

Chirale Störungstheorie für twisted-mass-Gitter-QCD mit nichtentarteten Quarkmassen

vorgelegt von

Kai Walter
geboren am 08.07.1985 in Kyoto/Japan

18. Februar 2011

Diplomarbeit



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



Diese korrigierte Version unterscheidet sich nur geringfügig von der am 18. Februar 2011 im Prüfungssekretariat eingereichten Arbeit. Die Verbesserungen sind hauptsächlich orthographischer und stilistischer Natur.

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung	1
1. Grundlagen für die chirale Störungstheorie	3
1.1. Bestandteile der QCD	3
1.1.1. Die Quarks	3
1.1.2. Die Gluonen	4
1.2. Das Confinement	5
1.3. Die QCD-Lagrange-Dichte	6
1.4. Chirale Symmetrie	7
1.5. QCD im Niederenergie-Regime	9
1.6. Effektive Feldtheorie	10
1.7. Spontane Symmetriebrechung eines skalaren Feldes	12
1.8. Das Goldstone-Theorem	14
1.9. Explizite Symmetriebrechung	14
1.10. Spontane Symmetriebrechung in der QCD	16
2. Chirale Störungstheorie im Kontinuum	18
2.1. Grundidee der χ PT	18
2.2. Chirale Störungstheorie für Mesonen	19
2.2.1. Das Weinberg'sche Zählschema	19
2.3. Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte	20
2.3.1. Transformationsverhalten der Goldstone-Bosonen	20
2.3.2. Vorgehensweise zur Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte	24
2.3.3. Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte	25
2.3.4. Die effektive Lagrange-Dichte führender Ordnung	26
2.3.5. Die effektive Lagrange-Dichte nächstführender Ordnung	26
2.3.6. Die Niederenergielkopplungskonstanten	27
2.4. Massen der pseudo-skalaren Mesonen in führender Ordnung	29
2.4.1. Parametrisierung	29
2.4.2. Die Massenmatrix in führender Ordnung	30
2.4.3. Diagonalisierung der Massenmatrix	31
2.4.4. Mesonenmassen in Ordnung Δm	32

2.5.	Mesonen-Propagator in führender Ordnung	32
2.5.1.	Propagator des Masseneigenzustands	32
2.5.2.	Propagator der Originalfelder	33
2.6.	λ_1 -Implementierung des Massenunterschiedes	34
2.6.1.	Diagonalisierung der Massenmatrix	35
2.7.	Mesonenmassen in nächstführender Ordnung	37
2.7.1.	Die Selbstenergie	37
2.7.2.	Kontaktbeiträge zur Selbstenergie	38
2.7.3.	Schleifenbeiträge zur Selbstenergie	40
2.7.3.1.	Herleitung des Vertex	40
2.7.3.2.	Schleifenbeiträge ohne Mischung der Mesonen in NLO	41
2.7.3.3.	Berechnung des Schleifen-Diagramms	43
2.7.3.4.	Matrizen der Schleifenbeiträge	46
2.7.3.5.	Schleifenbeiträge mit Mischung der Mesonen	47
2.7.4.	Renormierung der Gasser-Leutwyler-Koeffizienten	48
2.7.5.	Gesamtselbstenergie	48
2.7.6.	Diagonalisierung des Propagators in NLO	50
2.7.7.	Mesonenmassen in NLO	51
2.8.	Zusammenfassung und Ausblick	52
3.	Chirale Störungstheorie auf dem Gitter	54
3.1.	QCD auf dem Gitter	54
3.1.1.	Euklidische Formulierung der QCD	54
3.1.2.	Die Wilson-Wirkung	55
3.1.3.	Die Symanzik-Wirkung	57
3.2.	Chirale Störungstheorie auf dem Gitter	58
3.3.	Chirale Störungstheorie für twisted-mass-Gitter-QCD	59
3.3.1.	Axiale Drehung der Quarkmassen in der Kontinuums-QCD	59
3.3.2.	Axiale Drehung der Masse in der Gitter- χ PT in LO	60
3.3.2.1.	Twisted-mass-Lagrange-Dichte	60
3.3.2.2.	Verschiebung des Potential-Minimums	61
3.4.	Mesonenmassen in LO	62
3.4.1.	Berechnungen mit Original-Feldern	62
3.4.2.	Berechnungen mit der optimierten Parametrisierung der Felder	63
3.4.3.	Mischung von π_3 und η_8	65
3.5.	Axiale Drehung der Masse in der Gitter- χ PT in NLO	67
3.5.1.	Verschiebung des Potential-Minimums	67
3.6.	Zusammenfassung und Ausblick	69

A. SU(3)	71
A.1. Generatoren der SU(3)	71
A.2. Die Strukturkonstanten der SU(3)	72
A.3. Produkte und die Spur der Gell-Mann-Matrizen	73
A.4. Parametrisierung einer hermiteschen Matrix durch Gell-Mann-Matrizen	74
B. Diagonalisierung einer symmetrischen 2×2-Matrix	75
C. Gamma-Funktion	76
D. Chirale Darstellung der Dirac-Matrizen	77

0. Einleitung

Nach heutigem Wissen existieren vier fundamentale Kräfte, mit denen alle physikalischen Phänomene sowohl in der mikroskopischen Welt, wie z.B. die Kernfusion, als auch in der makroskopischen Welt, wie die Planetenbewegungen, beschreibbar sind. Es gibt neben den im makroskopischen Bereich erkennbaren Kräften, der elektromagnetischen Kraft und der Gravitation, auch die starke und die schwache Kraft, die sich nur im mikroskopischen Bereich bemerkbar machen.

Diese Kräfte können, mit Ausnahme der Gravitation, mit dem *Standardmodell* der Elementarteilchenphysik beschrieben werden, das in den 1960er und 1970er Jahren entwickelt wurde. Dieses Modell beruht auf dem *Eich-Prinzip*, nach dem die Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen durch Austausch von sogenannten *Eichbosonen* erfolgen. Die Elementarteilchen und die Eichbosonen, die das Standardmodell beinhaltet, werden in Tabelle 0.1 zusammengefasst.

Quarks	u up	c charm	t top	γ Photon	Eichbosonen
	d down	s strange	b bottom	g Gluon	
Leptonen	ν_e Elektron-Neutrino	ν_μ Muon-Neutrino	ν_τ Tau-Neutrino	Z^0 Z-Boson	Eichbosonen
	e Elektron	μ Myon	τ Tau	W^\pm W-Boson	

Tabelle 0.1.: Elementarteilchen des Standardmodells (ohne das Higgs-Boson).

Ein Teil des Standardmodells, der die starke Wechselwirkung zwischen Quarks durch Austausch von Gluonen beschreibt, ist die *Quantenchromodynamik* (kurz: QCD). In analytischen Berechnungen wird dabei, wie bei anderen Feldtheorien, auch die störungstheoretische

Entwicklung nach der Kopplungskonstanten der Wechselwirkung verwendet. Die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung ist energieabhängig (siehe Abbildung 1.4 in Kapitel 1), sodass eine störungstheoretische Beschreibung nur für den hochenergetischen Bereich sinnvoll ist, in dem diese Konstante kleiner als eins ist. Im Niederenergie-Regime sind daher alternative Methoden vonnöten.

J. Gasser und H. Leutwyler entwickelten in den 1980er Jahren die *effektive Feldtheorie* der QCD, eine *chirale Störungstheorie* mit geeigneten Parametern, um die Niederenergie-QCD analytisch zu beschreiben. Diese Theorie enthält allerdings viele freie Parameter, die experimentell oder durch Vergleiche mit anderen Theorien bestimmt werden müssen. Die chirale Störungstheorie ist ein wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit.

Die vorliegende Arbeit besteht aus drei Kapiteln:

- In ersten Kapitel werden Grundlagen für die chirale Störungstheorie, die Quantenchromodynamik, die effektive Feldtheorie und die spontane Symmetriebrechung diskutiert.
- Im zweiten Kapitel wird die chirale Störungstheorie im Kontinuum behandelt. Zunächst wird die Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte dieser Theorie motiviert und anschließend die Massen der acht pseudo-skalaren Mesonen berechnet, wobei der Isospinbrechende Massenunterschied der up- und down-Quarks Δm bis zur linearen Ordnung betrachtet wird.
- Im dritten Kapitel wird die Anwendung der chiralen Störungstheorie auf dem Gitter betrachtet, wobei axial gedrehte Quarkmassen verwendet werden. Die QCD auf dem Gitter mit diesen Massen wird *twisted mass lattice QCD* (kurz: twLQCD) genannt, die zur Verbesserung der numerischen Genauigkeiten von großer Bedeutung ist. In diesem Kapitel werden ebenfalls die Massen der pseudo-skalaren Mesonen bis zur Ordnung Δm berechnet.

1. Grundlagen für die chirale Störungstheorie

In diesem Kapitel werden die zum Verständnis der chiralen Störungstheorie unentbehrlichen Themengebiete, die Quantenchromodynamik und ihre Symmetrien und die spontane Symmetriebrechung behandelt. Zunächst folgen einige allgemeine Ausführungen zur QCD.

1.1. Bestandteile der QCD

Die Quantenchromodynamik besteht aus fermionischen und bosonischen Anteilen, die *Quarks* und *Gluonen* genannt werden. In den nächsten Abschnitten werden diese näher behandelt.

1.1.1. Die Quarks

Die QCD beschreibt die starke Wechselwirkung, die die Quarks zusammenhält. Quarks sind Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$ und gelten als fundamentale Bausteine der Materie. Es gibt nach heutigem Wissen sechs Quarks: up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) und top (t), die sich in drei *Generationen*

$$\begin{array}{c} \text{1. Generation} \\ \left(\begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{2. Generation} \\ \left(\begin{array}{c} c \\ s \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{3. Generation} \\ \left(\begin{array}{c} t \\ b \end{array} \right) \end{array}$$

einteilen lassen. Die verschiedenen Quarksorten werden auch **Flavor** genannt und unterscheiden sich vor allem durch ihre Masse, siehe Tabelle 1.1.

leichte Quarks	Flavor	u	d	s
	Ladung	$2/3e$	$-1/3e$	$-1/3e$
	Masse in MeV	1,7-3,3	4,1-5,8	80-130
schwere Quarks	Flavor	c	b	t
	Ladung	$2/3e$	$-1/3e$	$2/3e$
	Masse in GeV	1,18-1,34	4,13-4,37	$172 \pm 2,2$

Tabelle 1.1.: Masse und Ladung verschiedener Quarksorten [1]

Quarkmassen wurden dabei im $\overline{\text{MS}}$ -Schema für die Energie 2 GeV angegeben.

Allerdings besteht die natürlich vorkommende sichtbare Materie (Protonen und Neutronen) nur aus up- und down-Quarks. Die schwereren Quarks machen sich nur in hochenergetischen

1.1. Bestandteile der QCD

Prozessen, wie zum Beispiel bei Streu-Experimenten, bemerkbar.

Interessant ist die Tatsache, dass die Quarks sehr unterschiedliche Massen haben: Die Masse des leichtesten Quarks, des up-Quarks, ist vergleichbar mit der Elektronen-Masse; dahingegen ist das Top-Quark sogar schwerer als ein Wolfram-Atom. Wegen der sehr unterschiedlichen Massen werden diese zweckmäßigerweise in zwei Klassen unterteilt:

$$\begin{pmatrix} m_u \\ m_d \\ m_s \end{pmatrix} \ll 1 \text{ GeV} \leq \begin{pmatrix} m_c \\ m_b \\ m_t \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Dabei ist 1 GeV eine typische Masse der Hadronen (vgl. Protonmasse ≈ 938 MeV).

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich die leichten Quarks betrachtet, da sie eine wesentliche Rolle in der Niederenergie-QCD spielen.

1.1.2. Die Gluonen

Die starke Wechselwirkung wird durch Austausch von **Gluonen**, masseloser Spin-1 Eichbosonen, vermittelt, die an die sogenannte *Farbladung* der Quarks koppeln. Die Quarks binden sich, indem sie Gluonen austauschen und sich dadurch ihre *Farbe* ändert, siehe Abbildung 1.1.

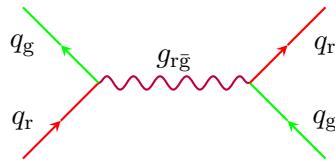


Abbildung 1.1.: Austausch eines Rot-Antigrün-Gluons

Die Indizes r, g und b stehen für die Farbladungen Rot, Grün und Blau. Die Quarks können im Farbraum der starken Wechselwirkung als ein Farb-Triplett betrachtet werden,

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

wobei der Index f für den Flavor steht. Mathematisch können Quarks als Elemente und Gluonen als Eichfelder der SU(3)-Eichgruppe der QCD verstanden werden. Gluonen tragen daher Kombinationen von Farben und Anti-Farben $(r, g, b) \times (\bar{r}, \bar{g}, \bar{b})$, die gruppentheoretisch wie folgt dargestellt werden können:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1. \quad (1.3)$$

Es gibt daher 8 Gluonen und ein Farbsingulett-Gluon. Dieses Farbsingulett-Gluon ist allerdings nicht physikalisch, da dessen Wellenfunktion symmetrisch ist und somit das Pauli-Prinzip verletzt.

1.2. Das Confinement

Eine wichtige Eigenschaft der Quarks ist, dass sie nicht einzeln auftreten können, sondern immer in gebundener Form (Mesonen oder Baryonen). Diese Tatsache wird **Confinement** genannt und ist auf das Verhalten des Wechselwirkungspotentials der QCD zurückzuführen. Die Approximation des Wechselwirkungspotentials der QCD ist gegeben durch

$$V(r) \approx -\frac{c}{r} + k \cdot r, \quad (1.4)$$

wobei k und c Konstanten sind, die die starke Wechselwirkung auszeichnen. Der Verlauf des Potentials wird in Abbildung 1.2 gezeigt.

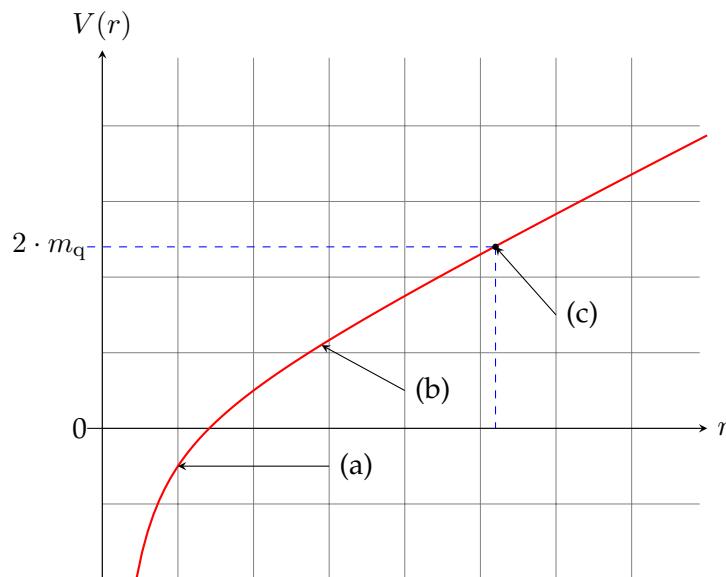


Abbildung 1.2.: Potential der starken Wechselwirkung

Die in dieser Abbildung eingezeichneten Bereiche werden in Abbildung 1.3 verwendet.

Der Versuch, Hadronen in einzelne Quarks zu trennen, wird wegen dieses divergierenden Potentials durch Bildungen eines Quark-Anti-Quark-Paares scheitern. Abbildung 1.3 zeigt dies schematisch.

1.3. Die QCD-Lagrange-Dichte

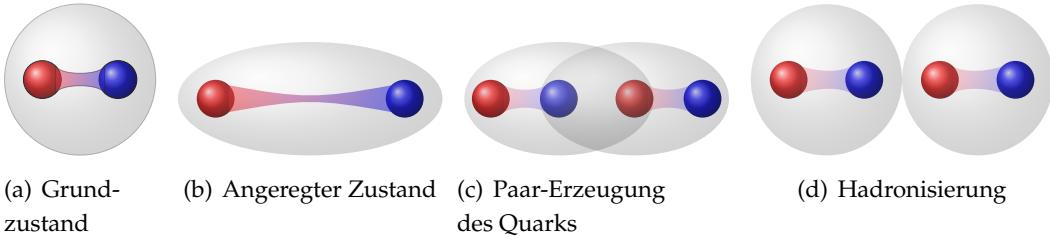


Abbildung 1.3.: Ein Beispiel für das Confinement

1.3. Die QCD-Lagrange-Dichte

Im Folgenden werden nur die drei leichten Quarks betrachtet.

Da es sich bei der QCD um eine SU(3)-Eichtheorie handelt, hat der Feldstärketensor der QCD die Form

$$G_{\mu\nu,a} = \partial_\mu A_{a,\nu} - \partial_\nu A_{a,\mu} + g f_{abc} A_{b,\mu} A_{c,\nu},$$

wobei $A_a(x)$ die acht Gluonfelder und g die Kopplungskonstante der QCD darstellen. Die Lagrange-Dichte wird nun so konstruiert, dass sie unter $SU(3)_c^1$ -Eichtransformation invariant bleibt:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f (i \gamma_\mu D^\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G^{\mu\nu,a}. \quad (1.5)$$

Der fermionische Anteil wird mit dem *Dirac-Operator*

$$i \gamma_\mu D^\mu - m_f$$

gebildet. D^μ ist dabei die *kovariante Ableitung*

$$D^\mu = \partial^\mu - i g \frac{\lambda_a}{2} A_a^\mu,$$

die die $SU(3)_c$ -Invarianz des fermionischen Anteils sicherstellt. Die λ^a in der kovarianten Ableitung sind die Gell-Mann-Matrizen, die Generatoren der $SU(3)$ (siehe Anhang A.1). Diese Lagrange-Dichte erfüllt, außer der Eichsymmetrie, die globale U(1)-Symmetrie, aber auch die diskreten Symmetrien wie Paritäts- (P-), Ladungskonjugations- (C-) und Zeitumkehr- (T-) Symmetrie.

Für den Fall $m_u = m_d = m_s$ erfüllt sie auch eine globale Flavor-SU(3)-Symmetrie, da die Vertauschung des Quark-Flavors die Lagrange-Dichte nicht ändert, und für den chiralen Grenzfall ($m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$) die **chirale Symmetrie**. Diese soll im nächsten Abschnitt näher betrachtet werden.

¹Der Index c steht für color, um die Eichtransformation im Farbraum von anderen $SU(3)$ -Transformationen zu unterscheiden

1.4. Chirale Symmetrie

Mit der Definition der Projektoren auf den links- bzw. rechtshändigen chiralen Raum

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5), \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad (1.6)$$

lassen sich die Quarkfelder in links- bzw. rechtshändigen Anteil zerlegen [2]:

$$\begin{aligned} P_L q &= q_L, & \bar{q} P_R &= \bar{q}_L, \\ P_R q &= q_R, & \bar{q} P_L &= \bar{q}_R. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Die Lagrange-Dichte (1.5) kann damit umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = &+ \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_{R,f} (i\gamma_\mu D^\mu) q_{R,f} + \bar{q}_{L,f} (i\gamma_\mu D^\mu) q_{L,f} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu,a} G^{\mu\nu,a} \\ &- \sum_{f=u,d,s} [\bar{q}_{L,f} m_f q_{R,f} + \bar{q}_{R,f} m_f q_{L,f}]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Wie in (1.8) zu sehen ist, lässt sich einerseits der kinetische Term der Quarks in den links- bzw. den rechtshändigen Anteil separieren, andererseits taucht im Massenterm die Mischung zwischen diesen auf. Daher gilt im chiralen Grenzfall die globale $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Symmetrie, d.h. die Transformationen der Quarkfelder

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} &\mapsto \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a^L \frac{\lambda_a}{2} \right) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} &\mapsto \exp \left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a^R \frac{\lambda_a}{2} \right) \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.9)$$

lassen die Lagragedichte invariant. Außerhalb des chiralen Grenzfalls bricht der Massenterm die $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Symmetrie

Die zugehörigen erhaltenen Ströme der chiralen Symmetrie sind

$$\begin{aligned} J_L^{\mu,a} &= \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, \\ J_R^{\mu,a} &= \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Um die Symmetriebrechung näher zu untersuchen, werden daraus zweckmäßigerweise die Axial- und Vektorströme konstruiert:

$$J_V^{\mu,a} = J_R^{\mu,a} + J_L^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, \quad (1.11)$$

$$J_A^{\mu,a} = J_R^{\mu,a} - J_L^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\lambda_a}{2} q. \quad (1.12)$$

Durch Divergenz-Bildung dieser Ströme werden die gebrochenen Symmetrien sichtbar:

$$\begin{aligned} \partial_\mu J_V^{\mu,a} &= i \bar{q} \left[M, \frac{\lambda_a}{2} \right] q \\ \partial_\mu J_A^{\mu,a} &= i \bar{q} \left\{ M, \frac{\lambda_a}{2} \right\} \gamma^5 q, \end{aligned} \quad (1.13)$$

wobei M die Massenmatrix der Quarks darstellt. Diese kann z.B. in der diagonalen Gestalt wie folgt angegeben werden:

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}.$$

Da die Gell-Mann-Matrizen mit der Einheitsmatrix kommutieren, verschwindet die Divergenz der Vektorströme für $m_u = m_d = m_s$, sodass für diesen Fall $SU(3)_V$ -Symmetrie vorhanden ist. Die Divergenz der Axialströme verschwindet nur für den chiralen Grenzfall, sodass die axiale Symmetrie $SU(3)_A$ durch die Quarkmassen gebrochen wird. Insgesamt wird die chirale Symmetrie $SU(3)_L \times SU(3)_R$ durch die Quarkmassen auf $SU(3)_V$ reduziert. In Abschnitt 1.10 wird die Symmetriebrechung genauer untersucht.

1.5. QCD im Niederenergie-Regime

Für die explizite Berechnung der Erwartungswerte in der QCD wird eine störungstheoretische Methode mit der Kopplungskonstanten α_s als Kleinheitsparameter verwendet. Diese versagt jedoch im Niederenergie-Regime, da in diesem Bereich die Kopplungskonstante der QCD größer wird als eins, siehe Abbildung 1.4.

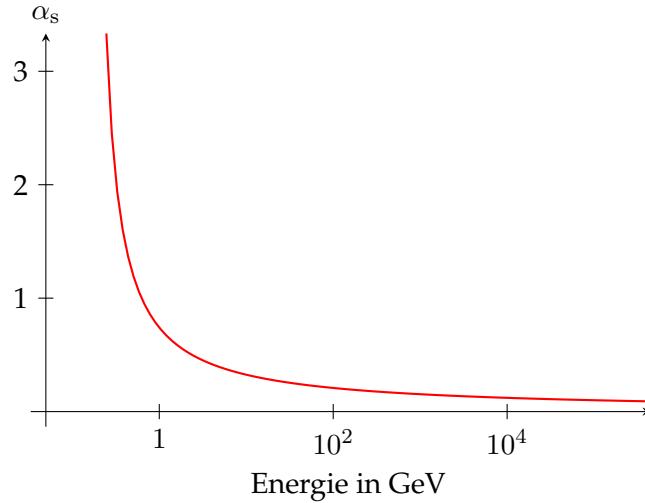


Abbildung 1.4.: Laufende Kopplungskonstante in Abhängigkeit von der Energie

QCD wird einerseits z.B. anhand eines Beschleunigers im hochenergetischen Bereich erforscht, andererseits gibt es auch interessante Messgrößen im Niederenergie-Regime wie Massen oder Zerfallskonstanten der Mesonen.

Um theoretische Vorhersagen in diesem Bereich zu treffen, muss eine neue Methode zur Berechnung verwendet werden. Eine mögliche Methode ist die **chirale Störungstheorie (kurz: χ PT)**.

1.6. Effektive Feldtheorie

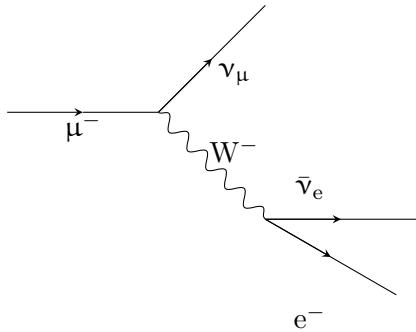
Da die χ PT eine effektive Feldtheorie für die QCD darstellt, wird zunächst Allgemeines über diese Theorie ausgeführt.

