

Partiell gequenchte chirale Störungstheorie für
die $N=1$ supersymmetrische Yang-Mills-Theorie

Hendrik Stüwe

3. Dezember 2013

Die vorliegende Version ist gegenüber der bewerteten Abgabe um einige Rechtschreib- und Formfehler bereinigt.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Grundlagen | 1 |
| 1.1 | Anmerkungen zur Notation | 1 |
| 1.2 | Grassmann-Zahlen | 2 |
| 1.3 | Quantenchromodynamik | 3 |
| 1.3.1 | Noether-Ströme | 4 |
| | Methode von Gell-Mann und Lévy | 6 |
| 1.4 | Symmetriebrechung | 7 |
| 1.4.1 | Spontane Symmetriebrechung | 7 |
| | Spontane Symmetriebrechung in der QCD | 9 |
| | Skalares Quarkkondensatsinglett | 10 |
| 1.5 | Chirale Störungstheorie | 11 |
| 1.5.1 | Effektive Felder | 11 |
| | Definition: Nebenklasse | 12 |
| 1.5.2 | Ableitung und äußere Felder | 13 |
| 1.5.3 | Power counting | 14 |
| | Dimensionale Regularisierung | 17 |
| 1.6 | Partial gequenchte, chirale Störungstheorie | 19 |
| 1.7 | Supersymmetrie | 22 |
| 2 | Anwendung | 23 |
| 2.1 | Eigenschaften von Gluinos | 23 |
| 2.1.1 | Symmetriegruppe der Gluinos | 24 |
| 2.1.2 | Weyl-Spinor-Darstellung | 26 |
| 2.2 | Dirac-Spinor-Darstellung | 27 |
| 2.2.1 | Verträglichkeit der Darstellung | 27 |
| | Majorana-Bedingung | 27 |
| | Gluino-Lagrangian | 28 |
| 2.2.2 | Vergleich der Symmetriegruppen | 29 |
| | Majorana $U_A(1)$ -Symmetrie | 29 |
| | Majorana $SU(4)^*$ -Symmetrie | 30 |
| | Dirac $U(1)_L \times U(1)_R$ -Symmetrie | 32 |
| | Dirac $SU(2)_L \times SU(2)_R$ | 33 |
| | Zusammenfassung der Symmetriegruppen | 35 |
| 2.3 | Effektive Feldtheorie | 36 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.3.1 | Noether-Ströme | 36 |
| 2.3.2 | Spontane Symmetriebrechung | 37 |
| 2.3.3 | Die effektiven Felder | 38 |
| | Transformationsverhalten | 39 |
| | Externe Felder | 41 |
| | Konstruktion des effektiven Lagrangians | 42 |
| 2.3.4 | Massenbestimmung in der chiralen Störungstheorie | 44 |
| 2.3.5 | Partial gequenchte effektive Feldtheorie | 50 |
| | Massen in niedrigster Ordnung | 51 |
| | Baumdiagramm von Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ | 51 |
| | Schleifenbeiträge von Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ | 53 |
| | Zusammenfassung der Ergebnisse | 55 |
| 3 | Literaturverzeichnis | 57 |
| A | Definitionen und Vertiefungen | 59 |
| A.1 | Vertiefungen | 59 |
| A.1.1 | Dirac-Matrizen | 59 |
| | Definition Clifford-Algebra | 59 |
| A.2 | Definitionen | 60 |
| A.2.1 | Gell-Mann-Matrizen | 60 |
| A.2.2 | Gewählte Darstellungen | 61 |
| | $SO(4)$ | 61 |
| | $SU(2)$ | 61 |
| | $SO(2)^*$ | 62 |
| | $SO(3)^*$ | 62 |
| | $U(1)_A \times U(1)_A \times U(1)_A$ | 63 |
| | $SU(2)^*$ | 63 |
| | $SU(4)^*$ | 64 |
| | Danksagung | 65 |

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Anmerkungen zur Notation

Zu Beginn erweist es sich als sinnvoll, die genutzten Konventionen und Notationen offen darzulegen, um spätere Verwirrung zu vermeiden.

Für die Metrik des Hilbertraumes verwenden wir die „Minus-Notation“

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (1.1)$$

Die Pauli-Matrizen sind gegeben durch

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Mit diesen Matrizen definieren wir Vektoren

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}_{2 \times 2}, \vec{\sigma}) \quad \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}_{2 \times 2}, -\vec{\sigma}) \quad (1.3)$$

Für die γ -Matrizen nutzen wir die Weyl-Darstellung, in welcher gilt

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Somit folgen die Projektoren P_L, P_R mit

$$P_L = \frac{\mathbb{1}_{4 \times 4} - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_R = \frac{\mathbb{1}_{4 \times 4} + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

und für die Ladungskonjugation C :

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Es gilt die von der Dirac-Darstellung gewohnte Eigenschaft $C^{-1} = C^T = C^\dagger = -C$.

Für Dirac-Spinoren verwenden wir die Standardnotation

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (1.7)$$

und ausserdem die Feynman-Slash-Notation

$$\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu \quad (1.8)$$

Natürlich gilt, soweit nicht explizit verneint, die Einsteinsche Summenkonvention, wobei über mehrfach auftretende Indizes summiert wird.

1.2 Grassmann-Zahlen

In dieser Arbeit behandeln wir vorwiegend Spinoren, deren Komponenten von antikommutierenden Zahlen gebildet werden. Deshalb führen wir durch ihre Antikommutativität definierte Grassmann-Zahlen ein, d.h. für zwei Grassmann-Zahlen χ, η gilt:

$$\chi\eta = -\eta\chi \quad (1.9)$$

Daraus folgt sofort $\chi^2 = 0$. Das Produkt zweier Grassmann-Zahlen kommutiert dann mit einer Grassmann-Zahl. Die Addition und Multiplikation mit Skalaren ist wie in anderen Vektorräumen definiert.

Eine interessante Folge ist, dass man jede Funktion $f(\chi)$ entwickeln kann in

$$f(\chi) = A + B\chi \quad (1.10)$$

mit A einer Grassmann-Zahl und $B \in \mathbb{C}$. Dies entspricht einer Taylor-Reihe, wobei jeder Term ab 2. Ordnung gleich 0 wird. Hiermit wollen wir nun die Integration über Grassmann-Zahlen definieren. Wichtig ist hierbei festzuhalten, dass es sich dabei nicht um ein Riemann- oder Lebesgueintegral handelt, welches den Grenzübergang einer Summe darstellt. Vielmehr ist Integration in diesem Fall eine Operation, welche Eigenschaften wie Distributivität und Linearität besitzt. Somit definieren wir:

$$\int d\chi f(\chi) = \int d\chi (A + B\chi) =: B \quad (1.11)$$

Bei der Integration über mehrere Variablen ist zu beachten, dass die Differentiale selbst Grassmann-wertig sind und somit gilt:

$$\int d\chi d\eta \chi\eta = - \int d\eta d\chi \chi\eta = - \int d\eta\eta = -1 \quad (1.12)$$

Wollen wir nun eine Ableitung definieren, so können wir die gewöhnlichen Ableitungsregeln übernehmen:

$$\frac{d}{d\chi} (f(\chi)) = \frac{d}{d\chi} (A + B\chi) = B \quad (1.13)$$

Wir sehen, dass dies das gleiche Ergebnis wie die Integration liefert. Natürlich ist zu beachten, dass die Ableitungen selber wieder Grassmann-wertig sind und

somit „Ableitungen von links“ und „Ableitungen von rechts“ zu unterscheiden sind

$$\frac{\overrightarrow{d}}{d\chi}\chi = -\chi \frac{\overleftarrow{d}}{d\chi} = 1 \quad (1.14)$$

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir alle Ableitungen als „Ableitungen von links“ behandeln und Ausdrücke gegebenenfalls für diese Konvention umordnen.

1.3 Quantenchromodynamik

Die Quantenchromodynamik, kurz QCD, ist eine Theorie der starken Wechselwirkung. Somit umfasst sie die farbladungstragenden Quarks und die Austauschteilchen der Gluonen. Die Farbladung ist eine Erhaltungsgröße analog der elektrischen Ladung mit drei möglichen Zustände, welche oft *rot*, *blau* und *grün* genannt werden. Nach dem Vorbild der Quantenelektrodynamik (QED) handelt es sich um eine Eichtheorie; anders als im Fall der QED ist die zugehörige Eichgruppe, die $SU(3)_c$, nicht-abelsch. Dies bedeutet physikalisch, dass die kraftübertragenden Gluonen in Wechselwirkung mit sich selbst stehen.

In Tab. 1.1 sind die Teilchen der QCD zusammengefasst. Für den Aufbau atomarer Materie sind ausschließlich up- und down-Quarks nötig (neben Elektronen, welche nicht der starken WW unterliegen). Diese verschiedenen Arten von Quarks werden als „Flavour“ bezeichnet und zwischen ihnen besteht eine „Flavour“-Symmetrie, welche sich ebenfalls durch eine Lie-Gruppe beschreiben lässt. Jedoch brechen endliche Quarkmassen diese Symmetrie, wodurch sie nur für kleine Massen angenähert realisiert sein kann. Typischerweise arbeitet man mit einer $SU(3)_f$, wobei mit up-, down- und strange-Quarks nur die „leichtesten“ Flavour einbezogen werden.

In den Gleichungen der QCD werden Quarks durch q repräsentiert, wobei implizit gilt

$$q = q_{d,f,c} \quad (1.15)$$

Über diese Indizes wird nach der Summenkonvention summiert; die Bedeutung der einzelnen Indizes ist dabei wie folgt

- d ist der Dirac-Index und läuft von 1 bis 4 weil die Wellenfunktionen 4-dimensionale Vektoren sind
- f ist der Flavour-Index und läuft von 1 bis zur Anzahl der Flavour N , wobei $N = 2$ und $N = 3$ die meistgenutzten Fälle sind
- c ist der Farbindex und kann die drei Farbzustände *rot*, *blau* und *grün* annehmen

Eine Besonderheit der QCD ist, dass die Kraftwirkung zwischen geladenen Teilchen mit großem Abstand zunimmt, wodurch keine freien Quarks existieren.

| Teilchen | Symbol | elek. Ladung[e] | Masse[19] |
|---------------|--------|-----------------|-------------------|
| up-Quark | u | $+\frac{2}{3}$ | 1,7 – 3,3 MeV |
| down-Quark | d | $-\frac{1}{3}$ | 4,1 – 5,8 MeV |
| charm-Quark | c | $+\frac{2}{3}$ | 1,18 – 1,34 GeV |
| strange-Quark | s | $-\frac{1}{3}$ | 80 – 130 MeV |
| top-Quark | t | $+\frac{2}{3}$ | 171,1 – 173,9 GeV |
| bottom-Quark | b | $-\frac{1}{3}$ | 4,13 – 4,37 GeV |
| Gluon | g | 0 | 0 |

Tabelle 1.1: Übersicht über die Teilchen der QCD

Dies wird als Confinement bezeichnet und nur unter den extremsten Umständen hoher Energien sind asymptotisch freie Quarks möglich. Als Folge dessen sind nicht Quarks, sondern Hadronen die bestimmenden Teilchen beobachteter Phänomene. Die Hadronen, welche sich in Mesonen(Quark-Antiquark), Baryonen(3 Quarks) sowie hypothetische Baryonen aufteilen, können nicht analytisch durch die QCD beschrieben werden. Hierfür werden vielmehr effektive Theorien oder numerische Rechnungen benötigt.

1.3.1 Noether-Ströme

Noether-Ströme sind aus dem Noether-Theorem abgeleitete Erhaltungsgrößen. Das Theorem selbst besagt, dass zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems eine Erhaltungsgröße existiert.[20] Eine Symmetrie ist in diesem Zusammenhang eine Transformation, welche das Verhalten des Systems unverändert lässt. Da sich das Theorem direkt auf Systeme bezieht, deren Bewegungsgleichungen durch Variation abgeleitet werden, ist mit „Verhalten“ die Wirkungsfunktion gemeint. Somit resultiert jede kontinuierliche Transformation, welche die Wirkung unverändert lässt, in einer Erhaltungsgröße. Dies wird in der folgenden Betrachtung einer skalaren Feldtheorie klar. Sei also eine Transformation Γ gegeben mit

$$\bar{x}^\mu = \Gamma x^\mu = x^\mu + \delta x^\mu(x) \quad (1.16)$$

$$\bar{\phi}_i(\bar{x}) = \Gamma \phi_i(x) = \phi_i(x) + \delta \phi_i(x, \phi_i) \quad (1.17)$$

Wir wollen dabei die Transformationen mittels N infinitesimaler Parameter $\delta\beta_\alpha$ definieren:

$$\delta x^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial(\delta\beta_\alpha)} \delta\beta_\alpha \quad (1.18)$$

$$\delta \phi_i(x, \phi_i) = \frac{\partial \phi_i}{\partial(\delta\beta_\alpha)} \delta\beta_\alpha \quad (1.19)$$

Für das Noether-Theorem nehmen wir nun an, dass diese Transformation den Lagrangian forminvariant belässt, d.h.

$$\mathcal{L}'\left(\phi_i, \frac{\partial\phi_i}{\partial x_\mu}\right) = \mathcal{L}\left(\phi_i, \frac{\partial\phi_i}{\partial x_\mu}\right) \quad (1.20)$$

woraus direkt folgt

$$\int_{\bar{R}} d^4\bar{x} \mathcal{L}\left(\bar{\phi}_i, \frac{\partial\bar{\phi}_i}{\partial\bar{x}_\mu}\right) - \int_R d^4x \mathcal{L}\left(\phi_i, \frac{\partial\phi_i}{\partial x_\mu}\right) = 0 \quad (1.21)$$

Ersetzt man nun $\bar{\phi}_i$ und \bar{x}^μ so ergibt sich

$$0 = \int_R d^4x \left\{ \mathcal{L} \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \right) \delta\phi_i(\bar{x}, x) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} \right) \delta(\partial^\mu\phi_i(\bar{x}, x)) \right\} \quad (1.22)$$

Dabei ist es hilfreich $\delta\phi_i(\bar{x}, x)$ in Anteile aufzuspalten, die jeweils nur von \bar{x}, x abhängen

$$\delta\phi_i(\bar{x}, x) = \bar{\phi}_i(\bar{x}) - \phi_i(x) = \left(\frac{\partial\phi_i(x)}{\partial x^\mu} \right) \delta x^\mu + \delta\phi_i(x) + \mathcal{O}(\delta\beta_\alpha^2) \quad (1.23)$$

wobei gilt $\delta\phi_i(x) = \bar{\phi}_i(x) - \phi_i(x)$. Gleiches tun wir nun für $\delta(\partial^\mu\phi_i)(\bar{x}, x)$

$$\delta(\partial^\mu\phi_i)(\bar{x}, x) = \left(\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x_\mu\partial x^\nu} \right) \delta x^\nu + \partial^\mu(\delta\phi_i(x)) + \mathcal{O}(\delta\beta_\alpha^2) \quad (1.24)$$

Einsetzen von Gl. (1.23) und (1.24) in Gl. (1.22) ergibt

$$0 = \int_R d^4x \left\{ \mathcal{L} \left(\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} \right) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \right) \delta x^\mu + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} \right) \delta\phi_i(x) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} \right) \partial^\mu(\delta\phi_i(x)) \right\} \quad (1.25)$$

Für den dritten Term nutzen wir nun die Eulersche Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} = \partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} \right) \quad (1.26)$$

und erhalten

$$0 = \int_R d^4x \left\{ \mathcal{L} \left(\frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\mu} \right) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \right) \delta x^\mu + \left[\partial^\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} \right) \right] \delta\phi_i(x) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_i)} \right) \partial^\mu(\delta\phi_i(x)) \right\} \quad (1.27)$$

Dieser Integrand ist allerdings eine Divergenz von der Form

$$\int_R d^4x \partial_\mu \left(\mathcal{L} \delta x^\mu + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \right) \delta \phi_i(x) \right) = 0 \quad (1.28)$$

Da die Integrationsgrenzen beliebig sind, muss der Integrand selbst identisch 0 sein. Somit ist dies ein Ausdruck der Form

$$\partial_\mu (\delta J^\mu) = 0 \quad \text{mit} \quad \delta J^\mu = -\mathcal{L} \delta x^\mu - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) \delta \phi_i(x) \quad (1.29)$$

wobei das Vorzeichen in δJ^μ Konvention ist. Zuletzt verwenden wir Gl. (1.19) um die Ströme zu den einzelnen Variationsparametern β_α zu erhalten

$$J_\alpha^\mu(x) = -\mathcal{L} \frac{\partial (\delta x^\mu)}{\partial \beta_\alpha} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) \left(\frac{\partial (\delta \phi_i(x))}{\partial \beta_\alpha} \right) \quad (1.30)$$

Dies sind die symmetriebedingten Noether-Ströme. Zu jedem Strom lässt sich eine Ladung Q_α mittels

$$Q_\alpha(t) = \int d^3x J_\alpha^0(t, \vec{x}) \quad (1.31)$$

definieren.

Methode von Gell-Mann und Lévy

Nachdem wir zuvor die Noether-Ströme eingeführt haben, wollen wir nun die Methode betrachten, mit welcher wir in dieser Arbeit explizite Berechnungen durchführen. Während die Ströme mittels Gl. (1.30) prinzipiell berechenbar sind, werden wir die einfachere Methode von Gell-Mann und Lévy[11] anwenden. Wir betrachten hierbei globale Transformationen von unabhängigen Feldern ϕ_i :

$$\phi_i(x) \mapsto \phi'_i(x) = \phi_i(x) + \delta \phi_i(x) \quad (1.32a)$$

$$= \phi_i(x) - i\epsilon_a F_{ai}[\phi(x)] \quad (1.32b)$$

Hierbei ist $F_{ai}[\phi(x)]$ ein Funktional zur Beschreibung der Transformation (vgl. in Gl. (1.19) gilt $F_{\alpha i}[\phi(x)] = \frac{\partial \phi_i}{\partial (\delta \beta_\alpha)}$). In dieser Methode wird nun die globale Symmetrie zu einer lokalen erhoben, also ϵ_a durch $\epsilon_a(x)$ ersetzt. Dies hat für die Variation des Lagrangian zur Folge

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \partial^\mu (\delta \phi_i) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} (-i\epsilon_a(x) F_{ai}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} (-i\epsilon_a(x) \partial^\mu F_{ai} - iF_{ai} \partial^\mu \epsilon_a(x)) \quad (1.33) \\ &= \epsilon_a(x) \cdot \underbrace{\left(-i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} F_{ai} - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \partial^\mu F_{ai} \right)}_I + (\partial^\mu \epsilon_a(x)) \cdot \underbrace{\left(-i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} F_{ai} \right)}_{II} \end{aligned}$$

An diesem Ausdruck sind zwei Dinge auffällig. Zunächst sieht man leicht, dass Term I die Divergenz von Term II ist und desweiteren kann man sich vergewissern, dass Term II gerade dem Noether-Strom entspricht.

$$J_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} F_{ai} \quad (1.34)$$

$$\partial_\mu J_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} F_{ai} - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \partial^\mu F_{ai} \quad (1.35)$$

Somit folgt für die Variation des Lagrangians

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon_a(x) \partial_\mu J_a^\mu + (\partial_\mu \epsilon_a(x)) J_a^\mu \quad (1.36)$$

woraus wir direkt folgern

$$J_a^\mu = \frac{\partial (\delta \mathcal{L})}{\partial (\partial_\mu \epsilon_a)} \quad (1.37)$$

$$\partial_\mu J_a^\mu = \frac{\partial (\delta \mathcal{L})}{\partial \epsilon_a} \quad (1.38)$$

Dies liefert mit dem Zusammenhang

$$\delta \mathcal{L} = \mathcal{L}'(\phi', \partial_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.39)$$

eine einfache Methode um schnell die Noether-Ströme und ihre Divergenzen zu berechnen.

1.4 Symmetriebrechung

1.4.1 Spontane Symmetriebrechung

Betrachtet man ein System, dessen Grundzustand eine geringere Symmetrie besitzt als das Gesamtsystem, so bezeichnet man die Symmetrie des Systems als spontan gebrochen. Um dies zu illustrieren wollen wir uns zunächst einem viel genutzten Modell zuwenden bevor wir den etwas komplizierteren Fall der QCD besprechen. Dies übertragen wir dann in Abschnitt 2.3.2 auf den Fall von Gluinos.

Wir beginnen mit dem Lagrangian

$$\mathcal{L}(\vec{\Phi}, \partial_\mu \vec{\Phi}) = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_i \partial^\mu \Phi_i - \frac{m^2}{2} \Phi_i \Phi_i - \frac{\lambda}{4} (\Phi_i \Phi_i)^2 \quad (1.40)$$

, welcher das Potential

$$\mathcal{V}(\vec{\Phi}) = \frac{m^2}{2} \Phi_i \Phi_i + \frac{\lambda}{4} (\Phi_i \Phi_i)^2 \quad (1.41)$$

enthält. Der Lagrangian und das Potential sind invariant unter einer SO(3)-Transformation

$$\vec{\Phi} \mapsto \vec{\Phi}' = e^{-i\alpha_n T_n} \vec{\Phi} \quad (1.42)$$

mit den Generatoren $T_n, n = 1, 2, 3$ der $SO(3)$. Um nun das Minimum des Potentials festzustellen müssen zwei wichtige Fälle unterschieden werden:

1. Gilt $m^2 > 0, \lambda > 0$, so liegt ein einzigartiges Minimum bei $\vec{\Phi} = 0$ vor. Dies bezeichnet man als Wigner-Weyl-Realisation der Symmetrie.
2. Gilt $m^2 < 0, \lambda > 0$, so liegen nun unendlich viele Minima vor. Dieser Fall wird als Nambu-Goldstone-Realisation der Symmetrie bezeichnet.

