

Chirale Störungstheorie für Mesonen in der Twisted-Mass Gitter-QCD

Rechnungen zu Massen und Zerfallskonstanten für zwei und drei Flavours

Diplomarbeit

Tobias Sudmann

Dezember 2005



Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Neben der Berichtigung kleiner Flüchtigkeitsfehler unterscheidet sich die vorliegende Version von der dem Prüfungsamt vorgelegten durch die Korrektur der Parametrisierung des Gitterterms ρ auf Seite 60 und den daraus resultierenden unterschiedlichen Massen und Zerfallskonstanten für den Fall $N_f = 3$.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Quantenchromodynamik	3
1.1 Einordnung in das Standardmodell	3
1.2 Grundlagen	4
1.3 Chirale Symmetrie	5
2 Chirale Störungstheorie	9
2.1 Spontane Symmetriebrechung	9
2.2 Goldstone-Theorem	11
2.3 Effektive Feldtheorie	13
3 Gitter-QCD	17
3.1 Wilson Gitter-Formulierung	17
3.2 Twisted-Mass Gitter-QCD	21
3.3 Effektive Lagrangedichte	23
4 Methodik der χPT für Twisted-Mass Gitter-QCD	27
4.1 Analytische Berechnung in führender Ordnung	27
4.2 Störungsansatz in führender Ordnung	31
4.3 Treelevel in nächstführender Ordnung mittels Störungsansatz	34
4.4 Skizze der Schleifenrechnung	38
4.5 Optimierte Parametrisierung der Felder	46
5 Pionmassen für $N_f = 2$	49
5.1 Massen in führender Ordnung	49
5.2 Massen in nächstführender Ordnung	50
5.3 Pionmassen bei ungleichen Quarkmassen	54
6 Mesonmassen für $N_f = 3$	59
6.1 Parametrisierung	59
6.2 Massen in führender Ordnung	61
6.3 Treelevel-Massen in nächstführender Ordnung	62
6.4 Schleifenrechnung	66
6.5 Massen des Mesonen-Oktetts in nächstführender Ordnung	68
6.6 Mesonmassen bei ungleichen up- und down-Quarkmassen	71

7 Zerfallskonstanten	79
7.1 Axialstrom $A_{\mu,a}$	79
7.2 Pion-Zerfallskonstante für $N_f = 2$	80
7.3 Meson-Zerfallskonstanten für $N_f = 3$	83
Zusammenfassung und Ausblick	87
A Symmetrisierung von Vertizes	89
B Renormierungskoeffizienten	91
C Symmetriegruppe $SU(n)$	93
C.1 Generatoren der $SU(2)$	93
C.2 Generatoren der $SU(3)$	93
D Chirale Darstellung der Dirac-Matrizen	95
Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	97
Literaturverzeichnis	99

Einleitung

Im letzten Jahrhundert hat insbesondere die Theoretische Physik einen neuen Blick auf die Grundlagen der Physik geliefert. Die fundamentalen Wechselwirkungen werden durch zwei Theorien mit unterschiedlichen Geltungsbereichen beschrieben. Die schwächste Wechselwirkung ist die Gravitation, sie bestimmt die Physik auf großen, kosmologischen Skalen. Diese wird durch eine klassische Feldtheorie erfasst, die *Allgemeine Relativitätstheorie* aus dem Jahr 1916. Viele Vorhersagen konnten erfolgreich bestätigt werden und sie hält seitdem vielen Experimenten stand.

Auf der anderen Seite steht die Physik der Elementarteilchen, die durch die wesentlich stärkeren Wechselwirkungen bestimmt wird; diese sind die *elektroschwache* und die *starke* Kraft. Auf den Erkenntnissen der Quantentheorie aufbauend werden diese Wechselwirkungen seit den 1970er Jahren erfolgreich durch sog. *Eichtheorien* beschrieben. Dabei handelt es sich um *Quantenfeldtheorien* mit zugrunde liegenden *Eichsymmetrien*. Die elektroschwache Wechselwirkung basiert auf einer $U(1) \times SU(2)$ -Symmetrie, die starke auf der $SU(3)$ -*Colour*-Symmetrie. Dieses Modell wird als das *Standardmodell* der Elementarteilchenphysik bezeichnet.

Seit dieser Zeit werden auch Anstrengungen unternommen, diese beiden unterschiedlichen Theorien miteinander zu verknüpfen und noch tiefere Einsichten in das Wesen der Natur zu gewinnen. Zu den aktuellen Anwärtern einer solchen *TOE* (engl.: *theory of everything*) gehören u. a. die *Stringtheorie* und die *Loop Quantum Gravity*. Diese Ansätze sind z. B. für das Verständnis des frühen Universums oder von Phänomenen wie „Schwarzen Löchern“ interessant, bei denen sich die beiden oben beschriebenen Geltungsbereiche überlappen. Dennoch behält das heutige Standardmodell als grenzwertige Beschreibung seine Gültigkeit, und selbst dieses ist noch nicht vollständig verstanden.

Die starke Wechselwirkung oder auch *Quantenchromodynamik* (QCD) ist z. B. bei niedrigen Energien nicht einfach zu analysieren. In den 1980er Jahren wurde von J. Gasser und H. Leutwyler eine *Chirale Störungstheorie* (χ PT, engl.: *chiral perturbation theory*) entwickelt, die mit geeigneten Parametern die QCD bei niedrigen Energien beschreiben kann. Diese Parameter werden dabei aus verschiedenen Experimenten gewonnen. Mittlerweile stehen leistungsfähige Rechner zur Verfügung, die es uns im Prinzip erlauben, diese Parameter auch direkt aus der QCD zu bestimmen. Solche numerischen Simulationen werden nicht in einer kontinuierlichen Raumzeit, sondern auf einem diskreten Gitter durchgeführt. Um die

Einleitung

Ergebnisse solcher Simulationen auswerten zu können, muss die chirale Störungstheorie diesen Bedingungen angepasst werden. Einen möglichen Rahmen dafür bietet die *Twisted-Mass Gitter-QCD*. Die vorliegende Diplomarbeit wird sich mit dieser beschäftigen.

Im ersten Kapitel werden die Grundlagen der QCD und insbesondere der chirale Grenzfall besprochen. Im Anschluss daran werden die Folgen der Symmetriebrechung und die Aufstellung einer *effektiven Feldtheorie* für niedrige Energien diskutiert. Im nächsten Kapitel werden der Übergang auf das Gitter und eine mögliche Formulierung dargestellt, insbesondere wird die Twisted-Mass Gitter-QCD eingeführt und eine entsprechende effektive Lagrangedichte wird konstruiert.

In Kapitel vier werden konkrete Ansätze vorgestellt, aus der Twisted-Mass Gitter-QCD physikalische Größen zu extrahieren. Dabei wird vor allem auf auftretende Probleme und Schwierigkeiten eingegangen und eine Methode entwickelt, diese zu umgehen. Diese wird im nächsten Kapitel bei Berücksichtigung der zwei leichtesten Quarks zur Bestimmung der Pionmassen benutzt. Die Massen werden bis einschließlich der nächstführenden Ordnung der Störungstheorie und Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ in der Gitterkonstanten berechnet. Im folgenden Kapitel werden unter Hinzunahme des strange-Quarks in gleicher Weise die Massen des Mesonen-Oktetts bestimmt. Im siebten Kapitel werden zusätzlich noch die Zerfallskonstanten für die bereits diskutierten Fälle bestimmt.

Häufig verwendete Verfahren und Eigenschaften sind in den Anhang ausgegliedert worden. Neben einem Literaturverzeichnis ist auch ein Abkürzungs- und Symbolverzeichnis aufgeführt, in dem die in der Arbeit verwendeten Bezeichnungen zusammengefasst sind.

1 Quantenchromodynamik

Wie in der Einleitung erwähnt, werden mit Ausnahme der Gravitation die fundamentalen Wechselwirkungen der Elementarteilchen durch das Standardmodell beschrieben. In diesem Kapitel werden einige spezielle Eigenschaften eines Teils dieses Modells, der QCD, aufgeführt.

1.1 Einordnung in das Standardmodell

Das Standardmodell der Elementarteilchen klassifiziert die kleinsten Grundbausteine der Natur. Die gesamte bekannte Materie ist aus *Fermionen* aufgebaut, die durch den Austausch von *Eichbosonen* miteinander wechselwirken. Alle Fermionen unterliegen der elektroschwachen Kraft und lassen sich in *Leptonen* und *Quarks* unterteilen, letztere werden allerdings von der starken Wechselwirkung dominiert. Die Fermionen sind hier ihren *Generationen* nach in Doublets angeordnet dargestellt.

Leptonen:

Die drei Generationen bestehen aus dem *Elektron* e , dem *Myon* μ , dem *Tauon* τ und den jeweils zugeordneten Neutrinos:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}.$$

Die Neutrinos sind neutral, die anderen Leptonen tragen die Elementarladung.

Quarks:

Die Quarks gliedern sich gleichermaßen, jedem Quark wird ein sog. *Flavour* zugeordnet, der dem jeweiligen Quark seinen Namen gibt: *up-*, *down-*, *charm-*, *strange-*, *top-*, und *bottom-* Quark;

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}.$$

Die Quarks tragen betragsmäßig $1/3$ bzw. $2/3$ der Elementarladung.

Eichbosonen:

Die Eichbosonen sind die Vermittler der Wechselwirkungen, dazu gehören die masselosen Photonen γ und Gluonen g sowie die massiven W^\pm - und Z^0 -Bosonen:

$$\text{elektroschwach: } (\gamma, W^\pm, Z^0) , \quad \text{stark: } g .$$

Während die Leptonen auch als freie Teilchen beobachtbar sind, sind die Quarks stets in *Hadronen* gebunden; dieses Phänomen wird als *Confinement* bezeichnet. Die Hadronen tragen ausschließlich ganzzahlige Vielfache der Elementarladung. Dazu gehören zum einen die *Baryonen* wie z. B. die Nukleonen Proton und Neutron, die sich aus drei Quarks zusammensetzen, und zum anderen die *Mesonen*, die jeweils aus einem Quark und einem Anti-Quark bestehen. Mesonen werden in der vorliegenden Arbeit behandelt. Die Bezeichnung Meson stammt von griech. *mesos* (Mitte), da die Mesonmasse zwischen denen der leichten Leptonen und der schweren Baryonen liegt. Die Kernkraft, die die Nukleonen im Atomkern zusammenhält, kann als eine Art „Van-der-Waals-Kraft“ der starken Wechselwirkung aufgefasst werden, die durch den Austausch von Mesonen erklärt wird. Bereits 1935, also lange vor der Formulierung der QCD, wurde die Kernkraft von H. Yukawa durch einen solchen Austausch beschrieben und die Existenz von Mesonen vorausgesagt.*

1.2 Grundlagen

Die zugrunde liegende Eichsymmetrie der QCD ist die $SU(3)_c$, der Index c weist explizit auf die Colour-Symmetrie hin, um Verwechslung mit anderen Symmetrien zu vermeiden. Die Namensgebung hat den Ursprung in der Tatsache, dass Quarks nur in den o. a. gebundenen Zuständen auftreten. Diese entsprechen der Analogie von farbneutraler Mischung von drei Farben bzw. der Kombination Farbe und Anti-Farbe. Die Quarkfelder

$$q(x) = \begin{pmatrix} q_r(x) \\ q_g(x) \\ q_b(x) \end{pmatrix}$$

tragen üblicherweise die drei *Farbladungen* mit den Attributen rot, grün und blau. Aufgrund der Eigenschaften der Eichgruppe ist die QCD eine nicht-abelsche Eichtheorie, sie beschreibt die starke Wechselwirkung zwischen diesen Farbladungen und ist unabhängig vom Flavour. Das bedeutet, dass die Lagrangedichte der QCD

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a$$

invariant unter lokalen $SU(3)_c$ -Transformationen im Farb-Raum ist. Die Indizes $\{a, b, c, \dots\}$ laufen in dieser Arbeit immer von $1, \dots, 8$.

*H. Yukawa hatte dieses Teilchen ursprünglich mit *Mesotron* bezeichnet, bevor W. Heisenberg diese Namensgebung „korrigierte“.

In der Summation $f = u, d, s, c, b, t$ sind die sechs Quarkflavours berücksichtigt, der Flavour-index f wird im Folgenden aber nicht mehr explizit aufgeführt. Auch die acht Eichbosonen, die Gluonen, tragen die Farbladung. Die entsprechenden Eichfelder A_μ^a sind sowohl in der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + ig A_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}$$

als auch im Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$$

enthalten. Dabei ist g eine Kopplungskonstante, f_{abc} sind die total antisymmetrischen Strukturkonstanten, und die Gell-Mann-Matrizen λ_a sind die Generatoren der Fundamentaldarstellung der SU(3) (s. Anhang C.2).

Während bei hohen Energien aufgrund der asymptotischen Freiheit Störungsrechnung möglich ist, treten bei niedrigen Energien Schwierigkeiten auf. Zunächst einmal ist die Kopplungskonstante $g^2/4\pi$ von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$. Zudem ist die QCD nicht-abelsch, was u. a. zur Konsequenz hat, dass die Theorie nicht-linear in der Wechselwirkung der Gluonen ist. Außerdem ist die Theorie in den Freiheitsgraden Quarks und Gluonen formuliert, während aber bei niedrigen Energien hadronisch gebundene Zustände relevant sind.

Um in diesem Bereich überprüfbare Vorhersagen zu erhalten, wird nun die chirale Symmetrie der Lagrangedichte benutzt, um eine effektive Feldtheorie für niedrige Energien zu formulieren.

1.3 Chirale Symmetrie

Typische hadronische Massen liegen in der Größenordnung $\Lambda_{\text{QCD}} \approx 1 \text{ GeV}$ wie z. B. das Proton mit einer Masse von 938,3 MeV. Für die Massen der drei leichten Quarks u , d und s gilt aber

$$m_u, m_d, m_s \ll 1 \text{ GeV} ,$$

da $m_s \approx 100 \text{ MeV}$ und $m_u, m_d < 10 \text{ MeV}$ [1]; berücksicht man sogar nur die leichtesten Quarks m_u , m_d , wird die Relation noch deutlicher. Es bedarf auf jeden Fall mehr als der Quarkmassen, um die hadronischen Massen zu erklären. Die Quarkmassen sind in Abb. 1 aufgeführt. Beschränkt man sich auf diese leichten Quarks, motiviert diese Beziehung dazu, die QCD im Grenzfall verschwindender Quarkmassen

$$m_u, m_d, m_s \longrightarrow 0$$

zu betrachten. Die Lagrangedichte reduziert sich dann bei Betrachtung dieser Flavours zu

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = i\bar{q}\gamma^\mu D_\mu q - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu} .$$

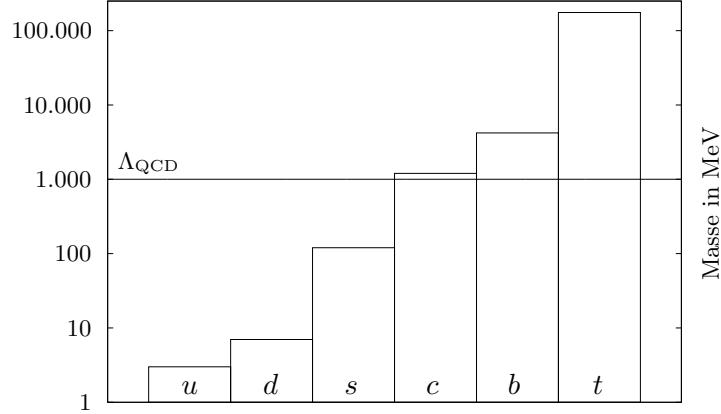


Abb. 1: Quarkmassen (logarithmische Skala). Es werden die unterschiedlichen Größenordnungen der Quarkmassen und insbesondere das Verhältnis zur hadronischen Skala Λ_{QCD} veranschaulicht.

Mit Hilfe der Operatoren

$$P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_5) \quad \text{und} \quad P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_5)$$

können Dirac-Spinoren auf ihre links- und rechtshändigen Anteile projiziert werden, zur Darstellung s. a. Anhang D. Wendet man diese Projektoren auf das Quarkfeld an,

$$q = (P_R + P_L)q = q_R + q_L ,$$

lässt sich die Langragedichte in den Anteilen verschiedener Händigkeit (Chiralität) formulieren:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = i\bar{q}_L \gamma^\mu D_\mu q_L + i\bar{q}_R \gamma^\mu D_\mu q_R - \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a .$$

Die Lagragedichte ist somit invariant unter unabhängigen, globalen rechts- und linkshändigen Drehungen, sie besitzt eine globale, chirale $U(3)_L \times U(3)_R$ Symmetrie. Dieser Grenzfall wird daher als *chiraler Grenzfall* bezeichnet.

1.3.1 Chirale Ströme

Das Noether-Theorem erlaubt es, aufgrund dieser globalen Symmetrie $2 \cdot (8 + 1)$ klassisch erhaltene Ströme zu berechnen, die mit $L^{\mu,a}$, L^μ , $R^{\mu,a}$ und R^μ bezeichnet werden. Diese werden zu vektoriellen und axialen Strömen kombiniert, die sich dann unter Paritäts-

Transformationen entsprechend verhalten:

$$\begin{aligned} V^{\mu,a} &= L^{\mu,a} + R^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q , \\ V^\mu &= L^\mu + R^\mu = \bar{q}\gamma^\mu q , \\ A^{\mu,a} &= L^{\mu,a} - R^{\mu,a} = \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q , \\ A^\mu &= L^\mu - R^\mu = \bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 q . \end{aligned}$$

In der QCD als Quantenfeldtheorie sind die Ströme allerdings nicht klassisch und bleiben auch nicht zwingend erhalten. Bei fast allen dieser Ströme ist dies aber dennoch der Fall, lediglich der axiale Singulettstrom A^μ hat aufgrund von Quanteneffekten eine Anomalie. Die relevante chirale Symmetrie ist für die drei Quarkflavours ($N_f = 3$) somit durch die Gruppe $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V$ realisiert. Berücksichtigt man nur die zwei leichtesten Quarks, gilt dies analog mit $N_f = 2$.

Wenn man nun die Quarkmassen als Störung betrachtet, ändern sich die Divergenzen der Ströme. Zusammenfassend stellt man fest [2]:

- Der vektorielle Oktettstrom $V^{\mu,a}$ bleibt für $m_u = m_d = m_s$ erhalten. Beschränkt man sich auf die zwei leichtesten Quarks u und d , ist diese Annahme auch realistisch.
- Der vektorielle Singulettstrom V^μ bleibt erhalten (Baryonenzahlerhaltung).
- Die axialen Ströme erhalten (zusätzliche) Divergenzen.

2 Chirale Störungstheorie

Die im vorherigen Kapitel betrachtete chirale Symmetrie wird nun benutzt, um die chirale Störungstheorie (χ PT) zu entwickeln [3, 4, 5, 6]. Die chirale Symmetrie wird in der Natur nicht beobachtet. Auch die endlichen Quarkmassen reichen nicht aus, um das reale Teilchenspektrum zu erklären; die chirale Symmetrie muss daher gebrochen sein. Man spricht von einer *spontan gebrochenen* Symmetrie.

2.1 Spontane Symmetriebrechung

Um das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung zu untersuchen, wird zunächst die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\Phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - V(\Phi)$$

betrachtet. Am oft zitierten Beispiel

$$V(\Phi) = \frac{m^2}{2}\Phi^2 + \frac{\lambda}{4}\Phi^4, \quad \lambda > 0$$

kann die spontane Symmetriebrechung illustriert werden. Für den Fall $m^2 < 0$ hat das Potential die Form einer Doppelmulde mit Minima bei

$$\Phi_{\min} = \pm\Phi_0 = \pm\sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}$$

und einem lokalen Maximum bei $\Phi = 0$, wie in Abb. 2 veranschaulicht. Die Theorie besitzt also zwei Grundzustände mit unterschiedlichen Erwartungswerten. Entwickelt man nun $\mathcal{L}(\Phi)$ um eines der beiden Minima,

$$\Phi \rightarrow \Phi \mp \Phi_0 ,$$

erhält man als neue Lagrangedichte

$$\mathcal{L}'(\Phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + m^2\Phi^2 \mp \lambda\Phi_0\Phi^3 - \frac{\lambda}{4}(-\Phi_0^4 + \Phi^4) .$$

Durch die Wahl eines der beiden Grundzustände wird die Symmetrie spontan gebrochen. In der Feldtheorie ist dieses immer mit Entartung von Grundzuständen verbunden, der Grundzustand kann keine Überlagerung beider Zustände sein [2].

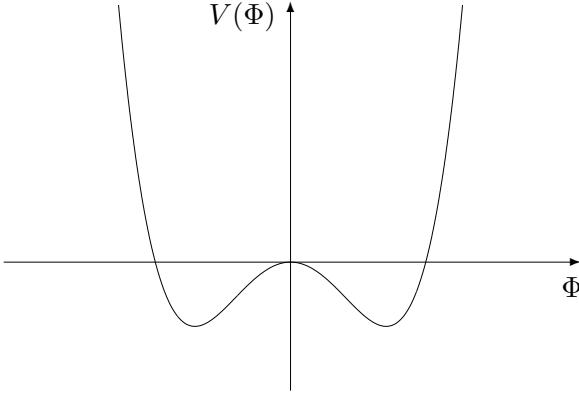


Abb. 2: Doppelmulden-Potential $V(\Phi)$. Durch die Auswahl eines der beiden Minima wird die vorhandene Symmetrie spontan gebrochen.

Es gibt zahlreiche Beispiele, die dieses Phänomen veranschaulichen. Ein sehr einfaches ist in [7] dargestellt:

Ein vollkommen symmetrischer, elastischer Stab steht senkrecht auf einer Ebene. Auf das obere Stabende wird eine Kraft ausgeübt. Überschreitet diese Kraft einen kritischen Wert, biegt sich der Stab in eine Richtung durch. Dieser neue Grundzustand ist unsymmetrisch. Eine beliebig kleine Störung führt letztlich dazu, dass das System einen der möglichen Grundzustände annimmt.

Um die Auswirkung der spontanen Symmetriebrechung auf die QCD zu untersuchen, kann man zunächst die obige Lagrangedichte so modifizieren, dass die globale Symmetrie eine nicht-abelsche ist.

2.1.1 Nicht-abelsche Symmetrie

Die Modifikation zu einer nicht-abelschen Symmetrie lässt sich z. B. durch die Ersetzung

$$\Phi \longrightarrow \vec{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}$$

erreichen. Die Minima $\vec{\Phi}_0$ liegen dann auf einer Kugelschale um $\vec{\Phi} = 0$. Angenommen das gewählte Minimum liegt in Φ_3 -Richtung und man entwickelt nun die Lagrangedichte um dieses, dann ergibt sich nach gleichem Vorgehen wie im letzten Abschnitt die neue Lagrangedichte

$$\mathcal{L}'(\vec{\Phi}) = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\Phi} \partial^\mu \vec{\Phi} + m^2 \Phi_3^2 - \lambda |\vec{\Phi}_0| \Phi_3 \vec{\Phi}^2 - \frac{\lambda}{4} (-(\vec{\Phi}_0^2)^2 + (\vec{\Phi}^2)^2) .$$

Aufgrund der Symmetriebrechung durch Annahme eines Grundzustandes findet man nun zwei unterschiedliche Bosonentypen vor, das massive Boson Φ_3 und zwei masselose *Goldstone-Bosonen*.

Die Erzeugung masseloser Goldstone-Bosonen ist eine grundlegende Eigenschaft bei spontaner Brechung nicht-abelscher Symmetrien [2]. Eine Verallgemeinerung wird im nächsten Abschnitt vorgenommen.

2.2 Goldstone-Theorem

Zunächst betrachtet man wieder eine allgemeine Lagrangedichte der Form

$$\mathcal{L}(\vec{\Phi}) = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\Phi} \partial^\mu \vec{\Phi} - V(\vec{\Phi}),$$

wobei jetzt $V(\vec{\Phi})$ invariant bezüglich einer beliebigen, globalen, kontinuierlichen Symmetriegruppe G ist. Die spontane Symmetriebrechung führt nun dazu, dass der Grundzustand nicht mehr invariant unter allen Transformationen aus G ist. Im Allgemeinen existiert dann eine Untergruppe H bezüglich der der Grundzustand noch invariant ist.

Ist nun n_G die Anzahl der Generatoren der Symmetriegruppe G und für H entsprechend n_H , dann macht das Goldstone-Theorem die folgende Aussage [2]:

Zu jedem Generator, der den Grundzustand nicht vernichtet, gehört ein masseloses Goldstone-Boson. Es existieren also

$$\dim G/H = n_G - n_H$$

Goldstone-Bosonen.

Diese Aussage lässt sich leicht am Beispiel aus Abschnitt 2.1.1 verifizieren. Das Potential ist offensichtlich invariant gegenüber Drehungen im $\vec{\Phi}$ -Raum. Der Grundzustand ist nur invariant bezüglich Drehung um eine Achse (hier: Φ_3), es existieren also zwei masselose Goldstone-Bosonen.

Die allgemeine Aussage des Goldstone-Theorems lässt sich nun auf die chirale Symmetrie der QCD anwenden.

2.2.1 Chirale Symmetriebrechung der QCD

Aufgrund des Teilchenspektrums, das aus den zwei leichtesten bzw. drei leichten Quarks resultiert ($N_f = 2, 3$), stellt man fest, dass die chirale Symmetrie gebrochen ist. Die Hadronen bilden nicht einmal näherungsweise ein entartetes Multiplett. Berücksichtigt man die

Paritätseigenschaften dieser Teilchen, liegt es nahe, $SU(N_f)_V$ als zugrunde liegende Symmetriegruppe der Hadronen anzunehmen. Dies bedeutet, dass die aus den vektoriellen Strömen resultierenden Ladungen Q_V^a und Q_V (Baryonenzahl) den Grundzustand vernichten, d. h. der Grundzustand ist invariant bezüglich $SU(N_f)_V \times U(1)_V$. Die für jeden Quarkflavour separate $U(1)_V$ -Symmetrie wird im Folgenden nicht näher betrachtet, da diese zur Klassifikation der Hadronen bezüglich ihrer Baryonenzahl führt.

Mit dem Goldstone-Theorem folgt dann mit den Symmetriegruppen

$$G = SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R , \\ H = SU(N_f)_V ,$$

dass die Anzahl der Goldstone-Bosonen mit

$$N_f = 2 : n = 6 - 3 = 3 \\ N_f = 3 : n = 16 - 8 = 8$$

festgelegt ist. Geht man nur von den Quarkflavours u und d aus, können die drei Pionen π^\pm und π^0 mit den Goldstone-Bosonen identifiziert werden. Fügt man noch das s -Quark hinzu, erhält man zusätzlich die vier Kaonen und das η -Meson, diese bilden zusammen das Oktett der pseudoskalaren Mesonen.

2.2.2 Goldstone-Bosonen-Felder

Die Anzahl der Goldstone-Bosonen ist durch die Dimension der Gruppen G und H eindeutig bestimmt. Des Weiteren erhält man auch Aussagen über die Transformationseigenschaften der Felder der Goldstone-Bosonen, wie nun skizziert wird.

Für jedes $g \in G$ definiert die Menge

$$gH \stackrel{\text{def}}{=} \{gh | h \in H\}$$

eine sog. *Linksnebenklasse* von H . Betrachtet man nun die Felder, kann man zeigen, dass die Variablen der Goldstone-Bosonen isomorph zu den Elementen der Menge der Linksnebenklassen $\{gH | g \in G\}$ sind [2]. Das Transformationsverhalten bezüglich G ist abgesehen von der Parametrisierung eindeutig festgelegt. Ist nun speziell

$$G = \{(L, R) | L, R \in SU(N_f)\} = SU(N_f) \times SU(N_f) , \\ H = \{(V, V) | V \in SU(N_f)\} \cong SU(N_f) ,$$

so lässt sich leicht eine Darstellung U der Linksnebenklasse $\tilde{g}H = \{(\tilde{L}V, \tilde{R}V) | V \in SU(N_f)\}$ angeben:

$$(\tilde{L}V, \tilde{R}V) = (\tilde{L}V, R\tilde{L}^\dagger \tilde{L}V) = (1, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger)(\tilde{L}V, \tilde{L}V) \Rightarrow \tilde{g}H = (1, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger)H = (1, U)H .$$

Wählt man konventionsgemäß das erste Argument als 1, ist die $SU(N_f)$ -Matrix $U = \tilde{R}\tilde{L}^\dagger$ von $\tilde{g}H$ sogar eindeutig. Das Transformationsverhalten von U lässt sich direkt ablesen, da wegen

$$g\tilde{g}H = (L, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger)H = (1, R\tilde{R}\tilde{L}^\dagger L^\dagger)(L, L)H = (1, RUL^\dagger)H$$

unter expliziter Angabe der x -Abhängigkeit der Felder somit gilt:

$$U(x) \longrightarrow U'(x) = RU(x)L^\dagger . \quad (2.1)$$

2.2.3 Feldkonfiguration $U(x)$

Die Feldkonfigurationen der Goldstone-Bosonen werden wie üblich in der Exponentialdarstellung parametrisiert. Für $N_f = 2$ werden dazu die Pauli-Matrizen τ_i als Generatoren der $SU(2)$ benutzt (s. Anhang C.1). Die Indizes $\{i, j, k, \dots\}$ laufen immer über 1, 2 und 3. Die Feldkonfiguration ist durch

$$U(x) = \exp\left(\frac{i}{F_0}\tau_i\pi_i(x)\right)$$

gegeben, wobei die Konstante $F_0 \approx 86$ MeV die Dimension einer Energie hat, damit der Exponent dimensionslos ist. Außer der Konstanten F_0 wird in der Literatur auch die Konstante $f_0 = \sqrt{2}F_0$ verwendet. Des Weiteren ist

$$\tau_i\pi_i = \begin{pmatrix} \pi_3 & \pi_1 - i\pi_2 \\ \pi_1 + i\pi_2 & -\pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix} ,$$

dabei entsprechen die π_i den kartesischen Feldkomponenten, π^\pm und π^0 den in der Natur beobachtbaren Ladungseigenzuständen.

Analog werden für $N_f = 3$ die Gell-Mann-Matrizen zur Parametrisierung herangezogen:

$$U(x) = \exp\left(\frac{i}{F_0}\lambda_a\phi_a(x)\right) ,$$

hier ist dann

$$\lambda_a\phi_a = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} .$$

Mit dieser Parametrisierung soll nun eine effektive Feldtheorie formuliert werden.

2.3 Effektive Feldtheorie

Um eine effektive Feldtheorie aufzustellen, sucht man die allgemeinste Lagrangedichte, die aus allen möglichen Termen besteht, die mit der vorgegebenen Symmetrie übereinstimmen. Dieses ist i. Allg. eine unendliche Zahl von unabhängigen Beiträgen.

