



WESTFÄLISCHE
WILHELMUS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



Diplomarbeit

Numerische Untersuchung eines Confinement-Kriteriums für Theorien mit dynamischen Materiefeldern

vorgelegt von
Anja Teuber

25. Oktober 2011

Betreuer: Prof. Dr. Gernot Münster

Gegenüber der am 25. Oktober 2011 im Prüfungsamt abgegebenen Diplomarbeit wurden in der hier vorliegenden Version neben Tippfehlern die Formeln (2.38), (5.45) und (5.46) berichtigt sowie eine Bemerkung zur Methode der Überrelaxation in Abschnitt 6.2 ergänzt.

Münster, 21. November 2011

*Nicht allein in Rechnungssachen
Soll der Mensch sich Mühe machen;
Sontern auch der Weisheit Lehren
Muss man mit Vergnügen hören.*

Wilhelm Busch,
Max und Moritz (4. Streich)

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	7
2 Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik	9
2.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik	9
2.2 Der Lagrange-Formalismus	10
2.3 Eichtheorien	11
2.4 Der Pfadintegralformalismus	14
2.5 Massive Teilchen und spontane Symmetriebrechung	15
2.6 Der Gitterformalismus	15
3 Confinement-Kriterien	19
3.1 Confinement, statisches Potential und String Breaking	19
3.2 Das Wilson-Loop-Kriterium	21
3.3 Der Fredenhagen-Marcu-Operator	24
4 Das SU(2)-Higgs-Modell	29
4.1 Kontinuums- und Gitterformulierung des Higgs-Modells	29
4.2 Die Phasenstruktur des SU(2)-Higgs-Modells	32
5 Numerische Simulationen	35
5.1 Monte-Carlo-Simulationen	35
5.2 Der Wärmebad-Algorithmus	36
5.2.1 Implementierung des Eichsektors	36
5.2.2 Implementierung des Higgs-Sektors	38
5.2.3 Anfangsbedingungen	40
5.3 Datenanalyse mit Jackknife-Binning	40
5.4 Programmskizze	41
5.5 Definition wichtiger Größen	42
6 Ergebnisse	45
6.1 Reine SU(2)-Eichtheorie	45
6.2 SU(2)-Higgs-Modell	45
6.3 FM-Operator	46
6.4 Fazit	48
6.5 Diagramme	49
7 Zusammenfassung und Ausblick	61

A Anhang	63
A.1 Verwendete Konventionen	63
A.1.1 Einheitensystem	63
A.1.2 Summenkonvention	63
A.1.3 Parametrisierung von Feldern	64
A.2 Eigenschaften und Rechenoperationen von SU(2)-Eichfeldern und Higgs-Feldern	64
A.3 Übersicht über die Simulationen	65
A.4 Übersicht über den Quellcode des Programms	66
Literaturverzeichnis	69

1 Einleitung

Bereits der Naturphilosoph Demokrit war 500 v. Chr. der Auffassung, dass Materie aus kleinsten Teilchen zusammengesetzt ist, die ihre vielfältigen Erscheinungsformen erklären. Während die westliche Welt noch viele Jahrhunderte lang an die vier Urstoffe Erde, Wasser, Feuer und Luft glaubte, wurde die Idee des Atoms („atomon“, griechisch: das Unteilbare) im frühen 18. Jahrhundert mit Daltons Gesetz der konstanten Proportionen wieder aufgegriffen. In den ersten zehn Jahren des 19. Jahrhunderts gelang z. B. mit den Rutherford'schen Streuexperimenten ein erster Blick ins Atominnere, in dem ein Atomkern und eine Elektronenhülle ausgemacht werden konnten. In den 1930er Jahren wurden Protonen und Neutronen als Bausteine des Atomkerns identifiziert¹, im Jahre 1964 folgte die Hypothese² von M. Gell-Mann [3], jedes Nukleon sei aus drei Elementarteilchen, den sog. Quarks, aufgebaut.

Hinweise auf die Existenz der Quarks und ihre Eigenschaften wurden erst ab dem Ende der 1960er Jahre in tief-inelastischen Elektron-Nukleon-Streuungen³ [5, 6, 7] erhalten. Quarks sind im Allgemeinen schwer experimentell zugänglich, da sie unter alltäglichen Bedingungen nur zu sog. Hadronen gebunden, jedoch nicht einzeln auftreten. Dieses Phänomen wird Confinement (englisch: Einschluss) genannt und stellt bisher lediglich eine Beobachtungstatsache dar, da es trotz vieler Hinweise noch nicht als fundamentale Eigenschaft der Theorie (der Quantenchromodynamik, QCD) bewiesen werden konnte⁴.

Unter extremen Bedingungen (d. h. kurz nach dem Urknall oder bei Teilchenkollisionen im *Large Hadron Collider* des europäischen Kernforschungszentrums CERN [9]) unterliegen die Quarks und Gluonen (die Austauschteilchen, die die Quarks binden) nicht länger dem Confinement-Prinzip, sondern bilden ein Quark-Gluon-Plasma [10]. Die Hadronen einerseits und das Quark-Gluon-Plasma andererseits bilden zwei Phasen der QCD.

Es gibt verschiedene Ansätze mathematische Größen (sog. Ordnungsparameter) zu konstruieren, anhand derer in Abhängigkeit von den physikalischen Parametern (z. B. der Temperatur) Aussagen darüber getroffen werden können, ob sich ein System in der hadronischen Phase (Confinement-Phase) oder in der Plasma-Phase (Deconfinement-Phase) befindet. Wird angenommen, dass die Quarks unendlich schwer sind, gibt es Ordnungsparameter wie den Wilson-Loop [11], die zwischen den Phasen der QCD unterscheiden können. Die Berechnungen, die dazu nötig sind, können jedoch nicht analytisch, sondern lediglich numerisch in sog. Gittersimulationen ausgeführt werden.

¹Eine Zusammenstellung der historischen Aspekte der Physik ist z. B. in [1] zu finden.

²Für die Arbeiten zu diesem Thema wurde der Physik-Nobelpreis im Jahre 1969 an M. Gell-Mann verliehen [2].

³Für die Arbeiten zu diesem Thema wurde der Physik-Nobelpreis im Jahre 1990 an J. I. Friedman, H. W. Kendall und R. E. Taylor verliehen [4].

⁴Es gibt viele Ansätze, Confinement in QCD zu erklären. Eine bekannte Idee dazu besagt, dass das QCD-Pfadintegral von einer besonderen Klasse von Feldkonfigurationen dominiert wird, die den entsprechenden Abfall des Erwartungswerts des Wilson-Loops bewirken. Magnetische Monopole etwa wären Kandidaten für diese Konfigurationen. Eine Übersicht dazu ist in [8] gegeben.

Die beiden Physiker K. Fredenhagen und M. Marcu haben im Jahre 1986 einen Artikel [12] veröffentlicht, in dem sie ein Confinement-Kriterium (im Folgenden Fredenhagen-Marcu-Operator genannt) vorschlagen, das auch bei Quarks endlicher Masse (sog. dynamischen Quarks) bzw. universell in Theorien mit dynamischen Materiefeldern funktionieren sollte. Da es sehr aufwendig und in einigen Parameterbereichen bisher unmöglich ist, die volle QCD numerisch zu simulieren [13], ist ein direkter Test des Fredenhagen-Marcu-Operators in der QCD nicht praktikabel⁵. Anstelle dessen wird auf das Higgs-Modell zurückgegriffen, das ebenfalls zwei Phasen besitzt, von denen eine Confinement-ähnliche Eigenschaften besitzt.

Im zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit sollen jedoch zunächst die relevanten Grundlagen der Theoretischen Teilchenphysik zusammengefasst werden. Dazu gehören die qualitativen Inhalte des Standardmodells der Teilchenphysik, das Konzept von Eichtheorien und die Beschreibung von Quantenfeldtheorien mithilfe von Pfadintegralen. Außerdem soll der Higgs-Mechanismus kurz geschildert und eine Einführung in die Gitterdiskretisierung von Quantenfeldtheorien gegeben werden.

In Kapitel 3 wird das Phänomen des Confinements näher erläutert, sowie der Wilson-Loop als herkömmliches Confinement-Kriterium betrachtet. Im Anschluss soll dargelegt werden, aus welchem Grund und auf welche Weise der Fredenhagen-Marcu-Operator definiert wird.

Das SU(2)-Higgs-Modell, in dem die numerischen Simulationen durchgeführt werden sollen, wird schließlich in Kapitel 4 ausführlich vorgestellt. Das fünfte Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich mit den technischen Details der Gittersimulationen. Hier wird der benötigte Wärmebad-Algorithmus in allen Einzelheiten geschildert, auf die Auswertung der Monte-Carlo-Daten eingegangen und wichtige Größen, die im weiteren Verlauf berechnet werden sollen, werden definiert.

In Kapitel 6 werden die Ergebnisse, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit gewonnen wurden, vorgestellt, verglichen und eingeordnet.

Nach einer Zusammenfassung in Kapitel 7 sind im Anhang Hinweise auf verwendete Einheiten, Notationskonventionen u. a. zu finden.

⁵Insbesondere können leichte Quarkmassen bisher nicht simuliert werden.

2 Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik

It might be noted here, for the benefit of those interested in exact solutions, that there is an alternative formulation of the many-body problem, i.e., how many bodies are required before we have a problem? G.E. Brown points out that this can be answered by a look at history. In eighteenth-century Newtonian mechanics, the three-body problem was insoluble. With the birth of general relativity around 1910 and quantum electrodynamics in 1930, the two- and one-body problems became insoluble. And within modern quantum field theory, the problem of zero bodies (vacuum) is insoluble. So, if we are out after exact solutions, no bodies at all is already too many!

(Richard D. Mattuck,
A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem)

Im folgenden Kapitel werden einige Grundlagen der Theoretischen Physik zusammengefasst. Zunächst sollen dazu die Teilchen und Kräfte des Standardmodells der Teilchenphysik rein qualitativ vorgestellt werden. Um die zugrundeliegenden Theorien der verschiedenen Wechselwirkungen besser zu verstehen, werden danach einige zentrale Konzepte geschildert: der Lagrange-Formalismus, Eichtheorien, Pfadintegrale und die spontane Symmetriebrechung. Im Hinblick auf die numerischen Simulationen der vorliegenden Arbeit wird abschließend eine Einführung in die Quantenfeldtheorie „auf dem Gitter“ gegeben.

2.1 Das Standardmodell der Teilchenphysik

Das Standardmodell der Teilchenphysik [14] ist eine Theorie zur Beschreibung der Elementarteilchen (d. h. Teilchen ohne bisher nachweisbare Substruktur) und ihrer Wechselwirkungen. Es wurde in den 1960ern und 1970ern entwickelt und beinhaltet zwölf Materieteilchen: sechs Quarks (*up*, *down*, *charm*, *strange*, *top*, *bottom*), drei geladene Leptonen (Elektron, Myon und Tau) und drei neutrale Leptonen (Neutrinos), die in drei Familien angeordnet werden können.

Die Kräfte, die im Standardmodell beschrieben werden, sind die starke, die schwache und die elektromagnetische Kraft. Die Gravitation ist nicht in der Theorie enthalten, allerdings ist ihre Wirkung im Bereich der Elementarteilchen vernachlässigbar klein.

Jede Kraft wird durch sog. Austauschteilchen (Bosonen) vermittelt und im Rahmen einer Quantenfeldtheorie (QFT; Kapitel 2.2 – 2.4) [15, 16] mathematisch beschrieben.

Die elektromagnetische Wechselwirkung wird durch das Photon vermittelt und wurde schon früh im Rahmen der Quantenelektrodynamik (QED) [17] beschrieben. Die elektromagnetische Kraft koppelt an elektrische Ladungen (geladene Leptonen und Quarks) und hat wegen der Masselosigkeit des Photons eine unendliche Reichweite.

Die Bosonen der schwachen Wechselwirkung sind zwei geladene W^- und W^+ sowie ein neutrales Z^0 . Wegen der recht hohen Masse dieser Austauschteilchen hat die schwache Kraft nur eine sehr geringe Reichweite. Sie koppelt an alle Teilchen, die einen Flavor tragen (Quarks und alle Leptonen).

Das Glashow-Weinberg-Salam-Modell⁶ [19, 20] ist die QFT, die den elektromagnetischen und den schwachen Sektor zum elektroschwachen Sektor vereinigt. Ein wichtiger Aspekt in dieser Theorie ist der Higgs-Mechanismus, auf den in den Kapiteln 2.5 und 4 näher eingegangen werden soll. Das Higgs-Boson, das dazu eingeführt wurde, ist ein weiteres Teilchen des Standardmodells, nach dem in aktuellen Experimenten am CERN [21] gesucht wird.

Die starke Wechselwirkung wird durch acht verschiedene Gluonen vermittelt und wirkt nur auf Teilchen, die eine Farbladung tragen (Quarks und die Gluonen selbst). Trotz der Masselosigkeit der Gluonen hat die starke Kraft aufgrund der Selbstwechselwirkung der Austauschteilchen eine begrenzte Reichweite. Die zugehörige QFT ist die Quantenchromodynamik (QCD; Kapitel 3) [22].

2.2 Der Lagrange-Formalismus

Nichtrelativistische Quantenmechanik beschreibt das Verhalten skalarer Teilchen mithilfe von Wahrscheinlichkeitsaussagen. Ort und Impuls sind dabei dynamische Variablen, während die Zeit als Parameter die Entwicklung von quantenmechanischen Systemen beschreibt. Der Versuch, die Gleichungen der Quantenmechanik auf relativistische Teilchen zu verallgemeinern, erfordert einen Übergang zur QFT, da ohne diese keine Teilchenerzeugung oder -vernichtung beschrieben werden kann, die durch die Äquivalenz von Energie und Masse auftreten.

Eine relativistische Quantentheorie basiert auf den Wechselwirkungen der Teilchen untereinander und beschreibt die Wechselwirkung ihrer Felder. Die Felder übernehmen die Rolle der dynamischen Variablen und entstehen durch den Übergang von N-Teilchen-Systemen – mit Koordinaten $\vec{x}_i(t)$ für jedes der Teilchen – zu Feldern $\phi(x)$ auf der kontinuierlichen Raumzeit. Die Bewegungsgleichungen (Euler-Lagrange-Gleichungen) und Erhaltungsgrößen der Theorie ergeben sich durch Minimierung der Wirkung. Eine Herleitung sowie weitere Diskussionen befinden sich in der Standardliteratur, z. B. in [15, 16].

Sei die Lagrange-Dichte \mathcal{L} in Abhängigkeit der Felder ϕ , deren kovarianter Ableitungen $\partial_\mu\phi$ sowie der Raumzeit x^μ gegeben, so ist die Wirkung definiert als⁷

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, x^\mu). \quad (2.1)$$

⁶Für die Arbeiten zu diesem Thema wurde der Physik-Nobelpreis im Jahre 1979 an S.L. Glashow, A. Salam und S. Weinberg verliehen [18].

⁷In der vorliegenden Arbeit werden natürliche Einheiten $\hbar = c = 1$ verwendet.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen folgen aus der Variation der Wirkung $\delta S = 0$ mit $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$ bzw. $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$ und sind gegeben durch

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0. \quad (2.2)$$

Ebenfalls aus dieser Variation folgt das Noether-Theorem⁸ [23] mit

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) = \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.3)$$

wobei J^μ den erhaltenen Noether-Strom bezeichnet.

Eine Quantentheorie für relativistische Spin-0-Teilchen ergibt sich aus der Energie-Impuls-Beziehung

$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad (2.4)$$

durch die erste Quantisierung $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$, $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$ und führt auf die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial^2 + m^2) \phi = 0 \quad (2.5)$$

mit der zugehörigen Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.6)$$

2.3 Eichtheorien

Der Prototyp der Eichtheorie ist der Elektromagnetismus mit der Lagrange-Dichte⁹ für Felder im Vakuum

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

wobei $F_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor ist, der sich aus den Eichfeldern A_μ über

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.8)$$

ergibt. Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen für die dynamische Variable A_μ folgt

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.9)$$

eine der quellfreien Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form.

⁸ „Die Invarianz der Wirkung unter einer kontinuierlichen Symmetrietransformation impliziert einen erhaltenen Strom.“

⁹ Im Allgemeinen ergibt sich die Form der Lagrange-Dichte aus den von der Theorie geforderten Symmetrien (z. B. Lorentz-Invarianz, Abel'sche oder nicht-Abel'sche, globale oder lokale Eichsymmetrie). Auch symmetrieverbrechende Terme sind möglich. Jede QFT des Standardmodells ist Lorentz-invariant. Für QED etwa wird eine lokale Abel'sche U(1)-Symmetrie gefordert, für QCD eine lokale nicht-Abel'sche SU(3)-Symmetrie etc. Die einzelnen Terme einer Lagrange-Dichte stehen für die Dynamik der Felder, ihre Massen, die Wechselwirkungen zwischen den Konstituenten oder ihre Selbstwechselwirkung. Durch Addition entsprechender Terme können weitere Aspekte berücksichtigt werden.

Die Quantenelektrodynamik (QED) ist die entsprechende Quantenfeldtheorie der elektromagnetischen Kraft, die die Wechselwirkung von Teilchen¹⁰ durch den Austausch von Photonen (dargestellt durch das Eichfeld A_μ) beschreibt. Die Lagrange-Dichte der QED ist invariant unter lokalen Eichtransformationen, worauf im Verlauf dieses Abschnitts näher eingegangen wird. Zudem ist die QED eine Abel'sche Eichtheorie, da die Eichtransformationen vertauschen. Zur Beschreibung der schwachen und der starken Kraft sind nicht-Abel'sche Eichtheorien nötig, da die Austauschteilchen selbstwechselwirken. Dazu werden zusätzliche Vektorfelder eingeführt, die die lokale Eichinvarianz generalisieren und daher erhalten. Die Form der Lagrange-Dichte bleibt zunächst gleich, jedoch werden Gruppenindizes hinzugefügt (z. B. $A_\mu \rightarrow A_\mu^a$), so dass die verschiedenen Komponenten (z. B. die verschiedenen Gluonen in der QCD) durch einen zusätzlichen antisymmetrischen Term im Feldstärketensor wechselwirken:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.11)$$

Dabei ist g die Kopplungskonstante und f^{abc} die vollständig antisymmetrische Strukturkonstante der jeweiligen Theorie. Ein Zusammenhang mit den Kommutatoren der Generatoren λ^a ergibt sich über

$$[\lambda^a, \lambda^b] = i f^{abc} \lambda^c. \quad (2.12)$$

Mithilfe der Matrixdarstellung ($A_\mu = A_\mu^a \lambda^a$, $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \lambda^a$) folgt aus (2.11):

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu]. \quad (2.13)$$

In der fundamentalen Darstellung werden die Generatoren orthonormal, so dass gilt

$$\text{Sp}(\lambda^a \lambda^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (2.14)$$

Die einfachste nicht-Abel'sche Eichtheorie, die auch in der vorliegenden Arbeit benutzt wird, ist die SU(2) mit

$$\lambda^a = \frac{1}{2} \tau_a, \quad (2.15)$$

den Pauli-Matrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

sowie

$$f^{abc} = \epsilon_{abc}. \quad (2.17)$$

¹⁰Es handelt sich um geladene Fermionen und ihre Antiteilchen (Elektronen und Positronen im Falle der QED bzw. die Quarks und Antiquarks im Falle der QCD). Zur vollständigen Beschreibung der Theorie ist daher dem Maxwell-Term (2.7) der Lagrange-Dichte der sog. Dirac-Term

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\Psi} (i \gamma^\mu D_\mu - m) \Psi \quad (2.10)$$

hinzuzufügen, der die Fermionen als Spinorfelder Ψ beschreibt. Da numerische Simulationen mit Fermionen sehr aufwendig sind und im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht behandelt werden, wird der fermionische Sektor einer jeden QFT im Folgenden außen vor gelassen.

Eine lokale Eichsymmetrie ist dann gegeben, wenn eine Eichtransformation des Feldes in einem lokalen Umfeld die Wirkung invariant lässt. Die QED-Lagrange-Dichte z. B. bleibt invariant unter den Transformationen

$$\phi \longrightarrow e^{ig\Lambda(x)}\phi, \quad A_\mu \longrightarrow A_\mu - \partial_\mu\Lambda(x) \quad (2.18)$$

mit der Eichfunktion $\Lambda(x)$, sofern die Ableitungen des Feldes durch die kovarianten Ableitungen

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu \quad (2.19)$$

ersetzt werden.

In nicht-Abel'schen Eichtheorien folgt nach einigen Überlegungen, auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden soll,

$$\phi \longrightarrow \hat{g}(x)\phi, \quad (2.20)$$

$$D_\mu \longrightarrow \hat{g}(x)D_\mu\hat{g}^{-1}(x) \quad (2.21)$$

und daher

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \hat{g}(x)F_{\mu\nu}\hat{g}^{-1}(x) \quad (2.22)$$

und

$$A_\mu \longrightarrow \hat{g}(x)A_\mu\hat{g}^{-1}(x) - \frac{i}{g}\hat{g}(x)\partial_\mu\hat{g}^{-1}(x) \quad (2.23)$$

mit

$$\hat{g}(x) = e^{ig\Lambda^a(x)\lambda^a}. \quad (2.24)$$

Bewegt sich ein Teilchen entlang eines Pfades P in der Raumzeit, so erhält sein Feld durch die Wechselwirkung mit externen Eichfeldern eine zusätzliche Phase

$$\phi \longrightarrow \exp\left(ig \int_P A_\mu dx^\mu\right)\phi = U(P)\phi. \quad (2.25)$$

Ein wegabhängiger Phasenfaktor in Abel'scher Eichtheorie kann Teilchen an verschiedenen Raumzeitpunkten eichinvariant über $\phi^\dagger(x)U(x \rightarrow y)\phi(y)$ verbinden, so dass $U(P)$ als Paralleltransporter der Eichgruppen-Geometrie angesehen werden kann.

In nicht-Abel'schen Eichtheorien erfolgt eine Generalisierung mithilfe von

$$\frac{dx^\mu}{ds}D_\mu U^\dagger(s) = 0, \quad U(0) = 1, \quad (2.26)$$

wobei der gewählte Weg als $x^\mu(s)$ mit $s \in [0, 1]$ parametrisiert ist. Umgeformt folgt

$$U(s) = P \exp\left(ig \int_0^s ds \frac{dx^\mu}{ds} A_\mu\right). \quad (2.27)$$

P steht für Wegordnung entlang des Pfades.

Für einen geschlossenen Weg \mathcal{C} ist die Spur des Paralleltransporters eichinvariant und wird Wilson-Loop genannt (vgl. Kapitel 3.2):

$$W(\mathcal{C}) = \text{Sp } U(\mathcal{C}). \quad (2.28)$$

2.4 Der Pfadintegralformalismus

Die Felder einer QFT können entweder als Operatoren auf einem Zustandsraum (kanonische Quantisierung) oder als Integrationsvariablen in Funktionalintegralen definiert werden. Dank der Äquivalenz der beiden Formalismen kann frei nach Praktikabilität gewählt werden. In der vorliegenden Arbeit wird die Pfadintegralquantisierung benutzt, da diese eine interessante Beziehung zwischen QFT und statistischer Physik offenbart, die zu Simulationszwecken genutzt werden kann. Auch für diesen Abschnitt sei auf die gängige Literatur, z. B. [15], verwiesen.

