

Chirale Störungstheorie für
Quantenchromodynamik auf dem Gitter
mit axial gedrehter Massenmatrix

als Diplomarbeit vorgelegt von
Christian Schmidt

Januar 2004

Institut für Theoretische Physik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

In der hier vorliegenden Version wurden neben Rechtschreibkorrekturen einige Flüchtigkeitsfehler verbessert. Unter anderem hatte sich ein Vorzeichenfehler in der Formel für die Pion-Feldverschiebung auf Seite 48 eingeschlichen, der nun korrigiert wurde.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung und Überblick	5
2. Grundlagen der Quantenchromodynamik	7
2.1. Die Lagrangedichte der QCD	7
2.2. Euklidische Formulierung	8
2.3. Chirale Symmetrie	10
3. Chirale Störungstheorie	13
3.1. Motivation	13
3.2. Goldstonebosonen	15
3.3. Spontane Symmetriebrechung in der QCD	18
3.4. Die effektive Lagrangedichte der χ PT	20
3.5. Das Weinberg'sche Powercounting	24
4. Gitter-QCD	27
4.1. Das Dopplerproblem	27
4.2. Wilson-Fermionen	30
4.3. Die Symanzik-Wirkung	31
4.4. Chirale Störungstheorie für die Gitter-QCD	33
5. Axial gedrehter Massenterm	37
5.1. Auswirkung auf die effektive Lagrangedichte der χ PT	37
5.2. Pionmassen in niedrigster Ordnung	40
5.3. Entwicklung nach Potenzen von a	42
6. Berechnung der Pionmassen in Ordnung p^4	45
6.1. Treelevel-Terme: Entwicklung von \mathcal{L}_4	45
6.2. Schleifenrechnung aus \mathcal{L}_2	49
6.3. Ergebnis für die Pionmassen	52
7. Berechnung der Pion-Zerfallskonstanten	55
7.1. Rechnung in erster Ordnung	55
7.2. Rechnung in nächster Ordnung: Treelevel-Terme	56
7.3. F_π in nächster Ordnung: Schleifenanteil	58
7.4. Ergebnis für die Zerfallskonstante	60

8. Mesonenmassen im partiell gequenchten Modell	63
8.1. Einleitung	63
8.2. Berechnung der Valenzmesonenmassen in führender Ordnung	65
8.3. Treelevel-Terme aus \mathcal{L}_4	69
8.4. Schleifenrechnung	72
9. Zusammenfassung und Ausblick	77
A. Anhang	79
Literaturverzeichnis	82

1. Einleitung und Überblick

Nach heutigem Wissen sind die vier fundamentalen Kräfte der Natur die Gravitation, die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung.

Die Gravitation wird durch die Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben und in dieser auf die Geometrie der Raumzeit zurückgeführt. Im Gegensatz dazu findet die Beschreibung der anderen drei Kräfte mit Hilfe von Quantenfeldtheorien statt, die aus der Verbindung der Quantenmechanik mit der Speziellen Relativitätstheorie entstanden sind. Diese Arbeit befasst sich (fast) ausschliesslich mit der starken Wechselwirkung und der Quantenchromodynamik (QCD), mit deren Hilfe sie beschrieben wird.

Die grundlegenden Freiheitsgrade der QCD sind die Quarks und die Eichbosonen der QCD, die Gluonen. Alle in der Natur beobachteten Hadronen, die die Bausteine der bekannten Materie darstellen, werden als gebundene Zustände dieser Elementarteilchen aufgefasst. Insgesamt wurden bisher sechs verschiedene Quark-Flavours (d.h. Sorten) unterschiedlicher Masse gefunden, von denen aber nur zwei direkt am Aufbau der alltäglichen Welt beteiligt sind. Diese beiden Flavours werden gemäß ihrer elektrischen Ladung als *up* ($Q_u = +2/3 e$) und *down* ($Q_d = -1/3 e$) bezeichnet.

Baryonen sind gebundene Zustände von Quarks und Gluonen, die drei Valenzquarks enthalten. Die wichtigsten Baryonen sind die Nukleonen, also Protonen (uud) und Neutronen (udd). Außerdem gibt es eine Vielzahl schwererer Teilchen, die auch die anderen Quarkflavours enthalten können.

Durch Kombination eines Quarks mit einem Antiquark erhält man die Mesonen. Beschränkt man sich auf die beiden leichtesten Flavours, so nennt man die resultierenden Teilchen π -Mesonen oder kurz Pionen. Sie vermitteln die aus der QCD resultierende, anziehende Kraft zwischen den Nukleonen.

Im Rahmen der chiralen Störungstheorie werden die Pionen als Goldstonebosonen der spontan gebrochenen chiralen Symmetrie der QCD interpretiert. Aus diesem Grund werden im zweiten Kapitel zunächst die grundlegenden Symmetrien der Quantenchromodynamik beschrieben.

Die Entstehung von Goldstonebosonen wird im dritten Kapitel ausführlich allgemein begründet, bevor der in der QCD vorliegende Fall genauer untersucht wird. Mit Hilfe der Goldstonebosonen wird anschließend die chirale Störungstheorie als effektive Feldtheorie der QCD für niedrige Energien eingeführt.

Um aus einem solchen Modell der starken Wechselwirkung messbare Vorhersagen zu treffen, müssen Computersimulationen der grundlegenden Quark- und Gluonenfelder durchgeführt wer-

1. Einleitung und Überblick

den. Dazu wird das Raumzeit-Kontinuum durch ein diskretes 3+1 dimensionales Gitter ersetzt. Im vierten Kapitel wird daher beschrieben, auf welche Weise der Übergang zur Gittertheorie durchgeführt wird. Probleme treten insbesondere für die fermionischen Quarkfelder auf; beschrieben wird eine Lösungsmethode und ihre Konsequenzen im Rahmen der chiralen Störungstheorie.

Eine mögliche Methode, die Konvergenz von Gitterrechnungen zu verbessern, ist die Einführung eines chiral gedrehten Massenterms. Im fünften Kapitel wird untersucht, welche Konsequenzen daraus in führender Ordnung der chiralen Störungstheorie für die Pionenmassen folgen. Zu diesem Zweck wird ein möglichst einfaches Modell mit zwei massenentarteten Quarkfeldern betrachtet. Die im fünften Kapitel entwickelte Näherungsmethode wird anschließend im sechsten und siebten Kapitel verwendet, um die Pionenmassen und die Pionenzzerfallskonstante in nächstfolgender Ordnung zu berechnen. Um den Zerfallsprozess eines Pions zu beschreiben, wird im siebten Kapitel kurz auf einen Aspekt der schwachen Wechselwirkung eingegangen.

Um Gittersimulationen trotz der begrenzten Rechner-Ressourcen realistischer zu machen, wurde die Methode der partiellen Dämpfung („partially quenching“) von Fermionen entwickelt. Im achten Kapitel wird untersucht, auf welche Weise sich die Ergebnisse aus dem fünften und sechsten Kapitel durch diese neue Vorgehensweise ändern.

Im neunten Kapitel wird schließlich eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse und ein Ausblick auf weitere mögliche Forschungen gegeben.

2. Grundlagen der Quantenchromodynamik

2.1. Die Lagrangedichte der QCD

Die Eichgruppe SU(3)

Während die Quantenelektrodynamik (QED) eine U(1) Eichsymmetrie besitzt, liegt der QCD eine SU(3)-Eichsymmetrie zugrunde, die als *Colour*-SU(3) bezeichnet wird. Das bedeutet, dass einem (fermionischen) Quark-Feld drei Dirac-Spinoren

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_r(x) \\ \psi_g(x) \\ \psi_b(x) \end{pmatrix}$$

zugeordnet werden. Die einzelnen Anteile werden als „rot“, „grün“ und „blau“ bezeichnet, woher der Name Quantenchromodynamik (griechisch: *chromos*=Farbe) stammt. Außerdem wird gefordert, dass die Lagrangedichte der QCD invariant gegenüber lokalen SU(3) Rotationen

$$\psi(x) \rightarrow \exp\left(i\alpha^i(x)\frac{\lambda_i}{2}\right)\psi(x)$$

in diesem internen „Farbraum“ sein soll. Die Rotationen werden hier durch die acht *Gell-Mann*-Matrizen λ_i parametrisiert. Die Symmetrie-Forderung führt zur kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^i \frac{\lambda_i}{2}.$$

Die acht Eichfelder $A_i(x)$ werden als „Gluonen“ bezeichnet.

Eichbosonen

Die Gluonen tragen nun ihrerseits ebenfalls zur Lagrangedichte bei, der entsprechende Term ist

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(F_{\mu\nu}^i \frac{\lambda_i}{2} \right)^2 \right] = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^i)^2$$

mit dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + gf^{ijk} A_\mu^j A_\nu^k. \quad (2.1)$$

2. Grundlagen der Quantenchromodynamik

Die Strukturkonstanten f^{ijk} der Gruppe $SU(3)$ werden dabei durch die Liealgebra

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right] = if^{ijk}\frac{\lambda_k}{2}$$

definiert. Wie man erkennt, führt die nicht-abelsche Natur der Gruppe $SU(3)$ auf diese Weise zu kubischen und quartischen Wechselwirkungstermen im Eichanteil.

Yang-Mills-Lagrangedichte

Durch Einsetzen der kovarianten Ableitung in die Dirac-Lagrangedichte und Addition des Eichanteils erhält man schließlich

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^i)^2. \quad (2.2)$$

Der Dirac-adjungierte Spinor ist dabei wie gewohnt durch

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$$

definiert. Die Lagrangedichte in Gleichung 2.2 beschreibt die Wechselwirkung eines Fermionfeldes mit den Eichfeldern. Um die vollständige QCD-Lagrangedichte zu erhalten, muss daher noch über alle sechs Quarkflavours summiert werden. Das Ergebnis ist

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)\psi_f - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^i)^2.$$

Mit ψ ist nun also insgesamt ein $4 \times 3 \times 6 = 72$ -komponentiges Feld gemeint. Wie man sieht, ist die Stärke der Wechselwirkung zwischen den Quarks und Gluonen unabhängig von den Quarkflavours. Diese allgemein für nicht-abelsche Eichtheorien gültige Eigenschaft stammt daher, dass die Kopplungskonstante g durch die Definition der Feldstärke in Gl. 2.1 bereits eindeutig festgelegt ist.

2.2. Euklidische Formulierung

Wick-Rotation

Bisher wurden alle Gleichungen im Minkowski-Raum formuliert, also in der Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie mit der Metrik

$$g_{\mu\nu}^M = \text{diag}(1, -1, -1, -1).$$

Alternativ lassen sich die Gleichungen auch mit der (vierdimensionalen) euklidischen Metrik

$$g_{\mu\nu}^E = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$$

formulieren. Dazu muss jedoch die analytische Fortsetzung der Observablen auf imaginäre Zeiten betrachtet werden. Die alte Zeitvariable $x_0 = t$ wird dazu durch

$$x_4 = ix_0 = ict$$

ersetzt. Dieses Vorgehen ist äquivalent zu einer Wick-Rotation um 90° . Das invariante Raumzeit-Intervall der speziellen Relativitätstheorie wird dadurch zu

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = - \sum_{\mu=1}^4 (x^\mu)^2.$$

Die gleiche Fortsetzung wird analog bei allen Zeit-Komponenten von Vierervektoren durchgeführt.

Beispiel: ϕ^4 -Theorie

Als Nächstes soll untersucht werden, wie die Lagrangedichte an diese veränderte Formulierung angepasst werden kann. Zur Vereinfachung wird dazu zunächst nicht die Lagrangedichte der QCD, sondern die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}^M = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4$$

der ϕ^4 -Theorie betrachtet. Das (minkowskische) Erzeugende Funktional dieser Theorie ist

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right) \right].$$

Die oben beschriebene Ersetzung führt zu

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int d^4x_E \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu^E \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi \right) \right]$$

Um das Erzeugende Funktional auf die Form

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int d^4x_E (\mathcal{L}_E - J\phi) \right]. \quad (2.3)$$

zu bringen, definiert man die euklidische ϕ^4 -Lagrangedichte

$$\mathcal{L}^E = \frac{1}{2}(\partial_\mu^E \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4.$$

Aus diesem Beispiel kann man die folgende Regel ablesen:

Regel 1: Um von einer minkowskischen zur entsprechenden euklidischen (nicht-fermionischen) Lagrangedichte zu gelangen, ändert man das Vorzeichen und fügt anschließend für jedes Skalarprodukt zusätzlich einen Faktor (-1) ein.

Die euklidische QCD-Lagrangedichte

Für den Fall, dass Spinorfelder beteiligt sind, ist diese Regel jedoch noch nicht vollständig richtig. An Stelle der “normalen” Antikommutatoren für die Diracmatrizen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

muss nämlich jetzt entsprechend der neuen Metrik

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

gefordert werden. Eine Wahl, die diese Bedingung erfüllt, ist

$$\gamma_4^E = -\gamma^0, \quad \gamma_i^E = i\gamma^i.$$

Damit erhält man für die Kontraktion der kovarianten Ableitung

$$i\gamma^\mu D_\mu = -\gamma_\mu^E D_\mu^E.$$

Die euklidische QCD-Lagrangedichte ist damit

$$\mathcal{L}_{QCD}^E = \bar{\psi}_f(\gamma_\mu^E D_\mu^E + m)\psi_f + \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^{i,E})^2. \quad (2.4)$$

In dieser Arbeit wird für die weiteren QCD-Rechnungen die euklidische Formulierung benutzt. Der Grund für diese Wahl ist die Anwendbarkeit bei numerischen Gitterrechnungen. Diese werden durch Mittelung über eine große Zahl zufällig erzeugter Feldkonfigurationen durchgeführt. Der negative Exponentialfaktor (siehe z.B. Gl. 2.3) sorgt dann dafür, dass Feldkonfigurationen mit großem Wirkungsintegral exponentiell unterdrückt werden und ermöglicht so die Konvergenz der Rechnung.

2.3. Chirale Symmetrie

Chiraler Grenzfall

Vergleicht man die Massen der beiden leichtesten Quark-Flavours (z.B. nach [1] $m_u = 1.5 - 4.5$ MeV, $m_d = 5 - 8.5$ MeV) mit der Protonenmasse ($m_p = 938$ MeV), so fällt auf, dass der direkte Beitrag der Quarkmassen zu m_p äußerst gering ist. Das Strange-Quark besitzt eine Masse von $m_s = 80 - 150$ MeV, ist also etwa eine Größenordnung leichter als die typische Hadronenmassen.

Es ist daher sinnvoll, die Einschränkung der QCD auf die N_f (i.A. 2 oder 3) leichtesten Flavours im chiralen Grenzfall verschwindender Quarkmassen zu betrachten. Die Lagrangedichte aus Gl. 2.4 wird zu

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \bar{\psi}\gamma_\mu D_\mu\psi + \frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^i)^2.$$

Der Flavor-Index (der jetzt von 1 bis N_f läuft) wird zur Vereinfachung der Notation hier und im weiteren Verlauf nicht mehr explizit ausgeschrieben. Das Superskript E wird nur noch in Einzelfällen notiert, um Unklarheiten zu vermeiden.

Chirale Eigenzustände

Definiert werden nun die beiden Operatoren

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \quad \text{und} \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$$

mit den Projektoreigenschaften

$$P_R + P_L = 1, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0.$$

Mit Hilfe dieser chiralen Projektoren können die Quark-Wellenfunktionen in zwei Anteile zerlegt werden, wobei

$$\psi_R = P_R \psi \quad \text{und} \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L$$

als rechtshändig,

$$\psi_L = P_L \psi \quad \text{und} \quad \bar{\psi}_L = \bar{\psi} P_R$$

dagegen als linkshändig bezeichnet werden. Die Begründung für diese Bezeichnung ist, dass diese chiralen Anteile für freie, masselose Teilchen den Helizitäts-Eigenzuständen entsprechen. Diese beschreiben den Spin (also die „Drehrichtung“) relativ zum Impulsvektor.

Mit Hilfe der Relationen

$$P_R \gamma_\mu = \gamma_\mu P_L \quad \text{und} \quad P_L \gamma_\mu = \gamma_\mu P_R$$

lässt sich die Lagrangedichte im chiralen Grenzfall als

$$\mathcal{L}_{QCD}^0 = \bar{\psi}_R \gamma_\mu D_\mu \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma_\mu D_\mu \psi_L + \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^i)^2 \quad (2.5)$$

schreiben. Die rechts- und linkshändigen Anteile der Lagrangedichte sind nun also entkoppelt und wechselwirken nur noch durch die Eichbosonen. Die Lagrangedichte in Gl. 2.5 ist daher invariant bezüglich der Transformationen

$$\begin{aligned} \psi_L &\rightarrow L \psi_L, & \bar{\psi}_L &\rightarrow \bar{\psi}_L L^\dagger \\ \psi_R &\rightarrow R \psi_R, & \bar{\psi}_R &\rightarrow \bar{\psi}_R R^\dagger, \end{aligned} \quad (2.6)$$

wobei L und R beliebige unitäre Matrizen im Flavour-Raum bezeichnen.

3. Chirale Störungstheorie

3.1. Motivation

Aus verschiedenen Gründen ist es äußerst schwierig, mit Hilfe der Quantenchromodynamik experimentell überprüfbare Aussagen herzuleiten. Im Vergleich mit der Quantenelektrodynamik werden diese Probleme besonders deutlich:

Zum einen ist die Kopplungskonstante der QCD (bei verschwindendem Impulsübertrag) von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$, während sie in der QED etwa $1/137$ beträgt. Deswegen ist die Anwendung der gewohnten Störungstheorie auf QCD-Prozesse im Energiebereich typischer Hadronenmassen nicht möglich.

Zum anderen hat die QCD eine nicht-abelsche Natur, die aus der zugrundeliegenden $SU(3)$ -Farbsymmetrie resultiert. Dadurch treten in der QCD-Lagrangedichte Wechselwirkungsterme zwischen den Eichbosonen (s.o.) auf, die zu Nichtlinearitäten führen. Das Ergebnis ist, dass die resultierende Kraft zwischen zwei Farbladungen nicht wie in der QED mit dem Abstand abnimmt, sondern konstant bleibt. In der Natur treten deshalb keine freien Farbladungen auf. Dieses Phänomen wird als „Confinement“ bezeichnet.

Um trotz dieser Schwierigkeiten mit Hilfe der QCD Vorhersagen zu treffen, wurde unter anderem die chirale Störungstheorie („*chiral perturbation theory*“, χ PT) entwickelt. Die Grundlage der χ PT ist die spontane Brechung der chiralen Symmetrie. Unter Berücksichtigung dieses Mechanismus gelangt man zu einer effektiven Feldtheorie für niedrige Energien, die es erlaubt, Beziehungen zwischen physikalisch messbaren Größen herzuleiten. Dieses sind z.B. Mesonenmassen, Streulängen oder Zerfallskonstanten.

Die relevanten Freiheitsgrade der χ PT sind die Pseudo-Goldstonebosonen. Beschränkt man sich auf die zwei leichtesten Quark-Flavours, so sind diese identisch mit den drei π -Mesonen. Wird das Strange-Quark mit betrachtet, so kommen noch die vier K -Mesonen und das η hinzu.

Das Schicksal der chiralen Symmetriegruppe

Aufgrund der Entkopplung der beiden chiralen Anteile ist die Lagrangedichte aus Gl. 2.5 im Flavour-Raum invariant bezüglich der globalen Symmetriegruppe $U(3)_R \times U(3)_L$ (für $N_f = 3$). Im Folgenden wird es sich als sinnvoll erweisen, diese Symmetrie nach

$$U(3)_R \times U(3)_L = SU(3)_R \times SU(3)_L \times U(1)_R \times U(1)_L$$

3. Chirale Störungstheorie

zu zerlegen.

Ein Element dieser Symmetriegruppe kann durch

$$\psi_R = \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \rightarrow U_R \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} = \exp\left(i\theta_R^a \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{i\theta_R} \psi_R$$

und

$$\psi_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \rightarrow U_L \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = \exp\left(i\theta_L^a \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{i\theta_L} \psi_L$$

parametrisiert werden. Als erstes werden die beiden $U(1)$ -Anteile betrachtet.

Für eine allgemeine $U(1)_R \times U(1)_L$ -Transformation mit θ_R und θ_L gilt

$$\psi = \psi_R + \psi_L \rightarrow e^{i\theta_R} \psi_R + e^{i\theta_L} \psi_L = e^{i(\theta_S + \theta_P)} \psi_R + e^{i(\theta_S - \theta_P)} \psi_L$$

mit den Parametern

$$\theta_S = \frac{1}{2}(\theta_R + \theta_L) \quad \text{und} \quad \theta_P = \frac{1}{2}(\theta_R - \theta_L).$$

Der skalare Anteil

$$\psi \rightarrow e^{i\theta_S} \psi$$

ist eine globale Symmetrie der Quantentheorie und entspricht der globalen Baryonenzahlerhaltung. Er wird hier nicht weiter betrachtet.

Der pseudoskalare (axiale) Anteil

$$\psi \rightarrow e^{i\theta_P \gamma_5} \psi$$

dagegen entspricht zwar einer Symmetrie der klassischen Lagrangedichte aus Gl. 2.5, wird jedoch in der Quantentheorie durch eine Anomalie gebrochen, wie zuerst von Adler, Bell und Jackiw beschrieben wurde [3], [4]. Eine etwas anschaulichere Erklärung im Pfadintegral-Formalismus ist, dass zwar die Lagrangedichte, jedoch nicht das Maß des Pfadintegrals gegenüber axialen $U(1)$ -Transformationen invariant ist [5].

Zu betrachten bleibt noch der $SU(3)_R \times SU(3)_L$ -Anteil, welcher oft als chirale Symmetriegruppe der QCD im eigentlichen Sinn bezeichnet wird. Diese soll nun näher untersucht werden. Nach dem Noether-Theorem erhält man für jeden Generator dieser Symmetriegruppe einen erhaltenen Strom. Dies sind die acht rechtshändigen Ströme

$$R_a^\mu = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \psi_R$$

und die acht linkshändigen Ströme

$$L_a^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \psi_L.$$

Durch Linearkombination erhält man daraus die Vektorströme

$$V_a^\mu = R_a^\mu + L_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \psi$$

mit positiver Parität sowie die Axialvektorströme

$$A_a^\mu = R_a^\mu - L_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} \psi$$

mit negativer Parität. Durch Volumen-Integration über die 0-Komponenten erhält man aus diesen schließlich die Ladungsoperatoren

$$Q_V^a = \int dV V_a^0 \quad \text{und} \quad Q_A^a = \int dV A_a^0$$

Die so berechneten Ladungen sind Erhaltungsgrößen, für sie gilt also

$$[H, Q_V^a] = [H, Q_A^a] = 0. \quad (3.1)$$

Für den Fall, dass die chirale Symmetrie ungebrochen ist, würde man erwarten, dass sich die Hadronen (als QCD-Eigenzustände) in Multipletts der Gruppe $SU(3) \times SU(3)$ anordnen. Insbesondere wäre zu erwarten, dass es zu jedem Eigenzustand $|\phi\rangle$ mit der Energie E_ϕ einen entarteten Eigenzustand $Q_A^a |\phi\rangle$ mit entgegengesetzter Parität gibt. Dies folgt direkt aus der Erhaltung der Ladungsoperatoren:

$$H(Q_A^a |\phi\rangle) = Q_A^a H |\phi\rangle = Q_A^a E_\phi |\phi\rangle = E_\phi(Q_A^a |\phi\rangle). \quad (3.2)$$

Dieses Verhalten wird jedoch nicht in der Natur beobachtet, die Hadronen ordnen sich statt dessen in Multipletts der Gruppe $SU(3)$ an. Die nichtverschwindenden realen Quarkmassen können diesen Symmetriebruch nicht erklären, da durch sie nur die Massenentartung innerhalb der Multipletts aufgehoben wird. Die Schlussfolgerung aus diesem Widerspruch muss deshalb sein, dass die chirale $SU(3) \times SU(3)$ -Symmetrie in der Natur spontan gebrochen ist. In diesem Fall gilt Gl. 3.2 nicht mehr, da der Grundzustand nicht invariant gegenüber den Symmetrietransformationen ist.

3.2. Goldstonebosonen

Beispiel: $SO(3) \rightarrow SO(2)$

Spontane Symmetriebrechung ist nicht nur aus der Quantenfeldtheorie bekannt. Ein häufiges (d.h. oft zitiertes) Beispiel ist die Ausrichtung der Elementarmagnete in einem Ferromagneten: Obwohl die grundlegende Theorie rotationssymmetrisch ist, bildet sich dennoch ein Grundzustand mit makroskopischer Feldrichtung aus. Dieser Phasenübergang kann konkret bei Unterschreitung der Curie-Temperatur beobachtet werden.

Ein anderes Beispiel nach S. Weinberg ist ein gewöhnlicher Stuhl, der im Raum eine klar definierte Richtung besitzt, obwohl die grundlegenden quantenmechanischen Gleichungen rotationssymmetrisch sind [9].

