

HOLGER SCHMALLE

**Spin-1 Zustände der
N=1 SU(2) Super Yang-Mills Theorie
auf dem Gitter**

Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Februar 2004

Spin-1 Zustände der N=1 SU(2) Super Yang-Mills Theorie auf dem Gitter

als Diplomarbeit vorgelegt von
Holger Schmalle

Februar 2004

Institut für Theoretische Physik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Diese korrigierte Version unterscheidet sich geringfügig von der dem Prüfungssekretariat vorgelegten.

Münster, den 09.03.2004

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Einführung in die Supersymmetrie	3
1.1 Graduierung und Poincaré-Superalgebra	3
1.1.1 Poincaré-Algebra	3
1.1.2 Casimir-Operatoren	3
1.1.3 Irreduzible Darstellungen	4
1.1.4 \mathbf{Z}_2 -Graduierung der Poincaré-Algebra	5
1.1.5 Irreduzible Darstellungen der SUSY-Algebra	5
1.1.6 Chirales und Vektor-Supermultiplett	6
1.2 Superfelder	8
1.3 Eine supersymmetrische Lagrangedichte	9
2 Die N=1 SUSY-Yang-Mills Theorie auf dem Gitter	11
2.1 Grundbegriffe der Gitterreichtheorie	11
2.1.1 Notationen	11
2.1.2 Die Wilson-Wirkung für das Eichfeld	12
2.1.3 Die Wirkung für den fermionischen Teil	13
2.2 Majorana-Fermionen in der adjungierten Darstellung	15
2.3 Die n-Punkt Funktion	16
3 Simulation auf dem Gitter	19
3.1 Erzeugung von Feldkonfigurationen	19
3.2 Korrelationsfunktionen	20
3.3 Massenbestimmung von Majorana-Majorana Bindungszuständen	21
3.4 Der verbundene Anteil	21
3.5 Der unverbundene Anteil	22

3.6 Smearing	22
3.6.1 APE Smearing	23
3.6.2 Jacobi Smearing	23
4 Der Spin 1 Operator	25
4.1 Der lokale Spin-1 Operator	25
4.1.1 Das Transformationsverhalten	25
4.1.2 Die Korrelationsfunktion	26
4.2 Der nichtlokale Spin-1 Gluinoball	27
4.2.1 Verhalten unter P-Parität	29
4.2.2 Verhalten unter <i>C</i> -Parität	30
4.2.3 Der Majorana-Link-Majorana Operator	30
4.2.4 Die VST für nichtlokale Operatoren	31
4.2.5 Anwendung und Probleme der VST	32
4.3 Smearing für nichtlokale Operatoren	33
4.3.1 APE Smearing	33
4.3.2 Jacobi-Smearing	35
5 Ergebnisse	37
Zusammenfassung und Ausblick	41
A Majorana-Spinoren	43
B SU(N)-Algebra	45
B.1 Allgemeine Relationen	45
B.2 SU(2)	46
C Dirac-Matrizen	47
C.1 Dirac-Matrizen in euklidischer und minkowskischer Formulierung	47
C.2 Eigenschaften euklidischer Matrizen	47
D Paritätsoperationen	49
D.1 Ladungskonjugation	49
D.2 Raumspiegelungen	50
E Wichtige Relationen	51

F Hinweise zum Programm	52
Literaturverzeichnis	55
Danksagung	57

Einleitung

Die Elementarteilchen und ihre fundamentalen Wechselwirkungen, die elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung, lassen sich mit hoher Genauigkeit durch das Standardmodell beschreiben. Alle Voraussagen des Standardmodells wurden bisher experimentell bestätigt. Dennoch ist das Standardmodell nicht in der Lage, alle offenen Fragen zu beantworten. So besteht z.B. das sog. Hierarchie-Problem, das daraus resultiert, dass das Standardmodell auf einem Produkt aus drei Eichgruppen ($SU(3) \times SU(2) \times U(1)$) basiert, mit unterschiedlichen Kopplungskonstanten in jedem Sektor. Es hat sich herausgestellt, dass es nicht möglich ist das Standardmodell so zu erweitern, dass sich die Kopplungen auf einer größeren Skala vereinigen. Weiterhin vermag das Standardmodell nicht zu erklären wieso die elementaren Fermionen in drei Familien mit völlig unterschiedlichen Massen auftreten. Es gibt noch weitere Phänomene die das Standardmodell nicht zu erklären vermag, wie z.B. dunkle Materie.

Aufgrund dieser Probleme war man bestrebt das Standardmodell zu erweitern, dessen Teilchenspektrum durch die Poincaré-Gruppe und ihrer zugehörigen Lie-Algebra festgelegt wird. Die durch die spezielle Relativitätstheorie motivierte Poincaré-Algebra lässt sich jedoch nicht durch eine innere Lie-Algebra erweitern, wie S. COLEMAN und J. MANDULA[3] gezeigt haben. Lässt man jedoch auch antikommutierende Generatoren zu, dann lässt sich die Poincaré-Algebra sinnvoll erweitern zu einer sog. Lie-Superalgebra.

Damit erhält man als Erweiterung des Standardmodells supersymmetrische Theorien, die in der Lage sind einige Probleme des Standardmodells zu lösen oder zumindest zu entschärfen. So tritt z.B. das Hierarchie-Problem in einer supersymmetrischen Quantenfeldtheorie nicht auf. Auch liefert die Supersymmetrie Ansätze zur Vereinheitlichung aller fundamentalen Kräfte inklusive der Gravitation. Dies ist jedoch vermutlich nur im Rahmen einer supersymmetrischen Stringtheorie möglich. Die Supersymmetrie ist eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen, d.h. jedes Teilchen erhält einen supersymmetrischen Partner, mit einem um $\frac{1}{2}$ reduzierten Spin, aus der anderen Gruppe. Der einfachste Fall für eine supersymmetrische nichttabelsche Eichtheorie ist die N=1 SU(2) Super-Yang-Mills-Theorie, mit der sich diese Arbeit beschäftigt. In den letzten Jahren hat die DESY-Münster Kollaboration im Rahmen von Gittersimulationen Untersuchungen zum Massenspektrum dieser

Theorie gemacht. Dabei wurden bisher Spin 0 und Spin $\frac{1}{2}$ Zustände untersucht. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Simulation von Spin 1 Zuständen auf dem Gitter. Insbesondere werden Gluino-Gluino Bindungszustände, die bisher nur mit Hilfe lokaler Operatoren untersucht wurden, durch ausgedehnte Operatoren beschrieben. Dafür wurde das von C. GEBERT geschriebene Programm um Messroutinen zur Bestimmung der Massen von Spin 1 Gluino-Gluino Bindungszuständen erweitert. Die Zustände werden dabei auf zwei verschiedene Weisen realisiert, zum einen durch Operatoren, die beide Majorana-Teilchen an den selben Gitterplatz setzen, zum anderen durch räumlich ausgedehnte Operatoren, bei denen die Majorana Teilchen auf benachbarten Gitterplätzen lokalisiert sind. Diese Verfahren werden auf ihre Vor- und Nachteile untersucht.

Kapitel 1

Einführung in die Supersymmetrie

Auch wenn die Supersymmetrie noch nicht zweifelsfrei nachgewiesen ist, so gibt es doch einige Indizien, die für eine supersymmetrische Beschreibung der Natur sprechen (vgl. Einleitung). Durch die Einführung einer Supersymmetrie entstehen neue Multipletts, in denen Teilchen mit unterschiedlichem Spin vereinigt werden. Insbesondere handelt es sich um eine Symmetrie, die bosonische und fermionische Freiheitsgrade vermischt.

1.1 Graduierung und Poincaré-Superalgebra

1.1.1 Poincaré-Algebra

Das Elementarteilchenspektrum einer relativistischen Quantenfeldtheorie ergibt sich aus den irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe \mathcal{P} . Diese setzt sich aus den Verschiebungen im Minkowski-Raum und den Lorentztransformationen zusammen. Die zugehörige Lie-Algebra wird von den sechs Generatoren der Lorentzgruppe $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ und den vier Generatoren der Translationsgruppe P^μ erzeugt und wird durch Vertauschungsrelationen der insgesamt zehn Generatoren

$$\begin{aligned}[P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [P^\rho, M^{\mu\nu}] &= i(g^{\rho\mu}P^\nu - g^{\rho\nu}P^\mu) \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= -i(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho})\end{aligned}$$

festgelegt.

1.1.2 Casimir-Operatoren

In der Quantenfeldtheorie können alle physikalischen Zustände nach den Eigenwerten von Casimir-Operatoren klassifiziert werden. Die Casimir-Operatoren einer Gruppe sind dadurch definiert, dass sie mit allen Generatoren der Gruppe vertauschen.

Die Casimir-Operatoren der Poincaré-Gruppe sind:

$$\begin{aligned} P^2 &= P_\mu P^\mu \\ W^2 &= W_\mu W^\mu, \end{aligned}$$

mit dem Pauli-Lubanski-Vektor $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}$.

1.1.3 Irreduzible Darstellungen

Aus den oben angegebenen Casimir-Operatoren ergeben sich verschiedene irreduzible Darstellungen der Poincaré-Gruppe. Dabei sind zwei dieser Darstellungen von Bedeutung, die *massive Darstellung*, zur Beschreibung massebehafteter Teilchen, und die *massenlose Darstellung* für massenlose Teilchen.

1. Massive Darstellung: $P^2 = m^2 c^2 > 0$

$$W^2 = -m^2 c^2 S^2$$

S^k ist der Generator der inneren Drehungen.

Für die Eigenwerte ergibt sich:

$$\begin{aligned} P^2 &= m^2 c^2, \\ W^2 &= -m^2 c^2 s(s+1) \quad \text{mit } m \in \mathbb{R} \text{ und } s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots. \end{aligned}$$

Die Darstellung wird durch die Masse m und den Spin s charakterisiert. Sie lässt sich mit massiven Elementarteilchen identifizieren.

2. Massenlose Darstellung: $P^2 = 0$ und $W^2 = 0$

$$W^\mu = h P^\mu \quad \text{mit } h = \pm s \text{ und } s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots,$$

wobei $h = W_0/P_0$ ebenfalls ein Casimir-Operator ist. Die Poincaré-Invariante h wird als *Helizität* bezeichnet. Sie „ersetzt“ bei massenlosen Teilchen den Spinbegriff.

3. Die zwei weiteren irreduziblen Darstellungen sind physikalisch irrelevant. Eine beschreibt massenlose Teilchen mit kontinuierlichem Spin ($s \in \mathbf{R}$), die andere Teilchen, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen ($P_\mu P^\mu < 0$).

1.1.4 \mathbf{Z}_2 -Graduierung der Poincaré-Algebra

Das Spektrum der Elementarteilchen lässt sich durch eine Veränderung der Poincaré-Algebra erweitern. Dies ist nicht im Rahmen einer Lie-Algebra möglich, sondern nur wenn man zusätzlich zu den Kommutatorrelationen auch Antikommatorrelationen zwischen den Generatoren zulässt.

Eine solche Algebra ist die \mathbf{Z}_2 -graduierte Algebra:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{(0)} \oplus \mathcal{G}_{(1)},$$

mit:

$$x_i \circ y_j \in \mathcal{G}_{(i+j \bmod 2)} \quad \text{mit} \quad i, j \in \{0, 1\} \text{ und } x_i \in \mathcal{G}_{(i)}, y_i \in \mathcal{G}_{(j)}.$$

Eine graduierte \mathbf{Z}_2 -Lie-Algebra erhält man mit:

$$\begin{aligned} \text{Supersymmetrie : } & x_i \circ y_j = -(-1)^{i,j} y_j \circ x_i \\ \text{Jacobi-Identität : } & x_k \circ (y_l \circ z_m) (-1)^{k \cdot m} \\ & + y_l \circ (z_m \circ x_k) (-1)^{k \cdot l} + z_m \circ (x_k \circ y_l) (-1)^{l \cdot m}. \end{aligned}$$

Damit erweitert man die Poincaré-Symmetrie durch so genannte *SUSY-Generatoren* Q_a ($a = 1, \dots, 4$), mit den Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} [P^\mu, Q_a] &= 0 \\ [M^{\mu\nu}, Q_a] &= -(\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu})_{ab} Q_b \\ \{Q_a, Q_b\} &= -2(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu, \end{aligned}$$

mit $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

1.1.5 Irreduzible Darstellungen der SUSY-Algebra

Die irreduziblen Darstellungen dieser Algebra erhält man wiederum aus den zugehörigen Casimir-Operatoren. Diese lauten im Fall der SUSY-Algebra wie folgt:

$$\begin{aligned} P^2 &= P_\mu P^\mu \\ C^2 &= C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} C_{\mu\nu} &= Y_\mu P_\nu - Y_\nu P_\mu \\ Y_\mu &= W_\mu + \frac{1}{4} X_\mu \\ X_\mu &= \frac{1}{2} \bar{Q} \gamma_\mu \gamma_5 Q \end{aligned}$$

Dabei sind die Q s so genannte Weyl-Spinoren.

Der Vierervektor Y_μ erfüllt die relativistische Drehimpulsalgebra:

$$[Y_\mu, Y_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\rho Y^\sigma$$

im Ruhesystem ergibt sich:

$$[Y_i, Y_j] = im\epsilon_{ijk} Y_k$$

Damit stellt $\frac{1}{m}\vec{Y}$ eine Verallgemeinerung des Drehimpulses dar (auch *Superspin* genannt), mit den Eigenwerten:

$$(\vec{Y}/m)^2 = y(y+1) \quad \text{mit} \quad y = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

Für den Casimir-Operator im Ruhesystem $C^2 = -2m^2 Y^2$ ergibt sich:

$$C^2 = -2m^4 y(y+1) \quad \text{mit} \quad y = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

Im massiven Fall wird somit jede irreduzible Darstellung der SUSY-Algebra durch das Paar (m, y) charakterisiert, wobei man die Zustände innerhalb eines solchen Supermultipletts zum einen nach

- den Eigenwerten y_3 der z -Komponente des Superspins $\frac{1}{m}\vec{Y}$ mit $-y \leq y_3 \leq y$,

und zum anderen wegen $[W_3, C_{\mu\nu} C^{\mu\nu}] = [W_3, Y_3] = 0$ nach

- den Eigenwerten s_3 der z -Komponente des Spins $\frac{1}{m}\vec{W}$ mit $s_3 \in \{y_3, y_3 + \frac{1}{2}, y_3 - \frac{1}{2}\}$ und nochmals zweifach entartetem $s_3 = y_3$,

klassifiziert.

Im massenlosen Fall, $P^2 = 0$ und $W^2 = 0$, tritt die Helizität h wieder an die Stelle der z -Komponente des Spins s , und man erhält zwei Zustände, die mit \underline{h} und $\overline{h} = \underline{h} + \frac{1}{2}$ bezeichnet sind. Für CPT -invariante Theorien hat man den obigen Zuständen zwei weitere hinzuzufügen. Für ihre Helizitäten ergibt sich dann $\underline{h}_{CPT} = -\underline{h}$ und $\overline{h}_{CPT} = -\overline{h} = -\underline{h} - \frac{1}{2}$.

