (Dublett $s_3 = \pm\frac{1}{2}$)
- einem skalaren Teilchen (Boson mit Spin 0)
- einem pseudoskalaren Teilchen (Boson mit Spin 0)

Das chirale Multiplett ist zum Beispiel im Wess-Zumino-Modell realisiert und beschreibt allgemein Materiefelder wie die Quarks und Squarks oder aber auch Elektronen und Sleptonen.

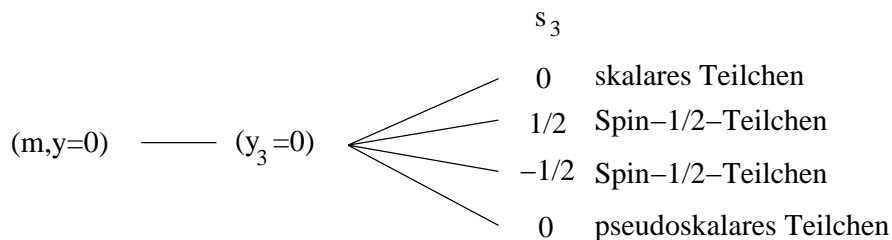


Abbildung 2.2: Das chirale Supermultiplett

2.2.4 Das Vektor-Supermultiplett

Das Vektor-Supermultiplett ($y = \frac{1}{2}$) ist das Multiplett der hier behandelten Yang-Mills-Theorie. Es beschreibt die Eichbosonen Photonen, W - und Z -Bosonen, Gluonen zusammen mit ihren supersymmetrischen Partnern den Photoninos, Winos, Zinos und Gluinos.

Im massiven Fall ist sein Teilcheninhalt (Abb. 2.3):

- 2 Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (jeweils ein Dublett)
- ein Vektorteilchen (Boson Spin 1 /Triplet)
- ein pseudoskalar Teilchen (Boson Spin 0)

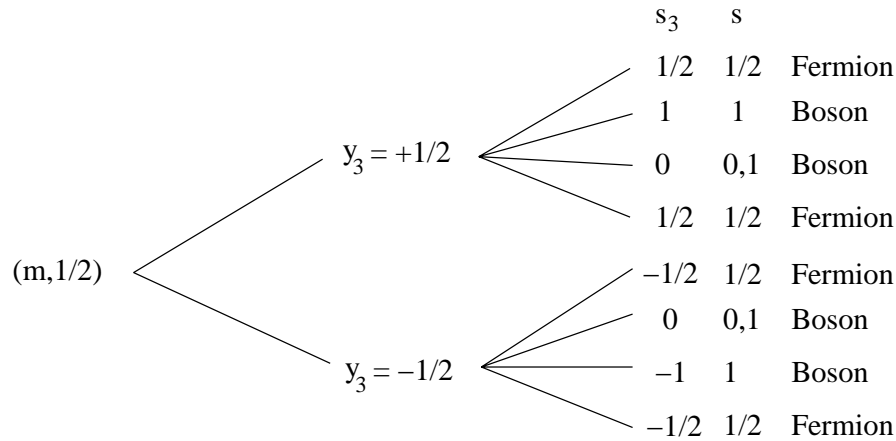


Abbildung 2.3: Das Vektor-Supermultiplett

2.3 Superraum und Superfelder

Nachdem im 1. Abschnitt dieses Kapitels die Kommutator- bzw. Antikommutatorbeziehungen der Poincaré-Superalgebra hergeleitet wurden, macht es Sinn, die zugehörige unitäre Darstellung der Poincaré-Supergruppe auf dem Raum der Superfunktionen einzuführen. Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist der achtdimensionale Superraum $\mathbb{R}^{4|4}$. Er ist eine Erweiterung des Minkowski-Raumes mit seinen vier kommutierenden (bosonischen) Raum-Zeit-Koordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 , ergänzt durch vier neue antikommutierende (fermionische) Koordinaten $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$ bzw. $\theta, \bar{\theta}$ in der Weyl-Darstellung.

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) \longrightarrow (x^1, x^2, x^3, x^4, \theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) \hat{=} (x, \theta, \bar{\theta}) \tag{2.29}$$

Während der Viererimpulsoperator \hat{P}^μ die Translation der Felder im bosonischen Sektor generiert

$$\psi(x + a, \theta, \bar{\theta}) = \exp(-ia^\mu \hat{P}_\mu) \psi(x, \theta, \bar{\theta}), \tag{2.30}$$

sorgen die SUSY-Operatoren \hat{Q} und $\hat{\bar{Q}}$ nun für Verschiebungen im fermionischen Raum um die weyl-spinoriellen Größen ξ und $\bar{\xi}$.

$$\psi(x, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) = \exp(i(\xi \hat{Q} + \bar{\xi} \hat{\bar{Q}})) \psi(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{2.31}$$

Vereinfachend werden im folgenden die eigentlichen Lorentztransformationen nicht berücksichtigt, so dass ein Element der Poincaré-Supergruppe mit Parametern aus dem Superraum $(a, \xi, \bar{\xi})$ durch

$$L(a, \xi, \bar{\xi}) = \exp(i(\xi \hat{Q} + \bar{\xi} \hat{\bar{Q}} - a^\mu P_\mu)) \quad (2.32)$$

gegeben ist. Mit der BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Relation

$$\exp(A) \cdot \exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots\right) \quad (2.33)$$

und den Antikommutatorbeziehungen (2.14) und (2.15) erhält man die Kompositionsregel der Gruppenmultiplikation (siehe [KS])

$$L(a, \epsilon, \bar{\epsilon})L(b, \eta, \bar{\eta}) = L(a + b - i\epsilon\sigma\bar{\eta} + i\eta\sigma\bar{\epsilon}, \epsilon + \eta, \bar{\epsilon} + \bar{\eta}). \quad (2.34)$$

Das Produkt ist erneut von der Form $L(a, \epsilon, \bar{\epsilon})$. Die SUSY- Transformationen bilden also eine Gruppe. Man beachte, dass zwei rein fermionische Transformationen zu einer Verschiebung in der Raumzeit führen.

$$L(0, \epsilon, \bar{\epsilon})L(0, \eta, \bar{\eta}) = L(i\eta\sigma\bar{\epsilon} - i\epsilon\sigma\bar{\eta}, \epsilon + \eta, \bar{\epsilon} + \bar{\eta}) \quad (2.35)$$

Wie gewöhnlich verursachen Multiplikationen von Gruppen-Elementen Verschiebungen im Parameterraum, der hier gleichzeitig auch der Superraum ist,

$$L(a^\mu, \epsilon, \bar{\epsilon}) : (x, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow (x^\mu + \xi^\mu, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}) \quad (2.36)$$

mit $\xi^\mu = a^\mu - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon} = a^\mu - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta} - i\bar{\epsilon}\tilde{\sigma}^\mu\theta$. Entsprechend werden auch die auf dem Superraum definierten Superfelder \mathcal{F} transformiert und man erhält

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow \mathcal{F}(x^\mu + \xi^\mu, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}) \\ &= \mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) + \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{F} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} + \bar{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\theta}} + \dots \\ &= \left[1 + a^\mu \partial_\mu + \epsilon \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i\sigma^\mu \theta \partial_\mu \right) + \bar{\epsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i\tilde{\sigma}^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \right) + \dots \right] \mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \\ &= : U(a^\mu, \epsilon, \bar{\epsilon}) \mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Wählt man diesen unitären Operator in der Form

$$U = \exp(i(a^\mu \hat{P}_\mu + \epsilon \hat{Q} + \bar{\epsilon} \hat{\bar{Q}})) \simeq 1 + ia^\mu \hat{P}_\mu + i\epsilon \hat{Q} + i\bar{\epsilon} \hat{\bar{Q}} \quad (2.38)$$

und entwickelt ihn bis zur ersten Ordnung, so ergeben sich die Darstellungen der Generatoren durch Koeffizientenvergleich zu

$$\hat{P}_\mu = -i\partial_\mu \quad (2.39)$$

$$i\hat{Q} = \frac{\partial}{\partial \theta} - i\sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \quad (2.40)$$

$$i\hat{\bar{Q}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + i\theta\sigma^\mu \partial_\mu. \quad (2.41)$$

Man kann zeigen, dass die so definierten Operatoren die SUSY-Algebra erfüllen.

2.3.1 Allgemeine Superfelder

Entwickelt man das Superfeld in eine Potenzreihe in θ und $\bar{\theta}$, so zeigt sich unter der Vorgabe, dass \mathcal{F} ein Lorentzskalar sein muss, der Teilchengehalt des allgemeinen Superfeldes¹

$$\mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)M(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) \quad (2.42)$$

$$+ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x) \quad (2.43)$$

$$+ (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x). \quad (2.44)$$

Danach erhält man:

- 4 komplexe skalare Felder: $f(x), M(x), N(x), d(x)$, (4 bosonische Freiheitsgrade)
- 2 linkshändige Weyl-Spinorfelder: $\phi(x), \alpha(x)$, (4 fermionische Freiheitsgrade)
- 2 rechtshändige Weyl-Spinorfelder: $\bar{\chi}(x), \bar{\lambda}$, (4 fermionische Freiheitsgrade)
- 1 komplexes Vektorfeld $A_\mu(x)$ (4 bosonische Freiheitsgrade).

Die Boson-Fermion-Regel, nach der in jeder supersymmetrischen Theorie die Anzahl der Freiheitsgrade von Bosonen und Fermionen übereinstimmen müssen, ist erfüllt.

Wendet man die infinitesimalen Supersymmetrietransformationen auf das allgemeine Superfeld an,

$$\delta_\epsilon \mathcal{F} = (\epsilon^A \partial_A + \bar{\epsilon}_A \bar{\partial}^A - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu)\mathcal{F} \quad (2.45)$$

so ist dies äquivalent zu einer Transformation der Komponentfelder mit

$$\delta f = \epsilon\phi + \bar{\epsilon}\bar{\chi} \quad (2.46)$$

$$\delta\phi = 2\epsilon M + \sigma^\mu\bar{\epsilon}(i\partial_\mu f + A_\mu) \quad (2.47)$$

$$\delta\bar{\chi} = 2\bar{\epsilon}N + \tilde{\sigma}^\mu\epsilon(i\partial_\mu f - A_\mu) \quad (2.48)$$

$$\delta M = \bar{\epsilon}\bar{\lambda} - \frac{i}{2}\partial_\mu(\phi\sigma^\mu\bar{\epsilon}) \quad (2.49)$$

$$\delta N = \epsilon\alpha + \frac{i}{2}\partial_\mu(\epsilon\sigma^\mu\bar{\chi}) \quad (2.50)$$

$$\delta A_\mu = \frac{i}{2}\delta^\nu(\epsilon\sigma_\nu\tilde{\sigma}_\mu\phi - \bar{\chi}\tilde{\sigma}_\mu\sigma_\nu\bar{\epsilon}) + (\epsilon\sigma_\mu\bar{\lambda}) + (\alpha\sigma_\mu\bar{\epsilon}) \quad (2.51)$$

$$\delta\bar{\lambda} = \bar{\epsilon}(2d + \frac{i}{2}\partial^\mu A_\mu) + i\tilde{\sigma}^\mu\epsilon\partial_\mu M \quad (2.52)$$

$$\delta\alpha = \epsilon(2d - \frac{i}{2}\partial^\mu A_\mu) + i\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu N \quad (2.53)$$

$$\delta d = \frac{i}{2}\partial_\mu(\epsilon\sigma^\mu\bar{\lambda} - \alpha\sigma^\mu\bar{\epsilon}). \quad (2.54)$$

¹Da θ und $\bar{\theta}$ nur jeweils zwei grassmannwertige Komponenten besitzen, verschwinden alle Produkte aus mehr als zwei fermionischen Superraumkoordinaten ($\theta\theta\theta = \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta} = 0$).

$$\theta\theta = \theta^A\theta_A = \theta^1\theta_1 + \theta^2\theta_2$$

Da Multiplikationen und Additionen von Superfeldern wieder Superfelder ergeben, sind sie eine lineare Darstellung der SUSY-Algebra. Diese ist aber zunächst höchst reduzibel. Zu irreduziblen Darstellungen gelangt man durch supersymmetrisch kovariante Zusatzforderungen, die dann zu den eingeschränkten Superfeldern führen (constrained superfields). Hierzu definiert man die kovarianten Ableitungen

$$\begin{aligned} D_A &:= \partial_A + i(\sigma^\mu \bar{\theta})_A \partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot{A}} &:= -\bar{\partial}_{\dot{A}} + i(\bar{\sigma}^\mu \theta)_{\dot{A}} \partial_\mu. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Sie haben die Eigenschaft, dass sie mit den SUSY-Generatoren Q und \bar{Q} antivertauschen

$$\{D, Q\} = \{\bar{D}, \bar{Q}\} = \{D, \bar{Q}\} = \{\bar{D}, Q\} = 0 \quad (2.56)$$

und daher, wie der Name schon sagt, invariant gegenüber SUSY-Transformationen sind. Dies zeigt sich durch $\{D, \epsilon\} = \{\bar{D}, \bar{\epsilon}\} = 0$ mit

$$[\delta_\epsilon, D] = i[\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}, D] = i\epsilon\{Q, D\} + i\bar{\epsilon}\{\bar{Q}, D\} = 0 \quad (2.57)$$

$$[\delta_\epsilon, \bar{D}] = i[\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}, \bar{D}] = i\epsilon\{Q, \bar{D}\} + i\bar{\epsilon}\{\bar{Q}, \bar{D}\} = 0. \quad (2.58)$$

Zudem erfüllen sie dieselben Antivertauschungsrelationen wie die SUSY-Operatoren selbst

$$\{D, D\} = \{\bar{D}, \bar{D}\} = 0 \quad \text{und} \quad \{D, \bar{D}\} = -2i\sigma^\mu \partial_\mu, \quad (2.59)$$

so dass z.B. gilt:

$$\begin{aligned} [D_A, \bar{D}^2] &= \{D_A, \bar{D}_{\dot{B}}\} \bar{D}^{\dot{B}} - \bar{D}_{\dot{B}} \{D_A, \bar{D}^{\dot{B}}\} \\ &= -2i\sigma^\mu_{A\dot{B}} \partial_\mu \bar{D}^{\dot{B}} + 2i\bar{D}_{\dot{B}} \sigma^\mu_{A\dot{B}} \partial_\mu = -4i\sigma^\mu_{A\dot{B}} \bar{D}^{\dot{B}} \partial_\mu. \end{aligned} \quad (2.60)$$

2.3.2 Eingeschränkte Superfelder

Prinzipiell unterscheidet man drei Formen von Superfeldern.

$$\bar{D}_{\dot{A}} \mathcal{F} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{chirales Superfeld} \quad \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.61)$$

$$D_A \mathcal{F} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{antichirales Superfeld} \quad \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.62)$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^\dagger \quad \longrightarrow \quad \text{Vektor-Superfeld} \quad V(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.63)$$

Chirale und antichirale Superfelder werden im Gegensatz zum Vektorfeld auch skalare Superfelder genannt. Während die Vektorfelder reelle Felder sind, sind die skalaren Felder komplexwertig. Der Teilchengehalt der chiralen Felder entspricht dem des massiven chiralen Supermultipletts, der des Vektorsuperfeldes dem Vektorsupermultiplett. Die skalaren Felder beschreiben also „Materiefelder“, die Vektorfelder beschreiben die Eichfelder, wie die supersymmetrischen Yang-Mills-Felder.

Das skalare Superfeld

Die allgemeinste Form eines chiralen Superfeldes, das der Bedingung $\bar{D}_{\dot{A}}\mathcal{F} = 0$ genügt, ist unabhängig von der $\bar{\theta}$ -Koordinate und ist gegeben durch

$$\Phi(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y) \quad \text{mit} \quad y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}. \quad (2.64)$$

Der Faktor $\sqrt{2}$ ist hier aus traditionellen Gründen hinzugefügt worden. Der Teilcheninhalt dieses Feldes kann erneut aus den Komponentenfeldern erschlossen werden:

- 1 komplexes Skalarfeld ϕ zur Beschreibung von Sleptonen und Squarks,
- 1 linkshändiges Weyl-Spinorfeld ψ für Leptonen und Quarks
- 1 komplexes Skalarfeld F als Hilfsfeld

Etwas längere Rechnungen in [KS] zeigen, wie sich diese Komponentenfelder unter den SUSY-Transformationen verändern.

$$\delta\phi = \sqrt{2}\epsilon\psi \quad (2.65)$$

$$\delta\psi = i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\epsilon F \quad (2.66)$$

$$\delta F = i\sqrt{2}\partial_\mu(\bar{\epsilon}\tilde{\sigma}^\mu\psi) \quad (2.67)$$

Weiterhin gilt:

$$\Phi_i \text{ chiral} \Leftrightarrow \Phi_i^\dagger \text{ antichiral} \quad (2.68)$$

$$\Phi_i \text{ chiral} \Rightarrow \Phi_i\Phi_j \text{ chiral} \quad (2.69)$$

$$\Phi_i^\dagger \text{ antichiral} \Rightarrow \Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger \text{ antichiral} \quad (2.70)$$

$$\Phi \text{ chiral} \Rightarrow \Phi^\dagger\Phi \text{ Vektor-Superfeld} \quad (2.71)$$

$$\Phi \text{ chiral} \Rightarrow \Phi + \Phi^\dagger \text{ Vektor-Superfeld} \quad (2.72)$$

$$\Phi \text{ chiral} \Rightarrow i(\Phi - \Phi^\dagger) \text{ Vektor-Superfeld} \quad (2.73)$$

Das Vektor-Superfeld

Zerlegt man das Vektorfeld V in seine Komponentenfunktionen

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = f + \theta\phi + \bar{\theta}\bar{\chi} + (\theta\theta)M + (\bar{\theta}\bar{\theta})N \\ + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda} + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d, \quad (2.74)$$

so folgt aus der Forderung (2.63)

$$f = f^*, A_\mu = A_\mu^*, d = d^*, M = N^*, \phi = \chi, \lambda = \alpha. \quad (2.75)$$

Das Vektor-Superfeld besitzt also im Gegensatz zum allgemeinen Superfeld nur noch zwei unabhängige Weyl-Spinorfelder ϕ und λ (8 fermionische Freiheitsgrade) sowie vier bosonische Felder - zwei reelle Skalarfelder f und d , ein komplexes Skalarfeld M und ein reelles Vektorfeld A_μ - (8 bosonische Freiheitsgrade).

2.4 Supersymmetrische Lagrange-Dichten

SUSY Lagrangedichten werden so konstruiert, dass sie sich unter den SUSY-Transformationen lediglich um eine Viererdivergenz verändern ($\delta_\epsilon \mathcal{L} = \partial_\mu \Lambda^\mu$). Das Wirkungsfunktional

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (2.76)$$

und damit die Physik, bleibt dann aufgrund der Tatsache, dass Raum-Zeit-Integrale über Viererdivergenzen verschwinden (Gaußscher Satz), invariant gegenüber diesen Transformationen. Für ein allgemeines Superfeld $\mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta})$ wird diese Eigenschaft von der $(\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta})$ -Komponente, dem d-Term (2.54), für chirale Felder von der $(\theta\theta)$ -Komponente, dem F-Term erfüllt (2.67). Daher macht es Sinn, eine Lagrangedichte in der Form

$$\mathcal{L} = (\text{Superfeld})\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + (\text{chirales Superfeld})\big|_{(\theta\theta)} + \text{h.c.} \quad (2.77)$$

zu definieren. h.c. ist der hermitesch konjugierte Teil, der sichert, dass der gesamte Ausdruck reell ist.

Das bekannteste supersymmetrische Modell ist das Wess-Zumino-Modell, dessen Teilcheninhalt dem chiralen Supermultiplett entstammt. Eine schöne Beschreibung dieses einfachsten supersymmetrischen Modells findet sich in [KS]. Es soll hier nur kurz genannt werden, um die generelle Struktur einer möglichen Lagrangedichte zu erkennen. Diese wird definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int} \\ &= \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi(x, \theta, \bar{\theta})\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$- \frac{m}{2} \Phi^2(y, \theta)\big|_{\theta\theta} + \text{h.c.} \quad (2.79)$$

$$- \frac{g}{3} \Phi^3(y, \theta)\big|_{\theta\theta} + \text{h.c.} \quad (2.80)$$

Sie besitzt also wie in der klassischen Feldtheorie einen kinetischen Term, einen Massen- und einen Wechselwirkungsterm.

2.4.1 Die abelschen SUSY-Eichtransformationen

Geht man von einem chiralen Superfeld Φ und den Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \Phi'(x, \theta, \bar{\theta}) &= e^{-i\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ \Phi'^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) &= \Phi^\dagger e^{i\Lambda^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})} \end{aligned} \quad (2.81)$$

aus, so ist unter der Forderung, dass das transformierte Feld $\Phi'(x, \theta, \bar{\theta})$ chiral bleibt,

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{A}} \Phi' &= \bar{D}_{\dot{A}} [e^{-i\Lambda} \Phi] \\ &= [\bar{D}_{\dot{A}} e^{-i\Lambda}] \Phi + e^{-i\Lambda} [\bar{D}_{\dot{A}} \Phi] \\ &= [-i(\bar{D}_{\dot{A}} \Lambda) e^{-i\Lambda}] \Phi \\ \Rightarrow \bar{D}_{\dot{A}} \Lambda &= 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

das Feld Λ selbst chiral. Der kinetische Term der Lagrangedichte (2.78) ist aber in dieser Form nicht invariant, so dass er durch die Einführung eines kompensierenden Vektorfeldes V modifiziert werden muss zu

$$\mathcal{L}_{kin} = \Phi^\dagger e^V \Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}. \quad (2.83)$$

Folglich sollte dieses sich wie

$$V \longrightarrow V' = V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) \quad (2.84)$$

transformieren. Bezogen auf die Ebene der Komponentenfelder von V entspricht dies:

$$f' = f + \phi + \phi^* = f + 2(\text{Re}\phi) \quad (2.85)$$

$$\phi' = \phi - i\sqrt{2}\psi \quad (2.86)$$

$$M' = M - 2iF \quad (2.87)$$

$$A'_\mu = A_\mu + i\partial_\mu(\phi - \phi^*) = A'_\mu - 2\partial_\mu(\text{Im}\phi) \quad (2.88)$$

$$\lambda' = \lambda \quad (2.89)$$

$$d' = d \quad (2.90)$$

Auffällig dabei ist die Übereinstimmung des Transformationsverhaltens des reellen Vektorfeldes A_μ mit der lokalen Eichtransformation des elektromagnetischen Feldes in der QED

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda \quad \Lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.91)$$

Der antisymmetrische abelsche Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.92)$$

ist daher wie in der QED gegenüber dieser supersymmetrischen Eichtransformation invariant. Eine spezielle Form der Eichtransformation ist die Wess-Zumino-Eichung. In ihr wird das chirale Feld Λ bzw. Λ^\dagger so gewählt, dass V' die Komponentenfelder f, ϕ und M nicht mehr enthält. Dies ist möglich durch die richtige Wahl der Komponentenfelder von Λ :

$$2\text{Re}\phi = -f \quad (2.93)$$

$$\psi = -\frac{i}{\sqrt{2}}\phi \quad (2.94)$$

$$F = -\frac{i}{2}M \quad (2.95)$$

Da die Wess-Zumino-Eichung die Wahl von $\text{Im}\phi$ nicht beschränkt, ist es möglich, im Rahmen dieser Eichung (2.88) die nullte Komponente des A -Feldes zu eliminieren $A_0 = 0$ (Coulomb-Eichung).

Das Vektor-Superfeld in der konventionellen und der Wess-Zumino-Eichung ist also durch

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu(x) + i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}(x)) - i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\lambda(x)) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x) \quad (2.96)$$

gegeben. Sein Teilchengehalt entspricht dem des Vektor-Supermultipletts.

- 1 komplexes Weyl-Spinorfeld λ (4 Freiheitsgrade)

- 1 reelles Skalarfeld d (1 Freiheitsgrade)
- 1 reelles Vektorfeld A_μ (3 Freiheitsgrade)

Mit anderen Worten: Die Wess-Zumino und die Coulomb-Eichung halbieren die ursprünglich 16 Freiheitsgrade. Um das neue Vektorfeld nun selbst in die Dynamik des Systems einzubinden, definiert man die supersymmetrischen Feldstärken

$$W_A := -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A V(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.97)$$

$$\bar{W}_{\dot{A}} := -\frac{1}{4}(DD)\bar{D}_{\dot{A}} V(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (2.98)$$

Wegen $D^3 = \bar{D}^3 = 0$ sind diese Feldstärken selbst chirale bzw. antichirale Superfelder, da

$$\bar{D}_{\dot{A}} W_A = -\frac{1}{4}\bar{D}_{\dot{A}}(\bar{D}\bar{D})D_A V = 0 \quad (2.99)$$

$$D_A \bar{W}_{\dot{A}} = -\frac{1}{4}D_A(DD)\bar{D}_{\dot{A}} V = 0. \quad (2.100)$$

Außerdem ist W_A mit $\bar{D}\Phi = D\Phi^\dagger = 0$ und (2.60) eichtransformationinvariant

$$\begin{aligned} W_A \longrightarrow W'_A &= -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A V' \\ &= -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A(V + i(\Phi - \Phi^\dagger)) \\ &= W_A - \frac{i}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A\Phi = W_A + \frac{i}{4}[D_A, \bar{D}^2]\Phi \\ &= W_A + \sigma_{AA}^\mu \partial_\mu \bar{D}^{\dot{A}}\Phi = W_A. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Aus (2.96) und einigen Umformungen ergibt sich die Komponentenschreibweise der Feldstärke W_A zu

$$W_A = i\lambda_A - 2d\theta_A - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu} - (\theta\theta)(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})_A. \quad (2.102)$$

Nun konstruiert man die Lagrangedichte als einen reellen Lorentzskalar durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}W^A W_A|_{(\theta\theta)} + HC. \quad (2.103)$$

Daraus folgt mit (2.102) und einiger Rechnung die Lagrangedichte von Vektor-Superfeldern in WZ-Eichung

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{2}(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda) + 2d^2. \quad (2.104)$$

2.4.2 Nicht-abelsche SUSY-Eichtheorien

Im folgenden wird die Lagrangedichte einer nicht-abelschen, supersymmetrischen Eichtheorie anhand der N=1 SU(2) SYM-Theorie konstruiert. Die Rolle der Materiefelder in der Lagrangedichte übernimmt wieder das chirale bzw. anti-chirale Superfeld Φ , da es lediglich aus skalaren und spinoriellen Feldern besteht.

Die SU(2)-Eichtransformationen von Φ werden beschrieben durch

$$\Phi'(x, \theta, \bar{\theta}) = e^{-i\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.105)$$

$$\text{bzw. } \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) e^{i\Lambda^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})}. \quad (2.106)$$

Dabei ist $\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})$ ein Feld aus der su(2) Lie-Algebra, welches durch $\Lambda(x, \theta, \bar{\theta}) = \Lambda^a(x, \theta, \bar{\theta})T^a$ bzw. $\bar{\Lambda}(x, \theta, \bar{\theta}) = \bar{\Lambda}^a(x, \theta, \bar{\theta})T^a$ beschrieben werden kann und unter der Forderung, dass das transformierte Feld Φ' chiral bleibt

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{A}}\Phi' &= \bar{D}_{\dot{A}}[e^{-i\Lambda}\Phi] \\ &= [\bar{D}_{\dot{A}}e^{-i\Lambda}]\Phi + e^{-i\Lambda}[\bar{D}_{\dot{A}}\Phi] \\ &= [-i(\bar{D}_{\dot{A}}\Lambda)e^{-i\Lambda}]\Phi = 0 \Rightarrow \bar{D}_{\dot{A}}\Lambda = 0, \end{aligned} \quad (2.107)$$

selbst chiral ist. Die T^a sind die drei Generatoren der SU(2) (siehe Anhang A)

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad \text{und} \quad \text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (2.108)$$

Nimmt man ein System von masselosen chiralen Superfeldern Φ , so ist wie im abelschen Fall klar, dass unter diesen Eichtransformationen der kinetische Teil der Lagrangedichte nicht invariant bleibt, da

$$\Phi'^\dagger\Phi' = \Phi^\dagger e^{i(\Lambda^\dagger - \Lambda)}\Phi. \quad (2.109)$$

Um nun eine transformationsinvariante Lagrangedichte zu konstruieren, führt man wie im abelschen Fall zunächst ein matrixwertiges Vektor-Superfeld $V = V^a T^a$ ein, welches sich unter der Transformation wie

$$e^{V'} = e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} \quad (2.110)$$

verhält und daher zur adjungierten Darstellung der Eichgruppe gehört. Damit ist unter Berücksichtigung der Wess-Zumino-Eichung [BK] sein Transformationsverhalten festgelegt zu

$$V' - V = i(\Lambda - \Lambda^\dagger) - i[V, \Lambda + \Lambda^\dagger]. \quad (2.111)$$

Die supersymmetrische Lagrangedichte $\Phi^\dagger e^V \Phi$ ist somit eichinvariant. Um nun wieder V selbst in die Dynamik einzubinden, führt man analog zu (2.97) bzw. (2.98) neue, Lie-Algebra wertige chirale Superfelder ($\bar{D}_{\dot{A}}W_A = D_A\bar{W}_{\dot{A}} = 0$) ein, deren Aufbau sich im Vergleich zu den üblichen abelschen Feldstärkevektoren nur geringfügig unterscheidet

$$W_A = -\frac{1}{4}\bar{D}^2(e^{-V}D_A e^V) = W_A^a T^a \quad (2.112)$$

$$\bar{W}_{\dot{A}} = \frac{1}{4}D^2(e^V\bar{D}_{\dot{A}}e^{-V}) = (W_A)^\dagger. \quad (2.113)$$

Dieses sind die supersymmetrischen Yang-Mills-Feldstärken. Im abelschen Fall gehen sie wieder über in die üblichen abelschen Feldstärken. Außerdem sind sie kovariant bezüglich der Eichtransformationen.

$$\begin{aligned} W'_A &= -\frac{1}{4}\bar{D}^2(e^{-i\Lambda}e^{-V}e^{i\Lambda^\dagger}D_A e^{-i\Lambda^\dagger}e^V e^{i\Lambda}) = -\frac{1}{4}\bar{D}^2(e^{-i\Lambda}e^{-V}D_A(e^V e^{i\Lambda})) \\ &= e^{-i\Lambda}W_A e^{i\Lambda} - \frac{1}{4}e^{-i\Lambda}\bar{D}^2D_A e^{i\Lambda} = e^{-i\Lambda}W_A e^{i\Lambda} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Weil $\bar{D}^2 D_A \eta = 0$ für jedes chirale Superfeld η ist, ergibt sich somit

$$W'_A = e^{-i\Lambda} W_A e^{i\Lambda} \quad (2.115)$$

$$\bar{W}'_{\dot{A}} = e^{-i\Lambda^\dagger} \bar{W}_{\dot{A}} e^{i\Lambda^\dagger}. \quad (2.116)$$

Dies bedeutet aber, dass die Eichtransformationen die Spuren

$$\text{Tr}(W^A W_A) = \text{Tr}(W^{Aa} T^a W_A^b T^b) = W^{Aa} W_A^b \text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} W^{Aa} W_A^a \quad (2.117)$$

$$\text{bzw. } \text{Tr}(\bar{W}_{\dot{A}} \bar{W}^{\dot{A}}) = \frac{1}{2} \bar{W}_{\dot{A}}^a \bar{W}^{\dot{A}a} \quad (2.118)$$

nicht ändern und daher auch der Eichfeldanteil der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \left(\text{Tr}(W^A W_A) \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \text{Tr}(\bar{W}_{\dot{A}} \bar{W}^{\dot{A}}) \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \right) \quad (2.119)$$

durch eine solche Konstruktion gleichzeitig eich- und SUSY-invariant ist.

Die allgemeinste supersymmetrische renormierbare Lagrangedichte ist schließlich durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} \left(\text{Tr}(W^A W_A) \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \text{Tr}(\bar{W}_{\dot{A}} \bar{W}^{\dot{A}}) \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \right) \\ & + (\Phi e^V \Phi)_D \\ & + \left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right)_F + \text{h.c} \end{aligned} \quad (2.120)$$

gegeben. Der letzte Term ist so gewählt, dass die Wirkung noch renormierbar ist. Im weiteren beschränken wir uns auf den reinen Eichterm $\text{Tr}(W^A W_A)$ (Yang-Mills-Term).

Um diesen Ausdruck in seine Komponentenfelder zu zerlegen, nutzt man aus, dass

$$W_A^a = i\lambda_A^a - 2d^a \theta_A - (\sigma^{\mu\nu} \theta)_A F_{\mu\nu}^a - (\theta\theta) (\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}^a)_A \quad (2.121)$$

ist, mit der Yang-Mills-Feldstärke

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.122)$$

und der kovarianten Ableitung

$$\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}^{a\dot{A}} = \partial_\mu \bar{\lambda}^{a\dot{A}} + g f^{abc} A_\mu^b \bar{\lambda}^{c\dot{A}}. \quad (2.123)$$

Durch Einsetzen und einiges Umformen ist

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - i\lambda^a \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}^a + \frac{1}{2} d^a d^a. \quad (2.124)$$

Das Hilfsfeld d , das die Boson-Fermion-Regel sichert, kann durch eine Gauß-Integration eliminiert werden, wodurch man von der sogenannten off-shell zur on-shell-Darstellung gelangt. Das Weyl-Spinorfeld wird mit

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \bar{\lambda}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad (2.125)$$

zum Majorana-Feld, so dass

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{i}{2}\bar{\lambda}^a \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a. \quad (2.126)$$

Oft ist es üblich, die Kopplung g des Eichfeldes an seinen fermionischen Superpartner in das Eichfeld A_μ in adjungierter Darstellung zu absorbieren.

$$\lambda = \lambda^a T^a \quad (2.127)$$

$$A_\mu = -ig A_\mu^a T^a \quad (2.128)$$

$$F_{\mu\nu} = -ig F_{\mu\nu}^a T^a \quad (2.129)$$

Dies liefert einen zusätzlichen Faktor $\frac{1}{g^2}$, und man verbleibt nach der Wick-Rotation in euklidischer Raumzeit mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E(x) &= -\frac{1}{2g^2} \text{Tr} (F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)) + \text{Tr} (\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x)) \\ &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu (\mathcal{D}_\mu \lambda(x))^a, \end{aligned} \quad (2.130)$$

mit dem üblichen nicht-abelschen Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (2.131)$$

und der kovarianten Ableitung

$$(\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}) = \partial_\mu \bar{\lambda} + [A_\mu, \bar{\lambda}]. \quad (2.132)$$

Dies ist die Lagrange-Dichte der N=1 SYM mit den Gluonfeldern $A_\mu^a(x)$ und den Gluinofeldern $\lambda^a(x)$. Sie entspricht in ihrer Form der QCD-Lagrangedichte² mit dem Unterschied, dass es sich bei den Fermionen um Majorana-Fermionen handelt. Sie ist invariant unter den SUSY-Transformationen:

$$\delta A_\mu^a = 2i\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda^a(x) \quad (2.133)$$

$$\delta \lambda^a = -\sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \epsilon \quad (2.134)$$

$$\delta \bar{\lambda}^a = \bar{\epsilon} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a(x) \quad (2.135)$$

2.5 Die Gluino-Masse und die Massenmultipletts

Bisher sind die Gluino-Felder zunächst noch masselos. Führt man allerdings eine von null verschiedene Gluino-Masse $m_{\tilde{g}}$ durch den Masseterm

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = m_{\tilde{g}} \text{Tr} \bar{\lambda} \lambda \quad (2.136)$$

ein, so bricht dieser Term die Supersymmetrie. Die Brechung bezeichnet man als weich, da die für die Klärung des Hierarchieproblems notwendigen Effekte des „non-renormalization-Theorems“

²Für eine SUSY-QCD müsste man noch zusätzlich chirale Felder verwenden, die dann die Quarks bzw. Squarks beinhalten.

und die damit verbundene Aufhebung der Divergenzen nach wie vor erhalten bleiben [GG]. Darüberhinaus bricht die Gluino-Masse, wie in der QCD, die chirale $U(1)$ -Symmetrie durch die Transformationen

$$\lambda \rightarrow e^{i\phi\gamma_5}\lambda \quad \text{bzw.} \quad \bar{\lambda} \rightarrow \bar{\lambda}e^{i\phi\gamma_5} \quad (2.137)$$

und Instantonenrechnungen für das Gluino-Kondensat $\langle \bar{\lambda}\lambda \rangle$ [AKM] zeigen aufgrund dessen eine Aufspaltung in $\langle \bar{\lambda}\lambda \rangle > 0$ für $m_{\tilde{g}} > 0$ und $\langle \bar{\lambda}\lambda \rangle < 0$ für $m_{\tilde{g}} < 0$. Im Grenzfall verschwindender Gluino-Masse $m_{\tilde{g}} = 0$, in dem die Supersymmetrie wieder hergestellt ist, erwartet man daher einen Phasenübergang erster Ordnung mit $\langle \bar{\lambda}\lambda \rangle$ als Ordnungsparameter.

Analog zur QCD vermutet man darüberhinaus mit $m_{\tilde{g}} = 0$ im Niederenergiespektrum der supersymmetrischen Multipletts farblose Bindungszustände zwischen Gluonen und/oder Gluinos. Zur Beschreibung dieser Multipletts ist es üblich, effektive Feldtheorien aus geeigneten farblosen Operatoren, die den Teilchen des Multipletts entsprechen, zusammenzusetzen. Nach der Theorie von G.VENEZIANO und S.YANKIELOWICZ [VY] sind dies:

- $\bar{\lambda}\gamma_5\lambda$: ein pseudoskalaros Boson aus zwei Gluinos mit Spin 0 und der Masse $m_{\tilde{g}\tilde{g}}^{0-}$. Sein Name $a\text{-}\eta'$ wurde aus dem äquivalent aufgebauten η' -Meson der QCD abgeleitet (a = adjungiert).
- $\bar{\lambda}\lambda$: ein skalares Boson mit Spin 0 und Masse $m_{\tilde{g}\tilde{g}}^{0+}$ ($a\text{-}f_0$). Seine Bezeichnung ist ebenfalls aus der QCD entliehen.
- $F_{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\lambda$: der Gluino-Glueball, ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen aus einem Majorana-Fermion und einem Gluon mit Masse $m_{g\tilde{g}}$. In der QCD gibt es hierfür keine Entsprechung.

Neuere Untersuchungen von G.R. FARRAR, G. GABADAZE und M.SCHWETZ [FGS] sagen zusätzlich noch ein zweites, leichteres Multiplett auch mit gluonischen Bindungszuständen voraus.

- $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ (0^+ Glueball)
- $F_{\mu\nu}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ (0^- Glueball)
- Gluino-Glueball wie in der VENEZIANO-YANKIELOWICZ-Wirkung, aber leichter als dieses

Die Massen dieser Multipletts spalten sich im Regime der weich gebrochenen Supersymmetrie ($m_{\tilde{g}} \neq 0$) auf.

Kapitel 3

Die Grassmann-Algebra und ihre Anwendungen

In vielen Bereichen der Quantenfeldtheorie, in denen Fermionen eine Rolle spielen, so wie zum Beispiel in der QED oder QCD, werden Funktionalintegrale über Felder benötigt, die nicht wie üblich miteinander kommutieren (bosonische Felder) sondern antikommutieren (fermionische Felder). Um die Funktionalintegrale der zugehörigen Korrelationsfunktionen, die Greenschen Funktionen, berechnen zu können, braucht man eine Algebra, mit deren Hilfe gleiche Elemente bzw. funktionale Felder sich dem Paulischen Ausschließungsprinzip nach vernichten. Diese Algebra ist die nach dem Mathematiker H. GRASSMANN benannte Grassmann-Algebra. Im folgenden werden die für die weitere Arbeit benötigten Rechenregeln und Integrationsformeln aufgezeigt.

Ein Spezialfall der funktionalen Grassmann-Integration ist die Integration über Majorana-wertige Felder, bei denen die zusätzliche Bedingung zwischen den zueinander adjungierten Feldern ($\bar{\lambda} = \lambda^T C$) dafür sorgt, dass die Anzahl der Freiheitsgrade von den ursprünglich 8 (4 komplexe Einträge) der gewöhnlichen Dirac-Felder auf 4 reduziert wird. Insbesondere für diese Felder werden Integrationsformeln, vor allem im Hinblick auf die Greenschen Funktionen, angegeben

3.1 Die komplexe Grassmann-Algebra

Wie schon erwähnt, fußt die Integration über fermionische Felder auf der antikommutierenden Algebra

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = \{\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = 0. \quad (3.1)$$

Die fermionischen Feldfunktionen werden durch Dirac-Spinoren beschrieben, die sich in der Weyl-Darstellung aus den beiden zweikomponentigen Weyl-Spinoren ψ_L und ϕ_R zusammensetzen. Diese sind durch ihr Transformationsverhalten bezüglich der linken bzw. der rechten Fundamentaldarstellung der allgemeinen Lorentz-Gruppe charakterisiert.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Der jeweilige adjungierte Spinor ergibt sich in der minkowskischen Beschreibung durch

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma_0. \quad (3.3)$$

Um nun die Darstellung zu vereinfachen, wird im folgenden nicht mehr von Feldern $\psi(x)$ bzw. $\bar{\psi}(x)$ $x \in \mathbb{R}$, die eine unendlich-dimensionale Algebra erzeugen, sondern vereinfachend von den endlich vielen Grassmann-Variablen¹ η und $\bar{\eta}$ die Rede sein.

$$\{\eta_i, \eta_j\} = \{\bar{\eta}_i, \eta_j\} = \{\bar{\eta}_i, \bar{\eta}_j\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_i^2 = \bar{\eta}_i^2 = 0 \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (3.4)$$

Die nachfolgenden Rechnungen lassen sich aber später leicht wieder auf die Felder übertragen, indem man den Kontinuumsimes $\eta_i \rightarrow \psi(x)$ betrachtet. Die Antikommutatoren (3.4) bedingen, dass jede Funktion $F(\eta_i, \bar{\eta}_i)$ in eine endliche Reihe von Grassmann-Produkten mit komplexen Koeffizienten entwickelbar ist.

$$\begin{aligned} F(\eta_i, \bar{\eta}_i) &= F^{(00)} + F_{i_1}^{(10)} \eta_{i_1} + F_{i_1}^{(01)} \bar{\eta}_{i_1} + F_{j_1 i_1}^{(11)} \eta_{j_1} \bar{\eta}_{i_1} + \sum_{i_1 > i_2} F_{i_1 i_2}^{(20)} \eta_{i_1} \eta_{i_2} \\ &\quad + \sum_{j_1 > j_2} F_{j_1 j_2}^{(02)} \bar{\eta}_{j_1} \bar{\eta}_{j_2} + \dots + \sum_{j_1 > \dots > j_N} \sum_{i_1 > \dots > i_N} F_{(j_1 i_1)(j_2 i_2) \dots (j_N i_N)}^{(NN)} \eta_{j_1} \bar{\eta}_{i_1} \dots \eta_{j_N} \bar{\eta}_{i_N} \\ &= F^{(00)} + F^{(10)} \eta + F^{(01)} \bar{\eta} + F^{(11)} \eta \bar{\eta} + \sum_{i_1 > i_2} F^{(20)} \eta \eta \\ &\quad + F^{(02)} \bar{\eta} \bar{\eta} + \dots + F^{(NN)} \eta_1 \bar{\eta}_1 \dots \eta_N \bar{\eta}_N \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1.1 Differentiation nach Grassmann-Variablen

Bei der Differentiation nach grassmannwertigen Variablen existieren, anders als bei kommutierenden Algebren, zwei verschiedene Ableitungen:

$$\text{Linksableitung: } \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \bar{\eta} = \bar{\eta} = -\frac{\partial}{\partial \eta} \bar{\eta} \eta \quad (3.6)$$

$$\text{Rechtsableitung: } \eta \bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} = \eta = -\bar{\eta} \eta \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \quad (3.7)$$

Ferner ist darauf zu achten, dass die Variablen so häufig paarweise miteinander vertauscht werden, bis die Variable, nach der differenziert werden soll, direkt vor dem Differentialoperator steht, z.B.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 &= \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} [-\eta_1 \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 \eta_2] = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} \eta_1 \bar{\eta}_2 \bar{\eta}_1 \eta_2 = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} [-\bar{\eta}_2 \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2] = -\eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_3} \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Für spätere Berechnungen wird zudem noch folgende Beziehung benötigt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \exp \left(\sum_j \bar{\rho}_j \eta_j \right) &= \frac{\partial}{\partial \rho_i} \prod_j (1 + \bar{\rho}_j \eta_j) = \eta_i \prod_{j \neq i} (1 + \bar{\rho}_j \eta_j) \\ &= \underbrace{\eta_i (1 + \bar{\rho}_i \eta_i)}_{\eta_i} \prod_{j \neq i} (1 + \bar{\rho}_j \eta_j) = \eta_i \exp \left(\sum_j \bar{\rho}_j \eta_j \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

¹Auch Generatoren genannt, da sie einen N -dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum aufspannen.