Betrachten wir nun den Nambu-Goldstone-Fall, so erhalten wir für den Grundzustand:

$$|\vec{\Phi}_{min}| = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} = \phi_{min} \quad (1.43a)$$

$$|\vec{\Phi}| = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2} \quad (1.43b)$$

Da wir Koordinatentransformationen jederzeit durchführen können, wählen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit den Grundzustand in Φ_3 -Richtung, also

$$\vec{\Phi}_{min} = \phi_{min} \hat{e}_3 \quad (1.44)$$

Dieser Grundzustand ist nicht invariant unter beliebigen Transformationen, da zwei der drei Generatoren der Gruppe den Grundzustand verändern:

$$e^{-i\alpha_1 T_1} \cdot \vec{\Phi}_{min} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_1) \phi_{min} \\ \cos(\alpha_1) \phi_{min} \end{pmatrix} \quad (1.45a)$$

$$e^{-i\alpha_2 T_2} \cdot \vec{\Phi}_{min} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1) \phi_{min} \\ 0 \\ \cos(\alpha_1) \phi_{min} \end{pmatrix} \quad (1.45b)$$

Einzig der letzte Generator lässt den Grundzustand invariant. Dies entspricht einer Rotation um die x_3 -Achse

$$e^{-i\alpha_3 T_3} \cdot \vec{\Phi}_{min} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_{min} \end{pmatrix} = \vec{\Phi}_{min} \quad (1.46)$$

Zu guter Letzt entwickeln wir Φ_3 um den Grundzustand

$$\Phi_3(x) = \phi_{min} + \eta(x) \quad (1.47)$$

und erhalten somit einen neuen Potentialausdruck

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}} &= \frac{1}{2}(-2m^2)\eta^2 + \lambda\phi_{min}\eta(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \eta^2) \\ &\quad + \frac{\lambda}{4}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \eta^2)^2 - \frac{\lambda}{4}\phi_{min}^4 \end{aligned} \quad (1.48)$$

Nähere Untersuchung dieses Ausdrucks zeigen, dass Φ_1 und Φ_2 keine Massenterme mehr besitzen und nur noch ein massives Teilchen η vorhanden ist. Die masselosen Teilchen werden als Goldstone-Bosonen bezeichnet.

Spontane Symmetriebrechung in der QCD

Während das Modell des vorigen Abschnitts recht instruktiv ist und die Grundlagen leicht nachvollziehbar sind, so ist es doch für die direkte Anwendung wenig nützlich. Betrachten wir hierzu den QCD-Lagrangian

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}_{f,c} (i\mathcal{D} - m) q_{f,c} \quad (1.49)$$

Es fällt sofort auf, dass das Potential nur aus einem Massenterm besteht und somit ein einziges Minimum bei $q = 0$ besitzt. Dies hilft uns aber nicht weiter, da auf diese Weise keine spontane Symmetriebrechung zustande kommt. Man könnte meinen, dass somit in der QCD keine Symmetriebrechung vorliegt; betrachtet man jedoch die vorhandenen $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie des Lagrangian, so sollte man von den zugeordneten Hadronen Multipletts erwarten, welche der Dimension der irreduziblen Darstellung der Symmetriegruppe entsprechen.

Betrachten wir nun die Vektor- und Axialladungen

$$Q_{Va} = Q_{Ra} + Q_{La} = \int d^3x q^\dagger T_a^V q = \int d^3x q^\dagger T_a q \quad (1.50)$$

$$Q_{Aa} = Q_{Ra} - Q_{La} = \int d^3x q^\dagger T_a^A q = \int d^3x q^\dagger \gamma_5 T_a q \quad (1.51)$$

Die T_a^V und T_a^A sind die Generatoren der vektoriiellen, bzw. axialen Transformationen, welche in diesem Fall die Generatoren der $SU(3)$ sind, also $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$ mit den Gell-Mann-Matrizen λ_a (siehe Anhang A.2.1) und $\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1}$.

Ist H^0 nun der QCD-Hamiltonian, so kommutieren diese Ladungen mit dem Hamiltonian. Da diese Ladungen aber unterschiedliche Parität besitzen, erwarten wir für den Grundzustand entartete Multipletts mit entgegen gesetzter Parität. Um dies zu überprüfen, sei $|\alpha, +\rangle$ ein Eigenzustand zu H^0 und P mit Eigenwerten E_α , bzw. $+1$. Definieren wir nun den Zustand $\Phi_{a\alpha} = Q_{Aa} |\alpha, +\rangle$, so ergibt sich für diesen Zustand

$$H^0 \Phi_{a\alpha} = H^0 Q_{Aa} |\alpha, +\rangle = Q_{Aa} H^0 |\alpha, +\rangle = E_\alpha Q_{Aa} |\alpha, +\rangle = E_\alpha \Phi_{a\alpha} \quad (1.52)$$

$$P \Phi_{a\alpha} = P Q_{Aa} P^{-1} P |\alpha, +\rangle = -Q_{Aa} |\alpha, +\rangle = -\Phi_{a\alpha} \quad (1.53)$$

Das macht deutlich, dass bei der vorliegenden $SU(3)$ -Symmetrie zwei entartete Oktetts mit entgegen gesetzter Parität im Grundzustand vorliegen. Diese kann man in die Teilchenzustände entwickeln und erhält

$$\Phi_{a\alpha} = Q_{Aa} |\alpha, +\rangle = |\beta, -\rangle \langle \beta, - | Q_{Aa} |\alpha, +\rangle = t_{a,\beta\alpha} |\beta, -\rangle \quad (1.54)$$

Nun kann im Experiment zwar ein Grundzustandsmultiplett mit negativer Parität nachgewiesen werden, es liegt jedoch kein entartetes Oktett mit positiver Parität vor. Daran erkennen wir, dass unsere vorige Beweisführung nicht korrekt sein kann. Wir haben dabei implizit angenommen, dass Q_{Aa} den Grundzustand auslöscht. Man sieht dies so: Sei $b_{\alpha,+}^\dagger$ der Erzeuger von $|\alpha, +\rangle$ mit

$|\alpha, +\rangle = b_{\alpha,+}^\dagger |0\rangle$. Dann argumentieren wir wie folgt

$$Q_{Aa} |\alpha, +\rangle = Q_{Aa} b_{\alpha,+}^\dagger |0\rangle \quad (1.55a)$$

$$= \left([Q_{Aa}, b_{\alpha,+}^\dagger] + b_{\alpha,+}^\dagger \underbrace{Q_{Aa}}_{\rightarrow 0} \right) |0\rangle \quad (1.55b)$$

$$= t_{a,\beta\alpha} b_{\beta,-}^\dagger |0\rangle \quad (1.55c)$$

Das entspricht wieder der Entwicklung in Teilchenzustände, benötigt aber als Voraussetzung eine Annihilation des Grundzustandes durch Q_{Aa} . Sollte dies nicht der Fall sein, so ist der Grundzustand nicht mehr invariant unter der vollen Symmetriegruppe des Lagrangian und es liegt eine spontane Symmetriebrechung vor. Somit ist statt einer vollen $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Symmetrie nur eine $SU(3)_V$ -Symmetrie realisiert.

Skalares Quarkkondensatsinglett

Im vorigen Abschnitt konnten wir motivieren, dass die Symmetrie in der QCD spontan gebrochen sein muss. Nun möchten wir zeigen, dass ein nicht verschwindender Vakuumerwartungswert im chiralen Limes des Operators $\bar{q}q$ ein hinreichendes Kriterium für diese spontane Symmetriebrechung ist. Der Operator $\bar{q}q$ transformiert unter Lorentztransformation wie ein Skalar und als ein Singlett unter $SU(3)_V$; man nennt $\bar{q}q$ deshalb das skalare Quarkkondensatsinglett. Zunächst betrachten wir hierfür die skalaren und pseudoskalaren Quarkdichten

$$S_a(y) = \bar{q}(y) \lambda_a q(y), \quad a = 0, \dots, 8 \quad (1.56)$$

$$P_a(y) = i \bar{q}(y) \gamma_5 \lambda_a q(y), \quad a = 0, \dots, 8 \quad (1.57)$$

und die Vektor- und Axialladungen

$$Q_{Va}(t) = \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) \frac{\lambda_a}{2} q(t, \vec{x}) \quad (1.58)$$

$$Q_{Aa}(t) = \int d^3x q^\dagger(t, \vec{x}) \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q(t, \vec{x}) \quad (1.59)$$

Wir können hieraus ableiten, dass die skalaren Quarkdichten wie ein Singlett und ein Oktett unter $SU(3)_V$ transformieren

$$[Q_{Va}(t), S_0(y)] = 0, \quad a = 0, \dots, 8 \quad (1.60)$$

$$[Q_{Va}(t), S_b(y)] = i f_{abc} S_c(y), \quad a, b = 0, \dots, 8 \quad (1.61)$$

Nun nutzen wir die Invarianz des Grundzustandes unter $SU(3)_V$, also $Q_{Va} |0\rangle = 0$ und den Ausdruck

$$S_a(y) = -\frac{i}{3} f_{abc} [Q_{Vb}(t), S_c(y)] \quad (1.62)$$

um den Vakuumerwartungswert von $S_a(y)$ zu erhalten:

$$\langle 0 | S_a(y) | 0 \rangle = \langle 0 | S_a(0) | 0 \rangle = \langle S_a \rangle = 0, \quad a = 1, \dots, 8 \quad (1.63)$$

Hierbei haben wir uns die Translationsinvarianz des Grundzustandes zu nutze gemacht. Aus Gl. (1.63) erhalten wir für $a = 3$

$$\langle \bar{u}u \rangle - \langle \bar{d}d \rangle = 0 \quad (1.64)$$

und für $a = 8$ erhalten wir

$$\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle - 2 \langle \bar{s}s \rangle = 0 \quad (1.65)$$

Kombiniert man dies, so ergibt sich $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle$. Wegen Gl. (1.60) kann die gleiche Argumentation nicht für den Singlett-Zustand gemacht werden und wir erhalten

$$\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s \rangle = 3 \langle \bar{u}u \rangle = 3 \langle \bar{d}d \rangle = 3 \langle \bar{s}s \rangle \neq 0 \quad (1.66)$$

Nun endlich betrachten wir das Verhalten der pseudoskalaren Quarkdichten unter $SU(3)_A$ und erhalten

$$i[Q_{Aa}(t), P_a(y)] = \begin{cases} \bar{u}u + \bar{d}d & a = 1, 2, 3 \\ \bar{u}u + \bar{s}s & a = 4, 5 \\ \bar{d}d + \bar{s}s & a = 6, 7 \\ \frac{1}{3}(\bar{u}u + \bar{d}d + 4\bar{s}s) & a = 8 \end{cases} \quad (1.67)$$

Daraus folgt direkt der Vakuumerwartungswert

$$\langle 0 | i[Q_{Aa}(t), P_a(y)] | 0 \rangle = \frac{2}{3} \langle \bar{q}q \rangle, \quad a = 1, \dots, 8 \quad (1.68)$$

Fügt man in Gl. (1.68) eine komplette Basis ein, so ergibt sich, dass sowohl $P_a(y)$ wie auch $Q_{Aa}(t)$ nichtverschwindende Matrixelemente im Übergang vom Vakuum zu einem Teilchenzustand haben. Somit reicht ein nichtverschwindendes Quarkkondensat $\langle \bar{q}q \rangle$ aus, damit Q_{Aa} den Grundzustand nicht mehr vernichtet und somit die $SU(3)_A$ -Symmetrie gebrochen ist.

1.5 Chirale Störungstheorie

Die chirale Störungstheorie ist eine effektive Feldtheorie zur Beschreibung der starken Wechselwirkung. In diesem Rahmen werden die im vorigen Kapitel beschriebenen (quasi-)Goldstonebosonen als fundamentale Teilchen einführen und deren Dynamik beschreiben. Zu diesem Zweck benötigen wir eine mathematische Beschreibung der Teilchen, d.h. im Rahmen einer Quantenfeldtheorie benötigen wir Felder, die alle Eigenschaften der Bosonen besitzen.

1.5.1 Effektive Felder

Als Erstes führen wir also 8 skalare Felder ϕ_i ein, welche wir in einem Vektor \vec{v} zusammenfassen. Dabei gilt

$$\phi_i : M^4 \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.69)$$

mit der Minkowski-Raumzeit M^4 ; es folgt direkt

$$\vec{v} : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^8 \quad (1.70)$$

Dies sind aber nur generische Felder und entsprechen nicht unbedingt den Teilchen, welche wir beschreiben wollen. Wir verlangen deswegen das gleiche Verhalten unter Symmetrietransformationen für die eingeführten Felder, wie es die Goldstonebosonen des vorigen Abschnitts besitzen. Die Objekte, die wir suchen, müssen, wie der Grundzustand, invariant unter $SU(3)_V$ sein und aus der $SU(3)_L \times SU(3)_R$ hervorgehen. Es existiert etwas, wofür genau dies gilt: Die Menge der Nebenklassen von $SU(3)_V$ in $SU(3)_L \times SU(3)_R$!

Definition: Nebenklasse

Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G . Die Relation \sim sei gegeben durch

$$a \sim b \Leftrightarrow a^{-1} \cdot b \in H$$

Dann ist dies eine Äquivalenzrelation auf G und die Äquivalenzklasse zu einem $a \in G$ ist $\{a \cdot u | u \in H\}$. Diese Menge bezeichnet man auch als aH und sie ist die Linksnebenklasse von H nach a . Auf gleiche Weise ist Ha die Rechtsnebenklasse von H nach a . Die Menge aller Linksnebenklassen (Rechtsnebenklassen) bezeichnen wir durch G/H ($G \setminus H$) mit

$$G/H = \{gH | g \in G\} \quad (1.71)$$

Von besonderem Interesse ist die Eigenschaft einzelner Elemente ihre komplette Nebenklasse zu repräsentieren. Für die QCD arbeiten wir nun mit

$$\begin{aligned} G &= SU(3)_L \times SU(3)_R = \{(L, R) | L \in SU(3), R \in SU(3)\} \\ H &= SU(3)_V = \{(V, V) | V \in SU(3)\} \end{aligned}$$

Sei nun $\tilde{g} = (\tilde{L}, \tilde{R}) \in G$, dann lässt sich die Linksnebenklasse darstellen durch

$$\tilde{g}H = (\tilde{L}, \tilde{R}) = (\mathbb{1}, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger) (\tilde{L}, \tilde{L}) H = (\mathbb{1}, \tilde{R}\tilde{L}^\dagger) H$$

Also wird die Nebenklasse charakterisiert durch $U = \tilde{R}\tilde{L}^\dagger$. [17] Das Transformationsverhalten von U unter G lässt sich folgendermaßen bestimmen: Sei $g \in G$ eine Transformation, so ist

$$\begin{aligned} g\tilde{g}H &= (L, R) (\mathbb{1}, U) H = (L, RU) H \\ &= (\mathbb{1}, RUL^\dagger) (L, L) H = (\mathbb{1}, RUL^\dagger) H \end{aligned}$$

Wir lesen direkt das Verhalten von U ab

$$U' = RUL^\dagger \quad (1.72)$$

Die $SU(3)$ -Matrix U muss nun mit den Bosonenfeldern verknüpft werden. So entsteht eine Abbildung

$$U(x) : M^4 \rightarrow SU(3) \quad (1.73)$$

mit $U(x)$ definiert durch

$$U(x) = \exp\left(\frac{i}{F}\phi(x)\right) \quad \text{mit} \quad \phi(x) = \lambda_a \phi_a(x) \quad (1.74)$$

Die Konstante F wurde eingeführt, um den Exponenten dimensionslos zu realisieren. $\phi(x)$ kann auch auf andere Weise gebildet werden, dies hängt lediglich von der Wahl der Nebenklassenelemente ab.

Nach dem effektiven Bosonenfeld bestimmen wir nun eine Massengröße für unsere Theorie. In der QCD brechen die Quarkmassen explizit die $SU(3)_L \times SU(3)_R$ -Symmetrie.

$$\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = -\bar{q}_R \mathcal{M} q_L - \bar{q}_L \mathcal{M}^\dagger q_R \quad (1.75)$$

Diese Masse ist eine statische Größe, jedoch wollen wir sie hier wie ein Massfeld behandeln, welches durch sein Transformationsverhalten den Lagrangian invariant lässt.[12] \mathcal{M} transformiert dann wie

$$\mathcal{M}' = R \mathcal{M} L^\dagger \quad (1.76)$$

\mathcal{M} ist nun unser effektives Massfeld.

1.5.2 Ableitung und äußere Felder

Wenden wir uns den Ableitungen zu. Die Ableitung von U sollte auf gleiche Weise transformieren wie U selbst. Dies ist trivial erfüllt für globale Transformationen:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (U') &= \partial_\mu (R U L^\dagger) = \partial_\mu (R) U L^\dagger + R \partial_\mu (U) L^\dagger + R U \partial_\mu (L^\dagger) \\ &= R \partial_\mu U L^\dagger = (\partial_\mu U)' \end{aligned}$$

Für lokale Transformationen ist dies nicht mehr der Fall, da Ableitungen der Transformationsmatrizen nicht mehr verschwinden. Es ist dann notwendig äußere Felder r_μ , l_μ einzuführen und eine kovariante Ableitung D_μ zu definieren

$$D_\mu U = \partial_\mu U - i r_\mu U + i U l_\mu \quad (1.77)$$

Die äußeren Felder transformieren wie folgt

$$r'_\mu = R(x) r_\mu R^\dagger(x) + i R(x) \partial_\mu R^\dagger(x) \quad (1.78a)$$

$$l'_\mu = L(x) l_\mu L^\dagger(x) + i L(x) \partial_\mu L^\dagger(x) \quad (1.78b)$$

Die kovariante Ableitung transformiert wie gewünscht

$$(D_\mu U)' = R D_\mu U L^\dagger$$

Zu den äußeren Feldern bestimmen wir die Feldstärketensoren

$$F_{R\mu\nu} = \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu] \quad (1.79a)$$

$$F_{L\mu\nu} = \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu] \quad (1.79b)$$

mit dem Transformationsverhalten

$$F'_{R\mu\nu} = R F_{R\mu\nu} R^\dagger$$

$$F'_{L\mu\nu} = L F_{L\mu\nu} L^\dagger$$

Mit allen relevanten Größen beisammen können wir nun beginnen effektive Lagrangian zu bilden und auszuwerten.

1.5.3 Power counting

Für die vollständige, effektive Theorie müssen aus den involvierten Größen alle Terme gebildet werden, die mit den erhaltenen Symmetrien des Systems vereinbar sind. Es gibt jedoch unendlich viele solcher Terme, wodurch wir uns unweigerlich einschränken müssen. Zusätzlich ergeben sich für zu berechnende Schleifendiagramme Divergenzen, welche im Allgemeinen nicht renormierbar sind. Es gibt unterschiedliche Ansätze zur Auswahl der genutzten Terme; wir wollen uns hier auf das von Weinberg vorgeschlagene „power counting“ beschränken. Man entwickelt in Ordnungen des Impulses und der Massen, also in Ordnungen der Energie. Den zugehörigen Parameter nennen wir q und es gilt $p \propto q$, $\chi \propto q^2$. Jeder Größe kann man so eine Ordnung in q zuordnen und bildet dann alle symmetriekonformen Terme bis zur gewünschten Ordnung. Für die verwendeten Größen gilt

$$U = \mathcal{O}(q^0); D_\mu U = \mathcal{O}(q^1); \chi = \mathcal{O}(q^2); F_{L\mu\nu}/F_{R\mu\nu} = \mathcal{O}(q^2)$$

Der abgeleitete Lagrangian niedrigster Ordnung ist

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F^2}{4} \text{Tr} [D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F^2}{4} \text{Tr} [U \chi^\dagger + \chi U^\dagger] \quad (1.80)$$

Die Spur wird wegen der Eigenschaft

$$\begin{aligned} \text{Tr} [A' B'^\dagger] &= \text{Tr} [R A L^\dagger L B^\dagger R^\dagger] = \text{Tr} [R A B^\dagger R^\dagger] \\ &= \text{Tr} [R^\dagger R A B^\dagger] = \text{Tr} [A B^\dagger] \end{aligned}$$

verwendet, was Invarianz unter Symmetrietransformation gewährleistet. Der Faktor F^2 wird eingeführt, damit \mathcal{L}_2 von Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ ist; der Faktor 4 könnte in die Definition von F absorbiert werden, liefert jedoch eine vertraute Form für die gleich folgende Entwicklung in ϕ . Bemerkenswert ist, dass die niedrigste Ordnung q^2 und die nächsthöhere q^4 ist, da Größen von Ordnung q unkontrahierte Lorentz-Indizes besitzen und Terme von ungerader Ordnung in q somit nicht Lorentz-invariant sind.

Um nun den Propagator niedrigster Ordnung zu bestimmen, benötigen wir alle Terme aus Gl. (1.80), die quadratisch im Feld ϕ sind. Wir entwickeln in Ordnungen von ϕ und vernachlässigen externe Felder:

$$\mathcal{L}_2^2 = \frac{1}{4} \text{Tr} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] - \frac{1}{4} \text{Tr} [\phi^2 \chi] + \frac{F^2}{2} \text{Tr} [\chi] \quad (1.81)$$

Da $\frac{1}{2} F^2 \text{Tr} [\chi]$ nur eine Konstante ist, kann sie durch Verschiebung der Integrationsgrenzen aus der Wirkung entfernt werden und hat somit keinen Einfluss auf die Dynamik. Im Folgenden sind tiefgestellte Indizes immer die Ordnung in q , hochgestellte die Ordnung in ϕ .