1.1.6 Chirales und Vektor-Supermultiplett

In diesem Unterabschnitt sei kurz auf die zwei einfachsten Darstellungen der SUSY-Algebra eingegangen.

Chirales Supermultiplett

Für $y = 0$ erhält man das *chirale Supermultiplett*. Im massiven Sektor besteht es aus drei Teilchen:

- einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (Dublett mit $s_3 = \pm \frac{1}{2}$)
- einem skalaren Teilchen (Boson mit Spin 0)
- einem pseudoskalaren Teilchen (Boson mit Spin 0) .

Mit Hilfe des (massiven) chiralen Supermultipletts lassen sich beispielsweise Quarks und Leptonen sowie ihre Superpartner Squarks und Sleptonen beschreiben. Darüber hinaus ordnet man die Higgs-Teilchen und ihre SUSY-Partner dieser Darstellung zu. Das massenlose chirale Supermultiplett gleicht seinem massiven Analogon. Es beinhaltet ein skalares Teilchen ($\underline{h} = 0$) und einen Weyl-Spinor ($\bar{h} = 1/2$). Für eine Lorentz-invariante Theorie hat man jetzt noch die beiden durch *CPT*-Transformation zu bestimmenden Partner zu berücksichtigen. Man erhält somit insgesamt

- ein Majorana-Spinor-Teilchen ($\bar{h} = \pm 1/2$)

und

- ein komplexwertiges skalares Teilchen ($\underline{h} = 0$) .

Vektor-Supermultiplett

Sollen auch Eichbosonen (z.B. die Gluonen der QCD, oder die Vektorbosonen des elektroschwachen Sektors) in die Theorie eingebaut werden, so hat man Darstellungen mit $y = \frac{1}{2}$ zu betrachten. Das sich daraus ableitende *Vektor-Supermultiplett* enthält im massiven Fall:

- 2 Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (jeweils ein Dublett)
- ein Vektorteilchen (Boson Spin 1 / Triplet)
- ein pseudoskalares Teilchen (Boson Spin 0) .

Das massenlose Vektor-Supermultiplett mit $\underline{h} = 1/2$ beinhaltet zuzüglich der *CPT*-Partner

- ein (massenloses) vektorielles Teilchen ($\bar{h} = \pm 1$)

und als fermionischen Partner der Eichbosonen

- ein Majorana-Spinor-Teilchen ($\underline{h} = \pm \frac{1}{2}$) .

1.2 Superfelder

In einer gewöhnlichen Feldtheorie sind die Felder Funktionen der Raumzeitkoordinaten x . Um eine supersymmetrische Feldtheorie zu konstruieren, bietet es sich an ein Superfeld $S(x, \theta, \bar{\theta})$ einzuführen, das auch von grassmannwertigen Weyl-Spinoren θ und $\bar{\theta}$ abhängt. Zu den Poincaré-Transformationen

$$(\Lambda(w), a) = \exp \left\{ i \left(-\frac{1}{2} w_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma} - x_\mu P^\mu \right) \right\}, \quad (1.1)$$

die auf Felder des vierdimensionalen Minkowski-Raumes wirken, gibt es auch ein Analogon im Superraum, der ein um vier¹ grassmannwertige Koordinaten erweiterter Minkowski-Raum ist. In diesem Superraum liefern die SUSY-Generatoren Q und \bar{Q} analog zu den Generatoren P^μ , die durch $\exp(-ix_\mu P^\mu)$ Verschiebungen um x_μ im Minkowski-Raum erzeugen, eine Translation um die Weyl-spinoriellen, grassmannwertigen Parameter θ und $\bar{\theta}$ gemäß

$$\exp \{ i (\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}) \} \quad (\text{SUSY-Translation}). \quad (1.2)$$

Damit erhält man als supersymmetrische Erweiterung der Poincaré-Gruppe die *Poincaré-Supergruppe*. Ein allgemeines Gruppenelement (ohne Berücksichtigung von Lorentz-Boosts) hat dann die Form²

$$G(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = \exp \{ i (-x^\mu P_\mu + \theta Q + \bar{\theta} \bar{Q}) \}. \quad (1.3)$$

Ein Superfeld $S(x, \theta, \bar{\theta})$ kann man in eine Potenzreihe in θ und $\bar{\theta}$ entwickeln. Aufgrund der Grassmann-Eigenschaft $\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0$ bricht diese Reihe nach endlich vielen Termen ab. Man erhält für das Superfeld

$$\begin{aligned} S(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta \phi(x) + \bar{\theta} \bar{\xi}(x) + (\theta \theta) M(x) \\ &+ (\bar{\theta} \bar{\theta}) N(x) + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu(x) + (\theta \theta) \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) \\ &+ (\bar{\theta} \bar{\theta}) \theta \alpha(x) + (\theta \theta) (\bar{\theta} \bar{\theta}) d(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

(1.5)

mit den Komponentenfeldern $\phi, \bar{\xi}, M, N, A_\mu, \bar{\lambda}, \alpha$ und d . Dabei enthalten die Superfelder die im vorherigen Abschnitt angesprochenen Supermultipletts in Form eben

¹Die zusätzlichen Koordinaten werden durch zwei Weyl-Spinoren θ und $\bar{\theta}$ ausgedrückt.

²Eine Darstellung im Superraum ist

$$\begin{aligned} P_\mu &= -i \partial_\mu \\ iQ_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \\ i\bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \end{aligned}$$

mit $\sigma^\mu = (\mathbf{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$. Eine Herleitung findet man z.B. in [1].

dieser Komponentenfelder. Ihr Verhalten unter Lorentztransformationen ergibt sich aus der Forderung, dass das Superfeld S ein Lorentzskalar sei. Da Linearkombinationen von Superfeldern wieder Superfelder sind, ist der durch sie gegebene Darstellungsraum linear. Er ist allerdings hochgradig reduzibel. Um zu irreduziblen Darstellungen der Superfelder zu gelangen, fordert man deren Invarianz gegenüber SUSY-Transformationen. Die beiden wichtigsten Typen von Feldern sind in diesem Zusammenhang

- das skalare Superfeld
- das Vektor-Superfeld.

Wenn man kovariante Ableitungen

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \quad (1.6)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \quad (1.7)$$

einführt, erhält man durch die Forderung $D_\alpha \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$ ein chirales und für $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0$ ein antichirales Superfeld. Ein solches Superfeld enthält Skalarfelder und ein Weyl-Spinorfeld. Es beschreibt die bekannten Fermionfelder (Quarks und Leptonen) und ihre supersymmetrischen Partner (Squarks und Sleptonen). Will man auch Eichbosonen beschreiben, so braucht man eine Theorie, die Spin-1 Vektorfelder beinhaltet. Die SUSY-kovariante Bedingung für ein solches Vektor-Superfeld lautet dann

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (1.8)$$

Dieses Feld lässt sich wiederum in Komponentenfelder [10]

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) &= f + i\theta\phi - i\bar{\theta}\bar{\phi} + \frac{i}{2}(\theta\theta)M - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})M^* \\ &+ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + i(\theta\theta)\bar{\theta}\left(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi\right) \\ &- i(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\left(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\phi}\right) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(d - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial^\mu f\right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

zerlegen. Es ergeben sich als fermionische Freiheitsgrade zwei Weyl-Spinorfelder ϕ und λ , sowie als bosonische Anteile zwei reelle Felder f und d , ein komplexes Feld M und schließlich ein reelles Vektorfeld A_μ .

1.3 Eine supersymmetrische Lagrangedichte

Mit diesen Superfeldern lässt sich eine Supersymmetrische nicht-abelsche Eichtheorie konstruieren (siehe z.B. [1]), deren Lagrangedichte sich unter Weglassung der

Materiefelder in euklidischer Formulierung zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a \gamma_\mu (\mathcal{D}_\mu \lambda)^a \quad (1.10)$$

ergibt. Dabei ist

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (1.11)$$

der nicht-abelsche Feldstärketensor und

$$(\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}) = \partial_\mu \bar{\lambda} + [A_\mu, \bar{\lambda}] \quad (1.12)$$

die kovariante Ableitung in adjungierter Darstellung (vgl. Kapitel 2.2). Außerdem ist zu beachten, dass sich die Felder in der adjungierten Darstellung befinden:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^a T^a \\ A_\mu &= -ig A_\mu^a T^a \\ F_{\mu\nu} &= -ig F_{\mu\nu}^a T^a \end{aligned} \quad (1.13)$$

Das bosonische Vektorfeld A_μ stellt dabei ein Gluon dar, und der Majorana-Spinor λ ist mit den zugehörigen Superpartnern, den Gluinos, zu identifizieren. Dass es sich um eine Supersymmetrische Theorie handelt, folgt aus den SUSY-Transformationen

$$\delta A_\mu(x) = -2g \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon \quad (1.14)$$

$$\delta \lambda(x) = -\frac{i}{g} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \varepsilon \quad (1.15)$$

$$\delta \bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g} \bar{\varepsilon} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x), \quad (1.16)$$

unter denen die zugehörige Wirkung invariant ist.

Kapitel 2

Die $N=1$ SUSY-Yang-Mills Theorie auf dem Gitter

2.1 Grundbegriffe der Gittereichtheorie

2.1.1 Notationen

Das lokale Eichprinzip macht bekanntermaßen die Einführung von Paralleltransporthern und kovarianten Ableitungen notwendig. Genauer lässt sich in kontinuierlicher Raumzeit zu jeder Kurve $c_s : [0, s] \rightarrow \mathbf{R}^4$ ein durch die $SU(N)$ -Eichsymmetrie induzierter Paralleltransporter $U(c_s) \in SU(N)$ finden, der dann über DYSON'S Formel

$$U(c_s) = \mathcal{P} \exp \left\{ - \int_{c_s} A_\mu(x) dx_\mu \right\} \quad (2.1)$$

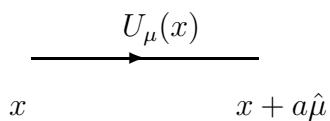
mit dem Eichfeld A_μ verknüpft ist. Dabei stellt \mathcal{P} den Pfadordnungsoperator dar, und das Eichfeld ist Element der Lie-Algebra der $SU(N)$, d.h. $A_\mu(x) \in su(N)$.

Den Krümmungs- oder Feldstärketensor $F_{\mu\nu}(x)$ der Theorie erhält man dann aus infinitesimalen geschlossenen Kurven $c_{x;\mu,\nu}$ um x mit Seitenlängen dx_μ und dx_ν durch die Beziehung

$$U(c_{x;\mu,\nu}) = 1 - F_{\mu\nu}(x) dx_\mu dx_\nu. \quad (2.2)$$

Auf dem Gitter ist die kleinste Wegstrecke nicht mehr infinitesimal, sondern von der Länge a .

Die Paralleltransporter werden deshalb auf den Gitterkanten definiert:



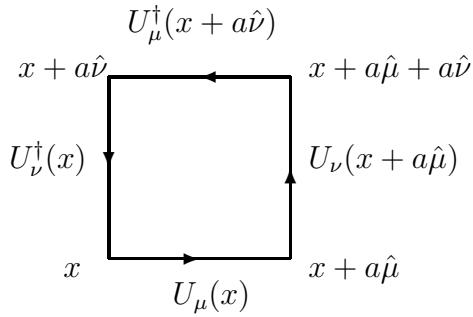
Die zu (2.1) analoge Beziehung zwischen den Paralleltransportern und dem Eichfeld A_μ ist durch

$$U_\mu(x) = e^{-aA_\mu(x)} \quad \text{und} \quad U_\mu^\dagger(x) = e^{aA_\mu(x)} \quad (2.3)$$

gegeben.

2.1.2 Die Wilson-Wirkung für das Eichfeld

Um nun eine Gitter-Wirkung für das Eichfeld aufzustellen, benötigt man analog zu (2.2) geschlossene Kurven. Die kleinstmögliche Wahl ist hierbei auf dem Gitter die sogenannte Plaquettenvariable $U_{\mu\nu}(x)$ entlang eines Quadrats der Seitenlänge a :



Algebraisch ist dieser Ausdruck durch

$$U_{\mu\nu}(x) = U_\nu^\dagger(x)U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu})U_\nu(x + a\hat{\mu})U_\mu(x) \quad (2.4)$$

gegeben.

Durch Einsetzen der (2.3) entsprechenden Beziehungen, Benutzung der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel¹ und Taylor-Entwicklung nach a sieht man dann, dass (2.2) in der folgenden Art und Weise reproduziert wird:

$$U_{\mu\nu}(x) = 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^3). \quad (2.5)$$

Als Diskretisierung des Eichfeldanteils der Lagrange-Dichte benutzen wir nun die Standard-Formulierung nach WILSON [21][22]:

$$S_g^{lat}(x) = \frac{1}{2g^2} \sum_x \sum_{1 \leq \mu \neq \nu \leq 4} \left[4 - \text{Tr} \{ U_{\mu\nu}(x) + U_{\nu\mu}(x) \} \right]. \quad (2.6)$$

Die Lagrange-Dichte auf dem Gitter hängt mit der Wirkung über die Beziehung

$$S^{lat} = a^4 \sum_x \mathcal{L}^{lat}(x) \quad (2.7)$$

¹ $\exp(x)\exp(y) = \exp(x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \dots)$

zusammen, denn es gilt $a^4 \sum_x \rightarrow \int d^4x$ für $a \rightarrow 0$. Eine naheliegende Wahl der Lagrange-Dichte auf dem Gitter ist daher

$$\mathcal{L}_g^{lat}(x) = \frac{1}{2g^2} \frac{1}{a^4} \sum_{1 \leq \mu \neq \nu \leq 4} \left[4 - \text{Tr} \{ U_{\mu\nu}(x) + U_{\nu\mu}(x) \} \right]. \quad (2.8)$$

2.1.3 Die Wirkung für den fermionischen Teil

Im Kontinuum ist der fermionische Teil der Wirkung durch den Ausdruck

$$\mathcal{L}_f(x) = \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x) \} \quad (2.9)$$

gegeben. Im wesentlichen sind nun also Ableitungen auf dem Gitter zu modellieren. Für die Ableitung ohne Eichfeld und eine auf dem Gitter erklärte Funktion f findet man dabei eine Vorwärts- und eine Rückwärtsableitung sowie eine symmetrische Form:

