

Implementierung und Test neuer Operatoren in der supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie

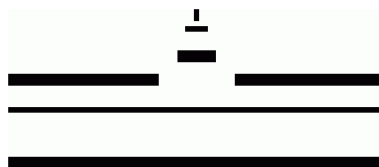
Implementation and test of new operators in the supersymmetric Yang-Mills theory

Master-Arbeit

von

Kai Sparenberg

vorgelegt dem Fachbereich der Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster



14. Januar 2013

Diese korrigierte Version unterscheidet sich nur geringfügig von derjenigen, welche dem Prüfungsausschuss vorgelegt wurde. Dies betrifft vor allem Tippfehler sowie das Vorzeichen der Exponentialfunktion auf Seite 82 und ein Quadrat in Gleichung (3.4.2).

Bevergern, im Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
1. Quantenfeldtheorie auf dem Gitter	1
1.1. Das Gitter	1
1.2. Funktionen auf dem Gitter	4
1.3. Quantenfeldtheorien auf dem Gitter	10
1.3.1. Das Pfadintegral	10
1.3.2. Integration von Grassmann-Variablen	13
1.3.3. Euklidische Feldtheorie und Korrelatoren	20
1.4. Die $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetrische SU(2) Yang-Mills Theorie	23
1.4.1. Kontinuierliche Wirkung	24
1.4.2. Adjungierte Fermionen	27
1.4.3. Diskretisierte Wirkung	31
1.4.4. Nochmals adjungierte Fermionen	35
1.4.5. Der Dirac-Operator	35
1.4.6. Der naive Propagator	37
1.4.7. Bedeutung der Pole	38
1.4.8. Pole des naiven Dirac-Operators	41
1.4.9. Der Wilson-Term	43
1.4.10. Pole des Propagators mit Wilson-Term	44
1.4.11. Wirkung der Theorie	46
2. Baryonische Korrelatoren	49
2.1. Transformationsverhalten im Kontinuum	49
2.2. Transformationsverhalten auf dem Gitter	51
2.3. Der fermionische Korrelator	52
2.4. Die allgemeine Form des Baryonenkorrelators	54
2.4.1. Einfluss der Randbedingung	57
2.4.2. Explizite Form des Korrelators	58
3. Berechnung der Vakuumerwartungswerte	61
3.1. Ausintegration der Fermionen	61
3.2. Stochastische Interpretation des Pfadintegrals	62
3.3. Erzeugung der Konfigurationen	63
3.3.1. Die Markov-Kette	63
3.3.2. Pseudofermionen	64
3.3.3. Molekulare Dynamik	65
3.3.4. Der PHMC Algorithmus	66

3.4. Auswertung der Mittelwerte	67
3.4.1. Fehlerabschätzung	67
3.4.2. Translationsinvarianz des Korrelators	69
3.4.3. Even Odd Preconditioning	71
3.4.4. Conjugate Gradient Verfahren	76
3.4.5. Verbundener- und unverbundener Anteil	77
3.4.6. Stochastic Estimator Technique	78
3.4.7. Eigenwertzerlegung	79
4. Ergebnisse	81
4.1. Der verbundene Anteil	81
4.1.1. Das Vorgehen	82
4.1.2. Gitterausdehnung und Sommer-Parameter	83
4.1.3. Die $8^3 \times 16$ Gitter: 1, 2, 3 und 12	84
4.1.4. Die $12^3 \times 24$ Gitter: 4, 5, 7 und 10	85
4.1.5. Die $16^3 \times 36$ Gitter: 6, 8, 11, 13 und 16	87
4.1.6. Die $20^3 \times 40$ Gitter: 9 und 14	90
4.1.7. Die $24^3 \times 48$ Gitter: 15 und 17	91
4.2. Der unverbundene Anteil	92
4.2.1. Der unverbundene Anteil mit der stochastic estimator Technique	93
4.2.2. Der unverbundene Anteil mit der Eigenwertzerlegung	100
4.2.3. Das Verhältnis von unverbundenen zum verbundenen Anteil	106
5. Zusammenfassung und Ausblick	107
5.1. Zusammenfassung	107
5.2. Ausblick	108
A. Anhang	111
A.1. Fermionen und die Dirac-Matrizen	111
A.2. Wick-Rotation	114
A.3. Umrechnungen in andere Konventionen	115
A.4. Symmetrien des Dirac-Operators	116
A.5. Der Pfaffian von M und sein Vorzeichen	118
A.6. Distributionelle Identität	123
A.7. Explizite Berechnung des Korrelators	124
Literaturverzeichnis	135
Danksagung	137

Einleitung

Die Quantenfeldtheorie ist die am besten funktionierende Theorie, die der Physik zur Verfügung steht, um Vorhersagen in der Welt der Elementarteilchen zu machen. Anfängliche Schwierigkeiten, wie eine divergente Vakuumenergie oder divergente Streumatrix-Elemente, ließen sich durch besseres Verständnis der Struktur dieser Theorie sowie physikalische Interpretation ausmerzen. So hat zum Beispiel die Normalordnung von Feldoperatorprodukten die Vakuumenergie endlich gemacht und die Renormierung die Streumatrix-Elemente gezähmt. Ein weiteres Merkmal, das sich in der Untersuchung der physikalischen Gesetze herauskristallisierte, war die Bedeutung von Symmetrien in der Welt und die Tatsache, dass sich in der Quantenfeldtheorie Erhaltungsgrößen wie Ladung, Farbe oder Parität mit Symmetrien beschreiben lassen. Dies führte schnell dazu, dass die Quantenelektrodynamik (QED), die Theorie die die Wechselwirkung von geladenen Elektronen und Positronen mit neutralen Photonen beschreibt, allein aus dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz eines Fermionenfeldes hergeleitet wurde. Die dort verwendete Symmetriegruppe ist die abelsche $U(1)$ Gruppe.

Es stellte sich weiter heraus, dass sich elektrische- und schwache Kraft durch das Prinzip der lokalen Eichinvarianz vereinen lassen, wenn sie als eine lokal eichinvariante Theorie mit $SU(2) \times U(1)$ als Symmetriegruppe beschrieben wird. Das war ein weiterer großer Erfolg der Symmetrien und der lokalen Eichinvarianz in der Physik. S. L. Glashow, A. Salam und S. Weinberg erhielten 1979 dafür den Nobelpreis.

Es wurde noch eine weitere Symmetriegruppe hinzugefügt, so dass das Standardmodell als eine Theorie mit der Symmetriegruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ aufgefasst werden kann. Die Theorie, die den $SU(3)$ -Teil beschreibt, ist die Quantenchromodynamik (QCD). Diese drei Symmetriegruppen sind jedoch teilweise nicht exakt, sondern gebrochen, was uns alleine schon die Massenunterschiede der Teilchen in dieser Theorie verraten. Diese Symmetriebrechung ließ sich nun explizit in die Theorie einbauen, was dafür sorgte, dass die Massen gewisser Teilchen der Theorie aneinander gekoppelt sind und allein durch die Stärke der Symmetriebrechung bestimmt sind. Dieses Verfahren ist der Higgs-Mechanismus, dem seit einiger Zeit sehr viel Aufmerksamkeit zukommt, da am 4. Juli 2012 mitgeteilt wurde, dass durch die Experimente ATLAS und CMS am CERN mit dem LHC ein Teilchen gefunden wurde, was sich als eben dieses symmetriebrechendes Teilchen herausstellen könnte. Eine Übereinstimmung der Masse des gefundenen Teilchens mit den Vorhersagen aus der Theorie lässt hoffen, dass es eben dieses ist. Die Veröffentlichungen dazu sind [2] und [6].

Trotz all dieser Erfolge, ist das Standardmodell noch nicht komplett und hat noch einige Lücken neben der völligen Nichtbeachtung von gravitativen Effekten. Ein ästhetisches Manko ist zum Beispiel, dass sich die laufenden Eichkopplungen bei hohen Energien nicht vereinigen. Ein fundamentales Problem sind jedoch die masselosen Fermionen, die die Neutrinos beschreiben. Neutrinos sind jedoch nicht masselos, da der Effekt der Neutrino-Oszillation auftritt, bei dem sich Neutrinos einer Familie in die einer anderen Familie umwandeln, welcher bei masselosen Neutrinos nicht möglich wäre.

Das Prinzip, einer Theorie eine Symmetrie zugrunde zu legen, hatte sich gut bewährt, war jedoch durch das Coleman Mandula No-Go Theorem [7] zu einem Hindernis gelangt. Dieses Theorem besagt, dass sich jede neue Symmetrie der Streumatrix, die in der Form einer Lie-Algebra auf die Theorie wirkt, nur trivial mit der Poincaré-Algebra vereinigen lässt. Es ist zwar möglich, Symmetrien getrennt von der Raumzeit in die Theorie einzubringen, jedoch lässt sich keine untrennbar mit der Raumzeit verbinden. Löst man sich jedoch vom Konzept der einfachen Lie-Algebra und lässt \mathbb{Z}_2 -graduierte Algebren zu, was physikalisch dem Einführen fermionischer Generatoren entspricht, so ergibt dies eine Möglichkeit, eine Symmetrie mit der Poincaré-Algebra zu vereinen. Für diesen Fall liefert das Haag-Lopuszański-Sohnius Theorem [13] die Aussage, dass alle Generatoren der neuen Symmetrie in einer Spin- $\frac{1}{2}$ Darstellung der Poincaré-Algebra sind, was alle neuen Symmetrien klassifiziert. Die Zahl \mathcal{N} gibt dann die Zahl der fermionischen Generatoren an. Eine Theorie, die mit $\mathcal{N} > 1$ supersymmetrisch ist, wird erweitert supersymmetrisch genannt. Die Natur der Generatoren sorgt dafür, dass wir eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen bekommen, welche zu einer identischen Anzahl an Freiheitsgraden zwischen Bosonen und Fermionen führt. Aufgrund der komplementären Natur von Fermionen und Bosonen, werden die anfangs erwähnten Divergenzen in vielen Streumatrix-Elementen beseitigt, von denen wir aus dem Experiment wissen, dass diese nicht existieren. Auch ist es in der Supersymmetrie der Fall, dass sich die Eichkopplungen bei hohen Energien zu einer einzigen Eichkopplung vereinigen. Diese Tatsachen können als Hinweise gedeutet werden, dass diese Symmetrie ein Schritt in die richtige Richtung ist. Einführungen in die Supersymmetrie findet man in [28].

Da sich supersymmetrische Theorien jedoch in vielen Bereichen anders verhalten, als das uns bekannte Standardmodell, ist es in Aussicht auf eine grundlegendere Theorie sinnvoll, die Supersymmetrie genauer zu untersuchen. So finden sich in supersymmetrischen Theorien zu jedem Fermion und Boson Partnerteilchen mit jeweils umgekehrter Spin-Statistik und es treten häufiger Majorana-Fermionen auf, also Fermionen, die ungeladen und ihre eigenen Antiteilchen sind, die wir bisher noch nicht experimentell beobachtet haben.

Das in dieser Arbeit untersuchte Modell ist eine $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische Yang-Mills Theorie [10] [31], mit Fermionen in der adjungierten Darstellung, in der Wess-Zumino-Eichung und wurde auf dem Gitter durch die von Curci und Veneziano vorgeschlagene Gitterwirkung umgesetzt [8]. Dieses Modell lässt sich jedoch, trotz seines Ursprunges in der Supersymmetrie, als gewöhnliche Eichtheorie auffassen, was in dieser Arbeit getan wird, da hier keine aus der Supersymmetrie stammenden Größen verwendet werden.

Nun wird schon seit einiger Zeit die $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische Yang-Mills Theorie mit SU(2)-Eichbosonen und Majorana-Fermionen in adjungierter Darstellung numerisch auf Gittern untersucht. Dazu werden zum Beispiel die Massen von Bindungszuständen aus den Fermionen und Bosonen, die in der Regel Gluinos und Gluonen genannt werden, mit zwei Bestandteilen bestimmt und ihr Verhalten in Bezug auf die Gittergröße, Eichkopplung und nackte Fermionenmasse betrachtet. Zum Beispiel wurde in [5] die Auswirkung der endlichen Gittergröße auf die Massen der mesonischen Bindungszustände untersucht und die Veröffentlichung [4] fasst unter anderem diese Ergebnisse zur endlichen Gittergröße zusammen. Es stellte sich heraus, dass die Effekte der endlichen Gittergröße auf moderat großen Gittern nicht zu groß sind. In dieser Arbeit wurden erste Untersuchungen in Bezug auf baryonische Bindungszustände, also Bindungszustände, die aus drei Fermionen bestehen, durchgeführt.

Die Bestimmung der Masse von Bindungszuständen ist im Formalismus der Quantenfeldtheorie nicht ohne weiteres möglich, da die perturbativen Ansätze freie Elementarteilchen zugrundelegen, die nur über einen endlichen Zeitraum miteinander wechselwirken. Dies ist die berühmte Methode der Feynman-Diagramme, der Dyson-Reihe und so weiter [26]. Es ist in diesem Formalismus nicht möglich, Wechselwirkungen über unbeschränkte Zeiten zu beschreiben. Aus diesem Grund hat sich die Gitter-Feld-Theorie entwickelt, die es durch Diskretisierung der Raumzeit ermöglicht, nicht-perturbative Berechnungen durchzuführen, da sich das der Theorie zugrundeliegende Pfadintegral stochastisch interpretieren und berechnen lässt [20].

Zur Berechnung der baryonischen Zustände habe ich den Operator $W(x) = \varepsilon_{abc} \lambda^a \text{Tr}_S (\lambda^b C \gamma^4 \lambda^c)$ gewählt, der nur an Spin $\frac{1}{2}$ -Baryonen koppelt, die aus drei Fermionen bestehen. Ich habe ein bereits bestehendes Programm verwendet, um die Konfigurationen der Eichfelder zu generieren, die als Grundlage für die stochastische Berechnung der Massen dienen. Dieses Programm habe ich um einen Teil erweitert, der es erlaubt, den baryonischen Korrelator von $W(x)$ zu berechnen, um aus diesem die Massen zu bestimmen. Die verwendeten Methoden waren die Stochastic Estimator Technique und die Eigenwertzerlegung des hermiteschen Dirac-Operators.

Kapitel 1

Quantenfeldtheorie auf dem Gitter

In diesem Kapitel wird eine kurze Einführung in die Quantenfeldtheorie und die Bedeutung von Vakuum Erwartungswerten gegeben. Dazu wird erst der Gitterformalismus eingeführt und einige wichtige Rechentechniken vorgezeigt, die wir später gebrauchen werden. Danach werden kurz einige Fakten über Quantenfeldtheorien und den Pfadintegralformalismus dargestellt, die uns eine physikalische Interpretation der Berechnungen, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, erlauben. Danach wird eine kurze Einführung in die Gestalt einer Yang-Mills Theorien gegeben und diese dann auf das Gitter übertragen. Anschließend wird noch einmal genauer auf die Interpretation des Fermionen-Korrelators eingegangen. Am Ende haben wir dann die Wirkung der untersuchten Theorie auf dem Gitter.

Einführungen in die Thematik der Gitterfeldtheorien finden sich in den Standardwerken [20], [11], [23], [9] und [25], an denen sich diese Ausführungen orientieren.

1.1. Das Gitter

Als Punktmenge aufgefasst ist ein hyperkubisches Gitter einer $d + 1$ dimensionalen Raumzeit durch den *Gitterabstandsvektor*

$$a = a^\mu e_\mu = (a^0, a^1, \dots, a^d)$$

und die *Gitterausdehnungen*

$$N = N^\mu e_\mu = (N^0, N^1, \dots, N^d)$$

bestimmt, wenn man es als

$$\Lambda_N^a := \bigotimes_{\mu=0}^d a^\mu \cdot \{0, 1, \dots, N^\mu - 1\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

auffasst. Drei Spezialfälle dieser Definition werden noch angegeben:

$$\begin{aligned} \Lambda^a &:= \bigotimes_{\mu=0}^d a^\mu \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^{d+1} \\ \Lambda_N &:= \bigotimes_{\mu=0}^d \{0, 1, \dots, N^\mu - 1\} \subset \mathbb{N}^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1} \\ \Lambda &:= \mathbb{Z}^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}. \end{aligned}$$

Jedes Gitter Λ_N^a lässt sich bijektiv auf das Gitter Λ_N abbilden. Diese Abbildung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \eta^a : \Lambda_N &\rightarrow \Lambda_N^a \\ (n^0, n^1, \dots, n^d) = n &\mapsto \eta^a(n) = (n^0 \cdot a^0, n^1 \cdot a^1, \dots, n^d \cdot a^d). \end{aligned}$$

Da die Gitter eine diskrete Approximation des kontinuierlichen Raumes sind, müssen wir uns ein paar Gedanken darüber machen, wie wir mit einem Gitter das *Kontinuum* approximieren können. Anschaulich erhöhen wir einfach die Punktdichte in einem Würfel, indem wir die Zahl der Gitterpunkte N erhöhen und die Gitterabstände a entsprechend anpassen.

Haben wir ein endliches Gitter Λ_N^a , so approximiert dies den Würfel

$$W_L := \bigotimes_{\mu=0}^d [0, a^\mu N^\mu] = \bigotimes_{\mu=0}^d [0, L^\mu],$$

wobei

$$L = (L^0, L^1, \dots, L^d)$$

gilt. Der Würfel lässt sich erzeugen, indem wir wie folgt einen *Kontinuums*limes bilden. Die Längen L sind durch das Gitter Λ_N^a eindeutig bestimmt. Nun bilden wir den Limes für $N^\mu \rightarrow \infty$, wobei wir die Gitterkonstante nach $a^\mu = \frac{L^\mu}{N^\mu}$ anpassen. Wir erhalten den Raum

$$\Lambda_\infty^{\frac{L}{N}} := \lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N^{\frac{L}{N}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \bigotimes_{\mu=0}^d \cdot \left\{ 0, 1, \dots, L^\mu - \frac{L^\mu}{N^\mu} \right\},$$

welcher immer mehr gegen W_L konvergiert, wobei er nur eine Menge der Form $W_L \cap \mathbb{Q}^{d+1}$ erreichen kann. Dieser ist in vielen Aspekten *kleiner* als W_L , so hat $\Lambda_\infty^{\frac{L}{N}}$ zum Beispiel verschwindendes Volumen in W_L . Trotzdem sagen wir, dass effektiv

$$\Lambda_\infty^{\frac{L}{N}} = W_L$$

erreicht wird. Diese Aussage ist jedoch vertretbar, da wir uns mit Funktionen(Feldern) auf diesem Würfel beschäftigen. Da sich jegliche Funktionen (stetig, differenzierbar, glatt) durch stückweise lineare Funktionen beliebig genau approximieren lassen, erhalten wir aus dem Abschluss der Menge der Funktionen von $\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N^{\frac{L}{N}}$ nach \mathbb{R} schon mehr Funktionen als wir brauchen. Betrachten wir die Differentiation und die Integration in diesem Limes, gehen diese für passende Funktionen auch in die kontinuierlichen Versionen über.

Für spätere Verwendung definieren wir das zu Λ_N^a assoziierte *Impulsgitter* Γ_N^a . Dieses ist gegeben durch

$$\Gamma_N^a = \bigotimes_{\mu=0}^d \frac{2\pi}{a^\mu N^\mu} \cdot \left\{ 1 - \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor, 2 - \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Die Spezialfälle der Gitter werden hier zu

$$\begin{aligned}\Gamma^a &:= \bigotimes_{\mu=0}^d \left(-\frac{\pi}{a^\mu}, \frac{\pi}{a^\mu} \right] \subset \mathbb{R}^{d+1} \\ \Gamma_N &:= \bigotimes_{\mu=0}^d \frac{2\pi}{N^\mu} \cdot \left\{ 1 - \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor, 2 - \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1} \\ \Gamma &:= (-\pi, \pi]^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}.\end{aligned}$$

Auch für dieses Gitter definieren wir eine Abbildung auf das Einheitsgitter

$$\begin{aligned}\gamma^a : \Lambda_N &\rightarrow \Gamma_N^a \\ n &\mapsto \left(\left(n^0 - \left\lfloor \frac{N^0}{2} \right\rfloor + 1 \right) \cdot \frac{2\pi}{N^0 a^0}, \dots, \left(n^d - \left\lfloor \frac{N^d}{2} \right\rfloor + 1 \right) \cdot \frac{2\pi}{N^d a^d} \right).\end{aligned}$$

Außerdem sollten wir hier noch ein um $\frac{\pi}{aN}$ verschobenes Impuls-Gitter definieren, welches sich für antiperiodische Randbedingungen als nützlich erweisen wird. Dieses ist durch

$$\tilde{\Gamma}_N^a = \bigotimes_{\mu=0}^d \frac{2\pi}{a^\mu N^\mu} \cdot \left\{ \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor, \frac{3}{2} - \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

gegeben und hat die Spezialfälle

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^a &:= \bigotimes_{\mu=0}^d \left(-\frac{\pi}{a^\mu}, \frac{\pi}{a^\mu} \right] \subset \mathbb{R}^{d+1} \\ \tilde{\Gamma}_N &:= \bigotimes_{\mu=0}^d \frac{2\pi}{N^\mu} \cdot \left\{ \frac{1}{2} - \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor, \frac{3}{2} - \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{N^\mu}{2} \right\rfloor - \frac{1}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1} \\ \tilde{\Gamma} &:= (-\pi, \pi]^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}.\end{aligned}$$

Der Übergang ist gegeben durch

$$\tilde{\Gamma}_N^a = \Gamma_N^a - \left(\frac{\pi}{a^0 N^0}, \frac{\pi}{a^1 N^1}, \dots, \frac{\pi}{a^d N^d} \right).$$

Die Abbildung auf das Einheitsgitter ist dann durch

$$\begin{aligned}\gamma^a : \Lambda_N &\rightarrow \tilde{\Gamma}_N^a \\ n &\mapsto \left(\left(n^0 - \left\lfloor \frac{N^0}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{N^0 a^0}, \dots, \left(n^d - \left\lfloor \frac{N^d}{2} \right\rfloor + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{N^d a^d} \right)\end{aligned}$$

gegeben.

1.2. Funktionen auf dem Gitter

Da wir auch Skalar-, Spinor- und weitere Felder auf dem Gitter betrachten wollen, starten wir damit, uns Funktionen auf dem Gitter anzuschauen. Wir interpretieren unser Gitter Λ_N^a immer als in den Würfel W_L eingebettet und unsere Funktion auf das Gitter beschränkt. Sei φ eine solche Funktion auf dem Gitter

$$\varphi : \Lambda_N^a \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dabei verwenden wir, da wir nur diskret viele Auswertungspunkte haben, eine Indexnotation. Außerdem setzen wir aus Gewohnheit $x^0 = t$ und schreiben

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(t, \vec{x}) =: \varphi_{m, \vec{n}} =: \varphi_n \\ \text{mit } \eta^a(n) &= \eta^a(m, \vec{n}) = (t, \vec{x}) = x \end{aligned}$$

Um mit diesem Feld arbeiten zu können, müssen wir einige Rechentechniken aus dem Kontinuum auf das Gitter übertragen, die im Kontinuumslimites ihre ursprüngliche Form wieder ergeben.

Die Differentiation ∂_μ approximieren wir auf dem Gitter durch¹

$$\Delta_\mu \varphi_n := \frac{\varphi_{n+\hat{\mu}} - \varphi_{n-\hat{\mu}}}{2a^\mu}.$$

Hierbei ist $\hat{\mu}$ als $\delta^\nu_\mu e_\nu$ aufzufassen. Für diesen Ausdruck gilt nach Taylorentwicklung für entsprechendes $\varphi : W_L \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Delta_\mu \varphi_n &= \frac{\varphi_{n+\hat{\mu}} - \varphi_{n-\hat{\mu}}}{2a^\mu} = \frac{\varphi(x + a^\mu \hat{\mu}) - \varphi(x - a^\mu \hat{\mu})}{2a^\mu} \\ &= \frac{\varphi(x) + a^\mu \partial_\mu \varphi(x) + \frac{a^{\mu 2}}{2} \partial_\mu^2 \varphi(x) - \left(\varphi(x) - a^\mu \partial_\mu \varphi(x) + \frac{a^{\mu 2}}{2} \partial_\mu^2 \varphi(x) \right) + \mathcal{O}(a^{\mu 3})}{2a^\mu} \\ &= \partial_\mu \varphi_n + \mathcal{O}((a^\mu)^2). \end{aligned}$$

Die diskrete Variante konvergiert demnach im Kontinuumslimites gegen die partielle Ableitung in Richtung μ mit einem Fehler von $\mathcal{O}((a^\mu)^2)$.

Für die Approximation der Integration $\int_{W_L} d^{d+1}x$ definieren wir das diskrete Gegenstück $\int_{\Lambda_N^a}$ durch

$$\int_{x \in \Lambda_N^a} \varphi_x = \sum_{n^0=0}^{N^0-1} a^0 \cdots \sum_{n^d=0}^{N^d-1} a^d \varphi_n = \sum_{n \in \Lambda_N} V_a \cdot \varphi_n.$$

wobei wir indirekt das *Zellenvolumen*

$$V_a := \prod_{\mu=0}^d a^\mu$$

definiert haben. Für eine kürzere Notation verwenden wir im folgenden

$$\int_{x \in \Lambda_N^a} =: \int_x.$$

¹Auf die Subtilitäten, die sich durch die Randpunkte ergeben, wird später eingegangen.

Wir sehen, dass dies für den Kontinuumsimes direkt in die Definition des Riemann Integrals übergeht. Nun können wir Funktionen differenzieren und integrieren.

Eine weitere häufig verwendete Technik ist die Fouriertransformation. Bei ihrer Verwendung müssen wir jedoch die diskrete Fouriertransformation verwenden, die durch

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &: \Gamma_N^a \rightarrow \mathbb{R} \\ \hat{\varphi}_p &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_x e^{-ipx} \varphi_x\end{aligned}$$

gegeben ist. Die Rücktransformation ist dann

$$\varphi_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_{p \in \Gamma_N^a} e^{ipx} \hat{\varphi}_p.$$

Hierbei ist

$$\int_{p \in \Gamma_N^a} =: \int_p$$

die Integration über das Impulsgitter mit dem Zellenvolumen

$$\hat{V}_a^N := \prod_{\mu=0}^d \frac{2\pi}{a^\mu N^\mu} = \frac{(2\pi)^d}{V_a |\Lambda_N|}.$$

Die Integration im assoziierten Impulsraum hat folglich die Form

$$\int_p \hat{\varphi}_p = \sum_{p \in \Gamma_N^a} \hat{\varphi}_p = \hat{V}_a^N \sum_{n \in \Lambda_N} \hat{\varphi}_n$$

Auch hier verwenden wir im folgenden die Notationen

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_p &= \hat{\varphi}_{p^0, \vec{p}} =: \hat{\varphi}_{m, \vec{n}} =: \hat{\varphi}_n \\ \text{mit } \gamma_N^a(n) &= \gamma_N^a(m, \vec{n}) = (p^0, \vec{p}) = p.\end{aligned}$$

Mit diesen Definitionen erhalten wir die nützlichen Relationen²

$$\int_p e^{ip(x-y)} = \frac{(2\pi)^d}{V_a} \delta_{x,y} \quad : \quad \Lambda_N^a \times \Lambda_N^a \rightarrow \left\{ 0, \frac{(2\pi)^d}{V_a} \right\} \quad (1.2.1)$$

$$\int_x e^{-i(p-q)x} = \frac{2\pi}{\hat{V}_a^N} \delta_{p,q} \quad : \quad \Gamma_N^a \times \Gamma_N^a \rightarrow \left\{ 0, \frac{2\pi}{\hat{V}_a^N} \right\} \quad (1.2.2)$$

Die Fouriertransformation lässt sich auch nur auf eine Auswahl von Achsen anwenden, was sich später als nützlich erweisen wird³. Wir wollen an dieser Stelle noch einmal die Relationen (1.2.1) und (1.2.2) verifizieren, um ein wenig mit dem Gitterformalismus vertraut zu werden. Wir be-

²Alle diese Rechnungen gelten analog für die verschobenen Impulsgitter $\tilde{\Gamma}$.

³Transformieren wie nur die ν -te Achse, ist dies dann gegeben durch

$$\hat{\varphi}_{(x^0, \dots, p^\nu, \dots, x^d)} = \frac{a^\nu}{\sqrt{2\pi}} \sum_{x^\nu} e^{-ip^\nu x^\nu} \varphi_{(x^0, \dots, x^\nu, \dots, x^d)} =: \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x^\nu} e^{-ip^\nu x^\nu} \varphi_{(x^0, \dots, x^\nu, \dots, x^d)}$$

ginnen mit

$$\begin{aligned}
 \int_p e^{ip(x-y)} &= \hat{V}_a^N \sum_{p \in \Gamma_N^a} e^{ip(x-y)} = \frac{(2\pi)^d}{V_a |\Lambda_N|} \sum_{n \in \Lambda_N} \prod_{\mu=0}^d \exp \left(i \frac{2\pi}{a^\mu N^\mu} \left(n^\mu - \left\lceil \frac{N^\mu}{2} \right\rceil + 1 \right) (x^\mu - y^\mu) \right) \\
 &= \frac{(2\pi)^d}{V_a |\Lambda_N|} \prod_{\mu=0}^d \sum_{n^\mu=0}^{N^\mu-1} \exp \left(i \frac{2\pi}{a^\mu N^\mu} \left(n^\mu - \left\lceil \frac{N^\mu}{2} \right\rceil + 1 \right) a^\mu (m^\mu - l^\mu) \right) \\
 &= \frac{(2\pi)^d}{V_a |\Lambda_N|} \prod_{\mu=0}^d \exp \left(i \frac{2\pi}{N^\mu} \left(\left\lceil \frac{N^\mu}{2} \right\rceil - 1 \right) (m^\mu - l^\mu) \right) \sum_{n^\mu=0}^{N^\mu-1} e^{i \frac{2\pi}{N^\mu} n^\mu (m^\mu - l^\mu)}.
 \end{aligned}$$

In der ersten Zeile haben wir die Definition des Integrals und explizit das Impuls-Gitter eingesetzt. In der zweiten Zeile haben wir das Raumbgitter eingesetzt und darauffolgend zur dritten Zeile umgeformt. Die Summe in der dritten Zeile ist eine geometrische Reihe, die wir im Fall $x^\mu \neq y^\mu$, also $m^\mu \neq l^\mu$ direkt ausrechnen können zu

$$\begin{aligned}
 \sum_{n^\mu=0}^{N^\mu-1} e^{i \frac{2\pi}{N^\mu} n^\mu (m^\mu - l^\mu)} &= \sum_{n^\mu=0}^{N^\mu-1} \left(e^{i \frac{2\pi}{N^\mu} (m^\mu - l^\mu)} \right)^{n^\mu} \\
 &= \frac{1 - \left(e^{i \frac{2\pi}{N^\mu} (m^\mu - l^\mu)} \right)^{N^\mu}}{1 - e^{i \frac{2\pi}{N^\mu} (m^\mu - l^\mu)}} = 0.
 \end{aligned}$$

Im Fall $x^\mu = y^\mu$, also $m^\mu = l^\mu$ erhalten wir

$$\sum_{n^\mu=0}^{N^\mu-1} e^{i \frac{2\pi}{N^\mu} n^\mu (m^\mu - l^\mu)} = \sum_{n^\mu=0}^{N^\mu-1} 1 = N^\mu$$

woraus

$$\sum_{n^\mu=0}^{N^\mu-1} e^{i \frac{2\pi}{N^\mu} n^\mu (m^\mu - l^\mu)} = N^\mu \delta_{x^\mu, y^\mu}.$$

und

$$\int_p e^{ip(x-y)} = \frac{(2\pi)^d}{V_a |\Lambda_N|} \prod_{\mu=0}^d N^\mu \delta_{x^\mu, y^\mu} = \frac{(2\pi)^d}{V_a} \delta_{x, y}$$

folgt. Wir haben die Exponentialfunktion vor der Summe direkt zu 1 gesetzt, da diese nur im Fall $x^\mu = y^\mu$ einen Wert liefert und wir haben $\prod_{\mu=0}^d \delta_{x^\mu, y^\mu}$ mit $\delta_{x, y}$ identifiziert. Für (1.2.2) gilt analoges. Wir bemerken zuerst, dass

$$\begin{aligned}
 p^\mu - q^\mu &= \frac{2\pi}{a^\mu N^\mu} \left(m^\mu - \left\lceil \frac{N^\mu}{2} \right\rceil + 1 \right) - \frac{2\pi}{a^\mu N^\mu} \left(l^\mu - \left\lceil \frac{N^\mu}{2} \right\rceil + 1 \right) \\
 &= \frac{2\pi}{a^\mu N^\mu} (m^\mu - l^\mu),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_x e^{-i(p-q)x} &= V_a \prod_{\mu=0}^d \sum_{n^\mu=0}^{N^\mu-1} \exp \left(\frac{2\pi}{a^\mu N^\mu} (m^\mu - l^\mu) n^\mu \right) \\
 &= V_a |\Lambda_N| \delta_{p, q} = \frac{(2\pi)^d}{\hat{V}_a^N} \delta_{p, q}.
 \end{aligned}$$

Wir sehen noch eine Eigenheit der diskreten Delta-Funktion⁴

$$\begin{aligned}\int_y f(y) \delta_{x,y} &= V_a f(x) \\ \int_q f(q) \delta_{p,q} &= \hat{V}_a^N f(p).\end{aligned}$$

Dies kommt daher, dass wir mit $\delta_{x,y}$ und $\delta_{p,q}$ das Kronecker-Delta meinen, wobei wir im Kontinuum die Delta-Distribution bekommen wollen. Dafür können wir dann die Funktionen $\delta_{x,y}^C$, $\delta_{p,q}^C$ definieren⁵, die im Kontinuumslimites gegen die Delta-Distributionen $\delta^{(n)}(x-y)$ und $\delta^{(n)}(p-q)$ konvergieren. Diese sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\delta_{x,y}^C &= \frac{1}{V_a} \delta_{x,y} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_p e^{ip(x-y)} \\ \delta_{p,q}^C &= \frac{1}{\hat{V}_a^N} \delta_{p,q} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_x e^{-i(p-q)x}\end{aligned}$$

und erfüllen wie erwartet

$$\begin{aligned}\int_y f(y) \delta_{x,y}^C &= f(x) \\ \int_q f(q) \delta_{p,q}^C &= f(p).\end{aligned}$$

Damit lassen sich direkt die Fourier Hin- und Rücktransformation prüfen. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_p e^{ipx} \hat{\varphi}_p &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_p e^{ipx} \int_y e^{-ipy} \varphi_y = \int_y \varphi_y \frac{1}{(2\pi)^d} \int_p e^{ip(x-y)} \\ &= \int_y \varphi_y \delta_{x,y}^C = \varphi_x\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \int_x e^{-ipx} \varphi_x &= \int_x e^{-ipx} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_q e^{iqx} \hat{\varphi}_q = \int_q \hat{\varphi}_q \frac{1}{(2\pi)^d} \int_x e^{-i(p-q)x} \\ &= \int_q \hat{\varphi}_q \delta_{p,q}^C = \hat{\varphi}_p.\end{aligned}$$

Eine weitere Relation, die wir später benötigen, ist die Diagonalgestalt der diskretisierten Ableitung Δ_μ , wenn wir sie als Matrix und das Integral \int_x als Matrixmultiplikation auffassen. Das ist realisierbar, wenn wir

$$(\Delta_\mu)_{x,y} = \frac{1}{2a^\mu} (\delta_{x,y-a^\mu \hat{\mu}}^C - \delta_{x,y+a^\mu \hat{\mu}}^C) \quad (1.2.3)$$

⁴In diesem Fall können wir für endliche Gitter wirklich von einer Funktion sprechen.

⁵Ich verwende hier den Index C und nicht K, da das K schnell mit *Kronecker* in Verbindung gebracht werden kann.

setzen, womit dann direkt

$$\begin{aligned}\Delta_\mu \varphi_x &= \int_y (\Delta_\mu)_{x,y} \varphi_y \\ &= \int_y \frac{1}{2a^\mu} (\delta_{x,y-a^\mu \hat{\mu}}^C - \delta_{x,y+a^\mu \hat{\mu}}^C) \varphi_y \\ &= \frac{1}{2a^\mu} (\varphi_{x+a^\mu \hat{\mu}} - \varphi_{x-a^\mu \hat{\mu}})\end{aligned}$$

folgt. Analog lässt sich die Fouriertransformation als unitäre lineare Transformation mit den Einträgen

$$\mathcal{F}_{p,x} = \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}^d}$$

auffassen, denn damit folgt

$$\hat{\varphi}_p = \int_x \mathcal{F}_{p,x} \varphi_x = \int_x \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}^d} \varphi_x$$

und

$$\varphi_x = \int_p \mathcal{F}_{x,p}^{-1} \hat{\varphi}_p = \int_x \frac{e^{ixp}}{\sqrt{2\pi}^d} \hat{\varphi}_p = \int_p \mathcal{F}_{x,p}^\dagger \hat{\varphi}_p.$$

Wir können uns damit $\mathcal{F}_{p,x}$ als unitäre Matrix vorstellen, für die

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= \mathcal{F} \varphi \\ \varphi &= \mathcal{F}^{-1} \hat{\varphi} \\ \mathcal{F}^{-1} &= \mathcal{F}^\dagger\end{aligned}$$

gilt. Nun schauen wir, wie sich die Matrix $\delta_\mu^C(s)$ gegeben durch

$$(\delta_\mu^C(s))_{x,y} := \delta_{x,y-sa^\mu \hat{\mu}}^C \quad (1.2.4)$$

für $s \in \Lambda_{N^\mu}^{a^\mu}$ transformiert. Wir sehen ebenfalls, dass diese Definition auf einem endlichen Gitter nicht direkt klar ist, da wir am Rand des Gitters auf Gitterpunkte außerhalb des Gitters verweisen würden. Wählen wir jedoch periodische oder antiperiodische Randbedingungen für unsere Funktionen, gilt

$$\varphi_{x+N^\mu a^\mu \hat{\mu}} = b \varphi_x$$

mit $b = -1$ für antiperiodische und $b = 1$ für periodische Randbedingungen. Damit setzen wir dann für $s > 0$

$$(\delta_\mu^C(s))_{x,y} = \begin{cases} \delta_{x,y-sa^\mu \hat{\mu}}^C & \text{falls } y^\mu - sa^\mu \geq 0 \\ b \delta_{x,y+(N^\mu-s)a^\mu \hat{\mu}}^C & \text{sonst} \end{cases}$$

und analog

$$(\delta_\mu^C(-s))_{x,y} = \begin{cases} \delta_{x,y+sa^\mu \hat{\mu}}^C & \text{falls } y^\mu + sa^\mu \leq (N^\mu - 1)a^\mu \\ b \delta_{x,y-(N^\mu-s)a^\mu \hat{\mu}}^C & \text{sonst} \end{cases}.$$

Diese Definition ist durch die Randbedingungen erzwungen, denn es gilt zum Beispiel für $y^\mu < sa^\mu$

$$\int_x \varphi_x (\delta_\mu^C(s))_{x,y} = \varphi_{y-sa^\mu \hat{\mu}} = b \varphi_{y+(N^\mu-s)a^\mu \hat{\mu}}.$$

Die Fourier-Transformation nennen wir

$$(\hat{\delta}_\mu^C(s))_{p,q} := (\mathcal{F}\delta_\mu^C\mathcal{F}^\dagger)_{p,q}.$$

Das Ergebnis berechnet sich für $s > 0$ zu

$$\begin{aligned} (\hat{\delta}_\mu^C(s))_{p,q} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_x \int_y e^{-ipx} (\delta_\mu^C(-s))_{x,y} e^{iqy} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\int_{y^\mu \geq sa^\mu} \int_x e^{-ipx} \delta_{x,y-sa^\mu}^\mu e^{iqy} + b \int_{y^\mu \leq (s-1)a^\mu} \int_x e^{-ipx} \delta_{x,y+(N^\mu-s)a^\mu}^\mu e^{iqy} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} e^{isa^\mu p^\mu} \left(\int_{y^\mu \geq sa^\mu} e^{-i(p-q)y} + b \int_{y^\mu \leq (s-1)a^\mu} e^{-i(p-q)y} e^{-ip^\mu N^\mu a^\mu} \right). \end{aligned}$$

Es ist nun wichtig, welches Impulsgitter wir der Fouriertransformation zugrundelegen, denn

$$p^\mu N^\mu a^\mu = \begin{cases} \frac{2\pi}{N^\mu a^\mu} k^\mu N^\mu a^\mu & \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \text{für } p^\mu \in \Gamma_{N^\mu}^{a^\mu} \\ \frac{2\pi}{N^\mu a^\mu} (k^\mu - \frac{1}{2}) N^\mu a^\mu & \in 2\pi\mathbb{Z} - \pi \quad \text{für } p^\mu \in \tilde{\Gamma}_{N^\mu}^{a^\mu} \end{cases}.$$

Wählen wir für periodische Randbedingungen das normale und für antiperiodische Randbedingungen das verschobene Gitter, so lassen sich die Integrale zusammenführen, da

$$be^{-ip^\mu N^\mu a^\mu} = \begin{cases} e^{-i2\pi k^\mu} = 1 & \text{für } p^\mu \in \Gamma_{N^\mu}^{a^\mu} \\ -e^{-i2\pi k^\mu + i\pi} = 1 & \text{für } p^\mu \in \tilde{\Gamma}_{N^\mu}^{a^\mu} \end{cases}$$

Damit folgt dann

$$(\hat{\delta}_\mu^C(s))_{p,q} = \frac{1}{(2\pi)^d} e^{isa^\mu p^\mu} \int_y e^{-i(p-q)y} = e^{isa^\mu p^\mu} \delta_{p,q}^C,$$

wenn wir uns merken, das passende Impulsgitter zu verwenden. Analog zeigt man

$$(\hat{\delta}_\mu^C(-s))_{p,q} = e^{-isa^\mu p^\mu} \delta_{p,q}^C.$$

Dies entspricht dem Verschiebesatz der Fouriertransformation. Es ist von Bedeutung zu bemerken, dass keine Summation über μ im Exponenten ausgeführt wird. Demzufolge gilt

$$\mathcal{F}\delta_\mu^C(s) = \hat{\delta}_\mu^C(s)\mathcal{F}. \quad (1.2.5)$$

Weiterhin können wir nun Δ_μ in der kompakten Form

$$\Delta_\mu = \frac{1}{2a^\mu} (\delta_\mu^C(1) - \delta_\mu^C(-1))$$

ausdrücken, womit direkt

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}\Delta_\mu)_{p,x} &= \frac{1}{2a^\mu} (\mathcal{F}(\delta_\mu^C(1) - \delta_\mu^C(-1)))_{p,x} = \frac{1}{2a} \left((\hat{\delta}_\mu^C(1) - \hat{\delta}_\mu^C(-1)) \mathcal{F} \right)_{p,x} \\ &= i \frac{\sin(a^\mu p^\mu)}{a^\mu} (\hat{\delta}_\mu^C \mathcal{F})_{p,x} =: (\hat{\Delta}_\mu \mathcal{F})_{p,x} \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

folgt.

1.3. Quantenfeldtheorien auf dem Gitter

Die entscheidenden Größen, die sich mit Quantenfeldtheorien auf dem Gitter berechnen lassen, sind Massen von Teilchen. Diese Massen lassen sich dann via des *Kontinuumslimes* auf reale Quantenfeldtheorien übertragen.

Das Gitter Λ_N^a , auf dem wir unsere Theorie definieren, hat $d = 3$ mit

$$\begin{aligned} a &= (a, a, a, a) \\ N &= (T, N, N, N) \end{aligned}$$

mit der 0-Komponente als Zeitrichtung. Von der Notation her werden wir das Gitter in Λ_N^{3a} und Λ_T^{1a} aufteilen, wobei Λ_N^{3a} die Raumachsen und Λ_T^{1a} die Zeitachse enthält. Wir schreiben dann einen Punkt $x \in \Lambda_N^a$ als

$$x = (t, \vec{x}) \in \Lambda_T^{1a} \times \Lambda_N^{3a}.$$

1.3.1. Das Pfadintegral

Ein Standard-Weg, eine Quantenfeldtheorie aufzustellen, ist es, sich eine skalare Wirkung S als Integral einer lokalen Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(x, \varphi^k(x), \lambda^k(x), \partial_\mu \varphi^k(x), \partial_\mu \lambda^k(x), \dots)$ zu definieren, die von den bosonischen Feldern φ^k , den fermionischen Feldern λ^k mit Spin $\frac{1}{2}$ und ihren Ableitungen an einem festen Raumzeitpunkt abhängt. Der zugrundeliegende Raum wird kanonisch als der Minkowski-Raum M^4 gewählt, mit der Metrik

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Damit haben wir

$$S[\varphi^k, \lambda^k] = \int_{M^4} d^4x \mathcal{L}(x, \varphi^k(x), \lambda^k(x), \partial_\mu \varphi^k(x), \partial_\mu \lambda^k(x), \dots).$$

Aus dieser Wirkung lässt sich eine Hamilton-Funktion H herleiten, die nun von den Feldern φ^k , λ^k und zu den Feldern kanonisch konjugierten *Impulsen*

$$\begin{aligned} \pi^k(x) &:= \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi^k(x), \lambda^k(x))}{\partial(\partial_0 \varphi^k(x))} \\ \omega^k(x) &:= \frac{\partial \mathcal{L}(\varphi^k(x), \lambda^k(x))}{\partial(\partial_0 \lambda^k(x))} \end{aligned}$$

abhängt. Die Felder sind so gewählt, dass sie als Operatorfelder $\hat{\varphi}^k(\vec{x})$, $\hat{\pi}^k(\vec{x})$, $\hat{\lambda}^k(\vec{x})$ und $\hat{\omega}^k(\vec{x})$ aufgefasst im Heisenberg-Bild den kanonischen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^k(\vec{x}, t) &= e^{i\hat{H}t} \hat{\varphi}^k(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t} & \hat{\pi}^k(\vec{x}, t) &= e^{i\hat{H}t} \hat{\pi}^k(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t} \\ \hat{\lambda}^k(\vec{x}, t) &= e^{i\hat{H}t} \hat{\lambda}^k(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t} & \hat{\omega}^k(\vec{x}, t) &= e^{i\hat{H}t} \hat{\omega}^k(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t} \end{aligned}$$

gehören und ohne Konsistenzlücken die Kommutatorrelationen

$$[\hat{\varphi}^k(\vec{x}, t), \hat{\pi}^j(\vec{y}, t)] = \{\hat{\lambda}^k(\vec{x}, t), \hat{\omega}^j(\vec{y}, t)\} = i\delta^{k,j}\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \quad (1.3.1)$$

$$[\hat{\varphi}^k(\vec{x}, t), \hat{\varphi}^j(\vec{y}, t)] = [\hat{\pi}^k(\vec{x}, t), \hat{\pi}^j(\vec{y}, t)] = 0 \quad (1.3.2)$$

$$\{\hat{\lambda}^k(\vec{x}, t), \hat{\lambda}^j(\vec{y}, t)\} = \{\hat{\omega}^k(\vec{x}, t), \hat{\omega}^j(\vec{y}, t)\} = 0 \quad (1.3.3)$$

erfüllen. Dies kann nun naiv durch das Lösen der Bewegungsgleichungen oder systematisch mit Hilfe von Dirac-Klammern getan werden. Hat nun der Hamilton Operator eine bestimmte Form, die auch bei unserer Theorie gegeben ist, so ergibt sich die Quantenfeldtheorie, die zum Hamilton Operator \hat{H} gehört, durch das übliche Pfadintegral, in dem wir die Wirkung verwenden, mit der wir begonnen haben⁶. Dies führt uns dann zu der bekannten Form⁷

$$\langle \text{vac}(t = \infty) | T(f[\hat{\varphi}^k, \hat{\lambda}^k]) | \text{vac}(t = -\infty) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\lambda^\dagger f[\varphi^k, \lambda^k] e^{iS[\varphi^k, \lambda^k]} \quad (1.3.4)$$

für den zeitgeordneten Vakuumerwartungswert von $f[\hat{\varphi}^k, \hat{\lambda}^k]$. Ein Beispiel wäre

$$f[\hat{\varphi}^k, \hat{\lambda}^k] = \int d^3x \hat{\lambda}^k(t, \vec{x}) (\hat{\lambda}^\dagger)^l(0, \vec{0}) \quad (1.3.5)$$

Hierbei ist \mathcal{Z} so gewählt, dass $\langle \text{vac}(t) | \text{vac}(t) \rangle = 1$ gilt, also

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\lambda^\dagger e^{iS[\varphi^k, \lambda^k]}$$

und die Pfadintegraldifferentiale sind durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\varphi &= \prod_{x \in M^4} \prod_k d\varphi^k(x) \\ \mathcal{D}\lambda &= \prod_{x \in M^4} \prod_k d\lambda^k(x) \\ \mathcal{D}\lambda^\dagger &= \prod_{x \in M^4} \prod_k d\lambda^{\dagger k}(x) \end{aligned}$$

gegeben. Die Integration über die Fermionen Felder wird mit Graßmann-Zahlen ausgeführt, welche im nächsten Abschnitt besprochen wird.

Diese Formel wird verwendet, um Ergebnisse von Streuexperimenten zu berechnen. Dabei will man wissen, wie wahrscheinlich es ist, wenn man das Experiment mit einer Teilchenkonstellation beginnt, die von $|\psi(t = -\infty)\rangle$ am *Anfang* beschrieben wird, die Teilchenkonstellation zu erreichen, die durch $|\psi(t = \infty)\rangle$ am *Ende* beschrieben wird. Man möchte also

$$\langle \psi(t = \infty) | \psi(t = -\infty) \rangle \quad (1.3.6)$$

⁶In [26] Kapitel 9 befindet sich eine Diskussion dieser Tatsache. Ist die Matrix \mathcal{A} im Allgemeinen feldabhängig, so ergeben sich zusätzliche Terme zu S , die zusätzliche Vertices. Diese Vertices werden dann in der Gitter-Theorie mit mindestens einem zusätzlichen Faktor a der Gitter-Länge unterdrückt.

⁷Die Wirkung $S[\varphi^k, \lambda^k]$ enthält noch einen unterdrückten zusätzlichen Term der Form $S[\varphi^k, \lambda^k] \rightarrow S[\varphi^k, \lambda^k] + i\varepsilon F[\varphi^k, \lambda^k]$, was durch das Skalarprodukt der wechselwirkenden Felder im *Zeitunendlichen* mit dem freien Vakuum erzeugt wird. In den späteren Ergebnissen wird dann $\varepsilon \rightarrow 0$ gefordert [26].

berechnen. Nun lässt sich zeigen, dass wir die Zustände am Anfang und am Ende als freie Teilchen modellieren können, diese sich also durch Operatoren aus dem Vakuum erzeugen lassen. Wir brauchen also nur noch eine Formel für $\langle \text{vac}(t = \infty) | T(f[\hat{\varphi}^k, \hat{\lambda}^k]) | \text{vac}(t = -\infty) \rangle$, wobei die Operatoren in $T(f[\hat{\varphi}^k, \hat{\lambda}^k])$ uns die Anfangs- und Endzustände passend präparieren. Da die Herleitung der Pfadintegralformeln auf dem Gitter in analoger Weise geschieht, lässt sich diese auf das Gitter übernehmen, so dass auf dem oben beschriebenen Gitter

$$\langle \text{vac}(t = T) | T(f[\hat{\varphi}^k, \hat{\lambda}^k]) | \text{vac}(t = 0) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}\varphi^k \mathcal{D}\lambda^k \mathcal{D}\lambda^{\dagger k} f[\varphi^k, \lambda^k] e^{-iS[\varphi^k, \lambda^k]}$$

mit den Differentialen

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\varphi &= \prod_{\eta^a(n) \in \Lambda_N^a} \prod_k d\varphi_n^k \\ \mathcal{D}\lambda &= \prod_{\eta^a(n) \in \Lambda_N^a} \prod_k d\lambda_n^k \\ \mathcal{D}\lambda^\dagger &= \prod_{\eta^a(n) \in \Lambda_N^a} \prod_k d\lambda_n^{\dagger k} \end{aligned}$$

gilt. Wir sehen, dass hier der *Anfang* und das *Ende* bei endlichen und nicht den gewünschten unendlichen Werten liegen, da das Gitter nur endliche Ausdehnung hat. Die Berechnung des Pfadintegrals im wechselwirkungsfreien Fall ist nahezu eine Trivialität, da sie sich auf Gauß-Integrale reduziert, wohingegen sie im wechselwirkenden Fall ein ungelöstes Problem ist, wenn wir die Perturbationsreihe nicht als Lösung sehen.

Dass die fermionische Integration andere Eigenschaften als die bosonische hat, zeigt die folgende Überlegung. Zur Herleitung der Pfadintegralformel werden vollständige Basen der Felder und ihrer kanonisch konjugierten Impulse benötigt. Haben wir nun Eigenzustände $|\lambda\rangle$ zu $\hat{\lambda}_n^k$ mit den Werten λ_n^k , es gilt also

$$\hat{\lambda}_n^k |\lambda\rangle = \lambda_n^k |\lambda\rangle.$$

Nehmen wir nun an, die λ_n^k wären kommutierende Zahlen, folgt ein Widerspruch mit den kanonischen Antikommutatorregeln, da

$$\{\hat{\lambda}_n^k, \hat{\lambda}_m^l\} |\lambda\rangle = \{\lambda_n^k, \lambda_m^l\} |\lambda\rangle = 2\lambda_n^k \lambda_m^l |\lambda\rangle.$$

folgt, was im Widerspruch zu (1.3.3)

$$\{\hat{\lambda}_n^k, \hat{\lambda}_m^l\} |\lambda\rangle = 0 |\lambda\rangle$$

steht. Um dies zu verhindern, nehmen wir die *Feldwerte* λ_n^k sowie die Werte der konjugierten Felder ω_n^k als Elemente aus einer Grassmann-Algebra an. Diese *Zahlen* erfüllen dann als Elemente einer Grassmann-Algebra

$$\{\lambda_n^k, \lambda_m^l\} = \{\lambda_n^k, \omega_m^l\} = \{\omega_n^k, \omega_m^l\} = 0.$$

Es mag verwirrend erscheinen, dass hier auch $\{\lambda_n^k, \omega_m^l\}$ verschwindet, doch dies muss nicht der Antikommutatorrelation entsprechen, da $|\lambda\rangle$ und $|\omega\rangle$ unterschiedliche Basen des Hilbertraumes

sind. Dies ist die Übertragung der Antikommutatorrelationen auf die Feldwerte, wodurch sich Eigenzustände $|\lambda\rangle$ und $|\omega\rangle$ mit beliebigen Feldwerten konstruieren lassen.

1.3.2. Integration von Grassmann-Variablen

Da wir hier mit Majorana-Fermionen arbeiten, können wir die Ergebnisse wie in [11] nicht direkt übernehmen, sondern müssen sie auf den Fall der Majorana-Fermionen anpassen. Angepasste Ergebnisse sind in [10] und [16] zu finden.

Angenommen wir haben die Menge $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ von Grassmann-Variablen. Diese Variablen sind dadurch definiert, dass sie

$$\{\xi_n, \xi_m\} = 0$$

erfüllen. Funktionen in diesen Grassman-Variablen sind höchstens Polynome N -ter Ordnung, da Quadrate verschwinden und wir können damit jede Funktion in der Form

$$f(\xi_1, \dots, \xi_N) = \xi_N g(\xi_1, \dots, \xi_{N-1}) + h(\xi_1, \dots, \xi_{N-1})$$

schreiben, also höchstens linear in jeder Variable. Dies lässt sich auch schreiben als

$$f(\xi_1, \dots, \xi_N) = f + f_i \xi^i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N f_{i,j} \xi^i \xi^j + \dots + f_{1,2,\dots,N} \xi^1 \xi^2 \dots \xi^N.$$

Für diese Variablen gibt es eine antikommutierende Ableitung, die sich durch

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^n}, \xi^m \right\} = \delta_n^m$$

in fast gewöhnlicher Weise definieren lässt. Es ist sinnvoll die Ableitung als antikommutierend zu definieren, so dass

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^n}, \frac{\partial}{\partial \xi^m} \right\} = 0.$$

gilt. Dies wird später verwendet, um Formeln für die Erwartungswerte zu bestimmen.

Wir benötigen noch die Ableitung der Exponentialfunktion von Grassmann-Variablen. Seien dazu $\{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ und $\{\zeta_1, \dots, \zeta_N\}$ zwei Sätze von Grassmann-Variablen, die auch untereinander antikommutieren. Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \zeta_j \right) &= \prod_{j=1}^N \exp(\xi_j \zeta_j) = \prod_{j=1}^N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\xi_j \zeta_j)^n \right) \\ &= \prod_{j=1}^N (1 + \xi_j \zeta_j). \end{aligned}$$

Damit zeigen wir dann, dass

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi_l} \exp \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \zeta_j \right) &= \frac{\partial}{\partial \xi_l} \prod_{j=1}^N (1 + \xi_j \zeta_j) = \zeta_l \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^N (1 + \xi_j \zeta_j) \\
 &= \zeta_l (1 + \xi_l \zeta_l) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^N (1 + \xi_j \zeta_j) \\
 &= \zeta_l \exp \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \zeta_j \right)
 \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

für die Ableitung der Exponentialfunktion gilt.