In der QCD gilt nun

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{pmatrix} \phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_8 & \phi_1 - i\phi_2 & \phi_4 - i\phi_5 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_8 & \phi_6 - i\phi_7 \\ \phi_4 + i\phi_5 & \phi_6 + i\phi_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\phi_8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.82)$$

und wir nehmen an $m_u = m_d = \hat{m}$:

$$\chi = \begin{pmatrix} \hat{\chi} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\chi} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_s \end{pmatrix} = 2B_0 \begin{pmatrix} \hat{m} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{m} & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} \quad (1.83)$$

Daraus folgt für den Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^2 &= \frac{1}{2} \left[\partial_\mu \pi^0 \partial^\mu \pi^0 + \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + 2\partial_\mu \pi^+ \partial^\mu \pi^- + 2\partial_\mu K^+ \partial^\mu K^- \right. \\ &\quad \left. + 2\partial_\mu K^0 \partial^\mu \bar{K}^0 + \hat{\chi} \pi^0 \pi^0 + \frac{1}{3} (\hat{\chi} + 2\chi_s) \eta^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{\chi} \pi^+ \pi^- + (\hat{\chi} + \chi_s) K^+ K^- + (\hat{\chi} + \chi_s) K^0 \bar{K}^0 \right] \end{aligned} \quad (1.84)$$

Woraus sich durch Aufstellen der Übergangsmatrix der Propagator berechnen lässt. Wir nutzen Δ_a anstelle von Δ_{aa} zur Beschreibung des Übergangs $\phi_a \rightarrow \phi_a$.

$$i\Delta_a^{LO}(p^2) = \frac{i}{p^2 - M_{a,2}^2 + i0^+}, \quad a = \pi, K, \eta \quad (1.85)$$

mit den Massen niedrigster Ordnung

$$M_{\pi,2}^2 = \hat{\chi}, \quad M_{K,2}^2 = \frac{1}{2} (\hat{\chi} + \chi_s), \quad M_{\eta,2}^2 = \frac{1}{3} (\hat{\chi} + 2\chi_s)$$

Für höhere Ordnungen müssen zusätzliche Interaktionen berücksichtigt werden, die wir als Störung um den Propagator niedrigster Ordnung beschreiben wollen.

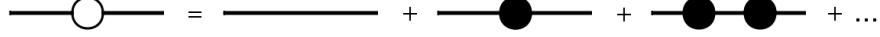
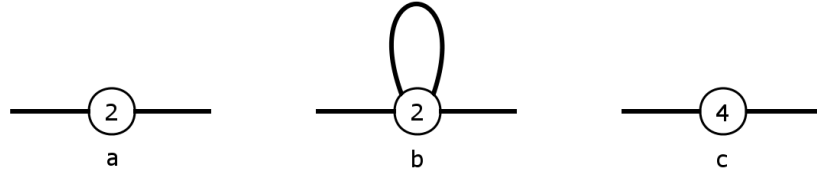


Abbildung 1.1: Propagator dargestellt als Summe über irreduzible Diagramme

Abbildung 1.2: Beiträge bis Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$: Vertex von Ordnung q^2 (a), Schleife mit q^2 -Vertex (b) und der Vertex von Ordnung q^4 (c)

Dies ist schematisch in Abb. 1.1 zu sehen und mathematisch beschrieben durch

$$\begin{aligned} i\Delta_a(p^2) &= i\Delta_a^{LO}(p^2) + i\Delta_a^{LO}(p^2) (-i\Sigma(p^2)) i\Delta_a^{LO}(p^2) + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - M_a^2 - \Sigma + i0^+} \end{aligned} \quad (1.86)$$

Die Interaktion Σ enthält alle Beiträge höherer Ordnung. Arbeiten wir mit Ordnung q^4 , so erhalten wir zusätzlich zum niedrigsten Beitrag noch Schleifenterme mit einem $\mathcal{O}(q^2)$ -Vertex (q^2 -Vertex + q^2 -Propagator = q^4 -Term) und einem Vertex von Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ (vgl. Abb. 1.2). Für den Schleifenterm benötigen wir den Propagator niedrigster Ordnung und ein 4-Teilchen-Vertex von Ordnung q^2 . Wir nutzen also \mathcal{L}_2 aus Gl. (1.80), betrachten allerdings nur Terme von Ordnung ϕ^4 .

$$\mathcal{L}_2^4 = \frac{1}{24F^2} \text{Tr} [\phi \partial_\mu \phi \phi \partial^\mu \phi - \phi^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] + \frac{1}{48F^2} \text{Tr} [\chi \phi^4] \quad (1.87)$$

Für die Schleife müssen wir natürlich den internen Impuls k über alle möglichen Werte integrieren, was zu divergenten Ergebnissen führt. Um trotzdem eine effektive Theorie ableiten zu können, müssen diese Divergenzen reguliert werden; dabei verschwinden die divergenten Anteile zwar nicht, sie können jedoch abgespalten und in einer späteren Renormierung ausgeglichen werden. Wir nutzen in dieser Arbeit die dimensionale Regularisierung.

Dimensionale Regularisierung

Die dimensionale Regularisierung[15][26] wurde eingeführt durch 't Hooft und Veltman um Integrale vom Typ

$$I = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - M^2 + i0^+} \quad (1.88)$$

zu berechnen. Der Ausdruck in Gl. (1.88) ist divergent, was jedoch auf die Anzahl der Dimensionen in der Integration zurückzuführen ist, da nach einer Wick-Rotation z.B. eine eindimensionale Integration direkt durchführbar ist. Bei der dimensional Regularisierung betrachtet man nun statt Gl. (1.88) ein Integral der Form

$$I(M^2, \mu, n) = \mu^{4-n} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{i}{k^2 - M^2 + i0^+} \quad (1.89)$$

mit dem 't Hooftschem Renormalisierungsparameter μ , der die Einheit des Integrals für alle n erhält. Durch Wick-Rotation lässt sich dieser Ausdruck überführen in

$$I(M^2, \mu, n) = 2\mu^{4-n} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty dl \frac{l^{n-1}}{l^2 + M^2} \quad (1.90)$$

mit der Eulerschen Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, $0 < x \in \mathbb{R}$. Das Integral in Gl. (1.90) lässt sich analytisch auswerten

$$\int_0^\infty dl \frac{l^{n-1}}{l^2 + M^2} = \frac{1}{2} (M^2)^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) \quad (1.91)$$

Somit folgt für Gl. (1.90)

$$I(M^2, \mu, n) = \frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (M^2)^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) \quad (1.92)$$

Wir wollen nun das Verhalten des Integrals in der Nähe von $n = 4$ untersuchen und entwickeln deshalb in $\epsilon = 4 - n$ um 0. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\mu^{4-n}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} (M^2)^{\frac{n}{2}-1} &= \frac{M^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{2-\frac{n}{2}} = \frac{M^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \\ &= \frac{M^2}{(4\pi)^2} + \frac{\epsilon}{2} \frac{M^2}{(4\pi)^2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ \Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{n}{2} + 2\right)}{\left(1 - \frac{n}{2}\right)\left(2 - \frac{n}{2}\right)} = -\frac{\Gamma\left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)}{\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)\frac{\epsilon}{2}} \\ &= -\frac{2}{\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \left(\Gamma(1) + \frac{\epsilon}{2}\Gamma'(1) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \end{aligned}$$

Die Kombination dieser Reihen ergibt

$$I(M^2, \mu, n) = \frac{M^2}{16\pi^2} \left[-\frac{2}{\epsilon} - \Gamma'(1) - 1 - \ln(4\pi) + \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \quad (1.93)$$

Einige Terme fassen wir zusammen durch

$$R = \frac{2}{n-4} - (1 + \Gamma'(1) + \ln(4\pi)) \quad (1.94)$$

und erhalten somit

$$I(M^2, \mu, n) = \frac{M^2}{16\pi^2} \left[R + \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \right] + \mathcal{O}(n-4) \quad (1.95)$$

Hier fällt sofort auf, dass für $n \rightarrow 4$ R divergiert, jedoch der zweite Term unberührt bleibt und keine weiteren Terme beitragen. Somit müssen wir nur die Divergenz von R kompensieren, um einen endlichen Ausdruck zu erlangen. Die divergente Größe R soll nun in die freien Parameter der Theorie absorbiert werden; dies ist aber nicht allein mit F und B_0 möglich. Zum jetzigen Zeitpunkt ist unsere Theorie nicht renormierbar, doch Weinbergs „power counting“ sieht vor, dass wir noch den 2-Teilchen-Vertex von Ordnung q^4 berücksichtigen. Man bildet also alle symmetriekonformen Terme der Ordnung q^4 und fasst sie in einem Lagrangian zusammen. Wir übernehmen hier das Ergebnis von Gasser und Leutwyler[9]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & L_1 \left\{ \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \right] \right\}^2 + L_2 \text{Tr} \left[D_\mu U (D_\nu U)^\dagger \right] \text{Tr} \left[D^\mu U (D^\nu U)^\dagger \right] \\ & + L_3 \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger D_\nu U (D^\nu U)^\dagger \right] \\ & + L_4 \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \right] \text{Tr} \left[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right] \\ & + L_5 \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \right] + L_6 \left\{ \text{Tr} \left[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right] \right\}^2 \\ & + L_7 \left\{ \text{Tr} \left[\chi U^\dagger - U \chi^\dagger \right] \right\}^2 + L_8 \text{Tr} \left[U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger \right] \\ & - i L_9 \text{Tr} \left[f_{\mu\nu}^R D^\mu U (D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^* (D^\mu U)^\dagger D^\nu U \right] + L_{10} \text{Tr} \left[U f_{\mu\nu}^* U^\dagger f^{\mu\nu} \right] \\ & + H_1 \text{Tr} \left[f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + f_{\mu\nu}^* f^{*\mu\nu} \right] + H_2 \text{Tr} \left[\chi \chi^\dagger \right] \end{aligned} \quad (1.96)$$

Wir betrachten nur den 2-Teilchen-Vertex, müssen also bis zur Ordnung ϕ^2 entwickeln und erhalten für die einzelnen Terme (unter Vernachlässigung äußerer

Felder):

$$\begin{aligned}
L_{1,2,3} &: \mathcal{O}(\phi^4) \\
L_4 &: 2\text{Tr}[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi]\text{Tr}[\chi] \\
L_5 &: 2\text{Tr}[\chi\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi] \\
L_6 &: 4\text{Tr}[\chi] - \frac{2}{F^2}\text{Tr}[\chi]\text{Tr}[\chi\phi^2] \\
L_7 &: -4\text{Tr}[\chi\phi]^2 \\
L_8 &: \text{Tr}\left[\chi^2 - \frac{6}{F^2}\chi^2\phi^2\right]
\end{aligned}$$

Mit den hier eingeführten freien Parametern lässt sich die Theorie renormieren. Das Bemerkenswerte ist, dass durch Anwendung von Weinbergs „power counting“ eine renormierbare, effektive Theorie beliebiger Ordnung aufgestellt werden kann. Die Beiträge zur Interaktion können in Größen A, B zusammengefasst werden:

$$-i\Sigma(p^2) = -i(A + Bp^2) \quad (1.97)$$

Es folgt für unsere Massen

$$\begin{aligned}
M^2 &= M_2^2 + \Sigma(M^2) \\
&= M_2^2 + A + BM^2 \\
\Rightarrow M^2 &= \frac{M_2^2 + A}{1 - B} \\
&\approx M_2^2(1 + B) + A
\end{aligned} \quad (1.98)$$

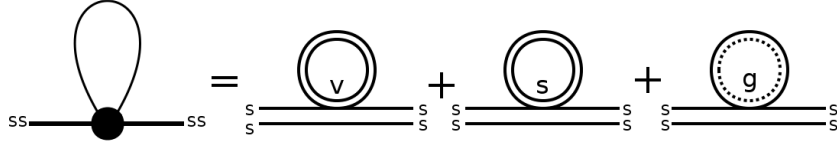
So wollen wir die Massen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ bestimmen.

1.6 Partial gequenchte, chirale Störungstheorie

Für unsere Anwendung ergibt sich ein fundamentales Problem: Die spontane Symmetriebrechung ist nur nachweisbar, wenn 2 oder mehr Flavour vorhanden sind. Später wollen wir aber einen einzelnen Flavour beschreiben. Es bietet sich hier eine sehr interessante Technik an: die partial gequenchte, chirale Störungstheorie.

Wir haben in dieser Theorie eine beliebige Anzahl n_s sogenannter „sea“-Quarks. Diese sind die physikalischen Größen dieser Theorie und so etwas wie die „realen“ Quarks. Zusätzlich führen wir n_v „valenz“- und n_g „ghost“-Quarks ein. Für eine richtige Quenchung muss gelten $n_v = n_g$ und für die Massen $m_v = m_g$. Es sind auch Anwendungen mit ungleichen Massen möglich, diese sollen hier jedoch nicht behandelt werden.

Unsere Theorie umfasst jetzt $2n_v + n_s$ Flavour, wodurch eine chirale Störung für $n_v \geq 1$ möglich ist. Der Fall $n_s = 0$ ist die vollständig gequenchte, chirale Störung und hat auch interessante Anwendungsgebiete; wir beschränken uns

Abbildung 1.3: Beiträge zur ϕ_{ss} -Schleife

hier auf $n_s = 1$ und den minimalen Fall $n_v = 1$. Damit die „sea“-Quarks keine Beiträge der unphysikalischen „valenz“- und „ghost“-Quarks erhalten, sind die „ghost“-Quarks auf besondere Art definiert: sie sind bosonisch. Hierbei sei klar gestellt, dass in diesem Fall bosonisch so zu verstehen ist, dass sie untereinander kommutieren; sie sind jedoch weiterhin Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen. In Folge sind die Schleifenbeiträge durch „valenz“- und „ghost“-Quarks (siehe Abb. 1.3) im Betrag gleich, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen, wodurch nur „sea“-Quark-Schleifen beitragen. Aufgrund der unterschiedlichen Eigenschaften der „ghost“-Quarks im Vergleich mit den restlichen Quarks ist auch die zugrunde liegende Symmetriegruppe eine andere. Man spricht von einer graduerten Symmetrie und schreibt sie als

$$SU(n_v + n_s | n_g)$$

Die genaueren Eigenschaften dieser Gruppe wurden unter anderem von Sharpe und Shores [24] untersucht. Für uns genügt es zu wissen, dass chirale Störungstheorie für diese Gruppe möglich ist und wir die zuvor behandelten Techniken anwenden dürfen. Für $\phi(x)$ gilt

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{vv} & \phi_{vs} & \phi_{vg} \\ \phi_{sv} & \phi_{ss} & \phi_{sg} \\ \phi_{gv} & \phi_{gs} & \phi_{gg} \end{pmatrix} \quad (1.99)$$

Hierbei ist zu beachten, dass ϕ_{vg} , ϕ_{gv} , ϕ_{sg} und ϕ_{gs} antikommutieren und die restlichen ϕ_{ij} kommutieren.

Die Definition der Masse, der äußeren Felder und der kovarianten Ableitung bleiben bestehen und wir können sogar Weinbergs „power counting“ anwenden. Eine Änderung ergibt sich beim Formulieren der Lagrangians. Nutzen wir zuvor die Spur, so wird diese in der $SU(n_v + n_s | n_g)$ durch die „Super-Spur“ ersetzt:

$$\text{STr} \left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right] = \text{Tr}[A] - \text{Tr}[D] \quad (1.100)$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n_v+n_s} \times \mathbb{R}^{n_v+n_s}$, $D \in \mathbb{R}^{n_g} \times \mathbb{R}^{n_g}$.

Durch diese Änderungen sollte der Lagrangian niedrigster Ordnung lauten:

$$\mathcal{L}_2^{PQ} = \frac{F^2}{4} \text{STr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \right] + \frac{F^2}{4} \text{STr} \left[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right] \quad (1.101)$$

Es wird hier jedoch etwas wichtig, was wir in der ungequenchten Theorie nicht ausgeführt haben, dort aber auch unerheblich war. Die anomale Brechung der $U(1)_A$ -Symmetrie führt ein weiteres Teilchen ein, welches wir Φ_0 nennen wollen. Für Φ_0 gilt

$$\Phi_0 = \text{STr} [\phi] \quad (1.102)$$

Der volle Lagrangian lautet dann

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{PQ} = & \frac{F^2}{4} \text{STr} [D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \frac{F^2}{4} \text{STr} [\chi U^\dagger + U \chi^\dagger] \\ & + \frac{\alpha}{6} D_\mu \Phi_0 D^\mu \Phi_0 + \frac{m_0}{6} \Phi_0^2 \end{aligned} \quad (1.103)$$

Um das Teilchen Φ_0 aus der Theorie auszukoppeln, ist es üblich den Limes $m_0 \rightarrow \infty$ zu betrachten, in welchem Φ_0 nicht an der Interaktion teilnimmt und somit aus dem Lagrangian entfernt werden kann. Hierbei ergibt sich folgendes Problem: der Propagator für $\phi_{ij} \rightarrow \phi_{ji}, i \neq j$ die besitzt gewohnte Form:

$$i\Delta_{ij}^c(p^2) = \frac{i\epsilon_j}{p^2 - M_{ij}^2 + i0^+} \quad \text{mit} \quad \epsilon_j = \begin{cases} 1 & j = v, s \\ -1 & j = g \end{cases} \quad (1.104)$$

ϵ_j ist der graduierten Symmetrie geschuldet und der Index c für charged signalisiert „geladene“ Nebendiagonalelemente. Für den Propagator $\phi_{ii} \rightarrow \phi_{jj}$, also für Diagonalelemente von ϕ ist das nun nicht mehr der Fall und der Propagator ist[13]

$$\begin{aligned} i\Delta_{ij}^n(p^2) = & \frac{i\delta_{ij}\epsilon_j}{p^2 - M_{ii}^2 + i0^+} \\ & - \frac{i}{3 + \alpha} \frac{(m_0^2 + \alpha p^2)(p^2 - M_{ss}^2)}{(p^2 - M_{ii}^2)(p^2 - M_{jj}^2)(p^2 - m_{\eta'}^2)} \end{aligned} \quad (1.105)$$

mit

$$m_{\eta'}^2 = \frac{M_{ss}^2 + \frac{1}{3}m_0^2}{1 + \frac{1}{3}\alpha}$$

Dieser zusätzliche Term verschwindet jedoch nicht im Limes $m_0 \rightarrow \infty$ und es verbleibt der Propagator

$$i\Delta_{ij}^n(p^2) = i\Delta_{ij}^c(p^2) \delta_{ij} - i\Delta_{ij}^a(p^2) \quad (1.106)$$

Hierbei beachten wir die Fallunterscheidung: Wenn $i \neq j$ und $\chi_i \neq \chi_j$ so gilt

$$i\Delta_{ij}^a(p^2) = \frac{1}{\chi_i - \chi_j} \left(\frac{\chi_i - \chi_s}{(p^2 - \chi_i + i0^+)^2} - \frac{\chi_j - \chi_s}{p^2 - \chi_j + i0^+} \right) \quad (1.107)$$

Wenn jedoch $i = j$ oder $\chi_i \neq \chi_j$, so gilt

$$i\Delta_{ij}^a(p^2) = \frac{\chi_i - \chi_s}{p^2 - \chi_i + i0^+} \quad (1.108)$$

Wir können nun die nötigen Lagrangians aufstellen und mit den Propagatoren (1.104) und (1.106) genauso Massen berechnen wie zuvor in der ungequenchten Theorie.

1.7 Supersymmetrie

Die Gluinos, mit denen wir im Folgenden arbeiten werden, sind sogenannte supersymmetrische Partnerteilchen. Diese gehen zurück auf Entwicklungen der 60er und 70er des letzten Jahrhunderts. 1967 gelang es Coleman und Mandula unter Annahme weniger, aber gerechtfertigter Bedingungen zu zeigen, dass für eine Wirkung S die Poincaré-Gruppe der Raumzeit und eine vorliegende Lie-Gruppe nur über ein triviales Produkt verknüpft sein können und dieses die maximale Symmetrie ist.[5].

Somit existiert keine Interaktion zwischen Raumzeittransformationen und Eichtransformationen. Jedoch konnten Haag, Łopuszański und Sohnius 1975 zeigen, dass fermionische Generatoren existieren können, welche von Coleman und Mandula nicht ausgeschlossen wurden.[14] Diese zusätzlichen Symmetrien werden als Supersymmetrien bezeichnet und zugehörige Theorien durch die Anzahl fermionischer Generatoren \mathcal{N} gekennzeichnet. Fermionische Transformationen kommutieren nicht mit den Raumzeittransformationen der Poincaré-Gruppe und ändern den Spin des Zustandes, auf den sie wirken. Dies hat zur Folge, dass zusätzliche Teilchen existieren müssen, welche die gleichen Eigenschaften besitzen wie ihre „Partner“ aus der ursprünglichen Theorie, sich jedoch um Spin- $\frac{1}{2}$ unterscheiden.

Solche Teilchen sind im Experiment noch nicht nachgewiesen worden, weshalb man davon ausgeht, dass Supersymmetrien nur gebrochen vorliegen. Sie sind trotzdem weiterhin von großem Interesse, da sich in supersymmetrischen Modellen Probleme wie divergente Schleifenbeiträge und möglicherweise das Hierarchie-Problem lösen lassen. Ausserdem ermöglicht eine lokale Supersymmetrie eine Einbindung der Gravitation in sog. Super-Gravitationsmodellen. Aufgrund ihres immensen Potentials ist die Supersymmetrie weiterhin ein aktives Forschungsfeld, in welches wir mit dieser Arbeit vorstoßen wollen.

Kapitel 2

Anwendung

In dieser Arbeit werden wir uns mit den gebundenen Zuständen von Gluinos beschäftigen, welche wir durch chirale Störungsrechnung beschreiben wollen. Dazu werden wir uns zunächst mit den grundlegenden und für die späteren Rechnungen entscheidenden Eigenschaften der Gluinos vertraut machen, wobei wir insbesondere die Symmetrien betrachten werden. Dann wollen wir die Erkenntnisse der QCD aus Abschnitt 1.4.1 nutzen um die spontane Symmetriebrechung der Gluinos zu zeigen. Auf dieser Grundlagen erhalten wir die Symmetriegruppen mit welchen wir dann schließlich zur chiralen Störungsrechnung übergehen können. Zu guter Letzt werden wir und noch mit einem sogenannten „partially quenched“ Ansatz arbeiten um unendliche Loop-Beiträge zu eliminieren.