Entsprechend gilt

$$\exp\left(\sum_j \bar{\eta}_j \rho_j\right) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \rho_i} = \bar{\eta}_i \exp\left(\sum_j \bar{\eta}_j \rho_j\right). \quad (3.10)$$

3.1.2 Integration über Grassmann-Variablen

Ziel dieses Abschnittes ist es, Integrale der Form

$$\int D(\bar{\eta}\eta) F(\eta, \bar{\eta}) \quad \text{mit} \quad D(\bar{\eta}\eta) = d\bar{\eta}_N d\eta_N \dots d\bar{\eta}_1 d\eta_1 \quad (3.11)$$

zu lösen. Plausiblerweise fordert man für Grassmann-Integrale

$$\int d\eta_i 1 = 0 \quad (\text{Integrale über totale Differentiale } \frac{d\eta_i}{d\eta_i} = 1 \text{ verschwinden}) \quad (3.12)$$

$$\int d\eta_i \eta_i = 1 \quad (\text{Normierung}). \quad (3.13)$$

Bemerkenswert ist hier die Äquivalenz von Integration und Differentiation. Im Raum der Grassmann-Zahlen sind Integration und Differentiation dasselbe. Natürlich antikommutieren auch die Integrationsmaße

$$\{d\eta_i, d\eta_j\} = \{d\eta_i, \eta_j\} = 0. \quad (3.14)$$

Beispiel:

$$\int d\bar{\eta} d\eta \eta \bar{\eta} = - \int d\bar{\eta} d\eta \bar{\eta} \eta = \int d\eta d\bar{\eta} \bar{\eta} \eta = 1 \quad (3.15)$$

$$\int d\bar{\eta}_1 d\eta_1 d\eta_2 \eta_1 \bar{\eta}_1 = 0 \quad (3.16)$$

$$\int D(\bar{\eta}\eta) F(\eta_i, \bar{\eta}_i) = F^{(NN)} \quad (3.17)$$

Diese Regeln können nun auf folgendes Integral angewandt werden.

$$\begin{aligned} I[A] &= \int D(\bar{\eta}\eta) \exp(-(\bar{\eta}, A\eta)) = \int D(\bar{\eta}\eta) \exp\left(-\sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j\right) \\ &= \int D(\bar{\eta}\eta) \prod_{i=1}^N \exp(-\bar{\eta}_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \eta_j) \\ &= \int D(\bar{\eta}\eta) (1 - \bar{\eta}_1 A_{1i_1} \eta_{i_1})(1 - \bar{\eta}_2 A_{2i_2} \eta_{i_2}) \dots (1 - \bar{\eta}_N A_{Ni_N} \eta_{i_N}) \\ &= \int D(\bar{\eta}\eta) (1 + \eta_{i_1} A_{1i_1} \bar{\eta}_1)(1 + \eta_{i_2} A_{2i_2} \bar{\eta}_2) \dots (1 + \eta_{i_N} A_{Ni_N} \bar{\eta}_N) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
&= \int D(\bar{\eta}\eta) \sum_{i_1, \dots, i_N} \eta_{i_1} \bar{\eta}_1 \eta_{i_2} \bar{\eta}_2 \dots \eta_{i_N} \bar{\eta}_N A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{Ni_N} \\
&= \int D(\bar{\eta}\eta) \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 \dots \eta_N \bar{\eta}_N \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} A_{1\sigma_1} A_{2\sigma_2} \dots A_{N\sigma_N} \\
&= \left(\int d\bar{\eta}_N d\eta_N \dots d\bar{\eta}_1 d\eta_1 \eta_1 \bar{\eta}_1 \dots \eta_N \bar{\eta}_N \right) \det(A) = \det(A) \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $(-1)^{\sigma}$ die Parität der Permutationen.

Setzt man nun $B = (-A)$, so ist

$$\begin{aligned}
I[B] &= \int D(\bar{\eta}\eta) \exp(-(\bar{\eta}, B\eta)) = \det(B) = \det(-A) = (-1)^N \det(A) \\
\Rightarrow \det(A) &= (-1)^{-N} \int D(\bar{\eta}\eta) \exp((\bar{\eta}, A\eta)) = \int D(\eta\bar{\eta}) \exp((\bar{\eta}, A\eta)), \quad (3.20)
\end{aligned}$$

und daher

$$\int D(\bar{\eta}\eta) \exp(-(\bar{\eta}, A\eta)) = \int D(\eta\bar{\eta}) \exp((\bar{\eta}, A\eta)). \quad (3.21)$$

Einschub:

Ein anderes Verfahren zur Berechnung von $I[A]$ benutzt die Grassmannsche Integralsubstitution. Es sei $F_A(\bar{\eta}, \eta) = F(\bar{\eta}, A\eta)$, dann ist

$$\int D(\eta\bar{\eta}) F_A(\bar{\eta}, \eta) = \det(A) \int D(\eta\bar{\eta}) F(\bar{\eta}, \eta). \quad (3.22)$$

Beweis:

Wie in (3.5) ist

$$\begin{aligned}
F(\bar{\eta}, \eta) &= \dots + F^{(NN)} \bar{\eta}_1 \eta_1 \dots \bar{\eta}_N \eta_N \\
\Rightarrow F_A(\bar{\eta}, \eta) &= F(\bar{\eta}, A\eta) \\
&= \dots + F^{(NN)} \bar{\eta}_1 A_{1k_1} \eta_{k_1} \dots \bar{\eta}_N A_{Nk_N} \eta_{k_N} \\
&= \dots + F^{(NN)} \left(\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} A_{1\sigma_1} \dots A_{N\sigma_N} \right) \bar{\eta}_1 \eta_1 \dots \bar{\eta}_N \eta_N \\
&= \dots + F^{(NN)} (\det(A)) \bar{\eta}_1 \eta_1 \dots \bar{\eta}_N \eta_N \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Mit $F_A(\bar{\eta}, \eta) = \exp((\bar{\eta}, A\eta))$ folgt also

$$\int D(\eta\bar{\eta}) \exp((\bar{\eta}, A\eta)) = \det(A) \int D(\eta\bar{\eta}) e^{(\bar{\eta}, \eta)} = \det(A). \quad (3.24)$$

Durch eine einfache lineare Substitution kann man mit diesem Ergebnis auch folgendes, für den späteren Pfadintegralformalismus wichtige Integral lösen.²

$$\begin{aligned}
Z[\rho, \bar{\rho}] &= \int D(\bar{\eta}\eta) \exp(-(\bar{\eta}, A\eta) + (\bar{\eta}, \rho) + (\bar{\rho}, \eta)) \\
&= \int D(\bar{\eta}\eta) \exp \left(- \sum_{i,j} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j + \sum_i (\bar{\eta}_i \rho_i + \bar{\rho}_i \eta_i) \right) \quad (3.25)
\end{aligned}$$

²Die „Quellen“ $\{\rho_i\}$ und $\{\bar{\rho}_i\}$ sind ebenfalls Elemente einer komplexen Grassmann-Algebra.

Denn mit

$$\eta'_i = \eta_i - \sum_k A_{ik}^{-1} \rho_k \quad \text{bzw.} \quad \bar{\eta}'_i = \bar{\eta}_i - \sum_k \bar{\rho}_k A_{ik}^{-1} \quad (3.26)$$

und der Invarianz des Integrationsmaßes bezüglich dieser Transformation erhält man

$$\begin{aligned} Z[\rho, \bar{\rho}] &= \left[\int D(\bar{\eta}' \eta') \exp \left(- \sum_{i,j} \bar{\eta}'_i A_{ij} \eta'_j \right) \right] \cdot \exp \left(\sum_{i,j} \bar{\rho}_i A_{ij}^{-1} \rho_j \right) \\ &= \det(A) \exp \left(\sum_{i,j} \bar{\rho}_i A_{ij}^{-1} \rho_j \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ein weiteres wichtiges Integral, das später noch benutzt wird, ist

$$\begin{aligned} I_{i_1 \dots i_l i'_1 \dots i'_l}[A] &= \int D(\bar{\eta} \eta) \eta_{i_1} \dots \eta_{i_l} \bar{\eta}_{i'_1} \dots \bar{\eta}_{i'_l} \exp \left(- \sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j \right) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_{i_l}} Z[\rho, \bar{\rho}] \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \rho_{i'_1}} \dots \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \rho_{i'_l}} \right]_{\rho=\bar{\rho}=0}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

$Z[\rho, \bar{\rho}]$ ist somit die erzeugende Funktion von I und wird nun im Hinblick auf die Differentiationen folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} Z[\rho, \bar{\rho}] &= \det(A) \exp \left(\sum_{i,j} \bar{\rho}_i A_{ij}^{-1} \rho_j \right) = \det(A) \prod_i \exp \left(\bar{\rho}_i \sum_j A_{ij}^{-1} \rho_j \right) \\ &= \det(A) (1 + \bar{\rho}_{i_1} A_{i_1 k_1}^{-1} \rho_{k_1}) (1 + \bar{\rho}_{i_2} A_{i_2 k_2}^{-1} \rho_{k_2}) \dots (1 + \bar{\rho}_{i_l} A_{i_l k_l}^{-1} \rho_{k_l}) \cdot [\dots] \end{aligned} \quad (3.29)$$

$[\dots]$ bezeichnet die noch verbleibenden Faktoren, die nicht $\bar{\rho}_{i_1}, \dots, \bar{\rho}_{i_l}$ enthalten. Diese spielen aber bei den weiteren Berechnungen keine Rolle, da nach ihnen nicht differenziert wird und sie danach im Exponenten gleich null gesetzt werden. Aus diesem Grund werden sie durch 1 ersetzt. Der relevante Teil von $Z[\rho, \bar{\rho}]$ hinsichtlich der späteren Integration ist also

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \det(A) \sum_{\{k_i\}'} \bar{\rho}_{i_1} A_{i_1 k_1}^{-1} \rho_{k_1} \dots \bar{\rho}_{i_l} A_{i_l k_l}^{-1} \rho_{k_l}. \quad (3.30)$$

Alle k_i müssen dabei natürlich verschieden sein und können nur die Werte $\{i'_1, i'_2, \dots, i'_l\}$ annehmen, was durch den Strich an $\{k_i\}'$ ausgedrückt wird und durch die zugehörigen Rechtsableitungen in (3.28) begründet wird. Den obigen Ausdruck kann man auch schreiben als Summe über alle Permutationen von $\{i'_1, i'_2, \dots, i'_l\}$

$$\begin{aligned} Z[\rho, \bar{\rho}] &= \det A \sum_P A_{i_1, i'_{P_1}}^{-1} A_{i_2, i'_{P_2}}^{-1} \dots A_{i_l, i'_{P_l}}^{-1} \bar{\rho}_{i_1} \rho_{i'_{P_1}} \bar{\rho}_{i_2} \rho_{i'_{P_2}} \dots \bar{\rho}_{i_l} \rho_{i'_{P_l}} \\ &= \det A \left[\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} A_{i_1, i'_{\sigma_1}}^{-1} A_{i_2, i'_{\sigma_2}}^{-1} \dots A_{i_l, i'_{\sigma_l}}^{-1} \right] \bar{\rho}_{i_1} \rho_{i'_1} \bar{\rho}_{i_2} \rho_{i'_2} \dots \bar{\rho}_{i_l} \rho_{i'_l}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Beachtet man beim Einsetzen von Z in (3.28) die Regeln der Links- und Rechtsableitungen, die zu einer erneuten Umordnung der Variablen führt, so ergibt sich ein zusätzlicher Faktor $\xi_l = (-1)^{l(l-1)/2}$.

$$\begin{aligned} & \int D(\bar{\eta}\eta) \eta_{i_1} \dots \eta_{i_l} \bar{\eta}_{i'_1} \dots \bar{\eta}_{i'_l} \exp\left(-\sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j\right) = \xi_l (\det A) \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} A_{i_1, i'_{\sigma_1}}^{-1} A_{i_2, i'_{\sigma_2}}^{-1} \dots A_{i_l, i'_{\sigma_l}}^{-1} \\ \Leftrightarrow & \int D(\bar{\eta}\eta) \eta_{i_1} \bar{\eta}_{i'_1} \dots \eta_{i_l} \bar{\eta}_{i'_l} \exp\left(-\sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j\right) = (\det A) \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} A_{i_1, i'_{\sigma_1}}^{-1} A_{i_2, i'_{\sigma_2}}^{-1} \dots A_{i_l, i'_{\sigma_l}}^{-1} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Diese Beziehung ist notwendig für die Berechnung der 2-Punkt-Korrelationsfunktion (Kontraktion)

$$\begin{aligned} \underbrace{\eta_i \bar{\eta}_j}_{\text{Kontraktion}} \equiv \langle \eta_i \bar{\eta}_j \rangle &= \frac{\int D(\bar{\eta}\eta) \eta_i \bar{\eta}_j \exp\left(-\sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j\right)}{\int D(\bar{\eta}\eta) \exp\left(-\sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j\right)} \\ &= \frac{(\det A) A_{ij}^{-1}}{(\det A)} = A_{ij}^{-1} \end{aligned} \quad (3.33)$$

bzw. für allgemeine (2l)-Punkt-Korrelationsfunktionen

$$\begin{aligned} \langle \eta_{i_1} \bar{\eta}_{i'_1} \dots \eta_{i_n} \bar{\eta}_{i'_n} \rangle &= \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} A_{i_1, i'_{\sigma_1}}^{-1} A_{i_2, i'_{\sigma_2}}^{-1} \dots A_{i_l, i'_{\sigma_l}}^{-1} \\ &= \underbrace{\eta_{i_1} \bar{\eta}_{i'_1} \dots \eta_{i_n} \bar{\eta}_{i'_n}}_{\text{Kontraktion}} + \underbrace{\eta_{i_1} \bar{\eta}_{i'_1} \dots \eta_{i_n} \bar{\eta}_{i'_n}}_{\text{Kontraktion}} + \dots \\ &\quad + \underbrace{\eta_{i_1} \bar{\eta}_{i'_1} \dots \eta_{i_n} \bar{\eta}_{i'_n}}_{\text{Kontraktion}} + \dots \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.1.3 Komplex-grassmannwertige Pfadintegrale in der freien Dirac-Theorie

Nachdem nun die wichtigsten Regeln der komplexen Grassmann-Theorie hergeleitet wurden, können diese übertragen werden auf die fermionischen Felder im Pfadintegralformalismus.

Als ein Beispiel hierfür diene die freie Dirac-Theorie in der euklidischen Darstellung mit der Wirkung

$$S_F[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi}(x) (\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m) \psi(x) \quad (3.35)$$

oder unter Berücksichtigung der vier Komponenten von ψ , den Dirac-Indizes im folgenden gekennzeichnet durch α und β ,

$$S_F[\psi, \bar{\psi}] = \sum_{\alpha, \beta} \iint d^4x d^4y \bar{\psi}_{\alpha}(x) K_{\alpha\beta}(x-y) \psi_{\beta}(y) =: (\bar{\psi}, K\psi) \quad (3.36)$$

$$\text{mit dem Integralkern } K_{\alpha\beta}(x-y) = (\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m)_{\alpha\beta} \delta^{(4)}(x-y). \quad (3.37)$$

Wie in der Einleitung erwähnt bilden die Feldvariablen eine unendlichdimensionale Grassmann-Algebra. Dies bereitet (zumindest formal) keine Schwierigkeiten, denn man kann nun die Rechenregeln des diskreten endlichdimensionalen Falls sinngemäß übertragen.

Die Zweipunktkorrelationsfunktion $\tau(x, y)$, der sogenannte Fermionpropagator, entspricht dem Vakuumerwartungswert des Produkts der freien Felder. Analog zu (3.33) ist er das Inverse zum Fermion-Operator K .

$$\begin{aligned}
\tau(x, y) &= \langle \Omega | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | \Omega \rangle \\
&= \frac{\int D(\bar{\psi}\psi) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \exp(-S_F[\psi, \bar{\psi}])}{\int D(\bar{\psi}\psi) \exp(-S_F[\psi, \bar{\psi}])} \\
&= K_{\alpha,\beta}^{-1}(x, y) \\
&= -(\gamma_\mu \partial_\mu - m)_{\alpha\beta} \Delta_F(x - y) \\
&= S_{F\alpha\beta}(x - y)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$D(\bar{\psi}\psi) = \prod_{\alpha,x} d\bar{\psi}_\alpha(x) d\psi_\alpha(x) \tag{3.39}$$

$\Delta_F(x - y)$ ist der Feynman-Propagator für skalare Felder

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \Delta_F(p) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{1}{p^2 + m^2}, \tag{3.40}$$

der die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt ($\square = -\partial_\mu \partial^\mu$)

$$\begin{aligned}
(\square_x + m^2) \Delta_F(x - y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (p^2 + m^2) \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2} \\
&= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} = \delta^4(x - y).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$S_{F\alpha\beta}(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{(-i\not{p} + m)_{\alpha\beta}}{p^2 + m^2} \tag{3.42}$$

ist der Feynman-Propagator für Diracfelder. Die zugehörigen 2l-Punkt-Korrelationsfunktionen $\tau(x_1, y_1, \dots, x_l, y_l)$ können dann äquivalent zu (3.34) durch

$$\begin{aligned}
\tau(x_1, y_1, \dots, x_l, y_l) &= \langle \Omega | \psi_{\alpha_1}(x_1) \bar{\psi}_{\beta_1}(y_1) \dots \psi_{\alpha_l}(x_l) \bar{\psi}_{\beta_l}(y_l) | \Omega \rangle \\
&= \frac{\int D(\bar{\psi}\psi) \psi_{\alpha_1}(x_1) \bar{\psi}_{\beta_1}(y_1) \dots \psi_{\alpha_l}(x_l) \bar{\psi}_{\beta_l}(y_l) \exp(iS_F[\psi, \bar{\psi}])}{\int D(\bar{\psi}\psi) \exp(iS_F[\psi, \bar{\psi}])} \\
&= \sum_{\sigma} (-1)^\sigma \tau(x_1, y_{\sigma_1}) \dots \tau(x_l, y_{\sigma_l})
\end{aligned} \tag{3.43}$$

berechnet werden. Dies ist das Wicksche Theorem für fermionische Felder. Auch die Gleichungen (3.19) und (3.27) können direkt in den Pfadintegralformalismus übernommen werden. Somit ist

$$\int D(\bar{\psi}\psi) \exp(-(\bar{\psi}, K\psi)) = \det(K) \tag{3.44}$$

und

$$\int D(\bar{\psi}\psi) \exp(-(\bar{\psi}, K\psi) + (\bar{\eta}, \psi) + (\bar{\psi}, \eta)) = \det(K) \exp((\bar{\eta}, K^{-1}\eta)). \tag{3.45}$$

3.2 Die reelle Grassmann-Algebra

Die n -dimensionale reellwertige Grassmann-Algebra wird durch die Generatoren

$$\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n \quad \text{mit} \quad n = 2 \cdot m \quad (3.46)$$

aufgespannt, die wiederum antikommutieren

$$\{\xi_i, \xi_j\} = 0. \quad (3.47)$$

Dabei ist eine gerade Dimension nicht notwendig. Eine ungerade Dimension führt aber zu verschwindenden Integralausdrücken. Außerdem kann durch eine gerade Anzahl von Generatoren wieder eine komplexe Grassmann-Algebra aufgebaut werden und umgekehrt

$$\{\eta_1, \dots, \eta_m, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_m\} \longleftrightarrow \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \quad (3.48)$$

So können die Rechenregeln der Differentiation und der Integration leicht aus der komplexen in die reelle Algebra übertragen werden.

Erneut gilt es, ein Integral $I[A]$, welches vergleichbar ist mit (3.19) ist, zu lösen. Eine Matrix A sei antisymmetrisch³ ($A_{ij} = -A_{ji}$) und es sei $D\xi = d\xi_n \dots d\xi_1$

$$I[A] = \int D\xi \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} \xi_i A_{ij} \xi_j\right) = \frac{1}{2^m m!} \int D\xi \left(\sum_{i,j} \xi_i A_{ij} \xi_j\right)^m.$$

Beim Ausmultiplizieren des Produkts tragen abermals nur Terme bei, die eine Permutation der $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ enthalten.⁴ Unter Berücksichtigung der Vorzeichenwechsel aufgrund der Umordnung der ξ 's hinsichtlich der Integration erhält man so

$$I[A] = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} A_{i_{\sigma_1}, i_{\sigma_2}} A_{i_{\sigma_3}, i_{\sigma_4}} \dots A_{i_{\sigma_{n-1}}, i_{\sigma_n}} =: \text{Pf}(A). \quad (3.51)$$

Diesen Ausdruck bezeichnet man als die Pfaffsche Form der antisymmetrischen Matrix A . Dabei besteht folgender wichtiger Zusammenhang:

$$\text{Pf}(A)^2 = \det(A) \quad (3.52)$$

Beweis:

$$\text{Pf}(A)^2 = I[A]^2 = \int D\xi D\xi' \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} A_{ij} (\xi_i \xi_j + \xi'_i \xi'_j)\right) \quad (3.53)$$

³O.B.d.A ist A antisymmetrisch, denn es ist $A_a = \frac{A^T - A}{2}$ der antisymmetrische Anteil einer Matrix A und es gilt:

$$\sum_{ij} \xi_i A_{ij} \xi_j = - \sum_{ij} \xi_j A_{ij} \xi_i = - \sum_{ij} \xi_j A_{ji}^T \xi_i \quad (3.49)$$

und daher

$$\sum_{ij} \xi_i A_{ij} \xi_j = \sum_{ij} \xi_i \left(\frac{A - A^T}{2}\right)_{ij} \xi_j = \sum_{ij} \xi_i (A_a)_{ij} \xi_j. \quad (3.50)$$

⁴Für n ungerade ist $I[A] = 0$.

Durch die lineare Transformation

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_k + i\xi'_k) \quad \text{und} \quad \bar{\eta}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_k - i\xi'_k), \quad (3.54)$$

die den Übergang von der reellen in die komplexe Grassmann-Algebra ebnet, ist mit der Jacobiante $(-1)^m$

$$\xi_i \xi_j + \xi'_i \xi'_j = \bar{\eta}_i \eta_j - \bar{\eta}_j \eta_i, \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} D\xi D\xi' &= d\xi_n \dots d\xi_1 d\xi'_n \dots d\xi'_1 = (-1)^{-m} d\xi_n d\xi'_n \dots d\xi_1 d\xi'_1 \\ &= d\eta_n d\bar{\eta}_n \dots d\eta_1 d\bar{\eta}_1 = \prod_i d\eta_i d\bar{\eta}_i = D(\eta\bar{\eta}), \end{aligned} \quad (3.56)$$

so dass man unter Ausnutzung der Antisymmetrie von A und (3.19),(3.21)

$$\begin{aligned} Pf(A)^2 &= \int D(\eta\bar{\eta}) \exp\left(\sum_{i,j} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j\right) \\ &= \int D(\bar{\eta}\eta) \exp\left(-\sum_{i,j} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j\right) \\ &= \det(A) \end{aligned} \quad (3.57)$$

erhält. Bis auf das Vorzeichen ist somit aber auch

$$Pf(A) = \pm \sqrt{\det(A)}. \quad (3.58)$$

Eine andere Möglichkeit, dies zu zeigen, zeigt Anhang C.

Sofern A zusätzlich noch invertierbar ist, ist mit

$$\xi' = \xi - A^{-1}\eta \quad \text{bzw.} \quad (\xi')^T = \xi^T - \eta^T A^{-1T} = \xi^T + \eta^T A^{-1} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} Z[\eta] &= \int D(\xi) \exp\left(\frac{1}{2}(\xi, A\xi) + (\eta, \xi)\right) \\ &= \int D(\xi') \exp\left(\frac{1}{2}(\xi', A\xi')\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}(\eta, A^{-1}\eta)\right) \\ &= Pf(A) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}(\eta, A^{-1}\eta)\right). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die Korrelationsfunktionen für reelle Grassmann-Variablen lassen sich hiermit analog zum komplexwertigen Fall bestimmen.

Für gerade $l = 2m$ ist

$$\begin{aligned} \langle \xi_{i_1} \dots \xi_{i_l} \rangle &= \frac{1}{Z[0]} \int D(\xi) \xi_{i_1} \dots \xi_{i_l} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{ij} \xi_i A_{ij} \xi_j \right) \\ &= \frac{1}{Pf(A)} \left(\frac{\partial}{\partial \eta_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \eta_{i_l}} Z[\eta] \Big|_{\eta=0} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \eta_{i_l}} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{ij} \eta_i A_{ij}^{-1} \eta_j \right) \Big|_{\eta=0} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial \eta_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \eta_{i_l}} \left(\frac{(-1)^{\frac{l(l-1)}{2}}}{2^m m!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} A_{i_{\sigma_1}, i_{\sigma_2}}^{-1} \dots A_{i_{\sigma_{l-1}}, i_{\sigma_l}}^{-1} \right) \eta_{i_1} \dots \eta_{i_l} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} A_{i_{\sigma_1}, i_{\sigma_2}}^{-1} \dots A_{i_{\sigma_{l-1}}, i_{\sigma_l}}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Dieses bedeutet für $m = 1$

$$\langle \xi_1 \xi_2 \rangle = -\frac{1}{2} (A_{12}^{-1} - A_{21}^{-1}) = -A_{12}^{-1} \quad (3.63)$$

bzw. für $m = 2$

$$\begin{aligned} \langle \xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 \rangle &= \frac{1}{8} \cdot (24 \text{ Terme}) \\ &= \frac{1}{2} (A_{12}^{-1} A_{34}^{-1} + A_{34}^{-1} A_{12}^{-1} + A_{23}^{-1} A_{14}^{-1} + A_{14}^{-1} A_{23}^{-1} - A_{13}^{-1} A_{24}^{-1} - A_{24}^{-1} A_{13}^{-1}) \\ &= A_{12}^{-1} A_{34}^{-1} + A_{14}^{-1} A_{23}^{-1} - A_{13}^{-1} A_{24}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Der entscheidende Unterschied zum komplexen Fall ist, dass nun Kontraktionen zwischen allen Paaren von Variablen erlaubt sind.

Man kann sich mit (3.61) leicht überlegen, dass für l ungerade, wie schon in der komplexwertigen Grassmann-Algebra, die Korrelationsfunktionen verschwinden.

$$\langle \xi_{i_1} \dots \xi_{i_l} \rangle = 0 \quad (3.65)$$

3.2.1 Die reelle Grassmann-Algebra in der freien N=1 SUSY Yang-Mills-Theorie mit Majorana-Fermionen

Majorana-Fermionen werden beschrieben durch spezielle Dirac-Spinorfelder, die im Minkowski-Raum die zusätzliche Eigenschaft

$$\bar{\lambda} \equiv \lambda^\dagger \gamma_0 \stackrel{!}{=} \lambda^T C \quad (3.66)$$

erfüllen müssen. C ist der Ladungskonjugationsoperator mit den darstellungsunabhängigen Eigenschaften

$$C = -C^\dagger = -C^{-1} = -C^T = C^*. \quad (3.67)$$

Physikalisch ist jedes Teilchen, das durch ein solches Majorana-Feld beschrieben wird, gleichzeitig auch sein Antiteilchen, da es durch Ladungskonjugation in sich selbst übergeht.

$$\lambda \longrightarrow \lambda^C = C \bar{\lambda}^T = C C^T \lambda = C C^{-1} \lambda = \lambda \quad (3.68)$$

In der Weyl-Darstellung ist daher

$$\lambda = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \chi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

In der euklidischen Formulierung, die im folgenden beibehalten wird, gilt

$$\bar{\lambda} \stackrel{!}{=} \lambda^T C \quad \leftrightarrow \quad \lambda = C^{-1T} \bar{\lambda}^T = -C^{-1} \bar{\lambda}^T. \quad (3.70)$$

Diese Beziehung zwischen den Majorana-Feldern und ihren adjungierten Feldern impliziert den reell-grassmannwertigen Charakter der Felder und den aus ihnen gebildeten Operatoren. Jedes Feld bzw. jeder Operator lässt sich durch das zugehörige adjungierte Feld beschreiben und umgekehrt.

Beispiele:

$$\langle \lambda_\alpha \bar{\lambda}_\beta \rangle = \langle \lambda_\alpha \lambda_\gamma \rangle C_{\gamma\beta} \quad (3.71)$$

$$\bar{\lambda}_\alpha M_{\alpha\beta} \lambda_\beta = \lambda_\alpha C_{\alpha\gamma} M_{\gamma\beta} \lambda_\beta = -\bar{\lambda}_\alpha M_{\alpha\gamma} C_{\gamma\beta}^{-1} \bar{\lambda}_\beta \quad (3.72)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{\partial \bar{\lambda}_\beta}{\partial \lambda_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_\beta} = C_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_\beta} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}_\alpha} = C_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_\beta} \quad (3.73)$$

Außerdem gelten besondere Rechenregeln für Majorana-Fermionen. [Ga1]

$$\bar{\lambda} \phi = \bar{\phi} \lambda \quad (3.74)$$

$$\bar{\lambda} \gamma_\mu \phi = -\bar{\phi} \gamma_\mu \lambda \quad (3.75)$$

$$\bar{\lambda} \gamma_\mu \gamma_\nu \phi = \bar{\phi} \gamma_\nu \gamma_\mu \lambda \quad (3.76)$$

$$\bar{\lambda} \gamma_5 \phi = \bar{\phi} \gamma_5 \lambda \quad (3.77)$$

$$\bar{\lambda} \gamma_\mu \gamma_5 \phi = \bar{\phi} \gamma_\mu \gamma_5 \lambda \quad (3.78)$$

Wie im letzten Kapitel gesehen, enthält der fermionische Teil der Wirkung der N=1 supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie solche Majorana-Felder. Er ist im Kontinuum gegeben durch

$$\begin{aligned} S_f[\lambda, A] &= \int d^4x \operatorname{Tr} (\bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu + m) \lambda(x)) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \bar{\lambda}_\alpha^a(x) (\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu + m)_{\alpha\beta} \delta_{ab} \delta^4(x-y) \lambda_\beta^b(y) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \bar{\lambda}_\alpha^a(x) Q_{\alpha\beta}^{ab}(x-y) \lambda_\beta^b(y) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \lambda_\alpha^a(x) C_{\alpha\iota} Q_{\iota\beta}^{ab}(x-y) \lambda_\beta^b(y) \end{aligned} \quad (3.79)$$

mit der Fermionenmatrix als Operatorkernel

$$Q_{\alpha\beta}^{ab}(x-y) = (\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu + m)_{\alpha\beta} \delta_{ab} \delta^{(4)}(x-y). \quad (3.80)$$

\mathcal{D}_μ ist die kovariante Ableitung

$$\mathcal{D}_\mu \lambda^a(x) = \partial_\mu \lambda^a(x) + g f_{abc} A_\mu^b(x) \lambda^c(x). \quad (3.81)$$

In der freien Theorie ($A_\mu = 0$) ist die Wirkung nur noch eine Funktion von λ und die kovariante Ableitung des Fermionenoperators wird zu einer einfachen. Das fermionische erzeugende Funktional $Z[\theta]$ mit der äußeren Quelle $\theta(x)$, die ebenfalls durch ein Majorana-Feld beschrieben wird, lautet

$$Z[\theta] = \frac{Z_0[\theta]}{Z_0[0]} = \frac{\int D\lambda(x) \exp\left(-S_f[\lambda] + \int d^4x \bar{\theta}(x)\lambda(x)\right)}{\int D\lambda(x) \exp(-S_f[\lambda])}. \quad (3.82)$$

Man beachte, dass hier lediglich über $D\lambda(x) = \prod_{x,\alpha,a} d\lambda_\alpha^a(x)$ integriert wird, da $\bar{\lambda}$ und λ über (3.70) miteinander verknüpft sind. Die bezüglich der Quelle θ quadratische Form des erzeugenden Funktionals ergibt sich erneut durch eine Variablenverschiebung

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha^a(x) &\longrightarrow \lambda_\alpha^a(x) - \int d^4y S_{F(\alpha\beta)}^{ab}(x-y)\theta_\beta^b(y) \\ &= \lambda_\alpha^a(x) + \int d^4y S_{F(\alpha\beta)}^{ab}(x-y)C^{-1}\bar{\theta}_\beta^b(y). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} Z_0[\theta] &= Z_0[0] \exp\left(\frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y \bar{\theta}_\alpha^a S_{F(\alpha\beta)}^{ab}(x-y)\theta_\beta^b(y)\right) \\ &= Z_0[0] \exp\left(-\frac{1}{2} \iint d^4x d^4y \bar{\theta}_\alpha^a S_{F(\alpha\beta)}^{ab}(x-y)C_{i\beta}^{-1}\bar{\theta}_\beta^b(y)\right), \end{aligned} \quad (3.84)$$

mit $S_F(x-y)$ als den freien Gluinopropagator. Er ist wieder das Inverse, die Greensche Funktion, des freien Fermionenoperators Q_F .

$$\int d^4z Q_F^{ab}(x-z)S_F^{bc}(z-y) = \delta^{(4)}(x-y)\delta^{ac} \quad (3.85)$$

Wie üblich kann man diesen im Impulsraum über seine Fourierdarstellung

$$S_F^{cd}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{S}_F^{cd}(p) \exp(ip(x-y)) \quad (3.86)$$

berechnen. So ist

$$\begin{aligned} \int d^4z Q_F^{ab}(x-z)S_F^{bc}(z-y) &= (\not{\partial}_\mu + m) \delta^{ab} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{S}_F^{bc}(p) \exp(ip(x-y)) \\ &= \delta^{ab} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{S}_F^{bc}(p) (i\not{p} + m) \exp(ip(x-y)) \\ &= \delta^{(4)}(x-y)\delta^{ac}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\Rightarrow \tilde{S}_F^{bc}(p) = \frac{\delta^{bc}}{(i\not{p} + m)} = \delta^{bc} \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2} = \delta^{bc} \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2} \quad (3.88)$$

$$S_F^{ab}(x-y) = Q^{-1}(x-y) = \delta^{ab} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i\not{p} + m}{p^2 + m^2} \exp(ip(x-y)) \quad (3.89)$$

Unter Beachtung der Formel

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T \quad (3.90)$$

sieht man durch die Substitution p nach $-p$ in (3.89)

$$\begin{aligned} CS_F(x-y)C^{-1} &= S_F^T(y-x) \\ \Leftrightarrow (S_F(x-y)C^{-1})^T &= (C^{-1}S_F^T(y-x))^T = -(S_F(y-x)C^{-1}), \end{aligned} \quad (3.91)$$

dass $S_F(x-y)C^{-1}$ und somit auch sein Inverses $CQ(x-y)$ antisymmetrisch bezüglich einer gemeinsamen Vertauschung der Koordinaten und Dirac-Indizes ist.

Die Ergebnisse der reellen Grassmann-Algebra lassen sich nun mit

$$i \rightarrow (x, \alpha, a), \quad (3.92)$$

$$\xi_i \rightarrow \lambda_\alpha^a(x), \quad (3.93)$$

$$\eta_i \rightarrow \bar{\theta}_\alpha^a(x), \quad (3.94)$$

$$A_{ij} \rightarrow -C_{\alpha i} Q_{i\beta}^{ab}(x-y) \quad (3.95)$$

$$A_{ij}^{-1} \rightarrow -S_{F\alpha i}^{ab}(x-y)C_{i\beta}^{-1} \quad (3.96)$$

formal vollständig übertragen. So ist nach (3.63)

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \lambda_{\delta_2}^{d_2}(x_2) \rangle &= \frac{1}{Z_0[0]} \int D\lambda(x) \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \lambda_{\delta_2}^{d_2}(x_2) \exp \left(-S_F[\lambda, A] + \int d^4x \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right) \\ &= \frac{\delta}{\delta \bar{\theta}_{\delta_1}^{d_1}(x_1)} \frac{\delta}{\delta \bar{\theta}_{\delta_2}^{d_2}(x_2)} \exp \left(-\frac{1}{2} \iint d^4x d^4y \bar{\theta}_\alpha^a(x) S_{F(\alpha i)}^{ab}(x-y) C_{i\beta}^{-1} \bar{\theta}_\beta^b(y) \right) \Big|_{\bar{\theta}(x)=0} \\ &= S_{F(\delta_1 \iota)}^{d_1 d_2}(x_1 - x_2) C_{i\delta_2}^{-1} \end{aligned} \quad (3.97)$$

und somit

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \bar{\lambda}_{\delta_2}^{d_2}(x_2) \rangle &= \langle \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \lambda_{\epsilon_2}^{d_2}(x_2) \rangle C_{\epsilon_2 \delta_2} = S_{F(\delta_1 \iota)}^{d_1 d_2}(x_1 - x_2) C_{i\epsilon_2}^{-1} C_{\epsilon_2 \delta_2} \\ &= S_{F(\delta_1 \delta_2)}^{d_1 d_2}(x_1 - x_2) \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\lambda}_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \lambda_{\delta_2}^{d_2}(x_2) \rangle &= \langle \lambda_{\epsilon_1}^{d_1}(x_1) \lambda_{\delta_2}^{d_2}(x_2) \rangle C_{\epsilon_1 \delta_1} = S_{F(\epsilon_1 \iota)}^{d_1 d_2}(x_1 - x_2) C_{i\delta_2}^{-1} C_{\epsilon_1 \delta_1} \\ &= -C_{\delta_1 \epsilon_1} S_{F(\epsilon_1 \iota)}^{d_1 d_2}(x_1 - x_2) C_{i\delta_2}^{-1} = -S_{F(\delta_2 \delta_1)}^{d_1 d_2}(x_2 - x_1) \\ &= -\langle \lambda_{\delta_2}^{d_1}(x_2) \bar{\lambda}_{\delta_1}^{d_2}(x_1) \rangle \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\lambda}_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \bar{\lambda}_{\delta_2}^{d_2}(x_2) \rangle &= \langle \lambda_{\epsilon_1}^{d_1}(x_1) \lambda_{\epsilon_2}^{d_2}(x_2) \rangle C_{\epsilon_1 \delta_1} C_{\epsilon_2 \delta_2} = S_{F(\epsilon_1 \iota)}^{d_1 d_2}(x_1 - x_2) C_{i\epsilon_2}^{-1} C_{\epsilon_1 \delta_1} C_{\epsilon_2 \delta_2} \\ &= S_{F(\epsilon_1 \delta_2)}^{d_1 d_2}(x_1 - x_2) C_{\epsilon_1 \delta_1} = -C_{\delta_1 \epsilon_1} S_{F(\epsilon_1 \delta_2)}^{d_1 d_2}(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (3.100)$$

Die 4-Punkt-Funktion erhält man durch Anwendung von (3.62).

$$\begin{aligned}
& \left\langle \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \bar{\lambda}_{\delta_2}^{d_2}(x_2) \lambda_{\delta_3}^{d_3}(x_3) \bar{\lambda}_{\delta_4}^{d_4}(x_4) \right\rangle \\
&= \left\langle \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \lambda_{\epsilon_2}^{d_2}(x_2) \lambda_{\delta_3}^{d_3}(x_3) \lambda_{\epsilon_4}^{d_4}(x_4) \right\rangle C_{\epsilon_2 \delta_2} C_{\epsilon_4 \delta_4} \\
&= \left(\left\langle \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \lambda_{\epsilon_2}^{d_2}(x_2) \right\rangle \left\langle \lambda_{\delta_3}^{d_3}(x_3) \lambda_{\epsilon_4}^{d_4}(x_4) \right\rangle + \left\langle \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \lambda_{\epsilon_4}^{d_4}(x_4) \right\rangle \left\langle \lambda_{\epsilon_2}^{d_2}(x_2) \lambda_{\delta_3}^{d_3}(x_3) \right\rangle \right. \\
&\quad \left. - \left\langle \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \lambda_{\delta_3}^{d_3}(x_3) \right\rangle \left\langle \lambda_{\epsilon_2}^{d_2}(x_2) \lambda_{\epsilon_4}^{d_4}(x_4) \right\rangle \right) C_{\epsilon_2 \delta_2} C_{\epsilon_4 \delta_4} \\
&= S_{F\delta_1 \iota_1}^{d_1 d_2}(x_1 - x_2) \underbrace{C_{\iota_1 \epsilon_2}^{-1} C_{\epsilon_2 \delta_2}}_{\delta_{\iota_1 \delta_2}} S_{F\delta_3 \iota_2}^{d_3 d_4}(x_3 - x_4) \underbrace{C_{\iota_2 \epsilon_4}^{-1} C_{\epsilon_4 \delta_4}}_{\delta_{\iota_2 \delta_4}} \\
&\quad + S_{F\delta_1 \iota_1}^{d_1 d_4}(x_1 - x_4) \underbrace{C_{\iota_1 \epsilon_4}^{-1} C_{\epsilon_4 \delta_4}}_{\delta_{\iota_1 \delta_4}} \underbrace{S_{F\epsilon_2 \iota_2}^{d_2 d_3}(x_2 - x_3) C_{\iota_2 \delta_3}^{-1} C_{\epsilon_2 \delta_2}}_{-C_{\delta_2 \epsilon_2} S_{F\epsilon_2 \iota_2}^{d_2 d_3}(x_2 - x_3) C_{\iota_2 \delta_3}^{-1} = -S_{F\delta_3 \delta_2}^{d_2 d_3}(x_3 - x_2)} \\
&\quad - S_{F\delta_1 \iota_1}^{d_1 d_3}(x_1 - x_3) C_{\iota_1 \delta_3}^{-1} S_{F\epsilon_2 \iota_2}^{d_2 d_4}(x_2 - x_4) \underbrace{C_{\iota_2 \epsilon_4}^{-1} C_{\epsilon_4 \delta_4}}_{\delta_{\iota_2 \delta_4}} C_{\epsilon_2 \delta_2} \\
&= S_{F\delta_1 \delta_2}^{d_1 d_2}(x_1 - x_2) S_{F\delta_3 \delta_4}^{d_3 d_4}(x_3 - x_4) - S_{F\delta_1 \delta_4}^{d_1 d_4}(x_1 - x_4) S_{F\delta_3 \delta_2}^{d_2 d_3}(x_3 - x_2) \\
&\quad + S_{F\delta_1 \iota_1}^{d_1 d_3}(x_1 - x_3) C_{\iota_1 \delta_3}^{-1} C_{\delta_2 \epsilon_2} S_{F\epsilon_2 \delta_4}^{d_2 d_4}(x_2 - x_4) \\
&= \left\langle \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \bar{\lambda}_{\delta_2}^{d_2}(x_2) \right\rangle \left\langle \lambda_{\delta_3}^{d_3}(x_3) \bar{\lambda}_{\delta_4}^{d_4}(x_4) \right\rangle + \left\langle \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \bar{\lambda}_{\delta_4}^{d_4}(x_4) \right\rangle \left\langle \bar{\lambda}_{\delta_2}^{d_2}(x_2) \lambda_{\delta_3}^{d_3}(x_3) \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \lambda_{\delta_1}^{d_1}(x_1) \lambda_{\delta_3}^{d_3}(x_3) \right\rangle \left\langle \bar{\lambda}_{\delta_2}^{d_2}(x_2) \bar{\lambda}_{\delta_4}^{d_4}(x_4) \right\rangle \tag{3.101}
\end{aligned}$$

Dies entspricht (3.64), und es zeigt sich erneut, dass man die Korrelationsfunktionen als eine Summe über alle Kontraktionen schreiben kann. Dies entspricht dem Wickschen Theorem für bosonische Felder, bei dem Kontraktionen über alle Paare von Feldern erlaubt sind, aber mit dem Unterschied, dass ein Vertauschen der Felder ein Minuszeichen in den 2-Punkt Greensfunktionen hervorruft.

Kapitel 4

Die N=1 supersymmetrische Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Nachdem nun das Rüstzeug der Integration über Majorana-Felder bereitgestellt wurde, wird dieses nun für die gitterregularisierte Yang-Mills-Theorie benutzt. Dazu ist es aber zunächst einmal notwendig, sich im Rahmen dieser Theorie mit den formalen Definitionen und Konsequenzen einer diskretisierten Raumzeit und den auf ihr basierenden (Eich-)Feldtheorien vertraut zu machen. Dieses soll in den ersten beiden Unterabschnitten geschehen. Am Ende steht dann die in [CV] vorgeschlagene Version der SYM mit den Majorana-Fermionen in adjungierter Darstellung.

Die Gitterregularisierung ist eine von mehreren nicht-störungstheoretischen Regularisierungen. Mit ihr ist es möglich, über stochastische Methoden, wie etwa der Monte-Carlo Simulation, numerisch oder, wie in dieser Arbeit, durch Starkkopplungs- oder Hochtemperatur-Entwicklungen die Zustandssumme analytisch zu berechnen. Allerdings bricht das Gitter viele wichtige Kontinuumssymmetrien, wie z.B. die Lorentzinvarianz, damit verbunden die Supersymmetrie und zudem noch die chirale Symmetrie. G.CURCI und G.VENEZIANO machten daher den Vorschlag, zunächst mit der einfachen Gitterwirkung zu starten, um später durch ein korrektes Einstellen der freien Parameter g und $m_{\tilde{g}}$ gleichzeitig beide Symmetrien wieder zu restaurieren. Die Kopplungskonstante g wird über eine Renormierungsgruppengleichung zu einer Funktion des Gitterabstandes, der laufenden Kopplung. Diese Prozedur nennt man Kontinuumslimes, im Gegensatz zum naiven Kontinuumslimes, bei dem allein der Gitterabstand gegen 0 läuft.