Bevor der QCD-Fall diskutiert wird, soll der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung zunächst an einem vereinfachten Beispiel verdeutlicht werden. Betrachtet wird dazu ein dreikomponentiges, hermitesches Feld ϕ_i mit der (minkowskischen) Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i) - \frac{1}{2}m^2(\phi_i \phi_i) - \frac{\lambda}{4}(\phi_i \phi_i)^2$$

3. Chirale Störungstheorie

für die $m^2 < 0$ und $\lambda > 0$ gilt. Diese Lagrangedichte ist invariant gegenüber $SO(3)$ -Transformationen der ϕ -Felder. Das Minimum des Potentials wird erreicht, wenn das Feld räumlich konstant ist und überall den Betrag

$$|\phi| = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2} = v = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \quad (3.3)$$

annimmt. Durch Gl. 3.3 werden unendlich viele Zustände niedrigster Energie beschrieben, die sich nur durch die Richtung des ϕ -Vektors im internen Symmetrieraum unterscheiden.

Das Vakuum ist keine Überlagerung dieser unendlich vielen Zustände. Statt dessen wird eine **spontane Symmetriebrechung** gefordert: Durch kleine Störungen der Symmetrie wird eine bestimmte Richtung des ϕ -Vektors ausgewählt. Diese Richtung wird, der üblichen Konvention folgend, mit der 3-Richtung identifiziert. Der Vakuumzustand ist dann

$$\vec{\phi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Die Felder werden nun relativ zu diesem Vakuumzustand neu definiert. Für die ϕ_1 und ϕ_2 -Anteile ändert sich dadurch nichts, der ϕ_3 Anteil wird dagegen durch das Differenzfeld

$$\eta = \phi_3 - v$$

ersetzt. Mit dieser neuen Variablen wird die ursprüngliche Lagrangedichte zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_k \partial^\mu \phi_k) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta \partial^\mu \eta) + \frac{1}{2}(-2m^2)\eta^2 + \lambda v \eta(\phi_k^2 + \eta^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_k^2 + \eta^2)^2 - \frac{\lambda}{4}v^4,$$

wobei der Index k jetzt nur noch von 1 bis 2 läuft. Diese Lagrangedichte enthält keine linearen Anteile in den Feldern, wie für ein Extremum zu erwarten ist. Ausserdem gibt es keine Massenterme für ϕ_1 und ϕ_2 , während das η -Feld die Masse

$$m_\eta = \sqrt{-2m^2}$$

erhält. Die beiden masselosen Teilchen sind die **Goldstonebosonen** der gebrochenen $SO(3)$ -Symmetrie. Dieses Phänomen, das allgemein bei spontaner Symmetriebrechung auftritt, wurde erstmals von Nambu [6] und Goldstone [7] beschrieben.

Verallgemeinerung auf beliebige Symmetriegruppen

Das vorangehende Beispiel soll nun verallgemeinert werden. Betrachtet wird dazu eine klassische Feldtheorie, deren Lagrangedichte $\mathcal{L}[\phi]$ invariant gegenüber globalen Transformationen aus der Symmetriegruppe G sei. Der Grundzustand ϕ_0 des Systems sei dagegen nur invariant unter einer Untergruppe H von G . Die Elemente der Symmetriegruppe seien im Darstellungsraum der Felder durch die Matrizen U repräsentiert. Insgesamt gilt also

$$\mathcal{L}[U(g)\phi] = \mathcal{L}[\phi] \quad \forall \quad g \in G$$

und

$$U(h)\phi_0 = \phi_0 \quad \forall \quad h \in H \subset G$$

Im obigen Beispiel ist $G=SO(3)$ und $H=SO(2)$, da der Vakuumzustand aus Gl. 3.4 invariant gegenüber Drehungen um die 3-Achse ist.

Das Potenzial der Feldtheorie wird nun um das Minimum entwickelt, d.h. man betrachtet den Wert des Potenzials an der Stelle

$$\phi = \phi_0 + \delta\phi.$$

Wie oben erwähnt verschwinden alle linearen Terme, so dass man bis zur zweiten Ordnung in den Feldern

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_j \partial \phi_k} \right)_{\phi=\phi_0} (\delta\phi_j)(\delta\phi_k) + \dots$$

erhält. Die (positiv semidefinite) Massenmatrix ist damit

$$M_{jk} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_j \partial \phi_k} \right)_{\phi=\phi_0}.$$

Als nächstes wird die Wirkung einer Gruppentransformation auf das Potenzial betrachtet. Man erhält wieder bis zur zweiten Ordnung

$$V(U(g)\phi_0) = V(\phi_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_j \partial \phi_k} \right)_{\phi=\phi_0} (\delta\phi_j)(\delta\phi_k) + \dots,$$

wobei die $\delta\phi$ -Terme jetzt aus der infinitesimalen Gruppentransformation stammen. Da $g \in G$ eine Symmetrie der Lagrangedichte sein soll, muss der quadratische Term (sowie alle höheren Terme) verschwinden, d.h. es muss gelten

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_j \partial \phi_k} \right)_{\phi=\phi_0} (\delta\phi_j)(\delta\phi_k) = M_{jk} (\delta\phi_j)(\delta\phi_k) = 0. \quad (3.5)$$

Die Matrix-Darstellung der Elemente g von G sei

$$U(g) = \exp(iT_i \alpha_i)$$

mit den Generatoren T_i . Die Generatoren, für die

$$T_i \phi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \exp(iT_i \alpha_i) \phi_0 = \phi_0$$

gilt, gehören zur Darstellung von H . Für diese ist

$$\delta\phi = iT_i \delta\alpha_i \phi_0 = 0.$$

Gl. 3.5 ist damit automatisch erfüllt, und über die Massen kann keine Aussage getroffen werden. Die Anzahl dieser Teilchen entspricht der Ordnung der Liegruppe H .

Für die Generatoren der Darstellung von G , die den Grundzustand nicht „vernichten“, gilt dagegen

$$\delta\phi = iT_i \delta\alpha_i \phi_0 \neq 0.$$

3. Chirale Störungstheorie

Aus Gl. 3.5 folgt, dass die Massen dieser Felder verschwinden müssen.

Die Anzahl der masselosen Goldstonebosonen ist damit

$$N_B = \mathcal{O}(G) - \mathcal{O}(H)$$

Aus quantenmechanischer Sicht bilden die Ladungsoperatoren der Noetherströme die Darstellung der Liegruppen G und H im Hilbertraum der Zustandsvektoren. Die Verallgemeinerung des vorherigen Abschnitts ist daher, dass die Ladungsoperatoren der gebrochenen Symmetrie $Q^{(H)}$ den Grundzustand $|0\rangle$ nicht vernichten. Die Schlussfolgerungen über Existenz und Anzahl der Goldstonebosonen ändern sich nicht. Eine genauere Analyse des quantenmechanischen Falls ist z.B. in [2] oder [8] zu finden.

3.3. Spontane Symmetriebrechung in der QCD

Goldstonebosonen

Wie bereits oben erwähnt wurde, ist die chirale $SU(3) \times SU(3)$ -Symmetrie in der Natur spontan gebrochen. Die dabei auftretenden Goldstonebosonen und ihre mathematische Beschreibung im Rahmen der chiralen Störungstheorie sollen nun genauer untersucht werden. Man geht dazu von folgender Vermutung aus:

Die in der Natur vorhandene $SU(3)$ -Symmetrie wird mit dem vektorialen Anteil der chiralen Symmetrie identifiziert, während die gebrochene Symmetrie dem axialen Anteil entspricht.

Das bedeutet, dass nach Gl. 3.1 weiterhin alle Ladungen mit dem Hamiltonoperator vertauschen, der Grundzustand (das "Vakuum") aber nur von den Vektorladungen Q_V^a vernichtet wird:

$$Q_V^a |0\rangle = 0, \quad Q_A^a |0\rangle \neq 0.$$

Aus dieser Vermutung kann man zwei wichtige Folgerungen ableiten:

1. Die Anzahl der Goldstonebosonen entspricht der Anzahl der axialen Ladungsoperatoren. Für $N_f = 2$ gibt es also drei, für $N_f = 3$ dagegen acht Goldstonebosonen.
2. Die Goldstonebosonen besitzen negative Parität, da sie mit axialen Operatoren verknüpft sind.

Die Teilchen in dem von Pionen (π^+, π^-, π^0), Kaonen ($K^+, \bar{K}^-, K^0, \bar{K}^0$) und dem Eta-Meson (η) gebildeten Oktett kommen in der richtigen Anzahl vor. Sie besitzen ausserdem die richtigen Paritätseigenwerte sowie eine vergleichsweise geringe Masse. Diese Übereinstimmung spricht für die Richtigkeit der Vermutung.

Matrix der Goldstoneboson-Variablen

Die chirale Symmetriegruppe der QCD Lagrangedichte im chiralen Grenzfall ist die Gruppe $G = \text{SU}(3) \times \text{SU}(3)$. Ein Element g dieser Gruppe kann als Paar von zwei $\text{SU}(3)$ -Matrizen geschrieben werden:

$$g = (L, R), \quad L, R \in \text{SU}(3).$$

Die Elemente der vektoriiellen Symmetriegruppe des Vakuums $H = \text{SU}(3)$ entsprechen den Diagonalelementen von G , d.h.

$$h \in H \quad \Rightarrow \quad h = (V, V), \quad V \in \text{SU}(3).$$

Betrachtet wird nun wieder ein beliebiges Element von G . Dieses lässt sich umformen zu

$$g = (L, R) = (LR^\dagger R, R) = (LR^\dagger, \mathbf{1})(R, R) = (U, \mathbf{1})h, \quad h \in H.$$

Durch die $\text{SU}(3)$ -Matrix $U = LR^\dagger$ wird also eine Linksnebenklasse gH der Gruppe G definiert. Die Matrix U enthält alle Informationen über die Feldkonfiguration der Goldstonebosonen. Auf den mathematischen Beweis der Isomorphie von Linksnebenklassen und Goldstonebosonen-Variablen wird hier verzichtet, er ist z.B. in [2] nachzulesen.

Statt dessen soll als Nächstes das Transformationsverhalten der Matrix U unter chiralen Transformationen untersucht werden. Dazu wird ein Gruppenelement $\tilde{g} = (\tilde{L}, \tilde{R})$ auf g angewendet. Das Ergebnis ist

$$\tilde{g}g = (\tilde{L}, \tilde{R})(U, \mathbf{1})h = (\tilde{L}U, \tilde{R})h = (\tilde{L}U\tilde{R}^\dagger, \mathbf{1})(\tilde{R}, \tilde{R})h = (\tilde{L}U\tilde{R}^\dagger, \mathbf{1})\tilde{h}.$$

Sowohl h als auch \tilde{h} bezeichnen dabei Elemente von H . Hieraus lässt sich das wichtige Ergebnis

$$\boxed{U \rightarrow LUR^\dagger} \quad (3.6)$$

ablesen, welches das Transformationsverhalten der so definierten Goldstonebosonen-Matrix unter chiralen Transformationen angibt.

Eine mögliche Parametrisierung der Matrix U durch die Goldstonebosonen-Felder ist

$$U(x) = \exp\left(\frac{i}{F_0} \Phi\right) = \exp\left(\frac{i}{F_0} 2T_i \phi_i\right), \quad (3.7)$$

wobei T_i die Generatoren der Gruppe $\text{SU}(N_f)$ bezeichnet. Betrachtet man drei Quarkflavours, so können die Gell-Mann-Matrizen als $\lambda_i/2 = T_i$ gewählt werden und man erhält

$$\Phi = \lambda_i \phi_i = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \eta \end{pmatrix}.$$

Beschränkt man sich auf zwei Quarkflavours, so wählt man statt dessen die Pauli-Matrizen mit $\tau_i/2 = T_i$. Die Goldstonebosonen-Matrix U ist dann

$$\Phi = \tau_i \phi_i = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}.$$

3. Chirale Störungstheorie

In beiden Fällen entsprechen die kartesischen Feldkomponenten ϕ_i i.A. nicht den in der Natur beobachteten Ladungs-Eigenzuständen, sondern einer Linearkombination aus diesen. Im $SU(2)$ -Fall ist z.B.

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi^+ + \pi^-), \quad \phi_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\pi^+ - \pi^-), \quad \phi_3 = \pi^0.$$

Die Transformationseigenschaft der Goldstonebosonen-Felder unter chiralen Transformationen folgt direkt aus Gl. 3.6. Sie ist für die weiteren Rechnungen nicht von Belang und wird daher nicht explizit angegeben.

3.4. Die effektive Lagrangedichte der χ PT

Symmetrieforderungen

Die Grundidee der chiralen Störungstheorie (χ PT) ist es, eine effektive Feldtheorie zu finden, welche die QCD bei niedrigen Energien beschreibt. Die Lagrangedichte dieser Theorie muss die chirale Symmetrie $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L$ besitzen, der Grundzustand jedoch nur eine $SU(N_f)_V$ -Symmetrie.

Die Parametrisierung in Gl. 3.7 legt den Grundzustand bereits fest, denn für $\phi_i = 0$ folgt

$$U_0 = \exp\left(\frac{i}{F_0} 2T_i \phi_i\right) = \exp(0) = \mathbf{1}.$$

Diese Wahl ist konsistent mit der geforderten Symmetriebedingung. Für diagonale Transformationen ist $R = L$, daher gilt

$$U'_0 = RUL^\dagger = R\mathbf{1}R^\dagger = \mathbf{1} = U_0.$$

Für die effektive Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie gibt es keine besonderen Einschränkungen, außer dass sie der chiralen Symmetrie $SU(N_f)_R \times SU(N_f)_L$ genügen und ein Lorentz-Skalar sein muss. Alle Terme, die die Goldstonebosonen-Variablen enthalten und diese grundlegenden Bedingungen erfüllen, müssen berücksichtigt werden. Um die Amplitude für einen physikalischen Prozess zu erhalten, müssen dann die Feynmandiagramme, die man aus der effektiven Lagrangedichte erhält, summiert werden.

Zunächst sieht es so aus, als ob die Theorie für praktische Rechnungen nicht brauchbar wäre, da unendlich viele Terme und Diagramme berücksichtigt werden müssen. Dies ist jedoch nicht der Fall, denn für die chirale Lagrangedichte existiert ein Zählschema, das es erlaubt, die einzelnen Terme nach Potenzen der vorkommenden Energien zu sortieren. Die allgemeine Lagrangedichte setzt sich dann zusammen aus den verschiedenen Ordnungen, die mit geraden Indizes bezeichnet werden:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \dots$$

Bevor genauer auf dieses Weinberg'sche "Powercounting"-Argument eingegangen wird, soll zunächst die Lagrangedichte niedrigster Ordnung \mathcal{L}_2 bestimmt werden.

Die chirale Lagrangedichte führender Ordnung

Chiral invariante Kombinationen der Form $UU^\dagger = \mathbf{1}$ sind konstant und ergeben daher keinen relevanten Beitrag. Die Lagrangedichte muss also Ableitungen der Matrix U enthalten. Aus der Lorentz-Invarianz folgt, dass stets Paare von Ableitungen auftreten müssen, da diese Vektorcharakter besitzen.

Die einfachste nichtkonstante Lagrangedichte, die den Symmetrieforderungen genügt, ist

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle. \quad (3.8)$$

Die hier mit $\langle \rangle$ bezeichnete Spurbildung ist notwendig, um einen Vierer-Skalar zu erhalten. Die Invarianz gegenüber globalen chiralen Transformationen überprüft man durch Einsetzen von Gl. 3.6 unter Berücksichtigung der Zyklizität der Spur:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}'_2 &= \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu (LUR^\dagger) \partial_\mu (LUR^\dagger)^\dagger \rangle \\ &= \frac{F_0^2}{4} \langle L(\partial_\mu U)R^\dagger R(\partial_\mu U^\dagger)L^\dagger \rangle \\ &= \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \\ &= \mathcal{L}_2 \end{aligned}$$

Der Vorfaktor $F_0^2/4$ wurde so gewählt, dass der führende Term in der Entwicklung nach den Feldern

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial_\mu \phi_i + \dots$$

die Standardform für einen kinetischen Term erhält. Die Bedeutung der Konstanten F_0 wird im siebten Kapitel deutlich werden.

Neben Gl. 3.8 sind weitere Terme möglich, die ebenfalls zwei Ableitungen enthalten und den allgemeinen Symmetrieforderungen genügen. Diese können jedoch auf den oben genannten Term zurückgeführt werden.

Explizite Symmetriebrechung: Spurionanalyse

Bisher wurde der Quarkmassenterm, der eine explizite Brechung der chiralen Symmetrie bewirkt, in der Diskussion vernachlässigt. Um mit Hilfe der effektiven Feldtheorie sinnvolle physikalische Aussagen (z.B. über die Pionmassen) treffen zu können, muss diese Symmetriebrechung jedoch eingebaut werden. Die Form der entsprechenden Terme in der effektiven Lagrangedichte wird im Folgenden mit Hilfe der sog. *Spurionanalyse* bestimmt.

Dazu geht man zunächst von der QCD-Lagrangedichte in Gl. 2.4 aus. Der Massenterm ist

$$\mathcal{L}_m^{QCD} = \bar{\psi} m \psi = (\bar{\psi} P_R + \bar{\psi} P_L) m (P_R \psi + P_L \psi)$$

3. Chirale Störungstheorie

mit der Flavour-Matrix (für $N_f = 3$)

$$m = \text{diag} (m_u, m_d, m_s).$$

Da die Projektoren mit der Massenmatrix vertauschen, erhält man

$$\mathcal{L}_m^{QCD} = \bar{\psi} P_R m P_R \psi + \bar{\psi} P_L m P_L \psi = \bar{\psi}_L m \psi_R + \bar{\psi}_R m \psi_L.$$

Die konstante Matrix m wird jetzt formal durch das Spurion M bzw. M^\dagger ersetzt. Man erhält

$$\mathcal{L}_m^{QCD} = \bar{\psi}_L M \psi_R + \bar{\psi}_R M^\dagger \psi_L.$$

Das Spurion soll so transformieren, dass die Lagrangedichte invariant wird. Die dazu nötige Transformationsregel ist

$$M \rightarrow L M R^\dagger.$$

Das Spurion wird jetzt mit dieser Transformationsregel in die effektive Lagrangedichte eingebaut, so dass diese invariant unter chiralen Transformationen bleibt. Der einfachste, nichtkonstante Term, der diese Bedingung erfüllt, hat die Form

$$\mathcal{L}_2^M = -\frac{B_0 F_0^2}{2} \langle M U^\dagger + U M^\dagger \rangle$$

mit der zusätzlichen Konstanten B_0 . Wird das Spurion jetzt wieder durch die konstante Massenmatrix m ersetzt, so wird die chirale Symmetrie in der effektiven Lagrangedichte auf genau die gleiche Weise wie in der QCD explizit gebrochen. Das Ergebnis ist

$$\mathcal{L}_2^m = -\frac{B_0 F_0^2}{2} \langle m U^\dagger + U m^\dagger \rangle = -\frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle$$

mit der Abkürzung $\chi = 2B_0 m$. Für eine reelle Diagonalmatrix gilt natürlich $\chi^\dagger = \chi$, die Unterscheidung wird jedoch für spätere Rechnungen beibehalten.

Die so erhaltene chirale Lagrangedichte kann nun wieder nach den kartesischen Feldkomponenten ϕ_i entwickelt werden. Bis zum quadratischen Term erhält man

$$\mathcal{L}_2^m = -\frac{B_0 F_0^2}{2} \langle m(U^\dagger + U) \rangle = \text{const} + \frac{B_0}{2} \langle m(\phi_i 2T_i)^2 \rangle + \dots$$

Für $N_f = 2$ ergibt sich daraus

$$\mathcal{L}_2^m = \text{const} + \frac{1}{2} B_0 (m_u + m_d) \phi_i^2 + \dots$$

Die Masse der nun als **Pseudo-Goldstonebosonen** bezeichneten Pionen ist damit

$$m_\pi^2 = B_0 (m_u + m_d).$$

Bei Isospin-Symmetrie ($m_u = m_d = m_q$) erhält man

$$m_\pi^2 = 2B_0 m_q. \tag{3.9}$$

Ausrichtung des Vakuums

An diesem Punkt ist noch die Frage zu klären, welche Bedeutung der Konstanten B_0 zukommt. Wie bereits erwähnt, ist die „Richtung“ des Vakuum-Zustands einer gebrochenen Symmetrie nicht völlig zufällig. Sie wird statt dessen durch kleine Störungen des Systems festgelegt, wie es in diesem Fall die nicht verschwindende Massenmatrix ist. Ein Zusammenhang zwischen der spontanen und der expliziten Symmetriebrechung ist daher zu erwarten.

Die Stärke der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie wird durch den Vakuumerwartungswert

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}\psi | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}_L \psi_R | 0 \rangle + \langle 0 | \bar{\psi}_R \psi_L | 0 \rangle$$

beschrieben, der auch als skalares Quark-Kondensat bezeichnet wird. Unter Berücksichtigung der Transformationseigenschaften der chiralen Anteile nach Gl. 2.6 sieht man, dass dieser Erwartungswert die axiale Symmetrie bricht, jedoch invariant unter diagonalen Transformationen der Form $L = R$ ist.

Die Stärke der expliziten Symmetriebrechung hängt mit dieser Größe durch die Relation

$$3F_0^2 B_0 = -\langle \bar{\psi}\psi \rangle$$

zusammen. Die Ausrichtung des QCD-Vakuums mit der Massenmatrix erkennt man daran, dass beide die gleichen Erhaltungssätze für Parität, elektrische Ladung und Strangeness erfüllen [9].

Die effektive Lagrangedichte vierter Ordnung

Die in den letzten beiden Abschnitten beschriebene euklidische Lagrangedichte führender (zweiter) Ordnung ist insgesamt

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle.$$

Ein Term aus \mathcal{L}_2 enthält also entweder zwei Ableitungen der Matrix U oder die Massenmatrix m in erster Potenz. Die doppelte Zählung der Massenmatrix stammt daher, dass sie nach Gl. 3.9 proportional zum Quadrat der Pionmassen ist.

Die allgemeine Lagrangedichte der vierten Ordnung wurde erstmals von Gasser und Leutwyler angegeben [10]. Sie lautet ohne Berücksichtigung äußerer Quellen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -L_1 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle^2 - L_2 \langle \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \rangle^2 \\ & -L_3 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial_\nu U^\dagger \rangle + L_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle \\ & +L_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \rangle - L_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle^2 \\ & -L_7 \langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \rangle^2 - L_8 \langle U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger \rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die Vorzeichen wurden dabei mit Hilfe von *Regel 1* aus dem zweiten Kapitel an die euklidische Formulierung angepasst. Man erkennt, dass die einzelnen Terme entweder vier Ableitungen, zwei Ableitungen und eine Massenmatrix, oder die Massenmatrix zum Quadrat enthalten. Die

3. Chirale Störungstheorie

Konstanten L_1 bis L_8 werden als Gasser-Leutwyler-Koeffizienten bezeichnet und müssen entweder experimentell oder durch numerische Rechnungen im Rahmen der Gitter-QCD bestimmt werden.

Höhere Ordnungen als \mathcal{L}_4 werden in dieser Arbeit nicht betrachtet.

3.5. Das Weinberg'sche Powercounting

Die chirale Dimension

Um mit Hilfe der effektiven Feldtheorie sinnvolle Vorhersagen zu treffen, müssen nicht nur die möglichen Terme der Lagrangedichte, sondern auch die aus ihnen gebildeten Diagramme nach Potenzen der Pionimpulse und Quarkmassen sortiert werden. Die effektive Theorie ist für praktische Rechnungen nämlich nur dann brauchbar, wenn in jeder Ordnung eine endliche Anzahl zu berücksichtigender Diagramme übrig bleibt. Das von S. Weinberg erfundene Sortierungs-Schema („Powercounting“) erfüllt diese Bedingung [11].

Betrachtet wird die Amplitude für einen Streuvorgang, der einem Feynman-Diagramm der effektiven Feldtheorie entspricht. Untersucht wird das Verhalten unter einer Reskalierung der *äußeren* Mesonenimpulse und der Quark-Massen gemäß

$$p \rightarrow tp, \quad m \rightarrow t^2m.$$

Die quadratische Reskalierung ist dabei äquivalent zu einer linearen Reskalierung der Mesonenmassen

$$M \rightarrow tM.$$

Die **chirale Dimension** des Diagramms D wird nun durch das Skalierungsverhalten der Streuamplitude

$$\mathcal{M}(tp, t^2M^2) \rightarrow t^D \mathcal{M}(p, M^2)$$

definiert, wobei t eine reelle Konstante ist. Für kleine Energien müssen nach dieser Sortierung nur noch Diagramme mit kleinem D berücksichtigt werden. Im Folgenden wird die von Weinberg gefundene Formel für die chirale Dimension eines Diagramms nachvollzogen.

