

ENNO E. SCHOLZ

Das Abelsche Higgs-Modell in zwei Dimensionen



Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Das Abelsche Higgs-Modell in zwei Dimensionen

als Diplomarbeit vorgelegt von
Enno E. Scholz

Januar 2002



Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
Wilhelm-Klemm-Str. 9, D-48149 Münster

Nicht Kunst und Wissenschaft allein,
Geduld will bei dem Werke sein.
Ein stiller Geist ist jahrelang geschäftig,
Die Zeit nur macht die feine Gärung kräftig.

Johann Wolfgang von Goethe, *Faust - Eine Tragödie*

Dieses Exemplar unterscheidet sich von dem im Prüfungssekreteriat zur Bewertung vorgelegten durch einige Korrekturen. Neben orthographischen sowie stilistischen Verbesserungen ergab eine spätere Durchsicht einen Vorzeichenfehler in der Bestimmung der Selbstenergieanteile der Propgagatoren, welcher entscheidende Auswirkungen auf das Grenzwertverhalten ($\xi \rightarrow 0$) der renormierten Vakuumerwartungswerte in der R_ξ -Eichung hatte.

Münster, im März 2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	9
1 Quantenfeldtheorie	11
1.1 Lagrange-Formalismus	11
1.2 Erzeugende Funktionale	12
1.3 Störungstheorie	16
2 Eichtheorie	21
2.1 Globale und lokale Symmetrien	21
2.1.1 Spontan gebrochene globale Symmetrien	23
2.1.2 Spontan gebrochene lokale Symmetrien, Higgs-Mechanismus	25
2.2 Allgemeine Eichfixierung	27
2.2.1 Unabhängigkeit der renormierten S -Matrix von der Eichfixierung . .	29
2.2.2 BRST-Symmetrie	32
3 Abelsches Higgs-Modell, $D = 2$	37
3.1 Das Modell	37
3.2 Unitäre Eichung	38
3.2.1 Feynman-Regeln in der Unitären Eichung	38
3.2.2 Eigenschaften der Unitären Eichung	45
3.2.3 Power-Counting-Theorem	46
3.3 R_ξ -Eichung	48
3.3.1 Wahl der Eichfixierungsfunktion	48
3.3.2 Feynman-Regeln in der R_ξ -Eichung	50
3.3.3 Slavnov-Taylor-Identitäten	54
4 Regularisierung	61

4.1	Unitäre Eichung	62
4.1.1	Vakuum	62
4.1.2	Skalarfeld-Propagator	63
4.1.3	Eichfeld-Propagator	64
4.2	R_ξ -Eichung	65
4.2.1	Vakuum	65
4.2.2	ϕ_1 -Propagator	67
4.2.3	ϕ_2 -Propagator	70
4.2.4	Eichfeld-Propagator	73
4.2.5	Geistfeld-Propagator	76
4.2.6	ϕ_2 -Eichfeld-Mix-Propagator	78
5	Renormierung	81
5.1	Renormierungsverfahren	82
5.1.1	Renormierungsschema I	83
5.1.2	Renormierungsschema II (Polmasse)	83
5.2	Skalarfeld-Propagator	84
5.2.1	Unitäre Eichung	84
5.2.2	R_ξ -Eichung	87
5.3	Eichfeld-Propagator	91
5.3.1	Unitäre Eichung	91
5.3.2	R_ξ -Eichung	98
5.4	Geist-Propagator	104
5.5	Renormierung des Vakuumerwartungswertes	105
5.5.1	Renormierungsschema I	106
5.5.2	Renormierungsschema II (Polmasse)	107
6	Eichunabhängigkeit in einem Streuprozeß	109
Zusammenfassung und Ausblick		119
A	Gamma-Funktion und Dimensionelle Regularisierung	121
A.1	Gamma-Funktion	121
A.2	Gaußsche Integrale, Schwinger-Parametrisierung	122
A.3	Eulersche Beta-Funktion	122

A.4 Integralberechnung in beliebigen Dimensionen	123
A.4.1 Feynman-Parametrisierung	126
B Dimensionelle Regularisierung, Rechnungen	129
C Einige Integrale	143
C.1 Integrale mit einer Integrationsvariablen	143
C.2 Integrale mit zwei Integrationsvariablen	145
C.3 Integrale mit drei Integrationsvariablen	148
D Verschiedenes	153
D.1 Grassmann-Zahlen	153
D.2 Analytische Fortsetzung	155
Literaturverzeichnis	157

Einleitung

Die Vereinigung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung mit den Methoden der Eichtheorie im Weinberg-Salam-Modell der elektro-schwachen Wechselwirkung beruht auf einer spontan gebrochenen $SU(2) \times U(1)$ -Symmetrie. Aus diesem Grunde ist es lohnenswert, sich näher mit dem Higgs-Mechanismus zu befassen, der in diesem Modell die Massen sowohl der Eichbosonen (mit Ausnahme des Photons) als auch des Elektrons, des Myons und des Tauons (also der Leptonen mit Ausnahme der Neutrinos) erzeugt. Leider konnte das hierzu erforderliche Higgs-Boson bisher experimentell noch nicht nachgewiesen werden. Auch ist die Frage, ob es sich bei den Neutrinos tatsächlich um masselose Teilchen handelt, noch nicht eindeutig entschieden. Es mehren sich die Hinweise, die auf eine von Null verschiedene, endliche Neutrinomasse hindeuten. Weiter können in Higgs-Modellen durch die Betrachtung von Instanton-Lösungen Baryonenzahl-verletzende Prozesse festgestellt werden, welche in der Kosmologie die beobachtete Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie erklären könnten. In der Festkörperphysik lassen sich Higgs-Modelle auch zur theoretischen Beschreibung der Supraleitung verwenden.

Ausgangspunkt dieser Arbeit war ein gittertheoretischer Zugang (s. [33]) sowohl zum Abelschen Higgs-Modell in zwei Dimensionen als auch zum $SU(2)$ -Modell in vier Dimensionen ([18], auch [9]). Dort wurden mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen u.a. sogenannte topologische Observablen berechnet. Hierbei handelt es sich um mit Instanton-Lösungen des Modells verknüpfte Größen (s. dort, bzw. [7]). Um diese Ergebnisse (für den Abelschen, zwei-dimensionalen Fall) mit Ergebnissen von Rechnungen im Kontinuum vergleichen zu können, soll das Modell nun analytisch im Rahmen der Störungstheorie behandelt werden. Dabei lege ich in dieser Arbeit einen Schwerpunkt auf den Vergleich von Ergebnissen, welche ich mit unterschiedlichen Eichfixierungen erhalten habe. Die Fixierung der Eichung ist bei der störungstheoretischen Behandlung von Eichtheorien notwendigerweise durchzuführen. Es wird sich herausstellen, daß eine spezielle Eichfixierung, genauer die Unitäre Eichung, formal nicht renormierbar zu sein scheint, obwohl sie als Limes in einer Klasse von renormierbaren Eichungen, den R_ξ -Eichungen, enthalten ist. Dies ist insofern problematisch, da diese Eichung gerade für die oben erwähnte Gitter-Rechnung verwandt wurde. Ich werde (in der ersten Ordnung der Störungstheorie) zeigen, daß trotz dieser Umstände die betrachteten Größen, nämlich die Massen der physikalischen Teilchen, entweder unabhängig von der Eichung sind oder sich über die Grenzwertbildung vergleichen lassen. Für den sogenannten Vakuumerwartungswert gilt dies jedoch nicht. Da die Unitäre Eichung in den meisten Fällen komfortabler in der Durchführung zu sein scheint, ist die-

ses Ergebnis, hier erzielt für ein „Spielzeug-Modell“, durchaus auch im Hinblick auf das Weinberg-Salam-Modell von Interesse. Nichtsdestotrotz stellen die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen die Grundlage für eine Kontinuumsuntersuchung der Ergebnisse des Abelschen Higgs-Modell in [18] betreffend dar.

Zur Gliederung dieser Arbeit: Im ersten Kapitel stelle ich einige später benutzte Definitionen, Zusammenhänge und Methoden der Quantenfeldtheorie vor. Dabei verwende ich ausschließlich den Pfadintegralformalismus. Als nächstes wird die Eichtheorie diskutiert, wobei die Schwerpunkte hierbei der Higgs-Mechanismus, also die spontane Brechung lokaler Symmetrien, und die Eichfixierung bilden. Im Zusammenhang mit letzterem behandle ich ebenfalls die BRST-Symmetrie. Mit diesen Grundlagen ausgestattet werde ich anschließend das Abelsche Higgs-Modell in zwei Dimensionen (kurz: $D = 2$) sowohl in der Unitären als auch in der R_ξ -Eichung (einer formal renormierbaren Eichung) behandeln. Hierzu leite ich in den einzelnen Eichungen die Feynman-Regeln her. Als Motivation zur Einführung der R_ξ -Eichung wird das Renormierungsverhalten in der Unitären Eichung mit einem Power-Counting-Argument untersucht. Weiter gebe ich als eine Anwendung der BRST-Symmetrie die Slavnov-Taylor-Identitäten in der R_ξ -Eichung an. Das folgende Kapitel enthält die Regularisierung der aus den Feynman-Regeln erhaltenen Ausdrücke der Vakuumerwartungswerte und Propagatoren bis zur 1-Loop-Ordnung. Diese Berechnungen stellen einen Hauptteil meiner Arbeit dar. Als Regularisierungsverfahren verwende ich die Dimensionelle Regularisierung. Mit diesen Ergebnissen kann nun die Renormierung der Propagatoren nach zwei unterschiedlichen Schemata durchgeführt werden. Hierbei lege ich den Schwerpunkt auf den Vergleich der Ergebnisse in den unterschiedlichen Eichungen. Ebenfalls verglichen werden die Vakuumerwartungswerte. Hiernach folgt die Betrachtung eines Streuprozesses, womit ich die Eichunabhängigkeit eines sogenannten „physikalischen“ Prozesses demonstrieren möchte. Abschließend gebe ich eine Zusammenfassung meiner Ergebnisse und diskutiere weitere, noch zu untersuchende Aspekte dieses Themas.

Im Anhang findet sich eine Zusammenstellung der bei der Dimensionellen Regularisierung benutzten Formeln sowie eine kurze Herleitung(sskizze) derselben. Auch sind hier die Rechnungen zur Regularisierung genauer dokumentiert (im Hauptteil habe ich lediglich die Ergebnisse angegeben), hierzu gehört auch ein Abschnitt mit berechneten Integralausdrücken. Außerdem werden im Anhang noch Grassmann-Zahlen eingeführt sowie die benutzten analytischen Fortsetzungen angegeben.

Noch einige Bemerkung zur **Notation** in dieser Arbeit: ich habe stets eine Euklidische Raum-Zeit-Metrik verwandt (hervorgehend aus der Minkowski-Metrik durch eine Wick-Rotation) und in natürlichen Einheiten $\hbar = c = 1$ gerechnet (\hbar : Plancksches Wirkungsquantum dividiert durch 2π , c : Lichtgeschwindigkeit im Vakuum). Soweit nicht speziell auf anderes hingewiesen wird, beziehe ich mich stets auf eine zweidimensionale Raum-Zeit, d.h. je eine Zeit- und Ortskoordinate. In Feynman-Diagrammen sind die äußeren Impulse stets einlaufend notiert, alle weiteren ergeben sich durch Beschriftung und/oder Impulserhaltung an den Vertizes.

Kapitel 1

Einige Dinge aus der Quantentheorie der Felder

1.1 Lagrange-Formalismus

Der Lagrange-Formalismus basiert auf einem Extremalprinzip (siehe, auch zu den folgenden Themen dieses Kapitels, [21], [35], [38]). Zunächst wird über die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(\phi(x))$ für ein Feld $\phi(x)$ eine Wirkung S

$$S = \int d^2x \mathcal{L}(\phi(x)) \quad (1.1)$$

definiert, und gefordert, daß diese unter Variationen der Felder extremal wird:

$$\delta S = 0.$$

Den Zusammenhang mit der Bewegungsgleichung liefert die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0. \quad (1.2)$$

Für ein freies, komplexes Skalarfeld lautet die zur Klein-Gordon-Gleichung

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial_\mu - m^2)\phi &= 0 \\ (\partial_\mu \partial_\mu - m^2)\phi^* &= 0 \end{aligned}$$

gehörige Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 + m^2 |\phi|^2,$$

allgemeiner für ein Potential, welches auch Wechselwirkungsterme beinhalten kann:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 + V(|\phi|). \quad (1.3)$$

Bereits an dieser Stelle möchte ich darauf hinweisen, daß bei der Behandlung von lokalen Eichtheorien die Ableitung ∂_μ durch die kovariante Ableitung D_μ zu ersetzen sein wird (s. Abschn. 2.1).

1.2 Erzeugende Funktionale

Das erzeugende Funktional $Z[J, J_\mu]$ der Greenschen Funktionen ist durch ein Funktionalintegral

$$Z[J_{\mathbb{R}}, J_\mu] = \int \mathcal{D}\phi_{\mathbb{R}} \mathcal{D}A_\mu \exp \int d^2x (-\mathcal{L}(\phi_{\mathbb{R}}(x), A_\mu(x)) + J_{\mathbb{R}}(x)\phi_{\mathbb{R}}(x) + J_\mu(x)A_\mu(x)) \quad (1.4)$$

definiert. Hierbei sind $J_{\mathbb{R}}$ und J_μ die Quellen des Skalarfeldes $\phi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. des Vektorfeldes $A_\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Desweiteren soll ein komplexes Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ betrachtet werden. Dieses kann äquivalent zu zwei unabhängigen Skalarfeldern, $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, behandelt werden. In dieser Arbeit wird die Zerlegung

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i\phi_2(x)) \quad (1.5)$$

gewählt. Dies führt zu folgenden Ersetzungen im erzeugenden Funktional¹

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\phi_{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathcal{D}\phi_1 i \mathcal{D}\phi_2 = \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \\ J_{\mathbb{R}}(x)\phi_{\mathbb{R}}(x) &\longrightarrow J_1(x)\phi_1(x) + J_2(x)\phi_2(x) = 2\operatorname{Re}(J^*(x)\phi(x)) \\ &= J^*(x)\phi(x) + J(x)\phi^*(x) \\ \text{mit: } J(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (J_1(x) + iJ_2(x)), \end{aligned}$$

so daß dieses nun wie folgt lautet:

$$\begin{aligned} Z[J, J^*, J_\mu] &= \\ &= \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \mathcal{D}A_\mu \exp \int d^2x \left(-\mathcal{L}(\phi(x), \phi^*(x), A_\mu(x)) + J^*(x)\phi(x) + J(x)\phi^*(x) + J_\mu(x)A_\mu(x) \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Da in dieser Arbeit sowohl reelle als auch komplexe Skalarfelder behandelt werden sollen, werden in diesem und dem folgenden Abschnitt beide Typen nebeneinander betrachtet. Man achte auf die Unterscheidung zwischen $\phi_{\mathbb{R}}$ und ϕ !

Mit der Einführung der Wirkung (vgl. (1.1))

$$\begin{aligned} S(\phi_{\mathbb{R}}, A_\mu) &= \int d^2x \mathcal{L}(\phi_{\mathbb{R}}(x), A_\mu(x)) \\ \text{bzw. } S(\phi, A_\mu) &= \int d^2x \mathcal{L}(\phi(x), A_\mu(x)) \end{aligned}$$

¹ beachte bei der Integration der Differentialformen:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\phi_1 i \mathcal{D}\phi_2 &= -i \mathcal{D}\phi_2 \mathcal{D}\phi_1 \\ \mathcal{D}\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{D}\phi + \mathcal{D}\phi^*) &\quad \mathcal{D}\phi_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} (\mathcal{D}\phi - \mathcal{D}\phi^*) \\ \mathcal{D}\phi_2 \mathcal{D}\phi_1 = -\frac{i}{2} (\mathcal{D}\phi^2 - \mathcal{D}\phi^{*2} + \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^* - \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi) &= i \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \end{aligned}$$

also:

$$\mathcal{D}\phi_1 i \mathcal{D}\phi_2 = \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi$$

folgt zunächst für den Fall eines reellen Skalarfeldes bzw. für das reelle Vektorfeld:

$$Z[J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}] = \int \mathcal{D}\phi_{\mathbb{R}} \mathcal{D}A_{\mu} \exp \left\{ -S + \int d^2x (J_{\mathbb{R}}(x)\phi_{\mathbb{R}}(x) + J_{\mu}(x)A_{\mu}(x)) \right\}. \quad (1.7)$$

Betrachtet man nun die beiden Identitäten:

$$\frac{\delta}{\delta J_{\mathbb{R}}(y)} \exp \left\{ \int d^2x J_{\mathbb{R}}(x)\phi_{\mathbb{R}}(x) \right\} = \phi_{\mathbb{R}}(y) \exp \left\{ \int d^2x J_{\mathbb{R}}(x)\phi_{\mathbb{R}}(x) \right\} \quad (1.8)$$

$$\frac{\delta}{\delta J_{\mu}(x)} \exp \left\{ \int d^2x J_{\mu}(x)A_{\mu}(x) \right\} = A_{\mu}(x) \exp \left\{ \int d^2x J_{\mu}(x)A_{\mu}(x) \right\}, \quad (1.9)$$

so folgen für die 1-Punkt-Greensfunktionen:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\mathbb{R}}(x) \rangle &= \frac{1}{Z_0} \frac{\delta Z[J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}]}{\delta J_{\mathbb{R}}(x)} \Big|_{J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}=0} \\ \langle A_{\mu}(x) \rangle &= \frac{1}{Z_0} \frac{\delta Z[J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}]}{\delta J_{\mu}(x)} \Big|_{J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}=0} \\ \text{mit: } Z_0 &= Z[0, 0]. \end{aligned}$$

Des Weiteren sei allgemein definiert:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\mathbb{R}}(x) \rangle_{J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}} &= \frac{1}{Z_0} \frac{\delta Z[J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}]}{\delta J_{\mathbb{R}}(x)} \\ \langle A_{\mu}(x) \rangle_{J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}} &= \frac{1}{Z_0} \frac{\delta Z[J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}]}{\delta J_{\mu}(x)}. \end{aligned}$$

Die höheren Greensfunktionen erhält man nach:

$$\begin{aligned} \langle A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \phi_{\mathbb{R}}(x_{n+1}) \dots \phi_{\mathbb{R}}(x_{n+m}) \rangle &= \\ \frac{1}{Z_0} \frac{\delta^{n+m}}{\delta J_{\mu_1}(x_1) \dots \delta J_{\mu_n}(x_n) \delta J_{\mathbb{R}}(x_{n+1}) \dots \delta J_{\mathbb{R}}(x_{n+m})} Z[J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}] \Big|_{J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}=0}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

woraus sich auch die Namensgebung „erzeugendes Funktional“ erklärt. Es sei an dieser Stelle auf die Analogie zwischen dem hier definierten erzeugenden Funktional und der Zustandssumme in der Statistischen Physik bei der Berechnung von Erwartungswerten hingewiesen:

$$\langle F \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi_{\mathbb{R}} \mathcal{D}A_{\mu} F e^{-S}}{\int \mathcal{D}\phi_{\mathbb{R}} \mathcal{D}A_{\mu} e^{-S}} = \frac{\int \mathcal{D}\phi_{\mathbb{R}} \mathcal{D}A_{\mu} F e^{-S}}{Z_0}.$$

Das erzeugende Funktional W für die zusammenhängenden Greensfunktionen $\langle A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \phi_{\mathbb{R}}(x_{n+1}) \dots \phi_{\mathbb{R}}(x_{n+m}) \rangle_c$ ist durch

$$W = \ln \frac{Z}{Z_0} \quad (1.11)$$

gegeben, woraus sich die zusammenhängenden Greensfunktionen analog zu (1.10) berechnen:

$$\begin{aligned} & \langle A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \phi_{\mathbb{R}}(x_{n+1}) \dots \phi_{\mathbb{R}}(x_{n+m}) \rangle_c = \\ & \frac{\delta^{n+m}}{\delta J_{\mu_1}(x_1) \dots \delta J_{\mu_n}(x_n) \delta J_{\mathbb{R}}(x_{n+1}) \dots \delta J_{\mathbb{R}}(x_{n+m})} W[J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}] \Big|_{J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}=0}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Dieser Zusammenhang zwischen den erzeugenden Funktionalen Z und W lässt sich wie folgt verstehen: Im Funktional Z sind alle Vakuum-zu-Vakuum-Amplituden enthalten, sowohl die verbundenen als auch die unverbundenen. Sei nun W dasjenige Funktional, welches lediglich die zusammenhängenden („connected“) Anteile enthält. Eine beliebige Greensfunktion kann stets in ihre zusammenhängenden und getrennten Anteile zerlegt werden, also lässt Z sich schreiben als:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} W^n = \exp W,$$

da in Z die Beiträge, welche durch Permutation von inneren Vertizes auseinander hervorgehen, nicht nur einfach gezählt werden.

Die Einteilchen-irreduziblen (1PI) Greensfunktionen lassen sich aus der Legendre-Transformierten von W , der *effektiven Wirkung*:

$$\Gamma[\langle \phi_{\mathbb{R}} \rangle_{c, J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}}, \langle A_{\mu} \rangle_{c, J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}}] = W[J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}] - \int d^2x (\langle J_{\mathbb{R}}(x) \phi_{\mathbb{R}}(x) \rangle_{c, J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}} + J_{\mu}(x) \langle A_{\mu}(x) \rangle_{c, J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}}) \quad (1.13)$$

wiederum für $n, m \geq 3$ analog zu (1.10) berechnen (der besseren Übersichtlichkeit wegen hier lediglich für die Quelle notiert: J):

$$\begin{aligned} & \langle A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \phi_{\mathbb{R}}(x_{n+1}) \dots \phi_{\mathbb{R}}(x_{n+m}) \rangle_{1\text{PI}} = \\ & \frac{\delta^{n+m}}{\delta \langle A_{\mu_1}(x_1) \rangle_{c,J} \dots \delta \langle \phi_{\mathbb{R}}(x_{n+m}) \rangle_{c,J}} \Gamma[\langle \phi_{\mathbb{R}} \rangle_{c,J}, \langle A_{\mu} \rangle_{c,J}] \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Speziell gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)} G_c^{(2)} &= -1 \\ \Gamma_{\mu\lambda}^{(2)} G_{c,\lambda\nu}^{(2)} &= -\delta_{\mu\nu} \\ \text{mit:} \\ \Gamma^{(2)} &= \langle \phi_{\mathbb{R}}(x_1) \phi_{\mathbb{R}}(x_2) \rangle_{1\text{PI}} & G_c^{(2)} &= \langle \phi_{\mathbb{R}}(x_1) \phi_{\mathbb{R}}(x_2) \rangle_c \\ \Gamma_{\mu\nu}^{(2)} &= \langle A_{\mu}(x_1) A_{\nu}(x_2) \rangle_{1\text{PI}} & G_{c,\mu\nu}^{(2)} &= \langle A_{\mu}(x_1) A_{\nu}(x_2) \rangle_c. \end{aligned}$$

Es sei noch bemerkt, daß gilt (im folgenden stehe ϕ allgemein für eine Feldkomponente):

$$\frac{\partial \Gamma[\langle \phi \rangle_{c,J}]}{\partial \langle \phi \rangle_{c,J}} = -J.$$

Hieraus folgt, daß sich die möglichen Werte für die externen Felder in Abwesenheit äußerer Quellen ($J = 0$) als die stationären Punkte der effektiven Wirkung ergeben. Weiter läßt sich über die effektive Wirkung das sogenannte *effektive Potential* V definieren:

$$\Gamma[\phi_0] = -\mathcal{V} V(\phi_0), \quad (1.15)$$

wobei ϕ_0 unabhängig von den Raum-Zeit-Koordinaten sei, und \mathcal{V} das Volumen der Raumzeit meine. Dieses Potential muß als eine Energiedichte interpretiert werden (s. z.Bsp. [7], Kap. 5 oder [44], Kap. 16.3). Zu dieser Einsicht gelangt man, indem man den Effekt einer adiabatisch ein- und wieder ausgeschalteten Quelle J betrachtet (d.h. zu den Zeiten $t = \pm\infty$ gelte $J = 0$, dazwischen sei für eine Zeit $T \gg 1$ $J \neq 0$, der Übergang erfolge hinreichend glatt). Da der Anfangs- wie auch der Endzustand hierbei der Vakuumzustand ist, dem System aber eine Energie $E[J]$ zugeführt wurde, kann der Unterschied nur in der effektiven Wirkung dieser Zustände bestehen. Man erhält:

$$W[J] = -E[J]T.$$

Bestimmt man nun mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren denjenigen normierten Zustand, der den Erwartungswert $\langle H \rangle$ der Energie des Systems minimiert und in welchem die Felder einen bestimmten (zeitunabhängigen) Erwartungswert besitzen, so findet man

$$\langle H \rangle = -\frac{1}{T} \Gamma[\phi] \quad (1.16)$$

und für ein konstantes ϕ

$$\Gamma[\phi] = -\mathcal{V}_{\text{Raum}} T V(\phi), \quad (1.17)$$

wobei $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\text{Raum}} T$. Aus diesen Überlegungen folgt weiter, daß das Vakuum nicht nur ein stationärer Punkt von Γ sondern sogar ein Minimum sein muß.

Der Beweis, daß sich aus Γ die Ein-Teilchen-irreduziblen Anteile ergeben, sei hier kurz skizziert (s. [44]): Man betrachte das Funktional für die zusammenhängenden Greensfunktionen $W_\Gamma[J, g]$ welches man aus der Wirkung

$$S = g^{-1} \Gamma[\langle \phi \rangle_{c,J}]$$

erhält. Die Propagatoren (2-Punkt-Funktionen) aus dieser Wirkung sind proportional zu g , jeder Vertex zu g^{-1} . Die Anzahl der Schleifen (Loops) in einem Diagramm L erhält man aus der Anzahl der inneren Propagatoren I und der Vertizes V als

$$L = I - V + 1,$$

also ist der L -Loop Beitrag proportional zu g^{L-1} . Man schreibt nun formal:

$$W_\Gamma = \sum_{L=0}^{\infty} g^{L-1} W_\Gamma^{(L)}.$$

Gesucht ist demnach der Baumgraphen („tree“)-Anteil $W_\Gamma^{(0)}$. Dieser ergibt sich aus dem Limes $g \rightarrow 0$, da hier der Wert des Pfadintegral im wesentlichen durch den Wert am

stationären Punkt gegeben ist. Durch Vergleich der Terme nullter Ordnung in g läßt sich nun zeigen, daß gilt

$$W = \int_{\text{zusammenhängende Baumgraphen}} \mathcal{D}\phi(x) \exp\{\Gamma[\phi(x)] + \int d^2x \phi(x) J(x)\},$$

daß also in Γ bereits alle 1PI-Subgraphen enthalten sind.

Ebenso läßt sich nun der Fall des komplexen Skalarfeldes behandeln. Analog zur Identität (1.8) gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J(y)} \exp \left\{ \int d^2x \left(J^*(x)\phi(x) + J(x)\phi^*(x) \right) \right\} &= \\ &= \phi^*(y) \exp \left\{ \int d^2x \left(J^*(x)\phi(x) + J(x)\phi^*(x) \right) \right\} \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta J^*(y)} \exp \left\{ \int d^2x \left(J^*(x)\phi(x) + J(x)\phi^*(x) \right) \right\} &= \\ &= \phi(y) \exp \left\{ \int d^2x \left(J^*(x)\phi(x) + J(x)\phi^*(x) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Dabei kann das aus der Theorie der komplexen Funktionen bekannte Wirtinger-Kalkül (vgl. z.Bsp. [13]) direkt auf die Funktionalableitungen angewandt werden. Entsprechend erhält man wie oben die 1-Punkt- und höheren Greensfunktionen, sowie die zusammenhängenden und 1PI Greensfunktionen. An dieser Stelle sei nur noch einmal notiert:

$$\begin{aligned} < A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \phi(x_{n+1}) \dots \phi(x_{n+m}) \phi^*(x_{n+m+1}) \dots \phi^*(x_{n+m+l}) > = \\ &\frac{\delta^{n+m+l}}{\delta J_{\mu_1}(x_1) \dots \delta J_{\mu_n}(x_n) \delta J^*(x_{n+1}) \dots \delta J^*(x_{n+m}) \delta J(x_{n+m+1}) \dots \delta J(x_{n+m+l})} \frac{Z[J, J^*, J_\mu]}{Z_0} \Big|_{J, J^*, J_\mu=0}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

1.3 Störungstheorie

Zur konkreten Bestimmung der n -Punkt-Greensfunktionen kann eine perturbative Vorgehensweise benutzt werden. Hierzu wird die Lagrange-Dichte zerlegt in einen Anteil $\mathcal{L}_{\text{quad}}$, der die Terme bis zur quadratischen Ordnung in den Feldern enthält, sowie den Wechselwirkungsanteil \mathcal{L}_{int} :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{quad}} + \mathcal{L}_{\text{int}}. \quad (1.21)$$

Hiermit schreibt sich das erzeugende Funktional (1.7) mit $S_{\text{quad}} = \int d^2x \mathcal{L}_{\text{quad}}$

$$\begin{aligned} Z[J_{\mathbb{R}}, J_\mu] &= \int \mathcal{D}\phi_{\mathbb{R}} \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ - \int d^2x \mathcal{L}_{\text{int}} \right\} \cdot \\ &\quad \exp \left\{ -S_{\text{quad}} + \int d^2x (J_{\mathbb{R}}(x)\phi_{\mathbb{R}}(x) + J_\mu(x)A_\mu(x)) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \int d^2x \mathcal{L}_{\text{int}} \left[\frac{\delta}{\delta J_{\mathbb{R}}(x)}, \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \right] \right\} Z_{\text{quad}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\text{mit: } Z_{\text{quad}} = \int \mathcal{D}\phi_{\mathbb{R}} \mathcal{D}A_\mu \exp \left\{ - \int d^2x (\mathcal{L}_{\text{quad}} - J_{\mathbb{R}}(x)\phi_{\mathbb{R}}(x) - J_\mu(x)A_\mu(x)) \right\} \quad (1.23)$$

bzw. entsprechend für den Fall eines komplexen Skalarfeldes. Die Störungsreihe erhält man nun, durch die Entwicklung von

$$\exp \left\{ - \int d^2x \mathcal{L}_{\text{int}} \left[\frac{\delta}{\delta J_{\mathbb{R}}(x)}, \frac{\delta}{\delta J_{\mu}(x)} \right] \right\}$$

in eine Potenzreihe. Hierbei hat sich die nach R.P. Feynman benannte Methode der Feynman-Diagramme (siehe z. Bsp. [35], [38], [42], [43] oder andere) als äußerst komfortabel handhabbar erwiesen. Bei Z_{quad} handelt es sich um ein Gaußsches Funktionalintegral, dessen Berechnung nun skizziert werden soll. Der Einfachheit halber werde angenommen, daß die Felder $\phi_{\mathbb{R}}(x)$ bzw. $\phi(x)$ und $A_{\mu}(x)$ im quadratischen Anteil der Lagrange-Dichte entkoppelt sind (d.h. es treten keine Mischterme auf, für den Fall daß dies nicht gegeben ist, sind die gekoppelten Felder gemeinsam als Komponenten eines Feldes zu behandeln). Dann gilt:

$$\begin{aligned} Z_{\text{quad}} [J_{\mathbb{R}}, J_{\mu}] &= Z_{\text{quad}, \phi_{\mathbb{R}}} [J_{\mathbb{R}}] \cdot Z_{\text{quad}, G} [J_{\mu}] \\ Z_{\text{quad}} [J, J^*, J_{\mu}] &= Z_{\text{quad}, \phi} [J, J^*] \cdot Z_{\text{quad}, G} [J_{\mu}] \end{aligned}$$

mit:

$$\begin{aligned} Z_{\text{quad}, \phi_{\mathbb{R}}} [J_{\mathbb{R}}] &= \int \mathcal{D}\phi_{\mathbb{R}} \exp \left\{ - \int d^2x (\mathcal{L}_{\text{quad}, \phi_{\mathbb{R}}} - J_{\mathbb{R}}(x)\phi_{\mathbb{R}}(x)) \right\} \\ Z_{\text{quad}, \phi} [J, J^*] &= \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d^2x (\mathcal{L}_{\text{quad}, \phi} - J^*(x)\phi(x) - J(x)\phi^*(x)) \right\} \\ Z_{\text{quad}, G} [J_{\mu}] &= \int \mathcal{D}A_{\mu} \exp \left\{ - \int d^2x (\mathcal{L}_{\text{quad}, G} - J_{\mu}(x)A_{\mu}(x)) \right\}. \end{aligned}$$

Schreibt man nun die Wirkung mit Hilfe des Operators K bzw. $K_{\mu\nu}$

$$S_{\text{quad}, \phi_{\mathbb{R}}} = \int d^2x \frac{1}{2} \phi_{\mathbb{R}} K \phi_{\mathbb{R}} \quad (1.24)$$

$$S_{\text{quad}, \phi} = \int d^2x \phi^* K \phi \quad (1.25)$$

$$S_{\text{quad}, G} = \int d^2x \frac{1}{2} A_{\mu} K_{\mu\nu} A_{\nu} \quad (1.26)$$

und bezeichnet mit Δ bzw. $\Delta_{\mu\nu}$ die zugehörigen Propagatoren (auch: Feynman-Operatoren, 2-Punkt-Greensfunktionen), welche die inversen Operatoren zu K bzw. $K_{\mu\nu}$ sind:

$$K \Delta = \delta, \quad K_{\mu\lambda} \Delta_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad (1.27)$$

so folgt nach kurzer Rechnung, welche nachfolgend jeweils für das reelle und das komplexe Skalarfeld skizziert ist:

$$\begin{aligned} Z_{\text{quad}, \phi_{\mathbb{R}}} [J_{\mathbb{R}}] &= Z_{\text{quad}, \phi_{\mathbb{R}}} [0] \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^2x \int d^2y J_{\mathbb{R}}(x) \Delta(x-y) J_{\mathbb{R}}(y) \right\} \\ Z_{\text{quad}, \phi} [J, J^*] &= Z_{\text{quad}, \phi} [0, 0] \cdot \exp \left\{ \int d^2x \int d^2y J^*(x) \Delta(x-y) J(y) \right\} \\ Z_{\text{quad}, G} [J_{\mu}] &= Z_{\text{quad}, G} [0] \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^2x \int d^2y J_{\mu}(x) \Delta_{\mu\nu}(x-y) J_{\nu}(y) \right\}. \end{aligned}$$

Die Rechnung für die einzelnen Komponenten des Vektorfeldes verläuft analog zu der des reellen Skalarfeldes.

Komplexes Skalarfeld: Zunächst betrachtet man eine Transformation des Skalarfeldes $\phi \rightarrow \phi + \phi_0$:

$$\begin{aligned} \int d^2x (\phi^* K \phi - J^* \phi - J \phi^*) &= \\ &= \int d^2x (\phi_0^* K \phi_0 + \phi^* K \phi + \phi^* K \phi_0 + \phi_0^* K \phi - J^* \phi - J^* \phi_0 - J \phi_0^* - J \phi^*) \\ &= \int d^2x (J \phi_0^* + \phi^* K \phi + J \phi^* + J^* \phi - J^* \phi_0 - J \phi_0^* - J \phi^*) \\ &= \int d^2x (\phi^* K \phi - J^* \phi_0) \\ &= \int d^2x (\phi^* K \phi - J^* \Delta J). \end{aligned}$$

Hierbei wurde das Feld ϕ_0 so gewählt, daß es der Gleichung²

$$K \phi_0 = J \text{ bzw. } \phi_0 = \Delta J$$

genügt. Desweiteren wurde

$$\int d^2x \phi_0^* K \phi = \int d^2x \phi K \phi_0^*$$

ausgenutzt. Schlußendlich folgt:

$$\begin{aligned} Z_{\text{quad},\phi}[J, J^*] &= \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \exp \left\{ - \int d^2x (\phi^*(x) K \phi(x) - J^*(x) \Delta J(x)) \right\} \\ &= Z_{\text{quad}}[0, 0] \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int d^2x J^*(x) \Delta J(x) \right\}. \end{aligned}$$

Reelles Skalarfeld: Die Vorgehensweise läuft analog:

$$\begin{aligned} \int d^2x \left(\frac{1}{2} \phi_{\mathbb{R}} K \phi_{\mathbb{R}} - J_{\mathbb{R}} \phi_{\mathbb{R}} \right) &= \\ &= \int d^2x \left(\frac{1}{2} \phi_{\mathbb{R}} K \phi_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2} \phi_{\mathbb{R},0} K \phi_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2} \phi_{\mathbb{R},0} K \phi_{\mathbb{R},0} + \frac{1}{2} \phi_{\mathbb{R}} K \phi_{\mathbb{R},0} - J_{\mathbb{R}} \phi_{\mathbb{R},0} - J_{\mathbb{R}} \phi_{\mathbb{R}} \right) \\ &= \int d^2x \left(\frac{1}{2} \phi_{\mathbb{R}} K \phi_{\mathbb{R}} + J_{\mathbb{R}} \phi_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2} J_{\mathbb{R}} \phi_{\mathbb{R},0} - J_{\mathbb{R}} \phi_{\mathbb{R},0} - J_{\mathbb{R}} \phi_{\mathbb{R}} \right) \\ &= \int d^2x \left(\frac{1}{2} \phi_{\mathbb{R}} K \phi_{\mathbb{R}} - \frac{1}{2} J_{\mathbb{R}} \phi_{\mathbb{R},0} \right) \\ &= \int d^2x \frac{1}{2} (\phi_{\mathbb{R}} K \phi_{\mathbb{R}} - J_{\mathbb{R}} \Delta J_{\mathbb{R}}) \end{aligned}$$

²beachte: $\Delta J(x) = \int d^2y \Delta(x-y) J(y)$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} Z_{\text{quad}, \phi_{\mathbb{R}}}[0] &= \int \mathcal{D}\phi_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^2x \phi_{\mathbb{R}} K \phi_{\mathbb{R}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det K}} \end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{quad}, \phi}[0, 0] &= \int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi \exp \left(- \int d^2x \phi^* K \phi \right) \\ &= \frac{1}{\det K} \end{aligned} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{quad, G}}[0] &= \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^2x A_\mu K_{\mu\nu} A_\nu \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det K_{\mu\nu}}} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Kapitel 2

Eichtheorie

2.1 Globale und lokale Symmetrien

Unter einer Eichtheorie versteht man zunächst allgemein eine Theorie, deren zugrundeliegende Lagrange-Dichte unter einer Transformation, genauer einer Eichtransformation, der Felder invariant bleibt. In dieser Arbeit werde ich nicht die aus einer Transformation der Raum-Zeit-Koordinaten resultierenden Energie-Impuls-Relationen diskutieren (s. z. Bsp. [38]). Es verbleibt nun, zwei Fälle zu unterscheiden:

Globale Symmetrien, d.h. hierbei hängt die Transformation der Felder nicht von den Raum-Zeit-Koordinaten ab, das zu transformierende Feld wird überall, also *global*, um denselben Anteil verschoben. Hierfür ist auch die Bezeichnung „Eichtransformation erster Art“ gebräuchlich.

Lokale Symmetrien, d.h. die Transformation der Felder ist von den Raum-Zeit-Koordinaten abhängig. Man spricht auch von einer „Eichtransformation zweiter Art“ oder nur von einer „Eichtransformation“.

Ein wichtiger Aspekt dieser Invarianz unter Transformationen ist es, daß sich über das Noether-Theorem (s. [25] oder [38]) global bzw. lokal erhaltene Ströme und dazugehörige Ladungen einführen lassen. Beispiele hierfür sind die Quantenelektrodynamik, in welcher die Ladung eine lokal erhaltene Größe darstellt, oder verschiedene Modelle, die die Leptonenzahl erhalten.

Zunächst ist eine allgemeine Vorüberlegung zu den Symmetrien der effektiven Wirkung anzustellen. Gegeben sei eine Symmetrietransformation der Felder ϕ , welche die Wirkung S sowie das Integrationsmaß $\mathcal{D}\phi$ einzeln invariant lässt oder vereinfachend an dieser Stelle: $\int \mathcal{D}\phi e^{-S}$ sei invariant. Die Frage ist nun, unter welcher Symmetrietransformation die effektive Wirkung invariant bleibt. Die Antwort hierauf erhält man durch die Forderung, das erzeugende Funktional sei invariant unter der ursprünglichen Transformation. Hieraus ergeben sich die sogenannten *Slavnov-Taylor-Identitäten*, die die gesuchte Transformation der effektiven Wirkung bestimmen (vgl. [44], Kap. 16.4). Speziell für eine lineare Trans-

formation der Felder

$$\phi^a \longrightarrow \phi^{a'} = \phi^a + \epsilon(\varphi^a + T^{ab}\phi^b)$$

ergibt sich dieselbe Symmetrietransformation auch für die Effektive Wirkung. Im folgenden sei dieser Fall stets vorausgesetzt, also lediglich lineare Transformationen betrachtet!

Dem Schwerpunkt dieser Arbeit folgend möchte ich nun noch etwas genauer auf die lokale Eichinvarianz eingehen. Als einfaches Beispiel bietet sich hier auch schon eine Abelsche (also kommutative) Symmetriegruppe an, nämlich eine $U(1)$ -Transformation, d.h. die Gruppe der Unitären Matrizen in einer Dimension:

$$\phi \longrightarrow \phi' = \exp[-i\alpha(x)] \phi(x) = \left(1 - i\alpha(x) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right) \phi. \quad (2.1)$$

Nun ist es erforderlich, eine *kovariante Ableitung* D_μ einzuführen, welche sich ebenso wie das Skalarfeld ϕ selber transformiert. Dies geschieht mit Hilfe des *Eichfeldes* A_μ :

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (2.2)$$

Das Eichfeld transformiere sich wie folgt:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) + \mathcal{O}(\alpha^2). \quad (2.3)$$

Man bezeichnet e als die Kopplungskonstante. Die Feldstärke $F_{\mu\nu}$ ist definiert als:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.4)$$

Diese Größe ist selbst eichinvariant. Der kinetische Term der Eichfelder in der Lagrange-Dichte ist:

$$\mathcal{L}_{\text{kin, G}} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Der Vollständigkeit halber seien hier noch die entsprechenden Zusammenhänge für die nicht Abelsche Symmetriegruppe der speziellen unitären Matrizen in N Dimensionen, das ist die Gruppe $SU(N)$, angegeben (vgl. [34]):

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \phi' = \exp[-iT^a\alpha^a(x)] \phi \\ D_\mu &= \partial_\mu - ieT^a A_\mu^a \\ A_\mu^a &\rightarrow A_\mu^{a'} = A_\mu' + f_{abc}\alpha^b(x)A_\mu^c - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha^a(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + ef^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \end{aligned}$$

wobei T^a die Generatoren der Transformation und f^{abc} die Strukturkonstanten sind:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c.$$

Auf zwei Dinge sei an dieser Stelle verwiesen: Das Einführen eines Massentermes für das Eichfeld, welcher von der Gestalt $m^2 A_\mu^2$ sein müßte, verträgt sich nicht mit der Eichinvarianz der Lagrange-Dichte. Deshalb wird die Masse des Eichfeldes über den Higgs-Mechanismus, also eine spontane Symmetriebrechung, eingeführt (siehe die beiden folgenden Abschnitte). Des Weiteren bringt die Eichinvarianz der Wirkung Probleme bei der störungstheoretischen Formulierung im Pfadintegralformalismus mit sich. Deshalb ist eine sogenannte Fixierung der Eichung vorzunehmen (siehe Abschnitt 2.2).