Da auf dem Gitter nur endliche Impulse existieren, sind gitterbasierte Feldtheorien Feldtheorien, die mit einer Cut-Off Frequenz von $\Lambda = \frac{\pi}{a}$ regularisiert werden, weshalb man auch von einer künstlichen Regularisierung spricht. Dadurch werden zuvor ultraviolett divergente Integrale endlich. So, wie in der Quantenmechanik Pfadintegrale, mithin die Funktionalintegration, als Limes endlich-dimensionaler Integrationen über die Diskretisierung der Zeitachse beschrieben werden, wird durch die Gitterregularisierung dieses Konzept nun generell auf alle Richtungen der euklidischen Raumzeit erweitert. Jeder Punkt der Raumzeit ist dann ein Element des hyperkubischen Gitters

$$\Lambda = (a\mathbb{Z})^4 = \left\{ x \mid \frac{x_\mu}{a} \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (4.1)$$

a ist die Gitterkonstante, deren Dimension in den natürlichen Einheiten¹ die Einheit einer inversen Masse $[a] = [T] = [L] = [M^{-1}]$ besitzt. Integration und Differentiation auf dem Gitter entsprechen ihren finiten Formen. So ist

$$\int d^4x \longrightarrow a^4 \sum_{x \in \Lambda} \quad (4.2)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} f(x) \longrightarrow \begin{cases} \Delta_\mu^f f(x) := \frac{1}{a}(f(x + a\hat{\mu}) - f(x)) & : \text{ (Vowartsableitung)} \\ \Delta_\mu^b f(x) := \frac{1}{a}(f(x) - f(x - a\hat{\mu})) & : \text{ (Ruckwartsableitung)} \\ \Delta_\mu^s f(x) := \frac{1}{2a}(f(x + a\hat{\mu}) - f(x - \hat{\mu})) & : \text{ (symmetrische Ableitung)} \end{cases} \quad (4.3)$$

$\hat{\mu}$ ist der Gitter-Einheitsvektor in den 4 euklidischen Raumrichtungen ($\mu = 1, 2, 3, 4$). Um Schreibarbeit zu sparen, wird im folgenden immer $\mu := a\hat{\mu}$ verwendet. Auf den Gitterpunkten sind die Felder definiert und mit ihnen das kanonische Skalarprodukt

$$(f, g) = a^4 \sum_x f(x) \cdot g(x). \quad (4.4)$$

4.1 Die fermionische Gitterwirkung fur Majorana-Fermionen (Wilson-Dirac-Wirkung)

Der kinetische Term der Wirkung fur Majorana-Fermionen im Kontinuum, wie er in dem Modell der freien supersymmetrischen Yang-Mills-Wirkung auftaucht,

$$S_f[\lambda] = \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\lambda}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\lambda(x) \quad (4.5)$$

wird auf dem Gitter (Λ) zu

$$\begin{aligned} S_f^\Lambda[\lambda] &:= \frac{1}{2} \sum_x a^4 \sum_{\mu=1}^4 \bar{\lambda}(x)(\gamma_\mu \Delta_\mu^s + m)\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_x a^4 \sum_{\mu=1}^4 \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \frac{\lambda(x + \mu) - \lambda(x - \mu)}{2a} + m \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left\{ \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \lambda(x + \mu) - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \lambda(x - \mu)] + m \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left\{ \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \lambda(x + \mu) + m \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left\{ -\frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \bar{\lambda}(x + \mu) \gamma_\mu \lambda(x) + m \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

¹ $\hbar = [E \cdot T] = 1$ und $c = [L/T] = 1$

Hierbei wurde in den letzten beiden Umformungen die Konvention $\gamma_{-\mu} := -\gamma_{\mu}$ für $\mu = 1, 2, 3, 4$ eingeführt und die Identität (3.75) benutzt. Außerdem verwendet man die symmetrische Ableitung Δ_s , um die Parität der Theorie zu erhalten.

Leider ist diese Wirkung so noch nicht vollständig, da man das Problem der Fermionenverdopplung noch nicht berücksichtigt hat. Dies ist eine charakteristische Eigenschaft der naiven Fermionendiskretisierung, die durch neuartige Ansätze der Wirkung etwa nach Wilson (Wilson-Fermionen) oder nach J.B.KOGUT und L.SUSSKIND (staggered fermions) beseitigt werden kann.

4.1.1 Die Fermionenverdopplung

Beschreibt man fermionische Felder auf dem Gitter, so tritt nach einem „No-go“-Theorem von H.B.NIELSEN und M.NINOMIYA [NN1],[NN2] zwangsläufig das Problem der Fermionenverdopplung auf. Diese Eigenschaft wird hier am Beispiel des freien Fermionenpropagators auf dem Gitter deutlich. Analog zum letzten Kapitel kann der Operatorkernel Q_{Fxy} , die Fermionenmatrix, mit

$$S_f[\lambda] = \frac{1}{2} \sum_{x,y} a^4 \bar{\lambda}(x) Q_{Fxy} \lambda(y) \quad (4.7)$$

durch

$$Q_{Fxy} = m\delta_{x,y} + \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \delta_{x,y-\hat{\mu}} - \gamma_{\mu} \delta_{x,y+\hat{\mu}} \quad (4.8)$$

beschrieben werden. Der freie Fermionenpropagator S_F ist erneut die inverse Matrix von Q_F , so dass

$$\sum_z Q_{Fxz} S_{Fzy} = \delta_{xy} \quad (4.9)$$

ist. Betrachtet man nun zunächst ein begrenztes Gitter mit N Punkten in allen Raumrichtungen und periodischen Randbedingungen, so bedeutet dies im Impulsraum, dass die Phasen (Impulse) diskret und äquidistant in der 1. Brillouin-Zone verteilt sind

$$q_{\mu} \in \left\{ \frac{2\pi}{N} n \mid n = 0, \dots, N-1 \right\}. \quad (4.10)$$

Durch die Periodizität des Gitters kann man anstatt $0 \leq q_{\mu} < 2\pi$ wie im folgenden auch $-\pi < q_{\mu} \leq \pi$ als 1. Brillouin-Zone definieren. In der diskreten Fourierdarstellung mit

$$S_{Fxy} = \frac{1}{(aN)^4} \sum_q \tilde{S}_{Fq} e^{iq(x-y)/aN} \quad (4.11)$$

ist

$$\begin{aligned}
\sum_z Q_{Fzx} S_{Fzy} &= \sum_z \frac{1}{(aN)^4} \sum_q \tilde{S}_{Fq} \left(m \delta_{x,z} + \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \delta_{x,z-\mu} - \gamma_\mu \delta_{x,z+\mu} \right) e^{iq(z-y)/aN} \\
&= \frac{1}{(aN)^4} \sum_q \tilde{S}_{Fq} \left[m + \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \left(\gamma_\mu e^{iq_\mu/aN} - \gamma_\mu e^{-iq_\mu/aN} \right) \right] e^{iq(x-y)/aN} \\
&= \frac{1}{(aN)^4} \sum_q \tilde{S}_{Fq} \left(m + \frac{i}{a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \sin(q_\mu/N) \right) e^{iq(x-y)/aN} \\
&= \frac{1}{(aN)^4} \sum_q e^{iq(x-y)/aN}, \tag{4.12}
\end{aligned}$$

und man erhält den Gitterpropagator

$$\tilde{S}_{Fq} = \left(\frac{i}{a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \sin(q_\mu/N) + m \right)^{-1}. \tag{4.13}$$

Mit $p_\mu = q_\mu/Na$ liefert dieser im naiven Kontinuumsimes ($a \rightarrow 0$) für $p_\mu \approx 0$ wegen

$$\sin(ap_\mu) = ap_\mu + \mathcal{O}(a^2) \tag{4.14}$$

scheinbar die korrekte Form des Kontinuumspropagators (3.88)

$$\tilde{S}_{Fp} = (ip_\mu + m)^{-1}. \tag{4.15}$$

Dennoch existieren Unstimmigkeiten hinsichtlich der $2^4 - 1 = 15$ Fermionen mit den nicht verschwindenden Impulsen in den Ecken der 1. Brillouin-Zone ($p_\mu = \pi/a$). Dort verschwindet nämlich ebenfalls die Sinusfunktion des Gitterpropagators. Anders als die Kontinuumsversion unterdrückt der Gitterpropagator diese Fermionen nicht, was im Ortsraum zu einer starken Variation der Felder benachbarter Gitterpunkte führt und dadurch die Möglichkeit einer einfachen Kontinuumsimesbildung verhindert wird². Diese 15 voneinander unabhängigen Fermionen³ sind Gitterartefakte, die nach einem Vorschlag von L.SUSSKIND und seiner Arbeitsgruppe [Su] mit künstlich eingeführten Flavour-Zahlen unterschiedlich beschrieben werden können (staggered fermions). K.G. WILSONS Ansatz (1977) war dagegen, den Gitterpropagator so abzuändern, dass die Massen dieser Fermionen in der Kontinuumsbildung unendlich groß werden, und sie so indirekt beseitigt werden. Dazu ergänzte er \tilde{S}_{Fq} zu

$$\tilde{S}_{Fq} = \left(m + \frac{i}{a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \sin(ap_\mu) + \frac{r}{a} \sum_{\mu=1}^4 (1 - \cos ap_\mu) \right)^{-1}. \tag{4.16}$$

$0 < r \leq 1$ ist der sogenannte Wilson-Parameter. Die Fermiondoppler besitzen also eine Masse von $(m + \frac{2nr}{a})$ (n ist die Anzahl der von 0 verschiedenen Impulskomponenten), die im Kontinuum

²Für bosonische (skalare) Felder wäre das Argument der Sinusfunktion in (4.13) nur halb so groß, weshalb dieses Problem bei den Bosonen nicht auftaucht.

³Der Name Fermionenverdopplung bezieht sich auf den eindimensionalen Fall.

unendlich groß wird. Dieser Trick verändert den Fermionenoperatorkern

$$Q_{Fxy} = \left(m + \frac{4r}{a}\right)\delta_{x,y} + \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 -[r + \gamma_\mu]\delta_{x,y+\mu} - [r - \gamma_\mu]\delta_{x,y-\mu} \quad (4.17)$$

und man erhält im Gegensatz zu (4.6)

$$\begin{aligned} S_f^\Lambda[\lambda] &= \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left\{ \left(m + \frac{4r}{a}\right) \bar{\lambda}(x)\lambda(x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \bar{\lambda}(x+\mu)[r + \gamma_\mu]\lambda(x) + \bar{\lambda}(x)[r - \gamma_\mu]\lambda(x+\mu) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_x a^4 \left\{ \left(m + \frac{4r}{a}\right) \bar{\lambda}(x)\lambda(x) - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \bar{\lambda}(x+\mu)[r + \gamma_\mu]\lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Mit der Skalierung

$$a^{3/2}(am + 4r)^{1/2}\lambda(x) \rightarrow \lambda(x) \quad \text{bzw.} \quad a^{3/2}(am + 4r)^{1/2}\bar{\lambda}(x) \rightarrow \bar{\lambda}(x), \quad (4.19)$$

die die Felder dimensionslos macht, ist dies äquivalent zu

$$S_f^\Lambda[\lambda] = \frac{1}{2} \sum_x \left\{ \bar{\lambda}(x)\lambda(x) - K \sum_{\mu=1}^4 \bar{\lambda}(x+\mu)[r + \gamma_\mu]\lambda(x) + \bar{\lambda}(x)[r - \gamma_\mu]\lambda(x+\mu) \right\}. \quad (4.20)$$

K bezeichnet den Hoppingparameter, der die Gluinomasse enthält,

$$K = \frac{1}{2am_{\tilde{g}} + 8r}. \quad (4.21)$$

Wie schon im kontinuierlichen Fall ist diese Version der freien fermionischen Yang-Mills-Wirkung auf dem Gitter schon aufgrund des Massenterms nicht invariant gegenüber der chiralen Transformation

$$\lambda(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5}\lambda(x) \quad \text{bzw.} \quad \bar{\lambda} \rightarrow \bar{\lambda}(x) e^{i\alpha\gamma_5}. \quad (4.22)$$

Wilson's Ansatz aber bricht diese Symmetrie noch zusätzlich, selbst für eine verschwindende Gluino-Masse ($m_{\tilde{g}} = 0$).

4.2 Gitter-Eichttheorie

Die nächste Aufgabe besteht nun darin, die fermionische Wirkung (4.20) eichinvariant gegenüber lokalen SU(2)-Transformationen zu formulieren.

Eine lokale SU(N)-Transformation wird beschrieben durch

$$\begin{aligned} \psi(x) &\longrightarrow \Lambda(x)^{-1}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\longrightarrow \bar{\psi}(x)\Lambda(x) \quad \text{mit} \quad \Lambda \in \text{SU}(N) \\ \Lambda^\dagger\Lambda &= 1, \quad \det(\Lambda) = 1, \end{aligned} \quad (4.23)$$

mit dem durch die Parameterwerte $\omega^a(x)$ und den Generatoren T^a festgelegten Gruppenelement ($a = 1, \dots, N^2 - 1$)

$$\Lambda(x) = \exp(i\omega^a(x)T^a) \quad \omega^a(x) \in \mathbb{R}. \quad (4.24)$$

Da diese Gruppe von x abhängig ist und ihre Elemente nicht miteinander kommutieren, handelt es sich um eine lokale, nicht-abelsche Eichtransformation. Wie im Kontinuum besteht auch auf dem Gitter die Möglichkeit, hierfür Paralleltransporter zu definieren, die es erlauben, Skalarprodukte in der Form

$$\sum_x \bar{\psi}(x + \mu)U(x + \mu, x)\psi(x) \quad (4.25)$$

eichinvariant zu konstruieren.

4.2.1 Das Konzept der Paralleltransporter

Im Kontinuum wird der Paralleltransport eines Feldes $\psi(x)$ aus einer lokalen Basis des Vektorraums V_x entlang eines Weges \mathcal{C}_{yx} in der Raumzeit in den Vektorraum V_y mit anderer Basis vermittelt durch eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} U(\mathcal{C}_{yx}) : V_x &\rightarrow V_y \\ \psi(x) &\mapsto U(\mathcal{C}_{yx})\psi(x). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Diese muss folgende wichtige Eigenschaften erfüllen:

1. $U(\emptyset) = \mathbb{1}$,
 \emptyset ist der Weg mit der Länge 0.
2. $U(\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1) = U(\mathcal{C}_2)U(\mathcal{C}_1)$,
 $\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_1$ ist der Weg, der durch die Verbindung von \mathcal{C}_1 und \mathcal{C}_2 entsteht.
3. $U(\mathcal{C}^{-1}) = U(\mathcal{C})^{-1}$
 \mathcal{C}^{-1} bezeichnet dabei den Weg, der entgegengesetzt zu \mathcal{C} durchlaufen wird.

Das Skalarprodukt in der Form

$$\int d^4x d^4y \bar{\lambda}(y)U(\mathcal{C}_{yx})\lambda(x) \quad (4.27)$$

ist dann eichinvariant, wenn man verlangt, dass $U(\mathcal{C}_{yx})$ unter der Eichtransformation sich wie

$$U(\mathcal{C}_{yx}) \rightarrow \Lambda(y)^{-1}U(\mathcal{C}_{yx})\Lambda(x) \quad (4.28)$$

verhält. Der Paralleltransporter ist daher selbst wieder Element der Gruppe $SU(N)$. Nimmt man den direkten Weg von x nach $x + dx$, so lässt sich der zugehörige Paralleltransporter um die Einheitsmatrix entwickeln zu

$$U(C_{x+dx,x}) = \mathbb{1} - A_\mu(x)dx^\mu \in SU(N). \quad (4.29)$$

In einer hinreichend kleinen Umgebung von $\mathbb{1}$ kann das Gruppenelement durch die zugehörigen Generatoren aus der Lie-Algebra der $su(N)$ beschrieben werden. Das Feld $A_\mu(x) \in su(N)$ ist das Eichfeld.

Mit Hilfe des Paralleltransporters ist es desweiteren möglich, eine kovariante Ableitung zu konstruieren. Diese entsteht aus der Differenz zweier infinitesimal benachbarter Felder an den Punkten x und $x + dx$, die sich durch den Paralleltransport nun in derselben Basis befinden

$$D\lambda(x) := U(C_{x+dx,x})^{-1}\lambda(x+dx) - \lambda(x). \quad (4.30)$$

Mit $D\lambda(x) := D_\mu(x)dx_\mu$ ist sie

$$D_\mu\lambda(x) = (\partial_\mu + A_\mu(x))\lambda(x). \quad (4.31)$$

Das Transformationsverhalten des Paralleltransporters (4.28) legt das des Eichfeldes fest. Danach ist

$$\begin{aligned} A'_\mu(x) &= \Lambda^{-1}(x)A_\mu(x)\Lambda(x) - (\partial_\mu\Lambda^{-1}(x))\Lambda(x) \\ &= \Lambda^{-1}(x)(\partial_\mu + A_\mu(x))\Lambda(x). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Die kovariante Ableitung heißt nun kovariant im Sinne von

$$D'_\mu\lambda'(x) = \Lambda^{-1}(x)D_\mu\lambda(x). \quad (4.33)$$

Die Dynamik des Eichfeldes selbst wird über den Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ definiert. Er ist der Kommutator der kovarianten Ableitungen

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (4.34)$$

und steht wie das Eichfeld beim Paralleltransport mit dem Transporter $U(C_{xx})$ über

$$U(C_{xx}) = \mathbb{1} - F_{\mu\nu}(x)dx_\mu dy_\nu \in SU(N) \quad (4.35)$$

in Verbindung. C_{xx} ist ein Parallelogramm im vierdimensionalen Raum mit den Kanten dy und dx . Unter den lokalen Transformationen verhält $F_{\mu\nu}$ sich wie

$$F'_{\mu\nu}(x) = \Lambda(x)^{-1}F_{\mu\nu}(x)\Lambda(x). \quad (4.36)$$

Da sowohl $F_{\mu\nu}$ als auch $A_\mu(x)$ Elemente der Lie-Algebra $su(N)$ (4.29),(4.35) sind, lassen sie sich schreiben als Linearkombination der Generatoren T^a .

$$A_\mu(x) = -igA_\mu^a(x)T^a \quad (4.37)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = -igF_{\mu\nu}^a(x)T^a \quad (4.38)$$

Die Komponenten der beiden Felder sind über (4.34) durch

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.39)$$

miteinander verbunden. Die Kopplungskonstante g wird hier auf die übliche Art und Weise eingeführt. Die Yang-Mills-Wirkung für das Eichfeld ist in dieser Darstellung gegeben durch

$$S_g[A_\mu] = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (4.40)$$

Aufgrund der Zyklizität der Spur ist diese per Konstruktion eichinvariant.

Einschub:

Sind alle Paralleltransporter bekannt, so liegt das Eichfeld $A_\mu(x)$ fest. Auf der anderen Seite ist es aber auch möglich, über die Eichfelder auf die Paralleltransporter zu schließen. Dazu parametrisiert man einen Weg \mathcal{C}_{xy} in der Raumzeit mit

$$c : [0, 1] \longrightarrow \text{Punkte auf } \mathcal{C}_{xy}, \quad c_\mu(0) = x_\mu, \quad c_\mu(1) = y_\mu. \quad (4.41)$$

Beschränkt man sich auf das Intervall $[0, s] \subset [0, 1]$, so ergibt sich durch Variation des Endpunktes die Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds}U(C_s) = -A_\mu(c(s))\frac{dc_\mu}{ds}U(C_s). \quad (4.42)$$

Mit der Anfangsbedingung

$$U(\mathcal{C}_0) = \mathbb{1} \quad (4.43)$$

ist ihre Lösung die schon aus der Streutheorie bekannte Dyson Formel

$$U(C_s) = \text{P exp} \left(- \int_0^s A_\mu(c(s)) \frac{dc_\mu}{ds} ds \right) = \text{P exp} \left(- \int_{C_s} A_\mu(x) dx_\mu \right). \quad (4.44)$$

P ist der Pfadordnungsoperator, der dafür sorgt, dass die Matrizen $A_\mu(s)$ mit kleineren s links stehen.

4.2.2 Die Wilson-Wirkung

Auf dem hyperkubischen Gitter ist die kürzeste Verbindung zweier Punkte durch den Gitterabstand a gegeben. Aus diesem Grunde macht es Sinn, den Paralleltransporter auf den Gitterkanten b (Links oder Bonds) zu definieren

$$U(b) := U(x + \mu, x) = U_\mu(x) \in SU(N) \quad (4.45)$$

mit dem zu (4.28) äquivalenten Transformationsverhalten

$$U_\mu(x) \longrightarrow \Lambda^{-1}(x + \mu)U_\mu(x)\Lambda(x). \quad (4.46)$$

Er verbindet also jeweils zwei benachbarte Punkte x und $x + \mu$ auf dem Gitter oder graphisch veranschaulicht:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{U_\mu(x)} & \bullet \\ x & & x + \mu \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \bullet & \xleftarrow{U_\mu^{-1}(x)} & \bullet \\ x & & x + \mu \end{array} \quad (4.47)$$

Im Kontinuum konnten die Paralleltransporter mit Hilfe der Dyson-Formel entwickelt werden. Entsprechend kann man sie auf dem Gitter definieren.

$$U_\mu(x) = \exp(-aA_\mu(x)) = 1 - aA_\mu(x) + \frac{a^2}{2}A_\mu(x)^2 + \dots \quad (4.48)$$

Diese Link-Variable erfüllt mit (4.37) wie im Kontinuum die Beziehung

$$U_\mu(x) = U_{-\mu}^{-1}(x + \mu) = U_{-\mu}^\dagger(x + \mu). \quad (4.49)$$

Unter dem Gittereichfeld versteht man nun die Konfiguration aller dieser Link-Variablen auf dem Gitter. Die kovarianten Gitterableitungen (hier: Vorwärtsableitung) sind analog zum Kontinuum dann

$$D_\mu^f \lambda(x) = \frac{U_\mu^{-1}(x) \lambda(x + \mu) - \lambda(x)}{a}. \quad (4.50)$$

Ergänzt man nun die fermionische Gitter-Wirkung (4.20) mit der kovarianten Ableitung, so wird sie selbst invariant unter den lokalen Eichtransformationen und lautet

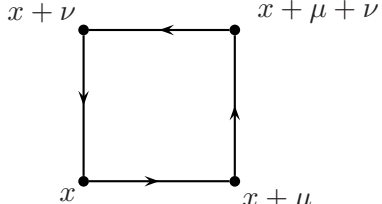
$$S_f^\Lambda[\lambda, U] = \frac{1}{2} \sum_x \left\{ \bar{\lambda}(x) \lambda(x) - K \sum_{\mu=1}^4 \bar{\lambda}(x + \mu) [r + \gamma_\mu] U_\mu(x) \lambda(x) + \bar{\lambda}(x) [r - \gamma_\mu] U_\mu^{-1}(x) \lambda(x + \mu) \right\}. \quad (4.51)$$

In dieser Form wurde sie erstmals präsentiert von G. CURCI und G. VENEZIANO in [CV].

Es bleibt noch die Konstruktion des Terms für das Eichfeld. Dieser sollte die Eigenschaft besitzen, eichinvariant zu sein und im Kontinuum $a \rightarrow 0$ gerade die Wirkung $S_g[A_\mu]$ zu reproduzieren. Die kleinsten Parallelogramme auf dem Gitter sind die Plaquetten, die sich aus den 4 Punkten des Quadrates

$$(x, x + \mu, x + \mu + \nu, x + \nu)$$

ergeben. Der zugehörige Paralleltransporter entlang dieser Plaquette (im mathematisch positiven Sinne) ist dann



$$(4.52)$$

$$\begin{aligned} U_p = U_{\mu\nu}(x) &= U(x, x + \nu) U(x + \nu, x + \mu + \nu) U(x + \mu + \nu, x + \mu) U(x + \mu, x) \\ &= U_\nu^{-1}(x + \nu) U_\mu^{-1}(x + \mu + \nu) U_\nu(x + \mu) U_\mu(x). \end{aligned} \quad (4.53)$$

U_p nennt man Plaquette-Variable. 1974 gelang es K.G.WILSON, mit ihrer Hilfe eine Gitterwirkung für das Eichfeld zu definieren [Wi1],[Wi2]. Sie lautet

$$S[U] = \sum_p S_p(U_p) \quad (4.54)$$

mit dem Plaquette-Term

$$\begin{aligned} S_p(U_p) &= -\beta \left\{ \frac{1}{2 \text{Tr } 1} \text{Tr} (U_p + U_p^{-1}) - 1 \right\} \\ &= \beta \left\{ 1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr } U_p \right\} \quad \text{SU}(2): \text{Re Tr } U_p = \text{Tr } U_p. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Der Ausdruck \sum_p bezeichnet die Summe über alle Plaquetten in ein und derselben Orientierung.

$$\sum_p = \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \quad (4.56)$$

Mit der BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel

$$\exp(x) \exp(y) = \exp\left(x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \dots\right) \quad (4.57)$$

und

$$A_\nu(x + \mu) = A_\nu(x) + a\Delta_\mu^f A_\nu(x) \quad (4.58)$$

findet man über (4.48) dann [MM]

$$U_{\mu\nu}(x) = \exp(-a^2 G_{\mu\nu}(x)) \quad (4.59)$$

$$G_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a) \quad \text{mit} \quad \text{Tr} G_{\mu\nu}(x) = 0 \quad (4.60)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \Delta_\mu^f A_\nu(x) - \Delta_\nu^f A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (4.61)$$

Die Spur der Wilson-Wirkung wird so zu

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(U_p + U_p^{-1}) \\ &= \text{Tr} \left\{ \left(1 - a^2 G_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} a^4 G_{\mu\nu}^2 + \dots \right) + \left(1 + a^2 G_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} a^4 G_{\mu\nu}^2 + \dots \right) \right\} \\ &= 2 \text{Tr} 1 + a^4 \text{Tr}(F_{\mu\nu}(x)^2) + \mathcal{O}(a^5). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Mit $\sum_p \text{Tr}(F_{\mu\nu}(x)^2) = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu,\nu} \text{Tr}(F_{\mu\nu}(x)^2)$ gelangt man so zu

$$S = -\frac{\beta}{4N} \sum_x a^4 \text{Tr}\{F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)\} + \mathcal{O}(a^4). \quad (4.63)$$

Eine Gitterwirkung, die der Forderung, im Kontinuumslimites die ursprüngliche Yang-Mills-Wirkung (2.130) wiederherzustellen, gehorcht, ist daher mit (4.2) und

$$\beta = \frac{2N}{g^2} \quad (4.64)$$

erfüllt.

4.3 Majorana-Fermionen in der adjungierten Darstellung

1843 entdeckte W.R.HAMILTON (und vor ihm schon 1819 C.F.GAUSS) auf der Suche nach einer Erweiterung der komplexen Zahlen die sogenannten hyperkomplexen Zahlen, deren Multiplikation räumlichen Drehungen ebenso entspricht wie ebene Drehungen der Multiplikation komplexer Zahlen. Seine Idee war es, die hyperkomplexen Zahlen durch den Ansatz $x_0 \mathbb{1} + i\vec{x}\vec{\sigma}$ zu repräsentieren. Die darin enthaltenen neuen „Zahlen“ $i\vec{\sigma}$ sind die Quaternionen, also letztlich nichts anderes als die Pauli-Matrizen, obwohl Hamilton in seiner Arbeit ihre Matrixdarstellungen gar nicht kannte. Aber auch er gelangte so ebenfalls zu der Lie-Algebra mit ihren definierenden Vertauschungsrelationen. Wie in [SU] oder [KS] gezeigt wird, wird mit dieser Methode der spezielle Zusammenhang zwischen der Tensor Darstellung der Elemente der $SO(3)$ und der Spinordarstellung der $SU(2)$ deutlich. Ordnet man jedem Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ eine 2×2 -Matrix X zu

$$X = x^i \sigma^i = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix}, \quad \text{und umgekehrt} \quad x^i = \frac{1}{2} \text{Tr} X \sigma^i, \quad (4.65)$$

so ist die Determinante dieser Konstruktion das negative Skalarprodukt $-x^i x^i$ des Vektors x . Transformiert man desweiteren X mit einem $\Lambda \in SU(2)$

$$X \rightarrow X' = \Lambda X \Lambda^{-1} = \Lambda X \Lambda^\dagger, \quad (4.66)$$

so bleibt das Skalarprodukt invariant.

$$-(x'^i x'^i) = \det X' = \det \Lambda \det X \det \Lambda^\dagger = \det X = -x^i x^i \quad (4.67)$$

Es handelt sich also bei der spinoriellen Transformation von X (4.66) um eine orthogonale Vektor-Transformation bezüglich x , wobei aber eine Spiegelung $x' = -x$ durch eine solche Transformation nicht möglich ist. Das bedeutet $x'^i = R^{ki} x^j$ mit $R^{ki} \in SO(3)$ und es ist egal, ob man die Basis der Pauli-Matrizen bezüglich der $SU(2)$ transformiert oder den ursprünglichen Vektor x mit einem Element der $SO(3)$:

$$\begin{aligned} X' &= x'^i \sigma^i = R^{ij} x^j \sigma^i \\ X' &= x^j \sigma'^j = x^j \Lambda \sigma^j \Lambda^\dagger \end{aligned} \quad (4.68)$$

Der Koeffizientenvergleich liefert

$$R^{ij} \sigma^i = \Lambda \sigma^j \Lambda^\dagger. \quad (4.69)$$

Multipliziert man noch mit $\frac{1}{2} \sigma^k$ von links und bildet unter Berücksichtigung von $\text{Tr} \sigma_i \sigma_j = 2\delta_{ij}$ die Spur, so ist

$$R^{kj} = \frac{1}{2} \text{Tr} \sigma^k \Lambda \sigma^j \Lambda^\dagger. \quad (4.70)$$

Dies ist der gesuchte Zusammenhang zwischen der Tensorarstellung der $SO(3)$ -Gruppe in ihrer fundamentalen, die gleichzeitig auch die zugehörige adjungierte Darstellung ist, und der Spinordarstellung der $SU(2)$ -Gruppe in ihrer fundamentalen Darstellung. Mit der für alle 2×2 -Matrizen gültigen Identität

$$\sigma^k M \sigma^k = 2 \text{Tr} M \cdot \mathbb{1} - M \quad (4.71)$$

folgt aus (4.69) und Multiplikation mit σ^j weiterhin

$$R^{ij} \sigma^i \sigma^j = \Lambda \sigma^j \Lambda^\dagger \sigma^j = \Lambda (2 \text{Tr} \Lambda^\dagger \cdot \mathbb{1} - \Lambda^\dagger). \quad (4.72)$$

Bildet man die Spur über diesen Ausdruck, so erhält man eine später noch häufig verwendete nützliche Eigenschaft

$$(\text{Tr}(\Lambda))^2 = (1 + \text{Tr}(R)). \quad (4.73)$$

Nach diesem allgemeinen Zusammenhang werden nun neben den Eichfeldern $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a$ auch die Majorana-Felder in einer Basis aus den Generatoren der $SU(2)$ in der fundamentalen Darstellung entwickelt

$$\lambda(x) = \lambda^a(x) T^a. \quad (4.74)$$

Ihr Transformationsverhalten gegenüber der Eichtransformation ist analog zu (4.66)

$$\lambda(x) \rightarrow \lambda'(x) = \Lambda^{-1}(x) \lambda(x) \Lambda(x). \quad (4.75)$$

In dieser Darstellung verlieren aber die ursprünglichen Operatoren wie

$$\sum_x \bar{\lambda}(x + \mu) U(x + \mu, x) \lambda(x) \quad (4.76)$$

ihre Eichinvarianz. Ein Mangel, der aber mittels der zyklischen Invarianz der Spur

$$\sum_x \text{Tr}(\bar{\lambda}(x + \mu) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^{-1}(x)) \quad (4.77)$$

wiederhergestellt werden kann. Mit der Normierung $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ ist

$$\begin{aligned}
 S_f^\Lambda[\lambda, U] &= \sum_x \left\{ \text{Tr}(\bar{\lambda}(x)\lambda(x)) \right. \\
 &\quad \left. - K \text{Tr} \left(\sum_{\mu=1}^4 \sum_{\alpha\beta} \bar{\lambda}_\beta(x+\mu)[r+\gamma_\mu]_{\beta\alpha} U_\mu(x) \lambda_\alpha(x) U_\mu^{-1}(x) \right. \right. \\
 &\quad \quad \left. \left. + \bar{\lambda}_\beta(x)[r-\gamma_\mu]_{\beta\alpha} U_\mu^{-1}(x) \lambda_\beta(x+\mu) U_\mu(x) \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{x,\alpha,a \\ y,\beta,b}} \left\{ \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \lambda_\alpha^a(x) \right. \\
 &\quad \left. - K \sum_{\mu=1}^4 \bar{\lambda}_\beta^b(x+\mu)[r+\gamma_\mu]_{\beta\alpha} V_\mu^{ba}(x) \lambda_\alpha^a(x) + \bar{\lambda}_\beta^b(x)[r-\gamma_\mu]_{\beta\alpha} (V_\mu^T)^{ba}(x) \lambda_\alpha^a(x+\mu) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

mit

$$V_\mu^{ba}(x) = V(x+\mu, x)^{ba} = 2 \text{Tr} \left(U_\mu(x) T^b U_\mu^{-1}(x) T^a \right) = (V_\mu^{ba}(x))^* = ((V_\mu^T(x))^{-1})^{ba}. \tag{4.79}$$

Dies ist die von I.MONTVAY vorgeschlagene Version der CURCI-VENEZIANO-Wirkung. Der Faktor $\frac{1}{2}$ entspricht formal einer Flavour-Zahl N_F , die wegen der halben Anzahl an Freiheitsgraden im Vergleich zu den Dirac-Fermionen typisch ist für Majorana-Fermionen.

Die Matrix V entspricht exakt (4.70), so dass V als ein Element der $\text{SO}(3)$ gesehen werden kann. Diese Gruppe wiederum ist aufgrund der gemeinsamen Strukturkonstanten isomorph zur adjungierten Darstellung der $\text{SU}(2)$.

Aufgrund des Transformationsverhaltens der Majorana-Fermionen (4.75) spricht man von der supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie mit Majorana-Fermionen, die sich bezüglich der adjungierten Darstellung der $\text{SU}(2)$ transformieren, oder kurz mit Majorana-Fermionen in adjungierter Darstellung. Eine weitere Eigenschaft dieser Matrix ist

$$V_\mu^{-1}(x) = V_\mu^{T_a}(x), \tag{4.80}$$

bei der sich die Transposition auf die Farbfreiheitsgrade bezieht. Eine Transposition nach Farb- und Ortsfreiheitsgraden ($T_{x,a}$) ändert $V_\mu(x)$ nicht, denn es ist

$$\begin{aligned}
 (V_\mu^{T_{x,a}}(x))^{ba} &= (V^{T_x})^{ab}(x+\mu, x) \\
 &= V(x, x+\mu)^{ab} \\
 &= (V^{-1}(x+\mu, x))^{ab} \\
 &= V(x+\mu, x)^{ba} \\
 &= V_\mu(x)^{ba}.
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

In kompakter Form kann man die Wirkung schreiben als

$$S_f^\Lambda[\lambda, U] = \frac{1}{2} \sum_{x\alpha a, y\beta b} \bar{\lambda}^a(y) Q_{yx}^{ab} \lambda^b(x) = \frac{1}{2} \sum_{xb, ya} \lambda^a(y) C Q_{yx}^{ab} \lambda^b(x) \quad (4.82)$$

mit der Fermionenmatrix

$$\begin{aligned} Q_{y\beta, x\alpha}^{ba} &= Q[U]_{y\beta, x\alpha}^{ba} \\ &= \delta_{yx} \delta_{ba} \delta_{\beta\alpha} - K \sum_{\mu=1}^4 \left[(r + \gamma_\mu)_{\beta\alpha} V_\mu(x)^{ba} \delta_{y, x+\mu} + (r - \gamma_\mu)_{\beta\alpha} (V_\mu^T)^{ba}(y) \delta_{y+\mu, x} \right] \\ &= (\mathbb{1} - KM)_{y\beta, x\alpha}^{ba} [U]. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Entscheidend für die späteren Rechnungen ist die Antisymmetrie des Operatorkernelns CQ bezüglich einer gemeinsamen Vertauschung von Orts-, Dirac- und Farbindizes. Dies lässt sich zeigen durch

$$\begin{aligned} C_{\beta\iota} Q_{y\iota, x\tau}^{ba} C_{\tau\alpha}^{-1} &= C_{\beta\iota} \delta_{\iota\tau} C_{\tau\alpha}^{-1} \delta_{ba} \delta_{yx} \\ &\quad - K \sum_{\mu=1}^4 \left[[C_{\beta\iota} (r + \gamma_\mu)_{\iota\tau} C_{\tau\alpha}^{-1}] (V_\mu^{ba}(x)) \delta_{y, x+\mu} + [C_{\beta\iota} (r - \gamma_\mu)_{\iota\tau} C_{\tau\alpha}^{-1}] (V_\mu^T(y)^{ba}) \delta_{y+\mu, x} \right] \\ &= \delta_{\beta\alpha} \delta_{ab} \delta_{xy} - K \sum_{\mu=1}^4 \left[\left[r + \underbrace{C_{\beta\iota} (\gamma_\mu)_{\iota\tau} C_{\tau\alpha}^{-1}}_{-(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}} \right] V_\mu^{ba}(x) \delta_{x+\mu, y} + \left[r - \underbrace{C_{\beta\iota} (\gamma_\mu)_{\iota\tau} C_{\tau\alpha}^{-1}}_{-(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}} \right] (V_\mu^T(y)^{ba}) \delta_{x, y+\mu} \right] \\ &= \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} \delta_{xy} - K \sum_{\mu=1}^4 \left[[r - \gamma_\mu]_{\alpha\beta} (V_\mu^T(x)^{ab}) \delta_{x+\mu, y} + [r + \gamma_\mu]_{\alpha\beta} (V_\mu^{ab}(y)) \delta_{x, y+\mu} \right] \\ &= Q_{x\alpha, y\beta}^{ab}, \end{aligned} \quad (4.84)$$

so dass mit der Multiplikation von rechts mit $C_{\alpha\rho}$

$$C_{\beta\iota} Q_{y\iota, x\rho}^{ba} = Q_{x\alpha, y\beta}^{ab} C_{\alpha\rho} = -C_{\rho\alpha} Q_{x\alpha, y\beta}^{ab} \Rightarrow CQ^{T_{x\alpha\alpha}} = -CQ \quad (4.85)$$

die Behauptung folgt.

Der Ausdruck (4.78) kann mit (3.75) erneut in eine einfacher zu handhabende Form

$$S_f^\Lambda[\lambda, U] = \frac{1}{2} \sum_x \left\{ \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \lambda_\alpha^a(x) - 2K \sum_{\mu=1}^4 \bar{\lambda}_\beta^b(x+\mu) V_\mu^{ba}(x) [r + \gamma_\mu]_{\beta\alpha} \lambda_\alpha^a(x) \right\} \quad (4.86)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_x \left\{ \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \lambda_\alpha^a(x) - 2K \sum_{\mu=1}^4 \bar{\lambda}_\beta^b(x) (V_\mu^T)^{ba}(x) [r - \gamma_\mu]_{\beta\alpha} \lambda_\alpha^a(x+\mu) \right\} \quad (4.87)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{x, \alpha, a} \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \lambda_\alpha^a(x) - K \sum_{\substack{(xy) \\ \alpha\beta, ab}} \bar{\lambda}_\beta^b(y) M_{y\beta, x\alpha}^{ba} \lambda_\alpha^a(x) \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned}
M_{y\beta,x\alpha}^{ba} &= M_{y\beta,x\alpha}^{(+)\,ba} + M_{y\beta,x\alpha}^{(-)\,ba} \\
&= \sum_{\mu=1}^4 (r + \gamma_\mu)_{\beta\alpha} V_\mu^{ba}(x) \delta_{y,x+\mu} + \sum_{\mu=1}^4 (r - \gamma_\mu)_{\beta\alpha} (V_\mu^T)^{ba}(y) \delta_{y+\mu,x}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

überführt werden. $\sum_{\langle xy \rangle}$ bezeichnet die Summe über alle nächsten Nachbarpaare. Dadurch wird erreicht, dass für jedes Nachbarpunktepaar jeweils nur ein Term, entweder M^+ oder M^- , und nicht, wie noch in (4.78), zwei Terme zur Wirkung beitragen, was die Rechnungen vereinfacht. Die wichtigen Symmetrieeigenschaften

$$\begin{aligned}
CMC^{-1} &= C(M^+ + M^-)C^{-1} \\
&= CM^+C^{-1} + CM^-C^{-1} \\
&= M^{(-)T} + M^{(+)T} = M^T
\end{aligned} \tag{4.90}$$

und damit

$$(CM)^T = -CM \tag{4.91}$$

bleiben natürlich erhalten. Mit den Definitionen

$$\gamma_{yx} = \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu (\delta_{y,x+\mu} - \delta_{y+\mu,x}) \tag{4.92}$$

$$V(y,x) = \sum_{\mu=1}^4 V_{yx} \delta_{y,x+\mu} + V_{xy}^T \delta_{y+\mu,x} \tag{4.93}$$

ist somit

$$M_{yx} = (r + \gamma_{yx})V(y,x). \tag{4.94}$$

Die vollständige N=1 SU(2) Super-Yang-Mills-Wirkung auf dem Gitter wie sie in dieser Arbeit verwendet wird - ist damit abschließend ($\beta = \frac{4}{g^2}$)

$$\begin{aligned}
S^\Lambda[U, \lambda] &= S_g^\Lambda[U] + S_f^\Lambda[U, \lambda] \\
&= \beta \sum_P \left\{ 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_P \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{x\alpha, a \\ y\beta b}} \bar{\lambda}_\beta^b(y) Q_{y\beta,x\alpha}^{ba} \lambda_\alpha^a(x) \\
&= \beta \sum_P \left\{ 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_P \right\} + \frac{1}{2} \sum_{x,\alpha,a} \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \lambda_\alpha^a(x) - K \sum_{\substack{\langle xy \rangle \\ \alpha\beta, ab}} \bar{\lambda}_\beta^b(y) M_{y\beta,x\alpha}^{ba} \lambda_\alpha^a(x).
\end{aligned} \tag{4.95}$$

4.4 Der Kontinuumslimit

Aus der Forderung der Unabhängigkeit der Observablen vom Gitterabstand gelangt man zur Renormierungsgruppengleichung. Die zentrale Funktion, die die Kopplung g in Beziehung zum Gitterabstand a setzt, ist die Callan-Symanzik β -Funktion

$$\beta(g) = -a \frac{\partial g}{\partial a}. \tag{4.96}$$

Sie kann in Potenzen von g entwickelt werden, wobei ihre vom Regularisierungsschema unabhängigen und daher universell gültigen ersten beiden Koeffizienten störungstheoretisch berechnet werden können [NSVZ]:

$$\beta(g) = -b_0 g^3 - b_1 g^5 + \mathcal{O}(g^7) \quad (4.97)$$

mit

$$b_0 = \frac{3N_c}{16\pi^2} \quad \text{und} \quad b_1 = \frac{6N_c^2}{(16\pi^2)^2}. \quad (4.98)$$

Durch eine einfache Integration gelangt man so zu der gesuchten Abhängigkeit

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Lambda_L} (b_0 g^2)^{-\frac{b_1}{2b_0^2}} e^{-\frac{1}{2b_0 g^2}} \\ \Leftrightarrow g^{-2}(a) &= 2b_0 \ln\left(\frac{1}{a\Lambda_L}\right) + \frac{b_1}{b_0} \ln\left(2 \ln\left(\frac{1}{a\Lambda_L}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Nach dieser Gleichung können nun beide Parameter gleichzeitig eingestellt werden. Die Massenskala Λ_L ist ein freier Parameter, der bei der Integration der β -Funktion entsteht und noch an mögliche zukünftige Experimente angepasst werden muss. Es zeigt sich ein für nicht-abelsche Feldtheorien typisches Verhalten, nach dem die Kontinuumstheorie, der Kontinuumslimes ($a \rightarrow 0$) durch $g \rightarrow 0$ bzw. $\beta \rightarrow \infty^4$ also einer asymptotisch kleinen Kopplung (asymptotische Freiheit) erreicht wird.

Neben dem Kontinuumslimes sollte durch ein korrektes Einstellen (Tuning) von β und K eine verschwindende Gluino-Masse für die Wiederherstellung sowohl der chiralen als auch der Supersymmetrie im Kontinuum sorgen. In den Simulationen wird üblicherweise β fest gewählt ($\beta \approx 2 \dots 3$), wobei K auf $K^{\text{cr}}(\beta)$, einem kritischen Punkt des Systems, bei dem ein Phasenübergang erwartet wird, eingestellt wird, wobei

$$K_{\text{chiral}}^{\text{cr}} = K_{\text{SUSY}}^{\text{cr}} \quad (4.100)$$

ist. K^{cr} wird zu einer Funktion von β mit

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} K^{\text{cr}} = \frac{1}{8}. \quad (4.101)$$

Als Ordnungsparameter dieses Phasenübergangs dient das Gluino-Kondensat $\langle \lambda \bar{\lambda} \rangle$, dessen Verschwinden auf die Restauration der chiralen Symmetrie schließen lässt (Abb. 4.1).

Desweiteren sollten an diesem Punkt die in den Simulationen beobachtbaren Massenaufspaltungen der leichtesten Multipletts aus Abschnitt 2.5 approximativ aufgehoben sein (siehe Abb. 4.2).

⁴ β ist hier natürlich $\beta = \frac{2N}{g^2}$.

