

Dirk Sandbrink

Numerische Bestimmung von  
Quarkpotential, Glueball-Massen  
und Phasenstruktur in der  $\mathcal{N} = 1$   
supersymmetrischen  
Yang-Mills-Theorie

2014



Theoretische Physik

**Numerische Bestimmung von  
Quarkpotential, Glueball-Massen  
und Phasenstruktur in der  $\mathcal{N} = 1$   
supersymmetrischen  
Yang-Mills-Theorie**

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
Dirk Sandbrink  
aus Ankum

– 2014 –

Diese Version der Arbeit unterscheidet sich geringfügig von der dem Prüfungsamt vorgelegten Version. Es wurden Tippfehler behoben, aber keine inhaltlichen Änderungen vorgenommen.

Dekan:	Prof. Dr. C. Weinheimer
Erster Gutachter:	Prof. Dr. G. Münster
Zweiter Gutachter:	Priv.-Doz. Dr. J. Heitger
Tag der mündlichen Prüfung:	26.01.2015
Tag der Promotion:	26.01.2015

# Zusammenfassung

Eines der vielversprechendsten Modelle für Physik jenseits des Standardmodells ist die Supersymmetrie. Diese Arbeit entstand im Rahmen der DESY-Münster-Kollaboration, die sich insbesondere mit der  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie (SYM) beschäftigt. Dabei handelt es sich um eine vergleichsweise einfache Theorie, die sich gut dazu eignet, die erwarteten Eigenschaften einer supersymmetrischen Theorie mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen auf dem Gitter zu studieren.

Diese Arbeit konzentriert sich auf die numerische Bestimmung von Quarkpotential, Glueball-Massen und der Phasenstruktur in der  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie. Das Quarkpotential wird zur Berechnung der Sommer-Skala verwendet, welche wiederum zur Umrechnung des dimensionslosen Gitterabstandes in physikalische Einheiten benutzt wird.

Bei den Gluebällen handelt es sich um hypothetische, nur aus Gluonen aufgebaute Teilchen, deren Massen aufgrund ihrer rein gluonischen Natur bei Gittersimulationen relativ schwierig zu bestimmen sind. Daher werden verschiedene Methoden untersucht, um die Unsicherheiten bei der Massenbestimmung zu verringern. Der Fokus liegt dabei auf den Smearing-Methoden und ihrem Einsatz beim *variational smearing* sowie der Verwendung verschiedener Glueball-Operatoren.

Schließlich wird ein erster Blick auf das Phasendiagramm des Modells bei endlichen Temperaturen geworfen. Parallel zu den Simulationen bei Temperatur Null wurden dazu verschiedene Simulationen bei endlicher Temperatur durchgeführt, um das Verhalten der Polyakov-Schleifen und des Gluino-Kondensats im Phasendiagramm genauer zu analysieren.

## Abstract

One of the most promising candidates to describe the physics beyond the standard model is the so-called supersymmetry. This work was created in the context of the DESY-Münster-Collaboration, which studies in particular the  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric Yang-Mills theory (SYM). SYM is a comparatively simple theory, which is therefore well-suited to study the expected properties of a supersymmetric theory with the help of Monte Carlo simulations on the lattice.

This thesis is focused on the numerical determination of the quarkpotential, the glueball masses and the phase structure of the  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric Yang-Mills theory. The quarkpotential is used to calculate the Sommer scale, which in turn is needed to convert the dimensionless lattice spacing into physical units.

Glueballs are hypothetical particles built out of gluons, their masses are relatively hard to determine in lattice simulations due to their pure gluonic nature. For this reason, various methods are studied to reduce the uncertainties of the mass determination. The focus lies on smearing methods and their use in *variational smearing* as well as on the use of different glueball operators.

Lastly, a first look is taken at the phase diagram of the model at finite temperature. Various simulations have been performed at finite temperature in parallel to those performed at temperature zero to analyse the behaviour of the Polyakov loop and the gluino condensate in greater detail.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2. Theoretischer Hintergrund</b>	<b>9</b>
2.1. Poincaré-Superalgebra	10
2.2. Irreduzible Darstellung	11
2.3. Supermultipletts	12
2.4. Superfelder	13
2.5. $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische Yang-Mills-Theorie	14
2.6. SYM-Multipletts	16
2.7. Gitterwirkung	17
2.7.1. Plakette	19
2.7.2. Wilson-Schleifen	20
2.7.3. $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische Yang-Mills Gitterwirkung	21
2.8. Verbesserung der Wirkung	23
<b>3. Gittersimulationen und Messmethoden</b>	<b>25</b>
3.1. Monte-Carlo-Simulationen	25
3.1.1. Markov-Ketten	26
3.1.2. Metropolis-Algorithmus	27
3.1.3. Molekulardynamik	28
3.1.4. Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus	29
3.1.5. Polynomiale Approximation	29
3.1.6. Zweistufiger polynomialer Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus	31
3.1.7. Korrekturfaktoren	32
3.2. Korrelatoren und Massenbestimmung	34
3.3. Berechnung des statistischen Fehlers	36
3.3.1. Autokorrelation	37

3.3.2.	Jackknifing . . . . .	38
3.3.3.	Linearisierung . . . . .	39
3.4.	Limes verschwindender Gluino-Masse . . . . .	40
3.5.	Smearing Techniken . . . . .	42
3.5.1.	APE-Smearing . . . . .	42
3.5.2.	HYP-Smearing . . . . .	43
3.6.	Variationsmethoden . . . . .	44
<b>4.</b>	<b>Quarkpotential</b>	<b>47</b>
4.1.	Berechnung des Quarkpotentials . . . . .	47
4.1.1.	Zwei-Fit-Prozedur . . . . .	48
4.1.2.	Sommer-Parameter . . . . .	50
4.1.3.	Optimierungen der Fits . . . . .	50
4.2.	Alternative Methoden . . . . .	55
4.2.1.	Alternative Fit-Prozeduren . . . . .	56
4.2.2.	Creutz-Ratio . . . . .	58
4.3.	Ergebnisse . . . . .	59
<b>5.</b>	<b>Gluebälle</b>	<b>63</b>
5.1.	Details zur Messung . . . . .	63
5.1.1.	Wahl des Operators . . . . .	63
5.1.2.	Smearing . . . . .	65
5.1.3.	Analyse . . . . .	66
5.1.4.	Fehlerabschätzung . . . . .	71
5.1.5.	Variationsmethoden . . . . .	73
5.2.	Optimierung der Messung . . . . .	75
5.2.1.	Smearing-Parameter . . . . .	75
5.2.2.	Wahl der Smearing-Level . . . . .	77
5.2.3.	Vergleich APE- und HYP-Smearing . . . . .	84
5.2.4.	Verwendung anderer Operatoren . . . . .	85
5.3.	Ergebnisse . . . . .	94
5.3.1.	$\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing . . . . .	95
5.3.2.	$\beta = 1.75$ , 3 Level Stout-Smearing . . . . .	99
5.3.3.	$\beta = 1.90$ , 1 Level Stout-Smearing . . . . .	102

5.3.4. $\beta = 2.10$ , 1 Level Stout-Smearing . . . . .	107
5.3.5. Reine Eichtheorie . . . . .	113
5.3.6. Zusammenfassung der Ergebnisse . . . . .	120
<b>6. Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen</b>	<b>123</b>
6.1. Polyakov-Schleife . . . . .	123
6.2. Gluino-Kondensat . . . . .	128
6.3. Zusammenfassung . . . . .	136
<b>7. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>139</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>143</b>
<b>Liste der Veröffentlichungen</b>	<b>153</b>
<b>A. Glueball Abbildungen</b>	<b>155</b>
A.1. APE- und HYP-Smearing . . . . .	155
A.2. Verwendung anderer Operatoren . . . . .	161
A.3. Effektive Massen und Fit-Massen . . . . .	162



# 1. Einleitung

Alle bisher bekannte Materie wird durch das sogenannte *Standardmodell der Teilchenphysik* beschrieben. Im Jahr 2012 wurde am Large Hadron Collider (LHC) [64] mit dem Higgs-Boson nach langer Suche der letzte fehlende Baustein des Standardmodells nachgewiesen. Postuliert wurde das Higgs-Teilchen bereits 1964, und zwar unabhängig voneinander von Higgs [55, 56], Englert und Brout [40] sowie Guralnik, Hagen und Kibble [50]. François Englert und Peter W. Higgs wurden für diese Vorhersage 2013 mit dem Nobelpreis in Physik ausgezeichnet [85].

Die Voraussagen des Standardmodells decken sich bisher sehr gut mit den experimentellen Beobachtungen. Dennoch bleiben einige offene Fragen, die einer genaueren Untersuchung bedürfen. So ist das Standardmodell aus Sicht vieler Physiker wenig elegant, da es sehr viele Eingangsparameter benötigt, die nicht aus der Theorie selbst hervorgehen. Außerdem ist unklar, warum es im Standardmodell ausgerechnet drei verschiedene Teilchenfamilien gibt, oder warum die Teilchenmassen über so viele Größenordnungen verteilt sind. Darüber hinaus beschreibt das Standardmodell nur die sichtbare Materie. Aus kosmologischen Beobachtungen ist jedoch bekannt, dass die sichtbare Materie nur etwa 5% der gesamten im Universum verteilten Masse ausmacht, den weitaus größeren Anteil stellen die sogenannte *dunkle Materie* (ca. 25%) und die *dunkle Energie* (ca. 70%).

Aus diesen und weiteren Gründen sind die meisten Physiker davon überzeugt, dass es eine Physik jenseits des Standardmodells geben muss. Eines der vielversprechendsten Modelle dafür ist die *Supersymmetrie* (SUSY). Es sagt voraus, dass jedes Elementarteilchen des Standardmodells ein supersymmetrisches Partnerteilchen besitzt. Da in der Natur bisher noch keine supersymmetrischen Teilchen entdeckt wurden, muss es sich bei der Supersymmetrie um eine gebrochene Symmetrie handeln, in der die SUSY-Teilchen deutlich schwerer als ihre Partnerteilchen sind. Viele der willkürlich erscheinenden Eigenschaften des Standardmodells ergeben sich in supersymmetrischen Theorien auf ganz natürliche Weise und die leichtesten su-

persymmetrischen Teilchen stellen exzellente Kandidaten für die dunkle Materie dar.

Die experimentelle Suche nach supersymmetrischen Teilchen läuft derzeit auf Hochtouren. Bisher war die Suche jedoch trotz aller Anstrengungen nicht erfolgreich, weshalb schon von einer „Krise der Supersymmetrie“ [71] gesprochen wird. Es bleibt abzuwarten, ob der LHC nach seinem bis voraussichtlich 2015 stattfindenden Umbau in der Lage sein wird, erste Spuren von supersymmetrischen Teilchen nachzuweisen.

In den vergangenen Jahrzehnten wurden eine Vielzahl supersymmetrischer Theorien entwickelt. Diese Arbeit entstand im Rahmen der DESY-Münster-Kollaboration, die sich insbesondere mit der  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie (SYM) beschäftigt. Dabei handelt es sich um eine vergleichsweise einfache Theorie, die sich gut dazu eignet, die erwarteten Eigenschaften einer supersymmetrischen Theorie mit Hilfe von Computersimulationen zu studieren.

Der *theoretische Hintergrund* von Supersymmetrie im Allgemeinen und der  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie im Speziellen wird in Kapitel 2 näher beleuchtet. Zunächst werden kurz die wichtigsten analytischen Formeln genannt und das erwartete Teilchenspektrum in der Form der SYM-Multipletts beschrieben. Anschließend wird gezeigt, welche Form die Wirkung annimmt, wenn die vierdimensionale Raumzeit für Computersimulationen durch ein  $L^3 \times T$  Gitter beschrieben wird, und wie diese Gitterwirkung weiter verbessert werden kann.

Im dritten Kapitel wird auf die technischen Details der durchgeführten *Gittersimulationen* eingegangen. Dazu gehören eine Einführung in Monte-Carlo-Simulationen und insbesondere die in von der DESY-Münster-Kollaboration verwendeten Algorithmen. Es wird gezeigt, wie Teilchenmassen auf dem Gitter berechnet werden und auf welche Weise man den statistischen Fehler dieser Massen abschätzen kann. Zum Schluss werden die Smearing-Techniken und Variationsmethoden beschrieben, die später bei der Bestimmung des Quarkpotentials und der Glueball-Massen zum Einsatz kommen.

Auf dem Gitter gibt man Abstände und Massen zunächst in Einheiten des dimensionslosen Gitterabstandes  $a$  an. Um diese Größen in physikalische Einheiten umrechnen zu können, benutzt man die sogenannte Sommer-Skala, welche mit Hilfe des statischen Quarkpotentials bestimmt wird. In Kapitel 4 werden die bisher

---

von der DESY-Münster-Kollaboration verwendeten Methoden zur Bestimmung von *Quarkpotential und Sommer-Skala* vorgestellt. Anschließend wird untersucht, wie die bestehenden Methoden optimiert werden können, um in der Vergangenheit aufgetretene Probleme und Unsicherheiten zu beseitigen. Außerdem werden alternative Ansätze zur Bestimmung von Quarkpotential und Sommer-Skala betrachtet und mit den daraus gewonnen Erkenntnissen in einem letzten Schritt die aktuellen Ergebnisse aufgezeigt.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf den *Gluebällen*, denen das Kapitel 5 gewidmet ist. Diese nur aus Gluonen aufgebauten Teilchen wurden erstmals 1972 von Fritsch und Gell-Mann [46] vorausgesagt. In der  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie erwartet man zwei Gluebälle, den leichteren  $0^{++}$ -Glueball und den etwas schwereren  $0^{-+}$ -Glueball. Aufgrund ihrer rein gluonischen Natur weisen Gluebälle ein sehr schlechtes Signal-zu-Rausch-Verhältnis auf, weshalb ihre Masse bei Gittersimulationen relativ schwierig zu bestimmen ist. In dieser Arbeit werden daher die verwendeten Methoden zur Messung der Glueball-Massen detailliert vorgestellt, um dann verschiedene Möglichkeiten zur Verbesserung des Glueball-Signals auf ihre Eignung hin zu untersuchen. Der Fokus liegt dabei auf den Smearing-Methoden und ihrem Einsatz beim *variational smearing* sowie der Verwendung verschiedener Glueball-Operatoren. Abschließend sollen die Ergebnisse für die Massen des  $0^{++}$ -Glueballs und des  $0^{-+}$ -Glueballs ausführlich diskutiert werden.

Die Untersuchungen der  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie durch die DESY-Münster-Kollaboration haben sich bisher vor allem auf den Limes einer unendlich ausgedehnten Raumzeit konzentriert, was einer Temperatur von Null entspricht. In Kapitel 6 soll ein erster Blick auf das Phasendiagramm des Modells bei endlichen Temperaturen geworfen werden. Parallel zu den Simulationen bei Temperatur Null wurden dazu verschiedene Simulationen bei endlicher Temperatur durchgeführt, um das Verhalten der Polyakov-Schleifen und des Gluino-Kondensats im Phasendiagramm genauer zu analysieren.



## 2. Theoretischer Hintergrund

Dieses Kapitel gibt einen kurzen Überblick über die theoretischen Hintergründe der Arbeit. Für eine vertiefende Lektüre eignen sich beispielsweise die Lehrbücher von Gattringer und Lang [47] oder Wess und Bagger [101] und die Dissertationen von Spanderen [96], Luckmann [65] und Demmouche [35].

Die *Supersymmetrie* (SUSY) stellt eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen dar, bei der diese Teilchen durch den Transformations-Operator  $Q$  ineinander umgewandelt werden können:

$$Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle \quad , \quad Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle . \quad (2.1)$$

Diese Teilchen werden auch als Superpartner bezeichnet.

Ein bedeutendes no-go Theorem im Zusammenhang mit der Supersymmetrie ist das *Coleman-Mandula-Theorem* [30], laut dem es nicht möglich ist, die Poincaré-Gruppe mit einer nicht-trivialen Symmetrie zu einer Lie-Algebra zu erweitern. Das Haag-Łopuszański-Sohnius-Theorem [51] erweitert dieses Theorem, indem es die Supersymmetrie explizit als nicht-triviale Erweiterung der Poincaré-Algebra zulässt.

Falls die Supersymmetrie *spontan gebrochen* ist, so ist die Anzahl der bosonischen und der fermionischen Zustände bei der Energie  $E = 0$  gleich und für den *Witten-Index* [103] gilt

$$\Delta := \text{Sp}[-1]^{N_f} = n_{\text{B}}^{E=0} - n_{\text{F}}^{E=0} = 0 . \quad (2.2)$$

Bei einer exakten Supersymmetrie gilt hingegen  $\Delta = 1$ .

## 2.1. Poincaré-Superalgebra

Die Gruppe der Lorentz-Transformationen  $\Lambda^\mu_\nu$  und die Gruppe der Translationen  $a^\mu$  im Minkowskiraum

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.3)$$

bilden zusammen die *Poincaré-Gruppe*. Die zugehörige Lie-Algebra besteht aus den sechs Generatoren der Lorentz-Gruppe  $M^{\rho\sigma} = -M^{\sigma\rho}$  und den vier Generatoren der Translation  $P^\mu$ . Für die Produkte der Poincaré-Algebra gilt

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\sigma}) , \quad (2.4)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\rho] = i(\eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu) , \quad (2.5)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 . \quad (2.6)$$

Die Supersymmetrie stellt eine Erweiterung der Poincaré-Algebra dar. Dazu verwendet man die Supersymmetrie-Generatoren  $Q_\alpha$  mit  $\alpha = 1, \dots, 4N$ . Der im Folgenden betrachtete Fall mit  $N = 1$  besitzt somit vier spinorartige Generatoren  $Q_\alpha$ . Man könnte  $Q_\alpha$  als einen Dirac-Spinor betrachten, da diese jedoch über vier komplexe Einträge und somit acht Freiheitsgrade verfügen, eignen sich Majorana-Spinoren mit ihren vier Freiheitsgraden besser, um die kleinste mögliche Darstellung zu finden. Für sie gilt

$$Q = C\bar{Q}^T \quad \text{bzw.} \quad \bar{Q} = Q^T C , \quad (2.7)$$

wobei  $C = i\gamma^2\gamma^0$  der Ladungskonjugationsoperator ist.

Bezüglich der Lorentz-Transformation  $M^{\mu\nu}$  transformiert sich  $Q_\alpha$  wie ein Spinor, außerdem ist er invariant unter der Translation  $P^\mu$ . Somit ergeben sich zwei weitere Regeln für die Algebra:

$$[M^{\mu\nu}, Q_\alpha] = -\sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} Q^\beta \quad \text{mit} \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] , \quad (2.8)$$

$$[P^\mu, Q_\alpha] = 0 . \quad (2.9)$$

Die Jacobi-Identität erfordert schließlich

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = 2\gamma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu . \quad (2.10)$$

Die Kommutator-Regeln (2.4)-(2.6) und (2.8)-(2.10) bilden zusammen die *vollständige Lie-Superalgebra*:

$$\begin{aligned}
 [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\sigma}) , \\
 [M^{\mu\nu}, P^\rho] &= i(\eta^{\nu\rho} P^\mu - \eta^{\mu\rho} P^\nu) , \\
 [P^\mu, P^\nu] &= 0 , \\
 [M^{\mu\nu}, Q_\alpha] &= -\sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu} Q^\beta \quad \text{mit} \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] , \\
 [P^\mu, Q_\alpha] &= 0 , \\
 \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= 2\gamma_{\alpha\beta}^\mu P_\mu .
 \end{aligned}$$

Statt den Majorana-Spinoren  $Q_\alpha$  werden in der Literatur oft die zwei-komponentigen *Weyl-Spinoren*  $Q_a$  verwendet. Sie hängen aufgrund der Beziehung

$$Q_\alpha = \begin{pmatrix} Q_a \\ \bar{Q}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

miteinander zusammen. [96]

## 2.2. Irreduzible Darstellung

Die irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Superalgebra werden zur Klassifizierung der supersymmetrischen Zustände benötigt. Dazu verwendet man *Casimir-Operatoren*, die mit allen Generatoren vertauschen. Von besonderer Bedeutung sind die beiden Casimir-Operatoren

$$P^2 = P_\mu P^\mu \quad (2.12)$$

und

$$C^2 = C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad C_{\mu\nu} = Y_\mu P_\nu - Y_\nu P_\mu . \quad (2.13)$$

Der Vierervektor  $Y_\mu$  setzt sich gemäß

$$Y_\mu = W_\mu + \frac{1}{8} \bar{Q} \gamma_\mu \gamma_5 Q \quad (2.14)$$

## 2. Theoretischer Hintergrund

---

aus dem *Pauli-Lubanski-Vektor*

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma} , \quad (2.15)$$

einer relativistischen Verallgemeinerung des Spinvektors, und den Weyl-Spinoren  $Q$  und  $\bar{Q}$  zusammen. Der Vierervektor  $Y_\mu$  erfüllt die Vertauschungsrelation

$$[Y_\mu, Y_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\rho Y^\sigma \quad (2.16)$$

und wird in der Form  $\frac{1}{m}\mathbf{Y}$  als *Superspin* bezeichnet. Der Superspin besitzt die Eigenwerte

$$\left(\frac{\mathbf{Y}}{m}\right)^2 = y(y+1) \quad \text{mit} \quad y = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots , \quad (2.17)$$

und  $C^2$  hat die Eigenwerte

$$C^2 = -2m^4 y(y+1) \quad \text{mit} \quad y = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots , \quad (2.18)$$

die supersymmetrischen Teilchen lassen sich also über den Superspin  $y$  und die Masse  $m$  charakterisieren. [96]

### 2.3. Supermultipletts

Teilchen mit demselben Superspin  $y$  werden zu *Supermultipletts* zusammengefasst. Die beiden einfachsten Darstellungen der SUSY-Algebra erhält man für  $y = 0$  und  $y = \frac{1}{2}$ . Das *chirale Supermultiplett* mit  $y = 0$  besteht aus einem skalaren und einem pseudoskalaren Teilchen mit Spin 0 und einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Mit diesem Supermultiplett lassen sich Materiefelder beschreiben, also Quarks und Leptonen und deren Superpartner Squarks und Sleptonen.

Bei  $y = \frac{1}{2}$  spricht man vom *Vektor-Supermultiplett*. Es enthält ein pseudoskalares Teilchen mit Spin 0, zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen und ein Vektorteilchen mit Spin 1. Hiermit lassen sich die Eichbosonen beschreiben, also Photonen, W/Z-Bosonen und Gluonen sowie deren Superpartner Photinos, Winos, Zinos und Gluinos.<sup>1</sup> [65]

---

<sup>1</sup>Für eine vollständige Übersicht über das Teilchenspektrum des minimalen Supersymmetrischen Standardmodells (MSSM) sei z.B. auf [1] verwiesen.

## 2.4. Superfelder

Zur vereinfachten Darstellung von supersymmetrischen Theorien führt man *Superfelder*  $\mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$  ein, die zusätzlich zur Raum-Zeit-Koordinate  $x^\mu$  auch von den antikommutierenden Grassmann-Variablen  $\theta$  und  $\bar{\theta}$  abhängen. Mit Hilfe der supersymmetrischen Algebra (2.4)-(2.10) kann jedes Gruppenelement  $G(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$  wie folgt dargestellt werden:

$$G(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = \exp \{i(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q} - x^\mu P_\mu)\} . \quad (2.19)$$

Die Generatoren haben dabei die Form

$$iQ = \frac{\partial}{\partial \theta} - i\sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu , \quad (2.20)$$

$$i\bar{Q} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + i\sigma^\mu \theta \partial_\mu , \quad (2.21)$$

$$P_\mu = i\partial_\mu . \quad (2.22)$$

Um mehr über den Teilchengehalt des Superfeldes zu erfahren, kann man  $\mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$  in einer Potenzreihe von  $\theta$  und  $\bar{\theta}$  entwickeln:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta M(x) \\ &+ \bar{\theta}\bar{\theta}N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) \\ &+ \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\alpha(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Fordert man weiterhin, dass  $\mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$  sich wie ein Lorentz-Skalar verhält, dann kann man die verschiedenen Komponentenfelder in (2.23) wie folgt identifizieren:

- 4 komplexe skalare Felder  $f(x)$ ,  $M(x)$ ,  $N(x)$  und  $D(x)$ ,
- 2 linkshändige und 2 rechtshändige Weyl-Spinoren  $\phi(x)$ ,  $\alpha(x)$  und  $\bar{\chi}(x)$ ,  $\bar{\lambda}(x)$ ,
- 1 komplexes Vektorfeld  $A_\mu(x)$ .

Als Nächstes möchte man zu einer irreduziblen Darstellung der Superfelder gelangen. Dazu definiert man die kovarianten, mit  $Q$  und  $\bar{Q}$  antikommutierenden

Ableitungen

$$\mathcal{D}_A = \partial_A + i(\sigma^\mu\theta)_A\partial_\mu, \quad (2.24)$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{A}} = -\partial_{\dot{A}} + i(\tilde{\sigma}^\mu\theta)_{\dot{A}}\partial_\mu \quad (2.25)$$

mit den erweiterten Pauli-Matrizen  $\tilde{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})$ . Mit diesen Ableitungen identifiziert man ein chirales und ein antichirales Superfeld, indem man fordert, dass

$$\mathcal{D}_A\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{A}}\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \quad (2.26)$$

gilt. Das chirale Superfeld  $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$  enthält 2 skalare Felder und einen linkshändigen Weyl-Spinor [65], sein Teilchengehalt entspricht damit dem des massiven chiralen Supermultipletts aus Abschnitt 2.3.

Ein Vektor-Superfeld zur Beschreibung der supersymmetrischen Yang-Mills-Felder erhält man über die Bedingung

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) . \quad (2.27)$$

In der Wess-Zumino-Eichung hat es die Form

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x) . \quad (2.28)$$

Die verschiedenen Komponenten sind

- 1 reelles skalares Feld  $d(x)$  (Hilfsfeld<sup>2</sup>),
- 1 komplexes Weyl-Spinorfeld  $\lambda(x)$  (Gluino-Feld) und
- 1 reelles Vektorfeld  $A_\mu(x)$  (Gluon-Feld). [65]

## 2.5. $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische Yang-Mills-Theorie

Ausgehend von der Definition der *supersymmetrischen Feldstärke*

$$W_A := -\frac{1}{4}(D\bar{D})D_A V(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (2.29)$$

---

<sup>2</sup>Das Feld  $d(x)$  kann später mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung eliminiert werden.

konstruiert man eine reelle Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} W^A W_A + h.c. , \quad (2.30)$$

wobei  $h.c.$  für die hermitesch konjugierten Terme steht. Einsetzen von (2.28) liefert

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{i}{2} (\lambda \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda) + 2d^2 . \quad (2.31)$$

Für nicht-abelsche Theorien verwendet man ein matrixwertiges Vektor-Superfeld in adjungierter Darstellung,

$$V = V^a T^a , \quad (2.32)$$

wobei  $T^a$  die Generatoren der Gruppe sind. Für sie gilt

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (2.33)$$

mit der Strukturkonstante  $f^{abc}$ . Schreibt man auch die Feldstärke als

$$W_A = W_A^a T^a , \quad (2.34)$$

kommt die Lagrange-Dichte (2.31) auf die Form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - i \lambda^a \sigma^\mu (\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda})^a + \frac{1}{2} d^a d^a \quad (2.35)$$

mit der Yang-Mills-Feldstärke

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.36)$$

und der kovarianten Ableitung

$$(\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda})^a = \partial_\mu \bar{\lambda}^a + g f_{abc} A_\mu^b \bar{\lambda}^c . \quad (2.37)$$

Weiterhin kann man den *Majorana-Bi-Spinor*

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \bar{\lambda}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

## 2. Theoretischer Hintergrund

---

einführen und das Hilfsfeld  $d^a$  eliminieren, womit man schließlich zur Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{i}{2}\bar{\lambda}^a \gamma^\mu (\mathcal{D}_\mu \lambda^a) \quad (2.39)$$

gelangt. Diese Lagrange-Dichte ist eichinvariant, da die masselosen Felder  $\lambda$  und  $F_{\mu\nu}$  (bzw.  $A_\mu$ ) eichinvariant sind. Erst das Hinzufügen eines Massenterms

$$\mathcal{L}_m = \frac{m_g}{2}\bar{\lambda}\lambda \quad (2.40)$$

mit nicht-verschwindender Gluino-Masse  $m_g \neq 0$  führt dazu, dass die Supersymmetrie weich gebrochen wird (*soft breaking*).

Die vollständige Lagrange-Dichte der SYM besteht somit aus dem Gluon-Feld  $A_\mu$  und dem Gluino-Feld  $\lambda$  und wird ergänzt um einen Massenterm:

$$\mathcal{L} = \text{Sp} \left[ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\bar{\lambda}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\lambda - \frac{m_g}{2}\bar{\lambda}\lambda \right]. \quad (2.41)$$

Hierbei ist  $F_{\mu\nu}$  der nicht-abelsche Feldstärketensor und  $\mathcal{D}_\mu$  ist die eichkovariante Ableitung in der adjungierten Repräsentation. Die Felder  $\lambda$  und  $A_\mu$  können durch eine supersymmetrische Transformation ineinander umgewandelt werden. [65]

## 2.6. SYM-Multipletts

In der supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie erwartet man – analog zur QCD – *Confinement* und ein Teilchenspektrum mit farblosen gebundenen Zuständen. Zur Bestimmung dieser Zustände haben Veneziano und Yankielowicz [100] eine effektive Wirkung konstruiert, nach der das chirale Wess-Zumino-Multiplett folgende Teilchen enthält:

- $\bar{\lambda}\lambda$ , genannt  $a-f_0$ , ein aus zwei Gluinos bestehendes, skalares  $J^{PC} = 0^{++}$  Boson,
- $\bar{\lambda}\gamma_5\lambda$ , genannt  $a-\eta'$ , ein aus zwei Gluinos bestehendes, pseudoskalares  $J^{PC} = 0^{-+}$  Boson,
- $\chi = F^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\lambda$ , genannt Gluino-Glueball, ein aus einem Gluino und einem Gluon bestehendes Majorana-Fermion mit Spin  $\frac{1}{2}$ .

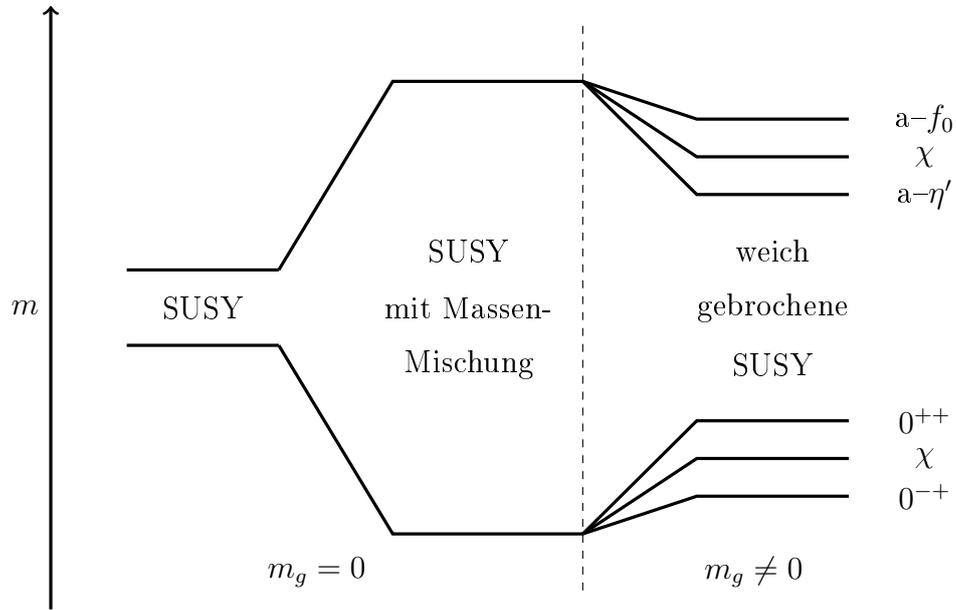


Abbildung 2.1.: Massenmultiplizität nach Farrar, Gabadadze und Schwetz [42].

Das Fehlen von rein gluonischen Zuständen (Gluebälle) veranlasste Farrar et al. [42] dazu, die Wirkung von Veneziano und Yankielowicz um einen weiteren Term zu erweitern, wodurch die Theorie ein weiteres, leichteres Multiplizität erhält:

- $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ , ein skalarer  $0^{++}$ -Glueball und Hauptgegenstand dieser Arbeit,
- $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$ , ein pseudoskalarer  $0^{-+}$ -Glueball,
- ein weiterer Gluino-Glueball Zustand  $\chi$  mit geringerer Masse.

Im Fall nicht verschwindender Gluino-Masse  $m_g \neq 0$  kommt es zur Aufspaltung der einzelnen Multiplizitäten (siehe Abb. 2.1). Außerdem können  $a-\eta'$  und  $a-f_0$  mit den Glueball-Zuständen mischen. [65, 96]

## 2.7. Gitterwirkung

Für numerische Simulationen beschreibt man die vierdimensionale Raumzeit durch ein  $L^3 \times T$  Gitter – also ein Gitter mit  $L$  Punkten in jeder Raumrichtung und  $T$  Punkten in Zeitrichtung – mit dem Gitterabstand  $a$ .

## 2. Theoretischer Hintergrund

---

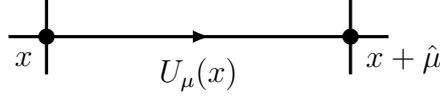


Abbildung 2.2.: Link-Variable  $U_\mu(x)$ . Die Gitterachse  $\mu = 1, 2, 3, 4$  gibt die Richtung an, in die der zugehörige Vektor  $\hat{\mu}$  zeigt.

Auf den Gitterpunkten werden die Spinoren des Gluino-Feldes  $\psi(x)$  platziert. Unter lokalen Eichtransformationen verhalten sie sich wie

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Lambda(x)\psi(x) \quad (2.42)$$

mit  $\Lambda(x) \in \text{SU}(N)$ , das heißt  $\Lambda(x)$  ist eine  $N \times N$  Matrix mit  $\Lambda^\dagger(x)\Lambda(x) = \mathbf{1}$  und  $\det \Lambda(x) = 1$ .

Das Gluon- beziehungsweise Eichfeld  $A_\mu$  befindet sich nicht auf den Gitterpunkten selbst, sondern auf den Verbindungslinien (*Links*) dazwischen. Dazu definiert man die gerichtete Link-Variable

$$U_\mu(x) := e^{iaA_\mu(x)}, \quad (2.43)$$

welche den Punkt  $x$  mit dem Punkt  $x + \hat{\mu}$  verbindet (siehe Abb. 2.2).  $U_\mu(x)$  ist ein Element der Eichgruppe<sup>3</sup>  $\text{SU}(N)$  und es gilt

$$U_{-\mu}(x) = U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}). \quad (2.44)$$

Unter einer lokalen Eichtransformation transformiert sich die Link-Variable wie

$$U_\mu(x) \rightarrow U'_\mu(x) = \Lambda(x)U_\mu(x)\Lambda^{-1}(x + \hat{\mu}), \quad (2.45)$$

so dass auch der Ausdruck

$$\bar{\psi}'(x)U'_\mu(x)\psi'(x + \hat{\mu}) = \bar{\psi}(x)U_\mu(x)\psi(x + \hat{\mu}) \quad (2.46)$$

eichinvariant ist. Mehrere Link-Variablen können zusammengefasst werden und bilden dann die Gitterversion eines Eichtransporters. Betrachtet man beispielsweise

---

<sup>3</sup>Im Fall von SUSY ist dies die  $\text{SU}(2)$ .

einen Pfad  $\mathcal{P}$ , der die Gitterpunkte  $x_0$  bis  $x_n$  miteinander verbindet, dann ist das geordnete Produkt der Link-Variablen auf diesem Pfad definiert als

$$P[U] = U_{\mu_0}(x_0)U_{\mu_1}(x_0 + \hat{\mu}_0) \cdots U_{\mu_{n-1}}(x_n - \hat{\mu}_{n-1}) \quad (2.47)$$

$$\equiv \prod_{(x,\mu) \in \mathcal{P}} U_{\mu}(x) . \quad (2.48)$$

Falls es sich bei dem Pfad  $\mathcal{P}$  um eine geschlossene Schleife  $\mathcal{L}$  handelt, dann ist

$$\text{Sp} \left[ \prod_{(x,\mu) \in \mathcal{L}} U_{\mu}(x) \right] \quad (2.49)$$

eichinvariant. [47]

### 2.7.1. Plakette

Die einfachste nicht-triviale Schleife auf dem Gitter ist die sogenannte *Plakette*, welche aus genau vier Links besteht (siehe Abb. 2.3):

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(x) &= U_{\mu}(x)U_{\nu}(x + \hat{\mu})U_{-\mu}(x + \hat{\mu} + \hat{\nu})U_{-\nu}(x + \hat{\nu}) \\ &= U_{\mu}(x)U_{\nu}(x + \hat{\mu})U_{\mu}^{\dagger}(x + \hat{\nu})U_{\nu}^{\dagger}(x) . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Nach (2.49) ist  $\text{Sp} [U_{\mu\nu}(x)]$  eichinvariant. Die Plakette hängt gemäß

$$U_{\mu\nu}(x) = \exp \{ i a^2 F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^3) \} \quad (2.51)$$

mit dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}(x) = -i [D_{\mu}(x), D_{\nu}(x)] = \partial_{\mu} A_{\nu}(x) - \partial_{\nu} A_{\mu}(x) + i [A_{\mu}(x), A_{\nu}(x)] \quad (2.52)$$

zusammen und kann daher bei der Konstruktion der Eichwirkung auf dem Gitter benutzt werden. [47]

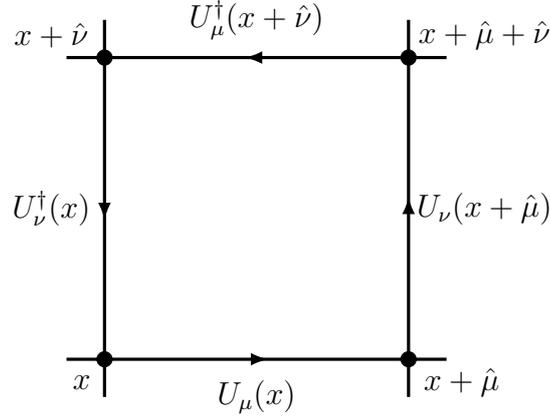


Abbildung 2.3.: Plakette  $U_{\mu\nu}(x)$

### 2.7.2. Wilson-Schleifen

Eine allgemeinere Art von Schleife ist die sogenannte *Wilson-Schleife*, die aus zwei räumlichen Wilson-Linien  $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)$  und  $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  und zwei zeitlichen Transportern  $T(\mathbf{y}, t)$  und  $T(\mathbf{x}, t)$  besteht (siehe Abb. 2.4):

$$\mathcal{L} = (\mathbf{x}, 0) \xrightarrow{T} (\mathbf{x}, t) \xrightarrow{S} (\mathbf{y}, t) \xrightarrow{T^{\dagger}} (\mathbf{y}, 0) \xrightarrow{S^{\dagger}} (\mathbf{x}, 0) . \quad (2.53)$$

Dabei verbindet die räumliche Wilson-Linien  $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  die Punkte  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  zum festen Zeitpunkt  $t$ , während der zeitliche Transporter  $T(\mathbf{x}, t)$  den Punkt  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt 0 mit dem Punkt  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt  $t$  verbindet.

Die Spur über die Schleife  $\mathcal{L}$  ist genau wie die Plakette nach (2.49) eichinvariant, diese Größe wird *Wilson-Schleife* genannt:

$$\mathcal{W}_{\mathcal{L}}[U] = \text{Sp} [T(\mathbf{x}, t)S(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)T^{\dagger}(\mathbf{y}, t)S^{\dagger}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, 0)] = \text{Sp} \left[ \prod_{(x,\mu) \in \mathcal{L}} U_{\mu}(x) \right] . \quad (2.54)$$

Wilson-Schleifen spielen eine wichtige Rolle bei der Bestimmung des Quark-Antiquark-Potentials  $V(r)$ , mehr dazu im Abschnitt 4.1. [47]

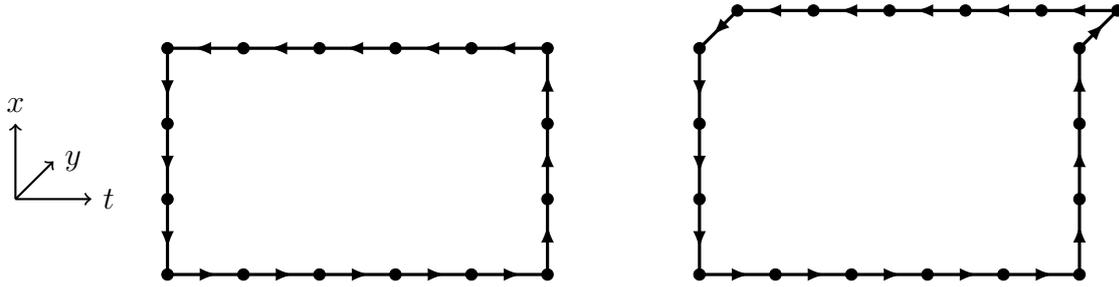


Abbildung 2.4.: Beispiel für eine planare und eine nicht-planare Wilson-Schleife

### 2.7.3. $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische Yang-Mills Gitterwirkung

Die Wirkung  $S$  der supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie setzt sich aus einem Eichanteil  $S_G$  und einer fermionischen Wirkung  $S_F$  zusammen, wie es von Curci und Veneziano [33] vorgeschlagen wurde. Für den Eichanteil verwendet man die *Wilson-Wirkung* [102], die Summe über alle Plaketten auf dem Gitter, jeweils in nur einer Orientierung:

$$S_G = \frac{2}{g^2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Re Sp} (1 - U_{\mu\nu}(x)) . \quad (2.55)$$

Mit der Definition der nackten Eichkopplung  $\beta$  für  $SU(N_c)$ ,

$$\beta = \frac{2N_c}{g^2} , \quad (2.56)$$

erhält die Wilson-Wirkung die Form

$$S_G = \beta \sum_x \sum_{\mu < \nu} \left( 1 - \frac{1}{N_c} \text{Re Sp} U_{\mu\nu}(x) \right) . \quad (2.57)$$

Den Zusammenhang mit der Kontinuumswirkung erkennt man, wenn man die Entwicklung (2.51) in (2.55) einsetzt und beachtet, dass die Summe über alle Gitterpunkte für  $a \rightarrow 0$  zum Integral über die Raum-Zeit wird,

$$a^4 \sum_x \xrightarrow{a \rightarrow 0} \int dx^4 . \quad (2.58)$$

## 2. Theoretischer Hintergrund

---

Die Wirkung

$$S_G = \frac{a^4}{2g^2} \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Sp} (F_{\mu\nu}(x)^2) + \mathcal{O}(a^2) \quad (2.59)$$

entspricht dann bis auf den Faktor  $\mathcal{O}(a^2)$  der Kontinuumswirkung.

In der fermionischen Wirkung werden die Gluinos durch Wilson-Fermionen in der adjungierten Darstellung beschrieben,

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_{xy} \bar{\lambda}_x Q_{xy} \lambda_y . \quad (2.60)$$

Die *Fermion-Matrix*  $Q$  – auch Wilson-Dirac-Operator  $D_w$  genannt – ist definiert als

$$\begin{aligned} Q_{xa\alpha,yb\beta} &= \delta_{xy} \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} \\ &\quad - \kappa \sum_{\mu=1}^4 \left[ (1 - \gamma_\mu)_{\alpha\beta} (V_\mu(x))_{ab} \delta_{x+\mu,y} \right. \\ &\quad \left. + (1 + \gamma_\mu)_{\alpha\beta} (V_\mu^\dagger(x - \mu))_{ab} \delta_{x-\mu,y} \right] \end{aligned} \quad (2.61)$$

mit den Orts-, Farb- und Dirac-Indizes  $(x, a, \alpha)$  und dem Hoppingparameter

$$\kappa = \frac{1}{2m_{\tilde{g},0} + 8r} . \quad (2.62)$$

Die Link-Variable  $V_\mu(x)$  in der adjungierten Darstellung hängt mit der Link-Variablen  $U_\mu(x)$  in der fundamentalen Darstellung über

$$[V_\mu(x)]^{ab} = 2\text{Sp}[U_\mu^\dagger(x)T^a U_\mu(x)T^b] = [V_\mu(x)]^{*ab} = [V_\mu^{-1}(x)]^{Tab} \quad (2.63)$$

zusammen. Die Generatoren  $T^a$  der Eichgruppe  $SU(N_c)$  werden auf  $2\text{Sp}[T^a T^b] = \delta^{ab}$  normiert. Im Fall der  $SU(2)$  sind die Generatoren die Pauli-Matrizen  $\sigma^a$ ,

$$T^a = \frac{1}{2} \sigma^a . \quad (2.64)$$

Beachtet man, dass die Determinante der Fermion-Matrix für Majorana-Fermio-

nen stets positiv ist, dann lässt sich das fermionische Pfadintegral schreiben als

$$\int [d\lambda] e^{-\frac{1}{2}\lambda Q \lambda} = \pm \sqrt{\det(Q)} = \text{Pf}(CQ) = \text{Pf}(M) . \quad (2.65)$$

Das Quadrat des *Pfaffian*  $\text{Pf}(M)$  entspricht der Determinanten der Fermion-Matrix  $Q$ , allerdings bleibt das Vorzeichen unbestimmt.<sup>4</sup> Der Pfaffian einer antisymmetrischen  $2m \times 2m$  Matrix  $M = CQ = -M^T$  ist über das Grassmann-Integral

$$\text{Pf}(M) = \int [d\phi] e^{-\frac{1}{2}\phi_\alpha M_{\alpha\beta} \phi_\beta} = \frac{1}{m!2^m} \epsilon_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}} M_{\alpha_1\alpha_2} \cdots M_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}} \quad (2.66)$$

definiert.

Der Erwartungswert des Majorana-Feldes wird mit Hilfe des Erzeugendenfunktionals  $\mathcal{Z}[J]$  mit einer externen Quelle  $J(x)$  berechnet [37],

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[J] &= \int [dU] \exp \left( -S[U] - \frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) Q_{xy}^{-1} C^{-1} J(y) \right) \\ &= \int [dU] \text{Pf}(CQ[U]) \exp \left( -S_G[U] - \frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) Q_{xy}^{-1} C^{-1} J(y) \right) . \end{aligned} \quad (2.67)$$

Der einfachste Fall ist die *2-Punkt-Funktion*,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T} \{ \lambda_\alpha^a(x_1) \lambda_\beta^b(x_2) \} \rangle_S &= 2^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial J(x_1)} \frac{\partial}{\partial J(x_2)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{x,y} J(x) Q_{xy}^{-1} C^{-1} J(y)} \right\rangle \\ &= \langle \Delta_{\alpha\rho}^{ab}(x,y) C_{\rho\beta}^{-1} \rangle_U , \end{aligned} \quad (2.68)$$

wobei  $\mathcal{T}\{\dots\}$  das zeitlich geordnete Produkt ist und  $\Delta \equiv Q^{-1}$  die Gluino-Propagator-Matrix.

## 2.8. Verbesserung der Wirkung

Die Eichwirkung (2.55) stellt nur eine von vielen Möglichkeiten für die Konstruktion der Wirkung dar. Wichtig ist, dass die Wirkung im Kontinuumslimites  $a \rightarrow 0$  zur Kontinuumswirkung führt. Man kann daher beispielsweise weitere Terme zur

<sup>4</sup> Das Vorzeichen des Pfaffian kann in den Korrekturfaktoren berücksichtigt werden, siehe Abschnitt 3.1.7.

## 2. Theoretischer Hintergrund

---

Wirkung hinzufügen, so lange diese im Limes  $a \rightarrow 0$  wieder verschwinden. Durch eine geschickte Wahl der Wirkung lassen sich dann die durch die Diskretisierung der Raumzeit auftretenden Fehler verkleinern.

Eine verbesserte Form der Eichwirkung (2.55) ist die *tree-level Symanzik* (tlSym) verbesserte Wirkung [69, 97, 98]:

$$S_G = \beta \left( c_0 \sum_{pl} \left\{ 1 - \frac{1}{N_c} \operatorname{Re} \operatorname{Sp} U_{pl} \right\} + c_1 \sum_{rec} \left\{ 1 - \frac{1}{N_c} \operatorname{Re} \operatorname{Sp} U_{rec} \right\} \right) \quad (2.69)$$

mit  $c_0 = 1 - 8c_1$  und  $c_1 = -1/12$ . Zusätzlich zur Summe über alle Plaketten wird hier eine Summe über rechteckige Wilson-Schleifen aus sechs Link-Variablen  $U_{rec}$  hinzugefügt.

Weitere Vorteile erhält man durch Anwendung von *Stout-Smearing* [81] auf die Link-Variablen  $U_\mu(x)$  im Wilson-Dirac-Operator (2.61). Die geschmierten Link-Variablen  $U'_\mu(x)$  werden durch die Projektion

$$U'_\mu(x) = U_\mu(x) \exp \left\{ \frac{1}{2} (\Omega_\mu(x) - \Omega_\mu^\dagger(x)) - \frac{1}{4} \operatorname{Sp} (\Omega_\mu(x) - \Omega_\mu^\dagger(x)) \right\} \quad (2.70)$$

mit  $\Omega_\mu(x) = U_\mu^\dagger(x) C_\mu(x)$  gebildet. Die Größe  $C_\mu(x)$  ist wiederum eine Summe über mehrere Klammern aus je drei Link-Variablen,

$$C_\mu(x) = \sum_{\nu \neq \mu} \rho_{\mu\nu} (U_\nu^\dagger(x + \hat{\mu}) U_\mu(x + \hat{\nu}) U_\nu(x)) \quad (2.71)$$

$$+ U_\nu(x - \hat{\nu} + \hat{\mu}) U_\mu(x - \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x - \hat{\nu}) . \quad (2.72)$$

Die reellen Smearing-Parameter  $\rho_{\mu\nu}$  können unterschiedlich justiert werden, die Wahl hier fällt auf  $\rho_{\mu\nu} = 0.15$  für alle Richtungen (Raum- und Zeitrichtung). Ein Vorteil von Stout-Smearing ist, dass die Größe  $U'_\mu(x)$  in Bezug auf die Link-Variablen differenzierbar ist [47].

Stout-Smearing kann mehrfach hintereinander angewendet werden, im Rahmen dieser Arbeit werden meist ein oder drei Level Stout-Smearing benutzt [16].

# 3. Gittersimulationen und Messmethoden

In diesem Kapitel sollen einige Grundlagen zu Gittersimulationen und den dabei verwendeten Messmethoden vorgestellt werden. Dazu wird es eine kurze Einführung über Monte-Carlo-Simulationen im Allgemeinen und über den von der DESY-Münster-Kollaboration verwendeten zweistufigen polynomialen Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus [36, 78] im Speziellen geben. Es folgt ein Abschnitt über die bei diesem Verfahren notwendige Verwendung von Korrekturfaktoren, danach wird die Bestimmung von Teilchenmassen anhand von Korrelatoren beschrieben. Schließlich wird auf einige speziellere Techniken wie Smearing, Variationsmethoden und Jackknifing eingegangen.