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^{lat,f} f(x) &= \frac{1}{a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x)) \\ \Delta_\mu^{lat,b} f(x) &= \frac{1}{a} (f(x) - f(x - a\hat{\mu})) \\ \Delta_\mu^{lat,sym} f(x) &= \frac{1}{2a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x - a\hat{\mu})). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Man sieht sofort, daß diese im Limes $a \rightarrow 0$ die Ableitungen des Kontinuums ergeben. Für die kovariante Ableitung der adjungierten Darstellung kann man auf dem Gitter analoge Versionen definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^{lat,f} f(x) &= \frac{1}{a} (U_\mu^\dagger(x) f(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - f(x)) \\ \mathcal{D}_\mu^{lat,b} f(x) &= \frac{1}{a} (f(x) - U_\mu(x - a\hat{\mu}) f(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu})) \\ \mathcal{D}_\mu^{lat,sym} f(x) &= \frac{1}{2a} (U_\mu^\dagger(x) f(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - U_\mu(x - a\hat{\mu}) f(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu})). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Die fermionische Lagrange-Dichte ist nun durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{lat}(x) &= \frac{1}{2a} \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ &\quad \left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

gegeben. Um dies auf eine Form zu bringen, die der von (2.9) entspricht, fügen wir

zwei Nullen ein und nutzen die Zyklizität der Spur:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f^{lat}(x) &= \frac{1}{2a} \sum_{\mu} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_{\mu} U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \right. \\
&\quad - \underbrace{\bar{\lambda}(x) \gamma_{\mu} \lambda(x)}_0 \\
&\quad - U_{\mu}^{\dagger}(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \gamma_{\mu} U_{\mu}(x) \lambda(x) \\
&\quad \left. + \underbrace{\bar{\lambda}(x) \gamma_{\mu} \lambda(x)}_0 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_{\mu} \mathcal{D}_{\mu}^{lat,f} \lambda(x) - \mathcal{D}_{\mu}^{lat,f} \bar{\lambda}(x) \gamma_{\mu} \lambda(x) \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_{\mu} \mathcal{D}_{\mu}^{lat,f} \lambda(x) \right\}. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass auch hier der korrekte Kontinuumslimes reproduziert wird. Schließlich muss man noch den Wilson-Term einführen, der die beim Kontinuumslimes auftretenden Fermion-Doppler eliminiert und kein Analogon im Kontinuum findet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{f,Wil}^{lat}(x) &= \frac{1}{2a} r \sum_{\mu} \text{Tr} \left\{ \right. \\
&\quad - \bar{\lambda}(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \\
&\quad - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \left. \right\} \\
&\quad + \frac{4r}{a} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\} \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Insgesamt sieht also der fermionische Anteil der Lagrange-Dichte wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f^{lat}(x) + \mathcal{L}_{f,Wil}^{lat}(x) + \mathcal{L}_m^{lat}(x) &= \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2a} \sum_{\mu} \left(\bar{\lambda}(x) (\gamma_{\mu} - r) U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \right. \right. \\
&\quad - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_{\mu} + r) U_{\mu}(x) \lambda(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \left. \right) \\
&\quad \left. + \left(m_0 + \frac{4r}{a} \right) \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\}. \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir den Gluinoss durch den Term $\mathcal{L}_m^{lat}(x) = m_0 \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \}$ noch eine zusätzliche (nackte) Masse m_0 verliehen. Die zugehörige Wirkung findet man z.B. in [13]. In der weiteren Rechnung werden wir die Kennzeichnung *lat* weglassen, denn es ist klar, dass es sich um die Variation der Gitter-Lagrange-Dichte handelt.

2.2 Majorana-Fermionen in der adjungierten Darstellung

Wie z.B. in [18] nachzulesen existiert ein Zusammenhang zwischen der Tensordarstellung der $SO(3)$ und der Spinordarstellung der $SU(2)$. So lässt sich jedem Vektor $x \in \mathbf{R}^3$ eine 2×2 -Matrix X

$$X = x^i \sigma^i = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$x^i = \frac{1}{2} \text{Tr } X \sigma^i \quad (2.17)$$

zuordnen. Transformiert man X mit einem $\Lambda \in SU(2)$

$$X \rightarrow X' = \Lambda X \Lambda' \quad (2.18)$$

entspricht das einer orthogonalen Vektor-Transformation² $R^{ki} \in SO(3)$ von x . Es muss also gelten:

$$\Lambda X \Lambda^{-1} \stackrel{!}{=} (R^{ij} x^j) \sigma^i \quad (2.19)$$

$$\Leftrightarrow x^j \Lambda \sigma^j \Lambda^{-1} = x^j R^{ij} \sigma^i \quad (2.20)$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1}{2} \sigma^k$ und anschließender Spurbildung erhält man:

$$R^{kj} = \frac{1}{2} \text{Tr } \sigma^k \Lambda \sigma^j \Lambda^{-1}. \quad (2.21)$$

Mit der Skalierung

$$a^{3/2} (am + 4r)^{1/2} \lambda(x) \rightarrow \lambda(x) \quad (2.22)$$

und dem Hoppingparameter

$$K = \frac{1}{2am_0 + 8r} \quad (2.23)$$

lässt sich, da sich die Felder in der Lagrangedichte (2.15) in der adjungierten Darstellung (1.13) befinden, die zugehörige Wirkung schreiben als:

²denn $\det X$ ist das negative Skalarprodukt $-x^i x^i$; außerdem ist die Determinante invariant unter $SU(2)$ Transformationen und damit auch $-x^i x^i$.

$$\begin{aligned}
S_f &= \sum_x \left\{ \text{Tr} (\bar{\lambda}(x) \lambda(x)) \right. \\
&- K \text{Tr} \left(\sum_{\mu=1}^4 \sum_{\alpha\beta} \bar{\lambda}_\beta(x+\mu) [r + \gamma_\mu]_{\beta\alpha} U_\mu(x) \lambda_\alpha(x) U_\mu^{-1}(x) \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{\lambda}_\beta(x) [r - \gamma_\mu]_{\beta\alpha} U_\mu^{-1}(x) \lambda_\beta(x-\mu) U_\mu(x) \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{\substack{x,\alpha,a \\ y,\beta,b}} \left\{ \bar{\lambda}_\alpha^a(x) \lambda_\alpha^a(x) \right. \\
&- K \sum_{\mu=1}^4 \bar{\lambda}_\beta^b(x+\mu) [r + \gamma_\mu]_{\beta\alpha} V_\mu^{ba}(x) \lambda_\alpha^a(x) + \bar{\lambda}_\beta^b(x) [r - \gamma_\mu]_{\beta\alpha} (V_\mu^T)^{ba}(x) \lambda_\alpha^a(x+\mu) \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Diese Wirkung lässt sich auch kompakter schreiben als

$$S_f = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x,\alpha,a \\ y,\beta,b}} \bar{\lambda}^b(y) Q_{y\beta,x\alpha}^{ba} \lambda^a(x), \tag{2.25}$$

mit der Fermionenmatrix

$$Q_{y\beta,x\alpha}^{ba} = \delta_{yx} \delta_{ba} \delta_{\beta\alpha} - K \sum_{\mu=1}^4 [(r + \gamma_\mu)_{\beta\alpha} V_\mu^{ba}(x) \delta_{y,x+\mu} + (r - \gamma_\mu)_{\beta\alpha} (V_\mu^T)^{ba}(y) \delta_{y+\mu,x}]. \tag{2.26}$$

Dabei gelten für V und λ die zu (2.21) bzw. (2.18) analogen Beziehungen

$$V_\mu^{ab}(x) = 2 \text{Tr} (U_\mu(x) T^a U_\mu^{-1}(x) T^b) \tag{2.27}$$

$$\lambda'(x) = \Lambda^{-1} \lambda(x) \Lambda(x). \tag{2.28}$$

Diese Wirkung ist die von I. MONTVAY vorgeschlagene Version der CURCI-VENEZIANO-Wirkung. Aufgrund des Transformationsverhaltens der Majorana-Spinoren (2.28) spricht man auch von der supersymmetrischen Yang-Mills Theorie mit Majorana-Fermionen in adjungerter Darstellung.

2.3 Die n-Punkt Funktion

Da Majorana-Fermionen wegen der Beziehung $\lambda = C \bar{\lambda}^T$ nur halb so viele Freiheitsgrade wie Dirac-Fermionen haben, lässt sich der fermionische Teil der Wirkung auch schreiben als

$$\begin{aligned} S_f &= \frac{1}{2} \sum_{x,y} \bar{\lambda}_\mu^a(x) Q_{\mu\nu}^{ab} \lambda_\mu^b(y) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x,y} \lambda_\mu^a(x) C_{\mu\tau} Q_{\tau\nu}^{ab} \lambda_\mu^b(y). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Das zugehörige erzeugende Funktional lautet dann

$$Z[J] = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\lambda \exp \left(-S_g - S_f - \sum_x J(x) \lambda(x) \right). \quad (2.30)$$

Mit den Transformationen

$$\lambda_\mu^a(x)' = \lambda_\mu^a(x) + \sum_y J_\nu^b(M^{-1})_{\nu\mu}^{ba}(x, y) \quad (2.31)$$

$$M_{\nu\mu}^{ba}(x, y) = [CQ]_{\nu\mu}^{ba}(x, y) \quad (2.32)$$

erhält man schließlich

$$Z[J] = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\lambda' \exp \left(-S_g - \frac{1}{2} \sum_{x,y} \lambda'(x) M(x, y) \lambda'(y) + J(x) M^{-1}(x, y) J(y) \right). \quad (2.33)$$

In diesem Ausdruck tritt die Pfaffsche Form der Matrix M auf. Für eine total antisymmetrische Matrix mit $2N$ Dimensionen lässt sich die Pfaffsche Form schreiben als

$$\text{Pf}[M] = \int \mathcal{D}\lambda \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda_\mu M_{\mu\nu} \lambda_\nu \right) = \frac{1}{N! 2^N} \epsilon_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_{2N} \nu_{2N}} M_{\mu_1 \nu_1} \dots M_{\mu_{2N} \nu_{2N}}, \quad (2.34)$$

dabei ist ϵ der total antisymmetrische Tensor. Das erzeugende Funktional bekommt dann die Gestalt

$$Z[J] = \int \mathcal{D}U \text{Pf}[M] \exp \left(-S_g - \frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) M^{-1}(x, y) J(y) \right) \quad (2.35)$$

oder mit

$$S_{eff} = S_g - \log \text{Pf}[M] \quad (2.36)$$

die Form

$$Z[J] = \int \mathcal{D}U \exp \left(-S_{eff} - \frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) M^{-1}(x, y) J(y) \right). \quad (2.37)$$

Durch funktionale Differentiation lassen sich daraus die n-Punkt Funktionen berechnen:

$$\begin{aligned}
& \langle T \{ \lambda_{\epsilon_1}^{c_1}(x_1) \dots \lambda_{\epsilon_n}^{c_n}(x_n) \} \rangle \\
&= \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\lambda \lambda_{\epsilon_1}^{c_1}(x_1) \dots \lambda_{\epsilon_n}^{c_n}(x_n) \exp \left(-S_g - \frac{1}{2} \sum_{x,y} \lambda(x) M(x,y) \lambda(y) \right)}{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\lambda \exp(-S_g - S_f)} \\
&= \frac{1}{Z[0]} \int \mathcal{D}U \frac{\delta^n}{\delta J_{\epsilon_1}^{c_1}(x_1) \delta J_{\epsilon_n}^{c_n}(x_n)} \exp \left(-S_{eff} - \frac{1}{2} \sum_{x,y} J_\mu^a(x) M^{-1}{}^{ab}_{\mu\nu}(x,y) J_\nu^b(y) \right) \Big|_{J=0} \\
&= \left\langle \frac{\delta^n}{\delta J_{\epsilon_1}^{c_1}(x_1) \delta J_{\epsilon_n}^{c_n}(x_n)} \exp \left(\frac{1}{2} \sum_{x,y} J_\mu^a(x) M^{-1}{}^{ab}_{\mu\nu}(x,y) J_\nu^b(y) \right) \right\rangle_g \quad (2.38)
\end{aligned}$$

$\langle \dots \rangle_g$ bezeichnet die noch auszuführende Mittelung über die Eichfelder. Diese wird auf dem Gitter numerisch durchgeführt. Für die im weiteren betrachteten Zustände ist es notwendig, die 4-Punkt-Funktion zu kennen, die sich aus(2.38) zu

$$\begin{aligned}
& \langle T \{ \lambda_{\epsilon_1}^{c_1}(x_1) \lambda_{\epsilon_2}^{c_2}(x_2) \lambda_{\epsilon_3}^{c_3}(x_3) \lambda_{\epsilon_4}^{c_4}(x_4) \} \rangle \\
&= \langle M^{-1}{}^{c_1 c_2}_{\epsilon_1 \epsilon_2}(x_1, x_2) M^{-1}{}^{c_3 c_4}_{\epsilon_3 \epsilon_4}(x_3, x_4) \\
&\quad + M^{-1}{}^{c_1 c_4}_{\epsilon_1 \epsilon_4}(x_1, x_4) M^{-1}{}^{c_2 c_3}_{\epsilon_2 \epsilon_3}(x_2, x_3) \\
&\quad - M^{-1}{}^{c_1 c_3}_{\epsilon_1 \epsilon_3}(x_1, x_3) M^{-1}{}^{c_2 c_4}_{\epsilon_2 \epsilon_4}(x_2, x_4) \rangle_g \\
&= \langle \Delta_{\epsilon_1 \delta_2}^{c_1 c_2}(x_1, x_2) C_{\delta_2 \epsilon_2}^{-1} \Delta_{\epsilon_3 \delta_4}^{c_3 c_4}(x_3, x_4) C_{\delta_4 \epsilon_4}^{-1} \\
&\quad + \Delta_{\epsilon_1 \delta_4}^{c_1 c_4}(x_1, x_4) C_{\delta_4 \epsilon_4}^{-1} \Delta_{\epsilon_2 \delta_3}^{c_2 c_3}(x_2, x_3) C_{\delta_3 \epsilon_3}^{-1} \\
&\quad - \Delta_{\epsilon_1 \delta_3}^{c_1 c_3}(x_1, x_3) C_{\delta_3 \epsilon_3}^{-1} \Delta_{\epsilon_2 \delta_4}^{c_2 c_4}(x_2, x_4) C_{\delta_4 \epsilon_4}^{-1} \rangle_g \quad (2.39)
\end{aligned}$$

ergibt. Mit der inversen Fermionenmatrix $\Delta = Q^{-1}$.

Kapitel 3

Simulation auf dem Gitter

Wie in der QCD erwartet man in der N=1 Supersymmetrischen Yang-Mills Theorie massive Bindungszustände der elementaren Teilchen. Bei nicht gebrochener Supersymmetrie sollten sich diese Zustände in den supersymmetrischen Multipletts aus Kapitel 1 anordnen. Um das Massenspektrum einer Theorie zu untersuchen, ist es notwendig, Verfahren zu entwickeln die geeignet sind die Massen von Bindungszuständen zu messen. Dabei hat man sich bisher auf Zustände konzentriert, die auf einem Gitterpunkt lokalisiert waren und hat ihnen später durch sog. Smearing eine räumliche Ausdehnung verliehen. In diesem Kapitel ist die Vorgehensweise für diese lokalen Operatoren kurz zusammengefasst. Im nächsten Kapitel wird dann darauf eingegangen, welche Änderungen für die Betrachtung nichtlokaler Operatoren notwendig sind.