Die Integration lässt sich nicht analog zu der auf \mathbb{R} übernehmen. Wir wollen aber zwei Randbedingungen erfüllt haben. Erstens soll das Integral normierbar sein, also wählen wir

$$\int d\xi^n \xi^n = 1.$$

Zweitens soll, analog zu der Integration von schnell abfallenden Funktionen im \mathbb{R}^n , das Integral über Randterme verschwinden. Wir verlangen also

$$\int d\xi^n \frac{\partial}{\partial \xi^n} f(\xi^1, \dots, \xi^N) = 0$$

woraus dann mit $f(\xi^1, \dots, \xi^N) = \xi^n$ direkt

$$\int d\xi^n 1 = 0$$

folgt. Wir sehen, dass die so definierte Integration mit der Differentiation übereinstimmt. Deswegen fordern wir auch hier die obige Antikommutation der Differentiale

$$\{d\xi^n, d\xi^m\} = 0.$$

Dies verrät uns auch, wie das *Volumenelement* dieser Variablen transformiert. Es gilt

$$\int d\xi^N \dots d\xi^2 d\xi^1 = \frac{\partial}{\partial \xi^N} \dots \frac{\partial}{\partial \xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi^1}.$$

Transformieren wir jetzt so von ξ^i nach ζ^i , so dass der lineare Anteil die Form

$$\zeta^n = S^n_m \xi^m + \sigma^n$$

mit nichtsingulärer \mathbb{C} -Matrix S und den Grassmann-Zahlen σ^n hat, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial \xi^n} = \frac{\partial \zeta^m}{\partial \xi^n} \frac{\partial}{\partial \zeta^m} = S^m_n \frac{\partial}{\partial \zeta^m}.$$

Wir erhalten nach der Transformation für das Volumenelement

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \xi^{n_N}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi^{n_2}} \frac{\partial}{\partial \xi^{n_1}} &= S^{n_N}_N \frac{\partial}{\partial \zeta^{n_N}} \cdots S^{n_2}_2 \frac{\partial}{\partial \zeta^{n_2}} S^{n_1}_1 \frac{\partial}{\partial \zeta^{n_1}} \\
 &= S^{n_N}_N \cdots S^{n_2}_2 S^{n_2}_2 \frac{\partial}{\partial \zeta^{n_N}} \cdots \frac{\partial}{\partial \zeta^{n_2}} \frac{\partial}{\partial \zeta^{n_1}} \\
 &= \varepsilon_{n_N, \dots, n_2, n_1}^{N, \dots, 2, 1} S^{n_N}_N \cdots S^{n_2}_2 S^{n_2}_2 \frac{\partial}{\partial \zeta^N} \cdots \frac{\partial}{\partial \zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta^1} \\
 &= \det(S) \frac{\partial}{\partial \zeta^N} \cdots \frac{\partial}{\partial \zeta^2} \frac{\partial}{\partial \zeta^1}.
 \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

In der zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, dass die Matrix aus \mathbb{C} -Zahlen besteht. Danach haben wir das Antikommutieren ausgenutzt, wobei $\varepsilon_{n_N, \dots, n_2, n_1}^{N, \dots, 2, 1}$ das Vorzeichen der Permutation von n_N, \dots, n_2, n_1 bezüglich $N, \dots, 2, 1$ ist. Damit steht dort nichts anderes, als die Determinante der Matrix S . Hiermit gilt es nun Integrale in der Form

$$W[\theta] := \int d\xi^N \cdots d\xi^1 \exp \left(\frac{1}{2} (\xi^T_m M^m_n \xi^n + \theta^T_n \xi^n - \xi^T_n \theta^n) \right) \tag{1.3.9}$$

$$\langle \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_l} \rangle_F := \frac{\int d\xi^N \cdots d\xi^1 \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_l} \exp \left(\frac{1}{2} \xi^T_m M^m_n \xi^n \right)}{W[0]} \tag{1.3.10}$$

zu lösen. Betrachten wir das erste Integral. Da alle θ und ξ paarweise antikommutieren und $\xi^T_n \theta^n$ eindimensional ist, gilt

$$\xi^T_n \theta^n = (\xi^T_n \theta^n)^T = -\theta^T_n \xi^n$$

und wir können es als

$$W[\theta] = \int d\xi^N \cdots d\xi^1 \exp \left(\frac{1}{2} \xi^T_m M^m_n \xi^n + \theta^T_n \xi^n \right) \tag{1.3.11}$$

schreiben. Die Größe $W[\theta]$ nennt man das *erzeugende Funktional*, da sich damit alle fermionischen Mittelwerte herleiten lassen. Hier ist M eine nichtsinguläre antisymmetrische \mathbb{C} -Matrix und θ^n sind Grassmann-Variablen. Ist M nicht antisymmetrisch, so können wir M durch den antisymmetrischen Anteil von M ersetzen, da

$$\begin{aligned}
 \xi^T_m M^m_n \xi^n &= \sum_m M^m_n \xi^m \xi^n = \frac{1}{2} \sum_m M^m_n (\xi^m \xi^n - \xi^n \xi^m) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_m (M^m_n \xi^m \xi^n - M^m_n \xi^n \xi^m) = \frac{1}{2} \sum_m (M^m_n \xi^m \xi^n - M^n_m \xi^m \xi^n) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_m \xi^m (M^m_n - M^n_m) \xi^n = \frac{1}{2} \xi^T_m (M^m_n - M^{T^m}_n) \xi^n,
 \end{aligned}$$

genau dem antisymmetrischen Anteil von M entspricht. Um dieses Integral nun zu lösen, transformieren wir ξ^n zu

$$\begin{aligned}
 \zeta^n &= \xi^n - (M^{-1})^n_m \theta^m \\
 \zeta^T_n &= \xi^T_n - \theta^T_m (M^{-1})^m_n = \xi^T_n + \theta^T_m (M^{-1})^m_n.
 \end{aligned}$$

Schreiben wir dies dann in Vektornotation mit unterdrückten Indizes, erhalten wir

$$\begin{aligned} W[\theta] &= \int d\zeta^N \cdots d\zeta^1 \exp \left(\frac{1}{2} (\zeta^T M \zeta + \theta^T \zeta - \zeta^T \theta) \right) \\ \zeta &= \zeta - M^{-1} \theta \\ \zeta^T &= \zeta^T + \theta^T M^{-1}. \end{aligned}$$

womit wir dann für den Exponenten

$$\begin{aligned} &(\zeta^T - \theta^T M^{-1}) M (\zeta + M^{-1} \theta) + \theta^T (\zeta + M^{-1} \theta) - (\zeta^T - \theta^T M^{-1}) \theta \\ &= (\zeta^T M - \theta^T) (\zeta + M^{-1} \theta) + \theta^T \zeta + \theta^T M^{-1} \theta - \zeta^T \theta + \theta^T M^{-1} \theta \\ &= \zeta^T M \zeta - \theta^T \zeta + \zeta^T \theta - \theta^T M^{-1} \theta + \theta^T \zeta + 2\theta^T M^{-1} \theta - \zeta^T \theta \\ &= \zeta^T M \zeta + \theta^T M^{-1} \theta \end{aligned}$$

erhalten. Damit muss jetzt noch

$$W[\theta] = \exp \left(\frac{1}{2} \theta^T M^{-1} \theta \right) \int d\zeta^N \cdots d\zeta^1 \exp \left(\frac{1}{2} \zeta^T M \zeta \right)$$

berechnet werden. Das Ergebnis ist durch die Terme $\mathcal{O}(\zeta^N)$ in der Entwicklung der Exponentialfunktion gegeben. Wir erhalten damit direkt für ungerade N , dass

$$W[\theta] = 0.$$

Für $N = 2K$ gilt dann aber

$$W[\theta] = \exp \left(\frac{1}{2} \theta^T M^{-1} \theta \right) \frac{1}{2^K K!} \int d\zeta^N \cdots d\zeta^1 (\zeta^T M \zeta)^K.$$

Der Integrand lässt sich analog zu (1.3.8) umschreiben zu

$$\begin{aligned} (\zeta^T M \zeta)^K &= \zeta^{n_1} M_{n_1 m_1} \zeta^{m_1} \zeta^{n_2} M_{n_2 m_2} \zeta^{m_2} \cdots \zeta^{n_K} M_{n_K m_K} \zeta^{m_K} \\ &= M_{n_1 m_1} M_{n_2 m_2} \cdots M_{n_K m_K} \zeta^{n_1} \zeta^{m_1} \cdots \zeta^{n_K} \zeta^{m_K} \\ &= M_{n_1 m_1} M_{n_2 m_2} \cdots M_{n_K m_K} \varepsilon_{1,2,\dots,N}^{n_1, m_1, \dots, n_K, m_K} \zeta^1 \zeta^2 \cdots \zeta^N \\ &= 2^K K! \text{Pf}(M) \zeta^1 \zeta^2 \cdots \zeta^N. \end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Hier haben wir den Pfaffian definiert. Dieser ist für eine quadratische $2K \times 2K$ Matrix M gegeben durch

$$\text{Pf}(M) := \frac{1}{2^K K!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}(1, \dots, 2K)} \text{sign}(\sigma) M_{\sigma(1), \sigma(2)} \cdots M_{\sigma(2K-1), \sigma(2K)}.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} W[\theta] &= \text{Pf}(M) \exp \left(\frac{1}{2} \theta^T M^{-1} \theta \right) \int d\zeta^N \cdots d\zeta^1 \zeta^1 \zeta^2 \cdots \zeta^N \\ &= \text{Pf}(M) \exp \left(\frac{1}{2} \theta^T M^{-1} \theta \right). \end{aligned} \tag{1.3.13}$$

Es gilt außerdem die schnell gezeigte Gleichheit

$$W[\theta] = W[0] \exp \left(\frac{1}{2} \theta^T M^{-1} \theta \right),$$

da

$$W[0] = \text{Pf}(M) \exp \left(\frac{1}{2} 0^T M^{-1} 0 \right) = \text{Pf}(M).$$

Für den Pfaffian lässt sich noch eine wichtige Relation herleiten. Dazu benutzen wir die Darstellung

$$\text{Pf}(M) = \int d\zeta^N \dots d\zeta^1 \exp \left(\frac{1}{2} \zeta^T M \zeta \right)$$

des Pfaffians. Quadrieren wir dies, erhalten wir

$$\text{Pf}(M)^2 = \int d\zeta^N \dots d\zeta^1 d\xi^N \dots d\xi^1 \exp \left(\frac{1}{2} \zeta^T M \zeta + \frac{1}{2} \xi^T M \xi \right).$$

Transformieren wir nun auf die neuen Variablen

$$\begin{pmatrix} \zeta \\ \xi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\zeta} \\ \tilde{\xi} \end{pmatrix},$$

So bekommen wir noch die Determinante des Volumenelementes zu

$$\int d\zeta^N \dots d\zeta^1 d\xi^N \dots d\xi^1 = \frac{1}{2^N} \det \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{pmatrix} \int d\tilde{\zeta}^N \dots d\tilde{\zeta}^1 d\tilde{\xi}^N \dots d\tilde{\xi}^1.$$

Nun gilt aber, wenn wir die Determinante über die Submatrizen berechnen, dass

$$\det \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ -i\mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{pmatrix} = \det (\mathbb{1}(i\mathbb{1}) - \mathbb{1}(-i\mathbb{1})) = \det(2i\mathbb{1}) = (2i)^N.$$

Damit haben wir

$$i^N \int d\tilde{\zeta}^N \dots d\tilde{\zeta}^1 d\tilde{\xi}^N \dots d\tilde{\xi}^1.$$

$\text{Pf}(M)^2$ entspricht nun dem Ausdruck

$$\text{Pf}(M)^2 = (-1)^K \int d\tilde{\zeta}^N \dots d\tilde{\zeta}^1 d\tilde{\xi}^N \dots d\tilde{\xi}^1 \exp \left(\frac{1}{2} \left(\tilde{\zeta}^T M \tilde{\xi} + \tilde{\xi}^T M \tilde{\zeta} \right) \right).$$

Da M antisymmetrisch ist und alle $\tilde{\zeta}$ mit allen $\tilde{\xi}$ antikommutieren, ist also

$$\tilde{\zeta}^T M \tilde{\xi} + \tilde{\xi}^T M \tilde{\zeta} = 2\tilde{\zeta}^T M \tilde{\xi}$$

und damit

$$\text{Pf}(M)^2 = (-1)^K \int d\tilde{\zeta}^N \dots d\tilde{\zeta}^1 d\tilde{\xi}^N \dots d\tilde{\xi}^1 \exp \left(\tilde{\zeta}^T M \tilde{\xi} \right).$$

Transformieren wir nun noch einmal weiter

$$\hat{\xi} = M \tilde{\xi}$$

erhalten wir die Transformation der Integrationsdifferentiale durch

$$\int d\tilde{\xi}^N \cdots d\tilde{\xi}^1 = \det(M) \int d\hat{\xi}^N \cdots d\hat{\xi}^1.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} \text{Pf}(M)^2 &= (-1)^K \det(M) \int d\tilde{\xi}^N \cdots d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^N \cdots d\tilde{\xi}^1 \exp\left(\tilde{\xi}^T \hat{\xi}\right) \\ &= \frac{(-1)^K}{N!} \det(M) \int d\tilde{\xi}^N \cdots d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^N \cdots d\tilde{\xi}^1 \left(\tilde{\xi}^T \hat{\xi}\right)^N. \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir noch $\left(\tilde{\xi}^T \hat{\xi}\right)^N$ genauer. Für diesen Ausdruck gilt

$$\left(\tilde{\xi}^T \hat{\xi}\right)^N = \tilde{\xi}^{n_1} \hat{\xi}^{n_1} \cdots \tilde{\xi}^{n_N} \hat{\xi}^{n_N} = (-1)^K \hat{\xi}^{n_1} \cdots \hat{\xi}^{n_N} \tilde{\xi}^{n_1} \cdots \tilde{\xi}^{n_N},$$

da wir nacheinander $\tilde{\xi}^{n_N}$ einmal nach rechts tauschen und $\tilde{\xi}^{n_{N-1}}$ zweimal nach rechts tauschen und so weiter. Damit haben wir

$$\sum_{i=1}^N 1 = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{2K(2K+1)}{2} = 2K^2 + K$$

Vertauschungen, also auch genausoviele negative Vorfaktoren. Jetzt tauschen wir alle $\tilde{\xi}$ untereinander bis sie in der Reihenfolge $\tilde{\xi}^1 \cdots \tilde{\xi}^N$ stehen und machen dies analog für die $\hat{\xi}$, womit wir effektiv kein Vorzeichen erhalten. Da wir nach wie vor $N!$ solcher Terme in $\left(\tilde{\xi}^T \hat{\xi}\right)^N$ haben, gilt

$$\left(\tilde{\xi}^T \hat{\xi}\right)^N = (-1)^K N! \hat{\xi}^1 \cdots \hat{\xi}^N \tilde{\xi}^1 \cdots \tilde{\xi}^N$$

wodurch wir direkt

$$\text{Pf}(M)^2 = \det(M)$$

erhalten. Betrachten wir nun die *Mittelwerte* aus Gleichung (1.3.10). Wir sehen aus der Definition des Erzeugenden-Funktional, dass

$$\langle \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_l} \rangle_F = \frac{1}{W[0]} \left. \frac{\partial^l}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_l}} \right|_{\theta=0} W[\theta] \quad (1.3.14)$$

gilt. Für die Ableitung erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^l}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_l}} W[\theta] &= \frac{\partial^l}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_l}} \int d\xi^N \cdots d\xi^1 \exp\left(\frac{1}{2} \xi^T M \xi + \theta^T \xi\right) \\ &= \frac{\partial^{l-1}}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_{l-1}}} \int d\xi^N \cdots d\xi^1 \xi_{i_l} \exp\left(\frac{1}{2} \xi^T M \xi + \theta^T \xi\right) \\ &= \frac{\partial^{l-1}}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_{l-1}}} \int d\xi^N \cdots d\xi^1 \exp\left(\frac{1}{2} \xi^T M \xi + \theta^T \xi\right) \xi_{i_l} \\ &\vdots \\ &= \int d\xi^N \cdots d\xi^1 \exp\left(\frac{1}{2} \xi^T M \xi + \theta^T \xi\right) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_l}. \end{aligned}$$

Wir haben in Zeile drei die Ableitung der Exponentialfunktion (1.3.7) verwendet. In Zeile vier haben dann ausgenutzt, dass im Exponenten nur Quadrate von Graßmann-Variablen stehen und damit untereinander kommutieren. Außerdem geben uns die Ableitungen keine Vorzeichen, da wir $N = 2K$ vorausgesetzt hatten. Damit folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^l}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_l}} W[\theta] \right|_{\theta=0} &= \int d\xi^N \cdots d\xi^1 \exp\left(\frac{1}{2} \xi^T M \xi\right) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_l} \\ &= W[0] \langle \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_l} \rangle_F. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für die Ableitung wegen (1.3.13)

$$\frac{\partial^l}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_l}} W[\theta] = W[0] \frac{\partial^l}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_l}} \exp\left(\frac{1}{2} \theta^T M^{-1} \theta\right)$$

Auch hier sehen wir, dass l gerade sein muss, wenn wir nach dem Nullsetzen von θ etwas nicht verschwindendes erhalten wollen. Darum sei $l = 2k$, dann gilt

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_{2k}}} W[\theta] = W[0] \frac{1}{2^k k!} \frac{\partial^{2k}}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_{2k}}} (\theta^T M^{-1} \theta)^k.$$

Schauen wir uns jetzt (1.3.12) noch einmal an, dann sehen wir

$$(\theta^T M^{-1} \theta)^k = M^{-1}_{n_1 n_2} \cdots M^{-1}_{n_{2k-1} n_{2k}} \varepsilon_{i_{2k}, \dots, i_1}^{n_1, \dots, n_{2k}} \zeta^{i_{2k}} \cdots \zeta^{i_1}.$$

Die Ableitung gibt uns dann

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_{2k}}} W[\theta] = \frac{W[0]}{2^k k!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}(i_{2k}, \dots, i_1)} \text{sign}(\sigma) M^{-1}_{\sigma(i_{2k}) \sigma(i_{2k-1})} \cdots M^{-1}_{\sigma(i_2) \sigma(i_1)}.$$

Wir können die Summe über die Indizes n_1, \dots, n_{2k} durch die Summe aller Permutationen ersetzen, da wir nur einen Term erhalten, wenn diese eine Permutation von i_{2k}, \dots, i_1 ist. Schalten wir σ noch die Permutation τ voraus, die die Reihenfolge von i_{2k}, \dots, i_1 umkehrt, so haben wir auch hier $\sum_{i=1}^{2k} 1 = \frac{2k(2k+1)}{2} = 2k^2 + k$ Vertauschungen, damit also $\text{sign}(\tau) = (-1)^k$, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2k}}{\partial \theta_{i_1} \cdots \partial \theta_{i_{2k}}} W[\theta] &= \frac{W[0]}{2^k k!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}(i_{2k}, \dots, i_1)} \text{sign}(\sigma) \prod_{j=1}^k M^{-1}_{\sigma \circ \tau(i_{2j-1}) \sigma \circ \tau(i_{2j})} \\ &\stackrel{\sigma' = \sigma \circ \tau}{=} \frac{W[0]}{2^k k!} \sum_{\sigma' \in \text{Perm}(i_1, \dots, i_{2k})} \text{sign}(\sigma' \circ \tau) \prod_{j=1}^k M^{-1}_{\sigma'(i_{2j-1}) \sigma'(i_{2j})} \\ &= \frac{\text{sign}(\tau) W[0]}{2^k k!} \sum_{\sigma' \in \text{Perm}(i_1, \dots, i_{2k})} \text{sign}(\sigma') \prod_{j=1}^k M^{-1}_{\sigma'(i_{2j-1}) \sigma'(i_{2j})} \\ &= \frac{(-1)^k W[0]}{2^k k!} \sum_{\sigma' \in \text{Perm}(i_1, \dots, i_{2k})} \text{sign}(\sigma') \prod_{j=1}^k M^{-1}_{\sigma'(i_{2j-1}) \sigma'(i_{2j})} \end{aligned}$$

Wir haben die Abgeschlossenheit der Permutationsgruppe unter Verknüpfung und die Gruppenhomomorphismus-Eigenschaft der $\text{sign}()$ -Funktion ausgenutzt und bemerkt, dass $\tau \circ \tau = \text{id}$ ist.

Damit haben wir das Wick'sche Theorem gezeigt:

$$\langle \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{2k}} \rangle_F = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \sum_{\sigma' \in \text{Perm}(i_1, \dots, i_{2k})} \text{sign}(\sigma') \prod_{j=1}^k M^{-1}_{\sigma'(i_{2j-1})\sigma'\tau(i_{2j})}. \quad (1.3.15)$$

Dieses finden wir für normale Fermionen in [11] Kapitel 5. Es zeigt sich dass im Fall der Majorana-Fermionen alle Permutationen der Indizes an den Matrizen vorkommen und nicht nach Fermion und Antifermion getrennt, wie im üblichen Fall.

Beim Arbeiten mit mehreren Indizes muss Vorsicht geboten werden. Ein Beispiel ist $v^{(i_1, i_2)}$ mit den zwei Indizes i_1 und i_2 . Wir können diesen jetzt als einen vierdimensionalen Vektor v^n mit

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v^{(1,1)} \\ v^{(1,2)} \\ v^{(2,1)} \\ v^{(2,2)} \end{pmatrix}$$

verstehen. Dann sind die Mengen der Indexpermutationen $\text{Perm}(1, 2, 3, 4)$ von n und die der einzelnen Vertauschungen von a und α , also $\text{Perm}(1, 2) \times \text{Perm}(1, 2)$ nicht gleich. So lässt sich zum Beispiel nicht $(1, 1)$ mit $(1, 2)$ vertauschen, wenn wir *nur* $\text{Perm}(1, 2) \times \text{Perm}(1, 2)$ zur Verfügung haben. Also müssen wir bei Multiindizes mit $\text{Perm}(1, 2, 3, 4)$ arbeiten und dürfen die Permutationen nicht auf einzelne Indizes aufteilen.

1.3.3. Euklidische Feldtheorie und Korrelatoren

Kommen wir noch einmal auf das Pfadintegral zurück. Ersetzt man in der Herleitung der Pfadintegral-Feldtheorie die Zeit t durch eine komplexe Zeit $\tilde{t} = x^0 - ix^4$, zeigt sich, dass alle Erwartungswerte komplex analytische Funktionen von \tilde{t} in der unteren komplexen Halbebene sind. Die Grenzwerte dieser Funktionen sind physikalisch relevante Ergebnisse, wenn wir die reelle \tilde{t} -Achse von unten erreichen.⁸ Dies ist mathematisch vertretbar, da wir ein beschränktes, positives Energiespektrum voraussetzen, so dass die Zeittranslationen möglich sind. Wählen wir nun zur einfacheren Berechnung $\tilde{t} = -ix^4$ ändert sich die Minkowski-Metrik zu der trivialen Euklidischen Metrik und wir erhalten unsere Theorie aus der Minkowski-Theorie durch die Ersetzungen

$$\begin{aligned} x^0 &\rightarrow -i(x^{(E)})^4 \\ x^i &\rightarrow (x^{(E)})^i \\ p^0 &\rightarrow -i(p^{(E)})^4 \\ p^i &\rightarrow (p^{(E)})^i, \end{aligned}$$

wobei das (E) hier für *euklidische* Größen steht. Diese Koordinatentransformation erzeugt nun auch Transformationen von Vektoren, partiellen Ableitungen und der Metrik. Diese führen dann

⁸Eine Analyse dieser Tatsachen wird unter anderem mit Hilfe von Wightman- und Schwinger-Funktionen durchgeführt und lässt sich zum Beispiel in [12] nachlesen. Die Analyse führt auf Bedingungen, wann es erlaubt ist, den Grenzübergang zur reellen Zeitachse durchzuführen. Wightman- und Schwinger-Funktionen sind die Vakuumernwartungswerte von Feldoperatorprodukten mit reeller oder imaginärer Zeit.

zu den Transformationsvorschriften für die Metrik $\eta_{\mu\nu}$, kontravariante Vektoren V^μ und kovariante Vektoren V_μ

$$\begin{aligned} \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \eta_{\mu\nu} &\rightarrow -\delta_{\mu\nu} \\ \int d^4x &\rightarrow -i \int d^4x^{(E)} \\ (V^0, V^1, V^2, V^3) &\rightarrow (i(V^{(E)})^4, (V^{(E)})^1, (V^{(E)})^2, (V^{(E)})^3) \\ (V_0, V_1, V_2, V_3) &\rightarrow (-i(V^{(E)})_4, (V^{(E)})_1, (V^{(E)})_2, (V^{(E)})_3). \end{aligned}$$

Da wir später auch Fermionen betrachten, müssen wir uns noch überlegen, was mit den Dirac-Matrizen passiert. Diese sollten nun

$$\{(\gamma^{(E)})^\mu, (\gamma^{(E)})^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}$$

erfüllen. Sie lassen sich aus den gewöhnlichen Dirac-Matrizen mittels

$$\begin{aligned} (\gamma^{(E)})^4 &= i\gamma^0 \\ (\gamma^{(E)})^i &= \gamma^i \end{aligned}$$

gewinnen, was nochmals genauer im Anhang A.1 beschrieben wird. Für den Rest dieses Kapitels werden wir den Index (E) unterdrücken und im euklidischen Sinne läuft der Index μ von 1 bis 4, anstatt von 0 bis 3 und die Summenkonvention wird ab hier für Raumzeit-Indizes auf gleicher Höhe angewendet. Die in dieser Theorie berechneten Korrelatoren nennt man *euklidische Korrelatoren*. Diese berechnen sich für den Operator $\hat{O}(t)$ der Felder durch

$$\langle \hat{O}(t) \hat{O}^\dagger(0) \rangle_T = \frac{1}{\mathcal{Z}_T} \int \mathcal{D}\varphi^k \mathcal{D}\lambda^k \mathcal{D}\lambda^{\dagger k} e^{-S^{(E)}[\varphi^k, \lambda^k]} O(t) \bar{O}(0),$$

wobei

$$\mathcal{Z}_T = \int \mathcal{D}\varphi^k \mathcal{D}\lambda^k \mathcal{D}\lambda^{\dagger k} e^{-S^{(E)}[\varphi^k, \lambda^k]}$$

als Normierung verwendet wird und $O(t)$ ist die Funktion, die man erhält, wenn alle Operatoren durch ihre klassisch korrespondierenden Funktionen ersetzt werden. $\bar{O}(t)$ ist die komplexe Konjugation von $O(t)$. Die euklidische Wirkung wird mit obigen Ersetzungen in der Minkowski-Wirkung erhalten, wenn wir noch zusätzlich

$$S^{(E)}[\varphi^k, \lambda^k] = -iS[\varphi^k, \lambda^k]$$

verwenden. Haben wir nun einen Operator \hat{O} , der nach unserem Ermessen auf einen massiven Teilchenzustand projiziert, betrachten wir den euklidischen Korrelator von \hat{O} alternativ in der Form

$$\langle \hat{O}(t) \hat{O}^\dagger(0) \rangle_T := \frac{1}{\mathcal{Z}_T} \text{Tr} \left[e^{-(T-t)\hat{H}} \hat{O} e^{-t\hat{H}} \hat{O}^\dagger \right],$$

wobei \mathcal{Z}_T durch

$$\mathcal{Z}_T := \text{Tr} \left[e^{-T\hat{H}} \right]$$

gegeben ist. Da die Spur eine basisunabhängige Größe ist, berechnen wir diese in der Eigenbasis $\{|n\rangle\}$ des Hamilton-Operators zu den Energie-Eigenwerten E_n

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle .$$

Wir wählen die Basis weiterhin so, dass die Energie-Eigenwerte geordnet sind, so dass

$$E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \dots .$$

In dieser Basis erhalten wir

$$\mathcal{Z}_T = \sum_n \langle n | e^{-T\hat{H}} | n \rangle = \sum_n e^{-TE_n} = e^{-TE_0} \left(1 + \sum_{n>0} e^{-T\Delta E_n} \right)$$

mit

$$\Delta E_n := E_n - E_0$$

Dies gibt uns dann für den euklidischen Korrelator

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}(t) \hat{O}^\dagger(0) \rangle_T &= \frac{1}{\mathcal{Z}_T} \sum_n \langle n | e^{-(T-t)\hat{H}} \hat{O} e^{-t\hat{H}} \hat{O}^\dagger | n \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_T} \sum_{n,m} e^{-(T-t)E_n} \langle n | \hat{O} e^{-t\hat{H}} | m \rangle \langle m | \hat{O}^\dagger | n \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_T} \sum_{n,m} e^{-TE_n} \langle n | \hat{O} | m \rangle \langle m | \hat{O}^\dagger | n \rangle e^{-t(E_m - E_n)} \\ &= \frac{\sum_{n,m} e^{-T\Delta E_n} \langle n | \hat{O} | m \rangle \langle m | \hat{O}^\dagger | n \rangle e^{-t(\Delta E_m - \Delta E_n)}}{1 + \sum_{n>0} e^{-T\Delta E_n}} . \end{aligned}$$

Nehmen wir nun den Limes großer T an, erhalten wir, da $e^{-T\Delta E_n} \rightarrow 0$ für $n > 0$

$$\begin{aligned} \langle \hat{O}(t) \hat{O}^\dagger(0) \rangle_{T \rightarrow \infty} &= \sum_m \langle 0 | \hat{O} | m \rangle \langle m | \hat{O}^\dagger | 0 \rangle e^{-t(\Delta E_m - \Delta E_0)} \\ &= \sum_m |\langle 0 | \hat{O} | m \rangle|^2 e^{-t\Delta E_m} \\ &= |\langle 0 | \hat{O} | 0 \rangle|^2 + |\langle 0 | \hat{O} | 1 \rangle|^2 e^{-t\Delta E_1} + \dots . \end{aligned}$$

Das Ergebnis lässt sich sehr schön interpretieren. Wir erhalten den Term $|\langle 0 | \hat{O} | 1 \rangle|^2 e^{-t\Delta E_1}$, der uns den schwächsten exponentiellen Abfall für große t liefert. Dabei ergibt sich für $|\langle 0 | \hat{O} | 1 \rangle|$ nur dann ein nichtverschwindender Wert, wenn \hat{O} den Zustand $|1\rangle$ in das Vakuum überführt, also das Teilchen in $|1\rangle$ vernichtet. Der Faktor E_1 lässt sich als Masse des leichtesten Teilchens interpretieren, das einen nichtverschwindenden Überlapp mit dem Operator \hat{O} hat. Für gewöhnlich sind diese Teilchen gebundene Zustände, so wie das Wasserstoff-Atom in der Quantenmechanik, dessen Masse sich aus den Massen der Konstituenten und der Bindungsenergie zusammensetzt [11] [20] [23] [25] [9].

1.4. Die $\mathcal{N} = 1$ Supersymmetrische SU(2) Yang-Mills Theorie

Wir betrachten vorerst die Wirkung unserer Eichtheorie im Kontinuum, stellen dann die diskretisierte Version dieser Theorie vor und schauen uns den Kontinuumsimes an.

In dieser Darstellung der Theorie wird auf die Einführung der Supersymmetrie verzichtet, da sie für das Verständnis der hier präsentierten Ideen nicht hilfreich wäre. Es sei aber erwähnt, dass sich die Supersymmetrie dadurch zeigt, dass wir nachher eine gleiche Anzahl an Fermionen und Bosonen haben und die Fermionen masselos wählen können, wodurch wir eine *Supersymmetrie* zwischen Fermionen und Bosonen haben. Dies ist der Fall $\mathcal{N} = 1$, eines supersymmetrischen Partners, da wir nur ein *Paar* an Bosonen und Fermionen haben. Haben die Fermionen jedoch eine Masse, so gibt es eine Asymmetrie zwischen den Fermionen und den masselosen Eichbosonen und die Supersymmetrie ist gebrochen. Eine Einführung in die die Supersymmetrie ist in [28] zu finden.

Die Idee hinter einer Yang-Mills Theorie ist es, einen Lagrangian zu formulieren, der *eichinvariant* ist. Da sich Teilchen als Vektorfelder in bestimmten Vektorräumen darstellen lassen, können wir fordern, dass der Lagrangian unter bestimmten linearen Transformationen dieser Felder invariant sein soll. Haben wir zum Beispiel ein Vektorfeld in unserem Lagrangian, welches nur durch seine Länge eingeht, ist diese Theorie rotationsinvariant. Geht jedoch zum Beispiel nur eine einzige Komponente ein, ist diese Rotationsinvarianz zerstört, da eine Drehung diese Komponente verändert.

Fordert man diese Invarianz nun an jedem Raumzeitpunkt, also *lokale Eichinvarianz*, erhalten wir eine nichttriviale Zusatzforderung, da Ableitungen nicht mit den lokalen Transformationen kommutieren und unser Lagrangian Ableitungsterme enthalten muss.

Für die Symmetrien, die die Eichtransformationen erzeugen, werden in der Regel die speziell unitären Gruppen SU(N) verwendet. In unserer Theorie benutzen wir $N = 2$. Auch hier sind die Ausführungen analog zu [20] und [11].

Wir verwenden ab diesem Punkt die einsteinsche Summenkonvention, wenn diese nicht ausdrücklich außer Kraft gesetzt wird. Wir summieren also über gepaarte Indizes auf unterschiedlicher Höhe. So gilt zum Beispiel im Minkowski-Raum

$$v^\mu w_\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^3 v^\mu w^\nu \eta_{\mu\nu}. \quad (1.4.1)$$

Im euklidischen, sowie Darstellungs- und Farb-Räumen, wird auch über Indizes auf gleicher Höhe summiert, wie zum Beispiel in

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x) T^a$$

für Eichfelder.

Für eine Einführung in die Thematik der Lie-Gruppen und Lie-Algebren verweise ich noch an dieser Stelle auf [22], wo diese Themen hinreichend besprochen werden. Es ist anzumerken, dass die Erzeuger der Lie-Algebra $A^a \in \mathfrak{g}$ zur Lie-Gruppe G mit den physikalisch verwendeten Generatoren T^a über $A^a = iT^a$ zusammenhängen.

1.4.1. Kontinuierliche Wirkung

Wir werden diese Herleitung vorerst im Minkowski-Raum ausführen und nachher die Euklidische Wirkung angeben. Die kontinuierliche Wirkung, die wir im Kontinuumslimit berechnen wollen, enthält drei Majorana-Fermionen⁹ $\lambda^{i\alpha}(x)$ sowie drei Eichbosonen $A_\mu^a(x)$ mit $a = 1, \dots, N^2 - 1$ $i = 1, \dots, N_d$ $\alpha = 1, \dots, 4$ und $\mu = 0, \dots, 3$ ¹⁰. Die $A_\mu^a(x)$ sind fast die Koordinaten der Lie-Algebrawertigen Felder $iA_\mu(x) \in \mathfrak{su}(N)$, die durch

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a$$

gegeben sind, wobei wir hier die drei Generatoren $T^a \in \mathfrak{su}(N)$ der Lie-Algebra verwendet haben. Die Generatoren sind komplexe $N_d \times N_d$ Matrizen $(T^a)^{ij}$, die die Lie-Algebra linear auf dem \mathbb{R}^{N_d} darstellen. Diese Generatoren erfüllen die Kommutatorrelationen

$$[T^a, T^b] = T^a T^b - T^b T^a = if^{abc}T^c,$$

wobei f^{abc} die sogenannten Strukturkonstanten sind. Für $\mathfrak{su}(N)$ sind diese antisymmetrisch unter Vertauschung aller Indizes und speziell für $N = 2$ gilt $f^{abc} = \epsilon^{abc}$ wobei $\epsilon^{123} = 1$. Die Eichbosonen transformieren unter der lokalen Eichtransformation mit $U(x) = U^{ij}(x) \in \text{SU}(N)$ in der passenden Darstellung durch

$$A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) - i\partial_\mu(U(x))U^\dagger(x),$$

da sich diese Felder mathematisch als lokale Zusammenhangsform interpretieren lassen. Haben wir nun die Fermionen als Vektoren, so transformieren sie unter einer lokalen Eichtransformation $U(x) = U^{ij}(x) \in \text{SU}(N)$, die o.B.d.A. nicht in der selben Darstellung wie oben sein muss, durch

$$\begin{aligned}\lambda'(x) &= U(x)\lambda(x) \\ \bar{\lambda}'(x) &= \bar{\lambda}(x)U^\dagger(x)\end{aligned}$$

wie ein gewöhnlicher Vektor. Hierfür lässt sich die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu(x)$$

definieren.

⁹Die Eigenschaften der Fermionen des Kontinuums sind noch einmal im Anhang A.1 zusammengefasst, wo auch die hier wichtigen Eigenschaften der Dirac-Matrizen erwähnt werden.

¹⁰Da wir hier vier verschiedene Indizes und damit vier verschiedene Vektorräume haben, müssen wir Operationen wie Spurbildung passend kennzeichnen. Den Raum bezüglich α nennen wir Spin-Raum und kennzeichnen Operationen auf diesen mit einem Index s . a gehört zum Farb-Raum und Operationen werden mit c gekennzeichnet. Der Tangentialraum an den Minkowski-Raum wird mit μ verbunden und Operationen hier mit einem x indiziert. i gehört zum Darstellungsraum der Gruppe und Operationen hier erhalten ein d . Alle unterdrückten Indizes müssen als $\mathbb{1}$ auf den jeweiligen Räumen interpretiert werden.

Diese Ableitung transformiert dann durch

$$\begin{aligned}
 D'_\mu &= \partial_\mu - iA'_\mu(x) \\
 &= \partial_\mu - iU(x)A_\mu(x)U^{\dagger d}(x) - (\partial_\mu U(x))U^{\dagger d}(x) \\
 &= \partial_\mu - iU(x)A_\mu(x)U^{\dagger d}(x) + U(x)(\partial_\mu U^{\dagger d}(x)) \\
 &= U(x) \left(U^{\dagger d}(x)\partial_\mu + \partial_\mu(U^{\dagger d}(x)) - iA_\mu(x)U^{\dagger d}(x) \right) \\
 &= U(x) (\partial_\mu - iA_\mu(x)) U^{\dagger d}(x) = U(x)D_\mu U^{\dagger d}(x).
 \end{aligned}$$

In der dritten Zeile haben wir

$$0 = \partial_\mu \mathbb{1} = \partial_\mu(UU^{\dagger d}) = (\partial_\mu U)U^{\dagger d} + U(\partial_\mu U^{\dagger d})$$

verwendet. In der vierten Zeile gilt es noch zu beachten, dass

$$\partial_\mu(U^{\dagger d}(x)f(x)) = (\partial_\mu U^{\dagger d}(x))f(x) + U^{\dagger d}(x)(\partial_\mu f(x)).$$

Es steht uns nun frei, die Darstellung der Generatoren zu wählen. In unserem Fall verwenden wir die adjungierte- anstatt der definierenden Darstellung. Die Generatoren der definierenden Darstellung sind gegeben durch

$$T^{\text{def}1} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad T^{\text{def}2} := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad T^{\text{def}3} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und in der adjungierten Darstellung durch

$$T^{A1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad T^{A2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T^{A3} := \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra ist durch

$$(T^a)^{bc} = -if^{abc}$$

definiert. Diese beiden Darstellungen erfüllen noch die schönen Spur-Eigenschaften

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}_d \left(T^{\text{def}i} T^{\text{def}j} \right) &= \frac{1}{2} \delta^{ij} \\
 \text{Tr}_d \left(T^{Ai} T^{Aj} \right) &= 2\delta^{ij}.
 \end{aligned}$$

Es gilt sogar, dass für jede treue Darstellung semisimpler kompakter Lie-Gruppen eine Basis von Generatoren T^j gefunden werden kann, so dass

$$\text{Tr}_d (T^i T^j) = C_T \delta^{ij}$$

mit der darstellungsabhängigen Konstante C_T gilt. Das wird in den ersten Kapiteln von [27] erläutert. Die kovariante Ableitung gibt nun die Möglichkeit das Eichboson eichinvariant an das Fermion zu koppeln und im wechselwirkungsfreien Fall den bekannten Fermionen-Lagrangian zu

erhalten. Dieser ist leicht mit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F(\lambda(x)) &= \frac{1}{2}\bar{\lambda}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2}\bar{\lambda}^i(x)(\delta^{ij}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) + \gamma^\mu A_\mu^a(T^a)^{ij})\lambda^j(x)\end{aligned}\quad (1.4.2)$$

anzugeben. Die γ^μ sind die üblichen Dirac-Matrizen im Spinraum. Aus der kovarianten Ableitung lässt sich noch eine zweite invariante Größe bilden, die wir als Eichbosonen-Lagrangian verwenden können. Betrachten wir dazu

$$F_{\mu\nu} := i[D_\mu, D_\nu] = i(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu),$$

den Feldstärketensor. Dieses Objekt transformiert unter einer Eichtransformation wie

$$F'_{\mu\nu}(x) := U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{\dagger d}(x)$$

und wird eichinvariant, wenn wir die Spur im Darstellungsraum bilden. Da die Spur invariant unter zyklischen Vertauschungen ist, gilt

$$\text{Tr}_d(F'_{\mu\nu}) := \text{Tr}_d(U(x)F_{\mu\nu}U^{\dagger d}(x)) = \text{Tr}_d(U^{\dagger d}(x)U(x)F_{\mu\nu}) = \text{Tr}_d(F_{\mu\nu}).$$

Dies ist zwar eichinvariant aber kein Lorentz-Skalar, aber das lässt sich ändern indem wir $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ verwenden, was durch

$$\text{Tr}_d(F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu}) := \text{Tr}_d(U(x)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}U^{\dagger d}(x)) = \text{Tr}_d(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

transformiert und ist damit ein eichinvarianter Skalar. Jetzt wollen wir diesen Feldstärketensor genauer betrachten. Wir haben

$$\begin{aligned}D_\mu D_\nu &= (\partial_\mu - iA_\mu(x))(\partial_\nu - iA_\nu(x)) \\ &= \partial_\mu \partial_\nu - A_\mu(x)A_\nu(x) - i(\partial_\mu A_\nu(x)) - iA_\nu(x)\partial_\mu - iA_\mu(x)\partial_\nu\end{aligned}$$

woraus dann direkt folgt, dass $[D_\mu, D_\nu]$ kein Differentialoperator sondern ein Tensor ist und

$$[D_\mu, D_\nu] = -i(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) - [A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

Stellen wir das Feld $A_\nu(x)$ als $A_\mu^a(x)T^a$ dar, ergibt sich

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu] &= -i(\partial_\mu A_\nu^a(x)T^a - \partial_\nu A_\mu^a(x)T^a) - [A_\mu^a(x)T^a, A_\nu^b(x)T^b] \\ &= -i(\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x))T^a - A_\mu^a(x)A_\nu^b(x)[T^a, T^b] \\ &= -i(\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x))T^a - iA_\mu^a(x)A_\nu^b(x)f_{abc}T^c \\ &= -i\left(\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + A_\mu^b(x)A_\nu^c(x)f_{bca}\right)T^a.\end{aligned}$$

Wir können $F_{\mu\nu}$ also als $F^a_{\mu\nu} T^a$ schreiben, wobei

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu(x) - \partial_\nu A^a_\mu(x) + A^b_\mu(x) A^c_\nu(x) f_{bca}.$$

Damit erhalten wir direkt

$$\text{Tr}_d(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu} \text{Tr}_d(T^a T^b) = C_T F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$$

Dies gibt uns dann unseren Eichbosonen-Lagrangian mit

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{g^2} \text{Tr}_d(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{C_T}{g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}.$$

Anzumerken sei noch, dass dieser Ausdruck nur in der Konstante C_T von der gewählten (treuen) Darstellung der Eichgruppe abhängt. Damit können wir die Darstellung der Eichbosonen unabhängig von der der Fermionen wählen. Diese wird die definierende Darstellung mit $C_T = \frac{1}{2}$ sein. Die Fermionen werden in der adjungierten Darstellung verwendet, für die wir $C_T = 2$ haben. Aus diesen Bausteinen setzt sich die Lagrangedichte unserer Kontinuums-Theorie zusammen zu

$$\mathcal{L}(A^a_\mu(x), \lambda^i_\alpha(x)) = -\frac{1}{2g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{\lambda} (i\gamma^\mu D_\mu - m_{\tilde{g}}) \lambda.$$

Dies wird jedoch meistens direkt als Wirkung umformuliert, da sie die Größe ist, die in das Pfadintegral eingeht. In unserem Fall ist das

$$S[A_\mu, \lambda] = - \int_{M^4} d^4x \left\{ \frac{1}{2g^2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{\lambda} (i\gamma^\mu D_\mu - m_{\tilde{g}}) \lambda \right\}.$$

Die Minkowski-Wirkung ist mit den Ersetzungen

$$S[A^{(E)}_\mu, \lambda^{(E)}] = i \int_{M^4} d^4x^{(E)} \left\{ \frac{1}{2g^2} F^{(E)a}_{\mu\nu} F^{(E)a}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^{(E)} \left(i\gamma^{(E)}_\mu D^{(E)}_\mu + m_{\tilde{g}} \right) \lambda^{(E)} \right\}$$

und dann mit dem zusätzlichen Faktor erhalten wir die euklidische Wirkung mit

$$\begin{aligned} S^{(E)}[A^{(E)}_\mu, \lambda^{(E)}] &= -i S[A^{(E)}_\mu, \lambda^{(E)}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^4} d^4x^{(E)} \left\{ \frac{1}{2g^2} F^{(E)a}_{\mu\nu} F^{(E)a}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{\lambda}^{(E)} \left(i\gamma^{(E)}_\mu D^{(E)}_\mu + m_{\tilde{g}} \right) \lambda^{(E)} \right\}. \end{aligned}$$

1.4.2. Adjungierte Fermionen

In der Supersymmetrie wird für die Fermionen gefordert, dass es eine Fermion-Boson-Symmetrie gibt. Dafür interpretieren wir die Fermionen-Felder $i\lambda_\alpha(x) \in \mathfrak{su}(N) \subset M(N_d)$ als Elemente der Lie-Algebra bezüglich der oben gewählten Darstellung. Es gilt also

$$\lambda(x) = \lambda^a(x) (T^a)^{ij} e_i \otimes e_j.$$

Sie transformieren als Elemente der Lie-Algebra unter einer lokalen Eichtransformation $U(x) = U^{ij}(x) \in \text{SU}(N)$, durch

$$\begin{aligned}\lambda'_\alpha(x) &= U(x)\lambda_\alpha(x)U^{\dagger d}(x) \\ \bar{\lambda}'_\alpha(x) &= U(x)\bar{\lambda}_\alpha(x)U^{\dagger d}(x).\end{aligned}$$

Eine solche Darstellung wird die adjungierte Darstellung genannt. Mithilfe des Eichboson-Feldes lässt sich nun auch hier eine kovariante Ableitung der Fermionen, wie in [10], definieren. Die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung

$$D_\mu\lambda(x) = \partial_\mu\lambda(x) - i[A_\mu(x), \lambda(x)].$$

Die Ableitung transformiert, wenn wir die x -Abhängigkeit unterdrücken, wie

$$\begin{aligned}(D_\mu\lambda)' &= \partial_\mu\lambda' - i[A'_\mu, \lambda'] \\ &= \partial_\mu(U\lambda U^{\dagger d}) - i[U A_\mu U^{\dagger d} - i(\partial_\mu U)U^{\dagger d}, U\lambda U^{\dagger d}] \\ &= \partial_\mu(U\lambda U^{\dagger d}) - i[U A_\mu U^{\dagger d}, U\lambda U^{\dagger d}] - [(\partial_\mu U)U^{\dagger d}, U\lambda U^{\dagger d}] \\ &= U(\partial_\mu\lambda)U^{\dagger d} - iU[A_\mu, \lambda]U^{\dagger d} + (\partial_\mu U)\lambda U^{\dagger d} + U\lambda(\partial_\mu U^{\dagger d}) - [(\partial_\mu U)U^{\dagger d}, U\lambda U^{\dagger d}] \\ &= U(\partial_\mu\lambda - i[A_\mu, \lambda])U^{\dagger d} = U(D_\mu\lambda)U^{\dagger d}.\end{aligned}$$

In Zeile vier haben wir wieder

$$0 = \partial_\mu \mathbb{1} = \partial_\mu(UU^{\dagger d}) = (\partial_\mu U)U^{\dagger d} + U(\partial_\mu U^{\dagger d})$$

benutzt, da daraus

$$\begin{aligned}[(\partial_\mu U)U^{\dagger d}, U\lambda U^{\dagger d}] &= (\partial_\mu U)\lambda U^{\dagger d} - U\lambda U^{\dagger d}(\partial_\mu U)U^{\dagger d} \\ &= (\partial_\mu U)\lambda U^{\dagger d} + U\lambda(\partial_\mu U^{\dagger d})\end{aligned}$$

folgt. Damit verschwinden die letzten drei Summanden. Schreiben wir die Komponenten aus, erhalten wir

$$\begin{aligned}D_\mu\lambda &= \partial_\mu\lambda(x) - i[A_\mu(x), \lambda(x)] \\ &= \partial_\mu\lambda^a(x)T^a - iA_\mu^b(x)\lambda^c(x)[T^b, T^c] \\ &= \partial_\mu\lambda^a(x)T^a + A_\mu^b(x)\lambda^c(x)f^{bca}T^a \\ &= (\partial_\mu\lambda^a(x) + f^{abc}A_\mu^b(x)\lambda^c(x))T^a.\end{aligned}\tag{1.4.3}$$

Hiermit erhalten wir im Gegensatz zu den Vektor-Darstellungen durch

$$(\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu\lambda)' = U(\bar{\lambda}\gamma^\mu D_\mu\lambda)U^{\dagger d}$$

keine eichinvariante Größe. Dazu müssen wir analog zum Feldstärketensor die Spur im Darstellungsraum bilden. Damit haben wir in dieser Darstellung den Fermionen-Lagrangian gegeben

durch

$$\mathcal{L}_F(\lambda(x)) = -\frac{1}{2C_T} \text{Tr}_d \left(\bar{\lambda}(x) (\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu + m) \lambda(x) \right).$$

Es zeigt sich schnell, dass dieser in Komponenten ausgedrückt die Form

$$\mathcal{L}_F(\lambda(x)) = -\frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \left(\delta^{ab} (\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu + m) + \mathrm{i} f^{acb} \gamma^\mu A_\mu^c(x) \right) \lambda^b(x) \quad (1.4.4)$$

annimmt und dass wir dasselbe Ergebnis erhalten, wenn wir die Fermionen in der adjungierten Vektordarstellung betrachten. Also wenn wir $i = a$, $N_d = N^2 - 1$ u.s.w. setzen, und die Generatoren

$$(T^a)^{bc} = -\mathrm{i} f^{abc}$$

verwenden. Wir stellen die Korrespondenz dadurch her, dass wir wegen

$$\lambda(x) = \lambda^a(x) e_a = \frac{1}{C_T} \text{Tr}_d(T^a \lambda(x)) e_a$$

die Größe $\frac{1}{C_T} \text{Tr}_d(T^a \lambda(x))$ als Vektorkomponente λ^a verwenden. Dies ist einen Vektorraumisomorphismus, da die Generatoren T_a linear unabhängig in $M(N_d)$ sind und jeder Generator durch $\text{Tr}_d(T^a \cdots)$ auf genau einen Basisvektor des \mathbb{R}^{N_d} abgebildet wird. Betrachten wir nun die Transformation $U(x) = U^{ij}(x) \in SU(N)$ einer beliebigen treuen Darstellung, die auf \mathbb{R}^{N_d} , so gilt nun

$$\lambda'(x) = \lambda^a(x) U(x) T^a U^{\dagger d}(x).$$

Ab hier unterdrücken wir nochmals die x -Abhängigkeit. Diese Transformation lässt sich darstellen als

$$U^{ij} = \exp(\mathrm{i} \omega^c (T^c)^{ij})$$

für genau ein paar von $\omega^c \in \mathbb{R}^{N^2-1}$. Damit können wir die korrespondierende Transformation in der adjungierten Darstellung angeben als

$$V^{ab} = \exp(\mathrm{i} \omega^c (\tilde{T}^c)^{ab}),$$

so dass hier

$$\lambda' = V \lambda = V^{ab} \lambda^b T^a$$

gilt. Hier sind nun \tilde{T}^a die Generatoren in der adjungierten- und T^a die Generatoren der gewählten Darstellung. Diese Darstellungen sind nun äquivalent, wenn

$$V^{ab} \lambda^b = \frac{1}{C_T} \text{Tr}_d(T^a \lambda')$$

gilt. Ausführlicher ergibt die rechte Seite

$$\text{Tr}_d(T^a \lambda') = \text{Tr}_d(T^a \lambda^b U T^b U^{\dagger d}) = \text{Tr}_d(T^a U T^b U^{\dagger d}) \lambda^b,$$

wodurch jetzt nur noch

$$C_T V^{ab} = \text{Tr}_d(T^a U T^b U^{\dagger d})$$

gelten muss. Gleichheit lässt sich mit Hilfe der Eindeutigkeit der Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit fester Startbedingung zeigen. Dazu definieren wir die Größen

$$\begin{aligned}(U_t)^{ij} &= \exp(i t \omega^c (T^c)^{ij}) \\ (V_t)^{ab} &= \exp(i t \omega^c (\tilde{T}^c)^{ab}) \\ (W_t)^{ab} &= \frac{1}{C_T} \text{Tr}_d(T^a U_t T^b U_t^{\dagger d}).\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass

$$\begin{aligned}U_0 &= \mathbb{1}, \quad U_1 = U, \quad \frac{d}{dt} U_t = i \omega^c T^c U_t = i \omega^c U_t T^c \\ V_0 &= \mathbb{1}, \quad V_1 = V, \quad \frac{d}{dt} V_t = i \omega^c \tilde{T}^c V_t = i \omega^c V_t \tilde{T}^c \\ W_0 &= \mathbb{1}.\end{aligned}$$

Berechnen wir die Ableitung von W_t , erhalten wir

$$\begin{aligned}C_T \frac{d}{dt} (W_t)^{ab} &= i \omega^c \left(\text{Tr}_d(T^a T^c U_t T^b U_t^{\dagger d}) - \text{Tr}_d(T^a U_t T^b U_t^{\dagger d} T^c) \right) \\ &= i \omega^c \left(\text{Tr}_d(T^a T^c U_t T^b U_t^{\dagger d}) - \text{Tr}_d(T^c T^a U_t T^b U_t^{\dagger d}) \right) \\ &= -i \omega^c \text{Tr}_d([T^c, T^a] U_t T^b U_t^{\dagger d}) \\ &= i \omega^c (-i f^{cad}) \text{Tr}_d(T^d U_t T^b U_t^{\dagger d}) \\ &= i \omega^c (\tilde{T}^c)^{ad} \text{Tr}_d(T^d U_t T^b U_t^{\dagger d}) = C_T i \omega^c (\tilde{T}^c)^{ad} (W_t)^{db}.\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass W_t dieselbe gewöhnliche Differentialgleichung wie V_t mit derselben Anfangsbedingung erfüllt. Damit gilt

$$W_t = V_t$$

und insbesondere

$$W_1 = \frac{1}{C_T} \text{Tr}_d(T^a U T^b U^{\dagger d}) = V = V_1.$$

Damit sind die Transformationen in der Lie-Algebra- und der adjungierten Vektor-Darstellung äquivalent. Wir können also auf diese Weise mit jeder treuen Darstellung die adjungierte Darstellung *simulieren*. Dies hat bei Berechnungen den Vorteil, dass wir für die $SU(2)$ zum Beispiel nur eine 2×2 Matrix in der definierenden, anstatt einer 3×3 Matrix in der adjungierten Darstellung verwenden können. Für die weiteren Rechnungen verwenden wir jedoch die Vektor-Darstellung, da in dieser die Beachtung der Kommutatoren wegfällt.

Wir sehen zum Beispiel, dass die Ableitung in Vektordarstellung die einfache Form

$$\begin{aligned}(D_\mu \lambda(x))^a &= (\delta^{ab} \partial_\mu - i A_\mu^c (\tilde{T}^c)^{ab}) \lambda^b(x) \\ (D_\mu \lambda(x))^a &= (\delta^{ab} \partial_\mu - i A_\mu^c (-i f^{cab})) \lambda^b(x) \\ (D_\mu \lambda(x))^a &= (\delta^{ab} \partial_\mu - f^{cab} A_\mu^c) \lambda^b(x) \\ (D_\mu \lambda(x))^a &= (\delta^{ab} \partial_\mu + f^{acb} A_\mu^c) \lambda^b(x)\end{aligned}$$

hat. Es ist dieselbe Form wie in (1.4.3), wenn wir die T^a als Basisvektoren interpretieren. Es zeigt sich auch, dass der hieraus mit (1.4.2) resultierende Lagrangian, dem Lagrangian (1.4.4)

gleich. Damit sind also beide Betrachtungsweisen äquivalent.

1.4.3. Diskretisierte Wirkung

In diesem Abschnitt schauen wir uns die diskretisierte Wirkung an. Sie sollte vorerst nur das Kriterium erfüllen, dass sie für $a \rightarrow 0$ möglichst gut in die kontinuierliche Wirkung übergeht. Doch bevor wir die Wirkung aufstellen können, müssen wir noch einige entscheidende Objekte einführen.

Unsere Theorie sei auf einem vierdimensionalen Gitter Λ_N^a definiert, auf dem der Gitterabstandsvektor durch

$$a = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a, a, a, a)$$

gegeben ist und die Gitterausdehnungen durch

$$N = (N^0, N^1, N^2, N^3) = (N_T, N, N, N).$$

Wir separieren die Nullkomponente vom Rest, da wir diese als Zeitrichtung interpretieren wollen. Es wird sich nachher als nützlich erweisen, das Gitter in die zwei Untergitter aufzuteilen

$$\Lambda^T := \Lambda_{(N_T)}^{(a)}$$

bestehend aus N_T Punkten und

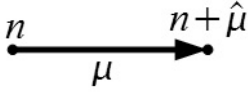
$$\Lambda^S := \Lambda_{(N,N,N)}^{(a,a,a)},$$

so, dass

$$\Lambda_N^a = \Lambda^T \times \Lambda^S$$

Unsere Felder sind nun die Eichbosonen mit den Indizes $A_{\mu x}^a$ und die Fermionen mit den Indizes $\lambda_x^{a\alpha}$. Aber es sei anzumerken, dass wir auch hier zwischen x und n als Index wechseln und in den Fällen, wo mehrere Ort-Zeit-Indizes auftauchen, wird n mit x , m mit y und so weiter assoziiert. Desweiteren müssen wir noch Randbedingungen festlegen, da wir auf einem endlichen Raum-Zeit-Gebiet arbeiten. Wir wählen für die Eichfelder $A_{\mu x}^a$ periodische Randbedingungen in Raum- und Zeit-Richtung

$$\begin{aligned} A_{\mu(x^0+N_T, x^1, x^2, x^3)}^a &:= A_{\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)}^a \\ A_{\mu(x^0, x^1+N, x^2, x^3)}^a &:= A_{\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)}^a \\ A_{\mu(x^0, x^1, x^2+N, x^3)}^a &:= A_{\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)}^a \\ A_{\mu(x^0, x^1, x^2, x^3+N)}^a &:= A_{\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)}^a. \end{aligned} \tag{1.4.5}$$



$$\lambda(n) U_\mu(n) \lambda(n + \hat{\mu})$$

Abbildung 1.1.: $U_\mu(n)$ verbindet das Fermion bei n mit dem bei $n + \hat{\mu}$ so, dass eine Eichinvariante Größe entsteht.