Ausgehend von der Überlegung, dass sich die Möglichkeit eines quantenmechanischen Teilchens, sich von einem Ort y zu einem anderen Ort x zu bewegen, aus der Summe aller möglichen Pfade $y \rightarrow x$ zusammensetzt, können quantenmechanische Übergangsamplituden als unendlich-dimensionales Pfadintegral dargestellt werden:

$$\langle x, t | y, 0 \rangle = \langle x | e^{-iHt} | y \rangle = \int \mathcal{D}x e^{iS[x]}, \quad (2.29)$$

wobei $S[x]$ die klassische Wirkung des jeweiligen Pfades ist. Das Integrationsmaß $\mathcal{D}x = \mathcal{D}[x(t)]$ bedeutet dabei, dass über alle möglichen Wege zwischen y und x integriert werden muss:

$$\mathcal{D}[x(t)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^n dx(t_j). \quad (2.30)$$

Verallgemeinert auf Felder ergibt sich die Funktionalintegral-Darstellung

$$\langle \phi_f(\vec{x}), t_f | \phi_i(\vec{x}), t_i \rangle = Z[\phi] = \int_{\phi_i(\vec{x})}^{\phi_f(\vec{x})} \mathcal{D}\phi e^{i \int_{t_i}^{t_f} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)} \quad (2.31)$$

mit der klassischen Lagrange-Dichte \mathcal{L} und den Anfangs- und Endwerten ϕ_i und ϕ_f des Feldes. $\mathcal{D}\phi = \prod_x d\phi(x)$ meint dabei die Integration über alle Feldkonfigurationen mit den gegebenen Randbedingungen.

Die Euklid'sche Formulierung des Pfadintegrals kann durch die Wick-Rotation $t \rightarrow it$ erhalten werden. Dieses Vorgehen ist in verschiedenen Zusammenhängen vorteilhaft, da Z nun die Form einer Zustandssumme der Statistischen Physik hat. Für den Erwartungswert einer Observablen \mathcal{O} ergibt sich im Euklid'schen

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}(\phi) e^{-S[\phi]} \quad (2.32)$$

mit

$$Z = \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}. \quad (2.33)$$

Das Euklid'sche Pfadintegral kann reinterpretiert werden als ein klassisches statistisches System, in dem jene Feldkonfigurationen, die die Euklid'sche Wirkung minimieren, einen großen Beitrag zu Erwartungswerten beitragen, während Feldkonfigurationen, die nicht nahe des Wirkungsminimums liegen, Quantenkorrekturen darstellen. Diese Eigenschaft wird sich bei der numerischen Auswertung von Erwartungswerten zunutze gemacht, indem die Raumzeit in einem endlichen Volumen V diskretisiert wird. Dazu wird der Übergang

$$\int \mathcal{D}\phi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{x \in V} d\phi(x) \quad (2.34)$$

durchgeführt und später der Grenzwert $\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ V \rightarrow \infty}}$ mit der Gitterkonstanten a gebildet (Kapitel 2.6).

2.5 Massive Teilchen und spontane Symmetriebrechung

Alle Bosonen sind innerhalb der entsprechenden QFT zunächst masselos. Da die Austauschteilchen der schwachen Kraft nachweislich massiv sind, müssten der Lagrange-Dichte Massenterme hinzugefügt werden, die jedoch ihre Eichinvarianz verletzen würden.

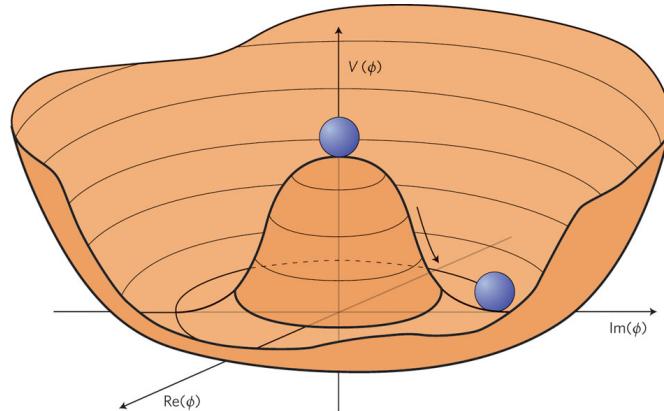


Abbildung 2.1: Das Mexikanerhut-Potential der Selbstwechselwirkung des Higgs-Feldes (entnommen aus [24])

Zur Lösung dieses Problems wird das Konzept der spontanen Symmetriebrechung¹¹ herangezogen¹². Nach dem Goldstone-Theorem bewirkt die spontane Symmetriebrechung einer globalen Symmetrie die Existenz eines oder mehrerer masseloser Spin-0-Teilchen, sog. Nambu-Goldstone-Bosonen [27, 28, 29]. Der Higgs-Mechanismus dagegen beschreibt die Folgen der spontanen Symmetriebrechung lokaler (Eich-) Symmetrien ([30], Kapitel 4). Das Higgs-Feld, das dazu eingeführt wird, hat eine nichttriviale Selbstwechselwirkung, die Mexikanerhut-Potential (Abbildung 2.1) genannt wird. Dieses Potential hat ein lokales Maximum, wenn das Feld verschwindet, und einen Ring aus unendlich vielen entarteten Vakua in der komplexen Ebene. Eine Betrachtung der Fluktuationen des Feldes um den Grundzustand herum führt auf einen Massenterm für die Eichfelder, d. h. das Goldstone-Boson koppelt an ein masseloses Spin-1-Eichboson, wodurch ein massives Spin-1-Teilchen entsteht.

2.6 Der Gitterformalismus

Innerhalb der QED bildet die sog. Störungstheorie, d. h. eine Reihenentwicklung in der (kleinen) Kopplungskonstanten, ein wirkungsvolles Werkzeug zur Berechnung diverser

¹¹Eine Symmetrie heißt spontan gebrochen, wenn die Lagrange-Dichte der Theorie zwar invariant unter der entsprechenden Symmetrietransformation ist, der Grundzustand jedoch nicht.

¹²Für die Arbeiten zu diesem Thema wurde der Physik-Nobelpreis 2008 an Y. Nambu, M. Kobayashi und T. Maskawa verliehen [25, 26].

Größen. In der QCD kann dieses Verfahren wegen der laufenden Kopplung (Kopplungskonstante nimmt mit steigender Energie ab) nur im hochenergetischen Bereich angewendet werden. Bei niedrigen Energien stellt u. a. die Gitterregularisierung eine geeignete Alternative dar. Allgemein bietet die Übertragung einer Quantenfeldtheorie „auf ein Gitter“ vielerlei analytische und numerische Möglichkeiten zur Bearbeitung physikalischer Fragestellungen auf jeglichen Längen- und Energieskalen. Im Folgenden sei dazu ein kurzer Abriss aus [31] gegeben.

Zur Diskretisierung der Raumzeit wird ein hyperkubisches Gitter

$$\Lambda = a\mathbb{Z}^4 = \left\{ x \mid \frac{x_\mu}{a} \in \mathbb{Z} \right\} \quad (2.35)$$

eingeführt, wobei a die sog. Gitterkonstante¹³ bezeichnet. Materiefelder (Quark- oder Higgs-Felder) $\Psi(x)$ werden auf den Gitterpunkten $x \in \Lambda$ definiert und symbolisch als Punkte dargestellt (Abbildung 2.2).



Abbildung 2.2: Symbolische Darstellung eines Materiefeldes auf dem Gitter

Um die Invarianz der Wirkung unter lokalen Eichtransformationen zu gewährleisten, werden die Eichfelder im Kontinuum über die Paralleltransporter entlang infinitesimaler Distanzen eingeführt. Auf dem Gitter ist die kürzeste Entfernung der Gitterabstand a , so dass ein elementarer Paralleltransporter (Linkvariable) $U_{x\mu}$ mit dem sog. Link identifiziert wird. Ein Link entspricht dem direkten Weg von x nach $x + a\hat{\mu}$ und er wird unter Angabe des Anfangspunktes x und der Richtung μ notiert. Jeder beliebige Weg \mathcal{C} kann als Produkt der einzelnen Links $U(\mathcal{C})$ dargestellt werden. Ein Eichfeld auf dem Gitter wird schließlich als Menge aller Linkvariablen definiert.

Im Folgenden soll $U(x, y)$ das Produkt der Linkvariablen entlang des geraden Weges, der y mit x verbindet, beinhalten. Symbolisch soll dies als Linie mit Pfeil dargestellt werden (Abbildung 2.3).

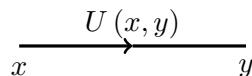


Abbildung 2.3: Symbolische Darstellung eines Produktes aus Links auf dem Gitter

Es gilt

$$U^{-1}(x, y) = U(y, x). \quad (2.36)$$

Der Zusammenhang zwischen den Linkvariablen und den physikalischen Bosonfeldern $A_\mu(x)$ gestaltet sich gemäß

$$U_{x\mu} = e^{-iagA_\mu^a(x)\lambda^a}. \quad (2.37)$$

Die kleinste Variante, auf dem Gitter eine geschlossene Schleife (*Loop*) zu bilden, besteht aus vier Links und wird Plakette P genannt (Abbildung 2.4). Der entsprechende

¹³Die Gitterkonstante wird im Folgenden auf $a = 1$ gesetzt.

Paralleltransporter ist die Plakettvariable

$$\begin{aligned}
 U_P &= U(x, x + a\hat{\mu}) U(x + a\hat{\mu}, x + a\hat{\nu} + a\hat{\mu}) U(x + a\hat{\nu} + a\hat{\mu}, x + a\hat{\nu}) U(x + a\hat{\nu}, x) \\
 &= U_{x\mu} U_{x+a\hat{\mu},\nu} U_{x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu},-\mu} U_{x+a\hat{\nu},-\nu} \\
 &= U_{x\mu} U_{x+a\hat{\mu},\nu} U_{x+a\hat{\nu},\mu}^{-1} U_{x\nu}^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

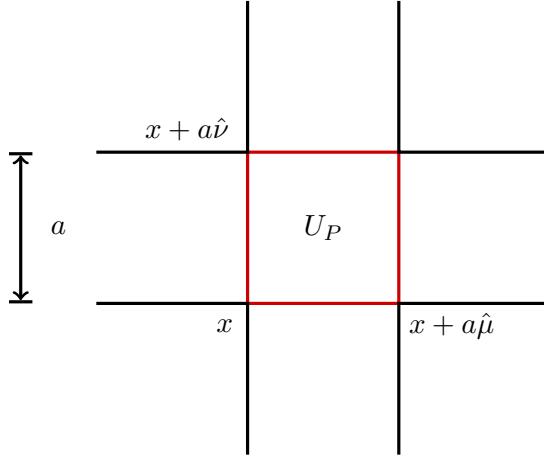


Abbildung 2.4: Veranschaulichung der Plakettvariablen U_P

Eine mögliche Gitterwirkung für reine Eichtheorie ist die sog. Wilson-Wirkung, hier für $SU(2)$:

$$S[U] = \beta \sum_P \left[1 - \frac{1}{2} \text{Sp } U_P \right]. \tag{2.39}$$

Die Summe läuft dabei über alle Plaketten, wobei jede Plakette nur in einer Orientierung berücksichtigt werden soll,

$$\sum_P = \sum_{\square} := \sum_x \sum_{0 \leq \nu \leq \mu \leq 3}. \tag{2.40}$$

Die führende Ordnung der Wilson-Wirkung geht für kleine Gitterkonstanten ($a \rightarrow 0$) in die Yang-Mills-Wirkung über, sofern die Kopplungskonstante g mit der Gitterkopplung

$$\beta = \frac{4}{g^2} \tag{2.41}$$

identifiziert wird. Dazu wird die Exponentialfunktion aus (2.37) entwickelt.

Weitere eichinvariante Größen¹⁴ können aus $\phi(x)U(\mathcal{C}_{x,y})\phi(y)$ oder $\text{Sp } U(\mathcal{C}_{x,x})$ gebildet werden.

Auf dem Gitter ist eine Eichfixierung nicht unbedingt notwendig, da die Anzahl der Variablen im begrenzten Volumen naturgemäß endlich ist. Allerdings kann eine Eichfixierung manchmal hilfreich sein. Um eine Eichung durchzuführen, wird eine Teilmenge B aller Links und für diese eine feste Konfiguration von Linkvariablen $U_0(b)$ für alle $b \in B$ gewählt. Bei der Berechnung von Erwartungswerten werden nun all diese Linkvariablen auf einen beliebigen festen Wert gesetzt.

¹⁴Größen, die nicht eichinvariant sind, mitteln im Funktionalintegral zu null.

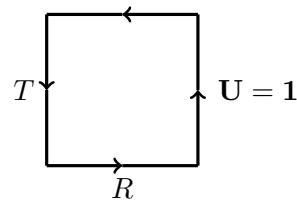


Abbildung 2.5: Veranschaulichung der temporalen Eichung auf dem Gitter

Für die temporale Eichung (Abbildung 2.5), die teilweise in der vorliegenden Arbeit verwendet wird, gilt

$$B = \{ \langle x, y \rangle \mid y = x \pm a \cdot \hat{t} \} \quad (2.42)$$

und

$$U_0(b) = 1, \quad (2.43)$$

was $A_0 = 0$ im Kontinuum entspricht.

3 Confinement-Kriterien

Die QCD ist eine nicht-Abel'sche SU(3)-Yang-Mills-Theorie mit zwei besonderen Eigenschaften [15]:

- **Confinement:** Der Betrag der starken Kraft zwischen Quarks fällt – anders als die elektromagnetische Kraft – nicht mit zunehmendem Abstand ab, so dass unendlich viel Energie aufgebracht werden müsste, um zwei oder mehr Quarks zu trennen. Dass Quarks in Hadronen gebunden sind, ist bisher analytisch nicht berechenbar. Allerdings ist ein mathematisches Werkzeug wünschenswert, das zwischen der Confinement- und der Deconfinement-Phase unterscheiden kann, um die Abwesenheit freier Quarks innerhalb der Theoretischen Physik zu erklären. Eine Möglichkeit des Zugangs bietet hier die Gitterformulierung der QCD (Kapitel 2.6).
- **Asymptotische Freiheit:** Die Kopplungskonstante der QCD nimmt mit zunehmender Energie (bzw. abnehmender Distanz) ab, so dass hochenergetische Quarks fast nicht mehr wechselwirken¹⁵.

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, gibt es Confinement-Kriterien (z. B. Wilson-Loop), die innerhalb einer reinen Eichtheorie erfolgreich anzeigen, ob Confinement oder Deconfinement vorliegt. In Anwesenheit dynamischer Materiefelder greifen diese Kriterien allerdings nicht mehr. Im folgenden Kapitel soll näher darauf eingegangen werden, wie das Wilson-Loop-Kriterium funktioniert, was der Unterschied bei dynamischen Quarks ist und wie in diesem Rahmen ein geeignetes Confinement-Kriterium aussehen könnte.

3.1 Confinement, statisches Potential und String Breaking

Der Begriff „Farb-Confinement“ beschreibt das Phänomen, dass Teilchen, die eine Farbladung tragen (insbesondere Quarks), nicht isoliert auftreten und daher nicht direkt beobachtet werden können. Im Allgemeinen liegt in einer Theorie Confinement vor, falls alle Zustände endlicher Energie invariant unter globalen Eichtransformationen sind¹⁶.

Im Folgenden soll ein Quark-Antiquark-Paar mit räumlichem Abstand R betrachtet werden. Der farbelektrische Fluss zwischen den Quarks bildet aufgrund der Selbstwechselwirkung der Gluonen eine sog. Flussröhre mit endlicher Dicke. Wenn der Abstand zwischen den Quarks zunimmt, wird das Verhältnis von Dicke zu Länge der Flussröhre infinitesimal klein, so dass das Gluonfeld nun einen Faden (*String*) aus Farbladungen bildet, der die beiden Quarks verbindet und sie zusammenzieht. Mit der Annahme, die Quarks wären unendlich schwer (statische Quarks), würde in reiner nicht-Abel'scher

¹⁵Für die Arbeiten zu diesem Thema wurde der Physik-Nobelpreis im Jahre 2004 an D.J. Gross, H.D. Politzer und F. Wilczek vergeben [32, 33, 34].

¹⁶Beispielsweise liegt in der QED kein Confinement vor, da hier Zustände endlicher Energie (einzelne Elektronen) existieren, die eine nicht verschwindende elektrische Ladung haben, und daher bei einer globalen Eichtransformation eine Phase erhalten.

Eichtheorie das Potential linear mit dem Abstand der Quarks wachsen¹⁷. Dieses Potential

$$\lim_{R \rightarrow \infty} V(R) \sim \alpha \cdot R \quad (3.2)$$

wird statisches Potential genannt, wobei α die sog. Fadenspannung ist, die als konstante Kraft interpretiert werden kann, die zwischen weit voneinander entfernten Farbladungen wirken würde (Abbildung 3.1).



Abbildung 3.1: Veranschaulichung des statischen Potentials zwischen zwei weit entfernten, unendlich schweren Quarks

Liegen dagegen dynamische Materiefelder vor, wird erwartet, dass das Potential bei großen Abständen der Quarks abflacht, da das System instabil wird und es zu Abschirmungseffekten aufgrund der Produktion leichter Quark-Antiquark-Paare kommt (Abbildung 3.2). Dieses Phänomen des *String Breakings* tritt zutage, wenn die Energie des Gluonfadens zwischen den statischen Quarks den Betrag erreicht, der benötigt wird, um ein leichtes Quark-Antiquark-Paar, das jeweils an die schweren Quarks bindet, zu erzeugen. Ist der Abstand R der Quarks kleiner als eine kritische Distanz R_b , wird der Gluonfaden aufrecht erhalten und es liegt ein linear wachsendes Potential vor. Für Abstände größer der kritischen Distanz R_b wird das Potential des Grundzustandes durch die Energie der zwei leichten „Mesonen“ begrenzt, so dass das Potential in diesem Fall gegeben ist durch

$$\lim_{R_b < R \rightarrow \infty} V(R) = 2\mu, \quad (3.3)$$

wobei μ die Mesonmasse bezeichnet.

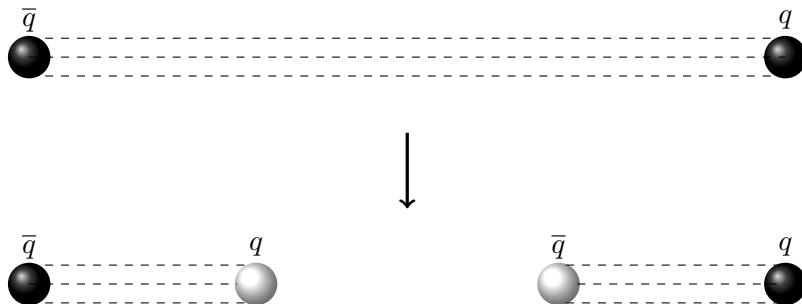


Abbildung 3.2: Veranschaulichung des String Breakings

¹⁷Ein Theorem von [35] besagt, dass das Potential zwischen zwei statischen Quarks den Bedingungen

$$\frac{\partial V}{\partial R} > 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial R^2} \leq 0 \quad (3.1)$$

genügt. Die zweite Bedingung wird durch ein lineares Potential erfüllt; das Quark-Antiquark-Potential darf nicht schneller wachsen als linear. Zunächst ist allerdings nicht festgelegt, dass das Potential auch tatsächlich linear anwächst, jedoch deuten die Phänomenologie des Hadronspektrums sowie Gittersimulationen darauf hin [36].

Wird im Experiment ein Quark durch ein hochenergetisches Photon aus einem Hadron herausgeschlagen, nimmt die Energie des farbelektrischen Feldes mit zunehmendem Abstand zwischen Quarks und Hadronrest zu, bis diese groß genug ist, um ein leichtes Quark-Antiquark-Paar zu erzeugen. Das leichte Antiquark bindet dann an das herausgeschlagene Quark, während das leichte Quark an den Hadronrest bindet. Die beiden resultierenden Farb-Singulett-Zustände sind dabei zunächst meist in angeregten Zuständen und verfallen im weiteren Verlauf in leichtere Hadronen. Es wird ein Schauer gewöhnlicher Hadronen detektiert, jedoch weder ein freies Quark noch ein farb-ionisiertes Hadron.

In reiner Eichtheorie kann aus folgenden Gründen kein String Breaking auftreten: Die Quarks leben in der fundamentalen Darstellung der Eichgruppe und transformieren entsprechend

$$\Psi(x) \rightarrow \hat{g}(x) \Psi(x) \quad (3.4)$$

unter einer Eichtransformation

$$\hat{g}(x) = \exp \{-ig\Lambda^a(x)\lambda^a\}. \quad (3.5)$$

Die Gluonen dagegen leben in der adjungierten Darstellung und transformieren nach

$$A_\mu(x) \rightarrow \hat{g}(x) A_\mu(x) \hat{g}^\dagger(x) + \frac{i}{g} \hat{g}(x) \partial_\mu \hat{g}^\dagger(x). \quad (3.6)$$

Daher ist es nicht möglich, aus den Gluonen ein Objekt zu formen, das in der fundamentalen Darstellung lebt. Anders ausgedrückt können die Gluonen die Farbladung eines Quarks nicht neutralisieren, da sie in einer anderen Darstellung leben. Das farbelektrische Feld eines Quarks kann nur an einem anderen Quark enden oder muss sich ins Unendliche erstrecken. Für Letzteres wäre unendlich viel Energie notwendig, die in der Natur nicht aufgebracht werden kann.

Confinement impliziert das lineare Anwachsen des Potentials zwischen zwei Farbladungen mit ihrer Entfernung. In einer Eichtheorie mit Fermionen in der fundamentalen Darstellung der Eichgruppe SU(3) (z. B. QCD) erlischt der farbelektrische Faden zwischen dem schweren Quark Ψ und dem Antiquark $\bar{\Psi}$, wenn ihr Abstand R groß genug wird, da sich leichte Quark-Antiquark-Paare bilden. Daraus resultiert die Abschirmung des Potentials, so dass es für große Abstände nicht divergiert.

In reiner SU(3)-Eichtheorie, d. h. ohne die leichten Fermionen, kommt es nicht zum String Breaking, da aus den Gluonen, die in der adjungierten Darstellung der Eichgruppe leben, kein Objekt gebildet werden kann, das in der fundamentalen Darstellung lebt, wie es die Fermionen tun müssten.

3.2 Das Wilson-Loop-Kriterium

Die Inhalte dieses Abschnitts sind aus [11] entnommen.

Sei ein geschlossener Weg \mathcal{C} gegeben, so wird der sog. Wilson-Loop (vgl. Kapitel 2.3, (2.28)) definiert als

$$W(\mathcal{C}) = \text{Sp} \left[P \cdot e^{i \int_{\mathcal{C}} A_i dx^i} \right], \quad (3.7)$$

wobei P Wegordnung entlang \mathcal{C} meint. Auf dem Gitter überträgt sich die Definition entsprechend auf

$$W(\mathcal{C}) = \text{Sp} U(\mathcal{C}), \quad (3.8)$$

wobei $U(\mathcal{C})$ das Produkt der Linkvariablen bezeichnet, die den Weg \mathcal{C} bilden. Der Wilson-Loop ist demnach eichinvariant.

Der Wilson-Loop misst im physikalischen Sinne die Antwort des Eichfeldes auf eine äußere Quelle, die sich entlang seiner Kontur bewegt. Für zeitartige Loops entspricht dies der Produktion eines Quark-Paars zur Startzeit, der Bewegung der Quarks den Loop entlang und ihrer Annihilation zur Endzeit.

Zur Herleitung des Wilson-Loop-Kriteriums soll eine Testladung Ψ entlang des geschlossenen Weges \mathcal{C} bewegt werden. Die entsprechende quantenmechanische Amplitude ist dann durch den Vakuumerwartungswert (VEV) des Wilson-Loops $\langle 0|W(\mathcal{C})|0\rangle$ gegeben.