Die Methode der effektiven Feldtheorie bietet sich immer dann an, wenn man zwei Skalen unterschiedlicher Größenordnung hat. So kann man z. B. in dem Bereich, wo Massen und Impulse klein sind im Verhältnis zu Λ_{QCD} , die Eigenschaften der Mesonen durch eine effektive Feldtheorie beschreiben. Die unterschiedlichen Skalen ermöglichen es, die effektive Lagrangedichte nach einem Schema zu sortieren, indem die Massen und Impulse nach ihren Potenzen angeordnet werden. Außerdem muss berücksichtigt werden, welche Feynman-Diagramme in welcher Ordnung relevant sind. Aussagen darüber liefert das *Weinberg'sche Powercounting*.

2.3.1 Weinberg'sches Powercounting

Zunächst müssen die Massen und Impulse sortiert werden, d. h. die Lagragedichte wird nach Potenzen von Quarkmassen und Ableitungen sortiert. Da, wie man sehen wird, $m_\pi^2 \sim m_q$, wird den Quarkmassen dieselbe Ordnung zugewiesen wie zwei Impulsen [2]. In dieser Zählweise treten dann nur gerade Ordnungen von p und m auf:

$$\mathcal{L} = \sum_D \mathcal{L}_D = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \dots ,$$

D ist die *chirale Dimension* des Beitrags \mathcal{L}_D . Auch den Feynman-Diagrammen muss eine solche Dimension zugeordnet werden. Betrachtet man nun ein beliebiges verbundenes Diagramm, ergibt eine Reskalierung der äußeren Impulse und Massen mit einem Faktor t bzw. t^2 für die Amplitude

$$\mathcal{M}(tp, t^2 m_0^2) = t^D \mathcal{M}(p, m_0^2) .$$

Ein solches Diagramm enthält i. Allg. N_{2n} Vertizes mit $2n$ Ableitungen und jeweils einer impulserhaltenen δ -Funktion, die somit insgesamt zur chiralen Dimension den Beitrag

$$\sum_n N_{2n} (2n - 4)$$

liefert. Zusätzlich fügt die Impulserhaltung der äußeren Impulse einen Beitrag von vier zur chiralen Dimension hinzu. Des Weiteren sind N_I innere Linien im Diagramm, diese liefern wegen

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \xrightarrow[m_0^2 \rightarrow t^2 m_0^2]{k \rightarrow tk} t^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m_0^2}$$

einen weiteren Beitrag von $2N_I$.

Insgesamt ergibt sich daraus eine chirale Dimension

$$D = 4 + 2N_I + \sum_n N_{2n} (2n - 4) .$$

Diese Formel lässt sich alleine auf die Anzahl der Schleifen und der Vertizes zurückführen, wenn man den Zusammenhang

$$N_I = N_L + (N_V - 1) , \quad N_V = \sum_n N_{2n}$$

mit der Anzahl unabhängiger Schleifen N_L ausnutzt; es ergibt sich

$$D = 2 + 2 \sum_n N_{2n}(n - 1) + 2N_L .$$

Man erkennt sofort, dass die Schleifenbeiträge unterdrückt sind. Berücksichtigt man z. B. in der effektiven Lagrangedichte Terme bis einschließlich \mathcal{L}_4 ($D = 4$), treten nur Ein-Schleifenbeiträge aus den Diagrammen in \mathcal{L}_2 auf; bis einschließlich \mathcal{L}_2 ($D = 2$) sind sogar keine Schleifenbeiträge enthalten. Die Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2$ wird mit *führender* Ordnung (LO, engl.: *leading order*) bezeichnet, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4$ mit *nächstführender* Ordnung (NLO, engl.: *next-leading order*).

2.3.2 Konstruktion einer effektiven Lagrangedichte

Die Lagrangedichte führender Ordnung enthält nach dem Weinberg'schen Powercounting alle chiral invarianten Terme mit zwei Ableitungen. Um die Spur der Matrizen zu symbolisieren, wird der Einfachheit halber die Notation

$$\langle \dots \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tr}(\dots)$$

verwendet. Die allgemeinste Lagrangedichte führender Ordnung enthält Ableitungen und wird deswegen mit *derivativ* (der) gekennzeichnet, dieser Term ist von der Form

$$\mathcal{L}_{\text{der}} = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle .$$

Der Vorfaktor ist gerade so gewählt, dass in der Entwicklung nach den Feldern der kinetische Anteil die gewohnte Form

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \pi_i \partial^\mu \pi_i \quad \text{für } N_f = 2$$

hat. Zusätzlich muss auch die explizite Symmetriebrechung durch die Quarkmassen berücksichtigt werden. Nehmen wir den Fall $N_f = 2$ und $m = m_u = m_d$, d. h. die Massenmatrix

$$M = m \mathbf{1} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$$

parametrisiert den Massenanteil der QCD-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_M = -q_R M q_L - q_L M^{(\dagger)} q_R .$$

Die Lagrangedichte wäre wegen Gl. (2.1) offensichtlich invariant, wenn M wie

$$M \longrightarrow M' = R M L^\dagger$$

transformieren würde. Diese Annahme zur Konstruktion einer effektiven Lagrangedichte wird als *Spurionanalyse* bezeichnet. Die dann allgemeinste Form der Lagrangedichte in niedrigster Ordnung in M ist dann [2]

$$\mathcal{L}_{\text{sb}} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \langle M U^\dagger + U M^\dagger \rangle$$

mit dem zusätzlichen Parameter B_0 . Mittels der später verwendeten Abkürzung $\chi = \chi_0 \mathbb{1} = 2B_0 m \mathbb{1}$ lässt sich dies umschreiben zu

$$\mathcal{L}_{\text{sb}} = \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle .$$

Das so konstruierte \mathcal{L}_{sb} bricht die chirale Symmetrie der effektiven Lagrangedichte. Der symmetriebrechende (sb) Anteil lässt sich in den Feldern entwickeln, für $N_f = 2$ erhält man

$$\mathcal{L}_{\text{sb}} = \text{const.} + \frac{1}{2} \chi_0 \pi_i^2 + \mathcal{O}(\pi^4) .$$

Durch die explizite Symmetriebrechung erhalten den Goldstone-Bosonen eine Masse; die Pionen haben so in führender Ordnung die Masse

$$m_\pi^2 = \chi_0 = 2B_0 m .$$

Die eigentlichen Goldstone-Bosonen sind masselos, deswegen spricht man hier auch von *Pseudo-Goldstone-Bosonen*. Die Relation $m_\pi^2 \sim m_q$ wurde bereits im vorherigen Abschnitt benutzt, um ein sinnvolles Sortierschema aufzustellen.

3 Gitter-QCD

Die Gitter-QCD unterscheidet sich von der konventionellen dadurch, dass die Raumzeit durch ein diskretes Raum-Zeit-Gitter ersetzt wird. Auf diesem Gitter sollen mit Hilfe von Computer-Rechnungen (z. B. Monte-Carlo-Simulationen) physikalische Größen aus der QCD extrahiert werden. In diesem Kapitel werden Grundlagen der Gitter-QCD besprochen und mögliche Auswirkungen auf bisherige Ergebnisse, wie z. B. die Symmetriebrechung, überprüft.

3.1 Wilson Gitter-Formulierung

Die Gitter-QCD wird auf einem euklidischen Gitter formuliert, d. h. die Metrik des Minkowski-Raumes wird durch die euklidische Metrik ersetzt.

3.1.1 Euklidische Metrik

Um die QCD und die chirale Störungstheorie auf dem Gitter zu formulieren, müssen die jeweiligen Ausdrücke transformiert werden. An die Stelle des aus der Relativitätstheorie bekannten metrischen Tensors

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

tritt die euklidische Entsprechung, d. h.

$$g_{\mu\nu}^E = \delta_{\mu\nu} = \mathbb{1} .$$

Die Raumzeit-Koordinaten müssen der neuen Metrik angepasst werden. Diese wird dadurch erreicht, dass man von der reellen Zeit x_0 zu einer imaginären Zeit $x_4 = ix_0$ übergeht, die euklidischen Koordinaten sind mit $\mu = 1, \dots, 4$ indiziert. In der komplexen Ebene entspricht diese Transformation gerade einer Drehung um $\pi/2$, die als *Wick-Rotation* bezeichnet wird.

Auch die Antikommunitatoren der Dirac-Matrizen müssen der neuen Metrik angepasst werden:

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu} \longrightarrow [\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E]_+ = 2\delta_{\mu\nu} .$$

Dieses wird z. B. durch die Ersetzungen

$$\gamma_4^E = -\gamma^0 \quad \text{und} \quad \gamma_i^E = i\gamma^i$$

erreicht [7, 9]. Zu einer expliziten chiralen Darstellung der Dirac-Matrizen s. Anhang D.

3.1.2 Wilson-Wirkung

Die einfachste Möglichkeit die QCD auf dem Gitter zu formulieren, besteht darin, von der Kontinuums-Wirkung auszugehen und zu substituieren; Ableitungen werden durch endliche Differenzen ersetzt und das Raumzeit-Integral wird zu einer Summe über die Gitterplätze. Es zeigt sich aber, dass diese Wirkung für eine nichtverschwindende Gitterkonstante a nicht eichinvariant ist. Die Eigenschaften der Renormierung führen schließlich sogar dazu, dass die Eichinvarianz auch beim Grenzübergang $a \rightarrow 0$ verletzt wird. Die Lösung dieses Problems besteht darin, die Wirkung so zu modifizieren, dass diese für jedes a eichinvariant ist. Die Wilson Gitter-Formulierung [8] stellt eine solche Lösung dar, sie ist insbesondere eine eichinvariante Regularisierung der QCD für eine beliebige Anzahl von Quarkflavours.

Das Produkt von Feldern an verschiedenen Orten $\psi(x)\psi(y)$ ist auf dem Gitter nicht invariant unter Eichtransformationen. Es ist notwendig, eine Matrix $U(x, y) \in \mathrm{SU}(N_f)$ einzuführen, so dass

$$\psi(x)U(x, y)\psi(y)$$

eichinvariant ist. In Analogie zu ähnlichen Objekten der Differentialgeometrie wird $U(x, y)$ als *Parallel-Transporter* bezeichnet. Auf dem Gitter wird ein elementarer Parallel-Transporter durch die sog. *Link-Variable*

$$U_\mu(x) \stackrel{\text{def}}{=} U(x + a\hat{\mu}, x) = \exp\left(ig_0 a A_\mu^b(x) \lambda_b\right)$$

definiert, wobei $\hat{\mu}$ der Einheitsvektor in μ -Richtung ist und g_0 die nackte Kopplung. Diese Verknüpfung von einem Gitterpunkt x und der Richtung μ repräsentiert auf dem Gitter das Eichfeld [9]. Die *Plaquette-Variable* $U(p)$ ist dann durch das Produkt der Link-Variablen entlang des Randes der Plaquette p gegeben:

$$U(p) = U_{\mu\nu}(x) \stackrel{\text{def}}{=} U_{-\nu}(x + a\hat{\nu}) U_{-\mu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) .$$

In der üblichen Notation ist die Wilson-Wirkung von der Form

$$S[U, \bar{\psi}, \psi] = S_G[U] + S_F[U, \bar{\psi}, \psi] , \quad (3.1)$$

dabei bezeichnet S_G die gewöhnliche Plaquette-Wirkung und S_F die Quark-Wirkung. Die Plaquette-Wirkung S_G setzt sich aus den Plaquette-Variablen $U(p)$ zusammen:

$$S_G[U] = \frac{1}{g_0^2} \sum_p \langle 1 - U(p) \rangle ,$$

die Summe läuft über alle orientierten Plaquetten des Gitters. Die Quark-Wirkung

$$S_F[U, \bar{\psi}, \psi] = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) (D_W + m_0) \psi(x)$$

enthält die nackte Quarkmasse m_0 , die Wilson-Dirac-Matrix

$$D_W = \frac{1}{2} (\gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) - ar \nabla_\mu^* \nabla_\mu)$$

und eine Summation über die Gitterpunkte x . Die Wilson-Dirac-Matrix setzt sich aus der Gitterkonstanten a , einem Parameter r und den eichkovarianten Ableitungen

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \psi(x) &= \frac{1}{a} (U_\mu(x) \psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x)) , \\ \nabla_\mu^* \psi(x) &= \frac{1}{a} (\psi(x) - U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \psi(x - a\hat{\mu})) \end{aligned}$$

zusammen. Nahe am Kontinuum beschreiben die so definierten Terme ein effektive Wirkung der Form

$$S_{\text{eff}} = S_0 + aS_1 + a^2 S_2 + \dots$$

mit der Wirkung der Kontinuums-QCD S_0 . Des Weiteren enthält die Wirkung auch Terme der Ordnung $\mathcal{O}(a)$, welche bei endlichem a große Beiträge liefern können. Eine mögliche Verbesserung liefert das *Symanzik improvement programme* [10], dessen Anwendung lediglich zu Gitterterminen der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ und höher führt.

3.1.3 Symanzik-Wirkung

Die Idee, die dem Symanzik improvement programme zugrunde liegt, wird in [9] dargelegt. Durch Einführung zusätzlicher Gegenterme sollen alle Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ eliminiert werden. Dabei werden die in der Wilson-Wirkung auftretenden Korrekturterme

$$S_k = \int \mathcal{L}_k(x) d^4x$$

näher untersucht. Zunächst ist die Zahl der relevanten Terme aufgrund ihrer Dimension $4+k$ eingeschränkt. Des Weiteren kann wegen der x -Integration mittels partieller Integration die Anzahl der möglichen Terme reduziert werden. Die übrigen Terme müssen noch invariant unter $U(1) \times SU(N_f)$ sein, so dass letztendlich fünf Terme relevant sind:

$$\begin{aligned} O_1 &= \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi , \\ O_2 &= \bar{\psi} D_\mu D_\mu \psi + \bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu \overrightarrow{D}_\mu \psi , \\ O_3 &= m \langle F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rangle , \\ O_4 &= m \left(\bar{\psi} \gamma_\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu \gamma_\mu \psi \right) , \\ O_5 &= m^2 \bar{\psi} \psi . \end{aligned}$$

Wie die Wirkung wird ein lokal eichinvariantes Feld ϕ durch ein effektives Feld

$$\phi_{\text{eff}}(x) = \phi_0(x) + a\phi_1(x) + a^2\phi_2(x) + \dots$$

dargestellt. Mögliche Kontaktterme aus \mathcal{L}_1 können durch eine Redefinition des Feldes ϕ_1 kompensiert werden. Letztendlich führt dies dazu, dass O_2 und O_4 eliminiert werden können. Des Weiteren kann gezeigt werden, dass durch Anwendung eines Masse unabhängigen Renormierungsschemas die Beiträge von O_3 und O_5 irrelevant werden. Die so verbesserte Wirkung

$$S_{\text{impr}}[U, \bar{\psi}, \psi] = S[U, \bar{\psi}, \psi] + \delta S[U, \bar{\psi}, \psi]$$

setzt sich aus der Wilson-Wirkung S aus Gl. (3.1) und dem zusätzlichen Term

$$\delta S[U, \bar{\psi}, \psi] = a^5 \sum_x c_{\text{SW}} \frac{i}{4} \bar{\psi}(x) \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} \psi(x)$$

zusammen, $\hat{F}_{\mu\nu}$ ist eine spezielle Gitterdarstellung des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$ und c_{SW} der sog. Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient.

Insgesamt liefert das Symanzik improvement programme so eine $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung. Allerdings bestehen weiterhin Nachteile [11], die Gittersimulationen deutlich erschweren. Dazu gehören insbesondere die verschwindend kleinen Eigenwerte der Wilson-Dirac-Matrix. Diese kleinen Eigenwerte und deren Eigenvektoren führen auch bei größeren Quarkmassen zu sog. *Quark Zero Modes*, die in der QCD eigentlich nur bei verschwindenden Quarkmassen auftreten. Daraus resultieren Fluktuationen der Observablen, die eine verlässliche statistische Auswertung unmöglich machen. Ein vielversprechender Lösungsansatz für dieses Problem liegt in der Twisted-Mass Gitter-QCD.

Bevor wir uns dieser zuwenden, wird an dieser Stelle zunächst die sog. *Wilson-Mittelung* vorgestellt.

3.1.4 Wilson-Mittelung

Grundlage der Wilson-Mittelung bildet die Tatsache, dass die Kontinuums-Wirkung invariant gegenüber Transformationen der Art

$$\mathcal{R}_5 : \begin{cases} \psi \rightarrow \psi' = \gamma_5 \psi \\ \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = -\psi' \gamma_5 \end{cases} ,$$

ist, der sog. *\mathcal{R}_5 -Parität*. Wie bei der Spurion-Analyse (sp) der Quarkmasse m kann man hier m_0 und den Parameter r in der Gitter-Wirkung als Feld annehmen und die Transformation

$$\mathcal{R}_5^{\text{sp}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_5 \times [r \rightarrow -r] \times [m_q \rightarrow -m_q]$$

definieren, die eine Symmetrie der Gitter-Wirkung ist. m_q ist als Differenz von nackter und kritischer Masse definiert: $m_q = m_0 - m_{\text{cr}}$. Der Mittelwert einer Observablen mit verschiedenen gewählten Vorzeichen für m_q oder r führt zu einer interessanten Beobachtung. In [12] wird die $\mathcal{R}_5^{\text{sp}}$ -Parität benutzt, um zu zeigen, dass der Erwartungswert eines eichinvarianten Operators O durch Wilson-Mittelung (engl.: *wilson average*, WA)

$$\langle O \rangle_{(m_q)}^{\text{WA}} = \frac{1}{2} [\langle O \rangle_{(r, m_q)} + \langle O \rangle_{(-r, m_q)}]$$

bzw. durch Massen-Mittelung (MA)

$$\langle O \rangle_{(m_q)}^{\text{MA}} = \frac{1}{2} [\langle O \rangle_{(r, m_q)} + \langle O \rangle_{(r, -m_q)}]$$

um Ordnung $\mathcal{O}(a)$ verbessert wird, d. h., dass sich die Gitterartefakte dieser Ordnung absorbieren. Allerdings sind damit i. Allg. zwei Werte (d. h. zwei Simulationen) notwendig, um die beiden Erwartungswerte zu bestimmen, aus denen anschließend der Mittelwert gebildet wird.

3.2 Twisted-Mass Gitter-QCD

Ausgangspunkt für Twisted-Mass Gitter-QCD ist die Wilson-Wirkung (3.1) mit einem neuen Dirac-Operator

$$D_{\text{twist}} = D_W + i\mu_q \gamma_5 \tau_3 .$$

Durch diesen zusätzlichen Term ist der Dirac-Operator für $\mu_q \neq 0$ gegen Quark Zero Modes geschützt, da [13]

$$\det_2(D_{\text{twist}}) = \det_1(D_W^\dagger D_W + \mu_q^2) > 0 ,$$

$\det_{1,2}$ sind die Determinanten im 1- bzw. 2-Flavour-Raum. Des Weiteren kann man zeigen, dass die Twisted-Mass Gitter-QCD und die gewöhnliche Gitter-QCD abgesehen von Cut-Off-Effekten äquivalent sind [14].

Im Kontinuum führt eine Transformation der Felder

$$\psi \longrightarrow \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\gamma_5 \tau_3\right) \psi , \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} \exp\left(i\frac{\alpha}{2}\gamma_5 \tau_3\right)$$

die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(x) = \psi(x)(D + m + i\mu_q \gamma_5 \tau_3)\psi(x)$$

mit $\alpha = \frac{\mu_q}{m_q}$ über in

$$\mathcal{L}'(x) = \psi(x)(D + m')\psi(x) ,$$

was der gewöhnlichen QCD mit $m' = \sqrt{m^2 + \mu_q^2}$ entspricht. Diese beiden Formulierungen sind äquivalent und haben den gleichen physikalischen Inhalt.

Bei der Aufstellung der Wirkung in Twisted-Mass Gitter-QCD zeichnen sich zwei spezielle Darstellungen aus. Durch geignete Wahl der Basis und Reparametrisierung der Variablen kann der Term $i\mu_q\gamma_5\tau_3$ auf den Massen- oder auf den Wilson-Term geschoben werden. Im ersten Fall spricht man von der sog. *Twisted Basis* mit

$$S_F^{\text{tw}}[U, \bar{\psi}_{\text{tw}}, \psi_{\text{tw}}] = a^4 \sum_x \bar{\psi}_{\text{tw}}(x) \left(\frac{1}{2} \gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) \right. \\ \left. + \left(-a \frac{r}{2} \nabla_\mu^* \nabla_\mu + m_{\text{cr}}(r) \right) + m_q \exp(i\omega\gamma_5\tau_3) \right) \psi_{\text{tw}}(x)$$

und im anderen von der *Physical Basis* mit

$$S_F^{\text{ph}}[U, \bar{\psi}_{\text{ph}}, \psi_{\text{ph}}] = a^4 \sum_x \bar{\psi}_{\text{ph}}(x) \left(\frac{1}{2} \gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) \right. \\ \left. + \left(-a \frac{r}{2} \nabla_\mu^* \nabla_\mu + m_{\text{cr}}(r) \right) \exp(-i\omega\gamma_5\tau_3) + m_q \right) \psi_{\text{ph}}(x).$$

Neben der Vermeidung von Quark Zero Modes hat die Twisted-Mass Gitter-QCD weitere Vorteile, wie die automatische $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung.

3.2.1 Automatische $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung bei $\omega = \pm\pi/2$

Das zugrunde liegende Argument, das zum Beweis dieser Eigenschaft für $N_f = 2$ führt, basiert auf einer speziellen Wilson-Mittelung. Die Wirkung der Twisted-Mass Gitter-QCD unterscheidet sich von der gewöhnlichen Gitter-Wirkung, so dass zunächst $\mathcal{R}_5^{\text{sp}}$ modifiziert werden muss. Außerdem ist die Wirkung insbesondere invariant unter der Transformation

$$[r \rightarrow -r] \times [\omega \rightarrow \omega + \pi].$$

Bei der Wilson-Mittelung kann man nun statt des Vorzeichenwechsels in r auch eine Phasenverschiebung in ω vornehmen. Für Operatoren, die unter der Transformation $\omega \rightarrow -\omega$ gerade ω -Parität besitzen, gilt

$$\langle O \rangle_\omega = \langle O \rangle_{-\omega}.$$

Zu diesen Operatoren gehören viele Observablen, wie z. B. Matrixelemente und Energieigenwerte. Im Spezialfall $\omega = \pm\pi/2$ ist die Phasenverschiebung um π gleichbedeutend mit einem Vorzeichenwechsel $[\omega \rightarrow -\omega]$, aufgrund der obigen Invarianz gilt also

$$\langle O \rangle_r = \langle O \rangle_{-r}.$$

Damit benötigt man bei der Wilson-Mittelung lediglich einen einzelnen Wert; der Erwartungswert ist somit für $\omega = \pm\pi/2$ automatisch $\mathcal{O}(a)$ -verbessert.

3.3 Effektive Lagrangedichte

Bisher wurden die Eigenschaften der Twisted-Mass Gitter-QCD diskutiert. Nun werden die Auswirkungen auf die effektive Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie explizit aufgeführt.

3.3.1 Gitterterm

In Abschnitt 2.3.2 wurde die allgemeinste Lagrangedichte in führender Ordnung konstruiert. Auf dem Gitter müssen zusätzliche Terme berücksichtigt werden. Mit Hilfe der Spurionanalyse lassen sich analog zum Massenterm mögliche Gitterterme konstruieren. Die Gitterkonstante verhält sich dabei ganz ähnlich wie die Störung durch die Quarkmasse, so dass man schließlich den zusätzlichen Term

$$-\frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle$$

mit $\rho = \rho_0 \mathbb{1} = 2W_0 a \mathbb{1}$ berücksichtigen muss. Neben F_0 und B_0 tritt zusätzlich der Parameter W_0 auf.

Energieskalen

Das Aufstellen einer effektiven Feldtheorie bietet sich, wie bereits im Abschnitt 2.3 erläutert, immer dann an, wenn zwei unterschiedliche (Energie-)Skalen auftreten. Durch die Einführung des Gitterterms tritt eine zusätzliche Energieskala in der Lagrangedichte auf, analog zum Massenparameter χ_0 der Gitterparameter ρ_0 . Mit diesen Größen lassen sich zwei Entwicklungsparameter einführen, für die Massen und Impulse

$$\varepsilon \sim \frac{p^2}{\Lambda^2} \sim \frac{\chi_0}{\Lambda^2}$$

und für das Gitter

$$\delta \sim \frac{\rho_0}{\Lambda^2} .$$

Diese müssen zueinander in Beziehung gesetzt werden, um eine eindeutige Entwicklung zu definieren. Eine sinnvolle Hierarchie ist durch

$$\{\varepsilon, \delta\} \gg \{\varepsilon^2, \varepsilon\delta\} \gg \delta^2$$

gegeben, da die eigentliche symmetriebrechende Größe die Quarkmasse ist; das Gitter ist ein zusätzlicher Störfaktor. Diese Hierarchie ist Grundlage aller folgenden Rechnungen.

3.3.2 Auswirkung der axialen Drehung

Wie bereits in Abschnitt 3.2 gezeigt, ist in der Twisted Basis die Drehung eine axiale Drehung des Massenterms m_q gemäß

$$m_q \longrightarrow m_q e^{i\omega \gamma_5 \tau_3} .$$

Mit Hilfe einer Spurionanalyse der Matrix χ ist das Transformationsverhalten

$$\chi \longrightarrow \chi(\omega) = e^{-i\omega \frac{\tau_3}{2}} \chi e^{-i\omega \frac{\tau_3}{2}} \quad (3.2)$$

derart, dass der Massenterm von der Form

$$-\frac{F_0^2}{4} \langle \chi(\omega) U^\dagger + U \chi(\omega)^\dagger \rangle$$

ist. In der chiralen Störungstheorie transformiert U nach Gl. (2.1) gemäß

$$U \longrightarrow U' = RUL^\dagger .$$

Für die spezielle Drehung

$$R = e^{-i\omega \frac{\tau_3}{2}} \quad \text{und} \quad L = e^{i\omega \frac{\tau_3}{2}}$$

ergibt sich daraus

$$U \longrightarrow U' = e^{-i\omega \frac{\tau_3}{2}} U e^{-i\omega \frac{\tau_3}{2}} . \quad (3.3)$$

Eine Transformation nach Gl. (3.2) und (3.3) liefert unter Berücksichtigung der Zyklizität der Spur den Massenterm

$$-\frac{F_0^2}{4} \langle \chi(\omega) U^\dagger + U \chi(\omega)^\dagger \rangle = -\frac{F_0^2}{4} \langle \chi U'^\dagger + U' \chi^\dagger \rangle .$$

Hierin spiegelt sich die Tatsache wieder, dass die Kontinuums-QCD invariant bezüglich axialer Drehungen ist. Dieses wird hier in der chiralen Störungstheorie durch eine zusätzliche Transformation der Matrix U verifiziert.

Eine solche Transformation wirkt sich aber nicht nur auf den Massenterm aus, denn auch im Gitterterm muss diese Transformation durchgeführt werden. So wie die axiale Drehung des Massenterms durch eine Transformation der Felder absorbiert wurde, kann diese im Gitterterm auf die Matrix ρ so übertragen werden, dass

$$\begin{aligned} \rho &\longrightarrow \rho(\omega) = e^{i\omega \frac{\tau_3}{2}} \rho e^{i\omega \frac{\tau_3}{2}} \\ &= \rho_0 \mathbb{1} + i\rho_3 \tau_3 , \end{aligned}$$

mit $\rho_0 = 2W_0 a \cos \omega$ und $\rho_3 = 2W_0 a \sin \omega$. Damit folgt für den Gitterterm, wieder aufgrund der Zyklizität der Spur,

$$-\frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle = -\frac{F_0^2}{4} \langle \rho(\omega) U'^\dagger + U' \rho(\omega)^\dagger \rangle .$$

In dieser Darstellung, der Physical Basis, hat der Massenterm seine gewohnte Gestalt, die folgenden Rechnungen werden in dieser Basis durchgeführt. Der Gitterterm erhält aus der axialen Drehung eine Abhängigkeit vom Winkel ω . Dieses führt für $\omega \neq 0$ zu anderen Gitterartefakten, insbesondere erhält man für $\omega = \pm\pi/2$ die automatische $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung. Auf die Angabe der expliziten ω -Abhängigkeit $\rho = \rho(\omega)$ wird, wie auch auf den Strich an der Matrix U , im Folgenden verzichtet.

3.3.3 Effektive Lagrangedichte

Abschließend werden am Ende dieses Kapitels die Lagrangedichten in führender und nächstführender Ordnung angegeben, auf die bei allen Berechnungen physikalischer Größen immer wieder verwiesen wird.

Die effektive Lagrangedichte ist nach [15] in führender Ordnung $\mathcal{L}_{\text{LO}} = \mathcal{L}_2$ mit

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle . \quad (3.4a)$$

An gleicher Stelle ist auch die effektive Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{NLO}} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4$ in nächstführender Ordnung angegeben, sie setzt sich aus dem in (3.4a) aufgeführten Anteil und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & - L_1 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle^2 - L_2 \langle \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \rangle^2 - L_3 \langle (\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger)^2 \rangle \\ & + L_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle + W_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle \\ & + L_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle + W_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle \\ & - L_6 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle^2 - W_6 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle - W'_6 \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle^2 \\ & - L_7 \langle \chi^\dagger U - U^\dagger \chi \rangle^2 - W_7 \langle \chi^\dagger U - U^\dagger \chi \rangle \langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \rangle - W'_7 \langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \rangle^2 \\ & - L_8 \langle \chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi \rangle - W_8 \langle \rho^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \chi \rangle \\ & - W'_8 \langle \rho^\dagger U \rho^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \rho \rangle \end{aligned} \quad (3.4b)$$

zusammen. Die Koeffizienten L_1 bis W'_8 sind die sog. *Gasser-Leutwyler-Koeffizienten* (GL-Koeffizienten).

4 Methodik der χ PT für Twisted-Mass Gitter-QCD

In diesem Kapitel werden Rechenverfahren vorgestellt, mit denen physikalische Größen aus der Lagrangedichte für den Fall $N_f = 2$ extrahiert werden können. Zunächst wird gezeigt, wie in führender Ordnung mit Methoden der Analysis die Massen berechnet werden. Im Anschluss daran soll mit Hilfe der Störungsrechnung das Ergebnis reproduziert und auf die nächstführende Ordnung ausgeweitet werden. Dabei wird der schon in [16, 17] verwendete Ansatz benutzt, um Ergebnisse bis einschließlich $\mathcal{O}(a^2)$ zu erhalten. Die Analyse dieses Vorgehens führt schließlich zu einer effizienten Methode der chiralen Störungstheorie für Twisted-Mass Gitter-QCD.