- Zunächst betrachtet man dazu die **inneren Linien** des Diagramms. Diese liefern jeweils einen Faktor t^2 , da

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + (tM)^2} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{t^2} \frac{1}{(k/t)^2 + M^2} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{t^2}{l^2 + M^2}$$

ist, was einer Reskalierung auch der inneren Impulse zu $l = k/t$ entspricht.

- Die **Vertices** aus der Lagrangedichte \mathcal{L}_{2n} tragen jeweils einen Faktor t^{2n} bei. Dieser stammt aus den derivativen Kopplungen und/oder aus der Reskalierung der Quarkmassen. Außerdem enthält jeder Vertex eine Deltafunktion der Form $\delta^4(\sum p_i)$, die die Erhaltung des Viererimpulses beschreibt. Insgesamt skaliert ein Vertex-Faktor daher mit t^{2n-4} .

- Zusätzlich gibt es noch einen globalen Faktor t^4 , der aus der Beziehung $S \sim \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}$ zwischen der invarianten Amplitude und der S -Matrix stammt. Durch diese Gleichung wird lediglich die Erhaltung des Viererimpulses bei dem gesamten Streuvorgang beschrieben.

Insgesamt erhält man für die chirale Dimension eines Diagramms also den Ausdruck

$$D = 4 + 2N_I + \sum_{n=1}^{\infty} N_{2n}(2n - 4).$$

Dabei bezeichnet N_I die Anzahl der internen Linien und N_{2n} die Anzahl der Vertices aus \mathcal{L}_{2n} . Es ist vorteilhaft, diesen Ausdruck so umzuformen, dass statt der internen Linien die Anzahl der unabhängigen Schleifen N_L vorkommt. Unter Benutzung der allgemein für Feynman-Diagramme gültigen topologischen Formel [2]

$$N_L = N_I - (N_V - 1),$$

wobei N_V die Gesamtzahl der Vertices bezeichnet, erhält man das Resultat

$$D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (2n - 2)N_{2n} + 2N_L. \quad (3.11)$$

Renormierungs-Schema

Aus Gl. 3.11 kann man ablesen, dass Schleifendiagramme in der chiralen Störungstheorie automatisch unterdrückt werden. In führender Ordnung ($D = 2$) müssen so z.B. nur Treelevel-Beiträge mit Vertices aus \mathcal{L}_2 berücksichtigt werden.

In nächstfolgender Ordnung ($D = 4$) treten dann allerdings Diagramme mit genau einer Schleife auf. Die Schleifenintegrale divergieren, so dass es zunächst so aussieht, als ob keine sinnvollen Vorhersagen getroffen werden könnten.

Dies ist jedoch nicht der Fall. Die Ergebnisse werden dadurch endlich, dass die Treelevel-Terme mit einem \mathcal{L}_4 -Vertex hinzugenommen werden. Die effektive Lagrangedichte wurde ja gerade so konstruiert, dass sie alle möglichen Terme enthält, die mit der chiralen Symmetrie vereinbar sind. Da die Schleifenterme die gleichen Symmetriebedingungen erfüllen, gibt es für jede Divergenz „automatisch“ einen Gegenterm aus \mathcal{L}_4 . Die Divergenzen werden mit der Methode der dimensionellen Regularisierung nach 't Hooft und Veltman [12] behandelt, bei der das Integral in $4 - \epsilon$ Raumzeitdimensionen betrachtet wird. Die nackten Gasser-Leutwyler-Koeffizienten

$$L_i = L_i^r + \frac{\Gamma_i}{32\pi^2} R$$

sind dann eine Summe aus dem endlichen (renormierten) Anteil L_i^r und der unendlichen Konstante

$$R = -\frac{2}{\epsilon} - (\log(4\pi) - \gamma_E + 1).$$

Die numerischen Faktoren Γ_i können dem Anhang entnommen werden.

3. *Chirale Störungstheorie*

An diesem Punkt sind die Grundlagen der chiralen Störungstheorie nun so weit wie nötig beschrieben. Im nächsten Kapitel wird untersucht, welche zusätzlichen Effekte sich ergeben, wenn man das Raumzeit-Kontinuum durch ein diskretes Gitter ersetzt, wie es in numerischen Rechnungen verwendet wird.

4. Gitter-QCD

4.1. Das Dopplerproblem

Die fermionische Gitterwirkung

Da die chirale Symmetrie im Flavour-Raum lebt und damit unabhängig von der Colour-SU(3) ist, reicht es, in diesem Kapitel ausschließlich den fermionischen Anteil der QCD-Lagrangedichte zu betrachten. Um im weiteren Verlauf der Diskussion Verwechslungen zu vermeiden, wird die Fermionmasse in diesem Kapitel mit M bezeichnet. Die euklidische Lagrangedichte ist dann durch

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) \left(\gamma_\mu \partial_\mu + M \right) \psi(x).$$

gegeben. Das zugehörige Wirkungsintegral ist

$$S_F = \int d^4x \bar{\psi}(x) \left(\gamma_\mu \partial_\mu + M \right) \psi(x)$$

Im Pfadintegral-Formalismus erhält man daraus die Greenfunktionen

$$\langle \psi_\alpha(x) \cdots \bar{\psi}_\beta(y) \cdots \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi (\psi_\alpha(x) \cdots \bar{\psi}_\beta(y) \cdots) \exp(-S_F[\psi, \bar{\psi}])}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \exp(-S_F[\psi, \bar{\psi}])}.$$

Die Funktionalintegrale sind im Kontinuumsfall nur rein formal durch

$$\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi = \prod_{\alpha, x} d\bar{\psi}_\alpha(x) \prod_{\beta, y} d\psi_\beta(y)$$

definiert, wobei x und y Raumzeitpunkte, α und β Dirac-Indices bezeichnen. Beim Übergang zu einem Gitter mit der Gitterkonstanten a wird daraus

$$\mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \rightarrow \mathbb{D}\bar{\psi} \mathbb{D}\psi = \prod_{\alpha, n} d\bar{\psi}_\alpha(na) \prod_{\beta, m} d\psi_\beta(ma).$$

Der Raumzeitvektor n besitzt dabei ganzzahlige Komponenten und indiziert so die verschiedenen Gitterplätze.

Für die weitere Rechnung ist es vorteilhaft, die in der Wirkung vorkommenden Größen mit Hilfe der durch die Gitterkonstante a definierten Skala dimensionslos zu machen. Dazu werden die kanonischen Dimensionen der Dirac-Felder verwendet, die z.B. daraus folgen, dass die Wirkung dimensionslos ist (wegen $\hbar = 1$). Man erhält so die Gittervariablen

$$\hat{M} = a M, \quad \hat{\psi}_\alpha(n) = a^{3/2} \psi_\alpha(x), \quad \hat{\bar{\psi}}_\alpha(n) = a^{3/2} \bar{\psi}_\alpha(x).$$

4. Gitter-QCD

Die Ableitung auf dem Gitter wird symmetrisch durch die Differenz der Feldwerte an den beiden in μ -Richtung benachbarten Gitterpunkten definiert:

$$\hat{\partial}_\mu \hat{\psi}_\alpha(n) = \frac{1}{2a} [\hat{\psi}_\alpha(n + \hat{\mu}) - \hat{\psi}_\alpha(n - \hat{\mu})]. \quad (4.1)$$

Die Gitter-Ableitung und die Multiplikation mit der Massen-Einheitsmatrix können dann zur Fermionmatrix

$$K_{\alpha,\beta}(n, m) = \sum_\mu \frac{1}{2} (\gamma_\mu)_{\alpha,\beta} [\delta_{m, n+\hat{\mu}} - \delta_{m, n-\hat{\mu}}] + \hat{M} \delta_{mn} \delta_{\alpha,\beta}$$

zusammengefasst werden. Diese ist eine Gitter- und Diracmatrix, die für nicht identische und nicht benachbarte Gitterpunkte n, m verschwindet. Die euklidische Gitter-Wirkung erhält so die einfache Form

$$S_F = \sum_{n, m, \alpha, \beta} \hat{\psi}_\alpha(n) K_{\alpha,\beta}(n, m) \hat{\psi}_\beta(m). \quad (4.2)$$

Die gesuchten Gitter-Greenfunktionen sind dann

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(n) \cdots \hat{\psi}_\beta(m) \cdots \rangle = \frac{\int D\hat{\psi} D\hat{\psi} \hat{\psi}_\alpha(n) \cdots \hat{\psi}_\beta(m) \cdots e^{-S_F}}{\int D\hat{\psi} D\hat{\psi} e^{-S_F}} \quad (4.3)$$

mit dem Integrationsmaß

$$D\hat{\psi} D\hat{\psi} = \prod_{\alpha, n} d\hat{\psi}_\alpha(na) \prod_{\beta, m} d\hat{\psi}_\beta(ma).$$

Kontinuumslimites der Gitter-Greenfunktion

Um Gl. 4.3 auszuwerten, wird das erzeugende Funktional

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int D\hat{\psi} D\hat{\psi} \exp \left(-S_F + \sum_{n, \alpha} \left[\bar{\eta}_\alpha(n) \hat{\psi}_\alpha(n) + \hat{\psi}_\alpha(n) \eta_\alpha(n) \right] \right)$$

mit den *Grassmann*-wertigen Quellen $\eta, \bar{\eta}$ betrachtet. Die Auswertung des Integrals nach den *Grassmann*-Integrationsregeln ergibt, z.B. nach [13]

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \det K \exp \left(\sum_{n, m, \alpha, \beta} \bar{\eta}_\alpha(n) K_{\alpha\beta}^{-1}(n, m) \eta_\beta(m) \right).$$

Durch Ableitung nach den Feldern erhält man die Zweipunktfunktion

$$\langle \hat{\psi}_\alpha(n) \hat{\psi}_\beta(m) \rangle = K_{\alpha\beta}^{-1}(n, m). \quad (4.4)$$

Das Problem ist also darauf reduziert worden, die durch

$$\sum_{\lambda, l} K_{\alpha\lambda}^{-1}(n, l) K_{\lambda\beta}(l, m) = \delta_{\alpha\beta} \delta_{nm} \quad (4.5)$$

definierte inverse Matrix K^{-1} zu bestimmen. Diese Rechnung wird im Fourier-Raum durchgeführt, in dem die Kronecker-Deltas durch

$$\delta_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} e^{i\hat{k}(n-m)}$$

dargestellt werden können. Die Integration über den dimensionslosen Gitterimpuls $\hat{k}_\mu = ap_\mu$ ist dabei (in allen vier Dimensionen) auf die erste *Brillouin*-Zone beschränkt. Durch Einsetzen dieser Darstellung erhält man für die Matrix K im Fourier-Raum

$$K_{\alpha\beta}(n, m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \tilde{K}_{\alpha\beta}(\hat{k}) e^{i\hat{k}(n-m)}$$

mit

$$\tilde{K}_{\alpha\beta}(\hat{k}) = \sum_{\mu} \frac{1}{2} (\gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \left[e^{i\hat{k}_\mu} - e^{-i\hat{k}_\mu} \right] + \hat{M} \delta_{\alpha\beta} = \left[i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin \hat{k}_\mu + \hat{M} \right]_{\alpha\beta}.$$

Der Sinus in $\tilde{K}(\hat{k})$ folgt also direkt aus der diskreten Gitterableitung in Gl. 4.1. Unter Benutzung der Gittersummenregel

$$\sum_n e^{-in\hat{k}} = (2\pi)^4 \delta^4(\hat{k})$$

sowie der Gln. 4.4 und 4.5 erhält man schliesslich für die gesuchte Gitter-Zweipunktfunction

$$G_{\alpha\beta}(n, m, \hat{M}) \equiv \langle \hat{\psi}_{\alpha}(n) \hat{\psi}_{\beta}(m) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \frac{[-i\gamma_{\mu} \hat{k}'_{\mu} + \hat{M}]_{\alpha\beta}}{(\hat{k}')^2 + \hat{M}^2} e^{i\hat{k}(n-m)}$$

mit $\hat{k}'_{\mu} = \sin k_{\mu}$.

Betrachtet wird nun der **Kontinuums-Limes** dieses Korrelators. Dazu werden die dimensionslosen Gittergrößen mit den entsprechenden Potenzen von a multipliziert und die diskreten Gitter-Koordinaten durch $x = an$ und $y = am$ ersetzt. Anschliessend wird der Grenzwert für $a \rightarrow 0$ gebildet:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^3} G_{\alpha\beta} \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, Ma \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{[-i\gamma_{\mu} p'_{\mu} + M]_{\alpha\beta}}{(p')^2 + M^2} e^{ip(x-y)} \quad (4.6)$$

mit $p'_{\mu} = \frac{1}{a} \sin(p_{\mu}a)$.

Die Erwartung ist, dass das Ergebnis der Greenfunktion für freie Fermionen im Kontinuum

$$\langle \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \frac{-i\gamma_{\mu} p_{\mu} + M}{p^2 + M^2} e^{ip(x-y)}$$

entspricht.

Beim Grenzübergang tritt nun allerdings das sog. **Dopplerproblem** auf. Das Integral in Gl. 4.6 erstreckt sich für kleine a über einen sehr großen Impulsbereich. Da die Potenz von p'_{μ} im Nenner größer als im Zähler ist, werden beim Grenzübergang alle Beiträge unterdrückt, für die nicht $p'_{\mu} = a^{-1} \sin(ap_{\mu}) \approx 0$ ist. Diese Bedingung wird zum einen für $p_{\mu} \approx 0$ erfüllt, was die

4. Gitter-QCD

gewünschte Kontinuums-Greenfunktion liefert. Zum anderen verschwindet p'_μ aber auch an den Integrationsgrenzen, also bei $p_\mu \approx \pm\pi/a$. Diese Werte entsprechen dem Rand der ersten *Brillouin-Zone*. Das Ergebnis ist, dass sich für jede betrachtete Dimension die Anzahl der erhaltenen Fermionen-Propagatoren verdoppelt. In einer realistischen Simulation mit vier Raumzeitdimensionen erhält man also für jedes Fermionenfeld $2^4 - 1 = 15$ weitere, unphysikalische Felder.

4.2. Wilson-Fermionen

Zwei Lösungsansätze

Um für fermionische Korrelatoren einen physikalisch sinnvollen Kontinuums-Limes zu erhalten, haben sich zwei Lösungsansätze etabliert. Die eine Methode wird als „staggered“ (gestapelte) Fermionen bezeichnet. Die Idee dieses Ansatzes nach Kogut und Susskind [14] ist es, die *Brillouin-Zone* in allen Dimensionen zu halbieren. Auf diese Weise liegen die unphysikalischen Nullstellen von p'_μ nicht mehr innerhalb des Integrationsbereiches von Gl. 4.6, wodurch das Dopplerproblem vermieden wird.

Eine Halbierung der Brillouin-Zone läßt sich nur durch die Verdopplung der effektiven Gitterkonstanten erreichen. Dazu müssen die Freiheitsgrade auf benachbarte Gitterplätze, die die Ecken eines Hyperkubus bilden, verteilt werden. In z.B. vier Dimensionen hat ein Hyperkubus 16 Ecken, ein Fermionenfeld allerdings nur 4 Dirac-Komponenten. Daher müssen mehrere Fermionen-Flavours gleichzeitig simuliert werden, woher der Name „staggered“ stammt. Auf die genaueren Einzelheiten und Probleme dieses Ansatzes soll hier nicht weiter eingegangen werden.

Wilson-Wirkung

Statt dessen wird nun die zweite Methode betrachtet, die auf Wilson zurückgeht [15]. Um den richtigen Grenzwert zu erhalten, wird bei den sog. Wilson-Fermionen nicht die Brillouin-Zone, sondern der Integrand in Gl. 4.6 modifiziert. Dieses Vorgehen ist berechtigt, denn die fermionische Gitterwirkung muss nicht zwingend die in Gl. 4.2 angegebene Form haben, solange der Kontinuums-limes erfüllt wird. Betrachtet wird daher jetzt die um einen zusätzlichen Term der Ordnung a erweiterte Wilson-Wirkung

$$S_F^{(W)} = S_F - \frac{r}{2} \sum_n \hat{\psi}(n) \hat{\square} \hat{\psi}(n)$$

mit dem Wilson-Parameter r (der gleich 1 gewählt werden kann) und dem vierdimensionalen Gitter-Laplaceoperator (der im euklidischen Raum statt des D'Alembert-Operators auftritt)

$$\hat{\square} \hat{\psi}(n) = \sum_\mu \left[\hat{\psi}(n + \hat{\mu}) + \hat{\psi}(n - \hat{\mu}) - 2\hat{\psi}(n) \right].$$

Die Wilson-Wirkung kann wieder auf die Form

$$S_F^{(W)} = \sum_{n,m,\alpha,\beta} \hat{\psi}_\alpha(n) K_{\alpha,\beta}(n,m) \hat{\psi}_\beta(m)$$

gebracht werden, wobei die neue Fermionmatrix durch

$$K_{\alpha\beta}^{(W)}(n, m) = (\hat{M} + 4r) \delta_{nm} \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\mu} \left[(r - \gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \delta_{m, n+\mu} + (r + \gamma_{\mu})_{\alpha\beta} \delta_{m, n-\mu} \right]$$

gegeben ist. Mit dieser Wirkung erhält man wieder einen Kontinuumslikes der Form 4.6.

Der wesentliche Unterschied ist jetzt allerdings, dass die Masse in dieser Gleichung die Form

$$M(p) = M + \frac{2r}{a} \sum_{\mu} \sin^2(ap_{\mu}/2) \quad (4.7)$$

erhält und damit impulsabhängig wird. An den Rändern der Brillouin-Zone divergiert diese Masse, so dass die Nullstelle von p'_{μ} kein Dopplerproblem mehr verursachen kann. Bei festem Impuls und für $a \rightarrow 0$ verschwindet der zusätzliche Term wie gefordert.

Wie im dritten Kapitel erläutert wurde, wird die chirale Symmetrie der QCD explizit durch den Quark-Massenterm gebrochen. Im Fall der Wilson-Fermionen sieht man bereits an Gl. 4.7, dass diese Symmetrie bei endlichem Gitterabstand selbst dann gebrochen wird, wenn die Fermionen ursprünglich masselos waren. Die Ursache dafür liegt beim Wilson-Term

$$S_w = \frac{r}{2} \sum_n \hat{\psi}(n) \hat{\square} \hat{\psi}(n) = \frac{r}{2} \sum_n \left[\hat{\psi}_L(n) \hat{\square} \hat{\psi}_R(n) + \hat{\psi}_R(n) \hat{\square} \hat{\psi}_L(n) \right],$$

der unter chiralen Transformationen das gleiche Verhalten wie der Massenterm zeigt.

4.3. Die Symanzik-Wirkung

Problemstellung

In numerischen Rechnungen muss mit einer relativ großen Gitterkonstante a gerechnet werden, so dass die Diskretisierungseffekte nicht vernachlässigt werden können. Um die Störungsterme linear in a zu halbieren, muss die Gitterkonstante halbiert werden, was in 3+1 Dimensionen zu einer wesentlich höheren Rechenzeit führt. Um die Konvergenz von Gitterrechnungen durch Beseitigung der linearen Störeffekte zu verbessern, wurde deshalb das Improvement-Programm erfunden [16].

Im Rahmen dieses Programms werden in die Gitterwirkung zusätzliche Terme eingeführt, die in allen On-Shell-Größen (also physikalisch relevante Größen wie z.B. Streuquerschnitte) die Gittereffekte genau aufheben. Die Bedingung an diese Terme ist dabei lediglich, dass sie die auf dem Gitter gültigen Symmetrien erfüllen. Die gesamte Gitterwirkung mit allen Gegentermen wird dann als Symanzik-Wirkung bezeichnet.

Fermionen und Eichfelder auf dem Gitter

Die Symanzik-Wirkung in $\mathcal{O}(a)$ wurde zuerst von Sheikholeslami und Wohlert bestimmt [17], später wurde in [18] eine systematisierte Herleitung angegeben. Diese soll nun kurz skizziert

4. Gitter-QCD

werden. Ausgangspunkt dazu ist die vollständige QCD-Gitterwirkung (jetzt wieder mit nicht skalierten Größen)

$$S[U, \bar{\psi}, \psi] = S_G[U] + S_F[U, \bar{\psi}, \psi].$$

Die Gitterwirkung besteht zum einen aus der Wilson-Fermionenwirkung

$$S_F[U, \bar{\psi}, \psi] = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x)(D + M)\psi(x)$$

mit dem Wilson-Dirac Operator

$$D = \frac{1}{2} \{ \gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) - a \nabla_\mu^* \nabla_\mu \},$$

der die kovarianten Gitter-Ableitungen

$$\nabla_\mu \psi(x) = \frac{1}{a} [\lambda_\mu U(x, \mu) \psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x)]$$

und

$$\nabla_\mu^* \psi(x) = \frac{1}{a} [\psi(x) - \lambda_\mu^{-1} U(x - a\hat{\mu}, \mu)^{-1} \psi(x - a\hat{\mu})]$$

enthält. Dabei ist λ ein Phasenfaktor und $U(x, \mu)$ eine sog. Link-Variable, die das Eichfeld repräsentiert und auf der Verbindung der Gitterplätze x/a und $x/a + \hat{\mu}$ definiert ist.

Zum anderen wird nun auch die Wilson-Eichfeldwirkung berücksichtigt, die mit Hilfe dieser Linkvariablen durch

$$S_G[U] = \frac{1}{g_0^2} \sum_p \langle 1 - U(p) \rangle$$

definiert ist. Dabei bezeichnet g_0 die Gitter-Kopplungskonstante und $U(p)$ das Produkt der Linkvariablen entlang des Randes der Plaquette p . Die Summe läuft über alle orientierten Plaquetten des Gitters.

Die effektive Kontinuums-Theorie

Um die Symanzik-Wirkung in Ordnung a zu finden, wird untersucht, welche lokale, effektive Kontinuums-Theorie die Gittereffekte simulieren kann. Die Terme, die die nötigen Symmetrieforderungen erfüllen, können nach ihrer Dimension geordnet werden:

$$S_S = a^{-1} S_{-1} + S_0 + a S_1 + a^2 S_2 + \dots$$

Der S_{-1} -Term ist durch das Quark-Kondensat $\bar{\psi}\psi$ gegeben, der S_0 -Anteil entspricht der normalen Kontinuums-Wirkung. Der S_1 -Anteil kann aufgrund von Symmetrieforderungen zunächst auf die fünf Operatoren

$$\begin{aligned} O_1 &= \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi \\ O_2 &= \bar{\psi} D_\mu D_\mu \psi + \bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu \psi \\ O_3 &= M \langle F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rangle \\ O_4 &= M \{ \bar{\psi} \gamma_\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu \gamma_\mu \psi \} \\ O_5 &= M^2 \bar{\psi} \psi \end{aligned} \tag{4.8}$$

reduziert werden. Falls nur On-Shell-Größen betrachtet werden, können die klassischen Bewegungsgleichungen verwendet werden [18]. In diesem Fall müssen die Operatoren O_2 und O_4 nicht mehr getrennt berücksichtigt werden. Schließlich können die Operatoren O_3 und O_5 als Beitrag zur Renormierung der Masse und Kopplungskonstanten aufgefasst werden, so dass nur noch der als O_1 bezeichnete Pauli-Term übrig bleibt.

Das wichtige Ergebnis ist, dass Gittereffekte bis zur Ordnung a in der Kontinuumstheorie berücksichtigt werden können, wenn der durch Gl. 4.8 angegebene Zusatzterm in die Wirkung aufgenommen wird. Die zu betrachtende effektive Lagrangedichte der Gitter-QCD ist also

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD} + ac_{sw}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\psi + \mathcal{O}(a^2)$$

mit dem Sheikholeslami-Wohlert Parameter c_{sw} . Die weitere Implementierung des Improvement-Programmes ist für die weiteren Rechnungen nicht von Interesse.

4.4. Chirale Störungstheorie für die Gitter-QCD

Energieskalen

Bei den heutigen, begrenzten Computerleistungen besteht eine Diskrepanz zwischen den in der Gittereichtheorie simulierten Modellen und der physikalischen QCD. Diese zeigt sich in mehreren Punkten:

- Das Kontinuum der Raumzeit wird durch ein Gitter ersetzt. Dadurch entstehen Störungen, die keine Entsprechung in der Natur haben. Die Stärke dieser Diskretisierungseffekte wird durch den Gitterabstand a bestimmt.
- Die simulierbare Größe des Raumzeitbereichs ist auf 1.3 bis 3 fm beschränkt. Für eine sinnvolle Simulation müssten Raumbereiche der Größe $L \gg 1/\Lambda_\pi \approx 2$ fm betrachtet werden, wobei die Größe Λ_π hier eine typische Mesonenmasse von ca. 100 MeV bezeichnet
- Fermionen können derzeit nicht mit Massen unter etwa $m_s/8$ simuliert werden, während die leichten Quarkmassen in der Natur den Wert $m_s/25$ besitzen.

Die chirale Störungstheorie ist im Rahmen von Gittersimulationen besonders nützlich, da sie die Extrapolation von Simulationsergebnissen auf physikalisch relevante Werte erlaubt. Im Folgenden soll daher untersucht werden, auf welche Weise Gittereffekte in die chirale Störungstheorie eingebaut werden können.