In der effektiven Feldtheorie (kurz: EFT) wird ein bestimmter Bereich der Theorie (in der Regel Niederenergie-Regime) betrachtet und dieser approximativ durch entsprechende Felder in diesem Bereich beschrieben. EFT ist von Natur aus störungstheoretisch und vereinfacht oder ermöglicht überhaupt die Rechnung im betrachteten Bereich.

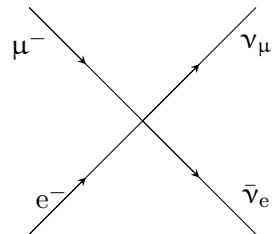
In der EFT tauchen schwere Felder nicht in der effektiven Lagrange-Dichte oder in der effektiven Wirkung auf. Dies kann formal wie folgt mathematisch dargestellt werden:

$$e^{i\Gamma_{\text{eff}}[\Phi_l]} = \int \mathcal{D}\Phi_h e^{i\mathcal{S}[\Phi_l, \Phi_h]}. \quad (1.14)$$

Γ_{eff} ist dabei die effektive Wirkung, Φ_l und Φ_h sind leichte und schwere Felder. Man sagt, schwere Felder in der EFT würden „ausintegriert“. Zur Illustration eines Feynman-Diagramms in EFT wird der μ^- -Zerfall betrachtet. Die Abbildung 1.5(a) zeigt das tree-level Feynman-Diagramm in der fundamentalen Theorie (Standardmodell): Die Kraft wird übertragen durch den Austausch eines W^- -Bosons. In der EFT der schwachen Wechselwirkung, der *Fermi-Theorie*, taucht dagegen kein W -Boson auf, weil seine Masse von ca. 80 GeV zu hoch ist, um im Niederenergie-Regime eine Rolle zu spielen. Das Feynman-Diagramm vereinfacht sich dadurch, siehe Abbildung 1.5(b).



(a) Wechselwirkung durch Austausch von W -Boson



(b) Kontaktwechselwirkung ohne Austausch eines Eichbosons

Abbildung 1.5.: Das tree-level Feynman-Diagramm (a) im Standardmodell und (b) in der EFT für den μ^- -Zerfall

Man unterscheidet drei Typen der EFT nach ihren jeweiligen Eigenschaften. [3]

1. Vollständige Ausintegration schwerer Felder

Es können zwei wesentliche Bereiche der Theorie durch eine Referenzenergie Λ definiert werden. Der Bereich oberhalb Λ wird „fundamentales“ und der unterhalb dieser „effektives“ Niveau genannt. Laut des Entkopplungstheorems [4] können im effektiven Niveau die Feynman-Diagramme vernachlässigt werden, die schwere Felder enthalten. So hängt die Lagrange-Dichte im effektiven Niveau nur von leichten Feldern ab. Ein wichtiges Beispiel dafür ist die *Fermi-Theorie* der schwachen Wechselwirkung: Im Niederenergie-Regime werden die schweren Felder wie W- oder Z-Bosonen nicht betrachtet, d.h. die Lagrange-Dichte in der Fermi-Theorie hängt nur von leichten Feldern wie Elektron, Neutrino usw. ab. Ein Beispiel für das Feynman-Diagramm in dieser Theorie wurde bereits in Abbildung 1.5 gezeigt.

2. Teilweise Ausintegration der schweren Felder

In diesem Typ der EFT verschwinden die schweren Felder nicht vollständig, sondern nur jene mit hohem Impuls.

Ein wichtiges Beispiel dafür ist die *heavy quark effective theory (HQET)*. Diese Theorie stellt im Wesentlichen die Entwicklung der QCD-Lagrange-Dichte durch das Inverse schwerer Quarkmassen wie z.B. des bottom-Quarks dar.

3. Vollständige Ausintegration schwerer Felder mit spontaner Symmetriebrechung

Dieser Typ der EFT ist dem ersten Typen ähnlich: Die effektive Lagrange-Dichte hängt nur von leichten Feldern ab. Der einzige Unterschied ist, dass beim Übergang vom fundamentalen zum effektiven Niveau spontane Symmetriebrechung auftritt und entsprechende Goldstone-Bosonen erzeugt werden.

Eine EFT dieses Typs hat zwei wichtige Eigenschaften:

- Universalität

Diese EFT hängt nicht von der spezifischen physikalischen Realisierung ab und findet nicht nur in der Teilchenphysik, sondern auch in der Festkörperphysik Anwendung (z.B. BSC-Theorie der Supraleitung).

- Die EFT ist nicht renormierbar.

Die wichtigen Anwendungen dieses Typs der EFT in der Teilchenphysik sind die elektroschwache Symmetriebrechung und die **chirale Störungstheorie (χ PT)**.

1.7. Spontane Symmetriebrechung eines skalaren Feldes

Zur Untersuchung der spontanen Symmetriebrechung wird ein einfaches Beispielsystem mit einem komplexen Feld

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (1.15)$$

betrachtet. Die Lagrange-Dichte mit diesem Feld lautet

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - V(\phi)$$

mit dem Potential

$$V(\phi) = m^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad (1.16)$$

wobei λ wegen der Renormierbarkeit positiv sein muss. Sie besitzt eine globale U(1)-Symmetrie:

$$\phi' = e^{i\alpha} \cdot \phi. \quad (1.17)$$

Das Minimum dieses Potentials liegt bei

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_2} = 0.$$

Hierzu wird eine Fallunterscheidung für m^2 getroffen:

1. $m^2 > 0$

In diesem Fall liegt das Minimum des Potentials bei

$$\langle 0 | \hat{\phi} | 0 \rangle = 0,$$

wie in Abbildung 1.6(a) mit einem roten Punkt verdeutlicht wird. Das heißt, es gibt nur einen Grundzustand und dessen Feldkonfiguration ist U(1)-symmetrisch: Die Symmetrie der Lagrange-Dichte ist auch im Grundzustand erhalten.

2. $m^2 < 0$

$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$ wird zu einem lokalen Maximum bzw. instabil und das Potential bildet bei

$$\langle 0 | \hat{\phi} | 0 \rangle = \sqrt{\frac{-m^2}{2\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}}$$

das Minimum, wie in Abbildung 1.6(b) als roter Kreis dargestellt wird. Wie in der Abbildung deutlich wird, liegt eine kontinuierliche Entartung des Grundzustandes in φ -Richtung vor. Beim Übergang vom instabilen zum stabilen Vakuum wird zufällig eine bestimmte Feldkonfiguration ausgewählt, wie z.B. $\langle 0 | \hat{\phi}_1 | 0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$ und $\langle 0 | \hat{\phi}_2 | 0 \rangle = 0$.

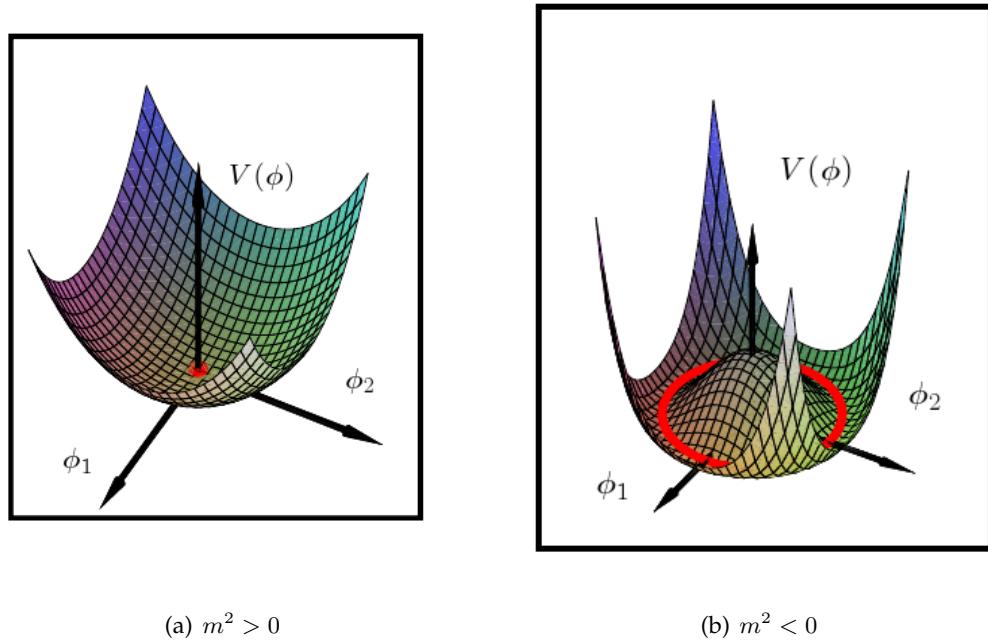


Abbildung 1.6.: Potential mit (a) dem symmetrischen Grundzustand und (b) dem Grundzustand mit gebrochener U(1)-Symmetrie

Für $m^2 < 0$ wird nun die Lagrange-Dichte um das neue Minimum entwickelt. Das komplexe Feld wird dabei mit den Fluktuationen um das Minimum in radialer bzw. in azimutaler Richtung $\rho(x)$ und $\varphi(x)$ dargestellt,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \rho(x)] e^{i \frac{\varphi(x)}{v}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \rho(x) + i \varphi(x)] + \mathcal{O}\left(\frac{\rho}{v}, \frac{\varphi}{v}\right).$$

Da die Fluktuationen gegenüber dem Vakuumerwartungswert v als klein angenommen werden können, wird $\mathcal{O}\left(\frac{\rho}{v}, \frac{\varphi}{v}\right)$ vernachlässigt. So ergibt sich für die Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \lambda v^2 \rho^2 - \lambda v(\rho^3 + \rho \varphi^2) - \frac{\lambda}{4}(\rho^2 + \varphi^2)^2. \quad (1.18)$$

Die Lagrange-Dichte (1.18) besitzt keine U(1)-Symmetrie mehr, obwohl die ursprüngliche Theorie diese erfüllt. Man nennt dies **spontane Symmetriebrechung**.

Die Lagrange-Dichte im Grundzustand (1.18) enthält

- ein massives Feld ρ mit der Masse $m_\rho^2 = 2\lambda v^2$
- und ein masseloses Feld φ .

ρ ist massiv, weil zur Anregung dieses Feldes aufgrund des Potentialwalls in radialer Richtung Energie benötigt wird. Dagegen ist φ masselos, da die Anregung in azimutaler Richtung keine

Energie kostet. Dieses masselose Teilchen wird **Goldstone-Boson** genannt. Wie im nächsten Kapitel näher diskutiert werden soll, wird es durch die spontane Symmetriebrechung hervorgerufen.

1.8. Das Goldstone-Theorem

Wie im obigen Beispiel gezeigt, taucht bei einer spontanen Symmetriebrechung von U(1) ein masseloses Goldstone-Boson auf. Diese Tatsache kann mit dem **Goldstone-Theorem** verallgemeinert werden [5]. Es besagt: Wird die ursprüngliche Symmetrie G mit n_G Generatoren spontan gebrochen zur Symmetrie H mit n_H Generatoren, so werden masselose skalare Teilchen erzeugt, deren Anzahl dem Unterschied der Anzahl der Generatoren $n_G - n_H$ entspricht. Da es im Allgemeinen aufwändig ist, wie im Beispiel 1.7 den symmetriebrechenden Grundzustand zu finden, werden häufig die Ladungsoperatoren der Symmetrie

$$Q^a(t) = \int d^3x J^{0,a}(t, \vec{x}) \quad (1.19)$$

als ein Indikator zur spontanen Symmetriebrechung verwendet: Vernichten die Ladungsoperatoren nicht den Vakuumzustand ($Q^a|0\rangle \neq 0$), so liegt spontane Symmetriebrechung vor und laut dem Goldstone-Theorem existiert zu jedem solchen Operator ein Goldstone-Boson. Ferner zeichnet sich die Multiplettstruktur der Goldstone-Bosonen nach dem *Coleman-Theorem* durch die Symmetriegruppe des Grundzustandes aus [6].

1.9. Explizite Symmetriebrechung

In Abschnitt 1.7 wurde ein Beispiel für die spontane Symmetriebrechung gezeigt, bei der die *exakte* Symmetrie im Grundzustand gebrochen wird. In der Physik gibt es aber häufig den Fall, in dem die ursprüngliche Symmetrie nur näherungsweise erfüllt wird und diese im Grundzustand gebrochen wird. Man spricht dann von **expliziter Symmetriebrechung**. Als ein Beispiel-System wird die Lagrangedichte (1.16) mit einer kleinen Störung betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)(\partial^\mu\phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)(\partial^\mu\phi_2) - V(\phi_1, \phi_2) \\ \text{mit } V(\phi) &= \frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 + a \cdot \phi_1. \end{aligned} \quad (1.20)$$

1. Für $m^2 > 0, \lambda > 0$ und $a > 0$:

Unter dieser Bedingung sieht das Potential wie in Abbildung 1.7 aus, wobei es wegen der Anschaulichkeit nur in ϕ_1 -Richtung betrachtet wird. Das Minimum liegt im Gegensatz zum Fall ohne Störung nicht mehr bei Null, sondern bei

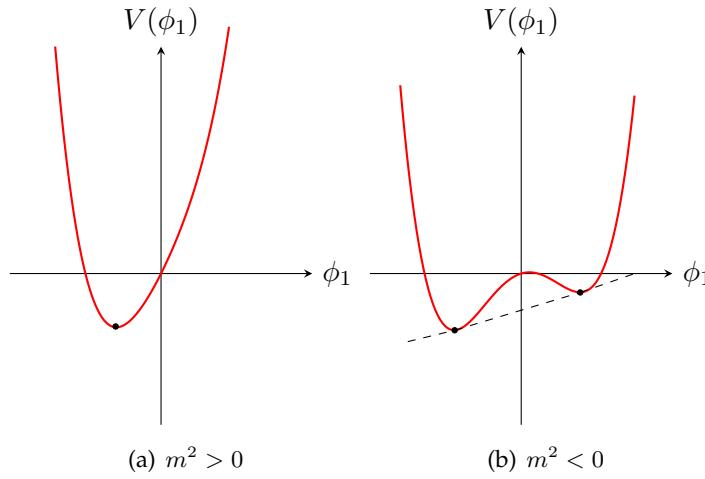


Abbildung 1.7.: Potentiale mit (a) annähernd gültiger Symmetrie und (b) explizit gebrochener Symmetrie

$$\phi_1 = \frac{a}{2m^2} \quad \phi_2 = 0, \quad (1.21)$$

wobei die Lösung anhand eines störungstheoretischen Ansatzes bis zur Ordnung $\mathcal{O}(a)$ berechnet wurde.

2. Für $m^2 < 0$, $\lambda > 0$ und $a > 0$:

In diesem Fall liegen die Minima bei

$$\phi_1 = \pm \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} + \frac{a}{2m^2}, \quad \phi_2 = 0. \quad (1.22)$$

Wegen der Asymmetrie des Potentials ist das Minimum bei

$$\phi_1 = -\sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} + \frac{a}{2m^2} \equiv l, \quad \phi_2 = 0$$

energetisch günstiger. Analog zur spontanen Symmetriebrechung wird das Feld in der Nähe dieses Minimums betrachtet:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[l + \rho(x)] e^{\frac{i\varphi(x)}{l}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[l + \rho(x) + i\varphi(x)] + \mathcal{O}\left(\frac{\rho}{l}, \frac{\varphi}{l}\right). \end{aligned}$$

So kann die Masse der Teilchen berechnet werden:

$$m_\varphi^2 = a \sqrt{\frac{\lambda}{-m^2}}, \quad m_\rho^2 = -2m^2 + 3a \sqrt{\frac{\lambda}{-m^2}}. \quad (1.23)$$

Ein wichtiger Punkt hierbei ist, dass das Goldstone-Boson φ bei der expliziten Symmetriebrechung massebehaftet ist und die Masse proportional zum symmetriebrechenden Parameter a steigt.

1.10. Spontane Symmetriebrechung in der QCD

Wie in Kapitel 1.4 gezeigt wurde, besitzt die QCD-Lagrange-Dichte im chiralen Grenzfall eine $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Symmetrie. Die Frage ist nun, ob spontane Symmetriebrechung vorliegt.

Um das Symmetrieverhalten des QCD-Grundzustandes zu untersuchen, werden Axial- und Vektorladungsoperator betrachtet:

$$Q_A^a = Q_R^a - Q_L^a = \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q(t, \vec{x}) \quad (1.24)$$

$$Q_V^a = Q_R^a + Q_L^a = \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda^a}{2} q(t, \vec{x}), \quad (1.25)$$

wobei Q_A^a positive und Q_V^a negative Parität besitzt.

In der Arbeit von Vafa und Witten [7] wurde gezeigt, dass der QCD-Grundzustand im chiralen Grenzfall $SU(3)_V$ -Symmetrie besitzen muss, also die Vektorladungsoperatoren den Vakuumzustand vernichten:

$$Q_V^a |0\rangle = 0.$$

Zur Untersuchung der axialen Symmetrie $SU(3)_A$ im Grundzustand wird zunächst die pseudoskalaren Quarkdichte

$$P_q(x) = i \bar{q}(x) \gamma_5 \lambda_a q(x) \quad (1.26)$$

definiert. Der Vakuumerwartungswert des Kommutators zwischen Q_A^a und $P_q(x)$ lässt sich ausrechnen zu [8]:

$$\langle 0 | i [Q_A^a, P^a(x)] | 0 \rangle = \frac{2}{3} \langle \bar{q}q \rangle.$$

Daraus folgt unmittelbar

$$Q_A^a |0\rangle \neq 0.$$

Die Axial-Symmetrie des Vakuums wird durch das sogenannte *skalare Singulettquarkkondensat* $\langle \bar{q}q \rangle$ spontan gebrochen. Insgesamt wird $SU(3)_R \times SU(3)_L$ spontan gebrochen zu $SU(3)_V$, sodass acht Goldstone-Bosonen mit negativer Parität erzeugt werden, die sich durch die Strangeness

² S und die dritte Komponente des Isospins I_3 unterscheiden. Diese Goldstone-Bosonen sind die Pionen π , Kaonen K und Eta η , die sich im zweidimensionalen Raum darstellen lassen, der durch S und I_3 aufgespannt wird, siehe Abbildung 1.8.

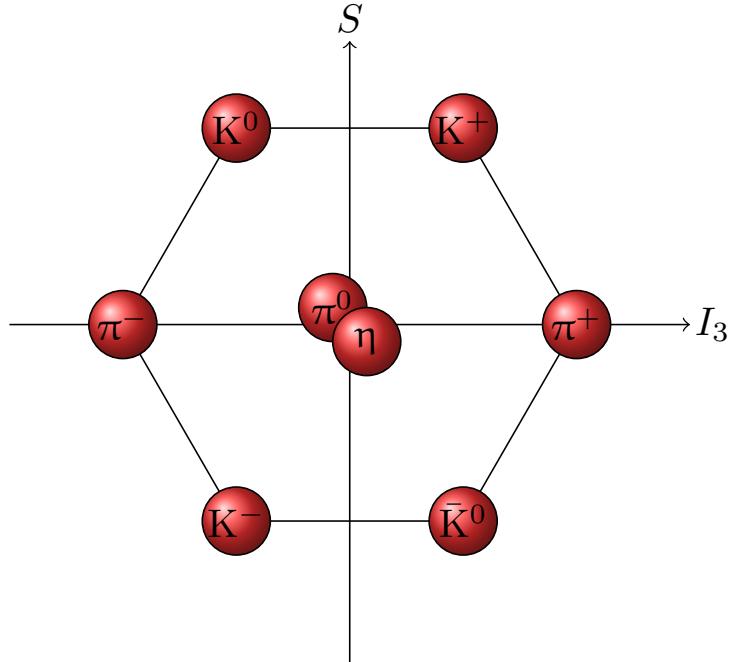


Abbildung 1.8.: Die leichten pseudo-skalaren Mesonen werden als Oktett dargestellt. Diese Mesonen haben entartete Massen, falls die up-, down- und strange-Quarkmassen gleich sind.

Die chirale Symmetrie ist allerdings nur näherungsweise erfüllt, weil die leichten Quarks massebehaftet sind. Daher wird die Symmetrie nicht nur spontan, sondern auch explizit gebrochen, sodass die pseudo-skalaren Mesonen massiv werden, siehe Kapitel 1.9.

²Die Strangeness S bezeichnet die Quantenzahl für die Seltsamkeit eines Teilchens. Es gilt $S = -1$ bzw. $S = 1$ falls ein strange-Quark bzw. ein Anti-strange-Quark vorhanden ist und $S = 0$, falls kein strange-Quark vorhanden ist.

2. Chirale Störungstheorie im Kontinuum

2.1. Grundidee der χ PT

Wie viele andere moderne EFTen findet auch die χ PT in der Weinberg'schen Überlegung [9] ihren Ursprung.

Sie besagt: Konstruiert man die *allgemeinste Lagrange-Dichte* mit der vorhandenen Symmetrie, wie zum Beispiel für die QCD die Poincaré-Invarianz, C-, P- und T-Symmetrie usw., so ergibt sich für jede Ordnung der Störungstheorie die allgemeine S-Matrix mit

- den angenommenen Symmetrien,
- der Analyzität,
- der Unitarität,
- und dem Clusterzerlegungsprinzip,

welche für eine konsistente QFT notwendige Eigenschaften sind. Die allgemeinste Lagrange-Dichte besteht zunächst aus unendlich vielen Termen mit unendlich vielen freien Parametern. Damit mit dieser explizite Berechnungen durchgeführt werden können, wird auch ein Schema benötigt, das die Beiträge nach Ordnungen des Impulses sortiert.

Zudem sind die Freiheitsgrade im Niederenergie-Regime wegen des Confinement, siehe Abschnitt 1.2, nicht mehr Quarks, sondern die Goldstone-Bosonen; das heißt, die gesuchte effektive Lagrange-Dichte der χ PT muss mit diesen konstruiert werden.

Insgesamt wird zur Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte der χ PT für pseudo-skalare Mesonen folgendes benötigt:

1. Die allgemeinste Lagrange-Dichte, die unter Poincaré-, $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -, C-, P- und T-Transformationen invariant ist ,
2. ein konsistentes Zählschema, mit dem Beiträge nach Ordnungen des Impulses sortiert werden,
3. und acht pseudo-skalare Mesonenfelder als Bestandteile der effektiven Lagrange-Dichte.

2.2. Chirale Störungstheorie für Mesonen

2.2.1. Das Weinberg'sche Zählschema

Da das Niederenergie-Regime der QCD in der chiralen Störungstheorie betrachtet wird, kann angenommen werden, dass der Impuls der Felder klein genug ist, damit die Störungstheorie in diesem gerechtfertigt werden kann. Wegen der Masse-Impuls-Beziehung ist die Ströungstheorie in Quarkmassen gleichbedeutend.

Daher wird zunächst die allgemeinste Lagrange-Dichte nach Impuls-Ordnung sortiert:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \dots, \quad (2.1)$$

wobei der Term \mathcal{L}_{2n} einen Faktor p^{2n} enthält. Ungerade Potenzen des Impulses tauchen in der Lagrange-Dichte im mesonischen Sektor nicht auf, da sich solche mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ oder dem Levi-Civita-Tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ nicht zum Lorentz-Skalar kontrahieren lassen.

Da in den expliziten Rechnungen der Störungstheorie Feynman-Diagramme verwendet werden, ist ein Zählschema vonnöten, mit dem Diagramme nach Impuls-Ordnung sortiert werden können. Dabei stellt das sogenannte **Weinberg'sche Zählschema** [9] eine geeignete Methode dar.

Mit dieser Methode wird das Verhalten der Streuamplitude \mathcal{M} unter Skalierung des äußeren Impulses und der Quarkmasse untersucht:

$$p'_i = t \cdot p_i \quad \text{und} \quad m'_q = t^2 \cdot m_q,$$

wobei die Quarkmasse quadratisch skaliert wird, weil die Mesonmasse proportional zur Wurzel aus der Quarkmasse ist [10]. Das Resultat ist [9]

$$\mathcal{M}(t p_i, t^2 m_q) = t^{2D} \mathcal{M}(p_i, m_q) \quad (2.2)$$

$$\text{mit } D = 2 + 2N_L + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n}, \quad (2.3)$$

wobei N_{2n} die Anzahl der Vertizes aus \mathcal{L}_{2n} und N_L die Anzahl der Schleifen im betrachteten Diagramm darstellen. D wird die **chirale Dimension** genannt. Diejenigen Diagramme, die eine hohe chirale Dimension besitzen, sind für kleine Energien unterdrückt. Einige explizite Beispiele werden in Tabelle 2.1 gezeigt.