2.1 Eigenschaften von Gluinos

Gluinos sind durch die Supersymmetrie vorhergesagte Partnerteilchen der Gluonen des Standardmodells. Als solche besitzen sie einen Spin von $\frac{1}{2}$ (Gluonen besitzen Spin 0) und teilen alle sonstigen Eigenschaften von Gluonen. Somit bilden die Gluinos ein Oktett in der adjungierten Darstellung der Colour- $SU(3)$, welche eine ungebrochene Symmetrie ist. Da die Supersymmetrie jedoch keine ungebrochene Symmetrie sein kann (keine massenentarteten Partnerteilchen), müssen Gluinos im Gegensatz zu den masselosen Gluonen eine Masse besitzen. Der allgemeine Gluino-Lagrangian lautet somit

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2} \bar{\lambda} (i\not{D} - m_g) \lambda - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (2.1)$$

Hierbei ist $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor der Gluonen, D_μ die kovariante Ableitung mit $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu$ (g Kopplungskonstante) und λ die Gluinospinoren, welche nicht mit den Gell-Mann-Matrizen zu verwechseln sind. m_g ist die Gluinomasse. Die Indizes der Gluinos sind nicht explizit aufgeführt, vollständig aufgeschrieben

lautet der Lagrangian

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2} \bar{\lambda}_{d',c'} (i[\not{D}]_{d'd} - m_g \delta_{d'd}) \lambda_{d,c} - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (2.2)$$

Wie in der QCD haben wir einen Dirac-Index d und einen Colour-Index c , jedoch keinen Flavour-Index. Wichtig ist, dass die Gluinos als Teilchen der adjungierten Farbgruppe 8 Farbladungen besitzen.

2.1.1 Symmetriegruppe der Gluinos

Betrachtet man Gl. (2.1) so liegt die Vermutung nahe, dass hier die gleiche Symmetrie wie in der QCD vorliegt, also $U(1)$ für einen Flavour. Es ist aber gerade so, dass Gluonen als neutrale Bosonen ihre eigenen Antiteilchen sind und somit auch Gluinos ihre eigenen Antiteilchen und deshalb Majorana-Fermionen sein müssen. Das heißt es gilt unter Ladungskonjugation C :

$$\lambda = C \bar{\lambda}^T \quad (2.3)$$

Man kann dies auch mittels einer Darstellung des vierdimensionalen Majorana-Spinors durch zwei zweidimensionale Weyl-Spinoren χ, η verdeutlichen

$$\lambda = \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ -i\sigma^2 \chi^* \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Dies hat direkt zur Folge, dass Gluinos keine $U(1)$ -Symmetrie besitzen, da für die Transformation gilt:

$$\lambda \mapsto \lambda' = e^{i\alpha} \lambda = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \chi \\ -e^{i\alpha} i\sigma^2 \chi^* \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^{i\alpha} \chi \\ -i\sigma^2 e^{-i\alpha} \chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi' \\ -i\sigma^2 \chi'^* \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Dies entspricht einer entgegengesetzten Transformation von links- und rechtshändig chiralen Anteilen; einer $U(1)_A$ -Symmetrie, welche jedoch anomal gebrochen ist. Damit liegt also keine kontinuierliche Symmetrie vor. Deshalb bedienen wir uns eines Tricks, wobei wir zusätzliche Gluino-Freiheitsgrade einführen, welche wir bei Bedarf später wieder entfernen können, indem die Massen dieser zusätzlichen Teilchen im Limes gegen unendlich betrachtet werden.

Folglich haben wir nun einen neuen Lagrangian

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2} \bar{\lambda}_{d',f',c'} \left(i[\not{D}]_{d'd} - [m_g]_{f'f} \right) \lambda_{d,f,c} - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (2.6)$$

Die Anzahl der Gluinos lassen wir zunächst unbestimmt und nennen sie einfach nur N . Für N Dirac-Spinoren ist die maximale Symmetrie $SU(N)_L \times SU(N)_R \times U(1)$, wobei wir die $U(1)$ -Symmetrie schon ausgeschlossen haben. Genau wie in der QCD können wir den Lagrangian in rechts- und linkshändig chirale Anteile aufspalten, dies ist jedoch nicht zweckmäßig. Aus Gl. (2.4) geht direkt hervor, dass links- und rechtshändig chirale Anteile nicht unabhängig voneinander sind

und somit nicht unabhängig transformiert werden können. Dies sehen wir durch Anwenden des Projektors P_L auf Gl. (2.3)

$$P_L \lambda = P_L C \bar{\lambda}^T \quad (2.7a)$$

$$= C P_L \gamma^{0T} \lambda^* \quad (2.7b)$$

$$= C \gamma^{0T} P_R \lambda^* \quad (2.7c)$$

$$\lambda_L = C \bar{\lambda}_R^T \quad (2.7d)$$

Es ist hier deshalb sinnvoller, zwischen vektoriellen und axialen Transformationen zu unterscheiden, anstatt zwischen links- und rechtshändig chiralen. Wir legen also die $SU(N)_V \times SU(N)_A$ zugrunde und können Transformationen U infinitesimal annähern durch

$$U \approx \mathbb{1} - iT^V - iT^A \quad (2.8)$$

mit den Transformationen

$$T^V = t \otimes \mathbb{1} \Rightarrow T_{f'f d'd}^V = [t]_{f'f} \cdot [\mathbb{1}]_{d'd} \quad (2.9a)$$

$$T^A = t \otimes \gamma^5 \Rightarrow T_{f'f d'd}^A = [t]_{f'f} \cdot [\gamma^5]_{d'd} \quad (2.9b)$$

Nun wenden wir U in Gl. (2.4) an

$$\lambda' = C \bar{\lambda}'^T \quad (2.10a)$$

$$(\mathbb{1} - iT^V - iT^A) \lambda = C (\mathbb{1} + iT^{V*} - iT^{A*}) \bar{\lambda}^T \quad (2.10b)$$

$$(\mathbb{1} - iT^V - iT^A) \lambda = (\mathbb{1} + iT^{V*} - iT^{A*}) C \bar{\lambda}^T \quad (2.10c)$$

$$(\mathbb{1} - iT^V - iT^A) \lambda = (\mathbb{1} + iT^{V*} - iT^{A*}) \lambda \quad (2.10d)$$

Daraus folgt für die Generatoren

$$T^V = -T^{V*} \quad (2.11a)$$

$$T^A = T^{A*} \quad (2.11b)$$

Die Majorana-Bedingung lässt also imaginäre Generatoren vektorieller Transformationen und reelle Generatoren axialer Transformationen zu. Das bedeutet für die $SU(N)_V \times SU(N)_A$, dass wir die Generatoren der $SU(N)$ in reelle und imaginäre Generatoren aufteilen müssen. Die $SU(N)$ teilt sich auf in

- $\frac{1}{2}N(N-1)$ imaginäre Generatoren, welche eine geschlossene Algebra besitzen und die $SO(N)$ generieren, die eine Untergruppe der $SU(N)$ ist,
- $\frac{1}{2}N(N+1) - 1$ reelle Generatoren, die keine Untergruppe generieren.

Die Gesamtzahl der zulässigen Generatoren ist somit $N^2 - 1$ und die vektoriellen und axialen Generatoren bilden zusammen eine Lie-Gruppe mit der gleichen Algebra wie eine $SU(N)$. Diese Gruppen wollen wir $SU(N)^*$ nennen, womit Gluinos $SU(N)^* \times U(1)_A$ -Symmetrie besitzen. Für die Fälle $N = 2$ und $N = 4$ sind die Generatoren in Abschnitt A.2.2 aufgeführt.

2.1.2 Weyl-Spinor-Darstellung

Um zu verstehen, wie diese recht ungewöhnliche Symmetriegruppe zustande kommt, ist es instruktiv den Lagrangian und die Transformationen unter der Verwendung von Weyl-Spinoren zu betrachten. Für unsere Dirac-Spinoren gilt:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \chi \\ -i\sigma^2\chi^* \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Es folgt für den Lagrangian:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G^{Weyl} &= \frac{1}{2} (\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi + \chi^T \sigma^2 \sigma^\mu D_\mu \sigma^2 \chi^*) \\ &\quad - \frac{i}{2} (\chi^T \sigma^2 m_g \chi - \chi^\dagger m_g \sigma^2 \chi^*) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Nutzen wir nun $\sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = \bar{\sigma}^{\mu T}$ und integrieren partiell, so kann der zweite Bewegungsterm ersetzt werden durch

$$- (D_\mu \chi^T) \bar{\sigma}^{\mu T} \chi^* = (\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi)^T \quad (2.14a)$$

$$= \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi \quad (2.14b)$$

Der Lagrangian lautet dann

$$\mathcal{L}_G^{Weyl} = \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \chi - \frac{i}{2} (\chi^T \sigma^2 m_g \chi - \chi^\dagger m_g \sigma^2 \chi^*) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (2.15)$$

Man sieht, dass der masselose Lagrangian invariant unter unitären Transformationen ist. Er ist von der Form gleich des QCD-Lagrangian, jedoch kann man keine chiralen Komponenten unterscheiden, womit $SU(N) \times U(1)$ die maximale Symmetrie ist. Es fällt sofort auf, dass der Massenterm nur invariant unter orthogonalen Transformationen sein kann und somit explizit die Symmetrie bricht (Für orthogonale Transformationen O gilt $O^T = O^\dagger$; $SO(N)$ -Transformationen erfüllen dies). Betrachtet man die Majorana-Bedingung, so sieht man den Ursprung der Symmetrie der Gluinos: Reelle Transformationen wirken auf alle chiralen Komponenten gleich, während imaginäre die Komponenten mit unterschiedlichem Vorzeichen, also axial transformieren.

Die beobachtete Symmetriebrechung deckt sich mit einer Arbeit von Peskin[21], die trefflich durch Damgaard et al. zusammengefasst wurde[6]: Es existieren nur drei unterschiedliche Arten der Symmetriebrechung für chirale $SU(N_f) \times SU(N_f)$ -Symmetrien, welche von Fermionenrepräsentation abhängen:

- Die Fermionenrepräsentation ist pseudo-reell. Die Symmetrie ist erweitert zu $SU(2N_f)$ und bricht zu $Sp(2N_f)$ (kompakte symplektische Gruppe)
- Die Fermionenrepräsentation ist komplex. Die Symmetrie bricht mit $SU(N_f) \times SU(N_f) \rightarrow SU(N_f)$
- Die Fermionenrepräsentation ist reell. Wieder ist die Symmetrie erweitert zu $SU(2N_f)$, bricht jedoch zu $SO(2N_f)$

Die Klassifikation ist sofort ersichtlich: Während in der QCD die Quarks komplex repräsentiert sind, haben wir in unserer Anwendung eine reelle Repräsentation. Das bedeutet jedoch, dass die Weyl-Spinoren schon unter der erweiterten Symmetrie transformieren und wir $2N_f$ Majorana-Spinoren durch N_f Dirac-Spinoren mit $SU(N_f) \times SU(N_f)$ -Symmetrie darstellen können sollten. Dies wollen wir im folgenden Kapitel tun.

2.2 Dirac-Spinor-Darstellung

Es ist möglich, einen Majorana-Spinor als Summe eines Teilchen- und eines Antiteilchen-Spinors darzustellen[18]:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi + \Psi_c) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi + C\bar{\Psi}_c^T) \quad (2.16)$$

Man erhält jedoch aus einem Dirac-Spinor zwei Majorana-Spinoren

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi + C\bar{\Psi}^T) \quad (2.17a)$$

$$\lambda_2 = \frac{i}{\sqrt{2}} (-\Psi + C\bar{\Psi}^T) \quad (2.17b)$$

2.2.1 Verträglichkeit der Darstellung

Im Folgenden wollen wir nun die Dirac-Spinoren in den Gluino-Lagrangian einsetzen und diese zur Grundlage unserer weiteren Betrachtung machen. Von den Dirac-Spinoren wissen wir schon, dass sie problemlos in rechts- und links-händig chirale Anteile zerlegbar sind, welche prinzipiell unabhängig transformierbar sind. Desweiteren spricht nichts gegen unitäre Transformationen dieser Spinoren. Nun wollen wir die nötigen Gleichungen aufstellen und überprüfen, ob unter unitären Transformationen der Lagrangian invariant bleibt und die Majorana-Bedingung gewahrt wird. Aus den Gl. (2.17a) und (2.17b) erhalten wir

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_1 + i\lambda_2) \quad (2.18)$$

Mit diesem Spinor alleine können wir noch nicht arbeiten, da höchstens $U(1)$ -Symmetrie besteht und dies für eine chirale Störungsrechnung nicht ausreicht. Somit erweitern wir unser Modell auf N Dirac-Spinoren, womit $2N$ Majorana-Spinoren erzeugt werden.

Majorana-Bedingung

Eine der wichtigsten Fragen ist, ob die Majoranabedingung durch eine unitäre Transformation der Dirac-Spinoren verletzt wird. Betrachten wir dazu eine Transformation

$$\Psi \mapsto \Psi' = U\Psi \quad (2.19)$$

U ist eine Matrix, die im „Flavourraum“ der Ψ 's wirkt, also mit Indizes folgendermaßen dargestellt wird

$$\Psi'_{d,f',c} = U_{f'f} \Psi_{d,f,c} \quad (2.20)$$

Diese Transformation hat zur Folge

$$\lambda_1 \mapsto \lambda'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(U \Psi_1 + C U^* \bar{\Psi}_1^T \right) \quad (2.21)$$

Man sieht leicht, dass dies weiterhin der Majoranabedingung genügt, wenn man $\gamma^0 C^* = C^* \gamma^0$ und die Vertauschbarkeit von U und γ^0 beachtet. Für unsere Anwendung wichtig ist noch die unabhängige Transformation von links- und rechtshändig chiralen Komponenten und deren Wirkung auf die Majoranabedingung. Exemplarisch betrachten wir eine Transformation rechtshändig chiralen Komponente

$$\Psi_{1,R} \mapsto \Psi'_{1,R} = U_R \Psi_{1,R} \quad (2.22a)$$

$$\Psi_1 = \Psi_{1,R} + \Psi_{1,L} \mapsto \Psi'_1 = U_R \Psi_{1,R} + \Psi_{1,L} \quad (2.22b)$$

Zerlegt man nun Ψ_1 in den Definitionsgleichungen für λ , so erhält man

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_{1,R} + \Psi_{1,L} + C \bar{\Psi}_{1,R}^T + C \bar{\Psi}_{1,L}^T \right) \quad (2.23a)$$

$$\Rightarrow \lambda'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(U_R \Psi_{1,R} + \Psi_{1,L} + U_R^* C \bar{\Psi}_{1,R}^T + C \bar{\Psi}_{1,L}^T \right) \quad (2.23b)$$

Man erkennt sofort, dass die Majoranabedingung gewahrt bleibt und es gilt:

$$C \bar{\lambda}'_1{}^T T = \lambda'_1 \quad (2.24)$$

Glauino-Lagrangian

Setzen wir nun Gl. (2.17a) und (2.17b) in den Lagrangian (2.1) ein, führt dies zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = & \frac{1}{2} \left(\bar{\Psi} (i\mathcal{D} - \tilde{m}_g) \Psi + \Psi^T C (i\mathcal{D} - \tilde{m}_g) C \bar{\Psi}^T \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\bar{\Psi} m_{diff} C \bar{\Psi}^T + \Psi^T m_{diff} C \Psi \right) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.25)$$

mit $\tilde{m}_g = \frac{1}{2} \text{diag}(m_1 + m_2, \dots, m_{2N-1} + m_{2N})$ und $m_{diff} = \frac{1}{2} \text{diag}(m_1 - m_2, \dots, m_{2N-1} - m_{2N})$. Am auffälligsten ist hierbei, dass die m_{diff} enthaltenen Terme nicht invariant sind unter unitären Transformationen. Diese verschwinden jedoch für $m_k = m_{k+1}$ bei ungeradem k . Dies ist aufgrund der Konstruktion der Glauino-Spinoren aus Dirac-Spinoren nicht verwunderlich und es gilt $\tilde{m}_g = \text{diag}(m_1, m_3, \dots, m_{2N-1})$. Dies vereinfacht den Ausdruck zu

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2} \left(\bar{\Psi} (i\mathcal{D} - \tilde{m}_g) \Psi + \Psi^T C (i\mathcal{D} - \tilde{m}_g) C \bar{\Psi}^T \right) - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (2.26)$$

Die Massenterme lassen sich hier leicht zusammenfassen, da gilt

$$-\Psi^T C \tilde{m}_g C \bar{\Psi}^T = \Psi^T C (-C) \tilde{m}_g \bar{\Psi}^T = \Psi^T \tilde{m}_g \bar{\Psi}^T \quad (2.27a)$$

$$= (\tilde{m}_g)_{jj} \Psi_j^T \bar{\Psi}_j^T = -(\tilde{m}_g)_{jj} \bar{\Psi}_j \Psi_j \quad (2.27b)$$

$$= -\bar{\Psi} \tilde{m}_g \Psi \quad (2.27c)$$

Für den kinetischen Term müssen wir etwas anders vorgehen und eine totale Ableitung zufügen

$$i\Psi^T C \not{D} C \bar{\Psi}^T = -i\Psi^T C \gamma^\mu (-C) D_\mu \bar{\Psi}^T = i\Psi^T \gamma^{\mu T} D_\mu \bar{\Psi}^T \quad (2.28a)$$

$$= -i((D_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi)^T = -i(D_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu \Psi \quad (2.28b)$$

$$= i\bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi - D_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) \quad (2.28c)$$

Die totale Ableitung kann aus dem Lagrangian entfernt werden und der resultierende Lagrangian lautet

$$\mathcal{L}_G = \bar{\Psi} (i\not{D} - \tilde{m}_g) \Psi - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \quad (2.29)$$

Dieser Ausdruck ist sowohl unter $U(1)_L \times U(1)_R$, wie auch $SU(N)_L \times SU(N)_R$ invariant, wenn man den masselosen Fall betrachtet. Dies ist offensichtlich, da er genau dem QCD-Lagrangian entspricht und jener diese Invarianzen aufweist.

2.2.2 Vergleich der Symmetriegruppen

Zuvor zeigten wir, dass $2N$ Gluinos durch N Dirac-Felder darstellbar sind und dass eine solche Darstellung die Majorana-Bedingung nicht verletzt. Nun jedoch wollen wir uns fragen, wie sich die unterschiedlichen Symmetriegruppen der Majorana- und Dirac-Spinoren verhalten und ob diese deckungsgleich sind. Wir erinnern uns, dass die Majorana-Spinoren eine $SU(2N)^*$ -Symmetrie wie auch eine $U_A(1)$ -Symmetrie besitzen. Die Dirac-Spinoren hingegen sollten sowohl eine $SU(N)_L \times SU(N)_R$ -Symmetrie, wie auch eine $U(1)_L \times U(1)_R$ -Symmetrie besitzen. Im Folgenden werden wir nun die Wirkung von Majorana-Transformationen auf Dirac-Spinoren und die umgekehrte Wirkung von Dirac-Transformationen auf Majorana-Spinoren überprüfen. Hierzu verwenden wir die minimale Zahl an Dirac-Spinoren, für die chirale Störung durchführbar ist, also $N = 2$.

Majorana $U_A(1)$ -Symmetrie

Für diese Transformation ist unsere Betrachtung sehr einfach, da gilt:

$$\lambda \mapsto \lambda' = \exp(i\gamma^5 \alpha) \lambda \quad (2.30)$$

Somit folgt für die Dirac-Spinoren

$$\Psi'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda'_1 + i\lambda'_2) \quad (2.31a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(i\gamma^5 \alpha) (\lambda_1 + i\lambda_2) \quad (2.31b)$$

$$= \exp(i\gamma^5 \alpha) \Psi_1 \quad (2.31c)$$

Eine $U_A(1)$ -Transformation der Majorana-Spinoren entspricht also einer $U_A(1)$ -Transformation der Dirac-Spinoren. Interessant ist, dass die $U_A(1)$ -Symmetrie der Dirac-Spinoren in der QCD durch eine Anomalie gebrochen wird, was in diesem Falle die Folgerung nahe legt, dass auch die Majorana- $U_A(1)$ gebrochen ist.