Wie bereits weiter oben erwähnt, wird die chirale $SU(2) \times SU(2)$ -Symmetrie in der Gitter-QCD durch den Wilson-Term gebrochen. Das gleiche Verhalten zeigt sich erwartungsgemäß auch in der effektiven Symanzik-Wirkung. Der zusätzliche Term verhält sich unter chiralen Symmetrietransformationen genau wie der Massenterm; daher liegt die Vermutung nahe, dass er auf die gleiche Weise in die Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie eingebaut werden kann. Diese Vorgehensweise wurde das erste Mal in [19] beschrieben. Die Stärke der beiden

4. Gitter-QCD

symmetriebrechenden Terme wird im Folgenden durch die Parameter

$$\chi_0 = 2B_0m \quad \text{und} \quad \rho_0 = 2W_0a$$

angegeben, wobei c_{sw} in die neue Konstante W_0 absorbiert wurde.

Als effektive Feldtheorie nutzt die chirale Störungstheorie die Existenz verschiedener Energieskalen in der QCD aus, um Vorhersagen zu treffen. Betrachtet wird zunächst der Fall ohne Gittereffekte. Die niedrige Energieskala ist dann durch die Mesonenimpulse p^2 und die Quarkmassen (repräsentiert durch χ_0) gegeben, während die höhere Energieskala der typischen Hadronen-Energie $\Lambda \approx 1$ GeV entspricht. Durch die Gittereffekte tritt nun zusätzlich eine weitere Energieskala auf, die durch ρ_0 definiert ist. Diese drei Energieskalen müssen in Bezug zueinander gesetzt werden. Da Gittereffekte der Ordnung a^2 in der Symanzik-Wirkung nicht betrachtet wurden, stellt

$$\Lambda^2 \gg \{\chi_0, p^2\} \gg \rho_0$$

eine sinnvolle Hierarchie der Energieskalen dar. Die Entwicklung findet dann nach den beiden Parametern

$$\epsilon \sim \frac{p^2}{\Lambda^2} \sim \frac{\chi_0}{\Lambda^2} \quad \text{und} \quad \delta = \frac{\rho_0}{\Lambda^2}$$

statt, für die $\{\epsilon, \delta\} \gg \{\epsilon^2, \epsilon\delta\} \gg \delta^2$ gilt.

Die effektive Lagrangedichte

Nach dieser Sortierung wird die effektive Lagrangedichte der chiralen Störungstheorie mit Wilson-Fermionen in führender Ordnung zu

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle, \quad (4.9)$$

wobei die Matrizen χ und ρ durch

$$\chi = \chi_0 \mathbf{1} = 2B_0m \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \rho = \rho_0 \mathbf{1} = 2W_0a \mathbf{1}$$

gegeben sind. Wie nach der Sortierungsregel gefordert, ist $\mathcal{L}_2 \sim \mathcal{O}(\epsilon, \delta)$.

Den Ausdruck für die Lagrangedichte der nächsthöheren Ordnung erhält man nach dem gleichen Prinzip. Verlangt wird dabei, dass $\mathcal{L}_4 \sim \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon\delta)$. Das Ergebnis lautet [19]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -L_1 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle^2 - L_2 \langle \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \rangle^2 - L_3 \langle (\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger)^2 \rangle \\ & + L_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle + W_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle \\ & + L_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) \rangle + W_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (\rho^\dagger U + U^\dagger \rho) \rangle \\ & - L_6 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle^2 - W_6 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle \\ & - L_7 \langle \chi^\dagger U - U^\dagger \chi \rangle^2 - W_7 \langle \chi^\dagger U - U^\dagger \chi \rangle \langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \rangle \\ & - L_8 \langle \chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi \rangle - W_8 \langle \rho^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \chi \rangle \end{aligned} \quad (4.10)$$

Zusätzlich zu den Gasser-Leutwyler-Koeffizienten der Kontinuums-Theorie gibt es jetzt fünf weitere Parameter, die von der Gitterdynamik abhängen. Um mit dieser effektiven Theorie

sinnvolle Aussagen zu treffen, muss angenommen werden, dass diese Koeffizienten nicht von a abhängen. Dies ist jedoch nur eine Näherung, da die W_i unter anderem von der Kopplung abhängen, die wiederum von der Gitterkonstanten abhängt. Nach [19] ist diese Abhängigkeit jedoch nur schwach, da die Energieskala Λ konstant bleibt.

Beachtet werden muss ausserdem, dass die Masse m in der chiralen Lagrangedichte nicht die gleiche wie die Masse M in der Wilson-Wirkung ist, sondern der Differenz $M - M_c$ zu einer „kritischen“ Masse entspricht, für die die Mesonenmassen in der Simulation verschwinden.

5. Axial gedrehter Massenterm

5.1. Auswirkung auf die effektive Lagrangedichte der χ PT

Twisting und die QCD-Lagrangedichte

Die Einführung eines axial gedrehten (“getwisteten”) Massenterms in der QCD bietet Vorteile wie z.B. eine vereinfachte Renormierungsprozedur, die in [20] und [21] beschrieben werden. Durch eine geeignete axiale Drehung können außerdem $\mathcal{O}(a)$ -Gitterartefakte in der chiralen Störungstheorie vermieden werden. Dieser Effekt wird in den folgenden drei Kapiteln explizit gezeigt.

Zunächst soll jedoch untersucht werden, welche Auswirkungen eine axiale Drehung der Massenmatrix auf die Kontinuums-QCD hat. Zur Vereinfachung gehen wir dazu hier und im Folgenden von zwei Quark-Flavours mit entarteten Massen ($m_u = m_d = m$) aus. Wie im dritten Kapitel beschrieben, lässt sich der fermionische Teil der QCD-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{QCD}^{(f)} = \mathcal{L}^{(0)} + \bar{\psi} M' \psi.$$

in den chiral invarianten kinetischen Term $\mathcal{L}^{(0)}$ und den die axiale Symmetrie brechenden Massenterm mit der Flavour-Matrix

$$M' = \text{diag} (m, m)$$

aufteilen. Der invariante Term ist

$$\mathcal{L}^{(0)} = \bar{\psi} \gamma_\mu D_\mu \psi = \sum_{c=1}^3 \sum_{f=1}^2 \bar{\psi}_{c,f} \gamma_\mu (D_\mu \psi)_{c,f}$$

wobei über Colour- und Flavour-Indices summiert wird und die kovariante Ableitung durch

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu$$

gegeben ist.

Verhalten unter chiralen Transformationen

Der Term $\mathcal{L}^{(0)}$ ist invariant unter der chiralen Symmetriegruppe $SU(2)_L \times SU(2)_R$ und damit auch unter der einparametrischen Untergruppe, die durch die Transformation

$$\psi \rightarrow e^{i\omega \gamma_5 \tau_3 / 2} \psi \equiv U(\omega) \psi$$

5. Axial gedrehter Massenterm

bzw.

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\omega\gamma_5\tau_3/2} \equiv \bar{\psi} U(\omega)$$

gegeben ist. Durch die Flavour-Matrix τ_3 wird dabei die Orientierung der Drehung im chiralen Raum definiert. Die γ_5 -Dirac-Matrix bewirkt, dass die rechts- bzw linkshändigen Anteile des Quarkfeldes mit unterschiedlichem Vorzeichen transformiert werden, nämlich

$$U_L(\omega) = e^{-i\omega\tau_3/2} \quad \text{und} \quad U_R(\omega) = e^{i\omega\tau_3/2}.$$

$U(\omega)$ ist also eine rein axiale Transformation. Bei Aufteilung in die Flavour-Anteile bestehen die Quarkfelder für $N_f = 2$ aus den beiden Spinoren u und d . Da diese die beiden Eigenzustände der τ_3 -Flavourmatrix mit den Eigenwerten 1 und -1 sind, kann man das Transformationsverhalten für diese Teilfelder explizit aufschreiben und erhält

$$u \rightarrow e^{i\omega\gamma_5/2}u \quad \text{und} \quad d \rightarrow e^{-i\omega\gamma_5/2}d.$$

Unter weiterer Berücksichtigung der Chiralität erhält man vier Komponenten mit den Transformationen

$$\begin{aligned} u_L &\rightarrow e^{-i\omega/2}u_L & u_R &\rightarrow e^{i\omega/2}u_R \\ d_L &\rightarrow e^{i\omega/2}d_L & d_R &\rightarrow e^{-i\omega/2}d_R. \end{aligned}$$

Die Kombination $\bar{q}q$ transformiert daher unter $U(\omega)$ wie

$$\bar{q}q \rightarrow \bar{q} e^{i\omega\gamma_5\tau_3} q = e^{i\omega}\bar{u}_L u_R + e^{-i\omega}\bar{u}_R u_L + e^{-i\omega}\bar{d}_L d_R + e^{i\omega}\bar{d}_R d_L.$$

Axial gedrehte Massenmatrix in der QCD

Führt man nun eine *axial gedrehte* Massenmatrix $M(\omega) = M' e^{i\omega\gamma_5\tau_3}$ ein, so ändert sich die Form der Lagrangedichte nicht, falls die Quarkfelder gleichzeitig wie

$$\psi = e^{-i\omega\gamma_5\tau_3/2}\psi'$$

transformiert werden. In diesem Fall ist nämlich

$$\bar{\psi} M(\omega)\psi = \bar{\psi}' M'\psi'.$$

Die von dieser Lagrangedichte beschriebene Physik unterscheidet sich also nicht von der üblichen QCD. Der einzige Unterschied ist, dass durch den gedrehten Massenterm eine andere Ausrichtung des Grundzustandes der gebrochenen Symmetrie im chiralen Raum festgelegt wird, was aber keine Auswirkung auf messbare Größen hat.

Gedrehter Massenterm in der chiralen Störungstheorie

Wie gezeigt wurde, ist die effektive Lagrangedichte der χPT in niedrigster Ordnung

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \rangle + \mathcal{L}_m \equiv \mathcal{L}_2^{(0)} + \mathcal{L}_m$$

5.1. Auswirkung auf die effektive Lagrangedichte der χPT

mit dem Massenterm

$$\mathcal{L}_m = -\frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle.$$

Um das Verhalten der Massenmatrix unter axialen Drehungen zu bestimmen, wird wieder die Spurion-Analyse benutzt. Dazu wird das Verhalten der Matrix U bei einer axialen Drehung untersucht. Betrachtet wird zunächst die allgemeine chirale Transformation $(L, R) \in SU(2)_L \times SU(2)_R$. Nach Gl. 3.6 transformiert sich die Matrix U wie

$$U \rightarrow LUR^{-1}.$$

Für die axiale Transformation $U(\omega)$ ist

$$L = U_L(\omega) = e^{-i\omega\tau_3/2} \quad \text{und} \quad R = U_R(\omega) = e^{i\omega\tau_3/2}.$$

Insgesamt erhält man also

$$U \rightarrow e^{-i\omega\tau_3/2} U e^{-i\omega\tau_3/2}.$$

Im dritten Kapitel wurde gezeigt, dass sich die Matrix χ als Spurion in der gleichen Weise wie die Matrix U transformieren muss, damit die axiale Symmetrie in der richtigen Weise gebrochen wird. Diese Vorschrift kann nun angewendet werden, um die richtige Form des ‘‘twisted mass’’-Terms in der chiralen Störungstheorie zu erhalten. Das Ergebnis ist

$$\chi(\omega) = U_L(\omega) \chi U_R^{-1}(\omega) = e^{-i\omega\tau_3/2} \chi e^{-i\omega\tau_3/2}$$

Da die Spurionanalyse unabhängig von der Ausrichtung des Massenterms im chiralen Raum ist, erhält man bis auf die Drehung den gewohnten Massenterm

$$\mathcal{L}_m = -\frac{F_0^2}{4} \langle \chi(\omega) U^\dagger + U \chi^\dagger(\omega) \rangle$$

in der effektiven Lagrangedichte.

Führt man nun eine Substitution der Form

$$U = e^{-i\omega\tau_3/2} U' e^{-i\omega\tau_3/2}$$

durch, so sieht man, dass sich für beliebiges ω die Form des Massenterms nicht ändert, da

$$\langle \chi(\omega) U^\dagger + U \chi^\dagger(\omega) \rangle = \langle \chi U'^\dagger + U' \chi^\dagger \rangle.$$

Auch hier ändert sich also die Form der effektiven Lagrangedichte nicht, so dass dieselbe Physik beschrieben wird. Dieses Ergebnis war zu erwarten, da es bereits weiter oben für die QCD als fundamentale Theorie gezeigt wurde.

Chiral gedrehter Massenterm in der Gitter-QCD

Versucht man, die QCD mit Wilson-Fermionen auf dem Gitter durch eine effektive Kontinuums-Theorie zu beschreiben, tritt in der Lagrangedichte bis $\mathcal{O}(a)$ im wesentlichen ein zusätzlicher symmetriebrechender Term der Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QCD} + a c_{SW} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \psi + \mathcal{O}(a^2)$$

5. Axial gedrehter Massenterm

auf. Durch den Gitterterm und den Massenterm sind jetzt zwei Richtungen im chiralen Symmetrieraum ausgezeichnet. Sind diese beiden Terme gegeneinander verdreht, so lassen sich die Effekte nicht mehr durch eine entsprechende Rotation des Grundzustandes wegtransformieren, wie es ohne den Gitterterm der Fall war. Die Konsequenzen daraus sollen im Folgenden im Rahmen der chiralen Störungstheorie untersucht werden.

Wie im vierten Kapitel beschrieben, transformiert sich der Gitterterm in der Spurionanalyse wie der Massenterm, und man erhält als effektive *chirale* Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2^{(0)} + \mathcal{L}_m - \frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle$$

mit

$$\rho = 2W_0 a \mathbf{1}.$$

Auch hier wird der Massenterm jetzt einer chiralen Drehung

$$\chi \rightarrow \chi(\omega)$$

unterworfen, wie sie im letzten Abschnitt beschrieben wurde. Da in der weiteren Rechnung alle Größen in Potenzen der Gitterkonstante entwickelt werden, stellt es sich als sinnvoll heraus, die Drehung auf den Gitterterm zu übertragen. Dies wird erreicht, indem die Pionmatrix zur neuen Matrix U' gedreht wird, die durch

$$U = e^{-i\omega\tau_3/2} U' e^{-i\omega\tau_3/2}$$

definiert ist. Der Gitterterm erhält dann die Form

$$\begin{aligned} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle &= \langle \rho e^{i\omega\tau_3/2} U'^\dagger e^{i\omega\tau_3/2} + e^{-i\omega\tau_3/2} U' e^{-i\omega\tau_3/2} \rho^\dagger \rangle \\ &\equiv \langle \rho(\omega) U'^\dagger + U' \rho(\omega)^\dagger \rangle, \end{aligned} \quad (5.1)$$

wobei die nun drehwinkelabhängige Matrix $\rho(\omega)$ durch

$$\rho(\omega) = e^{i\omega\tau_3/2} \rho e^{i\omega\tau_3/2} = e^{i\omega\tau_3} \rho$$

definiert ist. In dieser Betrachtungsweise bewirkt ein chiral gedrehter Massenterm also im Rahmen der Gitter-QCD nicht wegtransformierbare Gitterartefakte.

5.2. Pionmassen in niedrigster Ordnung

Exakte Berechnung

Wie oben gezeigt wurde, erhält man den Symmetriebrechungsterm

$$\mathcal{L}_{sb}^{(tm)} = -\frac{F_0^2}{4} \langle (\chi + \rho(\omega)) U^\dagger + U (\chi + \rho(\omega))^\dagger \rangle,$$

wobei statt U' jetzt wieder U geschrieben wird. Im Folgenden wird die Matrix $\rho(\omega)$ nur noch als ρ bezeichnet. Diese Matrix kann eindeutig zerlegt werden in

$$\rho = \rho_0 \mathbf{1} + i\rho_3 \tau_3,$$

wobei die beiden reellen Parameter durch

$$\rho_0 = 2W_0 a \cos \omega$$

und

$$\rho_3 = 2W_0 a \sin \omega$$

gegeben sind. Zu beachten ist dabei, dass sowohl ρ_0 als auch ρ_3 von der Ordnung a sind, was im weiteren Verlauf der Rechnung benutzt werden wird. Für die Summe der beiden Matrizen χ und ρ erhält man

$$\mu = \chi + \rho = (\chi_0 + \rho_0)\mathbf{1} + \rho_3 i\tau_3 \equiv \mu_0 \mathbf{1} + \mu_3 i\tau_3$$

mit den Parametern

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 2B_0 m + 2W_0 a \cos \omega \\ \mu_3 &= 2W_0 a \sin \omega. \end{aligned}$$

Um die Massen der Goldstonebosonen zu bestimmen, muss diese Lagrangedichte um das Minimum entwickelt werden. Dieses kann hier durch einen Trick bestimmt werden, der die Isomorphie von $U(2)$ und S^3 (der Einheitskugel in vier Dimensionen) ausnutzt [22].

Eine beliebige 2×2 Matrix A ist nämlich genau dann unitär, wenn sie durch

$$A = a_0 \mathbf{1} + i a_i \tau_i \quad \text{mit} \quad a_0, a_i \in \mathbb{R}$$

ausgedrückt werden kann und außerdem

$$|a|^2 = a_0^2 + a_i a_i = 1 \quad \text{oder} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in S^3$$

gilt.

In unserem Fall ist also

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{|\mu|} = \frac{\mu_0}{|\mu|} \mathbf{1} + \frac{\mu_3}{|\mu|} i\tau_3 = e^{i\beta\tau_3}$$

eine unitäre Matrix. Durch Umkehrung der oben benutzten Formel erhält man für den Drehwinkel

$$\cos \beta = \frac{\mu_0}{|\mu|}.$$

Der symmetriebrechende Term der Lagrangedichte kann nun auf die Form

$$\mathcal{L}_{sb}^{(tm)} = -\frac{F_0^2}{4} |\mu| \langle \hat{\mu} U^\dagger + U \hat{\mu}^\dagger \rangle$$

gebracht werden. Für zwei beliebige unitäre 2×2 Matrizen A und B gilt

$$\frac{1}{2} \langle AB^\dagger \rangle = a_0 b_0 + a_i b_i,$$

5. Axial gedrehter Massenterm

wobei die gleiche Zerlegung wie oben benutzt wurde. Dieser Ausdruck läßt sich als ein Skalarprodukt von zwei Einheitsvektoren im \mathbb{R}^4 auffassen, das genau dann maximal wird, wenn die Vektoren identisch sind. Die Lagrangedichte wird also für

$$U = \hat{\mu} = e^{i\beta\tau_3}$$

minimiert. Durch die chirale Transformation

$$U = e^{i\beta\tau_3/2} U' e^{i\beta\tau_3/2}$$

erhält man die gewünschte Form, ohne dass der kinetische Anteil der Lagrangedichte verändert wird. Der Symmetriebrechungsterm ist nun

$$\mathcal{L}_{sb}^{(tm)} = -\frac{F_0^2}{4} |\mu| \langle U'^{\dagger} + U' \rangle.$$

Durch Entwicklung der Matrix

$$U' = \exp\left(\frac{i}{F_0} \pi_a \tau_a\right)$$

nach den Potenzen der Pionfelder erhält man für den Massenterm

$$\mathcal{L}_M = \frac{|\mu|}{2} \pi_a \pi_a$$

und damit für die Massen in niedrigster Ordnung

$$\begin{aligned} M_\pi^2 &= |\mu| = \sqrt{\chi_0^2 + 2\chi_0\rho_0 + \rho_0^2 + \rho_3^2} \\ &= \chi_0 \sqrt{1 + 2\frac{\rho_0}{\chi_0} + \mathcal{O}(a^2)} \\ &= \chi_0 \left[1 + \frac{\rho_0}{\chi_0} + \mathcal{O}(a^2) \right] \\ &= \chi_0 + \rho_0 + \mathcal{O}(a^2) \\ &= 2B_0 m' + 2W_0 a \cos\omega + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned}$$

Man erkennt, dass in niedrigster Ordnung der Gitter-Term von ω abhängig wird, was zu erwarten war. Es gibt in dieser Ordnung keine Aufspaltung der Massen von π^\pm und π^0 .

5.3. Entwicklung nach Potenzen von a

Das Ergebnis der vorhergehenden Rechnung soll nun noch einmal auf eine andere Weise hergeleitet werden, die sich leichter auf höhere Ordnungen verallgemeinern lässt.

Die Pionfelder in der ungedrehten Matrix U werden jetzt als π'_i bezeichnet. Diese sind so definiert, dass $\pi'_i = 0$ dem Minimum der Lagrangedichte ohne Gitterterm entspricht. Der Gitterterm wird nun als Störung betrachtet, die das Minimum zum neuen Wert $\tilde{\pi}_i$ verschiebt. Die physikalisch relevanten Felder entsprechen daher der Differenz

$$\pi_a = \pi'_a - \tilde{\pi}_a.$$

Aus der exakten Rechnung im letzten Abschnitt sieht man, dass in führender Ordnung

$$U = e^{i\pi'_a \tau_a / F_0} = \hat{\mu} = e^{i\beta \tau_3}$$

ist, so dass man für die Werte im Minimum

$$\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = 0, \quad \tilde{\pi}_3 = F_0 \beta$$

erhält. Dabei gilt

$$\tan \beta = \frac{\mu_3}{\mu_0} = \frac{\rho_3}{\chi_0 + \rho_0} = \frac{\rho_3}{\chi_0 (1 + \mathcal{O}(a))} = \frac{\rho_3}{\chi_0} (1 + \mathcal{O}(a)),$$

und damit

$$\beta = \arctan \left[\frac{\rho_3}{\chi_0} (1 + \mathcal{O}(a)) \right] = \frac{W_0 a}{B_0 m'} \sin \omega + \mathcal{O}(a^2).$$

Durch Entwicklung der Lagrangedichte nach den Pionfeldern soll dieses Ergebnis nun reproduziert werden. Dazu wird angenommen, dass die Störung des Minimalwertes ebenfalls linear im Gitterabstand ist, d.h. man verwendet den Ansatz

$$\tilde{\pi}_b = a \lambda_b + \mathcal{O}(a^2).$$

In die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{sb}^{(tm)} = -\frac{F_0^2}{4} \langle \mu U^\dagger + U \mu^\dagger \rangle$$

werden nun die expliziten Ausdrücke für die Feldvariablen

$$U = \exp \left(\frac{i}{F_0} \pi'_b \tau_b \right) = \exp \left(\frac{i}{F_0} (a \lambda_b + \pi_b) \tau_b \right)$$

und den Störungsterm

$$\mu = \mu_0 \mathbf{1} + \mu_3 i \tau_3$$

eingesetzt und die Exponentialfunktion bis zum quadratischen Term entwickelt. Das Ergebnis ist

$$\mathcal{L}_{sb}^{(tm)} = \text{const} + \frac{\mu_0}{2} \left(2a \lambda_b \pi_b + \pi_b^2 \right) - \mu_3 F_0 (a \lambda_3 + \pi_3) + \mathcal{O}(\pi^3, a^2).$$

Im Minimum muss der lineare Term verschwinden, es gilt also

$$\mu_0 a \lambda_b \pi_b = \mu_3 F_0 \pi_3.$$

Daraus folgt für die Vakuumerwartungswerte

$$\tilde{\pi}_1 = a \lambda_1 = \tilde{\pi}_2 = a \lambda_2 = 0$$

sowie

$$\tilde{\pi}_3 = a \lambda_3 = F_0 \frac{\mu_3}{\mu_0} = F_0 \tan \beta = F_0 \frac{W_0 a}{B_0 m'} \sin \omega + \mathcal{O}(a^2).$$

In der betrachteten Ordnung $\mathcal{O}(a)$ stimmt dieses Ergebnis mit dem oben erhaltenen überein. Für die Pionmassen erhält man

$$M_\pi^2 = \mu_0 = 2B_0 m' + 2W_0 a \cos \omega,$$

was ebenfalls in Ordnung $\mathcal{O}(a)$ mit dem oben erhaltenen Ergebnis übereinstimmt.

6. Berechnung der Pionmassen in Ordnung p^4

6.1. Treelevel-Terme: Entwicklung von \mathcal{L}_4

Vorgehensweise

Um die chirale Störungstheorie in nächstführender Ordnung (hier als $\mathcal{O}(p^4)$ bezeichnet) anzuwenden, müssen nach dem Weinbergschen Powercounting (siehe Kapitel 3) einerseits die Treelevel-Beiträge aus der Lagrangedichte \mathcal{L}_4 , andererseits die Ein-Schleifen-Beiträge aus \mathcal{L}_2 berücksichtigt werden. Hier sollen zunächst die Treelevel-Terme untersucht werden, die auch als Kontakt-Terme bezeichnet werden.