4.1 Analytische Berechnung in führender Ordnung

4.1.1 Lagrangedichte

Aus der Exponentialdarstellung aus Abschnitt 2.2.3 lassen sich einige der im Folgenden benötigten Größen berechnen. Zur Darstellung bietet sich neben den trigonometrischen Funktionen auch die sog. „Spaltfunktion“*

$$\text{si}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin(x)}{x}$$

an. Zunächst ist wegen der Produkteigenschaft der Pauli-Matrizen (s. Anhang C.1)

$$\begin{aligned} U(x) &= \cos\left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0}\right)\mathbb{1} + i\frac{\pi_i}{F_0}\text{si}\left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0}\right)\tau_i \\ &= \cos\left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0}\right)\mathbb{1} + i\frac{\pi_i}{|\vec{\pi}|}\sin\left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0}\right)\tau_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

und $U^\dagger(x)$ ist entsprechend mit umgedrehten Vorzeichen des imaginären Terms. Dabei wird die Abkürzung $|\vec{\pi}| = \sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2}$ verwendet. Der Ausdruck ist wohldefiniert, da in der

*Die Bezeichnung „Spaltfunktion“ kommt daher, dass das Beugungsbild eines endlichen Spalts die si-Funktion ist, d. h. die si-Funktion ist die Fouriertransformierte der Rechteckfunktion.

Entwicklung nach den Feldern nur Terme der Form

$$|\vec{\pi}|^{2n} = (\vec{\pi}^2)^n \quad , \quad n \in \mathbb{N}^0$$

aufreten. Außerdem ist mit

$$\partial_\mu |\vec{\pi}| = \frac{(\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})}{|\vec{\pi}|}$$

die Kombination der immer doppelt auftretenden Ableitungen durch

$$\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger = \frac{1}{2} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \mathbb{1} = \left[1 - \text{si}^2 \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) \right] \frac{(\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})^2}{F_0^2 |\vec{\pi}|^2} \mathbb{1} + \text{si}^2 \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) \frac{(\partial_\mu \vec{\pi})^2}{F_0^2} \mathbb{1} \quad (4.2)$$

gegeben. Die effektive Lagrangedichte in führender Ordnung \mathcal{L}_{LO} aus Gl. (3.4a)

$$\mathcal{L}_{\text{LO}} = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle .$$

lässt sich mit Gl. (4.1)/(4.2) explizit angeben. Der für das Minimum und die Massen relevante symmetriebrechende Anteil lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{LO,sb}} &= -\frac{F_0^2}{4} \langle (\chi + \rho) U^\dagger + U (\chi^\dagger + \rho^\dagger) \rangle \\ &= -F_0^2 (\chi_0 + \rho_0) \cos \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) - F_0 \rho_3 \pi_3 \text{si} \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) , \end{aligned} \quad (4.3)$$

der derivative Term

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{LO,der}} &= \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \text{si}^2 \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) \right] \frac{(\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})^2}{|\vec{\pi}|^2} + \frac{1}{2} \text{si}^2 \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) (\partial_\mu \vec{\pi})^2 . \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.1.2 Minimum und Krümmung der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{LO,sb}}$

Um das Minimum $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3)$ analytisch zu bestimmen, wird der symmetriebrechende Anteil aus Gl. (4.3) partiell nach den Pionfeldern π_i abgeleitet. Für $\pi_{1,2}$ ist

$$\frac{\partial}{\partial \pi_{1,2}} \mathcal{L}_{\text{LO,sb}} = (\chi_0 + \rho_0) \pi_{1,2} \text{si} \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) - F_0 \rho_3 \frac{\pi_{1,2} \pi_3}{|\vec{\pi}|^2} \left[\text{si} \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) - \cos \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) \right] ,$$

also

$$\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = 0 .$$

Für π_3 ist die Lösung von null verschieden, denn

$$\frac{\partial}{\partial \pi_3} \mathcal{L}_{\text{LO,sb}} = [(\chi_0 + \rho_0) \pi_3 + F_0 \rho_3] \text{si} \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) - F_0 \rho_3 \frac{\pi_3^2}{|\vec{\pi}|^2} \left[\text{si} \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) - \cos \left(\frac{|\vec{\pi}|}{F_0} \right) \right]$$

ist auf der π_3 -Achse ausgewertet

$$\frac{\partial}{\partial \pi_3} \mathcal{L}_{\text{LO,sb}} \Big|_{\pi_1=\pi_2=0} = F_0(\chi_0 + \rho_0) \sin\left(\frac{\pi_3}{F_0}\right) - F_0 \rho_3 \cos\left(\frac{\pi_3}{F_0}\right)$$

und somit

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_3 &= F_0 \arctan\left(\frac{\rho_3}{\chi_0 + \rho_0}\right) \\ &= F_0 \frac{\rho_3(\chi_0 - \rho_0)}{\chi_0^2} + \mathcal{O}(a^3). \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die arctan-Lösung nicht „exakter“ ist als die explizite Näherung, sondern auch nur für Terme einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ die Lösung darstellt. In der Lagrangedichte dieser Ordnung sind keine Informationen über Terme höherer Ordnung enthalten.

Die Krümmung der Lagrangedichte im Minimum in π_i -Richtung ist die entsprechende Pionmasse vor der Normierung der Wellenfunktion durch den kinetischen Anteil. Dazu werden die zweiten partiellen Ableitungen an der Stelle des Minimums ausgewertet. Die Ableitungen werden sehr länglich, an der Stelle des Minimums vereinfachen sie sich schließlich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \pi_{1,2}^2} \mathcal{L}_{\text{LO,sb}} \Big|_{\min} &= (\chi_0 + \rho_0) \sin\left(\frac{\tilde{\pi}_3}{F_0}\right) - \rho_3 \frac{F_0}{\tilde{\pi}_3} \cos\left(\frac{\tilde{\pi}_3}{F_0}\right) + \rho_3 \frac{F_0}{\tilde{\pi}_3} \sin\left(\frac{\tilde{\pi}_3}{F_0}\right) \\ &= (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{6\chi_0} + \mathcal{O}(a^3) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \pi_3^2} \mathcal{L}_{\text{LO,sb}} \Big|_{\min} &= (\chi_0 + \rho_0) \cos\left(\frac{\tilde{\pi}_3}{F_0}\right) + \rho_3 \sin\left(\frac{\tilde{\pi}_3}{F_0}\right) \\ &= (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} + \mathcal{O}(a^3). \end{aligned}$$

Die Krümmung in π_3 -Richtung ist im Vergleich zu denen in $\pi_{1,2}$ -Richtung um den Faktor

$$1 + \frac{\rho_3^2}{3\chi_0^2} + \mathcal{O}(a^3) \tag{4.5}$$

größer. Dieses Ergebnis lässt sich durch einen Plot der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{LO,sb}}$ aus Gl. (4.3) veranschaulichen. In Abb. 3 sind die Parameter so gewählt, dass die unterschiedlichen Krümmungen deutlich werden: $W_0 a / B_0 m = 10$, $\omega = \pi/2$ und $F_0 = 1$. An der Projektion der Höhenlinien in die Ebene erkennt man deutlich, dass das Minimum vom Koordinatenursprung verschoben und die Krümmung im Minimum in π_3 -Richtung stärker als in $\pi_{1,2}$ -Richtung ist.

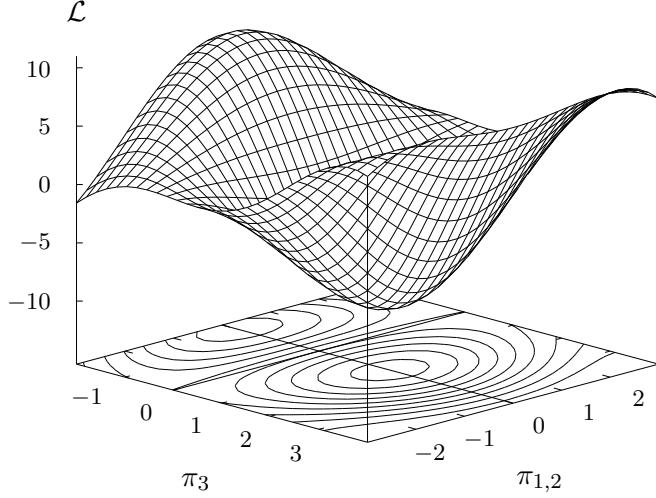


Abb. 3: Lagragedichte $\mathcal{L}_{\text{LO,sb}}$ mit $\omega = \pi/2$. Die Höhenlinien verdeutlichen, dass der von null verschiedene Winkel ω das Minimum aus dem Koordinatenursprung verschiebt und dass die Krümmung in π_3 -Richtung größer als in $\pi_{1,2}$ -Richtung ist.

4.1.3 Renormierung der Felder

Die Pionfelder π_i müssen nun renormiert werden, weil der inverse Propagator von der Gestalt

$$G_i^{-1}(p) = k_i(p^2 + m_{\pi_i}^2)$$

ist. Das bedeutet, dass Koeffizienten k_i gesucht werden, so dass sich aus der Lagragedichte im Minimum

$$\mathcal{L}_{\text{LO}} \Big|_{\min} = \frac{1}{2} k_i [(\partial_\mu \pi_i)^2 + m_{\pi_i}^2 \pi_i^2] + \text{WW-Terme}$$

nach Renormierung der Felder gemäß

$$\pi_i \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{k_i}} \pi_i$$

die Pionmassen ablesen lassen. Dazu wird zunächst Gl. (4.4) an der Stelle des Minimums ausgewertet, d. h.

$$\mathcal{L}_{\text{LO,der}} \Big|_{\min} = \frac{1}{2} k_i (\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3) (\partial_\mu \pi_i)^2 + \text{WW-Terme} .$$

Da $\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = 0$ lässt sich das Ergebnis für die Felder π_1 und π_2 direkt ablesen:

$$k_{1,2} = \sin^2 \left(\frac{\tilde{\pi}_3}{F_0} \right) = 1 - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{3F_0^2} + \mathcal{O}(a^3) .$$

Für das Feld π_3 ist $(\tilde{\pi}_3 \partial_\mu \pi_3)^2 = \tilde{\pi}_3^2 (\partial_\mu \pi_3)^2 \neq 0$ und deswegen muss nach Gl. (4.4) zusätzlich noch der Term

$$1 - \sin^2 \left(\frac{\tilde{\pi}_3}{F_0} \right) = \frac{\tilde{\pi}_3^2}{3F_0^2} + \mathcal{O}(a^3)$$

berücksichtigt werden, so dass insgesamt

$$k_3 = 1 + \mathcal{O}(a^3) .$$

4.1.4 Berechnung der Pionmassen

Die in Abschnitt 4.1.2 berechneten Krümmungen werden nun durch die k_i normiert. Der Faktor $k_{1,2}$ entspricht dabei allerdings genau dem Inversen aus Gl. (4.5). Die Renormierung hebt somit die unterschiedlichen Krümmungen exakt auf:

$$m_\pi^2 = (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} + \mathcal{O}(a^3) . \quad (4.6)$$

Die Pionmassen sind damit in führender Ordnung entartet. Dieses Ergebnis wird nun im nächsten Abschnitt durch eine Störungsentwicklung reproduziert, um anschließend die beiden Verfahren zu vergleichen.

4.2 Störungsansatz in führender Ordnung

4.2.1 Lineare Verschiebung der Pionfelder

Es wurde gezeigt, dass die axiale Drehung zu einer Verschiebung des Minimums zu $\tilde{\vec{\pi}}$ führt. In diesem Abschnitt wird diese Verschiebung als Störung aufgefasst. Dazu werden die Felder so transformiert, dass das Minimum im Koordinatenursprung liegt: $\pi_i \rightarrow \pi_i + \tilde{\pi}_i$. Um die ursprünglichen Felder von den neuen zu unterscheiden, werden die unverschobenen im Folgenden mit π'_i bezeichnet. Die Transformation lautet dann explizit

$$\pi'_i = \pi_i + \tilde{\pi}_i . \quad (4.7)$$

Da die Ergebnisse nur bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ berechnet werden, wird für die Verschiebung der allgemeine Ansatz

$$\tilde{\pi}_i(a) = \lambda_{1,i} a + \lambda_{2,i} a^2 + \mathcal{O}(a^3)$$

verwendet. Dieses wird in die Lagrangedichte eingesetzt, d. h.

$$\mathcal{L}_{\text{LO}}(\vec{\pi}') \longrightarrow \mathcal{L}_{\text{LO}}(\vec{\pi}) .$$

Der symmetriebrechende Anteil lässt sich dann formal schreiben als

$$\mathcal{L}_{\text{LO,sb}} = \text{const.} + \mathcal{L}_{\text{LO,lin}} + \mathcal{L}_{\text{LO,quad}} + \mathcal{O}(\text{NLO}, a^3) . \quad (4.8)$$

Die Bezeichnung $\mathcal{O}(\text{NLO}, a^3)$ bedeutet, dass neben den Gitterbeiträgen ab Ordnung $\mathcal{O}(a^3)$ alle Beiträge zu nächstführender Ordnung und höher (Schleifenbeiträge) nicht berücksichtigt werden. Aus dem linearen (lin) und quadratischen (quad) Term, $\mathcal{L}_{\text{LO,lin}}$ und $\mathcal{L}_{\text{LO,quad}}$, werden nun die Massen in führender Ordnung bestimmt.

4.2.2 Berechnung des Minimums und des quadratischen Anteils

Das Minimum der Lagragedichte entspricht den Nullstellen in $\mathcal{L}_{\text{LO,lin}}$ aus Gl. (4.8), d. h.

$$i = 1, 2 : (\chi_0 + \rho_0)\tilde{\pi}_i\pi_i = 0 \quad (4.9a)$$

$$i = 3 : (\chi_0 + \rho_0)\tilde{\pi}_3\pi_3 = \rho_3 F_0 \pi_3 . \quad (4.9b)$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = 0 + \mathcal{O}(a^3) \quad (4.10a)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_3 &= F_0 \frac{\rho_3(\chi_0 - \rho_0)}{\chi_0^2} + \mathcal{O}(a^3) \\ &= F_0 \frac{W_0 a}{B_0 m} \sin \omega - F_0 \frac{W_0^2 a^2}{B_0^2 m^2} \sin \omega \cos \omega + \mathcal{O}(a^3) . \end{aligned} \quad (4.10b)$$

Dieses Ergebnis entspricht genau dem der analytischen Rechnung in Abschnitt 4.1.2.

Der quadratische Anteil in den Pionfeldern aus Gl. (4.8) lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{LO,quad}} &= \frac{1}{2}\pi_i^2 \left[(\chi_0 + \rho_0) + (1 + 2\delta_{3i}) \left(\frac{\rho_3 \tilde{\pi}_3}{3F_0} - \frac{\chi_0 \tilde{\pi}_3^2}{6F_0^2} \right) + \mathcal{O}(a^3) \right] \\ &= \frac{1}{2}\pi_i^2 \left[(\chi_0 + \rho_0) + (1 + 2\delta_{3i}) \frac{\rho_3^2}{6\chi_0} + \mathcal{O}(a^3) \right] . \end{aligned} \quad (4.11)$$

In Abschnitt 4.1.4 wurde auch dieses Ergebnis durch die exakte Berechnung der Krümmung bestimmt. Als Nächstes werden auch hier wieder der kinetische Anteil und somit auch die Konstanten k_i bestimmt, um die Massen zu normieren.

4.2.3 Berechnung des kinetischen Anteils

In der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ hat der derivative Anteil der Lagragedichte aus Gl. (4.4) die Entwicklung

$$\mathcal{L}_{\text{LO,kin}} = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle = \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_i)^2 \left[1 - (1 - \delta_{3i}) \frac{\tilde{\pi}_3^2}{3F_0^2} \right] + \mathcal{O}(\text{NLO}, a^3) ,$$

wobei der eckige Klammerterm der Konstanten k_i entspricht. Die Ursache der unterschiedlichen Werte liegt wieder darin, dass beim Feld π_3 erneut ein zusätzlicher Term $\tilde{\pi}_3^2/3F_0^2$ auftritt und die Konstante deswegen den Wert $k_3 = 1$ annimmt; es gilt somit

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= 1 - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{3F_0^2} + \mathcal{O}(a^3), \\ k_3 &= 1 + \mathcal{O}(a^3). \end{aligned}$$

Mit diesen Werten lässt sich wie in Abschnitt 4.1.4 die Pionmasse bestimmen.

4.2.4 Berechnung der Pionmassen

Die Pionmassen in führender Ordnung lassen sich nun aus den Klammertermen aus Gl. (4.11) bestimmen:

$$\begin{aligned} m_{\pi_{1,2}}^2 &= \left[(\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{6\chi_0} + \mathcal{O}(a^3) \right] \cdot \left[1 + \frac{\tilde{\pi}_3^2}{3F_0^2} + \mathcal{O}(a^3) \right] \\ &= (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} + \mathcal{O}(a^3) \end{aligned} \quad (4.12a)$$

und

$$m_{\pi_3}^2 = (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} + \mathcal{O}(a^3). \quad (4.12b)$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit dem in Gl. (4.6) aus Abschnitt 4.1.4, die Pionmassen sind in führender Ordnung entartet. In den Variablen m und a ausgedrückt lässt sich die Masse als

$$m_\pi^2 = 2B_0m + 2W_0a \cos \omega + \frac{W_0^2 a^2}{B_0 m} \sin^2(\omega) + \mathcal{O}(a^3)$$

angeben. Dieses Ergebnis ist bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(a)$ bereits in [16, 17] hergeleitet worden.

Vergleich der Methoden

Das analytische Vorgehen bedarf keiner Substitutionen oder anderer Transformationen, die Berechnung ist direkt möglich. Allerdings ist die Herangehensweise mit Methoden der Analysis sehr technisch. Das Minimum und die Massen werden durch Differentiation nach den Feldern bestimmt, dazu muss insbesondere die zweite Ableitung im Minimum ausgewertet werden. In führender Ordnung ist dies noch ein sinnvolles Vorgehen, aber im Vergleich zur Störungsrechnung doch mit einem Mehraufwand verbunden.

Durch den Störungsansatz lässt sich das Minimum ohne Differentiation berechnen. Durch die Substitution liegt das Minimum wieder im Koordinatenursprung. Für die Berechnung

wird die Lagragedichte nach den Feldern entwickelt; diese ist noch recht übersichtlich, da die Verschiebung nur in π_3 -Richtung stattfindet. Die beiden Methoden unterscheiden sich nicht grundlegend. Die wesentlichen Unterschiede sind in Tab. 1 aufgeführt.

Analytische Rechnung	Störungsansatz
Differentiation	Terme unterschiedlicher Ordnung analysieren
Minimum direkt bestimmen	Störungsansatz
Auswertung in $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3)$	Verschiebung und Auswertung in $(0, 0, 0)$

Tab. 1: Unterschiede der Berechnungsmethoden.

Um den Mehraufwand durch Differentiation zu vermeiden, wird für die Rechnung in nächstführender Ordnung der Störungsansatz verwendet.

4.3 Treelevel in nächstführender Ordnung mittels Störungsansatz

Die Terme der Lagragedichte \mathcal{L}_{NLO} aus Gl. (3.4) werden nun einzeln analysiert und berechnet.

4.3.1 Berechnung des Minimum und des quadratischen Anteils

L_1 , L_2 und L_3

Diese Terme sind weder für den linearen, quadratischen noch für den kinetischen Term relevant, da sie mindestens vier Ableitungen enthalten. Sie werden deshalb hier nicht explizit berechnet.

L_6 , W_6 und W'_6

Mit Hilfe der Spur- und Produkteigenschaften der Pauli-Matrizen τ_i (s. Anhang C.1) lassen sich die Terme explizit angeben, sie lauten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO}, L_6} &= L_6 \chi_0^2 \langle U + U^\dagger \rangle^2 \\ &= 16 L_6 \chi_0^2 \cos^2 \left(\frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO}, W_6} &= W_6 \chi_0 \langle U + U^\dagger \rangle \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle \\ &= 16 W_6 \chi_0 \left[\rho_0 \cos^2 \left(\frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) + \rho_3 \frac{\pi'_3}{F_0} \operatorname{si} \left(\frac{2 |\vec{\pi}'|}{F_0} \right) \right]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO},W'_6} &= W'_6 \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle^2 \\ &= 16W'_6 \left[\rho_0 \cos \left(\frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) + \rho_3 \frac{\pi'_3}{F_0} \sin \left(\frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) \right]^2.\end{aligned}$$

L_7 , W_7 und W'_7

Diese sind identisch null und liefern somit keine Beiträge. Das gilt allerdings nur für den Fall $N_f = 2$ aufgrund der speziellen Eigenschaften der Pauli-Matrizen.

L_8 , W_8 und W'_8

Die entsprechenden Terme lauten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO},L_8} &= L_8 \chi_0^2 \langle UU + U^\dagger U^\dagger \rangle \\ &= 4L_8 \chi_0^2 \cos \left(\frac{2|\vec{\pi}'|}{F_0} \right), \\ \mathcal{L}_{\text{NLO},W_8} &= W_8 \chi_0 \langle \rho^\dagger UU + U^\dagger \rho U^\dagger \rangle \\ &= 8W_8 \chi_0 \left[\rho_0 \cos \left(\frac{2|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) + \rho_3 \frac{\pi'_3}{F_0} \sin \left(\frac{2|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) \right]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO},W'_8} &= W'_8 \langle \rho^\dagger U \rho^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \rho \rangle \\ &= 4W'_8 \rho_0^2 \cos \left(\frac{2|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) + 16W'_8 \rho_0 \rho_3 \frac{\pi'_3}{F_0} \sin \left(\frac{2|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) - 4W'_8 \rho_3^2 \left[1 + \frac{2\pi'^2_3}{F_0^2} \sin^2 \left(\frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) \right].\end{aligned}$$

Das Minimum der Lagragedichte aus Gl. (3.4) entspricht den Nullstellen im linearen Anteil von \mathcal{L}_{NLO} . Dazu werden die Ergebnisse der Treelevel-Terme bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(\pi'^4)$ entwickelt, da in dieser aufgrund der Binomialentwicklung

$$(\tilde{\pi}_i + \pi_i)^4 = \tilde{\pi}_i^4 + 4\tilde{\pi}_i^3 \pi_i + 6\tilde{\pi}_i^2 \pi_i^2 + 4\tilde{\pi}_i \pi_i^3 + \pi_i^4$$

alle relevanten Terme enthalten sind. Des Weiteren werden aufgrund der Übersichtlichkeit folgende Abkürzungen eingeführt [18]:

$$\begin{aligned}L_{54} &= 2L_4 + L_5 & W_{54} &= 2W_4 + W_5 \\ L_{86} &= 2L_6 + L_8 & W_{86} &= 2W_6 + W_8 & W'_{86} &= 2W'_6 + W'_8.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Die Gleichungen zur Bestimmung des Minimums entsprechen dann denen in Gl. (4.9), wenn man auf der linken Seite die Substitutionen

$$\chi_0 + \rho_0 \longrightarrow \chi_0 + \rho_0 + \frac{16}{F_0^2} (L_{86} \chi_0^2 + W_{86} \chi_0 \rho_0 + W'_{86} (\rho_0^2 - \delta_{3i} \rho_3^2))$$

und für $i = 3$ auf der rechten Seite

$$\rho_3 \longrightarrow \rho_3 \left[1 + \frac{8}{F_0^2} (W_{86}\chi_0 + 2W'_{86}\rho_0) \right]$$

durchführt. Damit lassen sich die dann Lösungen

$$\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = 0$$

direkt übernehmen und

$$\tilde{\pi}_3 = \frac{\rho_3}{F_0} \left[\frac{F_0^2}{\chi_0} - 16L_{86} + 8W_{86} + \frac{\rho_0}{\chi_0} \left(-\frac{F_0^2}{\chi_0} + 32L_{86} - 24W_{86} + 16W'_{86} \right) \right] + \mathcal{O}(a^3)$$

analog berechnen; die Koeffizienten L_i , W_i und W'_i treten in nächstführender Ordnung nur linear auf. Außerdem ist es völlig ausreichend, $\tilde{\pi}_3$ nur bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(a)$ zu verwenden, da das Feld nur quadratisch oder in Verbindung mit ρ_3 auftritt:

$$\tilde{\pi}_3 = \frac{\rho_3}{F_0} \left[\frac{F_0^2}{\chi_0} - 16L_{86} + 8W_{86} \right] + \mathcal{O}(a^2). \quad (4.14)$$

Der quadratische Term lautet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO,quad}} &= \frac{1}{2} \pi_i^2 \left[(\chi_0 + \rho_0) + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 L_{86} + \chi_0 \rho_0 W_{86} + \rho_0^2 W'_{86}) \right. \\ &\quad + (1 + 2\delta_{3i}) \left(\frac{\rho_3 \tilde{\pi}_3}{3F_0} - \frac{\chi_0 \tilde{\pi}_3^2}{6F_0^2} + \frac{32\chi_0 \rho_3 \tilde{\pi}_3}{3F_0^3} W_{86} - \frac{32\chi_0^2 \tilde{\pi}_3^2}{3F_0^4} L_{86} \right) \\ &\quad \left. - \delta_{3i} \frac{16\rho_3^2}{F_0^2} W'_{86} + \mathcal{O}(a^3) \right], \end{aligned}$$

mit den obigen Lösungen ergibt sich damit für die quadratischen Terme in \mathcal{L}_{NLO}

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO,quad}} &= \frac{1}{2} \pi_i^2 \left[(\chi_0 + \rho_0) + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 L_{86} + \chi_0 \rho_0 W_{86} + \rho_0^2 W'_{86}) \right. \\ &\quad + (1 + 2\delta_{3i}) \left(\frac{\rho_3^2}{6\chi_0} + \frac{32\rho_3^2}{3F_0^2} (W_{86} - L_{86}) \right) \\ &\quad \left. - \delta_{3i} \frac{16\rho_3^2}{F_0^2} W'_{86} + \mathcal{O}(a^3) \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.3.2 Berechnung des kinetischen Anteils

Die exakte Auswertung dieser Terme führt zu länglichen Ausdrücken, deswegen werden direkt die entwickelten Beiträge angegeben.

L_4 und W_4

Diese Terme tragen weder zum linearen noch zum quadratischen Anteil bei und werden deshalb erst jetzt betrachtet. Mit Hilfe von Gl. (4.4) und den Ergebnissen aus dem vorherigen Abschnitt lassen sich die kinetischen Anteile zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO},L_4} &= L_4 \chi_0 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle U + U^\dagger \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_i)^2 \frac{16 L_4 \chi_0}{F_0^2} \cdot \begin{cases} 1 - \frac{5 \tilde{\pi}_3^2}{6 F_0^2} + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } i = 1, 2 \\ 1 - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{2 F_0^2} + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } i = 3 \end{cases}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO},W_4} &= W_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_i)^2 \frac{16 W_4}{F_0^2} \left(\rho_0 + \frac{\rho_3 \tilde{\pi}_3}{F_0} + \mathcal{O}(a^3) \right)\end{aligned}$$

berechnen.

L_5 und W_5

Analog zu L_4 und W_4 ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO},L_5} &= L_5 \chi_0 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (U + U^\dagger) \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_i)^2 \frac{8 L_5 \chi_0}{F_0^2} \cdot \begin{cases} 1 - \frac{5 \tilde{\pi}_3^2}{6 F_0^2} + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } i = 1, 2 \\ 1 - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{2 F_0^2} + \mathcal{O}(a^3) & \text{für } i = 3 \end{cases}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO},W_5} &= W_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (\rho^\dagger U + U^\dagger \rho) \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_i)^2 \frac{8 W_5}{F_0^2} \left(\rho_0 + \frac{\rho_3 \tilde{\pi}_3}{F_0} + \mathcal{O}(a^3) \right).\end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man mit den Ergebnissen führender Ordnung aus Abschnitt 4.2.3 für die nächstführende Ordnung

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO,kin}} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_i)^2 \left[1 - (1 - \delta_{3i}) \frac{\tilde{\pi}_3^2}{3 F_0^2} + \frac{8}{F_0^2} L_{54} \left(\chi_0 - (5 - 2\delta_{3i}) \frac{\tilde{\pi}_3^2}{6 F_0^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{F_0^2} W_{54} \left(\rho_0 - \frac{\rho_3 \tilde{\pi}_3}{F_0} \right) + \mathcal{O}(a^3) \right],\end{aligned}$$

bzw. mit $\tilde{\pi}_3$ eingesetzt

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO,kin}} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi_i)^2 \left[1 - (1 - \delta_{3i}) \frac{\rho_3^2}{3F_0^2 \chi_0} \left(\frac{F_0^2}{\chi_0} - 32L_{86} + 16W_{86} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{F_0^2} L_{54} \left(\chi_0 - (5 - 2\delta_{3i}) \frac{\rho_3^2}{6\chi_0} \right) + \frac{8}{F_0^2} W_{54} \left(\rho_0 - \frac{\rho_3^2}{\chi_0} \right) + \mathcal{O}(a^3) \right] \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} K_i (\partial_\mu \pi_i)^2.\end{aligned}$$

Die Renormierung der Felder und damit auch des inversen Propagators

$$G_i^{-1}(p) = K_i(p^2 + \bar{M}_{\pi_i}^2)$$

führt zu den Treelevel-Massen \bar{M}_{π_i} . Mit Gl. (4.15) ist

$$\begin{aligned}\bar{M}_{\pi_{1,2}}^2 &= (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \chi_0^2) L_{54} - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \rho_0^2 + \rho_3^2) W_{54} \\ &\quad + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 - \rho_3^2) L_{86} + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \rho_3^2) W_{86} + \frac{16}{F_0^2} \rho_0^2 W'_{86}\end{aligned}\tag{4.16a}$$

und

$$\begin{aligned}\bar{M}_{\pi_3}^2 &= (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \chi_0^2) L_{54} - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \rho_0^2 + \rho_3^2) W_{54} \\ &\quad + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 - 2\rho_3^2) L_{86} + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + 2\rho_3^2) W_{86} + \frac{16}{F_0^2} (\rho_0^2 - \rho_3^2) W'_{86},\end{aligned}\tag{4.16b}$$

die Massenentartung ist teilweise aufgehoben. Das Treelevel-Ergebnis ist identisch mit dem aus [18]. Zur Bestimmung der Pionmassen in nächstführender Ordnung müssen aber aufgrund des Weinberg'schen Powercountings noch Ein-Schleifen-Beiträge aus \mathcal{L}_2 berücksichtigt werden.

