

Störungstheoretische Untersuchung
eines gitterregularisierten
abelschen Higgs-Yukawa-Modells

Als Diplomarbeit im April 1994 vorgelegt von
Jörg Viola

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Theoretische Physik I
Wilhelm-Klemm-Straße 9
48149 Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Das Higgs-Yukawa-Modell	5
1.1 Globale Invarianz	5
1.2 Lokale Invarianz	7
1.3 Störungstheoretische Notation	9
1.4 Spontane Symmetriebrechung	11
1.4.1 Symmetrische und gebrochene Phase	12
1.4.2 Weinberg-Rotation	14
2 Quantisierung und Feynman-Regeln	16
2.1 Quantisierung	16
2.1.1 Kompakte vs. nichtkomplexe Eichtheorie	17
2.1.2 Faddeev-Popov-Ansatz	18
2.1.3 'T Hooft- und unitäre Eichung	19
2.2 Störungstheorie	21
2.3 Feynman-Regeln	23
2.3.1 Reine Higgs-Wirkung	23
2.3.2 Yukawa-Kopplung	24
2.3.3 Freie Fermion-Wirkung	25
2.3.4 Higgs-Eichfeld-Wechselwirkung	26
2.3.5 Reine Eichfeld-Wirkung	27
2.3.6 Fermion-Eichfeld-Wechselwirkung	29
2.3.7 Faddeev-Popov-Wirkung	30
2.3.8 Unitäre Eichung	30
3 Renormierung	32
3.1 Vakuumerwartungswert	32
3.1.1 Unrenormierter Vakuumerwartungswert	32
3.1.2 Renormierter Vakuumerwartungswert	34
3.2 Higgs-Feld	34
3.2.1 Selbstenergie	34
3.2.2 Renormierte Masse	39
3.2.3 Pol-Masse	40
3.2.4 Physikalische Masse	41

3.2.5	Quartische Kopplung	42
3.3	Fermion-Feld	42
3.3.1	Fermion-Selbstenergie	43
3.3.2	Fermion-Masse	46
3.3.3	Yukawa-Kopplungen	48
3.4	Kritische Parameter	48
3.5	Eichfelder	52
4	Endliches Volumen	56
4.1	Vorüberlegungen	56
4.2	Renormierte Größen	58
4.2.1	Bosonen	58
4.2.2	Fermionen	59
4.3	Volumen-Effekte	60
4.3.1	Verschwindende Eichkopplung	62
4.3.2	Higgs-Masse	64
4.3.3	Higgs-Selbstkopplung	71
4.3.4	Wellenfunktionsrenormierung	72
4.3.5	Vakuumerwartungswert	76
4.3.6	Fermion-Masse	76
4.3.7	Yukawa-Kopplungen	79
4.3.8	Variation der vektoriellen Eichkopplung	81
5	Massenschranken	84
5.1	Effektives Potential	84
5.2	Weinberg-Linde-Schranke	86
5.3	Vakuum-Stabilität	88
6	Die symmetrische Phase	92
6.1	Renormierte Größen	92
6.1.1	Higgs-Feld	92
6.1.2	Fermion-Feld	93
6.1.3	Eichfeld	94
6.2	Eichinvarianz	96
6.3	Volumen-Effekte	97
Zusammenfassung		102
Anhang		104
A	Bezeichnungen	104
B	Gitter-Regularisierung	105
C	Chirale Transformationen	105
D	Fouriertransformation	106
E	Eichfeld-Vertices	108

Einleitung

Die als *Standardmodell* bekannte Zusammenfassung der GLASHOW-SALAM-WEINBERG-Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung mit der Quantenchromodynamik gilt heute als Grundlage für die Physik der Elementarteilchen bis zu den experimentell erreichbaren Energien. Zu ihren attraktivsten Eigenschaften zählen Renormierbarkeit, asymptotische Freiheit und die Vorhersage neutraler Ströme und massiver Vektorbosonen.

Eine wichtige Methode zur Behandlung derartiger relativistischer Quantenfeldtheorien insbesondere im nichtperturbativen Bereich stellt die Einführung einer diskretisierten euklidischen Raum-Zeit dar. Sie ermöglicht neben der Verwendung statistischer Methoden auch die numerische Untersuchung geeigneter Observabler durch Monte-Carlo-Simulationen.

Kern der Theorie der elektroschwachen Kraft ist das für die Massenerzeugung durch spontane Symmetriebrechung benötigte HIGGS-Feld. Da das zugehörige elementare Teilchen bislang nicht nachgewiesen werden konnte, ist die Untersuchung dieses Teils der Theorie wichtig. Besonders sind hier die Arbeiten von LÜSCHER und WEISZ [LW88] zu nennen, welche starke Argumente für die Trivialität der ϕ^4 -Theorie in vier Dimensionen liefern. Daraus lassen sich obere Schranken für die Masse des HIGGS-Bosons ableiten.

Aufgrund der Komplexität der GLASHOW-SALAM-WEINBERG-Theorie werden vielfach vereinfachte Modelle untersucht. Dazu zählen insbesondere rechts-links-symmetrische HIGGS-YUKAWA-Modelle, in denen die Eichgruppe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ zunächst auf $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ erweitert wird [MON87]. Neben reinen HIGGS-Modellen, in denen eine n -komponentige skalare Feldtheorie geeicht wird, kommt den reinen YUKAWA-Modellen, also den ungeeichten Theorien mit Skalar-Fermion-Kopplung, eine besondere Bedeutung zu.

Bekanntermaßen [NN81] führt die naive Gitterregularisierung der dort mit dem HIGGS-Feld wechselwirkenden Fermionfelder auf das sog. *Doubling-Problem* (siehe z.B. [MM94, S. 177f] oder [ROT89, S. 81]). Dieses kann zwar durch einen im Kontinuumslimes verschwindenden Zusatzterm gelöst werden [WIL75], allerdings wird dabei die chirale Symmetrie gebrochen. Zusammen mit der Einführung expliziter Spiegelfermionen liefert die WILSON-Wirkung jedoch die in chiralen Theorien

minimal mögliche Anzahl an zusätzlichen Freiheitsgraden. Die in diesem Kontext interessante Frage nach der Beseitigung der Spiegelfermionen im Kontinuumslimes führt auf zwei mögliche Entkopplungsszenarien, deren Untersuchung nichtperturbative Hilfsmittel erfordern: Entweder die Spiegelfermionen erhalten wie die Doubling-Fermionen in der einfachen WILSON-Formulierung eine Masse in der Größe des Cutoff, oder ihre Masse und ihre Kopplungen verschwinden. Während den zu den YUKAWA-Kopplungen proportionalen Massen der Fermionen durch die vermutete Trivialität der Theorie Grenzen gesetzt sind, konnte die zweite Möglichkeit numerisch gewinnbringend eingesetzt werden [LMP93a, LMP93b]. Sie wird durch die GOLTERMAN-PETCHER-Relationen [GP89, LW92] gestützt, welche sich aber nicht auf Theorien mit Eichfeldern anwenden lassen. Deren Untersuchung gewinnt damit an Bedeutung.

Die Eichung des Modells erhöht zwar aufgrund weiterer Freiheitsgrade und Wechselwirkungen seine Komplexität, beseitigt aber in der Phase spontan gebrochener Symmetrie die vom masselosen GOLDSTONE-Boson hervorgerufenen Infrarot-Singularitäten, welche die Definition und Berechnung renormierter Größen behindern. Außerdem ermöglicht sie bei Betrachtung des effektiven Potentials die Angabe der sogenannten WEINBERG-LINDE-Schranke, unterhalb derer die spontan gebrochene Symmetrie dynamisch wiederhergestellt wird.

Diese Arbeit baut auf ausführlichen Untersuchungen eines $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -symmetrischen YUKAWA-Modells mit expliziten Spiegelfermionen auf [FKL91, LMWG91]. Einerseits erlaubt diese Symmetriegruppe bei gegebener Rechenzeit genauere Simulationen, andererseits besitzt sie im Gegensatz zur $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ wie die elektroschwache Eichgruppe chirale Anomalien.

Monte-Carlo-Simulationen – das wichtigste Hilfsmittel in gitterregularisierten Feldtheorien – sind nur auf Gittern mit endlichem Volumen möglich. Die Frage nach Abweichungen der berechneten Größen von ihrem Wert im unendlichen Volumen stellt sich sofort und ist ausgiebig behandelt worden. Für große Volumina sind analytische Untersuchungen möglich [LÜS86a, MÜN85], Abschätzungen lassen sich mit Hilfe der renormierten Störungstheorie gewinnen (so geschehen z.B. in [LMWM91]).

In dieser Arbeit wird eine perturbative Behandlung des $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -symmetrischen HIGGS-YUKAWA-Modells in Ein-Schleifen-Approximation vorgenommen. Im ersten Kapitel wird das Modell vorgestellt, im zweiten seine Quantisierung besprochen, gefolgt von der Herleitung der FEYNMAN-Regeln. Anschließend werden die Ein-Schleifen-Ausdrücke für renormierte Massen und Kopplungen abgeleitet und Näherungen für die kritischen Parameter der Theorie extrahiert. Das vierte Kapitel enthält die Behandlung der Theorie in einem endlichen Volumen. Nach einigen einleitenden Überlegungen und Beispielen werden numerisch gewonnene Volumeneffekte für einige Größen vorgestellt. Schranken für die Masse des HIGGS-Bosons bzw. die Selbstkopplung werden im fünften Kapitel hergeleitet, während das sechste Kapitel noch einmal kurz auf die Verhältnisse in der symmetrischen Phase eingeht.

Kapitel 1

Das Higgs-Yukawa-Modell

1.1 Globale Invarianz

Ein global $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -invariantes YUKAWA-Modell wird nach [FKL91] durch folgende Wirkung definiert:

$$\begin{aligned}
S &= S_\phi + S_\Psi + S_{\Psi\phi} \\
S_\phi &= \sum_x \left\{ \mu_\phi \phi_x^\dagger \phi_x + \lambda (\phi_x^\dagger \phi_x)^2 - \kappa \sum_\mu \phi_{x+\mu}^\dagger \phi_x \right\} \\
S_\Psi &= \sum_x \left\{ \mu_{\psi\chi} [\bar{\chi}_x \psi_x + \bar{\psi}_x \chi_x] - \sum_\mu [K_\psi \bar{\psi}_{x+\mu} \gamma_\mu \psi_x + K_\chi \bar{\chi}_{x+\mu} \gamma_\mu \chi_x] \right. \\
&\quad \left. + K_r \sum_\mu [\bar{\chi}_x \psi_x - \bar{\chi}_{x+\mu} \psi_x + \bar{\psi}_x \chi_x - \bar{\psi}_{x+\mu} \chi_x] \right\} \\
S_{\Psi\phi} &= \sum_x \left\{ G_\psi \bar{\psi}_x [\phi_{1x} - i\gamma_5 \phi_{2x}] \psi_x + G_\chi \bar{\chi}_x [\phi_{1x} + i\gamma_5 \phi_{2x}] \chi_x \right\}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Hier bezeichnet μ_ϕ die skalare Masse, $\mu_{\psi\chi}$ die Fermion-Mischung und κ , K_ψ , K_χ und K_r die Hopping-Parameter. G_ψ und G_χ heißen YUKAWA-Kopplungen. Die Summe über x läuft über alle Gitterpunkte, jene über μ über alle $2d$ positiven und negativen Raumrichtungen. $\phi_x = \phi_{1x} + i\phi_{2x}$ ist das komplexe HIGGS-Feld, ψ_x ein Fermionfeld und χ_x sein Spiegelpartner, der explizit in die Theorie eingeführt wurde, um einen die chirale Invarianz nicht brechenden WILSON-Term einführen zu können. Damit lassen sich alle bei der Gitter-Regularisierung von DIRAC-Feldern auftretenden Doubler entfernen, und es verbleibt das explizit vorhandene Fermion-/Mirror-Fermion-Paar.

Die Einführung eines zusammengesetzten Fermion-/Mirror-Fermion-Feldes

$$\Psi_x = \begin{pmatrix} \psi_x \\ \chi_x \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

erlaubt eine kompaktere Schreibweise:

$$\begin{aligned} S_\Psi &= \sum_{xy} \overline{\Psi}_y \left\{ \delta_{xy} (\mu_{\psi\chi} + 2dK_r) \mathbf{R} - \sum_\mu \delta_{yx+\mu} \tilde{\mathbf{K}}_\mu \right\} \Psi_x \\ S_{\Psi\phi} &= \sum_x \overline{\Psi}_x \mathbf{G}_\Psi \boldsymbol{\Gamma}_\alpha \phi_{\alpha x} \Psi_x, \end{aligned} \quad (1.3)$$

wobei folgende 2×2 -Matrizen definiert wurden:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \tilde{\mathbf{K}}_\mu &:= \begin{pmatrix} K_\psi \gamma_\mu & K_r \\ K_r & K_\chi \gamma_\mu \end{pmatrix} \\ \mathbf{G}_\Psi &:= \begin{pmatrix} G_\psi & 0 \\ 0 & G_\chi \end{pmatrix} & \boldsymbol{\Gamma}_\alpha &:= \begin{pmatrix} \Gamma_\alpha & 0 \\ 0 & \Gamma_\alpha^\dagger \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.4)$$

mit

$$\Gamma_1 = 1 \quad \Gamma_2 = -i\gamma_5. \quad (1.5)$$

Häufig faßt man die Fermionen enthaltenden Teile der Wirkung mit Hilfe der Fermion-Matrix zusammen:

$$\begin{aligned} S_{\psi\chi\phi} &:= S_\Psi + S_{\Psi\phi} = \sum_{xy} \overline{\Psi}_y \mathbf{Q}(\phi)_{yx} \Psi_x \\ \mathbf{Q}(\phi)_{yx} &= \delta_{yx} ((\mu_{\psi\chi} + 2dK_r) \mathbf{R} + \mathbf{G}_\Psi \boldsymbol{\Gamma}_\alpha \phi_{\alpha x}) - \sum_\mu \delta_{yx+\mu} \tilde{\mathbf{K}}_\mu \end{aligned} \quad (1.6)$$

Die Ergebnisse sollen mit Monte-Carlo-Daten verglichen werden. Um den sogenannten hybriden Monte-Carlo-Algorithmus anwenden zu können, muß jedoch eine technische Fermionverdopplung eingeführt werden (siehe z.B. [KEN88]). Das Modell wird daher auch hier entsprechend erweitert: Man führt N_f Fermionfelder $\Psi^{(f)}$, N_f gerade, ein und betrachtet je zwei davon als durch die technische Verdopplung auseinander hervorgegangen. Dazu werden Fermionmatrizen $\mathbf{Q}^{(f)}$ folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{Q}^{(1)}(\phi)_{yx} := \mathbf{Q}(\phi)_{yx} \quad ; \quad \mathbf{Q}^{(f+1)}(\phi)_{yx} := \mathbf{Q}^{(f)}(\phi)_{yx}^\dagger \quad (1.7)$$

und die Wirkung entsprechend erweitert:

$$S_{\psi\chi\phi} = \sum_{xy} \overline{\Psi}_y^{(f)} \mathbf{Q}^{(f)}(\phi)_{yx} \Psi_x^{(f)} \quad (1.8)$$

Über f soll dabei immer summiert werden. In den Fermionmatrizen tauchen dann Matrizen $\boldsymbol{\Gamma}^{(f)}$ auf, die sich für ungerade f durch Adjugation aus (1.4) ergeben.

Die Wirkung S ist invariant unter einer $U(1)_L \otimes U(1)_R$ - Transformation (V_L, V_R) , falls die Felder sich wie folgt transformieren:

$$\begin{aligned} \Psi_{Lx}^{(f)} &\mapsto V_L \Psi_{Lx}^{(f)} & \overline{\Psi}_{Lx}^{(f)} &\mapsto \overline{\Psi}_{Lx}^{(f)} V_L^{-1} \\ \Psi_{Rx}^{(f)} &\mapsto V_R \Psi_{Rx}^{(f)} & \overline{\Psi}_{Rx}^{(f)} &\mapsto \overline{\Psi}_{Rx}^{(f)} V_R^{-1} \\ \phi_x &\mapsto V_L \phi_x V_R^{-1}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

Dabei wurde definiert:

$$\Psi_{Lx}^{(f)} := \mathbf{P}_L^{(f)} \Psi_x^{(f)} \quad \Psi_{Rx}^{(f)} := \mathbf{P}_R^{(f)} \Psi_x^{(f)}, \quad (1.10)$$

vgl. (A.17). Die ungeraden $\Psi^{(f)}$ unterscheiden sich also von den ursprünglichen geraden nur durch eine Vertauschung von Fermion- und Mirror-Fermion-Feld.

1.2 Lokale Invarianz

Thema dieser Arbeit ist die Untersuchung der geeichten Version des gerade vorgestellten Modells. Wie üblich implementiert man die Eichung durch die Forderung nach lokaler Invarianz, d.h. der Symmetrie der Wirkung unter einer lokalen Transformation von der Art (1.9):

$$\begin{aligned} \Psi_{Lx}^{(f)} &\mapsto V_{Lx} \Psi_{Lx}^{(f)} & \bar{\Psi}_{Lx}^{(f)} &\mapsto \bar{\Psi}_{Lx}^{(f)} V_{Lx}^{-1} \\ \Psi_{Rx}^{(f)} &\mapsto V_{Rx} \Psi_{Rx}^{(f)} & \bar{\Psi}_{Rx}^{(f)} &\mapsto \bar{\Psi}_{Rx}^{(f)} V_{Rx}^{-1} \\ \phi_x &\mapsto V_{Lx} \phi_x V_{Rx}^{-1}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

mit einer i.a. an jedem Punkt des Gitters verschiedenen $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -Transformation (V_{Lx}, V_{Rx}). Unter einer solchen Transformation sind nur die lokalen Teile der Wirkung (1.1) invariant. Zu einer lokal invarianten Wirkung gelangt man, indem man wie z.B. in [MON87] neue, unter einer Eichtransformation nicht invarianten Variablen U einführt.

Als Beispiel betrachte man den nicht lokalen Teil von $S_{\psi\chi\phi}$:

$$S_{\psi\chi\phi}^{n.l.} = - \sum_{x\mu} \bar{\Psi}_{x+\mu}^{(f)} \tilde{\mathbf{K}}_\mu \Psi_x^{(f)} \quad (1.12)$$

Unter einer Eichtransformation variiert dieser Term folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & - \sum_{x\mu} \bar{\Psi}_{x+\mu}^{(f)} \tilde{\mathbf{K}}_\mu \Psi_x^{(f)} \\ & \mapsto - \sum_{x\mu} \bar{\Psi}_{x+\mu}^{(f)} \tilde{\mathbf{K}}_\mu \left(\mathbf{P}_L^{(f)} V_{Lx+\mu}^{-1} V_{Lx} + \mathbf{P}_R^{(f)} V_{Rx+\mu}^{-1} V_{Rx} \right) \Psi_x^{(f)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Invarianz stellt sich also nur für den Fall konstanter Transformationen ein. Um den auftretenden Defekt zu beheben, müssen die neuen Variablen offenbar die Transformationen an zwei benachbarten Gitterpunkten kompensieren. Sie werden daher den Links ($x\mu$) zugeordnet. Der entsprechend modifizierte Term verhält sich dann folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & - \sum_{x\mu} \bar{\Psi}_{x+\mu}^{(f)} \tilde{\mathbf{K}}_\mu \left(\mathbf{P}_L^{(f)} U_{Lx\mu} + \mathbf{P}_R^{(f)} U_{Rx\mu} \right) \Psi_x^{(f)} \\ & \mapsto - \sum_{x\mu} \bar{\Psi}_{x+\mu}^{(f)} \tilde{\mathbf{K}}_\mu \left(\mathbf{P}_L^{(f)} V_{Lx+\mu}^{-1} U_{Lx\mu} V_{Lx} + \mathbf{P}_R^{(f)} V_{Rx+\mu}^{-1} U_{Rx\mu} V_{Rx} \right) \Psi_x^{(f)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Wählt man hierin die U_L , U_R als Elemente der Eichgruppe (hier jeweils $U(1)$) selbst und prägt ihnen das Transformationsverhalten

$$U_{L\mu x} \mapsto V_{Lx+\mu} U_{L\mu x} V_{Lx}^{-1}; \quad U_{R\mu x} \mapsto V_{Rx+\mu} U_{R\mu x} V_{Rx}^{-1} \quad (1.15)$$

auf, so wird der betrachtete Term invariant! Folglich sind die Felder $U_{L\mu x}$ und $U_{R\mu x}$ als Analoga der Eichfelder im Kontinuum zu verstehen, die vorgeführte Ankopplung als die Gitter-Version der kovarianten Ableitung.

Der zweite nicht lokal invariante Term in S kommt aus dem kinetischen Term des HIGGS-Feldes:

$$-\sum_{x\mu} \phi_{x+\mu}^\dagger \phi_x \mapsto -\sum_{x\mu} V_{Rx+\mu} \phi_{x+\mu}^\dagger V_{Lx+\mu}^{-1} V_{Lx} \phi_x V_{Rx}^{-1} \quad (1.16)$$

Die Forderung nach Invarianz dieses Ausdrucks legt das Auftreten der neuen Freiheitsgrade eindeutig fest:

$$-\sum_{x\mu} U_{L\mu x} U_{R\mu x}^\dagger \phi_{x+\mu}^\dagger \phi_x \mapsto -\sum_{x\mu} U_{L\mu x} U_{R\mu x}^\dagger \phi_{x+\mu}^\dagger \phi_x \quad (1.17)$$

Die Felder U_L und U_R koppeln bislang an Fermionen und das HIGGS-Feld, treten jedoch noch nicht als dynamischer Freiheitsgrad auf. Auf einem Gitter fügt man daher nach einem Vorschlag von WILSON [WIL74, KOG79] (vgl. wieder [MON87]) folgende freie Wirkung für die Eichfelder ein:

$$\begin{aligned} S_G &= S_{GL} + S_{GR} \\ S_{GL} &= \frac{\beta_L}{2} \sum_{x\mu+\nu+} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (U_{L\mu\nu x} + U_{L\mu\nu x}^\dagger) \right\} \\ S_{GR} &= \frac{\beta_R}{2} \sum_{x\mu+\nu+} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (U_{R\mu\nu x} + U_{R\mu\nu x}^\dagger) \right\} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$U_{L\mu\nu x}$ und $U_{R\mu\nu x}$ sind die Plaquettevariablen, bei deren Bildung die für nichtabelsche Eichtheorien benötigte Pfadordnung nicht beachtet werden muß:

$$\begin{aligned} U_{L\mu\nu x} &= U_{L\mu x} U_{L\nu(x+\mu)} U_{L\mu(x+\nu)}^\dagger U_{L\nu x}^\dagger \\ U_{R\mu\nu x} &= U_{R\mu x} U_{R\nu(x+\mu)} U_{R\mu(x+\nu)}^\dagger U_{R\nu x}^\dagger \end{aligned} \quad (1.19)$$

Damit lautet die Wirkung des lokal invarianten HIGGS-YUKAWA-Modells:

$$\begin{aligned}
S &= S_\phi + S_\Psi + S_{\Psi\phi} + S_{GL} + S_{GR} \\
S_\phi &= \sum_x \left\{ \mu_\phi \phi_x^\dagger \phi_x + \lambda (\phi_x^\dagger \phi_x)^2 - \kappa \sum_\mu U_{L\mu x} U_{R\mu x}^\dagger \phi_{x+\mu}^\dagger \phi_x \right\} \\
S_\Psi &= \sum_{xy} \overline{\Psi}_y^{(f)} \left\{ \delta_{yx} (\mu_{\psi\chi} + 2dK_r) \mathbf{R} - \sum_\mu \delta_{yx+\mu} \tilde{\mathbf{K}}_\mu \left(\mathbf{P}_L^{(f)} U_{Lx\mu} + \mathbf{P}_R^{(f)} U_{Rx\mu} \right) \right\} \Psi_x^{(f)} \\
S_{\Psi\phi} &= \sum_x \overline{\Psi}_x^{(f)} \mathbf{G}_\Psi \mathbf{\Gamma}^{(f)} \phi_{\alpha x} \Psi_x^{(f)} \\
S_{GL} &= \frac{\beta_L}{2} \sum_{x\mu+\nu+} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (U_{L\mu\nu x} + U_{L\mu\nu x}^\dagger) \right\} \\
S_{GR} &= \frac{\beta_R}{2} \sum_{x\mu+\nu+} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (U_{R\mu\nu x} + U_{R\mu\nu x}^\dagger) \right\}
\end{aligned} \tag{1.20}$$

1.3 Störungstheoretische Notation

Die Formulierung des Modells (1.20) eignet sich für numerische Simulationen oder auch für eine Entwicklung nach kleinen β_L , β_R (also starke Eichkopplungen, s. (1.34)).

Für die perturbative Behandlung verwendet man im allgemeinen eine andere Normierung der Felder, vgl. z.B. [FKL91, LMWG91]. Durch diese Umnormierung wird eine Ähnlichkeit der Theorie zu Kontinuumsformulierungen erreicht, welche die Auffindung von FEYNMAN-Regeln erleichtert.

Üblicherweise schränkt man besonders den Sektor der Hopping-Parameter durch gewisse Konventionen ein. Wählt man

$$K_\psi = K_\chi = K \quad K_r = rK, \tag{1.21}$$

so lautet die Fermion-Wirkung:

$$S_\Psi = K \sum_{xy} \overline{\Psi}_y^{(f)} \left\{ \delta_{yx} \left(\frac{\mu_{\psi\chi}}{K} + 2dr \right) \mathbf{R} - \sum_\mu \delta_{yx+\mu} \mathbf{K}_\mu \left(\mathbf{P}_L^{(f)} U_{Lx\mu} + \mathbf{P}_R^{(f)} U_{Rx\mu} \right) \right\} \Psi_x^{(f)} \tag{1.22}$$

mit

$$\mathbf{K}_\mu := \begin{pmatrix} \gamma_\mu & r \\ r & \gamma_\mu \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

Der verbliebene Hopping-Parameter K lässt sich durch eine mit der Einführung des nackten Fermionfeldes verbundene Umnormierung eliminieren:

$$\Psi_{0x}^{(f)} := \sqrt{2K} \Psi_x^{(f)} \tag{1.24}$$

Separiert man noch die freie Fermion-Wirkung von der Eich-Wechselwirkung, so erhält man mit $\mu_0 := \frac{\mu_{\psi\chi}}{2K}$:

$$\begin{aligned} S_\Psi &= S_{0\Psi} + S_{G\Psi} \\ S_{0\Psi} &= \sum_{xy} \overline{\Psi}_{0y}^{(f)} \left\{ \delta_{yx}(\mu_0 + dr) \mathbf{R} - \frac{1}{2} \sum_\mu \delta_{yx+\mu} \mathbf{K}_\mu \right\} \Psi_{0x}^{(f)} \\ S_{G\Psi} &= -\frac{1}{2} \sum_{x\mu} \overline{\Psi}_{0x+\mu}^{(f)} \mathbf{K}_\mu \left(\mathbf{P}_L^{(f)}(U_{Lx\mu} - 1) + \mathbf{P}_R^{(f)}(U_{Rx\mu} - 1) \right) \Psi_{0x}^{(f)}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Ebenso definiert man das nackte skalare Feld und seine Komponenten durch

$$\phi_{0x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{01x} + i\phi_{02x}) := \sqrt{\kappa} \phi_x \quad (1.26)$$

und erhält für die skalare Wirkung:

$$\begin{aligned} S_\phi &= S_{0\phi} + S_{G\phi} \\ S_{0\phi} &= \sum_x \left\{ \nabla_\mu \phi_{0x}^\dagger \nabla_\mu \phi_{0x} + m_{0+}^2 \phi_{0x}^\dagger \phi_{0x} + \frac{g_0}{6} (\phi_{0x}^\dagger \phi_{0x})^2 \right\} \\ S_{G\phi} &= -\sum_{x\mu} (U_{L\mu x} U_{R\mu x}^\dagger - 1) \phi_{0x+\mu}^\dagger \phi_{0x}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Die nackte Masse und Kopplung wurde definiert durch:

$$m_{0+}^2 := \frac{\mu_\phi}{\kappa} - 2d \quad g_0 := \frac{6\lambda}{\kappa^2} \quad (1.28)$$

Die YUKAWA-Wechselwirkung schreibt sich mit diesen Konventionen:

$$S_{\Psi\phi} = \sum_x \overline{\Psi}_{0x}^{(f)} \mathbf{G}_{0\Psi} \Gamma_\alpha^{(f)} \phi_{0\alpha x} \Psi_{0x}^{(f)} \quad (1.29)$$

mit

$$\mathbf{G}_{0\Psi} := \begin{pmatrix} G_{0\psi} & 0 \\ 0 & G_{0\chi} \end{pmatrix} \quad G_{0\psi} = \frac{G_\psi}{2K\sqrt{2\kappa}} \quad G_{0\chi} = \frac{G_\chi}{2K\sqrt{2\kappa}}. \quad (1.30)$$

Schließlich werden die Linkvariablen $U_{L\mu x}$ und $U_{R\mu x}$ so parametrisiert, daß sich eine perturbative Entwicklung anbietet:

$$U_{L\mu x} = e^{ig_L W_{L\mu x}} \quad U_{R\mu x} = e^{ig_R W_{R\mu x}} \quad (1.31)$$

Die Plaquettevariablen aus (1.19) lauten dann

$$U_{L\mu\nu x} = e^{ig_L W_{L\mu\nu x}} \quad U_{R\mu\nu x} = e^{ig_R W_{R\mu\nu x}} \quad (1.32)$$

mit den Feldstärketensoren

$$\begin{aligned} W_{L\mu\nu x} &= \nabla_\mu W_{L\nu x} - \nabla_\nu W_{L\mu x} \\ W_{R\mu\nu x} &= \nabla_\mu W_{R\nu x} - \nabla_\nu W_{R\mu x}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Wie sich durch einen Vergleich mit der YANG-MILLS-Theorie, welche im Kontinuum umlimes dargestellt werden soll, herausstellt, lassen sich die Konstanten β durch die Eichkopplungskonstanten ausdrücken:

$$\beta_L = \frac{1}{g_L^2} \quad ; \quad \beta_R = \frac{1}{g_R^2}. \quad (1.34)$$

Daher nimmt die WILSON-Wirkung folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} S_{GL} &= \frac{1}{2g_L^2} \sum_{x\mu+\nu+} \{1 - \cos g_L W_{L\mu\nu x}\} = \frac{1}{g_L^2} \sum_{x\mu+\nu+} \sin^2 \frac{g_L W_{L\mu\nu x}}{2} \\ S_{GR} &= \frac{1}{2g_R^2} \sum_{x\mu+\nu+} \{1 - \cos g_R W_{R\mu\nu x}\} = \frac{1}{g_R^2} \sum_{x\mu+\nu+} \sin^2 \frac{g_R W_{R\mu\nu x}}{2} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Damit lautet die gesamte Wirkung in störungstheoretischen Konventionen:

$$\begin{aligned} S &= S_{0\phi} + S_{0\Psi} + S_{GL} + S_{GR} + S_{\Psi\phi} + S_{G\phi} + S_{G\Psi} \\ S_{0\phi} &= \sum_x \left\{ \sum_{\mu+} \nabla_\mu \phi_{0x}^\dagger \nabla_\mu \phi_{0x} + m_{0+}^2 \phi_{0x}^\dagger \phi_{0x} + \frac{g_0}{6} (\phi_{0x}^\dagger \phi_{0x})^2 \right\} \\ S_{0\Psi} &= \sum_{xy} \overline{\Psi}_{0y}^{(f)} \left\{ \delta_{yx} (\mu_0 + dr) \mathbf{R} - \frac{1}{2} \sum_\mu \delta_{yx+\mu} \mathbf{K}_\mu \right\} \Psi_{0x}^{(f)} \\ S_{GL} &= \frac{1}{g_L^2} \sum_{x\mu+\nu+} \sin^2 \frac{g_L W_{L\mu\nu x}}{2} \\ S_{GR} &= \frac{1}{g_R^2} \sum_{x\mu+\nu+} \sin^2 \frac{g_R W_{R\mu\nu x}}{2} \\ S_{\Psi\phi} &= \sum_x \overline{\Psi}_{0x}^{(f)} \mathbf{G}_{0\Psi} \boldsymbol{\Gamma}^{(f)} \phi_{0\alpha x} \Psi_{0x}^{(f)} \\ S_{G\phi} &= - \sum_{x\mu} (U_{L\mu x} U_{R\mu x}^\dagger - 1) \phi_{0x+\mu}^\dagger \phi_{0x} \\ S_{G\Psi} &= - \frac{1}{2} \sum_{x\mu} \overline{\Psi}_{0x+\mu}^{(f)} \mathbf{K}_\mu \left(\mathbf{P}_L^{(f)} (U_{Lx\mu} - 1) + \mathbf{P}_R^{(f)} (U_{Rx\mu} - 1) \right) \Psi_{0x}^{(f)} \end{aligned} \quad (1.36)$$

1.4 Spontane Symmetriebrechung

Explizite Massenterme für die Fermionen sind aufgrund der chiralen Invarianz verboten. Wie im Standardmodell bedient man sich daher zur Massenerzeugung des HIGGS-Mechanismus [AL73, S. 20]. Dazu werden in einem ersten Schritt die Parameter des skalaren Sektors des Modells so gewählt, daß das Potential ein von Null verschiedenes Minimum und das HIGGS-Feld damit einen nicht verschwindenden klassischen Vakuumerwartungswert entwickelt. Alle an das HIGGS-Feld koppelnden Felder erhalten dadurch Massen.

Derartige, auf dem ϕ^4 -Modell aufbauende, HIGGS-Modelle können also durch Wahl der Parameter in der Wirkung sowohl mit als auch ohne von Null verschiedenem Vakuumerwartungswert betrachtet werden. Man spricht von der symmetrischen Phase mit $\langle\phi\rangle = 0$ und von der Phase gebrochener Symmetrie mit $\langle\phi\rangle \neq 0$. Generell ist der letzte Fall zwar infolge fehlender Symmetrien aufwendiger zu behandeln, aber wegen der nicht verschwindenden Fermionmassen realistischer.

1.4.1 Symmetrische und gebrochene Phase

Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichte ich auf eine getrennte Behandlung beider Phasen, sondern stelle hier die Vorgehensweise in der gebrochenen Phase vor. Durch Elimination des Vakuumerwartungswertes erhält man stets die Gleichungen der symmetrischen Phase.

Zunächst berechnet man den klassischen HIGGS-Vakuumerwartungswert wie folgt: Man betrachte eine konstante Feldkonfiguration $\phi_{0x} = \phi_0$ und suche das Minimum von $S_{0\phi}$:

$$S_{0\phi}(|\phi_0|) = \Omega \left\{ m_{0+}^2 |\phi_0|^2 + \frac{g_0}{6} |\phi_0|^4 \right\} \quad (1.37)$$

Ω ist das Gittervolumen. $S_{0\phi}$ wird extremal bei

$$|\phi_0| = 0 \quad \vee \quad |\phi_0|^2 = \frac{v_0^2}{2} := -\frac{3m_{0+}^2}{g_0} \quad (1.38)$$

Für $m_{0+}^2 > 0$ wird $S_{0\phi}$ bei $|\phi_0| = 0$ minimal (symmetrische Phase), für $m_{0+}^2 < 0$ bei $|\phi_0|^2 = \frac{v_0^2}{2}$. Die lokale chirale Symmetrie des Modells wird spontan gebrochen, indem aus den möglichen Grundzuständen

$$\phi_{0x} = \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}} \right) e^{i\alpha} \quad ; \quad 0 \leq \alpha < 2\pi \quad (1.39)$$

genau einer gewählt wird, welcher dann im Gegensatz zur Wirkung des Modells nicht mehr invariant unter der Eichsymmetrie ist. Konventionellerweise wählt man $\alpha = 0$. Man erhält eine einheitliche Beschreibung beiden Phasen, indem man in der symmetrischen Phase $v_0 = 0$ setzt.

Die Störungstheorie ist als Näherungsmethode auf kleine Feldamplituden angewiesen, daher wird das HIGGS-Feld folgendermaßen parametrisiert (siehe hierzu auch Abschnitt 5.2):

$$\phi_{0x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \sigma_x + v_0 + i\pi_x \} \quad (1.40)$$

Die neuen Felder σ_x und π_x seien reell. Ihr Vakuumerwartungswert verschwindet in der klassischen Approximation.

Im Anschluß an diese Betrachtung kann auch die nackte Masse des HIGGS-Feldes angegeben werden. Sie ist definiert durch die zweite Ableitung des Potentials in

seinem Minimum:

$$m_0^2 = \frac{1}{2\Omega} \left. \frac{\partial^2}{\partial \phi_0^2} S_{0\phi}(|\phi_0|) \right|_{\phi_0=\frac{v_0}{\sqrt{2}}} \quad (1.41)$$

Man findet in der symmetrischen Phase:

$$m_0^2 = m_{0+}^2 > 0 \quad (1.42)$$

und in der gebrochenen Phase:

$$m_0^2 = -2m_{0+}^2 > 0. \quad (1.43)$$

Hier gilt der wichtige Zusammenhang

$$v_0^2 = \frac{3m_0^2}{g_0}. \quad (1.44)$$

Die HIGGS-Wirkungen in den beiden Phasen unterscheiden sich also voneinander. In der gebrochenen Phase gilt:

$$S_{0\phi} = \sum_x \left\{ \sum_{\mu+} \nabla_\mu \phi_{0x}^\dagger \nabla_\mu \phi_{0x} - \frac{m_0^2}{2} \phi_{0x}^\dagger \phi_{0x} + \frac{g_0}{6} (\phi_{0x}^\dagger \phi_{0x})^2 \right\}, \quad (1.45)$$

die Wirkung der symmetrischen Phase erhält man durch $m_0^2 \mapsto -2m_0^2$. Einsetzen von (1.40) liefert:

$$\begin{aligned} S_\phi = & \sum_x \left\{ \frac{1}{2} \nabla_\mu \sigma_x \nabla_\mu \sigma_x + \frac{1}{2} \nabla_\mu \pi_x \nabla_\mu \pi_x + \frac{1}{2} m_0^2 \sigma_x^2 + \frac{1}{2} m_{0\pi}^2 \pi_x^2 \right. \\ & \left. + \frac{g_0}{6} v_0 (\sigma_x^3 + \sigma_x \pi_x^2) + \frac{g_0}{4!} (\sigma_x^4 + 2\sigma_x^2 \pi_x^2 + \pi_x^4) \right\}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

mit $m_{0\pi}^2 = m_0^2$ in der symmetrischen und $m_{0\pi}^2 = 0$ in der gebrochenen Phase. Offenbar handelt es sich bei π um jenen unphysikalischen Freiheitsgrad, der in einer ungeeichten Theorie dem GOLDSTONE-Boson entspricht.

Die spontane Brechung der Eichsymmetrie hat verschiedene Konsequenzen. Vor allem erzeugt sie Massen für alle mit dem HIGGS-Feld wechselwirkenden Felder. Dies ist insofern bemerkenswert, als derartige Massenterme in der symmetrischen Phase die Eichsymmetrie brechen. Des weiteren erlaubt sie die Unterscheidung zwischen physikalischen und unphysikalischen Feldfreiheitsgraden. Mit letzteren sind Freiheitsgrade gemeint, deren freier Propagator Mischungen mit anderen Feldern aufweist. So wird sich das Feld π durch seine Kopplung an die Eichfelder als unphysikalisch erweisen. Auch die Eichfelder W_L und W_R selbst sind jedoch keine sinnvollen Parametrisierungen. Diese Probleme werden im nächsten Abschnitt besprochen.

1.4.2 Weinberg-Rotation

Die Brechung der Eichsymmetrie erzeugt vor allem in der HIGGS-Eichfeld-Wechselwirkung $S_{G\phi}$ einige problematische Terme. Diese lautet nach (1.36):

$$\begin{aligned} S_{G\phi} &= -\sum_{x\mu} (e^{i(g_L W_{L\mu x} - g_R W_{R\mu x})} - 1) \phi_{0x+\mu}^\dagger \phi_{0x} \\ &= -\sum_{x\mu_+} \left\{ (2 \cos(g_L W_{L\mu x} - g_R W_{R\mu x}) - 2) \operatorname{Re} \phi_{0x+\mu}^\dagger \phi_{0x} \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin(g_L W_{L\mu x} - g_R W_{R\mu x}) \operatorname{Im} \phi_{0x+\mu}^\dagger \phi_{0x} \right\} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Mit der Parametrisierung (1.40) erhält man :

$$\begin{aligned} S_{G\phi} &= -\sum_{x\mu_+} \left\{ (\cos(g_L W_{L\mu x} - g_R W_{R\mu x}) - 1) ((\sigma_{x+\mu} + v_0)(\sigma_x + v_0) + \pi_{x+\mu} \pi_x) \right. \\ &\quad \left. - \sin(g_L W_{L\mu x} - g_R W_{R\mu x}) (\pi_x(\sigma_{x+\mu} + v_0) - \pi_{x+\mu}(\sigma_x + v_0)) \right\} \end{aligned} \quad (1.48)$$

Dies lautet bis zur zweiten Ordnung in den Eichkopplungskonstanten:

$$\begin{aligned} S_{G\phi} &= \frac{1}{2} \sum_{x\mu_+} (g_L W_{L\mu x} - g_R W_{R\mu x})^2 ((\sigma_x + v_0)(\sigma_{x+\mu} + v_0) + \pi_x \pi_{x+\mu}) \\ &\quad + \sum_{x\mu_+} (g_L W_{L\mu x} - g_R W_{R\mu x}) ((\sigma_{x+\mu} + v_0)\pi_x - (\sigma_x + v_0)\pi_{x+\mu}) \\ &\quad + \mathcal{O}(g_L^3, g_R^3) \end{aligned} \quad (1.49)$$

Hierin sind zwei problematische Ausdrücke zu sehen:

- Zwei Terme proportional zu v_0 aus dem zweiten Summanden:

$$(g_L W_{L\mu x} - g_R W_{R\mu x})(\pi_x - \pi_{x+\mu}) = -(g_L W_{L\mu x} - g_R W_{R\mu x}) \nabla_\mu \pi_x \quad (1.50)$$

Dies ist die aus Kontinuumstheorien bekannte Mischung von Eichfeldern mit einer Komponente des HIGGS-Feldes. Sie kann durch die Wahl einer bestimmten Eichung verhindert werden, was später besprochen werden soll.

- Ein Term proportional zu v_0^2 aus dem ersten Summanden mit der Feldkombination:

$$(g_L W_{L\mu x} - g_R W_{R\mu x})^2 = g_L^2 W_{L\mu x}^2 + g_R^2 W_{R\mu x}^2 - 2g_L g_R W_{L\mu x} W_{R\mu x} \quad (1.51)$$

Der letzte Term deutet eine Mischung zwischen den beiden Eichfeldern an, die also einzeln keine physikalischen Felder sind.

Beide Terme bereiten nur in der gebrochenen Phase Probleme. Die Mischung zwischen den Eichfeldern $\mathbf{W} = (W_L, W_R)^T$ erzwingt die Einführung neuer Eichfelder $\mathbf{Z} = (Z, A)^T$ als Linearkombination $\mathbf{Z} = \mathbf{DW}$ der alten Eichfelder (siehe hierzu

[AL73, S. 43], [RYD89, S. 311f] oder [IZ85, S. 622]. Diese Transformation wird weiterhin durch den in den Feldern quadratischen Propagator-Term

$$S_G^{(2)} = \sum_{xy} \mathbf{W}_{\mu x}^T \Delta_{\mu\nu xy} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{W}_{\nu y} = \sum_{xy} \mathbf{Z}_{\mu x}^T \Delta_{\mu\nu xy} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{Z}_{\nu y} \quad (1.52)$$

eingeschränkt, in dem nämlich keine Mischung erzeugt werden soll. Daher wählt man \mathbf{D} als Drehmatrix mit dem WEINBERG-Winkel θ_W und erhält umgehend:

$$\begin{aligned} Z_{\mu x} &= W_{L\mu x} \cos \theta_W - W_{R\mu x} \sin \theta_W & W_{L\mu x} &= Z_{\mu x} \cos \theta_W + A_{\mu x} \sin \theta_W \\ A_{\mu x} &= W_{L\mu x} \sin \theta_W + W_{R\mu x} \cos \theta_W & W_{R\mu x} &= -Z_{\mu x} \sin \theta_W + A_{\mu x} \cos \theta_W \end{aligned} \quad (1.53)$$

Ersetzt man also den obigen Mischterm durch

$$g_L W_{L\mu x} - g_R W_{R\mu x} =: e' Z_{\mu x} \quad (1.54)$$

mit der axialen Kopplung e' , so gilt sofort

$$g_L = e' \cos \theta_W \quad g_R = e' \sin \theta_W. \quad (1.55)$$

Häufig treten folgende Kombinationen auf:

$$g_L W_{L\mu x} = e_L Z_{\mu x} + e A_{\mu x} \quad g_R W_{R\mu x} = -e_R Z_{\mu x} + e A_{\mu x}, \quad (1.56)$$

wobei zwecks Übersichtlichkeit folgende Größen eingeführt wurden:

$$e_L = e' \cos^2 \theta_W \quad e_R = e' \sin^2 \theta_W \quad e = \frac{1}{2} e' \sin(2\theta_W). \quad (1.57)$$

Obwohl diese Drehung Probleme vermeidet, die in der symmetrischen Phase nicht auftreten, darf sie dort durchgeführt werden. Damit ist eine einheitliche Behandlung beider Phasen auch mit den neuen Eichfeldern möglich.