2.3. Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte

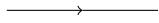
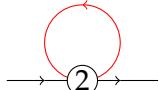
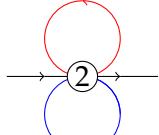
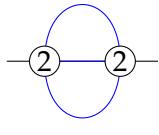
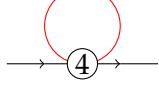
chirale Ordnung	Anzahl der Schleifen und Vertizes	Feynman-Diagramm
$D = 2$	$N_{2n} = 0, N_L = 0$	
$D = 4$	$N_2 = 1, N_L = 1$	
	$N_4 = 1, N_L = 0$	
$D = 6$	$N_2 = 1, N_L = 2$	
	$N_2 = 2, N_L = 2$	
	$N_4 = 1, N_L = 1$	
usw.		...

Tabelle 2.1.: Chirale Ordnung der Feynman-Diagramme

2.3. Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte

2.3.1. Transformationsverhalten der Goldstone-Bosonen

In diesem Kapitel wird die Darstellung der leichten pseudo-skalaren Mesonenfelder gesucht. Als naiver Ansatz werden die Felder in einem Vektor zusammengefasst und dieser mit den Gell-Mann-Matrizen zur hermiteschen spurlosen 3×3 -Matrix parametrisiert:

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^8 \lambda_a \cdot \phi_a = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \phi(x) = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \\ \eta_8 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

wobei der Ladungseigenzustand

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \mp i\pi_2) &\hat{=} \pi^\pm & \frac{1}{\sqrt{2}}(K_4 \mp iK_5) &\hat{=} K^\pm \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(K_6 - iK_7) &\hat{=} K^0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(K_6 + iK_7) &\hat{=} \bar{K}^0 \\ \pi_3 &\hat{=} \pi^0 & \eta_8 &\hat{=} \eta \end{aligned} \quad (2.5)$$

gewählt wurde. Diese Feldmatrix (2.4) transformiert sich allerdings unter $SU(3)_R \times SU(3)_L$ auf nichtlineare Weise, sodass die Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte mit dieser erheblich erschwert wird. Nun wird die alternative Darstellung der Felder gesucht, die sich unter $SU(3)_R \times SU(3)_L$ linear transformiert.

Die Idee für diese neue Darstellung ist die folgende: Bei einer Darstellung, die linear in den Mesonenfeldern ist, ist das Transformationsverhalten offenbar nichtlinear. Daher muss nun eine nichtlineare Darstellung (nichtlineare Realisierung¹) konstruiert werden, damit das Transformationsverhalten linear ist. Es stellt sich heraus, dass die nichtlineare Darstellung der Felder der Form

$$U(x) = \exp\left(i \frac{\phi(x)}{F}\right) \quad (2.6)$$

die geeignete Transformationseigenschaft besitzt [8]:

$$U'(x) = R U(x) L^\dagger, \quad \text{mit } R \in SU(3)_R \text{ und } L \in SU(3)_L. \quad (2.7)$$

F ist eine Konstante, die sicherstellt, dass das Argument in der Exponentialfunktion dimensionslos ist. Die Konstante wird in Abschnitt 2.3.6 näher betrachtet.

Im Folgenden werden das Transformationsverhalten und die chirale Ordnung der „Bauelemente“ der effektiven Lagrange-Dichte diskutiert. Neben der $SU(3)_R \times SU(3)_L$ -Transformation sind auch die diskreten Symmetrien wie C-, P- und T-Transformation bei der Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte wichtig, weil die QCD auch diese Symmetrien besitzt. Die

¹Die nichtlineare Realisierung stellt die Verallgemeinerung der Darstellung aus der linearen Gruppe dar, die in der Physik häufig gebraucht wird.

2.3. Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte

Zeitumkehr-Symmetrie enthalten aber alle Größen automatisch, daher wird sie hierbei nicht betrachtet.

1. Die Feldmatrix der Goldstone-Bosonen

- $G = \text{SU}(3)_R \times \text{SU}(3)_L$

Das Transformationsverhalten wurde bereits gezeigt, siehe Gleichung (2.7).

- Parität

Da es sich um pseudo-skalare Mesonen handelt, gilt

$$\mathcal{P} \cdot \phi_a = -\phi_a,$$

wobei \mathcal{P} den Paritätsoperator darstellt. Daher transformiert sich $U(x)$ wie folgt:

$$\mathcal{P} U(x) = \exp\left(-i \frac{\phi}{F}\right) = U^\dagger. \quad (2.8)$$

- Ladungskonjugation

Einzelne Goldstone-Bosonen-Felder verhalten sich unter Ladungskonjugation mit entsprechendem Operator \mathcal{C} wie folgt:

$$\mathcal{C} \pi^\pm = \pi^\mp \quad \mathcal{C} K^\pm = K^\mp \quad \mathcal{C} K^0 = \bar{K}^0 \quad \mathcal{C} \pi^0 = \pi^0 \quad \mathcal{C} \eta = \eta.$$

Dies entspricht daher der Transponierung der Feldmatrix:

$$\mathcal{C} U(x) = \exp\left(i \frac{\phi^T}{F}\right) = U^T. \quad (2.9)$$

Da $U(x)$ keine Ableitung enthält und daher in der Rechnung kein Impuls durch diese erzeugt wird, ist $U(x)$ von chiraler Ordnung $\mathcal{O}(p^0)$.

2. Kovariante Ableitung der Feldmatrix $D_\mu U(x)$

Das Transformationsverhalten von $D_\mu U(x)$ ist wegen der kovarianten Ableitung analog zu $U(x)$. Die chirale Ordnung ist wegen der Ableitung $\mathcal{O}(p^1)$.

3. Ein äußeres Feld

Aufgrund der chiralen Symmetrie müssen die links- und rechtshändigen Felder r_ν und l_ν unterschieden werden, die in Form eines rechts- bzw. linkshändigen Feldstärketensors

$$f_{\mu\nu}^R = \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu] \quad (2.10)$$

$$f_{\mu\nu}^L = \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu] \quad (2.11)$$

in die Lagrange-Dichte eingehen.

- $SU(3)_R \times SU(3)_L$

Die Feldstärketensoren transformieren sich in der jeweiligen links- und rechtshändigen chiralen Teilgruppe wie ein Tensor und die Ströme r_ν und l_ν wie ein Vektor:

$$\begin{aligned} f^{R'}_{\mu\nu} &= R f^R_{\mu\nu} R^\dagger & r'_\mu &= R r_\mu R^\dagger + i R \partial_\mu R^\dagger \\ f^{L'}_{\mu\nu} &= L f^L_{\mu\nu} L^\dagger & l'_\mu &= L l_\mu L^\dagger + i L \partial_\mu L^\dagger. \end{aligned} \quad (2.12)$$

- Parität

Durch Raumspiegelung werden die Raumkomponenten der Vierervektoren negativ: $\mathcal{P} : (a^0, \vec{a}) \rightarrow (a^0, -\vec{a})$. Dies entspricht der Vertauschung der ko- und kontravarianten Indizes im Minkowski-Raum. Außerdem wird dabei der Drehsinn der Felder geändert:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} f^R_{\mu\nu} &= f^{\mu\nu}_L & \mathcal{P} r_\mu &= l^\mu \\ \mathcal{P} f^L_{\mu\nu} &= f^{\mu\nu}_R & \mathcal{P} l_\mu &= r^\mu. \end{aligned} \quad (2.13)$$

- Ladungskonjugation

Der Ladungskonjugationsoperator hat die Form $\mathcal{C} = i \gamma^2 \gamma^0$. Dieser hat dann außer der Änderung der Händigkeit und Vertauschung der ko- und kontravarianten Indizes, wie bei der Parität, auch die Transponierung und Änderung der Stromrichtung zur Folge:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} f^R_{\mu\nu} &= -(f^{\mu\nu}_L)^T & \mathcal{C} r_\mu &= -(l^\mu)^T \\ \mathcal{C} f^L_{\mu\nu} &= -(f^{\mu\nu}_R)^T & \mathcal{C} l_\mu &= -(r^\mu)^T. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die chirale Ordnung der Ströme ist $\mathcal{O}(p^1)$ und die der Feldstärketensoren $\mathcal{O}(p^2)$.

4. Massenmatrix

In Abschnitt 1.10 wurde gezeigt, dass der Massenterm in der Lagrange-Dichte die chirale Symmetrie explizit bricht. Es ist aber sehr aufwändig, eine allgemeine symmetriebrechende effektive Lagrange-Dichte zu konstruieren. Daher macht man sich die *Spurion-Analyse* zunutze. Dabei wird angenommen, dass die Massenmatrix wie

$$M' = R M L^\dagger \quad (2.15)$$

transformiere, sodass der Massenterm invariant bliebe, obwohl sie in Wirklichkeit eine Konstante darstellt [11]. So kann die effektive Lagrange-Dichte viel einfacher konstruiert werden. Bei der expliziten Rechnung werden für die Massenmatrix natürlich konstante Werte verwendet.

Um die Invarianz des Massenterms zu gewährleisten, muss sich die Massenmatrix unter C- und P-Transformation anhand der Spurion-Analyse wie folgt verhalten:

2.3. Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte

$$\mathcal{P} M = M^T \quad (2.16)$$

$$\mathcal{C} M = M^\dagger. \quad (2.17)$$

Da im Niederenergie-Regime nicht mehr die Quarks die Freiheitsgrade sind, darf die Massenmatrix M nicht allein in der Lagrange-Dichte auftauchen, sondern immer nur mit einem freien Parameter B :

$$\chi = 2B \cdot M. \quad (2.18)$$

Dabei stellt der Faktor 2 eine Konvention dar und hat keine physikalische Bedeutung. Die Massen der Quarks sind proportional zum Quadrat der Mesonenmasse, daher ist die Massenmatrix von der chiralen Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$.

2.3.2. Vorgehensweise zur Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte

Die Vorgehensweise der Konstruktion kann am besten mit dem Bauen mit Lego-Steinen verglichen werden. Die gefundenen Bausteine der effektiven Lagrange-Dichte können als Lego-Steine identifiziert werden:

$$\begin{array}{c} \text{Yellow brick} \\ \equiv U(x), \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Green brick} \\ \equiv D_\mu U(x), \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Red brick} \\ \equiv f_{\mu\nu}^L, \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Red brick} \\ \equiv f_{\mu\nu}^R, \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Brown brick} \\ \equiv \chi. \end{array} \quad (2.19)$$

Nun sind die zur Verfügung stehenden Steine bekannt. Außerdem ist bekannt, wie sich die Theorie (QCD) im Hinblick auf die Symmetrieeigenschaften (in Abbildung 2.1 in Form eines Kegels dargestellt) verhält. Nun muss die Theorie mit den Lego-Steinen durch entsprechende Kombinationen miteinander approximativ nachgebaut werden.

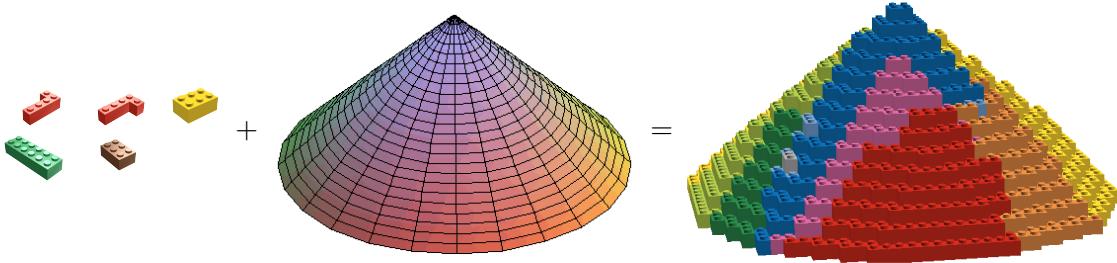


Abbildung 2.1.: Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte verglichen mit Lego-Bauen

Die mathematische Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

Elemente	G	C	P	chirale Ordnung
$U(x)$	$RU(x)L^\dagger$	U^T	U^\dagger	$\mathcal{O}(p^0)$
$D_\mu U(x)$	$R[D_\mu U(x)]L^\dagger$	$(D_\mu U)^T$	$(D_\mu U)^\dagger$	$\mathcal{O}(p^1)$
χ	$R\chi L^\dagger$	χ^T	χ^\dagger	$\mathcal{O}(p^2)$
$f_{\mu\nu}^R$	$Rf_{\mu\nu}^R R^\dagger$	$-(f_{\mu\nu}^L)^T$	$f_L^{\mu\nu}$	$\mathcal{O}(p^2)$
$f_{\mu\nu}^L$	$Lf_{\mu\nu}^L L^\dagger$	$-(f_{\mu\nu}^R)^T$	$f_R^{\mu\nu}$	$\mathcal{O}(p^2)$

Tabelle 2.2.: Transformationsverhalten der Bestandteile der effektiven Lagrange-Dichte

2.3.3. Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte

Alle „Bauelemente“ der effektiven Lagrange-Dichte und deren Verhalten unter $G = \text{SU}(3)_R \times \text{SU}(3)_L$, P- und C-Transformation werden in Tabelle 2.2 zusammengefasst. Anhand dieser Tabelle lassen sich nun die Terme kombinieren, die geeignete Symmetrie besitzen. Beispiele für die möglichen Terme werden im Folgenden in chiraler Ordnung $\mathcal{O}(p^0)$ und $\mathcal{O}(p^2)$ explizit gezeigt.

- $\mathcal{O}(p^0)$

In dieser Ordnung können geeignete Terme nur durch Kombinationen mit der Feldmatrix $U(x)$ realisiert werden. Um die Invarianz unter den betrachteten Symmetrien zu realisieren, werden Eigenschaften der Spur ausgenutzt, wie z.B. zyklische Vertauschbarkeit,

$$\text{Tr} [UU^\dagger] = 3, \quad \text{Tr} [UU^\dagger UU^\dagger] = 3, \quad \text{Tr} [UU^\dagger] \cdot \text{Tr} [UU^\dagger] = 9, \dots \quad (2.20)$$

Da die Feldmatrix unitär ist, können durch Kombination nur konstante Zahlen erzeugt werden. Solche Terme ohne Mesonenfelder ϕ_i in der Lagrange-Dichte haben keine physikalische Bedeutung und können ignoriert werden.

- $\mathcal{O}(p^2)$

In nächsthöherer Ordnung können Ableitungen und Massenmatrix in der effektiven Lagrange-Dichte auftauchen. Da der Feldstärketensor entweder mit zwei Ableitungen der Mesonenfelder $D_\mu U$ oder mit sich selbst zum Lorentz-Skalar kontrahiert werden muss, taucht dieser in $\mathcal{O}(p^2)$ nicht auf. Die möglichen Terme sind:

$$\text{Tr} [(D_\mu U)(D^\mu U)^\dagger], \quad \text{Tr} [MU^\dagger], \quad \text{Tr} [UM^\dagger]. \quad (2.21)$$

Andere mögliche Terme mit zwei Ableitungen

$$\text{Tr}[D_\mu D_\nu UU^\dagger], \quad \text{Tr}[U(D_\mu D_\nu U)^\dagger], \dots$$

können auf die Form

$$\text{Tr}[D_\mu U(D_\nu U)^\dagger]$$

zurückgeführt werden [8].

2.3.4. Die effektive Lagrange-Dichte führender Ordnung

Nun wird die Lagrange-Dichte niedrigster Ordnung bestimmt, die auch mit **LO** (englisch: *Leading Order*) abgekürzt wird. Mögliche Terme wurden in Abschnitt 2.3.3 diskutiert. Die gesuchte Lagrange-Dichte ist dann die Addition aller möglichen Terme mit zwei freien Parametern F und B :

$$\mathcal{L}_{\text{LO}} = \frac{F^2}{4} \text{Tr} [D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F^2}{4} \text{Tr} [\chi U^\dagger + U \chi^\dagger] \quad (2.22)$$

Ein möglicher Term $\text{Tr}[\chi U^\dagger - U \chi^\dagger]$ taucht dabei wegen der Paritätseigenschaft nicht auf. Hierbei wird der Faktor $\frac{F^2}{4}$ in (2.22) konventionell so gewählt, dass der erste Term mit Ableitungen in niedrigster Ordnung dem kinetischen Term der Mesonen

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i$$

entspricht. Dies wird bei der Massenberechnung in Abschnitt 2.4 explizit gezeigt. Die Dynamik in niedrigster Ordnung zeichnet sich durch die Konstanten F und B aus. Die Konstanten werden auch **Niederenergielkopplungskonstanten** genannt, deren Bedeutung in Abschnitt 2.3.6 genauer diskutiert wird.

2.3.5. Die effektive Lagrange-Dichte nächstführender Ordnung

Die Lagrange-Dichte nächsthöherer Ordnung wird durch **NLO** (englisch: *Next to Leading Order*) abgekürzt und enthält deutlich mehr Terme als in LO. Sie besteht aus insgesamt zehn Termen, die Mesonenfelder enthalten, und zwei sogenannten Kontakttermen, die keine Mesonenfelder enthalten und somit keine Auswirkung auf die Physik haben. Die Kontaktterme werden eingeführt, damit die Renormierbarkeit der Lagrange-Dichte gewährleistet werden kann, siehe Abschnitt 2.7.4. Die Lagrange-Dichte in NLO, $\mathcal{O}(p^4)$, ist dann die Addition möglicher Terme jeweils multipliziert mit Niederenergielkopplungskonstanten L_i , die auch *Gasser-Leutwyler-Koeffizienten* genannt werden, und Kontaktkonstanten H_i .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO}} = & L_1 \left\{ \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \right\}^2 + L_2 \text{Tr}[D_\mu U (D_\nu U)^\dagger] \text{Tr}[D^\mu U (D^\nu U)^\dagger] \\ & + L_3 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger D_\nu U (D^\nu U)^\dagger] + L_4 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \\ & + L_5 \text{Tr}[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)] + L_6 \left[\text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \right]^2 \\ & + L_7 \left[\text{Tr}(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger) \right]^2 + L_8 \text{Tr}(U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger) \\ & - i L_9 \text{Tr}[f_{\mu\nu}^R D^\mu U (D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^L (D^\mu U)^\dagger D^\nu U] + L_{10} \text{Tr}(U f_{\mu\nu}^L U^\dagger f_{\mu\nu}^R) \\ & + H_1 \text{Tr}[f_{\mu\nu}^R f_{\mu\nu}^R + f_{\mu\nu}^L f_{\mu\nu}^L] + H_2 \text{Tr}[\chi \chi^\dagger] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Die Lagrange-Dichten höherer Ordnungen lassen sich analog zu LO und NLO konstruieren, sie sollen aber im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet werden.

2.3.6. Die Niederenergielkopplungskonstanten

Die in den Abschnitten 2.3.4 und 2.3.5 eingeführten Niederenergielkopplungskonstanten sind zunächst frei wählbar und durch Vergleich mit anderen Theorien oder Experimenten festzulegen. Dies wird im Folgenden für die Parameter F und B in LO explizit gezeigt.

Sowohl F als auch B hängen eng mit der Symmetriebrechung der chiralen Symmetrie zusammen. Daher werden zunächst die symmetriebrechenden Axialströme betrachtet, siehe Abschnitt 1.4. Die axialen Ströme werden aus den links- und rechtshändigen Strömen (1.10) gebildet

$$J_A^{\mu,a} = J_R^{\mu,a} - J_L^{\mu,a} = -i \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left(\lambda_a \{U, \partial^\mu U^\dagger\} \right), \quad (2.24)$$

betrachtet wird dabei die niedrigste Ordnung, daher wird die Feldmatrix (2.6) zu $U(x) \approx 1 + i \frac{\phi_a}{F}$ entwickelt. In dieser Ordnung ergibt sich für die axialen Ströme:

$$J_A^{\mu,a} \approx -F \partial^\mu \phi_a. \quad (2.25)$$

Mit Gleichung (2.25) können die Matrixelemente für den Zerfall eines Mesons ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \langle 0 | J_A^{\mu,a} | \phi_b(p) \rangle &= \langle 0 | -F \partial^\mu \phi_a(x) | \phi(p) \rangle \\ &= i p^\mu F \exp(-i p x) \delta_{ab}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Also entspricht F der Zerfallskonstanten der Mesonen.

Da der Parameter B eng mit den Mesonenmassen und somit mit dem Quarkkondensat, siehe Abschnitt 1.4, zusammenhängt, wird die Relation für die Energiedichte im Grundzustand in der QCD,

$$\frac{\partial \langle |\mathcal{H}_{\text{QCD}}| \rangle}{\partial m_q} \Big|_{m_u=m_d=m_s=0} = \frac{1}{3} \langle \bar{q}q \rangle, \quad (2.27)$$

betrachtet. Mit der effektiven Energiedichte in LO im Grundzustand ($U(x) = 1$),

$$\langle \mathcal{H}_{\text{eff}} \rangle = -F^2 B (m_u + m_d + m_s), \quad (2.28)$$

können dann schließlich die gesuchten Größen in Verbindung gebracht werden:

$$3F^2 B = -\langle \bar{q}q \rangle. \quad (2.29)$$

Da die Konstante F in beiden Bedingungen für die Symmetriebrechung (2.26) und (2.29) vorhanden ist, stellt der Wert dieser die notwendige und hinreichende Bedingung für die

2.3. Konstruktion der effektiven Lagrange-Dichte

spontane Symmetriebrechung dar. B hingegen taucht nur in der Bedingung (2.29) auf, sodass ihr Wert eine hinreichende, aber nicht notwendige Bedingung für die Symmetriebrechung ist.

Zur Festlegung der Parameter in NLO müssen verschiedene Zerfälle oder Streuungen betrachtet werden. Die experimentell ermittelten Werte für diese werden zusammen mit den Quellen in Tabelle 2.3 zusammengefasst.

	Werte	Quelle
L_1^r	$(0,9 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$	$\pi\pi$ -Streuung
L_2^r	$(1,7 \pm 0,7) \cdot 10^{-3}$	und
L_3^r	$(-4,4 \pm 2,3) \cdot 10^{-3}$	$K \rightarrow \pi\pi l\nu$
L_4^r	$(0 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}$	$N_c \rightarrow \infty$
L_5^r	$(2,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-3}$	F_K/F_π
L_6^r	$(0 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$	$N_c \rightarrow \infty$
L_7^r	$(-0,4 \pm 0,15) \cdot 10^{-3}$	$\eta - \eta'$ -Mischung
L_8^r	$(1,1 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$	$M_K^2/M_\pi^2, L_5^r$
L_9^r	$(7,4 \pm 0,7) \cdot 10^{-3}$	Seltene Pion-Zerfälle
L_{10}^r	$(-6,0 \pm 0,7) \cdot 10^{-3}$	

Tabelle 2.3.: Die experimentell bestimmten Werte für Gasser-Leutwyler-Koeffizienten und die Quellen [12]

Die Anzahl der Parameter steigt rapide mit der Ordnung, wie in Tabelle 2.4 gezeigt wird. Daher ist die Betrachtung höherer Ordnungen als NNLO (englisch: *next to next to leading order*) $\mathcal{O}(p^6)$ nicht mehr realistisch.

Ordnung	2 Flavour		3 Flavour	
	Parameter	Anzahl	Parameter	Anzahl ²
p^2	F_0, B_0	2	F, B	2
p^4	l_i^r, h_i^r	7+3	L_i^r, H_i^r	10+2
p^6	c_i^r	52+4	C_i^r	90+4
...				

Tabelle 2.4.: Anzahl der freien Parameter in der chiralen Strömungstheorie [13]

²Zum Beispiel 90+4 bedeutet dabei, dass 90 physikalische Terme und vier Kontaktterme vorhanden sind.

2.4. Massen der pseudo-skalaren Mesonen in führender Ordnung

Im letzten Abschnitt wurden die Lagrange-Dichten der χ PT in LO und NLO hergeleitet. Als Anwendung werden in diesem Abschnitt die Mesonenmassen berechnet, wobei der Massenunterschied des up- und down-Quarks $m_d - m_u = \Delta m$ bis zur Ordnung Δm betrachtet wird. Der Massenunterschied führt zur Mischung von π_3 und η_8 .

2.4.1. Parametrisierung

Zunächst wird die Parametrisierung der benötigten Größen definiert.