2.1.1 Spontan gebrochene globale Symmetrien

Von einer global gebrochenen Symmetrie spricht man, falls der Vakuumzustand nicht symmetrisch unter der globalen Transformation ist, welche die Wirkung invariant lässt: Sei G eine lineare Transformation, mit

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}(G\phi)$$

also auch

$$\Gamma[\phi] = \Gamma[G\phi],$$

und ϕ_0 ein Vakuumzustand, so ist eine Symmetrie gebrochen, falls gilt:

$$G\phi_0 \neq \phi_0.$$

Ein einfaches Beispiel bietet hier das folgende Potential für ein reelles (eindimensionales) Skalarfeld $\phi(x)$:

$$V(\phi) = m^2\phi^2 + g\phi^4.$$

Es sei $g > 0$. Dann hängt die Potentialform im wesentlichen vom Vorzeichen von m^2 ab (s. Abb. 2.1). Das Potential ist stets invariant unter der Transformation $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$, doch dies gilt nur für $m^2 \geq 0$ auch für den Vakuumzustand (das ist in diesem Fall natürlich $\phi_0 = 0$). Im Fall $m^2 < 0$ gibt es zwei (entartete) Vakuumzustände, die sich zwar durch diese Symmetrietransformation ineinander überführen lassen, aber eben nicht gleich sind.

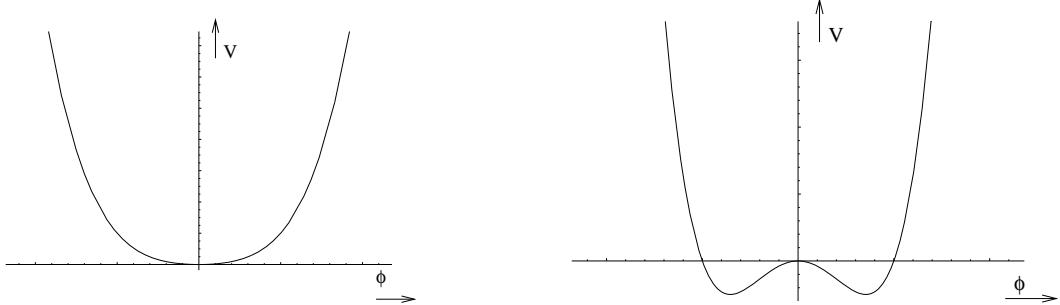


Abbildung 2.1: Potential $V(\phi)$ für $m^2 \geq 0$ (links) und $m^2 < 0$ (rechts)

Der Vakuumzustand einer Theorie ist durch das Minimum von $-\Gamma$ gegeben: wie oben bereits erwähnt wurde, muss dieser Zustand ein stationärer Punkt von Γ sein:

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi} \right|_{\phi=\phi_0} = 0.$$

Die Forderung nach einem Minimum folgt aus der Energie-Interpretation der effektiven Wirkung. Eine weitere Frage, die sich in diesem Zusammenhang stellt, hängt mit dem Auftreten mehrerer, entarteter Vakuumzustände zusammen: Ist in diesem Fall der gesuchte Zustand eine Superposition mehrerer oder aller Vakuumzustände? Dies ist nicht der Fall, da jeder lokale Operator diagonalisierbar in der Basis dieser Zustände ist ([44]).

Um nun die Konsequenzen einer global gebrochenen Symmetrie in einer quantisierten Feldtheorie zu besprechen, ist es zweckmäßig, das effektive Potential zu benutzen (s. [7], Kap. 5). Für den Fall einer lorentz- und translationsinvarianten Theorie kann man von konstanten Feldern ausgehen, man erhält:

$$\mathcal{V} V_{\text{eff}}(\phi) = -\Gamma[\phi].$$

Hierbei ist \mathcal{V} ein Faktor für das Raumzeit-Volumen. Man fordert nun also:

$$\left. \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi} \right|_{\phi=\phi_0} = 0.$$

Die Invarianz der effektiven Wirkung unter der linearen (globalen) Transformation

$$G : \phi_n \rightarrow \phi_n + i\epsilon T_{nm} \phi_m,$$

wobei iT eine reelle Matrix sei, schreibt sich nun mit dem effektiven Potential:

$$\sum_{nm} \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi_n} T_{nm} \phi_m = 0.$$

Hieraus erhält man durch erneutes Differenzieren und Ausnutzung der Definition des Vakuumzustandes ϕ_0 (vgl. [44]):

$$\sum_{nm} \left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial \phi_n \partial \phi_l} \right|_{\phi=\phi_0} T_{nm}(\phi_0)_m = 0.$$

Dies ist trivialerweise erfüllt, falls der Vakuumzustand unverändert unter der Symmetrietransformation G bleibt, also $T_{nm}(\phi_0)_m = 0$. Diese eventuell vorhandene ungebrochene Untergruppe der Symmetriegruppe G sei im folgenden mit H bezeichnet. Für Symmetrien der verbleibenden Nebengruppe G/H besagt die obige Gleichung, daß $T\phi_0$ ein Eigenvektor mit Eigenwert 0 der Matrix $\left. \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial \phi_n \partial \phi_l} \right|_{\phi=\phi_0}$ ist. Nun soll argumentiert werden, daß diesen Eigenvektoren Teilchen der Masse $m=0$ entsprechen, die sogenannten *Goldstone-Bosonen*. Wie oben bereits notiert, entspricht der inverse Propagator gerade der negativen 1PI-2-Punkt-Funktion der effektiven Wirkung. Die Masse eines Teilchen ist durch die Polstelle seines Propagators bzw. die Nullstelle des inversen Propagators gegeben, also für den Wert von p , welcher die folgende Gleichung löst:

$$\Delta_{nl}^{-1}(p^2) = \int d^2x e^{ip(x-y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_n \delta \phi_l}(x, y) = 0.$$

Setzt man hier nun $p = 0$, so ist dieses gleichbedeutend mit der Differentiation nach konstanten Feldern ϕ (vgl. [35]), und man kann für Γ das effektive Potential V_{eff} schreiben:

$$\Delta_{nl}^{-1}(0) = \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial \phi_n \partial \phi_l},$$

hiermit folgt

$$\sum_n \Delta_{nl}^{-1}(0) (T\phi_0)_n = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß den Eigenvektoren, die den Eigenwert Null besitzen, Polstellen bei $p = 0$ von $\Delta(p)$ entsprechen.

Zusammenfassen läßt sich dies im *Goldstone-Theorem* (s. z.Bsp. [25], auch bezeichnet als Nambu-Goldstone-Theorem), nach dem zu jeder unabhängig gebrochenen Symmetrie ein masseloses Boson gehört. Die Anzahl dieser Goldstone-Bosonen ist demnach gegeben durch:

$$\text{Anzahl(Goldstone-Bosonen)} = \dim G/H = \dim G - \dim H.$$

Zur Erinnerung: G bezeichne die volle globale Symmetriegruppe der Wirkung, H die Untergruppe, welche den Vakuumzustand invariant läßt.

2.1.2 Spontan gebrochene lokale Symmetrien, Higgs-Mechanismus

Im Gegensatz zu den bisher behandelten globalen Symmetrien werden nun die *lokalen* betrachtet. Diese zeichnen sich durch eine Abhängigkeit der Transformation von den Raum-Zeit-Koordinaten ab: $G = G(x)$. Auch hier wird wiederum der Fall einer linearen Transformation angenommen:

$$G(x) : \phi_n \rightarrow \phi_n + i\epsilon(x)T_{nm}\phi_m,$$

wobei die Abhängigkeit von den Raum-Zeit-Koordinaten durch den Transformationsparameter $\epsilon(x)$ gegeben ist. Es wird sich herausstellen, daß in diesem Fall die Goldstone-Bosonen der global gebrochenen Theorie als massive Vektorteilchen erscheinen. Dies bezeichnet man als den *Higgs-Mechanismus*¹.

Für die nun folgende Betrachtung vgl. [44], siehe auch [28]. Um das Eichfeld zu quantisieren, ist es notwendig, eine Eichung (z. Bsp. Unitäre, R_ξ -, Feynman- oder Landau-Eichung) durch eine Eichvorschrift zu wählen, um die zusätzlichen Freiheitsgrade der Theorie zu reduzieren (s. Abschnitt 2.2). Die folgende Betrachtung geschieht am einfachsten in der Unitären Eichung, welche in der Forderung besteht, daß die Skalarfelder nach der Eichfixierung $\tilde{\phi}$ senkrecht auf den Goldstone-Feldern stehen:

$$0 = \sum_n \tilde{\phi}_n (T\phi_0)_n.$$

Nun betrachte man die Beiträge aus dem kinetischen Term der Skalarfelder

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(D_\mu \tilde{\phi})^2 = \frac{1}{2} \sum_n \left(\partial_\mu \tilde{\phi}_n - ie A_\mu T_{nm} \tilde{\phi}_m \right)^2,$$

entwickelt um den Vakuumerwartungswert ϕ_0 :

$$\tilde{\phi} =: \phi' + \phi_0$$

bis zur quadratischen Ordnung:

$$\mathcal{L}_{\text{kin,quad}} = \frac{1}{2} \left((\partial_\mu \phi')^2 + M^2 A_\mu^2 \right)$$

¹nach P.W. Higgs, wie S. Coleman in [7], Kap.5 erwähnt, wurde dieser „Mechanismus“ jedoch unabhängig von Brout, Englert, Guralnik, Hagen, Higgs und Kibble entdeckt.

mit der Massenmatrix

$$M^2 := -e^2 \sum_{nml} T_{nm} T_{nl} (\phi_0)_m (\phi_0)_l,$$

für den Fall mehrerer Generatoren T^α (und somit auch mehrerer Eichfelder A_μ^α):

$$(M^2)_{\alpha\beta} := -e^2 \sum_{nml} T_{nm}^\alpha T_{nl}^\beta (\phi_0)_m (\phi_0)_l.$$

Aufgrund der Unitären Eichung entsteht kein Term ϕA . Da die Matrix T imaginär und antisymmetrisch gewählt war, ist M^2 reell, symmetrisch und positiv semi-definit (für $e^2 \geq 0$, hier stets angenommen) und hängt von der Kopplung des Eichfeldes ab. Man betrachte nun zunächst den Fall, daß eine Symmetrie ungebrochen bleibt, im einfachsten Fall gehört diese ungebrochene Symmetrie direkt zu einem der Generatoren und es folgt sofort, daß das zugehörige Eichboson masselos bleibt. Dies gilt auch für den Fall, daß die ungebrochene Symmetrie zu einer Linearkombination von Generatoren $a_\alpha T^\alpha$ gehört, also gilt:

$$\sum_\alpha a_\alpha T_\alpha \phi_0 = 0.$$

Es folgt nämlich:

$$\sum_\alpha (M^2)_{\alpha\beta} a_\alpha = -e^2 \sum_{\alpha nml} T_{nm}^\alpha T_{nl}^\beta (\phi_0)_m (\phi_0)_l a_\alpha = 0.$$

Umgekehrt gilt auch, zu jedem masselosen Eichboson gehört eine ungebrochene Symmetrie:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\beta} (M^2)_{\alpha\beta} a_\alpha a_\beta &= -e^2 \sum_{\alpha\beta nml} a_\alpha T_{nm}^\alpha (\phi_0)_m a_\beta T_{nl}^\beta (\phi_0)_l \\ &= e^2 \sum_n \sum_{\alpha m} \left(i a_\alpha T_{nm}^\alpha (\phi_0)_m \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(Anmerkung: hieraus folgt auch: M^2 positiv semi-definit) wobei die Gleichheit nur für

$$\sum_{\alpha m} a_\alpha T_{nm}^\alpha (\phi_0)_m = 0,$$

nämlich eine ungebrochene Symmetrie, gelten kann, q.e.d..

Somit gehört zu jeder spontan gebrochenen Symmetrie ein massives Eichfeld. Wichtig hierbei ist, daß diese Masse dynamisch über den Higgs-Mechanismus erzeugt wurde, und nicht durch Einfügen eines Massentermes ($\propto m^2 A_\mu^2$) in die Lagrange-Dichte, was die Eichinvarianz der Wirkung zerstört hätte. Diese Eichinvarianz bleibt hier erhalten und somit auch deren Konsequenzen (erhaltene Ströme und Ladungen).

Es sei an dieser Stelle bereits darauf hingewiesen, daß sich das Renormierungsverhalten des Eichfeld-Propagators in der Unitären Eichung als ungünstig erweisen wird, weshalb der Higgs-Mechanismus auch noch in einer *Renormierbaren Eichung*, hier der R_ξ -Eichung, betrachtet werden wird.

2.2 Allgemeine Eichfixierung

Das Hauptproblem bei der Formulierung lokaler Eichtheorien im Pfadintegralformalismus besteht in der Integration über sogenannte Eichorbits. Die einer solchen Theorie zugrunde gelegte Eichinvarianz der Lagrange-Dichte bzw. der Wirkung führt dazu, daß sämtliche Feldkonfigurationen (A_μ^G, ϕ^G) , welche aus (A_μ, ϕ) durch eine Transformation G hervorgehen, denselben Beitrag zum Pfadintegral leisten. Man spricht in diesem Zusammenhang vom *Eichorbit* (A_μ, ϕ) . Dieser gesamte Eichorbit ist bereits in dem Pfadintegral $\int \mathcal{D}A_\mu$ enthalten und bewirkt bei Anwendung der Störungstheorie, da hier die Propagatoren zunächst nur aus den quadratischen Anteilen bestimmt werden, einen divergenten Anteil. Dies wird durch eine Eichfixierung behoben, indem man durch eine Eichbedingung aus jedem dieser Orbits nur einen Repräsentanten auswählt. In der Unitären Eichung (siehe vorheriger Abschnitt sowie 3.2.1) lautet die Eichbedingung z. Bsp. $\omega' = 0$ (die Phase des komplexen Skalarfeldes wird durch eine Eichtransformation überall zu Null gewählt, hieraus ergibt sich dann auch das Vektorfeld B_μ , bzw. das Skalarfeld stehe senkrecht auf den Goldstone-Feldern). Bei einer allgemeinen Eichfixierung geschieht nun diese Festlegung der Eichung durch eine Eichfixierungsfunktion $F(A_\mu, \phi)$, z. Bsp. durch die Forderung

$$F(A_\mu, \phi) - a = 0,$$

die für die auszuwählenden Konfigurationen erfüllt sein soll. Hierbei sei a eine beliebige Funktion der Raum-Zeit-Koordinaten. Diese Überlegungen sollen nun etwas ausführlicher dargestellt werden (vgl. hierzu [1], aber auch [44], Kap. 15).

Die Skalarfelder ϕ_i transformieren sich unter G nach

$$\phi \rightarrow \phi' = (1 + i\epsilon_\alpha(x)T_\alpha)\phi.$$

Eine Eichfixierung sei wie oben erläutert durch

$$F_\alpha(A_\mu, \phi) - a_\alpha = 0,$$

gegeben, mit der Bedingung, daß, für A_μ und ϕ gegeben,

$$F_\alpha(A_\mu^g, \phi^g) - a_\alpha = 0$$

eine eindeutige Lösung $g \in G$ besitze (mit A_μ^g bzw. ϕ^g bezeichne ich die aus A_μ bzw. ϕ durch die Transformation g hervorgegangenen Felder). Nun setze man die Identität

$$1 = \int \mathcal{D}g \delta(F(A_\mu^g, \phi^g)) \det \left(\frac{\delta F(A_\mu^g, \phi^g)}{\delta g} \right) \quad (2.6)$$

in das Pfadintegral über die Wirkung ein:

$$\int \mathcal{D}g \det(M_F) \delta(F_\alpha(A_\mu^g, \phi^g) - a_\alpha) \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\phi e^{-S(A_\mu, \phi)},$$

wobei

$$M_{F\alpha\beta} = \left. \frac{\delta F_\alpha(A_\mu^g, \phi^g)}{\delta \epsilon_\beta} \right|_{\epsilon=0}$$

ist, also beschreibt $\det M_F$ die Jacobi-Determinante der Transformation g . Aufgrund der Eichinvarianz läßt sich nun zeigen, daß sich in diesem Integral über die Wirkung gerade der Eichorbit (also das Funktionalintegral über sämtliche Eichtransformationen) als divergenter Anteil faktorisieren läßt:

$$\left(\int \mathcal{D}g \right) \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\phi \det(M_F) \delta(F_\alpha(A_\mu, \phi) - a_\alpha) e^{-S(A_\mu, \phi)}.$$

Über die beliebige Funktion a_α kann nun noch eine Gauß-Integration durchgeführt werden:

$$\int \mathcal{D}a_\alpha e^{-\frac{1}{2} \int d^2x a_\alpha^2},$$

so daß sich das erzeugende Funktional ohne den oben separierten divergenten Faktor nun schreibt:

$$Z_F[J, J_\mu] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\phi \det M_F e^{-\int d^2x (\mathcal{L} + \frac{1}{2}F_\alpha^2 - J_\mu A_\mu - J\phi)}. \quad (2.7)$$

Hieraus wird ersichtlich, daß die Eichfixierung gerade in dem Hinzufügen eines *Eichfixierungstermes* (**Gauge Fixing Term**)

$$\mathcal{L}_{GF} = \frac{1}{2}F_\alpha^2$$

zur Lagrange-Dichte besteht. Wie in Anhang D.1 gezeigt wird, läßt sich die Determinante über komplexe Grassmannfelder \bar{c} und c , sogenannte Geistfelder, durch die Einführung eines **Faddeev-Popov-Termes**²

$$\mathcal{L}_{FP} = \bar{c} M_F c$$

in die Lagrangedichte behandeln. Diese Felder beschreiben unphysikalische Teilchen (eben „Geister“), da sie die Dynamik eines skalaren Feldes besitzen aber antivertauschend (Grassmann-Felder) sind. Demzufolge können sie nicht als Anfangs- oder Endzustände auftreten sondern lediglich in Schleifenbeiträgen. Es bleibt nun u.a., neben der noch zu zeigenden Unabhängigkeit der Ergebnisse von der speziellen Wahl der Eichfixierung, noch der Beweis ungeführt, daß auch ohne diese unphysikalischen Felder die Streumatrix unitär bleibt. Dies ist deshalb entscheidend, da nur dann gewährleistet ist, daß sich aus einer Anfangskonfiguration ohne Geist-Felder ein Endzustand entwickelt, der ebenfalls nur physikalische Felder enthält. Hierauf werde ich nach Einführung der BRST-Symmetrie in Abschn. 2.2.2 weiter eingehen. Nachdem zunächst kurz dargestellt werden soll, wie die Eichfixierungsfunktion in einem Modell mit gebrochener Symmetrie allgemein günstig gewählt werden kann, wird im folgenden Abschnitt auf die Unabhängigkeit der aus dem erzeugenden Funktional gewonnenen Ergebnisse von der Wahl der Fixierung eingegangen.

Wählt man die Eichfixierungsfunktion so, daß eine renormierbare Theorie entsteht und die Eichfixierung noch von einem (reellen, nicht-negativen) Parameter ξ abhängt, so spricht man von einer R_ξ -Eichung. In [1] wird eine solche Eichfixierungsfunktion für den allgemeinen Fall einer spontan-gebrochenen, nicht Abelschen Theorie angegeben. Diese Wahl zeichnet sich unter anderem dadurch aus, daß bis zur quadratischen Ordnung keine Mischung in den einzelnen Feldern stattfindet. Dieses Verfahren wird in Abschn. 3.3 auch benutzt werden, um eine renormierbare Formulierung des Abelschen Higgs-Modells in zwei Dimensionen aufzustellen.

²nach L.D. Faddeev und V.N. Popov, siehe z. Bsp. Literaturhinweise in [1] oder [25]

2.2.1 Unabhängigkeit der renormierten S -Matrix von der Eichfixierung

In diesem Abschnitt soll unabhängig von der im folgenden Abschnitt behandelten BRST-Symmetrie gezeigt werden, daß die durch ein wie oben beschrieben eichfixiertes Modell erhaltenen Ergebnisse nicht von der Wahl der Eichfixierung abhängen. Hierzu bediene ich mich, abweichend von den übrigen Teilen dieser Arbeit, der unter anderem in [1] benutzten Notation, welche die Skalar- und Eichfelder zusammenfassend als ϕ_a bezeichnet. Der Index a stehe für $\alpha = 1, \dots, N$ für die Erzeugenden der Symmetriegruppe G (nicht notwendig Abelsch), und für $i = 1, \dots, K$ für die skalaren Felder der Theorie. Die eichtransformierte Größe schreibt sich nun

$$\phi_a^g = \phi_a + [\Gamma_{ab}^\alpha \phi_b + \Lambda_a^\alpha] \epsilon_\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.8)$$

Um mit dieser Notation beispielsweise die schon erwähnte lokale $U(1)$ -Symmetrie³ eines (komplexen) Skalarfeldes ϕ zu beschreiben, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \phi_a &= \begin{cases} \phi & , a = 0 \\ A_\mu & , a = 1 \end{cases} \\ \Gamma_{0b}^1 &= -i\delta_{0b} \\ \Lambda_1^1 &= -\frac{1}{e}\partial_\mu \end{aligned}$$

(nicht aufgeführte Komponenten von Γ bzw. Λ sind gleich null).

Das erzeugende Funktional, hervorgegangen aus einer Fixierung über die Funktion F , ist:

$$Z_F[J] = \int \mathcal{D}\phi \det M_F e^{-S[\phi] - \frac{1}{2}F_\alpha^2 + J_a \phi_a},$$

wobei die Eichfixierungsfunktion an dieser Stelle nur bis zur ersten Ordnung betrachtet wird (vgl. hierfür und für folgendes: [1], [28]):

$$F_\alpha(\phi^g) = F_\alpha(\phi) + M_{F\alpha\beta}\epsilon_\beta + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Für die hier präsentierte Argumentation sind zunächst die *Ward-Takahashi-Identitäten*, auch als *Slavnov-Taylor-Identitäten* bezeichnet, herzuleiten. Diese erhält man aus der Invarianz von Z_F unter Änderung der Integrationsvariablen. Hierbei beschränkt man die möglichen Transformationen mittels der Bedingung

$$M_{F\alpha\beta}\epsilon_\beta = \lambda_\alpha = \text{const.}$$

³Als weiteres Beispiel sei noch eine $SU(N)$ -Yang-Mills-Theorie mit N Eichfeldern und K Skalarfeldern aufgeführt:

$$\begin{aligned} \phi_a &= \begin{cases} A_\mu^\alpha & , \alpha = 1, \dots, N \\ \psi^i & , a = 1, \dots, K \end{cases} \\ \Lambda_a^\alpha &= \delta_a^\alpha \partial_\mu \\ \Gamma_{ab}^\alpha &= \begin{cases} f_{ab}^\alpha & , a, b \in \{\alpha\} \\ T_{ab}^\alpha & , a, b \in \{i\} \end{cases} \end{aligned}$$

Also legt λ im wesentlichen die Eichtransformation fest. Weiter folgen aus dieser Bedingung:

$$\begin{aligned}\epsilon_\alpha &= (M_F^{-1})_{\alpha\beta} \lambda_\beta = \epsilon_\alpha(\phi) \\ F_\alpha(\phi^g) &= F_\alpha(\phi) + \lambda_\alpha + \mathcal{O}(\lambda^2).\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (s. [30])

$$\mathcal{D}\phi \det M_F(\phi) = \mathcal{D}\phi^g \det M_F(\phi^g)$$

(i.a. gilt *nicht* unbedingt $\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\phi^g$ und $\det M_F(\phi) = \det M_F(\phi^g)$) folgt aus der Unabhängigkeit des erzeugenden Funktionals von der Integrationsvariablen, also

$$\frac{\delta}{\delta \lambda_\alpha} Z_F = 0,$$

und der Invarianz der Wirkung die gesuchte Ward-Takahashi-Identität

$$0 = \left\{ F_\alpha \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] + J_a \left(\Gamma_{ab}^\beta \frac{\delta}{\delta J_b} + \Lambda_a^\beta \right) \left(M_F^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right)_{\beta\alpha} \right\} Z_F[J]. \quad (2.9)$$

Ein anderer Weg zu diesen Identitäten führt über die noch zu besprechende BRST-Symmetrie. Hierauf gehe ich Abschn. 2.2.2 sowie genauer bei der konkreten Anwendung auf das Abelsche Higgs Modell ($D = 2$) in Abschn. 3.3.3 ein.

Es lässt sich weiter zeigen, daß der Term $(M_F^{-1} [\frac{\delta}{\delta J}])_{\beta\alpha} Z_F[J]$ gerade dem Geist-Propagator entspricht:

$$\left(M_F^{-1} \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] \right)_{\beta\alpha} Z_F[J] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} c_\beta \bar{c}_\alpha e^{-S - \frac{1}{2} F_\alpha^2 + \bar{c}_\beta M_F c_\alpha + J_a \phi_a}.$$

Nun wird die Änderung ΔZ des erzeugenden Funktionals unter einer Änderung der Eichfixierung

$$F_\alpha \longrightarrow F_\alpha + \Delta F_\alpha$$

betrachtet. Benutze hierbei:

$$\begin{aligned}\det M_{F+\Delta F} &= \det \left\{ \left(\frac{\delta F_\alpha}{\delta \phi_a} + \frac{\delta \Delta F_\alpha}{\delta \phi_a} \right) \left(\Gamma_{ab}^\beta \phi_b + \Lambda_a^\beta \right) \right\} \\ &= \det M_F \left(1 + \frac{\delta \Delta F_\alpha}{\delta \phi_a} \left(\Gamma_{ab}^\beta \phi_b + \Lambda_a^\beta \right) (M_F^{-1})_{\beta\alpha} + \mathcal{O}((\Delta F)^2) \right).\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\Delta Z &= Z_{F+\Delta F} - Z_F \\ &= \int \mathcal{D}\phi \det M_F e^{-S - \frac{1}{2} F_\alpha^2 + J_a \phi_a} \left\{ F_\alpha \Delta F_\alpha + \frac{\delta \Delta F_\alpha}{\delta \phi_a} \left(\Gamma_{ab}^\beta \phi_b + \Lambda_a^\beta \right) (M_F^{-1})_{\beta\alpha} \right\}.\end{aligned}$$

Man wende nun $\Delta F_\alpha [\frac{\delta}{\delta J}]$ auf die Ward-Takahashi-Identität (2.9) an und erhält bei Beachtung von

$$\Delta F_\alpha \left[\frac{\delta}{\delta J} \right] J_a e^{J_a \phi_a} = e^{J_a \phi_a} \left\{ J_a \Delta F_\alpha(\phi) + \frac{\delta \Delta F_\alpha(\phi)}{\delta \phi_a} \right\}$$

die Identität:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \det M_F e^{-S - \frac{1}{2}F_\alpha^2 + J_a\phi_a} \left\{ F_\alpha \Delta F_\alpha + \left[J_a \Delta F_\alpha(\phi) + \frac{\delta \Delta F_\alpha(\phi)}{\delta \phi_a} \right] \left(\Gamma_{ab}^\beta \phi_b + \Lambda_a^\beta \right) (M_F^{-1})_{\beta\alpha} \right\}.$$

Somit erhält man für die Änderung des erzeugenden Funktionalen:

$$\Delta Z = \int \mathcal{D}\phi \det M_F e^{-S - \frac{1}{2}F_\alpha^2 + J_a\phi_a} J_a \Delta F_\alpha(\phi) \left(\Gamma_{ab}^\beta \phi_b + \Lambda_a^\beta \right) (M_F^{-1})_{\beta\alpha}$$

und in erster Ordnung in ΔF :

$$Z_{F+\Delta F} = \int \mathcal{D}\phi \det M_F e^{-S - \frac{1}{2}F_\alpha^2 + J_a \{ \phi_a + (\Gamma_{ab}^\alpha \phi_b + \Lambda_a^\alpha)(M_F^{-1})_{\alpha\beta} \Delta F_\beta \}}.$$

Damit resultiert aus einer Änderung der Eichfixierungsfunktion eine zusätzliche Kopplung an die äußeren Quellen. Bei der Berechnung der S -Matrix Elemente sind lediglich die amputierten n -Punkt-Greensfunktionen auf der Massenschale von Bedeutung. Es soll nun gezeigt werden, daß die oben auftretende zusätzliche Kopplung an die Quellen die renormierte S -Matrix unverändert läßt (vgl. [31]). Dieser Zusammenhang wird in [21] als „equivalence theorem“ beschrieben. Man betrachte zum einen das erzeugende Funktional (N : Normierungsfaktor)

$$Z_J[J] = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-S + \int d^n x J(x)\phi(x) \right]$$

und zum anderen Z_j , wo zusätzlich eine Kopplung, hier beschrieben durch eine Funktion der Felder $h(\phi)$, an die Quelle j besteht:

$$j \left(\phi + h(\phi) \right) = j H(\phi)$$

$$\begin{aligned} Z_j[j] &= N \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-S + \int d^n x j(x) H(\phi(x)) \right] \\ &= \exp \left[\int d^n x j(x) H \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z_J[J]. \end{aligned}$$

Es lassen sich also die von Z_j erzeugten n -Punkt-Greensfunktionen durch diejenigen, welche von Z_J erzeugt werden, ausdrücken. Die 2-Punkt-Greensfunktionen aus Z_J bzw. Z_j besitzen jeweils Pole bei der gleichen Masse $p^2 = -m_R^2$, da speziell auch Δ_j durch die 2-Punkt- und höheren Greensfunktionen von Z_J beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \lim_{p^2 \rightarrow -m_R^2} \Delta_J &= \frac{Z_J^R}{p^2 + m_R^2} \\ \lim_{p^2 \rightarrow -m_R^2} \Delta_j &= \frac{Z_j^R}{p^2 + m_R^2} \end{aligned}$$

(vgl. Kap. 5), wobei Z^R die jeweilige Renormierungskonstante bezeichne. Man definiere nun das Verhältnis der beiden Renormierungskonstanten:

$$\sigma = \frac{Z_j^R}{Z_J^R} = \frac{\lim_{p^2 \rightarrow -m_R^2} \Delta_j}{\lim_{p^2 \rightarrow -m_R^2} \Delta_J}$$

und betrachte die aus Z_j erhaltene, unrenormierte S -Matrix

$$S_j^u(k_1, \dots) = \prod_i \lim_{k_i^2 \rightarrow -m_R^2} (k_i^2 + m_R^2) G_j(k_1, \dots),$$

wobei G_j die aus Z_j erzeugte n-Punkt-Greensfunktion ist. Es wird deutlich, daß nur diejenigen Anteile von G_j nach der Grenzwertbildung noch vorhanden sind, die in allen Impulsvariablen k_i Pole besitzen, also gilt (N sei die Anzahl der äußeren Felder):

$$S_j^u = \sigma^{\frac{N}{2}} S_J^u$$

bzw.:

$$S = (Z_j^R)^{-\frac{N}{2}} S_j^u = (Z_J^R)^{-\frac{N}{2}} S_J^u.$$

Also sind die *renormierten* S -Matrix-Elemente einer durch die Funktion F eichfixierten Theorie

$$S = \frac{S_F}{\prod_l (Z_F^R)^{\frac{1}{l}}}$$

unabhängig von der gewählten Eichung!

2.2.2 Becchi-Rouet-Stora-Tyutin-Symmetrie

Die eichfixierte Lagrange-Dichte bzw. die daraus resultierende Wirkung besitzt zwar keine lokale Eichinvarianz mehr (dies war ja gerade das Ziel, um die Pfadintegralmethode störungstheoretisch anwenden zu können), jedoch kann noch eine globale Symmetrie, die nach Becchi, Rouet, Stora und Tyutin⁴ benannte **BRST**-Symmetrie, ausgemacht werden.

Vorbereitend wird das Eichfixierungsfunktional (an dieser Stelle bereits mit dem später einzuführendem Eichparameter ξ geschrieben)

$$\exp \left[-\frac{\xi}{2} \int d^D x F^2 \right]$$

formal einer Fourier-Transformation unterzogen, das hierbei benutzte Hilfsfeld h wird als *Nakanishi-Lautrup-Feld* bezeichnet:

$$\int \mathcal{D}h \exp \left[\frac{1}{2\xi} \int d^D x h^2 \right] \exp \left[- \int d^D x Fh \right],$$

so daß sich die Wirkung nun schreibt:

$$S = - \int d^D x \left(\mathcal{L} + \mathcal{L}_{FP} - hF - \frac{1}{2\xi} h^2 \right)$$

(man beachte hier die Verwendung einer Euklidischen Metrik im Gegensatz zu z. Bsp. [25] oder [44]). Die BRST-Transformation δ_θ wird nach [44] allgemein eingeführt: hierbei

⁴in der Literatur wird der letzte Urheber teilweise nicht genannt, also nur von der BRS-Symmetrie gesprochen, siehe die Literaturangaben in [35]

sei θ eine infinitesimale Grassmann-Konstante, d.h. antivertauschend mit den Geistfeldern sowie eventuell vorhandenen Fermionfeldern.

$$\delta_\theta \phi = iT_\alpha \theta c_\alpha \phi \quad (2.10)$$

$$\delta_\theta A_{\alpha\mu} = \theta D_\mu c_\alpha \quad (2.11)$$

$$\delta_\theta \bar{c}_\alpha = -\theta h_\alpha \quad (2.12)$$

$$\delta_\theta c_\alpha = -\frac{1}{2}\theta f_{\alpha\beta\gamma} c_\beta c_\gamma \quad (2.13)$$

$$\delta_\theta h_\alpha = 0 \quad (2.14)$$

T : Generatoren der Symmetriegruppe

f : Strukturkonstanten

Speziell für den in dieser Arbeit betrachteten Fall einer Abelschen $U(1)$ -Symmetrie gilt:

$$\delta_\theta \phi = ie\theta c\phi$$

$$\delta_\theta A_\mu = \theta \partial_\mu c$$

$$\delta_\theta \bar{c} = -\theta h$$

$$\delta_\theta c = 0$$

$$\delta_\theta h = 0.$$

An dieser Stelle wird ersichtlich, daß die (lokale) Eichtransformation in der BRST-Transformation enthalten ist, man kann den Eichparameter α identifizieren als:

$$\alpha(x) = e\theta c(x).$$

Beachtenswert ist hierbei, daß die Lokalität der ursprünglichen Eichsymmetrie nun gänzlich in dem Geistfeld $c(x)$ enthalten ist, der Transformationsparameter θ selbst hängt nicht von den Raum-Zeit-Koordinaten ab. Die ursprüngliche Lagrange-Dichte \mathcal{L} ist also auch BRST-invariant. Eine weitere wichtige Feststellung ist die Nilpotenz der BRST-Transformation. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß sich diese Eigenschaft nur durch die Einführung des Nakanishi-Lautrup-Hilfsfeldes erreichen läßt (s. z.Bsp. [4]). Zwar läßt sich dessen Einführung auch umgehen, dann kann aber die folgende Argumentation nicht mehr so kompakt geführt werden. An anderer Stelle in dieser Arbeit (Abschn. 3.3.3) wird eine Formulierung der BRST-Symmetrie ohne dieses Hilfsfeld jedoch vorteilhafter sein (näheres siehe dort). Die Nilpotenz drückt sich wie folgt aus: Schreibt man die BRST-Transformation eines beliebigen Funktionals G der Skalar-, Eich-, Geist- und Hilfsfelder

$$\delta_\theta G = \theta T_{\text{BRST}} G, \quad (2.15)$$

so gilt stets (s. [44])

$$T_{\text{BRST}} T_{\text{BRST}} G = 0.$$

Mit dieser Feststellung läßt sich nun auch die globale BRST-Invarianz der eichfixierten Lagrange-Dichte zeigen, indem man den Eichfixierungsterm \mathcal{L}_{GF} und den Faddeev-Popov(Geist)-Term \mathcal{L}_{FP} aus einer BRST-Transformation hervorgegangen schreibt:

$$\mathcal{L}_{GF+FP} = T_{\text{BRST}} (\bar{c}G),$$

wobei an das Funktional G lediglich die Forderung gestellt wird, daß es die gleiche Anzahl an Geist- wie an Antigeistfeldern enthalte⁵. In [25] wird dieses Verfahren dazu benutzt, allgemeine Eichfixierungen einzuführen. Eine Auftrennung der Anteile in einen Eichfixierungs- und einen Faddeev-Popov(Geist)-Term ist genau dann möglich, wenn im Funktional G keine Geistfelder vorkommen. Die später benutzte Eichfixierung erhält man mit

$$G = F + \frac{1}{2\xi}h \propto \partial_\mu A_\mu - \frac{ev}{\xi}\phi_2 + \frac{1}{2\xi}h$$

(ϕ_2 entspricht dem Imaginäranteil des Feldes ϕ , siehe (3.42), für die Transformation in diesen Variablen (3.43)). Es gilt:

$$\begin{aligned}\delta_\theta \bar{c} \partial_\mu A_\mu &= -\theta h \partial_\mu A_\mu - \theta \bar{c} \partial_\mu^2 c \\ \delta_\theta \bar{c} \phi_2 &= -\theta h \phi_2 + \theta e \bar{c} c (\phi_1 + v) \\ \delta_\theta \bar{c} h &= -\theta h^2,\end{aligned}$$

also:

$$T_{\text{BRST}} \bar{c} G = -h \partial_\mu A_\mu - \bar{c} \partial_\mu^2 c + \frac{ev}{\xi} h \phi_2 - \frac{e^2 v}{\xi} \bar{c} c (\phi_1 + v) - \frac{1}{2\xi} h^2,$$

woraus sich nach der Integration über das Nakanishi-Lautrup-Feld die eichfixierte Lagrange-Dichte ergibt.

Die gesamte Lagrange-Dichte schreibt sich nun also:

$$\mathcal{L}_{\text{gesamt}} = \mathcal{L} + T_{\text{BRST}} \bar{c} G.$$

Eine wichtige Interpretation ist die folgende: Sämtliche „Physik“ einer Eichtheorie ist im Kern der BRST-Symmetrie enthalten, also in BRST-invarianten Termen, wobei zwei Terme als gleich anzusehen sind, falls sie sich lediglich um einen Beitrag unterscheiden, der bereits aus einem BRST-transformierten Term hervorgeht („modulo dem Bild der BRST-Transformation“). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der Kohomologie der Transformation. Tatsächlich kann die BRST-Transformation dazu genutzt werden, eine erhaltene Ladung Q_{BRST} zu definieren, die wiederum nilpotent ist. Hierauf basierend lassen sich sämtliche Zustände des Hilbertraums aller Zustände (physikalischer wie auch unphysikalischer, d.h. solcher die Geist-Felder etc. enthalten) in drei Unterräume aufteilen (s. z.Bsp. [25] oder kurz: [35]):

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle \in \mathcal{H}_1 &: Q_{\text{BRST}} |\psi_1\rangle \neq 0 \\ |\psi_2\rangle \in \mathcal{H}_2 &: |\psi_2\rangle = Q_{\text{BRST}} |\psi_1\rangle \\ |\psi_0\rangle \in \mathcal{H}_0 &: Q_{\text{BRST}} |\psi_0\rangle = 0, |\psi_0\rangle \notin \mathcal{H}_2.\end{aligned}$$

⁵Es läßt sich ein Geistzahloperator N_F definieren, der jedem Geistfeld den Wert +1, jedem Antigeistfeld den Wert -1 zuordnet. Dies beruht auf dem Noether-Theorem angewandt auf die (globale) Symmetrietransformation (s. [25]):

$$\begin{aligned}c_\alpha &\rightarrow c'_\alpha = e^r c_\alpha \\ \bar{c}_\alpha &\rightarrow \bar{c}'_\alpha = e^{-r} \bar{c}_\alpha \\ r &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Die Forderung lautet dann $N_F G = 0$

Der physikalische Unterraum kann nun mit \mathcal{H}_0 identifiziert werden. Hierauf aufbauend läßt sich auch der Beweis der Unitarität der S -Matrix eingeschränkt auf den physikalischen Unterraum führen und eine Identifizierung von eichinvarianten Größen durchführen (ausführlich: s.[25]). An dieser Stelle beschränke ich mich auf eine kurze Beweisskizze der Unitarität auf dem physikalischen Unterraum (vgl. [35]). Ausgehend von der Unitarität auf dem Raum aller Zustände

$$S^\dagger S = \mathbb{1}$$

ist nun zu zeigen ($|\psi_i\rangle, |\psi_f\rangle \in \mathcal{H}_0$):

$$\langle \psi_f | S^\dagger S | \psi_i \rangle = \sum_{|\psi_m\rangle \in \mathcal{H}_0} \langle \psi_f | S^\dagger | \psi_m \rangle \langle \psi_m | S | \psi_i \rangle = \langle \psi_f | \mathbb{1} | \psi_i \rangle.$$

Es läßt sich zeigen, daß die BRST-Ladung Q_{BRST} mit dem Zeitentwicklungsoperator (also im wesentlichen der Hamiltonfunktion) kommutiert, also:

$$Q_{\text{BRST}} S |\psi_0\rangle = 0.$$

Damit läßt sich schreiben:

$$S |\psi_0\rangle = \sum_{|\psi_n\rangle \in \mathcal{H}_0} a_n |\psi_n\rangle + \sum_{|\psi_m\rangle \in \mathcal{H}_2} b_m |\psi_m\rangle.$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \langle \psi_0 | \psi_2 \rangle &= 0 \\ \langle \psi_2 | \psi_2 \rangle &= 0 \\ \langle \psi_0 | \psi_0 \rangle &\stackrel{\text{i.a.}}{\neq} 0. \end{aligned}$$

Somit tragen zu dem Produkt aus $\langle \psi_f | S^\dagger$ und $S | \psi_i \rangle$ nur die Zwischenzustände aus dem physikalischen Unterraum \mathcal{H}_0 bei, q.e.d..

Eine weitere Anwendung der BRST-Symmetrie wird die Herleitung der Slavnov-Taylor-Identitäten in Abschn. 3.3.3 sein. Hierbei wird aus der Forderung nach der BRST-Invarianz des erzeugenden Funktionalen ein Zusammenhang zwischen den n-Punkt-Greensfunktionen hergeleitet (vgl. z. Bsp. [4]). In dieser Arbeit beschränke ich mich darauf, diesen Aspekt lediglich am konkreten Fall des später betrachteten Modells zu bearbeiten.

Kapitel 3

Das Abelsche Higgs-Modell in $D = 2$ Dimensionen

3.1 Das Modell

Die Lagrange-Dichte für das Abelsche Higgs-Modell (in Euklidischer Raum-Zeit) lässt sich wie folgt schreiben:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi, \quad (3.1)$$

wobei \mathcal{L}_G die Lagrange-Dichte des Eichfeldes $A_\mu(x)$ meint,

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.2)$$

$$\text{mit: } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad A_\mu(x) \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

und \mathcal{L}_ϕ diejenige des komplexen skalaren Feldes $\phi(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= |D_\mu \phi|^2 + V(|\phi|) \\ \text{mit: } \phi(x) &\in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Hierbei beschreibt D_μ die kovariante Ableitung (s. Abschn. 2.1)

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (3.5)$$

mit der Kopplungskonstanten e , so daß die Lagrange-Dichte unter folgenden lokalen Eichtransformationen mit dem Eichparameter $\alpha(x)$ invariant bleibt.

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \phi(x) \quad (3.6)$$

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (3.7)$$

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

Für das Potential $V(|\phi|)$ wird in diesem Modell gewählt:

$$V(|\phi|) = m^2 |\phi|^2 + \frac{g}{6} |\phi|^4. \quad (3.9)$$

Hierbei handelt es sich um eine Übertragung des bereits in Abschnitt 2.1.1 behandelten Potentials auf ein komplexes Skalarfeld. Dieses Potential ist in der Abb. 3.1 für die Symmetrische Phase ($m^2 \geq 0$) sowie für die Higgs-Phase ($m^2 < 0$) gezeigt. Man sieht, daß das Vakuum der Symmetrischen Phase ($\phi_0 = 0$) invariant gegenüber Rotationen um den Ursprung ist, während in der Higgs-Phase das Vakuum auf einem Kreis um den Ursprung liegt, die Symmetrie also spontan gebrochen ist.