Kapitel 2

Quantisierung und Feynman-Regeln

2.1 Quantisierung

Die klassische Feldtheorie mit der Wirkung S wird nun durch Betrachtung des erzeugenden Funktionals der n-Punkt-Funktionen quantisiert:

$$Z[\mathbf{J}] = \int \mathcal{D}\Phi e^{-S[\Phi] + \sum_x \mathbf{J}_x \Phi_x} \quad (2.1)$$

Hierbei stehen Φ und \mathbf{J} kollektiv für alle auftretenden Felder bzw. Quellen. Es wird ein eichinvariantes Maß folgendermaßen gewählt:

$$\mathcal{D}\Phi := \prod_x \prod_\alpha d\phi_{0x}^\alpha \prod_f d\Psi_{0x}^{(f)} d\bar{\Psi}_{0x}^{(f)} \prod_\mu dZ_{\mu x} dA_{\mu x} \quad (2.2)$$

Aufgrund der Wechselwirkungen in S ist eine geschlossene Auswertung unmöglich, daher wird die Wirkung in einen freien Teil und in die Wechselwirkungen unterteilt: $S = S_0 + S_I$. In S_0 tauchen alle Terme auf, in denen die Felder quadratisch vorkommen.

Das übliche perturbative Vorgehen besteht nun darin, im Exponential $\exp(-S_I)$ die Felder durch Ableitungen nach den Quellen zu ersetzen und das verbleibende Integral zu faktorisieren:

$$\begin{aligned} Z[\mathbf{J}] &= \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -S_0[\Phi] - S_I[\Phi] + \sum_x \mathbf{J}_x \Phi_x \right\} \\ &= \exp \left\{ -S_I[\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}}] \right\} \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -S_0[\Phi] + \sum_x \mathbf{J}_x \Phi_x \right\} \\ &= \exp \left\{ -S_I[\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}}] \right\} \exp \left\{ \sum_{xy} \mathbf{J}_x \Delta_{xy} \mathbf{J}_y \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Der letzte Schritt deutet die explizite Ausintegration der nach Vorziehen der Wechselwirkungen verbleibenden GAUSS-Integrale an. Das Ergebnis wird mit Hilfe von Propagatoren dargestellt (im bosonischen Fall tritt noch ein Faktor $\frac{1}{2}$ auf). Diese Ausintegration ist im Fall der Eichfelder nicht ohne weiteres möglich.

2.1.1 Kompakte vs. nichtkompakte Eichtheorie

In diesem Abschnitt wird stellvertretend die freie Theorie für das Eichfeld Z behandelt, alle Überlegungen treffen jedoch analog für das Feld A zu und sind problemlos auf den wechselwirkenden Fall zu erweitern.

Im erzeugenden Funktional des freien Z -Feldes wird – wie bei der Gitterregularisierung von Eichtheorien üblich – das HAAR'sche Maß über der Eichgruppe verwendet ([CRE83, S. 39ff], [MM94, S. 102]). Dessen explizite Darstellung mit Hilfe einer Parametrisierung wie (1.31) führt im allgemeinen auf einen Zusatzterm in der Wirkung. Dies ist in der hier behandelten ABEL'schen Theorie jedoch nicht der Fall, man findet

$$\int dU_{Z\mu x} f(U_{Z\mu x}) = \frac{e'}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{e'}}^{\frac{\pi}{e'}} dZ_{\mu x} f(e^{ie' Z_{\mu x}}). \quad (2.4)$$

Der Normierungsfaktor kann im erzeugenden Funktional wie üblich unterdrückt werden, welches damit folgende Form annimmt:

$$Z_Z[J^{(Z)}] = \int_{-\frac{\pi}{e'}}^{\frac{\pi}{e'}} \prod_{\mu x} dZ_{\mu x} \exp \left\{ -S_Z + \sum_x J_{\mu x}^{(Z)} Z_{\mu x} \right\}, \quad (2.5)$$

Dies kann – obwohl es sich um eine freie Theorie handelt – im Gegensatz zum erzeugenden Funktional anderer Felder nicht ausintegriert werden, da der Wertebereich des Feldes – der Einheitskreis in der komplexen Ebene – kompakt ist. Man spricht daher von einer kompakten Eichtheorie. Ein Vorteil dieser Formulierung ist zwar, daß das Eichgruppenvolumen endlich und daher eine Eichfixierung nicht nötig ist, andererseits ist aber eine perturbative Behandlung analog der Theorie im Kontinuum kaum möglich, selbst die Definition eines Propagators scheint problematisch.

Eine Möglichkeit besteht nun darin, die Felder mit kompaktem Wertebereich nicht-linear auf solche mit nicht-kompaktem Wertebereich abzubilden [SHA78]. Die niedrigsten Feldpotenzen werden dabei nicht verändert, es treten aber neue Selbstwechselwirkungen hinzu. Es ist jedoch auch legitim, einfach durch Ausdehnung des Integrationsintervalls von der kompakten zur nichtkompakten Theorie überzugehen.

Die Äquivalenz dieser beiden Formulierungen kann, zumindest im perturbativen Rahmen, auf folgenden Wegen gezeigt werden:

- Man überlegt sich, daß die volle Wirkung sicher in Z periodisch ist. Benutzt man auch einen periodischen Quellenterm, so kann das Integrationsintervall

auf $[-\frac{N\pi}{e'}, \frac{N\pi}{e'}]$ ausgedehnt werden, wenn anschließend durch N dividiert wird. Die Konstante N^{-1} ändert jedoch nur die Normierung, welche bei der Berechnung von Erwartungswerten keine Rolle spielt. Folglich kann auch der Grenzwert $N \rightarrow \infty$ ausgeführt werden.

- Man geht zur nichtkompakten Theorie über durch:

$$Z_Z[J^{(Z)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mu x} dZ_{\mu x} \prod_{\mu x} \Theta(\frac{\pi}{e'} - |Z_{\mu x}|) \exp \left\{ -S_Z + \sum_x J_{\mu x}^{(Z)} Z_{\mu x} \right\} \quad (2.6)$$

Die zusätzliche Θ -Funktion kann für die Zwecke der Störungstheorie aber fortgelassen werden, wie man folgendermaßen sieht. Es gilt:

$$\Theta(\frac{\pi}{e'} - |Z_{\mu x}|) = \lim_{w \rightarrow \infty} e^{-\left(\frac{e'}{\pi} Z_{\mu x}\right)^{2w}} \quad (2.7)$$

Also lautet das erzeugende Funktional:

$$\begin{aligned} Z_Z[J^{(Z)}] &= \lim_{w \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mu x} dZ_{\mu x} \prod_{\mu x} \exp \left\{ -S_Z - S_{n.c.}(w) + \sum_x J_{\mu x}^{(Z)} Z_{\mu x} \right\} \\ S_{n.c.}(w) &= \sum_{x \mu} \left(\frac{e'}{\pi} Z_{\mu x} \right)^{2w} \end{aligned} \quad (2.8)$$

In der perturbativen Behandlung taucht die Selbstwechselwirkung $S_{n.c.}(w)$ als ein Vertex mit $2w$ einlaufenden Eichbosonen auf, der zur Ordnung eines Graphen mit e'^{2w} beiträgt. Im Grenzfall $w \rightarrow \infty$ ist dieser Vertex für jede endliche Störungsordnung zu vernachlässigen.

Im folgenden werden also für beide Eichfelder auch in der vollen Theorie nichtkompakte Integrationsbereiche verwendet. Damit ist das Volumen der Eichgruppe unendlich und erzeugt bei der Integration innerhalb einer Eich-Äquivalenzklasse eine Divergenz. Daher muß in dieser Formulierung eine Eichung ausgewählt werden.

2.1.2 Faddeev-Popov-Ansatz

Die Fixierung der Eichung erfolgt wie üblich durch den Ansatz von FADDEEV und POPOV, welcher besonders im Kontext nichtabelscher Eichtheorien in Lehrbüchern vorgestellt (siehe z.B. [FS80, S. 87ff], [RYD89, S. 245ff] oder [AL73, S. 82ff]), auch in gitterregularisierten Theorien angewandt wird [MM94, S. 122ff] und hier nur kurz referiert werden soll. Im erzeugenden Funktional (2.5) soll nicht über Eichfeldkonfigurationen integriert werden, welche durch eine Eichtransformation auseinander hervorgehen. Zu diesem Zweck wählt man eine Eichung

$$\mathcal{F}[\overline{Z}_{\mu x}] = c_x, \quad (2.9)$$

welche von allen aus einer Konfiguration durch Eichtransformationen entstandenen Eichfeldern genau eines – \bar{Z} – erfüllt. Dann lautet das erzeugende Funktional:

$$Z_Z[J^{(Z)}] = \int \prod_{\mu x} d\bar{Z}_{\mu x} \exp \left\{ -S_Z + \sum_x J_{\mu x}^{(Z)} \bar{Z}_{\mu x} \right\} \quad (2.10)$$

Der FADDEEV-POPOV-Ansatz besteht nunmehr darin, hier eine Integration über alle möglichen Werte der Eichfixierung einzufügen:

$$Z_Z[J^{(Z)}] = \int \prod_{\mu x} d\bar{Z}_{\mu x} d\mathcal{F} \exp \left\{ -S_Z + \sum_x J_{\mu x}^{(Z)} \bar{Z}_{\mu x} \right\} \delta(\mathcal{F} - c), \quad (2.11)$$

wobei eine funktionale Delta-Distribution dafür sorgt, daß der Wert des Integrals nicht verändert wird. Da die Eichfixierung eindeutig sein muß, ist der Zusammenhang zwischen dem Wert von $\mathcal{F}[\bar{Z}_\mu + \nabla_\mu \Lambda]$ und Λ eindeutig. Daher kann man eine Variablensubstitution vornehmen, deren JACOBI-Matrix hier \mathcal{M} genannt wird:

$$\mathcal{M}_{xy} := \frac{\partial \mathcal{F}[\bar{Z}_{\mu x} + \nabla_\mu \Lambda_x]}{\partial \Lambda_y} \quad (2.12)$$

\mathcal{M} heißt auch FADDEEV-POPOV-Operator. Formal erhält man:

$$Z_Z[J^{(Z)}] = \int \prod_{\mu x} d\bar{Z}_{\mu x} d\Lambda_x \det \mathcal{M} \exp \left\{ -S_Z + \sum_x J_{\mu x}^{(Z)} \bar{Z}_{\mu x} \right\} \delta(\mathcal{F}[\bar{Z}_{\mu x} + \nabla_\mu \Lambda_x] - c_x) \quad (2.13)$$

Um wieder die Form eines Wirkungsexponentials zu gewinnen (aus dem später die Störungstheorie leicht abzuleiten ist), stellt man die Determinante durch eine funktionale GRASSMANN-Integration dar und integriert mit einem GAUSS-Gewicht über die freie Funktion c_x . Man erhält:

$$Z_Z[J^{(Z)}] = \int \prod_{\mu x} dZ_{\mu x} d\bar{\eta}_x d\eta_x \exp \left\{ -S_Z - S_{GF} - S_{FP} + \sum_x J_{\mu x}^{(Z)} Z_{\mu x} \right\} \quad (2.14)$$

mit dem eichfixierenden Term

$$S_{GF} = \frac{1}{2\xi} \sum_x (\mathcal{F}[Z_{\mu x}])^2 \quad (2.15)$$

und der FADDEEV-POPOV-Wirkung

$$S_{FP} = \sum_x \bar{\eta}_x \mathcal{M}_{xy} \eta_y. \quad (2.16)$$

Die Fixierung der Eichung des Feldes A verläuft völlig analog.

2.1.3 'T Hooft- und unitäre Eichung

Die von 'T HOOFT vorgeschlagene Eichfixierung ([TH71], siehe auch [RYD89, S. 385ff], [IZ85, S. 619f] oder [AL73, S. 122ff]) behebt das Problem des in (1.50) erscheinenden Mischungsterms

$$-v_0 e' \sum_x Z_{\mu x} \nabla_\mu \pi_x. \quad (2.17)$$

Danach wählt man:

$$\mathcal{F}[Z_{\mu x}] = \nabla_\mu^* Z_{\mu x} + \xi v_0 e' \pi_x, \quad (2.18)$$

also:

$$\begin{aligned} S_{GF} &= \frac{1}{2\xi} \sum_x \left\{ \nabla_\mu^* Z_{\mu x} + \xi v_0 e' \pi_x \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2\xi} \sum_x (\nabla_\mu^* Z_{\mu x})^2 + v_0 e' \sum_x Z_{\mu x} \nabla_\mu \pi_x + \frac{1}{2} m_{0\pi}^2 \sum_x \pi_x^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

In $S + S_{GF}$ tritt folglich keine Mischung zwischen HIGGS- und Eichfeld mehr auf. Außerdem erhält das π -Boson die Masse $m_{0\pi} = \sqrt{\xi} e' v_0$. Diese Eigenschaft ist attraktiv, da sie Infrarot-Divergenzen von Schleifen-Integralen, wie sie bei der ungeeichten Theorie auftreten, verhindert. Gleichzeitig sieht man, daß die 'T HOOFT-LANDAU-Eichung $\xi = 0$ in dieser Hinsicht Probleme bereitet, sie wird daher im folgenden vermieden.

Die Fixierung der 'T HOOFT-Eichung transformiert sich unter einer Eichtransformation folgendermaßen:

$$\mathcal{F}[Z_{\mu x}] \mapsto \mathcal{F}[Z_{\mu x}] + \square \Lambda_x + \xi v_0 e'^2 (\sigma_x + v_0) \Lambda_x, \quad (2.20)$$

daher lautet die JACOBI-Matrix

$$\mathcal{M} = \square + \xi v_0^2 e'^2 + \xi v_0 e'^2 \sigma \quad (2.21)$$

und damit die FADDEEV-POPOV-Wirkung:

$$S_{FP} = \sum_x \bar{\eta}_x \left\{ \square + \xi v_0^2 e'^2 \right\} \eta_x + \xi v_0 e'^2 \sum_x \bar{\eta}_x \sigma_x \eta_x \quad (2.22)$$

Obwohl also die Eichgruppe ABEL'sch ist, können die FADDEEV-POPOV-Geister nicht ausintegriert werden, sondern koppeln an das HIGGS-Feld [ACGQ73]!

Die Rechnungen zur Renormierung der Theorie z.B. in Ein-Schleifen-Ordnung lassen sich durch die Wahl $\xi \rightarrow \infty$ erheblich vereinfachen. Die Masse des π -Bosons wird dann unendlich und die Beiträge von Graphen mit π -Bosonen verschwinden. In dieser Eichung gilt $\pi_x = 0$, wie einfach verstanden werden kann, wenn man den letzten Summanden des eichfixierenden Terms in (2.19) betrachtet. Im Funktionalintegral liefert er einen Faktor

$$e^{- \sum_{x \mu+} \frac{1}{2} \xi v_0^2 e'^2 \pi_x^2}. \quad (2.23)$$

Andererseits ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} \quad (2.24)$$

eine Darstellung der δ -Distribution. Da sich der Vorfaktor vor der Bildung von Erwartungswerten bei der Normierung des erzeugenden Funktionalen kürzt, kann für $\xi \rightarrow \infty$ die Integration über π_x ausgeführt werden. In der Wirkung muß dann $\pi_x = 0$ gesetzt werden. Da in dieser Eichung keine unphysikalischen Freiheitsgrade mehr auftreten, läßt sich die Unitarität der S-Matrix zeigen. Die gewählte Eichung heißt daher unitär.

Das Erreichen der unitären Eichung ist möglich, da der unphysikalische Freiheitsgrad π ein inhomogenes Transformationsverhalten aufweist. Betrachtet man nämlich eine infinitesimale Eichtransformation $e'\Lambda_x$, so erhält man:

$$\begin{aligned}\sigma_x &\mapsto \sigma_x - e'\Lambda_x\pi_x \\ \pi_x &\mapsto \pi_x + e'\Lambda_x\sigma_x + e'\Lambda_xv_0\end{aligned}\tag{2.25}$$

Die 'T HOOFT-Eichungen und die unitäre Eichung fixieren das Eichfeld Z . Bei der Entwicklung nach schwachen Kopplungen wird in der nichtkompakten Theorie jedoch auch eine Fixierung des Eichfeldes A nötig. Hier wähle ich die übliche LORENTZ-Eichung

$$S'_{GF} = \frac{1}{2\xi'} \sum_{x\mu+} (\nabla_\mu^* A_{\mu x})^2, \tag{2.26}$$

bzw. meistens weiter die FEYNMAN-Eichung $\xi' = 1$. Nach der bisherigen Diskussion ist klar, daß die bei der Fixierung des Feldes A auftretenden FADDEEV-POPOV-Geister ausintegriert werden können. Sie werden im folgenden daher nicht betrachtet.

2.2 Störungstheorie

Nach diesem Übergang zur nichtkompakten Eichfeldtheorie auf dem Gitter lautet das erzeugende Funktional nun nach (2.3):

$$Z[\mathbf{J}] = \exp \left\{ -S_I \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}} \right] \right\} \exp \left\{ \sum_{xy} \mathbf{J}_x \Delta_{xy} \mathbf{J}_y \right\}, \tag{2.27}$$

mit Faktoren $\frac{1}{2}$ vor bosonischen Propagatoren. S_I enthält sämtliche Wechselwirkungen, auch die aus der "freien" Gitterwirkung der Eichfelder stammenden Selbstkopplungen von Z und A . Entwickelt man diese Größe in allen Kopplungen bis zu einer gewissen Ordnung, so erhält man ein Polynom in den Feldern. Die *negativen* Koeffizienten eines Produktes von Feldern heißen Vertices und werden hier mit $V^{(\dots)}$ bezeichnet. Wird in einen Vertex zu n Feldern ein Faktor $\frac{1}{n!}$ hineindefiniert, so ändert dies lediglich die Regel über Symmetriefaktoren (s.u.).

Die n-Punkt-Funktionen werden aus ihrem erzeugenden Funktional durch Ableitung nach den Quellen gebildet:

$$\langle \Phi^n \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{J}} \right)^n \frac{Z[\mathbf{J}]}{Z[\mathbf{0}]} \Big|_{\mathbf{J}=0} \tag{2.28}$$

Die FEYNMAN-Regeln können nun folgendermaßen aus der Wirkung abgelesen werden: Ein Vertex entspricht einem Punkt mit auslaufenden Linien. Die Enden dieser Linien tragen – ebenso wie jene der externen Linien, die den Ableitungen aus der

Bildung der n-Punkt-Funktion zugeordnet sind – Ableitungen nach Quellen. Den Propagatoren sind Linien mit Quellen an den Enden zugeordnet. Alle Exponentialfunktionen werden entwickelt. Es tragen nur jene Terme bei, bei denen jede Ableitung mit einer entsprechenden Quelle kombiniert und dabei jede Quelle “abgesättigt” wird. Dies sind genau jene Graphen, welche mit den bei der Entwicklung der Exponentialfunktionen entstehenden Bausteinen (also Vertices und Propagatoren) erzeugt werden können. Es ergeben sich daher die folgenden allgemeinen FEYNMAN-Regeln:

1. Eine n-Punkt-Funktion ist die Summe aller Graphen mit der richtigen Anzahl und Art äußerer Beine, gewöhnlich mit einer maximalen Anzahl von Vertices oder Schleifen.
2. Jeder orientierten inneren Linie (Fermionen) wird der Propagator, jeder nicht orientierten (Bosonen) $1/2$ mal der Propagator zugeordnet.
3. Jedem Vertex werden der entsprechende Ausdruck und eine Summe über den Ort zugeordnet.
4. Zusammenhängende Indices werden kontrahiert. Dies ergibt auch eine Spur für Fermionschleifen.
5. Ein Faktor -1 für Fermionschleifen. Dieser stammt aus dem GRASSMANN-Charakter der Fermionfelder [HUA82, S. 141ff].
6. Jedem Graph wird ein Symmetriefaktor zugeordnet:

$$S(\mathcal{G}) = \frac{N}{\prod_i n_i!} \quad (2.29)$$

Hier ist N die Anzahl der Möglichkeiten, den Graph aus seinen Bausteinen zu erzeugen; der Index i zählt die Typen der verwendeten Bausteine und n_i ist die Anzahl der Bausteine vom Typ i , die verwendet wurden.

Die Berechnung der Symmetriefaktoren weicht von der üblichen Konvention ab, denn die Fakultät der Anzahl der einlaufenden Felder ist nicht in der Definition der Vertices enthalten. Da in dieser Theorie vier verschiedene Typen von Feldern auftreten, ist diese Art der Berechnung von Symmetriefaktoren übersichtlicher. Ihre Form soll an dem Beispiel einer Theorie mit Vertices V_m und einem Feld schematisch veranschaulicht werden. Die n -Punkt-Funktion lautet dann:

$$\begin{aligned} \langle \phi^n \rangle &= \left(\frac{\partial}{\partial J} \right)^n \exp \left\{ \sum_m V_m \left(\frac{\partial}{\partial J} \right)^m \right\} \exp \left. \{ J \Delta J \} \right|_{J=0} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial J} \right)^n \prod_m \sum_{v_m} \frac{1}{v_m!} V_m^{v_m} \left(\frac{\partial}{\partial J} \right)^{mv_m} \sum_p \frac{1}{p!} (J \Delta J)^p \Big|_{J=0} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Bezeichnet man mit $N(v_1, \dots, v_{2p}; p)$ die Zahl der sich durch Anwendung der Produktregel ergebenden Terme, so lautet ein Summand dieses Ausdrucks:

$$\frac{N(v_1, \dots, v_{2p}; p)}{p!} \prod_{m=1}^{2p} \frac{1}{v_m!} V_m^{v_m} \Delta^p \quad \text{mit} \quad n + \sum_m m v_m = 2p, \quad (2.31)$$

worin neben der erwarteten Kombination von Vertices und Propagatoren auch der Symmetriefaktor erscheint.

Die FEYNMAN-Regeln im Impulsraum ergeben sich wie gewohnt durch FOURIER-Transformation. Definiert man einen Faktor $(2\pi)^d$ sowie die Gesamtimpulserhaltung aus der n -Punktfunktion heraus, so gelten obige Regeln auch hier (mit in den Impulsraum transformierten Vertices und Propagatoren) und über Schleifen wird wie üblich integriert.

2.3 Feynman-Regeln

Nun werden die FEYNMAN-Regeln in der 'T HOOFT-Eichung abgeleitet. Dazu werden aus jedem Teil der Wirkung (1.36) Propagatoren (Inverse der Koeffizienten quadratischer Terme) und Vertices (negative Koeffizienten höherer Potenzen) abgelesen. Die Reihenfolge der Behandlung wird dabei dadurch diktiert, daß gewisse Terme innerhalb der Wirkung umsortiert werden.

2.3.1 Reine Higgs-Wirkung

Für die Wirkung des HIGGS-Feldes in der $\sigma - \pi$ -Parametrisierung wurde in 1.4.1 bereits ein vorläufiger Ausdruck hergeleitet:

$$S_\phi = \sum_x \left\{ \frac{1}{2} \nabla_\mu \sigma_x \nabla_\mu \sigma_x + \frac{1}{2} \nabla_\mu \pi_x \nabla_\mu \pi_x + \frac{1}{2} m_0^2 \sigma_x^2 + \frac{1}{2} m_{0\pi}^2 \pi_x^2 + \frac{g_0}{6} v_0 (\sigma_x^3 + \sigma_x \pi_x^2) + \frac{g_0}{4!} (\sigma_x^4 + 2\sigma_x^2 \pi_x^2 + \pi_x^4) \right\} \quad (2.32)$$

Zu diesem wird noch der durch den eichfixierenden Term (2.19) erzeugte Massenterm für das π -Boson hinzugeschlagen. Dabei bleibt die Form der Wirkung erhalten, und man findet folgende nackte Massen:

Symmetrische Phase: $m_{0\pi} = m_0$

Gebrochene Phase: $m_{0\pi} = \sqrt{\xi} e' v_0$

Die Vertices können aus (2.32) sofort abgelesen werden. Aufgrund ihrer Lokalität ändern sie ihre Form auch beim Übergang in den Impulsraum nicht:

$$\begin{aligned} V^{(3\sigma)} &= -\frac{g_0}{6}v_0 \\ V^{(\sigma,2\pi)} &= -\frac{g_0}{6}v_0 \\ V^{(4\sigma)} &= -\frac{g_0}{4!} \\ V^{(4\pi)} &= -\frac{g_0}{4!} \\ V^{(2\sigma,2\pi)} &= -\frac{2g_0}{4!} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die Propagatoren im Ortsraum lassen sich sofort ablesen. Ihre Transformation in den Impulsraum bereitet ebenfalls keine Schwierigkeiten. Dazu setzt man die FOURIER-Transformierten Felder ein und erhält mit (A.19):

$$\sum_x \left\{ \frac{1}{2} \nabla_\mu \sigma_x \nabla_\mu \sigma_x + \frac{1}{2} m_0^2 \sigma_x^2 \right\} = \frac{1}{2} \int_q \sigma(q) \sigma(-q) (\hat{q}^2 + m_0^2), \quad (2.34)$$

analog für das Feld π und damit:

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma(p) &= \frac{1}{q^2 + m_0^2} \\ \Delta_\pi(p) &= \frac{1}{\hat{q}^2 + m_{0\pi}^2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

2.3.2 Yukawa-Kopplung

Nach (1.36) lautet die Kopplung zwischen Fermion- und HIGGS-Feld in der neuen Parametrisierung:

$$S_{\Psi\phi} = \sum_x \overline{\Psi}_{0x}^{(f)} \mathbf{G}_{0\Psi} \left(\mathbf{\Gamma}_1^{(f)} (\sigma_x + v_0) + \mathbf{\Gamma}_2^{(f)} \pi_x \right) \Psi_{0x}^{(f)} \quad (2.36)$$

Wegen (1.5) gilt

$$\mathbf{\Gamma}_1^{(f)} \Psi_{0x}^{(f)} = \Psi_{0x}^{(f)} \quad \mathbf{\Gamma}_2^{(f)} \Psi_{0Lx}^{(f)} = -i \Psi_{0Lx}^{(f)} \quad \mathbf{\Gamma}_2^{(f)} \Psi_{0Rx}^{(f)} = i \Psi_{0Rx}^{(f)}, \quad (2.37)$$

und daher

$$S_{\Psi\phi} = \sum_x \overline{\Psi}_{0x}^{(f)} \mathbf{G}_{0\Psi} (\sigma_x + v_0 + (-i \mathbf{P}_L^{(f)} + i \mathbf{P}_R^{(f)}) \pi_x) \Psi_{0x}^{(f)} \quad (2.38)$$

Der von den skalaren Freiheitsgraden σ und π unabhängige Teil ist in den Fermionfeldern quadratisch und wird der freien Fermion-Wirkung hinzugefügt, siehe 2.3.3. Am Rest liest man ohne weitere Schwierigkeiten die YUKAWA-Vertices ab:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{(2\Psi,f,\sigma)} &= -\mathbf{G}_{0\Psi} \\ \mathbf{V}^{(2\Psi,f,\pi)} &= i \mathbf{G}_{0\Psi} (\mathbf{P}_L^{(f)} - \mathbf{P}_R^{(f)}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.3.3 Freie Fermion-Wirkung

Die freie Fermion-Wirkung lautet nach (1.36):

$$S_{0\Psi} = \sum_{xy} \bar{\Psi}_{0y}^{(f)} \left\{ \delta_{yx} (\mu_0 + dr) \mathbf{R} - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \delta_{yx+\mu} \mathbf{K}_{\mu} \right\} \Psi_{0x}^{(f)} \quad (2.40)$$

Dem wird nach 2.3.2 folgender Term hinzugefügt:

$$\sum_x \bar{\Psi}_{0x}^{(f)} \mathbf{G}_{0\Psi} v_0 \Psi_{0x}^{(f)} \quad (2.41)$$

Damit werden in der gebrochenen Phase genau jene Mischterme $\bar{\psi}\psi$ und $\bar{\chi}\chi$ erzeugt, die in der symmetrischen Phase aufgrund der chiralen Invarianz verboten sind. Durch den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert des HIGGS-Feldes werden also Massenterme für Fermionen und Mirror-Fermionen generiert. Definiert man die Massen

$$\mu_{0\psi} := G_{0\psi} v_0 \quad ; \quad \mu_{0\chi} := G_{0\chi} v_0 \quad (2.42)$$

so lautet die volle freie Fermion-Wirkung ausgeschrieben:

$$S_{0\Psi} = \sum_{xy} \bar{\Psi}_{0y}^{(f)} \left\{ \delta_{yx} \begin{pmatrix} \mu_{0\psi} & \mu_0 + dr \\ \mu_0 + dr & \mu_{0\chi} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \delta_{yx+\mu} \begin{pmatrix} \gamma_{\mu} & r \\ r & \gamma_{\mu} \end{pmatrix} \right\} \Psi_{0x}^{(f)} \quad (2.43)$$

Der inverse Propagator im Impulsraum ergibt sich durch Einsetzen der FOURIER-Transformierten Felder und Anwendung von (A.25) und (A.26) (mit $k = 0$):

$$S_{0\Psi} = \int_q \bar{\Psi}_0^{(f)}(q) \begin{pmatrix} \mu_{0\psi} + i\gamma_{\mu} \overline{q}_{\mu} & \mu_q \\ \mu_q & \mu_{0\chi} + i\gamma_{\mu} \overline{q}_{\mu} \end{pmatrix} \Psi_0^{(f)}(q) \quad (2.44)$$

mit der Abkürzung $\mu_q := \mu_0 + \frac{r}{2}\hat{q}^2$. Inversion liefert:

$$\begin{aligned} \Delta_{\Psi}(p) &= D^{-1}(p) \left\{ \Delta_{\Psi}^{(1)}(p) - i\gamma_{\mu} \overline{p}_{\mu} \Delta_{\Psi}^{(2)}(p) \right\} \\ D(p) &= (\mu_{0\psi} + \mu_{0\chi})^2 \overline{p}^2 + (\overline{p}^2 + \mu_p^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi})^2 \\ \Delta_{\Psi}^{(1)}(p) &= \begin{pmatrix} \mu_{0\psi}(\overline{p}^2 + \mu_{0\chi}^2) - \mu_{0\chi} \mu_p^2 & \mu_p(\overline{p}^2 + \mu_p^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) \\ \mu_p(\overline{p}^2 + \mu_p^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) & \mu_{0\chi}(\overline{p}^2 + \mu_{0\psi}^2) - \mu_{0\psi} \mu_p^2 \end{pmatrix} \\ \Delta_{\Psi}^{(2)}(p) &= \begin{pmatrix} \overline{p}^2 + \mu_p^2 + \mu_{0\chi}^2 & -\mu_p(\mu_{0\psi} + \mu_{0\chi}) \\ -\mu_p(\mu_{0\psi} + \mu_{0\chi}) & \overline{p}^2 + \mu_p^2 + \mu_{0\psi}^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Hier sind D , $\Delta_{\Psi}^{(1)}$ und $\Delta_{\Psi}^{(2)}$ gerade skalare Funktionen. Diese Ausdrücke vereinfachen sich erheblich im Sonderfall $\mu_{0\psi} = -\mu_{0\chi}$. Dort kann man nämlich durch einen Faktor $\overline{p}^2 + \mu_p^2 + \mu_{0\psi}^2$ dividieren und folgende Definitionen verwenden:

$$D(p) = \overline{p}^2 + \mu_p^2 + \mu_{0\psi}^2 \quad \Delta_{\Psi}^{(1)}(p) = \begin{pmatrix} \mu_{0\psi} & \mu_p \\ \mu_p & -\mu_{0\psi} \end{pmatrix} \quad \Delta_{\Psi}^{(2)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

2.3.4 Higgs-Eichfeld-Wechselwirkung

Die Wechselwirkung zwischen HIGGS-Feld und Eichfeld ist bereits in 1.4.2 untersucht worden und lautet:

$$\begin{aligned} S_{\phi G} &= - \sum_{x\mu_+} (\cos e' Z_{\mu x} - 1) ((\sigma_x + v_0)(\sigma_{x+\mu} + v_0) + \pi_x \pi_{x+\mu}) \\ &\quad + \sum_{x\mu_+} \sin e' Z_{\mu x} ((\sigma_{x+\mu} + v_0)\pi_x - (\sigma_x + v_0)\pi_{x+\mu}) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Entwickelt man die Winkelfunktionen und beachtet den Beitrag der 'T HOOFT-Eichung (2.19), so erhält man:

$$\begin{aligned} S_{\phi G} &= \sum_{k=1}^{\infty} S_{\phi G}^{(k)} \\ S_{\phi G}^{(2k)} &= -\frac{(-1)^k}{(2k)!} e'^{2k} \sum_{x\mu_+} Z_{\mu x}^{2k} (\sigma_x \sigma_{x+\mu} + v_0 (\sigma_{x+\mu} + \sigma_x) + v_0^2 + \pi_x \pi_{x+\mu}) \\ S_{\phi G}^{(1)} &= -e' \sum_{x\mu_+} Z_{\mu x} (\sigma_{x+\mu} \pi_x - \sigma_x \pi_{x+\mu}) \\ S_{\phi G}^{(2k+1)} &= \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e'^{2k+1} \sum_{x\mu_+} Z_{\mu x}^{2k+1} (\sigma_{x+\mu} \pi_x - \sigma_x \pi_{x+\mu} - v_0 \nabla_\mu \pi_x); k > 0 \end{aligned} \quad (2.48)$$

Hier tritt ein vom HIGGS-Feld unabhängiger Term auf, der zur reinen Eichfeld-Wirkung hinzugefügt wird. Außerdem findet man Terme der Art (hier steht \vec{k} stets für alle auftretenden Impulse):

$$\sum_{x\mu_+} Z_{\mu x}^n \sigma_x \sigma_{x+\mu} = \int_{(\vec{k})} \sum_{\mu_+} \prod_i Z_\mu(k_i) \sigma(q) \sigma(-q') e^{-\frac{i}{2}(q'_\mu + q_\mu)} \quad (2.49)$$

Wegen der Vorzeichen der Feldimpulse führt dies auf einen gerichteten Vertex, der je zweimal mit unterschiedlichen Vorzeichen gezählt werden muß. Dies ist wegen der ungerichteten skalaren Propagatoren unbequem. Man kommt auf eine symmetrischere Form, indem man in einer Hälfte des obigen Ausdrucks $q \mapsto -q'$, $q' \mapsto -q$ ausführt:

$$\sum_{x\mu_+} Z_{\mu x}^n \sigma_x \sigma_{x+\mu} = \int_{(\vec{k})} \sum_{\mu_+} \prod_i Z_\mu(k_i) \sigma(q) \sigma(-q') \cos \frac{q'_\mu + q_\mu}{2} \quad (2.50)$$

Weiter treten auf:

$$\begin{aligned} \sum_{x\mu_+} Z_{\mu x}^n (\sigma_{x+\mu} \pi_x - \sigma_x \pi_{x+\mu}) &= - \int_{(\vec{k})} \sum_{\mu_+} \prod_i Z_\mu(k_i) \pi(q) \sigma(-q') i \widehat{q'_\mu + q_\mu} \\ \sum_{x\mu_+} Z_{\mu x}^n (\sigma_{x+\mu} + \sigma_x) &= \int_{(\vec{k})} \sum_{\mu_+} \prod_i Z_\mu(k_i) \sigma(q) 2 \cos \frac{q_\mu}{2} \\ \sum_{x\mu_+} Z_{\mu x}^n (\pi_{x+\mu} - \pi_x) &= \int_{(\vec{k})} \sum_{\mu_+} \prod_i Z_\mu(k_i) \pi(q) i \widehat{q_\mu} \end{aligned} \quad (2.51)$$

Beachtet man diese Regeln, so gelangt man zu folgenden Vertices:

$$\begin{aligned}
 V_\mu^{(2\sigma, 2kZ)}(q, q') &= \frac{(-1)^k}{(2k)!} e'^{2k} \cos \frac{q'_\mu + q_\mu}{2} \\
 V_\mu^{(2\pi, 2kZ)}(q, q') &= \frac{(-1)^k}{(2k)!} e'^{2k} \cos \frac{q'_\mu + q_\mu}{2} \\
 V_\mu^{(\sigma, \pi, (2k+1)Z)}(q, q') &= -\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e'^{2k+1} i q'_\mu \widehat{+} q_\mu \\
 V_\mu^{(\sigma, 2kZ)}(q) &= 2 \frac{(-1)^k}{(2k)!} e'^{2k} v_0 \cos \frac{q_\mu}{2} \\
 V_\mu^{(\pi, (2k+1)Z)}(q) &= -\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} e'^{2k+1} v_0 i \widehat{q}_\mu \quad ; \quad k > 0
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Der letzte Vertex taucht für $k = 0$ nicht auf, da dieser genau die Mischung zwischen Eichfeld und GOLDSTONE-Feld beschreibt, welche durch die 'T HOOFT-Eichung aufgehoben wird. Beim gemischten $\sigma - \pi - Z$ -Vertex wähle ich gemäß (2.51) das σ -Feld als Träger des auslaufenden Impulses.

2.3.5 Reine Eichfeld-Wirkung

Nach (1.36) lautet die reine Eichfeld-Wirkung

$$\begin{aligned}
 S_{GL} &= \frac{1}{e' e_L} \sum_{x\mu+\nu_+} \sin^2 \frac{1}{2} (e A_{\mu\nu x} + e_L Z_{\mu\nu x}) \\
 S_{GR} &= \frac{1}{e' e_R} \sum_{x\mu+\nu_+} \sin^2 \frac{1}{2} (e A_{\mu\nu x} - e_R Z_{\mu\nu x})
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Entwickelt man dies in den Eichkopplungen, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 S_G &= \sum_{k=0}^{\infty} S_G^{(k)} \\
 S_G^{(k)} &= \frac{(-1)^k}{2(2k+2)!} \sum_{x\mu+\nu_+} \sum_{j=0}^{2k+2} \binom{2k+2}{j} e^{2k+2-j} e^{(j)} A_{\mu\nu x}^{2k+2-j} Z_{\mu\nu x}^j
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

mit

$$e^{(j)} = \frac{1}{e'} (e_L^{j-1} + (-1)^j e_R^{j-1}). \tag{2.55}$$

Insgesamt lautet also die Eichfeld-Wirkung:

$$\begin{aligned}
 S_G &= \sum_{k=0}^{\infty} S_G^{(k)} \\
 S_G^{(k)} &= \frac{(-1)^k}{(2k+2)!} \frac{1}{2} \sum_{x\mu+\nu_+} \sum_{j=0}^{2k+2} \binom{2k+2}{j} e^{2k+2-j} e^{(j)} A_{\mu\nu x}^{2k+2-j} Z_{\mu\nu x}^j
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Dem wird noch der Term aus 2.3.4 hinzugefügt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+2)!} e'^{2k+2} v_0^2 \sum_{x\mu+} Z_{\mu x}^{2k+2}, \tag{2.57}$$

sowie ein Teil des eichfixierenden Terms aus 2.1.3:

$$\frac{1}{2\xi} \sum_x (\nabla_\mu^* Z_{\mu x})^2 + \frac{1}{2\xi'} \sum_x (\nabla_\mu^* A_{\mu x})^2 \tag{2.58}$$

Die zum Übergang in den Impulsraum benötigten Beziehungen sind in (A.21) zusammengefaßt.

$k = 0$: Der Propagator

Die nullte Ordnung der reinen Eichfeld-Wirkung ist in den Feldern quadratisch. Mit den Beiträgen der eichfixierenden Terme sowie der HIGGS-Wechselwirkung lautet sie:

$$S_G^{(0)} = \frac{1}{4} \sum_{x\mu_+ \nu_+} \left\{ A_{\mu\nu x}^2 + Z_{\mu\nu x}^2 \right\} + \sum_{x\mu_+} \left\{ \frac{1}{2} M_Z^2 Z_{\mu x}^2 + \frac{1}{2\xi} (\nabla_\mu^* Z_{\mu x})^2 + \frac{1}{2\xi'} (\nabla_\mu^* A_{\mu x})^2 \right\} \quad (2.59)$$

Hier ist der dritte Summand unschwer als Massenterm für das Z -Feld zu erkennen. Der HIGGS-Mechanismus liefert also ein masseloses Photon und ein Z -Boson der Masse

$$M_Z = e' v_0. \quad (2.60)$$

Der erste Anteil für das Z -Boson lautet:

$$\frac{1}{4} \sum_{x\mu_+ \nu_+} Z_{\mu\nu x}^2 = \frac{1}{2} \int_k Z_\sigma(k) Z_{\sigma'}(-k) (\delta_{\sigma'\sigma} \hat{k}^2 - \hat{k}_\sigma \hat{k}_{\sigma'}), \quad (2.61)$$

der zweite:

$$\sum_{x\mu_+} \left\{ \frac{M_Z^2}{2} Z_{\mu x}^2 + \frac{1}{2\xi} (\nabla_\mu^* Z_{\mu x})^2 \right\} = \sum_{\mu_+} \int_k Z_\mu(k) Z_\nu(-k) \left\{ \frac{M_Z^2}{2} \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2\xi} \hat{k}_\mu \hat{k}_\nu \right\} \quad (2.62)$$

Der inverse Propagator des Z -Bosons lautet also:

$$\Delta^{(Z)}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} (\hat{k}^2 + M_Z^2) - (1 - \frac{1}{\xi}) \hat{k}_\mu \hat{k}_\nu \quad (2.63)$$

und dessen Inversion liefert:

$$\Delta^{(Z)}_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\hat{k}^2 + M_Z^2} \left(\delta_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2 + \xi M_Z^2} \right) \quad (2.64)$$

Der Photonpropagator ergibt sich daraus einfach durch die Ersetzungen $M_Z \rightarrow 0$ und $\xi \rightarrow \xi'$:

$$\Delta_{\mu\nu}^{(A)}(k) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{\hat{k}^2} + (\xi' - 1) \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^4}. \quad (2.65)$$

$k = 1$: Selbstwechselwirkungen

Auf einem Gitter tritt auch in einer ABEL'schen Eichtheorie eine Selbstwechselwirkung auf. Die in der ersten Schleifen-Ordnung noch benötigten Vertices erhält man aus $S_G^{(1)}$ und dem Beitrag der HIGGS-Eichfeld-Wechselwirkung. Dies lautet nämlich zusammen:

$$S_G^{(1)} = -\frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2} \sum_{x\mu_+ \nu_+} \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} e^{4-j} e^{(j)} A_{\mu\nu x}^{4-j} Z_{\mu\nu x}^j + e'^2 M_Z^2 \sum_{x\mu_+} Z_{\mu x}^4 \right) \quad (2.66)$$

Die FOURIER-Transformation vierter Feldpotenzen ist Gegenstand von (A.22), man erhält

$$S_G^{(1)} = - \sum_j \int_{(\vec{k})} V_{\mu\nu\rho\sigma}^{((4-j)A,jZ)}(k_1, k_2, k_3, k_4) A_\mu(k_1) \dots Z_\sigma(k_4) \quad (2.67)$$

mit den Vertices:

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu\rho\sigma}^{(4A)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{e^2}{48} \zeta_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ V_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2A,2Z)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{e^2}{8} \zeta_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ V_{\mu\nu\rho\sigma}^{(A,3Z)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{1}{12} e(e_L - e_R) \zeta_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ V_{\mu\nu\rho\sigma}^{(4Z)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{1}{48} (e'^2 - 3e^2) \zeta_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \frac{1}{24} e'^2 M_Z^2 \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} \delta_{\mu\sigma} \end{aligned} \quad (2.68)$$

$V^{(3A,Z)}$ verschwindet: Ein massives Eichboson wechselwirkt nicht mit drei masselosen.

2.3.6 Fermion-Eichfeld-Wechselwirkung

Nach (1.36) lautet die Wechselwirkung zwischen Fermion- und Eichfeld:

$$\begin{aligned} S_{\Psi G} &= -\frac{1}{2} \sum_{x\mu} \overline{\Psi}_{0x+\mu}^{(f)} \mathbf{K}_\mu \left(\mathbf{P}_L^{(f)} (U_{L\mu x} - 1) + \mathbf{P}_R^{(f)} (U_{R\mu x} - 1) \right) \Psi_{0x}^{(f)} =: \sum_{k=1}^{\infty} S_{\Psi G}^{(k)} \\ S_{\Psi G}^{(k)} &= -\frac{i^k}{2k!} \sum_{x\mu} \sum_{j=0}^k \overline{\Psi}_{0x+\mu}^{(f)} \mathbf{K}_\mu \binom{k}{j} \left(\mathbf{P}_L^{(f)} e^j e_L^{k-j} + \mathbf{P}_R^{(f)} e^j (-e_R)^{k-j} \right) A_{\mu x}^j Z_{\mu x}^{k-j} \Psi_{0x}^{(f)} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Die hierin auftauchenden Wechselwirkungen von Fermionfeldern und Eichfeldern werden in (A.26) in den Impulsraum transformiert. Danach lautet die Wechselwirkung insgesamt:

$$\begin{aligned} S_{\Psi G}^{(k)} &= -\frac{i^k}{k!} \int_{(\vec{k})} \sum_{\mu+} \sum_{j=0}^k \overline{\Psi}_0^{(f)}(p') \mathbf{V}_\mu^{(k)}(p' + p) \binom{k}{j} \\ &\quad \times \left(\mathbf{P}_L^{(f)} e^j e_L^{k-j} + \mathbf{P}_R^{(f)} e^j (-e_R)^{k-j} \right) A_\mu(k_1) \dots Z_\mu(k_k) \Psi_0^{(f)}(p), \end{aligned} \quad (2.70)$$

wo zur Abkürzung die Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_\mu^{(k)}(q) &= \begin{pmatrix} \gamma_\mu \cos \frac{q_\mu}{2} & -ir \sin \frac{q_\mu}{2} \\ -ir \sin \frac{q_\mu}{2} & \gamma_\mu \cos \frac{q_\mu}{2} \end{pmatrix} & k \text{ ungerade} \\ \mathbf{V}_\mu^{(k)}(q) &= \begin{pmatrix} -i\gamma_\mu \sin \frac{q_\mu}{2} & r \cos \frac{q_\mu}{2} \\ r \cos \frac{q_\mu}{2} & -i\gamma_\mu \sin \frac{q_\mu}{2} \end{pmatrix} & k \text{ gerade} \end{aligned} \quad (2.71)$$

eingeführt wurden. An diesem Ergebnis sind die Vertices abzulesen:

$$\mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,jA,(k-j)Z)}(p, p') = \frac{i^k}{k!} \binom{k}{j} \mathbf{V}_\mu^{(k)}(p' + p) \left(\mathbf{P}_L^{(f)} e^j e_L^{k-j} + \mathbf{P}_R^{(f)} e^j (-e_R)^{k-j} \right) \quad (2.72)$$

Für $k = j$ erkennt man hier die reine vektorielle Kopplung mit der Kopplungskonstante e . Für die Ein-Schleifen-Approximation benötigt man:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,A)}(p, p') &= ie\mathbf{V}_\mu^{(1)}(p' + p) \\ \mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,Z)}(p, p') &= i\mathbf{V}_\mu^{(1)}(p' + p)(e_L \mathbf{P}_L^{(f)} - e_R \mathbf{P}_R^{(f)}) \\ \mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,2A)}(p, p') &= -\frac{e^2}{2}\mathbf{V}_\mu^{(2)}(p' + p) \\ \mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,2Z)}(p, p') &= -\frac{1}{2}\mathbf{V}_\mu^{(2)}(p' + p)(e_L^2 \mathbf{P}_L^{(f)} + e_R^2 \mathbf{P}_R^{(f)}) \\ \mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,A,Z)}(p, p') &= -\mathbf{V}_\mu^{(2)}(p' + p)e(e_L \mathbf{P}_L^{(f)} - e_R \mathbf{P}_R^{(f)})\end{aligned}\quad (2.73)$$

2.3.7 Faddeev-Popov-Wirkung

Nach 2.1.3 lautet die Wirkung der FADDEEV-POPOV-Geister:

$$S_{FP} = \sum_x \bar{\eta}_x \left\{ \square + \xi v_0^2 e'^2 \right\} \eta_x + \xi v_0 e'^2 \sum_x \bar{\eta}_x \sigma_x \eta_x \quad (2.74)$$

Hier liest man sofort den Propagator ab:

$$\Delta_\eta(q) = \frac{1}{\tilde{q}^2 + \xi(e'v_0)^2}, \quad (2.75)$$

der wie üblich bosonischen Typs ist, obwohl die Felder selbst GRASSMANN-Algebra-wertig sind. Die Wechselwirkung mit dem HIGGS-Feld lautet:

$$V^{(\sigma, 2\eta)} = -\xi v_0 e'^2 \quad (2.76)$$

2.3.8 Unitäre Eichung

Wie in 2.1.3 bereits ausgeführt, vereinfachen sich viele Rechnungen der gebrochenen Phase in der unitären Eichung $\xi \rightarrow \infty$. Dort wird der Freiheitsgrad π auf Null fixiert (seine Masse divergiert), und alle diesbezüglichen FEYNMAN-Regeln können gestrichen werden. Allerdings ist ad hoc nicht klar, wie sich die FADDEEV-POPOV-Determinante respektive die Geist-Felder bei dieser Eichfixierung verhalten. Diese Frage ist erst *nach* der Behandlung der allgemeinen 'T HOOFT-Eichung in den letzten Abschnitten durch Ausführen des Grenzprozesses $\xi \rightarrow \infty$ zu klären.