Für die Fermionen $\lambda_x^{a\alpha}$ wählen wir in allen Raum-Richtungen periodische Randbedingungen, in Zeitrichtung werden jedoch entweder periodische oder antiperiodische Randbedingungen verwendet.

$$\begin{aligned} \lambda_{(x^0+N_T, x^1, x^2, x^3)}^{a\alpha} &:= b \lambda_{(x^0, x^1, x^2, x^3)}^{a\alpha} \\ \lambda_{(x^0, x^1+N, x^2, x^3)}^{a\alpha} &:= \lambda_{(x^0, x^1, x^2, x^3)}^{a\alpha} \\ \lambda_{(x^0, x^1, x^2+N, x^3)}^{a\alpha} &:= \lambda_{(x^0, x^1, x^2, x^3)}^{a\alpha} \\ \lambda_{(x^0, x^1, x^2, x^3+N)}^{a\alpha} &:= \lambda_{(x^0, x^1, x^2, x^3)}^{a\alpha}. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Es ist zu verstehen, dass b den Randbedingungen entsprechend gewählt wird, also $b = 1$ für die periodische und $b = -1$ für die antiperiodische Randbedingung in Zeitrichtung. Wir werden keine spezielle Randbedingung wählen, jedoch die Indizierung aller beeinflussten Größen mit einem b vorerst unterlassen. Daher müssen wir uns immer daran erinnern, dass es eine explizite Abhängigkeit von den Randbedingungen gibt. Wir betrachten zuerst die partielle Ableitung des Fermionenfeldes, die sich wie oben beschrieben naiv durch

$$\Delta_\mu \lambda_n = \frac{\lambda_{n+\hat{\mu}} - \lambda_{n-\hat{\mu}}}{2a}$$

approximieren lässt. Wollten wir nun daraus einen eichinvarianten Term wie gewöhnlich erstellen durch

$$\bar{\lambda}_n \Delta_\mu \lambda_n$$

sehen wir, dass dieser nicht lokal eichinvariant ist. Sei nun eine lokale Eichtransformation durch $\Omega_n \in \text{SU}(2)$ gegeben, so dass $\lambda'_n = \Omega_n \lambda_n$, dann ergibt sich die Transformation der obigen Größe zu

$$\bar{\lambda}'_n \Delta_\mu \lambda'_n = \bar{\lambda}'_n \frac{\lambda'_{n+\hat{\mu}} - \lambda'_{n-\hat{\mu}}}{2a} = \frac{\bar{\lambda}_n \Omega_n^\dagger \Omega_{n+\hat{\mu}} \lambda_{n+\hat{\mu}} - \bar{\lambda}_n \Omega_n^\dagger \Omega_{n-\hat{\mu}} \lambda_{n-\hat{\mu}}}{2a},$$

was nicht eichinvariant ist, da $\Omega_n^\dagger \Omega_m = \mathbb{1}$ im Allgemeinen nur für $n = m$ gilt. Wir führen dafür nun die *Linkvariable* $U_\mu(n) \in \text{SU}(2)$ ein, die durch

$$U'_\mu(n) = \Omega_n U_\mu(n) \Omega_{n+\hat{\mu}}^\dagger$$

unter einer Eichtransformation transformiert. Anschaulich versteht man unter $U_\mu(n)$ ein Objekt, welches zwischen den Transformationen zweier benachbarter Punkte vermittelt. Damit können wir $U_\mu(n)$ mit der Verbindungslinie von n nach $n + \hat{\mu}$ assoziieren. Damit hat $U_\mu(n)$ auch eine

Richtung, und wir können sinnvoll ein $U_{-\mu}(n)$ definieren, das unter Eichtransformationen durch

$$U_{-\mu}(n) = \Omega_n U_{-\mu}(n) \Omega_{n-\hat{\mu}}^\dagger$$

transformiert. Da wir $U_\mu(n)$ und $U_{-\mu}(n + \hat{\mu})$ unweigerlich mit derselben Verbindungslinie assoziieren, es jedoch in die entgegengesetzte Richtung *zeigt*, fordern wir

$$U_{-\mu}(n + \hat{\mu}) = U_\mu(n)^\dagger.$$

Wir können die $U_\mu(n)$ als Elemente der Eichgruppe auffassen, da so etwas im kontinuierlichen Fall existiert. Im diskreten Fall schreiben wir es als

$$U_\mu(n) = \exp \left(i a A_\mu \left(n + \frac{1}{2} \hat{\mu} \right) \right)$$

wobei wir hier annehmen, dass das *Eichfeld* nur Werte auf den Linien zwischen den Gitterpunkten annimmt und entlang dieser Linien konstant bleibt¹¹.

Führen wir dann die veränderte Ableitung

$$\tilde{\Delta}_\mu \lambda_n = \frac{U_\mu(n) \lambda_{n+\hat{\mu}} - U_{-\mu}(n) \lambda_{n-\hat{\mu}}}{2a}$$

ein, sehen wir, dass diese eichinvariant ist. Ausserdem ist geht dies im Kontinuumsimes in die gewünschte Größe über, da nach [20] oder [11]

$$\tilde{\Delta}_\mu \lambda_n = \partial_\mu \lambda_n + i A_\mu(n) \lambda_n + \mathcal{O}(a^2). \quad (1.4.7)$$

Unsere diskretisierte Ableitung $\tilde{\Delta}_\mu$ liefert im Kontinuum also den gewünschten Operator D_μ . Nun fehlt uns noch das Gegenstück des Feldstärketensors. Da wir für die Ableitung schon die Linkvariablen benutzt haben, ist es ersichtlich, dass wir auch hierfür die Linkvariablen benutzen wollen um nicht mit Eichfeldern und Linkvariablen zur selben Zeit zu rechnen. Geometrisch ist der Feldstärketensor nichts anderes als eine Krümmung in der Lie-Gruppe über unserem Minkowski-Raum. Er ist analog zum Riemannschen Krümmungstensor in der allgemeinen Relativitätstheorie zu verstehen, indem er die Drehung eines Tangentialvektors auf einer kleinen geschlossenen Bahn beschreibt, die parallel transportiert werden¹². Dies gibt Anlass, eine *Plaquette* zu betrachten, also das Produkt von Paralleltransportern entlang einer geschlossenen Bahn. Wir wählen dazu die einfachste geschlossene Bahn, ein Quadrat in μ und ν Richtung, und definieren die Plaquette einfach als

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_{-\mu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu}) U_{-\nu}(n + \hat{\nu}).$$

¹¹Für zwei Punkte a, b einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit und einen Weg γ zwischen diesen, gibt es in der Lie-Algebra \mathfrak{g} der Lie-Gruppe G , die auf M wirkt, ein Eichbosonenfeld $iA_\mu \in \mathfrak{g}$ $\mu = 1, \dots, n$, das den Paralleltransporter U_γ in G erzeugt, der unter einer lokalen Eichtransformation $\Omega(x) \in SU(2)$ durch

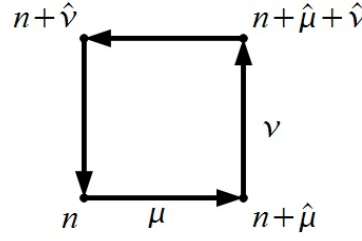
$$U'_\gamma = \Omega(a) U_\gamma \Omega(b)$$

transformiert. Vergleichen wir die diskrete und die kontinuierliche Version, entlang einer geraden Kurve von x nach $x + a\hat{\mu}$ sehen wir, dass

$$U_\mu(x) = U_\gamma + \mathcal{O}(a).$$

Diese Tatsachen finden sich in [22] ausführlicher erläutert.

¹²Wir finden diese Tatsachen in großer Ausführlichkeit in [22] beschrieben.



$$U_{\mu}(n) U_{\nu}(n + \hat{\mu}) U_{-\nu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu}) U_{-\mu}(n + \hat{\nu})$$

Abbildung 1.2.: $U_{\mu\nu}(n)$ gibt die Veränderung eines Lie-Gruppen-Elementes an, welches infinitesimal parallel durch das Rechteck (μ, ν) transportiert wird.

Die Eichtransformation $\Omega_n \in \text{SU}(2)$ bewirkt nun

$$U'_{\mu\nu}(n) = \Omega_n U_{\mu\nu}(n) \Omega_n^{\dagger}.$$

Das Transformationsverhalten von $U_{\mu\nu}(n)$ ist identisch mit dem des Feldstärketensors. Nun lässt sich $U_{\mu\nu}(n)$ so verstehen, dass es ein Element $\Omega \in \text{SU}(2)$ aus der Lie-Gruppe parallel durch das Quadrat in μ, ν -Richtung transportiert und es dann zu $U_{\mu\nu}(n)\Omega$ wird. Um zu erfahren, inwieweit sich dieses Element verändern würde, betrachten wir

$$\text{Tr}_d (\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)), \quad (1.4.8)$$

die Differenz des Transporters und der Identität, wobei wir die Spur bilden, um eine eichinvariante Größe zu erhalten.

In [11] wird gezeigt, dass der Realteil dieser Größe im Kontinuumslimit zu

$$\Re(\text{Tr}_d (\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n))) = \frac{1}{2} a^4 \text{Tr}_d (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(a^6), \quad (1.4.9)$$

wird. Also können wir die euklidische Wirkung im Kontinuum mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(U_{\mu}(n), \lambda_n, \lambda_n^{\dagger}) = \frac{2}{g^2 a^4} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \Re(\text{Tr}_d (\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n))) - \frac{1}{2} \bar{\lambda}_n \left(i\gamma_{\mu} \tilde{\Delta}_{\mu} + m_{\tilde{g}} \right) \lambda_n$$

approximieren, denn mit (1.4.7) und (1.4.9) folgt

$$\begin{aligned} S[U_{\mu}, \lambda, \lambda^{\dagger}] &= \int_x \mathcal{L}(U_{\mu}(n), \lambda_n, \lambda_n^{\dagger}) \\ &= \int_x \left(\frac{2}{g^2 a^4} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \Re(\text{Tr}_d (\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n))) - \frac{1}{2} \bar{\lambda}_n \left(i\gamma_{\mu} \tilde{\Delta}_{\mu} + m_{\tilde{g}} \right) \lambda_n \right) \\ &= \int_x \left(\frac{1}{g^2} \text{Tr}_d (F_{\mu\nu}(n) F_{\mu\nu}(n)) - \frac{1}{2} \bar{\lambda}_n ((i\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + iA_{\mu}(n)) + m_{\tilde{g}}) \lambda_n \right) + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned}$$

Da wir jedoch eine supersymmetrische Theorie beschreiben wollen, und hier klar sechs Freiheitsgrade haben, die Fermionen und ihre jeweiligen Antifermionen, haben wir doppelt so viele

Fermionen wie Bosonen. Dies können wir angleichen, indem wir mit Majorana-Fermionen arbeiten indem wir¹³

$$\bar{\lambda} = \lambda^\dagger \gamma^0 \stackrel{!}{=} -\lambda^T C$$

fordern. Im Pfadintegral lässt sich das leicht ausführen, indem wir den Faktor $\delta(\lambda^\dagger \gamma^0 - \lambda^T C)$ hinzufügen, um die Majorana-Bedingung einzuhalten. Damit erhalten wir für das Gitterpfadintegral das Integrationsmaß

$$\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\lambda^\dagger \exp\left(-S[U_\mu, \lambda, \lambda^\dagger]\right) \delta\left(\lambda^\dagger \gamma^0 + \lambda^T C\right).$$

Damit erhalten wir für unsere Theorie das Maß

$$\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\lambda \exp\left(-S[U_\mu, \lambda, \lambda^\dagger = -\lambda^T C \gamma^0]\right).$$

1.4.4. Nochmals adjungierte Fermionen

Wie bereits angesprochen, werden wir im folgenden mit Fermionen in der adjungierten Darstellung arbeiten, jedoch wollen wir die Transformationen mit Hilfe von Matrizen der definierenden Darstellung von $(U_\mu)^{ij}(n) \in SU(2)$ darstellen, da diese leichter zu modellieren sind. Wir haben aber bereits gesehen, dass wir die Transformationen in der adjungierten Darstellung durch die Umwandlung mit den definierenden Generatoren T^a

$$(V_\mu)^{ab}(n) = 2\text{Tr}_d(T^a U_\mu(n) T^b (U_\mu)^\dagger(n)) \quad (1.4.10)$$

erhalten, da hier $C_T = \frac{1}{2}$ ist. Mit dieser Ersetzung erhalten wir fast die endgültige Darstellung unserer Gitter-Wirkung.

1.4.5. Der Dirac-Operator

Betrachten wir freie Fermionen, deren Wirkung durch

$$S[\lambda] = \int_x \mathcal{L}(\lambda_x) = -\frac{1}{2} \int_x \bar{\lambda}_x (i\gamma_\mu \Delta_\mu + m_{\tilde{g}}) \lambda_x$$

gegeben ist und uns das Pfadintegral in der Form

$$\int \mathcal{D}\lambda \exp(-S[\lambda]).$$

erzeugt, können wir exakt den euklidischen Propagator mit Hilfe von (1.3.4) zu

$$\langle \lambda_x^{a\alpha} \bar{\lambda}_y^{b\beta} \rangle_T = \frac{\int \mathcal{D}\lambda \exp(-S[\lambda]) \lambda_x^{a\alpha} \bar{\lambda}_y^{b\beta}}{\int \mathcal{D}\lambda \exp(-S[\lambda])} \quad (1.4.11)$$

¹³Das Minuszeichen welches im Vergleich zu den Konventionen aus [20] kommt daher, dass wir hier mit $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ arbeiten. Es gibt dort zusätzliche Faktoren i. Darauf wird jedoch im A.3 genauer eingegangen.

bestimmen. Benutzen wir die Definition (1.3.11) von $W[\theta]$ und ersetzen θ durch den fermionischen Strom J_x sowie die Matrix M durch die im folgenden erläuterte Matrix. Dazu betrachten wir den Exponenten etwas genauer. Dieser lässt sich als Matrix auffassen. Weiterhin betrachten wir die Integration \int_x wieder als Matrixmultiplikation der Raumindizes, so dass wir mit (1.2.3) die Form

$$S[\lambda] = -\frac{1}{2} \bar{\lambda} Q \lambda = -\frac{1}{2} \bar{\lambda} (i\gamma_\mu \Delta_\mu + m_{\tilde{g}} \delta^C) \lambda$$

erhalten. Schreiben wir das aus, steht dort

$$\begin{aligned} S[\lambda] &= -\frac{1}{2} \int_x \int_y \bar{\lambda}_x (i\gamma_\mu (\Delta_\mu)_{x,y} + m_{\tilde{g}} \delta_{x,y}^C) \lambda_y \\ &= -\frac{1}{2} \int_x \int_y \bar{\lambda}_x \left(\frac{i}{2a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu (\delta_{x,y-a\hat{\mu}}^C - \delta_{x,y+a\hat{\mu}}^C) + m_{\tilde{g}} \delta_{x,y}^C \right) \lambda_y. \end{aligned}$$

Wir müssen jedoch auf die Randbedingungen achten, die wir in (1.4.6) gewählt haben. Dazu ersetzen wir die verschobenen Delta-Funktionen durch die in Gleichung (1.2.4) und den dort folgenden definierte Funktion, die die Randbedingungen beachtet. Die Matrix Q wird im Weiteren als der *Dirac-Operator* referenziert. Er ist die Verbindungsmatrix zwischen λ und $\bar{\lambda}$ in der Fermionenwirkung. Wir definieren hiermit die Matrix M , da wir mit Majorana-Fermionen arbeiten. Denn hier gilt dann

$$S[\lambda] = -\frac{1}{2} \lambda^T M \lambda = -\frac{1}{2} \lambda^T C (i\gamma_\mu \Delta_\mu + m_{\tilde{g}} \delta^C) \lambda$$

Wir schreiben die Indizes von M in der folgenden Weise¹⁴

$$\lambda^T M \lambda = \int_y \int_x (\lambda^T)_{b\beta y} M_{a\alpha x}^{b\beta y} \lambda_x^{a\alpha} = \int_y \int_x \lambda_y^{b\beta} M_{a\alpha x}^{b\beta y} \lambda_x^{a\alpha},$$

da sich so die große Menge an Indizes besser notieren lässt. Wir haben nun drei Indizepaare und wollen wir noch einmal ausführlich auf die Notation, am Beispiel der Transposition, eingehen. Dabei haben die Transpositionen im Ort-Zeit-Raum, im Spinor-Raum und im Darstellungsraum¹⁵ die Gestalt

$$\begin{aligned} (M^{\text{Ts}})_{a\alpha x}^{b\beta y} &= M_{a\beta x}^{b\alpha y} \\ (M^{\text{Td}})_{a\alpha x}^{b\beta y} &= M_{b\alpha x}^{a\beta y} \\ (M^{\text{TE}})_{a\alpha x}^{b\beta y} &= M_{a\alpha y}^{b\beta x}. \end{aligned}$$

Die Matrix M ist, wie in A.4 gezeigt, antisymmetrisch, so dass

$$(M^{\text{TsdE}})_{a\alpha x}^{b\beta y} = M_{b\beta y}^{a\alpha x} = -M_{a\alpha x}^{b\beta y}.$$

Wir sehen dort auch dass

$$M = CQ$$

¹⁴Für eine eindeutige Notation müssten wir M durch $M_{a\alpha x}^{b\beta y}$ indizieren, da der *linke* Index meist mit der Spaltennummer assoziiert wird. Wir verzichten jedoch zu Gunsten der Übersichtlichkeit und kompakterer Gleichungen auf diese Indizierung und appellieren hier an den Leser, dies im Hinterkopf zu behalten.

¹⁵Wir führen hier zusätzlich den Index E für den Ort-Zeitraum der Variable x ein.

gilt.

1.4.6. Der naive Propagator

Mit Hilfe des Wick'schen Theorems erhalten wir für den Fermionen-Korrelator mit (1.3.15) sofort

$$\begin{aligned}\langle \lambda_x^{a\alpha} \lambda_y^{b\beta} \rangle_T &= \frac{1}{2} \sum_{\sigma \in \text{Perm}((x,a,\alpha),(y,b,\beta))} \text{sign}(\sigma) (M^{-1})_{\sigma((y,b,\beta))}^{\sigma((x,a,\alpha))} \\ &= \frac{1}{2} \left((M^{-1})_{y,b,\beta}^{x,a,\alpha} - (M^{-1})_{x,a,\alpha}^{y,b,\beta} \right) = (M^{-1})_{y,b,\beta}^{x,a,\alpha}\end{aligned}$$

Da wir mit Majorana-Fermionen arbeiten, bekommen wir den gewünschten Propagator durch Multiplikation mit C , so dass

$$\langle \lambda_x^{a\alpha} \bar{\lambda}_y^{b\beta} \rangle_T = \langle \lambda_x^{a\alpha} \lambda_y^{b\gamma} \rangle_T C^{\gamma\beta} = (M^{-1})_{b\gamma y}^{a\alpha x} C^{\gamma\beta},$$

was wir durch

$$\begin{aligned}(M^{-1})_{b\gamma y}^{a\alpha x} C^{\gamma\beta} &= ((CQ)^{-1})_{b\gamma y}^{a\alpha x} C^{\gamma\beta} = (Q^{-1})_{b\delta y}^{a\alpha x} (C^{-1})^{\delta\gamma} C^{\gamma\beta} \\ &= (Q^{-1})_{b\beta y}^{a\alpha x} =: \Delta_{b\beta y}^{a\alpha x}\end{aligned}$$

leicht auf den Dirac-Operator zurückführen. Der inverse Dirac-Operator wird mit Propagator bezeichnet und Δ genannt. Nun müssen wir noch Δ berechnen. Durch die Fouriertransformationseigenschaften der diskretisierten Ableitung Δ_μ (1.2.6) und ihrer Nichtsingularität lässt sich Q durch

$$\begin{aligned}Q &= \mathcal{F}^\dagger \mathcal{F} Q \mathcal{F}^\dagger \mathcal{F} = \mathcal{F}^\dagger (\mathcal{F} Q \mathcal{F}^\dagger) \mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}^\dagger \left(\mathcal{F} (i\gamma_\mu \Delta_\mu + m_{\tilde{g}} \delta^C) \mathcal{F}^\dagger \right) \mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}^\dagger \left(i\gamma_\mu \hat{\Delta}_\mu + m_{\tilde{g}} \hat{\delta}^C \mathcal{F} \mathcal{F}^\dagger \right) \mathcal{F} \\ &= \mathcal{F}^\dagger \left(i\gamma_\mu \hat{\Delta}_\mu + m_{\tilde{g}} \hat{\delta}^C \right) \mathcal{F} =: \mathcal{F}^\dagger \hat{Q} \mathcal{F}\end{aligned}$$

ausdrücken. Hierbei hat \hat{Q} die einfache Diagonalgestalt

$$\hat{Q}_q^p = \left(- \sum_{\mu=1}^4 \frac{\gamma_\mu \sin(ap_\mu)}{a} + m_{\tilde{g}} \right) \delta_{p,q}^C,$$

wenn wir die passenden Impulsgitter verwenden. Das heisst, dass wir für p^4 das verschobene Gitter, falls wir mit zeitlich antiperiodischem Gitter arbeiten und für die anderen das normale Impulsgitter verwenden. Damit folgt

$$\Delta = \mathcal{F}^\dagger \hat{Q}^{-1} \mathcal{F} =: \mathcal{F}^\dagger \hat{\Delta} \mathcal{F}.$$

Dann berechnen wir nun $\hat{\Delta}$ durch

$$\begin{aligned}\hat{\Delta} &= \left(\left(-\sum_{\mu=1}^4 \frac{\gamma_{\mu} \sin(ap_{\mu})}{a} + m_{\tilde{g}} \right) \delta_{p,q}^C \right)^{-1} \\ &= \left(-\sum_{\mu=1}^4 \frac{\gamma_{\mu} \sin(ap_{\mu})}{a} + m_{\tilde{g}} \right)^{-1} \delta_{p,q}^C.\end{aligned}$$

Nun gilt wegen der Antikommutatorrelationen der Dirac-Matrizen

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} a_{\mu} + b \right) \left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} a_{\mu} - b \right) &= \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^4 \{ \gamma_{\mu}, \gamma_{\nu} \} a_{\mu} a_{\nu} - b^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^4 (-2\delta_{\mu\nu}) a_{\mu} a_{\nu} - b^2 \\ &= -\sum_{\mu=1}^4 a_{\mu}^2 - b^2\end{aligned}$$

für beliebige $a_{\mu}, b \in \mathbb{C}$. Wir haben zunächst ausgenutzt, dass a_{μ} und a_{ν} kommutieren, dann Indizes umbenannt, ausgeklammert und den Antikommutator benutzt. Hiermit können wir die Inversion des Propagators abschließen und erhalten

$$\hat{\Delta}_{p,q} = \frac{a^2 m_{\tilde{g}} + a \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \sin(ap_{\mu})}{\sum_{\mu=1}^4 \sin(ap_{\mu})^2 + a^2 m_{\tilde{g}}^2} \delta_{p,q}^C.$$

1.4.7. Bedeutung der Pole

Wir haben den Propagator in der Form eines Quotienten

$$\hat{\Delta}_{p,q} = \frac{F(p)}{G(p)} \delta_{p,q}^C$$

gegeben, wobei $G(p)$ Nullstellen hat, aus denen wir die Menge der Lösungen $p_4(\vec{p})$ bestimmen. Diese werden wir als Energien interpretieren. Desweiteren sind $F(p)$ und $G(p)$ insbesondere periodisch in p_4 mit Periode $\frac{2\pi}{a}$. Nun gilt, wenn angewendet auf diese $\frac{2\pi}{a}$ periodischen oder antiperiodischen Funktionen, nach [20] die Identität

$$N_T \int_{-\frac{\pi}{aN_T}}^{\frac{\pi}{aN_T}} dk \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n e^{inaN_T k} = \frac{2\pi}{aN_T} \int_{-\frac{\pi}{aN_T}}^{\frac{\pi}{aN_T}} dk \sum_{p_4 \in \Gamma_{N_T}^a(\tilde{\Gamma}_{N_T}^a)} \delta(k - p_4).$$

Diese Identität lässt sich, wie im Anhang A.6 gezeigt, beweisen. Dabei ist b der bereits erwähnte Faktor, der durch die Periodizität des Gitters gegeben ist und $\Gamma_{N_T}^a$ das passend gewählte Impulsgitter. In unserer Notation können wir rechts die Summe noch umschreiben, so dass wir

$$N_T \int_{k \in \Gamma^{aN_T}} dk \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n e^{inaN_T k} = \int_{k \in \Gamma^{aN_T}} dk \int_{p_4} \delta(k - p_4) \quad (1.4.12)$$

erhalten. Wir sehen, dass die Summe über eine Funktion, die nur auf diskret vielen Punkten in diesem Intervall definiert ist, beliebig kontinuierlich fortgesetzt werden kann, doch die Summe gleich bleibt. Damit können wir das Zeitverhalten des Propagators bestimmen, denn seine Fourier-Transformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_{(t,\vec{p}),(s,\vec{y})} &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int_{\vec{q}} e^{-i\vec{q}\vec{y}} \int_{p_4} \int_{q_4} e^{ip_4 t} \hat{\Delta}_{(p_4,\vec{p}),(q_4,\vec{q})} e^{-iq_4 s} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int_{p_4} e^{ip_4 t} \frac{F(p_4, \vec{p})}{G(p_4, \vec{p})} \int_{q_4} e^{-iq_4 s} \int_{\vec{q}} e^{-i\vec{q}\vec{y}} \delta_{(p_4,\vec{p}),(q_4,\vec{q})}^C \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int_{p_4} e^{ip_4(t-s)} \frac{F(p_4, \vec{p})}{G(p_4, \vec{p})} e^{-i\vec{p}\vec{y}}.\end{aligned}$$

Uns interessiert dann nur noch

$$\hat{\Delta}_{(t,\vec{p}),(0,\vec{0})} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{5}{2}}} \int_{p_4} e^{ip_4 t} \frac{F(p_4, \vec{p})}{G(p_4, \vec{p})}.$$

Jetzt gilt mit (1.4.12), wenn wir die Fortsetzung dadurch wählen, dass wir für p_4 die kontinuierlichen Werte einsetzen

$$\begin{aligned}(2\pi)^{\frac{5}{2}} \hat{\Delta}_{(t,\vec{p}),(0,\vec{0})} &= \int_{k \in \Gamma^{aN_T}} dk \int_{p_4} \delta(k - p_4) e^{ikt} \frac{F(k, \vec{p})}{G(k, \vec{p})} \\ &= \int_{k \in \Gamma^{aN_T}} dk \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n e^{inaN_T k} e^{ikt} \frac{F(k, \vec{p})}{G(k, \vec{p})} \\ &= \int_{k \in \Gamma^{aN_T}} dk \sum_{n=-\infty}^{\infty} b^n e^{ik(t+n aN_T)} \frac{F(k, \vec{p})}{G(k, \vec{p})}.\end{aligned}$$

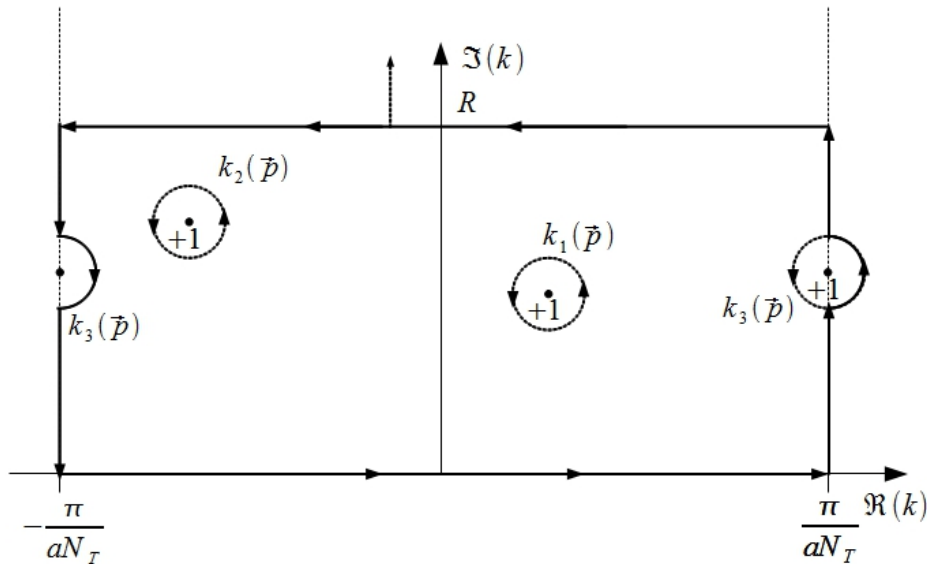


Abbildung 1.3.: Der Weg für die k -Integration.

Hat $G(k, \vec{p})$ nun die Nullstellen $\{k_i(\vec{p}) + iE_i(\vec{p})\}$ mit nichtverschwindendem Imaginärteil $E_i(\vec{p}) \neq 0$, so können wir den Residuen-Satz, der sich zum Beispiel in [18] findet, anwenden. Wir erweitern

dazu die Werte von k ins komplexe und fügen noch Wege hinzu, die keinen Beitrag zum Integral liefern, jedoch das Intervall $\left(-\frac{\pi}{aN_T}, \frac{\pi}{aN_T}\right]$ zu einem Kreisweg vervollständigen. Dieser Weg ist in Abbildung 1.3 zu sehen. Wir gehen dazu entlang des Intervalls, dann bei $k = \frac{\pi}{aN_T}$ gehen wir die Imaginäre Ebene nach oben bis wir einen unendlichen positiven Imaginäranteil haben, gehen das Intervall zurück und dann den Weg nach oben rückwärts entlang, womit sein Beitrag wegfällt. Der Rückweg des Intervalls im Unendlichen ist auch unterdrückt, wenn wir annehmen, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-R(t+naN_T)} \left| \frac{F(k + iR, \vec{p})}{G(k + iR, \vec{p})} \right| = 0 \quad \forall k, \vec{p}.$$

Gilt dies nicht, müssen wir schauen ob

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} e^{-R(t+naN_T)} \left| \frac{F(k + iR, \vec{p})}{G(k + iR, \vec{p})} \right| = 0 \quad \forall k, \vec{p}$$

gilt und in diesem Fall den Weg um die untere Halbebene schließen und die Pole dort negativ zählen. Ist keiner der beiden Fälle gegeben, so ist der Residuensatz nicht anwendbar. Für die von uns betrachteten Fälle gilt

$$\lim_{R \rightarrow \pm\infty} \left| \frac{F(k + iR, \vec{p})}{G(k + iR, \vec{p})} \right| \propto e^{\mp aR}$$

sowie, dass

$$k_i(\vec{p}) = 0$$

für alle Nullstellen von G . Damit gilt für den relevanten Grenzwert

$$\lim_{R \rightarrow \pm\infty} e^{-R(t+naN_T)} \left| \frac{F(k + iR, \vec{p})}{G(k + iR, \vec{p})} \right| \propto e^{-R(t+a(nN_T \pm 1))}.$$

Nach einigen Überlegungen und der Verwendung von $t \in \{a, 2a, \dots, (N_T - 1)a\}$ folgt, dass wir den Weg für $n \geq 0$ bei $+\infty$ und für $n \leq -1$ bei $-\infty$ schließen müssen. Daraus bekommen wir

$$\begin{aligned} (2\pi)^{\frac{5}{2}} \hat{\Delta}_{(t, \vec{p}), (0, \vec{0})} = & \sum_{n=0}^{\infty} b^n \sum_{\substack{G(iE_i(\vec{p}), \vec{p})=0 \\ E_i(\vec{p}) > 0}} 2\pi i \text{Res}_{iE_i(\vec{p})} e^{ik(t+naN_T)} \frac{F(k, \vec{p})}{G(k, \vec{p})} \\ & - \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n \sum_{\substack{G(-iE_i(\vec{p}), \vec{p})=0 \\ E_i(\vec{p}) > 0}} 2\pi i \text{Res}_{-iE_i(\vec{p})} e^{ik(t+naN_T)} \frac{F(k, \vec{p})}{G(k, \vec{p})}, \end{aligned}$$

was wir weiter ausrechnen können. Dazu wenden wir die Substitution

$$h_i(\vec{p}) := 2\pi i \frac{F(iE_i(\vec{p}), \vec{p})}{\left. \frac{d}{dq} \right|_{q=iE_i(\vec{p})} G(q, \vec{p})}$$

an und bekommen damit

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{\frac{5}{2}} \hat{\Delta}_{(t, \vec{p}), (0, \vec{0})} &= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \sum_{\substack{G(iE_i(\vec{p}), \vec{p})=0 \\ E_i(\vec{p}) > 0}} e^{-E_i(\vec{p})(t + naN_T)} h_i(\vec{p}) \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} b^n \sum_{\substack{G(-iE_i(\vec{p}), \vec{p})=0 \\ E_i(\vec{p}) > 0}} e^{-E_i(\vec{p})(naN_T - t)} h_i(\vec{p}) \\
 &= \sum_{\substack{G(iE_i(\vec{p}), \vec{p})=0 \\ E_i(\vec{p}) > 0}} e^{-E_i(\vec{p})t} h_i(\vec{p}) \sum_{n=0}^{\infty} b^n e^{-E_i(\vec{p})naN_T} \\
 &- \sum_{\substack{G(-iE_i(\vec{p}), \vec{p})=0 \\ E_i(\vec{p}) > 0}} e^{E_i(\vec{p})t} h_i(\vec{p}) \sum_{n=1}^{\infty} b^n e^{-E_i(\vec{p})naN_T} \\
 &= \sum_{\substack{G(iE_i(\vec{p}), \vec{p})=0 \\ E_i(\vec{p}) > 0}} \frac{h_i(\vec{p})}{1 - be^{-E_i(\vec{p})aN_T}} e^{-E_i(\vec{p})t} \\
 &- b \sum_{\substack{G(-iE_i(\vec{p}), \vec{p})=0 \\ E_i(\vec{p}) > 0}} \frac{h_i(\vec{p})}{1 - be^{-E_i(\vec{p})aN_T}} e^{-E_i(\vec{p})(aN_T - t)}.
 \end{aligned}$$

Wir sehen jetzt, dass uns die rein imaginären Pole des Propagators Teilchen erzeugen. Dies erkennen wir an dem exponentiellen Abfall mit dem Koeffizienten $E_i(\vec{p})$. Eine analoge Rechnung zeigt, dass für den negativen Zeit-Propagator

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^{\frac{5}{2}} \hat{\Delta}_{(-t, \vec{p}), (0, \vec{0})} &= (2\pi)^{\frac{5}{2}} \hat{\Delta}_{(0, \vec{p}), (t, \vec{0})} = b \sum_{\substack{G(iE_i(\vec{p}), \vec{p})=0 \\ E_i(\vec{p}) > 0}} \frac{h_i(\vec{p})}{1 - be^{-E_i(\vec{p})aN_T}} e^{-E_i(\vec{p})(aN_T - t)} \\
 &- \sum_{\substack{G(-iE_i(\vec{p}), \vec{p})=0 \\ E_i(\vec{p}) > 0}} \frac{h_i(\vec{p})}{1 - be^{E_i(\vec{p})aN_T}} e^{-E_i(\vec{p})t}
 \end{aligned}$$

gilt.

1.4.8. Pole des naiven Dirac-Operators

Wie gerade gesehen, erzeugen die Pole des Propagators die fundamentalen Fermionen unserer Theorie. Betrachten wir hier nun den naiven Dirac-Operator. Berechnen wir die Werte p_4 , für die es einen Pol gibt. Es muss also

$$\sin(ap_4(\vec{p}))^2 = - \left(a^2 m_g^2 + \sum_{i=1}^3 \sin(ap_i)^2 \right)$$

erfüllt sein, dann haben wir ein Teilchen. Da dies eine euklidische Größe ist, können wir die reale Energieimpuls-Relation erhalten, wenn wir $p_4(\vec{p})$ durch $iE(\vec{p})$ ersetzen, sehen jedoch, dass es durch den Sinus für jede Lösung $aE(\vec{p})$ auch eine Lösung $aE(\vec{p}) + i\pi$ gibt. Wir bekommen dann mit $E(\vec{p})$ die Energie eines Teilchens im Minkowskiraum. Damit gilt dann wegen

$$\sin(iaE(\vec{p})) = i \sinh(aE(\vec{p}))$$

für die Polstellen die Gleichung

$$\sinh(aE(\vec{p}))^2 = a^2 m_{\tilde{g}}^2 + \sum_{i=1}^3 \sin(ap_i)^2. \quad (1.4.13)$$

Benutzen wir die explizite Form des sinh und nennen $e^{aE(\vec{p})} =: z(\vec{p}) \in \mathbb{R}_+$, dann haben wir

$$\frac{1}{4} \left(z(\vec{p}) - \frac{1}{z(\vec{p})} \right)^2 = a^2 m_{\tilde{g}}^2 + \sum_{i=1}^3 \sin(ap_i)^2.$$

Wir verwenden die Abkürzung

$$M(\vec{p}) := a^2 m_{\tilde{g}}^2 + \sum_{i=1}^3 \sin(ap_i)^2 \geq 0$$

und bekommen für $z(\vec{p})^2$ die Lösungen

$$z_{\pm}(\vec{p})^2 = 2M(\vec{p}) + 1 \pm 2\sqrt{M(\vec{p})^2 + M(\vec{p})}.$$

Diese sind beide nicht negativ, da

$$2M(\vec{p}) + 1 = 2\sqrt{\left(M(\vec{p}) + \frac{1}{2}\right)^2} = 2\sqrt{M(\vec{p})^2 + M(\vec{p}) + \frac{1}{4}} > 2\sqrt{M(\vec{p})^2 + M(\vec{p})}.$$

Da wir nur eine positive Lösung wollen, erhalten wir die zwei Energien

$$2aE_{\pm}(\vec{p}) = \ln \left(2M(\vec{p}) + 1 \pm 2\sqrt{M(\vec{p})^2 + M(\vec{p})} \right).$$

Wegen der Periodizität von $M(\vec{p})$ gilt, dass wir 8 Impulse mit derselben Energie haben, da unter Verwendung von

$$\begin{aligned} \vec{q}_0 &= (0, 0, 0) \\ \vec{q}_1 &= \left(0, 0, \frac{\pi}{a}\right) \\ &\vdots \\ \vec{q}_7 &= \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, 0\right) \\ \vec{q}_8 &= \left(\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right) \end{aligned}$$

dann

$$M(\vec{p}) = M(\vec{p} + \vec{q}_i)$$

gilt und damit

$$E_{\pm}(\vec{p}) = E_{\pm}(\vec{p} + \vec{q}_i).$$

Nun lassen sich in einer wechselwirkenden Theorie aus einem Teilchen mit Impuls \vec{p} alle anderen Teilchen mit Impulsen $\vec{p} + \vec{q}_i$ erzeugen, da diese dieselbe Energie haben¹⁶. Außerdem gibt es noch 8 weitere nichtreell energetische Teilchen mit den Energien

$$E_{\pm}(\vec{p} + \vec{q}_i) + i\frac{\pi}{a}.$$

Damit haben wir insgesamt 32 Teilchen, die dieser Propagator beschreibt. Um den Kontinuums-
limes zu erhalten, betrachten wir erst $M(\vec{p})$. Hierfür gilt

$$M(\vec{p}) = a^2 (m_{\tilde{g}}^2 + \vec{p}^2) + \mathcal{O}(a^3),$$

womit wir dann

$$\begin{aligned} \sqrt{M(\vec{p})^2 + M(\vec{p})} &= \sqrt{M(\vec{p}) (M(\vec{p}) + 1)} \\ &= \sqrt{a^2 (m_{\tilde{g}}^2 + \vec{p}^2) + \mathcal{O}(a^3)} \\ &= a\sqrt{m_{\tilde{g}}^2 + \vec{p}^2} + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned}$$

erhalten. Damit gilt

$$\begin{aligned} \exp(2aE_{\pm}(\vec{p})) &= 2M(\vec{p}) + 1 \pm 2\sqrt{M(\vec{p})^2 + M(\vec{p})} \\ 1 + 2aE_{\pm}(\vec{p}) + \mathcal{O}(a^2) &= 1 \pm 2a\sqrt{m_{\tilde{g}}^2 + \vec{p}^2} + \mathcal{O}(a^2), \end{aligned}$$

und wir haben für die Energie im Kontinuum

$$E_{\pm}(\vec{p} + \vec{q}_i) = \pm\sqrt{m_{\tilde{g}}^2 + (\vec{p} + \vec{q}_i)^2}.$$

sowie die imaginären Energien, welche wegen des Faktors $\frac{\pi}{a}$ stark fluktuieren im Limes. Dies ist nicht das Verhalten, welches wir uns wünschen für eine reale physikalische Theorie. Um dieses Manko auszugleichen wird der Wilson-Term eingeführt.

1.4.9. Der Wilson-Term

Die Pole entstehen dadurch, dass die Diagonalwerte von \hat{Q} verschwinden. Um diesem vorzubeugen, wird der Wilson-Term hinzugefügt.¹⁷ Dieser ist in der Impulsdarstellung leicht zu erklären, da er eine einfache, $\frac{2\pi}{a}$ -periodische Funktion sein sollte, die die Minima am Rand des Impulsgitters anhebt. Die einfachste Funktion dieser Art ist

$$\frac{r}{a} \sum_{\mu=1}^4 (1 - \cos(ap_{\mu})),$$

wobei der Faktor r nahezu beliebig ist, aber positiv gewählt werden muss. Der Faktor a ist aus ästhetischen Gründen dort und die Summe geht über alle Impulskomponenten, um etwas

¹⁶Siehe dazu [20].

¹⁷Dieses Verfahren, seine Ergebnisse sowie Interpretationen lassen sich in [30], [20] oder [11] nachschlagen.

Minkowski-Skalar anmutendes zu erhalten. Modifizieren wir \hat{Q} auf der Diagonalen um diesen Term, erhalten wir den Dirac-Operator

$$\begin{aligned} Q_y^x &= (\mathcal{F}^\dagger)_{x,p} \left(-\sum_{\mu=1}^4 \frac{\gamma_\mu \sin(ap_\mu)}{a} + \frac{r}{a} \sum_{\mu=1}^4 (1 - \cos(ap_\mu)) + m_{\tilde{g}} \right) \hat{\delta}_{p,q}^C \mathcal{F}_{q,y} \\ &= (\mathcal{F}^\dagger)_{x,p} \left(-\sum_{\mu=1}^4 \left(\frac{\gamma_\mu \sin(ap_\mu)}{a} + \frac{r}{a} \cos(ap_\mu) \right) + m_{\tilde{g}} + \frac{4r}{a} \right) \hat{\delta}_{p,q}^C \mathcal{F}_{q,y}. \end{aligned}$$

Wir verwenden ab hier die Abkürzung

$$\tilde{m}_{\tilde{g}} = m_{\tilde{g}} + \frac{4r}{a}$$

Für den Sinus-Cosinus-Term gilt

$$\begin{aligned} -\sum_{\mu=1}^4 \left(\frac{\gamma_\mu \sin(ap_\mu)}{a} + \frac{r}{a} \cos(ap_\mu) \right) &= -\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 (2\gamma_\mu \sin(ap_\mu) + 2r \cos(ap_\mu)) \\ &= -\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 (-i\gamma_\mu (e^{iap_\mu} - e^{-iap_\mu}) + r (e^{iap_\mu} + e^{-iap_\mu})) \\ &= \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 (e^{iap_\mu} (i\gamma_\mu - r) - e^{-iap_\mu} (i\gamma_\mu + r)). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung für Q unter Verwendung der Substitution $\tilde{m}_{\tilde{g}} := m_{\tilde{g}} + \frac{4r}{a}$ ergibt sich

$$Q_y^x = (\mathcal{F}^\dagger)_{x,p} \left(\frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 (e^{iap_\mu} (i\gamma_\mu - r) - e^{-iap_\mu} (i\gamma_\mu + r)) + \tilde{m}_{\tilde{g}} \right) \hat{\delta}_{p,q}^C \mathcal{F}_{q,y},$$

was im Hinblick auf (1.2.4)-(1.2.5) zu

$$Q_y^x = \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{x,y-a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu - r) - \delta_{x,y+a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu + r)) + \tilde{m}_{\tilde{g}} \delta_{x,y}^C \quad (1.4.14)$$

wird.

1.4.10. Pole des Propagators mit Wilson-Term

Wir wollen noch die Auswirkungen dieses Terms auf die Pole untersuchen. Dazu betrachten wir erneut den Nenner des Propagators, den wir wie zuvor erhalten, wenn wir

$$am_{\tilde{g}} \rightarrow a\tilde{m}_{\tilde{g}} - r \sum_{\mu=1}^4 \cos(ap_\mu) \geq am_{\tilde{g}}$$

ersetzen. Die neue Energie-Impulsrelation ist nicht mehr invariant unter der Verschiebung von $aE(\vec{p})$ um $i\pi$ und Verschiebung der Impulse um \vec{q}_i . Setzen wir hier wieder $p_4 = iE(\vec{p})$ um die

physikalischen Energien zu erhalten, wird die Cosinussumme zu

$$\sum_{\mu=1}^4 \cos(ap_\mu) = \sum_{i=1}^3 \cos(ap_i) + \cos(iaE(\vec{p})) = \sum_{i=1}^3 \cos(ap_i) + \cosh(aE(\vec{p})).$$

Damit gilt für Pole die Energie-Impuls-Relation

$$\sinh(aE(\vec{p}))^2 = \left(a\tilde{m}_{\tilde{g}} - r \sum_{i=1}^3 \cos(ap_i) - r \cosh(aE(\vec{p})) \right)^2 + \sum_{i=1}^3 \sin(ap_i)^2. \quad (1.4.15)$$

Setzen wir $\cosh(aE(\vec{p})) =: z(\vec{p}) \geq 1$, so erhalten wir die Gleichung

$$z(\vec{p})^2 - 1 = \left(a\tilde{m}_{\tilde{g}} - r \sum_{i=1}^3 \cos(ap_i) - rz(\vec{p}) \right)^2 + \sum_{i=1}^3 \sin(ap_i)^2,$$

was mit den Substitutionen

$$\begin{aligned} A(\vec{p}) &:= a\tilde{m}_{\tilde{g}} - r \sum_{i=1}^3 \cos(ap_i) \geq 0 \\ M(\vec{p}) &:= A(\vec{p})^2 + \sum_{i=1}^3 \sin(ap_i)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1.4.16)$$

zu

$$z(\vec{p})^2 - 1 = M(\vec{p}) - 2rA(\vec{p})z(\vec{p}) + r^2z(\vec{p})^2 \quad (1.4.17)$$

wird. Die Lösungen für $z(\vec{p})$ lassen sich angeben durch

$$z_{\pm}(\vec{p}) = -\frac{rA(\vec{p})}{1-r^2} \pm \sqrt{\frac{r^2A(\vec{p})^2 + (1-r^2)(1+M(\vec{p}))}{(1-r^2)^2}}. \quad (1.4.18)$$

Wir sehen, dass nur dann eine physikalische Lösungen zulässig ist, wenn wir $r \leq 1$ wählen, da nur dann der Ausdruck unter der Wurzel nicht negativ ist. Damit haben wir $r \in (0, 1]$ zu wählen. Desweiteren sehen wir, dass $z_{-}(\vec{p}) < 0$ ist und damit eine nicht physikalische, nicht reelle Lösung zulässt. Mit

$$w(\vec{p}) = e^{aE(\vec{p})},$$

gilt, dass

$$\frac{1}{2} \left(w_{\pm}(\vec{p}) + \frac{1}{w_{\pm}(\vec{p})} \right) = z_{\pm}(\vec{p}) \quad (1.4.19)$$

ist, womit wir für einen bestimmten Impuls \vec{p} die vier Lösungen¹⁸

$$w_{\sigma_1}^{\sigma_2}(\vec{p}) = z_{\sigma_1}(\vec{p}) + \sigma_2 \sqrt{z_{\sigma_1}(\vec{p})^2 - 1}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \{+, -\}$$

erhalten. Die negativen Lösungen $w_{\sigma_1}^{\sigma_2}(\vec{p})$ entsprechen imaginären Energielösungen $aE(\vec{p}) + i\pi$ und es lässt sich zeigen, dass diese für $r \rightarrow 1$ im Kontinuum divergieren, also nicht angenommen werden können, weshalb man in der Regel $r = 1$ wählt. Zusätzlich erhalten alle minimalen

¹⁸Diese Lösungen existieren immer, da $z_{\sigma_1}(\vec{p})^2 < 1$ in Gleichung (1.4.17) zu einem Widerspruch führen würde, da die linke Seite negativ und die rechte Seite nicht negativ wäre.

Energielösungen, die nicht bei \vec{q}_0 liegen, additive Terme proportional a^{-1} dazu, womit diese im Kontinuumslimit unterdrückt werden, da sie Teilchen mit einer Masse $m + \frac{c}{a}$ entsprechen. Damit erfüllt der veränderte Dirac-Operator im Fall $r = 1$ die Anforderungen, die wir benötigen. Für eine genaue Analyse dieser Sachverhalte verweise ich an dieser Stelle auf [20] und [11].

1.4.11. Wirkung der Theorie

Wir sind jetzt in der Lage, einen Lagrangian für die euklidische Theorie anzugeben. Dazu verwenden wir den Dirac-Operator mit Wilson-Term und fügen noch die Eichwirkung, sowie Eichtransporter hinzu, um eine lokal eichinvariante Wirkung zu erhalten.

$$S_G[U_\mu] = \int_x \frac{2}{g^2 a^4} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \Re(\text{Tr}_d(\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(x))).$$

Diese vereinfachen wir, indem wir die Spur im Darstellungsraum über die $\mathbb{1}$ ausführen. Diese hat den Wert 2, da wir die definierende Darstellung der $SU(2)$ verwenden, diesen Faktor klammern wir aus und schreiben

$$\begin{aligned} S_G[U_\mu] &= \beta \int_x \sum_{\mu, \nu=0}^3 \left(1 - \frac{1}{N_d} \Re(\text{Tr}_d U_{\mu\nu}(x)) \right) \\ &= \beta \int_x \sum_{\mu, \nu=0}^3 \left(1 - \frac{1}{2} \Re(\text{Tr}_d U_{\mu\nu}(x)) \right). \end{aligned}$$

wobei wir

$$\beta = \frac{2N_d}{g^2 a^4} = \frac{4}{g^2 a^4}$$

gesetzt haben. Der Eichanteil der Wirkung wird um einen zusätzlichen Term erweitert, um Diskretisierungsfehler in einer höheren Ordnung zu unterdrücken. Dies ist die *tree level improved Symanzik* Wirkung. Der Zusatzterm ist durch

$$S_G^{\text{sym}}[U_\mu] = \beta \int_x \sum_{\mu, \nu=0}^3 \left(1 - \frac{1}{2} \Re(\text{Tr}_d G_{\mu\nu}(x)) \right)$$

gegeben, wobei

$$G_{\mu\nu}(x) = U_\mu(n)U_\mu(n + \hat{\mu})U_\nu(n + 2\hat{\mu})U_{-\mu}(n + 2\hat{\mu} + \hat{\nu})U_{-\mu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu})U_{-\nu}(n + \hat{\nu})$$

einer rechteckigen Plaquette entspricht. Nun addieren wir dies zu unserer Wirkung hinzu und erhalten die verbesserte Wirkung

$$S_G^{\text{imp}}[U_\mu] = c_0 S_G[U_\mu] + c_1 S_G^{\text{sym}}[U_\mu],$$

für die die Koeffizienten $c_0 = 1 - 8c_1$ erfüllen. In unserem Fall haben wir $c_1 = -\frac{1}{12}$ verwendet, wie in [3] zu lesen ist. Betrachten wir jetzt die Fermionenwirkung etwas genauer, so hat sie mit

(1.4.14) die Form

$$S_F[U_\mu, \lambda] = \int_x \int_y \bar{\lambda}_{b\beta y} Q_{a\alpha x}^{b\beta y} \lambda_x^{a\alpha}$$

$$Q_{a\alpha x}^{b\beta y}(U_\mu(x)) = \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{y,x-a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu - 1) V_\mu(x) - \delta_{y,x+a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu + 1) V_{-\mu}(x)) + \tilde{m}_{\tilde{g}} \delta_{x,y}^C.$$

Es ist wichtig zu sehen, dass hier die Matrix Q von den Eichtransportern abhängt. Dass es nur der Eichtransporter an x ist, werden wir sofort sehen. Hier ist wie in (1.4.10) angegeben V_μ bestimmt durch

$$(V_\mu)^{ab}(x) = 2\text{Tr}_d(T^a U_\mu(x) T^b (U_\mu)^\dagger(x)),$$

da wir die Linktransporter in der definierenden Darstellung gewählt haben. Diese Matrizen sind per Definition unitär. Sie lassen sich auch über die Exponentialdarstellung mit den adjungierten Generatoren verstehen. Diese sind rein imaginär, womit automatisch V_μ reell, also orthonormal ist. Anders lässt sich dies sehen, wenn wir die Bestimmungsgleichung von V_μ komplex konjugieren, dann sehen wir

$$\begin{aligned} (V_\mu)^{ab}(x)^* &= 2\text{Tr}_d(T^a U_\mu(x) T^b (U_\mu)^\dagger(x))^* \\ &= 2\text{Tr}_d((T^a U_\mu(x) T^b (U_\mu)^\dagger(x))^\dagger) \\ &= 2\text{Tr}_d(U_\mu(x) T^b (U_\mu)^\dagger(x) T^a) \\ &= 2\text{Tr}_d(T^a U_\mu(x) T^b (U_\mu)^\dagger(x)) = (V_\mu)^{ab}(x). \end{aligned}$$

Die komplexe Konjugation wird in der Spur durch adjungieren umgesetzt, was in Zeile zwei verwendet wurde. Dann haben wir adjungiert und die Zyklicität der Spur ausgenutzt. Damit ist

$$V_{-\mu}(y) = V_\mu^\dagger(y - a\hat{\mu}) = V_\mu^{\text{T}_d}(y - a\hat{\mu}),$$

wodurch Q zu

$$Q_{x,y}^y[U_\mu] = \frac{1}{2a} \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{x,y-a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu - 1) V_\mu(x) - \delta_{x,y+a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu + 1) V_\mu^{\text{T}_d}(x)) + \tilde{m}_{\tilde{g}} \delta_{x,y}^C.$$

wird. Skalieren wir unsere Fermionen noch mit dem Faktor $\sqrt{\tilde{m}_{\tilde{g}}}$, erhalten wir in den Pfadintegralen nur Vorfaktoren, die sich wegekürzen, also irrelevant sind. Desweiteren geht Q in $\tilde{m}_{\tilde{g}}^{-1} Q$ über, so dass wir

$$\begin{aligned} Q_{x,y}^y[U_\mu] &= \delta_{x,y}^C + \frac{1}{2a\tilde{m}_{\tilde{g}}} \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{x,y-a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu - 1) V_\mu(x) - \delta_{x,y+a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu + 1) V_\mu^{\text{T}_d}(y)) \\ &= \delta_{x,y}^C - \kappa \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{x,y+a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu + 1) V_\mu^{\text{T}_d}(y) - \delta_{x,y-a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu - 1) V_\mu(x)) \\ &= \delta_{x,y}^C - \kappa H_x^y[U_\mu] \end{aligned}$$

erhalten. Die Matrix H wird auch Hopping-Matrix und wir haben den Vorfaktor κ genannt, der durch

$$\kappa = \frac{1}{2a\tilde{m}_{\tilde{g}}} = \frac{1}{2(am_{\tilde{g}} + 4r)} = \frac{1}{2(am_{\tilde{g}} + 4)}$$

gegeben ist. Wir sehen, dass der Fall der masselosen Fermionen, also der Fall der wiederhergestellten Supersymmetrie für $\kappa_{\text{cr}} = \frac{1}{8}$ gegeben ist. In Abschnitt A.4 und A.5 des Anhangs finden sich weitere wichtige Eigenschaften von Q . Jetzt haben wir die Wirkung

$$\begin{aligned} S[U_\mu, \lambda] &= S_G^{\text{imp}}[U_\mu] + S_F[U_\mu, \lambda] \\ &= S_G^{\text{imp}}[U_\mu] + \int_x \int_y \bar{\lambda}_y Q_x^y \lambda_x. \end{aligned} \tag{1.4.20}$$

Dies gibt uns das Pfadintegralmaß endgültig zu

$$\mathcal{D}U \mathcal{D}\lambda \exp \left(-S_G^{\text{imp}}[U_\mu] - \int_x \int_y \lambda_y M_x^y \lambda_x \right)$$

wobei hier wieder

$$M_x^y := C Q_x^y$$

gesetzt wurde.

Kapitel 2

Baryonische Korrelatoren

Es wird zunächst das Transformationsverhalten und damit der Spin-Gehalt des verwendeten Baryonen-Operators untersucht und die Ergebnisse auf das Gitter übertragen.

Danach wird aufgezeigt, welches Verhalten wir für den später berechneten Korrelator erwarten und in welcher Weise sich die Masse des untersuchten Bindungszustandes in ihm widerspiegelt. Am Ende dieses Kapitels wird noch auf einige benötigte Eigenschaften zur Berechnung des Korrelators und die Ausintegration der Fermionen-Freiheitsgrade im Pfadintegral eingegangen.

In den Standardwerken [20], [11], [23], [9] und [25] sind analoge Ausführungen zu finden. Speziell für den Fall der Baryonen im Fall der QCD findet man Darstellungen in [20], [24].