4.4 Skizze der Schleifenrechnung

4.4.1 Wechselwirkungsterme

Für die Rechnung in nächstführender Ordnung sind die Wechselwirkungsterme aus führender Ordnung relevant. Dazu wird die Lagrangedichte \mathcal{L}_{LO} aus Gl. (3.4a) in den Feldern entwickelt. Der symmetriebrechende Anteil aus Gl. (4.3) muss aufgrund der Binomialentwicklung

$$(\tilde{\pi}_i + \pi_i)^6 = \tilde{\pi}_i^6 + 6\tilde{\pi}_i^5 \pi_i + 15\tilde{\pi}_i^4 \pi_i^2 + 20\tilde{\pi}_i^3 \pi_i^3 + 15\tilde{\pi}_i^2 \pi_i^4 + 6\tilde{\pi}_i \pi_i^5 + \pi_i^6$$

bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(\vec{\pi}'^6)$ entwickelt werden. Mit der Sinus- und Kosinus-Reihe ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{LO,sb}} &= \text{const.} + \mathcal{L}_{\text{LO,lin}} + \mathcal{L}_{\text{LO,quad}} \\ &+ \frac{\rho_3}{6F_0} \pi_3 |\vec{\pi}'|^2 - \frac{\chi_0 + \rho_0}{24F_0^2} |\vec{\pi}'|^4 - \frac{\rho_3}{120F_0^3} \pi_3 |\vec{\pi}'|^4 - \frac{\chi_0 + \rho_0}{720F_0^4} |\vec{\pi}'|^6 + \mathcal{O}(\vec{\pi}'^8) .\end{aligned}$$

Der derivative Anteil muss ebenfalls entwickelt werden. Berücksichtigt man, dass $\partial_\mu \vec{\pi}' = \partial_\mu \vec{\pi}$ von Ordnung $\mathcal{O}(\pi)$ ist, dann ist

$$\mathcal{L}_{\text{LO,der}} = \left[\frac{1}{2} - \frac{|\vec{\pi}'|^2}{6F_0^2} + \frac{|\vec{\pi}'|^4}{45F_0^4} \right] (\partial_\mu \vec{\pi}')^2 + \left[\frac{1}{6F_0^2} - \frac{|\vec{\pi}'|^2}{45F_0^4} \right] (\vec{\pi}' \partial_\mu \vec{\pi}')^2 + \mathcal{O}(\vec{\pi}'^6) .$$

In diesen beiden Ausdrücken sind alle für die Schleifenrechnung nötigen Terme enthalten. Allerdings sind auch noch solche enthalten, die für die Schleifenrechnung nicht relevant sind. Das sind einmal alle Treelevel-Terme, die bei den WW-Termen keine Rolle spielen und bereits berücksichtigt worden sind. Außerdem können natürlich alle Terme vernachlässigt werden, die höher als Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ sind.

Die verbleibenden Terme lassen sich zu einer WW-Lagrangedichte in nächstführender Ordnung zusammenfassen. Dabei werden die in Treelevel führender Ordnung bestimmte Nullstelle $\tilde{\pi}_3$ aus Gl. (4.10) und die Masse m_π^2 aus Gl. (4.12) eingesetzt. Das Massenquadrat wird hier, wie im Zusammenhang mit Schleifenrechnungen üblich, mit m_0^2 bezeichnet:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{NLO,WW}} &= - \frac{1}{4!} \underbrace{\frac{1}{F_0^2} \left(m_0^2 - \frac{2\rho_3^2}{5\chi_0} \right)}_{v^{(1)}} \vec{\pi}^4 - \frac{1}{4!} \underbrace{\frac{1}{F_0^2} \left(\frac{2\rho_3^2}{5\chi_0} \right)}_{v^{(1')}} \pi_3^2 \vec{\pi}^2 \\ &- \frac{1}{4!} \underbrace{\frac{4}{F_0^2} \left(1 - \frac{4\rho_3^2}{15\chi_0^2} \right)}_{v^{(2)}} \vec{\pi}^2 (\partial_\mu \vec{\pi})^2 - \frac{1}{4!} \underbrace{\frac{4}{F_0^2} \left(\frac{-8\rho_3^2}{15\chi_0^2} \right)}_{v^{(2')}} \pi_3^2 (\partial_\mu \vec{\pi})^2 \\ &- \frac{1}{4!} \underbrace{\frac{4}{F_0^2} \left(\frac{2\rho_3^2}{15\chi_0^2} \right)}_{v^{(2'')}} \vec{\pi}^2 (\partial_\mu \pi_3)^2 \\ &- \frac{1}{4!} \underbrace{\frac{4}{F_0^2} \left(-1 + \frac{2\rho_3^2}{15\chi_0^2} \right)}_{v^{(3)}} (\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})^2 - \frac{1}{4!} \underbrace{\frac{4}{F_0^2} \left(\frac{8\rho_3^2}{15\chi_0^2} \right)}_{v^{(3')}} (\pi_3 \partial_\mu \pi_3) (\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) \\ &- \frac{1}{3!} \frac{2}{F_0} \left(\frac{\rho_3(\chi_0 - \rho_0)}{\chi_0^2} \right) (\pi_3 (\partial_\mu \vec{\pi})^2 - \partial_\mu \pi_3 (\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})) .\end{aligned}\tag{4.17}$$

Aus der Struktur der WW-Lagrangedichte folgt, dass sowohl Beiträge mit 4-Vertex als auch mit 3-Vertizes berechnet werden müssen. Man sieht, dass das Feld π_3 eine Sonderrolle einnimmt.

4.4.2 Diagramm mit 4-Vertex

Da aufgrund des Powercounting-Schemas nur Ein-Schleifen-Diagramme berücksichtigt werden, existiert genau ein Diagramm mit 4-Vertex. Es enthält einen Vertex und ist somit in der Kopplungskonstanten g von Ordnung $\mathcal{O}(g)$, g ist in Gl. (4.17) in den Faktoren enthalten.

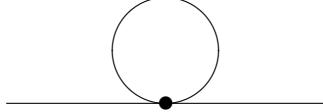


Abb. 4: Ein-Schleifen-Diagramm zur Bestimmung der Massen. Es enthält einen 4-Vertex und ist somit in der Kopplungskonstante von Ordnung $\mathcal{O}(g)$.

Der 4-Vertex wird nun gemäß Anhang A vollständig symmetrisiert, d. h. die einzelnen Beiträge $V_{ijkl}^{(n)}$ werden bestimmt. Es werden dabei auch redundante Kronecker-Symbole wie z. B. in $\delta_{ij}\delta_{i3}\delta_{j3}$ explizit aufgeführt, damit die Struktur des Vertizes deutlich ist. Dies führt zu einer Vereinfachung der Bestimmung der einzelnen Beiträge. Die relevanten Terme aus Gl. (4.17) sind dann durch

$$-\frac{1}{4!} \sum_n v^{(n)} V_{ijkl}^{(n)} \pi_i \pi_j \pi_k \pi_l$$

gegeben. Die Vertizes $V_{ijkl}^{(1)}$ und $V_{ijkl}^{(1')}$ sind von der Form $\pi_i^2 \pi_j^2$ und resultieren aus dem symmetriebrechenden Teil der Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} V_{ijkl}^{(1)} &= \frac{1}{3} [\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] , \\ V_{ijkl}^{(1')} &= \frac{1}{6} [\delta_{ij}\delta_{kl}(\delta_{i3}\delta_{j3} + \delta_{k3}\delta_{l3}) \\ &\quad + \delta_{ik}\delta_{jl}(\delta_{i3}\delta_{k3} + \delta_{j3}\delta_{l3}) \\ &\quad + \delta_{il}\delta_{jk}(\delta_{i3}\delta_{l3} + \delta_{j3}\delta_{k3})] . \end{aligned}$$

Die nächsten drei Vertizes $V_{ijkl}^{(2)}$, $V_{ijkl}^{(2')}$ und $V_{ijkl}^{(2'')}$ kommen aus dem derivativen Term und haben die Form $\pi_i^2 (\partial_\mu \pi_j)^2$:

$$\begin{aligned} V_{ijkl}^{(2)} &= -\frac{1}{6} [\delta_{ij}\delta_{kl}(p_ip_j + p_kp_l) \\ &\quad + \delta_{ik}\delta_{jl}(p_ip_k + p_jp_l) \\ &\quad + \delta_{il}\delta_{jk}(p_ip_l + p_jp_k)] , \\ V_{ijkl}^{(2')} &= -\frac{1}{6} [\delta_{ij}\delta_{kl}(\delta_{k3}\delta_{l3}p_ip_j + \delta_{i3}\delta_{j3}p_kp_l) \\ &\quad + \delta_{ik}\delta_{jl}(\delta_{j3}\delta_{l3}p_ip_k + \delta_{i3}\delta_{k3}p_jp_l) \\ &\quad + \delta_{il}\delta_{jk}(\delta_{j3}\delta_{k3}p_ip_l + \delta_{i3}\delta_{l3}p_jp_k)] , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ijkl}^{(2'')} = & -\frac{1}{6} [\delta_{ij}\delta_{kl}(\delta_{i3}\delta_{j3}p_ip_j + \delta_{k3}\delta_{l3}p_kp_l) \\ & + \delta_{ik}\delta_{jl}(\delta_{i3}\delta_{k3}p_ip_k + \delta_{j3}\delta_{l3}p_jp_l) \\ & + \delta_{il}\delta_{jk}(\delta_{i3}\delta_{l3}p_ip_l + \delta_{j3}\delta_{l3}p_jp_k)] . \end{aligned}$$

Die letzten beiden Vertizes $V_{ijkl}^{(3)}$ und $V_{ijkl}^{(3')}$ sind von der Gestalt $(\pi_i \partial_\mu \pi_j)^2$ und kommen wie die vorherigen auch aus dem derivativen Anteil:

$$\begin{aligned} V_{ijkl}^{(3)} = & -\frac{1}{12} [\delta_{ij}\delta_{kl}(p_i + p_j)(p_k + p_l) \\ & + \delta_{ik}\delta_{jl}(p_i + p_k)(p_j + p_l) \\ & + \delta_{il}\delta_{jk}(p_i + p_l)(p_j + p_k)] , \\ V_{ijkl}^{(3')} = & -\frac{1}{24} [\delta_{ij}\delta_{kl}(p_i + p_j)(p_k + p_l)(\delta_{i3}\delta_{j3} + \delta_{k3}\delta_{l3}) \\ & + \delta_{ik}\delta_{jl}(p_i + p_k)(p_j + p_l)(\delta_{i3}\delta_{k3} + \delta_{j3}\delta_{l3}) \\ & + \delta_{il}\delta_{jk}(p_i + p_l)(p_j + p_k)(\delta_{i3}\delta_{l3} + \delta_{j3}\delta_{k3})] . \end{aligned}$$

Da der Vertex nun vollkommen symmetrisiert ist, können die Beinchen i, j, k und l und deren Impulse nun beliebig zugeordnet werden.

Berechnung des Diagramms

Zur Berechnung werden die Bezeichnungen aus Abb. 5 verwendet. Die Impulse p_i, p_j, p_k und p_l sind als einlaufend definiert, der äußere Impuls wird mit p und der innere mit k bezeichnet.

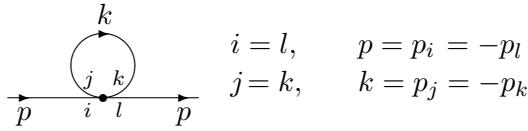


Abb. 5: Bezeichnungen am 4-Vertex

Aufgrund der Sonderrolle der π_3 -Terme muss der Beitrag zu $\pi_{1,2}$ und π_3 getrennt berechnet werden. Es ist zu beachten, dass die Schleifen-Pionen im Propagator noch durch die k_i ausführender Ordnung normiert werden müssen. Der Zähler im Schleifenintegral lässt sich dann ausrechnen, wobei der Index 4 den Beitrag aus dem Diagramm mit 4-Vertex kennzeichnet:

$$\begin{aligned} V_4^{\pi_{1,2}} &= \sum_n v^{(n)} V_{1jk1}^{(n)} \delta_{jk} k_j^{-1} = \sum_n v^{(n)} V_{2jk2}^{(n)} \delta_{jk} k_j^{-1} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} V_4^{(0)} + V_4^{(1,2)} + \mathcal{O}(a^3) , \\ V_4^{\pi_3} &= \sum_n v^{(n)} V_{3jk3}^{(n)} \delta_{jk} k_j^{-1} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} V_4^{(0)} + V_4^{(3)} + \mathcal{O}(a^3) . \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $V_4^{(0)}$ den für alle Pionen identischen Anteil

$$V_4^{(0)} = \frac{1}{3F_0^2} [5m_0^2 + 4p^2 + 4k^2] ,$$

in $V_4^{(1,2)}$ und $V_4^{(3)}$ sind die unterschiedlichen Terme von Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ zusammengefasst.

Aus den Vertizes lässt sich der Schleifenanteil der Selbstenergie berechnen. Der Symmetriefaktor S^{-1} ist aufgrund der möglichen Vertauschung der beiden inneren Linien durch $S = 2$ gegeben. Der Schleifenbeitrag lässt sich recht gut berechnen, wie am Beispiel von $V_4^{(0)}$ gezeigt wird:

$$\begin{aligned} \Sigma_4^{(0)}(p^2) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{V_4^{(0)}}{k^2 + m_0^2} \\ &= \frac{1}{6F_0^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{5m_0^2 + 4p^2 + 4k^2}{k^2 + m_0^2} \\ &= \frac{1}{6F_0^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_0^2 + 4p^2}{k^2 + m_0^2} + \frac{4}{6F_0^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + m_0^2}{k^2 + m_0^2} . \end{aligned}$$

Die Renormierung wird nun mit der Methode der dimensionellen Regularisierung durchgeführt. Dabei werden die auftretenden Integrale mittels einer Renormierungsskala Λ nach d Dimensionen fortgesetzt. So liefert das zweite Integral keinen Beitrag und das erste Integral des Typs

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m_0^2}$$

ergibt fortgesetzt

$$I(m_0^2, \Lambda^2, d) = \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m_0^2} . \quad (4.18)$$

Λ hat die Dimension einer Masse und der Propagator behält für beliebiges d seine Dimension bei [19]. Die Lösung dieses Integrals [7]

$$I(m_0^2, \Lambda^2, d) = \frac{m_0^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\Lambda^2}{m_0^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \Gamma \left(1 - \frac{d}{2} \right)$$

lässt sich mit der Γ -Funktion angeben, die bei $d = 4$ einen einfachen Pol hat. Durch die Einführung eines Parameters $\varepsilon = 4 - d$ lässt sich die Lösung um $d = 4$, also $\varepsilon = 0$, entwickeln. Die Entwicklung der Γ -Funktion

$$\Gamma(\varepsilon - n) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (4.19)$$

führt schließlich zu

$$\begin{aligned} I(m_0^2) &\stackrel{\text{def}}{=} I(m_0^2, \Lambda^2, \varepsilon) \\ &= \frac{m_0^2}{(4\pi)^2} \left[-\frac{2}{\varepsilon} - \ln(4\pi) + \gamma_E - 1 + \ln \left(\frac{m_0^2}{\Lambda^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_0^2}{(4\pi)^2} \left[R + \ln \left(\frac{m_0^2}{\Lambda^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon) . \end{aligned}$$

Dabei ist R eine divergente Konstante und $\gamma_E \approx 0.577$ die sog. Euler-Mascheroni-Konstante. Mit Hilfe dieses Ergebnisses lässt sich der Schleifenanteil von $V_4^{(0)}$ angeben:

$$\Sigma_4^{(0)}(p^2) = \left[\frac{m_0^2}{6F_0^2} + \frac{2}{3F_0^2} p^2 \right] I(m_0^2). \quad (4.20)$$

Dieses Verfahren lässt sich analog auch auf die beiden anderen Terme $V_4^{(1,2)}$ und $V_4^{(3)}$ anwenden.

4.4.3 Diagramme mit 3-Vertizes

Bei den Diagrammen mit 3-Vertizes sind insgesamt die zwei Graphen aus Abb. 6 zu berücksichtigen. Wie in der ϕ^3 -Theorie (z. B. [20]) wird im Folgenden das linke als „Tadpole“- und das rechte als „Selbstenergie“-Diagramm bezeichnet, obwohl i. Allg. natürlich beide zur Selbstenergie beitragen können. In beiden Graphen treten jeweils zwei Vertizes auf, die

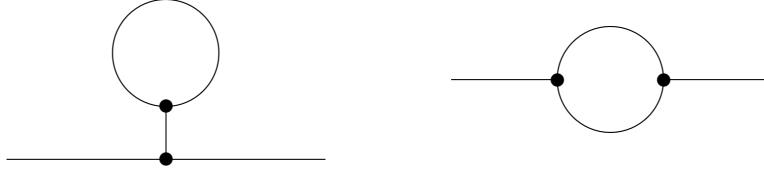


Abb. 6: Ein-Schleifen-Diagramme zur Bestimmung der Massen. Sie enthalten jeweils zwei 3-Vertizes und sind somit von Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$.

Kopplungskonstante geht also quadratisch in die Rechnung ein. Aus Gl. (4.17) folgt

$$g^2 = \frac{4\rho_3^2}{F_0^2 \chi_0^2} + \mathcal{O}(a^3).$$

Die Beiträge sind somit von Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$, die Korrekturen k_i für die Schleifen-Pionen müssen für die 3-Vertizes also nicht berücksichtigt werden.

Symmetrisierung

Jeder einzelne Vertex wird wieder vollständig symmetriert. Ein Vertex wird mit den Beinchen i, j und k parametrisiert, was zu

$$\begin{aligned} V_{ijk} &= -\frac{1}{3} [\delta_{ij}\delta_{k3}p_ip_j + \delta_{ik}\delta_{j3}p_ip_k + \delta_{i3}\delta_{jk}p_jp_k] \\ &\quad + \frac{1}{6} [\delta_{ij}\delta_{k3}(p_i + p_j)p_k + \delta_{ik}\delta_{j3}(p_i + p_k)p_j + \delta_{i3}\delta_{jk}(p_j + p_k)p_i] \end{aligned} \quad (4.21)$$

führt. Der zweite Vertex wird analog mit V_{lmn} bezeichnet. Zunächst wird der Tadpole-Beitrag berechnet.

Tadpole-Diagramm

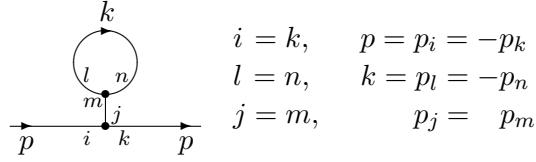


Abb. 7: Bezeichnungen am Tadpole-Graphen.

Die Vertizes müssen nun der Topologie des Graphen entsprechend verknüpft werden. Dazu werden die Bezeichnungen aus Abb. 7 benutzt. Das führt im Schleifenintegral zum Zähler

$$V_{3,\text{tad}}^{\pi_{1,2}} = V_{ijk} V_{lmn} \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} \Big|_{i=1,2} = \frac{2}{9} p^2 k^2$$

$$V_{3,\text{tad}}^{\pi_3} = V_{ijk} V_{lmn} \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} \Big|_{i=3} = 0 ,$$

der nur für die Pionen $\pi_{1,2}$ von null verschieden ist.

Hieraus lässt sich der Schleifenanteil des Tadpole-Vertex berechnen. Wegen der möglichen Vertauschung der inneren Linie muss der Symmetriefaktor $S^{-1} = 1/2$ berücksichtigt werden:

$$\Sigma_{3,\text{tad}}^{\pi_{1,2}}(p^2) = \frac{1}{2} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{V_{3,\text{tad}}^{\pi_{1,2}}}{k^2 + m_0^2} \frac{1}{0 + m_0^2} .$$

In dieser Form lässt sich der Schleifenanteil mit dem gleichen Vorgehen berechnen, das beim Graphen mit 4-Vertex verwendet wurde. Als Letztes muss noch der Schleifenanteil des Selbstenergie-Graphen berechnet werden.

Selbstenergie-Diagramm

Hier benutzt man wieder die symmetrierten Vertizes V_{ijk} und V_{lmn} aus Gl. (4.21). Aus den Bezeichnungen in Abb. 8 folgt die entsprechende Verknüpfung der Vertizes, um den Beitrag des Diagramms zu berechnen.

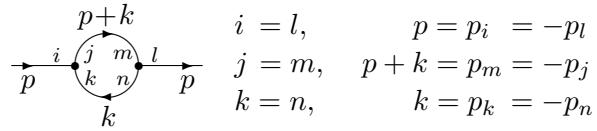


Abb. 8: Bezeichnungen am Selbstenergie-Graphen.

Der Zähler im Schleifenintegral erhält den Index SE und ist von der Form

$$V_{3,\text{SE}}^{\pi_i} = V_{ijk} V_{lmn} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn}$$

$$= c_0^{\pi_i} p^2 p^2 + c_1^{\pi_i} p^2 (pk) + c_2^{\pi_i} p^2 k^2 + c_2' p^2 (pk)^2 + c_3^{\pi_i} (pk) k^2 + c_4^{\pi_i} k^2 k^2$$

mit den Koeffizienten c_N . Alle Terme sind von der Form

$$\prod_{n=1}^N k_{\mu_n} \prod_{n=N+1}^4 p_{\mu_n},$$

so dass zunächst das Integral

$$\prod_{n=N+1}^4 p_{\mu_n} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\prod_{n=1}^N k_{\mu_n}}{[k^2 + m_0^2][(p+k)^2 + m_0^2]}$$

betrachtet wird, um den Selbstenergie-Beitrag sinnvoll aufzustellen. Es erweist sich als vorteilhaft, das Integral mit dem sog. „Feynman-Trick“ umzuschreiben. Dieser besteht darin, die Gleichung

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2}$$

mit der Wahl $a = (p+k)^2 + m_0^2$ und $b = k^2 + m_0^2$ anzuwenden, wodurch der Integrand zu

$$\int_0^1 dx \frac{\prod_{n=1}^N k_{\mu_n}}{(k^2 + m_0^2 + p^2 x + 2pkx)^2}$$

wird. Durch die Substitution $k \rightarrow k - px$ verschwinden die in k linearen Terme im Nenner und mit der Abkürzung

$$\hat{m}^2 = \hat{m}^2(p^2, x) = m_0^2 - p^2 x(1-x)$$

vereinfacht sich das Integral zu

$$\int_0^1 dx \frac{\prod_{n=1}^N (k_{\mu_n} - p_{\mu_n} x)}{(k^2 + \hat{m}^2)^2}.$$

Das k -Integral wird wieder mit dimensioneller Regularisierung behandelt. Da nach [20]

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + \hat{m}^2)^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\hat{m}^2)^{\alpha - \frac{d}{2}}}, \quad (4.22a)$$

folgt durch mehrfache Differentiation des k -Integrals u. a.

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + \hat{m}^2)^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha - 1 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\alpha)} \frac{\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu}}{(\hat{m}^2)^{\alpha - 1 - \frac{d}{2}}} \quad (4.22b)$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma}{(k^2 + \hat{m}^2)^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha - 2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\alpha)} \frac{\frac{1}{4} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho})}{(\hat{m}^2)^{\alpha - 2 - \frac{d}{2}}} \quad (4.22c)$$

und für eine ungerade Anzahl der k im Nenner verschwindet das Integral. Diese Formeln stimmen abgesehen von der Wick-Rotation mit denen im Minkowski-Raum in [21] überein. Es ist zu berücksichtigen, dass das Integral von der Kombination der Raumzeit-Indizes abhängt.

Mit diesem Resultat lässt sich das Schleifenintegral aufstellen. Dieses ist von Ordnung g^2 und wird mit dem Symmetriefaktor $S^{-1} = 1/2$ versehen. Die Integrale werden unter Berücksichtigung von Gl. (4.19)/(4.22) um $\varepsilon = 0$ entwickelt.

Insgesamt ist damit ein möglicher Weg skizziert, die Schleifenbeiträge aus dem WW-Term zu berechnen. Es war aber nicht möglich, ein vernünftiges Ergebnis für die Schleifenbeiträge zu erhalten. Das lag insbesondere an den auftretenden 3-Vertizes und den damit verbundenen umfangreichen Rechnungen. Besonders deutlich wird dies im Vergleich zur Schleifenrechnung im Kontinuum [22], dort treten nur die drei vollkommen symmetrischen WW-Terme aus Gl. (4.17) auf.

4.5 Optimierte Parametrisierung der Felder

Der vorherige Abschnitt hat gezeigt, dass der Rechenaufwand im Gegensatz zur Kontinuumstheorie bzw. der ungedrehten Gittertheorie sehr groß wird. Für eine effiziente Rechnung stellt sich die Aufgabe, diesen zusätzlichen Rechenaufwand zu minimieren. Ein möglicher Ansatz besteht darin, die Parametrisierung der physikalisch relevanten Felder zu modifizieren.

Im Abschnitt 4.2 wurden die Felder π_i durch die ungedrehten Felder π'_i und das neue Minimum $\tilde{\pi}_i$ durch Gl. (4.7) parametrisiert: $\pi_i = \pi'_i - \tilde{\pi}_i$. Dadurch ändert sich die Parametrisierung der Feldkonfiguration durch die einfache Substitution

$$U' = \exp\left(\frac{i}{F_0}\tau_i\pi'_i\right) = \exp\left(\frac{i}{F_0}\tau_i\pi_i + \frac{i}{F_0}\tau_i\tilde{\pi}_i\right),$$

einer linearen Verschiebung der Felder, und das Minimum liegt im Koordinatenursprung.

Die vorliegende Lagragedichte aus Gl. (3.4) wird durch die Exponential-Matrix U' parametrisiert. Die triviale lineare Verschiebung der Felder geht in das Argument der Exponentialfunktion ein; bei Matrix-wertigem Argument wird diese Verschiebung zu einer komplexen Transformation. Dieses wird deutlich, wenn man die Baker-Campbell-Hausdorff-Reihe (BCH-Reihe) betrachtet:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}([A,[A,B]]+[B,[B,A]])+\dots}.$$

Die nahe liegende einfache Transformation der Felder führt zu einer nichttrivialen Verschiebung im eigentlichen Freiheitsgrad der Lagragedichte, der Feldkonfigurations-Matrix U .

Bei der Matrix U handelt es sich um eine unitäre Matrix. Diese Tatsache motiviert, die Feldverschiebung ebenfalls durch eine unitäre Matrix U_0 zu beschreiben:

$$U' = \exp\left(\frac{i}{F_0}\tau_i\pi'_i\right) = \exp\left(\frac{i}{F_0}\tau_i\hat{\pi}_i\right) \exp\left(\frac{i}{F_0}\tau_i\tilde{\pi}_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{U} U_0.$$

Um die Felder zu unterscheiden, werden die physikalisch relevanten Felder in dieser „neuen“ Parametrisierung mit $\hat{\pi}_i$ bezeichnet. Diese unterscheidet sich gerade um die Terme in der BCH-Reihe, da die τ_i nicht kommutieren.

Die Multiplikation mit U_0 hat wegen

$$UU^\dagger = \hat{U}U_0(\hat{U}U_0)^\dagger = \hat{U}\underbrace{U_0U_0^\dagger}_1\hat{U}^\dagger = \hat{U}\hat{U}^\dagger$$

insbesondere keine Auswirkung auf den derivativen Term, was dazu führt, dass in führender Ordnung die Felder wie im Kontinuum bereits normiert sind. Daraus folgt, dass aus dem quadratischen Anteil die Massen direkt aus der Lagragedichte abgelesen werden können. Des Weiteren treten alle derivativen WW-Terme symmetrisiert auf, womit insbesondere die schwierigen 3-Vertizes nicht berechnet werden müssen. Diese Parametrisierung bietet somit schon eine deutliche Verbesserung zur ursprünglich verwendeten.

Die Relationen zwischen den Feldern $\hat{\pi}_i$ und π_i lassen sich über die BCH-Reihe bestimmen (z. B. durch das Verfahren in [23]). Wegen

$$\hat{U}U_0 = U' \Leftrightarrow \hat{U} = U'U_0^\dagger$$

folgt nach Anwendung der BCH-Entwicklung und Bildung des Logarithmus

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_i\tau_i &= \pi_i\tau_i - \frac{1}{2}i(\pi_i + \tilde{\pi}_i)\tilde{\pi}_j[\tau_i, \tau_j] + \dots \\ &= \pi_i\tau_i + (\pi_i + \tilde{\pi}_i)\tilde{\pi}_j\varepsilon_{ijk}\tau_k + \dots , \end{aligned}$$

hierbei sind nur die ersten Terme aufgeführt. Berücksichtigt man alle relevanten Terme, lassen sich daraus die Relationen zwischen den Feldern herleiten. Die Felder $\hat{\pi}_i$ gehen dann aus den π_i durch

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_1 &= \left(1 - \frac{2\tilde{\pi}_3^2}{3F_0^2}\right)\pi_1 + \frac{\tilde{\pi}_3}{F_0}\pi_2 - \frac{\tilde{\pi}_3}{3F_0^2}\left(\pi_1 + \frac{\tilde{\pi}_3}{F_0}\pi_2\right)\pi_3 \\ &\quad - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{15F_0^4}\left(\pi_1^2 + \pi_2^2 - \frac{1}{3}\pi_3^2\right)\pi_1 - \frac{\tilde{\pi}_3}{45F_0^4}\left(\pi_1 + \frac{\tilde{\pi}_3}{F_0}\pi_2\right)\pi_3|\vec{\pi}|^2 , \\ \hat{\pi}_2 &= \left(1 - \frac{2\tilde{\pi}_3^2}{3F_0^2}\right)\pi_2 - \frac{\tilde{\pi}_3}{F_0}\pi_1 - \frac{\tilde{\pi}_3}{3F_0^2}\left(\pi_2 - \frac{\tilde{\pi}_3}{F_0}\pi_1\right)\pi_3 \\ &\quad - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{15F_0^4}\left(\pi_1^2 + \pi_2^2 - \frac{1}{3}\pi_3^2\right)\pi_2 - \frac{\tilde{\pi}_3}{45F_0^4}\left(\pi_2 - \frac{\tilde{\pi}_3}{F_0}\pi_1\right)\pi_3|\vec{\pi}|^2 , \\ \hat{\pi}_3 &= \pi_3 + \left(\frac{\tilde{\pi}_3}{3F_0^2} - \frac{4\tilde{\pi}_3^2}{45F_0^4}\pi_3 + \frac{\tilde{\pi}_3}{45F_0^4}|\vec{\pi}|^2\right)(\pi_1^2 + \pi_2^2) \end{aligned}$$

hervor. Diese Transformationen führen die Lagragedichte von der \hat{U} -Parametrisierung in die „alte“ U -Parametrisierung über. Die Rücktransformation ist abgesehen von den numerischen Faktoren von derselben Form.