Da die Masse der Geister wie jene der π -Felder mit ξ divergiert, vermutet man naiv ein Verschwinden aller Geist-Beiträge. Dann führt die unitäre Eichung z.B. bei der numerischen Auswertung in Kapitel 4 jedoch auf von 'T HOOFT-Eichungen abweichende Resultate. Der Grund dafür ist in dem zu ξ proportionalen Vertex (2.76) zu sehen, welcher den Effekt der divergenten Masse aufheben kann. Als Beispiel betrachte man den Geist-Beitrag zur σ -Selbstenergie (vgl. (3.24)):

$$-\xi^2 e'^4 v_0^2 \int_q \frac{1}{\tilde{q}^2 + \xi(e'v_0)^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + \xi(e'v_0)^2} \rightarrow -e'^4 v_0^2 \int_q \frac{1}{(e'v_0)^4} = -\frac{1}{v_0^2} \neq 0 \quad (2.77)$$

Am einfachsten baut man diese Eigenschaft in die FEYNMAN-Regeln der unitären Eichung ein, indem man sich überlegt, daß externe Geist-Linien nicht vorkommen und nur ein Vertex mit Geist-Feldern existiert. Daher endet nämlich jede Geist-Linie in einem solchen Vertex, und man kann ein Element *Propagator+Vertex* als FEYNMAN-Regel benutzen:

$$-\frac{\xi v_0 e'^2}{\hat{q}^2 + \xi(e'v_0)^2} \rightarrow -\frac{1}{v_0} =: V_u^{(\sigma,2\eta)} \quad (2.78)$$

$V_u^{(\sigma,2\eta)}$ ist ein Dreier-Vertex mit einem σ -Bein und zwei zu unterscheidenden η -Beinen. Die Unterscheidung resultiert aus der Orientierung der Geist-Linien und dem an einem Bein angehängten Propagator. Da $V_u^{(\sigma,2\eta)}$ nicht vom Geist-Impuls abhängt und die Schleifen-Integrale auf Eins normiert sind, braucht über Geist-Schleifen nicht integriert zu werden, sie tragen aber als Fermion-Schleifen einen Faktor -1 bei. Die FEYNMAN-Regeln lauten folglich in der unitären Eichung (und in der FEYNMAN-Eichung $\xi' = 1$ für das Photon-Feld):

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma(p) &= \frac{1}{\hat{q}^2 + m_0^2} \\ \Delta_\Psi(p) &= D^{-1}(p) \left\{ \Delta_\Psi^{(1)}(p) - i\gamma_\mu \bar{p}_\mu \Delta_\Psi^{(2)}(p) \right\} \\ \Delta^{(Z)}_{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{\hat{k}^2 + M_Z^2} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{M_Z^2} \right) \\ \Delta_{\mu\nu}^{(A)}(k) &= \frac{\delta_{\mu\nu}}{\hat{k}^2} \\ V^{(3\sigma)} &= -\frac{g_0}{6} v_0 \\ V^{(4\sigma)} &= -\frac{g_0}{4!} \\ V^{(2\Psi,f,\sigma)} &= -G_\Psi \\ V_\mu^{(2\sigma,2kZ)}(q, q') &= \frac{(-1)^k}{(2k)!} e'^{2k} \cos \frac{q'_\mu + q_\mu}{2} \\ V_\mu^{(\sigma,2kZ)}(q) &= 2 \frac{(-1)^k}{(2k)!} e'^{2k} v_0 \cos \frac{q_\mu}{2} \\ V_{\mu\nu\rho\sigma}^{(4A)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{\epsilon^2}{48} \zeta_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ V_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2A,2Z)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{\epsilon^2}{8} \zeta_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ V_{\mu\nu\rho\sigma}^{(A,3Z)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{1}{12} \epsilon(e_L - e_R) \zeta_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) \\ V_{\mu\nu\rho\sigma}^{(4Z)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= \frac{1}{48} (\epsilon'^2 - 3\epsilon^2) \zeta_{\mu\nu\rho\sigma}(k_1, k_2, k_3, k_4) + \frac{1}{24} \epsilon'^2 M_Z^2 \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\rho} \delta_{\sigma\sigma} \\ \mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,A)}(p, p') &= ie \mathbf{V}_\mu^{(1)}(p' + p) \\ \mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,Z)}(p, p') &= i \mathbf{V}_\mu^{(1)}(p' + p) (e_L \mathbf{P}_L^{(f)} - e_R \mathbf{P}_R^{(f)}) \\ \mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,2A)}(p, p') &= \frac{\epsilon^2}{2} \mathbf{V}_\mu^{(2)}(p' + p) \\ \mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,2Z)}(p, p') &= \mathbf{V}_\mu^{(2)}(p' + p) (e_L^2 \mathbf{P}_L^{(f)} + e_R^2 \mathbf{P}_R^{(f)}) \\ \mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,A,Z)}(p, p') &= \mathbf{V}_\mu^{(2)}(p' + p) e(e_L \mathbf{P}_L^{(f)} - e_R \mathbf{P}_R^{(f)}) \\ V_u^{(\sigma,2\eta)} &= -\frac{1}{v_0} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Kapitel 3

Renormierung

In diesem Abschnitt wird die Renormierung der Theorie in der gebrochenen Phase in der Ein-Schleifen-Approximation durchgeführt. Dazu werden die üblichen Renormierungsbedingungen im unendlichen Volumen aufgeprägt.

3.1 Vakuumerwartungswert

3.1.1 Unrenormierter Vakuumerwartungswert

Der Vakuumerwartungswert des unrenormierten HIGGS-Feldes $\langle \sigma \rangle$ taucht zum einen in der Selbstenergie des HIGGS-Feldes auf, zum anderen liefert die renormierte Version eine Möglichkeit zur Definition der renormierten HIGGS-Selbstkopplung. Daher wird diese Hilfsgröße zunächst berechnet.

$\langle \sigma \rangle$ lässt sich als Wert der Einpunktfunction des σ -Feldes auffassen und daher als Summe von fünf (nicht amputierten) Graphen mit verschwindendem externem Impuls darstellen:

$$\langle \sigma \rangle = \mathcal{G}_1^{(1)} + \mathcal{G}_2^{(1)} + \mathcal{G}_3^{(1)} + \mathcal{G}_4^{(1)} + \mathcal{G}_5^{(1)} \quad (3.1)$$

Die einzelnen Graphen werden nun behandelt:

$$\mathcal{G}_1^{(1)} \hat{=} \text{---} \circ q$$

$$\mathcal{G}_1^{(1)} = \frac{24}{2!} \cdot \frac{1}{2} \Delta_\sigma(0) V^{(3\sigma)} \int_q \frac{1}{2} \Delta_\sigma(q) = -\frac{1}{2} \frac{v_0}{m_0^2} g_0 \int_q \frac{1}{\tilde{q}^2 + m_0^2} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{G}_2^{(1)} \quad \hat{=} \quad \text{---} \circ q$$

$$\mathcal{G}_2^{(1)} = 4 \cdot \frac{1}{2} \Delta_\sigma(0) V^{(\sigma, 2\pi)} \int_q \frac{1}{2} \Delta_\pi(q) = -\frac{1}{6} \frac{v_0}{m_0^2} g_0 \int_q \frac{1}{\tilde{q}^2 + m_{0\pi}^2} \quad (3.3)$$

$$\mathcal{G}_3^{(1)} \quad \hat{=} \quad \text{---} \circ \circ q$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3^{(1)} &= -2N_f \frac{1}{2} \Delta_\sigma(0) \int_q \text{Tr } \mathbf{V}^{(2\psi, \sigma)} \boldsymbol{\Delta}_\Psi(q) \\ &= \frac{v_0}{m_0^2} d N_f \int_q D^{-1}(q) \left\{ (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) \bar{p}^2 + 2G_{0\psi}^2 G_{0\chi}^2 v_0^2 - 2G_{0\chi} G_{0\psi} \mu_p^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\mathcal{G}_4^{(1)} \quad \hat{=} \quad \text{---} \circ \circ \circ q$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4^{(1)} &= 4 \cdot \frac{1}{2} \Delta_\sigma(0) \int_q V_\mu^{(\sigma, 2Z)}(0) \frac{1}{2} \Delta_{\mu\mu}^{(Z)}(q) \\ &= -\frac{v_0}{m_0^2} e'^2 \int_q \frac{1}{\tilde{q}^2 + M_Z^2} \left\{ d + (\xi - 1) \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{q}^2 + \xi M_Z^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dies kann noch vereinfacht werden, denn es gilt:

$$(\xi - 1) \tilde{q}^2 \frac{1}{\tilde{q}^2 + M_Z^2} \frac{1}{\tilde{q}^2 + \xi M_Z^2} = -\frac{1}{\tilde{q}^2 + M_Z^2} + \xi \frac{1}{\tilde{q}^2 + \xi M_Z^2}, \quad (3.6)$$

wie man leicht durch Multiplikation beider Seiten mit beiden Nennern zeigt; das Vorgehen entspricht einer Partialbruchzerlegung. Das Ergebnis ist:

$$\mathcal{G}_4^{(1)} = -\frac{v_0}{m_0^2} e'^2 \int_q \left\{ (d - 1) \frac{1}{\tilde{q}^2 + M_Z^2} + \xi \frac{1}{\tilde{q}^2 + \xi M_Z^2} \right\} \quad (3.7)$$

$$\mathcal{G}_5^{(1)} \quad \hat{=} \quad \text{---} \circ \circ \circ q$$

$$\mathcal{G}_5^{(1)} = -2 \cdot \frac{1}{2} \Delta_\sigma(0) V^{(\sigma, 2\eta)} \int_q \Delta_\eta(q) = \frac{v_0}{m_0^2} \xi e'^2 \int_q \frac{1}{\tilde{q}^2 + \xi M_Z^2} \quad (3.8)$$

Offenbar kompensiert dieser Graph genau den eichabhängigen Teil von $\mathcal{G}_4^{(1)}$. Insgesamt lautet der unrenormierte Erwartungswert also in Ein-Schleifen-Näherung:

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{v_0}{m_0^2} \left[-\frac{1}{2} g_0 \int_q \left\{ \frac{1}{\tilde{q}^2 + m_0^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\tilde{q}^2 + m_{0\pi}^2} \right\} \right. \\ &\quad + d N_f \int_q D^{-1}(q) \left\{ (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) \bar{p}^2 + 2G_{0\psi}^2 G_{0\chi}^2 v_0^2 - 2G_{0\chi} G_{0\psi} \mu_p^2 \right\} \\ &\quad \left. - (d - 1) e'^2 \int_q \frac{1}{\tilde{q}^2 + M_Z^2} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

In der gebrochenen Phase kann $m_{0\pi}^2$ durch ξM_Z^2 ersetzt werden. Damit ist der Vakuumerwartungswert eichabhängig! Dies ist bereits von Kontinuumstheorien bekannt [ACGQ73]. In der symmetrischen Phase verschwindet der Vakuumerwartungswert $\langle \sigma \rangle$.

Die Vakuumerwartungswerte aller anderen Felder verschwinden in beiden Phasen. Die Ursache dafür liegt beim Fermionfeld einfach im Fehlen entsprechender Graphen. Bei den übrigen Feldern tritt in der Ein-Schleifen-Approximation jeweils nur der Graph mit der Fermionschleife auf. Dieser verschwindet beim π -Feld aufgrund der chiralen Kopplung (2.39), bei den Eichfeldern kann FURRY's Theorem angewendet werden.

3.1.2 Renormierter Vakuumerwartungswert

Der renormierte Vakuumerwartungswert $v_R = \sqrt{2}\langle \phi_R \rangle$ ergibt sich nach (1.40) aus der unrenormierten Größe durch Multiplikation mit der Wellenfunktionsrenormierung des HIGGS-Feldes. Diese wird durch die Selbstenergien der Komponenten des HIGGS-Feldes bestimmt, siehe 3.2. In der Theorie ohne Eichfelder erzeugt das GOLDSTONE-Boson π eine Infrarot-Divergenz in Z_σ , daher definiert man dort [LMWG91, WIT92]:

$$v_R := Z_\pi^{-\frac{1}{2}}(v_0 + \langle \sigma \rangle) \quad (3.10)$$

Diese Definition wird hier auch für den geeichten Fall übernommen.

3.2 Higgs-Feld

3.2.1 Selbstenergie

Die Selbstenergie Σ , also die Summe aller amputierten Ein-Teilchen-irreduziblen Graphen, spielt bei der perturbativen Renormierung einer Feldtheorie eine zentrale Rolle, denn der volle Propagator lässt sich schreiben als:

$$G^{-1}(p) = \Delta^{-1}(p) - \Sigma(p) \quad (3.11)$$

Diese Beziehung gilt für alle Felder und im endlichen wie im unendlichen Volumen. Sie wird damit zur Grundlage der Definition renormierter Massen und der Wellenfunktionsrenormierung.

Für die Selbstenergie des σ -Feldes findet man in der Ein-Schleifen-Näherung zehn Graphen, schreibt also:

$$\Sigma_\sigma(p) = \sum_{n=1}^{10} \mathcal{G}_n^{(2)}(p) \quad (3.12)$$

$\mathcal{G}_1^{(2)}(p)$ enthält die fünf zum Vakuumerwartungswert beitragenden Graphen:

$$\mathcal{G}_1^{(2)}(p) \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \langle \sigma \rangle \\ | \\ p \end{array} q$$

$$\mathcal{G}_1^{(2)}(p) = 3! V^{(3\sigma)} \langle \sigma \rangle = -g_0 v_0 \langle \sigma \rangle \quad (3.13)$$

$$\mathcal{G}_2^{(2)}(p) \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} q \\ | \\ p \\ | \\ q + p \end{array}$$

$$\mathcal{G}_2^{(2)}(p) = \frac{288}{2! 2!} \int_q V^{(3\sigma)} \frac{1}{2} \Delta_\sigma(q) V^{(3\sigma)} \frac{1}{2} \Delta_\sigma(q+p) = \frac{1}{2} g_0^2 v_0^2 \int \frac{1}{\tilde{q}^2 + m_0^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + m_0^2} \quad (3.14)$$

$$\mathcal{G}_3^{(2)}(p) \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\mathcal{G}_3^{(2)}(p) = 4! \int_q V^{(4\sigma)} \frac{1}{2} \Delta_\sigma(q) = -\frac{g_0}{2} \int_q \frac{1}{\tilde{q}^2 + m_0^2} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{G}_4^{(2)}(p) \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} q \\ | \\ p \\ | \\ q + p \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4^{(2)}(p) &= \frac{32}{2! 2!} \int_q V^{(2\pi, \sigma)} \frac{1}{2} \Delta_\pi(q) V^{(2\pi, \sigma)} \frac{1}{2} \Delta_\pi(q+p) \\ &= \frac{1}{18} g_0^2 v_0^2 \int_q \frac{1}{\tilde{q}^2 + m_{0\pi}^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + m_{0\pi}^2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Falls $e' = 0$, also $m_{0\pi} = 0$ ist, erzeugt dieser Graph eine Infrarot-Singularität (nämlich bei $p = 0$) sowohl in der renormierten Masse über $\Sigma_\sigma(0)$ als auch in der Wellenfunktionsrenormierung Z_σ über die Ableitung nach p .

$$\mathcal{G}_5^{(2)}(p) \hat{=} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} q \\ | \\ p \\ | \\ q \end{array}$$

$$\mathcal{G}_5^{(2)}(p) = 4 \int_q V^{(2\pi, 2\sigma)} \frac{1}{2} \Delta_\sigma(q) = -\frac{g_0}{6} \int_q \frac{1}{\tilde{q}^2 + m_{0\pi}^2} \quad (3.17)$$

$$\mathcal{G}_6^{(2)}(p) \hat{=} \frac{p}{\overbrace{q+p}^{\text{---}}}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_6^{(2)}(p) &= -\frac{4N_f}{2!2!} \int_q \text{Tr } \mathbf{V}^{(2\psi,\sigma)} \Delta_\Psi(q) \mathbf{V}^{(2\psi,\sigma)} \Delta_\Psi(q+p) \\
&= -dN_f \int_q D^{-1}(q) D^{-1}(q+p) \\
&\quad \times \left\{ G_{0\psi}^2 v_0^2 (G_{0\psi}(\bar{q}^2 + \mu_{0\chi}^2) - G_{0\chi}\mu_q^2)(G_{0\psi}(\bar{q}^2 + \mu_{0\chi}^2) - G_{0\chi}\mu_{q+p}^2) \right. \\
&\quad + G_{0\psi} G_{0\chi} \mu_q \mu_{q+p} (\bar{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi})(\bar{q}^2 + \mu_{q+p}^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) \\
&\quad - G_{0\psi}^2 \bar{q} \bar{q} + p (\bar{q}^2 + \mu_q^2 + \mu_{0\chi}^2)(\bar{q}^2 + \mu_{q+p}^2 + \mu_{0\chi}^2) \\
&\quad \left. - G_{0\psi} G_{0\chi} \bar{q} \bar{q} + p \mu_q \mu_{q+p} (\mu_{0\psi} + \mu_{0\chi})^2 + (\psi \mapsto \chi) \right\} \\
&\tag{3.18}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_7^{(2)}(p) \hat{=} \frac{p}{\overbrace{\text{---}}^q}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_7^{(2)}(p) &= \frac{32}{2!2!} \int_q V_\mu^{(2Z,\sigma)}(p) \frac{1}{2} \Delta_{\mu\nu}^{(Z)}(q+p) V_\nu^{(2Z,\sigma)}(p) \frac{1}{2} \Delta_{\mu\nu}^{(Z)}(q) \\
&= 2v_0^2 e'^4 \cos \frac{p_\mu}{2} \cos \frac{p_\nu}{2} \int_q \frac{1}{\bar{q}^2 + M_Z^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + M_Z^2} \left(\delta_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu}(\xi - 1) \frac{\widehat{q}_\mu^2}{\bar{q}^2 + \xi M_Z^2} \right. \\
&\quad \left. + \delta_{\mu\nu}(\xi - 1) \frac{\widehat{q}_\mu \widehat{p}_\mu}{\widehat{q+p}^2 + \xi M_Z^2} + (\xi - 1)^2 \frac{\widehat{q}_\mu \widehat{q}_\nu}{\bar{q}^2 + \xi M_Z^2} \frac{\widehat{q}_\mu \widehat{p}_\mu \widehat{q}_\nu \widehat{p}_\nu}{\widehat{q+p}^2 + \xi M_Z^2} \right) \\
&\tag{3.19}
\end{aligned}$$

Für $p = 0$ lautet dies unter Benutzung der Identität (3.6):

$$\mathcal{G}_7^{(2)}(0) = 2v_0^2 e'^4 \int_q \left[(d-1) \left(\frac{1}{\bar{q}^2 + M_Z^2} \right)^2 + \xi^2 \left(\frac{1}{\bar{q}^2 + \xi M_Z^2} \right)^2 \right], \tag{3.20}$$

$$\mathcal{G}_8^{(2)}(p) \hat{=} \underline{\overbrace{\text{---}}^q}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_8^{(2)}(p) &= 4V_\mu^{(2Z,2\sigma)}(p,p) \int_q \frac{1}{2} \Delta_{\mu\mu}^{(Z)}(q) \\
&= -e'^2 \sum_{\mu+} \cos p_\mu \int_q \left\{ \left(1 - \frac{1}{d} \right) \frac{1}{\bar{q}^2 + M_Z^2} + \frac{\xi}{d} \frac{\widehat{q}^2}{\bar{q}^2 + \xi M_Z^2} \right\} \\
&\tag{3.21}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_9^{(2)}(p) \hat{=} \begin{array}{c} q \\ \text{---} \\ | \curvearrowleft \curvearrowright | \\ p \quad \quad \quad q+p \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_9^{(2)}(p) &= \frac{8}{2!} \int_q V_\mu^{(\sigma, \pi, Z)}(q, -p) V_\nu^{(\sigma, \pi, Z)}(-q, p) \frac{1}{2} \Delta_\pi(q) \frac{1}{2} \Delta_{\mu\nu}^{(Z)}(q + p) \\ &= e'^2 \int_q \frac{1}{\widehat{q}^2 + m_{0\pi}^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + M_Z^2} \left(\widehat{q-p}^2 + (\xi - 1) \frac{(\widehat{q+p} \cdot \widehat{q-p})^2}{\widehat{q+p}^2 + \xi M_Z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dies vereinfacht sich für $p = 0$ zu:

$$\mathcal{G}_9^{(2)}(0) = \xi e'^2 \int_q \frac{1}{\widehat{q}^2 + \xi M_Z^2} \frac{\widehat{q}^2}{\widehat{q}^2 + m_{0\pi}^2} \quad (3.23)$$

$$\mathcal{G}_{10}^{(2)}(p) \hat{=} \begin{array}{c} q \\ \text{---} \\ | \curvearrowleft \curvearrowright | \\ p \quad \quad \quad q+p \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{10}^{(2)}(p) &= -\frac{4}{2! 2!} \left(V^{(2\eta, \sigma)} \right)^2 \int_q \Delta_\eta(q) \Delta_\eta(q + p) \\ &= -\xi^2 e'^4 v_0^2 \int_q \frac{1}{\widehat{q}^2 + \xi M_Z^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + \xi M_Z^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Wegen ihrer besonderen Bedeutung soll die Selbstenergie hier der Übersichtlichkeit

halber noch einmal vollständig aufgeführt werden:

$$\begin{aligned}
 \Sigma_\sigma(p) = & -\frac{g_0 v_0^2}{m_0^2} \left[-\frac{1}{2} g_0 \int_q \left\{ \frac{1}{q^2 + m_0^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{q^2 + m_{0\pi}^2} \right\} \right. \\
 & + d N_f \int_q D^{-1}(q) \left\{ (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) \bar{p}^2 + 2 G_{0\psi}^2 G_{0\chi}^2 v_0^2 - 2 G_{0\chi} G_{0\psi} \mu_p^2 \right\} \\
 & \left. - (d-1) \epsilon'^2 \int_q \frac{1}{q^2 + M_Z^2} \right] \\
 & - \frac{g_0}{2} \int_q \left\{ \frac{1}{q^2 + m_0^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{q^2 + m_{0\pi}^2} \right\} \\
 & + \frac{1}{2} g_0^2 v_0^2 \int \left\{ \frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + m_0^2} + \frac{1}{9} \frac{1}{q^2 + m_{0\pi}^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + m_{0\pi}^2} \right\} \\
 & - d N_f \int_q D^{-1}(q) D^{-1}(q+p) \\
 & \times \left\{ G_{0\psi}^2 v_0^2 (G_{0\psi}(\bar{q}^2 + \mu_{0\chi}^2) - G_{0\chi} \mu_q^2) (G_{0\psi}(\bar{q}^2 + \mu_{0\chi}^2) - G_{0\chi} \mu_{q+p}^2) \right. \\
 & + G_{0\psi} G_{0\chi} \mu_q \mu_{q+p} (\bar{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) (\bar{q}^2 + \mu_{q+p}^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) \\
 & - G_{0\psi}^2 \bar{q} \bar{q} + \bar{p} (\bar{q}^2 + \mu_q^2 + \mu_{0\chi}^2) (\bar{q}^2 + \mu_{q+p}^2 + \mu_{0\chi}^2) \\
 & - G_{0\psi} G_{0\chi} \bar{q} \bar{q} + \bar{p} \mu_q \mu_{q+p} (\mu_{0\psi} + \mu_{0\chi})^2 + (\psi \mapsto \chi) \} \\
 & + 2 v_0^2 \epsilon'^4 \cos \frac{p_\mu}{2} \cos \frac{p_\nu}{2} \int_q \frac{1}{q^2 + M_Z^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + M_Z^2} \left(\delta_{\mu\nu} + \delta_{\mu\nu} (\xi - 1) \frac{\widehat{q}_\mu^2}{q^2 + \xi M_Z^2} \right. \\
 & \left. + \delta_{\mu\nu} (\xi - 1) \frac{\widehat{q}_\mu + \widehat{p}_\mu}{q^2 + \xi M_Z^2} + (\xi - 1)^2 \frac{\widehat{q}_\mu \widehat{q}_\nu}{q^2 + \xi M_Z^2} \frac{\widehat{q}_\mu + \widehat{p}_\mu \widehat{q}_\nu + \widehat{p}_\nu}{q^2 + \xi M_Z^2} \right) \\
 & - \epsilon'^2 \sum_{\mu+} \cos p_\mu \int_q \left\{ \left(1 - \frac{1}{d} \right) \frac{1}{q^2 + M_Z^2} + \frac{\xi}{d} \frac{\widehat{q}^2}{q^2 + \xi M_Z^2} \right\} \\
 & + \epsilon'^2 \int_q \frac{1}{q^2 + m_{0\pi}^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + M_Z^2} \left(\widehat{q-p}^2 + (\xi - 1) \frac{(\widehat{q+p} \cdot \widehat{q-p})^2}{q^2 + \xi M_Z^2} \right) \\
 & - \xi^2 \epsilon'^4 v_0^2 \int_q \frac{1}{q^2 + \xi M_Z^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + \xi M_Z^2} \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

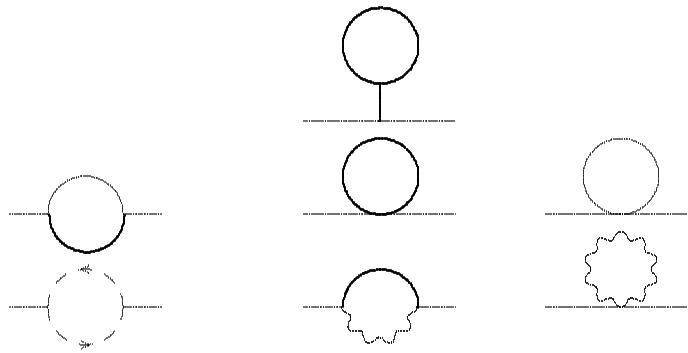


Abbildung 3.1: Selbstenergie-Graphen des π -Feldes

Völlig analog erhält man durch Aufsummation der sieben Ein-Schleifen-Graphen

aus Abb. 3.1 die Selbstenergie des π -Feldes:

$$\begin{aligned}
\Sigma_\pi(p) = & -\frac{1}{3}g_0v_0\langle\sigma\rangle - \frac{1}{2}g_0 \int_q \left(\frac{1}{\hat{q}^2+m_{0\pi}^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{\hat{q}^2+m_0^2} \right) \\
& + 4N_f \int_q D^{-1}(q)D^{-1}(q+p) \\
& \times \left\{ G_{0\psi}^2 v_0^2 (G_{0\psi}(\bar{q}^2 + \mu_{0\chi}^2) - G_{0\chi}\mu_q^2) (G_{0\psi}(\bar{q}^2 + p^2 + \mu_{0\chi}^2) - G_{0\chi}\mu_{q+p}^2) \right. \\
& - G_{0\psi}G_{0\chi}\mu_q\mu_{q+p}(\bar{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi})(\bar{q}^2 + p^2 + \mu_{q+p}^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}) \\
& + G_{0\psi}^2 \bar{q}\bar{q} + p(\bar{q}^2 + \mu_q^2 + \mu_{0\chi}^2)(\bar{q}^2 + p^2 + \mu_{q+p}^2 + \mu_{0\chi}^2) \\
& - G_{0\psi}G_{0\chi}\bar{q}\bar{q} + p\mu_q\mu_{q+p}(\mu_{0\psi} + \mu_{0\chi})^2 + (\psi \mapsto \chi) \} \\
& - e'^2 \sum_{\mu+} \cos p_\mu \int_q \left\{ \left(1 - \frac{1}{d}\right) \frac{1}{\hat{q}^2 + M_Z^2} + \frac{\xi}{d} \frac{\hat{q}^2}{\hat{q}^2 + \xi M_Z^2} \right\} \\
& + e'^2 \int_q \frac{1}{\hat{q}^2 + m_0^2} \frac{1}{\hat{q}^2 - p^2 + M_Z^2} \left(\hat{p}^2 + \hat{q}^2 + (\xi - 1) \frac{(\hat{q}^2 + \hat{p}^2)^2}{\hat{q}^2 - p^2 + \xi M_Z^2} \right) \\
& + \frac{1}{9}g_0^2 v_0^2 \int_q \frac{1}{\hat{q}^2 + m_0^2} \frac{1}{\hat{q}^2 + m_{0\pi}^2} \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Setzt man in diese Ausdrücke die in der Phase gebrochener Symmetrie geltenden Beziehungen ein, so werden für $e' = 0$ die Ergebnisse aus [LMWG91] reproduziert.

3.2.2 Renormierte Masse

Der inverse volle Propagator des unrenormierten σ -Feldes lässt sich mit Hilfe der Selbstenergie Σ_σ folgendermaßen schreiben:

$$G_\sigma^{-1}(p) = \hat{p}^2 + m_0^2 - \Sigma_\sigma(p) \tag{3.27}$$

Die Renormierungsbedingung lautet im unendlichen Volumen:

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} G_{R\sigma}^{-1}(p) \right|_{p=0} = 1 \tag{3.28}$$

Dort wird die TAYLOR-Entwicklung der Selbstenergie um $p = 0$ durch die Forderung nach Kovarianz eingeschränkt (vgl. Abschnitt 4.2.1):

$$\Sigma_\sigma(p) = \Sigma_\sigma(0) + \frac{1}{8}p^2 \Sigma''_\sigma(0) + \mathcal{O}(p^4) \quad ; \quad \Sigma''_\sigma(p) = \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma_\sigma(p) \tag{3.29}$$

Mit der Wellenfunktionsrenormierung

$$Z_\sigma^{-1} = 1 - \frac{1}{8}\Sigma''_\sigma(0) \tag{3.30}$$

ergibt sich:

$$G_\sigma^{-1}(p) = m_0^2 - \Sigma_\sigma(0) + Z_\sigma^{-1}\hat{p}^2 + \mathcal{O}(p^4) \tag{3.31}$$

Damit erfüllt

$$G_{R\sigma}^{-1}(p) := Z_\sigma G_\sigma^{-1}(p) = m_{R\sigma}^2 + \hat{p}^2 + \mathcal{O}(p^4) \quad (3.32)$$

mit der renormierten Masse

$$m_R^2 := Z_\sigma(m_0^2 - \Sigma_\sigma(0)) \quad (3.33)$$

die Renormierungsbedingung. Da der renormierte Propagator mit dem Erwartungswert eines Produktes aus zwei renormierten Feldern identisch ist, gilt der Zusammenhang

$$\sigma_{Rx} = Z_\sigma^{-\frac{1}{2}} \sigma_x. \quad (3.34)$$

Mit den Gleichungen (3.33) und (3.30) kann die renormierte Masse des HIGGS-Feldes aus der Selbstenergie bestimmt werden.

Die Behandlung des π -Feldes verläuft analog, das renormierte Feld lautet:

$$\pi_{Rx} = Z_\pi^{-\frac{1}{2}} \pi_x \quad Z_\pi^{-1} = 1 - \frac{1}{8} \left. \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma_\pi(p) \right|_{p=0} \quad (3.35)$$

Explizit lautet die renormierte Masse im unendlichen Volumen:

$$\begin{aligned} m_R^2 &= m_0^2 \\ &- g_0 \int_q \left\{ \frac{1}{q^2+m_0^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{q^2+\xi M_Z^2} \right\} - \frac{3}{2} g_0 m_0^2 \int_q \left\{ \left(\frac{1}{q^2+m_0^2} \right)^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{q^2+\xi M_Z^2} \right)^2 \right\} \\ &+ 3dN_f \int_q D^{-1}(q) \left\{ (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) \bar{q}^2 + 2G_{0\psi}^2 G_{0\chi}^2 v_0^2 - 2G_{0\chi} G_{0\psi} \mu_q^2 \right\} \\ &+ dN_f \int_q D^{-2}(q) \left\{ G_{0\psi}^2 v_0^2 (G_{0\psi}(\bar{q}^2 + \mu_{0\chi}^2) - G_{0\chi} \mu_q^2)^2 \right. \\ &\quad \left. + G_{0\psi} G_{0\chi} \mu_q^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi})^2 - G_{0\psi}^2 \bar{q}^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2 + \mu_{0\chi}^2)^2 \right. \\ &\quad \left. - G_{0\psi} G_{0\chi} \bar{q}^2 \mu_q^2 (\mu_{0\psi} + \mu_{0\chi})^2 + (\psi \mapsto \chi) \right\} \\ &- 2(d-1) e'^2 \int_q \frac{1}{q^2+M_Z^2} - 2v_0^2 e'^4 (d-1) \int_q \left(\frac{1}{q^2+M_Z^2} \right)^2 + m_0^2 (Z_\sigma - 1) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Im endlichen Volumen muß diese Renormierungsprozedur etwas geändert werden (siehe 4.2.1), jedoch genügt auch dort die Kenntnis der Selbstenergien — welche sich aufgrund der identischen FEYNMAN-Regeln im endlichen Volumen formal nicht von jenen im unendlichen Volumen unterscheiden — zur Berechnung der renormierten Größen.

3.2.3 Pol-Masse

In der ungeeichten Theorie führt die verschwindende Masse des GOLDSTONE-Bosons π zu einer Infrarot-Divergenz der renormierten Masse [LMWG91]. In diesem Fall

verwendet man daher die Pol-Masse des HIGGS-Feldes, welche durch den komplexen Pol im_{ph} des HIGGS-Propagators gegeben ist. Im Kontinuum sind in der Baum-Approximation renormierte und Pol-Masse identisch, denn dort gilt:

$$G_\sigma^{-1}(p) = m_0^2 + p^2 \quad (3.37)$$

Bei endlicher Gitterkonstante gibt es bereits in der Baum-Approximation einen Unterschied:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} G_\sigma^{-1}(\vec{0}, im_p^{(0)}) = m_0^2 + 4 \sin^2 \frac{im_p^{(0)}}{2} \\ &\Rightarrow \quad m_p^{(0)} = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{m_0}{2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

In höheren Störungsordnungen ergibt sich:

$$m_p = 2 \operatorname{arcsinh} \frac{1}{2} \sqrt{m_0^2 - \Sigma_\sigma(\vec{0}, im_p)} \quad (3.39)$$

Σ_σ ist proportional zu Potenzen der Kopplungen, eine Entwicklung liefert daher in der Ein-Schleifen-Approximation:

$$m_p = m_p^{(0)} - \frac{1}{2 \sinh m_p^{(0)}} \Sigma_\sigma(\vec{0}, im_p) \quad (3.40)$$

Nun kann m_p rekursiv eingesetzt werden. In der niedrigsten Ordnung bricht man sofort ab und erhält

$$m_p = m_p^{(0)} - \frac{1}{2 \sinh m_p^{(0)}} \Sigma_\sigma(\vec{0}, im_p^{(0)}). \quad (3.41)$$

Die Auswertung der Selbstenergie bei komplexem Argument erweist sich als aufwendig. Sie wurde daher ausschließlich numerisch durchgeführt.

3.2.4 Physikalische Masse

Die bisher besprochenen Größen werden rein perturbativ aus Eigenschaften des Propagators bestimmt. Die Masse des durch eine Feldtheorie beschriebenen Teilchens ist aber definiert durch den niedrigsten Eigenwert der Transfermatrix. Dieser dominiert das exponentielle Abfallverhalten der Zeitscheiben-Korrelation [MM94, S. 60]:

$$C(\vec{p}, t) := \int \frac{dp_4}{2\pi} G(\vec{p}, p_4) e^{ip_4 t} \quad (3.42)$$

bei verschwindendem räumlichem Impuls:

$$C(0, t) = \sum_k c_k e^{-E_k t} \quad (3.43)$$

mit den Eigenwerten E_k des Gitter-Hamilton-Operators. Im unendlichen Volumen kann man $t \rightarrow \infty$ betrachten und $m_{ph} := E_0$ als inverse Korrelationslänge oder physikalische Masse der Ein-Teilchen-Zustände identifizieren.

Die Bedeutung der Pol-Masse röhrt nun daher, daß man im unendlichen Volumen (genauer für $T = \infty$) ihre Übereinstimmung mit der physikalischen Masse exakt zeigen kann. Dazu ersetzt man den Integrationsweg in (3.42) durch einen geeignet gewählten Weg in der komplexen p_4 -Ebene um den Pol bei $p_4 = im_p$ und benutzt den Residuensatz, um zu zeigen:

$$C(0, t) \rightarrow \text{const} \cdot e^{-m_p t} \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad (3.44)$$

In einem endlichen Volumen sind beide Größen nicht identisch, siehe dazu Abschnitt 4.3.2.

3.2.5 Quartische Kopplung

Renormierte Kopplungen werden im allgemeinen durch Werte von Vertex-Funktionen bei gewissen Impulsen definiert. In der Phase gebrochener Symmetrie gibt es jedoch die Möglichkeit, die Beziehung (1.44) auszunutzen und die Selbstkopplung des HIGGS-Feldes mit Hilfe des Vakuumerwartungswertes zu definieren ([MM94, S. 71], [LW88]):

$$g_R := \frac{3m_R^2}{v_R^2}. \quad (3.45)$$

Verwendet man (3.33) und (3.10), so gelangt man zu der Störungsentwicklung

$$g_R = g_0 - \frac{3}{v_0^2} \Sigma_\sigma(0) - \frac{2g_0}{v_0} \langle \sigma \rangle + g_0(Z_\sigma - 1) + g_0(Z_\pi - 1) \quad (3.46)$$

In der ungeeichten Theorie divergiert die renormierte Masse. Dort verwendet man daher die Pol-Kopplung:

$$g_p := \frac{3m_p^2}{v_R^2}. \quad (3.47)$$

Wie in [WIT92] genau ausgeführt wird, ist dann aber – insbesondere beim Übergang zur renormierten Störungstheorie – zu beachten:

$$g_p = \frac{3m_p^{(0)2}}{v_0^2} + \mathcal{O}(g_0^2) \neq g_0 + \mathcal{O}(g_0^2), \quad (3.48)$$

mit $g_p^{(0)} := 3m_p^{(0)2}/v_0^2$ gilt vielmehr:

$$g_p = g_p^{(0)} - \frac{3m_p^{(0)}}{v_0^2 \sinh m_p^{(0)}} \Sigma_\sigma(\vec{0}, im_p^{(0)}) - \frac{2g_p^{(0)}}{v_0} \langle \sigma \rangle + g_p^{(0)}(Z_\pi - 1). \quad (3.49)$$

3.3 Fermion-Feld

Die Definition und Berechnung renormierter Größen gestaltet sich für die Fermionen aufgrund der Struktur des Fermionfeldes aufwendiger als im skalaren Sektor.

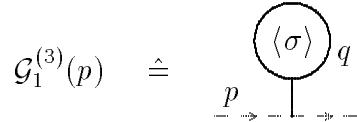
Am Prinzip der Vorgehensweise ändert sich jedoch nichts: Zunächst wird die Selbstenergie berechnet, mit deren Hilfe der volle Propagator dargestellt werden kann. An diesen werden Renormierungsbedingungen gestellt und damit die renormierten Größen definiert. Dies geschieht hier für die erste Fermion-Generation $f = 1$.

3.3.1 Fermion-Selbstenergie

In Ein-Schleifen-Approximation findet man fünf Graphen:

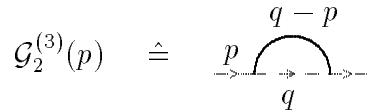
$$\Sigma_\Psi(p) = \sum_{n=1}^5 \mathcal{G}_n^{(3)}(p) \quad (3.50)$$

Der erste Graph enthält wieder die “Tadpole”-Beiträge:

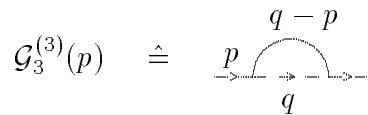


$$\mathcal{G}_1^{(3)}(p) = \mathbf{V}^{(2ψ, σ)}⟨σ⟩ = -\mathbf{G}_{0\Psi}⟨σ⟩ \quad (3.51)$$

Es wären hier im Prinzip Graphen mit Insertionen der A -, Z - und $π$ -Einpunktfunktionen denkbar. Diese sind aber proportional zu den entsprechenden Vakuumerwartungswerten und verschwinden daher.