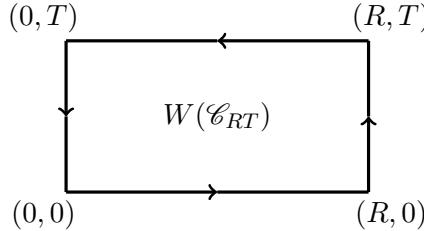


Abbildung 3.3: Veranschaulichung eines rechteckigen Wilson-Loops

Der Einfachheit halber soll eine rechteckige Kontur \mathcal{C}_{RT} der Länge T in Zeitrichtung sowie der Länge R in eine Raumrichtung (z. B. x -Richtung) angenommen werden (Abbildung 3.3). Der VEV des Wilson-Loops ist damit

$$\langle 0|W(\mathcal{C}_{RT})|0\rangle = \langle 0| \text{Sp} \left[P e^{i \int_T^0 dt A_0(t, 0)} \cdot P e^{i \int_R^0 dx A_1(T, x)} \right. \\ \left. P e^{i \int_0^T dt A_0(t, R)} \cdot P e^{i \int_0^R dx A_1(0, x)} \right] |0\rangle. \quad (3.9)$$

In temporaler Eichung ($A_0 = 0$) vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\langle 0|W(\mathcal{C}_{RT})|0\rangle = \left\langle 0| \text{Sp} \left[P e^{i \int_R^0 dx A_1(T, x)} \cdot P e^{i \int_0^R dx A_1(0, x)} \right] |0\right\rangle. \quad (3.10)$$

Sei

$$W_R(t) = P e^{i \int_0^R dx A_1(t, x)}, \quad (3.11)$$

so folgt

$$\langle 0|W(\mathcal{C}_{RT})|0\rangle = \sum_{m,m'} \langle 0|(W_R)_{mm'}^*(T) (W_R)_{m'm}(0)|0\rangle, \quad (3.12)$$

wobei die Spur als Summe notiert wurde. Mithilfe des (Euklid'schen) Zeitentwicklungsoperators $e^{-H(T-0)}$ kann $(W_R)^*(T)$ mit $W_R(0)$ in Verbindung gebracht werden:

$$\langle 0|W(\mathcal{C}_{RT})|0\rangle = \sum_{m,m'} \langle 0|(W_R)_{mm'}^*(0) e^{-HT} (W_R)_{m'm}(0)|0\rangle. \quad (3.13)$$

Das Einfügen eines vollständigen Systems aus Eigenzuständen führt auf

$$\langle 0|W(\mathcal{C}_{RT})|0\rangle = \sum_{m,m',n} \langle 0|(W_R)_{mm'}^*(0) e^{-HT} |n\rangle \langle n|(W_R)_{m'm}(0)|0\rangle. \quad (3.14)$$

Mit $e^{-HT}|n\rangle = e^{-E_n T}|n\rangle$ folgt schließlich

$$\langle 0|W(\mathcal{C}_{RT})|0\rangle = \sum_{m,m',n} |\langle n|(W_R)_{m'm}(0)|0\rangle|^2 e^{-E_n(R)T}. \quad (3.15)$$

Für sehr lange zeitliche Konturen ($T \rightarrow \infty$) liefert der Grundzustand die einzigen nennenswerten Beiträge. Da die Quarks statisch sind, ist ihre Gesamtenergie durch die potentielle $E_0 = V$ gegeben; das führt auf

$$\langle 0|W(\mathcal{C})|0\rangle \underset{T \rightarrow \infty}{=} OL \cdot e^{-V(R)T} \quad (3.16)$$

mit

$$OL = \text{Sp} \left| \left\langle n | P e^{i \int_0^R dx A_1(0,x)} | 0 \right\rangle \right|^2 = \text{Sp} |\langle n | W_R(0) | 0 \rangle|^2 = \text{const.} \quad (3.17)$$

Diese Konstante OL wird Überlapp genannt. Um sie zu berechnen, müssten die Wellenfunktionen eingesetzt und über das Produkt aus Operator und Zustand integriert werden. Ist ein Operator „gut“ für den Grundzustand $|n_0\rangle$ des Systems („Er hat einen großen Überlapp.“), so hat das Integral einen großen Wert und projiziert den Grundzustand. Für einen Operator, der keinen großen Überlapp hat, liefert das Integral einen kleinen Wert. Zum Beispiel hat der punktartige Operator $\bar{\Psi}\Psi$ nur einen sehr kleinen Überlapp mit dem ausgedehnten Grundzustand. Daher kann er den Grundzustand nicht projizieren und projiziert stattdessen einen anderen Zustand mit größerem Überlapp. Der Wilson-Loop ist ein guter Operator für die fadenartigen Zustände zwischen dem Quark-Antiquark-Paar.

Zusammenfassend beinhaltet das Wilson-Loop-Kriterium

$$\langle 0|W(\mathcal{C}_{RT})|0\rangle \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} e^{-V(R)T} \quad (3.18)$$

Folgendes: Falls sich die Theorie im Bereich der Confinement-Phase befindet, wächst das Potential linear $V(R) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \alpha R$ und der VEV des Wilson-Loops ist

$$\langle 0|W(\mathcal{C})|0\rangle \underset{R,T \rightarrow \infty}{\sim} \exp(-\alpha RT). \quad (3.19)$$

Hierbei handelt es sich um das sog. Flächengesetz.

Falls eine Theorie kein Confinement aufweist oder sich in der Deconfinement-Phase befindet, nähert sich das Potential mit zunehmendem räumlichen Abstand der Quarks einer Konstanten $V(R) \underset{R \rightarrow \infty}{=} 2\mu$. Der VEV des Wilson-Loops fällt nun exponentiell mit seinem Umfang ab:

$$\langle 0|W(\mathcal{C})|0\rangle \underset{R,T \rightarrow \infty}{\sim} \exp[-2\mu \cdot (T + R)]. \quad (3.20)$$

Dieses Verhalten wird Umfangsgesetz genannt.

Umgekehrt kann das statische Potential $V(R)$ durch das Verhalten des entsprechenden Wilson-Loops für große Zeiten in der fundamentalen Darstellung der Theorie definiert werden:

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle 0|W(\mathcal{C}_{RT})|0\rangle. \quad (3.21)$$

Wie bereits erwähnt ist der Wilson-Loop ein guter Operator für das linear wachsende Potential in reiner Eichtheorie. Dagegen ist es nicht möglich, String Breaking mit diesem Operator zu messen, da er keinen ausreichenden Überlapp mit dem Zustand der zwei Mesonen hat. Das Phänomen des String Breakings mischt sowohl fadenartige als auch mesonartige Zustände, so dass der Wilson-Loop-Operator mit Operatoren ergänzt werden sollte, die die mesonartigen Zustände messen können. Eine Möglichkeit, dies umzusetzen, wurde von Fredenhagen und Marcu vorgeschlagen und soll im folgenden Abschnitt näher erläutert werden.

3.3 Der Fredenhagen-Marcu-Operator

Die Idee von K. Fredenhagen und M. Marcu beinhaltet eine Neudefinition des Begriffs „Confinement“, sobald dynamische Materiefelder zugelassen werden. Anstelle des linear anwachsenden Potentials soll das Auftreten von String Breaking ausschlaggebend sein. In diesem Abschnitt werden die Gedankengänge aus [12] mit Ergänzungen aus [37] wiedergegeben.

Wie bereits im vorherigen Abschnitt erwähnt, scheitert das Wilson-Loop-Kriterium bei dynamischen Quarks, da der Wilson-Loop einen unzureichenden Überlapp mit den Meson-Zuständen hat. Produkte aus Quarkfeldern eignen sich hingegen sehr gut für die Messung der Mesonzustände. Um String Breaking zu messen, soll daher im Folgenden eine Kombination aus beiden benutzt werden.

Bei kleinen Abständen der Quarks oder in reiner Eichtheorie kann das statische Potential über den Erwartungswert des Wilson-Loops berechnet werden (Abbildung 3.4).

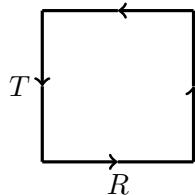


Abbildung 3.4: Operator für kleine räumliche Abstände der Quarks

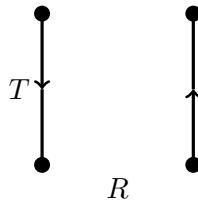


Abbildung 3.5: Operator für große räumliche Abstände der Quarks

Für große Abstände der Quarks, die weit über der kritischen Entfernung für String Breaking liegen, kann das Potential, das etwa dem von zwei schwach wechselwirkenden Mesonen entspricht, aus der Korrelationsfunktion

$$\langle \bar{\Psi}(x + T\hat{t}) U(x + T\hat{t}, x) \Psi(x) \bar{\Psi}(y) U(y, y + T\hat{t}) \Psi(y + T\hat{t}) \rangle \quad (3.22)$$

berechnet werden (Abbildung 3.5).

Für alle und insbesondere die mittleren Abstände nahe der String-Breaking-Distanz soll die Korrelationsfunktion

$$\langle \bar{\Psi}(y) U(y, y + T\hat{t}) U(y + T\hat{t}, x + T\hat{t}) U(x + T\hat{t}, x) \Psi(x) \rangle \quad (3.23)$$

eingeführt werden (Abbildung 3.6).

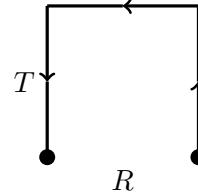


Abbildung 3.6: Operator für mittlere räumliche Abstände der Quarks

Sei

$$|\Phi_{xy}\rangle = \sum_i \bar{\Psi}_i(\vec{x}) U(\mathcal{C}_{xy}) \Psi_i(\vec{y}) |0\rangle \quad (3.24)$$

eine Reihe von Dipolzuständen, in der die Summe über alle Materiefelder in der fundamentalen Darstellung läuft. In der Form würde die Energie des Zustandes Φ_{xy} divergieren, falls die Entfernung $R = |\vec{x} - \vec{y}|$ der Quarks sehr groß wird. Um einen passenden Operator zu finden, soll durch $U^{(n)}(\mathcal{C}_{xy})$ das Resultat der Translation des Paralleltransporters $U(\mathcal{C}_{xy})$ um n Gitterabstände in die Euklid'sche Zeitrichtung benannt werden:

$$U^{(n)}(\mathcal{C}_{xy}) = \hat{T}^n U(\mathcal{C}_{xy}) \hat{T}^{-n}, \quad (3.25)$$

wobei \hat{T} der Zeitentwicklungsoperator (im Kontinuum) bzw. die Transfermatrix (auf dem Gitter) ist. Nun bleibt die Energie des Zustandes

$$|\Phi_{xy}^{(n)}\rangle = \sum_i \bar{\Psi}_i(\vec{x}) U^{(n)}(\mathcal{C}_{xy}) \Psi_i(\vec{y}) |0\rangle \quad (3.26)$$

im Limes $\vec{y} \rightarrow \infty$ endlich, sofern n proportional zur Entfernung $R = |\vec{x} - \vec{y}|$ gewählt wird.

Dieses Verhalten ist eine Konsequenz des Umfanggesetzes für den Wilson-Loop, das immer greift, wenn die Eichfelder an Materiefelder koppeln, die die fundamentale Ladung tragen. Eingeschränkt durch obige Bedingungen wird der Limes für große Zeiten im Umfanggesetz so gewählt, dass das Resultat endlich ist.

Im Folgenden liege die Relativkoordinate $\vec{x} - \vec{y}$ entlang einer Achse und sei $n = \frac{R}{2} = \frac{1}{2} |\vec{x} - \vec{y}|$ (Abbildung 3.7).

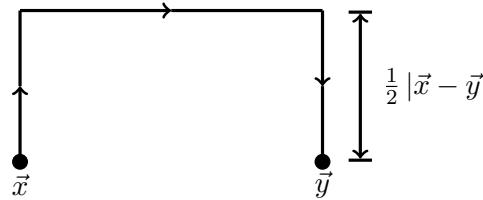


Abbildung 3.7: Veranschaulichung des rechteckigen Pfades \mathcal{C}_{xy}

In Experimenten tritt Confinement dadurch in Erscheinung, dass sich ausreichend weit voneinander entfernte Quarks in gewöhnliche Hadronen aufspalten. In diesem Fall geht die Übergangswahrscheinlichkeit des modifizierten Dipolzustands $\Phi_{xy}^{(n)}$ in hadronische Zustände (und ins Vakuum) gegen 1. Da alle hadronischen Zustände lokale Anregungen des Vakuums sind, wird erwartet, dass die normierte Übergangswahrscheinlichkeit für große Abstände konstant und endlich ist,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\left| \langle 0 | \Phi_{xy}^{(n)} \rangle \right|^2}{\left| \Phi_{xy}^{(n)} \right|^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\left| \sum_i \langle 0 | \bar{\Psi}_i(\vec{x}) U^{(n)}(\mathcal{C}_{xy}) \Psi_i(\vec{y}) | 0 \rangle \right|^2}{\left| \Phi_{xy}^{(n)} \right|^2} = \text{const.} \neq 0. \quad (3.27)$$

Falls dieser Grenzwert dagegen verschwindet, weist das darauf hin, dass die Dipolzustände orthogonal zu allen Hadronzuständen sind und daher ein einzelnes Quark beschreiben.

Um den Ausdruck in (3.27) berechnen zu können, müssen alle Matrixelemente als Euklid'sche Erwartungswerte von eichinvarianten Strings und Loops formuliert werden. Dazu sollen die Endpunkte des Pfades \mathcal{C}_{xy} in der ($t = 0$)-Hyperebene liegen.

Nun kann der Zähler ausgedrückt werden als

$$\left| \sum_i \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \right|^2 \quad (3.28)$$

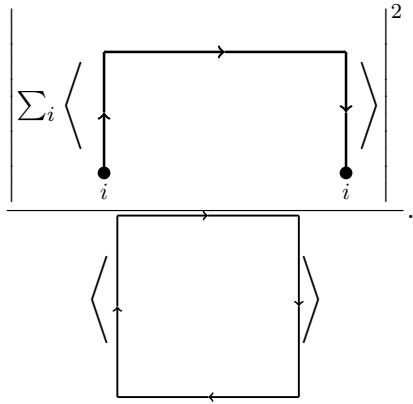
sowie der Nenner als

$$\sum_{i,i'} \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \left. \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \right\rangle, \quad (3.29)$$

θ bezeichnet dabei die Spiegelung an der ($t = 0$)-Hyperebene.

Im Kontinuum muss der Nenner des Bruches regularisiert werden, da das Produkt von Quarkfeldern an identischen Punkten divergiert. Ein einfacher Weg, dies zu erreichen, ist, den Nenner durch den Erwartungswert des Wilson-Loops $\mathcal{C}_{xy} \cdot \theta \cdot \mathcal{C}_{xy}$ zu ersetzen. Zusammengefasst ergibt sich das Fredenhagen-Marcu-Confinement-Kriterium (FM-Operator):

$$\rho_{FM} = \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \frac{\left| \sum_i \langle 0 | \bar{\Psi}_i(\vec{x}) U^{(n)}(\mathcal{C}_{xy}) \Psi_i(\vec{y}) | 0 \rangle \right|^2}{\langle \mathcal{C}_{xy} \cdot \theta \cdot \mathcal{C}_{xy} \rangle}, \quad (3.30)$$

$$\rho_{FM} = \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \frac{\left| \sum_i \left\langle \begin{array}{c} \nearrow \\ \downarrow \\ i \end{array} \right| \right|^2}{\left\langle \begin{array}{c} \nearrow \\ \downarrow \end{array} \right\rangle}. \quad (3.31)$$


Der Parameter ρ_{FM} testet den Ursprung des Wilson-Loop-Abfalls mit seinem Umfang, falls dynamische Materiefelder zugelassen werden. Wird das Verhalten durch die Abschirmeffekte der Materiefelder dominiert, fallen sowohl Zähler als auch Nenner exponentiell mit der gleichen Rate ab. Daher folgt $\rho_{FM} \neq 0$, ein Indiz für Confinement. Falls das Abfallen mit dem Umfang unabhängig von der Ladungsabschirmung ist, wird der Nenner langsamer abfallen als der Zähler, so dass ρ_{FM} verschwindet. Genauer betrachtet ist dieser Parameter ein Kriterium, das auf Farbabschirmung testet.

4 Das SU(2)-Higgs-Modell

Der Higgs-Mechanismus ist eine Theorie des Standardmodells, die auf spontaner Symmetriebrechung basiert und die gemessenen Massen der Bosonen der schwachen Wechselwirkung erklären kann. Dazu wird ein Hintergrundfeld¹⁸, das sog. Higgs-Feld, eingeführt, das mit sich selbst und den Eichfeldern wechselwirkt (vgl. Kapitel 2).

Im vorliegenden Kapitel wird das SU(2)-Higgs-Modell in Gitter- und Kontinuumsformulierung vorgestellt sowie seine bisher bekannte Phasenstruktur beschrieben. Dazu werden die entsprechenden Inhalte aus [31] und [38] zusammengefasst.

4.1 Kontinuums- und Gitterformulierung des Higgs-Modells

Das Higgs-Feld des Standardmodells ist ein $SU(2) \times U(1)$ -Doublet, das vier reelle Komponenten der $SU(2)$ -Symmetrie und eine Phase der $U(1)$ -Symmetrie enthält. Durch die Symmetriebrechung der $SU(2)$ durch den nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes mischen drei seiner vier Freiheitsgrade mit den W - und Z -Bosonen, während der übrige Freiheitsgrad zum Higgs-Boson wird. Die $U(1)$ -Symmetrie bleibt dabei erhalten und erklärt die Rotationssymmetrie des Potentials der Selbstwechselwirkung (vgl. Kapitel 2.5).

Das Higgs-Modell beschreibt die Selbstwechselwirkung des Higgs-Feldes sowie seine Wechselwirkung mit $SU(2)$ - und $U(1)$ -Eichfeldern. Das Verhältnis der jeweiligen Koppungskonstanten ($-\frac{g'}{2}$ für $U(1)$ und g für $SU(2)$) kann durch den Weinberg-Winkel θ_W angegeben werden:

$$\tan \theta_W = \frac{g'}{g}. \quad (4.1)$$

Da dieser relativ klein ist, kann die Kopplung des Higgs-Feldes an die $U(1)$ -Eichfelder in erster Näherung vernachlässigt werden. Außerdem sollen im Folgenden keine Fermionen berücksichtigt werden, da diese lediglich über ein Yukawa-Potential, das oft sehr schwach ist, an das Higgs-Feld koppeln.

Damit ist das $SU(2)$ -Higgs-Modell, das in der vorliegenden Arbeit benutzt werden soll, ein einfach zu handhabendes Grundkonzept, um die Wechselwirkung von $SU(2)$ -Eichfeldern und dem Higgs-Feld zu untersuchen. Es enthält aus den genannten Gründen den Spezialfall eines entarteten Boson-Triplets und keine masselosen Photonen. Die Phasenstruktur des vereinfachten Modells enthält trotzdem eine symmetrische Phase (Confinement-Phase) und eine gebrochene Phase (Higgs-Phase), wobei die Confinement-Phase Eigenschaften aufweist, die ähnlich derer der QCD sind. Insbesondere wird *String Breaking* erwartet, da die Goldstone-Bosonen die Farbladung der Eichbosonen abschirmen können.

¹⁸Ein Hintergrundfeld zeichnet sich dadurch aus, dass der Erwartungswert selbst im Grundzustand nicht verschwindet.

Die vier reellen Freiheitsgrade des $SU(2)$ -Doublets werden entsprechend

$$\phi(x) = \phi_x = \sigma(x) + i\tau_r\pi_r(x) \quad (4.2)$$

parametrisiert¹⁹, wobei σ das Higgs-Feld, $\vec{\pi}$ die Goldstone-Bosonfelder und $\vec{\tau}$ die Pauli-Matrizen beschreibt.

Die Gitterwirkung des Modells besteht aus dem reinen Eichterm $S_g[U]$ und dem geeichten skalaren Term $S_\phi[U, \phi]$:

$$S[U, \phi] = S_g[U] + S_\phi[U, \phi]. \quad (4.3)$$

Dabei entspricht S_g der Wilson-Wirkung (vgl. Kapitel 2.6)

$$S_g[U] = \beta \sum_{\square} \left(1 - \frac{1}{2} \text{Sp } U_{\square} \right) \quad (4.4)$$

mit der Gitterkopplung β , der Plakette

$$U_{\square} = U_{x,\nu}^\dagger U_{x+\nu,\mu}^\dagger U_{x+\mu,\nu} U_{x,\mu} \quad (4.5)$$

und dem $SU(2)$ -Eichfeld

$$U_{x\mu} = \exp \left(i \frac{g}{2} \tau_a A_{x\mu}^a \right). \quad (4.6)$$

S_ϕ dagegen ist gegeben durch

$$S_\phi[U, \phi] = \sum_x \left\{ \frac{1}{2} \text{Sp} (\phi_x^\dagger \phi_x) + \lambda \left[\frac{1}{2} \text{Sp} (\phi_x^\dagger \phi_x) - 1 \right]^2 - \kappa \sum_{\mu=0}^3 \text{Sp} (\phi_{x+\mu}^\dagger U_{x\mu} \phi_x) \right\} \quad (4.7)$$

mit der skalaren quartischen Kopplung λ und dem Hopping-Parameter κ . Das adjungierte Feld ergibt sich aus

$$\phi_x^\dagger = \tau_2 \phi_x^T \tau_2. \quad (4.8)$$

In vielen Zusammenhängen ist es praktisch, das Higgs-Feld in eine Länge ρ_x und einen Winkelanteil α_x zu zerlegen:

$$\phi_x = \rho_x \alpha_x \quad (4.9)$$

mit

$$\rho_x^2 = \frac{1}{2} \text{Sp} (\phi_x^\dagger \phi_x) \geq 0; \rho_x \in \mathbb{R} \quad (4.10)$$

und

$$\alpha_x = \frac{1}{\rho_x} \phi_x \in \text{SU}(2). \quad (4.11)$$

Die drei Parameter β , λ und κ bestimmen mit ihren Werten die Physik des Modells. Naturgemäß können aus ihnen physikalische Größen wie die Eichkopplung

$$g^2 = \frac{4}{\beta} \quad (4.12)$$

¹⁹Es gilt die Einstein'sche Summenkonvention.

und die Higgs-Masse

$$m_0^2 = \frac{1-2\lambda}{\kappa} - 8 \quad (4.13)$$

errechnet werden.

Der Vollständigkeit halber soll nun das Higgs-Modell im Kontinuum betrachtet werden. Die (Euklid'sche) Wirkung ergibt sich entsprechend zu

$$S_K [A_\mu^a, \Phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) + m_K^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \lambda_K (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right\} \quad (4.14)$$

mit

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} (\sigma(x) + i \vec{\pi}(x) \vec{\tau}), \quad (4.15)$$

$$D_\mu \Phi(x) = \left(\partial_\mu - i \frac{g}{2} \vec{\tau} \vec{A}_\mu \right) \Phi(x), \quad (4.16)$$

und

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig [A_\mu, A_\nu]. \quad (4.17)$$

Die Bezeichnungen entsprechen denen des Gitters; \vec{A}_μ bezeichnet das Bosonfeld.

Üblicherweise wird das Higgs-Feld um seinen Vakuumerwartungswert v verschoben:

$$\sigma = v + \sigma'. \quad (4.18)$$

Der Zusammenhang zwischen Kontinuums- und Gittergrößen ist

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{\kappa}}{a} \phi_x, \quad (4.19)$$

$$\lambda_K = \frac{\lambda}{\kappa^2}, \quad (4.20)$$

und

$$m_K^2 = \frac{m_0^2}{a^2} \quad (4.21)$$

mit der Gitterkonstanten a .

Die volle Lagrange-Dichte des Higgs-Modells wird durch eine Eichfixierung

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = \frac{1}{2\xi} (G^a)^2 \quad (4.22)$$

und dem Hinzufügen von Geist-Termen

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = -c^{*a} \frac{\delta G^a}{\delta \Lambda^b} c^b \quad (4.23)$$

mit

$$G^a = \partial_\mu A_\mu^a + \xi \frac{g}{2} v \pi^a \quad (4.24)$$

und dem Transformationsparameter $\Lambda^a(x)$ erreicht.