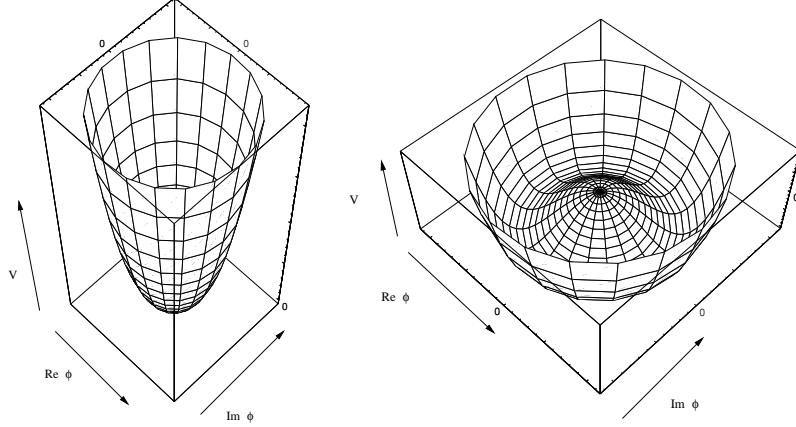


Abbildung 3.1: Potential $V(\phi)$ für die Fälle $m^2 \geq 0$ und $m^2 < 0$

3.2 Unitäre Eichung

3.2.1 Feynman-Regeln in der Unitären Eichung

Zunächst sollen die Propagatoren der Felder ϕ und A_μ bestimmt werden. Hierzu geht man von den quadratischen Anteilen in den jeweiligen Feldern der Lagrange-Dichte aus und bestimmt deren Inverse (vgl. 1.3). Mit den so gewonnenen Propagatoren läßt sich dann die Störungstheorie betreiben. (siehe auch z.Bsp. [38])

Zur Bestimmung der quadratischen Anteile in der Lagrange-Dichte ist es zunächst zweckmäßig, diese wie folgt auszuschreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + |\partial_\mu \phi|^2 + m^2 |\phi|^2 \\ & + e^2 A_\mu^2 |\phi|^2 + ie A_\mu (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) + \frac{g}{6} |\phi|^4. \end{aligned}$$

Um den Propagator Δ des skalaren Feldes zu bestimmen, geht man von folgendem Anteil der Lagrange-Dichte aus:

$$\mathcal{L}_{\phi, \text{quad}} = |\partial_\mu \phi|^2 + m^2 |\phi|^2.$$

Da für die Berechnung der Propagatoren lediglich die Wirkung S entscheidend ist, kann

man mit Hilfe der partiellen Integration eine nützliche Umformung vornehmen:

$$\begin{aligned} \int d^2x |\partial_\mu \phi|^2 &= \int d^2x \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi \\ &= \phi^* \partial_\mu \phi \Big|_{-\infty}^\infty - \int d^2x \phi^* \partial_\mu^2 \phi \\ &= - \int d^2x \phi^* \partial_\mu^2 \phi. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hiermit lässt sich $S_{\phi, \text{quad}} = \int d^2x \mathcal{L}_{\phi, \text{quad}}$ als

$$\begin{aligned} S_{\phi, \text{quad}} &= \int d^2x \phi^* K \phi \\ \text{mit: } K &= m^2 - \partial_\mu^2 \end{aligned}$$

schreiben (vgl. (1.24)). Der Propagator berechnet sich nun aus der Forderung (vgl. (1.27))

$$K \Delta = \delta \quad (3.11)$$

über die Fourier-Darstellung

$$\Delta(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \Delta(k) e^{-ikx}. \quad (3.12)$$

Also:

$$K \Delta(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \Delta(k) (m^2 + k^2) e^{-ikx}$$

Mit der Forderung (3.11) folgt hieraus die Darstellung des Propagators im Impulsraum (und mit (3.12) die Darstellung im Ortsraum) :

$$\Delta(k) = \frac{1}{m^2 + k^2}. \quad (3.13)$$

Der Eichfeldpropagator $\Delta_{\mu\nu}$ wird aus $\mathcal{L}_{G, \text{quad}} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ bestimmt. Die zugehörige Wirkung lässt sich wie folgt schreiben (vgl. 1.26)):

$$\begin{aligned} S_{G, \text{quad}} &= \int d^2x \mathcal{L}_{G, \text{quad}} \\ &= \int d^2x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2x A_\mu K_{\mu\nu} A_\nu \\ \text{mit: } K_{\mu\nu} &= -\delta_{\mu\nu} \partial_\mu^2 + \partial_\mu \partial_\nu. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Umformung

$$\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu A_\nu)^2 - (\partial_\mu A_\nu)(\partial_\nu A_\mu)] \quad (3.14)$$

sowie die Identität

$$0 = \frac{1}{2} \int d^2x \partial_\mu [A_\nu(\partial_\nu A_\mu)] = \int d^2x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu)(\partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2} A_\mu \partial_\mu \partial_\nu A_\nu \right], \quad (3.15)$$

welche aus dem Gaußschen Satz folgt, benutzt. Bei der Berechnung des Propagators aus der Forderung (1.27)

$$K_{\mu\lambda} \Delta_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu}$$

ergeben sich nun allerdings dieselben Schwierigkeiten, die in der Quantenelektrodynamik bei der Berechnung des Photonpropagators (vgl. z. Bsp. [38]) auftreten: ohne eine spezielle Eichfixierung (s. Abschnitt 2.2) existiert kein Inverses zu $K_{\mu\nu}$.

Aus diesem Grund sollen die Feynmanregeln nun zunächst in der sogenannten *Unitären Eichung* formuliert werden. Das skalare Feld lässt sich ohne Einschränkung der Allgemeinheit auch durch seinen Betrag $\rho(x)$ und Winkelanteil $\omega(x)$ darstellen:

$$\phi(x) = \rho(x) e^{i\omega(x)}, \rho(x), \omega(x) \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Die kovariante Ableitung bzw. deren Betragsquadrat lassen sich dann wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} D_\mu \phi(x) &= (\partial_\mu - ie A_\mu(x)) \rho(x) e^{i\omega(x)} \\ &= \partial_\mu \rho(x) e^{i\omega(x)} + i\rho(x) (\partial_\mu \omega(x)) e^{i\omega(x)} - ie A_\mu(x) \rho(x) e^{i\omega(x)} \\ &= [\partial_\mu + i(\partial_\mu \omega(x) - e A_\mu(x)) \rho(x)] e^{i\omega(x)} \\ |D_\mu \phi(x)|^2 &= (\partial_\mu \rho(x))^2 + \rho(x)^2 (\partial_\mu \omega(x) - e A_\mu(x))^2. \end{aligned}$$

Die Eichtransformationen (3.6)-(3.8) lauten nun:

$$\omega(x) \rightarrow \omega'(x) = \omega(x) - \alpha(x) \quad (3.17)$$

$$\rho(x) \rightarrow \rho'(x) = \rho(x) \quad (3.18)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x) \quad (3.19)$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

Mit dem so parametrisierten skalaren Feld schreibt sich die Lagrange-Dichte \mathcal{L} als

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_{G,\text{quad}}} + \underbrace{(\partial_\mu \rho)^2 + m^2 \rho^2}_{\mathcal{L}_{\rho,\text{quad}}} \\ &\quad + (\partial_\mu \omega)^2 \rho^2 + e^2 A_\mu^2 \rho^2 - 2e(\partial_\mu \omega) A_\mu \rho^2 + \frac{g}{6} \rho^4. \end{aligned}$$

Hierbei tritt noch dieselbe Schwierigkeit bei der Bestimmung des Eichfeldpropagators auf, da $\mathcal{L}_{G,\text{quad}}$ noch unverändert geblieben ist. Die Unitäre Eichung besteht nun in der Fixierung des Winkelanteils: man unterzieht das Skalarfeld in jedem Punkt x einer Eichtransformation mit dem Eichparameter

$$\alpha(x) \equiv \omega(x). \quad (3.21)$$

Nach Anwendung der Eichtransformationen (3.17)-(3.20) folgt hiermit:

$$\omega'(x) = 0 \quad (3.22)$$

$$\phi'(x) = \rho(x) \quad (3.23)$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \omega(x) \equiv B_\mu \quad (3.24)$$

$$F'_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (3.25)$$

Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung (vgl. Abschnitt 2.1.2), das Skalarfeld $\rho(x)$ stehe überall senkrecht auf dem Goldstone-Feld $\omega(x)$.

Nun wird das Potential $V(|\phi|) = V(\rho)$ um seinen Vakuumerwartungswert entwickelt (in der Higgs-Phase, in der Symmetrischen Phase wäre dies die Entwicklung um $\rho = 0$, das Eichfeld bliebe weiterhin masselos). Zunächst ist es vorteilhaft, das Potential wie folgt zu schreiben. Mit

$$m^2 = -\frac{\tilde{m}^2}{2} \quad (3.26)$$

folgt aus (3.9):

$$\begin{aligned} V(\rho) &= -\frac{\tilde{m}^2}{2}\rho^2 + \frac{g}{6}\rho^4 \\ &= \frac{g}{6} \left(\rho^4 - \frac{3\tilde{m}^2}{g}\rho^2 + \left(\frac{3\tilde{m}^2}{2g}\right)^2 - \left(\frac{3\tilde{m}^2}{2g}\right)^2 \right) \\ &= \frac{g}{6} \left[\left(\rho^2 - \frac{3\tilde{m}^2}{2g}\right)^2 - \left(\frac{3\tilde{m}^2}{2g}\right)^2 \right] \\ &= \frac{g}{6} \left(\rho^2 - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \text{const.} \\ \text{mit: } \frac{v^2}{2} &= \frac{3\tilde{m}^2}{2g}. \end{aligned}$$

Entwickelt man nun das Feld $\rho(x)$ nach

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \sigma(x)) \quad (3.27)$$

um den Vakuumerwartungswert, so erhält man die Lagrange-Dichte in den Feldern $\sigma(x)$

und $B_\mu(x)$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \frac{1}{2}(v + \sigma)^2 e^2 B_\mu^2 + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
 &\quad + \frac{g}{6} \left(\frac{1}{2} (v^2 + \sigma^2 + 2v\sigma) - \frac{v^2}{2} \right)^2 - \text{const.} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2}_{\mathcal{L}_{\sigma,\text{quad}}} + \underbrace{\frac{1}{6}v^2\sigma^2 + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_{G,\text{quad}}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^2v^2B_\mu^2}_{\mathcal{L}_{\text{int}}} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}e^2\sigma^2B_\mu^2 + e^2v\sigma B_\mu^2 + \frac{gv}{3!}\sigma^3 + \frac{g}{4!}\sigma^4}_{\mathcal{L}_{\text{int}}} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2}_{\mathcal{L}_{\sigma,\text{quad}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\tilde{m}^2\sigma^2}_{\mathcal{L}_{G,\text{quad}}} + \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_{\text{int}}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^2v^2B_\mu^2}_{\mathcal{L}_{\text{int}}} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}e^2\sigma^2B_\mu^2 + e^2v\sigma B_\mu^2 + \frac{\sqrt{3g}}{3!}\tilde{m}\sigma^3 + \frac{g}{4!}\sigma^4}_{\mathcal{L}_{\text{int}}}. \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

Konstante Terme nach der ersten Umformung ignoriert!

Aus dieser Lagrange-Dichte lassen sich nun die Propagatoren des Skalar- und des Eichfeldes berechnen. Es sei an dieser Stelle bereits darauf hingewiesen, daß die Lagrange-Dichte in der Unitären Eichung formal nicht renormierbar ist. Hierauf soll allerdings in einem späteren Abschnitt (s. 3.2.3) genauer eingegangen werden.

Den Skalarfeldpropagator Δ_σ erhält man wiederum (vgl. oben), indem man den quadratischen Anteil der Wirkung $S_{\sigma,\text{quad}} = \int d^2x \mathcal{L}_{\sigma,\text{quad}}$ schreibt als

$$S_{\sigma,\text{quad}} = \frac{1}{2} \int d^2x \sigma K \sigma,$$

mit:

$$K = \tilde{m}^2 - \partial_\mu^2, \tag{3.29}$$

und dann den inversen Operator zu K (im Impulsraum) bestimmt:

$$\Delta_\sigma(K) = \frac{1}{\tilde{m}^2 + k^2}. \tag{3.30}$$

Da die Masse des Skalarfeldpropagators durch \tilde{m} gegeben ist, wird diese von nun an mit m_0 bezeichnet ($m_0 = \tilde{m}$).

Dieses Vorgehen ist ebenfalls beim Eichfeldpropagator möglich, da aufgrund des $\frac{1}{2}e^2v^2B_\mu^2$ -Terms das Eichfeld eine Masse erhalten hat.

$$\begin{aligned}
 S_{G,\text{quad}} &= \int d^2x \mathcal{L}_{G,\text{quad}} \\
 &= \frac{1}{2} \int d^2x B_\mu K_{\mu\nu} B_\nu \\
 \text{mit: } K_{\mu\nu} &= (e^2v^2 - \partial_\mu^2) \delta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

Beim Übergang in den Impulsraum ergibt sich:

$$K_{\mu\nu}(x)\Delta_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \Delta_{\mu\nu}(k) [(\delta_{\mu\nu}(e^2v^2 + k^2) - k_\mu k_\nu)] e^{-ikx}.$$

Somit bleibt die Aufgabe, den inversen Operator zu (3.31) zu bestimmen. Hierfür wird folgender Ansatz gewählt:

$$[(e^2v^2 + k^2)\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu]^{-1} = A\delta_{\mu\nu} + Bk_\mu k_\nu$$

(Begründung: $\delta_{\mu\nu}$ und $k_\mu k_\nu$ sind die beiden einzigen möglichen kovarianten Kombinationen).

$$\begin{aligned} ((e^2v^2 + k^2)\delta_{\mu\lambda} - k_\mu k_\lambda)(A\delta_{\lambda\nu} + Bk_\lambda k_\nu) &\stackrel{!}{=} \delta_{\mu\nu} \\ (A(e^2v^2 + k^2)\delta_{\mu\nu} + B(e^2v^2 + k^2)k_\mu k_\nu - Ak_\mu k_\nu - Bk^2k_\mu k_\nu) &\stackrel{!}{=} \delta_{\mu\nu} \\ A(e^2v^2 + k^2)\delta_{\mu\nu} + (e^2v^2B - A)k_\mu k_\nu &\stackrel{!}{=} \delta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{1}{e^2v^2 + k^2} \\ \Rightarrow B &= \frac{A}{e^2v^2} \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{e^2v^2 + k^2} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{e^2v^2} \right) \\ &= \frac{1}{\frac{3\tilde{m}^2e^2}{g} + k^2} \left(\delta_{\mu\nu} + g \frac{k_\mu k_\nu}{3\tilde{m}^2e^2} \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Die Masse des Eichfeldpropagators ist also durch $ev = \tilde{m}e\sqrt{\frac{3}{g}}$ gegeben und soll im folgenden mit $m_{0,v}$ bezeichnet werden:

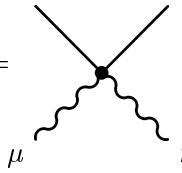
$$m_{0,v}^2 := e^2v^2 = \frac{3\tilde{m}^2e^2}{g} \quad (3.33)$$

$$\text{bzw.: } \frac{m_{0,v}^2}{m_0^2} = \frac{3e^2}{g}. \quad (3.34)$$

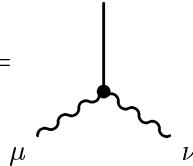
Somit sind nun alle Propagatoren in der Higgs-Phase der Unitären Eichung bekannt. Die Vertizes können direkt aus der Lagrange-Dichte (3.28) abgelesen werden. Es ergeben sich die folgenden Feynmanregeln:

- Skalarfeldpropagator: $\Delta_\sigma = \frac{1}{m_0^2 + k^2} = \text{_____}$
- Eichfeldpropagator: $\Delta_{\mu\nu} = \frac{1}{m_{0,v}^2 + k^2} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_{0,v}^2} \right) = \mu \text{ ~~~~~} \nu$
- über die Impulse k_i der inneren Skalar- und Eichfeldpropagatoren wird integriert:
 $\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 k_i$

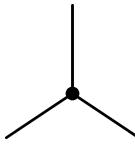
• $\sigma^2 B_\mu^2$ -Vertex: $-2e^2 \delta_{\mu\nu} =$



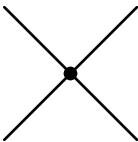
• σB_μ^2 -Vertex: $-2e^2 v \delta_{\mu\nu} = -2e^2 \tilde{m} \sqrt{\frac{3}{g}} \delta_{\mu\nu} =$



• σ^3 -Vertex: $-\sqrt{3g} \tilde{m} = -gv =$



• σ^4 -Vertex: $-g =$



- jeder Vertex ist zusätzlich mit einem Faktor $\delta(\sum_i k_i)$ zu versehen, um die Impulserhaltung zu berücksichtigen
- letztendlich wird jedes Diagramm noch durch einen Symmetriefaktor S dividiert, der die Permutationen der Vertizes und der inneren Propagatoren berücksichtigt, welche das Diagramm unverändert lassen. Es gilt:

$$S = 2^l \left(\prod_i v_{i,\sigma}! \right) \left(\prod_i v_{i,B}! \right) r \quad (3.35)$$

Wobei l die Anzahl der inneren Skalarfeld- bzw. Eichfeldpropagatoren ist, die einen Vertex mit sich selbst verbinden, $v_{i,\sigma}$ bzw. $v_{i,B}$ die Anzahl der inneren Skalar- bzw. Eichfeldpropagatoren, die zwei Vertizes miteinander verbinden (der Index i numeriere die verbundenen Vertex-Paare), und r gebe die Anzahl der Möglichkeiten an, die inneren Punkte anzuordnen, ohne das Diagramm zu ändern.

3.2.2 Eigenschaften der Unitären Eichung

Der große Vorteil in der Verwendung der Unitären Eichung ist die vollkommene Abwesenheit „unphysikalischer“ Felder (z. Bsp. Geister oder unphysikalische Freiheitsgrade), wie sie in allgemeinen Eichfixierungen auftreten. Deshalb ist unter anderem die Unitarität der S-Matrix in dieser Eichung sofort einzusehen.

Allerdings wird sich die in (3.28) angegebene Lagrange-Dichte durch ein sogenanntes Power-Counting-Argument (s. nächster Abschnitt) als formal nicht renormierbar herausstellen. Hierauf hat u.a. bereits B. W. Lee in [26] für den vierdimensionalen Fall hingewiesen. Diesen Aspekt greift auch H. Sonoda in [39] (ebenfalls für $D = 4$) auf¹, und gibt als Grund für die Extra-Divergenzen in der Unitären Eichung die Definition der Felder σ und B_μ an. Drückt man nach [39] z. Bsp. das Feld σ durch das ursprüngliche, komplexe Feld ϕ , welches später in der R_ξ -Eichung (mit der Zerlegung in die Felder ϕ_1, ϕ_2 (s. (3.42))), in welcher die Renormierbarkeit schon durch das folgende Power-Counting-Theorem sichergestellt ist, eingeführt wird, aus, so erhält man für σ eine unendliche Reihe (Entwicklung: $\rho^2 - \frac{v^2}{2} \ll 1$):

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= v \left(-1 + \sqrt{\frac{2\rho^2}{v^2}} \right) \\ &= v \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{2\rho^2}{v^2} - 1 \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{2\rho^2}{v^2} - 1 \right)^2 + \dots \right\} \quad (\text{s. [39], (30)}),\end{aligned}$$

beachte:

$$\rho^2 = |\phi|^2.$$

Zwar gibt es durchaus Hinweise, daß die S-Matrix-Elemente, berechnet in der Unitären Eichung, dieselben Ergebnisse liefern wie eine Betrachtung in der R_ξ -Eichung (s. [3] und in [39] angegebene Literatur), oder zumindest eine Aufhebung einzelner Divergenzen stattfindet (in 1-Loop-Ordnung: s. [36], [45]), aber dies ist noch nicht generell sichergestellt. H. Sonoda zeigt zumindest für den Abelschen Fall mit Hilfe der BRST-Symmetrie, daß sich dieser Mangel der Unitären Eichung beheben läßt, indem man bestimmte Linearkombinationen der Felder σ und B_μ betrachtet. Weiter ergibt sich so auch die Äquivalenz der beiden Eichungen in allen Loop-Ordnungen. H. Sonoda nimmt weiter an, daß sich dieses Ergebnis auch auf den Fall einer nicht-Abelschen Theorie erweitern läßt, wenigstens für eine nicht-Abelsche Theorie ohne masselose Eichbosonen sollten sich keine neuen Schwierigkeiten ergeben. In diesem Zusammenhang möchte ich auch noch auf eine Veröffentlichung von B.W. Lee und J. Zinn-Justin ([29]) hinweisen, in der gezeigt wird, daß sich die Greensfunktionen der Unitären Eichung durch die der R_ξ -Eichung beschreiben lassen (vgl. auch die Diskussion des „Equivalence Theorem“ im Zusammenhang mit der Argumentation zur Unabhängigkeit der S-Matrix von der gewählten Eichfixierung in Abschn. 2.2.1). Dieses Verfahren wurde in [37] zur Renormierung der Unitären Eichung angewandt. Allerdings erweist sich dies als wenig konstruktiv, da zunächst einmal die Renormierung

¹Dort ist allerdings der später einzuführende Parameter ξ durch dessen Inverses $\frac{1}{\xi}$ ersetzt worden. Diese Notation findet sich auch bei anderen Autoren.

in der R_ξ -Eichung durchzuführen ist, um diese dann auch auf die Unitäre übertragen zu können.

In dieser Arbeit soll nun versucht werden, nachdem auch die Feynman-Regeln in der R_ξ -Eichung hergeleitet sind (Abschn. 3.3), relevante Parameter des Modells (hier: die Masse des skalaren sowie des Eichfeldes und den Vakuumerwartungswert des ersten) bis zur 1-Loop-Ordnung unabhängig voneinander zu berechnen und anschließend zu vergleichen.

3.2.3 Power-Counting-Theorem

Die formale Renormierbarkeit ergibt sich aus dem *oberflächlichen Divergenzgrad* oder *superficial degree of divergence* δ . Hier soll nun die Berechnung desselben zunächst allgemein für den D -dimensionalen Fall gezeigt (vgl. [43], Kap. 12 oder [27] jeweils für $D = 4$) und dann auf den hier behandelten 2-dimensionalen Fall angewendet werden.

Ziel ist es, den divergenten Anteil eines Feynman-Diagramms in der Form

$$\int d\kappa \kappa^{\delta-1} \quad (3.36)$$

zu schreiben. Somit beschreibt $\delta = 0$ einen logarithmisch divergenten Anteil, $\delta > 0$ einen allgemein divergenten Anteil, $\delta < 0$ hingegen einen konvergenten Anteil. Das asymptotische Verhalten eines Propagators für ein Feld der Sorte f soll in diesen Überlegungen durch die Größe s_f , die sich aus dem Propagatorverhalten für große Werte von k ergibt:

$$\Delta_f(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} k^{(-2+2s_f)}, \quad (3.37)$$

beschrieben werden. Für den Skalarfeldpropagator (3.30) gilt also $s_\sigma = 0$ und für den Eichfeldpropagator (3.32) $s_B = 1$. Ausgehend von der Annahme, die Lagrange-Dichte \mathcal{L} setze sich aus einzelnen Termen \mathcal{L}_i zusammen,

$$\mathcal{L} = \sum_i \mathcal{L}_i,$$

wobei der Term $\mathcal{L}_i n_{if}$ Felder der Sorte f und d_i Ableitungen enthalte, berechnet sich der oberflächliche Divergenzgrad $\delta^{(D)}$ in D Dimensionen für ein Diagramm mit I_f internen und E_f externen Feldern der Sorte f sowie N_i Vertizes der Sorte i nach:

$$\delta^{(D)} = \sum_f I_f (2s_f - 2) + \sum_i N_i d_i + D \left[\sum_f I_f + \left(\sum_i N_i - 1 \right) \right].$$

Hierin beschreibt der erste Term die Beiträge der einzelnen Propagatoren, der zweite Term die Anzahl der Impulsfaktoren, die aufgrund der Ableitungen in den einzelnen Termen der Lagrange-Dichte auftauchen, und der letzte Term die D -dimensionalen Integrationen über die inneren Felder unter Berücksichtigung der Impulserhaltung an den inneren Vertizes und der globalen Impulserhaltung. Berücksichtigt man den Zusammenhang zwischen den inneren, äußeren Feldern und Vertizes

$$2I_f + E_f = \sum_i N_i n_{if}$$

\mathcal{L}_i	d_i	n_{iB}	$n_{i\sigma}$	Δ_i^2
$\frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2$	2	0	2	0
$\frac{\tilde{m}}{2}\sigma^2$	0	0	2	2
$F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$	2	2	0	-2
$\frac{e^2 v^2}{2}B_\mu^2$	0	2	0	0
$\frac{e^2}{2}\sigma^2 B_\mu^2$	0	2	2	0
$e^2 v \sigma B_m u^2$	0	2	1	0
$\frac{\sqrt{3g}\tilde{m}}{3!}\sigma^3$	0	0	3	2
$\frac{g}{4!}\sigma^4$	0	0	4	2

Tabelle 3.1: Zur formalen Renormierbarkeit der Theorie in zwei Dimensionen ($s_B = 1, s_\sigma = 0$)

(jedes innere Feld der Sorte f muß mit genau zwei Vertizes, die Felder dieser Sorte enthalten, verbunden sein, jedes äußere Feld mit genau einem solchen Vertex), so läßt sich schreiben:

$$\delta^{(D)} = D - \sum_f E_f \left(s_f - 1 + \frac{D}{2} \right) - \sum_i N_i \Delta_i^{(D)}, \quad (3.38)$$

$$\text{mit: } \Delta_i^{(D)} = -d_i + D - \sum_f n_{if} \left(s_f - 1 + \frac{D}{2} \right). \quad (3.39)$$

Um nun lediglich eine endliche Anzahl (in verschiedenen Ordnungen der Störungstheorie) divergenter Diagramme zu erhalten, muß $\Delta_i^{(D)} \geq 0$ für alle Terme der Lagrange-Dichte gelten. Ist dies nicht erfüllt, so spricht man von einer formal nicht renormierbaren Theorie, da dann stets ab einer gewissen Anzahl N_i von Vertizes eines Typs mit $\Delta_i^{(D)} < 0$ der Divergenzgrad größer Null ist und mit weiteren Vertizes noch zunimmt.

Speziell angewendet auf den zweidimensionalen Fall folgt:

$$\delta^{(2)} = 2 - \sum_f E_f s_f - \sum_i N_i \Delta_i^{(2)}, \quad (3.40)$$

$$\text{mit: } \Delta_i^{(2)} = 2 - d_i - \sum_f n_{if} s_f. \quad (3.41)$$

Damit kann nun die formale Renormierbarkeit in der Higgs-Phase mit Unitärer Eichung überprüft werden. Siehe hierzu Tab. 3.1. Aufgrund des Propagatorverhaltens des massiven Eichfeldes ist diese Theorie demnach nicht renormierbar. Darum soll neben der Unitären Eichung auch die sogenannte R_ξ -Eichung betrachtet werden (s. nächster Abschnitt).

3.3 R_ξ -Eichung

3.3.1 Wahl der Eichfixierungsfunktion

Um die R_ξ -Eichung durchzuführen, wird das Skalarfeld $\phi(x)$ nun in seinen Real- und Imaginärteil aufgeteilt. Des Weiteren wird das Vakuum $\frac{v}{\sqrt{2}}$ reell gewählt:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \phi_1(x) + i\phi_2(x)) \text{ mit: } \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.42)$$

Hierbei soll in der Higgs-Phase v durch (3.27) gegeben sein, in der symmetrischen Phase gelte jedoch $v = 0$ (in beiden Fällen: $v \in \mathbb{R}$). Die Eichtransformation des Skalarfeldes muß nun wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x) = e^{-i\alpha(x)} \phi(x) \\ \Rightarrow \begin{cases} \phi_1(x) &\longrightarrow \phi'_1(x) = \cos(\alpha)\phi_1(x) + \sin(\alpha)\phi_2(x) + (\cos(\alpha) - 1)v \\ \phi_2(x) &\longrightarrow \phi'_2(x) = \cos(\alpha)\phi_2(x) - \sin(\alpha)(\phi_1(x) + v) \end{cases}, \\ \text{bzw. infinitesimal:} \\ \begin{cases} \phi_1(x) &\longrightarrow \phi'_1(x) = \phi_1(x) + \alpha\phi_2(x) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ \phi_2(x) &\longrightarrow \phi'_2(x) = \phi_2(x) - \alpha(\phi_1(x) + v) + \mathcal{O}(\alpha^2) \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

die Eichtransformation des Vektorfeldes $A_\mu(x)$ bleibt hiervon unberührt, es gelten weiterhin (3.7) und (3.8). Die Lagrange-Dichte in den neuen Feldern schreibt sich nun als (beachte die neuen Bezeichnungen, die während der Aufstellung der Feynman-Regeln in der Unitären Eichung eingeführt wurden!):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi \\ \mathcal{L}_G &= \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_\phi &= |D_\mu\phi|^2 + V(|\phi|) \\ |D_\mu\phi|^2 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 + \frac{m_{0,v}^2}{2}A_\mu^2 \\ &\quad - evA_\mu(\partial_\mu\phi_2) + \frac{1}{2}e^2A_\mu^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}e^2A_\mu^2\phi_2^2 \\ &\quad + eA_\mu\phi_2\partial_\mu\phi_1 - eA_\mu\phi_1(\partial_\mu\phi_2) + e^2vA_\mu^2\phi_1 \\ V(|\phi|) &= \frac{m_0^2}{2}\phi_1^2 + \frac{g}{24}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 + \frac{gv}{6}\phi_1^3 + \frac{gv}{6}\phi_1\phi_2^2 \\ &\quad + \underbrace{\frac{m^2v^2}{2} + \frac{gv^4}{24}}_{\text{const.}}. \end{aligned}$$

Hierbei ist besonders zu beachten, daß das Feld $\phi_2(x)$ keinen quadratischen Term, sprich keinen Massenterm, besitzt, sowie, daß ein Mischterm zwischen den Feldern $\phi_2(x)$ und $A_\mu(x)$ bereits im quadratischen Anteil der Lagrange-Dichte auftritt. Um diesen zu beseitigen wird nun die R_ξ -Eichung (vgl. [1], leichte Abweichungen wg. der hier benutzten

Euklidischen Metrik, sowie günstigerer Wahl der Massendimension der Geistfelder etc., siehe auch: [41]) durch die Eichfixierungsfunktion

$$F = e \left(\partial_\mu A_\mu - \frac{ev}{\xi} \phi_2 \right) \quad (3.44)$$

durchgeführt. Nach der Gauß-Integration mit dem Faktor $\left(-\frac{\xi}{2e^2}\right)$ ändert sich nun die Lagrange-Dichte wie folgt (hinzufügen des Eichfixierungstermes \mathcal{L}_{GF}):

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{\xi}{2e^2} F^2. \quad (3.45)$$

Mit

$$\int d^2x (\partial_\mu A_\mu) \phi_2 = \underbrace{\int d^2x \partial_\mu (A_\mu \phi_2)}_{=0} - \int d^2x A_\mu (\partial_\mu \phi_2) \quad (3.46)$$

lässt sich schreiben:

$$\frac{\xi}{2e^2} F^2 = \frac{\xi}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{m_{0,v}^2}{2\xi} \phi_2^2 + ev A_\mu \partial_\mu \phi_2,$$

so daß die Aufhebung des Mischterms in der resultierenden Lagrange-Dichte offensichtlich wird. Weiter ist in der Lagrange-Dichte noch der aus der Funktionaldeterminante $\det M_F$ der Eichfunktion resultierende Term zu berücksichtigen. Es gilt:

$$M_F = \left. \frac{\delta F(A'_\mu, \phi'_1, \phi'_2)}{\delta \alpha} \right|_{\alpha=0}, \quad (3.47)$$

wobei die gestrichenen Größen durch eine Eichtransformation mit dem Parameter α aus den ungestrichenen hervorgehen. Somit folgt:

$$M_F = - \left[\partial_\mu^2 - \frac{e^2 v}{\xi} (\phi_1 + v) \right]. \quad (3.48)$$

Die Determinante hieraus berechnet sich mit (D.1) zu:

$$\det M_F = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left\{ \int d^2x \bar{c} \left[\partial_\mu^2 - \frac{e^2 v}{\xi} (\phi_1 + v) \right] c \right\}. \quad (3.49)$$

Diesem kann durch Hinzufügen des (Faddeev-Popov-)Geisterterms

$$\mathcal{L}_{\text{Geist}} = \underbrace{-\bar{c} \partial_\mu^2 c + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \bar{c} c}_{\mathcal{L}_{\text{Geist, quad}}} + \underbrace{\frac{e^2 v}{\xi} \phi_1 \bar{c} c}_{\mathcal{L}_{\text{Geist, int}}} \quad (3.50)$$

in die Lagrange-Dichte Rechnung getragen werden. Man beachte an dieser Stelle, daß trotz der zugrunde liegenden Abelschen Symmetrie ein Wechselwirkungsterm zwischen dem Geistfeld und den ursprünglichen Feldern (hier dem ϕ_1 -Feld) auftritt. Dies ist eine Konsequenz der spontanen Symmetriebrechung. Im Falle der QED ($U(1)$ -Symmetrie (Abelsch!) ohne Symmetriebrechung) existiert keine Kopplung des Geistfeldes an die ursprünglichen Felder, so daß dort der Geist-Beitrag faktorisiert und nicht weiter beachtet werden muß. Ohne spontane Symmetriebrechung treten Wechselwirkungen der Geist-Felder mit den ursprünglichen nur bei nicht Abelschen Symmetrien auf.

3.3.2 Feynman-Regeln in der R_ξ -Eichung

Die einzelnen Propagatoren berechnen sich aus $\mathcal{L}_{\text{quad}} = \mathcal{L}_{G, \text{quad}} + \mathcal{L}_{\phi_1, \text{quad}} + \mathcal{L}_{\phi_2, \text{quad}} + \mathcal{L}_{\text{Geist, quad}}$ mit:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{G, \text{quad}} &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\xi}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{m_{0,v}^2}{2} A_\mu^2 \\ \mathcal{L}_{\phi_1, \text{quad}} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{m_0^2}{2} \phi_1^2 \\ \mathcal{L}_{\phi_2, \text{quad}} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_2)^2 + \frac{m_{0,v}^2}{2\xi} \phi_2^2 \\ \mathcal{L}_{\text{Geist, quad}} &= -\bar{c} \partial_\mu^2 c + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \bar{c} c\end{aligned}$$

sowie der Vollständigkeit halber angegeben:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{Geist, int}} &= \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 \phi_2^2 + e^2 v A_\mu^2 \phi_1 + e A_\mu (\partial_\mu \phi_1) \phi_2 \\ &\quad - e A_\mu \phi_1 (\partial_\mu \phi_2) + \frac{g}{24} (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 + \frac{gv}{6} (\phi_1^3 + \phi_1 \phi_2^2) \\ &\quad + \frac{e^2 v}{\xi} \phi_1 \bar{c} c.\end{aligned}$$

Für den ϕ_1 -Propagator Δ_{ϕ_1} ergibt sich wiederum (vgl. die Herleitung zu (3.30)):

$$\Delta_{\phi_1}(k) = \frac{1}{m_0^2 + k^2} = \text{_____}. \quad (3.51)$$

Ebenso berechnet sich der ϕ_2 -Propagator Δ_{ϕ_2} :

$$\Delta_{\phi_2}(k) = \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} = \text{-----}. \quad (3.52)$$

Zur Bestimmung des Eichfeldpropagators $\Delta_{\mu\nu,\xi}$ in der R_ξ -Eichung geht man von

$$\begin{aligned}S_{G, \text{quad}} &= \frac{1}{2} \int d^2x A_\mu K_{\mu\nu,\xi} A_\nu, \\ \text{mit: } K_{\mu\nu,\xi} &= (-\partial_\mu^2 + m_{0,v}^2) \delta_{\mu\nu} + (1 - \xi) \partial_\mu \partial_\nu,\end{aligned}$$

aus² und sucht den zu $K_{\mu\nu,\xi}$ inversen Operator:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mu\nu,\xi}(k) &= \frac{1}{k^2 + m_{0,v}^2} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1 - \xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \right) \\ &= \frac{1}{k^2 + m_{0,v}^2} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] + \frac{1}{\xi} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \\ &= \mu \text{ ~~~~~~} \nu . \quad (3.53)\end{aligned}$$

²beachte hierbei:

$$\int d^2x (\partial_\mu A_\mu)^2 = - \int d^2x A_\mu \partial_\mu A_\nu$$

Als letztes bleibt der Geistfeldpropagator Δ_c . Hierbei ist darauf zu achten, daß es sich um ein komplexes sowie grassmannwertiges Skalarfeld handelt. Abweichend von dem erzeugenden Funktional eines kommutierenden, skalaren Feldes lautet für diesen Fall das erzeugende Funktional

$$Z[\bar{J}_c, J_c] = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp \left\{ \int d^2x \left(\mathcal{L}_{\text{ghost, quad}} + \bar{J}_c(x)c(x) + \bar{c}(x)J_c(x) \right) \right\}.$$

Für die Ersetzung in der Störungsreihe benötigt man die Identitäten

$$\frac{\delta}{\delta \bar{J}_c(z)} \exp \left\{ \int d^2x \bar{J}_c(x)c(x) \right\} = c(z) \exp \left\{ \int d^2x \bar{J}_c(x)c(x) \right\} \quad (3.54)$$

$$\frac{\delta}{\delta J_c(z)} \exp \left\{ \int d^2x \bar{c}(x)J_c(x) \right\} = -\bar{c}(z) \exp \left\{ \int d^2x \bar{c}(x)J_c(x) \right\}. \quad (3.55)$$

Analog zur Behandlung läßt sich nun das erzeugende Funktional schreiben als

$$Z[\bar{J}_c, J_c] = Z[0, 0] \exp \int d^2x \int d^2y \bar{J}_c(y)\Delta_c(x-y)J_c(x),$$

wobei:

$$\begin{aligned} \int d^2x (-\bar{c}K_c c) &= \int d^2x \mathcal{L}_{\text{Geist, quad}}, \\ K_c \Delta_c &= \delta. \end{aligned}$$

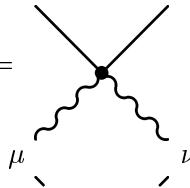
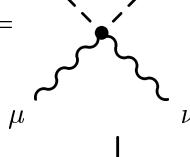
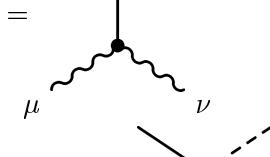
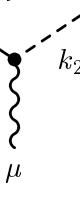
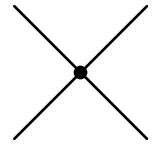
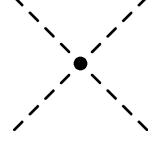
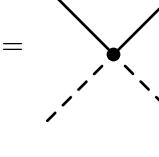
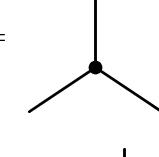
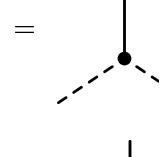
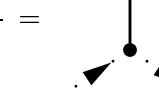
Abweichend erhält man jedoch hier:

$$Z[0, 0] = \det K_c.$$

Man berechnet nun:

$$\Delta_c(k) = \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} = \dots \blacktriangleright \dots \quad (3.56)$$

Die Vertizes wiederum werden aus $\mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_{\text{Geist, int}}$ abgelesen (vgl. [41]):

- $A_\mu^2 \phi_1^2$ -Vertex: $-2e^2 \delta_{\mu\nu} =$ 
- $A_\mu^2 \phi_2^2$ -Vertex: $-2e^2 \delta_{\mu\nu} =$ 
- $A_\mu^2 \phi_1$ -Vertex: $-2e^2 v \delta_{\mu\nu} =$ 
- $A_\mu \phi_1 \phi_2$ -Vertex: $-ie(k_1 - k_2)_\mu =$ 
- ϕ_1^4 -Vertex: $-g =$ 
- ϕ_2^4 -Vertex: $-g =$ 
- $\phi_1^2 \phi_2^2$ -Vertex: $-\frac{g}{3} =$ 
- ϕ_1^3 -Vertex: $-gv =$ 
- $\phi_1 \phi_2^2$ -Vertex: $-\frac{gv}{3} =$ 
- $\phi_1 \bar{c} c$ -Vertex: $-\frac{e^2 v}{\xi} =$ 

Auch hier ist wieder (vgl. die Feynman-Regeln in der Unitären Eichung, S. 44) jeder Vertex mit einem Faktor $\delta(\sum_i k_i)$ zu multiplizieren, über die inneren Impulse zu integrieren und durch einen Symmetriefaktor S zu dividieren, der sich hier ergibt als:

$$S = 2^l (-1)^L \left(\prod_i v_{i,\phi_1}! \right) \left(\prod_i v_{i,\phi_2}! \right) \left(\prod_i v_{i,A}! \right) \left(\prod_i v_{i,c}! \right) \left(\prod_i v_{i,\bar{c}}! \right) r \quad (3.57)$$

mit den Definitionen analog zu denen, die (3.35) folgen. Dabei ist mit l nur die Anzahl der Skalar- und Eichfeldpropagatoren, die einen Vertex mit sich selbst verbinden, gemeint (keine Geistpropagatoren). Zusätzlich ist darauf zu achten, daß jede *geschlossene Geist-Schleife* eine Multiplikation des Ausdrucks mit (-1) bewirkt. L sei demnach die Anzahl der geschlossenen Geist-Schleifen. Dies röhrt von dem fermionischen Charakter (Grassmann-Felder!) der Geist-Felder bzw. deren Quellen her. Es ist nämlich folgendes zu beachten:

$$\frac{\delta^2}{\delta J_c(x)\delta J_c(y)} = -\frac{\delta^2}{\delta J_c(y)\delta J_c(x)},$$

Da eine geschlossene Schleife stets durch einen Term

$$\frac{\delta^2}{\delta \bar{J}_c(z_1)\delta J_c(z_1)} \frac{\delta^2}{\delta \bar{J}_c(z_2)\delta J_c(z_2)}$$

erzeugt wird, der sich wie folgt umschreiben läßt:

$$= -\frac{\delta^2}{\delta \bar{J}_c(z_1)\delta J_c(z_2)} \frac{\delta^2}{\delta \bar{J}_c(z_2)\delta J_c(z_1)} \rightarrow -\Delta_c(z_1 - z_2) \Delta_c(z_2 - z_1),$$

ergibt sich der Faktor (-1) für jede der Geist-Schleifen.

Ein Vergleich mit den zuvor gefundenen Feynman-Regeln in der Unitären Eichung (s. S. 44) zeigt, daß der Propagator für das σ -Feld in der Unitären Eichung mit dem des ϕ_1 -Feldes in der R_ξ -Eichung übereinstimmt. Betrachtet man den Fall $\xi \rightarrow 0$, so erhält man ebenfalls den Eichfeldpropagator in der Unitären Eichung aus den obenstehenden Regeln. In diesem Fall streben der ϕ_2 -Propagator und der Geistpropagator gegen null:

$$\begin{aligned} \Delta_{\phi_2}(k) &= \frac{\xi}{\xi k^2 + m_{0,v}^2} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0 \\ \Delta_c(k) &= \frac{\xi}{\xi k^2 + m_{0,v}^2} \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt formal, daß die Unitäre Eichung als Spezialfall $\xi \rightarrow 0$ in der R_ξ -Eichung enthalten ist ([1], [3], [25]). Der Vorteil der R_ξ -Eichung besteht nun allerdings in der Renormierbarkeit: Für sämtliche Propagatoren gilt (s. Definition (3.37)) $s = 0$, so daß mit (3.39)

$$\Delta_i^{(2)} = 2 - d_i$$

und $0 \leq d_i \leq 2$ gilt, da in der Lagrange-Dichte höchstens Terme mit zwei Ableitungen auftreten. Somit ist $\Delta_i^{(2)} \geq 0$ für alle Terme, die Theorie also formal renormierbar. In dieser Arbeit soll nun untersucht werden, inwieweit sich dieser formale Limes auch auf konkret berechnete Größen in 1-Loop-Ordnung anwenden läßt.