Die Mesonenfelder werden als ein Vektor

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \\ \eta_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\pi} \\ \vec{K}_1 \\ \vec{K}_2 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

zusammengefasst. Da in $\mathcal{O}(\Delta m)$ eine Entartung der Pionmassen vorliegt, ist es zweckmäßig, π_1 , π_2 und π_3 zu einem Vektor $\vec{\pi}$ zusammenzufassen. Dies gilt auch für die K_4 - K_5 - und K_6 - K_7 -Felder. Anschließend werden die Felder und die Massenmatrix anhand der Gell-Mann-Matrizen parametrisiert, siehe Anhang A.4:

$$\phi := \lambda_a \phi_a = \begin{pmatrix} \pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_8 & \pi_1 - i\pi_2 & K_4 - iK_5 \\ \pi_1 + i\pi_2 & -\pi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_8 & K_6 - iK_7 \\ K_4 + iK_5 & K_6 + iK_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta_8 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \chi &= 2BM = 2B \left(\begin{array}{cc|c} \hat{m} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{m} & 0 \\ \hline 0 & 0 & m_s \end{array} \right) - \Delta m B \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &= 2B\hat{m}\mathbb{1} + 2B(m_s - \hat{m}) \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) - \Delta m B \left(\begin{array}{c|c} \tau_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

\hat{m} und Δm stellen dabei den Mittelwert und den Massenunterschied des up- und down-Quarks dar:

$$\hat{m} = \frac{1}{2}(m_u + m_d), \quad \Delta m = (m_d - m_u). \quad (2.33)$$

2.4. Massen der pseudo-skalaren Mesonen in führender Ordnung

Zur Berechnung der Spur ist es angenehm, die Matrizen durch die Linear-Kombination der Gell-Mann-Matrizen darzustellen:

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \frac{1}{3}\mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 \quad \left(\begin{array}{c|c} \tau_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = \lambda_3. \quad (2.34)$$

2.4.2. Die Massenmatrix in führender Ordnung

Um die Masse der Mesonen zu bestimmen, wird die Feldmatrix (2.6) bis einschließlich $\mathcal{O}(\phi^2)$ entwickelt. So erhält man aus der Lagrange-Dichte (2.22)³:

$$\mathcal{L}_{\text{LO}}^{2\phi} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \mathcal{L}_M \quad (2.35)$$

$$\text{mit } \mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}\text{Tr}[\phi^2\chi]. \quad (2.36)$$

Mit der Parametrisierung (2.32) und den Relationen der SU(3) aus Anhang A.3 lässt sich der Massenterm der Lagrange-Dichte \mathcal{L}_M auswerten zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} & \left[2\hat{m}B\vec{\pi}^2 + (\hat{m} + m_s - 1/2\Delta m)B\vec{K}_1^2 \right. \\ & \left. + (\hat{m} + m_s + 1/2\Delta m)B\vec{K}_2^2 + \frac{2}{3}(\hat{m} + 2m_s)B\eta_8^2 \right] + \frac{B}{\sqrt{3}}\Delta m\pi_3\eta_8. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die Massenmatrix der Mesonen D kann dann aus der Lagrange-Dichte (2.37) abgelesen werden,

$$\begin{aligned} D_\pi &= 2B\hat{m} & (i = j = 1, 2, 3), \\ D_{K_1} &= B(\hat{m} + m_s) - \frac{1}{2}B\Delta m & (i = j = 4, 5), \\ D_{K_2} &= B(\hat{m} + m_s) + \frac{1}{2}B\Delta m & (i = j = 6, 7), \\ D_{\eta_8} &= \frac{2B}{3}(\hat{m} + 2m_s) & (i = j = 8), \\ D_{\eta\pi} &= D_{\eta\pi} = -\frac{B}{\sqrt{3}}\Delta m & (i = 3, j = 8), \\ D_{ij} &= 0 & (\text{sonst}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die Nebendiagonalen im π_3 - η_8 -Sektor sind erkennbar.

³Der obere Index 2ϕ der Lagrange-Dichte bedeutet, dass sie bis $\mathcal{O}(\phi^2)$ entwickelt wurde.

2.4.3. Diagonalisierung der Massenmatrix

Zur Massenbestimmung muss der Masseneigenzustand der Mesonenfelder ϕ^M gefunden werden, für den die Massenmatrix diagonal ist. Dazu wird der nichtdiagonale Sektor der Massenmatrix (2.38),

$$\begin{pmatrix} 2\hat{m}B & -\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta m B \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta m B & \frac{2}{3}(\hat{m} + 2m_s)B \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

diagonalisiert. Die Eigenwerte dieser Matrix lauten nach Anhang B

$$M_{\pi_3}^2 = 2\hat{m}B - \frac{4}{3}(m_s - \hat{m})B \frac{\sin^2 \varepsilon_2}{\cos 2\varepsilon_2}, \quad (2.40)$$

$$M_{\eta_8}^2 = \frac{2}{3}(\hat{m} + 2m_s)B + \frac{4}{3}(m_s - \hat{m})B \frac{\sin^2 \varepsilon_2}{\cos 2\varepsilon_2}, \quad (2.41)$$

$$\text{mit } \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Delta m}{m_s - \hat{m}} \right). \quad (2.42)$$

Der Eigenzustand ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} \pi_3^M \\ \eta_8^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon_2 & \sin \varepsilon_2 \\ -\sin \varepsilon_2 & \cos \varepsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_3 \\ \eta_8 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Die Eigenwerte der Matrix D , Gleichung (2.38), entsprechen den Mesonenmassen:

$$\begin{aligned} M_\pi^2 &= 2B\hat{m} & M_{\pi_3}^2 &= 2\hat{m}B - R \\ M_{K_1}^2 &= B(\hat{m} + m_s) - \frac{1}{2}B\Delta m & M_{K_2}^2 &= B(\hat{m} + m_s) + \frac{1}{2}B\Delta m \\ M_{\eta_8}^2 &= \frac{2}{3}(\hat{m} + 2m_s)B + R. \end{aligned} \quad (2.44)$$

R ist dabei die Abweichung der π_3 - und η_8 -Massen vom mischungsfreien Fall:

$$\begin{aligned} R &= \frac{4}{3}(m_s - \hat{m})B \frac{\sin^2 \varepsilon_2}{\cos 2\varepsilon_2} \\ &= \frac{2}{3}(m_s - \hat{m})B \left[\sqrt{1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\Delta m}{m_s - \hat{m}} \right)^2} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{4} \frac{\Delta m^2 B}{m_s - \hat{m}} + \mathcal{O}(\Delta m^4). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Die Mesonen können auch im gewohnten Ladungseigenzustand (2.5) dargestellt werden.

2.4.4. Mesonenmassen in Ordnung Δm

Entwickelt man das Ergebnis für die Massen (2.45) bis zur linearen Ordnung $\mathcal{O}(\Delta m)$, so erhält man

$$\boxed{\begin{aligned} M_\pi^2 &= 2B\hat{m} & M_{\eta_8}^2 &= \frac{2}{3}(\hat{m} + 2m_s)B \\ M_{K_1}^2 &= B(\hat{m} + m_s) - \frac{1}{2}B\Delta m & M_{K_2}^2 &= B(\hat{m} + m_s) + \frac{1}{2}B\Delta m. \end{aligned}} \quad (2.46)$$

Das heißt, der Quarkmassenunterschied $m_d - m_u$ erzeugt eine Massenaufspaltung im Kaon-Sektor. Die Auswirkung der Isospin-Asymmetrie in den π_3 - und η_8 -Massen ist von $\mathcal{O}(\Delta m^2)$. Im Folgenden werden die Mesonenmassen unter Vernachlässigung von $m_d - m_u$

$$\overset{\circ}{M}_\pi^2 = 2\hat{m}B, \quad \overset{\circ}{M}_K^2 = (\hat{m} + m_s)B, \quad \text{und} \quad \overset{\circ}{M}_\eta^2 = \frac{2}{3}(\hat{m} + 2m_s)B \quad (2.47)$$

genannt.

Diese Massen erfüllen automatisch die Gell-Mann-Okubo-Relation [10] unabhängig von einer Niederenergie-Konstanten B :

$$4\overset{\circ}{M}_K^2 = 3\overset{\circ}{M}_\eta^2 + \overset{\circ}{M}_\pi^2. \quad (2.48)$$

Wegen des unbekannten Parameters B ist es nicht möglich, die Quarkmassen aus den Mesonenmassen zu ermitteln, aber deren Verhältnis kann in Abhängigkeit von den Mesonenmassen dargestellt werden:

$$\frac{\overset{\circ}{M}_K^2}{\overset{\circ}{M}_\pi^2} = \frac{\hat{m} + m_s}{2\hat{m}}. \quad (2.49)$$

2.5. Mesonen-Propagator in führender Ordnung

Für die Massenberechnung in NLO ist der Propagator der Mesonen in führender Ordnung von Bedeutung. Dabei ist wegen der Mischung von π_3 und η_8 zu beachten, welche Basis der Felder in der Rechnung verwendet wird. Im Folgenden werden die Propagatoren zweier verschiedener Basen gezeigt. In den folgenden Berechnungen werden Terme von höheren Ordnung als Δm vernachlässigt.

2.5.1. Propagator des Masseneigenzustands

Die Massenmatrix ist im Masseneigenzustand diagonal, infolgedessen auch der Propagator:

$$\begin{aligned}
 G_\pi(p^2) &= \frac{1}{p^2 - \dot{M}_\pi^2} \\
 G_{K_1}(p^2) &= \frac{1}{p^2 - \dot{M}_K^2 + \frac{1}{2}\Delta m B} \\
 G_{K_2}(p^2) &= \frac{1}{p^2 - \dot{M}_K^2 - \frac{1}{2}\Delta m B} \\
 G_{\eta_8}(p^2) &= \frac{1}{p^2 - \dot{M}_\eta^2}.
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Der Masseneigenzustand $\vec{\phi}^M$ enthält dafür die Mischungsterme in π_3^M und η_8^M . Bis $\mathcal{O}(\Delta m)$ entwickelt, ergibt sich für den Eigenzustand (2.43):

$$\begin{aligned}
 \pi_{1,2}^M &= \pi_{1,2} \\
 \vec{K}_1^M &= \vec{K}_1 \\
 \vec{K}_2^M &= \vec{K}_2 \\
 \pi_3^M &= \pi_3 + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\Delta m}{m_s - \hat{m}} \eta_8 + \mathcal{O}(\Delta m^2) \\
 \eta_8^M &= \eta_8 - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\Delta m}{m_s - \hat{m}} \pi_3 + \mathcal{O}(\Delta m^2).
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

2.5.2. Propagator der Originalfelder

In diesem Fall bleiben die Felder von der Mischung unberührt, wohingegen die Propagatoren verändert werden. Der inverse Propagator führender Ordnung lässt sich mit der Massenmatrix (2.38) darstellen als

$$G_{ij}^{-1}(p^2) = p^2 \delta_{ij} - D_{ij}. \tag{2.52}$$

Wegen der Mischung ist der inverse Propagator im π_3 - η_8 -Sektor nicht diagonal:

$$G_{\pi\eta}^{-1} = \begin{pmatrix} p^2 - \dot{M}_\pi^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta m \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\Delta m & p^2 - \dot{M}_\eta^2 \end{pmatrix}.$$

Durch die Invertierung ergibt sich der gesuchte Propagator in LO:

$$G_{\pi\eta} = \frac{1}{(p^2 - \dot{M}_\pi^2)(p^2 - \dot{M}_\eta^2) - \frac{1}{3}\Delta m^2} \begin{pmatrix} p^2 - \dot{M}_\eta^2 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta m \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta m & p^2 - \dot{M}_\pi^2 \end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

2.6. λ_1 -Implementierung des Massenunterschiedes

Unter Vernachlässigung von $\mathcal{O}(\Delta m^2)$ ergibt sich:

$$G_{\pi\eta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 - \overset{\circ}{M}_\pi^2} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta m}{(p^2 - \overset{\circ}{M}_\pi^2)(p^2 - \overset{\circ}{M}_\eta^2)} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\Delta m}{(p^2 - \overset{\circ}{M}_\pi^2)(p^2 - \overset{\circ}{M}_\eta^2)} & \frac{1}{p^2 - \overset{\circ}{M}_\eta^2} \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Die Nichtdiagonalelemente können anhand der Methode der Partialbruchzerlegung in einer günstigen Form dargestellt werden:

$$G_{38} = G_{83} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\Delta m}{m_s - \widehat{m}} \left(\frac{1}{p^2 - \overset{\circ}{M}_\pi^2} - \frac{1}{p^2 - \overset{\circ}{M}_\eta^2} \right). \quad (2.55)$$

Zusammengefasst ergibt sich für den Propagator in LO:

(i = j = 1, 2, 3)	$G_\pi = \frac{1}{p^2 - \overset{\circ}{M}_\pi^2}$
(i = j = 4, 5)	$G_{K_1} = \frac{1}{p^2 - \overset{\circ}{M}_{K_1}^2 + \frac{1}{2}\Delta m}$
(i = j = 6, 7)	$G_{K_2} = \frac{1}{p^2 - \overset{\circ}{M}_{K_2}^2 - \frac{1}{2}\Delta m}$
(i = j = 8)	$G_\eta = \frac{1}{p^2 - \overset{\circ}{M}_\eta^2}$
(i = 3, j = 8)	$G_{\eta\pi} = G_{\pi\eta} = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\Delta m}{m_s - \widehat{m}} \left(\frac{1}{p^2 - \overset{\circ}{M}_\eta^2} - \frac{1}{p^2 - \overset{\circ}{M}_\pi^2} \right)$
(sonst).	$G_{ij} = 0$

(2.56)

2.6. λ_1 -Implementierung des Massenunterschiedes

In Abschnitt 3.3, in der *twisted-mass-QCD*, wird neben der gewohnten Parametrisierung der Massenmatrix (2.32) auch eine solche benötigt, in der der Massenunterschied Δm nicht mit λ_3 sondern mit λ_1 implementiert wird. In der twisted-mass-QCD wird die Massenmatrix in λ_3 -Richtung axial gedreht. Allerdings, um eine positiv-definite Fermionendeterminante zu gewährleisten, darf die Masse nicht durch den gleichen Generator der Drehung implementiert werden. Eine Lösung dieses Problems ist die oben genannte Parametrisierung.

Analog zur Implementierung mit λ_3 werden drei Basen gewählt. Mit diesen wird die Massenmatrix konstruiert:

$$M = \widehat{m} \mathbb{1} + (m_s - \widehat{m}) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \Delta m \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

$$= \begin{pmatrix} \widehat{m} & \frac{1}{2} \Delta m & 0 \\ \frac{1}{2} \Delta m & \widehat{m} & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Durch Einsetzen dieser Massenmatrix in \mathcal{L}_M , (2.36), ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M = & -B\widehat{m}\vec{\pi}^2 - \frac{B}{2}(\widehat{m} + m_s)\vec{K}^2 - \frac{B}{3}(\widehat{m} + 2m_s)\eta_8^2 \\ & + \frac{B}{\sqrt{3}}\Delta m\pi_1\eta_8 + \frac{B}{2}\Delta mK_4K_6 + \frac{B}{2}\Delta mK_5K_7 \\ & + \frac{B}{\sqrt{3}}\Delta m\eta_8\pi_1 + \frac{B}{2}\Delta mK_6K_4 + \frac{B}{2}\Delta mK_7K_5, \end{aligned} \quad (2.59)$$

wobei die vier Kaon-Felder im Vektor \vec{K} zusammengefasst wurden. Anders als bei der Implementierung mit λ_3 sind π_1 - η_8 -, K_4 - K_6 - und K_5 - K_7 -Mischung vorhanden.

2.6.1. Diagonalisierung der Massenmatrix

Die Massenmatrix, die sich aus (2.59) ablesen lässt, kann in zwei voneinander unabhängige, nichtdiagonale Sektoren geteilt werden: in den K_1 - K_2 - und den π_1 - η_8 -Sektor.

- **Diagonalisierung im Kaon-Sektor:**

Die zu diagonalisierende Matrix ist

$$D_K := \begin{pmatrix} \mathring{M}_K^2 & 0 & -\frac{1}{2}\Delta m & 0 \\ 0 & \mathring{M}_K^2 & 0 & -\frac{1}{2}\Delta m \\ -\frac{1}{2}\Delta m & 0 & \mathring{M}_K^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\Delta m & 0 & \mathring{M}_K^2 \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

Diese Matrix ist symmetrisch und somit diagonalisierbar. Die Eigenwerte werden aus dem charakteristischen Polynom bestimmt:

$$\begin{aligned} \det(D_K - \lambda \mathbb{1}) &= (\mathring{M}_K^2 - \lambda)^4 - \frac{1}{2}(\mathring{M}_K^2 - \lambda)^2 \Delta m^2 + \frac{1}{16} \Delta m^4 \\ &= (\lambda - \mathring{M}_K^2 - \frac{1}{2}\Delta m)^2(\lambda - \mathring{M}_K^2 + \frac{1}{2}\Delta m)^2 = 0 \\ \Rightarrow & \begin{cases} \lambda_{1,2} = \mathring{M}_K^2 - \frac{1}{2}\Delta m \\ \lambda_{3,4} = \mathring{M}_K^2 + \frac{1}{2}\Delta m. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.6. λ_1 -Implementierung des Massenunterschiedes

Die zugehörige Drehmatrix O_K und der Eigenvektor lauten:

$$O_K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

$$\begin{pmatrix} \vec{K}_1^M \\ \vec{K}_2^M \end{pmatrix} = O_K \begin{pmatrix} \vec{K}_1 \\ \vec{K}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} K_4 + K_6 \\ K_5 + K_7 \\ -K_4 + K_6 \\ -K_5 + K_7 \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Dieses Ergebnis entspricht einer Drehung von $\frac{\pi}{4}$ in der K_4 - K_6 - bzw. K_5 - K_7 -Ebene.

- **Diagonalisierung im π_1 - η_8 -Sektor:**

Zu diagonalisieren ist folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} \dot{M}_\pi^2 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta m \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\Delta m & \dot{M}_\eta^2 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

Die Matrix ist identisch mit der Matrix (2.39).

Das heißt, π_1 in der λ_1 -Implementierung repräsentiert das π^0 -Meson.

Es stellt sich insbesondere heraus, dass sich in den zwei verschiedenen Implementierungen in LO kein Unterschied in den Massen zeigt.

2.7. Mesonenmassen in nächstführender Ordnung

Da die Lagrange-Dichte in NLO, anders als in LO, Wechselwirkungsterme enthält, muss bei der Massenberechnung die sogenannte **Selbstenergie** betrachtet werden, die sich in zwei Beiträge, Kontakt- und Schleifen-Beitrag, unterteilen lässt. Um letztendlich die Mesonenmassen zu erhalten, wird der Propagator in NLO diagonalisiert und daraus werden die Massen abgelesen.

2.7.1. Die Selbstenergie

Wegen der Wechselwirkungsterme in NLO muss der Propagator in NLO wie folgt modifiziert werden [14]:

$$G_{\text{NLO}}(p^2) = \frac{i}{p^2 - M_{\text{LO}}^2 - \Sigma(M_{\text{LO}}^2)}. \quad (2.65)$$

M_{LO} sind dabei die Mesonenmassen in LO. $\Sigma(p^2)$ ist die Selbstenergie und hat in NLO die einfache Form

$$\Sigma_\phi(p^2) = A_\phi + B_\phi \cdot p^2, \quad (2.66)$$

wobei A_ϕ und B_ϕ konstante Matrizen sind. Um die Massen der Mesonen zu bestimmen, werden diese Matrizen benötigt.

Nach dem Weinberg'schen Zählschema, siehe Abschnitt 2.2.1, kommen zwei Diagramme der Selbstwechselwirkung in Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ in Frage⁴:

1. **Kontaktbeitrag** $\Sigma_\phi^K(p^2) = a_\phi^K + b_\phi^K \cdot p^2$:

Mesonen wechselwirken mit sich selbst, dergestalt, dass keine Schleife gebildet wird und der Vertex von $\mathcal{O}(p^4)$ ist (Abbildung 2.2); das heißt, für die Berechnung wird die Lagrange-Dichte in NLO benötigt.



Abbildung 2.2.: Selbstwechselwirkung aus der Lagrange-Dichte \mathcal{L}_{NLO}

Die Zahl 4 bedeutet, dass der Vertex von chiraler Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ ist.

⁴In der twisted-mass-QCD, siehe Kapitel 3.3, tauchen neben diesen auch die Dreier-Vertizes auf.

2.7. Mesonenmassen in nächstführender Ordnung

2. **Schleifenbeitrag** $\Sigma_\phi^S(p^2) = a_\phi^S + b_\phi^S \cdot p^2$:

Bei der Propagation tritt eine Schleife auf, daher muss der Vertex von $\mathcal{O}(p^2)$ sein, sodass insgesamt die chirale Ordnung $D = 4$ gewährleistet wird, siehe Abbildung 2.3. So muss in diesem Fall die Lagrange-Dichte in LO verwendet werden.

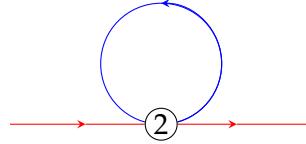


Abbildung 2.3.: Selbstwechselwirkung aus der Lagrange-Dichte \mathcal{L}_{LO}

Der Vertex ist von chiraler Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$.

Im Folgenden werden Kontakt- und Schleifenbeiträge zur Selbstenergie separat bestimmt.

2.7.2. Kontaktbeiträge zur Selbstenergie

Für die Berechnung wird die Lagrange-Dichte (2.23) benötigt. Dabei müssen nur der vierte bis achte Term betrachtet werden, da

- die ersten drei Terme jeweils mehr als zwei Felder enthalten,
- der neunte und zehnte Term die Kopplung mit äußeren Feldern f^L und f^R darstellen,
- und die letzten zwei Terme keine Felder enthalten.

Entwickelt man die relevanten Terme bis $\mathcal{O}(\phi^2)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO}}^{2\phi} = & -\frac{1}{2} [a_\eta \eta_8^2 + b_\eta (\partial_\mu \eta_8)^2] - \frac{1}{2} [a_\pi \vec{\pi}^2 + b_\pi (\partial_\mu \vec{\pi})^2] \\ & - \frac{1}{2} [(a_{\pi_3} - a_\pi) \pi_3^2 + (b_{\pi_3} - b_\pi) (\partial_\mu \pi_3)^2] - \frac{1}{2} [a_{K_1} \vec{K}_1^2 + b_{K_1} (\partial_\mu \vec{K}_1)^2] \quad (2.67) \\ & - \frac{1}{2} [a_{K_2} \vec{K}_2^2 + b_{K_2} (\partial_\mu \vec{K}_2)^2] - (a_{\pi\eta} \pi_3 \eta_8 + b_{\pi\eta} \partial_\mu \pi_3 \partial^\mu \eta_8), \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_{\eta}^K &= \frac{64B^2}{3F^2} \left[L_6(2\hat{m} + m_s)(\hat{m} + 2m_s) + 2L_7(\hat{m} - m_s)^2 \right. \\
&\quad \left. + L_8(\hat{m}^2 + 2m_s^2 + \frac{1}{4}\Delta m^2) \right] \\
b_{\eta}^K &= -\frac{16B}{F^2} \left[(2\hat{m} + m_s)L_4 + \frac{L_5}{3}(\hat{m} + 2m_s) \right] \\
a_{\pi_3}^K &= \frac{64B^2}{F^2} \left[L_6\hat{m}(2\hat{m} + m_s) + L_8\hat{m}^2 + \frac{1}{4}\Delta m^2(2L_7 + L_8) \right] \\
b_{\pi_3}^K &= -\frac{16B}{F^2} [L_4(2\hat{m} + m_s) + L_5\hat{m}] \\
a_{\pi}^K &= \frac{64B^2}{F^2} [L_6\hat{m}(2\hat{m} + m_s) + L_8\hat{m}^2] \\
b_{\pi}^K &= -\frac{16B}{F^2} [L_4(2\hat{m} + m_s) + L_5\hat{m}] \\
a_{K_1}^K &= \frac{32B^2}{F^2} \left[L_6(2\hat{m} + m_s)(\hat{m} + m_s) + \frac{L_8}{2}(\hat{m} + m_s)^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\Delta m\{(2\hat{m} + m_s)L_6 + (\hat{m} + m_s)L_8\} + \frac{1}{8}\Delta m^2L_8 \right] \\
b_{K_1}^K &= -\frac{16B}{F^2} \left[L_4(2\hat{m} + m_s) + \frac{L_5}{2}(\hat{m} + m_s) - \frac{L_5}{4}\Delta m \right] \\
a_{K_2}^K &= \frac{32B^2}{F^2} \left[L_6(2\hat{m} + m_s)(\hat{m} + m_s) + \frac{L_8}{2}(\hat{m} + m_s)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\Delta m\{(2\hat{m} + m_s)L_6 + (\hat{m} + m_s)L_8\} + \frac{1}{8}\Delta m^2L_8 \right] \\
b_{K_2}^K &= -\frac{16B}{F^2} \left[L_4(2\hat{m} + m_s) + \frac{L_5}{2}(\hat{m} + m_s) + \frac{L_5}{4}\Delta m \right] \\
a_{\pi\eta}^K &= a_{\eta\pi}^K = -\frac{32B^2}{\sqrt{3}F^2}\Delta m [L_6(2\hat{m} + m_s) - 2L_7(m_s - \hat{m}) + 2L_8\hat{m}] \\
b_{\pi\eta}^K &= b_{\eta\pi}^K = \frac{8B}{\sqrt{3}F^2}L_5\Delta m.
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Dabei wurden die ungedrehten Originalfelder (2.30) verwendet. Die Koeffizienten a_{ϕ}^K entsprechen den Kontaktbeiträgen zur Selbstenergie.

