

## Diplomarbeit

---

# Phasenstruktur der gitterregularisierten Twisted-Mass-QCD für drei Quarkflavours in chiraler Störungstheorie

---

Martin Wilde

Münster, 19. Juli 2009

Betreuer: Prof. Dr. Gernot Münster

Diese korrigierte Version unterscheidet sich nur geringfügig von der am 20. Juli 2009 im Prüfungssekretariat eingereichten Arbeit. Die Verbesserungen sind hauptsächlich orthographischer und stilistischer Natur.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2 QCD - Symmetrien und Symmetriebrechung</b>	<b>9</b>
2.1 Das Standardmodell der Elementarteilchen . . . . .	9
2.2 Die QCD-Lagrangedichte und ihre Symmetrien . . . . .	10
2.3 Spontane und explizite Symmetriebrechung . . . . .	12
2.3.1 Spontane Symmetriebrechung . . . . .	13
2.3.2 Goldstone-Bosonen . . . . .	13
2.3.3 Explizite Symmetriebrechung . . . . .	14
2.3.4 Spontane und explizite Symmetriebrechung in der QCD . . . . .	15
<b>3 Die Lagrangedichte der QCD in der chiralen Störungstheorie</b>	<b>17</b>
3.1 Goldstone-Bosonen als Freiheitsgrade der chiralen Störungstheorie . . . . .	17
3.2 Zählschema nach Weinberg . . . . .	19
3.3 Konstruktion der Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie bis $\mathcal{L}_4$ . . . . .	20
<b>4 Chirale Störungstheorie für Gitter-QCD</b>	<b>23</b>
4.1 Gitterformulierung der QCD . . . . .	23
4.1.1 Gitter-Wirkung nach Wilson . . . . .	23
4.1.2 Verbesserte Gitter-Wirkung - Symanzik-Wirkung . . . . .	26
4.2 Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie für Gitter-QCD . . . . .	28
<b>5 Twisted-Mass-QCD</b>	<b>31</b>
5.1 Twisted-Mass-QCD im Kontinuum . . . . .	31
5.2 Wilson-Twisted-Mass-QCD . . . . .	32
5.3 Twisted-Mass in der chiralen Störungstheorie . . . . .	33
5.4 Chirale Störungstheorie mit Twisted-Mass-Term für drei Quarkflavours . . . . .	33
<b>6 Phasenstruktur der Twisted-Mass-Gitter-QCD für zwei Quarkflavours</b>	<b>35</b>
6.1 Parametrisierung der chiralen Störungstheorie für zwei Quarkflavours . . . . .	35
6.2 Minima- und Phasenstruktur für zwei Quarkflavours . . . . .	36
6.2.1 Aoki-Szenario . . . . .	36
6.2.2 Normales Szenario . . . . .	37
<b>7 Entwicklung eines vereinfachten Potentials für drei Quarkflavours</b>	<b>39</b>
7.1 Parametrisierung der Feldkonfigurationsmatrix . . . . .	39
7.2 Einführung verschobener Quarkmassen und einer abkürzenden Notation . . . . .	41
7.3 Näherung des Potentials für kleine Quarkmassen . . . . .	42

<b>8 Phasenstruktur des Potentials bestehend aus den drei masseabhängigen Termen</b>	<b>45</b>
8.1 Betrachtung der drei masseabhängigen Terme ohne gedrehte Masse $\mu$ . . . . .	46
8.2 Betrachtung der drei masseabhängigen Terme einschließlich der gedrehte Masse $\mu$ . . . . .	47
<b>9 Phasenstruktur des um zwei dominante Terme erweiterten Potentials</b>	<b>53</b>
9.1 Phasenstruktur des Potentials mit $L_{WW} > 0$ und $L_{WW6} = L_{WW7} = 0$ . . . . .	54
9.1.1 Untersuchung ohne gedrehte u- und d-Quarkmassen . . . . .	54
9.1.2 Untersuchung mit gedrehten u- und d-Quarkmassen . . . . .	55
9.2 Phasenstruktur des Potentials mit $L_{WW} < 0$ und $L_{WW6} = L_{WW7} = 0$ . . . . .	58
9.2.1 Untersuchung ohne gedrehte u- und d-Quarkmassen . . . . .	58
9.2.2 Untersuchung mit gedrehten u- und d-Quarkmassen . . . . .	60
<b>10 Phasenstruktur unter Berücksichtigung aller neun Potentialterme</b>	<b>65</b>
10.1 Phasenstruktur des Potentials mit $L_{WW} > 0$ und $ L_{WW6}  =  L_{WW7}  \neq 0$ . . . . .	66
10.1.1 Untersuchung ohne Drehung der u- und d-Quarkmasse . . . . .	66
10.1.2 Untersuchung mit Drehung der u- und d-Quarkmasse . . . . .	68
10.2 Phasenstruktur des Potentials mit $L_{WW} < 0$ und $ L_{WW6}  =  L_{WW7}  \neq 0$ . . . . .	70
10.2.1 Untersuchung ohne Drehung der u- und d-Quarkmasse . . . . .	71
10.2.2 Untersuchung mit Drehung der u- und d-Quarkmasse . . . . .	72
<b>11 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>79</b>
<b>A Dirac-Matrizen</b>	<b>81</b>
A.1 Dirac-Matrizen im Minkowski-Raum . . . . .	81
A.2 Dirac-Matrizen im euklidischen Raum . . . . .	81
<b>B Gruppe SU(N)</b>	<b>83</b>
B.1 Gruppe SU(2) . . . . .	83
B.2 Gruppe SU(3) . . . . .	83
<b>C Verwendete Konstanten</b>	<b>85</b>
C.1 Größe der verwendeten Konstanten und LECs . . . . .	85
C.2 Für $N_f = 2$ verwendete Relationen . . . . .	86
C.3 Für $N_f = 3$ verwendete Relationen . . . . .	86
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>87</b>

# 1 Einleitung

Das Verhalten der experimentell gefundenen Elementarteilchen lässt sich heute sehr genau mit dem Standardmodell beschreiben. Dieses Modell liefert eine kombinierte Darstellung von drei der vier Grundkräfte der Natur. Die starke Wechselwirkung ist eine dieser vier elementaren Kräfte. Zu ihrer mathematischen Darstellung wird die Eichfeldtheorie Quantenchromodynamik (QCD) [1–3] verwendet. Die anderen vom Standardmodell beschriebenen Wechselwirkungen sind die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung. Die Gravitation als die vierte elementare Kraft findet im Standardmodell keine Berücksichtigung.

Die elementaren Teilchen, die vom Standardmodell beschrieben werden, sind zwölf Fermionen mit halbzahligen Spin, ergänzt durch 12 Antiteilchen, und zusätzlichen bosonischen Austauschteilchen.

Die Fermionen, die der QCD zugeordnet werden, sind die sechs Quarks, die in drei Generationen gruppiert werden. Diese sechs Quarks, die sich durch verschiedene *Flavours* voneinander unterscheiden, sind das up-, down-, strange-, charm- top- und bottom-Quark. Bezeichnet werden sie häufig mit ihrem Anfangsbuchstaben, so dass die drei Quark-Familien wie folgt geschrieben werden können:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

Die bosonischen Austauschteilchen der QCD werden Gluonen genannt. Diese masselosen und elektrisch ungeladenen Teilchen besitzen wie die Quarks einen weiteren Freiheitsgrad, der Farbe oder Farbladung genannt wird. Es existieren acht unterschiedlich farbgeladene Gluonen. Teilchen, die sich aus Quarks zusammensetzen, sogenannte Hadronen, sind immer “weiß”, was bedeutet, dass sie keine Farbladung tragen. Dies wird in der Natur erreicht, indem sich Zustände aus zwei Quarks bilden, die mit einer Farbe und der zugehörigen Antifarbe geladen sind. Ein solcher Zusammenschluss wird Meson genannt.

Eine weitere Möglichkeit, ein farbunladenes Teilchen zu erzeugen, ist die Verbindung von drei Quarks zu einem Baryon. Die Quarks tragen dabei jeweils eine der drei unterschiedlichen Farben oder Antifarben, so dass es analog zur additiven Farbmischung ebenfalls zu einem “weißen” Teilchen kommt. Dieses Zusammenhalten von Quarks in einem Quark-Paar oder Quark-Triplett wird als *Confinement* bezeichnet.

David Gross, Frank Wilczek und David Politzer entdeckten 1971 [4, 5], dass dieser Zusammenschluss bzw. die ihn bedingende Wechselwirkungsstärke für große Energien resp. kleine Abstände asymptotisch gegen Null geht, während für große Abstände resp. kleine Energien das besagte Confinement eintritt.

In der Feldtheorie der elektromagnetischen Wechselwirkung, der Quantenelektrodynamik, können Ergebnisse mittels Störungsrechnung gewonnen werden. Die Störungstheorie liefert ein Schema, um die Wechselwirkung in verschiedenen Ordnungen zu organisieren, wobei die Größe der Beiträge abnimmt und höhere Ordnungen nur Korrekturen zu den vorherigen Ordnungen darstellen. Das funktioniert aber nur bei Kopplungstärken  $< 1$ , was in der QED gegeben ist. In der QCD hingegen besitzt die Kopplungstärke für kleine Energien größere Werte; dadurch wird es schwierig, mittels QCD theoretische Vorhersagen für die starke Wechselwirkung bei kleinen Energien zu treffen.

Daher müssen bei kleinen Energien andere Wege gefunden werden, um Ergebnisse in der QCD zu gewinnen. Ein sehr verbreitetes Mittel sind dabei numerische Simulationen [6]. Diese Simulationen, z.B. mit Hilfe des Monte-Carlo-Algorithmus, werten die Formeln der QCD statistisch aus. Dazu ist es notwendig, die QCD für ein raumzeitliches Gitter zu formulieren, was als gitterregularisierte QCD oder kurz Gitter-QCD [7] bezeichnet wird. Außerdem werden in den Simulationen die Quarkmassen unphysikalisch groß gewählt, was die Simulationszeiten wesentlich verkürzt und somit Simulationen erst praktisch durchführbar macht. Um die Ergebnisse der numerischen Betrachtung auf das Kontinuum zu übertragen, werden die Simulationen für verschiedene Massen und Gittergrößen durchgeführt und anschließend zu physikalischen Massen und einer kontinuierlichen Raumzeit extrapoliert. Dabei ist jedoch nicht auszuschließen, dass durch eventuelle Phasensprünge bei der Variation der Quarkmassen diese Extrapolation ins Kontinuum fehlerbehaftet ist und deshalb angepasst werden muss.

Eine weitere Möglichkeit, Ergebnisse aus der Kontinuums-QCD zu gewinnen, bietet die chirale Störungstheorie ( $\chi$ PTh) [8]. Diese besitzt anders als die QCD nicht Quarks als Freiheitsgrade, sondern die für kleine Energien durch das Confinement auftretenden Hadronen. Bei sehr niedrigen Energien sind die vorherrschenden Hadronen die sehr leichten pseudoskalaren Mesonen. Somit beschreibt die chirale Störungstheorie als eine effektive Theorie die QCD bei kleinen Energien und bietet damit eine Möglichkeit, analytische Lösungen für diesen Energiebereich zu finden.

Ziel dieser Arbeit ist es nun, mittels chiraler Störungstheorie Phasensprünge der Gitter-QCD bei Variation der Massen zu ermitteln. Hier werden dazu drei Quarkflavours (up, down, strange) betrachtet. Die beiden leichtesten Quarks, das up- und das down-Quark, werden dabei als masseentartet angenommen. Als zusätzlicher Parameter wird eine axial verdrehte u- und d-Quarkmasse betrachtet. Diese wird in der Twisted-Mass-QCD (tmQCD) [9] verwendet, einer Methode der Gitter-QCD, um Gitterartefakte, d.h. Fehler, die durch die Diskretisierung auftreten, zu vermindern. Darüber hinaus unterbindet eine verdrehte Masse Nullmoden des Diracoperators, die eine statistische Auswertung erschweren.

In Kapitel 2 wird dazu eine kurze Einführung in die bisherige Entwicklung des Standardmodells und der QCD gegeben. Von besonderer Bedeutung sind dabei die chiralen Symmetrien der QCD-Lagrangedichte, da an Hand dieser die chirale Störungstheorie konstruiert wird. Darüber hinaus werden die spontane und explizite Brechung dieser Symmetrie behandelt.

Im dritten Kapitel wird die Konstruktion der Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie bis zur vierten Ordnung (*next to leading order*; NLO) nachvollzogen. Entscheidend

---

ist dabei ein Theorem von Weinberg, das eine “Schablone” für die Konstruktion liefert.

Da das Verhalten der Gitter-QCD untersucht werden soll, ist es nötig, die Lagragedichte so anzupassen, dass sie effektiv Gitter-QCD beschreibt. Dazu wird in Kapitel 4 zunächst ein kurzer Abriss der von Wilson entwickelten und nach ihm benannten Wilson-Wirkung gegeben, die es ermöglicht, QCD auf dem Gitter zu beschreiben. Symanziks Arbeit über eine effektive Gitterwirkung im Kontinuum liefert anschließend das Rüstzeug, die Auswirkungen der Gitterregularisierung der Wilson-Wirkung auf die QCD in die chirale Störungstheorie zu übertragen.

Im fünften Kapitel wird kurz auf die tmQCD und die daraus folgenden Modifikationen der konstruierten Lagragedichte eingegangen. Hier wird lediglich die gemeinsame Masse der u- und d-Quarks verdreht, die Masse des s-Quarks verbleibt ungedreht. Als wichtigster Punkt ist dabei die zusätzliche Abhängigkeit von der gedrehten Masse festzuhalten, die als ein weiterer Parameter zu den Quarkmassen hinzukommt.

Im sechsten Kapitel wird ein Einblick in die zu dieser Arbeit äquivalente Betrachtung für Zwei-Flavour-Gitter-QCD gegeben. Dort treten zwei unterschiedliche Szenarien auf, die beide kurz erläutert werden.

Informationen über das Minimum der Lagragedichte sind für die Bildung von Vakuumerwartungswerten, die in Gittersimulationen berechnet werden, unabdingbar. Daher wird in Kapitel 7 die Lagragedichte der chiralen Störungstheorie so formuliert, dass ihre Minima in Abhängigkeit von den drei betrachteten Massen, der gemeinsamen u- und d-Quarkmasse, deren verdrehtem Anteil sowie der s-Quarkmasse, bestimmt werden können. Dazu wird neben der geeigneten Parametrisierung für die Feldkonfigurationsmatrix, die die Mesonenfelder enthält, eine Verschiebung der Quarkmassen vorgenommen. Dadurch werden Terme proportional zum Quadrat der Gitterkonstanten, die aus der Gitterformulierung resultieren, zu den Quarkmassen addiert. Schließlich wird noch eine Näherung für kleine Quarkmassen eingeführt, die das Potential wesentlich vereinfacht.

Das so gewonnene Potential der Lagragedichte wird in den anschließenden Kapiteln auf sein absolutes Minimum und dessen Sprünge untersucht. Da wie erwähnt in Simulationen unrealistisch große Quarkmassen verwendet werden, ist es wichtig, gerade für kleinere Werte der Massen, die bei der Extrapolation durchlaufen werden, Phasensprünge zu kennen. Daher wird das betrachtete Potential für kleine Massen genähert und so vereinfacht. Es können bei dieser Näherung alle Terme ignoriert werden, die erst für sehr große Massen einen spürbaren Einfluss auf das Potential entwickeln. Die verbleibenden Terme sind zusätzlich abhängig von drei unbekannten Konstanten, die aus der chiralen Störungstheorie stammen. Der Betrag dieser Konstanten konnte mit Hilfe von [10] abgeschätzt werden. In Kapitel 8 wird dazu zunächst ein genähertes, lediglich aus drei linearen Termen bestehendes Potential, untersucht.

In Kapitel 9 wird die Analyse des linearen Potentials um zwei zusätzliche Terme erweitert. Diese beiden Terme sind aufgrund der Größe der zugehörigen Konstante, für kleine Massen die dominanten Beiträge. Da nur der Betrag dieser Konstanten bekannt ist, wird die Analyse für beide Vorzeichen durchgeführt.

Im zehnten und letzten Kapitel werden schließlich alle Terme der Näherung für kleine Massen berücksichtigt. Das Potential besitzt damit eine Abhängigkeit von allen drei

unbekannten Konstanten, wobei jede der 8 verschiedenen Vorzeichenkombinationen separat zu betrachtet ist.

## 2 QCD - Symmetrien und Symmetriebrechung

Im diesem Kapitel wird zunächst eine kurze Darstellung der geschichtlichen Entwicklung des Standardmodells der Elementarteilchen behandelt. Anschließend werden die für diese Arbeit wesentlichen Bestandteile der Theorie skizziert. Diese sind neben der Quantenchromodynamik (QCD), der Eichtheorie der Quarks und Gluonen, die spontane und explizite Brechung von nicht-abelschen Symmetrien.

### 2.1 Das Standardmodell der Elementarteilchen

Das Standardmodell der Elementarteilchen stellt die grundlegende vereinheitlichte Theorie zur Beschreibung der elementaren Teilchen dar. Es verbindet drei der vier grundlegenden Kräfte der Natur in einem Modell, und zwar die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung. Nicht berücksichtigt wird im Standardmodell die Gravitation, die noch nicht zufriedenstellend integriert werden konnte. Das Standardmodell wird mit Hilfe der Quantenfeldtheorie [11] beschrieben, die bereits in den 40er Jahren durch die Quantenelektrodynamik (QED) entwickelt wurde. In Quantenfeldtheorien spielen Eichtheorien eine zentrale Rolle. Maßgeblich an ihrer Entwicklung beteiligt waren Feynman, Schwinger und Tomonaga [12]. Die Anfänge des Standardmodells reichen in die 60er und 70er Jahre des letzten Jahrhunderts zurück, als es Glashow zusammen mit Weinberg und Salam gelang, eine vereinheitlichte Beschreibung der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung, die elektroschwache Wechselwirkung zu formulieren [13, 14].

Als der zweite wesentliche Schritt zur Vereinheitlichung des Standardmodells ist der von Gell-Mann [1] und Zweig [2] zu nennen. Sie postulierten die Quarks als Konstituenten der Hadronen und ordneten sie in  $SU(3)$  Multiplets an - Gell-Mann spricht vom “achtfachen Weg” [15] - und legten damit den Grundstein der QCD und ihrer Eingliederung in das Standardmodell.

Die sechs Quarks der QCD sind in Tabelle 2.1 aufgelistet. jedem Quark ist dabei ein namensgebendes Flavour zugeordnet. Die angegebenen Massen in der Tabelle sind Stromquarkmassen.

Die Quarks sind elektrisch geladene Spin-1/2-Fermionen. Die starke Wechselwirkung wird durch acht Gluonen vermittelt.

Durch die starke Wechselwirkung der Quarks treten diese ausschließlich in gebundenen Zuständen auf. Diese Eigenschaft wird als *Confinement* bezeichnet. Es existieren zwei verschiedene Bindungsarten der Quarks auch Hadronen genannt werden, und zwar die

Flavour	Up	Down	Strange	Charm	Bottom	Top
Ladung [e]	2/3	-1/3	-1/3	2/3	-1/3	2/3
Masse [GeV]	0,005	0,009	0,175	1,15	4,0	174,3

Tabelle 2.1: Elektrische Ladungen und Stromquarkmassen der sechs Quarkflavours

Mesonen und die Baryonen. Die Mesonen sind farbneutrale Zusammenschlüsse aus einem Quark und einem Antiquark, die Baryonen bestehen hingegen aus drei Quarks.

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich intensiver mit der starken Wechselwirkung und den für die QCD wichtigen Symmetrien und deren Brechung. Ein ausführlicher Überblick über die QCD findet sich z.B. in [3].

## 2.2 Die QCD-Lagrangedichte und ihre Symmetrien

Die starke Wechselwirkung wird durch eine nichtabelsche Eichtheorie, die QCD, beschrieben [3]. Die an dieser Wechselwirkung beteiligten Elementarteilchen sind die Quarks und die Gluonen als zugehörige Austauschteilchen. Beide weisen einen zusätzlichen Freiheitsgrad auf, der Farbladung genannt wird. Dieser Freiheitsgrad macht die QCD zu einer lokalen nichtabelschen  $SU(3)_c$ -Eichtheorie, wobei der Index  $c$  für *colour* steht und sich auf den inneren Farbladungsraum bezieht. Die Einführung dieses Freiheitsgrades ist notwendig, um das Pauli-Prinzip zu erfüllen.

Der Index  $c$  wird hinzugefügt, um eine Verwechslung mit der zusätzlich vorhandenen globalen Flavour  $SU(N_f)$ -Symmetrie zu vermeiden.  $N_f$  bezeichnet die Anzahl der in die Theorie einbezogenen Quarks. In dieser Arbeit werden lediglich die drei leichtesten Quarks berücksichtigt.

In der QCD werden die Quarkfelder durch fermionische Felder

$$q(x) = (q_{\alpha,c,f}(x)) \quad (2.1)$$

beschrieben. Der Index  $f$  unterscheidet dabei die sechs verschiedenen Quarkflavours. Der Index  $c$  gibt die Farbladung des Quarks (rot, grün, blau) an. Der Index  $\alpha$  ist der Spinorindex.

Die QCD-Lagrangedichte lautet:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu,a} F_a^{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Die darin enthaltenen  $\gamma^\mu$  sind die Dirac-Matrizen<sup>1</sup>.

Die Lagrangedichte (2.2) besitzt für masselose Quarks eine exakt erhaltene globale  $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V$  Flavoursymmetrie. Auch für massive Quarks ist diese Symmetrie für Spezialfälle teilweise erfüllt.

---

<sup>1</sup>siehe Anhang A

Für eine weitergehende Betrachtung der Symmetrien werden die sechs Quarkflavours in zwei Gruppen eingeteilt. Man unterscheidet dabei die Gruppe der leichten Quarks (up, down, strange) und der schweren Quarks (charm, bottom, top). Anders als die drei schweren können die drei leichten Quarks in einer groben Näherung als massenentartet ( $m_u = m_d = m_s$ ) angenommen werden. Die Lagrangedichte weist dann für die leichten Quarks eine  $SU(3)$ -Flavoursymmetrie auf.

Da zusätzlich eine lokale  $SU(3)_c$ -Eichsymmetrie für die QCD gefordert wird, ist es notwendig, die Lagrangedichte mit einer kovarianten Ableitung zu formulieren. Eine einfache Viererableitung der Form  $\partial_\mu$  würde diese Forderung nach Invarianz unter der lokalen Eichtransformation nicht erfüllen. Die kovariante Ableitung der QCD lautet:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} A_{\mu,a}. \quad (2.3)$$

Durch die Einführung dieser Ableitung kommt es zu einer Kopplung der Eichfelder  $A_{\mu,a}$ , der Gluonen, an die Quarks. Aus der Tatsache, dass lediglich eine einzige Kopplungskonstante  $g$  für alle acht Eichfelder existiert, ist ersichtlich, dass die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen farbunabhängig ist. Die Gruppe  $SU(3)$  besitzt damit sowohl als Eichgruppe als auch für den häufig betrachteten Spezialfall  $N_f = 3$  mit massentarteten Quarks eine große Bedeutung für die QCD. Die  $SU(3)$  ist die Gruppe der unitären Matrizen<sup>2</sup>  $U$  mit Dimension 3 und der zusätzlichen Bedingung  $\det U = +1$ . Sie besitzt acht Generatoren, die nicht vertauschen. Diese sind bis auf den Faktor  $\frac{1}{2}$  identisch mit den Gell-Mann-Matrizen  $\lambda_a$ ,  $a = 1, \dots, 8$ . Die  $SU(3)$  ist somit eine nichtabelsche Symmetriegruppe. Zusammen mit der Vertauschungsrelation

$$\left[ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = if_{abc} \frac{\lambda^c}{2} \quad (2.4)$$

bilden die Generatoren die Lie-Algebra der  $SU(3)$ . Die Strukturkonstante  $f_{abc}$  ist dabei vollständig antisymmetrisch.

Um eine Wechselwirkung der Eichbosonen untereinander zu gewährleisten, beinhaltet die QCD-Lagrangedichte einen zusätzlichen Term, der Yang-Mills-Term genannt wird. Dieser ist ein Produkt aus Feldstärketensoren  $F_{\mu\nu,a}$ , die unabhängig von den Quarkflavours sind. Im Fall der nichtabelschen Symmetriegruppe  $SU(3)_c$  lautet der Feldstärkentensor:

$$F_{\mu\nu,a} = \partial_\mu A_{\nu,a} - \partial_\nu A_{\mu,a} + gf_{abc} A_{\mu,b} A_{\nu,c}. \quad (2.5)$$

Die bereits oben erwähnte Flavoursymmetrie für masselose Quarks soll im Anschluss näher behandelt werden; man spricht in diesem Fall vom chiralen Limes. In diesem Limes weist die QCD eine exakt erhaltene globale  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ -Flavoursymmetrie auf, die sogenannte chirale Symmetrie. Die Lagrangedichte im chiralen Limes hat die Form:

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f i \gamma^\mu D_\mu q_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu,a} F_a^{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

<sup>2</sup>siehe Anhang B

Diese Lagragedichte kann mit Hilfe der Projektionsoperatoren

$$P_R = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5), \quad P_L = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5) \quad (2.7)$$

auf ihre positiven und negativen Helizitätseigenzustände projiziert werden. Im betrachteten Fall masseloser Quarks entspricht die Helizität der Chiralität, man spricht von rechts- und linkshändigen Quarks. Die Operatoren besitzen die Eigenschaften:

$$P_R + P_L = \mathbf{1}, \quad P_{R/L}^2 = P_{R/L}, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0. \quad (2.8)$$

Mit diesen Operatoren lässt sich die Lagragedichte (2.6) in einen rechts- und einen linkshändigen Anteil separieren und kann geschrieben werden als:

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \sum_{f=u,d,s} (\bar{q}_{R,f} i\gamma^\mu D_\mu q_{R,f} + \bar{q}_{L,f} i\gamma^\mu D_\mu q_{L,f}) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu,a} F_a^{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Das Noether-Theorem sagt aus, dass zu jeder globalen kontinuierlichen Symmetrie der Lagragedichte und der zugehörigen Bewegungsgleichung ein erhaltener Strom existiert. Aus der vorhandenen chiralen Symmetrie der QCD sollten folglich  $2 \times (8 + 1) = 18$  erhaltene Ströme zu erwarten sein, die sich wie die Symmetrie selbst in links- und rechts-händige Ströme unterteilen lassen. Anstelle dieser rechts- und linkshändigen Ströme, die hier als  $R^{\mu,a}$  und  $L^{\mu,a}$  bezeichnet werden, werden häufig Kombinationen gebildet, die wie ein Vektor bzw. ein Axialvektor unter Parität transformieren. Die so gebildeten Ströme setzen sich, entsprechend der Symmetrie, aus zwei Oktett- und zwei Singulett-Strömen zusammen:

$$\begin{aligned} V^{\mu,a} &= R^{\mu,a} + L^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q \\ A^{\mu,a} &= R^{\mu,a} - L^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \\ V^\mu &= R^\mu + L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q \\ A^\mu &= R^\mu - L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Im klassischen Fall sind diese Ströme immer erhalten. In der Quantentheorie ist der Singulett-Axialvektorstrom  $A^\mu$ , der zur Symmetrie  $U(1)_A$  gehört, durch eine Anomalie verletzt. Diese Betrachtungen gelten unter der Voraussetzung verschwindender Quarkmassen und somit exakt erfüllter Symmetrien. Dies ist in der Realität natürlich nicht gegeben; vielmehr sind die Quarks massiv, dadurch kommt es zu Symmetriebrechungen, und die Ströme (2.10) sind nicht sämtlich erhalten.

## 2.3 Spontane und explizite Symmetriebrechung

In diesem Abschnitt werden die beiden Arten von Symmetriebrechung erläutert: zum einen die spontane Symmetriebrechung, die mit dem Goldstone-Theorem [16] verknüpft ist, zum anderen die explizite Symmetriebrechung. Anschließend werden diese beiden Konzepte auf die QCD angewandt. Eine genauere Betrachtung des Konzepts der Sym-

metriebrechung ist [8] zu entnehmen.

### 2.3.1 Spontane Symmetriebrechung

In einer quantenfeldtheoretischen Betrachtung ist spontane Symmetriebrechung immer mit einer Entartung des Grundzustandes verbunden. Spontane Symmetriebrechung findet immer dann statt, wenn der Grundzustand, den das betrachtete System einnimmt, weniger Symmetrien besitzt als die zugehörige Lagrangedichte [11]. Ein häufig verwendetes Beispiel für diese Art der Symmetriebrechung stellt die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i - \frac{\lambda}{4} (\phi_i \phi_i)^2 \quad (2.11)$$

mit  $m^2 < 0$ ,  $\lambda > 0$  und  $\phi_i$  hermitesch dar. Diese Lagrangedichte ist invariant bezüglich der globalen, kontinuierlichen und nicht-abelschen  $SO(3)$ -Symmetriegruppe. Sucht man nach Minima von (2.11), findet sich:

$$|\phi_{\min}| = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} =: v. \quad (2.12)$$

Die Minima liegen damit auf einer Kugeloberfläche, die um den Ursprung zentriert ist. Von diesen Minima lässt sich ein beliebiger Grundzustand auswählen. Hier wird dieser Grundzustand in die  $\vec{e}_3$ -Richtung gelegt. Das daraus resultierende Minimum entspricht daher:

$$\vec{\phi}_{\min} = v \vec{e}_3. \quad (2.13)$$

Dieses Minimum ist nicht invariant unter der vollen  $SO(3)$ -Gruppe. Lediglich Drehungen um die dritte Achse lassen den Vektor  $\vec{\phi}_{\min}$  konstant. Somit ist der Vektor nur noch invariant unter einer Untergruppe der vollen Gruppe  $SO(3)$ . Die übrigen Transformationen, die nicht Element der Untergruppe sind, bilden keine eigene Gruppe, da die Identität nicht enthalten ist. Entwickelt man den Grundzustand (2.13) mit

$$|\vec{\phi}_{\min}| = v + \eta, \quad (2.14)$$

setzt diesen Ausdruck in (2.11) ein und betrachtet lediglich die Potentialdichte  $\mathcal{V}$  der Lagrangedichte, so hat diese die folgende Gestalt:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} (-2m^2) \eta^2 + \lambda v \eta (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \eta^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \eta^2)^2 - \frac{\lambda}{4} v^4. \quad (2.15)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich ablesen, dass nach der spontanen Symmetriebrechung zwei masselose Bosonen  $\phi_1, \phi_2$  und ein massives Boson  $\eta$  mit  $m_\eta = (-2m^2)^{1/2}$  existieren. Die beiden masselosen Bosonen repräsentieren die Goldstone-Bosonen der spontanen Symmetriebrechung.