Der Ausgangspunkt dazu ist die allgemeine Lagrangedichte von Gasser und Leutwyler, ergänzt um die zusätzlichen Gitterterme der Ordnung a . Diese wurde bereits in Gl. 4.10 angegeben, muss jedoch nun mit chiral gedrehtem Gitterterm $\rho(\omega)$ verwendet werden. Im Folgenden werden die einzelnen Summanden analog zur vorherigen Rechnung bis zur Ordnung π^2 in den Pionfeldern und bis zur Ordnung a in der Gitterkonstanten entwickelt.

L_1 bis L_3 -Terme

Die Entwicklungen der Terme proportional zu L_1 bis L_3 enthalten mindestens vier Ableitungen von Pionfeldern und sind daher in diesem Zusammenhang nicht von Interesse.

L_4 und W_4 -Terme

Der erste Teil dieser Terme entspricht dem kinetischen Teil der Lagrangedichte führender Ordnung. Bis zur Ordnung a erhält man

$$\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle = \frac{2}{F_0^2} (\partial_\mu \pi_b) (\partial_\mu \pi_b).$$

Die folgenden Rechnungen können vereinfacht werden, wenn zunächst eine allgemeine Matrix der Form

$$\eta = \mathbf{1}\eta_0 + i\tau_3\eta_3$$

betrachtet wird. Bis $\mathcal{O}(a)$ erhält man

$$\langle \eta U^\dagger + U \eta^\dagger \rangle = 4\eta_0 - \frac{2}{F_0^2} \eta_0 (2a\lambda_b \pi_b + \pi_b^2) + \frac{4}{F_0} \eta_3 (a\lambda_3 + \pi_3) + \mathcal{O}(\pi^3, a^2). \quad (6.1)$$

6. Berechnung der Pionmassen in Ordnung p^4

Damit kann nun die zweite Spur in den L_4 und W_4 -Termen bestimmt werden. Das Ergebnis ist

$$L_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle = \frac{8L_4 \chi_0}{F_0^2} (\partial_\mu \pi_b)(\partial_\mu \pi_b) + \mathcal{O}(\pi^3, a^2)$$

sowie

$$W_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle = \frac{8W_4 \rho_0}{F_0^2} (\partial_\mu \pi_b)(\partial_\mu \pi_b) + \mathcal{O}(\pi^3, a^2).$$

L_5 und W_5 -Terme

Der L_5 -Term enthält nur die Diagonalmatrix χ und ist daher proportional zum L_4 -Term. Der einzige Unterschied ist ein Faktor $1/2$, da nur noch eine Spur vorkommt. Man erhält

$$L_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \left[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right] = \frac{4L_5 \chi_0}{F_0^2} (\partial_\mu \pi_b)(\partial_\mu \pi_b) + \mathcal{O}(\pi^3, a^2).$$

Die gedrehte Matrix $\rho(\omega)$ ist keine Diagonalmatrix. Daher trifft das Argument von oben zwar nicht auf den W_5 -Term zu, jedoch sind die Abweichungen von der Ordnung a^2 und π^3 . Daher ist auch hier das Ergebnis proportional zum W_4 -Term:

$$W_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \left[\rho U^\dagger + U \rho^\dagger \right] = \frac{4W_5 \rho_0}{F_0^2} (\partial_\mu \pi_b)(\partial_\mu \pi_b) + \mathcal{O}(\pi^3, a^2).$$

L_6 und W_6 -Terme

Für die Entwicklung des L_6 -Terms wird auch hier zunächst benutzt, dass χ eine Diagonalmatrix ist. Damit folgt

$$L_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle^2 = L_6 \chi_0^2 \langle U^\dagger + U \rangle^2.$$

Da U eine $SU(2)$ -Matrix ist, gilt außerdem

$$\langle U^\dagger + U \rangle = 4 \cos \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0}$$

und damit unter Benutzung der Cosinus-Reihe

$$\langle U^\dagger + U \rangle^2 = 16 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right)^2 + \mathcal{O}(\pi'^4) \right]^2 = 16 - 16 \left(\frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right)^2 + \mathcal{O}(\pi'^4)$$

Durch Umschreiben auf die Variablen π_a erhält man schließlich

$$L_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle^2 = \text{const} - \frac{16L_6 \chi_0^2}{F_0^2} \left(2a \lambda_b \pi_b + \pi_b^2 \right) + \mathcal{O}(\pi^3, a^2).$$

An dieser Stelle ist es wichtig zu betrachten, was mit den $\mathcal{O}(\pi'^4)$ -Termen passiert. Die Entwicklung mit Hilfe des Binomialsatzes ergibt

$$\pi'^4 = (\pi + \lambda a)^4 = \pi^4 + 4\pi^3 \lambda a + 6\pi^2 \lambda^2 a^2 + 4\pi \lambda^3 a^3 + \lambda^4 a^4.$$

Man sieht, dass die Kontaktterme von $\mathcal{O}(a^2)$ sind und daher in diesem Kontext vernachlässigt werden können. In den folgenden Rechnungen wird dieses Argument implizit verwendet.

Der W_6 -Terms besteht aus zwei Spuren, die miteinander multipliziert werden. Für den ersten Teil gilt wie oben

$$\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle = 4\chi_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\bar{\pi}'^2}{F_0^2} + \mathcal{O}(\bar{\pi}'^4) \right),$$

der zweite Teil ergibt nach Gl. 6.1

$$\langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle = 4\rho_0 - \frac{2}{F_0^2} \rho_0 \bar{\pi}'^2 + \frac{4}{F_0} \rho_3 \pi'_3 + \mathcal{O}(\bar{\pi}'^4).$$

Für das Produkt erhält man

$$\begin{aligned} & W_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle \\ &= \text{const} + \frac{16W_6}{F_0^2} \left(-\chi_0 \rho_0 \pi^2 + F_0 \chi_0 \rho_3 \pi_3 \right) + \mathcal{O}(\pi^3, a^2). \end{aligned}$$

L_7 und W_7 -Terme

Die Terme proportional zu L_7 und W_7 verschwinden, da der Ausdruck

$$\langle \chi U^\dagger - U \chi^\dagger \rangle = \chi_0 \langle U^\dagger - U \rangle$$

für den Fall $N_f = 2$ gleich Null ist. In diesem Fall gilt nämlich

$$U = \exp\left(\frac{i}{F_0} \pi_a \tau_a\right) = \cos \frac{|\bar{\pi}'|}{F_0} + i \hat{\pi}'_a \tau_a \sin \frac{|\bar{\pi}'|}{F_0} \quad (6.2)$$

mit

$$|\bar{\pi}'| = \sqrt{\pi'_a \pi'_a} \quad \text{und} \quad \hat{\pi}'_a = \frac{\pi'_a}{|\bar{\pi}'|}.$$

Bei der Differenzbildung bleiben nur die spurlosen Imaginärteile übrig.

L_8 und W_8 -Terme

Für die Entwicklung des L_8 -Terms wird zunächst wieder die Diagonalform der Matrix χ benutzt. Man erhält

$$\langle \chi U^\dagger \chi U^\dagger + U \chi^\dagger U \chi^\dagger \rangle = \chi_0^2 \langle U^\dagger U^\dagger + U U \rangle.$$

Mit Hilfe von Gl.6.2 erhält man

$$U^\dagger U^\dagger + U U = 2 \cos^2 \frac{|\bar{\pi}'|}{F_0} - 2 \hat{\pi}'_a \hat{\pi}'_b \tau_a \tau_b \sin^2 \frac{|\bar{\pi}'|}{F_0}.$$

Durch Spurbildung und Benutzung der Reihen für Cosinus und Sinus ergibt sich schließlich

$$L_8 \langle \chi U^\dagger \chi U^\dagger + U \chi^\dagger U \chi^\dagger \rangle = \text{const} - 8 \frac{L_8 \chi_0^2}{F_0^2} \left(2a \lambda_b \pi_b + \pi_b^2 \right) + \mathcal{O}(\pi^3, a^2).$$

6. Berechnung der Pionmassen in Ordnung p^4

Die im W_8 -Term enthaltene Spur

$$\langle \chi U^\dagger \rho U^\dagger + U \rho^\dagger U \chi^\dagger \rangle = \chi_0 \langle U^\dagger \rho U^\dagger + U \rho^\dagger U \rangle$$

wird explizit ausgerechnet, wobei wieder Gl.6.2 benutzt wird. Es gilt

$$\begin{aligned} U^\dagger \rho U^\dagger &= \left(\cos \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} - i \hat{\pi}'_a \tau_a \sin \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) \left(\rho_0 + i \tau_3 \rho_3 \right) \left(\cos \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} - i \hat{\pi}'_a \tau_a \sin \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) \\ &= \rho_0 \left(\cos \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} - i \hat{\pi}'_a \tau_a \sin \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right)^2 + i \tau_3 \rho_3 \cos^2 \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \\ &\quad + \hat{\pi}'_a \rho_3 (\tau_a \tau_3 + \tau_3 \tau_a) \sin \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \cos \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} - i \hat{\pi}'_a \hat{\pi}'_b \rho_3 \tau_a \tau_3 \tau_b \sin^2 \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0}. \end{aligned}$$

Durch Addition mit dem komplex konjugierten Ausdruck, Spurbildung und Anwendung der Produktformeln für die trigonometrischen Funktionen erhält man

$$\langle U^\dagger \rho U^\dagger + U \rho^\dagger U \rangle = 4\rho_0 \cos \left(\frac{2|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) + 4\hat{\pi}'_3 \rho_3 \sin \left(\frac{2|\vec{\pi}'|}{F_0} \right).$$

Ausgedrückt durch die Differenzfelder π ist das Ergebnis

$$W_8 \langle \chi U^\dagger \rho U^\dagger + U \rho^\dagger U \chi^\dagger \rangle = \text{const} + \frac{8W_8}{F_0^2} \left(-\chi_0 \rho_0 \pi_a^2 + F_0 \chi_0 \rho_3 \pi_3 \right) + \mathcal{O}(\pi^3, a^2).$$

Summe der Treelevel-Beiträge in nächstführender Ordnung

Insgesamt erhält man für den kinetischen Teil der Lagrangedichte aus Gl. 4.10

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} K (\partial_\mu \pi_a)(\partial_\mu \pi_a)$$

mit

$$K = 1 + \frac{8}{F_0^2} \chi_0 (2L_4 + L_5) + \frac{8}{F_0^2} \rho_0 (2W_4 + W_5).$$

Der in den Pionfeldern lineare Anteil ist

$$\mathcal{L}_{\text{lin}} = a \lambda_a \pi_a \left[\chi_0 + \rho_0 + \frac{16\chi_0^2}{F_0^2} (2L_6 + L_8) \right] - \rho_3 F_0 \pi_3 \left[1 + \frac{8\chi_0}{F_0^2} (2W_6 + W_8) \right].$$

Für die Vakuumerwartungswerte folgt daraus

$$\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = 0$$

und

$$\tilde{\pi}_3 = \lambda_3 a = \rho_3 F_0 \frac{1 + \frac{8\chi_0}{F_0^2} (2W_6 + W_8)}{\chi_0 + \rho_0 + \frac{16\chi_0^2}{F_0^2} (2L_6 + L_8)}.$$

In Ordnung a kann das ρ_0 im Nenner vernachlässigt werden. Man erhält

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_3 &= \frac{\rho_3 F_0}{\chi_0} \frac{1 + \frac{8\chi_0}{F_0^2}(2W_6 + W_8)}{1 + \frac{16\chi_0}{F_0^2}(2L_6 + L_8)} + \mathcal{O}(a^2) \\ &= \frac{\rho_3 F_0}{\chi_0} \left[1 + \frac{8\chi_0}{F_0^2}(-4L_6 - 2L_8 + 2W_6 + W_8) \right] + \mathcal{O}(a^2)\end{aligned}\quad (6.3)$$

Aus diesem Ausdruck lassen sich leicht die Beiträge führender und nächstführender Ordnung ablesen.

Der in den Pionfeldern quadratische Anteil ist

$$\mathcal{L}_{\text{quad}} = \frac{1}{2} (\pi)^2 \left[\chi_0 + \rho_0 + \frac{16\chi_0^2}{F_0^2}(2L_6 + L_8) + \frac{16\chi_0\rho_0}{F_0^2}(2W_6 + W_8) \right].$$

6.2. Schleifenrechnung aus \mathcal{L}_2

Wechselwirkungsterme

Zusätzlich zu den bereits berechneten Termen tragen auch mögliche Schleifendiagramme der Lagrangedichte aus Gl. 4.9 zu den gesuchten Pionmassen bei. Um die dabei vorkommenden Wechselwirkungsterme zu berechnen, muss die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \mu U^\dagger + U \mu^\dagger \rangle$$

zunächst bis zur Ordnung π'^4 nach den Feldern entwickelt werden. Für den symmetrischen Anteil gilt [23]

$$\frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle = \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi}' \partial_\mu \vec{\pi}') + \frac{1}{6F_0^2} \left[(\vec{\pi}' \partial_\mu \vec{\pi}') (\vec{\pi}' \partial_\mu \vec{\pi}') - \vec{\pi}'^2 (\partial_\mu \vec{\pi}' \partial_\mu \vec{\pi}') \right] + \mathcal{O}(\pi'^6),$$

wie sich unter Benutzung der Spurformeln aus dem Anhang nachrechnen lässt. Für den Massen- und Gitterterm erhält man

$$\begin{aligned}-\frac{F_0^2}{4} \langle \mu U^\dagger + U \mu^\dagger \rangle &= -\frac{F_0^2}{4} \langle (\mu_0 + i\tau_3 \mu_3) \left(\cos \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} - i\vec{\tau} \hat{\pi}' \sin \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) + \text{kompl. Konj.} \rangle \\ &= -\frac{F_0^2}{4} \left(4\mu_0 \cos \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} + 4\mu_3 \hat{\pi}'_3 \sin \frac{|\vec{\pi}'|}{F_0} \right) \\ &= -F_0^2 \mu_0 - F_0 \mu_3 \pi'_3 + \frac{\mu_0}{2} \vec{\pi}'^2 + \frac{\mu_3}{6F_0} \vec{\pi}'^2 \pi'_3 - \frac{1}{24F_0^2} (\vec{\pi}'^2)^2 + \mathcal{O}(\pi'^5)\end{aligned}\quad (6.4)$$

Diese Lagrangedichte muss als Nächstes mit Hilfe der Definition

$$\pi_j = \pi'_j - a\lambda_j$$

6. Berechnung der Pionmassen in Ordnung p^4

auf die Felder π_j umgeschrieben werden. Für die Wechselwirkungsterme erhält man bis zur Ordnung a aus dem kinetischen Anteil

$$\mathcal{L}_{\text{WW,kin}} = \frac{1}{6F_0^2} \left[2a(\lambda_j \partial_\mu \pi'_j)(\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) + (\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})^2 - 2a(\lambda_j \pi_j)(\partial_\mu \vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) - (\pi^2)(\partial_\mu \vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) \right].$$

Terme der Ordnung π^6 liefern auch hier keinen Beitrag, da in ihrer Binomialentwicklung mehr als vier Pionfelder oder mindestens der Faktor a^2 auftauchen. Aus dem symmetriebrechenden Anteil erhält man

$$\mathcal{L}_{\text{WW,s.b.}} = \frac{\rho_3}{6F_0} \pi^2 \pi_3 - \frac{\chi_0}{6F_0^2} a \lambda_i \pi_i \pi^2 - \frac{\chi_0 + \rho_0}{24F_0^2} \pi^4.$$

Auch hier liefert der π^5 -Term keinen Beitrag, da alle ungeraden Terme einen Faktor μ_3 enthalten und daher der π^4 Term die Ordnung a^2 hat.

Die *Chirale Dimension* eines Diagramms ist nach Gl. 3.11 durch

$$D = 2 + 2N_L + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n}$$

gegeben, wobei N_L die Anzahl der Schleifen bezeichnet und N_k die Anzahl der Vertices aus der Lagrangedichte der Ordnung k ist.

Da in unserem Fall nur Vertices der Ordnung $k = 2$ (bzw $n = 1$) betrachtet werden, haben alle Diagramme mit genau einer Schleife die chirale Dimension 4 und tragen daher zu den Pionmassen nächster Ordnung bei.

Insgesamt werden durch die neuen Dreiervertices, zusätzlich zu dem gewohnten Einschleifendiagramm (Abb. 6.1) zwei weitere Diagramme mit nur einer Schleife möglich, nämlich die in Abb. 6.2 gezeigten.

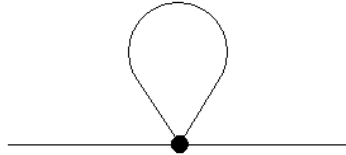


Abbildung 6.1.: *Schleifendiagramm mit Vierervertex. Dieses ist von $\mathcal{O}(a)$ und trägt daher zur Pion-Selbstenergie bei*

Die Pionfelder kommen in den neuen Dreier-Wechselwirkungstermen asymmetrisch vor, daher ist anzunehmen, dass diese Diagramme zu unterschiedlichen Massen der geladenen und ungeladenen Pionen führen werden. Alle Terme, die drei Pionfelder enthalten, sind jedoch von der Ordnung a . Da in den beiden möglichen Diagrammen jeweils genau zwei Vertices vorkommen, ist ihr Beitrag von der Ordnung a^2 und wird hier (bei Rechnung bis zur Ordnung a) nicht berücksichtigt. Der entscheidende Wechselwirkungsterm ist daher derjenige, der den Vierervertex beschreibt. Dieser hat die Form

$$\mathcal{L}_{\text{WW}} = \frac{1}{6F_0^2} \left[(\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})^2 - (\pi^2)(\partial_\mu \vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) \right] - \frac{\mu_0}{24F_0^2} \pi^4. \quad (6.5)$$

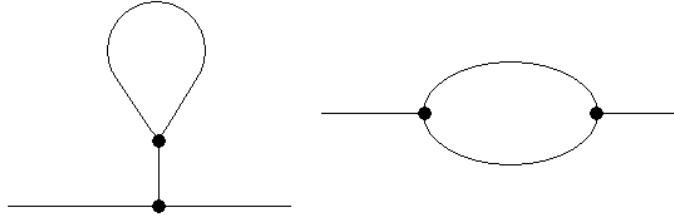


Abbildung 6.2.: Schleifendiagramme mit Dreiervertizes. Da mindestens zwei Vertices der Ordnung a vorkommen, werden diese Diagramme nicht berücksichtigt

Feynman-Regel für den 4-Pion-Vertex

Die Wechselwirkungs-Lagrangedichte aus Gl.6.5 enthält drei verschiedene Terme, die sich durch die Anzahl und Anordnung der Ableitungen unterscheiden. Der einfachste Vertex wird durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{24F_0^2} (\vec{\pi}^2)^2 = -\frac{1}{4!} V_{abcd}^{(1)} \pi_a \pi_b \pi_c \pi_d$$

beschrieben. Daraus erhält man für den symmetrisierten Vertex

$$V_{abcd}^{(1)} = \frac{\mu_0}{3F_0^2} (\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}).$$

Die Ableitungen im zweiten Vertex

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{6F_0^2} (\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi})^2$$

führen jeweils zu einem Faktor ip , wobei alle Impulse als einlaufend definiert werden. Insgesamt erhält man das symmetrisierte Ergebnis

$$V_{abcd}^{(2)} = \frac{1}{3F_0^2} \left[(p_a + p_b)^2 \delta_{ab}\delta_{cd} + (p_a + p_c)^2 \delta_{ac}\delta_{bd} + (p_a + p_d)^2 \delta_{ad}\delta_{bc} \right].$$

Für den dritten vorkommenden Wechselwirkungsterm ergibt sich analog

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= -\frac{1}{6F_0^2} (\pi^2) (\partial_\mu \vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) \\ \Rightarrow V_{abcd}^{(3)} &= -\frac{2}{3F_0^2} \left[\delta_{ab}\delta_{cd} (p_a p_b + p_c p_d) + \delta_{ac}\delta_{bd} (p_a p_c + p_b p_d) + \delta_{ad}\delta_{bc} (p_a p_d + p_b p_c) \right]. \end{aligned}$$

Schleifenanteil der Pion-Selbstenergie

Zur Berechnung der Pion-Selbstenergie betrachtet man das in Abb. 6.1 dargestellte Diagramm. Das äußere Pion erhält den Impuls p und den Isospin-Index i , das Pion in der Schleife den Impuls k und den Isospin-Index j . In der Notation des letzten Abschnitts bedeutet das

$$i = a = d, \quad j = b = c, \quad p = p_a = -p_d, \quad k = p_b = -p_c.$$

6. Berechnung der Pionmassen in Ordnung p^4

Da alle Isospinkomponenten gleichermaßen zur Wechselwirkung beitragen, wird über den Index j summiert. Im Pion-Propagator wird die Masse in erster Ordnung

$$m_0^2 = \mu_0 = \chi_0 + \rho_0$$

eingesetzt. Insgesamt erhält man so für den Vertex des Diagramms aus Abb. 6.1

$$V_{\text{ges}} = \frac{1}{3F_0^2} \left[5m_0^2 + 4p^2 + 4k^2 \right].$$

und damit für den Schleifenanteil der Selbstenergie

$$\begin{aligned} \Sigma_\pi^L(p^2) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} V_{\text{ges}} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{3F_0^2} \frac{5m_0^2 + 4p^2 + 4k^2}{k^2 + m_0^2} \\ &= \frac{1}{6F_0^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{m_0^2 + 4p^2}{k^2 + m_0^2} + \frac{2}{3F_0^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + m_0^2}{k^2 + m_0^2} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Dieses wird nun mit Hilfe der dimensionellen Regularisierung behandelt. Dabei verschwindet das zweite Integral und man erhält

$$\Sigma_\pi^L(p^2) = \frac{1}{6F_0^2} (4p^2 + m_0^2) I(m_0^2, \Lambda^2, \epsilon)$$

mit

$$\begin{aligned} I(m_0^2, \Lambda^2, \epsilon) &= \Lambda^\epsilon \int \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\ &= \frac{m_0^2}{16\pi^2} \left[R + \log \left(\frac{m_0^2}{\Lambda^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Dabei wurde die Renormierungsskala Λ mit der Dimension einer Masse eingeführt. Das Ergebnis enthält die divergente Konstante

$$R = -\frac{2}{\epsilon} - [\log(4\pi) - \gamma + 1].$$

6.3. Ergebnis für die Pionmassen

Unter Berücksichtigung der bereits diskutierten Treelevel-Beiträge und der neuen Schleifenterme erhält man insgesamt für den inversen Propagator in nächstführender Ordnung („*next-to-leading-order*“, NLO)

$$G_{\text{NLO}}^{-1}(p^2) = p^2 + m_0^2 - \Sigma_\pi(p^2)$$

und damit für die Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NLO}} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi \partial_\mu \pi) \left(1 + \frac{8}{F_0^2} \chi_0 (2L_4 + L_5) + \frac{8}{F_0^2} \rho_0 (2W_4 + W_5) - \frac{2}{3F_0^2} I(m_0^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \pi^2 \left(m_0^2 - \frac{m_0^2}{6F_0^2} I(m_0^2) + \frac{16\chi_0^2}{F_0^2} (2L_6 + L_8) + \frac{16\chi_0 \rho_0}{F_0^2} (2W_6 + W_8) \right). \end{aligned}$$

Durch Renormierung der Felder gemäß

$$\pi = Z^{1/2} \pi_R \quad (6.8)$$

mit

$$Z = \left[1 + \frac{8}{F_0^2} \chi_0 (2L_4 + L_5) + \frac{8}{F_0^2} \rho_0 (2W_4 + W_5) - \frac{2}{3F_0^2} I(m_0^2) \right]^{-1}$$

erhält man wieder die Form

$$\mathcal{L}_{\text{NLO}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_R \partial_\mu \pi_R) + \frac{1}{2} M_\pi^2(\text{NLO}) \pi_R^2.$$

Die Pionmasse $M_\pi^2(\text{NLO})$ ist damit bis zur Ordnung a durch

$$\begin{aligned} M_\pi^2(\text{NLO}) &= m_0^2 + 8 \frac{\chi_0^2}{F_0^2} (4L_6 + 2L_8 - 2L_4 - L_5) \\ &+ 8 \frac{\chi_0 \rho_0}{F_0^2} (4W_6 + 2W_8 - 2W_4 - W_5 - 2L_4 - L_5) + \frac{m_0^2}{2F_0^2} I(m_0^2) \end{aligned}$$

gegeben. Dieser Ausdruck enthält noch die Divergenz des Schleifenintegrals $I(m_0^2)$. Durch Renormierung der Koeffizienten L_i und W_i gemäß

$$L_i = L_i^r + \frac{\Gamma_i}{32\pi^2} R$$

und

$$W_i = W_i^r + \frac{\Delta_i}{32\pi^2} R$$

wird diese absorbiert. Dazu müssen die Konstanten Γ_i und Δ_i der Bedingung

$$\begin{aligned} &(\chi_0 + \rho_0)^2 + 8\chi_0^2(5\Gamma_6 + 2\Gamma_8 - 2\Gamma_4 - \Gamma_5) \\ &+ 8\chi_0\rho_0(5\Delta_6 + 2\Delta_8 - 2\Delta_4 - \Delta_5 - 2\Gamma_4 - \Gamma_5) = 0 \end{aligned}$$

genügen. Man erhält den endlichen Ausdruck

$$\begin{aligned} M_\pi^2(\text{NLO}) &= \chi_0 + \rho_0 + 8 \frac{\chi_0^2}{F_0^2} (4L_6^r + 2L_8^r - 2L_4^r - L_5^r) \\ &+ 8 \frac{\chi_0 \rho_0}{F_0^2} (4W_6^r + 2W_8^r - 2W_4^r - W_5^r - 2L_4^r - L_5^r) \\ &+ \frac{(\chi_0 + \rho_0)^2}{32\pi^2 F_0^2} \log \left(\frac{\chi_0 + \rho_0}{\Lambda^2} \right). \end{aligned}$$

Als Letztes muss der logarithmische Term bis zur Ordnung a entwickelt werden. Diese Rechnung wird der Einfachheit halber mit Hilfe des Parameters

$$\zeta = \frac{\rho_0}{\chi_0} = \frac{2aW_0 \cos \omega}{2B_0 m'} \sim \mathcal{O}(a)$$

durchgeführt. Man erhält

$$\begin{aligned} (\chi_0 + \rho_0)^2 \log(\chi_0 + \rho_0) &\equiv \chi_0^2 (1 + \zeta)^2 \log [\chi_0 (1 + \zeta)] \\ &= \chi_0^2 \log \chi_0 (1 + 2\zeta) + \chi_0^2 \zeta + \mathcal{O}(\zeta^2) \\ &= \chi_0^2 \log \chi_0 + 2\chi_0 \rho_0 \log \chi_0 + \chi_0 \rho_0 + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned}$$

6. Berechnung der Pionmassen in Ordnung p^4

Damit ist das Endergebnis für die Pionmassen in nächstführender chiraler Ordnung bis zur Ordnung a

$$\begin{aligned}
M_\pi^2(\text{NLO}) &= \chi_0 + \rho_0 + 8 \frac{\chi_0^2}{F_0^2} (4L_6^r + 2L_8^r - 2L_4^r - L_5^r) \\
&\quad + 8 \frac{\chi_0 \rho_0}{F_0^2} (4W_6^r + 2W_8^r - 2W_4^r - W_5^r - 2L_4^r - L_5^r) \\
&\quad + \frac{1}{32\pi^2 F_0^2} \left[\chi_0^2 \log \frac{\chi_0}{\Lambda^2} + 2\chi_0 \rho_0 \log \frac{\chi_0}{\Lambda^2} + \chi_0 \rho_0 \right].
\end{aligned}$$

Zum Überprüfen dieses Ergebnisses betrachtet man Gl. 43 aus [24] für verschwindenden twist-Winkel ($\omega = 0$), zwei Valenz-Flavours ($N_f = 2$) und den Fall ohne Quenching, d.h. $\hat{m}_{\text{Val}} = \hat{m}_{\text{Sea}}$. Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$\rho_0 = \hat{a} \quad \text{und} \quad \chi_0 = \hat{m}_{\text{Val}} = \hat{m}_{\text{Sea}}.$$

Die Formeln stimmen dann bis zur Ordnung a^2 überein.