3.1 Erzeugung von Feldkonfigurationen

Um Massen von Bindungszuständen auf dem Gitter zu messen, ist es notwendig Erwartungswerte, wie in Formel (2.39), von Funktionen der Felder $A(U)$ zu berechnen.

$$\langle A(U) \rangle = \int \mathcal{D}U e^{-S_{eff}} A(U) \quad (3.1)$$

Wegen der großen Zahl an Integrationsvariablen¹

$$\mathcal{D}U = \prod_{x,\mu} dU_\mu(x)$$

kommt zur Auswertung nur eine Monte-Carlo-Integration in Frage. Dazu werden zufällig Feldkonfigurationen erzeugt und dann der Mittelwert des Integranden gebildet. Dieses Vorgehen wäre im vorliegenden Fall jedoch sehr ineffizient, da aufgrund

¹Selbst für die Testläufe dieser Arbeit, für die nur ein sehr kleines Gitter verwendet wurde, wären es schon über 1000 Integrationsvariablen.

des Faktors $e^{-S_{eff}}$ der Integrand Peaks bei einigen wenigen Konfigurationen hat. Es ist numerisch daher effizienter ein Ensemble $\{U_n | n = 1, \dots, N\}$ mit der Verteilung $p(U_n) \sim e^{-S_{eff}}(U)$ zu erzeugen. Der Erwartungswert einer Größe A ergibt sich dann zu

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A(U_n). \quad (3.2)$$

Eine detaillierte Darstellung der verschiedenen numerischen Verfahren findet man z.B. in [14].

3.2 Korrelationsfunktionen

Die Masse eines gebundenen Zustandes φ (das könnte z.B. ein Bindungszustand aus zwei Majorana-Teilchen $\varphi = \bar{\lambda}(x)\lambda(x)$ sein,) wird durch das asymptotische Verhalten der Korrelationsfunktionen

$$C(\Delta t) = \langle S(t + \Delta t)^\dagger S(t) \rangle - \langle S(t + \Delta t)^\dagger \rangle \langle S(t) \rangle \quad (3.3)$$

zwischen den Zeitscheibenerwartungswerten

$$S(t, p = 0) = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{x}} \varphi(x, t) \quad (3.4)$$

bestimmt. Dabei ist L^3 das (räumliche) Volumen, die Summe über \vec{x} sorgt dafür, dass man nur die Komponenten mit Impuls $p = 0$ erhält. Fügt man jetzt einen kompletten Satz von Energieeigenfunktionen ein und berücksichtigt periodische bzw. antiperiodische Randbedingungen in Zeitrichtung, dann erhält man

$$\begin{aligned} C(\Delta t) &= \sum_n \left\{ |\langle n | S(t) | 0 \rangle|^2 e^{-E_n \Delta t} \pm |\langle 0 | S(t)^\dagger | n \rangle|^2 e^{-E_n (L-t-\Delta t)} \right\} \\ &= \sum_n c_n (e^{-m_n \Delta t} \pm e^{-m_n (T-\Delta t)}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Durch die Periodizität des Gitters ergibt sich eine Symmetrie bzgl. $\frac{T}{2}$ bei einer zeitlichen Ausdehnung von T . Für große Werte von Δt sind die Terme für größere Massen exponentiell gedämpft, so dass $C(\Delta t)$ im Limes $\Delta t \rightarrow \infty$ in

$$C(\Delta t) = C_0 + c_1 (e^{-m_1 \Delta t} \pm e^{-m_1 (T-\Delta t)}) \quad (3.6)$$

übergeht. Durch einen Fit an diese Funktion kann man dann die Masse des leichtesten Zustandes extrahieren. Da man den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow \infty$ jedoch nicht ausführen kann, erhält man bei einem solchen Fit Fehler, da die Terme zu schweren Zuständen nicht völlig verschwinden. Um dennoch gute Ergebnisse zu erzielen

ist es notwendig Operatoren zu konstruieren, die das Vakuum besonders gut auf den Grundzustand abbilden. Denn für einen Operator φ mit

$$\langle n|S(t)|0\rangle = \delta_{n1}, \quad (3.7)$$

ist der Übergang zu $\Delta t \rightarrow \infty$ nicht notwendig, um die tatsächliche Masse zu extrahieren. Solche Operatoren sind jedoch nicht einfach zu finden, man führt deshalb unterschiedliche Smearing-Techniken ein, die es erlauben eine große Zahl von Operatoren zu erzeugen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde jedoch ein anderer Weg beschritten. Es wurden nichtlokale Operatoren konstruiert, die evtl., eine bessere Projektion auf den Grundzustand liefern. Außerdem wäre es auch denkbar, dass man Operatoren erhält, die primär auf einen schwereren Zustand projizieren

$$\langle n|S(t)|0\rangle \approx \delta_{nm}. \quad (3.8)$$

3.3 Massenbestimmung von Majorana-Majorana Bindungszuständen

Die Korrelationsfunktionen für Zustände, die zwei Majoranateilchen enthalten, haben alle eine ähnliche Struktur. Sie bestehen immer aus verbundenen und unverbundenen Anteilen. So berechnet sich die Korrelationsfunktion für den skalaren Gluino-ball $\varphi(x) = \bar{\lambda}(x)\lambda(x)$ aus (2.39) zu:

$$\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle = \underbrace{\text{Tr}_{\text{sc}} \Delta_{xx} \text{Tr}_{\text{sc}} \Delta_{yy}}_{\text{unverbundener Anteil}} - \underbrace{2\text{Tr}_{\text{sc}} \Delta_{xy} \Delta_{yx}}_{\text{verbundener Anteil}} \quad (3.9)$$

Um jetzt Massen berechnen zu können ist es notwendig, $\Delta(U) = Q^{-1}(U)$ zu kennen. D.h. es ist notwendig die Fermionenmatrix Q_{xy} zu invertieren. Da x und y alle Gitterpunkte durchlaufen, und Matrixinversionen sehr rechenaufwendig sind, ist es nicht möglich die komplette Fermionenmatrix zu invertieren. Deshalb verwendet man ein anderes Verfahren zur Berechnung der Korrelationsfunktion. Dabei werden die verbundenen und unverbundenen Anteile getrennt betrachtet. Die unverbundenen Anteile werden mittels der *Volume Source Technique* (VST), die verbundenen Anteile durch statistisch verteilte Quellen berechnet.

3.4 Der verbundene Anteil

Um nicht den vollen Propagatoren Δ_{xy} berechnen zu müssen, wählt man sich eine feste Quelle $x = x_0$ und berechnet dann die Elemente Δ_{yx_0} mit

$$Q_{xy}\Delta_{yx_0} = \delta_{x,x_0}. \quad (3.10)$$

Für die Korrelationsfunktion ergibt sich dann für den verbundenen Anteil

$$C(\Delta t) = \left\langle \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{y}} 2 \text{Tr}_{\text{sc}} \gamma_5 \Delta_{yx_0}^* \gamma_5 \Delta_{yx_0} \right\rangle. \quad (3.11)$$

Dabei nutzt man die Relation

$$\Delta = \gamma_5 (\Delta^*)^{T_{x,s,c}} \gamma_5 \quad (3.12)$$

der Fermionenmatrix aus. Mit der Transposition $T_{x,s,c}$ bzgl. der Orts-, Spin- und Farbfreiheitsgrade.

3.5 Der unverbundene Anteil

Zur Ermittlung des unverbundenen Anteils ist es notwendig Propagatoren des Typs Δ_{xx} zu berechnen. Eine Möglichkeit stellt dabei die *Volume Source Technique*(VST) dar. Die VST ermöglicht es alle Propagatoren Δ_{xx} aus einer einzigen Matrixinversion² zu gewinnen. Dabei macht man sich zu Nutze, dass nach dem Elitzur-Theorem [4] die Erwartungswerte nicht eichinvarianter Größen verschwinden.

$$\Delta_{xx} = \Delta_{xx} + \sum_{y \neq x} \Delta_{xy} = \sum_y \Delta_{xy} \quad (3.13)$$

Denn Δ_{xy} ist für $x \neq y$ nicht eichinvariant und $\sum_y \Delta_{xy}$ lässt sich durch eine einzige Matrixinversion gewinnen:

$$Q_{\mu\nu}^{ab}(x, y) \sum_{z,c,\alpha} \Delta_{\nu\alpha}^{bc}(y, z) = b[x, a, \mu] \quad (3.14)$$

Dabei ist $b[x, a, \mu] = 1$ für alle Punkte im Orts- Spin- und Farbraum. Der gesamte Raum ist also angefüllt mit Quellen, dieser Umstand war namensgebend für die VST.

3.6 Smearing

Wenn man Bindungszustände auf dem Gitter simuliert ist nicht nur das Transformationsverhalten der verwendeten Operatoren bedeutend, sondern auch ihre Struktur. Um gute Ergebnisse zu erzielen ist es wichtig, dass der aus dem Vakuum erzeugte Zustand im wesentlichen ein Energieeigenzustand ist. Dies versucht man zu erreichen,

²Eine Matrixinversion meint hier das Lösen des Gleichungssystems $Q_{\mu\nu}^{ab}(x, y) Z_\nu^b(y) = \delta_\mu^a(x)$. Wenn $\delta_\mu^a(x) = 1$ für $[z, c, \tau]$ und sonst = 0, dann liefert Z gerade eine Spalte von $(Q_{\nu\tau}^{bc}(y, z))^{-1} = Z_\nu^b(y)$.

indem man den Operatoren durch Smearing eine räumliche Ausdehnung verleiht. Ein Bindungszustand zweier Gluinos wäre z.B. auf einem Gitterpunkt lokalisiert und damit punktförmig. Für einen gluonischen Bindungszustand würde sich z.B. eine Ausdehnung von der Größe einer Plakette ergeben. Diese Ausdehnungen stimmen nicht zwangsläufig mit den natürlichen Ausdehnungen dieser Bindungszustände überein. Smearing sorgt dafür, dass die simulierten Zustände „verschmiert“ werden und so ein besseres Resultat für den zu messenden Zustand erzielt wird. Der Smearing-Radius muss dabei auf den zu messenden Zustand abgestimmt werden. Als zusätzlicher Effekt des Smearings ergibt sich eine Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses.

3.6.1 APE Smearing

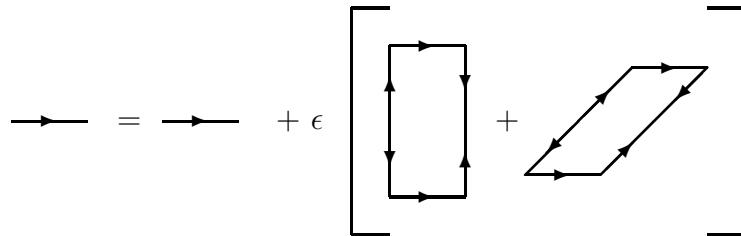


Abbildung 3.1: APE Smearing

Ein mögliches Verfahren zur Verschmierung von Eichfeldern ist APE-Smearing. Dabei wird ein Link durch eine Summe über benachbarte Links ersetzt (siehe Abb. 3.1). Durch N-fache Anwendung dieses Verfahrens

$$U_{x,\mu} \rightarrow U_{x,\mu} + \epsilon \sum_{\substack{\nu=1,2,3 \\ \nu \neq \mu}} \left(U_{x+\hat{\mu},\nu}^\dagger U_{x+\hat{\nu},\mu} U_{x,\mu} + U_{x+\hat{\mu}-\hat{\nu},\nu} U_{x-\hat{\nu},\mu} U_{x-\hat{\nu},\nu}^\dagger \right) \quad (3.15)$$

auf das komplette Gitter erhält man einen Smearing-Radius von $R = N\epsilon$.

3.6.2 Jacobi Smearing

Wenn man fermionische Zustände berechnet, ist es notwendig die Fermionenmatrix zu invertieren. Dabei ist es das einfachste, mit punktförmigen Quellen und Senken zu arbeiten. Dies wird jedoch den physikalischen Zuständen nicht gerecht, die eine natürliche Ausdehnung besitzen. Eine Möglichkeit dieser Ausdehnung gerecht zu werden, ist die δ -artigen Quellen und Senken durch

$$F^{ab}(x, x') = \delta^{ab} \delta_{xx'} + \sum_{i=1}^{N_J} \left[\kappa_J \sum_{\mu=1}^3 (\delta_{x',x+\hat{\mu}} V_\mu^{ab}(x) + \delta_{x'+\hat{\mu},x} V_\mu^{\dagger ab}(x)) \right]^i \quad (3.16)$$

zu ersetzen. Dabei meint $\sum_{i=1}^{N_J} [\dots]$ N-fache Iteration von $[\dots]$. Die Parameter κ_J und N_J sind durch ausprobieren zu optimieren.

Kapitel 4

Der Spin 1 Operator

Nach Kapitel 1 gibt es ein supersymmetrisches Vektormultiplett, das zwei Spin- $\frac{1}{2}$, ein Spin-0 (Pseudoskalar) und ein Spin-1 (Vektor)-Teilchen enthält. In diesem Kapitel werden lokale und nichtlokale Operatoren konstruiert, die das Spin-1-Vektorboson beschreiben.

4.1 Der lokale Spin-1 Operator

Lokal (d.h. alle Majorana-Teilchen befinden sich auf dem selben Gitterpunkt) lässt sich ein Spin 1 Operator durch

$$\varphi_v = \bar{\lambda} \gamma_\mu \lambda \quad \text{mit} \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (4.1)$$

oder durch

$$\varphi_p = \bar{\lambda} \gamma_5 \gamma_\mu \lambda \quad \text{mit} \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (4.2)$$

realisieren. Der erste Operator transformiert sich wie ein Vektor, der zweite wie ein Pseudovektor. Beachtet man die speziell für Majorana-Spinoren gültige Relation (A.10)

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \phi = -\bar{\phi} \gamma_\mu \psi \quad (4.3)$$

ergibt sich direkt $\varphi_v = 0$. Es gibt also keinen lokalen Operator, der einen Spin-1 Zustand mit negativer Parität erzeugt.

4.1.1 Das Transformationsverhalten

Sei Λ eine Lorentz-Transformation und $S(\Lambda)$ die zugehörige Transformationsmatrix. Dann gilt

$$S^{-1}\gamma_5 S = \gamma_5 \quad (4.4)$$

$$S^{-1}\gamma_\mu S = \Lambda_\mu^\nu \gamma_\nu \quad (4.5)$$

$$\lambda'(x') = S\lambda(x) \quad (4.6)$$

$$\bar{\lambda}'(x') = \bar{\lambda}(x)S^{-1}. \quad (4.7)$$

Damit ergibt sich für das Transformationsverhalten des Operators (4.2)

$$\varphi_\mu(x')' = \bar{\lambda}(x')'\gamma_5\gamma_\mu\lambda'(x') \quad (4.8)$$

$$= \bar{\lambda}(x)S^{-1}\gamma_5SS^{-1}\gamma_\mu S\lambda(x) \quad (4.9)$$

$$= \bar{\lambda}(x)\gamma_5\Lambda_\mu^\nu\gamma_\nu\lambda(x) = \Lambda_\mu^\nu\varphi_\nu(x). \quad (4.10)$$

Der Operator transformiert sich also wie ein Vierervektor. Beachtet man auch noch das Transformationsverhalten unter Raumspiegelung, das durch den Paritätsoperator P mit

$$P(\lambda) = i\gamma_4\lambda \quad (4.11)$$

$$P(\bar{\lambda}) = -i\bar{\lambda}\gamma_4 \quad (4.12)$$

beschrieben wird, ergibt sich, dass sich der Operator wie ein (Dreier-)Pseudovektor transformiert

$$P(\varphi_v) = P(\bar{\lambda})\gamma_\mu P(\lambda) = \bar{\lambda}\gamma_4\gamma_\mu\gamma_4\lambda = -\bar{\lambda}\gamma_\mu\lambda = -\varphi_v \quad (4.13)$$

$$P(\varphi_p) = P(\bar{\lambda})\gamma_5\gamma_\mu P(\lambda) = \bar{\lambda}\gamma_4\gamma_5\gamma_\mu\gamma_4\lambda = \bar{\lambda}\gamma_\mu\lambda = \varphi_p. \quad (4.14)$$

Dabei wurde verwendet, dass $\{\gamma_4, \gamma_\mu\} = 0$ (vgl. Anhang C) für $\mu = 1, 2, 3, 5$ gilt.