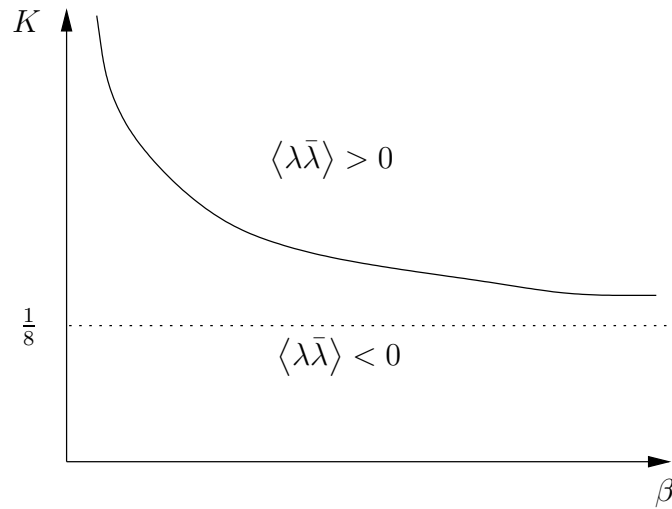


Abbildung 4.1: Erwartetes Phasendiagramm des chiralen Gluino-Kondensats

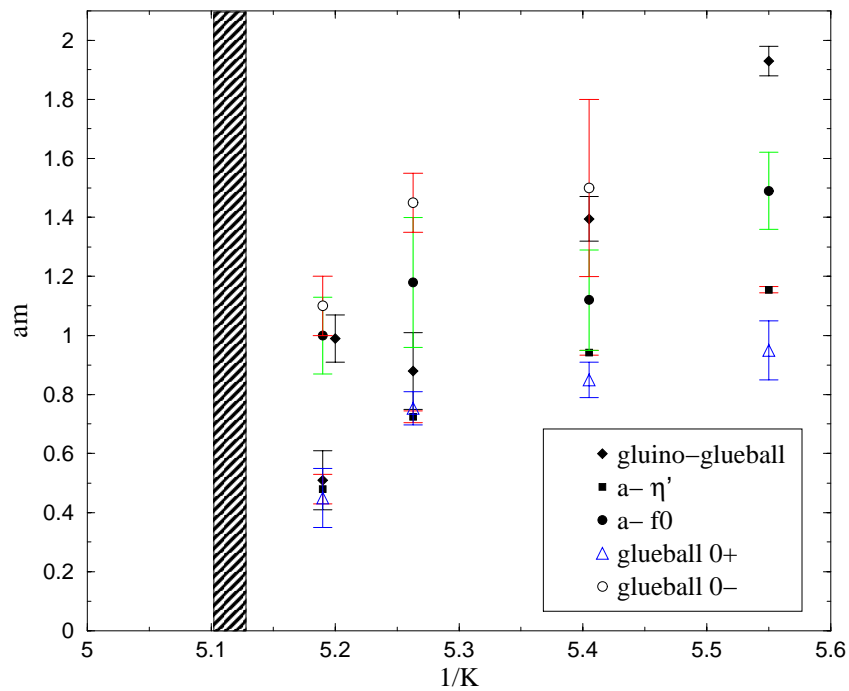


Abbildung 4.2: Die leichtesten Massen des chiralen Multipletts der G.R. FARRAR-G. GABADAZE-M.SCHWETZ-Wirkung aus Monte-Carlo-Simulationen für $\beta = 2.3$. Das gestrichelte Gebiet kennzeichnet den vermuteten Bereich verschwindender Gluino-Masse.

Kapitel 5

Die Gruppe $SU(N)$ und ihre Integration

Die Integration über die $SU(N)$ -Eichgruppe spielt für die Berechnungen der physikalischen Größen der Yang-Mills-Theorie mit Fermionen eine entscheidende Rolle, denn die Doppelentwicklung nach dem Hoppingparameter K und der Eichkopplung g bzw. β , beide in der Form einer Starkkopplungsentwicklung, hinterlässt eine $SU(N)$ -Gruppenintegration über Polynome aus Eichlinks $U \in SU(2)$ und den Hopping-Matrizen $V \in SO(3)$, beide in ihren fundamentalen Darstellungen. Eine systematische, graphische Methode, um $SU(N)$ -Integrale zu lösen, stammt von M. CREUTZ [Cr1]. In ähnlicher Weise kann auch die $SO(3)$ -Integration behandelt werden, die in [Lu] fälschlicherweise mit der $SU(3)$ -Integration identifiziert wurde. Doch bevor die Methoden dargestellt werden, werden zunächst die grundlegenden Eigenschaften der $SU(N)$ -Liegruppe und des ihr zugehörigen Integrationsmaßes, das Haar-Maß, eingeführt.

5.1 Die Gruppe der $SU(N)$ -Matrizen

Bei der Gruppe $SU(N)$, der Menge aller komplexen N -dimensionalen speziellen und unitären Matrizen, handelt es sich unabhängig von ihren Darstellungen um eine kompakte, nicht abelsche Liegruppe, deren Generatoren J den fundamentalen Vertauschungsrelationen

$$[J_i, J_j] = i f_{ijk} J_k. \quad f_{ijk} : \text{Strukturkonstanten} \quad (5.1)$$

gehörchen (siehe auch Anhang A). Im Fall der zweidimensionalen Spinordarstellung $j = \frac{1}{2}$ der $SU(2)$ mit $f_{ijk} = \epsilon_{ijk}$ werden diese Relationen von den Pauli-Matrizen $\frac{\sigma_i}{2}$ erfüllt, und man kann jedem Gruppenelement U eindeutig einen gerichteten Winkel $\vec{\varphi} = \varphi \cdot \vec{n}$ als Parameter zuordnen. Dieser entspricht einem Punkt auf der Oberfläche einer vier-dimensionalen Hyperkugel S^3 . Sie

bildet die Gruppenmannigfaltigkeit¹, und es ist

$$U(\vec{\sigma}) = \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\varphi}\vec{\sigma}\right) = \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)\mathbb{1} + i\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)\vec{n}\vec{\sigma}$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad |\vec{n}| = 1. \quad (5.2)$$

Eine andere Möglichkeit der Parametrisierung wäre z.B.:

$$U = a_0\mathbb{1} + i\vec{a}\vec{\sigma} \quad \text{mit} \quad a_0^2 + \vec{a}^2 = 1. \quad (5.3)$$

Ist die Gruppenmannigfaltigkeit, wie in diesem Fall, darüberhinaus noch kompakt und differenzierbar, so spricht man von einer kompakten Lie-Algebra bzw. Lie-Gruppe.

Man kann nun zeigen [Cr2], dass für jede kompakte Lie-Gruppe G ein invariantes Integrationsmaß existiert, das Haar-Maß, mit den folgenden Eigenschaften

1. Gruppentranslationsinvarianz:

$$\int_G f(U)dU = \int_G f(VU)dU = \int_G f(UV)dU \quad \text{für} \quad U, V \in G$$

2. Normierung: $\int_G dU = 1$.

Speziell folgt aus der Invarianz

$$\int_G f(U)dU = \int_G f(VUW)dU = \int_G f(U^{-1})dU \quad \text{mit} \quad V, W \in G. \quad (5.4)$$

Für die $SU(2)$ könnte man auf das normierte Oberflächenmaß der Hyperkugel zurückgreifen

$$dU = \frac{1}{4\pi^2} \left(\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 d\varphi d\Omega(\vec{n}) \quad (5.5)$$

mit $d\Omega(\vec{n})$ als Kugeloberflächeneinheitsmaß im \mathbb{R}^3 , oder alternativ ausgehend von (5.3)

$$dU = \frac{1}{\pi^2} \delta(a^2 - 1) d^4a \quad (5.6)$$

verwenden.

Eine hilfreiche Möglichkeit zur Berechnung von Gruppenintegralen bieten die Charakter-Funktionen $\chi_j(U)$. Für ein Gruppenelement U in der j -ten unitären und irreduziblen Darstellung der $SU(2)$ $D^j(U)$ ist sie

$$\chi_j(U) = \text{Tr}(D^j(U)) = \frac{\sin\left(j + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)} \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (5.7)$$

Sie ist eine invariante Funktion oder Klassenfunktion der Gruppe

$$\chi_j(VUV^{-1}) = \chi_j(U) \quad U, V \in SU(N). \quad (5.8)$$

Siehe hierzu auch Kapitel 7.

¹Der Begriff der Mannigfaltigkeit entstammt aus der Topologie und definiert eine Menge von Punkten, mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt eine offene Umgebung U_i in \mathcal{M} besitzt, für die es eine eindeutige Abbildung φ_i auf eine offene Untermenge U'_i des \mathbb{R}^n gibt.

5.2 Die Gruppenintegration der SU(N) in fundamentaler Darstellung

Im folgenden geht es nun um die Berechnung von Integralen der Art

$$I = \int dU U_{i_1 j_1} \cdots U_{i_n j_n} U_{k_1 l_1}^{-1} \cdots U_{k_m l_m}^{-1} \quad (5.9)$$

mit den SU(N) Gruppenelementen U zunächst in ihrer fundamentalen Darstellung - die Indizes beziehen sich auf die Einträge der darstellenden Matrizen.

Wählt man zunächst eine erzeugende Funktion

$$W(J, K) = \int dU e^{\text{Tr}(J^T U + K^T U^{-1})} \quad (5.10)$$

mit beliebigen $N \times N$ -Matrizen J und K , so ist

$$I = \left(\frac{\partial}{\partial J_{j_1 i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial J_{j_n i_n}} \frac{\partial}{\partial K_{l_1 k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial K_{l_m k_m}} W(J, K) \right) \Bigg|_{J=K=0} \quad (5.11)$$

Die K -Abhängigkeit dieser Funktion $W(J, K)$ wird durch eine neue Funktion $W(J)$ eliminiert. Hierfür ersetzt man alle U_{ij}^{-1} in (5.9) durch ihre Kofaktoren $\text{cof}(U)_{ji}$. Dies ist die mit $(-1)^{i+j}$ multiplizierte Determinante derjenigen Matrix, die durch Streichung der j -ten Zeile bzw i -ten Spalte aus U entsteht.

$$\begin{aligned} U_{ij}^{-1} &= \frac{\text{cof}(U)_{ij}}{\det(U)} = (-1)^{i+j} \det(U_{a \neq i, b \neq j}) \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \epsilon_{j, i_1, \dots, i_{N-1}} \epsilon_{i, j_1, \dots, j_{N-1}} U_{i_1 j_1} \cdots U_{i_{N-1} j_{N-1}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

ϵ ist wieder der total-antisymmetrische Tensor mit $\epsilon_{1,2,\dots,N} = 1$. Dadurch werden die inversen Gruppenelemente in der Integration beseitigt. Für die erzeugende Funktion bedeutet dieser Schritt

$$\begin{aligned} W(J, K) &= \exp \left\{ \text{Tr} K \left(\text{cof} \frac{\partial}{\partial J} \right) \right\} W(J) \\ W(J) &= \int dU \exp(\text{Tr} J U), \end{aligned} \quad (5.13)$$

und $W(J)$ wird zur neuen, von K unabhängigen, erzeugenden Funktion. Wie außerdem in [Cr1] gezeigt wird, muss jede differenzierbare und damit in J analytische Funktion, die die durch die Invarianz des Integrationsmaßes bedingte Eigenschaft

$$W(J) = W(V J W) \quad V, W \in SU(N) \quad (5.14)$$

erfüllt, in eine Potenzreihe der SU(N)-Gruppeninvarianten $\det(J)$

$$W(J) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (\det J)^i \quad (5.15)$$

entwickelbar sein. Die Normierung des Gruppenmaßes fordert $a_0 = 1$, und da die Determinante für alle Elemente der SU(N) eins sein muss, ist

$$\left(\det \frac{\partial}{\partial J} \right) W(J) = W(J). \tag{5.16}$$

Zusammen mit der von M.CREUTZ gefundenen Relation

$$\left(\det \frac{\partial}{\partial J} \right) (\det J)^i = \frac{(i + N - 1)!}{(i - 1)!} (\det J)^{i-1} \tag{5.17}$$

ist

$$a_i = \frac{(i - 1)!}{(i + N - 1)!} a_{i-1} \stackrel{a_0=1}{\implies} a_i = \frac{2!3! \dots (N - 1)!}{i!(i + 1)! \dots (i + N - 1)!} \tag{5.18}$$

und

$$W(J) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2! \dots (N - 1)!}{i! \dots (i + N - 1)!} (\det J)^i. \tag{5.19}$$

Die Determinanten von J können dann wieder durch ϵ -Tensoren beschrieben werden

$$\det J = \frac{1}{N!} \epsilon_{i_1 \dots i_N} \epsilon_{j_1 \dots j_N} J_{i_1 j_1} \dots J_{i_N j_N}, \tag{5.20}$$

so dass das Integral nach den Ableitungen von $W(J)$ letzten Endes in eine Summe von Produkten aus ϵ -Tensoren zerfällt. Wenn anschließend die Quellen J und K zu Null gesetzt werden, bleibt schließlich von dieser Summe aber nur ein Term aus Produkten über ϵ -Tensoren und Permutationen übrig. Damit sind jetzt prinzipiell alle Möglichkeiten gegeben, das Integral (5.9) zu berechnen.

Aufgrund der Komplexität der Rechnungen bietet sich ein ebenfalls von M.CREUTZ vorgeschlagenes graphisches Verfahren an. Danach ordnet man jedem Element der Gruppe einen gerichteten Pfeil zu.

$$U_{ij} = \begin{array}{c} j \\ \uparrow \\ i \end{array} \quad U_{ij}^{-1} = \begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ j \end{array} \tag{5.21}$$

Das Integral (5.9) ist dann die Kollektion dieser Pfeile.

$$I = \begin{array}{ccccccc} & j_1 & & j_n & k_1 & & k_m \\ & \uparrow & \dots & \uparrow & \downarrow & \dots & \downarrow \\ i_1 & \dots & i_n & l_1 & \dots & l_m & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \end{array} \tag{5.22}$$

Das Kronecker-Delta wird zu einer ungerichteten Linie und der antisymmetrische ϵ -Tensor zu einem Vertex mit N Linien.

$$\delta_{ij} = i \text{ --- } j$$

$$\epsilon_{i_1 \dots i_N} = \begin{array}{c} i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_N \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \text{Vertex} \end{array} = \begin{array}{c} i_N \quad i_2 \quad i_1 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \text{Vertex} \end{array} \tag{5.23}$$

Beide besitzen die Eigenschaft, invariant gegenüber Gruppentransformationen zu sein.

$$U_{ij}\delta_{jk}U_{kl}^{-1} = \delta_{il} \tag{5.24}$$

$$U_{i_1j_1}U_{i_2j_2}\cdots U_{i_Nj_N}\epsilon_{j_1,\dots,j_N} = \epsilon_{i_1,\dots,i_N} \tag{5.25}$$

oder graphisch



$$\tag{5.26}$$

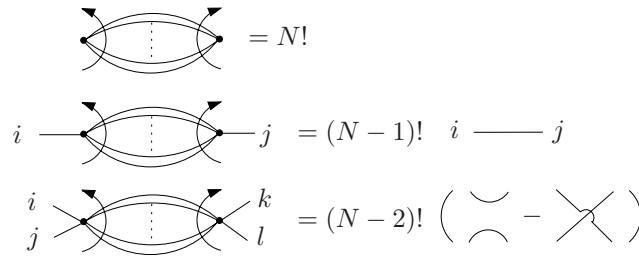
Wie man der Graphik entnehmen kann, bedeuten zwei verbundene Linien, dass über die zugehörigen Indizes an dem Verknüpfungspunkt das Matrixprodukt gebildet wird. Die bei der Entwicklung der Gruppenintegrale auftretenden Produkte über ϵ -Tensoren können durch die folgenden Identitäten vereinfacht werden.

$$\epsilon_{i_1\dots i_N} \epsilon_{i_1\dots i_N} = N! \tag{5.27}$$

$$\epsilon_{i,i_1\dots i_{N-1}} \epsilon_{j,i_1\dots i_{N-1}} = (N-1)! \delta_{ij} \tag{5.28}$$

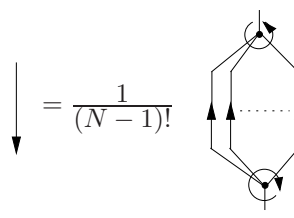
$$\epsilon_{i,j,i_1\dots i_{N-2}} \epsilon_{k,l,i_1\dots i_{N-2}} = (N-2)! (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{5.29}$$

Graphisch entspricht dies:



$$\tag{5.30}$$

Auch die Bildung der Kofaktoren (5.12) und das p-te Element der Reihenentwicklung von $W(J)$ (5.19) lassen sich darstellen.



$$\tag{5.31}$$

$$\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \dots \\ \uparrow \end{array} \right)^p = \frac{2! 3! \dots (N-1)!}{(p+1)! \dots (p+N-1)!} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} \right)^p + \text{Permutationen} \tag{5.32}$$

Um nun das Standardintegral (5.9) graphisch zu lösen, ersetzt man zunächst entsprechend (5.12) die inversen Gruppenelemente durch ihre Kofaktoren bzw. die nach unten gerichteten Pfeile durch die nach oben gerichteten Pfeile aus der Graphik (5.31). Wenn es mehr Pfeile gibt, die nach unten gerichtet sind als Pfeile, die nach oben zeigen, ist es natürlich sinnvoller, zunächst die nach oben gerichteten Pfeile zu konvertieren bzw. die nicht inversen Gruppenelemente durch ihre Kofaktoren zu ersetzen. Besitzen danach alle Pfeile, deren Anzahl ein Vielfaches (p-faches) von N sein muss, dieselbe Richtung, so ist die p-te Potenz in der Entwicklung von $W(J)$ (5.19) nach (5.20) eine Summe über Permutationen von Graphen, die man erhält, wenn man in allen Varianten die Indizes der Gruppenelemente mit den Vertices verbindet. Dieses Mischen führt aber zu teilweise topologisch gleichen Verknüpfungen, so dass die resultierende Summe effektiv nur noch aus einer Anzahl von $Np!/p!(N!)^p$ Termen besteht. Für $p = 1$ ist

$$\int dU U_{i_1 j_1} \dots U_{i_N j_N} = \frac{1}{N!} \epsilon_{i_1 \dots i_N} \epsilon_{j_1 \dots j_N} \tag{5.33}$$

Das einfachste Gruppenintegral in der Form (5.9) ist

$$I_{ijkl} = \int dU U_{ij} U_{kl}^{-1} \tag{5.34}$$

Mit (5.12), (5.19) und (5.28) ergibt sich seine Lösung graphisch durch

$$I_{ijkl} = \begin{array}{c} \uparrow j \\ \downarrow k \\ i \quad l \end{array} = \frac{1}{(N-1)!} \begin{array}{c} \uparrow j \\ i \end{array} \begin{array}{c} \text{Diagram} \end{array} = \frac{1}{N!(N-1)!} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{Diagram} \end{array} = \frac{1}{N} \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \text{Diagram} \end{array} \tag{5.35}$$

also

$$I_{ijkl} = \int dU U_{ij} U_{kl}^{-1} = \frac{1}{N} \delta_{jk} \delta_{il} \tag{5.36}$$

Das nächste Beispiel ist das Integral über vier Gruppenelemente.

$$I = \int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1} \tag{5.37}$$

Dieses lässt sich ebenfalls graphisch lösen. So ist

$$\begin{aligned}
 I &= \begin{array}{c} j_1 \quad k_1 \quad j_2 \quad k_2 \\ \uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow \\ i_1 \quad l_1 \quad i_2 \quad l_2 \end{array} = \left(\frac{1}{(N-1)!} \right)^2 \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Diagram 1} \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{Diagram 2} \\ \uparrow \end{array} \\
 &= a \left(\begin{array}{cc} \text{Diagram 3} & \text{Diagram 4} \\ + & \end{array} \right) + b \left(\begin{array}{cc} \text{Diagram 5} & \text{Diagram 6} \\ + & \end{array} \right) \tag{5.38}
 \end{aligned}$$

Die Vorfaktoren werden zunächst noch nicht bestimmt. Die Struktur des Ergebnisses hätte man aber auch durch einfache Überlegungen bekommen können. Besitzen alle Pfeile nach der Ersetzung durch die Kofaktoren dieselbe Richtung, würde man eine Summe mit $(2N)!/(2!N!)^2$ -Termen erwarten. Es gibt aber einen Trick, mit dem man diese Summe schnell und einfach aus dem schon bekannten Ergebnis (5.36) herleiten kann. Man weiß, dass der p-te Term der Entwicklung eine gerade Anzahl von Paaren von Vertices bzw. ϵ -Tensoren hervorbringt, die sich gleichmäßig oben und unten verteilen und später mit (5.28) in Produkte aus Deltafunktionen zerfallen. Diese Deltafunktionen können aber per Konstruktion hier niemals j_1 und j_2 bzw. l_1 und l_2 miteinander verbinden und es bleiben noch vier verschiedene Möglichkeiten, Produkte aus Deltafunktionen (Linien) zu konstruieren, die die übrigen Indizes untereinander verbinden. Darüberhinaus müssen sowohl die Lösung als auch die Integration invariant gegenüber einem Vertauschen $k_1 l_1 k_2 l_2 \longleftrightarrow k_2 l_2 k_1 l_1$ sein, so dass das Integral die Form

$$\begin{aligned}
 I &= a(\delta_{i_1 l_1} \delta_{j_1 k_1} \delta_{i_2 l_2} \delta_{j_2 k_2} + \delta_{i_2 l_1} \delta_{j_2 k_1} \delta_{i_1 l_2} \delta_{j_1 k_2}) \\
 &\quad + b(\delta_{i_1 l_1} \delta_{j_1 k_2} \delta_{i_2 l_2} \delta_{j_2 k_1} + \delta_{i_2 l_1} \delta_{j_1 k_1} \delta_{i_1 l_2} \delta_{j_2 k_2}) \tag{5.39}
 \end{aligned}$$

besitzen muss.

Die zwei unabhängigen Konstanten können nun bestimmt werden, indem man diesen Ausdruck mit $\delta_{j_1 k_1}$ multipliziert und ihn mit (5.35) vergleicht.

$$\begin{aligned}
 \delta_{j_1 k_1} I &= \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \\ \uparrow \downarrow \uparrow \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \uparrow \downarrow \end{array} = \frac{1}{N} \left(\begin{array}{cc} \text{Diagram 7} & \text{Diagram 8} \\ + & \end{array} \right) \\
 &= a \left(\begin{array}{cc} \text{Diagram 9} & \text{Diagram 10} \\ + & \end{array} \right) + b \left(\begin{array}{cc} \text{Diagram 11} & \text{Diagram 12} \\ + & \end{array} \right) \\
 &= (Na + b) \left(\begin{array}{cc} \text{Diagram 13} & \text{Diagram 14} \\ + & \end{array} \right) + (Nb + a) \left(\begin{array}{cc} \text{Diagram 15} & \text{Diagram 16} \\ + & \end{array} \right) \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

Die in der Graphik auftretenden Kreise entsprechen der Summe $\sum_i \delta_{ii} = N$. Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$a = 1/(N^2 - 1) \quad (5.41)$$

$$b = -1/(N(N^2 - 1)). \quad (5.42)$$

Entsprechend können nun sukzessiv und mit hohem Rechenaufwand die nächst größeren Integrale bestimmt werden [Lu]. Im folgenden sind die Ergebnisse in den niedrigsten Ordnungen für den Fall $N = 2$ aufgelistet:

$$\begin{aligned} \hat{U}_2^*(i_1, j_1, i_2, j_2) &= \int dU U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_{i_1 i_2} \epsilon_{j_1 j_2} = \frac{1}{2} (\delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} - \delta_{i_1 j_2} \delta_{i_2 j_1}) \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\hat{U}_2(i_1, j_1, i_1, j_1) = \int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} = \frac{1}{2} \delta_{j_1 k_1} \delta_{i_1 l_1} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}_4(i_1, j_1, k_1, l_1, i_2, j_2, k_2, l_2) &= \int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1} \\ &= \frac{1}{3} (\delta_{i_1 l_1} \delta_{j_1 k_1} \delta_{i_2 l_2} \delta_{j_2 k_2} + \delta_{i_2 l_1} \delta_{j_2 k_1} \delta_{i_1 l_2} \delta_{j_1 k_2}) \\ &\quad - \frac{1}{6} (\delta_{i_1 l_1} \delta_{j_1 k_2} \delta_{i_2 l_2} \delta_{j_2 k_1} + \delta_{i_2 l_1} \delta_{j_1 k_1} \delta_{i_1 l_2} \delta_{j_2 k_2}) \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$\hat{U}_6(i_1, j_1, \dots, k_3 l_3) = \int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1} U_{i_3 j_3} U_{k_3 l_3}^{-1} = \frac{1}{6} T_1 - \frac{1}{24} T_2 \quad (5.46)$$

mit

$$\begin{aligned} T_1 &= \delta_{i_1 l_1} \delta_{i_2 l_2} \delta_{i_3 l_3} \delta_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_2} \delta_{j_3 k_3} + \text{Permutationen von } (k_1 l_1)(k_2 l_2)(k_3 l_3) \\ T_2 &= \delta_{i_1 l_1} \delta_{i_2 l_2} \delta_{i_3 l_3} \delta_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_3} \delta_{j_3 k_2} + \delta_{i_1 l_2} \delta_{i_2 l_1} \delta_{i_3 l_3} \delta_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_2} \delta_{j_3 k_3} \\ &\quad + \delta_{i_1 l_3} \delta_{i_2 l_1} \delta_{i_3 l_2} \delta_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_3} \delta_{j_3 k_2} + \text{Permutationen von } (k_1 l_1)(k_2 l_2)(k_3 l_3) \end{aligned} \quad (5.47)$$

Für den Fall $N = 2$ und $p = 3$ führt aber das graphische Verfahren nicht zu einer eindeutigen Lösung, was durch spezielle Eigenschaften der Gruppe der $SU(2)$ erklärt werden kann. Dieses Problem konnte in [Lu] gelöst werden mit dem oben formulierten Ergebnis. Die Funktionen \hat{U} wurden dann in dieser Form in MATHEMATICA implementiert.

Ein weiterer wichtiger Zusammenhang, der sich direkt aus (5.36) ergibt, ist

$$\begin{aligned} \int dU \text{Tr} U U_1 \text{Tr} U^{-1} U_2 &= \int dU U^{ab} U_1^{ba} U^{(-1)cd} U_2^{dc} \\ &= \frac{1}{N} U_1^{ba} U_2^{dc} \delta_{bc} \delta_{ad} \\ &= \frac{1}{N} \text{Tr} U_1 U_2 \quad U, U_1; U_2 \in SU(N). \end{aligned} \quad (5.48)$$

In den folgenden Kapiteln treten in den Entwicklungen Eichplaquetten U_P in Form von Produkten über Gruppenelemente der $SU(2)$ auf. Graphisch führt (5.48) so zu einer „Verschmelzung“ benachbarter Plaquettermen. So ist

$$\int dU_1 dU_2 dU_3 dU_4 = \frac{1}{N^2} \int dU_2 dU_4 = \frac{1}{N^2} \int dU = \frac{1}{N^3} \tag{5.49}$$

5.3 Die Gruppenintegration der SU(2) in adjungierter Darstellung

Neben den Integralen über die Eichlinks treten in den Rechnungen Integrale über Gruppenelemente der SO(3) in Form der Hoppingmatrizen V auf. Aufgrund der Isomorphie der Gruppe der SO(3) und der SU(2)/ Z_2 sind SO(3)-Integration und SU(2)-Integration über SU(2) Elemente in adjungierter Darstellung äquivalent, wobei $V_{ij} = U_{ij}^{\text{adj}} = 1/2 \text{Tr}(\sigma_i U^\dagger \sigma_j U) \in \text{SO}(3)$. Daher sind sie zunächst nichts anderes als eine Linearkombination von U und U^{-1} in fundamentaler Darstellung, so dass man die bisherigen Ergebnisse direkt auf sie übertragen kann. Allerdings werden die Rechnungen für Integrale mit mehr als zwei V's sehr komplex. Nach [EMS] kann man analog zum vorherigen Abschnitt aber auch für SO(3)-Integrale eine erzeugende Funktion $W(M)$ nach den Invarianten der Gruppe entwickeln und die zugehörigen Integrationsregeln herleiten. Das erzeugende Integral mit der 3×3 -Matrix M

$$W(M) = \int_{\text{SO}(3)} dR \exp(\text{Tr} V M^T) \tag{5.50}$$

für das Standardintegral

$$\begin{aligned}
 I_{i_1, j_1 \dots i_N, j_N} &= \int_{\text{SO}(3)} dV V_{i_1, j_1} \dots V_{i_N, j_N} = \int_{\text{SU}(2)} dU U_{i_1, j_1}^{\text{adj}} \dots U_{i_N, j_N}^{\text{adj}} \\
 &= \left. \frac{\partial}{\partial M_{i_N, j_N}} \dots \frac{\partial}{\partial M_{i_1, j_1}} W(M) \right|_{M=0}
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

ist wie $W(J)$ in (5.14) erneut invariant im Sinne von

$$W(M) = W(V_1 M V_2), \quad V_1, V_2 \in \text{SO}(3) \tag{5.52}$$

und lässt sich daher als Funktion der SO(3)-Invarianten

$$x = \text{Tr} M M^T, \quad y = 4 \det M, \quad z = \frac{1}{2} [\text{Tr} M M^T]^2 - \text{Tr} M M^T M M^T \tag{5.53}$$

schreiben. Da $W(M)$ eine bezüglich M analytische Funktion sein muss, kann man ferner annehmen, dass M reell und generisch ist, das heißt, dass x, y, z von Null verschieden sind. O.B.d.A ist M eine Diagonalmatrix

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (5.54)$$

wodurch mit (5.6)

$$\begin{aligned} W(M) &= \int_{\text{SO}(3)} dV \exp \left[\sum_{i=1}^3 m_i V_{ii} \right] \\ &= \int_{\text{SU}(2)} DU \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \text{Tr}(\sigma_i U^\dagger \sigma_i U) \right] \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int d^4 a \delta(a^2 - 1) \exp \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i \text{Tr}(\sigma_i U^\dagger \sigma_i U) \right] \end{aligned} \quad (5.55)$$

ist. Mit der Integraldarstellung der Delta-Funktion

$$\delta(a^2 - 1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp i\xi(a^2 - 1) \quad (5.56)$$

bildet $W(M)$ bezüglich der a -Integration ein Gaußsches Integral mit dem Ergebnis ($s = i\xi$)

$$W(M) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0 - i\infty}^{s_0 + i\infty} ds e^s \cdot f(s; m_1, m_2, m_3) \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} f(s; m_1, m_2, m_3) &= [s^4 - 2(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)s^2 - 8m_1m_2m_3s \\ &\quad + m_1^4 + m_2^4 + m_3^4 - 2(m_2^2m_3^2 + m_3^2m_1^2 + m_1^2m_2^2)]^{-1/2} \\ &= [s^4 - 2xs^2 - 2ys - 2z]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Dies ist ein Fourier-Mellin Integral, wobei s_0 so gewählt wurde, dass alle Singularitäten links vom Integrationsweg liegen. Entwickelt man nun $W(M)$ nach $x/s^2, y/s^3$ und z/s^4 und integriert Term für Term, so erhält man die gesuchte Potenzreihe in den Gruppeninvarianten

$$W(M) = \sum_{j,k,l=0}^{\infty} \frac{(2(j+k+l)-1)!!}{j! \cdot k! \cdot l! \cdot (1+2j+3k+4l)!} x^j y^k z^l. \quad (5.59)$$

Für die einfachsten Integrale können nun folgende Ergebnisse berechnet werden (P : Permutationen):

1.

$$\int dU V_{i_1 j_1} = 0 \quad (5.60)$$

2. $j = 1, k = 0, l = 0$

$$\begin{aligned}
\hat{V}_2(i_1, j_1, i_2, j_2) &= \int dU V_{i_1 j_1} V_{i_2 j_2} \\
&= \frac{\partial}{\partial M_{i_2 j_2}} \frac{\partial}{\partial M_{i_1 j_1}} \frac{1}{3!} (\delta_{kl} \delta_{mn} M_{km} M_{ln}) \\
&= \frac{1}{6} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} + P(\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\})) \\
&= \frac{1}{6} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} + \delta_{i_2 i_1} \delta_{j_2 j_1}) = \frac{1}{3} \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2}
\end{aligned} \tag{5.61}$$

3. $j = 0, k = 1, l = 0$

$$\begin{aligned}
\hat{V}_3(i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3) &= \int dU V_{i_1 j_1} V_{i_2 j_2} V_{i_3 j_3} \\
&= \frac{\partial}{\partial M_{i_3 j_3}} \frac{\partial}{\partial M_{i_2 j_2}} \frac{\partial}{\partial M_{i_1 j_1}} \frac{4}{4!} \left(\frac{1}{3!} \epsilon_{klm} \epsilon_{nop} M_{kn} M_{lo} M_{mp} \right) \\
&= \frac{1}{3!^2} (\epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3} + P(\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \{i_3, j_3\})) \\
&= \frac{1}{3!} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3} = \frac{1}{6} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3}
\end{aligned} \tag{5.62}$$

4. $j = 2, k = 0, l = 0$ und $j = 0, k = 0, l = 1$

$$\begin{aligned}
\hat{V}_4(i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4) &= \int dU V_{i_1 j_1} V_{i_2 j_2} V_{i_3 j_3} V_{i_4 j_4} \\
&= \prod_{k=1}^4 \frac{\partial}{\partial M_{i_k j_k}} \left(\frac{3!!}{2! \cdot 5!} [\text{Tr} M M^T]^2 + \frac{1}{5! \cdot 2} [\text{Tr} M M^T]^2 - \frac{1}{5!} \text{Tr} M M^T M M^T \right) \\
&= \prod_{k=1}^4 \frac{\partial}{\partial M_{i_k j_k}} \left(\frac{2}{5!} [\text{Tr} M M^T]^2 - \frac{1}{5!} \text{Tr} M M^T M M^T \right) \\
&= \frac{2}{5!} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_3 i_4} \delta_{j_3 j_4} + P(\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \{i_3, j_3\}, \{i_4, j_4\})) \\
&\quad - \frac{1}{5!} (\delta_{i_1 i_4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_2 i_3} \delta_{j_4 j_3} + P(\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \{i_3, j_3\}, \{i_4, j_4\})) \\
&= \frac{16}{5!} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_3 i_4} \delta_{j_3 j_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_2 i_4} \delta_{j_2 j_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_2 i_3} \delta_{j_2 j_3}) \\
&\quad - \frac{8}{5!} (\delta_{i_1 i_4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_2 i_3} \delta_{j_3 j_4} + \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_3 i_4} \delta_{j_2 j_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_2 i_4} \delta_{j_2 j_3}) \\
&= \frac{2}{15} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_3 i_4} \delta_{j_3 j_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_2 i_4} \delta_{j_2 j_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_2 i_3} \delta_{j_2 j_3}) \\
&\quad - \frac{1}{15} (\delta_{i_1 i_4} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_2 i_3} \delta_{j_3 j_4} + \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_3} \delta_{i_3 i_4} \delta_{j_2 j_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{j_1 j_4} \delta_{i_2 i_4} \delta_{j_2 j_3})
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Die ersten drei Gruppenintegrale unterscheiden sich nicht von den in [Lu] angegebenen. Erst bei größeren Integralen existieren signifikante Unterschiede zu der SU(3)-Gruppenintegration.

Integrale mit mehr als vier V 's werden für meine Arbeit nicht benötigt. Sie erscheinen aber zusammen mit einer Kontrollrechnung im Anhang.

Kapitel 6

Die Hoppingparameter-Entwicklung

Mit Hilfe numerischer Methoden, wie den Monte-Carlo Simulationen, ist es im Prinzip möglich, die Korrelationsfunktionen bosonischer Feldtheorien mit einer beliebig starken Kopplung g zu bestimmen. Enthält die Wirkung aber, wie im Falle der SYM, fermionische Grassmann-Felder, so müssen diese zunächst gesondert ausintegriert werden, da ihre Implementierung beispielsweise durch spezielle Matrizen zu viel Performance benötigen würde. Das resultierende Pfadintegral kann dann mit den üblichen statistischen Verfahren, wie der Starkkopplungsentwicklung, analytisch oder numerisch weiter berechnet werden. Die Integration über die Fermion-Felder ist aber in diesem Fall nichttrivial, da die Fermionenmatrix nicht nur lokale, sondern auch Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen beschreibt, deren Stärke durch die Größe des Hoppingparameters bestimmt wird. In der Vergangenheit hat man diese Wechselwirkungen in der sogenannten Quenched-Approximation oft vernachlässigt, indem man die bei der Integration über die Fermionfelder auftretende Fermion-Determinante auf eins gesetzt hat. Sie enthält die Fermion-Loop-Beiträge, die - das zeigen numerische Ergebnisse aus der QCD in ungequenchter Approximation - nur einen geringen Einfluss ($\approx 10\%$) auf das niederenergetische Massenspektrum haben (siehe z.B. [CP]). Aus numerischer Sicht bedeutet dies aber eine immense Vereinfachung.

Um aber die Selbstwechselwirkungen der Felder zu berücksichtigen, wird im folgenden das Verfahren der Hoppingparameter-Entwicklung (HPE) angewandt. Dabei handelt es sich um eine Entwicklung desjenigen Boltzmannfaktors, der die fermionischen Wechselwirkungsterme enthält, nach dem Hoppingparameter K . Eine solche Entwicklung ist allerdings nur sinnvoll für einen sehr kleinen Hoppingparameter, mithin einer großen nackten Gluino-Masse $m_{\tilde{g}}$. Diese wiederum ist wesentlich größer als die aus der Renormierungstheorie geforderte kritische Gluino-Masse m_{cr} , bei der die renormierte Gluino-Masse m verschwindet und die Kontinuumsphysik erreicht werden müsste.

Da K die Stärke der Feldwechselwirkungen beschreibt, kann die HPE, mit Blick auf die statistische Mechanik, mit einer Hochtemperatur-Entwicklung verglichen werden. Mit ihr ist es möglich, relevante thermodynamische Größen der Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter, wie etwa die freie Energie-Dichte

$$F = -\frac{1}{\Omega} \ln Z, \tag{6.1}$$

die mittlere Plaquetteenergie E_P

$$E_P = -\frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (6.2)$$

oder aber auch die Massen physikalischer Zustände Γ aus den niedrigsten Massenmultipletts über den exponentiellen Abfall der zugehörigen zeitlichen Korrelationsfunktion

$$\langle \Gamma(t)\Gamma(0) \rangle = C \exp(-mt) \quad (6.3)$$

zu bestimmen.

Mit der Gitterwirkung S^Λ aus dem letzten Kapitel ist die Zustandssumme auf dem Gitter gegeben durch

$$\begin{aligned} Z[\beta, K] &= \int DUD\lambda \exp(-S^\Lambda[\lambda, U]) \\ &= \int DUD\lambda \exp(-S_g^\Lambda[U] - S_f^\Lambda[\lambda, U]) \\ &= \int DU \exp(-S_g^\Lambda[U]) \int D\lambda \exp(-S_f^\Lambda[\lambda, U]) \\ &= \int DU \exp(-S_g^\Lambda[U]) \cdot Z_f[U] \end{aligned} \quad (6.4)$$

mit

$$DU = \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \quad \text{und} \quad D\lambda = \prod_{x,\alpha,a} d\lambda_\alpha^a(x). \quad (6.5)$$

Da keine äußeren Felder auftauchen, wird die Zustandsfunktion bzw. die freie Energie allein durch Vakuumfluktuation bestimmt. Dieses Kapitel beschäftigt sich nun mit zwei formal unterschiedlichen Entwicklungen der fermionischen Zustandsfunktion nach dem Hoppingparameter.

6.1 HPE der fermionischen Wirkung

Die erste Form der Entwicklung wurde schon in [Lu] verwendet. Entwickelt man danach die Exponentialfunktion des fermionischen Boltzmann-Faktors

$$\exp(-S_f^\Lambda[\lambda, U]) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{x,a,\alpha} \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \lambda_\alpha^a(x)\right) \cdot \exp\left(K \sum_{\substack{\langle x,y \rangle \\ \alpha\beta,ab}} \bar{\lambda}_\beta^b(y) M_{y\beta,x\alpha}^{ba} \lambda_\alpha^a(x)\right) \quad (6.6)$$

in ihre Taylorreihe

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots, \quad (6.7)$$

so bietet sich die Möglichkeit, diese Reihe graphisch zu veranschaulichen. Mit Einsteinscher Summenkonvention und

$$\begin{aligned}
 & \exp \left(K \sum_{\langle x,y \rangle} \bar{\lambda}_\beta^b(y) M_{y\beta,x\alpha}^{ba} \lambda_\alpha^a(x) \right) \\
 &= \prod_{\langle x,y \rangle} \exp \left(K \left(\bar{\lambda}_\beta^b(y) M_{y\beta,x\alpha}^{ba} \lambda_\alpha^a(x) \right) \right) \\
 &= \prod_{\langle x,y \rangle} \left\{ 1 + K \left(\bar{\lambda}_\beta^b(y) M_{y\beta,x\alpha}^{ba} \lambda_\alpha^a(x) \right) + \frac{K^2}{2} \left(\bar{\lambda}_\beta^b(y) M_{y\beta,x\alpha}^{ba} \lambda_\alpha^a(x) \right)^2 + \dots \right\} \\
 &= \prod_{\langle x,y \rangle} \left\{ 1 + K \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ x \qquad y \end{array} + \frac{K^2}{2} \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ \text{---} \text{---} \\ \bullet \text{---} \bullet \\ x \qquad y \end{array} + \dots \right\} \\
 &= \sum_{\mathcal{G}} K^{|\mathcal{G}|} c(\mathcal{G}) \prod_{\langle x,y \rangle \in \mathcal{G}} \left(\bar{\lambda}_\beta^b(y) M_{y\beta,x\alpha}^{ba} \lambda_\alpha^a(x) \right)^{m(x,y)} \tag{6.8}
 \end{aligned}$$

wird die Zustandsfunktion zu einer Summe über Graphen \mathcal{G} auf dem Gitter.

Zur Schreibweise:

\mathcal{G} ist ein Graph, der aus Vertices \bullet besteht, die eindeutig Punkten auf dem Gitter zugeordnet werden können, und aus Kanten $\langle x, y \rangle$ mit einer von 0 verschiedenen Multiplizität $m(\langle x, y \rangle)$. Mit der Multiplizität meint man eine eindeutige Abbildung aller Kanten des Gitters auf die natürlichen Zahlen

$$\begin{aligned}
 m &: \Lambda \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\
 \langle x, y \rangle &\longmapsto m(\langle x, y \rangle) = m(x, y) \in 0, 1, 2, \dots \tag{6.9}
 \end{aligned}$$

Graphisch entspricht sie der Anzahl der Bänder auf einer Kante. Die Gesamtzahl aller Bänder $|\mathcal{G}|$ eines Graphen

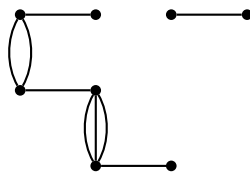
$$|\mathcal{G}| = \sum_{\langle x,y \rangle \in \mathcal{G}} m(x, y) \tag{6.10}$$

bestimmt die Ordnung von K , mit der jeder Graph \mathcal{G} zur Reihe (6.8) beiträgt. Der Faktor $c(\mathcal{G})$ berücksichtigt die Vorfaktoren der Taylorreihe

$$c(\mathcal{G}) = \prod_{\langle x,y \rangle \in \mathcal{G}} \frac{1}{m(x, y)!} \tag{6.11}$$

Die Zahl der Bänder, die von einem Vertex ausgehen, ist der Rang des Vertex.

Ein möglicher Graph wäre beispielsweise:



$$\begin{aligned}
 |\mathcal{G}| &= 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 = 9 \\
 c(\mathcal{G}) &= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

Der Wechselwirkungsanteil der Zustandsfunktion wird so zu einer unendlichen Summe über alle Graphen auf dem Gitter, und das fermionische Funktional ist

$$\begin{aligned}
Z_f[U] &= \int D\lambda \exp(-S_f[U, \lambda]) \\
&= \int \prod_{x,\alpha,a} d\lambda_\alpha^a(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{x,\alpha,a} \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \lambda_\alpha^a(x)\right) \\
&\quad \cdot \left(\sum_{\mathcal{G}} K^{|\mathcal{G}|} c(\mathcal{G}) \prod_{\langle y,z \rangle \in \tilde{\mathcal{G}}} \left(\bar{\lambda}_\gamma^c(z) M_{z\gamma,y\beta}^{cb} \lambda_\beta^b(y) \right)^{m(y,z)} \right) \\
&= \sum_{\mathcal{G}} K^{|\mathcal{G}|} c(\mathcal{G}) \mathcal{N}_\Lambda \left\langle \prod_{\langle y,z \rangle \in \tilde{\mathcal{G}}} \left(\bar{\lambda}_\gamma^c(z) M_{z\gamma,y\beta}^{cb} \lambda_\beta^b(y) \right)^{m(y,z)} \right\rangle_\Lambda \\
&= \sum_{\mathcal{G}} \Phi(\mathcal{G}). \tag{6.12}
\end{aligned}$$

Dabei ist der Gittererwartungswert $\langle \dots \rangle_\Lambda$ durch

$$\langle \dots \rangle_\Lambda = \frac{1}{\mathcal{N}_\Lambda} \int D\lambda \exp\left(-\frac{1}{2} (\bar{\lambda}, \lambda)\right) [\dots] \tag{6.13}$$

gegeben mit einer Normierungskonstante \mathcal{N}_Λ , deren Wert sich aus den Ergebnissen von Kapitel 3 ableiten lässt.