4.2 Die Phasenstruktur des $SU(2)$ -Higgs-Modells

Die Phasenstruktur des $SU(2)$ -Higgs-Modells am Temperaturnullpunkt wird durch einen Phasenübergang zwischen der Confinement-Phase (symmetrische Phase, S) bei kleinem Hopping-Parameter und der Higgs-Phase (H) bei großem Hopping-Parameter bestimmt²⁰ (Abbildung 4.1).

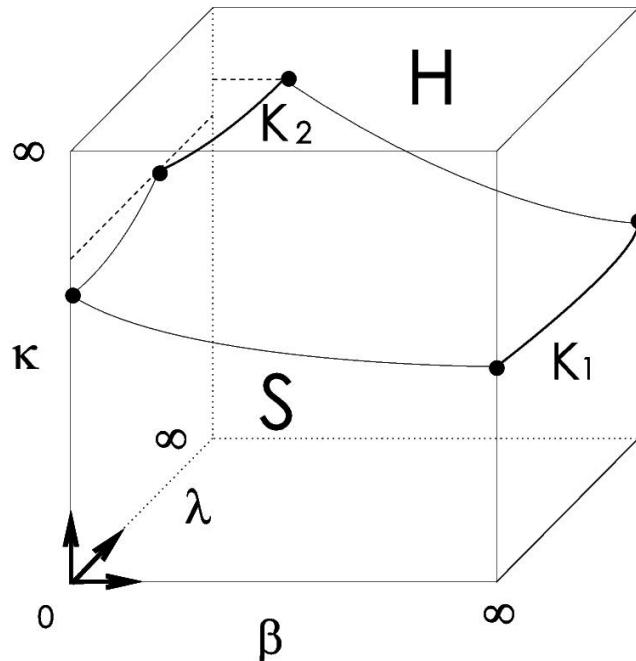


Abbildung 4.1: Die Phasenstruktur des $SU(2)$ -Higgs-Modells bei $T = 0$ (entnommen aus [31])

Die Ergebnisse früherer numerischer Simulationen legen nahe, dass die Phasengrenze aus Phasenübergängen erster Ordnung gebildet wird, deren Stärke mit zunehmenden Werten von λ und β abnimmt. Entlang zweier Linien finden Phasenübergänge zweiter Ordnung statt: entlang K_1 bei unendlich großer Gitterkopplung β und entlang K_2 bei größerer quartischer Kopplung λ und kleiner Gitterkopplung β .

Im Grenzfall der unendlich großen Gitterkopplung ($\beta \rightarrow \infty$) geht das Higgs-Modell in das skalare, symmetrische ϕ^4 -Modell über, da die Eichkopplung verschwindet und die Eichfelder von den skalaren Feldern entkoppeln. Daher ist der Phasenübergang K_1 , der die symmetrische Phase von der Phase mit spontan gebrochener Symmetrie trennt, bekannt.

Die symmetrische Phase des ϕ^4 -Modells wird mit zunehmender Eichkopplung durch die Confinement-Phase des Higgs-Modells fortgesetzt; hier besteht das Spektrum aus vier entarteten Zuständen gleicher Masse. Diese Phase weist Eigenschaften auf, die ähnlich denen der QCD sind: die skalaren Teilchen sind hier durch die $SU(2)$ -Eichfelder

²⁰ „Hinter“ der Linie K_2 existiert eine analytische Verbindung zwischen den beiden Phasen des Higgs-Modells, so dass Confinement- und Higgs-Phase streng genommen nur zwei verschiedene Regionen in einer einzigen Phase sind. Da viele physikalische Größen jedoch quantitative Unterschiede in den beiden Regionen aufweisen und es daher möglich ist, Ordnungsparameter zu konstruieren, wird gemeinhin von zwei verschiedenen Phasen gesprochen.

zu $SU(2)$ -Singlettzuständen gebunden, genau wie die Quarks durch die Gluonen zu Farbsinglett-Zuständen gebunden sind. Im Grenzfall $\kappa = 0$ liegt reine $SU(2)$ -Eichtheorie vor, da das Skalarfeld durch seine unendliche Masse entkoppelt. Mit zunehmendem Hopping-Parameter wird das Skalarfeld leichter und die Glueball-Zustände der reinen Eichtheorie mischen zunehmend mit den gebundenen Zuständen der skalaren Teilchen.

Die spontan gebrochene Phase des ϕ^4 -Modells wird bei abnehmender Gitterkoppelung durch die Higgs-Phase fortgesetzt. Die drei masselosen Goldstone-Bosonen der ϕ^4 -Theorie werden hier massiv, da sie mit den Eichbosonen mischen.

5 Numerische Simulationen

Basierend auf dem *Gesetz der großen Zahlen* eignen sich sog. Monte-Carlo-Verfahren zur numerischen Lösung analytisch nicht zugänglicher mathematischer Probleme in „Computer-Experimenten“. Insbesondere eignet sich eine Abwandlung der Monte-Carlo-Integration zur Auswertung von Pfadintegralen bzw. genauer zur Berechnung von Erwartungswerten. Da je ein Link des Gitters ausgewählt und in Kontakt mit einer Art Wärmebad aus Nachbarlinks gebracht wird, so dass die Generierung eines neuen Links der Thermalisierung mit seiner unmittelbaren Umgebung entspricht, erhält dieses numerische Vorgehen den Namen Wärmebad-Algorithmus.

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen derartiger Simulationen knapp umrissen und auf die technischen Details des verwendeten Algorithmus eingegangen werden. Des Weiteren werden der Datenauswertung mithilfe des Jackknife-Binnings und der Definition einiger zentraler (Gitter-) Größen eigene Abschnitte gewidmet.

5.1 Monte-Carlo-Simulationen

Mithilfe von sog. Monte-Carlo-Simulationen [39] können Erwartungswerte von Observablen, die im Pfadintegralformalismus (vgl. Kapitel 2.4) gegeben sind durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}U \mathcal{O}[U, \phi] e^{-S[U, \phi]} \quad (5.1)$$

mit

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}U e^{-S[U, \phi]}, \quad (5.2)$$

numerisch berechnet werden. Definitionsgemäß müssten dafür sämtliche Kombinationen von Feldkonfigurationen $[U, \phi]$ erzeugt werden, jedoch bietet die Tatsache, dass der im Pfadintegral auftauchende Faktor $e^{-S[U, \phi]}$ dem Boltzmann-Faktor der Statistischen Physik gleicht, eine hilfreiche Alternative: Beim sog. *Importance Sampling* werden Feldkonfigurationen mit der Wahrscheinlichkeit $e^{-S[U, \phi]}$ erzeugt, so dass diejenigen, die weit vom Wirkungsminimum entfernt sind und keinen signifikanten Beitrag zum Erwartungswert liefern, von vorne herein unterdrückt sind. Aus einer Anzahl N derartig gewichteter Konfigurationen kann der Mittelwert

$$\bar{\mathcal{O}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}[U_i, \phi_i] \quad (5.3)$$

berechnet werden, für den

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\mathcal{O}} \quad (5.4)$$

gilt.

Eine neue Feldkonfiguration $[U', \phi']$ wird dabei durch einen Auffrischungsalgorithmus aus einer vorhergehenden $[U, \phi]$ mit einer Wahrscheinlichkeit $P_{[U, \phi] \rightarrow [U', \phi']}$ erzeugt, für die gilt

$$\int \mathcal{D}U' \mathcal{D}\phi' P_{[U, \phi] \rightarrow [U', \phi']} = 1. \quad (5.5)$$

Der Algorithmus erzeugt sog. Markov-Ketten, sofern zusätzlich

$$P_{[U, \phi] \rightarrow [U', \phi']} > 0 \quad (5.6)$$

gilt. In diesem Fall existiert genau ein Fixpunkt W

$$W[U', \phi'] = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\phi P_{[U, \phi] \rightarrow [U', \phi']} W[U, \phi], \quad (5.7)$$

der unabhängig von der Anfangskonfiguration erreicht wird. Nach der sog. Thermalisierungsphase gilt im Gleichgewicht

$$W[U, \phi] \sim e^{-S[U, \phi]}. \quad (5.8)$$

In dem Programm, das innerhalb der vorliegenden Arbeit erstellt wurde, werden die Auffrischungsschritte für Eichfelder U und Higgs-Felder ϕ separat und nacheinander ausgeführt. Eine genaue Darstellung der Vorgehensweise befindet sich im folgenden Abschnitt.

5.2 Der Wärmebad-Algorithmus

5.2.1 Implementierung des Eichsektors

In diesem Abschnitt soll im Detail erläutert werden, wie aus einer alten Eichfeldkonfiguration eine geeignete neue errechnet werden kann. Dabei wird die Auffrischung eines einzelnen Links U beschrieben, der entsprechend einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$dp(U) \sim e^{-S(U)} dU \quad (5.9)$$

erneuert werden soll. Zum Update der ganzen Eichfeld-Konfiguration muss jeder Link des implementierten Gitters einzeln aufgefrischt werden. Der Wärmebad-Algorithmus für SU(2)-Eichtheorie wurde maßgeblich von M. Creutz entwickelt. Die folgende Schilderung bezieht sich daher hauptsächlich auf [40].

Seien $[U]$ und $[U']$ zwei Eichfeldkonfigurationen, die sich lediglich in einem Link unterscheiden. Diese verschiedenen Links seien $U_{x\mu}$ bzw. $U'_{x\mu}$. Die Wilson-Wirkung für SU(2) kann nun in zwei Teile aufgespalten werden: in einen, der von dem speziellen Link U abhängt, und einen, der den Rest enthält;

$$\begin{aligned} S[U] &= \beta \sum_{\square} \left[1 - \frac{1}{2} \text{Sp } U_{\square} \right] \\ &= \beta \left(-\frac{1}{2} \text{Sp } (UV) + \sum_{U \notin \square} \left[1 - \frac{1}{2} \text{Sp } U_{\square} \right] \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Hier bezeichnet V den sog. *Staple*, d. h. die drei Links, die mit dem Link U zusammen eine Plakette bilden. Im Folgenden soll V bereits die Gitterkopplung β enthalten, um den Algorithmus später auf den Higgs-Sektor übertragen zu können.

Im Update-Schritt für den speziellen Link $U_{x\mu}$ braucht nun nur der Teil der Wirkung berücksichtigt zu werden, der tatsächlich von $U_{x\mu}$ abhängt. Der Restterm der Wirkung ist während des Prozesses konstant und daher unerheblich (er fällt unter die Proportionalitätskonstanten in (5.9)). Im Folgenden wird der relevante Anteil der Wirkung

$$S(U_{x\mu}) = -\frac{1}{2} \text{Sp} (U_{x\mu} V_{x\mu}) \quad (5.11)$$

mit der Summe aus den sechs angrenzenden Staples

$$\begin{aligned} V_{x\mu} &= \beta \sum_{\square=1}^6 U_{\square} \\ &= \beta \sum_{\nu \neq \mu} \left(U_{x+\hat{\mu},\nu} U_{x+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x,\nu}^\dagger + U_{x+\hat{\mu}-\hat{\nu},\nu}^\dagger U_{x-\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x-\hat{\nu},\nu} \right) \end{aligned} \quad (5.12)$$

verwendet.

Analog zu den Higgs-Feldern (4.2) werden die SU(2)-Elemente der Eichfelder entsprechend

$$U = a_0 \cdot \mathbb{1} + i \vec{a} \vec{\tau} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & ia_1 + a_2 \\ ia_1 - a_2 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

parametrisiert und auch als reelles Tupel $(a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^4$ gespeichert, wobei

$$a^2 = a_0^2 + \vec{a}^2 = 1 \quad (5.14)$$

gilt²¹. Das invariante Haar-Maß der SU(2) ist daher

$$dU = \frac{1}{2\pi^2} \delta(a^2 - 1) d^4 a. \quad (5.15)$$

Eine nützliche Eigenschaft der SU(2)-Elemente ist die Tatsache, dass eine Summe aus Gruppenelementen immer proportional zu einem weiteren Element der Gruppe ist, d. h.

$$V = \beta \sum_{\square=1}^6 U_{\square} = k \cdot \bar{U} \quad (5.16)$$

mit $\bar{U} \in SU(2)$ und

$$k = \sqrt{\det V}. \quad (5.17)$$

Aus der Verteilung (5.9) folgt nun mit $V = k \bar{U}$ und $\frac{1}{2} \text{Sp} U = a_0$ entsprechend

$$dp(U \bar{U}^{-1}) \sim e^{\frac{1}{2} k \text{Sp} U} dU = e^{k a_0} dU. \quad (5.18)$$

Zusammen mit dem Haar-Maß (5.15) folgt

$$\begin{aligned} dp(U \bar{U}^{-1}) &= \frac{1}{2\pi^2} \delta(a^2 - 1) e^{k a_0} d^4 a \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{1 - a_0^2} e^{k a_0} d\Omega da_0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

²¹Eine Auflistung der mathematischen Eigenschaften von SU(2)-Elementen befindet sich im Anhang.

so dass sich das Problem auf die Generierung von Zufallspunkten auf der vierdimensionalen Einheitskugel mit exponentieller Gewichtung in a_0 -Richtung reduziert. Konkret wird dazu a_0 im Intervall $[-1, 1]$ exponentiell verteilt erzeugt und mithilfe eines Akzeptanz-Verweigerungs-Schrittes korrigiert. Dabei wird davon ausgegangen, dass Standard-Zufallszahlgeneratoren²² gleichverteilte (Pseudo-) Zufallszahlen im Intervall $]0, 1[$ erzeugen. Um eine so erhaltene Zufallszahl x auf ein Intervall $[a, b]$ abzubilden, wird

$$\tilde{x} = (b - a)x + a \quad (5.20)$$

berechnet.

Zunächst wird eine gleichverteilte Zufallszahl y mit $e^{-2k} < y < 1$ erzeugt. Dann liefert

$$a_0 = 1 + \frac{1}{k} \ln y \quad (5.21)$$

ein a_0 mit exponentieller Verteilung. Dann wird eine zweite gleichverteilte Zufallszahl $z \in]0, 1[$ erzeugt und das vorher errechnete a_0 mit einer Wahrscheinlichkeit $1 - \sqrt{1 - a_0^2}$ verworfen, d. h. nur wenn

$$z^2 \leq 1 - a_0^2 \quad (5.22)$$

gilt, wird mit dem aktuellen a_0 fortgefahren, anderenfalls wird ein neues a_0 erzeugt, bis ein geeignetes gefunden wurde. Das resultierende a_0 hat nun eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(a_0) \sim \sqrt{1 - a_0^2} e^{k a_0}$.

Die Komponenten aus \vec{a} werden in Kugelkoordinaten auf der Einheitskugel erzeugt:

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\pi \cdot \text{RAN} \\ \vartheta &= \arccos(1 - 2 \cdot \text{RAN}) \\ R &= \sqrt{1 - a_0^2}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

wobei RAN jeweils für eine zuvor erzeugte gleichverteilte Zufallszahl steht.

Die neu erzeugten Parameter des Links U_{neu} sind nun

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \\ a_1 &= R \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ a_2 &= R \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ a_3 &= R \cdot \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (5.24)$$

wobei der Link U' , der den Link U nach dem Update-Schritt ersetzt, erst aus

$$U' = U_{\text{neu}} \cdot \bar{U}^{-1} \quad (5.25)$$

errechnet werden muss.

5.2.2 Implementierung des Higgs-Sektors

Das Vorgehen dieses Abschnitts orientiert sich hauptsächlich an den Arbeiten [42, 43].

Zur Implementierung des Higgs-Sektors bedarf es lediglich einer kleinen Korrektur im Auffrischungsalgorithmus für das Eichfeld. Der Ausdruck (5.12) muss um den Teil der

²²In der vorliegenden Arbeit wurde ein Zufallszahlengenerator aus [41] benutzt.

skalaren Wirkung (4.7) erweitert werden, der von den Eichfeldern abhängt, d. h. Formel (5.12) wird ersetzt durch

$$V_{x\mu} = 2\kappa \phi_{x+\hat{\mu}} \phi_x^\dagger + \beta \sum_{\square=1}^6 U_{\square}. \quad (5.26)$$

Für den Wärmebad-Algorithmus des Higgs-Feldes soll die Wirkung (4.7) in einen quadratischen Teil und einen Term proportional zu λ zerlegt werden. Mit (4.10) folgt

$$S_\phi = \lambda (\rho_x^2 - 1)^2 - \sum_{m=0}^3 \left(\phi_{xm} - \tilde{V}_{xm} \right)^2, \quad (5.27)$$

wobei der Index m die Position im Parametervektor bezeichnet und die Wechselwirkung mit den nächsten Nachbarn gegeben ist durch

$$\tilde{V}_x = \kappa \sum_{\mu} \left[U_{x\mu} \phi_{x+\hat{\mu}} + U_{x-\hat{\mu},\mu}^\dagger \phi_{x-\mu} \right]. \quad (5.28)$$

Das neue Feld ϕ_x wird nun entsprechend des quadratischen Teils der Wirkung generiert und dann mithilfe eines Akzeptanz-Verweigerungs-Schritts gemäß dem λ -abhängigen Term korrigiert. Dazu kann der Teil der Wirkung, der proportional zu ρ^2 ist, zwischen dem quadratischen und dem quartischen Term verschoben werden:

$$S_\phi = \xi \left[\sum_{m=0}^3 \left(\phi_{xm} - \frac{\tilde{V}_{xm}}{\xi} \right)^2 \right] + \lambda \left[\rho_x^2 - \left(1 + \frac{\xi-1}{2\lambda} \right) \right]^2. \quad (5.29)$$

Dabei ist ξ ein frei wählbarer Parameter, der zur Optimierung des Update-Prozesses genutzt werden kann.

Zunächst werden über

$$\phi_{xm} = \sqrt{\frac{-\ln \text{RAN}}{\xi}} \cdot \cos(2\pi \cdot \text{RAN}) + \frac{\tilde{V}_{xm}}{\xi} \quad (5.30)$$

vier Higgs-Feldkomponenten $\phi_{x0}, \dots, \phi_{x3}$ mit der jeweiligen Gauß-Verteilung

$$dp(\phi_{xm}) \sim d\phi_{xm} e^{-\xi \left(\phi_{xm} - \frac{\tilde{V}_{xm}}{\xi} \right)^2} \quad (5.31)$$

erzeugt. Diese werden dann mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$P_A = e^{-\lambda \left[\rho_x^2 - \left(1 + \frac{\xi-1}{2\lambda} \right) \right]^2} \quad (5.32)$$

akzeptiert. Je höher die Akzeptanzrate, desto effizienter der Algorithmus, daher soll mithilfe des Parameters ξ die Rate (5.32) maximiert werden, woraus

$$\xi^3 - (1 - 2\lambda) \xi^2 - 4\lambda\xi = 2\lambda \det \tilde{V} \quad (5.33)$$

folgt. Da die numerische Lösung dieser Gleichung in der Praxis zu aufwendig ist, wird [43] zufolge auf die Näherung

$$\xi = h_0 + \sqrt{h_1 + h_2 \det \tilde{V}} \quad (5.34)$$

mit

$$h_0 = \xi_0 - \frac{\xi_0^2 + 4\lambda}{6\xi_0 + 4\lambda - 2}, \quad (5.35)$$

$$h_1 = \left(\frac{\xi_0^2 + 4\lambda}{6\xi_0 + 4\lambda - 2} \right)^2, \quad (5.36)$$

$$h_2 = \frac{4\lambda}{6\xi_0 + 4\lambda - 2} \quad (5.37)$$

und

$$\xi_0 = \frac{1}{2} - \lambda + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^2 + 4\lambda} \quad (5.38)$$

zurückgegriffen, wobei lediglich ξ für jede Linkauffrischung neu berechnet werden muss.

5.2.3 Anfangsbedingungen

Für einen sog. Kaltstart (geordneter Start) wird die erste Feldkonfiguration so gewählt, dass alle Eichfelder $U = 1$ sind²³, was dem Parameter-Tupel $(1, 0, 0, 0)$ entspricht. Die Higgs-Felder werden entsprechend auf $\phi = (\rho_0, 0, 0, 0)$ gesetzt. Alternativ kann ein sog. Warmstart (chaotischer Start) durchgeführt werden, bei dem die Felder für die erste Konfiguration zufällig erzeugt werden. Dazu wird a_0 als Zufallszahl generiert und a_1, \dots, a_3 entsprechend in Kugelkoordinaten erzeugt. Außerdem wird eine anfängliche Higgs-Länge ρ_0 vorgegeben und das Tupel $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ entsprechend $\rho_0^2 = \phi_0^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2$ generiert.

5.3 Datenanalyse mit Jackknife-Binning

Auch bei Größen, die numerisch berechnet werden, sollen Unsicherheiten in der Form

$$\langle A \rangle = \bar{A} \pm \Delta A \quad (5.39)$$

angegeben werden, wobei \bar{A} den sog. Schätzer

$$\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A_n \quad (5.40)$$

bezeichnet, falls es sich um N Einzelmessungen mit den Ergebnissen A_n handelt. Bei der Messung unkorrelierter Werte ergibt sich der Fehler aus der quadratischen Standardabweichung über

$$\Delta A = \sqrt{\frac{1}{N} \sigma^2} \quad (5.41)$$

mit

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (A_n - \bar{A})^2. \quad (5.42)$$

Aufgrund der Generierung neuer Feldkonfigurationen aus den vorhergehenden sind die Einzelmessungen, die im Wärmebad-Programm vorgenommen werden, korreliert.

²³Dies ist der Fall der freien Eichfelder $A_\mu = 0$.

Bezogen auf den Informationsgewinn sieht es daher so aus, als wären nur $N_{\text{eff}} < N$ Messungen genommen worden, so dass sich der Fehler erhöht auf

$$\Delta A = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{eff}}} \sigma^2}. \quad (5.43)$$

Der tatsächliche Wert für N_{eff} kann anhand der genommenen Daten über die integrierte Autokorrelationszeit berechnet werden, jedoch ist diese in der Praxis mit einer hohen Unsicherheit behaftet. Eine einfache Alternative bietet hier die Methode des *Jackknife-Binnings* [39], bei der die Daten in Blöcken (*bins*) vorgemittelt werden, so dass die so erhaltenen Mittelwerte dann als statistisch unabhängig angesehen werden können.

In einer Simulation wird für jede Feldkonfiguration ein Wert A_n errechnet, so dass die ersten Werte aus Konfigurationen bestimmt werden, die noch weit vom Gleichgewicht entfernt sind. Die Daten dieser Thermalisierungsphase werden vor der eigentlichen Auswertung verworfen²⁴. Aus den N verbleibenden relevanten Werten wird nun zunächst der Schätzer \bar{A} berechnet. Dann werden die Daten in N_B Blöcke der Länge b unterteilt und jeweils ein Block-Mittelwert gebildet:

$$\bar{B}_i = \frac{1}{b} \sum_{A_n \in B_i} A_n, \quad i = 1, \dots, N_B. \quad (5.44)$$

Dann wird üblicherweise jeder Block-Mittelwert durch den Mittelwert aller anderen Blöcke ersetzt, da so eine größere Statistik für jeden vorgemittelten Wert erreicht werden kann und die Methode stabiler wird:

$$\bar{B}'_i = \frac{1}{N_B - 1} \sum_{j \neq i} \bar{B}_j. \quad (5.45)$$

Nun wird davon ausgegangen, dass die Werte \bar{B}'_i unkorreliert sind, so dass sich für die Standardabweichung

$$\sigma_{\text{Jackknife}}^2 = (N_B - 1) \sum_{i=1}^{N_B} \left(\bar{B}'_i - \bar{A} \right)^2 \quad (5.46)$$

ergibt. Die verschiedenen Vorfaktoren in (5.42) und (5.46) folgen aus der Tatsache, dass die Mittelwerte \bar{B}'_i der Jackknife-Blöcke $(N_B - 1)$ -mal dichter um den Schätzer verteilt sind als die ursprünglichen Einzelwerte. Nun kann über (5.41) mit $\sigma_{\text{Jackknife}}^2$ und N_B die Unsicherheit ΔA berechnet werden.