Trotz der guten Verbesserung in Bezug auf die Schleifenrechnung weist diese Parametrisierung auch noch Nachteile auf. Aufgrund der unterschiedlichen Vorzeichen in den Transformationen der π_1 - und π_2 -Felder wird die vorhandene Symmetrie verdeckt. Dies führt einerseits dazu, dass der symmetriebrechende Teil der Lagragedichte aufgrund der gewachsenen Zahl

an Termen an Übersichtlichkeit verliert. Andererseits hat dieses sogar direkten Einfluss auf Rechnungen für ungleiche up- und down-Quarkmassen, denn anders als im Kontinuum treten in der Lagrangedichte Terme auf, die zu Nicht-Diagonalelementen im inversen Propagator führen. Die deutlichen Verbesserungen haben also ihren Preis.

Ein Blick auf die modifizierte Parametrisierung $U' = U_0 U$ zeigt auf, wie auch diese Nachteile weitgehend eliminiert werden können. Diese Parametrisierung unterscheidet sich von der obigen lediglich dadurch, dass sich einige Vorzeichen in den o. a. Transformationsformeln ändern: Die Gleichung für $\hat{\pi}_1$ unterscheidet sich bei den in π_2 linearen Termen und Gleichung $\hat{\pi}_2$ bei den in π_1 linearen.

Ein Vergleich der Transformationsformeln, d. h. der Vorzeichen, legt eine „symmetrierte“ Parametrisierung

$$U' = \exp\left(\frac{i}{F_0}\tau_i\pi'_i\right) = \exp\left(\frac{i}{2F_0}\tau_i\tilde{\pi}_i\right) \exp\left(\frac{i}{F_0}\tau_i\hat{\pi}_i\right) \exp\left(\frac{i}{2F_0}\tau_i\tilde{\pi}_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{U_0}\hat{U}\sqrt{U_0} \quad (4.23)$$

nahe, wobei das U_0 wie vorher definiert wird. Durch eine zweifache Anwendung der BCH-Entwicklung gelangt man zu den Transformationen

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_1 &= \left(1 - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{6F_0^2}\right)\pi_1 - \frac{\tilde{\pi}_3}{3F_0^2}\pi_1\pi_3 - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{15F_0^4}\left(\pi_1^2 + \pi_2^2 - \frac{1}{3}\pi_3^2\right)\pi_1 - \frac{\tilde{\pi}_3}{45F_0^4}\pi_1\pi_3|\vec{\pi}|^2, \\ \hat{\pi}_2 &= \left(1 - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{6F_0^2}\right)\pi_2 - \frac{\tilde{\pi}_3}{3F_0^2}\pi_2\pi_3 - \frac{\tilde{\pi}_3^2}{15F_0^4}\left(\pi_1^2 + \pi_2^2 - \frac{1}{3}\pi_3^2\right)\pi_2 - \frac{\tilde{\pi}_3}{45F_0^4}\pi_2\pi_3|\vec{\pi}|^2, \\ \hat{\pi}_3 &= \pi_3 + \left(\frac{\tilde{\pi}_3}{3F_0^2} - \frac{4\tilde{\pi}_3^2}{45F_0^4}\pi_3 + \frac{\tilde{\pi}_3}{45F_0^4}|\vec{\pi}|^2\right)(\pi_1^2 + \pi_2^2). \end{aligned}$$

Diese Parametrisierung verdeckt die Symmetrie der π_1 - und π_2 -Felder nicht. Die Treelevel-Lagrangedichte behält ihre Übersichtlichkeit und die Schleifenrechnung wird radikal vereinfacht. Tatsächlich führt diese Parametrisierung unmittelbar zu der einfachen Schleifenrechnung, wie man sie aus dem Kontinuum kennt. Diese „symmetrierte“ Parametrisierung wird in den nächsten Kapiteln benutzt, um möglichst effizient Massen und Zerfallskonstanten für unterschiedliche Konfigurationen zu bestimmen.

Der Einfachheit halber wird dazu aber im Folgenden wieder die Bezeichnung ohne Hut $U(x)$ für die neue Feldkonfiguration verwendet.

5 Pionmassen für $N_f = 2$

In diesem Kapitel werden die Treelevel-Rechnungen aus Kapitel 4 in der neuen Parametrisierung wiederholt. Die Verbesserungen werden an den Zwischenergebnissen explizit deutlich. Anschließend wird die vereinfachte Berechnung der Schleifenbeiträge durchgeführt und damit werden die Pionmassen in nächstführender Ordnung vollständig bestimmt.

5.1 Massen in führender Ordnung

Die Lagrangedichte ist von der Form

$$\mathcal{L}_{\text{LO}} = \text{const.} + \mathcal{L}_{\text{lin}} + \mathcal{L}_{\text{quad}} + \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{WW}} ,$$

für die Treelevel-Rechnung sind die WW-Terme nicht relevant. Zunächst wird die Lagrangedichte nach der Gitterkonstanten a entwickelt. Die Drehung führt dazu, dass das Minimum vom Nullpunkt verschoben wird. Das Minimum wird wie gewohnt durch die Bedingung

$$\mathcal{L}_{\text{lin}} = 0$$

bestimmt. Daraus folgt entsprechend Gl. (4.10)

$$\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = 0$$

und

$$\tilde{\pi}_3 = F_0 \frac{\rho_3(\chi_0 - \rho_0)}{\chi_0^2} + \mathcal{O}(a^3) .$$

Die obigen Terme aus der Lagrangedichte sind von der Gestalt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_i)^2 , \\ \mathcal{L}_{\text{quad}} &= \frac{1}{2} m_\pi^2 \pi_i^2 = \frac{1}{2} \pi_i^2 \left[\chi_0 + \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right] \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{L}_{\text{WW}} = \frac{1}{6F_0^2} \left[(\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})^2 - |\vec{\pi}|^2 (\partial_\mu \vec{\pi})^2 \right] - \frac{m_0^2}{24F_0^2} |\vec{\pi}|^4 .$$

Da der kinetische Term automatisch normiert ist, lassen sich die Pionmassen direkt ablesen. Insbesondere kann in der Schleifenrechnung somit auf jegliche Normierung der Felder durch $\sqrt{k_i}$ verzichtet werden.

Vor der Schleifenrechnung werden aber zunächst noch die Treelevel-Terme in nächstführender Ordnung berechnet.

5.2 Massen in nächstführender Ordnung

Das Vorgehen ist identisch zu dem in Abschnitt 4.3 ausführlich Dargestellten und kann so übernommen werden. Die leicht unterschiedlichen Zwischenergebnisse werden dennoch aufgeführt.

Zu Beginn der Rechnung wird das Minimum in der nächstführenden Ordnung bestimmt. Dabei wird neben $\hat{\pi}_1 = \hat{\pi}_2 = 0$ das Ergebnis

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_3 &= F_0 \rho_3 \frac{F_0^2 + 8\chi_0 W_{86}}{\chi_0(F_0^2 + 16\chi_0 L_{86})} + \mathcal{O}(a^2) \\ &= \frac{\rho_3}{F_0} \left[\frac{F_0^2}{\chi_0} - 16L_{86} + 8W_{86} \right] + \mathcal{O}(a^2)\end{aligned}$$

aus Gl. (4.14) reproduziert. Nun kann die Lagrangedichte wieder am Minimum ausgewertet werden:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi_i)^2 \left[1 + \frac{8}{F_0^2} \left(\chi_0 - \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right) L_{54} + \frac{8}{F_0^2} \left(\rho_0 + \frac{\rho_3^2}{\chi_0} \right) W_{54} \right], \\ \mathcal{L}_{\text{quad}} &= \frac{1}{2}\pi_i^2 \left[\chi_0 + \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 - (1 + \delta_{3i})\rho_3^2) L_{86} \right. \\ &\quad \left. + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0\rho_0 + (1 + \delta_{3i})\rho_3^2) W_{86} + \frac{16}{F_0^2} (\rho_0^2 - \delta_{3i}\rho_3^2) W'_{86} \right].\end{aligned}$$

Im Gegensatz zur vorherigen Parametrisierung unterscheiden sich die Terme für die Pionen im kinetischen Anteil nicht, die Normierung der Felder durch $\sqrt{K_i}$ ist somit unabhängig vom betrachteten Pion. Die Massen lassen sich nun analog berechnen, man erhält wie in (4.16)

$$\begin{aligned}\bar{M}_{\pi_{1,2}}^2 &= (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0\rho_0 + \chi_0^2) L_{54} - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0\rho_0 + \rho_0^2 + \rho_3^2) W_{54} \\ &\quad + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 - \rho_3^2) L_{86} + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0\rho_0 + \rho_3^2) W_{86} + \frac{16}{F_0^2} \rho_0^2 W'_{86}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\bar{M}_{\pi_3}^2 &= (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} - \frac{8}{F_0^2}(\chi_0\rho_0 + \chi_0^2)L_{54} - \frac{8}{F_0^2}(\chi_0\rho_0 + \rho_0^2 + \rho_3^2)W_{54} \\ &\quad + \frac{16}{F_0^2}(\chi_0^2 - 2\rho_3^2)L_{86} + \frac{16}{F_0^2}(\chi_0\rho_0 + 2\rho_3^2)W_{86} + \frac{16}{F_0^2}(\rho_0^2 - \rho_3^2)W'_{86}.\end{aligned}$$

Die Treelevel-Massen sind also teilweise entartet mit einem Massensplitting von

$$\begin{aligned}\Delta\bar{M}_\pi^2 &= \bar{M}_{\pi_{1,2}}^2 - \bar{M}_{\pi_3}^2 \\ &= \frac{16\rho_3^2}{F_0^2}(L_{86} - W_{86} + W'_{86}) \\ &= \frac{64W_0^2a^2\sin^2(\omega)}{F_0^2}(L_{86} - W_{86} + W'_{86}).\end{aligned}$$

Damit sind die Treelevel-Massen in der symmetrisierten Parametrisierung reproduziert worden. Nun wird die vereinfachte Schleifenrechnung durchgeführt, um abschließend die Pionmassen zu bestimmen.

5.2.1 Schleifenrechnung

Wie in Kapitel 4 angedeutet, sind die WW-Terme ausschließlich vom selben Typ wie im Kontinuum. Die Schleifenrechnung wird nun für die relevanten WW-Terme

$$\mathcal{L}_{WW} = \frac{1}{6F_0^2} [(\vec{\pi}\partial_\mu\vec{\pi})^2 - |\vec{\pi}|^2(\partial_\mu\vec{\pi})^2] - \frac{m_0^2}{24F_0^2}|\vec{\pi}|^4$$

durchgeführt, $m_0^2 = m_\pi^2$ ist die Pionmasse in führender Ordnung. Aufgrund der Struktur des WW-Terms müssen keine Graphen mit 3-Vertizes berechnet werden.

Das Diagramm enthält einen Vertex und ist somit in der Kopplungskonstanten g von Ordnung $\mathcal{O}(g)$.

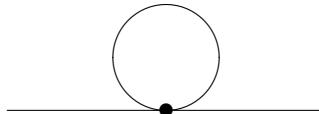


Abb. 9: Das verbleibende Ein-Schleifen-Diagramm zur Bestimmung der Massen.

Es enthält den 4-Vertex und ist von Ordnung $\mathcal{O}(g)$. Die komplexeren Diagramme der $\mathcal{O}(g^2)$ treten nicht auf.

Der 4-Vertex wird nun vollständig symmetrisiert wie in Anhang A beschrieben. Die WW-Lagrangedichte ist dann im Impulsraum durch

$$-\frac{1}{4!} \sum_{n=1}^3 v^{(n)} V_{ijkl}^{(n)} \pi_i \pi_j \pi_k \pi_l$$

gegeben. $V_{ijkl}^{(n)}$ ist der vollständig symmetrierte 4-Vertex, $v^{(n)}$ steht für die jeweiligen Vorfaktoren. Dabei stehen i, j, k und l jeweils für eines der vier Beinchen.

Entsprechend Abschnitt 4.4 wird der 4-Vertex symmetrisiert; die Ergebnisse sind hier erneut aufgeführt. Der Vertex $V_{ijkl}^{(1)}$ ist von der Form $\pi_i^2 \pi_j^2$ und resultiert aus dem symmetriebrechenden Term

$$V_{ijkl}^{(1)} = \frac{1}{3} [\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] .$$

Der nächste Vertex $V_{ijkl}^{(2)}$ kommt aus dem derivativen Term und hat die Form $\pi_i^2 (\partial_\mu \pi_j)^2$:

$$\begin{aligned} V_{ijkl}^{(2)} = & -\frac{1}{6} [\delta_{ij} \delta_{kl} (p_i p_j + p_k p_l) \\ & + \delta_{ik} \delta_{jl} (p_i p_k + p_j p_l) \\ & + \delta_{il} \delta_{jk} (p_i p_l + p_j p_k)] . \end{aligned}$$

Der letzte Vertex $V_{ijkl}^{(3)}$ ist von der Gestalt $(\pi_i \partial_\mu \pi_j)^2$ und kommt ebenfalls aus dem derivativen Anteil:

$$\begin{aligned} V_{ijkl}^{(3)} = & -\frac{1}{12} [\delta_{ij} \delta_{kl} (p_i + p_j)(p_k + p_l) \\ & + \delta_{ik} \delta_{jl} (p_i + p_k)(p_j + p_l) \\ & + \delta_{il} \delta_{jk} (p_i + p_l)(p_j + p_k)] . \end{aligned}$$

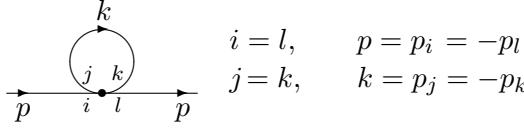
Die Beinchen i, j, k und l und deren Impulse können nun wieder beliebig zugeordnet werden, um den Beitrag des Diagramms zu bestimmen.

Berechnung des Diagramms

Zur Berechnung werden die Bezeichnungen aus Abb. 10 benutzt. Die Impulse p_i, p_j, p_k und p_l sind als einlaufend definiert, der äußere Impuls wird mit p und der innere mit k bezeichnet.

Der Zähler des Schleifenintegrals ist nun durch

$$\begin{aligned} V_4 &= \sum_n v^{(n)} V_{ijkl}^{(n)} \delta_{il} \delta_{jk} \\ &= \frac{1}{3F_0^2} [5m_0^2 + 4p^2 + 4k^2] \end{aligned}$$


Abb. 10: Bezeichnungen am 4-Vertex

gegeben. Der Schleifenbeitrag entspricht gerade dem in Kapitel 4 exemplarisch berechneten in Gl. (4.20), d. h.

$$\Sigma_4(p^2) = \left[\frac{m_0^2}{6F_0^2} + \frac{2}{3F_0^2} p^2 \right] I(m_0^2).$$

Die Renormierung wird nun auch mittels dimensioneller Regularisierung ausgeführt, so dass

$$I(m_0^2) = \frac{m_0^2}{16\pi^2} \left[R + \ln \left(\frac{m_0^2}{\Lambda^2} \right) \right].$$

Insgesamt lassen sich die Schleifenanteile damit zu

$$\begin{aligned} \Sigma_{m^2}^{\pi_i} &= \frac{1}{24\pi^2 F_0^2} \frac{m_\pi^4}{4} \left[R + \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{24\pi^2 F_0^2} \frac{1}{4} \left[((\chi_0 + \rho_0)^2 + \rho_3^2) \left[R + \ln \left(\frac{\chi_0}{\Lambda^2} \right) \right] + \left(\chi_0 \rho_0 + \frac{3\rho_0^2}{2} + \frac{\rho_3^2}{2} \right) \right], \\ \Sigma_{p^2}^{\pi_i} &= \frac{1}{24\pi^2 F_0^2} m_\pi^2 \left[R + \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{24\pi^2 F_0^2} \frac{1}{\chi_0} \left[\left(\chi_0^2 + \chi_0 \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2} \right) \left[R + \ln \left(\frac{\chi_0}{\Lambda^2} \right) \right] + \left(\chi_0 \rho_0 + \frac{\rho_0^2}{2} + \frac{\rho_3^2}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

bestimmen. Berücksichtigt man diese Beiträge im inversen Propagator, lassen die Pionmassen durch

$$M_\pi^2 = \bar{M}_\pi^2 + \Sigma_{m^2}^{\pi_i} - m_\pi^2 \Sigma_{p^2}^{\pi_i}$$

in nächstführender Ordnung berechnen.

5.2.2 Pionmasse NLO

Die divergenten Schleifenbeiträge werden nun durch Renormierung der Treelevel-Terme absorbiert, dazu werden die Koeffizienten aus Tab. 2 benutzt (s. Anhang B). Die Divergenzen heben sich gerade auf und man erhält die renormierten Pionmassen

$$\begin{aligned} M_{\pi_{1,2}}^2 &= m_\pi^2 + \frac{m_\pi^4}{32\pi^2 F_0^2} \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) \\ &\quad - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \chi_0^2) L_{54}^r - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \rho_0^2 + \rho_3^2) W_{54}^r \\ &\quad + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 - \rho_3^2) L_{86}^r + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \rho_3^2) W_{86}^r + \frac{16}{F_0^2} \rho_0^2 W_{86}^{rr} \end{aligned} \tag{5.2a}$$

Γ_{54}	Γ_{86}	Δ_{54}	Δ_{86}	Δ'_{86}
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$

Tab. 2: Werte der Renormierungs-Koeffizienten $N_f = 2$.

und

$$\begin{aligned} M_{\pi_3}^2 &= m_\pi^2 + \frac{m_\pi^4}{32\pi^2 F_0^2} \ln\left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right) \\ &\quad - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \chi_0^2) L_{54}^r - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \rho_0^2 + \rho_3^2) W_{54}^r \\ &\quad + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 - 2\rho_3^2) L_{86}^r + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + 2\rho_3^2) W_{86}^r + \frac{16}{F_0^2} (\rho_0^2 - \rho_3^2) W_{86}'^r \end{aligned} \quad (5.2b)$$

mit

$$\frac{m_\pi^4}{32\pi^2 F_0^2} \ln\left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right) = \frac{1}{2 \cdot 32\pi^2 F_0^2} \left[2\chi_0 \rho_0 + 3\rho_0^2 + \rho_3^2 + 2((\chi_0 + \rho_0)^2 + \rho_3^2) \ln\left(\frac{\chi_0}{\Lambda^2}\right) \right] + \mathcal{O}(a^3).$$

Daraus resultiert mit den renormierten GL-Koeffizienten ein Massensplitting von

$$\begin{aligned} \Delta M_\pi^2 &= M_{\pi_{1,2}}^2 - M_{\pi_3}^2 \\ &= \frac{16\rho_3^2}{F_0^2} (L_{86}^r - W_{86}^r + W_{86}'^r) \\ &= \frac{64W_0^2 a^2 \sin^2(\omega)}{F_0^2} (L_{86}^r - W_{86}^r + W_{86}'^r), \end{aligned}$$

die Schleifenbeiträge tragen somit nicht zum Massensplitting bei. Dieses Ergebnis ist mit anderen Ansätzen bereits in [18, 24] gezeigt worden.

Die renormierten GL-Koeffizienten L_i^r , W_i^r und $W_i'^r$ hängen von der Renormierungsskala Λ ab. Für zwei Skalen Λ_1 und Λ_2 sind die Koeffizienten durch die Relation

$$L_i^r(\Lambda_2) = L_i^r(\Lambda_1) + \frac{\Gamma_i}{16\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}\right)$$

miteinander verbunden (analog für W_i^r und $W_i'^r$). Als Renormierungsskala wählt man üblicherweise $\Lambda = 4\pi F_0$.

5.3 Pionmassen bei ungleichen Quarkmassen

Die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt kann man leicht auf den Fall ungleicher Quarkmassen $m_u \neq m_d$ erweitern, wenn man die im Folgenden dargestellte Parametrisierung wählt.

5.3.1 Parametrisierung

Da das up-Quark leichter als das down-Quark ist, werden die nicht-negativen Größen

$$m_+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_d + m_u}{2} \geq 0$$

als Mittelwert der Quarkmassen und

$$m_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_d - m_u}{2} \geq 0$$

als Abweichung von diesem verwendet, die Indizes symbolisieren die Rechenoperation zwischen den Quarkmassen. Diese lassen sich dann durch die neu definierten Größen ausdrücken:

$$\begin{aligned} m_u &= m_+ - m_- , \\ m_d &= m_+ + m_- . \end{aligned}$$

Um zu gewährleisten, dass die Fermion-Determinante positiv ist, kann nach [13] die Wirkung nicht beliebig modifiziert werden. Die Massen dürfen nicht mit denselben Generatoren implementiert werden wie die Drehung. Da die axiale Drehung um die τ_3 -Achse ausgeführt wird, erreicht man dieses z. B. dadurch, dass man die Abweichung m_- in τ_1 -Richtung einfügt. Die Quarkmassen-Matrix M hat dann die Gestalt

$$M = m_+ \mathbb{1} + m_- \tau_1 = \begin{pmatrix} m_+ & m_- \\ m_- & m_+ \end{pmatrix} .$$

Die Eigenschaften der τ_i -Matrizen führen dann zu der einfachen Erweiterung auf den Fall verschiedener Quarkmassen. Die relevanten Anteile der Lagrangedichte aus Kapitel 5.2 können direkt übernommen werden. Wegen der geänderten Quarkmatrix muss die Lagrangedichte allerdings leicht modifiziert werden.

5.3.2 Modifikation der Lagrangedichte

Die Lagrangedichte \mathcal{L}_{NLO} ändert sich dann formal nicht, wenn auch das χ an die veränderten Quarkmassen angepasst wird, d. h.

$$\chi = \chi_0 \mathbb{1} \longrightarrow \chi = \chi_0 \mathbb{1} + \chi_1 \tau_1 ,$$

wobei $\chi_0 = 2B_0 m_+ = B_0(m_d + m_u)$ und $\chi_1 = 2B_0 m_- = B_0(m_d - m_u)$.

Damit können sich grundsätzlich nur der Massenterm aus \mathcal{L}_{LO} und die Ausdrücke mit den Konstanten L_4, \dots, L_8 und W_6, W_7 und W_8 ändern, indem zusätzlich zu den χ_0 -Termen noch χ_1 -Terme auftreten. Eine genaue Untersuchung der Lagrangedichte zeigt, dass nur die L_7 - und L_8 -Terme von null verschieden sind:

- Der W_7 -Beitrag bleibt null, da $\langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \rangle = 0$.

- Wegen $\tau_1 = \tau_1^\dagger$ gilt

$$\langle \tau_1^\dagger U + U^\dagger \tau_1 \rangle = \langle \tau_1 U + (\tau_1 U)^\dagger \rangle = \underbrace{\langle \tau_1 U \rangle}_{\text{imaginär}} + \overline{\langle \tau_1 U \rangle} = 0 ,$$

d. h. der Massenterm aus \mathcal{L}_{LO} und die L_6 -, W_6 - und W_8 -Terme liefern keine zusätzlichen Beiträge.

- Der L_4 - und L_5 -Term ändern sich dann ebenfalls nicht, da nach Gl. (4.2)

$$\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger = \frac{1}{2} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \mathbb{1} .$$

Insbesondere müssen damit weder die Berechnung des kinetischen Anteils noch die Schleifenrechnung erneut durchgeführt werden.

5.3.3 Treelevel-Terme

Die Rechnung zeigt, dass die neuen Terme keinen Einfluss auf die Lage des Minimums haben, welches dann (vgl. Gl. (4.14)) wieder bei

$$\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = 0$$

und

$$\tilde{\pi}_3 = \frac{\rho_3}{F_0} \left(\frac{F_0^2}{\chi_0} + 8W_{86} - 16L_{86} \right) + \mathcal{O}(a^2)$$

liegt. Im quadratischen Anteil führen die zusätzlichen Terme zu einer Modifikation des π_1 -Terms. Mit der Abkürzung

$$L_{87} = 2L_7 + L_8$$

ergibt sich für die quadratischen Terme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quad}} = & \frac{1}{2} \pi_i^2 \left[\chi_0 + \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 - (1 + \delta_{3i})\rho_3^2) L_{86} + \delta_{1i} \frac{16}{F_0^2} \chi_1^2 L_{87} \right. \\ & \left. + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + (1 + \delta_{3i})\rho_3^2) W_{86} + \frac{16}{F_0^2} (\rho_0^2 - \delta_{3i}\rho_3^2) W'_{86} \right] . \end{aligned}$$

Es tritt somit nur ein zusätzlicher Term in der Rechnung auf. Da $L_{87} = L_{87}^r$ (s. Anhang B), hat dieser Term keinen Einfluss auf die Renormierung.

5.3.4 Berechnung der Pionmassen

Es lassen sich nun ohne weiteres die renormierten Pionmassen angeben. Mit den Ergebnissen der Schleifenrechnung aus Abschnitt 5.2.1 ergeben sich

$$\begin{aligned} M_{\pi_1}^2 &= m_\pi^2 + \frac{m_\pi^4}{32\pi^2 F_0^2} \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) \\ &\quad - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \chi_0^2) L_{54}^r - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \rho_0^2 + \rho_3^2) W_{54}^r \\ &\quad + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 - \rho_3^2) L_{86}^r + \frac{16}{F_0^2} \chi_1^2 L_{87}^r + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \rho_3^2) W_{86}^r + \frac{16}{F_0^2} \rho_0^2 W_{86}'^r , \end{aligned} \quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned} M_{\pi_2}^2 &= m_\pi^2 + \frac{m_\pi^4}{32\pi^2 F_0^2} \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) \\ &\quad - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \chi_0^2) L_{54}^r - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \rho_0^2 + \rho_3^2) W_{54}^r \\ &\quad + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 - \rho_3^2) L_{86}^r + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \rho_3^2) W_{86}^r + \frac{16}{F_0^2} \rho_0^2 W_{86}'^r \end{aligned} \quad (5.3b)$$

und

$$\begin{aligned} M_{\pi_3}^2 &= m_\pi^2 + \frac{m_\pi^4}{32\pi^2 F_0^2} \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) \\ &\quad - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \chi_0^2) L_{54}^r - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + \rho_0^2 + \rho_3^2) W_{54}^r \\ &\quad + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0^2 - 2\rho_3^2) L_{86}^r + \frac{16}{F_0^2} (\chi_0 \rho_0 + 2\rho_3^2) W_{86}^r + \frac{16}{F_0^2} (\rho_0^2 - \rho_3^2) W_{86}'^r . \end{aligned} \quad (5.3c)$$

Damit sind jetzt auch die Pionmassen in nächstführender Ordnung sowohl mit entarteten Massen als auch für den Fall $m_u \neq m_d$ bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ in der Gitterkonstanten bestimmt; in beiden Fällen treten keine Mischungen auf.

Aufgrund der Implementierung der unterschiedlichen up- und down-Quarkmassen durch τ_1 wird die Masse des neutralen Pions π^0 durch die kartesische Feldkomponente π_1 repräsentiert. Die aus der Kontinuums-QCD gewohnte Zuordnung aus Abschnitt 2.2.3

$$\begin{aligned} \pi^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_1 \mp i\pi_2) , \\ \pi^0 &= \pi_3 \end{aligned}$$

muss dementsprechend modifiziert werden ($\pi_1 \leftrightarrow \pi_3$). Die geladenen Pionen π^\pm setzen sich dann aus den Feldkomponenten π_2 und π_3 zusammen. Da die Entartung der Pionmassen aber vollständig aufgehoben ist, sind die Ladungseigenzustände π^\pm für $m_u \neq m_d$ und $\omega \neq 0$ keine Masseneigenzustände.

Neben dem gewöhnlich in τ_3 -Richtung implementierten Drehwinkel ω kann man die Drehung auch in eine andere Richtung wählen. So können die ungleichen Quarkmassen wie im Kontinuum üblich in τ_3 -Richtung eingefügt werden; die Quark-Massenmatrix ist dann diagonal. Außerdem kann die gewöhnliche Zuordnung der Ladungseigenzustände verwendet werden; wie bereits angeführt sind diese jedoch keine Masseneigenzustände. Abgesehen von den entsprechenden Vertauschungen unterscheiden sich die Ergebnisse für die Pionmassen nicht.

Fazit

Die Rechnung zeigt, dass die optimierte Parametrisierung der Feldkonfiguration durch eine symmetrische, unitäre Transformation (s. Gl. (4.23)) tatsächlich ein erfolgreicher Ansatz zur Berechnung der Pionmassen ist. Im Gegensatz zur linearen Feldverschiebung [16, 17] treten in nächstführender Ordnung einschließlich der $\mathcal{O}(a^2)$ -Terme im Vergleich zur Kontinuumurrechnung keine zusätzlichen Schwierigkeiten auf. Diese Tatsache motiviert, diesen Ansatz auf andere Konfigurationen und zur Bestimmung weiterer physikalischer Größen anzuwenden.

6 Mesonmassen für $N_f = 3$

Die am Ende von Kapitel 4 eingeführte Parametrisierung wird nun verwendet, um die Mesonmassen für $N_f = 3$ zu bestimmen. Zusätzlich zum up- und down-Quark wird also noch das strange-Quark berücksichtigt. Die in der Natur beobachteten Mesonen können im Y - I_3 -Diagramm übersichtlich dargestellt werden.

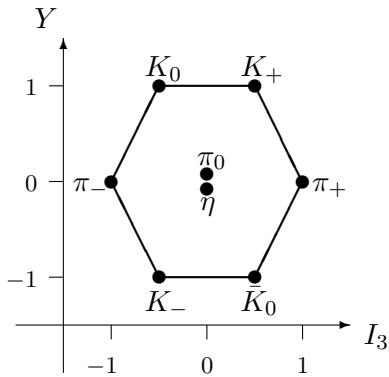


Abb. 11: Darstellung des Mesonen-Oktetts im Y - I_3 -Diagramm. I_3 bezeichnet den Isospin und $Y = 2(Q - I_3)$ die *Hyperladung*. Die Pionen haben den Isospin $(-1, 0, 1)$ und tragen wie das Eta-Meson keine Hyperladung. Die Kaonen hingegen tragen die Hyperladung ± 1 . Darin äußert sich die *Strangeness* S der Kaonen, weil für das Mesonen-Oktett $Y = S$ gilt.*

6.1 Parametrisierung

Die chirale Symmetrie wird im Fall $N_f = 3$ durch die Gruppe SU(3) beschrieben. Die Generatoren dieser Gruppe werden durch die acht Gell-Mann-Matrizen λ_a dargestellt. Diese sind

*Die Hyperladung ist i. Allg. die Summe von Baryonenzahl \tilde{B} und Strangeness S sowie *Charmness* C , *Bottomness* B und *Topness* T , d. h.

$$Y = \tilde{B} + S + C + B + T .$$

Für das Mesonen-Oktett kann allerdings nur $S \neq 0$ sein.

spurlos, aber weisen nicht alle vorteilhaften Eigenschaften der Pauli-Matrizen der SU(2), wie z. B. $\tau_i^2 = \mathbb{1}$, auf (s. Anhang C.2).