### 2.3.2 Goldstone-Bosonen

Das Auftreten von Goldstone-Bosonen wird mit Hilfe des Goldstone-Theorems [16] beschrieben. Es trifft die Aussage, dass bei einem spontanen Bruch der Symmetrie masse-

lose, bosonische Teilchen entstehen, die Goldstone-Bosonen genannt werden. Aus gruppentheoretischer Sicht existiert für jeden Generator einer Symmetriegruppe der Lagragedichte, der deren Grundzustand nicht invariant lässt, ein Goldstone-Boson. Die Anzahl der vorhandenen Goldstone-Bosonen lässt sich somit über die Generatoren ausdrücken: Bezeichnet  $n_G$  die Anzahl der Generatoren, die zur Symmetriegruppe der Lagragedichte gehören, und  $n_H$  die Anzahl der Generatoren der Untergruppe  $H$  von  $G$ , die den Grundzustand invariant lassen, so ist die Zahl der Goldstone-Bosonen  $n$  gegeben durch die Differenz  $n = n_G - n_H$ .

Für die im Abschnitt 2.3.1 betrachtete Gruppe  $SO(3)$ , die drei Generatoren besitzt, lässt lediglich einer der drei Generatoren den Grundzustand invariant. Es sollten demnach  $3 - 1 = 2$  Goldstone-Bosonen auftreten. Dies deckt sich mit den in Abschnitt 2.3.1 gefundenen Ergebnissen.

In dem hier behandelten Beispiel wird davon ausgegangen, dass von der Lagragedichte mehrere entartete Grundzustände ausgebildet werden, die weniger Symmetrien aufweisen, als die Lagragedichte selbst. Dies ist auf das Vorzeichen des quadratischen Terms mit  $m^2 < 0$  in Gleichung (2.11) zurückzuführen. Diese Wahl des Vorzeichens von  $m^2$ , bei der spontane Symmetriebrechung und als Folge Goldstone-Bosonen auftreten, wird Nambu-Goldstone-Modus genannt.

Im gegenteiligen Fall mit  $m^2 > 0$  existieren keine entarteten Grundzustände. Der einzige Grundzustand  $\phi_{\min} = 0$  besitzt dieselben Symmetrien wie die Lagragedichte und es treten keine Goldstone-Bosonen auf. Dieser Modus wird als Wigner-Weyl-Modus bezeichnet.

### 2.3.3 Explizite Symmetriebrechung

Eine weitere, direkte Form der Symmetriebrechung ist die explizite Brechung einer Symmetrie. Explizite Symmetriebrechung tritt auf, wenn eine erfüllte Symmetrie durch einen zusätzlichen Beitrag, z.B. durch einen zusätzlichen Term in der Lagragedichte, verletzt wird. Ist der Einfluss dieses Beitrages gering, kann die Symmetrie dennoch näherungsweise als erfüllt gelten. Trotzdem kann die Berücksichtigung eines solchen symmetriebrechenden Terms innerhalb einer Lagragedichte entscheidende Konsequenzen für die Goldstone-Bosonen einer zusätzlichen spontanen Symmetriebrechung haben. Als ein einfaches Beispiel wird zu der Lagragedichte (2.11) ein zusätzlicher Term  $+a\phi_3$  hinzugefügt, der die bestehende  $SO(3)$ -Symmetrie explizit bricht. Wird nur die Potentialdichte der so gewonnenen Lagragedichte betrachtet, hat diese die Form:

$$\mathcal{V} = +\frac{m^2}{2}\phi_i\phi_i + \frac{\lambda}{4}(\phi_i\phi_i)^2 + a\phi_3. \quad (2.16)$$

Für die Konstanten in diesem Ausdruck, die bereits in Abschnitt 2.3.1 eingeführt wurden, gelten dieselben Bedingungen wie im Fall der spontanen Symmetriebrechung. Zusätzlich gilt für die neu auftretende Konstante  $a > 0$ . Das in dieser Weise explizit gebrochene Potential weist lediglich eine  $SO(2)$ -Symmetrie auf. Das Vorgehen ist identisch zu dem ohne explizite Symmetriebrechung: Es wird ein Minimum ausgewählt, um  $\phi_{\min}$  entwickelt, und die Massen der auftretenden Bosonen werden ermittelt.

Als wichtige Konsequenz der zusätzlichen expliziten Symmetriebrechung besitzen nun alle drei auftretenden Bosonen nicht verschwindende Massen. Diese ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} m_{\phi_1}^2 &= m_{\phi_2}^2 = a\sqrt{\frac{\lambda}{-m^2}}, \\ m_\eta^2 &= -2m^2 + 3a\sqrt{\frac{\lambda}{-m^2}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Die vormalen masselosen Goldstone-Bosonen  $\phi_1$  und  $\phi_2$  haben durch die explizite Brechung der Symmetrie der Lagragedichte eine Masse erhalten. Diese massiven Bosonen tragen daher die Bezeichnung Pseudo-Goldstone-Bosonen.

### 2.3.4 Spontane und explizite Symmetriebrechung in der QCD

Die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Konzepte der spontanen und der expliziten Symmetriebrechung werden in diesem Abschnitt auf experimentell gewonnene Erkenntnisse angewandt. Die QCD für die drei leichten Quarks besitzt im chiralen Grenzfall eine  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie. Mit Hilfe der in Gl. (2.10) verwendeten Kombinationen lässt sich diese Symmetrie auch in eine axiale und eine vektorielle Symmetrie umformulieren. Für die aus der Strom-Algebra folgenden Ladungsgeneratoren der Symmetriegruppen [8] ergibt sich damit:

$$Q_V^a = Q_R^a + Q_L^a, \quad Q_A^a = Q_R^a - Q_L^a \quad \text{für} \quad a = 1, \dots, 8. \quad (2.18)$$

Zu beachten ist, dass die axialen im Gegensatz zu den vektoriellen Generatoren keine geschlossene Algebra bilden. Die Symmetrie  $U(1)_V$  bestimmt die Baryonenzahl und teilt das Teilchenspektrum in Mesonen und Baryonen auf. Betrachtet man die weiteren chiralen Symmetrien der Lagragedichte der masselosen QCD, sollten sich die Teilchen aufgrund der entgegengesetzten Parität und der Vertauschbarkeit der Generatoren mit dem Hamiltonoperator der QCD in Multipletts anordnen, die bezüglich der Parität entartet sind. In experimentell ermittelten Teilchenspektren finden sich aber nicht alle der daraus zu erwartenden Teilchen, was eher auf eine  $SU(3)$ -Symmetrie schließen lässt. Wie von Vafa und Witten [17] gezeigt wurde, besitzt der Grundzustand der QCD mindestens eine  $SU(3)_V \times U(1)_V$ -Symmetrie.

Geht man daher davon aus, dass der Grundzustand anders als die Lagragedichte nicht invariant unter axialen Symmetrien ist, so sollten acht Goldstone-Bosonen existieren, die aufgrund der Eigenschaften der Generatoren der  $SU(3)_A$  pseudoskalare Teilchen sind. Als Kandidaten für diese Bosonen bietet sich das pseudoskalare Mesonenoktett an. Diese Mesonen besitzen jedoch, im Gegensatz zu den Goldstone-Bosonen, eine endliche, wenn auch sehr geringe Masse.

In der Realität sind die Quarks nicht masselos. Wird die Quarkmasse berücksichtigt und der resultierende Masseterm zur Lagragedichte hinzugefügt, bricht dieser explizit die im chiralen Grenzfall vorherrschende  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  Symmetrie. Als Folge daraus sollten die Goldstone-Bosonen in Pseudo-Goldstone-Bosonen übergehen, was die geringe Masse der pseudoskalaren Mesonen erklären würde.

Betrachtet man nicht die drei leichtesten Quarks, sondern lediglich das u- und das

d-Quark, so besitzt die QCD im chiralen Grenzfall eine  $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie. Der Grundzustand weist entsprechend dem Fall von drei Quarks eine  $SU(2)_V$ -Symmetrie auf. Der Masseterm bricht auch hier diese Symmetrie explizit. Als Folge lässt dieser Fall drei Pseudo-Goldstone-Bosonen erwarten, die als die drei Pionen ( $\pi^0, \pi^+, \pi^-$ ) identifiziert werden.

# 3 Die Lagragedichte der QCD in der chiralen Störungstheorie

Ziel dieses Kapitels ist es, eine effektive Lagragedichte zu konstruieren, die die QCD bei niedrigen Energien beschreibt. Diese effektive Theorie wird chirale Störungstheorie genannt [8,18]. Die Freiheitsgrade dieser Theorie sind nicht die freien Quarks und Gluonen der QCD, sondern gebundene hadronische Zustände. Bei den hier betrachteten sehr geringen Massen werden diese Zustände durch das pseudoskalare Mesonen-Oktett gebildet, welches sich aus den Pseudo-Goldstone-Bosonen der spontanen Symmetriebrechung der QCD zusammensetzt (vgl. Kap. 2.3). Die Lagragedichte der effektiven Theorie weist entsprechend ihrer Konstruktion dieselbe  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie auf wie die zugrunde liegende QCD. Ebenso muss eine identische spontane Symmetriebrechung stattfinden. Die explizite Symmetriebrechung durch die Quarkmassen muss ebenfalls in die effektive Theorie eingegliedert werden.

## 3.1 Goldstone-Bosonen als Freiheitsgrade der chiralen Störungstheorie

Die chirale Störungstheorie besitzt als Freiheitsgrade die acht Goldstone-Bosonen der spontanen Symmetriebrechung der Drei-Flavour-QCD. Um die effektive Theorie aufzustellen zu können, müssen die Transformationseigenschaften der Goldstone-Bosonen bekannt sein. Diese Eigenschaften lassen sich aus den Symmetrien der Lagragedichte und des Grundzustandes der QCD ermitteln [8].

Die Elemente der Symmetriegruppe der Lagragedichte seien  $g \in G$ , die des Grundzustandes  $h \in H$ . Die entsprechenden Gruppen sind:

$$\begin{aligned} G &= SU(3)_L \times SU(3)_R = \{(L, R) | L \in SU(3)_L, R \in SU(3)_R\}, \\ H &= \{(V, V) | V \in SU(3)_V\} \cong SU(3)_V. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Die neuen Variablen der effektiven Theorie sind die Goldstone-Felder  $\phi_i(x)$ . Diese werden in einem Vektor  $\vec{\Pi}(x)$  angeordnet, der die Dimension  $n$  besitzt, was der Zahl der Goldstone-Bosonen entspricht. Um das Transformationsverhalten der Goldstone-Bosonen zu bestimmen, ist der Begriff der Linksnebenklasse

$$\tilde{g}H = \{(\tilde{L}V, \tilde{R}V) | V \in SU(3)_V\} \tag{3.2}$$

einzuführen, wobei  $\tilde{g}$  ein Element aus  $G$  bezeichnet. Diese Linksnebenklasse ist eindeutig

durch eine  $SU(3)$ -Matrix  $U = \tilde{R}\tilde{L}^\dagger$  definiert:

$$(\tilde{L}V, \tilde{R}V) = (\tilde{L}V, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger\tilde{L}V) = (1, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger) \underbrace{(\tilde{L}V, \tilde{L}V)}_{\in H} \Rightarrow \tilde{g}H = (1, \underbrace{\tilde{R}\tilde{L}^\dagger}_{=U})H. \quad (3.3)$$

Es lässt sich zeigen, dass  $U$  isomorph zu einem Vektor  $\vec{\Pi}$  der Goldstone-Bosonen ist. Das Transformationsverhalten von  $U$  unter  $g = (L, R) \in G$  erhält man somit aus der Linksnebenklasse:

$$g\tilde{g}H = (L, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)H = (1, RRR\tilde{R}\tilde{L}^\dagger L^\dagger)(L, L)H = (1, R(\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)L^\dagger)H. \quad (3.4)$$

Für das Verhalten von  $U$  unter den betrachteten Transformationen bedeutet dies:

$$U = \tilde{R}\tilde{L}^\dagger \rightarrow U' = R(\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)L^\dagger = R(U)L^\dagger. \quad (3.5)$$

Zu beachten ist, dass die Matrix  $U$ , ebenso wie die Goldstone-Felder, eine Raumzeit-Abhängigkeit besitzt, die in den vorangegangenen Schritten zur besseren Übersichtlichkeit nicht explizit dargestellt wurde.

Um die Goldstone-Felder zu beschreiben, muss eine zweckmäßige Parametrisierung für die Matrix  $U(x)$  gewählt werden. Diese Parametrisierung ist nicht eindeutig, häufig wird eine Exponentialdarstellung verwendet. Diese besitzt die Form:

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{F_0}\right) = \exp\left(i\frac{\lambda_a \phi_a}{F_0}\right) \quad (3.6)$$

mit

$$\lambda_a \phi_a = \begin{pmatrix} \phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_8 & \phi_1 - i\phi_2 & \phi_4 - i\phi_5 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_8 & \phi_6 - i\phi_7 \\ \phi_4 + i\phi_5 & \phi_6 + i\phi_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\phi_8 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Dabei werden zur Parametrisierung die acht Gell-Mann-Matrizen  $\lambda_a$  verwendet. Die Konstante  $F_0$  hat die Dimension einer Energie und bewirkt, dass der Exponent dimensionslos wird.

Im Fall von nur zwei Flavours können die drei Pauli-Matrizen<sup>3</sup>  $\tau_i$  zu einer äquivalenten Parametrisierung von  $U(x)$  verwendet werden. In diesem Fall besitzt  $U(x)$  die Form:

$$U(x) = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{F_0}\right) = \exp\left(i\frac{\tau_i \pi_i}{F_0}\right) \quad (3.8)$$

mit

$$\tau_i \pi_i = \begin{pmatrix} \pi_3 & \pi_1 + i\pi_2 \\ \pi_1 - i\pi_2 & -\pi_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

In (3.8) bezeichnen die Felder  $\pi_i$  die für  $SU(2)$  auftretenden drei Goldstone-Bosonen. Mit den so gewonnenen Kenntnissen der Transformationseigenschaften der Goldstone-Bosonen kann nun eine effektive Theorie formuliert werden.

---

<sup>3</sup>siehe Anhang B

## 3.2 Zählschema nach Weinberg

Um eine effektive Lagragedichte aus einer gegebene Theorie zu konstruieren, lässt sich ein Theorem von Weinberg verwenden [19]. Dieses Theorem besagt, dass eine effektive Lagragedichte perturbativ aus allen mit der Symmetrie verträglichen Termen aufgestellt werden kann. Eine solche Lagragedichte liefert die allgemeinste S-Matrix der zugrundeliegenden Theorie, die den Konsistenzbedingungen der Analytizität, Unitarität und Kausalität genügt. Eine so konstruierte Lagragedichte wird im Allgemeinen unendlich viele Terme und die dazugehörigen freien Parameter besitzen.

Im Fall der chiralen Störungstheorie beschreibt die effektive Theorie die Dynamik der Goldstone-Bosonen; die Terme werden aufsteigend nach der Anzahl von Impulsen und Quarkmassen sortiert. Dabei wird ein Quarkmassenterm mit dem Faktor 2 gewichtet, da, wie sich mit (3.19) zeigen wird, die Quadrate der Mesonenmassen proportional zu den Quarkmassen sind. Die Lagragedichte ist ein Lorentz-Skalar, weshalb Ableitungen immer in gerader Anzahl auftreten müssen, damit diese kontrahiert werden können. Daraus ergibt sich:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \sum_n \mathcal{L}_{2n} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \dots . \quad (3.10)$$

Der erste Term mit  $n = 1$  beinhaltet dabei sowohl zwei Ableitungen (Impulse), als auch einen Quarkmassenterm und wird im Folgenden mit  $\mathcal{O}(p^2)$  bezeichnet.

Das Zählschema nach Weinberg liefert eine Möglichkeit, ein gegebenes Feynman-Diagramm unter einer linearen Reskalierung der externen Impulse und einer quadratischen Reskalierung der Quarkmassen zu untersuchen und ihnen eine Ordnung der effektiven Lagragedichte zuzuordnen. Dabei ist die chirale Dimension  $D$  eines gegebenen Diagramms gegeben durch:

$$\mathcal{M}(tp_i, t^2 m_q) = t^D \mathcal{M}(p_i, m_q). \quad (3.11)$$

Die chirale Dimension ist über die Formel

$$D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n} + 2N_L \quad (3.12)$$

mit den möglichen zugehörigen Diagrammen verknüpft. Dabei steht  $N_{2n}$  für die Anzahl der Vertizes der Lagragedichte  $\mathcal{L}_{2n}$  und  $N_L$  ist die Anzahl der unabhängigen Schleifen. Für kleine Massen und Impulse, wie sie in der chiralen Störungstheorie betrachtet werden, sollten aufgrund von (3.11) Diagramme mit kleinem  $D$  ( $D = 2, D = 4$ ) dominieren. Nach Gleichung (3.12) sind das solche mit möglichst kleinen Werten für  $n$ , hier mit  $n = 1$ . Diese sind gerade die Baum-Diagramme, die sich zu  $\mathcal{L}_2$  zuordnen lassen. Man erkennt darüber hinaus, dass Schleifen durch den Faktor  $2N_L$  stets unterdrückt sind und erst in höheren Ordnungen (ab  $D = 4$ ) vorkommen können.

### 3.3 Konstruktion der Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie bis $\mathcal{L}_4$

Als nächstes wird die effektive Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie der Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 \quad (3.13)$$

konstruiert [8,20]. Die Freiheitsgrade sind durch das Oktett der pseudoskalaren Mesonen definiert, das durch die Matrix  $U$  repräsentiert wird. Die Lagrangedichte muss im chiralen Grenzfall eine  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie besitzen. Der Grundzustand muss invariant unter  $SU(3)_V \times U(1)_V$  sein. Der Massenterm der Lagrangedichte bricht diese Symmetrien explizit. Zunächst wird die Lagrangedichte der niedrigsten Ordnung, auch *Leading Order* (LO) genannt, ohne einen die Symmetrie brechenden Masseterm betrachtet und daran die allgemeine Vorgehensweise bei der Konstruktion veranschaulicht. Die Lagrangedichte  $\mathcal{L}_2$  besteht nach Abschnitt 3.2 aus allen invarianten Termen mit zwei Ableitungen der Feldkonfigurationsmatrix  $U$ . Allgemein gilt: Invariante Terme, bestehend aus den invarianten Objekten  $A, B, C, \dots$  lassen sich aus der Spur des Produktes der Art  $AB^\dagger$  aufstellen. Für höhere Ordnungen setzt sich die Lagrangedichte aus der Spur von Produkten von einzelnen Elementen und aus Produkten von Spuren in der Art

$$\text{Tr} (AB^\dagger CD^\dagger), \quad \text{Tr} (AB^\dagger) \text{Tr} (CD^\dagger), \quad \dots$$

zusammen. Der einzige Term, der in der Ordnung  $\mathcal{O}(p^2)$  gebildet werden kann und von Null verschieden ist, lautet

$$\mathcal{L}_{2,k} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \quad (3.14)$$

und stellt somit die Lagrangedichte. Der freie Parameter  $F_0$  ist die Pion-Zerfalls-Konstante und besitzt damit eine physikalische Relevanz. Sie kann aus der QCD bestimmt werden. Die Gestalt des Vorfaktors  $F_0^2/4$  ist so gewählt, dass bei einer Entwicklung nach den in  $U$  enthaltenden Felder der kinetische Anteil in führender Ordnung die bekannte Form

$$\mathcal{L}_{2,k} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a + \dots \quad (3.15)$$

besitzt. Um den Masseterm der QCD

$$\mathcal{L}_M = -\bar{q}_R M q_L - \bar{q}_L M^\dagger q_R, \quad M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

korrekt in die effektive Theorie einzubauen, verwendet man die Methode der Spurion-analyse. Dazu nimmt man an, dass der Masseterm invariant ist, wenn die Massematrix wie

$$M \rightarrow R M L^\dagger \quad (3.17)$$

transformiert. Damit konstruiert man die vermeintlich invarianten Terme der gesuchten Ordnung. Diese Invarianten in der Ordnung  $\mathcal{O}(p^2)$  sind  $\text{Tr} (M U^\dagger)$  und  $\text{Tr} (U M^\dagger)$ . Bildet

man daraus einen Term für die Lagragedichte  $\mathcal{L}_2$ , ergibt sich:

$$\mathcal{L}_{s.b.} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr} (MU^\dagger + UM^\dagger). \quad (3.18)$$

Der freie Parameter  $B_0$  dieses Ausdrucks ist proportional zum chiralen Quarkkondensat  $\langle \bar{q}q \rangle$ . Entwickelt man  $\mathcal{L}_{s.b.}$  bis zur zweiten Ordnung in den in  $U$  enthaltenden Mesonen-Feldern, erhält man mit  $m_u = m_d = m_q \neq m_s$  die Massen der Pseudo-Goldstone-Bosonen:

$$\begin{aligned} M_\pi^2 &= 2B_0 m_q, \\ M_K^2 &= B_0(m_q + m_s), \\ M_\eta^2 &= \frac{2}{3}B_0(m_q + 2m_s). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Wie bereits in Abschnitt 3.2 vorweggenommen, sind die Mesonenmassen quadratische Funktionen der Quarkmassen, was dort als Begründung für die Ordnung  $\mathcal{O}(p^2) \sim \mathcal{O}(m)$  einer Quarkmasse verwendet wurde.

Mit der Definition

$$\chi = 2B_0 M \quad (3.20)$$

lautet die vollständige Lagragedichte bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(p^2)$ :

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \left\langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right\rangle + \frac{F_0^2}{4} \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle. \quad (3.21)$$

Dabei wurde die Notation  $\langle \dots \rangle = \text{Tr}(\dots)$  benutzt. Diese wird auch im Folgendem beibehalten.

Die Konstruktion der Lagragedichte  $\mathcal{L}_4$  (*next to leading order* oder NLO) verläuft entsprechend. Sie wird aus allen invarianten Termen der Ordnung  $\mathcal{O}(p^4)$  gebildet. Die vollständige Lagragedichte der Ordnung  $\mathcal{O}(p^4)$  lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & L_1 \left\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right\rangle^2 + L_2 \left\langle \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \right\rangle^2 + L_3 \left\langle \left( \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right)^2 \right\rangle \\ & + L_4 \left\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right\rangle \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle + L_5 \left\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \left( \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \right) \right\rangle \\ & + L_6 \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle^2 + L_7 \left\langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right\rangle^2 + L_8 \left\langle \chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dabei sind äußere Quellen nicht berücksichtigt worden. Die acht zugehörigen Parameter  $L_i$  werden als Gasser-Leutwyler-Koeffizienten<sup>4</sup> bezeichnet und müssen anders als die Konstanten der Ordnung  $\mathcal{O}(p^2)$  experimentell oder durch Simulationen bestimmt werden. Sie werden auch als *Low-Energy-Constants* (LEC) oder Gasser-Leutwyler-Konstanten bezeichnet.

---

<sup>4</sup>siehe Anhang C



# 4 Chirale Störungstheorie für Gitter-QCD

Die Gleichungen der Quantenchromodynamik sind ohne einschränkende Annahmen nicht analytisch lösbar. Eine Möglichkeit zur näherungsweisen Lösung besteht in einer störungstheoretischen Entwicklung in der Kopplungskonstanten. Diese perturbative Betrachtung liefert aufgrund der asymptotischen Freiheit der QCD lediglich für große Energien sinnvolle Ergebnisse.

Eine weitere häufig genutzte nicht-perturbative Möglichkeit, Ergebnisse in der QCD zu erhalten, stellt die numerische Bearbeitung, z.B. durch Monte-Carlo-Simulationen dar. Dabei ist es erforderlich, sich auf ein diskretes und endliches raumzeitliches Gitter zu beschränken. Diese Beschränkung bewirkt ein Abweichen der Gitter-Ergebnisse von z.B. störungstheoretischen Betrachtungen im Kontinuum. Will man mit der hier verwendeten chiralen Störungstheorie Gitter-Ergebnisse interpretieren, muss die chirale Lagrangiedichte den Gittereffekten entsprechend modifiziert werden [10].

## 4.1 Gitterformulierung der QCD

Bevor eine chirale Störungstheorie für Gitter-QCD modifiziert wird, soll zunächst kurz eine Darstellung der QCD auf dem Gitter gegeben werden. Der hier verwendete Ansatz ist der von Wilson [21]. Eine genauere Darstellung kann [22] entnommen werden. Eine grundlegende Einführung in die Gitter-QCD liefert [7]. Einen Überblick über die hier verwendeten Methoden bietet auch [23].

Eine weitere Möglichkeit QCD, auf dem Gitter zu formulieren, bietet die der Staggered-Fermionen, die hier jedoch nicht betrachtet wird. Für einen Einblick kann ebenfalls [22] herangezogen werden.

### 4.1.1 Gitter-Wirkung nach Wilson

Der Übergang von der kontinuierlichen QCD zur Gitter-QCD erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wechselt man vom Minkowski-Raum in einen vierdimensionalen euklidischen Vektorraum. Dies bedeutet eine Veränderung des metrischen Tensors. Er ändert sich von

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (4.1)$$

im Minkowski-Raum in

$$g_{\mu\nu}^E = \delta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1, 1) \quad (4.2)$$

im euklidischen Raum. Dabei gehen die Indizes des Minkowski-Raumes  $\mu = 0,1,2,3$ , wobei die nullte Komponente die Zeitkoordinate beschreibt, über in  $\mu = 1,2,3,4$ , wo die neue vierte Komponente die der Zeit ist. Der Übergang zur euklidischen Metrik entspricht einer Rotation der Zeitvariablen  $t$  gegen den Uhrzeigersinn zu rein imaginären Werten:

$$t \rightarrow i\tau. \quad (4.3)$$

Diese Transformation wird Wick-Rotation genannt. Der Anti-Kommutator der Dirac-Matrizen im Minkowski-Raum ist proportional zu dessen metrischem Tensor:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (4.4)$$

Diese Relation muss ebenfalls, entsprechend angepasst für den euklidischen Raum, gefordert werden<sup>5</sup>. Im euklidischem Raum gilt analog:

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (4.5)$$

Dies kann durch die geeignete Wahl von euklidischen Dirac-Matrizen erreicht werden:

$$\gamma_i^E = i\gamma^i, \quad \gamma_4^E = -\gamma^0, \quad i\gamma^\mu \partial_\mu = -\gamma_\mu^E \partial_\mu^E. \quad (4.6)$$

Die euklidische Betrachtung besitzt den Vorteil, dass die bei der Berechnung von Greens-Funktionen auftauchenden Exponentialfunktionen des Boltzmann-Faktors  $\exp(-S_E)$  reell sind und so Oszillationen verhindert werden, was eine statistische Auswertung ermöglicht, die z.B. mittels Gittersimulationen erfolgen kann.

Im zweiten Schritt wird der kontinuierliche euklidische Raum durch einzelne diskrete Punkte ersetzt. Der Abstand der Gitterpunkte wird mit  $a$  bezeichnet. Die Fermionenfelder befinden sich auf diesen Gitterpunkten. Die die Wechselwirkung vermittelnden Gluonen sind hingegen auf den Verbindungslien zwischen diesen Punkten lokalisiert. Um dieser Diskretisierung Rechnung zu tragen, müssen Ableitungen in endliche Differenzen und Integrale über die Raumzeit in Summen über die Gitterpunkte überführt werden. Eine durch diesen Übergang erhaltene Wirkung ist für Gitterkonstanten ungleich Null, jedoch nicht eichinvariant. Auch im Kontinuumslimes  $a \rightarrow 0$  ist diese Invarianz wegen der Eigenschaften der Renormierung verletzt. Es müssen somit weitere Modifikationen vorgenommen werden, die eine Invarianz für alle Werte der Gitterkonstanten gewährleisten. Eine Standardlösung für dieses Problem ist die von Wilson. In der sog. Wilson'schen Wirkung [21] wird zunächst eine Eichinvarianz für die Gittertheorie formuliert und anschließend die Wirkung dementsprechend angepasst. Dieser Sachverhalt wird im folgenden Abschnitt genauer untersucht.