4.1.2 Die Korrelationsfunktion

Wenn man beachtet, dass

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T \quad \text{und} \quad C\Delta C^{-1} = C^{-1}\Delta C = \Delta^{T_{x\mu a}} \quad (4.15)$$

gilt (vgl. Anhang D und E), kann man die Korrelationsfunktion mit Hilfe von Gleichung (2.39) berechnen

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_\mu(x) \varphi_\nu(y) \rangle &= \left\langle \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \lambda(x) \right\} \left\{ \bar{\lambda}(y) \gamma_5 \gamma_\nu \lambda(y) \right\} \right\rangle \\
&= \left\langle \lambda_{\delta_1}^a(x) \lambda_{\delta_2}^a(x) \lambda_{\delta_3}^b(y) \lambda_{\delta_4}^b(y) \right\rangle \\
&\quad C_{\delta_1 \epsilon_1} \gamma_5 \epsilon_1 \tau_1 \gamma_\mu \tau_1 \delta_2 C_{\delta_3 \epsilon_3} \gamma_5 \epsilon_3 \tau_3 \gamma_\nu \tau_3 \delta_4 \\
&= \left[\Delta_{\delta_1 \tau_2}^{aa}(x, x) \Delta_{\delta_3 \tau_4}^{bb}(y, y) C_{\tau_2 \delta_2}^{-1} C_{\tau_4 \delta_4}^{-1} \right. \\
&\quad + \Delta_{\delta_1 \tau_2}^{ab}(x, y) \Delta_{\delta_2 \tau_4}^{ab}(x, y) C_{\tau_2 \delta_4}^{-1} C_{\tau_4 \delta_3}^{-1} \\
&\quad \left. - \Delta_{\delta_1 \tau_2}^{ab}(x, y) \Delta_{\delta_2 \tau_4}^{ab}(x, y) C_{\tau_2 \delta_3}^{-1} C_{\tau_4 \delta_4}^{-1} \right] \\
&\quad C_{\delta_1 \epsilon_1} \gamma_5 \epsilon_1 \tau_1 \gamma_\mu \tau_1 \delta_2 C_{\delta_3 \epsilon_3} \gamma_5 \epsilon_3 \tau_3 \gamma_\nu \tau_3 \delta_4 \\
&= \underbrace{(-C_{\epsilon_1 \delta_1}) \Delta_{\delta_1 \tau_2}^{aa}(x, x) C_{\tau_2 \delta_2}^{-1}}_{-\Delta_{\delta_2 \epsilon_1}^{aa}(x, x)} \underbrace{(-C_{\epsilon_3 \delta_3}) \Delta_{\delta_3 \tau_4}^{bb}(y, y) C_{\tau_4 \delta_4}^{-1}}_{-\Delta_{\delta_4 \epsilon_3}^{bb}(y, y)} \\
&\quad \gamma_5 \epsilon_1 \tau_1 \gamma_\mu \tau_1 \delta_2 \gamma_5 \epsilon_3 \tau_3 \gamma_\nu \tau_3 \delta_4 \\
&\quad + \underbrace{(-C_{\epsilon_1 \delta_1}) \Delta_{\delta_1 \tau_2}^{ab}(x, y) C_{\tau_2 \delta_4}^{-1}}_{-\Delta_{\delta_4 \epsilon_1}^{ba}(y, x)} \underbrace{\Delta_{\delta_2 \tau_4}^{ab}(x, y) C_{\tau_4 \delta_3}^{-1} C_{\delta_3 \epsilon_3}}_{\delta_{\tau_4 \epsilon_3}} \\
&\quad \gamma_5 \epsilon_1 \tau_1 \gamma_\mu \tau_1 \delta_2 \gamma_5 \epsilon_3 \tau_3 \gamma_\nu \tau_3 \delta_4 \\
&\quad - \underbrace{(-C_{\epsilon_1 \delta_1}) \Delta_{\delta_1 \tau_2}^{ab}(x, y) C_{\tau_2 \delta_3}^{-1}}_{-\Delta_{\delta_3 \epsilon_1}^{ba}(y, x)} \Delta_{\delta_2 \tau_4}^{ab}(x, y) \\
&\quad \underbrace{C_{\delta_3 \epsilon_3} \gamma_5 \epsilon_3 \tau_3 \gamma_\nu \tau_3 \delta_4 C_{\tau_4 \delta_4}^{-1}}_{\gamma_5^T \delta_3 \tau_3 (-\gamma_\nu^T \tau_3 \delta_4) C_{\delta_4 \epsilon_3} (-C_{\epsilon_3 \tau_4}^{-1})} \gamma_5 \epsilon_1 \tau_1 \gamma_\mu \tau_1 \delta_2 \\
&= \text{Tr}_{\text{sc}} \{ \gamma_5 \gamma_\mu \Delta_{xx} \} \text{Tr}_{\text{sc}} \{ \gamma_5 \gamma_\nu \Delta_{yy} \} \\
&\quad - \text{Tr}_{\text{sc}} \{ \gamma_5 \gamma_\mu \Delta_{xy} \gamma_5 \gamma_\nu \Delta_{yx} \} \\
&\quad + \text{Tr}_{\text{sc}} \{ \gamma_5 \gamma_\mu \Delta_{xy} \gamma_\nu \gamma_5 \Delta_{yx} \}. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\langle \varphi_\mu^P(x) \varphi_\mu^P(y) \rangle = \text{Tr}_{\text{sc}} \{ \gamma_5 \gamma_\mu \Delta_{xx} \} \text{Tr}_{\text{sc}} \{ \gamma_5 \gamma_\mu \Delta_{yy} \} - 2 \text{Tr}_{\text{sc}} \{ \gamma_5 \gamma_\mu \Delta_{xy} \gamma_5 \gamma_\mu \Delta_{yx} \}. \tag{4.17}$$

4.2 Der nichtlokale Spin-1 Gluinoball

Im Kontinuum besitzen Gluinobälle einen ganzzahligen Spin J , wodurch sie durch irreduzible Darstellungen der Gruppe $\text{SO}(3)$ ¹ klassifiziert werden. Auf dem Gitter gehen die kontinuierlichen Rotationen der Gruppe $\text{SO}(3)$ in die Transformationen der

¹Im allgemeinen zieht man die irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\text{SU}(2)$ zur Klassifikation von Spinzuständen heran. Im bosonischen Sektor stimmen die die irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$ und $SO(3)$ jedoch überein.

kubischen Gruppe O_h über. Zustände auf dem Gitter werden dementsprechend nach den irreduziblen Darstellungen von O_h klassifiziert. Diese sind A_1 , A_2 , E , T_1 und T_2 . Da man aus Gittersimulationen Spinzustände des Kontinuums extrahieren will, muss man beachten, was mit einer irreduziblen Darstellung \mathcal{R}^j aus $SO(3)$, (wobei j den Spinzustand bezeichnet) beim Übergang zu einem diskreten Gitter geschieht. Es zeigt sich, dass man \mathcal{R} als eine reduzible Darstellung \mathcal{R}_O^j von O_h auffassen kann. Diese wiederum lässt sich dann in ihre irreduziblen Teile zerlegen, und man erhält:

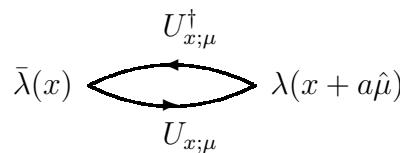
Spin j	Zerlegung in irreduzible Darstellungen von O
0	A_1
1	T_1
2	$E \oplus T_2$
3	$A_2 \oplus T_1 \oplus T_2$
4	$A_1 \oplus E \oplus T_1 \oplus T_2$
⋮	

Wie man sieht ist die Darstellung für Spin-1, an der wir interessiert sind, irreduzibel. Damit lassen sich Spin-1 Teilchen auf dem Gitter durch Operatoren beschreiben, die sich unter T_1 transformieren. Zustände mit höherem Spin spalten sich dagegen auf dem Gitter auf, was es schwieriger macht, diese zu behandeln. Eine ausführliche Darstellung dieser Thematik findet man z.B. in [8] und [9].

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Spin-1-Gluinoball-Zustände mittels nichtlokaler Operatoren auf dem Gitter zu modellieren. Eine ausführliche Auflistung findet man in [9]. Die einfachste Möglichkeit ist der Majorana-Link-Majorana-Operator:

$$\varphi_p = \text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)U_{x;\mu}^\dagger\lambda(x + a\hat{\mu})U_{x;\mu}\} \quad (4.18)$$

Graphisch lässt er sich durch



veranschaulichen, wobei die Gitter-Links zur Visualisierung gekrümmt gezeichnet sind. Im dreidimensionalen Gitter sind drei Orientierungen des Operators möglich, die mit

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{\lambda} \nearrow^\lambda & = O_1 & \\
 | & & | \\
 \bar{\lambda} & = O_2 & \bar{\lambda} \longrightarrow^\lambda = O_3
 \end{array}$$

bezeichnet werden. Die Operatoren $O_1 - O_3$ lassen sich mit den Kanten eines Würfels identifizieren; geometrische Überlegungen führen dazu, dass sie sich nach T_1 transformieren. Das gleiche Transformationverhalten zeigt auch der Operator

$$\varphi_v = \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) U_{x;\mu}^\dagger \gamma_5 \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} \}. \quad (4.19)$$

4.2.1 Verhalten unter P-Parität

Spiegelt man die Majorana-Link-Majorana-Operatoren

$$\varphi_v = \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) U_{x;\mu}^\dagger \Gamma \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} \}, \quad (4.20)$$

mit $\Gamma = \{\mathbf{1}, \gamma_5\}$, am Gitterpunkt x , so erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
 P_x \{ \bar{\lambda}(x) U_{x;\mu}^\dagger \Gamma \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} \} &= \pm \left(-i \bar{\lambda}(x) \gamma_0 U_{x;-\mu}^\dagger i \gamma_0 \Gamma \lambda(x - a\hat{\mu}) U_{x;-\mu} \right) \\
 &= \pm \left(\bar{\lambda}(x) \gamma_0^2 U_{x;-\mu}^\dagger \Gamma \lambda(x - a\hat{\mu}) U_{x;-\mu} \right) \\
 &= \pm \left(\bar{\lambda}(x) U_{x;-\mu}^\dagger \Gamma \lambda(x - a\hat{\mu}) U_{x;-\mu} \right). \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass γ_5 unter Raumspiegelungen das Vorzeichen wechselt, also

$$P^{-1} \Gamma P = \pm \Gamma \quad (4.22)$$

gilt (vgl. Anhang D). Führt man jetzt eine Translation in $+a\hat{\mu}$ -Richtung um einen Gitterplatz durch, so geht die über Gleichung (4.21) gebildete Spur in den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \pm (\text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu}^\dagger \Gamma \lambda(x) U_{x;\mu}^\dagger \}) &= \pm (\text{Tr} \{ \bar{\lambda}^a(x + a\hat{\mu}) T^a U_{x;\mu}^\dagger \Gamma \lambda(x)^b T^b U_{x;\mu}^\dagger \}) \\
 &= \pm (\bar{\lambda}^a(x + a\hat{\mu}) \Gamma \lambda(x)^b \text{Tr} \{ T^a U_{x;\mu}^\dagger T^b U_{x;\mu}^\dagger \}) \\
 &= \pm (\bar{\lambda}(x)^b \Gamma \lambda^a(x + a\hat{\mu}) \text{Tr} \{ T^b U_{x;\mu}^\dagger T^a U_{x;\mu}^\dagger \}) \\
 &= \pm (\text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x)^b T^b U_{x;\mu}^\dagger \Gamma \lambda^a(x + a\hat{\mu}) T^a U_{x;\mu}^\dagger \}) \\
 &= \pm (\text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) U_{x;\mu}^\dagger \Gamma \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu}^\dagger \}) \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

über. Dabei wurden die Zerlegung $\lambda = \lambda^a T^a$ und die Rechenregel $\bar{\psi}\phi = \bar{\phi}\psi$ verwendet (vgl. Anhang A). Damit hat φ_v also eine negative P-Parität, φ_p hingegen eine positive.

4.2.2 Verhalten unter C -Parität

Die Majorana-Spinoren verhalten sich gegenüber C -Paritätsoperationen per Definition invariant

$$\lambda \xrightarrow{C} \lambda^C = \lambda \quad \text{bzw.} \quad \bar{\lambda} \xrightarrow{C} \bar{\lambda}^C = \bar{\lambda}. \quad (4.24)$$

Dasselbe gilt für γ_5 . Die Gitter-Links ändern jeweils ihre Orientierung

$$U_{x;\mu} \xrightarrow{C} U_{x;\mu}^\dagger \quad \text{bzw.} \quad U_{x;\mu}^\dagger \xrightarrow{C} U_{x;\mu}, \quad (4.25)$$

so dass beide Majorana-Link-Majorana-Operatoren insgesamt den C -Paritätseigenwert +1 besitzen.