Um eine geeignete Blockgröße b zu finden, wird die Fehlerabschätzung ΔA gegen b aufgetragen. In diesem Diagramm sollte sich ein Plateau abzeichnen, aus dem ein Wert b zur Auswertung benutzt wird.

5.4 Programmskizze

Das erstellte Programm, das der vorliegenden Arbeit in digitaler Form auf einer CD beiliegt, enthält die Wärmebad-Algorithmen für Eich- und Higgs-Felder und wertet die gewonnenen Daten mithilfe des Jackknife-Binnigs aus. Die physikalischen Parameter des Modells sind β , κ und λ . Des Weiteren werden folgende Angaben benötigt:

²⁴Ein Verfahren zum Abschätzen der Länge der Thermalisierungsphase wird in Kapitel 5.5 erläutert.

- Anzahl der Gitterpunkte pro Dimension L
- Anzahl der Iterationsschritte N_{Iter}
- Anfangskonfiguration (Kalt- / Warmstart)
- Wert der Higgs-Länge in der Anfangskonfiguration
- Größen, die gemessen werden sollen

und für die Auswertung

- Anzahl der zu verworrenden Thermalisierungsschritte
- Anzahl der Jackknife-Blöcke.

Der Ablauf des Programms sei im Folgenden skizziert:

1. Setzen der Anfangskonfigurationen (geordnet/ chaotisch) für Eich- und Higgs-Felder
2. Beginn der Iteration:
 - a) Messungsroutinen der gewünschten Größen
 - b) Auffrischungsroutine für den Higgs-Sektor
 - c) Auffrischungsroutine für den Eichsektor
3. Auswertung der Daten

Dabei soll betont werden, dass die Reihenfolge der Auffrischungsalgorithmen keinerlei Auswirkung auf die erzielten Resultate hat.

5.5 Definition wichtiger Größen

Es gibt einige zentrale Größen, deren Erwartungswerte sich zum Testen des Programms eignen [44]. Für reine Eichtheorie seien der Plakettenerwartungswert

$$\langle P \rangle = \frac{1}{L^4} \sum_x \frac{1}{6} \sum_{\nu < \mu} \left(1 - \frac{1}{2} \text{Sp } U_{\square} \right) = \left\langle 1 - \frac{1}{2} \text{Sp } U_{\square} \right\rangle \quad (5.47)$$

mit der Abmessung L des Gitters pro Dimension und die quadratischen Wilson-Loops

$$\langle WL(R \times R) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \text{Sp} \prod_{\mathcal{C}_{R \times R}} U \right\rangle \quad (5.48)$$

genannt. Durch die etwas unterschiedliche Definition der beiden Größen gilt

$$1 - \langle P \rangle = \langle WL(1 \times 1) \rangle. \quad (5.49)$$

Der Plakettenerwartungswert kann mit der inneren Energie des Systems identifiziert werden. Bei einem Kaltstart sollte dieser daher zunächst bei 0 liegen, bei einem Warmstart ungefähr bei 1. Im Gleichgewicht jedoch, d. h. nach der Thermalisierungsphase,

sollten die Werte übereinstimmen. Mithilfe der beiden Zeitreihen, die nach einem Warm- bzw. Kaltstart gewonnen wurden, kann durch Auftragen der Werte gegen die Iterations schritte abgeschätzt werden, wie lange das System bis zum Erreichen des Gleichgewichts braucht. Außerdem gibt es analytische Voraussagen [40] für die Plakettenerwartungswerte im Starkkopplungsbereich (kleine β)

$$\langle P \rangle = 1 - \frac{\beta}{4} \quad \beta \rightarrow 0 \quad (5.50)$$

und im Schwachkopplungsbereich (große β)

$$\langle P \rangle = \frac{3}{4\beta} \quad \beta \rightarrow \infty, \quad (5.51)$$

mit denen die numerischen Ergebnisse verglichen werden können. Ebenfalls ein analytisches Ergebnis [40] gibt es für den 2×2 -Wilson-Loop im Schwachkopplungslimes

$$\langle WL(2 \times 2) \rangle = \left(\frac{\beta}{4} \right)^4 \quad \beta \rightarrow \infty. \quad (5.52)$$

Im $SU(2)$ -Higgs-Modell kommen zudem die quadratische Higgs-Länge

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{1}{L^4} \sum_x \rho^2(x) \quad (5.53)$$

und die zwei eichinvarianten Links

$$\langle L_\phi \rangle = \frac{1}{L^4} \sum_x \frac{1}{4} \sum_\mu \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\phi_x^\dagger U_{x\mu} \phi_{x+\hat{\mu}} \right) \quad (5.54)$$

und

$$\langle L_\alpha \rangle = \frac{1}{L^4} \sum_x \frac{1}{4} \sum_\mu \frac{1}{2} \text{Sp} \left(\alpha_x^\dagger U_{x\mu} \alpha_{x+\hat{\mu}} \right) \quad (5.55)$$

hinz. L_ϕ kann dabei als innere Energie der Wechselwirkung zwischen Eich- und Higgs- Feldern interpretiert werden, wobei κ die Rolle der inversen Temperatur übernimmt.

Im Grenzfall $\beta = \lambda = 0$ können die Erwartungswerte der Higgs-Länge und der Eich- Higgs-Kopplung analytisch berechnet [45] werden:

$$\langle \rho^2 \rangle = \frac{14}{3 + 4\sqrt{1 - 28\kappa^2}} \quad (5.56)$$

$$\langle L_\phi \rangle = \frac{\langle \rho^2 \rangle - 2}{8\kappa}. \quad (5.57)$$

Der Fredenhagen-Marcu-Operator wurde definiert als

$$\rho_{FM}^\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \rho_{FM} \left(R, T = \frac{R}{2} \right) \quad (5.58)$$

mit

$$\rho_{FM} (R, T) = \frac{G^2(R, T)}{WL(R \times R)} \quad (5.59)$$

und

$$G(R, T) = \left\langle \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\phi_x^\dagger U \left(\begin{array}{c} \nearrow R \\ x \quad y \\ \searrow T \end{array} \right) \phi_y \right] \right\rangle. \quad (5.60)$$

Aufgrund der Bedingung $T = \frac{R}{2}$ können zunächst nur die „geraden“ Operatoren

$$\rho_{FM}(2, 1), \quad \rho_{FM}(4, 2), \quad \rho_{FM}(6, 3) \quad \text{usw.}$$

berechnet werden. Ein Vorschlag, um auch die „ungeraden“ Operatoren messen zu können, wurde aus [46] übernommen. Anstelle von (5.59) soll

$$\rho_{FM}(R, T_1, T_2) = \frac{G(R, T_1) \cdot G(R, T_2)}{WL(R \times R)} \quad T_1 + T_2 = R, \quad |T_1 - T_2| \leq 1 \quad (5.61)$$

berechnet werden, um alle Kombinationen

$$\rho_{FM}(1, 1, 0), \quad \rho_{FM}(2, 1, 1), \quad \rho_{FM}(3, 2, 1), \quad \rho_{FM}(4, 2, 2) \quad \text{usw.}$$

erreichen zu können.

6 Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Simulationsergebnisse der vorliegenden Arbeit präsentiert und, falls vorhanden, mit Werten aus der Literatur verglichen. Der Lesbarkeit halber befinden sich alle Diagramme, zusammen mit einer tabellarischen Übersicht, am Ende des Kapitels im Abschnitt 6.5. In Abschnitt A.3 befindet sich zudem eine Übersicht über die hier vorgestellten Simulationsläufe.

6.1 Reine SU(2)-Eichtheorie

Zu Beginn der Arbeit wurde das Wärmebad für reine Eichtheorie (s. Kapitel 5.2.1) implementiert. Für einen ersten Test des Programms wurde bei $\beta = 2.3$ der Plakettenerwartungswert nach Warm- und Kaltstarts auf verschiedenen großen Gittern gemessen (Abbildung 6.1, Seite 50). Das so erhaltene Ergebnis

$$\langle P \rangle = 0.3947 \pm 0.0004 \quad (6.1)$$

deckt sich mit [40] und [44].

Anschließend wurde nach 30 Thermalisierungsschritten der Plakettenerwartungswert für verschiedene Werte der Gitterkopplung β auf einem 16^4 -Gitter bestimmt (Abbildung 6.2, Seite 51). Die gemessenen Werte stimmen mit den analytischen Voraussagen (5.50) und (5.51) überein und entsprechen überdies den Ergebnissen aus [40].

Zuletzt wurden die kleineren quadratischen Wilson-Loops in Abhängigkeit von der Gitterkopplung auf einem 10^4 -Gitter gemessen (Abbildung 6.3, Seite 51). Auch diese Ergebnisse stimmen mit den analytischen Voraussagen (5.50), (5.51) und (5.52) überein, sofern berücksichtigt wird, dass sich die ersten beiden auf die etwas abweichend definierte Plakette $\langle P \rangle = 1 - \langle WL(1 \times 1) \rangle$ beziehen. Zudem bestätigen die Werte die Ergebnisse aus [40].

Versuchsweise wurde ein Teil des Auffrischungsalgorithmus durch einen Vorschlag von A. D. Kennedy und B. J. Pendleton [47] ersetzt. Hierdurch konnte eine Laufzeitverbesserung bei sehr großen β erzielt werden. Da jedoch keine der folgenden Simulationen in diesem Bereich stattfindet, wurde weiterhin der ursprüngliche Algorithmus von M. Creutz verwendet.

6.2 SU(2)-Higgs-Modell

Nach der Implementierung des Higgs-Sektors (Kapitel 5.2.2) wurden zunächst wieder Thermalisierungsbilder für den Plakettenerwartungswert (Abbildung 6.4, Seite 52) und den Erwartungswert der Higgs-Länge (Abbildung 6.5, Seite 52) für die Parameter $\beta = 2.25$, $\kappa = 0.27$ und $\lambda = 0.5$ erstellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Thermalisierungszeit gegenüber der reinen Eichtheorie von etwa 30 Iterationen auf 600

erhöht hat. Dies liegt zu einem großen Teil daran, dass sich das System mit den gewählten Parametern nahe einer Phasengrenze befindet. Etwas abseits dieses kritischen Bereichs thermalisiert das System schneller.

Ebenfalls wurden die beiden Links L_ϕ und L_α gemessen (jeweils 1000 Iterationen, 600 davon zur Thermalisierung):

$$\langle P \rangle = 0.5953 \pm 0.0001 \quad (6.2)$$

$$\langle \rho^2 \rangle = 1.5280 \pm 0.0003 \quad (6.3)$$

$$\langle L_\phi \rangle = 0.0419 \pm 0.0004 \quad (6.4)$$

$$\langle L_\alpha \rangle = 0.2489 \pm 0.0002 \quad (6.5)$$

Die Ergebnisse decken sich mit [44]. Zudem konnte im Spezialfall $\beta = \lambda = 0$ auf einem 16^4 -Gitter eine Übereinstimmung mit den analytischen Voraussagen für die Higgs-Länge (5.56) und die Eich-Higgs-Kopplung (5.57) erreicht werden (Abbildungen 6.6 und 6.7, Seite 53).

In [43] wurde das Verfahren der sog. Überrelaxation zur Verbesserung der numerischen Effizienz vorgeschlagen. Dieser Algorithmus, der zusätzliche Auffrischungsschritte für sowohl die Eich- als auch die Higgs-Felder vorsieht und ggf. mehrfach pro Iterationsschritt durchlaufen wird, verkürzte zwar die Thermalisierungszeit des Systems auf etwa ein Drittel, erhöhte jedoch in gleichem Maße die benötigte Rechenzeit²⁵. Da die Rechenzeiten auf der lokal vorhandenen Hardware in einem Rahmen blieben, der einen flüssigen Arbeitsablauf zulässt, wurde im Weiteren darauf verzichtet, die Algorithmen verbessern zu wollen.

6.3 FM-Operator

Der Fredenhagen-Marcu-Operator wurde entsprechend (5.61) ins Programm aufgenommen. Da der relevante Wert der Grenzwert für große Loops ist (vgl. (5.58)), wurde zunächst für vier Parametersätze ($\beta = 2.4$, $\lambda = 0.5$ und $\kappa_1 = 0.255$, $\kappa_2 = 0.261$, $\kappa_3 = 0.270$ und $\kappa_4 = 0.280$) der FM-Operator in Abhängigkeit des Umfangs $P = 4R$ auf einem 16^4 -Gitter gemessen (Abbildung 6.8, Seite 54). Hier können die Werte für ρ_{FM}^∞ an den Plateaus abgelesen werden.

Da die Beschaffung von Werten auf diese Weise recht aufwendig ist, werden im Folgenden lediglich die Werte für $P = 20$ oder $P = 24$ (je nach Parameterbereich) benutzt, die etwa auf der Höhe des Plateaus liegen. Dieses Verfahren ist aufgrund der Stabilität der Plateaus gerechtfertigt. Auch in der Notation wird nun nicht mehr zwischen ρ_{FM}^∞ und ρ_{FM} (5, 3, 2) bzw. ρ_{FM} (6, 3, 3) unterschieden. Mithilfe dieser Vereinfachung ist Diagramm 6.9 auf Seite 54 (ebenso wie alle anderen Diagramme dieser Art) entstanden, in dem der FM-Operator als Funktion des Hopping-Parameters κ aufgetragen ist.

Der Bereich des Phasenübergangs kann hier durch Ablesen als

$$\kappa_c = 0.259 \pm 0.001 \quad (6.6)$$

²⁵Der Vollständigkeit halber sei darauf hingewiesen, dass die genannte Methode in bestimmten Parameterbereichen zur Senkung der Autokorrelationszeiten führen kann und daher bei einigen Fragestellungen ein wichtiges Werkzeug darstellt.

angegeben werden, was sich mit den Angaben in [46] deckt. In gleicher Weise wurden anschließend die kritischen Hopping-Parameter für $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 2$ und $\lambda = 10$ bestimmt (Abbildungen 6.10 – 6.13, Seiten 55 – 56). Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst und in Abbildung 6.14 auf Seite 57 graphisch dargestellt.

quartische Kopplung λ	kritischer Hopping-Parameter κ_c
0.01	0.1494 ± 0.0001
0.1	0.190 ± 0.001
0.5	0.259 ± 0.001
2.0	0.329 ± 0.001
10.0	0.368 ± 0.002

Tabelle 6.1: Die kritischen Hopping-Parameter für verschiedene quartische Kopplungen bei $\beta = 2.4$

Dabei nimmt die Stärke, mit der ρ_{FM} nach dem Phasenübergang ansteigt, mit großem λ deutlich ab, so dass es für große λ recht schwierig ist, den Ort der Phasengrenze genau auszumachen. Ob im Verlauf der Werte des FM-Operators bei $\lambda = 10.0$ überhaupt noch ein deutlicher Knick vorhanden ist, kann aufgrund der sehr kleinen Absolutwerte nicht beantwortet werden.

Im letzten Arbeitsschritt wurde die quartische Kopplung auf $\lambda = 0.5$ fixiert und nun für verschiedene Werte der Gitterkopplung β der kritische Hopping-Parameter bestimmt. Die Messungen für größere β (Abbildungen 6.15 – 6.18, Seiten 57 – 59) erwiesen sich dabei als numerisch unproblematisch, während für $\beta = 2.1$ (Abbildung 6.19, Seite 59) auf 24^4 -Gittern gerechnet werden musste, um eine geringere Streuung der Einzelwerte zu bekommen. Bei $\beta = 1.9$ (Abbildung 6.20, Seite 60) wiederum wurde zu 32^4 -Gittern übergegangen²⁶. Die Ergebnisse dieser Simulationen sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst und in Abbildung 6.21 auf Seite 60 graphisch dargestellt.

Gitterkopplung β	kritischer Hopping-Parameter κ_c
1.9	0.3115 ± 0.0005
2.1	0.2868 ± 0.0002
2.4	0.259 ± 0.001
3.0	0.244 ± 0.001
3.5	0.240 ± 0.001
5.0	0.232 ± 0.001
10.0	0.227 ± 0.001

Tabelle 6.2: Die kritischen Hopping-Parameter für verschiedene Gitterkopplungen bei $\lambda = 0.5$

Die Werte der kritischen Hopping-Parameter stimmen mit denen aus [48] überein. Gegenüber der Arbeit dieser Arbeitsgruppe, die den Phasenübergang im Higgs-Modell mithilfe der inneren Energie vermessen hat, konnte mit dem FM-Operator eine Verbesserung erzielt werden. Der Plakettenerwartungswert zeigt für $\beta = 3.5$ keinen deutlichen

²⁶Die Tatsache, dass scheinbar für kleinere Gitterkopplungen eine größere Streuung der Werte auftritt, erklärt sich wahrscheinlich in diesem Fall durch die Nähe der Parameterkombination zu einem kritischen Punkt. Testweise wurden Simulationen bei sehr viel kleineren Werten von β durchgeführt, bei denen wieder eine geringere Streuung auch auf kleinen Gittern vorlag.

Übergang, während der FM-Operator sein Verhalten am Phasenübergang merklich ändert (Abbildung 6.16, Seite 58). So konnte sogar noch deutlich der Ort des Phasenübergangs bei $\beta = 5.0$ und $\beta = 10$ bestimmt werden (Abbildungen 6.17 und 6.18, Seiten 58 und 59), wobei der Knick im Verlauf der Werte bei $\beta = 10$ undeutlicher wird, so dass hier, ähnlich wie im Bereich großer λ , offen gehalten werden muss, ob sich der FM-Operator im Grenzfall $\beta \rightarrow \infty$ noch als Ordnungsparameter eignen würde.

6.4 Fazit

Das implementierte SU(2)-Higgs-Modell konnte zunächst erfolgreich auf seine Richtigkeit geprüft werden, in dem die Erwartungswerte der Plakette, der quadratischen Higgs-Länge und einiger anderer Größen mit Ergebnissen von anderen Arbeitsgruppen oder, sofern vorhanden, mit analytischen Voraussagen verglichen wurden. Des Weiteren wurden in verschiedenen Parameterbereichen Thermalisierungsbilder angefertigt, um die Länge der Thermalisierungsphase sinnvoll abschätzen zu können. Die Auswertung der statistischen Daten erfolgte über das Jackknife-Binning und lieferte in den meisten Fällen eine zufriedenstellende numerische Genauigkeit auf 16^4 -Gittern. Für kleine Gitterkopplungen jedoch, bei denen die Werte einer starken Streuung unterlagen, wurde auf größere Gitter zurückgegriffen.

Der FM-Operator stellt sich im SU(2)-Higgs-Modell als äußerst guter Ordnungsparameter heraus. Er steigt in der Higgs-Phase mit zunehmendem Hopping-Parameter etwa linear an, während er in der Confinement-Phase so gut wie verschwindet. In den meisten Parameterbereichen hat sein Verlauf einen deutlichen Knick (typisches Verhalten z. B. in Abbildung 6.11 auf Seite 55), der für große quartische Kopplungen jedoch kaum noch auszumachen ist. Für kleinere Gitterkopplungen ist das Verhalten am Phasenübergang dagegen eher sprunghaft (zu sehen z. B. in Abbildung 6.19 auf Seite 59).

Dieses Verhalten erscheint zunächst paradox, da von Fredenhagen und Marcu argumentiert wurde, ihr Operator näherte sich im Confinement einer endlichen Konstanten. Ein Hinweis dazu wird in [46] gegeben: Die Abstände der Quarks (bzw. Higgs-Felder), die auf numerisch handhabbaren Gittergrößen realisierbar sind, sind nicht ausreichend groß, um String Breaking zu zeigen. Daher erscheinen die Ladungen frei (sie werden *noch* nicht abgeschirmt), so dass der FM-Operator Null wird. Es wird erwartet, dass sein Wert für genügend großen Umfang $P = 4R$ auf eine nicht verschwindende Konstante ansteigt²⁷. Aufgrund zu kleiner Gitter (und folglich zu kleiner Loops) und dem Fehlen einer Coulomb-Phase im verwendeten Modell konnte der Ordnungsparameter letztlich weder in Phasen mit String Breaking noch in Phasen ohne String Breaking getestet werden. Obwohl somit, basierend auf den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit, nicht beantwortet werden kann, ob der Fredenhagen-Marcu-Operator zwischen Confinement und Deconfinement unterscheiden kann, ist er eine geeignete Größe, um den Phasenübergang im SU(2)-Higgs-Modell zu lokalisieren.

Der Übergang zwischen Confinement- und Higgs-Phase konnte über drei Größenordnungen der quartischen Kopplung gemessen werden. Die Größe des FM-Erwartungswerts

²⁷In Modellen, die dem SU(2)-Higgs-Modell sehr ähnlich sind (Z_2 -Modell oder das Abel'sche Higgs-Modell) gibt es neben der Higgs-Phase (großes β , großes κ) und der Confinement-Phase (kleines β , kleines κ) noch eine sog. Coulomb-Phase (großes β , kleines κ), in der freie geladene Zustände vorliegen [49]. Diese Phase entspricht der QCD-Deconfinement-Phase und in ihr sollte der FM-Operator tatsächlich konsistent mit Null sein.

nimmt dabei mit steigendem λ deutlich ab, so dass sich das Verhalten des Ordnungsparameters in diesem Bereich stetig und nicht mehr sprunghaft ändert. Ob sich der FM-Operator im Limes $\lambda \rightarrow \infty$, in dem die Higgs-Länge auf 1 fixiert ist, überhaupt noch als Ordnungsparameter eignet, müsste gesondert untersucht werden.

Die Gitterkopplung wurde nur über einen begrenzten Bereich variiert, da einige Werte erhöhten numerischen Aufwand mit sich brachten. Den Ergebnissen von [48] zufolge, wird im Bereich $1.95 < \beta < 2.25$ bei $\lambda = 0.5$ ein kritischer Punkt des Phasendiagramms erwartet, hinter dem (d. h. bei kleineren Werten von β) Higgs- und Confinement-Phase analytisch verbunden sind und im strengen Sinne kein Phasenübergang mehr stattfindet. Daher wurde erwartet, dass die Ergebnisse für $\beta = 1.9$ ein signifikant anderes Verhalten des FM-Operators (einen langsamem stetigen Anstieg der Werte mit zunehmendem κ , jedoch weder Knick noch Sprung) zeigen als die Ergebnisse der anderen Parameterbereiche. Durch das eher sprunghafte Verhalten kann die Existenz eines kritischen Punktes im oben genannten Intervall nicht ohne Weiteres bestätigt werden.

Das Verhalten der Phasengrenze für große Gitterkopplungen lässt sich gut mit der Annahme, dass der kritische Hopping-Parameter im Limes $\beta \rightarrow \infty$ (skalare O(4)-Theorie) bei $\kappa_c = 0.218$ [48] liegt, überein bringen. Im Gegensatz zum Plakettenerwartungswert scheint der FM-Operator auch noch für größere Gitterkopplungen einen Phasenübergang deutlich anzeigen zu können.

6.5 Diagramme

In diesem Abschnitt sind alle Diagramme, auf die in den Abschnitten 6.1 - 6.3 verwiesen wurde, gesammelt abgedruckt. Eine Übersicht ist in Tabelle 6.3 gegeben.