## 3.1. Monte-Carlo-Simulationen

Man betrachte zunächst der Einfachheit halber den Erwartungswert einer Observablen  $O$  in reiner Eichtheorie,

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} O[U] \quad \text{mit} \quad Z = \int \mathcal{D}[U] e^{-S_G[U]} . \quad (3.1)$$

Das hier vorkommende Integral über alle möglichen Zustände des Feldes  $U$  kann nur für sehr kleine Gitter analytisch gelöst werden. Die Grundidee der Monte-Carlo-Simulation ist es, dieses Integral durch eine endliche Summe über  $N$  Feld-Konfigurationen  $U^{(n)}$  zu approximieren,

$$\langle O \rangle \approx \frac{1}{N} \sum_n O[U^{(n)}] , \quad (3.2)$$

wobei die Konfigurationen  $U^{(n)}$  der Verteilung  $\exp(-S[U^{(n)}])$  genügen. Der statistische Fehler einer solchen Berechnung ist proportional zu  $1/\sqrt{N}$ . [47]

### 3.1.1. Markov-Ketten

Die Herausforderungen der Monte-Carlo-Simulation liegen darin, Konfigurationen  $U^{(n)}$  zu erzeugen, die der Verteilung  $\exp(-S[U^{(n)}])$  entsprechen, und dabei den Rechenaufwand möglichst gering zu halten. Dazu startet man mit einer zufällig generierten Konfiguration  $U^{(0)}$  und erzeugt davon ausgehend eine sogenannte *Markov-Kette* von Konfigurationen,

$$U^{(0)} \rightarrow U^{(1)} \rightarrow U^{(2)} \rightarrow \dots \quad (3.3)$$

Der Monte-Carlo-Schritt von einer Konfiguration  $U^{(n-1)}$  zur nächsten Konfiguration  $U^{(n)}$  wird als *Update* bezeichnet und hängt von der bedingten Übergangswahrscheinlichkeit

$$P(U^{(n)} = U' | U^{(n-1)} = U) = T(U'|U) \quad (3.4)$$

ab.  $T(U'|U)$  ist unabhängig von der Konfigurationsnummer  $n$  und es gilt

$$0 \leq T(U'|U) \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{U'} T(U'|U) = 1 \quad (3.5)$$

Eine Markov-Kette sollte jede mögliche Konfiguration  $U^{(n)}$  nach einer endlichen Anzahl von Schritten  $n$  aufsuchen können. Es darf somit keine Konfigurationen geben, die nie erreichbar sind (Quellen), und auch nicht solche, von denen aus keine neuen Konfigurationen mehr erreicht werden können (Senken). Daher fordert man, dass die Wahrscheinlichkeit von einer bestimmten Konfiguration  $U$  zur Konfiguration  $U'$  zu gelangen gleich der Wahrscheinlichkeit ist, sich wieder von der Konfiguration  $U'$  zu entfernen:

$$\sum_U T(U'|U)P(U) \stackrel{!}{=} \sum_U T(U|U')P(U') \quad (3.6)$$

$P(U)$  ist hier die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich die Markov-Kette gerade im Zustand  $U$  befindet. Gleichung (3.6) ist lösbar, wenn die *detailed balance condition*

$$T(U'|U)P(U) = T(U|U')P(U') \quad (3.7)$$

erfüllt ist, welche von den meisten Update-Algorithmen verwendet wird. [47]

Man kann außerdem durch Einsetzen der Norm (3.5) in die rechte Seite von (3.6) zeigen, dass die Gleichgewichts-Verteilung  $P(U)$  ein Fixpunkt der Markov-Kette ist:

$$\sum_U T(U'|U)P(U) = P(U') . \quad (3.8)$$

In der Regel befindet sich die Startkonfiguration  $U^{(0)}$  einer Markov-Kette nicht im Gleichgewicht, erst nach einer gewissen Anzahl von Update-Schritten erreicht das System die Gleichgewichts-Verteilung  $P(U)$ . Da  $P(U)$  ein Fixpunkt der Markov-Kette ist, bleibt das System anschließend immer im Gleichgewicht. [47]

### 3.1.2. Metropolis-Algorithmus

Es gibt verschiedene Algorithmen, um ausgehend von einer gegebenen Konfiguration  $U$  eine neue Konfiguration  $U'$  zu erzeugen, die den obigen Bedingungen genügt. Für die Wilson-Wirkung (2.55) eignet sich beispielsweise der Metropolis-Algorithmus [72], bei dem sich  $U$  und  $U'$  immer nur in einer einzelnen Link-Variable

$$U'_\mu(x) = XU_\mu(x) \quad (3.9)$$

unterscheiden.  $X$  ist ein zufällig gewähltes Element der Eichgruppe  $SU(N)$ , das sich nur wenig von der Einheitsmatrix  $\mathbb{1}$  unterscheiden sollte.

Da nur eine Link-Variable verändert wird, lässt sich die daraus resultierende Änderung der Wirkung  $\Delta S$  mit relativ geringem Aufwand berechnen.<sup>1</sup> Im folgenden Akzeptanz-Schritt werden alle neuen Konfigurationen akzeptiert, bei denen die Wirkung abgenommen hat oder gleich geblieben ist. Konfigurationen, bei denen die Wirkung zugenommen hat ( $\Delta S > 0$ ), werden nur akzeptiert, falls gilt

$$r \leq \exp(-\Delta S) \quad \text{mit} \quad r \in [0, 1) \text{ zufällig gewählt.} \quad (3.10)$$

Die Bedingung (3.10) ist notwendig, damit die Markov-Kette nicht in einen Zustand mit minimaler Wirkung läuft, was die detailed balance condition (3.7) verletzen würde.

<sup>1</sup>In der vierdimensionalen Raumzeit ändern sich nur die sechs Plaketten, zu denen die veränderte Link-Variable  $U'_\mu(x)$  gehört. Für die genaue Formel siehe [47].

Diese zwei Schritte – Vorschlag einer neuen Konfiguration  $U'$  und Akzeptanz-Prüfung abhängig von der Änderung der Wirkung – werden solange wiederholt, bis eine ausreichende Anzahl  $n$  an Konfigurationen erzeugt wurde. Da der Metropolis-Algorithmus ein *lokaler* Algorithmus ist, bei dem sich die neu erzeugten Konfigurationen nur wenig von den vorherigen unterscheiden, entwickelt sich die Markov-Kette entsprechend langsam weiter. [47]

### 3.1.3. Molekulardynamik

Der im nächsten Abschnitt vorgestellte Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus basiert auf der Molekulardynamik [28, 88], bei der statt des kanonischen ein mikrokanonisches Ensemble verwendet wird. Dafür definiert man den Hamilton-Operator

$$H[U, P] = \frac{1}{2} \sum_x \sum_\mu P_\mu(x)^2 + S[U] , \quad (3.11)$$

wobei  $P_\mu(x)$  der zu  $U_\mu(x)$  kanonisch konjugierte Impuls ist. Bei der Berechnung der Erwartungswerte mit (3.1) kann dann die Wirkung  $S[U]$  durch den Hamilton-Operator  $H[U, P]$  ersetzt werden. Außerdem gelten die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{d\tau} U_\mu(x) = P_\mu(x) \quad , \quad \frac{d}{d\tau} P_\mu(x) = -\frac{\partial S(U)}{\partial U_\mu(x)} \quad (3.12)$$

mit der Zeit-Variablen  $\tau$ . Ausgehend von  $\tau = 0$  lässt sich damit eine Trajektorie durch den Phasenraum konstruieren, die für den Update-Schritt benutzt werden kann. Der Vorteil der Molekulardynamik ist, dass so die gesamte Konfiguration  $U$  aktualisiert werden kann, und nicht nur ein einzelner Link  $U_\mu(x)$  wie beim Metropolis-Algorithmus (vgl. Abschnitt 3.1.2).

Gleichung (3.11) beschreibt nur den Fall einer reinen Eichtheorie. Zur Beschreibung von Fermionen muss diese Gleichung um das Skalarfeld  $\phi$  und den dazu kanonisch konjugierten Impuls  $\pi$  erweitert werden:

$$H[U, P, \phi, \pi] = \frac{1}{2} \sum_x \sum_\mu P_\mu(x)^2 + \frac{1}{2} \sum_x \pi^\dagger(x) \pi(x) + S[U, \phi] . \quad (3.13)$$

### 3.1.4. Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus

Der Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus (HMC) [38, 92] kombiniert Molekulardynamik und Metropolis-Akzeptanz-Schritt. Man beginnt zunächst mit einer zufällig gewählten Konfiguration  $U^{(0)}$ . Danach werden die folgenden Schritte immer wieder ausgeführt, bis genug Konfigurationen erzeugt wurden:

1. Erzeuge gaußverteilte Pseudo-Impulse  $P_\mu(x)$ .
2. Nutze die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für  $U$  und  $P$ , um die neuen Felder  $U'$  und  $P'$  zu berechnen. Dabei bewegt man sich entlang der Trajektorie im Phasenraum.
3. Akzeptiere die neue Konfiguration mit der Wahrscheinlichkeit

$$P_A(U', P'|U, P) = \min \left( 1, \frac{e^{-H[U', P']}}{e^{-H[U, P]}} \right) . \quad (3.14)$$

Diese Bedingung ist notwendig, da die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen in Schritt 2 für endliche Zeitschritte  $\tau$  nicht exakt gelöst werden können. (Sonst wäre  $\delta H = 0$  und alle neuen Konfigurationen würden akzeptiert.)

4. Gehe zurück zu Schritt 1. Falls sie akzeptiert wurde, benutze ab jetzt die neue Konfiguration  $U'$ , sonst wieder  $U$ .

### 3.1.5. Polynomiale Approximation

Die größte Schwierigkeit bei der Simulation von Feldtheorien mit Fermionen liegt in der Bestimmung der Determinante der sehr großen Fermion-Matrix  $Q$ . Auf Lüscher [66] geht der Vorschlag zurück, die Determinante durch ein Polynom  $P_{n_1}^{(1)}$  der Ordnung  $n_1$  zu approximieren,

$$|\det(Q)|^{2\alpha} = \{\det(Q^\dagger Q)\}^\alpha \simeq \frac{1}{\det P_{n_1}^{(1)}(Q^\dagger Q)} \quad (3.15)$$

mit  $\alpha = \frac{N_f}{2}$ . Im Fall der SYM gilt  $\alpha = \frac{1}{4}$  und das Polynom erfüllt die Bedingung

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} P_{n_1}^{(1)}(x) \simeq x^{-\frac{1}{4}} \quad , \quad x \in [\epsilon, \lambda] . \quad (3.16)$$

Das Intervall  $[\epsilon, \lambda]$  sollte dabei alle Eigenwerte von  $Q^\dagger Q$  einschließen. Weiter nutzt man aus, dass die Nullstellen  $\rho$  des Polynoms  $P_{n_1}^{(1)}$  nur in komplex konjugierten Paaren auftauchen und schreibt

$$\begin{aligned} |\det(Q)|^{2\alpha} &\simeq \prod_{i=1}^{n_1} \det \left[ (\tilde{Q} - \rho^*)(\tilde{Q} - \rho) \right]^{-1} \\ &= \int [d\phi] \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{x,y} \phi_i^\dagger(y) \left[ (\tilde{Q} - \rho^*)(\tilde{Q} - \rho) \right]_{xy} \phi_i(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Für dieses Integral wurde das lokale bosonische Feld  $\phi_i(x)$  eingeführt.

Eine auf diese Weise approximierte Wirkung wird auch als *multi-bosonische Wirkung* bezeichnet. Durch ihre lokale Natur kann die multi-bosonische Wirkung bei lokalen Update-Algorithmen wie dem Metropolis-Algorithmus benutzt werden.

Die Approximation durch ein einzelnes Polynom  $P_{n_1}^{(1)}$  liefert nur für sehr große Ordnungen<sup>2</sup> ein ausreichend genaues Ergebnis, wodurch sich der Rechenaufwand enorm erhöhen würde. Im *Two-Step Multi-Boson* (TSMB) Algorithmus [75] wird daher ein zweites Polynom  $P_{n_2}^{(2)}$  eingeführt, welches speziell kleine Abweichungen korrigieren soll. Für beide Polynome zusammen gilt dann

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} P_{n_1}^{(1)}(x) P_{n_2}^{(2)}(x) \simeq x^{-\frac{1}{4}}. \quad (3.18)$$

Der Update-Schritt wird beim TSMB-Algorithmus nur mit einem relativ kleinen Polynom  $P_{n_1}^{(1)}$  durchgeführt, danach folgt ein *noisy correction* (NC) Schritt mit dem Polynom  $P_{n_2}^{(2)}$ . Dort wird ein der Verteilung

$$\frac{e^{-\eta^\dagger P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}[U]^2)\eta}}{\int [d\eta] e^{-\eta^\dagger P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}[U]^2)\eta}} \quad (3.19)$$

entsprechender Zufallsvektor  $\eta$  erzeugt und die neue Konfiguration  $U'$  mit der Wahrscheinlichkeit

$$P_A(U'|U) = \min \left( 1, \exp \left\{ -\eta^\dagger P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}[U']^2)\eta + \eta^\dagger P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}[U]^2)\eta \right\} \right) \quad (3.20)$$

---

<sup>2</sup> $n_1 \approx 10^3$  bis  $n_1 \approx 10^4$ .

akzeptiert. Ein drittes Polynom

$$P_{n_3}^{(3)}(x) \simeq P_{n_2}^{(2)}(x)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

wird benutzt, um den Vektor  $\eta$  mit Hilfe eines einfach gaußverteilten Vektors  $\eta'$  zu generieren:

$$\eta = P_{n_3}^{(3)}(\tilde{Q}[U]^2)\eta' \simeq P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}[U]^2)^{-\frac{1}{2}}\eta' . \quad (3.22)$$

In der Regel reicht schon eine endliche Ordnung  $n_2$  des Polynoms  $P_{n_2}^{(2)}$  aus, um eine Approximation mit hinreichend kleinen Fehlern (deutlich kleiner als die statistischen Fehler) zu erreichen. Probleme gibt es, falls der kleinste Eigenwert von  $\tilde{Q}^2$  kleiner als die Untergrenze  $\epsilon$  der Approximation ist. In diesem Fall ist ein weiterer Korrektur-Schritt notwendig, mehr dazu im Abschnitt 3.1.7 über Korrekturfaktoren.

Die Wahl geeigneter Polynome ist ein wichtiger Bestandteil bei der Benutzung einer polynomialen Approximation. Dabei gilt es, einen Kompromiss zwischen einer möglichst guten Approximation und einem vertretbaren Rechenaufwand zu finden. Zur Beschreibung der Erzeugung geeigneter Polynome sei auf die Artikel von Montvay [76] beziehungsweise Gebert und Montvay [48] verwiesen.

### 3.1.6. Zweistufiger polynomialer Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus

Die DESY-Münster-Kollaboration verwendet im Moment den von Montvay und Scholz [78] entwickelten *Two-Step Polynomial Hybrid-Monte-Carlo* (TS-PHMC) Algorithmus. Dabei handelt es sich um einen polynomialen Hybrid-Monte-Carlo (PHMC) Algorithmus [43–45], kombiniert mit der zweistufigen polynomialen Approximation des TSMB-Algorithmus.

Der TS-PHMC-Algorithmus basiert auf einem Hamilton-Operator mit der polynomialen Approximation (3.16):

$$H[U, P, \phi, \pi] = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} P_\mu(x)^2 + \frac{1}{2} \sum_x \pi^\dagger(x)\pi(x) + S_G[U] + \sum_{x,y} \phi_i^\dagger(y) P_{n_1}^{(1)}(\tilde{Q}[U]^2)\phi_i(x) . \quad (3.23)$$

Man beginnt mit zufällig gewählten Link-Variablen  $U_\mu(x)$ . Danach werden die fol-

genden Schritte ausgeführt:

1. Erzeuge gaußverteilte Pseudo-Impulse  $P$ .
2. Erzeuge das Pseudo-Fermionen-Feld  $\phi$  mit Hilfe des gaußverteilten Zufallsvektors  $\eta$ :  $\phi = P_{n_1}^{(1)}(\tilde{Q}^2)^{-\frac{1}{2}}\eta$ .
3. Nutze die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für  $U$  und  $P$  bei konstantem Hintergrundfeld  $\phi$ , um die neuen Felder  $U'$  und  $P'$  zu berechnen. Der dabei verwendete Leapfrog-Integrator basiert auf dem Integrator von Sexton und Weingarten [93].
4. Berechne die Energiedifferenz  $\Delta H = H[U', P'] - H[U, P]$ . Die neue Konfiguration wird mit der Wahrscheinlichkeit  $P_A(U', P'|U, P) = \min(1, e^{-\Delta H})$  akzeptiert.
5. Wiederhole die Schritte eins bis vier, bis das System weit genug entlang der Trajektorie fortgeschritten ist.
6. Führe einen NC-Schritt mit dem Polynom  $P_{n_2}^{(2)}$  wie beim TSMB-Algorithmus durch, siehe (3.20).
7. Speichere die neue Konfiguration  $U'$ , falls sie beim vorherigen Schritt akzeptiert wurde, ansonsten die alte Konfiguration  $U$ .
8. Gehe solange wieder zu Schritt eins, bis ausreichend Konfigurationen erzeugt wurden.

Des Weiteren werden *even/odd preconditioning* [96] zur Optimierung der Fermion-Matrix und *determinant breakup* [5, 53] zur Beschleunigung des Algorithmus verwendet.

#### 3.1.7. Korrekturfaktoren

Die in Abschnitt 3.1.5 vorgestellte polynomiale Approximation ist nur exakt, wenn die Ordnung des verwendeten Polynoms  $P_{n_2}^{(2)}$  gegen unendlich geht,  $n_2 \rightarrow \infty$ . Es reicht jedoch aus, wenn der Fehler der Approximation kleiner als der statistische Fehler ist, was schon mit endlichen Werten von  $n_2$  erreicht werden kann.

Die Größe des Fehlers der Approximation hängt jedoch empfindlich vom kleinsten Eigenwert  $\lambda_{\min}$  der Fermion-Matrix  $Q^\dagger Q$  ab. Ist  $\lambda_{\min} < \epsilon$ , also kleiner als die Untergrenze der Approximation, dann ist die Approximation nicht mehr ausreichend genau. Dies ist bei einer sehr geringen Anzahl an Konfigurationen der Fall, weshalb es sich nicht lohnt, die Ordnung  $n_2$  des Polynoms für die gesamte Simulation so stark zu erhöhen, dass  $\epsilon$  immer kleiner als der kleinste Eigenwert ist.

Stattdessen wird ein zusätzlicher *Korrektur-Schritt* [61] bei der Messung der Observablen eingeführt, bei dem ein Korrekturfaktor

$$R[U] = \langle \exp \{ \eta^\dagger [1 - P_{n_4}^{(4)}(\tilde{Q}^2)] \eta \} \rangle_\eta \quad (3.24)$$

für jede Konfiguration  $U$  berechnet wird. Dabei ist  $\eta$  ein Zufallsvektor mit gaußverteiletem Rauschen und für das hier eingeführte vierte Polynom  $P_{n_4}^{(4)}$  gilt

$$\lim_{n_4 \rightarrow \infty} P_{n_1}^{(1)}(x) P_{n_2}^{(2)}(x) P_{n_4}^{(4)}(x) = x^{-\frac{N_f}{2}} \quad , \quad x \in [\epsilon', \lambda] \quad (3.25)$$

Wählt man  $\epsilon' = 0$ , so liefert der Korrektur-Schritt ein quasi exaktes Ergebnis. Alternativ berechnet man die Eigenwerte, die kleiner als  $\epsilon' > 0$  sind, exakt und multipliziert mit  $\lambda^{\frac{N_f}{2}} P_{n_1}^{(1)}(\lambda) P_{n_2}^{(2)}(\lambda)$ .

Bei der Berechnung des Erwartungswert einer Observablen  $O$  wird dann jede Konfiguration mit dem Korrekturfaktor  $R[U]$  neu gewichtet<sup>3</sup>,

$$\langle O \rangle = \frac{\langle OR[U] \rangle_U}{\langle R[U] \rangle_U} \quad (3.26)$$

Für die meisten Konfigurationen ist  $R[U] \approx 1$ , nur in wenigen Fällen weicht der Korrekturfaktor deutlich von diesem Wert ab. Die Anzahl der „Ausreißer“ nimmt zu, wenn man bei kleineren Fermion-Massen simuliert, das heißt, wenn man einen Wert für  $\kappa$  nahe am kritischen Punkt  $\kappa_c$  wählt. [35]

### Vorzeichen des Pfaffian

Der Korrekturfaktor kann außerdem benutzt werden, um das bisher unbestimmte Vorzeichen des Pfaffian  $\text{Pf}(M)$  aus (2.65) zu berücksichtigen. Der Pfaffian hat dasselbe Vorzeichen wie das Produkt der doppelt entarteten reellen Eigenwerte, das

<sup>3</sup>Der Korrekturfaktor wird auch als *reweighting*-Faktor bezeichnet, da jede Konfiguration mit diesem Faktor neu gewichtet wird.

heißt, dass er negativ ist, wenn es eine ungerade Anzahl *negativer* doppelt entarteter reeller Eigenwerte gibt [63].

Zur Bestimmung des Vorzeichens ist es also notwendig, alle negativen reellen Eigenwerte zu bestimmen. Dazu wird ein auf dem Arnoldi-Verfahren [8] basierendes beschleunigtes Verfahren benutzt, bei dem die Fermion-Matrix durch geschickte polynomiale Transformationen so fokussiert wird, dass die relevanten reellen Eigenwerte schneller berechnet werden können [12, 106].

In der Regel ist das Vorzeichen positiv, negative Vorzeichen werden genau wie die „Ausreißer“ beim Korrekturfaktor häufiger, wenn bei kleinen Fermion-Massen simuliert wird.

## 3.2. Korrelatoren und Massenbestimmung

Ausgangspunkt der Massenbestimmung ist der Zwei-Punkt-Korrelator

$$C(x, y) = \langle O^\dagger(x)O(y) \rangle, \quad (3.27)$$

bei dem ein Teilchen am Raumzeit-Punkt  $y$  erzeugt wird und dann zum Raumzeit-Punkt  $x$  wandert. Der Operator  $O$  sollte das entsprechende Teilchen (beispielsweise den  $0^{++}$ -Glueball) dabei möglichst gut beschreiben. Nach (3.2) kann der Korrelator  $C(x, y)$  in einer Monte-Carlo-Simulation mittels

$$\langle O^\dagger(x)O(y) \rangle_U \approx \frac{1}{N} \sum_n \{O^\dagger(x)O(y)\}[U^{(n)}] \quad (3.28)$$

berechnet werden, wobei  $N$  die Anzahl der Konfiguration ist, auf denen die Größe  $O^\dagger(x)O(y)$  ausgewertet wird.

Die Massen erhält man aus dem zeitlichen Verhalten des Korrelators. Dazu betrachtet man die sogenannte Zeitscheiben-Korrelationsfunktion

$$C(\Delta t) = \langle S^\dagger(t + \Delta t)S(t) \rangle. \quad (3.29)$$

$S(t)$  erhält man durch Mittelung des Operators  $O(\mathbf{x}, t)$  über alle Raumpunkte  $\mathbf{x}$ ,

$$S(t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} O(\mathbf{x}, t). \quad (3.30)$$

Das Einschieben eines vollständigen Satzes von Eigenzuständen

$$\sum_k |k\rangle\langle k| = \mathbb{1} \quad (3.31)$$

in den Korrelator (3.29) liefert

$$C(\Delta t) = \sum_{k=0} |\langle k|S(t)|0\rangle|^2 e^{-m_k \Delta t} \pm |\langle 0|S^\dagger(t)|k\rangle|^2 e^{-m_k(T-\Delta t)} \quad (3.32)$$

$$= a_0^2 + \sum_{k=1} a_k^2 (e^{-m_k \Delta t} \pm e^{-m_k(T-\Delta t)}) \quad (3.33)$$

mit der zeitlichen Ausdehnung  $T$  des Gitters. Die Wahl des Vorzeichens zwischen den zwei Exponential-Termen ist abhängig von den verwendeten Randbedingungen. Für die Eichfelder werden periodische Randbedingungen und damit ein positives Vorzeichen benutzt, während für die Fermionfelder antiperiodische Randbedingungen und somit ein negatives Vorzeichen verwendet werden.

Die Größe  $a_0^2$  ist der sogenannte *Vakuumerwartungswert*. Bei Operatoren, die mit dem Vakuum überlappen, ist dieser Wert größer Null, kann aber durch die Transformation

$$S(t) \rightarrow \tilde{S}(t) = S(t) - \langle S(t) \rangle_U \quad (3.34)$$

subtrahiert werden. Dies wird bei allen betroffenen Operatoren vor der Berechnung des Korrelators (3.29) durchgeführt, daher wird im Weiteren auf die Tilde bei  $\tilde{S}(t)$  verzichtet.

Durch die periodischen Randbedingungen ist  $C(\Delta t)$  symmetrisch um  $T/2$ . Der Korrelator wird mittels

$$C(\Delta t) \rightarrow \tilde{C}(\Delta t) = \frac{1}{2} (C(\Delta t) \pm C(T - \Delta t)) \quad (3.35)$$

symmetrisiert, um das Signal-zu-Rausch-Verhältnis zu verbessern. Diese Symmetrisierung wird immer durchgeführt, weshalb im Folgenden auf die Tilde verzichtet wird.

Die Spektralzerlegung (3.33) des Korrelators enthält neben der gesuchten Masse  $m_1$  des niedrigsten gebundenen Zustands noch weitere Massen  $m_k > m_1$  von angeregten Zuständen. Für ausreichend große zeitliche Abstände  $\Delta t$  sollten die angeregten Zustände soweit abgeklungen sein, dass der Korrelator allein durch die

Masse  $m_1$  des Grundzustands dominiert wird. Diese lässt sich dann mit einem Fit an die Funktion

$$C(\Delta t) = a_1^2 (e^{-m_1 \Delta t} \pm e^{-m_1(T-\Delta t)}) \quad (3.36)$$

im Fit-Intervall  $\Delta t \in [t_1, t_2]$  bestimmen.

Die genaue Wahl des Fit-Intervalls erfordert ein paar Abwägungen. Einerseits muss  $t_1$  ausreichend groß gewählt werden, damit der Korrelator nicht mehr durch angeregte Zustände beeinflusst wird. Andererseits darf  $t_1$  aber auch nicht zu groß gewählt werden, weil der Korrelator für große Abstände  $\Delta t$  immer stärker verrauscht ist und der Fit dadurch einen zu großen Fehler bekommt. Für die Länge des Fit-Intervalls hat sich ein Wert von etwa 5 bewährt, siehe dazu auch den Abschnitt 5.1.3 über die Analysemethoden bei der Bestimmung der Glueball-Massen.

Eine gute Hilfe bei der Festlegung des Fit-Intervalls ist die *effektive Masse*

$$m_{\text{eff}}(\Delta t) = \ln \frac{C(\Delta t)}{C(\Delta t + 1)}. \quad (3.37)$$

Unter idealen Bedingungen zeigt ein Plot der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(\Delta t)$  als Funktion von  $\Delta t$  ein Plateau in dem Bereich, in dem die Masse  $m_1$  des Grundzustands dominiert. In diesem Bereich sollte dann der Fit (3.36) durchgeführt werden [77].

### 3.3. Berechnung des statistischen Fehlers

Alle gemessenen Größen werden zusammen mit ihrem statistischen Fehler angegeben, der dadurch zustande kommt, dass nur eine endliche Anzahl an Konfigurationen erzeugt werden kann. Zur Berechnung des statistischen Fehlers gibt es verschiedene Möglichkeiten, in dieser Arbeit wird in erster Linie die in Abschnitt 3.3.2 vorgestellte Jackknife-Analyse verwendet. Zur Kontrolle wird außerdem die Methode der Linearisierung verwendet (siehe Abschnitt 3.3.3), in der Regel stimmen die Ergebnisse dieser beiden Methoden aber überein.

Neben dem statistischen Fehler gibt es auch systematische Fehler. Dies sind beispielsweise Fehler, die mit der Approximation der Raumzeit durch ein endliches Gitter zusammenhängen, sogenannte Diskretisierungsfehler und Volumen-Effekte. Für eine detaillierte Untersuchung dieser Fehler durch die DESY-Münster-Kollaboration siehe [14] und die Diplomarbeit von Tobias Berheide [22].

Eine andere mögliche Quelle für systematische Fehler sind Fit-Fehler. Große Fit-Fehler zeigen an, dass die gewählte Fit-Funktion die zugrunde liegenden Daten nur schlecht approximiert. In den allermeisten Fällen lassen sich die Fit-Fehler durch eine bessere Wahl des Fit-Intervalls minimieren.

In der Regel sind die systematischen Fehler kleiner als die statistischen Fehler und werden daher nicht separat angegeben. Auf die systematischen Fehler bei der Bestimmung der Glueballmassen wird in Abschnitt 5.1.4 näher eingegangen.

### 3.3.1. Autokorrelation

In Abschnitt 3.1 wurde beschrieben, wie eine Markov-Kette von Konfigurationen erzeugt wird. Diese Prozedur hat zur Folge, dass direkt nacheinander erzeugte Konfigurationen und damit die auf ihnen gemessenen Größen nicht unabhängig voneinander sind. Für eine korrekte statistische Analyse dürfen aber nur Konfigurationen benutzt werden, die unabhängig voneinander sind, das heißt, die in der Markov-Kette weit genug voneinander entfernt sind. Um den notwendigen Abstand für unabhängige Konfigurationen zu bestimmen, wird die *Autokorrelationszeit* verwendet.<sup>4</sup>

Man betrachte  $N$  Konfigurationen, auf denen jeweils die primäre Größe  $X$  bestimmt wurde. Die Autokorrelations-Funktion ist definiert als

$$C_X(t) = C_X(X_i, X_{i+t}) = \langle X_i X_{i+t} \rangle - \langle X_i \rangle \langle X_{i+t} \rangle . \quad (3.38)$$

Hier ist  $t$  der zeitliche Abstand zwischen den Konfigurationen. Man beachte, dass für die erste Gleichung in (3.38) angenommen wurde, dass sich die Markov-Kette der  $N$  Konfigurationen bereits im Gleichgewicht befindet. Für ausreichend große Abstände  $t \gg 1$  zeigt die normalisierte Autokorrelations-Funktion

$$\Gamma_X(t) := \frac{C(t)}{C(0)} \sim \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (3.39)$$

typischerweise einen exponentiellen Abfall, anhand dessen die *exponentielle Auto-*

---

<sup>4</sup>In diesem Zusammenhang ist mit „Zeit“ die zur Benennung der Konfigurationen verwendete Computerzeit gemeint, der „zeitliche Abstand“ direkt nacheinander erzeugter Konfiguration ist beispielsweise  $t = 1$ .

*korrelationszeit*

$$\tau_{\text{exp}} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{-\log |C(t)|} \quad (3.40)$$

bestimmt werden kann. Von der Größe  $\tau_{\text{exp}}$  hängt ab, wie lange es bei einer Markov-Kette dauert, in einen Gleichgewichtszustand zu gelangen.

Für die Berechnung des statistischen Fehlers betrachtet man die *integrierte Autokorrelationszeit*

$$\tau_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \Gamma(t) = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{\infty} \Gamma(t) . \quad (3.41)$$

Bei korrelierten Konfigurationen ist die Varianz um den Faktor  $2\tau_{\text{int}}$  größer als bei unkorrelierten Konfigurationen. Das bedeutet, dass von den insgesamt  $N$  Konfigurationen nur  $N/(2\tau_{\text{int}})$  tatsächlich unabhängig voneinander sind. [47, 77]

### 3.3.2. Jackknifing

Die Standardmethode zur Bestimmung des statistischen Fehlers ist in dieser Arbeit die *Jackknife-Analyse*, auch *Jackknifing* genannt. Man betrachtet wieder  $N$  Konfigurationen, auf denen die Größe  $X$  bestimmt wurde. Die Idee ist nun, dass man  $N$  Teilmengen bildet, bei denen jeweils die  $n$ -te Konfiguration ausgelassen wird, und darauf den Mittelwert

$$X_J^n = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N X^{[i]} \quad \text{mit} \quad i \neq n \quad (3.42)$$

berechnet. Auf diese Weise untersucht man, welchen Einfluss das Weglassen jeweils einer einzelnen Konfiguration auf das Gesamtergebnis hat. Mit den Ergebnissen von (3.42) lassen sich dann der Jackknife-Mittelwert

$$\bar{X}_J = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_J^n \quad (3.43)$$

und dessen Varianz

$$\sigma^2(\bar{X}_J) = \frac{N-1}{N} \sum_{n=1}^N (X_J^n - \bar{X}_J)^2 \quad (3.44)$$

berechnen. [47]

Die Jackknife-Analyse liefert nur für unkorrelierte Konfigurationen ein richti-

ges Ergebnis, bei korrelierten Konfigurationen wird der tatsächliche Fehler unterschätzt. Um das Jackknifing trotzdem verwenden zu können, kombiniert man es mit dem sogenannten *Blocking* oder *Binning*. Dabei werden jeweils  $B$  zusammenhängende Konfigurationen zu einem Block zusammengefasst und die auf ihnen berechneten Werte  $X^{[i]}, \dots, X^{[i+B-1]}$  zu einem einzigen Wert  $X_B^{[i]}$  gemittelt. Die so gemittelten Werte  $X_B^{[i]}$  ( $i = 1, \dots, N_B$ ) werden dann für die Jackknife-Analyse (3.42–3.44) verwendet. [47]

Die Größe  $B$  der Blocks wird beginnend bei 1 immer weiter vergrößert, bis der statistische Fehler von unten ein Plateau erreicht.  $B$  sollte dabei aber nicht zu weit erhöht werden, da ansonsten die Anzahl der effektiv genutzten Konfigurationen  $N_B = N/B$  so weit abnimmt, dass keine ausreichend große Statistik mehr vorhanden ist. Bei den in dieser Arbeit untersuchten Konfigurationen reicht ein Wert von  $B = 10$  in den meisten Fällen aus, um den Fehler für unkorrelierte Daten zu erhalten.

### 3.3.3. Linearisierung

Die Methode der Linearisierung, auch  $\Gamma$ -Methode genannt, wurde erstmals von Ulli Wolff [105] vorgeschlagen. Sie dient der genaueren Abschätzung des statistischen Fehlers bei sekundären Observablen.

Sekundäre Größen sind beispielsweise Massen, da sie eine Funktion von primären Größen  $A_\alpha$  darstellen,

$$f(A) = f(A_\alpha) \quad \text{mit} \quad \alpha = 1, \dots, M . \quad (3.45)$$

$A_\alpha$  sind dabei die exakten Erwartungswerte, während die gemessenen Erwartungswerte durch Mittelung über den Ergebnissen von  $N$  Messungen entstehen,

$$\bar{a}_\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_\alpha^{(i)} . \quad (3.46)$$

Die Abweichung zwischen gemessenen und exakten Erwartungswerten sollte ausreichend klein sein,  $|\bar{a}_\alpha - A_\alpha| \ll 1$ . Ist dies der Fall, so kann man für die Abweichung der Größe  $f(A_\alpha)$  bei  $\bar{a}_\alpha$  vom wirklichen Ergebnis einen linearen Zusammenhang

annehmen,

$$f(\bar{a}) - f(A) \simeq \sum_{\alpha} (\bar{a}_{\alpha} - A_{\alpha}) \frac{\partial f(A)}{\partial A_{\alpha}} . \quad (3.47)$$

Der Gradient

$$\frac{\partial f(A)}{\partial A_{\alpha}} \simeq \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial \bar{a}_{\alpha}} \equiv \bar{f}_{\alpha} \quad (3.48)$$

wird numerisch bestimmt, indem  $\bar{a}_{\alpha}$  jeweils um den kleinen Wert  $h_{\alpha}$  vergrößert oder verringert wird,

$$\bar{f}_{\alpha} \approx \frac{1}{2h_{\alpha}} [f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{\alpha} + h_{\alpha}, \dots) - f(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{\alpha} - h_{\alpha}, \dots)] . \quad (3.49)$$

Als Wert für  $h_{\alpha}$  wird in der Regel der Fehler von  $\bar{a}_{\alpha}$  genommen, sofern der Fehler nicht größer als 10% ist. Andernfalls wird  $h_{\alpha}$  zusätzlich um einen Faktor 10 verringert.<sup>5</sup>

Somit ist die Abweichung von  $f(\bar{a})$  von  $f(A)$  gegeben durch

$$f(\bar{a}) - f(A) \simeq \sum_{\alpha} (\bar{a}_{\alpha} - A_{\alpha}) \bar{f}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \bar{a}_{\alpha} \bar{f}_{\alpha} - \sum_{\alpha} A_{\alpha} \bar{f}_{\alpha} = \bar{a}_f - A_f , \quad (3.50)$$

und für die Varianz von  $f(A)$  gilt

$$\sigma_f^2 = \langle (\bar{a}_f - A_f)^2 \rangle , \quad (3.51)$$

der Fehler der sekundären Größe  $f(A)$  kann also auf die Fehler der primären Größen zurückgeführt werden. [35, 105]

### 3.4. Limes verschwindender Gluino-Masse

Von besonderem Interesse ist das Verhalten am kritischen Punkt  $\kappa_c$ , an dem die renormierte Gluino-Masse  $m_g$  verschwindet. Um diesen Punkt zu finden, führt man – bei fester Eichkopplung  $\beta$  – Simulationen mit verschiedenen Hoppingparametern  $\kappa < \kappa_c$  durch und nähert sich dabei dem kritischen Punkt  $\kappa_c$  schrittweise an.

---

<sup>5</sup>In Kombination mit der in Abschnitt 3.6 vorgestellten Variationsmethode muss ein sehr kleiner Wert für  $h_{\alpha}$  gewählt werden, damit die Korrelationsmatrix stets positiv definit bleibt. In der Regel wird dort daher ein Wert von  $h_{\alpha} = 1 \times 10^{-6} \times \bar{a}_{\alpha}$  verwendet, der unabhängig vom Fehler von  $\bar{a}_{\alpha}$  ist.

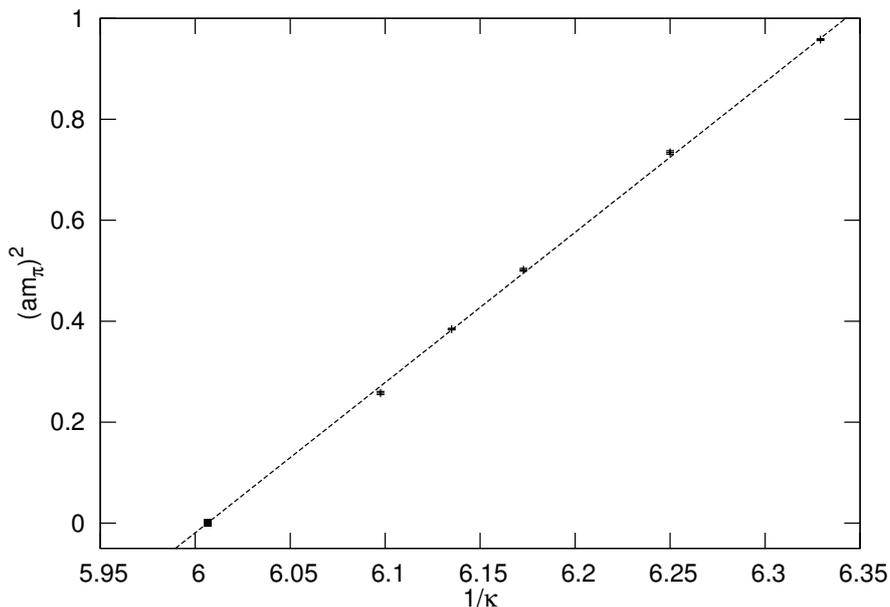


Abbildung 3.1.: Quadrat der Pionmasse als Funktion des inversen Hoppingparameters  $1/\kappa$ . Das Quadrat ■ markiert den Punkt  $\kappa_c^{OZI} = 0.16648(7)$  verschwindender Gluino-Masse. Gittergröße  $16^3 \times 32$ ,  $\beta = 1.50$ , 1 Level Stout-Smearing, jeweils etwa 2000 Konfigurationen pro Punkt.

Eine direkte Bestimmung der Gluino-Masse ist über die supersymmetrischen Ward-Identitäten (WIs) möglich [41]. Alternativ kann der Punkt  $\kappa_c$  indirekt mit Hilfe der adjungierten Pionmasse bestimmt werden, deren Quadrat  $(am_\pi)^2$  linear mit der Gluino-Masse verschwindet [36]. Wie in [36] gezeigt wurde, stimmen die mit beiden Methoden bestimmten kritischen Punkte  $\kappa_c^{WI}$  beziehungsweise  $\kappa_c^{OZI}$  innerhalb des Fehlers überein.

Abbildung 3.1 zeigt das Quadrat der Pionmasse  $(am_\pi)^2$  als Funktion von  $1/\kappa$  bei  $\beta = 1.50$ . Dazu wurden für fünf verschiedene Werte von  $\kappa$  (0.158, 0.160, 0.162, 0.163, 0.164) jeweils etwa 2000 Konfigurationen erzeugt und dann die Pionmasse bestimmt. Man erkennt deutlich das erwartete lineare Verhalten, mit dem der kritische Punkt  $\kappa_c^{OZI} = 0.16648(7)$  bestimmt werden kann. Der angegebene Fehler ergibt sich aus der Unsicherheit des linearen Fits.

## 3.5. Smearing Techniken

Um gute Ergebnisse bei der Bestimmung von Massen zu erhalten, ist es wichtig, dass die verwendeten Operatoren einen möglichst großen Überlapp mit dem Grundzustand des zu untersuchenden Teilchens haben. Eine gebräuchliche Technik zur Vergrößerung des Überlapps mit dem Grundzustand ist das sogenannte *Smearing* (dt. „Schmieren“), bei dem einzelne Links durch eine Summe kurzer Pfade ersetzt werden, deren Endpunkte die beiden Enden des ursprünglichen Links sind.

Die DESY-Münster-Kollaboration verwendet APE-Smearing [4] zur Verbesserung der rein gluonischen Operatoren und Jacobi-Smearing [7] bei Operatoren mit fermionischem Anteil. In dieser Arbeit wird außerdem HYP-Smearing [54] als mögliche Alternative zum APE-Smearing untersucht.

### 3.5.1. APE-Smearing

Beim APE-Smearing [4] wird jeder räumliche Link  $U_\mu(x)$  durch sich selbst plus die Summer der vier ihn umgebenden räumlichen Klammern ersetzt,

$$U_\mu(x) \rightarrow U'_\mu(x) = U_\mu(x) + \epsilon_{\text{APE}} \sum_{\nu=\pm 1, \nu \neq \mu}^{\pm 3} U_\nu(x) U_\mu(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x + \hat{\mu}) . \quad (3.52)$$

Dies ist grafisch in Abbildung 3.2 dargestellt. Wenn nicht anders angegeben, wird dabei der Parameter  $\epsilon_{\text{APE}} = 0.5$  verwendet. Die so erzeugte Link-Variable  $U'_\mu(x)$  ist in der Regel kein Element der Eichgruppe mehr, so dass anschließend eine Rückprojektion in die Eichgruppe durchgeführt werden muss. Im Fall der  $SU(2)$  ist diese durch

$$U_\mu^s(x) = \mathcal{P}_{SU(2)}[U'_\mu(x)] = \frac{U'_\mu(x)}{\sqrt{\frac{1}{2} \text{Sp} [U'_\mu{}^\dagger(x) U'_\mu(x)]}} \quad (3.53)$$

gegeben.

Das APE-Smearing wird  $N_{\text{APE}}$  mal wiederholt. Dabei ist wegen der periodischen Randbedingungen darauf zu achten, dass der effektive Smearing-Radius kleiner als die räumliche Ausdehnung  $L$  des Gitters bleibt. Für den effektiven Smearing-Radius

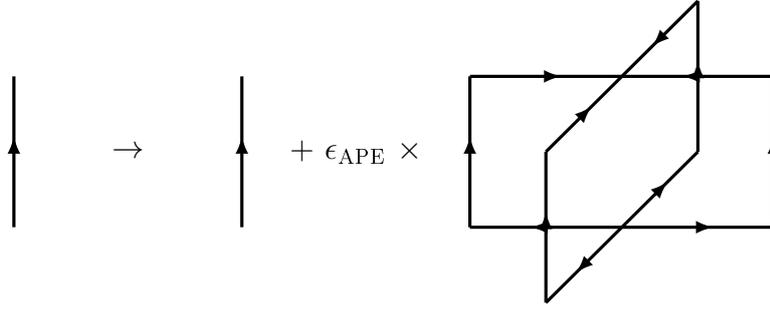


Abbildung 3.2.: APE-Smearing

gibt es unterschiedliche Definitionen. Nach Bernard und DeGrand [23] beträgt er

$$R_s = \sqrt{\frac{N_{\text{APE}} \epsilon_{\text{APE}}}{3}}, \quad (3.54)$$

während Demmouche [35] die etwas konservativere Definition

$$R_s = N_{\text{APE}} \epsilon_{\text{APE}} \quad (3.55)$$

nennt. In der Regel wird mindestens  $N_{\text{APE}} = 4$  und maximal  $N_{\text{APE}} = 2L$  verwendet. Größere Werte sind möglich, bringen jedoch kaum noch Vorteile.

### 3.5.2. HYP-Smearing

Das HYP-Smearing [54] ist dem APE-Smearing ähnlich, im Gegensatz zu letzterem werden aber alle Links im (Hyper-)Kubus verwendet, der den ursprünglichen Link  $U_\mu(x)$  umgibt. Die Abbildung 3.3 zeigt die jeweils berücksichtigten Links beim APE-Smearing und beim HYP-Smearing in drei Dimensionen.

Beim räumlichen HYP-Smearing wird der geschmierte Link  $U_\mu^s(x)$  in zwei Stufen berechnet. Die letzte Stufe entspricht dem APE-Smearing, wobei jedoch nicht die normalen äußeren Links benutzt werden, sondern ebenfalls geschmierte Link-Variablen  $V_{\mu;\nu}(x)$ :

$$U_\mu^s(x) = \mathcal{P}_{\text{SU}(2)} \left[ U_\mu(x) + \epsilon_{\text{HYP},1} \sum_{\nu=\pm 1, \nu \neq \mu}^{\pm 3} V_{\nu;\mu}(x) V_{\mu;\nu}(x + \hat{\nu}) V_{\nu;\mu}^\dagger(x + \hat{\mu}) \right]. \quad (3.56)$$

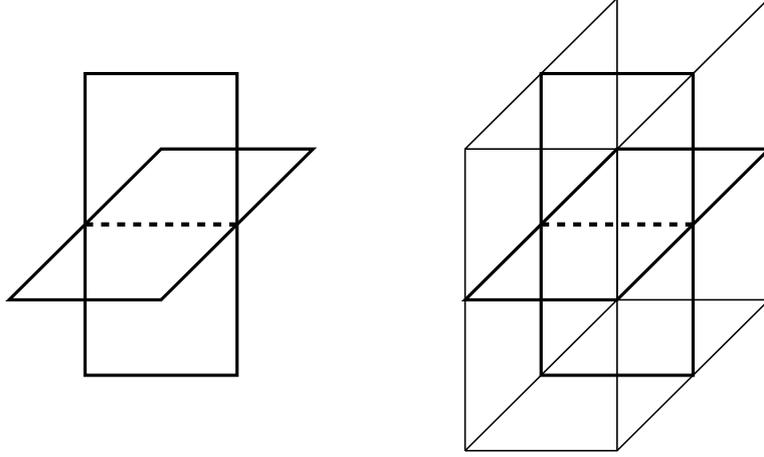


Abbildung 3.3.: Vergleich von APE-Smearing (links) und HYP-Smearing (rechts) in drei Dimensionen. Der gestrichelte Link in der Mitte ist jeweils derjenige, der durch sich selbst plus eine Summe der umherlaufenden Links ersetzt wird.

Die geschmierten Links  $V_{\mu,\nu}(x)$  werden in der ersten Stufe durch sich selbst plus die Summe der zwei benachbarten, zum Rand des Kubus gehörenden Klammern ersetzt,

$$V_{\mu,\nu}(x) = \mathcal{P}_{\text{SU}(2)} \left[ U_{\mu}(x) + \epsilon_{\text{HYP},2} \sum_{\pm\rho \neq 0,\mu,\nu} U_{\rho}(x) U_{\mu}(x + \hat{\rho}) U_{\rho}^{\dagger}(x + \hat{\mu}) \right], \quad (3.57)$$

mit der zur  $\mu$ - $\nu$ -Ebene senkrechten Richtung  $\rho$ .

In der Regel werden die Parameter  $\epsilon_{\text{HYP},1} = 0.6$  und  $\epsilon_{\text{HYP},2} = 0.3$  verwendet und das HYP-Smearing wird  $N_{\text{HYP}}$ -mal wiederholt. Der effektive Smearing-Radius ist durch die zusätzlich verwendeten Links etwas größer als beim APE-Smearing, so dass weniger Smearing-Level erforderlich sind, um eine vergleichbare Verbesserung des Ergebnisses zu erreichen.

### 3.6. Variationsmethoden

Weitere Möglichkeiten zur besseren Bestimmung der Massen sind *Variationsmethoden* [24, 70]. Die Grundidee dahinter ist, statt nur eines Operators mehrere verschiedene Operatoren zu verwenden, die alle dieselben Quantenzahlen haben und

damit mehr oder weniger gut mit dem Grundzustand des gesuchten Teilchens übereinstimmen. Von diesen  $N_{\text{OP}}$  Operatoren wird die optimale Kombination gesucht, die am besten mit dem gesuchten Zustand überlappt. Außerdem ist es mit der Variationsmethode möglich, neben dem Grundzustand auch angeregte Zustände zu untersuchen.

Die einfachste Möglichkeit, mehrere Operatoren für ein und denselben Zustand zu erzeugen, ist es, unterschiedlich viele Smearing-Level zu verwenden. Dieses Verfahren wird als *variational smearing* bezeichnet und man verwendet beispielsweise APE-Smearing mit  $N_{\text{APE}} = 4, 8, 12, 16$ .

Mit den verschiedenen Operatoren bildet man die Korrelationsmatrix

$$C_{ij}(t) = \langle O_i(t)O_j(0) \rangle , \quad (3.58)$$

die im Hilbert-Raum die Form

$$C_{ij}(t) = \sum_k \langle 0|O_i(t)|k \rangle \langle k|O_j^\dagger(0)|0 \rangle e^{-m_k t} \quad (3.59)$$

annimmt. Die Eigenwerte  $\lambda^k(t)$  der Korrelationsmatrix  $C(t)$  werden so sortiert, dass  $\lambda^1 \geq \lambda^2 \geq \dots \geq \lambda^{N_{\text{OP}}}$  ist. Lüscher und Wolff [70] haben gezeigt, dass sich die Eigenwerte  $\lambda^k(t)$  verhalten wie

$$\lambda^k(t) \propto e^{-m_k t} (1 + \mathcal{O}(e^{-\Delta m_k t})) . \quad (3.60)$$

$m_k$  ist die Masse des  $k$ -ten Zustandes und  $\Delta m_k$  ist die Massendifferenz zu den anderen Zuständen.

Bessere Ergebnisse als bei der direkten Bestimmung der Eigenwerte der Korrelationsmatrix  $C(t)$  erhält man, wenn man das *generalisierte Eigenwertproblem*

$$C(t)\mathbf{v}^k = \lambda^k(t)C(t_0)\mathbf{v}^k \quad (3.61)$$

löst.  $t_0$  sollte theoretisch so groß wie möglich gewählt werden, in der Praxis ist meistens aber nur  $t_0 = 0$  möglich.