Zu jeder dieser Matrizen gehört ein Meson ϕ_a ; diese stellen Linearkombinationen der drei Pionen π , der vier Kaonen K und des η -Teilchens dar. Damit der Unterschied deutlich ist, wird neben der Bezeichnung ϕ_a auch diese benutzt:

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ K_4 \\ K_5 \\ K_6 \\ K_7 \\ \eta_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\pi} \\ \vec{K} \\ \eta_8 \end{pmatrix} .$$

Auch die Masse des strange-Quarks muss berücksichtigt werden, so dass man i. Allg. drei paarweise verschiedene Quarkmassen hat. Wegen

$$m_u, m_d \ll m_s$$

wird zunächst aber vereinfacht $m = m_u = m_d$ angenommen; das führt zu den Definitionen

$$\begin{aligned} \chi_0 &= 2B_0 m , \\ \chi_s &= 2B_0 m_s . \end{aligned}$$

Die daraus resultierende Massenmatrix wird durch die Einheitsmatrix und die Gell-Mann-Matrizen parametrisiert, nahe liegend ist

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{3}(2\chi_0 + \chi_s)\mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\chi_s - \chi_0)\lambda_8 \\ &= \begin{pmatrix} \chi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_s \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Eine mögliche Unterscheidung von up- und down-Quark wie im Fall $N_f = 2$ kann wieder durch die λ_1 -Matrix eingefügt werden.

Die Gitterterme werden so wie für $N_f = 2$ parametrisiert, die axiale Drehung erfolgt analog mit λ_3 , d. h.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{3}(2\rho_0 + |\rho|)\mathbb{1} - \frac{1}{\sqrt{3}}(|\rho| - \rho_0)\lambda_8 + i\rho_3\lambda_3 \\ &= \begin{pmatrix} \rho_0 + i\rho_3 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_0 - i\rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & |\rho| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $|\rho| = \sqrt{\rho_0^2 + \rho_3^2} = 2W_0a$. Damit sind alle relevanten Größen definiert.

6.2 Massen in führender Ordnung

6.2.1 Bestimmung des Minimums und des kinetischen Anteils

Das Minimum wird erneut dadurch bestimmt, dass wieder

$$\mathcal{L}_{\text{lin}} = 0$$

berechnet wird. Wie auch im Fall $N_f = 2$ verschiebt sich das Minimum nur in Richtung der λ_3 -Achse. Die Auflösung nach $\tilde{\pi}_3$ liefert das identische Minimum

$$\tilde{\pi}_3 = F_0 \frac{\rho_3(\chi_0 - \rho_0)}{\chi_0^2} + \mathcal{O}(a^3) .$$

In führender Ordnung hat die Quarkmasse m_s aber keine Auswirkung auf die Lage des Minimums.

Für den kinetischen Anteil gilt aufgrund der zyklischen Eigenschaft der Spur wieder

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\phi})^2 ,$$

die Massen lassen sich somit direkt aus der Lagrangedichte ablesen.

6.2.2 Bestimmung der Mesonenmassen

Der quadratische Anteil der Lagrangedichte ist von der Form

$$\mathcal{L}_{\text{quad}} = \frac{1}{2} (m_\pi^2 \vec{\pi}^2 + m_K^2 \vec{K}^2 + m_\eta^2 \eta^2) ,$$

es treten keine Mischterme auf. Die Massen sind explizit gegeben durch

$$\begin{aligned} m_\pi^2 &= \chi_0 + \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} , \\ m_K^2 &= \frac{1}{2} \left[(\chi_s + \chi_0) + (|\rho| + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right] , \\ m_\eta^2 &= \frac{1}{3} \left[(2\chi_s + \chi_0) + (2|\rho| + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right] . \end{aligned}$$

Diese erfüllen damit wie im Kontinuum die Gell-Mann-Okubo-Relation

$$4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2$$

bzw.

$$3m_\eta^2 - m_K^2 = 3m_K^2 - m_\pi^2 .$$

Als Nächstes werden die Massen des Mesonen-Oktetts in nächstführender Ordnung berechnet. Dazu betrachtet man zunächst die Treelevel-Terme.

6.3 Treelevel-Massen in nächstführender Ordnung

Aufgrund der Eigenschaften der Gell-Mann-Matrizen müssen bei der Berechnung abgesehen von L_1 , L_2 und L_3 alle Teile der Lagragedichte berücksichtigt werden. Ansonsten ist das Verfahren analog zu dem aus den Abschnitten 4.3 und 5.2.

6.3.1 Bestimmung des Minimums und des quadratischen Anteils

Das Minimum ist auf der π_3 -Achse verschoben. Aus dem linearen Teil der Lagragedichte lässt sich die Nullstelle bestimmen, man erhält

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_3 &= F_0 \rho_3 \frac{F_0^2 + 8W_8\chi_0 + 8(2\chi_0 + \chi_s)W_6}{\chi_0(F_0^2 + 16L_8\chi_0 + 16(2\chi_0 + \chi_s)L_6)} + \mathcal{O}(a^2) \\ &= \frac{\rho_3}{F_0} \left[\frac{F_0^2}{\chi_0} - 8(2L_8 - W_8) - 8\frac{2\chi_0 + \chi_s}{\chi_0}(2L_6 - W_6) \right] + \mathcal{O}(a^2),\end{aligned}$$

damit der lineare Term \mathcal{L}_{lin} verschwindet. Für $\chi_s = 0$ erhält man formal die gleiche Nullstelle wie in der Rechnung für $N_f = 2$ mit den Bezeichnungen aus Gl. (4.13). Wegen $\chi_s \neq \chi_0$ bietet sich hier und im Folgenden eine alternative Schreibweise wie z. B. $L_{86} = 3L_6 + L_8$ nicht an.

Am Minimum lässt sich der symmetriebrechende Anteil auswerten. Für den quadratischen Anteil erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{quad},\pi_i} &= \frac{1}{2}\pi_i^2 \left[m_\pi^2 + \frac{4}{F_0^2} \left[\chi_0^2(4L_8 + 8L_6) + 4\chi_0\chi_sL_6 + \chi_0\rho_0(4W_8 + 8W_6) + 2\chi_0|\rho|W_6 \right. \right. \\ &\quad + 2\chi_s\rho_0W_6 + \rho_0^2(4W'_8 + 8W'_6) + 4\rho_0|\rho|W'_6 + \rho_3^2\frac{\chi_s}{\chi_0}(-2L_6 + 2W_6) \\ &\quad \left. \left. + (\delta_{i1} + \delta_{i2})[\rho_3^2(-4L_8 - 8L_6 + 4W_8 + 8W_6)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \delta_{i3}[\rho_3^2(-8L_8 - 16L_6 + 8W_8 + 16W_6 - 4W'_8 - 8W'_6)] \right] \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{quad},K} &= \frac{1}{2}\vec{K}^2 \left[m_K^2 + \frac{4}{F_0^2} \left[\chi_0^2(L_8 + 4L_6) + \chi_0\chi_s(2L_8 + 6L_6) + \chi_s^2(L_8 + 2L_6) \right. \right. \\ &\quad + \chi_0\rho_0(W_8 + 4W_6) + \chi_0|\rho|(W_8 + 3W_6) + \chi_s\rho_0(W_8 + 3W_6) \\ &\quad + \chi_s|\rho|(W_8 + 2W_6) + \rho_0^2(2W'_8 + 6W'_6) + \rho_0|\rho|(2W'_8 + 6W'_6) \\ &\quad + \rho_3^2(-2L_8 - 4L_6 + 2W_8 + 4W_6 + 2W'_6) \\ &\quad \left. \left. + \rho_3^2\frac{\chi_s}{\chi_0}(-L_8 - 3L_6 + W_8 + 3W_6) \right] \right]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quad},\eta} = & \frac{1}{2}\eta^2 \left[m_\eta^2 + \frac{4}{F_0^2} \frac{2}{3} \left[\chi_0^2 (2L_8 + 4L_7 + 4L_6) + \chi_0 \chi_s (-8L_7 + 10L_6) \right. \right. \\ & + \chi_s^2 (4L_8 + 4L_7 + 4L_6) + \chi_0 \rho_0 (2W_8 + 4W_7 + 4W_6) \\ & + \chi_0 |\rho| (-4W_7 + 5W_6) + \chi_s \rho_0 (-4W_7 + 5W_6) \\ & + \chi_s |\rho| (4W_8 + 4W_7 + 4W_6) \\ & + \rho_0^2 (6W'_8 + 8W'_7 + 8W'_6) + \rho_0 |\rho| (-8W'_7 + 10W'_6) \\ & + \rho_3^2 (-4L_8 - 4L_7 - 4L_6 + 4W_8 + 4W_7 + 4W_6 + 2W'_8 + 4W'_7 + 4W'_6) \\ & \left. \left. + \rho_3^2 \frac{\chi_s}{\chi_0} (4L_7 - 5L_6 - 4W_7 + 5W_6) \right] \right]. \end{aligned}$$

6.3.2 Bestimmung des kinetischen Anteils

Als Nächstes muss noch der kinetische Anteil berechnet werden, um die Felder zu normieren. Aus der Lagrangedichte nächstführender Ordnung erhält man Beiträge aus den L_4 -, L_5 -, W_4 - und W_5 -Terminen. Nach den Teilchen aufgeschlüsselt müssen die Anteile

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin},\pi} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 \left[1 + \frac{4}{F_0^2} \left[\chi_0 (2L_5 + 4L_4) + 2\chi_s L_4 + \rho_0 (2W_5 + 4W_4) + 2|\rho| W_4 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\rho_3^2}{\chi_0} (-L_5 - 2L_4 + 2W_5 + 4W_4) \right] \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin},K} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{K})^2 \left[1 + \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{2} \left[\chi_0 (2L_5 + 8L_4) + \chi_s (2L_5 + 4L_4) + \rho_0 (2W_5 + 8W_4) \right. \right. \\ & \left. \left. + |\rho| (2W_5 + 4W_4) + \frac{\rho_3^2}{\chi_0} (-L_5 - 4L_4 + 2W_5 + 8W_4) \right] \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin},\eta} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 \left[1 + \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{3} \left[\chi_0 (2L_5 + 12L_4) + \chi_s (4L_5 + 6L_4) + \rho_0 (2W_5 + 12W_4) \right. \right. \\ & \left. \left. + |\rho| (4W_5 + 6W_4) + \frac{\rho_3^2}{\chi_0} (-L_5 - 6L_4 + 2W_5 + 12W_4) \right] \right] \end{aligned}$$

berücksichtigt werden. Mit dem eckigen Klammerterm sind die K_a aus dem inversen Propagator

$$G_a^{-1}(p) = K_a(p^2 + \bar{M}_{\phi_a}^2)$$

gegeben. Da $G_a^{-1}(p)$ Diagonalgestalt hat, lassen sich die Treelevel-Massen $\bar{M}_{\phi_a}^2$ direkt bestimmen.

6.3.3 Treelevel-Massen des Mesonen-Oktetts

Pionmassen

Die Pionmassen erhalten in nächstführender Ordnung explizite Beiträge des strange-Quarks. Diese sind indirekt auch schon im Fall $N_f = 2$ enthalten. Dort äußern sie sich wegen $m_s \rightarrow \infty$ nur durch „virtuelle“ Effekte, d. h. durch unterschiedliche GL- und Renormierungs-Koeffizienten [6, 19].

Für die Pionen erhält man so die Treelevel-Massen

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\pi_{1,2}}^2 &= (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \\ &+ \frac{4}{F_0^2} \left[\chi_0^2 (4L_8 + 8L_6 - 2L_5 - 4L_4) \right. \\ &\quad + \chi_0 \chi_s (4L_6 - 2L_4) \\ &\quad + \chi_0 \rho_0 (-2L_5 - 4L_4 + 4W_8 + 8W_6 - 2W_5 - 4W_4) \\ &\quad + \chi_0 |\rho| (2W_6 - 2W_4) \\ &\quad + \chi_s \rho_0 (-2L_4 + 2W_6) \\ &\quad + \rho_0^2 (-2W_5 - 4W_4 + 4W'_8 + 8W'_6) \\ &\quad + \rho_0 |\rho| (-2W_4 + 4W'_6) \\ &\quad + \rho_3^2 (-4L_8 - 8L_6 + 4W_8 + 8W_6 - 2W_5 - 4W_4) \\ &\quad \left. + \rho_3^2 \frac{\chi_s}{\chi_0} (-2L_6 - L_4 + 2W_6) \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{M}_{\pi_3}^2 &= (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \\ &+ \frac{4}{F_0^2} \left[\chi_0^2 (4L_8 + 8L_6 - 2L_5 - 4L_4) \right. \\ &\quad + \chi_0 \chi_s (4L_6 - 2L_4) \\ &\quad + \chi_0 \rho_0 (-2L_5 - 4L_4 + 4W_8 + 8W_6 - 2W_5 - 4W_4) \\ &\quad + \chi_0 |\rho| (2W_6 - 2W_4) \\ &\quad + \chi_s \rho_0 (-2L_4 + 2W_6) \\ &\quad + \rho_0^2 (-2W_5 - 4W_4 + 4W'_8 + 8W'_6) \\ &\quad + \rho_0 |\rho| (-2W_4 + 4W'_6) \\ &\quad + \rho_3^2 (-8L_8 - 16L_6 + 8W_8 + 16W_6 - 2W_5 - 4W_4 - 4W'_8 - 8W'_6) \\ &\quad \left. + \rho_3^2 \frac{\chi_s}{\chi_0} (-2L_6 - L_4 + 2W_6) \right]. \end{aligned}$$

Betrachtet man das aus der axialen Drehung resultierende Massensplitting

$$\begin{aligned}\Delta \bar{M}_\pi^2 &= \bar{M}_{\pi_{1,2}}^2 - \bar{M}_{\pi_3}^2 \\ &= \frac{16\rho_3^2}{F_0^2}(L_{86} - W_{86} + W'_{86}) \\ &= \frac{64W_0^2 a^2 \sin^2(\omega)}{F_0^2}(L_{86} - W_{86} + W'_{86}) ,\end{aligned}$$

dann entspricht dies formal dem Ergebnis aus Kapitel 5 mit der gekürzten Schreibweise aus Gl. (4.13).

Kaonmassen

Neben den Pionmassen lassen sich auch die Massen der Kaonen bestimmen, man erhält

$$\begin{aligned}\bar{M}_K^2 &= \frac{1}{2} \left[(\chi_s + \chi_0) + (|\rho| + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right] \\ &\quad + \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{2} \left[\chi_0^2 (2L_8 + 8L_6 - L_5 - 4L_4) \right. \\ &\quad + \chi_0 \chi_s (4L_8 + 16L_6 - 2L_5 - 6L_4) \\ &\quad + \chi_s^2 (2L_8 + 4L_6 - L_5 - 2L_4) \\ &\quad + \chi_0 \rho_0 (-L_5 - 4L_4 + 2W_8 + 8W_6 - W_5 - 4W_4) \\ &\quad + \chi_0 |\rho| (-L_5 - 4L_4 + 2W_8 + 6W_6 - W_5 - 2W_4) \\ &\quad + \chi_s \rho_0 (-L_5 - 2L_4 + 2W_8 + 6W_6 - W_5 - 4W_4) \\ &\quad + \chi_s \rho_0 (-L_5 - 2L_4 + 2W_8 + 4W_6 - W_5 - 2W_4) \\ &\quad + \rho_0^2 (-2W_5 - 6W_4 + 4W'_8 + 12W'_6) \\ &\quad + \rho_0 |\rho| (-2W_5 - 6W_4 + 4W'_8 + 12W'_6) \\ &\quad + \rho_3^2 (-4L_8 - 8L_6 + 4W_8 + 8W_6 - 2W_5 - 6W_4 + 4W'_6) \\ &\quad \left. + \rho_3^2 \frac{\chi_s}{\chi_0} (-2L_8 - 6L_6 + L_4 + 2W_8 + 6W_6 - W_5 - 4W_4) \right] .\end{aligned}$$

Der Twisted-Mass-Term belässt somit die Kaon-Massen auch in nächstführender Ordnung entartet.

Etamasse

Um das Oktett zu vervollständigen, wird noch die Masse des η -Teilchens mit

$$\begin{aligned} \bar{M}_\eta^2 = & \frac{1}{3} \left[(2\chi_s + \chi_0) + (2|\rho| + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right] \\ & + \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{9} \left[\chi_0^2 (12L_8 + 24L_7 + 24L_6 - 2L_5 - 12L_4) \right. \\ & \quad + \chi_0 \chi_s (-48L_7 + 60L_6 - 8L_5 - 30L_4) \\ & \quad + \chi_s^2 (24L_8 + 24L_7 + 24L_6 - 8L_5 - 12L_4) \\ & \quad + \chi_0 \rho_0 (-2L_5 - 12L_4 + 12W_8 + 24W_7 + 24W_6 - 2W_5 - 12W_4) \\ & \quad + \chi_0 |\rho| (-4L_5 - 24L_4 - 24W_7 + 30W_6 - 4W_5 - 6W_4) \\ & \quad + \chi_s \rho_0 (-4L_5 - 6L_4 - 24W_7 + 30W_6 - 4W_5 - 24W_4) \\ & \quad + \chi_s |\rho| (-8L_5 - 12L_4 + 24W_8 + 24W_7 + 24W_6 - 8W_5 - 12W_4) \\ & \quad + \rho_0^2 (-10W_5 - 24W_4 + 36W'_8 + 48W'_7 + 48W'_6) \\ & \quad + \rho_0 |\rho| (-8W_5 - 30W_4 - 48W'_7 + 60W'_6) \\ & \quad + \rho_3^2 (-24L_8 - 24L_7 - 24L_6 + 24W_8 + 24W_7 + 24W_6 \\ & \quad \quad - 10W_5 - 24W_4 + 12W'_8 + 24W'_7 + 24W'_6) \\ & \quad \left. + \rho_3^2 \frac{\chi_s}{\chi_0} (24L_7 - 30L_6 + 9L_4 - 24W_7 + 30W_6 - 4W_5 - 24W_4) \right] \end{aligned}$$

angegeben.

Damit sind die Treelevel-Massen vollständig. Zuletzt wird nun noch die Schleifenrechnung durchgeführt, um die Massen endgültig zu berechnen.

6.4 Schleifenrechnung

Zur besseren Übersicht wird zunächst der WW-Anteil der Lagrangedichte zerlegt:

$$\mathcal{L}_{WW} = \mathcal{L}_{WW,sb} + \mathcal{L}_{WW,der} .$$

Als symmetriebrechenden Term erhält man, ausgedrückt in Massen aus führender Ordnung,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WW,sb} = & -\frac{1}{4!} \frac{1}{F_0^2} \left[m_\pi^2 |\vec{\pi}|^4 + m_K^2 |\vec{K}|^4 + \frac{1}{3} (4m_\eta^2 - m_\pi^2) |\eta|^4 \right. \\ & \quad \left. + (m_K^2 + m_\pi^2) |\vec{\pi}|^2 |\vec{K}|^2 + 2m_\pi^2 |\vec{\pi}|^2 |\eta|^2 + (3m_\eta^2 - m_K^2) |\vec{K}|^2 |\eta|^2 \right] . \end{aligned}$$

Dieser ist damit formal identisch mit dem der Kontinuums-QCD [2]. Auch für den derivativen Anteil erhält man analog

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WW,\text{der}} = & -\frac{1}{4!} \frac{1}{F_0^2} \left[4 \left[(\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})^2 - |\vec{\pi}|^2 (\partial_\mu \vec{\pi})^2 \right] + \left[(\vec{K} \partial_\mu \vec{K})^2 - |\vec{K}|^2 (\partial_\mu \vec{K})^2 \right] \right. \\ & + 3 \left[2(K_4 \partial_\mu K_4)(K_5 \partial_\mu K_5) \Big|_{=0} - K_4^2 (\partial_\mu K_5)^2 - K_5^2 (\partial_\mu K_4)^2 \right. \\ & + 2(K_6 \partial_\mu K_6)(K_7 \partial_\mu K_7) \Big|_{=0} - K_6^2 (\partial_\mu K_7)^2 - K_7^2 (\partial_\mu K_6)^2 \Big] \\ & + \left. \left[2(\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})(\vec{K} \partial_\mu \vec{K}) \Big|_{=0} - |\vec{\pi}|^2 (\partial_\mu \vec{K})^2 - |\vec{K}|^2 (\partial_\mu \vec{\pi})^2 \right] \right. \\ & \left. + 3 \left[2(\eta \partial_\mu \eta)(\vec{K} \partial_\mu \vec{K}) \Big|_{=0} - |\eta|^2 (\partial_\mu \vec{K})^2 - |\vec{K}|^2 (\partial_\mu \eta)^2 \right] \right]. \end{aligned}$$

Alle weiteren WW-Terme, die vier Felder enthalten, sind aufgrund ihrer Asymmetrie Graphen mit mindestens zwei Schleifen zuzuordnen; diese sind somit nicht relevant. Die vier durch $|_{=0}$ gekennzeichneten Terme liefern ebenfalls keine Beiträge.

Die Symmetrisierung der übrigen Beiträge läuft mit Anhang A analog zu der in Abschnitt 4.4. Wie dort durchgeführt, werden die Mischterme durch zusätzliche Kronecker-Symbole symmetriert. Das Diagramm unterscheidet sich lediglich durch die zusätzlichen Kombinations-

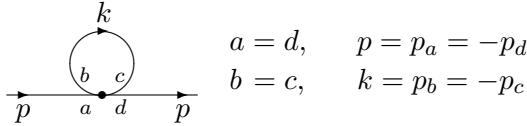


Abb. 12: Bezeichnungen am 4-Vertex.

möglichkeiten der Mesonen, was zu unterschiedlichen geometrischen Vorfaktoren führt. Der gesamte Beitrag

$$-\frac{1}{4!} \sum_n v^{(n)} V_{abcd}^{(n)} \pi_a \pi_b \pi_c \pi_d$$

lässt sich durch Summation über die 18 verbliebenen Terme bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass die Summation über die Felder im Gegensatz zu $N_f = 2$ über acht Felder durchzuführen ist.

Die Ergebnisse lassen sich wieder mittels des divergenten Integrals

$$I(m_0^2) = \frac{m_0^2}{16\pi^2} \left[R + \ln \left(\frac{m_0^2}{\Lambda^2} \right) \right]$$

und der Massen aus führender Ordnung angeben. Nach Anteilen des quadratischen und kinetischen Terms aufgeteilt, d. h.

$$\Sigma^\phi = \Sigma_{p^2}^\phi p^2 + \Sigma_{m^2}^\phi ,$$

erhält man die Schleifenbeiträge

$$\begin{aligned}\Sigma_{m^2}^\pi &= \frac{m_{\pi,\text{LO}}^2}{6F_0^2} [I(m_{\pi,\text{LO}}^2) + 2I(m_{K,\text{LO}}^2) + I(m_{\eta,\text{LO}}^2)] \\ \Sigma_{p^2}^\pi &= \frac{1}{6F_0^2} [4I(m_{\pi,\text{LO}}^2) + 2I(m_{K,\text{LO}}^2)] ,\end{aligned}\tag{6.1a}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{m^2}^K &= \frac{m_{K,\text{LO}}^2}{6F_0^2} [\frac{3}{2}I(m_{\pi,\text{LO}}^2) + 3I(m_{K,\text{LO}}^2) - \frac{1}{2}I(m_{\eta,\text{LO}}^2)] \\ \Sigma_{p^2}^K &= \frac{1}{6F_0^2} [\frac{3}{2}I(m_{\pi,\text{LO}}^2) + 3I(m_{K,\text{LO}}^2) + \frac{3}{2}I(m_{\eta,\text{LO}}^2)]\end{aligned}\tag{6.1b}$$

und

$$\begin{aligned}\Sigma_{m^2}^\eta &= \frac{m_{\eta,\text{LO}}^2}{6F_0^2} [4I(m_{\eta,\text{LO}}^2)] + \frac{m_{\pi,\text{LO}}^2}{6F_0^2} [3I(m_{\pi,\text{LO}}^2) - 2I(m_{K,\text{LO}}^2) - I(m_{\eta,\text{LO}}^2)] \\ \Sigma_{p^2}^\eta &= \frac{I(m_{K,\text{LO}}^2)}{F_0^2} .\end{aligned}\tag{6.1c}$$

Diese Ergebnisse stimmen mit denen aus der chiralen Störungstheorie im Kontinuum überein [2], wenn man die unterschiedlichen Massen in führender Ordnung berücksichtigt. Diese müssen im inversen Propagator in den K_a und $M_{\phi_a}^2$ berücksichtigt werden, um die vollständigen Massen in nächstführender Ordnung anzugeben. Aus der Entwicklung bis einschließlich dieser Ordnung resultiert

$$M_{\phi^2} = \bar{M}_{\phi^2} + \Sigma_{m^2}^\phi - m_\phi^2 \Sigma_{p^2}^\phi .$$

6.5 Massen des Mesonen-Oktetts in nächstführender Ordnung

Zur abschließenden Bestimmung der Mesonmassen werden aus den Treelevel-Ergebnissen und den Schleifenbeiträgen die Massen nächstführender Ordnung berechnet.

Da die Rechnung mit $N_f = 3$ Flavours durchgeführt wurde, müssen andere Renormierungs-Koeffizienten verwendet werden. Nach Anhang B ergibt sich die Tab. 3, außerdem gilt $\Delta'_i = \Gamma_i$, $\Delta_i = \Gamma_i$ für $i = 4, 5$ und $\Delta_i = 2\Gamma_i$ für $i = 6, 8$. Die auftretenden Divergenzen werden durch Renormierung der GL-Koeffizienten absorbiert, so dass die vollständigen Massen endlich sind.

Pionmassen

Für die Pionmassen erhält man den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 M_{\pi_i}^2 = & m_\pi^2 + \frac{m_\pi^2}{3 \cdot 32\pi^2 F_0^2} \left[3 \cdot m_\pi^2 \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) - m_\eta^2 \ln \left(\frac{m_\eta^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\
 & + \frac{4}{F_0^2} \left[\chi_0^2 (4L_8^r + 8L_6^r - 2L_5^r - 4L_4^r) \right. \\
 & \quad + \chi_0 \chi_s (4L_6^r - 2L_4^r) \\
 & \quad + \chi_0 \rho_0 (-2L_5^r - 4L_4^r + 4W_8^r + 8W_6^r - 2W_5^r - 4W_4^r) \\
 & \quad + \chi_0 |\rho| (2W_6^r - 2W_4^r) \\
 & \quad + \chi_s \rho_0 (-2L_4^r + 2W_6^r) \\
 & \quad + \rho_0^2 (-2W_5^r - 4W_4^r + 4W_8^{tr} + 8W_6^{tr}) \\
 & \quad + \rho_0 |\rho| (-2W_4^r + 4W_6^{tr}) \\
 & \quad + (\delta_{i1} + \delta_{i2}) [\rho_3^2 (-4L_8^r - 8L_6^r + 4W_8^r + 8W_6^r - 2W_5^r - 4W_4^r)] \\
 & \quad + \delta_{i3} [\rho_3^2 (-8L_8^r - 16L_6^r + 8W_8^r + 16W_6^r - 2W_5^r - 4W_4^r \\
 & \quad \quad - 4W_8^{tr} - 8W_6^{tr})] \\
 & \quad \left. + \rho_3^2 \frac{\chi_s}{\chi_0} (-2L_6^r - L_4^r + 2W_6^r) \right]
 \end{aligned} \tag{6.2a}$$

mit den renormierten GL-Koeffizienten, dabei lassen sich die Logarithmus-Terme nach der Gitterkonstanten a entwickeln.

Kaonmassen

Des Weiteren ergibt sich für die Kaonmassen

$$\begin{aligned}
 M_K^2 = & m_K^2 + \frac{m_K^2}{3 \cdot 32\pi^2 F_0^2} \left[2 \cdot m_\eta^2 \ln \left(\frac{m_\eta^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\
 & + \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{2} \left[\chi_0^2 (2L_8^r + 8L_6^r - L_5^r - 4L_4^r) \right. \\
 & \quad + \chi_0 \chi_s (4L_8^r + 16L_6^r - 2L_5^r - 6L_4^r) \\
 & \quad + \chi_s^2 (2L_8^r + 4L_6^r - L_5^r - 2L_4^r) \\
 & \quad + \chi_0 \rho_0 (-L_5^r - 4L_4^r + 2W_8^r + 8W_6^r - W_5^r - 4W_4^r) \\
 & \quad + \chi_0 |\rho| (-L_5^r - 4L_4^r + 2W_8^r + 6W_6^r - W_5^r - 2W_4^r) \\
 & \quad + \chi_s \rho_0 (-L_5^r - 2L_4^r + 2W_8^r + 6W_6^r - W_5^r - 4W_4^r) \\
 & \quad + \chi_s \rho_0 (-L_5^r - 2L_4^r + 2W_8^r + 4W_6^r - W_5^r - 2W_4^r) \\
 & \quad + \rho_0^2 (-2W_5^r - 6W_4^r + 4W_8^{tr} + 12W_6^{tr}) \\
 & \quad + \rho_0 |\rho| (-2W_5^r - 6W_4^r + 4W_8^{tr} + 12W_6^{tr}) \\
 & \quad + \rho_3^2 (-4L_8^r - 8L_6^r + 4W_8^r + 8W_6^r - 2W_5^r - 6W_4^r + 4W_6^{tr}) \\
 & \quad \left. + \rho_3^2 \frac{\chi_s}{\chi_0} (-2L_8^r - 6L_6^r + L_4^r + 2W_8^r + 6W_6^r - W_5^r - 4W_4^r) \right]
 \end{aligned} \tag{6.2b}$$

Γ_4	Γ_5	Γ_6	Γ_7	Γ_8
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{144}$	0	$\frac{5}{48}$

Tab. 3: Werte der Renormierungs-Koeffizienten $N_f = 3$

mit dem einfachen Logarithmus-Term, der lediglich von der Eta-Masse führender Ordnung abhängt.