Das Produkt von zwei Feldern  $\bar{\psi}(x) \cdot \psi(y)$ , die an zwei verschiedenen Orten im Kontinuum oder an zwei verschiedenen Gitterpunkten lokalisiert sind, ist nicht invariant unter einer lokalen Eichtransformation  $\Lambda(x) \in \text{SU}(N)$ . Bei der Konstruktion einer Gitterwirkung nach Wilson treten aber gerade solche Produkte von Feldern für benachbarte Gitterpunkte auf. In der Differentialgeometrie wird ein derartiges Produkt aus Feldern durch eine multiplikativ hinzugefügte  $\text{SU}(N)$ -Matrix  $U(x,y,\mathcal{C})$  invariant, die Paralleltransporter genannt wird. Dabei steht  $\mathcal{C}$  für die Abhängigkeit von dem gewählten Pfad,

---

<sup>5</sup>siehe Anhang A

der die Felder verbindet. Zur Darstellung der Gitter-Wirkung ist somit ein Paralleltransporter zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten erforderlich; er wird als Link-Variable bezeichnet. Der zugehörige Pfad, also die direkte Verbindung zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten, wird Link genannt. Die Link-Variable hat die Form

$$U(x, x + a\hat{\mu}) \equiv U_{x\mu} = \exp \left( ig_0 a A_\mu^b(x) T_b \right) \quad (4.7)$$

und transformiert unter einer zugehörigen Eichtransformation  $\Lambda(x)$  gemäß:

$$U_{x\mu} \rightarrow \Lambda(x) U_{x, mu} \Lambda(x + a\hat{\mu})^{-1}. \quad (4.8)$$

Der Vektor  $\hat{\mu}$  ist der Einheitsvektor in die Gitterrichtung  $\mu = 1, 2, 3, 4$ ; die Konstante  $g_0$  beschreibt die nackte, d.h. unrenormierte, Kopplung. Terme mit Produkten aus Feldern sind mit Hilfe der Link-Variablen eichinvariant und besitzen nun die Form:

$$\sum_{x, \mu} \bar{\psi}(x + a\hat{\mu}) U_{x\mu} \psi(x). \quad (4.9)$$

Die Link-Variable ersetzt somit das Eichfeld der Kontinuums-QCD. Die Quark-Wirkung auf dem Gitter besitzt nach dem Übergang zu Differenzen und Summen die Form

$$S_F = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) (D_W[U] + m_0) \psi(x) \quad (4.10)$$

mit der nackten Quarkmasse  $m_0$  und dem Wilson-Dirac-Operator  $D_W$ , der anstelle der Eichfelder die Link-Variablen beinhaltet und somit eichinvariant ist. Dieser Operator hat die Form:

$$D_W = \frac{1}{2} [\gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) - ar \nabla_\mu^* \nabla_\mu]. \quad (4.11)$$

Der erste Term beschreibt die diskretisierte Ableitung. Der zweite Term wird Wilson-Term genannt, wobei der darin enthaltende Wilson-Parameter  $r$  zu Eins gewählt werden kann. Dieser Term unterbindet zwar das Auftreten von zusätzlichen Fermionen durch den künstlich eingeführten Cut-Off einer endlichen Gitterlänge  $a$ , was als Dopplerproblem bezeichnet wird, besitzt aber den Nachteil, nicht invariant unter axialen Transformationen zu sein. Er bricht damit die chirale Symmetrie explizit. Die Vorwärts- und Rückwärts-Differenzen-Operatoren beschreiben die eich-kovarianten Ableitungen und besitzen die Form:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \psi(x) &= \frac{1}{a} [U_{x\mu} \psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x)], \\ \nabla_\mu^* \psi(x) &= \frac{1}{a} [\psi(x) - U_{x\mu}^\dagger \psi(x - a\hat{\mu})]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Neben der Quark-Wirkung muss auch die Yang-Mills-Wirkung der QCD in die Gitterformulierung überführt werden. Ein eichinvarianter Ausdruck auf dem Gitter ist ein geschlossener Pfad aus vier Links, die sog. Plaquette. Diese stellt die kleinste mögliche Schleife auf dem Gitter dar. Der zugehörige Paralleltransporter

$$U(p) \equiv U_{x;\mu\nu} \equiv U(x, x + a\hat{\nu}) U(x + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) U(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu}) U(x + a\hat{\mu}, x) \quad (4.13)$$

wird Plaquette-Variable genannt. Diese Variable wird für die Konstruktion der Gitter-Yang-Mills-Wirkung benutzt und trägt daher den Namen Plaquette-Wirkung:

$$S_G = \frac{1}{g_0^2} \sum_p \text{ReTr}(1 - U(p)). \quad (4.14)$$

Die darin enthaltene Summe läuft über alle orientierten Plaquetten  $p$ . Die vollständige Wilson-Wirkung auf dem Gitter ist durch die Summe aus der Quark- und der Plakette-Wirkung gegeben:

$$\begin{aligned} S [U, \bar{\psi}, \psi] &= S_F [U, \bar{\psi}, \psi] + S_G [U] \\ &= a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) (D_W + m_0) \psi(x) + \frac{1}{g_0^2} \sum_p \text{ReTr}(1 - U(p)). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Einen Nachteil der Wilson-Gitter-Wirkung stellt die Verletzung der chiralen Symmetrie dar, die im Kontinuumslimes der Gittertheorie jedoch wieder erfüllt sein sollte.

#### 4.1.2 Verbesserte Gitter-Wirkung - Symanzik-Wirkung

Die im vorigen Abschnitt vorgestellte Gitter-Wirkung nach Wilson bewirkt bei der Berechnung physikalischer Größen Beiträge, die auf die Diskretisierung zurückzuführen sind. Solche Fehler können bis 30 Prozent ausmachen und zu einer falschen Extrapolation in das Kontinuum führen. Durch das Einfügen von Gegentermen können diese Fehler jedoch reduziert werden [24, 25]. Diese Gegenterme bewirken, dass die unerwünschten Gittereffekte durch Subtraktion eliminiert werden. Eine Variante dazu stellt die verbesserte Wirkung nach Symanzik dar. Dazu wird eine effektive Kontinuumswirkung konstruiert, die die Wilson-Wirkung für kleine Gitterkonstanten beschreibt. Neben der Konstruktion der Gegenterme kann diese effektive Wirkung ebenfalls dazu genutzt werden, die Wilson-Wirkung effektiv im Kontinuum zu beschreiben. Die Symanzik'sche Wirkung lässt sich wie folgt darstellen:

$$S = S_0 + aS_1 + a^2S_2 + \dots \quad (4.16)$$

Der Term  $S_0$  beschreibt dabei die reine Kontinuumswirkung, während die weiteren Terme die Gitter-Effekte proportional zu  $a$ ,  $a^2$  usw. charakterisieren. Die einzelnen Terme können mit

$$S_k = \int d^4x \mathcal{L}_k(x) \quad (4.17)$$

berechnet werden. Die Lagrangedichten mit  $k \geq 1$  werden aus allen möglichen lokalen Operatorkombinationen mit der Dimension  $4+k$  aufgebaut. Die Anzahl der Dimensionen ist mit der Quarkmasse verknüpft, die mit den auftretenden Feldern multipliziert wird.

Die Anzahl der möglichen Operatorkombinationen für  $\mathcal{L}_1$  kann durch zwei Überlegungen verringert werden. Zum einen müssen sie den Symmetrien der zugrunde liegenden Gitter-Theorie genügen, zum anderem kann durch partielle Integration ihre Anzahl weiter reduziert werden. Für die zugehörige Lagrangedichte für Gitter-Effekte von  $\mathcal{O}(a)$

verbleiben fünf Kombinationen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{O}_1 &= \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi, \\
 \mathcal{O}_2 &= \bar{\psi} D_\mu D_\mu \psi + \bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu, \\
 \mathcal{O}_3 &= m \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \\
 \mathcal{O}_4 &= m \left( \bar{\psi} \gamma_{\mu\nu} D_\mu \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu \gamma_\mu \psi \right), \\
 \mathcal{O}_5 &= m^2 \bar{\psi} \psi.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Die Felder werden ebenfalls durch ein effektives, eichinvariantes Feld beschrieben:

$$\phi_{\text{eff}}(x) = \phi_0(x) + a\phi_1(x) + a^2\phi_2(x) + \dots \tag{4.19}$$

Die Felder der verschiedenen Ordnungen sind wie die effektive Lagragedichte invariant unter den Symmetrien der Gitter-Theorie. Die Liste von Operatorkombinationen (4.18), die für die effektive Lagragedichte relevant sind, kann unter Verwendung der Feldgleichungen um die Kombinationen  $\mathcal{O}_2$  und  $\mathcal{O}_4$  weiter reduziert werden. Die effektive Lagragedichte  $\mathcal{L}_1$  ist somit aus den Operatorkombinationen  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_3$  und  $\mathcal{O}_5$  aufgebaut. Will man die Wilson-Wirkung mittels eines Gegenterms um die Gittereffekte der Ordnung  $\mathcal{O}(a)$  verbessern, bieten sich eben diese drei Operatorkombinationen an:

$$\delta S = a^5 \sum_x \{c_1 \hat{\mathcal{O}}_1(x) + c_3 \hat{\mathcal{O}}_3(x) + c_5 \hat{\mathcal{O}}_5(x)\}. \tag{4.20}$$

Die Dächer der Operatoren bringen zum Ausdruck, dass diese sich auf eine Gitterformulierung beziehen. Die Operatoren  $\hat{\mathcal{O}}_3$  und  $\hat{\mathcal{O}}_5$  können in die Wilson-Wirkung integriert werden, da sie die Struktur des Plakette-Feldes bzw. der skalaren Dichte besitzen, was zu einem angepassten Verhalten der Wirkung unter einer Reskalierung führt. Der einzige verbleibende Term ist  $\sim \hat{\mathcal{O}}_1$  und trägt den Namen Pauli-Term. Die verbesserte Wilson-Wirkung hat damit die Form:

$$S_{\text{imp}} = S_{\text{Wilson}} + a^5 \sum_x c_{SW} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} \psi. \tag{4.21}$$

Der einzige neue Koeffizient  $c_{SW}$  wird als Sheikholeslami-Wohlert Koeffizient bezeichnet und ist, abhängig von der verwendeten Gitterwirkung, eine komplizierte Funktion der Eich-Kopplung.

Neben der Verbesserung der Wilson-Wirkung durch den gefundenen Gegenterm ist auch die effektiv konstruierte Symanzik-Wirkung (4.16) selbst nützlich. Diese lautet:

$$S = S_0 + a c_{SW} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi. \tag{4.22}$$

Der Term  $S_0$  kann dabei durch die QCD oder auch durch eine effektive Theorie wie die chirale Störungstheorie gebildet werden. Ist Letzteres der Fall, so muss der Term  $aS_1$  für diese Zwecke in die chirale Störungstheorie überführt werden. Damit wird es dann möglich, auf dem Gitter gewonnene Ergebnisse analytisch zu überprüfen.

## 4.2 Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie für Gitter-QCD

Um die Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie (3.22) in die effektive Symanzik-Wirkung umzuschreiben, muss diese in jeder Ordnung ihrer Entwicklung (vgl. Kap. 3.2) mit Termen proportional zur Gitterkonstanten  $a$  angepasst werden [26]. Dabei wird zu der Entwicklung in den Impulsen und den Quarkmassen die Gitterkonstante als ein weiterer Entwicklungsparameter hinzugefügt. Die Ordnung  $\mathcal{O}(a)$  wird dabei wie zwei Impulse und wie eine Quarkmasse gezählt. Damit gilt für die betrachteten Ordnungen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &\sim \mathcal{O}(p^2, a), \\ \mathcal{L}_4 &\sim \mathcal{O}(p^4, p^2a, a^2).\end{aligned}$$

Darüber hinaus muss die euklidische Formulierung auf dem Gitter, die in Abschnitt 4.1.1 eingeführt wurde, berücksichtigt werden. Dies führt zu abweichenden Vorzeichen der Lagrangedichteterme gegenüber der Formulierung im Minkowski-Raum (3.22). Um die benötigten Gitter-Terme zu konstruieren, benutzt man wie im Fall des Masseterms der QCD die Spurionanalyse, die in analoger Weise durchgeführt werden kann. Dies ist ohne weitere Annahmen möglich, da die beiden Größen Masse und Gitterkonstante identische Eigenschaften aufweisen. Als Folge dessen brechen die zugehörigen Terme auch auf dieselbe Art explizit die chirale Symmetrie. Für die Analyse wird  $ac_{sw}$  aus (4.22), wie zuvor die Quarkmasse  $M$ , als Spurion  $A$  aufgefasst:

$$\bar{q}ac_{sw}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}q \sim \bar{q}_LA\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}q_R + \bar{q}_RA^\dagger\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}q_L. \quad (4.23)$$

Mit der Abkürzung

$$\rho = \rho_0 \mathbf{1} = 2W_0a, \quad (4.24)$$

wobei  $c_{sw}$  in  $W_0$  integriert ist, ergibt sich für die Ordnung  $\mathcal{O}(p^2, a)$  unter Berücksichtigung der euklidischen Formulierung folgende Lagrangedichte in LO:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \left\langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \right\rangle - \frac{F_0^2}{4} \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle - \frac{F_0^2}{4} \left\langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \right\rangle. \quad (4.25)$$

Die Terme in NLO werden ebenfalls mittels Spurionanalyse gefunden. Durch die gleiche Struktur des Masseterms der QCD und des Pauli-Terms der Symanzik-Wirkung haben die Gitterterme der chiralen Lagrangedichte dieselbe Form. Sie unterscheiden sich neben den unterschiedlichen Spurions in den zugehörigen Konstanten, die im Fall der Gitterterme mit  $W'_i$  bezeichnet sind. Den Termen proportional zu  $p^2a$  sind die Konstanten  $W_i$  zugeordnet. Die Langrangedichte für die chirale Störungstheorie auf dem Gitter lautet [27]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 \\ &= \frac{F_0^2}{4} \left\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right\rangle - \frac{F_0^2}{4} \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle - \frac{F_0^2}{4} \left\langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \right\rangle\end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned}
 & -L_1 \left\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right\rangle^2 - L_2 \left\langle \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \right\rangle - L_3 \left\langle \left( \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right)^2 \right\rangle \\
 & + L_4 \left\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right\rangle \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle + W_4 \left\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right\rangle \left\langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \right\rangle \\
 & + L_5 \left\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \left( \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \right) \right\rangle + W_5 \left\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \left( \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \right) \right\rangle \\
 & - L_6 \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle^2 - W_6 \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle \left\langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \right\rangle \\
 & - W'_6 \left\langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \right\rangle^2 - L_7 \left\langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right\rangle^2 \\
 & - W_7 \left\langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right\rangle \left\langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \right\rangle - W'_7 \left\langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \right\rangle^2 \\
 & - L_8 \left\langle \chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi \right\rangle - W_8 \left\langle \rho^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \chi \right\rangle \\
 & - W'_8 \left\langle \rho^\dagger U \rho^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \rho \right\rangle. \tag{4.27}
 \end{aligned}$$

Damit ist die Konstruktion der Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie zur Beschreibung der Gitter-QCD abgeschlossen. In der Gitter-QCD wird häufig eine axial gedrehter Masseterm verwendet, was einige Vorteile mit sich bringt. Diese Technik soll im folgenden Kapitel behandelt werden.



## 5 Twisted-Mass-QCD

Die Twisted-Mass-Gitter-QCD (tmLQCD) bietet eine weitere Möglichkeit, neben der im vorherigen Kapitel vorgestellten Konstruktion von Gegentermen mit dem Symanzik'schen Programm die Wilson-Gitter-Wirkung in der Ordnung  $\mathcal{O}(a)$  zu verbessern. Um diese Verbesserung zu erreichen, wird der Masseterm der Wilson-Wirkung axial im Flavourraum gedreht. Wie sich zeigen wird, tritt die angestrebte Verbesserung bei einer Drehung um  $\pi/2$  auf, was auch mit *maximal twist* bezeichnet wird. Um die Betrachtung zunächst übersichtlich zu halten, wird die Zwei-Flavour-QCD mit zwei degenerierten Quarks zur Erläuterung gewählt. Am Ende des Kapitels wird der in dieser Arbeit untersuchte Fall mit drei Flavours vorgestellt. Einführungen in die Twisted-Mass-QCD im Kontinuum und auf dem Gitter bieten [9, 28].

### 5.1 Twisted-Mass-QCD im Kontinuum

Wird eine gedrehte Massematrix betrachtet, spricht man von der Twisted-Mass-QCD (tmQCD). Zunächst werden die Auswirkungen eines gedrehten Masseterms im Kontinuum betrachtet. In der QCD (2.2) kann der Masseterm allgemein in der Form

$$\mathcal{L}_{QCD,m} = \bar{\chi} M e^{i\omega\gamma_5\tau^3} \chi \quad (5.1)$$

geschrieben werden. Wegen den Transformationseigenschaften der Quarkfelder  $\chi$  kann mittels  $\tau^3$ , das auf das Flavour-Doublett wirkt, durch eine axiale Transformation der Form

$$\begin{aligned} \psi &= e^{\frac{i}{2}\omega\gamma_5\tau^3} \chi, \\ \bar{\psi} &= \bar{\chi} e^{\frac{i}{2}\omega\gamma_5\tau^3} \end{aligned} \quad (5.2)$$

der Massenterm der tmQCD zurück in die geläufige Standardform

$$\mathcal{L}_{QCD,m} = \bar{\psi} M \psi \quad (5.3)$$

gebracht werden. Man spricht im Fall der Standardform von der physikalischen Basis (*physical basis*); wird hingegen die Drehung nicht auf die Felder bezogen, sondern als eine Drehung der Matrix  $M$  aufgefasst, so spricht man von einer verdrehten Basis (*twisted basis*). Spaltet man die Exponentialfunktion aus (5.1) auf, so erhält man eine in Real- und Imaginärteil separierte Masse  $M$ :

$$\begin{aligned} M e^{i\omega\gamma_5\tau^3} &= M (\cos(\omega) + i\gamma_5\tau^3 \sin(\omega)), \\ \tilde{m} = M \cos(\omega), \quad \mu &= M \sin(\omega), \quad M = \sqrt{\tilde{m}^2 + \mu^2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Von maximaler Verdrehung spricht man bei  $\omega = \pi/2$ , wenn  $\mu$  maximal wird und somit  $\tilde{m}$  verschwindet. Als wichtige Erkenntnis ist festzuhalten, dass die Physik aufgrund der Symmetrien der Lagrangedichte durch eine Drehung des Masseterms im Kontinuum nicht verändert wird.

## 5.2 Wilson-Twisted-Mass-QCD

In der Wilson-Twisted-Mass-QCD (WtmQCD) wird die Methode der axial gedrehten Masse auf die Wilson-Wirkung angewandt. Die Wirkung der WtmQCD hat in der *twisted basis* die Form:

$$S_F^{tw} [U, \bar{\chi}, \chi] = a^4 \sum_x \bar{\chi}(x) \left( \frac{1}{2} (\gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) - ar \nabla_\mu^* \nabla_\mu) + m_q e^{i\omega \gamma_5 \tau^3} \right) \chi(x). \quad (5.5)$$

Verlagert man die Drehung des Masseterms in die Felder, gelangt man zur *physical basis*. Dabei hat die Wirkung der WtmQCD folgende Form:

$$S_F^{ph} [U, \bar{\psi}, \psi] = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) \left( \frac{1}{2} (\gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) - ar \nabla_\mu^* \nabla_\mu e^{-i\omega \gamma_5 \tau^3}) + m_q \right) \psi(x). \quad (5.6)$$

Offenbar erhält man anders als im Kontinuum bei der Gitter-Darstellung nicht die Standardform der betrachteten Wirkung, hier die Wilson-Wirkung, zurück. Dies ist auf die Eigenschaften des Wilson-Terms zurückzuführen, der nicht invariant unter Drehungen im Flavourraum ist. Somit handelt es sich bei der WtmQCD und einer Gitter-QCD mittels der Standard-Wilson-Wirkung um zwei unterschiedliche Regularisierungen auf dem Gitter.

Die WtmQCD besitzt zwei entscheidende Vorteile. Der erste Vorteil ist eine automatische  $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung bei maximalem Twist. Der Wilson-Term wird in die Wirkung eingefügt, um das Dopplerproblem zu umgehen, sorgt jedoch für zusätzliche Gittereffekte der  $\mathcal{O}(a)$ . Aufgrund seiner zu einem zusätzlichen Masseterm äquivalenten Gestalt, macht er neben den Standard-Renormierungen eine zusätzliche additive Renormierung der Form

$$\tilde{m} = m_q - m_{cr} \quad (5.7)$$

notwendig. Dabei ist  $m_q$  die physikalische Quarkmasse und  $m_{cr}$  die Verschiebung der Masse durch den Wilson-Term. Durch die Abhängigkeit der Masse vom Twistwinkel ist auch die Physik abhängig von diesem Winkel.

Will man eine automatische  $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung erhalten [9, 29], lässt sich  $m_q$  in der Simulation so wählen, dass diese Masse dem Einfluss des Wilson-Terms entspricht und als Gegenterm fungiert. Aufgrund der Symmetrien der Kontinuums-QCD unter axialen Drehungen des Masseterms lässt sich die Masse der entsprechenden Simulation vollständig in den Imaginärteil von  $m_0$  verlegen, was einer maximalen Drehung von  $\pi/2$  entspricht. Der Realteil bleibt dabei bei dem um  $\mathcal{O}(a)$  verbesserten Wert.

Der zweite Vorteil der WtmQCD besteht in der Vermeidung von Nullmoden des Dirac-Operators, die eine statistische Auswertung von Observablen erschweren. Für weitere Informationen kann auf [30] zurückgegriffen werden.

### 5.3 Twisted-Mass in der chiralen Störungstheorie

Wird die Methode der WtmQCD auf die chirale Störungstheorie angewandt [31,32], lässt sich auch hier die Wirkung bzw. die Lagrangedichte sowohl in der physikalischen Basis als auch in der verdrehten Basis formulieren. Die im folgendem verwendete Notation entspricht [33]. Die invarianten Felder der QCD sind in der chiralen Störungstheorie durch die Matrix  $U$  ersetzt. Ist der Masseterm mit  $m_u = m_d = m_q$  gemäß

$$\chi(\omega) = 2B_0 m_q e^{-i\omega\tau^3} = 2B_0 (\tilde{m}\mathbf{1} - i\mu\tau_3) = \tilde{\chi}\mathbf{1} + i\chi'_3\tau_3 \quad (5.8)$$

gedreht, befindet man sich in der *twisted basis*. Die Masse  $m_q$  lässt sich separieren in

$$\tilde{m} = m_q \cos(\omega), \quad \mu = m_q \sin(\omega), \quad m_q = \sqrt{\tilde{m}^2 + \mu^2}. \quad (5.9)$$

Die Gittermatrix  $\rho$  behält dabei ihre Standardform:

$$\rho = \rho_0 \mathbf{1} = 2W_0 a \mathbf{1}. \quad (5.10)$$

Die Lagrangedichte kann durch eine Drehung der Form

$$U = e^{-\frac{1}{2}\omega\tau^3} U' e^{-\frac{1}{2}\omega\tau^3} \quad (5.11)$$

in die *physical basis* transformiert werden, was jedoch eine Drehung der Gittermatrix  $\rho$  zu Folge hat.

Diese hat dann die Gestalt:

$$\rho(\omega) = 2W_0 a e^{i\omega\tau^3} = \rho_0 \mathbf{1} + i\rho_3 \tau^3. \quad (5.12)$$

Entsprechend gilt in der *twisted basis*:

$$\rho_0 = 2W_0 a \cos(\omega), \quad \rho_3 = 2W_0 a \sin(\omega), \quad \rho = \sqrt{\rho_0^2 + \rho_3^2}. \quad (5.13)$$

In der *physical basis* ist die Masse ungedreht und besitzt die Standardform:

$$\chi = \chi_0 \mathbf{1} = 2B_0 m_q \mathbf{1}. \quad (5.14)$$

Eine vertiefte Darstellung der chiralen Störungstheorie findet sich in [10].

### 5.4 Chirale Störungstheorie mit Twisted-Mass-Term für drei Quarkflavours

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung der Phasenstruktur der Drei-Flavour-QCD. Dabei wird der Spezialfall  $m_u = m_d = m_q \neq m_s$  betrachtet. Dafür muss die oben dargestellte Methode der tmQCD auf drei Flavours erweitert werden. Die allgemeine Drehung der Massematrix  $\chi$  kann durch eine Matrix  $\mathcal{D}$  ausgeführt werden [34]. Diese

allgemeine Drehmatrix hat die Gestalt:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

wobei  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  stets erfüllt ist. In dem hier betrachteten Fall wird als Drehmatrix  $\mathcal{D}$  eine Matrix gewählt, die ausschließlich die Massen  $m_u$  und  $m_d$  dreht,  $m_s$  jedoch nicht verändert. Eine solche Drehung wird durch die Matrix

$$\mathcal{D} = e^{-i\omega\lambda_3} \quad (5.16)$$

bewirkt. Die Matrix  $\lambda_3$  ist ein Generator der SU(3) und proportional zur dritten Gell-Mann-Matrix. Eine mit

$$\chi(\omega) = \chi \cdot \mathcal{D} = \chi e^{-i\omega\lambda_3} = 2B_0(\text{diag}(\tilde{m}, \tilde{m}, m_s) - i\mu\lambda_3) \quad (5.17)$$

gedrehte Massenmatrix besitzt die Form:

$$\chi(\omega) = \begin{pmatrix} \chi_0 + i\chi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_0 - i\chi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_s \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Die darin enthaltenden Größen sind durch

$$\begin{aligned} \chi_0 &= 2B_0\tilde{m}, \\ \chi_3 &= -2B_0\mu, \\ \chi_s &= 2B_0m_s \end{aligned} \quad (5.19)$$

gegeben. Die gedrehte Matrix (5.18) ersetzt die ungedrehte Form in der Lagragedichte nach Gl. (4.26). Mit Hilfe der Spurionanalyse lässt sich zeigen, dass dieser Austausch bis zur Ordnung  $\mathcal{L}_4$  ausreicht und keine neuen Terme in die Theorie einfließen. Damit ist die Herleitung einer effektiven Lagragedichte für WtmQCD mit einem Drehwinkel abgeschlossen. Mit der so gewonnenen effektiven Gleichung lässt sich die Minimastruktur der zugehörigen Gitterdarstellung ermitteln.

Bevor damit begonnen wird, soll im folgendem Kapitel noch ein kurzer Einblick in die Phasenstruktur der entsprechenden Theorie mit zwei degenerierten Quarkflavours ohne s-Quark gegeben werden.

# 6 Phasenstruktur der Twisted-Mass-Gitter-QCD für zwei Quarkflavours

In diesem Kapitel wird ein Überblick über die Kenntnisse der Phasenstruktur in der  $m_q$ - $\mu$ -Ebene für chirale Störungstheorie mit zwei Flavours gegeben. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in [35–38].

In den nachfolgenden Kapiteln wird die entsprechende Untersuchung für drei Flavours durchgeführt.

## 6.1 Parametrisierung der chiralen Störungstheorie für zwei Quarkflavours

Um die Phasenstruktur der WtmQCD für zwei Quarkflavours zu ermitteln, muss das Minimum der Lagrangedichte (4.26) bestimmt werden. In den hier benutzten Quellen wirkt die Drehung in  $\tau_3$ -Richtung. Das Minimum wird daher ebenfalls in diese Richtung gelegt. Mit dieser Richtung des Minimums nimmt die Matrix  $U$  aus (3.8) die vereinfachte Form

$$U = e^{i\omega_3\tau_3} = \begin{pmatrix} \cos \omega_3 - i \sin \omega_3 & 0 \\ 0 & \cos \omega_3 + i \sin \omega_3 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

an. Der Winkel  $\omega_3$  beschreibt die Verdrehung des Minimums in  $\tau_3$ -Richtung und wird daher Vakuumwinkel genannt. Eine Untersuchung ohne eine zuvor festgelegte Vakuumrichtung ist in [39] wiedergegeben.

Das Potential (4.26) lässt sich vereinfachen, indem eine von (3.8) abweichende Parametrisierung mit

$$U = u_0 \mathbf{1} + i \sum_{i=1}^3 u_i \tau_i \quad (6.2)$$

gewählt wird. Mit einem Vakuum ausschließlich in  $\tau_3$ -Richtung vereinfacht sich dies zu:

$$U = u_0 \mathbf{1} + i u_3 \tau_3. \quad (6.3)$$

Die Parameter  $u_0$  und  $u_3$  lassen sich nun mit (6.1) als

$$u_0 = \cos(\omega_3), \quad u_3 = \sin(\omega_3) \quad (6.4)$$

identifizieren. Es gilt die aus  $\det U = 1$  und der Unitarität von  $U$  folgende Nebenbedingung für  $U$ :

$$u_0^2 + \bar{u}_i^2 = u_0^2 + u_3^2 = 1. \quad (6.5)$$

Mit dieser neuen Parametrisierung und durch die Wahl einer eingeschränkten Vakuumrichtung vereinfacht sich das Potential der Lagrangedichte (4.26) zu:

$$V(u_0, u_3) = -c_1 u_0 + c_2 u_0^2 + c_3 u_3 + c_4 u_3^2 + c_5 u_0 u_3 + L_{\text{const.}} \quad (6.6)$$

Die bei der Berechnung dieses Potentials auftretenden teilweise massenabhängigen Koeffizienten  $c_i$  ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} c_1 &= F_0^2 \chi'_0, \\ c_2 &= -8 \left[ L_{86} \chi'^2_0 - (2L_{86} - W_{86}) \chi'_0 \rho_0 + (L_{86} - W_{86} + W'_{86}) \rho_0^2 \right], \\ c_3 &= -F_0^2 \chi'_3, \\ c_4 &= -8L_{86} \chi'_3, \\ c_5 &= -16L_{86} \chi'_0 \chi'_3 + 8(2L_{86} - W_{86}) \chi'_3 \rho_0. \end{aligned}$$

Um eine kürzere Form der Koeffizienten zu erhalten, ist für die Gasser-Leutwyler-Konstanten die abkürzende Schreibweise<sup>6</sup>

$$X_{ij} = 2X_j + X_i \quad (6.7)$$

verwendet worden. Weiterhin werden zu dem Quarkmassenterm  $\chi_0$  Terme proportional zu  $\rho_0 \sim a$  hinzugefügt:

$$\chi'_0 = \tilde{\chi}_0 + \rho_0 = 2B_0 \tilde{m}', \quad \chi'_3 = -2B_0 \mu, \quad (6.8)$$

was die Quarkmassen um Beiträge proportional zur Gitterkonstanten verschiebt. Die in der Formel (6.8) benutzten Größen entsprechen der Notation aus Abschnitt 5.3.

## 6.2 Minima- und Phasenstruktur für zwei Quarkflavours

Zur Untersuchung der Phasenstruktur für kleine Quarkmassen kann das Potential (6.6) auf die Form

$$V = -c_1 u_0 + c_2 u_0^2 + c_3 u_3 \quad (6.9)$$

reduziert werden, da alle Terme, die proportional zu  $u_i^2$  oder einer Masse sind geringere Beiträge liefern als die linearen Terme. Der Koeffizient  $c_1$  ist proportional zur gemeinsamen Masse der u- und d-Quarks, während  $c_3$  proportional zu der gedrehten Masse  $\mu$  ist. In Abhängigkeit vom Vorzeichen des Koeffizienten  $c_2$ , das nicht eindeutig bestimmt ist, können zwei verschiedene Szenarien für die Phasenstruktur auftreten.