Für das genaue Vorgehen gibt es dabei zwei Möglichkeiten. Bei der *t-Eigenvektormethode* wird das generalisierte Eigenwertproblem (3.61) auf jeder Zeitscheibe  $t$

gelöst und die effektive Masse ergibt sich mittels

$$m^k(t) = \ln \left[ \frac{\lambda^k(t)}{\lambda^k(t+1)} \right]. \quad (3.62)$$

Außerdem können die Eigenwerte  $\lambda^k(t)$  genau wie Korrelatoren für Fits nach (3.36) benutzt werden.

Eine andere Methode ist die sogenannte *fixed-vector-Methode*. Dabei wird das generalisierte Eigenwertproblem nur einmal für feste Zeitscheiben  $t_0$  und  $t = t_1 > t_0$  gelöst, wobei in der Regel  $t_1 = 1$  verwendet wird. Die effektive Masse bei dieser Methode ist

$$m^k(t) = \ln \left[ \frac{\sum_{ij} \mathbf{v}_i^k \mathbf{v}_j^k C_{ij}(t)}{\sum_{ij} \mathbf{v}_i^k \mathbf{v}_j^k C_{ij}(t+1)} \right]. \quad (3.63)$$

Für Fits nach (3.36) wird dann die Größe  $\sum_{ij} \mathbf{v}_i^k \mathbf{v}_j^k C_{ij}(t)$  als Korrelator verwendet.

## 4. Quarkpotential

Neben den Massen der verschiedenen Teilchen wird das *statische Quarkpotential*  $V(r)$  bestimmt. Dieses Potential beschreibt die Energie eines Quark-Antiquark-Paares im Abstand  $r$ . Analog zur QCD erwartet man bei der Supersymmetrie *Confinement*, was sich in einem linearen Anstieg des Quark-Antiquark Potentials  $V(r)$  für große Abstände  $r$  äußern sollte. Die Bestimmung des Quarkpotentials ist somit ein Test auf Confinement.

Daneben wird das Quarkpotential zur Festlegung der physikalischen Skala benutzt. Bisher wurden alle Größen, Abstände wie Massen, in Einheiten des dimensionslosen Gitterabstandes  $a$  angegeben. Um den Gitterabstand und damit auch die Teilchenmassen in physikalischen Einheiten angeben zu können, verwendet man die sogenannte *Sommer-Skala* [95]. Die Sommer-Skala wird über die Kraft  $F(r) = dV(r)/dr$  zwischen zwei Quarks definiert. Der Vergleich mit experimentellen Daten von  $\bar{b}b$  und  $\bar{c}c$  Paaren liefert

$$F(r_0)r_0^2 = 1.65 \quad \text{bei} \quad r_0 \simeq 0.5 \text{ fm} . \quad (4.1)$$

In diesem Kapitel sollen verschiedene Methoden zur Bestimmung des Quarkpotentials  $V(r)$  vorgestellt werden, insbesondere die von der DESY-Münster-Kollaboration hauptsächlich verwendete Zwei-Fit-Prozedur [29]. Der Schwerpunkt wird dabei auf die Beschreibung der technischen Details gelegt.

### 4.1. Berechnung des Quarkpotentials

Ausgangspunkt der Berechnung des Quarkpotentials auf dem Gitter ist die in Abschnitt 2.7.2 vorgestellte planare *Wilson-Schleife*  $W(r, t)$ , wobei  $r$  und  $t$  die Ausdehnung der Wilson-Schleife in Raum- beziehungsweise Zeitrichtung beschreiben.

Die Berechnung der Wilson-Schleifen ist relativ aufwendig, da über alle  $L^3 \times T$

Gitterpunkte als mögliche Ausgangspunkte der Schleife gemittelt wird. Außerdem wird über die drei verschiedenen Ebenen gemittelt, in denen die planaren Wilson-Schleifen liegen können ( $x$ - $t$ -Ebene,  $y$ - $t$ -Ebene,  $z$ - $t$ -Ebene). Die Wilson-Schleifen werden für verschiedene Ausdehnungen berechnet, beginnend bei  $W(1, 1)$  bis maximal  $W(L/2, T/2)$ , also jeweils bis zur halben Ausdehnung des Gitters. Größere Wilson-Schleifen werden nicht berechnet, da die Berechnung zum einen mit zunehmender Ausdehnung immer länger dauert und da zum anderen das Signal-zu-Rausch-Verhältnis zunehmend schlechter wird. Bei sehr großen Gittern können kleinere maximale Ausdehnungen für  $W(r, t)$  ausreichen, dies sollte jedoch im Einzelfall geprüft werden.<sup>1</sup>

Zur Verbesserung der Daten wird das in Abschnitt 3.5.1 vorgestellte APE-Smearing mit  $N_{\text{APE}} = 4$  und  $\epsilon_{\text{APE}} = 0.5$  verwendet. Die Parameter sind so gewählt, dass eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit den Ergebnissen aus früheren Veröffentlichungen gewährleistet ist. An dieser Stelle sei auf die Diplomarbeit von Rüdiger Haake [52] verwiesen, in der die Auswirkungen von APE-Smearing und HYP-Smearing auf das Quarkpotential und den Sommer-Parameter detailliert untersucht wurden. Des Weiteren wurde dort untersucht, inwiefern Variationsmethoden (siehe Abschnitt 3.6) zur Verbesserung der Ergebnisse beitragen können.

### 4.1.1. Zwei-Fit-Prozedur

Das statische Quarkpotential  $V(r)$  kann aus dem Verhalten der Wilson-Schleifen bei großen zeitlichen Abständen  $t$  bestimmt werden [47],

$$\langle W(r, t) \rangle \propto e^{-tV(r)} (1 + \mathcal{O}(e^{-t\Delta E})) . \quad (4.2)$$

Mit der Definition [9]

$$V(r, t) = \ln \frac{\langle W(r, t) \rangle}{\langle W(r, t+1) \rangle} \quad (4.3)$$

erhält man zunächst das volle Quarkpotential  $V(r, t)$ .<sup>2</sup> Man beachte dabei, dass die Größe  $\langle W(r, t) \rangle$  für große  $r$  und  $t$  aufgrund des statistischen Fehlers negativ werden kann. Bei der Berechnung mit dem Computer wird  $V(r, t)$  dann der Wert

---

<sup>1</sup>Bei den Simulationen auf  $32^3 \times 64$  Gittern reicht es beispielsweise aus, nur die Wilson-Schleifen bis maximal  $W(L/2 = 16, T/4 = 16)$  zu berechnen.

<sup>2</sup>Eine alternative Definition ist  $V(r, t) = -\frac{1}{t} \ln W(r, t)$  [35].

NaN<sup>3</sup> zugeordnet. In diesem Fall ist darauf zu achten, das Fit-Intervall für den nächsten Schritt entsprechend zu verkleinern.

Das statische Quarkpotential  $V(r)$  kann aus dem Limes  $t \rightarrow \infty$  von  $V(r, t)$  gewonnen werden. Dies geschieht über einen Fit an die Funktion

$$V(r, t) = V(r) + c_1 e^{-c_2 t} , \quad (4.4)$$

separat durchgeführt für jedes  $r \in [1, r_{\max}]$ . Als Startwerte für die Fit-Prozedur werden  $V(r) = 0$ ,  $c_1 = 1$  und  $c_2 = 1$  gewählt. Die von der Fit-Routine verwendeten Fehlerwerte von  $V(r, t)$  werden vorher mittels Jackknifing bestimmt.

Das statische Quarkpotential  $V(r)$  setzt sich aus einem Coulomb-Anteil und einem Anteil für die String-Spannung  $\sigma$  zusammen [47],

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r . \quad (4.5)$$

Startwerte für den Fit sind  $\sigma = 1$ ,  $A = 0$  und  $B = 0$ . Als Fehlerwerte für  $V(r)$  werden die beim Fit an (4.4) ermittelten Fehler verwendet. Abbildung 4.1 zeigt ein Beispiel für das Quarkpotential  $V(r)$ . Man erkennt deutlich das  $1/r$ -Verhalten für kleine  $r$  und den linearen Anstieg des Quarkpotentials für große  $r$ .

Der Fit an  $V(r)$  wird über das gesamte vorhandene Fit-Intervall  $r \in [1, r_{\max}]$  durchgeführt. Dabei ist zu beachten, dass der Fehler von  $V(r)$  mit zunehmendem  $r$  stark ansteigt. Der Fehler von  $V(r = 1)$  ist 2 bis 3 Größenordnungen kleiner als der Fehler von  $V(r_{\max})$ , entsprechend stärker werden die ersten Punkte des Intervalls von der Fit-Routine berücksichtigt. Daher sollte man nach dem Fit unbedingt den graphischen Verlauf der gefitteten Funktion überprüfen. Unter bestimmten Umständen kann es vorkommen, dass der hintere Teil des Potentials  $V(r)$  nicht richtig erfasst wird und die Fit-Funktion über oder unter dem tatsächlichen Verlauf des Potentials liegt. Dies kann selbst dann passieren, wenn die angegebenen Fehler für die Fit-Variablen und  $\chi^2$  klein sind.

Bei allen in dieser Arbeit durchgeführten Fits wird das von der GNU Scientific Library [49] in der Bibliothek `gsl_multifit_nlin.h` bereitgestellte *Nonlinear Least-Squares Fitting* verwendet, bei dem  $\chi^2$  minimiert wird.

---

<sup>3</sup>NaN steht für „Not a Number“ und ist ein numerischer Datentyp-Wert für ungültige Werte [104].

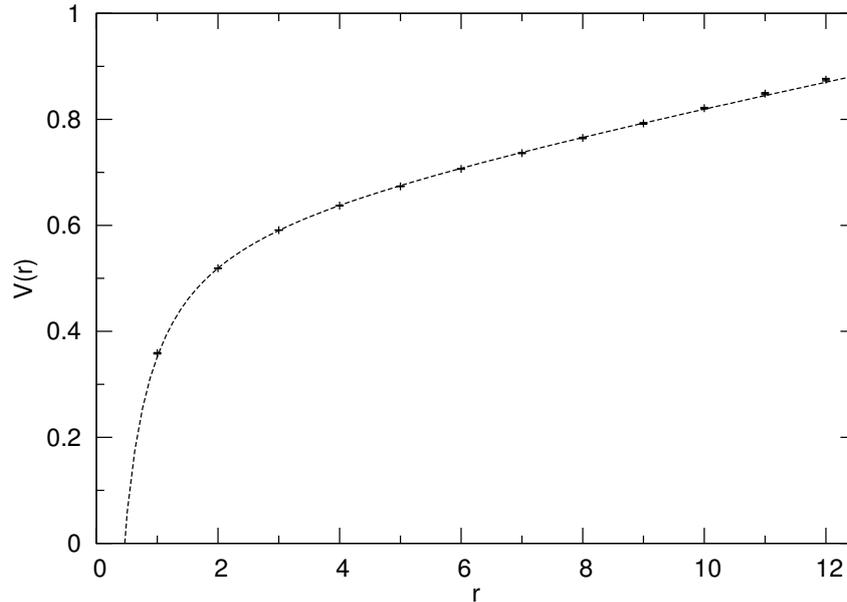


Abbildung 4.1.: Quarkpotential  $V(r)$ . Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1360$ , 10023 Konfigurationen.

#### 4.1.2. Sommer-Parameter

Der Sommer-Parameter  $r_0$  wird aus den Fit-Ergebnissen von (4.5) bestimmt [47],

$$\frac{r_0}{a} = \sqrt{\frac{1.65 + B}{\sigma}}. \quad (4.6)$$

Der statistische Fehler von  $r_0$  wird mittels Jackknifing und mittels Linearisierung bestimmt. In den meisten Fällen sind beide Fehlerwerte etwa gleich groß, bei Abweichungen wird der größere von beiden verwendet.

Außerdem wird mittels Fehlerfortpflanzung aus den Fit-Fehlern von  $B$  und  $\sigma$  ein weiterer Fehlerwert für (4.6) bestimmt. Dieser Fehlerwert sollte kleiner als die statistischen Fehler sein, andernfalls deutet es auf Probleme bei der Fit-Prozedur hin.

#### 4.1.3. Optimierungen der Fits

Manchmal kommt es vor, dass die Fits an (4.4) und (4.5) das Quarkpotential nicht richtig erfassen. Dies geschieht besonders häufig dann, wenn nur eine geringe Statis-

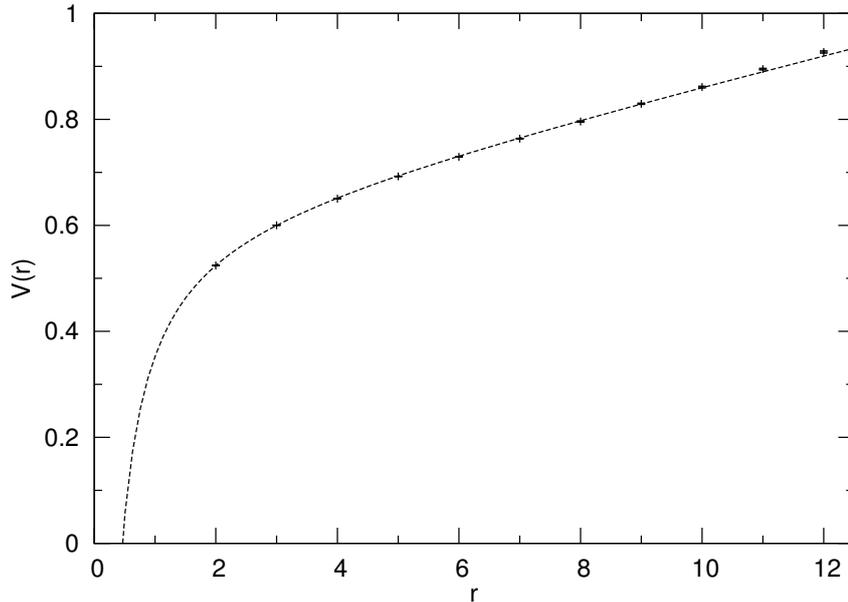


Abbildung 4.2.: Quarkpotential  $V(r)$  mit fehlendem Datenpunkt bei  $r = 1$ . Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1350$ , 10056 Konfigurationen.

tik vorhanden ist, kann aber auch bei einer großen Anzahl von Konfigurationen auftreten. Die Abbildung 4.2 zeigt ein Beispiel, in dem der Punkt  $V(r = 1)$  scheinbar fehlt. Durch einen fehlerhaften Fit an (4.4) hat er den Wert  $V(r = 1) = -46(49)$ , woraus  $r_0 = 7.036(24)$  resultiert. Mit Hilfe geeigneter Optimierungen erhält man hingegen  $V(r = 1) = 0.36102(4)$  und  $r_0 = 6.909(17)$ .<sup>4</sup>

In diesem Abschnitt werden daher die verschiedenen Möglichkeiten zur Optimierung der Fits vorgestellt und miteinander verglichen.

### Überprüfung von $V(r, t = 1)$

In manchen Fällen ist  $V(r, t = 1) < V(r, t = 2)$ , wodurch der Fit an (4.4) statt eines exponentiellen Abfalls fälschlicherweise einen exponentiellen Anstieg vermutet. Der Fit an  $V(r, t) = V(r) + c_1 e^{-c_2 t}$  ist dann nicht mehr stabil und liefert ein falsches Ergebnis für  $V(r)$ .

Die Instabilität des Fits äußert sich darin, dass der statistische Fehler von  $V(r)$  sehr groß wird, meistens sogar größer als der Betrag von  $V(r)$ . Dieser Effekt hat Vor-

<sup>4</sup>Ein älteres Beispiel findet sich in der Arbeit von Demmouche [35], Abbildung 4.8, Seite 148. Dort fehlt der Punkte  $V(r = 7) \approx -99(400000)$ .

und Nachteile. Der Vorteil des großen Fehlers liegt darin, dass der anschließende Fit an (4.5) und somit auch der Ergebnis für  $r_0$  nur wenig durch den fehlerhaften Punkt beeinflusst werden. Der Nachteil ist, dass ein einzelner falsch bestimmter Punkt im statischen Quarkpotential  $V(r)$  leicht unbemerkt bleibt. Es reicht daher nicht, nur das Ergebnis für  $r_0$  auf Plausibilität zu überprüfen, auch alle Punkte von  $V(r)$  müssen untersucht werden.

Die Optimierung der Fits ist in diesen Fällen sehr einfach und wird dadurch erreicht, dass der Punkt  $V(r, t = 1)$  aus dem Fit-Intervall für den exponentiellen Abfall von  $V(r, t)$  (4.4) entfernt wird.

### Minimierung von $\chi^2$

Eine aufwendigere Methode zur Optimierung der exponentiellen Fits an (4.4) ist die Minimierung von  $\chi^2$  durch schrittweise Verkleinerung des Fit-Intervalls. Man beginnt mit einem Fit an das volle Intervall  $[1 : t_{\max}]$ <sup>5</sup> und bestimmt dabei die Größe  $\chi^2/N_{\text{DF}}$ , wobei  $N_{\text{DF}}$  die Anzahl der Freiheitsgrade<sup>6</sup> ist. Anschließend verkleinert man das Fit-Intervall um eins auf  $[2 : t_{\max}]$  und prüft, ob die Größe  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  dadurch abnimmt. Die Verkleinerung des Fit-Intervalls setzt man so lange fort, bis  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  kleiner als zwei ist<sup>7</sup>, oder bis eine vorgegebene Grenze  $[t_{\max\text{start}} : t_{\max}]$  erreicht wurde. Als Ergebnis für  $V(r)$  nimmt man schließlich den Fit mit dem kleinsten Wert für  $\chi^2/N_{\text{DF}}$ .

Die Begrenzung  $t_{\max\text{start}}$  für die Verkleinerung des Fit-Intervalls ist notwendig, da unter ungünstigen Umständen sonst ein sehr kleines Fit-Intervall gewählt werden kann. Die ersten Punkte im vollen Intervall  $[1 : t_{\max}]$  sind jedoch auch stets diejenigen mit dem kleinsten statistischen Fehler und entsprechend mit dem größten Informationsgehalt, man sollte also nicht zu viele von ihnen vernachlässigen. Es hat sich daher bewährt, eine Begrenzung von  $t_{\max\text{start}} = 4$  vorzugeben. In den meisten Fällen ist sogar schon bei einem der ersten beiden Fit-Intervalle das Ziel  $\chi^2/N_{\text{DF}} < 2$  erreicht.

Alternativ ist auch eine Verkleinerung des Fit-Intervalls auf der anderen Seite denkbar, also von  $[1 : t_{\max}]$  zu  $[1 : t_{\max} - 1]$ . Der Effekt ist jedoch sehr gering, da

---

<sup>5</sup> $t_{\max}$  wird dabei so groß wie möglich gewählt, ohne dass im Intervall  $[1 : t_{\max}]$  undefinierte Werte  $V(r, t) = \text{NaN}$  liegen.

<sup>6</sup>Englisch „Degree of Freedom“.

<sup>7</sup>Üblicherweise spricht man von einem „guten“ Fit, wenn  $0.1 < \chi^2/N_{\text{DF}} < 2.0$  ist.

die hinteren Datenpunkte des Intervalls ohnehin einen großen statistischen Fehler haben und den Fit somit kaum beeinflussen. Aus diesem Grund wird das hintere Ende des Fit-Intervalls nicht verändert.

In der Regel deckt diese Optimierung den oben beschriebenen Fall  $V(r, t = 1) < V(r, t = 2)$  mit ab, da die Größe  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  dann für das volle Fit-Intervall  $[1 : t_{\text{max}}]$  deutlich zu groß ist.

### Optimierte Startwerte

Eine sehr einfache Art der Optimierung ist die Wahl besserer Startwerte für die Fit-Parameter der Fits an (4.4) und (4.5). Für den exponentiellen Fit an

$$V(r, t) = V(r) + c_1 e^{-c_2 t}$$

kann man versuchen,  $V(r)$  durch das Verhalten bei großem – aber auch nicht zu großem – zeitlichen Abstand von  $V(r, t)$  abzuschätzen:

- $V(r) = V(r, t_{\text{max}}/2 - 1)$  falls  $0 < V(r) < 2$ , sonst  $V(r) = 0$  ,
- $c_1 = 1$  ,
- $c_2 = 1$  .

Die Startwerte von  $c_1$  und  $c_2$  werden nicht weiter optimiert. Man kann zwar versuchen, auch sie anhand der Ausgangsdaten zu berechnen (siehe z.B. [35]), oft fluktuieren die Daten für  $V(r, t)$  jedoch zu stark, um sinnvolle Ergebnisse zu liefern.

Beim Fit an das Quarkpotential

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r$$

lassen sich alle drei Parameter gut aus den Ausgangsdaten für  $V(r)$  bestimmen, wenn man einen linearen Anstieg des Potentials für große Abstände  $r$  annimmt:

- $\sigma = V(r_{\text{max}} - 1) - V(r_{\text{max}} - 2)$  , falls  $0 < \sigma < 1$ , sonst  $\sigma = 1$  ,
- $A = V(r_{\text{max}}) - \sigma * r_{\text{max}}$  , falls  $0 < A < 1$ , sonst  $A = 0$  ,
- $B = (V(r_{\text{min}}) - A - \sigma * r_{\text{min}}) * r_{\text{min}}$  , falls  $-1 < B < 0$ , sonst  $B = 0$  .

Wichtig ist dabei nur darauf zu achten, dass die verwendeten Punkte  $V(r)$  im ersten Schritt vernünftig bestimmt wurden. Zur Sicherheit wird daher jeweils überprüft, ob die Werte in einem sinnvollen Bereich liegen.

### Vergleich der Optimierungen

Die verschiedenen Optimierungen sollen nun am Beispiel des in Abbildung 4.2 gezeigten Quarkpotentials miteinander verglichen werden. In Tabelle 4.1 werden dazu die Ergebnisse für einige Werte von  $V(r)$  und der Sommer-Parameter  $r_0$  für die verschiedenen Verfahren aufgelistet. Die berücksichtigten Verfahren sind:

- das Standardverfahren (keine Optimierung),
- die Überprüfung von  $V(r, t = 1)$ ,
- die Minimierung von  $\chi^2$ ,
- die Optimierung der Startwerte für den exponentiellen Fit an (4.4).

Für die Optimierung der Startwerte für den Fit an das Quarkpotential (4.5) werden keine Ergebnisse aufgelistet, da es sich gezeigt hat, dass die Wahl dieser Startwerte keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Der verwendete Fit-Algorithmus ist so gut, dass dort immer dasselbe Minimum für die verschiedenen Parameter gefunden wird.

Wie bereits zuvor erwähnt, besteht das Hauptproblem in dem gewählten Beispiel darin, dass der Punkt  $V(r = 1) = -46.9(49.7)$  ohne Optimierungen nicht richtig bestimmt wird. Sowohl die Überprüfung von  $V(r, t = 1)$  als auch die Minimierung von  $\chi^2$  beheben dieses Problem und liefern beide dasselbe Ergebnis  $V(r = 1) = 0.36102(4)$ . Die Wahl eines besseren Startparameters für den Fit an  $V(r, t) = V(r) + c_1 e^{-c_2 t}$  hilft hingegen nicht weiter, obwohl der gewählte Startwert  $V(r) = 0.36$  sehr nahe am richtigen Ergebnis liegt.

Ein Nachteil der Minimierung von  $\chi^2$  zeigt sich beim Vergleich der Ergebnisse für  $V(r = 4)$ . Dort liefert diese Optimierung als einzige ein abweichendes Ergebnis mit einem um den Faktor 100 größeren statistischen Fehler. Dies zeigt, dass die Minimierung von  $\chi^2$  nicht immer stabil ist und auf verschiedenen Jackknife-Bins unterschiedliche Fit-Intervalle ausgewählt werden. Als Folge davon ergeben sich auch beim Ergebnis für  $r_0$  Abweichungen und der statistische Fehler von  $r_0$  verdoppelt sich fast gegenüber der Überprüfung von  $V(r, t = 1)$ .

	Standard	Überprüfung $V(r, 1)$	Minimierung $\chi^2$	Startwerte
$V(1)$	-46.9(49.7)	0.36102(4)	0.36102(4)	-46.9(49.1)
$V(2)$	0.52425(8)	0.52425(8)	0.52425(8)	0.52425(8)
$V(3)$	0.6002(1)	0.6002(1)	0.6002(1)	0.6002(1)
$V(4)$	0.6503(2)	0.6503(2)	0.6489(225)	0.6503(2)
$r_0$	7.036(24)	6.909(17)	6.934(30)	7.036(24)

Tabelle 4.1.: Ergebnisvergleich der Bestimmung des Quarkpotentials  $V(r)$  und des Sommer-Parameters  $r_0$  in Abhängigkeit von der verwendeten Optimierung. Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1350$ , 10056 Konfigurationen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass schon die einfache Überprüfung von  $V(r, t = 1)$  ausreicht, um fehlerhafte Punkte im Quarkpotential  $V(r)$  zu vermeiden (siehe Abbildung 4.3). Die Minimierung von  $\chi^2$  erreicht dieses Ziel auch, ist aber nicht immer stabil und kann so zu einem größeren statistischen Fehler führen. Eine bessere Wahl der Startwerte für die verwendeten Fits an (4.4) und (4.5) erweist sich als unnötig, da die verwendeten Fit-Algorithmen ohnehin das richtige Minimum finden.

Für die Untersuchungen des Quarkpotentials wurde in dieser Arbeit wenn möglich auf die hier vorgestellten Optimierungen verzichtet, um ein möglichst einfaches und stabiles Verfahren zu Bestimmung von  $V(r)$  und  $r_0$  zu verwenden. Nur wenn fehlerhafte Punkte im statischen Quarkpotential  $V(r)$  aufgetreten sind, wurde die Überprüfung von  $V(r, t = 1)$  durchgeführt, um diese Fehler zu beheben.

## 4.2. Alternative Methoden

Neben der oben beschriebenen Zwei-Fit-Prozedur wurden noch weitere Methoden zur Bestimmung des Quarkpotentials  $V(r)$  und des Sommer-Parameters  $r_0$  getestet. Sie sollen im folgenden kurz vorgestellt werden.

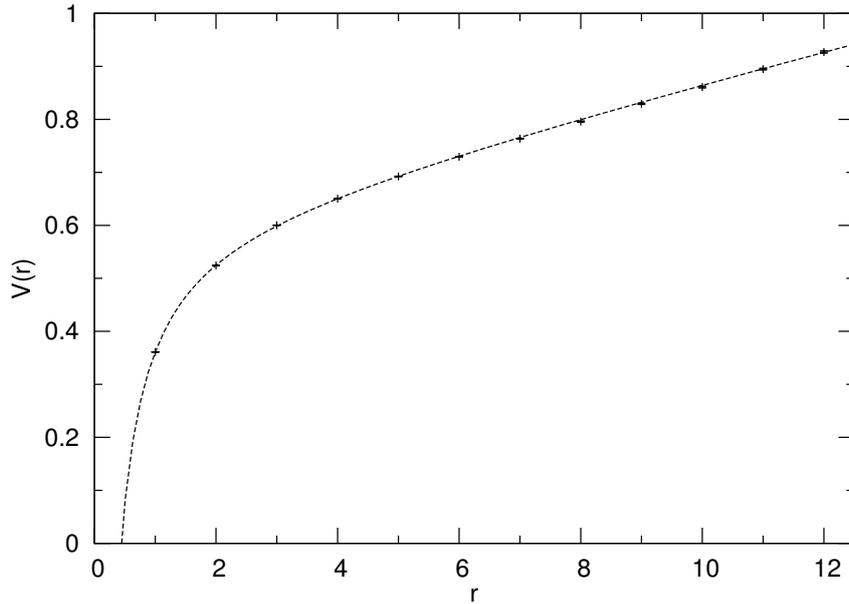


Abbildung 4.3.: Quarkpotential  $V(r)$  nach Überprüfung von  $V(r, t = 1)$ . Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1350$ , 10056 Konfigurationen.

#### 4.2.1. Alternative Fit-Prozeduren

Das Quarkpotential  $V(r)$  kann ohne vorherige Berechnung von  $V(r, t)$  direkt aus  $\langle W(r, t) \rangle$  bestimmt werden, indem man einen Fit direkt an den Wilson-Schleifen

$$\langle W(r, t) \rangle = ce^{-tV(r)} \quad (4.7)$$

durchführt [47]. Dies entspricht Gleichung (4.2), jedoch ohne den  $\mathcal{O}(e^{-t\Delta E})$  Korrekturterm. Anschließend wird der normale Potential-Fit (4.5) durchgeführt.

Diese Methode liefert in der Regel mit der normalen Zwei-Fit-Prozedur vergleichbare Ergebnisse, meist aber mit einem deutlich größeren statistischen Fehler.

Eine andere Möglichkeit ergibt sich, wenn man das Langzeitverhalten

$$V(r, t) \approx V(r) \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad (4.8)$$

ausnutzt und für jedes  $r$  einen Plateau-Fit an  $V(r, t)$  im Intervall  $[t_i : t_f]$  durchführt, wobei  $t_i$  und  $t_f$  so gewählt werden sollten, dass  $V(r, t)$  im gewählten Bereich ein Plateau zeigt. Für eine erste Abschätzung eignet sich beispielsweise das Intervall

$[t_{\max}/2 : t_{\max}]$ . Da das Ergebnis  $V(r)$  auch direkt analytisch berechnet werden kann, spricht man hier auch von einer *Ein-Fit-Prozedur* [35]. Anschließend erfolgt wieder der Potential-Fit (4.5).

Problematisch an dieser Art der Bestimmung von  $V(r)$  ist, dass die Punkte  $V(r, t)$  mit dem kleinsten statistischen Fehler nicht berücksichtigt werden. Dadurch steigt die Unsicherheit für den Sommer-Parameter  $r_0$  und es kommt oft zu deutlich abweichenden Ergebnissen.

### Erweitertes Quarkpotential $V(r)$

Das Quarkpotential (4.5) kann um einen Korrekturterm  $F$  für das Gitter erweitert werden,

$$V(r) = A + B \left[ \frac{1}{r} \right] + \sigma r + F \left( \left[ \frac{1}{r} \right] - \frac{1}{r} \right). \quad (4.9)$$

Die Größe  $\left[ \frac{1}{r} \right]$  ist dabei gegeben durch [74]

$$\left[ \frac{1}{r} \right] = 4\pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\prod_{i=1}^3 \cos(r_i k_i)}{4 \left( \sum_{j=1}^3 \sin^2(k_j/2) - 4c_1 \sum_{j=1}^3 \sin^4(k_j/2) \right)} \quad (4.10)$$

mit  $c_1 = 0$  für eine Wilson-Wirkung nach (2.55) und  $c_1 = -1/12$  für eine tree-level Symanzik Wirkung nach (2.69).

Als Startwerte für die Parameter  $A$ ,  $B$  und  $\sigma$  werden dieselben Werte wie im Fall des einfachen Quarkpotentials (4.5) verwendet, zusätzlich wird  $F = 0.4$  benutzt. Da ein Fit mit vier Parametern in der Regel weniger stabil ist als ein Fit mit dreien, kann man einen Parameter aus (4.9) eliminieren, indem man  $B = -\pi/12$  festlegt [39].

Die Ergebnisse für das erweiterte Quarkpotential (4.9) unterscheiden sich nicht signifikant von den Ergebnissen für das einfache Quarkpotential (4.5). Das gilt sowohl für den Fall mit festem  $B = -\pi/12$  als auch für den Fall mit variablem  $B$ .

### 4.2.2. Creutz-Ratio

Der Sommer-Parameter  $r_0$  kann statt über das Quarkpotential  $V(r)$  auch über die Creutz-Ratio [31, 32]

$$\chi(r, t) = -\log \left( \frac{W(r, t)W(r-1, t-1)}{W(r, t-1)W(r-1, t)} \right) \quad (4.11)$$

bestimmt werden. Dabei erhält man die Kraft zwischen zwei Quarks im Abstand  $r_1$  aus

$$F(r_1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(r, t) . \quad (4.12)$$

$r_1$  liegt zwischen  $r$  und  $r-1$  und ist durch

$$\frac{1}{r_1^2} = - \left( \left[ \frac{1}{\vec{r}} \right] - \left[ \frac{1}{\vec{r} - \frac{\vec{r}}{r}} \right] \right) \quad (4.13)$$

gegeben. Andererseits kann die Kraft auch in der Form

$$F(r_1) = f_1 + f_2 \frac{1}{r_1^2} \quad (4.14)$$

dargestellt werden. Der Sommer-Parameter  $r_0$  lässt sich schließlich aus einem Paar von  $\chi(r, t)$  und  $\chi(r', t)$  bestimmen, wobei  $r' = r + 1$  und ein ausreichend großes  $t$  gewählt werden [35]:

$$\frac{1.65 - r_1'^2 \chi(r', t)}{r_0^2 - r_1'^2} = \frac{r_1^2 \chi(r, t) - r_1'^2 \chi(r', t)}{r_1^2 - r_1'^2} . \quad (4.15)$$

Das Einsetzen von  $r_1^2$  und  $r_1'^2$  gemäß (4.13) und Umstellen nach  $r_0$  liefert dann das gewünschte Ergebnis.

Diese Methode hat sich als sehr instabil erwiesen, da die Wilson-Schleifen  $W(r, t)$  für ausreichend große  $t$  oft schon sehr stark schwanken. Außerdem werden, anders als bei den Verfahren mit Fits, insgesamt nur 6 verschiedene Wilson-Schleifen bei der Berechnung berücksichtigt.

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$r_0$	$A$	$-B$	$\sigma$
$32^3 \times 64$	1.75	0.14900	5034	8.236(32)	0.5743(9)	0.2514(8)	0.0206(1)
$24^3 \times 48$	1.75	0.14900	9349	8.253(29)	0.5745(5)	0.2513(5)	0.0205(1)
$32^3 \times 64$	1.75	0.14920	6279	8.374(24)	0.5736(3)	0.2503(3)	0.0199(1)
$24^3 \times 48$	1.75	0.14920	13017	8.455(29)	0.5746(3)	0.2507(3)	0.0195(1)
$24^3 \times 48$	1.75	0.14925	7224	8.599(45)	0.577(1)	0.2526(9)	0.0188(2)
↳ Minimierung von $\chi^2$ :				8.94(86)	0.583(20)	0.257(17)	0.0173(3)
$24^3 \times 48$	1.75	0.14930	10280	8.528(52)	0.575(1)	0.251(1)	0.0192(2)
$32^3 \times 64$	1.75	0.14940	5486	8.58(31)	0.5749(3)	0.2512(4)	0.0189(1)
$32^3 \times 64$	1.75	0.14950	2007	8.91(27)	0.5770(5)	0.2519(4)	0.0175(1)
$24^3 \times 64$	1.75	0.1350	10056	7.036(24)	0.613(2)	0.288(3)	0.0275(2)
↳ Überprüfung von $V(r, t = 1)$ :				6.909(17)	0.601(1)	0.269(1)	0.0289(1)
$24^3 \times 64$	1.75	0.1355	10311	7.324(34)	0.615(2)	0.289(3)	0.0253(2)
$24^3 \times 64$	1.75	0.1360	10023	7.683(42)	0.617(2)	0.287(3)	0.0230(3)
$24^3 \times 64$	1.75	0.1365	9667	8.061(50)	0.616(2)	0.283(3)	0.0210(3)
$24^3 \times 64$	1.75	0.1368	10188	8.157(23)	0.611(1)	0.274(1)	0.0206(1)
$32^3 \times 64$	1.90	0.14330	5125	10.92(11)	0.5119(6)	0.2222(5)	0.0119(1)
$32^3 \times 64$	1.90	0.14387	5034	11.53(5)	0.5115(2)	0.2206(4)	0.0107(1)
$32^3 \times 64$	1.90	0.14415	5069	11.61(15)	0.5109(2)	0.2203(3)	0.0106(1)
$32^3 \times 64$	1.90	0.14435	10680	11.86(5)	0.5109(3)	0.2200(3)	0.0102(1)
$48^3 \times 96$	2.10	0.1397	1105	15.82(24)	0.4434(5)	0.1891(5)	0.0058(1)
$48^3 \times 96$	2.10	0.1400	1400	16.29(15)	0.4431(3)	0.1884(4)	0.0055(1)
$48^3 \times 96$	2.10	0.1401	1034	16.33(33)	0.4431(3)	0.1886(4)	0.0055(1)

Tabelle 4.2.: Ergebnisse für den Sommer-Parameter  $r_0$  und die Fit-Parameter  $A$ ,  $B$  und  $\sigma$  bei verschiedenen Untersuchungen. In zwei Fällen sind zusätzlich die Ergebnisse *mit* Optimierungen angegeben.

### 4.3. Ergebnisse

In Tabelle 4.2 sind die Ergebnisse der Zwei-Fit-Prozedur für verschiedene Simulationen aufgelistet. Bei den Simulationen auf dem  $24^3 \times 64$  Gitter wurden 3 Level Stout-Smearing verwendet, bei allen übrigen 1 Level Stout-Smearing. Wenn nicht anders angegeben wurden keine Optimierungen bei der Bestimmung des Quarkpotentials verwendet.

Bei fester Eichkopplung  $\beta$  und steigendem Hoppingparameter  $\kappa$  steigt der Sommer-Parameter  $r_0$  an, während die String-Spannung  $\sigma$  abnimmt. Die beiden Para-

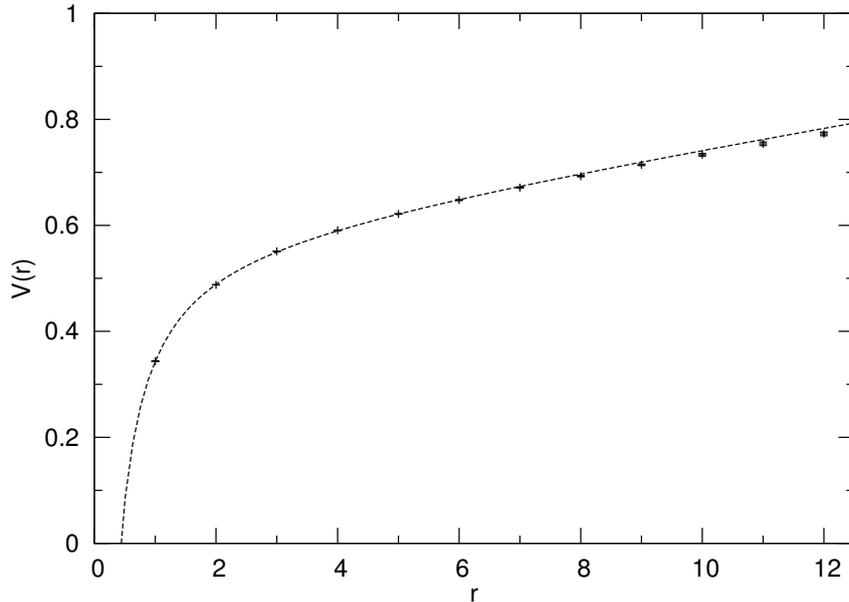


Abbildung 4.4.: Quarkpotential  $V(r)$ . Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.14925$ , 7224 Konfigurationen.

meter  $A$  und  $B$  bleiben hingegen annähernd konstant, wobei  $-B$  stets nahe am universellen Lüscher-Wert  $\pi/12 = 0.26$  [68] liegt.

Beim  $24^3 \times 48$  Gitter mit  $\beta = 1.75$  und  $\kappa = 0.14925$  fällt auf, dass der Sommer-Parameter  $r_0 = 8.599(45)$  dort größer als bei  $\kappa = 0.14930$  und  $\kappa = 0.14940$  ist, während  $\sigma$  kleiner als bei den beiden anderen Simulationen ist. Das Quarkpotential  $V(r)$  ist in Abbildung 4.4 zu sehen, es zeigt bis auf eine kleine Abweichung des Fits für große Abstände  $r$  keine Auffälligkeiten. Optimierungen verbessern das Ergebnis nicht, eine Überprüfung von  $V(r, t = 1)$  führt zu demselben Ergebnis, während die Minimierung von  $\chi^2$  zu einem noch größeren Wert von  $r_0 = 8.94(86)$  mit deutlich zu großem Fehler führt. Der Grund für diesen Ausreißer beim Wert des Sommer-Parameters  $r_0$  bleibt daher unklar.

Das  $24^3 \times 64$  Gitter mit  $\beta = 1.75$  und  $\kappa = 0.1350$  wurde bereits im Abschnitt 4.1.3 näher untersucht. In diesem Fall muss eine Überprüfung von  $V(r, t = 1)$  durchgeführt werden, da der Punkt  $V(r = 1)$  des Quarkpotentials sonst nicht richtig erfasst wird. Ein Blick in Tabelle 4.2 offenbart, dass die Werte der Parameter  $A$  und  $B$  nach der Optimierung nicht mehr ganz mit den Werten der übrigen Simulationen übereinstimmen. Dies kann ein Hinweis darauf sein, dass es für die Bestimmung des

Sommer-Parameters  $r_0$  besser sein könnte, falsch bestimmte Punkte des Quarkpotentials  $V(r)$  zu ignorieren, anstatt Optimierungsverfahren für die Fits anzuwenden.<sup>8</sup> Das gilt insbesondere dann, wenn Punkte mit kleinem Abstand  $r$  betroffen sind, da diese den Fit durch ihren sehr kleinen statistischen Fehler dominieren können.

Insgesamt erweist sich die Bestimmung des Quarkpotentials  $V(r)$  und des Sommer-Parameters  $r_0$  als sehr stabil. Das Quarkpotential zeigt fast immer einen sauberen Verlauf ohne signifikante Abweichungen einzelner Punkte und der statistische Fehler von  $r_0$  ist meistens kleiner als 1%. Die Anwendung von Optimierungsverfahren ist nur in Ausnahmefällen nötig, insbesondere bei noch nicht abgeschlossenen Simulationen mit geringer Statistik ( $N_{\text{conf}} \ll 5000$ ).

Wichtig ist es, in allen Fällen dieselbe Methode zur Bestimmung des Quarkpotentials  $V(r)$  und des Sommer-Parameters  $r_0$  zu verwenden, da verschiedene Methoden zu deutlich unterschiedlichen Ergebnissen führen können und die Skala dann nicht mehr einheitlich gesetzt wird.<sup>9</sup> In diesem Zusammenhang sollten auch Optimierungen wie die Minimierung von  $\chi^2$  als Änderung der Methode betrachtet werden, die dementsprechend nur mit Bedacht eingesetzt werden sollten.

---

<sup>8</sup>Im Fall ohne Optimierungen werden falsch bestimmte Punkte von  $V(r)$  schon dadurch ignoriert, dass sie aufgrund ihres enormen statistischen Fehlers nur einen minimalen Einfluss auf das Ergebnis der Fit-Routinen haben.

<sup>9</sup>Dieser systematische Effekt durch die Verwendung unterschiedlicher Methoden wurde beispielsweise auch in [83, 84] beobachtet.



## 5. Gluebälle

Als Gluebälle bezeichnet man Teilchen, die nur aus Gluonen aufgebaut sind. Die Existenz solcher Teilchen wurde 1972 von Fritzsche und Gell-Mann [46] vorausgesagt, ein experimenteller Nachweis fehlt bisher aber noch. Es gibt zahlreiche Untersuchungen zum Thema Gluebälle auf dem Gitter, für eine Übersicht siehe beispielsweise [86, 99].

In der  $SU(2)$  supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie erwartet man zwei Gluebälle im leichteren Multiplett, einen mit den Quantenzahlen  $J^{PC} = 0^{++}$  und einen mit  $J^{PC} = 0^{-+}$  (siehe Abschnitt 2.6). Dabei steht  $J$  für den Spin,  $P = \pm 1$  für die Parität und  $C = \pm 1$  für die Ladungskonjugation (C-Parität).

Die Massen der Gluebälle sind bei Gittersimulationen relativ schwierig zu bestimmen, da Gluebälle aufgrund ihrer rein gluonischen Natur ein sehr schlechtes Signal-zu-Rausch-Verhältnis aufweisen. Es gibt verschiedene Methoden zur Verbesserung des Signals, in dieser Arbeit werden dazu insbesondere Smearing- und Variationsmethoden eingesetzt.

### 5.1. Details zur Messung

#### 5.1.1. Wahl des Operators

Der erste Schritt ist die Wahl eines geeigneten Glueball-Operators auf dem Gitter. Dazu verwendet man geschlossene Schleifen aus Link-Variablen, die sich gemäß der kubischen Gruppe  $\mathbf{O}$  transformieren lassen [11]. Die kubische Gruppe  $\mathbf{O}$  besitzt 24 Elemente und die fünf irreduziblen Darstellungen  $A_1, A_2, E, T_1$  und  $T_2$ , wobei nur die Darstellung  $A_1$  den Spin  $J = 0$  enthält.

Für den  $0^{++}$ -Glueball-Operator kommen somit alle Operatoren in Frage, die einen  $A_1^{++}$ -Anteil enthalten. Der einfachste und bisher in der DESY-Münster-Kollaboration verwendete Operator dieser Art ist die Plakette  $U_{\mu\nu}(x)$ . Innerhalb der

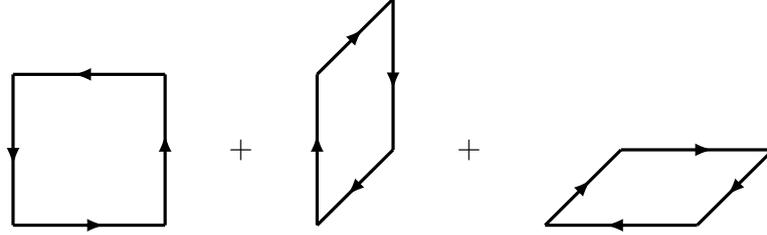


Abbildung 5.1.: Operator für den skalaren  $0^{++}$ -Glueball.

kubischen Gruppe  $\mathbf{O}$  hat dieser 4-Link-Operator drei mögliche Rotationen, die in Abbildung 5.1 dargestellt sind. Der vollständige Operator hat die Form

$$O_{0^{++}}(x) = \text{Sp} [U_{12}(x) + U_{23}(x) + U_{31}(x)] . \quad (5.1)$$

Beim  $0^{-+}$ -Glueball-Operator muss zusätzlich die negative Parität  $P = -1$  berücksichtigt werden. Die kubische Gruppe  $\mathbf{O}$  wird daher zur Gruppe  $\mathbf{O}_h = \mathbf{O} \times \{+1, -1\}$  mit 48 Elementen erweitert [11]. Die Gruppe  $\mathbf{O}_h$  umfasst zusätzlich zu den Rotationen noch Reflexionen.

Die einfachste Schleife mit meinem  $A_1^{-+}$ -Anteil ist die in Abbildung 5.2 dargestellte Schleife  $\mathcal{C}$ , die aus 8 Link-Variablen aufgebaut ist. Der  $0^{-+}$ -Glueball-Operator umfasst alle möglichen Rotationen  $\mathcal{R}$  dieser Schleife  $\mathcal{C}$  sowie ihrer punktgespiegelten Form  $\mathcal{PC}$ ,

$$O_{0^{-+}}(x) = \sum_{\mathcal{R} \in \mathbf{O}} [\text{Sp}U(\mathcal{C}) - \text{Sp}U(\mathcal{PC})] . \quad (5.2)$$

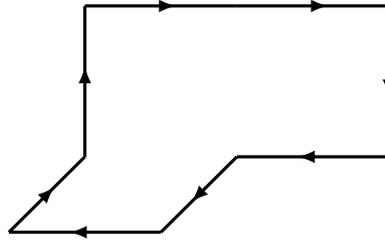
Bei einer *Messung* werden die Operatoren (5.1) beziehungsweise (5.2) auf jedem Gitterpunkt  $x$  berechnet.<sup>1</sup> Anschließend wird der räumliche Mittelwert für jede Zeitscheibe  $t$  gebildet und nur dieser Zeitscheiben-Operator

$$O_{0^{++}}(t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} O_{0^{++}}(\mathbf{x}, t) \quad (5.3)$$

wird in einer Datei gespeichert. Dies entspricht der Größe  $S(t)$  aus Abschnitt 3.2 und kann wie dort beschrieben für die Berechnung einer Zeitscheiben-Korrelationsfunktion verwendet werden.

---

<sup>1</sup>Der Übersichtlichkeit halber werden alle Rechnungen ab hier nur noch anhand des  $0^{++}$ -Glueballs gezeigt.

Abbildung 5.2.: Wilson-Schleife  $\mathcal{C}$  für den pseudoskalaren  $0^{-+}$ -Glueball.

### 5.1.2. Smearing

Um den Überlapp der obigen Operatoren mit dem Grundzustand der Gluebälle zu vergrößern, wird APE-Smearing oder HYP-Smearing verwendet. Beide Methoden wurden in Abschnitt 3.5.1 beziehungsweise 3.5.2 beschrieben.

In der Regel wird APE-Smearing mit  $\epsilon_{\text{APE}} = 0.5$  verwendet. Da die Berechnung der Gluebälle selbst mit einer geringen Parallelisierung des Gitters sehr schnell ist, wird die Berechnung für verschiedene Smearing-Level  $N_{\text{APE}}$  durchgeführt.<sup>2</sup> Man beginnt mit  $N_{\text{APE}} = 0$  (kein Smearing) und erhöht den Smearing-Level dann schrittweise nach jeder Messung von  $O_{0^{++}, N_{\text{APE}}}(t)$ . Nach den Smearing-Leveln  $[0, 1, 2, 3, 4]$  wird  $N_{\text{APE}}$  in Vierer-Schritten weiter erhöht, standardmäßig bis  $N_{\text{APE}} = 48$ .

Auf diese Weise wird der  $0^{++}$ -Glueball-Operator  $O_{0^{++}, N_{\text{APE}}}(t)$  für insgesamt 16 verschiedene Smearing-Level berechnet. Dadurch kann in der anschließenden Analyse der Smearing-Level mit dem besten Ergebnis ausgewählt werden. Außerdem können die Operatoren mit verschiedenen Smearing-Level für die in Abschnitt 3.6 beschriebenen Variationsmethoden miteinander kombiniert werden, worauf im Abschnitt 5.1.5 genauer eingegangen wird.

Im Prinzip können beliebig viele verschiedene Smearing-Level berechnet werden, der limitierende Faktor ist vor allem der benötigte Speicherbedarf für die erzeugten Daten, der linear mit der Anzahl der verschiedenen Smearing-Level ansteigt.<sup>3</sup>

Als Alternative zum APE-Smearing kann HYP-Smearing mit  $\epsilon_{\text{HYP},1} = 0.6$  und  $\epsilon_{\text{HYP},2} = 0.3$  verwendet werden. Für den Smearing-Level  $N_{\text{HYP}}$  werden dieselben

<sup>2</sup>Auf einem  $48^3 \times 96$  Gitter benötigt ein Rechenknoten auf JUROPA [60] mit 8 Kernen etwas weniger als eine Minute pro Konfiguration, um die hier beschriebenen Berechnungen durchzuführen.

<sup>3</sup>In einem typischen Fall mit 10000 Konfigurationen und 16 verschiedenen Smearing-Level wird eine Datenmenge von ungefähr 1 GB erzeugt.

Werte wie für  $N_{\text{APE}}$  beim APE-Smearing verwendet. Im Abschnitt 5.2 werden die beiden Smearing-Methoden miteinander verglichen und die Wahl der Parameter genauer untersucht.

### 5.1.3. Analyse

Nach der *Messung* der Operatoren erfolgt die *Analyse* der Daten. Zunächst soll der Fall betrachtet werden, in dem nur ein einzelner Smearing-Level verwendet wird.