Etamasse

Die Masse des η -Teilchens lässt sich schließlich mit

$$\begin{aligned}
 M_\eta^2 = & m_\eta^2 + \frac{m_\eta^2}{3 \cdot 32\pi^2 F_0^2} \left[6 \cdot m_K^2 \ln \left(\frac{m_K^2}{\Lambda^2} \right) - 4 \cdot m_\eta^2 \ln \left(\frac{m_\eta^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\
 & + \frac{m_\pi^2}{3 \cdot 32\pi^2 F_0^2} \left[m_\eta^2 \ln \left(\frac{m_\eta^2}{\Lambda^2} \right) - 3 \cdot m_\pi^2 \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) + 2 \cdot m_K^2 \ln \left(\frac{m_K^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\
 & + \frac{4}{F_0^2} \frac{1}{9} \left[\chi_0^2 (12L_8^r + 24L_7^r + 24L_6^r - 2L_5^r - 12L_4^r) \right. \\
 & \quad + \chi_0 \chi_s (-48L_7^r + 60L_6^r - 8L_5^r - 30L_4^r) \\
 & \quad + \chi_s^2 (24L_8^r + 24L_7^r + 24L_6^r - 8L_5^r - 12L_4^r) \\
 & \quad + \chi_0 \rho_0 (-2L_5^r - 12L_4^r + 12W_8^r + 24W_7^r + 24W_6^r - 2W_5^r - 12W_4^r) \quad (6.2c) \\
 & \quad + \chi_0 |\rho| (-4L_5^r - 24L_4^r - 24W_7^r + 30W_6^r - 4W_5^r - 6W_4^r) \\
 & \quad + \chi_s \rho_0 (-4L_5^r - 6L_4^r - 24W_7^r + 30W_6^r - 4W_5^r - 24W_4^r) \\
 & \quad + \chi_s |\rho| (-8L_5^r - 12L_4^r + 24W_8^r + 24W_7^r + 24W_6^r - 8W_5^r - 12W_4^r) \\
 & \quad + \rho_0^2 (-10W_5^r - 24W_4^r + 36W_8^{tr} + 48W_7^{tr} + 48W_6^{tr}) \\
 & \quad + \rho_0 |\rho| (-8W_5^r - 30W_4^r - 48W_7^{tr} + 60W_6^{tr}) \\
 & \quad + \rho_3^2 (-24L_8^r - 24L_7^r - 24L_6^r + 24W_8^r + 24W_7^r + 24W_6^r \\
 & \quad \quad - 10W_5^r - 24W_4^r + 12W_8^{tr} + 24W_7^{tr} + 24W_6^{tr}) \\
 & \quad \left. + \rho_3^2 \frac{\chi_s}{\chi_0} (24L_7^r - 30L_6^r + 9L_4^r - 24W_7^r + 30W_6^r - 4W_5^r - 24W_4^r) \right]
 \end{aligned}$$

angeben, wobei der Logarithmus-Term recht länglich ist.

Damit sind die Massen des Mesonen-Oktetts $(\vec{\pi}, \vec{K}, \eta)$ mit enarteten Massen $m = m_u = m_d$ und axialer Drehung in λ_3 -Richtung vollständig bestimmt.

Fazit

In führender Ordnung sind zumindest die Pionen noch $\mathcal{O}(a)$ -verbessert, aber auch dies ist in nächstführender Ordnung nicht mehr der Fall. In Abschnitt 3.2 wurde gezeigt, dass das für

$N_f = 2$ jedoch der Fall sein muss. Das dortige Argument lässt sich aber nicht auf $N_f = 3$ anwenden.

6.6 Mesonmassen bei ungleichen up- und down-Quarkmassen

In den bisherigen Rechnungen hat sich gezeigt, dass die optimierte Parametrisierung zu einem analogen Rechenschema von Kontinuum und Twisted-Mass Gitter-QCD führt, wenn man von zusätzlich auftretenden Termen absieht. Im Folgenden wird qualitativ untersucht, was passiert, wenn Mischungen auftreten. Dieses ist z. B. der Fall bei paarweise verschiedenen Massen m_u , m_d und m_s . Im Kontinuum tritt eine π_0 - η -Mischung auf, die für $m_u \neq m_d$ verschwindet.

6.6.1 Qualitative Betrachtung in nächstführender Ordnung

Um das qualitative Verhalten zu untersuchen, werden in diesem Abschnitt die Symbole

$$\begin{aligned}\Delta &\stackrel{\hat{=}}{=} \text{Term mit Beiträgen aus LO ,} \\ * &\stackrel{\hat{=}}{=} \text{Term ohne Beiträge aus LO}\end{aligned}$$

eingeführt, um die Gestalt des Propagators zu veranschaulichen. In diesen Termen sind sowohl Treelevel-Beiträge als auch mögliche Schleifenanteile enthalten

Propagator

Der allgemeine inverse Propagator

$$G^{-1} = Ap^2 + B$$

wird im Fall paarweise verschiedener Massen durch die Matrizen

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} \Delta & & & * & & & \\ & \Delta & & * & & & \\ & & \Delta & & & & \\ \hline & & & \Delta & \Delta & * & \\ & & & & \Delta & * & \Delta \\ & & & & & \Delta & \\ & & & & & & \Delta \\ \hline * & * & & & & & \Delta \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} \Delta & & & & & & \Delta \\ & \Delta & & & & & \\ & & \Delta & & & & \\ \hline & & & \Delta & \Delta & & \\ & & & & \Delta & \Delta & \\ & & & & & \Delta & \\ & & & & & & \Delta \\ \hline \Delta & & & & & & \Delta \end{array} \right)$$

repräsentiert. Die Nichtdiagonalelemente resultieren aus den unterschiedlichen up- und down-Quarkmassen, die durch $\chi_1 = B_0(m_d - m_u)$ parametrisiert ist. Die Ursache für die Nichtdiagonalelemente führender Ordnung im Kaon-Sektor liegt in der Implementierung von χ_1

in τ_1 -Richtung; bei der gewöhnlichen in τ_3 -Richtung treten diese gar nicht auf. Allerdings lassen sie sich auch durch eine einfache Drehung um $\pi/4$ im Kaon-Sektor auf die Diagonale zurückdrehen, so dass man

$$A = \begin{pmatrix} \Delta & & & & * & * \\ & \Delta & & & & \\ & & \Delta & & & \\ \hline & & & \Delta & * & \\ & & & & \Delta & * \\ & & & & & \Delta \\ \hline * & * & & & & \Delta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \Delta & & & & & \Delta \\ & \Delta & & & & \\ & & \Delta & & & \\ \hline & & & \Delta & & \\ & & & & \Delta & \\ & & & & & \Delta \\ \hline \Delta & & & & & \Delta \end{pmatrix}$$

erhält. Im Gegensatz zum Kontinuum treten aber bei allen Massen außer π_3 Mischungen auf. Die Auswirkung dieser zusätzlichen Mischung wird nun diskutiert.

Zunächst wird eine Diagonalisierung der A - als auch der B -Matrix durchgeführt. Das Verfahren der *simultanen Diagonalisierung* ist hier nicht anwendbar, da die dafür notwendige (und hinreichende) Bedingung

$$[A, B] = 0$$

hier nicht erfüllt ist. Allerdings lassen sich die beiden Matrizen *relativ diagonalisieren*, d. h. eine Transformationsmatrix T finden, so dass

$$A = T^\top T, \quad B = T^\top M T.$$

Relative Diagonalisierung

Die Matrix A kann zerlegt werden zu

$$A = \mathbb{1} + A_{\text{NLO}}.$$

Definiert man

$$\sqrt{A} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{1} + \frac{1}{2} A_{\text{NLO}},$$

so gilt: $\sqrt{A}\sqrt{A} = A + \mathcal{O}(\text{NNLO})$. Auf diese Weise lässt sich der Propagator umschreiben zu

$$\begin{aligned} G^{-1} &= Ap^2 + B = \sqrt{A}(p^2 + \underbrace{\sqrt{A^{-1}}B\sqrt{A^{-1}}}_{B'})\sqrt{A} \\ &= \sqrt{A}(p^2 + B')\sqrt{A}, \end{aligned}$$

so dass B' eine komplexere Form als B annimmt:

$$B' = \begin{pmatrix} \Delta & & & & \Delta \\ & \Delta & & & * \\ & & \Delta & & \\ \hline & & & \Delta & * \\ & & & & \Delta \\ & & & & \\ \hline & & & * & \Delta \\ & & & & \\ \hline \Delta & * & & & \Delta \end{pmatrix}.$$

Da B' symmetrisch ist, lässt sich eine Drehmatrix Θ finden, so dass

$$M = \Theta B' \Theta^\top,$$

mit der Orthogonalmatrix $\Theta^\top = \Theta^{-1}$. Für den Propagator heißt dies

$$\begin{aligned} G^{-1} &= Ap^2 + B = \sqrt{A}(p^2 + B')\sqrt{A} \\ &= \underbrace{\sqrt{A}\Theta^\top}_{T^\top}(p^2 + \Theta B' \Theta^\top)\underbrace{\Theta\sqrt{A}}_T \\ &= T^\top(p^2 + M)T. \end{aligned}$$

Es müssen also Mischwinkel bestimmt werden, um B' zu diagonalisieren. Das Diagonalisierungproblem besteht aus zwei Teilen, aus der 3-dimensionalen π_1 - π_2 - η -Mischung und den 2-dimensionalen K_\pm - K_0 -Mischungen.

Damit die Diagonalisierung nicht zu aufwendig wird, werden die auftretenden Größen bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(\chi_1^2)$ entwickelt. Dies ist dadurch gerechtfertigt, dass die Aufhebung der Isospin-Symmetrie im Gegensatz zur Aufhebung der SU(3)-Symmetrie sehr klein ist:

$$\frac{\chi_1}{\chi_s - \chi_0} \ll 1.$$

Pion-Eta-Mischung

Die π - η -Mischung besteht aus der schon im Kontinuum auftretenden π_1 - η -Mischung und der zusätzlichen Mischung mit π_2 . Die Matrix B' wird nun Schritt für Schritt diagonalisiert; die relevante Untermatrix ist von der Form

$$B' = \begin{pmatrix} b'_{11} & 0 & b'_{18} \\ 0 & b'_{22} & b'_{28} \\ b'_{18} & b'_{28} & b'_{88} \end{pmatrix}.$$

Mit der Drehung

$$\Theta_{18} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\theta_{18}^2 & 0 & -\theta_{18} \\ 0 & 1 & 0 \\ \theta_{18} & 0 & 1 - \frac{1}{2}\theta_{18}^2 \end{pmatrix}, \quad \theta_{18} = \frac{b'_{18}}{b'_{88} - b'_{11}} > 0$$

transformiert sich B' zu

$$B'' = \Theta_{18} B' \Theta_{18}^\top = \begin{pmatrix} b''_{11} & b''_{12} & 0 \\ b''_{12} & b''_{22} & b''_{28} \\ 0 & b''_{28} & b''_{88} \end{pmatrix},$$

wobei alle Nicht-Diagonalelemente jetzt von nächstführender Ordnung sind. Diese haben somit keinen Einfluss auf die Eigenwerte und damit auch nicht auf die Massen. Der Vollständigkeit halber wird die Drehung

$$\Theta_{12} \Theta_{28} = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_{12} & 0 \\ \theta_{12} & 1 & -\theta_{28} \\ 0 & \theta_{28} & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta_{12} = \frac{b''_{12}}{b''_{22} - b''_{11}}, \quad \theta_{28} = \frac{b''_{28}}{b''_{88} - b''_{22}}$$

durchgeführt. Mit der Drehmatrix

$$\Theta = \Theta_{18} \Theta_{12} \Theta_{28}$$

hat dann die Matrix

$$M = \Theta B' \Theta^\top$$

Diagonalgestalt. Damit lassen sich die Massen berechnen.

Mit den Drehwinkeln lassen sich *Mischwinkel* wie in [6] herleiten. Allerdings benötigt man nicht wie dort nur zwei ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$), sondern insgesamt sechs Mischwinkel. In der dortigen Notation entsprechen die Mischwinkel den Einträgen der Matrix

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{K^{-1}} T = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 & -\varepsilon'_1 & -\varepsilon_1 \\ \varepsilon'_1 & 1 & -\varepsilon''_1 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon''_2 & 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 \end{pmatrix},$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \left(1 + \frac{a_{88} - a_{11}}{2}\right) \theta_{18} - \frac{1}{2} a_{18}, & \varepsilon'_1 &= \theta_{12} + \frac{1}{2} \theta_{18} a_{28}, & \varepsilon''_1 &= \theta_{28} + \theta_{12} \theta_{18} - \frac{1}{2} a_{28} \\ \varepsilon_2 &= \left(1 - \frac{a_{88} - a_{11}}{2}\right) \theta_{18} + \frac{1}{2} a_{18}, & \varepsilon'_2 &= \theta_{12} - \frac{1}{2} \theta_{12} a_{18}^2 - \theta_{18} \theta_{28}, & \varepsilon''_2 &= \theta_{28} + \frac{1}{2} a_{28}. \end{aligned}$$

Es sei angemerkt, dass θ_{12} und somit auch ε'_1 und ε'_2 im Grenzfall gleicher up- und down-Quarkmassen nicht verschwinden, da θ_{12} nicht von χ_1 abhängt. Erst $a \rightarrow 0$ führt zu verschwindenden Mischwinkeln, was auf die verschiedenen Entwicklungen

$$a \ll \chi_1 \ll (\chi_s - \chi_0)$$

zurückzuführen ist. Allerdings führt der Grenzfall zu keinen Problemen, denn dort sind die Pionen π_1 und π_2 vollkommen symmetrisch in der Lagragedichte, was einem zusätzlichen Freiheitsgrad entspricht. Dieser kann genutzt werden, um die θ_{12} -Drehung aufzuheben. Eine solche Mischung hat somit im Grenzfall gleicher up- und down-Quarkmassen keine Auswirkung.

Kaon-Kaon-Mischung

Die Kaon-Mischung wird nur durch Terme nächstführender Ordnung hervorgerufen. Dieses kann analog zur Transformation $B'' \rightarrow M$ im vorherigen Abschnitt behandelt werden. Die Mischung hat somit keinen Einfluss auf die Kaon-Massen.

Fazit

Die Implementierung unterschiedlicher Massen führt schon im Kontinuum zu Mischungen. Dagegen führt eine alleinige Einführung eines Twisted-Mass-Terms selbst auf dem Gitter zu keinen Mischungen.

Betrachtet man die Generatoren, bedeutet dies hier, dass ein zusätzlicher Term $r_i \lambda_i$ mit $r \in \mathbb{R}$ Mischungen erzeugt, ein Term des Typs $ir_j \lambda_j$ jedoch nicht. In der Lagrangedichte treten aber i. Allg. Produkte dieser Terme auf, wie z. B.

$$r_1 \lambda_1 (ir_3 \lambda_3) = r_1 r_3 \lambda_2 \stackrel{\text{def}}{=} r_2 \lambda_2 .$$

Dies ist aber wieder ein Term der Gestalt $r_i \lambda_i$ und erzeugt zusätzliche Mischungen. Allgemein stellt man fest:

Die Kombination eines Twisted-Mass-Terms und eines Massenterms, der schon im Kontinuum Mischungen verursacht, kann zusätzliche Mischungen hervorrufen.

Das ist in der betrachteten Konfiguration offensichtlich der Fall.

6.6.2 Massen in führender Ordnung

Zum Abschluss dieses Kapitels werden die Massen in führender Ordnung explizit bestimmt. Dieses ist mit dem allgemeinen Verfahren der relativen Diagonalisierung möglich. Da aber in führender Ordnung $A = K = 1$, lassen sich die Massen durch alleinige Diagonalisierung der Massenmatrix bestimmen. Des Weiteren tritt nur die π_0 - η -Mischung auf, d. h. die prinzipiell möglichen weiteren Mischungen treten in führender Ordnung nicht auf.

Geladene Pionen

Die Massen der geladenen Pionen werden aufgrund der Implementierung der unterschiedlichen up- und down-Quarkmassen in τ_1 -Richtung durch die Pionen π_2 und π_3 repräsentiert. Die Massen dieser Pionen bleiben von der Mischung unberührt, so dass

$$m_{\pi^\pm}^2 = m_{\pi_{2,3}}^2 = \chi_0 + \rho_0 + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} .$$

Kaonen

Die Kaonenfelder werden lediglich um $\pi/4$ gedreht. Dadurch verlieren die geladenen Kaonen den Beitrag des Nichtdiagonalelements $\chi_1/2$ und die neutralen gewinnen diesen Beitrag hinzu. Damit erhält man in der üblichen Bezeichnung der Ladungseigenzustände die Massen

$$m_{K^\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[(\chi_s + \chi_0 - \chi_1) + (|\rho| + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right],$$

$$m_{K^0}^2 = \frac{1}{2} \left[(\chi_s + \chi_0 + \chi_1) + (|\rho| + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right].$$

π_0 - und η -Meson

Die Mischung des π_1 - und des η_8 -Mesons kann durch eine Drehmatrix parametrisiert werden:

$$\begin{pmatrix} \pi_0 \\ \eta \end{pmatrix} = \Theta \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix}.$$

π_0 und η sind die Masseneigenzustände. Das Nicht-Diagonalelement der Massenmatrix

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\chi_1$$

verschwindet, wenn mit den weiter oben eingeführten Bezeichnungen der Winkel zu

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2b_{18}}{b_{88} - b_{11}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\chi_1}{m_{\eta_8}^2 - m_{\pi_1}^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{3}\chi_1}{\chi_s - \chi_0} \right) - \frac{\sqrt{3}\chi_1}{2[(\chi_s - \chi_0)^2 + 3\chi_1^2]} \left[(|\rho| - \rho_0) - \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}\chi_1(\chi_s - \chi_0)}{2[(\chi_s - \chi_0)^2 + 3\chi_1^2]^2} (|\rho| - \rho_0)^2 \end{aligned}$$

gewählt wird. Das führt zu den Massen

$$\begin{aligned} m_{\pi_0}^2 &= m_{\pi_1}^2 \cos^2(\theta) + m_{\eta_8}^2 \sin^2(\theta) - \frac{2}{\sqrt{3}}\chi_1 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ &= m_{\pi_1}^2 - \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\chi_1 \sin(2\theta) - (m_{\eta_8}^2 - m_{\pi_1}^2) \sin^2(\theta) \right]}_{\Delta_\eta^\pi} \end{aligned}$$

und

$$m_\eta^2 = m_{\eta_8}^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\chi_1 \sin(2\theta) - (m_{\eta_8}^2 - m_{\pi_1}^2) \sin^2(\theta) \right].$$

Benutzt man die Relationen

$$\begin{aligned}\sin\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}\chi_1}{\chi_s - \chi_0}\right)\right) &= \sqrt{\frac{3\chi_1^2}{(\chi_s - \chi_0)^2 + 3\chi_1^2}} , \\ \cos\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{3}\chi_1}{\chi_s - \chi_0}\right)\right) &= \sqrt{\frac{(\chi_s - \chi_0)^2}{(\chi_s - \chi_0)^2 + 3\chi_1^2}}\end{aligned}$$

und die Halbwinkelformel

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) ,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta_\eta^\pi &= \frac{1}{\sqrt{3}}\chi_1 \sin(2\theta) - \frac{2}{3} \left[(\chi_s - \chi_0) + (|\rho| - \rho_0) - \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right] \sin^2(\theta) + \mathcal{O}(a^3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\chi_1 \sqrt{\frac{3\chi_1^2}{(\chi_s - \chi_0)^2 + 3\chi_1^2}} + \frac{\chi_1^2(|\rho| - \rho_0)^2}{2[(\chi_s - \chi_0)^2 + 3\chi_1^2]^{3/2}} \\ &\quad - \frac{1}{3} \left[(\chi_s - \chi_0) + (|\rho| - \rho_0) - \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right] \left[1 - \sqrt{\frac{(\chi_s - \chi_0)^2}{(\chi_s - \chi_0)^2 + 3\chi_1^2}} \right] + \mathcal{O}(a^3) \\ &= \frac{\chi_1^2}{2(\chi_s - \chi_0)} \left[1 - \frac{1}{\chi_s - \chi_0} \left[(|\rho| - \rho_0) - \frac{\rho_3^2}{2\chi_0} \right] + \left[\frac{|\rho| - \rho_0}{\chi_s - \chi_0} \right]^2 \right] + \mathcal{O}(\chi_1^4, a^3) .\end{aligned}$$

Im Schritt von der ersten zur zweiten Zeile sieht man, dass der ρ_3 -abhängige Teil des Mischwinkels nicht zu den Massen beiträgt; diese Beiträge aus $\sin(2\theta)$ und $\sin^2(\theta)$ heben sich aufgrund der Vorfaktoren gerade genau auf. Die Mischung mit η führt dazu, dass die Masse von π_0 nicht mehr $\mathcal{O}(a)$ -verbessert ist. Das Ergebnis stimmt im Kontinuum mit dem in [6] überein.

7 Zerfallskonstanten

Die Mesonen sind keine stabilen Teilchen. Die geladenen Pionen z. B. zerfallen typischerweise über die schwache Wechselwirkung zu Leptonen:

$$\begin{aligned}\pi^+ &\longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu \\ \pi^- &\longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu.\end{aligned}$$

Die neutralen Mesonen und die Kaonen zerfallen auch über andere Prozesse, die hier aber nicht weiter betrachtet werden. Der schwache Zerfall findet über die Kopplung der schwachen Eichbosonen an den Axialstrom $A_{\mu,a}$ statt. Die Zerfallskonstante ist ein Maß für die Stärke dieser Kopplung.

Die Mesonen-Zerfallskonstanten werden nun bis einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(a)$ bestimmt, höhere Ordnungen treten erst in nächst-nächstführender Ordnung auf [24].

7.1 Axialstrom $A_{\mu,a}$

In Kapitel 1 wurden bereits die chiralen Ströme eingeführt. Der axiale Oktettstrom

$$A_{\mu,a} = R_{\mu,a} - L_{\mu,a}$$

definiert die Zerfallskonstante F_ϕ über die Relation

$$\langle 0 | A_{\mu,a} | \phi_b(\vec{p}) \rangle = i F_\phi p_\mu \delta_{ab}.$$

Damit ist es hinreichend, den Axialstrom zu berechnen und über die obige Korrelationsfunktion die Zerfallskonstante zu bestimmen. Diese ergibt sich aus Variation der Lagrangedichte (Noether-Theorem [2]).

Zur Bestimmung des Axialstromes $A_{\mu,a}$ werden die links- und rechtshändigen Anteile separat betrachtet. Um z. B. den linkshändigen Strom zu berechnen, wird die Feldkonfiguration $U(x)$ durch die chirale Transformation LUR^\dagger mit $R = \mathbb{1}$ und

$$L = \exp \left(i \theta_a^L \frac{\lambda_a}{2} \right) = 1 + i \theta_a^L \frac{\lambda_a}{2} + \mathcal{O}(\theta^2)$$

infinitesimal transformiert, so dass die Variation der Lagragedichte durch

$$\delta_L \mathcal{L} = \mathcal{L}(LU) - \mathcal{L}(U)$$

gegeben ist. Der linkshändige Oktettstrom ist dann durch

$$L_{\mu,a} = \frac{\partial(\delta_L \mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \theta_a^L)}$$

definiert. Damit ist direkt klar, dass nur die derivativen Anteile der Lagragedichte zu den Strömen beitragen.

Analog berechnet sich der rechtshändige Oktettstrom $R_{\mu,a}$, und somit ist schließlich

$$A_{\mu,a} = \frac{\partial(\delta_R \mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \theta_a^R)} - \frac{\partial(\delta_L \mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu \theta_a^L)} .$$

7.2 Pion-Zerfallskonstante für $N_f = 2$

Die Berechnung der Pion-Zerfallskonstante im Fall $N_f = 2$ ist aufgrund der speziellen Eigenschaften der Pauli-Matrizen recht einfach. In führender Ordnung muss nur ein Term der Lagragedichte berücksichtigt werden. Durch die infinitesimale Transformation erhält man

$$\begin{aligned} \delta_L \mathcal{L}_{\text{LO}} &= \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu(LU) \partial_\mu(LU) - \partial_\mu U \partial_\mu U \rangle \\ &= i \partial_\mu \theta_i^L \frac{F_0^2}{4} \underbrace{\langle \frac{\tau_i}{2} U(\partial_\mu U) - (\partial_\mu U) U^\dagger \frac{\tau_i}{2} \rangle}_{\langle \tau_i U(\partial_\mu U^\dagger) \rangle} + \text{,,Terme ohne } \partial_\mu \theta_i^L + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned}$$

und damit

$$L_{\mu,i} = i \frac{F_0^2}{4} \langle \tau_i U(\partial_\mu U^\dagger) \rangle .$$

Die Rechnung für den rechtshändigen Strom läuft analog, so dass

$$R_{\mu,i} = -i \frac{F_0^2}{4} \langle \tau_i (\partial_\mu U^\dagger) U \rangle ,$$

womit man leicht

$$A_{\mu,i} = -i \frac{F_0^2}{4} \langle \tau_i [U, \partial_\mu U^\dagger]_+ \rangle = -F_0 \partial_\mu \pi_i + \mathcal{O}(\pi^3, a^2)$$

berechnen kann. Das Matrixelement lässt sich dann zu

$$\langle 0 | A_{\mu,i} | \pi_j(\vec{p}) \rangle = -F_0 \langle 0 | \partial_\mu \pi_i | \pi_j(\vec{p}) \rangle = i F_0 p_\mu \delta_{ij}$$

bestimmen. Die Zerfallskonstante ist somit in führender Ordnung

$$F_\pi = F_0 ,$$

was dem Resultat im Kontinuum entspricht. F_0 ist in seiner Form ja gerade über diese Eigenschaft definiert.

In nächstführender Ordnung wird die Rechnung in Treelevel prinzipiell auch nicht schwieriger, es müssen zusätzlich nur noch die L_4 -, W_4 -, L_5 - und W_5 -Terme berücksichtigt werden, dieses führt zu

$$\begin{aligned} A_{\mu,i} &= -i \langle \tau_i [U, \partial_\mu U^\dagger]_+ \cdot \left[\frac{F_0^2}{4} + L_4 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle + W_4 \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + L_5 (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) + W_5 (\rho U^\dagger + U \rho^\dagger) \right] \right\rangle \\ &= -F_0 \left[1 + \frac{8}{F_0^2} (\chi_0 L_{54} + \rho_0 W_{54}) \right] \partial_\mu \pi_i + \mathcal{O}(\pi^3, a^2) . \end{aligned}$$

Die Renormierung der Wellenfunktion durch $\sqrt{K_i}$ liefert das Treelevel-Resultat

$$\frac{\bar{F}_\pi}{F_0} = 1 + \frac{4}{F_0^2} [\chi_0 L_{54} + \rho_0 W_{54}] .$$

7.2.1 Schleifenrechnung

Wie auch schon bei der Massenberechnung tragen in nächstführender Ordnung nur die Ein-Schleifen-Diagramme bei. Neben Vertizes treten nun auch Kontraktionen mit dem Axialstrom auf, diese sind durch ein schwarzes Quadrat gekennzeichnet. In Abb. 13 ist die einfache Kontraktion mit einem Feld dargestellt. Das Diagramm enthält keinen Vertex und ist somit von Ordnung $\mathcal{O}(g^0)$.

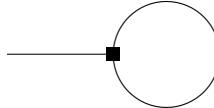


Abb. 13: Ein-Schleifen-Diagramm der Ordnung $\mathcal{O}(g^0)$ zur Bestimmung der Zerfallskonstanten. Das schwarze Quadrat symbolisiert die Kontraktion mit dem Axialstrom.

Neben diesem können auch noch die Graphen aus Abb. 14 zur Zerfallskonstante beitragen. Diese enthalten jeweils einen 3-Vertex und sind somit von Ordnung $\mathcal{O}(g)$. In der optimierten Parametrisierung treten jedoch keine 3-Vertizes auf, so dass diese Diagramme keinen Beitrag liefern.



Abb. 14: Ein-Schleifen-Diagramme der Ordnung $\mathcal{O}(g)$ zur Bestimmung der Zerfallskonstanten. Neben der Kontraktion des Axialstroms ist jeweils ein 3-Vertex enthalten.

Der Axialstrom ist einschließlich der relevanten Schleifenterme durch

$$A_{\mu,i} = -F_0 \partial_\mu \pi_i + \frac{2}{3F_0} (\vec{\pi}^2 \partial_\mu \pi_i - (\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) \pi_i)$$

gegeben. Um den Schleifenbeitrag zu bestimmen, müssen die Kontraktionen der Korrelationsfunktionen berechnet werden.

Für den ersten Term

$$\langle 0 | \vec{\pi}^2 \partial_\mu \pi_i | \pi_j(\vec{p}) \rangle = \langle 0 | \pi_k \pi_k \partial_\mu \pi_i | \pi_j(\vec{p}) \rangle$$

ergibt die Kontraktion mit einem π_k

$$\delta_{jk} \langle \pi_k(0) | \partial_\mu \pi_i(0) \rangle = i \delta_{ij} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{k^2 + m^2} = 0$$

und die mit $\partial_\mu \pi_i$

$$(-ip_\mu) \delta_{ij} \langle \pi_k(0) | \pi_k(0) \rangle = -ip_\mu \delta_{ij} \underbrace{\delta_{kk}}_3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} = -3ip_\mu \delta_{ij} I(m_0) .$$

Für den zweiten Term

$$\langle 0 | (\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) \pi_i | \pi_j(\vec{p}) \rangle = \langle 0 | \pi_k \partial_\mu \pi_k \pi_i | \pi_j(\vec{p}) \rangle$$

ergibt die Kontraktion mit den Feldern π_i und π_k wieder null, die Kontraktion mit $\partial_\mu \pi_k$ liefert

$$(-ip_\mu) \delta_{jk} \langle \pi_k(0) | \pi_i(0) \rangle = -ip_\mu \underbrace{\delta_{jk} \delta_{ik}}_{\delta_{ij}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} = -ip_\mu \delta_{ij} I(m_0) .$$

Daraus erhält man insgesamt

$$\langle 0 | A_{\mu,i}^{\text{loop}} | \pi_j(\vec{p}) \rangle = -ip_\mu \delta_{ij} \frac{4}{3F_0} I(m_0^2) .$$

Die Renormierung der Wellenfunktion durch $\sqrt{K_i}$, was einer Subtraktion von $\Sigma_{p^2}/2$ aus Gl. (4.20) entspricht, führt zum renormierten Ergebnis für die Pion-Zerfallskonstante

$$\frac{F_\pi}{F_0} = 1 + \frac{4}{F_0^2} [\chi_0 L_{54} + \rho_0 W_{54}] - \frac{2}{32\pi^2 F_0^2} \left[\rho_0 + (\chi_0 + \rho_0) \ln \left(\frac{\chi_0}{\Lambda^2} \right) \right] .$$

Dieses Resultat stimmt mit dem in [16, 17] überein.

Zerfallskonstante bei ungleichen Quarkmassen

Beim Übergang zum allgemeineren Fall ohne Isospin-Symmetrie liefern nur die L_7 - und L_8 -Terme neue Beiträge in der Lagrangedichte; diese enthalten aber keine Ableitungen. Die Zerfallskonstante ändert sich deswegen nicht.

7.3 Meson-Zerfallskonstanten für $N_f = 3$

Die Mesonen-Zerfallskonstanten bei $N_f = 3$ lassen sich analog berechnen. Allerdings haben die Gell-Mann-Matrizen nicht alle einfachen Eigenschaften der Pauli-Matrizen, so dass die Schleifenrechnung umfangreicher wird.