7. Berechnung der Pion-Zerfallskonstanten

7.1. Rechnung in erster Ordnung

Nach den Pionmassen soll nun die Pionzerfallskonstante F_π als zweite Größe berechnet werden. Ein typischer Prozess ist z.B. der Zerfall eines positiv geladenen Pions in ein positiv geladenes Myon und ein Myon-Neutrino

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu.$$

Es handelt sich hier um einen schwachen Zerfall, da die Baryonenzahlen für die einzelnen Quarkflavours (“Upness” und “Downness” bzw. die Isospin-Komponente I_3) nicht separat erhalten bleiben. Um den genauen Mechanismus des Pionzerfalls nach dem Standardmodell der Elementarteilchen zu beschreiben, müßte ausführlich auf die Beschreibung der schwachen Wechselwirkung eingegangen werden, was im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht möglich ist.

Hier soll deshalb die Bemerkung ausreichen, dass die schwache Wechselwirkung die Erhaltung der Parität verletzt. Eine Folge daraus ist, dass die Kopplung der (die Wechselwirkung vermittelnden) W -Bosonen an die Pionfelder über die Axialstromdichte stattfindet. Die Stärke der Kopplung ist damit durch das Matrixelement

$$\langle 0 | J_A^{\mu,a} | \pi_b(p) \rangle = i F_\pi p^\mu \delta_{ab} \quad (7.1)$$

mit der Pionzerfallskonstante F_π gegeben. Durch Messung des Pionenzerfalls erhält man den experimentellen Wert

$$F_\pi = 93 \text{ MeV}.$$

Aus dem Blickwinkel der chiralen Störungstheorie reicht es aus, das oben angegebene Matrixelement zu bestimmen, um den Pionzerfall zu beschreiben. Für diese Berechnung wird der Axialstrom $J_A^{\mu,a}$ benötigt, der mit der üblichen Noether-Prozedur ermittelt wird. Ausgangspunkt ist zunächst wieder die Lagrangedichte der Ordnung p^2

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle.$$

Eine Variation des *symmetrischen Anteils* gemäß

$$\delta \mathcal{L}_2^{(0)} = \mathcal{L}_2^{(0)}(U' = LUR^\dagger) - \mathcal{L}_2^{(0)}(U)$$

mit $R = \mathbf{1}$ und

$$L = \exp \left(i \theta_a^L \frac{\tau_a}{2} \right)$$

7. Berechnung der Pion-Zerfallskonstanten

ergibt bis zur Ordnung θ

$$\delta\mathcal{L}_2^{(0)} = \frac{F_0^2}{4} i\partial_\mu\theta_a^L \langle \tau_a U \partial_\mu U^\dagger \rangle.$$

Der linkshändige Strom ist damit

$$J_L^{\mu,a} = \frac{\partial(\delta\mathcal{L}_2^{(0)})}{\partial(\partial_\mu\theta_a^L)} = i\frac{F_0^2}{4} \langle \tau_a U \partial_\mu U^\dagger \rangle.$$

Analog erhält man für den rechtshändigen Strom

$$J_R^{\mu,a} = \frac{\partial(\delta\mathcal{L}_2^{(0)})}{\partial(\partial_\mu\theta_a^R)} = -i\frac{F_0^2}{4} \langle \tau_a \partial_\mu U^\dagger U \rangle$$

und damit für den Axialstrom

$$J_A^{\mu,a} = J_R^{\mu,a} - J_L^{\mu,a} = -i\frac{F_0^2}{4} \langle \tau_a \{U, \partial_\mu U^\dagger\} \rangle.$$

Der *symmetriebrechende Anteil* der Lagrangedichte leistet keinen Beitrag, da dessen Variation keine Terme proportional zu $\partial_\mu\theta$ enthält. Durch Entwicklung in den Pionfeldern erhält man

$$J_A^{\mu,a} = -i\frac{F_0^2}{4} \langle \tau_a \{U, \partial_\mu U^\dagger\} \rangle = -F_0 \partial_\mu \pi'_a + \mathcal{O}(\pi'^3).$$

Die Verschiebung des Pionfeldes

$$\pi'_a = \pi_a - a\lambda_a$$

hat keine Auswirkungen auf die Ableitung. Der π'^3 -Term enthält entweder einen Faktor a^2 oder zwei der physikalischen Pionfelder π , so dass sich in Ordnung a nichts an der Standardrechnung ändert. Damit erhält man für das Matrixelement

$$\langle 0 | J_A^{\mu,a} | \pi_b(p) \rangle = -F_0 \langle 0 | \partial_\mu \pi_a | \pi_b(p) \rangle = -F_0 (-ip_\mu) \delta_{ab}.$$

In erster Ordnung gilt also, insbesondere auch für einen gedrehten Massenterm,

$$F_\pi = F_0.$$

Diese Formel ist der Grund dafür, dass die in der Lagrangedichte auftauchende Konstante F_0 auch als **Pionzerfallskonstante** bezeichnet wird.

7.2. Rechnung in nächster Ordnung: Treelevel-Terme

Ansatz

In nächster Ordnung müssen zunächst wieder die Treelevel-Terme aus \mathcal{L}_4 berücksichtigt werden. Dazu wird die im letzten Abschnitt beschriebene Berechnung der Axialströme mit der Lagrangedichte aus Gl. 4.10 wiederholt, wobei nun jedoch ein gedrehter Gitterterm $\rho(\omega)$ eingesetzt wird. Diese Rechnung entspricht dem in Abb. 7.1 gezeigten Diagramm.



Abbildung 7.1.: Treelevel-Beitrag zu F_π . Das schwarze Viereck stellt die Kontraktion mit dem Axialstromvektor dar, der hier in zweiter Ordnung der chiralen Störungstheorie betrachtet wird.

L_1 bis L_3 -Terme

Diese Terme liefern keinen Beitrag, da in den entsprechenden Anteilen des Axialstromes mindestens drei Ableitungen der Pionmatrix U auftauchen. In der Entwicklung nach den Feldern interessieren hier jedoch nur die Terme, die genau ein Pionfeld enthalten.

L_4 und W_4 -Terme

Für den Axialstrom aus dem L_4 -Term erhält man

$$J_A^a(L_4) = -iL_4 \langle \tau_a \{U, \partial_\mu U^\dagger\} \rangle \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle = -\frac{16}{F_0} \chi_0 L_4 \partial_\mu \pi_a + \mathcal{O}(\pi^3),$$

sowie analog für den W_4 -Term

$$J_A^a(W_4) = -iW_4 \langle \tau_a \{U, \partial_\mu U^\dagger\} \rangle \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle = -\frac{16}{F_0} \rho_0 W_4 \partial_\mu \pi_a + \mathcal{O}(\pi^2, a^2).$$

L_5 und W_5 -Terme

Da χ eine $SU(2)$ -Diagonalmatrix ist, stimmt dieser Term wieder bis auf einen Faktor $1/2$ mit dem L_4 -Term überein. Man erhält also

$$J_A^a(L_5) = -iL_5 \langle \tau_a \{U, \partial_\mu U^\dagger\} \rangle [\chi U^\dagger + U \chi^\dagger] = -\frac{8}{F_0} \chi_0 L_5 \partial_\mu \pi_a + \mathcal{O}(\pi^3).$$

Die gleiche Formel läßt sich auch bis zur Ordnung a auf den W_5 -Term anwenden, das Ergebnis ist

$$J_A^a(W_5) = -iW_5 \langle \tau_a \{U, \partial_\mu U^\dagger\} \rangle [\rho U^\dagger + U \rho^\dagger] = -\frac{8}{F_0} \rho_0 W_5 \partial_\mu \pi_a + \mathcal{O}(\pi^2).$$

L_6 bis W_8 -Terme

Wie schon weiter oben erwähnt wurde, tragen Terme ohne Ableitungen nicht zu den Axialstromdichten bei. Daher muss dieser Teil der Lagrangedichte bei der Berechnung der Pionzerfallskonstante nicht berücksichtigt werden.

7. Berechnung der Pion-Zerfallskonstanten

Ergebnis der Treelevel-Terme

Insgesamt erhält man aus den Treelevel-Anteilen erster und zweiter Ordnung also den Axialstrom

$$J_A^a(\text{Treelevel}) = -F_0 \partial_\mu \pi_a - \frac{8}{F_0} [\chi_0 (2L_4 + L_5) + \rho_0 (2W_4 + W_5)] \partial_\mu \pi_a + \mathcal{O}(a^2).$$

Durch Einsetzen in Gl. 7.1 erhält man

$$\langle 0 | J_A^{\mu,a} | \pi_b(p) \rangle = i p_\mu \delta_{ab} \left(F_0 + \frac{8}{F_0} [\chi_0 (2L_4 + L_5) + \rho_0 (2W_4 + W_5)] \right) + \mathcal{O}(a^2).$$

7.3. F_π in nächster Ordnung: Schleifenanteil

Ansatz

Durch Entwicklung des Axialstromes führender Ordnung nach den Pionfeldern erhält man Vertizes mit zwei bis unendlich vielen Pionfeldern, die alle durch Schleifengraphen zur Zerfallskonstanten beitragen. Wie bei der Berechnung der Pionmassen wird die Anzahl und Art der auftretenden Diagramme jedoch dadurch beschränkt, dass die *chirale Dimension* den Wert 4 annehmen muss. Das bedeutet, dass auch hier nur Vertizes aus \mathcal{L}_2 und genau eine Schleife vorkommen können.

Entwicklung des Axialstromes bis $\mathcal{O}(\pi^3)$

Als erstes muss nun also der Axialstrom aus \mathcal{L}_2 nach den Feldern entwickelt werden. Als Ergebnis einer längeren Rechnung erhält man bis zur dritten Potenz in den ursprünglichen Feldern

$$J_{\mu,a}^A = -F_0 \partial_\mu \pi'_a + \frac{2}{3F_0} \left(\vec{\pi}'^2 \partial_\mu \pi'_a - (\vec{\pi}' \partial_\mu \vec{\pi}') \pi'_a \right) + \mathcal{O}(\pi'^5).$$

Verschiebung der Felder nach

$$\pi'_j = a \lambda_j + \pi_j$$

ergibt

$$\begin{aligned} J_{\mu,a}^A &= -F_0 \partial_\mu \pi_a + \frac{2}{3F_0} \left(2a \lambda_j \pi_j \partial_\mu \pi_a - a \lambda_j \partial_\mu \pi_j \pi_a - (\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) a \lambda_a \right) \\ &\quad + \frac{2}{3F_0} \left(\vec{\pi}^2 \partial_\mu \pi_a - (\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) \pi_a \right) + \mathcal{O}(\pi^4, a^2). \end{aligned}$$

Die π'^5 -Terme der ursprünglichen Felder tragen in dieser Ordnung nichts bei, da bei ihrer Entwicklung bis $\mathcal{O}(\pi^3)$ mindestens ein Faktor a^2 auftaucht. Die Vertizes mit zwei Pionfeldern sind jeweils von Ordnung a . Das bedeutet, dass die beiden möglichen Diagramme, die diese Vertizes

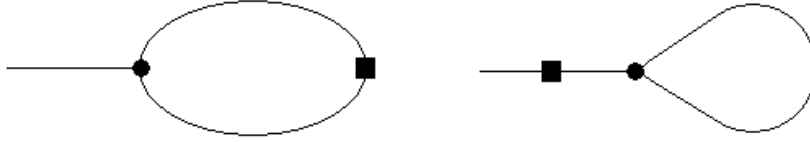


Abbildung 7.2.: Schleifenkorrekturen zu F_π der Ordnung a^2 . Das schwarze Viereck stellt den Axialstromvektor da , der schwarze Kreis die Dreiervertices aus dem vorherigen Kapitel.

enthalten (siehe Abb. 7.2), mit dem Faktor a^2 unterdrückt sind und daher hier nicht weiter untersucht werden.

Es bleiben also nur die Terme mit drei Pionfeldern. Diese tragen durch das Diagramm in Abb. 7.3 zur Zerfallskonstanten bei.

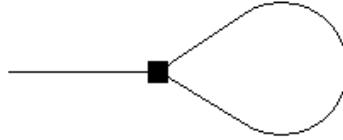


Abbildung 7.3.: Relevante Schleifenkorrektur zu F_π . Das schwarze Viereck stellt den Axialstromvektor da , der hier nur in führender Ordnung betrachtet wird.

Auswertung des Schleifendiagramms

Betrachtet wird zunächst die Korrelationsfunktion

$$\langle 0 | \vec{\pi}^2 \partial_\mu \pi_a | \pi_b(p) \rangle = \langle 0 | \pi_j \pi_j \partial_\mu \pi_a | \pi_b(p) \rangle.$$

Die Kontraktion des äußeren Impulseigenzustands mit einem Feld π_j ergibt

$$\delta_{jb} \langle \pi_j(0) | \partial_\mu \pi_a(0) \rangle = \delta_{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{ik_\mu}{k^2 + m^2} = 0.$$

Durch Kontraktion des Impulszustands mit dem abgeleiteten Feld $\partial_\mu \pi_a$ erhält man dagegen

$$(-ip_\mu) \delta_{ab} \langle \pi_j(0) | \pi_j(0) \rangle = -3ip_\mu \delta_{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} = -3ip_\mu \delta_{ab} I(m_0^2).$$

Der Faktor 3 stammt aus der Summation über die Isospinkomponenten, das divergente Integral $I(m_0^2)$ wurde in Gl. 6.7 bereits berechnet. Die Korrelationsfunktion

$$\langle 0 | (\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) \pi_a | \pi_b(p) \rangle = \langle 0 | (\pi_j \partial_\mu \pi_j) \pi_a | \pi_b(p) \rangle$$

ergibt analog durch Kontraktion des Impulszustandes mit dem abgeleiteten Feld

$$-ip_\mu \delta_{jb} \langle \pi_j(0) | \pi_a(0) \rangle = -ip_\mu \delta_{jb} \delta_{ja} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} = -ip_\mu \delta_{ab} I(m_0^2).$$

7. Berechnung der Pion-Zerfallskonstanten

Der Beitrag des Schleifendiagramms aus Abb.7.3 ist also insgesamt

$$\langle 0 | \frac{2}{3F_0} (\vec{\pi}^2 \partial_\mu \pi_a - (\vec{\pi} \partial_\mu \vec{\pi}) \pi_a) | \pi_b(p) \rangle = \frac{4}{3F_0} (-ip_\mu) \delta_{ab} I(m_0^2).$$

Feldstärkenrenormierung

Neben den bisher genannten Diagrammen muss außerdem die Renormierung der Feldstärken nach den Gln. 6.8f bei der Berechnung von F_π berücksichtigt werden. Dieser Schritt entspricht den in Abb. 7.4 gezeigten Diagrammen. Unter Berücksichtigung dieses Effektes ergibt die Kon-

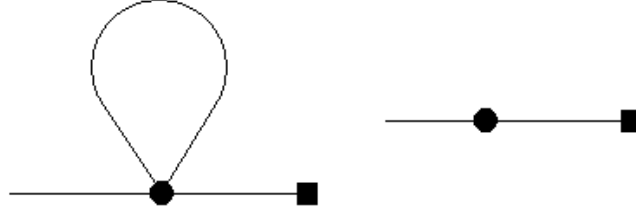


Abbildung 7.4.: *Beitrag der Feldstärkenrenormierung. Das linke Diagramm entspricht der Schleifenkorrektur, das rechte Diagramm den Kontakt-Termen aus dem letzten Kapitel.*

traktion einer Feldableitung mit einem äußeren Impulszustand nun

$$\langle 0 | \partial_\mu \pi_a(0) | \pi_b(p) \rangle = \sqrt{Z} (-ip_\mu) \delta_{ab}.$$

7.4. Ergebnis für die Zerfallskonstante

Durch Sammlung aller Beiträge erhält man insgesamt das Matrixelement

$$\begin{aligned} & \langle 0 | J_A^{\mu,a} | \pi_b(p) \rangle \\ &= ip_\mu \delta_{ab} \sqrt{Z} \left(F_0 + \frac{8}{F_0} [\chi_0 (2L_4 + L_5) + \rho_0 (2W_4 + W_5)] - \frac{4}{3F_0} I(m_0^2) \right) + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Die Zerfallskonstante ist damit

$$F_\pi = F_0 \frac{1 + \frac{8}{F_0^2} [\chi_0 (2L_4 + L_5) + \rho_0 (2W_4 + W_5)] - \frac{4}{3F_0^2} I(m_0^2)}{\left[1 + \frac{8}{F_0^2} \chi_0 (2L_4 + L_5) + \frac{8}{F_0^2} \rho_0 (2W_4 + W_5) - \frac{2}{3F_0^2} I(m_0^2) \right]^{1/2}}.$$

Näherung bis zur Ordnung χ_0 und ρ_0 ergibt

$$F_\pi = F_0 \left(1 + \frac{4}{F_0^2} [\chi_0 (2L_4 + L_5) + \rho_0 (2W_4 + W_5)] - \frac{1}{F_0^2} I(m_0^2) \right).$$

Terme der Ordnung χ_0^2 und $\chi_0\rho_0$ werden nicht berücksichtigt. Dies ist konsistent mit dem chiralen Powercounting-Schema, da auch die Lagrangedichte der Ordnung p^6 Terme proportional zu χ_0^2 und $\chi_0\rho_0$ zu F_π beiträgt, die ebenfalls nicht berücksichtigt werden. Nach der Renormierung der Koeffizienten W und L und der Entwicklung des chiralen Logarithmus erhält man das Endergebnis

$$F_\pi = F_0 \left(1 + \frac{4}{F_0^2} [\chi_0 (2L_4^r + L_5^r) + \rho_0 (2W_4^r + W_5^r)] - \frac{1}{16\pi^2 F_0^2} \left[(\chi_0 + \rho_0) \log \frac{\chi_0}{\nu^2} + \rho_0 \right] \right).$$

Im Kontinuumslimit ($\rho \rightarrow 0$) entspricht dieses Ergebnis dem von Gasser und Leutwyler aus [10] für $N_f = 2$, für endliche Gitterabstände ohne chirale Drehung stimmt das Ergebnis mit [19] überein.

8. Mesonenmassen im partiell gequenchten Modell

8.1. Einleitung

Fermionen-Dämpfung

Wie bereits im vierten Kapitel erwähnt wurde, ist es mit heutigen Rechnerleistungen nicht möglich, bei Gittersimulationen realistische Werte für die Quarkmassen zu verwenden. Das genaue Vorgehen bei diesen Gitterrechnungen kann hier nicht in allen Einzelheiten beschrieben werden. Der an dieser Stelle wichtige Aspekt ist, dass dabei verschiedene Feldkonfigurationen erzeugt werden, über die dann (gewichtet mit der euklidischen Wirkung) gemittelt wird. Zur Berechnung der einzelnen Konfigurationen ist die Bestimmung der Quarkdeterminanten

$$\det(\gamma_\mu D_\mu + m)$$

erforderlich, deren Berechnung besonders viel Rechenzeit in Anspruch nimmt. Sind ausreichend viele Feldkonfigurationen ermittelt, so können danach mit deutlich weniger Aufwand physikalisch interessante Größen wie Mesonen-Korrelatoren berechnet werden. In diesem letzten Schritt taucht die Fermionmasse als Teil des Propagators erneut auf.

Um die Rechenzeit zu begrenzen, wurde als erster Ansatz bei der Erzeugung von Feldkonfigurationen die Quarkdeterminante einfach durch eine Konstante ersetzt. Diese Herangehensweise wird als *quenched* (hier übersetzt mit „gedämpfte“) Gitterrechnung bezeichnet. Diese ist äquivalent dazu, in Feynmandiagrammen keine Quark-Schleifenterme zuzulassen.

Mit der Entwicklung leistungsfähigerer Rechner in den 1990er-Jahren wurde es schließlich doch möglich, Fermionen dynamisch zu simulieren, jedoch nicht für physikalische Werte der Quarkmassen. Deswegen ging man zu teilweise gedämpften („partially quenched“) Rechnungen über. In diesen wird in der Fermiondeterminante eine andere, höhere Masse als in den Propagatoren verwendet. Die dynamischen Quarks in der Determinante werden konventionell als Seequarks, die Quarks im Propagator dagegen als Valenzquarks bezeichnet.

Analytische Beschreibung

Um analytische Aussagen über Rechnungen dieser Art zu treffen, wurde von Morel ein supersymmetrisches Modell für gequenchte Rechnungen in der QCD entwickelt [25]. Später wurde

8. Mesonenmassen im partiell gequenchten Modell

dieses von Bernard und Golterman zunächst auf die gequenchte [26], später auf die partiell gequenchte chirale Störungstheorie angewendet [27]. Die Idee von Morel ist, der Theorie für jedes Valenzquark ein zusätzliches, *kommutierendes* Spin-1/2-Feld hinzuzufügen.

Diese sog. *Geister* sollen nun mit $\tilde{\psi}$, ihre Masse mit \tilde{m} bezeichnet werden. Das Pfadintegral der gedämpften QCD wird damit zu

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}[\psi \bar{\psi} \tilde{\psi} \bar{\tilde{\psi}} A] \exp \left(-S_G - \int d^4x \left[\bar{\psi} (\gamma_\mu D_\mu + m) \psi + \bar{\tilde{\psi}} (\gamma_\mu D_\mu + \tilde{m}) \tilde{\psi} \right] \right) \\ &= \int \mathcal{D}[A] \exp(-S_G) \frac{\det(\gamma_\mu D_\mu + m)}{\det(\gamma_\mu D_\mu + \tilde{m})} \end{aligned}$$

Falls die Geister massendegeneriert mit den Valenzquarks sind, kürzen sich die entsprechenden Determinanten heraus, so dass weder die Valenzquarks noch die Geister zu den Schleifenkorrekturen beitragen. Dies ist genau das Verhalten, das bei vollständig gequenchten Rechnungen simuliert wird. In partiell gequenchten Rechnungen gibt es zusätzlich zu den Valenzquarks und Geistern noch Seequarks, die kein entsprechendes Geisterfeld erhalten und so nicht gequench werden.