Majorana $SU(4)^*$ -Symmetrie

Eine $SU(4)^*$ -Transformation ist eine Multiplikation mit einer unitären Matrix U :

$$\lambda' = U \cdot \lambda \quad (2.32)$$

mit

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Somit folgt

$$\lambda'_i = u_{ij} \lambda_j \quad (2.34)$$

Einsetzen in die Gleichungen für Ψ'

$$\Psi'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{1j} \lambda_j + i u_{2j} \lambda_j) \quad (2.35a)$$

$$\Psi'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{2j} \lambda_j + i u_{4j} \lambda_j) \quad (2.35b)$$

Zuletzt setzen wir wieder die Definitionen der λ ein

$$\begin{aligned} \Psi'_1 = \frac{1}{2} [& (u_{11} + iu_{21} - iu_{12} + u_{22}) \Psi_1 \\ & + (u_{11} + iu_{21} + iu_{12} - u_{22}) C\overline{\Psi}_1^T \\ & + (u_{13} + iu_{23} - iu_{14} + u_{24}) \Psi_2 \\ & + (u_{13} + iu_{23} + iu_{14} - u_{24}) C\overline{\Psi}_2^T] \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \Psi'_2 = \frac{1}{2} [& (u_{31} + iu_{41} - iu_{32} + u_{42}) \Psi_1 \\ & + (u_{31} + iu_{41} + iu_{32} - u_{42}) C\overline{\Psi}_1^T \\ & + (u_{33} + iu_{43} - iu_{34} + u_{44}) \Psi_2 \\ & + (u_{33} + iu_{43} + iu_{34} - u_{44}) C\overline{\Psi}_2^T] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Problematisch ist in diesem Fall, dass $C\overline{\Psi}^T$ nicht durch unitäre Transformation von Ψ erzeugt werden kann und somit verschwinden muss. Es könnten zwar antiunitäre Transformationen vom Typ $\Psi' = U\Psi^*$ in Frage kommen, jedoch ergeben sich sofort andere Probleme; z.B. nutzen wir den Generator F_1 und erhalten für die Transformation von Ψ

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Psi_1 - \gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) C\overline{\Psi}_2^T \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Dies ist nicht als Kombination einer unitären und antiunitären Transformation darstellbar. Somit müssen die komplex konjugierten Beiträge verschwinden. Für die Faktoren $(u_{11} + iu_{21} + iu_{12} - u_{22})$ und $(u_{33} + iu_{43} + iu_{34} - u_{44})$ ist dies durch die Antisymmetrie für orthogonalen Matrizen gegeben, jedoch nicht für alle unitäre Matrizen. Die Anforderungen $(u_{13} + iu_{23} + iu_{14} - u_{24}) = 0$ und $(u_{31} + iu_{41} + iu_{32} - u_{42}) = 0$ sind nur für Transformationen der Generatoren 2 und 14 erfüllt (siehe Abschnitt A.2.2). Somit besitzen die Transformationen, die durch die restlichen Generatoren erzeugt werden keine Darstellung als Transformation von Ψ . Sind die obigen Anforderungen jedoch erfüllt, so gilt für die Matrix S mit $\Psi' = S \cdot \Psi$

$$S = \begin{pmatrix} u_{11} + iu_{21} & u_{13} + iu_{23} \\ u_{31} + iu_{41} & u_{33} + iu_{43} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Somit folgt für die durch die Generatoren 2,14 mit α erzeugten Transformationen

$$S_2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.40a)$$

$$S_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad (2.40b)$$

Wir wollen zukünftig durch einen Index in der Transformation zeigen, welcher Generator gemeint ist. Die Matrizen S_2 , S_{14} lassen sich jeweils in eine

U -Transformation mit einer SU_3 -Matrix zerlegen. Insgesamt zeigt sich, dass nur Teile der $SU(4)^*$ durch die Dirac-Spinoren abgebildet werden können. Im Folgenden werden wir uns ansehen, welche Auswirkungen die unitären Transformationen der Dirac-Spinoren auf die Majorana-Spinoren haben.

Dirac $U(1)_L \times U(1)_R$ -Symmetrie

Für die unitäre Transformation der Dirac-Spinoren gilt

$$\Psi = P_R \Psi + P_L \Psi \mapsto \Psi' = U_L P_L \Psi + U_R P_R \Psi \quad (2.41)$$

Daraus folgt für λ' direkt

$$\lambda'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(U_G P_G \Psi_1 + U_G^* P'_G C \overline{\Psi}_1^T \right) \quad (2.42a)$$

$$= \frac{1}{2} [U_G P_G (\lambda_1 + i\lambda_2) + U_G^* P'_G (\lambda_1 - i\lambda_2)] \quad (2.42b)$$

$$= \frac{1}{2} [(U_G P_G + U_G^* P'_G) \lambda_1 + i(U_G P_G - U_G^* P'_G) \lambda_2] \quad (2.42c)$$

$$\lambda'_2 = \frac{1}{2} [(U_G P_G + U_G^* P'_G) \lambda_2 + i(U_G^* P'_G - U_G P_G) \lambda_1] \quad (2.42d)$$

Hierbei bedeutet $P'_L = P_R$ und G wird über L, R summiert. Gleiche Ausdrücke lassen sich auch für λ'_3, λ'_4 finden und ergeben somit die Transformationsmatrix S mit $\lambda' = S\lambda$

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U_G P_G + U_G^* P'_G & i(U_G P_G - U_G^* P'_G) \\ -i(U_G P_G - U_G^* P'_G) & U_G P_G + U_G^* P'_G \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Setzt man hier nun die Definition der unitären Transformation ein, so erhält man unter Verwendung der Darstellungen der trigonometrischen Funktionen durch Exponentialfunktionen, hier für rein linkshändige und rein rechtshändige Transformationen

$$S_L = \exp\left(i\gamma^5 \frac{\alpha_L}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_L}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha_L}{2}\right) & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\alpha_L}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha_L}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\alpha_L}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha_L}{2}\right) \\ 0 & 0 & -\sin\left(\frac{\alpha_L}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha_L}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

$$S_R = \exp\left(-i\gamma^5 \frac{\alpha_R}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_R}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha_R}{2}\right) & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\alpha_R}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha_R}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\alpha_R}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha_R}{2}\right) \\ 0 & 0 & -\sin\left(\frac{\alpha_R}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha_R}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Es fällt auf, dass sich die Transformation der λ 's in einen axialen und einen vektoriellen Anteil zerlegen lässt, wobei der axiale Anteil direkt einer $U(1)_A$ -Symmetrie entspricht und der vektorielle Anteil eine orthogonale Transformation ist, welche sich durch die Kombination der Generatoren 2 und 14 der $SU(4)^*$

beschreiben oder sich alternativ als 4-dimensionale Darstellung einer $SO(2)$ -Transformation interpretieren lässt. Unabhängig davon bildet der vektorielle Anteil der Transformation in einen Unterraum der $SU(4)^*$ ab.

Dirac $SU(2)_L \times SU(2)_R$

Für die unitäre Transformation der Dirac-Spinoren gilt

$$\Psi' = U_L P_L \Psi + U_R P_R \Psi \quad (2.46a)$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11}^L P_L \Psi_1 + u_{12}^L P_L \Psi_2 + u_{11}^R P_R \Psi_1 + u_{12}^R P_R \Psi_2 \\ u_{21}^L P_L \Psi_1 + u_{22}^L P_L \Psi_2 + u_{21}^R P_R \Psi_1 + u_{22}^R P_R \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.46b)$$

$$= \begin{pmatrix} u_{1j}^G P_G \Psi_j \\ u_{2j}^G P_G \Psi_j \end{pmatrix} \quad (2.46c)$$

wobei zu beachten ist, dass j über 1,2 summiert wird und G über L, R . Dies hat eine Transformation von λ zur Folge

$$\lambda'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_{1j}^G P_G \Psi_j + u_{1j}^{*G} P'_G C \overline{\Psi_j}^T \right) \quad (2.47a)$$

$$= \frac{1}{2} \left[u_{1j}^G P_G (\lambda_{2j-1} + i\lambda_{2j}) + u_{1j}^{*G} P'_G (\lambda_{2j-1} - i\lambda_{2j}) \right] \quad (2.47b)$$

$$= \frac{1}{2} \left[(u_{1j}^G P_G + u_{1j}^{*G} P'_G) \lambda_{2j-1} + i (u_{1j}^G P_G - u_{1j}^{*G} P'_G) \lambda_{2j} \right] \quad (2.47c)$$

Für $\lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4$ lassen sich ähnliche Gleichungen aufstellen was in einer Transformationsmatrix S mit $\lambda' = S\lambda$ zusammenfassbar ist.

$$S = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \otimes U^G P_G + \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \otimes U^{G*} P'_G \right] \quad (2.48)$$

Mit den Definitionen aus Abschnitt A.2.2 ergibt sich für die durch die einzelnen Generatoren erzeugten Transformationen (beispielhaft hier für reine linkshändige Transformationen):

$$S_L^1 = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & i\gamma^5 (1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)) \\ -i\gamma^5 (1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)) & 1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (2.49a)$$

$$+ \begin{pmatrix} -i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & -i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg]$$

$$S_L^2 = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) & i\gamma^5 (1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)) \\ -i\gamma^5 (1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)) & 1 + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (2.49b)$$

$$+ \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & -i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg]$$

$$S_L^3 = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 + \exp\left(-i\gamma^5 \frac{\alpha}{2}\right) & i\gamma^5 (1 - \exp\left(-i\gamma^5 \frac{\alpha}{2}\right)) \\ -i\gamma^5 (1 - \exp\left(-i\gamma^5 \frac{\alpha}{2}\right)) & 1 + \exp\left(-i\gamma^5 \frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \right] \quad (2.49c)$$

$$\otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg]$$

Dies lässt sich erheblich vereinfachen unter Verwendung der Relationen

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cos(x) \quad (2.50a)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) \quad (2.50b)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \quad (2.50c)$$

Somit ergibt sich für die Transformationsmatrizen:

$$S_L^1 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & 0 & -\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) \\ 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 \\ \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) \end{pmatrix} \quad (2.51a)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & -i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & -i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) \\ -i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 \\ 0 & -i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) \end{pmatrix}$$

$$S_L^2 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 \\ 0 & -\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) \end{pmatrix} \quad (2.51b)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & 0 & -i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) \\ 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 \\ 0 & i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 \\ -i\gamma^5 \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) \end{pmatrix}$$

$$S_L^3 = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) & -\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) \\ 0 & 0 & \sin\left(\frac{\alpha}{4}\right) & \cos\left(\frac{\alpha}{4}\right) \end{pmatrix} \quad (2.51c)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \exp\left(-i\gamma^5 \frac{\alpha}{4}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp\left(-i\gamma^5 \frac{\alpha}{4}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp\left(i\gamma^5 \frac{\alpha}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp\left(i\gamma^5 \frac{\alpha}{4}\right) \end{pmatrix}$$

Wieder fällt auf, dass sich die Transformation in einen axialen und einen vektoriellen Anteil aufspalten lässt. Jeder dieser Transformationsanteile lässt sich durch die Kombination von $SU(4)^*$ -Generatoren erzeugen. Ausserdem kann man zeigen, dass vektorielle Transformationen im Ψ -Raum zu vektoriellen Transformationen im λ -Raum führen. Gleiches gilt für die axialen Transformationen, wodurch sich Transformationen nach Generatoren ordnen lassen und sich Entsprechungen finden lassen, so dass ein Generator der $SU(2)$ der gleichzeitigen Transformation mit zwei Generatoren der $SU(4)^*$ entspricht (siehe Tab. 2.1). Somit sehen wir, dass $SU(2)_L \times SU(2)_R$ komplett nach $SU(4)^*$ abbildet.

| Generator $SU(2)$ | Wirkung in $SU(4)^*$ |
|-------------------|---|
| T_1 | $F_7 + F_{10}$ |
| T_2 | $-T_5 + T_{12}$ |
| T_3 | $-T_2 + T_{14}$ |
| $\gamma^5 T_1$ | $-T_4 - T_{11}$ |
| $\gamma^5 T_2$ | $T_6 - T_9$ |
| $\gamma^5 T_3$ | $-\frac{2}{\sqrt{3}}T_8 - \frac{2}{\sqrt{6}}T_{15}$ |

Tabelle 2.1: Wirkung von Generatoren im Ψ -Raum ausgedrückt durch Generatoren im λ -Raum

| wirkt auf Ψ | wirkt auf λ wie |
|------------------|--|
| $U(1)_V$ | $SO(2)^* \subset SU(4)^*$ |
| $U(1)_A$ | $U(1)_A$ |
| $SU(2)_V$ | $SO(3)^* \subset SU(4)^*$ |
| $SU(2)_A$ | $U(1)_A \times U(1)_A \times U(1)_A \subset SU(4)^*$ |

Tabelle 2.2: Wirkungen der Transformationen von Ψ auf λ

Zusammenfassung der Symmetriegruppen

In Tabelle 2.2 sieht man noch einmal den Überblick über die verschiedenen Transformationen von Ψ . Die Generatoren der einzelnen genannten Gruppen findet man in Abschnitt A.2.2. Zuvor haben wir zunächst die unitären Transformationen der λ 's, die $SU(4)^*$ -Symmetrie, überprüft und dabei festgestellt, dass nicht alle Transformationen durch die Ψ 's beschreibbar sind. In der weiteren Analyse der Ψ -Transformationen stellten wir fest, dass die vektoriellen Transformationen der Ψ 's auf orthogonale Vektortransformationen der λ 's abbilden und axiale Transformationen der Ψ 's auf die λ 's ebenfalls wie axiale, unitäre Transformationen wirken. Somit erklärt sich direkt, warum nicht die komplette $SU(4)^* \times U(1)_A$ abgebildet werden kann: Zusammen besitzen diese Gruppen 6 vektorielle und 10 axiale Freiheitsgrade, während für $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$ nur 4 vektorielle und 4 axiale Freiheitsgrade bereitstehen. Es sind also 2 vektorielle und 6 axiale Freiheitsgrade nicht darstellbar. Dies erklärt, warum von den 6 vektoriellen Generatoren $F_2, F_5, F_7, F_{10}, F_{12}$ und F_{14} nur 2 (F_2 und F_{14}) direkt im Ψ -Raum dargestellt werden können, während die Restlichen jeweils paarweise gekoppelt sind (2 freie + 4 paarweise gekoppelte Freiheitsgrade = 4 vektorielle Freiheitsgrade). Auch folgt daraus, dass bei direkter Abbildung der $U(1)_A$ -Transformation und paarweise Abbildung (siehe Tab. 2.1) der Generatoren $T_4, T_6, T_8, T_9, T_{11}$ und T_{15} keine weiteren Freiheitsgrade verbleiben und 3 axiale Generatoren durch Ψ -Transformationen überhaupt nicht genutzt werden. F_1, F_3 und F_{13} sind somit in unserer Dirac-Darstellung nicht berücksichtigt und korrespondierende Teilchen können somit nicht beschrieben werden.

2.3 Effektive Feldtheorie

Wie wollen nun beginnen, auf Grundlage der $SU(N)^*$ -Symmetrie der Gluinos eine effektive Feldtheorie zu erarbeiten. Die Abläufe werden dabei analog zur QCD vollzogen: Zunächst werden wir die Noether-Ströme und deren Divergenzen bestimmen, um die vorhandenen Symmetrien zu beurteilen. Dann wird geprüft, ob eine spontane Symmetriebrechung vorliegt und ist dies der Fall, so werden wir eine effektive Theorie mit den entstandenen Goldstone-Bosonen formulieren.

2.3.1 Noether-Ströme

Wir wollen nun mit den in 1.3.1 eingeführten Methoden die Noether-Ströme und ihre Divergenzen berechnen. Dies tun wir am Lagrangian mit Massentermen, damit Auswirkungen auf erhaltenen Größen offensichtlich werden. Die Ströme teilen wir nach ihrem Verhalten unter Paritätstransformation auf

$$V^\mu \Leftrightarrow T_a = t_a \quad (2.52a)$$

$$A^\mu \Leftrightarrow T_a = \gamma^5 t_a \quad (2.52b)$$

Für alle unsere späteren Betrachtungen ist nur die 0-Komponente der Ströme entscheidend, da durch sie die Noether-Ladung bestimmt ist. Wir geben deswegen konsequent nur diese an.

Beginnend mit der $U(1)_A$ -Symmetrie erhalten wir

$$A^0 = \frac{1}{2} \lambda^\dagger \gamma^5 \lambda \quad (2.53)$$

mit folgender Divergenz

$$\partial_\mu A^\mu = i \bar{\lambda} \gamma^5 \tilde{m}_g \lambda \quad (2.54)$$

Es existiert kein $U(1)$ -Vektorstrom, der in der QCD mit der Baryonenzahlerhaltung identifiziert wird. Wir können hier eine gleichwertige Größe definieren. Für den axialen Strom ist anzumerken, dass die Einführung von Massen die Symmetrie explizit bricht und der Strom somit nicht mehr erhalten ist. Der Ausdruck in Gl. (2.54) ließe nun vermuten, dass der Strom im masselosen Fall erhalten ist. In der QCD zeigt sich jedoch, dass eine Anomalie die Symmetrie selbst im masselosen Fall bricht.[1][2] Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden wir nicht prüfen, ob eine solche anomale Symmetriebrechung hier ebenfalls gegeben ist, es erscheint jedoch plausibel.

Für die $SU(N)^*$ -Symmetrie erhalten wir $\frac{1}{2}N(N-1)$ Vektorströme und $\frac{1}{2}N(N+1) - 1$ axiale Ströme

$$V_a^0 = \frac{1}{2} \lambda^\dagger T_a^V \lambda \quad (2.55a)$$

$$A_a^0 = \frac{1}{2} \lambda^\dagger T_a^A \lambda \quad (2.55b)$$

mit den Divergenzen

$$\partial_\mu V_a^\mu = \frac{i}{2} \bar{\lambda} [\tilde{m}_g, T_a^V] \lambda \quad (2.56a)$$

$$\partial_\mu A_a^\mu = \frac{i}{2} \bar{\lambda} \{\tilde{m}_g, T_a^A\} \lambda \quad (2.56b)$$

Wie man in den Divergenzen in Gl. (2.56a) sieht, sind alle Ströme im masselosen Fall $\tilde{m}_g = 0$ erhalten. Die axiale Symmetrie wird durch Einführung von Massen jeglicher Art explizit gebrochen, während die Vektorströme im Fall gleicher Massen weiterhin erhalten bleiben. Erst eine Massendifferenz bricht die Symmetrie explizit, da dann der Kommutator nicht mehr verschwindet.

2.3.2 Spontane Symmetriebrechung

Eine wichtige Voraussetzung für die chirale Störungsrechnung ist die spontane Brechung der zugrunde liegenden Symmetrie. In Abschnitt 1.4.1 wurde die spontane Symmetriebrechung durch ein skalares Quarkkondensat beschrieben. Wie wir sehen werden ist ein analoges Vorgehen zwar möglich, liefert aber nicht die gleichen Ergebnisse. Im Allgemeinen bricht eine Gruppe G zu einer Menge H , für uns gilt $G = SU(N)^*$ und $H = SO(N)$. Wir werden die Betrachtung hier für $SU(3)^*$ vollziehen, damit die Parallelen und Unterschiede deutlich werden. Wie zuvor können Gluinodichten definiert werden

$$S_a(y) = 2\bar{\lambda}(y)T_a^V\lambda(y), \quad a = 0, \dots, 3 \quad (2.57a)$$

$$P_a(y) = 2i\bar{\lambda}(y)T_a^A\lambda(y) \quad a = 0, \dots, 5 \quad (2.57b)$$

wobei $T_0^V = \mathbb{1}$ und $T_0^A = \gamma^5 \otimes \mathbb{1}$. Die Ladungen sind

$$Q_{V_a}(t) = \int d^3x \lambda^\dagger(t, \vec{x}) T_a^V \lambda(t, \vec{x}) \quad (2.58a)$$

$$Q_{A_a}(t) = \int d^3x \lambda^\dagger(t, \vec{x}) T_a^A \lambda(t, \vec{x}) \quad (2.58b)$$

Nun können wir aber nicht wie in der QCD verfahren, da hier ein besonderer Fall für die $S_a(y)$ vorliegt. Exemplarisch für $S_1(y)$ sehen wir

$$S_1 = 2\bar{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda \quad (2.59a)$$

$$= 2(i\bar{\lambda}_2\lambda_1 - i\bar{\lambda}_1\lambda_2) \quad (2.59b)$$

$$= 2(i\bar{\lambda}_2\lambda_1 - i\bar{\lambda}_2\lambda_1) \quad (2.59c)$$

$$= 0 \quad (2.59d)$$

Diese Folgerung können wir nur wegen der Majorana-Bedingung folgern, da dann gilt

$$\bar{\lambda}_1 \lambda_2 = (\bar{\lambda}_1 \lambda_2)^T = -\lambda_2^T \bar{\lambda}_1^T \quad (2.60a)$$

$$= -\lambda_2^T C^\dagger C \bar{\lambda}_1^T = (-C \lambda_2)^T \lambda_1 \quad (2.60b)$$

$$= \bar{\lambda}_2 \lambda_1 \quad (2.60c)$$

Da die Struktur immer die gleiche ist, verschwinden alle skalaren Gluinodichten außer S_0 , welches wie ein Singlett transformiert

$$[Q_{V_a}(t), S_0(y)] = 0, \quad a = 0, \dots, 3 \quad (2.61)$$

Natürlich müssen wir nicht weiter zeigen, dass

$$\langle S_a \rangle = 0, \quad a = 1, 2, 3 \quad (2.62)$$

Allerdings konnten wir zuvor zeigen, dass die Erwartungswerte einzelner „Flavourkondensate“ gleich sind. Nun bleibt uns nur das Singulett, für welches auch diesmal gelten sollte

$$0 \neq \langle \bar{\lambda} \lambda \rangle = \langle \bar{\lambda}_1 \lambda_1 \rangle + \langle \bar{\lambda}_2 \lambda_2 \rangle + \langle \bar{\lambda}_3 \lambda_3 \rangle \quad (2.63)$$

Nun endlich betrachten wir das Verhalten der pseudoskalaren Gluinodichten und erhalten

$$i [Q_{A_a}(t), P_a(y)] = \begin{cases} \bar{\lambda}_1 \lambda_1 + \bar{\lambda}_2 \lambda_2 & a = 1, 2 \\ \bar{\lambda}_1 \lambda_1 + \bar{\lambda}_3 \lambda_3 & a = 3 \\ \bar{\lambda}_2 \lambda_2 + \bar{\lambda}_3 \lambda_3 & a = 4 \\ \frac{1}{3} (\bar{\lambda}_1 \lambda_1 + \bar{\lambda}_2 \lambda_2 + 4\bar{\lambda}_3 \lambda_3) & a = 5 \end{cases} \quad (2.64)$$

Daraus folgt direkt der Vakuumerwartungswert

$$\langle i [Q_{A_a}(t), P_a(y)] \rangle = \begin{cases} \bar{\lambda} \lambda - \bar{\lambda}_3 \lambda_3 & a = 1, 2 \\ \bar{\lambda} \lambda - \bar{\lambda}_2 \lambda_2 & a = 3 \\ \bar{\lambda} \lambda - \bar{\lambda}_1 \lambda_1 & a = 4 \\ \frac{1}{3} \bar{\lambda} \lambda + \bar{\lambda}_3 \lambda_3 & a = 5 \end{cases} \quad (2.65)$$

Fügt man in Gl. (2.65) wieder eine komplette Basis ein, so ergibt sich, dass sowohl $P_a(y)$ wie auch $Q_{A_a}(t)$ nichtverschwindende Matrixelemente im Übergang vom Vakuum zu einem Teilchenzustand haben, wenn keiner der Ausdrücke rechts verschwindet. Dies sind somit unsere Bedingungen für eine spontane Symmetriebrechung.