$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2^{(3)}(p) &= \frac{4}{2!} \int_q \frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{q-p}^2 + m_0^2} \mathbf{V}^{(2ψ, σ)} \Delta_\Psi(q) \mathbf{V}^{(2ψ, σ)} \\ &= \int_q \frac{1}{\cancel{q-p}^2 + m_0^2} \mathbf{G}_{0\Psi} \Delta_\Psi(q) \mathbf{G}_{0\Psi} \end{aligned} \quad (3.52)$$



$$\mathcal{G}_3^{(3)}(p) = \frac{4}{2!} \int_q \frac{1}{2} \Delta_\pi(q-p) \mathbf{V}^{(2ψ, π)} \Delta_\Psi(q) \mathbf{V}^{(2ψ, π)} \quad (3.53)$$

Bei Benutzung von (A.16) wird hieraus:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3ψψ}^{(3)}(p) &= -G_{0ψ}^2 \int_q \frac{1}{\cancel{q-p}^2 + m_{0π}^2} \left\{ \Delta_{11}^{(1)}(q) + iγ_μ \bar{q}_μ \Delta_{11}^{(2)}(q) \right\} \\ \mathcal{G}_{3ψχ}^{(3)}(p) &= G_{0ψ} G_{0χ} \int_q \frac{1}{\cancel{q-p}^2 + m_{0π}^2} \left\{ \Delta_{12}^{(1)}(q) + iγ_μ \bar{q}_μ \Delta_{12}^{(2)}(q) \right\} \\ \mathcal{G}_{3χχ}^{(3)}(p) &= \mathcal{G}_{3ψψ}^{(3)}(p) \Big|_{ψ↔χ} \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\mathcal{G}_4^{(3)}(p) \quad \hat{=} \quad \begin{array}{c} q-p \\ \text{Diagramm: } p \xrightarrow{\text{---}} \text{---} \xrightarrow{\text{---}} \text{---} \\ q \end{array}$$

Dieser Graph ist mit den Eichfeldern Z und A getrennt zu berechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4^{(3Z)}(p) &= \frac{4}{2!} \int_q \frac{1}{2} \Delta_{\mu\nu}^{(Z)}(q-p) \mathbf{V}_{\mu}^{(2\psi,Z)}(p,q) \boldsymbol{\Delta}_{\Psi}(q) \mathbf{V}_{\nu}^{(2\psi,Z)}(q,p) \\ &= - \int_q D^{-1}(q) \Delta_{\mu\nu}^{(Z)}(q-p) \mathbf{V}_{\mu}^{(1)}(p+q) (e_L \mathbf{P}_L - e_R \mathbf{P}_R) \\ &\quad \times (\boldsymbol{\Delta}_{\Psi}^{(1)}(q) - i\gamma_{\sigma} \bar{q}_{\sigma} \boldsymbol{\Delta}_{\Psi}^{(2)}(q)) \mathbf{V}_{\nu}^{(1)}(p+q) (e_L \mathbf{P}_L - e_R \mathbf{P}_R), \end{aligned} \quad (3.55)$$

Benutzt man die Definitionen aus (A.15) und (A.16), so führt dies in der 'T HOOFT-FEYNMAN-Eichung mit $\xi = 1$ auf:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4^{(3Z)}(p) &= - \int_q D^{-1}(q) \frac{1}{\overline{q-p} + M_Z^2} (e_L^2 \mathbf{X}^{nd} - e^2 \mathbf{X}^{dn}) \mathbf{P}_L \\ &\quad - \int_q D^{-1}(q) \frac{1}{\overline{q-p} + M_Z^2} (e_R^2 \mathbf{X}^{nd} - e^2 \mathbf{X}^{dn}) \mathbf{P}_R \\ \mathbf{X}^{nd} &= \mathbf{V}_{\mu}^{(1)}(p+q) \left(\boldsymbol{\Delta}_{\Psi}^{(1)}{}^n(q) - i\gamma_{\sigma} \bar{q}_{\sigma} \boldsymbol{\Delta}_{\Psi}^{(2)}{}^d(q) \right) \mathbf{V}_{\mu}^{(1)}(p+q) \\ \mathbf{X}^{dn} &= \mathbf{V}_{\mu}^{(1)}(p+q) \left(\boldsymbol{\Delta}_{\Psi}^{(1)}{}^d(q) - i\gamma_{\sigma} \bar{q}_{\sigma} \boldsymbol{\Delta}_{\Psi}^{(2)}{}^n(q) \right) \mathbf{V}_{\mu}^{(1)}(p+q) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Hier wird deutlich, daß die Selbstenergie für $e_L \neq e_R$ in links- und rechtshändige Beiträge aufgespalten werden muß. Dies führt auf unterschiedliche renormierte Größen für die entsprechenden Feldanteile. Im folgenden wird immer der linkshändige Fermion-Anteil betrachtet, den Beitrag zur Selbstenergie des rechtshändigen Fermions erhält man durch Ersetzen von e_L mit e_R . Einsetzen der bekannten Ausdrücke liefert schließlich:

$$\begin{aligned} X_{\psi\psi}^{nd} &= -2i\gamma_{\sigma} \bar{q}_{\sigma} \cos^2 \frac{q_{\sigma}+p_{\sigma}}{2} \Delta_{\psi\psi}^{(2)}(q) - i\gamma_{\sigma} \bar{q}_{\sigma} \left(d - \frac{1}{4} \overline{q+p}^2 \right) \Delta_{\psi\psi}^{(2)}(q) \\ &\quad + \frac{ir^2}{4} \gamma_{\sigma} \bar{q}_{\sigma} \overline{q+p}^2 \Delta_{\chi\chi}^{(1)}(q) - ir\gamma_{\mu} \overline{q_{\mu}+p_{\mu}} \Delta_{\psi\chi}^{(1)}(q) \\ X_{\psi\chi}^{nd} &= \left(d - \frac{1+r^2}{4} \overline{q+p}^2 \right) \Delta_{\psi\chi}^{(1)}(q) - \frac{r}{2} \left(\gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} \Delta_{\psi\psi}^{(2)}(q) + \gamma_{\mu} \gamma_{\sigma} \Delta_{\chi\chi}^{(2)}(q) \right) \bar{q}_{\sigma} \overline{q_{\mu}+p_{\mu}} \\ X_{\chi\chi}^{nd} &= X_{\psi\psi}^{nd} \Big|_{\psi \leftrightarrow \chi} \\ X_{\psi\psi}^{dn} &= \left(d - \frac{1}{4} \overline{q+p}^2 \right) \Delta_{\psi\psi}^{(1)}(q) - \frac{r^2}{4} \overline{q+p}^2 \Delta_{\chi\chi}^{(1)}(q) - r \overline{q} \overline{q+p} \Delta_{\psi\chi}^{(2)}(q) \\ X_{\psi\chi}^{dn} &= -\frac{ir}{2} \gamma_{\mu} \overline{q_{\mu}+p_{\mu}} \left(\Delta_{\psi\psi}^{(1)}(q) + \Delta_{\chi\chi}^{(1)}(q) \right) + i\gamma_{\sigma} \bar{q}_{\sigma} \left(d - \frac{1-r^2}{4} \overline{q+p}^2 \right) \Delta_{\psi\chi}^{(2)}(q) \\ &\quad - 2i\gamma_{\sigma} \bar{q}_{\sigma} \cos^2 \frac{q_{\sigma}+p_{\sigma}}{2} \Delta_{\psi\chi}^{(2)}(q) \\ X_{\chi\chi}^{dn} &= X_{\psi\psi}^{dn} \Big|_{\psi \leftrightarrow \chi} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Für den Graph mit Photonenfeld gilt in FEYNMAN-Eichung $\xi' = 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_4^{(3A)}(p) &= \int_q \Delta_{\mu\nu}^{(A)}(q-p) V_{\mu}^{(2\psi,A)}(p,q) \boldsymbol{\Delta}_{\Psi}(q) V_{\nu}^{(2\psi,A)}(q,p) \\ &= -e^2 \int_q D^{-1}(q) \frac{1}{\overline{q-p}^2} (\mathbf{X}^{dn} + \mathbf{X}^{nd}) \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\mathcal{G}_5^{(3)}(p) \hat{=} \text{Diagramm mit einem vertikalen Pfeil } p \text{ und einem geschweiften Klammerstrich } q.$$

Auch dieser Graph liefert für die beiden Eichfelder getrennte Beiträge:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_5^{(3Z)}(p) &= 2\mathbf{V}_\mu^{(2\psi, 2Z)}(p, p) \int_q \frac{1}{2} \Delta_{\mu\mu}^{(Z)}(q) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{V}_\mu^{(2)}(p) (\epsilon_L^2 \mathbf{P}_L + \epsilon_R^2 \mathbf{P}_R) \int_q \Delta_{\mu\mu}^{(Z)}(q) \end{aligned} \quad (3.59)$$

und analog:

$$\mathcal{G}_5^{(3A)}(p) = -\frac{e^2}{2} \mathbf{V}_\mu^{(2)}(p) \int_q \Delta_{\mu\mu}^{(A)}(q) \quad (3.60)$$

Zusammenfassend gilt also für die Selbstenergie des linkshändigen Anteils der ersten Fermionengeneration in FEYNMAN-'T HOOFT-Eichung $\xi = \xi' = 1$:

$$\begin{aligned} \Sigma_\Psi(p) &= \Sigma_{\Psi L}(p) \mathbf{P}_L + \Sigma_{\Psi R}(p) \mathbf{P}_R \\ \Sigma_{\psi\psi L}(p) &= -G_{0\psi} \langle \sigma \rangle + G_{0\Psi}^2 \int_q D^{-1}(q) \frac{1}{\widetilde{q-p}^2 + m_0^2} \left(\Delta_{\psi\psi}^{(1)}(q) - i\gamma_\mu \bar{q}_\mu \Delta_{\psi\psi}^{(2)}(q) \right) \\ &\quad - G_{0\Psi}^2 \int_q D^{-1}(q) \frac{1}{\widetilde{q-p}^2 + m_{0\pi}^2} \left(\Delta_{\psi\psi}^{(1)}(q) + i\gamma_\mu \bar{q}_\mu \Delta_{\psi\psi}^{(2)}(q) \right) \\ &\quad - \int_q D^{-1}(q) \left\{ \frac{\epsilon_L^2}{\widetilde{q-p}^2 + M_Z^2} + \frac{\epsilon^2}{\widetilde{q-p}^2} \right\} \\ &\quad \times \left\{ -2i\gamma_\sigma \bar{q}_\sigma \cos^2 \frac{\widetilde{q}_\sigma + p_\sigma}{2} \Delta_{\psi\psi}^{(2)}(q) - i\gamma_\sigma \bar{q}_\sigma \left(d - \frac{1}{4} \widetilde{q} \cdot \widetilde{p}^2 \right) \Delta_{\psi\psi}^{(2)}(q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{ir^2}{4} \gamma_\sigma \bar{q}_\sigma \widetilde{q} \cdot \widetilde{p}^2 \Delta_{\chi\chi}^{(1)}(q) - ir\gamma_\mu \overline{q_\mu + p_\mu} \Delta_{\psi\chi}^{(1)}(q) \right\} \\ &\quad + e^2 \int_q D^{-1}(q) \left\{ \frac{1}{\widetilde{q-p}^2 + M_Z^2} - \frac{1}{\widetilde{q-p}^2} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \left(d - \frac{1}{4} \widetilde{q} \cdot \widetilde{p}^2 \right) \Delta_{\psi\psi}^{(1)}(q) - \frac{r^2}{4} \widetilde{q} \cdot \widetilde{p}^2 \Delta_{\chi\chi}^{(1)}(q) - r \bar{q} \overline{q + p} \Delta_{\psi\chi}^{(2)}(q) \right\} \\ &\quad + \frac{i}{2} \epsilon_L^2 \gamma_\mu \bar{p}_\mu \int_q \frac{1}{\widetilde{q}^2 + M_Z^2} + \frac{i}{2} e^2 \gamma_\mu \bar{p}_\mu \int_q \frac{1}{\widetilde{q}^2} \\ \Sigma_{\psi\chi L}(p) &= G_{0\psi} G_{0\chi} \int_q D^{-1}(q) \frac{1}{\widetilde{q-p}^2 + m_0^2} \left(\Delta_{\psi\chi}^{(1)}(q) - i\gamma_\mu \bar{q}_\mu \Delta_{\psi\chi}^{(2)}(q) \right) \\ &\quad + G_{0\psi} G_{0\chi} \int_q D^{-1}(q) \frac{1}{\widetilde{q-p}^2 + m_{0\pi}^2} \left(\Delta_{\psi\chi}^{(1)}(q) + i\gamma_\mu \bar{q}_\mu \Delta_{\psi\chi}^{(2)}(q) \right) \\ &\quad - \int_q D^{-1}(q) \left\{ \frac{\epsilon_L^2}{\widetilde{q-p}^2 + M_Z^2} + \frac{\epsilon^2}{\widetilde{q-p}^2} \right\} \left\{ \left(d - \frac{1+r^2}{4} \widetilde{q} \cdot \widetilde{p}^2 \right) \Delta_{\psi\chi}^{(1)}(q) \right. \\ &\quad \left. - \frac{r}{2} \left(\gamma_\sigma \gamma_\mu \Delta_{\psi\psi}^{(2)}(q) + \gamma_\mu \gamma_\sigma \Delta_{\chi\chi}^{(2)}(q) \right) \bar{q}_\sigma \overline{q_\mu + p_\mu} \right\} \\ &\quad + e^2 \int_q D^{-1}(q) \left\{ \frac{1}{\widetilde{q-p}^2 + M_Z^2} - \frac{1}{\widetilde{q-p}^2} \right\} \left\{ -\frac{ir}{2} \gamma_\mu \overline{q_\mu + p_\mu} \left(\Delta_{\psi\psi}^{(1)}(q) + \Delta_{\chi\chi}^{(1)}(q) \right) \right. \\ &\quad \left. + i\gamma_\sigma \bar{q}_\sigma \left(d - \frac{1-r^2}{4} \widetilde{q} \cdot \widetilde{p}^2 \right) \Delta_{\psi\chi}^{(2)}(q) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon_L^2 r \cos p_\mu \int_q \frac{1}{\widetilde{q}^2 + M_Z^2} - \frac{1}{2} e^2 r \cos p_\mu \int_q \frac{1}{\widetilde{q}^2} \\ \Sigma_{\chi\chi L}(p) &= \Sigma_{\psi\psi L}(p)|_{G_{0\psi} \leftrightarrow G_{0\chi}} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Hierin ist über alle auftretenden Indices zu summieren. Aus Gründen der Übersicht wurden die Matrixelemente des Fermionpropagators nicht ausgeschrieben, siehe hierzu (2.45). Die entsprechenden Größen für den rechtshändigen Anteil findet man durch $\epsilon_L \rightarrow \epsilon_R$.

3.3.2 Fermion-Masse

Da sich Selbstenergien und damit volle Propagatoren für rechts- und linkshändige Felder im allgemeinen unterscheiden, müssen renormierte Größen für beide Fälle separat definiert werden. Im folgenden werden nur linkshändige Teile betrachtet. Der volle Propagator schreibt sich mit der Fermion-Selbstenergie folgendermaßen:

$$\mathbf{G}_\Psi^{-1}(p) = \Delta_\Psi^{-1}(p) - \Sigma_\Psi(p) \quad (3.62)$$

In niedrigster Ordnung in p lautet dies (vgl. (2.44)):

$$\mathbf{G}_\Psi^{-1}(p) = \mathbf{M}_0 - \Sigma_\Psi(0) + i\gamma_\mu p_\mu \mathbf{N} + \mathcal{O}(p^2), \quad (3.63)$$

mit

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} \mu_{0\psi} & \mu_0 \\ \mu_0 & \mu_{0\chi} \end{pmatrix} \quad \mathbf{N} := \mathbf{1} + \frac{i}{4}\gamma_\mu \left. \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma_\Psi(p) \right|_{p=0}. \quad (3.64)$$

Die Renormierungsbedingung lautet:

$$\left. \frac{\partial}{\partial p_\mu} \mathbf{G}_{R\Psi}^{-1}(p) \right|_{p=0} = i\gamma_\mu \mathbf{1} \quad (3.65)$$

Definiert man das renormierte Fermionfeld durch $\Psi_{RL} := \mathbf{Z}_\Psi^{-1/2} \Psi_{0L}$ und beachtet

$$\overline{\Psi}_{RL} = \overline{\Psi}_{0L} \mathbf{Z}_\Psi^{-\frac{1}{2}T}, \quad (3.66)$$

so erhält man:

$$\mathbf{G}_{R\Psi}^{-1}(p) = \mathbf{Z}_\Psi^{\frac{1}{2}T} \mathbf{G}_\Psi^{-1}(p) \mathbf{Z}_\Psi^{\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} \mathbf{M}_R + i\gamma_\mu p_\mu \mathbf{1} + \mathcal{O}(p^2) \quad (3.67)$$

Folglich ist die Wellenfunktionsrenormierung definiert als diejenige 2×2 -Matrix, welche \mathbf{N} in die Einheitsmatrix transformiert

$$\mathbf{Z}_\Psi^{\frac{1}{2}T} \mathbf{N} \mathbf{Z}_\Psi^{\frac{1}{2}} = \mathbf{1}, \quad (3.68)$$

und die Matrix der renormierten Massen als:

$$\begin{pmatrix} \mu_{R\psi} & \mu_R \\ \mu_R & \mu_{R\chi} \end{pmatrix} := \mathbf{M}_R = \mathbf{Z}_\Psi^{\frac{1}{2}T} (\mathbf{M}_0 - \Sigma_\Psi(0)) \mathbf{Z}_\Psi^{\frac{1}{2}} \quad (3.69)$$

Zuletzt wird noch die Wellenfunktionsrenormierung aus der Matrix \mathbf{N} bestimmt. (3.68) führt auf folgende Bedingung:

$$0 \stackrel{!}{=} (N_{\psi\chi} - N_{\chi\psi})(Z_{\psi\psi}^{\frac{1}{2}} Z_{\chi\chi}^{\frac{1}{2}} - Z_{\chi\psi}^{\frac{1}{2}} Z_{\psi\chi}^{\frac{1}{2}}) = (N_{\psi\chi} - N_{\chi\psi}) \det \mathbf{Z}_{\Psi}^{\frac{1}{2}} \quad (3.70)$$

Die Determinante der Wellenfunktionsrenormierung ist aber ungleich Null, denn sonst wäre diese Matrix nicht invertierbar und das renormierte Feld könnte nicht definiert werden. Folglich muß \mathbf{N} symmetrisch sein. An den expliziten Ausdrücken liest man ab, daß dies nur dann der Fall ist, wenn – wie bereits besprochen – die Renormierungsbedingungen getrennt an rechts- und linkshändige Fermionfelder gestellt werden. Dann kann \mathbf{N} zunächst durch eine Drehung diagonalisiert und anschließend normiert werden. Man wählt also den Ansatz (vgl. [LMWG91]):

$$\mathbf{Z}_{\Psi}^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta \\ \sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{\psi}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{\chi}} \end{pmatrix} \quad (3.71)$$

Dies läßt sich explizit aus \mathbf{N} errechnen:

$$\begin{aligned} \sin \zeta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sgn} N_{\psi\chi} \operatorname{sgn} (N_{\psi\psi} - N_{\chi\chi}) \sqrt{1 - \frac{|N_{\psi\psi} - N_{\chi\chi}|}{\sqrt{(N_{\psi\psi} - N_{\chi\chi})^2 + 4N_{\psi\chi}^2}}} \\ \cos \zeta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{|N_{\psi\psi} - N_{\chi\chi}|}{\sqrt{(N_{\psi\psi} - N_{\chi\chi})^2 + 4N_{\psi\chi}^2}}} \\ Z_{\psi} &= 2 \left\{ N_{\psi\psi} + N_{\chi\chi} + \operatorname{sgn} (N_{\psi\psi} - N_{\chi\chi}) \sqrt{(N_{\psi\psi} - N_{\chi\chi})^2 + 4N_{\psi\chi}^2} \right\}^{-1} \\ Z_{\chi} &= 2 \left\{ N_{\psi\psi} + N_{\chi\chi} - \operatorname{sgn} (N_{\psi\psi} - N_{\chi\chi}) \sqrt{(N_{\psi\psi} - N_{\chi\chi})^2 + 4N_{\psi\chi}^2} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Falls \mathbf{N} bereits proportional zur Einheitsmatrix ist, so wird ζ durch (3.68) nicht fixiert. Dies ist in der Baum-Approximation, aber auch z.B. für $e = 0$ und $G_{R\psi} = -G_{R\chi}$ der Fall. ζ läßt sich auch durch Grenzübergänge nicht eindeutig bestimmen:

- Wählt man $N_{\psi\chi} = 0$ und $N_{\psi\psi} \rightarrow N_{\chi\chi}$, so folgt aus (3.72): $\zeta = 0$,
- wird hingegen zunächst $N_{\psi\psi} = N_{\chi\chi}$ fixiert und dann $N_{\psi\chi} \rightarrow 0$ gewählt, so findet man: $\zeta = \pi/4$.

Der zweite Fall tritt tatsächlich auf, wenn man zum Beispiel bei $G_{R\psi} = -G_{R\chi}$ den Grenzübergang $e \rightarrow 0$ ausführt (siehe Abschnitt 4.3.8). Jeder andere Winkel ist durch geeignete Ausführung des Grenzüberganges erreichbar. Damit ist in diesem Fall die renormierte Massenmatrix nur bis auf eine Transformation mit einer Drehmatrix definiert. Dies ist jedoch nur eine spezielle Ausprägung der Tatsache, daß die Wellenfunktionsrenormierung (und damit die Massenmatrix) durch (3.68) nur bis auf eine Drehung definiert ist: Mit \mathbf{Z}_{Ψ} erfüllt auch $\mathbf{Z}'_{\Psi} = \mathbf{Z}_{\Psi} \mathbf{D}$ mit einer Drehmatrix \mathbf{D} diese Gleichung. Dies zeigt, daß die Einträge in \mathbf{M}_R im allgemeinen von der

Wahl des Mischungswinkels der Felder abhängen. Unabhängig von dieser Wahl sind ausschließlich die Eigenwerte μ_{1R} und μ_{2R} von \mathbf{M}_R [LMWG91]:

$$\mu_{12R} = \frac{1}{2} \left(\mu_{R\psi} + \mu_{R\chi} \pm \sqrt{(\mu_{R\psi} - \mu_{R\chi})^2 + \mu_R^2} \right), \quad (3.73)$$

hingegen wiederum nicht der benötigte Diagonalisierungswinkel

$$\tan 2\alpha_R = \frac{2\mu_R}{\mu_{R\chi} - \mu_{R\psi}}. \quad (3.74)$$

Diese Frage wird in Abschnitt 4.3.8 noch einmal diskutiert.

Auch bei den Fermionen muß im endlichen Volumen etwas anders vorgegangen werden (siehe 4.2.2). Dort wird jedoch wieder nur die Fermionen-Selbstenergie zur Definition der renormierten Größen benötigt, welche sich formal von jener im unendlichen Volumen nicht unterscheidet.

3.3.3 Yukawa-Kopplungen

Wie bei der quartischen, so gibt es auch bei den beiden renormierten YUKAWA-Kopplungen die Möglichkeit einer Definition mit Hilfe des Vakuumerwartungswertes [LMWG91]:

$$G_{R\psi} := \frac{\mu_{R\psi}}{v_R} \quad G_{R\chi} := \frac{\mu_{R\chi}}{v_R} \quad (3.75)$$

3.4 Kritische Parameter

Als erste Anwendung der Ein-Schleifen-Störungsrechnung kann man die kritischen Parameter der Theorie in dieser Näherung ausrechnen. Damit bezeichnet man diejenigen Punkte im Raum der nackten Parameter, an denen die Korrelationslänge divergiert, also ein Phasenübergang stattfindet. Dort verschwindet die inverse Korrelationslänge, mithin die physikalische und die Pol-Masse. Der Propagator besitzt also einen Pol am Ursprung der BRILLOUIN-Zone, daher gilt auch für die renormierte Masse: $m_{Rc} = 0$. Da die dimensionsbehaftete Masse m_R/a vorgegeben, also insbesondere in der Nähe der kritischen Punkte konstant gehalten wird, muß dort die Gitterkonstante a verschwinden. An den kritischen Punkten ist folglich der Kontinuumslices der Gittertheorie zu vollziehen.

Kürzt man (3.36) ab durch:

$$m_R^2 = m_0^2 + \Delta m_0^2, \quad (3.76)$$

so findet man für den kritischen Parameter umgehend:

$$m_{0c}^2 = -\Delta m_0^2 \quad (3.77)$$

Alle auftretenden nackten Massen können durch die Ausdrücke der renormierten Störungstheorie ersetzt werden. Da Δm_0^2 bereits von erster Ordnung ist, sind alle daraus entstehenden Korrekturen von höherer als Ein-Schleifen-Ordnung und man erhält:

$$m_{0c}^2 = -\Delta m_R^2, \quad (3.78)$$

wo Δm_R^2 aus Δm_0^2 einfach durch Ersetzung aller nackten durch renormierte Massen entsteht. Dabei wird auch ersetzt: $v_0 \mapsto v_R \propto m_R = 0$, daher verschwinden die π - und Z -Masse und man erhält:

$$m_{0c}^2 = \left(\frac{4}{3}g_0 + 2(d-1)e'^2 \right) \int_q \frac{1}{\bar{q}} - 2dN_f \int_q \frac{(G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2)\bar{q}^2 - 2G_{0\chi}G_{0\psi}(\frac{r}{2}\hat{q}^2)^2}{(\bar{q}^2 + (\frac{r}{2}\hat{q}^2)^2)^2} \quad (3.79)$$

Für $d = 4$ und $N_f = 2$ gilt also:

$$m_{0c}^2 = \left(\frac{4}{3}g_0 + 6e'^2 \right) \mathcal{I}_1 - 16(G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2)\mathcal{I}_2 + 32G_{0\chi}G_{0\psi}\mathcal{I}_3 \quad (3.80)$$

mit den folgenden Werten der Gitterintegrale für $r = 1$ im unendlichen Volumen [WIT92]:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &:= \int_q \frac{1}{\bar{q}} & \approx & 0.159933 \\ \mathcal{I}_2 &:= \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \bar{q}^4/4)^2} & \approx & 0.025703 \\ \mathcal{I}_3 &:= \int_q \frac{(\frac{1}{2}\hat{q}^2)^2}{(\bar{q}^2 + \bar{q}^4/4)^2} & \approx & 0.059686 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Mit (1.28), (1.29), (1.43) und der Konvention $\mu_\phi = 1 - 2\lambda$ gilt für die Parameter der Gitternotation:

$$\frac{4\lambda - 2}{\kappa_c} + 16 = \left(\frac{8\lambda}{\kappa_c^2} + 6e'^2 \right) \mathcal{I}_1 - \frac{2}{K_c^2 \kappa_c} (G_\psi^2 + G_\chi^2) \mathcal{I}_2 + \frac{4G_\chi G_\psi}{K_c^2 \kappa_c} \mathcal{I}_3 \quad (3.82)$$

und damit eine quadratische Gleichung für den kritischen skalaren Hopping-Parameter:

$$0 = (3e'^2 \mathcal{I}_1 - 8)\kappa_c^2 + \left((1 - 2\lambda) - \frac{(G_\psi^2 + G_\chi^2)\mathcal{I}_2 - 2G_\chi G_\psi \mathcal{I}_3}{K_c^2} \right) \kappa_c + 4\lambda \mathcal{I}_1 \quad (3.83)$$

Verschwinden alle Kopplungen, so erhält man den Wert für den GAUSS'schen Fixpunkt: $\kappa_c = \frac{1}{8}$.

Ausgangspunkt der analogen Betrachtung für die Fermion-Parameter ist Gleichung (3.69). Mit $\mu_{Rc} = 0$ folgt sofort:

$$\mathbf{M}_{0c} = \mathbf{Z}_\Psi^{-\frac{1}{2}T} \begin{pmatrix} \mu_{R\psi} & 0 \\ 0 & \mu_{R\chi} \end{pmatrix} \mathbf{Z}_\Psi^{-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{\Sigma}_\Psi(0) \quad (3.84)$$

Hier setzt man wieder die renormierte Störungstheorie ein, insbesondere also $\mu_0 \mapsto \mu_R = 0$ und $v_0 \mapsto v_R = 0$ und erhält:

$$\mathbf{M}_{0c} = \boldsymbol{\Sigma}_{R\Psi}(0), \quad (3.85)$$

also insbesondere für die Fermionmasse ($r = 1$, $d = 4$ und $e = 0$):

$$\mu_{0c} = \Sigma_{\psi\chi}(0) = G_{0\psi}G_{0\chi}\mathcal{I}_4 + e'^2(\mathcal{I}_5 - 2\mathcal{I}_1) \quad (3.86)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4 &:= \int_q \frac{1}{\tilde{q}^2 + \tilde{q}^4/4} \approx 0.085390 \\ \mathcal{I}_5 &:= \int_q \frac{\tilde{q}^4 + \tilde{q}^6/8 + \tilde{q}^2}{(\tilde{q}^2 + \tilde{q}^4/4)\tilde{q}^2} \approx 0.9312. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Mit $\mu_0 = \frac{\mu_{\psi\chi}}{2K}$ und der Konvention $\mu_{\psi\chi} = 1 - 8K$ lautet dies:

$$0 = \frac{G_\psi G_\chi}{4K_c \kappa_c} \mathcal{I}_4 + (2e'^2(\mathcal{I}_5 - 2\mathcal{I}_1) + 8) K_c - 1 \quad (3.88)$$

Bei verschwindenden Kopplungen findet man für den GAUSS'schen Fixpunkt hier ebenfalls $K_c = \frac{1}{8}$. Für $G_\chi = 0$ gilt:

$$K_c = (2e'^2(\mathcal{I}_5 - 2\mathcal{I}_1) + 8)^{-1} \quad (3.89)$$

Damit lautet das Resultat für den skalaren Hopping-Parameter bei $G_\chi = 0$:

$$0 = (3e'^2\mathcal{I}_1 - 8)\kappa_c^2 + [(1 - 2\lambda) - G_\psi^2\mathcal{I}_2(2e'^2(\mathcal{I}_5 - 2\mathcal{I}_1) + 8)^2] \kappa_c + 4\lambda\mathcal{I}_1 \quad (3.90)$$

Für diesen Punkt sind die kritischen Hopping-Parameter in den Abbildungen 3.2,

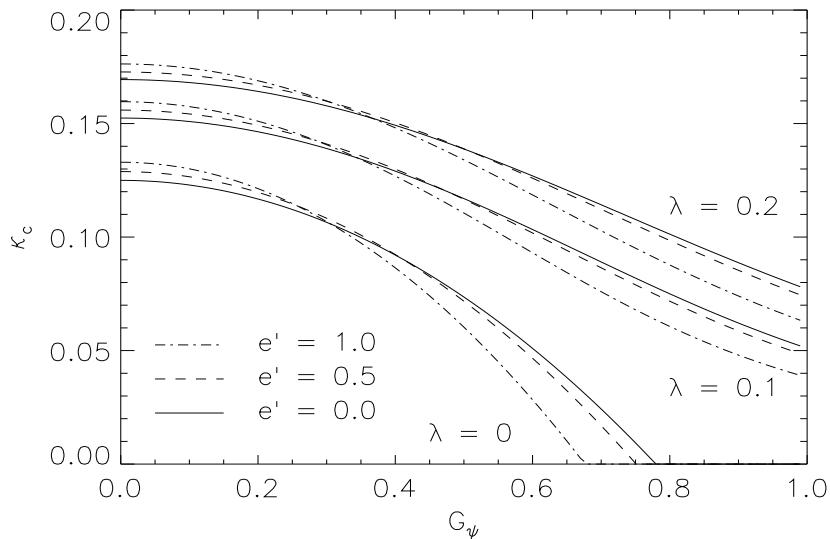


Abbildung 3.2: *Kritischer skalarer Hopping-Parameter für verschiedene Selbst- und Eichkopplungen im unendlichen Volumen.*

3.3 und 3.4 aufgetragen. Dort sind auch Volumeneffekte berücksichtigt, welche von

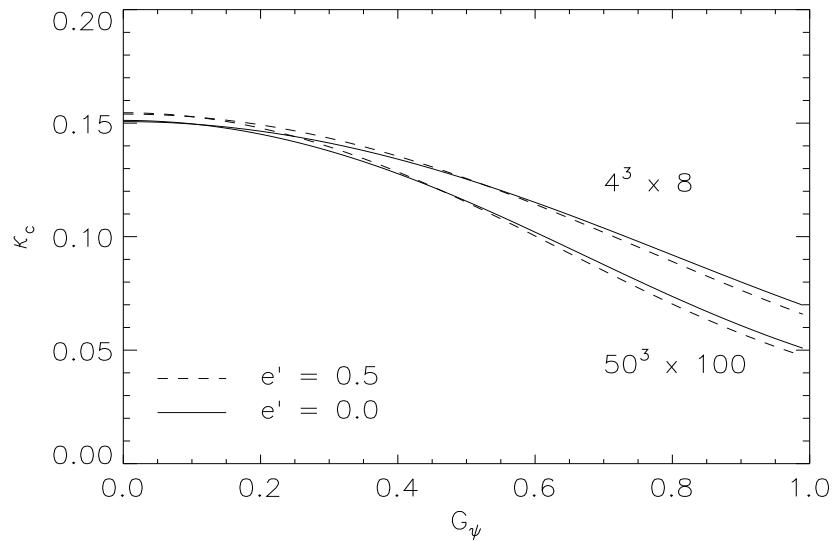


Abbildung 3.3: Kritischer skalarer Hopping-Parameter bei $\lambda = 0.1$ für verschiedene Eichkopplungen und Gittergrößen.

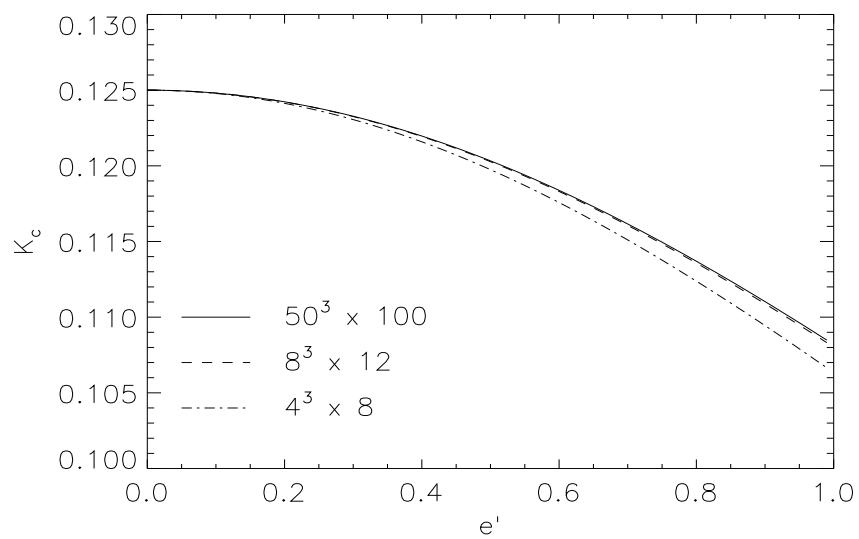


Abbildung 3.4: Kritischer fermionischer Hopping-Parameter als Funktion der Eichkopplung für verschiedene Gittergrößen.

der Auswertung der Impulsintegrale auf endlichen Gittern herrühren. Anstatt die Integrale für ein unendliches Volumen zu berechnen, wurde ein großes Gitter ($50^3 \cdot 100$) verwendet, auf dem die Ergebnisse offenbar nur noch wenig vom unendlich großen abweichen. Die skalaren kritischen Hopping-Parameter werden danach auf einem endlichen Gitter zu groß, die fermionischen zu klein geschätzt. Die Effekte sind jedoch für kleine Kopplungen gering.

3.5 Eichfelder

Die Untersuchung der Eichfelder und ihrer Parameter ist nicht das zentrale Anliegen der Behandlung von HIGGS-YUKAWA-Modellen. Sie gestaltet sich außerdem – besonders in der gebrochenen Phase – bereits in der Ein-Schleifen-Ordnung außerordentlich aufwendig und wurde daher bislang nicht besprochen. Allerdings lassen sich einige allgemeine Ergebnisse analog zu Kontinuumstheorien mit einfachen Mitteln ableiten.

Wie in einer Theorie mit fixierter Eichung üblich, manifestiert sich nämlich die Forderung nach Eichinvarianz in einer funktionalen Differentialgleichung für das erzeugende Funktional (siehe z.B. [RYD89, S. 270ff, 277ff], [IZ85, S. 594ff]). Zu ihrer Herleitung fordert man die Invarianz des erzeugenden Funktionals unter einer infinitesimalen Transformation $\Phi \mapsto \Phi + \delta\Phi$ der Felder. Ist die Wirkung S invariant, so gilt:

$$Z[\mathbf{J}] = \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ -S - S_{GF} - S_{FP} - \delta S_{GF} - \delta S_{FP} + \sum_x \mathbf{J}_x \Phi_x + \sum_x \mathbf{J}_x \delta \Phi_x \right\} \quad (3.91)$$

Da alle Variationen zum Parameter Λ der Transformation proportional sind, kann man in Λ entwickeln und erhält:

$$\left\{ -\delta \tilde{S}_{GF} - \delta \tilde{S}_{FP} + \sum_x \mathbf{J}_x \delta \tilde{\Phi}_x \right\} Z[\mathbf{J}] = 0, \quad (3.92)$$

wobei in den markierten Größen Felder durch Ableitungen nach den Quellen zu ersetzen sind. Die Variation des eichfixierenden Terms erhält man durch eine funktionale TAYLOR-Entwicklung (hier ist stellvertretend nur das Feld Z berücksichtigt):

$$\begin{aligned} S_{GF} = \frac{1}{2\xi} \sum_x (\mathcal{F}[Z_{\mu x}])^2 &\mapsto \frac{1}{2\xi} \sum_x \left(\mathcal{F}[Z_{\mu x}] + \sum_y \Lambda_y \frac{\partial \mathcal{F}[\overline{Z}_{\mu x} + \nabla_\mu \Lambda_x]}{\partial \Lambda_y} \Big|_{\Lambda=0} \right)^2 \\ &= S_{GF} + \frac{1}{\xi} \sum_{xy} \Lambda_x \mathcal{M}_{xy} \mathcal{F}[Z_{\mu y}], \end{aligned} \quad (3.93)$$

jene der FADDEEV-POPOV-Wirkung kann unmittelbar abgelesen werden, und man erhält:

$$\left\{ \sum_{xy} \left(-\frac{1}{\xi} \Lambda_x \widetilde{\mathcal{M}}_{xy} \mathcal{F} \left[\frac{\partial}{\partial J_{\mu y}^{(Z)}} \right] - \delta \overline{\tilde{\eta}}_x \widetilde{\mathcal{M}}_{xy} \tilde{\eta}_y - \overline{\tilde{\eta}}_x \widetilde{\mathcal{M}}_{xy} \delta \tilde{\eta}_y \right) + \sum_x \mathbf{J}_x \delta \tilde{\Phi}_x \right\} Z[\mathbf{J}] = 0 \quad (3.94)$$

Die explizite Form der resultierenden Identitäten hängt von der gewählten Transformation ab. Da S invariant sein soll, wird man für die darin auftauchenden Felder eine Eichtransformation verwenden. In der Wahl der Transformation der Geist-Felder ist man jedoch frei.

Becchi-Rouet-Stora-Transformationen

Die einfachsten Gleichungen erhält man, falls nicht nur S , sondern auch $S + S_{GF} + S_{FP}$ invariant ist. Dann verbleiben in den resultierenden Differentialgleichungen nur noch die von den Quellen stammenden Terme. Wählt man zunächst $\delta\bar{\eta} = 0$ und $\Lambda_x = -\bar{\eta}_x \lambda$ mit einer GRASSMANN-Variable λ , so erhält man

$$\left\{ \sum_{xy} \left(\frac{1}{\xi} \bar{\eta}_x \widetilde{\mathcal{M}}_{xy} \mathcal{F} \left[\frac{\partial}{\partial J_{\mu y}^{(Z)}} \right] \lambda - \bar{\eta}_x \widetilde{\mathcal{M}}_{xy} \delta\bar{\eta}_y \right) + \sum_x \mathbf{J}_x \delta\tilde{\Phi}_x \right\} Z[\mathbf{J}] = 0, \quad (3.95)$$

und dies vereinfacht sich offenbar erheblich für $\delta\bar{\eta}_y = \frac{1}{\xi} \mathcal{F} \left[\frac{\partial}{\partial J_{\mu y}^{(Z)}} \right] \lambda$, also die BECCHI-ROUET-STORA-Transformationen, welche für die 'T HOOFT-Eichungen explizit lauten:

$$\begin{aligned} \delta\sigma_x &= -e' \pi_x \Lambda_x \\ \delta\pi_x &= e' (\sigma_x + v_0) \Lambda_x \\ \delta\Psi_x^{(f)} &= i(e_L \mathbf{P}_L^{(f)} - e_R \mathbf{P}_R^{(f)}) \Psi_x^{(f)} \Lambda_x \\ \delta\bar{\Psi}_x^{(f)} &= -i \bar{\Psi}_x^{(f)} (e_L \mathbf{P}_R^{(f)} - e_R \mathbf{P}_L^{(f)}) \Lambda_x \\ \delta Z_{\mu x} &= \nabla_\mu \Lambda_x \\ \delta\eta_x &= \frac{1}{\xi} \left(\nabla_\mu^* Z_{\mu x} + \xi v_0 e' \pi_x \right) \lambda \\ \delta\bar{\eta}_x &= 0, \end{aligned} \quad (3.96)$$

mit $\Lambda_x = -\bar{\eta}_x \lambda$. Dann erhält man:

$$\sum_x \mathbf{J}_x \delta\tilde{\Phi}_x Z[\mathbf{J}] = 0 \quad (3.97)$$

Führt man noch das erzeugende Funktional der Vertexfunktionen mittels

$$\Gamma[\Phi] = \ln \frac{Z[\mathbf{J}]}{Z[\mathbf{0}]} - \sum_x \mathbf{J}_x \Phi_x \quad ; \quad \Phi_x = \frac{1}{Z[\mathbf{J}]} \frac{\partial Z[\mathbf{J}]}{\partial \mathbf{J}_x} \quad \mathbf{J}_x = -\frac{\partial \Gamma[\Phi]}{\partial \Phi_x} \quad (3.98)$$

ein, so gelangt man zu den SLAVNOV-TAYLOR-Identitäten:

$$\sum_x \frac{\partial \Gamma[\Phi]}{\partial \Phi_x} \delta\Phi_x = 0 \quad (3.99)$$

Schreibt man diese explizit aus, leitet nach Feldern ab und setzt sie anschließend gleich Null, so erhält man nichtperturbative Aussagen über volle Vertexfunktionen, z.B.:

$$0 = e' \Gamma_\mu^{(\pi, Z)}(p) - i \hat{p}_\nu \Gamma_{\nu\mu}^{(2Z)}(p) + i \frac{1}{\xi} \hat{p}_\mu \Gamma^{(2\eta)}(p), \quad (3.100)$$

also eine Verknüpfung voller Propagatoren von Geistern und Z -Bosonen mit der π - Z -Mischung, welche ja nur in der klassischen Approximation durch die 'T HOOFT-Eichung verhindert wird. Von der Gültigkeit solcher Relationen auf dem klassischen Niveau kann man sich leicht überzeugen.

Reine Eichtransformation

Beschränkt man sich auf eine Transformation der in der Wirkung auftauchenden Felder ($\delta\bar{\eta} = \delta\eta = 0$), so erhält man sofort die WARD-TAKAHASHI-Identitäten

$$\left\{ -\frac{1}{\xi} \sum_y \tilde{\mathcal{M}}_{xy} \mathcal{F} \left[\frac{\partial}{\partial J_{\mu y}^{(Z)}} \right] + \mathbf{J}_x \delta \tilde{\Phi}'_x \right\} Z[\mathbf{J}] = 0 \quad \forall x, \quad (3.101)$$

mit $\delta\tilde{\Phi}_x = \delta\tilde{\Phi}'_x \Lambda_x$. Für die 'T HOOFT-Eichungen lautet dies explizit:

$$0 = \left\{ -\frac{1}{\xi} \left(\square + \xi v_0^2 e'^2 + \xi v_0 e'^2 \frac{\partial}{\partial J_x^{(\sigma)}} \right) \left(\nabla_\mu^* \frac{\partial}{\partial J_{\mu x}^{(Z)}} + \xi v_0 e' \frac{\partial}{\partial J_x^{(\pi)}} \right) \right. \\ \left. - e' J_x^{(\sigma)} \frac{\partial}{\partial J^{(\pi)} x} + e' J_x^{(\pi)} \left(\frac{\partial}{\partial J^{(\sigma)} x} + v_0 \right) + \nabla_\mu^* J_{\mu x}^{(Z)} \right. \\ \left. + i \bar{J}_x^{(\Psi, f)} (e_L \mathbf{P}_L^{(f)} - e_R \mathbf{P}_R^{(f)}) \frac{\partial}{\partial \bar{J}_x^{(\Psi, f)}} - i \frac{\partial}{\partial J_x^{(\Psi, f)}} (e_L \mathbf{P}_R^{(f)} - e_R \mathbf{P}_L^{(f)}) J_x^{(\Psi, f)} \right\} Z[\mathbf{J}] \quad (3.102)$$

Daraus können die WARD-TAKAHASHI-Identitäten der unitären Eichung abgeleitet werden, indem man $\xi \rightarrow \infty$ betrachtet und alle das π -Feld betreffenden Beiträge unterdrückt:

$$0 = \left\{ -v_0 e'^2 \left(v_0 + \frac{\partial}{\partial J_x^{(\sigma)}} \right) \nabla_\mu^* \frac{\partial}{\partial J_{\mu x}^{(Z)}} + \nabla_\mu^* J_{\mu x}^{(Z)} \right. \\ \left. + i \bar{J}_x^{(\Psi, f)} (e_L \mathbf{P}_L^{(f)} - e_R \mathbf{P}_R^{(f)}) \frac{\partial}{\partial \bar{J}_x^{(\Psi, f)}} - i \frac{\partial}{\partial J_x^{(\Psi, f)}} (e_L \mathbf{P}_R^{(f)} - e_R \mathbf{P}_L^{(f)}) J_x^{(\Psi, f)} \right\} Z[\mathbf{J}] \quad (3.103)$$

Da das A -Feld nicht an das HIGGS-Feld koppelt, lautet die entsprechende Gleichung:

$$0 = \left\{ -\frac{1}{\xi'} \square \nabla_\mu^* \frac{\partial}{\partial J_{\mu x}^{(A)}} + \nabla_\mu^* J_{\mu x}^{(A)} + i e \bar{J}_x^{(\Psi, f)} \frac{\partial}{\partial \bar{J}_x^{(\Psi, f)}} - i e \frac{\partial}{\partial J_x^{(\Psi, f)}} J_x^{(\Psi, f)} \right\} Z[\mathbf{J}] \quad (3.104)$$

Auch diese Identitäten können für die Vertexfunktionen aufgeschrieben werden. Dazu dividiert man sie durch $Z[\mathbf{0}]$ und setzt (3.98) ein. Man erhält:

$$0 = -\frac{1}{\xi} (\square + \xi v_0^2 e'^2 + \xi v_0 e'^2 \sigma_x) (\nabla_\mu^* Z_{\mu x} + \xi v_0 e' \pi_x) \\ + e' \frac{\partial \Gamma}{\partial \sigma_x} \pi_x - e' \frac{\partial \Gamma}{\partial \pi_x} (\sigma_x + v_0) - \nabla_\mu^* \frac{\partial \Gamma}{\partial Z_{\mu x}} \\ - i \frac{\partial \Gamma}{\partial \Psi_x^{(f)}} (e_L \mathbf{P}_L^{(f)} - e_R \mathbf{P}_R^{(f)}) \Psi_x^{(f)} + i \bar{\Psi}_x^{(f)} (e_L \mathbf{P}_R^{(f)} - e_R \mathbf{P}_L^{(f)}) \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\Psi}_x^{(f)}} \quad (3.105) \\ 0 = -\frac{1}{\xi'} \square \nabla_\mu^* A_{\mu x} - \nabla_\mu^* \frac{\partial \Gamma}{\partial A_{\mu x}} + i e \frac{\partial \Gamma}{\partial \Psi_x^{(f)}} \Psi_x^{(f)} - i e \bar{\Psi}_x^{(f)} \frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\Psi}_x^{(f)}}$$

Diese Identitäten erlauben nichtperturbative Aussagen über Vertexfunktionen. Beispielsweise kann man die WARD-TAKAHASHI-Identität für den (inversen) Z -Boson-Propagator

$$-\Gamma_{\mu\nu xy}^{(2Z)} = -\frac{\partial}{\partial Z_{\mu x}} \frac{\partial}{\partial Z_{\nu y}} \Gamma[\Phi] \Big|_{\Phi=0} \quad (3.106)$$

ableiten, indem man nach $Z_{\nu y}$ differenziert und alle Felder auf Null setzt:

$$0 = -\frac{1}{\xi} \left(\square + \xi v_0^2 e'^2 \right) \nabla_\nu^* \delta_{xy} - \nabla_\mu^* \Gamma_{\mu\nu xy}^{(2Z)} \quad (3.107)$$

Im Impulsraum lautet dies:

$$0 = -\frac{1}{\xi} \left(\hat{k}^2 + \xi v_0^2 e'^2 \right) \hat{k}_\nu - \hat{k}_\mu \Gamma_{\mu\nu}^{(2Z)}(k) \quad (3.108)$$

Setzt man hier die Definition der Selbstenergie und den inversen nackten Propagator (2.63) ein

$$-\Gamma_{\mu\nu}^{(2Z)}(k) = \delta_{\mu\nu} (\hat{k}^2 + (e' v_0)^2) - (1 - \frac{1}{\xi}) \hat{k}_\mu \hat{k}_\nu - \Sigma_{Z\mu\nu}(k), \quad (3.109)$$

so erhält man:

$$0 = \hat{k}_\mu \Sigma_{Z\mu\nu}(k) \quad (3.110)$$

Die Selbstenergie ist transversal! Dieselbe Argumentation lässt sich analog für die Selbstenergie des Feldes A führen.