### 6.2.1 Aoki-Szenario

Wird der  $c_2 > 0$  gewählt, tritt das sog. *Aoki-Szenario* ein [40]. Für den Fall einer nicht vorhandenen gedrehten Masse  $\mu$ , ist  $c_3 = 0$  und das Potential besitzt sein Minimum bei:

$$\epsilon = \frac{c_1}{2|c_2|}. \quad (6.10)$$

---

<sup>6</sup>siehe Anhang C

Ist  $|\epsilon| > 1$ , befindet sich der daraus resultierende Grundzustand je nach Vorzeichen des Koeffizienten  $c_1$  bei  $U = u_0 \mathbf{1} = \pm \mathbf{1}$  und macht somit beim Vorzeichenwechsel einen Sprung. Die  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ -Symmetrie wird durch die u- und d-Masse explizit zu  $SU(2)_V$  gebrochen. Der Grundzustand weist ebenfalls diese Symmetrie auf. Die drei resultierenden Goldstone-Bosonen der Theorie, die Pionen, sind massiv:

$$m_\pi^2 = \frac{1}{F_0^2} (|c_1| - 2c_2). \quad (6.11)$$

Für kleine Quarkmassen und einem daraus resultierenden  $|\epsilon| < 1$  ergibt sich nach Gl. (6.5) ein nicht verschwindender Wert für  $u_3$ . Das Auftreten von  $u_3$  bedeutet gemäß Gl. (6.3) eine zusätzliche Komponente des Vakuums in  $\tau_3$ -Richtung. Dies bewirkt eine Reduzierung der Symmetrien des Grundzustandes, wodurch es zu spontaner Brechung der Flavour- und Paritätssymmetrie kommt. Das Auftreten nicht verschwindender Beiträge von  $u_3 \tau_3$  ist dabei mit dem Erwartungswert

$$\langle \bar{\psi} \gamma_5 \tau_3 \psi \rangle \neq 0 \quad (6.12)$$

verknüpft. Die verbleibende Symmetrie ist eine  $U(1)$ -Symmetrie, und die vorliegende Phase wird *Aoki-Phase* genannt. Neben den masselosen Goldstone-Bosonen  $\pi_1$  und  $\pi_2$  existiert ein massives  $\pi_3$ -Meson mit der Masse:

$$m_{\pi_3}^2 = \frac{2c_2}{F_0^2} (1 - \epsilon^2). \quad (6.13)$$

Für  $|\epsilon| = 1$  existiert ein Phasenübergang zweiter Ordnung, an dem alle drei Pionen masselos sind.

Bei Werten  $\mu \neq 0$  enthält das Potential einen zusätzlichen Term proportional zu  $u_3$ , die Symmetrie ist dadurch explizit gebrochen. Das Minimum variiert im Gegensatz zu  $\mu = 0$  kontinuierlich, wo ein Sprung von  $U = +1$  nach  $U = -1$  auftritt. Die Massen der Pionen sind immer ungleich Null.

### 6.2.2 Normales Szenario

Wird der Koeffizient  $c_2 < 0$  angenommen, tritt das sog. *normale Szenario* ein. Die Betrachtung ohne gedrehte Masse ergibt einen Sprung des absoluten Minimums von  $U = +1$  bei positiven Quarkmassen nach  $U = -1$  bei negativen Massen. Alle Pionen sind massiv, mit:

$$m_\pi^2 = \frac{1}{F_0^2} (|c_1| + 2|c_2|). \quad (6.14)$$

Für die Betrachtung mit gedrehter Quarkmasse ergeben sich nicht verschwindende Werte von  $u_3$ . Für nicht zu große Werte von  $\mu$  existiert weiterhin ein Sprung des Minimums bei

$$u_3 = -\frac{|c_2|}{2|c_2|}, \quad u_0 = 1 - u_3. \quad (6.15)$$

Dieser Übergang stellt einen Phasenübergang 1. Ordnung dar. Für den Wert

$$\mu_c = \frac{|c_2|}{F_0^2 B_0} \sim a^2 \quad (6.16)$$

verschwindet dieser Sprung und der Übergang wird kontinuierlich. Auf der Grenzlinie des Überganges mit  $c_1 = 0$  und  $\mu < \mu_c$  besitzt das neutrale Pion die Masse:

$$m_{\pi_3}^2 = \frac{1}{2F_0^2 |c_2|} (4c_2^2 - c_3^2) \sim a^2. \quad (6.17)$$

Die Masse der geladenen Pionen variiert kontinuierlich beim Übergang von positiven zu negativen Quarkmassen. Für  $c_1 = 0$  besitzt die Masse der geladenen Pionen

$$m_{\pi_1}^2 = m_{\pi_2}^2 = \frac{2|c_2|}{F_0^2} \sim a^2 \quad (6.18)$$

ihr Minimum.

# 7 Entwicklung eines vereinfachten Potentials für drei Quarkflavours

Um das Verhalten des Grundzustandes der Wilson-Gitter-QCD in der chiralen Störungstheorie für drei Quarkflavours zu ermitteln, wird der Anteil der potentiellen Energiedichte an der Lagrangedichte (4.26) betrachtet. Das Potential besteht aus allen Termen, die keine Ableitungen der Feldkonfigurationsmatrix beinhalten:

$$\begin{aligned}
V(U) = & -\frac{F_0^2}{4} \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle - \frac{F_0^2}{4} \left\langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \right\rangle \\
& - L_6 \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle^2 - W_6 \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle \left\langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \right\rangle \\
& - W'_6 \left\langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \right\rangle^2 - L_7 \left\langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right\rangle^2 \\
& - W_7 \left\langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right\rangle \left\langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \right\rangle - W'_7 \left\langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \right\rangle^2 \\
& - L_8 \left\langle \chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi \right\rangle - W_8 \left\langle \rho^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \chi \right\rangle \\
& - W'_8 \left\langle \rho^\dagger U \rho^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \rho \right\rangle. \tag{7.1}
\end{aligned}$$

Um dieses Potential leichter untersuchen zu können, wird es in diesem Kapitel in drei Schritten vereinfacht. Im ersten Schritt wird eine Parametrisierung für die Feldkonfigurationsmatrix (3.6) der Goldstone-Bosonen gewählt; im zweiten Schritt werden die Massen um  $\rho_0 \sim a$  verschoben. Dies Verschiebung ermöglicht einen direkten Vergleich mit dem Fall  $N_f = 2$  aus Kapitel 6. Schließlich wird eine Näherung für kleine Massen durchgeführt, die die Grundlage bildet für die Berechnung der Kapitel 8 bis 10.

## 7.1 Parametrisierung der Feldkonfigurationsmatrix

Es muss eine Parametrisierung gewählt werden, mit der sich das Potential untersuchen lässt. Das Vakuum liegt bei diesem Ansatz ausschließlich in  $\lambda_3$ - und  $\lambda_8$ -Richtung, wodurch die Matrix  $U$  folgende Form besitzt:

$$\begin{aligned}
U &= e^{i(\phi_3 \lambda_3 + \phi_8 \sqrt{3} \lambda_8)} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\phi_3 + \phi_8) + i \sin(\phi_3 + \phi_8) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_3 - \phi_8) - i \sin(\phi_3 - \phi_8) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(2\phi_8) - i \sin(2\phi_8) \end{pmatrix}. \tag{7.2}
\end{aligned}$$

Diese Matrix wird nun parametrisiert durch:

$$U = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 + ib_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + ic_2 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Der Vergleich von (7.2) und (7.3) liefert für die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos(\phi_3 + \phi_8), & a_2 &= \sin(\phi_3 + \phi_8), \\ b_1 &= \cos(\phi_3 - \phi_8), & b_2 &= -\sin(\phi_3 - \phi_8), \\ c_1 &= \cos(2\phi_8), & c_2 &= -\sin(2\phi_8). \end{aligned} \quad (7.4)$$

In einer nach (7.3) gewählten Parametrisierung beinhaltet das Potential sechs Parameter. Aus (7.2) wird deutlich, dass  $a$ ,  $b$  und  $c$  stets den Betrag 1 besitzen. Damit lassen sich die Imaginärteile über die dazugehörigen Realteile ausdrücken:

$$\begin{aligned} a_2^2 &= 1 - a_1^2, & a_2 &= u\sqrt{1 - a_1^2} \\ b_2^2 &= 1 - b_1^2, & b_2 &= v\sqrt{1 - b_1^2} \\ c_2^2 &= 1 - c_1^2, & c_2 &= w\sqrt{1 - c_1^2}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Das Vorzeichen der Wurzelausdrücke ist dabei unbestimmt. Diese Mehrdeutigkeit wird durch die Faktoren  $u$ ,  $v$  und  $w$  berücksichtigt, die die Werte  $+1$  oder  $-1$  annehmen können.

Aus der zusätzlichen Bedingung, dass  $U$  eine spezielle unitäre Matrix ist, d.h.  $\det U = +1$ , lässt sich eine zusätzliche Abhängigkeit der Parameter untereinander ableiten:

$$c_1 = -a_2 b_2 + a_1 b_1 = -uv\sqrt{1 - a_1^2}\sqrt{1 - b_1^2} + a_1 b_1. \quad (7.6)$$

Mit den Bedingungen (7.5) wird es somit möglich, die Abhängigkeit des Potentials auf die Größen  $a_1$ ,  $b_1$  und  $c_1$  zu reduzieren. Mit der Bedingung (7.6) lässt sich zusätzlich die Größe  $c_1$  über  $a_1$  und  $b_1$  auszudrücken, was eine dreidimensionale grafische Auswertung ermöglicht. Dabei fungieren die Größen  $a_1$  und  $b_1$  als Koordinaten des Potentials  $V(a_1, b_1)$ .

Bei der Bestimmung des Minimums muss die Doppeldeutigkeit der Parameter  $a_2$ ,  $b_2$  und  $c_2$  berücksichtigt werden. Das zu untersuchende Potential hat daher zusätzliche Abhängigkeiten und besitzt die Form  $V(a_1, b_1, u, v, w)$ . Dass  $u$ ,  $v$  und  $w$  lediglich zwei mögliche Werte besitzen, stellt eine wesentliche Vereinfachung dar. Dennoch müssen  $2^3$  Parametersätze untersucht werden um festzustellen, welcher das absolute Minimum ausbildet.

Berechnet man nun das Potential der Lagragedichte nach (7.1) in der Parametrisierung

(7.3) einschließlich einer gedrehten Massematrix (5.18), so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 V(a,b,c) = & A(\tilde{m})(a_1 + b_1) + A_c(m_s)c_1 + B(\mu, \tilde{m})(a_1^2 + b_1^2) + B_c(m_s)c_1^2 \\
 & + C(\tilde{m}, \mu)a_1b_1 + C_c(\tilde{m}, m_s)(a_1 + b_1)c_1 + D(\mu)(a_2 - b_2) \\
 & + E(\tilde{m}, \mu)a_1a_2 + F(\tilde{m}, \mu)a_2b_1 + F_c(m_s, \mu)c_1(a_2 - b_2) \\
 & + G(\tilde{m}, \mu)a_1b_2 + G_c(m_s, \mu)c_2(a_1 - b_1) + H(\tilde{m}, \mu)b_1b_2 \\
 & + J(\tilde{m}, \mu)a_2b_2 + J_c(\tilde{m}, m_s)c_2(a_2 + b_2) + \text{const.}
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

In diesem Potential sind die folgenden Koeffizienten verwendet worden:

$$\begin{aligned}
 A(\tilde{m}) &= -\frac{F_0^2}{2}(\chi_0 + \rho_0), \\
 A_c(m_s) &= -\frac{F_0^2}{2}(\chi_s + \rho_0), \\
 B(\mu, \tilde{m}) &= +4[(\chi_3^2 - \chi_0^2)(L_6 + L_7 + L_8) - \rho_0^2(W_6' + W_7' + W_8') - \chi_0\rho_0(W_6 + W_7 + W_8)], \\
 B_c(m_s) &= +4[-\chi_s^2(L_6 + L_7 + L_8) - \rho_0^2(W_6' + W_7' + W_8') - \chi_s\rho_0(W_6 + W_7 + W_8)], \\
 C(\tilde{m}, \mu) &= -8[\chi_0^2L_6 + \chi_3^2L_7 + \chi_0\rho_0W_6 + \rho_0^2W_6'], \\
 C_c(\tilde{m}, m_s) &= -4[2\chi_0\chi_sL_6 + \rho_0(\chi_0 + \chi_s)W_6 + 2\rho_0^2W_6'], \\
 D(\mu) &= -\frac{F_0^2}{2}\chi_3, \\
 E(\tilde{m}, \mu) &= -4[2\chi_0\chi_3(L_6 + L_7 + L_8) + \chi_3(W_6 + W_7 + W_8)], \\
 F(\tilde{m}, \mu) &= -4[2\chi_0\chi_3(L_6 - L_7) + \chi_3\rho_0(W_6 - W_7)], \\
 F_c(m_s, \mu) &= -4[2\chi_3\chi_sL_6 + \chi_3\rho_0W_6], \\
 G(\tilde{m}, \mu) &= +4[2\chi_0\chi_3(L_6 - L_7) + \chi_3\rho_0(W_6 - W_7)], \\
 G_c(m_s, \mu) &= -4[2\chi_3\chi_sL_7 + \chi_3\rho_0W_7], \\
 H(\tilde{m}, \mu) &= +4[2\chi_0\chi_3(L_6 + L_7 + L_8) + \chi_3\rho_0(W_6 + W_7 + W_8)], \\
 J(\tilde{m}, \mu) &= +8[\chi_3^2L_6 + \chi_0^2W_7 + \chi_0\rho_0W_7 + \rho_0^2W_7'], \\
 J_c(\tilde{m}, m_s) &= +4[2\chi_0\chi_sL_7 + \chi_0\rho_0W_7 + \rho_0(\chi_0 + \chi_s)W_7 + 2\rho_0^2W_7']. \tag{7.8}
 \end{aligned}$$

## 7.2 Einführung verschobener Quarkmassen und einer abkürzenden Notation

In der Wilson-Gitter-Wirkung führt der Wilson-Term zu einer Verschiebung der Quarkmassen (5.7). Dieser Effekt kann durch eine additive Renormierung der Quarkmassen kompensiert werden. Dazu werden verschobene Quarkmassen wie folgt eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \chi_0 + \rho_0 &= \chi'_0 \Rightarrow \chi_0 = \chi'_0 - \rho_0, \\
 \chi_s + \rho_0 &= \chi'_s \Rightarrow \chi_s = \chi'_s - \rho_0.
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Die neuen Massen erhalten damit einen zusätzlichen additiven Beitrag proportional zur Gitterkonstanten  $a$ . Somit wechseln die drei linearen Masseterme mit den Koeffizienten

$A$ ,  $A_c$  und  $D$  aus Gleichung (7.7) ihr Vorzeichen, wenn die verschobenen Quarkmassen ihren Nulldurchgang vollziehen.

Für eine übersichtliche Darstellung des Potentials werden zusätzlich die nachstehenden Abkürzungen<sup>7</sup> für typische Kombinationen der LE-Konstanten in (7.8) eingeführt:

$$\begin{aligned} L &= L_6 + L_7 + L_8, & W &= W_6 + W_7 + W_8, & W' &= W'_6 + W'_7 + W'_8, \\ L_W &= 2L - W, & L_{W6} &= 2L_6 - W_6, & L_{W7} &= 2L_7 - W_7, \\ L_{WW} &= L - W + W', & L_{WW6} &= L_6 - W_6 + W'_6, & L_{WW7} &= L_7 - W_7 + W'_7. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Damit erhalten die Koeffizienten (7.8) des Potentials die folgende, kürzere Form:

$$\begin{aligned} A(\tilde{m}') &= -\frac{F_0^2}{2} \chi'_0, \\ A_c(m'_s) &= -\frac{F_0^2}{2} \chi'_s, \\ B(\mu, \tilde{m}') &= -4[(\chi'_0)^2 - \chi_3^2)L - \chi'_0 \rho_0 L_W + \rho_0^2 L_{WW}], \\ B_c(m'_s) &= -4[\chi'_s \rho_0 L_W + \rho_0^2 L_{WW}], \\ C(\tilde{m}', \mu) &= -8[\chi'_0 \rho_0 L_6 + \chi_3^2 L_7 - \chi'_0 \rho_0 L_{W6} + \rho_0^2 L_{WW6}], \\ C_c(\tilde{m}', m'_s) &= -4[2\chi'_0 \chi'_s L_6 - (\chi'_0 + \chi'_s) \rho_0 L_{W6} + 2\rho_0^2 L_{WW6}], \\ D(\mu) &= -\frac{F_0^2}{2} \chi_3, \\ E(\tilde{m}', \mu) &= -4[2\chi'_0 \chi_3 L + \chi_3 \rho_0 L_W], \\ F(\tilde{m}', \mu) &= -4[2\chi'_0 \chi_3 (L_6 - L_7) - \chi_3 \rho_0 (L_{W6} - L_{W7})], \\ F_c(m'_s, \mu) &= -4[2\chi'_s \chi_3 L_6 - \chi_3 \rho_0 L_{W6}], \\ G(\tilde{m}', \mu) &= +4[2\chi'_0 \chi_3 (L_6 - L_7) - \chi_3 \rho_0 (L_{W6} - L_{W7})], \\ G_c(m'_s, \mu) &= -4[2\chi'_s \chi_3 L_7 - \chi_3 \rho_0 L_{W7}], \\ H(\tilde{m}', \mu) &= +4[2\chi'_0 \chi_3 L - \chi_3 \rho_0 L_W], \\ J(\tilde{m}', \mu) &= +8[\chi'_0 \rho_0 L_7 + \chi_3^2 L_6 - \chi'_0 \rho_0 L_{W7} + \rho_0^2 L_{WW7}], \\ J_c(\tilde{m}', m'_s) &= +4[2\chi'_0 \chi'_s L_7 - (\chi'_0 + \chi'_s) \rho_0 L_{W7} + 2\rho_0^2 L_{WW7}]. \end{aligned} \quad (7.11)$$

### 7.3 Näherung des Potentials für kleine Quarkmassen

Im dritten Schritt wird analog zu den erfolgten Untersuchungen für zwei Quarkflavours aus Kapitel 6 das zu analysierende Potential für kleine Quarkmassen genähert. Unter der Annahme kleiner Massen ist es möglich, Terme, die quadratisch in den Massen sind, zu ignorieren. Des Weiteren können Terme proportional zu  $\rho_0$  im Vergleich zu Termen, die proportional zu  $\rho_0^2$  sind vernachlässigt werden, da sie weit weniger zu dem Potential

---

<sup>7</sup>siehe Anhang C

beitragen. Die Liste (7.11) verkürzt sich damit zu:

$$\begin{aligned}
 A(\tilde{m}') &= -\frac{F_0^2}{2}\chi'_0, \\
 A_c(m'_s) &= -\frac{F_0^2}{2}\chi'_s, \\
 B(\tilde{m}') &= -4\rho_0^2 L_{WW}, \\
 B_c(m'_s) &= -4\rho_0^2 L_{WW}, \\
 C(\tilde{m}') &= -8\rho_0^2 L_{WW6}, \\
 C_c(\tilde{m}', m'_s) &= -8\rho_0^2 L_{WW6}, \\
 D(\mu) &= -\frac{F_0^2}{2}\chi_3, \\
 J(\tilde{m}') &= +8\rho_0^2 L_{WW7}, \\
 J_c(\tilde{m}', m'_s) &= +8\rho_0^2 L_{WW7}.
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Das Potential nimmt damit die Form an:

$$\begin{aligned}
 V(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2) &= -\frac{F_0^2}{2}\chi'_0(a_1 + b_1) - \frac{F_0^2}{2}\chi'_s c_1 - \frac{F_0^2}{2}\chi_3(a_2 - b_2) \\
 &\quad - 4L_{WW}\rho_0^2(a_1^2 + b_1^2) - 4L_{WW}\rho_0^2 c_1^2 \\
 &\quad - 8L_{WW6}\rho_0^2 a_1 b_1 - 8L_{WW6}\rho_0^2 (a_1 + b_1) c_1 \\
 &\quad + 8L_{WW7}\rho_0^2 a_2 b_2 + 8L_{WW7}\rho_0^2 c_2 (a_2 + b_2).
 \end{aligned} \tag{7.13}$$

Es verbleiben damit, neben den Terme, die proportional zu einer Masse ( $A(\tilde{m}')$ ,  $A_c(m'_s)$  und  $D(\mu)$ ) sind sechs weitere Terme. Diese weiteren Terme sind abhängig von den Konstanten  $L_{WW}$ ,  $L_{WW6}$  und  $L_{WW7}$  (vgl. (7.10)). Die Werte der Konstanten  $W_i$  und  $W'_i$ , die das effektiv eingeführte Gitter charakterisieren, sind nicht bekannt. Sie sollten aber eine vergleichbare Größenordnung wie die Gasser-Leutwyler-Konstanten aufweisen, da sie denselben Renormierungsgruppengleichungen genügen. Dadurch ist es möglich, die Größe ihrer Beträge abzuschätzen [10]. Zusammen mit den bekannten Konstanten  $L_i$  ergibt sich für die auftretenden Kombinationen der Konstanten eine ungefähre Größe der Beträge von:

$$|L_{WW}| < 0,035, \quad |L_{WW6}| < 0,012, \quad |L_{WW7}| < 0,012. \tag{7.14}$$

Diese Näherung liefert für kleine Massen sehr genaue Werte der Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  im Minimum. Der Vorteil dieser Näherung ist die Abhängigkeit des Potentials von nur noch drei der neun LE-Konstanten sowie von nur noch neun von fünfzehn des ungenäherten Potentials.



## 8 Phasenstruktur des Potentials bestehend aus den drei masseabhängigen Termen

In den folgenden Kapiteln wird die Minimastruktur des Potentials (7.13) untersucht. Das Potential ist abhängig von den drei Konstanten  $L_{WW}$ ,  $L_{WW6}$  und  $L_{WW7}$ . Da deren Betrag nur aus Abschätzungen bekannt ist, wird die Untersuchung für verschiedene Vorzeichenkombinationen durchgeführt. In einem ersten Schritt werden sie aber als verschwindend angenommen; das Potential setzt sich dann lediglich aus den zu  $A(\tilde{m}')$ ,  $A_c(m'_s)$  und  $D(\mu)$  gehörigen drei Termen zusammen:

$$V(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2) = A(\tilde{m}')(a_1 + b_1) + A_c(m'_s)c_1 + D(\mu)(a_2 - b_2). \quad (8.1)$$

Für dieses Potential ist es möglich, das Verhalten der Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  vollständig analytisch zu ermitteln. Dies wird nicht immer möglich sein, wenn zusätzliche Terme berücksichtigt werden.

Um eine übersichtliche Form des Potentials zu erhalten, wird es durch die Konstante  $F_0^2 B_0$  normiert. Die drei berücksichtigten Terme sind damit ausschließlich proportional zu den drei betrachteten Massen. Zusätzlich wird, um eine grafische Kontrolle mit dem Computeralgebraprogramm Maple der Ergebnisse zu ermöglichen, das Potential mit (7.5) und (7.6) substituiert. Daraus resultiert ein dreidimensionalens Potential, das durch die Faktoren  $u$ ,  $v$  und  $w$  nicht eindeutig ist. Es muss geprüft werden, für welche Vorzeichen von  $u$ ,  $v$  und  $w$  das absolute Minimum gebildet wird. Die Normierung und die Substitution bringt das Potential auf die Form:

$$\begin{aligned} V'(a_1, b_1, u, v) &= -\tilde{m}'(a_1 + b_1) - m'_s c_1 + \mu(a_2 - b_2) \\ &= -\tilde{m}'(a_1 + b_1) - m'_s(-uv\sqrt{1 - a_1^2}\sqrt{1 - b_1^2} + a_1 b_1) \\ &\quad + \mu(u\sqrt{1 - a_1^2} - v\sqrt{1 - b_1^2}). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Das gestrichene Potential bezeichnet das normierte Potential. Da diese Normierung auf die folgenden Ergebnisse keinen Einfluss hat wird der Strich im folgenden weggelassen. Dieses Potential wird nun auf Sprünge des Minimums untersucht. Ebenfalls werden die analytischen Lösungen der Parameter  $a_1$  und  $b_1$  sowie die Vorzeichen der Imaginärteile  $u$ ,  $v$  und  $w$  angegeben, soweit dies möglich ist. Der Parameter  $c_1$  bzw. die Werte der Imaginärteile ergeben sich aus den Nebenbedingungen (7.5) und (7.6).

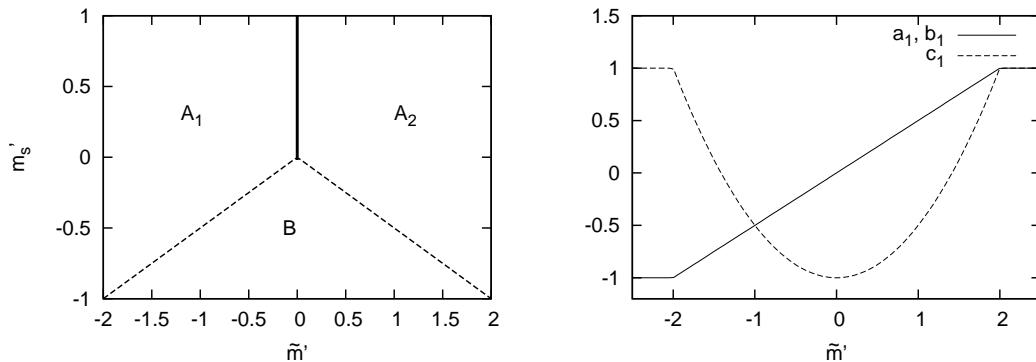


Abbildung 8.1: Phasendiagramm des Potentials (8.3) mit  $\mu = 0$  (links); Werte der Parameter  $a_1, b_1$  und  $c_1$  für  $\tilde{m}'_s = -1$  in Bereich  $B$  (rechts).

Erläuterung für alle Phasendiagramme: durchgezogene Linien bedeuten unstetige Übergänge, gestrichelte Linien beschreiben kontinuierliche Übergänge.

## 8.1 Betrachtung der Phasenstruktur ohne gedrehte Masse $\mu$

Zunächst wird das Potential ohne eine Drehung der u- und d-Quarkmasse betrachtet. Das Potential ist damit lediglich abhängig von den beiden unterschiedlichen Quarkmassen  $\tilde{m}'$  und  $\tilde{m}'_s$ . Es besitzt die Form:

$$V(a_1, b_1, c_1) = -\tilde{m}'(a_1 + b_1) - \tilde{m}'_s c_1. \quad (8.3)$$

Die Verhalten der Minima ist in Abb. 8.1 (links) gezeigt. Es sind drei verschiedene Bereiche zu erkennen, die mit  $A_1$ ,  $A_2$  und  $B$  bezeichnet sind:

- In den Bereichen  $A_1$  und  $A_2$  existiert ein konstantes Minimum, dieses befindet sich bei:

$$\begin{aligned} A_1 : \quad U &= \text{diag}(-1, -1, 1), \\ A_2 : \quad U &= \text{diag}(1, 1, 1). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Diese beiden Bereiche weisen für  $\tilde{m}'_s > 0$  eine gemeinsame Grenze bei  $\tilde{m}' = 0$  auf. Durch die zwei unterschiedlichen Positionen des Minimums in  $A_1$  und  $A_2$  springt dieses beim Überschreiten dieser Grenze. Der Sprung ist in Abb. 8.1 (links) durch eine durchgezogene Linie gekennzeichnet.

Für negative Werte der s-Quarkmasse existiert zwischen den Gebieten  $A_1$  und  $A_2$  ein weiteres, mit  $B$  bezeichnetes Gebiet. Die Grenze zu den Gebieten  $A_i$  ist gegeben durch:

$$\tilde{m}' = -2|\tilde{m}'_s|. \quad (8.5)$$

- In Bereich  $B$  existieren zwei entartete Minima, die identische Werte der Realteile  $a_1, b_1$  und  $c_1$  aufweisen, deren Imaginärteile jedoch beide Vorzeichen annehmen können ( $u = v = w = \pm 1$ ). Die Realteile  $a_1$  und  $b_1$  besitzen im Minimum die

Werte:

$$a_1 = b_1 = -\frac{\tilde{m}'}{2m'_s}. \quad (8.6)$$

Auf der durch Gl. (8.5) beschrieben Grenze besitzen alle Beträge der Realteile den Wert 1, der Übergang von  $B$  nach  $A_i$  ist somit stetig, was hier (Abb. 8.1) (wie auch in den folgenden Abbildungen) durch die gestrichelte Linie verdeutlicht ist. Beispielhaft ist für den Wert  $m'_s = -1$  das Verhalten der Parameter  $a_1$ ,  $b_1$  und  $c_1$  in Abb. 8.1 (rechts) gezeigt.

Im Fall verschwindender u- und d-Quarkmassen existiert keine eindeutige Gestalt der Feldkonfigurationsmatrix im Minimum, man findet:

$$\begin{aligned} m'_s > 0 \Rightarrow c_1 &= 1 : & ab = 1 &\Rightarrow a_1 = b_1, \\ m'_s < 0 \Rightarrow c_1 &= -1 : & ab = -1 &\Rightarrow a_1 = -b_1. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Für positive Werte von  $m'_s$  ist  $c_1 = 1$  und  $a_1 = b_1$ . Ist  $|a_1| = |b_1| \neq 1$  besitzen die zugehörigen Imaginärteile entgegengesetzte Vorzeichen ( $u = -v$ ). Im Fall negativer s-Quarkmassen ist  $a_1 = -b_1$  und  $c_1 = -1$ , die Imaginärteile besitzen für  $|a_1| = |b_1| \neq 1$  identische Vorzeichen ( $u = v$ ).

## 8.2 Betrachtung der Phasenstruktur einschließlich der gedrehten Masse $\mu$

Im zweiten Schritt wird die gedrehte Masse  $\mu$  in die Untersuchung einbezogen.

Das Potential hat mit einer zusätzlichen Abhängigkeit von der gedrehten Masse die Form:

$$V(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2) = -\tilde{m}'(a_1 + b_1) - m'_s c_1 + \mu(a_2 - b_2). \quad (8.8)$$

Zur besseren Übersicht werden zunächst zwei Schnittebenen durch den von  $\tilde{m}'$ ,  $m'_s$  und  $\mu$  aufgespannten Phasenraum des Potentials mit  $\tilde{m}' = 0$  bzw.  $m'_s = 0$  betrachtet; anschließend wird das Verhalten des Potentials im dreidimensionalen Phasenraum dargestellt.

### (a) $\tilde{m}' \neq 0$ , $m'_s = 0$ , $\mu \neq 0$

In der Ebene verschwindender s-Quarkmassen  $m'_s = 0$  befindet sich das Minimum für  $\mu = 0$  abhängig vom Vorzeichen der u- und d-Quarkmasse für  $\tilde{m}' > 0$  bei  $U = \text{diag}(1, 1, 1)$  und für  $\tilde{m}' < 0$  bei  $U = \text{diag}(-1, -1, 1)$ . Durch den zusätzlichen Beitrag einer gedrehten Masse verschiebt sich das Minimum entlang der Achse  $a_1 = b_1$ . Diese Parameter weisen dabei im Minimum die Werte

$$a_1 = b_1 = \frac{\tilde{m}'}{\sqrt{m_0'^2 + \mu^2}} \quad (8.9)$$

auf. Der Parameter  $c$  ist konstant und hat den Wert  $c_1 = 1$ . Die Imaginärteile der Parameter  $a$  und  $b$  weisen entgegengesetzte Vorzeichen auf. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{für } \mu > 0 : \quad u &= -v = -1, \\ \text{für } \mu < 0 : \quad u &= -v = 1. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Dieses Verhalten der Vorzeichen der Imaginärteile in Abhängigkeit von der gedrehten Masse wird im folgenden immer wieder auftreten. Der Sprung, der für  $\mu = 0$  gefunden wurde, tritt für  $\mu \neq 0$  nicht länger auf, er weicht einer kontinuierlichen Verschiebung entsprechend (8.9). Dieses Verhalten ist in Abb. 8.2 gezeigt.