Für den  $0^{++}$ -Glueball muss zunächst der nicht verschwindende Vakuumerwartungswert

$$vev(t) = \langle O_{0^{++}}(t) \rangle_U \quad (5.4)$$

berechnet werden, was durch Mittelung über alle Konfigurationen  $U$  geschieht. Falls zu den Konfigurationen jeweils ein Korrekturfaktor  $R[U]$  berechnet wurde, wird dieser gemäß (3.26) berücksichtigt. Der Vakuumerwartungswert wird für jede Zeitscheibe separat berechnet, prinzipiell kann aber auch der gemittelte Wert

$$vev = \frac{1}{T} \sum_t vev(t) \quad (5.5)$$

verwendet werden, da der Vakuumerwartungswert auf allen Zeitscheiben identisch sein sollte.

#### Korrelator

Aus den Operatoren  $O_{0^{++}}(t)$  wird gemäß (3.29) die Zeitscheiben-Korrelationsfunktion

$$C(\Delta t) = \left\langle \frac{1}{T} \sum_t (O_{0^{++}}(t + \Delta t) - vev(t + \Delta t))(O_{0^{++}}(t) - vev(t)) \right\rangle_U \quad (5.6)$$

gebildet.<sup>4</sup> Der statistische Fehler des Korrelators  $C(\Delta t)$  wird mittels Jackknifing (3.42) bestimmt, wobei standardmäßig eine Binggröße von  $B = 10$  verwendet wird. Das ist notwendig, um diesen Fehler bei den kommenden Massen-Fits als Eingangsgröße berücksichtigen zu können.

---

<sup>4</sup>Man beachte, dass für die Zeitdifferenz  $\Delta t$  oft auch nur die Bezeichnung  $t$  verwendet wird.

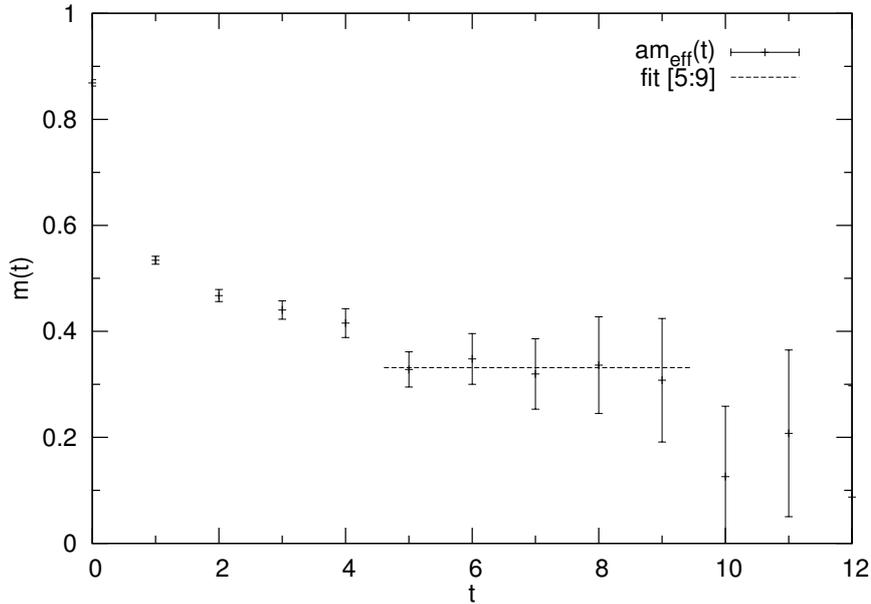


Abbildung 5.3.: Beispiel für den Verlauf der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{++-}$ -Glueballs. Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1368$ , 10188 Konfigurationen.

### Effektive Masse

Im nächsten Schritt wird für alle  $\Delta t$  die effektive Masse (3.37),

$$m_{\text{eff}}(\Delta t) = \ln \frac{C(\Delta t)}{C(\Delta t + 1)}, \quad (5.7)$$

und der zugehörige statistische Fehler bestimmt. Dazu kann Jackknifing oder Linearisierung verwendet werden, beide Methoden liefern in der Regel vergleichbare Ergebnisse. Idealerweise sollte die effektive Masse nach kurzem Abfall ein möglichst langes Plateau zeigen. Dieses Plateau liefert einen guten Hinweis darauf, welches Intervall von  $\Delta t$  sich besonders für den nachfolgenden Massen-Fit eignet.

Die Abbildung 5.3 zeigt ein Beispiel für den Verlauf der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$ . Bis  $t = 5$  fällt die effektive Masse ab, was den Abfall der angeregten Zustände widerspiegelt. Im Bereich  $t \in [5 : 9]$  zeigt  $m_{\text{eff}}(t)$  ein Plateau, dieser Bereich eignet sich somit gut für den nachfolgenden Massen-Fit. Ab  $t = 10$  fluktuiert die effektive Masse und ihr statistischer Fehler wird so groß, dass in diesem Bereich keine sinnvollen Ergebnisse mehr gewonnen werden können.

Möchte man anstatt der im folgenden Abschnitt beschriebenen Massen-Fits nur die effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  zur Abschätzung der Glueballmasse verwenden, so ergeben sich zwei Möglichkeiten. Zum einen kann man einen einzelnen Wert  $m_{\text{eff}}(t)$  innerhalb des Plateaus auswählen und diesen als Ergebnis verwenden, idealerweise einen möglichst niedrigen Wert aus der Mitte des Plateaus. Zum anderen kann man alle Werte des Plateaus verwenden, indem man einen Fit an eine Konstante in diesem Intervall durchführt. Dies entspricht der Bildung des mit dem statistischen Fehler gewichteten Mittelwertes.

### Massen-Fit

Der Massen-Fit (3.36),

$$C(\Delta t) = a_1^2 (e^{-m_1 \Delta t} \pm e^{-m_1(T-\Delta t)}) , \quad (5.8)$$

wird in mehreren Intervallen  $\Delta t \in [t_1 : t_2]$  durchgeführt. Es werden Intervalllängen von 3 bis 10 verwendet und für jede Länge wird  $t_1$  jeweils von 0 bis 11 variiert, so dass insgesamt 96 verschiedene Fit-Intervalle betrachtet werden. Längere Fit-Intervalle und größere Startpunkte  $t_1$  sind nicht notwendig, da der Korrelator  $C(\Delta t)$  für so große Werte von  $\Delta t$  einen so großen Fehler aufweist, dass er praktisch keine zusätzlichen Informationen für den Fit mehr liefert.

Aus dieser großen Anzahl an verschiedenen Fits werden zunächst alle *guten* Fits ausgewählt. Dabei werden die folgenden Kriterien verwendet:

- Der relative statistische Fehler der Masse ist kleiner oder gleich 10%.

Dieses Kriterium kann problematisch sein, wenn der Fehler aufgrund einer unzureichenden Statistik noch sehr groß ist, oder wenn das Plateau der effektiven Masse erst für große  $\Delta t$  erreicht wird, bei denen der Fehler schon entsprechend groß ist. Das Analyse-Programm erlaubt daher auch die Festlegung einer höheren Fehlergrenze.

- Die Fit-Eigenschaft  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  sollte zwischen 0.1 und 2.0 liegen, wobei  $N_{\text{DF}}$  die Anzahl der Freiheitsgrade ist.

Ein zu großer Wert  $\chi^2/N_{\text{DF}} > 2.0$  tritt vor allem im Bereich kleiner  $\Delta t$  auf, wenn die angeregten Zustände noch nicht zerfallen sind. Sehr kleine Werte  $\chi^2/N_{\text{DF}} < 0.1$  findet man hingegen im Bereich großer  $\Delta t$ , wo der statistische

Fehler des Korrelators  $C(\Delta t)$  immer größer wird. Daher ergibt es keinen Sinn, sehr lange Fit-Intervalle zu benutzen, da die zusätzlichen Punkte durch ihren großen Fehler keine weiteren Informationen liefern, aber  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  weiter verkleinern.

Anstatt des unkorrelierten  $\chi^2$  kann auch das korrelierte  $\chi_c^2$  verwendet werden. In der Regel ist  $\chi_c^2 > \chi^2$ , so dass eher Fits mit größeren  $\Delta t$  in das passende Intervall fallen. Dort ist der relative Fehler jedoch oft schon größer als 10%, wodurch die Anzahl der *guten* Fits bei der Verwendung des korrelierten  $\chi_c^2$  geringer ist als bei der Verwendung des unkorrelierten  $\chi^2$ .

- Außerdem werden negative und sehr kleine Massen ( $< 1 \times 10^{-6}$ ) verworfen. Solche Ergebnisse können auftreten, wenn der Korrelator sehr stark fluktuiert oder eine sehr schlechte Statistik vorliegt.

Diese Kriterien für die Güte der Fits sind für die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse notwendig, insbesondere bei Verwendung der später beschriebenen Histogramm-Methode. Außerdem erleichtern sie die Auswahl eines Fit-Intervalls und der zugehörigen Masse  $m_{\text{fit}}(t)$ . Dabei ist jedoch zu beachten, dass nicht alle *guten* Fits auch tatsächlich geeignet sind. Zum Teil werden auch solche Fits als *gut* klassifiziert, die noch deutlich durch angeregte Zustände beeinflusst werden und so ein zu hohes Ergebnis für die Masse liefern. Auch kommt es vor, dass optisch gute Fits, die eindeutig im Bereich des Plateaus der effektiven Masse liegen, aufgrund eines etwas zu großen relativen Fehlers oder zu kleinen  $\chi^2/N_{\text{DF}}$ , nicht als *gut* erkannt werden.

Die Auswahl des „besten“ Fit-Intervalls ist daher immer mit einer gewissen Unsicherheit verbunden und kann nicht durch einen Algorithmus geschehen. Auf den mit der Auswahl verbundenen systematischen Fehler wird in Abschnitt 5.1.4 genauer eingegangen.

Die Abbildung 5.4 zeigt ein Beispiel für  $m_{\text{fit}}(t)$ , wobei  $t$  der Startpunkt des Fit-Intervalls ist. Die Fit-Intervalle haben jeweils eine Länge von 5 Punkten, sie liegen also im Fit-Intervall  $[t : t + 4]$ . Idealerweise sollte auch  $m_{\text{fit}}(t)$  ein Plateau zeigen, sobald die angeregten Zustände zerfallen sind. Hier ist ein Plateau im Intervall  $[4 : 7]$  zu erahnen, wobei nur die Punkte 5 und 6 wirklich konstant zu sein scheinen.

In diesem Beispiel erfüllen  $m_{\text{fit}}(t = 2, 3, 4)$  alle Bedingungen für *gute* Fits, bei den späteren Fits ist der relative Fehler zu groß. Als Ergebnis für die Glueballmasse würde man in diesem Fall  $m_{\text{fit}}(4) = 0.364(27)$  auswählen, da es die kleinste

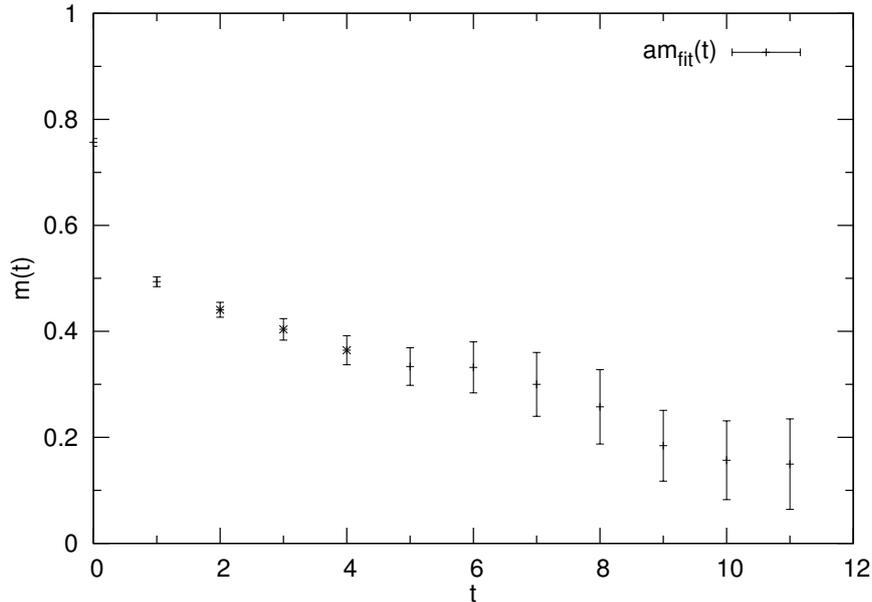


Abbildung 5.4.: Beispiel für den Verlauf der Massen-Fits  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs, die *guten* Fits starten im Intervall  $t \in [2 : 4]$ , das Fit-Intervall umfasst jeweils 5 Punkte. Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1368$ , 10188 Konfigurationen.

Masse ist und das Fit-Intervall am besten mit dem Plateau der effektiven Masse übereinstimmt (siehe Abbildung 5.3).

### Histogramm-Methode

Eine Alternative zur Auswahl einer einzelnen Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  ist die *Histogramm-Methode*. Dabei wird ein Histogramm aller *guten* Fits gebildet, wobei jeder einzelne Fit mit  $\exp(-\chi^2/N_{\text{DF}})$  beziehungsweise  $\exp(-\chi_c^2/N_{\text{DF}})$  gewichtet wird. Die Breite der einzelnen Fits im Histogramm wird durch ihren jeweiligen statistischen Fehler bestimmt.

Als Glueballmasse wird der gewichtete Mittelwert  $m_{\text{hist}}$  der Verteilung genommen. Der Fehler  $\sigma$  wird anhand der Breite des Histogramms bestimmt, so dass 68% aller Werte im Bereich  $m_{\text{hist}} \pm \sigma$  liegen, man nimmt also eine Normalverteilung der Fits an. Damit die Histogramm-Methode gute Ergebnisse liefert, wird eine ausreichend große Anzahl *guter* Fits benötigt.

Wenn möglich ist bei der Gewichtung das korrelierte  $\chi_c^2/N_{\text{DF}}$  dem unkorrelierten  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  vorzuziehen. Da die Zahl der *guten* Fits bei Verwendung des korrelierten

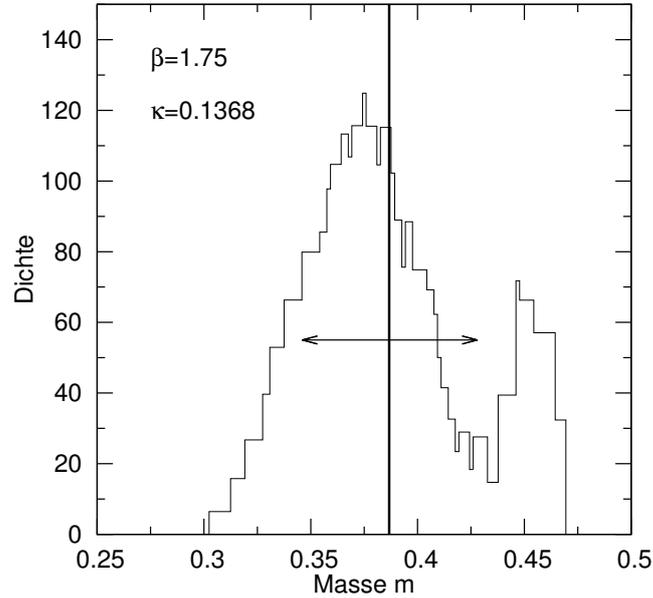


Abbildung 5.5.: Beispiel für die Histogramm-Methode. Die dicke Linie kennzeichnet die gewichtete Masse  $m_{\text{hist}} = 0.387(41)$ . Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1368$ , 10188 Konfigurationen.

$\chi_c^2/N_{\text{DF}}$  in der Regel signifikant kleiner ist, ist dies jedoch nicht immer möglich.

Die Qualität des Ergebnisses hängt stark davon ab, welche Fits als *gut* klassifiziert und daher berücksichtigt werden. Idealerweise sollten dies alle Fits sein, deren Fit-Intervall überwiegend in dem Bereich liegen, in dem die effektive Masse ein Plateau zeigt.

Abbildung 5.5 zeigt ein Beispiel für die Histogramm-Methode, bei der insgesamt 19 *gute* Fits zur Erstellung des Histogramms verwendet wurden. Vier dieser Fits haben eine etwas größere Masse ( $\approx 0.45$ ) als die übrigen, wodurch der gewichtete Mittelwert etwas nach oben verschoben wird und es neben dem annähernd normalverteilten Hauptpeak einen weiteren Peak gibt. Die ermittelte Masse  $m_{\text{hist}} = 0.387(41)$  liegt etwas über der zuvor ausgewählten Masse  $m_{\text{fit}}(4) = 0.364(27)$  des einzelnen Fits, beide stimmen aber innerhalb des Fehlers miteinander überein.

#### 5.1.4. Fehlerabschätzung

Ein sehr wichtiger Teil der Analyse ist die Fehlerabschätzung. Für eine möglichst genaue Abschätzung des Fehlers muss man sowohl den statistischen als auch den

systematischen Fehler berücksichtigen.

Der statistische Fehler  $f_{\text{stat}}$  wird wie in Abschnitt 3.3 beschrieben mittels Jackknifing oder Linearisierung bestimmt. Beide Methoden liefern vergleichbare Ergebnisse, das Jackknifing erweist sich jedoch insbesondere in Kombination mit Variationsmethoden als stabiler. Bei der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  und der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  liegt der statistische Fehler meist in einer Größenordnung von 5 bis 15%.

Ein systematische Fehler  $f_{\text{sys}}$  kommt durch die Auswahl einer bestimmten effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  beziehungsweise eines bestimmten Fit-Intervalls für die Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  zustande. Das ist insbesondere dann der Fall, wenn  $m_{\text{eff}}(t)$  oder  $m_{\text{fit}}(t)$  kein eindeutiges Plateau zeigen, aus dessen Mitte ein Wert ausgewählt werden kann, der sich nicht oder nur minimal von seinen Nachbarn unterscheidet. In den allermeisten Fällen gibt es nur ein sehr kurzes Plateau, manchmal ist sogar gar keines erkennbar. Dann ist es notwendig, einen systematischen Fehler anzugeben. Dafür wurden verschiedene Ansätze entwickelt und geprüft:

- Man kann die größte Differenz der ausgewählten Masse zu den zwei benachbarten Massen verwenden:

$$f_{\text{sys}} = \max \{ |m_{\text{fit}}(t-1) - m_{\text{fit}}(t)|, |m_{\text{fit}}(t) - m_{\text{fit}}(t+1)| \} .$$

Wenn nicht anders angegeben, wurde der angegebene systematische Fehler auf diese Weise bestimmt.

- Alternativ betrachtet man nur die Differenz zur nachfolgenden Masse:

$$f_{\text{sys}} = |m_{\text{fit}}(t) - m_{\text{fit}}(t+1)| .$$

Dieser Fehler eignet sich besonders dann, wenn die vorhergehende Masse  $m_{\text{fit}}(t-1)$  noch klar durch angeregte Zustände beeinflusst wird und dadurch deutlich größer als  $m_{\text{fit}}(t)$  ist.

- Als dritten Ansatz ermittelt man die Varianz von  $m_{\text{fit}}(t-1)$ ,  $m_{\text{fit}}(t)$  und  $m_{\text{fit}}(t+1)$  in Bezug auf ihren Mittelwert  $\bar{m} = \frac{1}{3}(m_{\text{fit}}(t-1) + m_{\text{fit}}(t) + m_{\text{fit}}(t+1))$ . Problematisch ist hier, dass der Mittelwert der drei Massen nicht unbedingt mit  $m_{\text{fit}}(t)$  übereinstimmen muss. Außerdem ist diese Varianz in aller Regel

kleiner als der mit einer der vorherigen Methoden bestimmte systematische Fehler, es besteht also die Gefahr, den systematischen Fehler zu unterschätzen.

- Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung des systematischen Fehlers  $f_{\text{sys}}$  liefert die Breite  $\sigma$  der Verteilung aus der Histogramm-Methode:

$$f_{\text{sys}} = \sigma .$$

Hier ist zu beachten, dass die für das Histogramm verwendeten *guten* Fits nicht immer im Bereich des Plateaus liegen. Oft werden auch solche Fits berücksichtigt, die sich nach einer rein optischen Beurteilung klar außerhalb des Plateaus befinden. Dies kann dazu führen, dass die Breite  $\sigma$  der Verteilung deutlich größer ist als der mit den anderen Methoden ermittelte systematische Fehler.

Der Gesamtfehler  $f$  kann mittels

$$f = \sqrt{f_{\text{stat}}^2 + f_{\text{sys}}^2} \quad (5.9)$$

berechnet werden. Die einzelnen Fehler werden in der Reihenfolge  $(f_{\text{stat}})(f_{\text{sys}})(f)$  angegeben. Ist nur ein Fehler angegeben, so handelt es sich stets um den statistischen Fehler  $f_{\text{stat}}$ .

### 5.1.5. Variationsmethoden

Im Abschnitt 3.6 wurden die Variationsmethoden vorgestellt, die bei der Analyse der Gluebälle benutzt werden. Anstatt sich für einen Operator mit festem Smearing-Level zu entscheiden, kann man auf diese Weise alle  $N_{\text{OP}}$  gemessenen Operatoren  $O_{0^{++}, N_{\text{APE}}}(t)$  berücksichtigen, um so den größtmöglichen Überlapp mit dem Grundzustand zu erhalten.

Anstatt des einfachen Korrelators  $C(t)$  aus (5.6) mit nur einem Operator verwendet man die  $N_{\text{OP}} \times N_{\text{OP}}$  Korrelationsmatrix

$$C_{ij}(\Delta t) = \left\langle \frac{1}{T} \sum_t (O_{0^{++}}(i, t + \Delta t) - \text{vev}(i, t + \Delta t)) (O_{0^{++}}(j, t) - \text{vev}(j, t)) \right\rangle_U, \quad (5.10)$$

wobei  $O_{0++}(i, t)$  der  $i$ -te Operator<sup>5</sup> und  $vev(i, t)$  der zu diesem Operator gehörige Vakuumerwartungswert ist. Die Korrelationsmatrix ist symmetrisch und positiv definit.

Die Eigenwerte  $\lambda^k(t)$  dieser Matrix werden mit Hilfe des generalisierten Eigenwertproblems (3.61) mit  $t_0 = 0$  bestimmt. Für alle weiteren Berechnungen (effektive Masse, Massen-Fits) verwendet man wie bei der  $t$ -Eigenvektor-Methode beschrieben anstatt des Korrelators  $C(\Delta t)$  den größten Eigenwert  $\lambda^1(t \equiv \Delta t)$ .

Alternativ kann auch die fixed-vector-Methode mit  $t_0 = 0$  und  $t_1 = 1$  benutzt werden. In dem Fall ersetzt man den Korrelator  $C(\Delta t)$  durch die Größe  $\sum_{ij} \mathbf{v}_i^k \mathbf{v}_j^k C_{ij}(t)$ . Beide Methoden liefern vergleichbare Ergebnisse.

Die maximale Anzahl  $N_{\text{OP}}$  der verwendeten Operatoren wird primär durch den Bedarf an Hauptspeicher beschränkt, der quadratisch mit der Anzahl der Operatoren anwächst. Eine typische Analyse von 10000 Konfigurationen mit  $T = 64$  und  $N_{\text{OP}} = 16$  benötigt etwa 1 GB Hauptspeicher.

Zur Bestimmung des statistischen Fehlers kann wie zuvor Jackknifing oder Linearisierung verwendet werden. Bei der Linearisierung ist jedoch darauf zu achten, dass der Faktor, um den die einzelnen Matrixelemente dabei variiert werden, sehr klein gehalten werden muss (vgl. Gleichung (3.49)). Sonst besteht die Gefahr, dass die Korrelationsmatrix nicht länger positiv definit ist und das Eigenwertproblem nicht mehr gelöst werden kann. In der Praxis hat sich ein Faktor von  $h_\alpha = 1 \times 10^{-6} \times \bar{a}_\alpha$  bewährt, in manchen Fällen ist aber auch ein noch kleinerer Faktor notwendig. Aufgrund dieser Schwierigkeit und zur Begrenzung des Rechenaufwandes wird im Normalfall nur Jackknifing zur Fehlerbestimmung benutzt, da die Ergebnisse mit denen der Linearisierung übereinstimmen.

---

<sup>5</sup>Die Reihenfolge der Operatoren spielt dabei keine Rolle.

## 5.2. Optimierung der Messung

In bisherigen Arbeiten der DESY-Münster-Kollaboration wurde primär APE-Smearing zur Verbesserung der Glueballmassen verwendet. In [35] wurde beispielsweise  $\epsilon_{\text{APE}} = 0.5$  mit den vier verschiedenen Smearing-Leveln  $N_{\text{APE}} = \{4, 8, 12, 16\}$  verwendet, zusammen mit dem Einsatz von Variationsmethoden. In [91] wurde hingegen mit kleineren Smearing-Parametern  $\epsilon_{\text{APE}} = \{0.1, 0.2, 0.3\}$  und Smearing-Leveln  $N_{\text{APE}} = \{0, 5, 15, 20\}$  gearbeitet, und anstatt Variationsmethoden wurde dort eine Matrixmethode eingesetzt.

In dieser Arbeit wird neben APE-Smearing auch HYP-Smearing untersucht. Eine neu geschriebene Analysesoftware ermöglicht es außerdem, eine deutlich höhere Anzahl verschiedener Smearing-Level bei den Variationsmethoden zu berücksichtigen.

In Abschnitt 5.2.4 werden zusätzlich zum einfachsten  $0^{++}$ -Glueball-Operator aus Abschnitt 5.1.1 noch weitere Operatoren aus mehr als vier Link-Variablen berücksichtigt, um so gegebenenfalls einen noch besseren Überlapp mit dem Grundzustand des  $0^{++}$ -Glueballs zu erreichen.

### 5.2.1. Smearing-Parameter

Als Erstes wurde der Einfluss des Smearing-Parameters  $\epsilon_{\text{APE}}$  beziehungsweise  $\epsilon_{\text{HYP},1}$  und  $\epsilon_{\text{HYP},2}$  auf die Ergebnisse genauer untersucht, um möglichst optimale Werte zu wählen. Prinzipiell haben größere Werte den Vorteil, dass der effektive Smearing-Radius schneller wächst, man braucht also insgesamt weniger Smearing-Level (und somit Rechenzeit), um einen bestimmten Smearing-Radius zu erreichen.

Für diese Untersuchungen wurden Variationsmethoden mit sechs verschiedenen Smearing-Leveln in verschiedenen Abständen verwendet, insbesondere  $N_{\text{APE}} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24\}$ .

Abbildung 5.6 zeigt das Verhalten der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(3)$  beim APE-Smearing in Abhängigkeit von  $\epsilon_{\text{APE}} \in [0.25, 0.75]$ . Für  $\epsilon_{\text{APE}} \leq 0.50$  bleibt die Fit-Masse nahezu unverändert, bei größeren Werten steigt der statistische Fehler jedoch sprunghaft an und die Werte fluktuieren stark. In allen folgenden Untersuchungen wird daher  $\epsilon_{\text{APE}} = 0.50$  verwendet, da dies der größte Wert ist, der noch stabile Ergebnisse liefert.

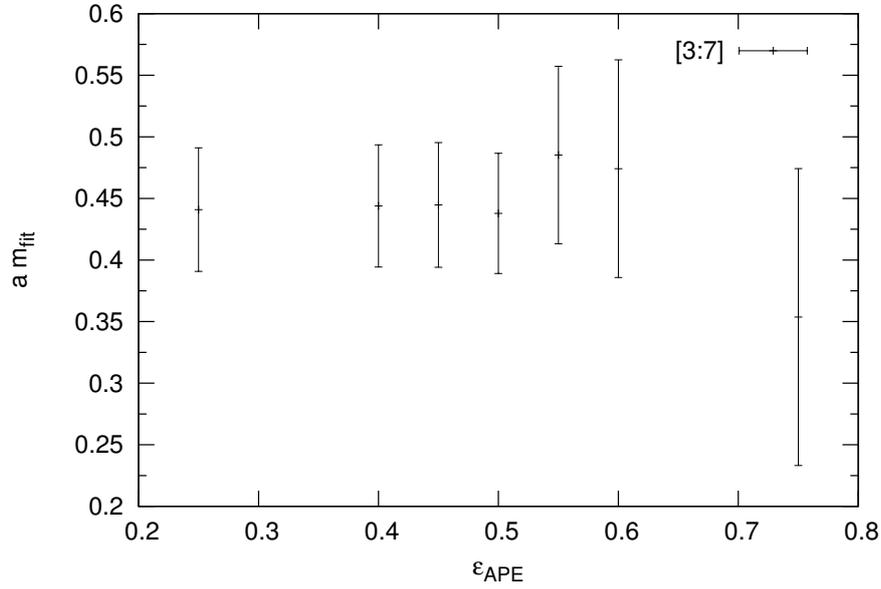


Abbildung 5.6.: Glueballmasse  $m_{\text{fit}}(3)$  als Funktion des Smearing-Parameters  $\epsilon_{\text{APE}}$ . Gittergröße  $32^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1492$ , 2335 Konfigurationen.

$\epsilon_{\text{HYP},1}$	$\epsilon_{\text{HYP},2}$	$m_{\text{fit}}(2)$	$m_{\text{fit}}(3)$	$m_{\text{fit}}(4)$	$m_{\text{fit}}(5)$
0.50	0.20	0.456(31)	0.437(46)	0.428(67)	0.426(102)
0.50	0.30	0.458(31)	0.441(47)	0.430(69)	0.428(106)
0.50	0.40	0.460(31)	0.443(47)	0.429(68)	0.429(107)
0.60	0.20	0.458(31)	0.440(47)	0.430(68)	0.431(106)
0.60	0.30	0.460(31)	0.445(47)	0.432(69)	0.433(108)
0.60	0.40	0.458(38)	0.431(58)	0.384(72)	0.333(99)
0.70	0.20	0.460(31)	0.443(47)	0.430(68)	0.430(106)
0.70	0.30	0.460(39)	0.424(57)	0.381(71)	0.347(96)
0.70	0.40	0.478(50)	0.414(78)	0.296(103)	0.106(88)

Tabelle 5.1.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  in Abhängigkeit von  $\epsilon_{\text{HYP},1}$  und  $\epsilon_{\text{HYP},2}$ , das Fit-Intervall ist jeweils  $[t : t + 4]$ .

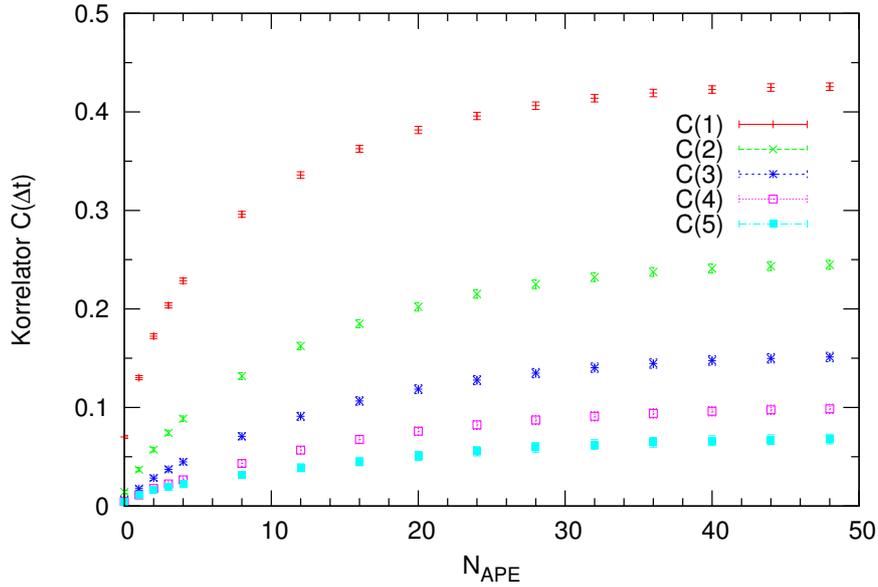


Abbildung 5.7.: Korrelator  $C(\Delta t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion des Smearing-Level  $N_{\text{APE}}$ . Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$ , 10280 Konfigurationen.

Tabelle 5.1 zeigt das Verhalten mehrerer Fit-Massen  $m_{\text{fit}}$  beim HYP-Smearing für verschiedene Kombinationen von  $\epsilon_{\text{HYP},1}$  und  $\epsilon_{\text{HYP},2}$ . Die Ergebnisse sind bis  $\epsilon_{\text{HYP},1} = 0.60$  und  $\epsilon_{\text{HYP},2} = 0.30$  stabil. Außerdem kann jeweils einer der beiden Parameter weiter erhöht werden, wenn der andere dafür entsprechend kleiner gewählt wird. In allen folgenden Untersuchungen werden  $\epsilon_{\text{HYP},1} = 0.60$  und  $\epsilon_{\text{HYP},2} = 0.30$  verwendet.

### 5.2.2. Wahl der Smearing-Level

Im nächsten Schritt wurde das Verhalten von Korrelatoren und Massen in Abhängigkeit der Smearing-Level  $N_{\text{APE}}$  beziehungsweise  $N_{\text{HYP}}$  untersucht. Auf den Einsatz von Variationsmethoden wurde dabei zunächst verzichtet, um die Smearing-Level unabhängig voneinander beurteilen zu können. Das gezeigte Verhalten ist für alle untersuchten Simulationen ähnlich, als Beispiel dient hier das Verhalten auf einem  $24^3 \times 48$  Gitter mit  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$  und 10280 Konfigurationen.

Beim APE-Smearing wurde der Bereich  $N_{\text{APE}} \in [0, 48]$  in Schritten von maximal vier Leveln auf einem  $24^3 \times 48$  Gitter untersucht. Darüber hinausgehend wurde testweise in größeren Schritten bis hin zu  $N_{\text{APE}} = 2048$  simuliert. Abbildung 5.7

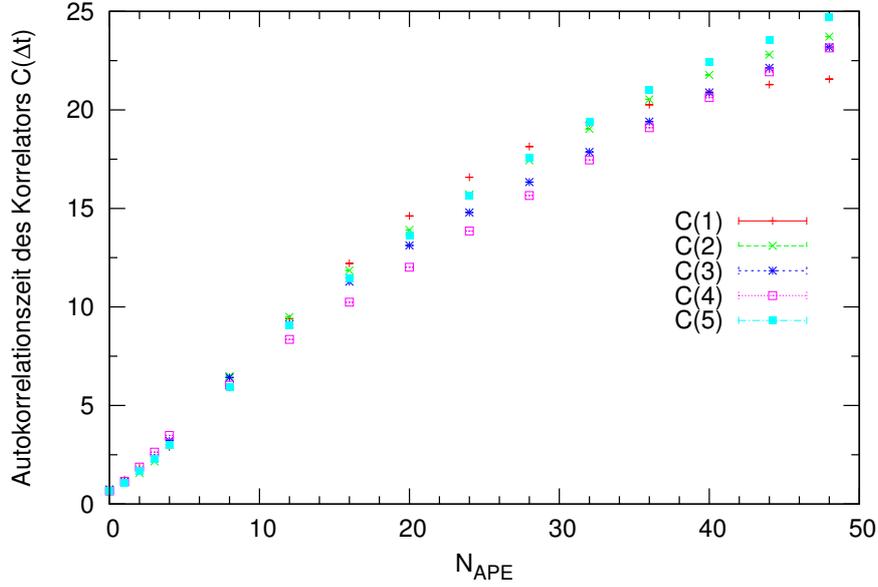


Abbildung 5.8.: Autokorrelationszeit des Korrelator  $C(\Delta t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{APE}}$ . Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$ , 10280 Konfigurationen.

zeigt das Verhalten der Korrelatoren  $C(\Delta t = 1, 2, 3, 4, 5)$  im Bereich bis  $N_{\text{APE}} = 48 \equiv 2L$ . Bei kleinen Smearing-Levels steigen die Korrelatoren zunächst stark an, um sich ab etwa  $N_{\text{APE}} \approx 40$  zu stabilisieren. Der stabile Bereich reicht bis ungefähr  $N_{\text{APE}} \approx 80$ , danach fallen die Korrelatoren wieder deutlich ab. Als *stabil* wird dabei der Bereich bezeichnet, in dem der Wert mit dem kleinsten relativen statistischen Fehler liegt und alle anderen Werte innerhalb des statistischen Fehlers mit diesem Wert übereinstimmen.

Der relative statistische Fehler fällt bis  $N_{\text{APE}} = 48$  ab und erreicht dort Werte um 3%. Wie Abbildung 5.8 zeigt, ist dabei jedoch zu beachten, dass die Autokorrelationszeit signifikant mit dem Smearing-Level ansteigt. Ohne Smearing beträgt sie weniger als 1.0, mit steigendem Smearing-Level erreicht sie jedoch Werte deutlich über 20. Wie der Korrelator selbst sinkt auch die Autokorrelationszeit ab ungefähr  $N_{\text{APE}} \approx 80$  und bewegt sich für sehr große  $N_{\text{APE}}$  wieder im Bereich ihres Ausgangswertes.

Die Abbildungen 5.9 und 5.10 zeigen das Verhalten der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(\Delta t)$  beziehungsweise der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(\Delta t, \Delta t + 4)$  für verschiedene  $\Delta t$  als Funktion

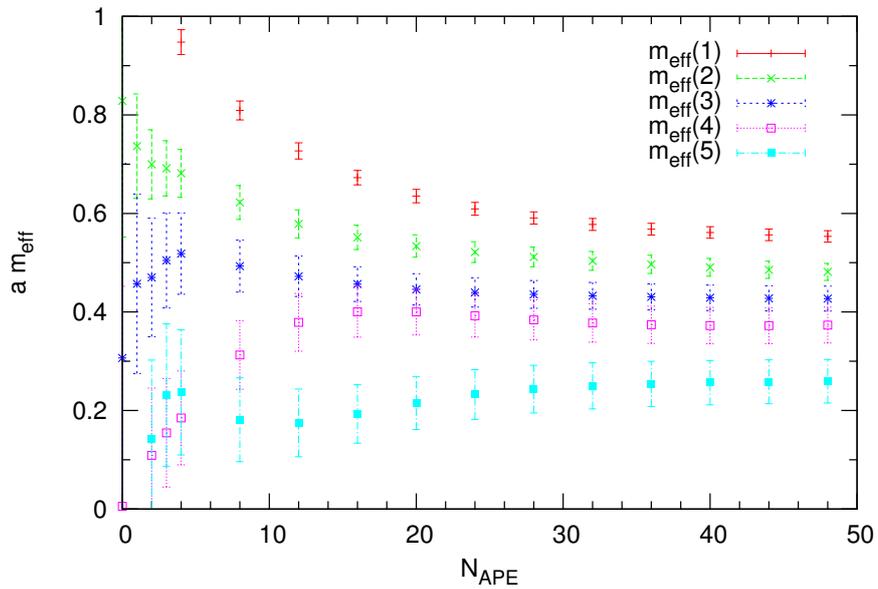


Abbildung 5.9.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{APE}}$ . Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$ , 10280 Konfigurationen.

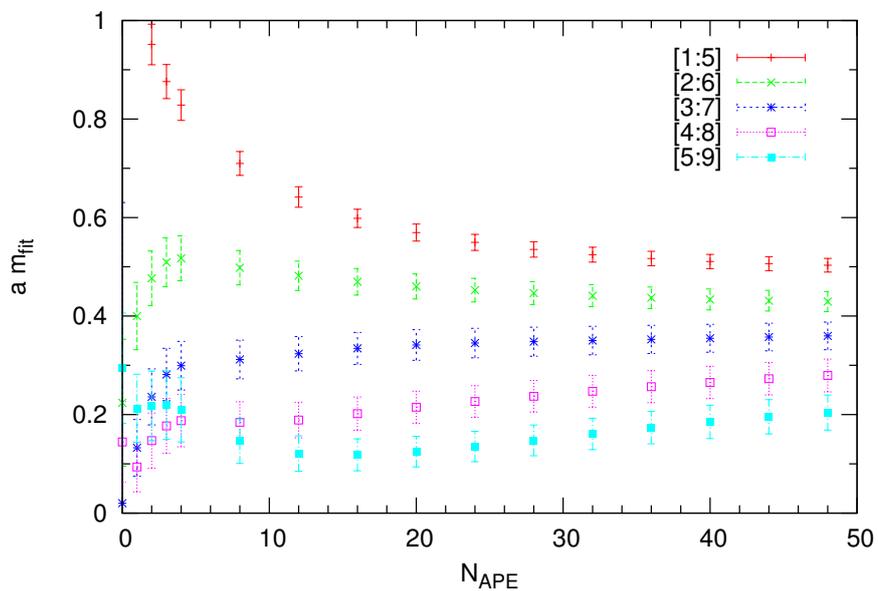


Abbildung 5.10.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{APE}}$ . Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$ , 10280 Konfigurationen.

des Smearing-Levels  $N_{\text{APE}}$ .<sup>6</sup> Abhängig von  $\Delta t$  steigt oder fällt die ermittelte Masse mit zunehmendem Smearing-Level  $N_{\text{APE}}$ , was mit dem je nach  $\Delta t$  unterschiedlich starken Anstieg des Korrelators  $C(\Delta t)$  zusammenhängt. Genau wie die Korrelatoren  $C(\Delta t)$  stabilisieren sich auch die Massen bei etwa  $N_{\text{APE}} \approx 40$ . Ungefähr ab  $N_{\text{APE}} \approx 80$  endet der stabile Bereich und die Massen beginnen zu fluktuieren, derart hohe Smearing-Level sollten also vermieden werden.

Das je nach  $\Delta t$  unterschiedliche Verhalten der Massen führt dazu, dass sich die verschiedenen Massen mit steigendem Smearing-Level einander annähern. Zwischen  $N_{\text{APE}} = 4$  und  $N_{\text{APE}} = 48$  halbiert sich der Abstand von  $m_{\text{eff}}(1)$  und  $m_{\text{eff}}(5)$  beziehungsweise der Abstand von  $m_{\text{fit}}(1)$  und  $m_{\text{fit}}(5)$  und der systematische Fehler nimmt entsprechend ab. Trotz dieser Annäherung stimmen die verschiedenen Massen selbst bei  $N_{\text{APE}} = 48$  nicht innerhalb ihres Fehlers miteinander überein.

### HYP-Smearing

Das Verhalten des Korrelators  $C(\Delta t)$ , der effektiven Massen  $m_{\text{eff}}(\Delta t)$  und der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(\Delta t, \Delta t + 4)$  beim HYP-Smearing ist dem Verhalten bei APE-Smearing sehr ähnlich. Der Unterschied besteht vor allem darin, dass weniger Smearing-Level  $N_{\text{HYP}}$  notwendig sind, um einen vergleichbaren Effekt zu erzielen. Letzteres entspricht dem erwarteten Verhalten, da ein einzelner Smearing-Schritt beim HYP-Smearing ein größeres Volumen erfasst als beim APE-Smearing.<sup>7</sup>

Beispielhaft wird in Abbildung 5.11 das Verhalten des Korrelators  $C(\Delta t)$  für verschiedene  $\Delta t$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{HYP}}$  gezeigt. Die Werte stabilisieren sich hier schon bei etwa  $N_{\text{HYP}} \approx 24$ , während dies beim APE-Smearing (Abb. 5.7) erst bei etwa  $N_{\text{APE}} \approx 40$  der Fall war. Der relative statistische Fehler fällt bis  $N_{\text{HYP}} = 40$  ab (gegenüber  $N_{\text{APE}} = 48$ ) und erreicht dort wie beim APE-Smearing Werte um 3%. Der stabile Bereich endet, verglichen mit  $N_{\text{APE}} \approx 80$  beim APE-Smearing, deutlich früher bei etwa  $N_{\text{HYP}} \approx 50$ .

Weitere Abbildungen für das Verhalten des Korrelators  $C(\Delta t)$ , der zugehörigen Autokorrelationszeit sowie der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(\Delta t)$  und der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(\Delta t, \Delta t + 4)$  beim HYP-Smearing finden sich im Anhang, Abbildungen A.1 bis A.4, Seite 156 und 157.

---

<sup>6</sup>Für einen größeren Ausschnitt der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(\Delta t)$  siehe Abbildung A.5, Seite 158.

<sup>7</sup>Vergleiche Abbildung 3.3, Seite 44.

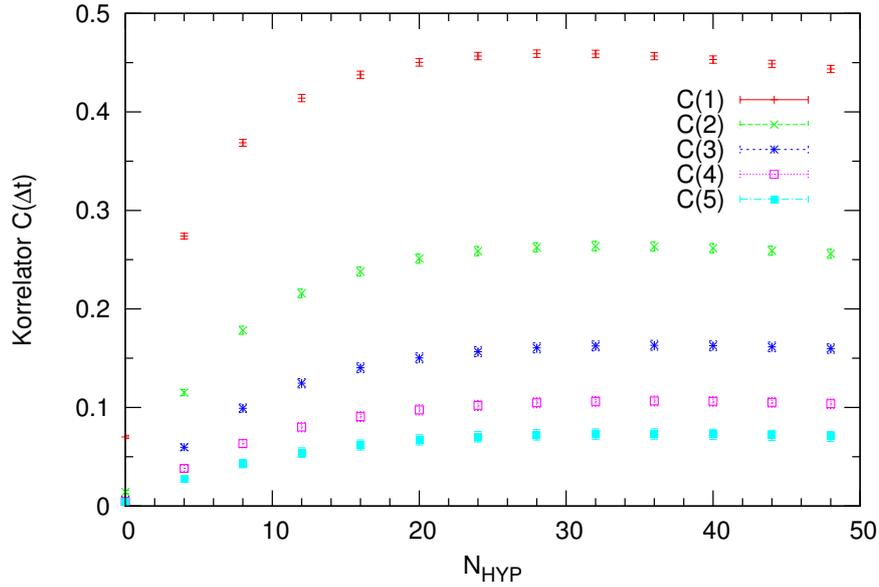


Abbildung 5.11.: Korrelator  $C(\Delta t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{HYP}}$ . Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$ , 10280 Konfigurationen.

### Smearing-Level bei Variationsmethoden

Bisher wurden nur die Ergebnisse für einzelne Smearing-Level betrachtet und dabei auf den Einsatz von Variationsmethoden verzichtet. Für einen abschließenden Vergleich von APE- und HYP-Smearing werden die bisher einzeln betrachteten Smearing-Level nun mit Hilfe der in Abschnitt 3.6 beschriebenen  $t$ -Eigenvektormethode miteinander verglichen. Dabei soll insbesondere untersucht werden, wie viele Smearing-Level berücksichtigt werden sollten und welche Smearing-Level den meisten Einfluss auf das Ergebnis haben.

Dazu wurde die Anzahl der verwendeten Operatoren  $N_{\text{OP}}$  schrittweise erhöht, wobei insgesamt die Smearing-Level

$$N_{\text{APE/HYP}} = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$$

berücksichtigt wurden. Bei der Erhöhung von  $N_{\text{OP}}$  wurde dabei einmal mit dem niedrigsten Smearing-Level  $N_{\text{APE/HYP}} = 0$  (kein Smearing) und einmal mit dem höchsten Smearing-Level  $N_{\text{APE/HYP}} = 48 \equiv 2L$  begonnen.

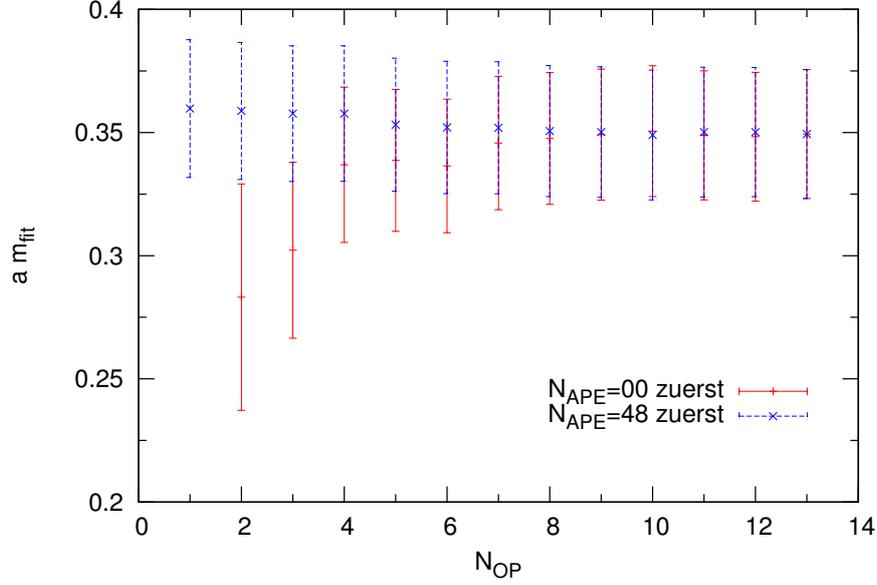


Abbildung 5.12.: Masse  $m_{\text{fit}}(t = 3)$  als Funktion der Anzahl der Operatoren  $N_{\text{OP}}$  bei APE-Smearing, wobei einmal mit dem größten und einmal mit dem kleinsten Smearing-Level begonnen wird. Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$ , 10280 Konfigurationen.

Abbildung 5.12 zeigt das Verhalten der Masse  $m_{\text{fit}}(t = 3)$  als Funktion der Anzahl der Operatoren  $N_{\text{OP}}$  bei APE-Smearing. Beginnt man mit dem kleinsten Smearing-Level, so steigt die Masse zunächst stark an, die erste Masse  $m_{\text{fit}}(t = 3, N_{\text{OP}} = 1) = 0.020(610)$  liegt sogar außerhalb des gewählten Massen-Intervalls. Schon ab  $N_{\text{OP}} = 4$  stimmen alle weiteren Massen innerhalb des Fehlers miteinander überein, das Hinzufügen weiterer Smearing-Level hat dann nur noch einen minimalen Effekt auf die Größe der Masse und ihres Fehlers. Spätestens ab  $N_{\text{OP}} \approx 8$  bleibt das Ergebnis praktisch konstant.

Beginnt man mit dem höchsten Smearing-Level, so nähert sich die Masse von oben ihrem endgültigen Wert an. In diesem Fall stimmen von Anfang an alle Massen innerhalb ihres Fehlers miteinander überein und auch hier ist das Ergebnis ab  $N_{\text{OP}} \approx 8$  praktisch konstant. Dieses Verhalten zeigt, dass die Variationsmethode von den hohen Smearing-Leveln dominiert wird.

Dies verdeutlicht auch ein Blick auf die in der  $t$ -Eigenvektor-Methode berechneten

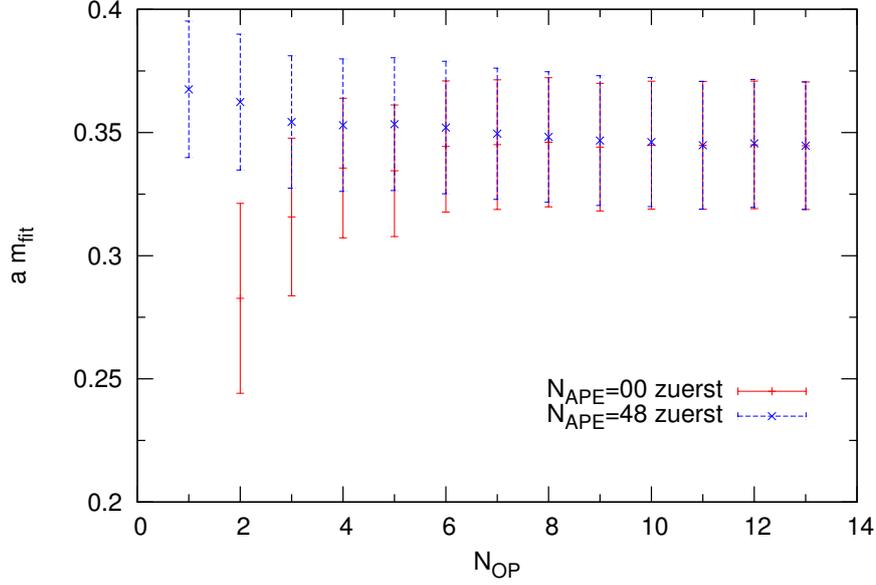


Abbildung 5.13.: Masse  $m_{fit}(t=3)$  als Funktion der Anzahl der Operatoren  $N_{OP}$  bei HYP-Smearing, wobei einmal mit dem größten und einmal mit dem kleinsten Smearing-Level begonnen wird. Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$ , 10280 Konfigurationen.