2.1. Transformationsverhalten im Kontinuum

Ein Baryonen-Feld wird oft in der Form

$$B^{\alpha\mu}(x) = \lambda^\alpha(x) \text{Tr}_s (\bar{\lambda}(x) \Gamma^\mu \lambda(x))$$

angegeben, wobei $\lambda(x)$ die fundamentalen Fermionen-Felder sind. Wir wollen nun den Spin-Gehalt dieses Feldes untersuchen. Dazu müssen wir die zwei Matrizen $u^{(j)\alpha\mu}(\vec{p}, s)$ und $v^{(j)\alpha\mu}(\vec{p}, s)$ berechnen, die unsere Feldkomponenten (α, μ) auf die Spin- z -Komponente s eines Teilchens mit Spin j projizieren, denn ein Feld $B^{\alpha\mu}(x)$ mit dieser Index-Struktur lässt sich eindeutig durch [26]

$$B^{\alpha\mu}(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{j,s} \int d^3p \left(u^{(j)\alpha\mu}(\vec{p}, s) e^{-ip^\mu x_\mu} a(\vec{p}, s) + v^{(j)\alpha\mu}(\vec{p}, s) e^{ip^\mu x_\mu} a^\dagger(\vec{p}, s) \right)$$

angeben. Dabei sind $u^{(j)\alpha\mu}(\vec{p}, s)$ ($v^{(j)\alpha\mu}(\vec{p}, s)$) aus $u^{(j)\alpha\mu}(\vec{0}, s)$ ($v^{(j)\alpha\mu}(\vec{0}, s)$) durch eine Lorentz Transformation zu gewinnen, die dadurch bestimmt ist, dass sie den Ruhe-Impuls $k^\mu = (E_B(\vec{0}), \vec{0})$ auf den Impuls $p^\mu = (E_B(\vec{p}), \vec{p})$ dreht. Es ist also eine Drehung $L(\vec{p})$, für die

$$L^\mu{}_\nu(\vec{p}) k^\nu = p^\mu$$

gilt. Eine solche Drehung wirkt auf $u^{(j)\alpha\mu}(\vec{0}, s)$ ($v^{(j)\alpha\mu}(\vec{0}, s)$) in der entsprechenden Darstellung die unser Feld bestimmt. Dann haben wir für $u^{(j)\alpha\mu}(\vec{p}, s)$ ($v^{(j)\alpha\mu}(\vec{p}, s)$) die Form

$$\begin{aligned} u^{(j)\alpha\mu}(\vec{p}, s) &= \sqrt{\frac{E_B(\vec{0})}{E_B(\vec{p})}} L^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta}(\vec{p}) u^{(j)\beta\nu}(\vec{0}, s) \\ v^{(j)\alpha\mu}(\vec{p}, s) &= \sqrt{\frac{E_B(\vec{0})}{E_B(\vec{p})}} L^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta}(\vec{p}) v^{(j)\beta\nu}(\vec{0}, s). \end{aligned}$$

Für die von uns gewählte Darstellung wird die Drehungen durch die Lie-Algebra

$$(J^{\rho\sigma})^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} = \mathbb{1}^\mu{}_\nu (J^{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta + (J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu \mathbb{1}^\alpha{}_\beta$$

erzeugt, wobei $(J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu$ der Standard-Generator der definierenden Darstellung

$$(J^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = -i(\eta^{\rho\mu}\delta^\sigma{}_\nu - \eta^{\sigma\mu}\delta^\rho{}_\nu)$$

und $(J^{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta$ die Dirac-Spinor-Darstellung

$$(J^{\rho\sigma})^\alpha{}_\beta = -\frac{i}{4}[\gamma^\rho, \gamma^\sigma]^\alpha{}_\beta$$

ist. Das Baryonen-Feld, das wir verwenden, ist nur für den Fall $\vec{p} = \vec{0}$ zu untersuchen, da wir bei der Berechnung auf den Nullimpuls projizieren. Bei diesem Impuls lässt sich der Spin-Inhalt des Teilchens bestimmen, indem wir mit Hilfe der Generatoren der Darstellung die Auf- und Absteige-Operatoren der räumlichen Drehungen zusammensetzen und mit diesen alle erreichbaren Spinzustände erzeugen. Können wir auf diese Weise mehr als zwei Zustände erreichen, haben wir eine Kopplung an die Spin- $\frac{3}{2}$ Darstellung. Die räumlichen Drehungen werden durch

$$(J_k)^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{kij}(J^{ij})^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} = \mathbb{1}^\mu{}_\nu (J_k)^\alpha{}_\beta + (J_k)^\mu{}_\nu \mathbb{1}^\alpha{}_\beta$$

erzeugt. Die Auf- und Absteige-Operatoren, sowie J_3 sind dann durch

$$\begin{aligned} (J_\pm)^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} &= (J_1)^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} \pm i(J_2)^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} = \mathbb{1}^\mu{}_\nu (J_\pm)^\alpha{}_\beta + (J_\pm)^\mu{}_\nu \mathbb{1}^\alpha{}_\beta \\ (J_3)^{\mu\alpha}{}_{\nu\beta} &= \mathbb{1}^\mu{}_\nu (J_3)^\alpha{}_\beta + (J_3)^\mu{}_\nu \mathbb{1}^\alpha{}_\beta \end{aligned}$$

gegeben. Explizit gilt für die Standard-Generatoren

$$\begin{aligned} (J_+)^{\mu}_{\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ (J_-)^{\mu}_{\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ (J_3)^{\mu}_{\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Unser Baryonen-Feld hat die Struktur

$$B^{\alpha\mu} = \lambda^{\alpha}(x) \delta^{\mu}_0 \text{Tr}_s (\bar{\lambda}(x) \gamma^0 \lambda(x))$$

woraus direkt

$$(J_3)^{\mu}_{\nu} \mathbb{1}^{\alpha}_{\beta} B^{\beta\nu} = (J_3)^{\mu}_0 \mathbb{1}^{\alpha}_{\beta} B^{\beta 0} = 0 = (J_{\pm})^{\mu}_{\nu} \mathbb{1}^{\alpha}_{\beta} B^{\beta\nu}$$

folgt. Damit wirkt die Lie-Algebra auf $B^{\alpha\mu}$ durch

$$(J_k)^{\mu\alpha}_{\nu\beta} B^{\beta\nu} = (J_k)^{\alpha}_{\beta} B^{\alpha\nu}$$

und damit koppelt $B^{\alpha\mu}$ nur an Spin- $\frac{1}{2}$ Baryonen. Dies ist auch ohne die Konstruktion aller erreichbaren Spinzustände zu sehen, da nur noch die Dirac-Spinor-Generatoren auf das Feld wirken und dies nur für Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen gilt. Das allgemeine Vorgehen wurde hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt.

2.2. Transformationsverhalten auf dem Gitter

Auf dem Gitter in der euklidischen Theorie verwenden wir den entsprechenden Operator

$$B^{\alpha\mu} = i\lambda^{\alpha}(x) \delta^{\mu}_4 \text{Tr}_s (\bar{\lambda}(x) \gamma_4 \lambda(x)),$$

der denselben Spin-Gehalt hat, da der Spin auf dem Gitter durch die Einschränkung der $SU(2)$ auf die Überlagerung der kubischen Gruppe bestimmt wird und diese Einschränkung nichts an dem Transformationsverhalten ändert, falls es sich um einen Spin $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ Zustand handelt. Diese Tatsache wurde in [15] herausgearbeitet.

2.3. Der fermionische Korrelator

Aus unserer Berechnung bekommen wir den Propagator eines Fermions. Wir nehmen hier als Beispiel den freien Fermionenpropagator

$$\Delta_{x,y} = \Delta_{(t,\vec{x}),(s,\vec{y})} = \Delta_{(t-s,\vec{x}-\vec{y}),(0,\vec{0})}$$

und berechnen daraus den Korrelator

$$C_b(t, \vec{p}) := (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \Delta_{(t,\vec{x}),(0,\vec{0})}.$$

Das b wird explizit erwähnt, da wir es nachher noch einmal brauchen. Wir haben gesehen, dass der Propagator für Wilson-Fermionen die Form

$$\hat{\Delta}_{p,q} = \frac{a^2 \tilde{m}_{\tilde{g}} - ra \sum_{\mu=1}^4 \cos(ap_{\mu}) + a \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \sin(ap_{\mu})}{\sum_{\mu=1}^4 \sin(ap_{\mu})^2 + \left(a \tilde{m}_{\tilde{g}} - r \sum_{\mu=1}^4 \cos(ap_{\mu})\right)^2} \delta_{p,q}^C.$$

hat. Dabei unterscheiden sich die Randbedingungen nur in der Wahl des p_4 -Gitters. Wir definieren hier die Funktion $f(p)$ durch

$$\hat{\Delta}_{p,q} =: f(p) \delta_{p,q}^C. \quad (2.3.1)$$

Aus dem Propagator im Impulsraum erhalten wir $\Delta_{(t,\vec{x}),(s,\vec{y})}$ durch die inverse Fourier-Transformation

$$\Delta_{(t,\vec{x}),(s,\vec{y})} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{p_4} e^{ip_4 t} \int_{q_4} e^{-iq_4 s} \int_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} \int_{\vec{q}} e^{-i\vec{q}\vec{y}} \hat{\Delta}_{(p_4,\vec{p}),(q_4,\vec{q})}.$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} \Delta_{(t,\vec{x}),(0,\vec{0})} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{p_4} e^{ip_4 t} \int_{q_4} \int_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} \int_{\vec{q}} f(p_4, \vec{p}) \delta_{p,q}^C \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{p_4} e^{ip_4 t} \int_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} f(p_4, \vec{p}). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir den Korrelator

$$\begin{aligned} C_b(t, \vec{p}) &= (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \Delta_{(t,\vec{x}),(0,\vec{0})} \\ &= (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{p_4} e^{ip_4 t} \int_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{x}} f(p_4, \vec{q}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{p_4} e^{ip_4 t} \int_{\vec{q}} \int_{\vec{x}} e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} f(p_4, \vec{q}) \\ &= \int_{p_4} e^{ip_4 t} \int_{\vec{q}} \delta_{\vec{p},\vec{q}}^C f(p_4, \vec{q}) \\ &= \int_{p_4} e^{ip_4 t} f(p_4, \vec{p}). \end{aligned}$$

Diesen können wir explizit mit den Gleichungen aus Abschnitt 1.4.7 und den Identifikationen

$$\begin{aligned}
 F(p_4, \vec{p}) &= a^2 \tilde{m}_{\tilde{g}} - r a \sum_{\mu=1}^4 \cos(ap_\mu) + a \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \sin(ap_\mu) \\
 G(p_4, \vec{p}) &= \sum_{\mu=1}^4 \sin(ap_\mu)^2 + \left(a \tilde{m}_{\tilde{g}} - r \sum_{\mu=1}^4 \cos(ap_\mu) \right)^2 \\
 &= \sum_{\mu=1}^4 (1 - \cos(ap_\mu)^2) + \left(a \tilde{m}_{\tilde{g}} - r \sum_{\mu=1}^4 \cos(ap_\mu) \right)^2 \\
 \frac{d}{dp_4} G(p_4, \vec{p}) &= \frac{d \cos(ap_4)}{dp_4} \frac{d}{d \cos(ap_4)} G(p_4, \vec{p}) \\
 &= a \sin(ap_4) \left(2(1-r) \cos(ap_4) + 2ar \tilde{m}_{\tilde{g}} - 2r^2 \sum_{i=1}^3 \cos(ap_i) \right)
 \end{aligned}$$

berechnen. Weiterhin wollen wir uns nur $C(t, \vec{0})$ sowie $r = 1$ betrachten, da es der Fall ist, den wir im Programm verwenden. Für diesen Fall gilt¹

$$\begin{aligned}
 F(p_4, \vec{0}) &= a^2 m_{\tilde{g}} + a - a \cos(ap_4) + a \gamma_4 \sin(ap_4) \\
 G(p_4, \vec{0}) &= 1 + (am_{\tilde{g}} + 1)^2 - 2(am_{\tilde{g}} + 1) \cos(ap_4) \\
 \frac{d}{dp_4} G(p_4, \vec{0}) &= 2a \sin(ap_4) (am_{\tilde{g}} + 1).
 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Damit gibt es genau eine positive und eine negative Energielösung, die wir $\pm E(\vec{0})$ nennen, für die $G(\pm E(\vec{0}), \vec{0}) = 0$ ist. Die Energie für den Nullimpuls lässt sich nun als Masse des Fermions interpretieren, weswegen wir $E(\vec{0}) =: m_F > 0$ setzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 h_{\pm}(\vec{0}) &= 2\pi i \frac{a^2 m_{\tilde{g}} + a - a \cosh(\pm am_F) + a i \gamma_4 \sinh(\pm am_F)}{2ia \sinh(\pm am_F) (am_{\tilde{g}} + 1)} \\
 &= \frac{\pi}{am_{\tilde{g}} + 1} \left(i \gamma_4 \mp \frac{\cosh(am_F) - (am_{\tilde{g}} + 1)}{\sinh(am_F)} \right)
 \end{aligned}$$

und sehen, dass die Matrix $h_{\pm}(\vec{0})$ vor den Exponentialfunktionen dem Paritätsoperator entspricht. Mit $\alpha := am_{\tilde{g}} + 1$ folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{(\cosh(am_F) - \alpha)^2}{\sinh(am_F)^2} &= \frac{(\alpha \cosh(am_F) - \alpha^2)^2}{\alpha^2 - \alpha^2 \cosh(am_F)^2} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{2}(1 + \alpha^2) - \alpha^2\right)^2}{\frac{1}{4}(1 + \alpha^2)^2 - \alpha^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{4}(1 - \alpha^2)^2}{\frac{1}{4}(1 - \alpha^2)^2} = 1,
 \end{aligned}$$

¹Für den Fall $r = 1$ ist hier wichtig, darauf zu achten, dass γ_4 in einer nichtdiagonalen Darstellung gewählt ist, da Diagonalterme das Verschwinden des Wegstück-Beitrages im unendlichen verhindern könnten und die Formeln, die wir gleich berechnen für $t = a, a(N_T - 1)$ dann von dieser Form abweichen würden.

wenn wir (2.3.2) in Zeile zwei verwenden. Ziehen wir nun die Wurzel, haben wir noch das freie Vorzeichen, welches wegen² $\cosh(am_F) - \alpha < 0$ für $am_{\tilde{g}} > 1$ durch

$$\frac{\cosh(am_F) - \alpha}{\sinh(am_F)} = -1.$$

gegeben ist. Wir erhalten also die Projektionsoperatoren

$$h_{\pm}(\vec{0}) = P^{\pm} = \frac{1}{2} (i\gamma_4 \pm \mathbb{1}).$$

Damit bekommen wir den Korrelator für $t \in \{a, 2a, \dots, a(N_T - 1)\}$ zu

$$C_b(t, \vec{0}) = 2\pi \frac{P^+ e^{-m_F t} - b P^- e^{-m_F(aN_T - t)}}{(am_{\tilde{g}} + 1)(1 - be^{-m_F aN_T})}. \quad (2.3.3)$$

Für $-t \in \{-a, -2a, \dots, -a(N_T - 1)\}$ gilt wie erwartet analog

$$C_b(-t, \vec{0}) = 2\pi \frac{b P^+ e^{-m_F(aN_T - t)} - P^- e^{-m_F t}}{(am_{\tilde{g}} + 1)(1 - be^{-m_F aN_T})} = b C(aN_T - t). \quad (2.3.4)$$

Dies ist der Fall für ein Fermion mit positiver Parität. Wir hatten gesehen, dass für ein Fermion

$$\hat{\Delta}_{(t, \vec{x}), (0, \vec{0})}^+ = \langle \lambda_{(t, \vec{x})} \bar{\lambda}_{(0, \vec{0})} \rangle$$

gilt. Dem fügen wir einen Index + hinzu, um diese Größe dem positiven Fermion zuzuordnen. Nun ergibt $\gamma_5 \lambda_{(t, \vec{x})}$ eine Wellenfunktion, die bis auf umgekehrte Parität genau dem Fermion von $\lambda_{(t, \vec{x})}$ entspricht. Damit gilt dann für den Korrelator eines Fermions mit negativer Parität

$$\hat{\Delta}_{(t, \vec{x}), (0, \vec{0})}^- = -\gamma_5 \langle \lambda_{(t, \vec{x})} \bar{\lambda}_{(0, \vec{0})} \rangle \gamma_5,$$

wobei wir $\gamma_5 \beta = -\beta \gamma_5$ benutzt haben. Damit erhalten wir den Korrelator für ein Fermion mit negativer Parität für $t \in \{a, 2a, \dots, a(N_T - 1)\}$

$$\begin{aligned} C_b^-(t, \vec{0}) &= 2\pi \frac{P^- e^{-m_F t} - b P^+ e^{-m_F(aN_T - t)}}{(am_{\tilde{g}} + 1)(1 - be^{-m_F aN_T})} \\ C_b^-(-t, \vec{0}) &= 2\pi \frac{b P^- e^{-m_F(aN_T - t)} - P^+ e^{-m_F t}}{(am_{\tilde{g}} + 1)(1 - be^{-m_F aN_T})}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

2.4. Die allgemeine Form des Baryonenkorrelators

Nun kann das von uns verwendete Baryonen-Feld³

$$B_x^\alpha = \varepsilon_{abc} \lambda_x^{a\alpha} \text{Tr}_s \left(\bar{\lambda}_x^b \gamma_4 \lambda_x^c \right)$$

²Es gilt dass $\alpha \geq 1$ ist. Für $\alpha = 1$ verschwindet $\cosh(am_F) - \alpha$, was einen degenerierten Fall darstellt.

³Wir haben noch die freien Darstellungsindizes mit ε_{abc} kontrahiert, da dies der einzige Tensor dritter Stufe ist, der unter Eichtransformationen invariant ist.

an verschiedene Teilchenzustände $|B, s, \vec{q}\rangle$ koppeln. Nehmen wir an, dass dies für die leichten Massen nur Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen sind, deren freie Korrelatoren proportional zu (2.3.3), (2.3.4) und (2.3.5) sind. Der Korrelator ist dann durch

$$\begin{aligned} C_b^{\alpha\beta}(t, \vec{p}) &= (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \left\langle T \left\{ B_{(t, \vec{x})}^{\alpha} \overline{B}_{(0, \vec{0})}^{\beta} \right\} \right\rangle \\ &= (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \left\langle \left\{ \theta(t) B_{(t, \vec{x})}^{\alpha} \overline{B}_{(0, \vec{0})}^{\beta} - \theta(-t) \overline{B}_{(0, \vec{0})}^{\beta} B_{(t, \vec{x})}^{\alpha} \right\} \right\rangle \\ &= (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \left\langle \left\{ \theta(t) B_{(t, \vec{x})}^{\alpha} \overline{B}_{(0, \vec{0})}^{\beta} - \theta(-t) \overline{B}_{(-t, -\vec{x})}^{\beta} B_{(0, \vec{0})}^{\alpha} \right\} \right\rangle \end{aligned}$$

gegeben, wobei $\theta(t)$ die Heavyside-Funktion ist. An dieser Stelle fügen wir eine vollständige Eins

$$\mathbb{1} = \sum_{B, s} \int_{\vec{q}} |B, s, \vec{q}\rangle \langle B, s, \vec{q}|$$

ein, die aus allen möglichen Zuständen mit allen möglichen Impulsen und anderen charakterisierenden Quantenzahlen besteht. Wir definieren nun ein beliebiges Baryon als das Baryon mit positiver Parität, woraus die Paritäten aller anderen Fermionen folgen. Damit teilt sich die Summe in positive und negative Paritäten auf, so dass

$$\mathbb{1} = \sum_{B^+, s} \int_{\vec{q}} |B^+, s, \vec{q}\rangle \langle B^+, s, \vec{q}| + \sum_{B^-, s} \int_{\vec{q}} |B^-, s, \vec{q}\rangle \langle B^-, s, \vec{q}|.$$

Es sind in den jeweiligen Summen auch die Antiteilchen enthalten, was heisst, dass das Antiteilchen von B^+ in der Summe von B^+ enthalten ist. Damit ergibt sich wir für $t > 0$

$$C_b^{\alpha\beta}(t, \vec{p}) = \sum_{B, s} \int_{\vec{q}} (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \left\langle B_{(t, \vec{x})}^{\alpha} \left| B, s, \vec{q} \right\rangle \left\langle B, s, \vec{q} \right| \overline{B}_{(0, \vec{0})}^{\beta} \right\rangle.$$

Nun gilt nach unserer Annahme

$$\sum_s \int_{\vec{q}} (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \left\langle B_{(t, \vec{x})}^{\alpha} \left| B^+, s, \vec{q} \right\rangle \left\langle B^+, s, \vec{q} \right| \overline{B}_{(0, \vec{0})}^{\beta} \right\rangle = |N_{B^+}|^2 C_{m_{B^+}}^{+\alpha\beta}(t, \vec{p})$$

sowie

$$\sum_s \int_{\vec{q}} (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \left\langle B_{(t, \vec{x})}^{\alpha} \left| B^-, s, \vec{q} \right\rangle \left\langle B^-, s, \vec{q} \right| \overline{B}_{(0, \vec{0})}^{\beta} \right\rangle = |N_{B^-}|^2 C_{m_{B^-}}^{-\alpha\beta}(t, \vec{p}),$$

wobei $|N_{B^\pm}|^2$ die Kopplungsstärke an den Teilchenzustand B^\pm angibt. Das heisst, für $t > 0$ hat der Korrelator die Form⁴

$$\begin{aligned} C(t, \vec{0})_b &= \sum_{B^+} |N_{B^+}|^2 C_{m_{B^+}}^+(t, \vec{0}) + \sum_{B^-} |N_{B^-}|^2 C_{m_{B^-}}^-(t, \vec{0}) \\ &= P^+ \left(\sum_{B^+} |\tilde{N}_{B^+}|^2 e^{-m_{B^+}t} - b \sum_{B^-} |\tilde{N}_{B^-}|^2 e^{-m_{B^-}(aN_T-t)} \right) \\ &\quad - bP^- \left(\sum_{B^+} |\tilde{N}_{B^+}|^2 e^{-m_{B^+}(aN_T-t)} - b \sum_{B^-} |\tilde{N}_{B^-}|^2 e^{-m_{B^-}t} \right), \end{aligned}$$

die sich auch in [24] wiederfindet. Da

$$\overline{B}_{(0,\vec{0})}^\alpha = \beta^{\alpha\beta} B_{(0,\vec{0})}^\beta$$

gilt, können wir

$$\sum_s \int_{\vec{q}} (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \langle \overline{B}_{(-t,-\vec{x})}^\beta | B^+, s, \vec{q} \rangle \langle B^+, s, \vec{q} | B_{(0,\vec{0})}^\alpha \rangle = |N_{B^+}|^2 C_{m_{B^+}}^{+\alpha\beta}(-t, \vec{p})$$

und

$$\sum_s \int_{\vec{q}} (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \langle \overline{B}_{(-t,-\vec{x})}^\beta | B^-, s, \vec{q} \rangle \langle B^-, s, \vec{q} | B_{(0,\vec{0})}^\alpha \rangle = |N_{B^-}|^2 C_{m_{B^-}}^{-\alpha\beta}(-t, \vec{p}),$$

bestimmen⁵, womit für den Korrelator bei negativer Zeit durch

$$\begin{aligned} C_b(-t, \vec{0}) &= \sum_{B^+} |N_{B^+}|^2 C_{m_{B^+}}^+(-t, \vec{0}) + \sum_{B^-} |N_{B^-}|^2 C_{m_{B^-}}^-(-t, \vec{0}) \\ &= \sum_{B^+} |N_{B^+}|^2 b C_{m_{B^+}}^{+\alpha\beta}(N_T - t, \vec{0}) + \sum_{B^-} |N_{B^-}|^2 b C_{m_{B^-}}^{-\alpha\beta}(N_T - t, \vec{0}) \\ &= bP^+ \left(\sum_{B^+} |\tilde{N}_{B^+}|^2 e^{-m_{B^+}(aN_T-t)} - b \sum_{B^-} |\tilde{N}_{B^-}|^2 e^{-m_{B^-}t} \right) \\ &\quad - P^- \left(\sum_{B^+} |\tilde{N}_{B^+}|^2 e^{-m_{B^+}t} - b \sum_{B^-} |\tilde{N}_{B^-}|^2 e^{-m_{B^-}(aN_T-t)} \right) \end{aligned}$$

gegeben ist. Wir sehen also, dass wir bei negativ-periodischen Randbedingungen in Zeit-Richtung die Fermionen mit unterschiedlicher Parität sich nach Projektion auf eine Parität entgegenlaufen. Hätten wir degenerierte Massen für positive und negative Parität, würden wir einen $\cosh(t - \frac{aN_T}{2})$ Propagator erwarten. Sind die Massen nicht degeneriert, erwarten wir also einen asymmetrischen Propagator. Mit Hilfe von linearer Algebra ist schnell gezeigt, dass bei einer festen Wahl von Zeit-Randbedingungen die Paritäten nicht entkoppelt werden können, aber wir

⁴Wir haben offensichtlich

$$|\tilde{N}_{B^\pm}|^2 := \frac{2\pi |N_{B^\pm}|^2}{(am+1)(1 - be^{-m_{B^\pm}aN_T})}$$

gesetzt, wobei $m \geq 0$ ein unbekannter Parameter ist.

⁵Es gilt

$$C_b(t, -\vec{p}) := (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \Delta_{(t,-\vec{x}),(0,\vec{0})}.$$

bemerken, dass wir unter Verwendung beider Randbedingungen

$$C_{1,-1}(t, \vec{0}) = C_1(t, \vec{0}) + C_{-1}(t, \vec{0}) = P^+ \sum_{B^+} |\tilde{N}_{B^+}|^2 e^{-m_{B^+} t} + P^- \sum_{B^-} |\tilde{N}_{B^-}|^2 e^{-m_{B^-} t}$$

erzeugen können und damit eine Entkopplung erreichen. Diese Idee findet man zum Beispiel in [24].

2.4.1. Einfluss der Randbedingung

Bei der Berechnung des Korrelators erhalten wir diesen nicht direkt, sondern den Zeitkorrelator von einem zufällig gewählten Startzeitpunkt τ aus und mitteln über alle Startzeitpunkte. Wir erhalten in jedem Schritt die Größe

$$F_{b\tau}(t) = C_b(t - \tau, \vec{0})$$

für $t \in \{0, a, \dots, (N_T - 1)a\}$. Hierbei nimmt τ jeden der Werte in $\{0, a, \dots, (N_T - 1)a\}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{N_T}$ an. Aus den $F_{b\tau}(t)$ berechnen wir dann ein $C_{b\tau}(t)$ mit $t = 0, a, \dots, (N_T - 1)a$. Dazu ordnen wir für jedes t die Werte $F_{b\tau}(t)$ dem Korrelator $C_{b\tau}(t - \tau)$ zu, da wir erwarten, dass dies so einem Korrelator entspricht. Weiterhin wollen wir die periodischen oder antiperiodischen Randbedingungen beachten und ordnen $F_{b\tau}(t)$ dem Wert $bC_{b\tau}(t - \tau + aN_T)$ zu, falls $t - \tau$ negativ ist. Damit haben wir dann für einen Satz an Werten von $F_{b\tau}(t)$ die Zuordnung

$$C_{b\tau}(t) := \begin{cases} F_{b\tau}(t + \tau) & \text{wenn } \tau \leq t \\ bF_{b\tau}(t + \tau - aN_T) & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Es musste beachtet werden, dass wir $F_{b\tau}(t)$ nur für $t = 0, a, \dots, (N_T - 1)a$ gegeben haben. Da wir in der Berechnung den Mittelwert für alle τ bilden, schauen wir uns

$$C_b(t) = \sum_{\tau=0}^{(N_T-1)a} \frac{1}{N_T} C_{b\tau}(t)$$

an. Für diesen Ausdruck gilt

$$\begin{aligned} TC_b(t) &= \sum_{\tau=0}^{(N_T-1)a} C_{b\tau}(t) \\ &= \sum_{\tau=0}^t F_{b\tau}(t + \tau) + b \sum_{\tau=t+a}^{(N_T-1)a} F_{b\tau}(t + \tau - T) \\ &= \sum_{\tau=0}^t C_b(t, \vec{0}) + b \sum_{\tau=t+a}^{(N_T-1)a} C_b(t - T, \vec{0}) \\ &= \sum_{\tau=0}^t C_b(t, \vec{0}) + \sum_{\tau=t+a}^{(N_T-1)a} C_b(t, \vec{0}) \\ &= TC_b(t, \vec{0}) \end{aligned}$$

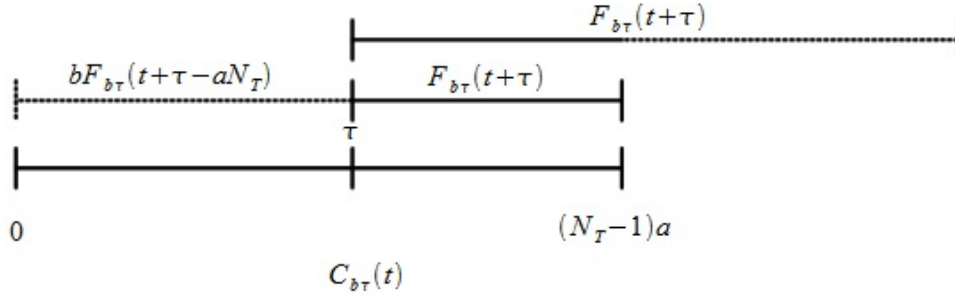


Abbildung 2.1.: Zuordnung der berechneten Größe $F_{b\tau}(t)$ zum Korrelator $C_{b\tau}(t)$.

und wir erhalten also exakt unseren Korrelator

$$C_b(t) = P^+ \left(\sum_{B^+} |\tilde{N}_{B^+}|^2 e^{-m_{B^+}t} - b \sum_{B^-} |\tilde{N}_{B^-}|^2 e^{-m_{B^-}(aN_T-t)} \right) - bP^- \left(\sum_{B^+} |\tilde{N}_{B^+}|^2 e^{-m_{B^+}(aN_T-t)} - b \sum_{B^-} |\tilde{N}_{B^-}|^2 e^{-m_{B^-}t} \right).$$

2.4.2. Explizite Form des Korrelators

In diesem Abschnitt werden wir den Korrelator des Operators

$$\begin{aligned} B_x^\alpha &= i\varepsilon_{abc} \lambda_x^{a\alpha} \text{Tr}_s \left(\bar{\lambda}_x^b \gamma_4 \lambda_x^c \right) \\ &= i\varepsilon_{abc} \lambda_x^{a\alpha} \text{Tr}_s \left(\lambda_x^b (C\gamma_4) \lambda_x^c \right) \\ &= i\varepsilon_{abc} (C\gamma_4)^{\beta\gamma} (\lambda_x^{\alpha a} \lambda_x^{\beta b} \lambda_x^{\gamma c}) \end{aligned}$$

betrachten. Wir haben in (1.3.15) gesehen, dass wir die Fermionen-Freiheitsgrade des Pfadintegrals

$$\begin{aligned} \left\langle \text{T} \left\{ B_x^\alpha \bar{B}_y^\beta \right\} \right\rangle &= \frac{\int \mathcal{D}U_\mu \mathcal{D}\lambda B_x^\alpha \bar{B}_y^\beta e^{-S[U_\mu, \lambda]}}{\int \mathcal{D}U_\mu \text{Pf}(M) e^{-S_G[U_\mu]}} \\ &= - \frac{\varepsilon_{abc} (C\gamma_4)^{\beta\gamma} \varepsilon_{a'b'c'} (C\gamma_4)^{\beta'\gamma'} \int \mathcal{D}U_\mu \mathcal{D}\lambda \left(\lambda_x^{\alpha a} \lambda_x^{\beta b} \lambda_x^{\gamma c} \bar{\lambda}_y^{\alpha' a'} \bar{\lambda}_y^{\beta' b'} \bar{\lambda}_y^{\gamma' c'} \right) e^{-S[U_\mu, \lambda]}}{\int \mathcal{D}U_\mu \text{Pf}(M) e^{-S_G[U_\mu]}} \end{aligned}$$

ausintegrieren können.

Das führt dann zu

$$\begin{aligned}
 & \int \mathcal{D}\lambda e^{-S_F[U_\mu, \lambda]} \varepsilon_{abc} \varepsilon_{a'b'c'} \lambda_x^{\alpha a} \lambda_x^{\beta b} \lambda_x^{\gamma c} \bar{\lambda}_y^{\alpha' a'} \bar{\lambda}_y^{\beta' b'} \bar{\lambda}_y^{\gamma' c'} (C\gamma_4)^{\beta\gamma} (C\gamma_4)^{\beta'\gamma'} \\
 &= \frac{-\text{Pf}(M)}{8 \cdot 6} \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, 6\}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^3 M_{a_{\sigma(2i)} \alpha_{\sigma(2i)} x_{\sigma(2i-1)}}^{a_{\sigma(2i-1)} \alpha_{\sigma(2i-1)} x_{\sigma(2i-1)}} \\
 &= \text{Pf}(M) \varepsilon_{abc} \varepsilon_{a'b'c'} (C\gamma_4)^{\beta\gamma} (C\gamma_4)^{\beta'\gamma'} \\
 & \quad \left(2\Delta_{x\bar{e}b}^{x\alpha a} \Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c} \Delta_{y\gamma'c'}^{y\bar{e}'b'} C^{\varepsilon\beta} C^{\varepsilon'\beta'} + 4\Delta_{x\bar{e}b}^{x\alpha a} \Delta_{y\beta'b'}^{x\gamma c} \Delta_{y\alpha'a'}^{y\eta'c'} C^{\varepsilon\beta} C^{\eta'\gamma'} \right. \\
 & \quad + \Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a} \Delta_{x\eta c}^{x\beta b} \Delta_{y\gamma'c'}^{y\bar{e}'b'} C^{\eta\gamma} C^{\varepsilon'\beta'} + 2\Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a} \Delta_{y\beta'b'}^{x\beta b} \Delta_{y\gamma'c'}^{x\gamma c} \\
 & \quad \left. + 2\Delta_{y\beta'b'}^{x\alpha a} \Delta_{x\eta c}^{x\beta b} \Delta_{y\alpha'a'}^{y\eta'c'} C^{\eta\gamma} C^{\eta'\gamma'} - 4\Delta_{y\gamma'c'}^{x\alpha a} \Delta_{y\beta'b'}^{x\beta b} \Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c} \right) \\
 &=: \text{Pf}(M) C_{xy}^{\alpha\beta}[U_\mu].
 \end{aligned}$$

Die lange und mühsame Rechnung findet sich im Anhang in Abschnitt A.7 und das Ergebnis kann mit dem in [16] verglichen werden. ⁶Den Korrelator bekommen wir nun durch

$$\left\langle \text{T} \left\{ B_x^\alpha \bar{B}_y^\beta \right\} \right\rangle = \frac{\int \mathcal{D}U_\mu \text{Pf}(M) C_{xy}^{\alpha\beta}[U_\mu] e^{-S_G[U_\mu]}}{\int \mathcal{D}U_\mu \text{Pf}(M) e^{-S_G[U_\mu]}}.$$

Damit ist die Größe, die wir für jede Konfiguration berechnen und deren Mittelwert wir bilden $C_{xy}^{\alpha\beta}[(U_\mu)_i]$, so dass

$$\left\langle \text{T} \left\{ B_x^\alpha \bar{B}_y^\beta \right\} \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_{xy}^{\alpha\beta}[(U_\mu)_i].$$

Der Fakt, dass wir den Vakuumerwartungswert auf diese Weise erhalten, muss noch bis Kapitel 3 als wahr hingenommen werden, wo dieses Vorgehen näher erläutert wird. Wie bereits besprochen, erhalten wir dann aus $\left\langle \text{T} \left\{ B_x^\alpha \bar{B}_y^\beta \right\} \right\rangle$ den Korrelator $C^{\alpha\beta}(t)$.



Abbildung 2.2.: Der verbundene (1) und der unverbundene (2) Anteil.

Rechnerisch ist es nun wichtig, den Korrelator in zwei Anteile aufzuteilen, die wir den *verbundenen* und den *unverbundenen* Anteil nennen. Hierbei ist die Bezeichnung von den mesonischen Operatoren geprägt, da es sich bei dem unverbundenen Anteil eher um einen brillenförmigen Anteil handelt. Diese sind gekennzeichnet durch die Propagatorstruktur. So ist der verbundene

⁶Dabei ist wichtig zu bemerken, dass mit der im Anhang verwendeten Notation $\Gamma = iC\gamma_4$ eine symmetrische hermitesche Matrix ist.

Anteil durch

$$C_{xy}^{\text{verb}\alpha\alpha'}[U_\mu] = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(C\gamma_4)^{\beta\gamma}(C\gamma_4)^{\beta'\gamma'} \\ \left(2\Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\beta b}\Delta_{y\gamma'c'}^{x\gamma c} - 4\Delta_{y\gamma'c'}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c} \right)$$

gegeben. Wir sehen, dass wir nur Propagatoren der Form $(\Delta^y_x)^3$ haben, die immer verschiedene Raum-Zeit-Punkte verbinden. Dies ist schematisch in Abbildung 2.2 unter (1) zu sehen. Der unverbundene Anteil ist der Rest, also durch

$$C_{xy}^{\text{unver}\alpha\alpha'}[U_\mu] = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(C\gamma_4)^{\beta\gamma}(C\gamma_4)^{\beta'\gamma'} \\ \left(2\Delta_{x\varepsilon b}^{x\alpha a}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\varepsilon'b'}C^{\varepsilon\beta}C^{\varepsilon'\beta'} + 4\Delta_{x\varepsilon b}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\gamma c}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\eta'c'}C^{\varepsilon\beta}C^{\eta'\gamma'} \right. \\ \left. + \Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{x\eta c}^{x\beta b}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\varepsilon'b'}C^{\eta\gamma}C^{\varepsilon'\beta'} + 2\Delta_{y\beta'b'}^{x\alpha a}\Delta_{x\eta c}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\eta'c'}C^{\eta\gamma}C^{\eta'\gamma'} \right)$$

gegeben. Hier haben die Propagatorprodukte die Form $\Delta^y_y\Delta^y_x\Delta^x_x$. Diese Terme haben eine neue Struktur, die schematisch in Abbildung 2.2 unter (2) zu sehen ist, deren Berechenbarkeit mit zwei Methoden in dieser Arbeit untersucht wurde. Diese Form ist nicht bei Baryonen mit gewöhnlichen Fermionen vorzufinden, da sie nur aus Fermionen beziehungsweise Antifermionen bestehen und das Wick'sche Theorem in diesem Fall nur Terme der Form $\langle \lambda_x \lambda_x \lambda_x \bar{\lambda}_y \bar{\lambda}_y \bar{\lambda}_y \rangle_F \propto (\Delta^y_x)^3$ liefert. Eine ausführliche Zusammenfassung über Baryonen, in der QCD auf dem Gitter, findet sich in [17]. Wir haben hier also eine neue Situation, in der, im Gegensatz zu den Mesonen, nicht nur die Spur $\text{Tr}(\Delta^y_y)$ des Propagators wichtig ist, sondern eine nicht triviale Kopplung zweier Spuren, die sich nicht als Standard-Matrix-Operation darstellen lässt.

Kapitel 3

Berechnung der Vakuumerwartungswerte

Anfangs wird erläutert, wie sich das Pfadintegral über bosonische Freiheitsgrade als stochastischer Prozess interpretieren lässt, welcher sich numerisch berechnen lässt. Danach werden einige der im Programm verwendeten Rechentechniken besprochen, die bei der Erzeugung von Konfigurationen und Auswertung der Vakuumerwartungswerte verwendet werden.

Ich werde hier nur einige Teile des Algorithmus ansprechen, der die Eichfeld-Konfigurationen erzeugt. Dies und wichtige Punkte der Auswertung werden in [10] genauer erläutert.

3.1. Ausintegration der Fermionen

Da wir später in dieser Arbeit die Massen von baryonischen Zuständen bestimmen wollen, müssen wir noch herausfinden, wie wir die Korrelatoren berechnen können. Unsere Projektoren auf die baryonischen Zustände haben die Form

$$W_{\Gamma}^{\alpha}(x) = \varepsilon_{abc} \Gamma^{\beta\gamma} (\lambda_x^{\alpha a} \lambda_x^{\beta b} \lambda_x^{\gamma c}).$$

Der Korrelator zu diesem Operator hat dann die Form

$$C_{\Gamma}^{\alpha\alpha'}(x, y) = \left\langle \text{T} \left\{ W_{\Gamma}^{\alpha}(x) \overline{W}_{\Gamma}^{\alpha'}(y) \right\} \right\rangle = \varepsilon_{abc} \varepsilon_{a'b'c'} \Gamma^{\beta\gamma} \Gamma^{\beta'\gamma'} \left\langle \text{T} \left\{ \lambda_x^{\alpha a} \lambda_x^{\beta b} \lambda_x^{\gamma c} \overline{\lambda}_y^{\alpha' a'} \overline{\lambda}_y^{\beta' b'} \overline{\lambda}_y^{\gamma' c'} \right\} \right\rangle,$$

wobei noch ein Projektionsoperator auf $\overline{W}_{\Gamma}^{\alpha'}(y)$ angewendet werden kann, um nur an Zustände mit gewählten Quantenzahlen zu koppeln. Betrachten wir den allgemeinen Korrelator für ein drei Majorana-Fermionen-Teilchen, der durch

$$\left\langle \text{T} \left\{ \lambda_{x_1}^{\alpha_1 a_1} \dots \lambda_{x_n}^{\alpha_n a_n} \overline{\lambda}_{y_1}^{\beta_1 b_1} \dots \overline{\lambda}_{y_n}^{\beta_n b_n} \right\} \right\rangle = \left\langle \text{T} \left\{ \lambda_{x_1}^{\alpha_1 a_1} \dots \lambda_{x_n}^{\alpha_n a_n} \lambda_{y_1}^{\beta_1 b_1} \dots \lambda_{y_n}^{\beta_n b_n} \right\} \right\rangle C_{y_1} \dots C_{y_{2n}}$$

gegeben ist, so haben wir in 1.3.3 gesehen, dass sich dieser Korrelator durch

$$\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\lambda \lambda_{x_1}^{\alpha_1 a_1} \dots \lambda_{x_n}^{\alpha_n a_n} \lambda_{y_1}^{\beta_1 b_1} \dots \lambda_{y_n}^{\beta_n b_n} e^{-S_G[U_\mu] - \int_x \int_y (\lambda^T)_y M_x^y \lambda_x}$$

berechnen lässt. Mithilfe des Wick'schen Theorems (1.3.15) können wir die fermionische Integration bereits ausführen und erhalten

$$\frac{(-1)^n}{2^n n!} \int \mathcal{D}U e^{-S_G[U_\mu]} \left(\text{Pf}(M) \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n M_{a_{\sigma(2i)} \alpha_{\sigma(2i)} x_{\sigma(2i)}}^{a_{\sigma(2i-1)} \alpha_{\sigma(2i-1)} x_{\sigma(2i-1)}} \right). \quad (3.1.1)$$

Hier haben wir aufgrund von kompakterer Notation

$$\begin{aligned} \alpha_{n+i} &= \beta_i \\ a_{n+i} &= b_i \\ x_{n+i} &= y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

gesetzt. Damit haben wir die Möglichkeit, den Korrelator durch

$$\left\langle T \left\{ \lambda_{x_1}^{\alpha_1 a_1} \dots \lambda_{x_n}^{\alpha_n a_n} \lambda_{y_1}^{\beta_1 b_1} \dots \lambda_{y_n}^{\beta_n b_n} \right\} \right\rangle = \frac{\int \mathcal{D}U e^{-S_G[U_\mu]} \text{Pf}(M) f(M)}{\int \mathcal{D}U e^{-S_G[U_\mu]} \text{Pf}(M)}, \quad (3.1.2)$$

zu berechnen, wobei

$$f(M) := \left\langle T \left\{ \lambda_{x_1}^{\alpha_1 a_1} \dots \lambda_{y_n}^{\beta_n b_n} \right\} \right\rangle_F = \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n M_{a_{\sigma(2i)} \alpha_{\sigma(2i)} x_{\sigma(2i)}}^{a_{\sigma(2i-1)} \alpha_{\sigma(2i-1)} x_{\sigma(2i-1)}}$$

gesetzt wurde. Wichtig ist hierbei, dass die Matrix M von den Eichbosonen-Feldern U_μ abhängt, weswegen das Integral nicht trivial ist.

3.2. Stochastische Interpretation des Pfadintegrals

Nun könnten wir

$$\frac{\mathcal{D}U e^{-S_G[U_\mu]} \text{Pf}(M)}{\int \mathcal{D}U e^{-S_G[U_\mu]} \text{Pf}(M)}$$

fast als Wahrscheinlichkeitsmaß auffassen, da es durch den Nenner normiert ist und die Exponentialfunktion immer positive Werte hat. Da $\text{Pf}(M)$ aber je nach Eich-Feld-Konfiguration positive oder negative Werte annehmen kann ist es unmöglich dies als Wahrscheinlichkeitsmaß zu interpretieren. Trennen wir das Vorzeichen von $\text{Pf}(M)$ von seinem Wert, können wir das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\frac{\mathcal{D}U e^{-S_G[U_\mu]} |\text{Pf}(M)|}{\int \mathcal{D}U e^{-S_G[U_\mu]} |\text{Pf}(M)|} =: \mathcal{D}_{\text{prob}} U \quad (3.2.1)$$

definieren und erhalten den Korrelator durch

$$\frac{\int \mathcal{D}_{\text{prob}} U \text{sign}(\text{Pf}(M)) f(M)}{\int \mathcal{D}_{\text{prob}} U \text{sign}(\text{Pf}(M))}.$$

Dies ergibt wieder (3.1.2), da sich die Normierungsfaktoren in Zähler und Nenner wegekürzen. Wir sehen, dass im Nenner das mittlere Vorzeichen steht, welches Schwierigkeiten bereiten kann, falls die Zahl positiver und negativer Vorzeichen gleich sind. Es würde dazu kommen, dass wir entweder eine Null oder sehr kleine Werte im Nenner stehen haben, was den statistischen Fehler

stark vergrößert. Das Vorzeichen des Pfaffians lässt sich bestimmen, indem die Anzahl der reellen negativen Eigenwerte des Dirac-Wilson-Operators Q abzählt werden [10] [31]. Eine Erklärung ist in Abschnitt A.5 des Anhangs gegeben.

Nun lassen sich über diverse Algorithmen Eich-Konfigurationen erzeugen, die eine Verteilung gemäß $\mathcal{D}_{\text{prob}}U$ besitzen. Haben wir eine Menge $\{(U_\mu)_i\}$ solcher Eich-Konfigurationen, lässt sich das Integral durch den einfachen Mittelwert

$$\int \mathcal{D}_{\text{prob}}U \text{ sign}(\text{Pf}(M))f(M) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{sign}(\text{Pf}(M_i))f(M_i)$$

berechnen. Eine genauere Betrachtung dieser Tatsachen kann in [11] nachgeschlagen werden.

3.3. Erzeugung der Konfigurationen

Die Konfigurationen werden durch einen PHMC Algorithmus erzeugt. Diese Abkürzung steht für *Polynomial Hybrid Monte Carlo* Algorithmus. Die vollständige Beschreibung des Algorithmus findet sich in [10], [11] und [5]. Wir werden nun Teile dieses Algorithmus besprechen und schematisch die Funktionsweise skizzieren.

3.3.1. Die Markov-Kette

Die Folge von Feldkonfigurationen $\{U_i\}$ wird durch einen Markov-Prozess generiert. Das ist eine feste Vorschrift T , die diese Folge durch

$$U_0 \xrightarrow{T} U_1 \xrightarrow{T} U_2 \xrightarrow{T} \dots$$

erzeugt. Diese Vorschrift ist ein stochastisches Objekt, welches die Konfiguration U_{i+1} aus der Konfiguration U_i mit der Wahrscheinlichkeit¹

$$P(U_i \rightarrow U_{i+1}) =: T(U_{i+1}|U_i)$$

erzeugt. Diese Übergangsvorschrift wird so gewählt, dass sie

$$0 \leq T(U'|U) \leq 1, \quad \sum_{U'} T(U'|U) = 1$$

erfüllt, so dass $T(U'|U)$ eine *Übergangswahrscheinlichkeit* ist. Hat diese Übergangswahrscheinlichkeit eine Fixpunkt-Verteilung $P(U)$, die

$$\sum_{U'} T(U|U')P(U') = P(U)$$

¹Korrektweise ist $P(U_i \rightarrow U_{i+1})$ ein Funktional und keine Funktion.

erfüllt, lässt sich zeigen, dass für die oben erzeugte Folge mit genügend sinnvollem U_0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(U = U_n) = P(U)$$

erfüllt. Haben wir eine solche Übergangsvorschrift, können wir Eich-Felder mit der Verteilung

$$P(U_\mu) := e^{-S_G[U_\mu]} |\text{Pf}(M)|$$

erzeugen. Ein wichtiger Schritt in dem Programm ist das Vorschlagen neuer Konfigurationen U' , die mit der Wahrscheinlichkeit $T(U'|U)$ angenommen werden, falls wir von der Konfiguration U ausgehen. Es ist klar, dass nicht alle vorgeschlagenen Konfigurationen angenommen werden, jedoch ist eine hohe Akzeptanzrate wünschenswert, da sonst zuviel Rechenzeit auf das Vorschlagen von neuen Konfigurationen verwendet wird ohne neue zu erhalten. Einige Vorschlagsverfahren wie der *Metropolis*, der *heatbath* oder *overrelaxation* Algorithmus finden sich in [20] und [11].

3.3.2. Pseudofermionen

Wir wissen, dass für das bosonische Pfadintegral mit den Feldern $\phi_x^{a\alpha}$ und einer bilinearen Wirkung $S[\phi] = \frac{1}{2} \int_y \int_x \phi_y^{b\beta} A_{a\alpha x}^{b\beta y} \phi_x^{a\alpha}$

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int_y \int_x \phi_y^{b\beta} A_{a\alpha x}^{b\beta y} \phi_x^{a\alpha}} = \left(\frac{2\pi}{a^4} \right)^{6 \left| \Lambda_{(N_T, N, N, N)}^{(a, a, a, a)} \right|} \det(A)^{-1} = \det \left(\frac{a^4}{2\pi} A \right)^{-1}$$

gilt, wobei die Indizes die der fermionischen Felder sind. Wir wählen nun die Matrix

$$A = \sqrt{Q^{\dagger \text{SdE}} Q}^{-\alpha}.$$

Dies ist eine wohldefinierte, existierende Matrix. Da $\gamma^5 Q$ hermitesch und normal ist, ist $Q^{\dagger \text{SdE}} Q$ auch hermitesch und zusätzlich positiv definit. Wir dürfen daher mit $\gamma^5 Q$ wie mit einer Zahl rechnen. Dies erlaubt der Funktionalalkül, der besagt, dass wir nur noch mit dem Spektrum der Matrix rechnen dürfen.² Da alle Eigenwerte von $\gamma^5 Q$ reell sind, sind alle Eigenwerte von $Q^{\dagger \text{SdE}} Q$ sogar positiv, weswegen $\sqrt{Q^{\dagger \text{SdE}} Q}$ definiert und positiv ist. Damit können wir auch $\sqrt{Q^{\dagger \text{SdE}} Q}^{-\alpha}$ bilden und für das Spektrum gilt

$$\mu \in \Sigma(\gamma^5 Q) \Rightarrow |\mu|^{-\alpha} \in \Sigma \left(\sqrt{Q^{\dagger \text{SdE}} Q}^{-\alpha} \right),$$

woraus dann

$$\begin{aligned} \det \left(\sqrt{Q^{\dagger \text{SdE}} Q}^{-\alpha} \right) &= \prod_{\mu \in \Sigma \left(\sqrt{Q^{\dagger \text{SdE}} Q}^{-\alpha} \right)} \mu = \prod_{\lambda \in \Sigma(\gamma^5 Q)} |\lambda|^{-\alpha} \\ &= |\det(\gamma^5 Q)|^{-\alpha} = |\det(Q)|^{-\alpha} = |\text{Pf}(M)|^{-2\alpha} \end{aligned}$$

²Genauere Informationen dazu findet man in [14] und [29].

folgt, da die Mengen der Eigenwerte gleichmächtig sind. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\frac{1}{2} \int_y \int_x \phi_y^{b\beta} \left(\sqrt{Q^{\dagger \text{SdE}} Q}^{-\alpha} \right)_{a\alpha x}^{b\beta y} \phi_x^{a\alpha}} &= \left(\frac{a^4}{2\pi} \right)^{6 \left| \Lambda_{(N_T, N, N, N)}^{(a, a, a, a)} \right|} \det \left(\sqrt{Q^{\dagger \text{SdE}} Q}^{-\alpha} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{a^4}{2\pi} \right)^{6 \left| \Lambda_{(N_T, N, N, N)}^{(a, a, a, a)} \right|} |\text{Pf}(M)|^{2\alpha}. \end{aligned}$$

Setzen wir $\alpha = \frac{1}{2}$, können wir $|\text{Pf}(M)|$ auch durch ein bosonisches Pfadintegral berechnen. Dieses können wir wiederum als Wahrscheinlichkeitsintegral auffassen und bekommen dann, wenn wir zusätzlich über die Felder $\phi_x^{\alpha a}$ integrieren, die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$P(U_\mu, \phi) := e^{-S_G[U_\mu] - \frac{1}{2} \phi^T \text{SdE} (Q^{\dagger \text{SdE}} Q)^{\frac{1}{4}} \phi}.$$

Die Felder ϕ nennt man *Pseudofermionen*. Das Kernstück ist die Auswahl der Approximationsmethode für die Matrix $(Q^{\dagger \text{SdE}} Q)^{\frac{1}{4}}$, da die direkte Berechnung ausserhalb unserer Möglichkeiten steht. Zur Approximation gibt es Polynom- und Quotienten-Formeln, die je nach System angewendet werden.³ Den Vorfaktor $\left(\frac{a^4}{2\pi} \right)^{6 \left| \Lambda_{(N_T, N, N, N)}^{(a, a, a, a)} \right|}$ können wir weglassen, da er konstant ist und im Quotienten (3.2.1) wieder herausfällt. Damit diese Methode verwendet werden kann, muss für jede Konfiguration der Eichfelder U_μ nebenher das Vorzeichen des Pfaffians geprüft werden, da dies nicht auf diese Weise berechnet werden kann.

3.3.3. Molekulare Dynamik

Wir wollen möglichst viele verschiedene Konfigurationen in unserem Markov-Prozess durchlaufen. Dazu fassen wir die Link-Variablen $(U_\mu)^{ij}(x)$ als

$$U_\mu^{ij}(x) = \exp \left(\sum_{a=1}^3 (\omega_\mu)_a(x) (T^a)^{ij} \right)$$

auf. Dann fügen wir in unsere neue Wirkung mit den Pseudo-Fermionen noch für jedes Feld $(\omega_\mu)_a(x)$ ein Feld $(P_\mu)_a(x)$ hinzu, und erhalten

$$H_{\text{MD}}[P_\mu, U_\mu, \phi] = \frac{1}{2} \int_x \sum_{a=1}^3 ((P_\mu)_a(x) (P_\mu)_a(x)) + S_{\text{PF}}[U_\mu, \phi]. \quad (3.3.1)$$

Diese Wirkung haben wir mit $H_{\text{MD}}[P_\mu, U_\mu, \phi]$ bezeichnet, da wir sie jetzt als einen Hamiltonian interpretieren können, in dem $(P_\mu)_a(x)$ der konjugierte Impuls zu $(\omega_\mu)_a(x)$ ist und $S_{\text{PF}}[U_\mu, \phi]$ ein zeitunabhängiges Potential. Dieser Hamiltonian bleibt also konstant, wenn wir die durch ihn erzeugten Bewegungsgleichungen aufintegrieren. Mit dieser Methode können wir schnell neue Feldkonfigurationen erzeugen, die mit großer Wahrscheinlichkeit angenommen werden, wenn wir der Wahrscheinlichkeitsdichte nun den Hamiltonian zugrunde legen, so dass wir

$$P(P_\mu, U_\mu, \phi) := e^{-H_{\text{MD}}[P_\mu, U_\mu, \phi]}$$

³In [19] wird eine iterative Methode beschrieben, die es ermöglicht, ein Polynom zur Approximation dieser Funktion zu generieren.

haben und unser Wahrscheinlichkeitsmaß um $\mathcal{D}P_\mu$ erweitern. Wir zahlen den Preis, ein weiteres Feld simulieren zu müssen, erhalten jedoch mehr Konfigurationen. Außerdem ändern sich die Ergebnisse nicht, da keine der berechneten Größen von P_μ abhängig ist, und diese *Integration* faktorisiert und verschwindet. Weitere Ausführungen hierzu findet man in [11] und [10].

3.3.4. Der PHMC Algorithmus

Der PHMC Algorithmus wird wie folgt realisiert:

1. Erzeugung einer Zufälligen Eichlinkkonfiguration U_μ .
2. Erzeugung der Pseudofermionen ϕ mit der Verteilung $e^{-\frac{1}{2}\phi^T \text{SdE} (Q^{\dagger \text{SdE}} Q)^{\frac{1}{4}} \phi}$.
3. Erzeugen der konjugierten Impulse P_μ mit der Verteilung $e^{-\frac{1}{2} \int_x \sum_{a=1}^3 ((P_\mu)_a(x)(P_\mu)_a(x))}$.
4. Integration der durch (3.3.1) erzeugten Bewegungsgleichungen, so dass wir U'_μ und P'_μ erhalten.
5. Akzeptieren von U'_μ und P'_μ mit der Wahrscheinlichkeit $\min\left(1, e^{H_{\text{MD}}[P_\mu, U_\mu, \phi] - H_{\text{MD}}[P'_\mu, U'_\mu, \phi]}\right)$.
6. Fahre mit Schritt zwei fort.

Der zweite Schritt entspricht dem *polynomial*-Teil des Algorithmus, da sich die Pseudofermionen mit der Verteilung $e^{-\frac{1}{2}\phi^T \text{SdE} (Q^{\dagger \text{SdE}} Q)^{\frac{1}{4}} \phi}$ erzeugen lassen, indem $(Q^{\dagger \text{SdE}} Q)^{-\frac{1}{4}}$ durch ein Polynom $P[Q^{\dagger \text{SdE}} Q]$ approximiert und ein mit $e^{-\frac{1}{2}\eta^T \text{SdE} \eta}$ Gauß-Verteiltes Boson η mit dem Polynom Multipliziert, so dass wir

$$\phi = P[Q^{\dagger \text{SdE}} Q]\eta$$

mit der gewünschten Verteilung erhalten.

Der dritte bis fünfte Schritt sind der *hybrid*-Teil des Algorithmus, da sie eine zusätzliche Hamilton'sche Dynamik in das System mit einbringt.

Der sechste stochastische Akzeptanz-Schritt macht diesen Algorithmus zu einem *Monte-Carlo*-Algorithmus.

Dass dieser Algorithmus in der Tat eine Markov-Kette erzeugt, die die gewünschte Verteilung als Grenzwert erhält, wird unter anderem in [11] gezeigt.

3.4. Auswertung der Mittelwerte

3.4.1. Fehlerabschätzung

Effektiv berechnen wir Mittelwerte von Größen mit gewissen Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Wir haben also eine Menge $\{x_i\}$ an Werten, die wir messen, um die Zufallsvariable X zu charakterisieren. Diese werden Werte von Korrelatoren $\{(C(t))_i\}$ sein, aus denen wir den wahren Korrelator $C(t)$ bestimmen wollen, um die Massen der Teilchen zu bestimmen, an die die Felder dieses Korrelators koppeln. Diese Zufallsvariable hat den Mittelwert $\langle X \rangle$ und die Varianz σ_X , da wir das Pfadintegral mit statistischen Methoden auswerten. Die gemessenen Werte $\{x_i\}$ sind mit den erzeugten Konfigurationen $\{(U_\mu)_i\}$ berechnet worden und sind Messwerte für die Zufallsvariablen X_i auf der entsprechenden Konfiguration $(U_\mu)_i$. Für diese Variablen gilt

$$\langle X_i \rangle = \langle X \rangle \quad \langle (X_i - \langle X \rangle)^2 \rangle = \sigma_X^2$$

da die Konfigurationen der gewünschten Verteilung folgen. Aus den Werten $\{x_i\}$ erzeugen wir die Größe

$$\hat{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3.4.1)$$

als Schätzer für den wahren Mittelwert $\langle X \rangle$. Dies ist selbst wieder die Zufallsvariable \hat{X} und hat den Mittelwert

$$\langle \hat{X} \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right\rangle = \langle X \rangle$$

mit der Varianz

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{X}}^2 &= \left\langle \left(\hat{X} - \langle \hat{X} \rangle \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \langle X \rangle \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i - \langle X \rangle \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{N} \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \langle X_i X_j \rangle. \end{aligned}$$

Wären unsere Feldkonfigurationen perfekt erzeugt, würden verschiedene X_i nicht korrelieren und für die Varianz würde

$$\sigma_{\hat{X}}^2 = \frac{1}{N} \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 + \frac{N^2 - N}{N^2} \langle X \rangle^2 = \frac{\sigma_X^2}{N}.$$

folgen, da $\langle X_i X_j \rangle$ zu $\langle X_i \rangle \langle X_j \rangle$ zerfällt. Da die Methode zur Erzeugung jedoch einen Markov-Prozess enthält⁴ sind diese in der Regel nicht unkorreliert. Der Schätzer für diese Varianz ist gegeben durch

$$\hat{\sigma}_{\hat{X}}^2 := \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x})^2. \quad (3.4.2)$$

⁴Es werden Zufällige Werte Z_{i+1} unter der Verwendung von Z_i erzeugt, und es kann somit ein Zusammenhang zwischen Z_i und Z_{i+1} bestehen.