Δm hat nicht nur den Unterschied der Kontaktbeiträge im Kaon-Sektor, sondern auch die Mischung von π_3 und η_8 zur Folge, wobei die Effekte von linearer Ordnung sind. Deren Auswirkung im π_3 - η_8 -Sektor ist dagegen nur von quadratischer Ordnung, die im Folgenden vernachlässigt wird.

2.7.3. Schleifenbeiträge zur Selbstenergie

Da es sich hierbei um eine Vier-Teilchen-Wechselwirkung handelt, muss die Lagrange-Dichte (2.36) in $\mathcal{O}(\phi^4)$ betrachtet werden:

$$\mathcal{L}_{\text{LO}}^{4\phi} = \frac{1}{4!F^2} [\text{Tr}([\phi, \partial_\mu \phi] \phi \partial^\mu \phi) + B \text{Tr}(M \phi^4)]. \quad (2.69)$$

Mit den Relationen aus Anhang A.3 lässt sich diese umformen zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{LO}}^{4\phi} = & -\frac{1}{6F^2} \phi_a \partial_\mu \phi_b \partial^\mu \phi_c \phi_d f_{abef} f_{cde} \\ & + \frac{(2\hat{m} + m_s)B}{36F^2} (\phi_a \phi_a)^2 - \frac{(m_s - \hat{m})B}{12\sqrt{3}F^2} \left(\frac{2}{3} d_{abc} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_8 + \delta_{ab} d_{cd8} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \right) \\ & - \frac{\Delta m B}{24F^2} \left(\frac{2}{3} d_{abc} \phi_3 \phi_a \phi_b \phi_c + \delta_{ab} d_{cd3} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \right). \end{aligned} \quad (2.70)$$

2.7.3.1. Herleitung des Vertex

Da es sich hierbei um eine Kontaktwechselwirkung handelt, kann der Vertex \mathcal{V} aus der Lagrange-Dichte (2.70) einfach abgelesen werden zu

$$\mathcal{V}_{abcd} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d = i \cdot 4! \cdot \mathcal{L}_{\text{LO}}^{4\phi}, \quad (2.71)$$

wobei der Vorfaktor $4!$ daraus stammt, dass es $4!$ Kombinationen gibt, die vier äußeren Beine zu positionieren.

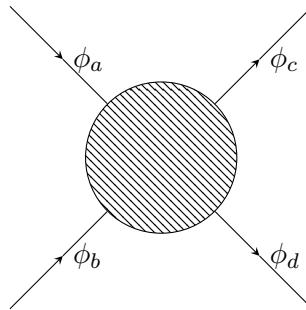


Abbildung 2.4.: Graphische Veranschaulichung einer Zwei-Teilchen-Streuung. Der schraffierte Bereich stellt dabei alle möglichen Wechselwirkungen dar.

Um den Vertex für Vier-Felder-WW (Abbildung 2.4),

$$\phi^a(p_a) + \phi^b(p_b) \longrightarrow \phi^c(p_c) + \phi^d(p_d),$$

herzuleiten, muss die Lagrange-Dichte (2.70) symmetrisiert werden. Das wird im Folgenden explizit für den Term $\phi_a \partial_\mu \phi_b \partial^\mu \phi_c \phi_d f_{abef} f_{cde}$ schrittweise durchgeführt.

1. Fourier-Transformation ($\partial_\mu \phi_i \rightarrow i p_i \phi_i$)

$$p_b p_c f_{abe} f_{cde} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \quad (2.72)$$

2. Symmetrisierung bezüglich der Impulse

$$\frac{1}{4} (p_a - p_b)(p_c - p_d) f_{abe} f_{cde} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \quad (2.73)$$

3. Symmetrisierung der Parametrisierung

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} [& (p_a - p_b)(p_c - p_d) f_{abe} f_{cde} + (p_a - p_c)(p_b - p_d) f_{ace} f_{bde} \\ & + (p_a - p_d)(p_b - p_c) f_{ade} f_{bce}] \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \end{aligned} \quad (2.74)$$

So ergibt sich der vollständige totalsymmetrische Vertex

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{abcd} = & \frac{i}{3F^2} [(p_a - p_b)(p_c - p_d) f_{abe} f_{cde} + (p_a - p_c)(p_b - p_d) f_{ace} f_{bde} \\ & + (p_a - p_d)(p_b - p_c) f_{ade} f_{bce}] \\ & + \frac{i 2(2\hat{m} + m_s)B}{9F^2} (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}) \\ & - \frac{i \Delta m B}{6F^2} (d_{abc}\delta_{d3} + d_{dab}\delta_{c3} + d_{cda}\delta_{b3} + d_{bcd}\delta_{a3}) \\ & - \frac{i \Delta m B}{6F^2} (\delta_{ab}d_{cd3} + \delta_{ac}d_{bd3} + \delta_{ad}d_{bc3} + \delta_{bc}d_{ad3} + \delta_{bd}d_{ac3} + \delta_{cd}d_{ab3}) \\ & - \frac{i(m_s - \hat{m})B}{3\sqrt{3}F^2} (d_{abc}\delta_{d8} + d_{dab}\delta_{c8} + d_{cda}\delta_{b8} + d_{bcd}\delta_{a8}) \\ & - \frac{i(m_s - \hat{m})B}{3\sqrt{3}F^2} (\delta_{ab}d_{cd8} + \delta_{ac}d_{bd8} + \delta_{ad}d_{bc8} + \delta_{bc}d_{ad8} + \delta_{bd}d_{ac8} + \delta_{cd}d_{ab8}) . \end{aligned} \quad (2.75)$$

Im nächsten Abschnitt werden schließlich die Schleifen-Beiträge anhand dieses Vertex explizit berechnet, wobei wegen der möglichen Mischung in NLO eine Fallunterscheidung getroffen werden muss.

2.7.3.2. Schleifenbeiträge ohne Mischung der Mesonen in NLO

Zur Berechnung der Schleifenbeiträge werden wegen der Mischung folgende Fallunterscheidung getroffen.

- **Ohne Mischung in NLO, ohne Mischung in der Schleife:**

$$(a = d = i, b = c = j, p_a = -p_d = p, p_b = -p_c = k)$$

In diesem Fall ergibt sich der Vertex \mathcal{V} für dieses Diagramm aus (2.75) zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ijji} = & i \left[-\frac{2}{3F^2} (p^2 + k^2) f_{ije} f_{ije} \right. \\ & + \frac{2(2\hat{m} + m_s)B}{9F^2} (2(\delta_{ij})^2 + \delta_{ii}\delta_{jj}) \\ & - \frac{(m_s - \hat{m})B}{3\sqrt{3}F^2} (2d_{iij}\delta_{j8} + 2d_{jji}\delta_{i8} + 4\delta_{ij}d_{ij8} + \delta_{ii}d_{jj8} + \delta_{jj}d_{ii8}) \\ & \left. - \frac{\Delta m B}{6F^2} (2d_{iij}\delta_{j3} + 2d_{jji}\delta_{i3} + 4\delta_{ij}d_{ij3} + \delta_{ii}d_{jj3} + \delta_{jj}d_{ii3}) \right]. \end{aligned} \quad (2.76)$$

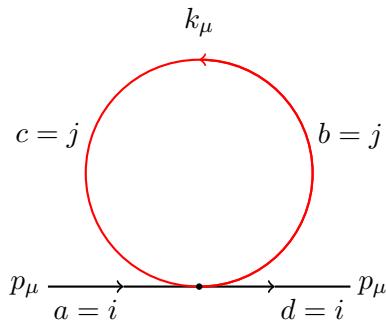


Abbildung 2.5.: Ein-Schleifen-Diagramm der Selbstwechselwirkung

Bei den Berechnungen muss zusätzlich der Symmetriefaktor des Diagramms $\frac{1}{2}$ beachtet werden, der aus der Tatsache herröhrt, dass es 12 Möglichkeiten gibt, von vier Feldoperatoren zwei mit äußeren Linien und zwei miteinander zu einer Schleife zu kontrahieren.

- **Ohne Mischung in NLO, mit Mischung in der Schleife:**

$(a = d = i, b = 3, c = 8 \text{ (} b = 8, c = 3\text{)}, p_a = -p_d = p \text{ und } p_b = -p_c = k)$

Da in LO Mischung zwischen π_3 und η_8 auftritt, muss auch das Diagramm (Abbildung 2.6) und der dazugehörige Vertex (2.77) betrachtet werden:

$$\mathcal{V}_{i38i} = 2i \left[-\frac{1}{3F^2} (p^2 + k^2) f_{3ie} f_{8ie} - \frac{(m_s - \hat{m})B}{6\sqrt{3}F^2} d_{ii3} \right] + \mathcal{O}(\Delta m). \quad (2.77)$$

Dabei wird der Massenunterschied Δm vernachlässigt, weil der zugehörige Propagator in LO (2.55) von $\mathcal{O}(\Delta m)$ ist.

Die Selbstenergie erhält man durch Integration über die Schleife

$$\Sigma_{ij} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} i \mathcal{V}_{ijk_1k_2} G(k^2)_{k_1k_2}, \quad (2.78)$$

wobei $G(k^2)$ den Propagator in LO (2.56) darstellt.

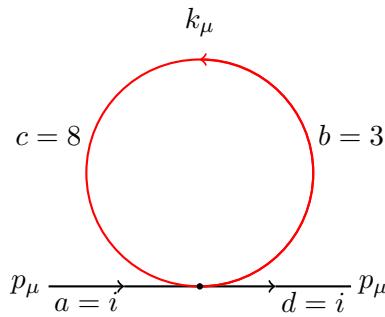


Abbildung 2.6.: Ein-Schleifen-Diagramm der Selbstwechselwirkung: In der Schleife tritt $\pi_3\eta_8$ -Mischung auf.

2.7.3.3. Berechnung des Schleifen-Diagramms

Um die Schleifenbeiträge zur Selbsternergie zu bestimmen, muss das Integral (2.78) ausgerechnet werden. Da der Vertex des Schleifendiagramms aus einem konstanten und vom Impuls k^2 abhängigen Term besteht, müssen nur folgende zwei Integrale betrachtet werden:

$$I = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_\phi^2}, \quad (2.79)$$

$$I' = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{k^2 - M_\phi^2}. \quad (2.80)$$

Es wird zunächst die allgemeine Form des Schleifen-Integrals betrachtet:

$$I(n) = \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - M_\phi^2}. \quad (2.81)$$

Dabei ist μ ein Renomierungsskalar und hat die gleiche Einheit wie der Impuls, damit das Integral für alle Dimension n die gleiche Einheit besitzt. Es wird zunächst eine Wick-Rotation ($k_0 \rightarrow i k_0$) durchgeführt, durch die das Integral im euklidischen Raum behandelt werden kann,

$$I(n) = \mu^{4-n} \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{l^2 + M_\phi^2}, \quad (2.82)$$

wobei l einen n -dimensionalen euklidischen Vektor darstellt.

Zur Auswertung dieses Integrals werden n -dimensionale Kugelkoordinaten eingeführt:

$$\begin{aligned} \int d^n l &= \int_0^\infty l^{n-1} dl \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^2 \theta_3 d\theta_3 \dots \\ &\times \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty l^{n-1} dl, \end{aligned} \quad (2.83)$$

2.7. Mesonenmassen in nächstführender Ordnung

wobei Γ die *Gamma-Funktion* darstellt, siehe Anhang C. Damit lässt sich das n -dimensionale Integral auf eine Dimension im radialen Anteil reduzieren.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow I(n) &= \frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty \frac{l^{n-1}}{l^2 + M_\phi^2} dl \\
 &= \frac{2\mu^{4-n}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{M_\phi^{-2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty \frac{l^{n-1}}{\frac{l^2}{M_\phi^2} + 1} dl \\
 &= \frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{(M_\phi^2)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{t+1} dt. \tag{2.84}
 \end{aligned}$$

Durch Substitution

$$\frac{l^2}{M_\phi^2} = t$$

und mit dem Integral

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1} dt}{(1+t)^{x+y}} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

kann das Integral (2.84) ausgewertet werden zu:

$$I(n) = \frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (M_\phi^2)^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right). \tag{2.85}$$

Dieses Integral divergiert für den Limes $n \rightarrow 4$, weil die Γ -Funktion für $x = -1$ einen Pol hat, siehe Abbildung 2.7. Um das Verhalten der Lösung um diesen Pol zu untersuchen, wird zunächst $\epsilon = 4 - n$ eingeführt und anschließend wird diese um $\epsilon = 0$ entwickelt:

$$\begin{aligned}
 I(n) &= \frac{(\mu^2)^{\frac{\epsilon}{2}}}{(4\pi)^{2-\frac{\epsilon}{2}}} (M_\phi^2)^{1-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \\
 &= \frac{M_\phi^2}{16\pi^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{M_\phi^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} + 1\right)}{\frac{\epsilon}{2}\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right)}. \tag{2.86}
 \end{aligned}$$

Mit den Entwicklungen

$$\begin{aligned}
 a^x &= 1 + \ln(a)x + \mathcal{O}(x^2), \\
 \Gamma(1+x) &= \Gamma(1) + \Gamma'(1)x + \mathcal{O}(x^2), \\
 \frac{1}{x-1} &= -1 - x + \mathcal{O}(x^2) \tag{2.87}
 \end{aligned}$$

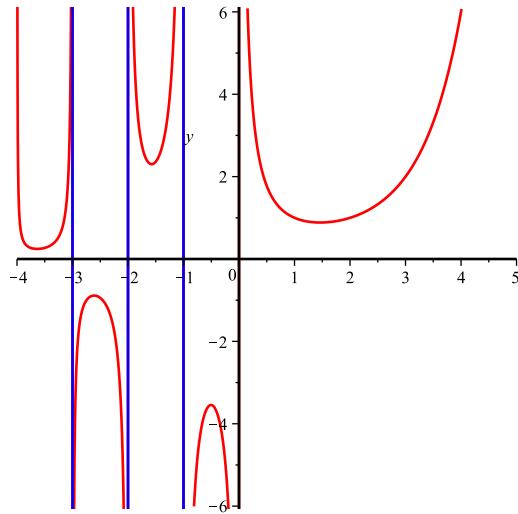


Abbildung 2.7.: Die Γ -Funktion $\Gamma(x)$

erhält man das Ergebnis

$$I(n) = \frac{M_\phi^2}{16\pi^2} \left[R + \ln\left(\frac{M_\phi^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(n-4) \right], \quad (2.88)$$

mit dem für $n = 4$ divergierenden konstanten Term⁵

$$R = \frac{2}{n-4} - \ln(4\pi) - \gamma_E - 1. \quad (2.89)$$

So wird der konstante, divergente Anteil des Integrals R isoliert.

Um das zweite Integral (2.80) zu lösen, wird zunächst im Nenner Null addiert:

$$I'(n) = \mu^{4-n} i \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^2 - M_\phi^2 + M_\phi^2}{k^2 - M_\phi^2}.$$

Da das Integral

$$\mu^{4-n} i \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \quad (2.90)$$

in der dimensionalen Regularisierung verschwindet, kann das Integral (2.80) geschrieben werden als

$$I'(n) = M_\phi^2 I(n). \quad (2.91)$$

⁵ $\gamma_E = 0,5772\dots$ ist die sogenannte Euler'sche Konstante und entspricht der Ableitung der Gamma-Funktion $\Gamma'(1)$.

2.7.3.4. Matrizen der Schleifenbeiträge

Die Matrizen a_ϕ^S und b_ϕ^S , die den Schleifenbeitrag beschreiben, sind dann nach der Integration gegeben durch:

$$a_\pi^S = \frac{1}{F^2} \left[-\frac{\dot{M}_\pi^2}{6} I(\dot{M}_\pi^2) - \frac{\dot{M}_\pi^2}{6} I(M_{K_1}^2) - \frac{\dot{M}_\pi^2}{6} I(M_{K_2}^2) - \frac{\dot{M}_\pi^2}{6} I(M_\eta^2) \right] \quad (2.92a)$$

$$b_\pi^S = \frac{1}{F^2} \left[\frac{2I(\dot{M}_\pi^2)}{3} + \frac{I(M_{K_1}^2)}{6} + \frac{I(M_{K_2}^2)}{6} \right] \quad (2.92b)$$

$$\begin{aligned} a_{K_1}^S &= \frac{1}{F^2} \left[-\frac{\dot{M}_K^2}{4} I(\dot{M}_\pi^2) - \frac{\dot{M}_K^2}{3} I(M_{K_1}^2) - \frac{\dot{M}_K^2}{6} I(M_{K_2}^2) + \frac{\dot{M}_K^2}{12} I(M_\eta^2) \right] \\ &\quad + \frac{\Delta m B}{F^2} \left[\frac{I(\dot{M}_\pi^2)}{4} + \frac{I(M_{K_1}^2)}{6} + \frac{I(M_{K_2}^2)}{12} - \frac{1}{8} \frac{\dot{M}_\eta^2 I(\dot{M}_\eta^2) - \dot{M}_\pi^2 I(\dot{M}_\pi^2)}{m_s - \hat{m}} \right] \end{aligned} \quad (2.92c)$$

$$\begin{aligned} b_{K_1}^S &= \frac{1}{F^2} \left[\frac{I(\dot{M}_\pi^2)}{4} + \frac{I(M_{K_1}^2)}{3} + \frac{I(M_{K_2}^2)}{6} + \frac{I(M_\eta^2)}{4} \right] \\ &\quad + \frac{\Delta m}{8(m_s - \hat{m}) F^2} \left[I(\dot{M}_\pi^2) - I(\dot{M}_\eta^2) \right] \end{aligned} \quad (2.92d)$$

$$\begin{aligned} a_{K_2}^S &= \frac{1}{F^2} \left[-\frac{\dot{M}_K^2}{4} I(\dot{M}_\pi^2) - \frac{\dot{M}_K^2}{3} I(M_{K_2}^2) - \frac{\dot{M}_K^2}{6} I(M_{K_1}^2) + \frac{\dot{M}_K^2}{12} I(M_\eta^2) \right] \\ &\quad - \frac{\Delta m B}{F^2} \left[\frac{I(\dot{M}_\pi^2)}{4} + \frac{I(M_{K_2}^2)}{6} + \frac{I(M_{K_1}^2)}{12} - \frac{1}{8} \frac{\dot{M}_\eta^2 I(\dot{M}_\eta^2) - \dot{M}_\pi^2 I(\dot{M}_\pi^2)}{m_s - \hat{m}} \right] \end{aligned} \quad (2.92e)$$

$$\begin{aligned} b_{K_2}^S &= \frac{1}{F^2} \left[\frac{I(\dot{M}_\pi^2)}{4} + \frac{I(M_{K_2}^2)}{3} + \frac{I(M_{K_1}^2)}{6} + \frac{I(M_\eta^2)}{4} \right] \\ &\quad - \frac{\Delta m}{8(m_s - \hat{m}) F^2} \left[I(\dot{M}_\pi^2) - I(\dot{M}_\eta^2) \right] \end{aligned} \quad (2.92f)$$

$$\begin{aligned} a_{\eta_8}^S &= \frac{1}{F^2} \left[-\frac{\dot{M}_\pi^2}{3} I(\dot{M}_\pi^2) - \frac{\dot{M}_\pi^2}{6} I(M_{\eta_3}^2) + \frac{2\dot{M}_K^2}{3} I(M_{K_1}^2) - \frac{\dot{M}_\eta^2}{2} I(M_{K_1}^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\dot{M}_\eta^2}{2} I(M_{K_2}^2) + \frac{2\dot{M}_K^2}{3} I(M_{K_2}^2) - \frac{2\dot{M}_\eta^2}{3} I(M_{\eta_8}^2) + \frac{\dot{M}_\pi^2}{6} I(M_{\eta_8}^2) \right] \\ &\quad + \frac{\Delta m B}{F^2} \left[-\frac{I(M_{K_1}^2)}{6} + \frac{I(M_{K_2}^2)}{6} \right] \end{aligned} \quad (2.92g)$$

$$b_{\eta_8}^S = \frac{1}{F^2} \left[\frac{I(M_{K_1}^2)}{2} + \frac{I(M_{K_2}^2)}{2} \right]. \quad (2.92h)$$

Bevor der explizite Ausdruck des Integrals $I(M_\phi^2)$ eingesetzt werden kann, müssen die divergenten Größen renormiert werden. Dies wird in Abschnitt 2.7.4 durchgeführt. Zunächst wird auch der Fall der Mischung in NLO betrachtet.

2.7.3.5. Schleifenbeiträge mit Mischung der Mesonen

Hierbei wird der Fall betrachtet, bei dem die Mesonen untereinander mischen können. Es wird folgende Fallunterscheidung getroffen:

- **Mit Mischung in NLO, ohne Mischung in der Schleife:**

$$(a \neq d, b = c = j, p_a = -p_d = p, \text{ und } p_b = -p_c = k)$$

Für diesen Fall lautet der Vertex:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{ajjd} &= -\frac{2}{3F^2}(p^2 + k^2)f_{aje}f_{dje} \\ &- \frac{\Delta m B}{6 \cdot F^2} (2d_{adj}\delta_{j3} + d_{ajj}\delta_{d3} + d_{jjd}\delta_{a3} + 2\delta_{aj}d_{dj3} + 2\delta_{dj}d_{aj3} + d_{ad3}\delta_{jj}) \\ &- \frac{(m_s - \hat{m})B}{3 \cdot \sqrt{3}F^2} (2d_{adj}\delta_{j8} + d_{ajj}\delta_{d8} + d_{jjd}\delta_{a8} + 2\delta_{aj}d_{dj8} + 2\delta_{dj}d_{aj8} + d_{ad8}\delta_{jj}). \end{aligned} \quad (2.93)$$

- **Mit Mischung in NLO, mit Mischung in der Schleife:**

$$(a \neq d, b = 3, c = 8 (b = 8, c = 3), p_a = -p_d = p \text{ und } p_b = -p_c = k)$$

Wegen der Mischung des π_3 - und η_8 -Mesons in LO muss auch der Fall betrachtet werden, der zu folgendem Vertex führt:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{a38d} = \mathcal{V}_{a83d} &= i \left[-\frac{1}{3F^2} ((p-k)^2 f_{8ae}f_{3de} + (p+k)^2 f_{3ae}f_{8de}) \right] \\ &- \frac{(m_s - \hat{m})B}{3\sqrt{3}F^2} (2d_{a38}\delta_{d8} + d_{ad3} + 2d_{d38}\delta_{a8} + d_{88d}\delta_{a3} + d_{a88}\delta_{d3}). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Durch analoge Rechnung zum mischungsfreien Fall erhält man die Koeffizienten a_ϕ^s und b_ϕ^s . Dabei stellt man fest, dass alle Beiträge außer $i = 3, 8$ verschwinden. Das heißt, in der chiralen Störungstheorie 4. Ordnung mischen nur π_3 und η_8 . Die Koeffizienten sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} a_{\pi\eta}^s = a_{\eta\pi}^s &= \frac{\dot{M}_\eta^2}{2\sqrt{3}F^2} [I(M_{K_1}^2) - I(M_{K_2}^2)] \\ &+ \frac{\Delta m B}{\sqrt{3}F^2} \left[I(\dot{M}_\pi^2) - \frac{1}{6}I(M_{K_1}^2) - \frac{1}{6}I(M_{K_2}^2) \right], \\ b_{\pi\eta}^s = b_{\eta\pi}^s &= \frac{1}{2\sqrt{3}F^2} [I(M_{K_1}^2) - I(M_{K_2}^2)]. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Es ist zu erkennen, dass diese Koeffizienten für den Fall gültiger Isospin-Symmetrie ($\Delta m = 0$) der up- und down-Quarks verschwinden, wie zu vermuten war.