An dieser Stelle möchte ich noch darauf hinweisen, daß in der Literatur auch noch zwei weitere Spezialfälle der R_ξ -Eichung behandelt werden. Zum einen $\xi \rightarrow \infty$, bezeichnet als die Landau-Eichung. Der Eichfeldpropagator ist in dieser Eichung rein transversal:

$$\Delta_{\mu\nu,\infty} = \frac{1}{k^2 + m_{0,v}^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right),$$

und die Propagatoren des ϕ_2 - und des Geistfeldes haben die Gestalt

$$\Delta_{\phi_2 \text{ bzw. Geist, Landau}} = \frac{1}{k^2}.$$

Ebenfalls wird häufig der Fall $\xi = 1$, die Feynman-Eichung betrachtet. In diesem Fall ergibt sich für den Eichfeldpropagator:

$$\Delta_{\mu\nu,1} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 + m_{0,v}^2}.$$

Der Vollständigkeit halber:

$$\Delta_{\phi_2 \text{ bzw. Geist, Feynman}} = \frac{1}{k^2 + m_{0,v}^2}.$$

An gegebener Stelle werde ich auf einige Aspekte dieser speziellen Eichungen zu sprechen kommen.

3.3.3 Slavnov-Taylor-Identitäten in der R_ξ -Eichung

Herleitung

In diesem Abschnitt sollen die aus der BRST-Symmetrie (s. Abschn. 2.2.2) resultierenden Slavnov-Taylor-Identitäten, welche Zusammenhänge zwischen verschiedenen n -Punkt-Greensfunktionen aufzeigen, hergeleitet werden (Slavnov-Taylor Identitäten in der Unitären Eichung: s. [36]). Hierzu ist es zweckmäßig, die BRST-Transformation δ_ϑ der Felder ohne das oben benutzte Nakanishi-Lautrup-Hilfsfeld zu schreiben:

$$\delta_\vartheta \phi = ie \vartheta c \phi \tag{3.58}$$

$$\text{bzw.: } \begin{cases} \delta_\vartheta \phi_1 = -e \vartheta c \phi_2 \\ \delta_\vartheta \phi_2 = e \vartheta c (\phi_1 + v) \end{cases} \tag{3.59}$$

$$\delta_\vartheta A_\mu = \vartheta \partial_\mu c \tag{3.60}$$

$$\delta_\vartheta c = 0 \tag{3.61}$$

$$\delta_\vartheta \bar{c} = \vartheta (\xi \partial_\mu A_\mu - ev \phi_2). \tag{3.62}$$

Man beachte, daß bei dieser Formulierung die BRST-Transformation nicht mehr nilpotent ist (s. [8])! Mit (vgl. (2.15))

$$\delta_\vartheta G = \vartheta \tilde{T}_{\text{BRST}} G \tag{3.63}$$

gilt zwar noch $\tilde{T}_{\text{BRST}}^2 \phi = 0$, $\tilde{T}_{\text{BRST}}^2 A_\mu = 0$ sowie $\tilde{T}_{\text{BRST}}^2 c = 0$, aber :

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\text{BRST}}^2 \bar{c} &= \frac{\delta_\vartheta}{\vartheta} (\xi \partial_\mu A_\mu - ev \phi_2) \\ &= \xi \partial_\mu^2 c - e^2 v c (\phi_1 + v) \\ &\stackrel{\text{i.a.}}{\neq} 0.\end{aligned}$$

Die Nilpotenz läßt sich nur bei Verwendung des Hilfsfeldes (s. Abschn. 2.2.2) erhalten (s. z.Bsp.[4], [6], [24]).

Die eichfixierte Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\text{ges}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}$ ist BRST-invariant:

- Die ursprüngliche $U(1)$ -Symmetrie der nicht eichfixierten Lagrange-Dichte \mathcal{L} ist durch $\alpha(x) \equiv e\vartheta c(x)$ in den BRST-Transformationen enthalten, also gilt auch

$$\tilde{T}_{\text{BRST}} \mathcal{L} = 0.$$

- Noch zu zeigen ist also

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\text{BRST}} (\mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP}) &= 0 \\ \mathcal{L}_{GF} + \mathcal{L}_{FP} &= \frac{\xi}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \frac{m_{0,v}^2}{2\xi} \phi_2^2 - ev \phi_2 (\partial_\mu A_\mu) - \bar{c} \partial_\mu^2 c + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \bar{c} c + \frac{m_{0,v}^2}{v\xi} \phi_1 \bar{c} c \\ \tilde{T}_{\text{BRST}} \frac{\xi}{2} (\partial_\mu A_\mu)^2 &= \xi (\partial_\mu A_\mu) (\partial_\mu^2 c) \\ \tilde{T}_{\text{BRST}} \frac{m_{0,v}^2}{2\xi} \phi_2^2 &= \frac{em_{0,v}^2}{\xi} \phi_2 (\phi_1 + v) c \\ \tilde{T}_{\text{BRST}} \left(-ev \phi_2 (\partial_\mu A_\mu) \right) &= -ev \phi_2 (\partial_\mu^2 c) - \frac{m_{0,v}^2}{v} (\phi_1 + v) c (\partial_\mu A_\mu) \\ \tilde{T}_{\text{BRST}} \left(-\bar{c} \partial_\mu^2 c \right) &= -(\xi \partial_\mu A_\mu - ev \phi_2) \partial_\mu^2 c \\ \tilde{T}_{\text{BRST}} \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \bar{c} c &= \frac{m_{0,v}^2}{\xi} (\xi \partial_\mu A_\mu - ev \phi_2) c \\ \tilde{T}_{\text{BRST}} \frac{m_{0,v}^2}{v\xi} \phi_1 \bar{c} c &= \frac{m_{0,v}^2}{\xi v} \phi_1 (\xi \partial_\mu A_\mu - ev \phi_2) c\end{aligned}$$

Nun läßt sich leicht nachrechnen, daß diese Terme sich zu Null addieren.

Also folgt, daß auch das erzeugende Funktional Z sich nicht unter einer BRST-Transformation ändert. Hieraus werde ich nun die funktionalen Slavnov-Taylor-Identitäten ableiten. Dazu ist es zunächst vorteilhaft, weitere Quellen für die BRST-transformierten Felder einzufügen (s. [23], [36], [40]). Da lediglich im Falle des ϕ_1 - und des ϕ_2 -Feldes neue, aus den bisherigen zusammengesetzte Felder entstehen, führe ich also lediglich zwei Quellen I_1, I_2 ein:

$$\begin{aligned}Z[J_1, \dots, I_2] &= \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left\{ -S \right. \\ &\quad \left. + \int d^2x \left[J_1 \phi_1 + J_2 \phi_2 + J_\mu A_\mu + J_c c + \bar{c} J_{\bar{c}} + I_1 (-ec \phi_2) + I_2 (ec(\phi_1 + v)) \right] \right\}. \tag{3.64}\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \delta_\vartheta Z[J_1, \dots, I_2] &= \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left\{ -S + \int d^2x \left[J_1 \delta_\vartheta \phi_1 + J_2 \delta_\vartheta \phi_2 + J_\mu \delta_\vartheta A_\mu + \delta_\vartheta \bar{c} J_{\bar{c}} \right] \right\} \\ &\approx \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp(-S) \left\{ 1 + \int d^2x \left[J_1 \delta_\vartheta \phi_1 + J_2 \delta_\vartheta \phi_2 + J_\mu \delta_\vartheta A_\mu + \delta_\vartheta \bar{c} J_{\bar{c}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Beachte hierbei: $\delta_\vartheta c = 0$, $\delta_\vartheta (ec\phi_2) = 0$, $\delta_\vartheta (ec(\phi_1 + v)) = 0$. Somit erhalte ich aus der Forderung:

$$\delta_\vartheta Z = 0$$

die Funktional-Gleichung:

$$0 = \int d^2x \left[J_1 \frac{\delta Z}{\delta I_1} + J_2 \frac{\delta Z}{\delta I_2} + J_\mu \partial_\mu \frac{\delta Z}{\delta J_c} + J_{\bar{c}} \left(\xi \partial_\mu \frac{\delta Z}{\delta J_\mu} - ev \frac{\delta Z}{\delta J_2} \right) \right]. \quad (3.65)$$

Diese lässt sich durch eine einfache Ersetzung $Z \rightarrow W$ in eine Funktionalgleichung für das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Greensfunktionen umschreiben. Unterzieht man nun die Quellen $J_1, J_2, J_\mu, J_{\bar{c}}$ und J_c einer Legendre-Transformation, so erhält man eine Funktionalgleichung für das erzeugende Funktional Γ der 1PI-Greensfunktionen. Man beachte hierbei:

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_1} & J_2 &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_2} \\ J_\mu &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} & J_c &= -\frac{\delta \Gamma}{\delta c} \\ \frac{\delta W}{\delta I_1} &= \frac{\delta \Gamma}{\delta I_1} & \frac{\delta W}{\delta I_2} &= \frac{\delta \Gamma}{\delta I_2}. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^2x \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_1} \frac{\delta \Gamma}{\delta I_1} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_2} \frac{\delta \Gamma}{\delta I_2} + \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} \partial_\mu c + \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}} \left(\xi \partial_\mu A_\mu - ev \phi_2 \right) \right] \\ 0 &= \int d^2x \left[-ec\phi_2 \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_1} + ec(\phi_1 + v) \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_2} + (\partial_\mu c) \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} + \left(\xi(\partial_\mu A_\mu) - ev \phi_2 \right) \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}} \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Hieraus lassen sich nun durch funktionales Differenzieren nach den einzelnen Feldern Zusammenhänge zwischen n -Punkt-Greensfunktionen herleiten. Dies soll im nächsten Abschnitt ausführlich diskutiert werden.

Folgerungen

Durch Anwendung des Operators $\frac{\delta^2}{\delta c(x_2) \delta A_\mu(x_1)}$ auf (3.66), erhalte ich:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^2x \left\{ -e c(x) \phi_2(x) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta c(x_2) \delta A_\mu(x_1) \delta \phi_1(x)} - e \delta(x - x_2) \phi_2(x) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(x_1) \delta \phi_1(x)} \right. \\ &\quad + e c(x) (\phi_1(x) + v) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta c(x_2) \delta A_\mu(x_1) \delta \phi_2(x)} + e \delta(x - x_2) (\phi_1(x) + v) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(x_1) \delta \phi_2(x)} \\ &\quad + (\partial_\nu c(x)) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta c(x_2) \delta A_\mu(x_1) \delta A_\nu(x)} - \delta(x - x_2) \partial_\nu \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(x_1) \delta A_\nu(x)} \\ &\quad \left. + (\xi(\partial_\nu A_\nu(x)) - ev \phi_2(x)) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta c(x_2) \delta A_\mu(x_1) \delta \bar{c}(x)} - \xi \delta(x - x_1) \partial_\mu \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta c(x_2) \delta \bar{c}(x)} \right\}, \end{aligned}$$

so daß ich nach Nullsetzen der äußeren Felder zu folgendem Ausdruck gelange. Hierbei ist darauf zu achten, daß das Feld ϕ_1 nur auf Tree-Level identisch Null gesetzt werden darf, in Loop-Ordnungen entstehen Korrekturen! Deshalb wird in den folgenden Ausdrücken das Feld ϕ_1 stets noch als $\phi_{1,0}$ notiert. Aus der obigen Relation folgt :

$$\begin{aligned} 0 &= e(\phi_{1,0} + v) \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(x_1) \delta \phi_2(x_2)} - \int d^2x \delta(x - x_2) \partial_\nu \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta A_\mu(x_1) \delta A_\nu(x)} \\ &\quad - \int d^2x \xi \delta(x - x_1) \partial_\mu \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta c(x_2) \delta \bar{c}(x)} \end{aligned} \quad (3.67)$$

bzw. unter Ausnutzung des Zusammenhangs zwischen den 1PI-2-Punkt-Greensfunktionen und den inversen Propagatoren G^{-1} :

$$0 = -e(\phi_{1,0} + v) G_{\mu\phi_2}^{-1}(p) - i p_\nu G_{\mu\nu,\xi}^{-1}(p) + i \xi p_\mu G_{\text{Geist}}^{-1}(p). \quad (3.68)$$

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß der obige Zusammenhang zwischen den inversen Propagatoren und 1PI-2-Punkt-Greensfunktionen nur dann gilt, wenn keine Mischung zwischen den einzelnen Feldern auftritt. Dies ist auf Tree-Level in der R_ξ -Eichung gewährleistet. In Loop-Ordnungen sind zunächst noch die Resultate aus Abschn. 5.3.2 zu beachten. Siehe hierzu auch die Bestimmung des inversen Propagators in [26] und [28]. Dies werde ich in dieser Arbeit nicht mehr behandeln. Auf Tree-Level gilt $\phi_{1,0} = 0$ sowie

$$\begin{aligned} G_{\mu\phi_2}^{-1}(p) &= 0 \\ p_\nu G_{\mu\nu,\xi}^{-1}(p) &= p_\nu \left\{ \left[p^2 + m_{0,v}^2 \right] \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] + \left[\xi p^2 + m_{0,v}^2 \right] \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right\} \\ &= p_\mu \left[\xi p^2 + m_{0,v}^2 \right] \\ G_{\text{Geist}}^{-1}(p) &= p^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}, \end{aligned}$$

welches (3.67) verifiziert.

Eine weitere 2-Punkt-Greensfunktionen verknüpfende Identität gewinne ich durch Anwendung von $\frac{\delta^2}{\delta c(x_2)\delta\phi_2(x_1)}$ auf (3.66):

$$\begin{aligned} 0 &= - \int d^2x \delta(x - x_1)\delta(x - x_2)e \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_1(x)} + e(v + \phi_{1,0}) \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_2(x_1)\delta\phi_2(x_2)} \\ &\quad - \int d^2x \delta(x - x_2)\partial_\mu \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_2(x_1)\delta A_\mu(x)} - ev \frac{\delta^2\Gamma}{\delta c(x_2)\delta\bar{c}(x_1)}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Mit $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_1(x)} = 0$ folgt die Identität für die inversen Propagatoren:

$$0 = -e(v + \phi_{1,0})G_{\phi_2}^{-1}(p) - i p_\mu G_{\phi_2\mu}^{-1}(p) + evG_{\text{Geist}}^{-1}(p), \quad (3.70)$$

welche sich auf Tree-Level mit den obigen Ausdrücken und

$$G_{\phi_2}^{-1}(p) = p^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}$$

bestätigen lässt. Um einen Zusammenhang zwischen den beiden Identitäten (3.68) und (3.70) herzustellen, lässt sich der inverse Geist-Propagator eliminieren.

Des Weiteren ergibt sich folgende Beobachtung: Aussagen aus den Slavnov-Taylor-Identitäten über den Eichfeld-Propagator betreffen stets nur dessen Longitudinal-Anteil, da $G_{\mu\nu,\xi}^{-1}$ stets mit einem Impuls p_μ zu multiplizieren ist!

Um eine Identität, welche den ϕ_1 -Feld-Propagator enthält, zu erlangen, betrachte ich $\frac{\delta^3}{\delta c(x_3)\delta\phi_2(x_2)\delta\phi_1(x_1)}$ angewandt auf (3.66). Diese Identität enthält 3-Punkt-Greensfunktionen.

$$\begin{aligned} 0 &= - \int d^2x e\delta(x - x_3)\delta(x - x_2)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_1(x_1)\phi_1(x)} + \int d^2x e\delta(x - x_1)\delta(x - x_3)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_2(x_2)\delta\phi_2(x)} \\ &\quad + e(\phi_{1,0} + v)\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_2(x_2)\delta\phi_1(x_1)\delta\phi_2(x_3)} \\ &\quad - \int d^2x \delta(x - x_3)\partial_\mu \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_2(x_2)\delta\phi_1(x_1)\delta A_\mu(x)} - ev \frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(x_3)\delta\phi_1(x_1)\delta\bar{c}(x_2)} \end{aligned} \quad (3.71)$$

bzw. :

$$\begin{aligned} 0 &= eG_{\phi_1}^{-1}(p) - eG_{\phi_2}^{-1}(q) - e(\phi_{1,0} + v)\Gamma_{\phi_1\phi_2\phi_2}(p, q, -p - q) \\ &\quad - i(p + q)_\mu\Gamma_{\phi_1\phi_2 A_\mu}(p, q, -p - q) + ev\Gamma_{\phi_1 c\bar{c}}(p, -p - q, q) \end{aligned} \quad (3.72)$$

Dies kann auf Tree-Level leicht bestätigt werden:

$$\begin{aligned}
 eG_{\phi_1}^{-1}(p) &= e(p^2 + m_0^2) \\
 -eG_{\phi_2}^{-1}(q) &= -e(q^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}) \\
 -ev\Gamma_{\phi_1\phi_2\phi_2}(p, q, -p - q) &= -ev\frac{qv}{3} = -em_0^2 \\
 ev\Gamma_{\phi_1 c\bar{c}}(p, -p - q, q) &= ev\frac{e^2 v}{\xi} = e\frac{m_{0,v}^2}{\xi} \\
 -i(p + q)_\mu\Gamma_{\phi_1\phi_2 A_\mu}(p, q, -p - q) &= -e(p + q)_\mu(p - q)_\mu = -e(p^2 - q^2).
 \end{aligned}$$

Eine weitere interessante Aussage erhalte ich durch $\frac{\delta^3}{\delta c(x_3)\delta\phi_1(x_2)\delta A_\mu(x_1)}$ (3.66):

$$\begin{aligned}
 0 &= e(\phi_{1,0} + v)\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_1(x_2)\delta A_\mu(x_1)\delta\phi_2(x_3)} + \int d^2x e\delta(x - x_3)\delta(x - x_2)\frac{\delta^2\Gamma}{\delta A_\mu(x_1)\delta\phi_2(x)} \\
 &\quad - \int d^2x \delta(x - x_3)\partial_\nu\frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_1(x_2)\delta A_\mu(x_1)\delta A_\nu(x)} - \int d^2x \xi\delta(x - x_1)\partial_\mu\frac{\delta^3\Gamma}{\delta c(x_3)\delta\phi_1(x_2)\delta\bar{c}(x)}
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

bzw.:

$$\begin{aligned}
 0 &= -eG_{\mu\phi_2}^{-1}(p) - e(\phi_{1,0} + v)\Gamma_{\phi_1\phi_2 A_\mu}(q, -p - q, p) \\
 &\quad - i(p + q)_\nu\Gamma_{\phi_1 A_\mu A_\nu}(q, p, -p - q) + i\xi p_\mu\Gamma_{\phi_1 c\bar{c}}(q, -p - q, p).
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Auch dies kann zumindest auf Tree-Level nachgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
 G_{\mu\phi_2}^{-1}(p) &= 0 \\
 -ev\Gamma_{\phi_1\phi_2 A_\mu}(q, -p - q, p) &= ie^2 v(2q + p)_\mu \\
 -i(p + q)_\nu\Gamma_{\phi_1 A_\mu A_\nu}(q, p, -p - q) &= -2ie^2 v(p + q)_\mu \\
 i\xi p_\mu\Gamma_{\phi_1 c\bar{c}}(q, -p - q, p) &= ie^2 v p_\mu.
 \end{aligned}$$

Hier besteht ein Zusammenhang zwischen dem inversen $A_\mu\phi_2$ -Mix-Propagator und 3-Punkt-Greensfunktionen.

Die in diesem Abschnitt hergeleiteten Identitäten können dazu herangezogen werden, die Eliminierung unphysikalischer Anteile in den Propagatoren (s. Abschn. 5.3) und in physikalischen Streuamplituden (s. Kapitel 6) sicherzustellen. So zeigen z. Bsp. die Gleichungen (3.68) und (3.70) eine Aufhebung der Propagatoren des ϕ_2 - und des Geist-Feldes mit dem des Longitudinal-Anteils des Eichfeldes.

Kapitel 4

Regularisierung

In dieser Arbeit soll das Verfahren der Dimensionellen Regularisierung (s. [19], [20], [32]) angewandt werden. Der Vorteil dieser Regularisierungsmethode (gegenüber z. Bsp. der „cut-off“-Regularisierung) ist die Erhaltung der Symmetrieeigenschaften. Die auftretenden Integrale in $D = 2$ Dimensionen werden zunächst in $D = 2 - 2\epsilon$ Dimensionen berechnet und als Laurent-Reihen im Parameter ϵ geschrieben. Das Ergebnis für $D = 2$ erhält man anschliessend als Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$. Durch Renormierung lassen sich zuvor die divergierenden Anteile entfernen (vgl. Kapitel 5 und dort zu diesem Thema angegebene Literatur). Hierzu ist es zunächst erforderlich, mit Hilfe eines willkürlich wählbaren Massenparameters die Dimensionen der Kopplungskonstanten anzupassen. Aus der Forderung, daß die Lagrange-Dichte in D Dimensionen ebenfalls die Massendimension D besitze, als Formel geschrieben $[\mathcal{L}] = D$, ergeben sich aus den einzelnen Termen in der Lagrange-Dichte die folgenden Massendimensionen der Kopplungskonstanten, Massenparameter und des Vakuumwertes des Feldes (s. Tab. 4.1): Die Massenparameter m_0 und $m_{0,v}$ besitzen also stets

	D	$D = 2 - 2\epsilon$	$D = 2$
$[m_0^2]$	2	2	2
$[e^2]$	$4 - D$	$2 + 2\epsilon$	2
$[g]$	$4 - D$	$2 + 2\epsilon$	2
$[m_{0,v}^2] = [e^2 v^2]$	2	2	2
$[v^2] = [\frac{m_0^2}{g}]$	$D - 2$	-2ϵ	0

Tabelle 4.1: Massendimensionen der Kopplungskonstanten, Massenparameter und des Vakuumwertes des Feldes

die Massendimension 1, die Kopplungskonstanten in $D = 2 - 2\epsilon$ werden nun geschrieben als

$$\begin{aligned} e &= \mu^\epsilon e' \\ g &= \mu^{2\epsilon} g' \\ v &= \mu^{-\epsilon} v', \end{aligned}$$

wobei die gestrichenen Größen die Kopplungskonstanten für $D = 2$ bezeichnen mögen, μ ist ein beliebiger Massenparameter, $[\mu] = 1$. Im folgenden schreibe ich die gestrichenen Größen wieder als ungestrichene.

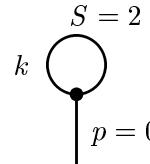
Nun liste ich die für die Propagatoren und Vakuumkorrekturen (in den beiden in Kapitel 3 behandelten Eichungen) berechneten 1-Loop-Ausdrücke auf. An dieser Stelle sind nur die Ergebnisse aufgeführt. Einzelne Rechnungen zu den auftretenden Ausdrücken entnehme man dem Anhang B, die Grundlagen hierzu sind im Anhang A notiert (s.a. oben zitierte Literatur). Des Weiteren sind hier sämtliche Propagatoren mit amputierten äußeren Linien notiert. Dies gilt jedoch nicht für die Beiträge zum Vakuumerwartungswert. Man erhält allgemein die amputierte n -Punkt-Greensfunktion G_n^{amp} aus G_n durch Multiplikation mit den inversen Propagatoren:

$$G_n^{\text{amp}} = \prod_{i=1}^n \Delta_i^{-1} G_n.$$

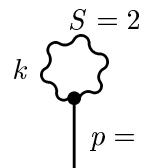
Außerdem tragen zu jedem Ausdruck noch Terme der Ordnung ϵ und höher bei (nicht notiert).

4.1 Unitäre Eichung

4.1.1 Vakuum



$$\begin{aligned} & S = 2 \\ & k \quad \text{---} \quad \text{loop} \quad \text{---} \quad p = 0 = -\mu^\epsilon \frac{gv}{2m_0^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\ & = -\mu^{-\epsilon} \frac{gv}{8\pi m_0^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} - \gamma \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$



$$\begin{aligned} & S = 2 \\ & k \quad \text{---} \quad \text{loop} \quad \text{---} \quad p = 0 = -\mu^\epsilon \frac{m_{0,v}^2}{vm_0^2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 + m_{0,v}^2} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_{0,v}^2} \right) \\ & = -\mu^{-\epsilon} \frac{e^2 v}{4\pi m_0^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

4.1.2 Skalarfeld-Propagator

$$\begin{array}{c} S = 2 \\ \text{Diagram: A loop with momentum } k \text{ attached to a horizontal line with momentum } p. \end{array}
 \begin{aligned}
 &= -\frac{g\mu^{2\epsilon}}{2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{m_0^2 + k^2} \\
 &= -\frac{g}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{array}{c} S = 2 \\ \text{Diagram: A loop with momentum } k \text{ attached to a horizontal line with momentum } p. \end{array}
 \begin{aligned}
 &= -e^2 \mu^{2\epsilon} \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_{0,v}^2}}{m_{0,v}^2 + k^2} \\
 &= -\frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{array}{c} S = 2 \\ \text{Diagram: A loop with momentum } k \text{ attached to a vertical line with momentum } p. \end{array}
 \begin{aligned}
 &= \frac{g^2 v^2 \mu^{2\epsilon}}{2m_0^2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{m_0^2 + k^2} \\
 &= \frac{3g}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{array}{c} S = 2 \\ \text{Diagram: A loop with momentum } k \text{ attached to a horizontal line with momentum } p. \end{array}
 \begin{aligned}
 &= \frac{e^2 v^2 g \mu^{2\epsilon}}{m_0^2} \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_{0,v}^2}}{m_{0,v}^2 + k^2} \\
 &= \frac{3e^2}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{array}{c} S = 2! \\ \text{Diagram: Two loops connected by a horizontal line with momentum } p. \end{array}
 \begin{aligned}
 &= \frac{g^2 v^2 \mu^{2\epsilon}}{2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{(m_0^2 + k^2)(m_0^2 + (k+p)^2)} \\
 &= \frac{3m_0^2 g}{8\pi \sqrt{p^4 + 4m_0^2 p^2}} \ln \frac{p^2 + 2m_0^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 m_0^2}}{p^2 + 2m_0^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2 m_0^2}}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$S = 2!$

$$\begin{aligned}
 & k + p \\
 & \text{---} \bullet \text{---} \quad = \\
 & \quad \text{---} \bullet \text{---} \quad k \\
 & = \frac{4e^4 v^2 \mu^{2\epsilon} \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\eta}}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{(k+p)_\mu (k+p)_\nu}{m_{0,v}^2} \right) \left(\delta_{\lambda\eta} + \frac{k_\lambda k_\eta}{m_{0,v}^2} \right)}{(m_{0,v}^2 + (k+p)^2)(m_{0,v}^2 + k^2)} \\
 & = 2e^4 v^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{(k+p)_\mu (k+p)_\nu}{m_{0,v}^2} \right) \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_{0,v}^2} \right)}{(m_{0,v}^2 + (k+p)^2)(m_{0,v}^2 + k^2)} \\
 & = \frac{e^2}{4\pi} \left\{ -\frac{p^2}{m_{0,v}^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(p^2 + 2m_{0,v}^2)^2}{2m_{0,v}^2 p^2 \sqrt{p^4 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + 2m_{0,v}^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + 2m_{0,v}^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \right\} \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

4.1.3 Eichfeld-Propagator

$$\begin{aligned}
 & S = 2 \\
 & \mu \text{---} \bullet \text{---} \quad \nu = -\mu^{2\epsilon} e^2 \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{m_0^2 + k^2} \\
 & = -\frac{e^2}{4\pi} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & S = 2 \\
 & \mu \text{---} \bullet \text{---} \quad \nu = \mu^{2\epsilon} \frac{g m_{0,v}^2}{m_0^2} \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{m_0^2 + k^2} \\
 & = \frac{3e^2}{4\pi} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

$S = 2$

$$\begin{aligned}
 \mu \sim & \frac{k^2}{p^2} \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\tau} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\lambda\tau} + \frac{k_\lambda k_\tau}{m_{0,v}^2}}{m_{0,v}^2 + k^2} \\
 & = \frac{3e^4}{2\pi g} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$


 $\nu =$

$$\begin{aligned}
 S = 1 & \quad k + p \\
 & \quad k \\
 & \quad p \\
 & = 4e^2 m_{0,v}^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m_{0,v}^2}}{[m_0^2 + (k+p)^2][m_{0,v}^2 + k^2]} \\
 & = \frac{e^2}{2\pi} \left\{ \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 2 - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} + \frac{p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2}{2p^2} \ln \frac{m_0^2}{m_{0,v}^2} \right. \right. \\
 & \quad - \frac{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2}{2p^2 \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \\
 & \quad + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} - \frac{p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2}{2p^2} \ln \frac{m_0^2}{m_{0,v}^2} \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{2p^2} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \right] \right\} \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

4.2 R_ξ -Eichung

4.2.1 Vakuum

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram: } & S = 2 \\
 & \text{Loop vertex } k \\
 & \text{External line } p = 0
 \end{aligned}
 = -\mu^\epsilon \frac{gv}{6m_0^2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}
 = -\mu^{-\epsilon} \frac{gv}{24\pi m_0^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right]
 \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram: } & S = -1 \\
 & \text{Loop vertex } k \\
 & \text{External line } p = 0
 \end{aligned}
 = \mu^\epsilon \frac{e^2 v}{\xi m_0^2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}
 = \mu^{-\epsilon} \frac{e^2 v}{4\pi m_0^2} \frac{1}{\xi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right]
 \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram: } & S = 2 \\
 & \text{Loop vertex } k \\
 & \text{External line } p = 0
 \end{aligned}
 = -\mu^\epsilon \frac{e^2 v \delta_{\mu\nu}}{m_0^2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu} + (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{m_{0,v}^2 + \xi k^2}}{k^2 + m_{0,v}^2}
 = -\mu^\epsilon \frac{e^2 v}{m_0^2} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \left[\frac{\delta_{\mu\nu}^2}{k^2 + m_{0,v}^2} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k^2}{\left[k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right] \left[k^2 + m_{0,v}^2\right]} \right]
 = -\mu^{-\epsilon} \frac{e^2 v}{4\pi m_0^2} \left[\frac{1+\xi}{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2 + \frac{1}{\xi} \ln \xi \right]
 \quad (4.16)$$

Hierbei sei nun auf folgendes hingewiesen. Der Anteil des ϕ_1 -Feldes (Realteil) entspricht exakt dem Anteil des σ -Feldes in der Unitären Eichung. Betrachtet man die Summe aus dem Eich- und dem Geistfeldanteil:

$$\text{Diagram: } \text{Loop vertex } k \quad \text{External line } p = 0
 + \text{Diagram: } \text{Loop vertex } k \quad \text{External line } p = 0
 = -\mu^{-\epsilon} \frac{e^2 v}{4\pi m_0^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right],$$

so zeigt der Vergleich mit dem Ausdruck in der Unitären Eichung:

$$\text{Diagram: } \text{Loop vertex } k \quad \text{External line } p = 0_{R_\xi}
 + \text{Diagram: } \text{Loop vertex } k \quad \text{External line } p = 0_{R_\xi}
 = \text{Diagram: } \text{Loop vertex } k \quad \text{External line } p = 0_{\text{unitär}}
 \quad (4.17)$$

4.2.2 ϕ_1 -Propagator

$$\begin{array}{c}
 S = 2 \\
 \text{Diagram: A horizontal line labeled } p \text{ with a circle loop attached to it. The loop is labeled } k. \\
 \end{array}
 = -\frac{g}{2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\
 = -\frac{g}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) \quad (4.18)$$

$$\begin{array}{c}
 S = 2 \\
 \text{Diagram: A horizontal line labeled } p \text{ with a dashed circle loop attached to it. The loop is labeled } k. \\
 \end{array}
 = -\frac{g}{6} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 = -\frac{g}{24\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right) \quad (4.19)$$

$$\begin{array}{c}
 S = 2 \\
 \text{Diagram: A horizontal line labeled } p \text{ with a wavy circle loop attached to it. The loop is labeled } k. \\
 \end{array}
 = -e^2 \delta_{\mu\nu} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{k^2 + m_{0,v}^2} \\
 = -\frac{e^2}{4\pi} \left[\frac{\xi+1}{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2 + \frac{1}{\xi} \ln \xi \right] \quad (4.20)$$

$$\begin{array}{c}
 S = 2 \\
 \text{Diagram: A horizontal line labeled } p \text{ with a circle loop attached to it. The loop is labeled } k. \\
 \end{array}
 = \frac{g^2 v^2}{2m_0^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\
 = \frac{3g}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) \quad (4.21)$$

$$\begin{array}{c}
 S = 2 \\
 \text{Diagram: A horizontal line labeled } p \text{ with a dashed circle loop attached to it. The loop is labeled } k. \\
 \end{array}
 = \frac{g^2 v^2}{6m_0^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 = \frac{g}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right) \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
 S = 2 & \\
 \text{Diagram: } & \text{A horizontal line labeled } p \text{ has a vertical line labeled } k \text{ attached to it. A wavy loop is attached to the top of the } k \text{ line.} \\
 & = \frac{gm_{0,v}^2}{m_0^2} \mu^{2\epsilon} \delta_{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{k^2 + m_{0,v}^2} \\
 & = \frac{3e^2}{4\pi} \left[\frac{\xi+1}{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2 + \frac{1}{\xi} \ln \xi \right] \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = -1 & \\
 \text{Diagram: } & \text{A horizontal line labeled } p \text{ has a vertical line labeled } k \text{ attached to it. A wavy loop is attached to the top of the } k \text{ line.} \\
 & = -\frac{gm_{0,v}^2}{\xi m_0^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 & = -\frac{3e^2}{4\pi\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right) \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = 2! & \\
 \text{Diagram: } & \text{A horizontal line labeled } p \text{ has a circle loop labeled } k+p \text{ attached to it. The loop is solid on the left and dashed on the right.} \\
 & = \frac{g^2 v^2}{2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k+p)^2 + m_0^2][k^2 + m_0^2]} \\
 & = \frac{3gm_0^2}{8\pi\sqrt{p^4 + 4p^2m_0^2}} \ln \frac{p^2 + 2m_0^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2m_0^2}}{p^2 + 2m_0^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2m_0^2}} \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = 2! & \\
 \text{Diagram: } & \text{A horizontal line labeled } p \text{ has a circle loop labeled } k+p \text{ attached to it. The loop is dashed on the left and solid on the right.} \\
 & = \frac{g^2 v^2}{18} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k+p)^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}][k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}]} \\
 & = \frac{gm_0^2}{24\pi\sqrt{p^4 + 4p^2\frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + 2\frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{p^4 + 4p^2\frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + 2\frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{p^4 + 4p^2\frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

$S = -1$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{e^2 m_{0,v}^2}{\xi^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k+p)^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}][k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}]} \\
 &= -\frac{e^2 m_{0,v}^2}{4\pi\xi^2 \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + 2\frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + 2\frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$S = 2!$

$$\begin{aligned}
 &= 2e^2 m_{0,v}^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}\right) \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{(k+p)_\mu (k+p)_\nu}{(k+p)^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}\right)}{\left((k+p)^2 + m_{0,v}^2\right) \left(k^2 + m_{0,v}^2\right)} \\
 &= \frac{e^2}{4\pi} \left[\frac{\xi-1}{\xi} \ln \xi + \frac{(p^2 + 2m_{0,v}^2)^2}{2m_{0,v}^2 \sqrt{p^4 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + 2m_{0,v}^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + 2m_{0,v}^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \right. \\
 &\quad + \frac{\left(p^2 + 2\frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2}{2m_{0,v}^2 \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + 2\frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + 2\frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \\
 &\quad \left. + \frac{4\frac{m_{0,v}^4}{\xi} - \left(p^2 + \frac{1+\xi}{\xi} m_{0,v}^2\right)^2}{m_{0,v}^2 \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m_{0,v}^2\right)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + \frac{\xi+1}{\xi} m_{0,v}^2 + \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m_{0,v}^2\right)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + \frac{\xi+1}{\xi} m_{0,v}^2 - \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m_{0,v}^2\right)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \right]
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

$S = 1$

$$\begin{aligned}
 &= e^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \right)}{[k^2 + m_{0,v}^2][(k+p)^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}]} \\
 &= \frac{e^2}{4\pi} \left[\frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \left(\frac{2}{\xi} - 1 + \frac{p^2}{m_{0,v}^2} \right) \ln \xi \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4 \frac{m_{0,v}^4}{\xi} - \left(p^2 + \frac{\xi+1}{\xi} m_{0,v}^2 \right)^2}{m_{0,v}^2 \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m_{0,v}^2 \right)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + \frac{\xi+1}{\xi} m_{0,v}^2 + \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m_{0,v}^2 \right)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + \frac{\xi+1}{\xi} m_{0,v}^2 - \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m_{0,v}^2 \right)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\left(p^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2}{m_{0,v}^2 \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + 2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + 2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \right] \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

4.2.3 ϕ_2 -Propagator

$S = 2$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{g}{6} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\
 &= -\frac{g}{24\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

$S = 2$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{g}{2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 &= -\frac{g}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right) \tag{4.31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = 2 & \\
 \text{Diagram: } & \text{A loop with a wavy line labeled } k \text{ attached to a dashed line labeled } p. \\
 & = -e^2 \delta_{\mu\nu} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{k^2 + m_{0,v}^2} \\
 & = -\frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{\xi+1}{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2 + \frac{1}{\xi} \ln \xi \right) \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = 2 & \\
 \text{Diagram: } & \text{A loop with a vertical line labeled } k \text{ attached to a dashed line labeled } p. \\
 & = \frac{g^2 v^2}{6m_0^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\
 & = \frac{g}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = 2 & \\
 \text{Diagram: } & \text{A dashed circle with a vertical line labeled } k \text{ attached to a dashed line labeled } p. \\
 & = \frac{g^2 v^2}{18m_0^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 & = \frac{g}{24\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right) \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = 2 & \\
 \text{Diagram: } & \text{A loop with a vertical line labeled } k \text{ attached to a dashed line labeled } p. \\
 & = \frac{gm_{0,v}^2}{3m_0^2} \delta_{\mu\nu} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{k^2 + m_{0,v}^2} \\
 & = \frac{e^2}{4\pi} \left[\frac{\xi+1}{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2 + \frac{1}{\xi} \ln \xi \right] \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Beachte an dieser Stelle:

$$\text{Diagram: } \text{Two diagrams are shown: one with a wavy line labeled } k \text{ attached to a dashed line labeled } p, \text{ and another with a vertical line labeled } k \text{ attached to a dashed line labeled } p. \quad + \quad = 0.$$

$$\begin{aligned}
S = -1 & \\
\text{Diagram: } \begin{array}{c} \cdots \\ | \\ \bullet \\ | \\ \cdots \end{array} k & = -\frac{gm_{0,v}^2}{3m_0^2\xi}\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
& = -\frac{e^2}{4\pi\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right) \quad (4.36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S = 1 & \\
\text{Diagram: } \begin{array}{c} \cdots \\ | \\ \bullet \\ | \\ \cdots \end{array} k + p & = \\
& = e^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \right)}{\left[k^2 + m_{0,v}^2 \right] \left[(k+p)^2 + m_0^2 \right]} \\
& = \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \ln \frac{m_0^2}{m_{0,v}^2} + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{m_0^2 + p^2}{m_{0,v}^2} \right) \ln \xi \right. \\
& \quad + \frac{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{m_{0,v}^2} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \\
& \quad \left. - \frac{(p^2 + m_0^2)^2}{m_{0,v}^2 \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \right\} \quad (4.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & S = 1 \\
 \text{Diagram: } & \text{A loop diagram with two external dashed lines labeled } p \text{ and } k + p. \\
 & = \frac{g^2 v^2}{9} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k+p)^2 + m_0^2] \left[k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right]} \\
 & = \frac{g m_0^2}{12\pi} \frac{\ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi}p^2}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi}p^2}}}{\sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi}p^2}}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

4.2.4 Eichfeld-Propagator

$$\begin{aligned}
 & S = 2 \\
 \text{Diagram: } & \text{A loop diagram with two external wavy lines labeled } \mu \text{ and } \nu, \text{ and internal lines labeled } p \text{ and } k. \\
 & = -e^2 \delta_{\mu\nu} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\
 & = -\frac{e^2}{4\pi} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
 & S = 2 \\
 \text{Diagram: } & \text{A loop diagram with two external wavy lines labeled } \mu \text{ and } \nu, \text{ and internal lines labeled } p \text{ and } k. \\
 & = -e^2 \delta_{\mu\nu} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 & = -\frac{e^2}{4\pi} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right)
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
 & S = 2 \\
 \text{Diagram: } & \text{A loop diagram with two external wavy lines labeled } \mu \text{ and } \nu, \text{ and internal line labeled } p. \\
 & = g \frac{m_{0,v}^2}{m_0^2} \delta_{\mu\nu} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\
 & = \frac{3e^2}{4\pi} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
 S = 2 \\
 \text{Diagram: } & \mu \text{ (wavy line)} \xrightarrow[p]{\quad} \nu \quad \text{with a dashed loop labeled } k \text{ attached to the vertex.} \\
 & = g \frac{m_{0,v}^2}{3m_0^2} \delta_{\mu\nu} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 & = \frac{e^2}{4\pi} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right) \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Beachte an dieser Stelle:

$$\text{Diagram: } \mu \text{ (wavy line)} \xrightarrow[p]{\quad} \nu + \mu \quad \text{with two dashed loops labeled } k \text{ attached to the vertex.} \quad = 0.$$

$$\begin{aligned}
 S = 2 \\
 \text{Diagram: } & \mu \text{ (wavy line)} \xrightarrow[p]{\quad} \nu \quad \text{with a complex loop labeled } k \text{ attached to the vertex.} \\
 & = 2e^2 \frac{m_{0,v}^2}{m_0^2} \delta_{\mu\nu} \mu^{2\epsilon} \delta_{\lambda\tau} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\lambda\tau} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\lambda k_\tau}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{k^2 + m_{0,v}^2} \\
 & = \frac{3e^4}{2\pi g} \delta_{\mu\nu} \left[\frac{1+\xi}{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2 + \frac{1}{\xi} \ln \xi \right] \quad (4.43)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = -1 \\
 \text{Diagram: } & \mu \text{ (wavy line)} \xrightarrow[p]{\quad} \nu \quad \text{with a complex loop labeled } k \text{ attached to the vertex.} \\
 & = -2e^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi m_0^2} \delta_{\mu\nu} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 & = -\frac{3e^4}{2\pi\xi} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right) \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

$S = 1 \quad k + p$

$\nu =$

$$\begin{aligned}
&= 4e^2 m_{0,v}^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{((k+p)^2 + m_0^2)(k^2 + m_{0,v}^2)} \\
&= \frac{e^2}{4\pi p^2} \left\{ \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \left[\frac{1-\xi}{\xi} m_{0,v}^2 \ln \frac{m_0^2}{m_{0,v}^2} - \left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right) \ln \xi \right. \right. \\
&\quad + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \\
&\quad - \frac{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2}{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \\
&\quad + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left[\frac{\xi-1}{\xi} m_{0,v}^2 \ln \frac{m_0^2}{m_{0,v}^2} + \left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right) \ln \xi \right. \\
&\quad - \frac{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2}{\sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \\
&\quad \left. + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \right] \} \tag{4.45}
\end{aligned}$$

$S = 1$

$$\begin{aligned}
 & \mu \xrightarrow[p]{\quad} \xrightarrow[k+p]{\quad} \nu = \\
 & = e^2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+p)_\mu (2k+p)_\nu}{[(k+p)^2 + m_0^2] [k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}]} \\
 & = \frac{e^2}{2\pi} \left\{ \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 2 - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} + \frac{p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}{2p^2} \ln \frac{\xi m_0^2}{m_{0,v}^2} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi}p^2}}{2p^2} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi}p^2}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi}p^2}} \right] \right. \\
 & \quad \left. + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} + \frac{p^2 - m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}{2p^2} \ln \frac{\xi m_0^2}{m_{0,v}^2} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\left(m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2}{2p^2 \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi}p^2}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi}p^2}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi}p^2}} \right] \right\} \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

4.2.5 Geistfeld-Propagator

$S = 2$

$$\begin{aligned}
 \dots \xrightarrow[p]{\quad} \cdot \bullet \cdot \xrightarrow[\quad]{\quad} \dots & = \frac{gm_{0,v}^2}{2\xi m_0^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\
 & = \frac{3e^2}{8\pi\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = 2 & \\
 \text{Diagram: } & \text{A horizontal line with arrows at both ends. A vertical line connects it to a point on a dashed circle labeled } k. \\
 & \dots \blacktriangleright \cdot \bullet \cdot \blacktriangleright \dots = \frac{gm_{0,v}^2}{6\xi m_0^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 & = \frac{e^2}{8\pi\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right) \quad (4.47)
 \end{aligned}$$

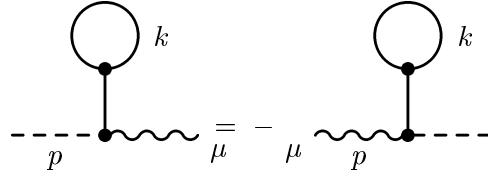
$$\begin{aligned}
 S = 2 & \\
 \text{Diagram: } & \text{A horizontal line with arrows at both ends. A vertical line connects it to a point on a wavy circle labeled } k. \\
 & \dots \blacktriangleright \cdot \bullet \cdot \blacktriangleright \dots = \frac{e^2 m_{0,v}^2}{\xi m_0^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{k^2 + m_{0,v}^2} \\
 & = \frac{3e^4}{4\pi\xi g} \left(\frac{\xi+1}{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2 + \frac{1}{\xi} \ln \xi \right) \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = -1 & \\
 \text{Diagram: } & \text{A horizontal line with arrows at both ends. A vertical line connects it to a point on a dashed circle labeled } k. \\
 & \dots \blacktriangleright \cdot \bullet \cdot \blacktriangleright \dots = -\frac{e^2 m_{0,v}^2}{\xi^2 m_0^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 & = -\frac{3e^4}{4\pi\xi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right) \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

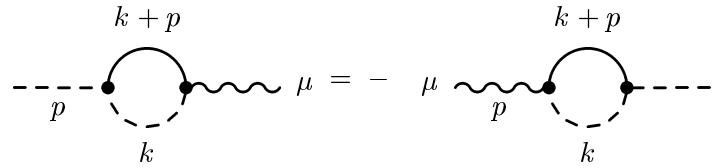
$$\begin{aligned}
 S = 1 & \\
 \text{Diagram: } & \text{A horizontal line with arrows at both ends. Two vertical lines connect it to two points on a solid circle labeled } k+p \text{ and } k. \\
 & \dots \blacktriangleright \cdot \bullet \cdot \blacktriangleright \dots = \frac{e^2 m_{0,v}^2}{\xi^2} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k+p)^2 + m_0^2] [k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}]} \\
 & = \frac{e^2 m_{0,v}^2}{4\pi\xi^2} \frac{\ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi})^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi} p^2}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi})^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi} p^2}}}{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi})^2 + 4\frac{m_{0,v}^2}{\xi} p^2}} \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

4.2.6 ϕ_2 -Eichfeld-Mix-Propagator

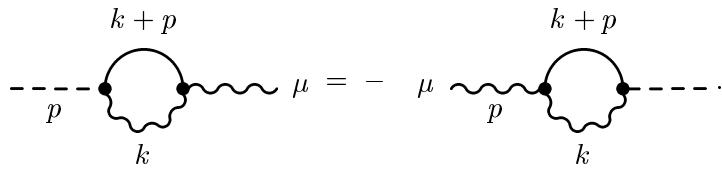
Beachte hierbei:



und ebenso für die drei übrigen Tadpole-Beiträge, sowie



und



$$\begin{aligned}
 S = 2 \\
 & \text{Diagram: } \text{circle} \text{---} \text{wavy line } k \text{---} \text{dashed line } p \\
 & \mu = -i \frac{egv}{2m_0^2} p_\mu \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\
 & = -i \frac{egv}{8\pi m_0^2} p_\mu \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi \mu^2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
 S = 2 \\
 & \text{Diagram: } \text{dashed line } p \text{---} \text{wavy line } k \text{---} \text{circle} \\
 & \mu = -i \frac{egv}{6m_0^2} p_\mu \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 & = -i \frac{egv}{24\pi m_0^2} p_\mu \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi \mu^2} + \ln \xi \right)
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

$S = 2$

$$\begin{aligned} \mu &= -i \frac{e^3 v}{m_0^2} p_\mu \mu^{2\epsilon} \delta_{\eta\tau} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\eta\tau} + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{k_\eta k_\tau}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{k^2 + m_{0,v}^2} \\ &= -i \frac{e^2 ev}{4\pi m_0^2} p_\mu \left(\frac{1+\xi}{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2 + \frac{1}{\xi} \ln \xi \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

$S = -1$

$$\begin{aligned} \mu &= i \frac{e^3 v}{\xi m_0^2} p_\mu \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\ &= i \frac{e^2 ev}{4\pi \xi m_0^2} p_\mu \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \ln \xi \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

$S = 1$

$$\begin{aligned} \mu &= i \frac{gve}{3} \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+p)_\mu}{[(k+p)^2 + m_0^2] \left[k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right]} \\ &= i \frac{egv}{12\pi p^2} p_\mu \left\{ \ln \left(\xi \frac{m_0^2}{m_{0,v}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{m_{0,v}^2}{\xi} - m_0^2}{\sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \right\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

$S = 1$

$$\begin{aligned}
 &= -2ie^3 v \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2p+k)_\mu + \frac{1-\xi}{\xi} \frac{(2p+k)_\lambda k_\lambda k_\mu}{k^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{((k+p)^2 + m_0^2) (k^2 + m_{0,v}^2)} \\
 &= -i \frac{e^2 ev}{4\pi m_{0,v}^2} p_\mu \left\{ \frac{m_{0,v}^2}{p^2} \ln \frac{m_0^2}{m_{0,v}^2} + \frac{p^2 + m_0^2}{p^2} \ln \xi \right. \\
 &\quad + \frac{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \\
 &\quad \left. - \frac{\left(p^2 + m_0^2\right)\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)}{p^2 \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \right\} \tag{4.56}
 \end{aligned}$$

Kapitel 5

Renormierung

Nachdem im vorhergehenden Kapitel sämtliche 1-Loop-Graphen sowohl in der Unitären als auch in der R_ξ -Eichung berechnet wurden, kann nun die eigentliche Renormierung durchgeführt werden. Hierbei sollen die Ergebnisse in diesen beiden Eichungen verglichen werden.