Seite	dargestellte Größe	als Fkt. von		Gittergröße
50	$\langle P \rangle$	Iterationen	reine Eichth. $\beta = 2.4$	4, 8, 16
51	$\langle P \rangle$	β	reine Eichth. analyt. Erg.	16
51	$\langle WL(R \times R) \rangle, R \in [1, 5]$	β	analyt. Erg.	10
52	$\langle P \rangle$	Iterationen	$\beta = 2.25, \kappa = 0.27, \lambda = 0.5$	16
52	$\langle \rho^2 \rangle$	Iterationen	$\beta = 2.25, \kappa = 0.27, \lambda = 0.5$	16
53	$\langle \rho^2 \rangle$	κ	$\beta = \lambda = 0$, analyt. Erg.	16
53	$\langle L_\phi \rangle$	κ	$\beta = \lambda = 0$, analyt. Erg.	16
54	$\langle \rho_{FM} \rangle$	$P = 4R$	$\beta = 2.4, \lambda = 0.5$, versch. κ	16
54	$\langle \rho_{FM} \rangle$	κ	$\beta = 2.4, \lambda = 0.5$	16
55	$\langle \rho_{FM} \rangle$	κ	$\beta = 2.4, \lambda = 0.01$	16
55	$\langle \rho_{FM} \rangle$	κ	$\beta = 2.4, \lambda = 0.1$	16
56	$\langle \rho_{FM} \rangle$	κ	$\beta = 2.4, \lambda = 2.0$	16
56	$\langle \rho_{FM} \rangle$	κ	$\beta = 2.4, \lambda = 10.0$	16
57	κ_c	λ	$\beta = 2.4$	
57	$\langle \rho_{FM} \rangle$	κ	$\beta = 3.0, \lambda = 0.5$	16
58	$\langle \rho_{FM} \rangle$	κ	$\beta = 3.5, \lambda = 0.5$	16
58	$\langle \rho_{FM} \rangle$	κ	$\beta = 5.0, \lambda = 0.5$	16
59	$\langle \rho_{FM} \rangle$	κ	$\beta = 10.0, \lambda = 0.5$	16
59	$\langle \rho_{FM} \rangle$	κ	$\beta = 2.1, \lambda = 0.5$	24
60	$\langle \rho_{FM} \rangle$	κ	$\beta = 1.9, \lambda = 0.5$	32
60	κ_c	β	$\lambda = 0.5$	

Tabelle 6.3: Übersicht über die Diagramme, die in der vorliegenden Arbeit präsentiert werden

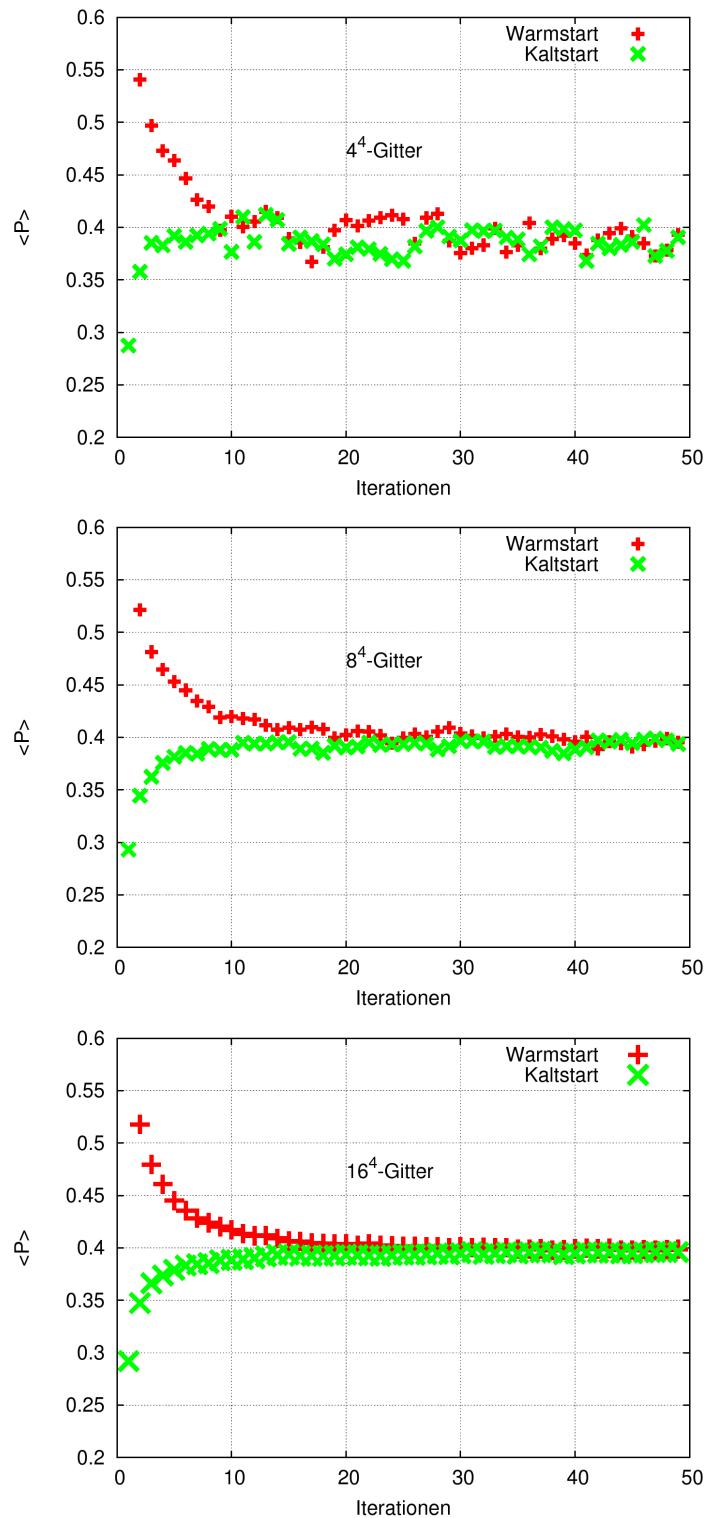


Abbildung 6.1: Der Plakettenerwartungswert $\langle P \rangle$ in reiner Eichtheorie als Funktion der Iterationsschritte bei $\beta = 2.3$ auf verschiedenen großen Gittern

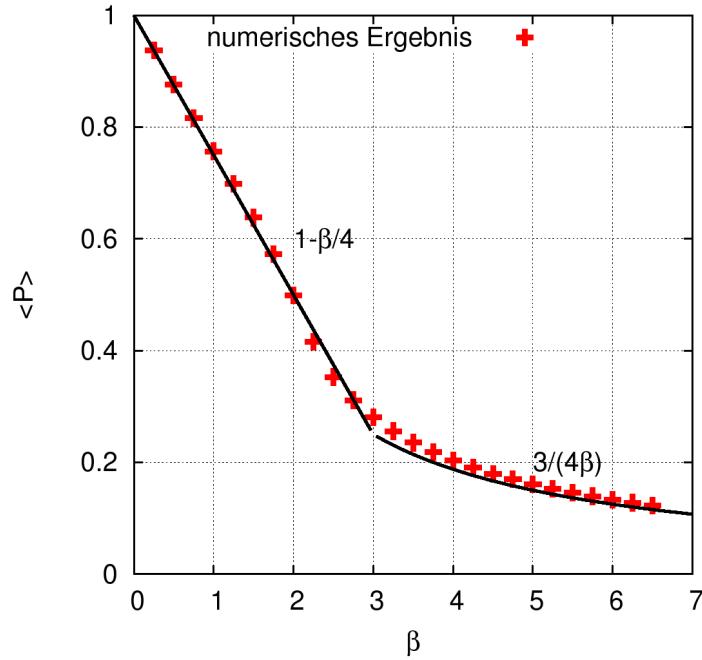


Abbildung 6.2: Der Plakettenerwartungswert $\langle P \rangle$ in reiner Eichtheorie als Funktion der Gitterkopplung β auf einem 16^4 -Gitter im Vergleich mit den analytischen Ergebnissen (5.50) und (5.51)

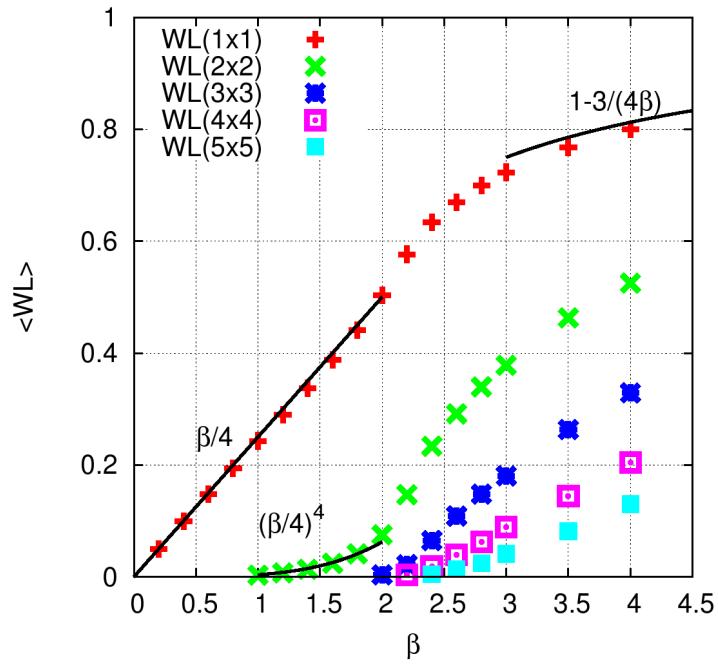


Abbildung 6.3: Die Erwartungswerte der kleinen Wilson-Loops $\langle WL \rangle$ in reiner Eichtheorie als Funktion der Gitterkopplung β auf einem 10^4 -Gitter im Vergleich mit den analytischen Ergebnissen (5.50), (5.51) und (5.52) (unter der Voraussetzung $\langle WL(1 \times 1) \rangle = 1 - \langle P \rangle$)

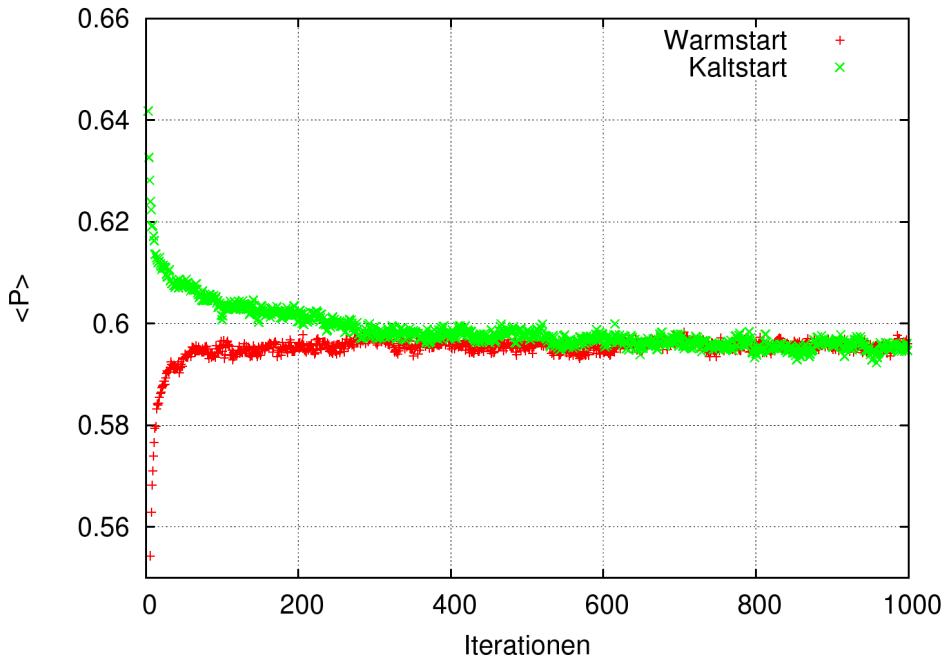


Abbildung 6.4: Der Plakettenerwartungswert $\langle P \rangle$ im SU(2)-Higgs-Modell als Funktion der Iterationsschritte auf einem 16^4 -Gitter bei $\beta = 2.25$, $\kappa = 0.27$ und $\lambda = 0.5$

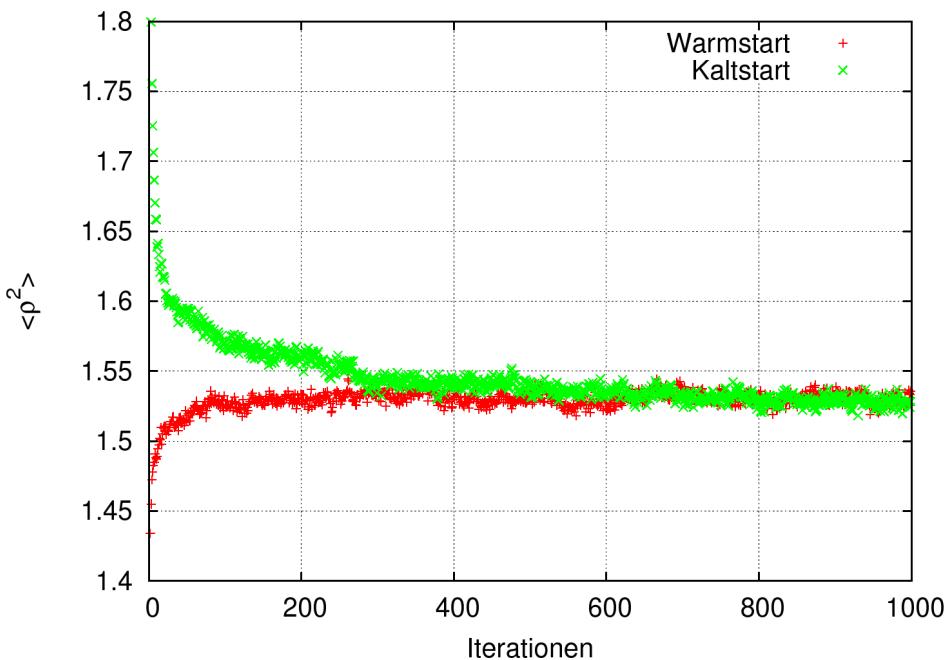


Abbildung 6.5: Der Erwartungswert der quadratischen Higgs-Länge $\langle \rho^2 \rangle$ als Funktion der Iterationsschritte auf einem 16^4 -Gitter bei $\beta = 2.25$, $\kappa = 0.27$ und $\lambda = 0.5$

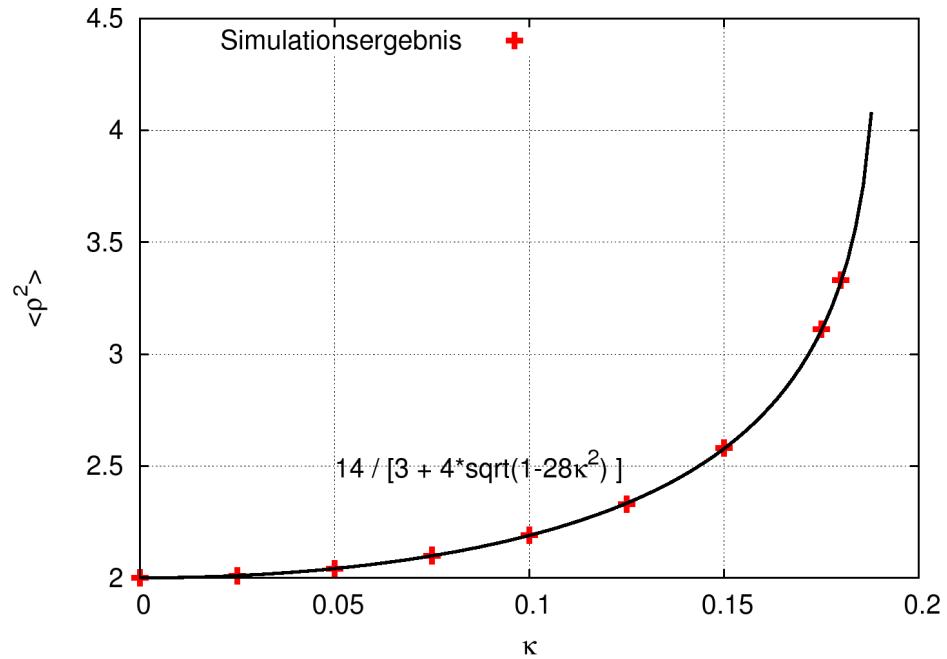


Abbildung 6.6: Der Erwartungswert der quadratischen Higgs-Länge $\langle \rho^2 \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ auf einem 16^4 -Gitter im Vergleich mit der analytischen Voraussage (5.56) bei $\beta = \lambda = 0$

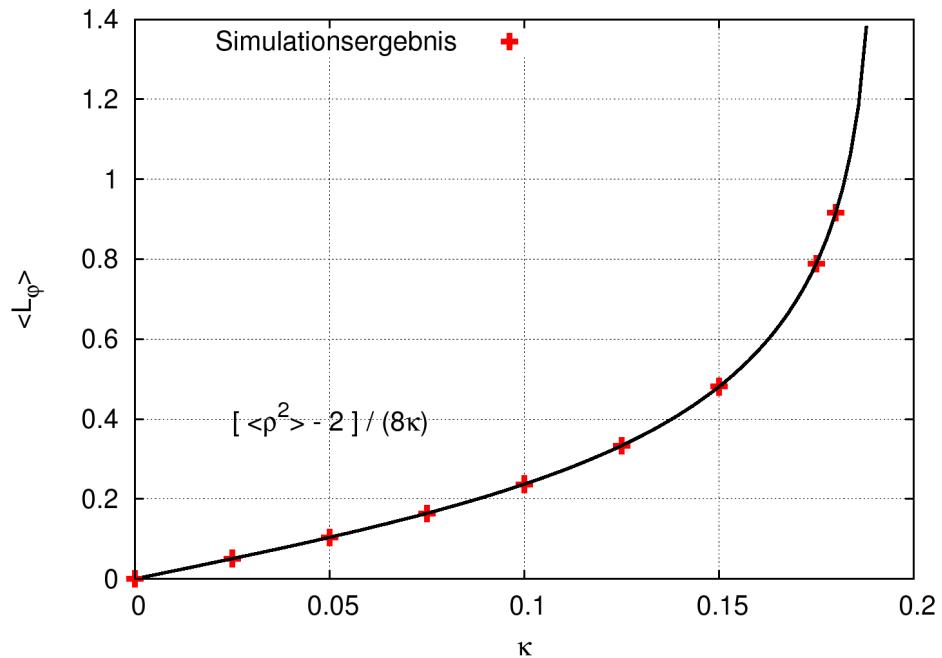


Abbildung 6.7: Der Erwartungswert der Eich-Higgs-Kopplung $\langle L_\phi \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ auf einem 16^4 -Gitter im Vergleich mit der analytischen Voraussage (5.57) bei $\beta = \lambda = 0$

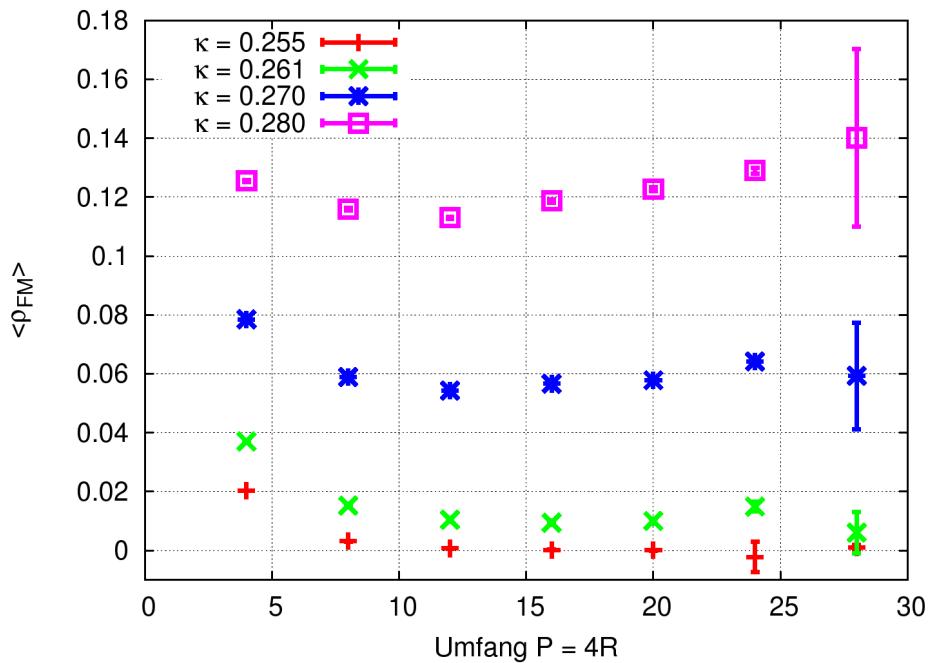


Abbildung 6.8: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Umfangs $P = 4R$ bei $\beta = 2.4$ und $\lambda = 0.5$ für verschiedene Hopping-Parameter κ auf einem 16^4 -Gitter

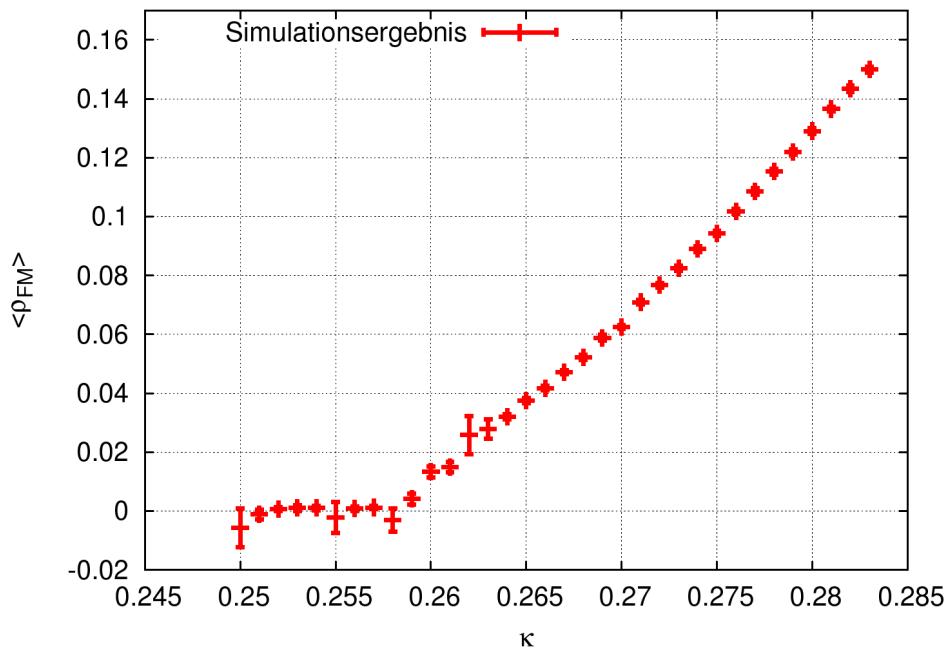


Abbildung 6.9: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ für $\lambda = 0.5$ und $\beta = 2.4$ auf einem 16^4 -Gitter