Der Übergang von positiven zu negativen gedrehten Massen ist ebenfalls stetig.

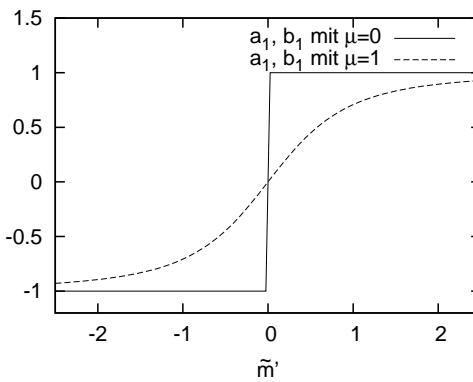


Abbildung 8.2: Verhalten der Parameter  $a_1$  und  $b_1$  für  $m'_s = 0$  bei  $\mu = 0$  und bei  $\mu = 1$ .

**(b)  $\tilde{m}' = 0, m'_s \neq 0, \mu \neq 0$**

Für die Ebene mit  $\tilde{m}' = 0$  ist das zugehörige Phasendiagramm in Abb. 8.3 (links) gezeigt. Darin sind drei unterschiedliche Bereiche zu erkennen:

- Gebiete  $E_1$  und  $E_2$ :

In Bereich  $E_1$  existiert ein einziges Minimum bei  $U = \text{diag}(-i, i, 1)$ . Ein unstetiger Übergang zu  $E_2$  befindet sich bei positiven Werten der Masse  $m'_s$  für  $\mu = 0$ . In Gebiet  $E_2$  existiert ebenfalls ein Minimum, dieses besitzt die Werte  $U = \text{diag}(i, -i, 1)$ .

- Gebiet  $D$ :

Dieses Gebiet ist durch

$$\mu = -2|m'_s| \quad (8.11)$$

von  $E_1$  bzw.  $E_2$  getrennt. In diesem Gebiet existieren zwei entartete Minima, die beide auf der Achse  $a_1 = -b_1$  lokalisiert sind. Die Parameter  $a_1$  und  $b_1$  besitzen in diesen Minima die Werte:

$$a_1^{1,2} = -b_1^{1,2} = \pm \sqrt{\frac{4m'^2 - \mu^2}{2m'_s}}. \quad (8.12)$$

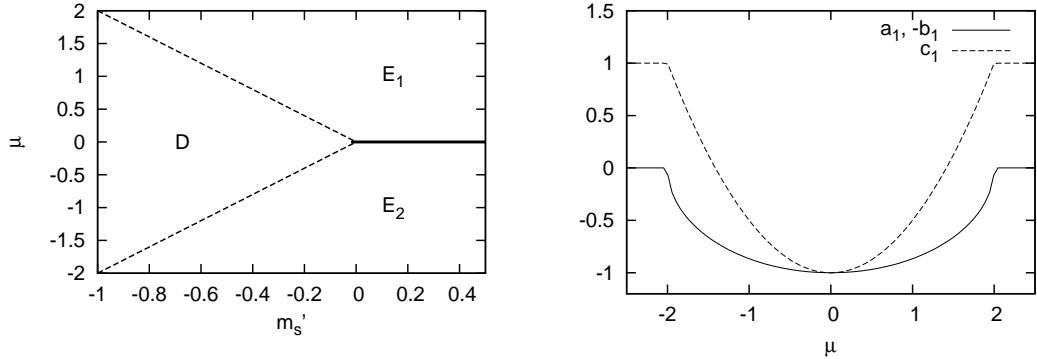


Abbildung 8.3: Phasendiagramm des linear genäherten Potentials mit  $\tilde{m}' = 0$  (links); Werte der Parameter  $a_1^1$ ,  $-b_1^1$  und  $c_1$  für  $m_s' = -1$  in Bereich  $B$  (rechts) für  $\mu \neq 0$ .

Das Vorzeichen der gedrehten Masse ist dabei entsprechend Gl. (8.10) bestimmt. Beide Minima sind dabei mit einem  $w = \pm 1$  verknüpft. Da sich für  $\mu = 0$  die Minima bei  $|a_1| = |b_1| = 1$  befinden, existiert anders als beim Wechsel für positive Werte der s-Quarkmasse kein Sprung der Potentialminima.

Ist in Gebiet  $D$  die Masse  $\mu = 0$  sind die Parameter  $a$  und  $b$  im Minimum nicht bestimmt und können wie in Abschnitt 8.2 beliebige Werte  $a_1 = -b_1$  annehmen.

**(c)  $\tilde{\mathbf{m}}' \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{m}_s' \neq \mathbf{0}$ ,  $\mu \neq 0$**

Mit den Kenntnissen des Verhaltens der Minima ohne gedrehte Masse und mit den Informationen aus den betrachteten Schnittebenen ist es nun möglich, das Verhalten des dreidimensionalen Phasenraumes darzustellen. Als Ausgangspunkt für die Beschreibung dient dabei das zweidimensionale Phasendiagramm mit  $\mu = 0$  entsprechend Abb. 8.1 (links). Dort sind drei Gebiete abgebildet, die mit  $A_1$ ,  $A_2$  und  $B$  bezeichnet sind. In diesem Abschnitt werden diese Gebiete in  $\mu$ -Richtung erweitert.

- Erweiterung des Gebietes  $B$  aus Abb. 8.1 um  $\mu \neq 0$ :  
Das Gebiet  $B$  erweitert sich zu einem dreidimensionalen kegelförmigen Volumen, das durch die Mantelflächen

$$\mu = \pm \sqrt{-m_0'^2 + 4m_s'^2}. \quad (8.13)$$

begrenzt wird. Dabei ist der Kegel auf negative Werte der s-Quarkmasse limitiert. Dieser Kegel ist in Abb. 8.4 dargestellt. Innerhalb des Kegels existieren zwei entartete Minima, die durch

$$\begin{aligned} a_1^{1,2} &= \frac{-\mu^2 \tilde{m}' - \tilde{m}'^3 \pm \sqrt{-\mu^2(2\tilde{m}'^2\mu^2 + \tilde{m}'^4 - 4\mu^4 m_s'^2 + \mu^4 - \tilde{m}'^2 m_s'^2)}}{2(\tilde{m}'^2 + \mu^2)m_s'}, \\ b_1^{1,2} &= -\frac{\mu^2 \tilde{m}' + m_0'^3 \pm \sqrt{-\mu^2(2\tilde{m}'^2\mu^2 + \tilde{m}'^4 - 4\mu^4 m_s'^2 + \mu^4 - 4\tilde{m}'^2 m_s'^2)}}{2(\tilde{m}'^2 + \mu^2)m_s'} \end{aligned} \quad (8.14)$$

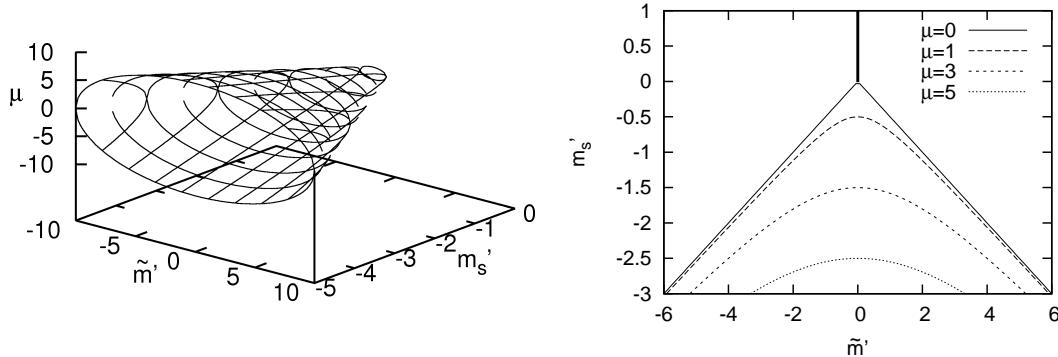


Abbildung 8.4: Aufweitung des Gebiete  $D$  aus Abschnitt 8.1 zu einem Kegel.  
Dargestellt als dreidimensionaler Körper (links) und durch Schnitte für verschiedene Werte von  $\mu$  (rechts).

gegeben sind. Analysiert man die absoluten Minima innerhalb des Kegels (8.13) genauer, finden sich dort zwei weitere kegelförmige Gebiete mit den Mantelflächen:

$$\begin{aligned}\mu &= \pm \sqrt{-\tilde{m}'^2 - 2\tilde{m}'m'_s} \\ \mu &= \pm \sqrt{-\tilde{m}'^2 + 2\tilde{m}'m'_s}.\end{aligned}\quad (8.15)$$

Die erste der beiden Gleichungen (8.15) gilt dabei für positive u- und d-Quarkmassen, die zweite für negative u- und d-Quarkmassen. Die Mantelflächen der Kegel (8.15) berühren sich an der  $m'_s$ -Achse und berühren den Kegel (8.13) in der  $\tilde{m}'-m'_s$ -Ebene. Innerhalb dieser beiden Kegel (8.15) besitzen die Imaginärteile der Parameter  $a$  und  $b$  gleiche Vorzeichen, außerhalb von (8.15), jedoch innerhalb von (8.13) entgegengesetzte Vorzeichen von  $a_2$  und  $b_2$ . Dieser Übergang, der im folgendem häufiger vorkommt, ist dennoch nicht mit einem Sprung der Potentialminima verbunden, da der Parameter, dessen Imaginärteil das Vorzeichen wechselt, dabei den Wert  $|1|$  annimmt und der Imaginärteil somit beim Übergang verschwindet.

Das Verhalten der Vorzeichen vor und nach dem Übergang ist in Tabelle 8.1 zusammengefasst. Angegeben sind dort für die vier möglichen Vorzeichenkombinationen von  $\tilde{m}'$  und  $\mu$  die Vorzeichen der Imaginärteile innerhalb (8.15), der Realteil, der beim Übergang den Wert  $|1|$  annimmt, und die Vorzeichen der Imaginärteile innerhalb von (8.13) nach dem Übergang.

- Erweiterung der Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  aus Abb. 8.1 um  $\mu \neq 0$ :  
Außerhalb des Kegel (8.13) existiert unabhängig von den Massen ein einziges Minimum, das durch

$$a_1 = b_1 = \frac{\tilde{m}'}{\sqrt{\tilde{m}'^2 + \mu^2}}. \quad (8.16)$$

beschrieben wird und einem Zusammenschluss der Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  entspricht. Dieses Minimum wird durch ein Potential mit  $u = -v$  gebildet, was in  $c_1 = 1$  resultiert. Es gibt keinen Sprung des Potentialminimums beim Nulldurchgang der Masse  $\tilde{m}'$  für  $\mu \neq 0$  bzw. beim Nulldurchgang von  $\mu$  für  $\tilde{m}' \neq 0$  und  $m'_s > 0$ . Beim Übergang der Minima aus dem Kegel (8.13) zu einem Minimum verhält sich das

Minimum stetig.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die  $m'_s$ -Achse mit  $m'_s > 0$  und  $\mu = 0$  die einzige Linie ist, bei deren Überschreitung das Potentialminimum ein unstetiges Verhalten zeigt.

Massen	Innerhalb (8.15)			Innerhalb (8.13)		
	$u$	$v$	$w$	$u$	$v$	$w$
$\tilde{m}' > 0, \mu > 0$	+1	+1	-1	$a_1 \rightarrow +1$	-1	+1
	-1	-1	+1	$b_1 \rightarrow +1$	-1	+1
$\tilde{m}' > 0, \mu < 0$	+1	+1	-1	$b_1 \rightarrow +1$	+1	-1
	-1	-1	+1	$a_1 \rightarrow +1$	+1	-1
$\tilde{m}' < 0, \mu > 0$	+1	+1	+1	$a_1 \rightarrow -1$	-1	+1
	-1	-1	-1	$b_1 \rightarrow -1$	-1	+1
$\tilde{m}' < 0, \mu < 0$	+1	+1	+1	$b_1 \rightarrow -1$	+1	-1
	-1	-1	-1	$a_1 \rightarrow -1$	+1	+1

Tabelle 8.1: Vorzeichen der Imaginärteile der Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  in Abhängigkeit der Vorzeichen der Massen  $\tilde{m}'$  und  $\mu$ , sowie Parameter  $a_1$ ,  $b_1$ , der beim Übergang den Betrag  $|1|$  besitzt.



## 9 Phasenstruktur des um zwei dominante Terme erweiterten Potentials

Im vorherigen Kapitel wurden lediglich die drei massebehafteten Terme des Potentials (7.13) in die Untersuchung der Minimastruktur einbezogen; für alle weiteren Konstanten wurde der Wert Null gewählt. In diesem Kapitel wird die Analyse des Potentials unter Berücksichtigung der zu  $L_{WW}$  proportionalen Terme erweitert, da diese gemäß der Abschätzung (7.14) den größten Beitrag zum Potential liefern sollten. Die andern beiden Konstanten und die zugehörigen Terme werden weiterhin vernachlässigt. Da die Abschätzung der Größe der Konstanten lediglich einen Wert für deren Betrag liefert, ist die Untersuchung für beide Vorzeichen der Konstanten durchgeführt worden.

Das nun zu untersuchende Potential besitzt die Gestalt:

$$V(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2) = -\frac{F_0^2}{2} \chi'_0(a_1 + b_1) - \frac{F_0^2}{2} \chi'_s c_1 - \frac{F_0^2}{2} \chi_3(a_2 - b_2) - 4L_{WW} \rho_0^2 (a_1^2 + b_1^2) - 4L_{WW} \rho_0^2 c_1^2 \quad (9.1)$$

Um eine übersichtliche Form des Potentials zu erhalten, wird es wie in Kapitel 8 mittels  $F_0^2 B_0$  normiert. Ebenfalls werden über (7.5) und (7.6) die Imaginärteile der Parameter durch ihre Realteile ausgedrückt. Das so normierte und zusätzlich substituierte Potential hat die Form:

$$\begin{aligned} V(a_1, b_1, c_1, u, v) &= -\tilde{m}'(a_1 + b_1) - m'_s c_1 + \mu(a_2 - b_2) - K_0(a_1^2 + b_1^2) - K_0 c_1^2 \\ &= -\tilde{m}'(a_1 + b_1) - m'_s(-uv\sqrt{1-a_1^2}\sqrt{1-b_1^2} + a_1 b_1) \\ &\quad + \mu(u\sqrt{1-a_1^2} - v\sqrt{1-b_1^2}) \\ &\quad - K_0(a_1^2 + b_1^2) - K_0(-uv\sqrt{1-a_1^2}\sqrt{1-b_1^2} + a_1 b_1)^2. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Die in der Gleichung auftretende Konstante  $K_0$  ist ein abkürzende Schreibweise für:

$$K_0 = 4L_{WW} \frac{\rho_0^2}{F_0^2 B_0} \sim a^2. \quad (9.3)$$

Die Konstante  $K_0$  besitzt damit dasselbe Vorzeichen wie die LE-Konstante  $L_{WW}$  und ist proportional zum Quadrat der Gitterkonstanten  $a$ .

## 9.1 Phasenstruktur des Potentials mit $L_{WW} > 0$ und $L_{WW6} = L_{WW7} = 0$

### 9.1.1 Untersuchung ohne gedrehte u- und d-Quarkmassen

In dem hier betrachteten Fall ist das Potential (9.2) nur von den Massen  $\tilde{m}'$  und  $m'_s$  abhängig und hat die Form:

$$V(a_1, b_1, c_1) = -\tilde{m}'(a_1 + b_1) - m'_s c_1 - K_0(a_1^2 + b_1^2) - K_0 c_1^2. \quad (9.4)$$

Die Gestalt des Phasendiagramms, das in Abb. 9.1 dargestellt ist, ähnelt stark dem des in Kapitel 8 untersuchten Potentials. Es existieren ebenfalls drei Gebiete mit abweichenden Minima. Im folgendem werden die Eigenschaften der drei Gebiete genauer betrachtet:

- Gebiete  $A_1$  und  $A_2$ :

Die Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  entsprechen denen aus Abb. 8.1 (links). Das Minimum befindet sich bei:

$$\begin{aligned} A_1 : \quad U &= \text{diag}(-1, -1, 1), \\ A_2 : \quad U &= \text{diag}(1, 1, 1). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Für positive s-Quarkmassen und für  $\tilde{m}' = 0$  besitzen die Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  einen Übergang, an dem sich das Minimum unstetig verhält.

- Gebiet  $B$ :

Für negative Massen  $m'_s$  befindet sich zwischen den Gebieten  $A_1$  und  $A_2$  ein weiteres Gebiet, das mit  $B$  bezeichnet ist. Die Grenze von  $B$  mit den anderen Gebieten ist durch

$$\tilde{m}' = -|m'_s| \quad (9.6)$$

gegeben. In  $B$  existieren zwei Minima, die konstante Parameterwerte besitzen. Diese sind:

$$B : \quad U = \text{diag}(-1, 1, -1), \quad U = \text{diag}(1, -1, -1) \quad (9.7)$$

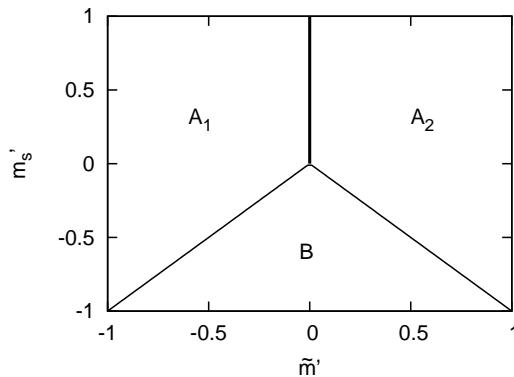


Abbildung 9.1: Phasendiagramm des Potentials mit  $K_0 > 0$  und  $\mu = 0$ .

Anders als in Kapitel 8 verhält sich das Minimum beim Übergang zwischen den Gebieten  $A_i$  und  $B$  unstetig.

### 9.1.2 Untersuchung mit gedrehten u- und d-Quarkmassen

Im dem hier betrachteten Fall lautet das Potential:

$$V(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2) = -\tilde{m}'(a_1 + b_1) - m'_s c_1 + \mu(a_2 - b_2) - K_0(a_1^2 + b_1^2) - K_0 c_1^2. \quad (9.8)$$

Im Phasendiagramm werden zunächst die beiden Schnittebenen mit  $\tilde{m}' = 0$  (a) und  $m'_s = 0$  (b) betrachtet. Anschließend wird das dreidimensionale Phasendiagramm in Abhängigkeit zu allen drei Massen (c) untersucht.

#### (a) $\tilde{m}' \neq 0, m'_s = 0, \mu \neq 0$

Zunächst wird das Potential in Abhängigkeit von den u- und d-Quarkmassen  $\tilde{m}'$  betrachtet, die einen zusätzlichen gedrehten Anteil aufweisen. Für  $\mu = 0$  befand sich das absolute Minimum bei  $U = \text{diag}(1, 1, 1)$  für  $\tilde{m}' > 0$  oder bei  $U = \text{diag}(-1, -1, 1)$  für  $\tilde{m}' < 0$ . Eine zusätzliche gedrehte Masse verlegt das absolute Minimum entlang der Achse  $a_1 = b_1$  mit  $c_1 = 1$  näher an  $a_1 = b_1 = 0$ . Es kommt, anders als für das Potential aus Kapitel 8, auch für  $\mu \neq 0$  zu einem Sprung des Minimums beim Vorzeichenwechsel der Masse  $\tilde{m}'$ . Bei diesem Sprung ändert das Minimum seine Werte von  $a_1 = b_1$  zu  $-a_1 = -b_1$ . Die Imaginärteile besitzen abhängig von der gedrehten Masse Vorzeichen wie in (8.10). Da sich für  $\mu = 0$  das Minimum bei  $|a_1| = |b_1| = c_1 = 1$  befindet, ist der Übergang von positiven zu negativen gedrehten Massen stetig. Für größere Werte der gedrehten Masse weicht der Sprung des Minimums beim Nulldurchgang der Masse  $\tilde{m}'$  einem stetigen Übergang. Diese Änderung tritt bei

$$|\mu_c| = 2K_0 \sim a^2 \quad (9.9)$$

auf. Für  $\tilde{m}' = 0$  befindet sich das Potentialminimum ab diesem Wert von  $\mu$  bei  $a_1 = b_1 = 0$ .

#### (b) $\tilde{m}' = 0, m'_s \neq 0, \mu \neq 0$

In diesem Abschnitt wird das Potential mit vollständig gedrehten u- und d-Quarkmassen  $\mu$  betrachtet,  $\tilde{m}'$  nimmt den Wert Null an. Zusätzlich werden s-Quarks mit der Masse  $m'_s$  berücksichtigt.

Das zugehörige Phasendiagramm ist in Abb. 9.2 gezeigt. Die dort dargestellten Gebiete werden im folgendem näher betrachtet:

- Gebiete  $D_1$  und  $D_2$ :

Für  $\mu = 0$  ergibt sich ein Sprung des absoluten Minimums beim Nulldurchgang der Masse  $m'_s$ . Auch für  $\mu \neq 0$  findet sich ein solcher Sprung, der nun bei negativen Werten der s-Quarkmasse auftritt. In beiden Gebieten  $D_1$  und  $D_2$  existieren

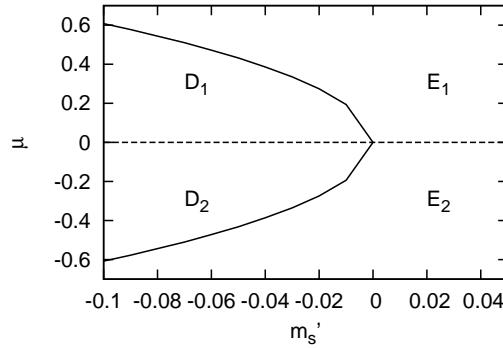


Abbildung 9.2: Werte der Masse  $\mu(m_s')$  beim Sprung der Minima von  $a_1 = b_1$  nach  $a_1 = -b_1$  inklusive Fit

zwei entartete Minima auf der Achse  $a_1 = -b_1$ . In diesen Minima besitzen die Parameter  $a_1$  und  $b_1$  die Koordinaten:

$$a_1^{1,2} = -b_1^{1,2} = \pm \frac{1}{12} \left( \frac{6S_1}{K_0} + \frac{24(-6m_s'K_0 + 9K_0^2 + m_s'^2)}{K_0S_1} + \frac{24(m_s' + 3K_0)}{K_0} \right)^{1/2}. \quad (9.10)$$

Dabei ist  $S_1$  eine Abkürzung für:

$$S_1 = \left( 72m_s'^2K_0 - 216m_s'K_0^2 + 216K_0^3 - 8m_s'^3 - 108K_0\mu^2 + 12\mu\sqrt{\frac{-3(36m_s'^2K_0 + 108m_s'K_0^2 - 4m_s'^3 - 27K_0\mu^2 + 108K_0^3)}{K_0}}K_0 \right)^{1/3}. \quad (9.11)$$

Der dritte Parameter  $c$  weicht im allgemeinen von  $c = c_1 = 1$  ab. Die Imaginärteile von  $a_2$  und  $b_2$  weisen Vorzeichen entsprechend (8.10) auf. Für jedes der beiden Minima besitzt  $c_2$  ein unterschiedliches Vorzeichen. Für  $\mu = 0$  ist  $|a_1| = |b_1| = |c_1| = 1$ , was einen stetigen Übergang des Minimums von  $D_1$  zu  $D_2$  zur Folge hat.

- Gebiete  $E_1$  und  $E_2$ :

Außerhalb von  $D_i$  existieren zwei weitere Gebiete. Diese sind in Abb. 9.2 mit  $E_1$  und  $E_2$  bezeichnet. Innerhalb dieser Gebiete treten je nach Wert von  $\mu$  ein oder zwei Minima auf. Der kritische Wert von  $\mu$  für diesen Übergang ist derselbe wie in Gl. (9.9). Ab diesem Wert befindet sich das alleinige Minimum bei  $a_1 = b_1 = 0$ . Allgemein besitzen die Koordinaten der Minima die Werte:

$$a_1^{1,2} = b_1^{1,2} = \pm \frac{\sqrt{4K_0^2 - \mu^2}}{2K_0}. \quad (9.12)$$

Der dritte Parameter  $c$  hat konstant den Wert  $c_1 = 1$ . Die Imaginärteile  $a_2$  und  $b_2$  besitzen wie in den Gebieten  $D_i$  Vorzeichen entsprechend (8.10). Der Übergang

von  $E_1$  zu  $E_2$  ist stetig, da  $|a_1| = |b_1| = |c_1| = 1$  für  $\mu = 0$  erfüllt ist.

**(c)  $\tilde{\mathbf{m}}' \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{m}'_s \neq \mathbf{0}$ ,  $\mu \neq 0$**

In den bisherigen Untersuchungen der beiden zweidimensionalen Schnittebenen sind sieben verschiedenen Gebiete benannt worden:  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $E_1$  und  $E_2$ . Für die Untersuchung des dreidimensionalen Phasenraumes werden die drei Gebiete aus Abb. 9.1 in  $\mu$ -Richtung erweitert:

- Erweiterung des Gebietes  $B$  aus Abb. 9.1 um  $\mu \neq 0$ :

Bei der dreidimensionalen Erweiterung in  $\mu$ -Richtung entwickeln sich die Grenzen der dreieckigen Fläche  $B$  aus 9.1 bzw die beiden Flächen  $D_i$  aus Abb. 9.2 zu einem kegelförmigen Volumen. Die Mantelfläche des Kegels ist nicht analytisch bestimmbar, numerisch ermittelte Werte sind in Abb. 9.3 dargestellt. Innerhalb

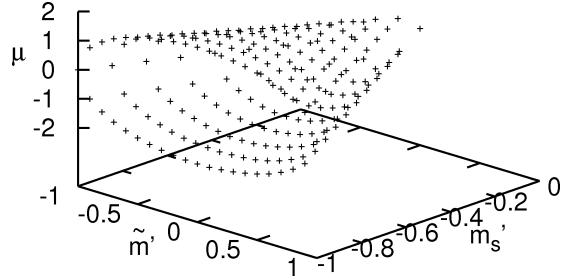


Abbildung 9.3: Werte der Masse  $\mu(\tilde{m}', m'_s)$  beim Sprung der Minima an den Übergängen zwischen den Gebieten  $B$  und  $A_i$  (Abb. 9.1), bzw.  $D_i$  und  $E_i$  (Abb. 9.2).

des dort gezeigten Kegels existieren zwei entartete Minima auf der Achse  $a_1 = -b_1$ . Da diese Achse durch eine zusätzliche u- und d-Quarkmasse nicht beeinflusst wird, können für  $\tilde{m}' = 0$  gefundenen Parameterwerte im Minimum (9.10) mit allen dort getroffenen Aussagen übernommen werden.

- Erweiterung der Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  aus Abb. 9.1 um  $\mu \neq 0$ :

Außerhalb des kegelförmigen Volumens existiert ein einziges Minimum, das von den zwei entarteten Minima aus den Gebieten  $D_i$  durch einen unstetigen Übergang auf der Kegelmantelfläche getrennt ist. Dieses eine Minimum befindet sich auf der Achse  $a_1 = b_1$  und  $c_1 = 1$  mit Imaginärteilen entsprechend (8.10). Die Position des Minimums lässt sich analytisch nicht bestimmen.

Beim Nulldurchgang der Masse  $\tilde{m}'$  wechselt das Vorzeichen der Parameter  $a_1$  und  $b_1$  unter der Bedingung, dass sich das System außerhalb des Kegelvolumens befindet. Unabhängig von der Masse des s-Quarks ist dieser Übergang bis zu dem Wert

$$|\mu_c| = 2K_0 \quad (9.13)$$

unstetig. Für größere Werte von  $\mu$  ergibt sich ein stetiger Übergang.

## 9.2 Phasenstruktur des Potentials mit $L_{WW} < 0$ und $L_{WW6} = L_{WW7} = 0$

In diesem Abschnitt wird das erweiterte Potential (9.2) mit der Randbedingung  $K_0 < 0$  untersucht. Wegen der Parallelen zu Abschnitt 9.1 erfolgt die Untersuchung der dort angewandten Methodik.

### 9.2.1 Untersuchung ohne gedrehte u- und d-Quarkmassen

In Abb. 9.4 ist das Phasendiagramm des Potentials für  $K_0 < 0$  in der  $\tilde{m}'-m'_s$ -Ebene gezeigt. Es sind fünf verschiedene Gebiete mit unterschiedlichen Minima zu erkennen. Diese Gebiete sind mit  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  bezeichnet. Die Besonderheiten dieser

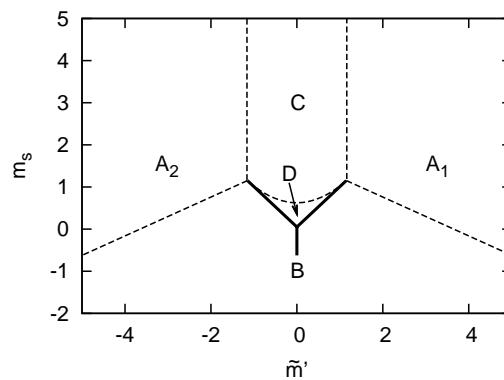


Abbildung 9.4: Phasendiagramm mit  $K_0 < 0$  und  $\mu = 0$

Gebiete werden nachfolgend diskutiert:

- Gebiete  $A_1$  und  $A_2$ :

In diesen Gebieten befindet sich das Minimum konstant bei den Werten

$$\begin{aligned} A_1 : \quad U &= \text{diag}(-1, -1, 1), \\ A_2 : \quad U &= \text{diag}(1, 1, 1). \end{aligned} \quad (9.14)$$

Die Grenzen zu Gebiet  $B$  werden durch

$$m'_s = \pm \frac{1}{2} \tilde{m}' - 3K_0 \quad (9.15)$$

beschrieben, während die Grenzen zu Gebiet  $C$  durch

$$\tilde{m}' = \pm 2K_0. \quad (9.16)$$

gebildet werden.

- Gebiet  $B$ :

Innerhalb von Gebiet  $B$  sind die Parameter im Minimum von den betrachteten Massen abhängig.