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\Lambda &= \int D\lambda \exp\left(-\frac{1}{2} (\bar{\lambda}, \lambda)\right) \\
&= \prod_{x,a} \int \prod_{\alpha} d\lambda_\alpha^a(x) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma} \lambda_\beta^a(x) C_{\beta\gamma} \lambda_\gamma^a(x)\right) \\
&= \prod_{x,a} \text{Pf}(-C) = \text{Pf}(C)^{3\Omega} \\
&= \left(\frac{1}{8} (C_{12}C_{34} - C_{12}C_{43} + C_{21}C_{43} - C_{21}C_{34} + C_{34}C_{12} - C_{34}C_{21} + C_{43}C_{21} - C_{43}C_{12}) \right)^{3\Omega} \\
&= (-1)^{3\Omega} = \mathcal{N}_x^\Omega := 1 \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Die Beschränkung auf eine gerade Anzahl von Gitterpunkten Ω ist sinnvoll, denn nur so ist der Beitrag des „leeren“ Graphen $\Phi(\emptyset)$ eins. Die in der Reihe auftretende Matrix $M_{y\beta,x\alpha}^{ba}$ ist abhängig von der Lage der Nachbarpunkte zueinander, weshalb sich zunächst folgende graphische Notation anbietet:

$$M_{y\beta,x\alpha}^{ba} = \begin{cases} M_{y\beta,x\alpha}^{(+)\,ba} = (r + \gamma_\mu)_{\beta\alpha} V_\mu^{ba}(x) &= \begin{array}{c} \overset{\mu}{\bullet} \xrightarrow{\quad} \bullet \\ \underline{x} \qquad \qquad \underline{y} \end{array} & \text{wenn } y = x + \mu \\ M_{y\beta,x\alpha}^{(-)\,ba} = (r - \gamma_\mu)_{\beta\alpha} (V_\mu^{ba}(y))^T &= \begin{array}{c} \bullet \xleftarrow{\quad} \bullet \\ \underline{y} \qquad \qquad \underline{x} \end{array} & \text{wenn } y + \mu = x \end{cases} \tag{6.15}$$

Man kann nun (6.12) bis zur n -ten Ordnung in K berechnen, indem man sukzessive die Beiträge aller Graphen mit maximal n Bändern aufsummiert.

Neben den Gittererwartungswerten lassen sich zweckmäßigerweise nun auch Punkt-Erwartungswerte definieren:

$$\langle \dots \rangle_x := \frac{1}{\mathcal{N}_x} \int \prod_{\alpha,a} d\lambda_\alpha^a(x) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\alpha,a} \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \lambda_\alpha^a(x) \right) [\dots]. \quad (6.16)$$

Mit den Zuordnungen

$$i, j \rightarrow (\alpha, a), (\beta, b) \quad (6.17)$$

$$\xi_i, \xi_j \rightarrow \lambda_\alpha^a, \lambda_\beta^b \quad (6.18)$$

$$A_{ij} \rightarrow -C_{\alpha\beta} \delta_{ab} \quad (\text{antisymmetrisch } i \leftrightarrow j) \quad (6.19)$$

$$A_{ij}^{-1} \rightarrow -C_{\alpha\beta}^{-1} \delta_{ab} = C_{\alpha\beta} \delta_{ab} \quad (6.20)$$

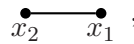
wird die Parallele zur einfachen Grassmann-Integration aus Kapitel 2 deutlich. Danach ist

$$\begin{aligned} \langle \lambda_\alpha^a \lambda_\beta^b \rangle_x &= -C_{\alpha\beta} \delta_{ab} = C_{\alpha\beta}^{-1} \delta_{ab} \\ \langle \lambda_\alpha^a \bar{\lambda}_\beta^b \rangle_x &= \langle \lambda_\alpha^a \lambda_\beta^b \rangle_x C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^{-1} C_{\beta\alpha} \delta_{ab} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} = -\langle \bar{\lambda}_\beta^b \lambda_\alpha^a \rangle_x \\ \langle \bar{\lambda}_\alpha^a \bar{\lambda}_\beta^b \rangle_x &= C_{\alpha\beta}^{-1} \delta_{ab}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Punkt-Erwartungswerte für eine ungerade Anzahl von Feldern sind mit (3.65) immer null. Ist die Anzahl der Felder dagegen gerade und größer zwei, so gilt das Wicksche Theorem, und es ist z.B.

$$\begin{aligned} \langle \lambda_\alpha^a \lambda_\beta^b \lambda_\gamma^c \lambda_\delta^d \rangle_x &= \langle \lambda_\alpha^a \lambda_\beta^b \rangle_x \langle \lambda_\gamma^c \lambda_\delta^d \rangle_x + \langle \lambda_\alpha^a \lambda_\delta^d \rangle_x \langle \lambda_\beta^b \lambda_\gamma^c \rangle_x - \langle \lambda_\alpha^a \lambda_\gamma^c \rangle_x \langle \lambda_\beta^b \lambda_\delta^d \rangle_x \\ &= C_{\alpha\beta}^{-1} \delta_{ab} C_{\gamma\delta}^{-1} \delta_{cd} + C_{\alpha\delta}^{-1} \delta_{ad} C_{\beta\gamma}^{-1} \delta_{bc} - C_{\alpha\gamma}^{-1} \delta_{ac} C_{\beta\delta}^{-1} \delta_{bd}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

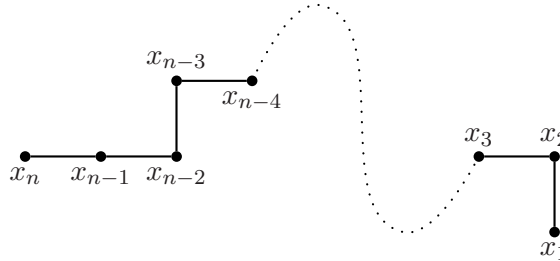
Nun, da alle Regeln zur Berechnung der fermionischen Zustandssumme bekannt sind, können die Graphen prinzipiell berechnet werden. Betrachtet man zum Beispiel den Graphen



so ist sein Beitrag

$$\Phi(\mathcal{G}) = K \langle \bar{\lambda}_{\alpha_1}^{a_1}(x_1) M_{\alpha_1 x_1, \beta_2 x_2}^{a_1 b_2} \lambda_{\beta_2}^{b_2}(x_2) \rangle_{x_1, x_2} = \mathcal{N}_x^{\Omega-2} K \langle \bar{\lambda}_{\alpha_1}^{a_1} \rangle_{x_1} M_{\alpha_1 y, \beta_1 x}^{a_1 b_1} \langle \lambda_{\beta_1}^{b_1} \rangle_{x_2} = 0. \quad (6.23)$$

Dieser Graph trägt daher nicht zur Entwicklung bei. Aber auch der Beitrag des folgenden Graphen (die gepunktete Linie ist ein beliebiger Weg auf dem Gitter)



$$\begin{aligned}
\Phi(\mathcal{G}) &= K^{n-1} \left\langle \bar{\lambda}_\alpha^a(x_n) M_{\alpha x_n, \beta x_{n-1}}^{ab} \lambda_\beta^b(x_{n-1}) \bar{\lambda}_\gamma^c(x_{n-1}) M_{\gamma x_{n-1}, \delta x_{n-2}}^{cd} \lambda_\delta^d(x_{n-2}) \cdots \right. \\
&\quad \left. \cdots \bar{\lambda}_\epsilon^e(x_3) M_{\epsilon x_3, \iota x_2}^{ef} \lambda_\iota^f(x_2) \bar{\lambda}_\kappa^g(x_2) M_{\kappa x_2, \lambda x_1}^{gh} \lambda_\lambda^h(x_1) \right\rangle_{\{x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1\}} \\
&= K^{n-1} \left\langle \bar{\lambda}_\alpha^a(x_n) M_{\alpha x_n, \beta x_{n-1}}^{ab} \langle \lambda_\beta^b(x_{n-1}) \bar{\lambda}_\gamma^c(x_{n-1}) \rangle_{x_{n-1}} M_{\gamma x_{n-1}, \delta x_{n-2}}^{cd} \langle \lambda_\delta^d(x_{n-2}) \cdots \right. \\
&\quad \left. \cdots \bar{\lambda}_\epsilon^e(x_3) \rangle_{x_3} M_{\epsilon x_3, \iota x_2}^{ef} \langle \lambda_\iota^f(x_2) \bar{\lambda}_\kappa^g(x_2) \rangle_{x_2} M_{\kappa x_2, \lambda x_1}^{gh} \lambda_\lambda^h(x_1) \right\rangle_{\{x_n, x_1\}} \\
&= K^{n-1} \left\langle \bar{\lambda}_\alpha^a(x_n) M_{\alpha x_n, \beta x_{n-1}}^{ab} \delta_{\beta\gamma} \delta_{bc} M_{\gamma x_{n-1}, \delta x_{n-2}}^{cd} \delta_{\delta\mu} \delta_{dm} \cdots \right. \\
&\quad \left. \cdots \delta_{ne} \delta_{\nu\epsilon} M_{\epsilon x_3, \iota x_2}^{ef} \delta_{\iota\kappa} \delta_{fg} M_{\kappa x_2, \lambda x_1}^{gh} \lambda_\lambda^h(x_1) \right\rangle_{\{x_n, x_1\}} \\
&= K^{n-1} \left\langle \bar{\lambda}_\alpha^a(x_n) (M_{x_n x_{n-1}} M_{x_{n-1} x_{n-2}} \cdots M_{x_3 x_2} M_{x_2 x_1})_{\alpha x_n, \lambda x_1}^{ah} \lambda_\lambda^h(x_1) \right\rangle_{\{x_n, x_1\}} \\
&= K^{n-1} \langle \bar{\lambda}_\alpha^a(x_n) \rangle_{x_n} (M_{x_n x_1}^{(n-1)})_{\alpha\lambda}^{ah} \langle \lambda_\lambda^h(x_1) \rangle_{x_1} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.24}$$

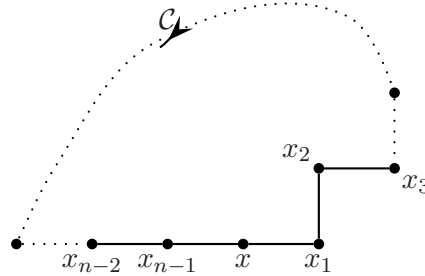
verschwindet. Dies ist damit begründet, dass an den Graphenenden immer Punkt-Erwartungswerte mit einer ungeraden Anzahl von Grassmann-Feldern auftreten. Dieses lässt sich in einer Regel zusammenfassen, die die Auswahl an möglichen Graphen erheblich einschränkt.

1. Regel (Auswahlregel):

Alle Graphen, die Vertices enthalten, von denen eine ungerade Anzahl von Bändern ausgeht (Vertices mit ungeradem Rang), liefern keinen Beitrag zur Entwicklung.

Dies bedeutet aber gleichzeitig, dass alle Graphen mit einer ungeraden Anzahl von Bändern verschwinden und dadurch keine Beiträge in ungerader Ordnung von K existieren.

Das einfachste nicht-verschwindende Beispiel ist ein Graph, der aus einem geschlossenen Weg \mathcal{C} besteht:



Sei nun $M(\mathcal{C})$ das weggeordnete Produkt der Matrizen M

$$\begin{aligned}
M(\mathcal{C}) &= M_{x x_{n-1}} M_{x_{n-1} x_{n-2}} \cdots M_{x_2 x_1} M_{x_1 x} \\
&= M_{x x_{n-1}}^+ M_{x_{n-1} x_{n-2}}^+ \cdots M_{x_2 x_1}^+ M_{x_1 x}^+,
\end{aligned} \tag{6.25}$$

so ist sein Beitrag

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathcal{G}) &= K^n \left\langle \bar{\lambda}_\alpha^a(x) (M(\mathcal{C})_{\alpha\lambda}^{ah} \lambda_\lambda^h(x)) \right\rangle_x \\
&= K^n \langle \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \lambda_\lambda^h(x) \rangle_x M(\mathcal{C})_{\alpha\lambda}^{ah} \\
&= -K^n \delta_{\alpha\lambda} \delta_{ah} (M(\mathcal{C}))_{\alpha\lambda}^{ah} \\
&= -K^n \text{Tr}_{\alpha a}(M(\mathcal{C})).
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Hierbei ist $\text{Tr}_{\alpha a}$ die Spur über alle Dirac- und Farbfreiheitsgrade. Erneut gelangt man zu einer neuen Regel.

2. Regel:

Bildet ein Graph mit n -Punkten einen geschlossenen Weg \mathcal{C} aus einfachen Bändern, so ist sein Beitrag

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathcal{G}(\mathcal{C})) &= -K^n \text{Tr}_{\alpha a}(M(\mathcal{C})) \\
&= -K^n \text{Tr}_\alpha \Gamma(\mathcal{C}) \cdot \text{Tr}_a V(\mathcal{C}),
\end{aligned} \tag{6.27}$$

mit

$$\Gamma(\mathcal{C}) = \prod_{\langle x,y \rangle \in \mathcal{G}} (r + \gamma_{yx}) = (r + \gamma_{xx_{n-1}}) \cdots (r + \gamma_{x_1 x}) \tag{6.28}$$

$$V(\mathcal{C}) = \prod_{\langle yx \rangle \in \mathcal{G}} V(y, x) = V(x, x_{n-1}) \cdots V(x_1, x). \tag{6.29}$$

Die Dirac-Spuren können mit den Regeln (D.5),(D.6) und (D.9),(D.8) oder (zur Kontrolle) mit Mathematica bestimmt werden. Da der Umlaufsinn für die Spurberechnung keine Rolle spielt, denn es ist

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{\alpha a} M(\mathcal{C}) &= \text{Tr}_{\alpha a}(CM(\mathcal{C})C^{-1}) \\
&= \text{Tr}_{\alpha a}(CM_{xx_{n-1}}C^{-1}CM_{x_{n-1}x_{n-2}}C^{-1} \cdots CM_{x_2x_1}C^{-1}CM_{x_1x}C^{-1}) \\
&= \text{Tr}(M_{x_{n-1}x}^{T_{\alpha a}} M_{x_{n-2}x_{n-1}}^{T_{\alpha a}} \cdots M_{x_1x_2}^{T_{\alpha a}} M_{xx_1}^{T_{\alpha a}}) \\
&= \text{Tr}_{\alpha a}((M_{xx_1}M_{x_1x_2} \cdots M_{x_{n-2}x_{n-1}}M_{x_{n-1}x})^{T_{\alpha a}}) \\
&= \text{Tr}_{\alpha a} M(\mathcal{C}^{-1})
\end{aligned} \tag{6.30}$$

eine Eigenschaft, die auch für die Dirac-Spuren

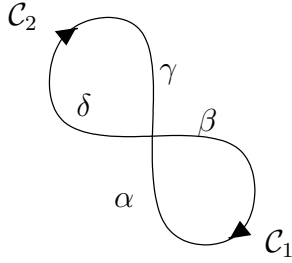
$$\text{Tr}_\alpha \Gamma(\mathcal{C}) = \text{Tr}_\alpha \Gamma(\mathcal{C}^{-1}) \tag{6.31}$$

und wegen $V_{xy} = (V_{yx}^T)$ für

$$\text{Tr}_a V(\mathcal{C}) = \text{Tr}_a V(\mathcal{C}^{-1}) \tag{6.32}$$

gilt, werden die Schleifen L (engl. Loops) als ein geschlossener, zusammenhängender, aber unorientierter Weg eingeführt.

$$\text{Tr}_{\alpha\alpha} M(L) = \text{Tr}_{\alpha\alpha} M(\mathcal{C}) = \text{Tr}_{\alpha\alpha} M(\mathcal{C}^{-1}) \quad (6.33)$$



Kommt es bei den Graphen zu Überschneidungen, so werden die Rechnungen komplizierter, denn die Schnittpunkte entsprechen Punkt-Erwartungswerte mit mehreren Grassmann-Feldern, so dass das Wicksche Theorem greift. Der einfachste Graph, der diese Eigenschaft besitzt, ist der linke Graph.

Sein Beitrag ist gegeben durch

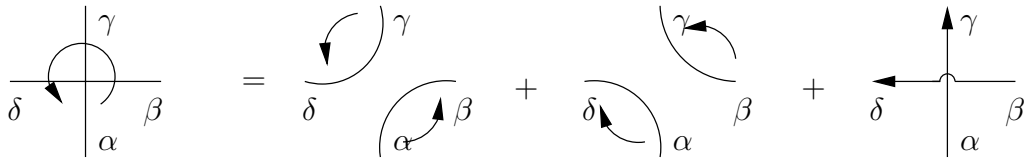
$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{G}) &= K^{|\mathcal{G}|} \left\langle [\bar{\lambda}_\alpha(x) M(\mathcal{C}_1)_{\alpha\beta} \lambda_\beta(x)] [\bar{\lambda}_\gamma(x) M(\mathcal{C}_2)_{\gamma\delta} \lambda_\delta(x)] \right\rangle_x \\ &= K^{|\mathcal{G}|} M(\mathcal{C}_1)_{\alpha\beta} M(\mathcal{C}_2)_{\gamma\delta} \langle \bar{\lambda}_\alpha \lambda_\beta \bar{\lambda}_\gamma \lambda_\delta \rangle_x. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Die Farbfreiheitsgrade werden der Übersichtlichkeit halber unterdrückt, können aber zu jeder Zeit wieder hinzugefügt werden, da sie immer nur als Deltafunktionen in den Punkt-Erwartungswerten auftauchen.

Mit dem Wickschen-Theorem

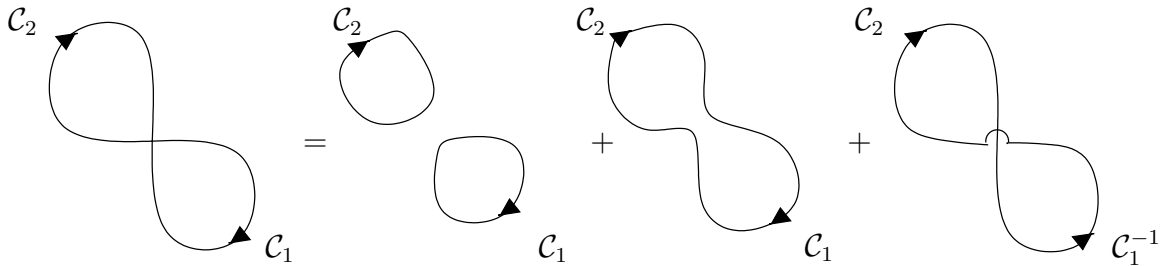
$$\begin{aligned} \langle \bar{\lambda}_\alpha \lambda_\beta \bar{\lambda}_\gamma \lambda_\delta \rangle_x &= \langle \bar{\lambda}_\alpha \lambda_\beta \rangle_x \langle \bar{\lambda}_\gamma \lambda_\delta \rangle_x + \langle \bar{\lambda}_\alpha \lambda_\delta \rangle_x \langle \lambda_\beta \bar{\lambda}_\gamma \rangle_x - \langle \bar{\lambda}_\alpha \bar{\lambda}_\gamma \rangle_x \langle \lambda_\beta \lambda_\delta \rangle_x \\ &= (-\delta_{\alpha\beta})(-\delta_{\gamma\delta}) - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - C_{\gamma\alpha} C_{\beta\delta}^{-1} \end{aligned} \quad (6.35)$$

oder graphisch



ist

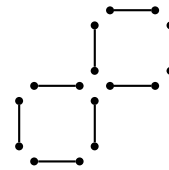
$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{G}) &= K^{|\mathcal{G}|} ((-\delta_{\beta\alpha}) M(\mathcal{C}_1)_{\alpha\beta} (-\delta_{\delta\gamma}) M(\mathcal{C}_2)_{\gamma\delta} + M(\mathcal{C}_1)_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} M(\mathcal{C}_2)_{\gamma\delta} (-\delta_{\delta\alpha}) \\ &\quad - C_{\gamma\alpha} M(\mathcal{C}_1)_{\alpha\beta} C_{\beta\delta}^{-1} M(\mathcal{C}_2)_{\gamma\delta}) \\ &= K^{|\mathcal{G}|} ((-\text{Tr}_{\alpha\alpha} M(\mathcal{C}_1))(-\text{Tr}_{\alpha\alpha} M(\mathcal{C}_2)) - \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M(\mathcal{C}_1)M(\mathcal{C}_2)) - \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M(\mathcal{C}_1^{-1})M(\mathcal{C}_2))) \\ &= K^{|\mathcal{G}|} ((-\text{Tr}_{\alpha\alpha} M(\mathcal{C}_1))(-\text{Tr}_{\alpha\alpha} M(\mathcal{C}_2)) - \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M(\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2)) - \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M(\mathcal{C}_1^{-1} \circ \mathcal{C}_2))) \end{aligned} \quad (6.36)$$



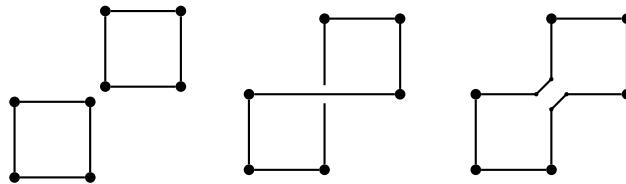
Man erkennt nun eine wichtige Eigenschaft. Danach zerfällt, bedingt durch das Wicksche Theorem, jeder Graph bei der Integration über seine Majorana-Felder in eine Klasse von Schlaufengraphen, die aus einer Menge von Schleifen L bestehen. Allgemein erhält man die Schlaufengraphen, wenn man die Bänder an den einzelnen Vertices in allen möglichen Variationen miteinander verbindet. Anhand des folgenden Beispielgraphen soll dieses Verfahren verdeutlicht werden.

$$\mathcal{G} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & x_4 & x_5 \\ & \square & \\ x_7 & x_3 & x_6 \\ \square & & \\ x_1 & & x_2 \end{array} \end{array} \quad (6.37)$$

1. Schritt: Die Bänder des Graphen werden separiert:



2. Schritt: Benachbarte Enden der Bänder werden in allen möglichen Varianten miteinander verbunden.



3. Schritt:

Die Schleifen der Graphen werden in beliebiger Richtung durchlaufen und ihre Beiträge aufsummiert, wobei nach Regel 3 (siehe Abschnitt 6.1.1) das jeweilige Vorzeichen durch die Anzahl der Fermionen-Loops gegeben ist.

$$\mathcal{G} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \square & & \square \\ \downarrow & & \downarrow \\ \square & & \square \\ \uparrow & & \uparrow \\ \square & & \square \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \square & & \square \\ \leftarrow & & \leftarrow \\ \square & & \square \\ \rightarrow & & \rightarrow \\ \square & & \square \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \square & & \square \\ \downarrow & & \downarrow \\ \square & & \square \\ \uparrow & & \uparrow \\ \square & & \square \end{array} \end{array}$$

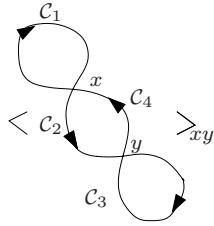
4. Schritt:

Der Vorfaktor wird ermittelt zu

$$|\mathcal{G}| = 8 \quad c(\mathcal{G}) = 1 \quad \implies K^8,$$

und man erhält

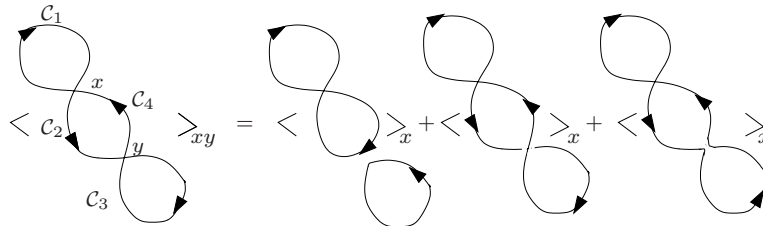
$$\begin{aligned}
\Phi(\mathcal{G}) &= K^8 \left\{ + \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M_{x_1x_7} M_{x_7x_3} M_{x_3x_2} M_{x_2x_1}) \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M_{x_3x_4} M_{x_4x_5} M_{x_5x_6} M_{x_6x_3}) \right. \\
&\quad - \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M_{x_1x_7} M_{x_7x_3} M_{x_3x_6} M_{x_6x_5} M_{x_5x_4} M_{x_4x_3} M_{x_3x_2} M_{x_2x_1}) \\
&\quad \left. - \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M_{x_1x_7} M_{x_7x_3} M_{x_3x_4} M_{x_4x_5} M_{x_5x_6} M_{x_6x_3} M_{x_3x_2} M_{x_2x_1}) \right\} \\
&= K^8 \left\{ + \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M_{x_1x_7}^- M_{x_7x_3}^- M_{x_3x_2}^+ M_{x_2x_1}^+) \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M_{x_3x_4}^- M_{x_4x_5}^- M_{x_5x_6}^+ M_{x_6x_3}^+) \right. \\
&\quad - \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M_{x_1x_7}^- M_{x_7x_3}^- M_{x_3x_6}^- M_{x_6x_5}^+ M_{x_5x_4}^+ M_{x_4x_3}^+ M_{x_3x_2}^+ M_{x_2x_1}^+) \\
&\quad \left. - \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M_{x_1x_7}^- M_{x_7x_3}^- M_{x_3x_4}^- M_{x_4x_5}^- M_{x_5x_6}^+ M_{x_6x_3}^+ M_{x_3x_2}^+ M_{x_2x_1}^+) \right\} \\
&\stackrel{(r=1)}{=} K^8 \left\{ + 16 \text{Tr}_a(V_{x_7x_1}^T V_{x_3x_7}^T V_{x_3x_2} V_{x_2x_1}) \text{Tr}_a(V_{x_4x_3}^T V_{x_5x_4}^T V_{x_5x_6} V_{x_6x_3}) \right. \\
&\quad - 64 \text{Tr}_a(V_{x_7x_1}^T V_{x_3x_7}^T V_{x_6x_3}^T V_{x_5x_6}^T V_{x_5x_4} V_{x_4x_3} V_{x_3x_2} V_{x_2x_1}) \\
&\quad \left. + 32 \text{Tr}_a(V_{x_7x_1}^T V_{x_3x_7}^T V_{x_4x_3}^T V_{x_5x_4}^T V_{x_5x_6} V_{x_6x_3} V_{x_3x_2} V_{x_2x_1}) \right\}. \tag{6.38}
\end{aligned}$$



Enthält ein Graph mehrere solcher Vertices, so erhält man die Schlaufengraphen, indem man nun sukzessive dieses Verfahren an jedem Vertex durchführt. Dass dies so ist, zeigt der Graph auf der linken Seite.

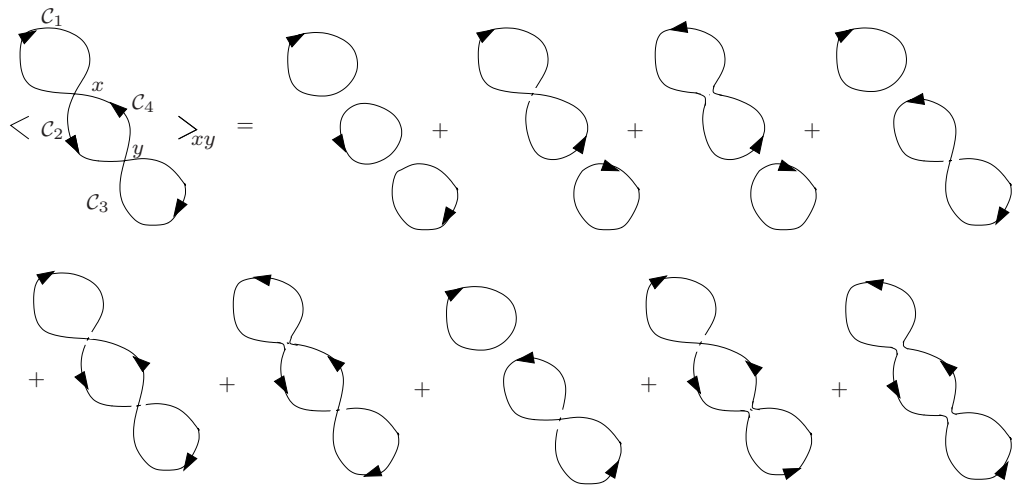
Sein Beitrag ist

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathcal{G}) &= K^{|\mathcal{G}|} \left\langle \bar{\lambda}_y M(\mathcal{C}_4) \lambda_x \bar{\lambda}_x M(\mathcal{C}_1) \lambda_x \bar{\lambda}_x M(\mathcal{C}_2) \lambda_y \bar{\lambda}_y M(\mathcal{C}_3) \lambda_y \right\rangle_{xy} \\
&= K^{|\mathcal{G}|} \left\langle \bar{\lambda}_x M(\mathcal{C}_1) \lambda_x \left\langle \bar{\lambda}_y M(\mathcal{C}_4) \lambda_x \bar{\lambda}_x M(\mathcal{C}_2) \lambda_y \bar{\lambda}_y M(\mathcal{C}_3) \lambda_y \right\rangle_y \right\rangle_x \\
&= K^{|\mathcal{G}|} \left(\langle \bar{\lambda}_x M_{xx}(\mathcal{C}_1) \lambda_x \bar{\lambda}_x M_{xy}(\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_4) \lambda_x \rangle_x (-\text{Tr} M(\mathcal{C}_3)) \right. \\
&\quad + \langle \bar{\lambda}_x M_{xx}(\mathcal{C}_1) \lambda_x \bar{\lambda}_x M_{xy}(\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_3 \circ \mathcal{C}_4) \lambda_x \rangle_x \\
&\quad \left. + \langle \bar{\lambda}_x M_{xx}(\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_3^{-1} \circ \mathcal{C}_4) \lambda_x \rangle_x \right) \tag{6.39}
\end{aligned}$$



und schließlich

$$\begin{aligned}
 \Phi(\mathcal{G}) = & K^{|\mathcal{G}|} ((-\text{Tr } M(\mathcal{C}_1))(-\text{Tr } M(\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_4))(-\text{Tr } M(\mathcal{C}_3)) \\
 & + (-\text{Tr } M(\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_4))(-\text{Tr } M(\mathcal{C}_3)) \\
 & + (-\text{Tr } M(\mathcal{C}_1^{-1} \circ \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_4))(-\text{Tr } M(\mathcal{C}_3)) \\
 & + (-\text{Tr } M(\mathcal{C}_1))(-\text{Tr } M(\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_3 \circ \mathcal{C}_4)) \\
 & + (-\text{Tr } M(\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_3 \circ \mathcal{C}_4)) \\
 & + (-\text{Tr } M(\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_3 \circ \mathcal{C}_4)) \\
 & + (-\text{Tr } M(\mathcal{C}_1))(-\text{Tr } M(\mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_3^{-1} \circ \mathcal{C}_4)) \\
 & + (-\text{Tr } M(\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_3^{-1} \circ \mathcal{C}_4)) \\
 & + (-\text{Tr } M(\mathcal{C}_1^{-1} \circ \mathcal{C}_2 \circ \mathcal{C}_3^{-1} \circ \mathcal{C}_4)).
 \end{aligned} \tag{6.40}$$



6.1.1 Die Spitze

Eine weitere wichtige Auswahlregel, die die Zahl der möglichen Graphen erheblich einschränkt, ergibt sich aus der Eigenschaft der Gamma-Matrizen. So ist das Matrix-Produkt

$$(r + \gamma_\mu)(r - \gamma_\mu) = r^2 - \gamma_\mu \gamma_\mu = r^2 - \mathbb{1} \tag{6.41}$$

im Falle $r = 1$ null. Dieses Produkt tritt aber in den Schleifen immer dann auf, wenn es orientierte Bänder gibt, die auf einer Kante in Richtung μ hin und ohne Umwege wieder zurücklaufen. Zerlegt man also einen Graphen in seine Schlaufengraphen, so werden alle die Beiträge, die Schleifen enthalten, mit rücklaufenden Linien in der Form



zu null. *Vorsicht:* Würde der oberste Punkt als Startpunkt gewählt und von dort die Schleife durchlaufen, so müsste man nicht auf der Kante hin und sofort wieder zurücklaufen. Dennoch ist auch dann aufgrund der zyklischen Invarianz der Spur und der damit verbundenen Wahlfreiheit

des Startpunktes der Beitrag des Graphen null. Mit anderen Worten: Der Graph liefert auch dann keinen Beitrag, wenn die auslaufende und die einlaufende Linie am Start- bzw. Endpunkt auf derselben Kante liegen. Hat ein Graph bereits solche Spitzen, so gilt dies auch für alle seine Schlaufengraphen und sein Beitrag ist automatisch null.

3. Regel (Auswahlregel):

Besitzen Graphen Spitzen (6.42), so verschwindet mit $r=1$ ihr Beitrag.

6.1.2 Subgraphen \mathcal{S} und ihre Windungszahlen

Alle Schlaufengraphen mit Schlaufen, die die Kanten in derselben Reihenfolge, aber auf unterschiedlichen Bändern überqueren, sind topologisch äquivalent und liefern denselben Beitrag zur Reihe. Sie können daher zu Subgraphen \mathcal{S} zusammengefasst werden.

Die Windungszahl $m \in \mathbb{Z}$ beschreibt die Zahl der Umläufe einer Schlaufe. Als ein Beispiel für diese Definitionen nehme man folgenden Graphen:

$$\mathcal{G}_8^1 = \begin{array}{c} x_4 \qquad x_3 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ x_1 \qquad x_2 \end{array} \quad (6.43)$$

Das Trennen der Bänder ergibt:

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ | \text{---} | \\ \bullet \text{---} \bullet \\ | \text{---} | \\ \bullet \text{---} \bullet \\ | \text{---} | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array} \quad (6.44)$$

Da an jedem Eckpunkt prinzipiell 3 verschiedene Möglichkeiten existieren, Nachbarpunkte miteinander zu verbinden, bekommt man insgesamt $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ unterschiedliche Schlaufengraphen. Bedenkt man aber, dass ein Hin- und Zurücklaufen auf derselben Kante nach Regel 3 für $r = 1$ zu einem verschwindenden Beitrag des Graphen führt, reduziert sich die Zahl der Möglichkeiten an jedem Eckpunkt auf 2, und man erhält nur noch $2^4 = 16$ Schlaufengraphen. Unter diesen 16 Schlaufengraphen sind 8 topologisch äquivalent, die die Plaquette zweimal umlaufen und daher die Windungszahl 2 besitzen, und 8 mit jeweils zwei separaten einfachen Schlaufen mit der Windungszahl 1.

$$8 \times \underbrace{\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ | \text{---} | \\ \bullet \text{---} \bullet \\ | \text{---} | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array}}_{\text{Windungszahl 1}} \quad \text{und} \quad 8 \times \underbrace{\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ | \text{---} | \\ \bullet \text{---} \bullet \\ | \text{---} | \\ \bullet \text{---} \bullet \end{array}}_{\text{Windungszahl 2}} \quad (6.45)$$

Mit dem entsprechenden Umlaufsinn, dem Vorzeichen und den Vorfaktoren ist der Beitrag dieses Graphen somit

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathcal{G}_8^1) &= \frac{K^8}{2^4} \\
&\times \left\{ -8 \operatorname{Tr}_{\alpha a} (M_{x_1 x_4} M_{x_4 x_3} M_{x_3 x_2} M_{x_2 x_1} M_{x_1 x_4} M_{x_4 x_3} M_{x_3 x_2} M_{x_2 x_1}) \right. \\
&\quad \left. + 8 (\operatorname{Tr}_{\alpha a} (M_{x_1 x_4} M_{x_4 x_3} M_{x_3 x_2} M_{x_2 x_1}))^2 \right\} \\
&\stackrel{(r=1)}{=} \frac{8K^8}{16} \\
&\times \left\{ -32 \operatorname{Tr}_a V_{x_4 x_1}^T V_{x_3 x_4}^T V_{x_3 x_2} V_{x_2 x_1} V_{x_4 x_1}^T V_{x_3 x_4}^T V_{x_3 x_2} V_{x_2 x_1} \right. \\
&\quad \left. + 64 \operatorname{Tr}_a V_{x_4 x_1}^T V_{x_3 x_4}^T V_{x_3 x_2} V_{x_2 x_1} \right\}. \tag{6.46}
\end{aligned}$$

Die fermionische Zustandssumme wird so zu einer Summe über Subgraphen \mathcal{S} aus t topologisch äquivalenten Schlaufengraphen und k Schleifen.

$$Z_f^\Lambda[U] = 1 + \sum_{\mathcal{G}} c(\mathcal{G}) K^{|\mathcal{G}|} \sum_{\mathcal{S} \in \mathcal{G}} t(\mathcal{S}) \prod_{i=1}^k (-\operatorname{Tr} M(L_i))^{n_i} \tag{6.47}$$

Im nächsten Abschnitt wird sich zeigen, dass das Produkt aus $c(\mathcal{G})$ mit der Anzahl topologisch äquivalenter Schlaufengraphen $t(\mathcal{S})$ von einem Symmetriefaktor S stammt.

Mit den oben aufgeführten Regeln und Techniken ist man nun in der Lage, die Beiträge des fermionischen Funktionals bis zu einer beliebigen Ordnung in K auszurechnen.

6.2 HPE der effektiven fermionischen Wirkung

Eine andere Möglichkeit, zu einer HPE zu gelangen, ist der Weg über die effektive Wirkung. Dabei wird zunächst das fermionische Funktional $Z_f[U]$ mit den Regeln der Grassmann-Integration behandelt, wobei man sich die Antisymmetrie der Matrix CQ zunutze macht.

$$\begin{aligned}
Z_f[U] &= \int D\lambda \exp(-S_f^\Lambda[\lambda, U]) \\
&= \int D\lambda \exp\left(-\frac{1}{2} \bar{\lambda}_\alpha^a(x) Q[U]_{\alpha x, \beta y}^{ab} \lambda_\beta^b(y)\right) \\
&= \int D\lambda \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\substack{x, \alpha, a \\ y, \beta, b}} \lambda_\alpha^a(x) C_{\alpha i} Q[U]_{ix, \beta y}^{ab} \lambda_\beta^b(y)\right) \\
&= \operatorname{Pf}(-CQ[U]) = \pm \sqrt{\det(CQ[U])} \\
&= \underbrace{(\sqrt{\det(C)})}_{=1}^{3\Omega} (\pm \sqrt{\det(Q[U])}) = \pm \sqrt{\det(Q[U])} \tag{6.48}
\end{aligned}$$

Für hinreichend kleine Werte von K gilt das positive Vorzeichen. Nach dieser Ausintegration der Fermionfelder lässt sich nun eine effektive fermionische Wirkung $S_{\text{eff}}^f[U]$ definieren,

$$\begin{aligned} Z_f[U] &= \exp\left(-S_{\text{eff}}^f[U]\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} \ln(\det(Q[U]))\right) \\ \Rightarrow S_{\text{eff}}^f[U] &= -\frac{1}{2} \ln(\det(Q[U])) \end{aligned} \quad (6.49)$$

die dann nur noch von den Eichfeldern abhängig ist.

Mit der Identität

$$\ln \det(A) = \text{Tr} \ln(A) \quad (6.50)$$

ist

$$S_{\text{eff}}^f[U] = -\frac{1}{2} \text{Tr}_{x\alpha\alpha} (\ln(Q[U])) = -\frac{1}{2} \text{Tr}_{x\alpha\alpha} (\ln(\mathbb{1} - KM[U])). \quad (6.51)$$

Entwickelt man den Logarithmus in Ordnungen von KM ,

$$\ln(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots\right] \quad (6.52)$$

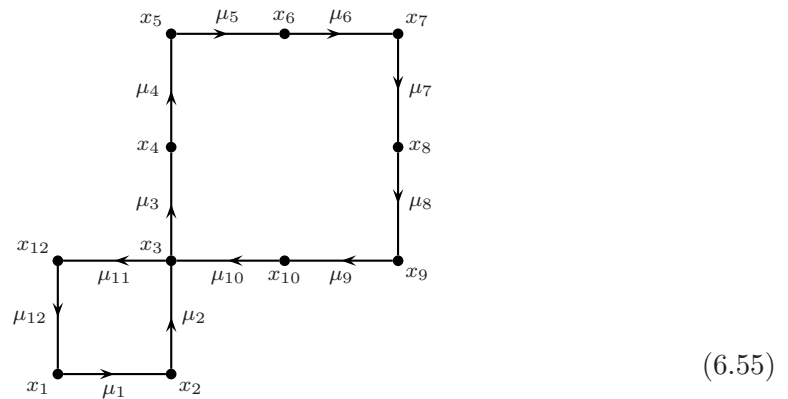
so erhält man schließlich

$$S_{\text{eff}}^f[U] = \frac{1}{2} \text{Tr}_{x\alpha\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(KM)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{2n} \text{Tr}_{x\alpha\alpha} M^n. \quad (6.53)$$

Da M_{xy} nur für benachbarte Punkte von null verschieden ist, ist $\text{Tr}_x M = M_{xx} = 0$, so dass die Reihe effektiv erst mit $n = 2$ beginnt. Benutzt man die Hopping-Matrix in der Form (4.83), so ist

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{x\alpha\alpha} M^n &= \sum_{x_1\mu_1 \dots x_n\mu_n} \delta_{x_1, x_n + \mu_n} \delta_{x_n, x_{n-1} + \mu_{n-1}} \dots \delta_{x_2, x_1 + \mu_1} \\ &\cdot \text{Tr}_\alpha [V_{\mu_n}(x_n) V_{\mu_{n-1}}(x_{n-1}) \dots V_{\mu_1}(x_1)] \text{Tr}_\alpha [(r + \gamma_{\mu_n})(r + \gamma_{\mu_{n-1}}) \dots (r + \gamma_{\mu_1})]. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Auch in diesem Fall bietet sich eine graphische Interpretation an. So ist $\text{Tr}_{x\alpha\alpha} M^{(n)}$ nichts anderes als eine Summe über alle geschlossenen Wege auf dem Gitter der Länge n . Ein solcher Weg wäre beispielsweise:



Da die Spur über x impliziert, dass solche Wege an allen Punkten des Gitters existieren können, kann man die effektive Wirkung auch schreiben als

$$S_{\text{eff}} = \sum_{x \in \Lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{2n} \sum_{\mathcal{C}_n(x)} \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M(\mathcal{C}_n(x))). \quad (6.56)$$

$\mathcal{C}_n(x)$ ist ein Weg, der in x startet und in n Schritten dorthin zurückkehrt. Da dies nur für eine gerade Anzahl von Schritten möglich ist, ist

$$S_{\text{eff}} = \sum_{x \in \Lambda} \sum_{n \text{ gerade}} \frac{K^n}{2n} \sum_{\mathcal{C}_n(x)} \text{Tr}_{\alpha\alpha}(M(\mathcal{C}_n(x))). \quad (6.57)$$

Die Wege müssen dabei in beiden Richtungen durchlaufen werden. Da sie aber auch hier mit (6.30) denselben Beitrag liefern, reicht es aus, sich schließlich für einen Weg zu entscheiden und die Summe entsprechend mit 2 zu multiplizieren, so dass

$$S_{\text{eff}}^f[U] = \sum_{x \in \Lambda} \sum_{n \text{ gerade}} \sum_{\mathcal{C}'_n(x)} \frac{K^n}{n} \text{Tr}_{\alpha\alpha} M(\mathcal{C}'_n(x)) \quad (6.58)$$

und

$$\begin{aligned} Z_f^\Lambda &= e^{-S_{\text{eff}}^f[U]} \\ &= \prod_{x \in \Lambda} \exp\left(- \sum_{n \text{ gerade}} \sum_{\mathcal{C}'_n(x)} \frac{K^n}{n} \text{Tr}_{\alpha\alpha} M(\mathcal{C}_n(x))\right) \end{aligned} \quad (6.59)$$

ist. (6.58) ist eine Summe über alle Gitterpunkte x und Wege $\mathcal{C}'_n(x)$. Nun hätte man aber auch irgendeinen anderen Punkt des Weges $\mathcal{C}_n(x)$ als Start- bzw. Endpunkt definieren können. Da diese beiden Wege mit unterschiedlichen Startpunkten topologisch äquivalent sind, können sie wieder zu Schlaufen L mit der Länge $|L|$ zusammengefasst werden. Für eine Schlaufe, die nur einmal umlaufen wird, ist die Anzahl der in ihr enthaltenen topologisch äquivalenten Wege \mathcal{C}_n gerade die Anzahl ihrer Punkte, also $|L| = n$. Beschreibt eine Schlaufe $m(L)$ Umläufe, so gibt es lediglich $\frac{|L|}{m(L)} = \frac{n}{m(L)}$ topologisch äquivalente Wege. Unter Berücksichtigung dieser Tatsachen wird die Wirkung zu einer Summe über alle möglichen unterschiedlichen Schlaufen des Gitters ($L \in \Lambda$)

$$\begin{aligned} S_{\text{eff}}^f[U] &= \sum_{n \text{ gerade}} \sum_{L_n \in \Lambda} \frac{K^n}{m(L)} \text{Tr}_{\alpha\alpha} M(L) \\ &= \sum_{L \in \Lambda} \frac{K^{|L|}}{m(L)} \text{Tr}_{\alpha\alpha} M(L). \end{aligned} \quad (6.60)$$

Durch die Translations- und Rotationsinvarianz des Gitters ist die Anzahl gleicher Schlaufen für große Gitter in etwa proportional zu der Zahl der Gitterpunkte Ω . Die zugehörigen Proportionalitätskonstanten sind die Koordinationszahlen N_L der Schlaufen. Mit ihrer Hilfe können sie vom Gitter „abgelöst“ werden.

$$S_{\text{eff}}^f[U] = \Omega \sum_L \frac{K^{|L|}}{m(L)} N_L \text{Tr}_{\alpha\alpha} M(L) \quad (6.61)$$

Das zugehörige fermionische Funktional lässt sich nun vergleichen mit dem aus der HPE des letzten Abschnittes. Dort mussten zunächst alle möglichen Graphen auf dem Gitter in ihre Schlaufengraphen zerlegt werden, die aus den Schleifen bestanden, und deren Beiträge in Form von Subgraphen zusammengerechnet werden. In der effektiven Wirkung (6.60) werden nun zunächst alle möglichen Schleifen einzeln aufsummiert. Das Minus-Zeichen vor jeder Schleife aus (6.27) entspricht hier dem Minus-Zeichen vor der effektiven Wirkung im Exponenten.