Kapitel 4

Endliches Volumen

4.1 Vorüberlegungen

Dieses Kapitel ist der Betrachtung des HIGGS-YUKAWA-Modells auf einem Raum-Zeit-Gitter mit der Ausdehnung T in zeitlicher Richtung und L in alle räumlichen Richtungen gewidmet. Das Gittervolumen $\Omega = L^3 T$ ist endlich. Wie sieht der Impulsraum dieses Systems aus? — Zweckmäßigerweise beschränkt man sich zunächst auf eine Dimension der Ausdehnung L und definiert dort die FOURIER-Transformation eines Feldes φ gemäß

$$\varphi_x := \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \varphi(p_n) e^{ip_n x}, \quad \varphi(p_n) := \sum_{x=0}^{L-1} \varphi_x e^{-ip_n x}, \quad (4.1)$$

mit $p_n = \frac{2\pi}{L} n + p_0$. Für die Festlegung von p_0 betrachtet man:

$$\varphi_L = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \varphi(p_n) e^{i\frac{2\pi}{L} n L} e^{ip_0 L} = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} \varphi(p_n) e^{ip_0 L} = \varphi_0 e^{ip_0 L} \quad (4.2)$$

Offenbar legt p_0 die Randbedingungen fest. Dabei betrachte ich stets nur zwei Fälle:

Periodische Randbedingungen ($\varphi_0 = \varphi_L$) : $p_n = \frac{2\pi}{L} n$

Antiperiodische Randbedingungen ($\varphi_0 = -\varphi_L$) : $p_n = \frac{2\pi}{L} n + \frac{\pi}{L}$

Diese Überlegungen lassen sich sofort auf die eingangs erwähnte Situation erweitern. Den in vorangegangen Arbeiten verwendeten Konventionen folgend, werden immer periodische Randbedingungen in alle Richtungen für bosonische Felder und periodische Randbedingungen in den räumlichen Richtungen und antiperiodische in der zeitlichen Richtung für fermionische Felder verwendet (siehe hierzu auch [MM94, S. 187f], [ROT92, S. 319ff] oder [KAP89, S. 26ff]). Die entsprechenden Impulsräume

sehen folgendermaßen aus:

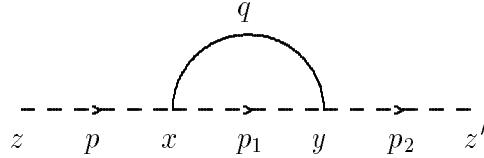
$$\begin{aligned} B_p &:= \{p = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3, n_4) : n_1, n_2, n_3 = 0, \dots, L-1, n_4 = 0, \dots, T-1\} \\ B_a &:= \{p = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3, n_4 + \frac{1}{2}) : n_1, n_2, n_3 = 0, \dots, L-1, n_4 = 0, \dots, T-1\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Propagatoren nehmen ihre Werte stets über derselben BRILLOUIN-Zone an wie die zugehörigen Felder. Ist nämlich $B \in \{B_p, B_a\}$ die zu einem Feld φ gehörige BRILLOUIN-Zone, so soll für die freie Wirkung gelten:

$$\sum_{xy} \varphi_x \Delta_{xy}^{-1} \varphi_y \stackrel{!}{=} \frac{1}{\Omega} \sum_{q \in B} \varphi(q) \Delta^{-1}(q) \varphi(q) \quad (4.4)$$

Dies ist nur dann konsistent, wenn der (inverse) Propagator seine Werte auf B annimmt.

Die Wirkung des Modells ändert sich beim Übergang zum endlichen Volumen formal nicht. Summen über Gitterpunkte besitzen allerdings nur endlich viele Summanden. Funktionalintegrale wie z.B. das erzeugende Funktional degenerieren zu einer Integration eines zwar hoch- aber endlichdimensionalen Raums (nur daher lassen sich Monte-Carlo-Simulationen durchführen). Die Ausdrücke für Propagatoren und Vertices in den FEYNMAN-Regeln ändern sich nicht. Allerdings sind die Schleifen-Integrationen durch Summen über die oben aufgeführten Impulse zu ersetzen. Dabei ist Vorsicht geboten: Die Summen sind stets so zu schreiben, daß Propagatoren eines Feldes nur Impulse aus der zu diesem Feld gehörenden BRILLOUIN-Zone als Argumente erhalten. Dies soll an einem Beispiel erläutert werden:



Im Ortsraum entspricht dieser Graph dem Ausdruck

$$\sum_{xy} \Delta_{\psi zx} G \Delta_{\psi xy} G \Delta_{\psi yz'} \Delta_{\varphi yx}. \quad (4.5)$$

Hierin soll ψ ein Fermion-, φ ein Bosonenfeld darstellen, G ist ein (lokaler) Vertex. Einsetzen von FOURIER-Darstellungen über den entsprechenden BRILLOUIN-Zonen liefert den Graphen im Impulsraum:

$$\sum_{p_1 \in B_a} \Delta_\psi(p) G \Delta_\psi(p_1) G \Delta_\psi(p) \Delta_\varphi(p_1 - p) ; \quad p \in B_a, \quad (4.6)$$

und tatsächlich erhält der bosonische Propagator, obwohl externer und Schleifen-Impuls in der BRILLOUIN-Zone zu antiperiodischen Randbedingungen liegen, einen Impuls aus der BRILLOUIN-Zone der Bosonenfelder. Allerdings darf in diesem Beispiel der externe Impuls *nicht* verschwinden! Er wäre dann nicht aus B_a , und das Argument von Δ_φ käme aus B_a , was nicht erlaubt ist. Derartige Zusatzbedingungen erfordern eine angepaßte Definition der renormierten Größen.

4.2 Renormierte Größen

Wie in den Abschnitten 3.2.2 und 3.3.2 ausgeführt, berechnet man zunächst die Selbstenergie eines Feldes und damit den vollen Propagator (in einer Störungsordnung). Dann renormiert man das Feld derart, daß der Koeffizient des zweiten Terms der Impulsentwicklung des Propagators Eins wird. Am renormierten Propagator liest man die renormierte Masse ab.

Die Wellenfunktionsrenormierung wird daher wesentlich durch eine Ableitung der Selbstenergie nach dem externen Impuls bestimmt. Die renormierte Masse enthält die Selbstenergie am externen Impuls Null. Im letzten Abschnitt wurde jedoch gezeigt, daß im endlichen Volumen eine diskrete Impulsdarstellung vorliegt, Differenziationen nach Impulsen also nicht möglich sind, und daß der Impuls Null nicht immer im Impulsraum enthalten ist. Daher müssen die Definitionen renormierter Größen in einem endlichen Volumen abgeändert werden, siehe [LMWG91].

4.2.1 Bosonen

Wie im unendlichen Volumen gilt für den inversen vollen Propagator (vgl. (3.27)):

$$G_\sigma^{-1}(p) = \hat{p}^2 + m_0^2 - \Sigma_\sigma(p) \quad ; \quad p \in B_p \quad (4.7)$$

Für $L \neq T$ wird die TAYLOR-Entwicklung der Selbstenergie durch Symmetriebedingungen weniger stark eingeschränkt als im unendlichen Volumen. Daher betrachtet man Impulse $p = (\vec{0}, p_4)$ und approximiert den Propagator durch

$$G_\sigma^{-1}(p) = m^2 + n\hat{p}_4^2 + \mathcal{O}(\hat{p}^4). \quad (4.8)$$

Die Renormierungsbedingung fordert für das entsprechende Verhalten des renormierten Propagators

$$G_{R\sigma}^{-1}(p) = m_R^2 + \hat{p}_4^2 + \mathcal{O}(\hat{p}^4). \quad (4.9)$$

Folglich lautet die Wellenfunktionsrenormierung

$$Z_\sigma = n^{-1} \quad (4.10)$$

und die renormierte Masse

$$m_R^2 = Z_\sigma m^2 = n^{-1} m^2. \quad (4.11)$$

Das eigentliche Problem liegt in der Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten m und n . Aus (4.7) liest man ab:

$$m^2 = m_0^2 - \Sigma_\sigma(0) \quad (4.12)$$

n wird bei der Auswertung numerischer Simulationen – der sich hier so weit wie möglich angepaßt werden muß, um einen Vergleich zu ermöglichen – durch die kleinsten nicht verschwindenden Impulse $p_{\pm} := (\vec{0}, \pm \frac{2\pi}{T})$ (für $T > L$) bestimmt. Man fordert nämlich:

$$m^2 + n\hat{p}_{\pm}^2 = G_{\sigma}^{-1}(p_{\pm}) = \hat{p}_{\pm}^2 + m_0^2 - \Sigma_{\sigma}(p_{\pm}) \quad (4.13)$$

und findet sofort:

$$n = 1 + \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{L}} (\Sigma_{\sigma}(0) - \Sigma_{\sigma}(p_{\pm})), \quad (4.14)$$

wobei die Wahl zwischen p_+ und p_- das Ergebnis nicht verändert. Da Σ_{σ} von erster Störungsordnung ist, erhält man damit für die renormierte Masse die Entwicklung:

$$m_R = m_0 - \frac{1}{2m_0} \left(\Sigma_{\sigma}(0) + m_0^2 \frac{\Sigma_{\sigma}(0) - \Sigma_{\sigma}(p_{\pm})}{4 \sin^2 \frac{\pi}{L}} \right) \quad (4.15)$$

4.2.2 Fermionen

Die (4.13) entsprechende Gleichung lautet für die Fermionen:

$$\mathbf{M} + i\mathbf{N}\gamma_{\mu}\bar{p}_{\mu} + \mathcal{O}(\bar{p}^2) = \mathbf{G}_{\Psi}^{-1}(p) = \mathbf{M}_0 + i\gamma_{\mu}\bar{p}_{\mu}\mathbf{1} - \boldsymbol{\Sigma}_{\Psi}(p) \quad p \in B_a, \quad (4.16)$$

vergleiche (3.63). Hier läßt sich auch \mathbf{M} nicht mehr direkt bestimmen, da $0 \notin B_a$. Stattdessen fordert man die exakte Gültigkeit von (4.16) bei den beiden kleinsten Impulsen $p_{\pm} := (0, 0, 0, \pm \frac{\pi}{T})$ und addiert beide Gleichungen. Es folgt:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Sigma}_{\Psi}(p_+) + \boldsymbol{\Sigma}_{\Psi}(p_-)) \quad (4.17)$$

Subtraktion hingegen liefert:

$$\mathbf{N} = \mathbf{1} + \frac{i\gamma_4}{2 \sin \frac{\pi}{T}} (\boldsymbol{\Sigma}_{\Psi}(p+) - \boldsymbol{\Sigma}_{\Psi}(p_-)) \quad (4.18)$$

Weiter wird verfahren wie im unendlichen Volumen, siehe 3.3.2. Die Wellenfunktionsrenormierung wird durch

$$\mathbf{Z}_{\Psi}^{\frac{1}{2}T} \mathbf{N} \mathbf{Z}_{\Psi}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{1}, \quad (4.19)$$

die renormierte Massenmatrix durch

$$\mathbf{M}_R := \mathbf{Z}_{\Psi}^{\frac{1}{2}T} \mathbf{M} \mathbf{Z}_{\Psi}^{\frac{1}{2}} \quad (4.20)$$

definiert. (3.72) ist unverändert gültig.

4.3 Volumen-Effekte

Die in den letzten Abschnitten definierten renormierten Größen lassen sich nun in Abhängigkeit von der Gittergröße untersuchen. Der Einfluß der endlichen Ausdehnung des Gitters ist vor allem für numerische Simulationen interessant, wo er sich bei gegebener Rechenzeit nicht ohne weiteres aus der Durchführung der Simulation auf verschiedenen großen Gittern bestimmen läßt [LMWM91]. In dieser Situation liefert die (renormierte) Störungstheorie auf folgende Weise eine Abschätzung der Volumeneffekte [LMWM91].

Eine renormierte Größe X_R lautet in der nackten Störungstheorie

$$X_R(L, T) = X_0 + \Delta X_0(L, T) \quad (4.21)$$

Hierin sei $\Delta X_0(L, T)$ die von allen nackten Parametern abhängige Ein-Schleifen-Korrektur zu X im Volumen $L^3 \cdot T$ (höhere Korrekturen sind nicht mitgeschrieben). Im unendlichen Volumen gilt, da *dort* die Renormierungsbedingungen aufgeprägt wurden:

$$X_R = X_R(\infty, \infty) = X_0 + \Delta X_0(\infty, \infty) \quad (4.22)$$

Der (absolute) Volumeneffekt ist die Differenz beider Größen:

$$\delta X_R(L, T) := X_R(L, T) - X_R = \Delta X_0(L, T) - \Delta X_0(\infty, \infty) \quad (4.23)$$

Die renormierte Störungstheorie ergibt sich durch Auflösen von (4.21) nach den nackten Größen und rekursives Einsetzen bis zur gegebenen Ordnung. In der Ein-Schleifen-Approximation erhält man:

$$X_0 = X_R(L, T) - \Delta X_R(L, T), \quad (4.24)$$

wobei $\Delta X_R(L, T)$ aus $\Delta X_0(L, T)$ einfach durch die Ersetzung aller nackten durch renormierte Parameter entsteht. Folglich lautet der Volumeneffekt in Ein-Schleifen-Ordnung:

$$\delta X_R(L, T) = \Delta X_R(L, T) - \Delta X_R(\infty, \infty) \quad (4.25)$$

Da die Berechnung der Ein-Schleifen-Integrale im unendlichen Volumen analytisch nicht möglich und numerisch aufwendig ist, geht man folgendermaßen vor: Die in dem Ausdruck $\Delta X_R(L, T)$ auftretenden Schleifen-Summen werden numerisch für einen gegebenen Satz renormierter Parameter $\{X_R, \dots\}$ und verschiedene Gittergrößen L, T berechnet. Dabei wird eine Ausdehnung L_∞, T_∞ bestimmt, ab der sich die Störungskorrektur nur noch unwesentlich ändert. Dann definiert man als approximativen Volumeneffekt:

$$\delta \tilde{X}_R(L, T) := \Delta X_R(L, T) - \Delta X_R(L_\infty, T_\infty) \quad (4.26)$$

und als renormierten Parameter im endlichen Volumen:

$$\tilde{X}_R(L, T) := X_R + \delta \tilde{X}_R(L, T) \quad (4.27)$$

Der entstehende Fehler wird kontrolliert, indem die betrachtete Größe außer auf $L_\infty^3 \cdot T_\infty$ noch auf einem etwas kleineren Gitter berechnet wird. Die Differenz der Ergebnisse sollte ein Maß für die Abweichung vom unendlichen Volumen darstellen. Liegt der so berechnete Fehler in der Größenordnung des Volumeneffektes, so müssen die Werte L_∞, T_∞ vergrößert werden.

Die Erstellung der Programme zur Auswertung der Schleifen-Summen erfolgte mit Hilfe von symbolischer Computer-Algebra: Zunächst wurde jeder zur Selbstenergie beitragende Graph bei vorgegebenen FEYNMAN-Regeln und Symmetriefaktoren symbolisch berechnet. Dies ergab einen Test der durchgeführten analytischen Rechnungen. Lediglich bei den Fermion-Graphen mußten symmetrische und antisymmetrische Anteile von Hand zur Verfügung gestellt werden. Aus den symbolischen Ausdrücken wurden dann automatisch Quelltexte generiert, welche den Wert der Störungskorrektur bei einem gegebenen Schleifenimpuls (und bei gegebenen renormierten Parametern und externen Impulsen) errechneten. Mit Hilfe einer für gerade räumliche Ausdehnung L möglichen optimierten Aufsummation bei gegebener Gittergröße [MÜN] wurde schließlich der approximative renormierte Parameter im endlichen Volumen bestimmt.

Die nachfolgenden Abschnitte stellen die Volumeneffekte einiger renormierter Größen im einzelnen vor. Von speziellen Untersuchungen abgesehen, wurden dabei alle Parameter um einen im folgenden “Referenzpunkt” genannten Parametersatz herum variiert. Tabelle 4.1 zeigt den untersuchten Bereich, die mittlere Spalte gibt den Wert an, auf den nicht variierte Parameter gesetzt wurden. Alle Rechnungen wurden

Parameter	fixiert bei	Bereich
m_p	0.5	0.2 – 1.0
μ_R	0.22	0.05 – 0.5
g_p	2.0	0.5 – 4.5
$G_{R\psi}$	0.45	0 – 0.5
$G_{R\chi}$	-0.45	-0.5 – 0.1
e'	0.5	0 – 1
e	0	0 – 0.25

Tabelle 4.1: *Untersuchte Parameterbereiche*

für ein $6^3 \cdot 12$ - und ein $8^3 \cdot 16$ -Gitter durchgeführt. Das kleinere Gitter wird immer mit Rauten \diamond , das größere mit Dreiecken \triangle markiert. Die kleinste Masse im Parameterbereich ist 0.05, einer Korrelationslänge von ≈ 20 entsprechend. Daher wurde $L_\infty = 26$ und $T_\infty = 52$ gewählt. Um einen Überblick über die dadurch entstehenden

Fehler zu gewinnen, wurde auch ein $24^3 \cdot 48$ -Gitter betrachtet. Die Abweichungen wurden als Fehlerbalken eingetragen (falls sie größer als die verwendeten Symbole sind), sollten aber wie bereits betont mehr als ein Anhaltspunkt über die relative Größe der Fehler betrachtet werden.

Der Referenzpunkt wurde so gewählt, daß die Korrelationslängen etwa den räumlichen Gitterausdehnungen entsprechen. Er sollte also grob die Grenze zu auftretenden Volumeneffekten markieren.

Alle Ergebnisse wurden in der 'T HOOFT-FEYNMAN-Eichung ($\xi = \xi' = 1$) gewonnen.

4.3.1 Verschwindende Eichkopplung

Als erstes betrachte ich den Fall verschwindender Eichkopplungen: $e' = e = 0$. Man erhält das ungeeichte HIGGS-YUKAWA-Modell zurück und sollte daher bisherige Resultate reproduzieren. Daraus ergibt sich ein Test von Rechnungen und Programm des reinen HIGGS- und Fermion-Sektors. Volumeneffekte wurden in [LMWM91] für einen Parametersatz mit $G_R := G_{R\psi} = -G_{R\chi}$ veröffentlicht. Damit übereinstimmend konnten für die Fermionmasse $\mu_R = 0.22$ keine nennenswerten Effekte gefunden werden, Tabelle 4.2 faßt die Ergebnisse zusammen. Die erste Zeile zu jeder Meßgröße enthält den Literaturwert, die nachfolgenden Zeilen unterscheiden sich in den Randbedingungen für die Fermionen in Zeitrichtung und der verwendeten Konvention für die Berechnung der renormierten Größen:

Nr.	Randbedingungen	Wellenfunktionsrenormierung
1.	periodisch	Definition im unendlichen Volumen (3.30)
2.	antiperiodisch	Definition im unendlichen Volumen (3.30)
3.	periodisch	Definition im endlichen Volumen (4.14)
4.	antiperiodisch	Definition im endlichen Volumen (4.14)

Eine Auswertung auf dem unendlichen Gitter wurde nicht vorgenommen, sondern stattdessen die Werte auf dem $16^3 \cdot 32$ Gitter durch Addition eines konstanten Offsets hergestellt. Die Ergebnisse stimmen also bei Anwendung der Methode 1 bis auf die jeweils letzte signifikante Stelle mit den Literaturwerten überein, eine Ausnahme bildet lediglich der Vakuumerwartungswert v_R . Der Unterschied zwischen den Definitionen der renormierten Größen, insbesondere der Wellenfunktionsrenormierung, im unendlichen Volumen (3.30) und im endlichen Volumen (4.14) ist bei moderat großen Gittern nicht zu vernachlässigen, wie einerseits der Tabelle 4.2 zu entnehmen ist, und andererseits in Abbildung 4.1 am Beispiel desselben Parametersatzes gezeigt wird. Der Volumeneffekt der im endlichen Volumen definierten Größe ist signifikant kleiner als jener der im unendlichen Volumen definierten Größe.

	$L^3 \cdot T$	∞	$16^3 \cdot 32$	$8^3 \cdot 16$	$6^3 \cdot 16$	$6^3 \cdot 6$
m_p	[LMWM91]	0.532	0.534	0.555	0.580	0.620
	1.,3.		0.534	0.555	0.580	0.621
	2.,4.		0.534	0.552	0.572	0.558
g_p	[LMWM91]	6.20	6.20	6.07	5.66	4.17
	1.		6.20	6.08	5.64	4.20
	2.		6.20	6.26	6.08	6.63
	3.		6.20	6.45	6.60	7.01
	4.		6.20	6.42	6.52	6.68
μ_R	3.		0.220	0.220	0.220	0.218
	4.		0.220	0.220	0.220	0.218
G_R	[LMWM91]	0.45	0.45	0.43	0.41	0.34
	3.		0.45	0.43	0.40	0.33
	4.		0.45	0.44	0.42	0.45
v_R	[LMWM91]	0.370	0.372	0.379	0.386	0.424
	1.		0.372	0.390	0.421	0.492
	2.		0.372	0.383	0.402	0.376
	3.		0.372	0.379	0.392	0.408
	4.		0.372	0.378	0.389	0.374
Z_π	[LMWM91]	0.973	0.969	0.898	0.783	0.502
	1.		0.969	0.900	0.781	0.508
	2.		0.969	0.936	0.866	0.970
	3.		0.969	0.960	0.934	0.962
	4.		0.969	0.962	0.938	0.977

Tabelle 4.2: *Volumeneffekte bei verschwindender Eichkopplung*

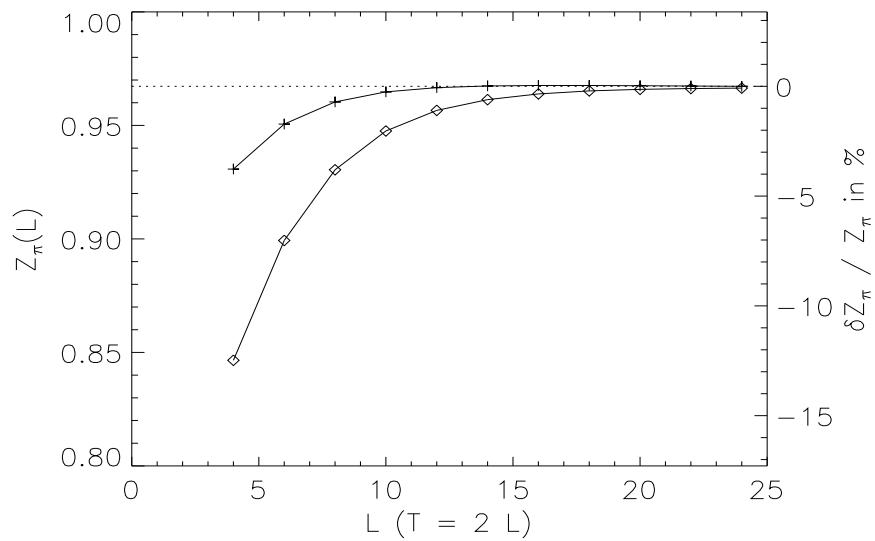


Abbildung 4.1: *Volumeneffekte der im endlichen (+) und im unendlichen (\diamond) Volumen definierten Wellenfunktionsrenormierung.*

Auch die Randbedingungen haben einen Einfluß auf die Ergebnisse: Im allgemeinen sind die Volumeneffekte bei antiperiodischen Randbedingungen in Zeitrichtung für die Fermionen kleiner als bei periodischen.

4.3.2 Higgs-Masse

Der Übergang zu endlichen Eichkopplungen beseitigt einige technische Probleme in der Phase gebrochener Symmetrie, vor allem die Infrarot-Divergenzen der renormierten Masse und der Wellenfunktionsrenormierung Z_σ , da der relevante Freiheitsgrad π entweder verschwindet (unitäre Eichung) oder massiv wird ('T HOOFT-Eichung). Daher stehen hier alle in 3.2 aufgeführten Definitionen der Massen zur Verfügung und können hinsichtlich ihrer Volumeneffekte verglichen werden.

Singularitäten der Pol-Masse

Bei der systematischen Untersuchung der Abhängigkeit der Pol-Masse vom (im Gegensatz z.B. zu [Lüs86a]) auch in Zeitrichtung endlichen Volumen findet man ein unregelmäßiges Verhalten. Abbildung 4.2 zeigt zum Beispiel die Pol-Masse am Referenzpunkt der weiteren Untersuchungen. Um dieses Verhalten zu verstehen, be-

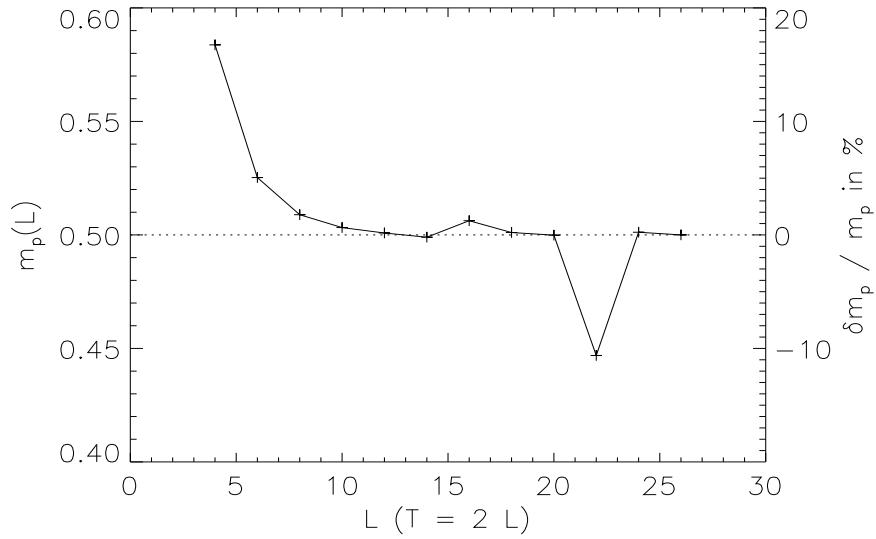


Abbildung 4.2: Volumeneffekte der Pol-Masse

trachte man noch einmal den Graphen $\mathcal{G}_4^{(2)}(p)$ aus 3.2.1:

$$\mathcal{G}_4^{(2)}(p) = \frac{1}{18} g_0^2 v_0^2 \int_q \frac{1}{\hat{q}^2 + m_{0\pi}^2} \frac{1}{\widehat{q+p}^2 + m_{0\pi}^2} \quad (4.28)$$

und seinen Beitrag zur Pol-Masse in (3.41), also bei $p = (\vec{0}, im_p^{(0)})$. Mit

$$\widehat{q+p}^2 = \hat{q}^2 - m_0^2 \cos q_4 + 2i\bar{q}_4 \sinh m_p^{(0)} \quad (4.29)$$

findet man:

$$\mathcal{G}_4^{(2)}(\vec{0}, im_p^{(0)}) = \frac{1}{18} g_0^2 v_0^2 \int_q \frac{1}{\hat{q}^2 + m_{0\pi}^2} \cdot \frac{\hat{q}^2 - m_0^2 \cos q_4 + m_{0\pi}^2}{(\hat{q}^2 - m_0^2 \cos q_4 + m_{0\pi}^2)^2 + 4\bar{q}_4^2 \sinh^2 m_p^{(0)}} \quad (4.30)$$

Der Integrand besitzt verschiedene quadratische Pole, beispielsweise für $q = (\vec{q}, 0)$ an den Stellen $\hat{q}^2 = m_0^2 - m_{0\pi}^2$. Da sich $\vec{q} = \frac{2\pi}{L} \vec{n}$ durch einen Vektor \vec{n} mit ganzzahligen Komponenten darstellen lässt, divergieren die Summanden an den Stellen

$$m_0^2 - m_{0\pi}^2 = 4 \sum_{i=1}^3 \sin^2 \frac{\pi n_i}{L} \quad (4.31)$$

Wählt man also bei gegebenem L alle Parameter so, daß ein \vec{n} die obige Gleichung erfüllt, so nimmt $\mathcal{G}_4^{(2)}(\vec{0}, im_p^{(0)})$ beliebig große Werte an. All diese Überlegungen bleiben richtig, wenn der Beitrag in der renormierten Störungstheorie verwendet wird. Die in Abbildung 4.2 verwendeten Parameter ergeben $m_p^{(2)} - m_{R\pi}^2 \approx 0.1615$ und die rechte Seite von (4.31) liefert für $\vec{n} = (1, 1, 0)$ und $L = 22$ etwa 0.1620, mit anderen Worten: Für $L \approx 22.04$ würde bei analytischer Fortsetzung in L der Pol erreicht, was

das Verhalten bei $L = 22$ in Abbildung 4.2 erklärt. Weitere Singularitäten entstehen bei $q_4 \neq 0$ und in anderen Beiträgen zur Selbstenergie.

Die im nächsten Abschnitt besprochene physikalische Masse zeigt diese Singularitäten nicht, daher ist der physikalische Gehalt des Phänomens anzuzweifeln, wahrscheinlicher ist, daß es sich um einen Artefakt der perturbativen Behandlung handelt. Allerdings zeigen sich bei der Untersuchung instabiler Teilchen (σ ist hier instabil) in endlichen Volumina in der Nähe von Resonanzen ähnliche Effekte bei höheren Energie-Eigenwerten [Lüs86b].

Physikalische Masse

Die in Abschnitt 3.2.4 als exponentielle Zerfallskonstante der Zeitscheiben-Korrelation eingeführte physikalische Masse stimmt, wie bereits betont, nur im unendlichen Volumen exakt mit der Pol-Masse überein. Um die Abweichungen überblicken zu können, wurde diese Größe für einige Parameterwerte numerisch ermittelt. Dazu wurde die Selbstenergie $\Sigma_\sigma(p)$ für alle Werte $p \in B_p$ bestimmt, daraus die Zeitscheiben-Korrelation

$$\operatorname{Re} C(0, t) = \sum_{n=0}^{T-1} \frac{\cos(\frac{2\pi}{T}nt)}{(2 \sin \frac{\pi}{T}n)^2 + m_0^2 - \Sigma_\sigma(\vec{0}, \frac{2\pi}{T}n)} \quad (4.32)$$

berechnet und mit der Funktion

$$C_f(t) = A + B \left(e^{-m_{ph}t} + e^{-m_{ph}(T-t)} \right) \quad (4.33)$$

gefittet. Die Zeitscheiben-Korrelation ist für zwei Beispiele in Abbildung 4.3 aufgetragen. Hieran ist zu erkennen, daß bei großen Kopplungen selbst bei Beschränkungen z.B. auf das Intervall $t \in [T/4, 3T/4]$ keine zuverlässige Bestimmung der physikalischen Masse mehr möglich ist. Diese Methode der Massenbestimmung bleibt also auf gewisse Parameterbereiche beschränkt, außerhalb verliert die perturbative Ein-Schleifen-Approximation ihre Gültigkeit.

Vergleich verschiedener Definitionen

Abbildung 4.4 zeigt beispielhaft die Volumeneffekte von renormierter Masse, Pol-Masse und physikalischer Masse. Die Volumeneffekte sinken bei der Gittergröße $10^3 \cdot 20$ unter 1 %. Die Massen von Z- und π -Bosonen betragen bei den gewählten Parametern 0.326, also ist $\mu_R = 0.22$ die kleinste Masse, einer Korrelationslänge von etwa 5 entsprechend. Die Volumeneffekte werden hier also dann unerheblich, wenn die räumliche Ausdehnung die doppelte Korrelationslänge erreicht.

Deutlich zeigt sich in der Abbildung der Unterschied der renormierten Masse von den anderen Definitionen, deren Volumeneffekte absolut etwa gleich groß sind, aber

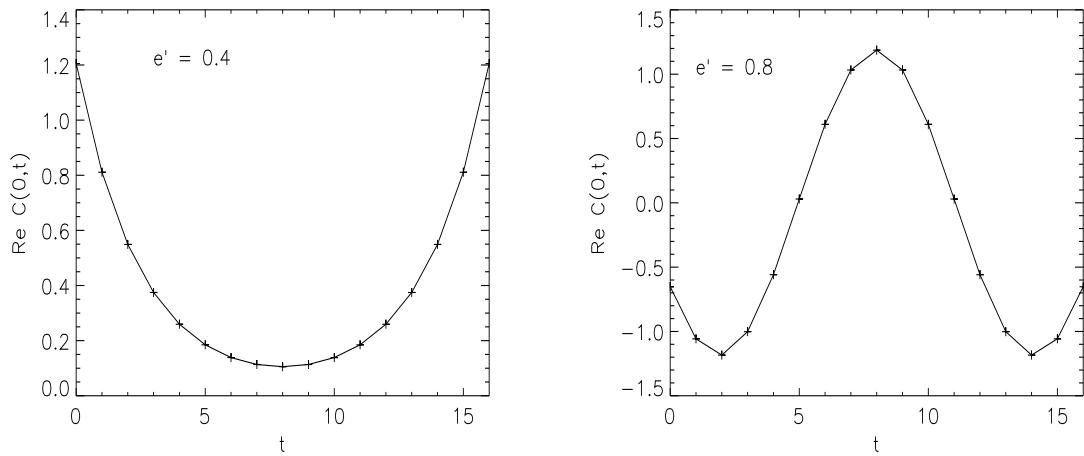


Abbildung 4.3: Zeitscheiben-Korrelation des σ -Feldes auf einem $8^3 \cdot 16$ -Gitter am Referenzpunkt, aber mit verschiedenen Eichkopplungen.

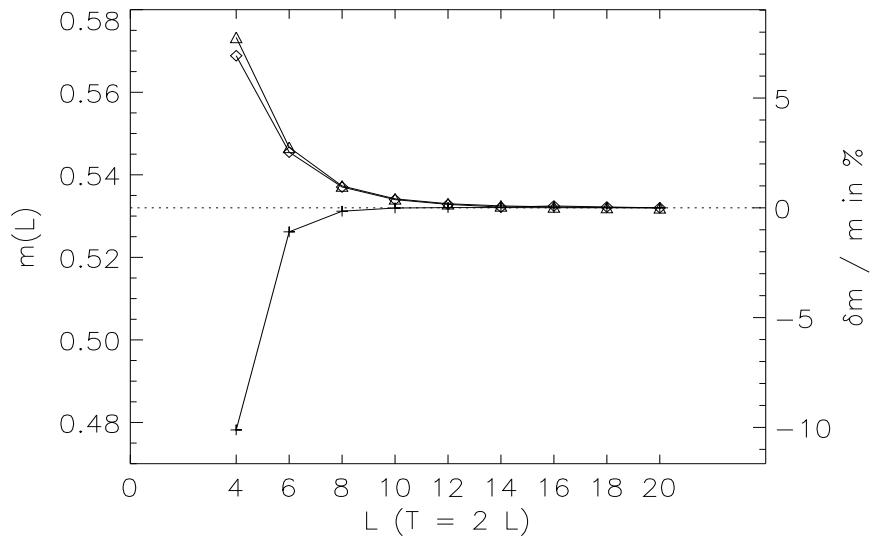


Abbildung 4.4: Vergleich der Massendefinitionen (+ renormierte Masse, \diamond Pol-Masse, \triangle physikalische Masse) hinsichtlich ihrer Volumeneffekte, Parameter wie am Referenzpunkt, aber $m_R = 0.532$.

ein anderes Vorzeichen tragen. Pol- und physikalische Masse hingegen unterscheiden sich erwartungsgemäß nur bei kleinen Gittern, allerdings zeigt letztere auch bei anders gewählten Parametern keine Anzeichen der bei der Pol-Masse auftretenden Singularitäten. Insgesamt liegt die Größe der Effekte z.B. für das $6^3 \cdot 12$ -Gitter bei maximal 3 %, also deutlich geringer als im ungeeichten Fall (ca. 10 % bei $6^3 \cdot 16$).

Das abgebildete Verhalten sollte durch die Ergebnisse aus [LÜS86a] beschrieben werden können. Dort wurde das asymptotische Verhalten des Volumeneffektes δm_p im Kontinuum für $L \rightarrow \infty$ und $T = \infty$ untersucht, indem dieser durch eine Streuamplitude ausgedrückt und darin die dominaten Graphen aufgesucht wurden. Das Ergebnis ist in [MÜN85] auf gitterregularisierte Theorien erweitert worden:

$$\delta m_p = -\frac{C}{L} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}m_p L} + \mathcal{O}(e^{-\tilde{m}L}), \quad (4.34)$$

mit $\tilde{m} > \frac{1}{2}\sqrt{3}m_p$. Nun sind bei $T = \infty$ Pol- und physikalische Masse identisch, hier ist dies aber nicht der Fall, und die Pol-Masse zeigt Singularitäten, welche das asymptotische Verhalten verschleiern. Es wurde daher versucht, obige Funktion an die physikalische Masse zu fitten. Die betrachteten Gittergrößen ermöglichen jedoch keine zuverlässige Bestimmung z.B. der Konstanten C .

Abhängigkeiten von renormierten Parametern

In diesem Abschnitt wird das Verhalten der Volumeneffekte der HIGGS-Massen bei Variation der renormierten Massen und Kopplungen untersucht.

Bei größeren Massen erwartet man wegen der kleineren Korrelationslänge im allgemeinen kleinere Volumeneffekte. Dieser Trend ist bei Pol- und renormierter Masse in den Abbildungen 4.7(1) und 4.6(1) deutlich zu erkennen. Bei Massen < 0.3 sind die Effekte beider Massen negativ und wachsen aufgrund der gegenüber der Gitterausdehnung groß werdenden Korrelationslänge schnell bis auf über -50 % an. Auffallend ist die Ähnlichkeit des Verhaltens bei Variation der HIGGS-Masse mit jenem bei Variation der Eichkopplung e' . Da allerdings e' an der Erzeugung von Massen $e'v_0$ für π - und Eichbosonen beteiligt ist, sollte dieser Befund nicht überraschen. Im Diagramm 4.7(5) ist in der Nähe von $e' = 0.8$ die Auswirkung einer der oben diskutierten Singularitäten der Pol-Masse auf ihren Volumeneffekt zu sehen. Im Grenzwert verschwindender Massen wachsen die Volumeneffekte der renormierten Größe schneller als jene der Pol-Masse. Hier zeigen sich bereits die aus der Definition bei verschwindendem Impuls herrührenden Infrarot-Divergenzen.

In 4.7(5) sind auch noch die für den ungeeichten Fall erhaltenen Resultate eingetragen: ca. +5 % für das kleinere Gitter. Der Übergang $e' \rightarrow 0$ erfolgt offenbar unstetig. Dies erklärt sich aus der Behandlung der Nullmoden bosonischer Propagatoren: Im masselosen Fall (also im Fall der π -Bosonen für $e' = 0$) werden sie ausintegriert und tragen zu Schleifen-Summen nicht bei. Für endliche e' hingegen lautet der Volumen-

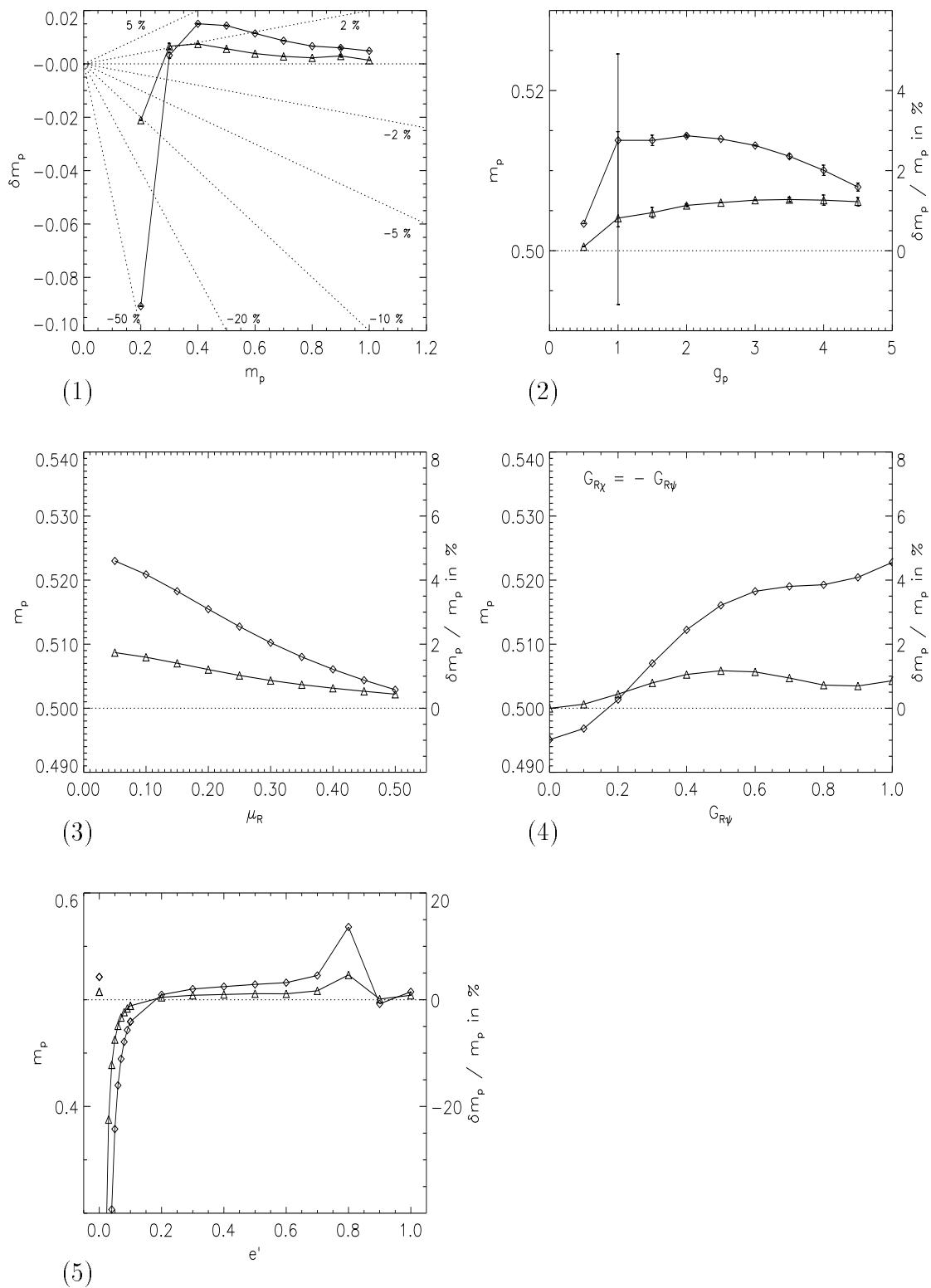


Abbildung 4.5: Volumeneffekte der Pol-Masse

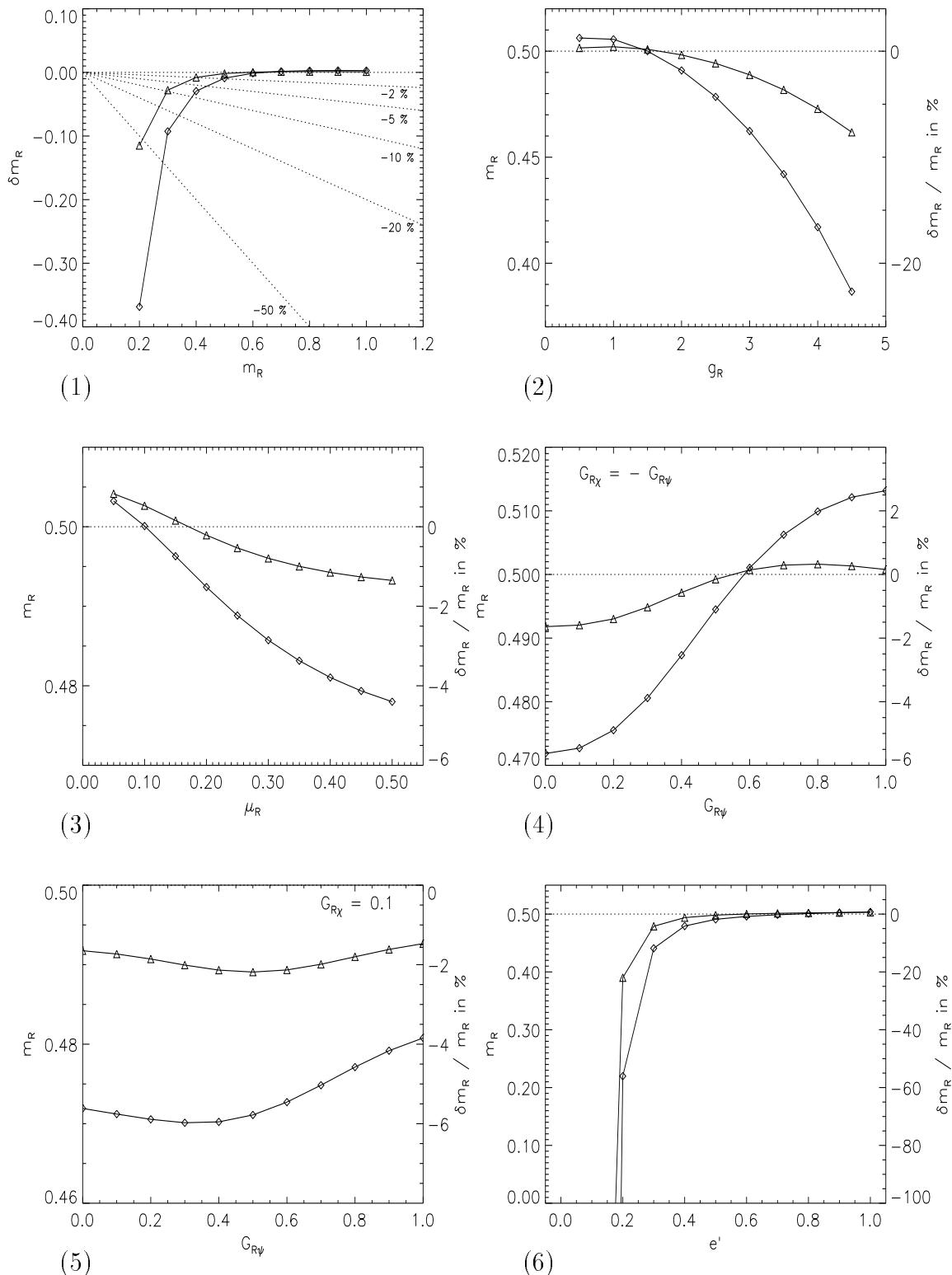


Abbildung 4.6: Volumeneffekte der renormierten HIGGS-Masse

effekt z.B. einer π -Boson-Schleife:

$$\begin{aligned} \delta \frac{1}{L^3 T} \sum_{q \in B_p} \frac{1}{\tilde{q}^2 + (e' v_0)^2} &= \delta \frac{1}{L^3 T} \frac{1}{(e' v_0)^2} + \delta \frac{1}{L^3 T} \sum_{q \neq 0} \frac{1}{\tilde{q}^2 + (e' v_0)^2} \\ &= \frac{1}{(e' v_0)^2} \left(\frac{1}{L^3 T} - \frac{1}{L_\infty^3 T_\infty} \right) + \mathcal{O}((e')^0) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Damit divergiert der Volumeneffekt für $e' \rightarrow 0$ und fixierte L, T quadratisch. Für $e' = 0$ hingegen wird der Term $\propto (e')^{-2}$ nicht mit aufsummiert.