Eigenvektoren, beispielsweise

$$\vec{v}(3) = (8.72 \times 10^{-8}, 6.81 \times 10^{-6}, -7.56 \times 10^{-6}, -1.09 \times 10^{-5}, -2.04 \times 10^{-5}, -0.001, 0.017, -0.099, 0.310, -0.575, 0.635, -0.385, 0.098),$$

den zu  $\lambda(t=3)$  zugehörigen gemittelten Eigenvektor. Den größten Beitrag bei der Bestimmung des Eigenwertes liefert hier der elfte Operator, was dem Smearing-Level  $N_{APE} = 40$  entspricht. Daneben liefern die Smearing-Level  $N_{APE} = 32, 36$  und  $44$  einen signifikanten Beitrag. Alle weiteren Smearing-Level, insbesondere die sehr kleinen, gehen nur mit einem geringen Anteil in die Berechnung des Eigenvektors und somit der Massen mit ein.

Das Ergebnis bei der Variationsmethode unter Berücksichtigung aller 13 Smearing-Level beträgt  $m_{fit}(t=3) = 0.349(26)$  und liegt somit etwas niedriger als das Ergebnis des Smearing-Levels  $N_{APE} = 40$  von  $m_{fit}(t=3) = 0.354(28)$ .

Abbildung 5.13 zeigt das Verhalten der Masse  $m_{fit}(t=3)$  als Funktion der An-

zahl der Operatoren  $N_{\text{OP}}$  bei HYP-Smearing. Dieses Verhalten ist dem bei APE-Smearing (Abbildung 5.12) sehr ähnlich. Deutlichster Unterschied ist, dass der Abfall der Masse bei Beginn mit dem höchsten Smearing-Level etwas größer ausfällt. Grund dafür ist, dass der Smearing-Level  $N_{\text{HYP}} = 48$  bereits geringfügig zu hoch ist. Ein Blick auf den Eigenvektor

$$\vec{v}(3) = (6.81 \times 10^{-8}, 8.93 \times 10^{-6}, -5.66 \times 10^{-5}, 8.47 \times 10^{-5}, 0.0018, \\ -0.016, 0.076, -0.227, 0.456, -0.614, 0.530, -0.266, 0.058)$$

zeigt, dass hier der zehnte Operator den größten Beitrag bei der Bestimmung des Eigenwertes liefert, was dem Smearing-Level  $N_{\text{HYP}} = 36$  entspricht.

Das Ergebnis bei der Variationsmethode unter Berücksichtigung aller 13 Smearing-Level beträgt  $m_{\text{fit}}(t = 3) = 0.344(26)$  und liegt somit etwas niedriger als das Ergebnis des Smearing-Levels  $N_{\text{HYP}} = 36$  von  $m_{\text{fit}}(t = 3) = 0.359(27)$ .

Beide Ergebnisse stimmen innerhalb des Fehlers miteinander und auch mit den Ergebnissen beim APE-Smearing überein. Die minimale Verbesserung des Ergebnisses durch Variationsmethoden scheint für sich genommen den damit verbundenen Mehraufwand kaum zu rechtfertigen. Der große Vorteil der Variationsmethode besteht vielmehr darin, dass durch sie die Suche nach dem optimalen Smearing-Level entfällt, sofern das gewählte Intervall der Smearing-Level den Bereich des optimalen Smearing-Levels enthält.<sup>8</sup> Dies ist insbesondere auch deshalb wichtig, da sich die Massen abhängig von  $\Delta t$  unterschiedlich mit steigendem Smearing-Level verhalten, wodurch die Suche nach dem optimalen Smearing-Level zusätzlich erschwert wird.

### 5.2.3. Vergleich APE- und HYP-Smearing

Wie im vorherigen Abschnitt festgestellt wurde, unterscheiden sich die Ergebnisse für APE-Smearing und HYP-Smearing praktisch nicht voneinander. Unter Verwendung von Variationsmethoden erhält man  $m_{\text{fit}}(t = 3) = 0.349(26)(91)$  für APE-Smearing beziehungsweise  $m_{\text{fit}}(t = 3) = 0.344(26)(91)$  für HYP-Smearing. Bei anderen Simulationen als dem hier betrachteten Beispiel ist die Verbesserung durch HYP-Smearing ähnlich klein, wenn man bei solch einem minimalen Unterschied

---

<sup>8</sup>In der Regel wird das Intervall  $N_{\text{APE/HYP}} \in [4 : 2L]$  berücksichtigt, wobei die Smearing-Level jeweils in Vierer-Schritten erhöht werden.

überhaupt von einer Verbesserung sprechen kann.

Möchte man auf Variationsmethoden verzichten, so hat APE-Smearing den Vorteil, dass der stabile Bereich mit etwa  $N_{\text{APE}} \in [40:80]$  deutlich größer ist als bei HYP-Smearing, wo er nur etwa  $N_{\text{HYP}} \in [24:50]$  umfasst. Dadurch ist beim APE-Smearing die Gefahr geringer, zu viele Smearing-Level zu verwenden, was zu instabilen Ergebnissen führen kann.

Des Weiteren hat APE-Smearing den Vorteil, dass dort neben dem Smearing-Level nur der Parameter  $\epsilon_{\text{APE}}$  optimiert werden muss, während es bei HYP-Smearing mit  $\epsilon_{\text{HYP},1}$  und  $\epsilon_{\text{HYP},2}$  zwei unabhängige Parameter gibt.

Berücksichtigt man dann noch den um etwa 70% höheren Bedarf an Rechenzeit bei der Verwendung von HYP-Smearing, so spricht auch dies für die weitere Benutzung von APE-Smearing. Daher wurden alle weiteren Untersuchungen mit APE-Smearing durchgeführt.

#### 5.2.4. Verwendung anderer Operatoren

Variationsmethoden beruhen auf der Verwendung unterschiedlicher Operatoren. Bisher wurden diese Operatoren dadurch erzeugt, dass der in Abschnitt 5.1.1 vorgestellte einfachste  $0^{++}$ -Glueball-Operator durch die Anwendung von APE- oder HYP-Smearing variiert wurde (*variational smearing*).

Berg und Billoire [10, 11] haben eine Liste weiterer verschiedener Glueball-Operatoren bis zur Länge von 8 Links vorgestellt. Neben dem 4-Link-Operator aus Abbildung 5.1 umfasst sie drei 6-Link-Operatoren und 18 8-Link-Operatoren, die jeweils eine unterschiedliche Anzahl möglicher Rotationen aufweisen. Jeder dieser Operatoren kann zusätzlich mit APE- und/oder HYP-Smearing kombiniert werden, wodurch sich theoretisch eine sehr hohe Anzahl verschiedener Operatoren erzeugen lässt.

Für diese Arbeit wurden insgesamt fünf verschiedene  $0^{++}$ -Glueball-Operatoren mit den Quantenzahlen  $J^{PC} = 0^{++}$  ausgewählt. Neben dem ursprünglichen 4-Link-Operator mit seinen drei möglichen Rotationen (Operator #1) wurden alle drei 6-Link-Operatoren in die Untersuchung miteinbezogen, wie sie in Abbildung 5.14 dargestellt sind:

- die doppelten Plaketten (double plaquettes) mit sechs möglichen Rotationen (Operator #2),

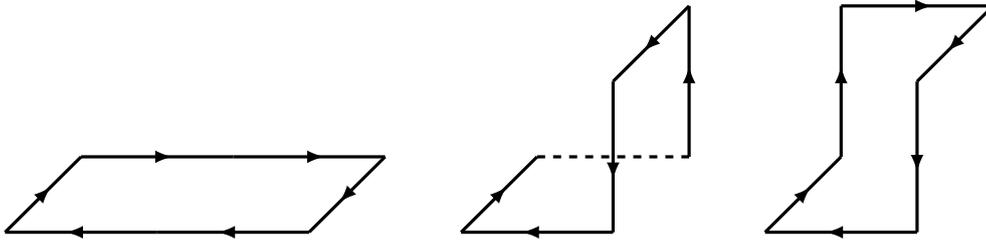


Abbildung 5.14.:  $0^{++}$ -Glueball-Operatoren mit 6 Links (von links nach rechts): Doppelte Plaketten (#2), gebogene Plaketten (#3) und verdrehte Plaketten (#4).

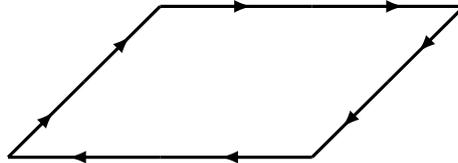


Abbildung 5.15.:  $0^{++}$ -Glueball-Operator mit 8 Links (#5).

- die gebogenen Plaketten (bent plaquettes) mit zwölf möglichen Rotationen (Operator #3),
- die verdrehten Plaketten (twisted plaquettes) mit vier möglichen Rotationen (Operator #4).

Von den 8-Link-Operatoren wurde der Übersichtlichkeit halber nur die erste Möglichkeit ausgewählt, bei der es sich im Grunde um eine Plakette mit doppelter Kantenlänge handelt (Operator #5, siehe Abbildung 5.15). Dieser Operator besitzt wie der einfache 4-Link-Operator nur drei mögliche Rotationen.

Jeder dieser fünf Operatoren wurde mit 16 verschiedenen Smearing-Leveln kombiniert,

$$N_{\text{APE}} = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\} .$$

Dadurch ergeben sich insgesamt 80 verschiedene Operatoren, die bei der Variationsmethode frei miteinander kombiniert werden können. Die Messungen der Operatoren wurden auf einem  $24^3 \times 64$  Gitter mit  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1350$  und 10056 Konfigurationen durchgeführt.

In diesem Fall hat sich während der Analyse gezeigt, dass nicht alle 80 Operatoren

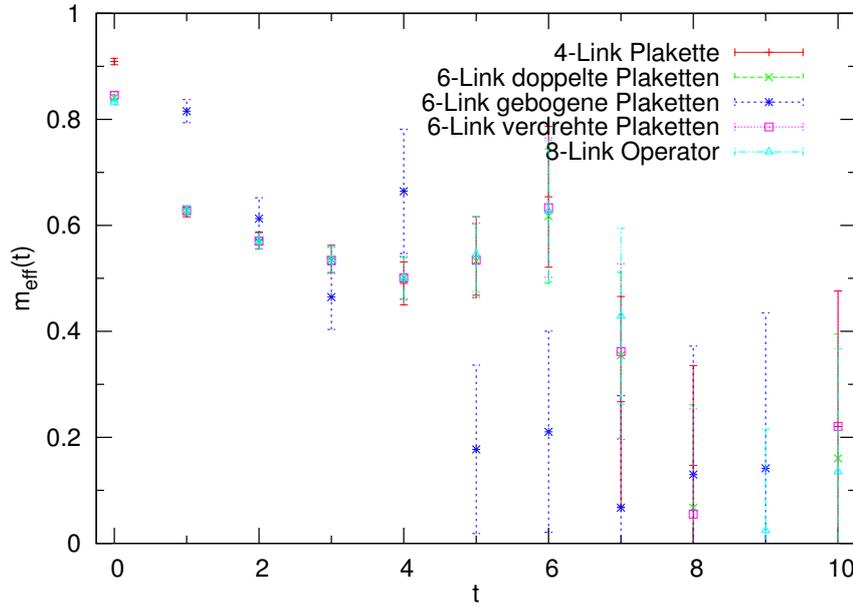


Abbildung 5.16.: Vergleich der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  der verschiedenen Operatoren unter Verwendung von *variational smearing*. Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1350$ , 10056 Konfigurationen.

auf einmal verwendet werden können, da die Korrelationsmatrix dann aufgrund von numerischen Instabilitäten nicht mehr auf allen Jackknife-Bins positiv definit ist.<sup>9</sup> Daher wurde immer nur eine Teilauswahl von maximal 48 verschiedenen Operatoren für die Analyse verwendet.

Neben dieser Einschränkung ist auch noch der große Bedarf an Arbeitsspeicher und Rechenzeit zu beachten. Während man für 35 Operatoren etwa 4.5 GB RAM benötigt, sind es bei 60 Operatoren schon 10 GB, und alle 80 Operatoren gleichzeitig erfordern sogar mindestens 20 GB Arbeitsspeicher.

### Vergleich der verschiedenen Operatoren

Zunächst wurden die verschiedenen Operatoren einzeln miteinander verglichen. Dabei wurde *variational smearing* mit APE-Smearing verwendet, da das Rauschen der einzelnen Operatoren ohne Smearing zu stark für einen aussagekräftigen Vergleich ist.

Abbildung 5.16 zeigt das Verhalten der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  der fünf verschie-

<sup>9</sup>Dass die Korrelationsmatrix sehr empfindlich auf kleine Fluktuationen reagiert, hat sich bereits im Zusammenhang mit der Linearisierung gezeigt, siehe Abschnitt 5.1.5.

	$m_{\text{eff}}(1)$	$m_{\text{eff}}(2)$	$m_{\text{eff}}(3)$	$m_{\text{eff}}(4)$	$m_{\text{eff}}(5)$	$m_{\text{eff}}(6)$
#1	0.625(9)	0.572(16)	0.537(26)	0.490(40)	0.542(74)	0.654(133)
#2	0.628(9)	0.570(15)	0.535(25)	0.501(40)	0.533(70)	0.618(127)
#3	0.815(22)	0.613(39)	0.465(61)	0.664(117)	0.177(159)	0.210(190)
#4	0.628(9)	0.570(15)	0.534(25)	0.501(40)	0.534(70)	0.633(131)
#5	0.628(9)	0.570(15)	0.536(25)	0.499(40)	0.545(71)	0.627(134)

Tabelle 5.2.: Einige Werte der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  für die in Abbildung 5.16 dargestellten Operatoren.

denen Operatoren. Mit Ausnahme von Operator #3 (gebogene Plaketten) stimmen die Ergebnisse bis  $t = 6$  sehr gut miteinander überein. Danach wird der statistische Fehler in allen Fällen so groß, dass man keine verlässlichen Massen mehr erhält.

Die Werte von  $m_{\text{eff}}(t)$  im Bereich  $t \in [1 : 6]$  sind in Tabelle 5.2 aufgelistet. Sowohl die Massen als auch die statistischen Fehler der Operatoren #1, #2, #4 und #5 sind praktisch identisch. Der Operator #3 weist dagegen einen deutlich größeren statistischen Fehler auf und seine Werte fluktuieren stark um die Ergebnisse der übrigen Operatoren.

Die Unterschiede des Operators #3 gegenüber den anderen Operatoren fallen deutlich geringer aus, wenn man anstatt der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  die Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  betrachtet. Alle fünf Operatoren liefern einen *guten* Massen-Fit im Intervall  $[2 : 6]$ . Für Operator #3 ist dort  $m_{\text{fit}}(2) = 0.551(31)$ , während das Ergebnis für alle anderen Operatoren  $m_{\text{fit}}(2) = 0.549(20)$  beträgt. Die Massen stimmen innerhalb des Fehlers überein und der statistische Fehler von Operator #3 ist mit 5.6% immer noch in einem vertretbaren Rahmen.

Bei den verschiedenen Operatoren gibt es insgesamt eine leicht unterschiedliche Anzahl *guter* Fits, die bei der Histogramm-Methode verwendet werden können. Die resultierenden Massen stimmen innerhalb des Fehlers miteinander überein:

- Operator #1:  $m_{\text{hist}} = 0.541(24)$ , 13 *gute* Fits.
- Operator #2:  $m_{\text{hist}} = 0.544(19)$ , 9 *gute* Fits.
- Operator #3:  $m_{\text{hist}} = 0.525(39)$ , 9 *gute* Fits.
- Operator #4:  $m_{\text{hist}} = 0.545(18)$ , 8 *gute* Fits.

- Operator #5:  $m_{\text{hist}} = 0.543(19)$ , 10 *gute* Fits.

Der Operator #3 (gebogene Plaketten) weicht wieder als einziger leicht von den anderen ab und liefert hier die niedrigste Masse, aber gleichzeitig auch den höchsten statistischen Fehler.

Somit kann man festhalten, dass die Operatoren #1, #2, #4 und #5 nahezu identische Ergebnisse liefern. Der Operator #3 stimmt mit diesen Ergebnissen innerhalb des Fehlers überein, er zeigt aber deutlich stärkere Fluktuationen und einen im Mittel 50 bis 100% größeren statistischen Fehler, was sich besonders stark bei Verwendung der effektiven Masse bemerkbar macht. Die Ursache für dieses Verhalten ist unklar. Es könnte darin begründet liegen, dass die doppelten Plaketten mit zwölf verschiedenen Rotationsmöglichkeiten deutlich mehr mögliche Rotationen und damit Rechterme als die anderen Operatoren besitzen, bei denen es maximal sechs verschiedene Rotationen gibt. Dies erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass numerische Instabilitäten auftreten.

### Kombination der verschiedenen Operatoren

Wie bereits beschrieben, wurde immer nur eine Teilauswahl von maximal 48 verschiedenen Operatoren für die Analyse verwendet, da die Korrelationsmatrix sonst oft aufgrund von numerischen Instabilitäten nicht mehr auf allen Jackknife-Bins positiv definit ist. Dieses Problem kann allerdings auch schon bei einer geringeren Anzahl von Operatoren auftreten.

Von den funktionierenden Kombinationen wurden fünf verschiedene ausgewählt, die mit dem 4-Link-Operator mit *variational smearing* verglichen werden:

- 4-Link-Operator mit *variational smearing*, mit allen 16 Smearing-Leveln  
 $N_{\text{APE}} = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$ .
- Alle fünf Operatoren, kombiniert mit den vier Smearing-Leveln  
 $N_{\text{APE}} = \{4, 16, 32, 48\}$  (insgesamt 20 verschiedene Operatoren).
- Alle fünf Operatoren, kombiniert mit den sieben Smearing-Leveln  
 $N_{\text{APE}} = \{4, 8, 16, 24, 32, 40, 48\}$  (insgesamt 35 verschiedene Operatoren).
- 4-Link-Operator #1 und alle 6-Link-Operatoren (#2, #3, #4), kombiniert mit den zwölf Smearing-Leveln  
 $N_{\text{APE}} = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$  (insgesamt 48 verschiedene Operatoren).

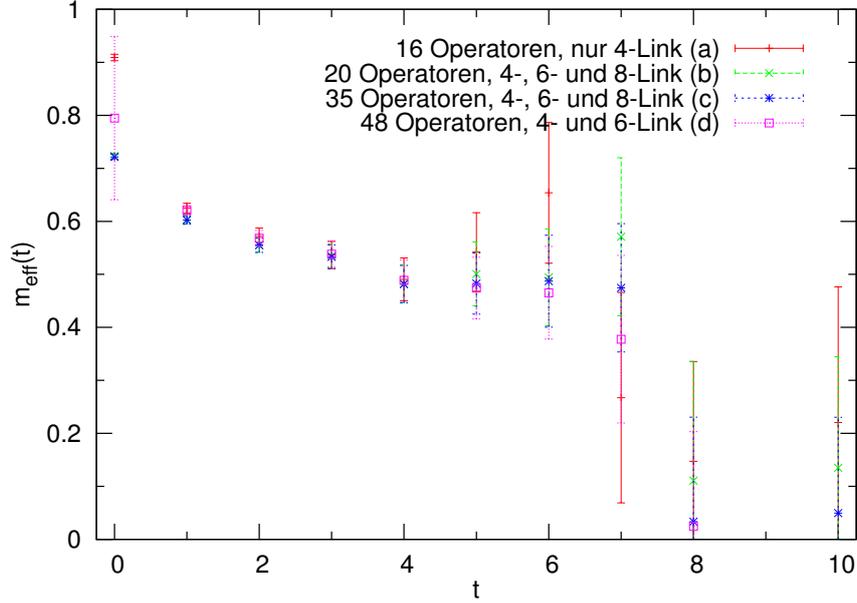


Abbildung 5.17.: Vergleich der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  für verschiedene Kombinationen der Operatoren. Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1350$ , 10056 Konfigurationen.

- (e) 4-Link-Operator #1, 6-Link-Operatoren #2 und #4 und 8-Link-Operator #5, kombiniert mit den vier Smearing-Leveln  $N_{\text{APE}} = \{4, 16, 32, 48\}$  (insgesamt 16 verschiedene Operatoren).
- (f) 4-Link-Operator #1, 6-Link-Operatoren #2 und #4 und 8-Link-Operator #5, kombiniert mit den sieben Smearing-Leveln  $N_{\text{APE}} = \{4, 8, 16, 24, 32, 40, 48\}$  (insgesamt 28 verschiedene Operatoren).

Die Fälle (e) und (f) unterscheiden sich von den Fällen (b) und (c) dadurch, dass der Operator #3 dort nicht berücksichtigt wurde.<sup>10</sup> Auf diese Weise soll untersucht werden, ob dieser bei der oben durchgeführten Einzeluntersuchung auffällige Operator möglicherweise einen negativen Einfluss auf das Ergebnis hat.

Die effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  für die Fälle (a) bis (d) ist in Abbildung 5.17 dargestellt. Bis  $t = 4$  stimmen alle Ergebnisse sehr gut miteinander überein. Im Bereich  $t = 5$  bis  $t = 7$  fällt auf, dass die effektive Masse bei Verwendung mehrerer Operatoren deutlich weniger stark fluktuiert und der statistische Fehler langsamer ansteigt,

<sup>10</sup>Es wurde auch versucht, den Operator #3 für den Fall (d) auszuschließen. Dies führte aber zu einer nicht mehr positiv definiten Korrelationsmatrix.

	$m_{\text{eff}}(1)$	$m_{\text{eff}}(2)$	$m_{\text{eff}}(3)$	$m_{\text{eff}}(4)$	$m_{\text{eff}}(5)$	$m_{\text{eff}}(6)$
(a)	0.625(9)	0.572(16)	0.537(26)	0.490(40)	0.542(74)	0.654(133)
(b)	0.603(8)	0.555(14)	0.535(23)	0.482(36)	0.501(60)	0.494(91)
(c)	0.602(8)	0.555(14)	0.533(22)	0.482(35)	0.483(58)	0.487(87)
(d)	0.621(9)	0.568(15)	0.538(24)	0.489(38)	0.474(58)	0.465(87)
(e)	0.603(8)	0.555(14)	0.536(23)	0.486(36)	0.541(64)	0.511(100)
(f)	0.603(8)	0.555(14)	0.534(22)	0.485(35)	0.531(62)	0.492(92)

Tabelle 5.3.: Einige Werte der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  für die in Abbildung 5.17 dargestellten Kombinationen von Operatoren.

	$m_{\text{fit}}(2)$	$m_{\text{fit}}(3)$	$m_{\text{fit}}(4)$	$m_{\text{fit}}(5)$
(a)	0.549(20)(17) <sup>†</sup>	0.532(33)(17) <sup>†</sup>	0.537(54)(28)	0.509(83)(218)
(b)	0.536(18)(26) <sup>†</sup>	0.511(30)(26) <sup>†</sup>	– –	0.468(58)(– –)
(c)	0.534(18)(28) <sup>†</sup>	0.506(29)(28) <sup>†</sup>	0.482(42)(65)	0.418(42)(137)
(d)	0.542(19)(36) <sup>†</sup>	0.507(30)(45) <sup>†</sup>	0.462(28)(67) <sup>†</sup>	0.395(35)(173) <sup>†</sup>
(e)	0.539(18)(20) <sup>†</sup>	0.519(31)(20)	0.513(48)(22)	0.491(67)(131)
(f)	0.538(18)(22) <sup>†</sup>	0.516(30)(22)	0.502(45)(55)	0.447(53)(160)

Tabelle 5.4.: Einige Werte der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  bei einer Intervalllänge von 5 für die verschiedenen Kombinationen von Operatoren. Als *gut* klassifizierte Fits sind mit † markiert.

als es für den Fall (a) mit nur einem Operator der Fall ist. Das Plateau der effektiven Masse ist bei Verwendung mehrerer Operatoren somit etwas länger und vor allem stabiler.

Die Werte von  $m_{\text{eff}}(t)$  im Bereich  $t \in [1 : 6]$  für die Fälle (a) bis (f) sind in Tabelle 5.3 aufgelistet. Bis  $t = 4$  sind die Werte praktisch identisch, was insbesondere auch für die Fälle (e) und (f) zutrifft, bei denen der Operator #3 weggelassen wurde. Bei  $t = 5$  und  $t = 6$  fällt auf, dass die effektive Masse in den Fällen (e) und (f) etwas stärker fluktuiert als in den Fällen (b) bis (d), wenngleich auch nicht so stark wie im Fall (a). Innerhalb des Fehlers stimmen die Fälle (b) bis (f) jedoch immer miteinander überein und auch der statistische Fehler unterscheidet sich kaum.

Aufgrund des etwas längeren und stabileren Plateaus der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  bei Verwendung von mehreren Operatoren liegt die Vermutung nahe, dass es dort mehr *gute* Massen-Fits mit kleineren Fehlern gibt. Tabelle 5.4 zeigt jedoch, dass dies

nicht der Fall ist.<sup>11</sup> Mehrere Operatoren führen nur zu einer minimalen Verringerung des statistischen Fehlers von  $m_{\text{fit}}(t)$ , gleichzeitig steigt aber der systematische Fehler in fast allen Fällen leicht an. Die Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  sinkt bei Verwendung mehrere Operatoren leicht ab, stimmt aber innerhalb des Fehlers noch mit dem Fall (a) des einzelnen Operators überein.

Die Gesamtzahl aller *guten* Fits ist in allen Fällen nahezu identisch, wie ein Blick auf die Ergebnisse der Histogramm-Methode zeigt:

- Fall (a):  $m_{\text{hist}} = 0.541(24)$ , 13 *gute* Fits.
- Fall (b):  $m_{\text{hist}} = 0.520(26)$ , 14 *gute* Fits.
- Fall (c):  $m_{\text{hist}} = 0.519(27)$ , 13 *gute* Fits.
- Fall (d):  $m_{\text{hist}} = 0.519(39)$ , 14 *gute* Fits.
- Fall (e):  $m_{\text{hist}} = 0.526(22)$ , 14 *gute* Fits.
- Fall (f):  $m_{\text{hist}} = 0.528(21)$ , 11 *gute* Fits.

Alle Ergebnisse stimmen innerhalb des Fehlers miteinander überein, wobei die Verwendung mehrerer Operatoren zu einer minimal geringeren Masse führt.

Insgesamt kann man festhalten, dass die Verwendung mehrerer  $0^{++}$ -Glueball-Operatoren neben dem einfachen 4-Link-Operator nicht zu signifikant besseren Ergebnissen führt. Tendenziell erhält man etwas niedrigere Massen, die Absenkung ist jedoch in allen Fällen kleiner als der zugehörige Fehler. Durch das variational smearing des 4-Link-Operators wird bereits ein so guter Überlapp mit dem Grundzustand erreicht, dass die explizite Definition weiterer Operatoren das Ergebnis kaum noch verändert.

Darüber hinaus führt die Verwendung mehrere Operatoren zu einem deutlich größeren Bedarf an Rechenzeit (quadratischer Zuwachs) und Speicherplatz (linearer Zuwachs). Außerdem kann es vorkommen, dass die Massenbestimmung an einer nicht mehr positiv definiten Korrelationsmatrix scheitert, oder dass einzelne Massen-Fits fehlschlagen ( $m_{\text{fit}}(4)$  in Fall (b)).

Bezüglich des in der Einzeluntersuchung auffälligen Operators #3 kann man festhalten, dass dieser Operator trotzdem ohne Probleme berücksichtigt werden kann.

---

<sup>11</sup>Die zugehörige Abbildung A.11 ist im Anhang auf Seite 161 zu finden.

In den meisten Fällen haben die Fälle (b) bis (d) mit diesem Operator sogar geringfügig niedrigere Massen als die Fälle (e) und (f), bei denen der Operator #3 ausgeschlossen wurde.

Vor diesem Hintergrund ist zu überlegen, ob möglicherweise eine Verbesserung der Ergebnisse möglich wäre, wenn anstatt der fünf verschiedenen Operatoren eine deutlich höhere Anzahl verschiedener Operatoren verwendet würden. Da man dann aber gleichzeitig die Anzahl der verschiedenen Smearing-Level reduzieren müsste, ist nicht mit einer signifikanten Änderung der Ergebnisse zu rechnen.

### 5.3. Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Massenbestimmung des  $0^{++}$ -Glueballs und des  $0^{-+}$ -Glueballs präsentiert. Dabei werden die Massen in Gittereinheiten angegeben, um eine gute Vergleichbarkeit zu ermöglichen und Unsicherheiten durch die Umrechnung in physikalische Einheiten zu vermeiden.

Die Simulationen sind auf vier Abschnitte verteilt, bei denen jeweils die Simulationen mit identischer Eichkopplung  $\beta$  und gleicher Anzahl an Levels von Stout-Smearing zusammengefasst werden. Ein fünfter Abschnitt widmet sich den Ergebnissen bei reiner Eichtheorie. In allen Fällen wurde APE-Smearing mit variational smearing eingesetzt, die verwendeten Smearing-Level sind in jedem Abschnitt aufgeführt.

In jedem Abschnitt werden die Simulationen in tabellarischer Form aufgelistet, beginnend mit der verwendeten Gittergröße, der Eichkopplung  $\beta$ , dem Hoppingparameter  $\kappa$  und der Anzahl verwendeter Konfigurationen  $N_{\text{conf}}$ . Dazu wird die Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$  für ein ausgewähltes *gutes* Intervall aufgelistet, wobei wenn möglich für Simulationen innerhalb einer Tabelle dasselbe Fit-Intervall verwendet wird.<sup>12</sup> Der letzte Eintrag enthält die mit der Histogramm-Methode ermittelte Masse  $m_{\text{hist}}$  und die Anzahl der dafür berücksichtigten Fits.

Passend für jeden Abschnitt wurden außerdem Plots der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  und der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  bei fester Fit-Intervalllänge von fünf erstellt, getrennt für den  $0^{++}$ -Glueball und den  $0^{-+}$ -Glueball. Die Datenpunkte bei gleicher Zeit  $t$  sind für die verschiedenen Werte von  $\kappa$  jeweils leicht versetzt dargestellt, um ein einfacheres Ablesen der Werte zu ermöglichen.

---

<sup>12</sup>Entscheidend für die Vergleichbarkeit ist der Start  $t_1$  des Fit-Intervalls, da sich die Ergebnisse für unterschiedliche Enden  $t_2$  nur wenig voneinander unterscheiden.

### 5.3.1. $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing

Die ersten für diese Arbeit betrachteten Untersuchungen wurden bei  $\beta = 1.75$  auf einem  $32^3 \times 64$  Gitter durchgeführt [13]. Ältere Untersuchungen der DESY-Münster-Kollaboration bei  $\beta = 1.60$  hatten eine unerwartete Massendifferenz zwischen bosonischen und fermionischen Teilchen gezeigt [36], weshalb der Gitterabstand durch die Erhöhung von  $\beta$  weiter verkleinert werden sollte. Die Untersuchungen auf dem  $32^3 \times 64$  Gitter wurden später durch Untersuchungen auf einem  $24^3 \times 48$  Gitter ergänzt, die eine höhere Statistik ermöglichten [14, 15].

Bei der Messung der Glueball-Operatoren wurde auf dem  $32^3 \times 64$  Gitter APE-Smearing mit 16 Smearing-Leveln im Intervall  $N_{\text{APE}} \in [4 : 64]$  angewendet. Auf dem  $24^3 \times 48$  Gitter hat sich APE-Smearing mit 12 Smearing-Leveln im Intervall  $N_{\text{APE}} \in [4 : 48]$  als ausreichend erwiesen.

#### $0^{++}$ -Glueball

Abbildung 5.18 zeigt die effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  und Abbildung 5.19 die Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs auf dem  $32^3 \times 64$  Gitter, Abbildungen 5.20 und 5.21 dieselben auf dem  $24^3 \times 48$  Gitter. Es wurde jeweils Simulationen für vier verschiedene Werte von  $\kappa$  durchgeführt, wobei die Werte  $\kappa = 0.1490$  und  $\kappa = 0.1492$  für beide Gittergrößen verwendet wurden.

Auf dem  $32^3 \times 64$  Gitter ist es in allen Fällen schwierig, ein Plateau der effektiven Masse zu identifizieren. Für  $\kappa = 0.1490$ ,  $\kappa = 0.1492$  und  $\kappa = 0.1494$  stimmen die Werte von  $m_{\text{eff}}(t)$  ungefähr im Intervall  $t \in [3 : 7]$  innerhalb des Fehlers miteinander überein, was aber vor allem durch den großen statistischen Fehler ermöglicht wird. Bei  $\kappa = 0.1495$  sieht man bereits ab  $t = 5$  starke Fluktuationen, welche auf die geringe Statistik von nur  $N_{\text{conf}} = 1887$  Konfigurationen zurückzuführen sind. Auffällig ist darüber hinaus, dass die effektive Masse bei  $\kappa = 0.1494$  und  $\kappa = 0.1495$  tendenziell über der bei  $\kappa = 0.1490$  und  $\kappa = 0.1492$  liegt, obwohl man eigentlich leichtere Massen erwarten würde.

Der statistische Fehler der effektiven Masse ist auf dem  $24^3 \times 48$  Gitter deutlich kleiner. Für  $\kappa = 0.1490$ ,  $\kappa = 0.1492$  und  $\kappa = 0.14925$  erkennt man jeweils im Bereich  $t \in [2 : 5]$  ein Plateau, wobei die effektive Masse wie zu erwarten mit zunehmendem  $\kappa$  abnimmt. Anders sieht es jedoch bei  $\kappa = 0.1493$  aus, hier ist kein Plateau erkennbar und die effektive Masse ist bis  $t = 4$  sogar deutlich zu groß.

Tabelle 5.5 listet die Fit-Massen  $m_{\text{fit}}(t)$  und die mit der Histogramm-Methode

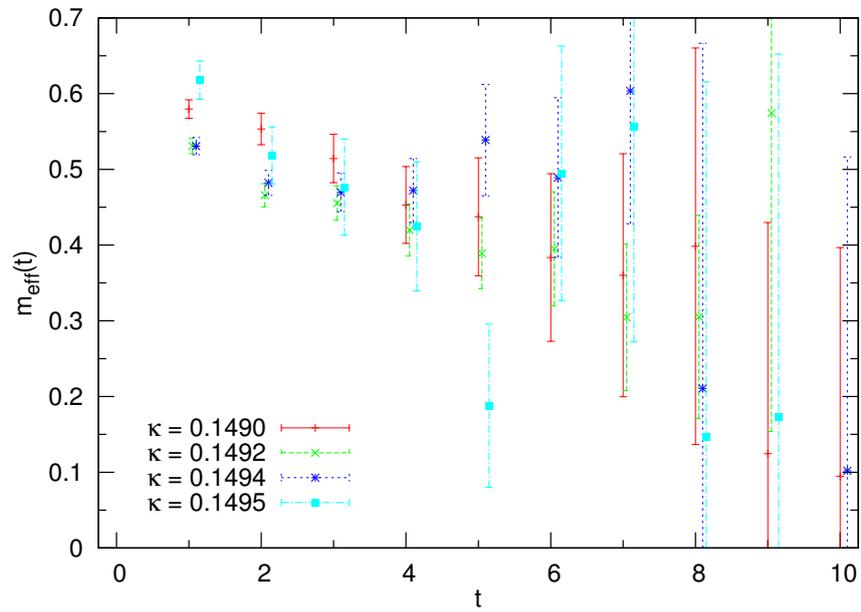


Abbildung 5.18.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $32^3 \times 64$ .

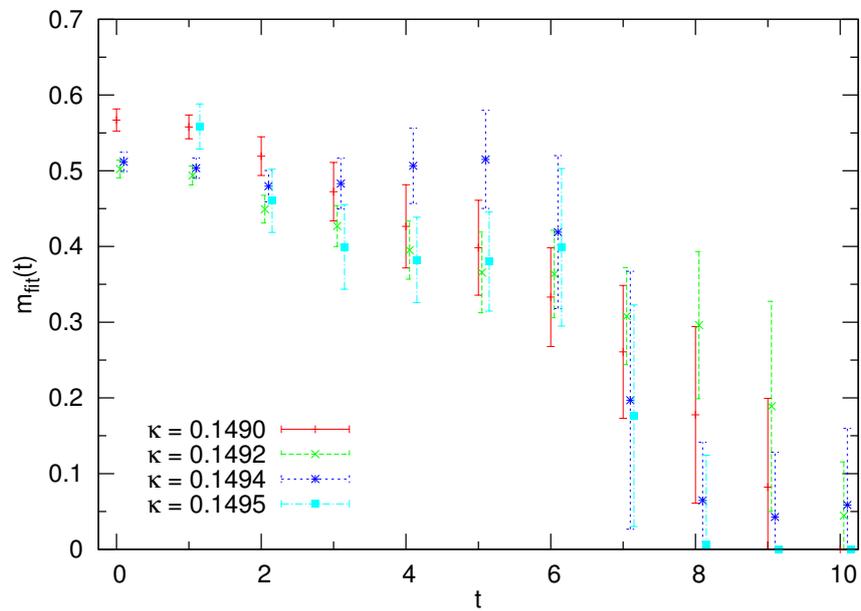


Abbildung 5.19.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $32^3 \times 64$ .

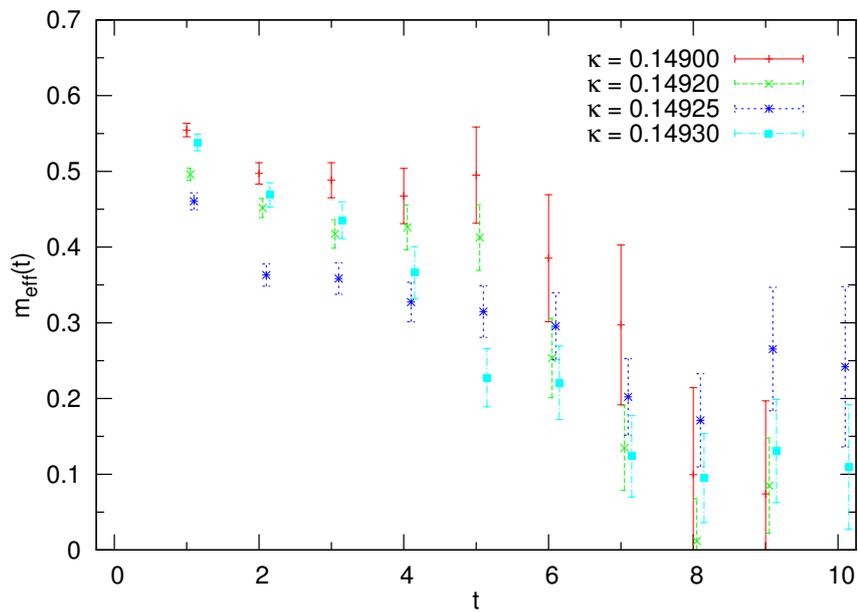


Abbildung 5.20.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $24^3 \times 48$ .

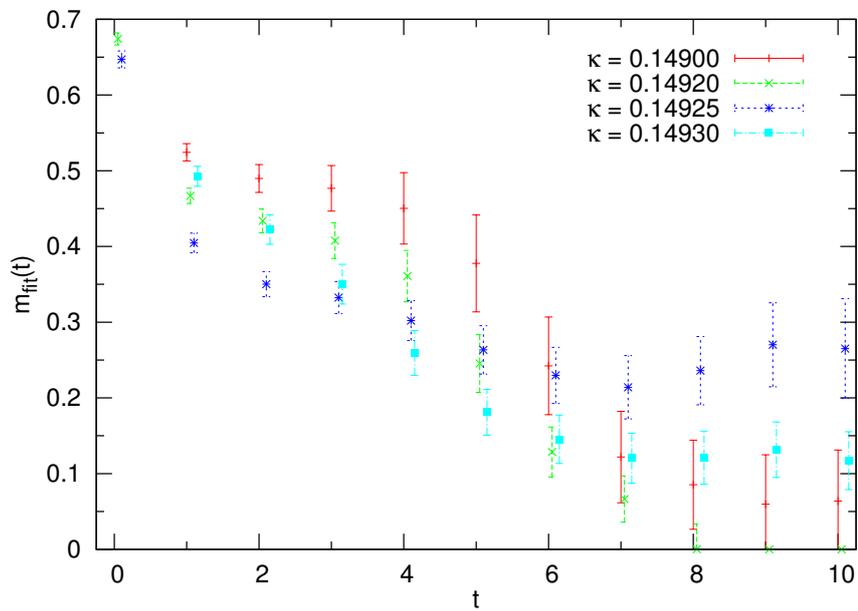


Abbildung 5.21.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $24^3 \times 48$ .

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$32^3 \times 64$	1.75	0.1490	4864	0.472(39)(47)	3	7	0.486(72)	29
$32^3 \times 64$	1.75	0.1492	6207	0.427(27)(32)	3	7	0.417(32)	18
$32^3 \times 64$	1.75	0.1494	5466	0.489(34)(11)	3	8	0.492(21)	22
$32^3 \times 64$	1.75	0.1495	1887	0.460(42)(98)	3	7	0.481(62)	10
$24^3 \times 48$	1.75	0.1490	9350	0.476(30)(27)	3	7	0.481(22)	10
$24^3 \times 48$	1.75	0.1492	13017	0.408(24)(47)	3	7	0.423(24)	9
$24^3 \times 48$	1.75	0.14925	7224	0.332(21)(31)	3	7	0.301(41)	19
$24^3 \times 48$	1.75	0.1493	10280	0.442(18)(68)	2	5	0.431(31)	4

Tabelle 5.5.: Masse des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing.

ermittelten Massen  $m_{\text{hist}}(t)$  für beide Gitter auf. Die Ergebnisse für  $\kappa = 0.1490$  und  $\kappa = 0.1492$  stimmen auf beiden Gittern miteinander überein, die Gittergröße von  $24^3 \times 48$  ist also bereits ausreichend. Auch die Massen bei  $\kappa = 0.14925$  auf dem  $24^3 \times 48$  Gitter erscheinen plausibel. Für  $\kappa \geq 0.1493$  erhält man jedoch auf beiden Gittern Massen, die höher als die vorherigen sind. Die Anzahl der Konfigurationen ist bis auf den Fall  $\kappa = 0.1495$  mit den anderen Simulationen vergleichbar, und selbst bei  $\kappa = 0.1495$  liegt der statistische Fehler noch unter 10%. Der Effekt der zu großen Masse wird auch beim  $a-f_0$  und beim Gluino-Glue ( $\tilde{g}g$ ) beobachtet [16] und könnte damit zusammenhängen, dass bei  $\kappa = 0.1494$  und  $\kappa = 0.1495$  Korrekturfaktoren berücksichtigt werden mussten.<sup>13</sup>

Dank der höheren Anzahl an Konfigurationen ist der statistische Fehler auf dem  $24^3 \times 48$  Gitter kleiner als auf dem  $32^3 \times 64$  Gitter. Der systematische Fehler der Fit-Massen  $m_{\text{fit}}(t)$  hat dieselbe Größenordnung wie der statistische Fehler und ist in einigen Fällen sogar größer als dieser. Dies ist eine direkte Folge des kurzen Plateaus der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$ , aufgrund dessen die Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  selbst gar kein Plateau zeigt (siehe Abbildung 5.19 und Abbildung 5.21).

### $0^{-+}$ -Glueball

Für den  $0^{-+}$ -Glueball können keine verlässlichen Ergebnisse angegeben werden. Die effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  zeigt in keinem Fall ein Plateau, die entsprechenden Abbildungen sind daher nur im Anhang auf Seite 163 und 164 aufgeführt. Tabelle 5.6

<sup>13</sup>Bei  $\kappa = 0.1494$  sind etwa 1% der Korrekturfaktoren kleiner als 0.98, bei  $\kappa = 0.1495$  sind es ungefähr 3% [16].

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$32^3 \times 64$	1.75	0.1490	4859	0.778(67)(307)	2	5	0.847(97)	3
$32^3 \times 64$	1.75	0.1492	6196	0.976(68)(354)	2	5	1.030(23)	4
$32^3 \times 64$	1.75	0.1494	5471	0.849(59)(212)	2	5	0.933(33)	3
$32^3 \times 64$	1.75	0.1495	1887	0.719(77)(271)	2	5	0.803(28)	2
$24^3 \times 48$	1.75	0.1490	9350	0.674(47)(163)	2	6	0.705(34)	3
$24^3 \times 48$	1.75	0.1492	10027	0.825(59)(229)	2	5	0.877(56)	5
$24^3 \times 48$	1.75	0.14925	7224	0.770(65)(230)	2	6	0.859(71)	4
$24^3 \times 48$	1.75	0.1493	10250	--	--	--	--	--

Tabelle 5.6.: Masse des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing.

entnimmt man, dass es dementsprechend kaum *gute* Fits gibt, im Fall  $\kappa = 0.1493$  sogar keinen einzigen. Die wenigen *guten* Fits haben zwar einen vertretbaren statistischen Fehler von knapp unter 10%, dafür liegt der systematische Fehler aber zwischen 25 und 40%. Aufgrund dieser Unsicherheiten kann lediglich ausgesagt werden, dass der  $0^{-+}$ -Glueball wie zu erwarten schwerer als der  $0^{++}$ -Glueball ist.

### 5.3.2. $\beta = 1.75$ , 3 Level Stout-Smearing

Die vorangegangenen Untersuchungen bei  $\beta = 1.75$  wurden durch weitere Simulationen auf einem  $24^3 \times 64$  Gitter mit drei Leveln Stout-Smearing ergänzt [16, 17]. Dabei wurden für fünf verschiedene Werte von  $\kappa$  jeweils etwa  $N_{\text{conf}} \approx 10000$  Konfigurationen erzeugt, eine genaue Übersicht befindet sich in Tabelle 5.7. Bei der Messung der Glueball-Operatoren wurde APE-Smearing mit 12 Smearing-Leveln im Intervall  $N_{\text{APE}} \in [4 : 48]$  eingesetzt.

#### $0^{++}$ -Glueball

Abbildung 5.22 zeigt die effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs für die verschiedenen Werte von  $\kappa$ , Abbildung 5.23 die zugehörige Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$ . Es ist erneut schwierig, ein Plateau der effektiven Masse auszumachen. Für  $\kappa = 0.1350$ ,  $\kappa = 0.1355$  und  $\kappa = 0.1365$  stimmen die Werte von  $m_{\text{eff}}(t)$  jeweils ungefähr im Intervall  $t \in [2 : 5]$  innerhalb des Fehlers miteinander überein, während die effektive Masse bei  $\kappa = 0.1360$  und  $\kappa = 0.1368$  in diesem Intervall kontinuierlich abfällt. Auffällig ist auch, dass die effektive Masse bis  $t = 2$  proportional zu  $\kappa$  geordnet ist, danach sind die Werte von  $\kappa = 0.1360$  niedriger als erwartet.

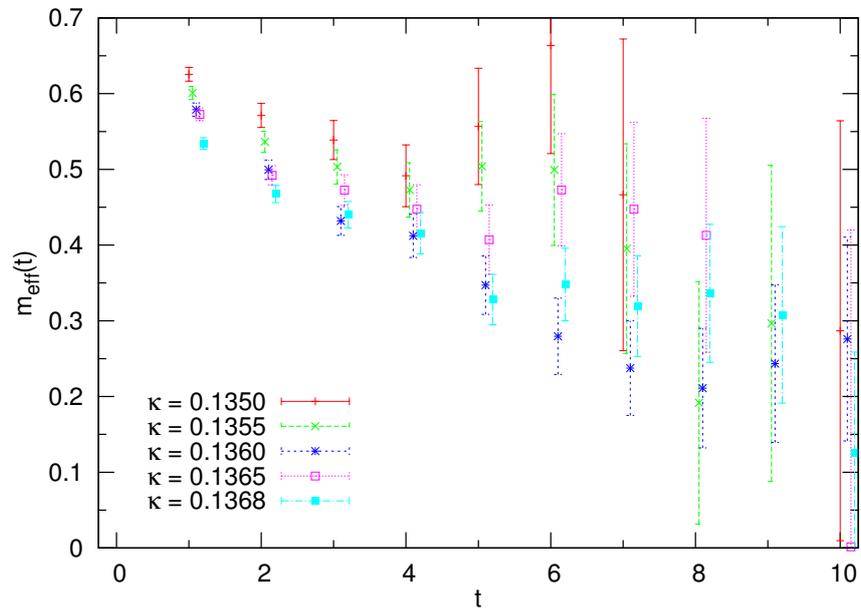


Abbildung 5.22.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 3 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $24^3 \times 64$ .

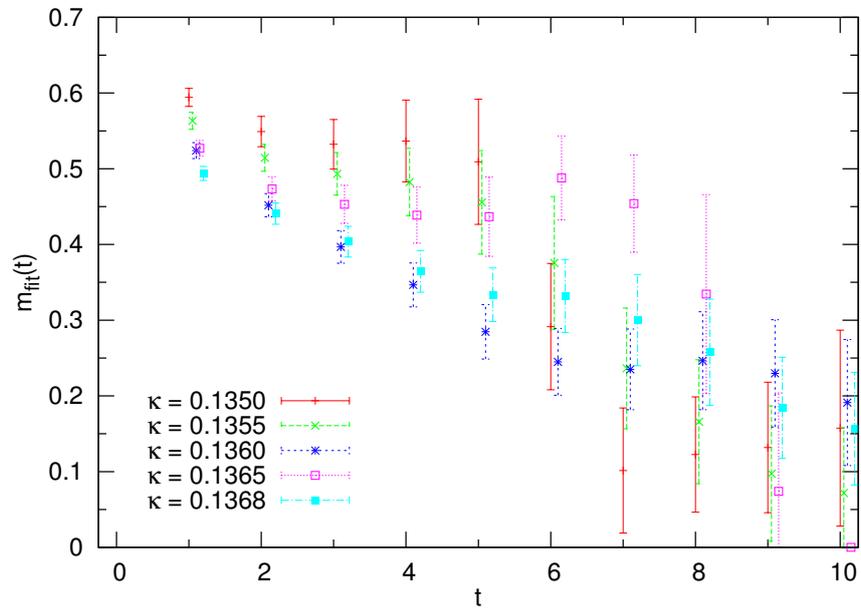


Abbildung 5.23.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 3 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $24^3 \times 64$ .

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$24^3 \times 64$	1.75	0.1350	10056	0.532(33)(17)	3	7	0.541(24)	13
$24^3 \times 64$	1.75	0.1355	10311	0.490(30)(22)	3	7	0.500(24)	13
$24^3 \times 64$	1.75	0.1360	10023	0.396(22)(55)	3	7	0.377(49)	14
$24^3 \times 64$	1.75	0.1365	9666	0.452(25)(20)	3	7	0.447(24)	28
$24^3 \times 64$	1.75	0.1368	10188	0.403(20)(39)	3	7	0.387(41)	19

Tabelle 5.7.: Masse des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 3 Level Stout-Smearing.