In  $B$  existieren zwei Minima mit identischen Werten der Realteile  $a_1 = b_1$ . Diese sind:

$$a_1 = b_1 = \frac{12^{1/3} \left( S_2^{2/3} + (K_0^2 - m_s' K_0) 12^{1/3} \right)}{12 S_2^{1/3} K_0}$$

$$S_2 = -K_0^2 \left( -9\tilde{m}' + \sqrt{\frac{12m_s'^3}{K_0} - 36m_s'^2 K_0 + 36m_s' K_0 - 12K_0 + 81\tilde{m}'^2 K_0} \right). \quad (9.17)$$

Die Imaginärteile der beiden Minima unterscheiden sich durch ihre Vorzeichen, es gilt  $u = v = -w = \pm 1$  für  $\tilde{m}' > 0$  und  $u = v = w = \pm 1$  für  $\tilde{m}' < 0$  (vgl. Tabelle 8.1). Für  $\tilde{m}' = 0$  ist  $c_1 = -1$ . Die Werte der Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  im Minimum sind in Abb. 9.5 gezeigt.

Für  $m_s' > K_0$  tritt ein Sprung beim Nulldurchgang der Masse  $\tilde{m}'$  auf. Diese ist in Abb. 9.4 durch den vertikalen Strich bei  $\tilde{m}' = 0$  verdeutlicht, der in das Gebiet  $B$  hineinragt. Der Übergang ins Gebiet  $D$  ist ebenfalls unstetig und wird in dem zu  $D$  zugeordneten Abschnitt besprochen.

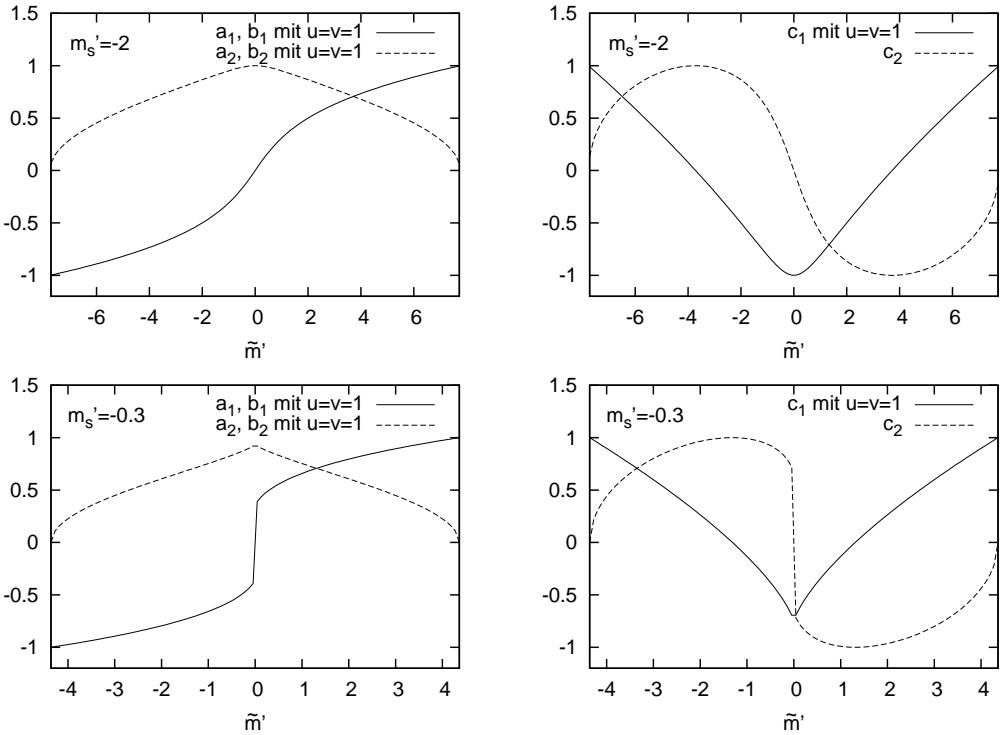


Abbildung 9.5: Verhalten der Parameter  $a$  und  $b$  (links) und des Parameters  $c$  (rechts) als Funktion von  $\tilde{m}'$  für  $m_s' = -2$  (oben) bzw.  $m_s' = -0,3$  (unten).

- Gebiet  $C$ :

Die Übergänge von  $A_i$  zu  $C$  sind ebenso durch eine kontinuierliche Änderung der

Parameter im Minimum geprägt wie die Übergänge von  $A_i$  nach  $B$ . Es existieren zwei entartete Minima, die identische Werte der Realteile aufweisen. Diese lauten:

$$a_1 = b_1 = -\frac{\tilde{m}'}{2K_0}. \quad (9.18)$$

Die Imaginärteile  $a_2$  und  $b_2$  besitzen entgegengesetzte Vorzeichen ( $u = -v = \pm 1$ ) und  $c_1$  den Wert 1. In Abb. 9.6 ist das Verhalten von  $a$  und  $b$  für  $u = -v = -1$  gezeigt.

Beim Übergang nach  $D$  spaltet sich jedes der Minima in zwei auf, diese liegen nicht länger auf der Achse  $a_1 = b_1$ .

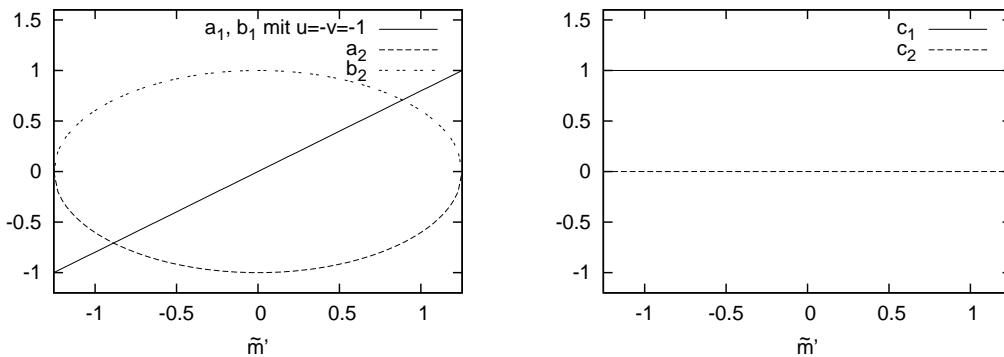


Abbildung 9.6: Verhalten der Parameter  $a$  und  $b$  (links) und des Parameters  $c$  (rechts) für  $K_0 < 0$  und  $\mu = 0$  als Funktion von  $\tilde{m}'$ .

- Gebiet  $D$ :

Für kleine Beträge der Massen  $\tilde{m}'$  und  $m'_s$  mit  $m'_s > 0$  und  $m'_s < |\tilde{m}'|$  existieren vier Minima, jeweils zwei für  $u = -v = \pm 1$ . Jedes weist dabei ein eigenes Vorzeichen von  $c_2$  auf. Die Grenze zu Gebiet  $C$  bildet die Funktion

$$m'_s = \frac{1}{K_0} \tilde{m}'^2 - K_0. \quad (9.19)$$

Die Grenze zu Gebiet  $B$  wird durch  $m'_s = |\tilde{m}'|$  gebildet. Die Minima verhalten sich beim Übergang über diese Grenze unstetig.

### 9.2.2 Untersuchung mit gedrehten u- und d-Quarkmassen

Wie in Abschnitt 9.1.2 werden auch hier zunächst die beiden Schnittebenen mit  $\tilde{m}' = 0$  (a) und  $m'_s = 0$  (b) betrachtet. Anschließend wird das dreidimensionale Phasendiagramm in Abhängigkeit zu allen drei Massen (c) untersucht.

#### (a) $\tilde{m}' \neq 0, m'_s = 0, \mu \neq 0$

Abhängig von den Beträgen der Massen  $\tilde{m}'$  und  $\mu$  treten in der  $\tilde{m}'\text{-}\mu$ -Ebene sechs verschiedene Gebiete mit abweichenden Potentialminima auf. Vier dieser Gebiete sind

für kleine Werte der betrachteten Massen durch einen Sprung getrennt, für größere Massen hingegen kontinuierlich verbunden. Das Phasendiagramm dieser Schnittebene ist in Abb. 9.7 (links) gezeigt.

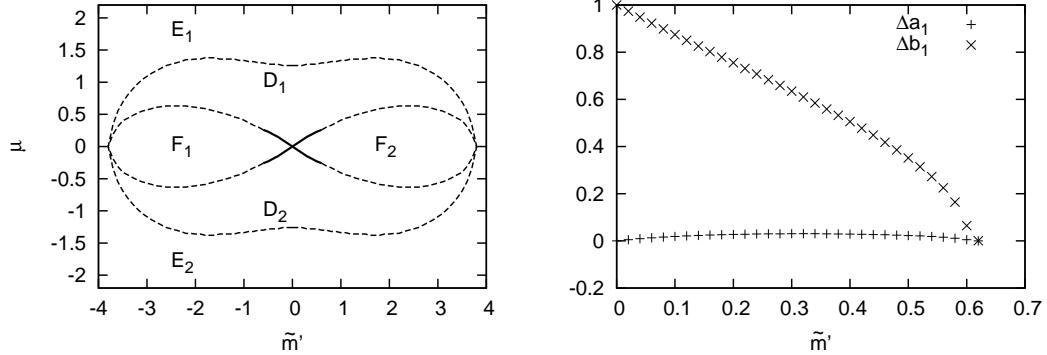


Abbildung 9.7: Werte von  $\tilde{m}'(\mu)$  beim Übergang der Minima (links). Größe des Sprunges der Realteile  $a_1$  und  $b_1$  bei diesem Übergang (rechts).

- Gebiete  $F_1$  und  $F_2$ :

Die Gebiete  $F_1$  und  $F_2$  sind um den Ursprung  $(0,0)$  symmetrisch angeordnet und weisen jeweils zwei entartete Minima auf. In  $F_1$  besitzen  $a_1$  und  $b_1$  negative, in  $F_2$  hingegen positive Werte, ebenfalls besitzen die Minima in diesen Gebieten unterschiedliche Vorzeichen von  $w$ . Die Gebiete entsprechen für  $\mu = 0$  Gebiet  $B$  in Abb. 9.4. Für  $\mu \neq 0$  wandert, je nach Vorzeichen der Imaginärteile  $u = v = \pm 1$ , Parameter  $a_1$  oder  $b_1$  zu einem Potentialrand. Ein vergleichbares Verhalten wurde bereits für  $K_0 = 0$  in Kapitel 8 beschrieben. Die Parameter verhalten sich entsprechend Tabelle 8.1. Besitzt einer der beiden Parameter  $a_1$  oder  $b_1$  den Wert  $|1|$ , kommt es zu einem Übergang in die Gebiete  $D_1$  oder  $D_2$ , was mit dem Wechsel des Vorzeichens des zu  $|a_1| = 1$  oder  $|b_1| = 1$  gehörigen Imaginärteils verbunden ist. Für kleine Massen  $\tilde{m}'$  und  $\mu$  findet dieser Vorzeichenwechsel eines der Parameter mit  $a_1 \neq |1|$  bzw.  $b_1 \neq |1|$  statt. Der Übergang ist damit unstetig. Die Größe dieser Sprünge ist Abhängigkeit von der Masse  $\tilde{m}'$  zeigt Abb. 9.7 (rechts).

- Gebiete  $D_1$  und  $D_2$ :

In den Gebieten  $D_1$  und  $D_2$  existieren demnach ebenfalls zwei entartete Minima, und die Imaginärteile  $a_2$  und  $b_2$  besitzen unterschiedliche Vorzeichen (vgl. Tabelle 8.1). Die Vorzeichen von  $u$  und  $v$  werden dabei durch das Vorzeichen der gedrehten Masse festgelegt (vgl. (8.10)). Wird der Betrag der gedrehten Masse weiter vergrößert, nähern sich die Minima der Achse  $a_1 = b_1$  an.

- Gebiet  $E_1$  und  $E_2$ :

Die jeweils zwei Minima aus  $D_1$  und  $D_2$  vereinen sich auf der Achse  $a_1 = b_1$  und  $c_1 = 1$  ( $u = -v = \pm 1$ ). In diesem Gebiet existiert nur noch ein Minimum.

**(b)  $\tilde{m}' = 0, \mathbf{m}' \neq \mathbf{0}, \mu \neq 0$**

Das Phasendiagramm dieser Schnittebene ist in Abb. 9.8 (links) gezeigt. Es existieren fünf Gebiete, die im folgenden näher beschrieben werden:

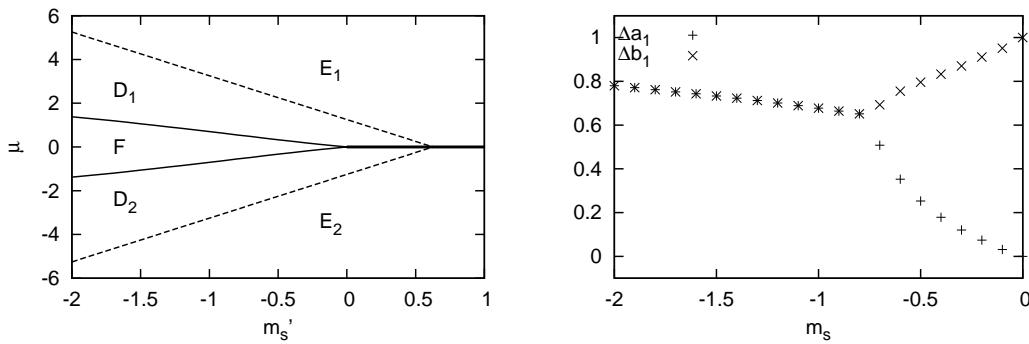


Abbildung 9.8: Werte von  $m_s'(\mu)$  beim Übergang der Minima (links). Größe des Sprunges der Realteile  $a_1$  und  $b_1$  bei diesem Übergang (rechts).

- Gebiet  $F$ :

In Gebiet  $F$  existieren wie im vorherigem Abschnitt zwei entartete Potentialminima. Die Imaginärteile  $a_2$  und  $b_2$  weisen identische Vorzeichen auf und es existiert für jede Kombination aus  $u = v \pm 1$  ein Minimum der Parameter  $c_1 = -1$ . Der Übergang zu den Gebieten  $D_1$  und  $D_2$  ist dabei immer mit einem Sprung verbunden. Die Größe des Sprunges der Parameter  $a_1$  und  $b_1$  in Abhängigkeit von der Masse  $m_s'$  ist in Abb. 9.8 (rechts) dargestellt. Beim Nulldurchgang der Masse  $\mu$  findet anders als in den anderen in dieser Schnittebene auftretenden Gebieten kein Sprung des Minimums statt.

- Gebiete  $D_1$  und  $D_2$ :

Die Minima in  $D_i$  können analytisch ermittelt werden und besitzen die Koordinaten:

$$a_1^{1,2} = -b_1^{1,2} = \pm \frac{1}{12} \left( \frac{6S_1}{K_0} + \frac{24(-6m_s'K_0 + 9K_0^2 + m_s'^2)}{K_0S_1} + \frac{24(m_s' + 3K_0)}{K_0} \right)^{1/2}. \quad (9.20)$$

Dabei ist  $S_1$  eine Abkürzung für:

$$S_1 = \left( 72m_s'^2K_0 - 216m_s'K_0^2 + 216K_0^3 - 8m_s'^3 - 108K_0\mu^2 + 12\mu\sqrt{\frac{-3(36m_s'^2K_0 + 108m_s'K_0^2 - 4m_s'^3 - 27K_0\mu^2 + 108K_0^3)}{K_0}}K_0 \right)^{1/3}. \quad (9.21)$$

Die Vorzeichen der Imaginärteile entsprechen (8.10) und  $w$  ergibt sich aus Tabelle 8.1. Die Gebiete  $D_1$  und  $D_2$  besitzen für  $-K_0 > m_s' > 0$  und  $\mu = 0$  eine gemeinsame Grenze. Beim Überschreiten dieser Grenze wechseln die Vorzeichen der Imaginärteile ihre Vorzeichen und es kommt somit zu einem Sprung des Minimums.

Für

$$\mu = \pm 2(m'_s + K_0) \quad (9.22)$$

vereinen sich die Minima von  $D_1$  bzw.  $D_2$  auf der Achse  $a_1 = b_1$  mit  $c_1 = 1$ .

- Gebiete  $E_1$  und  $E_2$ :

In diesen Gebieten existiert jeweils nur ein Minimum. Dieses befindet sich bei:

$$\begin{aligned} E_1, \quad \mu > 0 : \quad U &= \text{diag}(-i, i, 1), \\ E_2, \quad \mu < 0 : \quad U &= \text{diag}(i, -i, 1). \end{aligned} \quad (9.23)$$

Der Übergang zwischen diesen beiden Gebieten ist für  $m'_s > -K_0$  mit einem Sprung verbunden.

**(c)  $\tilde{m}' \neq 0, m'_s \neq 0, \mu \neq 0$**

Abschließend wird das dreidimensionale Phasendiagramm für  $K_0 < 0$  untersucht. Es wird mit Hilfe der Schnittebenen für  $\mu \neq 0$  aus Abb. 9.4 ergänzt. Die Untersuchung des Potentials (9.8) erfolgt in diesem Fall durch Ergänzungen zu den bisherigen Betrachtungen. Als Ausgangsbasis wird dazu Abb. 9.4 herangezogen:

- Erweiterung der Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  aus Abb. 9.4

Es existiert ein einziges Minimum auf der Achse  $a_1 = b_1$  und  $c_1 = 1$ . In den Abb. 9.7 und 9.8 sind die entsprechenden Gebiete mit  $E_1$  und  $E_2$  bezeichnet. Die entgegengesetzten Vorzeichen der Imaginärteile  $a_2$  und  $b_2$  ergeben sich gemäß (8.10). Je größer der Betrag von  $\mu$  ist, desto näher befindet sich das absolute Minimum an der Position  $a_1 = b_1 = 0$  und  $c_1 = 1$ . Da für  $\mu = 0$   $|a_1| = |b_1| = |c_1| = 1$  gilt, ist der Nulldurchgang der gedrehten Masse mit einem stetigen Übergang verknüpft. Auch beim Vorzeichenwechsel der s-Quarkmasse ist das Verhalten stetig.

- Erweiterung des Gebietes  $C$  aus Abb. 9.4

Wie bei der Erweiterung der Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  in  $\mu$ -Richtung befindet sich das einzige Minimum auf der Achse  $a_1 = b_1$  mit  $c_1 = 1$ . Da für  $\mu = 0$   $|a_1| = |b_1| = |c_1| \neq 1$  gilt, ist der Nulldurchgang der gedrehten Masse mit einem unstetigen Übergang verknüpft. Alle anderen Aussagen können von dem vorangegangenen Punkt übernommen werden. Zusätzlich ist der Übergang von positiven zu negativen u- und d-Quarkmassen stetig.

- Erweiterung des Gebietes  $B$  aus Abb. 9.4 Das bei der Erweiterung des Gebietes  $B$  in  $\mu$ -Richtung entstehende Volumen ist in Abb. 9.9 (links) gezeigt. Die Form dieses Volumens ähnelt zwei miteinander verschmolzenen Kegeln. In den Schnitten für  $\tilde{m}' = 0$  bzw.  $m'_s = 0$  (Abb. 9.7 und Abb. 9.8) wurde das für  $\mu \neq 0$  entstehende Gebiet mit  $F$  bezeichnet.

Innerhalb dieses Volumens existieren zwei entartete Minima, deren Imaginärteile  $a_2, b_2$  identische Vorzeichen aufweisen. Das Vorzeichen von  $c_2$  verhält sich gemäß Tabelle 8.1. Wird der Betrag von  $\mu$  vergrößert, kommt es zu einem Vorzeichenwechsel eines der Imaginärteile ( $u = -v$ ). Für kleine Beträge der Masse  $\tilde{m}'$  ist dieser Übergang unstetig (vgl. Abb. 9.8), für größere Beträge stetig, da der Real-

teil des zugehörigen Parameters beim Übergang den Wert  $|1|$  annimmt. Die Größe dieses Sprunges in Abhängigkeit von  $\tilde{m}'$  und  $m'_s$  ist in Abb. 9.10 gezeigt.

Für  $\mu = 0$  existiert ein Sprung beim Nulldurchgang der Masse  $\tilde{m}'$  für  $0 > m_s > K_0$ . Dieser Sprung tritt für  $\mu \neq 0$  und für  $0 > m_s > K_0$  in dem hier betrachteten Gebiet ebenfalls auf.

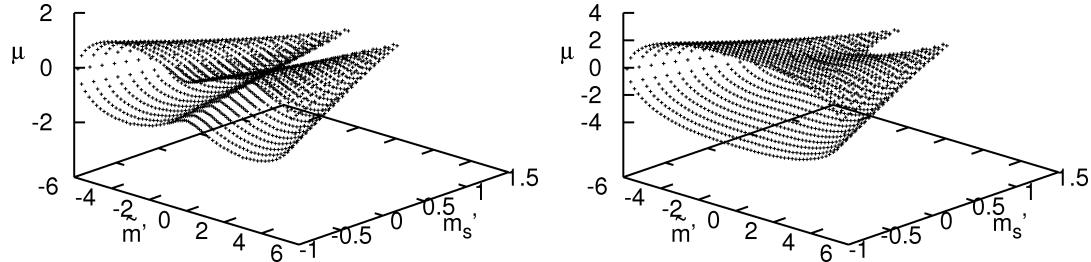


Abbildung 9.9: Grenzfläche des Vorzeichenwechsels eines Imaginärteils für  $K_0 < 0$ ; teilweise ist der Vorzeichenwechsel mit einem Sprung verbunden (links) und Grenzfläche des Überganges von zwei zu einem Minimum für  $K_0 < 0$  (rechts).

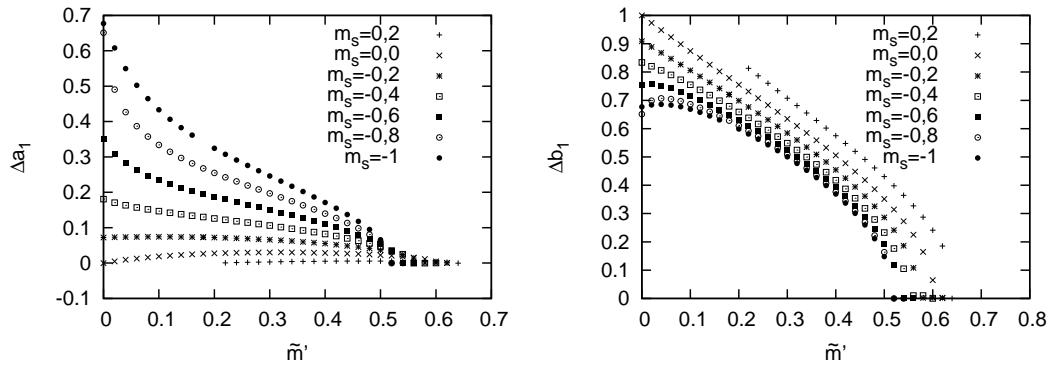


Abbildung 9.10: Größe der Sprünge  $\Delta a_1$  (links) und  $\Delta b_1$  (rechts) beim Übergang von Gebiet  $F_i$  nach  $D_i$  abhängig von  $\tilde{m}'$  für verschiedene Werte von  $m'_s$ .

- Erweiterung von  $D$  aus Abb. 9.4

Der in Abb. 9.9 (links) gezeigte ‘‘Doppelkegel’’ wird durch einen weiteren ‘‘Doppelkegel’’ mit ebenfalls entarteten Minima umschlossen. Dieser ist für  $\mu = 0$  mit  $D$  bezeichnet und ist in Abb. 9.9 (rechts) dargestellt.

Beim Übergang von diesem Gebiet in die Gebiete  $E_1$  oder  $E_2$  findet kein Sprung des Minimums statt. Die zwei in  $D$  existierenden Minima laufen auf der Achse  $a_1 = b_1$  und  $c_1 = 1$  zusammen.

# 10 Phasenstruktur unter Berücksichtigung aller neun Potentialterme

Die Phasenstruktur des in Kapitel 9 untersuchten Potentials stellt bereits eine gute Approximation des Potentials (7.7) für kleine Massen dar. Um diese Näherung weiter zu verbessern, werden nun alle unter (7.12) aufgelisteten Koeffizienten des Potentials für die Analyse der Phasenstruktur berücksichtigt. Dies führt gegenüber dem Potential (9.2) zu vier zusätzlichen Termen.

Wie in den vorangegangenen Kapiteln wird dieses Potential mit  $F_0^2 B_0$  normiert und die Imaginärteile der Parameter über die Realteile ausgedrückt. Das so gewonnene Potential lautet:

$$\begin{aligned}
 V(a_1, b_1, u, v, w) = & -\tilde{m}'(a_1 + b_1) - m'_s(-uv\sqrt{1-a_1^2}\sqrt{1-b_1^2} + a_1 b_1) \\
 & + \mu(u\sqrt{1-a_1^2} - v\sqrt{1-b_1^2}) \\
 & - K_0(a_1^2 + b_1^2) - K_0(-uv\sqrt{1-a_1^2}\sqrt{1-b_1^2} + a_1 b_1)^2 \\
 & - 2K_1 a_1 b_1 - 2K_1(a_1 + b_1)(-uv\sqrt{1-a_1^2}\sqrt{1-b_1^2} + a_1 b_1) \\
 & + 2K_2 uv\sqrt{1-a_1^2}\sqrt{1-b_1^2} \\
 & + 2K_2 w\sqrt{1-(-uv\sqrt{1-a_1^2}\sqrt{1-b_1^2} + a_1 b_1)^2}(u\sqrt{1-a_1^2} + v\sqrt{1-b_1^2})
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

Zusätzlich zur Konstanten  $K_0$  aus Gl. (9.3) ergeben sich zwei weitere Konstanten, die von  $L_{WW6}$  und  $L_{WW7}$  abhängen. Diese Konstanten besitzen die Form:

$$K_1 = 4L_{WW6} \frac{\rho_0^2}{F_0^2 B_0}, \quad K_2 = 4L_{WW7} \frac{\rho_0^2}{F_0^2 B_0}. \tag{10.2}$$

Anders als in der weniger genauen Approximation in Kapitel 9, in dem nur  $K_0$  zu berücksichtigen war, ist hier das Verhältnis der Konstanten von Bedeutung. Für die Konstanten werden Werte entsprechend (7.14) verwendet. Für eine vollständige Untersuchung müssen damit für jede Konstante beide Vorzeichen berücksichtigt werden.

## 10.1 Phasenstruktur des Potentials mit $L_{WW} > 0$ und $|L_{WW6}| = |L_{WW7}| \neq 0$

Im vorherigen Kapitel wurde abhängig vom Vorzeichen der Konstante  $K_0$  zwei unterschiedliche Szenarien gefunden. Da die vier in diesem Kapitel zusätzlich betrachteten Terme wegen ihrer Größe lediglich Korrekturen zu dem dort gefundenem Verhalten liefern, wird auch in diesem Kapitel die Betrachtung für beide Vorzeichen von  $K_0$  getrennt durchgeführt. Die Bezeichnungen der Gebiete in diesem Kapitel decken sich mit denen aus Kapitel 9. Gebiete mit gleichen Bezeichnungen in beiden Kapiteln weisen auch gleiche Eigenschaften auf.

Für jedes Vorzeichen von  $K_0$  werden dabei alle Vorzeichenkombinationen der Konstanten  $K_1$  und  $K_2$  betrachtet.

### 10.1.1 Untersuchung ohne Drehung der u- und d-Quarkmasse

Werden sowohl u- und d-Quarks wie auch s-Quarks als massiv angenommen, gibt es für alle möglichen Vorzeichenkombinationen Gemeinsamkeiten. Es finden sich, wie aus Abb.

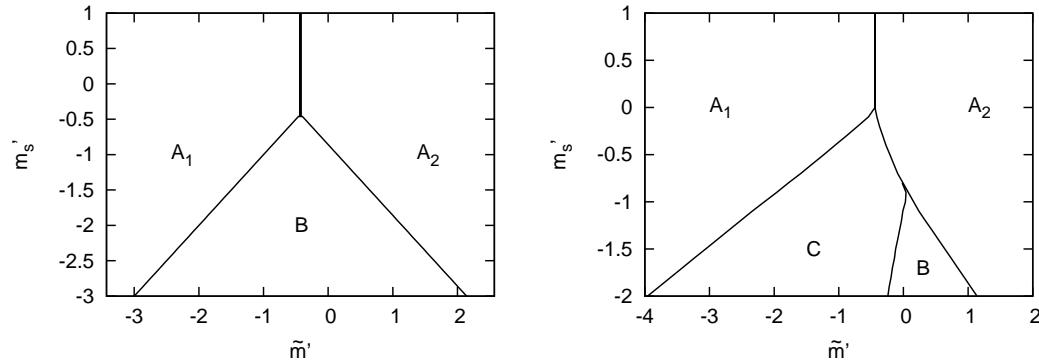


Abbildung 10.1: Verhalten der Minima in der  $\tilde{m}'$ - $\tilde{m}'_s$ -Ebene für  $K_0 > 0$ ,  $K_1 > 0$  und  $K_2 > 0$  (links) und für  $K_0 > 0$ ,  $K_1 > 0$  und  $K_2 < 0$  (rechts).

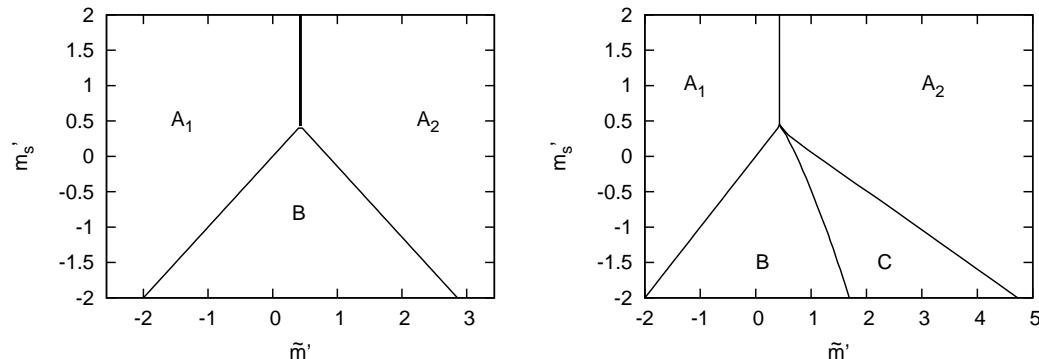


Abbildung 10.2: Verhalten der Minima in der  $\tilde{m}'$ - $\tilde{m}'_s$ -Ebene für  $K_0 > 0$ ,  $K_1 < 0$  und  $K_2 > 0$  (links) und für  $K_0 > 0$ ,  $K_1 < 0$  und  $K_2 < 0$  (rechts).