Bei der Variation der quartischen Kopplungskonstante zeigen sich in den Abbildungen 4.7(2) und 4.6(2) erhebliche Unterschiede zwischen renormierter und Pol-Masse. Während sich der Volumeneffekt der Pol-Masse als im wesentlichen konstant erweist bei ca. 3 % für ein $6^3 \cdot 12$ -Gitter, nimmt er bei der renormierten Masse etwa quadratisch mit der Kopplung bis auf über -20 % bei $g_R = 4.5$ zu. Dies ist mit dem Verschwinden des Vakuumerwartungswertes für große g_R zu erklären: Wieder verschwinden dann die durch den HIGGS-Mechanismus erzeugten Massen, und die Korrelationslänge wächst schnell an. Auch in 4.7(2) macht sich eine Singularität der Pol-Massen bemerkbar: Auf dem zur Kontrolle verwendeten $24^3 \cdot 48$ -Gitter liegt sie etwa bei $g_{ph} = 1$. Dies lässt den durch das endlich große Vergleichsgitter eingebrachten Fehler sehr groß erscheinen.

Die Abhängigkeiten von den fermionischen Größen erweisen sich als viel geringer (Abb. 4.7(3),(4) und 4.6(3)-(5)). Der Volumeneffekt der Pol-Masse bleibt im gesamten Bereich unterhalb von 5 % ($6^3 \cdot 12$). Er sinkt mit steigendem μ_R und steigt mit steigendem $G_{R\psi}$. Der Effekt der renormierten Masse liegt absolut immer unter 6 % und wechselt bei gewissen Parametern das Vorzeichen. Für renormierte Größen wurde noch ein Parametersatz mit fixiertem $G_{R\chi}$ berechnet. Der Volumeneffekt der renormierten Masse hängt dann kaum von $G_{R\psi}$ ab.

Interessant sind noch die Volumeneffekte der physikalischen HIGGS-Masse. Sie sind für die wichtigen Fälle der Variation der HIGGS-Masse und der Eichkopplung in Abbildung 4.7 dargestellt und müssen mit den Abbildungen 4.5(1) und (5) verglichen werden. Zunächst fällt der jeweils geringe Parameterbereich auf, in welchem die Bestimmung der physikalischen Masse (auf allen betrachteten Gittern) möglich war. Innerhalb dieses Bereiches zeigt sich jedoch jeweils eine gute Übereinstimmung, die allerdings in der Nähe der groß werdenden Effekte bei $e' < 0.2$ schlechter wird.

4.3.3 Higgs-Selbstkopplung

Das Verhalten der quartischen Selbstkopplung des HIGGS-Feldes zeigen die Abbildungen 4.8 und 4.9. Das grobe Verhalten der Volumeneffekte ist hier unabhängig von der Definition der Kopplung. Feinere Unterschiede zeigen sich aber durchaus, z.B. bei der Variation von HIGGS-Masse oder Eichkopplung, wo der Betrag des Volumeneffektes für $m_p > 0.3$ bzw. $e' > 0.2$ unter 5 % liegt und darunter plötzlich

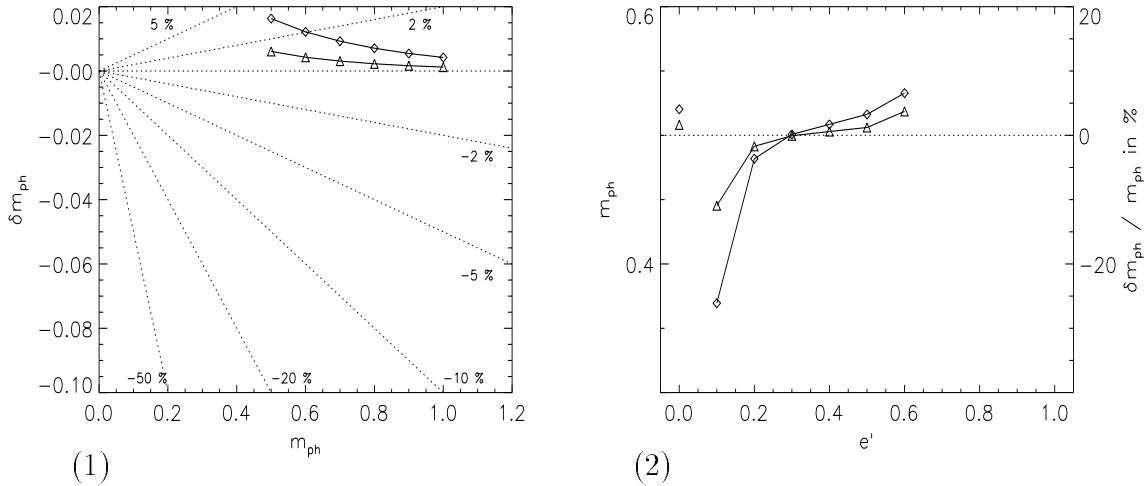


Abbildung 4.7: *Volumeneffekte der physikalischen Masse*

stark anwächst, während er für die renormierte Kopplung bereits etwa bei $m_R = 0.6$ und $e' = 0.6$ den Wert von 5 % erreicht.

Der Volumeneffekt steigt (bei beiden Größen) mit wachsenden Kopplungen an, und zwar bis etwa -5 % bei der Pol-Kopplung und unter -20 % bei der renormierten Kopplung für $g_R = 4.5$.

Wie bei den Massen ist die Abhängigkeit der Volumeneffekte von den fermionischen Parametern μ_R , $G_{R\psi}$ und $G_{R\chi}$ klein. Sie bleiben absolut immer kleiner als ca. 4 % (für die Pol-Kopplung, 10 % für die renormierte Kopplung) für das kleine Gitter und fallen mit wachsenden YUKAWA-Kopplungen.

4.3.4 Wellenfunktionsrenormierung

Abbildung 4.10(1) illustriert die Abhängigkeit des Volumeneffektes der Wellenfunktionsrenormierung des π -Feldes von der HIGGS-Masse. Für $m_p < 0.3$ steigt er drastisch an, wiederum eine Folge der in diesem Bereich vom HIGGS-Boson dominierten Korrelationslänge.

Die Variation der HIGGS-Kopplung wirkt sich im gegebenen Bereich weniger drastisch aus, allerdings macht sich auch hier bei großen Kopplungen der kleine Vakuumerwartungswert durch monotonen Steigen auf knapp 5% für $6^3 \cdot 12$ bemerkbar (Abbildung 4.10(2)).

Auch bei der Variation aller fermionischen Größen steigt der Volumeneffekt nicht über 4% an, mit wachsenden Parametern fällt er evtl. nach Annahme eines Maxi-

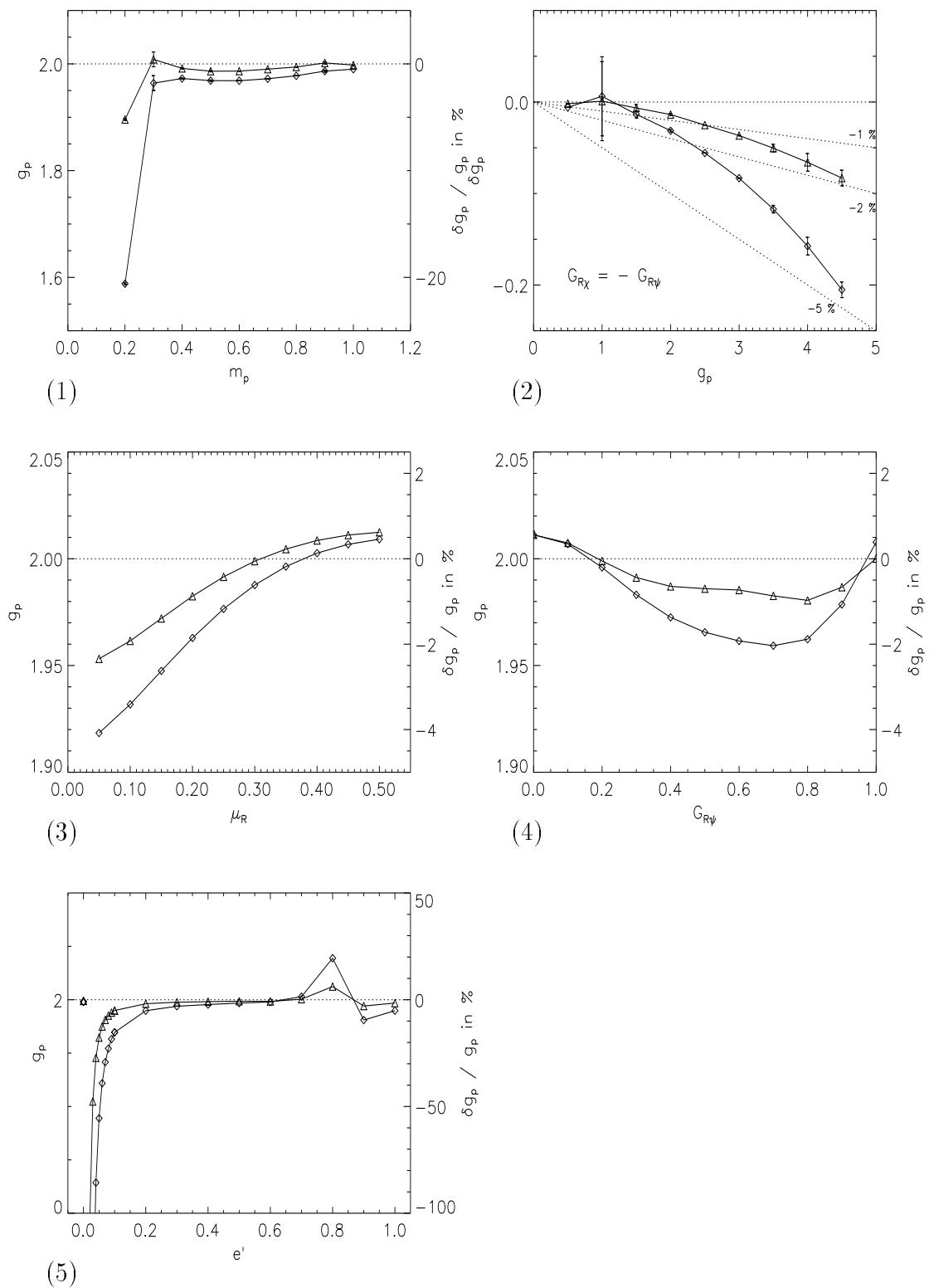


Abbildung 4.8: Volumeneffekte der Pol-Kopplung

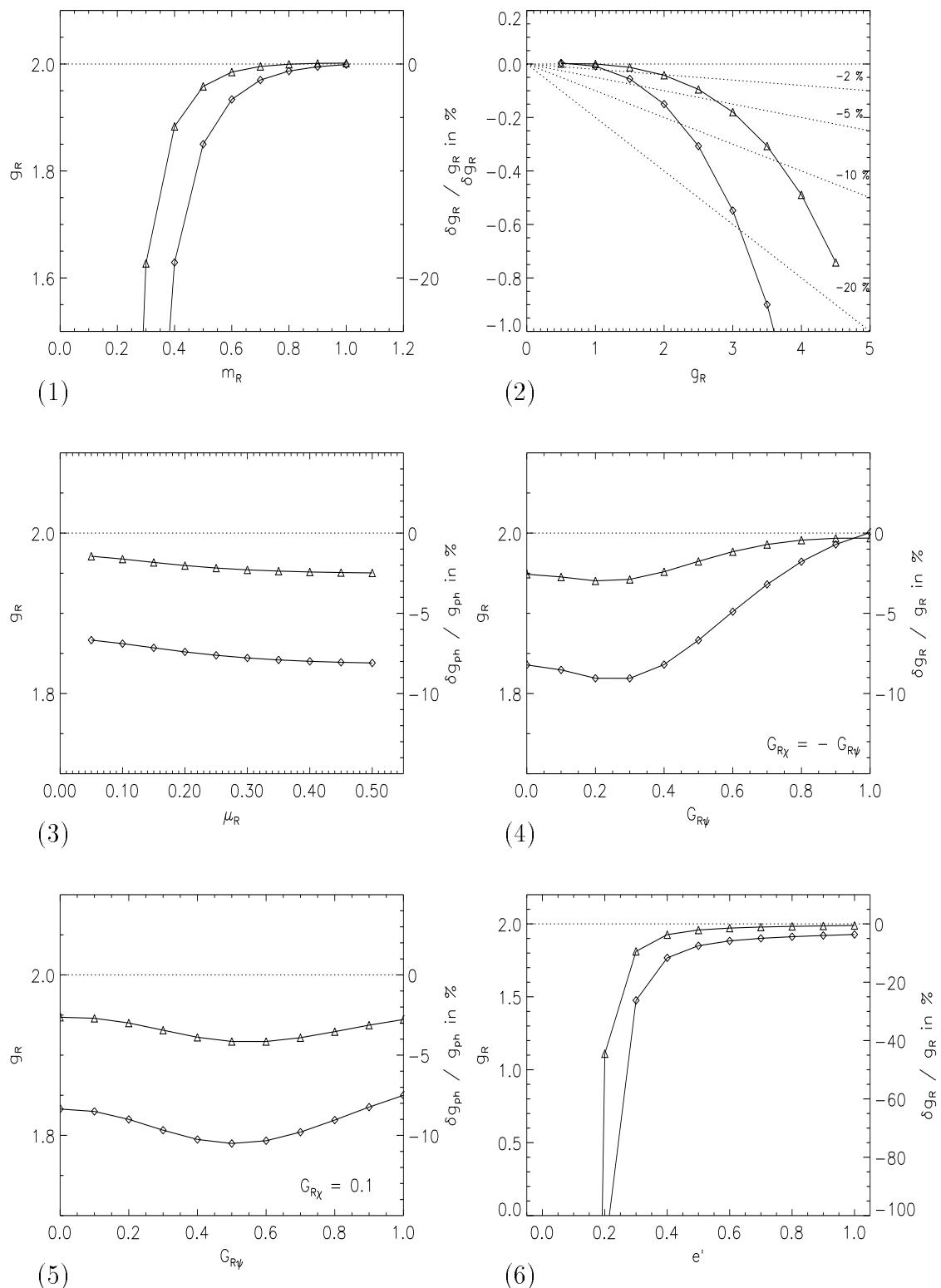


Abbildung 4.9: *Volumeneffekte der renormierten HIGGS-Selbstkopplung*

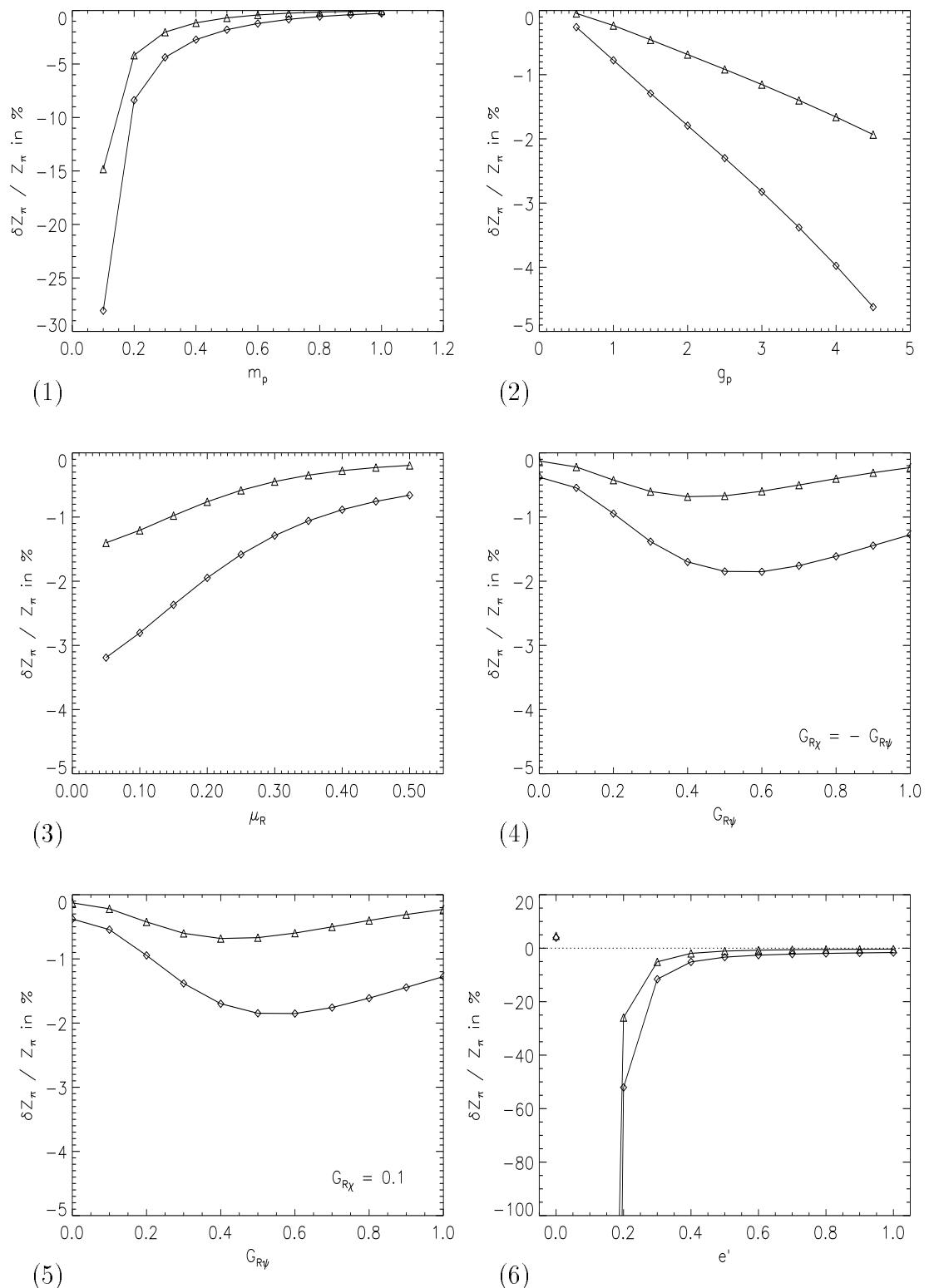


Abbildung 4.10: Volumeneffekte der Wellenfunktionsrenormierung

mums ($G_{R\psi} \approx 0.6$) ab.

Wie gewohnt ergibt die Variation der Eichkopplung dasselbe Bild wie die Variation der HIGGS-Masse. Wieder erfolgt ein unstetiger Übergang zum ungeeichten Fall mit positivem Volumeneffekt.

4.3.5 Vakuumerwartungswert

Daß $m_p \approx 0.4$ für die beiden gewählten Gitter etwa die Grenze zu großen Volumeneffekten darstellt, wird in Abbildung 4.11(1) besonders deutlich. Bei größeren Massen liegt der Volumeneffekt des Vakuumerwartungswertes unter 2 %, während er bei kleineren Massen das Vorzeichen wechselt und schnell auf weit über 10 % ansteigt.

Die Abhängigkeit von der Selbstkopplung ist nicht so ausgeprägt: Der Volumeneffekt bleibt im gesamten untersuchten Bereich unter 2 %. Offenbar wechselt er bei großen Kopplungen (wo wegen der großen Korrelationslänge sehr große Gitter als Referenz benötigt werden) noch einmal das Vorzeichen.

Wie bei allen anderen bosonischen Größen wirken sich Veränderungen der Fermion-Masse und YUKAWA-Kopplungen nur schwach auf die Volumeneffekte des Vakuumerwartungswertes aus (s. Abb. 4.11(3)-(5)), im gesamten Bereich werden sie nie größer als 4 %. Setzt man $G_{R\chi}$ fest auf 0.1, so bleiben sie sogar unter 1 %.

Bei der Variation der Eichkopplung in Abb. 4.11(6) zeigt sich das für renormierte (im Gegensatz zu durch Pole definierten) Größen mittlerweile gewohnte Bild: Unterhalb von etwa $e' = 0.3$ werden die Volumeneffekte schnell sehr groß. Oberhalb dieser Grenze liegen sie auf dem kleineren Gitter bei nur 3 %. Bei verschwindender Eichkopplung betragen sie etwa 1 %.

4.3.6 Fermion-Masse

Der Volumeneffekt der Fermion-Masse μ_R ist über den gesamten Bereich der HIGGS-Masse nahezu konstant und steigt erst unterhalb von $m_R = 0.2$ aufgrund der zum (dort sehr kleinen) Vakuumerwartungswert proportionalen Massen an. Im Vergleich zur ungeeichten Theorie ist der Effekt mit knapp 20 % auf dem $8^3 \cdot 16$ - und etwa 35 % auf dem $6^3 \cdot 12$ -Gitter überraschend groß.

Auch die Abhängigkeit von der Selbstkopplung ist gering, wie Abbildung 4.12(2) zeigt. Die Größe liegt über fast den gesamten Bereich nahezu konstant bei knapp 20 % bzw. 35 %.

Bei der Variation von μ_R selbst steigt der absolute Effekt von etwa 0.06 auf 0.10. Der relative Volumeneffekt sinkt folglich von über 100 % auf etwa 20 % auf dem

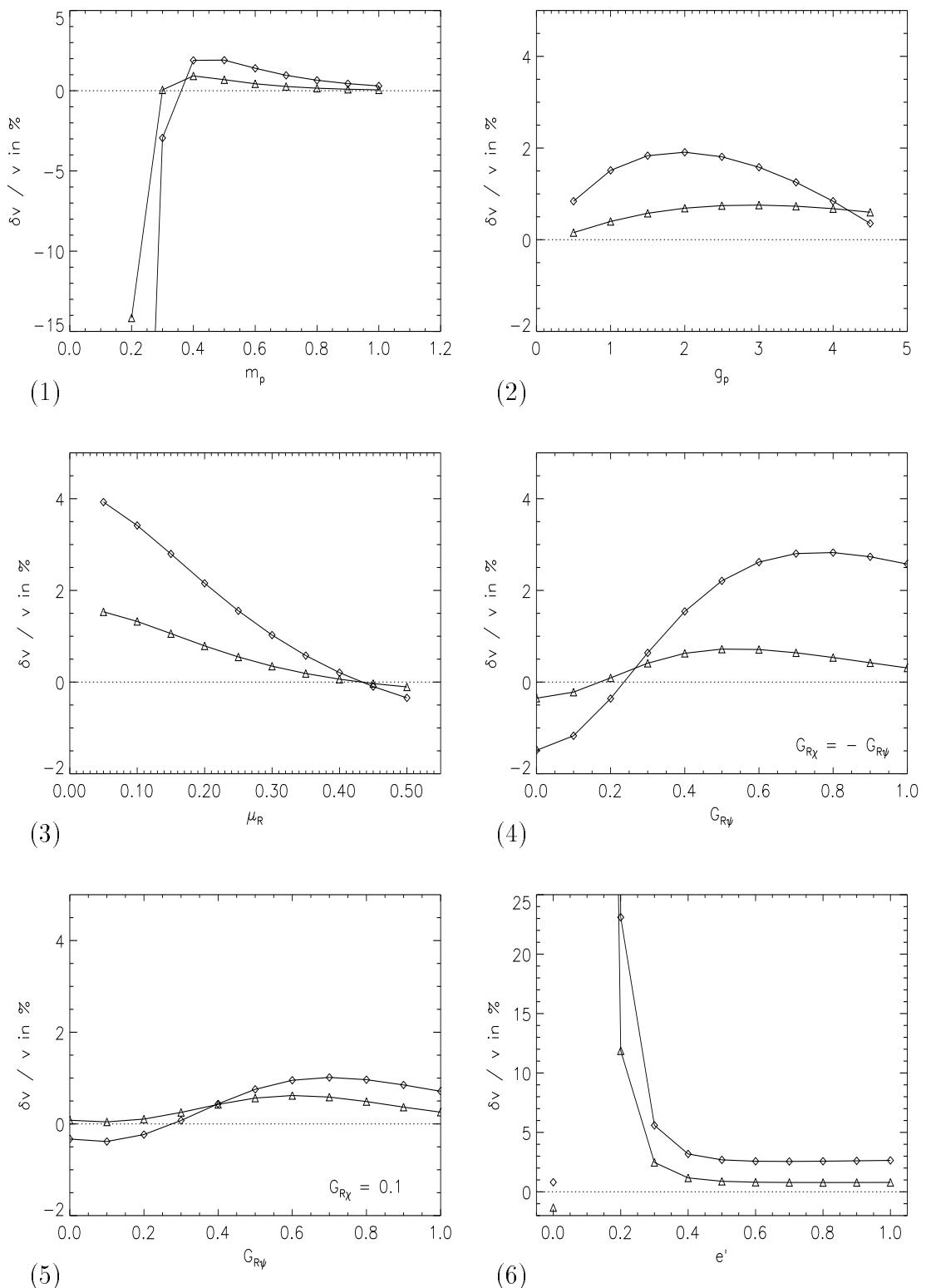


Abbildung 4.11: Volumeneffekte des Vakuumerwartungswertes

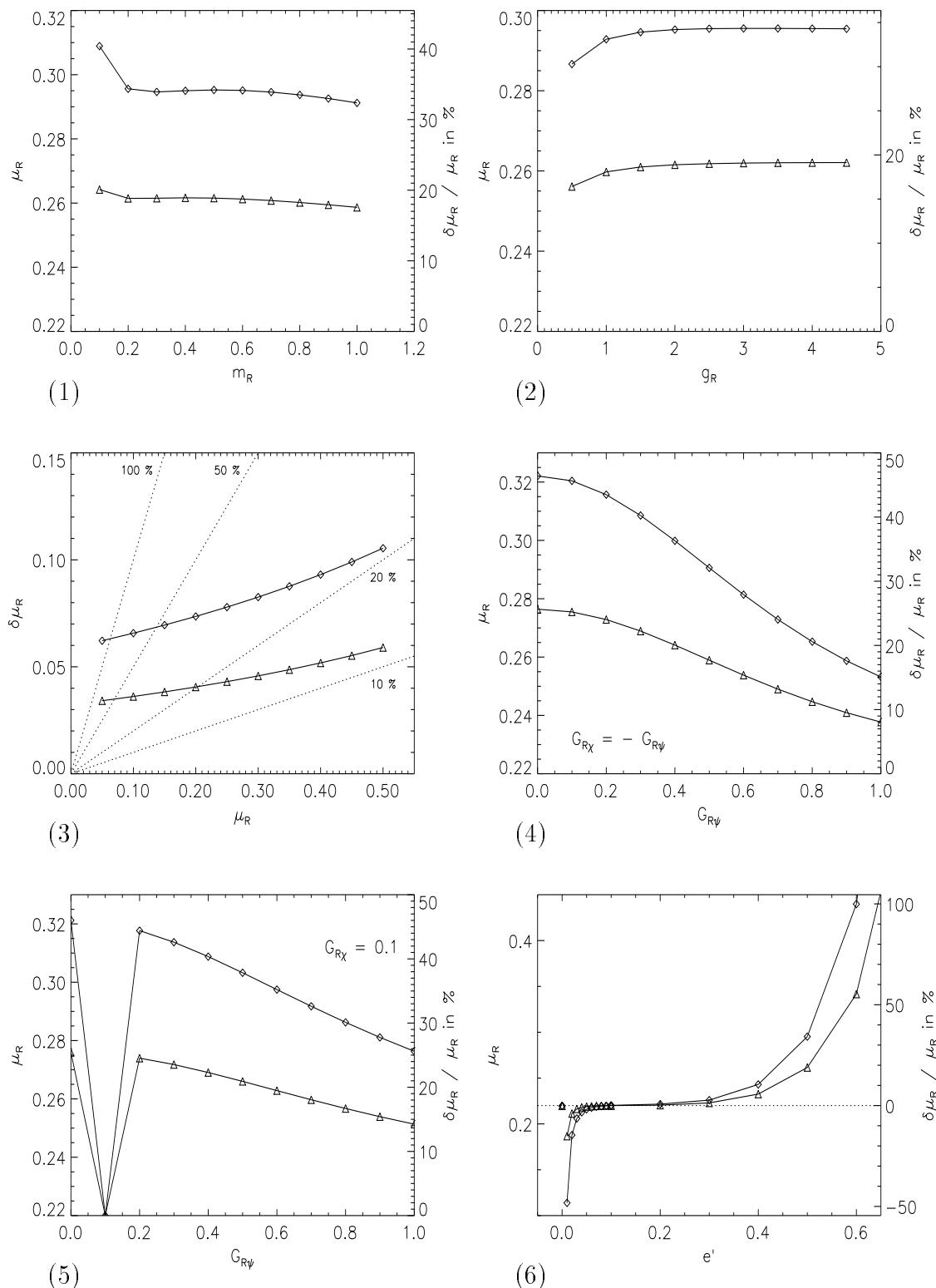


Abbildung 4.12: Volumeneffekte der Fermion-Masse

$6^3 \cdot 12$ -Gitter ab.

Generell wird der Volumeneffekt mit größeren YUKAWA-Kopplungen kleiner. Bei $G_{R\chi} = -G_{R\psi}$ (Abb. 4.12(4)) sinkt er von 45% bei $G_{R\psi} = 0$ auf 15 % bei $G_{R\psi} = 1$. Ähnlich verhält er sich im Fall $G_{R\chi} = 0.1$ (Abb. 4.12(5)), wo er aber nur bis auf ca. 25% abfällt. Hier findet sich noch ein interessanter Punkt: Für $G_{R\chi} = G_{R\psi}$ verschwindet der Volumeneffekt fast vollständig! Wie in Abbildung 4.13 zu sehen,

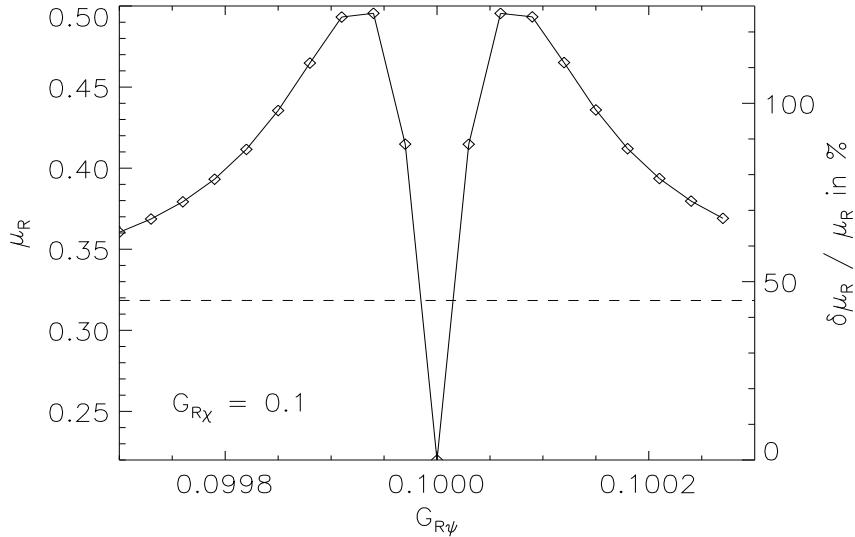


Abbildung 4.13: Volumeneffekte von μ_R bei $G_{R\chi} = G_{R\psi}$. Die gestrichelte Linie ist eine lineare Interpolation der Werte bei $G_{R\psi} = 0$ und $G_{R\psi} = 0.2$.

handelt es sich hierbei um ein sehr scharfes Minimum, in dessen unmittelbarer Nachbarschaft der Volumeneffekt auf über 120% anwächst.

Bei $e' = 0$ ist der Volumeneffekt kleiner als 1 %, die Abhängigkeit von der Eichkopplung lässt sich gut in drei Zonen einteilen (Abb. 4.12(6)): Unterhalb von $e' \approx 0.05$ führen die Nullmoden wie in 4.3.2 beschrieben zu divergierenden Volumeneffekten (hier ist die obige Argumentation auf den Graphen $\mathcal{G}_5^{(3)}$ anzuwenden). Zwischen $e' = 0.05$ und $e' \approx 0.3$ wechseln sie ihr Vorzeichen und liegen unter 5%, darüber steigen sie schnell auf über 100% bei $e' = 0.7$ an.

4.3.7 Yukawa-Kopplungen

Werden die YUKAWA-Kopplungen bei $G_{R\psi} = -G_{R\chi}$ festgehalten, so sind die Volumeneffekte nicht unabhängig, und man kann sich auf die Untersuchung von $G_{R\psi}$ beschränken (Abb. 4.14). Oberhalb von etwa $m_R = 0.3$ liegen die Volumeneffekte unter 5%, darunter wachsen sie schnell an.

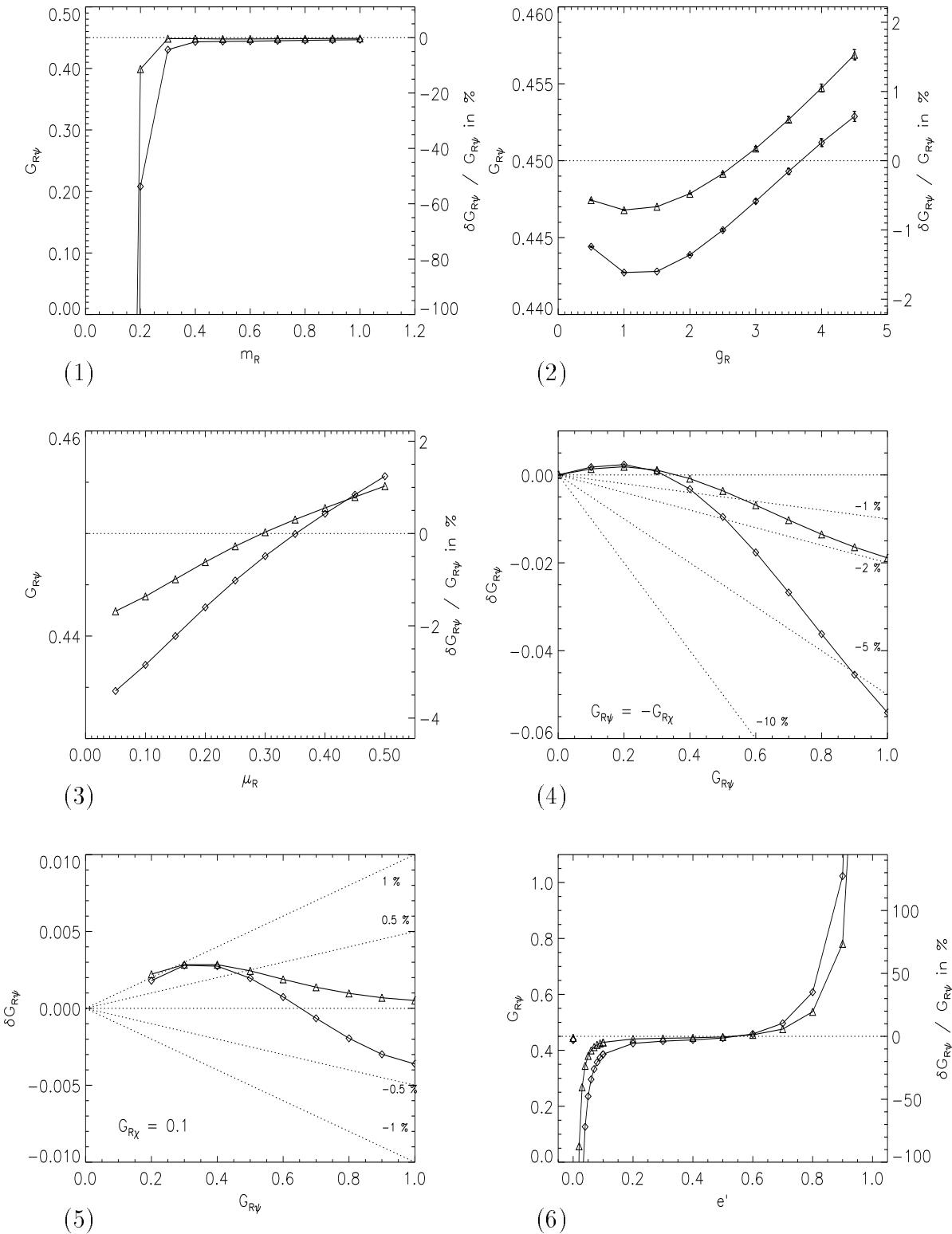


Abbildung 4.14: Volumeneffekte der YUKAWA-Kopplung

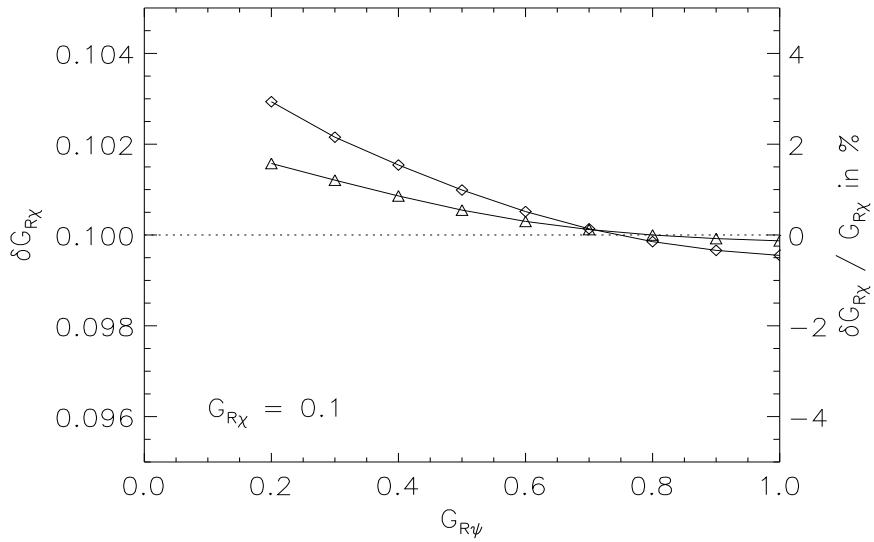


Abbildung 4.15: *Volumeneffekte der Spiegel-YUKAWA-Kopplung*

Mit der quartischen Kopplung wachsen die Volumeneffekte langsam von -2% auf ca. +1%, variieren also nur wenig. Für Kopplungen oberhalb von 3.5 sind die Abweichungen vom unendlichen Volumen für das größere Gitter größer als für das kleinere, ein Effekt, welcher mit der Volumenabhängigkeit von Schleifensummen bei antiperiodischen Randbedingungen zu erklären ist: Typischerweise besitzen diese bei moderaten Volumina ein Extremum, darunter wird der Volumeneffekt in einem gewissen Bereich kleiner als bei größeren Volumina.

Bei Veränderung der Fermion-Masse μ_R steigen die Volumeneffekte langsam von -3% auf +1%. Bei Variation der YUKAWA-Kopplungen selbst sind hier die absoluten Effekte nicht konstant, so daß die relativen Effekte betragsmäßig höchstens 5% erreichen. Selbst im asymptotischen Verhalten für große Kopplungen scheinen sie nicht über 10% zu steigen. Fixiert man $G_{R\chi}$ auf 0.1, so werden die Volumeneffekte beider YUKAWA-Kopplungen vollständig vernachlässigbar, wie Abb. 4.14(6) und 4.15 zeigen.

Mit der Eichkopplung variieren die Kopplungen wie die Fermion-Masse: Im ungeeichten Fall sind die Effekte sehr klein, für $e' < 0.2$ groß und negativ aufgrund der verschwindenden Eichboson-Massen, für $0.2 < e' < 0.7$ bleiben sie betragsmäßig unter 10% und oberhalb von $e' = 0.7$ wachsen sie schnell auf große positive Werte.

4.3.8 Variation der vektoriellen Eichkopplung

Eine Änderung der zum Feld A gehörenden Eichkopplung e beeinflußt nur fermionische Größen. Die entsprechenden Volumeneffekte sind in Abbildung 4.16 zu sehen. Bei fixiertem $e' = 0.5$ beträgt der erlaubte Bereich $e = 0 - 0.25$ (siehe (1.57)). Die

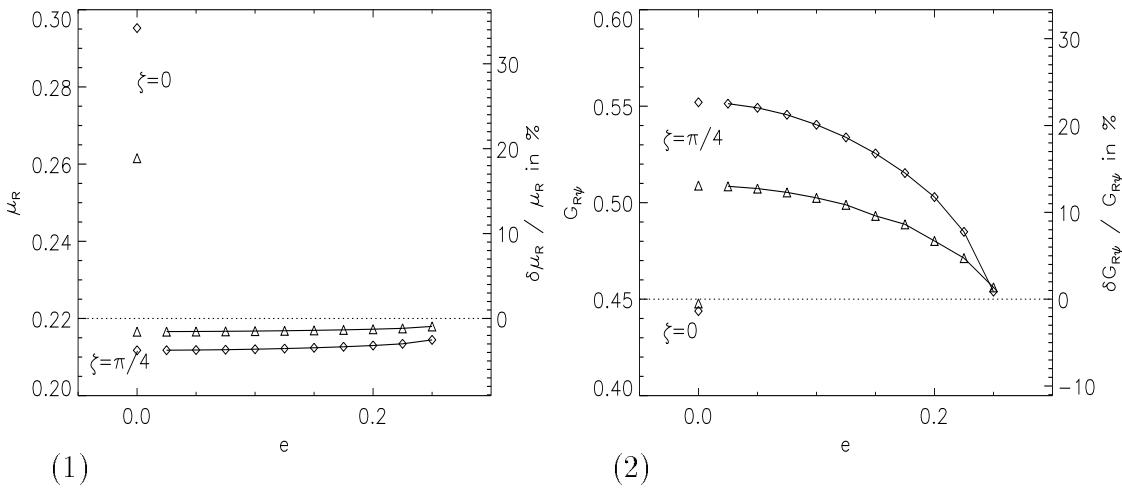


Abbildung 4.16: *Volumeneffekte als Funktion der vektoriellen Eichkoppelung*

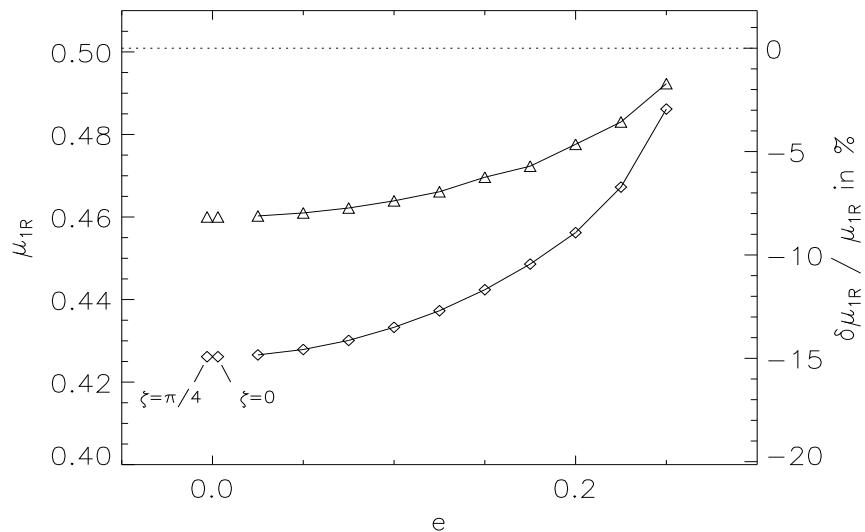


Abbildung 4.17: *Volumeneffekte der Eigenwerte der Massenmatrix*

Fermion-Masse zeigt eine nur moderate Abhängigkeit: Sie sinkt von etwa -4% auf -3% für das kleine Gitter. Bei der Kopplung gibt es deutlichere Veränderungen, sie sinkt von über 20% auf nahezu Null ab.

Der interessanteste Teil dieser Untersuchung liegt jedoch am Punkt $e = 0$. Bei der Wahl $G_{R\psi} = -G_{R\chi}$ wird die Matrix \mathbf{N} in (3.68) nämlich proportional zur Einheitsmatrix. Wie dort ausgeführt, ist der Rotationsanteil der Wellenfunktionsrenormierung dann nicht festgelegt, und man kann verschiedene renormierte Fermionfelder betrachten. Die bisherigen Untersuchungen fanden bei $\zeta = 0$ statt, diese Ergebnisse sind in 4.16 noch einmal eingetragen, sie setzen sich durch einen offenbar unstetigen Übergang von den Werten bei $e > 0$ ab. Wählt man hingegen $\zeta = \pi/4$, so erreicht man einen glatten Übergang zu $e = 0$.