2.3.3 Die effektiven Felder

Wir beschränken uns nun auf $N = 2$. Zum Aufbau unserer Theorie benötigen wir effektive Feldgrößen, aus welchen wir einen effektiven Lagrangian konstruieren. Für unsere - nach expliziter Symmetriebrechung quasi- - Goldstonebosonen

benötigen wir also eine Abbildung aus dem Minkowski-Raum in den Raum der unitären 2×2 -Matrizen mit Determinante 1. Die Suche nach einer solchen Beschreibung werden wir gruppentheoretisch durchführen, da sich so die Goldstonebosonen als Elemente der Nebenklasse $SU(2)^*/SO(2)$ auffassen lassen. Eine Linksnebenklasse ist definiert durch

$$G/H = \{gH | g \in G\} \quad (2.66)$$

und ist somit eine Menge von Mengen. Auf gleiche Weise lässt sich auch eine Rechtsnebenklasse definieren. Jedes Element eines Nebklassenelements repräsentiert das komplette Nebklassenelement unter der Gruppe H . Für den Fall der $SU(2)^*$ und der $SO(2)$ gilt, mit den Bezeichnungen der Generatoren der $SU(2)^*$:

$$gH = \exp(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3) H \quad (2.67a)$$

$$= \exp(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3) \exp(\beta_2 T_2) H = g' H \quad (2.67b)$$

β_2 kann hierbei beliebig gewählt werden und es existiert ein β_2 , so dass

$$g' = \exp(\alpha'_1 T_1 + \alpha'_3 T_3) \quad (2.68)$$

Somit können wir durch g' die Nebenklasse repräsentieren. Zur Beschreibung der Felder benötigen wir mathematische Ausdrücke, die ihr Verhalten beschreibt. Dafür können wir Funktionen ϕ_1, ϕ_2 einführen mit

$$\phi_1, \phi_2 : M^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

Hieraus konstruieren wir

$$\phi = \phi_1 T_1 + \phi_2 T_3 \quad \text{mit} \quad \phi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

Womit wir zu guter Letzt unsere unitären Matrizen definieren

$$U = \exp\left(i \frac{\phi}{F}\right) \quad \text{mit} \quad U : M^4 \rightarrow SU(2) \quad (2.69)$$

Der Parameter F wird eingeführt, damit der Exponent dimensionslos ist.

Transformationsverhalten

Nun haben wir also ein effektives Bosonenfeld U , jedoch kennen wir das Transformationsverhalten unter $SU(2)^*$ noch nicht. Die Bosonen sind durch die Nebenklasse $SU(2)^*/SO(2)$ dargestellt, weswegen wir die Wirkung von $SU(2)^*$ -Transformationen auf die Nebenklasse bestimmen müssen. Für $H = SO(2)$ und $\tilde{Y} \in SU(2)^*$ lässt sich die Nebenklasse als $\tilde{Y}H$ darstellen.

$$\tilde{Y}H = \exp(\alpha_1 T_1 + \alpha_3 T_3) H \quad (2.70)$$

Eine Transformation $Y \in SU(2)^*$ mit $Y = \exp(\beta_1 T_1 + \beta_2 T_2 + \beta_3 T_3)$ wirkt nun wie folgt:

$$Y\tilde{Y}H = Y\tilde{Y}OH \quad (2.71a)$$

$$= \exp(\alpha'_1 T_1 + \alpha'_2 T_3)H = WH \quad (2.71b)$$

Hierbei nutzten wir ein $O \in SO(2)$ mit $O = \exp(\kappa_2 T_2)$. Zu jedem $Y\tilde{Y}$ existiert ein κ , so dass wir ein W mit den angegebenen Eigenschaften erhalten.

Statt des Überganges $\vec{\alpha} \rightarrow \vec{\alpha}'$ wollen wir nun $2\vec{\alpha} \rightarrow 2\vec{\alpha}'$ betrachten und nutzen $W = W^T$:

$$\tilde{Y}^2 = \tilde{Y}\tilde{Y}^T \rightarrow W^2 = WW^T = Y\tilde{Y}OO^T\tilde{Y}^T Y^T \quad (2.72a)$$

$$= Y\tilde{Y}\tilde{Y}^T Y^T \quad (2.72b)$$

Identifizieren wir nun $\tilde{Y}\tilde{Y}^T$ mit U , so erhalten wir das Transformationsverhalten unseres Feldes

$$U \rightarrow YUY^T \quad (2.73)$$

Dies lässt sich besonders gut für den Grundzustand $U_0 = \mathbb{1}$ überprüfen

$$U'_0 = YU_0 Y^T = Y\mathbb{1}Y^T = YY^T \quad (2.74)$$

Der Grundzustand muss invariant unter vektoriellen und nicht erhalten unter axialen Transformationen sein, was wir mittels Gl. (2.74) zeigen:

$$Y = V : U'_0 = VV^T = VV^\dagger = \mathbb{1} = U_0 \quad (2.75a)$$

$$Y = A : U'_0 = AA^T = AA \neq \mathbb{1} = U_0 \quad (2.75b)$$

Wie in der QCD wollen wir ein effektives Massefeld \mathcal{M} einführen, welches so transformiert, dass $\bar{\lambda}\mathcal{M}\lambda$ invariant unter $SU(2)^*$ ist. Wir unterscheiden hier nun zwischen der Vektortransformation V und den axialen Transformationen A . So gilt:

$$\bar{\lambda}'_V \mathcal{M}'_V \lambda'_V = \bar{\lambda}V^\dagger \mathcal{M}'_V V\lambda \quad (2.76a)$$

$$\bar{\lambda}'_A \mathcal{M}'_A \lambda'_A = \bar{\lambda}A \mathcal{M}'_A A\lambda \quad (2.76b)$$

Für die geforderte Invarianz muss also gelten

$$\mathcal{M}'_V = V\mathcal{M}_V V^\dagger \quad (2.77a)$$

$$\mathcal{M}'_A = A^\dagger \mathcal{M}_A A^\dagger \quad (2.77b)$$

Natürlich wollen wir ein allgemeines Transformationsverhalten feststellen; praktischerweise gilt jedoch

$$V^{-1} = V^\dagger = V^T, \quad V = V^*$$

$$A^{-1} = A^\dagger = A^*, \quad A = A^T$$

Somit existiert ein allgemeines Verhalten unter $SU(2)^*$ -Transformationen Y :

$$\mathcal{M}' = Y^* \mathcal{M} Y^\dagger \quad (2.78)$$

Da gilt $M = M^\dagger$ können wir dies auch anders schreiben

$$\mathcal{M}' = Y \mathcal{M} Y^T \quad (2.79)$$

Somit haben wir das korrekte Transformationsverhalten gefunden. Für das Massenfeld \mathcal{M} wollen wir Ersetzung

$$\chi = 2B_0 \mathcal{M} \quad (2.80)$$

vornehmen. Dies ist eine häufig gewählte Konvention, wobei B_0 ein Parameter der effektiven Theorie ist.

Externe Felder

Bis jetzt haben wir passende Felder mit definiertem Transformationsverhalten eingeführt. Für die Ableitung des Bosonenfeldes muss nun das gleiche Verhalten vorliegen wie für das Feld selbst. Bei globalen Transformationen Y ist dies unproblematisch:

$$\partial_\mu U' = \partial_\mu (Y U Y^T) \quad (2.81a)$$

$$= \underbrace{\partial_\mu (Y) U Y^T}_{=0} + Y \partial_\mu (U) Y^T + \underbrace{Y U \partial_\mu (Y^T)}_{=0} \quad (2.81b)$$

$$= Y \partial_\mu (U) Y^T \quad (2.81c)$$

Befördert man die $SU(2)^*$ nun jedoch zu einer lokalen Symmetrie mit Transformationen $Y(x)$, so transformiert $\partial_\mu U$ nicht wie U . Wir führen also eine kovariante Ableitung D_μ mit externem Feld u_μ ein

$$D_\mu U = \partial_\mu U - i u_\mu U - i U u_\mu^* \quad (2.82)$$

Wie sich leicht überprüfen lässt, gilt

$$(D_\mu U)' = D'_\mu U' = Y D_\mu U Y^T$$

wenn für das Transformationsverhalten von u_μ gilt

$$u'_\mu = Y u_\mu Y^\dagger + i Y \partial_\mu Y^T \quad (2.83)$$

Die Parallelen zwischen Gl. (2.82) und der kovarianten Ableitung aus Abschnitt 1.5 ist offensichtlich, wenn man folgende Ersetzung vornimmt

$$r_\mu = u_\mu, \quad l_\mu = -u_\mu^*$$

Dies zeigt uns wieder, dass für Gluinos links- und rechtshändig chirale Komponenten nicht unabhängig sind. Die Feldstärketensoren $f_{\mu\nu}$ und $f_{\mu\nu}^*$ mit

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu - i[u_\mu, u_\nu] \quad (2.84a)$$

$$f_{\mu\nu}^* = \partial_\mu u_\nu^* - \partial_\nu u_\mu^* + i[u_\mu^*, u_\nu^*] \quad (2.84b)$$

haben dann das Transformationsverhalten

$$f'_{\mu\nu} = Y f_{\mu\nu} Y^\dagger \quad (2.85a)$$

$$f'^*_{\mu\nu} = Y^* f_{\mu\nu}^* Y^T \quad (2.85b)$$

Wenn wir uns die Eigenschaften unserer Felder näher betrachten, stellen wir fest, dass die Verhältnisse zwischen den Feldern und die Kriterien für Invarianz dieselben sind wie in der chiralen Störungstheorie, womit wir durch die Ersetzung $f_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^R$, $f_{\mu\nu}^* = F_{\mu\nu}^L$ alle Ergebnisse übernehmen können.

Konstruktion des effektiven Lagrangians

Da wir nun die Felder mit richtigem Transformationsverhalten bestimmt haben, wollen wir nun einen effektiven Lagrangian bestimmen. Nach Weinberg[28] müssen wir aus diesen Größen alle Ausdrücke bis zu der gewünschten Ordnung im Störungsparameter konstruieren, welche mit allen Symmetrien des Ur-Lagrangian verträglich sind. Aufgrund des Transformationsverhalten unter $SU(2)^*$ sind alle Ausdrücke der Form

$$\text{Tr}(AB^\dagger) \quad (2.86)$$

automatisch invariant. Es gilt

$$\text{Tr}(AB^\dagger) \rightarrow \text{Tr}(Y^* A Y^\dagger (Y^* B Y^\dagger)^\dagger) \quad (2.87a)$$

$$= \text{Tr}(Y^* A Y^\dagger Y B^\dagger Y^T) \quad (2.87b)$$

$$= \text{Tr}(Y^T Y^* A B^\dagger) = \text{Tr}(A B^\dagger) \quad (2.87c)$$

Dies gilt auch für Ausdrücke der Form $\text{Tr}(A B^\dagger C D^\dagger)$. Somit nutzen wir nun die Größen

$$U, D_\mu U, \chi, f_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}^* \quad (2.88)$$

um alle Ausdrücke zur Ordnung n in den symmetriebrechenden Massen ($\mathcal{O}(q^n)$) zu konstruieren. Dabei gilt

$$U = \mathcal{O}(q^0), D_\mu U = \mathcal{O}(q^1), F_{\mu\nu}, \chi = \mathcal{O}(q^2) \quad (2.89)$$

Somit konstruieren wir nun alle Terme bis $\mathcal{O}(q^2)$, wobei wir die Feldstärketensoren nur als $U f_{\mu\nu}^*$ und $f_{\mu\nu} U$ verwenden können, da nur diese das richtige

Transformationsverhalten aufweisen.

Alle Terme mit $\mathcal{O}(q^0)$

$$\text{Tr}(UU^\dagger) = 3 \quad (2.90a)$$

Alle Terme mit $\mathcal{O}(q^1)$

$$\text{Tr}(D_\mu UU^\dagger) \quad (2.90b)$$

$$\text{Tr}(UD_\mu U^\dagger) \quad (2.90c)$$

Alle Terme mit $\mathcal{O}(q^2)$

$$\text{Tr}(D_\mu UU^\dagger) \text{Tr}(D_\nu UU^\dagger) \quad (2.90d)$$

$$\text{Tr}(D_\mu UU^\dagger) \text{Tr}(UD_\nu U^\dagger) \quad (2.90e)$$

$$\text{Tr}(UD_\mu U^\dagger) \text{Tr}(D_\nu UU^\dagger) \quad (2.90f)$$

$$\text{Tr}(UD_\mu U^\dagger) \text{Tr}(UD_\nu U^\dagger) \quad (2.90g)$$

$$\text{Tr}(D_\mu D_\nu UU^\dagger) \quad (2.90h)$$

$$\text{Tr}(D_\mu UD_\nu U^\dagger) \quad (2.90i)$$

$$\text{Tr}(UD_\mu D_\nu U^\dagger) \quad (2.90j)$$

$$\text{Tr}(\chi U^\dagger) \quad (2.90k)$$

$$\text{Tr}(U\chi^\dagger) \quad (2.90l)$$

$$\text{Tr}(Uf_{\mu\nu}^* U^\dagger) = \text{Tr}(f_{\mu\nu}^*) = 0 \quad (2.90m)$$

$$\text{Tr}(U^\dagger f_{\mu\nu} U) = \text{Tr}(f_{\mu\nu}) = 0 \quad (2.90n)$$

Nun müssen wir alle Terme nutzen, welche mit den Symmetrien des Lagrangian vereinbar sind. Die Konstante in $\mathcal{O}(q^0)$ lassen wir ausser Acht, da sie nicht zur Dynamik beiträgt. Die Terme mit $\mathcal{O}(q^1)$ sind nicht Lorentz-invariant und werden somit auch nicht genutzt. Man kann jedoch zeigen, dass sie außerdem identisch 0 sind, womit auch die Terme (2.90d) bis (2.90g) verschwinden. Nun kann man die Terme (2.90h) bis (2.90j) durch Addition einer totalen Ableitung ineinander überführen, womit sie unter den Gesichtspunkten des Lagrangian den gleichen Beitrag leisten. Es reicht also, einen dieser Terme zu berücksichtigen und wir entscheiden uns für (2.90i), welchen wir zur Invarianz unter Lorentz-Transformation kontrahieren

$$\text{Tr}(D_\mu UD^\mu U^\dagger) \quad (2.91)$$

Es bleiben (2.90k) und (2.90l), welche nicht invariant unter Parität sind. Deswegen konstruieren wir aus ihnen

$$\text{Tr}(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger) \quad (2.92)$$

und erhalten somit unseren effektiven Lagrangian bis $\mathcal{O}(q^2)$

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{F^2}{4} \text{Tr}(D_\mu UD^\mu U^\dagger) + \frac{F^2}{4} \text{Tr}(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger) \quad (2.93)$$

hierbei wurden die Vorfaktoren durch unsere Wahl von U und χ bestimmt, generell muss nur pro Term eine zu bestimmende Konstante eingeführt werden. Dies sind in unserem Fall F und B_0 .

2.3.4 Massenbestimmung in der chiralen Störungstheorie

Aus dem Lagrangian (2.93) lässt auf einfachstem Wege eine erste Näherung für die Massen der beschriebenen Pseudo-Goldstone-Bosonen finden. Hierzu wollen wir den symmetriebrechenden Term $\frac{F^2}{4} \text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)$ in Potenzen von ϕ entwickeln. Es gilt:

$$\frac{F^2}{4} \text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) = \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left(2B_0 \mathcal{M} e^{-i\frac{\phi}{F}} + 2B_0 e^{i\frac{\phi}{F}} \mathcal{M} \right) \quad (2.94a)$$

$$= \frac{F^2}{4} \text{Tr} \left(4B_0 \mathcal{M} - 2B_0 \mathcal{M} i \frac{\phi}{F} + 2B_0 i \frac{\phi}{F} \mathcal{M} \right) \quad (2.94b)$$

$$- B_0 \mathcal{M} \frac{\phi^2}{F^2} - B_0 \frac{\phi^2}{F^2} \mathcal{M} - \mathcal{O}(\phi^3) \quad (2.94c)$$

$$= F^2 B_0 \text{Tr}(\mathcal{M}) - \frac{B_0}{2} \text{Tr}(\phi^2 \mathcal{M}) - \mathcal{O}(\phi^4) \quad (2.94d)$$

Bemerkenswert ist, dass in der Entwicklung alle ungeraden Exponenten verschwinden, da \mathcal{M} als Diagonalmatrix mit anderen Matrizen kommutiert. Es ist hierbei nur der im Feld ϕ quadratische Term interessant, da er als Massenterm zu interpretieren ist. Mit

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} \phi_1^2 + \phi_2^2 & 0 \\ 0 & \phi_1^2 + \phi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

folgt schließlich für den Massenterm

$$- \frac{B_0}{2} \text{Tr}(\phi^2 \mathcal{M}) = - \frac{B_0}{2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) (m_1 + m_2) \quad (2.96)$$

Somit folgt für die Massen der Teilchen in erster Näherung

$$M_\phi^2 = B_0 (m_1 + m_2) \quad (2.97)$$

Nun möchten wir Korrekturen zu diesen Massen durch Selbstinteraktion berechnen. Problematisch ist dies, da bei der Integration von Schleifendiagrammen Divergenzen auftreten und somit kein Ergebnis bestimmbar ist. Dies lässt sich jedoch durch Absorption der Divergenzen in den zusätzlichen Konstanten des effektiven Lagrangians nächsthöherer Ordnung beheben.[28]

Mit all diesen Vorbereitungen können wir nun die Massen nach Selbstwechselwirkung berechnen. Hierzu benötigen wir, wie zuvor erwähnt, den effektiven Lagrangian bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$, welchen wir auf gleiche Weise erhalten können wie in Abschnitt 2.3. Hier übernehmen wir wie zuvor das Ergebnis von

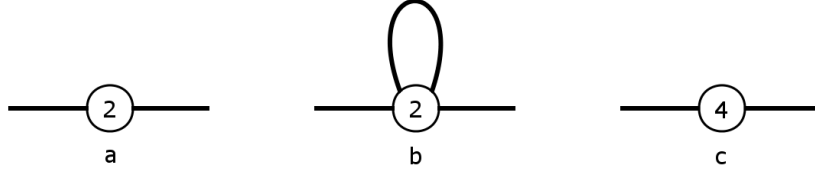


Abbildung 2.1: Baumdiagramm(a) und Schleifendiagramm(b) der Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$, Baumdiagramm von Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ (c)

Gasser und Leutwyler[9]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4 = & L_1 \left\{ \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \right] \right\}^2 + L_2 \text{Tr} \left[D_\mu U (D_\nu U)^\dagger \right] \text{Tr} \left[D^\mu U (D^\nu U)^\dagger \right] \\
& + L_3 \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger D_\nu U (D^\nu U)^\dagger \right] \\
& + L_4 \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger \right] \text{Tr} [\chi U^\dagger + U \chi^\dagger] \\
& + L_5 \text{Tr} \left[D_\mu U (D^\mu U)^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \right] + L_6 \left\{ \text{Tr} [\chi U^\dagger + U \chi^\dagger] \right\}^2 \\
& + L_7 \left\{ \text{Tr} [\chi U^\dagger - U \chi^\dagger] \right\}^2 + L_8 \text{Tr} [U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger] \\
& - i L_9 \text{Tr} \left[f_{\mu\nu}^R D^\mu U (D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^* (D^\mu U)^\dagger D^\nu U \right] + L_{10} \text{Tr} [U f_{\mu\nu}^* U^\dagger f^{\mu\nu}] \\
& + H_1 \text{Tr} [f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + f_{\mu\nu}^* f^{*\mu\nu}] + H_2 \text{Tr} [\chi \chi^\dagger]
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Da wir hier allerdings nur die Massen aus Selbstwechselwirkung bestimmen wollen, können Terme mit äußeren Feldern $f_{\mu\nu}^*$, $f_{\mu\nu}$ oder von Φ unabhängige Terme vernachlässigt werden, womit die Terme zu L_9 , L_{10} , H_1 und H_2 verschwinden. Ebenso wird die Kopplung an die externen Felder nicht benötigt, weshalb wir die kovarianten Ableitungen durch gewöhnliche Ableitungen ersetzen können. Um nun also die Massen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\phi^4)$ zu berechnen sind die in Abb. 2.1 gezeigten Diagramme nötig.

Dabei entspricht (a) der Masse aus \mathcal{L}_2 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\phi^2)$, welche wir schon bestimmt haben. (b) sind dann die Beiträge aus \mathcal{L}_2 von Ordnung $\mathcal{O}(\phi^4)$ und (c) die Beiträge aus \mathcal{L}_4 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\phi^2)$. Terme höherer Ordnung aus \mathcal{L}_4 können nicht berücksichtigt werden, da diese neue Divergenzen erzeugen. Um die Beiträge aller Diagramme gemeinsam als eine Masse interpretieren zu können bedienen wir uns eines schönen Tricks. Wie in Abb. 2.2 zu sehen, kann man einen reduzierten Ein-Teilchen-Vertex als Summe über Diagramme mit irreduziblen Vertices darstellen. Sei nun $-i\Sigma_\phi(p^2)$ der Ausdruck für die Interaktion an einem Vertex und der Propagator niedrigster Ordnung gegeben durch

$$i\Delta_{LO}(p) = \frac{i}{p^2 - M_{\phi,2}^2 + i0^+} \tag{2.99}$$

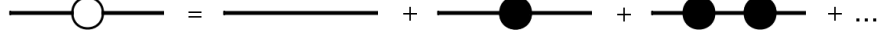


Abbildung 2.2: Darstellung einer reduzierbaren Interaktion (leerer Kreis) als Summe über irreduzible Interaktionen (gefüllte Kreise)

Dann lässt sich Abb. 2.2 mathematisch darstellen durch

$$\begin{aligned} i\Delta(p) &= i\Delta_{LO}(p) + i\Delta_{LO}(p) (-i\Sigma_\phi(p^2)) i\Delta_{LO}(p) + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - M_{\phi,2}^2 - \Sigma_\phi(p^2) + i0^+} \end{aligned} \quad (2.100)$$

wobei wir uns die Reihendarstellung von $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$ zunutze gemacht haben.