4.2.3 Der Majorana-Link-Majorana Operator

Aus den vorhergehenden Abschnitten folgt, dass sich die Operatoren $\varphi_v(x)$ (4.19) und $\varphi_p(x)$ (4.18) wie ein Vektor bzw. Pseudovektor transformieren. Um die Massen dieser Bindungszustände $\varphi(x)$ zu bestimmen, muss man die Korrelation $\langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle$ berechnen. Mit (2.39), den Relationen aus Anhang E und den Abkürzungen $x_1 = x$,

$x_2 = x + a\hat{\mu}$, $y_1 = y$ und $y_2 = y + a\hat{\mu}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi(x)\varphi(y) \rangle &= \left\langle \text{Tr}_c \left\{ \bar{\lambda}(x)U_{x;\mu}^\dagger \Gamma \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} \right\} \right. \\
 &\quad \left. \text{Tr}_c \left\{ \bar{\lambda}(y)U_{y;\mu}^\dagger \Gamma \lambda(y + a\hat{\mu}) U_{y;\mu} \right\} \right\rangle \\
 &= \langle \bar{\lambda}^a(x) \Gamma \lambda^b(x + a\hat{\mu}) \bar{\lambda}^c(y) \Gamma \lambda^d(y + a\hat{\mu}) \rangle \\
 &\quad \text{Tr} \left\{ T^a U_{x;\mu}^\dagger T^b U_{x;\mu} \right\} \text{Tr} \left\{ T^c U_{y;\nu}^\dagger T^d U_{y;\nu} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \langle \lambda_{\delta_1}^a(x) \lambda_{\delta_2}^b(x + a\hat{\mu}) \lambda_{\delta_3}^c(y) \lambda_{\delta_4}^d(y + a\hat{\nu}) \rangle \\
 &\quad C_{\delta_1 \epsilon_1} \Gamma_{\epsilon_1 \delta_2} C_{\delta_3 \epsilon_3} \Gamma_{\epsilon_3 \delta_4} V_\mu^{ab}(x) V_\nu^{cd}(y) \\
 &= \frac{1}{4} \left[\Delta_{\delta_1 \tau_2}^{ab}(x_1, x_2) \Delta_{\delta_3 \tau_4}^{cd}(y_1, y_2) C_{\tau_2 \delta_2}^{-1} C_{\tau_4 \delta_4}^{-1} \right. \\
 &\quad + \Delta_{\delta_1 \tau_4}^{ad}(x_1, y_2) \Delta_{\delta_2 \tau_3}^{bc}(x_2, y_1) C_{\tau_4 \delta_4}^{-1} C_{\tau_3 \delta_3}^{-1} \\
 &\quad \left. - \Delta_{\delta_1 \tau_3}^{ac}(x_1, y_1) \Delta_{\delta_2 \tau_4}^{bd}(x_2, y_2) C_{\tau_3 \delta_3}^{-1} C_{\tau_4 \delta_4}^{-1} \right] \\
 &\quad C_{\delta_1 \epsilon_1} \Gamma_{\epsilon_1 \delta_2} C_{\delta_3 \epsilon_3} \Gamma_{\epsilon_3 \delta_4} V_\mu^{ab}(x_1) V_\nu^{cd}(y_1) \\
 &= \frac{1}{4} \text{Tr}_s \left\{ \Gamma \Delta_{x_1 x_2}^{ab} \right\} \text{Tr}_s \left\{ \Gamma \Delta_{y_1 y_2}^{cd} \right\} V_\mu^{ab}(x_1) V_\nu^{cd}(y_2) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \text{Tr}_s \left\{ \Gamma \Delta_{y_2 x_1}^{da} \Gamma \Delta_{x_2 y_1}^{bc} \right\} V_\mu^{ab}(x_1) V_\nu^{cd}(y_1) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \text{Tr}_s \left\{ \Gamma \Delta_{y_1 x_1}^{ca} \Gamma \Delta_{x_2 y_2}^{bd} \right\} V_\mu^{ab}(x_1) V_\nu^{cd}(y_1) \\
 &= \frac{1}{4} \text{Tr}_{sc} \left\{ \Gamma \Delta_{x_1 x_2} V_\mu^T(x_1) \right\} \text{Tr}_{sc} \left\{ \Gamma \Delta_{y_1 y_2} V_\nu^T(y_1) \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \text{Tr}_{sc} \left\{ \Gamma \Delta_{y_2 x_1} V_\mu(x_1) \Gamma \Delta_{x_2 y_1} V_\nu(y_1) \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \text{Tr}_{sc} \left\{ \Gamma \Delta_{y_1 x_1} V_\mu(x_1) \Gamma \Delta_{x_2 y_2} V_\nu^T(y_1) \right\} \tag{4.26}
 \end{aligned}$$

Aus diesem Ausdruck lassen sich, mit den in Kapitel 3 vorgestellten Methoden, Massen für die Gluinobälle 1^{++} und 1^{-+} extrahieren. Es sind jedoch einige Besonderheiten zu beachten, auf die im weiteren eingegangen wird.

4.2.4 Die VST für nichtlokale Operatoren

Zur Bestimmung der unverbundenen Anteile nichtlokaler Operatoren muss die VST leicht abgewandelt werden. Für den Vektor-Gluinoball ergibt sich die Korrelationsfunktion aus 4.26 zu

$$C_{disc.}(\Delta t) = \sum_{\vec{x}, \vec{y}} \text{Tr}_{sc} \left\{ \gamma_5 \Delta_{x_1 x_2} V_\mu^T(x_1) \right\} \text{Tr}_{sc} \left\{ \gamma_5 \Delta_{y_1 y_2} V_\nu^T(y_1) \right\}. \tag{4.27}$$

Um hier die VST anwenden zu können muss man die obigen Ausdrücke um nicht eichinvariante Anteile erweitern:

$$\text{Tr}_{\text{sc}} \left\{ \gamma_5 \Delta_{x_1 x_2} V_\mu^T(x_1) \right\} = \text{Tr}_{\text{sc}} \left\{ \gamma_5 \Delta_{x_1 x_2} V_\mu^T(x_1) \right\} + \underbrace{\sum_{y \neq x_2} \text{Tr}_{\text{sc}} \left\{ \gamma_5 \Delta_{x_1 y} V_\mu^T(x_1) \right\}}_{=0 \quad \text{im Eichmittel}} \quad (4.28)$$

Graphisch stellt sich das wie folgt dar:

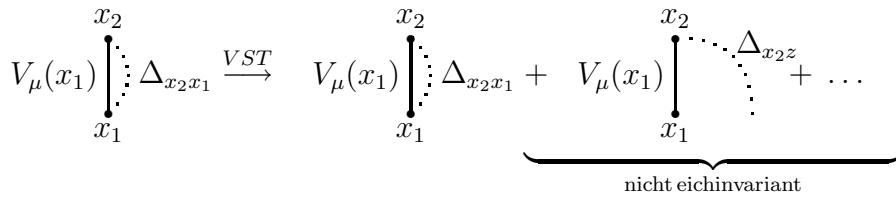


Abbildung 4.1: Die Volume Source Technique

Damit lässt sich die VST prinzipiell auch auf nichtlokale Operatoren anwenden.

4.2.5 Anwendung und Probleme der VST

Wie von R. PEETZ [15] festgestellt wurde, verschwinden bei Korrelationen der Form $\text{Tr}\{\Gamma \Delta_{xx}\} \text{Tr}\{\Gamma \Delta_{yy}\}$ nicht alle unerwünschten Terme. Dies trifft auch auf die nichtlokale Variante

$$\sum_{\vec{x}, \vec{y}} \text{Tr}_{\text{sc}} \left\{ \Delta_{x_1 x_2} V_\mu^T(x_1) \right\} \text{Tr}_{\text{sc}} \left\{ \Delta_{x_1 x_2} V_\mu^T(x_1) \right\} \quad (4.29)$$

zu. Anhand von Abb. 4.2 lässt sich das leicht erkennen.

Dieses Problem wurde dadurch behoben, dass man, bevor das Ensemblemittel über das Produkt aus $\text{Tr}_{\text{sc}} \left\{ \Delta_{x_1 x_2} V_\mu^T(x_1) \right\}$ und $\text{Tr}_{\text{sc}} \left\{ \Delta_{x_1 x_2} V_\mu^T(x_1) \right\}$ gebildet wird, die unerwünschten Terme beseitigt. Das geschieht für jeden der Terme separat, indem man auf jeder Konfiguration zufällige Eichtransformationen \mathcal{E}_k durchführt und dann den Mittelwert bildet. Also sind in

$$c(t) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}} \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_k \text{Tr}_{\text{sc}} \left\{ \Delta_{x_1 x_2} V_\mu^T(x_1) \right\} \quad (4.30)$$

alle nicht eichinvarianten Terme eliminiert, so dass

$$C(\Delta t) = \langle c(t) c(t + \Delta t) \rangle \quad (4.31)$$

die Korrelation ohne systematische Fehler liefert. Dieses Vorgehen birgt jedoch ein anderes Problem: zum einen tritt durch die zusätzliche Mittelung eine weitere Fehlerquelle auf, zum anderen ist diese Variante der VST mit einem deutlich höheren

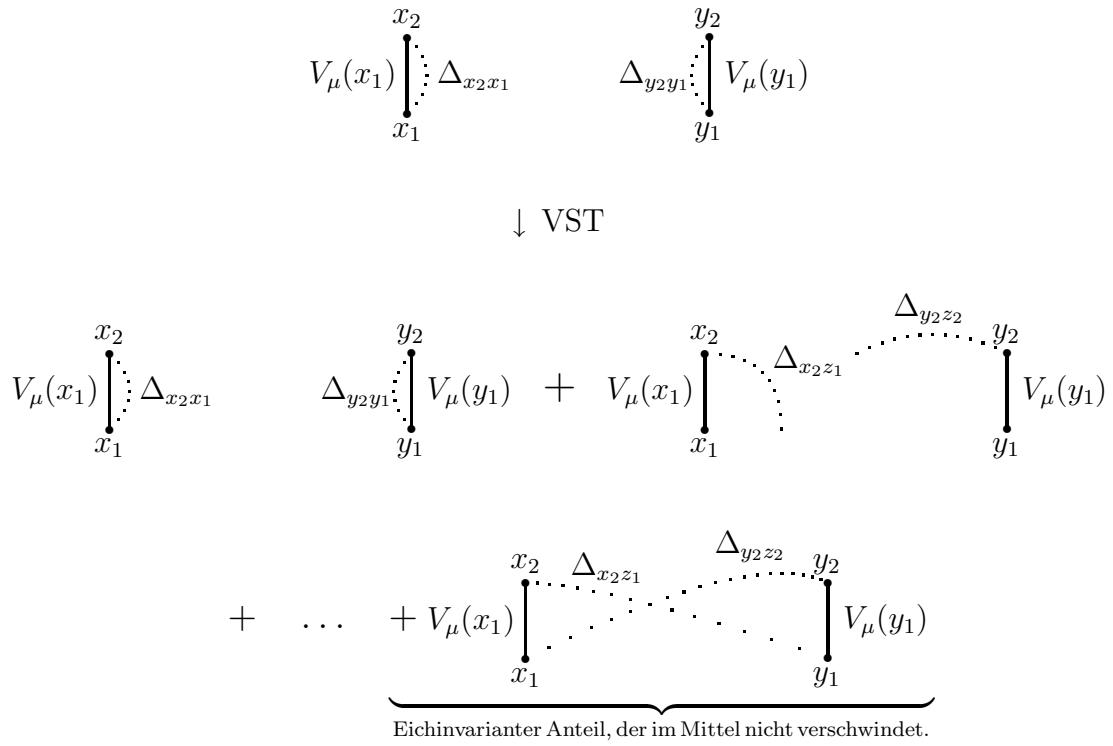


Abbildung 4.2: Probleme der VST

Rechenaufwand verbunden, da nach jeder zufälligen Eichtransformation die Fermionenmatrix erneut invertiert werden muss. In Zukunft bleibt deshalb zu untersuchen, ob es angebracht ist, hier eine andere Methode einzusetzen.

4.3 Smearing für nichtlokale Operatoren

Um Smearing auf nichtlokale Operatoren anwenden zu können ist es notwendig sicherzustellen, dass die gewählten Verfahren das Transformationsverhalten unverändert lassen. Da die von uns betrachteten Majorana-Link-Majorana-Operatoren sowohl Majorana-Spinoren als auch Eichlinks enthalten, liegt es nahe, diese beiden Verfahren zu kombinieren.

4.3.1 APE Smearing

Die in Abb. 4.3 illustrierte Ersetzung

$$U_{x,\mu} \rightarrow U_{x,\mu} + \epsilon \sum_{\substack{\nu=1,2,3 \\ \nu \neq \mu}} \left(U_{x+\hat{\mu},\nu}^\dagger U_{x+\hat{\nu},\mu} U_{x,\nu} + U_{x+\hat{\mu}-\hat{\nu},\nu} U_{x-\hat{\nu},\mu} U_{x-\hat{\nu},\nu}^\dagger \right) \quad (4.32)$$

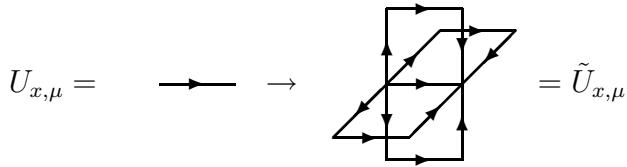


Abbildung 4.3: APE Smearing

eines Eichlinks sollte keinen Einfluß auf das Transformationsverhalten haben. Dies ist bzgl. der kubischen Gruppe O gegeben, denn $U_{x,\mu}$ und $\tilde{U}_{x,\mu}$ transformieren sich offensichtlich identisch unter O . Jetzt bleibt nur noch das Verhalten von $\tilde{U}_{x,\mu}$ unter P- und C-Paritätsoperationen zu untersuchen. Bei einer Raumspiegelung am Punkt x ergibt sich

$$\begin{aligned}
P(\tilde{U}_{x,\mu}) &= U_{x,-\mu} + \epsilon \sum_{\substack{\nu=1,2,3 \\ \nu \neq \mu}} \left(U_{x-\hat{\mu},-\nu}^\dagger U_{x-\hat{\nu},-\mu} U_{x,-\nu} + U_{x-\hat{\mu}+\hat{\nu},-\nu} U_{x+\hat{\nu},-\mu} U_{x+\hat{\nu},-\nu}^\dagger \right) \\
&= U_{x,-\mu} + \epsilon \sum_{\substack{\nu=1,2,3 \\ \nu \neq \mu}} \left(U_{x-\hat{\mu}-\hat{\nu},\nu} U_{x-\hat{\nu},-\mu} U_{x-\hat{\nu},\nu}^\dagger + U_{x-\hat{\mu}+\hat{\nu}-\hat{\nu},\nu}^\dagger U_{x+\hat{\nu},-\mu} U_{x+\hat{\nu}-\hat{\nu},\nu} \right) \\
&= U_{x,-\mu} + \epsilon \sum_{\substack{\nu=1,2,3 \\ \nu \neq \mu}} \left(U_{x-\hat{\mu},\nu}^\dagger U_{x+\hat{\nu},-\mu} U_{x,\nu} + U_{x-\hat{\mu}-\hat{\nu},\nu} U_{x-\hat{\nu},-\mu} U_{x-\hat{\nu},\nu}^\dagger \right) \\
&= \tilde{U}_{x,-\mu}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

unter Berücksichtigung von $U_{x,\mu} = U_{x+\hat{\mu},-\mu}^\dagger$. Unter C-Konjugation wird die Konfiguration in Gegenrichtung durchlaufen

$$\begin{aligned}
C(\tilde{U}_{x,\mu}) &= U_{x,\mu}^\dagger + \epsilon \sum_{\substack{\nu=1,2,3 \\ \nu \neq \mu}} \left(U_{x,\nu}^\dagger U_{x+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x+\hat{\mu},\nu} + U_{x-\hat{\nu},\nu} U_{x-\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x+\hat{\mu}-\hat{\nu},\nu}^\dagger \right) \\
&= U_{x,\mu}^\dagger + \epsilon \sum_{\substack{\nu=1,2,3 \\ \nu \neq \mu}} \left(U_{x,\nu}^\dagger U_{x+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x+\hat{\mu},\nu} + U_{x-\hat{\nu},\nu} U_{x-\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x+\hat{\mu}-\hat{\nu},\nu}^\dagger \right)^{\dagger\dagger} \\
&= U_{x,\mu}^\dagger + \epsilon \sum_{\substack{\nu=1,2,3 \\ \nu \neq \mu}} \left(U_{x+\hat{\mu},\nu}^\dagger U_{x+\hat{\nu},\mu} U_{x,\nu} + U_{x+\hat{\mu}-\hat{\nu},\nu} U_{x-\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x-\hat{\nu},\nu}^\dagger \right)^\dagger \\
&= \tilde{U}_{x,\mu}^\dagger.
\end{aligned} \tag{4.34} \tag{4.35}$$

Insgesamt sieht man, dass sich $U_{x,\mu}$ und $\tilde{U}_{x,\mu}$ in gleicher Weise unter Transformationen verhalten. APE-Smearing kann also ohne Bedenken auf alle Operatoren angewandt werden, die Eichlinks enthalten.