Das Ergebnis der Messung wird mit

$$\hat{x} \pm \hat{\sigma}_{\hat{X}}$$

angegeben. Wir sehen, dass dies im Fall für unkorrelierte Messwerte zu

$$\langle X \rangle \pm \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$$

wird. Wir können also die Genauigkeit der Messung durch eine erhöhte Zahl N von Messwerten verbessern.

Für korrelierte Messungen führt man die Autokorrelationsfunktion

$$C_X(t) := \langle (X_i - \langle X_i \rangle) (X_{i+t} - \langle X_{i+t} \rangle) \rangle = \langle (X_i - \langle X \rangle) (X_{i+t} - \langle X \rangle) \rangle$$

ein. Diese ist nicht mit den Korrelatoren für Feldoperatoren zu verwechseln. Für diese Funktion gilt offensichtlich

$$C_X(0) = \sigma_X^2.$$

Weiter gilt für Markov-Prozesse, dass

$$C_X(t) \stackrel{t \gg 1}{\propto} C_X(0) e^{-\frac{t}{\tau_{X,\text{exp}}}}.$$

Dies ist der führende Term von vielen weiteren, wie sich in [11] nachlesen lässt. Wir können die Varianz mit Hilfe dieser Autokorrelation ausdrücken, so dass

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{X}}^2 &= \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N C_X(|i-j|) = \frac{1}{N^2} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (N-|k|) C_X(|k|) \\ &= \frac{2}{N^2} \left(\frac{1}{2} C_X(0) + \sum_{k=1}^{N-1} (N-k) C_X(k) \right) \\ &= \frac{\sigma_X^2}{N^2} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{N} C_X(k) - \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{N} k C_X(k) \end{aligned}$$

Nun folgt für große N , dass

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{N} \rightarrow \int_0^1 dk$$

und wegen $C_X(k) \approx \sigma_X^2 e^{-\frac{k}{\tau_{X,\text{exp}}}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{X}}^2 &\approx \frac{\sigma_X^2}{N^2} + 2\sigma_X^2 \int_0^1 dk \left(1 - \frac{1}{N} k \right) e^{-\frac{k}{\tau_{X,\text{exp}}}} \\ &= \frac{\sigma_X^2}{N^2} + 2\sigma_X^2 \tau_{X,\text{exp}} \frac{N - \tau_{X,\text{exp}}}{N} - 2\sigma_X^2 \tau_{X,\text{exp}} \frac{N - \tau_{X,\text{exp}} - 1}{N} e^{-\frac{1}{\tau_{X,\text{exp}}}}. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass $N \gg \tau_{X,\text{exp}} \gg 1$ gilt, also dass wir eine große Autokorrelationszeit und auch genügend Messwerte haben, so vereinfacht sich der Ausdruck wegen

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{X,\text{exp}}}{N} &\rightarrow 0 \\ e^{-\frac{1}{\tau_{X,\text{exp}}}} &\rightarrow 0 \\ \frac{1}{N^2} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

zu

$$\sigma_{\hat{X}}^2 \approx 2\sigma_X^2 \tau_{X,\text{exp}}.$$

Damit sind der Mittelwert (3.4.1) sowie die Varianz (3.4.2) Schätzer für

$$\langle X \rangle \pm \sigma_X \sqrt{\frac{2\tau_{X,\text{exp}}}{N}}.$$

In dieser Näherung bekommen wir $\tau_{X,\text{exp}}$ durch

$$\tau_{X,\text{exp}} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{C_X(k)}{C_X(0)}.$$

Für Messungen mit einer kleinen Anzahl an Messwerten N müssen andere Auswertungsverfahren verwendet werden. Beispiele sind *data-blocking*-, *bootstrap*- und *jackknife*-Verfahren, welche unter anderem in [20], [11] oder [10] nachgelesen werden können.

3.4.2. Translationsinvarianz des Korrelators

Da wir mit sehr großen Matrizen arbeiten, können wir uns die Berechnung der kompletten Matrix Q^{-1} aus Q aus Zeitgründen nicht leisten. Daher greifen wir darauf zurück, die Inversion nur für einen festen Vektor zu machen, so dass wir das lineare Gleichungssystem

$$Qz = s$$

für ein festes s lösen. Hierfür gibt es schnelle Algorithmen, die es uns ermöglichen, diese Invertierung adäquat auszuführen. Dabei wird der Vektor s als *Quelle* bezeichnet und hat im einfachsten Fall die Gestalt

$$(s_{x_0}^{a_0\alpha_0})_x = \delta_{x,x_0}^C \delta^{a,a_0} \delta^{\alpha,\alpha_0}.$$

Die Invertierung von $s_{x_0}^{a_0\alpha_0}$ liefert uns

$$(z_{x_0}^{a_0\alpha_0})_y^{b\beta} = (\Delta s_{x_0}^{a_0\alpha_0})_y^{b\beta} = \Delta_{a_0\alpha_0 x_0}^{b\beta y},$$

was einer Spalte der Matrix Δ entspricht. Diese Invertierung führen wir für alle 12 Paare (a_0, α_0) , so dass wir die Matrix

$$(\Delta_{x_0})_{a\alpha}^{b\beta y} = \Delta_{a\alpha x_0}^{b\beta y}.$$

zur Verfügung haben. Dies reicht aus, um alle fermionischen Korrelatoren zu berechnen. Der Korrelator für das Feld $B_{(t,\vec{x})}^\alpha$ ist gegeben durch

$$C_b^{\alpha\beta}(t, \vec{0}) = (2\pi)^{\frac{5}{2}} \int_{\vec{x}} \left\langle T \left\{ B_{(t,\vec{x})}^\alpha \overline{B}_{(0,\vec{0})}^\beta \right\} \right\rangle.$$

In Abschnitt 2.4.1 hatten wir die zeitliche Mittelwertbildung angesprochen, welche zeigte, dass wir gleichverteilte zufällige Startzeitpunkte t_0 wählen können und anschließend über diese mitteln müssen. Für den räumlichen Anteil \vec{y}_0 bietet sich ein analoges vorgehen an. Wir bekommen den Term $\left\langle T \left\{ B_{(t,\vec{x})}^\alpha \overline{B}_{(t_0,\vec{y}_0)}^\beta \right\} \right\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{|\Lambda_{(N_T, N, N, N)}^{(a, a, a, a)}|} = \frac{1}{N_T N^3}$ für den Mittelwert, so dass wir insgesamt

$$C_b^{\alpha\beta}(t) = \frac{(2\pi)^{\frac{5}{2}}}{N_T N^3} \sum_{(t_0, \vec{y}_0) \in \Lambda_{(N_T, N, N, N)}^{(a, a, a, a)}} \int_{\vec{x}} \left\langle T \left\{ B_{(t,\vec{x})}^\alpha \overline{B}_{(t_0, \vec{y}_0)}^\beta \right\} \right\rangle$$

berechnen. Teilen wir die Summe nun nach zeitlichem und räumlichen Anteil auf, so bekommen wir

$$\begin{aligned} C_b^{\alpha\beta}(t) &= \frac{(2\pi)^{\frac{5}{2}}}{N_T} \sum_{t_0 \in \Lambda_{N_T}^a} \frac{1}{N^3} \sum_{\vec{y}_0 \in \Lambda_{(N, N, N)}^{(a, a, a)}} \int_{\vec{x}} \left\langle T \left\{ B_{(t, \vec{x} - \vec{y}_0)}^\alpha \overline{B}_{(t_0, \vec{0})}^\beta \right\} \right\rangle \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{5}{2}}}{N_T} \sum_{t_0 \in \Lambda_{N_T}^a} \frac{1}{N^3} \sum_{\vec{y}_0 \in \Lambda_{(N, N, N)}^{(a, a, a)}} \int_{\vec{x}} \left\langle T \left\{ B_{(t, \vec{x})}^\alpha \overline{B}_{(t_0, \vec{0})}^\beta \right\} \right\rangle \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{5}{2}}}{N_T} \sum_{t_0 \in \Lambda_{N_T}^a} \int_{\vec{x}} \left\langle T \left\{ B_{(t, \vec{x})}^\alpha \overline{B}_{(t_0, \vec{0})}^\beta \right\} \right\rangle, \end{aligned}$$

wobei wir durch die räumliche Periodizität von $B_{(t,\vec{x})}^\alpha$ verwendet haben um das Integral zu verschieben⁵. Der zeitliche Mittelwert wird nun wie in Abschnitt 2.4.1 berechnet, womit wir dann

$$C_b^{\alpha\beta}(t) = C_b^{\alpha\beta}(t, \vec{0})$$

erhalten. Wir können auf diese Weise $C_b^{\alpha\beta}(t, \vec{0})$ berechnen, ohne die Matrix Q für jede Eich-Feld-Konfiguration in allen Raumzeit-Punkten zu invertieren.

⁵Diese Periodizität ist für lokale Baryonenoperatoren auch gegeben, da sie nach Ausintegration der Fermionen in (3.1.1) ein Produkt von Fermionenpropagatoren werden. Dieses Argument wird klar, wenn wir uns das Produkt $G(x, y) := F(x, x)F(x, y)F(y, y)$ einer doppeltperiodischen Funktion $F(x, y) = F(x + L, y) = F(x, y + L)$ anschauen, denn dafür gilt

$$\begin{aligned} F(x, x)F(x, y)F(y, y) &= F(x, x)F(x, y + L)F(y + L, y + L) \\ F(x, x)F(x, y)F(y, y) &= F(x + L, x + L)F(x + L, y)F(y, y), \end{aligned}$$

womit auch $G(x, y)$ doppelt periodisch ist.

3.4.3. Even Odd Preconditioning

Um die Invertierung zu beschleunigen, wird das *even odd preconditioning* vorgenommen, welches effektiv die Dimension des Dirac-Wilson-Operators halbiert [16]. Wir sehen, dass Q in der Raumzeit nur für direkt benachbarte oder identische Punkte einen Eintrag enthält. Dies lässt uns die Matrix aufteilen nach gerader und ungerader Summe der Indizes, da diese ausschließlich mit den jeweils anderen Wechselwirken. Dies ist klar, da

$$x^1 + x^2 + x^3 + x^4 \in 2\mathbb{Z}a \Leftrightarrow x^1 + x^2 + x^3 + x^4 \pm a \in (2\mathbb{Z} + 1)a.$$

Zuerst betrachten wir den Fall einer eindimensionalen periodischen Feldtheorie. Wir führen also die Transformation⁶

$$T := \begin{pmatrix} T^{\text{odd}} \\ T^{\text{ev}} \end{pmatrix}$$

ein, wobei⁷

$$\begin{aligned} (T^{\text{odd}})_n^i &:= \delta_{2i+1,n} \quad i \in \{0, \dots, K-1\} \\ (T^{\text{ev}})_n^i &:= \delta_{2(i-K),n} \quad i \in \{K, \dots, 2K-1\} \end{aligned}$$

ist. Man sieht schnell, dass

$$T^{-1} = T^{\text{TsdE}} = \begin{pmatrix} T^{\text{odd TsdE}} & T^{\text{ev TsdE}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (TT^{\text{TsdE}})_j^i &= \left(\begin{pmatrix} T^{\text{odd}} \\ T^{\text{ev}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\text{odd TsdE}} & T^{\text{ev TsdE}} \end{pmatrix} \right)_j^i \\ &= \begin{pmatrix} T^{\text{odd}} T^{\text{odd TsdE}} & T^{\text{odd}} T^{\text{ev TsdE}} \\ T^{\text{ev}} T^{\text{odd TsdE}} & T^{\text{ev}} T^{\text{ev TsdE}} \end{pmatrix}_j^i \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}_j^i, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} \left(T^{\text{odd}} T^{\text{ev TsdE}} \right)_j^i &= \sum_{n \in \Lambda_N} (T^{\text{odd}})_n^i \left(T^{\text{ev TsdE}} \right)_j^n = \sum_{n \in \Lambda_N} (T^{\text{odd}})_n^i (T^{\text{odd}})_n^j \\ &= \sum_{n \in \Lambda_N} \delta_{2i+1,n} \delta_{2(j-K),n} = \delta_{2i+1,2(j-K)} = 0, \end{aligned}$$

⁶Diese Transformation ist im Spin- und Darstellungs-Raum trivial, also gilt ausführlicher

$$T_{b\beta i}^{aan} = \mathbb{1}_\beta^a \otimes \mathbb{1}_b^a \otimes T_i^n$$

⁷Wir verwenden hier für die Transformation das Standard-Gitter und damit auch die Standard-Summe als Matrixmultiplikation, da dies die Notation hier erheblich schöner gestaltet. Ausserdem nehmen wir an, dass $N_T, N \in 2\mathbb{Z}$, was in den meisten mir bekannten Umsetzungen auch der Fall ist. wir nennen $2K := N$ und $2K_T := N_T$.

da zwei ganze Zahlen entweder gerade oder ungerade sind und

$$\begin{aligned} \left(T^{\text{odd}} T^{\text{odd} T_{\text{SdE}}}\right)_j^i &= \sum_{n \in \Lambda_N} (T^{\text{odd}})_n^i \left(T^{\text{odd} T_{\text{SdE}}}\right)_j^n = \sum_{n \in \Lambda_N} (T^{\text{odd}})_n^i (T^{\text{odd}})_n^j \\ &= \sum_{n \in \Lambda_N} \delta_{2i+1,n} \delta_{2j+1,n} = \delta_{2i,2j} = \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man diese Gleichungen für $T^{\text{ev}} T^{\text{odd} T_{\text{SdE}}}$ und $T^{\text{ev}} T^{\text{ev} T_{\text{SdE}}}$. Wir sehen, dass sich die Transformation in diese Koordinaten in die vier Teilmatrizen

$$\begin{aligned} TQT^{\text{SdE}} &= \begin{pmatrix} T^{\text{odd}} \\ T^{\text{ev}} \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} T^{\text{odd} T_{\text{SdE}}} & T^{\text{ev} T_{\text{SdE}}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T^{\text{odd}} Q T^{\text{odd} T_{\text{SdE}}} & T^{\text{odd}} Q T^{\text{ev} T_{\text{SdE}}} \\ T^{\text{ev}} Q T^{\text{odd} T_{\text{SdE}}} & T^{\text{ev}} Q T^{\text{ev} T_{\text{SdE}}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

aufteilt. Nun berechnen wir, wie sich $(D^\pm)^n_m := \delta_{n,m \pm 1}$ unter dieser Transformation verhält. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(T^{\text{odd}} D^\pm T^{\text{odd} T_{\text{SdE}}}\right)_j^i &= \sum_{n,m \in \Lambda_N} (T^{\text{odd}})_n^i \delta_{n,m \pm 1} (T^{\text{odd}})_m^j \\ &= \sum_{n,m \in \Lambda_N} \delta_{2i-1,n} \delta_{n,m \pm 1} \delta_{2j-1,m} \\ &= \delta_{2i+1,2j+1 \pm 1} = \delta_{2i,2j \pm 1} = 0, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \left(T^{\text{odd}} D^\pm T^{\text{ev} T_{\text{SdE}}}\right)_j^i &= \sum_{n,m \in \Lambda_N} (T^{\text{odd}})_n^i \delta_{n,m \pm 1} (T^{\text{ev}})_m^j \\ &= \sum_{n,m \in \Lambda_N} \delta_{2i-1,n} \delta_{n,m \pm 1} \delta_{2(j-K),m} \\ &= \delta_{2i+1,2(j-K) \pm 1}. \end{aligned}$$

Unter Annahme eines symmetrischen Gitters erhalten wir für eine Funktion v_n auf dem Gitter

$$(T^{\text{odd}})_n^i v^n = b (T^{\text{odd}})_n^i v^{n \pm 2K},$$

weswegen

$$v^{2i+1} = b v^{2i+1 \pm 2K}$$

gelten muss. Dasselbe Verhalten folgt für T^{ev} . Die Funktionen haben demnach in den neuen Koordinaten dieselbe Periodizität und Randbedingungen, wie in den ursprünglichen Koordinaten. Damit gilt dann

$$\left(T^{\text{odd}} D^\pm T^{\text{ev} T_{\text{SdE}}}\right)_j^i = \delta_{2i+1,2j \pm 1} = \delta_{2i,2j-1 \pm 1-2K}.$$

Aufgrund der Reihenfolge der Transformationen gilt $i \in \{0, \dots, K-1\}$ und $j \in \{K, \dots, 2K-1\}$, also

$$\begin{aligned} 2i &\in \{0, 2, \dots, 2K-2\} \\ 2j-2K &\in \{0, 2, \dots, 2K-2\} \\ 2j-2-2K &\in \{-2=2K-2, 0, \dots, 2K-4\}. \end{aligned}$$

Damit wird D^- zu einer Einheitsmatrix und D^+ zu einer verschobenen Einheitsmatrix in den neuen Koordinaten. Aufgrund der Randbedingungen kann man nun die aus D^+ erhaltene Matrix als ein halbdimensionales D^+ ansehen. Analog erhalten wir durch transponieren

$$\begin{aligned} \left(T^{\text{ev}} D^{\pm} T^{\text{odd} T_{\text{sdE}}}\right)_j^i &= \left(\left(T^{\text{odd}} D^{\mp} T^{\text{ev} T_{\text{sdE}}}\right)^{T_{\text{sdE}}}\right)_j^i \\ &= \left(T^{\text{odd}} D^{\mp} T^{\text{ev} T_{\text{sdE}}}\right)_i^j = \delta_{2j, 2i+1 \mp 1 - 2K}, \end{aligned}$$

wobei $i \in \{K, \dots, 2K-1\}$ und $j \in \{0, \dots, K-1\}$ gilt, was zu

$$\begin{aligned} 2j &\in \{0, 2, \dots, 2K-2\} \\ 2i-2K &\in \{0, 2, \dots, 2K-2\} \\ 2i-2-2K &\in \{2K-2, 0, \dots, 2K-4\}. \end{aligned}$$

führt, wodurch D^+ zu einer Einheitsmatrix und D^- zu einer verschobenen Einheitsmatrix wird. Auch hier kann die aus D^- erhaltene Matrix als halbdimensionales D^- angesehen werden. Dies wird im folgenden Beispiel klar. Für $K=2$ haben die Transformationen die Form

$$T = \begin{pmatrix} T^{\text{odd}} \\ T^{\text{ev}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

und für D^{\pm} gilt, mit b für die Randbedingungen

$$D^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach der Transformation in die neuen Koordinaten haben diese Matrizen die Form

$$TD^+T^{\text{T}_{\text{SdE}}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \tilde{D}^+ & 0 \end{pmatrix}$$

$$TD^-T^{\text{T}_{\text{SdE}}} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{D}^- \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es zeigt sich durch Potenzieren, dass für $(D^\pm)^{2n+1}$ ein ähnliches Verhalten auftritt, so dass für $2n+1 \leq K^8$

$$T(D^+)^{2n+1}T^{\text{T}_{\text{SdE}}} = \begin{pmatrix} 0 & (\tilde{D}^+)^{2n} \\ (\tilde{D}^+)^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(D^-)^{2n+1}T^{\text{T}_{\text{SdE}}} = \begin{pmatrix} 0 & (\tilde{D}^-)^{2n+1} \\ (\tilde{D}^-)^{2n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4.3)$$

Für eine vierdimensionale Feldtheorie lassen sich die Indizes (n^1, n^2, n^3, n^4) zu einem Index n zum Beispiel durch die folgende Methode zusammenfassen. Dabei nehmen $n^{i=1,\dots,3}$ die Werte $\{0, \dots, N-1\}$ und n^4 die Werte $\{0, \dots, N_T-1\}$ an. Wir wenden das folgende iterative Vorgehen an. Wir fassen das erste Paar an Indizes durch

$$\begin{aligned} (n^i, n^j) &\mapsto \tilde{n}^{ij}(n^i, n^j) = n^i + N_i n^j \\ \tilde{n}^{ij} &\mapsto n^{ij} = F_N(\tilde{x}^{ij}(n^i, n^j)) = F(n^i, n^j) \end{aligned}$$

zusammen, wobei diese Indizes hintereinander angeordnet werden. Für die Abbildung F gilt⁹

$$F(n^i, n^j) = \begin{cases} \tilde{n}^{ij}(n^i, n^j) & \text{falls } n^j \text{ gerade} \\ \tilde{n}^{ij}(n^i, N - n^j - 1) & \text{falls } n^j \text{ ungerade.} \end{cases}$$

⁸Es gilt $(D^\pm)^{2n+1} = bD^{\mp 2n+1-K}$.

⁹Dieses Verdrehen ist nötig, da zum Beispiel für $N_i = 3$ die Matrix $(M_{N_i})_{ab} = (a+b) \bmod 2$ durch

$$M_3^{\text{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Und die Koordinaten dann durch

$$M_3^{\text{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \rightarrow & 0 & \cdots \\ \downarrow & \uparrow & & \downarrow & \cdots \\ 1 & 0 & & 1 & \cdots \\ \downarrow & \uparrow & & \downarrow & \cdots \\ 0 & \rightarrow & 1 & 0 & \rightarrow \cdots \end{pmatrix}$$

aufgereiht werden.

Damit haben wir (n^i, n^j) so angeordnet, dass zwei benachbarte Indizes immer in einer unterschiedlichen Restklasse von 2 sind. Es gilt

$$(n^i(n^{ij}) + n^j(n^{ij}) \bmod 2) \neq (n^i(n^{ij} \pm 1) + n^j(n^{ij} \pm 1) \bmod 2).$$

Ausserdem haben periodische Funktionen $f(n^i, n^j)$ nun die folgenden Periodizitäten

$$f(n^{ij}) = b_j f(n^{ij} + N_i N_j),$$

wobei b_i und b_j durch die jeweiligen Randbedingungen bestimmt sind. Die Operatoren D^\pm verbanden vorher Indizes mit gerader Indexsumme zu Indizes ungerader Indexsumme, weshalb sie in der neuen Anordnung zu Operatoren wie $(\hat{D}^\pm)^{2n+1}$ werden, da gerade und ungerade Indizes einen ungeraden Abstand voneinander haben. In (3.4.3) haben wir gesehen, dass diese Matrizen sich auf die Ecken aufteilen und die beiden Diagonalblöcke trivial lassen. Dieses Verfahren wenden wir nun iterativ an, so dass

$$\begin{aligned} (n^1, n^2) &\mapsto n^{12} \\ (n^{12}, n^3) &\mapsto n^{123} \\ (n^{123}, n^4) &\mapsto n. \end{aligned}$$

In diesem Index haben wir auch die oben genannten Eigenschaften für die Operatoren D^\pm , so dass auch hier eine Separation stattfinden wird und wir die *L-U-Zerlegung* im Index n vornehmen können. Es gilt in der neuen Basis n , wenn wir die Bezeichnung

$$Q^{oo} := T^{\text{odd}} Q T^{\text{odd} \text{Tsde}}$$

und analog für Q^{eo} , Q^{oe} und Q^{ee} wählen, Q in den Raumzeit-Indizes die Struktur

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & Q^{oe} \\ Q^{eo} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

hat. Da die Transformationen im Spin- und Darstellungsraum trivial sind folgt

$$[\gamma^5, T] = [C, T] = 0$$

wodurch immer noch

$$Q = \gamma^5 Q^{\dagger \text{Tsde}} \gamma^5 = C Q^{\text{Tsde}} C,$$

gilt, woraus direkt

$$Q^{oe} = \gamma^5 Q^{eo \dagger \text{Tsde}} \gamma^5 = C Q^{eo \text{Tsde}} C$$

folgt. Wir erkennen, dass Q^{eo} mit Q^{oe} und nicht mit sich selbst in Verbindung steht. Für das Produkt $Q^{eo} Q^{oe}$ gilt jedoch

$$Q^{eo} Q^{oe} = \gamma^5 (Q^{eo} Q^{oe})^{\dagger \text{Tsde}} \gamma^5 = C (Q^{eo} Q^{oe})^{\text{Tsde}} C. \quad (3.4.5)$$

Dies können wir mit den Matrizen¹⁰

$$L(A) := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ A & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad U(A) := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & A \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

zerlegen, da

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ Q^{\text{eo}} & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} - Q^{\text{eo}} Q^{\text{oe}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & Q^{\text{oe}} \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \\ &= L(Q^{\text{eo}}) \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} - Q^{\text{eo}} Q^{\text{oe}} \end{pmatrix} U(Q^{\text{oe}}). \end{aligned}$$

3.4.4. Conjugate Gradient Verfahren

Das Invertieren mit dem *Conjugate Gradient Verfahren*¹¹ ist die Zurückführung der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Qz = s$$

nach z auf das Minimieren einer Funktion. Ist A eine hermitesche, positiv definite Matrix, also eine Matrix, die nur reelle positive Eigenwerte hat, so ist die Lösung von

$$Av = w$$

äquivalent zur Minimierung der Funktion

$$f(v) = \frac{1}{2} v^\dagger Av - v^\dagger w.$$

Für den Gradienten von f gilt

$$g(v)^\dagger := (\nabla_v f(v))^\dagger = v^\dagger A - w^\dagger,$$

womit das Extremum eine Lösung des linearen Gleichungssystems ist und sogar ein lokales Minimum, da die Hessische durch

$$H_{v_1, v_2}(f) = v_2^\dagger \nabla_{v^\dagger} [(\nabla_v f(v)) v_1] = v_2^\dagger A v_1$$

gegeben ist, was immer positiv definit ist. Damit ist das Minimum v_{\min} von $f(v)$ die Lösung von

$$v_{\min}^\dagger A - w^\dagger = 0.$$

Da v_{\min} ein lokales Minimum ist, führt jedes Gradientenabstiegsverfahren zum Ziel. Wir starten mit einem Vektor v_1 , und bestimmen mit diesem das Residuum $r_1 = -g(v_1)$, und die Abstiegs-

¹⁰Man sieht schnell, dass

$$L(A)^{-1} = L(-A) \quad U(A)^{-1} = U(-A).$$

¹¹Siehe dazu [16] oder [10].

richtung $p_1 = r_1$. Der Algorithmus folgt dann dem iterativen System

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{r_i^\dagger r_i}{p_i^\dagger A p_i}, & v_{i+1} &= v_i + \alpha_i p_i \\ r_{i+1} &= r_i - \alpha_i A p_i, & \beta_i &= \frac{r_{i+1}^\dagger r_{i+1}}{r_i^\dagger r_i} \\ p_{i+1} &= r_{i+1} + \beta_i p_i\end{aligned}$$

wobei $r_i^\dagger r_i$ als Güteparameter für die Genauigkeit von v_i als Minimum verwendet wird. Diesen Algorithmus können wir jedoch nicht auf unser System anwenden, da Q weder hermitesch noch positiv definit ist. Betrachten wir die zerlegte Form

$$Q = L(Q^{\text{eo}}) \hat{Q} U(Q^{\text{oe}})$$

wissen wir aus (3.4.5), dass $\gamma^5 \hat{Q}$ hermitesch und damit $\hat{Q}^{\dagger \text{sdE}} \hat{Q}$ positiv definit und hermitesch ist. Um $Qz = s$ zu lösen, führen wir noch die folgenden Umformungen aus:

$$\begin{aligned}z &= U(-Q^{\text{oe}}) \hat{Q}^{-1} L(-Q^{\text{eo}}) s \\ &= U(-Q^{\text{oe}}) (\gamma^5 \hat{Q})^{-1} \gamma^5 L(-Q^{\text{eo}}) s \\ &= U(-Q^{\text{oe}}) (\gamma^5 \hat{Q})^{-1} (\gamma^5 \hat{Q})^{-1} \gamma^5 \hat{Q} \gamma^5 L(-Q^{\text{eo}}) s \\ &= U(-Q^{\text{oe}}) ((\gamma^5 \hat{Q})^2)^{-1} \gamma^5 \hat{Q} \gamma^5 L(-Q^{\text{eo}}) s \\ &= U(-Q^{\text{oe}}) (\hat{Q}^{\dagger \text{sdE}} \hat{Q})^{-1} \gamma^5 \hat{Q} \gamma^5 L(-Q^{\text{eo}}) s.\end{aligned}$$

Wir nehmen also die Quelle s , multiplizieren sie mit $\gamma^5 \hat{Q} \gamma^5 L(-Q^{\text{eo}})$, invertieren dann mit dem Conjugate-Gradient Verfahren $\hat{Q}^{\dagger \text{sdE}} \hat{Q}$ und multiplizieren anschließend noch mit $U(-Q^{\text{oe}})$ und bekommen damit die Lösung z , so dass

$$z = Q^{-1} s.$$

3.4.5. Verbundener- und unverbundener Anteil

Wir haben in unserem Korrelator einen sogenannten verbunden- und einen unverbundenen Anteil, die sich durch die Propagatorstruktur auszeichnen. Der verbundene Anteil lässt sich mit den bis jetzt besprochenen Methoden problemlos berechnen, da wir für diesen Propagatoroten der Form

$$\Delta_{a_0 \alpha_0 x_0}^{b \beta y}$$

benötigen. Dies ist eine Folgerung aus Abschnitt 3.4.2, da wir aufgrund der Translationsinvarianz auf jeder Konfiguration nur einen zufälligen *Startpunkt* x_0 wählen müssen, um im Mittel den richtigen Korrelator zu erhalten. Jedoch stellt der unverbundene Anteil noch eine Herausforderung dar, da wir für diesen die Diagonalelemente

$$\Delta_{a_0 \alpha_0 y}^{b \beta y}$$

für jedes y des Gitters benötigen. Da die Inversion jedoch zu zeitaufwendig ist, um sie für jeden Gitterpunkt einzeln auszuführen, werden andere Methoden benötigt. Die zwei untersuchten Methoden werden hier nun vorgestellt.

3.4.6. Stochastic Estimator Technique

Da die Berechnung des Korrelators, die raumzeitlichen Diagonalelemente des Propagators benötigt und eine Berechnung über das Conjugate Gradient Verfahren zuviel Zeit in Anspruch nehmen würde, nutzen wir die *Stochastic Estimator Technique* [10], eine stochastische Methode, um das Inverse abzuschätzen. Dazu werden zufällige Vektoren $\eta^{[r]}_{x\alpha a}$ erzeugt, so dass sie

$$\left\langle \eta^{[r]y\beta b} \eta^{\dagger_{\text{SdE}}[r]}_{x\alpha a} \right\rangle_{[r]} := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \eta^{[r]y\beta b} \eta^{\dagger_{\text{SdE}}[r]}_{x\alpha a} = \mathbb{1}_{x\alpha a}^{y\beta b}$$

erfüllen. Diese werden mit dem Conjugate-Gradient-Verfahren invertiert, so dass wir für jeden Vektor $\eta^{[r]}_{x\alpha a}$ den Vektor $s^{[r]}_{y\beta b}$ über

$$Q_{y\beta b}^{x\alpha a} s^{[r]y\beta b} = \eta^{[r]x\alpha a}$$

erhalten und

$$s^{[r]y\beta b} = \Delta_{x\alpha a}^{y\beta b} \eta^{[r]x\alpha a}.$$

Damit erzeugen wir die Matrix

$$\frac{1}{N} \sum_{r=1}^N s^{[r]x\alpha a} \eta^{\dagger_{\text{SdE}}[r]}_{y\beta b},$$

für die wir sehen, dass sie den vollen Propagator approximiert, da

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N s^{[r]x\alpha a} \eta^{\dagger_{\text{SdE}}[r]}_{y\beta b} &= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \Delta_{z\gamma c}^{x\alpha a} \eta^{[r]z\gamma c} \eta^{\dagger_{\text{SdE}}[r]}_{y\beta b} \\ &= \Delta_{z\gamma c}^{x\alpha a} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \eta^{[r]z\gamma c} \eta^{\dagger_{\text{SdE}}[r]}_{y\beta b} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \Delta_{z\gamma c}^{x\alpha a} \mathbb{1}_{y\beta b}^{z\gamma c} = \Delta_{y\beta b}^{x\alpha a}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise wird der Propagator approximiert. Im aktuellen Programm ist die Verteilung der Vektoren durch

$$\eta^{[r]x\alpha a} = e^{in^{[r]x\alpha a} \frac{\pi}{2}}$$

erzeugt, wobei $n^{[r]}$ gleichverteilt die Werte $\{0, 1, 2, 3\}$ annimmt. Hier gilt dann für den obigen Erwartungswert wie gewünscht

$$\left\langle \eta^{[r]y\beta b} \eta^{\dagger_{\text{SdE}}[r]}_{x\alpha a} \right\rangle_{[r]} = \begin{cases} \frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 e^{-in\frac{\pi}{2}} e^{in\frac{\pi}{2}} = 1 & \text{für } x = y, a = b, \alpha = \beta \\ \frac{1}{16} \sum_{n,m=1}^4 e^{-im\frac{\pi}{2}} e^{in\frac{\pi}{2}} = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da wir nur eine endliche Zahl von Schätzern betrachten, ist eine Fehlerabschätzung nötig. Die Varianz berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\sigma^2(\Delta_{y\beta b}^{x\alpha a}) &= \Delta_{z\gamma c}^{x\alpha a} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \sigma^2 \left(\eta^{[r]z\gamma c} \eta^{\dagger_{\text{sdE}}[r]}_{y\beta b} \right) \\ &= \Delta_{z\gamma c}^{x\alpha a} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \sigma^2 \left(\eta^{[r]z\gamma c} \eta^{\dagger_{\text{sdE}}[r]}_{y\beta b} \right)\end{aligned}$$

Für unseren Fall lässt sich der Fehler durch

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \eta^{[r]y\beta b} \eta^{\dagger_{\text{sdE}}[r]}_{x\alpha a} - \mathbb{1}_{x\alpha a}^{y\beta b} \right\| \in \mathcal{O} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \right)$$

abschätzen. Wir bezeichnen den Schätzer für das Inverse nun mit

$$(\Delta_{\text{SET}}^{[N]})_{x\alpha a}^{y\beta b} := \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \eta^{[r]y\beta b} \eta^{\dagger_{\text{sdE}}[r]}_{x\alpha a}.$$

3.4.7. Eigenwertzerlegung

Da die Matrix $\gamma^5 Q$ besser beherrschbar ist als Q , diagonalisieren wir $\gamma^5 Q$. Sie ist hermitesch und damit sogar unitär diagonalisierbar, so dass

$$\gamma^5 Q = U D_{\gamma^5 Q} U^{\dagger_{\text{sdE}}}$$

für eine Diagonalmatrix $D_{\gamma^5 Q}$ und eine unitäre Matrix U gilt. Wir können also die Matrix $\gamma^5 Q$ in ihren Eigenwerten und Eigenvektoren entwickeln

$$\gamma^5 Q = \sum_{\lambda \in \Sigma(\gamma^5 Q)} \lambda u_\lambda u_\lambda^{\dagger_{\text{sdE}}}.$$

Hier ist $\Sigma(\gamma^5 Q)$ die Menge der Eigenwerte, die sie gemäß ihrer Vielfachheit enthält, und u_λ ist der Eigenvektor zum Eigenwert λ . Diese Matrix ist leicht zu invertieren, falls $0 \notin \Sigma(\gamma^5 Q)$. Ihr Inverses ist gegeben durch

$$(\gamma^5 Q)^{-1} = \sum_{\lambda \in \Sigma(\gamma^5 Q)} \frac{1}{\lambda} u_\lambda u_\lambda^{\dagger_{\text{sdE}}},$$

womit wir die benötigte Matrix $\Delta = Q^{-1}$ durch

$$\Delta = \sum_{\lambda \in \Sigma(\gamma^5 Q)} \frac{1}{\lambda} u_\lambda u_\lambda^{\dagger_{\text{sdE}}} \gamma^5$$

erhalten. Jetzt nehmen wir an, dass wir, wenn wir $(\gamma^5 Q)^{-1}$ genügend genau approximieren, dass wir damit auch Q^{-1} gut genug approximieren. Wir wählen uns die N kleinsten Eigenwerte von

$\gamma^5 Q$ und approximieren so Q^{-1} durch

$$Q^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} u_{\lambda_i} u_{\lambda_i}^{\dagger \text{SdE}} \gamma^5 + Q_{\text{Rest}}^{-1}.$$

Nehmen wir an, dass Q_{Rest}^{-1} klein in einer geeigneten Norm ist. Für diesen Fall reicht diese Approximation aus. Wir nennen diese Approximation

$$(\Delta_{\text{EV}}^{[N]})_{x\alpha a}^{y\beta b} := \sum_{i=1}^N \frac{1}{\lambda_i} u_{\lambda_i} u_{\lambda_i}^{\dagger \text{SdE}} \gamma^5.$$

Wir können die Approximation verbessern, indem wir den Q_{Rest}^{-1} zusätzlich mit der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Technik schätzen. Wir projizieren dazu den Schätzvektor $\eta^{[r]}$ in das orthogonale Komplement zu den Eigenvektoren durch

$$\eta_{\perp}^{[r]} := \eta^{[r]} - \sum_{i=1}^N u_{\lambda_i} \left(u_{\lambda_i}^{\dagger \text{SdE}} \gamma^5 \eta^{[r]} \right),$$

da wir so erreichen, dass das Inverse mit $\eta_{\perp}^{[r]}$ als Quelle, nur Q_{Rest}^{-1} approximiert, denn

$$\begin{aligned} Q^{-1} \eta_{\perp}^{[r]} &= \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} u_{\lambda_j} u_{\lambda_j}^{\dagger \text{SdE}} \gamma^5 + Q_{\text{Rest}}^{-1} \right) \eta_{\perp}^{[r]} \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} u_{\lambda_j} u_{\lambda_j}^{\dagger \text{SdE}} \gamma^5 \left(\eta^{[r]} - \sum_{i=1}^N u_{\lambda_i} \left(u_{\lambda_i}^{\dagger \text{SdE}} \gamma^5 \eta^{[r]} \right) \right) + Q_{\text{Rest}}^{-1} \eta_{\perp}^{[r]} \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} u_{\lambda_j} \left(u_{\lambda_j}^{\dagger \text{SdE}} \gamma^5 \eta^{[r]} \right) - \sum_{i,j=1}^N \frac{1}{\lambda_j} u_{\lambda_j} \underbrace{\left(u_{\lambda_j}^{\dagger \text{SdE}} u_{\lambda_i} \right)}_{\delta_{ij}} \left(u_{\lambda_i}^{\dagger \text{SdE}} \gamma^5 \eta^{[r]} \right) \\ &\quad + Q_{\text{Rest}}^{-1} \eta_{\perp}^{[r]} \\ &= Q_{\text{Rest}}^{-1} \eta_{\perp}^{[r]}. \end{aligned}$$

Damit wird also nur noch Q_{Rest}^{-1} approximiert und wir verändern die Eigenwertzerlegung nicht. Ausführungen hierzu finden sich in [10]

Kapitel 4

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Berechnungen besprochen. Die Ergebnisse des verbundenen Anteils des Korrelators wurden mit Hilfe des Clusters *PALMA* [1] berechnet. Diese werden dann im ersten Abschnitt vorgestellt. Im zweiten Abschnitt werden die Ergebnisse, die für den unverbundenen Anteil des Korrelators präsentiert.

4.1. Der verbundene Anteil

Der verbundenen Anteil des Korrelators wurde auf verschiedenen Gittern gemessen. Für Eine Eichfeldkonfiguration U_μ ist er durch

$$C_{xy}^{\text{verb}\alpha\beta}[U_\mu] = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(C\gamma_4)^{\beta\gamma}(C\gamma_4)^{\beta'\gamma'} \left(2\Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\beta b}\Delta_{y\gamma'c'}^{x\gamma c} - 4\Delta_{y\gamma'c'}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c} \right)$$

gegeben. Dieser wurde über alle verfügbaren Konfigurationen ausgewertet, die wie in Abschnitt 3 besprochen erstellt wurden, so dass sich ein Erwartungswert

$$C^{\text{verb}\alpha\beta}(t) = \left\langle \text{T} \left\{ B_{(t,\vec{0})}^\alpha \bar{B}_{(0,\vec{0})}^\beta \right\} \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C^{\text{verb}\alpha\beta}_{(t,\vec{0})(0,\vec{0})}[(U_\mu)_i]$$

für den Korrelator ergab. Für die Fermionen wurden mit antisymmetrischen Randbedingungen simuliert, was dem Fall $b = -1$ entspricht. Diesen Korrelator projiziert man mittels

$$P^\pm = \frac{1}{2} (i\gamma_4 \pm \mathbb{1})$$

auf die Anteile mit positiver- oder negativer Parität, so dass

$$C^{\text{verb}\pm}(t) = \frac{1}{2} \text{Tr}_S (P^\pm C^{\text{verb}}(t))$$

betrachtet wird. Für diesen erwarten wir nach Abschnitt 2 das zeitliche Verhalten

$$\begin{aligned} C^{\text{verb}+}(t) &= \sum_{B^+} |\tilde{N}_{B^+}|^2 e^{-m_{B^+}t} + \sum_{B^-} |\tilde{N}_{B^-}|^2 e^{-m_{B^-}(aN_T-t)} \\ C^{\text{verb}-}(t) &= \sum_{B^+} |\tilde{N}_{B^+}|^2 e^{-m_{B^+}(aN_T-t)} + \sum_{B^-} |\tilde{N}_{B^-}|^2 e^{-m_{B^-}t}. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Ab hier nennen wir $C^{\text{verb}^+}(t)$ den positiven- und $C^{\text{verb}^-}(t)$ den negativen Korrelator. Diese Tatsache erfordert jedoch die Annahme, dass der verbleibende, unverbundene Anteil im Vergleich zum verbundenen Anteil vernachlässigbar klein ist. Da wir ein asymmetrisches zeitliches Verhalten erwarten, können wir, im Gegensatz zu den binären Teilchen, keine Summe der Form $C^{\text{verb}^\pm}(t) \pm C^{\text{verb}^\pm}(aN_T - t)$ bilden, um das Ergebnis zu verbessern. In Tabelle 4.1 sind alle gemessenen Gitter aufgezählt und durchnummeriert.

Nummer	κ	β	Gittergröße	Anzahl der Konfigurationen
1	0,1475	1,75	$8^3 \times 16$	22000
2	0,1478	1,75	$8^3 \times 16$	22000
3	0,1482	1,75	$8^3 \times 16$	22000
4	0,1485	1,75	$12^3 \times 24$	10000
5	0,1487	1,75	$12^3 \times 24$	10000
6	0,1487	1,75	$16^3 \times 36$	5000
7	0,1488	1,75	$12^3 \times 24$	10000
8	0,1488	1,75	$16^3 \times 36$	2850
9	0,1488	1,75	$20^3 \times 40$	2685
10	0,1489	1,75	$12^3 \times 24$	10000
11	0,1489	1,75	$16^3 \times 36$	5000
12	0,1489	1,75	$8^3 \times 16$	14000
13	0,1490	1,75	$16^3 \times 36$	6344
14	0,1490	1,75	$20^3 \times 40$	2328
15	0,1490	1,75	$24^3 \times 48$	1440
16	0,1492	1,75	$16^3 \times 36$	5700
17	0,1492	1,75	$24^3 \times 48$	1169

Tabelle 4.1.: Tabelle mit den ausgewerteten Konfigurationen.

4.1.1. Das Vorgehen

Die gemessenen Korrelatoren wurden statistisch ausgewertet, so dass wir den Korrelator $C^{\text{verb}^\pm}(t)$ und seine Unsicherheit erhalten. Der Korrelator ist jedoch nicht direkt in Einheiten der Zeit $t \in \{0, a, 2a, \dots\}$, sondern in Gitter-Zeit-Einheiten $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ vorhanden. Der Korrelator ist wird also als Funktion von n

$$\tilde{C}^{\text{verb}^\pm}(n) = C^{\text{verb}^\pm}(an)$$

berechnet. An diesen Korrelator wird deswegen die Funktion

$$f(n, A, am) := Ae^{amn}$$

gefitet, um die freien Parameter A, am mit Hilfe des Graphikbearbeitungsprogramms *gnuplot* zu bestimmen. In (4.1.1) sehen wir, dass m uns die Masse eines Bindungszustandes, also eines Baryons angibt, an das der Operator koppelt. Dieser Fit wird für verschiedene Intervalllängen $s \in \{3, 4, \dots\}$ und Intervallanfänge n durchgeführt und die erhaltenen effektiven Massen

$$G_s(n) := am_{[n, n+s-1]}$$

nach n aufgetragen, wobei $am_{[n,n+s-1]}$ die Masse ist, die wir auf dem Intervall $[n, n + s - 1]$ aus dem Fit erhalten haben. Hat der Korrelator in einem Bereich einen exponentiellen Abfall, so zeigt sich dieser durch ein Plateau in der Funktion $G_s(n)$. Es wird für kleine s ausgeprägter sein als für große. Ist so ein Plateau erkannt, wird ein Intervall *in diesem Plateau* gewählt, so dass der Fit den Korrelator gut wiedergibt und die Masse $am_{[n,n+s-1]}$ dadurch bestimmt. Als Masse wird dann das Fitergebnis $am_{[n,n+s-1]}$ mit dem jeweiligen Fit-Fehler angegeben. Die Gitter sind so in Gruppen eingeteilt, dass die Auswertung an einem Beispiel durchgeführt wird und die restlichen Auswertungen analog ablaufen. Die Massen werden am Ende des Abschnittes in einer Tabelle zusammengefasst. Dabei wird die Parität mit F^\pm oder B^\pm angegeben. Hierbei bedeutet F^+ , dass es sich um eine Masse eines Baryons handelt, das sich vorwärts in der Zeit bewegt und positive Parität hat. Analog ist dann B^- ein Baryon mit negativer Parität, welches sich rückwärts durch die Zeit bewegt.

4.1.2. Gitterausdehnung und Sommer-Parameter

Da nur das Produkt aus Masse und Gitterkonstante am bestimmbar ist, muss die Gitterkonstante a anhand eines physikalischen Messwertes bestimmt werden. Dazu wird in QCD-Rechnungen das statische Potential $V(r)$ verwendet, das die Anziehungskraft zwischen zwei statischen Quarks im Abstand r voneinander angibt [11]. Dabei wird der Sommer-Parameter $r_0 \approx 0,5\text{fm}$ verwendet, der durch

$$\left. \frac{dV(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = 1,65$$

die Gitterkonstante a festlegt, da wir auch in diesem Fall r in Gitter-Einheiten $\{0, 1, 2, \dots\}$ und nicht in absoluten Abständen erhalten. In der hier verwendeten Theorie lässt sich diese Skalierung auch verwenden [5] [4], um den Gitterparameter a zu bestimmen, der für Untersuchungen bezüglich des Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$ benötigt wird.

4.1.3. Die $8^3 \times 16$ Gitter: 1, 2, 3 und 12

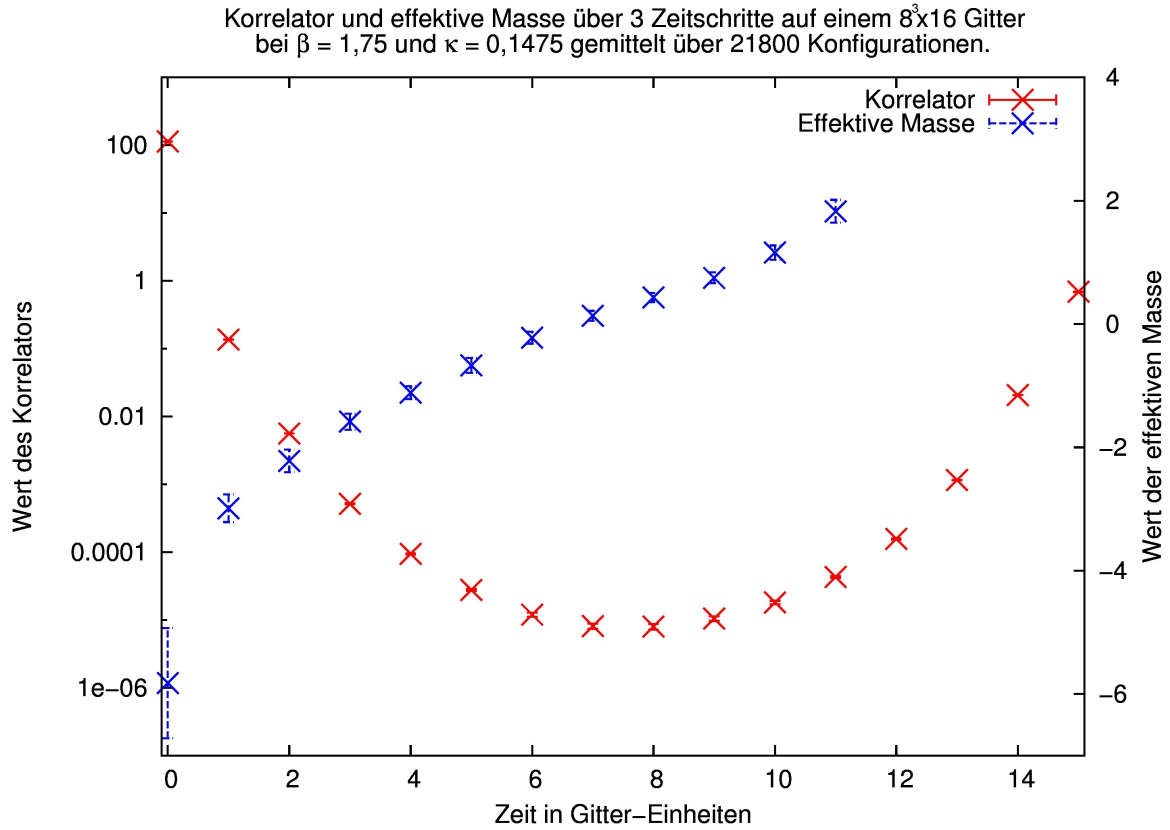


Abbildung 4.1.: $C^{\text{verb}^-}(t)$ mit gefitteten Massen auf Intervallen der Länge drei.

Es wird das Gitter 1 der Größe $8^3 \times 16$ mit $\beta = 1,75$ und $\kappa = 0,1475$ ausgewertet. In Abbildung 4.1 sehen wir den negativen Korrelator logarithmisch an der linken Achse in rot und dazu die effektive Masse $G_3(n)$, für Intervalle der Länge 3, linear an der rechten Achse in blau aufgetragen. Es zeigt sich, dass der Korrelator kein Intervall enthält, in dem erkennbar ein rein exponentieller Abfall stattfindet. Um in diesem Fall Massen extrahieren zu können, müsste die Funktion

$$f(n, A_1, m_1, A_2, m_2) := A_1 e^{-am_1 n} + A_2 e^{am_2 n}$$

an den Korrelator gefittet werden, um die Parameter A_i, am_i zu bestimmen. Dies stellt sich jedoch als zu instabil heraus, um Massen zu bestimmen.

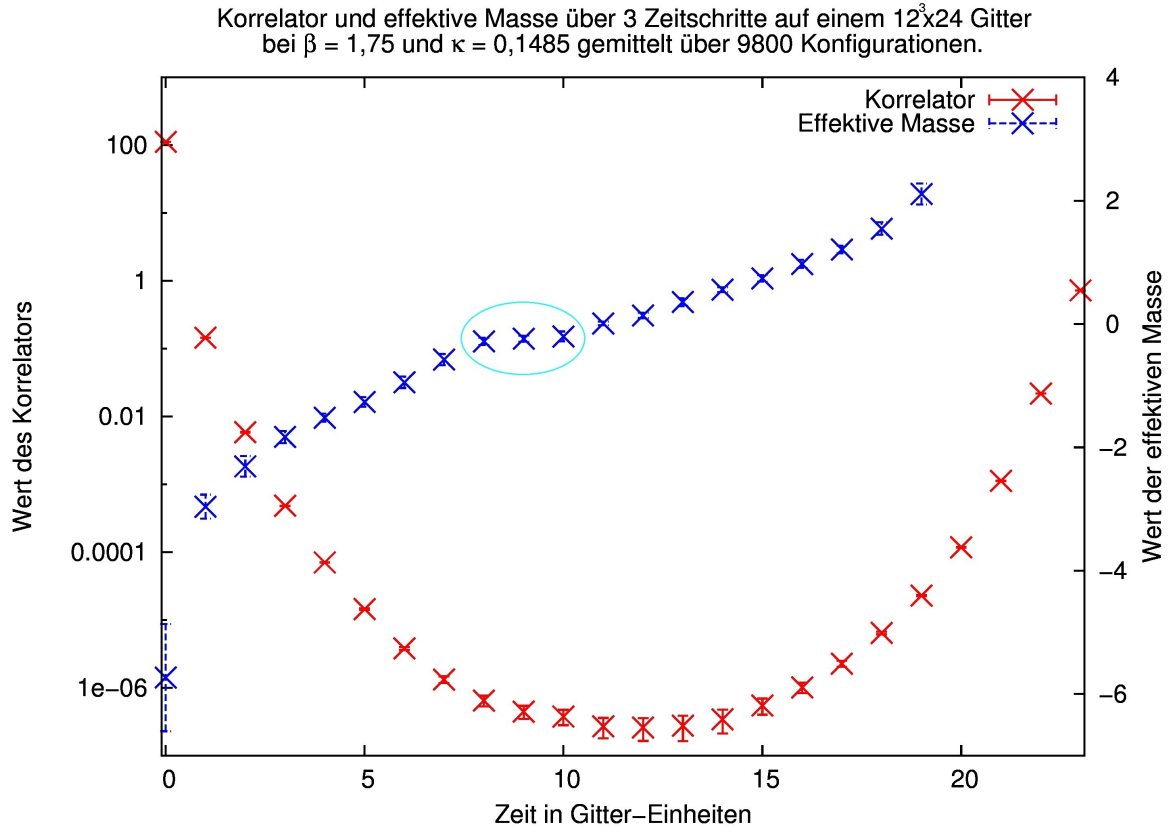
4.1.4. Die $12^3 \times 24$ Gitter: 4, 5, 7 und 10

Abbildung 4.2.: $C^{\text{verb-}}(t)$ mit gefitteten Massen auf Intervallen der Länge drei.

Auf Gitter 4 der Größe $12^3 \times 24$ lassen sich Plateaus nur schwer bestimmen. In Abbildung 4.2 ist wieder der negative Korrelator in rot logarithmisch und die effektive Masse $G_3(n)$ linear in dunkelblau abgebildet. Der in hellblau umkreiste Bereich um $n = 10$ lässt sich als Plateau erkennen. In Abbildung 4.3 sehen wir nun wieder den Korrelator und die effektive Masse $G_4(n)$. Die effektive Masse $G_4(n)$ hat auch hier im umkreisten Bereich wieder ein Plateau. Zusätzlich ist in hellblau noch der Fit und das angefittete Intervall zu sehen.

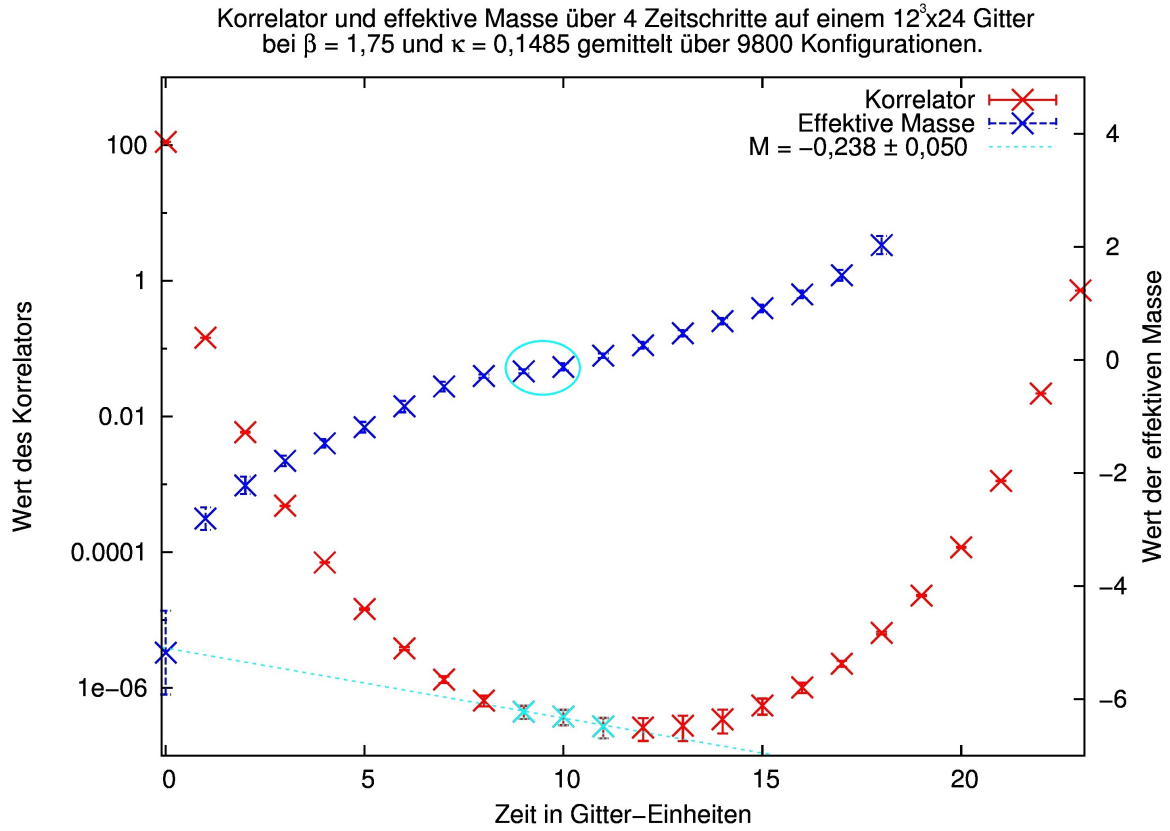


Abbildung 4.3.: $C^{\text{verb}^-}(t)$ mit gefitteten Massen auf Intervallen der Länge vier.