In dem Propagator (2.100) lässt sich eine neue Masse als der Pol definieren, womit folgt

$$M_\phi^2 = M_{\phi,2}^2 + \Sigma_\phi(M_\phi^2) \quad (2.101)$$

Dabei lässt sich der Interaktionsterm in Beiträge aus q^4 -Baumdiagramm (Abb. 2.1 c)) und dem q^2 -Schleifendiagramm (Abb. 2.1 b)) aufteilen.

$$\Sigma_\phi(p_\phi^2) = \Sigma_{q^2}^{loop}(p^2) + \Sigma_{q^4}^{tree}(p^2) \quad (2.102)$$

Wir werden zunächst den q^4 -Beitrag berechnen und müssen hierzu (2.98) bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\phi^2)$ entwickeln. Als erstes wollen wir deshalb die Entwicklungen einzelner relevanter Terme betrachten.

$$\partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger = \left(i \frac{\partial_\mu \phi}{F} - \frac{\partial_\mu \phi \cdot \phi + \phi \cdot \partial_\mu \phi}{F^2} + \mathcal{O}(\phi^3) \right) \quad (2.103a)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \left(-i \frac{\partial^\mu \phi}{F} - \frac{\partial^\mu \phi \cdot \phi + \phi \cdot \partial^\mu \phi}{F^2} + \mathcal{O}(\phi^3) \right) \\ &= \frac{1}{F^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \mathcal{O}(\phi^4) \end{aligned} \quad (2.103b)$$

$$\chi U^\dagger + U \chi^\dagger = 4B_0 \mathcal{M} - 4 \frac{B_0}{F^2} \phi^2 \mathcal{M} + \mathcal{O}(\phi^4) \quad (2.103c)$$

$$\chi U^\dagger - U \chi^\dagger = -4 \frac{B_0}{F} \phi \mathcal{M} + \mathcal{O}(\phi^3) \quad (2.103d)$$

$$\begin{aligned} U \chi^\dagger U \chi^\dagger &= 4B_0^2 \mathcal{M}^2 U U \\ &= 4B_0^2 \mathcal{M}^2 \left(\mathbb{1} + i \frac{\phi}{F} - \frac{\phi^2}{F^2} - i \frac{\phi^3}{F^3} + \mathcal{O}(\phi^4) \right)^2 \\ &= 4B_0^2 \mathcal{M}^2 \left(\mathbb{1} + 2i \frac{\phi}{F} - 3 \frac{\phi^2}{F^2} - 4i \frac{\phi^3}{F^3} + \mathcal{O}(\phi^4) \right) \end{aligned} \quad (2.103e)$$

Im Folgenden werden wir die Terme aus Gl. (2.98) mittels ihrer Konstanten identifizieren. Die Terme zu L_1 , L_2 und L_3 fallen sofort aus, da sie minimal von Ordnung $\mathcal{O}(\phi^4)$ sind (vgl. Gl. (2.103b)). Die restlichen Terme können mit Gl. (2.103b)-(2.103e) berechnet werden

$$\begin{aligned}
L_4 &: 8 \frac{B_0}{F^2} (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2) (m_1 + m_2) + \mathcal{O}(\phi^4) \\
L_5 &: 4 \frac{B_0}{F^2} (\partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2) (m_1 + m_2) + \mathcal{O}(\phi^4) \\
L_6 &: 16 B_0^2 (m_1 + m_2)^2 - 4 \frac{B_0^2}{F^2} (\phi_1^2 + \phi_2^2) (m_1 + m_2)^2 + \mathcal{O}(\phi^4) \\
L_7 &: -16 \frac{B_0^2}{F^2} (m_1 - m_2) \cdot \phi_1^2 + \mathcal{O}(\phi^4) \\
L_8 &: 8 B_0^2 (m_1^2 + m_2^2) - 24 \frac{B_0^2}{F^2} (m_1^2 + m_2^2) (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \mathcal{O}(\phi^4)
\end{aligned}$$

Die Kombination dieser Terme ergibt folgenden Lagrangian (Vorzeichen und Faktoren nach Konvention):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^{\phi^2} = & -\frac{1}{2} (a_1^{\text{tree}} \phi_1^2 + a_2^{\text{tree}} \phi_2^2 \\
& + b_1^{\text{tree}} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + b_2^{\text{tree}} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2)
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Dabei sind die Faktoren folgendermaßen definiert

$$a_1^{\text{tree}} = 8 \frac{B_0^2}{F^2} \left((m_1 + m_2)^2 L_6 + 6 (m_1^2 + m_2^2) L_8 + 4 (m_1 - m_2)^2 L_7 \right) \tag{2.105a}$$

$$a_2^{\text{tree}} = 8 \frac{B_0^2}{F^2} \left((m_1 + m_2)^2 L_6 + 6 (m_1^2 + m_2^2) L_8 \right) \tag{2.105b}$$

$$b_{1,2}^{\text{tree}} = -8 \frac{B_0}{F^2} (m_1 + m_2) (2L_4 + L_5) \tag{2.105c}$$

Nutzt man diesen Lagrangian zur Berechnung des Graphen Abb. 2.1 c), so erhält man für die Interaktion der ϕ_j :

$$-i \Sigma_{\phi^4, i}^{\text{tree}}(p^2) = -i (a_i^{\text{tree}} - b_i^{\text{tree}} p^2) \tag{2.106}$$

Nun benötigen wir noch den Beitrag des Schleifendiagrammes. Da dies ein Vierervertex ist, benötigen wir Terme von Ordnung $\mathcal{O}(\phi^4)$, jedoch nur von Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$. Die Entwicklung von Gl. (2.93) liefert:

$$\mathcal{L}_2^{\phi^4} = \frac{1}{6F^2} \left(\phi_i \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_j \phi_j - \phi_i \phi_i \partial_\mu \phi_j \partial^\mu \phi_j + \frac{M^2}{3} \phi_i \phi_i \phi_j \phi_j \right) \tag{2.107}$$

Um nun die Interaktion, wie in Abb. 2.3 gezeigt, zu berechnen, benötigen wir einen Ausdruck für die Schleife:

$$-i \Sigma_{\phi^2}^{\text{loop}, a} = \sum_{b=1}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i \Delta_{LO}(k) \langle p^{(a)}, k^{(b)} | i \mathcal{L}_2^{\phi^4} | p^{(a)}, k^{(b)} \rangle \tag{2.108}$$

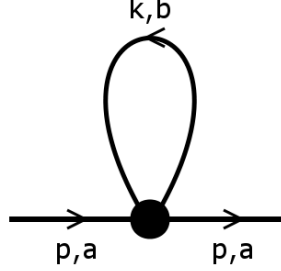


Abbildung 2.3: Schleifendiagramm für Teilchen a mit Impuls p , $b = 1, 2$ und innerem Impuls k

wobei mit $p^{(a)}$ nicht die Komponenten von p , sondern der zu ϕ_a gehörige Impuls bezeichnet ist. Wir berechnen die einzelnen Terme in $\mathcal{L}_2^{\phi^4}$:

$$\langle p^{(a)}, k^{(b)} | \phi_i \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_j \phi_j | p^{(a)}, k^{(b)} \rangle = 4\delta_{ab} (p^2 + k^2) \quad (2.109a)$$

$$\langle p^{(a)}, k^{(b)} | \phi_i \phi_i \partial_\mu \phi_j \partial^\mu \phi_j | p^{(a)}, k^{(b)} \rangle = 4\delta_{aa} \delta_{bb} (p^2 + k^2) \quad (2.109b)$$

$$\langle p^{(a)}, k^{(b)} | \phi_i \phi_i \phi_j \phi_j | p^{(a)}, k^{(b)} \rangle = 8 \cdot (\delta_{aa} \delta_{bb} + 2\delta_{ab}) \quad (2.109c)$$

Somit folgt z.B. für den Schleifenterm für ϕ_1 :

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{\phi^2}^{\text{loop},1}(p^2) &= \frac{1}{2} \sum_{b=1}^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i\Delta_{LO}(k) \langle p^{(1)}, k^{(b)} | i\mathcal{L}_2^{\phi^4} | p^{(1)}, k^{(b)} \rangle \\ &= \frac{i}{12F^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sum_{b=1}^2 [4\delta_{1b} (p^2 + k^2) - 4\delta_{bb} (p^2 + k^2) \\ &\quad + 2M_1^2 (\delta_{bb} + 2\delta_{1b})] \cdot i\Delta_{LO}(k) \\ &= \frac{i}{12F^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [-4k^2 - 4p^2 + 8M_1^2] \cdot \frac{i}{k^2 - M_1^2 + i0^+} \\ &= \frac{i}{12F^2} (-4p^2 + 8M_1^2) \cdot I(M_1^2, \mu, n) \\ &\quad - \frac{i}{12F^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4ik^2}{k^2 - M_1^2 + i0^+} \\ &= \frac{i}{12F^2} [(-4p^2 + 8M_1^2) \cdot I(M_1^2, \mu, n) - 4M_1^2 I(M_1^2, \mu, n)] \\ &= \frac{i}{3F^2} (-p^2 + M_1^2) \cdot I(M_1^2, \mu, n) \end{aligned} \quad (2.110)$$

Die Schleifenterme somit auch von der Form

$$-i\Sigma_{\phi^2}^{\text{loop},j}(p^2) = -i\left(a_j^{\text{loop}} + b_j^{\text{loop}}p^2\right) \quad (2.111)$$

womit gilt

$$\Sigma_{\phi}^j(p^2) = A_j + B_j p^2 \quad (2.112)$$

mit $A_j = a_j^{\text{tree}} + a_j^{\text{loop}}$ und $B_j = b_j^{\text{tree}} + b_j^{\text{loop}}$. Daraus können wir folgern

$$\begin{aligned} M_{\phi}^2 &= M_{\phi,2}^2 + \Sigma_{\phi}(M_{\phi}^2) \\ &= M_{\phi,2}^2 + A_{\phi} + B_{\phi}M_{\phi}^2 \\ \Rightarrow M_{\phi}^2 &= \frac{M_{\phi,2}^2 + A_{\phi}}{1 - B_{\phi}} = M_{\phi,2}^2(1 + B_{\phi}) + A_{\phi} + \mathcal{O}(q^6) \end{aligned} \quad (2.113)$$

und dabei nutzen wir

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{F^2} \left(-\frac{M_1^2}{3} I(M_1^2, \mu, n) + 8B_0^2(m_1 + m_2)^2 L_6 \right. \\ &\quad \left. + 48B_0^2(m_1^2 + m_2^2) L_8 + 32B_0^2(m_1 - m_2)^2 L_7 \right) \\ A_2 &= \frac{1}{F^2} \left(-\frac{M_2^2}{3} I(M_2^2, \mu, n) + 8B_0^2(m_1 + m_2)^2 L_6 + 48B_0^2(m_1^2 + m_2^2) L_8 \right) \\ B_{1,2} &= \frac{1}{F^2} \left(\frac{1}{3} I(M_{1,2}^2, \mu, n) - 16B_0(m_1 + m_2) L_4 - 8B_0(m_1 + m_2) L_5 \right) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Masse M_2 unter Ausnutzung von Gl. (2.97) und (1.94)

$$\begin{aligned} M_2^2 &= M_{2,2}^2(1 + B_2) + A_2 \\ &= M^2 \left(1 + \frac{1}{F^2} \left(\frac{M^2}{48\pi^2} \left[R + \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \right] - 16M^2 L_4 - 8M^2 L_5 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{F^2} \left(-\frac{M^4}{48\pi^2} \left[R + \ln\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) \right] + 8M^4 L_6 + 48B_0^2(m_1^2 + m_2^2) L_8 \right) \right) \\ &= M^2 \left(1 + \frac{M^2}{F^2} \left(8(L_6 - L_5 - 2L_4) + 48 \frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} L_8 \right) \right) \\ &= M^2 \left(1 + \frac{M^2}{F^2} \left(l_1 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} l_2 \right) \right) \end{aligned}$$

Zuletzt verwendeten wir noch folgende Ersetzung

$$l_1 = 8(L_6 - L_5 - 2L_4); \quad l_2 = 48L_8; \quad l_3 = 32L_7$$

Das erstaunliche ist hierbei, dass sich divergente Terme direkt auslöchen und keine Renormalisierung durchgeführt werden muss. Wir erhalten direkt die Mas-

sen der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$:

$$M_1^2 = M^2 \left(1 + \frac{M^2}{F^2} \left(l_1 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} l_2 + \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} l_3 \right) \right) \quad (2.114a)$$

$$M_2^2 = M^2 \left(1 + \frac{M^2}{F^2} \left(l_1 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} l_2 \right) \right) \quad (2.114b)$$

Diese werden wir insbesondere für einen späteren Vergleich mit den partiell gequenchten Ergebnissen nutzen.

2.3.5 Partial gequenchte effektive Feldtheorie

Den aus der QCD bekannten Ansatz der partial gequenchten chiralen Störung wollen wir nutzen, um den durch $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetrie vorhergesagten Fall für Gluinos zu beschreiben. Laut Vorhersage sollte nur ein „Gluino-Flavour“ existieren, jedoch mussten für die chirale Störung zusätzliche „Flavour“ eingeführt werden. Durch die partielle Quenchung können wir uns auf ein einzelnes See-Gluino beschränken und dank der Valenz- und Geistfreiheitsgrade trotzdem eine effektive Theorie konstruieren. Die Gültigkeit dieser Methode hat sich in der QCD gezeigt und wir werden sie somit hier direkt übertragen.

Zunächst besitzen Gluinos eine neue, gradierte Symmetriegruppe $SU(n_v + n_s | n_g)^*$, wobei wir uns auf den minimalen Fall von $n_v = n_s = n_g = 1$ beschränken wollen. Wie zuvor können wir die Ergebnisse der chiralen Störungstheorie, insbesondere die effektiven Lagrangian, übernehmen; dafür sind folgende Ersetzungen nötig:

$\text{Tr}(M)$ wird ersetzt durch $\text{STr}(M)$ mit

$$\text{STr}(M) = \text{Tr}(A) - \text{Tr}(D); \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{v+s} \times \mathbb{R}^{v+s}$, $D \in \mathbb{R}^g \times \mathbb{R}^g$. Das effektive Bosonenfeld U ist weiterhin durch

$$U = \exp\left(i \frac{\phi}{F}\right)$$

definiert, jedoch gilt nun für ϕ :

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_{vv} & \phi_{vs} & \phi_{vg} \\ \phi_{sv} & \phi_{ss} & \phi_{sg} \\ \phi_{gv} & \phi_{gs} & \phi_{gg} \end{pmatrix} \quad (2.115)$$

Außerdem gilt für das Massenfeld χ

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_v & 0 & 0 \\ 0 & \chi_s & 0 \\ 0 & 0 & \chi_g \end{pmatrix} \quad (2.116)$$

wobei wie zuvor der Zusammenhang $\chi_i = 2B_0 m_i$ besteht. Mit diesen Mitteln ist es uns nun möglich auf dem gleichen Weg wie zuvor im ungequenchten Ansatz die Massen der Bosonen zu berechnen.

Massen in niedrigster Ordnung

Der Lagrangian niedrigster Ordnung ist wie zuvor von Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$

$$\mathcal{L}_2^{PQ} = \frac{F^2}{4} \text{STr} [\partial_\mu U \partial^\mu U] + \frac{F^2}{4} \text{STr} [\chi U^\dagger + U \chi^\dagger] \quad (2.117)$$

Dabei sind schon externe Felder vernachlässigt, weswegen keine kovariante Ableitung vorliegt. Wieder nutzen wir die Entwicklung des Massenterms bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\phi^2)$

$$\frac{F^2}{4} \text{STr} [\chi U^\dagger + U \chi^\dagger] = \frac{F^2}{4} \text{STr} [\chi] - \frac{1}{4} \text{STr} [\phi^2 \chi] + \mathcal{O}(\phi^4) \quad (2.118)$$

und verwenden den in ϕ quadratischen Term

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \text{STr} [\phi^2 \chi] &= -\frac{1}{4} (\chi_v (\phi_{vv}^2 + \phi_{vs} \phi_{sv} + \phi_{vg} \phi_{gv}) + \chi_s (\phi_{ss}^2 + \phi_{sv} \phi_{vs} + \phi_{sg} \phi_{gs}) \\ &\quad - \chi_g (\phi_{gg}^2 + \phi_{gv} \phi_{vg} + \phi_{gs} \phi_{sg})) \\ &= -\frac{1}{4} (\chi_v \phi_{vv}^2 + \chi_s \phi_{ss}^2 - \chi_g \phi_{gg}^2 + (\chi_v + \chi_s) \phi_{vs} \phi_{sv} \\ &\quad + (\chi_v + \chi_g) \phi_{vg} \phi_{gv} + (\chi_s + \chi_g) \phi_{sg} \phi_{gs}) \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\phi_{vv}, \phi_{ss}, \phi_{gg}$ und ϕ_{vs} kommutierende Größen sind, während ϕ_{vg} und ϕ_{sg} antikommutieren. Somit können wir direkt die Massen ablesen und diese zusammenfassen durch

$$M_{ij}^2 = \frac{1}{2} (\chi_i + \chi_j) = B_0 (m_i + m_j) \quad (2.119)$$

Auf dieser Grundlage können wir nun die Massen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ berechnen. Es gilt

$$M_{ij,4}^2 = M_{ij,2}^2 + \Sigma_{ij} (M_{ij,4}^2) \quad (2.120)$$

Die Interaktion lässt sich in $\mathcal{O}(q^4)$ -Baum- und $\mathcal{O}(q^2)$ -Schleifendiagramme aufteilen.

Baumdiagramm von Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$

Wir verwenden den Lagrangian von Gasser und Leutwyler, wobei wir externe Felder und Terme ohne U vernachlässigen und erhalten mit den Ersetzungen der PQ χ PT:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{PQ} &= L_1 \text{STr} [\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger]^2 + L_2 \text{STr} [\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger] \text{STr} [\partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger] \\ &\quad + L_3 \text{STr} [\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger] \\ &\quad + L_4 \text{STr} [\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger] \text{STr} [\chi U^\dagger + U \chi^\dagger] \\ &\quad + L_5 \text{STr} [\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)] + L_6 \text{STr} [\chi U^\dagger + U \chi^\dagger]^2 \\ &\quad + L_7 \text{STr} [\chi U^\dagger - U \chi^\dagger]^2 + L_8 \text{STr} [U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger] \end{aligned} \quad (2.121)$$



Abbildung 2.4: Schleifendiagramm von Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$ (links) und Baumdiagramm von Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ (rechts) für ss-Bosonen

Die Entwicklungen der einzelnen Terme bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\phi^2)$ sind

$$L_1, L_2, L_3 : \mathcal{O}(\phi^4)$$

$$L_4 : \frac{2}{F^2} (\chi_v + \chi_s - \chi_g) (\partial_\mu \phi_{vv} \partial^\mu \phi_{vv} + \partial_\mu \phi_{vs} \partial^\mu \phi_{sv} + \partial_\mu \phi_{vg} \partial^\mu \phi_{gv} \\ + \partial_\mu \phi_{ss} \partial^\mu \phi_{ss} + \partial_\mu \phi_{sv} \partial^\mu \phi_{vs} + \partial_\mu \phi_{sg} \partial^\mu \phi_{gs} \\ - \partial_\mu \phi_{gg} \partial^\mu \phi_{gg} - \partial_\mu \phi_{gv} \partial^\mu \phi_{vg} - \partial_\mu \phi_{gs} \partial^\mu \phi_{sg})$$

$$L_5 : \frac{2}{F^2} [\chi_v (\partial_\mu \phi_{vv} \partial^\mu \phi_{vv} + \partial_\mu \phi_{vs} \partial^\mu \phi_{sv} + \partial_\mu \phi_{vg} \partial^\mu \phi_{gv}) \\ + \chi_s (\partial_\mu \phi_{ss} \partial^\mu \phi_{ss} + \partial_\mu \phi_{sv} \partial^\mu \phi_{vs} + \partial_\mu \phi_{sg} \partial^\mu \phi_{gs}) \\ - \chi_g (\partial_\mu \phi_{gg} \partial^\mu \phi_{gg} + \partial_\mu \phi_{gv} \partial^\mu \phi_{vg} + \partial_\mu \phi_{gs} \partial^\mu \phi_{sg})]$$

$$L_6 : -\frac{8}{F^2} (\chi_v + \chi_s - \chi_g) [\chi_v (\phi_{vv}^2 + \phi_{vs} \phi_{sv} + \phi_{vg} \phi_{gv}) \\ + \chi_s (\phi_{ss}^2 + \phi_{sv} \phi_{vs} + \phi_{sg} \phi_{gs}) - \chi_g (\phi_{gg}^2 + \phi_{gv} \phi_{vg} + \phi_{gs} \phi_{sg})]$$

$$L_7 : \frac{4}{F^2} (\chi_v \phi_{vv} + \chi_s \phi_{ss} - \chi_g \phi_{gg})^2$$

$$L_8 : -\frac{6}{F^2} [\chi_v^2 (\phi_{vv}^2 + \phi_{vs} \phi_{sv} + \phi_{vg} \phi_{gv}) + \chi_s^2 (\phi_{ss}^2 + \phi_{sv} \phi_{vs} + \phi_{sg} \phi_{gs}) \\ + \chi_g^2 (\phi_{gg}^2 + \phi_{gv} \phi_{vg} + \phi_{gs} \phi_{sg})]$$