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$24^3 \times 64$	1.75	0.1350	10056	--	--	--	--	--
$24^3 \times 64$	1.75	0.1355	10311	0.873(57)(186)	2	5	0.881(39)	2
$24^3 \times 64$	1.75	0.1360	10023	0.919(59)(373)	2	5	0.957(42)	2
$24^3 \times 64$	1.75	0.1365	9666	0.949(59)(252)	2	4	1.000(76)	2
$24^3 \times 64$	1.75	0.1368	10188	0.928(55)(185)	2	5	0.938(37)	2

Tabelle 5.8.: Masse des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 3 Level Stout-Smearing.

Das Verhalten der Fit-Masse ist ähnlich (Abbildung 5.23). Für  $\kappa = 0.1350$ ,  $\kappa = 0.1355$  und  $\kappa = 0.1365$  ist  $m_{\text{fit}}(t)$  im Intervall  $t \in [2 : 5]$  relativ konstant. Bei  $\kappa = 0.1360$  und  $\kappa = 0.1368$  stabilisieren sich die Werte erst ab  $t = 5$ , *gute* Fits sind jedoch nur bis  $t = 4$  zu finden.

In der tabellarischen Übersicht 5.7 macht sich das Verhalten bei  $\kappa = 0.1360$  und  $\kappa = 0.1368$  durch einen deutlich größeren systematischen Fehler der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  bemerkbar, ebenso steigt der Fehler der mit der Histogramm-Methode ermittelten Masse  $m_{\text{hist}}$  ungefähr um den Faktor 2. Die für  $\kappa = 0.1360$  ermittelte Masse erscheint außerdem bei allen angewandten Methoden zu gering zu sein. Dieser Effekt ist ähnlich beim  $a-f_0$  zu beobachten [16], wenn auch etwas weniger stark ausgeprägt als beim  $0^{++}$ -Glueball. Dort beträgt  $m_{a-f_0}(\kappa = 0.1360) = 0.401(30)(45)$ , während  $m_{a-f_0}(\kappa = 0.1360) = 0.4027(280)(16)$  ist.

### $0^{-+}$ -Glueball

Tabelle 5.8 zeigt, dass für den  $0^{-+}$ -Glueball wie schon bei einem Level Stout-Smearing keine verlässlichen Ergebnisse angegeben werden können. Für die entsprechenden Abbildungen sei daher wieder auf den Anhang verwiesen, Seite 165.

### 5.3.3. $\beta = 1.90$ , 1 Level Stout-Smearing

Insgesamt zeigte die Anwendung von drei Leveln Stout-Smearing keine wesentlichen Verbesserungen gegenüber nur einem Level Stout-Smearing, weshalb der Gitterabstand weiter verkleinert wurde. Dazu wurde als Nächstes  $\beta = 1.90$  gewählt und die Gittergröße wieder auf  $32^3 \times 64$  erhöht [20]. Für  $\kappa = 0.1433$  und  $\kappa = 0.14387$  wurden  $N_{\text{conf}} \approx 5000$  Konfigurationen erzeugt, für  $\kappa = 0.14415$  und  $\kappa = 0.14435$  etwa doppelt so viele, siehe Tabelle 5.9. Bei der Messung der Glueball-Operatoren wurde APE-Smearing mit 12 Smearing-Leveln im Intervall  $N_{\text{APE}} \in [4 : 48]$  eingesetzt, eine Erhöhung der Anzahl der Smearing-Level war trotz der gestiegenen räumlichen Ausdehnung  $L$  des Gitters nicht nötig.

#### $0^{++}$ -Glueball

Abbildung 5.24 zeigt das Verhalten der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$ , wobei der sichtbare Ausschnitt dieses Mal bewusst etwas erweitert wurde.  $\kappa = 0.1433$  zeigt nur einen kurzen stabilen Bereich im Intervall  $t \in [3 : 5]$ , danach fangen die Werte der effektiven Masse sehr stark an zu schwanken. Möglicherweise reicht die Statistik von  $N_{\text{conf}} = 5125$  Konfigurationen in diesem Fall noch nicht aus. Die Werte von  $\kappa = 0.14387$  fallen dadurch auf, dass sie im Vergleich zu den übrigen Ergebnissen systematisch zu niedrig zu sein scheinen, ein Plateau ist erst im Bereich  $t \in [8 : 11]$  erkennbar. Für  $\kappa = 0.14415$  zeigt die effektive Masse im Intervall  $t \in [4 : 8]$  ein Plateau, um danach sprunghaft abzufallen.

Das längste Plateau zeigt sich bei  $\kappa = 0.14435$  im Bereich  $t \in [7 : 13]$  und umfasst damit ganze sieben Datenpunkte. Ein derart langes Plateau wurde in keinem der vorherigen Fälle beobachtet. Als Folge davon zeigt auch die in Abbildung 5.25 dargestellte Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  ein Plateau und der systematische Fehler der Fit-Massen ist in diesem Bereich erstmals signifikant kleiner als der statistische Fehler:

$$\begin{aligned}
 m_{\text{fit}}(6, 10) &= 0.169(14)(26) , \\
 m_{\text{fit}}(7, 11) &= 0.157(16)(12) , \\
 m_{\text{fit}}(8, 12) &= 0.162(20)( 5) , \\
 m_{\text{fit}}(9, 13) &= 0.163(23)( 1) , \\
 m_{\text{fit}}(10, 14) &= 0.163(25)( 4) .
 \end{aligned}$$

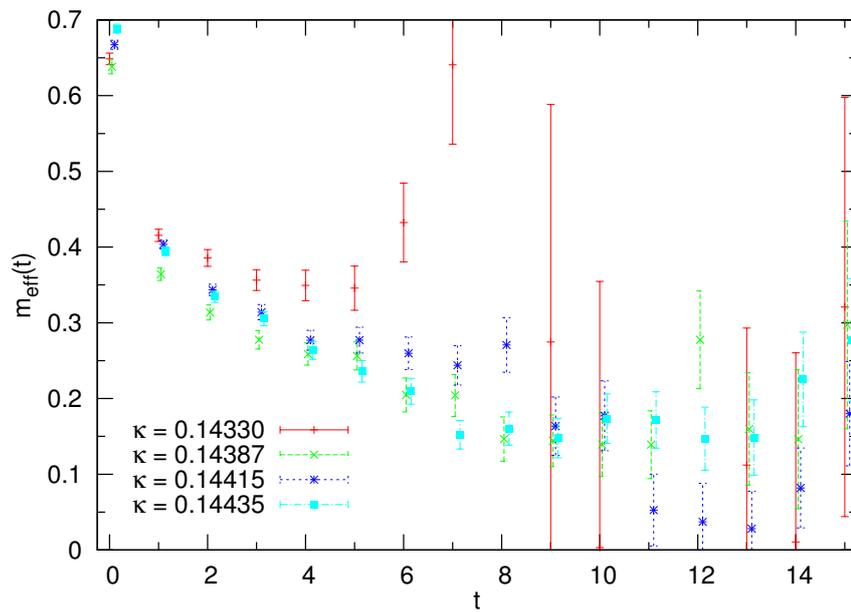


Abbildung 5.24.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.90$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $32^3 \times 64$ .

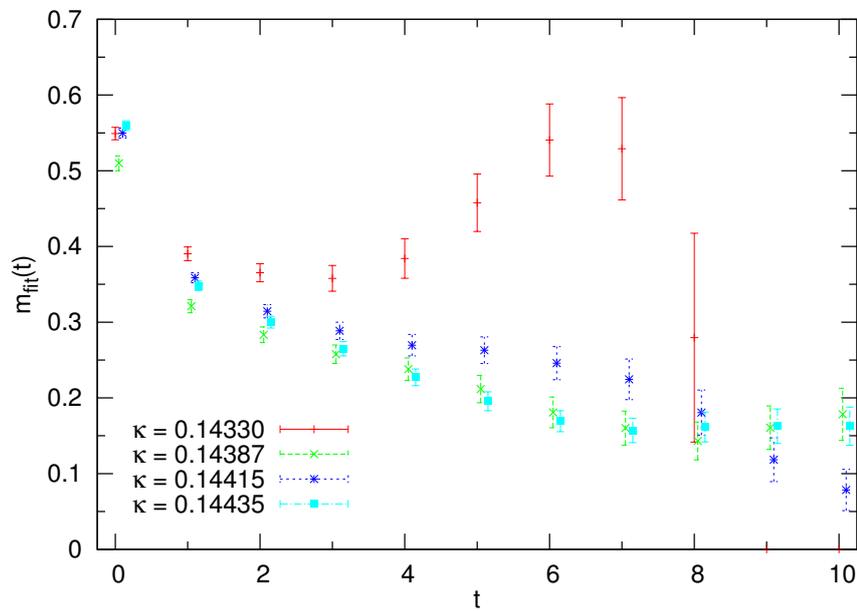


Abbildung 5.25.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.90$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $32^3 \times 64$ .

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$32^3 \times 64$	1.90	0.1433	5125	0.384(26)(73)	4	8	0.399(39)	25
$32^3 \times 64$	1.90	0.14387	5034	0.227(15)(27)	4	8	0.235(39)	26
$32^3 \times 64$	1.90	0.14415	10619	0.269(14)(19)	4	8	0.271(28)	22
$32^3 \times 64$	1.90	0.14435	10680	0.216(11)(29)	4	8	0.203(41)	33

Tabelle 5.9.: Masse des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.90$ , 1 Level Stout-Smearing.

Von diesen Fits wird jedoch nur der erste bei der Histogramm-Methode berücksichtigt, da nur dort der statistische Fehler unter 10% liegt.

Tabelle 5.9 zeigt den in allen Fällen *guten* Fit  $m_{\text{fit}}(4, 8)$  und die mit der Histogramm-Methode ermittelte Masse  $m_{\text{hist}}$ . Die Gesamtzahl der für  $m_{\text{fit}}$  berücksichtigten Fits ist in allen hoch und erreicht im Fall  $\kappa = 0.14435$  den bisher höchsten Wert. Auch in dieser Übersicht erscheint die Masse bei  $\kappa = 0.14387$  wie schon im Plot der effektiven Masse zu gering.

Bei  $\kappa = 0.14435$  ist  $m_{\text{hist}} = 0.203(41)$  signifikant größer als die in der Mitte des Plateaus der effektiven Masse ermittelte Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(8, 12) = 0.162(20)(5)$ , sie stimmen nur knapp innerhalb des Fehlers miteinander überein. Offensichtlich werden zu viele frühe Fits und zu wenige Fits aus dem Bereich des Plateaus berücksichtigt. Eine weitere Verkleinerung des statistischen Fehlers, beispielsweise durch die Erzeugung weiterer Konfigurationen, sollte in diesem Fall zu einer sichtbaren Verringerung der mit der Histogramm-Methode ermittelten Masse  $m_{\text{hist}}$  führen.

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$32^3 \times 64$	1.90	0.1433	5125	0.588(36)(62)	2	6	0.591(25)	6
$32^3 \times 64$	1.90	0.14387	5034	0.565(30)(42)	2	6	0.540(48)	13
$32^3 \times 64$	1.90	0.14415	10619	0.591(23)(35)	2	6	0.576(28)	12
$32^3 \times 64$	1.90	0.14435	10680	0.579(26)(50)	3	7	0.599(53)	19

Tabelle 5.10.: Masse des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.90$ , 1 Level Stout-Smearing. **$0^{-+}$ -Glueball**

Bei  $\beta = 1.90$  zeigt die Masse des  $0^{-+}$ -Glueballs erstmals Ansätze eines Plateaus, wie man in Abbildung 5.26 erkennen kann. Der stabile Bereich erstreckt sich von  $t = 2$  bis  $t \approx 4$ , bereits ab  $t \approx 3$  sind die Unsicherheiten jedoch schon so groß, dass sich die effektiven Massen für die verschiedenen Werte von  $\kappa$  nicht mehr voneinander trennen lassen.

Dies wird auch durch einen Blick auf Tabelle 5.10 verdeutlicht. Zwar gibt es erstmals zweistellige Werte für die Anzahl *guter* Fits bei einem  $0^{-+}$ -Glueball, die für die verschiedenen Werte von  $\kappa$  ermittelten Massen stimmen jedoch alle innerhalb des Fehlers miteinander überein. Eine aussagekräftige Interpolation der  $0^{-+}$ -Glueball-Masse zum Punkt verschwindender Gluino-Masse ist so noch nicht möglich, im Vergleich zu den Ergebnissen bei  $\beta = 1.75$  ist aber schon eine deutliche Verbesserung erkennbar.

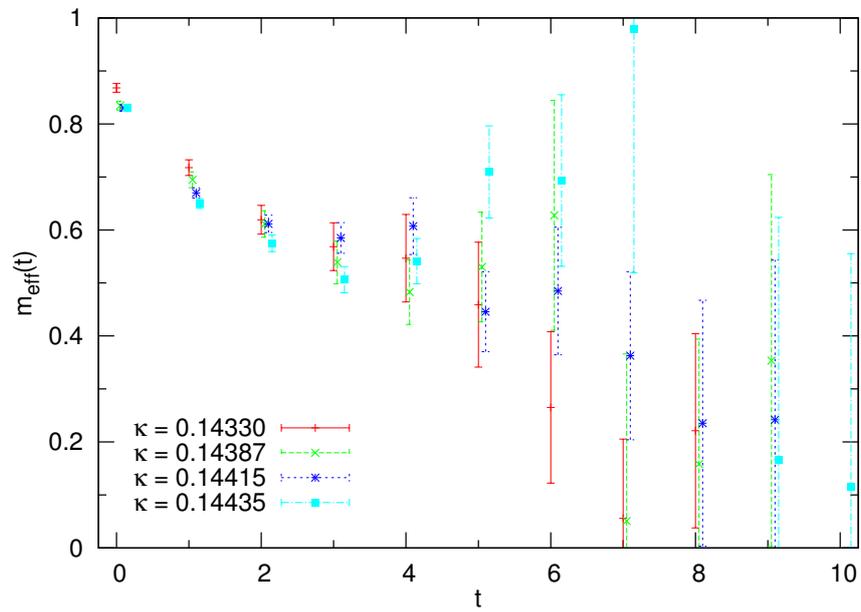


Abbildung 5.26.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.90$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $32^3 \times 64$ .

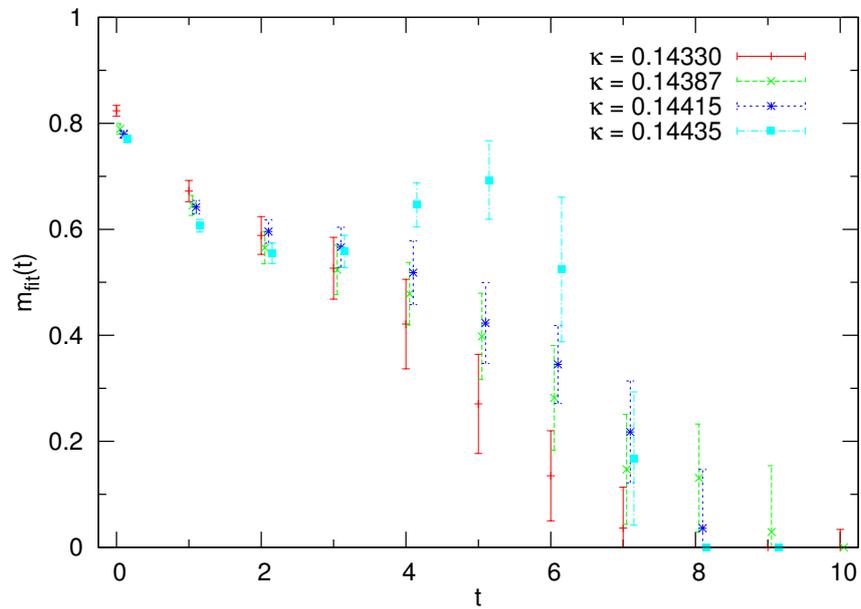


Abbildung 5.27.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.90$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $32^3 \times 64$ .

### 5.3.4. $\beta = 2.10$ , 1 Level Stout-Smearing

Die letzten Untersuchungen wurden bei  $\beta = 2.10$  durchgeführt. Aufgrund des kleineren Gitterabstandes musste die Gittergröße auf  $48^3 \times 96$  erhöht werden. Die Zahl der Gitterpunkte ist dadurch etwa fünfmal so groß wie die eines  $32^3 \times 64$  Gitters, weshalb bisher nur zwischen 1400 und 4000 Konfigurationen für drei verschiedene Werte von  $\kappa$  erzeugt werden konnten (siehe Tabelle 5.11). Bei der Messung der Glueball-Operatoren wurde APE-Smearing mit 16 Smearing-Leveln im Intervall  $N_{\text{APE}} \in [0 : 48]$  verwendet, wobei die Smearing-Level  $N_{\text{APE}} = \{0, 1, 2, 3\}$  neu hinzugekommen sind.

#### $0^{++}$ -Glueball

Abbildung 5.28 zeigt das Verhalten der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  und Abbildung 5.29 das der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  beim  $0^{++}$ -Glueball. Die effektive Masse hat trotz der geringen Anzahl an Konfigurationen für alle drei Fälle von  $\kappa$  einen relativ stabilen Bereich. Dieser erstreckt sich für  $\kappa = 0.1397$  ungefähr über das Intervall  $t \in [2 : 6]$  und für  $\kappa = 0.1400$  über das Intervall  $t \in [3 : 8]$ . Bei  $\kappa = 0.1401$  zeigt sich sogar ein sehr deutliches und langes Plateau, das sich von  $t = 4$  bis  $t = 10$  erstreckt. Dort ist die Zahl der Konfigurationen mit  $N_{\text{conf}} = 4013$  am höchsten, entsprechend klar ist das Signal der effektiven Masse.

Dank der relativ stabilen Bereiche der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  zeigt die Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  in allen Fällen ein deutliches Plateau (Abbildung 5.29). Für  $\kappa = 0.1397$  erstreckt sich das Plateau über den Bereich  $t \in [1 : 4]$  und für  $\kappa = 0.1400$  über den Bereich  $t \in [3 : 7]$ . Bei  $\kappa = 0.1401$  reicht das Plateau sogar mindestens über das Intervall  $t \in [4 : 9]$ , und bis  $t = 7$  ist der systematische Fehler so klein, dass der Gesamtfehler nur vom statistischen Fehler abhängt:

$$\begin{aligned}
 m_{\text{fit}}(4, 8) &= 0.176(9)(3)(9) , \\
 m_{\text{fit}}(5, 9) &= 0.173(10)(3)(10) , \\
 m_{\text{fit}}(6, 10) &= 0.170(11)(3)(11) , \\
 m_{\text{fit}}(7, 11) &= 0.171(13)(6)(14) , \\
 m_{\text{fit}}(8, 12) &= 0.165(16)(9)(18) , \\
 m_{\text{fit}}(9, 13) &= 0.156(19)(25)(31) .
 \end{aligned}$$

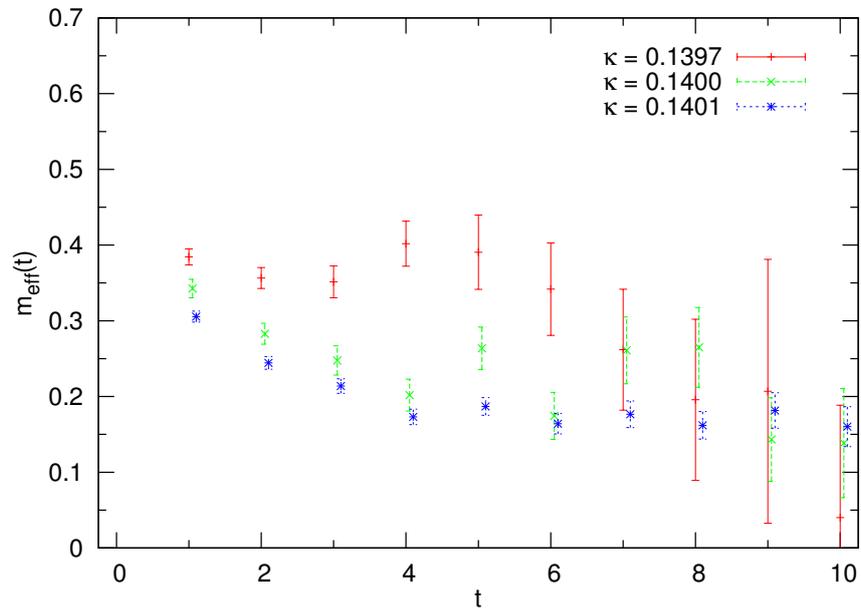


Abbildung 5.28.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 2.10$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $48^3 \times 96$ .

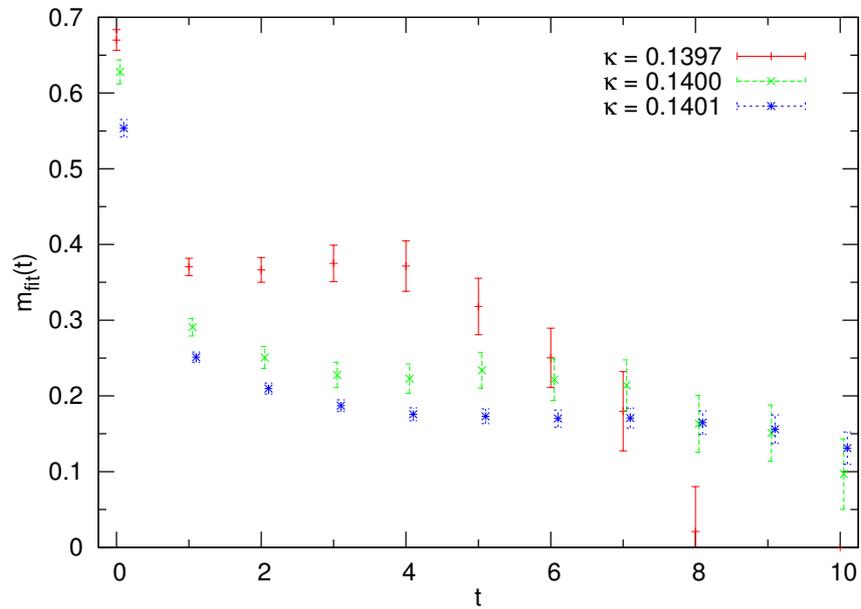


Abbildung 5.29.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 2.10$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $48^3 \times 96$ .

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$48^3 \times 96$	2.10	0.1397	1987	0.375(24)( 9)	3	7	0.361(16)	24
$48^3 \times 96$	2.10	0.1400	1400	0.223(19)(11)	4	8	0.230(17)	28
$48^3 \times 96$	2.10	0.1401	4013	0.176( 9)( 3)	4	8	0.167(10)	38

Tabelle 5.11.: Masse des  $0^{++}$ -Glueballs bei  $\beta = 2.10$ , 1 Level Stout-Smearing.

Das Intervall ist zwar noch einen Punkt kürzer als das bei  $\beta = 1.90$  und  $\kappa = 0.14435$  gefundene Intervall  $t \in [7 : 13]$ , dafür liegt der statistische Fehler aber bis einschließlich  $t = 8$  unter der Marke von 10%.

Somit gibt es bei  $\beta = 2.10$  erstmals den Fall, dass die Fit-Masse für alle untersuchten Werte von  $\kappa$  ein klares Plateau zeigt. Dementsprechend kann in Tabelle 5.11 für die Masse des  $0^{++}$ -Glueballs jeweils eine Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  angegeben werden, deren systematischer Fehler signifikant kleiner als deren statistischer Fehler ist.

Die Ergebnisse der Histogramm-Methode stimmen gut mit den sichtbaren Plateaus der Fit-Masse überein, da fast alle *guten* Fits auch im Bereich der Plateaus liegen. Die Anzahl der verwendeten Fits ist für alle drei Werte von  $\kappa$  hoch und bei  $\kappa = 0.1401$  findet man den bisher höchsten Wert an *guten* Fits.

Insgesamt erhält man bei  $\beta = 2.10$  ein erstaunlich klares Signal für den  $0^{++}$ -Glueball, vor allem wenn man die relativ geringe Anzahl an Konfigurationen betrachtet. Besonders positiv fällt auf, dass der systematische Fehler in allen Fällen kleiner als der statistische Fehler ist, wodurch die ermittelte Glueballmasse erstmals nicht mehr in starkem Maße von der Auswahl des Fit-Intervalls abhängt. Der Gesamtfehler wird durchgehend vom statistischen Fehler dominiert und die verwendeten Optimierungen wie das *variational smearing* können hier ihre volle Wirkung entfalten. Es ist anzunehmen, dass zusätzliche Konfigurationen, insbesondere bei  $\kappa = 0.1397$  und  $\kappa = 0.1400$ , zu einer weiteren Verringerung der Unsicherheiten führen werden.

### $0^{-+}$ -Glueball

Der  $0^{-+}$ -Glueball zeigt bei  $\beta = 2.10$  das bisher klarste Signal. Die in Abbildung 5.30 dargestellte effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  zeigt für alle Fälle von  $\kappa$  ein Plateau, auch wenn es für  $\kappa = 0.1397$  und  $\kappa = 0.1400$  mit  $t \in [3 : 6]$  beziehungsweise  $t \in [3 : 5]$

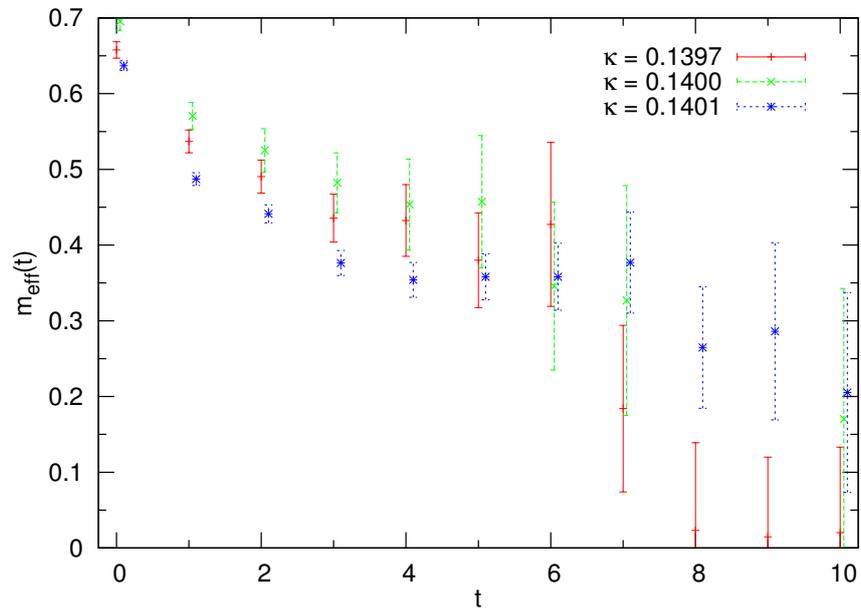


Abbildung 5.30.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 2.10$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $48^3 \times 96$ .

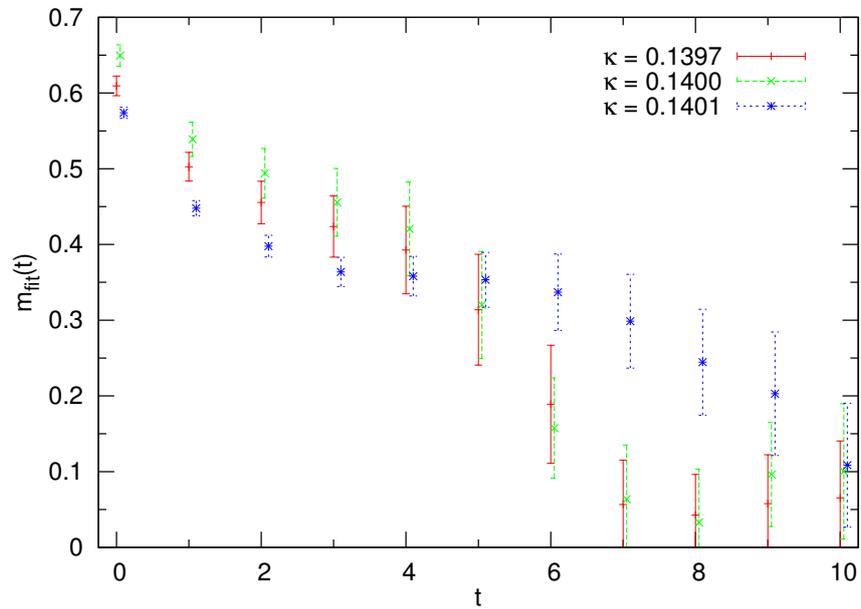


Abbildung 5.31.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 2.10$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $48^3 \times 96$ .

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$48^3 \times 96$	2.10	0.1397	1987	0.424(40)(32)	3	7	0.472(34)	13
$48^3 \times 96$	2.10	0.1400	1400	0.456(45)(35)	3	7	0.512(35)	12
$48^3 \times 96$	2.10	0.1401	4013	0.364(19)(5)	3	7	0.368(31)	15

Tabelle 5.12.: Masse des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 2.10$ , 1 Level Stout-Smearing.

sehr kurz ist. Die Ursache hierfür liegt sehr wahrscheinlich in der geringen Anzahl an Konfigurationen. Aus demselben Grund ist der statistische Fehler der Massen für beide Werte von  $\kappa$  so groß, dass die Massen noch nicht klar voneinander getrennt werden können.

Bei  $\kappa = 0.1401$  ist die Anzahl der Konfigurationen ausreichend hoch und das Plateau erstreckt sich über das Intervall  $t \in [3 : 7]$ . Dadurch zeigt auch die Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  im Bereich  $t \in [3 : 6]$  ein Plateau, siehe Abbildung 5.31. Für  $\kappa = 0.1397$  und  $\kappa = 0.1400$  ist die Fit-Masse im Bereich  $t \in [2 : 4]$  relativ stabil, was aber vor allem auf den großen statistischen Fehler zurückzuführen ist.

Tabelle 5.12 zeigt wie üblich eine ausgewählte Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  und die mit der Histogramm-Methode bestimmte Masse  $m_{\text{hist}}$ . In allen Fällen ist der systematische Fehler der Fit-Masse kleiner als der statistische, bei  $\kappa = 0.1401$  sogar sehr deutlich. Dort ist  $m_{\text{fit}}(3, 7) = 0.364(19)(5)(20)$ , der Gesamtfehler entspricht also fast genau dem statistischen Fehler.

Die Massen bei  $\kappa = 0.1397$  und  $\kappa = 0.1400$  sind aufgrund der geringen Statistik noch nicht voneinander zu trennen. Durch den jeweils großen statistischen Fehler werden bei der Histogramm-Methode nur sehr frühe Fits mit  $t = 1$  oder  $t = 2$  berücksichtigt, die noch durch angeregte Zustände beeinflusst werden. Dadurch ist die mit der Histogramm-Methode bestimmte Masse  $m_{\text{hist}}$  in diesen beiden Fällen höher als die jeweils ausgewählte Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(3, 7)$ .

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass bei  $\beta = 2.10$  die bisher besten Signale sowohl für den  $0^{++}$ -Glueball als auch den  $0^{-+}$ -Glueball beobachtet werden konnten. Sie zeichnen sich insbesondere dadurch aus, dass der systematische Fehler der ausgewählten Fit-Massen durchgehend kleiner als der statistische Fehler ist, die manuelle Auswahl des Fit-Intervalls ist dadurch nicht mehr der größte Unsicherheitsfaktor. Dass dies trotz der relativ geringen Statistik möglich ist, ist ein klares

## 5. Gluebälle

---

Indiz dafür, dass der geringe Gitterabstand auf dem  $48^3 \times 96$  Gitter einen sehr positiven Einfluss auf das Ergebnis hat.

### 5.3.5. Reine Eichtheorie

Parallel zu den obigen Untersuchungen wurden auf dem Computercluster PALMA [87] einige Simulationen in reiner SU(2) Eichtheorie ( $\kappa \equiv 0$ ) durchgeführt. Die Masse des  $0^{++}$ -Glueballs kann in der Regel in reiner Eichtheorie sehr genau bestimmt werden, da das Signal-zu-Rausch-Verhältnis deutlich besser ist. Für Beispiele zur Bestimmung des Glueball-Massenspektrums in SU(2) und SU(3) Eichtheorie siehe [58, 59] oder den Übersichtsartikel [99].

Die benötigte Rechenzeit zur Erzeugung von Konfigurationen ist bei der reinen Eichtheorie wesentlich geringer. Ziel war es, den Einfluss sehr großer Statistik bei der Bestimmung der Glueballmassen genauer zu untersuchen.

Alle Simulationen wurden auf einem  $24^3 \times 48$  Gitter durchgeführt. Dazu wurden für vier verschiedene Werte von  $\beta$  jeweils  $N_{\text{conf}} = 10000$  Konfigurationen erzeugt. Für  $\beta = 2.25$  wurde diese Zahl später auf  $N_{\text{conf}} = 50000$  erhöht (siehe Tabelle 5.14). Bei der Messung der Glueball-Operatoren wurde APE-Smearing mit 12 Smearing-Leveln im Intervall  $N_{\text{APE}} \in [4 : 48]$  eingesetzt.

Zusätzlich zur Masse des  $0^{++}$ -Glueballs und des  $0^{-+}$ -Glueballs wurden auch der Sommer-Parameter  $r_0$  und die String-Spannung  $\sigma$  bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.13 aufgeführt. Dank der hohen Anzahl an Konfigurationen ist die Unsicherheit in allen Fällen kleiner als 0.5%, weshalb auch im Fall von  $\beta = 2.25$  nur 10000 der vorhandenen 50000 Konfigurationen ausgewertet wurden.

#### $0^{++}$ -Glueball

Abbildung 5.32 zeigt das Verhalten der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs in reiner Eichtheorie und Abbildung 5.33 das dazu gehörende Verhalten der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$ . Für  $\beta = 1.75$  ist der Gitterabstand auf dem verwendeten  $24^3 \times 48$

Gitter	$\beta$	$N_{\text{conf}}$	$r_0$	$A$	$-B$	$\sigma$
$24^3 \times 48$	1.75	9750	3.837( 6)	0.548(2)	0.258(1)	0.0944(4)
$24^3 \times 48$	2.00	9750	7.927(16)	0.4886(5)	0.2176(5)	0.0227(1)
$24^3 \times 48$	2.25	9750	13.24(5)	0.4165(4)	0.1810(3)	0.0083(1)
$24^3 \times 48$	2.50	9750	17.71(8)	0.3572(3)	0.1520(2)	0.0047(1)

Tabelle 5.13.: Ergebnisse für den Sommer-Parameter  $r_0$  und die Fit-Parameter  $A$ ,  $B$  und  $\sigma$  bei reiner Eichtheorie.

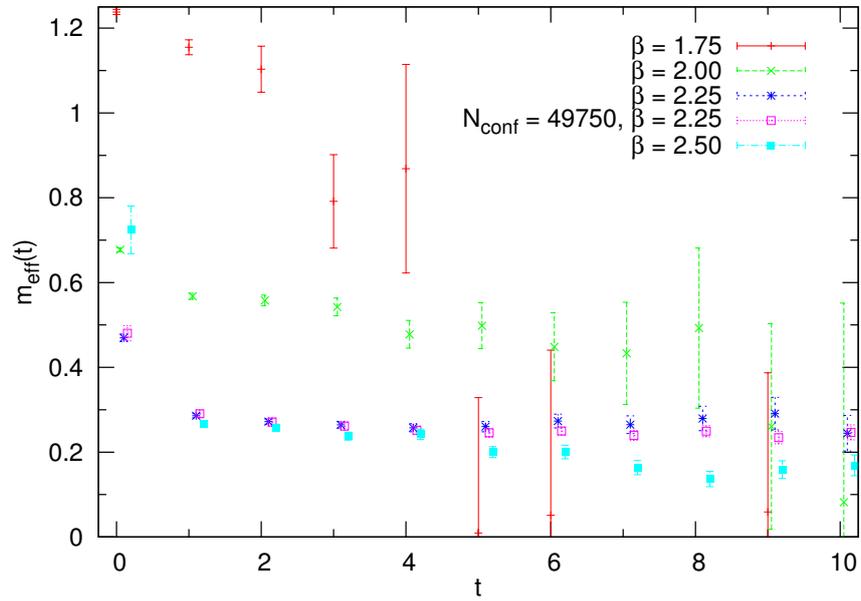


Abbildung 5.32.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei reiner Eichtheorie, Gittergröße  $24^3 \times 48$ .

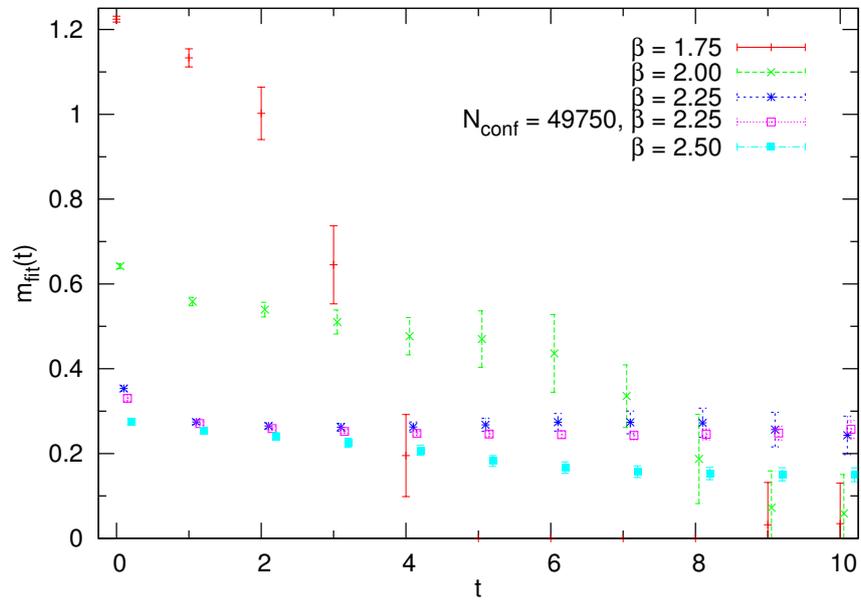


Abbildung 5.33.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{++}$ -Glueballs bei reiner Eichtheorie, Gittergröße  $24^3 \times 48$ .

Gitter offensichtlich zu groß, weshalb kein Plateau der effektiven Masse erkennbar ist. Ab  $t = 5$  ist das Rauschen der Eigenwerte  $\lambda(t)$  sogar so stark, dass keine sinnvollen Fits mehr möglich sind. Insgesamt gibt es bei  $\beta = 1.75$  nur zwei *gute* Fits, einen im Intervall  $t \in [1 : 3]$  und einen im Intervall  $t \in [2 : 5]$ .

Bereits bei  $\beta = 2.00$  erhält man ein deutlich besseres Signal. Die effektive Masse ist im Bereich  $t \in [1 : 8]$  relativ stabil, wobei sie mit der Zeit leicht abnimmt. Der statistische Fehler liegt bis  $t = 4$  unter 10% und ist damit deutlich kleiner als im Fall  $\beta = 1.75$ . Entsprechend bleibt auch die Fit-Masse bis  $t = 6$  annähernd stabil, der statistische und der systematische Fehler der Fit-Massen liegen in derselben Größenordnung.

Im Fall  $\beta = 2.25$  wurden zunächst wie in den anderen Fällen  $N_{\text{conf}} = 10000$  Konfigurationen erzeugt (blaue Datenpunkte). Schon bei dieser Anzahl an Konfigurationen zeigt die effektive Masse ein Plateau, das sich von  $t = 2$  bis  $t = 11$  erstreckt und damit zehn Datenpunkte umfasst. Das Plateau der Fit-Masse erstreckt sich von  $t = 2$  bis  $t = 10$  und ist damit ebenfalls länger als die Plateaus in allen anderen bisher betrachteten Untersuchungen. Zu beachten ist in diesem Fall, dass die Qualität des Signals so gut ist, dass das unkorrelierte  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  für fast alle Fits kleiner als die für *gute* Fits eigentlich vorgegebene Untergrenze von 0.1 ist. Daher sollte man in diesem Fall entweder auf diese Untergrenze als Qualitätsmerkmal verzichten oder aber nur das korrelierte  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  betrachten, welches durchgehend Werte größer als 0.1 liefert.

Die Erhöhung der Anzahl an Konfigurationen bei  $\beta = 2.25$  um den Faktor fünf auf  $N_{\text{conf}} = 50000$  führt erwartungsgemäß dazu, dass der statistische Fehler von effektiver Masse und Fit-Masse ungefähr um den Faktor  $\sqrt{5}$  abnimmt. Effektive Masse und Fit-Masse liegen tendenziell etwas niedriger als bei nur  $N_{\text{conf}} = 10000$  Konfigurationen, die Ergebnisse stimmen aber innerhalb des Fehlers miteinander überein. Das Plateau der effektiven Masse ist zwei Datenpunkte länger und erstreckt sich von  $t = 2$  bis  $t = 13$  und das Plateau der Fit-Masse reicht nun von  $t = 2$  bis mindestens  $t = 11$ .<sup>14</sup> Die Datenpunkte liegen dabei näher zusammen, die Differenz zwischen kleinster und größter Masse innerhalb des Intervalls sinkt bei der effektiven Masse von 0.046 auf 0.037 und bei der Fit-Masse von 0.031 auf 0.013.

Der statistische Fehler ist bei  $\beta = 2.50$  ähnlich klein wie bei  $\beta = 2.25$ , die Massen

<sup>14</sup>Der Startpunkt der Fit-Intervalle im Analyseprogramm beträgt maximal  $t = 11$ , damit auch längere Fit-Intervalle mit bis zu zehn Datenpunkten verwendet werden können.

Gitter	$\beta$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$24^3 \times 48$	1.75	9750	1.022(59)(280)	2	5	1.12(4)	2
$24^3 \times 48$	2.00	9715	0.510(28)(33)	3	7	0.522(32)	24
$24^3 \times 48$	2.25	9750	0.262( 9)( 3)	3	7	0.267(10)	36
$24^3 \times 48$	2.25	49750	0.252( 5)( 4)	3	7	0.248( 7)	68
$24^3 \times 48$	2.50	9750	0.225(11)(17)	3	7	0.208(34)	34
			0.157(14)(10)	7	11	0.164(18)	18

Tabelle 5.14.: Masse des  $0^{++}$ -Glueballs bei reiner Eichtheorie.

zeigen jedoch eine leicht abfallende Tendenz. Die effektive Masse weist ein kurzes Plateau im Bereich  $t \in [2 : 4]$  mit  $m_{\text{eff}}(3) = 0.238(9)(20)$  und ein weiteres im Intervall  $t \in [7 : 10]$  mit  $m_{\text{eff}}(9) = 0.159(21)(22)$  auf. Die Fit-Masse verhält sich ähnlich, mit  $m_{\text{fit}}(3) = 0.225(11)(18)$  und  $m_{\text{fit}}(9) = 0.151(15)(2)$ , wobei sich das zweite Intervall hier mindestens von  $t = 6$  bis  $t = 11$  erstreckt und die Werte darin deutlich näher beieinander liegen. Betrachtet man das unkorrelierte  $\chi^2/N_{\text{DF}}$ , so wird das erste Intervall bei den *guten* Fits bevorzugt, da die Größe  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  im zweiten Intervall kleiner als 0.1 wird. Das korrelierte  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  liegt hingegen im zweiten Intervall innerhalb des Zielbereichs von  $0.1 \leq \chi^2/N_{\text{DF}} \leq 2.0$ . Insgesamt erscheint das zweite Intervall plausibler, da es länger ist und die Massen dort kleinere systematische Fehler besitzen. Nicht auszuschließen ist, dass das Gittervolumen bei  $\beta = 2.50$  ein wenig zu klein ist und dass dadurch das weniger eindeutige Ergebnis zustande gekommen ist.

Tabelle 5.14 zeigt noch einmal die ausgewählten Fit-Massen  $m_{\text{fit}}(t)$  und die mit der Histogramm-Methode bestimmten Massen  $m_{\text{hist}}$ . Für  $\beta = 2.25$  sind die beiden Fälle mit  $N_{\text{conf}} = 10000$  Konfigurationen und mit  $N_{\text{conf}} = 50000$  Konfigurationen aufgeführt. Bei  $\beta = 2.50$  sind zum einen eine Fit-Masse aus dem ersten Intervall und die zugehörige Masse  $m_{\text{hist}}$  mit unkorreliertem  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  angegeben, zum anderen eine Fit-Masse auf dem zweiten Intervall und dazu  $m_{\text{hist}}$  mit korreliertem  $\chi^2/N_{\text{DF}}$ .

Ab  $\beta = 2.00$  stimmen die ausgewählte Fit-Masse und die mit der Histogramm-Methode ermittelte Masse  $m_{\text{hist}}$  gut miteinander überein, wobei für  $\beta = 2.25$  und das zweite Plateau bei  $\beta = 2.50$  unbedingt das korrelierte  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  verwendet werden muss, damit passende Fits ausgewählt werden.

Insgesamt lassen sich bei reiner Eichtheorie sehr gute Ergebnisse für die Masse des

$0^{++}$ -Glueballs erzielen. Insbesondere bei  $\beta = 2.25$  erhält man ein nahezu perfektes Plateau bei effektiver Masse und Fit-Masse, so dass der systematische Fehler nur noch etwa 1 bis 2% beträgt. Dadurch kann die Optimierung durch das variational smearing ihre volle Wirkung entfalten.

### $0^{-+}$ -Glueball

Das Verhalten der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs in reiner Eichtheorie ist in Abbildung 5.34 dargestellt, Abbildung 5.35 zeigt das dazu gehörende Verhalten der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$ . Die ersten beiden Massen bei  $\beta = 1.75$  liegen mit  $m_{\text{eff}}(0) = 2.149(13)$  und  $m_{\text{eff}}(1) = 1.911(88)$  beziehungsweise  $m_{\text{fit}}(0) = 2.140(13)$  und  $m_{\text{fit}}(1) = 1.783(87)$  jeweils außerhalb des gewählten Wertebereichs, danach fällt die Masse rapide ab. Es ist kein Plateau erkennbar und es gibt keine *guten* Fits, so dass eine Massenbestimmung für den  $0^{-+}$ -Glueball in diesem Fall nicht möglich ist.

Bei  $\beta = 2.00$  zeigt die effektive Masse ein nur kurzes Plateau im Bereich  $t \in [1 : 3]$ , danach fällt sie sehr schnell ab. Dadurch zeigt die Fit-Masse kein Plateau, wenngleich  $m_{\text{fit}}(1) = 0.928(16)$  und  $m_{\text{fit}}(2) = 0.865(38)$  fast innerhalb des Fehlers miteinander übereinstimmen. Insgesamt gibt es nur sechs *gute* Fits, wobei der Endpunkt der Fit-Intervalle nie über  $t = 5$  hinausgeht.

Die effektive Masse ist auch bei  $\beta = 2.25$  im Bereich  $t \in [1 : 3]$  annähernd konstant und fällt danach wie schon bei  $\beta = 2.00$  ab, wenngleich deutlich langsamer (blaue Datenpunkte). Dabei zeigen sich weitere kurze Plateaus in den Intervallen  $t \in [4 : 6]$  und  $t \in [6 : 8]$ . Die Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  nimmt kontinuierlich ab. Der Abfall ist von  $t = 1$  bis  $t = 5$  und von dort bis  $t = 10$  jeweils annähernd linear, aber mit deutlich größerer Steigung im zweiten Bereich. Alle *guten* Fits haben ihre Startpunkte im Bereich  $t \in [1 : 4]$ .

Mit  $N_{\text{conf}} = 50000$  Konfigurationen sinkt der statistische Fehler von effektiver Masse und Fit-Masse wie beim  $0^{++}$ -Glueball etwa um den Faktor  $\sqrt{5}$ . Die Masse nimmt weiterhin mit steigendem  $t$  ab, der Abfall ist aber schwächer als bei nur  $N_{\text{conf}} = 10000$  Konfigurationen. Insbesondere bei der Fit-Masse ist der Abfall nun über den gesamten Bereich linear, so dass  $m_{\text{fit}}(t)$  ab  $t = 7$  größer ist, als es mit weniger Konfigurationen der Fall war. Die effektive Masse zeigt Plateaus in den Intervallen  $t \in [4 : 6]$  und  $t \in [9 : 13]$ , die Fit-Masse im Bereich  $t \in [8 : 11]$ . Die Startpunkte der *guten* Fits liegen im Bereich  $t \in [2 : 7]$ , also bevor die Fit-Masse

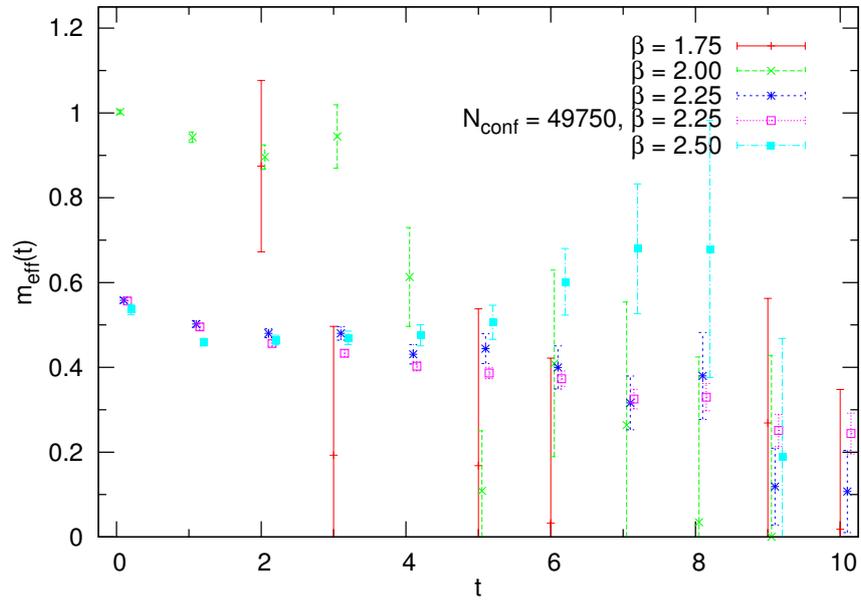


Abbildung 5.34.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs reiner Eichtheorie, Gittergröße  $24^3 \times 48$ .

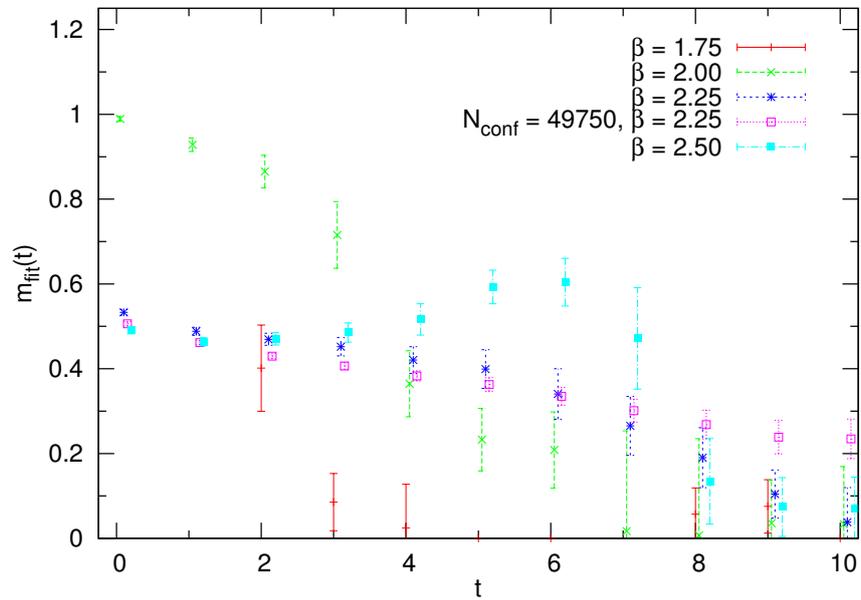


Abbildung 5.35.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs bei reiner Eichtheorie, Gittergröße  $24^3 \times 48$ .