4.3.2 Jacobi-Smearing

Beim Jacobi-Smearing wird das Fermionfeld durch die Matrix (3.16) verschmiert

$$\tilde{\lambda}^a(\vec{x}, t) = \sum_{x', b} F^{ab}(x, x') \lambda^b(x'). \quad (4.36)$$

Um das Transformationsverhalten von $\tilde{\lambda}$ zu untersuchen, genügt es den ersten Iterationsschritt des Jacobi-Smearings zu betrachten

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^a(\vec{x}, t) &= \sum_{x', b} \left[\delta^{ab} \delta_{xx'} + \kappa_J \sum_{\mu=1}^3 (\delta_{x', x+\hat{\mu}} V_\mu^{ab}(x) + \delta_{x'+\hat{\mu}, x} V_\mu^{\dagger ab}(x)) \right] \lambda^b(x') \\ &= \lambda^a(x) + \sum_{x', b} \kappa_J \sum_{\mu=1}^3 (V_\mu^{ab}(x) \lambda^b(x + \hat{\mu}) + V_\mu^{\dagger ab}(x) \lambda^b(x - \hat{\mu})). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Raumspiegelung am Punkt x ergibt:

$$\begin{aligned} P(\tilde{\lambda}^a(\vec{x}, t)) &= i\gamma_4 \lambda^a(x) + \sum_{x', b} \kappa_J \sum_{\mu=1}^3 (V_{-\mu}^{ab}(x) i\gamma_4 \lambda^b(x - \hat{\mu}) + V_{-\mu}^{\dagger ab}(x) i\gamma_4 \lambda^b(x + \hat{\mu})) \\ &= i\gamma_4 \lambda^a(x) + \sum_{x', b} \kappa_J \sum_{\mu=1}^3 (V_\mu^{ba}(x) i\gamma_4 \lambda^b(x - \hat{\mu}) + V_\mu^{\dagger ba}(x) i\gamma_4 \lambda^b(x + \hat{\mu})) \\ &= i\gamma_4 \left[\lambda^a(x) + \sum_{x', b} \kappa_J \sum_{\mu=1}^3 (V_\mu^{\dagger ab}(x) \lambda^b(x - \hat{\mu}) + V_{-\mu}^{ab}(x) \lambda^b(x + \hat{\mu})) \right] \\ &= i\gamma_4 \tilde{\lambda}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Wenn man nun noch beachtet, dass durch die Summation über alle Raumrichtungen $\tilde{\lambda}$ rotationssymmetrisch wird und außerdem invariant unter C-Konjugation $C(V_\mu^{ab}) = V_\mu^{ab}$, $C(\lambda) = \lambda$ ist, erhält man für $\tilde{\lambda}$ das selbe Transformationsverhalten wie für λ .

Zusammenfassend lässt sich sagen, daß man sowohl APE- als auch Jacobi-Smearing auf nichtlokale Operatoren anwenden kann, ohne deren Transformationsverhalten zu ändern. Es ist jedoch weiterhin notwendig die Smearing-Radien individuell anzupassen. Insbesondere bleibt zu untersuchen, ob die für den Majorana-Link-Majorana-Operator offensichtliche Wahl $N_J = N_{APE}$ und $\epsilon = \kappa_J$, optimal ist.

Kapitel 5

Ergebnisse

In diesem Kapitel werden einige der Simulationsergebnisse vorgestellt. Es handelt sich dabei allerdings nicht um quantitative Ergebnisse, sondern um eine erste Studie, die zum Testen der neu programmierten Messroutinen gedacht ist. Die hier aufgeführten Ergebnisse wurden alle auf einem Gitter der Größe $4^3 \times 6$ bei $K = 0, 194$ und $\beta = 2, 3$ mit 332 Konfigurationen durchgeführt.

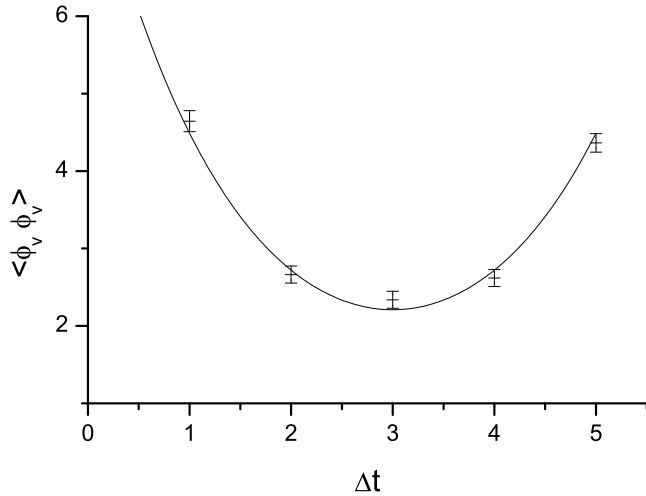


Abbildung 5.1: Zeitscheibenkorrelationsfunktion des Spin-1-Vektorbosons

In Abb. 5.1 ist die Zeitscheibenkorrelation des nichtlokal realisierten 1^{-+} -Gluinoball (4.19) aufgetragen. Der Fit mit (3.6) ergab eine Masse von $am_v = 0, 668$. Dabei wurde kein Smearing eingesetzt.

Abb. 5.2 zeigt die Korrelationsfunktion des 1^{-+} -Gluinoball. Dabei wurde sowohl

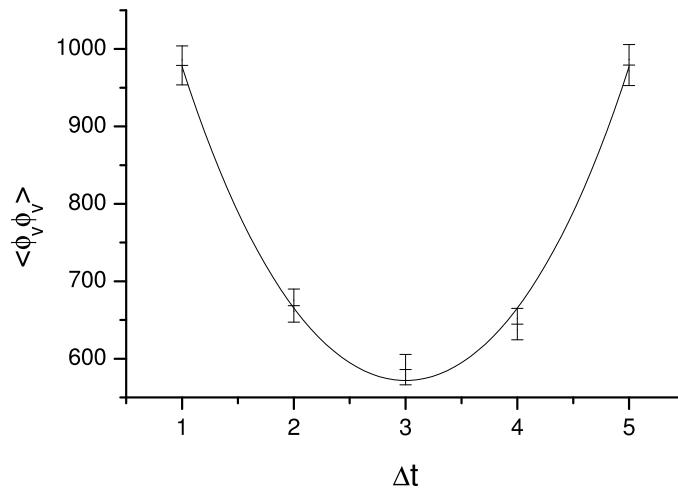


Abbildung 5.2: Zeitscheibenkorrelationsfunktion des Spin-1-Vektorteilchens (mit Smearing)

APE- als auch Jacobi-Smearing eingesetzt. Mit den Smearingparametern

$$\begin{aligned} N_J &= N_{APE} = 4 \\ \kappa_J &= \epsilon = 0, 2. \end{aligned}$$

Der Fit mit (3.6) lieferte eine Masse von $am_v = 0,565$ und weicht damit deutlich von dem Ergebnis ohne Smearing ab. Die Tendenz zu einer geringeren Masse deutet zum mindesten darauf hin, dass eine bessere Projektion auf den Grundzustand gelungen ist.

In Abb. 5.3 ist die Zeitscheibenkorrelation des 1^{++} -Gluinoball (lokaler Operator) zu sehen. Hier wurde der lokale Operator (4.2) verwendet. Der Massenfit ergab $am = 0,931$. Die Ergebnisse, für den nichtlokalen Operator, zum unverbundenen Anteil waren bisher leider so schlecht, dass hier kein direkter Vergleich zwischen lokal und nichtlokal möglich ist. In Abb. 5.4 sieht man jedoch den Vergleich für die Verbundenen Anteile. Es wird deutlich, dass der nichtlokale Operator größere Fehler produziert.

Insgesamt muss man aber sagen, dass Untersuchungen auf größeren Gittern notwendig sind, um aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten. Die hier aufgeführten Beispiele zeigen jedoch, dass sich Massen aus den betrachteten Operatoren extrahieren lassen.

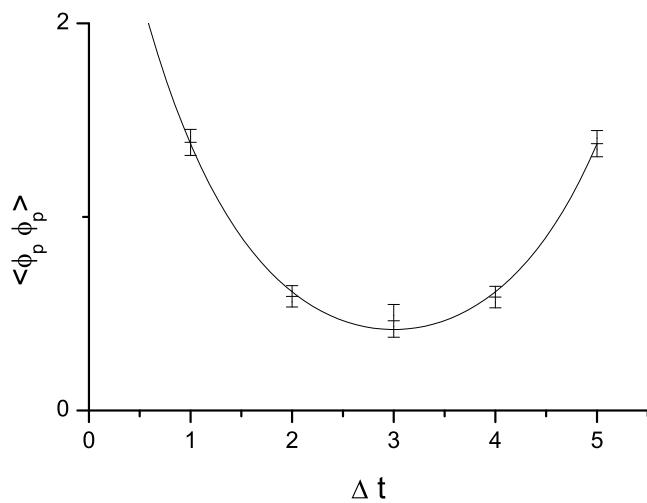


Abbildung 5.3: Zeitscheibenkorrelationsfunktion des Spin-1-Pseudovektors (lokaler Operator)

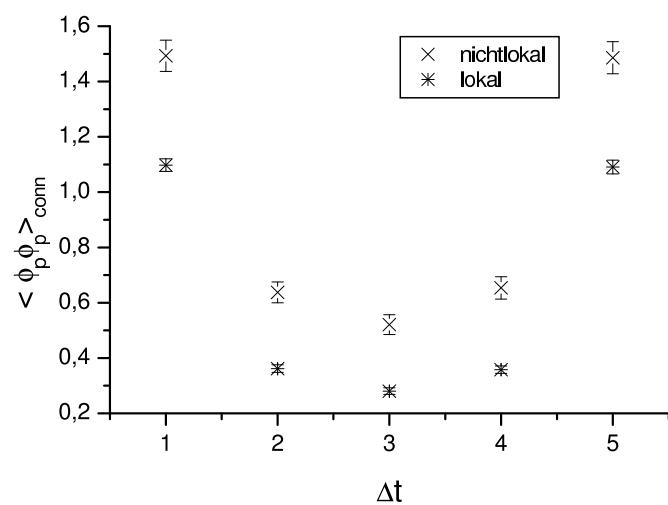


Abbildung 5.4: Korrelationsfunktion des lokalen und nichtlokalen Pseudoskalars

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es zu untersuchen, ob und in welcher Weise Majorana-Majorana-Bindungszustände durch nichtlokale Operatoren in einer SU(2) Super Yang-Mills Theorie auf dem Gitter realisierbar sind. Dazu wurden die Zeitscheibenkorrelationsfunktionen der Gluinobälle 1^{-+} und 1^{++} auf der Basis eines Majorana-Link-Majorana-Operators berechnet. Der 1^{++} -Gluinoball wurde auch mittels eines lokalen Operators realisiert. Für den 1^{-+} -Gluinoball war das aufgrund der Majorana-Natur der Spinoren nicht möglich. Da zum Erzielen guter Ergebnisse Smearing unerlässlich ist, wurden die gängigen Smearing Verfahren, Ape- und Jacobi-Smearing, auf ihre Tauglichkeit in Bezug auf nichtlokale Operatoren untersucht. Es hat sich herausgestellt, dass diese Verfahren prinzipiell auch auf nichtlokale Operatoren anwendbar sind.

Diese Operatoren auf dem Gitter zu simulieren erforderte eine Erweiterung der bisherigen Simulationsalgorithmen. Dies ist auf Basis eines von C. GEBERT entwickelten Programms geschehen. Mit dem modifizierten Programm sind Testläufe durchgeführt worden, die sinnvolle Ergebnisse lieferten. Es ist also prinzipiell möglich, mittels nichtlokaler Operatoren, Majorana-Majorana-Bindungszustände zu simulieren. Der nötige Rechenaufwand verdoppelt sich jedoch im Vergleich zu lokalen Operatoren. Da sich manche Zustände, wie z.B. der 1^{-+} Gluinoball, jedoch nicht lokal realisieren lassen, wird man hier auf einen nichtlokalen Operator zurückgreifen müssen.

Da zur Messung des unverbundenen Anteils die *Volume Source Technique*, die wie R. PEETZ[15] festgestellt hat einen systematischen Fehler beinhaltet, eingesetzt wurde ist es notwendig dies weiter zu untersuchen, und evtl. das Verfahren zu modifizieren¹. In Zukunft wäre es interessant Untersuchungen auf größeren Gittern durchzuführen, um auch quantitative Ergebnisse zu erzielen. Dazu wäre es insbesondere notwendig geeignete Smearing-Parameter zu ermitteln und Simulationen bei unterschiedlichen Hoppingparametern durchzuführen, um die auf dem Gitter gebrochene Supersymmetrie zu restaurieren. Es wäre auch möglich die bisher mittels lokaler Operatoren untersuchten Zustände durch nichtlokale Operatoren zu modellieren. Es ist durch-

¹Die vorgenommene Modifikation der VST behebt zwar den systematischen Fehler, produziert aber zusätzliche statistische Fehler. Außerdem benötigt diese Variante der VST einen deutlich höheren Rechenaufwand.

aus möglich, dass man eine bessere Projektion auf den Grundzustand oder sogar auf einen angeregten Zustand erhält.

Anhang A

Majorana-Spinoren

Dirac-Spinoren sind aus zwei Weyl-Spinoren zusammengesetzte Spinoren, die in der Weyl-Darstellung die Form

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

besitzen, wobei ψ_L und ψ_R je zweikomponentige Weyl-Spinoren darstellen, die sich nach der linken bzw. rechten Fundamentaldarstellung der Lorentzgruppe transformieren.

Im Minkowski-Raum erhält man einen Majorana-Spinor, indem man an einen allgemeinen Dirac-Spinor die Bedingung

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0 = \psi^t C \quad (\text{A.2})$$

stellt. Dabei ist in minkowskischer Formulierung

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

und C die Ladungskonjugationsmatrix.

Ein Majorana-Spinor ψ_M geht also wegen (A.2) bei Ladungskonjugation in sich selbst über, also

$$\psi_M^C = \psi_M \quad (\text{A.4})$$

und besitzt daher anstatt der vier komplexen Freiheitsgrade eines Dirac-Spinors lediglich zwei komplexe bzw. vier reelle Parameter. Die Ladungskonjugation ist dabei durch [10]

$$\psi^C = C \bar{\psi}^t \quad (\text{A.5})$$

mit

$$C = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

definiert.