Entwickelt man die Exponentialfunktion $Z_f^\Lambda[U]$ in ihre Reihe,

$$\begin{aligned}
Z_f^\Lambda[U] &= \exp\left(-\sum_{L \in \Lambda} \frac{K^{|L|}}{m(L)} \text{Tr } M(L)\right) \\
&= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{L \in \Lambda} \frac{K^{|L|}}{m(L)} (-\text{Tr } M(L)) \right)^l \\
&= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{L_1, \dots, L_l \in \Lambda} \frac{1}{l!} \frac{1}{m(L_1)} \dots \frac{1}{m(L_l)} K^{(|L_1| + \dots + |L_l|)} (-\text{Tr } M(L_1)) \dots (-\text{Tr } M(L_l))
\end{aligned} \tag{6.62}$$

L_1, \dots, L_l sind dabei nicht notwendig verschieden, und addiert alle gleichartigen Terme auf, die $L_1^{n_1}, \dots, L_k^{n_k}$ enthalten, wobei nun alle L_i verschieden sind und $n_1 + \dots + n_k = l$ ist, dann wird sie wieder zu einer Summe über Subgraphen \mathcal{S} (S : Symmetriefaktor)

$$\begin{aligned}
Z_f^\Lambda[U] &= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l!}{n_1! \dots n_k!} \sum_{L_1^{n_1}, \dots, L_k^{n_k} \in \Lambda} \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{m(L_1)} \right)^{n_1} \dots \left(\frac{1}{m(L_k)} \right)^{n_k} K^{(n_1 \cdot |L_1| + \dots + n_k \cdot |L_k|)} \\
&\quad \times (-\text{Tr } M(L_1))^{n_1} \dots (-\text{Tr } M(L_k))^{n_k} \\
&= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{L_1^{n_1}, \dots, L_k^{n_k} \in \Lambda} \frac{1}{n_1! \dots n_k!} \frac{1}{m(L_1)^{n_1} \dots m(L_k)^{n_k}} \\
&\quad \times K^{(n_1 \cdot |L_1| + \dots + n_k \cdot |L_k|)} (-\text{Tr } M(L_1))^{n_1} \dots (-\text{Tr } M(L_k))^{n_k} \\
&= 1 + \sum_{\mathcal{S}} \prod_{i=1}^k \frac{1}{n_i! m(L_i)^{n_i}} K^{n_i |L_i|} (-\text{Tr } M(L_i))^{n_i} \\
&= 1 + \sum_{\mathcal{S}} S(\mathcal{S}) K^{|\mathcal{S}|} \prod_{i=1}^k (-\text{Tr } M(L_i))^{n_i} \\
&= 1 + \sum_{\mathcal{G}} \sum_{S \in \mathcal{G}} S(\mathcal{S}) K^{|\mathcal{S}|} \prod_{i=1}^k (-\text{Tr } M(L_i))^{n_i} \\
&\hat{=} \sum_{\mathcal{G}} K^{|\mathcal{G}|} c(\mathcal{G}) \sum_{S \in \mathcal{G}} \frac{S(\mathcal{S})}{c(\mathcal{G})} K^{|\mathcal{S}|} \prod_{i=1}^k (-\text{Tr } M(L_i))^{n_i}.
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Die Äquivalenz beider Arten der Entwicklung ist mit

$$t(\mathcal{S}) = \frac{S(\mathcal{S})}{c(\mathcal{G})} \Leftrightarrow c(\mathcal{G}) = \frac{S(\mathcal{S})}{t(\mathcal{S})} \tag{6.64}$$

erkennbar.

Dies ist das Linked-Cluster-Theorem, nach dem effektiv nur die einfach zusammenhängenden Graphen, die Schleifen, zur erzeugenden Funktion beitragen. Subgraphen sind Konstruktionen, die erst durch die Entwicklung der Exponentialfunktion auftreten. Zweckmäßigerweise wird im folgenden das Minus-Zeichen im Symmetriefaktor absorbiert, so dass

$$S(\mathcal{S}) = \prod_{i=1}^k \frac{(-1)^{l_i}}{n_i! m(L_i)^{n_i}} \quad (6.65)$$

ist.

Ziel dieser Arbeit soll es sein, die fermionische Reihe als Summe von Subgraphen bis zur 8. Ordnung in K zu berechnen. Die dazu notwendigen Schleifen zusammen mit den zugehörigen Koordinationszahlen N_L und Γ -Spuren zeigt Abbildung 6.1. Die Zahlen 3 und 4 an den Schleifen I und M deuten an, dass die Seiten in unterschiedliche Dimensionen „geknickt“ sind.

Zur Notation:

In den folgenden Kapiteln tauchen immer wieder Spuren über weggeordnete M -Matrizen und V -Matrizen auf. Um Schreibarbeit zu sparen und die Rechnungen insgesamt übersichtlicher zu gestalten, führe ich die folgende Schreibweise ein. Wird ein Weg durch eine der möglichen Schleifen, z.B. durch die Schlaufe A , beschrieben, so schreibe ich

$$\text{Tr}_{\alpha a} M_A = \text{Tr}_{\alpha} \Gamma(A) \text{Tr}_a V_A \quad \text{bzw.} \quad \text{Tr}_a V_A = \chi_1(U_A). \quad (6.66)$$

Umläuft dieser eine Plaquette innerhalb einer Schlaufe, so helfen die Nummerierungen aus Abbildung 6.1. So ist ein Umlauf um die linke Plaquette von C

$$\text{Tr}_{\alpha a} M_{C_I} = \text{Tr}_{\alpha} \Gamma(C_I) \text{Tr}_a V_{C_I}. \quad (6.67)$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \text{Tr} V_{C_I} &= \text{Tr} V_{C_{I,II}} \tilde{V}_{C_I} \quad \text{bzw.} \quad \text{Tr} V_{C_{II}} = \text{Tr} V_{C_{I,II}}^T \tilde{V}_{C_{II}} \\ \text{Tr} V_C &= \text{Tr} \tilde{V}_{C_I} \tilde{V}_{C_{II}}. \end{aligned} \quad (6.68)$$

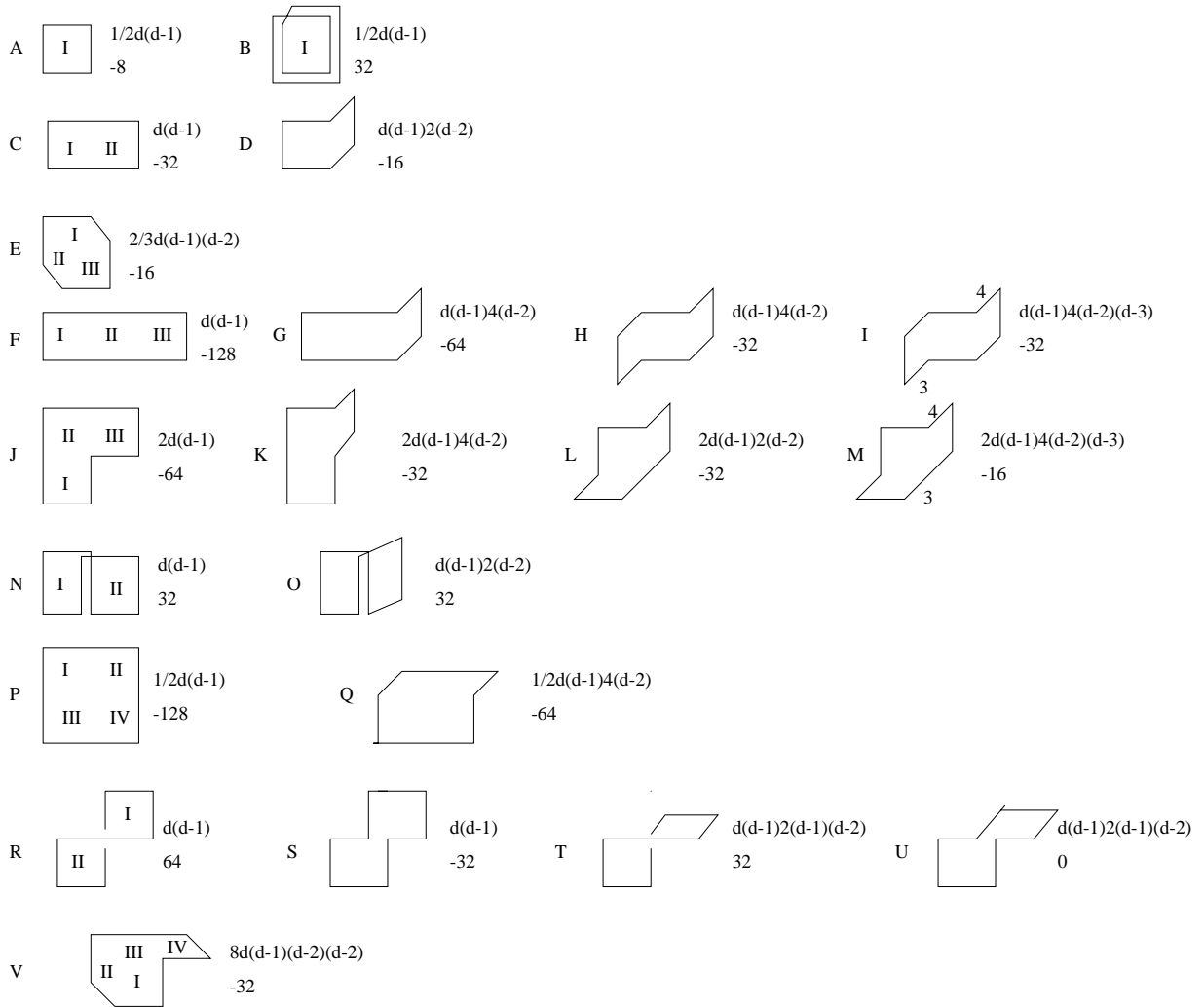


Abbildung 6.1: Fermionische Schleifen bis zur 8. Ordnung in K mit ihren Dirac-Spuren Γ und Koordinationszahlen

Kapitel 7

Die freie Energie der SYM

Der bosonische Boltzmann-Faktor der reinen Eichtheorie, dessen Wirkung in Kapitel 4 eingeführt wurde, ist wegen seiner Eichinvarianz eine $SU(2)$ -Klassenfunktion $f(U)$ mit der Eigenschaft

$$f(U) = f(VUV^{-1}) \quad \forall V \in SU(2). \quad (7.1)$$

Für eine irreduzible Darstellung j ($j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$), bezeichne nun $D_{\alpha\beta}^j(U)$ die Matrixelemente der darstellenden $d_j \times d_j$ -Matrix von U und $\chi_j(U) = \sum_{\alpha} D_{\alpha\alpha}^j(U)$ den irreduziblen Charakter dieses Gruppenelements¹. Aufgrund der Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen

$$\int DU D_{\alpha\beta}^r(U) D_{\gamma\delta}^{s*}(U) = \frac{\delta_{rs} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}}{d_r} \quad (7.2)$$

$$\sum_{r,\alpha,\beta} d_r D_{\alpha\beta}^r(U) D_{\alpha\beta}^{r*}(V) = \delta(U, V) \quad (7.3)$$

bilden diese Charaktere eine Orthonormalbasis

$$\int DU \chi_r(U) \chi_s^*(U) = \delta_{rs} \quad (7.4)$$

$$\sum_j \chi_j(UV^{-1}) = \delta(U, V) \quad (7.5)$$

$$\Rightarrow \int DU \chi_r(U) \chi_s(U^{-1}V) = \frac{\delta_{rs}}{d_r} \chi_r(V), \quad (7.6)$$

in der jede Klassenfunktion $f(U)$ eindeutig entwickelt werden kann zu

$$f(U) = \sum_j d_j c_j \chi_j(U). \quad (7.7)$$

Für den bosonischen Boltzmann-Faktor

$$\begin{aligned} \exp -S_g^{\Lambda}[U] &= \exp -\beta \left(\sum_P \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr } U_P \right) \right) \\ &= \exp \left(-\frac{\Omega}{2} d(d-1)\beta \right) \cdot \exp \frac{\beta}{2} \left(\sum_p \text{Tr } U_p \right), \end{aligned} \quad (7.8)$$

¹Speziell in der $SU(2)$ ist der Charakter zueinander konjugierter Elemente wegen $D^{j*}(U) = D^j((U^\dagger)^{-1}) = D^j(U)$ gleich ($\chi_j(U) = \chi_j^*(U)$).

als eine $SU(2)$ -Klassenfunktion

$$f(U) = \exp\left(\frac{\beta}{2} \text{Tr } U_p\right) = \sum_j d_j c_j(\beta) \chi_j(U_p) \quad (7.9)$$

$$\text{mit } c_j(\beta) = \int DU \frac{\chi_j(U_p)}{2j+1} \exp\left(\frac{\beta}{2} \text{Tr } U_p\right),$$

können die zugehörigen Koeffizienten direkt berechnet werden. Denn mit (5.7) und (5.5) ist

$$\exp\left(\frac{\beta}{2} \text{Tr } U_p\right) = \exp\left(\frac{\beta \sin \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}\right) = \exp(\beta \cos \frac{\theta}{2}) \quad (7.10)$$

und damit

$$\begin{aligned} (2j+1)c_j(\beta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin \frac{\theta}{2}} \exp\left(\beta \cos \frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \sin((2j+1)\theta) \exp(\beta \cos \theta) \\ &= \frac{-2}{\pi} \sin((2j+1)\theta) \frac{\exp \beta \cos \theta}{\beta} \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta \cos((2j+1)\theta) \frac{2j+1}{\beta} \exp(\beta \cos \theta) \\ &= 2(2j+1) \frac{I_{2j+1}(\beta)}{\beta} \\ &\Rightarrow c_j(\beta) = 2 \frac{I_{2j+1}(\beta)}{\beta}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

I_j ist die modifizierte Bessel-Funktion j -ter Ordnung. Somit ist

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\beta}{2} \sum_p \text{Tr } U_p\right) &= \prod_p \left(\sum_j d_j c_j(\beta) \chi_j(U_p) \right) \\ &= (c_0(\beta))^{\frac{g}{2}d(d-1)} \prod_p \left\{ 1 + \sum_{j \neq 0} d_j a_j(\beta) \chi_j(U_p) \right\}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

mit

$$a_j(\beta) = \frac{c_j(\beta)}{c_0(\beta)} = \frac{I_{2j+1}(\beta)}{I_1(\beta)} = \frac{\beta^{2j}}{(2j)!} + \mathcal{O}(\beta^{2j+1}). \quad (7.13)$$

Diese Entwicklung in β wird genauer, je kleiner β bzw. größer g ist, weshalb man weit entfernt von der Kontinuumsphysik ist.

Wie schon im Fall der HPE bietet sich auch hier eine graphische Veranschaulichung dieser Summe über Produkte aller Plaquetten auf dem Gitter an. Danach definiert man in diesem Fall einen bosonischen Graphen \mathcal{G}_B als eine Kollektion unterschiedlicher Plaquetten (Abb. 7.1) in nicht-trivialen Darstellungen

$$j_p \neq 0 \Rightarrow p \in |\mathcal{G}_B|. \quad (7.14)$$



Abbildung 7.1: Die graphische Darstellung der Plaquetten der niedrigsten Darstellungen

Dadurch wird auch der bosonische Boltzmannfaktor zu einer Graphensumme

$$Z_g^\Lambda[\beta] = \int DU \exp -S_g^\Lambda[U] = (e^{-\beta} c_0(\beta))^{\frac{d}{2}(d-1)} \int DU \sum_{\mathcal{G}_B} \prod_{p \in \mathcal{G}_B} d_{j_p} a_{j_p} \chi_j(U). \quad (7.15)$$

Die Zustandssumme folgt aus den einzelnen Beiträgen dieser Graphen aus der Eichintegration. Da der Faktor vor dem Integral weder von U noch von λ abhängig ist, schreibe ich nun

$$\bar{Z}_g^\Lambda[\beta] := \sum_{\mathcal{G}_B} \Phi(\mathcal{G}_B) \quad (7.16)$$

$$\Phi(\mathcal{G}_B) = \int DU \prod_{p \in \mathcal{G}_B} d_{j_p} a_{j_p}(\beta) \chi_{j_p}(U_p). \quad (7.17)$$

Für die Berechnung dieser Beiträge stehen folgende Integrationsregeln zur Verfügung

$$\begin{aligned} \int dU \chi_j(UV_1) \chi_{j'}(U^{-1}V_2) &= \frac{\delta_{jj'}}{d_j} \chi_j(V_1V_2) \\ \Rightarrow \int dU d_j \chi_j(UV_1) d_j \chi_j(U^{-1}V_2) &= d_j \chi_j(V_1V_2) \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\int dU \chi_r(U) = \delta_{0,r}. \quad (7.19)$$

Die erste Beziehung ist eine Verallgemeinerung von (5.48) auf alle Darstellungen. Treffen sich n Plaquette-Terme in einem gemeinsamen Link

$$\int dU \chi_{j_1}(V_1U) \cdots \chi_{j_n}(V_nU), \quad (7.20)$$

so bringt der zugehörige Graph nur dann einen Beitrag, wenn das Kronecker-Produkt der Darstellungen $j_1 \otimes \cdots \otimes j_n$ sich derart ausreduzieren lässt, dass es die triviale Darstellung ($j = 0$) enthält. Dies führt zu einer wichtigen Auswahlregel. Danach darf kein Graph einzelne Eichlinks enthalten, und er muss daher eine geschlossene Oberfläche aus Plaquetten besitzen. In der reinen Eichtheorie existieren bis zur Ordnung β^{10} lediglich vier Beiträge. Zunächst der leere Graph $\mathcal{G}_b = \emptyset$ mit $\Phi(\emptyset) = 1$, der Beitrag eines einfachen Würfels aus Plaquetten in fundamentaler Darstellung mit (7.18)

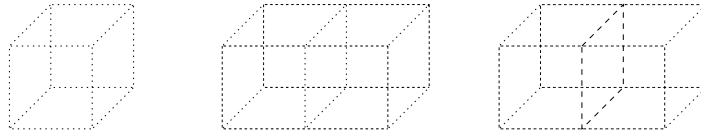


Abbildung 7.2: Würfel aus ($j = \frac{1}{2}$)-Plaqnetten und der Doppel-Würfel ohne und mit einer inneren ($j = 1$)-Plaqnette

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathcal{G}_b) &= a_{1/2}^6 \int \prod_{p \in \mathcal{G}_b} dU(p) d_{1/2} \text{Tr} U_{P_1} \prod_{i=1}^5 d_{1/2} \text{Tr} U_i \\
&= a_{1/2} d_{1/2} \int DU_{P_1} \text{Tr} U_{P_1} \text{Tr} U_{P_1} \\
&= a_{1/2}^6 d_{1/2} \int DU_{P_1} \chi_{1/2}(U_{P_1})^2 \\
&= a_{1/2} d_{1/2}^2 \int DU_{P_1} (1 + \chi_1(U_{P_1})) = a_{1/2}^6 d_{1/2}^2 = 4a_{1/2}^6, \tag{7.21}
\end{aligned}$$

der doppelte Würfel ohne innere Wand

$$\Phi(\mathcal{G}_b) = 4a_{1/2}^{10} \tag{7.22}$$

und mit innerer ($j=1$)-Wand (Abb. 7.2):

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathcal{G}_b) &= a_{1/2}^{10} a_1 \int DU_p (2\chi_{1/2}(U_p))^2 (3\chi_1(U_p)) \\
&= 12a_{1/2}^{10} a_1 \int DU_p \chi_0(U_p) + 2\chi_1(U_p) + 2\chi_2(U_p) \\
&= 12a_{1/2}^{10} a_1. \tag{7.23}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde nach der Integration über die fundamentalen Plaqnetten die Ausreduktion der Darstellungen

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes 1 = 0 \oplus 2 \times 1 \oplus 2 \tag{7.24}$$

verwendet. Die Konfigurationszahlen, diejenige Anzahl also, mit der diese Graphen auf dem vierdimensionalen Gitter vorkommen, können aus [BDI] entnommen werden, mit dem Ergebnis

$$\bar{Z}_g^\lambda[\beta] = 1 + \frac{\Omega}{6} d(d-1)(d-2)(4a_{1/2}^6) + \frac{\Omega}{6} d(d-1)(4d-9)(4a_{1/2}^{10}) + \mathcal{O}(\beta^{10}). \tag{7.25}$$

Nimmt man nun die Subgraphen der fermionischen Entwicklung \mathcal{S} noch hinzu, so müssen die neuen Graphen \mathcal{G} , die dann aus Eichplaqnetten und Schleifen aufgebaut sind, nicht notwendigerweise eine geschlossene Oberfläche besitzen. Nimmt man z.B. den Subgraphen, der aus der Schleife A gebildet wird, so kann er mit einer Plaqnette in adjungierter Darstellung versehen werden, wodurch die Ausreduktion an jeder Kante die triviale Darstellung hervorbringt und der Gesamtbeitrag des Graphen von Null verschieden ist.

$$\bar{Z}^\Lambda[K, \beta] = \sum_{\mathcal{G}} \Phi(\mathcal{G}) \tag{7.26}$$

Jeder dieser Graphen enthält verbundene und unverbundene Anteile. Die unverbundenen Anteile, die sogenannten Polymere X , haben keine gemeinsamen Kanten, so dass die Beiträge der Graphen aus dem Produkt der Beiträge ihrer jeweiligen unverbundenen Anteile hervorgehen.

$$\Phi(\mathcal{G}) = \prod_{X_i \in \mathcal{G}} \Phi(X_i) \quad (7.27)$$

7.1 Die freie Energie der Doppelentwicklung

Die Zustandssumme wird zu einer Summe über Produkte dieser Polymere

$$\bar{Z}^\Lambda[\beta, K] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{X_1, X_2, \dots, X_n} \frac{1}{n!} \Phi(X_1) \cdot \dots \cdot \Phi(X_n). \quad (7.28)$$

Bezeichnet nun I einen Satz von n Polymeren, so lässt sich mit dem Moment

$$\langle X_1, \dots, X_n \rangle = \begin{cases} 1, & \text{wenn jedes Paar } X_i, X_j \text{ unverbunden ist oder } n=1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.29)$$

\bar{Z}^Λ äquivalent schreiben als

$$\bar{Z}^\Lambda[\beta, K] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{X_1, X_2, \dots, X_n} \frac{1}{n!} \langle X_1, \dots, X_n \rangle \Phi(X_1) \cdot \dots \cdot \Phi(X_n). \quad (7.30)$$

Mit dem Momenten-Kumulanten-Theorem (B.12) [MM],[Mu] gelangt man direkt zur freien Energie. So ist

$$\begin{aligned} F(\beta, K) &= -\frac{1}{\Omega} \ln Z^\Lambda[\beta, K] = -\frac{d(d-1)}{2} (\ln(c_0(\beta)) - \beta) - \frac{1}{\Omega} \ln \bar{Z}^\Lambda[\beta, K] \\ &= -\frac{d(d-1)}{2} (\ln(c_0(\beta)) - \beta) - \frac{1}{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{X_1, X_2, \dots, X_n} \frac{1}{n!} [X_1, X_2, \dots, X_n] \Phi(X_1) \cdot \dots \cdot \Phi(X_n) \right). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Die Kumulante $[X_1, X_2, \dots, X_n]$ ist eine Summe über Produkte aller Partitionen von $\{X_1, \dots, X_n\}$, deren Elemente Momente bilden

$$[X_1, X_2, \dots, X_k] = \sum_P (-1)^{n-1} (n-1)! \underbrace{\langle X_1, \dots, X_m \rangle \dots \langle X_o, \dots, X_k \rangle}_{n\text{-Faktoren}}. \quad (7.32)$$

Die Kumulante eines Satzes von Polymeren ist aber nur dann von Null verschieden, wenn in einer Konfiguration aus Polymeren alle Polymere verbunden sind.

$$[X_1, \dots, X_n] \neq 0 \Leftrightarrow |X_1| \cup |X_2| \dots \cup |X_n| \quad (7.33)$$

Beweis:

Angenommen $|X_1| \cup |X_2| \dots \cup |X_n|$ sind unverbunden, dann gibt es zwangsläufig zwei Untermengen A und B aus $\{X_1, \dots, X_n\}$, so dass jedes Element aus A getrennt von einem beliebigen Element aus B ist. Dies bedeutet für das zugehörige Moment

$$\langle A_1, \dots, A_j, B_1, \dots, B_k \rangle = \langle A_1, \dots, A_j \rangle \langle B_1, \dots, B_k \rangle \quad \text{für } A_i \in A, B_i \in B, \quad (7.34)$$

so dass (B.14) gilt. Die freie Energie wird zu einer Summe über komplett verbundene Polymere, sogenannte Cluster C .

$$C = (X_1^{n_1}, X_2^{n_2}, \dots) \quad (7.35)$$

(n_1, n_2, \dots) ist die Anzahl bezüglich der Form als auch des Ortes gleicher Polymere. Jedes Polymer ist auch wieder ein Cluster, während ein Cluster in der Regel kein Polymer ist. Mit dieser Definition wird die freie Energie

$$-F(\beta, K) = \frac{1}{2}d(d-1)\ln(c_0(\beta)) + \frac{1}{\Omega} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{C=(X_1^{n_1}, X_2^{n_2}, \dots, X_k^{n_k})} a(C) \Phi(X_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot \Phi(X_k)^{n_k} \right), \quad (7.36)$$

mit dem kombinatorischen Faktor

$$a(C) = \frac{[X_1, \dots, X_1, X_2, \dots, X_2, \dots, X_k]}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (7.37)$$

Die Rechnungen zeigen, wie die freie Energie der Doppelreihenentwicklung in eine Summe aus Clustern zerfällt. Die Konfigurationszahlen der Cluster werden in den nachfolgenden Tabellen angegeben. Erst bei Clustern, die aus mehreren Polymeren bestehen, kommt der kombinatorische Faktor zum Tragen. Um nun die Summe der Cluster-Entwicklung systematisch zu berechnen, werden zunächst alle Polymere bis zur Ordnung K^8 bzw. β^8 konstruiert und ihre Beiträge berechnet. Darüberhinaus werden diese Polymere dann zu Clustern zusammengesetzt (Cluster-Graphen), sofern diese die maximalen Ordnungen nicht überschreiten. Da alle Graphen per Definition verbunden sind, und das Gitter translationsinvariant ist, steigt ihre Anzahl für $\Omega \rightarrow \infty$ linear mit Ω , so dass im thermodynamischen Limes letztlich die freie Energie als eine intensive Größe von Ω unabhängig ist.

Der kombinatorische Faktor reduziert die Zahl der möglichen Graphen, die einen Beitrag ergeben, aber erheblich. Besteht nämlich ein Polymer graphisch selbst wieder aus zwei unterschiedlichen Polymeren niedrigerer Ordnungen und ergibt sich dessen Beitrag aus dem Produkt der einzelnen Polymere, so wird dieser durch das Cluster, das ebenfalls aus diesen Polymeren gebildet wird, durch den kombinatorischen Faktor -1 gerade kompensiert.

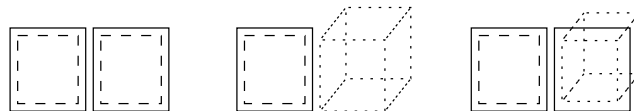


Abbildung 7.3: Graphen (Polymere), deren Beitrag das Produkt zweier Polymere ist.

7.2 Die freie Energie der reinen SU(2)-Eichtheorie

Die Zustandssumme besteht bis zur Ordnung β^{10} nur aus den schon bekannten Polymeren, so dass ihr kombinatorischer Faktor 1 ist. Der Übersichtlichkeit halber schreibe ich nun

$$x = a_{\frac{1}{2}}(\beta) = \frac{\beta}{4} - \frac{\beta^3}{96} + \frac{\beta^5}{1536} - \frac{\beta^7}{23040} + \mathcal{O}(\beta^9) \quad (7.38)$$

$$\text{bzw. } \beta = 4x \left(1 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{32}{45}x^6 + \frac{308}{405}x^8 + \mathcal{O}(x^{10}) \right) \quad (7.39)$$

$$\begin{aligned} y = a_1(\beta) &= \frac{\beta^2}{24} - \frac{\beta^4}{384} + \frac{\beta^6}{5760} - \frac{13\beta^8}{1105920} + \mathcal{O}(\beta^{10}) \\ &= \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 + \frac{16}{135}x^6 + \frac{8}{135}x^8 + \mathcal{O}(x^{10}) \end{aligned} \quad (7.40)$$

$$\begin{aligned} z = a_{\frac{3}{2}}(\beta) &= \frac{\beta^3}{192} - \frac{\beta^5}{2560} + \frac{\beta^7}{36864} + \mathcal{O}(\beta^9) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^7 + \mathcal{O}(x^9) \end{aligned} \quad (7.41)$$

$$\begin{aligned} v = a_2(\beta) &= \frac{\beta^4}{1920} - \frac{\beta^6}{23040} + \frac{\beta^8}{322560} + \mathcal{O}(\beta^{10}) \\ &= \frac{2}{15}x^4 + \frac{8}{45}x^6 + \frac{64}{315}x^8 + \mathcal{O}(x^{10}). \end{aligned} \quad (7.42)$$

Bis $\mathcal{O}(\beta^{10})$ ist freie Energie pro Plaquette F_P daher

$$\begin{aligned} -F_P(\beta, K=0) &= -\frac{2F(\beta, K=0)}{d(d-1)} \\ &= -\beta + \ln(c_0(\beta)) + (d-2) \left[\frac{4}{3}x^6 + (2d-5)4x^{10} \right. \\ &\quad \left. + (2d-5)12x^{10}y \right] + \mathcal{O}(\beta^{12}). \end{aligned} \quad (7.43)$$

In der 12. Ordnung von β existieren drei Polymere. Zunächst die beiden Graphen aus einer geschlossenen Oberfläche von 12 Plaquetten in $j = 1/2$ -Darstellung und der Kubus aus sechs Plaquetten in der $j = 1$ Darstellung. Ihr Beitrag zur freien Plaquetteenergie ist

$$\frac{8}{3}(d-2)(d-3)4x^{12} + \frac{2}{3}(d-2)(d-3)4x^{12} + \frac{9}{3}(d-2)y^6. \quad (7.44)$$

Darüberhinaus lassen sich noch aus zwei Kuben von jeweils sechs Plaquetten zwei Cluster konstruieren, die sich zwar berühren, aber deren Beitrag multiplikativ ist:

1. Das Cluster $C = (X_1, X_2)$ mit den Kuben X_1 und X_2 an unterschiedlichen Orten, aber mit einer gemeinsamen Wand. Seine Konfigurationszahl entspricht der des Doppelkubus in 10. Ordnung von β mit dem kombinatorischen Faktor $a(X_1, X_2) = -1$.

$$-(d-2)(2d-5) \times (4x^6)^2 \quad (7.45)$$

2. Zwei Kuben an derselben Stelle $C = (X_1, X_1)$ $a(X_1, X_1) = -\frac{1}{2}$ und der Koordinationszahl des einfachen Kubus

$$-\frac{1}{3}(d-2) \times \frac{1}{2}(4x^6)^2 \quad (7.46)$$

Zusammengefasst ist bis zur 12. Ordnung in β

$$\begin{aligned}
-F_P(\beta, K=0) &= -\beta + \ln(c_0(\beta)) + (d-2) \left[\frac{4}{3}x^6 + 4(2d-5)x^{10} - \frac{56}{3}(d-2)x^{12} + 3y^6 \right. \\
&\quad \left. + 12(2d-5)x^{10}y \right] + \mathcal{O}(\beta^{14}) \\
&= \beta + \ln(c_0(\beta)) + (d-2) \left[\frac{4}{3}x^6 + 4(2d-5)x^{10} - \frac{4}{3} \left(2d + \frac{146}{81} \right) x^{12} \right] + \mathcal{O}(x^{14}).
\end{aligned} \tag{7.47}$$

Dies entspricht den ersten Termen der Entwicklung in [DHN]. Dort wurde die Reihe bis zur 16. Ordnung nach einem Verfahren von J.M. DROUFFE berechnet. Seine Vorgehensweise zur Berechnung der in Ω linearen Koordinationszahlen unterscheidet sich von der hier präsentierten und ist für die Entwicklung der reinen Eichgraphen vorteilhafter, da dort alle Polymere aus geschlossenen Oberflächen bestehen. Sein Ergebnis

$$\begin{aligned}
-F_p(\beta, K=0) &= -\beta + \ln(c_0) + (d-2) \left[\frac{4}{3}x^6 + 4(2d-5)x^{10} - \frac{4}{3} \left(2d + \frac{146}{81} \right) x^{12} \right. \\
&\quad \left. + 4 \left(20d^2 - \frac{314}{3}d + \frac{33971}{243} \right) x^{14} + \left(-\frac{16}{3}d^2 - \frac{503147}{1620}d + \frac{12787481}{14580} \right) x^{16} \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(x^{18})
\end{aligned} \tag{7.48}$$

stimmt bis zur 12. Ordnung in β mit der oben gefundenen freien Energie überein. Für $d=4$ konnte K.G.WILSON [Wi3] diese Reihe sogar bis zur Ordnung β^{22} bestimmen.

$$\begin{aligned}
-F_p(\beta, K=0) &= -\beta + \ln(c_0) + 2 \left[\frac{4}{3}x^6 + 12x^{10} - \frac{3176}{243}x^{12} + \frac{39980}{243}x^{14} - \frac{6569971}{14580}x^{16} \right. \\
&\quad \left. + \frac{95936872}{32805}x^{18} - \frac{79327880}{6561}x^{20} + 65379.87679x^{22} \right] + \mathcal{O}(x^{24})
\end{aligned} \tag{7.49}$$

7.3 Die Doppelentwicklung in 0. Ordnung von β

Die 0. Ordnung in β entspricht der reinen HPE ohne zusätzliche Eichplaquetten. Die Zahl der möglichen Cluster und Polymere ist dabei erheblich reduziert, da die Eichintegration dafür sorgt, dass alle diejenigen, die einen isolierten Link besitzen, aufgrund von (5.60) verschwinden.

Tatsächlich existieren bis zur 8. Ordnung in K lediglich zwei verschiedene Subgraphen. Die Graphen bis zur 12. Ordnung zeigt Tabelle 7.1 Alle Graphen sind reine Polymere und können nicht weiter zerlegt werden. Daher können ihre Beiträge direkt aufsummiert werden. Für die Berechnung dieser Graphen benutze ich die 2. Möglichkeit der HPE.

Zunächst wird der Vorfaktor des 1. Clusters (Subgraphen) ermittelt. Weil er nur aus einer Schlaufe mit der Umlaufzahl 2 besteht, ist nach (6.65) sein Symmetriefaktor $S = -\frac{1}{2}$, und zusammen mit der Diracspur $\text{Tr } \Gamma(B) = 32$ ist dieser $-32K^8/2$. Seine Koordinationszahl \mathbb{N}_G ist $N_B = \frac{1}{2}d(d-1)$. Die Eichintegration über $\text{Tr } V_B$ ergibt mit (5.61)

$$\int DU_A \text{Tr } V_B = \int DU_A \text{Tr}(V_A V_A) = \int DU_A V_A^{ab} V_A^{ba} = \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{ba} = 1. \tag{7.50}$$












Nr.	$\mathcal{O}(K)$	Γ -Spur	$S(S)$	Graph	$2N_G/d(d-1)$	$\int DU$
1.	8	32	$-\frac{1}{2}$		1	1
2.	8	64	$\frac{1}{2}$		1	1
3.	12	1024	$\frac{1}{2}$		2	1
4.	12	512	$-\frac{1}{2}$		2	1
5.	12	256	$\frac{1}{2}$		$4(d-2)$	1
6.	12	128	$-\frac{1}{2}$		$4(d-2)$	1
7.	12	128	$-\frac{1}{2}$		$4/3(d-2)$	1
8.	12	256	$\frac{1}{2}$		$4/3(d-2)$	1
9.	12	-512	$-\frac{1}{6}$		1	1
10.	12	-128	$-\frac{1}{3}$		1	1
11.	12	-256	$\frac{1}{2}$		1	-1

Tabelle 7.1: Rein fermionische Cluster

Der 2. Graph besteht aus zwei Schlaufen. Mit $S = \frac{1}{2}$ und $\text{Tr } \Gamma(A) = -8$ ist sein Vorfaktor $32K^8$ und erneut ist $N_B = \frac{1}{2}d(d-1)$. Außerdem ist

$$\int DU_A \text{Tr } V_A \text{Tr } V_A = \int DU_A V_A^{aa} V_A^{bb} = \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{ab} = 1. \quad (7.51)$$

Alternativ hätte man mit der Ausreduktion der Darstellungen $1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2$ auch

$$\int DU_A \chi_1(U_A) \chi_1(U_A) = \int DU_A (1 + \chi_1(U_A) + \chi_2(U_A)) = 1 \quad (7.52)$$

rechnen können. Beide Graphen können nicht weiter in Polymere zerlegt werden. Ihr Beitrag zur freien Energie pro Plaquette ist also

$$\left(-\frac{32}{2} + \frac{64}{2}\right) K^8 = 16K^8. \quad (7.53)$$

Die Graphen Nr. 3-8 unterscheiden sich bezüglich der Eichintegration nicht von den ersten beiden Graphen.

Für den Graphen Nr. 9 ist

$$\int DU_A \text{Tr } V_A \text{Tr } V_A \text{Tr } V_A = \int DU_A V_A^{aa} V_A^{bb} V_A^{cc} = \frac{1}{6} \epsilon_{abc} \epsilon_{abc} = 1, \quad (7.54)$$

für Nr. 10

$$\int DU_A \text{Tr } V_A V_A V_A = \int DU_A V_A^{ab} V_A^{bc} V_A^{ca} = \frac{1}{6} \epsilon_{abc} \epsilon_{bca} = 1 \quad (7.55)$$

und für Nr. 11

$$\int DU_A \operatorname{Tr} V_A \operatorname{Tr} V_A V_A = \int DU_A V_A^{aa} V_A^{bc} V_A^{cb} = \frac{1}{6} \delta_{abc} \epsilon_{acb} = -1. \quad (7.56)$$

Alle Graphen zusammen ergeben mit $\ln(c_0(0)) = 0$

$$-F_P(\beta = 0, K) = 16K^8 + \left(768 + \frac{1024}{3}(d-2)\right) K^{12} + \mathcal{O}(K^{14}). \quad (7.57)$$

7.4 Die Doppelentwicklung in β und K

Neben den rein fermionischen bzw. bosonischen Graphen werden nun die gemischten Graphen der Doppelentwicklung angegeben und ihre Beiträge berechnet. Hierfür existieren zwei mögliche Konstruktionen.

7.4.1 Die Plaquettierung der Minimalflächen

Die Minimalfläche eines Graphens ist die kleinste von Plaquetten gebildete Fläche, die von diesem umrandet wird. Von null verschiedene, verbundene Graphen erhält man, wenn man die Minimalflächen der fermionischen Graphen mit Plaquetten in der adjungierten Darstellung auffüllt. Ihre Beiträge können aus Tabelle 7.2 entnommen werden. Die Eichintegration der Graphen Nr. 1, 4, 5, 6, 8, 10 können mit

$$\begin{aligned} d_1^2 \int dU \chi_1(V_1 U) \chi_1(U^{-1} V_2) &= d_1 \chi_1(V_1 V_2) \\ d_1 \int DU \chi_1(U)^2 &= 3 \end{aligned} \quad (7.58)$$

sofort berechnet werden. Für die anderen Graphen kann man wieder wahlweise die Gruppenintegrationsregeln aus Kapitel 5 oder aber die Ausreduktion der Darstellungen verwenden. So ist für den Graphen Nr. 7

$$\begin{aligned} & d_1^2 \int DU \operatorname{Tr}(\tilde{V}_{A_I} V_{A_I,II} \tilde{V}_{A_{II}} V_{A_I,II}) \operatorname{Tr}(\tilde{V}_{A_I} V_{A_I,II}) \operatorname{Tr}(\tilde{V}_{A_{II}} V_{A_I,II}) \\ &= 9 \int DU \tilde{V}_{A_I}^{ab} V_{A_I,II}^{bc} \tilde{V}_{A_{II}}^{cd} V_{A_I,II}^{da} \tilde{V}_{A_I}^{ef} V_{A_I,II}^{fe} \tilde{V}_{A_{II}}^{gh} V_{A_I,II}^{hg} \\ &= 9 \int D\tilde{U}_{A_I} \tilde{V}_{A_I}^{ab} \tilde{V}_{A_I}^{ef} \int D\tilde{U}_{A_{II}} \tilde{V}_{A_{II}}^{cd} \tilde{V}_{A_{II}}^{gh} \int dU_{A_I,II} V_{A_I,II}^{bc} V_{A_I,II}^{da} V_{A_I,II}^{fe} V_{A_I,II}^{hg} \\ &= 9 \cdot \hat{V}_2(a, b, e, f) \cdot \hat{V}_2(c, d, g, h) \cdot \hat{V}_4(b, c, d, a, f, e, h, g) = \frac{9}{5}. \end{aligned} \quad (7.59)$$

oder für den Graphen Nr. 2 mit

$$\begin{aligned} 1 \otimes 1 \otimes 1 &= (0 \oplus 1 \oplus 2) \otimes 1 \\ &= 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 2 \oplus 3 \\ &= 0 \oplus 3 \times 1 \oplus 2 \times 2 \oplus 3, \end{aligned} \quad (7.60)$$










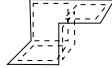
Nr.	$\mathcal{O}(\mathbf{K}, \beta_{\min})$	Vorfaktoren	$S(S)$	Graph	$2N_G/d(d-1)$	$\int DU$
1.	4,2	$-8y$	-1		1	3
2.	8,2	$64y$	$\frac{1}{2}$		1	3
3.	8,2	$32y$	$-\frac{1}{2}$		1	-3
4.	6,4	C: $-32y^2$, D: $-16y^2$	-1		C: 2, D: $4(d-2)$	3
5.	6,6	C: $-16y^3$	-1		$8/3(d-2)$	3
6.	8,6	$F - M : \Gamma(F - M)y^3$	-1		$N_{(F-M)}/N_A$	3
7.	8,4	N: $32y^2$, O: $32y^2$	-1		N: 2, O: $4(d-2)$	$\frac{9}{5}$
8.	8,8	P: $-128y^4$, Q: $-64y^4$	-1		P: 1, Q: $4(d-2)$	3
9.	8,4	R-T: $\Gamma(R, S, T)y^2$	-1		$N_{(R,S,T)}/N_A$	3
10.	8,6	$-32y^4$	-1		$32(d-2)^2$	3

Tabelle 7.2: Graphen mit $j = 1$ Plaquetten, Abkürzungen siehe Abb. 6.1



Nr.	$\mathcal{O}(\mathbf{K}, \beta_{\min})$	Vorfaktoren	$S(S)$	Graph	$2N_G/d(d-1)$	$\int DU$
1.	8,4	$64v$	$\frac{1}{2}$		1	5
2.	8,4	$32v$	$-\frac{1}{2}$		1	5

Tabelle 7.3: Graphen mit ($j = 2$)-Plaquette

wie schon in (7.55)

$$d_1 \int DU_A (\text{Tr } V_A)^3 = 3 \int DU_A (\chi_1(U_A))^3 = 3. \quad (7.61)$$

Die fermionischen Graphen aus Schlaufe B und zweimal Schlaufe A können zusätzlich noch durch eine Plaquette der Darstellung $j = 2$ aufgefüllt werden (Tab. 7.3). Um ihre Beiträge zu berechnen, empfiehlt sich die Ausreduktion.

Für den Graphen Nr. 1 ist

$$1 \otimes 1 \otimes 2 = 0 \oplus 2 \times 1 \oplus 3 \times 2 \oplus 2 \times 3 \oplus 4 \quad (7.62)$$

und daher

$$d_2 \int DU (\chi_1(U_A))^2 \chi_2(U_A) = 5. \quad (7.63)$$

Schreibt man die Spuren $\text{Tr } V_A$ und $\text{Tr } V_B$ in ihren $\text{SO}(3)$ -Winkelparametrisierungen

$$\begin{aligned}\text{Tr } V_A &= 1 + 2 \cos(\alpha) \\ \text{Tr } V_B &= 1 + 2 \cos(2\alpha),\end{aligned}\tag{7.64}$$

so findet man

$$\begin{aligned}\text{Tr } V_B &= \chi_1(U_B) = \text{Tr } V_A V_A = (\text{Tr } V_A)^2 - 2 \text{Tr } V_A \\ &= (\chi_1(U_A))^2 - 2\chi_1(U_A) = 1 - \chi_1(U_A) + \chi_2(U_A),\end{aligned}\tag{7.65}$$

also

$$d_2 \int DU_A \chi_1(U_B) \chi_2(U_A) = 5 \int DU_A (\chi_2(U_A))^2 = 5.\tag{7.66}$$

7.4.2 Die äußere Plaquettierung

Die Subgraphen können aber neben der Plaquettierung ihrer Minimalflächen auch noch durch das äußere Anheften von Plaquetten (äußere Plaquettierung) die Eichintegration überleben.

Graphen mit Schlaufe A

Die Graphen, die die Schlaufe A enthalten, zeigt Tabelle 7.4.