Vergleicht man die Volumeneffekte bei $e = 0$ zwischen 4.16(1) und 4.16(2), so fällt auf, daß die absoluten Effekte mit verschiedenen ζ vertauscht zu sein scheinen. Die Ursache für diesen Effekt ist darin zu suchen, daß für $\zeta = \pi/4$ der Dreh-Anteil der Wellenfunktionsrenormierung nebendiagonal und die Position von renormierter Kopplung und Masse in der Massenmatrix vertauscht wird.

Unabhängig von der ζ -Freiheit sind hingegen die Eigenwerte der Massenmatrix. Sie besitzen bei den gewählten Parametern entgegengesetztes Vorzeichen, μ_{1R} ist in Abbildung 4.17 gezeigt. Der Volumeneffekt sinkt beim kleineren Gitter von etwa -15% auf -3% ab. Auch bei $e = 0$ sind die Volumeneffekte vom gewählten Drehanteil in der Wellenfunktionsrenormierung unabhängig.

Kapitel 5

Massenschranken

Das hier behandelte Modell besitzt einen siebendimensionalen Raum nackter Parameter $(m_0, g_0, \mu_0, G_{0\psi}, G_{0\chi}, e', e)$. Physikalische Forderungen, vor allem nach der Stabilität der Theorie, schränken den gültigen Parameterbereich ein. Dies führt auf Schranken der renormierten Parameter. An prominenter Stelle sind hier obere und untere Schranken für die HIGGS-Selbstkopplung zu nennen, welche auf Schranken für die Masse des HIGGS-Bosons führen.

5.1 Effektives Potential

Die Nützlichkeit des effektiven Potentials (welches in Lehrbüchern vorgestellt wird ([IZ85, S. 448ff], [RYD89, S. 387ff], [HUA82, S. 200ff])) bei der Behandlung von Theorien mit spontaner Symmetriebrechung ist bekannt. Es lässt sich mit der Wirkung bzw. den FEYNMAN-Regeln der symmetrischen Phase relativ leicht berechnen, gestattet aber Rückschlüsse auf renormierte Größen wie beispielsweise den Vakuumerwartungswert. Ich werde hier der Kürze halber nur die bosonischen Beiträge für die niedrigste Ordnung in der Gitterkonstanten, also die Kontinuumsausdrücke, berechnen und die Fermion-Beiträge aus [LMWG91] entnehmen.

Als effektives Potential bezeichnet man im allgemeinen den negativen lokalen Anteil des erzeugenden Funktionals $\Gamma[\varphi]$. Dieses hängt über eine Legendre-Transformation mit dem erzeugenden Funktional Z zusammen:

$$\Gamma[\varphi] = \ln Z[J] - \sum_x J_x \varphi_x \quad \varphi_x = \frac{1}{Z[J]} \frac{\partial Z[J]}{\partial J_x} = \langle \phi \rangle_J \quad (5.1)$$

Exponentiation liefert

$$e^{\Gamma[\varphi]} = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi] + \sum_x J_x(\phi_x - \varphi_x)}, \quad (5.2)$$

was durch eine Sattelpunkt-Entwicklung um das Minimum φ von $S[\phi] - \sum_x J_x \phi_x$ ausgewertet wird:

$$\begin{aligned} e^{\Gamma(\varphi)} &= \exp \left\{ -S(\varphi) - \sum_x J_x \varphi_x \right\} \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{xy} \phi_x \phi_y \delta^2 S_{xy}(\varphi) \right\} \\ &= \exp \left\{ -S(\varphi) - \sum_x J_x \varphi_x \right\} (\det \delta^2 S(\varphi))^{-\frac{1}{2}} \\ &= \exp \left\{ -S(\varphi) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \delta^2 S(\varphi) - \sum_x J_x \varphi_x \right\} \\ \delta^2 S_{xy}(\varphi) &= \left. \frac{\partial}{\partial \phi_x} \frac{\partial}{\partial \phi_y} S[\phi] \right|_{\phi=\varphi} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Setzt man nun $J = 0$, so wird $\varphi = \langle \phi \rangle$ zu einer konstanten Feldkonfiguration. Ist $V(\varphi)$ der lokale Anteil von $S(\varphi)$, so lautet das effektive Potential in dieser Näherung (der man bei $\hbar \neq 1$ ihren Ein-Schleifen-Charakter angesehen hätte):

$$U(\varphi) = V(\varphi) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \delta^2 S(\varphi) \quad (5.4)$$

Diese Rechnung ist direkt auf den Fall mehrerer Felder erweiterbar.

Da die σ - π -Parametrisierung hier nicht benutzt wird, verwendet man die Wirkung mit den Konventionen der symmetrischen Phase und erhält als Beitrag der HIGGS-Felder [LMWG91]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \delta^2 S_\phi(\varphi) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\left(-\square - \frac{m_0^2}{2} \right) + \frac{g_0}{6} \begin{pmatrix} 3\varphi_1^2 + \varphi_2^2 & 2\varphi_1\varphi_2 \\ 2\varphi_1\varphi_2 & 3\varphi_2^2 + \varphi_1^2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \begin{pmatrix} -\square - \frac{m_0^2}{2} + g_0\varphi^2 & 0 \\ 0 & -\square - \frac{m_0^2}{2} + \frac{1}{3}g_0\varphi^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \int_q \left[\ln \left(\hat{q}^2 - \frac{m_0^2}{2} + g_0\varphi^2 \right) + \ln \left(\hat{q}^2 - \frac{m_0^2}{2} + \frac{1}{3}g_0\varphi^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

Wird die 'T HOOFT-Eichung in der symmetrischen Phase als $\mathcal{F}[Z_{\mu x}] = \nabla_\mu^* Z_{\mu x} + \xi e' \varphi_1 \varphi_2$ formuliert, so erhält man als Beitrag von Eichfeldern (genauer des Eichfeldes Z) und Geistertermen in der 'T HOOFT-FEYNMAN-Eichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \delta^2 (S_G + S_{GF} + S_{G\phi}) &= \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left((\Delta_{\mu\nu xy}^{(Z)})^{-1} + e'^2 \delta_{\mu\nu} \delta_{xy} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \right) \\ &= \frac{d}{2} \int_q \ln (\hat{q}^2 + 2e'^2 \varphi^2) \\ \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \delta^2 S_{FP} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln (\square + \delta_{xy} e'^2 (\varphi_1^2 - \varphi_2^2)) \\ &= -\frac{1}{2} \int_q \ln (\hat{q}^2 + 2e'^2 \varphi^2) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Hier wurde die Tatsache, daß φ für $J \rightarrow 0$ konstant wird, benutzt sowie der inverse Eichboson-Propagator in dieser Eichung. Bis auf die Fermion-Beiträge lautet das

effektive Potential folglich:

$$\begin{aligned} U(\varphi) = & -\frac{m_0^2}{2}\varphi^2 + \frac{g_0}{6}\varphi^4 + \frac{1}{2} \int_q \left[\ln(\hat{q}^2 - \frac{m_0^2}{2} + g_0\varphi^2) + \ln(\hat{q}^2 - \frac{m_0^2}{2} + \frac{1}{3}g_0\varphi^2) \right] \\ & + \frac{d-1}{2} \int_q \ln(\hat{q}^2 + 2e'^2\varphi^2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Diese Rechnung kann getestet werden, indem man den Vakuumerwartungswert in dieser Näherung als Extremum des effektiven Potentials sucht:

$$\begin{aligned} 0 & \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial\varphi}U(\varphi) \\ & = -m_0^2\varphi + \frac{2g_0\varphi^3}{3} + g_0\varphi \int_q \left[\frac{1}{\hat{q}^2 - \frac{m_0^2}{2} + g_0\varphi^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{\hat{q}^2 - \frac{m_0^2}{2} + \frac{1}{3}g_0\varphi^2} \right] \\ & \quad + 2(d-1)e'^2\varphi \int_q \frac{1}{\hat{q}^2 + 2e'^2\varphi^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Wählt man das nicht verschwindende Minimum und beachtet dort $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_0 + \langle\sigma\rangle)$, so findet man:

$$\langle\sigma\rangle = -\frac{3}{2v_0} \int_q \left[\frac{1}{\hat{q}^2 - \frac{m_0^2}{2} + \frac{g_0v_0^2}{2}} + \frac{1}{3} \frac{1}{\hat{q}^2 - \frac{m_0^2}{2} + \frac{g_0v_0^2}{6}} \right] - \frac{3(d-1)e'^2}{g_0v_0} \int_q \frac{1}{\hat{q}^2 + 2e'^2\frac{v_0^2}{2}} \quad (5.9)$$

Dies stimmt mit (3.9) überein, wenn man $g_0v_0^2 = 3m_0^2$ einsetzt.

5.2 Weinberg-Linde-Schranke

Mit Hilfe des effektiven Potentials lässt sich die Forderung nach dem Vorhandensein von spontaner Symmetriebrechung – formuliert durch $U(0) > U(\frac{v_R}{\sqrt{2}})$ – in eine untere Grenze für die HIGGS-Masse oder die Selbstkopplung umsetzen. Die Vorgehensweise wird hier nur skizziert, eine genaue Beschreibung findet sich z.B. in [CW73].

Durch Einsetzen der renormierten Störungstheorie in Ein-Schleifen-Ordnung gelangt man von (5.7) zu einem von Divergenzen befreiten renormierten effektiven Potential. Für die Herleitung der gesuchten Massenschranke kann jedoch eine weniger aufwendige Methode verwendet werden [WEI76] (siehe auch [LIN76], diese und weitere Artikel zu diesem Thema sind gesammelt in [EIN90] erschienen). Dazu schreibt man das effektive Potential (genauer seine bosonischen Beiträge) als

$$U(\varphi) = -\frac{m_0^2}{2}\varphi^2 + \frac{g_0}{6}\varphi^4 + \frac{1}{2}I(-\frac{m_0^2}{2} + g_0\varphi^2) + \frac{1}{2}I(-\frac{m_0^2}{2} + \frac{1}{3}g_0\varphi^2) + \frac{d-1}{2}I(2e'^2\varphi^2). \quad (5.10)$$

Unterdrückt man skalenverletzende Terme von der Ordnung der Gitterkonstante und regularisiert das auftretende Integral mit einem Cutoff Λ , so erhält man [HUA82, S.

107]:

$$\begin{aligned} I(x^2) &= \int_q \ln(\hat{q}^2 + x^2) \\ &\mapsto \frac{1}{32\pi^2} \left[2\Lambda^2 x^2 + x^4 \left(\ln \frac{x^2}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

Hier wurden von φ unabhängige Terme unterdrückt. Für große φ erhält man daraus als führenden Beitrag

$$B\varphi^4 \ln \frac{\varphi^2}{C^2} \quad (5.12)$$

mit einer Konstante C und $B = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{10}{9} g_0^2 + 4(d-1)e'^4 \right)$, was für $e' = 0$ mit dem Resultat aus [LMWG91] übereinstimmt. An dieser Stelle erweitere ich die Diskussion auf das volle Modell (mit Fermionen) einfach durch Übernahme des dortigen Resultats:

$$B = \frac{1}{64\pi^2} \left[\frac{10}{9} g_0^2 - 32(G_{0\psi}^4 + G_{0\chi}^4) + 4(d-1)e'^4 \right] \quad (5.13)$$

Das Ergebnis (5.12) dient nachträglich als Rechtfertigung der Parametrisierung (1.40) des HIGGS-Feldes. Der Koeffizient des quartischen Terms der effektiven Wirkung, welcher der renormierten quartischen Kopplung entspricht, enthält nämlich einen Logarithmus des Feldes, liegt also für große Felder außerhalb des perturbativen Regimes. Selbst die – im allgemeinen besser konvergierende – renormierte Störungstheorie lässt sich also nur für kleine Werte des Feldes anwenden.

Im folgenden soll eine *untere* Schranke für die HIGGS-Masse bzw. -Selbstkopplung abgeleitet werden. Zu Potenzen dieser Größen proportionale Terme können also vernachlässigt werden. Damit verschwindet der erste Summand aus B sowie ein Term proportional zu $\varphi^2 \ln \varphi^2$ im effektiven Potential, welches dann folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$U(\varphi) = -\frac{A^2}{2}\varphi^2 + B\varphi^4 \ln \frac{\varphi^2}{C^2} \quad (5.14)$$

mit einer bei Entfernung des Cutoff divergierenden Konstanten A und der den quartischen Term absorbierenden Skala C . A wird durch die Forderung fixiert, daß das effektive Potential am Vakuumerwartungswert ein Extremum besitzt:

$$0 \doteq \frac{\partial}{\partial \varphi} U(\varphi) \Big|_{\varphi=\frac{v_R}{\sqrt{2}}} = \frac{v_R}{\sqrt{2}} \left[-A^2 + 2Bv_R^2 \ln \frac{v_R^2}{2C^2} + Bv_R^2 \right], \quad (5.15)$$

es folgt sofort:

$$A^2 = 2Bv_R^2 \ln \frac{v_R^2}{2C^2} + Bv_R^2. \quad (5.16)$$

Die Masse des HIGGS-Bosons (und damit die Selbstkopplung) ist definiert durch die zweite Ableitung des effektiven Potentials in seinem Minimum:

$$m_\sigma^2 := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} U(\varphi) \Big|_{\varphi=\frac{v_R}{\sqrt{2}}} = 2Bv_R^2 \left(\ln \frac{v_R^2}{2C^2} + \frac{3}{2} \right) \quad (5.17)$$

Die grundlegende Forderung ist nun, daß spontane Symmetriebrechung tatsächlich vorliegt, in v_R also das *globale* Minimum liegt:

$$\begin{aligned} 0 = U(0) > U\left(\frac{v_R}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{A^2 v_R^2}{4} + \frac{B v_R^4}{4} \ln \frac{v_R^2}{2C^2} \\ &= -\frac{B v_R^4}{4} \left(1 + \ln \frac{v_R^2}{2C^2}\right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Solange B eine positive Konstante ist, muß der Logarithmus größer als -1 sein. Dies lautet für die Masse:

$$m_\sigma^2 > B v_R^2 \quad (5.19)$$

oder für die Selbstkopplung ($d = 4$)

$$g > 3B = \frac{1}{16\pi^2} [9e'^4 - 24(G_{R\psi}^4 + G_{R\chi}^4)]. \quad (5.20)$$

Abbildung 5.1 zeigt die WEINBERG-LINDE-Schranke zusammen mit der Vakuum-

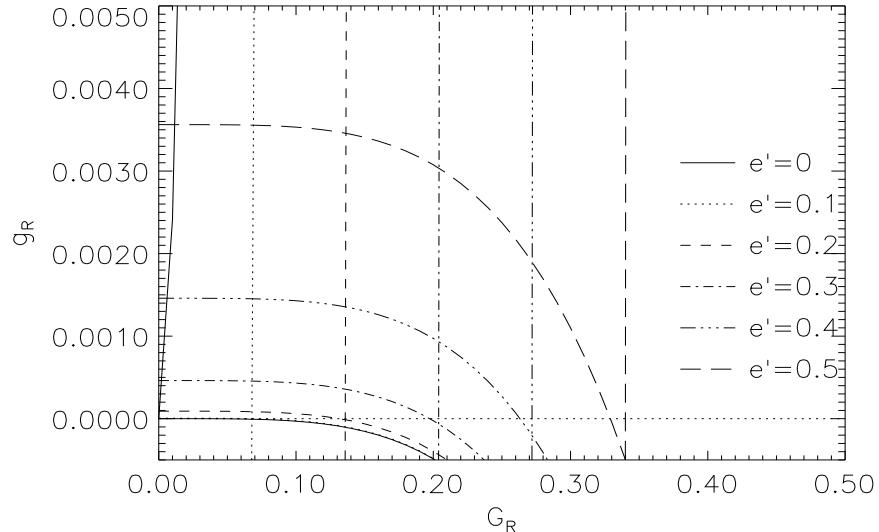


Abbildung 5.1: WEINBERG-LINDE-Schranke bei $\mu_R = 0.5$ und $v_R = 0.5$.

Stabilitätsschranke (den nahezu senkrechten Linien, s.u.) für verschiedene Eichkoppungen. Beide Schranken zusammen ergeben fast immer eine positive untere Grenze für die Selbstkopplung, allerdings ist die WEINBERG-LINDE-Schranke erheblich schwächer als jene der Vakuum-Stabilität.

5.3 Vakuum-Stabilität

Die Bedeutung der Vakuum-Stabilitäts-Schranke in einer gitterregularisierten Theorie wird in [LMWG91] ausführlich erklärt: Ihre Herleitung beruht auf der Verbin-

dung zwischen der laufenden Kopplung bei der Cutoff-Skala und der nackten Kopplung. Verfolgt man von diesem Punkt aus durch eine Integration der β -Funktion die Renormierungsgruppen-Trajektorie zu einer niedrigeren, insbesondere zur physikalischen Skala, so erhält man die korrespondierende renormierte Kopplung. Da die nackte Kopplung positiv ist (ansonsten wäre die Theorie instabil!), liefert die Integration vom Startpunkt $g_0 = 0$ aus eine untere Grenze für die renormierte Kopplung, falls die Trajektorie monoton fallend ist (sonst könnte sie bei einer Erhöhung des Cutoff wieder in den positiven Bereich führen). Dies ist dann der Fall, wenn nur der triviale Fixpunkt des Flusses existiert, wie von der Ein-Schleifen-Approximation der β -Funktion vorhergesagt.

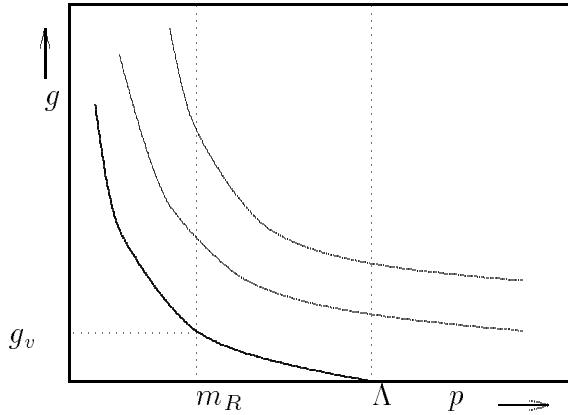


Abbildung 5.2: *Renormierungsgruppenfluß im Ein-Schleifen-Szenario*

Die kleinste mögliche renormierte Kopplung erhält man aus den Ergebnissen der Ein-Schleifen-Approximation, indem man bei fixiertem v_0 die nackte Kopplung $g_0 = 0$ setzt. Dann gilt sofort $m_0^2 = g_0 v_0^2 / 3 = 0$, und für die Schranke erhält man aus (3.36) $g_v = 3m_v^2/v_R^2$ mit:

$$\begin{aligned}
 m_v^2 &= m_0^2 - \Sigma_\sigma(0) + m_0^2(Z_\pi - 1) = -\Sigma_\sigma(0) \\
 &= +3N_f \int_q D^{-1}(q) \left\{ (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2)\bar{p}^2 + 2G_{0\psi}^2 G_{0\chi}^2 v_0^2 - 2G_{0\chi} G_{0\psi} \mu_p^2 \right\} \\
 &\quad + dN_f \int_q D^{-2}(q) \left\{ G_{0\psi}^2 v_0^2 (G_{0\psi}(\bar{q}^2 + \mu_{0\chi}^2) - G_{0\chi} \mu_q^2)^2 \right. \\
 &\quad \left. + G_{0\psi} G_{0\chi} \mu_q^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi})^2 - G_{0\psi}^2 \bar{q}^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2 + \mu_{0\chi}^2)^2 \right. \\
 &\quad \left. - G_{0\psi} G_{0\chi} \bar{q}^2 \mu_q^2 (\mu_{0\psi} + \mu_{0\chi})^2 + (\psi \mapsto \chi) \right\} \\
 &\quad - 2(d-1)e'^2 \int_q \frac{1}{\bar{q}^2 + M_Z^2} - 2v_0^2 e'^4 (d-1) \int_q \left(\frac{1}{\bar{q}^2 + M_Z^2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Setzt man hier die Ausdrücke der renormierten Störungstheorie ein und entwickelt dies noch bei fixiertem v_0 bis zur zweiten Ordnung, so erhält man:

$$m_v^2 = 2dN_f \int_q \frac{(G_{R\psi}^2 + G_{R\chi}^2)\bar{q}^2 - 2G_{R\chi} G_{R\psi} \mu_q^2}{(\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2} - 2(d-1)e'^2 \int_q \frac{1}{\bar{q}^2} \tag{5.22}$$

mit $\mu_{Rq} = \mu_R + \frac{r}{2}\hat{q}^2$. Setzt man weiter $d = 4$, $N_f = 2$ und $G_R = G_{R\psi} = -G_{R\chi}$, so lautet das Ergebnis:

$$g_v = \frac{1}{v_R^2} \left\{ 96G_R^2 \int_q \frac{1}{\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2} - 18e_R'^2 \int_q \frac{1}{\hat{q}^2} \right\}, \quad (5.23)$$

was für $e'_R = 0$ das Ergebnis aus [LMWG91] reproduziert. Die Abbildung 5.3 zeigt die Stabilitätsschranke an der auch in der Literatur gezeigten Stelle $\mu_R = 0.5$, $v_R = 0.5$. Die Eichkopplung wächst von oben nach unten um je 0.1 an. Mit der Eichung der Modells wird die Forderung an die HIGGS-Kopplung (und damit an die Masse des HIGGS-Bosons) schwächer. Abbildung 5.4 zeigt die Volumeneffekte der Schranke bei

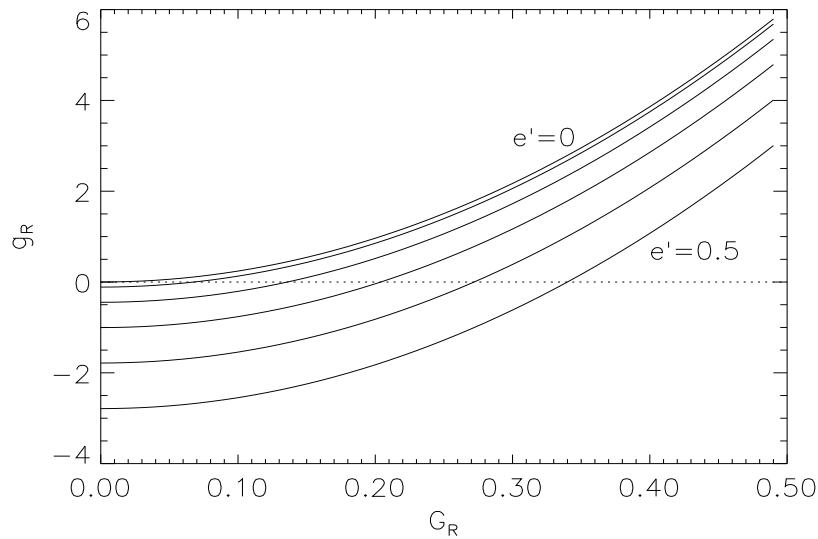


Abbildung 5.3: *Vakuum-Stabilitäts-Schranke als Funktion der Eichkopplung bei $\mu_R = 0.5$ und $v_R = 0.5$.*

der Eichkopplung $e' = 0.2$ (vergleiche [LMWM91]). Diese Effekte entstehen durch die Auswertung der in (5.23) auftretenden Integrale auf endlichen Gittern. Wieder wird auf eine Auswertung der Ausdrücke im unendlichen Volumen verzichtet und stattdessen das Ergebnis auf einem $50^3 \cdot 100$ -Gitter gezeigt.

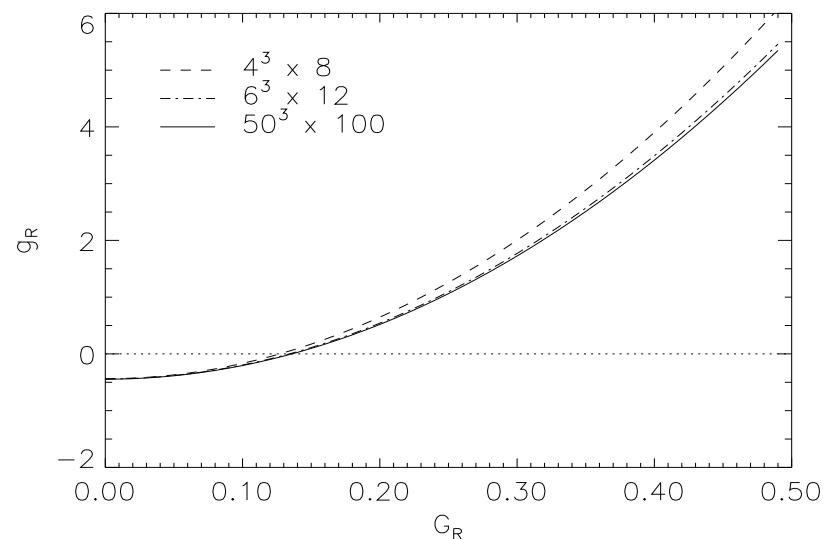


Abbildung 5.4: *Volumeneffekte der Vakuum-Stabilitäts-Schranke an der Stelle $\mu_R = 0.5$, $v_R = 0.5$ und $e' = 0.2$.*

Kapitel 6

Die symmetrische Phase

Bislang stand die Betrachtung der Phase spontan gebrochener Eichsymmetrie im Vordergrund. Aus den erhaltenen Ergebnissen lassen sich jedoch auch die entsprechenden Größen in der symmetrischen Phase ableiten. Im wesentlichen sind hierzu nur die Ersetzungen

$$v_0 \mapsto 0 \quad m_{0\pi} \mapsto m_0 \quad (6.1)$$

vorzunehmen. Alle Ausdrücke vereinfachen sich dadurch erheblich und einige weitgehende Untersuchungen werden möglich.

6.1 Renormierte Größen

6.1.1 Higgs-Feld

Aus (3.25) leitet man sofort die Selbstenergie einer der (hier gleichberechtigten) Komponenten des HIGGS-Feldes ab:

$$\begin{aligned} \Sigma_{\sigma+}(p) = & -\frac{2}{3}g_0 \int_q \frac{1}{\overline{q^2+m_0^2}} \\ & -dN_f \int_q \frac{2G_{0\psi}G_{0\chi}\mu_q\mu_{q+p}-(G_{0\psi}^2+G_{0\chi}^2)\overline{qq+p}}{(\overline{q^2+\mu_q^2})(\overline{q+p}^2+\mu_{q+p}^2)} \\ & -\epsilon'^2 \left(1 + \frac{\xi-1}{d}\right) \sum_{\mu+} \cos p_\mu \int_q \frac{1}{\overline{q^2}} \\ & +\epsilon'^2 \int_q \frac{1}{\overline{q^2+m_0^2}} \frac{1}{\widehat{q+p}^2} \left(\widehat{q-p}^2 + (\xi-1) \frac{\widehat{(q+p)} \cdot \widehat{(q-p)}}{\widehat{q+p}^2} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Der Vorgehensweise aus Abschnitt 3.2.2 folgend, findet man für die renormierte Masse in der symmetrischen Phase:

$$\begin{aligned} m_{R+}^2 = & m_0^2 + \frac{2}{3} g_0 \int_q \frac{1}{\overline{q}^2 + m_0^2} \\ & + dN_f \int_q \frac{2G_{0\Psi} G_{0\chi} \mu_q^2 - (G_{0\Psi}^2 + G_{0\chi}^2) \overline{q}^2}{(\overline{p}^2 + \mu_p^2)^2} \\ & + e'^2 \int_q \left[\frac{d-1+\xi}{\overline{q}^2} - \frac{\xi}{\overline{q}^2 + m_0^2} \right] + m_0^2 (Z_\sigma - 1) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Für $e' = 0$ wird das Ergebnis aus [FKL91] reproduziert. Hieran kann der kritische Parameter m_{0c+} bestimmt werden, für den die renormierte Masse (in Gittereinheiten) verschwindet:

$$m_{0c+}^2 = - \left(\frac{2}{3} g_0 + (d-1)e'^2 \right) \int_q \frac{1}{\overline{q}^2} - dN_f \int_q \frac{2G_{0\Psi} G_{0\chi} (\frac{r}{2}\overline{q}^2)^2 - (G_{0\Psi}^2 + G_{0\chi}^2) \overline{q}^2}{(\overline{p}^2 + (\frac{r}{2}\overline{q}^2)^2)^2} \quad (6.4)$$

Ein Vergleich mit (3.79) zeigt: $m_{0c}^2 = -2m_{0c+}^2$, daher findet man mit (1.42) und (1.43) für den kritischen skalaren Hopping-Parameter in beiden Phasen wie aus Konsistenzgründen erwartet den gleichen Wert.

6.1.2 Fermion-Feld

In der symmetrischen Phase darf für den Fermionpropagator die weiter vereinfachte Form (2.46) verwendet werden:

$$D(p) = \overline{p}^2 + \mu_p^2 \quad \Delta_\Psi^{(1)}(p) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_p \\ \mu_p & 0 \end{pmatrix} \quad \Delta_\Psi^{(2)}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Damit lautet die Selbstenergie (3.61):

$$\begin{aligned} \Sigma_{\psi\psi+}(p) &= -2iG_{0\Psi}^2 \int_q \frac{1}{\widetilde{q}^2 + m_0^2} \frac{i\gamma_\mu \overline{q}_\mu}{\overline{q}^2 + \mu_q^2} + \frac{i}{2}(e^2 + e_L^2) \gamma_\mu \overline{p}_\mu \int_q \frac{1}{\overline{q}^2} \\ &\quad + i(e^2 + e_L^2) \int_q \frac{1}{\widetilde{q}^2} \frac{r\gamma_\mu \overline{p}_\mu + q_\mu \mu(q) - \gamma_\mu \overline{q}_\mu (s_\nu^2 + r^2 s_\nu^2)}{\overline{q}^2 + \mu_q^2} \\ \Sigma_{\psi\chi+}(p) &= 2G_{0\Psi} G_{0\chi} \int_q \frac{1}{\widetilde{q}^2 + m_0^2} \frac{\mu_q}{\overline{q}^2 + \mu_q^2} - \frac{1}{2}(e^2 + e_L^2) r \cos p_\mu \int_q \frac{1}{\overline{q}^2} \\ &\quad + (e^2 + e_L^2) \int_q \frac{1}{\widetilde{q}^2} \frac{-(c_\mu^2 - r^2 s_\mu^2) \mu_q + r \overline{q} p + q}{\overline{q}^2 + \mu_q^2} \\ \Sigma_{\chi\chi+}(p) &= \Sigma_{\psi\psi}(p)|_{G_{0\Psi} \leftrightarrow G_{0\chi}} \end{aligned} \quad (6.6)$$

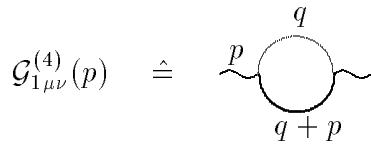
Die simultane Substitution $p \mapsto -p, q \mapsto -q$ lässt erkennen: $\Sigma_{\psi\psi+}(p)$ ist ungerade, $\Sigma_{\psi\chi+}(p)$ gerade im externen Impuls. Folglich ist die Wellenfunktionsrenormierung diagonal, die renormierte Massenmatrix also wie die nackte rein nebendiagonal.

6.1.3 Eichfeld

Wie in Abschnitt 3.5 bemerkt, ist die störungstheoretische Behandlung der Eichboson-Selbstenergie in der gebrochenen Phase aufwendig, und die resultierenden Ausdrücke sind unübersichtlich. In der symmetrischen Phase kann man sie jedoch noch behandeln und explizit ihre von den WARD-TAKAHASHI-Identitäten vorhergesagte Transversalität (vgl. Abschnitt 3.5) nachweisen. Ähnliche Rechnungen sind (sogar in nichtabelschen Eichtheorien) bereits in [HH80, KNS81] durchgeführt worden.

In der Ein-Schleifen-Näherung ist die Z -Boson-Selbstenergie eine Summe von fünf Beiträgen:

$$\Sigma_{Z\mu\nu}(p) = \sum_{n=1}^5 \mathcal{G}_n^{(4)}(p) \quad (6.7)$$



$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1\mu\nu}^{(4)}(p) &= \int_q V_\mu^{(\sigma,\pi,Z)}(q, q+p) \Delta_\sigma(q) V_\nu^{(\sigma,\pi,Z)}(q+p, q) \Delta_\pi(q+p) \\ &= 4\epsilon'^2 \int_q \frac{\sin(q_\mu + \frac{p_\mu}{2}) \sin(q_\nu + \frac{p_\nu}{2})}{(\hat{q}^2 + m_0^2)(q+p)^2 + m_0^2} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Entwickelt man dies in p , so ergibt sich:

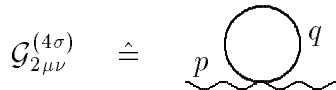
$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1\mu\nu}^{(4)}(p) &= \mathcal{G}_{1\mu\nu}^{(4)}(0) - \frac{\epsilon'^2}{3} \left\{ \delta_{\mu\nu} p_\rho^2 \mathcal{K}_{1\mu\rho} - p_\mu p_\nu \mathcal{K}_{1\mu\nu} \right\} + \mathcal{O}(p^4) \\ &= \mathcal{G}_{1\mu\nu}^{(4)}(0) - \frac{\epsilon'^2}{3} \left\{ \delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu \right\} \mathcal{K}_{1\rho \neq \rho'} + \mathcal{O}(p^4) \end{aligned} \quad (6.9)$$

mit

$$\mathcal{K}_{1\mu\nu} = \int_q \frac{\cos q_\mu \cos q_\nu}{(\hat{q}^2 + m_0^2)^2}. \quad (6.10)$$

Dabei wurde benutzt, daß für jeden Tensor $\mathcal{K}_{\mu\nu}$, welcher für $\mu = \nu$ den Wert $\mathcal{K}_{\mu=\nu}$ und für $\mu \neq \nu$ den Wert $\mathcal{K}_{\mu \neq \nu}$ annimmt, gilt:

$$\delta_{\mu\nu} p_\rho^2 \mathcal{K}_{\mu\rho} - p_\mu p_\nu \mathcal{K}_{\mu\nu} = \left\{ \delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu \right\} \mathcal{K}_{\mu \neq \nu}. \quad (6.11)$$



Dieser Graph zusammen mit dem entsprechenden mit einer π -Boson-Schleife wird hier nicht explizit berechnet. Man kann sich nämlich überlegen, daß sie unter recht allgemeinen Bedingungen den Beitrag von $\mathcal{G}_{1\mu\nu}^{(4)}$ mit verschwindendem externem Impuls aufheben (siehe hierzu Anhang E):

$$\mathcal{G}_{2\mu\nu}^{(4\sigma)} + \mathcal{G}_{2\mu\nu}^{(4\pi)} = -\mathcal{G}_{1\mu\nu}^{(4)}(0) \quad (6.12)$$

$$\mathcal{G}_{3\mu\nu}^{(4)}(p) \hat{=} \begin{array}{c} q \\ p \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \end{array} \quad q + p$$

$$\mathcal{G}_{3\mu\nu}^{(4)}(p) = - \int_q Tr \mathbf{V}_\mu^{(2\Psi,f,Z)}(q, q+p) \Delta_\Psi(q) \mathbf{V}_\nu^{(2\Psi,f,Z)}(q+p, q) \Delta_\Psi(q+p) \quad (6.13)$$

Der explizite Ausdruck ist umfangreich, die Entwicklung für kleine Impulse lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3\mu\nu}^{(4)}(p) &= \mathcal{G}_{3\mu\nu}^{(4)}(0) - 4N_f e'^2 \{ \delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu \} \mathcal{K}_{2\rho \neq \rho'} + \mathcal{O}(p^4) \\ \mathcal{K}_{2\rho \rho'} &= \int_q \frac{-\frac{1}{6} \partial_\rho \omega_\rho \partial_{\rho'} \omega_{\rho'} + \frac{1}{2} r^2 \omega_\rho \bar{q}_\rho \cos q_{\rho'} - \frac{1}{3} r^4 \bar{q}_\rho^2 \bar{q}_{\rho'}^2 + \frac{1}{2} \alpha_\rho \alpha_{\rho'}}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2} \\ \omega_\rho &= \bar{q}_\rho + r \mu_q \bar{q}_\rho \quad \partial_\rho \omega_\rho = \cos(2q_\rho) + r \mu_q \cos q_\rho + r^2 \bar{q}_\rho^2 \\ \alpha_\rho &= \cos^2 q_\rho + r^2 \bar{q}_\rho^2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Der Beitrag verschwindenden Impulses wird wieder durch den zweiten Fermion-Graphen $\mathcal{G}_{4\mu\nu}^{(4)}$ aufgehoben.

$$\mathcal{G}_{5\mu\nu}^{(4)}(p) \hat{=} \begin{array}{c} q \\ p \\ \text{---} \end{array}$$

Dieser Graph besitzt Beiträge von je einer Z - und einer A -Boson-Schleife:

$$\mathcal{G}_{5\mu\nu}^{(4)}(p) = 24 \int_q V_{\mu\nu\rho\sigma}^{(4Z)}(p, p, q, q) \Delta_{\rho\sigma}^{(Z)}(q) + 2 \int_q V_{\mu\nu\rho\sigma}^{(2Z, 2A)}(p, p, q, q) \Delta_{\rho\sigma}^{(A)}(q) \quad (6.15)$$

Mit

$$\sum_{\rho+} \zeta_{\mu\nu\rho\rho}(p, p, q, q) = \delta_{\mu\nu} \sum_{\rho+} \hat{p}_\rho^2 \bar{q}_\rho^2 + \delta_{\mu\nu} \hat{p}^2 \bar{q}_\mu^2 - \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu (\bar{q}_\mu^2 + \bar{q}_\nu^2) \quad (6.16)$$

findet man in FEYNMAN-Eichung:

$$\mathcal{G}_{5\mu\nu}^{(4)}(p) = \frac{1}{d} (e'^2 - 2e^2) (\delta_{\mu\nu} \hat{p}^2 - \hat{p}_\mu \hat{p}_\nu) = \frac{1}{d} (e'^2 - 2e^2) (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) + \mathcal{O}(p^4) \quad (6.17)$$

Im Lauf der Rechnungen tauchen nicht rotationsinvariante Terme proportional zu $\delta_{\mu\nu} p_\mu^2$ auf. Sie heben sich jedoch getrennt im skalaren und fermionischen Sektor weg. Damit ist die Selbstenergie transversal

$$\begin{aligned} \Sigma_{Z\mu\nu}(p) &= (\delta_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \Sigma_Z + \mathcal{O}(p^4) \\ \Sigma_Z &= \frac{e'^2}{3} \mathcal{K}_{1\rho \neq \rho'} - 4N_f e'^2 \mathcal{K}_{2\rho \neq \rho'} + \frac{1}{d} (e'^2 - 2e^2), \end{aligned} \quad (6.18)$$

und man kann mittels der Renormierungsbedingung

$$- (\Gamma_R^{(2Z, tr)})_{\mu\nu}^{-1}(p) = \frac{1}{p^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (6.19)$$

(der transversale Anteil des renormierten Propagators soll mit jenem des nackten Propagators identisch sein, vgl. [MM94, S. 125]) die Wellenfunktionsrenormierung des Z -Feldes bestimmen:

$$Z_Z = 1 + \Sigma_Z \quad (6.20)$$

6.2 Eichinvarianz

Alle meßbaren Größen müssen unter einer Änderung der fixierten Eichung, mithin des Eichparameters ξ , invariant sein. In den in Kapitel 3 berechneten Selbstenergien fällt aber die Abhängigkeit vom Eichparameter auf. Zwar heben sich z.B. in der renormierten Masse (3.36) alle näherungsweise zu Potenzen von ξ proportionalen Terme gegenseitig auf, schwächere Eich-Abhängigkeiten bleiben aber bestehen. Auch der Vakuumerwartungswert (3.9) ist über die π -Masse eichabhängig.

Diese Tatsachen sind von Theorien im Kontinuum bereits lange bekannt (siehe z.B. [LZJ72]), in [ACGQ73] wird die Eich-Abhängigkeit der skalaren Selbstenergie für ein ABEL'sches reines HIGGS-Modell explizit berechnet. Sie verschwindet, falls der externe Impuls auf der Massenschale liegt. Folglich ist die Pol-Masse eichunabhängig.

In der symmetrischen Phase hat man mit Gleichung (6.2) einen hinreichend einfachen Ausdruck an der Hand, mit dem der Frage nach der Eichinvarianz in der gitterregularisierten Theorie nachgegangen werden kann. Dazu betrachtet man zunächst nur die nicht eichinvarianten Terme des letzten Summanden:

$$e'^2 \xi \int_q \frac{1}{\hat{q}^2 + m_0^2} \frac{(\hat{q}^2 - \hat{p}^2)^2}{\hat{q}^4 + \hat{p}^4} \quad (6.21)$$

an der Stelle $p = (\vec{0}, im_p^{(0)})$. Zunächst setzt man $q \mapsto q - p$, wobei man mit der 2π -Periodizität des Integranden einen Vorteil der Gitterregularisierung gegenüber dem einfachen Impuls-Cutoff ausnützt. Allerdings ist dies für beliebige p nur auf einem unendlich großen Gitter legitim. Mit den Beziehungen (4.29), $m_0 = 2 \sinh \frac{m_p^{(0)}}{2}$ und $\hat{p}^2 = -m_0^2$ findet man für (6.21):

$$e'^2 \xi \int_q \frac{1}{\hat{q}^4} \frac{(\hat{q}^2 - \hat{p}^2)^2}{\hat{q}^2 + m_0^2} = e'^2 \xi \left(1 + \frac{m_0^2}{2d}\right) \int_q \frac{1}{\hat{q}^2} \quad (6.22)$$

Der eichabhängige Teil des dritten Summanden in (6.2) lautet:

$$-\frac{e'^2 \xi}{d} \sum_{\mu+} \cos p_\mu \int_q \frac{1}{\hat{q}^2} = -\frac{e'^2 \xi}{d} (d - 1 + \cosh m_p^{(0)}) \int_q \frac{1}{\hat{q}^2}, \quad (6.23)$$

und damit findet man folgende Eichabhängigkeit der Selbstenergie auf der (euklidischen) Massenschale:

$$\begin{aligned} \Sigma_\sigma(\vec{0}, im_p^{(0)}) &= \frac{e'^2 \xi}{d} \left(\frac{m_0^2}{2} + 1 - \cosh m_p^{(0)} \right) \int_q \frac{1}{\hat{q}^2} + GIT \\ &= \frac{e'^2 \xi}{d} \left(2 \sinh^2 \frac{m_p^{(0)}}{2} + 1 - \cosh m_p^{(0)} \right) \int_q \frac{1}{\hat{q}^2} + GIT \\ &= GIT, \end{aligned} \quad (6.24)$$

wo GIT alle eichinvarianten Terme andeutet. Die Selbstenergie ist also auf der Massenschale eichinvariant, folglich ist auch die Pol-Masse eichinvariant.

6.3 Volumen-Effekte

Die Volumeneffekte werden in der symmetrischen Phase auf die gleiche Weise definiert und berechnet wie in der gebrochenen, wobei sich zum Teil erhebliche Unterschiede zeigen.

Die Effekte der Pol-Masse findet man in Abbildung 6.1. Sie bleiben bei Variation aller Parameter betragsmäßig unter 1 %, eine Ausnahme bildet lediglich die Variation der renormierten Masse selbst (6.1(1)). Ab $m_p < 0.4$ steigen die Volumeneffekte schnell auf weit über -20 % bei $m_p = 0.2$.

Die Volumeneffekte der renormierten Masse in Abb. 6.2 sind generell erheblich größer und zeigen auch stärkere Abhängigkeiten von den renormierten Parametern. Bei der Variation der Masse ergibt sich ein ähnliches Bild wie bei der Pol-Masse. Von der Selbstkopplung hängen die Volumeneffekte nur schwach ab und liegen bei ca. -4 bis -5 % für das Volumen $6^3 \cdot 12$. Verkleinert man die Mischung der Fermionen, so wachsen die Volumeneffekte, und zwar auf knapp -10 % bei $\mu_R = 0.1$. Darunter scheinen sie (betragsmäßig) ein Maximum anzunehmen und wieder zu fallen. Mit wachsenden YUKAWA-Kopplungen steigen die Effekte bis auf -20 %, während sie von den Eichkopplungen nur schwach abhängig sind.

Überraschenderweise sind die Volumeneffekte der skalaren Wellenfunktionsrenormierung von den Parametern m_p , g_{ph} und e' unabhängig, nämlich etwa -2 % für das $8^3 \cdot 16$ - und -3.5 % für das $6^3 \cdot 12$ -Gitter. Lediglich die Variation der Fermion-Parameter bringt eine Änderung, diese ist derjenigen der renormierten Masse ganz ähnlich.

Wie bereits in der gebrochenen Phase festgestellt, wachsen die Volumeneffekte der Fermionmischung mit Einschalten der Eichkopplung stark an, dies ist in Abbildung 6.4(5) zu sehen. Dementsprechend liegen sie bei Variation der anderen Parameter immer in der Größenordnung von 30-40 %, abhängig natürlich auch vom absoluten Wert der Fermionmischung (6.4(2)). Lediglich für große YUKAWA-Kopplungen und vektorielle Eichkopplungen sinken die Volumeneffekte auf ca. 10 % ab. Von der HIGGS-Selbstkopplung hängen sie in der symmetrischen Phase nicht ab.