Die besondere Nützlichkeit von partiell gequenchten Rechnungen liegt darin, dass die Gasser-Leutwyler-Koeffizienten in ihnen ihre physikalischen Werte annehmen [28]. Das liegt daran, dass die Massenabhängigkeiten im Rahmen der chiralen Störungstheorie explizit gegeben sind, so dass die Gasser-Leutwyler-Koeffizienten für alle Werte der Seequark-Masse gleich sind. Geht man von identischen See- und Valenzquarkmassen $m_S = m_V$ aus, dann sind die Seequark-Propagatoren nicht mehr von Quark-Propagatoren in der QCD zu unterscheiden. Um die Werte der wirklichen QCD zu erhalten, muss mit drei Seequark-Flavours gerechnet werden, da dies der Situation in der Natur entspricht.

In diesem Kapitel wird zur Vereinfachung statt dessen der folgende Quark-Inhalt verwendet:

- Zwei entartete Valenzquarks der Masse m_V . Da diese Masse zur Bildung von Korrelatoren benutzt wird, ist sie durch die Numerik nicht nach unten begrenzt.
- Zwei entartete Seequarks mit der Masse m_S . Diese Masse muss einerseits so klein gewählt werden, dass die chirale Störungstheorie sinnvoll angewendet werden kann, andererseits muss sie aber auch so groß sein, dass die Quarkdeterminanten noch numerisch berechnet werden können.
- Zwei Geister mit der Valenzquark-Masse m_V . Die Geister sind unphysikalisch, da sie als kommutierende Spin 1/2-Felder das Spin-Statistik-Theorem verletzen.

Symmetriegruppe

Die bisher verwendete chirale Symmetriegruppe SU(2) wird nach dem Einführen der Seequarks und der Geister durch die graduierte Gruppe SU(4|2) ersetzt. Aufgrund von Effekten, die aus der geforderten Konvergenz von Funktionalintegralen über die Geistfelder folgen, ist dies eigentlich

nicht die korrekte Symmetriegruppe, für kleine Feldabweichungen kann jedoch trotzdem auf diese Weise gerechnet werden [29].

Die spontane Symmetriebrechung findet dann analog zum QCD-Fall statt: Im chiralen Grenzfall sind die Lagrangedichte und das Maß des Pfadintegrals invariant gegenüber Gruppentransformationen aus

$$G = \text{SU}(4|2)_R \times \text{SU}(4|2)_L,$$

während der Vakuum-Zustand nur invariant gegenüber der Untergruppe

$$H = \text{SU}(4|2)_V$$

ist. Die Symmetriebrechung führt dann zu 35 Goldstone-Teilchen, die durch eine $\text{SU}(4|2)$ -Matrix U beschrieben werden. Diese Matrix hat die Form

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Die 4×4 -Matrix A und die 2×2 -Matrix D enthalten kommutierende Einträge, die die 19 normalen Goldstone-Bosonen beschreiben. Die 4×2 -Matrix B und die 2×4 -Matrix C bestehen dagegen aus antikommutierenden Grassmann-Elementen, die die 16 fermionischen Goldstone-Teilchen repräsentieren. Diese entsprechen Mesonenfeldern, die ein Geistquark und ein gewöhnliches Quark enthalten und daher antikommutieren.

Matrizen dieser Form sind in der Theoretischen Physik bekannt, da sie auch in der Beschreibung von supersymmetrischen Quantenfeldtheorien benutzt werden [30]. Dort wird gerade die Eigenschaft benötigt, mit demselben Objekt bosonische und fermionische Freiheitsgrade gleichzeitig beschreiben zu können.

Um mit Hilfe einer solchen $\text{SU}(4|2)$ -Matrix eine (skalare) chirale Lagrangedichte aufzubauen, müssen sog. Superspuren verwendet werden. Für diese gilt mit den oben definierten Blockmatrizen

$$\text{sTr } U = \text{Tr } A - \text{Tr } D.$$

Durch die Verwendung von Superspuren bleibt die Relation

$$\text{sTr}(U_1 U_2) = \text{sTr}(U_2 U_1)$$

erhalten, die für normale Spuren nicht mehr gilt. Im diesem Kapitel werden Superspuren in den Lagrangendichten mit $\langle \rangle$ gekennzeichnet, damit die Formeln die gleiche Form wie in den vorherigen Kapiteln annehmen.

8.2. Berechnung der Valenzmesonenmassen in führender Ordnung

Massen- und Gittermatrizen

Die beiden im ungequenchten Fall verwendeten Matrizen χ und ρ erhalten durch die Erweiterung des Quarkinhalts eine neue Form. Zunächst wird die Theorie ohne gedrehten Massenterm

8. Mesonenmassen im partiell gequenchten Modell

betrachtet. Die Massenmatrix ist dann

$$\chi = 2B_0 \text{diag}(m_V, m_V, m_S, m_S, m_V, m_V).$$

Da die Gitterkorrekturen nicht von den Quarkmassen abhängen, ist die Gittermatrix proportional zur Einheitsmatrix:

$$\rho = 2W_0 a \mathbf{1}.$$

Die Drehung des Massenterms muss für die See- und Valenzquarks nicht mit dem gleichen Winkel erfolgen. Um den gedämpften Charakter zu erhalten, muss der Winkel für die Geister allerdings gleich dem Valenzwinkel gewählt werden. Insgesamt gibt es also in der gewisteten $SU(4|2)$ -Theorie zwei Parameter ω_V und ω_S . Die gedrehte Massenmatrix ist damit

$$\chi(\omega_V, \omega_S) = e^{-i\omega_V \tau_3^V/2} e^{-i\omega_S \tau_3^S/2} e^{-i\omega_V \tau_3^G/2} \chi e^{-i\omega_V \tau_3^G/2} e^{-i\omega_S \tau_3^S/2} e^{-i\omega_V \tau_3^V/2}$$

mit den erweiterten Pauli-Matrizen

$$\tau_3^V = \begin{pmatrix} \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3^S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3^G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix}.$$

Alle vorkommenden Drehmatrizen kommutieren miteinander, so dass die Reihenfolge der Drehungen nicht von Bedeutung ist. Als Abkürzung für die drei Drehungen wird im folgenden

$$e^{-i\omega \tau_3} \equiv e^{-i\omega_V \tau_3^V} e^{-i\omega_S \tau_3^S} e^{-i\omega_V \tau_3^G} \in SU(4|2)$$

verwendet. Die Massenmatrix wird dadurch formal wieder zu

$$\chi(\omega) = e^{-i\omega \tau_3/2} \chi e^{-i\omega \tau_3/2}.$$

Chirale Rücktransformation

Wie im ungedämpften Fall wird als Nächstes eine chirale Transformation durchgeführt, die die Drehung auf den Gitterterm verschiebt. Diese hat die Form

$$U = e^{-i\omega \tau_3/2} U' e^{-i\omega \tau_3/2}.$$

Ausgedrückt durch die transformierte Matrix U' , die wieder als U geschrieben wird, erhält die Lagrangedichte niedrigster Ordnung die Form

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \rho(\omega) U^\dagger + U \rho^\dagger(\omega) \rangle$$

mit der nun wieder ungedrehten Massenmatrix

$$\chi = 2B_0 \text{diag}(m_V, m_V, m_S, m_S, m_V, m_V)$$

und der gedrehten Gittermatrix

$$\rho(\omega) = \rho(\omega_V, \omega_S) = 2W_0 a e^{-i\omega_V \tau_3^V} e^{-i\omega_S \tau_3^S} e^{-i\omega_V \tau_3^G}.$$

8.2. Berechnung der Valenzmesonenmassen in führender Ordnung

Diese gedrehte Gittermatrix wird für die weitere Rechnung in drei 2×2 -Untermatrizen zerlegt:

$$\rho(\omega) = \begin{pmatrix} \rho^V(\omega_V) & 0 & 0 \\ 0 & \rho^S(\omega_S) & 0 \\ 0 & 0 & \rho^G(\omega_V) \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $\rho^V = \rho^G$. Für jede dieser Untermatrizen gilt die $SU(2)$ -Beziehung (hier für den Valenz-Anteil)

$$\rho^V(\omega_V) = \mathbf{1} 2W_0a \cos \omega_V + i\tau_3 2W_0a \sin \omega_V.$$

Wie bei der ungedämpften Rechnung werden außerdem die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \chi_0^V &= 2B_0m_V \\ \rho_0^V &= 2W_0a \cos \omega_V \\ \rho_3^V &= 2W_0a \sin \omega_V \end{aligned} \tag{8.1}$$

eingeführt. Für den See- und Geister-Anteil wird analog verfahren.

Wahl der Basis

Die $SU(4|2)$ -Matrix U hat die Form

$$U = \exp\left(\frac{i}{F_0}\Phi\right).$$

An dieser Stelle gibt es nun zwei prinzipiell verschiedene Methoden, die Matrix Φ zu konstruieren [31].

Die erste Möglichkeit ist es, eine Matrix-Darstellung der Generatoren der Gruppe $SU(4|2)$ zu definieren. Diese Methode ist die direkte Verallgemeinerung der Rechnungen, wie sie in den vorherigen Kapiteln durchgeführt wurden. Wenn man die 35 Generatoren als T'_i und die Goldstone-Felder als π'_j bezeichnet, so lässt sich die (verallgemeinerte) Pionmatrix durch

$$\Phi = \sum_j \pi'_j 2T'_j \quad \text{mit} \quad \text{sTr}\Phi = 0$$

ausdrücken. Die Rechnung findet dann genau wie im ungequenchten Fall statt. Da es bei dieser Darstellung keine einfache Zuordnung von Mesonenfeldern zu ihrem Quarkinhalt gibt, stellt es bei dieser Rechenmethode allerdings eine gewisse Näherung dar, die mit den Generatoren τ_i^V zusammenhängenden Felder als reine Valenzmesonen zu betrachten.

Die andere Möglichkeit ist, statt der Gruppe $SU(4|2)$ die Gruppe $U(4|2)$ zu betrachten. Der große Vorteil dieser Darstellung ist, dass die nun 36 Generatoren T_{ij} so gewählt werden können, dass jedem Matrixelement ein Generator entspricht, was eine stark vereinfachte Auswertung von Superspuren ermöglicht. Der Preis für diese Vereinfachung ist jedoch, dass nun ein neues Teilchen explizit in der Lagrangedichte berücksichtigt werden muss, das der Superspur von Φ_0 entspricht. Das neue Meson besitzt einen Massenterm und Kopplungen zu den Goldstonebosonen, wodurch weitere Parameter eingeführt werden müssen. Außerdem zerstört das Φ_0 durch Einführung einer weiteren Energieskala das chirale Powercounting. Um trotzdem auf das gleiche Ergebnis wie beim ersten Ansatz zu gelangen, muss dieses Teilchen wieder ausintegriert werden. Dieser zweite Ansatz ist bei vollständig gequenchten Rechnungen nötig, wird hier aber nicht weiter verfolgt.

Verschiebung des Minimums

In dieser Rechnung sei eine Parametrisierung $T_i = 2T'_i$ nach der ersten Methode so gewählt, dass sie τ_3^V, τ_3^S und τ_3^G enthält. Um das neue Minimum der Lagrangedichte in niedrigster Ordnung zu bestimmen, wird der symmetriebrechende Term

$$\mathcal{L}_{sb}^{pqtm} = -\frac{F_0^2}{4} \langle \mu U^\dagger + U \mu^\dagger \rangle$$

(mit der Abkürzung $\mu = \chi + \rho$) bis zur Ordnung π' entwickelt. Dazu ist es vorteilhaft, die Matrix μ in drei Teile

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu^V & 0 & 0 \\ 0 & \mu^S & 0 \\ 0 & 0 & \mu^G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^G \end{pmatrix}$$

zu zerlegen. Als Beispiel wird im folgenden μ^V betrachtet. Es gilt

$$\tilde{\mu}^V \equiv \begin{pmatrix} \mu^V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\chi_0^V + \rho_0^V) \mathbf{1}^V + i\rho_3^V \tau_3^V.$$

Für die Superspur dieses Anteils erhält man

$$\langle \tilde{\mu}^V U^\dagger + U \tilde{\mu}^{V\dagger} \rangle = \text{const} + \frac{4\rho_3^V}{F_0} \pi_3^V - \frac{1}{F_0^2} (\chi_0^V + \rho_0^V) \sum_{jk} \pi_j^V \pi_k^V \text{sTr} \left(\mathbf{1}^V T_j T_k \right) + \mathcal{O}(\pi'^3).$$

Nach Einsetzen von $\pi' = \pi + \lambda a$ und Entwicklung bis zur Ordnung a erhält man für die Feldverschiebungen

$$\tilde{\pi}_1^V = a\lambda_1^V = \tilde{\pi}_2^V = a\lambda_2^V = 0 \quad (8.2)$$

und

$$\tilde{\pi}_3^V = a\lambda_3^V = \frac{F_0 \rho_3^V}{\mu_0^V} = F_0 \frac{W_0 a}{B_0 m_V} \sin \omega_V + \mathcal{O}(a^2).$$

Für die Verschiebung der Seequark-Felder erhält man analog

$$\tilde{\pi}_1^S = a\lambda_1^S = \tilde{\pi}_2^S = a\lambda_2^S = 0$$

und

$$\tilde{\pi}_3^S = a\lambda_3^S = \frac{F_0 \rho_3^S}{\mu_0^S} = F_0 \frac{W_0 a}{B_0 m_S} \sin \omega_S + \mathcal{O}(a^2).$$

Für die Geister ist die Verschiebung identisch mit derjenigen der Valenzquarks.

Pionmassen

Nach der Verschiebung der Felder bekommt der für die Valenzquarks relevante Anteil der Lagrangedichte die Form

$$\mathcal{L}_{sb}^{pqtm} = \text{const} + \frac{1}{4} (\chi_0^V + \rho_0^V) \sum_{jk} \pi_j^V \pi_k^V \text{sTr} \left(\mathbf{1}^V T_j T_k \right) + \mathcal{O}(a^2, \pi^3)$$

Durch Einsetzen von τ_j^V und τ_k^V für T_j und T_k erhält man

$$\mathcal{L}_{sb}^{pqtm} = \text{const} + \frac{1}{2}(\chi_0^V + \rho_0^V) \pi_j^V \pi_j^V.$$

Die Massen der aus Valenzquarks zusammengesetzten Goldstonebosonen sind damit

$$m_{\pi,v}^2 = \chi_0^V + \rho_0^V = 2B_0 m_V + 2W_0 a \cos \omega_V.$$

In dieser Ordnung gibt es noch keinen Unterschied zwischen dem teilweise gedämpften und dem nicht gedämpften Fall. Dies war zu erwarten, da die Seequarks sich durch Schleifenbeiträge bemerkbar machen, die erst in nächstführender Ordnung Berücksichtigung finden werden.

8.3. Treelevel-Terme aus \mathcal{L}_4

Lagrange-Dichte

Die in Ordnung p^4 zu betrachtende Lagrangedichte ist die übliche aus der chiralen Störungstheorie bekannte Gasser-Leutwyler-Lagrangedichte, allerdings unter Verwendung von Superspuren. Die einzelnen Terme aus \mathcal{L}_4 werden nun bis zur Ordnung $(\pi_j^V)^2$ in den Valenzmesonen-Feldern entwickelt. Die Vakuumverschiebung nach den Gln. 8.2f wird dabei zunächst nicht betrachtet.

L_1 bis L_3 -Terme

In Treelevel-Ordnung interessieren nur die Beiträge mit genau zwei Pionfeldern. In der Entwicklung der ersten drei Terme kommen solche Beiträge jedoch nicht vor.

L_4 und W_4 -Terme

Die erste vorkommende Superspur enthält bereits mindestens zwei Feld-Ableitungen. Daher ist der einzige relevante Beitrag

$$\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle = \frac{1}{F_0^2} (\partial_\mu \pi'_j) (\partial_\mu \pi'_k) \text{sTr} (T_j T_k)$$

Durch Beschränkung auf den Valenz-Bereich (d.h. für $j, k \in [1, 2, 3]$) erhält man nach der Verschiebung der Felder das Ergebnis

$$\text{sTr} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle = \frac{2}{F_0^2} (\partial_\mu \pi_j^V) (\partial_\mu \pi_j^V) + \dots$$

Da die Massenmatrix diagonal ist, erhält man in nullter Näherung sofort

$$\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle = \text{Tr}(2\chi^V) + \text{Tr}(2\chi^S) - \text{Tr}(2\chi^G) = \text{Tr}(2\chi^S) = 4\chi_0^S$$

8. Mesonenmassen im partiell gequenchten Modell

und damit

$$L_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle = \frac{8L_4}{F_0^2} \chi_0^S (\partial_\mu \pi_j^V) (\partial_\mu \pi_j^V).$$

Für den Gitterterm ergibt sich die gleiche Näherung:

$$W_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \text{sTr} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle = \frac{8W_4}{F_0^2} \rho_0^S (\partial_\mu \pi_j^V) (\partial_\mu \pi_j^V).$$

L_5 - und W_5 -Terme

Die Entwicklung ist hier ähnlich wie bei den L_3 - und W_3 -Termen, es ist jedoch nur eine einzige Superspur vorhanden. Man erhält zunächst

$$\langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger [\chi U^\dagger + U \chi^\dagger] \rangle = \frac{1}{F_0^2} \partial_\mu \pi_j \partial_\mu \pi_k \text{sTr} (T_j T_k [\chi + \chi^\dagger]).$$

Bei Einschränkung auf die Valenzmesonen ergibt sich daraus

$$L_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger [\chi U^\dagger + U \chi^\dagger] \rangle = \frac{4L_5}{F_0^2} \chi_0^V (\partial_\mu \pi_j^V) (\partial_\mu \pi_j^V) + \dots$$

sowie für den Gitterterm

$$W_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger [\rho U^\dagger + U \rho^\dagger] \rangle = \frac{4W_5}{F_0^2} \rho_0^V (\partial_\mu \pi_j^V) (\partial_\mu \pi_j^V) + \dots$$

L_6 - und W_6 -Terme

Entwicklung des Massenterms bis zu quadratischen Anteilen in den Valenzmesonen-Feldern ergibt

$$\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle = 4\chi_0^S - \frac{2}{F_0^2} \chi_0^V (\pi_j^V)^2 + \dots$$

Damit erhält man für den gesuchten L_6 -Term

$$L_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle^2 = \text{const} - \frac{16L_6}{F_0^2} \chi_0^S \chi_0^V (\pi_j^V \pi_j^V) + \dots$$

Die Entwicklung des Gitterterms ergibt

$$\langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle = 4\rho_0^S + \frac{4}{F_0} \rho_3^V \pi_3^V - \frac{2}{F_0^2} \rho_0^V (\pi_j^V)^2 + \dots$$

Insgesamt erhält man damit für den W_6 -Term

$$\begin{aligned} & W_6 \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle \\ &= \text{const} + \frac{16W_6}{F_0} \chi_0^S \rho_3^V \pi_3^V - \frac{8W_6}{F_0^2} (\chi_0^S \rho_0^V + \chi_0^V \rho_0^S) (\pi_j^V \pi_j^V) + \dots \end{aligned}$$

L_7 - und W_7 -Terme

Die Valenzmesonen-Anteile aus diesen Termen verschwinden, so wie im ungequenchten Fall. Der Grund dafür ist der diagonale Massenterm.

 L_8 - und W_8 -Terme

Das erste benötigte Zwischenergebnis für die Berechnung des L_8 -Terms ist

$$\chi U^\dagger \chi U^\dagger = \text{const} - \frac{2i}{F_0} \pi_j^V \tau_j^V (\chi^V)^2 - \frac{2}{F_0^2} \pi_j^V \pi_k^V \tau_j^c \tau_k^V (\chi^V)^2.$$

Nach Addition des komplex Konjugierten und Superspurbildung erhält man

$$L_8 \langle \chi U^\dagger \chi U^\dagger + U \chi^\dagger U \chi^\dagger \rangle = \text{const} - \frac{8L_8}{F_0^2} (\chi_0^V)^2 (\pi_j^V \pi_j^V) + \dots$$

Die Berechnung des W_8 -Termes ist etwas aufwendiger, erfolgt aber ansonsten völlig analog. Das Ergebnis ist

$$W_8 \langle \chi U^\dagger \rho U^\dagger + U \rho^\dagger U \chi^\dagger \rangle = \text{const} + \frac{8W_8}{F_0} \chi_0^V \rho_3^V \pi_3^V - \frac{8W_8}{F_0^2} \chi_0^V \rho_0^V (\pi_j)^2 + \dots$$

Sammlung der Treelevel-Terme

Aus den Lagrangedichten \mathcal{L}_2 und \mathcal{L}_4 erhält man für die Valenzmesonen also insgesamt den kinetischen Term

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin}^V &= (\partial_\mu \pi_j^{\prime V})(\partial_\mu \pi_j^{\prime V}) \left[\frac{1}{2} + \frac{8L_4}{F_0^2} \chi_0^S + \frac{8W_4}{F_0^2} \rho_0^S + \frac{4L_5}{F_0^2} \chi_0^V + \frac{4W_5}{F_0^2} \rho_0^V \right] \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_j^{\prime V})(\partial_\mu \pi_j^{\prime V}) C_k \end{aligned} \quad (8.3)$$

und den Massenterm

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^V &= (\pi_j^{\prime V})^2 \left[\frac{1}{2} (\chi_0^V + \rho_0^V) + \frac{16L_6}{F_0^2} \chi_0^S \chi_0^V + \frac{8W_6}{F_0^2} (\chi_0^S \rho_0^V + \chi_0^V \rho_0^S) \right. \\ &\quad \left. + \frac{8L_8}{F_0^2} (\chi_0^V)^2 + \frac{8W_8}{F_0^2} \chi_0^V \rho_0^V \right] \\ &= \frac{1}{2} (\pi_j^{\prime V})^2 C_m \end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich insgesamt der lineare Anteil

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lin}^V &= -\pi_3^{\prime V} \left[F_0 \rho_3^V + \frac{16}{F_0} W_6 \chi_0^S \rho_3^V + \frac{8W_8}{F_0} \chi_0^V \rho_3^V \right] \\ &= -\pi_3^{\prime V} C_l \end{aligned}$$

Feldverschiebung

Die in diesen Termen enthaltenen Valenzmesonen-Felder werden nun gemäß

$$\pi' = a\lambda + \pi$$

verschoben. Im Minimum

$$\tilde{\pi}_j^V = a\lambda_j^V$$

sollen alle linearen Terme bis zur Ordnung a verschwinden, d.h. es wird gefordert

$$a\lambda_j^V \pi_j^V C_m - \pi_3^V C_l = 0$$

Daraus erhält man für die Vakuum-Feldverschiebungen in nächstführender Ordnung

$$\tilde{\pi}_1^V = a\lambda_1^V = \tilde{\pi}_2^V = a\lambda_2 = 0$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_3^V &= a\lambda_3^V = \frac{C_l}{C_m} \\ &= \frac{F_0 \rho_3^V + \frac{16W_6}{F_0} \chi_0^S \rho_3^V + \frac{8W_8}{F_0} \chi_0^V \rho_3^V}{(\chi_0^V + \rho_0^V) + \frac{32L_6}{F_0^2} \chi_0^S \chi_0^V + \frac{16W_6}{F_0^2} (\chi_0^S \rho_0^V + \chi_0^V \rho_0^S) + \frac{16L_8}{F_0^2} (\chi_0^V)^2 + \frac{16W_8}{F_0^2} \chi_0^V \rho_0^V} \end{aligned}$$

Valenzmesonen-Massen

Zur Bestimmung der Mesonenmassen ist zunächst eine Feldstärkenrenormierung mit dem Faktor $\sqrt{C_k}$ nötig. Die Lagrangedichte erhält dann die Form

$$\mathcal{L}_4^V = \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi_j^{v,r}) (\partial_\mu \pi_j^{v,r}) + \frac{1}{2} (\pi_j^{v,r})^2 \frac{C_m}{C_k}.$$

Die Mesonenmassen sind also durch

$$\begin{aligned} M_\pi = \frac{C_m}{C_k} &= (\chi_0^V + \rho_0^V) - \frac{8}{F_0^2} (\chi_0^V + \rho_0^V) [2L_4 \chi_0^S + L_5 \chi_0^V] - \frac{8}{F_0^2} \chi_0^V [2W_4 \rho_0^S + W_5 \rho_0^V] \\ &\quad + \frac{16}{F_0^2} [2L_6 \chi_0^S \chi_0^V + W_6 (\chi_0^S \rho_0^V + \chi_0^V \rho_0^S)] + \frac{16}{F_0^2} [L_8 (\chi_0^V)^2 + W_8 \chi_0^V \rho_0^S] + \dots \end{aligned}$$

gegeben. Dieses Ergebnis entspricht dem Treelevel-Anteil für die Valenz-Valenz-Masse aus dem Skript von Enno Scholz [32] sowie dem Treelevel-Anteil aus [24] für verschwindenden Drehwinkel.