2.7.4. Renormierung der Gasser-Leutwyler-Koeffizienten

Um ein physikalisch sinnvolles Ergebnis zu erhalten, muss die Unendlichkeit des Schleifenbeitrags beseitigt werden. Die Unendlichkeit im Schleifenbeitrag kann durch Neudefinition des Gasser-Leutwyler-Koeffizienten in den Kontaktbeiträgen, siehe Formel (2.68), eliminiert werden, da es sich um physikalisch nicht direkt messbare Konstanten handelt. Die renormierten Gasser-Leutwyler-Koeffizienten enthalten den unendlichen Term R im Schleifenintegral (2.89):

$$L_i^r = L_i - \frac{\Gamma_i}{32\pi^2} R, \quad i = 1 \dots 10 \quad (2.96)$$

$$H_i^r = H_i - \frac{\Delta_i}{32\pi^2} R, \quad i = 1, 2. \quad (2.97)$$

Die Koeffizienten Γ_i und Δ_i werden so bestimmt, dass die Unendlichkeit genau behoben wird [15].

	Γ_1	Γ_2	Γ_3	Γ_4	Γ_5	Γ_6	Γ_7	Γ_8	Γ_9	Γ_{10}	Δ_1	Δ_2
Wert	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{144}$	0	$\frac{5}{48}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$

Tabelle 2.5.: Werte der Renormierungskoeffizienten [15]

Nach der Renormierung hat das Integral (2.88) einen endlichen Wert

$$I(M_\phi^2) = \frac{M_\phi^2}{16\pi^2} \ln \left(\frac{M_\phi^2}{\mu^2} \right). \quad (2.98)$$

Zwecks Vereinfachung der Ergebnisse wird im Folgenden die Abkürzung

$$\mu_\phi := \frac{M_\phi^2}{32\pi^2 F^2} \ln \left(\frac{M_\phi^2}{\mu^2} \right) = \frac{1}{2F^2} I(M_\phi^2) \quad (2.99)$$

verwendet. Die Schleifen-Beiträge der K_1 - und K_2 -Mesonen werden um $\Delta m = 0$ entwickelt:

$$I(M_{K_1}^2) = I(\overset{\circ}{M}_K^2) - \frac{\Delta m B}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\overset{\circ}{M}_K^2}{\mu^2} \right) + 1 \right], \quad (2.100)$$

$$I(M_{K_2}^2) = I(\overset{\circ}{M}_K^2) + \frac{\Delta m B}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\overset{\circ}{M}_K^2}{\mu^2} \right) + 1 \right]. \quad (2.101)$$

2.7.5. Gesamtselbstenergie

Die renormierte Gesamtselbstenergie

$$\Sigma_\phi(p^2) = A_\phi + B_\phi \cdot p^2 = (a_\phi^S + a_\phi^K) + (b_\phi^S + b_\phi^K) \cdot p^2$$

ist in (2.102) und (2.105) angegeben.

$$\begin{aligned}
 A_\pi &= \mathring{M}_\pi^2 \left[-\frac{1}{3}\mu_\pi - \frac{2}{3}\mu_K - \frac{1}{3}\mu_\eta + \frac{32B}{F^2} (L_6^r(2\hat{m} + m_s) + L_8^r\hat{m}) \right] \\
 A_{K_1} &= \mathring{M}_K^2 \left[-\frac{1}{2}\mu_\pi - \mu_K + \frac{1}{6}\mu_\eta + \frac{16B}{F^2} (2L_6^r(2\hat{m} + m_s) + L_8^r(\hat{m} + m_s)) \right] + \delta_1(\Delta m) \\
 A_{K_2} &= \mathring{M}_K^2 \left[-\frac{1}{2}\mu_\pi - \mu_K + \frac{1}{6}\mu_\eta + \frac{16B}{F^2} (2L_6^r(2\hat{m} + m_s) + L_8^r(\hat{m} + m_s)) \right] - \delta_1(\Delta m) \\
 A_\eta &= \mathring{M}_\pi^2 \left[-\mu_\pi + \frac{2}{3}\mu_K + \frac{1}{3}\mu_\eta \right] + \mathring{M}_\eta^2 \left[-\frac{4}{3}\mu_\eta + \frac{16M_\eta^2}{F^2} L_8^r + \frac{32}{F^2} (2\hat{m} + m_s) BL_6^r \right] \\
 &\quad + \frac{128B^2}{9F^2} (\hat{m} - m_s)^2 (3L_7^r + L_8^r) \\
 B_\pi &= \frac{4}{3}\mu_\pi + \frac{2}{3}\mu_K - \frac{16B}{F^2} [L_4^r(2\hat{m} + m_s) + \hat{m}L_5^r] \\
 B_{K_1} &= \frac{1}{2}\mu_\pi + \mu_K + \frac{1}{2}\mu_\eta - \frac{8B}{F^2} [2L_4^r(2\hat{m} + m_s) + (\hat{m} + m_s)L_5^r] - \delta_2(\Delta m) \\
 B_{K_2} &= \frac{1}{2}\mu_\pi + \mu_K + \frac{1}{2}\mu_\eta - \frac{8B}{F^2} [2L_4^r(2\hat{m} + m_s) + (\hat{m} + m_s)L_5^r] + \delta_2(\Delta m) \\
 B_\eta &= 2\mu_K - \frac{8B}{F^2} \left[2L_4^r(2\hat{m} + m_s) + \frac{2}{3}(\hat{m} + 2m_s)L_5^r \right]
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Δm hat die Korrekturterme δ_1 und δ_2 im Kaon-Sektor zur Folge:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \Delta m B \left(\frac{\mu_\pi}{2} + \frac{2}{3}\mu_K + \frac{\mathring{M}_K^2}{192\pi^2 F^2} - \frac{1}{4} \frac{\mathring{M}_\eta^2 \mu_\eta - \mathring{M}_\pi^2 \mu_\pi}{m_s - \hat{m}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{16B}{F^2} (L_6^r(2\hat{m} + m_s) + (\hat{m} + m_s)L_8^r) \right), \tag{2.103}
 \end{aligned}$$

$$\delta_2 = \Delta m B \left(\frac{1}{192\pi^2 F^2} \left[1 + \ln \left(\frac{\mathring{M}_K^2}{\mu^2} \right) \right] - \frac{4L_5^r}{F^2} + \frac{\mu_\eta - \mu_\pi}{4(m_s - \hat{m})} \right). \tag{2.104}$$

2.7. Mesonenmassen in nächstführender Ordnung

Außerdem gibt es Nebendiagonale der Matrix, die aus der Mischung von π_3 und η_8 stammen:

$$\begin{aligned} A_{\pi\eta} &= \Delta m B \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \mu_\pi - \frac{2}{3\sqrt{3}} \mu_K - \frac{\dot{M}_\eta^2}{32\sqrt{3}\pi^2 F^2} \left[\ln \left(\frac{\dot{M}_K^2}{\mu^2} \right) + 1 \right] \right) \\ &\quad - \frac{32\Delta m B}{\sqrt{3}F^2} [(2\hat{m} + m_s)L_6^r - 2(m_s - \hat{m})L_7^r + 2\hat{m}L_8^r], \\ B_{\pi\eta} &= \frac{\Delta m B}{\sqrt{3}F^2} \left(-\frac{1}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\dot{M}_K^2}{\mu^2} \right) + 1 \right] + 8L_5^r \right). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Jetzt wird die Diagonalisierung durchgeführt, um die Massen der Mesonen zu bestimmen.

2.7.6. Diagonalisierung des Propagators in NLO

Zur Bestimmung der Mesonenmassen wird der Propagator in NLO der Form

$$G^{-1}(p^2) = p^2 \mathbb{1} - M_2^2 - (A_\phi + B_\phi p^2) \quad (2.106)$$

diagonalisiert. Dabei ist M_2^2 die Mesonenmasse in LO und A_ϕ und B_ϕ in Abschnitt 2.7.5 bestimmte konstante Matrizen.

Da die A_ϕ und B_ϕ nicht kommutieren, ist es nicht möglich die Methode der *spontanen Diagonalisierung* anzuwenden, aber mit Hilfe von einer Transformationsmatrix R der Form

$$\mathbb{1} - B_\phi = R^T R \Rightarrow R = \mathbb{1} - \frac{B_\phi}{2} + \mathcal{O}(p^2) \quad (2.107)$$

kann der Propagator *relativ diagonalisiert* werden,

$$G^{-1} = \left(1 - \frac{B_\phi}{2} \right) \left[p^2 \mathbb{1} - M_2^2 - A_\phi - \frac{\{B_\phi, M_2^2\}}{2} \right] \left(1 - \frac{B_\phi}{2} \right), \quad (2.108)$$

wobei die Beiträge in $\mathcal{O}(p^6)$ vernachlässigt wurden. Die nichtdiagonale Massenmatrix in LO, M_2^2 , kann mit der Drehmatrix (2.42) zu M_{2d} diagonalisiert werden, siehe Abschnitt 2.4.3,

$$G^{-1}(p^2) = \left(1 - \frac{B_\phi}{2} \right) O_2^T \left[p^2 \mathbb{1} - M_{2d}^2 - O_2 A_\phi O_2^T - \frac{\{O_2 B_\phi O_2^T, M_{2d}^2\}}{2} \right] O_2 \left(1 - \frac{B_\phi}{2} \right). \quad (2.109)$$

Jetzt kann die Massenmatrix in NLO M_4^2 von Gleichung (2.109) abgelesen werden, die zunächst noch keine diagonale Gestalt hat:

$$M_4^2 = M_{2d}^2 + O_2 A_\phi O_2^T + \frac{\{O_2 B_\phi O_2^T, M_{2d}^2\}}{2}. \quad (2.110)$$

Wie in LO gibt es hierbei auch die nichtdiagonalen Komponenten im π_3 - η_8 -Sektor. Jetzt wird die 2×2 -Matrix in diesem Sektor betrachtet. Die Diagonalisierung erfolgt durch kleine Drehungen in σ_2 -Richtung, $O_4 = \mathbb{1} + i\varepsilon_4 \sigma_2$, mit dem Drehwinkel, siehe Anhang B,

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 = \frac{1}{M_\pi^2 - M_\eta^2} & [A_{\pi\eta} + B_{\pi\eta}(M_\pi^2 + M_\eta^2)/2 + \varepsilon_2(A_\eta - A_\pi) \\ & + \varepsilon_2(B_\eta - B_\pi)(M_\pi^2 + M_\eta^2)/2]. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Es stellt sich bei der Diagonalisierung heraus, dass die Auswirkung der Mischung auf die Masse von $\mathcal{O}(\Delta m^2)$ ist. Diese vernachlässigt, ergibt sich für die Massen in NLO

$$M_{4d}^2(\phi) = A_\phi + M_{2d}^2(1 + B_\phi). \quad (2.112)$$

2.7.7. Mesonenmassen in NLO

Durch Einsetzen der Matrizen (2.102) und die Mesonenmassen in LO (2.46) in die Formel (2.112) erhält man die Mesonenmassen in NLO:

$$\begin{aligned} M_{\pi,4}^2 &= \mathring{M}_\pi^2 \left(1 + \mu_\pi - \frac{1}{3}\mu_\eta + K_4 + 2\hat{m}K_3 \right) \\ M_{K_1,4}^2 &= \mathring{M}_K^2 \left(1 + \frac{2}{3}\mu_\eta + K_4 + (\hat{m} + m_s)K_3 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\Delta m B \left(1 + \frac{2}{3}\mu_\eta + \mathring{M}_K^2 \frac{\mu_\eta - \mu_\pi}{\mathring{M}_K^2 - \mathring{M}_\pi^2} + K_4 + 2(m_s + \hat{m})K_3 \right) \\ M_{K_2,4}^2 &= \mathring{M}_K^2 \left(1 + \frac{2}{3}\mu_\eta + K_4 + (\hat{m} + m_s)K_3 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Delta m B \left(1 + \frac{2}{3}\mu_\eta + \mathring{M}_K^2 \frac{\mu_\eta - \mu_\pi}{\mathring{M}_K^2 - \mathring{M}_\pi^2} + K_4 + 2(m_s + \hat{m})K_3 \right) \\ M_{\eta_8,4}^2 &= \mathring{M}_\eta^2 \left\{ 1 + 2\mu_K - \frac{4}{3}\mu_\eta + \frac{2}{3}(\hat{m} + 2m_s)K_3 + K_4 \right\} \\ &\quad + \mathring{M}_\pi^2 \left\{ -\mu_\pi + \frac{2}{3}\mu_K + \frac{1}{3}\mu_\eta \right\} + K_5, \end{aligned} \quad (2.113)$$

mit den Abkürzungen

$$K_3 = \frac{8B}{F^2}(2L_8^r - L_5^r) \quad (2.114)$$

$$K_4 = (2\hat{m} + m_s)\frac{16B}{F^2}(2L_6^r - L_4^r) \quad (2.115)$$

$$K_5 = (m_s - \hat{m})^2 \frac{128B^2}{9F^2}(3L_7^r + L_8^r). \quad (2.116)$$

$m_d - m_u$ erzeugt den Unterschied der Kaonmassen:

$$\begin{aligned} (M_{4,K_2}^2 - M_{4,K_1}^2) &= (M_{4,K^0}^2 - M_{4,K^+}^2) \\ &= \Delta m B \left(1 + \frac{2}{3} \mu_\eta + \dot{M}_K^2 \frac{\mu_\eta - \mu_\pi}{\dot{M}_K^2 - \dot{M}_\pi^2} + K_4 + 2(m_s + \hat{m}) K_3 \right). \end{aligned} \quad (2.117)$$

Das in LO gefundene Verhältnis der Quarkmassen (2.49) kann auch in NLO formuliert werden:

$$\frac{M_{K,4}^2}{M_{\pi,4}^2} = \frac{\hat{m} + m_s}{2\hat{m}} (1 + \Delta_M) \quad (2.118)$$

$$\text{mit } \Delta_M = -\mu_\pi + \mu_\eta + \frac{8}{F^2} (\dot{M}_K^2 - \dot{M}_\pi^2) (2L_8^r - L_5^r). \quad (2.119)$$

Δ_M stellt dabei die NLO-Korrektur zum Massenverhältnis dar.

2.8. Zusammenfassung und Ausblick

In Abschnitt 2.4 wurden die Mesonenmassen in LO und in NLO berechnet. Die Massen für $\Delta m = 0$ in LO (2.47) sind proportional zu den Quarkmassen und erfüllen die Gell-Mann-Okubo-Relation (2.48), dagegen erhalten die Massen in NLO (2.113) nichtlineare Korrekturen der Form

$$\sim m_q^2 \ln \left(\frac{m_q^2}{\mu^2} \right) \quad \text{und} \quad \sim m_q^2, \quad (2.120)$$

sodass sie diese Relation nicht mehr erfüllen. Durch explizite Rechnungen für die Massen ist auch festzustellen, dass die χ PT keine gewöhnliche Entwicklung in den Massen wie die Taylor-Reihe ist; neben der in den Quarkmassen m_q analytischen Terme, die für $m_q \rightarrow 0$ trivialerweise verschwinden, wie $m_q^2 L_i$ mit einer Konstanten L_i , tauchen auch Terme auf, die nichtanalytischerweise gegen 0 konvergieren, wie $m_q^2 \ln(m_q^2)$ auf. Solche nichtanalytischen Terme werden *chirale Logarithmen* genannt.

In NLO wurde bei der Renormierung die Größe μ eingeführt. Die Massen dürfen aber nicht von diesem beliebigen Faktor abhängen. Dies wird durch das Verschwinden der Ableitung der Massen bestätigt [8]:

$$\frac{dM_{4,\phi}^2}{d\mu} = 0.$$

Für $\Delta m \neq 0$ war festzustellen:

- Mischung von π_3 und η_8 :

Der Isospin-symmetriebrechende Faktor in up- und down-Quark, $m_d - m_u$, erzeugt in der Lagrange-Dichte sowohl in LO als auch in NLO Terme proportional zu $\pi_3 \eta_8$, sodass

er zur π_3 - η_8 -Mischung führt. Dessen Auswirkung auf die π_3 - und η_8 -Massen ist allerdings von $\mathcal{O}(\Delta m^2)$, sodass er vernachlässigt werden kann. Der Mischungswinkel (2.42) ist dagegen von $\mathcal{O}(\Delta m)$ und erzeugt eine nicht zu vernachlässigende Korrektur im π_3 - η_8 -Masseneigenzustand (2.43) oder im Propagator (2.56). Bei der Diagonalisierung der Mesonen-Massenmatrix in NLO wurde die Methode der relativen Diagonalisierung verwendet, da die zu diagonalisierenden Matrizen A_ϕ und B_ϕ nicht kommutieren.

- Massenaufspaltung im Kaon-Sektor:

Durch den Massenunterschied $m_d - m_u$ wird die Entartung der Kaonen-Massen teilweise aufgehoben, siehe das Ergebnis (2.117). Die Entartung der K_4 - K_5 - bzw. K_6 - K_7 -Massen, die im Ladungszustand K^\pm - und K^0 -Massen entsprechen, bleiben allerdings davon unberührt.

Das Ergebnis für den Massenunterschied zwischen K^\pm und K^0 (2.117) stimmt mit dem Ergebnis von Gasser und Leutwyler [15] überein. Das Ergebnis von Ecker und Pich [16] für den Mischungswinkel konnte allerdings mit den in dieser Arbeit bestimmten Wechselwirkungsmatrizen (2.102) und (2.105) nicht reproduziert werden.

Mit Hilfe der χ PT lassen sich nicht nur Massen sondern auch eine Reihe interessanter Größen berechnen, wie die Zerfallskonstanten der Mesonen oder Pion-Pion-Streuung, die zur Bestimmung der freien Parameter durch Vergleich mit Experimenten benutzt werden können. Die χ PT lässt sich ferner auch für Baryonen erweitern, wodurch die interessanten Phänomene wie Pion-Nukleon-Streuung berechnet werden können [8].

3. Chirale Störungstheorie auf dem Gitter

In Kapitel 2 wurde als eine Möglichkeit, das nichtperturbative Regime der QCD zu untersuchen, die χ PT eingeführt, die der Entwicklung der QCD-Lagrange-Dichte mit Impuls oder Quarkmassen als Entwicklungsparameter entspricht. Neben dieser Theorie stellt die sogenannte *Gitter-QCD* auch eine sehr mächtige Methode der QCD dar, in der die Raumzeit auf dem Gitter diskretisiert wird und darauf numerische Berechnungen, wie z.B. Monte-Carlo-Simulationen, durchgeführt werden.

Zunächst wird die Gitter-QCD im Allgemeinen behandelt und schließlich die Anwendung der χ PT auf die Gitter-QCD beschrieben.

3.1. QCD auf dem Gitter

3.1.1. Euklidische Formulierung der QCD

Um die QCD auf einem euklidischen Gitter formulieren zu können, muss diese zunächst im euklidischen Raum formuliert werden. Die Umformulierung erfolgt durch eine sogenannte **Wick-Rotation**:

$$x_0 = -i x_4, \quad p_0 = i p_4. \quad (3.1)$$

Die Änderungen der mit der Metrik verbundenen Größen werden in Tabelle 3.1 zusammengefasst.

Minkowski'sche Metrik	euklidische Metrik
$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$	$g_{\mu\nu}^E = \delta_{\mu\nu}$
$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$	$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}$
$\gamma_i \quad (i = 1, 2, 3)$	$\gamma_i^E = i \gamma_i$
γ_0	$\gamma_4^E = -\gamma_0$
$i \gamma^\mu \partial_\mu$	$-\gamma_\mu^E \partial_\mu^E$

Tabelle 3.1.: Vergleich einiger wichtiger Größen in der Minkowski- und der euklidischen Metrik

Die euklidische QCD-Lagrange-Dichte ist dann gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{E}} = \sum_f \bar{q}_f (\gamma_{\mu}^{\text{E}} D_{\mu} + m_f) q_f + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Im euklidischen Raum entspricht das erzeugende Funktional der QCD,

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} \mathcal{D}A_{\mu} e^{-S_{\text{E}}[\bar{q}, q, A_{\mu}]} \quad \text{mit} \quad S_{\text{E}}[\bar{q}, q, A_{\mu}] = \int dx^4 \mathcal{L}, \quad (3.3)$$

der Zustandssumme aller Feldkonfigurationen, die mit dem Boltzmann-Faktor $e^{-S_{\text{E}}}$ gewichtet sind. Hier wird die Nützlichkeit der euklidischen Symmetrie sichtbar: Da das Argument der Exponentialfunktion reell ist, haben die Erwartungswerte, die z.B. durch numerische Methoden ausgerechnet werden, ein besseres Konvergenzverhalten und damit ist eine statistische Analyse möglich. Da im Folgenden nur noch mit euklidischen Größen gerechnet wird, wird der Index E weggelassen.

3.1.2. Die Wilson-Wirkung

Damit das Integral (3.3) numerisch ausgewertet werden kann, wird zunächst die Raumzeit auf einem hyperkubischen Gitter mit dem Gitterabstand a diskretisiert, siehe Abbildung 3.1.

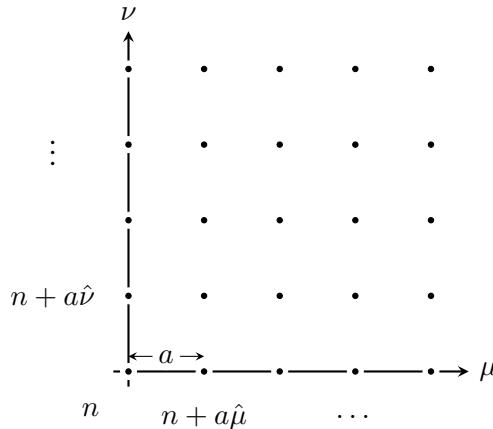


Abbildung 3.1.: Zweidimensionales Gitter in μ - und ν -Richtung

Die Felder werden nun durch Gitter-Punkte n definiert. Außerdem ist für die Rechnungen auf dem Gitter die Entdimensionalisierung der verwendeten Größen mit dem Gitterabstand a vorteilhaft:

$$m \rightarrow \frac{1}{a} \hat{m}, \quad (3.4)$$

$$\phi_{\alpha}(x) \rightarrow a^{-\frac{3}{2}} \hat{\phi}_{\alpha}(n), \quad (3.5)$$

$$\bar{\phi}_{\alpha}(x) \rightarrow a^{-\frac{3}{2}} \hat{\bar{\phi}}_{\alpha}(n). \quad (3.6)$$

3.1. QCD auf dem Gitter

Die Vorwärts- und Rückwärts-Ableitungen $\hat{\partial}_\mu^+$ und $\hat{\partial}_\mu^-$ auf dem Gitter werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\hat{\partial}_\mu^+ \hat{\phi}_\alpha(n) &= \frac{1}{a} [\hat{\phi}_\alpha(n + a\hat{\mu}) - \hat{\phi}_\alpha(n)], \\ \hat{\partial}_\mu^- \hat{\phi}_\alpha(n) &= \frac{1}{a} [\hat{\phi}_\alpha(n) - \hat{\phi}_\alpha(n - a\hat{\mu})],\end{aligned}$$

wobei $\hat{\mu}$ den Einheitsvektor in μ -Richtung darstellt. Da die chirale Symmetrie unabhängig von der Farb-SU(3) ist, wird im Folgenden nur der fermionische Anteil der Wirkung betrachtet.