Unter Renormierung versteht man das Entfernen der Divergenzen, die hier durch das Verfahren der Dimensionellen Regularisierung herausgearbeitet wurden. Dies kann einerseits durch Hinzufügen von „Counter-Termen“ zur ursprünglichen Lagrange-Dichte geschehen oder durch eine multiplikative Renormierung der auftretenden Felder, Massen und Kopplungskonstanten. Es kann gezeigt werden, daß, falls die benötigten Counter-Terme von der gleichen Gestalt wie die Anteile der ursprünglichen Lagrange-Dichte sind (und nur dann spricht man auch von einer renormierbaren Theorie), diese beiden Ansätze äquivalent sind (s. z. Bsp. [8], [38]). In dieser Arbeit werde ich nicht die komplette Renormierung für das Abelsche Higgs-Modell durchführen (hierfür s. [3], [41]), sondern mich auf eine Berechnung der Massen der einzelnen Propagatoren konzentrieren sowie die Feldrenormierungskonstanten angeben. Diese werden für den anschließenden Vergleich der 1-Loop-Beiträge zum Vakuumerwartungswert des Skalarfeldes benötigt. Die Bestimmung der Massen und somit auch der Renormierungskonstanten führe ich in zwei unterschiedlichen Renormierungsverfahren durch, die im folgenden Abschnitt kurz dargestellt werden.

Zunächst jedoch noch eine Bemerkung zu den Kopplungen g und e^2 : Nach [28] (auch z.Bsp.: [14] bzw. [17]) wird hier angenommen:

$$\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(e^2). \quad (5.1)$$

Formal werden also die Störungsreihen in einem Parameter, hier s , geschrieben, mit:

$$\begin{aligned} g &= s g' \\ e^2 &= s (e^2)' \end{aligned}$$

Somit ist eine Fixierung der Massen des Skalarfeldes und des Eichfeldes, m_0 und $m_{0,v}$, sichergestellt und eine Entwicklung in Ordnungen von s entspricht einer Entwicklung in der Anzahl der enthaltenen Loops (s. [28]). Es sei darauf hingewiesen, daß andere Annahmen

zu nicht wohldefinierten Störungsreihen führen können. Ein solches Beispiel wird in [2] zitiert (s. dort). Weiter wird in [11] ein ähnliches Verhalten der Störungsreihe für eine zu große Higgs-Masse im Standard-Modell erwähnt.

5.1 Renormierungsverfahren

Mit $-\Sigma$ sei die Summe aller amputierten Ein-Teilchen-irreduziblen(1PI) 1-Loop Beiträge zu einem Propagator G_0 bezeichnet. Graphisch sei dies wie folgt dargestellt (die durchgezogene Linie repräsentiere hier ganz allgemein einen beliebigen Propagator):

$$G_0 = \text{———},$$

$$-\Sigma = (\text{———} \otimes \text{———})_{\text{amp}}.$$

Den vollen Propagator (zusammenhängende 2-Punkt-Greensfunktion) $G_c^{(2)}$ erhält man nun wie folgt:

$$\begin{aligned} G_c^{(2)} &= \text{———} \bullet \text{———} \\ &= \text{———} + \text{———} \otimes \text{———} + \text{———} \otimes \text{———} \otimes \text{———} + \dots \\ &= G_0 + G_0 (-\Sigma) G_0 + G_0 (-\Sigma) G_0 (-\Sigma) G_0 + \dots \\ &= \frac{1}{G_0^{-1} + \Sigma}. \end{aligned}$$

Mit $G_c^{(2)} \Gamma^{(2)} = -1$ folgt also:

$$-\Gamma^{(2)} = \left(G_c^{(2)} \right)^{-1} = G_0^{-1} + \Sigma.$$

Für das Folgende sei als Beispiel stets der Skalarfeldpropagator gemeint, also:

$$\begin{aligned} G_0^{-1} &= p^2 + m_0^2, \\ -\Gamma^{(2)} &= p^2 + m_0^2 + \Sigma. \end{aligned}$$

5.1.1 Renormierungsschema I

Hierbei betrachtet man die Entwicklung der 2-Punkt-Vertex-Funktion um $p^2 = 0$:

$$\begin{aligned} -\Gamma_\sigma^{(2)}(p^2) &= m_0^2 + \Sigma(0) + \underbrace{\left(1 + \frac{\partial \Sigma}{\partial p^2}\Big|_{p^2=0}\right)}_{=-\frac{\partial \Gamma_\sigma^{(2)}}{\partial p^2}\Big|_{p^2=0}} p^2 + \mathcal{O}(p^4) \\ &\equiv \frac{1}{Z_R} \{m_R^2 + p^2 + \mathcal{O}(p^4)\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{Z_R} \equiv -\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_\sigma^{(2)}(p^2)\Big|_{p^2=0}, \quad (5.3)$$

$$\frac{m_R^2}{Z_R} \equiv -\Gamma_\sigma^{(2)}(0). \quad (5.4)$$

Die hierdurch festgelegte Masse m_R (auch: „renormierte Masse“) ist proportional zu einer inversen Korrelationslänge, welche durch das zweite Moment der 2-Punkt-Greensfunktion im Ortsraum gegeben ist:

$$\begin{aligned} 4\xi_R^2 &= \frac{\int d^2x \ x^2 \langle \sigma(x)\sigma(0) \rangle}{\int d^2x \ \langle \sigma(x)\sigma(0) \rangle} = \frac{\left[\delta_{\mu\nu} \left(i \frac{\partial}{\partial k_\mu} \right) \left(i \frac{\partial}{\partial k_\nu} \right) \left(-\frac{1}{\Gamma_\sigma^{(2)}(k^2)} \right) \right]_{k_\mu, k_\nu=0}}{\left[-\frac{1}{\Gamma_\sigma^{(2)}(k^2)} \right]_{k^2=0}} \\ &= \frac{2\delta_{\mu\mu}}{m_R^2} = \frac{4}{m_R^2}. \end{aligned}$$

Aus diesem Grunde wird m_R auch als „2nd moment mass“ bezeichnet. Da diese Massendefinition nicht der physikalischen Masse (auch: Polmasse, s. nächster Abschnitt) entspricht, ist nicht unbedingt eine Unabhängigkeit dieser Größe von der gewählten Eichung zu erwarten.

5.1.2 Renormierungsschema II (Polmasse)

Die physikalische Teilchenmasse m_σ , welche sich als eichunabhängig erwiesen hat (s. Abschn. 2.2.1), wird durch die dem Ursprung am nächsten gelegene Polstelle des vollen Propagators bzw. Nullstelle des inversen Propagators festgelegt:

$$\Gamma_\sigma^{(2)}((im_\sigma, 0)) = 0. \quad (5.5)$$

Der volle Propagator verhält sich nun für $p^2 \rightarrow -m_\sigma^2$ wie:

$$G_c^{(2)} \simeq \frac{Z_\sigma}{p^2 + m_\sigma^2}.$$

Für die Renormierungskonstante gilt also:

$$Z_\sigma = \text{res}_{p=(im_\sigma, 0)} G_c^{(2)}(p^2).$$

Die gesuchte Teilchenmasse findet man in erster Ordnung in s durch:

$$\begin{aligned} m_\sigma &= m_0 + sm_{(1)} + \mathcal{O}(s^2) \\ m_\sigma^2 &= m_0^2 + 2sm_0m_{(1)} + \mathcal{O}(s^2). \end{aligned}$$

Aus der Forderung (5.5) erhält man mit $p^2 = -m_\sigma^2$:

$$\begin{aligned} m_0^2 + p^2 + \Sigma(p^2) &= 0 \\ \Rightarrow m_{(1)} &= \frac{1}{2sm_0} \Sigma(-m_0^2) + \mathcal{O}(s) \end{aligned}$$

und letztlich:

$$m_\sigma^2 = m_0^2 + \Sigma(-m_0^2) + \mathcal{O}(s^2). \quad (5.6)$$

5.2 Skalarfeld-Propagator

5.2.1 Unitäre Eichung

Zunächst unabhängig vom Renormierungsschema wird die Summe der 1PI 1-Loop-Beiträge notiert:

$$\begin{aligned} -\Sigma_\sigma(p^2) &= \left(\text{Diagram with one loop on a horizontal line at } p \right. \\ &\quad + \text{Diagram with two loops on a horizontal line at } p \right. \\ &\quad + \text{Diagram with one loop on a horizontal line at } p \left. \right)_\text{amp} \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ g \left[\left(1 - \frac{p^2}{3m_0^2} \right) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{p^2}{3m_0^2} \ln \frac{3e^2}{g} \right. \right. \\ &\quad + \frac{3m_0^2}{2\sqrt{p^4 + 4p^2m_0^2}} \ln \frac{p^2 + 2m_0^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2m_0^2}}{p^2 + 2m_0^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2m_0^2}} \left. \right] \\ &\quad + e^2 \left[2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(p^2 + 2m_{0,v}^2)^2}{2m_{0,v}^2 \sqrt{p^4 + 4p^2m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + 2m_{0,v}^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2m_{0,v}^2}}{p^2 + 2m_{0,v}^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2m_{0,v}^2}} \right] \right\}. \quad (5.7) \end{aligned}$$

In beiden Renormierungsschemata werden die analytischen Fortsetzungen des Termes

$$\frac{1}{\sqrt{p^4 + 4p^2M^2}} \ln \frac{p^2 + 2M^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2M^2}}{p^2 + 2M^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2M^2}}$$

mit $M^2 = m_0^2$ bzw. $M^2 = m_{0,v}^2$ für Werte von $p^2 \rightarrow 0$ (Renormierungsschema I) oder $p^2 < 0$ (Renormierungsschema II) benötigt, siehe hierzu (D.15). Die Fortsetzung zu Werten $p^2 < -4M^2$ ist nicht mehr rein reell, da dann das durch das Skalarfeld beschriebene Teilchen nicht mehr stabil gegenüber Zerfällen in zwei Skalar- bzw. Vektorteilchen ist. Diese Situation bedarf allerdings keiner weiteren Beachtung, es ist vollkommen hinreichend, sich auf ein stabiles skalares Teilchen zu beziehen, da sämtliche Aussagen den Vergleich der unterschiedlichen Eichungen betreffend auch für ein instabiles Teilchen gelten.

Renormierungsschema I

Im folgenden benutzt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p^4 + 4p^2 M^2}} \ln \frac{p^2 + 2M^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 M^2}}{p^2 + 2M^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2 M^2}} &= \frac{1}{M^2} - \frac{1}{6M^4} p^2 + \mathcal{O}(p^4). \\ \frac{1}{Z_R} &= 1 - \frac{1}{8\pi} \left\{ -\frac{g}{2m_0^2} + \frac{e^2}{m_{0,v}^2} \left[-2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{10}{3} \right] \right\} \\ &= 1 - \frac{g}{4\pi m_0^2} \left[\frac{11}{36} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \quad (5.8) \\ \frac{m_R^2}{Z_R} &= m_0^2 - \frac{g}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} + \frac{3}{2} \right] - \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 1 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich m_R^2 in erster Ordnung in g und e^2 zu:

$$\begin{aligned} m_R^2 &= \frac{m_0^2 + \Sigma_\sigma(0)}{Z_R^{-1}} \\ &= m_0^2 - \frac{g}{12\pi} \left[\frac{43}{12} + 3 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \\ &\quad - \frac{e^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 1 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right] + \mathcal{O}(ge^2, g^2, e^4) \\ &= m_0^2 - \frac{g}{12\pi} \left[\frac{43}{12} + 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \ln \frac{3e^2}{g} \right] \\ &\quad - \frac{e^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 1 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right] + \mathcal{O}(ge^2, g^2, e^4). \quad (5.9) \end{aligned}$$

Renormierungsschema II

Da nun der Bereich $p^2 = -m_0^2$ betrachtet wird, ist bei der Gültigkeit der analytischen Fortsetzung zu achten auf:

$$\begin{aligned} -4m_{0,v}^2 &\leq -m_0^2, \\ 12\frac{e^2}{g} &\geq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_\sigma(-m_0^2) &= -\frac{g}{4\pi} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{3e^2}{g} + 2\sqrt{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3\sqrt{|1-12\frac{e^2}{g}|}} \operatorname{arccot} \sqrt{|1-12\frac{e^2}{g}|} \right] \\
&\quad - \frac{e^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} - \frac{4}{\sqrt{|1-12\frac{e^2}{g}|}} \operatorname{arccot} \sqrt{|1-12\frac{e^2}{g}|} \right] \\
&\quad - \frac{e^4}{\pi g} \frac{6}{\sqrt{|1-12\frac{e^2}{g}|}} \operatorname{arccot} \sqrt{|1-12\frac{e^2}{g}|}
\end{aligned}$$

Somit (beachte: $12\frac{e^2}{g} \geq 1$):

$$\begin{aligned}
m_\sigma^2 &= m_0^2 - \frac{g}{4\pi} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{3e^2}{g} + 2\sqrt{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3\sqrt{12\frac{e^2}{g}-1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g}-1} \right] \\
&\quad - \frac{e^2}{2\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} - \frac{4}{\sqrt{12\frac{e^2}{g}-1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g}-1} \right] \\
&\quad - \frac{e^4}{\pi g} \frac{6}{\sqrt{12\frac{e^2}{g}-1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g}-1}. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Für die Renormierungskonstante folgt:

$$Z_\sigma^{-1} = 1 + \left. \frac{\partial \Sigma_\sigma(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=-m_\sigma^2}.$$

Hierbei wird folgende Ableitung für $-4M^2 \leq p^2 \leq 0$ benötigt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p^2} \frac{1}{\sqrt{p^4+4p^2M^2}} \ln \frac{p^2+2M^2+\sqrt{p^4+4p^2M^2}}{p^2+2M^2-\sqrt{p^4+4p^2M^2}} &= \\
= \frac{2}{p^4+4p^2M^2} - \frac{4p^2+8M^2}{(p^4+4p^2M^2)\sqrt{|p^4+4p^2M^2|}} \operatorname{arccot} \sqrt{\left| 1+4\frac{M^2}{p^2} \right|}. \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Damit berechnet sich

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \Sigma_\sigma(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=-m_\sigma^2} &= -\frac{g}{4\pi m_0^2} \left[-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left(1-6\frac{e^2}{g}\right)^2}{3\left(1-12\frac{e^2}{g}\right)} + \frac{2}{3} \frac{-1+18\frac{e^2}{g}-36\frac{e^4}{g^2}-216\frac{e^6}{g^3}}{\left(1-12\frac{e^2}{g}\right)\sqrt{|1-12\frac{e^2}{g}|}} \operatorname{arccot} \sqrt{|1-12\frac{e^2}{g}|} \right],
\end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned}
 Z_\sigma^{-1} = & 1 - \frac{g}{4\pi m_0^2} \left[-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{\left(1 - 6\frac{e^2}{g} \right)^2}{3 \left(1 - 12\frac{e^2}{g} \right)} + \frac{2}{3} \frac{-1 + 18\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} - 216\frac{e^6}{g^3}}{\left(1 - 12\frac{e^2}{g} \right) \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \right].
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

5.2.2 R_ξ -Eichung

$$\begin{aligned}
 -\Sigma_{\phi_1, R_\xi}(p^2) = & \left(\frac{\text{---}}{p} \text{---} + \frac{\text{---}}{p} \text{---} + \frac{\text{---}}{p} \text{---} + \frac{\text{---}}{p} \text{---} \right. \\
 & + \frac{\text{---}}{p} \text{---} + \frac{\text{---}}{p} \text{---} + \frac{\text{---}}{p} \text{---} + \frac{\text{---}}{p} \text{---} \\
 & + \frac{\text{---}}{p} \text{---} + \frac{\text{---}}{p} \text{---} + \frac{\text{---}}{p} \text{---} + \frac{\text{---}}{p} \text{---} \left. \right)_\text{amp} \\
 = & \frac{1}{4\pi} \left\{ g \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{p^2 + m_0^2}{3m_0^2} \ln \xi \right. \right. \\
 & + \frac{3m_0^2}{2\sqrt{p^4 + 4m_0^2 p^2}} \ln \frac{p^2 + 2m_0^2 + \sqrt{p^4 + 4m_0^2 p^2}}{p^2 + 2m_0^2 - \sqrt{p^4 + 4m_0^2 p^2}} \\
 & + \frac{m_0^4 - p^4}{6m_0^2 \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_0^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + 2\frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + 2\frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \\
 & + e^2 \left[2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(p^2 + 2m_{0,v}^2)^2}{2m_{0,v}^2 \sqrt{p^4 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + 2m_{0,v}^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + 2m_{0,v}^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Die benötigten analytischen Fortsetzungen entnehme man wiederum (D.15). M^2 nimmt hier die Werte m_0^2 , $m_{0,v}^2$ und $\frac{m_{0,v}^2}{\xi}$ an. Daraus ergeben sich die Bedingungen (für $p^2 \leq 0$):

$$\begin{aligned}
 -4m_0^2 &\leq p^2, \\
 -4m_{0,v}^2 &\leq p^2, \\
 -4\frac{m_{0,v}^2}{\xi} &\leq p^2.
 \end{aligned}$$

Renormierungsschema I

Hier ebenfalls benutzt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p^4 + 4p^2M^2}} \ln \frac{p^2 + 2M^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2M^2}}{p^2 + 2M^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2M^2}} &= \frac{1}{M^2} - \frac{1}{6M^4}p^2 + \mathcal{O}(p^4). \\ \frac{1}{Z_{R,R_\xi}} &= 1 - \frac{g}{4\pi m_0^2} \left[\frac{11}{36} + \frac{1}{3} \ln \xi - \xi^2 \frac{g^2}{324e^4} \right] \\ \frac{m_{R,R_\xi}^2}{Z_{R,R_\xi}} &= m_0^2 \left\{ 1 - \frac{g}{4\pi m_0^2} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{1}{3} \ln \xi + \frac{3}{2} + \xi \frac{g}{18e^2} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^2}{2\pi m_0^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 1 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Also:

$$\begin{aligned} m_{R,R_\xi}^2 &= m_0^2 - \frac{g}{12\pi} \left[\frac{43}{12} + 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \ln \frac{3e^2}{g} + \xi \frac{g}{6e^2} + \xi^2 \frac{g^2}{108e^4} \right] \\ &\quad - \frac{e^2}{2\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 1 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die Masse für das reelle Skalarfeld ist in diesem Renormierungsschema nicht unabhängig von ξ , also der speziellen Eichung. Auf diese Möglichkeit habe ich bereits bei der Einführung dieser Masse, die nicht der physikalischen Teilchenmasse entspricht, hingewiesen (s. Abschn. 5.1.1). Man beachte aber, daß gilt:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} m_{R,R_\xi} = m_R. \quad (5.16)$$

Auch hier ist die Unitäre Eichung formal im Limes $\xi \rightarrow 0$ in der R_ξ -Eichung enthalten. Allerdings gilt dies nicht für die Renormierungskonstante. Aufgrund der logarithmischen Abhängigkeit vom Eichparameter divergiert Z_{R,R_ξ} für $\xi \rightarrow 0$. Dieser Logarithmus-Term in der R_ξ -Eichung scheint aber mit dem in der Unitären Eichung in der Renormierungs-konstanten enthaltenen (dimensionell) divergenten Term

$$\frac{g}{12\pi m_0^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right)$$

zusammenzuhängen. Eine ähnliche Entsprechung wird auch bei der nun folgenden Be-trachtung der Polmasse beobachtet werden.

Renormierungsschema II

Die Bedingung für eine rein reelle analytische Fortsetzung, $-4m_0^2 \leq p^2$, ist für $p^2 = -m_0^2$ erfüllt. Weiter muß auch $-4m_{0,v}^2 \leq p^2$, sowie $-4\frac{m_{0,v}^2}{\xi} \leq p^2$ gelten. Dies führt zu:

$$\begin{aligned} 12 \frac{e^2}{g} &\geq 1, \\ 12 \frac{e^2}{g} &\geq \xi. \end{aligned}$$

Es wird sich herausstellen, daß die zweite Bedingung nicht weiter beachtet werden muß, da sich die entsprechenden Terme bei der Berechnung der Polmasse exakt zu Null addieren. Dies kann folgendermaßen verstanden werden: Diese zweite Bedingung stellt die Stabilität des Realteils des Skalarfeldes (also des ϕ_1 -Feldes) gegen Zerfälle in zwei ϕ_2 - oder zwei Geister-Teilchen ($c\bar{c}$) sicher. Da es sich hierbei jeweils um unphysikalische Teilchen handelt, sollten diese Anteile sich gegeneinander wegheben, welches hier auch geschieht. Bei der Berechnung der Renormierungskonstanten ist allerdings auch die zweite Bedingung von Bedeutung. Da aber das Hauptinteresse im Limes $\xi \rightarrow 0$ liegt, bedeutet dies lediglich die Forderung $\infty > e^2 > 0, \infty > g > 0$. Soll jedoch auch die Landau-Eichung (formal: $\xi \rightarrow \infty$) betrachtet werden, so sind die Konsequenzen der zweiten Bedingung zu beachten. In der Feynman-Eichung ($\xi = 1$) sind die beiden Bedingungen identisch.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\phi_1, R_\xi}(-m_0^2) &= \\
&= -\frac{1}{4\pi} \left\{ g \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{6m_0^2}{\sqrt{|m_0^4 - 4m_0^4|}} \operatorname{arccot} \sqrt{|1 - 4|} \right] \right. \\
&\quad \left. + e^2 \left[2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{2(2m_{0,v}^2 - m_0^2)^2}{m_0^2 m_{0,v}^2 \sqrt{|1 - 12\frac{e^2}{g}|}} \operatorname{arccot} \sqrt{|1 - 12\frac{e^2}{g}|} \right] \right\} \\
&= -\frac{1}{4\pi} \left\{ g \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{3e^2}{g} + 2\sqrt{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} + \frac{2}{3\sqrt{|1 - 12\frac{e^2}{g}|}} \operatorname{arccot} \sqrt{|1 - 12\frac{e^2}{g}|} \right] \right. \\
&\quad \left. + e^2 \left[2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{8}{\sqrt{|1 - 12\frac{e^2}{g}|}} \operatorname{arccot} \sqrt{|1 - 12\frac{e^2}{g}|} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^4}{g} \frac{24}{\sqrt{|1 - 12\frac{e^2}{g}|}} \operatorname{arccot} \sqrt{|1 - 12\frac{e^2}{g}|} \right\}
\end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
m_{\phi_1}^2 &= m_0^2 - \frac{g}{4\pi} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{3e^2}{g} + 2\sqrt{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} + \frac{2}{3\sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^2}{2\pi} \left[\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{4}{\sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^4}{g\pi} \frac{6}{\sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \right].
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Die Masse erweist sich in diesem Renormierungsschema erwartungsgemäß als unabhängig

vom Eichparameter und stimmt mit der physikalischen Masse in der Unitären Eichung überein.

Es bleibt noch, die Renormierungskonstante zu bestimmen (benutze (5.11)):

$$Z_{\phi_1}^{-1} = 1 + \left. \frac{\partial \Sigma_{\phi_1, R_\xi}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=-m_\sigma^2},$$

mit:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Sigma_{\phi_1, R_\xi}(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=-m_\sigma^2} &= -\frac{g}{4\pi m_0^2} \left[-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} + \frac{1}{3} \ln \xi + \frac{\left(1 - 6\frac{e^2}{g}\right)^2}{3 \left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \frac{-1 + 18\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} - 216\frac{e^6}{g^3}}{\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right) \sqrt{\left|1 - 12\frac{e^2}{g}\right|}} \operatorname{arccot} \sqrt{\left|1 - 12\frac{e^2}{g}\right|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3\sqrt{\left|1 - 12\frac{e^2}{g}\right|}} \operatorname{arccot} \sqrt{\left|1 - 12\frac{e^2}{g}\right|} \right], \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} Z_{\phi_1}^{-1} &= 1 - \frac{g}{4\pi m_0^2} \left[-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} + \frac{1}{3} \ln \xi + \frac{\left(1 - 6\frac{e^2}{g}\right)^2}{3 \left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \frac{-1 + 18\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} - 216\frac{e^6}{g^3}}{\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right) \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} + \frac{4}{3\sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \right]. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Die Renormierungskonstante ist auch in diesem Renormierungsschema nicht unabhängig vom Eichparameter und divergiert für $\xi \rightarrow 0$ in gleicher Weise wie im Renormierungsschema I. Auch scheint hier wiederum diese Divergenz mit dem Term

$$\frac{g}{12\pi m_0^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right)$$

in der Unitären Eichung zusammenzuhängen.

Bemerkung:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\frac{R}{\xi} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{R}{\xi} - 1} = 0, R \geq 1 \tag{5.19}$$

5.3 Eichfeld-Propagator

5.3.1 Unitäre Eichung

$$\begin{aligned}
-\Sigma_{\mu\nu, \text{unitär}}(p) &= \\
&= \left(\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} \right)_{\text{amp}} \\
&= \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \left[4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{6e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \right. \\
&\quad - \frac{p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2}{p^2} \ln \frac{3e^2}{g} \\
&\quad - \frac{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2}{p^2 \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \\
&\quad + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left[4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{6e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2}{p^2} \ln \frac{3e^2}{g} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \right] \right\} \\
&=: -\Pi_1(p^2) \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] - \Pi_2(p^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \tag{5.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{\mu\nu}^{(2)} &= (p^2 + m_{0,v}^2) \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] + m_{0,v}^2 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} + \Sigma_{\mu\nu, \text{unitär}}(p) \\
&= \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \left[m_{0,v}^2 + p^2 + \Pi_1(p^2) \right] + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left[m_{0,v}^2 + \Pi_2(p^2) \right] \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Zur analytischen Fortsetzung siehe (D.14), beachte $p^2 \geq -m_{0,v}^2$.

Renormierungsschema I

$$-\Gamma_{\mu\nu}^{(2)} = \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \frac{m_R^2 + p^2 + \mathcal{O}(p^4)}{Z_R} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left(m_{0,v}^2 + \Pi_2(p^2) \right)$$

Damit¹

$$\begin{aligned}
G_{c,\mu\nu}^{(2)} &= \frac{1}{-\Gamma_{\mu\nu}^{(2)}} \\
&= \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \frac{Z_R}{m_R^2 + p^2 + \mathcal{O}(p^4)} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \frac{1}{m_{0,v}^2 + \Pi_2(p^2)}.
\end{aligned}$$

¹ $\left(a \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] + b \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)^{-1} = \frac{1}{a} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] + \frac{1}{b} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$
mit $a, b \neq 0$

Um die Entwicklung des Nenners des transversalen Anteils des Propagators zu bestimmen, kann in diesem Fall nicht die einfache Taylorreihe benutzt werden, da in den einzelnen Termen Infrarot-Divergenzen (das sind Divergenzen für $p \rightarrow 0$) auftauchen, die sich jedoch, wie ich nun zeigen werde, in der Summe wegheben. Mit

$$\begin{aligned}\Pi_1(p^2) &= -\frac{e^2}{4\pi} \left[4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + 6 \frac{e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - 12 \frac{e^2}{g} + 4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p^2} \left[A(p^2) \ln \frac{g}{3e^2} - B(p^2) \right] \right],\end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned}A(p^2) &= p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2 \\ B(p^2) &= \frac{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2}{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \\ &=: B(0) + \frac{\partial B(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=0} p^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B(p^2)}{\partial p^2)^2} \Big|_{p^2=0} p^4 + \mathcal{O}(p^6),\end{aligned}$$

heben sich aufgrund von

$$B(0) = (m_0^2 - m_{0,v}^2) \ln \frac{g}{3e^2}$$

die Infrarotdivergenzen heraus. Die weiteren Terme der Entwicklung erhält man mit²:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B(p^2)}{\partial p^2} &= 2 \frac{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2}{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2} \\ &\quad + \frac{\left(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2 \right) \left(p^4 + p^2(4m_{0,v}^2 + 2m_0^2) + 3m_{0,v}^4 - 4m_0^2 m_{0,v}^2 + m_0^4 \right)}{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}^3} \\ &\quad \cdot \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \\ \frac{\partial B(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=0} &= 2 + \frac{3m_{0,v}^2 - m_0^2}{m_0^2 - m_{0,v}^2} \ln \frac{3e^2}{g}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p^2} \frac{1}{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} &= \\ &= \frac{2}{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2} \\ &\quad - \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2}{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}^3} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 B(p^2)}{(\partial p^2)^2} = \\
&= 2 \left\{ \frac{p^6 + p^4(3m_0^2 + 7m_{0,v}^2) + p^2(3m_0^4 - 2m_0^2m_{0,v}^2 - m_{0,v}^4) - 7m_{0,v}^6 + 15m_0^2m_{0,v}^4 - 9m_0^4m_{0,v}^2 + m_0^6}{((p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2m_{0,v}^2)^2} \right. \\
&\quad + 2m_{0,v}^2 \frac{p^4(m_0^2 + 2m_{0,v}^2) + p^2(2m_0^4 - 6m_0^2m_{0,v}^2 + 4m_{0,v}^4) + m_0^6 + 2m_{0,v}^6 - 3m_0^2m_{0,v}^4}{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2m_{0,v}^2}} \\
&\quad \cdot \ln \left. \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2m_{0,v}^2}} \right\} \\
&\quad \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 B(p^2)}{(\partial p^2)^2} \Big|_{p^2=0} = \frac{m_0^2 - 7m_{0,v}^2}{(m_0^2 - m_{0,v}^2)^2} - 2m_{0,v}^2 \frac{m_0^2 + 2m_{0,v}^2}{(m_0^2 - m_{0,v}^2)^3} \ln \frac{3e^2}{g}
\end{aligned}$$

Bemerkung: die Fälle $m_0^2 > m_{0,v}^2$ und $m_0^2 < m_{0,v}^2$ müssen nicht gesondert betrachtet werden, da nur Terme mit ungerader Potenz (n) der Wurzel auftauchen, bzw. bei geradem n kein Logarithmus-Term vorhanden ist:

$$\begin{aligned}
& \ln \frac{\frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2m_{0,v}^2}}{n}}{\frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2m_{0,v}^2}}{n}} \stackrel{p^2=0}{=} \\
& \quad \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2m_{0,v}^2} \\
& \quad \stackrel{p^2=0}{=} \frac{1}{|m_0^2 - m_{0,v}^2|^n} \ln \frac{m_0^2 + m_{0,v}^2 + |m_0^2 - m_{0,v}^2|}{m_0^2 + m_{0,v}^2 - |m_0^2 - m_{0,v}^2|} \\
& \text{für: } m_0^2 > m_{0,v}^2 = \frac{1}{(m_0^2 - m_{0,v}^2)^n} \ln \frac{m_0^2}{m_{0,v}^2} \\
& \text{für: } m_0^2 < m_{0,v}^2 = \frac{1}{(m_{0,v}^2 - m_0^2)^n} \ln \frac{m_{0,v}^2}{m_0^2} = \frac{1}{(m_0^2 - m_{0,v}^2)^n} \ln \frac{m_0^2}{m_{0,v}^2}.
\end{aligned}$$

Es folgt also:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p^2} \left[A(p^2) \ln \frac{g}{3e^2} - B(p^2) \right] = \\
&= -2 - \frac{2m_{0,v}^2}{m_0^2 - m_{0,v}^2} \ln \frac{3e^2}{g} + p^2 \left(\frac{7m_{0,v}^2 - m_0^2}{(m_0^2 - m_{0,v}^2)^2} + 2m_{0,v}^2 \frac{m_0^2 + 2m_{0,v}^2}{(m_0^2 - m_{0,v}^2)^3} \ln \frac{3e^2}{g} \right) + \mathcal{O}(p^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z_{R,v}} &= 1 - \frac{e^2}{4\pi m_{0,v}^2} \left[\frac{7m_{0,v}^4 - m_0^2m_{0,v}^2}{(m_0^2 - m_{0,v}^2)^2} + 2m_{0,v}^4 \frac{m_0^2 + 2m_{0,v}^2}{(m_0^2 - m_{0,v}^2)^3} \ln \frac{3e^2}{g} \right] \quad (5.22) \\
\frac{m_{R,v}^2}{Z_{R,v}} &= m_{0,v}^2 \left\{ 1 - \frac{e^2}{4\pi m_{0,v}^2} \left[4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + 2 - \frac{2m_{0,v}^2}{m_0^2 - m_{0,v}^2} \ln \frac{3e^2}{g} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{3e^4}{2\pi g m_{0,v}^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{R,v}^2 &= m_{0,v}^2 - \frac{e^2}{4\pi} \left[4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + 2 + \frac{m_0^2 m_{0,v}^2 - 7m_{0,v}^4}{(m_0^2 - m_{0,v}^2)^2} \right. \\
&\quad \left. - 2m_{0,v}^2 \frac{m_0^4 - m_0^2 m_{0,v}^2 + 3m_{0,v}^4}{(m_0^2 - m_{0,v}^2)^3} \ln \frac{3e^2}{g} \right] \\
&\quad - \frac{3e^4}{2\pi g} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right] \\
&= m_{0,v}^2 - \frac{e^2}{2\pi} \left[2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + 1 \right] \\
&\quad - \frac{3e^4}{4\pi g} \left[2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{1}{\left(1 - \frac{3e^2}{g} \right)^2} - \frac{2}{\left(1 - \frac{3e^2}{g} \right)^3} \ln \frac{3e^2}{g} \right] \\
&\quad - \frac{9e^6}{4\pi g^2} \left[- \frac{7}{\left(1 - \frac{3e^2}{g} \right)^2} + \frac{2}{\left(1 - \frac{3e^2}{g} \right)^3} \ln \frac{3e^2}{g} \right] \\
&\quad + \frac{27e^8}{4\pi g^3} \frac{6}{\left(1 - \frac{3e^2}{g} \right)^3} \ln \frac{3e^2}{g} \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Renormierungsschema II

Für $p^2 \rightarrow -m_v^2$:

$$\begin{aligned}
-\Gamma_{\mu\nu}^{(2)} &\simeq \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \left(\frac{Z_v}{p^2 + m_v^2} \right)^{-1} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left[m_{0,v}^2 + \Pi_2(p^2) \right] \\
G_{\mu\nu}^{(2)} &\simeq \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \frac{Z_v}{p^2 + m_v^2} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \frac{1}{m_{0,v}^2 + \Pi_2(p^2)}
\end{aligned}$$

Wobei m_v durch die Forderung:

$$m_{0,v}^2 + p^2 + \Pi_1(p^2)|_{p=(im_v,0)} = 0$$

definiert wird.

Mit:

$$\begin{aligned}
m_v &= m_{0,v} + m_{(1)} s + \mathcal{O}(s^2) \\
m_v^2 &= m_{0,v}^2 + 2m_{0,v} m_{(1)} s + \mathcal{O}(s^2)
\end{aligned}$$

folgt:

$$m_v^2 = m_{0,v}^2 + \Pi_1(-m_{0,v}^2) + \mathcal{O}(s^2)$$

sowie:

$$Z_v^{-1} = 1 + \left. \frac{\partial \Pi_1(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2=-m_v^2}.$$

Bei der analytischen Fortsetzung sind nun die beiden Fälle $12\frac{e^2}{g} < 1$ und $12\frac{e^2}{g} \geq 1$ zu unterscheiden. Ersterer entspricht $p^2 = -m_{0,v}^2 > -m_0^2 - m_{0,v}^2 + 2\sqrt{m_0^2 m_{0,v}^2}$, letzterer $-m_0^2 - m_{0,v}^2 < p^2 = -m_{0,v}^2 \leq -m_0^2 - m_{0,v}^2 + 2\sqrt{m_0^2 m_{0,v}^2}$.