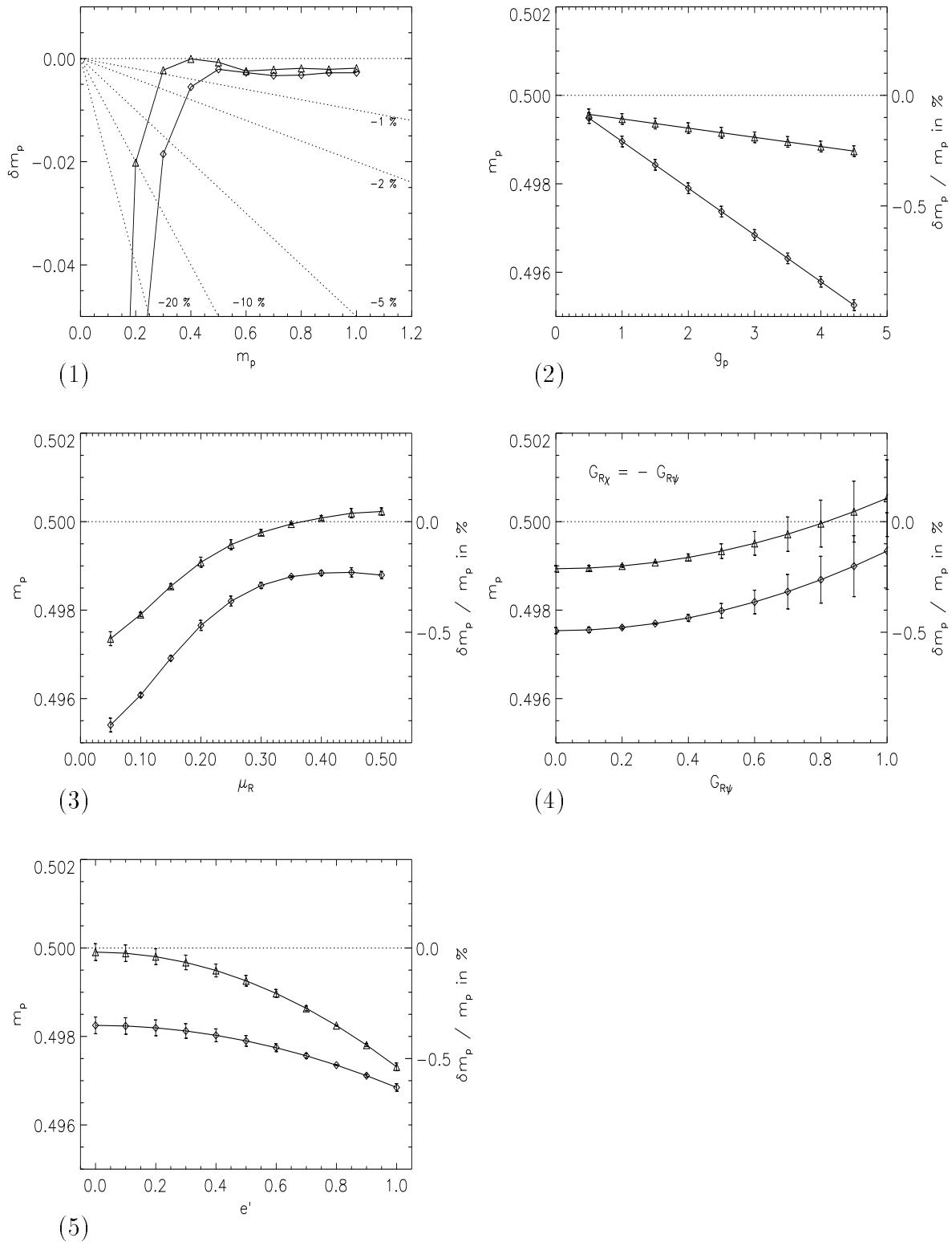
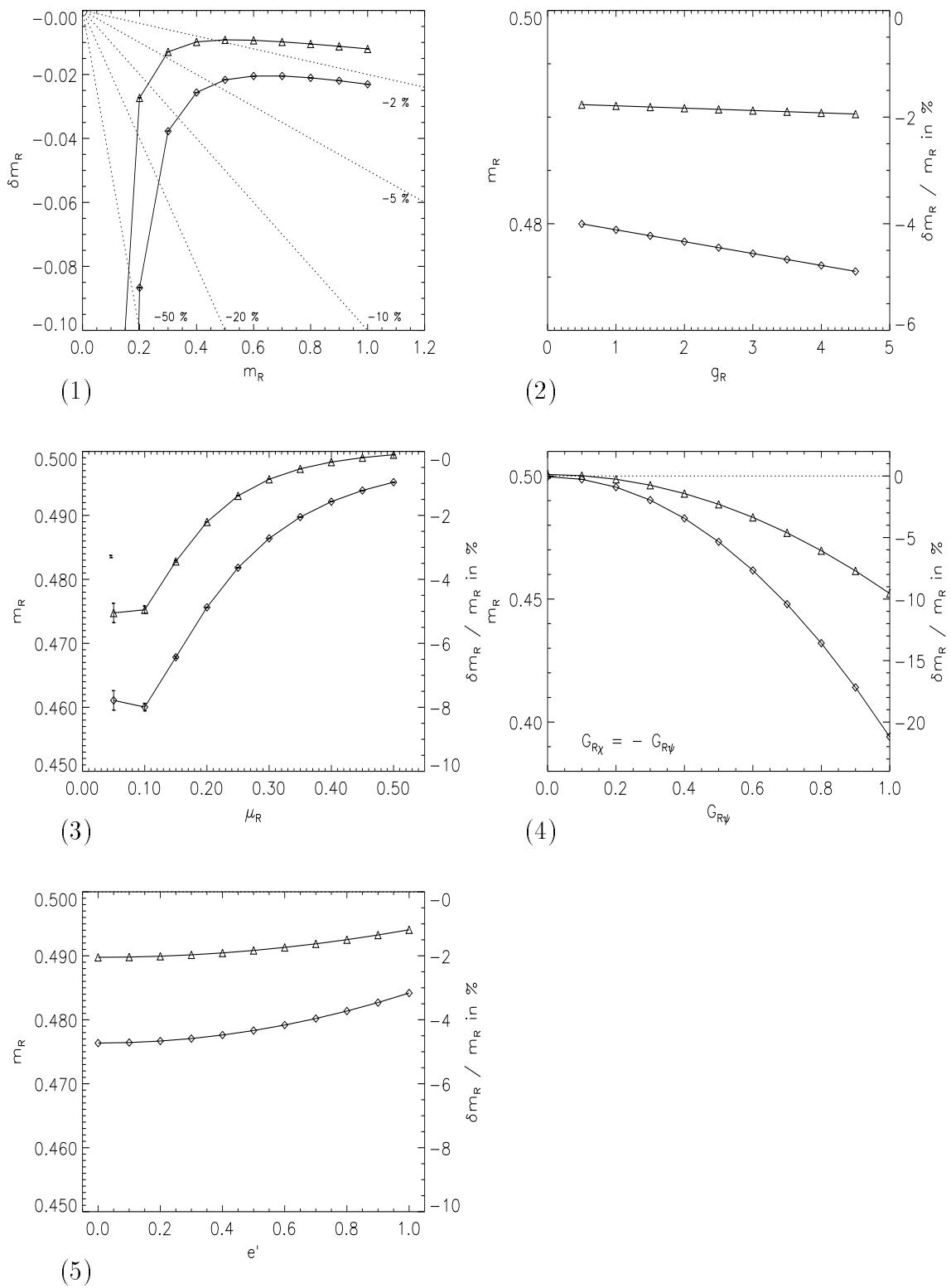


Abbildung 6.1: Volumeneffekte der Pol-Masse

Abbildung 6.2: *Volumeneffekte der renormierten Masse*

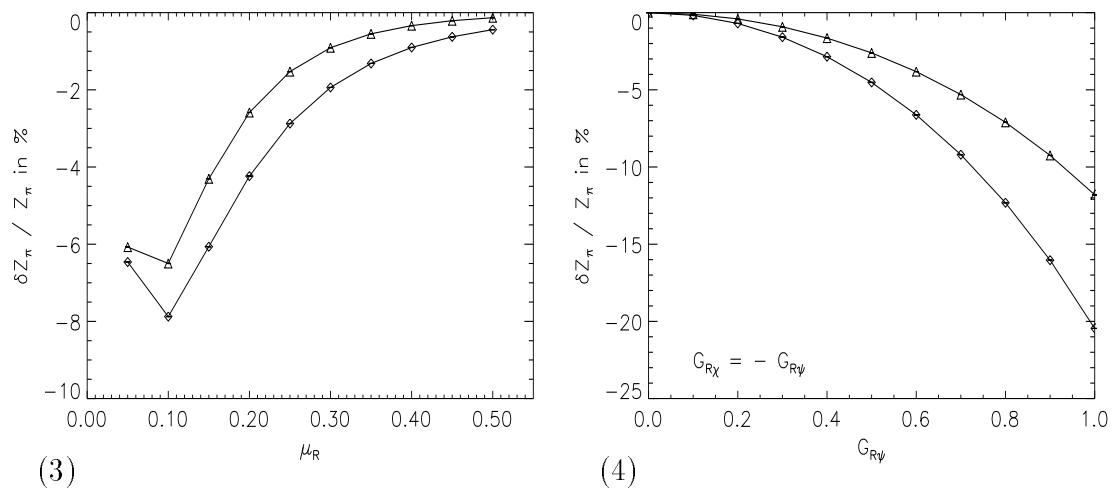


Abbildung 6.3: Volumeneffekte der Wellenfunktionsrenormierung

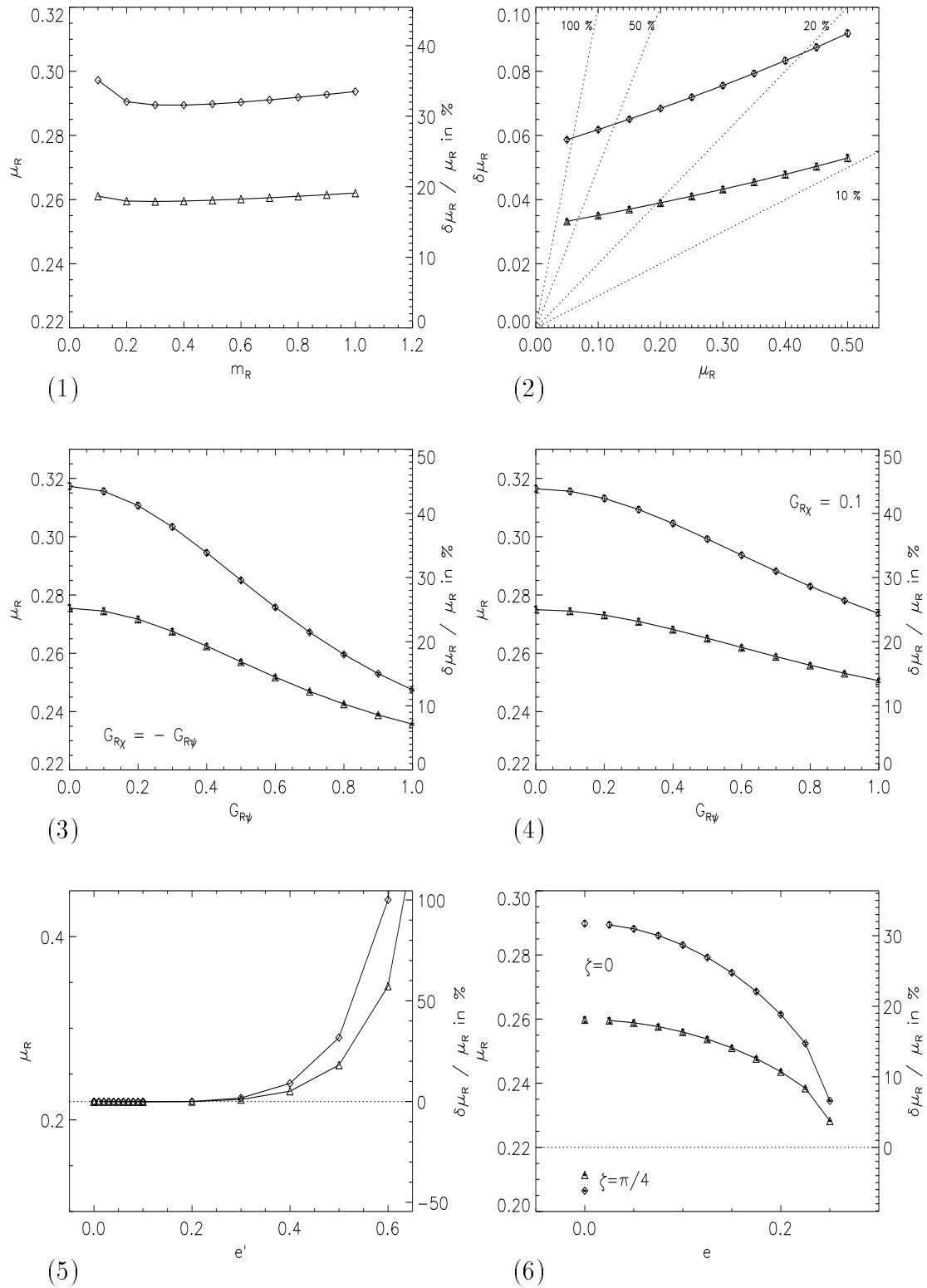


Abbildung 6.4: Volumeneffekte der Fermion-Mischung

Zusammenfassung

Inhalt dieser Arbeit ist die störungstheoretische Untersuchung eines $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -symmetrischen HIGGS-YUKAWA-Modells in der Ein-Schleifen-Ordnung. Dazu wurden zunächst die FEYNMAN-Regeln in den 'T HOOFT-Eichungen hergeleitet, wobei trotz der ABEL'schen Eichgruppe FADDEEV-POPOV-Geist-Felder berücksichtigt werden mußten. Erst nach Durchführung dieser allgemeinen Betrachtungen kann man die FEYNMAN-Regeln (wie auch die WARD-TAKAHASHI-Identitäten) in den einfacheren unitären oder 'T HOOFT-FEYNMAN-Eichungen angeben.

Anschließend wurden in der gebrochenen Phase die Selbstenergien und renormierten Massen von HIGGS- und Fermionfeld sowie der Vakuumerwartungswert analytisch berechnet. Daraus konnten die kritischen Parameter der Gitter-Theorie und deren Volumeneffekte extrahiert werden, die sich als gering herausstellten.

Die durch den Pol des HIGGS-Propagators gegebene Pol-Masse, die Wellenfunktionsrenormierungen und über Ein-Punkt-Funktionen definierte Kopplungen wurden lediglich numerisch zwecks Berechnung von Volumen-Effekten ausgewertet. Deren Verhalten bei Veränderung der renormierten Parameter im perturbativ zugänglichen Bereich war der zentrale Untersuchungsgegenstand. Generell ergaben sich dabei für renormierte, d.h. bei verschwindendem Impuls definierte Größen größere Volumeneffekte als für auf der Massenschale definierte Größen. Letztere zeigten jedoch bei gewissen Parameterkombinationen Pole, deren Ursprung unerklärt blieb. Erhebliche Abweichungen stellten sich zwischen den verschiedenen möglichen Definitionen der Wellenfunktionsrenormierungen heraus. Weitergehende Schlüsse, wie in [Lüs91] vorgeschlagen, wurden aus diesen Auswertungen nicht gezogen.

Ein weiterer Schwerpunkt war die Herleitung von unteren Schranken für die Masse des HIGGS-Bosons. Neben der Berechnung der Abweichung der Vakuum-Stabilitäts-Schranke von ihrem aus ungeeichten YUKAWA-Modellen bekannten Wert wurde auch die nur in Eichtheorien vorhandene WEINBERG-LINDE-Schranke angegeben. Sie erweist sich jedoch als sehr schwach im Vergleich zu der Schranke aus der Vakuum-Stabilität.

Der Untersuchung der symmetrischen Phase war das abschließende Kapitel gewidmet. Hier wurden die Selbstenergien und renormierten Massen sowie deren Volumeneffekte angegeben.

Die Behandlung der Eichfelder beschränkte sich auf die Herleitung der WARD-TAKAHASHI-Identitäten und den expliziten Nachweis der von ihnen geforderten Transversalität der Eichboson-Selbstenergie sowie der Eichinvarianz der Pol-Masse in der symmetrischen Phase.

Generell ist festzuhalten, daß die Eichung eines YUKAWA-Modells seine physikalischen Eigenschaften (z.B. das Phasendiagramm) im perturbativen Regime nur unwesentlich ändert. Im Gegensatz dazu unterscheiden sich die für numerische Simulationen wichtigen Volumeneffekte in beiden Modellen durchaus.

Eine Behandlung dieser Theorie über das Ein-Schleifen-Niveau hinaus erscheint wegen der durch die kleine Eichkopplung bedingten geringen Korrekturen gegenüber der ungeeichten Fassung in der Ein-Schleifen-Approximation nicht interessant. Sie würde außerdem mit großen Schwierigkeiten hinsichtlich sowohl der Anzahl der Graphen als auch der Handhabung der einzelnen Selbstenergie-Beiträge und deren numerischer Auswertung zu kämpfen haben. Hingegen dürfte die Erweiterung auf eine nichtabelsche Eichgruppe im Hinblick auf numerische Simulationen des $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -symmetrischen HIGGS-YUKAWA-Modells, als auch – auf lange Sicht – der elektroschwachen Eichgruppe selbst durchaus interessant sein. Die perturbative Behandlung einer solchen Theorie unterscheidet sich von der hier vorgestellten durch aufwendigere FEYNMAN-Regeln, welche aus der Tensorstruktur der Eichgruppe sowie der das HAAR'sche Maß implementierenden Maßwirkung resultieren.

Anhang

A Bezeichnungen

Mit $a_\mu = (a_1, \dots, a_d)$ werden euklidische Vektoren, mit \vec{a} Vektoren in $d - 1$ Dimensionen bezeichnet. Die Summenkonvention wird benutzt: Doppelt auftretende Indices werden über die positiven Raumrichtungen summiert. Die Summe \sum_μ läuft über $2d$ positive und negative Raumrichtungen, $\sum_{\mu+}$ nur über die positiven. Die übliche Algebra der DIRAC-Matrizen wird um solche mit negativen Indices erweitert: $\gamma_{-\mu} = -\gamma_\mu$. Mit dem Symbol Γ sind stets Vertexfunktionen, mit G volle und mit Δ nackte Propagatoren bezeichnet. Impulsintegrale werden als

$$\int_q f(q) = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} f(q) & \text{im unendlichen Volumen} \\ \frac{1}{L^{d-1} T} \sum_{q \in B} f(q) & \text{im Volumen } L^{d-1} \cdot T \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

geschrieben, die Brillouin-Zone hängt im endlichen Volumen von den verwendeten Randbedingungen ab, vgl. Abschnitt 4.1. Impulserhaltung wird durch eingeklammerte Integrationsvariable symbolisiert:

$$\int_{(q_1, \dots, q_n)} f(q_1, \dots, q_n) := \int_{q_1, \dots, q_n} \delta(q_1 + \dots + q_n) f(q_1, \dots, q_n) \quad (\text{A.2})$$

Wie üblich werden folgende Abkürzungen benutzt:

$$\hat{q} := 2 \sin \frac{q}{2} \quad \overline{q} := \sin q \quad \overline{\overline{q}} := \frac{1}{2} \sin(2q) \quad (\text{A.3})$$

Eine häufig auftretende Funktion ist:

$$f_k(x) := \frac{1}{2} \left\{ e^{\frac{i x}{2}} + (-1)^k e^{-\frac{i x}{2}} \right\} = \begin{cases} \cos \frac{x}{2} & k \text{ gerade} \\ i \sin \frac{x}{2} & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

B Gitter-Regularisierung

Die Gitterkonstante lautet stets: $a = 1$. Vorwärts- und Rückwärtsableitung sind dann definiert durch:

$$\nabla_\mu f_x := f_{x+\mu} - f_x \quad ; \quad \nabla_\mu^* f_x := f_{x-\mu} - f_x \quad (\text{A.5})$$

Der D'ALEMBERT-Operator lautet:

$$\square f_x := \sum_{\mu+} \nabla_\mu^* \nabla_\mu f_x = 2df_x - \sum_\mu f_{x+\mu} \quad (\text{A.6})$$

Vorwärts- und Rückwärtsableitung sind zueinander adjungiert.

$$\sum_x g_x (\nabla_\mu f_x) = \sum_x (\nabla_\mu^* g_x) f_x \quad (\text{A.7})$$

Insbesondere sind sie also nicht antihermitesch. Damit ist der durch Multiplikation der Ableitung mit i gebildete Impulsoperator nicht hermitesch. Dieses Problem tritt bei linearem Auftreten einer Ableitung, also insbesondere beim Umgang mit Dirac-Feldern auf. Dort wird die antihermitesch Ableitung

$$\partial_\mu f_x = \frac{1}{2} \{f_{x+\mu} - f_{x-\mu}\} \quad (\text{A.8})$$

verwendet, und zwar in der Form:

$$\sum_{\mu+} \gamma_\mu \partial_\mu f_x = \frac{1}{2} \sum_\mu \gamma_\mu f_{x+\mu} \quad (\text{A.9})$$

C Chirale Transformationen

Die Chiralität eines Spinors ist definiert, falls er ein Eigenvektor der Matrix γ_5 ist. Wegen $\gamma_5^2 = 1$ gibt es nur die Eigenwerte $+1$ (linkshändig) und -1 (rechtshändig). Jeder Spinor lässt sich in chirale Anteile zerlegen:

$$\psi = \psi_L + \psi_R \quad \psi_L = P_L \psi \quad \psi_R = P_R \psi. \quad (\text{A.10})$$

Die Projektionsoperatoren sind definiert als:

$$P_L = \frac{1}{2} \{1 + \gamma_5\} \quad P_R = \frac{1}{2} \{1 - \gamma_5\} \quad (\text{A.11})$$

und besitzen die Eigenschaften:

$$P_L^2 = P_R^2 = 1 \quad P_L P_R = 0 \quad P_L + P_R = 1 \quad P_L \gamma_\mu = \gamma_\mu P_R \quad P_R \gamma_\mu = \gamma_\mu P_L \quad (\text{A.12})$$

Daraus folgt für adjungierte Spinoren:

$$\bar{\psi}_L = \overline{\psi} P_R \quad \bar{\psi}_R = \overline{\psi} P_L \quad (\text{A.13})$$

Für Fermion-/Mirror-Fermion-Paare ist ebenfalls ein chiraler Projektor definiert:

$$\mathbf{P}_L := \begin{pmatrix} P_L & 0 \\ 0 & P_R \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_R := \begin{pmatrix} P_R & 0 \\ 0 & P_L \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Für mit P_L, P_R vertauschende Objekte a, b, c, d gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_L \begin{pmatrix} a\gamma_\mu & b \\ c & d\gamma_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a\gamma_\mu & b \\ c & d\gamma_\mu \end{pmatrix} \mathbf{P}_R \\ \mathbf{P}_R \begin{pmatrix} a\gamma_\mu & b \\ c & d\gamma_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a\gamma_\mu & b \\ c & d\gamma_\mu \end{pmatrix} \mathbf{P}_L \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Von Nutzen sind noch folgende Eigenschaften von 2×2 -Matrizen \mathbf{A} :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_R \mathbf{A} \mathbf{P}_R &= \mathbf{A}^d \mathbf{P}_R, \quad \mathbf{P}_L \mathbf{A} \mathbf{P}_L = \mathbf{A}^d \mathbf{P}_L, \\ \mathbf{P}_L \mathbf{A} \mathbf{P}_R &= \mathbf{A}^n \mathbf{P}_R, \quad \mathbf{P}_R \mathbf{A} \mathbf{P}_L = \mathbf{A}^n \mathbf{P}_L, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

wo \mathbf{A}^d (\mathbf{A}^n) die Matrix \mathbf{A} mit Null gesetzten Nebendiagonal-(Diagonal-)Elementen bezeichnet. Für eine Fermionengeneration f sind chirale Projektoren folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{P}_R^{(f)} = \begin{cases} \mathbf{P}_R & \text{für } f \text{ ungerade} \\ \mathbf{P}_L & \text{für } f \text{ gerade} \end{cases} \quad \mathbf{P}_L^{(f)} = \begin{cases} \mathbf{P}_L & \text{für } f \text{ ungerade} \\ \mathbf{P}_R & \text{für } f \text{ gerade} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

D Fouriertransformation

Die FOURIER-Transformation von *site*-Variablen (also solchen, die genau einem Gitterplatz zugeordnet sind), ist definiert als:

$$\varphi_x = \int_q \varphi(q) e^{iqx}, \quad (\text{A.18})$$

auf eine besondere Bezeichnung der Transformierten wird also verzichtet. Für die Gitterableitungen folgt sofort:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \varphi_x &= \int_q \varphi(q) e^{\frac{i}{2}q_\mu} i \hat{q}_\mu e^{iqx} \\ \nabla_\mu^* \varphi_x &= - \int_q \varphi(q) e^{-\frac{i}{2}q_\mu} i \hat{q}_\mu e^{iqx} \\ \square \varphi_x &= \int_q \varphi(q) \hat{q}^2 e^{iqx} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Für *link*-Variablen (z.B. Eichfelder) lautet die Transformation:

$$A_{\mu x} = \int_q A_\mu(q) e^{iq(x + \frac{\mu}{2})}, \quad (\text{A.20})$$

hier wird wie auch sonst mit μ sowohl der euklidische Index als auch der Einheitsvektor in die entsprechende Richtung bezeichnet. Damit lauten Ableitungen und der Feldstärketensor:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu A_{\nu x} &= \int_q A(q) e^{\frac{i}{2}(q_\mu + q_\nu)} i \hat{q}_\mu e^{iqx} \\ \nabla_\mu^* A_x &= - \int_q A(q) e^{-\frac{i}{2}(q_\mu + q_\nu)} i \hat{q}_\mu e^{iqx} \\ A_{\mu\nu x} &= \nabla_\mu A_{\nu x} - \nabla_\nu A_{\mu x} = (\delta_{\sigma\nu}\delta_{\rho\mu} - \delta_{\sigma\mu}\delta_{\rho\nu}) \int_q A_\sigma(q) e^{-\frac{i}{2}(q_\sigma + q_\rho)} i \hat{q}_\rho e^{iqx} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Benötigt wird auch noch die FOURIER-Transformation vierter Feldpotenzen:

$$\begin{aligned} \sum_{x\mu+} A_{\mu x}^4 &= \int_{(q_1, \dots, q_4)} \prod_{i=1}^4 A_\mu(q_i) \\ \sum_{x\mu+\nu+} A_{\mu\nu x}^4 &= \int_{(q_1, \dots, q_4)} \zeta_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) \prod_{i=1}^4 A_{\sigma_i}(q_i) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

mit

$$\begin{aligned} \zeta_{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}(q_1, q_2, q_3, q_4) &:= \sum_{\mu+\nu+} \prod_i (\delta_{\sigma_i \nu} \delta_{\rho_i \mu} - \delta_{\sigma_i \mu} \delta_{\rho_i \nu}) \hat{q}_{1\rho_1} \hat{q}_{2\rho_2} \hat{q}_{3\rho_3} \hat{q}_{4\rho_4} \\ &= \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_3} \delta_{\sigma_1 \sigma_4} \sum_\lambda \hat{q}_{1\lambda} \hat{q}_{2\lambda} \hat{q}_{3\lambda} \hat{q}_{4\lambda} - \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_3} \hat{q}_{1\sigma_4} \hat{q}_{2\sigma_4} \hat{q}_{3\sigma_4} \hat{q}_{4\sigma_1} \\ &\quad - \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_4} \hat{q}_{1\sigma_3} \hat{q}_{2\sigma_3} \hat{q}_{3\sigma_1} \hat{q}_{4\sigma_3} - \delta_{\sigma_1 \sigma_3} \delta_{\sigma_1 \sigma_4} \hat{q}_{1\sigma_2} \hat{q}_{2\sigma_1} \hat{q}_{3\sigma_2} \hat{q}_{4\sigma_2} \\ &\quad - \delta_{\sigma_2 \sigma_3} \delta_{\sigma_2 \sigma_4} \hat{q}_{1\sigma_2} \hat{q}_{2\sigma_1} \hat{q}_{3\sigma_1} \hat{q}_{4\sigma_1} + \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma_3 \sigma_4} \hat{q}_{1\sigma_3} \hat{q}_{2\sigma_3} \hat{q}_{3\sigma_1} \hat{q}_{4\sigma_1} \\ &\quad + \delta_{\sigma_1 \sigma_3} \delta_{\sigma_2 \sigma_4} \hat{q}_{1\sigma_2} \hat{q}_{2\sigma_1} \hat{q}_{3\sigma_2} \hat{q}_{4\sigma_1} + \delta_{\sigma_1 \sigma_4} \delta_{\sigma_2 \sigma_3} \hat{q}_{1\sigma_2} \hat{q}_{2\sigma_1} \hat{q}_{3\sigma_1} \hat{q}_{4\sigma_2}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Die FOURIER-Transformation lautet für die Fermion-Felder:

$$\psi_x = \int_q \psi_0(q) e^{iqx} \quad ; \quad \bar{\psi}_x = \int_q \bar{\psi}_0(q) e^{-iqx} \quad (\text{A.24})$$

Wichtig sind hier folgende Kombinationen:

$$\begin{aligned} \sum_{xy} \bar{\psi}_y \delta_{yx} a\psi_x &= \int_q \bar{\psi}_0(q) a\psi_0(q) \\ \sum_{xy\mu} \bar{\psi}_y \delta_{yx+\mu} A_{\mu x}^k a_\mu \psi_x &= \int_{qq'} \sum_\mu \bar{\psi}(q) \prod_{i=1}^k A_\mu(k_i) a_\mu \psi(q) e^{-\frac{i}{2}(q_\mu + q'_\mu)} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Transformiert a_μ beim Übergang $\mu \mapsto -\mu$ wie $(-1)^n$ (also etwa $n = 0$ für eine Zahl und $n = 1$ für eine γ -Matrix), so wird daraus:

$$\sum_{xy\mu} \bar{\psi}_y \delta_{yx+\mu} A_{\mu x}^k a_\mu \psi_x = \int_{qq'} \sum_{\mu+} \bar{\psi}(q) \prod_{i=1}^k A_\mu(k_i) a_\mu \psi(q) 2f_{n+k}(q_\mu + q'_\mu) \quad (\text{A.26})$$

E Eichfeld-Vertices

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß in einer Gitter-Eichtheorie die vom externen Impuls unabhängigen Ein-Schleifen-Beiträge zur Eichboson-Selbstenergie die Beiträge der anderen Ein-Schleifen-Graphen bei verschwindendem Impuls gerade aufheben. Seien genauer

$$\mathcal{G}_{1\mu\nu}(p) \doteq \begin{array}{c} q \\ \text{---} \\ p \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \mathcal{G}_{2\mu\nu} \doteq \begin{array}{c} q \\ \text{---} \\ p \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

so wird behauptet:

$$\mathcal{G}_{1\mu\nu}(0) = -\mathcal{G}_{2\mu\nu} \quad (\text{A.27})$$

Die Argumentation (welche im skalaren und fermionischen Fall durch eine explizite Rechnung geprüft wurde) verläuft folgendermaßen: Die geeichte Wirkung eines skalaren oder fermionischen Feldes ψ lässt sich schreiben als:

$$S = \sum_x \left\{ U_{\mu x} \psi_{x+\mu}^\dagger a_\mu \psi_x + \psi_x^\dagger b \psi_x \right\} \quad (\text{A.28})$$

Die perturbative Parametrisierung $U_{\mu x} = \exp(ieA_{\mu x})$ führt auf Vertices der Form

$$V_\mu^{(l)}(q, q') = -\frac{(ie)^l}{l!} e^{-\frac{i}{2}(q_\mu + q'_\mu)} a_\mu \quad (\text{A.29})$$

mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial q_\mu} V_\mu^{(l)}(q, q) = -\frac{l+1}{e} V_\mu^{(l+1)}(q, q). \quad (\text{A.30})$$

Der inverse nackte Propagator schreibt sich dann:

$$\Delta^{-1}(q) = -\sum_\mu V_\mu^{(0)}(q, q) + b \quad (\text{A.31})$$

und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial q_\mu} \Delta(q) = \Delta(q) \frac{\partial}{\partial q_\mu} V_\mu^{(0)}(q, q) \Delta(q) \quad (\text{A.32})$$

Die beiden in Frage kommenden Graph-Typen lauten in dieser Notation:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1\mu\nu}(p) &= \int_q V_\mu^{(1)}(q, q+p) \Delta(q) V_\nu^{(1)}(q+p, q) \Delta(q+p) \\ \mathcal{G}_{2\mu\nu} &= 2\delta_{\mu\nu} \int_q V_\mu^{(2)}(q, q) \Delta(q) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Anwendung der obigen Eigenschaften liefert:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{1\mu\nu}(0) &= \int_q V_\mu^{(1)}(q, q) \Delta(q) V_\nu^{(1)}(q, q) \Delta(q) \\
 &= -e \int_q V_\mu^{(1)}(q, q) \Delta(q) \frac{\partial}{\partial q_\nu} V_\nu^{(0)}(q, q) \Delta(q) \\
 &= -e \int_q V_\mu^{(1)}(q, q) \frac{\partial}{\partial q_\nu} \Delta(q) \\
 &= e \int_q \frac{\partial}{\partial q_\nu} V_\mu^{(1)}(q, q) \Delta(q) \\
 &= -2\delta_{\mu\nu} \int_q V_\mu^{(2)}(q, q) \Delta(q) \\
 &= -\mathcal{G}_{2\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

Auf diese Weise heben also die zusätzlich von der Gitterregularisierung erzeugten Graphen die Beiträge zur Selbstenergie bei verschwindendem Impuls auf, und zwar getrennt im skalaren und fermionischen Sektor.

Literaturverzeichnis

- [ACGQ73] T. APPELQUIST, J. CARRAZONE, T. GOLDMAN, and H. R. QUINN. Renormalization and gauge independence in spontaneously broken gauge theories. *Phys. Rev. D* **8**(6) (September 1973) 1747.
- [AL73] E. S. ABERS and B. W. LEE. Gauge theories. *Physics Reports* **9**(1) (April 1973) 1.
- [CRE83] M. CREUTZ. *Quarks, Gluons and Lattices*. Cambridge Univ. Press, 1983.
- [CW73] S. COLEMAN and E. WEINBERG. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. *Phys. Rev. D* **7** (1973) 1888.
- [EIN90] M.B. EINHORN, editor. *The Standard Model Higgs Boson*. North-Holland Elsevier Science Publishers, 1990.
- [FKL91] F. FARAKOS, G. KOUTSOUMBAS, L. LIN, J.P. MA, I. MONTVAY, and G. MÜNSTER. $U(1)_L \otimes U(1)_R$ Symmetric Yukawa Model in the Symmetric Phase. *Nucl. Phys.* **B(350)** (1991) 474.
- [FS80] L. D. FADDEEV and A. A. SLAVNOV. *Gauge Fields – Introduction to quantum theory*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1980.
- [GP89] M. F. L. GOLTERMAN and D. N. PETCHER. The decoupling of right-handed neutrinos in chiral lattice gauge theories. *Phys. Lett.* **B(225)** (1989) 159.
- [HH80] A. HASENFRATZ and P. HASENFRATZ. The connection between the Λ parameters of lattice and continuum theory. *Phys. Lett.* **B(93)** (1980) 165.
- [HUA82] K. HUANG. *Quark, Leptons and Gauge Fields*. World Scientific, 1982.
- [IZ85] C. ITZYKSON and J.-B. ZUBER. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, 1985.
- [KAP89] J. I. KAPUSTA. *Finite-Temperature Field Theory*. Cambridge University Press, 1989.

- [KEN88] A. D. KENNEDY. Hybrid monte carlo. *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B(4)** (1988) 576.
- [KNS81] H. KAWAI, R. NAKAYAMA, and K. SEO. Comparison of the lattice Λ parameter with the continuum Λ parameter in massless QCD. *Nucl. Phys* **B(189)** (1981) 40.
- [KOG79] J. B. KOGUT. An introduction to lattice gauge theory and spin systems. *Rev. Mod. Phys.* **51**(4) (1979) 659.
- [LIN76] A. D. LINDE. Dynamic reconstruction of symmetry and limitations on the masses and coupling constants in the higgs model. *JETP Lett.* **23**(1) (1976) 64.
- [LMP93a] L. LIN, G. MÜNSTER, M. PLAGGE, I. MONTVAY, and H. WITTIG. Bounds on the renormalized couplings in an $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ symmetric yukawa model. *Phys. Lett.* **B(317)** (1993) 143.
- [LMP93b] L. LIN, G. MÜNSTER, M. PLAGGE, I. MONTVAY, H. WITTIG, C. FRICK, and T. TRAPPENBERG. Mass spectrum and bounds on the couplings in yukawa models with mirror-fermions. *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **(30)** (1993) 647.
- [LMWG91] L. LIN, I. MONTVAY, H. WITTIG, and G. MÜNSTER. A $U(1)_L \otimes U(1)_R$ Symmetric Yukawa Model in the Phase with Spontaneously Broken Symmetry. *Nucl. Phys.* **B(355)** (1991) 511.
- [LMWM91] L. LIN, I. MONTVAY, H. WITTIG, and G. MÜNSTER. Scalar-fermion models with mirror pairs of fermion fields. *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **(20)** (1991) 601.
- [Lüs86a] M. LÜSCHER. Volume dependence of the energy spectrum in massive quantum field theories, I. stable particle states. *Comm. Math. Phys* **104** (1986) 177.
- [Lüs86b] M. LÜSCHER. Volume dependence of the energy spectrum in massive quantum field theories, II. scattering states. *Comm. Math. Phys* **105** (1986) 153.
- [Lüs91] M. LÜSCHER. Two-particle states on a torus and their relation to the scattering matrix. *Nucl. Phys.* **B(354)** (1991) 531.
- [LW88] M. LÜSCHER and P. WEISZ. Scaling laws and triviality bounds in the lattice ϕ^4 theory, II. one-component model in the phase with spontaneous symmetry breaking. *Nucl. Phys.* **B(295[FS21])** (1988) 65.
- [LW92] L. LIN and H. WITTIG. An $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ symmetric yukawa model in the symmetric phase. *Z. Phys.* **C(54)** (1992) 331.

- [LZJ72] B. W. LEE and J. ZINN-JUSTIN. Spontaneously broken gauge symmetries. III. equivalence. *Phys. Rev.* **D**(5) (1972) 3155.
- [MM94] G. MÜNSTER and I. MONTVAY. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, 1994.
- [MON87] I. MONTVAY. A chiral $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ gauge model on the lattice. *Phys. Lett.* **199**(1) (December 1987) 89.
- [MÜN] G. MÜNSTER. Private Mitteilung.
- [MÜN85] G. MÜNSTER. The size of finite size effects in lattice gauge theories. *Nucl. Phys.* **B**(249) (1985) 659.
- [NN81] H. B. NIELSEN and M. NINOMIYA. Absence of neutrinos on a lattice. *Nucl. Phys.* **B**(185) (1981) 20.
- [ROT89] H. J. ROTHE. An introduction to lattice gauge theories. In *Path integral method, lattice gauge theory and critical phenomena*, edited by A. SHAUKAT. World Scientific, 1989.
- [ROT92] H. J. ROTHE. *Lattice Gauge Theories*. World Scientific, 1992.
- [RYD89] L. H. RYDER. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1989.
- [SHA78] H. S. SHARATCHANDRA. Continuum limit of lattice gauge theories in the context of renormalized perturbation theory. *Phys. Rev.* **D**(18) (1978) 2042.
- [TH71] G. 'T HOOFT. Renormalizable lagrangians for massive yang-mills fields. *Nucl. Phys.* **B**(35) (1971) 167.
- [WEI76] S. WEINBERG. Mass of the higgs boson. *Phys. Rev. Lett.* **36**(6) (1976) 294.
- [WIL74] K. G. WILSON. Confinement of quarks. *Phys. Rev.* **D**(10) (1974) 2445.
- [WIL75] K. G. WILSON. Quarks and strings on a lattice. In *New phenomena in subnuclear physics*, edited by A. ZICHICHI, volume A, page 69. Plenum Press, New York, 1975.
- [WIT92] H. WITTIG. *Study of a chiral lattice yukawa model with mirror fermions*. PhD thesis, Universität Hamburg, 1992.

Abbildungsverzeichnis

3.1	Selbstenergie-Graphen des π -Feldes	38
3.2	Kritischer skalarer Hopping-Parameter	50
3.3	Volumeneffekte des kritischen Hopping-Parameters	51
3.4	Kritischer fermionischer Hopping-Parameter	51
4.1	Volumeneffekte verschieden definierter Wellenfunktionsrenormierungen	64
4.2	Volumeneffekte der Pol-Masse	65
4.3	Zeitscheiben-Korrelation	67
4.4	Vergleich der Massendefinitionen	67
4.5	Volumeneffekte der Pol-Masse	69
4.6	Volumeneffekte der renormierten HIGGS-Masse	70
4.7	Volumeneffekte der physikalischen Masse	72
4.8	Volumeneffekte der Pol-Kopplung	73
4.9	Volumeneffekte der renormierten HIGGS-Selbstkopplung	74
4.10	Volumeneffekte der Wellenfunktionsrenormierung	75
4.11	Volumeneffekte des Vakuumerwartungswertes	77
4.12	Volumeneffekte der Fermion-Masse	78
4.13	Volumeneffekte von μ_R bei $G_{R\chi} = G_{R\psi}$	79
4.14	Volumeneffekte der YUKAWA-Kopplung	80
4.15	Volumeneffekte der Spiegel-YUKAWA-Kopplung	81
4.16	Volumeneffekte als Funktion der vektoriellen Eichkopplung	82
4.17	Volumeneffekte der Eigenwerte der Massenmatrix	82
5.1	WEINBERG-LINDE-Schranke	88
5.2	Renormierungsgruppenfluß im Ein-Schleifen-Szenario	89
5.3	Vakuum-Stabilitäts-Schranke als Funktion der Eichkopplung	90
5.4	Volumeneffekte der Vakuum-Stabilitäts-Schranke	91
6.1	Volumeneffekte der Pol-Masse	98
6.2	Volumeneffekte der renormierten Masse	99
6.3	Volumeneffekte der Wellenfunktionsrenormierung	100
6.4	Volumeneffekte der Fermion-Mischung	101

Index

- β -Funktion, 89
- antihermitesche Ableitung, 105
- Brillouin-Zone, 57
- BRS-Transformationen, 53
- chirale Transformation
 - globale, 6
 - lokale, 7
- Chiralität, 105
- D'Alembert-Operator, 105
- Doubler, 5
- effektives Potential, 84
- Eichfixierender Term, 19
- Eichfixierung, 17
- Eichung
 - 't Hooft, 19
 - 't Hooft-Feynman, 44
 - 't Hooft-Landau, 20
 - Feynman, 21
 - Fixierung der, 18
 - unitäre, 20, 30
- Einpunktfunction, 32
- erzeugendes Funktional
 - n-Punkt-Funktionen, 16
 - Vertexfunktionen, 53, 84
- Faddeev-Popov-Operator, 19, 20
- Faddeev-Popov-Wirkung, 19
- Feldstärketensoren, 11
- Fermion-Matrix, 6
- Fermionfeld
 - nacktes, 9
 - renormiertes, 46
- Feynman-Regeln, 22, 23, 31
- Furry's Theorem, 34
- Gauß'scher Fixpunkt, 49
- Geist-Felder, 19–21, 30, 53
- Goldstone-Boson, 13, 34
- Grundzustand, 12
- Higgs-Mechanismus, 11, 28
- Hybrid-Monte-Carlo, 6
- Infrarot-Divergenz, 34, 35, 40
- kompakte Eichtheorie, 17
- Kontinuumslimes, 11
- Kopplung
 - axiale, 15
 - Pol-, 42
 - renormierte, 42
 - vektorielle, 15, 30
- Korrelationslänge, 41, 66
- kovariante Ableitung, 8
- kritische Parameter, 48
- Linkvariable, 7, 10, 107
- lokale Invarianz, 7
- Lorentz-Eichung, 21
- Maß, 16
 - Haar'sches, 17
- Masse
 - Z-Boson, 28
 - Fermionen, 25
 - physikalische, 41, 66
 - Pol-, 41, 96
 - renormierte, 40, 46, 59, 93
- Mirror-Fermion, 5
- Pfadordnung, 8
- Phase
 - gebrochene, 12
 - symmetrische, 12
- physikalische Freiheitsgrade, 13

- Plaquettevariable, 8, 10, 107
Propagator
 Eichbosonen, 28
 Fermionen, 25
 Geist-Felder, 30
 Higgs-Felder, 24
 voller, 39
- Rückwärtsableitung, 105
Randbedingungen, 56
Renormierungsbedingung, 39, 58, 59
- Selbstenergie
 Eichbosonen, 55, 95
 fermionische, 45, 93
 skalare, 34, 92
- Selbstwechselwirkung, 28
skalares Feld
 nacktes, 10
 renormiertes, 40
- Slavnov-Taylor-Identitäten, 53
Störungstheorie, 12
Symmetriefaktor, 22
- Transfermatrix, 41
- Vakuum-Stabilitäts-Schranke, 88
Vakuumerwartungswert, 12, 32, 86
Vertex, 21
 Eichfeld-Selbstwechselwirkung, 29
 Fermion-Eichfeld-Wechselw., 30
 Geist-Felder, 30, 31
 Higgs-Eichfeld-Wechselw., 27
 Higgs-Felder, 24
 Yukawa-Wechselwirkung, 24
- Volumeneffekt, 60
Vorwärtsableitung, 105
- Ward-Takahashi-Identitäten, 54
Weinberg-Linde-Schranke, 86
Weinberg-Winkel, 15
Wellenfunktionsrenormierung, 39, 46,
 59, 95
Wilson-Term, 5
Wilson-Wirkung, 8, 11
- Yang-Mills-Theorie, 11
- Yukawa-Modell, 5
Zeitscheiben-Korrelation, 41, 66

Danksagung

Das Studium und die Vorbereitung dieser Arbeit zählen zu den schönsten Zeiten meines Lebens. Viele hatten daran Anteil, danken möchte ich besonders:

- Herrn Prof. Dr. Gernot Münster für die geduldige und hilfreiche Betreuung,
- York Xylander, von dem ich so viel über Physik und andere Dinge lernen konnte,
- Jochen Heitger, Markus Plagge und Dirk Talkenberger für viele klärende Gespräche,
- der gesamten Arbeitsgruppe (besonders Klaus Spanderen und Bernd Nottelmann) für die stets angenehme Atmosphäre,
- Herrn Klute für die intensive Korrektur und
- meinem Vater. Ohne ihn wäre vieles nicht möglich gewesen.

Mein Dank an Jutta lässt sich an dieser Stelle nicht angemessen darstellen.

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, im April 1994