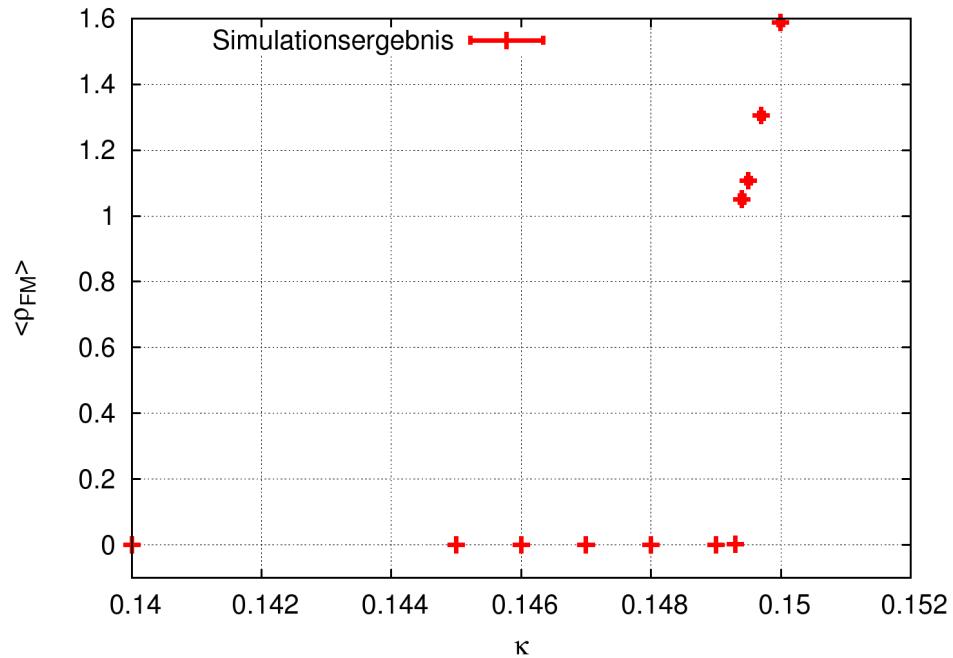


Abbildung 6.10: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ für $\lambda = 0.01$ und $\beta = 2.4$ auf einem 16^4 -Gitter

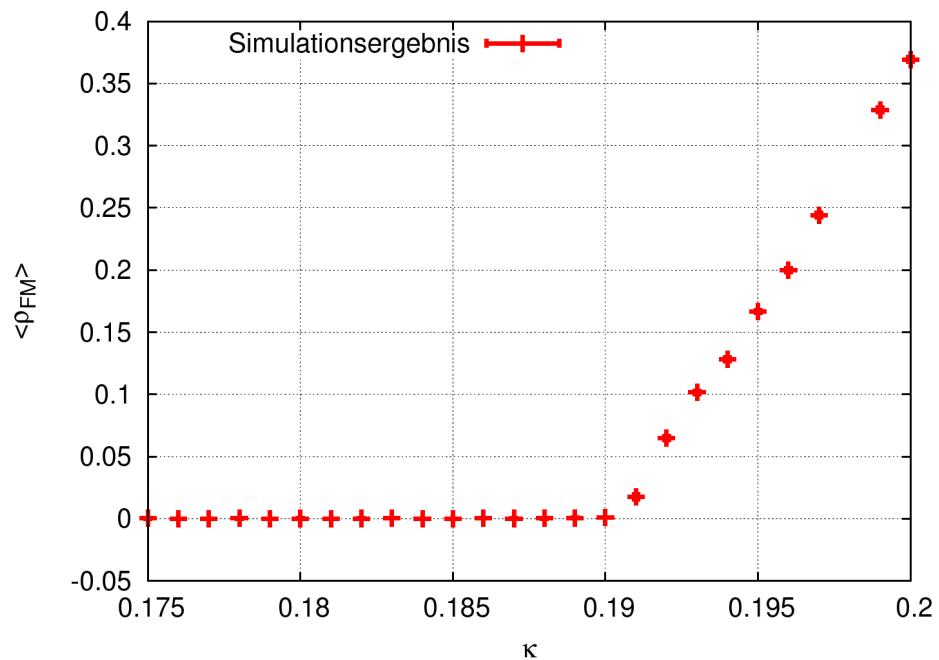


Abbildung 6.11: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ für $\lambda = 0.1$ und $\beta = 2.4$ auf einem 16^4 -Gitter

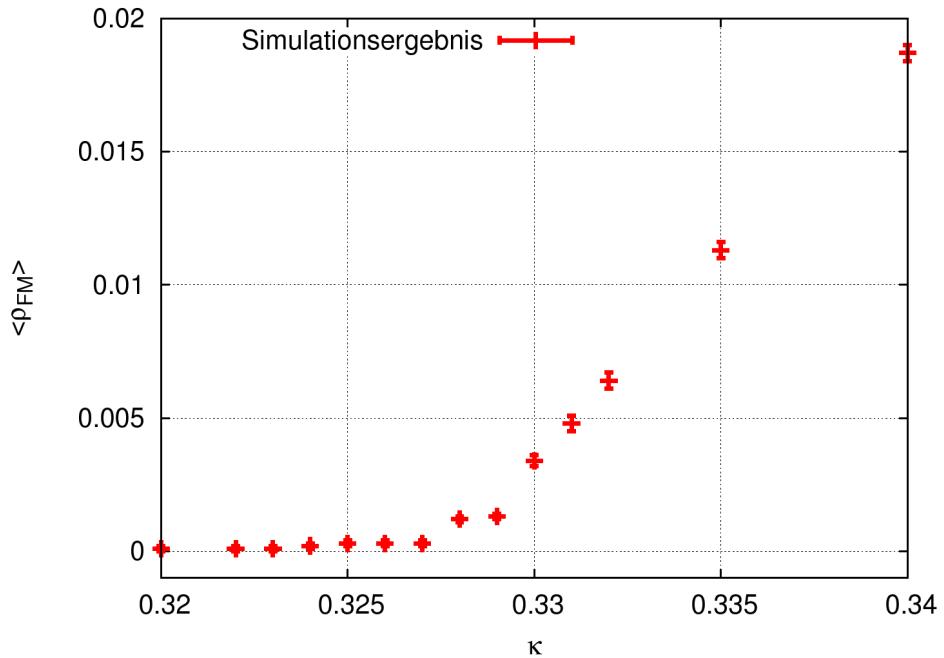


Abbildung 6.12: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ für $\lambda = 2.0$ und $\beta = 2.4$ auf einem 16^4 -Gitter

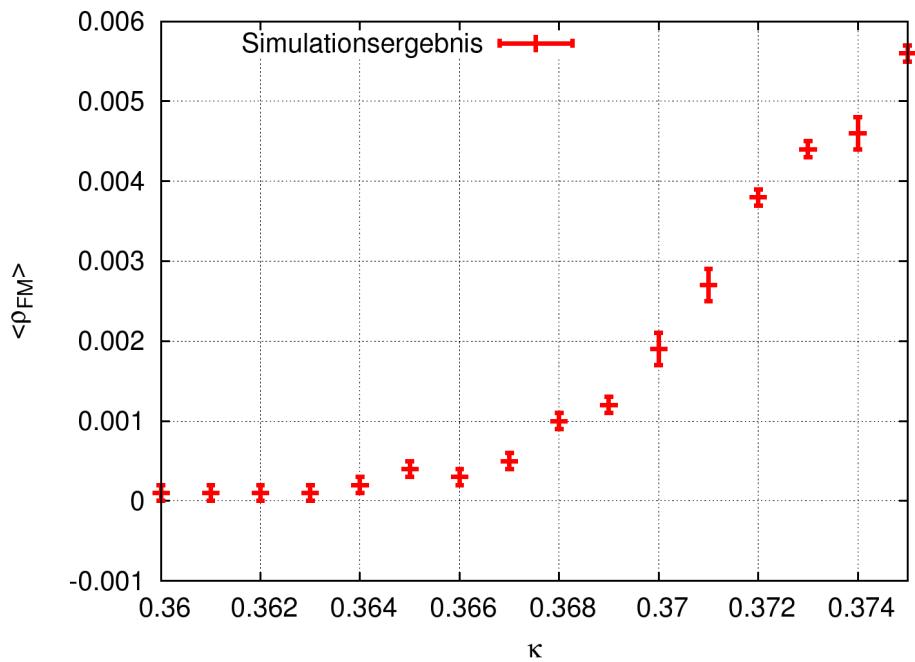


Abbildung 6.13: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ für $\lambda = 10.0$ und $\beta = 2.4$ auf einem 16^4 -Gitter

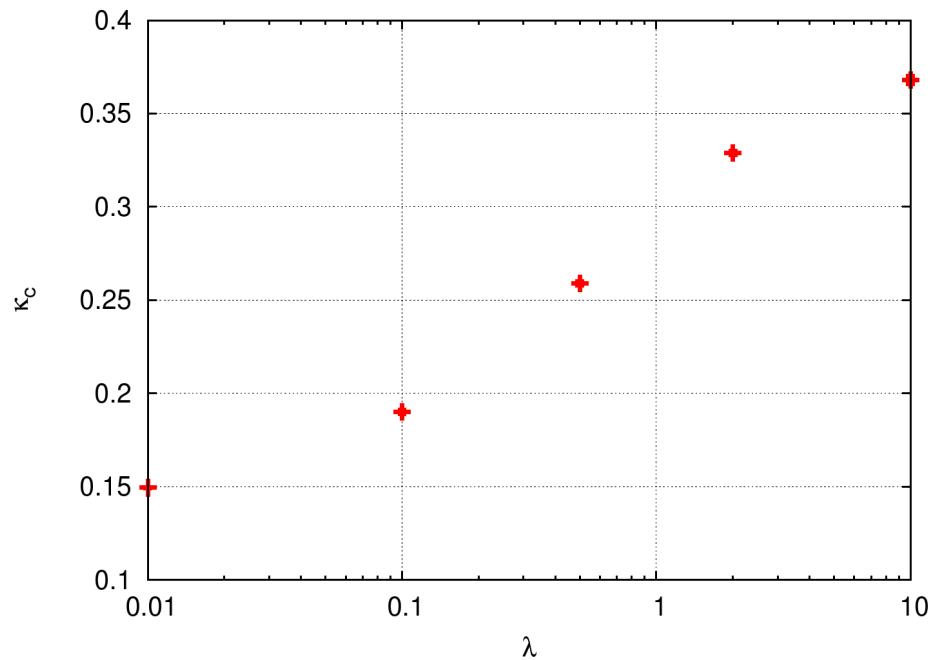


Abbildung 6.14: Der kritische Hopping-Parameter κ_c als Funktion der quartischen Kopplung λ bei $\beta = 2.4$

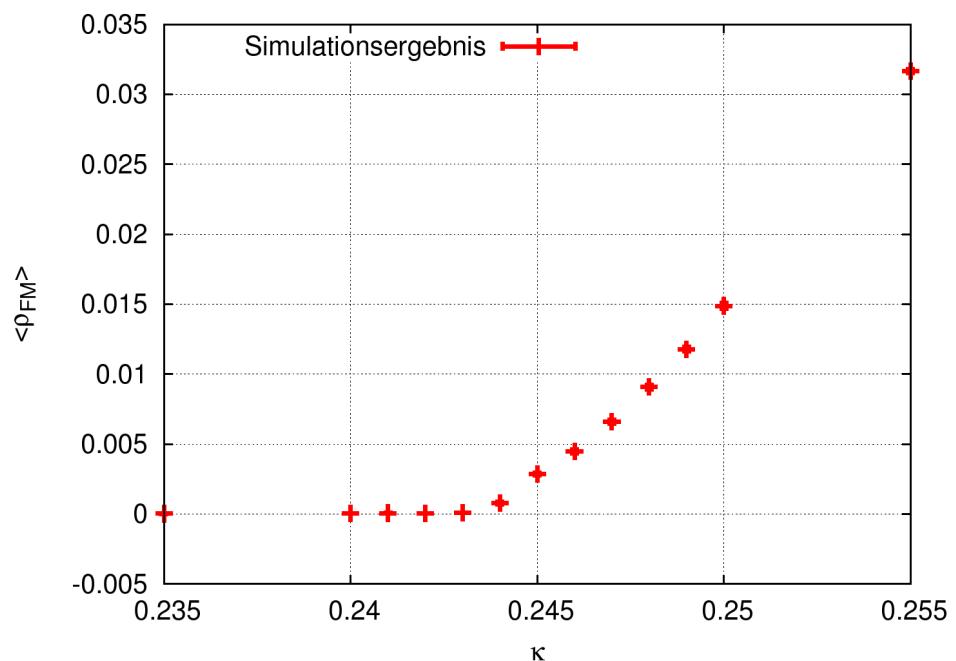


Abbildung 6.15: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ bei $\beta = 3.0$ und $\lambda = 0.5$ auf einem 16^4 -Gitter

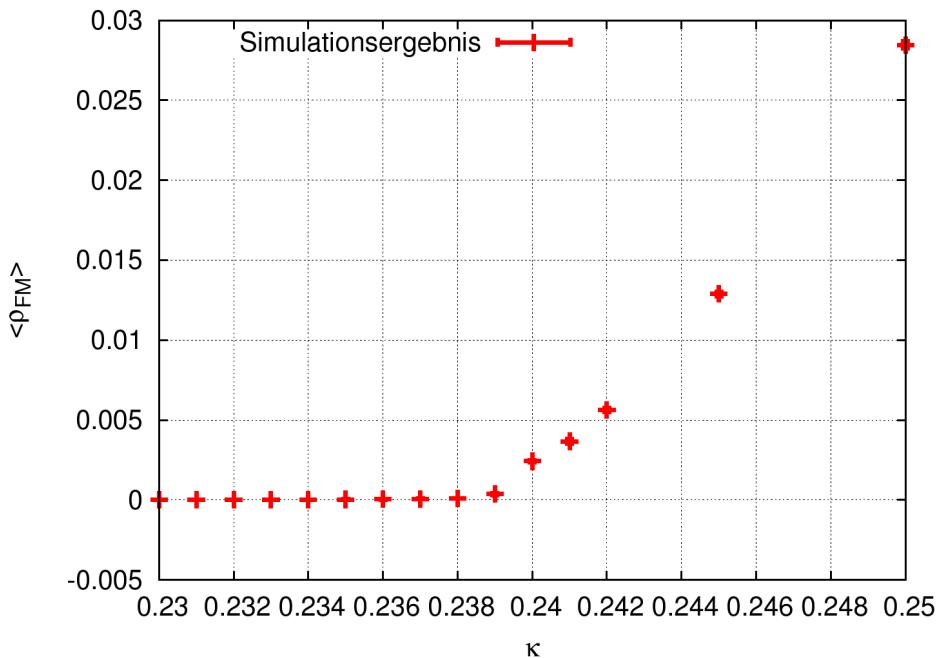


Abbildung 6.16: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ bei $\beta = 3.5$ und $\lambda = 0.5$ auf einem 16^4 -Gitter

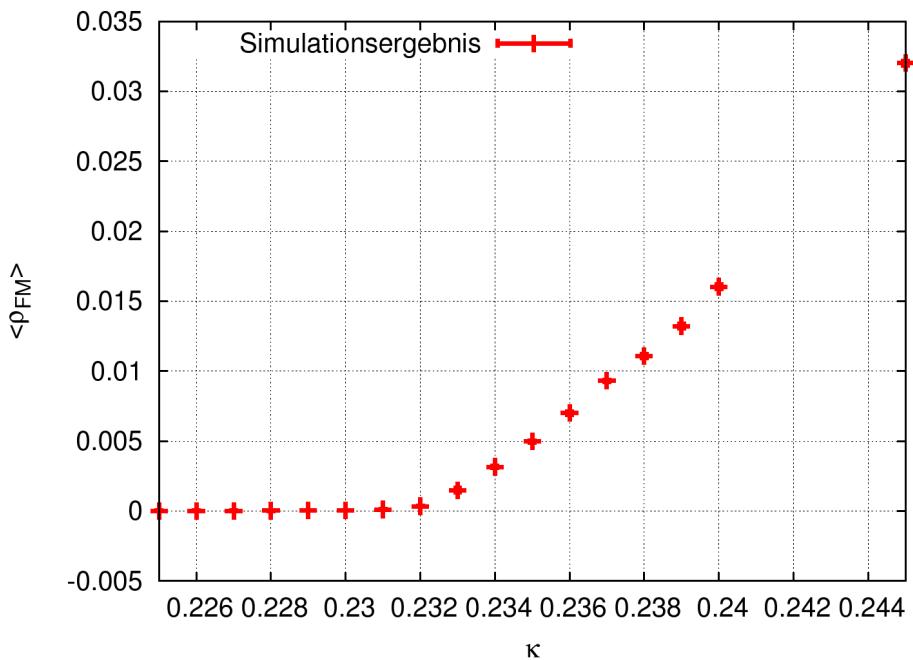


Abbildung 6.17: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ bei $\beta = 5.0$ und $\lambda = 0.5$ auf einem 16^4 -Gitter

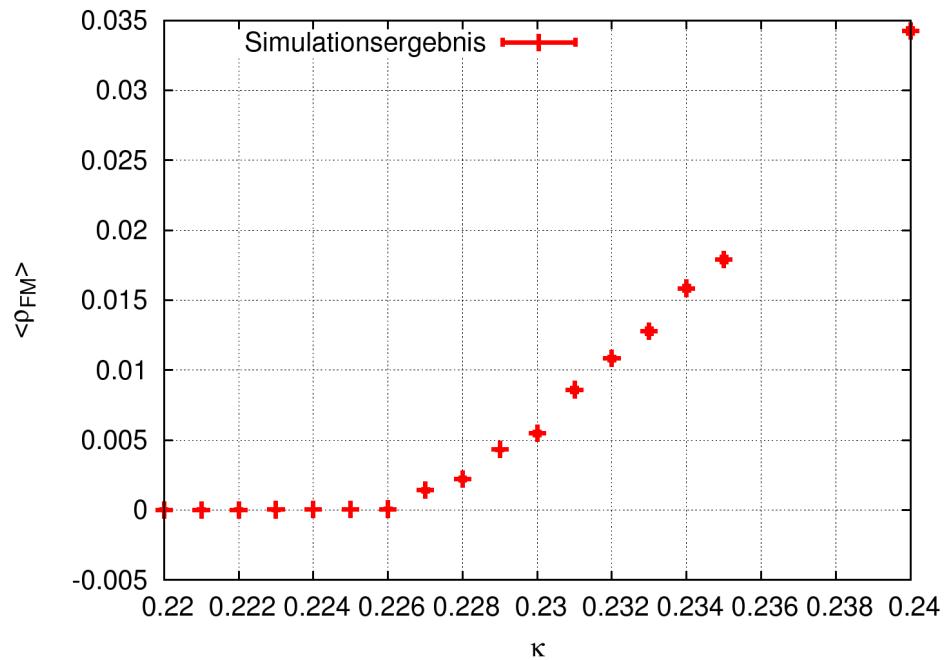


Abbildung 6.18: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Hopping-Paramters κ bei $\beta = 10.0$ und $\lambda = 0.5$ auf einem 16^4 -Gitter

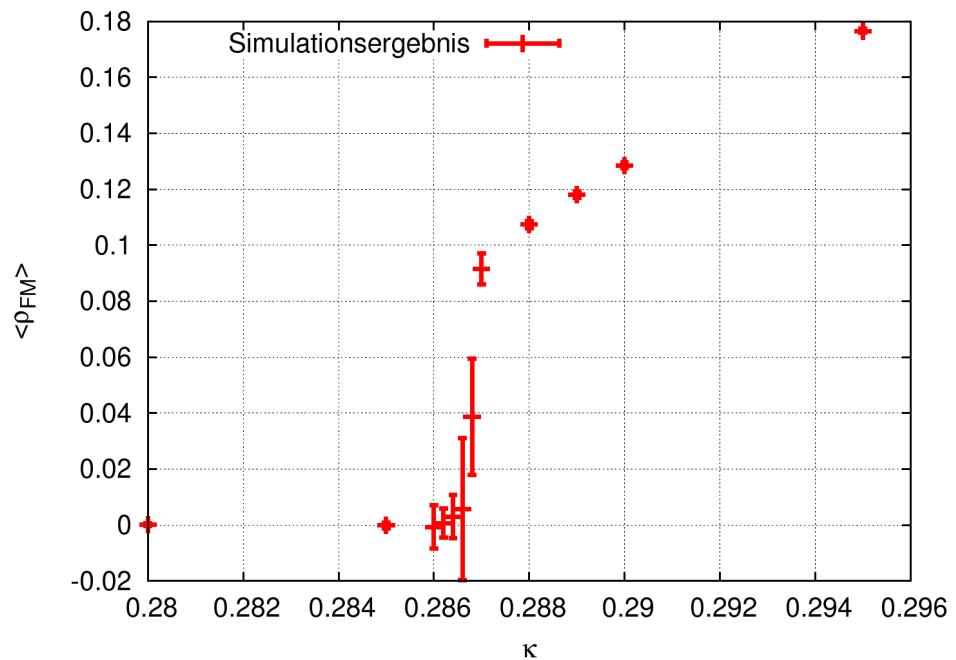


Abbildung 6.19: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ bei $\beta = 2.1$ und $\lambda = 0.5$ auf einem 24^4 -Gitter

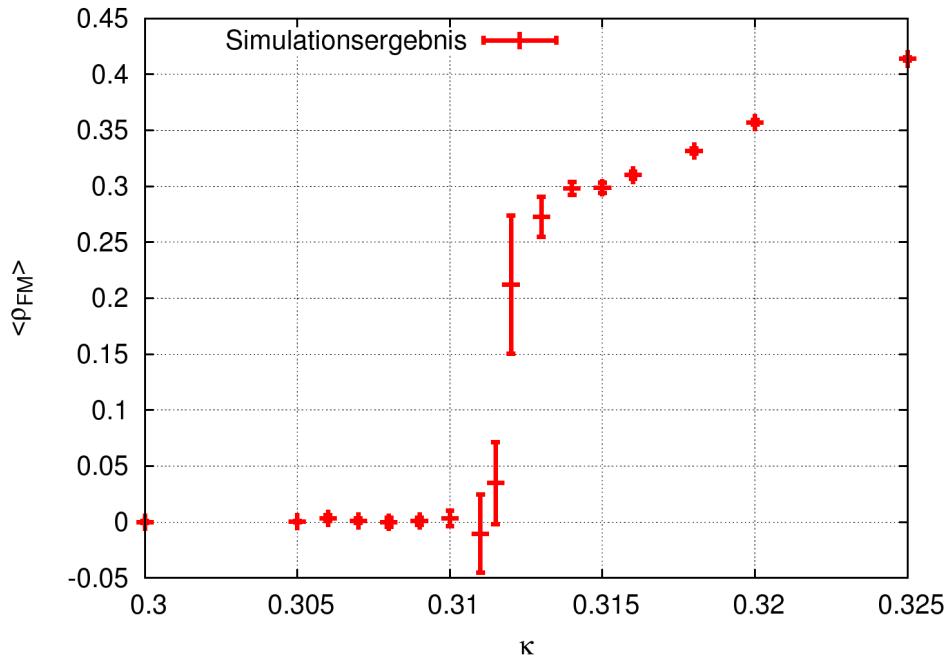


Abbildung 6.20: Der FM-Operator $\langle \rho_{FM} \rangle$ als Funktion des Hopping-Parameters κ bei $\beta = 1.9$ und $\lambda = 0.5$ auf einem 32^4 -Gitter

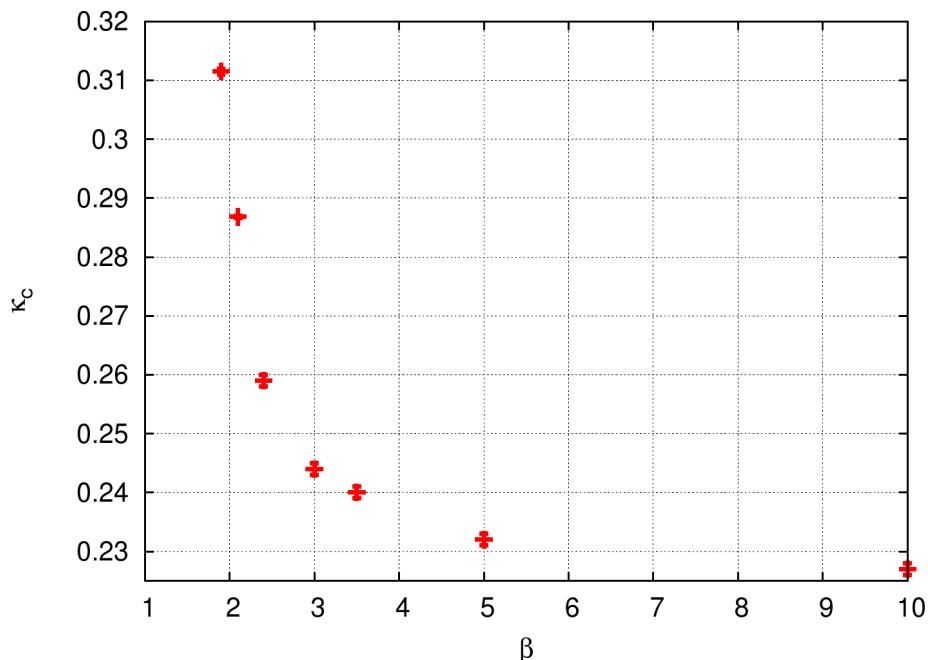


Abbildung 6.21: Der kritische Hopping-Parameter κ_c als Funktion der Gitterkopplung β bei $\lambda = 0.5$

7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde das von K. Fredenhagen und M. Marcu vorgeschlagene Confinement-Kriterium für Theorien mit dynamischen Materiefeldern im SU(2)-Higgs-Modell mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen untersucht. Dazu wurde der Erwartungswert des Operators in verschiedenen Parameterbereichen berechnet. Bei fixierter Eichkopplung konnte die quartische Kopplung über einen weiten Bereich variiert und jeweils ein kritischer Wert des Hopping-Parameters gefunden werden, bei dem ein Phasenübergang zwischen symmetrischer und Higgs-Phase stattfindet. In einem zweiten Arbeitsschritt wurden die kritischen Hopping-Parameter bei konstanter quartischer Kopplung und verschiedenen Gitterkopplungen bestimmt. Entgegen den Voraussagen einiger Vorarbeiten zeigt das Verhalten des FM-Operators auch unterhalb einer Gitterkopplung, ab der eine analytische Verbindung der Phasen vermutet wird, noch einen Phasenübergang an.