- $12\frac{e^2}{g} < 1$

$$\begin{aligned}\Pi_1(-m_{0,v}^2) = & -\frac{1}{4\pi} \left\{ g \left[\frac{1}{3} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{2}{3\sqrt{1-12\frac{e^2}{g}}} \operatorname{artanh} \sqrt{1-12\frac{e^2}{g}} \right] \right. \\ & + e^2 \left[4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2 \ln \frac{3e^2}{g} - \frac{8}{\sqrt{1-12\frac{e^2}{g}}} \operatorname{artanh} \sqrt{1-12\frac{e^2}{g}} \right] \\ & \left. + \frac{e^4}{g} \left[6 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{24}{\sqrt{1-12\frac{e^2}{g}}} \operatorname{artanh} \sqrt{1-12\frac{e^2}{g}} \right] \right\}\end{aligned}$$

Beachte im folgenden:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p^2} \frac{1}{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \operatorname{artanh} \frac{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2} = \\ = \frac{1}{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2} - \frac{(p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2) \operatorname{artanh} \frac{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2}}{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \Pi_1(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2 = -m_{0,v}^2} = & -\frac{e^2}{4\pi m_{0,v}^2} \left\{ -\ln \frac{3e^2}{g} + \frac{g}{3e^2} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{2 + 72\frac{e^4}{g^2} - 24\frac{e^2}{g}}{1 - 12\frac{e^2}{g}} \right. \\ & \left. + 2 \frac{-7 + 36\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} + \frac{1}{3}\frac{g}{e^2}}{\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{artanh} \sqrt{1 - 12\frac{e^2}{g}} \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_v^2 = & m_{0,v}^2 + \Pi_1(-m_{0,v}^2) \\ = & m_{0,v}^2 - \frac{g}{12\pi} \left[\ln \frac{3e^2}{g} + \frac{2}{\sqrt{1-12\frac{e^2}{g}}} \operatorname{artanh} \sqrt{1-12\frac{e^2}{g}} \right] \\ & - \frac{e^2}{2\pi} \left[2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \ln \frac{3e^2}{g} - \frac{4}{\sqrt{1-12\frac{e^2}{g}}} \operatorname{artanh} \sqrt{1-12\frac{e^2}{g}} \right] \\ & - \frac{3e^4}{2\pi g} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \frac{4}{\sqrt{1-12\frac{e^2}{g}}} \operatorname{artanh} \sqrt{1-12\frac{e^2}{g}} \right]\end{aligned}\tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
Z_v^{-1} &= 1 + \frac{\partial \Pi_1(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2 = -m_{0,v}^2} \\
&= 1 - \frac{e^2}{4\pi m_{0,v}^2} \left\{ -\ln \frac{3e^2}{g} + \frac{g}{3e^2} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{2 + 72\frac{e^4}{g^2} - 24\frac{e^2}{g}}{1 - 12\frac{e^2}{g}} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{-7 + 36\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} + \frac{1}{3}\frac{g}{e^2}}{\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{artanh} \sqrt{1 - 12\frac{e^2}{g}} \right\} \\
&\tag{5.25}
\end{aligned}$$

- $12\frac{e^2}{g} \geq 1$

Hierbei ist lediglich in obigen Formeln zu ersetzen: $\operatorname{artanh} \sqrt{\dots} \rightarrow \arctan \sqrt{|\dots|}$ und $\sqrt{\dots} \rightarrow \sqrt{|\dots|}$.

$$\begin{aligned}
\Pi_1(-m_{0,v}^2) &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ g \left[\frac{1}{3} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{2}{3\sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \arctan \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \right] \right. \\
&\quad + e^2 \left[4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - 2 \ln \frac{3e^2}{g} - \frac{8}{\sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \arctan \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \right] \\
&\quad \left. + \frac{e^4}{g} \left[6 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{24}{\sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \arctan \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Pi_1(p^2)}{\partial p^2} \Big|_{p^2 = -m_{0,v}^2} &= -\frac{e^2}{4\pi m_{0,v}^2} \left\{ -\ln \frac{3e^2}{g} + \frac{g}{3e^2} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{2 + 72\frac{e^4}{g^2} - 24\frac{e^2}{g}}{1 - 12\frac{e^2}{g}} \right. \\
&\quad \left. + 2 \frac{-7 + 36\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} + \frac{1}{3}\frac{g}{e^2}}{\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctan} \sqrt{1 - 12\frac{e^2}{g}} \right\} \\
&= -\frac{e^2}{4\pi m_{0,v}^2} \left\{ -\ln \frac{3e^2}{g} + \frac{g}{3e^2} \ln \frac{3e^2}{g} - \frac{2 + 72\frac{e^4}{g^2} - 24\frac{e^2}{g}}{12\frac{e^2}{g} - 1} \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{-7 + 36\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} + \frac{1}{3}\frac{g}{e^2}}{\left(12\frac{e^2}{g} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctan} \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_v^2 &= m_{0,v}^2 + \Pi_1(-m_{0,v}^2) \\
&= m_{0,v}^2 - \frac{g}{12\pi} \left[\ln \frac{3e^2}{g} + \frac{2}{\sqrt{12\frac{e^2}{g}-1}} \arctan \sqrt{12\frac{e^2}{g}-1} \right] \\
&\quad - \frac{e^2}{2\pi} \left[2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \ln \frac{3e^2}{g} - \frac{4}{\sqrt{12\frac{e^2}{g}-1}} \arctan \sqrt{12\frac{e^2}{g}-1} \right] \\
&\quad - \frac{3e^4}{2\pi g} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} + \frac{4}{\sqrt{12\frac{e^2}{g}-1}} \arctan \sqrt{12\frac{e^2}{g}-1} \right]
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
Z_v^{-1} &= 1 + \left. \frac{\partial \Pi_1(p^2)}{\partial p^2} \right|_{p^2 = -m_{0,v}^2} \\
&= 1 - \frac{e^2}{4\pi m_{0,v}^2} \left\{ -\ln \frac{3e^2}{g} + \frac{g}{3e^2} \ln \frac{3e^2}{g} - \frac{2 + 72\frac{e^4}{g^2} - 24\frac{e^2}{g}}{12\frac{e^2}{g}-1} \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{-7 + 36\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} + \frac{1}{3}\frac{g}{e^2}}{\left(12\frac{e^2}{g}-1\right)^{\frac{3}{2}}} \arctan \sqrt{12\frac{e^2}{g}-1} \right\}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

5.3.2 R_ξ -Eichung

Aufgrund der bereits in 1-Loop-Ordnung sich ergebenden Mischterme zwischen dem Eichfeld und dem ϕ_2 -Feldpropagator, müssen diese beiden Felder hier zusammen betrachtet werden.

$$\begin{aligned}
 -\Sigma_{\mu\nu, R_\xi}(p) &= \\
 &= \left(\text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2} + \text{Diagramm 3} + \text{Diagramm 4} + \text{Diagramm 5} + \text{Diagramm 6} \right)_{\text{amp.}} \\
 &= \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] \left[4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 1 - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2}{p^2} \ln \frac{3e^2}{g} \right. \right. \\
 &\quad - \frac{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2}{p^2 \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \\
 &\quad + \frac{6e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \left. \right] \\
 &\quad + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \left[4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{6e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) + 2 \ln \xi - \frac{p^2 - m_0^2 + m_{0,v}^2}{p^2} \ln \frac{3e^2}{g} \right. \\
 &\quad + \frac{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \\
 &\quad \left. \left. - \frac{p^2 + 2m_0^2 - 2\frac{m_{0,v}^2}{\xi}}{\sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \right] \right\} \\
 &=: -\Pi_{1,R_\xi}(p^2) \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] - \Pi_{2,R_\xi}(p^2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

Man beachte bereits an dieser Stelle: $\Pi_1(p^2) = \Pi_{1,R_\xi}(p^2)$!

$$\begin{aligned}
-\Sigma_{\phi_2, R_\xi}(p^2) &= \\
&= \left(\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} \right. \\
&\quad \left. + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9} \right)_{\text{amp.}} \\
&= \frac{e^2}{4\pi} \left\{ \frac{m_0^2 - m_{0,v}^2}{m_{0,v}^2} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{p^2}{m_{0,v}^2} \ln \xi \right. \\
&\quad + \frac{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{m_{0,v}^2} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \\
&\quad - \frac{p^2(p^2 + 2m_0^2)}{m_{0,v}^2 \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \left. \right\} \\
&\tag{5.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\Sigma_{\phi_2\mu, R_\xi}(p) &= \\
&= \left(\text{Diagram 10} + \text{Diagram 11} \right. \\
&\quad \left. + \text{Diagram 12} + \text{Diagram 13} + \text{Diagram 14} + \text{Diagram 15} \right)_{\text{amp.}} \\
&= i \frac{e^3 v}{4\pi m_{0,v}^2} p_\mu \left\{ -2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{3e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
&\quad - \frac{3}{2} \ln \xi + \frac{p^2 - 2m_0^2 + 2m_{0,v}^2}{2p^2} \ln \frac{3e^2}{g} \\
&\quad - \frac{\sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}}{p^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(p^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4p^2 m_{0,v}^2}} \\
&\quad + \frac{p^2 + 2m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}{\sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \left. \right\} \\
&\tag{5.30}
\end{aligned}$$

beachte:

$$\Sigma_{\phi_2\mu, R_\xi}(p) = -\Sigma_{\mu\phi_2, R_\xi}(p)$$

mit:

$$-\Sigma_{\mu\phi_2, R_\xi}(p) = \left(\mu \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)_\text{amp}$$

Diagonalisierung

Um der Mischung der beiden Felder gerecht zu werden, führe ich nun ein (formal) zweikomponentiges Feld ein, welches in der oberen Komponente das ϕ_2 -Feld enthält und in der unteren das Eichfeld (siehe z. Bsp. [26], [28]). Der gemischte nackte Propagator schreibt sich nun:

$$G_{\text{mix},0} = \text{---} \text{---} \text{---} = \begin{pmatrix} G_{\phi_2,R_\xi} & 0 \\ 0 & G_{\mu\nu,R_\xi} \end{pmatrix}.$$

Den vollen Propagator erhalte ich durch:

$$G_{\text{mix}} = \text{---} \bullet \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots,$$

mit:

$$(\text{---} \text{---} \text{---})_\text{amp} = - \begin{pmatrix} \Sigma_{\phi_2,R_\xi} & \Sigma_{\phi_2\nu,R_\xi} \\ \Sigma_{\mu\phi_2,R_\xi} & \Sigma_{\mu\nu,R_\xi} \end{pmatrix},$$

und mit:

$$\begin{aligned} G_{\text{mix},0}^{-1} &= \begin{pmatrix} G_{\phi_2,R_\xi}^{-1} & 0 \\ 0 & G_{\mu\nu,R_\xi}^{-1} \end{pmatrix} \\ G_{\phi_2,R_\xi}^{-1} &= p^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \\ G_{\mu\nu,R_\xi}^{-1} &= \left[p^2 + m_{0,v}^2 \right] \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] + \left[\xi p^2 + m_{0,v}^2 \right] \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \end{aligned} \quad (5.31)$$

die noch nicht diagonalisierte Matrix:

$$G_{\text{mix}}^{-1} \equiv -\Gamma_{\text{mix}}^{(2)} = G_{\text{mix},0}^{-1} + \Sigma_{\text{mix}}. \quad (5.32)$$

Zur Diagonalisierung in erster Ordnung betrachte man das Verfahren zur Diagonalisierung einer 2×2 -Matrix A der Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} a & ib \\ -ib & c \end{pmatrix},$$

wobei $a, c = \mathcal{O}(1)$ und $b = \mathcal{O}(s)$ seien. Gesucht ist nun die Matrix S , so daß

$$D = S^{-1} A S$$

Diagonalgestalt besitzt. S sei durch T ($T = \mathcal{O}(s)$, $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$) gegeben:

$$\begin{aligned} S &= \mathbf{1l} + iT + \mathcal{O}(s^2) \\ S^\dagger &= \mathbf{1l} - iT^t + \mathcal{O}(s^2) \\ S^{-1} = S^\dagger &\Rightarrow T = T^t \\ T &= \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also $t = \mathcal{O}(s)$. Nun folgt:

$$\begin{aligned} D &= (\mathbf{1l} - iT) A (\mathbf{1l} + iT) \\ &= A - iTA + iAT + \mathcal{O}(s^2) \\ &= \begin{pmatrix} a - 2tb & i(b - t(c - a)) \\ -i(b - t(c - a)) & c + 2tb \end{pmatrix} \\ \Rightarrow t &= \frac{b}{c - a} \\ D &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + \mathcal{O}(s^2). \end{aligned}$$

Dieses Verfahren wende ich nun auf die Matrix

$$\begin{aligned} -\Gamma &= \begin{pmatrix} \gamma_{11} & i\gamma_m p_\mu \\ -i\gamma_m p_\mu^t & \gamma_{22,\mu\nu} \end{pmatrix} \\ \gamma_{11} &= G_{\phi_2,R_\xi}^{-1} + \Sigma_{\phi_2,R_\xi} \quad \gamma_{22,\mu\nu} = G_{\mu\nu,R_\xi}^{-1} + \Sigma_{\mu\nu,R_\xi} \\ \gamma_m p_\mu &= \frac{1}{i} \Sigma_{\phi_2\mu,R_\xi} \quad -\gamma_m p_\mu^t = \frac{1}{i} \Sigma_{\mu\phi_2,R_\xi} \end{aligned}$$

an:

$$\begin{aligned} T &= t \begin{pmatrix} 0 & p_\mu \\ p_\mu^t & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}(s) \\ D &= (\mathbf{1l} - iT)(-\Gamma)(\mathbf{1l} + iT) \\ &= (-\Gamma) - iT(-\Gamma) + i(-\Gamma)T + \mathcal{O}(s^2) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{11} - 2t\gamma_m p_\mu^2 & i(\gamma_m p_\mu - tp_\nu \gamma_{22,\nu\mu} + t\gamma_{11} p_\mu) \\ -i(\gamma_m p_\mu^t + t\gamma_{11} p_\mu^t - t\gamma_{22,\mu\nu} p_\nu) & \gamma_{22,\mu\nu} + 2t\gamma_m p_\mu p_\nu \end{pmatrix} \\ \Rightarrow 0 &= \gamma_m p_\mu + t(\gamma_{11} p_\mu - p_\nu \gamma_{22,\nu\mu}). \end{aligned}$$

Mit

$$\gamma_{22,\mu\nu} = \left[p^2 + m_{0,v}^2 + \Pi_1(p^2) \right] \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] + \left[\xi p^2 + m_{0,v}^2 + \Pi_{2,R_\xi}(p^2) \right] \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$$

folgt

$$p_\nu \gamma_{22,\nu\mu} = \left[\xi p^2 + m_{0,v}^2 + \Pi_{2,R_\xi}(p^2) \right] p_\mu$$

und

$$\begin{aligned} t &= \frac{\gamma_m}{\xi p^2 + m_{0,v}^2 + \Pi_{2,R_\xi}(p^2) - \gamma_{11}} + \mathcal{O}(s^2) \\ &= \frac{\gamma_m}{(\xi - 1)p^2 + \frac{\xi - 1}{\xi} m_{0,v}^2} + \mathcal{O}(s^2). \end{aligned}$$

Damit erhalte ich:

$$D = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22,\mu\nu} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(s^2) \quad (5.33)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_2 \\ A_\mu \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_2 \\ A_\mu \end{pmatrix} + it \begin{pmatrix} p_\mu A_\mu \\ \phi_2 p_\mu \end{pmatrix} + \mathcal{O}(s^2). \quad (5.34)$$

Eichfeldanteil

Den obigen Überlegungen nach kann ich nun die Masse des Vektorteilchens aus dem Diagonalanteil $\gamma_{22,\mu\nu}$ bestimmen (vgl. [28]):

$$\begin{aligned} -\Gamma_{\mu\nu,R_\xi}^{(2)} &= \left[p^2 + m_{0,v}^2 \right] \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] + \left[\xi p^2 + m_{0,v}^2 \right] \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} + \Sigma_{\mu\nu,R_\xi}(p) \\ &= \left[\Pi_{1,R_\xi}(p^2) + p^2 + m_{0,v}^2 \right] \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] + \left[\Pi_{2,R_\xi}(p^2) + m_{0,v}^2 + \xi p^2 \right] \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Da gilt:

$$\Pi_1(p^2) = \Pi_{1,R_\xi}(p^2),$$

ist keine erneute Rechnung für Transversal-Anteil nötig, die Ergebnisse der Unitären Eichung können sofort übernommen werden. Insbesondere bedeutet dies, daß weder die Massen (auch nicht die renormierte Masse im Renormierungsschema I) noch die Renormierungskonstanten vom Eichparameter abhängen. Auf diese Übereinstimmung der Eichfeldpropagatoren in der Unitären und der R_ξ -Eichung haben bereits B.W. Lee und J. Zinn-Justin in [29] hingewiesen. Dort wurde dieses Ergebnis durch die Formulierung des Propagators in der Unitären Eichung durch Greensfunktionen in der R_ξ -Eichung erzielt. In [16] wird von R. Häußling und E. Kraus für alle Ordnungen der Störungstheorie gezeigt, daß die Selbstenergie des Transversalanteils unabhängig vom Eichparameter ξ ist.

Der Longitudinal-Anteil wird an dieser Stelle nicht weiter behandelt, da die in Abschn. 3.3.3 hergeleiteten Slavnov-Taylor-Identitäten (3.67) und (3.69) zwischen den 2-Punkt-Greensfunktionen des longitudinalen Eichfeldes, des ϕ_2 -Feldes (siehe auch den folgenden Abschnitt), des Geist-Feldes sowie des Eichfeld- ϕ_2 -Mix-Anteils in der Summe eine Aufhebung derselben anzeigen.

ϕ_2 -Feld

Hier betrachte ich ausschließlich die Polmasse (Renormierungsschema II).

Ansatz:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\phi_2}(p)|_{p=(im_{\phi_2},0)} &= 0 \\
 m_{\phi_2} &= \frac{m_{0,v}}{\sqrt{\xi}} + sm_1 + \mathcal{O}(s^2) \\
 m_{\phi_2}^2 &= \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \frac{2m_{0,v}m_1}{\sqrt{\xi}}s + \mathcal{O}(s^2) \\
 \text{Forderung: } p^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \Sigma_{\phi_2,R_\xi}(p^2) &= 0 \text{ bei } p^2 = -m_{\phi_2}^2 \\
 \Rightarrow m_{\phi_2}^2 &= \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \Sigma_{\phi_2,R_\xi}\left(-\frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right) + \mathcal{O}(s^2)
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle wird die analytische Fortsetzung (D.14) benötigt, wobei $M_1^2 = m_0^2$ und $M_2^2 = m_{0,v}^2$ bzw. $M_2^2 = \frac{m_{0,v}^2}{\xi}$. Erstes führt auf die Bedingung

$$\begin{aligned}
 -(m_0 + m_{0,v})^2 &\leq -\frac{m_{0,v}^2}{\xi} \\
 \frac{g}{3e^2} &\geq \frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{\xi},
 \end{aligned}$$

welche im Limes $\xi \rightarrow 0$ nicht erfüllt werden kann. Dies bedeutet aber, daß ein ϕ_2 -Teilchen instabil ist gegen Zerfälle in ein ϕ_1 - und ein A_μ -Teilchen. Wie oben bereits diskutiert, ist durch die Slavnov-Taylor-Identitäten eine Aufhebung dieser Instabilität durch den Longitudinal-Anteil des Eichfeldes zu erwarten: In $\Pi_{2,R_\xi}(p^2)$ ist (bei $p^2 = -m_{0,v}^2$) exakt derselbe Term mit entgegengesetztem Vorzeichen zu finden wie in $\Sigma_{\phi_2,R_\xi}(p^2)$. Interessant zu bemerken ist an dieser Stelle noch, daß in der Feynman-Eichung ($\xi = 1$) eine rein reelle Fortsetzung existiert.

5.4 Geist-Propagator

Der Vollständigkeit halber betrachte ich nun noch den Geist-Propagator, jedoch wegen seiner physikalischen Irrelevanz auch lediglich im Renormierungsschema II.

$$\begin{aligned}
 -\Sigma_{\text{Geist}}(p^2) &= \left(\dots \xrightarrow[p]{} \bullet \circlearrowleft \xrightarrow[p]{} \dots + \dots \xrightarrow[p]{} \bullet \circlearrowright \xrightarrow[p]{} \dots \right)_{\text{amp}} \\
 &= \frac{e^2}{4\pi\xi} \left\{ 2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{3e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{1}{2} \ln \xi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \ln \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{\xi \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{p^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)^2 + 4p^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \right) \right\} \quad (5.36)
 \end{aligned}$$

$$m_{\text{Geist}}^2 = \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \Sigma_{\text{Geist}}\left(-\frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right) + \mathcal{O}(s^2)$$

Die analytische Fortsetzung des Logarithmus-Termes (s. (D.14)) ist stets rein reell und führt auf die Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 12\frac{e^2}{g} < \xi \\
 m_{\text{Geist}}^2 &= \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \frac{e^2}{4\pi\xi} \left[2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{1}{2} \ln \xi \right] \\
 &\quad - \frac{3e^4}{4\pi\xi g} \left[\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{2}{\xi \sqrt{1 - 12\frac{e^2}{\xi g}}} \operatorname{artanh} \sqrt{1 - 12\frac{e^2}{\xi g}} \right] \quad (5.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad 12\frac{e^2}{g} \geq \xi \\
 m_{\text{Geist}}^2 &= \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \frac{e^2}{4\pi\xi} \left[2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{3e^2}{g} + \frac{1}{2} \ln \xi \right] \\
 &\quad - \frac{3e^4}{4\pi\xi g} \left[\left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{2}{\xi \sqrt{12\frac{e^2}{\xi g} - 1}} \operatorname{arctan} \sqrt{12\frac{e^2}{\xi g} - 1} \right] \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

Diese Masse ist, da es sich um kein physikalisches Teilchen handelt, nicht unabhängig vom Eichparameter und divergiert im Limes $\xi \rightarrow 0$ (2. Fall) erwartungsgemäß (s. z.Bsp. [1], [30]). Ich verweise nochmals auf die Bemerkung (s.o), daß der Geist-Propagator in den Slavnov-Taylor-Identitäten vorkommt, die die unphysikalischen Anteile des Eichfeldes (das ist der Longitudinal-Anteil) und des ebenfalls unphysikalischen ϕ_2 -Feldes beheben.

5.5 Renormierung des Vakuumerwartungswertes

Den (noch nicht renormierten) Vakuumerwartungswert des Skalarfeldes erhält man in 1-Loop-Ordnung in der Unitären Eichung aus den beiden Tadpole-Beiträgen:

$$\begin{aligned}
 v_{\text{unitär}}^{\text{1-Loop}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v + \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 2} \right) \\
 &= \mu^{-\epsilon} \frac{v}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \frac{g}{8\pi m_0^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right] - \frac{e^2}{4\pi m_0^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_0^2 v}{4\pi\mu^2} \right] \right\}. \tag{5.39}
 \end{aligned}$$

In der R_ξ -Eichung sind zwei weitere Graphen zu berücksichtigen und man erhält hier:

$$\begin{aligned}
 v_{R_\xi}^{\text{1-Loop}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(v + \text{Diagramm 1} + \text{Diagramm 3} + \text{Diagramm 4} + \text{Diagramm 5} \right) \\
 &= \mu^{-\epsilon} \frac{v}{\sqrt{2}} \left\{ 1 + \frac{g}{4\pi m_0^2} \left[-\frac{2}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{1}{6} \ln \frac{3e^2}{g} - \frac{1}{6} \ln \xi \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^2}{4\pi m_0^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_0^2 v}{4\pi\mu^2} \right) \right\}. \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

Es zeigt sich also, daß die Vakuumerwartungswerte des Skalarfeldes in 1-Loop-Ordnung in den unterschiedlichen Eichungen nicht übereinstimmen. Hinzu kommt noch, daß der Limes $\xi \rightarrow 0$ des Vakuumerwartungswertes in der R_ξ -Eichung aufgrund des Logarithmus-Terms divergiert. Folglich kann auch so keine Übereinstimmung erzielt werden. Jedoch fällt auch hier der bereits bei der Bestimmung der Massen und Renormierungskonstanten des reellen Skalarfeldes (s.o.) beobachtete Zusammenhang zwischen dem Logarithmus-Term in der R_ξ -Eichung und einer dimensionellen Divergenz in der Unitären Eichung auf. Der Beweis der Unabhängigkeit der S -Matrix von der gewählten Eichung (Abschn. 2.2.1) hat gezeigt, daß dabei die renormierte S -Matrix zu betrachten ist. Aus diesem Grund wende ich mich in den nun folgenden zwei Abschnitten den nach Renormierungsschema I bzw. II renormierten Vakuumerwartungswerten in den beiden Eichungen zu. Die renormierten Werte erhalte ich dabei durch Multiplikation mit $\sqrt{Z^{-1}}$, wobei Z die Renormierungskonstante des Skalarfeldes (sprich σ bzw. ϕ_1), jeweils in der entsprechenden Eichung und dem betrachteten Renormierungsschema, ist.

Daß der Vakuumerwartungswert nicht eichunabhängig und bei der Renormierung entsprechend zu berücksichtigen ist, wurde bereits in [3] erwähnt. Einen anderen Ansatz verfolgend, nämlich das effektive Potential über das Tree-Level-Niveau hinaus zu berechnen, gelangen die Autoren von [2] zu dem Ergebnis, daß hier auch das effektive Potential und folglich das Vakuum nicht unabhängig von der gewählten Eichung ist (s. auch: [10], [22]). Weiter wird hier aber durch die *Nielsen-Identität* (s. dort) die Eichunabhängigkeit der physikalischen Parameter sichergestellt. Darüber hinaus haben R. Fukuda und T. Kugo in [15]

gezeigt, daß der Wert des effektiven Potentials, berechnet am stationären Punkt der Wirkung, eichunabhängig ist. Dies sichert die Energieinterpretation der effektiven Wirkung: die Energie sollte ebenfalls nicht von der Eichung abhängen.

5.5.1 Renormierungsschema I

Die Renormierungskonstanten lauten hier wie folgt:

- in der Unitären Eichung für das Feld σ (s. (5.8)):

$$Z_R^{-1} = 1 - \frac{g}{4\pi m_0^2} \left[\frac{11}{36} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right]$$

- in der R_ξ -Eichung für das Feld ϕ_1 (s. (5.14)):

$$Z_{R,R_\xi}^{-1} = 1 - \frac{g}{4\pi m_0^2} \left[\frac{11}{36} + \frac{1}{3} \ln \xi - \xi^2 \frac{g^2}{324e^4} \right].$$

Damit berechnen sich die renormierten Vakuumerwartungswerte zu:

$$\begin{aligned} v_{\text{unitär}}^{\text{1-Loop, RSI}} &= \sqrt{Z_R^{-1}} v_{\text{unitär}}^{\text{1-Loop}} \\ &= \mu^{-\epsilon} \frac{v}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \frac{g}{12\pi m_0^2} \left[\frac{11}{24} + \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{3e^2}{g} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^2}{4\pi m_0^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right] \right\}, \end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned} v_{R_\xi}^{\text{1-Loop, RSI}} &= \sqrt{Z_{R,R_\xi}^{-1}} v_{R_\xi}^{\text{1-Loop}} \\ &= \mu^{-\epsilon} \frac{v}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \frac{g}{12\pi m_0^2} \left[\frac{11}{24} + 2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{3e^2}{g} + \ln \xi - \xi^2 \frac{g^2}{216e^4} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^2}{4\pi m_0^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Der renormierte Vakuumerwartungswert in der R_ξ -Eichung divergiert also ebenfalls im Limes $\xi \rightarrow 0$. Es ist allerdings zu beachten, daß hier wiederum eine Entsprechung zwischen einer dimensionellen Divergenz in der Unitären Eichung und der logarithmischen Divergenz in der R_ξ -Eichung auftritt:

$$\ln \xi - \frac{1}{2} \ln \frac{3e^2}{g} \sim - \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{3e^2}{g}.$$

Außerdem verbleibt in der R_ξ -Eichung lediglich ein Term proportional zu ξ^2 , welcher im Limes $\xi \rightarrow 0$ keine Rolle spielt.

5.5.2 Renormierungsschema II (Polmasse)

Renormierungskonstanten:

- in der unitären Eichung für das Feld σ (s. (5.12)):

$$\begin{aligned} Z_\sigma^{-1} = & 1 - \frac{g}{4\pi m_0^2} \left[-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\left(1 - 6\frac{e^2}{g}\right)^2}{3\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)} + \frac{2}{3} \frac{-1 + 18\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} - 216\frac{e^6}{g^3}}{\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)\sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \right] \end{aligned}$$

- in der R_ξ -Eichung für das Feld ϕ_1 (s. (5.18)):

$$\begin{aligned} Z_{\phi_1}^{-1} = & 1 - \frac{g}{4\pi m_0^2} \left[-1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} + \frac{1}{3} \ln \xi + \frac{\left(1 - 6\frac{e^2}{g}\right)^2}{3\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)} \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \frac{-1 + 18\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} - 216\frac{e^6}{g^3}}{\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)\sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} + \frac{4}{3\sqrt{12\frac{e^2}{g\xi} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g\xi} - 1} \right] \end{aligned}$$

renormierte Vakuumerwartungswerte:

$$\begin{aligned} v_{\text{unitär}}^{\text{1-Loop, RSII}} = & \sqrt{Z_\sigma^{-1}} v_{\text{unitär}}^{\text{1-Loop}} \\ = & \mu^{-\epsilon} \frac{v}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \frac{g}{12\pi m_0^2} \left[-\frac{3}{2} + \sqrt{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} + \frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{3e^2}{g} \right. \right. \\ & + \frac{\left(1 - 6\frac{e^2}{g}\right)^2}{2\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)} + \frac{-1 + 18\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} - 216\frac{e^6}{g^3}}{\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)\sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \\ & \left. \left. - \frac{e^2}{4\pi m_0^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right] \right\} \right. \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} v_{R_\xi}^{\text{1-Loop, RSII}} = & \sqrt{Z_{\phi_1}^{-1}} v_{R_\xi}^{\text{1-Loop}} \\ = & \mu^{-\epsilon} \frac{v}{\sqrt{2}} \left\{ 1 - \frac{g}{12\pi m_0^2} \left[-\frac{3}{2} + \sqrt{3} \operatorname{arccot} \sqrt{3} + 2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} \ln \frac{3e^2}{g} + \ln \xi + \frac{2}{\sqrt{12\frac{e^2}{g\xi} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g\xi} - 1} \\ & + \frac{\left(1 - 6\frac{e^2}{g}\right)^2}{2\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)} + \frac{-1 + 18\frac{e^2}{g} - 36\frac{e^4}{g^2} - 216\frac{e^6}{g^3}}{\left(1 - 12\frac{e^2}{g}\right)\sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1}} \operatorname{arccot} \sqrt{12\frac{e^2}{g} - 1} \\ & \left. \left. - \frac{e^2}{4\pi m_0^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right] \right\} \right. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Auch hier divergiert $v_{R_\xi}^{\text{1-Loop, RSII}}$ im Limes $\xi \rightarrow 0$ (man beachte jedoch: (5.19), sowie die Forderung (Stabilität des Skalarfeldes) $12\frac{e^2}{g} \geq 1$). Es findet sich im Vergleich wieder dieselbe Übereinstimmung zwischen dimensionellen und logarithmischen Divergenzen wie im Renormierungsschema I.

Kapitel 6

Eichunabhängigkeit in einem Streuprozeß

Ziel dieses Kapitels ist es, die Eliminierung unphysikalischer Pole in einem Streuprozeß zwischen physikalischen Zuständen zu zeigen. Hierzu betrachte ich die Streuung eines reellen Skalarfeldes (ϕ_1) an einem transversalen Vektorfeld, da hier gerade die berechneten 2-Punkt-Greensfunktionen in 1-Loop-Ordnung beitragen (s. Abb. 6.1).

Zunächst soll dieses in niedrigster Ordnung gezeigt werden. Hier tragen nur das 2. bis 4. Diagramm aus Abb. 6.1 bei, wobei der unphysikalische Pol des 3. Diagrammes gerade dem Longitudinal-Anteil des virtuellen Vektorteilchens entspricht. Zunächst: für das 2. und 3. Diagramm ergeben sich folgende Ausdrücke (im folgenden stets: $P = p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$):

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 2: } = \Delta_{\mu\lambda,\xi}(p_1)\Delta_{\tau\nu,\xi}(-p'_1)\Delta_{\phi_1}(p_2)\Delta_{\phi_1}(-p'_2)e^2 \frac{(p_2 + P)_\lambda(p'_2 + P)_\tau}{P^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 & \text{Diagram 3: } \text{Long.} = \Delta_{\mu\lambda,\xi}(p_1)\Delta_{\tau\nu,\xi}(-p'_1)\Delta_{\phi_1}(p_2)\Delta_{\phi_1}(-p'_2)4e^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \frac{P_\lambda P_\tau}{P^2} \frac{1}{P^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}.
 \end{aligned}$$

Um nun die S -Matrix-Elemente zu erhalten, sind die äußeren Propagatoren zu amputieren und alle äußeren Impulse auf die Massenschale zu setzen ($p_1^2 = p'^2_1 = -m_{0,v}^2$, $p_2^2 = p'^2_2 = -m_0^2$). Es ist hierbei darauf zu achten, daß von den äußeren Vektorfeldern noch die sogenannten Polarisationsvektoren $\epsilon_\lambda(p_1), \epsilon_\tau(-p'_1)$ erhalten bleiben (genauer: es ist mit den freien Wellenfunktionen der äußeren Felder zu multiplizieren). Da das äußere Vektorfeld transversal sein soll, gilt:

$$\epsilon_\lambda(p_i) p_{i\lambda} = 0.$$

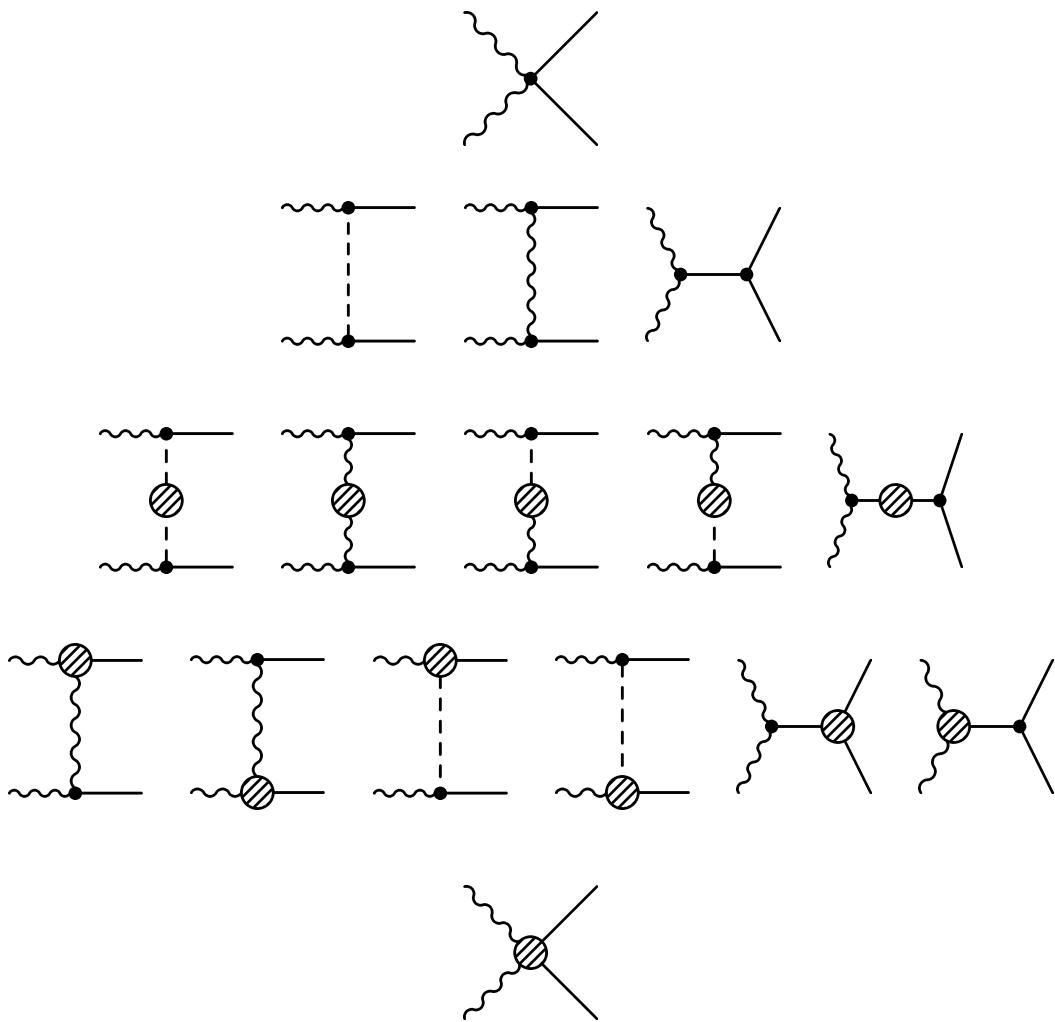


Abbildung 6.1: Beiträge zur $A_\mu^2 \phi_1^2$ -Streuung (in R_ξ -Eichung). Für die 3-Punkt-Beiträge s. Abb. 6.2 bis 6.4, für den 4-Punkt-Beitrag s. Abb. 6.5, vgl. [41]

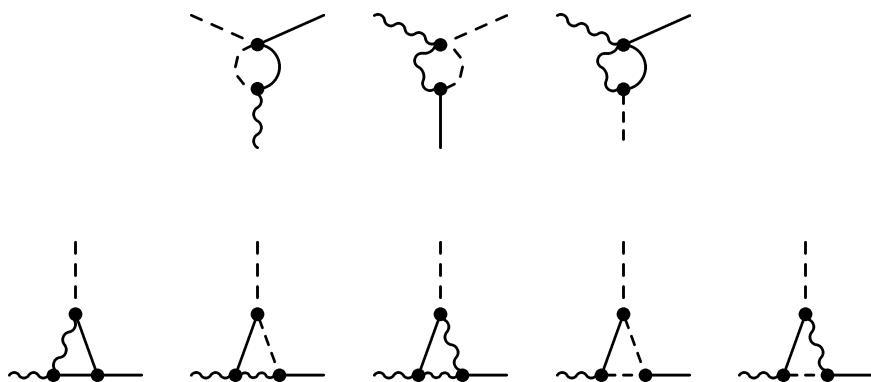
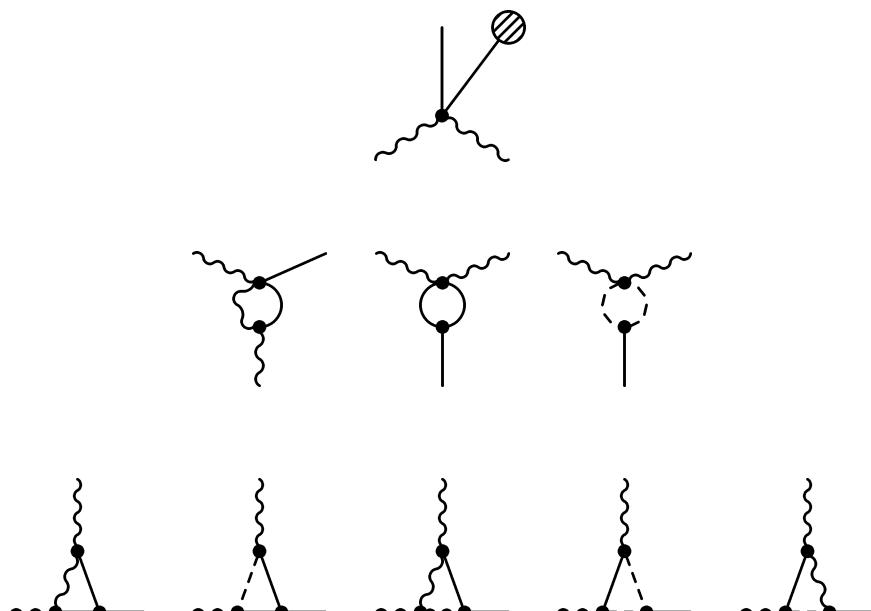
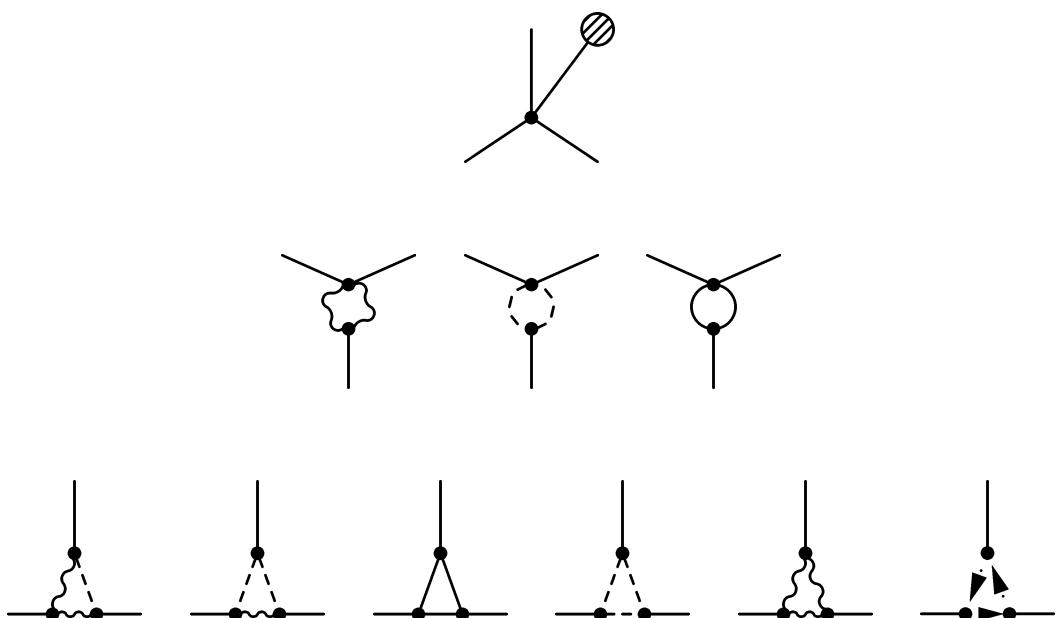
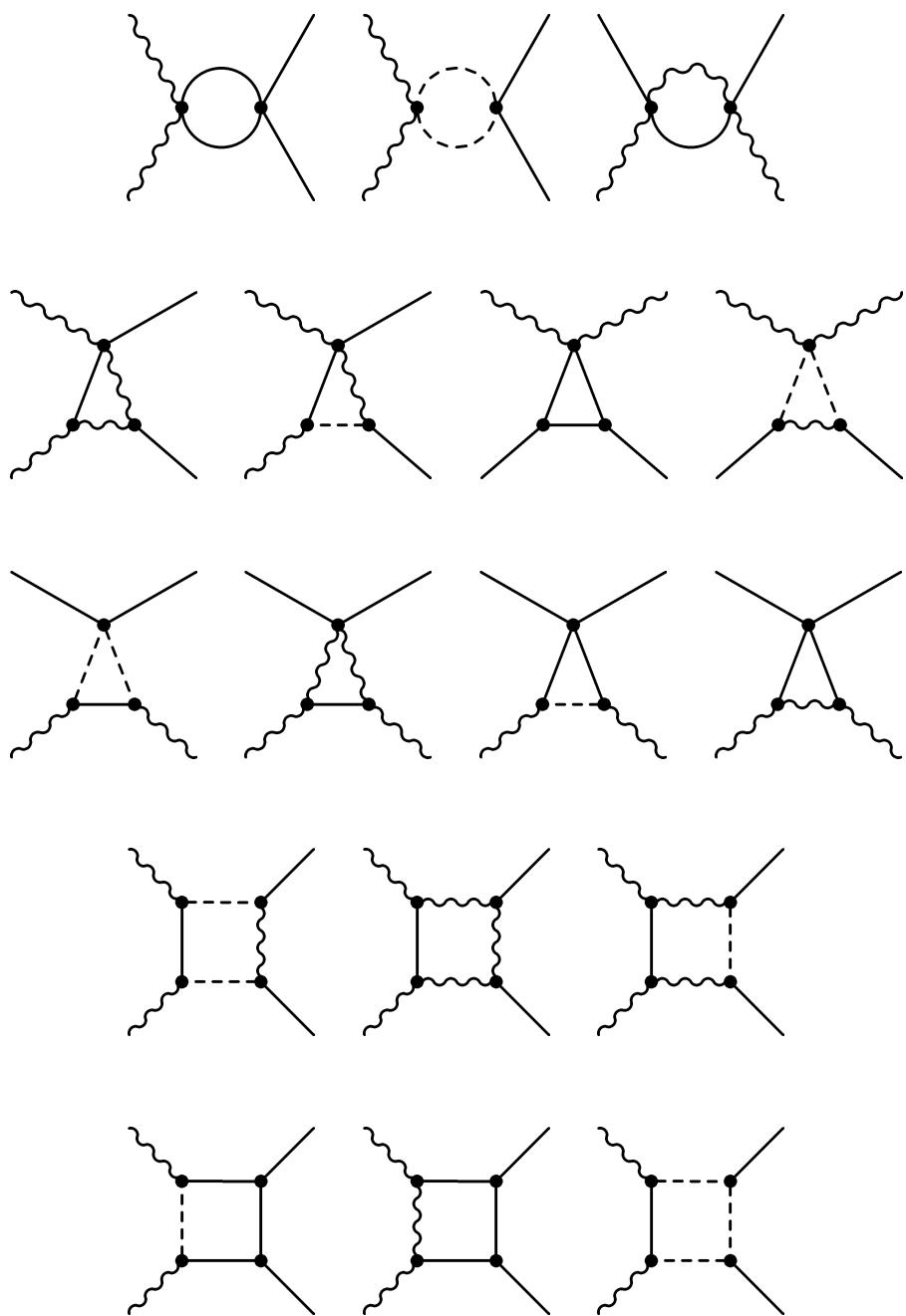


Abbildung 6.2: Beiträge zum $\phi_1 \phi_2 A_\mu$ -Vertex

Abbildung 6.3: Beiträge zum $\phi_1 A_\mu^2$ -VertexAbbildung 6.4: Beiträge zum ϕ_1^3 -Vertex

Abbildung 6.5: Beiträge zum $\phi_1^2 A_\mu^2$ -Vertex

Nun erhalte ich:

$$\begin{aligned}
 \left(\text{Diagramm mit vertikalem Zickzack-Propagator} \right)_{\text{amp., on-shell}} &= \epsilon_\lambda(p_1) \epsilon_\tau(-p'_1) e^2 \frac{(p_2 + P)_\lambda (p'_2 + P)_\tau}{P^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 &= \epsilon_\lambda(p_1) \epsilon_\tau(-p'_1) 4e^2 \frac{P_\lambda P_\tau}{P^2} \frac{P^2}{P^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \\
 &= \epsilon_\lambda(p_1) \epsilon_\tau(-p'_1) \frac{P_\lambda P_\tau}{P^2} 4e^2 \left(1 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \frac{1}{P^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\text{Diagramm mit vertikalem Zickzack-Propagator und Beschriftung 'Long.'} \right)_{\text{amp., on-shell}} &= \epsilon_\lambda(p_1) \epsilon_\tau(-p'_1) \frac{4e^2 m_{0,v}^2}{\xi} \frac{P_\lambda P_\tau}{P^2} \frac{1}{P^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}.
 \end{aligned}$$

Somit wird der Pol bei $P^2 = -\frac{m_{0,v}^2}{\xi}$ in der Summe dieser beiden Anteile eliminiert (vgl. Bemerkung in [3], ähnliches Bsp. in [35]). Da der Transversal-Anteil des Eichfeldes in beiden Eichungen übereinstimmt, gilt:

$$\left(\text{Diagramm mit vertikalem Zickzack-Propagator} + \text{Diagramm mit vertikalem Zickzack-Propagator} \right)^{R_\xi}_{\text{amp., on-shell}} = \left(\text{Diagramm mit vertikalem Zickzack-Propagator} \right)^{\text{Unitär}}_{\text{amp., on-shell}}.$$

Für das 4. Diagramm aus Abb. 6.1 gilt trivialerweise (die Skalarfeld-Propagatoren für die Felder σ und ϕ_1 sind identisch):

$$\left(\text{Diagramm mit vertikalem Zickzack-Propagator und einem Kurven-Propagator} \right)^{R_\xi}_{\text{amp., on-shell}} = \left(\text{Diagramm mit vertikalem Zickzack-Propagator und einem Kurven-Propagator} \right)^{\text{unitär}}_{\text{amp., on-shell}}.$$

Um dieses Verhalten auch in der 1-Loop-Ordnung demonstrieren zu können, wären auch die entsprechenden Korrekturen zu den 3-Punkt-Vertizes (u.a. „Triangel-Graphen“, s. Abb. 6.2 bis 6.4) sowie zu dem 4-Punkt-Vertex (u.a. „Box-Graphen“, s. Abb. 6.5) zu berechnen. Dies ist in dieser Arbeit jedoch nicht durchgeführt worden. Daß diese Graphen zur Eichunabhängigkeit beitragen, deuten die 3-Punkt-Greensfunktionen enthaltenden Slavnov-Taylor-Identitäten aus Abschn. 3.3.3 bereits an (z. Bsp. (3.71), (3.73)). Da in den Beiträgen aus den 3- und 4-Punkt-Greensfunktionen nur die Diagramme mit den Tadpole-Anteilen divergent sind, wie aus dem Verhalten für große Impulse der einzelnen Propagatoren folgt, sind in der R_ξ -Eichung sämtliche divergenten Anteile in den Diagrammen mit einem unphysikalischen Zwischenzustand bereits in denen der Abb. 6.6 enthalten. Ich werde hier die Weghebung derselben aufzeigen.