Für unsere Anwendung nutzen wir nur das Diagramm Abb. 2.4, weswegen wir uns auf Beiträge $\propto \phi_{vv}^2$ beschränken.

$$\mathcal{L}_{4,ss}^{PQ,2} = \frac{2}{F^2} [(\chi_v + \chi_s - \chi_g) L_4 + \chi_s L_5] \partial_\mu \phi_{ss} \partial^\mu \phi_{ss} \\ - \frac{2}{F^2} [4(\chi_v + \chi_s - \chi_g) \chi_s L_6 - 2\chi_s^2 L_7 + 3\chi_s^2 L_8] \phi_{ss}^2 \\ = -\frac{1}{2} (a_{ss}^{\text{tree}} \phi_{ss}^2 + b_{ss}^{\text{tree}} \partial_\mu \phi_{ss} \partial^\mu \phi_{ss})$$

Dann gilt für die Baumgraphenbeiträge zur Interaktion

$$-i\Sigma_{ss}^{\text{tree}}(p^2) = -i(a_{ss}^{\text{tree}} + b_{ss}^{\text{tree}} p^2)$$

mit

$$\begin{aligned} a_{ss}^{\text{tree}} &= \frac{4}{F^2} [4(\chi_v + \chi_s - \chi_g)\chi_s L_6 - 2\chi_s^2 L_7 + 3\chi_s^2 L_8] \\ b_{ss}^{\text{tree}} &= -\frac{4}{F^2} [(\chi_v + \chi_s - \chi_g)L_4 + \chi_s L_5] \end{aligned}$$

Schleifenbeiträge von Ordnung $\mathcal{O}(q^2)$

Zur Berechnung der Schleifenbeiträge ist eine Entwicklung von Gl. (2.117) bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\phi^4)$ notwendig:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{PQ,4} &= \frac{1}{24F^2} (\text{STr} [\phi \partial_\mu \phi \phi \partial^\mu \phi] - \text{STr} [\phi^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] + B_0 \text{STr} [\phi^4 \mathcal{M}]) \\ &= \frac{\epsilon_i}{24F^2} [\phi_{il} \partial_\mu \phi_{lk} \phi_{kf} \partial^\mu \phi_{fi} - \phi_{il} \phi_{lk} \partial_\mu \phi_{kf} \partial^\mu \phi_{fi} \\ &\quad + B_0 m_i \phi_{il} \phi_{lk} \phi_{kf} \phi_{fi}] \end{aligned} \quad (2.122)$$

mit

$$\epsilon_i = \begin{cases} 1, & i = v, s \\ -1, & i = g \end{cases}$$

Hiermit wollen wir den Ausdruck für das Schleifendiagramm auswerten

$$\text{Loop} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \langle \phi_s s, p; \phi_{ba}, k | i \mathcal{L}_2^{PQ,4} | \phi_{ab}, k; \phi_{ss}, p \rangle i \Delta_{ab}(k^2, M_{ab}^2) \quad (2.123)$$

Dabei hat der Propagator die einfache Form

$$\Delta_{ab}(p^2, M_{ab}^2) = \frac{\epsilon_b}{p^2 - M_{ab}^2 + i0^+} \quad (2.124)$$

Für die reinen See-Bosonen so wie für nicht-diagonale Bosonen verschwinden die unphysikalischen doppelten Pole; wie wir gleich sehen werden, werden die anderen Propagatoren nicht benötigt. Für die Massenquadrate gilt wie zuvor

$$M_{ab}^2 = \frac{1}{2} (\chi_a + \chi_b) = B_0 (m_a + m_b)$$

Zur Berechnung von Gl. (2.123) bestimmen wir zunächst

$$\begin{aligned} c_{ab} &= \langle \phi_s s, p; \phi_{ba}, k | i \mathcal{L}_2^{PQ,4} | \phi_{ab}, k; \phi_{ss}, p \rangle \\ &= \frac{i}{24F^2} [\delta_{sa} \delta_{sb} (4k^2 + 4p^2 + 4\chi_s) + \delta_{sb} (-2k^2 - 2p^2 + 3\chi_s + \epsilon_a \chi_a) \\ &\quad + \delta_{sa} (-2k^2 - 2p^2 + 3\chi_s + \epsilon_b \chi_b)] \end{aligned}$$

Somit gilt $c_{ab} = c_{ba}$ und es existieren nur 3 mögliche Ergebnisse

$$\begin{aligned} c_{ss} &= \frac{i}{2F^2} \chi_1 \\ c_{sv} &= \frac{i}{24F^2} (-2k^2 - 2p^2 + 3\chi_s + \chi_v) \\ c_{sg} &= \frac{i}{24F^2} (-2k^2 - 2p^2 + 3\chi_s - \chi_g) \end{aligned}$$

Desweiteren gilt $\Delta_{sg} = -\Delta_{gs}$, womit folgt

$$c_{sg}\Delta_{sg} + c_{gs}\Delta_{gs} = c_{sg}\Delta_{sg} - c_{sg}\Delta_{sg} = 0$$

wodurch sich Gl. (2.123) vereinfacht zu

$$\text{Loop} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (c_{ss}i\Delta_{ss} + 2c_{sv}\Delta_{sv}) \quad (2.125a)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{i}{2F^2} \chi_s i\Delta_{ss} + \frac{i}{12F^2} (-2k^2 - 2p^2 + 3\chi_s + \chi_v) i\Delta_{sv} \right] \quad (2.125b)$$

$$= \frac{i}{4F^2} \left[\chi_s I(M_{ss}^2, \mu^2) + \frac{1}{6} (-2M_{sv}^2 - 2p^2 + 3\chi_s + \chi_v) I(M_{sv}^2, \mu^2) \right] \quad (2.125c)$$

$$= -i \left[\frac{1}{12F^2} I(M_{sv}^2, \mu^2) p^2 - \frac{\chi_s}{4F^2} \left(I(M_{ss}^2, \mu^2) + \frac{1}{3} I(M_{sv}^2, \mu^2) \right) \right] \quad (2.125d)$$

Hier können wir direkt ablesen

$$a_{ss}^{\text{loop}} = -\frac{\chi_s}{4F^2} \left(I(M_{ss}^2, \mu^2) + \frac{1}{3} I(M_{sv}^2, \mu^2) \right) \quad (2.126a)$$

$$b_{ss}^{\text{loop}} = \frac{1}{12F^2} I(M_{sv}^2, \mu^2) \quad (2.126b)$$

Die Baum- und Schleifenbeiträge können wir nun zusammenfassen

$$A_{ss} = \frac{4}{F^2} [4(\chi_v + \chi_s - \chi_g) \chi_s L_6 - 2\chi_s^2 L_7 + 3\chi_s^2 L_8] - \frac{\chi_s}{4F^2} \left(I(M_{ss}^2, \mu^2) + \frac{1}{3} I(M_{sv}^2, \mu^2) \right) \quad (2.127a)$$

$$B_{ss} = -\frac{4}{F^2} [(\chi_v + \chi_s - \chi_g) L_4 + \chi_s L_5] + \frac{1}{12F^2} I(M_{sv}^2, \mu^2) \quad (2.127b)$$

Zur Berechnung der Masse von Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$, $M_{ss,4}^2$, nehmen wir $\chi_v = \chi_g$ an und nutzen

$$M_{ss,4}^2 = \chi_s (1 + B_{ss}) + A_{ss} \quad (2.128a)$$

$$\begin{aligned} &= \chi_s \left(1 - \frac{4}{F^2} \chi_s (L_4 + L_5) + \frac{1}{12F^2} I(M_{sv}^2, \mu^2) \right) \\ &\quad + \frac{4}{F^2} \chi_s^2 [4L_6 - 2L_7 + 3L_8] \end{aligned} \quad (2.128b)$$

$$\begin{aligned} &\quad - \frac{\chi_s}{4F^2} \left(I(M_{ss}^2, \mu^2) + \frac{1}{3} I(M_{sv}^2, \mu^2) \right) \\ &= \chi_s + \frac{4\chi_s^2}{F^2} (4L_6 - 2L_7 + 3L_8 - L_4 - L_5) - \frac{\chi_s}{4F^2} I(M_{ss}^2, \mu^2) \end{aligned} \quad (2.128c)$$

$$= \chi_s + \frac{l_1}{F^2} \chi_s^2 - \frac{\chi_s^2}{64\pi^2 F^2} \left[R + \ln \left(\frac{\chi_s}{\mu^2} \right) \right] \quad (2.128d)$$

$$= \chi_s + \frac{\chi_s^2}{F^2} \left[l_1^r - \frac{1}{64\pi^2} \ln \left(\frac{\chi_s}{\mu^2} \right) \right] \quad (2.128e)$$

Da der enthaltene Logarithmus bei festgesetzter Gluinomasse und Renormierungsskala nur eine Konstante ist, können wir ihn in l_1^r absorbieren oder alternativ für $\mu \approx \chi_s$ gleich komplett vernachlässigen. Abschließend ist unsere Masse somit

$$M_{ss,4}^2 = \chi_s + \frac{\chi_s^2}{F^2} l_1^r \quad (2.129)$$

Zusammenfassung der Ergebnisse

Ziel dieser Arbeit war es die chirale Störungstheorie und im speziellen die partielle Quenchung für die Gluinos in der $\mathcal{N} = 1$ -supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie durchzuführen. Die ungequenchte chirale Störung konnte nur mithilfe zusätzlicher Gluino-Flavour durchgeführt werden und ist somit keine adäquate Beschreibung der üblichen supersymmetrischen Erweiterung. Jedoch konnte auch die partiell gequenchte Störungsrechnung durchgeführt werden, in welcher nur ein physikalischer Gluino-Flavour vorhanden ist. Hiermit bestimmten wir die Masse des auftretenden quasi-Goldstonebosons bis zur Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$ zu

$$M_{ss,4}^2 = M_{ss,2}^2 + \frac{M_{ss,2}^4}{F^2} l_1^r \quad (2.130)$$

mit

$$M_{ss,2}^2 = 2B_0 m_s \quad (2.131)$$

Das aus Gittersimulationen bekannte „adjoint pion“ ist ϕ_{vs} , dessen Masse und Dynamik durch die in dieser Arbeit aufgeführte Störungstheorie analytisch bestimmbar ist.

Kapitel 3

Literaturverzeichnis

- [1] S.L. Adler. Axial-vector vertex in spinor electrodynamics. *Phys. Rev.*, 177:2426, 1969.
- [2] S.L. Adler and W.A. Bardeen. Absence of higher-order corrections in the anomalous axial-vector divergence equation. *Phys. Rev.*, 182:1517, 1969.
- [3] Pavel Alexandroff. *Einführung in die Gruppentheorie*. Harri Deutsch, 2007.
- [4] S. Coleman. The invariance of the vacuum is the invariance of the world. *J. Math. Phys.*, 7:787, 1966.
- [5] S. Coleman and J. Mandula. All possible symmetries of the s-matrix. *Phys. Rev.*, 159:1251–1256, 1967.
- [6] P.H. Damgaard, U.M. Heller, R. Niclasen, and B. Svetitsky. Patterns of spontaneous chiral symmetry breaking in vectorlike gauge theories. *Nucl.Phys. B*, 633:97–113, 2002.
- [7] K. Demmouche, F. Farchioni, A. Ferling, I. Montvay, G. Münster, E.E. Scholz, and J. Wuilloud. Simulations of supersymmetric yang-mills theory. *PoS*, LAT2009:268, 2009. arXiv:0911.0595[hep-lat].
- [8] Paul Dirac. *Principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, 1982.
- [9] J. Gasser and H. Leutwyler. Chiral perturbation theory: Expansions in the mass of the strange quark. *Nucl. Phys. B*, 250:465, 1985.
- [10] M. Gell-Mann. Symmetries of baryons and mesons. *Phys. Rev.*, 125:1067, 1962.
- [11] M. Gell-Mann and M. Lévy. The axial vector current in beta decay. *Nuovo Cim.*, 16:705, 1960.

- [12] H. Georgi. *Weak Interactions and Modern Particle Theory*. Benjamin/Cummings, 1984.
- [13] M.F.L. Golterman and K.C. Leung. Applications of partially quenched chiral perturbation theory. *Phys. Rev. D*, 7:5703, 1998.
- [14] R. Haag, J. Lopuszanski, and M. Sohnius. All possible generators of supersymmetries of the s-matrix. *Nucl. Phys. B*, 88:257–274, 1975.
- [15] G. 't Hooft and M. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nucl. Phys. B*, 44:189, 1972.
- [16] R. Kirchner, S. Luckmann, I. Montvay, K. Spanderen, and J. Westphalen. Evidence for discrete chiral symmetry breaking in n=1 supersymmetric yang-mills theory. *Phys. Lett. B*, 446:209–215, 1999. arXiv:hep-lat/9810062.
- [17] G. Marmo, A.P. Balachandran, B.S. Skagerstan, and A. Stern. *Classical Topology and Quantum States*. World Scientific, 1991.
- [18] I. Montvay. Supersymmetric yang-mills theory on the lattice. *Int. J. Mod. Phys. A*, 17:2377–2412, 2002. arXiv:hep-lat/0112007.
- [19] K. Nakamura et al. Quarks. *JPG*, 37:075021, 2010.
- [20] E. Noether. Invariante variationsprobleme. *Gött. Nachr.*, pages 235–257, 1918.
- [21] M.E. Peskin. The alignment of the vacuum in theories of technicolor. *Nucl. Phys. B*, 175:197–233, 1980.
- [22] Michael Peskin and Daniel Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Addison-Wesley, 1995.
- [23] Stefan Scherer and Matthias Schindler. *A Primer for Chiral Perturbation Theory*. Springer, 2011.
- [24] S. Sharpe and N. Shores. Partially quenched chiral perturbation theory without ϕ_0 . *Phys. Rev. D*, 11:114510, 2001.
- [25] C. Vafa and E. Witten. Restrictions on symmetry breaking in vector-like gauge theories. *Nucl. Phys. B*, 234:173, 1984.
- [26] M. Veltman and G. Passarino. One-loop corrections for e^+e^- annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the weinberg model. *Nucl. Phys. B*, 160:151, 1979.
- [27] B. L. van der Waerden. *Algebra I*. Springer, 1991.
- [28] S. Weinberg. Phenomenological lagrangians. *Physica A*, 96:327, 1979.

Anhang A

Definitionen und Vertiefungen

A.1 Vertiefungen

A.1.1 Dirac-Matrizen

Die γ -Matrizen sind die Erzeugenden einer Matrix-Repräsentation der Clifford-Algebra $Cl(1, 3, \mathbb{R})$ des Minkowski-Raums.

Definition Clifford-Algebra

Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ein Körper, \mathbb{V} ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper \mathbb{K} , $q : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform auf \mathbb{V} und $Q(v) = q(v, v)$ die zugehörige quadratische Form. Die **Clifford-Algebra** von (\mathbb{V}, Q) ist definiert über \mathbb{K} mit den Elementen aus \mathbb{V} und der Verknüpfung

$$v\dot{w} + w\dot{v} = -2q(v, w), \quad w, v \in \mathbb{V} \quad (\text{A.1})$$

Diese Algebra wird mittels $Cl(\mathbb{V}, Q)$ oder $Cl(\mathbb{V}, Q, \mathbb{K})$ bezeichnet.[27]

Für den vorliegenden Fall ergibt das $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_4$. Jede Menge von Matrizen, welche diese Algebra erzeugen, können als γ -Matrizen dienen, d.h. es existieren äquivalente Darstellungen, welche sich nur durch die Basiswahl unterscheiden. Insbesondere erfüllen $-\gamma^{\mu T}$ und $\gamma^{\mu\dagger}$ ebenfalls die Algebra, womit Matrizen A, C mit

$$C\gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T} \quad \text{und} \quad A\gamma^\mu A^{-1} = \gamma^{\mu\dagger} \quad (\text{A.2})$$

existieren. A ist entscheidend für die Konstruktion von Größen mit definierten Transformationseigenschaften unter Lorentz-Transformation, wie z.B. $\Psi^\dagger A \Psi \equiv \bar{\Psi} \Psi$ als Skalar transformiert, $\Psi^\dagger \Psi$ jedoch nicht. C hingegen kennen wir als Ladungskonjugationsoperator. Die unterschiedlichen Darstellungen der γ^μ führt auch zu unterschiedlichen A, C .

Am geläufigsten ist die Dirac-Darstellung mit

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{A.3})$$

In dieser Arbeit nutzen wir hingegen die Weyldarstellung mit

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{A.4})$$

Ein Vorteil ergibt sich bei der Definition von $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ und den Projektoren $P_L^2 = P_L = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 - \gamma^5)$ und $P_R^2 = P_R = \frac{1}{2}(\mathbb{1}_4 + \gamma^5)$, welche auf Unterräume unterschiedlicher Chiralität projizieren. Lauten diese Größen in Dirac-Darstellung

$$P_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & -\mathbb{1}_2 \\ -\mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad P_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

so sind sie in Weyl-Darstellung mit

$$P_L = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

gegeben, was eine einfachere Teilung von Spinoren in chirale Anteile ermöglicht. Die Ladungskonjugation C ist dann gegeben durch

$$C = i\gamma^2\gamma^0 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A.2 Definitionen

A.2.1 Gell-Mann-Matrizen

Eine der wichtigsten Gruppe der Feldtheorien ist die $SU(3)$ und somit sind auch ihre infinitesimalen Generatoren von großer Bedeutung, welche gebräuchlicher Weise durch die Gell-Mann-Matrizen repräsentiert werden.

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8a})$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8b})$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8c})$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8d})$$

Rein formell wird für manche Anwendungen noch λ_0 mit der Einheitsmatrix identifiziert, diese besitzt jedoch nicht die Eigenschaften der anderen Gell-Mann-Matrizen und ist somit nicht als solche zu betrachten.

A.2.2 Gewählte Darstellungen

Die Generatoren T_a der Lie-Gruppen erzeugen die Transformationsmatrizen mittels

$$M = \exp(i\alpha_a T_a) \quad (\text{A.9})$$

Während die ganze Menge dieser Matrizen durch die Gruppeneigenschaften fest definiert ist, kann die genaue Form der Generatoren unterschiedlich gewählt werden. Wir wollen hier die gewählten Repräsentationen der verwendeten Gruppen auführen.

$SO(4)$

Die $SO(4)$ besitzt 6 Generatoren

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10a})$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10b})$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10c})$$

$SU(2)$

Die Generatoren sind die 3 Pauli-Matrizen, jeweils mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11a})$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11b})$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11c})$$

$SO(2)^*$

Während $SO(2)^*$ keine gängige Bezeichnung ist, habe ich sie gewählt, da die Transformation wie eine 4-dimensionale $SO(2)$ -Rotation anmutet. Ihr einziger Generator ist

$$T = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

 $SO(3)^*$

Wie zuvor ist $SO(3)^*$ keine gängige Bezeichnung, beschreibt meiner Meinung nach jedoch recht gut eine Analogie dieser 4-dimensionalen Drehung mit 3 Generatoren.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13a})$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13b})$$

$$U(1)_A \times U(1)_A \times U(1)_A$$

Bei den Folgenden drei Generatoren handelt es sich nicht um eine vollständige Lie-Gruppe, sondern nur um jenen Anteil der Generatoren, welche Majorana-Spinoren unter Erhalt der Majorana-Bedingung axial transformiert. Somit bilden sie 3 $U(1)_A$ -Gruppen.

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma^5 \\ 0 & 0 & -\gamma^5 & 0 \\ 0 & -\gamma^5 & 0 & 0 \\ \gamma^5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14a})$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} -\gamma^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^5 \end{pmatrix} \quad (\text{A.14b})$$

$SU(2)^*$

Die $SU(N)^*$ -Gruppen sind die Symmetriegruppen der Gluinos und mit der $SU(2)^*$ zeigen wir hier die Generatoren für den minimal erweiterten Fall, in welchem chirale Störung möglich ist.

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15a})$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} \gamma^5 & 0 \\ 0 & -\gamma^5 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15b})$$

$SU(4)^*$

$$F_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 & 0 & 0 \\ \gamma^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$F_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$F_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^5 & 0 \\ 0 & \gamma^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$F_7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \gamma^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\gamma^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

$$F_9 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma^5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_{10} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.20})$$

$$F_{11} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F_{12} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$F_{13} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^5 \\ 0 & 0 & \gamma^5 & 0 \end{pmatrix} \quad F_{14} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$F_{15} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \gamma^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3\gamma^5 \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Danksagung

Diese Arbeit hätte nicht ohne Unterstützung entstehen können und somit möchte ich allen danken, die mir durch diese aufregende und interessante Zeit geholfen haben.

An erster Stelle möchte ich Prof. Münster danken, der mir nicht nur die Arbeit an einem(meiner Meinung nach) überdurchschnittlich interessanten Thema ermöglichte, sondern mir auch im gesamten Schaffensprozess mit Rat und Tat zur Seite stand. Auch möchte ich Dr. Heitger danken, der sich als Zweitprüfer zur Verfügung gestellt hat.

Desweiteren gilt mein Dank meinen Kommilitonen Kai Sparenberg, Michael Holl und Thomas Zub die mich durch stete Diskussionen und hilfreichem Input immer wieder auf neue Ideen brachten.

Der größte Dank gilt jedoch meiner Lebensgefährtin Anna, die mich während des Stresses und der Aufregung dieser Arbeit immer unterstützt hat. Ausserdem hat sie durch Korrekturlesen und wichtigen Einwüfen bezüglich Verständlichkeit und Formulierung massgeblich zu dieser Arbeit beigetragen.

Herzlichen Dank an euch alle!

Erklärung des Studenten

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Titel

**Partiell gequenchte chirale Störungstheorie für die N=1
supersymmetrische Yang-Mills-Theorie**

selbständig verfasst habe, und dass ich keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Ort, Datum

Unterschrift