Nr.	$\mathcal{O}(\mathbf{K}, \beta_{\min})$	Vorfaktoren	$\mathbf{S}(\mathcal{S})$	Graph	$2\mathbf{N}_{\mathcal{G}}/d(d-1)$	$\int \mathbf{D}\mathbf{U}$
1.	4,6	$-8x^6$	-1		$2(d-2)$	4
2.	4,8	$-8x^5z$	-1		$2(d-2)$	8
3.	8,6	$64x^6$	$\frac{1}{2}$		$2(d-2)$	8
4.	8,8	$64x^5z$	$\frac{1}{2}$		$2(d-2)$	16
5.	8,6	$64x^6$	1		$(d-2)$	6
6.	8,6	$64x^6$	1		$4(d-2)$	4
7.	8,8	$64x^5z$	1		$8(d-2)$	8
8.	8,8	$64x^5z$	1		$2(d-2)$	8

Tabelle 7.4: Äußere Plaquettierung der Graphen mit Schlaufe A

Die Berechnung dieser Graphen erfolgt stets nach der gleichen Methode. Zunächst wird versucht, die äußeren Plaquetten so weit wie möglich miteinander zu verschmelzen, und man verbleibt im

Fall des Graphen Nr. 6 mit der Notation (6.67)

$$d_{\frac{1}{2}}^3 \int DU_D dU_{D_I,II} \chi_{\frac{1}{2}}(U_D) \chi_{\frac{1}{2}}(U_{D_I}) \chi_1(U_{D_I}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_{D_{II}}) \chi_1(U_{D_{II}}). \quad (7.67)$$

Die Integration über $dU_{D_I,II}$ ergibt durch Ausreduktion und unter Verwendung von (7.18)

$$\begin{aligned} & \int dU_{D_I,II} \chi_{\frac{1}{2}}(U_{D_I}) \chi_1(U_{D_I}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_{D_{II}}) \chi_1(U_{D_{II}}) \\ &= \int dU_{D_I,II} (\chi_{\frac{1}{2}}(U_{D_I}) \chi_1(U_{D_I})) \cdot (\chi_{\frac{1}{2}}(U_{D_{II}}) \chi_1(U_{D_{II}})) \\ &= \int dU_{D_I,II} (\chi_{\frac{1}{2}}(U_{D_I}) \chi_{\frac{3}{2}}(U_{D_I})) \cdot (\chi_{\frac{1}{2}}(U_{D_{II}}) \chi_{\frac{3}{2}}(U_{D_{II}})) \\ &= \frac{1}{d_{\frac{1}{2}}} \chi_{\frac{1}{2}}(U_D) + \frac{1}{d_{\frac{3}{2}}} \chi_{\frac{3}{2}}(U_D) \end{aligned} \quad (7.68)$$

und somit

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{G}_A^4) &= d_{\frac{1}{2}}^2 \int DU_D \chi_{\frac{1}{2}}(U_D) \chi_{\frac{1}{2}}(U_D) + \frac{d_{\frac{1}{2}}^3}{d_{\frac{3}{2}}} \int DU_D \chi_{\frac{1}{2}}(U_D) \chi_{\frac{3}{2}}(U_D) \\ &= 4 \cdot 1 + \frac{8}{4} \cdot 0 = 4. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Graphen mit Schlaufe B

Die Eichintegration der Graphen mit Schlaufe B und äußerer Plaquetierung ergibt sich zu null.



Nr.	$\mathcal{O}(\mathbf{K}, \beta_{\min})$	Vorfaktoren	$S(S)$	Graph	$2N_{\mathcal{G}}/d(d-1)$	$\int DU$
1.	8,6	$32x^6$	$-\frac{1}{2}$		$2(d-2)$	0
2.	8,8	$32x^5z$	$-\frac{1}{2}$		$2(d-2)$	0

Tabelle 7.5: Äußere Plaquetierung des Graphen mit Schlaufe B

Die Abbildung 7.4 zeigt exemplarisch Graphen, die keinen Beitrag liefern, da sie das Produkt ihrer Komponenten sind.



Abbildung 7.4: Zwei Graphen, deren Cluster- bzw. Polymerbeiträge sich aufheben.

Im folgenden werden lediglich die Ergebnisse aufgelistet und nur die Spezialfälle, bei denen die Ausreduktion und das „Verschmelzen“ nicht zum Ziel führte, behandelt.

Graphen mit Schleifen C und D



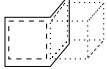
Nr.	$\mathcal{O}(\mathbf{K}, \beta_{\min})$	Vorfaktoren	$S(S)$	Graph	$2N_G/d(d-1)$	$\int DU$
1.	6,8	$-32yx^6$	-1		$8(d-2)$	4
2.	6,6	$-16x^6$	-1		$4(d-2)$	4
3.	8,8	$-16x^6y$	-1		$4(d-2)(2d-5)$	4

Tabelle 7.6: Äußere Plaquettierung der Graphen mit den Schleifen C und D

Graph mit Schleife E


Nr.	$\mathcal{O}(\mathbf{K}, \beta_{\min})$	Vorfaktoren	$S(S)$	Graph	$2N_G/d(d-1)$	$\int DU$
1.	6,8	$-16x^6$	-1		$4/3(d-2)$	4

Tabelle 7.7: Äußere Plaquettierung des Graphen mit Schleife E

Graphen mit den Schleifen G,H,I und K,L,M





Nr.	$\mathcal{O}(\mathbf{K}, \beta_{\min})$	Vorfaktoren	$S(S)$	Graph	$2N_G/d(d-1)$	$\int DU$
1.	8,8	$-64yx^6$	-1		$8(d-2)$	4
2.	8,8	$\Gamma(H, I)x^6y$	-1		H: $8(d-2)$ I: $16(d-2)(d-3)$	4
3.	8,8	$\Gamma(K, L, M)x^6y$	-1		K: $16(d-2)$ L: $16(d-2)$ M: $16(d-2)(d-3)$	4
4.	8,6	$-32x^6$	-1		$4(d-2)$	4

Tabelle 7.8: Äußere Plaquettierung der Graphen mit den Schleifen G,H,I und K,L,M

Graphen mit den Schleifen N und O

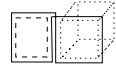
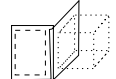
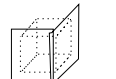
Nr.	$\mathcal{O}(\mathbf{K}, \beta_{\min})$	Vorfaktoren	$S(S)$	Graph	$2N_{\mathcal{G}}/d(d-1)$	$\int \mathbf{D}U$
1.	8,8	$32yx^6$	-1		$8(d-2)$	4
2.	8,8	$-16x^6y$	-1		$8(d-2)(2d-5)$	4
3.	8,6	$-16x^6$	-1		$4(d-2)$	0

Tabelle 7.9: Äußere Plaquetierung der Graphen mit den Schleifen N und O

Die Berechnung des Graphen Nr. 3 ist nach den üblichen Verfahren so nicht möglich. Stattdessen kann man die Gruppenintegrale (5.43)-(5.46) aus Kapitel 5 verwenden. Werden zunächst die benachbarten Plaquetten in der fundamentalen Darstellung mit (7.18) verknüpft, so führt dies zu dem Graphen aus Abbildung 7.5.

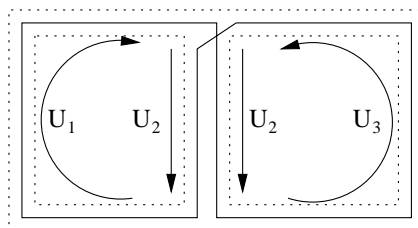


Abbildung 7.5: Graph Nr. 3 nach der Integration der äußeren Plaquetten in fundamentaler Darstellung (projiziert auf zwei Dimensionen). Durch die Pfeile werden die Orientierungen der Eichlinks festgelegt.

Dies entspricht

$$\begin{aligned}
& d_{\frac{1}{2}}^3 \int DU \chi_1(U_1 U_2 U_3 U_2) \chi_{\frac{1}{2}}(U_1 U_2) \chi_{\frac{1}{2}}(U_3 U_2) \chi_{\frac{1}{2}}(U_1 U_3^{-1}) \\
&= 8 \int DU \left(\chi_{\frac{1}{2}}(U_1 U_2 U_3 U_2) \chi_{\frac{1}{2}}(U_1^{-1} U_2^{-1} U_3^{-1} U_2^{-1}) - 1 \right) \chi_{\frac{1}{2}}(U_2^{-1} U_1^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_3 U_2) \chi_{\frac{1}{2}}(U_1 U_3^{-1}) \\
&= -8 \int DU U_2^{(-1)ab} U_1^{(-1)ba} U_3^{cd} U_2^{dc} U_1^{ef} U_3^{(-1)ef} \\
&\quad + 8 \int DU U_1^{ab} U_2^{bc} U_3^{cd} U_2^{da} U_1^{(-1)ef} U_2^{(-1)fg} U_3^{(-1)gh} U_2^{(-1)he} U_2^{(-1)ij} U_1^{(-1)ji} U_3^{kl} U_2^{lk} U_1^{mn} U_3^{(-1)nm} \\
&= -8 \int DU_1 U_1^{ef} U_1^{(-1)ba} \int DU_2 U_2^{dc} U_2^{(-1)ab} \int DU_3 U_3^{cd} U_3^{(-1)ef} \\
&\quad + 8 \int DU_1 U_1^{ab} U_1^{(-1)ef} U_1^{mn} U_1^{(-1)ji} \int DU_2 U_2^{bc} U_2^{(-1)fg} U_2^{da} U_2^{(-1)he} U_2^{lk} U_2^{(-1)ij} \\
&\quad \cdot \int DU_3 U_3^{cd} U_3^{(-1)gh} U_3^{kl} U_3^{(-1)nm} \\
&= -\frac{8}{8} \cdot (\delta_{fb} \delta_{ea} \delta_{ca} \delta_{db} \delta_{de} \delta_{cf}) \\
&\quad + 8 \cdot \hat{U}_4(a, b, e, f, m, n, j, i) \hat{U}_6(b, c, f, g, d, a, h, e, l, k, i, j) \hat{U}_4(c, d, g, h, k, l, n, m) \\
&= -2 + 2 = 0.
\end{aligned} \tag{7.70}$$

Graphen mit den Schlaufen R, S und T

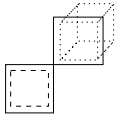
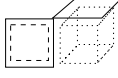
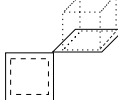
Nr.	$\mathcal{O}(\mathbf{K}, \beta_{\min})$	Vorfaktoren	$S(S)$	Graph	$2N_G/d(d-1)$	$\int \mathbf{DU}$
1.	8,8	$\Gamma(R, S)yx^6$	-1		$8(d-2)$	4
2.	8,8	$32x^6y$	-1		$8(d-2)(d-1)$	6
3.	8,8	$32x^6y$	-1		$8(d-2)(d-1)(2d-5)$	4

Tabelle 7.10: Äußere Plaquettierung der Graphen mit den Schlaufen R,S und T

Auch hier ist die Berechnung des Graphen Nr. 2 nicht so einfach. Nach der äußeren Eichintegration verbleibt man mit Abbildung 7.6. Dies entspricht

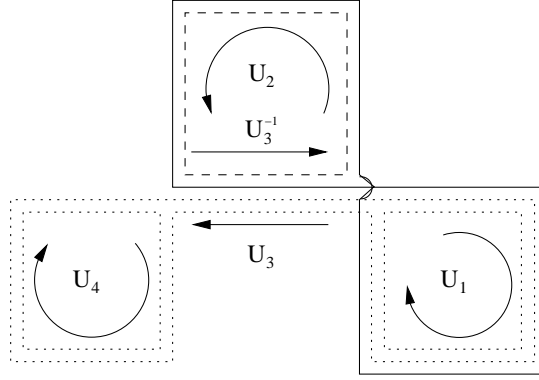


Abbildung 7.6: Graph Nr. 2 nach der Integration der äußeren Plaquetten in fundamentaler Darstellung (projiziert auf zwei Dimensionen)

$$\begin{aligned}
& d_1 d_{\frac{1}{2}}^3 \int DU \chi_1(U_1 U_2 U_3^{-1}) \chi_1(U_2 U_3^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_1 U_3 U_4 U_3^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_1) \chi_{\frac{1}{2}}(U_4) \\
&= 24 \int DU \left(\chi_{\frac{1}{2}}(U_1 U_2 U_3^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_3 U_2^{-1} U_1^{-1}) - 1 \right) \left(\chi_{\frac{1}{2}}(U_2 U_3^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_3 U_2^{-1}) - 1 \right) \\
&\quad \cdot \chi_{\frac{1}{2}}(U_1 U_3 U_4 U_3^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_1^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_4^{-1}) \\
&= 24 \int DU \left(\chi_{\frac{1}{2}}(U_1 U_2 U_3^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_3 U_2^{-1} U_1^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_2 U_3^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_3 U_2^{-1}) \right. \\
&\quad \left. - \chi_{\frac{1}{2}}(U_1 U_2 U_3^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_3 U_2^{-1} U_1) - \chi_{\frac{1}{2}}(U_2 U_3^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_3 U_2^{-1}) + 1 \right) \\
&\quad \cdot \chi_{\frac{1}{2}}(U_1^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_4^{-1}) \chi_{\frac{1}{2}}(U_1 U_3 U_4 U_3^{-1}) \\
&= 24 \left(U_1^{ab} U_2^{bc} (U_3^{-1})^{ca} U_3^{de} (U_2^{-1})^{ef} (U_1^{-1})^{fd} U_2^{gh} (U_3^{-1})^{hg} U_3^{ij} (U_2^{-1})^{ji} \right. \\
&\quad \left. - U_1^{ab} U_2^{bc} (U_3^{-1})^{ca} U_3^{de} (U_2^{-1})^{ef} (U_1^{-1})^{ef} - U_2^{ab} (U_3^{-1})^{ca} U_3^{cd} (U_2^{-1})^{de} + 1 \right) \\
&\quad \cdot (U_1^{-1})^{kk} (U_4^{-1})^{ll} U_1^{mn} U_3^{no} U_4^{op} (U_3^{-1})^{pq} \\
&= 24 \left(\int dU_1 U_1^{ab} (U_1^{-1})^{fd} U_1^{mn} (U_1^{-1})^{kk} \int dU_2 U_2^{bc} (U_2^{-1})^{ef} U_2^{gh} (U_2^{-1})^{ji} \right. \\
&\quad \cdot \int DU_3 U_3^{de} (U_3^{-1})^{ca} U_3^{ij} (U_3^{-1})^{hg} U_3^{no} (U_3^{-1})^{pm} \int dU_4 U_4^{op} (U_4^{-1})^{ll} \\
&\quad - \int dU_1 U_1^{ab} (U_1^{-1})^{fd} U_1^{mn} (U_1^{-1})^{kk} \int dU_2 U_2^{bc} (U_2^{-1})^{ef} \\
&\quad \cdot \int DU_3 U_3^{de} (U_3^{-1})^{ca} U_3^{no} (U_3^{-1})^{pm} \int dU_4 U_4^{op} (U_4^{-1})^{ll} \\
&\quad - \int dU_1 U_1^{mn} (U_1^{-1})^{kk} \int dU_2 U_2^{ab} (U_2^{-1})^{dc} \int DU_3 U_3^{cd} (U_3^{-1})^{ba} U_3^{no} (U_3^{-1})^{pm} \int dU_4 U_4^{op} (U_4^{-1})^{ll} \\
&\quad \left. + \int dU_1 U_1^{ab} (U_1^{-1})^{fd} \int DU_3 U_3^{no} (U_3^{-1})^{pm} \int dU_4 U_4^{op} (U_4^{-1})^{ll} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 24(\hat{U}_4(a, b, f, d, m, n, k, k)\hat{U}_4(b, c, e, f, g, h, j, i)\hat{U}_6(d, e, c, a, i, j, h, g, n, o, p, m)\hat{U}_2(o, p, l, l) \\
&\quad - \hat{U}_4(a, b, f, d, m, n, k, k)\hat{U}_2(b, c, e, f)\hat{U}_4(d, e, c, a, n, o, p, m)\hat{U}_2(o, p, l, l) \\
&\quad - \hat{U}_2(m, n, k, k)\hat{U}_2(a, b, d, c)\hat{U}_4(c, d, b, a, n, o, p, m)\hat{U}_2(o, p, l, l) \\
&\quad + \hat{U}_2(m, n, k, k)\hat{U}_2(n, o, p, m)\hat{U}_2(o, p, l, l)) \\
&= 24\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 6. \tag{7.71}
\end{aligned}$$

Graph mit Schlaufe V

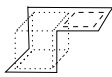
Nr.	$\mathcal{O}(\mathbf{K}, \beta_{\min})$	Vorfaktoren	$S(S)$	Graph	$2N_G/d(d-1)$	$\int DU$
1.	8,8	$-32x^6y$	-1		$16(d-2)^2$	4

Tabelle 7.11: Äußere Plaquetierung des Graphen mit Schlaufe V

Cluster-Graphen









Nr.	$\mathcal{O}(\mathbf{K}, \beta_{\min})$	Vorfaktoren	$S(S)$	$a(\mathcal{C})$	Graph	$2N_G/d(d-1)$	$\int DU$
1.	8,4	$64y^2$	1	$-\frac{1}{2}$		1	$3 \cdot 3 = 9$
2.	4,8	$-8yx^6$	-1	-1		$2(d-2)$	$3 \cdot 4 = 12$
3.	8,8	$64yx^6$	1	-1		$12(d-2)$	$3 \cdot 4 = 12$
4.	8,8	$64yx^6$	$\frac{1}{2}$	-1		$2(d-2)$	$3 \cdot 4 = 12$
5.	8,8	$32yx^6$	$-\frac{1}{2}$	-1		$2(d-2)$	$-3 \cdot 4 = -12$
6.	8,8	$64yx^6$	1	-1		$12(d-2)$	$3 \cdot 4 = 12$
7.	8,6	$64x^6$	$\frac{1}{2}$	-1		$2(d-2)$	$1 \cdot 4 = 4$
8.	8,6	$32x^6$	$-\frac{1}{2}$	-1		$2(d-2)$	$1 \cdot 4 = 4$

Tabelle 7.12: Cluster-Graphen

Addiert man nun alle Beiträge und ersetzt die Koeffizienten der Charakterentwicklung durch ihre Entwicklungen in β , so ergibt sich das zentrale Ergebnis meiner Arbeit: die freie Plaquetteenergie

$$\begin{aligned}
& -F_P(\beta, K) \\
&= -\beta \\
&\quad +16 K^8 + \left(768 + \frac{1024 (d-2)}{3}\right) K^{12} \\
&\quad +\beta^2 \left(\frac{1}{8} + \left[K^4 + 6 K^8 + \mathcal{O}(K^{10})\right]\right) \\
&\quad +\beta^4 \left(-\frac{1}{384} + \left[-\frac{K^4}{16} - \frac{d-1}{3} K^6 + \left(-\frac{19}{10} + \frac{8d}{5} - \frac{2d^2}{3}\right) K^8 + \mathcal{O}(K^{10})\right]\right) \\
&\quad +\beta^6 \left(\frac{1}{9216} + \frac{d-2}{3072} + \left[\left(\frac{1}{240} + \frac{d-2}{64}\right) K^4 + \left(-\frac{1}{54} - \frac{5d}{432}\right) K^6 \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \left(\frac{113}{1440} + \frac{3(d-2)}{8} - \frac{107d}{360} + \frac{7d^2}{36}\right) K^8 + \mathcal{O}(K^{10})\right]\right) \\
&\quad +\beta^8 \left(\frac{29}{184320} - \frac{d}{12288} + \left[\left(\frac{167}{46080} - \frac{5(d-2)}{1536} - \frac{d}{512}\right) K^4 + \left(\frac{113}{11520} - \frac{11d}{3840}\right) K^6 \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \left(\frac{42479}{604800} - \frac{67(d-2)}{256} + \frac{1439d}{28800} - \frac{1601d^2}{17280} + \frac{d^3}{48}\right) K^8 + \mathcal{O}(K^{10})\right]\right) \quad (7.72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{d=4}{=} -\beta \\
&\quad +16 K^8 + \frac{4352 K^{12}}{3} \\
&\quad +\beta^2 \left(\frac{1}{8} + \left[K^4 + 6 K^8 + \mathcal{O}(K^{10})\right]\right) \\
&\quad +\beta^4 \left(-\frac{1}{384} - \left[\frac{K^4}{16} + K^6 - \frac{37 K^8}{6} + \mathcal{O}(K^{10})\right]\right) \\
&\quad +\beta^6 \left(\frac{7}{9216} + \left[\frac{17 K^4}{480} - \frac{7 K^6}{108} + \frac{3961 K^8}{1440} + \mathcal{O}(K^{10})\right]\right) \\
&\quad +\beta^8 \left(-\frac{31}{184320} + \left[-\frac{493 K^4}{46080} - \frac{19 K^6}{11520} - \frac{12169 K^8}{30240} + \mathcal{O}(K^{10})\right]\right). \quad (7.73)
\end{aligned}$$

Auf analytischem Wege wird es kaum möglich sein, noch höhere Ordnungen zu bekommen, da

- die Anzahl der fermionischen Schleifen exponentiell mit ihrer Länge anwächst [BB],
- die Zahl der Möglichkeiten der Plaquetteierung erheblich zunimmt,
- die Berechnung der Beiträge dieser neuen Graphen nach dem Verfahren von M. CREUTZ zu aufwendig wird.

Die freie Energie kann nun dazu benutzt werden, um Monte-Carlo-Simulationen für große Gluino-Massen bzw. starke Kopplungen zu testen, indem man zum Beispiel den Erwartungswert des Wechselwirkungsterms $S_W := \bar{\lambda}_\alpha^a(y) M_{\alpha,\beta}^{ab}(y,x) \lambda_\beta^b(x)$ bestimmt. So ist

$$\left\langle \sum_{\langle x,y \rangle} \bar{\lambda}_\alpha^a(y) M_{\alpha,\beta}^{ab}(y,x) \lambda_\beta^b(x) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial K} \ln Z[\beta, K], \quad (7.74)$$

so dass

$$\begin{aligned}
\langle S_W \rangle &= -\frac{\partial}{\partial K} F(K, \beta) \\
&= 768 K^7 + x^2 (384 K^3 + 4608 K^7) \\
&\quad + x^4 (128 K^3 + 9216 K^5 - 69632 K^7) \\
&\quad + x^6 \left(\frac{47104 K^3}{15} + \frac{45056 K^5}{3} + \frac{1734656 K^7}{5} \right) \\
&\quad + x^8 \left(\frac{-60928 K^3}{15} + \frac{105472 K^5}{15} + \frac{158715904 K^7}{315} \right) + \mathcal{O}(x^{10}) \quad (7.75)
\end{aligned}$$

ist. Auch die Approximation der mittleren inneren Plaquetteenergie kann aus F_p durch Ableiten nach β leicht gewonnen werden.

$$\begin{aligned}
E_P(K, \beta) &= \langle \text{Tr } U_P \rangle = \frac{\int D U D \lambda \text{ Tr } U_P e^{-S^\Lambda[U, \lambda]}}{\int D U D \lambda e^{-S^\Lambda[U, \lambda]}} \\
&= 2 \cdot \left(1 - \frac{\partial}{\partial \beta} F_p(K, \beta) \right) \\
&= x (2 + 16 K^4 + 96 K^8) + x^3 \left(\frac{-64 K^4}{3} + 512 K^6 - \frac{9280 K^8}{3} \right) \\
&\quad + x^5 \left(8 + \frac{5728 K^4}{15} + \frac{2048 K^6}{9} + \frac{413248 K^8}{15} \right) \\
&\quad + x^7 \left(-16 - \frac{65216 K^4}{45} - \frac{186368 K^6}{135} - \frac{3097856 K^8}{945} \right) + \mathcal{O}(x^9) \quad (7.76)
\end{aligned}$$

Die Abbildung 7.7 zeigt die Abhängigkeit dieser Größe von β .

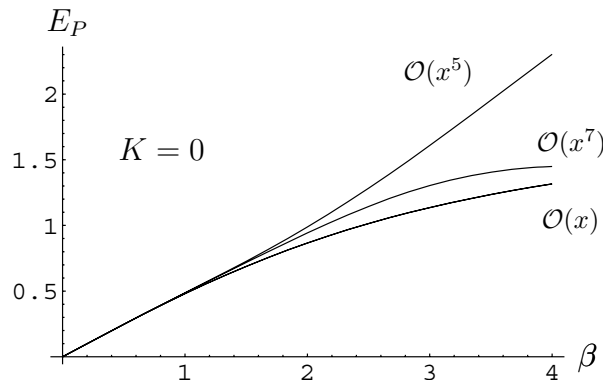


Abbildung 7.7: Die Plaquetteenergie E_P in Abhängigkeit von β für $K = 0$ in unterschiedlichen Approximationsstufen

Man kann erkennen, dass im Bereich etwa von $\beta < 1.9$ die Reihe in den verschiedenen Approximationen relativ stabil ist. So ist in diesem Bereich die Abweichung der verschiedenen Ordnungen kleiner als 10%.

Den Einfluss der Gluinofelder durch den Hoppingparameter kann man an den Graphen aus Abbildung 7.8 ablesen.

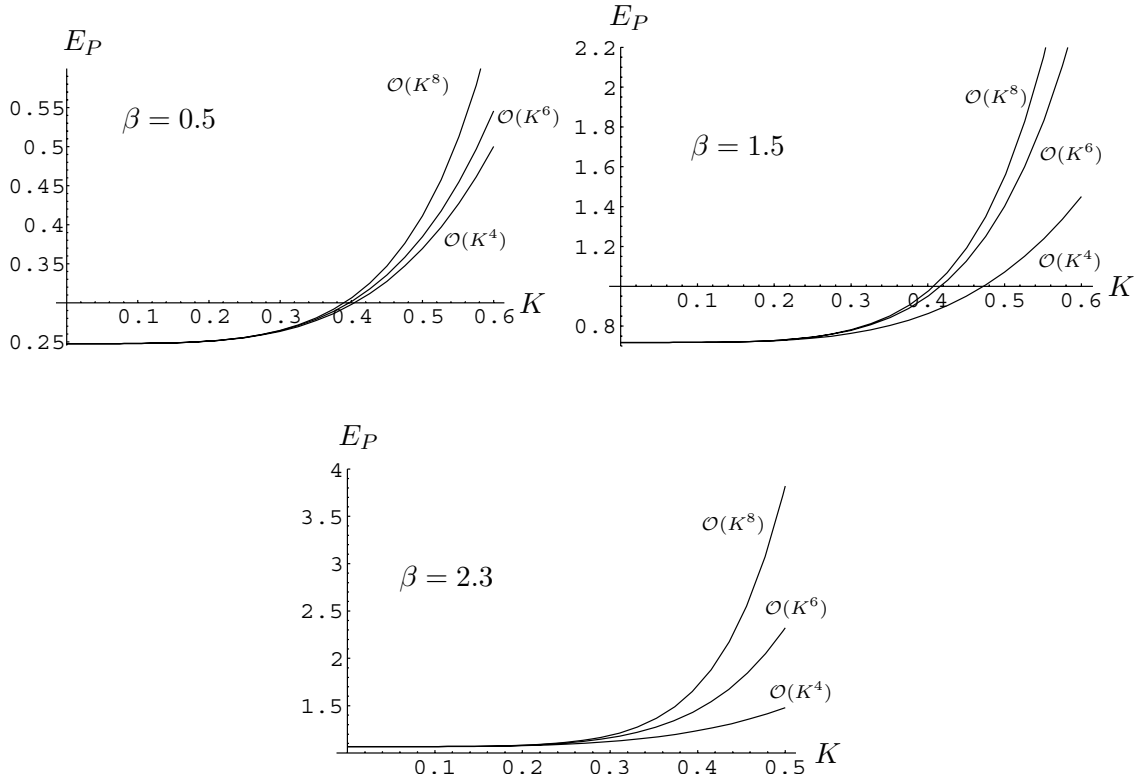


Abbildung 7.8: Die Plaquetteenergie für verschiedene Werte für K

Die Plaquetteenergie wächst mit K und höheren Ordnungen von K . Dies bedeutet, dass die Wirkung der Fermionfelder einer kleineren Kopplung g in der reinen Eichtheorie entsprechen würde. Desweiteren sieht man, dass bis zu etwa $K = 0.3$ die Reihen in den verschiedenen Ordnungen stabil sind ($< 10\%$, Abb 7.9).

Schließlich liefern die Größen A_6 und A_8

$$A_6 = \frac{E_P(K^6) - E_P(K=0)}{E_P(K=0)} \cdot 100\%, \quad A_8 = \frac{E_P(K^8) - E_P(K=0)}{E_P(K=0)} \cdot 100\% \quad (7.77)$$

die relativen Korrekturen der Gluinofelder für K^6 bzw. K^8 in Abbildung 7.9. Sie bestätigen den geringen Einfluss für kleine Werte von K .

Die Untersuchungen der DESY-Münster-Kollaboration mit dem Multi-Bosonischen Algorithmus von M.LÜSCHER [Ca] konzentrierten sich vor allem auf Analysen in der Nähe des kritischen Punktes K_{cr} . Für $\beta = 2.3$ gab es hierfür erste Anzeichen eines Phasenübergangs bei einem Wert von

$$K_{\text{cr}} = 0.1955(5). \quad (7.78)$$

In der Nähe dieses Wertes sollten die analytische Berechnungen keine guten Übereinstimmungen liefern können, da hier vor allem Effekte in den Beiträgen höherer Ordnungen dominieren.

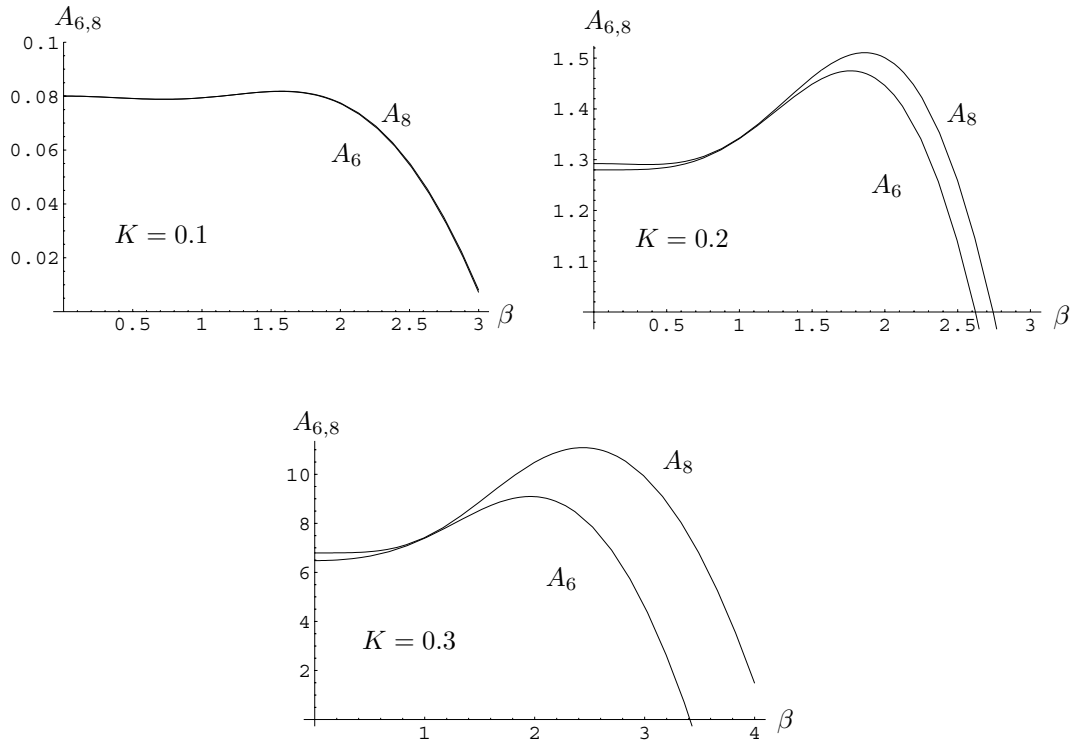


Abbildung 7.9: Die relativen Korrekturen der reinen SU(2)-Eichtheorie durch die Gluinofelder

Darüberhinaus wurde mit β zwischen 2.0 und 2.3 ein für die Aussagekraft der Reihe relativ großer Wert gewählt. Im Hinblick auf den Kontinuumsimes, der für $\beta \rightarrow \infty$ erreicht wird, stehen kleine β -Werte für die numerischen Untersuchungen nicht im Mittelpunkt. Aus diesem Grund waren keine aussagekräftigeren Daten verfügbar.

Dennoch habe ich meine Ergebnisse mit denen der Kollaboration [Fa],[Ta] und [Mo] verglichen (Tab. 7.13).

Die Abweichungen bestätigen diese Erwartungen, insbesondere die größeren Differenzen in der Nähe des kritischen Punktes. Auch erkennt man die Tendenz, dass für anwachsende K E_P steigt. Der zweite Wert aus [Mo] zeigt aufgrund des kleineren β -wertes erwartungsgemäß eine größere Übereinstimmung.

Schließlich sollte erwähnt werden, dass die gute Übereinstimmung natürlich vor allem der Starkkopplungsentwicklung der reinen Eichtheorie für ($K = 0$) zu verdanken ist, da der Einfluss von K in diesem Wertebereich bei unter 1.5% liegt.

$\beta = 2.3, 12^3 \times 24$ -Gitter

K	E_P (Simulation)	E_P (Entwicklung)	rel. Abw.
0.0	1.2144(4)	1.0679	12.0%
0.16	1.2294(4)	1.0733	12.7%
0.17	1.2352(8)	1.0750	12.9%
0.18	1.2464(6)	1.0771	13.6%
0.185	1.2552(2)	1.0783	14.1%
0.194	1.274036(2)	1.0809	15.2%

$\beta = 2.0, 4^3 \times 8$ -Gitter

K	E_P (Simulation)	E_P (Entwicklung)	rel. Abw.
0.150	1.015	0.934448	7.9%

Tabelle 7.13: Vergleich der numerischen mit den analytischen Ergebnissen anhand der Plaquetteenergie.

Kapitel 8

Die Gluino-Glueball Masse

Mit den in den letzten Kapiteln erarbeiteten Verfahren der Starkkopplungsentwicklungen können nun auch analytische Näherungen der Multiplettmassen auf dem Gitter, genauer ihrer Massenlücken (mass gap), durch den exponentiellen Abfall der Korrelationsfunktionen zugehöriger Operatoren

$$\langle \Gamma(x)\Gamma(y) \rangle = \frac{1}{Z} \int DUD\lambda \Gamma(x)\Gamma(y) \exp(-S^\Lambda(U, \lambda)) \quad (8.1)$$

mit $Z = \int DUD\lambda \exp(-S^\Lambda(U, \lambda))$ im Limes großer Zeiten T bestimmt werden:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle \Gamma(x)\Gamma(x+T) \rangle = Ce^{-mT} \quad (8.2)$$

Im Zentrum steht dabei hier der schon in [Lu] in erster Näherung berechnete Gluino-Gluon-Operator

$$\Gamma(x) = \text{Tr}(U_1\lambda(x)) = \text{Tr}(U_1T^a)\lambda^a(x). \quad (8.3)$$

Wie bei der freien Energie kann nun auch die Korrelationsfunktion als eine Summe über Beiträge von zusammenhängenden Graphen X geschrieben werden, die beide Operatoren $\Gamma(x), \Gamma(x+T)$ einschließen müssen. Diese enthält aufgrund der Normierung durch Z keine unverbundenen Vakuumgraphen [Cr2].

$$\langle \Gamma(x)\Gamma(x+T) \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{X_i} \Phi(X_i) \quad (8.4)$$

In [Lu] wurde schon gezeigt, dass die Konstruktion eines solchen Graphen aus rein fermionischen Bändern der HPE nicht möglich ist.

8.1 Der Graph der führenden Ordnungen in K und β

Den Graphen X_0 der führenden Ordnung in β zeigt Abbildung 8.1. Die äußeren Plaquetten dieses Schlauches entstammen der Charakterentwicklung, während die Operatorplaquetten die beiden Frontseiten bilden.

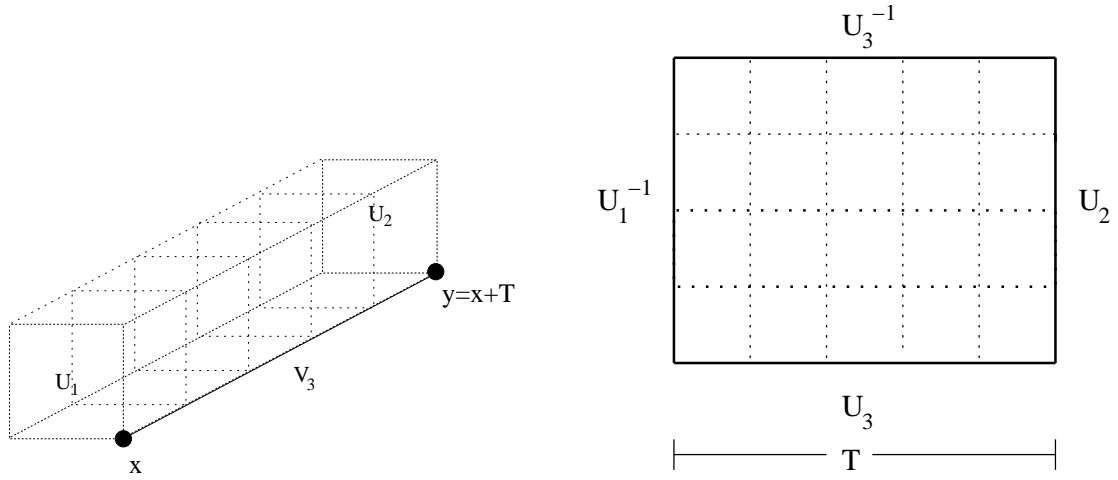


Abbildung 8.1: Links: Der Graph X_0 zur Korrelationsfunktion des Gluino-Glue-Operators in niedrigster Ordnung von β . Die Majorana-Fermionen (Punkte) sind über ein gemeinsames Band miteinander verbunden. Die Operatorplaquetten sind hervorgehoben. Rechts: Der Graph X_0 aufgeklappt in zwei Dimensionen.

Der Beitrag dieses Graphen $\Phi(X_0)$ in der Entwicklung (8.4) ist

$$\begin{aligned}
\Phi(X_0) &= K^T d_{\frac{1}{2}}^{4T} x^{4T} \int DU \prod_{i=1}^{4T} \chi_{\frac{1}{2}}(U_{P_i}) \cdot \text{Tr}(U_1 T^a) \text{Tr}(U_2 T^b) \\
&\quad \cdot \left\langle \lambda_{\alpha}^a(x) \bar{\lambda}_{\delta}^d(x) (M_3)_{x\delta, y\epsilon}^{de} \lambda_{\epsilon}^e(y) \lambda_{\beta}^b(y) \right\rangle_{x,y} \\
&= K^T d_{\frac{1}{2}}^{4T} x^{4T} \int DU \prod_{i=1}^{4T} \chi_{\frac{1}{2}}(U_{P_i}) \cdot \text{Tr}(U_1 T^a) \text{Tr}(U_2 T^b) \\
&\quad \cdot \left\langle \lambda_{\alpha}^a(x) \bar{\lambda}_{\delta}^d(x) \right\rangle_x (M_3)_{x\delta, y\epsilon}^{de} \left\langle \lambda_{\epsilon}^e(y) \lambda_{\beta}^b(y) \right\rangle_y \\
&= K^T d_{\frac{1}{2}}^{4T} x^{4T} \int DU \prod_{i=1}^{4T} \chi_{\frac{1}{2}}(U_{P_i}) \cdot \text{Tr}(U_1 T^a) \text{Tr}(U_2 T^b) \cdot ((-M_3)_{x\alpha, y\epsilon}^{ab} C_{\epsilon\beta}). \quad (8.5)
\end{aligned}$$

Mit $(1 - \gamma_{\mu})(1 - \gamma_{\mu}) = 2(1 - \gamma_{\mu})$ ist

$$\begin{aligned}
-(M_3)_{x\alpha, y\epsilon}^{ab} C_{\epsilon\beta} &= -\underbrace{[(1 - \gamma_{\mu}) \cdots (1 - \gamma_{\mu})]_{\alpha\beta}}_{T\text{-mal}} [V_{\mu}^T(x) \cdots V_{\mu}^T(x + (T - 1))]^{ab} \\
&= -2^{T-1} [(1 - \gamma_{\mu}) C]_{\alpha\beta} \cdot (V_3^T)^{ab}, \quad (8.6)
\end{aligned}$$

und man bekommt mit der üblichen Form der Eichintegration über die Schlauchplaquetten

$$\begin{aligned}
\Phi(X_0) &= -K^T x^{4T} 2^{T-1} d_{\frac{1}{2}} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\alpha\beta} \int DU' V_3^{ba} \text{Tr}(U_1 T^a) \text{Tr}(U_2 T^b) \text{Tr}(U_1 U_3^{-1} U_2^{-1} U_3) \\
&= -(2Kx^4)^T d_{\frac{1}{2}} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\alpha\beta} \int DU' \text{Tr}(U_3 T^b U_3^{-1} T^a) \text{Tr}(U_1 T^a) \text{Tr}(U_2 T^b) \text{Tr}(U_1 U_3^{-1} U_2^{-1} U_3) \\
&= -Ad_{\frac{1}{2}} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\alpha\beta} \\
&\quad \cdot \int DU' U_3^{ab} (T^b)^{bc} (U_3^{-1})^{cd} (T^a)^{da} U_1^{ef} (T^b)^{fe} U_2^{gh} (T^b)^{hg} U_1^{ij} U_3^{jk} (U_2^{-1})^{kl} (U_3^{-1})^{li} \\
&= -Ad_{\frac{1}{2}} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\alpha\beta} \cdot \left((T^a)^{fe} \int DU_1 U_1^{ef} U_1^{ij} \right) \left((T^b)^{hg} \int DU_2 U_2^{gh} (U_2^{-1})^{kl} \right) \\
&\quad \cdot \left((T^b)^{bc} (T^a)^{da} \int DU_3 U_3^{ab} (U_3^{-1})^{cd} U_3^{jk} (U_3^{-1})^{li} \right) \\
&= -Ad_{\frac{1}{2}} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\alpha\beta} \cdot \left(\frac{1}{2} ((T^a)^{ji} - (T^a)^{ij}) \right) \left(\frac{1}{2} (T^b)^{kl} \right) \left(\frac{2}{3} (T^b)^{lk} (T^a)^{ji} \right) \\
&= \frac{A}{6} \left(\text{Tr}(T^a T^a) \text{Tr}(T^b T^b) \right) d_{\frac{1}{2}} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\alpha\beta} \\
&= \frac{3A}{4} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\alpha\beta} = \frac{3}{4} (2Kx^4)^T [(1 - \gamma_\mu) C]_{\alpha\beta}. \tag{8.7}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Gluino-Glue-Masse in erster Näherung

$$m_{g\tilde{g}}^0 = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln(\Phi(X_0)) = - \ln(2Kx^4) = -4 \ln(x) - \ln(K) - \ln(2) \tag{8.8}$$

mit $A = (2Kx^4)^T$. Vergleicht man dieses Ergebnis mit der ersten Näherung der skalaren 0^+ -Glueball-Masse aus der Charakterentwicklung der reinen $SU(2)$ -Eichtheorie [MM]

$$m_{0^+}^0 = -4 \ln(x), \tag{8.9}$$

so ist

$$m(\text{Gluino-Glueball}) = m(\text{Glueball}) - \ln(K) - \ln(2). \tag{8.10}$$

Für kleine K -Werte, wie etwa $1/K = 5.55$, bedeutet dies

$$m(\text{Gluino-Glueball}) = m(\text{Glueball}) + 1, \tag{8.11}$$

was in diesem Fall in etwa mit den numerischen Ergebnissen in Abbildung 4.2 übereinstimmt. Die Korrekturen dieser Masse $\Delta m_{g\tilde{g}}$ in höheren Ordnungen von β und K

$$e^{-m_{g\tilde{g}} T} = e^{-(m_{g\tilde{g}}^0 + \Delta m) T} = e^{-m_{g\tilde{g}}^0 T} \left(1 - \Delta m T + \frac{1}{2} \Delta m^2 T^2 - \dots \right) \tag{8.12}$$

erhält man durch Modifikationen von X_0 , wie z.B. durch das Anheften weiterer Plaquetten oder durch eine stückweise Verlängerung des fermionischen Bandes. Durch die Gittertranslations- und Rotationsinvarianz müssen sämtliche Operatoren mit Abstand T in allen Orientierungen berücksichtigt werden. Es bietet sich daher an, zunächst den Operator $\Gamma(x)$ fest zu fixieren und $\Gamma(x + T)$ zu variieren.