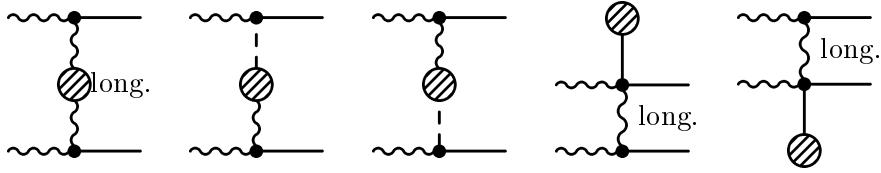


Abbildung 6.6: Graphen mit divergenten Anteilen in den unphysikalischen Propagatoren

$$\left(\begin{array}{c} p_1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ -p'_1 \end{array} \begin{array}{c} p_2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ -p'_2 \end{array} \right)_{\text{amp.,on-shell}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) 4e^2 m_{0,v}^2 [\Delta_{\lambda\rho,\xi}(P)\Delta_{\eta\tau,\xi}(P) (-\Sigma_{\rho\eta,R_\xi}(P))]_{\text{long}} \\
 &= \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) e^4 \frac{P_\lambda P_\tau}{\pi P^2} \frac{m_{0,v}^2}{(\xi P^2 + m_{0,v}^2)^2} \left\{ 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{6e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
 &\quad + 2 \ln \xi - \frac{P^2 + m_{0,v}^2 - m_0^2}{P^2} \ln \frac{3e^2}{g} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{(P^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4P^2 m_{0,v}^2}}{P^2} \ln \frac{P^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(P^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4P^2 m_{0,v}^2}}{P^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(P^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4P^2 m_{0,v}^2}} \\
 &\quad - \frac{P^2 + 2 \left(m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi} \right)}{\sqrt{(P^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi})^2 + 4P^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{P^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{(P^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi})^2 + 4P^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{P^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{(P^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi})^2 + 4P^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{c} p_1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ -p'_1 \end{array} \begin{array}{c} p_2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ -p'_2 \end{array} \right)_{\text{amp.,on-shell}}^{\text{div.}} =$$

$$= \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) e^4 \frac{P_\lambda P_\tau}{\pi P^2} \frac{m_{0,v}^2}{(\xi P^2 + m_{0,v}^2)^2} \left\{ 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{6e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\}$$

$$\left(\begin{array}{c} p_1 & p_2 \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ -p'_1 & -p'_2 \end{array} \right) \text{amp., on-shell} = \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) 2ie^3 v(p_2 + P)_\lambda \Delta_{\phi_2}(P) \Delta_{\rho\tau,\xi}(P) (-\Sigma_{\phi_2\rho,R_\xi}(P))$$

$$= \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) 4ie^3 v P_\lambda \Delta_{\phi_2}(P) \Delta_{\rho\tau,\xi}(P) (-\Sigma_{\phi_2\rho,R_\xi}(P))$$

$$\left(\begin{array}{c} p_1 & p_2 \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ -p'_1 & -p'_2 \end{array} \right) \text{amp., on-shell} = \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) 2ie^3 v(-p'_2 - P)_\lambda \Delta_{\phi_2}(P) \Delta_{\rho\tau,\xi}(P) (-\Sigma_{\rho\phi_2,R_\xi}(P))$$

Beachte: $\Sigma_{\phi_2\rho,R_\xi}(P) = -\Sigma_{\rho\phi_2,R_\xi}(P)$.

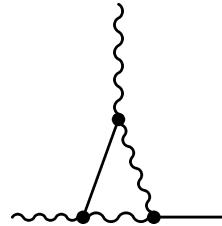
$$\left(\begin{array}{c} p_1 & p_2 \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ -p'_1 & -p'_2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} p_1 & p_2 \\ \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} \\ -p'_1 & -p'_2 \end{array} \right) \text{amp., on-shell} = \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) e^4 \frac{P_\lambda P_\tau}{\pi P^2} \frac{\xi P^2}{(\xi P^2 + m_{0,v}^2)^2} \left\{ 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{6e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right. \\
 \left. - \frac{P^2 + 2m_{0,v}^2 - 2m_0^2}{P^2} \ln \frac{3e^2}{g} + 3 \ln \xi \right. \\
 \left. + 2 \frac{\sqrt{(P^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4P^2 m_{0,v}^2}}{P^2} \ln \frac{P^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 + \sqrt{(P^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4P^2 m_{0,v}^2}}{P^2 + m_0^2 + m_{0,v}^2 - \sqrt{(P^2 + m_0^2 - m_{0,v}^2)^2 + 4P^2 m_{0,v}^2}} \right. \\
 \left. - \frac{2P^2 + 4m_0^2 - 2\frac{m_{0,v}^2}{\xi}}{\sqrt{(P^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi})^2 + 4P^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \ln \frac{P^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} + \sqrt{\left(P^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4P^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}}{P^2 + m_0^2 + \frac{m_{0,v}^2}{\xi} - \sqrt{\left(P^2 + m_0^2 - \frac{m_{0,v}^2}{\xi}\right)^2 + 4P^2 \frac{m_{0,v}^2}{\xi}}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ -p'_1 \quad -p'_2 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ -p'_1 \quad -p'_2 \end{array} \right)_{\text{div.}} = \\
& = \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) e^4 \frac{P_\lambda P_\tau}{\pi P^2} \frac{\xi P^2}{(\xi P^2 + m_{0,v}^2)^2} \left\{ 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{6e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \\
& \left(\begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ -p'_1 \quad -p'_2 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ -p'_1 \quad -p'_2 \end{array} \right)_{\text{amp., on-shell}} = \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) 8e^4 v \Delta_{\lambda\tau,\xi}^{\text{long.}}(P) \Sigma_{\text{Vakuum}, R_\xi} \\
& = \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) e^4 \frac{P_\lambda P_\tau}{\pi P^2} \frac{1}{\xi P^2 + m_{0,v}^2} \cdot \\
& \cdot \left\{ \ln \frac{3e^2}{g} - \ln \xi - 4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{6e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\} \\
& \left(\begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ -p'_1 \quad -p'_2 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ -p'_1 \quad -p'_2 \end{array} \right)_{\text{div.}} = \\
& = \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) e^4 \frac{P_\lambda P_\tau}{\pi P^2} \frac{1}{\xi P^2 + m_{0,v}^2} \left\{ -4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{6e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Somit erhalte ich nun in der Summe dieser divergenten Anteile:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ -p'_1 \quad -p'_2 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ -p'_1 \quad -p'_2 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ -p'_1 \quad -p'_2 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ -p'_1 \quad -p'_2 \end{array} + \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ -p'_1 \quad -p'_2 \end{array} \right)_{\text{div.}} = \\
& = \epsilon_\lambda(p_1)\epsilon_\tau(-p'_1) \frac{P_\lambda P_\tau}{\pi P^2} \frac{e^4}{\xi P^2 + m_{0,v}^2} \left[\frac{m_{0,v}^2}{\xi P^2 + m_{0,v}^2} + \frac{\xi P^2}{\xi P^2 + m_{0,v}^2} - 1 \right] \cdot \\
& \cdot \left[4 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} \right) + \frac{6e^2}{g} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 2 - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right) \right] \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Also konnte ich hier zumindest für die divergenten Anteile das Verschwinden der unphysikalischen Pole in diesem Streuprozeß demonstrieren. Ich möchte an dieser Stelle noch darauf hinweisen, daß in der Unitären Eichung hierzu dennoch die 1-Loop-Korrekturen zu den 3-Punkt-Greensfunktionen benötigt werden, da in dieser Eichung auch der folgende Triangel-Graph einen divergenten Anteil besitzt, was sich aus dem Propagator-Verhalten in der Unitären Eichung ablesen läßt.



Dies bestätigt auch die Annahme, daß eine vollständige Aufhebung aller eichabhängigen Anteile nur durch die Betrachtung sämtlicher 1-Loop-Korrekturen, also auch die der Triangel- und Boxgraphen, erreicht werden kann.

Zusammenfassung und Ausblick

Das Abelsche Higgs-Modell ($D = 2$) wurde in dieser Arbeit sowohl in der Unitären als auch in der R_ξ -Eichung jeweils bis zur 1-Loop-Ordnung behandelt. Dabei habe ich die Massen und Renormierungskonstanten der relevanten Felder durch zwei verschiedene Renormierungsschemata (renormierte Masse bzw. physikalische oder auch Polmasse) berechnet. Es ergab sich, wie aus der Eichunabhängigkeit zu erwarten, für die physikalischen Massen des Skalar- sowie des Eichfeldes kein Unterschied. Ein weiterer wichtiger Punkt ist allerdings, daß sich durch die Grenzwertbildung $\xi \rightarrow 0$, wodurch die Unitäre Eichung formal in der R_ξ -Eichung enthalten ist, auch die renormierten Massen (Renormierungsschema I) miteinander vergleichen lassen:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} m_{R,R_\xi} = m_R. \quad (5.16)$$

Ein solcher Zusammenhang läßt sich für die renormierten Vakuumerwartungswerte in beiden Renormierungsschemata nicht finden. Jedoch fällt hier wie auch schon bei der Bestimmung der Renormierungskonstanten eine Entsprechung zwischen einer dimensionellen Divergenz in der Unitären Eichung und einer im Limes $\xi \rightarrow 0$ logarithmischen Divergenz in der R_ξ -Eichung auf:

$$\ln \xi \sim - \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_{0,v}^2}{4\pi\mu^2} \right).$$

Im Zusammenhang mit dem ursprünglichen Ziel, eine Lösung im Kontinuum anzugeben für die von J. Heitger ([18]) bzw. H. Dilger und J. Heitger ([9]) mit der Gitter-Approximation unter anderem betrachteten topologischen Observablen im Abelschen Higgs-Modell ($D = 2$), sind hier gerade die Ergebnisse für das Renormierungsschema I von besonderem Interesse, da der Zugang über das Gitter mit Hilfe der renormierten Masse vereinfacht wird ([33]). Hierbei hat sich ergeben, daß die Masse sowie der Vakuumerwartungswert des skalaren Feldes nicht unabhängig von der gewählten Eichung sind. Bis zur 1-Loop-Ordnung habe ich diese Abhängigkeit explizit angegeben. Die Masse des Transversal-Anteils des Eichfeldpropagators zeigt jedoch keine solche Eichabhängigkeit. Dies bestätigt die Aussage ([16], [29]) über die direkte Unabhängigkeit der Selbstenergie des Transversal-Anteils des Eichfeldpropagators von der gewählten Eichung (also auch vom Eichparameter ξ) bis zur hier betrachteten 1-Loop-Ordnung.

Um die Konsequenzen der unterschiedlichen Eichungen weiter zu untersuchen, sollten zunächst die 1-Loop-Korrekturen zu den 3- und 4-Punkt-Vertizes bestimmt werden. Hiermit ließe sich dann auch das in Kapitel 6 betrachtete Beispiel abschließend behandeln.

Ebenfalls von Interesse ist eine Untersuchung des zur Energiedichte korrespondierenden effektiven Potentials an den stationären Punkten, hier sollte sich nach R. Fukuda und T. Kugo ([15]) keine Abhängigkeit von der gewählten Eichung zeigen.

Als Ausgangspunkt für weitere Betrachtungen zur Eichunabhängigkeit von physikalischen Prozessen (ein Beispiel hierfür habe ich in Kapitel 6 angeführt) wurden ebenfalls die Slavnov-Taylor-Identitäten aus der BRST-Invarianz der Lagrange-Dichte, fixiert durch die R_ξ -Eichung, hergeleitet und auf Tree-Level an einigen Beispielen demonstriert. Diese Identitäten sind auch bei der Beweisführung zur Renormierbarkeit von großem Nutzen. Mit der, wie oben bereits bemerkt, noch zu erfolgenden Bestimmung der 1-Loop Korrekturen der Vertizes, könnten diese Identitäten dann auch explizit nachgerechnet werden. Hierbei ist allerdings die erwähnte gemeinsame Invertierung des Eichfeldes und des Imaginäranteiles des Skalarfeldes zu beachten. Aus diesen Untersuchungen sollte hervorgehen, wie die Slavnov-Taylor-Identitäten im einzelnen die Eichunabhängigkeit sicherstellen.

Mit den nun vorliegenden Ergebnissen sollte jetzt die Grundlage für eine Lösung im Kontinuum der oben angeführten topologischen Observablen auch in der Unitären Eichung gegeben sein. Des Weiteren zeigen die Ergebnisse keinerlei Schwierigkeiten an, die Unitäre Eichung auch in realistischen Modellen (Weinberg-Salam-Modell der elektro-schwachen Wechselwirkung) zu verwenden, wie dies von H. Sonoda ([39]) bereits vorgeschlagen wurde. Dies sollte den Zugang zu solchen Modellen vereinfachen, da in dieser Formulierung sämtliche unphysikalischen Freiheitsgrade eliminiert sind. Allein die hieraus resultierende deutlich geringere Anzahl an für die Störungstheorie zu berechnenden Diagrammen stellt bei der praktischen Durchführung eine große Erleichterung dar.

Anhang A

Gamma-Funktion und Dimensionelle Regularisierung

A.1 Gamma-Funktion

Siehe hierzu [5], [13].

- Integraldarstellung nach Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1} \quad (\text{A.1})$$

für: $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0$

- Produktdarstellung nach Weierstraß

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}} \quad (\text{A.2})$$

$$\text{mit: } \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} - \ln n \right) \quad (\text{A.3})$$

Meromorph in \mathbb{C} mit Polen 1. Ordnung in $n, n \in \{0, -1, -2, -3, \dots\}$

- Funktionalgleichung et al.

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{A.4})$$

$$n \in \mathbb{N}: \Gamma(n+1) = n! \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, & \Gamma(2) &= 1 \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}, & \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= -2\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

- Entwicklung um Polstellen $-n, n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$$\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \psi_1(n+1) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \quad (\text{A.6})$$

mit:

$$\psi_1(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) \quad (\text{A.7})$$

$$\psi_1(n) = -\gamma + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{1}{\nu} \quad (\text{A.8})$$

$$\psi_1(1) = -\gamma \quad (\text{A.9})$$

A.2 Gaußsche Integrale, Schwinger-Parametrisierung

- Gaußsche Integrale Für $a, p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} a > 0$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(ax^2+2px)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{p^2}{a}}, \quad (\text{A.10})$$

bzw. in mehreren Dimensionen $D \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^D, p \in \mathbb{C}^D, a \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} a > 0$, mit px sei das Skalarprodukt zwischen p und x gemeint, $px \in \mathbb{C}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^D x e^{-(ax^2+2px)} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{D}{2}} e^{\frac{p^2}{a}}. \quad (\text{A.11})$$

- Schwinger Parametrisierung (siehe z.Bsp. [8]), für $n \in \mathbb{N}, \Lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\frac{1}{\Lambda^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} d\alpha \alpha^{n-1} e^{-\alpha \Lambda}. \quad (\text{A.12})$$

A.3 Eulersche Beta-Funktion

Für $x, y \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} x > 0, \operatorname{Re} y > 0$ gilt (vgl. [5]):

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2 \int_0^{\infty} dt t^{2x-1} (1+t^2)^{-x-y}, \quad (\text{A.13})$$

hieraus ergibt sich (mit $x = \frac{1+\beta}{2}$, $y = \alpha - \frac{1+\beta}{2}$, $t = \frac{s}{m}$) die nützliche Formel:

$$\int_0^{\infty} ds \frac{s^{\beta}}{(s^2 + m^2)^{\alpha}} = \frac{\Gamma(\alpha - \frac{\beta+1}{2}) \Gamma(\frac{\beta+1}{2})}{2\Gamma(\alpha)(m^2)^{\alpha - \frac{\beta+1}{2}}}, \quad (\text{A.14})$$

gültig für $\operatorname{Re} \beta > -1, \operatorname{Re} \alpha > 0, m^2 > 0$.

A.4 Integralberechnung in beliebigen Dimensionen

Für diesen Abschnitt vgl. [8], [19], [32] sowie [43]. Mit Hilfe der Schwinger-Parametrisierung lässt sich folgendes Integral in beliebiger Dimension $D \in \mathbb{N}, n > 0$ berechnen:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + 2kp + m^2)^n} &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1} e^{-\alpha(k^2 + 2kp + m^2)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1-\frac{D}{2}} e^{-\alpha(m^2 - p^2)} \\ \text{für } m^2 > p^2 \text{ gilt: } &= \frac{(m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-n}}{\Gamma(n)(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma(n - \frac{D}{2}) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^n} \left(\frac{m^2 - p^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2}-n} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)}. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Als weiteres Integral soll nun

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2 + m^2)^\beta}$$

mit $m^2 > 0, \alpha > 0, \beta > 0$ berechnet werden, welches für $2\alpha + D \geq 2\beta$ divergiert. Dies erkennt man, indem man sphärische Koordinaten einführt:

$$d^D k \longrightarrow \Omega_D \kappa^{D-1} d\kappa.$$

Hierbei steht Ω_D für die Oberfläche der Einheitssphäre in D Dimensionen. Es gilt:

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})}. \quad (\text{A.16})$$

Folglich:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2 + m^2)^\beta} &= \frac{2}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty d\kappa \frac{\kappa^{2\alpha+D-1}}{(\kappa^2 + m^2)^\beta} \\ &\stackrel{(\text{A.14})}{=} \frac{\Gamma(\beta - \alpha - \frac{D}{2}) \Gamma(\alpha + \frac{D}{2})}{\Gamma(\beta) \Gamma(\frac{D}{2})} \frac{(m^2)^{\alpha-\beta+\frac{D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Speziell für $\alpha = \beta = 1$:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{k^2 + m^2} &= \frac{D}{2} \Gamma(-\frac{D}{2}) \left(\frac{m^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2}} \\ &= -\Gamma(1 - \frac{D}{2}) \left(\frac{m^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Weiter wird nun noch das Integral

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2kp + m^2)^n}$$

für $m^2 > p^2$ benötigt. Dieses erhält man durch (vgl.[19]) Ableiten von (A.15) nach p_μ und p_ν :

$$\frac{\partial^2}{\partial p_\nu \partial p_\mu} \frac{1}{(k^2 + 2kp + m^2)^n} = n(n+1) \frac{4k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2kp + m^2)^{n+2}},$$

also:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2kp + m^2)^{n+2}} &= \\ &= \frac{1}{4n(n+1)} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\nu} (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-n} \\ &= \frac{1}{4n(n+1)} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} 2 \left(\frac{D}{2} - n \right) \\ &\quad \left[2 \left(\frac{D}{2} - n - 1 \right) (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-n-2} p_\mu p_\nu - (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-n-1} \delta_{\mu\nu} \right] \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n+1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} (m^2 - p^2)^{\frac{D}{2}-n-2} \left[\frac{m^2 - p^2}{2} \delta_{\mu\nu} - \left(\frac{D}{2} - n - 1 \right) p_\mu p_\nu \right], \end{aligned}$$

so daß sich nach $n+2 \rightarrow n$ zusammenfassen läßt¹:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + 2kp + m^2)^n} &= \\ &= \frac{1}{(4\pi)^n} \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{m^2 - p^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2}-n} \left[\Gamma(n - \frac{D}{2}) p_\mu p_\nu + \Gamma(n - 1 - \frac{D}{2}) \frac{m^2 - p^2}{2} \delta_{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Entweder durch Multiplikation mit $\delta_{\mu\nu}$ oder aber durch eine Variablentransformation $k_\mu \rightarrow k_\mu + p_\mu$ erhält man das Ergebnis für $\alpha = 1$ des folgenden Ausdruckes. Es wird allerdings

¹formal müßte durch diese Transformation die Gültigkeit auf $n > 2$ beschränkt werden, auf einem anderen Weg kann man diese Einschränkung umgehen: Ersetze zunächst $k_\mu \rightarrow (k+p)_\mu$, so daß der Nenner symmetrisch in k wird, und betrachte dann nur die symmetrischen Summanden des Zählers und benutze:

$$k_\mu k_\nu = \frac{k^2}{D} \delta_{\mu\nu}$$

auch der Wert für $\alpha = 2$ benötigt.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2 + 2kp + m^2)^\beta} = \\
&= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{[k^2 - 2kp + p^2]^\alpha}{[k^2 + m^2 - p^2]^\beta} \\
\text{für: } \alpha = 1 &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{[k^2 + m^2 - p^2]^\beta} + p^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + m^2 - p^2]^\beta} \\
m^2 \geq p^2 &= \frac{1}{(4\pi)^\beta} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\frac{m^2 - p^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2} - \beta} \left[\Gamma(\beta - \frac{D}{2}) p^2 + \Gamma(\beta - 1 - \frac{D}{2}) \frac{D}{2} (m^2 - p^2) \right] \\
&\quad \text{(A.20)} \\
\text{für: } \alpha = 2 &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^4 + p^4 + 2k^2 p^2 + 4(kp)^2 - 4(kp)(k^2 + p^2)}{(k^2 + m^2 - p^2)^\beta} \\
&= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^4}{(k^2 + m^2 - p^2)^\beta} + 2p^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{(k^2 + m^2 - p^2)^\beta} \\
&\quad + 4p_\mu p_\nu \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + m^2 - p^2)^\beta} + p^4 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m^2 - p^2)^\beta} \\
m^2 \geq p^2 &\stackrel{m^2 \geq p^2}{=} \frac{(m^2 - p^2)^{\frac{D}{2} - \beta}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \left[\frac{\Gamma(\beta - 2 - \frac{D}{2}) \Gamma(2 + \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(\beta)} (m^2 - p^2)^2 \right. \\
&\quad + 2 \frac{\Gamma(\beta - 1 - \frac{D}{2}) \Gamma(1 + \frac{D}{2})}{\Gamma(\beta) \Gamma(\frac{D}{2})} (m^2 - p^2) p^2 \\
&\quad \left. + 2 \frac{\Gamma(\beta - 1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(\beta)} (m^2 - p^2) p^2 + \frac{\Gamma(\beta - \frac{D}{2})}{\Gamma(\beta)} p^4 \right] \\
&= \frac{(m^2 - p^2)^{\frac{D}{2} - \beta}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\beta)} \left[\frac{\Gamma(\beta - 2 - \frac{D}{2}) \Gamma(2 + \frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})} (m^2 - p^2)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \Gamma(\beta - 1 - \frac{D}{2}) (m^2 - p^2) p^2 \left(\frac{D}{2} + 1 \right) + \Gamma(\beta - \frac{D}{2}) p^4 \right]
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Desweiteren wird nun noch das Integral

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 k_\mu}{[k^2 + 2pk + m^2]^n}$$

benötigt, hierzu soll zunächst

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{[k^2 + 2pk + m^2]^n}$$

berechnet werden, welches dann mit $\delta_{\nu\lambda}$ multipliziert das gewünschte Integral ergibt. Die Berechnung erfolgt durch Ausnutzung der Identität

$$\frac{\partial}{\partial p_\lambda} \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 + 2pk + m^2]^n} = -2n \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{[k^2 + 2pk + m^2]^{n+1}}.$$

Somit:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{[k^2 + 2pk + m^2]^{n+1}} = \\
 &= -\frac{1}{2n\Gamma(n)(4\pi)^n} \frac{\partial}{\partial p_\lambda} \left(\frac{m^2 - p^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2}-n} \left[\Gamma(n - \frac{D}{2}) p_\mu p_\nu + \Gamma(n - 1 - \frac{D}{2}) \frac{m^2 - p^2}{2} \delta_{\mu\nu} \right] \\
 &= \dots \\
 &= -\frac{1}{(4\pi)^{n+1}\Gamma(n+1)} \left(\frac{m^2 - p^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2}-n-1} \left[\Gamma(n + 1 - \frac{D}{2}) p_\mu p_\nu p_\lambda \right. \\
 &\quad \left. + \Gamma(n - \frac{D}{2}) \frac{m^2 - p^2}{2} \left(\delta_{\mu\nu} p_\lambda + \delta_{\nu\lambda} p_\mu + \delta_{\lambda\mu} p_\nu \right) \right],
 \end{aligned}$$

also nach $n+1 \rightarrow n$:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu k_\lambda}{[k^2 + 2pk + m^2]^n} = \\
 &= -\frac{1}{(4\pi)^n \Gamma(n)} \left(\frac{m^2 - p^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2}-n} \left[\Gamma(n - \frac{D}{2}) p_\mu p_\nu p_\lambda \right. \\
 &\quad \left. + \Gamma(n - 1 - \frac{D}{2}) \frac{m^2 - p^2}{2} \left(\delta_{\mu\nu} p_\lambda + \delta_{\nu\lambda} p_\mu + \delta_{\lambda\mu} p_\nu \right) \right] \tag{A.22}
 \end{aligned}$$

und nun:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k^2}{[k^2 + 2pk + m^2]^n} = \\
 &= -\frac{1}{(4\pi)^n \Gamma(n)} \left(\frac{m^2 - p^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2}-n} \left[\Gamma(n - \frac{D}{2}) p^2 + (1 + \frac{D}{2}) \Gamma(n - 1 - \frac{D}{2}) (m^2 - p^2) \right] p_\mu. \tag{A.23}
 \end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber sei nun noch angegeben:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu}{[k^2 + 2kp + m^2]^n} = -\frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)(4\pi)^n} \left(\frac{m^2 - p^2}{4\pi} \right)^{\frac{D}{2}-n} p_\mu. \tag{A.24}$$

A.4.1 Feynman-Parametrisierung

Häufig ist es zweckmäßig, ein Produkt im Nenner wie folgt umzuschreiben:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[a\alpha + (1-\alpha)b]^2}. \tag{A.25}$$

Dies kann sofort durch Integration gezeigt werden. Zuerst machte R.P. Feynman auf diese Vereinfachung in [12] aufmerksam.

Die Verallgemeinerung auf ein Produkt aus n Faktoren lautet (s. z.Bsp. [19] oder [43]):

$$\frac{1}{a_1 \dots a_n} = (n-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \dots \int_0^{\alpha_{n-2}} d\alpha_{n-1} \frac{1}{[a_1 \alpha_{n-1} + a_2 (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) + \dots + a_n (1 - \alpha_1)]^n}. \quad (\text{A.26})$$

Dies zeigt man durch eine vollständige Induktion. Der Induktionsanfang $n = 2$ ist durch (A.25) bzw. den trivialen Fall $n = 1$ gegeben. Die Induktionsvoraussetzung lautet:

$$\frac{1}{a_1 \dots a_{n-1}} = (n-2)! \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \dots \int_0^{\alpha_{n-3}} d\alpha_{n-2} \frac{1}{[a_1 \alpha_{n-2} + a_2 (\alpha_{n-3} - \alpha_{n-2}) + \dots + a_n (1 - \alpha_1)]^n}.$$

Der Induktionsschritt wird nun von $n - 1 \rightarrow n$ vollzogen:

$$\begin{aligned} & (n-1)! \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \dots \int_0^{\alpha_{n-2}} d\alpha_{n-1} \frac{1}{[a_1 \alpha_{n-1} + a_2 (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) + \dots + a_n (1 - \alpha_1)]^n} = \\ &= (n-2)! \frac{n-1}{a_1 - a_2} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \dots \int_0^{(a_1 - a_2)\alpha_{n-2}} d\alpha_{n-1} \cdot \\ & \quad \cdot \frac{1}{[a_1 \alpha_{n-1} + a_2 (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) + \dots + a_n (1 - \alpha_1)]^n} \\ &= (n-2)! \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \dots \int_0^{\alpha_{n-3}} d\alpha_{n-2} \cdot \\ & \quad \cdot \frac{1}{a_2 - a_1} \left[\frac{1}{[(a_1 - a_2)\alpha_{n-2} + a_2 \alpha_{n-2} + \dots + a_n (1 - \alpha_1)]^{n-1}} - \frac{1}{[a_2 \alpha_{n-2} + \dots + a_n (1 - \alpha_1)]^{n-1}} \right] \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{a_2 - a_1} \left[\frac{1}{a_1 a_3 \dots a_n} - \frac{1}{a_2 a_3 \dots a_n} \right] \\ &= \frac{1}{a_1 \dots a_n}, \text{ q.e.d..} \end{aligned}$$

Anhang B

Rechnungen zur Dimensionellen Regularisierung

In diesem Abschnitt werden die zur Dimensionellen Regularisierung benötigten Integralausdrücke mit Hilfe der in Anhang A vorgestellten Verfahren zur Integralberechnung in beliebigen Dimensionen, der Eigenschaften der Γ -Funktion und der Feynman-Parametrisierung sowie der in Anhang C verzeichneten Integralformeln berechnet. Es gilt $D = 2 - 2\epsilon$.

$$\begin{aligned}
 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m^2} &= \frac{\mu^{2\epsilon}}{4\pi} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \left(\frac{m^2}{4\pi}\right)^{\frac{D}{2}-1} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \left(1 - \epsilon \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon)\right)
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}}{k^2 + m^2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 1 - \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon)\right) \tag{B.2}$$

Beachte hierbei $\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu} = D$ sowie (B.28)

$$\begin{aligned}
 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{k^2 + m^2} &= -\mu^{2\epsilon} \Gamma(\epsilon) \left(\frac{m^2}{4\pi}\right)^{1-\epsilon} \\
 &= -\frac{m^2}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon)\right)
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{((k+p)^2 + m_1^2)(k^2 + m_2^2)} = \\
&= \int_0^1 d\alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + 2\alpha kp + \alpha(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_2^2]^2} \\
&= \frac{\mu^{2\epsilon}}{4\pi} \Gamma(1+\epsilon) \int_0^1 d\alpha \left(\frac{-\alpha^2 p^2 + \alpha(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_2^2}{4\pi} \right)^{-1-\epsilon} \\
&= \frac{(1 + \mathcal{O}(\epsilon))}{4\pi} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{-\alpha^2 p^2 + \alpha(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_2^2} \\
&= \frac{(1 + \mathcal{O}(\epsilon))}{4\pi \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}}{p^2 + m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

speziell für: $m_1^2 = m_2^2 = m^2$

$$= \frac{(1 + \mathcal{O}(\epsilon))}{4\pi \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}} \ln \frac{p^2 + 2m^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}}{p^2 + 2m^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}} \tag{B.5}$$

$$\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu}\delta_{\mu\nu}}{((k+p)^2 + m^2)(k^2 + m^2)} = \frac{(1 + \mathcal{O}(\epsilon))}{2\pi \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}} \ln \frac{p^2 + 2m^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}}{p^2 + 2m^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}} \tag{B.6}$$

Beachte hierbei (B.29).

$$\begin{aligned}
& \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{((k+p)^2 + m_1^2)(k^2 + m_2^2)} = \\
&= \int_0^1 d\alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{P_1'^2} \\
&= \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\alpha \left(\frac{P_1^2}{4\pi} \right)^{-\epsilon-1} \left[\Gamma(1+\epsilon) \alpha^2 p_\mu p_\nu + \Gamma(\epsilon) \frac{P_1}{2} \delta_{\mu\nu} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[p_\mu p_\nu \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^2}{P_1} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \int_0^1 d\alpha \frac{P_1}{4\pi \mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right] \\
&= -\frac{p_\mu p_\nu}{4\pi p^2} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \left(1 + \frac{p^2 + m_1^2 - m_2^2}{2p^2} \ln \frac{m_1^2}{m_2^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 2p^2 m_2^2}{2p^2 \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}}{p^2 + m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \right. \\
&\quad + \frac{\delta_{\mu\nu}}{8\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + 2 - \ln \frac{m_1^2}{4\pi \mu^2} + \frac{p^2 + m_1^2 - m_2^2}{2p^2} \ln \frac{m_1^2}{m_2^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}}{2p^2} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}}{p^2 + m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} + \mathcal{O}(\epsilon) \right)
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Zur Definition von P_1' bzw. P_1 siehe (B.20) bzw. (B.21).

$$\begin{aligned}
& \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{((k+p)^2 + m_1^2)(k^2 + m_2^2)} = \\
&= \int_0^1 d\alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{P_1'^2} \\
&= \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\alpha \left(\frac{P_1}{4\pi} \right)^{-1-\epsilon} \left[\Gamma(1+\epsilon) \alpha^2 p^2 + (\Gamma(\epsilon) - \Gamma(1+\epsilon)) P_1 \right] \\
&= p^2 \frac{(1 + \mathcal{O}(\epsilon))}{4\pi} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^2}{P_1} \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 1 - \int_0^1 d\alpha \ln \frac{P_1}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_1^2}{4\pi\mu^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{m_2^2}{\sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}}{p^2 + m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \tag{B.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\left(\delta_{\mu\nu} + \frac{(k+p)_\mu (k+p)_\nu}{m^2} \right) \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right)}{((k+p)^2 + m^2)(k^2 + m^2)} = \\
&= \int_0^1 d\alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} + 2 \frac{k^2}{m^2} + \frac{k^4 + 2p_\mu k_\mu k^2 + p_\mu p_\nu k_\mu k_\nu}{m^4}}{Q'^2} \\
&= \frac{1}{4\pi m^2} \int_0^1 d\alpha \left\{ \left(6\alpha^2 p^2 - 6\alpha p^2 + \frac{1}{2} p^2 \right) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{Q}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \left[-3\alpha^2 p^2 + 3\alpha p^2 - m^2 + \frac{\alpha^4 p^4 - 2\alpha^3 p^4 + \alpha^2 (p^4 + 2p^2 m^2) + 2m^4}{Q} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{4\pi m^4} \left[-\frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \frac{(p^2 + 2m^2)^2}{4\sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}} \ln \frac{p^2 + 2m^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}}{p^2 + 2m^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}} \right] \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Zur Definition von Q' bzw. Q s. (B.22) bzw. (B.23). Benutze (B.6), (B.8) sowie (B.10) und (B.11).

$$\begin{aligned}
& \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k^2}{((k+p)^2 + m^2)(k^2 + m^2)} = \\
&= \int_0^1 d\alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k^2}{Q'^2} \\
&= -p_\mu \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\alpha \left(\frac{Q}{4\pi}\right)^{-1-\epsilon} \left[\Gamma(1+\epsilon) \alpha^3 p^2 + \left(2\Gamma(\epsilon) - \Gamma(1+\epsilon)\right) \alpha Q \right] \\
&= -p_\mu \left[\frac{(1+\mathcal{O}(\epsilon))}{4\pi} p^2 \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^3}{Q} + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 d\alpha \alpha \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \frac{1}{2} - \ln \frac{Q}{4\pi\mu^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Beachte hier (B.28).