Die Fermionwirkung kann in naiver Art und Weise wie folgt diskretisiert werden:

$$\mathcal{S}_F^{(\text{naiv})}[\hat{\phi}, \hat{\phi}] = a^4 \sum_n \hat{\phi}(n)(D + \hat{m})\hat{\phi}(n), \quad (3.7)$$

mit dem Dirac-Operator

$$D = \frac{1}{2} [\gamma_\mu (\hat{\partial}_\mu^+ + \hat{\partial}_\mu^-)]. \quad (3.8)$$

Dabei wird die Ableitung im Dirac-Operator mit der Vorwärts- bzw. Rückwärts-Ableitung symmetriert. Wird der daraus resultierende Propagator [17]

$$\tilde{G}(p)^{-1} = \frac{m\mathbb{1} - i a^{-1} \sum_\mu \gamma_\mu \sin(p_\mu a)}{m^2 + a^{-2} \sum_\mu \sin(p_\mu a)^2} \quad (3.9)$$

betrachtet, so taucht beim Übergang zum Kontinuum $a \rightarrow 0$ ein Problem auf. Während der Propagator der masselosen Fermionen bei $p_\mu = 0$ einen Pol hat, besitzt (3.9) 15 weitere Pole für

$$p = (\pi/a, 0, 0, 0), (0, \pi/a, 0, 0), \dots (\pi/a, \pi/a, \pi/a, \pi/a), \quad (3.10)$$

für den Impuls am Rand der *Brillouin-Zone*. Dieses Problem wird *Fermionenverdopplung* genannt. Das Problem lässt sich zumindest im Kontinuumslimes beheben, indem der sogenannte *Wilson-Term* zum Dirac-Operator addiert wird [18]:

$$D_W = D - \frac{a}{2} \hat{\partial}_\mu^- \hat{\partial}_\mu^+ = \frac{1}{2} [\gamma_\mu (\hat{\partial}_\mu^+ + \hat{\partial}_\mu^-) - a \hat{\partial}_\mu^- \hat{\partial}_\mu^+]. \quad (3.11)$$

Da dieser Wilson-Term proportional zur Gittergröße a ist, verschwindet dieser im Kontinuumslimes, sodass die Physik dadurch nicht geändert wird. Der Wilsonterm bricht die chirale Symmetrie ähnlich wie der Massenterm:

$$\mathcal{L}_W = \frac{a}{2} \hat{\phi} \hat{\partial}_\mu^- \hat{\partial}_\mu^+ \hat{\phi} = \frac{a}{2} \hat{\phi} \hat{\square} \hat{\phi} = \frac{a}{2} \hat{\phi}_L \hat{\square} \hat{\phi}_R + \frac{a}{2} \hat{\phi}_R \hat{\square} \hat{\phi}_L, \quad (3.12)$$

wobei $\hat{\square}$ die D'Alembert-Operator darstellt.

3.1.3. Die Symanzik-Wirkung

Da in der expliziten numerischen Rechnung ein relativ großer Gitterabstand a verwendet wird, sind die dadurch entstandenen numerischen Fehler häufig sehr groß. Durch Addition von geeigneten, von a abhängigen Termen, die im Kontinuumslimes verschwinden, können diese jedoch verbessert werden. Um solche Gegenterme zu konstruieren, wird zunächst die Auswirkung des kleinen Gitterabstandes $a \approx 0$ in diesen untersucht.

Nach Symanzik [19] kann die effektive Wirkung in der Nähe des Kontinuumslimes, d.h. für $a \rightarrow 0$, in der Gitterkonstanten a entwickelt werden:

$$\mathcal{S}_{\text{eff}} = \mathcal{S}_0 + a\mathcal{S}_1 + a^2\mathcal{S}_2 + \dots, \quad (3.13)$$

wobei \mathcal{S}_0 die Kontinuumswirkung ist. Die \mathcal{S}_k lassen sich dabei durch Linearkombinationen lokaler Operatoren der Dimension $4 + k$ darstellen [19]. Eine Basis für $k = 1$ ist gegeben durch:

$$\mathcal{O}_1 = \bar{\phi}\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\phi \quad (3.14a)$$

$$\mathcal{O}_2 = \bar{\phi}D_\mu D_\mu\phi + \bar{\phi}\overleftarrow{D}_\mu\overleftarrow{D}_\mu\phi \quad (3.14b)$$

$$\mathcal{O}_3 = m\text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \quad (3.14c)$$

$$\mathcal{O}_4 = m\left(\bar{\phi}\gamma_\mu D_\mu\phi - \bar{\phi}\overleftarrow{D}_\mu\gamma_\mu\phi\right) \quad (3.14d)$$

$$\mathcal{O}_5 = m^2\bar{\phi}\phi. \quad (3.14e)$$

Davon ist allerdings nur der erste Operator von Bedeutung, da

- die Operatoren \mathcal{O}_2 und \mathcal{O}_4 sich über die Feldgleichungen als Linearkombination der anderen drei Operatoren darstellen lassen,
- und \mathcal{O}_3 und \mathcal{O}_5 zur Verschiebung der Quarkmassen und der Kopplungskonstanten führen und somit bei der Renormierung dieser Größen kompensiert werden können.

Jetzt kann dann der Gegenterm zur $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung anhand des Basiselements (3.14a) konstruiert werden [20]

$$\mathcal{L}_G = ac_{\text{SW}}\bar{\phi}(x)\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\phi(x) + \mathcal{O}(a^2) \quad (3.15)$$

wobei c_{SW} als Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient bezeichnet wird.

3.2. Chirale Störungstheorie auf dem Gitter

Die Arbeit besteht jetzt darin, den im letzten Kapitel gefundenen Gegenterm (3.15) in die Lagrange-Dichte der χ PT zu übertragen. Da solch ein Term ein ähnliches Transformationsverhalten wie der Massenterm (2.45) zeigt, können die entsprechenden Terme in der χ PT ähnlich wie die Massenterme konstruiert werden [21]. Während die symmetriebrechende Größe in den Massentermen das skalare Singulettquarkkondensat $\langle\bar{q}q\rangle$ ist, entspricht in Gitterterminen der Gitterabstand a dieser Größe. Daher liegt die Definition des Parameters der Gitterterme ρ durch den Gitterabstand nahe [22]:

$$\rho = 2W_0a, \quad (3.16)$$

wobei W_0 eine neue Konstante ist, welche die Stärke der Symmetriebrechung durch die Gitterterme beschreibt. Die gesuchten Gitterterme in der χ PT sind gegeben durch

- in LO

$$\mathcal{L}_{\text{LO}}^{\text{Gitter}} = \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right) - \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left(\chi U + U^\dagger \chi \right) - \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left(\rho U^\dagger + U \rho^\dagger \right) \quad (3.17)$$

- und in NLO [23]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO}}^{\text{Gitter}} = & -L_1 \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right)^2 - L_2 \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \right)^2 - L_3 \left[(\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger)^2 \right] \\ & + L_4 \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right) \text{Tr} \left(\chi^\dagger U + U^\dagger \chi \right) + L_5 \text{Tr} \left[\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \left(\chi^\dagger U + U^\dagger \chi \right) \right] \\ & - L_6 \text{Tr} \left(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right)^2 - L_7 \text{Tr} \left(\chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right)^2 - L_8 \text{Tr} \left(\chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi \right) \\ & + W_4 \text{Tr} \left(\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \right) \text{Tr} \left(\rho^\dagger U + U^\dagger \rho \right) + W_5 \text{Tr} \left[\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \left(\rho^\dagger U + U^\dagger \rho \right) \right] \\ & - W_6 \text{Tr} \left(\chi U^\dagger + U \rho^\dagger \right) \text{Tr} \left(\rho^\dagger U + U^\dagger \rho \right) - W'_6 \text{Tr} \left(\rho^\dagger U + U^\dagger \rho \right)^2 \\ & - W_7 \text{Tr} \left(\chi U^\dagger - U \rho^\dagger \right) \text{Tr} \left(\rho^\dagger U - U^\dagger \rho \right) - W'_7 \text{Tr} \left(\rho^\dagger U - U^\dagger \rho \right)^2 \\ & - W_8 \text{Tr} \left(\rho^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \chi \right) - W'_8 \text{Tr} \left(\rho^\dagger U \rho^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \rho \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Wegen des gleichen Transformationsverhaltens können Massen- und Gitterterme in NLO nicht separiert werden und es treten die Mischterme auf.

3.3. Chirale Störungstheorie für twisted-mass-Gitter-QCD

Twisted-mass-Gitter-QCD (kurz: tmLQCD) ist eine Methode der Gitter-QCD, bei der die up- und down-Quarkmasse axial in τ_3 -Richtung gedreht wird. Solch eine Transformation ändert die Physik nicht und hat in der Gitter-QCD eine sehr wichtige Eigenschaft: Die Genauigkeit bei der maximalen Drehung um $\frac{\pi}{2}$ verbessert sich automatisch um $\mathcal{O}(a)$. Um das Verhalten der axial gedrehten Massen zu untersuchen, wird zunächst die Kontinuums-QCD betrachtet.

3.3.1. Axiale Drehung der Quarkmassen in der Kontinuums-QCD

Eine axiale Drehung bedeutet im Kontinuum eine $SU(3)_R \times SU(3)_L$ Drehung. Dabei wird die Massenmatrix M wie folgt transformiert:

$$M' = LMR^\dagger, \quad L \in SU(3)_L \text{ und } R \in SU(3)_R, \quad (3.19)$$

wobei die gedrehte Massenmatrix M' nicht mehr hermitesch ist. Wählt man die Transformationsmatrizen zu

$$L = R^\dagger = e^{i \frac{\omega}{2} \lambda_3}, \quad (3.20)$$

was einer Drehung in τ_3 -Richtung im m_u - m_d -Sektor entspricht, so ergibt sich die transformierte Matrix:

$$\begin{aligned} M' &= \left[\widehat{m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + m_s \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] e^{i \omega \lambda_3} + \frac{1}{2} \Delta m \lambda_1 \\ &= \begin{pmatrix} m_0 + i m_3 & \frac{1}{2} \Delta m & 0 \\ \frac{1}{2} \Delta m & m_0 - i m_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Als Parametrisierung der Massenmatrix wird dabei (2.58) gewählt, in der Δm mit λ_1 implementiert wird, siehe Kapitel 2.6. m_0 und m_3 stellen den Real- bzw. Imaginärteil der physikalischen Masse \widehat{m} dar, die in Abbildung 3.2 in der komplexen Ebene veranschaulicht sind.

$$\widehat{m} e^{i \omega \tau_3} = \widehat{m} (\cos \omega + i \sin \omega \tau_3) \equiv m_0 + i m_3 \tau_3. \quad (3.22)$$

Der Massenterm der Lagrangedichte ändert sich durch die Drehung wie folgt:

$$\bar{q}_L M' q_R + \bar{q}_R M'^\dagger q_L = \bar{q} (m_0 + i \gamma_5 \lambda_3 m_3) q. \quad (3.23)$$

Die physikalische Masse \widehat{m} , die dem Betrag der komplexen gedrehten Masse entspricht, bleibt jedoch dadurch unverändert:

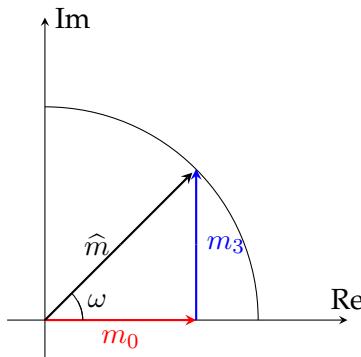


Abbildung 3.2.: Axial gedrehte up- und down-Quarkmasse

$$\hat{m} = \sqrt{m_0^2 + m_3^2}. \quad (3.24)$$

Nun wird die twisted-mass- χ PT (kurz: tm- χ PT) untersucht, in der die axiale Drehung angewendet wird.

3.3.2. Axiale Drehung der Masse in der Gitter- χ PT in LO

Im Gegensatz zur Kontinuums-QCD bleibt die Lagrange-Dichte auf dem Gitter nicht invariant unter einer axialen Drehung. Insbesondere hat dies eine Verschiebung des Minimums der Lagrange-Dichte zur Folge. Zur Massenbestimmung wird anschließend diese Lagrange-Dichte um das Minimum entwickelt.

3.3.2.1. Twisted-mass-Lagrange-Dichte

Die effektive Lagrange-Dichte der Gitter-QCD wurde bereits in Kapitel 3.2 eingeführt:

$$\mathcal{L}_{\text{LO,tm}} = \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left[\partial_\mu U (\partial_\mu U)^\dagger \right] - \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right] - \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left[\rho U^\dagger + U \rho^\dagger \right]. \quad (3.25)$$

Während der kinetische und der Massenterm in (3.25) unter der Transformation (3.20) invariant bleiben, ändert sich der Gitterterm mit der gedrehten Gittermatrix,

$$\begin{aligned} \rho &= \text{diag}(\rho_0 + i\rho_3, \rho_0 - i\rho_3, |\rho|) \\ &= \frac{1}{3}(2\rho_0 + |\rho|)\mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}}(|\rho| - \rho_0)\lambda_8 + i\rho_3\lambda_3. \end{aligned} \quad (3.26)$$

ρ_0 und ρ_3 entsprechen analog zur Drehung der Masse (3.24) dem Real- und Imaginärteil und $|\rho|$ dem Betrag:

$$\rho_0 = |\rho| \cos \omega, \quad \rho_3 = |\rho| \sin \omega. \quad (3.27)$$

Zur Definition der Massenmatrix werden folgende Abkürzungen verwendet,

$$\begin{aligned}\chi_0 &= 2B\hat{m}, \\ \chi_s &= 2Bm_s, \\ \chi_1 &= B\Delta m,\end{aligned}\tag{3.28}$$

wodurch die Massenmatrix folgende Form annimmt:

$$\chi = \frac{1}{3}(2\chi_0 + \chi_s)\mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\chi_s - \chi_0)\lambda_8 + \chi_1\lambda_1.\tag{3.29}$$

Die Lagrange-Dichte nach der axialen Drehung lautet dann:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{tm}} &= \frac{F^2}{4}\text{Tr}[\partial_\mu U(\partial_\mu U)^\dagger] - \frac{F^2}{12}(2\tilde{\chi}_0 + \tilde{\chi}_s)\text{Tr}[U + U^\dagger] + \frac{F^2}{4\sqrt{3}}(\tilde{\chi}_s - \tilde{\chi}_0)\text{Tr}[(U + U^\dagger)\lambda_8] \\ &\quad - \frac{F^2}{4}\chi_1\text{Tr}[(U + U^\dagger)\lambda_1] - i\frac{F^2}{4}\rho_3\text{Tr}[(U^\dagger - U)\lambda_3].\end{aligned}\tag{3.30}$$

Da ρ_0 und $|\rho|$ immer in Kombination mit χ_0 bzw. χ_s auftauchen, werden diese zusammengefasst zu:

$$\tilde{\chi}_0 = \chi_0 + \rho_0, \quad \tilde{\chi}_s = \chi_s + |\rho|.\tag{3.31}$$

3.3.2.2. Verschiebung des Potential-Minimums

Die Lagrange-Dichte ohne axiale Drehung besitzt in $\phi_i = 0$ ihr Minimum. Dieses wird allerdings in der tm- χ PT durch den Term

$$-i\frac{F^2}{4}\rho_3\text{Tr}[(U^\dagger - U)\lambda_3]\tag{3.32}$$

in Gleichung (3.30) verschoben. Die Verschiebung in der Form

$$\phi'_i = \phi_i + \tilde{\phi}_i\tag{3.33}$$

wird vom Gitterterm erzeugt, daher ist folgender Störungsansatz in der Gitterkonstanten a nahe liegend:

$$\tilde{\phi}_i = \Lambda_{1i}a + \Lambda_{2i}a^2 + \mathcal{O}(a^3),\tag{3.34}$$

wobei die Λ_{ki} vom Gitter unabhängige Konstanten darstellen.

Da die in $\tilde{\phi}_i$ linearen Terme zur Bestimmung der Nullstelle benötigt werden, wird die Lagrange-Dichte (3.30) bis $\mathcal{O}(\phi^2)$ entwickelt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{sb}} = & \frac{1}{2}\tilde{\chi}_0\vec{\pi}^2 + \frac{1}{4}(\tilde{\chi}_0 + \tilde{\chi}_s)\vec{K}^2 + \frac{1}{6}(\tilde{\chi}_0 + 2\tilde{\chi}_s)\eta_8^2 \\ & + \frac{1}{2}\chi_1 K_4 K_6 + \frac{1}{2}\chi_1 K_5 K_7 + \frac{1}{\sqrt{3}}\chi_1 \pi_1 \eta_8 - F\rho_3 \pi_3.\end{aligned}\quad (3.35)$$

Das Minimum wird wie gewohnt durch Ableitung nach den Feldern bestimmt:

$$\tilde{\phi}_i \Big|_{i \neq 3} = 0 \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_3 &= \frac{\rho_3 F}{\tilde{\chi}_0} \\ &= F \frac{\rho_3 (\chi_0 - \rho_0)}{\chi_0^2} + \mathcal{O}(a^3)\end{aligned}\quad (3.37)$$

$$= F \frac{2W_0 a}{\dot{M}_\pi^2} \sin \omega - F \left(\frac{2W_0 a}{\dot{M}_\pi^2} \right)^2 \sin \omega \cos \omega + \mathcal{O}(a^3). \quad (3.38)$$

3.4. Mesonenmassen in LO

3.4.1. Berechnungen mit Original-Feldern

Um die Mesonenmassen zu bestimmen, muss zunächst die Lagrange-Dichte (3.30) um das neue Minimum $\tilde{\phi}_i$ (3.36) entwickelt werden¹

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\text{sb}} = \mathcal{L}(\tilde{\phi}_i) + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \Big|_{\phi_i = \tilde{\phi}_i}}_{=0} \phi_i + \frac{1}{2} H_{ij} \phi_i \phi_j + \mathcal{O}(\phi^3), \quad (3.39)$$

wobei der erste konstante Term nicht relevant ist und im Weiteren ignoriert wird. Die Matrix

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \Big|_{\phi_i = \tilde{\phi}_i} \quad (3.40)$$

wird *Hesse-Matrix* genannt und stellt die Krümmung im Minimum dar. Diese reicht allerdings nicht, um die Mesonenmassen zu bestimmen, weil der kinetische Term der Lagrange-Dichte aufgrund des verschobenen Minimums folgende Form hat:

$$\frac{1}{2} k_i (\partial_\mu \phi_i)^2. \quad (3.41)$$

Daher müssen die Felder und Massen renormiert werden:

¹Der Index der Lagrange-Dichte sb steht für „symmetriebrechend“ und gemeint sind dabei die Massen- und Gitter-Terme.

$$\phi_i \rightarrow \frac{1}{\sqrt{k_i}} \phi_i. \quad (3.42)$$

Durch diese Renormierung hat die Lagrange-Dichte die Gestalt

$$\mathcal{L}_{\text{LO}} = \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \phi_i)^2 + \frac{1}{\sqrt{k_i k_j}} H_{ij} \phi_i \phi_j \right], \quad (3.43)$$

woraus sich die renormierte Massenmatrix D ablesen lässt:

$$D_{ij} = \frac{1}{\sqrt{k_i k_j}} H_{ij}. \quad (3.44)$$

Anschließend muss die Massenmatrix (3.44) diagonalisiert werden, um letztendlich die Mesonenmassen in LO zu bestimmen.

3.4.2. Berechnungen mit der optimierten Parametrisierung der Felder

Die Berechnungen mit den Original-Feldern sind vor allem in NLO mit einem großen Aufwand verbunden, da in dieser Ordnung neben den Zweier- und Vierer-Vertizes auch die Dreier-Vertizes zu betrachten sind, die der Verschiebung des Minimums (3.36) zugrunde liegen, siehe Abbildung 3.3.



Abbildung 3.3.: Schleifen-Diagramme zum Dreier-Vertex

Um diese zu vermeiden, wird eine optimierte Parametrisierung der Felder benötigt. Die neue optimierte Parametrisierung der Felder

$$\begin{aligned} U' &= \exp \left(\frac{i}{F} (\phi_a + \tilde{\phi}_a) \lambda_a \right) = \exp \left(\frac{i}{2F} \lambda_3 \tilde{\pi}_3 \right) \exp \left(\frac{i}{F} \lambda_a \hat{\phi}_a \right) \exp \left(\frac{i}{2F} \lambda_3 \tilde{\pi}_3 \right) \\ &\equiv U_0^{1/2} \hat{U} U_0^{1/2} \end{aligned} \quad (3.45)$$

behebt genau diese Probleme [24]. Die Transformationen von den Original- zu den optimierten Feldern lässt sich anhand der Baker-Campbell-Hausdorff-Reihe

$$\exp(A) \exp(B) = \exp \left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] + [B, [B, A]]) + \dots \right) \quad (3.46)$$

bestimmen zu

$$\begin{aligned}\widehat{\pi}_{1,2} &= \left(1 - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{6F^2}\right) \pi_{1,2} + \mathcal{O}(\phi^2) \\ \widehat{\pi}_3 &= \pi_3 + \mathcal{O}(\phi^2) \\ \widehat{\vec{K}} &= \left(1 - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{24F^2}\right) \vec{K} + \mathcal{O}(\phi^2) \\ \widehat{\eta}_8 &= \eta_8 + \mathcal{O}(\phi^2).\end{aligned}\tag{3.47}$$

Diese Parametrisierung hat auch bei der Berechnung der Massen in LO den Vorteil, dass der kinetische Term wegen der zyklischen Eigenschaft der Spur

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\partial_\mu U' (\partial_\mu U')^\dagger \right] = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\partial_\mu \widehat{U} (\partial_\mu \widehat{U})^\dagger \right]$$

auf 1 normiert ist. So lässt sich die Massenmatrix in dieser Parametrisierung direkt von der entwickelten Lagrange-Dichte ablesen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{sb}} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{\chi}_0 + \tilde{\chi}_0 \frac{\tilde{\pi}_3^2}{2F^2} \right) \widehat{\vec{\pi}}^2 + \frac{1}{4} \left(\tilde{\chi}_0 + \tilde{\chi}_s + \tilde{\chi}_0 \frac{\tilde{\pi}_3^2}{2F^2} \right) \widehat{\vec{K}}^2 + \frac{1}{6} \left(\tilde{\chi}_0 + 2\tilde{\chi}_s + \tilde{\chi}_0 \frac{\tilde{\pi}_3^2}{2F^2} \right) \widehat{\eta}_8^2 \\ &\quad + \frac{\chi_1}{2} \left(\widehat{K}_4 \widehat{K}_6 + \widehat{K}_5 \widehat{K}_7 \right) + \frac{\chi_1}{\sqrt{3}} \widehat{\pi}_1 \widehat{\eta}_8.\end{aligned}\tag{3.48}$$

Nach der Diagonalisierung lauten dann die Massen in LO:

$$\begin{aligned}
 M_{\pi_{1,2},\text{tw}}^2 &= \tilde{\chi}_0 + \frac{\rho_3^2}{2\tilde{\chi}_0} \\
 &= \mathring{M}_\pi^2 + \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2\mathring{M}_\pi^2} \\
 M_{\pi_3,\text{tw}}^2 &= \tilde{\chi}_0 + \frac{\rho_3^2}{2\tilde{\chi}_0} - R_{\text{tw}} \\
 &= \mathring{M}_\pi^2 + \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2\mathring{M}_\pi^2} - R_{\text{tw}} \\
 M_{K_1,\text{tw}}^2 &= \frac{1}{2} \left(\tilde{\chi}_0 + \tilde{\chi}_s - \chi_1 + \frac{\rho_3^2}{2\tilde{\chi}_0} \right) \\
 &= \mathring{M}_K^2 - \frac{1}{2} \Delta m + \frac{1}{2} (\rho_0 + |\rho|) + \frac{\rho_3^2}{4\mathring{M}_\pi^2} \\
 M_{K_2,\text{tw}}^2 &= \frac{1}{2} \left(\tilde{\chi}_0 + \tilde{\chi}_s + \chi_1 + \frac{\rho_3^2}{2\tilde{\chi}_0} \right) \\
 &= \mathring{M}_K^2 + \frac{1}{2} \Delta m + \frac{1}{2} (\rho_0 + |\rho|) + \frac{\rho_3^2}{4\mathring{M}_\pi^2} \\
 M_{\eta_8,\text{tw}}^2 &= \frac{1}{3} \left(\tilde{\chi}_0 + 2\tilde{\chi}_s + \frac{\rho_3^2}{2\tilde{\chi}_0} \right) + R_{\text{tw}} \\
 &= \mathring{M}_\eta^2 + \frac{1}{3} \rho_0 + \frac{2}{3} |\rho| + \frac{\rho_3^2}{6\mathring{M}_\pi^2} + R_{\text{tw}},
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

wobei R_{tw} die Abweichung von π_3 - und η_8 -Masse vom mischungsfreien Fall darstellt. Im nächsten Abschnitt wird diese zusammen mit dem Mischungswinkel explizit berechnet.