Gitter	$\beta$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$24^3 \times 48$	1.75	9750	--	--	--	--	--
$24^3 \times 48$	2.00	9715	0.889(36)(133)	2	5	0.912(26)	6
$24^3 \times 48$	2.25	9750	0.451(22)(32)	3	7	0.454(30)	27
$24^3 \times 48$	2.25	49750	0.406( 9)(23)	3	7	0.357(47)	32
$24^3 \times 48$	2.50	9750	0.493(25)(53)	3	7	0.515(46)	23

Tabelle 5.15.: Masse des  $0^{-+}$ -Glueballs bei reiner Eichtheorie.

ihr Plateau erreicht.

Man beachte, dass anders als beim  $0^{++}$ -Glueball und  $\beta = 2.25$  immer das unkorrelierte  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  verwendet werden muss, da die Werte des korrelierten  $\chi^2/N_{\text{DF}}$  im Bereich mit ausreichend kleinem statistischen Fehler fast durchgehend zu groß sind.

Das längste Plateau der effektiven Masse zeigt sich bei  $\beta = 2.50$ , es erstreckt sich von  $t = 1$  bis  $t = 5$ . Anders als in den übrigen Fällen steigt die effektive Masse danach zunächst wieder an und bereits ab  $t = 2$  sind sowohl effektive Masse als auch Fit-Masse größer als die entsprechenden Massen für den Fall  $\beta = 2.25$ . Dies legt den Schluss nahe, dass die tatsächliche Masse des  $0^{-+}$ -Glueballs für  $\beta = 2.50$  niedriger sein sollte als die hier ermittelte Masse.

Tabelle 5.15 zeigt die ausgewählten Fit-Massen  $m_{\text{fit}}(t)$  und die mit der Histogramm-Methode bestimmten Massen  $m_{\text{hist}}$  des  $0^{-+}$ -Glueballs. Bei  $\beta = 1.75$  treten keine *guten* Fits auf, was auch bei den vorherigen Simulationen bei diesem  $\beta$ -Wert mehrfach beobachtet wurde. Der Gitterabstand ist hier offenbar deutlich zu groß, um das Signal des  $0^{-+}$ -Glueballs erfassen zu können. Erste *gute* Fits treten bei  $\beta = 2.00$  auf, der statistische Fehler der Fit-Masse ist mit 4% sogar um einen Prozentpunkt kleiner als der statistische Fehler der  $0^{++}$ -Glueball-Masse, der systematische Fehler ist mit 15% jedoch signifikant größer.

Die Zahl der *guten* Fits ist bei  $\beta = 2.25$  und  $\beta = 2.50$  höher als in allen vorherigen Simulationen, der statistische Fehler der Fit-Masse liegt jeweils bei 5% (2% für  $N_{\text{conf}} = 50000$  Konfigurationen) und ist damit ungefähr so groß wie beim  $0^{++}$ -Glueball. Anders als dort wird der Gesamtfehler hier jedoch vom systematischen Fehler dominiert, was sich auch in dem größeren Fehler der mit der Histogramm-Methode bestimmten Masse  $m_{\text{hist}}$  äußert. Da die *guten* Fits nur in einem sehr

begrenzten Intervall liegen, ist anzunehmen, dass der tatsächliche Fehler sogar noch etwas größer ist.

Trotz aller Kritik sind die Ergebnisse für den  $0^{-+}$ -Glueball bei reiner Eichtheorie besser als bei allen vorherigen Simulationen. Interessanterweise führt nämlich gerade der kleine statistische Fehler von effektiver Masse und Fit-Masse dazu, dass in den Plots keine längeren Plateaus der Masse erkennbar sind.

### 5.3.6. Zusammenfassung der Ergebnisse

Die ausgewählten Fit-Massen  $m_{\text{fit}}(t)$  und die mit der Histogramm-Methode bestimmten Massen  $m_{\text{hist}}$  des  $0^{++}$ -Glueballs sind in Tabelle 5.16 noch einmal für alle Untersuchungen aufgeführt.

Der statistische Fehler der ausgewählten Fit-Masse liegt bei allen Simulationen zwischen 5 und 10%. Die Untersuchungen bei  $\beta = 2.25$  in reiner Eichtheorie haben gezeigt, dass der statistische Fehler bei einer Simulation wie zu erwarten mit  $\sqrt{N_{\text{conf}}}$  abnimmt.

Bei den Untersuchungen mit  $\beta = 1.75$  und  $\beta = 1.90$  liegt der systematische Fehler der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  in derselben Größenordnung wie der statistische Fehler oder ist sogar größer als dieser, die Auswahl des Fit-Intervalls stellt somit die größte Unsicherheit bei der Bestimmung der Masse dar. Erst im Fall von  $\beta = 2.10$  (beziehungsweise  $\beta = 2.25$  in reiner Eichtheorie) ist der systematische Fehler signifikant kleiner als der statistische.

Dieses Verhalten legt den Schluss nahe, dass der systematische Fehler vor allem vom Gitterabstand abhängt. Bei den Simulationen mit  $\beta = 1.75$  ist  $r_0 \approx 8$ , bei  $\beta = 1.90$  ist  $r_0 \approx 11$  und bei  $\beta = 2.10$  ist  $r_0 \approx 16$ .<sup>15</sup> Wenn man die geringe Anzahl an Konfiguration bei den Simulationen mit  $\beta = 2.10$  berücksichtigt oder den Plot der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  bei reiner Eichtheorie betrachtet (Abbildung 5.32, Seite 114), zeigt sich, dass auch der statistische Fehler von einem kleineren Gitterabstand profitiert. Daneben macht es in den Massenplots den Eindruck, dass der zeitliche Abstand  $t$ , bei dem das Glueball-Signal ins Rauschen übergeht, mit sinkendem Gitterabstand weiter nach hinten verschoben wird, was längere Plateaus der effektiven Masse ermöglicht.

---

<sup>15</sup>Für die genauen Werte des Sommer-Parameters  $r_0$  bei einzelnen Simulationen siehe Tabelle 4.2, Seite 59, beziehungsweise Tabelle 5.13, Seite 113, für die Werte von  $r_0$  in reiner Eichtheorie.

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$32^3 \times 64$	1.75	0.1490	4864	0.472(39)(47)	3	7	0.486(72)	29
$32^3 \times 64$	1.75	0.1492	6207	0.427(27)(32)	3	7	0.417(32)	18
$32^3 \times 64$	1.75	0.1494	5466	0.489(34)(11)	3	8	0.492(21)	22
$32^3 \times 64$	1.75	0.1495	1887	0.460(42)(98)	3	7	0.481(62)	10
$24^3 \times 48$	1.75	0.1490	9350	0.476(30)(27)	3	7	0.481(22)	10
$24^3 \times 48$	1.75	0.1492	13017	0.408(24)(47)	3	7	0.423(24)	9
$24^3 \times 48$	1.75	0.14925	7224	0.332(21)(31)	3	7	0.301(41)	19
$24^3 \times 48$	1.75	0.1493	10280	0.442(18)(68)	2	5	0.431(31)	4
$24^3 \times 64$	1.75	0.1350	10056	0.532(33)(17)	3	7	0.541(24)	13
$24^3 \times 64$	1.75	0.1355	10311	0.490(30)(22)	3	7	0.500(24)	13
$24^3 \times 64$	1.75	0.1360	10023	0.396(22)(55)	3	7	0.377(49)	14
$24^3 \times 64$	1.75	0.1365	9666	0.452(25)(20)	3	7	0.447(24)	28
$24^3 \times 64$	1.75	0.1368	10188	0.403(20)(39)	3	7	0.387(41)	19
$32^3 \times 64$	1.90	0.1433	5125	0.384(26)(73)	4	8	0.399(39)	25
$32^3 \times 64$	1.90	0.14387	5034	0.227(15)(27)	4	8	0.235(39)	26
$32^3 \times 64$	1.90	0.14415	10619	0.269(14)(19)	4	8	0.271(28)	22
$32^3 \times 64$	1.90	0.14435	10680	0.216(11)(29)	4	8	0.203(41)	33
$48^3 \times 96$	2.10	0.1397	1987	0.375(24)( 9)	3	7	0.361(16)	24
$48^3 \times 96$	2.10	0.1400	1400	0.223(19)(11)	4	8	0.230(17)	28
$48^3 \times 96$	2.10	0.1401	4013	0.176( 9)( 3)	4	8	0.167(10)	38
$24^3 \times 48$	1.75	--	9750	1.022(59)(280)	2	5	1.12(4)	2
$24^3 \times 48$	2.00	--	9715	0.510(28)(33)	3	7	0.522(32)	24
$24^3 \times 48$	2.25	--	9750	0.262( 9)( 3)	3	7	0.267(10)	36
$24^3 \times 48$	2.25	--	49750	0.252( 5)( 4)	3	7	0.248( 7)	68
$24^3 \times 48$	2.50	--	9750	0.225(11)(17)	3	7	0.208(34)	34
				0.157(14)(10)	7	11	0.164(18)	18

Tabelle 5.16.: Übersicht über alle Ergebnisse für die Masse des  $0^{++}$ -Glueballs.

Die Masse des  $0^{-+}$ -Glueballs ist wie zu erwarten deutlich schwerer zu bestimmen als die des  $0^{++}$ -Glueballs. Der statistische Fehler ist prozentual gesehen in derselben Größenordnung wie beim  $0^{++}$ -Glueball, die einzelnen Fit-Massen haben in den meisten Fällen mangels eines ausgeprägten Plateaus jedoch nur eine geringe Aussagekraft.

Bei den Simulationen mit  $\beta = 1.75$  zeigt die effektive Masse in keinem Fall ein Plateau, weshalb dort überhaupt keine verlässlichen Ergebnisse angegeben werden können. Erst bei  $\beta = 1.90$  zeigen sich Ansätze von Plateaus, doch schon ab  $t \approx 5$  geht das Signal der effektiven Masse in Rauschen über. Dieser Übergang verschiebt sich bei  $\beta = 2.10$  leicht zu  $t \approx 7$  und die effektive Masse zeigt Plateaus aus bis zu fünf Datenpunkten.

Somit nimmt der systematische Fehler der  $0^{-+}$ -Glueball-Massen genau wie beim  $0^{++}$ -Glueball mit sinkendem Gitterabstand ab. Problematisch an den Ergebnissen bei  $\beta = 2.10$  ist jedoch noch, dass die Massen für verschiedene Werte von  $\kappa$  nicht klar voneinander getrennt werden können. Dieser Effekt kann auch bei den anderen Werten von  $\beta$  beobachtet werden, nur in reiner Eichtheorie ist es möglich, die Massen des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 2.00$  und  $\beta = 2.25$  klar voneinander zu unterscheiden.

# 6. Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen

Alle bisherigen Untersuchungen wurden im Limes einer unendlich ausgedehnten Raumzeit durchgeführt, was einer Temperatur von Null entspricht. In diesem Kapitel soll nun ein erster Blick auf das Phasendiagramm des Modells bei endlichen Temperaturen geworfen werden.<sup>1</sup>

Dazu wählt man ein Gitter  $L^3 \times T$  mit  $T \ll L$ , beispielsweise  $T = L/2$ , und untersucht darauf das Verhalten verschiedener Ordnungsparameter im von  $\beta$  und  $\kappa$  aufgespannten Phasendiagramm. Die in dieser Arbeit betrachteten Ordnungsparameter sind die Polyakov-Schleife für den confinement-deconfinement Phasenübergang und das Gluino-Kondensat für den chiralen Phasenübergang.

## 6.1. Polyakov-Schleife

Die Polyakov-Schleife [89] ist eine spezielle Form der Wilson-Schleife aus Abschnitt 2.7.2, die das Gitter bei fester räumlicher Position  $\mathbf{x}$  einmal komplett in Zeitrichtung umläuft [47],

$$P(\mathbf{x}) = \text{Sp} \left[ \prod_{j=0}^{T-1} U_4(\mathbf{x}, 4) \right] . \quad (6.1)$$

Dies wird durch die periodischen Randbedingungen der Eichfelder ermöglicht. Die Größe  $P(\mathbf{x})$  ist translationsinvariant, daher betrachtet man den räumlichen Mittelwert

$$P = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}) . \quad (6.2)$$

---

<sup>1</sup>Zur Struktur des Phasendiagramms in der QCD siehe beispielsweise [26, 57].

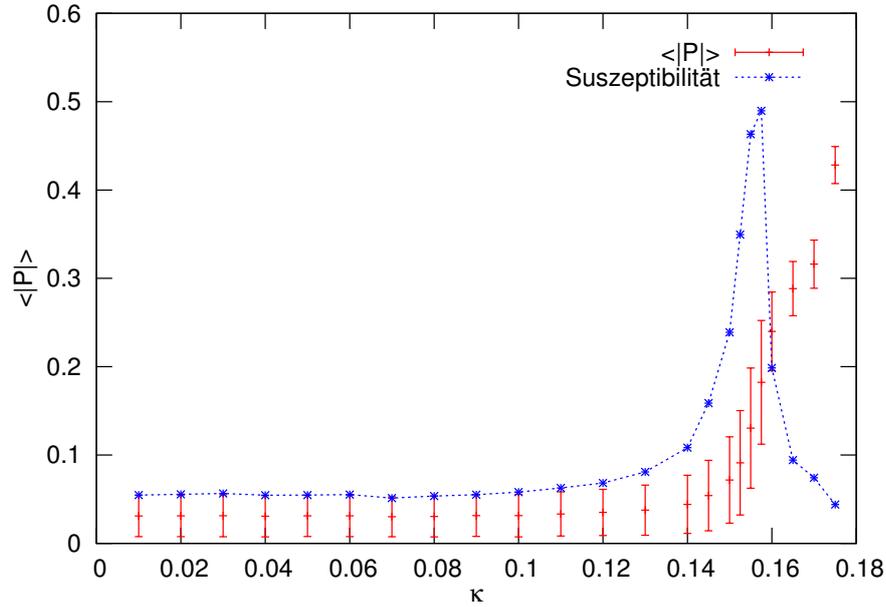


Abbildung 6.1.: Polyakov-Schleifen  $\langle |P| \rangle$  und zugehörige Suszeptibilität (skaliert um den Faktor 100) als Funktion von  $\kappa$ . Gittergröße  $8^3 \times 4$ ,  $\beta = 1.50$ .

Man beachte, dass  $P$  im Fall der supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie nur reelle Werte annimmt, während es in der QCD eine imaginäre Größe ist (siehe beispielsweise [47]). Aus physikalischer Sicht beschreibt der Erwartungswert der Polyakov-Schleife die Bewegung einer einzelnen statischen Farbladung,

$$|\langle P \rangle| \sim e^{-F_q/T}, \quad (6.3)$$

mit der freien Energie  $F_q$  [47].

Die Berechnung der Polyakov-Schleife  $P$  ist sehr einfach und schnell und wird daher gleich bei der Erzeugung neuer Konfigurationen durchgeführt zusammen mit der Messung der Plakette (siehe Abschnitt 2.7.1). Bei festem  $\beta$  und steigendem  $\kappa$  zeigt die Plakette stets einen langsamen und kontinuierlichen Anstieg. Anders verhält es sich bei der Polyakov-Schleife, bei der man abhängig vom Wert von  $\beta$  einen Phasenübergang beobachten kann.

Die Abbildung 6.1 zeigt ein Beispiel für den Erwartungswert der Polyakov-Schleife  $\langle |P| \rangle$  bei  $\beta = 1.50$ . Zunächst ist  $\langle |P| \rangle$  konstant nahe null, bis ab etwa  $\kappa = 0.145$

ein starker Anstieg stattfindet. Nach dem Anstieg erreicht  $\langle |P| \rangle$  wieder ein Plateau. In diesem Beispiel ist nur der Anfang des Plateaus zu sehen, bei Simulationen mit größerem  $\beta$  findet der Phasenübergang aber schon bei kleineren Werten von  $\kappa$  statt, so dass das Plateau dort klar zu erkennen ist.

Ein gutes Maß, um den Punkt des Phasenübergangs zu bestimmen, ist die zu  $\langle |P| \rangle$  zugehörige Suszeptibilität [47]

$$\chi_P = \langle P^2 \rangle - \langle |P| \rangle^2, \quad (6.4)$$

die am Ort des Phasenübergangs einen Peak zeigt. Die Suszeptibilität wird ebenfalls in Abbildung 6.1 dargestellt, skaliert um den Faktor 100. Sie zeigt einen deutlichen Peak bei  $\kappa \approx 0.155$ , was dem Punkt des maximalen Anstiegs der Polyakov-Schleife entspricht.

Um sicher zu gehen, dass tatsächlich ein Phasenübergang stattfindet, betrachtet man die in Abbildung 6.2 gezeigte Verteilung von  $P$  bei verschiedenen Werten von  $\kappa$ . Vor dem Phasenübergang ( $\kappa < 0.15$ ) ist der Wert der Polyakov-Schleife  $P$  gauß-verteilt um einen einzelnen Fixpunkt bei  $P = 0$ . Erhöht man  $\kappa$ , so wird die Verteilung breiter, bis sich der eine Fixpunkt bei  $P = 0$  in zwei symmetrisch um null liegende Fixpunkte aufteilt. Das System springt dabei zwischen den beiden Fixpunkten hin und her, so dass die Verteilung von  $P$  am Phasenübergang  $\kappa_P = 0.155$  weiterhin symmetrisch um den Nullpunkt liegt. Erst bei  $\kappa = 0.16$  wählt das System einen der beiden Fixpunkte zufällig aus und bleibt dann in diesem stecken. Das hier gesehene Verhalten ist typisch für einen Phasenübergang zweiter Ordnung.

Für den Fit verwendet man die Gauß-Verteilungen

$$\frac{p_i}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(P - P_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2. \quad (6.5)$$

Aus Symmetriegründen kann  $\sigma_1 = \sigma_2 \equiv \sigma$  und  $P_2 = -P_1$  angenommen werden, wodurch sich die Anzahl der Fit-Parameter reduziert. Durch die Norm gilt zusätzlich  $p_1 + p_2 = 1$ , die Fits sind jedoch stabiler, wenn diese Bedingung nicht erzwungen wird und man nur  $p_1 + p_2 \approx 1$  verlangt.

Um ein vollständiges Bild über das Phasendiagramm zu erhalten, wurde die oben beschriebene Untersuchung für einen großen Wertebereich von  $\beta$  durchgeführt.

## 6. Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen

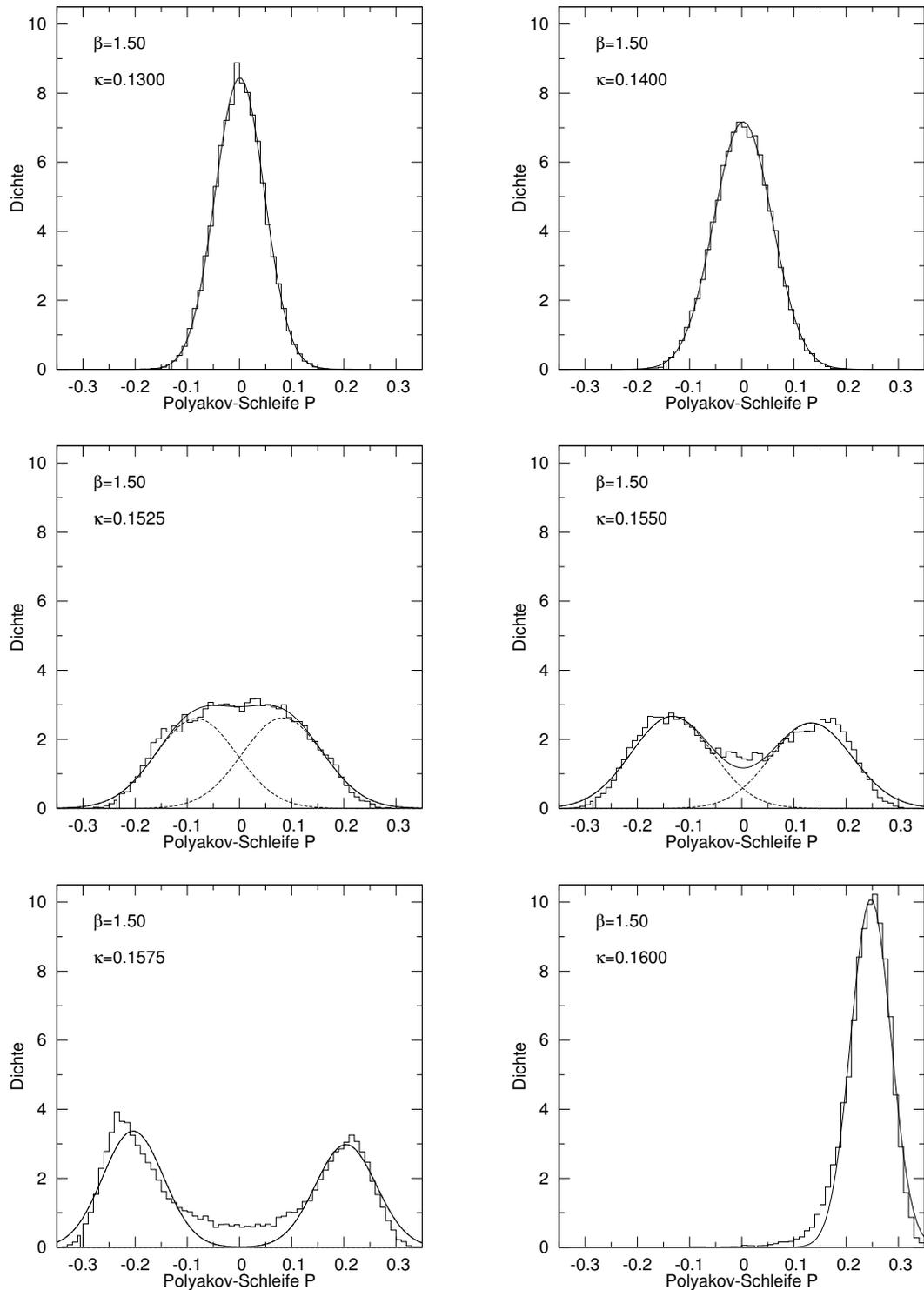


Abbildung 6.2.: Verteilung der Polyakov-Schleife  $P$ . Gittergröße  $8^3 \times 4$ ,  $\beta = 1.50$ .

Gitter	$\beta$	$N_{\text{conf}}$	$\kappa_P$
$8^3 \times 4$	1.35	20000	0.1650(50)
$8^3 \times 4$	1.40	20000	0.1650(25)
$8^3 \times 4$	1.45	20000	0.1625(25)
$8^3 \times 4$	1.50	20000	0.1550(50)
$8^3 \times 4$	1.55	20000	0.1475(50)
$8^3 \times 4$	1.60	20000	0.1350(50)
$8^3 \times 4$	1.65	20000	0.1150(50)
$8^3 \times 4$	1.70	20000	0.0000(25)
$8^3 \times 4$	1.75	20000	0.0000(25)
$12^3 \times 4$	1.50	$\sim 2500$	0.155(10)
$12^3 \times 4$	1.60	$\sim 2750$	0.140(15)
$12^3 \times 4$	1.70	$\sim 1400$	0.000(10)

Tabelle 6.1.: Ort des Polyakov-Schleifen-Phasenübergangs  $\kappa_P$  bei verschiedenen Werten von  $\beta$ .  $N_{\text{conf}}$  ist die Anzahl der für jeden Wert von  $\kappa$  gemessenen Konfigurationen.

Tabelle 6.1 listet den aus den Daten bestimmten Ort des Phasenübergangs  $\kappa_P$  für den Bereich  $\beta \in [1.35, 1.75]$  auf. Dieselben Daten sind im Phasendiagramm 6.3 grafisch dargestellt. Der angegebene Fehler ist eine auf der Breite des Peaks der Suszeptibilität beruhende Abschätzung. Mit steigendem  $\beta$  nimmt  $\kappa_P$  zunächst langsam und kontinuierlich ab, bis etwa  $\beta \approx 1.65$ . Dort erfolgt dann ein rapider Abfall auf  $\kappa_P = 0$  bei  $\beta = 1.70$ . Ein Phasenübergang bei  $\kappa_P = 0$  bedeutet dabei, dass sich das System für alle Werte von  $\kappa$  im Zustand mit zwei separaten Fixpunkten befindet. Dieses Verhalten scheint für alle  $\beta \geq 1.70$  zu gelten.<sup>2</sup>

Der genaue Verlauf des Phasenübergangs  $\kappa_P$  im Bereich  $\beta \in [1.65, 1.70]$  ist nur schwer zu erfassen, da die Verteilung der Polyakov-Schleife  $P$  dort schon für kleine Werte von  $\kappa$  relativ breit ist und die Suszeptibilität keinen deutlichen Peak mehr zeigt. Bei  $\beta = 1.67$  und  $\beta = 1.68$  erkennt man noch einen schwachen Peak im Bereich  $\kappa \approx 0.11$ , gleichzeitig scheint die Verteilung der Polyakov-Schleife  $P$  aber schon für sehr kleine  $\kappa = 0.005$  aus zwei sich überlagernden Gauß-Verteilungen zu bestehen.

Für  $\beta < 1.35$  konnte der Ort des Phasenübergangs nicht mehr sicher bestimmt werden, da die Simulation hier für große  $\kappa$  zusammenbricht. Dies äußert sich da-

<sup>2</sup>Es wurde bis  $\beta = 2.40$  simuliert.

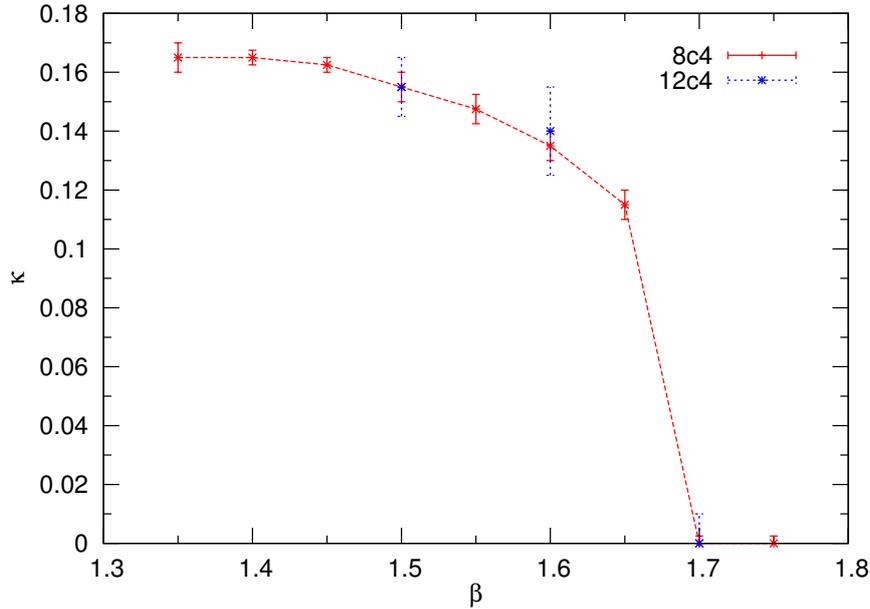


Abbildung 6.3.: Ort des Polyakov-Schleifen-Phasenübergangs  $\kappa_P$  im von  $\beta$  und  $\kappa$  aufgespannten Phasendiagramm.

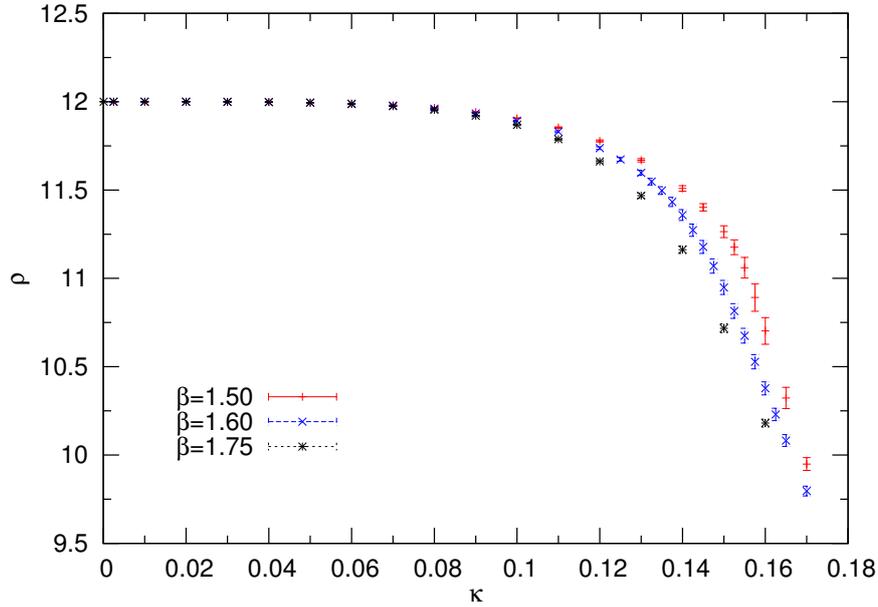
durch, dass die Akzeptanzrate neuer Konfigurationen im Update-Schritt der Monte-Carlo-Simulation ab etwa  $\kappa \approx 0.16$  immer kleiner wird<sup>3</sup>, bis sie schließlich bei  $\kappa \approx 0.165$  auf 0% fällt.

Um negative Effekte durch die kleine Größe des Gitters auszuschließen, wurden bei  $\beta = 1.50, 1.60$  und  $1.70$  zusätzlich Simulationen auf einem etwas größeren Gitter mit  $12^3 \times 4$  Punkten durchgeführt. Die dort gefundenen Werte für den Ort des Phasenübergangs stimmen innerhalb des Fehlers mit denen auf dem kleineren Gitter überein.

## 6.2. Gluino-Kondensat

Ein weiterer Ordnungsparameter ist das Gluino-Kondensat  $\rho = \langle \bar{\lambda}\lambda \rangle$ , welches als Vakuumerwartungswert im unverbundenen Anteil des  $a$ - $f_0$  auftaucht. Im Fall verschwindender Gluino-Masse  $m_g = 0$  erwartet man in der  $SU(2)$  supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie einen Phasenübergang erster Ordnung, einhergehend mit spontan gebrochener chiraler Symmetrie [62].

<sup>3</sup>Für  $\kappa < 0.16$  liegt die Akzeptanzrate bei fast 100%.

Abbildung 6.4.: Gluino-Kondensat  $\langle \rho \rangle$ .

Dieses Verhalten wurde erstmals in [62] genauer untersucht. Dabei wurde auf einem  $6^3 \times 12$  Gitter mit  $\beta = 2.3$  und  $\kappa \in [0.19, 0.20]$  simuliert und ein Phasenübergang bei  $\kappa_0 = 0.1955(5)$  gefunden. Der Phasenübergang ist, ähnlich wie bei der Polyakov-Schleife, an der Form der Verteilung des Gluino-Kondensats  $\rho$  erkennbar. Bei  $\kappa = 0.19$  und  $\kappa = 0.20$  kann diese Verteilung durch eine einzelne Gauß-Verteilung beschrieben werden, während in der Nähe des Phasenübergangs zwei sich überlagernde Gauß-Verteilungen nötig sind.

In dieser Arbeit soll das Verhalten des Gluino-Kondensats  $\rho$  bei endlichen Temperaturen untersucht werden, wobei als Approximation auf die verbundenen Anteile verzichtet wird, da sie im chiralen Limes verschwinden sollten.<sup>4</sup> Dazu wurde auf einem  $8^3 \times 4$  Gitter für  $\beta = 1.50, 1.60$  und  $1.75$  der Bereich  $\kappa \in [0, 0.17]$  mit einem Level Stout-Smearing betrachtet. Abbildung 6.4 zeigt den mittleren Wert des Gluino-Kondensats  $\langle \rho \rangle$  in Abhängigkeit von  $\kappa$ . Er startet bei seinem maximalen Wert  $\langle \rho \rangle = 12$  bei  $\kappa = 0$  und nimmt dann mit steigendem  $\kappa$  kontinuierlich ab. Der Abfall ist umso stärker, je größer  $\beta$  ist.

<sup>4</sup>Die verbundenen Anteile des Gluino-Kondensats wurden in späteren Untersuchungen der DESY-Münster-Kollaboration mitberücksichtigt [19]. Die dortigen Untersuchungen haben gezeigt, dass die unverbundenen Anteile wie erwartet dominieren und die verbundenen Anteile vernachlässigt werden können.

Analog zu (6.4) wird zunächst die Suszeptibilität

$$\chi_\rho = \langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2 \quad (6.6)$$

benutzt, um einen Anhaltspunkt für den Ort des Phasenübergangs zu erhalten. Man findet:

- $\beta = 1.50$ : Ein deutlicher, schmaler Peak bei  $\kappa = 0.1575(25)$ .
- $\beta = 1.60$ : Zwei sehr schwache Peaks bei  $\kappa = 0.1425(50)$  und  $\kappa = 0.1550(50)$ .
- $\beta = 1.75$ : Kein Peak erkennbar.

Abseits der Peaks fluktuiert die Suszeptibilität  $\chi_\rho$  um Null und das Signal ist insgesamt deutlich weniger aussagekräftig als bei der Polyakov-Schleife.

Für eine genauere Untersuchung des Phasenübergangs betrachtet man daher wieder die Form der Verteilung des Gluino-Kondensats  $\rho$ . Abseits des Phasenübergangs erwartet man eine einfache Gauß-Verteilung, in der Nähe des Phasenübergangs hingegen eine Überlagerung zweier Gauß-Verteilungen

$$\frac{p_i}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\rho - \rho_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, \quad (6.7)$$

die die Beiträge der zwei Phasen repräsentieren [62]. Aus Symmetriegründen kann  $\sigma_1 = \sigma_2 \equiv \sigma$  angenommen werden, um die Anzahl der Fit-Parameter zu reduzieren [62]. Durch die Norm gilt zusätzlich  $p_1 + p_2 = 1$ . Es zeigt sich jedoch, dass die Fits stabiler sind, wenn diese Bedingung nicht erzwungen wird und man nur  $p_1 + p_2 \approx 1$  verlangt. Je nach Wahl der Startparameter  $\rho_1$  und  $\rho_2$  kann es vorkommen, dass ein Ergebnis mit  $p_1 > 1$  und  $p_2 < 0$  auftritt (oder  $p_1 < 0$  und  $p_2 > 1$ ), wobei  $p_1 + p_2 \approx 1$  trotzdem erfüllt wird. In der Regel hilft es dann,  $\rho_1$  und  $\rho_2$  miteinander zu vertauschen, damit der Fit-Algorithmus das richtige Minimum findet.

Man beachte, dass die Verteilung des Gluino-Kondensats  $\rho$  für kleine  $\kappa < 0.03$  sehr schmal wird und ihre Form dadurch nicht mehr vernünftig erfasst werden kann. Erst ab  $\kappa \approx 0.04$  erkennt man eine saubere Gauß-Verteilung.

Abbildung 6.5 zeigt den Verlauf der Verteilung des Gluino-Kondensats  $\rho$  für  $\beta = 1.50$ . Bei kleinen  $\kappa$  bis etwa  $\kappa \approx 0.13$  kann die Verteilung gut durch eine einzelne Gauß-Verteilung beschrieben werden. Bei  $\kappa = 0.1500$  erkennt man dann eine zweite, kleinere Gauß-Verteilung an der linken Seite des Spektrums. Diese wächst an, bis sie bei  $\kappa = 0.1575$ , dem Ort maximaler Suszeptibilität, größer als die rechte Verteilung wird. Bei  $\kappa = 0.1600$  ist schließlich die rechte Verteilung die deutlich kleinere der beiden. Dieses Verhalten ist typisch für einen Phasenübergang erster Ordnung.

Der Ort des Phasenübergangs ist  $\kappa_\rho = 0.1575(25)$ . Hier zeigt die Suszeptibilität einen deutlichen Peak und die beiden Gauß-Verteilungen sind annähernd gleich groß. Außerdem wird die Breite der Verteilung  $\langle \rho \rangle$  an dieser Stelle maximal.

Seltsam ist das Verhalten für große  $\kappa$ , da die rechte Verteilung nicht wie beim in [62] beobachteten Phasenübergang verschwindet, sondern nach Erreichen eines Minimums bei  $\kappa = 0.1600$  wieder zunimmt und ein lokales Maximum bei  $\kappa = 0.1650(50)$  erreicht (mit  $p_2 \approx 0.26$ ). Dies entspricht ziemlich genau dem im Limes verschwindender Temperatur bestimmten kritischen Punkt  $\kappa_c^{OZI} = 0.16648(7)$ , an dem die Gluino-Masse verschwindet.<sup>5</sup>

Der Fall  $\beta = 1.60$  wird in Abbildung 6.6 dargestellt. Hier genügt bis  $\kappa \approx 0.12$  eine einzelne Gauß-Verteilung. Danach erscheint auf der linken Seite eine zweite Gauß-Verteilung, die mit steigendem  $\kappa$  immer weiter anwächst. Bei  $\kappa = 0.1400$  sind beide Verteilungen etwa gleich groß, bis  $\kappa = 0.1475$  verschwindet die rechte Verteilung dann fast vollständig. Die Verteilung bei  $\kappa = 0.1475$  könnte sogar fast genauso gut durch eine einzelne Gauß-Verteilung beschrieben werden, so dass das Verhalten bis hierher fast genau dem in [62] beschriebenen Phasenübergang entspricht.

Der schwache Peak der Suszeptibilität bei  $\kappa = 0.1425(50)$  deutet ebenfalls darauf hin, dass bei  $\kappa = 0.1400(25)$  ein Phasenübergang stattfindet. Zu beachten ist allerdings, dass die Breite der Verteilung  $\langle \rho \rangle$  ihr Maximum erst deutlich später erreicht, nämlich bei  $\kappa = 0.1550(25)$ .

Bei diesem Maximum zeigt die Suszeptibilität einen weiteren Peak. Das wird dadurch verursacht, dass die rechte Gauß-Verteilung für  $\kappa > 0.1475$  wieder größer wird, bis zu einem lokalen Maximum bei  $\kappa = 0.1550(25)$ . Dieses Maximum stimmt wie schon im Fall von  $\beta = 1.50$  mit dem Ort des kritischen Punktes  $\kappa_c^{OZI} =$

<sup>5</sup>Zur Bestimmung von  $\kappa_c^{OZI}$  siehe Abschnitt 3.4.

## 6. Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen

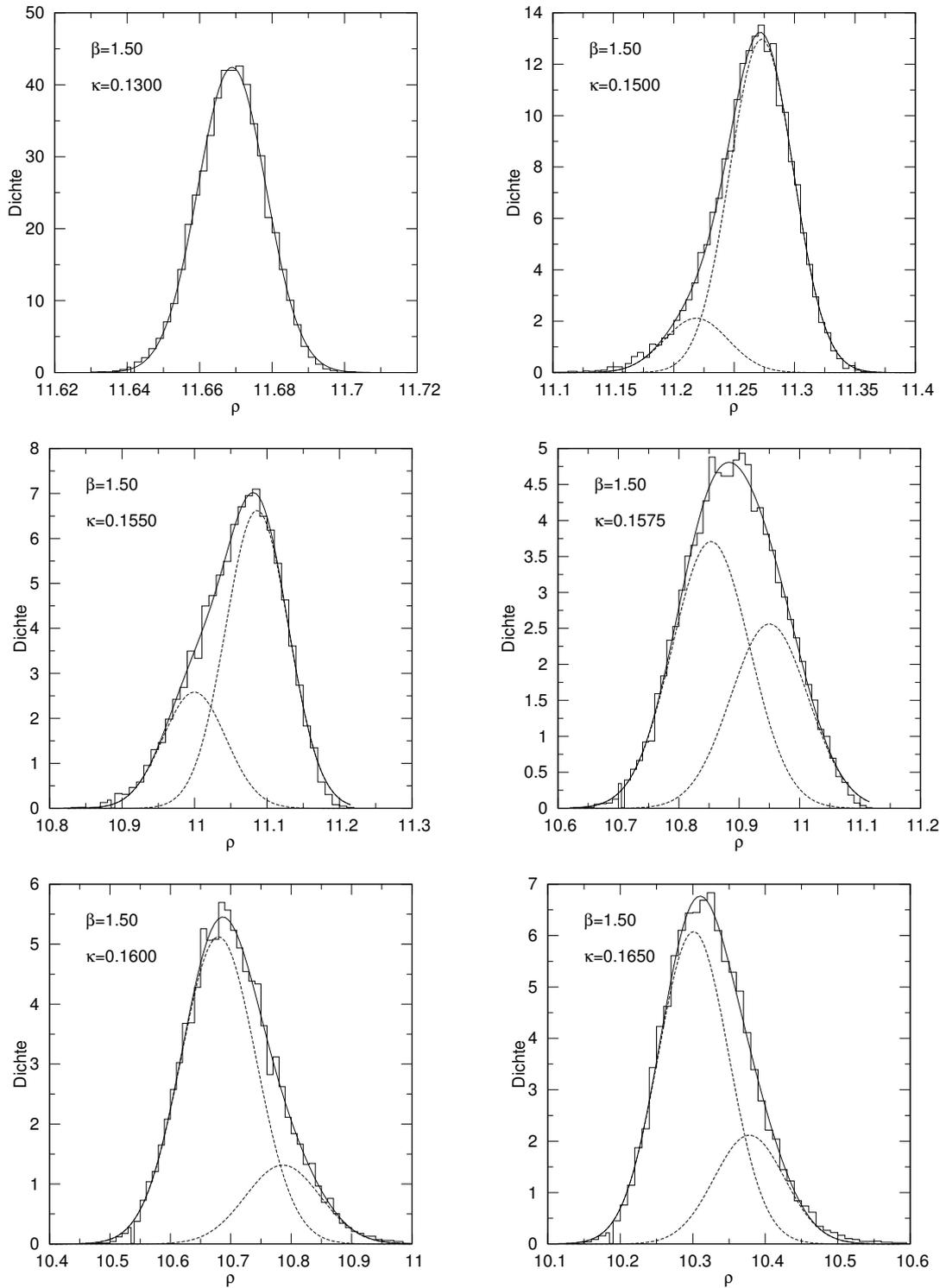
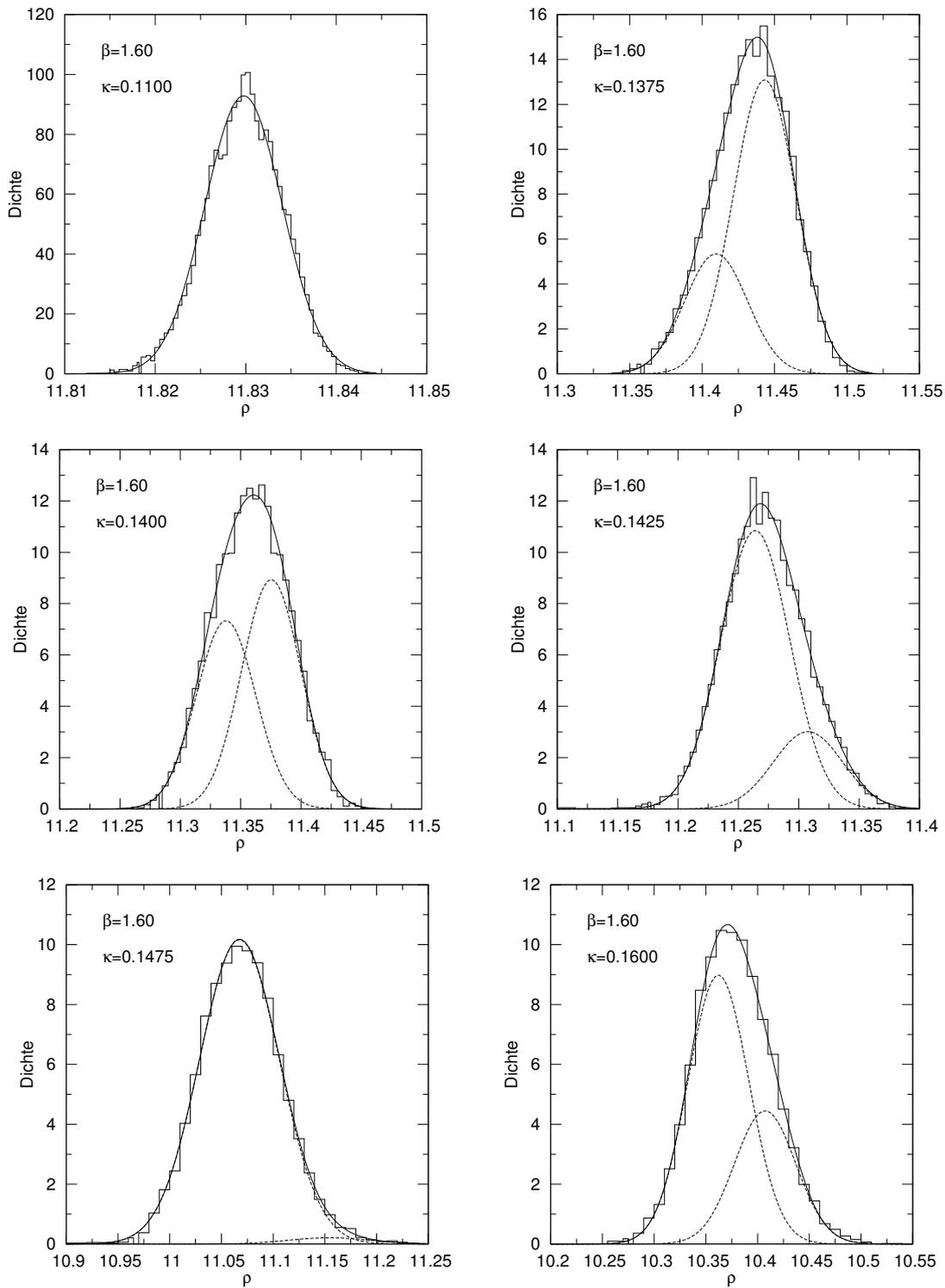


Abbildung 6.5.: Verteilung des Gluino-Kondensats  $\rho$ , Gittergröße  $8^3 \times 4$ ,  $\beta = 1.50$ .

Abbildung 6.6.: Verteilung des Gluino-Kondensats  $\rho$ , Gittergröße  $8^3 \times 4$ ,  $\beta = 1.60$ .

## 6. Supersymmetrie bei endlichen Temperaturen

Gitter	$\beta$	$N_{\text{conf}}$	$\kappa_\rho$	$\kappa_P$	$\kappa_c^{OZI}$
$8^3 \times 4$	1.50	12500	0.1575(25) / 0.1650(50)	0.1550(50)	0.16648(7)
$8^3 \times 4$	1.60	12500	0.1425(50) / 0.1550(50)	0.1350(50)	0.15793(4)
$8^3 \times 4$	1.75	12500	– / 0.15(1)	0.0000(25)	0.14972(1)

Tabelle 6.2.: Möglicher Ort des Gluino-Kondensat-Phasenübergangs  $\kappa_\rho$  bei verschiedenen Werten von  $\beta$ . Zum Vergleich sind das  $\kappa_P$  aus Tabelle 6.1 sowie der kritische Punkt  $\kappa_c^{OZI}$  angegeben.  $N_{\text{conf}}$  ist die Anzahl der für jeden Wert von  $\kappa$  gemessenen Konfigurationen.

0.15793(4) überein.<sup>6</sup>

Der Fall  $\beta = 1.75$  wird in Abbildung 6.7 gezeigt. Hier genügt bis  $\kappa \approx 0.11$  eine einzelne Gauß-Verteilung. Danach erscheint auf der *rechten* Seite eine zweite Gauß-Verteilung, die mit steigendem  $\kappa$  langsam anwächst.

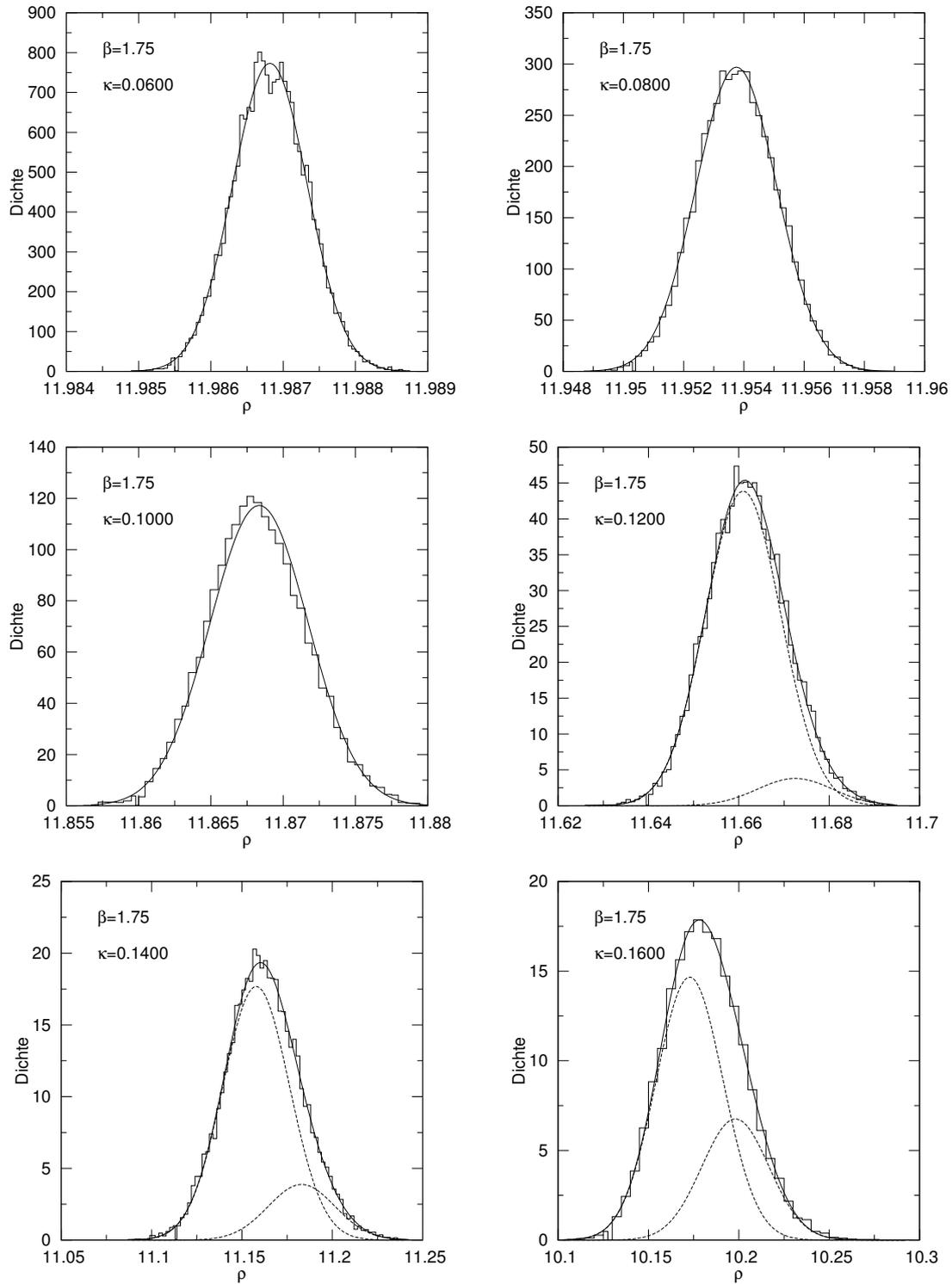
Die Breite der Verteilung  $\langle \rho \rangle$  erreicht ihr Maximum bei  $\kappa = 0.15(1)$ , was mit dem Ort des kritischen Punktes  $\kappa_c^{OZI} = 0.14972(1)$  übereinstimmt.<sup>7</sup> Die Suszeptibilität fluktuiert für den gesamten Bereich von  $\kappa$  um Null und zeigt keinen Peak.