Wir nehmen hier $am_{[9,11]}$ als Wert der Masse und erhalten

$$am_{[9,11]} = 0,238 \pm 0,050$$

für die Masse des leichteste Baryons mit negativer Parität. Für das Rückwärts propgierende Baryon erkennen wir kein Plateau. Die anderen Gitter wurden analog ausgewertet und die Ergebnisse in Tabelle 4.2 aufgeführt.

Nummer	s	t	$am_{[t,t+s-1]}$	$\Delta am_{[t,t+s-1]}$	Parität
4	3	7	0,882	0,028	F^+
5	4	7	0,690	0,007	F^+
7	4	15	0,775	0,058	B^+
7	4	5	1,056	0,055	F^+
10	4	7	0,203	0,005	F^+
10	4	14	0,452	0,038	B^+
4	3	9	0,238	0,050	F^-
5	3	7	0,527	0,023	F^-
7	3	5	0,934	0,028	F^-
7	3	5	0,200	0,021	B^-
10	3	5	0,932	0,027	F^-
10	3	18	1,475	0,008	B^-

Tabelle 4.2.: Die gemessenen Massen auf den Gittern 4,5,7 und 10.

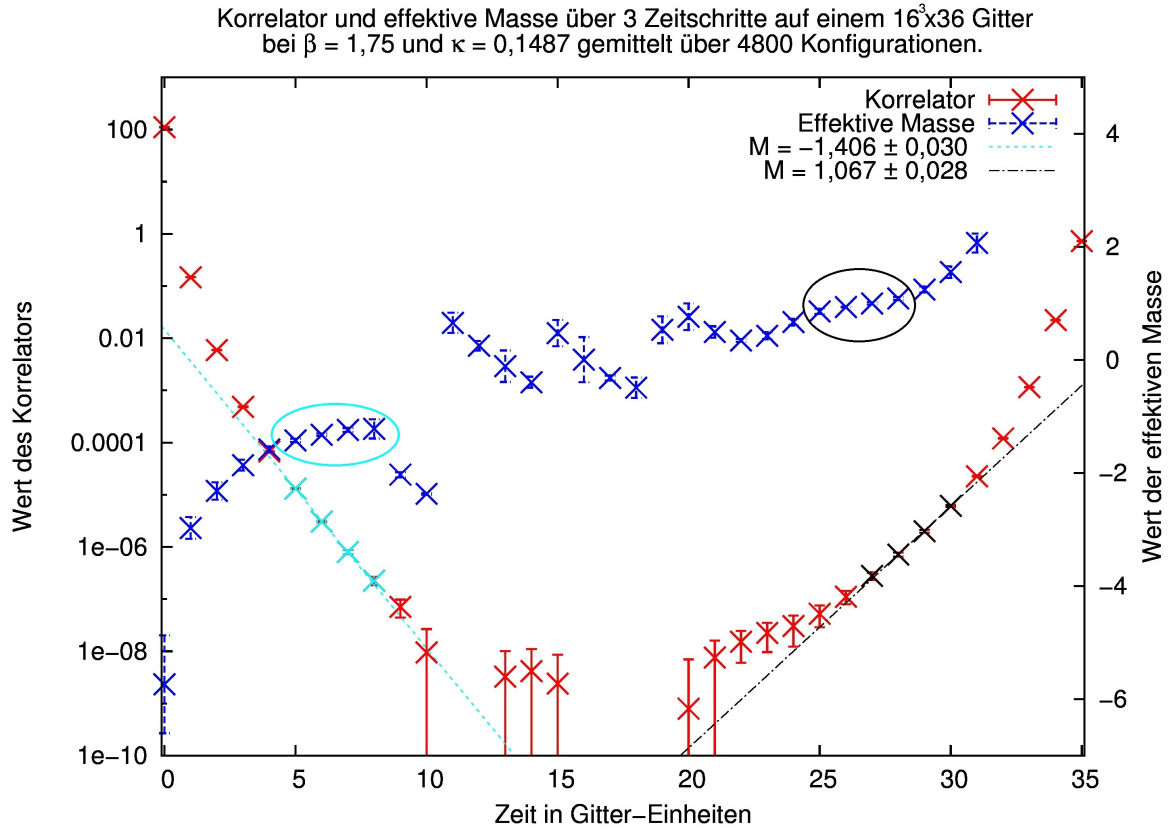
4.1.5. Die $16^3 \times 36$ Gitter: 6, 8, 11, 13 und 16

Abbildung 4.4.: $C^{\text{verb}^-}(t)$ mit gefitteten Massen auf Intervallen der Länge drei.

Für das Gitter 6 der Größe $16^3 \times 36$ ist in Abbildung 4.4 der negative Korrelator, die effektive Masse und zwei Fitkurven zu sehen. Die beiden gewählten Plateaus sind in der jeweiligen Farbe der Fitkurve umkreist. Für die Masse des vorwärts propagierenden Baryons negativer Parität (F^-) ergibt sich eine Masse von

$$am_{[5,8]} = 1,406 \pm 0,030$$

und für das rückwärts propagierende Baryon positiver Parität (B^+) ergibt sich eine Masse von

$$am_{[27,30]} = 1,067 \pm 0,028.$$

An diesem Korrelator ist auch zu sehen, dass die Werte im Intervall $[10, 21]$ vom erwarteten Verlauf eines Korrelators abweichen und der angegebene Fehler größer wird, als der Wert des Korrelators, weshalb diese Werte für die Auswertung nicht betrachtet werden. Ausserdem ist die erwartete Asymmetrie des Korrelators um $n = 15$ klar zu erkennen. Alle weiteren bestimmten Massen sind in Tabelle 4.3 zu finden.

Nummer	s	t	$am_{[t,t+s-1]}$	$\Delta am_{[t,t+s-1]}$	Parität
6	5	6	1,092	0,013	F ⁺
6	4	27	1,067	0,028	B ⁺
8	4	9	0,759	0,033	F ⁺
8	5	26	1,076	0,021	B ⁺
11	5	10	0,485	0,035	F ⁺
11	5	26	1,121	0,013	B ⁺
13	4	5	1,290	0,029	F ⁺
13	4	26	0,816	0,033	B ⁺
6	4	5	1,406	0,003	F ⁻
6	4	22	0,289	0,043	B ⁻
6	4	27	1,245	0,025	B ⁻
8	4	5	1,387	0,013	F ⁻
8	5	27	1,388	0,018	B ⁻
11	5	5	1,377	0,014	F ⁻
11	5	26	1,213	0,012	B ⁻
13	4	7	0,7462	0,023	F ⁻
13	5	26	1,084	0,016	F ⁻
16	5	26	— — —	— — —	F/B [±]

Tabelle 4.3.: Die gemessenen Massen auf den Gittern 6,8,11,13 und 16.

Für das Gitter 16 ließen sich keine Massen bestimmen, da dort der Korrelator komplett von der erwarteten Form abweicht und schon nach zwei oder drei Zeitschritten zu große Fehler annimmt. Der positive und negative Korrelator auf diesem Gitter sowie die effektiven Massen $G_3(n)$ sind in den Abbildungen 4.5 und 4.6 zu sehen.

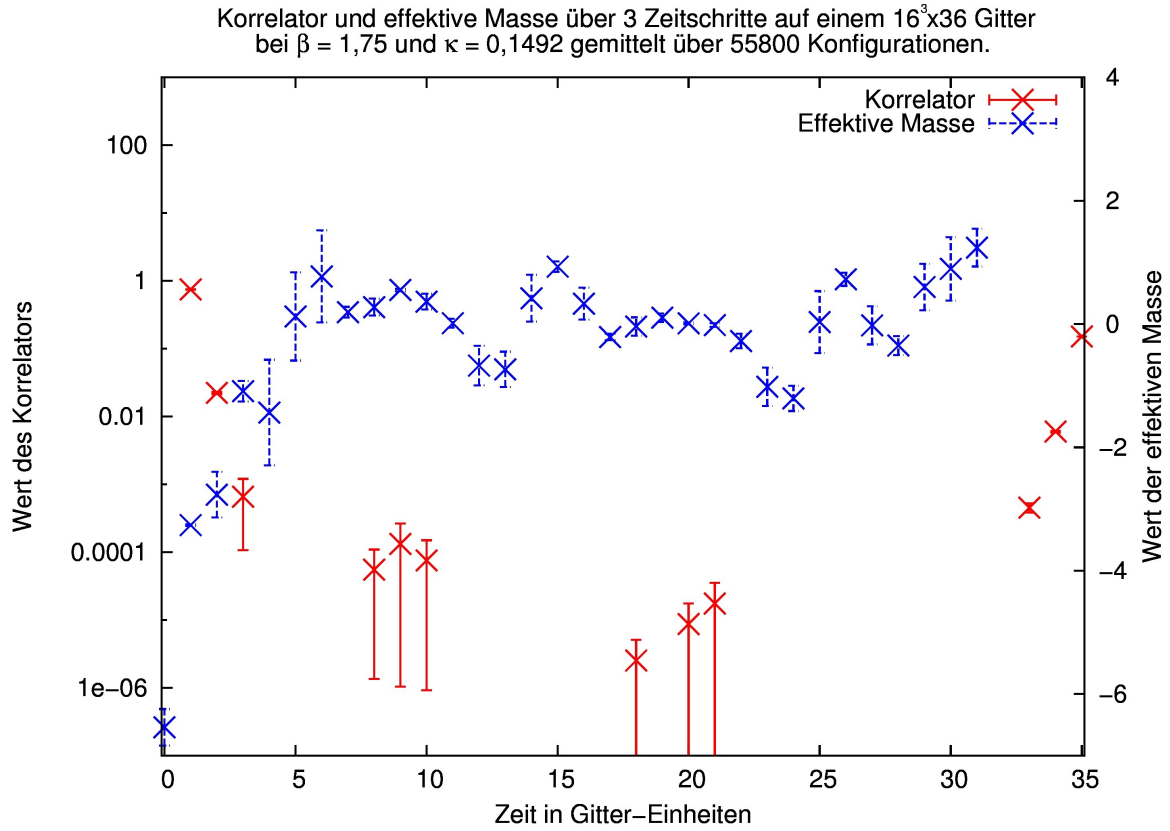


Abbildung 4.5.: $C^{\text{verb}^-}(t)$ mit gefitteten Massen auf Intervallen der Länge drei.

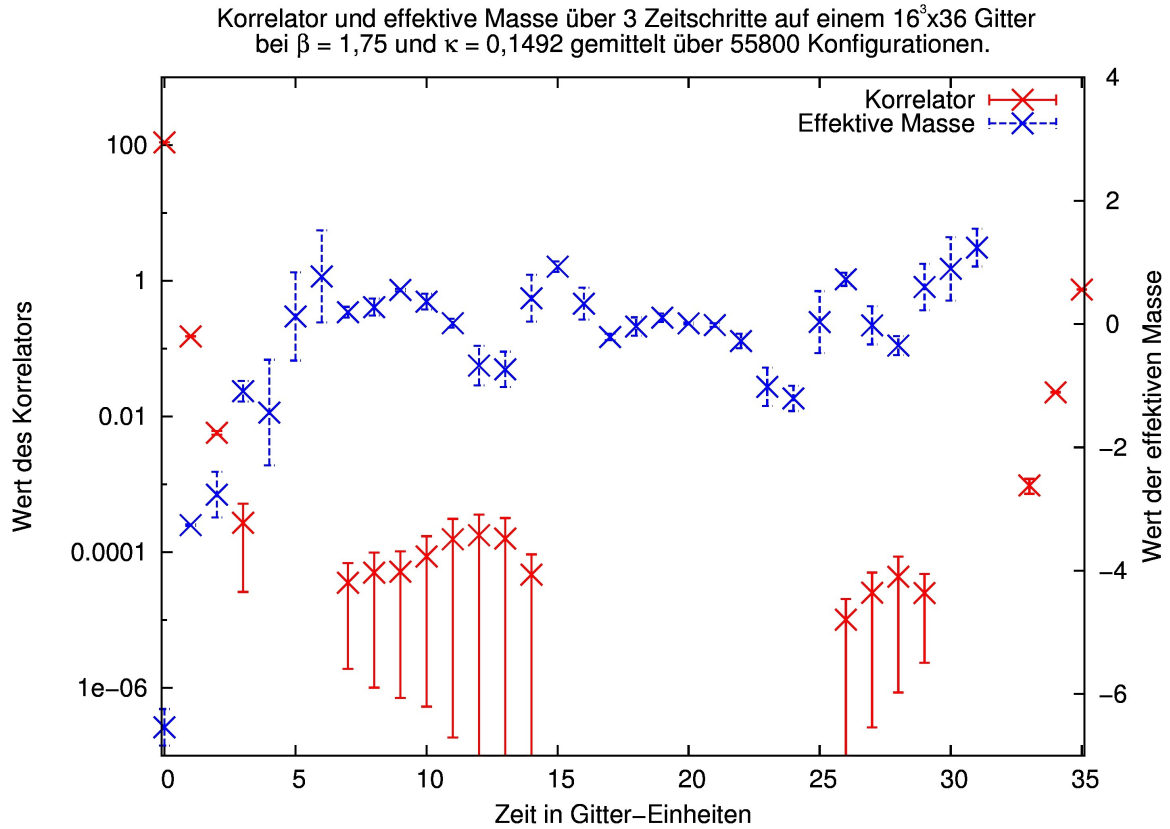


Abbildung 4.6.: $C^{\text{verb}^-}(t)$ mit gefitteten Massen auf Intervallen der Länge drei.

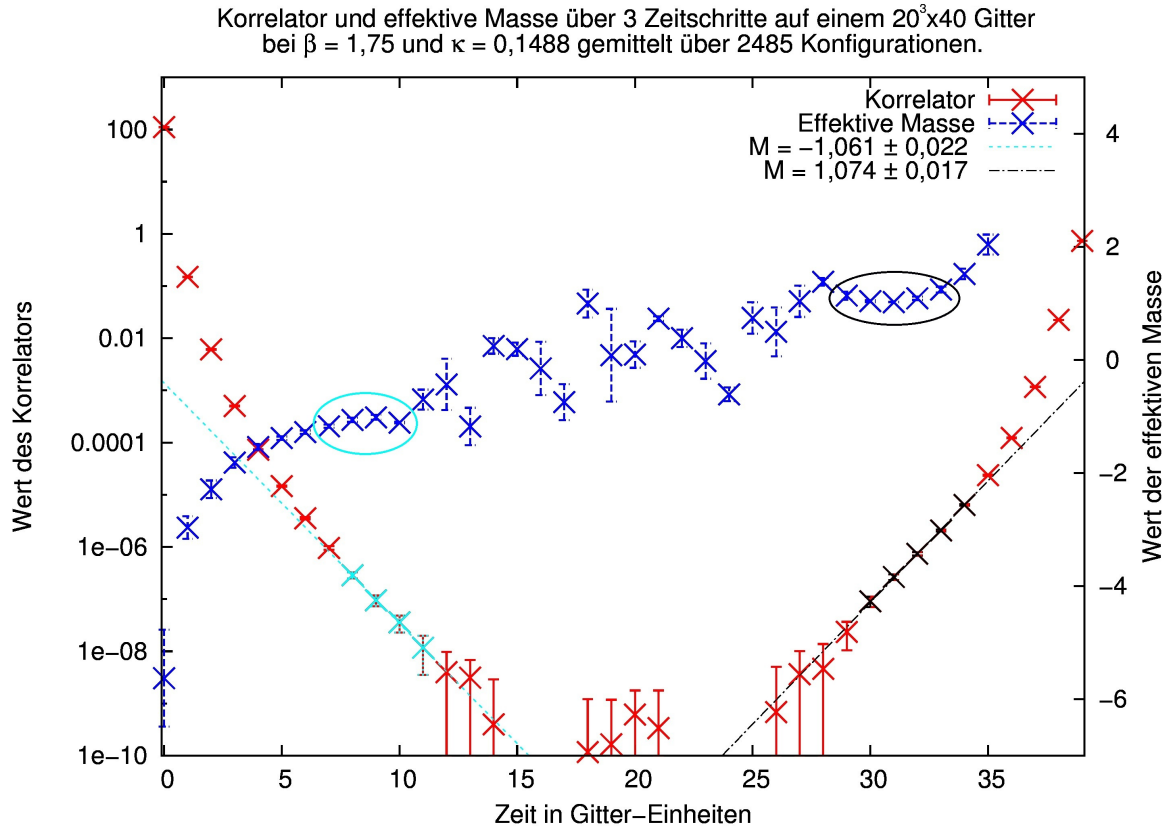
4.1.6. Die $20^3 \times 40$ Gitter: 9 und 14


Abbildung 4.7.: $C^{\text{verb}^-}(t)$ mit gefitteten Massen auf Intervallen der Länge drei.

Für das Gitter 9 der Größe $20^3 \times 40$ ist in Abbildung 4.7 der logarithmische Korrelator, die effektive Masse mit zwei Fitkurven zu sehen. Die beiden gewählten Plateaus sind in der jeweiligen Farbe der Fitkurve umkreist und das Intervall $[11, 28]$ wurde aus denselben Gründen wie zuvor aus der Auswertung ausgeschlossen. Für dieses Gitter ergibt sich die Masse des F^- -Baryons zu

$$am_{[9,11]} = 1,061 \pm 0,022$$

und die Masse des B^+ -Baryons ergibt sich zu

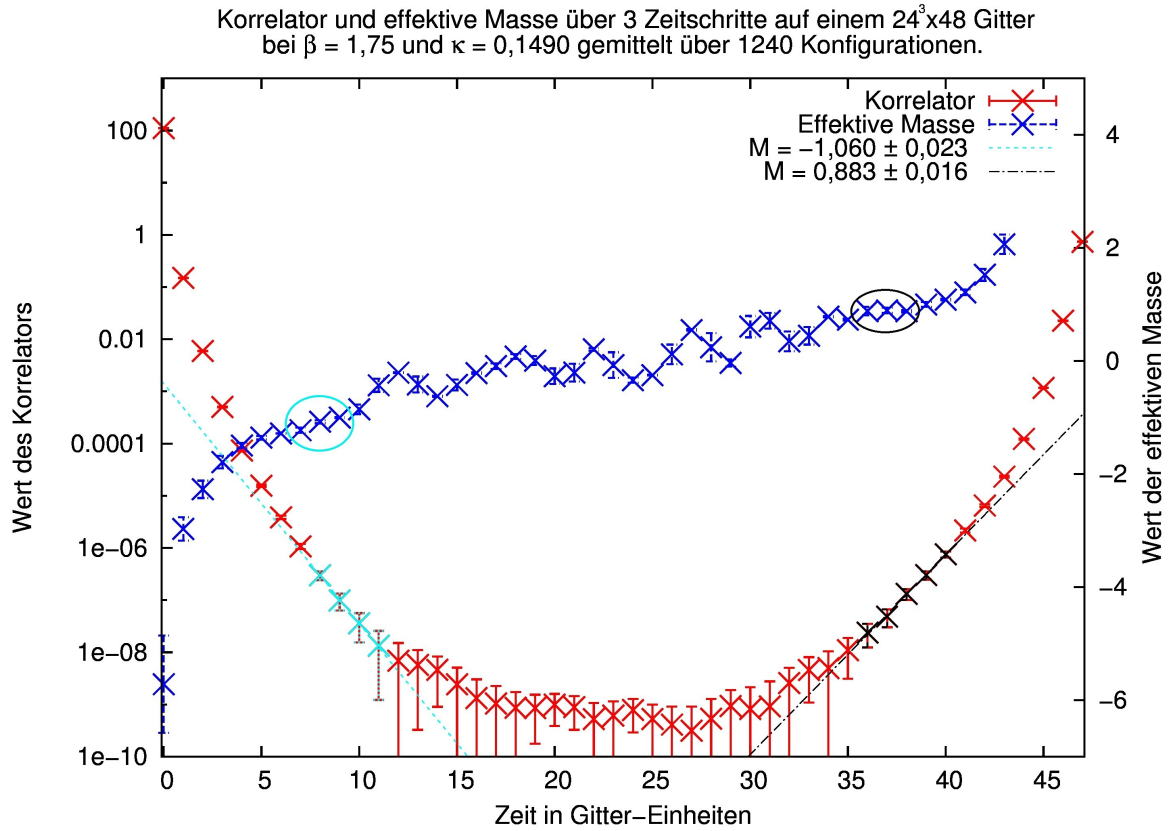
$$am_{[30,34]} = 1,074 \pm 0,017.$$

Alle weiteren Massen sind in Tabelle 4.4 angegeben.

Nummer	s	t	$am_{[t,t+s-1]}$	$\Delta am_{[t,t+s-1]}$	Parität
9	5	8	0,927	0,011	F^+
9	5	30	1,074	0,017	B^+
14	4	9	0,767	0,006	F^+
14	6	28	0,873	0,015	B^+
9	4	8	1,061	0,022	F^-
9	4	30	1,150	0,008	B^-
14	3	10	0,571	0,008	F^-
14	4	30	1,049	0,022	B^-

Tabelle 4.4.: Die gemessenen Massen auf den Gittern 9 und 14.

4.1.7. Die $24^3 \times 48$ Gitter: 15 und 17


 Abbildung 4.8.: $C^{\text{verb}^-}(t)$ mit gefitteten Massen auf Intervallen der Länge drei.

In Abbildung 4.8 sehen wir wie zuvor den negativen Korrelator, die effektive Masse, zwei Fitkurven und die dazugehörigen Plateaus von Gitter 15 der Größe $24^3 \times 48$. Wie auf den vorherigen Gittern wird hier das Intervall $[12, 34]$ für die Auswertung der Massen nicht beachtet. Auf diesem Gitter hat das F^- -Baryon die Masse

$$am_{[8,11]} = 1,060 \pm 0,023$$

und das B^+ -Baryon hat die Masse

$$am_{[36,40]} = 0,883 \pm 0,016.$$

Die weiteren Massen sind in Tabelle 4.5 zu finden.

Nummer	s	t	$am_{[t,t+s-1]}$	$\Delta am_{[t,t+s-1]}$	Parität
15	4	7	1,189	0,045	F^+
15	5	36	0,882	0,016	B^+
17	6	6	1,038	0,018	F^+
17	5	36	0,496	0,012	B^+
15	5	30	1,059	0,023	F^-
15	4	39	1,052	0,028	B^-
17	4	5	1,431	0,018	F^-
17	3	35	0,360	0,024	B^-

Tabelle 4.5.: Die gemessenen Massen auf den Gittern 15 und 17.

4.2. Der unverbundene Anteil

Der unverbundene Anteil wurde auf einem $4^3 \times 4$ Gitter mit $\kappa = 0,16$ und $\beta = 2,3$ untersucht, um zu testen, ob eine Berechnung überhaupt möglich ist. Es wurde die Stochastic Estimator Technique und die Eigenwert-Zerlegung getestet. Dazu wurden die relativen Abstände¹

$$d_{\text{SET}}(N) := \frac{\|\Delta_{\text{SET}}^{[N]} - \Delta\|}{\|\Delta\|}$$

$$d_{\text{EV}}(N) := \frac{\|\Delta_{\text{EV}}^{[N]} - \Delta\|}{\|\Delta\|}$$

des approximierten Propagators in Bezug auf die exakte Propagator berechnet und die Approximation des Baryonen-Korrelators mit diesem in Zusammenhang gesetzt.

Wir hatten in Abschnitt 2.4.2 gesehen, dass der unverbundene Anteil des Korrelator die Form

$$C_{xy}^{\text{unver}\alpha\alpha'}[U_\mu] = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(C\gamma_4)^{\beta\gamma}(C\gamma_4)^{\beta'\gamma'} \\ \left(2\Delta_{x\epsilon b}^{x\alpha a}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\epsilon'b'}C^{\epsilon\beta}C^{\epsilon'\beta'} + 4\Delta_{x\epsilon b}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\gamma c}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\eta'c'}C^{\epsilon\beta}C^{\eta'\gamma'} \right. \\ \left. + \Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{x\eta c}^{x\beta b}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\epsilon'b'}C^{\eta\gamma}C^{\epsilon'\beta'} + 2\Delta_{y\beta'b'}^{x\alpha a}\Delta_{x\eta c}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\eta'c'}C^{\eta\gamma}C^{\eta'\gamma'} \right)$$

hat. Zur Berechnung auf diesem Gitter wurde einer der drei Propagatoren durch die Approximation $\Delta_{\text{SET}}^{[N]}$ oder $\Delta_{\text{EV}}^{[N]}$ ersetzt und die beiden anderen Propagatoren wurden exakt berechnet,

¹Die Norm der Matrix $M \in M_N(\mathbb{C})$ mit Koeffizienten M^i_j ist durch

$$\|M\|^2 := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |M^i_j|^2$$

gegeben.

da dies auf diesem kleinen Gitter noch möglich ist. Die Approximationsmethoden sind in den Abschnitten 3.4.6 und 3.4.7 beschrieben. Aufgrund der in Abschnitt 3.4.2 gesehenen Translationsinvarianz des Korrelators benötigt man pro Konfiguration nur einen zufällig gewählten Punkt y_0 des Gitter und muss $C_{xy_0}^{\text{unver}\alpha\alpha'}[U_\mu]$ für dieses y_0 bestimmen um im Mittel den gesamten Korrelator zu erhalten. Deswegen muss nur eine der drei Matrizen durch eine Approximation ersetzt werden. Es werden die Propagatoren der Form Δ_x^z durch ihre Approximationen ersetzt, so dass der Korrelator

$$\begin{aligned} C_{[N] \ xy_0}^{\text{unver}\alpha\alpha'}[U_\mu] = & \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(C\gamma_4)^{\beta\gamma}(C\gamma_4)^{\beta'\gamma'} \\ & \left(2(\Delta^{[N]})_{x\bar{e}b}^{x\alpha a} \Delta_{y_0\alpha'a'}^{x\gamma c} \Delta_{y_0\gamma'c'}^{y_0\varepsilon'b'} C^{\varepsilon\beta} C^{\varepsilon'\beta'} + 4(\Delta^{[N]})_{x\bar{e}b}^{x\alpha a} \Delta_{y_0\beta'b'}^{x\gamma c} \Delta_{y_0\alpha'a'}^{y_0\eta'c'} C^{\varepsilon\beta} C^{\eta'\gamma'} \right. \\ & \left. + \Delta_{y_0\alpha'a'}^{x\alpha a} (\Delta^{[N]})_{x\eta c}^{x\beta b} \Delta_{y_0\gamma'c'}^{y_0\varepsilon'b'} C^{\eta\gamma} C^{\varepsilon'\beta'} + 2\Delta_{y_0\beta'b'}^{x\alpha a} (\Delta^{[N]})_{x\eta c}^{x\beta b} \Delta_{y_0\alpha'a'}^{y_0\eta'c'} C^{\eta\gamma} C^{\eta'\gamma'} \right) \end{aligned}$$

berechnet wird. Für eine große Zahl N an stochastischen Schätzern oder Eigenwerten wird

$$C_{[N] \ xy_0}^{\text{unver}\alpha\alpha'}[U_\mu] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} C_{xy_0}^{\text{unver}\alpha\alpha'}[U_\mu]$$

auf jeder Konfiguration erwartet. Insbesondere sollte

$$C_{[N] \ xy_0}^{\text{unver}\alpha\alpha'}[U_\mu] \xrightarrow{d(N) \rightarrow 0} C_{xy_0}^{\text{unver}\alpha\alpha'}[U_\mu]$$

für jede Konfiguration unabhängig der Approximationsmethode gelten. Gilt dies, sollte es auch für die betrachteten Projektionen auf negative und positive Parität gelten, die wir wie vorher durch

$$C^{\text{unverb}\pm}(t) = \frac{1}{2} \text{Tr}_S (P^\pm C^{\text{unverb}}(t))$$

erhalten.

4.2.1. Der unverbundene Anteil mit der stochastic estimator Technique

Auf dem oben genannten $4^3 \times 4$ Gitter mit $\kappa = 0,16$ und $\beta = 2,3$ wurde der unverbundenen Anteil des Korrelators für $N_{\text{max}} = 5000$ stochastische Schätzer berechnet und über 5 Konfigurationen gemittelt. Dies ist eine unnötig große Anzahl an Schätzern, da es auf diesem Gitter nur insgesamt nur $12 \cdot 4^4 = 3072$ Indizes (x, α, a) gibt und diese besser über das Conjugate Gradient Verfahren bestimmen könnten. Es werden so viele Schätzer verwendet, da diese Approximationsmethode nur für unendlich viele Schätzer einen exakten Wert liefert und die Approximation des Baryonen-Korrelators mit steigender Zahl an Schätzern stetig besser werden sollte.

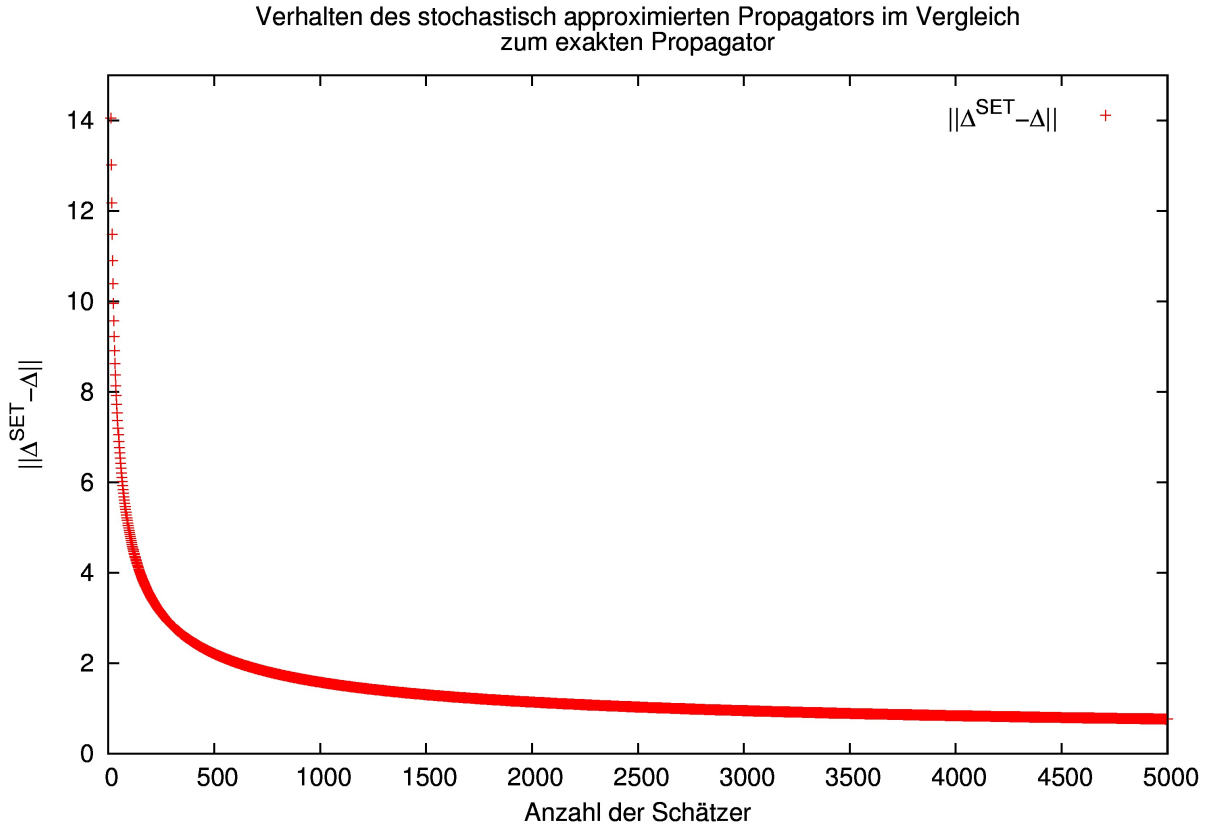


Abbildung 4.9.: Güte der Approximation in Abhängigkeit der Anzahl der Schätzer.

In Abbildung 4.9 ist die Güte der Propagator-Approximation zur Anzahl der Schätzer aufgetragen. Es zeigt sich, dass die Approximation mit steigender Anzahl an Schätzern stets besser wird und dass eine Güte von $d_{\text{SET}}(N_{\text{max}}) \approx \frac{1}{2}$ mit dieser Methode erreicht wird. Wird dieses Verhalten in Abbildung 4.10 doppelt logarithmisch aufgetragen erkennt man das vorausgesagte $\frac{1}{\sqrt{N}}$ Verhalten der Approximation. Es wird jedoch ab einer Anzahl von 1000 Schätzern von diesem Verhalten abgewichen und die Konvergenz verschlechtert sich.

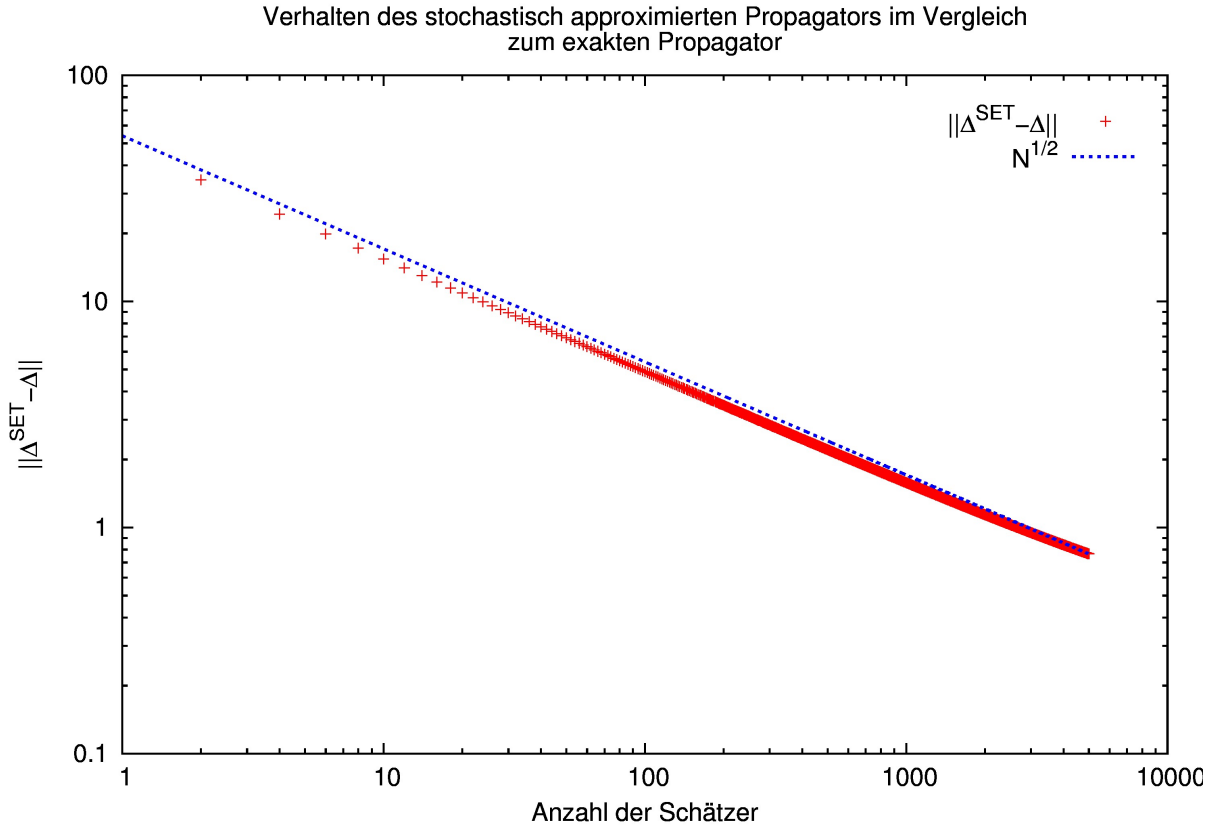


Abbildung 4.10.: Der Abstand $d_{\text{SET}}(N)$ doppeltlogarithmisch aufgetragen.

Es wurden noch das Verhalten zweier Kontrollgrößen in Abhängigkeit der Güte $d_{\text{SET}}(N)$ betrachtet, um die Gültigkeit der Approximation weiter zu belegen. Dazu wurden das skalare- und das pseudoskalare Kondensat $\langle \text{Tr}_{\text{SdE}}(\lambda \bar{\lambda}) \rangle$ und $\langle \text{Tr}_{\text{SdE}}(\lambda \gamma^5 \bar{\lambda}) \rangle^2$ verwendet.

²Für diese beiden Größen gilt

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}_{\text{SdE}}(\lambda \bar{\lambda}) \rangle_{\text{F}} &= \text{Tr}_{\text{SdE}}(\Delta) \\ \langle \text{Tr}_{\text{SdE}}(\lambda \gamma^5 \bar{\lambda}) \rangle_{\text{F}} &= \text{Tr}_{\text{SdE}}(\gamma^5 \Delta). \end{aligned}$$

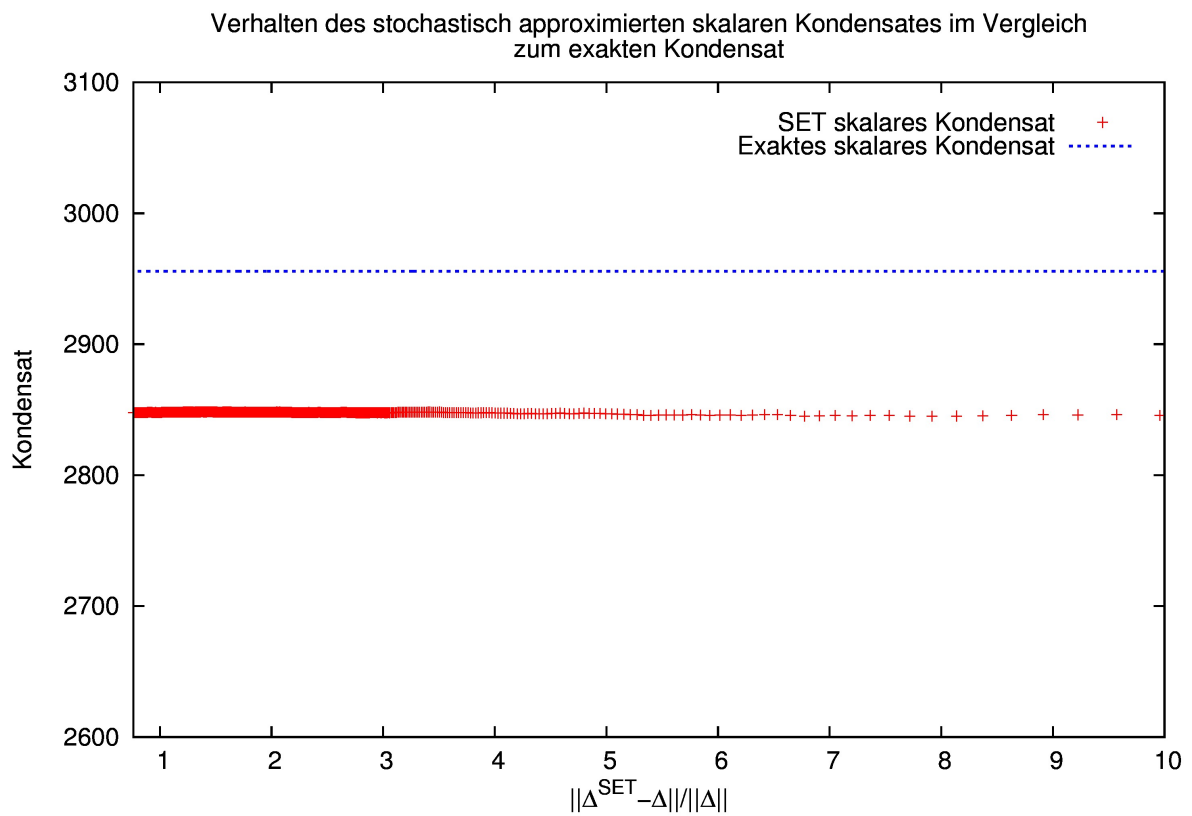


Abbildung 4.11.: Verhalten des skalaren Kondensates.

In Abbildung 4.11 ist das Verhalten des approximierten skalaren Kondensates, sowie das exakte skalare Kondensat zu sehen. Man sieht, dass das Kondensat schon mit einer sehr schlechten Güte der Approximation bis auf einen Fehler von 3% approximiert wird, sich jedoch die Approximation nicht mehr verbessert aber auch nicht verschlechtert.

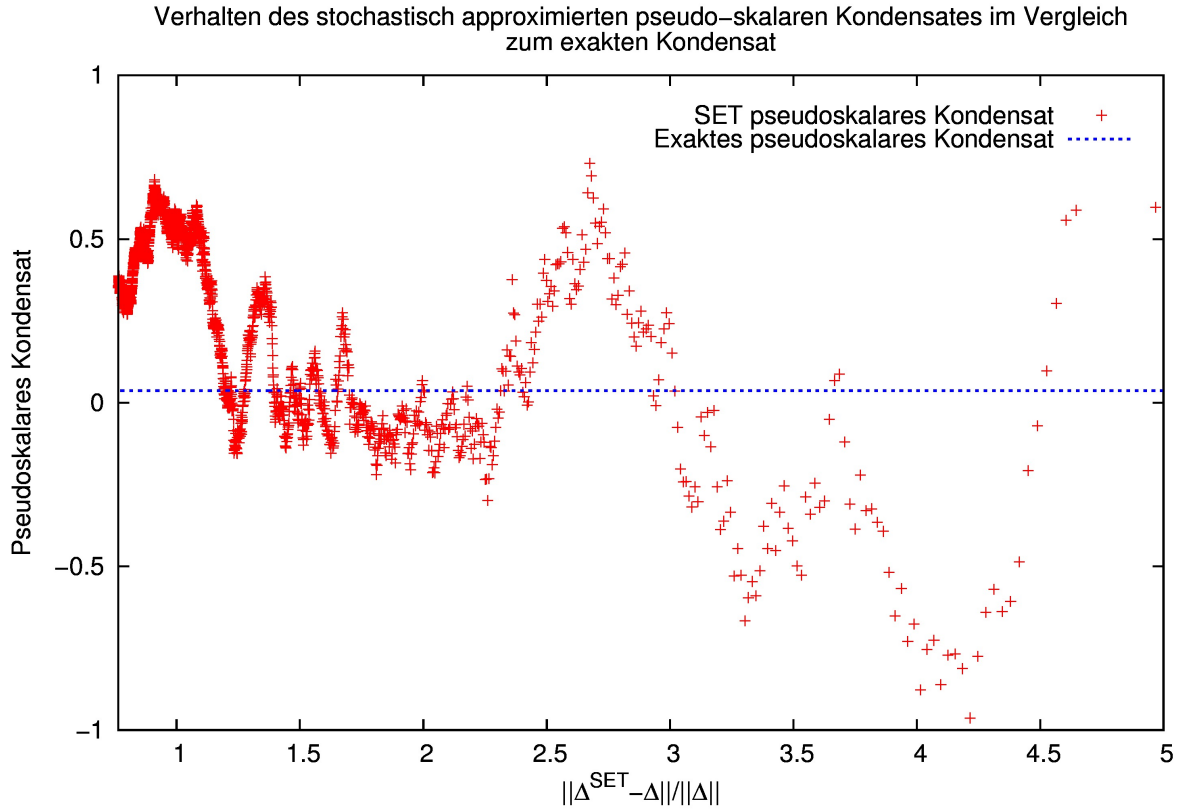


Abbildung 4.12.: Verhalten des pseudoskalaren Kondensates.

Das approximierte und exakte pseudoskalare Kondensat ist in Abbildung 4.12 dargestellt. Es zeigt sich, dass eine Verbesserung des Propagators für eine Güte größer als 1 keine Wirkung hat, da das approximierte Kondensat zufällig um den exakten Wert schwankt und dabei oft das Vorzeichen wechselt. Ist die Güte Approximation jedoch besser als 1, sehen wir eine geordnetere Bewegung zum exakten Wert hin. Die Güte wird erst ab $N \approx 3000$ kleiner als 1. Es zeigt sich also, dass die Approximationsmethode für die Kontroll-Größen funktioniert.

In den Abbildungen 4.13 bis 4.16 ist der approximierte und exakte unverbundene Anteil des Baryonen-Korrelators für verschiedene Zeiten gegen die Güte der Approximation des Propagators aufgetragen. In keiner der Abbildungen ist eine Konvergenz des Wertes zu erkennen. Die Approximation schwankt zufällig ohne Tendenz zum exakten Wert.

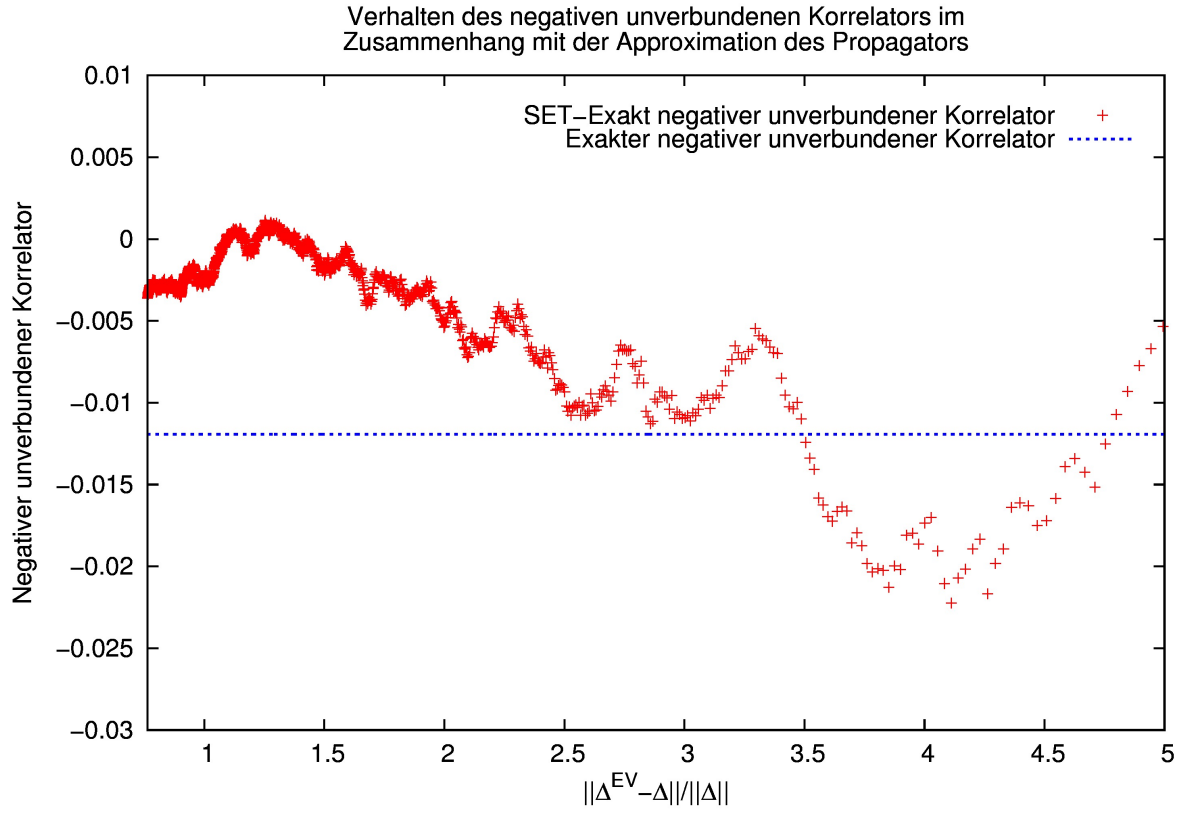


Abbildung 4.13.: Verhalten des unverbundenen Anteils des Korrelators mit negativer Parität für $n = 2$.

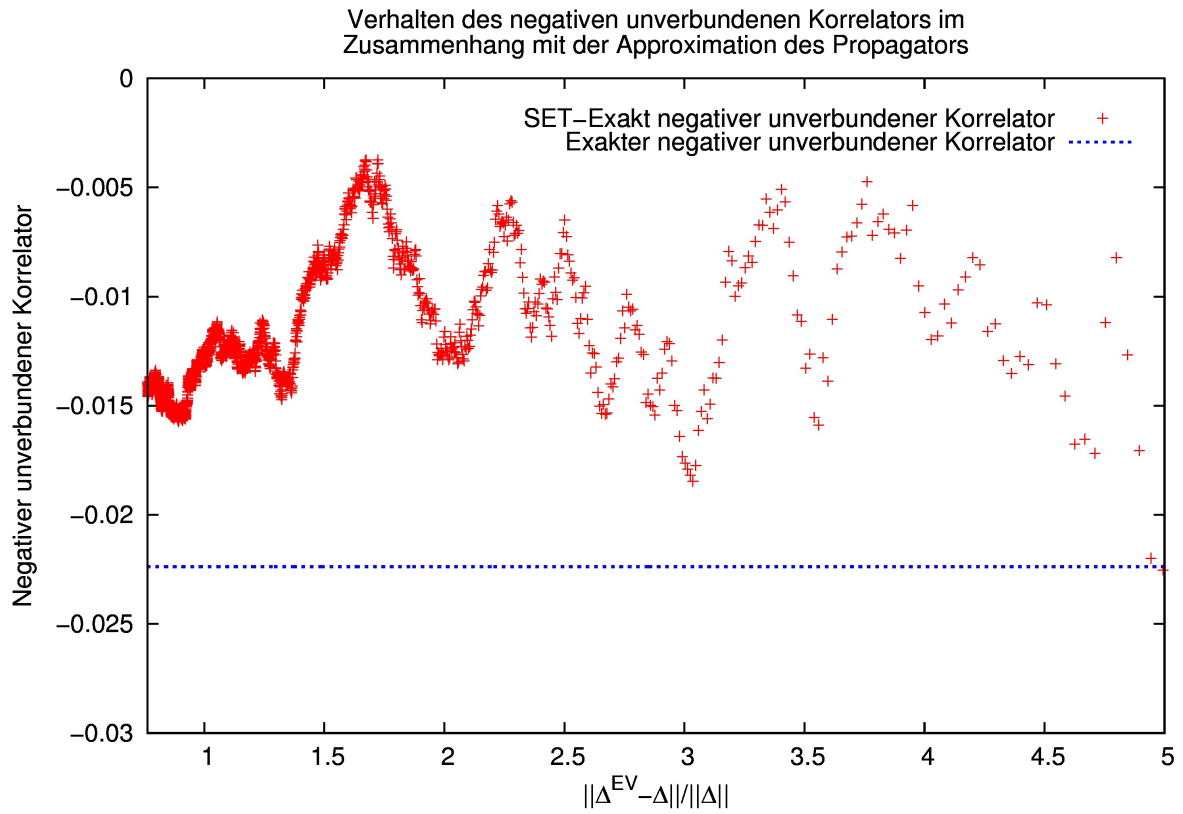


Abbildung 4.14.: Verhalten des unverbundenen Anteils des Korrelators mit negativer Parität für $n = 3$.

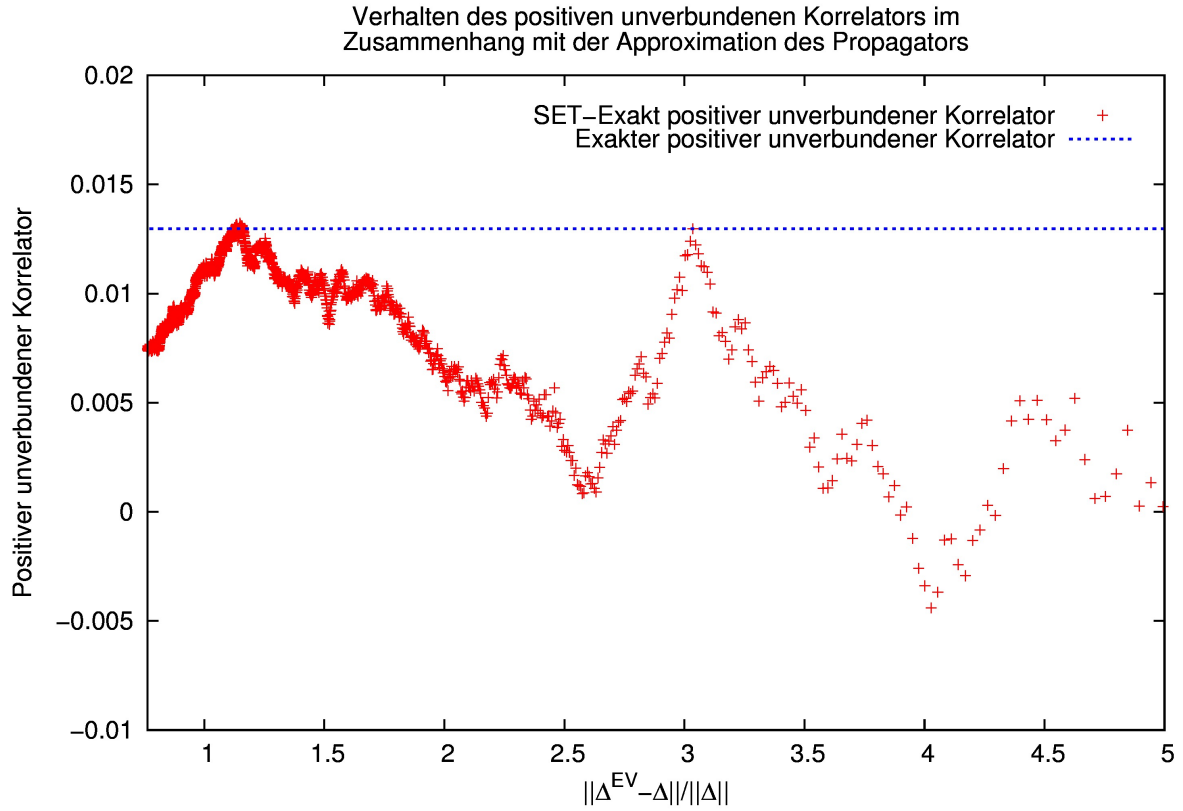


Abbildung 4.15.: Verhalten des unverbundenen Anteils des Korrelators mit positiver Parität für $n = 2$.

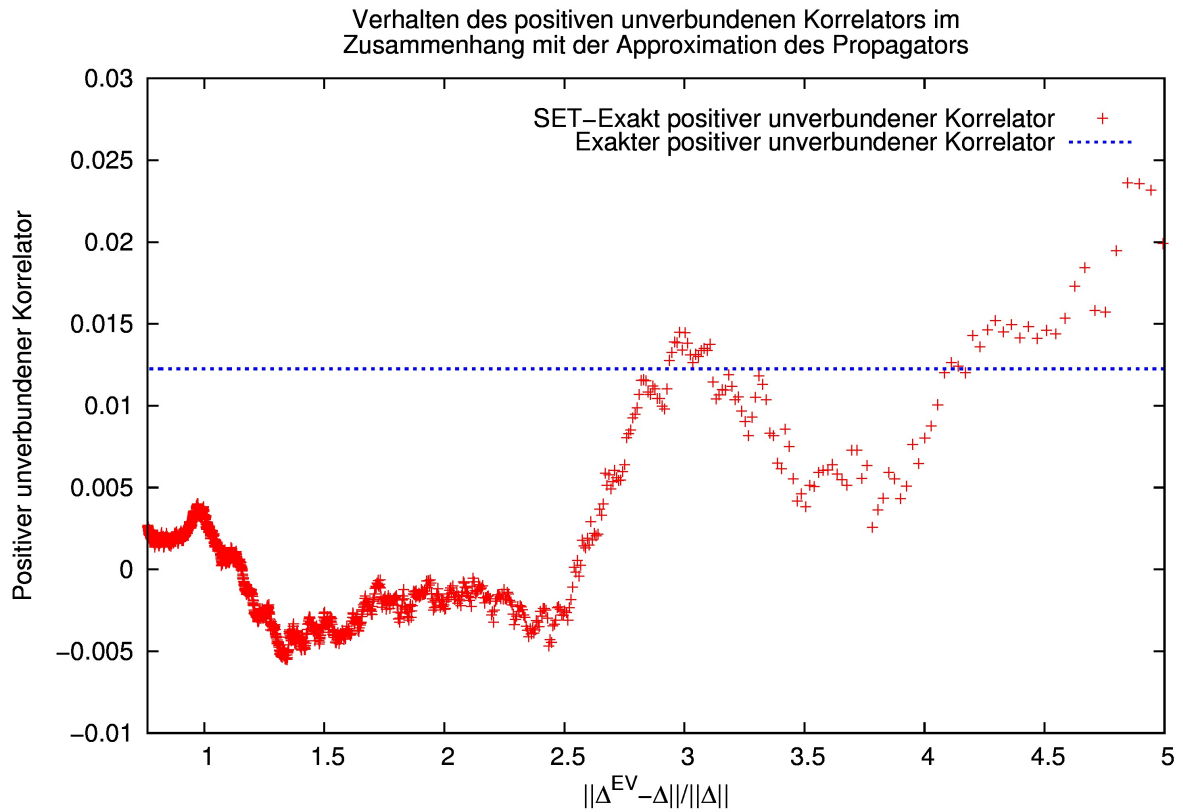
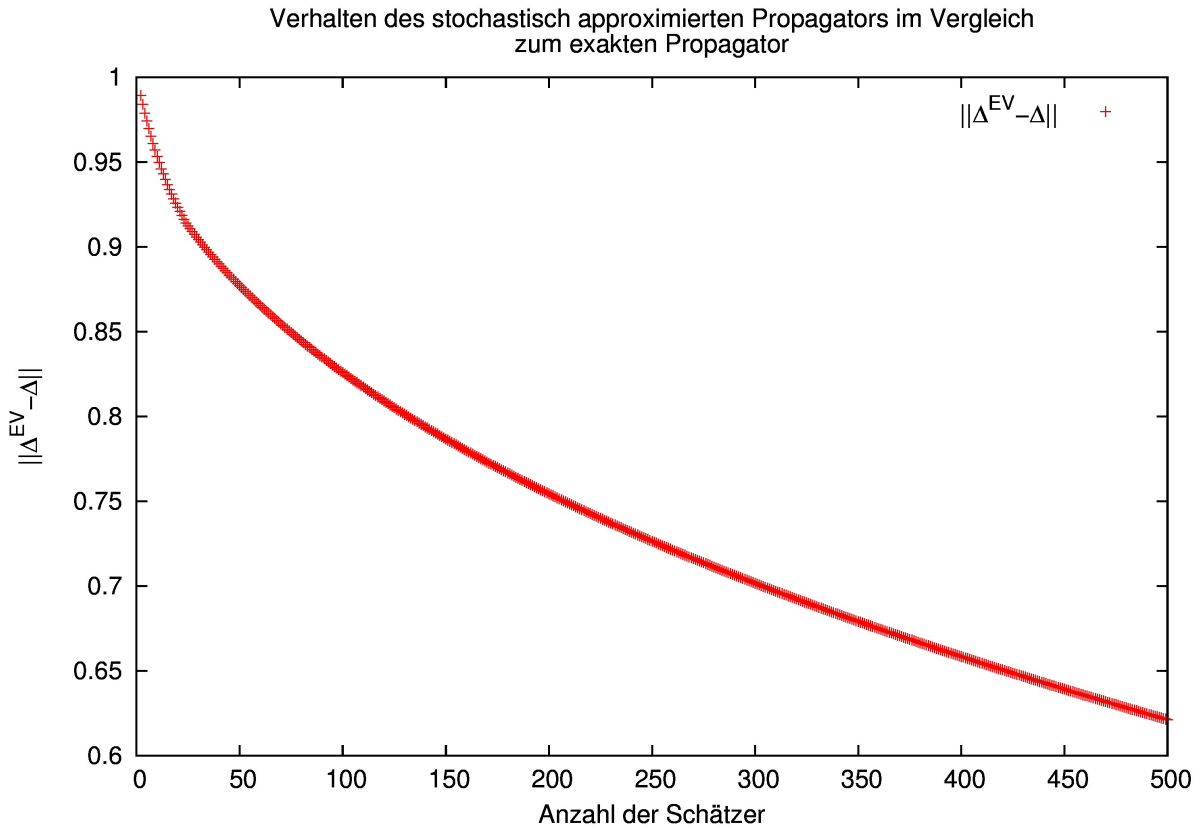


Abbildung 4.16.: Verhalten des unverbundenen Anteils des Korrelators mit positiver Parität für $n = 3$.