8.2 Die ersten Korrekturen in β

Plaziert man innerhalb des Schlauches von X_0 n Plaquetten in der adjungierten Darstellung, so bekommt man mit den Graphen $X_1(n)$ ($n = 1, 2, \dots$) die Korrekturen in β . Den einfachsten Graphen $X_1(1)$ nach der Integration über die Schlauchplaquetten zeigt Abbildung 8.2. Sein Beitrag ist demnach

$$\begin{aligned} \Phi(X_1) = & -Ad_{\frac{1}{2}}^2 d_1 y [(1 - \gamma_\mu) C]_{\alpha\beta} \int DU \operatorname{Tr}(U_1 U_5 U_4 U_5^{-1}) \operatorname{Tr}(U_5 U_6 T^b U_6^{-1} U_5^{-1} T^a) \\ & \cdot \operatorname{Tr}(U_4^{-1} U_6 U_2 U_6^{-1}) (\operatorname{Tr}(U_4) \operatorname{Tr}(U_4^{-1}) - 1) \operatorname{Tr}(U_1 T^a) \operatorname{Tr}(U_2 T^b). \end{aligned} \quad (8.13)$$

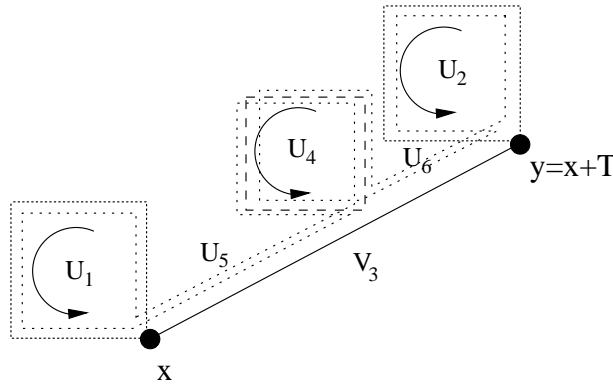


Abbildung 8.2: Gluino-Glueball-Graph $X_1(1)$ in β -Korrektur nach der Integration der Schlauchplaquetten

Da die schriftliche Ausmultiplikation zuviel Zeit in Anspruch genommen hätte, wurde erneut hierfür MATHEMATICA verwendet, mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \Phi(X_1(1)) &= 12yA[(1 - \gamma_\mu)C]_{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{72} \operatorname{Tr}(T^a T^a) \operatorname{Tr}(T^b T^b) \right) \\ &= -\frac{12}{72} yA[(1 - \gamma_\mu)C]_{\alpha\beta} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) = -\frac{y}{2} \Phi(X_0). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Zusammen ist dies

$$\Phi(X_0) \left(1 - (T - 1) \frac{y}{2} + \mathcal{O}(\beta^4) \right). \quad (8.15)$$

Entwickelt man den Logarithmus dieser Summe in seine Reihe ($T' = T - 1$), so ist

$$\begin{aligned} -T' \Delta m(\beta) &= \ln \left(1 - T' \frac{y}{2} + \mathcal{O}(\beta^4) \right) \\ &= -T' \frac{y}{2} + \mathcal{O}(\beta^4) \\ &\Rightarrow \Delta m(\beta) = \frac{y}{2} + \mathcal{O}(\beta^4). \end{aligned} \quad (8.16)$$

8.3 Korrekturen in K

Die ersten K -Korrekturen folgen aus den Graphen X_2 , die man erhält, wenn man zusätzlich Knicke in das fermionische Band von X_0 einbaut. Es sei im folgenden $X_2(n_1, \dots, n_i)$ ein Graph mit i Knicken und jeweils n_i Querschritten. Das einfachste Beispiel sind die $2(T-1)$ Graphen $X_2(1)$ aus Abbildung 8.3. Die Eichintegration der Schlauchplaquetten unterscheidet sich nicht von X_0 (Abb. 8.3 rechts).

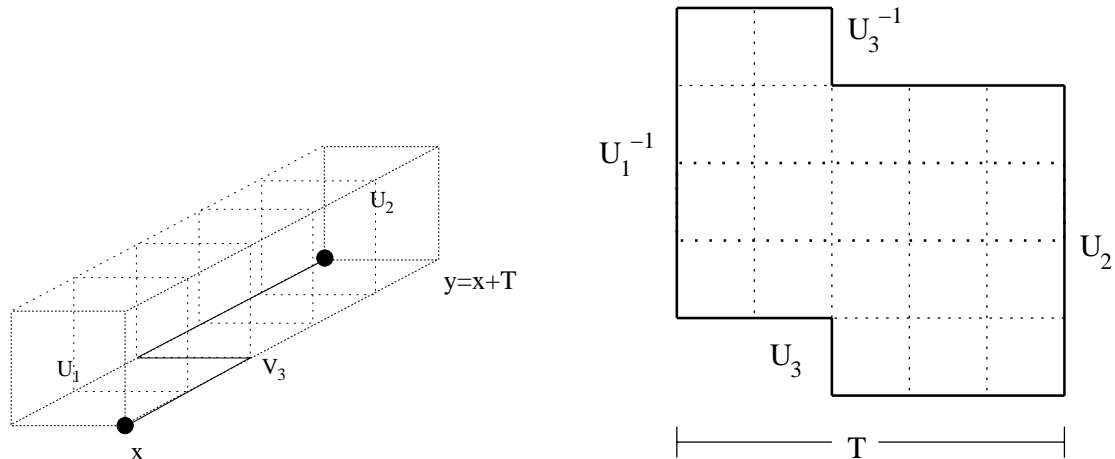


Abbildung 8.3: Gluino-Glueball-Graph X_2 in erster Massenkorrektur in K (links), aufgeklappt in zwei Dimensionen (rechts)

Da sich auch das Γ -Produkt aus den $(1 - \gamma_\mu)$ -Faktoren wegen

$$\dots (1 - \gamma_\mu)(1 \pm \gamma_\nu)(1 - \gamma_\mu) \dots = \dots (1 - \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu) \dots = \dots 2(1 - \gamma_\mu) \dots \quad (8.17)$$

nicht ändert, folgt

$$\Phi(X_2(1)) = K\Phi(X_0). \quad (8.18)$$

Dieses Verfahren kann nun bis zu drei Verzweigungen fortgeführt werden. Die Eichintegration ist dabei immer gleich. Lediglich das Γ -Produkt und die Potenzen von K ändern sich. Die Tabelle 8.1 zeigt die daraus resultierenden, zusätzlichen Faktoren und ferner die Anzahl N_{X_2} , mit der diese Graphen aus X_0 aufgebaut werden können. Dabei werden lediglich die effektiven Änderungen des Γ -Produktes angegeben.

Für zwei Querschritte in jeweils zwei unterschiedliche Richtungen ergeben sich folgende Γ -Produkte

$$\dots (1 - \gamma_\mu)(1 + \gamma_\nu)(1 + \gamma_\rho)(1 - \gamma_\mu) \dots = \dots 2(1 - \gamma_\mu)(1 + \gamma_\nu\gamma_\rho) \dots$$

bzw.

$$\begin{aligned} \dots (1 - \gamma_\mu)(1 + \gamma_\rho)(1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu) \dots &= \dots 2(1 - \gamma_\mu)(1 + \gamma_\rho\gamma_\nu) \dots \\ &= \dots 2(1 - \gamma_\mu)(1 - \gamma_\nu\gamma_\rho) \dots \end{aligned} \quad (8.19)$$

Addiert man beide Beiträge, so heben sich die Anteile proportional zu $\gamma_\nu\gamma_\rho$ bzw. zu $\gamma_\rho\gamma_\nu$ gerade auf. Daher führen zwei Querschritte, wie in Tabelle 8.1 angegeben, zu keiner Änderung des

X_2	K	Γ	N_X
$X_2(1)$	K	1	$2(T-1)$
$X_2(2)$	K^2	1	$2(T-1)$
$X_2(1,1)$	K^2	1	$\binom{T-1}{2}2^2$
$X_2(1,1,1)$	K^3	1	$\binom{T-1}{3}2^3$
$X_2(3)$	K^3	2	$2(T-1)$
$X_2(2,1)$	K^3	1	$2\binom{T-1}{2}2^2$

Tabelle 8.1: Die faktoriellen, effektiven Änderungen des Γ -Produktes und die Anzahl der Graphen N_X

Γ -Produktes. Zusammengenommen ergibt sich die Reihe

$$\Phi(X_0) \left(1 + T'(2K) + (T')^2 \frac{(2K)^2}{2!} + \frac{(2K)^3}{3!} T' (T' + 2) + \mathcal{O}(K^4) \right). \quad (8.20)$$

Entwickelt man erneut den Logarithmus dieser Reihe, so ist

$$\begin{aligned} -T' \Delta m(K) &= \ln \left(1 + T'(2K) + (T')^2 \frac{(2K)^2}{2!} + \frac{(2K)^3}{3!} T' (T' + 2) + \mathcal{O}(K^4) \right) \\ &= 2KT' + 2K^2 T'^2 + \frac{4}{3} K^3 (T'^3 + 2T') - \frac{1}{2} (4K^2 T'^2 + 8T'^3 K^3) \\ &\quad + \frac{1}{3} (8K^3 T'^3) + \mathcal{O}(K^4) \\ &= T' \left(2K + \frac{8}{3} K^3 + \mathcal{O}(K^4) \right) \\ &\Rightarrow \Delta m(K) = - \left(2K + \frac{8}{3} K^3 + \mathcal{O}(K^4) \right). \end{aligned} \quad (8.21)$$

Abschließend ergibt sich also eine approximative Gluino-Glueball-Masse von

$$m_{g\tilde{g}} = -4 \ln(x) - \ln(K) - \ln(2) - \left(2K + \frac{8}{3} K^3 \right) + \frac{y}{2} + \mathcal{O}(K^4, x^4). \quad (8.22)$$

Die Korrekturen bestätigen zwar die Tendenz aus Abbildung 4.2, wonach mit wachsendem K die Massenwerte abnehmen, sie sind aber vom Betrag her zu klein. Allerdings muss man auch hier den relativ großen Wert von β berücksichtigen, der den Vergleich mit einer Starkkopplungsentwicklung erschwert bzw. unmöglich macht. Zudem wurde K in der Nähe seines vermuteten kritischen Wertes gewählt.

Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel der Arbeit war es, physikalische Größen einer $N=1$ $SU(2)$ -Super-Yang-Mills-Theorie mit Majorana-Fermionen in adjungierter Darstellung durch eine analytische Entwicklung in den beiden Parametern der Theorie β und K approximativ zu bestimmen, um sie etwa mit den numerischen Ergebnissen der DESY-Münster-Kollaboration zu vergleichen.

In den ersten Kapiteln wurde neben einer Einführung in das Thema ein Einblick in die Rechnungen mit reellen Grassmann-Feldern gegeben. Dieses war notwendig, um die in den Funktionalintegralen der Super-Yang-Mills-Theorie vorkommenden Majorana-Fermionfelder zu beschreiben. Im Anschluss daran wurden nach einem graphischen Verfahren von M. CREUTZ die $SU(N)$ -Gruppenintegration und - darauf aufbauend - die Regeln der Integration der Gruppe $SO(3)$ bzw. der $SU(2)$ in adjungierter Darstellung eingeführt. Letztere entspricht nicht, wie zuvor in [Lu] noch angenommen, der $SU(3)$ -Integration.

Mit Hilfe der Doppelreihenentwicklung in Form graphischer Starkkopplungsentwicklungen, der Hoppingparameter-Entwicklung des fermionischen und der Charakter-Entwicklung des bosonischen Boltzmannfaktors, ist es gelungen, über den Momenten-Kumulanten-Formalismus die freie Plaquetteenergie F_P ohne äußere Quellen bis zur 8. Ordnung in β und K in beliebigen Dimensionen d zu bestimmen. Dies stellt im Rahmen zweier äquivalenter Hoppingparameter-Entwicklungen, zum einen über das Wicksche Theorem über Grassmann-Felder und zum anderen über die Formulierung einer effektiven Wirkung, eine systematische Erweiterung und Verbesserung der in [Lu] entwickelten Methoden dar. Sie kann in Zukunft dazu verwendet werden, Monte-Carlo-Simulationen mit massiven Gluinos und damit in ungequenchter Approximation, aber weit entfernt vom physikalisch interessanteren Kontinuumslimit zu testen. Bei der Analyse der Ergebnisse dieser Arbeit zeigte sich, dass ein größerer Hoppingparameterwert zu einer vergrößerten Plaquetteenergie E_P führt. Allerdings sind die hier behandelten Ordnungen noch zu klein, um auf diesem Wege genauere Aussagen über den Einfluss der Fermionfelder machen zu können. Leider kann man nicht hoffen, zu noch höheren Korrekturen zu gelangen, da die Anzahl der fermionischen Schleifen in den Subgraphen mit zunehmender Länge exponentiell anwächst.

Der Vergleich der Plaquetteenergie E_P mit den numerisch gewonnenen Werten für einen relativ großen β -Wert ($\beta = 2.3$) zeigte starke Abweichungen. Für einen kleineren Wert von $\beta = 2$ wurden diese erwartungsgemäß geringer. Für noch kleinere Werte für β waren keine Daten verfügbar, so dass in diesem für die Reihe eigentlich interessanteren und aussagekräftigen Bereich kein Vergleich mit den numerischen Resultaten möglich war.

Bei der approximativen Bestimmung der Gluino-Glueball-Masse im letzten Kapitel ist man mit

ähnlichen Problemen konfrontiert. So konnten zwar die ersten Massenkorrekturen berechnet werden, die Rechnungen zu den höheren Korrekturen hingegen gestalteten sich aber schwieriger als erwartet. So führt die Hinzunahme von weiteren Eichplaquetten zu immer größer werdenden und damit immer schwerer zu berechnenden Gruppenintegralen. Zusätzlich müssen noch eventuelle Änderungen in der fermionischen Kante der Graphen berücksichtigt werden. Für die Korrekturen in den Ordnungen von K^3 und β^2 konnten Beiträge gefunden werden, der Vergleich mit den numerischen Resultaten für $\beta = 2.3$ liefert auch hier keine sinnvollen Übereinstimmungen. Die Tendenz zu fallenden Gluino-Glueball-Massen mit größer werdenden Hoppingparametern konnte bestätigt werden. Doch auch hier wird eine Starkkopplungsentwicklung nur für kleinere β -Werte sinnvolle Ergebnisse liefern.

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass es mit den in dieser Arbeit verwendeten analytischen Möglichkeiten nur unter großem Aufwand möglich ist, die dynamischen Effekte der Gluinos in den Bereichen höherer Ordnungen in der Kopplung, wie sie in der reinen SU(2)-Eichtheorie erreicht werden, zu untersuchen. Als ein Begleiter der numerischen Rechnungen auf dem Gitter ist ein solcher Ansatz aber sinnvoll, und es ist denkbar, auch in Zukunft mit diesen oder ähnlichen Verfahren Aussagen über die physikalischen Größen und Teilchenmassen im Regime starker Kopplungen machen zu können.

Anhang A

Die $SU(N_c)$ -Farb­algebra

Die $SU(N_c)$ -Yang-Mills-Theorie mit Fermionen wie die QCD mit $SU(3)$ sowie die supersymmetrische Yang-Mills-Theorie mit $SU(2)$ enthält Symmetrien der Lagrangedichte bezüglich der $SU(N_c)$ -Eichtransformationen der Felder in der Form

$$\phi(x) \rightarrow \Lambda(x)\phi(x). \quad (\text{A.1})$$

$\Lambda(x)$ ist dabei ein Element der $SU(N)$ -Eichgruppe, der Gruppe aller speziellen unitären Matrizen, für die

$$\Lambda^\dagger \Lambda = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \det \Lambda = 1 \quad (\text{A.2})$$

ist. Jedes Element dieser Gruppe kann über die unitäre Form

$$\Lambda(x) = e^{i\theta^a(x)T^a} \quad (a = N_c^2 - 1) \quad (\text{A.3})$$

eindeutig einem Gruppenparameter $\theta(x)$ zugeordnet werden. T^a sind die Generatoren der Gruppe, deren Anzahl für den Fall der $SU(N_c)$ $N_c^2 - 1$ beträgt und die Gruppen-Dimension festlegt. Für diese wegen (A.2) hermiteschen und spurfreien Matrizen bedingt die Gruppeneigenschaft mit Hilfe der BAKER-CAMBPELL-HAUSDORFF-Formel (4.57), dass der Kommutator zweier beliebiger Generatoren selbst wieder ein Generator oder eine Linearkombination aus den Generatoren ist

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c. \quad (\text{A.4})$$

f_{abc} sind die Strukturkonstanten der Gruppe, die, wie der Name schon sagt, die Struktur der Generatoralgebra (Lie-Algebra) und damit im Speziellen auch ihre Darstellung festlegt (siehe adjungierte Darstellung). Der Antikommutator hingegen ist

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N_c}\delta_{ab} + d_{abc}T^c \quad \text{mit} \quad d_{abc} = 2 \text{Tr}(\{T^a, T^b\}T^c), \quad (\text{A.5})$$

wobei d_{abc} wegen der zyklischen Invarianz der Spur symmetrisch in seinen Indizes ist. Außerdem gelten die Spuridentitäten

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4}(d_{abc} + if_{abc}) \quad (\text{A.7})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) = \frac{1}{4N_c}\delta_{ab}\delta_{cd} + \frac{1}{8}(d_{abe} + if_{bae})(d_{cde} + if_{cde}), \quad (\text{A.8})$$

die man leicht aus den Kommutator- und Antikommutatorbeziehungen herleiten kann. Ferner ist

$$f_{acd}f_{bcd} = \delta_{ab}N_c. \quad (\text{A.9})$$

Wie in jeder Lie-Algebra lässt sich über den Kommutator ein Produkt definieren

$$A \circ B = [A, B] \quad A, B \in SU(N_c) \quad (\text{A.10})$$

mit den Eigenschaften der

$$\begin{aligned} \text{Antisymmetrie :} & \quad A \circ B = -B \circ A \\ \text{Jacobi-Identität:} & \quad (A \circ B) \circ C + (C \circ A) \circ B + (B \circ C) \circ A = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Die Jacobi-Identität führt mit (A.4) somit zu

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = f_{bcd}f_{ade} + f_{cad}f_{bde} + f_{abd}f_{cde} = 0, \quad (\text{A.12})$$

eine Gleichung, die alle darstellenden Matrizen erfüllen müssen.

A.1 Die fundamentale Darstellung

In dieser Darstellung, die auch die definierende Darstellung genannt wird, bestehen die Generatoren aus $N_c \times N_c$ -Matrizen. Im Fall der $SU(2)$ sind dies Vielfache der drei hermiteschen und spurfreien Pauli-Matrizen

$$T^a = \frac{1}{2}\sigma^a \quad (a = 1, 2, 3), \quad (\text{A.13})$$

mit

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Aus den (Anti-)Kommutatorbeziehungen

$$\begin{aligned} [\sigma^a, \sigma^b] &= 2i\epsilon_{abc}\sigma^c & \iff & \quad [T^a, T^b] = i\epsilon_{abc}T^c \\ \{\sigma^a, \sigma^b\} &= 2\delta_{ab}\mathbb{1} & \iff & \quad \{T^a, T^b\} = \frac{1}{2}\delta_{ab}\mathbb{1} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

(ϵ_{abc} ist der total-antisymmetrische Tensor 3. Stufe) erhält man die Konstanten der $SU(2)$ zu

$$f_{abc} = \epsilon_{abc} \quad d_{abc} = 0 \quad (\text{A.16})$$

und daher mit (A.8,A.7)

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T^a T^b T^c) &= \frac{1}{4}i\epsilon_{abc} \\ \text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) &= \frac{1}{8}(\delta_{ab}\delta_{cd} - \epsilon_{abe}\epsilon_{cde}). \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Die Felder als Elemente des zugehörigen Darstellungsraumes, sind zweidimensionale Vektoren, sogenannte Spinoren, genauer Tensoren 1. Stufe, mit dem für sie typischen Transformationsverhalten

$$\phi(x) \rightarrow \exp(i\theta^a(x)T^a)\phi(x). \quad (\text{A.18})$$

A.2 Die adjungierte Darstellung

Neben der fundamentalen ist auch die adjungierte, irreduzible Darstellung der $SU(N_c)$ von Bedeutung. Die Darstellungsmatrizen sind in diesem Falle $(N_c^2 - 1) \times (N_c^2 - 1)$ -Matrizen, die durch die Strukturkonstante f_{abc} festgelegt sind

$$(T^a)_b^c = if_{abc} = [\text{ad}(T^a)]_b^c, \quad (\text{A.19})$$

und aufgrund der Jacobi-Identität (A.12) so per Konstruktion die notwendige Kommutatorbeziehung (A.4) erfüllen.

In dieser Darstellung können die Felder als Elemente des Darstellungsraumes nun wahlweise erneut als 3-dimensionale Tensoren 1. Stufe mit dem entsprechenden Transformationsverhalten (A.18) und den Matrizen in adjungierter Darstellung gewählt werden, oder aber alternativ dazu und in dieser Arbeit verwendet, selbst als Matrizen bzw. Tensoren 2.Stufe beschrieben werden. So wird das Feld ϕ definiert durch

$$(\phi)_j^i = \phi^a (T^a)_j^i \quad (\text{A.20})$$

und sein Transformationsverhalten wird entsprechend einem Tensor 2.Stufe bestimmt durch

$$\phi \rightarrow \Lambda \phi \Lambda^\dagger = (\exp(i\theta^a T^a)) \phi (\exp(i\theta^a T^a))^\dagger. \quad (\text{A.21})$$

Die Äquivalenz beider Darstellungsräume kann mit der Formel

$$\begin{aligned} e^Y X e^{-Y} &= X + [X, Y] + \frac{1}{2!} [Y, [Y, X]] + \dots \\ &= [\exp \Delta_Y] X \quad (\Delta_Y \mathcal{O} = [Y, \mathcal{O}]) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

leicht eingesehen werden.

Anhang B

Das Momenten-Kumulanten Theorem

Bezeichne I eine Menge von Elementen, so ist ein Moment eine (symmetrische) Abbildung von Partitionen P aus I auf die reellen Zahlen

$$\langle \alpha, \dots, \beta \rangle \in \mathbb{R} \quad \text{für} \quad \alpha, \dots, \beta \in P \subset I \quad (\text{B.1})$$

mit der Zusatzbedingung

$$\langle \emptyset \rangle = 0. \quad (\text{B.2})$$

Auf dem Raum dieser Momente lässt sich eine Multiplikation $\langle \rangle_3 = \langle \rangle_1 \circ \langle \rangle_2$ definieren über

$$\langle \alpha, \dots, \beta \rangle_3 = \sum_{P_2} \langle \gamma, \dots, \delta \rangle_1 \langle \epsilon, \dots, \phi \rangle_2, \quad (\text{B.3})$$

wobei die Summe über alle Möglichkeiten, $\{\alpha, \dots, \beta\}$ in jeweils zwei Partitionen $\{\gamma, \dots, \delta\}$ und $\{\epsilon, \dots, \phi\}$ zu zerlegen (P_2), läuft. Die Identität

$$\mathbb{1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

ist selbst kein Moment, da sie nicht (B.2) gehorcht. Erfüllt die \circ -Exponentialfunktion eines Momentes $[]$ bezüglich dieser Multiplikation die Identität

$$\begin{aligned} \exp_{\circ}[] &= \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} []^n := 1 + \langle \rangle \\ \Leftrightarrow \langle \alpha, \dots, \xi \rangle &= \sum_P [\alpha, \dots, \beta][\gamma, \dots, \delta] \dots [\mu, \dots, \nu] \end{aligned}$$

so heißt das Moment $[]$ die Kumulante zum Moment $\langle \rangle$.

Beispiele:

$$\langle \alpha \rangle = [\alpha] \quad (\text{B.5})$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = [\alpha, \beta] + [\alpha][\beta] \quad (\text{B.6})$$

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned}
 [] &= \ln_o(\mathbb{1} + \langle \rangle) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \langle \rangle^n \\
 &\Leftrightarrow [\alpha, \dots, \xi] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{P_n} n! \langle \alpha, \dots, \beta \rangle \dots \langle \gamma, \dots, \delta \rangle \\
 &= \sum_P (-1)^{n-1} (n-1)! \underbrace{\langle \alpha, \dots, \beta \rangle \dots \langle \gamma, \dots, \delta \rangle}_{n\text{-Faktoren}}. \tag{B.7}
 \end{aligned}$$

Beispiele:

$$[\alpha] = \langle \alpha \rangle \tag{B.8}$$

$$[\alpha, \beta] = \langle \alpha, \beta \rangle - \langle \alpha \rangle \langle \beta \rangle \tag{B.9}$$

Mit Hilfe dieser Momente lassen sich zwei wichtige Sätze formulieren.

1. Sei F eine erzeugende Funktion von $\langle \rangle$:

$$F(\{\phi_\alpha\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \frac{1}{n!} \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_n} \tag{B.10}$$

und es gelte: $\langle \rangle = \langle \rangle_1 \circ \langle \rangle_2$, dann ist

$$F(\{\phi_\alpha\}) = F_1(\{\phi_\alpha\}) \cdot F_2(\{\phi_\alpha\}) \tag{B.11}$$

Mit Worten. Ist $\langle \rangle$ das \circ -Produkt zweier Momente, so ist die zugehörige erzeugende Funktion das Produkt der erzeugenden Funktionen dieser beiden Momente.

Dies führt direkt zum Haupttheorem des Momenten-Kumulanten-Formalismus

2. Sei f eine erzeugende Funktion von $[]$, dann ist

$$1 + F(\{\phi_\alpha\}) = \exp f(\{\phi_\alpha\}). \tag{B.12}$$

(Momenten-Kumulanten-Theorem)

Außerdem gilt:

Sind A und B zwei Teilmengen aus I , in die das Moment von I faktorisiert

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \langle \beta_1, \dots, \beta_m \rangle \quad \text{mit} \quad \alpha_i \in A, \beta_i \in B, \tag{B.13}$$

dann verschwindet die Kumulante immer dann, wenn sie gemeinsam Elemente aus A und B enthält

$$[\alpha_1, \dots, \alpha_j, \beta_1, \dots, \beta_k] = 0 \quad \text{für} \quad j \neq 0, k \neq 0 \tag{B.14}$$

Den Beweis liefert man durch vollständige Induktion.

Anhang C

Beweis II

Gezeigt werden soll

$$Pf(A) = \pm\sqrt{\det(A)} \quad A: \text{antisymmetrische } n = 2m\text{-dimensionale Matrix} \quad (\text{C.1})$$

Beweis:

Da A antisymmetrisch ist, ist iA hermitesch. Sie kann also mit einer unitären Transformation diagonalisiert werden und hat reelle Eigenwerte.

$$A_d = U i A U^\dagger \quad (\text{C.2})$$

Diese Eigenwerte treten paarweise mit beiden Vorzeichen auf. Denn es ist

$$\det(iA - \lambda 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det((iA - \lambda 1)^T) = \det(-iA - \lambda 1) = -\det(iA + \lambda 1) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Wenn also λ ein Eigenwert ist, so ist es auch $-\lambda$.

$$A_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & \\ 0 & -\lambda_1 & & & \\ & & \lambda_2 & 0 & \\ & & 0 & -\lambda_2 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Eine zweite unitäre Transformation R

$$R = \begin{pmatrix} R_2 & & \\ & R_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

mit der 2×2 -Matrix

$$R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}, \quad R_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = R_2^{-1} \quad (\text{C.6})$$

bewirkt ein „Umkippen“ der Eigenwerte dieser Diagonalmatrix. Denn man kann leicht nachprüfen, dass

$$R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_2^\dagger = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

ist.

Es existiert also eine unitäre Transformation, vermittelt durch RU , so dass

$$A' = -iRA_dR^\dagger = -iRUiAU^\dagger R^\dagger = RU AU^\dagger R^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ -\lambda_1 & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & \\ & & -\lambda_2 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

und somit $\det(A') = \det(A)$. (C.8)

Mit $\theta_i = (RU)_{ij}\xi_j$ und der Jacobiante 1 (unitäre Transformation) ist

$$\begin{aligned} \int D\xi \exp\left(\sum_{ij} \xi_i A_{ij} \xi_j\right) &= \int D\theta \exp\left(\sum_{ij} \theta_i A'_{ij} \theta_j\right) \\ &= \int D\theta \exp(2(\lambda_1\theta_1\theta_2 + \dots + \lambda_{n/2}\theta_{n-1}\theta_n)) \\ &= \int d\theta_n d\theta_{n-1} (\dots (d\theta_2 d\theta_1 \exp 2\lambda_1\theta_1\theta_2) \dots) \exp 2\lambda_m\theta_{n-1}\theta_n \\ &= 2^m \lambda_1 \dots \lambda_m = \pm \sqrt{2^n \lambda_1^2 \dots \lambda_m^2} = \pm \sqrt{\det(2A')} = \pm \sqrt{\det(2A)}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$Pf(A) = \int D(\xi) \exp \frac{1}{2} \sum_{ij} \xi_i A_{ij} \xi_j = \pm \sqrt{\det(A)}. \quad (\text{C.9})$$

Anhang D

Die Gamma-Matrizen

Die Gamma-Matrizen erfüllen in der minkowskischen Formulierung die Clifford-Algebra

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad g: \text{metrischer Tensor} \quad (\text{D.1})$$

In meiner Arbeit verwende ich ausschließlich Gamma-Matrizen in euklidischer Formulierung ($\gamma = \gamma^{\text{euklidisch}}$) mit

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (\text{D.2})$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2,3}^{\text{euklidisch}} &= -i\gamma_{1,2,3}^{\text{Minkowski}} \\ \gamma_4^{\text{euklidisch}} &= -i\gamma_4^{\text{Minkowski}} = \gamma_4^{\text{Minkowski}} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

oder explizit

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Sie erfüllen folgende Gleichungen

$$(\gamma_\mu)^2 = \mathbb{1} \quad (\text{D.5})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu) = \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu \quad (\text{D.6})$$

Außerdem definiert man

$$\gamma_5 := \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4. \quad (\text{D.7})$$

Unter anderem für die Berechnung der Γ -Spuren waren folgenden Eigenschaften der Gamma-Matrizen nützlich:

$P(\{\gamma\}) = P_g(\{\gamma\}) + P_u(\{\gamma\})$ sei ein beliebiges Polynom aus γ -Matrizen, wobei P_u die Terme mit einer ungeraden Anzahl und P_g die Terme mit einer geraden Anzahl von γ -Matrizen enthält, so ist

$$\dots (1 \pm \gamma_\mu) P(\{\gamma\}) (1 \pm \gamma_\mu) \dots = \dots 2(1 \pm \gamma_\mu) P_u(\{\gamma\}) \dots \quad (\text{D.8})$$

$$\dots (1 \pm \gamma_\mu) P(\{\gamma\}) (1 \mp \gamma_\mu) \dots = \dots 2(1 \pm \gamma_\mu) P_g(\{\gamma\}) \dots \quad (\text{D.9})$$

So ist z.B.

$$(1 + \gamma_\mu)(1 + \gamma_\nu)(1 + \gamma_\mu) = 2(1 + \gamma_\mu), \quad (\text{D.10})$$

aber

$$(1 + \gamma_\mu)(1 + \gamma_\nu)(1 - \gamma_\mu) = 2(1 + \gamma_\mu)\gamma_\nu. \quad (\text{D.11})$$

Anhang E

Höhere SO(3)-Gruppenintegrale

1. $j = 1, k = 1, l = 0$

$$\begin{aligned}
\hat{V}_5(i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4, i_5, j_5) &= \int dU V_{i_1 j_1} V_{i_2 j_2} V_{i_3 j_3} V_{i_4 j_4} V_{i_5 j_5} \\
&= \prod_{k=1}^5 \frac{\partial}{\partial M_{i_k j_k}} \left(\frac{3!! \cdot 4}{6! \cdot 3!} \delta_{kl} \delta_{mn} \epsilon_{opq} \epsilon_{rst} M_{km} M_{ln} M_{or} M_{ps} M_{qt} \right) \\
&= \frac{2}{6!} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} \epsilon_{i_3 i_4 i_5} \epsilon_{j_3 j_4 j_5} + P(\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \{i_3, j_3\}, \{i_4, j_4\}, \{i_5, j_5\})) \\
&= \frac{1}{30} (\delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} \epsilon_{i_3 i_4 i_5} \epsilon_{j_3 j_4 j_5} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{j_1 j_3} \epsilon_{i_2 i_4 i_5} \epsilon_{j_2 j_4 j_5} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{j_1 j_4} \epsilon_{i_2 i_3 i_5} \epsilon_{j_2 j_3 j_5} \\
&\quad + \delta_{i_1 i_5} \delta_{j_1 j_5} \epsilon_{i_2 i_3 i_4} \epsilon_{j_2 j_3 j_4} + \delta_{i_2 i_3} \delta_{j_2 j_3} \epsilon_{i_1 i_4 i_5} \epsilon_{j_1 j_4 j_5} + \delta_{i_3 i_4} \delta_{j_3 j_4} \epsilon_{i_1 i_2 i_5} \epsilon_{j_1 j_2 j_5} \\
&\quad + \delta_{i_4 i_5} \delta_{j_4 j_5} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3} + \delta_{i_2 i_5} \delta_{j_2 j_5} \epsilon_{i_1 i_3 i_4} \epsilon_{j_1 j_3 j_4} + \delta_{i_2 i_4} \delta_{j_2 j_4} \epsilon_{i_1 i_3 i_5} \epsilon_{j_1 j_3 j_5} \\
&\quad + \delta_{i_3 i_5} \delta_{j_3 j_5} \epsilon_{i_1 i_2 i_4} \epsilon_{j_1 j_2 j_4}) \tag{E.1}
\end{aligned}$$

2. $j = 3, k = 0, l = 0$ und $j = 0, k = 2, l = 0$ und $j = 1, k = 0, l = 1$

$$\begin{aligned}
\hat{V}_6(i_1, j_1, i_2, j_2, i_3, j_3, i_4, j_4, i_5, j_5, i_6, j_6) &= \int dU V_{i_1 j_1} V_{i_2 j_2} V_{i_3 j_3} V_{i_4 j_4} V_{i_5 j_5} V_{i_6 j_6} \\
&= \prod_{k=1}^6 \frac{\partial}{\partial M_{i_k j_k}} \left[\left(\frac{5!!}{3! \cdot 7!} [\text{Tr} M M^T]^3 \right) + \left(\frac{3!! \cdot 4^2}{2! \cdot 7!} [\det M]^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3!!}{7!} (\text{Tr} M M^T) \left(\frac{1}{2} \text{Tr} [M M^T]^2 - \text{Tr} M M^T M M^T \right) \right) \right] \\
&= \prod_{k=1}^6 \frac{\partial}{\partial M_{i_k j_k}} \left[\frac{4}{7!} (\text{Tr} M M^T)^3 + \frac{3!! \cdot 4^2}{2! \cdot 7!} [\det M]^2 - \frac{3}{7!} (\text{Tr} M M^T) (\text{Tr} M M^T M M^T) \right] \\
&= \frac{1}{1260} \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_3 i_4} \delta_{j_3 j_4} \delta_{i_5 i_6} \delta_{j_5 j_6} + \frac{1}{7560} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} \epsilon_{j_1 j_2 j_3} \epsilon_{i_4 i_5 i_6} \epsilon_{j_4 j_5 j_6} \\
&\quad - \frac{1}{1680} \delta_{i_1 i_2} \delta_{j_1 j_2} \delta_{i_3 i_6} \delta_{j_3 j_4} \delta_{i_4 i_5} \delta_{j_6 j_5} + P(\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \{i_3, j_3\}, \{i_4, j_4\}, \{i_5, j_5\}, \{i_6, j_6\}) \tag{E.2}
\end{aligned}$$

Für die Integrale über Spuren von V-Matrizen errechnet man mit diesen Ergebnissen - die Winkelintegrale dienen der Kontrolle:

$$\int DU (\text{Tr } V)^2 = \int DU V_{aa}V_{bb} \hat{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot (1 + 2 \cos \varphi)^2 = 1 \quad (\text{E.3})$$

$$\int DU (\text{Tr } V)^3 = \int DU V_{aa}V_{bb}V_{cc} \hat{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot (1 + 2 \cos \varphi)^3 = 1 \quad (\text{E.4})$$

$$\int DU (\text{Tr } V)^4 = \int DU V_{aa}V_{bb}V_{cc}V_{dd} \hat{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot (1 + 2 \cos \varphi)^4 = 3 \quad (\text{E.5})$$

$$\int DU (\text{Tr } V)^5 = \int DU V_{aa}V_{bb}V_{cc}V_{dd}V_{ee} \hat{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot (1 + 2 \cos \varphi)^5 = 6 \quad (\text{E.6})$$

$$\int DU (\text{Tr } V)^6 = \int DU V_{aa}V_{bb}V_{cc}V_{dd}V_{ee}V_{ff} \hat{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot (1 + 2 \cos \varphi)^6 = 15 \quad (\text{E.7})$$

Das Gruppenintegral mit der Potenz 6 wurde mit Hilfe des Computeralgebra-Programms MATHEMATICA berechnet.

Literaturverzeichnis

- [AKM] D. Amati, K. Konishi, Y. Meurice, G.C. Rossi und G. Veneziano: *Non-perturbative aspects in supersymmetric gauge theories*, Phys.Rep. **162**, 169 (1988)
- [BB] B. Berg, A. Billoire: *A note on γ traces for the Wilson-action in the continuum limit*, Lett.Math.Phys. **6**, 293 (1982)
- [Be] F.A. Berezin: *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York (1966)
- [BDI] R. Balian, J.M. Drouffe und C.Itzkson: *Gauge Fields on a Lattice. III. Strong-Coupling Expansion and Transition Points*, Phys.Rev. **D11**, 2104 (1975); Erratum: Phys.Rev **D19**, 2514 (1975)
- [BK] I.L. Buchbinder S.M. Kuzenko: *Ideas and Methodes of Supersymmetry and Supergravity*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia (1995)
- [Br] H.N. Brown et al.: *Precise measurement of the positive muon anomalous magnetic moment*, Phys.Rev.Lett. **86**, 2227 (2001)
- [Ca] I.Campos, A. Feo, R. Kirchner, S. Luckmann, I. Montvay, G. Münster, K. Spanderen and J. Westphalen: *Monte Carlo Simulation of $SU(2)$ Yang-Mills Theory with Light Gluinos*, Eur.Phys.J. **C.11**, 507 (1999)
- [CM] S. Coleman und J.Mandula: *All possible Symmetries of the S Matrix*, Phys. Rev. **159**,1251 (1967)
- [CP] CP-PACS Kollaboration: *Quenched Light Hadron Spektrum*, Phys.Rev.Let. **84**, 238 (2000)
- [Cr1] M. Creutz: *On invariant Integration over $SU(N)$* , J.Math.Phys. **19** (10), 2043 (1978)
- [Cr2] M. Creutz: *Quarks, gluons and lattices*, Cambridge University Press (1983)
- [CV] G. Curci und G. Veneziano: *Supersymmetry and the Lattice: A Reconciliation?*, Nucl.Phys. **B292** (1987) 555
- [DHN] R. Dashen, U. Heller und H. Neuenberger: *Analytical results for mixed action $SU(2)$ lattice gauge theory*, Nucl.Phys. **B215**, 360 (1983)
- [DZ] J.-M. Drouffe und J.-B. Zuber: *Strong coupling and mean field methods in lattice gauge theories*, Phys.Rep. **102**, 1 (1983)

- [EMS] K.-E. Eriksson, N. Mukunda, B.-S. Skagerstam: *Coherent-State Representation of a non-abelian charged Quantum Field*, Phys.Rev. **D24**, 2615 (1981)
- [Fa] unveröffentlichte Notizen von F. Farchioni (2002)
- [FGS] G.R. Farrar, G. Gabadadze und M. Schwetz: *The Spectrum of Softly Broken $N=1$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Phys.Rev. **D58**, 015009 (1998)
- [Ga1] T. Galla: *Supersymmetrische und Chirale Ward-Identitäten in einer diskretisierten $N=1$ -SUSY-Yang-Mills-Theorie*, Diplomarbeit an der WWU Münster (1999)
- [Ga2] T. Galla: *Supersymmetrie*, unveröffentlichtes Manuskript (1998)
- [GG] L. Girardello, M.T. Grisau: *Soft Breaking of Supersymmetry*, Nucl.Phys. **B194**, 65 (1982)
- [GL] Yu.A. Gol'fand, E.P. Likhtman: *Extension of the Algebra of Poincaré Group Generators and Violation of P Invarianz*, JETP Let. **13**, 323 (1971)
- [GR] W. Greiner, J. Reinhardt: *Theoretische Physik Band 7A - Feldquantisierung*, Verlag Harri Deutsch (1994)
- [HSL] R. Haag, J.T. Lopuszanski, M. Sohnius: *All possible Generators of Supersymmetries of the S Matrix*, Nucl.Phys. **B88**, 257 (1975)
- [Ko] H. Kopka: *L^AT_EX, Einführung Band 1*, Addison-Wesley, 2.Auflage (1996)
- [KS] H. Kalka, G. Soff: *Supersymmetrie*, Teubner Studienbücher (1997)
- [La] P. Langacker: *Implication of Precision Experiments. Precision Test of the Standard Electroweak Model*, World Scientific, Singapore (1995)
- [Lu] S. Luckmann: *Supersymmetrische Feldtheorien auf dem Gitter*, Dissertation, WWU Münster (2001)
- [MM] I. Montvay, G. Münster: *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1994)
- [Mo] I. Montvay: *An algorithm for gluinos on the lattice*, Nucl.Phys. **B466**, 259 (1996)
- [Mu] G. Münster: *High-temperature expansions for the free energy of vortices and the string tension in lattice gauge theories*, Nucl.Phys. **B180**, 23 (1981)
- [NN1] H.B. Nielsen, M. Ninomiya: *Absence of neutrinos on a lattice. 1. Proof by homotopy theory*, Nucl.Phys. **B185**, 20 (1981); erratum: **B195**, 541 (1981)
- [NN2] H.B. Nielsen, M. Ninomiya: *Absence of neutrinos on a lattice. 2. Intuitive topological proof*, Nucl.Phys. **193**, 173 (1981)
- [NSVZ] V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein, V. Zakharov: *Exact Gell-Mann-Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories from Instanton Calculus*, Nucl.Phys. **B229**, 381 (1983)

- [Ro] H.J. Rothe: *Lattice Gauge Theories - An Introduction*, World-Scientific Lecture Notes in Physics - Vol 43, Singapore (1992)
- [Ry] L.H. Ryder: *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Second Edition (1996)
- [So] M.F. Sohnius: *Introducing Supersymmetry*, Phys.Rep. **128**, 39 (1985)
- [Sp] K. Spanderen: *Monte-Carlo-Simulationen einer $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie mit dynamischen Gluinos*, Dissertation an der WWU Münster (1998)
- [SS] A. Salam, J. Strathdee: *Super-Symmetry and Non-Abelian Gauges*, Phys.Lett. **B51**, 353 (1974)
- [SU] R.U. Sexl, H.K. Urbantke: *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer Verlag, Berlin (1976)
- [Su] L. Susskind: *Lattice fermions*, Phys.Rev. **D16**, 3031 (1975)
- [Ta] D. Talkenberger: *Monte-Carlo-Simulationen von Modellen der Elementarteilchenphysik mit dynamischen Fermionen*, Dissertation, WWU Münster (1997)
- [VY] G. Veneziano, S. Yankielowicz: *An Effektive Lagrangian for the Pure $N=1$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Phys.Lett. **B113**, 231 (1982)
- [Wa] D. Wagner, *Introduction to Supersymmetry at the NLC*,
gefunden unter: <http://hep-www.colorado.edu/~nlc/SUSY-Wagner/susy/susynlc.html>
(1998)
- [Wi1] K.G. Wilson: *Confinement of Quarks*, Phys.Rev. **D10**, 2445, (1974)
- [Wi2] K.G. Wilson: *Quarks and Strings on a Lattice*, in New Phenomena in Subnuclear Physics, ed A.Zichichi, Plenum Press, New York, Part A, p. 69, (1977)
- [Wi3] K.G. Wilson unveröffentlicht zitiert in [DZ]
- [Wo] St. Wolfram: *Mathematica*, Addison-Wesley Publishing Company, Zweite Auflage (1992)
- [WZ] J. Wess, B. Zumino: *Supergauge invariant extension of quantum electrodynamics*, Nucl.Phys. **B78**, 1 (1974)
- [Zi] J. Zinn-Justin: *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press (1999)

Weitere Hilfsmittel

- Diese Arbeit wurde mit dem Textsatzsystem $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ erstellt.
- Für einige Rechnungen und Graphen habe ich das Computeralgebrasystem „MATHEMATICA“ in der Version 4.3 von Wolfram Research verwendet.
- Die Graphiken wurden sowohl mit dem Programm „xfig V 3.2“ als auch mit dem $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ -Zusatzpaket „pstricks“ hergestellt.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich nun bei allen bedanken, die mir während meiner Arbeit beiseite gestanden haben, auch bei denjenigen, die hier vielleicht nicht direkt genannt werden.

So gilt mein Dank:

- an erster Stelle Prof. Dr. Gernot Münster, der die Betreuung meiner Arbeit übernommen und sich jederzeit bereitwillig mit meinen Fragen und Problemen auseinandergesetzt hat, nicht zuletzt auch für seine aufmunternden Worte.
- meinen Kommilitonen und Zimmergenossen Kevin Johnson, Enno E. Scholz, Marko Kleine Berkenbusch und Björn Schwentker für die anregenden Gespräche und die angenehme Arbeitsatmosphäre.
- Burghard Grüter aus der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Manfred Stingl für die gemeinsamen Diskussionen und seine oftmals sehr hilfreichen Tipps.
- Roland Peetz und Dr. Jochen Heitger für ihre Verbesserungsvorschläge.
- allen noch nicht genannten Mitgliedern der Arbeitsgruppen Münster und Stingl, und den Mitarbeitern und Sekretärinnen des Instituts.

Nicht zuletzt aber möchte ich mich bei meinen Eltern Elsi Wissel-Jütter und Dr. Helmut Wissel bedanken. Ohne ihre moralische Unterstützung und die Finanzierung meines Studiums wäre diese Arbeit wohl nicht zustande gekommen.

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, im Januar 2002