10.1 und 10.2 ersichtlich, vier verschiedene Gebiete, die mit  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$  und  $C$  bezeichnet sind und sich durch die Lage des Minimums unterscheiden.

- $A_1$ :  $U = \text{diag}(-1, -1, 1)$
- $A_2$ :  $U = \text{diag}(1, 1, 1)$
- $B$ :  $U = \text{diag}(-1, -1, 1)$ ,  $U = \text{diag}(1, -1, -1)$
- $C$ :  $a_1 = b_1$ ,  $c = u = v = w = \pm 1$

In  $C$  existieren zwei Minima mit identischen Werten von  $a_1 = b_1$ . Die Minima unterscheiden sich durch die Vorzeichen der Imaginärteile.

Diese vier Gebiete sind sämtlich durch Sprünge getrennt. Gebiet  $C$  tritt dabei lediglich bei negativer Konstante  $K_2$  auf. Im folgendem werden die einzelnen Vorzeichenkombinationen separat betrachtet:

**$K_0 > 0$ ,  $K_1 > 0$ ,  $K_2 > 0$  (Abb. 10.1 (links)):** Sind alle Konstanten größer Null, besitzt das Phasendiagramm eine ähnliche Form wie in der vorrausgegangenen Approximation für  $K_0 > 0$  in Kapitel 9, die  $\tilde{m}'$ - und die  $m'_s$ -Achse sind lediglich um  $-2K_1$  verschoben.

Für diese Kombination der Vorzeichen treten lediglich die drei Gebiete  $A_1$ ,  $A_2$  und  $B$  auf. Die Grenze zwischen  $A_1$  und  $A_2$  ist für  $m'_s > -2K_1$  bei  $\tilde{m}' = -2K_1$ .

Ist  $m_s < -2K_1$ , weisen die Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  eine Grenze zu  $B$  auf. Diese Grenze ist gegeben durch  $m'_s = \tilde{m}'$  und  $m'_s = \tilde{m}' - 2K_1$ .

**$K_0 > 0$ ,  $K_1 > 0$ ,  $K_2 < 0$  (Abb. 10.1 (rechts)):** Für diese Vorzeichenkombination tritt zusätzlich das Gebiet  $C$  auf.

Die Grenzen zwischen den Gebieten  $A_i$  und  $B$  bzw.  $C$  können nicht analytisch ermittelt werden und wurden daher numerisch bestimmt.

Die Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  besitzen eine gemeinsame Grenze für  $m'_s > 0$  und  $\tilde{m}' = -2K_1$ .

Für s-Quarkmassen von 0 bis  $-0,9$  besitzt das Gebiet  $A_2$  eine Grenze zu Gebiet  $C$ , für  $m'_s < -0,9$  eine Grenze zu Gebiet  $B$ .  $A_1$  grenzt für alle Werte von  $m'_s < 0$  ausschließlich an Gebiet  $C$ .

**$K_0 > 0$ ,  $K_1 < 0$ ,  $K_2 > 0$  (Abb. 10.2 (links)):** Das Verhalten ähnelt deutlich dem Fall mit  $K_0 > 0$ ,  $K_1 > 0$ ,  $K_2 > 0$ . Es besteht lediglich ein Unterschied durch das entgegengesetzte Vorzeichen der Konstanten  $K_1$  und einer daraus resultierenden entgegengesetzten Verschiebung der  $\tilde{m}'$ - und der  $m'_s$ -Achse.

**$K_0 > 0$ ,  $K_1 < 0$ ,  $K_2 < 0$  (Abb. 10.2 (rechts)):** Es treten vier unterschiedliche Gebiete auf. Die Phasengrenzen besitzen bei  $\tilde{m}' = m_s = -2K_1$  einen gemeinsamen Punkt.

Für die hier betrachtet Kombination der Vorzeichen grenzt  $A_1$  neben  $A_2$  ausschließlich an  $B$ , diese nichtlineare Grenze konnte analytisch nicht ermittelt werden.

Die Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  berühren sich für  $m'_s > -2K_1$  bei  $\tilde{m}' = -2K_1$ .

$A_2$  besitzt eine Grenze zu  $C$ , diese ist analytisch gegeben durch:

$$m'_s = \tilde{m}' . \quad (10.3)$$

### 10.1.2 Untersuchung mit Drehung der u- und d-Quarkmasse

Anders als in den Kapiteln 8 und 9 sind hier keine dreidimensionalen Phasendiagramme erstellt worden. Diese sind entweder äquivalent zu denen aus Kapitel 9 oder weisen ein so komplizierte Struktur auf, dass sie zu unübersichtlich wären. Daher wird das Verhalten der dreidimensionalen Phasendiagramme ausschließlich mit Hilfe von Schnittebenen des Phasenraumes erläutert.

**$K_0 > 0, K_1 \leq 0, K_2 > 0$ :** Für diese Kombination aus Vorzeichen tritt kein neues Verhalten der Potentialminima gegenüber Abschnitt 9.1.2 auf. Das Phasendiagramm ist lediglich verschoben und zwei unterschiedliche zweidimensionale Schnitte sind in den Abb. 10.3 und 10.4 gezeigt. Es existiert, erweitert man Abb. 10.3 und 10.4 in die jeweils feh-

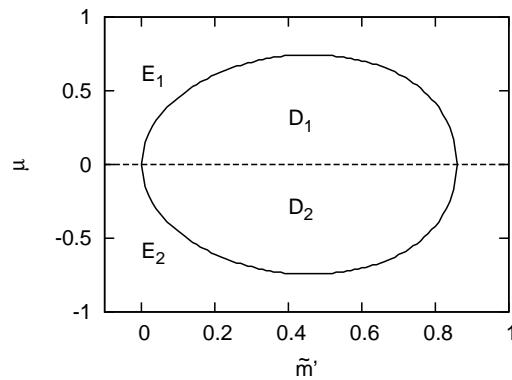


Abbildung 10.3: Verhalten der Minima in der  $\tilde{m}'$ - $\mu$ -Ebene für  $K_0 > 0$ ,  $K_1 < 0$  und  $K_2 > 0$ .

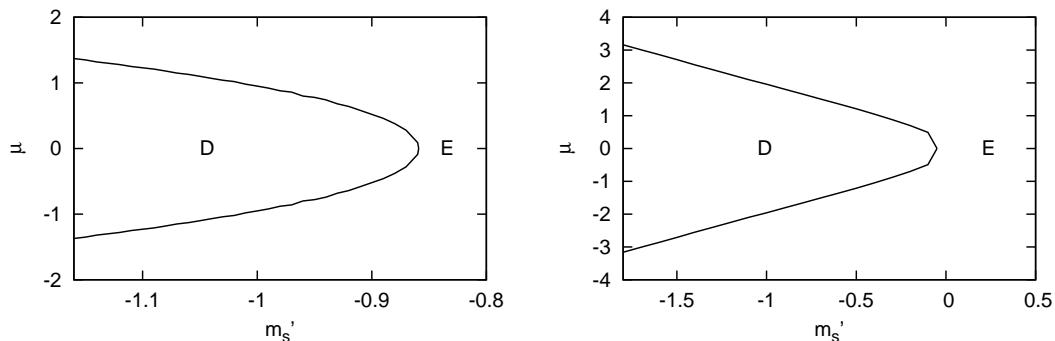


Abbildung 10.4: Verhalten der Minima in der  $m'_s$ - $\mu$ -Ebene für  $K_0 > 0$ ,  $K_1 > 0$  und  $K_2 > 0$  (links) und für  $K_0 > 0$ ,  $K_1 < 0$  und  $K_2 > 0$  (rechts).

lende Richtung, ein kegelförmiges Gebiet mit zwei entarteten Minima. Die Mantelfläche des Kegels stellt eine Grenze dar, an der sich die Minima unstetig verhalten.

Außerhalb des Kegels, was den Gebieten  $E_i$  entspricht, existiert ein Minimum mit  $a_1 = b_1$  und  $c_1 = 1$ . Dieses springt bei  $\tilde{m}' = -2K_1$  für den Fall, dass

$$|\mu_c| < 2K_0 + 2K_1 - 2K_2 \quad (10.4)$$

ist, von positiven zu negativen Werte der Parameter  $a_1 = b_1$ . Haben die Konstanten  $K_1$  und  $K_2$  identische Werte, ergibt sich daraus der Wert für  $\mu_c$  nach Gleichung (9.9) aus Abschnitt 9.1.2.

**$\mathbf{K_0 > 0, K_1 \leq 0, K_2 < 0}$ :** Für  $\mu = 0$  existieren in der  $\tilde{m}'$ - $m'_s$ -Ebene Abb. 10.1 (rechts) und 10.2 (rechts) vier verschiedene Gebiete. Wird zusätzlich die gedrehte Masse  $\mu$  betrachtet, ergibt sich erneut ein kegelförmiges Gebiet mit zwei entarteten Minima. Innerhalb dieses kegelförmigen Gebietes, existieren für einige Werte der Massen stetige Übergänge, die mit Vorzeichenwechsel der Imaginärteile verbunden sind. Die Gebiete, zwischen denen dieser Übergang stattfindet, sind in den Abb. 10.5, 10.6 und 10.7 mit  $F$  und  $D_i$  bezeichnet. Das Verhalten entspricht dem in Abschnitt 9.2 beschriebenen Übergang von  $F$  nach  $D_i$  (vgl. Gl. (8.10) und Tabelle 8.1). Aus den Abbildungen 10.5 und 10.6 ist ersichtlich, dass sich für kleinere Werte der s-Quarkmassen die Bereiche  $D_i$  vergrößern. Aus Abb. 10.6 (rechts) ist ersichtlich, dass die Gebiete  $D_i$  nicht für beliebig große Werte das Gebiet  $F$  umschließen. Besitzen die Gebiete  $D_i$  eine gemeinsame Grenze, ist das Verhalten der Minima beim Übergang stetig.

Für  $\mu = 0$  existierte ein Sprung des Minimums beim Übergang von  $B$  nach  $C$  (vgl. Abb. 10.1 (rechts) und 10.2 (rechts)). Dieses nichtstetige Verhalten tritt auch für kleine Werte von  $\mu \neq 0$  in dem nun mit  $F$  benannten Gebiet auf, wie aus Abb. 10.5 und 10.6 ersichtlich ist.

Außerhalb des kegelförmigen Gebietes existiert ein einziges Minimum mit  $a_1 = b_1$ ,  $c_1 = 1$  und Vorzeichen der Imaginärteile entsprechend (8.10). In den Diagrammen aus Abb. 10.5, 10.6 und 10.7 sind diese Gebiete mit  $E_i$  bezeichnet. Der Übergang von den zwei Minima innerhalb des Kegels zu dem einen Minimum außerhalb des Kegels ist unstetig.

In den Gebieten  $E_i$  existiert ein Sprung bei  $\tilde{m}' = -2K_1$ . Dieser tritt bis

$$|\mu_c| = 2K_0 + 2K_1 - 2K_2 \quad (10.5)$$

auf und ist in Abb. 10.6 (links) zu erkennen. In sämtlichen anderen Abbildungen ist dieser Sprung nicht dargestellt, da  $\mu_c$  für diese Massewerte innerhalb des Kegels und der zugehörigen Gebieten  $F$  oder  $D_i$  liegt und somit ein Sprung nicht stattfindet.

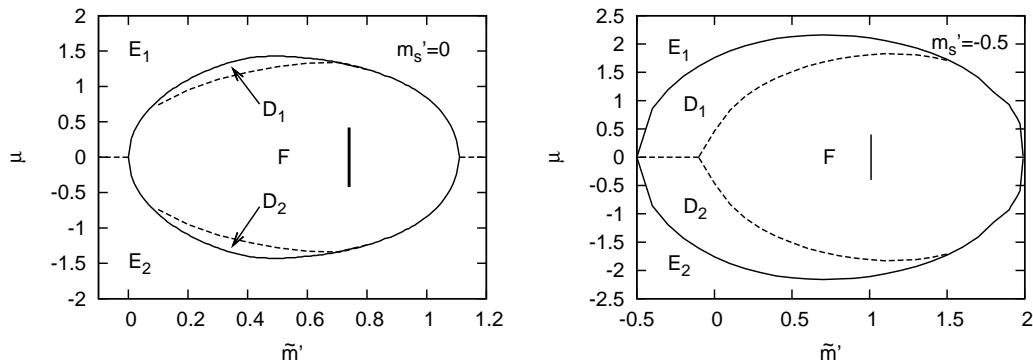


Abbildung 10.5: Verhalten der Minima für  $K_0 > 0$ ,  $K_1 < 0$  und  $K_2 < 0$  bei verschiedenen Werten von  $m'_s$ .

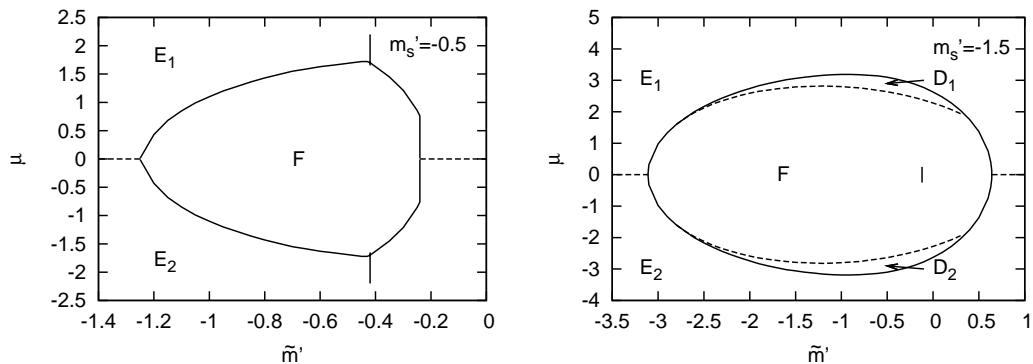


Abbildung 10.6: Verhalten der Minima für  $K_0 > 0$ ,  $K_1 > 0$  und  $K_2 < 0$  bei verschiedenen Werten von  $m'_s$ .

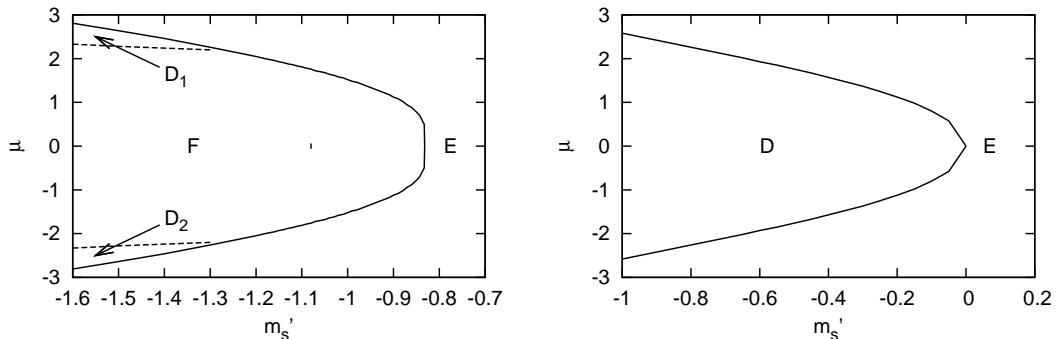


Abbildung 10.7: Verhalten der Minima in der  $m'_s$ - $\mu$ -Ebene für  $K_0 > 0$ ,  $K_1 > 0$  und  $K_2 < 0$  (links) und  $K_0 > 0$ ,  $K_1 < 0$  und  $K_2 < 0$  (rechts).

## 10.2 Phasenstruktur des Potentials mit $L_{WW} < 0$ und $|L_{WW6}| = |L_{WW7}| \neq 0$

Die im vorherigem Abschnitt mit  $K_0 > 0$  durchgeführte Untersuchung wird im folgenden mit  $K_0 < 0$  wiederholt. Es ergeben sich ähnliche Resultate wie bei der mit  $K_0 < 0$

und  $K_1 = K_2 = 0$  in Abschnitt 9.2 durchgeführten Untersuchung. Durch die Berücksichtigung der Konstanten  $K_1$  und  $K_2$  kommt es jedoch zu Verschiebungen der in Abschnitt 9.2 dargestellten Ergebnisse.

### 10.2.1 Untersuchung ohne Drehung der u- und d-Quarkmasse

Wird die  $\tilde{m}'$ - $m'_s$ -Ebene betrachtet, ergeben sich für alle möglichen Vorzeichenkombinationen der Konstanten ähnliche Gebiete. Sie sind in Abb. 10.8 mit  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $C$  und  $D$  bezeichnet. Deren Eigenschaften werden im folgenden zunächst beschrieben:

- Im Gebiet  $A_1$  befindet sich das Minimum bei  $U = \text{diag}(-1, -1, 1)$  in  $A_2$  bei  $U = \text{diag}(1, 1, 1)$ . Der Übergang von den Gebieten  $A_1$  und  $A_2$  in die benachbarten Gebiete  $B_1$  und  $C$  ist immer stetig.
- Im Gebiet  $B_1$  besitzen die Parameter  $a_1$  und  $b_1$  negative Werte, die Imaginärteile besitzen die Vorzeichen:  $u = v = w = \pm 1$ . Beim nichtstetigen Übergang in das Gebiet  $B_2$  springen die Realteile  $a_1$  und  $b_1$  zu positiven Werten und die Imaginärteile der Parameter besitzen die Vorzeichen  $u = v = -w = \pm 1$ . Es existieren immer zwei entartete Minima.
- Zusätzlich existieren mit  $C$  und  $D$  zwei weitere Gebiete, die sich durch die Anzahl der Minima unterscheiden. In  $C$  existiert ein Minimum mit  $a_1 = b_1$  und  $c_1 = 1$ , in  $D$  gibt es hingegen zwei Minima. In beiden Gebieten sind die Vorzeichen der Imaginärteile der Parameter  $a$  und  $b$  entgegengesetzt ( $u = -v$ ). Der Übergang von  $C$  nach  $D$  ist stetig.

Im folgenden werden die möglichen Vorzeichenkombinationen getrennt erörtert:

**$\mathbf{K_0 < 0, K_1 > 0, K_2 > 0}$ :** Das Phasendiagramm für diese Kombination von Vorzeichen ist in Abb. 10.8 (oben links) gezeigt.

In den Gebieten  $B_1$  und  $B_2$  befindet sich die absoluten Minima auf der Achse  $a_1 = b_1$  und somit unterscheiden sich die Minima lediglich durch die Vorzeichen ihrer Imaginärteile.

Es kommt zu einem Sprung der Potentialminima von positiven zu negativen Werten von  $a_1 = b_1$ , dieser Sprung erfolgt an der Grenze zwischen  $B_1$  und  $C$  bzw. an der Grenze zwischen  $B_1$  und  $B_2$ . Zwischen  $D$ , in dem zwei Minima existiert und  $B_2$ , in dem ein Minimum vorhanden ist, kommt es ebenfalls zu einem Sprung.

**$\mathbf{K_0 < 0, K_1 > 0, K_2 < 0}$ :** Das Phasendiagramm für diese Kombination von Vorzeichen ist in Abb. 10.8 (oben rechts) gezeigt.

In den Gebieten  $B_1$  und  $B_2$  befindet sich das absolute Minimum auf der Achse  $a_1 = b_1$ . Somit unterscheiden sich diese Minima ebenfalls nur durch ihre Imaginärteile. Es kommt zu einem Sprung von positiven zu negativen Werten der Parameter  $a_1 = b_1$  beim Übergang von  $B_1$  nach  $B_2$  bzw. nach  $A_2$ .

Da es hier anders als in den übrigen Fällen keine Gebiete  $C$  oder  $D$  gibt und damit  $A_1$  und  $A_2$  eine gemeinsame Grenze aufweisen, kommt es für alle Werte der Masse  $m'_s$  zu einem Sprung des Minimums (Übergang von  $A_1$  nach  $A_2$ , von  $B_1$  nach  $A_2$  und  $B_1$  nach  $B_2$ ).

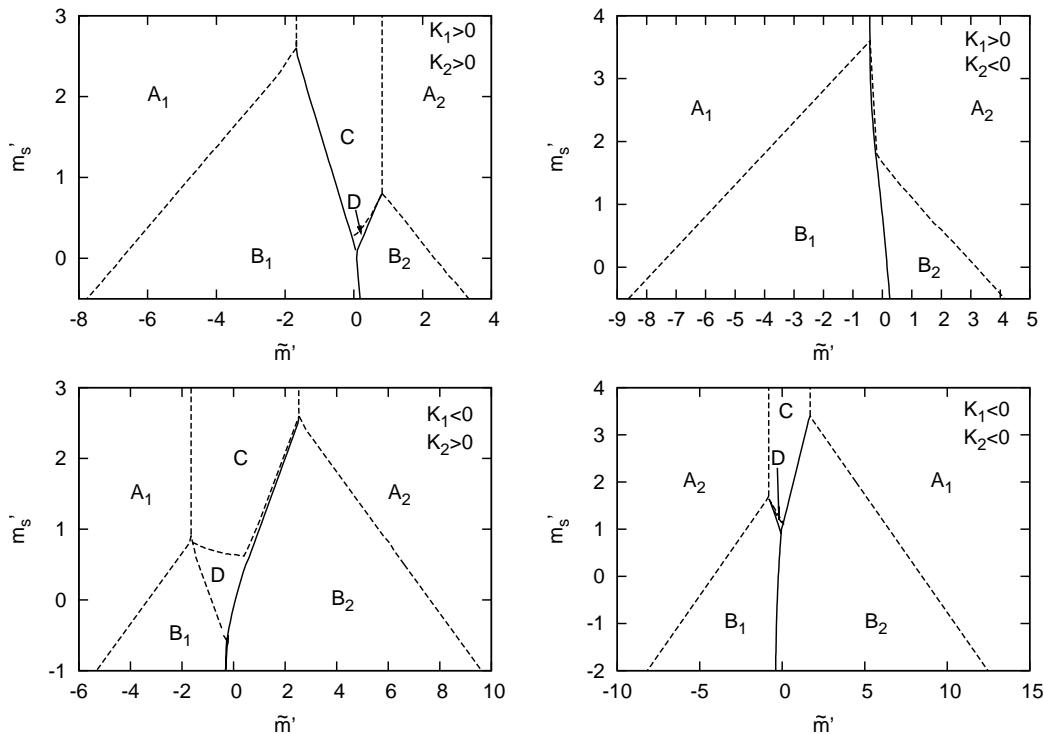


Abbildung 10.8: Verhalten der Minima in der  $\tilde{m}'$ - $\tilde{m}'_s$ -Ebene für  $K_0 < 0$  und verschiedene Vorzeichenkombinationen von  $K_1$  und  $K_2$ .

**$K_0 < 0, K_1 < 0, K_2 > 0$ :** Das Phasendiagramm für diese Kombination von Vorzeichen ist in Abb. 10.8 (unten links) gezeigt.

Ein Sprung des Minimums existiert zwischen  $B_2$  und  $B_1$  sowie zwischen  $B_2$  und  $D$ .

Anders als in allen anderen Fällen existiert kein Sprung zwischen  $B_1$  und  $D$ . Dies ist mit einer Aufspaltung der Minima in  $B_1$  verknüpft, die ebenfalls nur für die an dieser Stelle betrachtete Kombination der Vorzeichen auftritt.

**$K_0 < 0, K_1 < 0, K_2 < 0$ :** Das Phasendiagramm für diese Kombination von Vorzeichen ist in Abb. 10.8 (unten rechts) gezeigt.

In den Gebieten  $B_1$  und  $B_2$  befindet sich das absolute Minimum auf der Achse  $a_1 = b_1$ . Der Sprung von positiven zu negativen Werten von  $a_1$  und  $b_1$  bildet die Grenze zwischen  $B_2$  und  $B_1$ ,  $B_2$  und  $D$  und zwischen  $B_2$  und  $C$ .

Der Übergang der Minima in Gebiet  $B_1$  zu denen in Gebiet  $D$  ist ebenfalls mit einem Sprung verbunden.

### 10.2.2 Untersuchung mit Drehung der u- und d-Quarkmasse

Wie im Fall für  $K_0 > 0$  wird hier das Verhalten im dreidimensionalen Phasenraum mit Hilfe von Schnitten erläutert. In diesen Schnittflächen treten ähnliche Gebiete wie

in Abschnitt 9.2.2 auf, das Verhalten der Minima des dort und des hier betrachteten Potentials ähnelt sich stark.

Die Bezeichnungen der Gebiete aus Abschnitt 9.2.2 sind übernommen worden. Wie bereits dort gefunden existiert auch für  $K_0 < 0$  ein kegelförmiger Bereich, der vom Rest des Phasenraumes nicht durch einen Sprung des Minimums getrennt wird, sondern durch einen kontinuierlichen Übergang gekennzeichnet ist.

Die für  $K_0 < 0$  und  $|L_{WW6}| = |L_{WW7}| \neq 0$  auftretenden Gebiete werden zunächst kurz erläutert:

- Die Gebiete  $E_1$  und  $E_2$  der nachfolgenden Abbildungen 10.10 bis 10.16 entsprechen der Erweiterung der Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  aus Abb. 10.8 für eine zusätzliche Masse  $\mu$ . Als Folge verschiebt sich das Minimum entlang der Achse  $a_1 = b_1$  mit  $c_1 = 0$ . Die Vorzeichen der Imaginärteile der Parameter  $a_2$  und  $b_2$  folgen dabei Gl. (8.10).
- Werden die Gebiete  $B_i$  für  $\mu \neq 0$  betrachtet, entstehen Gebiete  $F_i$ . Dabei befinden sich in  $F_1$  die Minima bei negativen Werten der Parameter  $a_1 = b_1$  und die Imaginärteile besitzen die Vorzeichen  $u = v = w = \pm 1$ . In  $F_2$  sind die Werte der Parameter positiv und die Imaginärteile besitzen die Vorzeichen  $u = v = -w = \pm 1$ . Der Übergang zwischen den Gebieten  $F_i$  ist anders als bei dem in Abschnitt 9.2.2 beschriebenen Fall immer mit einem Sprung verbunden.
- Zusätzlich treten noch mit  $D_i$  bezeichnete Gebiete auf. Diese weisen, wie die Gebiete  $E_1$  und  $E_2$ , Minima mit identischen Vorzeichen der Imaginärteile und Abhängigkeiten von der Masse  $\mu$  (vgl. Gl. (8.10)) auf. Existiert ein Übergang von  $D_1$  zu  $D_2$ , ist dieser immer mit einem Sprung verbunden.

Nachfolgend werden alle Vorzeichenkombinationen von  $K_1$  und  $K_2$  separat diskutiert:

**$K_0 < 0, K_1 > 0, K_2 > 0$ :** Für diese Kombination sind in den Abb. 10.9 und 10.10 verschiedene Schnitte des dreidimensionalen Phasenraums gezeigt.

In Abb. 10.9 ist zu erkennen, wie die Gebiete  $D_1$  und  $D_2$  das Gebiet  $F_1$  umschließen, das aus  $B_1$  für  $\mu \neq 0$  hervorgeht. Für die in diesem Schnitt betrachte u- und d-Quarkmasse ( $\tilde{m}' = 0$ ) ist der Übergang von Gebiet  $F$  in die Gebiete  $D_i$  immer mit einem Sprung der Minima verbunden. Dieser Sprung ist auch in Abb. 10.10 (links) zu erkennen.

Auch wird in Abb. 10.10 (links) deutlich, dass, wenn sich die Gebiete  $F_1$  und  $F_2$  berühren, die Minima sich bei diesem Übergang unstetig verhalten.

In Abb. 10.10 (rechts) ist zu erkennen, dass, besteht eine gemeinsame Grenze zwischen  $F_1$  und  $E_i$ , die Minima sich an dieser Grenze unstetig verhalten. Diese Grenze tritt für genügend große s-Quarkmassen auf.

Der Übergang zwischen  $D_1$  und  $D_2$  ist ebenfalls mit einem Sprung der Minima verbunden. Alle weiteren Übergänge sind stetig.

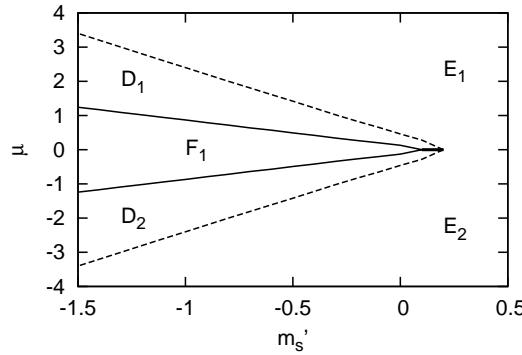


Abbildung 10.9: Verhalten der Minima in der  $m'_s$ - $\mu$ -Ebene für  $K_0 < 0$ ,  $K_1 > 0$  und  $K_2 > 0$

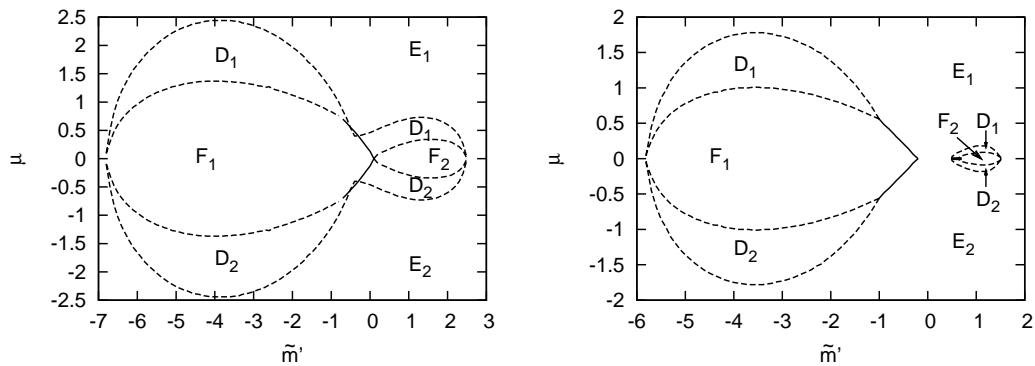


Abbildung 10.10: Verhalten der Minima für  $m'_s = 0,0$  (links) und  $m'_s = 0,5$  (rechts) für  $K_0 < 0$ ,  $K_1 > 0$  und  $K_2 > 0$ .

**$K_0 < 0, K_1 > 0, K_2 < 0$ :** Bei dieser Kombination existieren für  $\mu = 0$  keine Gebiete  $D$  oder  $C$ . Wie aus Abb. 10.11 ersichtlich treten für  $\mu \neq 0$  sehr wohl Gebiete  $D_i$  auf. Diese umschließen  $F_1$  und  $F_2$  erst für größere Werte der gedrehten Masse und wachsen für kleinere Werte der Masse  $m'_s$ .