4.2.2. Der unverbundene Anteil mit der Eigenwertzerlegung

Abbildung 4.17.: Der Abstand $d_{\text{EV}}(N)$.

Für diese Methode wurden $N_{\text{max}} = 500$ Betragsmäßig kleinsten Eigenwerte und Eigenvektoren auf 9 Konfigurationen des oben genannten $4^3 \times 4$ Gitters mit $\kappa = 0,16$ und $\beta = 2,3$ bestimmt und dieselben Größen wie im vorherigen Abschnitt betrachtet. Für die Approximation des Propagators zeigt sich, dass die Güte der Approximation des Propagators mit dem Wert 1 beginnt und mit jedem zusätzlichen Eigenwert, wie erwartet, kleiner wird. Dies ist in Abbildung 4.17 zu sehen, wo die Güte der Approximation gegen die Zahl der Eigenwerte aufgetragen ist. Das Konvergenz-Verhalten ist jedoch wesentlich schlechter als $\frac{1}{\sqrt{N}}$, wie in Abbildung 4.18 zu sehen ist. Dort ist die Güte der Approximation doppelt logarithmisch gegen die Zahl der Eigenwerte aufgetragen. Die beste Approximation hat die Güte $d_{\text{EV}}(N_{\text{max}}) \approx \frac{1}{2}$.

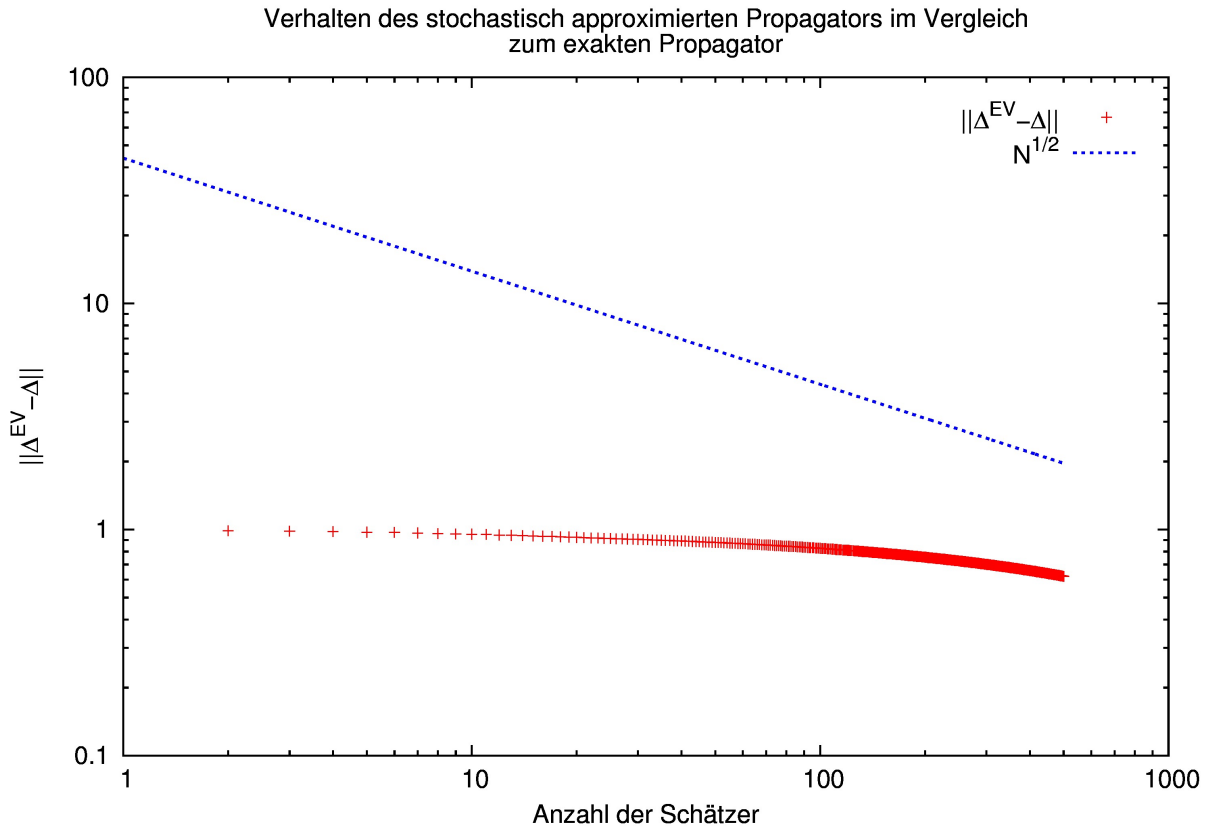


Abbildung 4.18.: Der Abstand $d_{EV}(N)$ doppeltlogarithmisch aufgetragen.

Für das skalare Kondensat ist in Abbildung 4.19 eine klare Konvergenz gegen den exakten Wert zu erkennen, dieser wird jedoch schlecht approximiert.

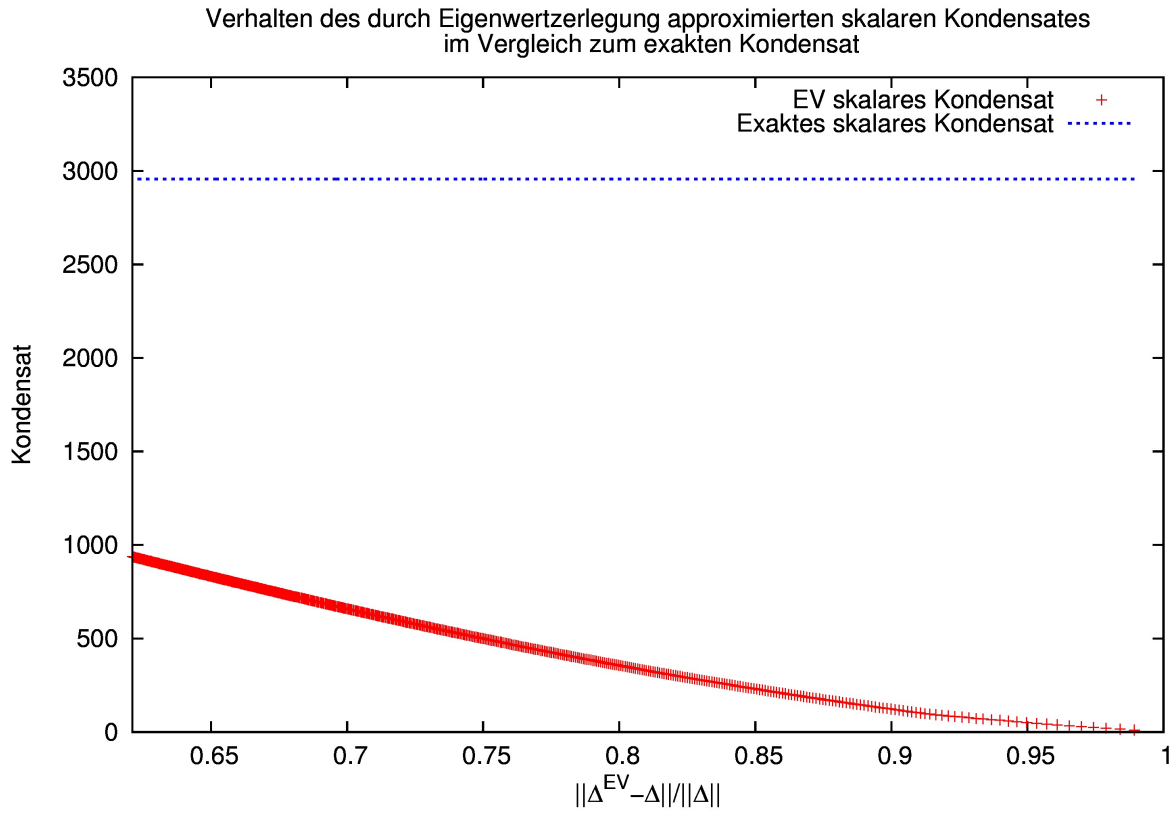


Abbildung 4.19.: Verhalten des skalaren Kondensates.

Das pseudoskalare Kondensat ist nichts anderes als die Summe der inversen Eigenwerte der Matrix $\gamma^5 Q$, welches die Matrix ist, deren Eigenwerte bestimmt werden. Diese werden wechselnd positiv und negativ gefunden, da wir nur die Betragsmäßig kleinsten Eigenwerte bestimmen, weswegen das pseudoskalare Kondensat sehr stark schwankt, wie in Abbildung 4.20 zu sehen ist. Es muss jedoch nur die Teilmenge an Werten beachtet werden, bei denen diese Paare offensichtlich gefunden wurden. Liegt der Fokus nahe genug um den exakten Wert, sieht man in Abbildung 4.21, dass die Approximation gut funktioniert, da sie immer weniger um den exakten Wert schwankt. Es zeigt sich also, dass die Approximationsmethode für die Kontrollgrößen funktioniert.

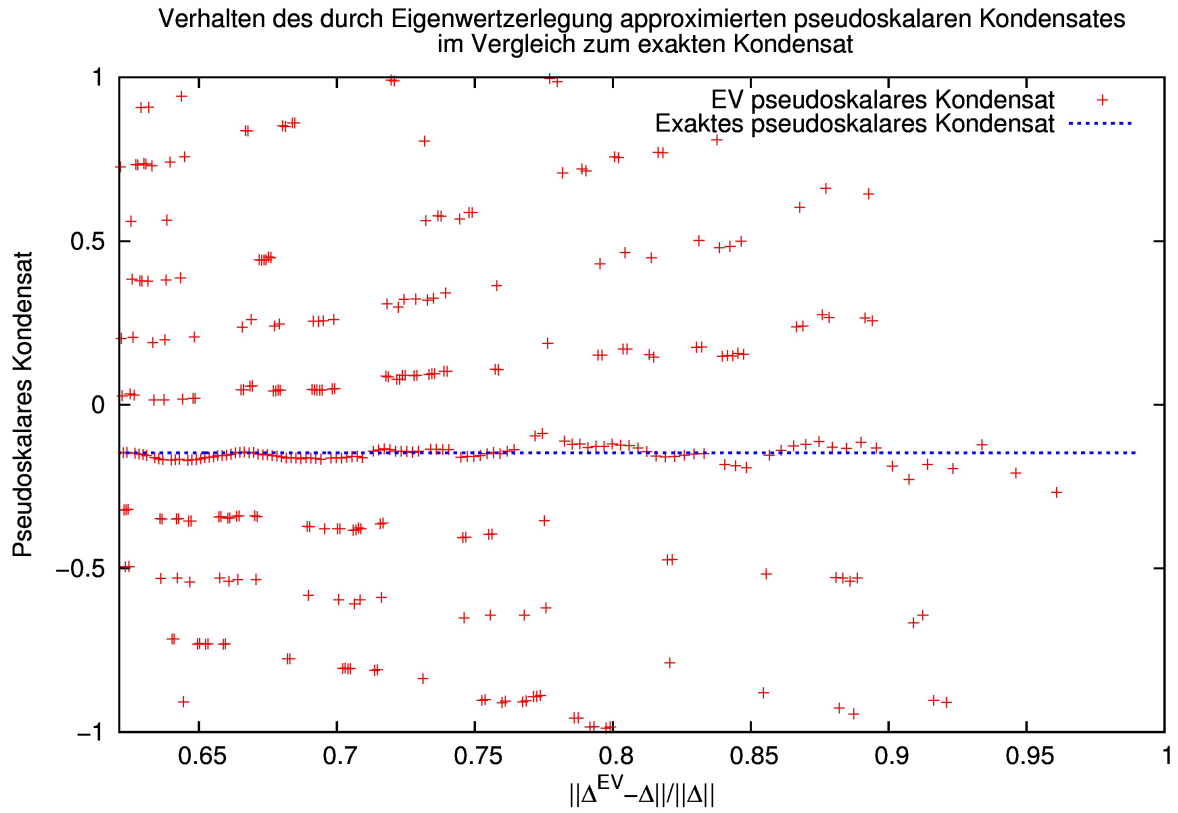


Abbildung 4.20.: Verhalten des pseudoskalaren Kondensates.

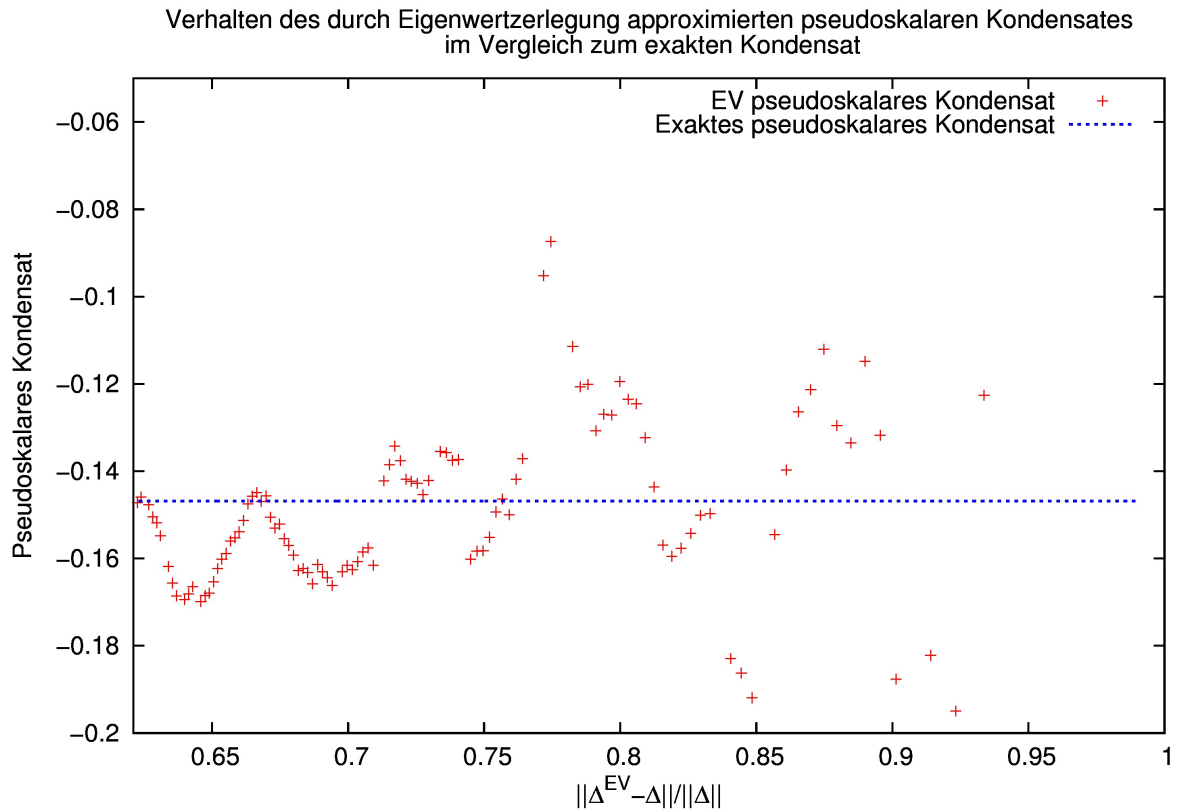


Abbildung 4.21.: Verhalten des pseudoskalaren Kondensates.

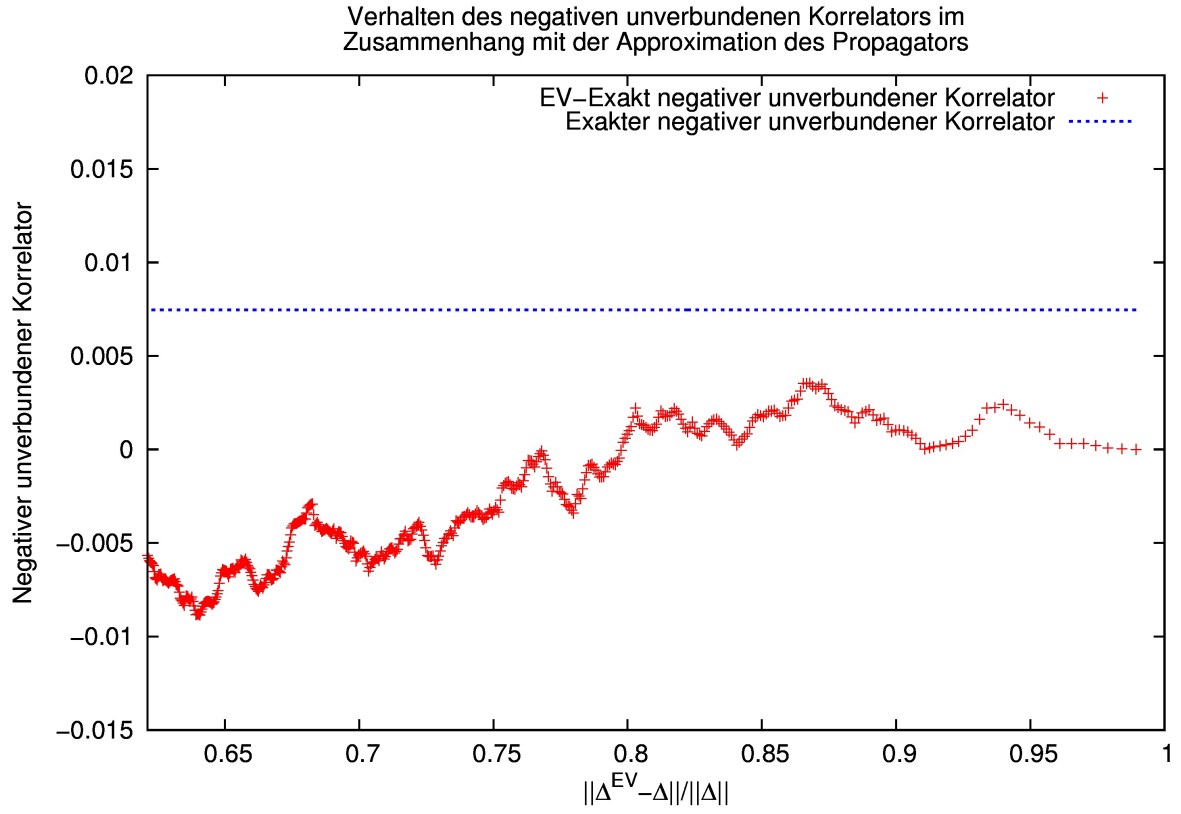


Abbildung 4.22.: Verhalten des unverbundenen Anteils des Korrelators mit negativer Parität für $n = 2$.

Für den unverbundenen Anteil zeigt sich aber auch hier, wie in den Abbildungen 4.22 bis 4.25 zu sehen ist, keine erkennbare Konvergenz der Approximation gegen den exakten Wert.

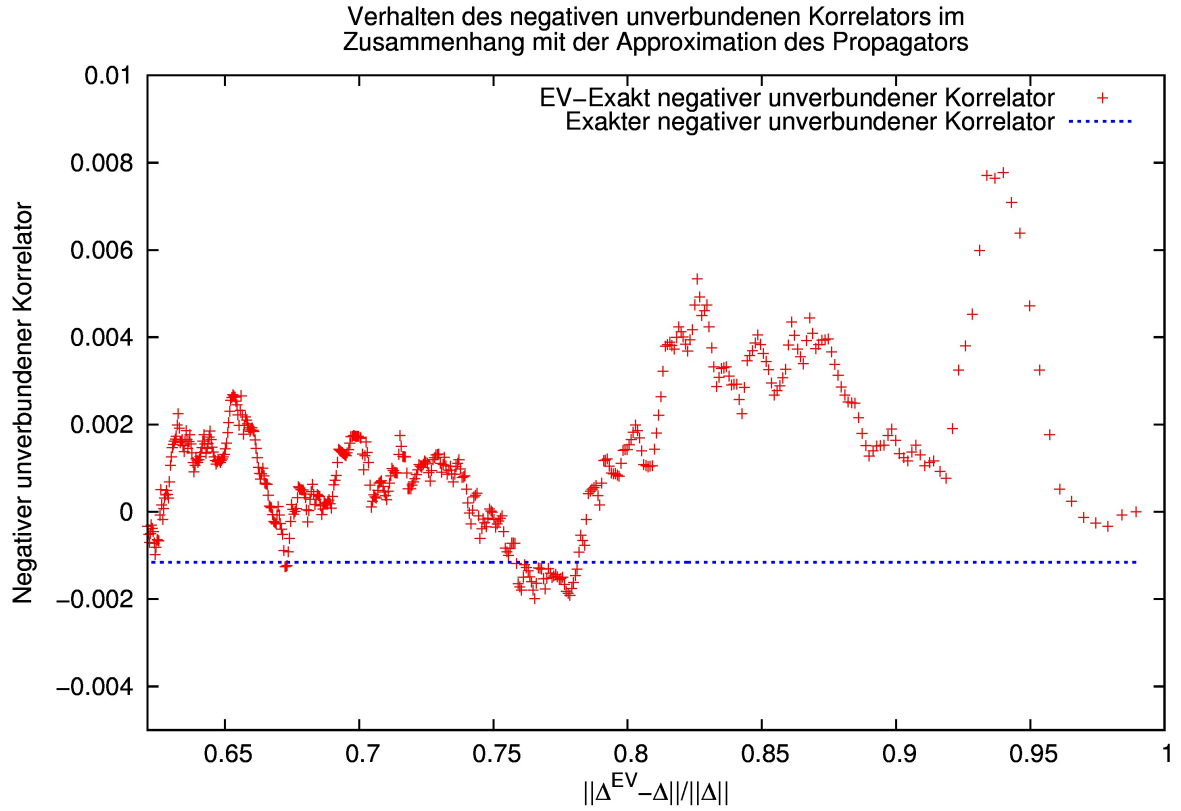


Abbildung 4.23.: Verhalten des unverbundenen Anteils des Korrelators mit negativer Parität für $n = 3$.

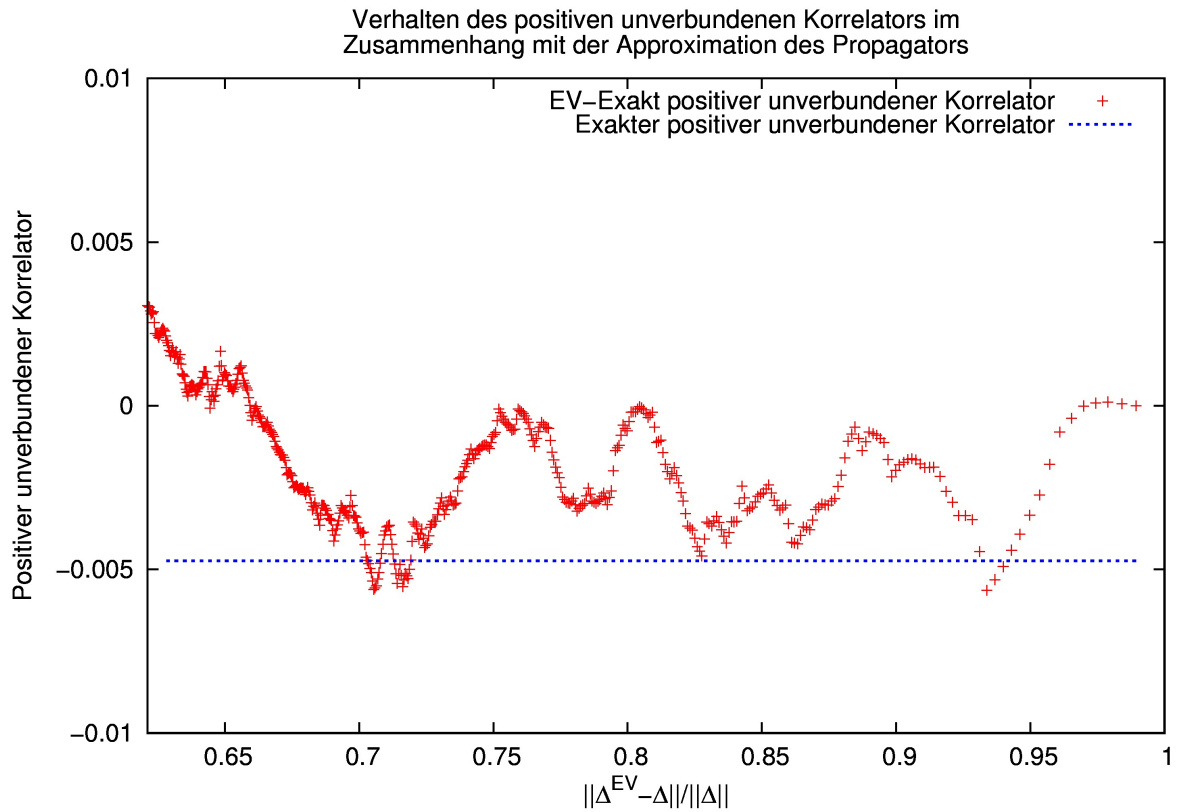


Abbildung 4.24.: Verhalten des unverbundenen Anteils des Korrelators mit positiver Parität für $n = 2$.

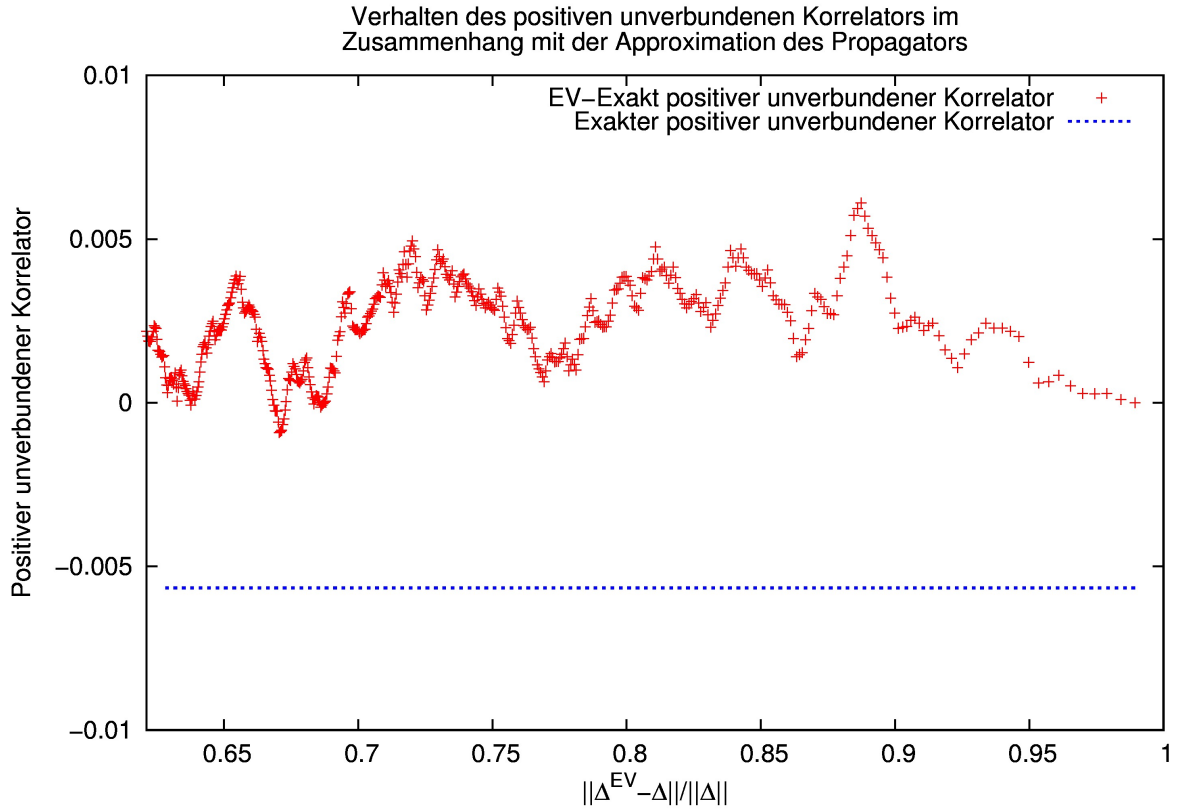


Abbildung 4.25.: Verhalten des unverbundenen Anteils des Korrelators mit positiver Parität für $n = 3$.

4.2.3. Das Verhältnis von unverbundenen zum verbundenen Anteil

Es wurde über 9 Konfigurationen des oben genannten $4^3 \times 4$ Gitters mit $\kappa = 0,16$ und $\beta = 2,3$ gemittelt und das Verhältnis

$$\frac{|C^{\text{unverb}\pm}(t)|}{|C^{\text{verb}\pm}(t)|}$$

betrachtet. Es zeigte sich, dass sich diese Größe für alle Zeiten t in einem Bereich von 10% bewegt. Der unverbundene Anteil hat für diese Konfigurationen also einen sehr kleinen Anteil am Gesamtwert des Korrelators und 90% des Korrelators sind durch den verbundenen Anteil gegeben.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Dieses Kapitel bildet den Abschluss dieser Arbeit und fasst die gesamte Arbeit noch einmal kurz zusammen.

5.1. Zusammenfassung

Im ersten Kapitel wurde der Gitterformalismus eingeführt. Die behandelte Theorie wurde grob hergeleitet und wesentliche Gleichungen gezeigt, was der einfachen Vergleichbarkeit dienen soll, da durch Konventionen einige relative und absolute Vorzeichen ihren Weg in die Wirkung oder daraus abgeleitete Größen finden. Es wurde jedoch keine Wahl von periodischen oder antiperiodischen Randbedingungen der Fermionen in Zeitrichtung getroffen, so dass im Nachhinein die Randbedingungen gewählt werden können. Diese haben unter anderem Auswirkung auf die Form des Propagators der Fermionen und damit auch die Form des Baryonen-Korrelators. Der wichtigste Abschnitt in diesem Kapitel ist der Abschnitt, der sich mit den Polen des Propagators und seinen Bedeutungen beschäftigt. Dort hat die Verwendung des Residuensatzes gezeigt, dass sich Pole des Propagators in der Impulsbasis als propagierende Teilchen in positiver und negativer Zeitrichtung manifestieren. Darauffolgend wurden der naive Dirac-Operator und der Dirac-Operator mit Wilson-Term untersucht und seine Pole, also Teilchen, analysiert. Am Ende wurde dann die Wirkung der Theorie präsentiert, die auf dem Gitter simuliert wurde.

Im zweiten Kapitel haben wir uns den Propagator beziehungsweise den Korrelator eines Baryons genauer angeschaut und berechnet, wie dieser aussehen sollte. Es stellt sich heraus, dass der Korrelator zwei gegenläufige Anteile erhält, da der Baryonen-Operator an Teilchen mit unterschiedlicher Parität koppeln kann. Dies führt dazu, dass der Korrelator eine Asymmetrie hat, die im Fall antisymmetrischer Randbedingungen für die Fermionen einen 'schiefen cosh-Verlauf' erzeugt, da die Paritätspartner unweigerlich in negativer Zeitrichtung propagieren. Eine Verwendung periodischer und antiperiodischer Randbedingungen kann jedoch eine Entkopplung der Paritäten bewirken. Am Ende des Kapitels wurde der baryonische Korrelator noch explizit angegeben und es zeigte sich, dass dieser Terme enthält, die in Modellen ohne Majorana-Fermionen nicht vorkommen.

Im dritten Kapitel haben wir uns mit der stochastischen Interpretation des Pfadintegrals und die dadurch ermöglichte Berechnung befasst. Es zeigt sich, dass die fermionischen Freiheitsgrade des Pfadintegrals direkt durch eine Abwandlung des Wick'schen Theorems ausintegriert werden können. Das Integral der bosonischen Felder lässt sich als stochastisches Integral auffassen, dessen Verteilung der Felder es zu simulieren gilt. Ist eine genügend große Menge an Feldkonfigurationen gegeben, lässt sich das Ergebnis des Pfadintegrals als Mittelwert angeben, dessen Fehler sich

abschätzen lässt.

Im vierten Kapitel wurden die Ergebnisse der Simulationen vorgestellt. Es zeigte sich in Abschnitt 4.1, dass der verbundene Anteil des Korrelators alleine das erwartete asymmetrische Verhalten eines Korrelators zeigt und sich Massen aus diesem bestimmen lassen. Dies lässt die Vermutung zu, dass der unverbundene Anteil keinen entscheidenden Beitrag zum Korrelator liefert. Wie in Abschnitt 4.2.3 gezeigt, war die Auswirkung des unverbundenen Anteils, auf einem kleinen $4^3 \times 4$ Gitter, im Bereich von 10%. Wird dies als Anhaltspunkt für die größeren Gitter genommen, auf denen nur der verbundene Anteil betrachtet wurde, so liegt die Vermutung nahe, dass dort der unverbundene Anteil auch nur 10% des gesamten Korrelators ausmacht. Um dies miteinzubeziehen, müsste der Fehler jedes Korrelatorpunktes um 10% erhöht werden, um die Fehler der bestimmten Massen anzupassen. Dies ändert die Ergebnisse jedoch nur geringfügig im Bereich von wenigen Prozent. Ist der unverbundene Anteil auch im Falle großer Gitter und anderer Parameter in dieser Weise vernachlässigbar, sind die Ergebnisse aus Abschnitt 4.1 als vollständige Massenbestimmung des leichtesten beobachtbaren Teilchens anzusehen.

Folgt man dieser Annahme, zeigt sich, dass die betrachteten Baryonen mit negativer Parität schwerer sind, als die mit positiver Parität. Außerdem zeigt sich, dass die Massen für $\kappa \rightarrow \kappa_{cr} = \frac{1}{8}$ abnehmen. Die Bindungszustände werden also im Fall kleiner werdender Fermionenmasse immer kleiner.

Auf den Gittern 13 und 15 gibt es die Möglichkeit, die hier bestimmten Massen mit denen von mesonischen Teilchen aus [5] zu vergleichen. Auf Gitter 13 ist zu erkennen, dass die baryonischen Teilchen mit Massen von 0,8 und 1,0 schwerer als die binären Teilchen mit Massen bis zu 0,77 sind. Auf Gitter 15 sind die baryonischen Teilchen mit den Massen von mindestens 0,88 klar schwerer im Vergleich zu maximal 0,62.

Die Ergebnisse der Approximationen des unverbundenen Anteils in den Abschnitten 4.2.2 und 4.2.1 zeigen, dass es nicht möglich zu sein scheint, ihn mit diesen Methoden zu bestimmen, weshalb sich die Annahme der Vernachlässigbarkeit des unverbundenen Anteils nicht verifizieren lässt.

Weiterhin lassen die Ergebnisse darauf schließen, dass sich nicht triviale und nicht diagonale Strukturen des Propagatorproduktes schlecht approximieren lassen. Bei der stochastic estimator technique wurde das pseudoskalare Kondensat $\text{Tr}(\gamma^5 \Delta)$ auch nicht gut approximiert und es hat keine Diagonalgestalt. Der Baryonen-Operator hat auch keine Diagonalgestalt und ist sogar nichtlinear. Er scheint sehr stark vom Zusammenspiel der einzelnen Elemente der Matrix abzuhängen, da er auch für eine große Zahl an Schätzern kein Konvergenzverhalten zeigt, obwohl der Propagator relativ gut approximiert wird. Für die Eigenwert-Zerlegung kann das Versagen dadurch erklärt werden, dass nicht Q sondern $\gamma^5 Q$ entwickelt wird und die Eigenwerte sowie Eigenräume von Q nicht gut approximiert werden, was wiederum das Zusammenspiel der einzelnen Elemente stört.

5.2. Ausblick

Es muss getestet werden, ob andere Methoden die Berechnung des unverbundenen Anteils des Korrelators zulassen. Eine Möglichkeit wäre die bereits beschriebene Kombination aus der stochastic estimator technique und der Eigenwertzerlegung. Alternativ könnte die LapH-Methode [21]

verwendet werden. Ist es mit diesen Methoden möglich, den unverbunden Anteil auf größeren Gittern zu bestimmen, kann das Größenverhältnis beider Anteile bestimmt werden, um die oben getroffenen Aussagen zu verifizieren oder zu widerlegen, dass der unverbundene Anteil vernachlässigbar ist. Ist er vernachlässigbar, lassen sich die Massen sehr schnell und mit wenig Rechenaufwand durch den verbundenen Anteil bestimmen, wenn die Fehler entsprechend angepasst werden.

Eine weitere Frage, die geklärt werden muss, ist die, ob die gemessenen Massen den leichtesten Baryonen der Theorie entsprechen oder es noch leichtere Baryonen gibt. Dazu könnten optimierte Operatoren oder größere Gitter verwendet werden. Dass diese Frage nicht direkt beantwortet werden kann, zeigt sich dadurch, dass in dieser Arbeit schon verschiedene Massen gefunden wurden.

Kapitel A

Anhang

A.1. Fermionen und die Dirac-Matrizen

Wir verwenden die Minkowski-Metrik in der Form

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Die Gamma-Matrizen erfüllen die Relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{A.1.1}$$

welche wir dann durch

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

darstellen. Daraus setzen sich dann die weiteren wichtigen Matrizen zur Helizität, Ladung und Parität zusammen. Diese sind in dieser Darstellung gegeben durch

$$\begin{aligned} \beta = \gamma_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & C = \gamma^2 \beta &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^5 &= -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sie haben weiter die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \beta^{-1} &= \beta = \beta^\dagger = \beta^{T_s} & \beta \gamma^\mu \beta^{-1} &= \gamma^{\mu\dagger} \\ \beta \gamma^0 \beta^{-1} &= \gamma^0 & \beta \gamma^i \beta^{-1} &= -\gamma^i \\ C^{-1} &= C = C^\dagger = -C^{T_s} & C \gamma^\mu C^{-1} &= -\gamma^{\mu T_s} \\ \gamma^{5-1} &= \gamma^5 = \gamma^{5\dagger} = \gamma^{5 T_s} & \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5 &= -\gamma^\mu \end{aligned}$$

Die vier Dirac-Matrizen erzeugen aufgrund von (A.1.1) eine Matrixalgebra, eine Representation der Poincare-Lie-Algebra durch

$$J^{\mu\nu} := -\frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

ergibt. Diese hat eine kanonische Parität gegeben durch β , welche die für eine Parität nötigen Eigenschaften erfüllt. Unter dieser Repräsentation der Poincaré-Algebra transformieren die Gamma-Matrizen wie Vektoren. Mit diesen Operatoren lassen sich nun fermionische Spin- $\frac{1}{2}$ Felder definieren. Diese sind durch

$$\psi^\alpha(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_s \int d^3p \left(u^\alpha(\vec{p}, s) e^{-ip^\mu x_\mu} a(\vec{p}, s) + v^\alpha(\vec{p}, s) e^{ip^\mu x_\mu} a^\dagger(\vec{p}, s) \right)$$

gegeben, wobei $a(\vec{p}, s)$ der Vernichter eines Fermions und $a^\dagger(\vec{p}, s)$ der Erzeuger des entsprechenden Antifermions ist. Ausserdem ist zu beachten, dass

$$p^0 = E(\vec{p})$$

gilt, also die Energie-Impuls-Relation des Fermions erfüllt ist. Weiter sind diese Erzeuger und Vernichter durch

$$\{a(\vec{p}, s), a^\dagger(\vec{q}, s')\} = \delta_{s,s'} \delta(\vec{p} - \vec{q})$$

normiert. Die Feldfunktionen im Impulsraum Verhalten sich unter Parität wie

$$\begin{aligned} \beta u(\vec{p}, s) &= u(-\vec{p}, s) \\ \beta v(\vec{p}, s) &= -v(-\vec{p}, s) \end{aligned}$$

und haben die Spinsumme gegeben durch

$$\begin{aligned} \sum_s u(\vec{p}, s) u^\dagger(\vec{p}, s) &= \frac{1}{2p^0} (-\gamma^\mu p_\mu + m) \beta^{-1} \\ \sum_s v(\vec{p}, s) v^\dagger(\vec{p}, s) &= \frac{1}{2p^0} (-\gamma^\mu p_\mu - m) \beta^{-1}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde nun die Parität des Fermions als +1 gewählt. Wir sehen nun weiter, dass für einen Zustand $|\vec{p}, s\rangle$, der eines dieser Fermionen mit Masse m darstellt

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \psi(x) | \vec{p}, s \rangle &= \langle 0 | \psi(x) a^\dagger(\vec{p}, s) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \left\{ \psi(x), a^\dagger(\vec{p}, s) \right\} | 0 \rangle + \langle 0 | a^\dagger(\vec{p}, s) \psi(x) | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{s'} \int d^3q \, u(\vec{q}, s') e^{-iq^\mu x_\mu} \langle 0 | \left\{ a(\vec{q}, s'), a^\dagger(\vec{p}, s) \right\} | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_{s'} \int d^3q \, u(\vec{q}, s') e^{-iq^\mu x_\mu} \delta_{s, s'} \delta(\vec{p} - \vec{q}) \langle 0 | 0 \rangle \\
&= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-ip^\mu x_\mu} u(\vec{p}, s)
\end{aligned}$$

gilt. Mit Adjungieren und analogen Rechnungen zeigt man schnell, dass

$$\begin{aligned}
\langle \vec{p}, s | \psi^\dagger(x) | 0 \rangle &= \langle 0 | \psi(x) | \vec{p}, s \rangle^\dagger = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip^\mu x_\mu} u^\dagger(\vec{p}, s) \\
{}^c \langle \vec{p}, s | \psi | 0 \rangle &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip^\mu x_\mu} v(\vec{p}, s) \\
\langle 0 | \psi^\dagger(x) | \vec{p}, s \rangle^c &= \langle \vec{p}, s | \psi(x) | 0 \rangle^\dagger = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-ip^\mu x_\mu} v^\dagger(\vec{p}, s)
\end{aligned}$$

gilt, wobei $|\vec{p}, s\rangle^c$ der Zustand des entsprechenden Antifermions ist. Bezüglich des Ladungskonjugations-Operators \mathbf{C} transformiert die Wellenfunktion durch

$$\mathbf{C} \psi \mathbf{C}^{-1} = -\beta C \psi^\dagger{}^{\text{Ts}}.$$

Wollen wir mit reellen, oder *ungeladenen* Fermionen, also Majorana-Fermionen arbeiten, so fordern wir

$$\psi^{\text{Ts}} = - \left(\beta C \psi^\dagger{}^{\text{Ts}} \right)^{\text{Ts}} = \psi^\dagger C \beta,$$

so dass sie ihre eigenen Antiteilchen sind und

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \beta = -\psi^{\text{Ts}} C$$

erfüllen. Gibt es nun ein weiteres fermionisches Feld mit negativer Parität, so gilt für dieses

$$\psi_-^\alpha(x) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \sum_s \int d^3p \left(u_-^\alpha(\vec{p}, s) e^{-ip^\mu x_\mu} a_-(\vec{p}, s) + v_-^\alpha(\vec{p}, s) e^{ip^\mu x_\mu} a_-^\dagger(\vec{p}, s) \right)$$

mit

$$\begin{aligned}
\beta u_-(\vec{p}, s) &= -u_-(-\vec{p}, s) \\
\beta v_-(\vec{p}, s) &= v_-(-\vec{p}, s).
\end{aligned}$$

woraus für die Spinsummen

$$\begin{aligned}
\sum_s u_-(\vec{p}, s) u^\dagger(\vec{p}, s) &= \frac{1}{2p^0} (-\gamma^\mu p_\mu - m) \beta \\
\sum_s v_-(\vec{p}, s) v^\dagger(\vec{p}, s) &= \frac{1}{2p^0} (-\gamma^\mu p_\mu + m) \beta.
\end{aligned}$$

folgt. Ausserdem gilt für den Zustand $|\vec{p}, s\rangle_-$ der dieses Fermion mit Masse m_- beschreibt, dass

$$\begin{aligned}\langle 0 | \psi_-(x) | \vec{p}, s \rangle_- &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-ip^\mu x_\mu} u_-(\vec{p}, s) \\ - \langle \vec{p}, s | \psi_-^\dagger(x) | 0 \rangle &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip^\mu x_\mu} u_-^\dagger(\vec{p}, s) \\ {}^c_- \langle \vec{p}, s | \psi_- | 0 \rangle &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{ip^\mu x_\mu} v_-(\vec{p}, s) \\ \langle 0 | \psi_-^\dagger(x) | \vec{p}, s \rangle_-^c &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-ip^\mu x_\mu} v_-^\dagger(\vec{p}, s)\end{aligned}$$

Wir haben damit einige wichtige Eigenschaften der Fermionen im Minkowskiraum zusammengefasst, so dass wir wissen, wie sich die analogen Felder in der euklidischen Theorie verhalten sollten.

A.2. Wick-Rotation

Die Transformation zur euklidischen Feldtheorie wird durch

$$(t, x, y, z) \mapsto (it, x, y, z)$$

vermittelt, was die Metrik zu

$$\eta^{\mu\nu} \mapsto -\delta^{\mu\nu}$$

umwandelt. Dies sieht man, wenn wir die neuen Koordinaten von 1 bis 4 anstatt von 0 bis 3 durchnummerieren und die Transformation durch

$$\begin{pmatrix} x^4 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

angeben. Vektoren und Kovektoren werden wie die Metrik durch die üblichen Transformationsgesetze umgewandelt, also

$$\begin{pmatrix} V^4 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_4 & V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & V_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ändern sich Skalarprodukte durch

$$p^\mu p_\mu \rightarrow p^\mu p_\mu = - \sum_{\mu=1}^4 p_\mu p_\mu.$$

Für die Gamma-Matrizen gilt dann die Relationen genauso

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\delta^{\mu\nu}$$

und es ändert sich nur γ_0 durch

$$\gamma^4 = i\gamma^0.$$

Die Matrizen für Helizität, Parität und Ladung werden nicht verändert und es gilt

$$\begin{aligned}\beta &= -i\gamma^4 & C &= \gamma^2\beta \\ \gamma_5 &= -\gamma^4\gamma^1\gamma^2\gamma^3\end{aligned}.$$

Hier haben wir dann Änderungen in Größen, die mit den Gamma-Matrizen kontrahiert werden durch

$$\gamma^\mu \partial_\mu \rightarrow -\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \partial_\mu$$

auszuführen. Eine weitere wichtige Tatsache ist, dass aus der β -Hermizität

$$\begin{aligned}(i\gamma^i)^\dagger &= -i\gamma^{i\dagger} = -i\beta\gamma^i\beta = i\gamma^i \\ (i\gamma^4)^\dagger &= -\gamma^{0\dagger} = -\beta\gamma^0\beta = -\gamma^0 = i\gamma^4\end{aligned}$$

folgt, also sind $i\gamma^\mu$ hermitesch. Es ist entscheidend, dass diese Relation komplex ist, da die Wick-Rotation einen zusätzlichen Faktor i eingebacht hat. Im Gegensatz dazu gelten alle reellen Relationen im euklidischen- genau so wie im Minkowski-Fall.

A.3. Umrechnungen in andere Konventionen

Es werde Umrechnungsvorschriften in drei andere Konventionen angeben, die sich in Werken auf der Literaturliste finden. Dabei sind die von mir verwendeten Größen mit my indiziert.

Als erstes wird mit der Notation von [26] verglichen. Dieser arbeitet jedoch nicht in euklidischer Feldtheorie, weswegen wir zum Vergleich also die Minkowski-Größen heranziehen. Für die Metrik gilt

$$(\eta_W)^{\mu\nu} = -(\eta_{my})^{\mu\nu}$$

woraus sich für beliebige Skalarprodukte die Umrechnung

$$(v_W)^\mu (w_W)_\mu = -(v_{my})^\mu (w_{my})_\mu$$

ergibt. Für die Gamma-Matrizen haben wir

$$(\gamma_W)^\mu = -i(\gamma_{my})^\mu.$$

Die Matrizen β, γ^5 und C bleiben gleich, da wir nur die Gamma-Matrizen ändern. Es gilt zum Beispiel für β

$$\beta = i(\gamma_W)^0 = (\gamma_{my})^0.$$

Nun vergleichen wir mit den Konventionen von [20]. Diese verwenden im Minkowski-Raum dieselbe Metrik wie wir, so dass

$$(\eta_{\text{MM}})^{\mu\nu} = (\eta_{\text{my}})^{\mu\nu}.$$

Jedoch werden bei der Wick-Rotation die Gamma-Matrizen nicht ihrer Vektornatur entsprechend transformiert, sondern es werden alle Raumkomponenten mit $-i$ multipliziert, so dass

$$\{(\gamma_{\text{MM}})^\mu, (\gamma_{\text{MM}})^\nu\} = 2\delta^{\mu\nu}$$

gilt, was jedoch nicht zur Metrik des euklidischen Raums passt, die $-\delta^{\mu\nu}$ ist. Hier gilt also die Umrechnungsformel

$$(\gamma_{\text{MM}})^\mu = -i(\gamma_{\text{my}})^\mu$$

Damit gilt Beispielsweise für die Parität

$$\beta = (\gamma_{\text{MM}})^4 = -i(\gamma_{\text{my}})^4$$

A.4. Symmetrien des Dirac-Operators

Unser Dirac-Operator hat die Form

$$Q_x^y[U_\mu] = \delta_{y,x}^{\text{C}} - \kappa \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{x,y+a\hat{\mu}}^{\text{C}} (i\gamma_\mu + 1) V_\mu^{\text{Td}}(y) - \delta_{x,y-a\hat{\mu}}^{\text{C}} (i\gamma_\mu - 1) V_\mu(x)).$$

Betrachten wir $(\gamma^5 Q \gamma^5)_x^y[U_\mu]$, sehen wir, dass sich nur das Vorzeichen der γ_μ verändert, da Q sonst trivial im Spinraum ist. Damit haben wir also

$$(\gamma^5 Q \gamma^5)_x^y[U_\mu] = \delta_{y,x}^{\text{C}} - \kappa \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{x,y+a\hat{\mu}}^{\text{C}} (-i\gamma_\mu + 1) V_\mu^{\text{Td}}(y) - \delta_{x,y-a\hat{\mu}}^{\text{C}} (i\gamma_\mu - 1) V_\mu(x)).$$

Vergleichen wir das mit $Q_x^{\dagger \text{SdE} y}[U_\mu]$ und beachten, dass $V_\mu^{\text{Td}} = V_\mu^{\dagger \text{d}}$ und dass $i\gamma^\mu$ hermitesch sind, sehen wir

$$\begin{aligned} Q_x^{\dagger \text{SdE} y}[U_\mu] &= \delta_{y,x}^{\text{C} \dagger \text{E}} - \kappa \sum_{\mu=1}^4 \left(\delta_{y+a\hat{\mu},x}^{\text{C} \dagger \text{E}} (i\gamma_\mu + 1) V_\mu(y) - \delta_{y-a\hat{\mu},x}^{\text{C} \dagger \text{E}} (i\gamma_\mu - 1) V_\mu^{\text{Td}}(x) \right) \\ &= \delta_{y,x}^{\text{C}} - \kappa \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{y-a\hat{\mu},x}^{\text{C}} (i\gamma_\mu + 1) V_\mu(y) - \delta_{y+a\hat{\mu},x}^{\text{C}} (i\gamma_\mu - 1) V_\mu^{\text{Td}}(x)) \\ &= \delta_{y,x}^{\text{C}} - \kappa \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{y+a\hat{\mu},x}^{\text{C}} (-i\gamma_\mu + 1) V_\mu^{\text{Td}}(x) + \delta_{y-a\hat{\mu},x}^{\text{C}} (i\gamma_\mu + 1) V_\mu(y)) \\ &= (\gamma^5 Q \gamma^5)_x^y[U_\mu]. \end{aligned}$$

Damit können wir dann den hermiteschen Operator

$$\tilde{Q} := \gamma^5 Q = \tilde{Q}^{\dagger \text{SdE}}$$

definieren. Es gilt nun

$$\det(\gamma^5) = 1,$$

da

$$(\gamma^5)^{b\beta y}_{a\alpha x} = \mathbb{1}_a^b \otimes (\gamma^5)_\alpha^\beta \otimes \delta_{y,x}^C.$$

Wir bekommen durch $\delta_{y,x}^C$ keinen zusätzlichen Faktor $a^{-|\Lambda_{(N_T, N, N, N)}^{(a, a, a, a)}|}$, da die Determinante sich im Euklidischen Raum auf die *Integral-Matrix-Multiplikation* bezieht. Damit wissen wir also

$$\det(Q) = \det(\tilde{Q}) = \det(\tilde{Q}^{\dagger_{\text{SdE}}}) = \det(\tilde{Q})^* \in \mathbb{R}.$$

Weiter betrachten wir $(CQC)^y_x[U_\mu]$. Auch hier ändert sich nur etwas an den Gamma-Matrizen und es folgt

$$\begin{aligned} (CQC)^y_x[U_\mu] &= \delta_{y,x}^C - \kappa \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{x,y+a\hat{\mu}}^C (-i\gamma_\mu^{\text{Ts}} + 1) V_\mu^{\text{Td}}(y) - \delta_{x,y-a\hat{\mu}}^C (-i\gamma_\mu^{\text{Ts}} - 1) V_\mu(x)) \\ &= \delta_{y,x}^C - \kappa \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{x,y-a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu^{\text{Ts}} + 1) V_\mu(x) - \delta_{x,y+a\hat{\mu}}^C (i\gamma_\mu^{\text{Ts}} - 1) V_\mu^{\text{Td}}(y)) \\ &= \delta_{y,x}^C - \kappa \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{y+a\hat{\mu},x}^{\text{TE}} (i\gamma_\mu^{\text{Ts}} + 1) V_\mu(y) - \delta_{y-a\hat{\mu},x}^{\text{TE}} (i\gamma_\mu^{\text{Ts}} - 1) V_\mu^{\text{Td}}(x)) \\ &= \delta_{y,x}^C - \kappa \sum_{\mu=1}^4 (\delta_{y+a\hat{\mu},x}^C (i\gamma_\mu + 1) V_\mu^{\text{Td}}(y) - \delta_{y-a\hat{\mu},x}^C (i\gamma_\mu - 1) V_\mu(x))^{\text{TsdE}} \\ &= (Q^{\text{TsdE}})^y_x[U_\mu]. \end{aligned}$$

Hier ist zu beachten, wenn wir

$$A^y_x := \delta_{y+a\hat{\mu},x}^C V_\mu^{\text{Td}}(y)$$

definieren, dass dann

$$(A^{\text{TE}})^y_x = A^x_y = \delta_{y-a\hat{\mu},x}^C V_\mu^{\text{Td}}(x)$$

gilt. Die Transposition tauscht auch die Funktionsargumente. Damit hat Q die beiden Symmetrien

$$Q = \gamma^5 Q^{\dagger_{\text{SdE}}} \gamma^5 = C Q^{\text{TsdE}} C.$$

Wir sehen weiter, dass wegen $C^{\text{TsdE}} = -C$ die Matrix

$$M := CQ = C^2 Q^{\text{TsdE}} C = Q^{\text{TsdE}} C = -(CQ)^{\text{TsdE}} = -M^{\text{TsdE}}$$

antisymmetrisch ist. Da $Q = \mathbb{1} + \kappa H$ gilt, erfüllt natürlich auch H diese Gleichungen. Wir benötigen jedoch noch eine weitere Eigenschaft von H . Wir betrachten dazu die Wirkung von

$$\Xi^y_x := \delta_{y,x}^C e^{\frac{i\pi}{a}(x^1+x^2+x^3+x^4)} = \Xi^\dagger$$

auf H . Es gilt, dass $\Xi^2 = \mathbb{1}$ und weiter bemerken wir, dass für

$$A^{\pm y}_x := \delta_{y\pm a\hat{\mu},x}^C$$

nun

$$(\Xi A^\pm)^y_x = \int_z \Xi^y_z \delta^C_{z \pm a \hat{\mu}, x} = \Xi^y_{x \mp a \hat{\mu}} = \delta^C_{y, x \mp a \hat{\mu}} e^{\frac{i\pi}{a}(x^1+x^2+x^3+x^4 \mp a)}$$

gilt und damit dann

$$\begin{aligned} (\Xi A^\pm \Xi)^y_x &= \int_w \int_z \Xi^y_z \delta^C_{z \pm a \hat{\mu}, w} \Xi^w_x = \int_w \Xi^y_{w \mp a \hat{\mu}} \Xi^w_x \\ &= \int_w \delta^C_{y, w \mp a \hat{\mu}} e^{\frac{i\pi}{a}(w^1+w^2+w^3+w^4 \mp a)} \delta^C_{w, x} e^{\frac{i\pi}{a}(w^1+w^2+w^3+w^4)} \\ &= \int_w \delta^C_{y, w \mp a \hat{\mu}} e^{\frac{i\pi}{a}(2w^1+2w^2+2w^3+2w^4-a)} \delta^C_{w, x} \\ &= \delta^C_{y, x \mp a \hat{\mu}} e^{-i\pi a} = -\delta^C_{y \pm a \hat{\mu}, x} = -A^{\pm y}_x \end{aligned}$$

folgt. Damit haben wir endgültig

$$(\Xi H \Xi)^y_x[U_\mu] = -H^y_x[U_\mu].$$

A.5. Der Pfaffian von M und sein Vorzeichen

Wie für jede komplexe Matrix, gibt es für Q eine Jordan-Normalform. Aber bei uns hat Q die Form

$$Q = \mathbb{1} - \kappa H,$$

so dass dies auch für H gilt. Es gibt eine nichtsinguläre Matrix U , sowie eine Matrix J_H , so dass

$$H = U J_H U^{-1}$$

gilt, wobei J die Form

$$J_H = \begin{pmatrix} J_{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\mu_l} \end{pmatrix},$$

mit dem Jordanblock J_i gegeben durch

$$J_{\mu_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 & 1 & & 0 \\ & \mu_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \mu_i & 1 \\ 0 & & & & \mu_i \end{pmatrix}}_{N_{\mu_i}},$$

hat. Sei Q nun eine $2K \times 2K$ Matrix, womit dann

$$\sum_{i=1}^l N_{\mu_i} = 2K$$

folgt. Wir nennen die Menge aller Eigenwerte

$$\Sigma(H) := \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_3\}$$

Nun benennen wir die Spalten von U mit $u_{\mu,i}$, wobei $i = 1, \dots, N_{\mu_i}$, so dass

$$\begin{aligned} Hu_{\mu,1} &= \mu u_{\mu,1} \\ Hu_{\mu,i+1} &= u_{\mu,i} + \mu u_{\mu,i+1}. \end{aligned}$$

Dies sind verallgemeinerte Rechtseigenvektoren von Q . Die Zeilen von U^{-1} nennen wir $v_{\mu,i}^\dagger$, wobei nun $v_{\mu,i}$ ein Linkseigenvektor ist. Für diese gilt

$$\begin{aligned} v_{\mu,N_\mu}^\dagger H &= \mu v_{\mu,N_\mu}^\dagger \\ v_{\mu,i-1}^\dagger H &= v_{\mu,i}^\dagger + \mu v_{\mu,i}^\dagger. \end{aligned}$$

Diese Eigenvektoren erfüllen

$$v_{\mu,i}^\dagger u_{\nu,j} = \delta_{\mu\nu} \delta_{ij}.$$

Haben wir zusätzlich entartete Eigenwerte, also $\mu_i = \mu_j$ für $i \neq j$, so müssen wir diese Eigenwerte noch durchnummerieren, so dass wir die Rechts- und Linkseigenvektoren in der Form

$$v_{(\mu,a),i}^\dagger u_{(\nu,b),j} = \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{ab}$$

als biorthonormale Basis erhalten, wobei (μ, a) der a -te Eigenwert μ ist. Wir fassen ab hier also μ als das Paar (μ, a) auf, falls es nicht explizit anders erwähnt wird.