Die Variation der Treelevel-Lagrangedichte in führender Ordnung liefert

$$\delta_L \mathcal{L}_{\text{LO}} = i\partial_\mu \theta_a^L \frac{F_0^2}{4} \left\langle \frac{\lambda_a}{2} U(\partial_\mu U) - (\partial_\mu U) U^\dagger \frac{\lambda_a}{2} \right\rangle + \text{„Terme ohne } \partial_\mu \theta_a^L“ + \mathcal{O}(\theta^2),$$

was nach gleichem Vorgehen wie in Abschnitt 7.2

$$F_\pi = F_K = F_\eta = F_0$$

ergibt.

In nächstführender Ordnung werden die zusätzlichen Beiträge berechnet, indem man die komplexere Massenmatrix χ berücksichtigt. Diese Rechnung und die Normierung der Wellenfunktion durch $\sqrt{K_a}$ läuft analog und man erhält die Treelevel-Ergebnisse

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_\pi}{F_0} &= 1 + \frac{4}{F_0^2} [\chi_0 L_5 + (\chi_s + 2\chi_0)L_4 + \rho_0 W_5 + (|\rho| + 2\rho_0)W_4], \\ \frac{\bar{F}_K}{F_0} &= 1 + \frac{4}{F_0^2} \left[\frac{1}{2}(-\chi_s + \chi_0)L_5 + (\chi_s + 2\chi_0)L_4 + \frac{1}{2}(|\rho| + \rho_0)W_5 + (|\rho| + 2\rho_0)W_4 \right], \\ \frac{\bar{F}_\eta}{F_0} &= 1 + \frac{4}{F_0^2} \left[\frac{1}{3}(2\chi_s + \chi_0)L_5 + (\chi_s + 2\chi_0)L_4 + \frac{1}{3}(2|\rho| + \rho_0)W_5 + (|\rho| + 2\rho_0)W_4 \right]. \end{aligned}$$

7.3.1 Schleifenrechnung

Abschließend müssen noch die Schleifenbeiträge $A_{\mu,a}^{\text{loop}}$ in der Kopplung berücksichtigt werden. Die möglichen Schleifenterme sind vielzählig, auch ein Aussortieren der irrelevanten Anteile von Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ lässt eine große Menge Terme übrig.

Durch geschicktes Einfügen von „Nulltermen“ lässt sich in den Termen eine Struktur auffinden, die der im Fall mit zwei Flavours ähnlich ist. Alle relevanten Terme lassen sich durch die symmetrische (8×8) -Matrix

$$A_{c,a}^{\text{loop}} = \left(\begin{array}{ccc|cccc|c} 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

mit

$$\sum_c A_{c,a}^{\text{loop}} = 12 , \quad \forall a$$

parametrisieren, so dass

$$A_{\mu,a} = A_{\mu,a}^{\text{tree}} + \frac{1}{6F_0} \sum_c \left[(\phi_c^2 A_{c,a}^{\text{loop}} \partial_\mu \phi_a - (\phi_c \partial_\mu \phi_c) A_{c,a}^{\text{loop}} \phi_a) \right] .$$

Der Schleifenbeitrag stimmt dann mit dem für $N_f = 2$ überein, lediglich die Faktoren $A_{c,a}^{\text{loop}}$ müssen berücksichtigt werden. Die ausdrückliche Angabe der Summation über c setzt die übliche Summenkonvention außer Kraft. Die zugehörigen Korrelationsfunktionen vereinfachen sich erneut dadurch, dass der äußere Impuls nur durch Kontraktion mit einem inneren Impuls von null verschiedene Werte liefert. Die Korrelationsfunktion

$$\sum_c \langle 0 | (\phi_c^2 A_{c,a}^{\text{loop}} \partial_\mu \phi_a) | \phi_b(p) \rangle$$

kontrahiert zu

$$\sum_c (-ip_\mu) \delta_{ab} A_{c,a}^{\text{loop}} \langle \phi_c(0) | \phi_c(0) \rangle = \sum_c (-ip_\mu) \delta_{ab} A_{c,a}^{\text{loop}} I(m_c) ,$$

wobei m_c die Treelevel-Masse des Mesons ϕ_c ist. Man erhält für die Mesonen die Schleifenbeiträge

$$\begin{aligned} \pi_a : \quad & \sum_c A_{c,a}^{\text{loop}} I(m_c) = 8I(m_\pi) + 4I(m_K) \\ K_a : \quad & \sum_c A_{c,a}^{\text{loop}} I(m_c) = 3I(m_\pi) + 6I(m_K) + 3I(m_\eta) \\ \eta_a : \quad & \sum_c A_{c,a}^{\text{loop}} I(m_c) = 12I(m_K) . \end{aligned}$$

Die Korrelationsfunktion

$$\sum_c \langle 0 | (\phi_c \partial_\mu \phi_c) A_{c,a}^{\text{loop}} \phi_a | \phi_b(p) \rangle$$

kontrahiert zu

$$\begin{aligned} \sum_c (-ip_\mu) \delta_{cb} A_{c,a}^{\text{loop}} \langle \phi_c(0) | \phi_a(0) \rangle &= \sum_c (-ip_\mu) \underbrace{\delta_{cb} \delta_{ac}}_{a=b=c} A_{c,a}^{\text{loop}} I(m_c) \\ &= \sum_a (-ip_\mu) \delta_{ab} A_{a,a}^{\text{loop}} I(m_a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und liefert keinen Beitrag, da die eingeführte Matrix keine von null verschiedenen Diagonalelemente enthält. Die Renormierung der Wellenfunktion durch $\sqrt{K_i}$ führt zur Subtraktion von $\Sigma_{p^2}/2$ aus Gl. (6.1), so dass

$$\begin{aligned} \pi_a : \quad &\sum_c \frac{1}{6F_0^2} A_{c,a}^{\text{loop}} I(m_c) - \frac{1}{2} \Sigma_{p^2}^\pi = \frac{1}{6F_0^2} \left[\begin{array}{c} I(m_\pi) + \frac{1}{2} I(m_K) \\ \vdots \end{array} \right], \\ K_a : \quad &\sum_c \frac{1}{6F_0^2} A_{c,a}^{\text{loop}} I(m_c) - \frac{1}{2} \Sigma_{p^2}^K = \frac{1}{6F_0^2} \left[\begin{array}{c} \frac{3}{8} I(m_\pi) + \frac{3}{4} I(m_K) + \frac{3}{8} I(m_\eta) \\ \vdots \end{array} \right], \\ \eta_a : \quad &\sum_c \frac{1}{6F_0^2} A_{c,a}^{\text{loop}} I(m_c) - \frac{1}{2} \Sigma_{p^2}^\eta = \frac{1}{6F_0^2} \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{3}{2} I(m_K) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Pionen

Insgesamt ergibt sich die renormierte Pion-Zerfallskonstante

$$\begin{aligned} \frac{F_\pi}{F_0} &= 1 - \frac{3}{32\pi^2 F_0^2} \left[\frac{2}{3} m_\pi^2 \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{1}{3} m_K^2 \ln \left(\frac{m_K^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{4}{F_0^2} [\chi_0 L_5^r + (\chi_s + 2\chi_0) L_4^r + \rho_0 W_5^r + (|\rho| + 2\rho_0) W_4^r] . \end{aligned} \tag{7.1a}$$

Kaon

Die Kaon-Zerfallskonstante enthält im Schleifenanteil alle Mesonmassen mit

$$\begin{aligned} \frac{F_K}{F_0} &= 1 - \frac{3}{32\pi^2 F_0^2} \left[\frac{1}{4} m_\pi^2 \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{1}{2} m_K^2 \ln \left(\frac{m_K^2}{\Lambda^2} \right) + \frac{1}{4} m_\eta^2 \ln \left(\frac{m_\eta^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\ &\quad + \frac{4}{F_0^2} [\frac{1}{2}(\chi_0 + \chi_s) L_5^r + (\chi_s + 2\chi_0) L_4^r + \frac{1}{2}(|\rho| + \rho_0) W_5^r + (|\rho| + 2\rho_0) W_4^r] . \end{aligned} \tag{7.1b}$$

Eta

Die Eta-Zerfallskonstante hat nur durch die Kaonmasse einen Schleifenbeitrag, so dass insgesamt

$$\begin{aligned} \frac{F_\eta}{F_0} = & 1 - \frac{3}{32\pi^2 F_0^2} \left[m_K^2 \ln \left(\frac{m_K^2}{\Lambda^2} \right) \right] \\ & + \frac{4}{F_0^2} \left[\frac{1}{3}(2\chi_s + \chi_0)L_5^r + (\chi_s + 2\chi_0)L_4^r + \frac{1}{3}(2|\rho| + \rho_0)W_5^r + (|\rho| + 2\rho_0)W_4^r \right]. \end{aligned} \quad (7.1c)$$

Die Ergebnisse gehen für $a \rightarrow 0$ in das Kontinuums-Ergebnis aus [6] über.

Fazit

Unter der Berücksichtigung der Koeffizienten-Matrix $A_{c,a}^{\text{loop}}$ können die Zerfallskonstanten in der optimierten Parametrisierung analog zum Fall $N_f = 2$ behandelt werden. Die Ergebnisse zeigen, dass die Zerfallskonstanten, wie auch schon bei den Meson-Massen gefunden, in nächstführender Ordnung für $\omega = \pm\pi/2$ nicht $\mathcal{O}(a)$ -verbessert sind.

Zusammenfassung und Ausblick

In den ersten drei Kapiteln wurden die Grundlagen der Twisted-Mass Gitter-QCD besprochen. Aus dem chiralen Grenzfall ließ sich mittels des Weinberg'schen Powercountings die chirale Störungstheorie entwickeln, eine effektive Theorie für niedrige Energien. Diese kann mit Wilson-Fermionen auch auf dem Gitter formuliert werden. Der Übergang zur Twisted-Mass Gitter-QCD durch Einführung eines zusätzlichen winkelabhängigen Terms verhindert Schwierigkeiten wie z. B. die Quark Zero Modes. Außerdem wurde dargelegt, dass dieser Ansatz weitere nützliche Eigenschaften wie die automatische $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung hat. Insgesamt bietet Twisted-Mass Gitter-QCD damit einen vielversprechenden Ansatz für Simulationen der QCD bei niedrigen Energien.

Kapitel vier ging ausführlich auf die Methodik der chiralen Störungstheorie ein. Dazu wurden insbesondere die Probleme der linearen Feldverschiebung bei Rechnungen einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ behandelt und ein mögliches Rechenverfahren wurde skizziert. Auf dieser Analyse aufbauend ist ein alternativer Ansatz entwickelt worden, der den Rechenaufwand deutlich minimiert. Im Folgenden zeigte sich sogar, dass sich die Rechnung in der symmetrischen Parametrisierung durch unitäre Matrizen in vielen Fällen nicht wesentlich von Kontinuumsrechnungen unterscheidet.

In Kapitel fünf wurden mittels dieses Verfahrens die Pionmassen nächstführender Ordnung einschließlich aller Terme von Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ bestimmt. Die Ergebnisse ließen sich recht einfach auf den Fall nicht entarteter Quarkmassen erweitern.

Diese Rechnungen wurden in Kapitel sechs auf den Fall $N_f = 3$ ausgeweitet. Dabei stellte sich heraus, dass die automatische $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung für $\omega = \pm\pi/2$ nur für die Pionen in führender Ordnung erreicht wird. Zusätzlich wurde qualitativ gezeigt, wie sich mögliche Mischungen in Anwesenheit eines Twisted-Mass-Terms verhalten; in führender Ordnung sind die Massen explizit berechnet worden.

In Kapitel sieben wurden für die vorangegangenen Konfigurationen auch die Zerfallskonstanten bestimmt.

Insgesamt liegen mit diesen Resultaten nun Ergebnisse zu Massen und Zerfallskonstanten für zwei und drei Flavours unter Berücksichtigung von Beiträgen einschließlich Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ vor. Kurz vor Abschluss dieser Arbeit wurden Ergebnisse für $N_f = 3$ ohne Twisted-Mass-

Zusammenfassung und Ausblick

Term ($\omega = 0$) veröffentlicht [26]. Ein direkter Vergleich mit diesen Ergebnissen ließ sich aufgrund der dort benutzten Notation nicht unmittelbar ziehen.

Es bietet sich an, die in dieser Arbeit durchgeföhrten Rechnungen auf „partially-quenched“-Modelle zu erweitern. In diesen Modellen wird die Rechenzeit von Simulationen dadurch reduziert, dass in der Fermiondeterminanten eine höhere Masse als in den Propagatoren verwendet wird.

Des Weiteren kann die für Simulationen interessante Konfiguration $N_f = 4$ im Grenzfall der charm-Quarkmasse $m_c \rightarrow \infty$ betrachtet und mit den hier berechneten Größen verglichen werden.

A Symmetrisierung von Vertizes

Bei der Berechnung von Schleifenbeiträgen ist es notwendig, die Vertizes zu symmetrisieren. In der Standardliteratur wird das Verfahren oft an den Beispielen der ϕ^3 - und ϕ^4 -Theorie illustriert. Dabei wird auf die eigentliche Symmetrisierung meist gar nicht eingegangen. Es bleibt insbesondere unklar, wie man bei nicht vollständig symmetrischen WW-Termen zu den Faktoren gelangt, die aus der Topologie der Diagramme resultieren. Aus diesem Grund ist an dieser Stelle ein Verfahren aufgeführt.

Schema

Die Symmetrisierung wird im Impulsraum vorgenommen, was zur Ersetzung

$$\partial_\mu \longrightarrow ip_\mu$$

führt. Die hier immer doppelt auftretenden Impulse führen somit zu einem Faktor -1 . Die Symmetrisierung läuft dann in den folgenden Schritten ab, was am Beispiel von $(\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})^2$ veranschaulicht wird:

1. Aufstellen einer möglichen Parametrisierung:

$$(\delta_{ij} ip_j)(\delta_{kl} ip_l) \pi_i \pi_j \pi_k \pi_l = -\delta_{ij} \delta_{kl} p_j p_l \pi_i \pi_j \pi_k \pi_l$$

2. Symmetrisierung der Impulse:

$$-\delta_{ij} \delta_{kl} \frac{1}{2}(p_i + p_j) \frac{1}{2}(p_k + p_l) \pi_i \pi_j \pi_k \pi_l$$

3. Symmetrisierung der Parametrisierung:

$$-\frac{1}{12} [\delta_{ij} \delta_{kl} (p_i + p_j)(p_k + p_l) + \delta_{ik} \delta_{jl} (p_i + p_k)(p_j + p_l) + \delta_{il} \delta_{jk} (p_i + p_l)(p_j + p_k)] \pi_i \pi_j \pi_k \pi_l$$

Dabei sind Kronecker-Symbole teilweise redundant, allerdings ist es sinnvoll, mit der ausführlichen Darstellung zu rechnen, damit die Struktur des Vertizes erkennbar bleibt. Dies führt zu einer deutlichen Vereinfachung der Bestimmung der einzelnen Beiträge.

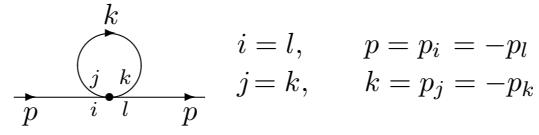


Abb. 15: Bezeichnungen am 4-Vertex.

Berechnung des Diagramms

Um den Beitrag des Diagramms zu bestimmen, werden nun eindeutige Bezeichnungen wie z. B. in Abb. 15 festgelegt. Die Impulse p_i , p_j , p_k und p_l sind als einlaufend definiert, der äußere Impuls wird mit p und der innere mit k bezeichnet. Außerdem wird aus dem Diagramm ersichtlich, dass $j = k$ gelten muss, was zu einem δ_{jk} führt. Unter Berücksichtigung der Kopplungskonstanten liefert die Summation über die Indizes den Schleifenbeitrag des WW-Terms. Bei den Diagrammen mit mehreren Vertizes ist zusätzlich nur zu beachten, dass die jeweilige Kopplungskonstante mit höheren Potenzen eingeht.

Eine explizite Anwendung des Vorgehens wird u. a. in Abschnitt 4.4 durchgeführt.

B Renormierungskoeffizienten

In nächstführender Ordung treten divergente Schleifenbeiträge auf, diese müssen durch Tree-level-Divergenzen aufgehoben werden. Dabei ist nicht eindeutig, inwiefern die endlichen Koeffizienten in die renormierten eingehen. Diese Uneindeutigkeit hat zwar keinen Einfluss auf die Beziehung zwischen den physikalischen Größen, wirkt sich aber auf die numerischen Werte der GL-Koeffizienten aus. Die in [6, 19] benutzte *Hintergrundfeld-Methode* ist eine mögliche Technik, die Koeffizienten zu bestimmen. Mit Hilfe der dimensionellen Regularisierung lässt sich dann ein Renormierungsschema aufstellen.

Die GL-Koeffizienten L_i , W_i und W'_i werden in einen renormierten und einen divergenten Anteil aufgespalten. Der divergente Anteil wird durch die in den Schleifenbeiträgen auftau-chende Größe

$$R = -\frac{2}{\varepsilon} - \ln(4\pi) + \gamma_E - 1$$

ausgedrückt; ε ist der dimensionelle Entwicklungsparameter und $\gamma_E \approx 0,577$ die Euler-Mascheroni-Konstante, so dass R für $\varepsilon \rightarrow 0$ divergiert. Nach [6, 19] ist ein mögliches Renor-mierungsschema durch

$$L_i = L_i^r + \frac{\Gamma_i}{32\pi^2} R, \quad W_i = W_i^r + \frac{\Delta_i}{32\pi^2} R, \quad W'_i = W'_i^r + \frac{\Delta'_i}{32\pi^2} R$$

gegeben. Dabei sind die Werte für die Γ_i nach [25] in Tab. 4 aufgeführt.

Γ_4	Γ_5	Γ_6	Γ_7	Γ_8
$\frac{1}{8}$	$\frac{N_f}{8}$	$\frac{N_f^2 + 2}{16 N_f^2}$	0	$\frac{N_f^2 - 4}{16 N_f}$

Tab. 4: Werte der Renormierungs-Koeffizienten für $SU(N_f)$.

Die für die Gitterterme relevanten Koeffizienten Δ_i und Δ'_i lassen sich dann aus den Relationen

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \Gamma_i \quad \text{für } i = 4, 5, \\ \Delta_i &= 2\Gamma_i \quad \text{für } i = 6, 8, \end{aligned}$$

und

$$\Delta'_i = \Gamma_i$$

leicht bestimmen.

Für die relevanten Symmetriegruppen SU(2) und SU(3) sind die expliziten Werte für die Γ_i in Tab. 5 aufgeführt.

	Γ_4	Γ_5	Γ_6	Γ_7	Γ_8
SU(2)	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{32}$	0	0
SU(3)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{144}$	0	$\frac{5}{48}$

Tab. 5: Renormierungs-Koeffizienten für SU(2) und SU(3).

C Symmetriegruppe $SU(n)$

C.1 Generatoren der $SU(2)$

Die Generatoren der $SU(2)$ werden wie üblich durch die drei $(2^2 - 1)$ Pauli-Matrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dargestellt (Standarddarstellung). Offensichtlich ist $\det \tau_i = -1$. Die τ_i bilden eine Lie-Algebra mit der Kommutatorrelation

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i\varepsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2},$$

wodurch die recht einfache Struktur der Gruppe deutlich wird. Oft wird mit $\tau_0 = \mathbb{1}$ eine weitere Pauli-Matrix definiert, die $SU(2)$ wird aber nur durch drei Generatoren generiert. Das Produkt zweier Pauli-Matrizen ergibt

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i\varepsilon_{ijk} \tau_k,$$

darüber sind dann auch alle höheren Produkte der Matrizen definiert. Diese Eigenschaft eignet sich gut zur Entwicklung von Matrixfunktionen. Zu den wichtigen Eigenschaften gehören auch die Spurformeln

$$\begin{aligned} \langle \tau_i \rangle &= 0, \\ \langle \tau_i \tau_j \rangle &= 2\delta_{ij}, \\ \langle \tau_i \tau_j \tau_k \rangle &= 2i\varepsilon_{ijk}. \end{aligned}$$

C.2 Generatoren der $SU(3)$

Die $SU(3)$ wird durch insgesamt acht $(3^2 - 1)$ Generatoren gebildet, diese sind hier wie gewöhnlich die sog. *Gell-Mann-Matrizen*. Die ersten drei stellen eine Erweiterung der Pauli-

Matrizen dar und werden durch fünf weitere ergänzt:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die der Lie-Algebra zugrunde liegende Kommutatorrelation

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2},$$

wird durch die Strukturkonstanten f_{abc} definiert [19]. Diese sind vollständig antisymmetrisch, und die nicht verschwindenden f_{abc} haben die Werte aus Tab. 6.

abc	123	147	156	246	257	345	367	458	678
f_{abc}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tab. 6: Werte der Strukturkonstanten f_{abc} .

Die Spurformeln lauten:

$$\begin{aligned}\langle \lambda_a \rangle &= 0, \\ \langle \lambda_a \lambda_b \rangle &= 2\delta_{ab}.\end{aligned}$$

D Chirale Darstellung der Dirac-Matrizen

Die Eigenzustände der Chiralität q_R und q_L sind in der Standard-Darstellung im Dirac-Spinor durch

$$\psi_{\text{St}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} q_R + q_L \\ q_R - q_L \end{pmatrix}$$

gegeben. Die *chirale Darstellung* zeichnet sich dadurch aus, dass der Dirac-Spinor

$$\psi_\chi = \begin{pmatrix} q_R \\ q_L \end{pmatrix}$$

von einfacher Gestalt bezüglich dieser Eigenzustände ist.

Chirale Darstellung im Minkowski-Raum

Gesucht ist eine Darstellung der Dirac-Matrizen, die die generelle Bedingung

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu}$$

erfüllt; $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ist der *metrische Tensor*. Eine mögliche chirale Darstellung der Dirac-Matrizen ist z. B. in [7] durch

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_i \\ \tau_i & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die für die chiralen Projektionen verwendete Matrix ist dann durch

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

bestimmt. Die Projektionen auf den rechts- und linkshändigen Anteil sind dann

$$P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma^5), \quad P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma^5),$$

wie sich z. B. in der chiralen Darstellung des Dirac-Spinors leicht verifizieren lässt.

Chirale Darstellung im Euklidischen Raum

Eine mögliche Transformation in den Euklidischen Raum ist nach [9] durch

$$\gamma_4^E = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i^E = i\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -i\tau_i \\ i\tau_i & 0 \end{pmatrix}$$

definiert. Dabei bleibt die γ^5 -Matrix in gleicher Form erhalten:

$$\gamma_5^E = \gamma_0^E \gamma_1^E \gamma_2^E \gamma_3^E = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung erfüllt offensichtlich

$$[\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E]_+ = 2\delta_{\mu\nu}$$

mit dem euklidischen metrischen Tensor $\delta_{\mu\nu} = \mathbb{1}$.

Abkürzungs- und Symboverzeichnis

Wenn nicht anders angegeben, werden die Abkürzungen und Symbole verwendet, die hier aufgeführt sind.

Abkürzungen:

LO	führende Ordnung (engl.: <i>leading order</i>)
NLO	nächstführende Ordnung (engl.: <i>next-leading order</i>)
NNLO	nächst-nächstführende Ordnung
der	derivativ (enthält Ableitungen)
kin	kinetisch
lin	linear
quad	quadratisch
sb	symmetriebrechend
WW	Wechselwirkung
GL	Gasser-Leutwyler(-Koeffizienten)
SE	Selbstenergie(-Diagramm)
tad	Tadpole(-Diagramm)

Indizes:

i, j, k, \dots	$\in \{1, 2, 3\}$
μ, ν, ρ, \dots	$\in \{0, 1, 2, 3\}$ im Minkowski-Raum
a, b, c, \dots	$\in \{1, 2, 3, 4\}$ im Euklidischen Raum (Gitter) $\in \{1, 2, \dots, 8\}$

Felder:

π_i	Pionfelder für $N_f = 2$
τ_i	Generatoren der SU(2)
ϕ_a	$= (\vec{\pi}, \vec{K}, \eta)$, Mesonfelder für $N_f = 3$
λ_a	Generatoren der SU(3)

\implies

Gitter:

a	Gitterkonstante
ρ_0	$= 2W_0 a \cos \omega$
ρ_3	$= 2W_0 a \sin \omega$
$ \rho $	$= \sqrt{\rho_0^2 + \rho_3^2} = 2W_0 a$
ρ	Gittermatrix (z. B. $\rho_0 \mathbb{1} + i\rho_3 \tau_3$)

Massen:

m_q	$q \in \{u, d, s\}$, Masse von Quark q
$m_{\{\pi_i, \phi_a\}}$	Masse von Meson π_i bzw. ϕ_a in LO
$M_{\{\pi_i, \phi_a\}}$	Masse in NLO (\bar{M} Treelevel-Masse)
$\chi_{\{i,a\}}$	$= 2B_0 m_{\{i,a\}}$, Masse proportional zu τ_i bzw. λ_a
χ	Quark-Massenmatrix (z. B. $\chi_0 \mathbb{1} = 2B_0 m \mathbb{1}$)

Propagator:

A	kinetische Matrix
B	Massenmatrix
K	$= \text{diag}(K_{\{\pi_i, \phi_a\}})$, diagonalisierte Matrix A
M	$= \text{diag}(M_{\{\pi_i, \phi_a\}})$, diagonalisierte Matrix B

Zerfallskonstanten:

$F_{\{\pi_i, \phi_a\}}$	Zerfallskonstante (\bar{F} Treelevel-Zerfallskonstante in NLO)
$A_{\mu, \{i,a\}}$	$= R_{\mu, \{i,a\}} - L_{\mu, \{i,a\}}$, Axialstrom

Sonstige:

$\langle \dots \rangle$	$= \text{Tr}(\dots)$, Spur
-------------------------	-----------------------------

Literaturverzeichnis

- [1] Particle Data Group: S. Eidelman et al. *Review of Particle Physics*. Phys. Lett. **B592** (2004) 1, <http://pdg.lbl.gov>
- [2] S. Scherer. *Introduction to Chiral Perturbation Theory*. Adv. Nucl. Phys. **27** (2002) 277, hep-ph/0210398
- [3] J. Gasser, H. Leutwyler. *Quark masses*. Phys. Reports **C87** (1982) 77
- [4] J. Gasser, H. Leutwyler. *On the low energy structure of QCD. / Low energy theorems as precision tests of QCD*. Phys. Lett. **B125** (1983) 321/325
- [5] J. Gasser, H. Leutwyler. *Chiral Perturbation Theory to One Loop*. Ann. Phys. **158** (1984) 142
- [6] J. Gasser, H. Leutwyler. *Chiral perturbation theory: expansions in the mass of the strange quark*. Nucl. Phys. **B250** (1985) 465
- [7] L. Ryder. *Quantum field theory*. 2nd ed. Cambridge University Press (1996)
- [8] K.G. Wilson. *Confinement of quarks*. Phys. Rev. **D10** (1974) 2445
- [9] M. Lüscher, S. Sint, R. Sommer, P. Weisz. *Chiral symmetry and $\mathcal{O}(a)$ improvement in lattice QCD*. Nucl. Phys. **B478** (1996) 365, hep-lat/9605038
- [10] K. Symanzik. *Continuum limit and improved action in lattice theories*. Nucl. Phys. **B226** (1983) 187/205
- [11] R. Frezzotti. *Wilson fermions with chirally twisted mass*. Nucl. Phys. **B Proc. Suppl.** **119** (2003) 140, hep-lat/0210007
- [12] R. Frezzotti, G.C. Rossi. *Chirally improving Wilson fermions. I. $\mathcal{O}(a)$ improvement*. JHEP **0408** (2004) 007, hep-lat/0306014
- [13] R. Frezzotti, G.C. Rossi. *Twisted-mass lattice QCD with mass non-degenerate quarks*. Nucl. Phys. **B Proc. Suppl.** **128** (2004) 193, hep-lat/0311008

- [14] R. Frezzotti, P.A. Grassi, S. Sint P. Weisz. *A local formulation of lattice QCD without unphysical zero modes.* Nucl. Phys. **B** Proc. Suppl. **83** (2000) 941, hep-lat/9909003
- [15] O. Bär, G. Rupak und S. Shores. *Chiral perturbation theory at $\mathcal{O}(a^2)$ for lattice QCD.* Phys. Rev. **D70** (2004) 034508, hep-lat/0306021
- [16] C. Schmidt. *Chirale Störungstheorie für Quantenchromodynamik auf dem Gitter mit axial gedrehter Massenmatrix.* Diplomarbeit WWU Münster (2004)
- [17] G. Münster, C. Schmidt. *Chiral perturbation theory for lattice QCD with a twisted mass term.* Europhys. Lett. **66** (2004) 652, hep-lat/0311032
- [18] L. Scorzato. *Pion mass splitting and phase structure in Twisted Mass QCD.* Eur. Phys. J. **C37** (2004) 445, hep-lat/0407023
- [19] J.F. Donoghue, E. Golowich, B.R. Holstein. *Dynamics of the Standard Model.* Cambridge University Press (1992)
- [20] G. Sterman. *An introduction to quantum field theory.* Cambridge University Press (1993)
- [21] T. Kugo. *Eichtheorie.* Springer-Verlag (1997)
- [22] G. Rupak. *Chiral perturbation theory for the Wilson lattice action.* Phys. Rev. **D66** (2002) 054503, hep-lat/0201019
- [23] M.W. Reinsch. *A simple expression for the terms in the Baker-Campbell-Hausdorff series.* J. Math. Phys. **41** (2000) 2434, math-ph/9905012
- [24] S.R. Sharpe, J.M.S. Wu. *Twisted mass chiral perturbation theory at next-to-leading order.* Phys. Rev. **D71** (2005) 074501, hep-lat/0411021
- [25] qq+q Collaboration: F. Farchioni, C. Gebert, I. Montvay, E. Scholz, L. Scorzato. *Partially quenched chiral perturbation theory and numerical simulations.* Phys. Lett. **B561** (2003) 102, hep-lat/0302011
- [26] S. Aoki, O. Bär, S. Takeda, T. Ishiwaka. *Pseudo scalar meson masses in Wilson Chiral Perturbation Theory for 2 + 1 flavors.* Phys. Rev. **D73** (2006) 014511, hep-lat/0509049

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigebringen haben. Mein Dank gilt hierbei

- Herrn Prof. Dr. G. Münster für die interessante Aufgabenstellung und die persönliche Betreuung meiner Arbeit,
- Stefanie Rau für die angenehme Atmosphäre in unserem Büro und das bereitwillige Korrekturlesen der Arbeit,
- meinen ehemaligen Übungsgruppenleitern Alexander Ferling und Björn Vogt für das aufmerksame Korrekturlesen dieser Arbeit.

Ganz besonders bedanke ich mich bei meinen Eltern, die mir durch ihre umfassende Unterstützung dieses Studium erst ermöglicht haben und immer für mich da sind.