Gibt man die Hermitizitätseigenschaft der minkowskischen Formulierung auf, so lässt sich ein euklidischer Majorana-Spinor durch die Relation

$$\bar{\lambda} = \lambda^t C \quad (\text{A.7})$$

definieren. In der Weyl-Darstellung schreibt sich damit der Majorana-Spinor gemäß

$$\lambda = \begin{pmatrix} \jmath_A \\ \bar{\jmath}^{\dot{A}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

wobei \jmath_A ein linkshändiger Weyl-Spinor ist. Für weitere Anmerkungen zu Majorana-Spinoren in euklidischer Formulierung konsultiere man [5] und die darin angegebenen Referenzen.

An dieser Stelle seien lediglich zwei, für diese Arbeit wichtige, Rechenregeln für Grassmann-wertige Majorana-Spinoren ψ und ϕ angegeben:

$$\bar{\psi}\phi = \bar{\phi}\psi \quad (\text{A.9})$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\phi = -\bar{\phi}\gamma_\mu\psi \quad (\text{A.10})$$

Beide Relationen weist man mit Hilfe der definierenden Eigenschaft des Ladungskonjugationsoperators C nach:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\phi &= (\bar{\psi}\phi)^t \\ &= (\psi^t C \phi)^t \\ &= -\phi^t C^t \psi \\ &= \phi^t C \psi \\ &= \bar{\phi}\psi, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma_\mu\phi &= (\bar{\psi}\gamma_\mu\phi)^t \\ &= (\psi^t C \gamma_\mu \phi)^t \\ &= -\phi^t \gamma_\mu^t C^t \psi \\ &= \phi^t \gamma_\mu^t C \psi \\ &= -\phi^t C \gamma_\mu \psi \\ &= -\bar{\phi}\gamma_\mu\psi. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Anhang B

SU(N)-Algebra

B.1 Allgemeine Relationen

Der Darstellungsraum der Eichgruppe $SU(N)$ in der Fundamentaldarstellung besteht aus N -komponentigen Vektoren ϕ . Die Eichtransformationen wirken dann via

$$\phi(x) \rightarrow \omega(x)\phi(x), \quad (\text{B.1})$$

wobei U eine Matrix aus $SU(N)$ ist. Diese lassen sich in der Form

$$\omega(x) = e^{i\theta^a(x)T^a} \quad (\text{B.2})$$

schreiben, wobei die T^a die Generatoren der Eichgruppe in Fundamentaldarstellung sind. Genauer bilden sie eine Basis der zu $SU(N)$ gehörigen Lie-Algebra. Die Anzahl der Generatoren beträgt im Fall der $SU(N)$ $N^2 - 1$. Für diese spurfreien, hermiteschen Matrizen gelten mit der Normierung

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (\text{B.3})$$

die Beziehungen

$$[T^a, T^b] = i f_{abc} T^c \quad (\text{B.4})$$

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N_c} \delta_{ab} + d_{abc} T^c. \quad (\text{B.5})$$

Die f_{abc} sind die Strukturkonstanten der Eichgruppe¹ und sind total antisymmetrisch gegen die Vertauschung zweier Indizes. Die auftretenden Konstanten d_{abc} sind über

$$d_{abc} = 2\text{Tr}(\{T^a, T^b\}T^c) \quad (\text{B.6})$$

¹Sie legen die Struktur der zugehörigen Lie-Algebra eindeutig fest.

definiert und sind total symmetrisch gegen Permutationen der Indizes. Man kann nun folgern:

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4} (d_{abc} + i f_{abc}) \quad (\text{B.7})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) = \frac{1}{4N_c} \delta_{ab} \delta_{cd} + \frac{1}{8} (d_{abe} + i f_{abe})(d_{cde} + i f_{cde}). \quad (\text{B.8})$$

Außerdem gilt

$$f_{acd} f_{bcd} = \delta_{ab} C_A, \quad (\text{B.9})$$

wobei $C_A = N$.

B.2 SU(2)

Im Fall der $SU(2)$ lassen sich als Generatoren etwa Vielfache der Pauli-Matrizen wählen, so daß dann mit

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

gilt

$$T^a = \frac{1}{2} \sigma^a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (\text{B.11})$$

Die Pauli-Matrizen erfüllen

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i \varepsilon_{abc} \sigma^c \quad (\text{B.12})$$

$$\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta_{ab} \mathbf{1}, \quad (\text{B.13})$$

also ist im Fall der $SU(2)$

$$f_{abc} = \varepsilon_{abc} \quad (\text{B.14})$$

$$d_{abc} = 0. \quad (\text{B.15})$$

Für $N = 2$ gilt daher

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4} i f_{abc} \quad (\text{B.16})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) = \frac{1}{8} (\delta_{ab} \delta_{cd} - f_{abe} f_{cde}). \quad (\text{B.17})$$

Anhang C

Dirac-Matrizen

C.1 Dirac-Matrizen in euklidischer und minkowskischer Formulierung

Zwischen den euklidischen Dirac-Matrizen und denen im Minkowski-Raum besteht der folgende Zusammenhang [14]:

$$\gamma_j^{eukl.} = -i\gamma_j^{mink.} \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \quad (\text{C.1})$$

$$\gamma_4^{eukl.} = -i\gamma_4^{mink.} = \gamma_0^{mink.}. \quad (\text{C.2})$$

C.2 Eigenschaften euklidischer Matrizen

Für die euklidischen Dirac-Matrizen gelten die folgenden Eigenschaften [5]:

$$\gamma_\mu^2 = \mathbf{1} \quad (\text{C.3})$$

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu \quad (\text{C.4})$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}\mathbf{1}. \quad (\text{C.5})$$

Mit den zusätzlichen Definitionen

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \quad (\text{C.6})$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (\text{C.7})$$

ergibt sich

$$\gamma_5 = \gamma_5^\dagger \quad (\text{C.8})$$

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1} \quad (\text{C.9})$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0, \quad (\text{C.10})$$

sowie

$$\sigma_{\mu\nu} \stackrel{(C.5)}{=} \frac{i}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - (2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1} - \gamma_\mu \gamma_\nu)) \quad (C.11)$$

$$= i\gamma_\mu \gamma_\nu - i\delta_{\mu\nu} \mathbf{1} . \quad (C.12)$$

Eine mögliche Darstellung der Dirac-Matrizen ist nach [14]

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3 , \quad (C.13)$$

wobei mit σ_j die Pauli-Matrizen gemeint sind (vgl. Anhang A).

Für γ_4 und $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \gamma_5^\dagger$ wählt man in der Weyl-Darstellung

$$\gamma_0 = \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} . \quad (C.14)$$

Anhang D

Paritätsoperationen

D.1 Ladungskonjugation

Für den Ladungskonjugationsoperator gelten die folgenden Zusammenhänge [5]:

$$C^t = -C \quad (D.1)$$

$$C^\dagger = C^{-1} \quad (D.2)$$

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^t \quad (D.3)$$

$$C^{-1}\gamma_\mu^t C = -\gamma_\mu \quad (D.4)$$

$$C\gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^t \quad (D.5)$$

$$C\sigma_{\mu\nu} C^{-1} = -\sigma_{\mu\nu}^t \quad (D.6)$$

$$C^{-1}\sigma_{\mu\nu}^t C = -\sigma_{\mu\nu} . \quad (D.7)$$

In der Weyl-Darstellung kann die Ladungskonjugationsmatrix als

$$C = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (D.8)$$

gewählt werden.

In darstellungsfreier Form findet man [10]

$$C = i\gamma_2^{mink.} \gamma_0 = -\gamma_2^{eukl.} \gamma_0 . \quad (D.9)$$

D.2 Raumspiegelungen

Die P-Paritätsoperation beschreibt Punktspiegelungen. Die wichtigsten Relationen sind bei Spiegelung am Punkt x :

$$P(U_\mu(x)) = U_{-\mu}(x) = U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}) \quad (\text{D.10})$$

$$P(V_\mu^{ab}) = V_{-\mu}^{ab} = V^{ba} \quad (\text{D.11})$$

$$P\lambda = i\gamma_4\lambda \quad (\text{D.12})$$

$$P(\bar{\lambda}) = -i\bar{\lambda}\gamma_4 \quad (\text{D.13})$$

$$P^{-1}\gamma_\mu P = -\gamma_\mu \quad \text{mit } \mu = 1, 2, 3, 5 \quad (\text{D.14})$$

$$P^{-1}\gamma_4 P = \gamma_4 \quad (\text{D.15})$$

Anhang E

Wichtige Relationen

Für die Fermionenmatrix

$$Q_{y\beta,xx}^{ba} = \delta_{yx}\delta_{ba}\delta_{\beta\alpha} - K \sum_{\mu=1}^4 [(r + \gamma_\mu)_{\beta\alpha} V_\mu(x)^{ba} \delta_{y,x+\mu} + (r - \gamma_\mu)_{\beta\alpha} (V_\mu^T)^{ba}(y) \delta_{y+\mu,x}] \quad (\text{E.1})$$

gilt folgender Zusammenhang [23]:

$$C_{\beta\iota} Q_{yx,\iota\tau}^{ab} C_{\tau\alpha}^{-1} = Q_{xy,\alpha\beta}^{ab} \quad (\text{E.2})$$

Für ihr Inverses folgen dann einige wichtige Relationen:

$$\gamma_5 \Delta_{\mu\nu}^{ab}(x-y) \gamma_5 = \Delta_{\nu\mu}^{ba}(y-x)^* \quad (\text{E.3})$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = -\Delta_{\nu\mu}^{ba}(y-x) \quad (\text{E.4})$$

$$C \Delta^{T_{x\mu a}} = -C \Delta \quad (\text{E.5})$$

$$C \Delta C^{-1} = C^{-1} \Delta C = \Delta^{T_{x\mu a}} \quad (\text{E.6})$$

Anhang F

Hinweise zum Programm

Hier sind kurz die wichtigsten Bedienungshinweise zum Programm zusammengefasst. Alle Einstellungen die zur Konfiguration von Messungen notwendig sich lassen sich in der Datei config.dat vornehmen. Dabei sind die wichtigsten:

- **Use Jacobi smearing, Smearing-Level, kappa_Jacobi**
Einstellungen für das Jacobi Smearing. Bezieht sich auf alle Spin-1 Operatoren.
- **Basic APE-Smearing, N, epsilon**
Einstellungen für das APE-Smearing. Bezieht sich auf alle nichtlokalen Operatoren.
- **Calculate Spin1 Correlator, <mu1(0..2),mu2(0..2)>, nonlocal, local**
Hier kann man festlegen für welche Spin-1 Korrelatoren der zusammenhängende Anteil berechnet werden soll. Durch mu1 und mu2 wird die Spinkomponente auf den verschiedenen Zeitscheiben festgelegt.
- **Calculate Spin1 TwoLoopCorrelator, <mu3,mu4>, nonlocal, local**
Hier kann man dieselben Einstellung für den unzusammenhängenden Korrelator machen.
- **Number of gauge-transformations for the VST (1-???)**
Legt die anzahl der Eichtransformationen fest, die auf einer Konfiguration durchgeführt werden, um den VST-Error zu beheben.

Literaturverzeichnis

- [1] D. Bailin, A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, IOP, Bristol 1994
- [2] T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford University Press, Oxford 1984
- [3] S. Coleman, J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys. Rev. 159 (1967) 1251
- [4] S. Elitzur, *Impossibility of Spontaneously Breaking Local Symmetries*, Phys. Rev. D12 (1975) 3978
- [5] T. Galla, *Supersymmetrische und Chirale Ward-Identitäten in einer diskreten N = 1-SUSY-Yang-Mills-Theorie*, Diplomarbeit, Universität Münster, 1999
- [6] C. Gebert, *Light quark fields in lattice gauge theories*, Dissertation, Universität Hamburg, 2002
- [7] M. Guidry, *Gauge Field Theories, An Introduction with Applications*
- [8] F. Heitger, *Darstellungstheorie der kubischen Gruppe in Anwendung auf Operatoren der N = 1 SUSY-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter*, Diplomarbeit, Universität Münster, 2000
- [9] K. R. Johnson, *Darstellungstheorie der Überlagerung der kubischen Gruppe in Anwendung auf Operatoren der N = 1 SUSY-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter*, Diplomarbeit, Universität Münster, 2002
- [10] H. Kalka, G. Soff, *Supersymmetrie*, Teubner, 1997
- [11] R. Kirchner, *Ward Identities and Mass Spectrum of N=1 Super Yang-Mills Theory on the Lattice*, Dissertation, Universität Hamburg, 2000
- [12] J. Lopuszanski, *An Introduction to Symmetry and Supersymmetry in Quantum Field Theory*, World Scientific, 1991

- [13] I. Montvay, *An algorithm for gluinos on the lattice*, Nuclear Physics B 466 (1996) 259-281
- [14] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 1994
- [15] R. Peetz, *Spectrum of N=1 Super Yang Mills Theory on the Lattice with a light Gluino*, Dissertation, Universität Münster, 2003
- [16] H.J. Rothe, *Lattice Gauge Theories, An Introduction*, World Scientific, Singapore, 1992
- [17] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1996
- [18] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, *Relativität Gruppen Teilchen* Springer-Verlag, Wien, 1976
- [19] K. Spanderen, *Monte-Carlo-Simulationen einer SU(2) Yang-Mills-Theorie mit dynamischen Gluinos*, Dissertation, Universität Münster, 1998
- [20] G. Veneziano, S. Yancielowicz, *An Effective Lagrangian for the Pure N = 1 Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Phys. Lett. 113B (1982) 231
- [21] K. G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. D10 2445 (1974)
- [22] K. G. Wilson, *Quarks and Strings on a Lattice*, in New Phenomena in Sub-nuclear Physics, eded. A. Zichichi, Plenum Press, New York, Part A, p. 69 (1977)
- [23] S. Wissel, *Die graphische Charakter- und Hoppingparameterentwicklung der N=1 SU(2)-Super-Yang-Mills-Theorie in d Dimensionen*, Diplomarbeit, Universität Münster, 2002

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei denen bedanken, die diese Arbeit möglich gemacht haben:

- Herrn Prof. Dr. Gernot Münster für den interessanten Themenvorschlag und die Betreuung dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr. Manfred Stingl für die Bereitschaft, die Zweitkorrektur zu übernehmen.
- Meinen Eltern Susanne und Rüdiger Schmalle für die Unterstützung während der gesamten Studienzeit.
- Stephan Eule für den *Spassfaktor Raum 408*.
- Till Hagedorn für interessante Mittagspausen.
- Michael "Ice Mombadil Senior" Krutschke für besonders interessante Mittagspausen.
- Holger Sassenberg und Alexander Wilk für das Korrekturlesen der Arbeit.
- Alex und Björn für das entspannte Zusammenleben.
- Dem Bafög-Amt für das geschenkte Geld.
- Special thanks to Sabata for keeping it evil!
- Besonderer Dank gilt meiner Freundin Regina Korth für die großartige Unterstützung aus der fernen Hauptstadt.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im Februar 2004