Ab hier nehmen wir weiter an, dass Q in Diagonalgestalt überführt werden kann, also dass die Jordanblöcke eindimensional sind. Wir nennen weiter den Raum der Rechtseigenvektoren R und den der Linkseigenvektoren L und auf diesen definieren wir die lineare isomorphe Abbildung

$$\phi := (UU^\dagger)^{-1} : R \rightarrow L$$

die dann

$$\phi(u_{(\mu,a)}) = v_{(\mu,a)}$$

erfüllt. Wir können Q jetzt in der Form

$$Q = 1 + U J_H U^{-1}$$

schreiben und es gilt

$$\det(Q) = \prod_{\mu \in \Sigma(H)} (1 - \kappa \mu)^{N_\mu}.$$

Für den Pfaffian von M wissen wir

$$\text{Pf}(M)^2 = \det(Q)$$

und es ist schnell einzusehen, dass $\text{Pf}(M)$ aufgefasst als Funktion von κ die Form

$$\text{Pf}(M) = \sum_{n=1}^K a_n \kappa^n \quad (\text{A.5.1})$$

mit konstanten Koeffizienten a_n hat, denn

$$\begin{aligned} \text{Pf}(M) &= \frac{1}{2^K K!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}(1, \dots, 2K)} \text{sign}(\sigma) M_{\sigma(1), \sigma(2)} \cdots M_{\sigma(2K-1), \sigma(2K)} \\ &= \frac{1}{2^K K!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}(1, \dots, 2K)} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^K (C_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)} - \kappa(CH)_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)}) \\ &= \frac{1}{2^K K!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}(1, \dots, 2K)} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^K (b_{\sigma, i} - \kappa c_{\sigma, i}). \end{aligned}$$

Hat die Determinante jetzt die Form

$$\det(Q) = \left(\sum_{n=1}^K a_n \kappa^n \right)^2,$$

so muss der Pfaffian bis auf ein Vorzeichen (A.5.1) erfüllen, da dies das einzige Polynom ist, welches quadriert die Determinante ergibt. Aus diesem Grund untersuchen wir nun die Menge $\Sigma(H)$ der Eigenwerte von H . Dazu definieren wir die zwei linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \gamma^5 : R &\rightarrow L \\ u_{(\mu, a)} &\mapsto \gamma^5 u_{(\mu, a)} \\ C^* : R &\rightarrow L \\ u_{(\mu, a)} &\mapsto C u_{(\mu, a)}^* \end{aligned}$$

die auch direkt die analogen Abbildungen von Links- zu Rechtseigenvektoren.

$$\begin{aligned} \gamma^5 : L &\rightarrow R \\ v_{(\mu, a)} &\mapsto \gamma^5 v_{(\mu, a)} \\ C^* : L &\rightarrow R \\ v_{(\mu, a)} &\mapsto C v_{(\mu, a)}^* \end{aligned}$$

induzieren. Man sieht schnell, dass

$$\begin{aligned} H^\dagger \gamma^5(u_{(\mu, a)}) &= H^\dagger \gamma^5 u_{(\mu, a)} = \gamma^5 H u_{(\mu, a)} = \mu \gamma^5 u_{(\mu, a)} \\ H^\dagger C^*(u_{(\mu, a)}) &= H^\dagger C u_{(\mu, a)}^* = C H^* u_{(\mu, a)}^* = \mu^* C u_{(\mu, a)}^* \\ H \gamma^5(v_{(\mu, a)}) &= H \gamma^5 v_{(\mu, a)} = \gamma^5 H^\dagger v_{(\mu, a)} = \mu^* \gamma^5 v_{(\mu, a)} \\ H C^*(v_{(\mu, a)}) &= C H^\text{T} v_{(\mu, a)}^* = C \left(H^\dagger v_{(\mu, a)} \right)^* = \mu C v_{(\mu, a)}^*, \end{aligned}$$

woraus wir

$$\begin{aligned}\gamma^5 : R_\mu &\rightarrow L_{\mu^*} \\ \gamma^5 : L_\mu &\rightarrow R_{\mu^*} \\ C^* : R_\mu &\rightarrow L_\mu \\ C^* : L_\mu &\rightarrow R_\mu\end{aligned}$$

sehen. Weiter sieht man direkt, dass

$$\begin{aligned}\gamma^5 \circ \gamma^5 &= \mathbb{1} \\ C^* \circ C^* &= -\mathbb{1}\end{aligned}$$

gilt. Wir fassen nun γ^5 als Automorphismus $\gamma^5 : R_\mu \times R_{\mu^*} \times L_\mu \times L_{\mu^*} \rightarrow R_\mu \times R_{\mu^*} \times L_\mu \times L_{\mu^*}$ auf, so dass die Matrix in dieser Basis die Gestalt

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \Gamma_1 \\ 0 & 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & \Gamma_3 & 0 & 0 \\ \Gamma_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Wir fordern hier $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Damit dann $\gamma^{5^2} = \mathbb{1}$ gelten kann, muss

$$\gamma^{5^2} = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \Gamma_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \Gamma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma_4 \Gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

gelten, also

$$\Gamma_4 = \Gamma_1^{-1} \quad \Gamma_3 = \Gamma_2^{-1}.$$

Desweiteren dürfen Γ_1 und Γ_2 nicht trivial, also 0, sein. Damit müssen die Γ_i mindestens eindimensional und damit $R_\mu \times R_{\mu^*} \times L_\mu \times L_{\mu^*}$ vierdimensional sein und mindestens zwei verschiedene Eigenwerte haben. Fassen wir auch C^* als solchen Automorphismus auf, so gilt

$$C^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \\ C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ * = * \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & C_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2^* \\ C_3^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_4^* & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wenn $*$ die komplexe Konjugation ist. Ausserdem gilt

$$\text{diag}(C_i) = 0,$$

da

$$(Cu_{(\mu,a)}^*)^{\dagger \text{SdE}} u_{(\mu,a)} = u_{(\mu,a)}^{\text{T SdE}} Cu_{(\mu,a)} = - \left(u_{(\mu,a)}^{\text{T SdE}} Cu_{(\mu,a)} \right)^{\text{T SdE}} = 0$$

verschwindet, denn $u_{(\mu,a)}^{\text{TsdE}} C u_{(\mu,a)}$ ist eine Zahl. Hier gilt $C^{*2} = -\mathbb{1}$, also muss

$$C^{*2} = \begin{pmatrix} C_1 C_3^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 C_4^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 C_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 C_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

und auch

$$C_3 = -C_1^{*-1} \quad C_4 = -C_2^{*-1}$$

gelten. Da auch die C_i nichttrivial sein sollen, müssen diese zweidimensional sein, da die Diagonalelemente verschwinden. Wir haben also mindestens vier Basisvektoren in $R_\mu \times R_{\mu^*}$ und damit für jeden nichtreellen Eigenwert μ direkt vier Eigenwerte. Für reelle Eigenwerte haben wir Automorphismen auf $R_\mu \times L_\mu$. Analog zeigt man, dass γ^5 mindestens zweidimensional und C^* mindestens vierdimensional realisiert werden kann. Damit gibt es zu jedem reellen Eigenwerten μ mindestens zwei verschiedene Eigenvektoren. Es gibt Beispiele dafür, dass es nur doppelte Entartung der reellen Eigenwerte gibt, nehme dazu einfach die Matrix

$$I := \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$$

für zwei beliebige reelle Zahlen μ, ν , dann hat diese Matrix I die geforderten Symmetrien und nur doppelt entartete Eigenwerte. Damit sind reelle Eigenwerte mindestens *zweifach* und komplexe *vierfach* entartet. Damit gilt nun für die Determinante

$$\det(Q) = \prod_{\mu \in \Sigma^{\frac{1}{2}}(H) \cap \mathbb{C}_{\Im > 0}} ((1 - \kappa\mu)^2 (1 - \kappa\mu^*)^2)^{N_\mu} \prod_{\nu \in \Sigma^{\frac{1}{2}}(H) \cap \mathbb{R}} ((1 - \kappa\nu)^2)^{N_\nu},$$

wenn $\Sigma^{\frac{1}{2}}(H)$ die Hälfte der Eigenwerte aus $\Sigma(H)$ ist. Damit ist $\det(Q)$ offensichtlich ein Polynom $2K$ -ten Grades und es gilt

$$\det(Q) = \left(\prod_{\mu \in \Sigma^{\frac{1}{2}}(H) \cap \mathbb{C}_{\Im > 0}} ((1 - \kappa\mu)(1 - \kappa\mu^*))^{N_\mu} \prod_{\nu \in \Sigma^{\frac{1}{2}}(H) \cap \mathbb{R}} (1 - \kappa\nu)^{N_\nu} \right)^2,$$

was uns den Pfaffian zu

$$\begin{aligned} \text{Pf}(M) &= \pm \prod_{\mu \in \Sigma^{\frac{1}{2}}(H) \cap \mathbb{C}_{\Im > 0}} ((1 - \kappa\mu)(1 - \kappa\mu^*))^{N_\mu} \prod_{\nu \in \Sigma^{\frac{1}{2}}(H) \cap \mathbb{R}} (1 - \kappa\nu)^{N_\nu} \\ &= \pm \prod_{\mu \in \Sigma^{\frac{1}{2}}(H) \cap \mathbb{C}_{\Im > 0}} |1 - \kappa\mu|^{2N_\mu} \prod_{\nu \in \Sigma^{\frac{1}{2}}(H) \cap \mathbb{R}} (1 - \kappa\nu)^{N_\nu} \end{aligned}$$

bestimmt. Damit wechselt der Pfaffian sein Vorzeichen genau dann, wenn ein doppelt entarteter reeller Eigenwert das Vorzeichen wechselt. Ausserdem gilt für $\kappa = 0$, dass $\text{Pf}(M) = \text{Pf}(C) = 1$, woraus dann

$$\begin{aligned} |\text{Pf}(M)| &= \prod_{\mu \in \Sigma^{\frac{1}{2}}(H) \cap \mathbb{C}_{\Im > 0}} |1 - \kappa \mu|^{2N_\mu} \prod_{\nu \in \Sigma^{\frac{1}{2}}(H) \cap \mathbb{R}} |1 - \kappa \nu|^{N_\nu} \\ \text{sign}(\text{Pf}(M)) &= \text{sign} \left(\prod_{\nu \in \Sigma^{\frac{1}{2}}(H) \cap \mathbb{R}} (1 - \kappa \nu)^{N_\nu} \right) \end{aligned}$$

folgt.

A.6. Distributionelle Identität

Sei $F : \left(-\frac{\pi}{aN_T}, \frac{\pi}{aN_T}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die wir periodisch auf \mathbb{R} fortsetzen können, dann gilt

$$F(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-iaN_T kn}.$$

Darauf wenden wir nun die Distribution

$$\int_{-\frac{\pi}{aN_T}}^{\frac{\pi}{aN_T}} dk \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{iamN_T k} F(k)$$

an, wobei $N_T \in \mathbb{N}$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{aN_T}}^{\frac{\pi}{aN_T}} dk \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{iamN_T k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-iaN_T kn} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\frac{\pi}{aN_T}}^{\frac{\pi}{aN_T}} dk e^{-iaN_T(n-m)k} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{2\pi}{aN_T} \delta_{n,m} \\ &= \frac{2\pi}{aN_T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n, \end{aligned}$$

da wir die Summen vertauschen dürfen, falls die Funktion beherrschbar genug ist. Andererseits gilt auch für die zweite Distribution

$$\frac{2\pi}{aN_T} \int_{-\frac{\pi}{aN_T}}^{\frac{\pi}{aN_T}} dk \sum_{\nu=0}^{N_T-1} \delta\left(k - \frac{2\pi}{aN_T} \nu\right) F(k),$$

dass

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{aN_T} \sum_{\nu=0}^{N_T-1} F\left(\frac{2\pi}{aN_T}\nu\right) &= \frac{2\pi}{aN_T} \sum_{\nu=0}^{N_T-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-iaN_T n \frac{2\pi}{aN_T}\nu} \\ &= \frac{2\pi}{aN_T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \sum_{\nu=0}^{N_T-1} e^{-i2\pi n\nu} = \frac{2\pi}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n. \end{aligned}$$

Da in dieser Gleichungsfolge nur wichtig war, dass die Summe $\sum_{\nu=0}^{N_T-1}$ über alle N_T verschiedenen ν modulo 2π geht, können wir diese Summe auch aus einer beliebigen Teilmenge bilden, insbesondere auch verschieben. Damit folgt die Gleichheit der Distributionen, wenn wir sie auf ein F anwenden:

$$\int_{-\frac{\pi}{aN_T}}^{\frac{\pi}{aN_T}} dk \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{iamN_T k} - \frac{2\pi}{aN_T^2} \sum_{\nu=N_0}^{N_0+N_T-1} \delta\left(k - \frac{2\pi}{aN_T}\nu\right) \right) F(k) = 0.$$

Wenden wir dies jetzt auf die verschobene periodische Funktion $F\left(q + \frac{\pi}{aN_T}\right)$ an und führen in den Integralen die Koordinatentransformation $q = k + \frac{\pi}{aN_T}$ durch, so gilt

$$\int_0^{\frac{2\pi}{aN_T}} dq \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{iamN_T q} e^{-i\pi m} - \frac{2\pi}{aN_T^2} \sum_{\nu=N_0}^{N_0+N_T-1} \delta\left(q - \frac{2\pi}{aN_T}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\right) \right) F(q) = 0.$$

Spalten wir dieses Integral in die Summanden auf, und bringen beide auf verschiedene Seiten der Gleichung, bekommen wir, wenn wir das Integral mit der unendlichen Summation vertauschen,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi m} \int_0^{\frac{2\pi}{aN_T}} dq e^{iamN_T q} F(q) = \frac{2\pi}{aN_T^2} \int_0^{\frac{2\pi}{aN_T}} dq \sum_{\nu=N_0}^{N_0+N_T-1} \delta\left(q - \frac{2\pi}{aN_T}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\right) F(q).$$

Gehen wir von der rechten Seite aus, haben wir die Summe einer (anti-)periodischen Funktion, die auf endlich vielen Werten definiert ist und können diese Summe durch ein Integral über eine unendlichen Reihe einer fast beliebig fortgesetzten periodischen Funktion berechnen.

A.7. Explizite Berechnung des Korrelators

Wir hatten gesehen, dass für den fermionischen Mittelwert

$$\langle T \{ \lambda(x_1) \dots \lambda(x_n) \bar{\lambda}(y_1) \dots \bar{\lambda}(y_n) \} \rangle_F = \frac{(-1)^n}{(2)^n n!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\}} \text{sign}(\sigma) \left\langle \prod_{i=1}^n M^{-1}(x_{\sigma(2i)}, x_{\sigma(2i+1)}) \right\rangle_U$$

gilt. Die Notation wurde ein wenig abgeändert, damit die folgenden Rechnungen übersichtlicher werden. Wir zeigen, dass dies dasselbe ist wie

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\tau \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\} \\ \tau(2i) < \tau(2i+1)}} \text{sign}(\tau) \prod_{i=1}^n M^{-1}(x_{\tau(2i)}, x_{\tau(2i+1)}) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{\tau \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\} \\ \tau(2i) < \tau(2i+1)}} \text{sign}(\tau) \prod_{i=1}^n (M^{-1}(x_{\tau(2i)}, x_{\tau(2i+1)}) - M^{-1}(x_{\tau(2i+1)}, x_{\tau(2i)})). \end{aligned} \quad (\text{A.7.1})$$

Dabei sind alle Paare von Indizes untereinander geordnet. Nun definieren wir die Permutationen π_i , durch

$$\pi_i(m) = \begin{cases} \tau(2i) & \text{für } m = \tau(2i+1) \\ \tau(2i+1) & \text{für } m = \tau(2i) \\ m & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es tauscht π_i das i -te Paar. Dann seien weiter für $d = \sum_{m=0}^N d_{i+1} 2^i$ in binärer Darstellung die Koeffizienten d_i definiert. Dann erhalten wir für (A.7.1)

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\substack{\tau \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\} \\ \tau(2i) < \tau(2i+1)}} \text{sign}(\tau) \sum_{d=0}^{2^n-1} \prod_{i=1}^n \text{sign}(\pi_i^{d_i}) M^{-1}(x_{\pi_i \circ \tau(2i)}, x_{\pi_i \circ \tau(2i+1)}),$$

was eine kompakte Schreibweise dafür ist, dass wir jedes mögliche Paar vertauschen. Dies schreiben wir unter Verwendung von

$$\text{sign}(\sigma) \text{sign}(\tau) = \text{sign}(\sigma \circ \tau) = \text{sign}(\tau \circ \sigma)$$

für zwei Permutationen σ und τ um zu

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\substack{\tau \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\} \\ \tau(2i) < \tau(2i+1)}} \sum_{d=0}^{2^n-1} \prod_{i=1}^n \text{sign}(\pi_i^{d_i} \circ \tau) M^{-1}(x_{\pi_i \circ \tau(2i)}, x_{\pi_i \circ \tau(2i+1)}).$$

Wir sehen, da wir durch die Verknüpfung von Permutationen τ von geordneten Paaren mit allen möglichen Tauschungen π_i der Paare sämtliche Permutationen der Zahlen $\{1, \dots, 2n\}$ erhalten, dass

$$\sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n M^{-1}(x_{\sigma(2i)}, x_{\sigma(2i+1)}) = 2^n \sum_{\substack{\tau \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\} \\ \tau(2i) < \tau(2i+1)}} \text{sign}(\tau) \prod_{i=1}^n M^{-1}(x_{\tau(2i)}, x_{\tau(2i+1)}).$$

Wir können die Paare an sich noch nach der Größe ordnen, so dass $\sigma(2i) < \sigma(2(i+1))$ gilt. Wir erhalten für jede dieser weiter reduzierten Permutationen $n!$ äquivalente Terme, da wir Zahlen summieren deren Matrixprodukte durch Indexpositionen bestimmt sind und das Vertauschen

zweier Paare kein negatives Vorzeichen gibt. Also haben wir

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n M^{-1}(x_{\sigma(2i)}, x_{\sigma(2i+1)}) \\ &= 2^n n! \sum_{\substack{\tau \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\} \\ \tau(2i) < \tau(2i+1), \tau(2i) < \tau(2(i+1))}} \text{sign}(\tau) \prod_{i=1}^n M^{-1}(x_{\tau(2i)}, x_{\tau(2i+1)}). \end{aligned}$$

Die Zahl der Terme in der reduzierten Darstellung ist dann gegeben durch

$$(2n)! \rightarrow \frac{(2n)!}{2^n} \rightarrow \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Für die ersten drei nichtverschwindenden Ordnungen erhalten wir jeweils 1, 3 und 15 Terme anstatt der 2, 24 und 720 Terme ohne die Reduzierung. Also gilt die ein wenig leichter zu bestimmende Form

$$\begin{aligned} & \langle T \{ \lambda(x_1) \dots \lambda(x_n) \bar{\lambda}(x_{n+1}) \dots \bar{\lambda}(x_{2n}) \} \rangle_F \\ &= \sum_{\substack{\tau \in \text{Perm}\{1, \dots, 2n\} \\ \tau(2i) < \tau(2i+1), \tau(2i) < \tau(2(i+1))}} \text{sign}(\tau) \prod_{i=1}^n M^{-1}(x_{\tau(2i)}, x_{\tau(2i+1)}) C_{x_{n+1}} \dots C_{x_{2n}}. \end{aligned}$$

wobei generell $\langle \cdot \rangle = \langle \langle \cdot \rangle_F \rangle_U$. Jetzt fehlt noch eine Möglichkeit, genau die richtigen Zahlenpaare zu finden.² Angenommen, wir haben alle $N_n := \frac{(2n)!}{2^n n!}$ Paare für den n -ten Korrelator aufgestellt, so dass wir die *Menge*

$$O^n(x_1, \dots, x_{2n}) = \{I_1, \dots, I_{N_n}\}$$

haben, wobei die I_k eine Kombination von Paaren

$$I_k = [(x_{a_1^k}, x_{b_1^k}), \dots, (x_{a_n^k}, x_{b_n^k})]$$

angibt, die den Summanden

$$P(I_k) := \prod_{i=1}^n M^{-1}(x_{a_i^k}, x_{b_i^k})$$

induziert. Es ist nun klar, dass

$$\begin{aligned} b_i^k &> a_i^k \\ a_{i+1}^k &> a_i^k \geq 1 \end{aligned}$$

²Interessanterweise lässt sich dieses Problem auf ein *Schachrätsel* übertragen. Dazu nehmen wir für den $2n$ -Majorana-Fermionen-Korrelator ein $n \times n$ Schachbrett und nummerieren es durch. Die Diagonale, also die (i, i) Felder haben eine Sonderrolle. Nun stellen wir n Türme auf eine Seite der Diagonalen und dazu n Türme an der Diagonalen gespiegelt auf die andere Seite, so dass die Diagonale immer frei bleibt und sich die Türme nicht gegenseitig schlagen können. Nun markieren die Türme einer Seite der Diagonalen genau ein Paar von Indizes die wir suchen. Damit ist das Finden aller Summanden äquivalent zum Finden aller möglichen solcher Aufstellungen. Für $n = 1$ gibt es nur eine mögliche Aufstellung, bei der die Türme auf $(1, 2)$ und $(2, 1)$ stehen, da $(1, 1)$ und $(2, 2)$ verboten ist, da wir die Diagonale frei lassen.

Dann gilt

$$\langle T \{ \lambda(x_1) \dots \lambda(x_n) \bar{\lambda}(x_{n+1}) \dots \bar{\lambda}(x_{2n}) \} \rangle_F = \sum_{k=1}^{N_n} \text{sign}(I_k) P(I_k) C_{x_{n+1}} \dots C_{x_{2n}}.$$

wobei $\text{sign}(I_k)$ das Vorzeichen der Permutation $(a_1^k, b_1^k, \dots, a_{2n}^k, b_{2n}^k)$ bedeutet. Nun können wir Paare in $O^{n+1}(x_1, \dots, x_{2(n+1)})$ erzeugen, indem wir

$$J_l^k = [(1, l), I_k] \text{ mit } I_k \in O^n(x_2, \dots, x_l, \dots, x_{2(n+1)})$$

setzen. Hier ist dann $[(1, l), I_k]$ natürlich als $\left[(1, l), \left(x_{a_1^k}, x_{b_1^k} \right), \dots, \left(x_{a_n^k}, x_{b_n^k} \right) \right]$ zu sehen. Dies ist eine Kombination von Paaren, die unseren Anforderungen genügt, da

$$\begin{aligned} 1 &< l \\ 1 &< 2 \leq a_1^k. \end{aligned}$$

Genauso sind die Kombinationen der Paare für unterschiedliche Indizes unterschiedlich, da sie sich mindestens im ersten Paar unterscheiden. Auf diese Weise erhalten wir die Teilmenge

$$\{J_1^1, \dots, J_1^{N_n}, J_2^1, \dots, J_{2(n+1)}^{N_n}\} \subseteq O^{n+1}.$$

Wir sehen direkt

$$\left| \{J_2^1, \dots, J_2^{N_n}, J_3^1, \dots, J_{2(n+1)}^{N_n}\} \right| = 2(n+1)N_n = N_{n+1} = |O^{n+1}|$$

und sind fertig. Wir sehen auch, dass für die Korrelatoren folgende Rekursionsvorschrift gilt

$$\begin{aligned}
& \langle T \{ \lambda(x_1) \dots \lambda(x_n) \bar{\lambda}(x_{n+1}) \dots \bar{\lambda}(x_{2n}) \} \rangle_F = \sum_{I \in O^n} \text{sign}(I) P(I) C_{x_{n+1}} \dots C_{x_{2n}} \\
&= \sum_{l=2}^{2n} \sum_{I \in O^{n-1}(\not{x}_l)} \text{sign}([(1, l), I]) P([(1, l), I]) C_{x_{n+1}} \dots C_{x_{2n}} \\
&= \sum_{l=2}^{2n} \sum_{I \in O^{n-1}(\not{x}_l)} (-1)^l \text{sign}(I) M^{-1}(x_1, x_l) P(I) C_{x_{n+1}} \dots C_{x_{2n}} \\
&= \sum_{l=2}^{2n} (-1)^l M^{-1}(x_1, x_l) \sum_{I \in O^{n-1}(\not{x}_l)} \text{sign}(I) P(I) C_{x_{n+1}} \dots C_{x_{2n}} \\
&= \left(\sum_{l=2}^n (-1)^l M^{-1}(x_1, x_l) \langle T \{ \lambda(x_2) \dots \not{\lambda}(\not{x}_l) \dots \lambda(x_{n+1}) \bar{\lambda}(x_{n+2}) \dots \bar{\lambda}(x_{2n}) \} \rangle_F C_{x_{n+1}} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l=n+1}^{2n} (-1)^l M^{-1}(x_1, x_l) C_{x_l} \langle T \{ \lambda(x_2) \dots \lambda(x_n) \bar{\lambda}(x_{n+1}) \dots \not{\lambda}(\not{x}_l) \dots \bar{\lambda}(x_{2n}) \} \rangle_F \right) \\
&= \left(\sum_{l=2}^n (-1)^l M^{-1}(x_1, x_l) \langle T \{ \lambda(x_2) \dots \not{\lambda}(\not{x}_l) \dots \lambda(x_{n+1}) \bar{\lambda}(x_{n+2}) \dots \bar{\lambda}(x_{2n}) \} \rangle_F C_{x_{n+1}} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=n+1}^{2n} (-1)^l M^{-1}(x_1, x_l) C_{x_l} \langle T \{ \lambda(x_2) \dots \lambda(x_n) \bar{\lambda}(x_{n+1}) \dots \not{\lambda}(\not{x}_l) \dots \bar{\lambda}(x_{2n}) \} \rangle_F \right).
\end{aligned}$$

In Zeile drei haben wir verwendet, dass wir $l - 2$ Permutationen brauchen, um x_l nach vorne zu ziehen und alle anderen Permutationen sich dann in I abspielen. In Zeile vier haben wir im ersten Teil $\bar{\lambda}(x_{n+1})$ zu $\lambda(x_{n+1}) C_{x_{n+1}}$ umgeformt, um die Zahl der Fermionen und Antifermionen auszugleichen. Im zweiten Teil haben wir das *überflüssige* C_{x_l} noch herausgezogen. Ziehen wir noch die C -Matrizen heraus, erhalten wir die kompaktere Form

$$\begin{aligned}
& \langle T \{ \lambda(x_1) \dots \lambda(x_n) \lambda(x_{n+1}) \dots \lambda(x_{2n}) \} \rangle_F \\
&= \sum_{l=2}^{2n} (-1)^l M^{-1}(x_1, x_l) \langle T \{ \lambda(x_2) \dots \not{\lambda}(\not{x}_l) \dots \lambda(x_{2n}) \} \rangle_F.
\end{aligned}$$

Hat nun M die Dimension N , so gilt

$$\langle T \{ \lambda(x_1) \dots \lambda(x_{2N}) \} \rangle_F = \text{Pf}(M^{-1}),$$

so dass wir eine Rekursionsformel für den Pfaffian erhalten. Ist nun $M^{(i,j)}$ die Matrix M , bei der die Spalten und Zeilen i und j entfernt wurden, so gilt

$$\text{Pf}(M) = \sum_{l=2}^{2N} (-1)^l M_{1l} \text{Pf}(M^{(1,l)}).$$

Damit berechnen wir den für uns wichtigen Korrelator im Fall $n = 3$. Für den ersten Korrelator zu $n = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \langle T \{ \lambda(x_1) \bar{\lambda}(x_2) \} \rangle_F &= \sum_{\substack{\tau \in \text{Perm}\{1,2\} \\ \tau(1) < \tau(2)}} \text{sign}(\tau) M^{-1}(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}) C_{x_2} \\ &= M^{-1}(x_1, x_2) C_{x_2}. \end{aligned}$$

Mit der Rekursionsvorschrift folgt für $n = 2$

$$\begin{aligned} \langle T \{ \lambda(x_1) \lambda(x_2) \bar{\lambda}(x_3) \bar{\lambda}(x_4) \} \rangle_F &= M^{-1}(x_1, x_2) \langle T \{ \lambda(x_3) \bar{\lambda}(x_4) \} \rangle_F C_{x_3} \\ &\quad - M^{-1}(x_1, x_3) C_{x_3} \langle T \{ \lambda(x_2) \bar{\lambda}(x_4) \} \rangle_F + M^{-1}(x_1, x_4) C_{x_4} \langle T \{ \lambda(x_2) \bar{\lambda}(x_3) \} \rangle_F \\ &= M^{-1}(x_1, x_2) M^{-1}(x_3, x_4) C_{x_3} C_{x_4} - M^{-1}(x_1, x_3) M^{-1}(x_2, x_4) C_{x_3} C_{x_4} \\ &\quad - M^{-1}(x_1, x_4) M^{-1}(x_2, x_3) C_{x_3} C_{x_4} \\ &= \{ M^{-1}(x_1, x_2) M^{-1}(x_3, x_4) - M^{-1}(x_1, x_3) M^{-1}(x_2, x_4) \\ &\quad + M^{-1}(x_1, x_4) M^{-1}(x_2, x_3) \} C_{x_3} C_{x_4} \\ &\quad . \end{aligned}$$

Damit berechnet sich dann der Fall $n = 3$ zu

$$\begin{aligned} \langle T \{ \lambda(x_1) \lambda(x_2) \lambda(x_3) \bar{\lambda}(x_4) \bar{\lambda}(x_5) \bar{\lambda}(x_6) \} \rangle_F &= M^{-1}(x_1, x_2) \langle T \{ \lambda(x_3) \lambda(x_4) \bar{\lambda}(x_5) \bar{\lambda}(x_6) \} \rangle_F C_{x_4} \\ &\quad - M^{-1}(x_1, x_3) \langle T \{ \lambda(x_2) \lambda(x_4) \bar{\lambda}(x_5) \bar{\lambda}(x_6) \} \rangle_F C_{x_4} + M^{-1}(x_1, x_4) \langle T \{ \lambda(x_2) \lambda(x_3) \bar{\lambda}(x_5) \bar{\lambda}(x_6) \} \rangle_F C_{x_4} \\ &\quad - M^{-1}(x_1, x_5) C_{x_5} \langle T \{ \lambda(x_2) \lambda(x_3) \bar{\lambda}(x_4) \bar{\lambda}(x_6) \} \rangle_F + M^{-1}(x_1, x_6) C_{x_6} \langle T \{ \lambda(x_2) \lambda(x_3) \bar{\lambda}(x_4) \bar{\lambda}(x_5) \} \rangle_F \end{aligned}$$

Damit ergibt sich unser Korrelator dann zu

$$\begin{aligned} &\langle T \{ \lambda(x_1) \lambda(x_2) \lambda(x_3) \bar{\lambda}(x_4) \bar{\lambda}(x_5) \bar{\lambda}(x_6) \} \rangle_F \\ &= \{ M^{-1}(x_1, x_2) M^{-1}(x_3, x_4) M^{-1}(x_5, x_6) - M^{-1}(x_1, x_2) M^{-1}(x_3, x_5) M^{-1}(x_4, x_6) \\ &\quad + M^{-1}(x_1, x_2) M^{-1}(x_3, x_6) M^{-1}(x_4, x_5) - M^{-1}(x_1, x_3) M^{-1}(x_2, x_4) M^{-1}(x_5, x_6) \\ &\quad + M^{-1}(x_1, x_3) M^{-1}(x_2, x_5) M^{-1}(x_4, x_6) - M^{-1}(x_1, x_3) M^{-1}(x_2, x_6) M^{-1}(x_4, x_5) \\ &\quad + M^{-1}(x_1, x_4) M^{-1}(x_2, x_3) M^{-1}(x_5, x_6) - M^{-1}(x_1, x_4) M^{-1}(x_2, x_5) M^{-1}(x_4, x_6) \\ &\quad + M^{-1}(x_1, x_4) M^{-1}(x_2, x_6) M^{-1}(x_4, x_5) - M^{-1}(x_1, x_5) M^{-1}(x_2, x_3) M^{-1}(x_4, x_6) \\ &\quad + M^{-1}(x_1, x_5) M^{-1}(x_2, x_4) M^{-1}(x_3, x_6) - M^{-1}(x_1, x_5) M^{-1}(x_2, x_6) M^{-1}(x_3, x_4) \\ &\quad + M^{-1}(x_1, x_6) M^{-1}(x_2, x_3) M^{-1}(x_4, x_5) - M^{-1}(x_1, x_6) M^{-1}(x_2, x_4) M^{-1}(x_3, x_5) \\ &\quad + M^{-1}(x_1, x_6) M^{-1}(x_2, x_5) M^{-1}(x_3, x_4) \} C_{x_4} C_{x_5} C_{x_6}. \end{aligned}$$

Es lassen sich noch weitere Vereinfachungen vornehmen. Diese folgen aus der expliziten Form unseres Baryonen-Operators. Diese war als

$$\begin{aligned} W_\Gamma^\alpha(x) &= \varepsilon_{abc} \lambda_x^{a\alpha} \text{Tr}_s \left(\bar{\lambda}_x^b \Gamma \lambda_x^c \right) \\ &= \varepsilon_{abc} \lambda_x^{a\alpha} \text{Tr}_s \left(\lambda_x^b (C\Gamma) \lambda_x^c \right) \\ &= \varepsilon_{abc} (C\Gamma)^{\beta\gamma} (\lambda_x^{\alpha a} \lambda_x^{\beta b} \lambda_x^{\gamma c}) \end{aligned}$$

gewählt, wodurch der zu ihm konjugierte Operator

$$\begin{aligned} \bar{W}_\Gamma^\alpha(x) &= \varepsilon_{abc} \bar{\lambda}_x^{a\alpha} \text{Tr}_s \left(\bar{\lambda}_x^c \Gamma^\dagger \lambda_x^b \right) \\ &= \varepsilon_{abc} \bar{\lambda}_x^{a\alpha} \text{Tr}_s \left(\bar{\lambda}_x^c (C\Gamma)^\dagger \lambda_x^b \right) \\ &= -\varepsilon_{abc} (C\Gamma)^\dagger{}^{\beta\gamma} (\bar{\lambda}_x^{\alpha a} \bar{\lambda}_x^{\beta b} \bar{\lambda}_x^{\gamma c}) \end{aligned}$$

ist. Wir nehmen jetzt an, dass $C\Gamma$ hermitesch und symmetrisch ist. Dann hat der Korrelator die Form

$$\begin{aligned} C_\Gamma^{\alpha\alpha'}(x-y) &= \left\langle W_\Gamma^\alpha(x) \bar{W}_\Gamma^\beta(y) \right\rangle_F \\ &= -\varepsilon_{abc} \varepsilon_{a'b'c'} (C\Gamma)^{\beta\gamma} (C\Gamma)^{\beta'\gamma'} \left\langle \lambda^{\alpha a}(x) \lambda^{\beta b}(x) \lambda^{\gamma c}(x) \bar{\lambda}^{\alpha' a'}(y) \bar{\lambda}^{\beta' b'}(y) \bar{\lambda}^{\gamma' c'}(y) \right\rangle_F, \end{aligned}$$

der sich mit unserer Notation verknüpfen lässt, wenn wir x_1 durch (x, α, a) , x_4 durch (y, δ', a') und so weiter ersetzen. Für die folgenden Rechnungen wenden wir die Hermitezität sowie Symmetrie von $C\Gamma$ an. Nun gilt für die Kontraktion mit einer (anti-)symmetrische Matrix A

$$A^{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} = \pm A^{\beta\alpha} B^{\alpha\beta} = \pm A^{\alpha\beta} B^{\beta\alpha}.$$

Damit können wir die Symmetrie von $C\Gamma$ ausnutzen und unter Beachtung, dass ε total antisymmetrisch ist sehen, dass wir (β, b) mit (γ, c) tauschen dürfen, wenn wir unserem Ausdruck ein Minus spendieren. Für uns heisst das, dass wir x_2 mit x_3 und x_5 mit x_6 tauschen dürfen, wenn wir jeweils ein zusätzliches Vorzeichen beachten. Dann markieren wir alle Terme, die wir mit dieser weiteren *Symmetrie* ineinander umwandeln können:

$$\begin{aligned} &\left\langle \text{Tr} \left\{ \lambda(x_1) \lambda(x_2) \lambda(x_3) \bar{\lambda}(x_4) \bar{\lambda}(x_5) \bar{\lambda}(x_6) \right\} \right\rangle_F \\ \rightarrow &\left\{ \begin{aligned} &\textcolor{red}{M}^{-1}(x_1, x_2) \textcolor{red}{M}^{-1}(x_3, x_4) \textcolor{red}{M}^{-1}(x_5, x_6) - M^{-1}(x_1, x_2) M^{-1}(x_3, x_5) M^{-1}(x_4, x_6) \\ &+ M^{-1}(x_1, x_2) M^{-1}(x_3, x_6) M^{-1}(x_4, x_5) - \textcolor{red}{M}^{-1}(x_1, x_3) \textcolor{red}{M}^{-1}(x_2, x_4) \textcolor{red}{M}^{-1}(x_5, x_6) \\ &+ M^{-1}(x_1, x_3) M^{-1}(x_2, x_5) M^{-1}(x_4, x_6) - M^{-1}(x_1, x_3) M^{-1}(x_2, x_6) M^{-1}(x_4, x_5) \\ &+ \textcolor{green}{M}^{-1}(x_1, x_4) \textcolor{green}{M}^{-1}(x_2, x_3) \textcolor{green}{M}^{-1}(x_5, x_6) - M^{-1}(x_1, x_4) M^{-1}(x_2, x_5) M^{-1}(x_3, x_6) \\ &+ M^{-1}(x_1, x_4) M^{-1}(x_2, x_6) M^{-1}(x_3, x_5) - \textcolor{teal}{M}^{-1}(x_1, x_5) \textcolor{teal}{M}^{-1}(x_2, x_3) \textcolor{teal}{M}^{-1}(x_4, x_6) \\ &+ M^{-1}(x_1, x_5) M^{-1}(x_2, x_4) M^{-1}(x_3, x_6) - M^{-1}(x_1, x_5) M^{-1}(x_2, x_6) M^{-1}(x_3, x_4) \\ &+ \textcolor{teal}{M}^{-1}(x_1, x_6) \textcolor{teal}{M}^{-1}(x_2, x_3) \textcolor{teal}{M}^{-1}(x_4, x_5) - M^{-1}(x_1, x_6) M^{-1}(x_2, x_4) M^{-1}(x_3, x_5) \\ &+ M^{-1}(x_1, x_6) M^{-1}(x_2, x_5) M^{-1}(x_3, x_4) \end{aligned} \right\} C_{x_4} C_{x_5} C_{x_6}. \end{aligned} \quad (\text{A.7.2})$$

Damit haben wir dann

$$\begin{aligned}
 & \langle T \{ \lambda(x_1) \lambda(x_2) \lambda(x_3) \bar{\lambda}(x_4) \bar{\lambda}(x_5) \bar{\lambda}(x_6) \} \rangle_F \\
 \rightarrow & \{ 2M^{-1}(x_1, x_2) M^{-1}(x_3, x_4) M^{-1}(x_5, x_6) - 4M^{-1}(x_1, x_2) M^{-1}(x_3, x_5) M^{-1}(x_4, x_6) \\
 & + M^{-1}(x_1, x_4) M^{-1}(x_2, x_3) M^{-1}(x_5, x_6) - 2M^{-1}(x_1, x_4) M^{-1}(x_2, x_5) M^{-1}(x_3, x_6) \\
 & - 2M^{-1}(x_1, x_5) M^{-1}(x_2, x_3) M^{-1}(x_4, x_6) + 4M^{-1}(x_1, x_6) M^{-1}(x_2, x_5) M^{-1}(x_3, x_4) \} \\
 & C_{x_4} C_{x_5} C_{x_6}.
 \end{aligned}$$

Schreiben wir den Propagator in der Indexnotation, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 C_{(CT)}^{\alpha\alpha'}(\Delta t) &= -\varepsilon_{abc} \varepsilon_{a'b'c'} (CT)^{\beta\gamma} (CT)^{\beta'\gamma'} \\
 & \left(2M^{-1}_{x\beta b} M^{-1}_{y\delta'a'} M^{-1}_{y\epsilon'b'} - 4M^{-1}_{x\beta b} M^{-1}_{y\epsilon'b'} M^{-1}_{y\eta'c'} \right. \\
 & + M^{-1}_{y\delta'a'} M^{-1}_{x\gamma c} M^{-1}_{y\epsilon'b'} - 2M^{-1}_{y\delta'a'} M^{-1}_{y\epsilon'b'} M^{-1}_{y\eta'c'} \\
 & \left. - 2M^{-1}_{y\epsilon'b'} M^{-1}_{x\gamma c} M^{-1}_{y\delta'a'} + 4M^{-1}_{y\eta'c'} M^{-1}_{y\epsilon'b'} M^{-1}_{y\delta'a'} \right) \\
 & C^{\delta'\alpha'} C^{\epsilon'\beta'} C^{\eta'\gamma'} \\
 &= -\varepsilon_{abc} \varepsilon_{a'b'c'} (CT)^{\beta\gamma} (CT)^{\beta'\gamma'} \\
 & \left(2M^{-1}_{x\beta b} M^{-1}_{y\delta'a'} M^{-1}_{y\eta'c'} + 4M^{-1}_{x\beta b} M^{-1}_{y\epsilon'b'} M^{-1}_{y\delta'a'} \right. \\
 & + M^{-1}_{y\delta'a'} M^{-1}_{x\gamma c} M^{-1}_{y\epsilon'b'} - 2M^{-1}_{y\delta'a'} M^{-1}_{y\epsilon'b'} M^{-1}_{y\eta'c'} \\
 & \left. + 2M^{-1}_{y\epsilon'b'} M^{-1}_{x\gamma c} M^{-1}_{y\delta'a'} + 4M^{-1}_{y\eta'c'} M^{-1}_{y\epsilon'b'} M^{-1}_{y\delta'a'} \right) \\
 & C^{\delta'\alpha'} C^{\epsilon'\beta'} C^{\eta'\gamma'}.
 \end{aligned}$$

Nun resubstituieren wir

$$M^{-1}_{y\eta'c'} = -\Delta_{y\mu'c'}^{\alpha\alpha} C^{\mu'\eta'}$$

und verwenden

$$C^{\alpha\beta} C^{\beta\gamma} = -\delta^{\alpha\gamma} = -C^{\alpha\beta} C^{\gamma\beta}$$

um

$$\begin{aligned}
 C_{(CT)}^{\alpha\alpha'}(x, y) &= -\varepsilon_{abc} \varepsilon_{a'b'c'} (CT)^{\beta\gamma} (CT)^{\beta'\gamma'} \\
 & \left(-2\Delta_{x\epsilon b}^{\alpha\alpha} \Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c} \Delta_{y\gamma'c'}^{y\epsilon'b'} C^{\epsilon\beta} C^{\epsilon'\beta'} - 4\Delta_{x\epsilon b}^{\alpha\alpha} \Delta_{y\beta'b'}^{x\gamma c} \Delta_{y\alpha'a'}^{y\eta'c'} C^{\epsilon\beta} C^{\eta'\gamma'} \right. \\
 & - \Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha\alpha} \Delta_{x\eta c}^{x\beta b} \Delta_{y\gamma'c'}^{y\epsilon'b'} C^{\eta\gamma} C^{\epsilon'\beta'} - 2\Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha\alpha} \Delta_{y\beta'b'}^{x\beta b} \Delta_{y\gamma'c'}^{x\gamma c} \\
 & \left. - 2\Delta_{y\beta'b'}^{x\alpha\alpha} \Delta_{x\eta c}^{x\beta b} \Delta_{y\alpha'a'}^{y\eta'c'} C^{\eta\gamma} C^{\eta'\gamma'} + 4\Delta_{y\gamma'c'}^{x\alpha\alpha} \Delta_{y\beta'b'}^{x\beta b} \Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c} \right)
 \end{aligned}$$

zu erhalten. Damit haben wir einen *verbundenen* und einen *unverbundenen* Anteil des Korrelators¹

$$\begin{aligned}
C_{\text{Con}}^{\alpha\alpha'}(x, y) &= -\varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(CT)^{\beta\gamma}(CT)^{\beta'\gamma'} \\
&\quad \left(-2\Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\beta b}\Delta_{y\gamma'c'}^{x\gamma c} + 4\Delta_{y\gamma'c'}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c} \right) \\
&= \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(CT)^{\beta\gamma}(CT)^{\beta'\gamma'} \\
&\quad \left(2\Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\beta b}\Delta_{y\gamma'c'}^{x\gamma c} + 4\Delta_{y\beta'b'}^{x\alpha a}\Delta_{y\gamma'c'}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c} \right) \\
C_{\text{Disc}}^{\alpha\alpha'}(x, y) &= -\varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(CT)^{\beta\gamma}(CT)^{\beta'\gamma'} \\
&\quad \left(-2\Delta_{x\epsilon b}^{x\alpha a}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\epsilon' b'}C^{\epsilon\beta}C^{\epsilon'\beta'} - 4\Delta_{x\epsilon b}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\gamma c}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\eta' c'}C^{\epsilon\beta}C^{\eta'\gamma'} \right. \\
&\quad \left. - \Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{x\eta c}^{x\beta b}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\epsilon' b'}C^{\eta\gamma}C^{\epsilon'\beta'} - 2\Delta_{y\beta'b'}^{x\alpha a}\Delta_{x\eta c}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\eta' c'}C^{\eta\gamma}C^{\eta'\gamma'} \right) \\
&= \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(CT)^{\beta\gamma}(CT)^{\beta'\gamma'} \\
&\quad \left(2\Delta_{x\delta b}^{x\alpha a}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\gamma c}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\delta' b'}C^{\delta\beta}C^{\delta'\beta'} + 4\Delta_{x\delta b}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\gamma c}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\delta' c'}C^{\delta\beta}C^{\delta'\gamma'} \right. \\
&\quad \left. + \Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\delta' b'}C^{\delta\gamma}C^{\delta'\beta'} + 2\Delta_{y\beta'b'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\delta' c'}C^{\delta\gamma}C^{\delta'\gamma'} \right) \\
&= \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(CT)^{\beta\gamma}(CT)^{\beta'\gamma'} \\
&\quad \left(2\Delta_{x\delta b}^{x\alpha a}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\beta c}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\delta' b'}C^{\delta\gamma}C^{\delta'\gamma'} + 4\Delta_{x\delta b}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\beta c}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\delta' c'}C^{\delta\gamma}C^{\delta'\gamma'} \right. \\
&\quad \left. + \Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\delta' b'}C^{\delta\gamma}C^{\delta'\gamma'} + 2\Delta_{y\beta'b'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\delta' c'}C^{\delta\gamma}C^{\delta'\gamma'} \right) \\
&= \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(CT)^{\beta\gamma}(CT)^{\beta'\gamma'} \\
&\quad \left(2\Delta_{x\delta b}^{x\alpha a}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\beta c}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\delta' b'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} + 4\Delta_{x\delta b}^{x\alpha a}\Delta_{y\beta'b'}^{x\beta c}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\delta' c'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} \right. \\
&\quad \left. + \Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\gamma'c'}^{y\delta' b'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} + 2\Delta_{y\beta'b'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\delta' c'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} \right).
\end{aligned}$$

Dann verwenden wir noch die Symmetrie von CT , die es uns erlaubt, in den Propagator-Produkten $\beta(/ \beta')$ mit $\delta(/ \delta')$ zu vertauschen. Weiterhin gilt für die Transposition des Propagators

$$\Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}C^{\alpha\beta}C^{\alpha'\beta'} = (C^{-1}\Delta C)_{y\beta'a'}^{x\beta a} = \Delta_{x\beta a}^{y\beta'a'}.$$

¹Hier sprechen wir von einem *verbundenen* Anteil, wenn die Propagatoren mit paarweise verschiedenen Raumzeit-Indizes auftauchen und vom *unverbundenen* Anteil, wenn mindestens ein Propagator zwei identische Raumzeit-Indizes besitzt. Diese Nomenklatur lehnt sich an die der Mesonen-Propagatoren an.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 C_{\text{Disc}}^{\alpha\alpha'}(x, y) &= \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(CT)^{\beta\gamma}(CT)^{\beta'\gamma'} \\
 &\quad \left(2\Delta_{x\beta b}^{x\alpha a}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\delta c}\Delta_{y\beta'b'}^{y\delta'c'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} + 4\Delta_{x\beta b}^{x\alpha a}\Delta_{y\delta'b'}^{x\delta c}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\beta'c'}C^{\delta\gamma}C^{\delta'\gamma'} \right. \\
 &\quad \left. + \Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\beta'b'}^{y\delta'c'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} + 2\Delta_{y\delta'c'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\beta'b'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} \right). \\
 &= \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(CT)^{\beta\gamma}(CT)^{\beta'\gamma'} \\
 &\quad \left(2\Delta_{x\beta b}^{x\alpha a}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\delta c}\Delta_{y\beta'b'}^{y\delta'c'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} + 4\Delta_{x\beta b}^{x\alpha a}\Delta_{x\gamma c}^{y\gamma'b'}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\beta'c'} \right. \\
 &\quad \left. + \Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\beta'b'}^{y\delta'c'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} + 2\Delta_{y\delta'c'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\beta'b'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} \right). \\
 &= \varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(CT)^{\beta\gamma}(CT)^{\beta'\gamma'} \\
 &\quad \left(2\Delta_{x\beta b}^{x\alpha a}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\delta c}\Delta_{y\beta'b'}^{y\delta'c'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} + 4\Delta_{x\beta b}^{x\alpha a}\Delta_{x\gamma c}^{y\beta'b'}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\gamma'c'} \right. \\
 &\quad \left. + \Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\beta'b'}^{y\delta'c'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} + 2\Delta_{y\delta'c'}^{x\alpha a}\Delta_{x\delta c}^{x\beta b}\Delta_{y\alpha'a'}^{y\beta'b'}C^{\gamma\delta}C^{\delta'\gamma'} \right).
 \end{aligned}$$

Dies deckt sich mit den Ergebnissen aus [16]. Ist nun CT antisymmetrisch, sehen wir an Gleichung A.7.2, dass nur ein Term übrig bleibt, da die Vertauschungen von x_2 mit x_3 und die Vertauschungen von x_5 und x_6 ohne zusätzliches Vorzeichen möglich ist. Dieser Term ist dann

$$C_{\Gamma}^{\alpha\alpha'}(\Delta t) = -\varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'}(CT)^{\beta\gamma}(CT)^{\beta'\gamma'}\Delta_{y\alpha'a'}^{x\alpha a}\Delta_{x\gamma c}^{x\beta b}\Delta_{y\beta'b'}^{y\gamma'c'}. \quad (\text{A.7.3})$$

Literaturverzeichnis

- [1] http://www.uni-muenster.de/ZIV/Technik/Server/HPC_PALMA.html.
- [2] ATLAS COLLABORATION: *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*. Physics Letters B, 716:1–29, 2012.
- [3] BERGNER, G. et al.: *Simulation of 4-d $\mathcal{N} = 1$ supersymmetric yang-mills theory with Symanzik improved gauge action and stout smearing*. The European Physical Journal C, 69:147–157, 2010.
- [4] BERGNER, G. et al.: *The gluino-gluon particle and finite size effects in supersymmetric Yang-Mills theory*. Journal of High Energy Physics, 1209:108, 2012.
- [5] BERHEIDE, T.: *Volumen-Effekte in der $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität, 2012.
- [6] CMS COLLABORATION: *Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC*. Physics Letters B, 716:30–61, 2012.
- [7] COLEMAN, S. und MANDULA, J.: *All Possible Symmetries of the S Matrix*. Physical Review, 159:1251–1256, 1967.
- [8] CURCI, G. und VENEZIANO, G.: *Supersymmetry and the lattice: A reconciliation?*. Nuclear Physics B, 292:555–572, 1987.
- [9] DEGRAND, T. und DETAR, C.: *Lattice Methods for Quantum Chromodynamics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006.
- [10] DEMMOUCHE, K.: *$\mathcal{N} = 1$ SU(2) Supersymmetric Yang-Mills theory on the lattice with light dynamical Wilson gluinos*. Doktorarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität, 2009.
- [11] GATtringer, C. und LANG, C. B.: *Quantum Chromodynamics on the Lattice*. Springer, 2010.
- [12] HAAG, R.: *Local Quantum Physics - Fields, Particles, Algebras*. Springer, 1996.
- [13] HAAG, R., LOPUSZAŃSKI, J. T. und SOHNUS, M.: *All possible generators of supersymmetries of the S-matrix*. Nuclear Physics B, 88:257–274, 1975.
- [14] HIRZEBRUCH, F. und SCHARLAU, W.: *Einführung in die Funktionalanalysis*. Spektrum Akademischer Verlag, 1996.
- [15] JOHNSON, K. R.: *Darstellungstheorie der Überlagerungen der kubischen Gruppe in Anwendung auf Operatoren der $\mathcal{N} = 1$ SU(2) SUSY-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter*. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität, 2002.
- [16] KIRCHNER, R.: *Ward identities and mass spectrum $\mathcal{N} = 1$ SU(2) Super Yang-Mills theory on the lattice*. Doktorarbeit, Universität Hamburg, 2000.

- [17] LEINWEBER, D. B., MELNITCHOUK, W., RICHARDS, D. G., WILLIAMS, A. G. und ZANNOTTI, J. M.: *Baryon spectroscopy in lattice QCD*. Lecture Notes in Physics, 663:71–112. Springer, 2005.
- [18] LORENZ, F.: *Funktionentheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1997.
- [19] MONTVAY, I.: *An algorithm for gluinos on the lattice*. Nuclear Physics B, 466:259–281, 1996.
- [20] MONTVAY, I. und MÜNSTER, G.: *Quantum fields on a lattice*. Cambridge University Press, 1994.
- [21] MORNINGSTAR, C., BULAVA, J., FOLEY, J., JUGE, K. J., LENKNER, D., PEARDON, M. und WONG, C. H.: *Improved stochastic estimation of quark propagation with Laplacian Heaviside smearing in lattice QCD*. Phys. Rev. D, 83:114505–114523, 2011.
- [22] NAKAHARA, M.: *Geometry, Topology and Physics - Second Edition*. Taylor & Francis, 2003.
- [23] ROTHE, H. J.: *Lattice Gauge Theories - An Introduction*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1992.
- [24] SASAKI, K. und SASAKI, S.: *Excited Baryon Spectroscopy from Lattice QCD: Finite Size Effect and Hyperfine Mass Splitting*. Physical Review D, 72:034502–034515, 2005.
- [25] SMIT, J.: *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, 2002.
- [26] WEINBERG, S.: *The quantum theory of fields - Volume I: Foundations*. Cambridge University Press, 2010.
- [27] WEINBERG, S.: *The quantum theory of fields - Volume II: Modern Applications*. Cambridge University Press, 2010.
- [28] WEINBERG, S.: *The quantum theory of fields - Volume III: Supersymmetry*. Cambridge University Press, 2010.
- [29] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, 2007.
- [30] WILSON, K.: *Quarks and strings on a Lattice*. In: ZICHICHI, A. (Hrsg.): *New Phenomena in Subnuclear Physics*, Bd. A. Plenum Press, New York, 1975.
- [31] WUILLOUD, J.: *The Wilson-Dirac Operator Eigenspectrum for the Theories of QCD and Super Yang-Mills with One Flavour*. Doktorarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität, 2010.

Danksagung

Mein Dank geht an:

- Prof. G. Münster, der sich bei meinen spontanen Besuchen stets die Zeit genommen hat meine Fragen zu beantworten.
- Dr. J. Heitger, der so spontan die Aufgabe als Zweitkorrekteur übernommen hat.
- Meine Eltern Marion und André Sparenberg, die stets für mich da waren.
- Meinen Kommilitonen und Flurnachbarn Thomas, für aufbauende Gespräche und viele Ideen beim Kaffee trinken.
- Meinen Kommilitonen und Flurnachbarn Hendrik, für inspirierende Gespräche über die Natur von Raum, Zeit, die Physik dahinter und viele andere mehr oder weniger sinnvolle Themen.
- Michael und Sven, für ihre offenen Ohren bei Fragen mathematischer und formaler Natur.
- Dr. Georg Bergner, für das Programm und die viele Zeit für Fragen jeglicher Natur, die das Programm oder das Thema dieser Arbeit betrafen.
- Florian, Umut, Stefano, für viele Antworten und die Zeit etwas gutes zu Essen.
- Meine Büronachbarn Tobias und Feng, für ein ruhiges Arbeitsklima und gegebenenfalls ein offenes Ohr für Fragen und Antworten.
- Für das Korrekturlesen an meinen Vater, Thomas P., Florian, Katharina, Thomas Z., Matthias, ...
- Meine Freunde Christian und Michèle, die mir während der Masterarbeit mit viel Spaß beiseite standen und auch einen Ausgleich für diese Arbeit schafften.
- Alle die ich jetzt unbeabsichtigt vergessen habe ...
- Und nochmals Florian und Thomas Z., für Formulierungshilfen in letzter Sekunde.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Kai Sparenberg