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^4}{Q'^2} = \\
&= \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\alpha \left(\frac{Q}{4\pi}\right)^{-1-\epsilon} \left[(\Gamma(1+\epsilon) - 2\Gamma(\epsilon)) Q^2 + 2(2\Gamma(\epsilon) - \Gamma(1+\epsilon)) \alpha^2 p^2 Q + \Gamma(1+\epsilon) \alpha^4 p^4 \right] \\
&= \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^{1-\epsilon}} \int_0^1 d\alpha \left[2\Gamma(\epsilon) Q^{-\epsilon} (2\alpha^2 p^2 - Q) + \Gamma(1+\epsilon) \left(Q - 2\alpha^2 p^2 + p^4 \frac{\alpha^4}{Q} \right) \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[2 \int_0^1 d\alpha \left(3\alpha^2 p^2 - \alpha p^2 - m^2 \right) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{Q}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right. \\
&\quad \left. + (1+\mathcal{O}(\epsilon)) \left(\int_0^1 d\alpha Q - 2p^2 \int_0^1 d\alpha \alpha^2 + p^4 \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^4}{Q} \right) \right]
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Beachte hier (B.28) und (B.30).

$$\begin{aligned}
\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{(k^2 + m_1^2)(k^2 + m_2^2)} &= \int_0^1 d\alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{[k^2 + \alpha(m_1^2 - m_2^2) + m_2^2]^2} \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - 1 - \int_0^1 d\alpha \ln \frac{\alpha(m_1^2 - m_2^2) + m_2^2}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \\
&= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_2^2}{4\pi\mu^2} - \frac{m_1^2}{m_1^2 - m_2^2} \ln \frac{m_1^2}{m_2^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right)
\end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
\mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu}{((k+p)^2 + m_1^2)(k^2 + m_2^2)} &= \\
&= \int_0^1 d\alpha \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu}{P_1'^2} \\
&= - \int_0^1 d\alpha \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^2} \Gamma(1+\epsilon) \left(\frac{P_1}{4\pi} \right)^{-\epsilon-1} \alpha p_\mu \\
&= -p_\mu \frac{(1 + \mathcal{O}(\epsilon))}{4\pi} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha}{P} \\
&= p_\mu \frac{1}{8\pi p^2} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \left(\ln \frac{m_1^2}{m_2^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{p^2 + m_1^2 - m_2^2}{\sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}}{p^2 + m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \right)
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{((k+p)^2 + m_1^2) (k^2 + m_2^2) \left(k^2 + \frac{m_2^2}{\xi}\right)} \\
&= 2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{P'_2} \\
&= \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^3} \left(\frac{P_2}{4\pi}\right)^{-2-\epsilon} \left[\Gamma(2+\epsilon) \alpha_2^2 p_\mu p_\nu + \Gamma(1+\epsilon) P_2 \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} \right] \\
&= \frac{(1+\mathcal{O}(\epsilon))}{4\pi} \left[p_\mu p_\nu \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^2}{P_2^2} + \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{1}{P_2} \right] \\
&= p_\mu p_\nu \xi \frac{(1+\mathcal{O}(\epsilon))}{8\pi p^4 (\xi-1) m_2^2} \left[- (p^2 + m_1^2 - m_2^2) \ln \xi + \frac{1-\xi}{\xi} m_2^2 \ln \frac{\xi m_1^2}{m_2^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 2p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}{\sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + \frac{m_2^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}}{p^2 + m_1^2 + \frac{m_2^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 2p^2 m_2^2}{\sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}}{p^2 + m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \right] \\
&\quad - \delta_{\mu\nu} \xi \frac{(1+\mathcal{O}(\epsilon))}{16\pi p^2 (\xi-1) m_2^2} \left[- \ln \xi + \frac{1-\xi}{\xi} m_2^2 \ln \frac{\xi m_1^2}{m_2^2} \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}}{p^2 + m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + \frac{m_2^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}}{p^2 + m_1^2 + \frac{m_2^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}} \right]
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Zur Definition von P'_2 bzw. P_2 siehe (B.24) bzw. (B.25).

$$\begin{aligned}
& \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k^2}{((k+p)^2 + m_1^2)(k^2 + m_2^2)(k^2 + \frac{m_2^2}{\xi})} = \\
&= 2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k^2}{P_2^3} \\
&= -p_\mu \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^3} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \left(\frac{P_2}{4\pi}\right)^{-2-\epsilon} \left[\Gamma(2+\epsilon) \alpha_2^3 p^2 + (2-\epsilon)\Gamma(1+\epsilon) \alpha_2 P_2 \right] \\
&= -p_\mu \frac{(1 + \mathcal{O}(\epsilon))}{4\pi} \left[p^2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha^3}{P_2^2} + 2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2}{P_2} \right] \\
&= p_\mu \xi \frac{(1 + \mathcal{O}(\epsilon))}{8\pi p^2 (\xi - 1) m_2^2} \left[-m_2^2 \ln \xi + \frac{\xi - 1}{\xi} m_2^2 \ln \frac{\xi m_1^2}{m_2^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{m_2^2 (p^2 + m_1^2 - m_2^2)}{\sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}}{p^2 + m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_2^2 \left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)}{\xi \sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + \frac{m_2^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}}{p^2 + m_1^2 + \frac{m_2^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}} \right]
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^4 + 4k^2(pk) + 4(pk)^2}{\left(k^2 + m_2^2\right)\left(k^2 + \frac{m_2^2}{\xi}\right)\left((k+p)^2 + m_1^2\right)} = \\
&= 2 \left[\int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^4}{P_2'^3} + 4p_\mu \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k^2}{P_2'^3} \right. \\
&\quad \left. + 4p_\mu p_\nu \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{P_2'^3} \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \frac{3}{2} - 2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \ln \frac{P_2}{4\pi\mu^2} + 4p^2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^2}{P_2} + p^4 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^4}{P_2^2} \right. \\
&\quad \left. - 8p^2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2}{P_2} - 4p^4 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^3}{P_2^2} + 2p^2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{1}{P_2} + 4p^4 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^2}{P_2^2} \right] \\
&= \frac{\xi}{4\pi(1-\xi)} \left[\frac{1-\xi}{\xi} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma - \ln \frac{m_2^2}{4\pi\mu^2} \right) + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{m_1^2 + p^2}{m_2^2} \right) \ln \xi \right. \\
&\quad \left. + \frac{(p^2 + m_1^2)^2}{m_2^2 \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + m_2^2 + \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}}{p^2 + m_1^2 + m_2^2 - \sqrt{(p^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 + 4p^2 m_2^2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(p^2 + m_1^2)^2}{m_2^2 \sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + m_1^2 + \frac{m_2^2}{\xi} + \sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}}{p^2 + m_1^2 + \frac{m_2^2}{\xi} - \sqrt{\left(p^2 + m_1^2 - \frac{m_2^2}{\xi}\right)^2 + 4p^2 \frac{m_2^2}{\xi}}} + \mathcal{O}(\epsilon) \right]
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Beachte hierbei (B.14), (B.15) sowie (B.17).

$$\begin{aligned}
& \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^4}{((k+p)^2 + m_1^2)(k^2 + m_2^2)(k^2 + \frac{m_2^2}{\xi})} = \\
&= 2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^4}{P_2^3} \\
&= \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^3} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \left(\frac{P_2}{4\pi} \right)^{-2-\epsilon} \left[\left(2\Gamma(\epsilon) - 4\Gamma(1+\epsilon) + \Gamma(2+\epsilon) \right) P_2^2 + 4\Gamma(1+\epsilon) \alpha_2^2 p^2 P_2 \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(2+\epsilon) \alpha_2^4 p^4 \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \left[\frac{2}{\epsilon} - 2\gamma - 3 - 2 \ln \frac{P_2}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\
&\quad + \frac{\left(1 + \mathcal{O}(\epsilon) \right)}{4\pi} \left[4p^2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^2}{P_2} + p^4 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^4}{P_2^2} \right]
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Beachte (B.31).

$$\begin{aligned}
& \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{((k+p)^2 + m^2) \left(k^2 + m^2 \right) \left(k^2 + \frac{m^2}{\xi} \right)} = \\
&= 2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{\left[k^2 + 2\alpha_2 kp + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 \frac{\xi-1}{\xi} m^2 + \frac{m^2}{\xi} \right]^3} \\
&= \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^2} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \left(\frac{-\alpha_2^2 p^2 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 \frac{\xi-1}{\xi} m^2 + \frac{m^2}{\xi}}{4\pi} \right)^{-2-\epsilon} \left[\Gamma(2+\epsilon) \alpha_2^2 p^2 \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(1+\epsilon) \left(-\alpha_2^2 p^2 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 \frac{\xi-1}{\xi} m^2 + \frac{m^2}{\xi} \right) \right] \\
&= \frac{(1+\mathcal{O}(\epsilon))}{4\pi} \left[p^2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^2}{\left(-\alpha_2^2 p^2 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 \frac{\xi-1}{\xi} m^2 + \frac{m^2}{\xi} \right)^2} \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{1}{-\alpha_2^2 p^2 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 \frac{\xi-1}{\xi} m^2 + \frac{m^2}{\xi}} \right] \\
&= \xi \frac{(1+\mathcal{O}(\epsilon))}{4\pi(1-\xi)} \left[- \frac{1}{\sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}} \ln \frac{p^2 + 2m^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}}{p^2 + 2m^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\xi \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m^2 \right)^2 + 4p^2 m^2}} \ln \frac{p^2 + \frac{\xi+1}{\xi} m^2 + \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m^2 \right)^2 + 4p^2 m^2}}{p^2 + \frac{\xi+1}{\xi} m^2 - \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m^2 \right)^2 + 4p^2 m^2}} \right]
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
& \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2 + kp)^2}{\left((k+p)^2 + m^2\right) \left((k+p)^2 + \frac{m^2}{\xi}\right) \left(k^2 + m^2\right) \left(k^2 + \frac{m^2}{\xi}\right)} = \\
&= \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^4 + 2k^2(kp) + (kp)^2}{\left((k+p)^2 + m^2\right) \left((k+p)^2 + \frac{m^2}{\xi}\right) \left(k^2 + m^2\right) \left(k^2 + \frac{m^2}{\xi}\right)} \\
&= 6 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[\frac{k^4}{P'_3} + 2p_\mu \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k^2}{P'_3} + p_\mu p_\nu \mu^{2\epsilon} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{P'_3} \right] \\
&= \frac{\mu^{2\epsilon}}{(4\pi)^4} \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \left(\frac{P_3}{4\pi} \right)^{-3-\epsilon} \left[\frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(3-\epsilon)}{\Gamma(1-\epsilon)} P_3^2 + 2(2-\epsilon)\Gamma(2+\epsilon)\alpha_2^2 p^2 P_3 \right. \\
&\quad \left. + \Gamma(3+\epsilon)\alpha_2^4 p^4 - 2(2-\epsilon)\Gamma(2+\epsilon)\alpha_2 p^2 P_3 - 2\Gamma(3+\epsilon)\alpha_2^3 p^4 + \frac{1}{2}\Gamma(2+\epsilon)p^2 + \Gamma(3+\epsilon)\alpha_2^2 p^4 \right] \\
&= \frac{1}{4\pi} \left[2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{1}{P_3} + 4p^2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2^2}{P_3^2} \right. \\
&\quad + 2p^4 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2^4}{P_3^3} - 4p^2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2}{P_3^2} \\
&\quad - 4p^4 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2^3}{P_3^3} + \frac{1}{2}p^2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{1}{P_3^2} \\
&\quad \left. + 2p^4 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2^2}{P_3^3} \right] \\
&= \xi^2 \frac{\left(1 + \mathcal{O}(\epsilon)\right)}{4\pi(1-\xi)^2} \left[\frac{\xi-1}{2\xi m^2} \ln \xi + \frac{(p^2 + 2m^2)^2}{4m^4 \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}} \ln \frac{p^2 + 2m^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}}{p^2 + 2m^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2 m^2}} \right. \\
&\quad + \frac{\left(p^2 + 2\frac{m^2}{\xi}\right)^2}{4m^4 \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m^2}{\xi}}} \ln \frac{p^2 + 2\frac{m^2}{\xi} + \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m^2}{\xi}}}{p^2 + 2\frac{m^2}{\xi} - \sqrt{p^4 + 4p^2 \frac{m^2}{\xi}}} \\
&\quad \left. - \frac{\left(p^2 + \frac{1+\xi}{\xi} m^2\right)^2}{2m^4 \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m^2\right)^2 + 4p^2 m^2}} \ln \frac{p^2 + \frac{1+\xi}{\xi} m^2 + \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m^2\right)^2 + 4p^2 m^2}}{p^2 + \frac{1+\xi}{\xi} m^2 - \sqrt{\left(p^2 + \frac{1-\xi}{\xi} m^2\right)^2 + 4p^2 m^2}} \right]
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Zur Definition von P'_3 bzw. P_3 s. (B.26) bzw. (B.27)

Polynome:

$$P'_1 = k^2 + 2\alpha kp + \alpha(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_2^2 \quad (\text{B.20})$$

$$P_1 = -\alpha^2 p^2 + \alpha(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_2^2 \quad (\text{B.21})$$

$$Q' = k^2 + 2\alpha kp + \alpha p^2 + m^2 \quad (\text{B.22})$$

$$Q = -\alpha^2 p^2 + \alpha p^2 + m^2 \quad (\text{B.23})$$

$$P'_2 = k^2 + \alpha_2 kp + \alpha_2(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + \alpha_1 \frac{\xi - 1}{\xi} m_2^2 + \frac{1}{\xi} m_2^2 \quad (\text{B.24})$$

$$P_2 = -\alpha_2^2 p^2 + \alpha_2(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + \alpha_1 \frac{\xi - 1}{\xi} m_2^2 + \frac{1}{\xi} m_2^2 \quad (\text{B.25})$$

$$P'_3 = k^2 + 2\alpha_2 kp + \alpha_3 \frac{1 - \xi}{\xi} m^2 + \alpha_2 \left(p^2 + \frac{\xi - 1}{\xi} m^2 \right) + \alpha_1 \frac{1 - \xi}{\xi} m^2 + m^2 \quad (\text{B.26})$$

$$P_3 = -\alpha_2^2 p^2 + \alpha_2 \left(p^2 + \frac{\xi - 1}{\xi} m^2 \right) + \alpha_3 \frac{1 - \xi}{\xi} m^2 + \alpha_1 \frac{1 - \xi}{\xi} m^2 + m^2 \quad (\text{B.27})$$

nützliche Formeln:

$$D \Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) = 2 \left(\Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) - \Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) \right) \quad (\text{B.28})$$

$$D \Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) = 2 \left(2\Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) - \Gamma \left(3 - \frac{D}{2} \right) \right) \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\Gamma \left(-\frac{D}{2} \right) \Gamma \left(2 + \frac{D}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{D}{2} \right)} = \Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) - 2\Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) \quad (\text{B.30})$$

$$\frac{\Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) \Gamma \left(2 + \frac{D}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{D}{2} \right)} = 2\Gamma \left(1 - \frac{D}{2} \right) - 4\Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) + \Gamma \left(3 - \frac{D}{2} \right) \quad (\text{B.31})$$

Anhang C

Einige Integrale

Die in diesem Abschnitt aufgeführten Integrale wurden mit Hilfe von Integraltafeln (s. [5]) berechnet. In den Abschnitten C.2 und C.3 konnten die Ausdrücke durch Differentiation aus jeweils dem ersten Integral bestimmt werden (siehe dort). Diese Differentiation wurde mit Hilfe des Computeralgebra-Programms „MATHEMATICA“ (Version 4.1, Wolfram Research) durchgeführt. Dieses Programm wurde ebenfalls dazu benutzt, die hier aufgelisteten Ausdrücke numerisch bzw., wo es möglich war, analytisch zu überprüfen.

C.1 Integrale mit einer Integrationsvariablen

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\alpha \ln[a\alpha^2 + b\alpha + c] &= \\ = -2 + \ln[a+b+c] + \frac{b}{2a} \ln \frac{a+b+c}{c} - \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac} \ln \frac{b+2c+\sqrt{b^2-4ac}}{b+2c-\sqrt{b^2-4ac}} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$\int_0^1 d\alpha \frac{1}{a\alpha^2 + b\alpha + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \frac{b+2c+\sqrt{b^2-4ac}}{b+2c-\sqrt{b^2-4ac}} \quad (\text{C.2})$$

$$\int_0^1 d\alpha \frac{\alpha}{a\alpha^2 + b\alpha + c} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+b+c}{c} - \frac{b}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \frac{b+2c+\sqrt{b^2-4ac}}{b+2c-\sqrt{b^2-4ac}} \quad (\text{C.3})$$

$$\int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^2}{a\alpha^2 + b\alpha + c} = \frac{1}{a} - \frac{b}{2a^2} \ln \frac{a+b+c}{c} + \frac{b^2 - 2ac}{2a^2\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \frac{b+2c+\sqrt{b^2-4ac}}{b+2c-\sqrt{b^2-4ac}} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\alpha \alpha \ln \frac{m^2 + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2}{4\pi\mu^2} &= \\ = \frac{1}{2} \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} - 1 + \frac{\sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}}{4p^2} \ln \frac{p^2 + 2m^2 + \sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}}{p^2 + 2m^2 - \sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}} & \quad (C.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\alpha \alpha^2 \ln \frac{m^2 + \alpha p^2 - \alpha^2 p^2}{4\pi\mu^2} &= \\ = \frac{1}{3} \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} - \frac{2m^2}{3p^2} - \frac{13}{18} + \frac{(p^2 + m^2)\sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}}{6p^4} \ln \frac{p^2 + 2m^2 + \sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}}{p^2 + 2m^2 - \sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}} & \quad (C.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^3}{-\alpha^2 p^2 + \alpha p + m^2} &= \\ = -\frac{3}{2p^2} + \frac{p^2 + 3m^2}{2p^2 \sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}} \ln \frac{p^2 + 2m^2 + \sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}}{p^2 + 2m^2 - \sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}} & \quad (C.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^4}{-\alpha^2 p^2 + \alpha p + m^2} &= \\ = -\frac{11}{6p^2} - \frac{m^2}{p^4} + \frac{p^4 + 4m^2 p^2 + 2m^4}{2p^4 \sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}} \ln \frac{p^2 + 2m^2 + \sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}}{p^2 + 2m^2 - \sqrt{p^4 + 4m^2 p^2}} & \quad (C.8) \end{aligned}$$

$$\int_0^1 d\alpha \ln \frac{\alpha(m_1^2 - m_2^2) + m_2^2}{4\pi\mu^2} = -1 + \ln \frac{m_2^2}{4\pi\mu^2} + \frac{m_1^2}{m_1^2 - m_2^2} \ln \frac{m_1^2}{m_2^2} \quad (C.9)$$

C.2 Integrale mit zwei Integrationsvariablen

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \ln[a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d] = \\
&= \frac{1}{12a^2c} \left\{ -18a^2c - 2ac(2b+c) + 6a^2c \ln[a+b+c+d] + 6abc \ln \left[\frac{a+b+c+d}{c+d} \right] \right. \\
&\quad + c((b+c)^2 - 6ad + bc + 2b^2) \ln \left[\frac{a+b+c+d}{d} \right] + b(6ad - b^2) \ln \left[\frac{d}{c+d} \right] \\
&\quad - (b^2 - 4a(c+d))^{\frac{3}{2}} \ln \left[\frac{-b - 2(c+d) + \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}}{-b - 2(c+d) - \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \right] \\
&\quad \left. + ((b+c)^2 - 4ad)^{\frac{3}{2}} \ln \left[\frac{-b - c - 2d + \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}}{-b - c - 2d - \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}} \right] \right\} \tag{C.10}
\end{aligned}$$

$a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d > 0$ für: $\alpha_1 \in [0, 1], \alpha_2 \in [0, \alpha_1]$

Die nachfolgenden Integrale konnten durch partielles Differenzieren des vorstehenden Ausdrückes nach den entsprechenden Konstanten mit Hilfe eines Computeralgebra-Programms¹ bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{1}{a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d} = \\
&= \frac{b}{2ac} \ln \left[\frac{d}{c+d} \right] - \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{a+b+c+d}{d} \right] \\
&\quad - \frac{\sqrt{b^2 - 4a(c+d)}}{2ac} \ln \left[\frac{b + 2(c+d) + \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}}{b + 2(c+d) - \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \right] \\
&\quad + \frac{\sqrt{(b+c)^2 - 4ad}}{2ac} \ln \left[\frac{b + c + 2d + \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}}{b + c + 2d - \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}} \right] \tag{C.11}
\end{aligned}$$

¹MATHEMATICA 4.1 von Wolfram Research

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2}{a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d} = \\
&= \frac{1}{4a^2c} \left\{ -2ac - (b^2 - 2a(c+d)) \ln \left[\frac{d}{c+d} \right] + c(2(a+b)+c) \ln \left[\frac{a+b+c+d}{d} \right] \right. \\
&\quad -(b+c)\sqrt{(b+c)^2 - 4ad} \ln \left[\frac{b+c+2d+\sqrt{(b+c)^2 - 4ad}}{b+c+2d-\sqrt{(b+c)^2 - 4ad}} \right] \\
&\quad \left. + b\sqrt{b^2 - 4a(c+d)} \ln \left[\frac{b+2(c+d)+\sqrt{b^2 - 4a(c+d)}}{b+2(c+d)-\sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \right] \right\} \tag{C.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2}{(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d)^2} = \\
&= \frac{1}{2ac} \ln \frac{c+d}{d} - \frac{b+c}{2ac\sqrt{(b+c)^2 - 4ad}} \ln \frac{b+c+2d+\sqrt{(b+c)^2 - 4ad}}{b+c+2d-\sqrt{(b+c)^2 - 4ad}} \\
&\quad + \frac{b}{2ac\sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \ln \frac{b+2(c+d)+\sqrt{b^2 - 4a(c+d)}}{b+2(c+d)-\sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \tag{C.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^2}{a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d} = \\
&= \frac{1}{6a^3c} \left\{ ac(3a+4b+2c) + (b^3 - 3ab(c+d)) \ln \left[\frac{d}{c+d} \right] \right. \\
&\quad - c(3b^2 + 3bc + c^2 + 3a(b-d)) \ln \left[\frac{a+b+c+d}{d} \right] \\
&\quad + ((b+c)^2 - ad) \sqrt{(b+c)^2 - 4ad} \ln \left[\frac{b+c+2d+\sqrt{(b+c)^2 - 4ad}}{b+c+2d-\sqrt{(b+c)^2 - 4ad}} \right] \\
&\quad \left. - (b^2 - a(c+d)) \sqrt{b^2 - 4a(c+d)} \ln \left[\frac{b+2(c+d)+\sqrt{b^2 - 4a(c+d)}}{b+2(c+d)-\sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \right] \right\} \tag{C.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^2}{(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d)^2} = \\
&= \frac{1}{2a^2c} \left\{ b \ln \left[\frac{d}{c+d} \right] - c \ln \left[\frac{a+b+c+d}{d} \right] \right. \\
&\quad + \frac{(b+c)^2 - 2ad}{\sqrt{(b+c)^2 - 4ad}} \ln \left[\frac{b+c+2d + \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}}{b+c+2d - \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}} \right] \\
&\quad \left. - \frac{b^2 - 2a(c+d)}{\sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \ln \left[\frac{b+2(c+d) + \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}}{b+2(c+d) - \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \right] \right\} \\
\end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^3}{(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d)^2} = \\
&= \frac{1}{2a^3c} \left\{ -2ac - (b^2 - a(c+d)) \ln \left[\frac{d}{c+d} \right] + c(a+2b+c) \ln \left[\frac{a+b+c+d}{d} \right] \right. \\
&\quad - (b+c) \frac{(b+c)^2 - 3ad}{\sqrt{(b+c)^2 - 4ad}} \ln \left[\frac{b+c+2d + \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}}{b+c+2d - \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \right] \\
&\quad \left. + b \frac{b^2 - 3a(c+d)}{\sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \ln \left[\frac{b+2(c+d) + \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}}{b+2(c+d) - \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \right] \right\} \\
\end{aligned} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \frac{\alpha_2^4}{(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d)^2} = \\
&= \frac{1}{2a^4c} \left\{ ac(a+4b+2c) + b(b^2 - 2a(c+d)) \ln \left[\frac{d}{c+d} \right] \right. \\
&\quad - c(3b^2 + 3bc + c^2 + 2a(b-d)) \ln \left[\frac{a+b+c+d}{d} \right] \\
&\quad + \frac{(b+c)^4 - 4ad(b+c)^2 + 2a^2d^2}{\sqrt{(b+c)^2 - 4ad}} \ln \left[\frac{b+c+2d + \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}}{b+c+2d - \sqrt{(b+c)^2 - 4ad}} \right] \\
&\quad \left. - \frac{b^4 - 4ab^2(c+d) + 2a^2(c+d)^2}{\sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \ln \left[\frac{b+2(c+d) + \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}}{b+2(c+d) - \sqrt{b^2 - 4a(c+d)}} \right] \right\} \\
\end{aligned} \tag{C.17}$$

C.3 Integrale mit drei Integrationsvariablen

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{1}{a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d\alpha_3 + e} = \\
&= \frac{1}{12a^2 cd} \left\{ -4acd + d(6ae - d^2 - 3bd - 3b^2) \ln \left[\frac{e}{c+e} \right] + 3cd(2b+c+d) \ln \left[\frac{a+b+c+d+e}{e} \right] \right. \\
&\quad + c(2b^2 + 6a(a+b-e) + bc + (b+c)^2) \ln \left[\frac{a+b+c+d+e}{a+b+c+e} \right] + 6acd \ln \left[\frac{a+b+c+d+e}{c+e} \right] \\
&\quad + ((b+c)^2 - 4ae)^{\frac{3}{2}} \ln \left[\frac{b+c+2e + \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}}{b+c+2e - \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad - ((b+c+d)^2 - 4ae)^{\frac{3}{2}} \ln \left[\frac{b+c+d+2e + \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}}{b+c+d+2e - \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad - (b^2 - 4a(c+e))^{\frac{3}{2}} \ln \left[\frac{b+2(c+e) + \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}}{b+2(c+e) - \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}} \right] \\
&\quad \left. + ((b+d)^2 - 4a(c+e))^{\frac{3}{2}} \ln \left[\frac{b+d+2(c+e) + \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}}{b+d+2(c+e) - \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}} \right] \right\} \tag{C.18}
\end{aligned}$$

$a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d\alpha_3 + e > 0$ für: $\alpha_1 \in [0, 1], \alpha_2 \in [0, \alpha_1], \alpha_3 \in [0, \alpha_2]$

Die nun folgenden Integrale wurden wiederum (s.o.) durch partielle Differentiation mit Hilfe eines Computeralgebra-Programms bestimmt.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{1}{(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d\alpha_3 + e)^2} = \\
&= \frac{1}{2acd} \left\{ d \ln \left[\frac{c+e}{e} \right] + c \ln \left[\frac{a+b+c+d+e}{a+b+c+e} \right] \right. \\
&\quad + \sqrt{(b+c)^2 - 4ae} \ln \left[\frac{b+c+2e + \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}}{b+c+2e - \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad - \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae} \ln \left[\frac{b+c+d+2e + \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}}{b+c+d+2e - \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad - \sqrt{b^2 - 4a(c+e)} \ln \left[\frac{b+2(c+e) + \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}}{b+2(c+e) - \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}} \right] \\
&\quad \left. + \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)} \ln \left[\frac{b+d+2(c+e) + \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}}{b+d+2(c+e) - \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}} \right] \right\} \tag{C.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2}{(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d\alpha_3 + e)^2} = \\
&= \frac{1}{4a^2cd} \left\{ d(2b+d) \ln \left[\frac{e}{c+e} \right] + c(2a+2b+c) \ln \left[\frac{a+b+c+e}{a+b+c+d+e} \right] + 2cd \ln \left[\frac{e}{a+b+c+d+e} \right] \right. \\
&\quad - (b+c) \sqrt{(b+c)^2 - 4ae} \ln \left[\frac{b+c+2e + \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}}{b+c+2e - \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad + (b+c+d) \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae} \ln \left[\frac{b+c+d+2e + \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}}{b+c+d+2e - \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad + b \sqrt{b^2 - 4a(c+e)} \ln \left[\frac{b+2(c+e) + \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}}{b+2(c+e) - \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}} \right] \\
&\quad \left. - (b+d) \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)} \ln \left[\frac{b+d+2(c+e) + \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}}{b+d+2(c+e) - \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}} \right] \right\} \tag{C.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2^2}{(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d\alpha_3 + e)^2} = \\
&= -\frac{1}{6a^3cd} \left\{ 4acd + d(3b^2 + 3bd + d^2 - 3ae) \ln \left[\frac{e}{c+e} \right] + 3acd \ln \left[\frac{c+e}{a+b+c+d+e} \right] \right. \\
&\quad + d(3c^2 + 6bc + 3cd) \ln \left[\frac{e}{a+b+c+d+e} \right] + c(3b^2 + 3bc + c^2 + 3a(b-e)) \ln \left[\frac{a+b+c+e}{a+b+c+d+e} \right] \\
&\quad - ((b+c)^2 - ae) \sqrt{(b+c)^2 - 4ae} \ln \left[\frac{b+c+2e + \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}}{b+c+2e - \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad + ((b+c+d)^2 - ae) \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae} \ln \left[\frac{b+c+d+2e + \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}}{b+c+d+2e - \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad + (b^2 - a(c+e)) \sqrt{b^2 - 4a(c+e)} \ln \left[\frac{b+2(c+e) + \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}}{b+2(c+e) - \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}} \right] \\
&\quad \left. - ((b+d)^2 - a(c+e)) \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)} \ln \left[\frac{b+d+2(c+e) + \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}}{b+d+2(c+e) - \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}} \right] \right\} \tag{C.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2^2}{(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d\alpha_3 + e)^3} = \\
&= \frac{1}{4a^2 cd} \left\{ d \ln \left[\frac{c+e}{e} \right] + c \ln \left[\frac{a+b+c+d+e}{a+b+c+e} \right] \right. \\
&\quad + \frac{(b+c)^2 - 2ae}{\sqrt{(b+c)^2 - 4ae}} \ln \left[\frac{b+c+2e + \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}}{b+c+2e - \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad - \frac{(b+c+d)^2 - 2ae}{\sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}} \ln \left[\frac{b+c+d+2e + \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}}{b+c+d+2e - \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad - \frac{b^2 - 2a(c+e)}{\sqrt{b^2 - 4a(c+e)}} \ln \left[\frac{b+2(c+e) + \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}}{b+2(c+e) - \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}} \right] \\
&\quad \left. + \frac{(b+d)^2 - 2a(c+e)}{\sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}} \ln \left[\frac{b+d+2(c+e) + \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}}{b+d+2(c+e) - \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}} \right] \right\} \\
& \tag{C.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2^3}{(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d\alpha_3 + e)^3} = \\
&= \frac{1}{4a^3 cd} \left\{ c(a+2b+c) \ln \left[\frac{a+b+c+e}{a+b+c+d+e} \right] + d(2b+d) \ln \left[\frac{e}{c+e} \right] + 2cd \ln \left[\frac{e}{a+b+c+d+e} \right] \right. \\
&\quad - (b+c) \frac{(b+c)^2 - 3ae}{\sqrt{(b+c)^2 - 4ae}} \ln \left[\frac{b+c+2e + \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}}{b+c+2e - \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad + (b+c+d) \frac{(b+c+d)^2 - 3ae}{\sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}} \ln \left[\frac{b+c+d+2e + \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}}{b+c+d+2e - \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}} \right] \\
&\quad + b \frac{b^2 - 3a(c+e)}{\sqrt{b^2 - 4a(c+e)}} \ln \left[\frac{b+2(c+e) + \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}}{b+2(c+e) - \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}} \right] \\
&\quad \left. - (b+d) \frac{(b+d)^2 - 3a(c+e)}{\sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}} \ln \left[\frac{b+d+2(c+e) + \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}}{b+d+2(c+e) - \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}} \right] \right\} \\
& \tag{C.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^{\alpha_1} d\alpha_2 \int_0^{\alpha_2} d\alpha_3 \frac{\alpha_2^4}{(a\alpha_2^2 + b\alpha_2 + c\alpha_1 + d\alpha_3 + e)^3} = \\
&= -\frac{1}{4a^4cd} \left\{ 4acd + d(3b^2 + 3bd + d^2 - 2ae) \ln \left[\frac{e}{c+e} \right] + 3cd(2b + c + d) \ln \left[\frac{e}{a+b+c+d+e} \right] \right. \\
&+ 2acd \ln \left[\frac{c+e}{a+b+c+d+e} \right] + (2abc + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 - 2ace) \ln \left[\frac{a+b+c+e}{a+b+c+d+e} \right] \\
&- \frac{2a^2e^2 + (b+c)^2((b+c)^2 - 4ae)}{\sqrt{(b+c)^2 - 4ae}} \ln \left[\frac{b+c+2e + \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}}{b+c+2e - \sqrt{(b+c)^2 - 4ae}} \right] \\
&+ \frac{2a^2e^2 + (b+c+d)^2((b+c+d)^2 - 4ae)}{\sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}} \ln \left[\frac{b+c+d+2e + \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}}{b+c+d+2e - \sqrt{(b+c+d)^2 - 4ae}} \right] \\
&+ \frac{2a^2(c+e)^2 + b^2(b^2 - 4a(c+e))}{\sqrt{b^2 - 4a(c+e)}} \ln \left[\frac{b+2(c+e) + \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}}{b+2(c+e) - \sqrt{b^2 - 4a(c+e)}} \right] \\
&\left. - \frac{2a^2(c+e)^2 + (b+d)^2((b+d)^2 - 4a(c+e))}{\sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}} \ln \left[\frac{b+d+2(c+e) + \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}}{b+d+2(c+e) - \sqrt{(b+d)^2 - 4a(c+e)}} \right] \right\} \tag{C.24}
\end{aligned}$$

Anhang D

Verschiedenes

D.1 Grassmann-Zahlen

In diesem Abschnitt soll die bei der Durchführung der R_ξ -Eichung nützliche Formel

$$\det M = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c e^{-\int d^2x \bar{c}(x) M c(x)}, \quad (\text{D.1})$$

wobei c und \bar{c} grassmannwertige, komplexe Felder sind, bewiesen werden (vgl. hierzu [25] und [35]).

Grassmannzahlen sind antikommutierende Zahlen, d.h. es gilt für θ_1, θ_2 Grassmannzahlen: $\theta_1 \theta_2 = -\theta_2 \theta_1$. Insbesondere muß also gelten $\theta^2 = 0$. Hieraus folgt, daß die Entwicklung einer von grassmannwertigen Zahlen abhängigen Funktion bereits nach dem linearen Term abbricht:

$$f(\theta) = A + B\theta. \quad (\text{D.2})$$

Unter einem Integral über eine Grassmannzahl soll nun stets ein unbestimmtes Integral verstanden werden, also $\int d\theta \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\theta$. An das Integral $\int d\theta f(\theta)$ werden nun folgende Forderungen gestellt:

- mit der obigen Entwicklung von $f(\theta)$ gelte eine lineare Abhängigkeit von A, B ,
- Invarianz unter der Transformation $\theta \rightarrow \theta + \eta$.

Die (bis auf einen konstanten Faktor, der hier zu 1 gewählt wurde) einzige hiermit konsistente Definition lautet:

$$\int d\theta f(\theta) = \int d\theta (A + B\theta) = B \quad (\text{D.3})$$

bzw. äquivalent:

$$\int d\theta 1 = 0, \quad \int d\theta \theta = 1. \quad (\text{D.4})$$

Per Konvention wird festgelegt, daß bei mehreren Integrationen zunächst die innere ausgeführt wird. Komplexe Grassmannzahlen lassen sich aus zwei reellen aufbauen: $\theta = \theta_1 + i\theta_2, \theta^* = \theta_1 - i\theta_2$. Hiermit folgt für zwei komplexe Grassmannzahlen:

$$(\eta\theta)^* = \theta^*\eta^* = -\eta^*\theta^* = -(\theta\eta)^*. \quad (\text{D.5})$$

Bei der Integration über komplexe Grassmannzahlen können nun θ und θ^* als unabhängig voneinander angesehen werden. Man berechnet nun zunächst das Integral

$$\int d\theta^* d\theta \exp(-\theta^* b\theta) = \int d\theta^* d\theta (1 - \theta^* b\theta) = b. \quad (\text{D.6})$$

Allgemein lässt sich nun auch ein n-dimensionaler Vektor θ von (komplexen) Grassmannzahlen $\theta_1, \dots, \theta_n$ betrachten. Für eine Funktion $f(\theta)$ gilt nun wiederum

$$\int d^n\theta f(\theta) = f_n, \quad (\text{D.7})$$

wobei f_n gerade der Faktor des Termes in der Entwicklung von $f(\theta)$ ist, in der jede Variable genau einmal vorkommt:

$$f(\theta) = f_0 + \sum_i f_1^i \theta_i + \dots + f_n \theta_n \dots \theta_1. \quad (\text{D.8})$$

Unterzieht man den Vektor nun einer linearen Transformation mittels einer $n \times n$ -Matrix A :

$$\theta'_i = A_{ij} \theta_j \quad (\text{D.9})$$

und bezeichnet die Jacobiente dieser Transformation als J , so folgt

$$\int d^n\theta f(A\theta) = \int J d^n\theta' f(\theta'). \quad (\text{D.10})$$

Nun betrachtet man wiederum den letzten Term in der Entwicklung von $f(A\theta)$:

$$\begin{aligned} f_n \theta'_n \dots \theta'_1 &= f_n \left((A_{nn}\theta_n + \dots + A_{n1}\theta_1) \cdot \dots \cdot (A_{1n}\theta_n + \dots + A_{11}\theta_1) \right) \\ &= f_n \sum_{i_n \dots i_1} (A_{ni_n} \dots A_{ni_1}) \epsilon_{i_n \dots i_1} \theta_n \dots \theta_1 \\ &= f_n \det A \theta_n \dots \theta_1. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Also folgt durch Vergleich mit (D.10):

$$J = \det A \text{ also: } d^n\theta = \det A d^n(A\theta). \quad (\text{D.12})$$

Hieraus folgt nun sofort:

$$\int d^n\eta d^n\theta e^{-\eta^T A\theta} = \det A, \quad (\text{D.13})$$

indem man die Transformation $\theta' = A\theta$ betrachtet und (D.6) mit $b = 1$ benutzt. In Verallgemeinerung auf komplexe Grassmannfelder ergibt sich nun die anfangs gesuchte Formel (D.1).

D.2 Analytische Fortsetzung

Hier gebe ich die in der vorliegenden Arbeit benutzten analytischen Fortsetzungen an (zum Thema „analytische Fortsetzung“ s. z. Bsp. [5] oder [13]).

Für $M_1, M_2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(p^2 + M_1^2 - M_2^2)^2 + 4p^2 M_2^2}} \ln \frac{p^2 + M_1^2 + M_2^2 + \sqrt{(p^2 + M_1^2 - M_2^2)^2 + 4p^2 M_2^2}}{p^2 + M_1^2 + M_2^2 - \sqrt{(p^2 + M_1^2 - M_2^2)^2 + 4p^2 M_2^2}} = \\ &= \begin{cases} \frac{2 \operatorname{artanh} \frac{\sqrt{(p^2 + M_1^2 - M_2^2)^2 + 4p^2 M_2^2}}{p^2 + M_1^2 + M_2^2}}{\sqrt{(p^2 + M_1^2 - M_2^2)^2 + 4p^2 M_2^2}} & , p^2 > -(M_1 - M_2)^2 \\ \frac{2 \arctan \frac{\sqrt{|(p^2 + M_1^2 - M_2^2)^2 + 4p^2 M_2^2|}}{p^2 + M_1^2 + M_2^2}}{\sqrt{|(p^2 + M_1^2 - M_2^2)^2 + 4p^2 M_2^2|}} & , -(M_1^2 + M_2^2) \leq p^2 \leq -(M_1 - M_2)^2 \\ \frac{2 \left(\pi + \arctan \frac{\sqrt{|(p^2 + M_1^2 - M_2^2)^2 + 4p^2 M_2^2|}}{p^2 + M_1^2 + M_2^2} \right)}{\sqrt{|(p^2 + M_1^2 - M_2^2)^2 + 4p^2 M_2^2|}} & , -(M_1 + M_2)^2 \leq p^2 \leq -(M_1^2 + M_2^2) \end{cases} \quad (D.14) \end{aligned}$$

Die weitere Fortsetzung ist nicht mehr rein reell.

Sowie speziell für $M = M_1 = M_2$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{p^4 + 4p^2 M^2}} \ln \frac{p^2 + 2M^2 + \sqrt{p^4 + 4p^2 M^2}}{p^2 + 2M^2 - \sqrt{p^4 + 4p^2 M^2}} = \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{p^4 + 4p^2 M^2}} \operatorname{artanh} \frac{\sqrt{p^4 + 4p^2 M^2}}{p^2 + 2M^2} & , p^2 > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{|p^4 + 4p^2 M^2|}} \arctan \frac{\sqrt{|p^4 + 4p^2 M^2|}}{p^2 + 2M^2} & , -2M^2 \leq p^2 \leq 0 \\ \frac{2}{\sqrt{|p^4 + 4p^2 M^2|}} \left(\pi + \arctan \frac{\sqrt{|p^4 + 4p^2 M^2|}}{p^2 + 2M^2} \right) & , -4M^2 \leq p^2 < -2M^2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{p^4 + 4p^2 M^2}} \operatorname{arcoth} \sqrt{1 + 4 \frac{M^2}{p^2}} & , p^2 > 0 \\ \frac{4}{\sqrt{|p^4 + 4p^2 M^2|}} \operatorname{arccot} \sqrt{|1 + 4 \frac{M^2}{p^2}|} & , -4M^2 \leq p^2 \leq 0 \end{cases} \quad (D.15) \end{aligned}$$

Die Fortsetzung zu Werten $p^2 < -4M^2$ ist nicht mehr rein reell.

Literaturverzeichnis

- [1] E.S. Abers, B.W. Lee, *Gauge Theories*, Physics Reports **C9** (1973) 1
- [2] I.J.R. Aitchison, C.M. Fraser, *Gauge Invariance and the Effective Potential*, Annals of Physics **156** (1984) 1
- [3] T. Appelquist et al., *Renormalization and Gauge Independence in Spontaneously Broken Gauge Theories*, Physical Review **D 8** (1973) 1747
- [4] L. Baulieu, *Perturbative Gauge Theories*, Physics Reports **129** (1985) 1
- [5] I.N. Bronstein, E. Zeidler (Hrsg.), *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, Teubner (1996)
- [6] T.P. Cheng, L.F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford University Press (1984)
- [7] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press (1985, Reprint 1995)
- [8] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press (1984, Reprint 1985)
- [9] H. Dilger, J. Heitger, *Scaling in the two-dimensional U(1)-Higgs-Model*, Nuclear Physics Proceedings Supplement **53** (1997) 587
- [10] L. Dolan, R. Jackiw, *Gauge-Invariant Signal for Gauge-Symmetry Breaking*, Physical Review **D9** (1974) 2904
- [11] J.F. Donoghue, E. Golowich, B.R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press (1992, Reprint 1996)
- [12] R.P. Feynman, *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics*, Physical Review **76** (1949) 769
- [13] W. Fischer, I. Lieb, *Funktionentheorie*, Vieweg (1994)
- [14] Z. Fodor, A. Hebecker, *Finite Temperature Effective Potential to Order g^4, λ^2 and the Electroweak Phase Transition*, Nuclear Physics **B432** (1994) 127
- [15] R. Fukuda, T. Kugo, *Gauge Invariance in the Effective Action and Potential*, Physical Review **D13** (1976) 3469

- [16] R. Häußling, E. Kraus, *Gauge Parameter Dependence and Gauge Invariance in the Abelian Higgs Model*, Zeitschrift für Physik **C75** (1997) 739
- [17] A. Hebecker, *Finite Temperature Effective Potential for the Abelian Higgs Model to the Order e^4, λ^2* , Zeitschrift für Physik **C60** (1993) 271
- [18] J. Heitger, *Numerical Simulations of Gauge-Higgs Models on the Lattice*, Dissertation, Universität Münster (1997)
- [19] G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nuclear Physics **B44** (1972) 189
- [20] G. 't Hooft, M. Veltman, *Scalar One-Loop Integrals*, Nuclear Physics **B153** (1979) 365
- [21] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980)
- [22] R. Jackiw, *Functional Evaluation of the Effective Potential*, Physical Review **D9** (1974) 1686
- [23] H. Kluberg-Stern, J.B. Zuber, *Renormalization of Non-Abelian Gauge Theories in a Background-Field Gauge. I Green's Functions*, Physical Review **D 12** (1975) 482
- [24] T. Kugo, I. Ojima, *Local Covariant Operator Formalism of Nonabelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem*, Supplement of the Progress of Theoretical Physics **66** (1979) 1; Errata: Progress of Theoretical Physics **71** (1984) 1121
- [25] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer (1997)
- [26] B.W. Lee, *Renormalizable Massive Vector-Meson Theory - Perturbation Theory of the Higgs Phenomenon*, Physical Review **D5** (1972) 823
- [27] B. W. Lee, J. Zinn-Justin, *Spontaneously Broken Gauge Symmetries I. Preliminaries*, Physical Review **D5** (1972) 3121
- [28] B. W. Lee, J. Zinn-Justin, *Spontaneously Broken Gauge Symmetries II. Perturbation Theory and Renormalization*, Physical Review **D5** (1972) 3137
- [29] B. W. Lee, J. Zinn-Justin, *Spontaneously Broken Gauge Symmetries III. Equivalence*, Physical Review **D5** (1972) 3155
- [30] B. W. Lee, J. Zinn-Justin, *Spontaneously Broken Gauge Symmetries IV. General Gauge Formulation*, Physical Review **D7** (1973) 1049
- [31] B.W. Lee, *Gauge Theories* in R. Balian, J. Zinn-Justin (Hrsg.), *Methods in Field Theory, Les Houches Session XXVIII, 1975*, North Holland (1976)
- [32] G. Leibbrandt, *Introduction to the Technique of Dimensional Regularization*, Reviews of Modern Physics **47** (1975) 849

- [33] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press (1994, Reprint 1997)
- [34] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific (1987)
- [35] M.E. Peskin, D.V. Schröder, *Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books (1995)
- [36] J. Przeszowski, *Structure of the 1-Loop Divergencies in the Unitary Gauge*, Il Nuovo Cimento **100 A** (1988) 25
- [37] D. Ross, *Renormalization of a Spontaneous Symmetry-Breaking Model in the Unitary Gauge*, Nuclear Physics **B** **59** (1973) 23
- [38] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd ed., Cambridge University Press (1996, Reprint 1998)
- [39] H. Sonoda, *Off-Shell Renormalization of the Abelian Higgs Model in the Unitary Gauge*, hep-th/0108217 bzw. KOBE-TH-01-05 (2001)
- [40] J.C. Taylor, *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge University Press (1976, Reprint 1978)
- [41] M. Vargas, J.L. Lucio M., *One Loop Renormalization of the Abelian Higgs Model* in J.L. Lucio, A. Zepeda (Hrsg.), *IV. Mexican School of Particles and Fields, Oaxtepec 1990*, World Scientific (1992)
- [42] M. Veltman, *Diagrammatica*, Cambridge University Press (1994, Reprint 1995)
- [43] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. 1 - Foundations*, Cambridge University Press (1995, Reprint 1999)
- [44] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. 2 - Modern Applications*, Cambridge University Press (1996, Reprint 2000)
- [45] K.A. Woodhouse, *Renormalizability of the Unitary Gauge*, Il Nuovo Cimento **23 A** (1974) 459

Weitere Hilfsmittel

- Einige Rechnungen wurden mit Hilfe des Computeralgebra-Programmes „MATHEMATICA“, Version 4.1 von Wolfram Research durchgeführt (s. Anmerkungen im Text) bzw. überprüft (nicht extra vermerkt). Auch wurden mit diesem Programm einige Graphiken erstellt.
- Diese Arbeit wurde mit $\text{\LaTeX}2\varepsilon$ erstellt, die Feynman-Graphen mit dem Zusatz-Paket „feynMF“ von Thorsten Ohl, erhältlich z.Bsp. über www.dante.de.
- Zum Nachbearbeiten einiger Graphiken wurde das Programm „xfig V 3.2“ benutzt.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich nun denen, die zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen haben, meinen Dank aussprechen:

- Herrn Prof. Dr. Gernot Münster für die interessante Aufgabenstellung sowie seine stete Bereitschaft, mich bei der Anfertigung dieser Arbeit durch zahlreiche Hinweise und Erklärungen zu unterstützen,
- Herrn Prof. Dr. Manfred Stingl, der bei speziellen Fragestellungen hilfreiche Aspekte beigesteuert hat,
- meinen „Bürokollegen“ Kevin Johnson, Björn Schwentker und Sönke Wissel für allgemeine und spezielle Diskussionen, Ablenkungen, Fragen und Antworten,
- allen Mitgliedern der Arbeitsgruppen Münster und Stingl sowie den übrigen Institutsangehörigen für die lockere Arbeitsatmosphäre,
- noch einmal Björn Schwentker speziell für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Ebenfalls danke ich Katja für manche Aufmunterung sowie meinen lieben Eltern, Fentke und Gerhard Scholz, die mich während meines Studiums stets unterstützt haben.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im Januar 2002