3.4.3. Mischung von π_3 und η_8

Die zu diagonalisierende Matrix ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\chi}_0 + \frac{\rho_3^2}{2\tilde{\chi}_0} & \frac{\chi_1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\chi_1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \left(\tilde{\chi}_0 + 2\tilde{\chi}_s + \frac{\rho_3^2}{2\tilde{\chi}_0} \right) \end{pmatrix}. \tag{3.50}$$

Der Mischungswinkel ε_{tw} ist mit der Formel (B.1) in Anhang B zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\text{tw}} &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi_1}{\frac{2}{3}(\tilde{\chi}_s - \tilde{\chi}_0) - \frac{\rho_3^2}{3\tilde{\chi}_0}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\Delta m}{m_s - \hat{m}} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2B} \frac{\Delta m}{4(m_s - \hat{m})^2 + 3\Delta m^2} \left(|\rho| - \rho_0 - \frac{\rho_3^2}{2\hat{M}_\pi^2} \right) \\
 &\quad + \frac{\sqrt{3}}{B^3} \frac{\Delta m}{[4(m_s - \hat{m})^2 + 3\Delta m^2]^2} (|\rho| - \rho_0)^2 + \mathcal{O}(a^3).
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Der erste Term entspricht dem Mischungswinkel im Kontinuum (2.42) und der zweite und dritte Term stellt eine Korrektur dar, die durch die Gitterkonstante a erzeugt wird. Die Aufspaltung der π_3 - und η_8 -Massen R_{tw} lässt sich analog zu Berechnungen im Kontinuum ermitteln (2.45):

$$\begin{aligned}
 R_{\text{tw}} &= \frac{1}{3} \Delta m^2 B^2 \frac{1}{\frac{4}{3}(m_s - \hat{m})B + \frac{2}{3}(|\rho| - \rho_0) - \frac{\rho_3^2}{3\tilde{\chi}_0}} \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\Delta m^2 B}{(m_s - \hat{m})} - \frac{\Delta m^2}{8(m_s - \hat{m})^2} \left(|\rho| - \rho_0 - \frac{\rho_3^2}{2\hat{M}_\pi^2} \right) \\
 &\quad + \frac{\Delta m^2}{16B(m_s - \hat{m})^3} (|\rho| - \rho_0)^2 + \mathcal{O}(a^3).
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Der Massenunterschied ist wie im Kontinuum von der Ordnung Δm^2 .

3.5. Axiale Drehung der Masse in der Gitter- χ PT in NLO

Die Vorgehensweise in der tm- χ PT NLO ist analog zum kontinuierlichen Fall: Die Kontakt- und Schleifenbeiträge müssen berechnet werden. Wie in LO muss zunächst die Verschiebung des Minimums berücksichtigt werden, das in NLO eine Korrektur erhält.

3.5.1. Verschiebung des Potential-Minimums

Das Minimum wird analog zu LO anhand des Störungsansatzes (3.34) bestimmt, wobei nur Störungen in $\mathcal{O}(a)$ betrachtet werden, weil die Verschiebung $\tilde{\phi}_i$ nur quadratisch oder in Kombination mit ρ_3 in die Lagrange-Dichte eingeht. Die tm-Lagrange-Dichte (3.18) wird so bis $\mathcal{O}(\phi^2)$ entwickelt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{NLO}} = & +\frac{\vec{\pi}^2}{F^2} \left[16L_6(2\hat{m} + m_s)B \cdot \dot{M}_\pi^2 + 8W_6(2\hat{m} + m_s)B \cdot \rho_0 + 4W_6(2\rho_0 + |\rho|) \cdot \dot{M}_\pi^2 \right. \\
 & \quad \left. + 8L_8 \left(\dot{M}_\pi^2 \right)^2 + 8W_8 \dot{M}_\pi^2 \rho_0 \right] \\
 & + \frac{\vec{K}^2}{F^2} \left[16L_6(2\hat{m} + m_s)B \cdot \dot{M}_K^2 + 4W_6(2\hat{m} + m_s)B \cdot (\rho_0 + |\rho|) + 4W_6(2\rho_0 + |\rho|) \cdot \dot{M}_K^2 \right. \\
 & \quad \left. + 8L_8 \left(\dot{M}_K^2 \right)^2 + 4W_8 \dot{M}_K^2 (2\rho_0 + |\rho|) \right] \\
 & + \frac{\eta_8^2}{F^2} \left[16L_6(2\hat{m} + m_s)B \cdot \dot{M}_\eta^2 + \frac{8}{3}W_6(2\hat{m} + m_s)B \cdot (\rho_0 + 2|\rho|) + 4W_6(2\rho_0 + |\rho|) \cdot \dot{M}_\eta^2 \right. \\
 & \quad + \frac{64}{3}L_7(m_s - \hat{m})^2 B^2 + \frac{32}{3}W_7(|\rho| - \rho_0)(m_s - \hat{m}) + \frac{64}{9}L_8(m_s - \hat{m})^2 B^2 \\
 & \quad \left. + 8L_8 \left(\dot{M}_\eta^2 \right)^2 + \frac{8}{3}W_8 \dot{M}_\eta^2 (\rho_0 + 2|\rho|) - \frac{32}{9}(|\rho| - \rho_0)(m_s - \hat{m}) \right] \tag{3.53} \\
 & + \frac{\pi_1 \cdot \eta_8}{F^2} \cdot \chi_1 \left[\frac{32(2\hat{m} + m_s)B}{\sqrt{3}} L_6 + 8(2\rho_0 + |\rho|)W_6 - \frac{64}{\sqrt{3}}(m_s - \hat{m})L_7 \right. \\
 & \quad \left. - \frac{16}{\sqrt{3}}(|\rho| - \rho_0)W_7 + \frac{32}{\sqrt{3}}\dot{M}_\pi^2 L_8 + \frac{16\rho_0}{\sqrt{3}}W_8 \right] \\
 & + \frac{K_4 \cdot K_6}{F^2} \chi_1 \left[16(2\hat{m} + m_s)BL_6 + 4(2\rho_0 + |\rho|)W_6 + 16\dot{M}_K^2 L_8 + 4(|\rho| + \rho_0)W_8 \right] \\
 & + \frac{K_5 \cdot K_7}{F^2} \chi_1 \left[16(2\hat{m} + m_s)BL_6 + 4(2\rho_0 + |\rho|)W_6 + 16\dot{M}_K^2 L_8 + 4(|\rho| + \rho_0)W_8 \right] \\
 & - \frac{\pi_3}{F} \rho_3 \left[8\dot{M}_\pi^2 W_8 + 16(2\hat{m} + m_s)W_6 \right].
 \end{aligned}$$

Von der Lagrange-Dichte (3.53) lässt sich ablesen, dass alle Minima außer in π_3 -Richtung bei Null liegen. Betrachtet man die LO- (3.35) und NLO-Beiträge (3.53) in der Lagrange-Dichte in π_3

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pi_3} = & \pi_3^2 \left[\frac{1}{2} \dot{M}_\pi^2 + \frac{16L_6}{F^2} (2\hat{m} + m_s) B \dot{M}_\pi^2 + \frac{8L_8}{F^2} (\dot{M}_\pi^2)^2 \right] \\ & - \pi_3 \rho_3 \left[F + \frac{16W_6}{F} (2\hat{m} + m_s) + \frac{8W_8}{F} \dot{M}_\pi^2 \right],\end{aligned}\tag{3.54}$$

so lässt sich das Minimum durch die Ableitung bestimmen:

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_3 &= \frac{F\rho_3}{\dot{M}_\pi^2} \frac{1 + \frac{16W_6}{F^2}(2\hat{m} + m_s) + \frac{8W_8}{F^2}\dot{M}_\pi^2}{1 + \frac{32L_6}{F^2}(2\hat{m} + m_s)B + \frac{16L_8}{F^2}\dot{M}_\pi^2} \\ &= \frac{F\rho_3}{\dot{M}_\pi^2} \left[1 - \frac{16(2\hat{m} + m_s)}{F^2}(2L_6 - W_6) - \frac{8\dot{M}_\pi^2}{F^2}(2L_8 - W_8) \right] + \mathcal{O}(a^2).\end{aligned}\tag{3.55}$$

3.6. Zusammenfassung und Ausblick

In Abschnitt 3.2 wurde die effektive Lagrange-Dichte auf dem Gitter konstruiert. Hierbei wurde berücksichtigt, dass sich die Gitterterme wie die Massenterme transformieren und ebenfalls zur Symmetriebrechung beitragen. Der symmetriebrechende Faktor, der in den Massentermen dem skalaren Singulettquarkkondensat $\langle\bar{q}q\rangle$ entspricht, ist im Gitterterm der Gitterabstand a . In Abschnitt 3.3.2 wurde die tm-QCD betrachtet, die wegen der $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung bei der maximalen Drehung sehr attraktiv ist, und diese in χ PT übersetzt. Folge der axialen Drehung ist die Verschiebung des Minimums, die durch die nichtinvarianten Gitterterme verursacht wird. Das Minimum bis NLO wurde in (3.55) berechnet. Wegen dieser Verschiebung des Minimums wird die optimierte Parametrisierung der Felder (3.47) eingeführt, um die Rechnungen zu vereinfachen. Mit der neuen Parametrisierung wurden die Mesonenmassen in LO bestimmt (3.49). Dabei ist festzustellen, dass der Gitter-Term in LO lediglich zur Verschiebung der Quarkmasse

$$\hat{m} \longrightarrow \hat{m} + \frac{\rho_0}{2B} + \frac{\rho_3^2}{4B\hat{M}_\pi^2} + \mathcal{O}(a^2), \quad m_s \longrightarrow m_s + \frac{|\rho|}{2B} + \mathcal{O}(a^2) \quad (3.56)$$

führt, sodass die Gell-Mann-Okubo-Relation für $\Delta m = 0$ auch auf dem Gitter erfüllt wird.

In dieser Arbeit wurden die Massen in LO bestimmt. Durch analoge Rechnungen im Kontinuum, Berechnung der Schleifen- und Kontakt-Beiträge, können auch die Massen in NLO berechnet werden. Dabei ist ausdrücklich zu empfehlen, die optimierte Parametrisierung der Felder zu verwenden, durch welche die Rechnungen erheblich vereinfacht werden, da dadurch keine Dreier-Vertizes auftauchen.

3.6. Zusammenfassung und Ausblick

A. SU(3)

A.1. Generatoren der SU(3)

Die SU(3) wird durch acht Generatoren gebildet, für die die Verwendung sogenannter Gell-Mann-Matrizen λ_a gängig ist:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

Die Generatoren sind hermitesch, $\lambda_a^\dagger = \lambda_a$, und spurfrei, $\text{Tr}\lambda_a = 0$.

A.2. Die Strukturkonstanten der $SU(3)$

Die Strukturkonstanten werden definiert durch die Vertauschungsrelation der Generatoren in $SU(3)$:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2i f_{abc} \lambda_c \quad \{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3} \delta_{ab} + 2d_{abc} \lambda_c \quad (\text{A.2})$$

Hierbei stellen f_{abc} und d_{abc} den total anti-symmetrischen bzw. -symmetrischen Tensor 3. Stufe dar. Die expliziten Werte beider Tensoren werden in den folgenden Tabellen zusammengefasst.

abc	f_{abc}
123	1
147	$\frac{1}{2}$
156	$-\frac{1}{2}$
246	$\frac{1}{2}$
257	$\frac{1}{2}$
345	$\frac{1}{2}$
367	$-\frac{1}{2}$
458	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
678	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

abc	d_{abc}
118	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
146	$\frac{1}{2}$
157	$\frac{1}{2}$
228	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
247	$-\frac{1}{2}$
256	$\frac{1}{2}$
338	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
344	$\frac{1}{2}$
355	$\frac{1}{2}$
366	$-\frac{1}{2}$
377	$-\frac{1}{2}$
448	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
558	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
668	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
778	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$
888	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Es ist wichtig, dass d_{abc} für $c = 8$ diagonale Struktur hat:

$$d_{ab8} = \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ab}(1 \rightarrow 3) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\delta_{ab}(4 \rightarrow 7) - \frac{1}{\sqrt{3}}\delta_{ab}(8 \rightarrow 8) \quad (\text{A.3})$$

mit

$$\delta_{ab}(l \rightarrow k) = \delta_{ab} \quad (a, b = l, \dots, k). \quad (\text{A.4})$$

Die Strukturkonstanten erfüllen folgende nützliche Relationen:

$$f_{abk}f_{kcd} = \frac{2}{3}(\delta_{ac}\delta_{cd} - \delta_{ad}\delta_{bc}) + d_{ack}d_{kbd} - d_{adk}d_{kbc} \quad (\text{A.5})$$

$$d_{abk}d_{kcd} = \frac{1}{3}(\delta_{ac}\delta_{cd} + \delta_{ad}\delta_{bc} - \delta_{ab}\delta_{cd} + f_{ack}f_{kbd} + f_{adk}f_{kbc}). \quad (\text{A.6})$$

A.3. Produkte und die Spur der Gell-Mann-Matrizen

Das Produkt der n Gell-Mann-Matrizen kann in der Form $a_0 + a_i \frac{\lambda_i}{2}$ geschrieben werden:

$$S(a_1 a_2 \dots a_n) = \frac{1}{6}\delta_{a_{n-1}a_n} S(a_1 a_2 \dots a_{n-2}) + \frac{1}{2}h_{a_{n-1}a_n k} S(a_1 a_2 a_{n-2} k). \quad (\text{A.7})$$

Dabei ist $S(a_1 a_2 \dots a_n)$ das Produkt der n Generatoren der SU(3) und h_{abc} die Kombination der Strukturkonstanten:

$$S(a_1 a_2 \dots a_n) = \frac{\lambda_{a_1}}{2} \frac{\lambda_{a_2}}{2} \dots \frac{\lambda_{a_n}}{2} \quad (\text{A.8})$$

$$h_{abc} = d_{abk} + i f_{abk}. \quad (\text{A.9})$$

Die ersten zwei Produkte sind gegeben durch:

$$\lambda_a \lambda_b = \frac{2}{3} \delta_{ab} + h_{abk} \lambda_k \quad (\text{A.10})$$

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = \frac{2}{3} h_{abc} + \left(\frac{2}{3} \delta_{ab} \delta_{cn} + h_{abk} h_{kcn} \right) \lambda_n. \quad (\text{A.11})$$

Die Spur des Produktes der n Gell-Mann-Matrizen lautet

$$\text{Tr}[S(a_1 a_2 \dots a_n)] = \frac{1}{6} \delta_{a_{n-1}a_n} \text{Tr}[S(a_1 a_2 \dots a_{n-2})] + \frac{1}{2} h_{a_{n-1}a_n k} \text{Tr}[S(a_1 a_2 \dots a_{n-2} k)]. \quad (\text{A.12})$$

Bis $n = 4$ werden die Formeln explizit angegeben:

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\lambda_a) &= 0, & \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) &= 2\delta_{ab}, & \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b \lambda_c) &= 2h_{abc} \\ \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d) &= \frac{4}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} + 2h_{abn} h_{ncd} \\ \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d \lambda_e) &= \frac{4}{3} \delta_{ab} h_{cde} + \frac{4}{3} h_{abc} \delta_{de} + 2h_{abn} h_{nck} h_{kde}.\end{aligned}\tag{A.13}$$

Für das Produkt

$$\text{Tr}[S(a_1 a_2 \dots a_n)] \phi_{a_1} \phi_{a_2} \dots \phi_{a_n}$$

muss nur der totalsymmetrische Anteil der Spur betrachtet werden. So lässt sich das Produkt mit den Relationen aus Anhang A.2 vereinfachen zu:

$$\text{Tr}[\lambda_a \lambda_b] \phi_a \phi_b = 2|\vec{\phi}|^2 \tag{A.14}$$

$$\text{Tr}[\lambda_a \lambda_b \lambda_c] \phi_a \phi_b \phi_c = d_{abc} \phi_a \phi_b \phi_c \tag{A.15}$$

$$\text{Tr}[\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d] \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d = 2\delta_{ab} \delta_{cd} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d = 2(|\vec{\phi}|^2)^2 \tag{A.16}$$

$$\text{Tr}[\lambda_a \lambda_b \lambda_c \lambda_d \lambda_e] \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \phi_e = \left(\frac{8}{3} \delta_{ab} d_{cde} + 2d_{abn} d_{nek} d_{kcd} \right) \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d \phi_e. \tag{A.17}$$

A.4. Parametrisierung einer hermiteschen Matrix durch Gell-Mann-Matrizen

Hermitesche Matrizen $A = A^\dagger$ können anhand der Gell-Mann-Matrizen wie folgt parametriert werden:

$$A = a_0 \cdot \mathbb{1} + a_i \lambda_i \tag{A.18}$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{3} \text{Tr}(A) \text{ und } a_i = \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda_i A). \tag{A.19}$$

B. Diagonalisierung einer symmetrischen 2×2 -Matrix

Für die allgemeine symmetrische 2×2 -Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ist die Drehmatrix für die Diagonalisierung gegeben durch

$$O_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit dem Drehwinkel $\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2b}{c-a} \right)$. (B.1)

Die entsprechenden Eigenwerte sind gegeben in Abhängigkeit vom Drehwinkel θ ,

$$\lambda_1 = a - (c-a) \frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta} \quad (B.2)$$

$$\lambda_2 = c + (c-a) \frac{\sin^2 \theta}{\cos 2\theta}, \quad (B.3)$$

und in Abhängigkeit von den Matrixkomponenten

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{1}{2}\sqrt{(c-a)^2 + 4b^2} \quad (B.4)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(3a-c) + \frac{1}{2}\sqrt{(c-a)^2 + 4b^2}. \quad (B.5)$$

C. Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (C.1)$$

und erfüllt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{und} \quad \Gamma(1) = 1, \quad (C.2)$$

das heißt, diese ist eine Verallgemeinerung der Fakultät auf reelle Zahlen.

Die Winkel-Integration der n -dimensionalen Kugelkoordinaten

$$I_W = \int_0^{2\pi} d\theta_1 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^2 \theta_3 d\theta_3 \dots \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_{n-1} d\theta_{n-1} \quad (C.3)$$

kann anhand der Gammafunktion dargestellt werden. Wegen der Rekursionsformel für das Integral

$$\int_0^\pi \sin^k \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k \theta d\theta = \frac{k-1}{k} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-2} \theta d\theta \quad (C.4)$$

gilt

$$\int_0^\pi \sin^k \theta d\theta = 2 \cdot \begin{cases} \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{n/2} \frac{2j-1}{2j} & \text{gerade } n \\ \prod_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{2j}{2j+1} & \text{ungerade } n. \end{cases} \quad (C.5)$$

Dieses Ergebnis kann schließlich mit der Gammafunktion zusammengefasst werden:

$$\int_0^\pi \sin^k \theta d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} \quad (C.6)$$

Damit kann das Winkelintegral ausgewertet werden zu:

$$\begin{aligned} I_W &= 2\pi^{n/2} \left(\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} \dots \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right) \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}. \end{aligned} \quad (C.7)$$

D. Chirale Darstellung der Dirac-Matrizen

Für die chirale Darstellung der Spinoren

$$\psi = \begin{pmatrix} q_R \\ q_L \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

sind die Gamma-Matrizen gegeben durch:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Anhand der γ^5 lassen sich die Projektoren

$$P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

konstruieren, die den Wyle-Spinor (D.1) in den links- bzw. rechtshändigen Anteil zerlegt:

$$P_L\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ q_L \end{pmatrix}, \quad P_R\psi = \begin{pmatrix} q_R \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

Literaturverzeichnis

- [1] **particle data group**
<http://pdg.lbl.gov/>
- [2] **L. H. Ryder**
Quantum Field Theory
Cambridge University Press, Cambridge (1996)
- [3] **G. Ecker**
Effective field theories
hep-ph/0507056
- [4] **T. Appelquist und J. Carazzone**
Infrared singularities and massive fields
Phys. Rev. D11 (1975) 2856
- [5] **J. Goldstone, A. Salam und S. Weinberg**
Broken Symmetries
Phys. Rev. 127 (1962) 965
- [6] **S. Coleman**
The Invariance of the Vacuum is the Invariance of the World
J. Math. Phys. 7 (1966) 787
- [7] **C. Vafa und E. Witten**
Restrictions on Symmetry Breaking in Vector-Like Gauge Theories
Nucl. Phys. B234 (1984) 173
- [8] **S. Scherer und M. R. Schindler**
A chiral perturbation theory primer
hep-ph/0505265
- [9] **S. Weinberg**
Phenomenological Lagrangians
Physica A96 (1979) 327
- [10] **M. Gell-Mann, R. J. Oakes und B. Renner**
Behavior of current divergences under $SU(3) \times SU(3)$
Phys. Rev. (1968) 2195

- [11] **H. Georgi**
 Weak Interactions and Modern Particle Theory (Dover Books on Physics)
Dover Publications, USA (2009)
- [12] **A. Dobado, A. Gomez-Nicola, A. L. Maroto und J. R. Pelaez**
 Effective Lagrangians for the Standard Model
Springer, Spain (1997)
- [13] **J. Bijnens**
 Quark Mass dependence at Two Loops for Meson Properties
PoS LAT2007:004,2007
[hep-lat/0708.1377](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0708.1377)
- [14] **T.-P. Cheng und L.-F. Li**
 Gauge Theory of elementary particle physics
Oxford University Press, Oxford (1988)
- [15] **J. Gasser und H. Leutwyler**
 Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark
Nucl. Phys. B250 (1985) 465
- [16] **G. Ecker, G. Muller, H. Neufeld und A. Pich**
 $\pi^0 \eta$ mixing and CP violation
Phys. Lett. B477 (2000) 88-92
- [17] **C. Gattringer und C. B. Lang**
 Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation (Lecture Notes in Physics)
Springer, Heidelberg (2009)
- [18] **K. G. Wilson**
 Confinement of Quarks
Phys. Rev.D10 (1974) 2445
- [19] **K. Symanzik**
 Continuum Limit and Improved Action in Lattice Theories.
Nucl. Phys. B226 (1983) 187
- [20] **B. Sheikholeslami und R. Wohlert**
 Improved Continuum Limit Lattice Action for QCD with Wilson Fermions
Nucl. Phys. B259 (1985) 572
- [21] **S. R. Sharpe**
 Applications of chiral perturbation theory to lattice QCD
[hep-lat/0607016](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0607016)

- [22] **G. Rupak und N. Shores**
Chiral perturbation theory for the Wilson lattice action
Phys. Rev. D66 (2002) 054503
hep-lat/0201019
- [23] **O. Bar, G. Rupak und N. Shores**
Chiral perturbation theory at $\mathcal{O}(a^2)$ for lattice QCD
Phys. Rev. D70 (2004)
- [24] **T. Sudmann**
Chirale Störungstheorie für Mesonen in der Twisted-Mass Gitter-QCD
Diplomarbeit WWU Münster (2005)
- [25] **V. I. Borodulin, R. N. Rogalev und S. R. Slabospitsky**
CORE: COnpendium of RElations: Version 2.1
hep-ph/9507456
- [26] **G. Colangelo, J. Gasser und H. Leutwyler**
The quark condensate from K_{e4} decays
Phys. Rev. Lett. (2001) 5008
hep-ph/0103063
- [27] **R. Hoffmann und R. B. Woodward**
Orbital Symmetries and Orientational Effects in a Sigmatropic Reaction
J. Am. Chem. Soc. (1965) 4389
- [28] **H. Leutwyler**
Physics of the light quarks
hep-ph/0808.2825
- [29] **I. Montvay und G. Münster**
Quantum Fields on a Lattice (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)
Cambridge University Press, Cambridge (1997)
- [30] **S. Scherer**
Effektive Feldtheorie 1 und 2
<http://www.kph.uni-mainz.de/T/80.php>
- [31] **M. Srednicki**
Quantum Field Theory
Cambridge University Press, Cambridge (2007)
- [32] **S. Weinberg**
The Quantum Theory of Fields, Vol. 1: Foundations
Cambridge University Press, Cambridge (1995)

Danksagung

Die Fertigstellung dieser Diplomarbeit wäre undenkbar ohne die vielfältige Hilfe, die mir von vielen Leuten zuteil geworden ist. Daher möchte ich an dieser Stelle meinen Dank zum Ausdruck bringen.

Besonders zu nennen sind

- Meine Familie, meine Verwandten und vor allem meine Großmutter Magdalena König für die allgegenwärtige Unterstützung.
- Herr Prof. G. Münster für die interessante Aufgabenstellung und persönliche Betreuung bei meiner Arbeit.
- Felix, Christopher, Thomas und Tobias für die immer erheiternde Stimmung im Büro.
- Felix, Ingo, Julian, Ingmar, Anja und Tobias für das Korrektarlesen.
- Vor allem Felix Bahr, der immer zuerst meine frisch geschriebenen, teilweise unentzifferbaren Sätze durchlesen musste.
- Meine Kommilitonen und meine Mitbewohner
- 世界の終わりと共に見た。ヒロ、アキ、リュータ、ハルカ
物理の楽しさを分かち合えた、ワタル。美術はミナさん。
みんなのお陰でシンスターでの生活が110倍楽しかった。
- マヤ。太陽の笑顔でいつも元気をもつた。
言葉では言い表せないほどの感謝をここに募る。

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, diese Diplomarbeit selbstständig angefertigt und keine als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, 18. Februar 2011

Kai Walter