Wie in Abb. 10.12 zu erkennen kommt es auch für diese Vorzeichenkombination zu einem Sprung der Parameter  $a_1$  und  $b_1$  von positiven zu negativen Werten innerhalb des kegelförmigen Bereichs in den Gebieten  $F_i$  und  $D_i$ . Die Linie des Überganges entspricht dabei einem Teil der Grenze von  $F_1$ .

Berühren sich die Gebiete  $F_1$  und die  $F_2$  umschließenden Gebiete  $D_i$ , kommt es ebenfalls zu einem Sprung der Potentialminima.

Es existieren ebenfalls Massenwerte, bei denen sich, wie in Abb. 10.11 und 10.12 (links) zu sehen,  $F_1$  und  $E_i$  berühren. Der beim Überschreiten dieser Grenze stattfindende Übergang ist ebenso unstetig.

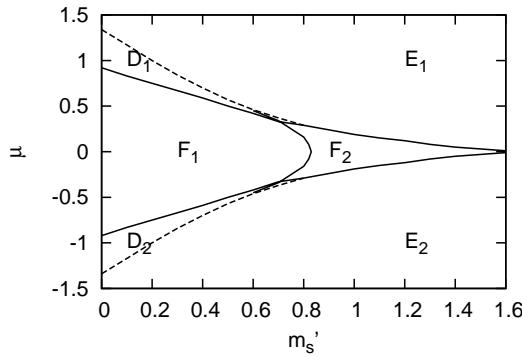


Abbildung 10.11: Verhalten der Minima in der  $m'_s$ - $\mu$ -Ebene für  $K_0 < 0$ ,  $K_1 > 0$  und  $K_2 < 0$

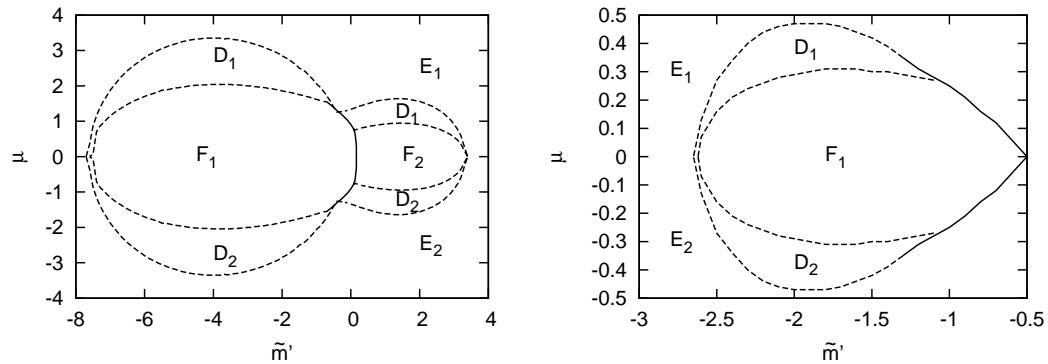


Abbildung 10.12: Verhalten der Minima für  $m'_s = 0,0$  (links) und  $m'_s = 2,5$  (rechts) für  $K_0 < 0$ ,  $K_1 > 0$  und  $K_2 < 0$ .

**$K_0 < 0, K_1 < 0, K_2 > 0$ :** Für diese Vorzeichenkombination tritt ein wesentlicher Unterschied zu den bisher betrachteten Fällen auf. Die zugehörigen Abbildungen sind Abb. 10.13 und 10.14.

Durch die negative Konstante  $K_1$  wird das Phasendiagramm “gespiegelt”. Die Gebiete  $F_1$  und  $F_2$  vertauschen ihre Größenverhältnisse. Dies ist mit einer Veränderung des Überganges von positiven zu negativen Werten der Parameter  $a_1$  und  $b_1$  verbunden. Dieser Übergang folgt nun der Form von Gebiet  $F_2$ .

Bis auf diesen Unterschied können alle für  $K_0 < 0, K_1 > 0, K_2 > 0$  getroffenen Aussagen für diese Kombination aus Vorzeichen übernommen werden.

Die zu den hier betrachteten Vorzeichen zugehörigen Abbildungen sind Abb. 10.13 und 10.14.

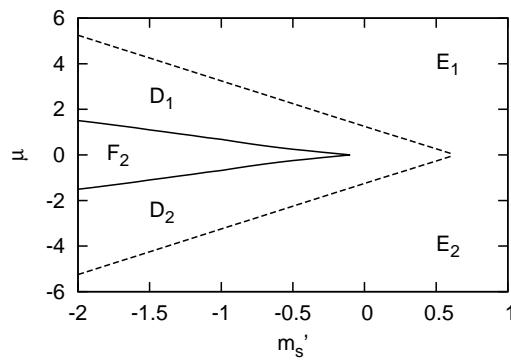


Abbildung 10.13: Verhalten der Minima in der  $m'_s$ - $\mu$ -Ebene für  $K_0 < 0, K_1 < 0$  und  $K_2 > 0$

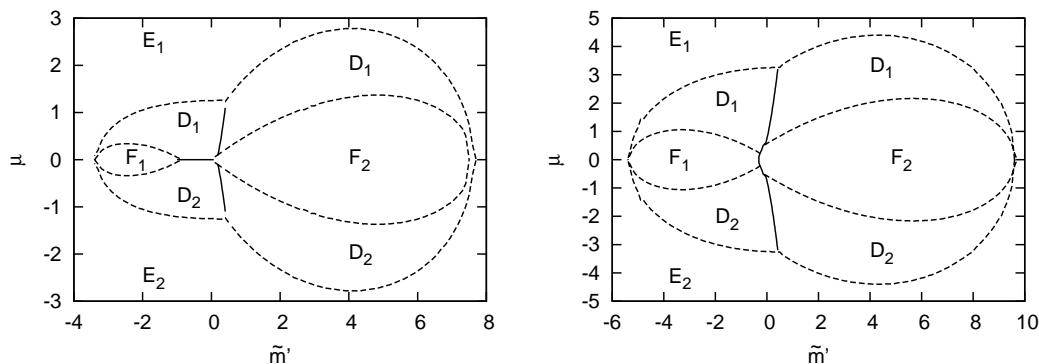


Abbildung 10.14: Verhalten der Minima für  $m'_s = 0,0$  (links) und  $m'_s = -1$  (rechts) für  $K_0 < 0, K_1 < 0$  und  $K_2 > 0$ .

**$K_0 < 0, K_1 < 0, K_2 < 0$ :** In dieser Kombination der Vorzeichen tritt kein neues Verhalten der unstetigen Übergänge des Potentials gegenüber  $K_0 < 0, K_1 < 0, K_2 > 0$  auf. Alle unstetigen Übergänge entsprechen den dort gefundenen. Es treten lediglich leichte Verschiebungen auf, so ist beispielweise der Bereich  $D$  für  $\mu = 0$  wesentlich kleiner.

Das Verhalten der einzelnen Bereiche und ihrer Übergänge ist in den Abb. 10.15 und 10.16 dargestellt.

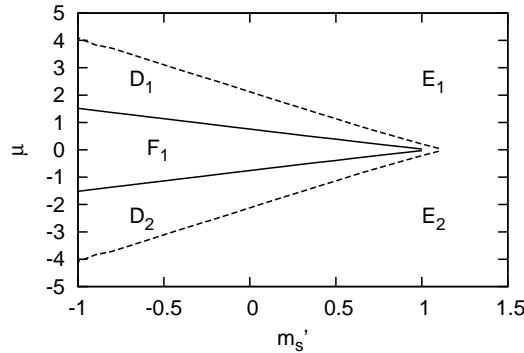


Abbildung 10.15: Verhalten der Minima in der  $m'_s$ - $\mu$ -Ebene für  $K_0 < 0, K_1 < 0$  und  $K_2 < 0$

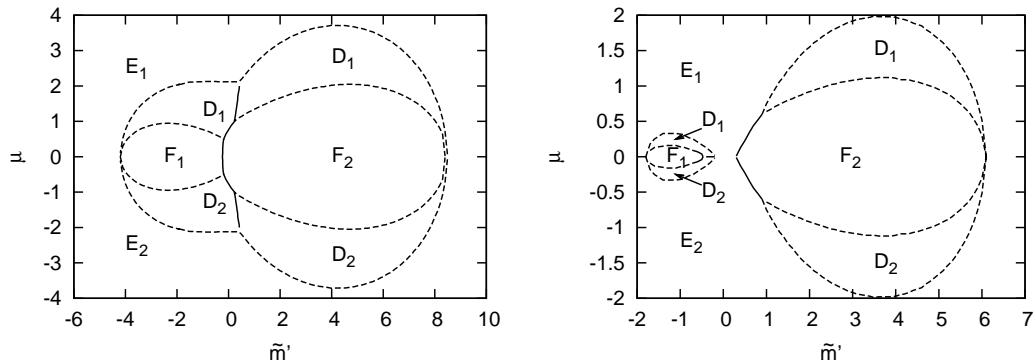


Abbildung 10.16: Verhalten der Minima für  $m'_s = 0,0$  (links) und  $m'_s = 1,2$  (rechts) für  $K_0 < 0, K_1 < 0$  und  $K_2 < 0$ .

Zusammenfassen ist festzustellen, dass bis auf  $K_0 < 0, K_1 > 0, K_2 < 0$ , wo die Gebiete  $D$  und  $C$  für  $\mu = 0$  nicht auftreten, kaum Veränderungen zu Abschnitt 9.2.2 existieren. Ein Unterschied, der auf die Verschiebung des Phasenraums durch die zusätzlichen Terme zurückzuführen ist, ist, dass lediglich ein  $F_1$  oder  $F_2$  teilweise umschließenden Übergang auftritt. Damit ist das Phasendiagramm nicht länger Spiegelsymmetrisch zur Ebene mit  $\tilde{m}' = 0$  (vgl. 9.7 (links)).



# 11 Zusammenfassung und Ausblick

Die Arbeit hat die Ermittlung der Minimastruktur des Potentials der chiralen Störungstheorie für Wilson-Twisted-Mass-QCD zum Thema. Von besonderem Interesse waren dabei Sprünge des Potentialminimums, die bei kontinuierlicher Variation der Massen auftreten. Dabei wird neben masseentarteten u- und d-Quarks ein zusätzliches s-Quarks betrachtet, so dass insgesamt drei Quarkflavours berücksichtigt wurden.

Nach einer kurzen Einführung in das Thema im ersten Kapitel wurden im zweiten Kapitel einige Grundlagen der QCD sowie deren beschrieben. Diese chiralen Symmetrien und ihre spontane und explizite Brechung waren die Voraussetzungen, um im dritten Kapitel die Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie für QCD zu konstruieren. Da die Minimastruktur von Gitter-QCD betrachtet worden ist, musste die Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie für QCD in eine effektiven Lagrangedichte für eine gitterregularisierte Theorie überführt werden. Dazu wurde in Kapitel vier neben der Wilson-Wirkung die Symanzik-Wirkung vorgestellt und damit die nötigen Modifikationen an der Lagrangedichte vorgenommen. Ein zusätzliche hier berücksichtigte Technik ist die Twisted-Mass-QCD. Dabei wird ein Flavourdublett, hier das des u- und d-Quark, axial gedreht. Das bewirkt eine automatische Verbesserung der in Gitter-QCD gewonnenen Ergebnisse bei *maximal twist* um  $\mathcal{O}(a)$ . Wird die tmQCD in der Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie berücksichtigt, kommt es neben der Abhängigkeit der Lagrangedichte und damit des Potentialminimums von der u-, d- und der s-Quarkmasse zu der zusätzlichen Abhängigkeit von dem gedrehten Anteil der u- und der d-Quarkmasse. In Kapitel sechs wurde als Ausgangspunkt für die eigene Analyse eine Untersuchung der Phasenstruktur für Zwei-Flavour-Wilson-QCD in chiraler Störungstheorie für zwei entartete Quarkflavours mit Twisted-Mass wiedergegeben. Eine solche Untersuchung für drei Quarkflavours wurde in den anschließenden Kapiteln ausführlich dargestellt.

Im siebten Kapitel wurde die Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie für Drei-Flavour-Twisted-Mass-Gitter-QCD auf eine Form gebracht, die für die Analyse der Minimastruktur geeignet war. Dazu wurde eine Parametrisierung der Feldkonfigurationsmatrix gewählt, in der das Potential eine Abhängigkeit von drei im Allgemeinen komplexen Parametern aufwies. Durch Nebenbedingungen wurden die drei Parameter allein über ihre Realteile, ergänzt durch die drei Faktoren  $u$ ,  $v$  und  $w$ , die die Werte  $\pm 1$  annehmen konnten und die Vorzeichen der Imaginärteile charakterisieren, ausgedrückt. Dies ermöglichte neben analytischen und numerischen Methoden eine zusätzliche grafische Auswertung der Minimastruktur. Neben dieser Substitution der Imaginärteile durch ihre Realteile sind zusätzlich die Quarkmassen um die Größenordnung  $\mathcal{O}(a)$  verschoben worden, was zu einem “natürlichen” Verhalten des Potentials führte: Das Potential wechselt sein Vorzeichen, wenn die Massen ihr Vorzeichen wechseln. Diese Verschiebung resultierte aus der Gitteranpassung der chiralen Störungstheorie. In Kapitel sieben wurde ebenfalls das Potential für kleine Quarkmassen genähert. Mit dieser Näherung wurde

erreicht, dass das Potential, das vormals fünfzehn Terme aufwies, sich nur noch aus neun Termen zusammensetzte.

In Kapitel acht wurde mit der Analyse des Potentials und dessen Minimastruktur begonnen. Das Potential wurde zunächst durch drei Terme, jeder proportional zu einer Masse, grob genähert. In dieser Approximation war es möglich, das Verhalten der Parameter, die das Minimum charakterisieren, analytisch zu ermitteln. Die Größe des Betrages dieser drei verbleibenden Konstanten konnte abgeschätzt werden. Terme, die erst bei sehr großen Massen relevant werden, wurden zunächst ignoriert. Die Berücksichtigung dieser Terme führte zu sechs weiteren Termen, die proportional zur Gitterkonstanten  $a^2$ , sowie zu drei Kombinationen aus teilweise unbekannten Gasser-Leutwyler-Konstanten waren.

In Kapitel neun wurden die Terme proportional zu der größten der drei Konstanten in die Untersuchung einbezogen. Als Folge waren die Minima nur noch teilweise analytisch bestimmbar. Statt dessen wurden das Verhalten der Minima numerisch bestimmt und die Ergebnisse wurden grafisch überprüft. Die Berücksichtigung beider möglichen Vorzeichen der Konstanten führte zu zwei verschiedenen Szenarien mit unterschiedlicher Struktur der Potentialminima. So konnte ähnlich wie bei dem Zwei-Flavour-Fall für ein Vorzeichen der Konstanten ein Sprung des Minimums beim Vorzeichenwechsel der gemeinsamen u- und d-Quarkmasse gefunden werden. Im Fall eines entgegengesetzten Vorzeichens wurde ein kontinuierlicher Übergang festgestellt.

Im zehnten Kapitel wurde schließlich alle sechs zusätzlichen Potentialterme in die Untersuchung einbezogen. Es ergaben sich dabei für jede Vorzeichenkombination der nur vom Betrag bekannten drei Konstanten abweichende Verhaltensweisen der Potentialminima. Die zwei Szenarien, die für die Betrachtung mit ausschließlich der dominierende Konstante identifiziert wurden, sind dabei aber stets zu erkennen und nur durch Verzerrungen der zusätzlichen Potentialterme überlagert.

Das Minimum wurde in dieser Arbeit in die  $\lambda_3$ - und  $\lambda_8$ -Richtung gelegt. Für eine weitgehende Untersuchung könnte diese Richtung verallgemeinert werden, so dass nicht nur eine diagonale Feldkonfigurationsmatrix zu betrachten wäre.

Auch ist es möglich, das hier betrachtete Potential auf andere Arten zu nähern. So könnte z.B. das Potential für große Massen genähert werden, um einen vollständigen Überblick über die Phasenstruktur zu gewinnen. Alternativ kann die hier verwendete Näherung durch Hinzunahme weiterer Terme für einen größeren Massebereich Gültigkeit erhalten.

Darüber hinaus könnten die Untersuchungen dieser Arbeit für nicht-masseentartete u- und d-Quarks ausgedehnt werden. Auch könnte ein weiteres Quark, das charm-Quark, mit in die Analyse einbezogen werden. Dies brächte die Möglichkeit mit sich, zwei unterschiedliche Twist-Winkel einzuführen und in beiden Flavour-Dublettes zu drehen.

Schließlich wäre es noch eine denkbare Erweiterung dieser Arbeit, sie mit genauer bekannten LECs erneut durchzuführen. Damit ließen sich für Sprünge der Minima eindeutige Massewerte angeben.

# A Dirac-Matrizen

Sowohl in der QCD-Lagrangedichte als auch bei der Konstruktion der Symanzik-Wirkung traten Dirac-Matrizen im Minkowski-Raum auf. Für die Gitterformulierung der QCD mussten diese in den euklidischen Raum überführt werden.

## A.1 Dirac-Matrizen im Minkowski-Raum

Die Dirac-Matrizen erfüllen im Minkowski-Raum die Antikommatorrelation:

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}. \quad (\text{A.1})$$

Es existieren vier Dirac-Matrizen, die aus den Pauli-Matrizen und der Einheitsmatrix aufgebaut sind. Die Gamma-Matrizen haben die Gestalt:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & \tau_1 \\ -\tau_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \tau_2 \\ -\tau_2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \tau_3 \\ -\tau_3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der vier Dirac-Matrizen lässt sich eine fünfte Matrix formulieren:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Außerdem lässt sich mit den Dirac-Matrizen die antisymmetrische Matrix

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

konstruieren.

## A.2 Dirac-Matrizen im euklidischen Raum

Im euklidischen Raum können ebenfalls Dirac-Matrizen formuliert werden. Diese erfüllen die Antikommatorrelation:

$$[\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E] = 2\delta^{\mu\nu} \mathbf{1}.$$

Eine Möglichkeit, die Dirac-Matrizen im euklidischen Raum zu formulieren ist:

$$\begin{aligned}\gamma_1^E &= \begin{pmatrix} 0 & -i\tau_1 \\ i\tau_1 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_2^E &= \begin{pmatrix} 0 & -i\tau_2 \\ i\tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3^E &= \begin{pmatrix} 0 & -i\tau_3 \\ i\tau_3 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_4^E &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Im euklidischen Fall wird die fünfte Dirac-Matrix analog zu A1 gebildet:

$$\gamma_5^E = i\gamma_1^E \gamma_2^E \gamma_3^E \gamma_4^E = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Auch wird mit den euklidischen Dirac-Matrizen eine antisymmetrische Matrix gebildet:

$$\sigma_{\mu\nu}^E = \frac{i}{2} [\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E]$$

## B Gruppe $SU(N)$

Eine Symmetriegruppe besteht aus einer Menge und einer Rechenvorschrift. Im Fall der Gruppe  $SU(N)$  wird die Menge der speziellen unitären Matrizen mit Dimension  $N$  betrachtet. Sie ist eine kompakte einfache Lie-Gruppe und besitzt  $N^2 - 1$  Generatoren.

Die  $SU(N)$  ist in der Physik unter anderem als Symmetriegruppe der QCD-Lagrangedichte relevant. In dieser Arbeit wurde die QCD-Lagrangedichte mit zwei und mit drei Quark-flavours behandelt; folglich kamen die Gruppen  $SU(2)$  und  $SU(3)$  zur Anwendung.

### B.1 Gruppe $SU(2)$

Die Generatoren der Gruppe  $SU(2)$  sind proportional zu den drei Pauli-Matrizen:

$$T_i = \frac{\tau_i}{2} \quad i = 1, \dots, 3$$

Die Paulimatrizen besitzen die Form:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Gruppe  $SU(2)$  bildet zusammen mit dem Kommutator

$$[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2}$$

eine Lie-Algebra.

### B.2 Gruppe $SU(3)$

Die Generatoren der Gruppe  $SU(3)$  sind proportional zu den acht Gell-Mann-Matrizen.

$$T_i = \frac{\lambda_a}{2} \quad a = 1, \dots, 8$$

Die Gell-Mann-Matrizen lauten:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Wie die Gruppe  $SU(2)$  bildet auch die Gruppe  $SU(3)$  bezüglich ihrer Kommutatorrelation eine Lie-Algebra:

$$[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}.$$

Die Strukturkonstante  $f_{abc}$  dieser Lie-Algebra hat in neun Fällen von Null abweichende Werte, die in der folgenden Tabelle dargestellt sind:

$f_{123}$	$f_{147}$	$f_{156}$	$f_{246}$	$f_{257}$	$f_{345}$	$f_{367}$	$f_{458}$	$f_{678}$
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

# C Verwendete Konstanten

## C.1 Größe der verwendeten Konstanten und LECs

In der Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie treten verschiedene dimensionslose Niederenergiekonstanten auf. Die Größen dieser Konstanten für NLO ist [41] entnommen worden:

$$\begin{aligned}L_1 &= 0,43 \cdot 10^{-3} \\L_2 &= 0,73 \cdot 10^{-3} \\L_3 &= -2,53 \cdot 10^{-3} \\L_4 &= 0 \\L_5 &= 0,97 \cdot 10^{-3} \\L_6 &= 0 \\L_7 &= -0,31 \cdot 10^{-3} \\L_8 &= 0,60 \cdot 10^{-3}\end{aligned}$$

Die Konstanten  $W_i$  und  $W'_i$  sind nicht genau bekannt und wurden mit Hilfe von [10] abgeschätzt:

$$|L_i| \sim |W_i| \sim |W'_i| \sim \frac{1}{(4\pi)^2} \sim 0,6 \cdot 10^{-2}$$

$W_0$  ist nicht dimensionslos und nimmt eine Sonderrolle ein, für sie wird der Wert entsprechend [34, 42] verwendet.

$$|W_0| \sim 10^7 \text{ MeV}^3$$

Desweiteren werden folgende Konstanten verwendet, die ebenfalls [42] entnommen sind:

$$\begin{aligned}F_0 &= 86 \text{ MeV}, \\B_0 &= 3100 \text{ MeV}, \\a &= \frac{1}{1975} \text{ MeV} = 0,1 \text{ fm}.\end{aligned}$$

## C.2 Für $N_f = 2$ verwendete Relationen

In Kapitel 6 werden für die Vereinfachung der LECs folgende Relationen benutzt:

$$\begin{aligned} L_{54} &= 2L_4 + L_5, \\ L_{86} &= 2L_6 + L_8, \\ W_{54} &= 2W_4 + W_5, \\ W_{86} &= 2W_6 + W_8, \\ W'_{86} &= 2W'_6 + W'_8. \end{aligned}$$

Allgemein folgen diese Kombinationen der Gleichung:

$$X_{ij} = 2X_i + X_j.$$

## C.3 Für $N_f = 3$ verwendete Relationen

Für drei Quarkflavours wurden abweichende Kombinationen der LECs verwendet. Als zweckmäßig stellten sich folgende Abkürzungen heraus:

$$\begin{aligned} L &= L_6 + L_7 + L_8, & W &= W_6 + W_7 + W_8, & W' &= W'_6 + W'_7 + W'_8, \\ L_W &= 2L - W, & L_{W6} &= 2L_6 - W_6, & L_{W7} &= 2L_7 - W_7, \\ L_{WW} &= L - W + W', & L_{WW6} &= L_6 - W_6 + W'_6, & L_{WW7} &= L_7 - W_7 + W'_7. \end{aligned}$$

# Literaturverzeichnis

- [1] M. GELL-MANN: *A Schematic Model of Baryons and Mesons*. Phys. Lett., 8:214–215, 1964.
- [2] G. ZWEIG: *An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking*. CERN-TH-401.
- [3] T.P. CHENG UND L.F. LI: *Gauge Theory of Elementary Particle Physics: Problems and Solutions*. Oxford Univ. Press, Oxford, 1999.
- [4] D. J. GROSS UND F. WILCZEK: *Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories*. Phys. Rev. Lett., 30(26):1343–1346, Jun 1973.
- [5] H. D. POLITZER: *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?* Phys. Rev. Lett., 30:1346–1349, 1973.
- [6] K. JANSEN: *Lattice QCD: a critical status report*. hep-lat/0810.5634, 2008.
- [7] G. MÜNSTER UND M. WALZL: *Lattice gauge theory: A short primer*. hep-lat/0012005, 2000.
- [8] S. SCHERER UND M.R. SCHINDLER: *A Chiral Perturbation Theory Primer*. Vorlesungsskript, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Mai 2005.
- [9] A. SHINDLER: *Twisted mass lattice QCD*. Phys. Rept., 461:37–110, 2008.
- [10] S.R. SHARPE: *Application of chiral perturbation theory to lattice QCD*. Lecture, University of Washington, Febuar 2008.
- [11] M.E. PESKIN UND D.V. SCHROEDER: *An Introduction to Quantum Field Theory; 1995 ed.* Westview, Boulder, CO, 1995. Includes exercises.
- [12] J. SCHWINGER: *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*. Dover Publications Inc., 2003.
- [13] S. L. GLASHOW: *Partial Symmetries of Weak Interactions*. Nucl. Phys., 22:579–588, 1961.
- [14] S. WEINBERG: *A Model of Leptons*. Phys. Rev. Lett., 19:1264–1266, 1967.
- [15] M. GELL-MANN UND Y. NEEMAM: *The eightfold way: a review with a collection of reprints*.
- [16] J. GOLDSTONE, A. SALAM UND S. WEINBERG: *Broken Symmetries*. Phys. Rev., 127(3):965–970, Aug 1962.
- [17] C. VAFA UND E. WITTEN: *Restrictions on Symmetry Breaking in Vector-Like Gauge Theories*. Nucl. Phys., B234:173, 1984.
- [18] G. ECKER: *Chiral symmetry*. hep-ph/9805500, 1998.
- [19] S. WEINBERG: *Phenomenological Lagrangians*. Physica, A96:327, 1979.

- [20] J. GASSER UND H. LEUTWYLER: *Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark*. Nucl. Phys., B250:465, 1985.
- [21] K.G. WILSON: *Confinement of quarks*. Phys. Rev., D10:2445–2459, 1974.
- [22] I. MONTVAY UND G. MÜNSTER: *Quantum fields on a lattice*. Cambridge, UK: Univ. Pr. (1994) 491 p. (Cambridge monographs on mathematical physics).
- [23] M. LÜSCHER: *Advanced lattice QCD*. hep-lat/9802029, 1998.
- [24] M. LÜSCHER, S. SINT, R. SOMMER UND P. WEISZ: *Chiral symmetry and  $O(a)$  improvement in lattice QCD*. Nucl. Phys., B478:365–400, 1996.
- [25] K. SYMANZIK: *Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories. 1. Principles and  $\phi^{***4}$  Theory*. Nucl. Phys., B226:187, 1983.
- [26] G. RUPAK UND N. SHORESH: *Chiral perturbation theory for the Wilson lattice action*. Phys. Rev., D66:054503, 2002.
- [27] O. BÄR, G. RUPAK UND N. SHORESH: *Chiral perturbation theory at  $O(a^{**2})$  for lattice QCD*. Phys. Rev., D70:034508, 2004.
- [28] R. FREZZOTTI, P.A. GRASSI, S. SINT UND P. WEISZ: *Lattice QCD with a chirally twisted mass term*. JHEP, 08:058, 2001.
- [29] R. FREZZOTTI UND G.C. ROSSI: *Chirally improving Wilson fermions. I:  $O(a)$  improvement*. JHEP, 08:007, 2004.
- [30] R. FREZZOTTI: *Wilson fermions with chirally twisted mass*. Nucl. Phys. Proc. Suppl., 119:140–148, 2003.
- [31] G. MÜNSTER UND C. SCHMIDT: *Chiral perturbation theory for lattice QCD with a twisted mass term*. Europhys. Lett., 66:652–656, 2004.
- [32] S.R. SHARPE UND J.M.S. WU: *Twisted mass chiral perturbation theory at next-to-leading order*. Phys. Rev., D71:074501, 2005.
- [33] P. HOFMANN, G. MÜNSTER UND L. SCORZATO: *Some formulae for twisted mass lattice QCD from chiral perturbation theory*. Interne Notizen, 2005.
- [34] S. RAU: *Vergleich verschiedener Approximationen in der chiralen Störungstheorie für Twisted-Mass Gitter-QCD*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2006.
- [35] S. AOKI:  *$U(1)$  Problem and Lattice QCD*. Nucl. Phys., B314:79, 1989.
- [36] G. MÜNSTER: *On the phase structure of twisted mass lattice QCD*. JHEP, 09:035, 2004.
- [37] S.R. SHARPE AND R.L. SINGLETON: *Predicting the Aoki phase using the chiral Lagrangian*. Nucl. Phys. Proc. Suppl., 73:234–236, 1999.
- [38] S.R. SHARPE UND J.M.S. WU: *The phase diagram of twisted mass lattice QCD*. Phys. Rev., D70:094029, 2004.
- [39] SCORZATO, L.: *Pion mass splitting and phase structure in twisted mass QCD*. Eur. Phys. J., C37:445–455, 2004.
- [40] S. AOKI: *New Phase Structure for Lattice QCD with Wilson Fermions*. Phys. Rev., D30:2653, 1984.

- [41] J. BIJNENS UND K. GHORBANI:  $\eta \rightarrow 3\pi$  at Two Loops In Chiral Perturbation Theory. JHEP, 11:030, 2007.
- [42] F. FARCHIONI UND ANDERE: Numerical simulations with two flavours of twisted-mass Wilson quarks and DBW2 gauge action. Eur. Phys. J., C47:453–472, 2006.



# Danksagung

Abschließend möchte ich mich bei einigen Menschen bedanken, die mich bei meiner Arbeit stets unterstützt haben:

- Bei Herrnn Prof. Dr. Münster möchte ich mich für die interessante Themenstellung und die immer freundliche Betreuung bedanken.
- Tobias Sudmann und Lars Zeidlewicz danke ich für die zu jederzeit aufgebrachte Geduld bei der Beantwortung meiner Fragen.
- Für die Sorgfalt und Zeit beim Korrekturlesen möchte ich Daniel Bieletzki und Lars Zeidlewicz danken.
- Dank auch an Simon Papenkort und Peter Düben für die stets angenehme Atmosphäre im Büro.
- Schließlich möchte ich meinen Eltern danken, die mich während meines Studiums immer unterstützt haben.



Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die hier angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, Juli 2009