8.4. Schleifenrechnung

Ansatz

Die Berechnung der Treelevel-Terme und die ungequenchte Rechnung legen die Vermutung nah, dass sich die Ergebnisse in Ordnung a durch eine einfache Substitution ergeben [32]. Dazu werden

die Parameter der partiell gequenchten Rechnung auf folgende Weise modifiziert:

$$\begin{aligned}\rho^V &= 2W_0^V a \rightarrow \rho_0^V = 2W_0^V a \cos \omega_V \\ \rho^S &= 2W_0^S a \rightarrow \rho_0^S = 2W_0^S a \cos \omega_S\end{aligned}$$

Diese Vermutung soll nun für die Schleifenrechnung in nächstführender Ordnung überprüft werden. Dazu müssen einerseits die Vertices, andererseits die Propagatoren der Substitutions-Regel genügen.

Form der Matrix μ

Die symmetriebrechende Matrix χ ist in der partiell gequenchten Rechnung nicht mehr proportional zur Einheitsmatrix, da die Valenz- und Seequarks unterschiedliche Massen haben. Zwei Linearkombinationen der superspurlosen Generatoren der Gruppe $SU(4|2)$ und der Einheitsmatrix seien nun so gewählt, dass sie die Form

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \mathbf{1}^V + \mathbf{1}^G$$

und

$$T_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1}^S$$

haben. Die Massenmatrix lässt sich dann als

$$\chi = T_\alpha \chi_0^V + T_\beta \chi_0^S$$

schreiben. In der ungequenchten Rechnung hat der Gitterterm dieselbe Form, so dass man die gesamte symmetriebrechende Matrix $\mu = \chi + \rho$ nach

$$\mu = \alpha T_\alpha + \beta T_\beta$$

zerlegen kann. Durch die chirale Drehung des Gitterterms gibt es jetzt allerdings zusätzliche Terme proportional zu den Matrizen

$$T_\gamma = \begin{pmatrix} \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix} = \tau_3^V + \tau_3^G$$

und

$$T_\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tau_3^S.$$

Die Matrizen T_γ und T_δ lassen sich dabei wieder als Linearkombinationen von Generatoren ausdrücken. Die symmetriebrechende Matrix hat jetzt insgesamt die Form

$$\mu = \chi + \rho = \alpha T_\alpha + \beta T_\beta + \gamma T_\gamma + \delta T_\delta.$$

8. Mesonenmassen im partiell gequenchten Modell

Die Koeffizienten α bis δ lassen sich eindeutig aus den Massen, der Gitterkonstanten und den Drehwinkeln bestimmen. Man erhält in der Theorie mit chiraler Drehung:

$$\begin{aligned}\alpha &= 2B_0m_V + 2W_0a \cos \omega_V \\ \beta &= 2B_0m_S + 2W_0a \cos \omega_S \\ \gamma &= i 2W_0a \sin \omega_V \\ \delta &= i 2W_0a \sin \omega_S\end{aligned}$$

In der Theorie ohne chirale Drehung (d.h. mit $\omega_V = \omega_S = 0$) sind die Koeffizienten dagegen durch

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 2B_0m_V + 2W_0a \\ \beta_0 &= 2B_0m_S + 2W_0a \\ \gamma_0 &= 0 \\ \delta_0 &= 0\end{aligned}$$

gegeben.

Vertices und Propagatoren

Um die Vertices in der partiell gequenchten Theorie zu bestimmen, muss der Ausdruck

$$\langle \mu U^\dagger + U \mu^\dagger \rangle = \langle \mu U^\dagger + \mu^\dagger U \rangle$$

bis zur vierten Potenz in den Pionfeldern entwickelt werden (die Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt aus den Eigenschaften der Superspur). Dazu betrachtet man zunächst den Term

$$\begin{aligned}\mu U^\dagger &= (\alpha T_\alpha + \beta T_\beta + \gamma T_\gamma + \delta T_\delta) \\ &\left(\mathbf{1} - \frac{i}{F_0} \pi_a T_a - \frac{1}{2F_0^2} \pi_a \pi_b T_a T_b + \frac{i}{6F_0^3} \pi_a \pi_b \pi_c T_a T_b T_c \right. \\ &\left. + \frac{1}{4!F_0^4} \pi_a \pi_b \pi_c \pi_d T_a T_b T_c T_d \right) + \mathcal{O}(\pi^5).\end{aligned}\tag{8.4}$$

Die Koeffizienten α und β sind reell, γ und δ sind dagegen rein imaginär. Addiert man den zweiten Term

$$\begin{aligned}\mu^\dagger U &= (\alpha T_\alpha + \beta T_\beta - \gamma T_\gamma - \delta T_\delta) \\ &\left(\mathbf{1} + \frac{i}{F_0} \pi_a T_a - \frac{1}{2F_0^2} \pi_a \pi_b T_a T_b - \frac{i}{6F_0^3} \pi_a \pi_b \pi_c T_a T_b T_c \right. \\ &\left. + \frac{1}{4!F_0^4} \pi_a \pi_b \pi_c \pi_d T_a T_b T_c T_d \right) + \mathcal{O}(\pi^5),\end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned}\mu U^\dagger + \mu^\dagger U &= 2(\alpha T_\alpha + \beta T_\beta) \left[\mathbf{1} - \frac{1}{2F_0^2} \pi_a \pi_b T_a T_b + \frac{1}{4!F_0^4} \pi_a \pi_b \pi_c \pi_d T_a T_b T_c T_d \right] \\ &+ 2(\gamma T_\gamma + \delta T_\delta) \left[-\frac{i}{F_0} \pi_a T_a + \frac{i}{6F_0^3} \pi_a \pi_b \pi_c T_a T_b T_c \right].\end{aligned}\tag{8.5}$$

Aus diesem Zwischenergebnis lassen sich bereits die Änderungen durch den gedrehten Massenterm ablesen, ohne dass eine explizite Basis für die Generatoren T_i gewählt werden muss:

- Die quadratischen Terme beschreiben die Propagatoren der auftretenden Goldstone-Mesonen. Bei diesen treten die Koeffizienten α und β auf, die sich nur um den zusätzlichen cos-Faktor in den Gittertermen vom nicht gequenchten Fall unterscheiden.
- Die kubischen Terme beschreiben Dreier-Vertices, enthalten jedoch die Faktoren $a \sin \omega_V$ bzw $a \sin \omega_S$. Da für mögliche Schleifenbeiträge mindestens zwei dieser Vertices benötigt werden, tragen Diagramme mit diesen Dreiervertices in Ordnung a nicht zu den Korrekturen bei. Dieses Argument gilt genauso für die zusätzlichen Dreiervertices, die durch die hier ansonsten nicht weiter relevante Feldverschiebung erzeugt werden.
- Die Vierer-Vertices treten auch in der Theorie ohne Quenching auf; der einzige Unterschied ist, dass die Gitterterme in den Koeffizienten auch hier jeweils mit $\cos \omega_V$ bzw $\cos \omega_S$ multipliziert werden.

Ergebnis

Das Fazit ist also, dass man die Vertices und Propagatoren mit gedrehtem Massenterm in Ordnung a durch die oben vermutete Substitution erhalten kann. Die Substitution bleibt daher bis zu dieser Ordnung auch für die Schleifenrechnung gültig, die ansonsten genauso wie in der nicht getwisteten, partiell gequenchten χPT durchgeführt wird.

Wendet man die Substitutionsregel auf die Formeln in [33] an, so erhält man die Valenzmesonenmasse [32]

$$\begin{aligned}
m_V^2 &= \chi_0^V + \rho_0^V \\
&+ \frac{1}{32\pi^2 F_0^2} (\chi_0^V + \rho_0^V) \left[\chi_0^V - \chi_0^S + \rho_0^V - \rho_0^S + (2\chi_0^V - \chi_0^S + 2\rho_0^V - \rho_0^S) \log(\chi_0^V + \rho_0^V) \right] \\
&+ \frac{8}{F_0^2} \left[(4L_6 - 2L_4) \chi_0^S \chi_0^V + (2L_8 - L_5) (\chi_0^V)^2 + (2W_6 - 2L_4) \chi_0^S \rho_0^V \right. \\
&\quad \left. + (2W_6 - 2W_4) \rho_0^S \chi_0^V + (2W_8 - W_5 - L_5) \chi_0^V \rho_0^V \right].
\end{aligned}$$

9. Zusammenfassung und Ausblick

Im sechsten Kapitel wurden die Massen der Pionen als Pseudo-Goldstonebosonen in nächstführender Ordnung der chiralen Störungstheorie für die Gitter-QCD berechnet. Im Vergleich zur entsprechenden Rechnung im Kontinuum erhält man zusätzliche Summanden, in denen die neuen, als W_i bezeichneten Konstanten auftauchen. Aus der Schleifenrechnung erhält man außerdem einen chiralen Logarithmus proportional zur Gitterkonstanten. Der axial gedrehte Massenterm führt zu einem $\cos\omega$ -Faktor in allen Gittertermen. In dieser Ordnung zeigen sich jedoch keine Unterschiede zwischen den Massen der verschiedenen Pionfelder.

Die gleichen Effekte wurden bei der Berechnung der Pion-Zerfallskonstanten im siebten Kapitel deutlich. Auch hier gibt es jetzt Gitterterme, die durchgängig proportional zu $\cos\omega$ sind. Unterschiede zwischen den Pionfeldern sind in Ordnung $\mathcal{O}(a)$ nicht vorhanden.

Im achten Kapitel wurde schliesslich nachgewiesen, dass der getwistete Massenterm auch im „partially quenched“-Modell in nächstführender Ordnung der chiralen Störungstheorie bis Ordnung $\mathcal{O}(a)$ im wesentlichen zu einem zusätzlichen $\cos\omega$ -Faktor in den Gittertermen führt. Der Treelevel-Beitrag für die Valenzmesonen wurde dazu explizit nachvollzogen, der Schleifenbeitrag durch Untersuchung der Vertices und Propagatoren überprüft.

Die in Kapitel 6 und 7 präsentierten Ergebnisse zeigen, dass die Konvergenz von Gitterrechnungen ohne *quenching* durch Anwendung der *twisted-mass*-Idee verbessert werden kann. Durch Wahl des chiralen Drehwinkels zu $\omega = \pi/2$ verschwinden die Gitter-Artefakte bis zur Ordnung $\mathcal{O}(a)$. Dieses Ergebnis wurde bereits publiziert [34] und ist konsistent mit Rechnungen, die in der Gitter-QCD ohne den Formalismus der chiralen Störungstheorie durchgeführt wurden [35], [36].

Im Verlauf der Rechnung wird jedoch auch deutlich, dass dieses Ergebnis in $\mathcal{O}(a^2)$ nicht in dieser Form gültig bleiben kann. Zum einen erhält man weitere Terme in \mathcal{L}_4 , die zu den Kontakttermen beitragen [24], zum anderen treten neue, in den Pionfeldern asymmetrische Wechselwirkungs-Vertices auf, die aus der Verschiebung des Feldes resultieren. Die vorgegebene chirale Drehrichtung des Massenterms zerstört so in $\mathcal{O}(a^2)$ die Massenentartung der Pionen, selbst wenn von identischen Quarkmassen ausgegangen wird. Die konkrete Bestimmung dieses Effekts stellt daher eine Aufgabe für weitere Forschungen dar.

Im achten Kapitel wurden erste Schritte zu einer Erweiterung auf das partiell gequenchte Modell unternommen. Im Fall der Valenz-Mesonen konnten die Ergebnisse aus der Literatur für $\omega = 0$ reproduziert werden, außerdem konnte bewiesen werden, dass die Valenz-Mesonen in einer Treelevel-Rechnung das gleiche Verhalten zeigen wie in der Rechnung ohne Quenching, die im sechstes Kapitel durchgeführt wurde.

9. Zusammenfassung und Ausblick

Die zitierte Substitutionsregel in $\mathcal{O}(a)$ konnte für die Schleifenrechnung aus Zeitgründen nicht mehr in allen Einzelheiten nachvollzogen werden, die wesentlichen Schritte konnten jedoch plausibel gemacht werden. Für eine ausführliche Rechnung muss eine der in [31] als äquivalent erkannten Methoden angewendet werden. Für die Rechnung ohne Φ_0 wird dabei eine konkrete Parametrisierung der Gruppe $SU(4|2)$ benötigt. Mit Hilfe einer solchen Parametrisierung kann auch F_π in partiell gequenchter chiraler Störungstheorie ausführlich bis $\mathcal{O}(a)$ ermittelt werden.

Um aktuell durchgeführte Simulationen sinnvoll auszuwerten, wird eine Kombination dieser nächsten Teilschritte erforderlich sein. Die geringen Quarkmassen können nur mit Hilfe von partiell gequenchten Fermionen eingebaut werden. Andererseits sind die heute verfügbaren Computerleistungen noch nicht ausreichend, um $\mathcal{O}(a^2)$ -Effekte ignorieren zu können. Das Ziel für die nähere Zukunft sollte daher sein, die hier formulierten Rechnungen zu erweitern, um eine analytische Beschreibung von partiell gequenchten Simulationen in Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ zu erhalten.

A. Anhang

Konventionen

Natürliche Einheiten

In dieser Diplomarbeit wird durchgängig die Konvention

$$\boxed{c = \hbar = 1}$$

verwendet. Aus $c = 1$ folgt, dass Zeit die Dimension einer Länge, Energie und Impuls die Dimension einer Masse erhalten. Aus $\hbar = 1$ folgt, dass das Produkt einer Länge und einer Masse dimensionslos ist. Insgesamt erhält man also

$$[x] = [t] = [m]^{-1} = [p]^{-1} = [E]^{-1}.$$

Einstein'sche Summenkonvention

Zur Vereinfachung der Notation wird durchgängig die Einstein'sche Summenkonvention benutzt. Über doppelt vorkommende Indices muss also stets summiert werden.

Griechische Indices μ und ν bezeichnen ausschließlich Vierervektorkomponenten im Minkowski-Raum bzw in der euklidischen Raumzeit. Römische Indices stehen entweder für Vektorkomponenten im dreidimensionalen Raum oder in internen Symmetrieräumen. Dirac-Spinorindices werden im Kapitel über die Gitterformulierung der QCD durch α und β gekennzeichnet. Ansonsten werden sie als implizit vorausgesetzt.

Spuren und Superspuren

Aufgrund der häufigen Verwendung von Spuren wird in dieser Arbeit die Abkürzung $\langle A \rangle$ für die Spur der Matrix A verwendet. Eine Ausnahme bildet das 8. Kapitel, in dem diese Abkürzung statt dessen die Superspur einer graduierten Matrix bezeichnet.

Diese beiden Zeichen können in anderem Zusammenhang aber auch die Dirac-Schreibweise für quantenmechanische Erwartungswerte darstellen. Zur besonderen Verdeutlichung und in Fällen, wo Mehrdeutigkeiten auftreten, wird statt dessen aber auch Tr bzw. sTr verwendet.

Die Gruppe SU(2)

Definition

SU(2) ist die Gruppe der unitären, komplexen 2×2 -Matrizen mit Einheitsdeterminante:

$$A \in \text{SU}(2) \quad \rightarrow \quad A^\dagger A = AA^\dagger = \mathbf{1}, \quad \det A = 1$$

Paulimatrizen

Die Generatoren von SU(2) werden durch

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Eigenschaften

Die τ_i bilden eine Liealgebra bezüglich des Kommutators:

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2}$$

Produkte der τ_i :

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} \mathbf{1} + i\epsilon_{ijk} \tau_k$$

Spurformeln:

$$\begin{aligned} \langle \tau_i \rangle &= 0 \\ \langle \tau_i \tau_j \rangle &= 2\delta_{ij} \\ \langle \tau_i \tau_j \tau_k \rangle &= 2i\epsilon_{ijk} \\ \langle \tau_i \tau_j \tau_k \tau_l \rangle &= 2(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned}$$

Exponentialdarstellung

$$\exp(ia_i \tau_i) = \mathbf{1} \cos a + i\hat{a}_i \tau_i \sin a \quad (\text{mit } a = \sqrt{a_i a_i} \quad \text{und} \quad \hat{a}_i = \frac{a_i}{a}).$$

Die Gruppe SU(3)

Gell-Mann-Matrizen

Die Generatoren von SU(3) werden durch

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

dargestellt.

Eigenschaften

Die λ_i bilden eine Liealgebra bezüglich des Kommutators:

$$\left[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}\right] = i f_{ijk} \frac{\lambda_k}{2}$$

mit den vollständig antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{ijk} . Für die Gell-Mann-Matrizen erhalten die nichtverschwindenden Strukturkonstanten die Werte [8]

$$\begin{aligned}f_{123} &= 1 \\ f_{147} &= -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2} \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Renormierungskonstanten

In der chiralen Störungstheorie der Ordnung $\mathcal{O}(p^4)$ im Kontinuum treten Divergenzen in Einschleifen-Diagrammen auf. Diese können durch Renormalisierung der Gasser-Leutwyler-Koeffizienten gemäß

$$L_i = L_i^r + \frac{\Gamma_i}{32\pi^2} R$$

beseitigt werden. Die divergente Konstante R ist bei dimensioneller Regularisierung in $4 - \epsilon$ Raumzeitdimensionen durch

$$R = -\frac{2}{\epsilon} - (\log(4\pi) - \gamma_E + 1)$$

A. Anhang

gegeben, die numerischen Konstanten Γ_i sind [2]

$$\Gamma_1 = \frac{3}{32}, \quad \Gamma_2 = \frac{3}{16}, \quad \Gamma_3 = 0, \quad \Gamma_4 = \frac{1}{8}, \quad \Gamma_5 = \frac{3}{8}, \quad \Gamma_6 = \frac{11}{144}, \quad \Gamma_7 = 0, \quad \Gamma_8 = \frac{5}{48}.$$

Dirac-Matrizen

Minkowski-Raum

Im Minkowski-Raum erfüllen die Dirac-Matrizen die Bedingung

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}.$$

Eine mögliche chirale Darstellung der Dirac-Matrizen ist durch

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \tau_k \\ -\tau_k & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Daraus folgt

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Verwendung findet ausserdem die antisymmetrische Matrix

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Euklidischer Raum

Die Bedingung für die Dirac-Matrizen lautet nun

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}.$$

Eine mögliche chirale Darstellung ist

$$\gamma_4^E = -\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k^E = i\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & -i\tau_k \\ i\tau_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit dieser Wahl erhält man

$$\gamma_5^E = \gamma_1^E\gamma_2^E\gamma_3^E\gamma_4^E = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Auch im Euklidischen gilt

$$\sigma_{\mu\nu}^E = \frac{i}{2} [\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E].$$

Literaturverzeichnis

- [1] K. Hagiwara et al. (Particle Data Group) „*Review of Particle Physics*”, Phys.Rev. D **66**, 010001 (2002)
- [2] S. Scherer „*Introduction to Chiral Perturbation Theory*”, Advances in Nucl. Phys. Vol. **27**, Eds.: J. W. Negele, E. Vogt (2002)
- [3] S. L. Adler „*Axial-vector vertex in spinor electrodynamics*”, Phys.Rev. **177**, 2426 (1969)
- [4] J. S. Bell und R. Jackiw „*A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the sigma model*”, Nuovo Cim. **60A**, 47 (1967)
- [5] K. Fujikawa „*Path integral measure for gauge invariant field theories*”, Phys.Rev.Lett. **42**, 1195 (1979)
- [6] Y. Nambu „*Axial Vector Current Conservation in Weak Interactions*”, Phys.Rev.Lett. **4**, 380 (1960)
- [7] J. Goldstone „*Field theories with 'superconductor' solutions*”, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961)
- [8] L. H. Ryder „*Quantum Field Theory*”, Cambridge University Press (1985)
- [9] S. Weinberg „*The Quantum Theory of Fields, Vol.II*”, Cambridge University Press (1996)
- [10] J. Gasser und H. Leutwyler „*Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark*”, Nucl.Phys. B **250**, 465 (1985)
- [11] S. Weinberg „*Phenomenological Lagrangians*”, Physica A **96**, 327 (1979)
- [12] G. 't Hooft und M. J. G. Veltman „*Regularization and renormalization of gauge fields*”, Nucl.Phys. B **44**, 189 (1972)
- [13] H.J. Rothe „*Lattice Gauge Theories*”, World Scientific, Singapur (1992)
- [14] J. Kogut und L. Susskind „*Hamiltonian Formulation of Wilson's Lattice Gauge Theories*”, Phys.Rev. D **11**, 395 (1975)
- [15] K.G. Wilson „*Confinement of Quarks*”, Phys.Rev. D **10**, 2445 (1974)

- [16] K. Symanzik "Continuum limit and improved Action in Lattice Theories", Nucl.Phys. B **226**, 187 u. 205 (1983)
- [17] B. Sheikholeslami und R. Wohlert „Improved Continuum Limit Lattice Action for QCD with Wilson Fermions”, Nucl.Phys. B **259**, 572 (1985)
- [18] M. Lüscher, S. Sint, R. Sommer und P. Weisz „Chiral symmetry and $O(a)$ improvement in lattice QCD”, Nucl.Phys. B **478**, 365 (1996)
- [19] G. Rupak und N. Shoresh „Chiral perturbation theory for the Wilson lattice action”, Phys.Rev. D **66**, 054503 (2002)
- [20] R. Frezotti, P.A. Grassi, S. Sint und P. Weisz „A local formulation of Lattice QCD without unphysical fermion zero modes”, Nucl.Phys. B (Proc.Suppl.) **83**, 941 (2000)
- [21] R. Frezotti „Wilson fermions with chirally twisted mass”, Nucl.Phys. B (Proc.Suppl.) **119**, 140 (2003)
- [22] G. Münster, persönliche Mitteilung (2003)
- [23] J. F. Donoghue, E. Golowich und B. R. Holstein “Dynamics of the Standard Model”, Cambridge University Press (1992)
- [24] O. Bär, G. Rupak und S. Shoresh „Chiral perturbation theory at $O(a^2)$ for lattice QCD”, arXiv:hep-lat/0306021 (2003)
- [25] A. Morel „Chiral logarithms in quenched QCD”, J.Phys. **48**, 111 (1987)
- [26] C.W. Bernard und M.F. Golterman „Chiral perturbation theory for the quenched approximation of QCD”, Phys.Rev. D **46**, 853 (1992)
- [27] C.W. Bernard und M.F. Golterman „Partially quenched gauge theories and an application to staggered fermions”, Phys.Rev. D **49**, 486 (1994)
- [28] S. Sharpe und N. Shoresh ”Physical Results from Unphysical Simulations“, Phys.Rev. D **62**, 094503 (2000)
- [29] P.H. Damgaard, J.C. Osborn, D. Toublan und J.J.M. Verbaarschot „The microscopic spectral density of the QCD Dirac Operator”, Nucl.Phys. B **547**, 305 (1999)
- [30] J. F. Cornwell „Group Theory in Physics, Vol.III”, Academic Press, London (1989)
- [31] S. Sharpe und N. Shoresh „Partially quenched chiral perturbation theory without Φ_0 ”, Phys.Rev. D **64**, 114510 (2001)
- [32] E. Scholz „Extending PQ χ PT to TM PQ χ PT”, interne Kommunikation (2003)

- [33] F. Farchioni, C. Gebert, I. Montvay, E. Scholz und L. Scorzato „*Partially quenched chiral perturbation theory and numerical simulations*”, Phys.Lett. B **561**, 102 (2003)
- [34] G. Münster und C. Schmidt „*Chiral perturbation theory for lattice QCD with a twisted mass term*”, arXiv:hep-lat/0311032 (2003)
- [35] R. Frezotti und G.C. Rossi ” *Chirally improving Wilson fermions - I. $O(a)$ improvement*”, arXiv:hep-lat/0306014 (2003)
- [36] R. Frezotti und G.C. Rossi ” *Twisted-mass lattice QCD with mass non-degenerate quarks*”, arXiv:hep-lat/0311008 (2003)

Danksagung

Hiermit danke ich allen, die mir während meines Studiums und bei der Erstellung dieser Diplomarbeit auf die eine oder andere Weise geholfen haben.

Insbesondere möchte ich danken

- Herrn Professor Dr. Gernot Münster für die interessante Aufgabenstellung in einem aktuellen Forschungsgebiet sowie für die viele Zeit und Geduld, die er stets meinen Fragen und Problemen gewidmet hat,
- Herrn Professor Dr. Peter Boschan für die frühzeitige Förderung und die Möglichkeit, während des Studiums meinen Horizont durch Studienreisen ins Ausland zu erweitern,
- der Studienstiftung des Deutschen Volkes für die vielseitige ideelle und materielle Förderung während der letzten drei Jahre,
- meinen Eltern Elisabeth und Ewald Schmidt für ihre immer großzügige Unterstützung und Hilfe in allen Lebenslagen,
- Melanie Müller für das Korrekturlesen dieser Arbeit,
- Dirk Homeier für das Korrekturlesen und für die angenehme Atmosphäre in unserem Büro,
- Catharina Spethmann für viel zu vieles, um es einzeln aufzulisten.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbst angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im Januar 2004