Die Werte des Ordnungsparameters liegen in der symmetrischen Phase des Higgs-Modells nahezu bei Null, während sie mit zunehmendem Hopping-Parameter in der gebrochenen Phase etwa linear ansteigen. Am Phasenübergang hat der Verlauf der Werte entweder einen Knick oder einen Sprung. Lediglich in den Limites großer Gitterkopplung bzw. großer quartischer Kopplung wird die Vermessung der Phasengrenze zunehmend schwierig, da die Änderung im Verlauf der Erwartungswerte langsam undeutlich wird bzw. die Erwartungswerte sehr klein werden.

Die Frage, ob sich der FM-Parameter als Confinement-Kriterium (in dem Sinne, dass zwischen Confinement und Deconfinement unterschieden werden kann) eignet, kann leider auf Basis der vorgenommenen Simulationen im SU(2)-Higgs-Modell nicht beantwortet werden, da das Modell keine Deconfinement-Phase beinhaltet und die Confinement-Phase im Rahmen der derzeitigen numerischen Möglichkeiten nicht unter dem Aspekt des String Breakings untersucht werden kann.

Innerhalb des verwendeten Modells zeigte sich jedoch eindeutig, dass der FM-Operator in vielen Teilen des Phasendiagramms sinnvoll als Ordnungsparameter eingesetzt werden kann. Eine nähere Untersuchung verschiedener Grenzfälle steht indes noch aus.

Im Hinblick auf die Untersuchung des Confinement-Deconfinement-Übergangs im Phasendiagramm der Quantenchromodynamik sollte das Verhalten des FM-Operators bei endlichen Temperaturen untersucht werden. Dies könnte zunächst auch im Higgs-Modell geschehen, indem die Ausdehnung des Gitters in Zeitrichtung reduziert wird.

Innerhalb des SU(2)-Higgs-Modells bei $T = 0$ sollte zunächst noch der Bereich kleiner Gitterkopplungen genauer untersucht werden, um dort möglicherweise den Ort des kritischen Punktes, hinter dem eine Verbindung der beiden Phasen vorliegt, bestimmen zu können. Ebenfalls könnten die schon vorhandenen Simulationen in die Bereiche sehr kleiner und vor allem sehr großer Hopping-Parameter ausgedehnt werden, da bisher lediglich der Bereich um die Phasengrenze herum betrachtet wurde.

Außerdem könnte der Grenzwert unendlich großer skalarer Kopplungen (d. h. Fixierung der Higgs-Länge auf $\rho = 1$) schon in der Wirkung genommen und diese entsprechend implementiert werden. Falls sich der FM-Operator in dem modifizierten Modell als Ordnungsparameter eignet, könnte die Phasenübergangslinie erster Ordnung bei großen Gitterkopplungen, ihr kritischer Endpunkt sowie die analytische Verbindung der beiden Phasen bei kleinen Gitterkopplungen genauer vermessen werden. Eine direkte Messung des FM-Operators im skalaren ϕ^4 -Modell wäre ebenfalls zu Testzwecken interessant, da aufgrund der bisherigen Daten angenommen werden muss, dass der Erwartungswert für sehr große Gitterkopplungen auch in der Higgs-Phase gegen Null geht.

A Anhang

A.1 Verwendete Konventionen

A.1.1 Einheitensystem

In der vorliegenden Arbeit wird in natürlichen Einheiten

$$\hbar = c = 1 \quad (\text{A.1})$$

gerechnet. Um eine gegebene Größe in natürlichen Einheiten in ein anderes Einheitensystem umzurechnen, muss ihr Wert so oft mit den Größen [50]

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \hbar = 6,5821220(20) \cdot 10^{-22} \text{ MeV s} \quad (\text{A.2})$$

multipliziert werden, bis die Einheit der gewünschten entspricht. Eine Übersicht dazu ist in Tabelle A.1 gegeben.

Größe	natürliche Einheit	tatsächliche Einheit
Energie	1 eV	1 eV
Zeit	$\frac{1}{1 \text{ eV}}$	$\frac{\hbar}{1 \text{ eV}}$
Länge	$\frac{1}{1 \text{ eV}}$	$\frac{\hbar c}{1 \text{ eV}}$
Masse	1 eV	$\frac{1 \text{ eV}}{c^2}$

Tabelle A.1: Übersicht über die natürlichen Einheiten von Energie, Zeit, Länge und Masse

Im Gitterformalismus wird die Gitterkonstante zumeist zu

$$a = 1 \quad (\text{A.3})$$

gewählt; die so erhaltenen Größen sind daher dimensionslos. Der Übergang zu physikalischen Einheiten erfolgt durch die ggf. wiederholte Multiplikation der Größen mit der Gitterkonstanten, bis die passende Einheit erreicht ist.

A.1.2 Summenkonvention

Gemäß der Einstein'schein Summenkonvention wird über doppelt auftretende Indizes innerhalb eines Produktes summiert. Eine Ausnahme bilden die Indizes, die Raumzeitpunkte im Gitter oder Gitterrichtungen bezeichnen; hier sind auszuführende Summen stets explizit angegeben.

A.1.3 Parametrisierung von Feldern

In der vorliegenden Arbeit werden Eich- und Higgs-Felder durchgängig über die Pauli-Matrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

parametrisiert. Allgemein (und insbesondere für Eichfelder) werden die Notationen

$$U = a_0 \mathbb{1} + i \vec{a} \vec{\tau} = \begin{pmatrix} a_0 + ia_3 & ia_1 + a_2 \\ ia_1 - a_2 & a_0 - ia_3 \end{pmatrix} = (a_0, a_1, a_2, a_3) \quad (\text{A.5})$$

benutzt. Für Higgs-Felder wird zur Verdeutlichung der physikalischen Hintergründe teilweise

$$\phi(x) = \sigma(x) + i \vec{\pi}(x) \vec{\tau} = \begin{pmatrix} \sigma + i\pi_3 & i\pi_1 + \pi_2 \\ i\pi_1 - \pi_2 & \sigma - i\pi_3 \end{pmatrix} = \rho(x) \cdot \alpha(x) \quad (\text{A.6})$$

mit $\rho \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in SU(2)$ benutzt. Umgekehrt gilt damit für die Parameter

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \text{Sp } U \\ ia_1 &= \frac{1}{2} \text{Sp } (U\tau_1) \\ ia_2 &= \frac{1}{2} \text{Sp } (U\tau_2) \\ ia_3 &= \frac{1}{2} \text{Sp } (U\tau_3). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A.2 Eigenschaften und Rechenoperationen von SU(2)-Eichfeldern und Higgs-Feldern

Für die Determinante einer Matrix $U = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ gilt

$$\det U = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2. \quad (\text{A.8})$$

Für $SU(2)$ -Eichfelder gilt

$$\det U = 1 \quad (\text{A.9})$$

sowie für Higgs-Felder

$$\det \phi = \rho^2. \quad (\text{A.10})$$

Die adjungierte Matrix ist gegeben durch

$$U^\dagger = (a_0, -a_1, -a_2, -a_3), \quad (\text{A.11})$$

die komplex konjugierte Matrix durch

$$U^* = (a_0, -a_1, a_2, -a_3) \quad (\text{A.12})$$

und die transponierte Matrix durch

$$U^T = (a_0, a_1, -a_2, a_3). \quad (\text{A.13})$$

Für das Inverse von SU(2)-Eichfeldern gilt $U^{-1} = U^\dagger$.

Die Spur der Matrix ist

$$\text{Sp } U = 2 \cdot a_0. \quad (\text{A.14})$$

Zwei Matrizen U und $V = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ werden addiert durch

$$U + V = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \quad (\text{A.15})$$

und über

$$U \cdot V = (c_0, c_1, c_2, c_3) \quad (\text{A.16})$$

mit

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\ c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 - a_2b_3 + a_3b_2 \\ c_2 &= a_0b_2 + a_1b_3 + a_2b_0 - a_3b_1 \\ c_3 &= a_0b_3 - a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0 \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

multipliziert.

A.3 Übersicht über die Simulationen

In diesem Abschnitt sind die Simulationen, die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt wurden, in Tabellenform zusammengefasst aufgelistet. Dabei bezeichnet β die Gitterkopplung, λ die skalare quartische Kopplung, κ den Hopping-Parameter, $4R$ den Umfang des Wilson-Loops, Δ ist die Schrittweite im jeweiligen angegebenen Parameterintervall, L die Anzahl der Gitterpunkte pro Dimension, $\#\text{Iter}$ sind die Anzahl der gemachten Iterationsschritte und $\#\text{Therma}$ die Anzahl der davon verworfenen Thermalisierungsschritte.

Einzelne Simulationen sind zum Teil zu Testzwecken mit etwas anderen Simulationsparametern durchgeführt worden als aus den Tabellen ersichtlich. Der Übersichtlichkeit halber wurde aber davon abgesehen, tatsächlich jede Simulation einzeln aufzulisten.

Simulationen zur reinen Eichtheorie

Größe	β	Δ	L	$\#\text{Iter}$	$\#\text{Therma}$
P	0.25 - 6.50	0.25	16	50	30
$WL(1 \times 1)$	0.2 - 4.0	0.2	10	50	30
$WL(2 \times 2)$	0.2 - 4.0	0.2	10	50	30
$WL(3 \times 3)$	0.2 - 4.0	0.2	10	50	30
$WL(4 \times 4)$	0.2 - 4.0	0.2	10	50	30
$WL(5 \times 5)$	0.2 - 4.0	0.2	10	50	30

Simulationen zum SU(2)-Higgs-Modell

Größe	β	λ	κ	Δ	L	#Iter	#Therma
ρ^2, L_ϕ	0	0	0.025 - 0.175	0.025	16	600	500
ρ^2, L_ϕ	0	0	0.18	-	16	600	500
$P, \rho^2, L_\phi, L_\alpha$	2.25	0.5	0.27	-	16	600	500

Simulationen zum FM-Operator

β	λ	κ	$4R$	Δ	L	#Iter	#Therma
2.4	0.5	0.255	4-28	4	16	600	500
2.4	0.5	0.261	4-28	4	16	1000	500
2.4	0.5	0.270	4-28	4	16	600	500
2.4	0.5	0.281	4-28	4	16	600	500
2.4	0.5	0.250-0.252	24	0.001	16	1000	500
2.4	0.5	0.253-0.259	24	0.001	16	5000	500
2.4	0.5	0.259-0.283	24	0.001	16	1000	500
2.4	2.0	0.320-0.340	20	0.001	16	1000	500
2.4	10.0	0.360-0.375	20	0.001	16	1000	500
2.4	0.1	0.175-0.200	20	0.001	16	1000	500
2.4	0.01	0.140	20	-	16	1000	500
2.4	0.01	0.145-0.149	20	0.001	16	1000	500
2.4	0.01	0.1491-0.1500	20	0.0001	16	1200	800
3.0	0.5	0.235-0.255	20	0.001	16	1200	800
3.5	0.5	0.230-0.250	20	0.001	16	1200	800
5.0	0.5	0.225-0.245	20	0.001	16	1200	800
10.0	0.5	0.220-0.240	20	0.001	16	1200	600
2.1	0.5	0.280-0.285	20	0.005	24	1200	600
2.1	0.5	0.2860-0.2870	20	0.0002	24	1200	600
2.1	0.5	0.288-0.295	20	0.001	24	1200	600
1.9	0.5	0.305-0.325	20	0.001	32	1200	600

A.4 Übersicht über den Quellcode des Programms

In diesem Abschnitt sei eine kurze Übersicht über den im Rahmen dieser Arbeit in der Programmiersprache C++ erstellten Quellcode gegeben, der auf der beiliegenden CD gespeichert ist.

In der Datei `header.h` werden alle Parameter des Programms (vgl. Kapitel 5.4) hinterlegt. Zur Ausführung des Programms können alle Einstellungen (welche Messungen vorgenommen werden sollen, welche Updating-Algorithmen verwendet werden sollen usw.) hier vorgenommen werden. Die restlichen Dateien müssen nicht editiert werden.

Die Datei `headeronce.h` enthält Programmteile, die lediglich einmal kompiliert werden müssen. Die Dateien `nr3.h` und `ran.h` enthalten eine Sammlung von Standardbibliotheken sowie einen Zufallszahlengenerator, beide sind aus [41] entnommen.

Das Hauptprogramm befindet sich in der Datei `Heatbath.c`. Sein Aufbau wurde in Kapitel 5.4 geschildert. Die Einzelergebnisse werden in einer Datei `results.txt` ausge-

geben sowie eine Übersicht über die gewählten Parameter, die Endergebnisse und die Programmlaufzeit in einer Datei **summary.txt**.

In der Datei **Functions.c** werden Routinen für die Messung verschiedenster Größen bereitgehalten. Die Routine in der Datei **Link.c** beschreibt ein *Array* mit den nächsten Nachbarn eines jeden Links, auf das an verschiedenen Stellen des Programms zurückgegriffen wird. In der Datei **MatOp.c** werden alle benötigten Matrix-Rechenoperationen hinterlegt. Die Routine zur statistischen Auswertung der Daten befindet sich schließlich in der Datei **statistic.c**.

Literaturverzeichnis

- [1] SIMONYI, K.: *Kulturgeschichte der Physik: Von den Anfängen bis heute.* Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, 2001.
- [2] THE OFFICIAL WEB SITE OF THE NOBEL PRIZE: THE NOBEL PRIZE IN PHYSICS 1969:
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1969/, 17. Oktober 2011.
- [3] GELL-MANN, M.: *A schematic model of baryons and mesons.* Phys.Lett., 8 214–215, 1964.
- [4] THE OFFICIAL WEB SITE OF THE NOBEL PRIZE: THE NOBEL PRIZE IN PHYSICS 1990:
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1990/, 18. Oktober 2011.
- [5] TAYLOR, R.E.: *Deep inelastic scattering: The early years.* Rev.Mod.Phys., 63 573–595, 1991.
- [6] KENDALL, H.W.: *Deep inelastic scattering: Experiments on the proton and the observation.* Rev.Mod.Phys., 63 597–614, 1991.
- [7] FRIEDMAN, J.I.: *Deep inelastic scattering: Comparisons with the quark model.* Rev.Mod.Phys., 63 615–629, 1991.
- [8] ALKOFER, R. und GREENSITE, J.: *Quark confinement: The hard problem of hadron physics.* J. Phys., G34, 2007.
- [9] CERN: EUROPEAN ORGANIZATION FOR NUCLEAR RESEARCH – CLUES TO THE EARLY UNIVERSE: <http://public.web.cern.ch/public/en/Science/EarlyUniverse-en.html>, 18. Oktober 2011.
- [10] KAPUSTA, J.I. und GALE, C.: *Finite-Temperature Field Theory.* Cambridge University Press, 2006.
- [11] WILSON, K.G.: *Confinement of quarks.* Phys.Rev., D10 2445–2459, 1974.
- [12] FREDENHAGEN, K. und MARCU, M.: *Confinement criterion for QCD with dynamical quarks.* Phys.Rev.Lett., 56(3) 223–224, 1986.
- [13] JANSEN, K.: *Lattice QCD: A critical status report.* PoS, LATTICE2008, 2008.
- [14] BURGESS, C. und MOORE, G.: *The Standard Model: A Primer.* Cambridge University Press, 2007.

- [15] PESKIN, M.E. und SCHROEDER, D.V.: *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [16] SREDNICKI, M.: *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [17] SCHWINGER, J.S. (Herausgeber): *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*. Dover Publications, Inc., 1958.
- [18] THE OFFICIAL WEB SITE OF THE NOBEL PRIZE: THE NOBEL PRIZE IN PHYSICS 1979:
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1979/, 11. Oktober 2011.
- [19] SALAM, A.: *Gauge unification of fundamental forces*. Rev.Mod.Phys., 52 525–538, 1980.
- [20] WEINBERG, S.: *Conceptual foundations of the unified theory of weak and electromagnetic interactions*. Rev.Mod.Phys., 52 515–523, 1980.
- [21] CERN: EUROPEEN ORGANIZATION FOR NUCLEAR RESEARCH – MISSING HIGGS: <http://public.web.cern.ch/public/en/Science/Higgs-en.html>, 11. Oktober 2011.
- [22] YANG, C.N. und MILLS, R.L.: *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*. Phys.Rev., 96 191–195, 1954.
- [23] NOETHER, E.: *Invariante Variationsprobleme*. Gött.Nachr., 1918 235–257, 1918.
- [24] ÁLVAREZ-GAUMÉ, L. und ELLIS, J.: *Eyes on a prize particle*. Nature Physics, 7 2–3, 2011.
- [25] THE OFFICIAL WEB SITE OF THE NOBEL PRIZE: THE NOBEL PRIZE IN PHYSICS 2008:
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2008/, 09. Oktober 2011.
- [26] KOBAYASHI, M. und MASKAWA, T.: *CP-Violation in the renormalizable theory of weak interaction*. Prog.Theor.Phys., 49(2) 652–657, 1973.
- [27] NAMBU, Y.: *Axial vector current conservation in weak interactions*. Phys.Rev.Lett., 4 380–382, 1960.
- [28] GOLDSTONE, J.: *Field theories with Superconductor solutions*. Nuovo Cim., 19 154–164, 1961.
- [29] GOLDSTONE, J., SALAM, A. und WEINBERG, S.: *Broken symmetries*. Phys.Rev., 127 965–970, 1962.
- [30] HIGGS, P.W.: *Broken symmetries and the masses of gauge bosons*. Phys.Rev.Lett., 13 508–509, 1964.
- [31] MONTVAY, I. und MÜNSTER, G.: *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1994.

- [32] THE OFFICIAL WEB SITE OF THE NOBEL PRIZE: THE NOBEL PRIZE IN PHYSICS 2004:
http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2004/,
10. Oktober 2011.
- [33] GROSS, D.J. und WILCZEK, F.: *Asymptotically free gauge theories*. Phys.Rev., D8 3633–3652, 1973.
- [34] POLITZER, H.D.: *Asymptotic freedom: An approach to strong interactions*. Phys.Rep., 14 129–180, 1974.
- [35] BACHAS, C.: *Concavity of the quarkonium potential*. Phys.Rev., D33(9) 2723–2725, 1986.
- [36] BALI, G.S.: *QCD forces and heavy quark bound states*. Phys.Rept., 343 1–136, 2001.
- [37] KNECHTLI, F.: *The Static Potential in the SU(2) Higgs Model*. Doktorarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin, 1999.
- [38] JASTER, A.: *Numerische Simulationen von Higgs-Modellen*. Doktorarbeit, Universität Hamburg, 1995.
- [39] BERG, B.A.: *Markov Chain - Monte Carlo Simulations and Their Statistical Analysis*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004.
- [40] CREUTZ, M.: *Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory*. Phys.Rev., D21(8) 2308–2315, 1980.
- [41] PRESS, W.H. et al.: *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [42] FODOR, Z., HEIN, J., JANSEN, K., JASTER, A. und MONTVAY, I.: *Simulating the electroweak phase transition in the SU(2) Higgs model*. Nucl.Phys., B439 147–186, 1995.
- [43] BUNK, B.: *Monte Carlo methods and results for the electro-weak phase transition*. Nucl.Phys.Proc.Suppl., B42 566–568, 1995.
- [44] WURTZ, M.B.: *Lattice Simulations of the SU(2)-Multi-Higgs Phase Transition*. Doktorarbeit, University of Saskatchewan, 2009.
- [45] KÜHNELT, H., LANG, C.B. und VONES, G.: *SU(2) gauge-Higgs theory with radial degree of freedom*. Nucl.Phys., B230 16–30, 1984.
- [46] EVERTZ, H.G., GRÖSCH, V., KASTRUP, H.A., NEUHAUS, T. et al.: *Monte Carlo analysis of gauge invariant two-point functions in an SU(2) Higgs model*. Phys.Lett., B175(3) 335–340, 1986.
- [47] KENNEDY, A.D. und PENDLETON, B.J.: *Improved heatbath method for Monte Carlo calculations in lattice gauge theories*. Phys.Lett., B156 393–399, 1985.

- [48] BOCK, W., EVERTZ, H.G., LANDAU, D.P., NEUHAUS, T. et al.: *Search for critical points in the $SU(2)$ Higgs model.* Phys.Rev., D41(8) 2573–2580, 1990.
- [49] FRADKIN, E. und SHENKER, S.H.: *Phase diagrams of lattice gauge theories with Higgs fields.* Phys.Rev., D19(12) 3682–3697, 1979.
- [50] MONTANET, L. et al.: *Review of particle properties.* Phys.Rev., D50 1173, 1994.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei den Menschen bedanken, die mich während meines Studiums und während der Erstellung dieser Arbeit unterstützt haben. Besonderer Dank gilt

- Herrn Prof. Dr. Gernot Münster für die stets begeisterte Betreuung meiner Diplomarbeit und die anregenden Gespräche.
- Herrn Prof. Dr. Owe Philipsen für die interessante Themenstellung sowie die Betreuung meines Theoretikums.
- Dr. Lars Zeidlewicz für die vielen hilfreichen Antworten auf all meine Fragen, den Kaffee und für das Korrekturlesen der Arbeit.
- allen (ehemaligen) Mitgliedern der Arbeitsgruppe Philipsen sowie Dirk Sandbrink aus der Arbeitsgruppe Münster für Rat und Hilfestellung bei allerlei Problemen, Diskussionen über Physik und vor allem eine Menge Spaß.
- Heike Krommes für das aufmerksame Korrekturlesen meiner Arbeit.
- Eva Baresel, Janine Hüting, Megi Moschny, Sybille Niemeier, Christoph Sapp und Ingmar Schnell - vielen Dank für eure großartige Unterstützung während der letzten Jahre! Ohne euch würde ich wohl immer noch Schlüsselanhänger knüpfen...
- Patrick Steppeler - vielen Dank für so Vieles, insbesondere für deine Geduld, dafür, dass du weißt, was gut für mich ist, und für deinen Glauben an mich!

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Anja Teuber
Münster, 25. Oktober 2011