Von besonderem Interesse ist im Fall  $\beta = 1.75$  das Verhalten nahe  $\kappa = 0$ , da die Polyakov-Schleife dort einen Phasenübergang zeigt. Bis hinunter zu  $\kappa = 0.04$  kann die Verteilung des Gluino-Kondensats gut durch eine einzelne Gauß-Verteilung beschrieben werden. Bei noch kleineren Werten von  $\kappa$  wird die Verteilung jedoch so schmal, dass keine sichere Aussage über ihre genaue Form mehr getroffen werden kann.

Die Ergebnisse für die verschiedenen Werte von  $\beta$  sind in Tabelle 6.2 zusammengefasst. Bei  $\beta = 1.50$  und  $\beta = 1.60$  sieht man an jeweils zwei Stellen Anzeichen für einen Phasenübergang. Die erste Stelle stimmt jeweils innerhalb des Fehlers mit der Stelle des Phasenübergangs bei der Polyakov-Schleife  $\kappa_P$  überein, die Verteilung des Gluino-Kondensats  $\rho$  zeigt dort ein für einen Phasenübergang erster Ordnung charakteristisches Verhalten und es gibt einen (bei  $\beta = 1.60$  relativ schwachen) Peak in der Suszeptibilität.

<sup>6</sup> $\kappa_c^{OZI} = 0.15793(4)$  wurde in [36] für  $\beta = 1.60$  auf einem  $24^3 \times 48$  Gitter mit einem Level Stout-Smearing bestimmt.

<sup>7</sup> $\kappa_c^{OZI} = 0.14972(1)$  wurde anhand der bereits in Tabelle 4.2 aufgelisteten  $24^3 \times 48$  und  $32^3 \times 64$  Gitter mit einem Level Stout-Smearing bestimmt.

Abbildung 6.7.: Verteilung des Gluino-Kondensats  $\rho$ , Gittergröße  $8^3 \times 4$ ,  $\beta = 1.75$ .

Daneben gibt es für alle Werte von  $\beta$  ein schwaches Signal an der Stelle des kritischen Punktes  $\kappa_c^{OZI}$ . Dieses Signal äußert sich auf verschiedene Art und Weise:

- Bei  $\beta = 1.60$  zeigt die Suszeptibilität hier einen schwachen Peak.
- Bei  $\beta = 1.50$  und  $\beta = 1.60$  gibt es hier ein lokales Maximum der rechten Gauß-Verteilung.
- Bei  $\beta = 1.60$  und  $\beta = 1.75$  liegt hier das Maximum der Breite der Verteilung der Gluino-Masse  $\rho$ .

Allen Punkten ist gemeinsam, dass die rechte Gauß-Verteilung in der gesamten Umgebung kleiner als die linke ist. Somit fehlt die für einen Phasenübergang erster Ordnung typische Verschiebung der Gewichtung von der linken auf die rechte Gauß-Verteilung.

### 6.3. Zusammenfassung

Der bei der Polyakov-Schleife beobachtete confinement-deconfinement Phasenübergang  $\kappa_P(\beta)$  und die chirale kritische Linie  $\kappa_c(\beta, T = 0)$  sind in Abbildung 6.8 dargestellt. Der Verlauf der Linien zeigt im untersuchten Bereich eine große Ähnlichkeit mit der in der QCD beobachteten Struktur des Phasendiagramms [6, 57].

Die Polyakov-Schleife zeigt einen gut erkennbaren Phasenübergang zweiter Ordnung. Weitere Untersuchungen sind notwendig, um den Verlauf der Linie  $\kappa_P(\beta)$  genauer zu erfassen. Von besonderem Interesse ist der Bereich  $\beta \in [1.65, 1.70]$ , in dem der stärkste Abfall von  $\kappa_P(\beta)$  stattfindet. Dort zeigt die Suszeptibilität (6.4) keinen klaren Peak mehr und der Ort des Phasenübergangs ist entsprechend schwierig zu bestimmen.

Beim Gluino-Kondensat  $\rho$  deuten die bisherigen Untersuchungen darauf hin, dass hier ebenfalls ein Phasenübergang erster Ordnung an der thermischen Linie  $\kappa_P(\beta)$  des confinement-deconfinement Phasenübergangs stattfindet. Entlang der kritischen Linie  $\kappa_c(\beta)$  wird die chirale Symmetrie ebenfalls gebrochen, dort fehlen aber die Charakteristika eines Phasenübergangs. Um beide Effekte besser trennen zu können, sollten weitere Untersuchungen im Bereich  $\beta \in [1.65, 1.70]$  mit einem größeren Abstand zwischen  $\kappa_P(\beta) \neq 0$  und  $\kappa_c(\beta, T = 0)$  durchgeführt werden.

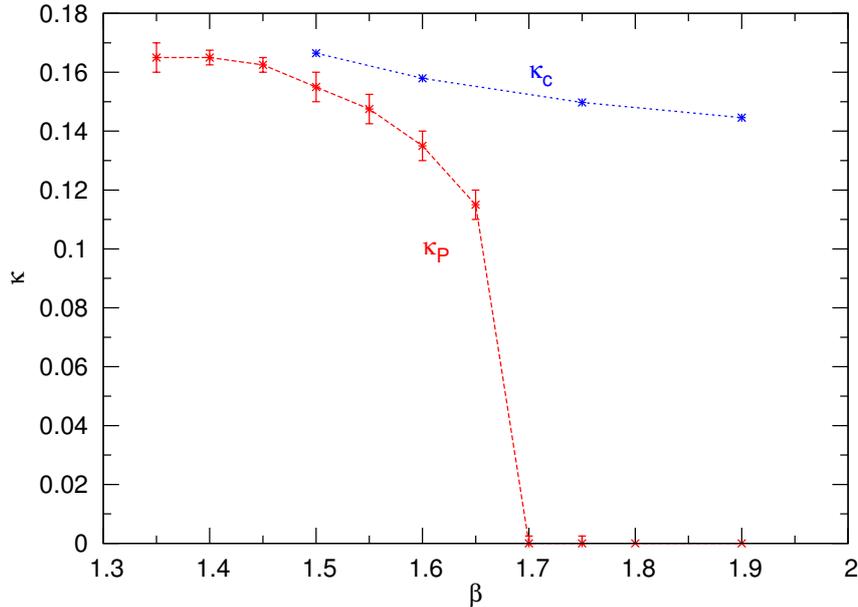


Abbildung 6.8.: Polyakov-Schleifen-Phasenübergang  $\kappa_P(\beta)$  und kritische Linie  $\kappa_c(\beta, T = 0)$  im von  $\beta$  und  $\kappa$  aufgespannten Phasendiagramm.

Zur Absicherung der Ergebnisse sollten außerdem Untersuchungen auf größeren Gittern durchgeführt werden, beispielsweise  $12^3 \times 4$  und  $16^3 \times 4$ . Der bisher verwendete Code war dafür ungeeignet, da spätestens bei Gittern der Größe  $16^3 \times 4$  eine Parallelisierung erforderlich ist. Mit dem bisherigen Code war dies aber nur möglich, wenn die Parallelisierung in Zeitrichtung mindestens so groß ist wie die in den Raumrichtungen, was bei  $T = 4$  wenig Sinn ergibt. Die zurzeit in der DESY-Münster-Kollaboration entwickelte neue Version des Codes wird diese Einschränkung nicht mehr haben.

Die hier vorgestellten Ergebnisse bilden lediglich die Grundlage für weitergehende Untersuchungen der DESY-Münster-Kollaboration zur Phasenstruktur der  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie bei endlicher Temperatur, die zusammen in [19] veröffentlicht wurden. Dort wurden auch die verbundenen Anteile des Gluino-Kondensats mitberücksichtigt und die Suszeptibilität des Gluino-Kondensats genauer betrachtet. Die durchgeführten Untersuchungen deuten ebenfalls darauf hin, dass der chirale Phasenübergang in derselben Region wie der confinement-deconfinement Phasenübergang stattfindet.



# 7. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Eigenschaften der  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie untersucht. Diese Untersuchungen fanden im Rahmen der DESY-Münster-Kollaboration statt und beruhten im Wesentlichen auf der Durchführung und Auswertung von Monte-Carlo-Simulationen. Die gewonnenen Erkenntnisse sind bereits teilweise in Veröffentlichungen der DESY-Münster-Kollaboration eingeflossen [13–21]. Dort findet man auch eine Einordnung der gefundenen  $0^{++}$ -Glueball-Massen in das Massenspektrum der übrigen Teilchen.

Zunächst wurden die bisher verwendeten Methoden zur Bestimmung des statischen Quarkpotentials  $V(r)$  genauer untersucht. In der Vergangenheit gab es vereinzelt Probleme mit der benutzten Zwei-Fit-Prozedur, die sich darin äußerten, dass einzelne Punkte von  $V(r)$  weit außerhalb des erwarteten Wertebereichs lagen, verbunden mit einem sehr großen statistischen Fehler. Daher wurden in Kapitel 4 verschiedene Optimierungsverfahren und alternative Berechnungsmethoden zur Berechnung von Quarkpotential und Sommer-Parameter näher betrachtet.

Es hat sich gezeigt, dass schon die einfache Überprüfung von  $V(r, t = 1) \stackrel{!}{\geq} V(r, t = 2)$  ausreicht, um fehlerhafte Punkte im statischen Quarkpotential  $V(r)$  zu verhindern. Eine automatische Minimierung von  $\chi^2$  erreicht dieses Ziel auch, zeigt aber mitunter Stabilitätsprobleme und einen größeren statistischen Fehler. Die oft empfohlene Wahl besserer Startwerte für die verwendeten Fits hat sich hingegen als unwirksam und unnötig erwiesen, da die Fit-Algorithmen ohnehin das richtige Minimum finden. Ähnlich verhielt es sich mit alternativen Fit-Prozeduren, auch sie zeigten keine signifikanten Verbesserungen gegenüber der einfachen Zwei-Fit-Prozedur.

Bei der Bestimmung des Quarkpotentials  $V(r)$  und des Sommer-Parameters  $r_0$

für die im Zeitraum dieser Arbeit durchgeführten Simulationen (Tabelle 4.2) wurde deutlich, dass wenn möglich immer dieselbe Methode verwendet werden sollte, um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten. Daher wurde durchgehend die bewährte Zwei-Fit-Prozedur benutzt und auf Optimierungen wurde bis auf die wenigen Fälle, in denen sie wirklich nötig waren, verzichtet. Das Quarkpotential zeigte in fast allen Fällen einen sauberen Verlauf ohne signifikante Abweichungen einzelner Punkte und der Sommer-Parameter konnte meistens mit einer Unsicherheit von weniger als 1% bestimmt werden.

Alternativ zum Sommer-Parameter  $r_0$  kann die Skala auch durch den Parameter  $w_0$  [25] bestimmt werden, der durch den Wilson-Fluss [67] definiert wird. Erste Ergebnisse der DESY-Münster-Kollaboration dazu sind in [19, 20] zu finden.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit lag auf der Massenbestimmung des  $0^{++}$ -Glueballs und des  $0^{-+}$ -Glueballs, die in Kapitel 5 beschrieben ist. Aufgrund ihrer rein gluonischen Natur weisen die Gluebälle ein sehr schlechtes Signal-zu-Rausch-Verhältnis auf, weshalb verschiedene Möglichkeiten untersucht wurden, um die Massenbestimmung zu verbessern. Dazu wurde ein neuer Analyse-Code entwickelt, der variational smearing mit einer deutlich höheren Anzahl verschiedener Smearing-Level ermöglicht. Standardmäßig werden für die Messungen der Gluebälle nun 12 bis 16 Smearing-Level verwendet, was eine Verringerung der statistischen Fehler ermöglichte, da zuvor maximal vier Level genutzt werden konnten.

Mit diesem Analyse-Code wurden die optimalen Parameter für das bisher von der DESY-Münster-Kollaboration verwendete APE-Smearing ermittelt. Parallel dazu wurde HYP-Smearing als mögliche Alternative zum APE-Smearing untersucht. Es hat sich gezeigt, dass sich die Ergebnisse für APE-Smearing und HYP-Smearing praktisch nicht voneinander unterscheiden, wenn man eine ausreichend hohe Anzahl an verschiedenen Smearing-Leveln berücksichtigt ( $N_{\text{OP}} \geq 8$ ). Die Ergebnisse werden dabei durch den höchsten Smearing-Level dominiert, der etwa der doppelten räumlichen Ausdehnung  $L$  des Gitters entsprechen sollte ( $N_{\text{APE}} \approx 2L$ ). HYP-Smearing kommt dabei mit einer geringeren Anzahl an Smearing-Leveln  $N_{\text{HYP}}$  aus, gleichzeitig wird aber eine etwa 70% höhere Rechenzeit benötigt.

Des Weiteren wurde die Verwendung unterschiedlicher  $0^{++}$ -Glueball-Operatoren untersucht, um einen besseren Überlapp mit dem Grundzustand zu erreichen. Zusätzlich zum bisher verwendeten einfachsten aus drei Plaketten aufgebauten  $0^{++}$ -

---

Glueball-Operatoren wurden vier weitere Operatoren hinzugefügt und auf unterschiedlichste Weise beim *variational smearing* miteinander kombiniert. Tendenziell erhält man durch die Verwendung mehrerer Operatoren geringfügig niedrigere Massen, die Absenkung ist jedoch in allen Fällen kleiner als der zugehörige statistische Fehler. Offenbar wird durch das *variational smearing* des 4-Link-Operators bereits ein so guter Überlapp mit dem Grundzustand erreicht, dass die explizite Definition weiterer Operatoren das Ergebnis kaum noch verbessert.

Aufgrund der gewonnenen Erkenntnisse wurde die Massenbestimmung des  $0^{++}$ -Glueballs und des  $0^{-+}$ -Glueballs mit *variational smearing* mit dem einfachen und stabilen APE-Smearing mit 12 bis 16 verschiedenen Smearing-Leveln durchgeführt. Dadurch konnten die Massen mit relativ geringem Rechenaufwand bestimmt und die statistischen Fehler wie gewünscht verringert werden. Im Laufe der Untersuchungen zeigte sich jedoch, dass der limitierende Faktor bei der Massenbestimmung nicht mehr der nun kleinere statistische Fehler ist, sondern der systematische Fehler. Dieser kommt dadurch zustande, dass die effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  keine ausreichend langen Plateaus zeigt, so dass die Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  entsprechend stark schwankt. Insbesondere beim  $0^{-+}$ -Glueball haben die ermittelten Fit-Massen mangels eines ausgeprägten Plateaus nur eine geringe Aussagekraft, obwohl ihr statistischer Fehler in derselben Größenordnung wie beim  $0^{++}$ -Glueball liegt.

Der Vergleich der Ergebnisse bei verschiedenen Gitterabständen legt den Schluss nahe, dass der systematische Fehler bei kleinerem Gitterabstand deutlich geringer ausfällt. Gerade die Ergebnisse bei  $\beta = 2.10$  sind trotz einer bisher relativ geringen Statistik sehr vielversprechend, sogar die effektive Masse des  $0^{-+}$ -Glueballs zeigt dort längere Plateaus. Es ist aber zu beachten, dass ein kleinerer Gitterabstand in der Regel ein größeres Gitter mit einem entsprechend höheren Bedarf an Rechenzeit erfordert, da es andernfalls zu unerwünschten Volumeneffekten kommen kann. Durch eine Abschätzung der finite size Effekte, die auch mit Hilfe dieser Arbeit vorgenommen wurde, konnte gezeigt werden, dass ein kleineres Volumen für die Simulationen ausreichend ist [14]. Eine weitere Möglichkeit, um bei zukünftigen Untersuchungen von kleineren Gitterabständen zu profitieren, ohne dass der Rechenaufwand zu sehr ansteigt, wäre die Verwendung anisotroper Gitter [79, 80]. Dabei wird nur der Gitterabstand in zeitlicher Richtung verringert, während der Abstand und die Anzahl an Gitterpunkten in den drei Raumrichtungen unverändert bleiben.

In Kapitel 6 wurde ein erster Blick auf das Phasendiagramm der  $\mathcal{N} = 1$  Super Yang-Mills-Theorie geworfen. Dazu wurden die Phasenübergänge der Polyakov-Schleife und des Gluino-Kondensats genauer untersucht. Die weitergehenden Untersuchungen der DESY-Münster-Kollaboration zur Phasenstruktur bei endlicher Temperatur wurden in [19] veröffentlicht.

Der bei der Polyakov-Schleife beobachtete thermische Phasenübergang  $\kappa_P(\beta)$  und die chirale kritische Linie  $\kappa_c(\beta, T = 0)$  zeigen im untersuchten Bereich eine große Ähnlichkeit mit der in der QCD beobachteten Struktur des Phasendiagramms (Abbildung 6.8). Die Verteilung der Polyakov-Schleife  $P$  zeigt dabei ein Verhalten, das typisch für einen Phasenübergang zweiter Ordnung ist.

Beim Gluino-Kondensat  $\rho$  deuten die bisherigen Untersuchungen darauf hin, dass hier ebenfalls ein Phasenübergang an der thermischen Linie  $\kappa_P(\beta)$  stattfindet, wobei es sich um einen Phasenübergang erster Ordnung zu handeln scheint. Entlang der kritischen Linie  $\kappa_c(\beta)$  wird die chirale Symmetrie ebenfalls gebrochen, dort fehlen aber die Charakteristika eines Phasenübergangs. Weitere Untersuchungen sind notwendig, um beide Effekte besser trennen zu können.

# Literaturverzeichnis

- [1] Ian J.R. Aitchison, *Supersymmetry and the MSSM: An Elementary introduction*, (2005), [arXiv:hep-ph/0505105].
- [2] I.J.R. Aitchison und A.J.G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics*, 3. Aufl., Bd. 1, Taylor & Francis, 2003.
- [3] ———, *Gauge Theories in Particle Physics*, 3. Aufl., Bd. 2, Institute of Physics Publishing, 2004.
- [4] M. Albanese et al., *Glueball Masses and String Tension in Lattice QCD*, Phys. Lett. **B192** (1987), 163–169.
- [5] A. Alexandru und A. Hasenfratz, *Partial global stochastic metropolis update for dynamical smeared link fermions*, Phys. Rev. **D66** (2002), 094502, [arXiv:hep-lat/0207014].
- [6] A. Ali Khan et al., *Equation of state in finite temperature QCD with two flavors of improved Wilson quarks*, Phys. Rev. **D64** (2001), 074510, [arXiv:hep-lat/0103028].
- [7] C. R. Allton et al., *Gauge-invariant smearing and matrix correlators using Wilson fermions at  $\beta = 6.2$* , Phys. Rev. **D47** (1993), 5128–5137, [arXiv:hep-lat/9303009].
- [8] W. E. Arnoldi, *The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenvalue problem.*, Quart. Appl. Math. **9** (1951), 17–29.
- [9] G. S. Bali, C. Schlichter und K. Schilling, *Observing long color flux tubes in  $SU(2)$  lattice gauge theory*, Phys. Rev. **D51** (1995), 5165–5198, [arXiv:hep-lat/9409005].

- [10] B. Berg und A. Billoire, *Glueball spectroscopy in 4d SU(3) lattice gauge theory (II)*, Nucl. Phys. **B226** (1983), Nr. 2, 405–416.
- [11] ———, *Glueball spectroscopy in 4d SU(3) lattice gauge theory (I)*, Nucl. Phys. **B221** (1983), Nr. 1, 109–140.
- [12] G. Bergner und J. Wuilloud, *Acceleration of the Arnoldi method and real eigenvalues of the non-Hermitian Wilson-Dirac operator*, Comput. Phys. Commun. **183** (2012), 299–304, [arXiv:1104.1363 [hep-lat]].
- [13] G. Bergner, G. Münster, D. Sandbrink, U. D. Özugurel und I. Montvay, *Supersymmetric Yang-Mills theory: a step towards the continuum*, PoS **Lattice 2011** (2011), 055, [arXiv:1111.3012 [hep-lat]].
- [14] G. Bergner, T. Berheide, G. Münster, U. D. Özugurel, D. Sandbrink und I. Montvay, *The gluino-gluon particle and finite size effects in supersymmetric Yang-Mills theory*, J. High Energ. Phys. **1209** (2012), 108, [arXiv:1206.2341 [hep-lat]].
- [15] G. Bergner, I. Montvay, G. Münster, D. Sandbrink und U. D. Özugurel, *The gluino-gluon particle and relevant scales for the simulations of supersymmetric Yang-Mills theory*, PoS **Lattice 2012** (2012), 042, [arXiv:1210.7767 [hep-lat]].
- [16] G. Bergner, I. Montvay, G. Münster, U. D. Özugurel und D. Sandbrink, *Towards the spectrum of low-lying particles in supersymmetric Yang-Mills theory*, J. High Energ. Phys. **1311** (2013), 061, [arXiv:1304.2168 [hep-lat]].
- [17] G. Bergner, I. Montvay, G. Münster, D. Sandbrink und U. D. Özugurel,  *$N=1$  supersymmetric Yang-Mills theory on the lattice*, PoS **Lattice 2013** (2013), 483, [arXiv:1311.1681 [hep-lat]].
- [18] G. Bergner, I. Montvay, G. Münster, U. D. Özugurel und D. Sandbrink, *Numerical simulation of supersymmetric Yang-Mills theory*, Proceedings of the NIC Symposium 2014 (K. Binder, G. Münster und M. Kremer, Hrsg.), NIC Series, Bd. 47, 2014, S. 169.

- [19] G. Bergner, P. Giudice, G. Münster, S. Piemonte und D. Sandbrink, *Phase structure of the  $N=1$  supersymmetric Yang-Mills theory at finite temperature*, J. High Energ. Phys. **1411** (2014), 049, [arXiv:1405.3180 [hep-lat]].
- [20] G. Bergner, P. Giudice, I. Montvay, G. Münster, U. D. Özugurel, S. Piemonte und D. Sandbrink, *Latest lattice results of  $N=1$  supersymmetric Yang-Mills theory with some topological insights*, PoS **Lattice 2014** (2014), 273, [arXiv:1411.1746 [hep-lat]].
- [21] G. Bergner, P. Giudice, G. Münster, S. Piemonte und D. Sandbrink, *First studies of the phase diagram of  $N=1$  supersymmetric Yang-Mills theory*, PoS **Lattice 2014** (2014), 262, [arXiv:1501.02746 [hep-lat]].
- [22] T. Berheide, *Volumen-Effekte in der  $N=1$  supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter*, Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2012.
- [23] C. W. Bernard und T. A. DeGrand, *Perturbation theory for fat link fermion actions*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **83** (2000), 845–847, [arXiv:hep-lat/9909083].
- [24] B. Blossier, M. Della Morte, G. von Hippel, T. Mendes und R. Sommer, *On the generalized eigenvalue method for energies and matrix elements in lattice field theory*, J. High Energ. Phys. **0904** (2009), 094, [arXiv:0902.1265 [hep-lat]].
- [25] S. Borsanyi, S. Durr, Z. Fodor, C. Hoelbling, S. D. Katz et al., *High-precision scale setting in lattice QCD*, J. High Energ. Phys. **1209** (2012), 010, [arXiv:1203.4469 [hep-lat]].
- [26] S. Borsányi, Z. Fodor, C. Hoelbling, S. D. Katz, S. Krieg, C. Ratti und K. K. Szabó, *Is there still any  $T_c$  mystery in lattice QCD? Results with physical masses in the continuum limit III*, J. High Energ. Phys. **1009** (2010), 073, [arXiv:1005.3508 [hep-lat]].
- [27] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, 5. Aufl., H. Deutsch, 2000.
- [28] D. J. E. Callaway und A. Rahman, *Microcanonical Ensemble Formulation of Lattice Gauge Theory*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982), 613–616.

- [29] I. Campos et al., *Monte Carlo simulation of  $SU(2)$  Yang-Mills theory with light gluinos*, Eur. Phys. J. **C11** (1999), 507–527, [arXiv:hep-lat/9903014].
- [30] S. Coleman und J. Mandula, *All Possible Symmetries of the  $S$  Matrix*, Phys. Rev. **159** (1967), 1251–1256.
- [31] M. Creutz, *Asymptotic-Freedom Scales*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980), 313–316.
- [32] ———, *Monte Carlo study of quantized  $SU(2)$  gauge theory*, Phys. Rev. **D21** (1980), 2308–2315.
- [33] G. Curci und G. Veneziano, *Supersymmetry and the lattice: A reconciliation?*, Nucl. Phys. **B292** (1987), Nr. 0, 555–572.
- [34] A. Das und T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, 2. Aufl., World Scientific Publishing Company, 2003.
- [35] K. Demmouche,  *$N=1$   $SU(2)$  Supersymmetric Yang-Mills theory on the lattice with light dynamical Wilson gluinos*, Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2009.
- [36] K. Demmouche, F. Farchioni, A. Ferling, I. Montvay, G. Münster et al., *Simulation of 4d  $N=1$  supersymmetric Yang-Mills theory with Symanzik improved gauge action and stout smearing*, Eur. Phys. J. **C69** (2010), 147–157, [arXiv:1003.2073 [hep-lat]].
- [37] A. Donini, M. Guagnelli, P. Hernandez und A. Vladikas, *Towards  $N=1$  super Yang-Mills on the lattice*, Nucl. Phys. **B523** (1998), 529–552, [arXiv:hep-lat/9710065].
- [38] S. Duane, A.D. Kennedy, B. J. Pendleton und D. Roweth, *Hybrid Monte Carlo*, Phys. Lett. **B195** (1987), Nr. 2, 216–222.
- [39] R.G. Edwards, U. M. Heller und T.R. Klassen, *Accurate scale determinations for the Wilson gauge action*, Nucl. Phys. **B517** (1998), 377–392, [arXiv:hep-lat/9711003].
- [40] F. Englert und R. Brout, *Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 321–323.

- [41] F. Farchioni, A. Feo, T. Galla, C. Gebert, R. Kirchner, I. Montvay, G. Münster und A. Vladikas, *The Supersymmetric Ward identities on the lattice*, Eur. Phys. J. **C23** (2002), 719–734, [arXiv:hep-lat/0111008].
- [42] G.R. Farrar, G. Gabadadze und M. Schwetz, *The spectrum of softly broken  $N=1$  supersymmetric Yang-Mills theory*, Phys. Rev. **D60** (1999), 035002, [arXiv:hep-th/9806204].
- [43] R. Frezzotti und K. Jansen, *A polynomial hybrid Monte Carlo algorithm*, Phys. Lett. **B402** (1997), Nr. 3–4, 328–334, [arXiv:hep-lat/9702016].
- [44] ———, *The PHMC algorithm for simulations of dynamical fermions: I. Description and properties*, Nucl. Phys. **B555** (1999), Nr. 1–2, 395–431, [arXiv:hep-lat/9808011].
- [45] ———, *The PHMC algorithm for simulations of dynamical fermions: II. Performance analysis*, Nucl. Phys. **B555** (1999), Nr. 1–2, 432–453, [arXiv:hep-lat/9808038].
- [46] H. Fritzsche und M. Gell-Mann, *Current algebra: Quarks and what else?*, Proceedings of the XVI International Conference on High Energy Physics **C720906V2** (1972), 135–165, [arXiv:hep-ph/0208010].
- [47] C. Gattringer und C. B. Lang, *Quantum Chromodynamics on the Lattice*, Springer, 2010.
- [48] C. Gebert und I. Montvay, *A Recurrence scheme for least square optimized polynomials*, (2003), [arXiv:hep-lat/0302025].
- [49] GSL, *GNU Scientific Library*, Website, 2014, <http://www.gnu.org/software/gsl/>, gesehen am 15.11.2014.
- [50] G. S. Guralnik, C. R. Hagen und T. W. B. Kibble, *Global Conservation Laws and Massless Particles*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 585–587.
- [51] R. Haag, J. T. Łopuszański und M. Sohnius, *All possible generators of supersymmetries of the  $S$ -matrix*, Nucl. Phys. **B88** (1975), Nr. 2, 257–274.

- [52] R. Haake, *Methoden zur Bestimmung des Sommer-Parameters auf dem Gitter*, Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2012.
- [53] M. Hasenbusch, *Speeding up finite step size updating of full QCD on the lattice*, Phys. Rev. **D59** (1999), 054505, [arXiv:hep-lat/9807031].
- [54] A. Hasenfratz und F. Knechtli, *Flavor symmetry and the static potential with hypercubic blocking*, Phys. Rev. **D64** (2001), Nr. 3, 034504, [arXiv:hep-lat/0103029].
- [55] P. W. Higgs, *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 508–509.
- [56] P. W. Higgs, *Broken symmetries, massless particles and gauge fields*, Phys. Lett. **12** (1964), Nr. 2, 132–133.
- [57] E. M. Ilgenfritz, K. Jansen, M. P. Lombardo, M. Müller-Preussker, M. Petschlies, O. Philipsen und L. Zeidlewicz, *Phase structure of thermal lattice QCD with  $N(f) = 2$  twisted mass Wilson fermions*, Phys. Rev. **D80** (2009), 094502, [arXiv:0905.3112 [hep-lat]].
- [58] K. Ishikawa, G. Schierholz und M. Teper, *Calculation of the Glueball Mass Spectrum of  $SU(2)$  and  $SU(3)$  Nonabelian Lattice Gauge Theories 1. Introduction and  $SU(2)$* , Z. Phys. **C19** (1983), 327.
- [59] K. Ishikawa, A. Sato, G. Schierholz und M. Teper, *Calculation of the Glueball Mass Spectrum of  $SU(2)$  and  $SU(3)$  Nonabelian Lattice Gauge Theories. 2.  $SU(3)$* , Z. Phys. **C21** (1983), 167.
- [60] JuRoPA, *Jülich Research on Petaflop Architectures*, Website, 2014, <http://www.fz-juelich.de/jsc/juropa/>, gesehen am 15.11.2014.
- [61] R. Kirchner, S. Luckmann, I. Montvay, K. Spanderen und J. Westphalen, *Numerical simulation of dynamical gluinos: Experience with a multibosonic algorithm and first results*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **73** (1999), 828–833, [arXiv:hep-lat/9808024].

- [62] R. Kirchner, I. Montvay, J. Westphalen, S. Luckmann und K. Spanderen, *Evidence for discrete chiral symmetry breaking in  $N=1$  supersymmetric Yang-Mills theory*, Phys. Lett. **B446** (1999), Nr. 3–4, 209–215, [arXiv:hep-lat/9810062].
- [63] G. Koutsoumbas, I. Montvay, A. Pap, K. Spanderen, D. Talkenberger et al., *Numerical study of  $SU(2)$  Yang-Mills theory with gluinos*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **63** (1998), 727–729, [arXiv:hep-lat/9709091].
- [64] LHC, *The Large Hadron Collider*, Website, 2014, <http://lhcb.web.cern.ch/lhc/>, gesehen am 15.11.2014.
- [65] S. Luckmann, *Supersymmetrische Feldtheorien auf dem Gitter*, Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2001.
- [66] M. Lüscher, *A new approach to the problem of dynamical quarks in numerical simulations of lattice QCD*, Nucl. Phys. **B418** (1994), Nr. 3, 637–648.
- [67] M. Lüscher, *Properties and uses of the Wilson flow in lattice QCD*, J. High Energ. Phys. **1008** (2010), 071, [arXiv:1006.4518 [hep-lat]].
- [68] M. Lüscher, K. Symanzik und P. Weisz, *Anomalies of the free loop wave equation in the WKB approximation*, Nucl. Phys. **B173** (1980), Nr. 3, 365–396.
- [69] M. Lüscher und P. Weisz, *On-shell improved lattice gauge theories*, Comm. Math. Phys. **97** (1985), Nr. 1–2, 59–77, Erratum: 98(3):433.
- [70] M. Lüscher und U. Wolff, *How to calculate the elastic scattering matrix in two-dimensional quantum field theories by numerical simulation*, Nucl. Phys. **B339** (1990), Nr. 1, 222–252.
- [71] J. Lykken und M. Spiropulu, *Supersymmetrie in der Krise*, Spektrum der Wissenschaft **9/14** (2014), 36–43.
- [72] N. Metropolis, A. W. Rosenbluth, M. N. Rosenbluth, A. H. Teller und E. Teller, *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*, J. Chem. Phys. **21** (1953), Nr. 6, 1087–1092.
- [73] S. Meyers, *Effective C++*, 3. Aufl., Addison-Wesley, 2005.

- [74] C. Michael, *The Running coupling from lattice gauge theory*, Phys. Lett. **B283** (1992), 103–106, [arXiv:hep-lat/9205010].
- [75] I. Montvay, *An algorithm for gluinos on the lattice*, Nucl. Phys. **B466** (1996), Nr. 1–2, 259–281, [arXiv:hep-lat/9510042].
- [76] ———, *Quadratically optimized polynomials for fermion simulations*, Comput. Phys. Commun. **109** (1998), Nr. 2–3, 144–60, [arXiv:hep-lat/9707005].
- [77] I. Montvay und G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 1997.
- [78] I. Montvay und E. Scholz, *Updating algorithms with multi-step stochastic correction*, Phys. Lett. **B623** (2005), 73–79, [arXiv:hep-lat/0506006].
- [79] C. J. Morningstar und M. J. Peardon, *Efficient glueball simulations on anisotropic lattices*, Phys. Rev. **D56** (1997), 4043–4061, [arXiv:hep-lat/9704011].
- [80] ———, *The Glueball spectrum from an anisotropic lattice study*, Phys. Rev. **D60** (1999), 034509, [arXiv:hep-lat/9901004].
- [81] C. Morningstar und M. J. Peardon, *Analytic smearing of  $SU(3)$  link variables in lattice QCD*, Phys. Rev. **D69** (2004), 054501, [arXiv:hep-lat/0311018].
- [82] G. Münster und M. Walzl, *Lattice gauge theory: A Short primer*, (2000), [arXiv:hep-lat/0012005].
- [83] F. Niedermayer, P. Rufenacht und U. Wenger, *Fixed point gauge actions with fat links: Scaling and glueballs*, Nucl. Phys. **B597** (2001), 413–450, [arXiv:hep-lat/0007007].
- [84] ———, *Fixed point  $SU(3)$  gauge actions: Scaling properties and glueballs*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **94** (2001), 636–639, [arXiv:hep-lat/0011041].
- [85] Nobelprize.org, *The Nobel Prize in Physics 2013*, Website, 2014, [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/2013/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2013/), gesehen am 15.11.2014.
- [86] W. Ochs, *The Status of Glueballs*, J. Phys. G **40** (2013), 043001, [arXiv:1301.5183 [hep-lat]].

- [87] PALMA, *Paralleles Linux-System für Münsteraner Anwender*, Website, 2014, <http://www.uni-muenster.de/ZIV/Technik/PALMA/>, gesehen am 15.11.2014.
- [88] J. Polonyi und H. W. Wyld, *Microcanonical Simulation of Fermionic Systems*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983), 2257–2260, Erratum: 52:401.
- [89] A.M. Polyakov, *Compact gauge fields and the infrared catastrophe*, Phys. Lett. **B59** (1975), Nr. 1, 82–84.
- [90] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, 3. Aufl., Cambridge University Press, 2007.
- [91] L. Quack, *Untersuchung der skalaren Glueballmasse und der Glueball- $\sigma$ -Mischung*, Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2010.
- [92] R. T. Scalettar, D. J. Scalapino und R. L. Sugar, *New algorithm for the numerical simulation of fermions*, Phys. Rev. **B34** (1986), 7911–7917.
- [93] J.C. Sexton und D.H. Weingarten, *Hamiltonian evolution for the hybrid Monte Carlo algorithm*, Nucl. Phys. **B380** (1992), Nr. 3, 665–677.
- [94] J. Smit, *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 2002.
- [95] R. Sommer, *A new way to set the energy scale in lattice gauge theories and its application to the static force and  $\alpha_s$  in  $SU(2)$  Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. **B411** (1994), Nr. 2–3, 839–854, [arXiv:hep-lat/9310022].
- [96] K. Spanderen, *Monte-Carlo-Simulationen einer  $SU(2)$  Yang-Mills-Theorie mit dynamischen Gluinos*, Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1998.
- [97] K. Symanzik, *Continuum limit and improved action in lattice theories: (I). Principles and  $\phi^4$  theory*, Nucl. Phys. **B226** (1983), Nr. 1, 187–204.
- [98] ———, *Continuum limit and improved action in lattice theories: (II).  $O(N)$  non-linear sigma model in perturbation theory*, Nucl. Phys. **B226** (1983), Nr. 1, 205–227.

- [99] M. J. Teper, *Glueball masses and other physical properties of  $SU(N)$  gauge theories in  $D = (3+1)$ : A Review of lattice results for theorists*, (1998), [arXiv:hep-th/9812187].
- [100] G. Veneziano und S. Yankielowicz, *An effective lagrangian for the pure  $N = 1$  supersymmetric Yang-Mills theory*, Phys. Lett. **B113** (1982), 231–236.
- [101] J. Wess und J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, 1992.
- [102] K. G. Wilson, *Confinement of quarks*, Phys. Rev. **D10** (1974), 2445–2459.
- [103] E. Witten, *Constraints on supersymmetry breaking*, Nucl. Phys. **B202** (1982), Nr. 2, 253–316.
- [104] J. Wolf, *C++ von A bis Z*, 2. Aufl., Galileo Press, 2009.
- [105] U. Wolff, *Monte Carlo errors with less errors*, Comput. Phys. Commun. **156** (2004), 143–153, Erratum: 176:383, 2007. [arXiv:hep-lat/0306017].
- [106] J. Wuilloud, *The Wilson-Dirac Operator Eigenspectrum for the Theories of QCD and Super Yang-Mills with One Flavour*, Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2010.

# Liste der Veröffentlichungen

- [1] G. Bergner, G. Münster, D. Sandbrink, U. D. Özugurel und I. Montvay, *Supersymmetric Yang-Mills theory: a step towards the continuum*, PoS **Lattice 2011** (2011), 055, [arXiv:1111.3012 [hep-lat]].
- [2] G. Bergner, T. Berheide, G. Münster, U. D. Özugurel, D. Sandbrink und I. Montvay, *The gluino-gluon particle and finite size effects in supersymmetric Yang-Mills theory*, J. High Energ. Phys. **1209** (2012), 108, [arXiv:1206.2341 [hep-lat]].
- [3] G. Bergner, I. Montvay, G. Münster, D. Sandbrink und U. D. Özugurel, *The gluino-gluon particle and relevant scales for the simulations of supersymmetric Yang-Mills theory*, PoS **Lattice 2012** (2012), 042, [arXiv:1210.7767 [hep-lat]].
- [4] G. Bergner, I. Montvay, G. Münster, U. D. Özugurel und D. Sandbrink, *Towards the spectrum of low-lying particles in supersymmetric Yang-Mills theory*, J. High Energ. Phys. **1311** (2013), 061, [arXiv:1304.2168 [hep-lat]].
- [5] G. Bergner, I. Montvay, G. Münster, D. Sandbrink und U. D. Özugurel,  *$N=1$  supersymmetric Yang-Mills theory on the lattice*, PoS **Lattice 2013** (2013), 483, [arXiv:1311.1681 [hep-lat]].
- [6] G. Bergner, I. Montvay, G. Münster, U. D. Özugurel und D. Sandbrink, *Numerical simulation of supersymmetric Yang-Mills theory*, Proceedings of the NIC Symposium 2014 (K. Binder, G. Münster und M. Kremer, Hrsg.), NIC Series, Bd. 47, 2014, S. 169.
- [7] G. Bergner, P. Giudice, G. Münster, S. Piemonte und D. Sandbrink, *Phase structure of the  $N=1$  supersymmetric Yang-Mills theory at finite temperature*, J. High Energ. Phys. **1411** (2014), 049, [arXiv:1405.3180 [hep-lat]].

- [8] G. Bergner, P. Giudice, I. Montvay, G. Münster, U. D. Özugurel, S. Piemonte und D. Sandbrink, *Latest lattice results of  $N=1$  supersymmetric Yang-Mills theory with some topological insights*, PoS **Lattice 2014** (2014), 273, [arXiv:1411.1746 [hep-lat]].
  
- [9] G. Bergner, P. Giudice, G. Münster, S. Piemonte und D. Sandbrink, *First studies of the phase diagram of  $N=1$  supersymmetric Yang-Mills theory*, PoS **Lattice 2014** (2014), 262, [arXiv:1501.02746 [hep-lat]].

# A. Glueball Abbildungen

Hier finden sich einige weitere Abbildungen zum Kapitel 5 über die Gluebälle.

## A.1. APE- und HYP-Smearing

Die Abbildungen A.1 bis A.4 zeigen das Verhalten des Korrelators  $C(\Delta t)$  und der Massen  $m_{\text{eff}}(\Delta t)$  und  $m_{\text{fit}}(\Delta t, \Delta t + 4)$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{HYP}}$  beim HYP-Smearing. Sie zeigen eine große Ähnlichkeit mit den entsprechenden Abbildungen 5.7 bis 5.10 für das APE-Smearing (Seite 77 bis 79).

Die Abbildungen A.5 und A.6 zeigen nochmals die in Abbildung 5.9 (Seite 79) beziehungsweise Abbildung A.3 (Seite 157) dargestellte effektive Masse  $m_{\text{eff}}$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{APE}}$  beziehungsweise  $N_{\text{HYP}}$ , aber mit einem vergrößerten Ausschnitt des Smearing-Levels. Auf diese Weise ist das in Abschnitt 5.2.2 beschriebene Plateau und der anschließende Anstieg der effektiven Masse besser zu erkennen.

Die Abbildungen A.7 bis A.10 zeigen das Verhalten des Korrelators  $C(\Delta t)$  und der Massen  $m_{\text{eff}}(\Delta t)$  und  $m_{\text{fit}}(\Delta t, \Delta t + 4)$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{APE}}$ , wobei jeweils die fünf in Abschnitt 5.2.4 vorgestellten Operatoren verwendet werden. Sie zeigen eine große Ähnlichkeit mit den entsprechenden Abbildungen 5.7 bis 5.10 auf den Seiten 77 bis 79, bei denen nur der 4-Link-Operator verwendet wurde.

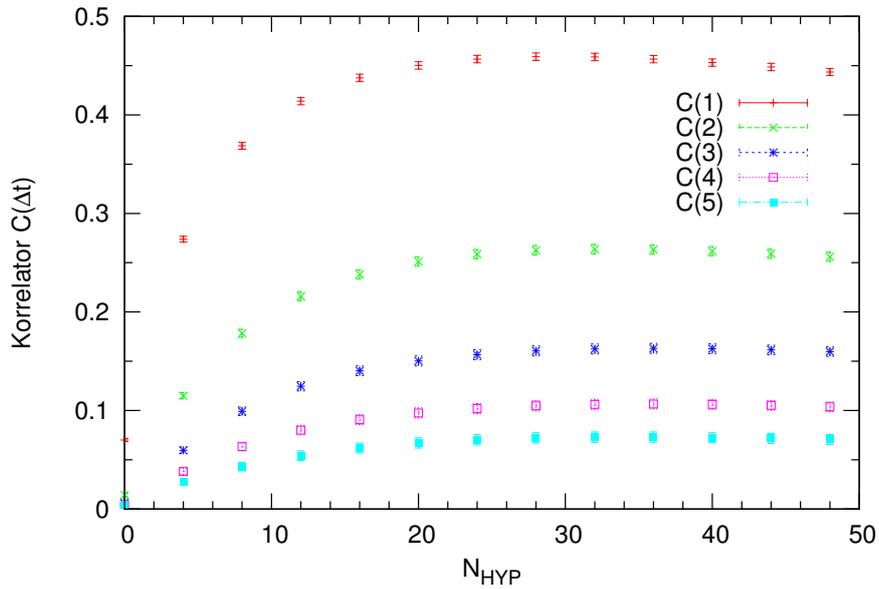


Abbildung A.1.: Korrelator  $C(\Delta t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{HYP}}$ . Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$ , 10280 Konfigurationen.

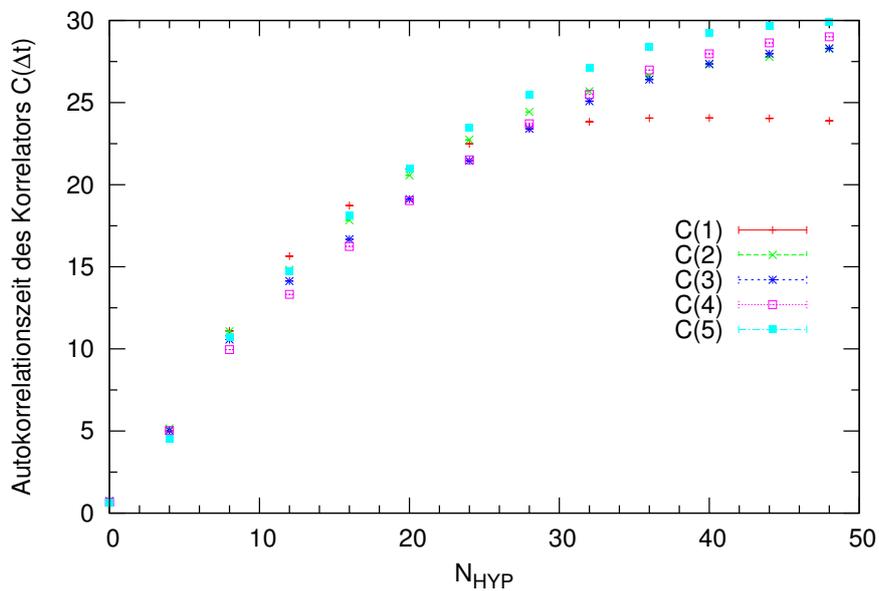


Abbildung A.2.: Autokorrelationszeit des Korrelators  $C(\Delta t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{HYP}}$ . Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$ , 10280 Konfigurationen.

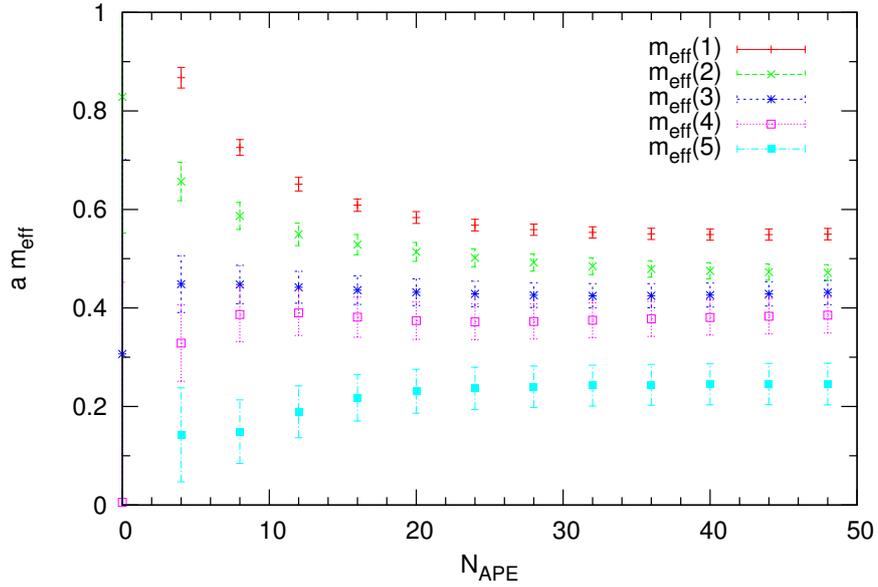


Abbildung A.3.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{HYP}}$ . Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$ , 10280 Konfigurationen.

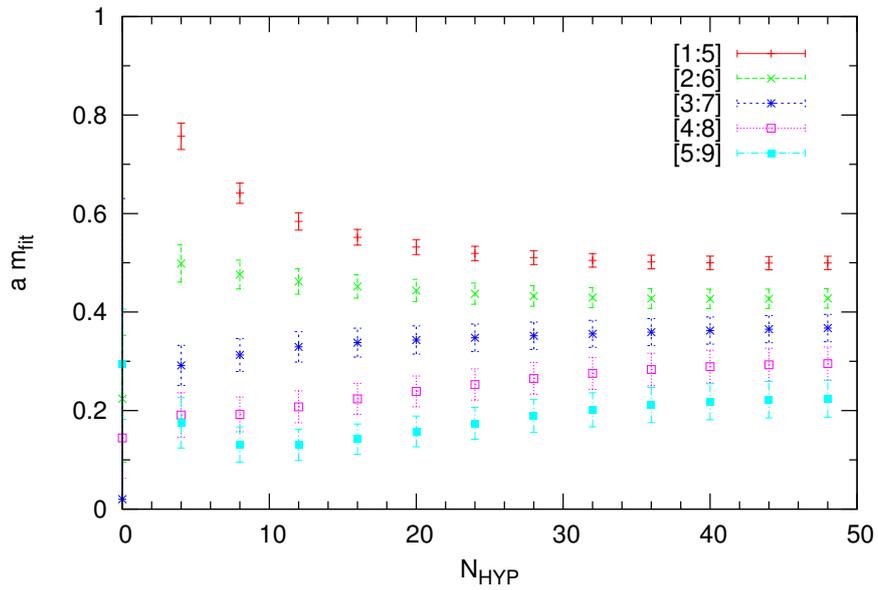


Abbildung A.4.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion des Smearing-Levels  $N_{\text{HYP}}$ . Gittergröße  $24^3 \times 48$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1493$ , 10280 Konfigurationen.

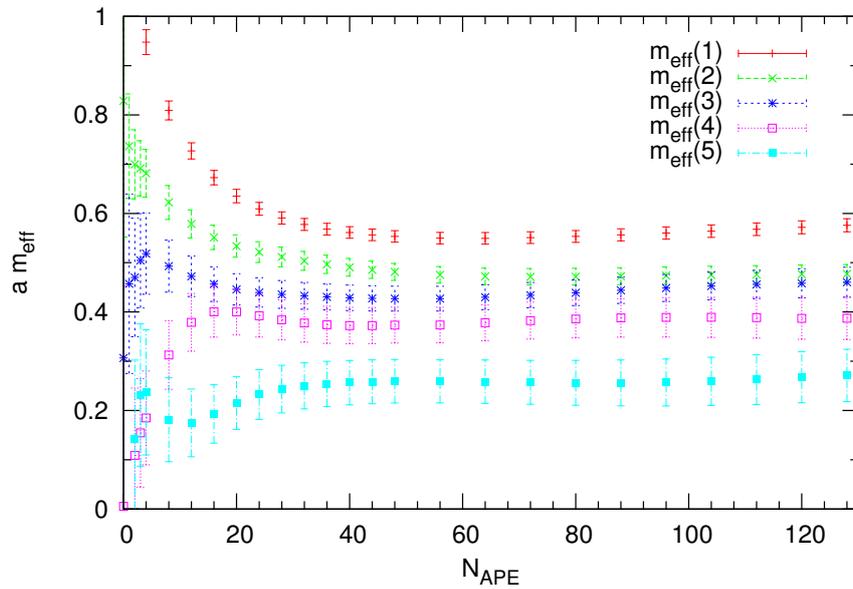


Abbildung A.5.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion des Smearing-Llevels  $N_{\text{APE}}$ . Die Daten entsprechen Abbildung 5.9 (Seite 79), mit einem größeren Ausschnitt von  $N_{\text{APE}}$ .

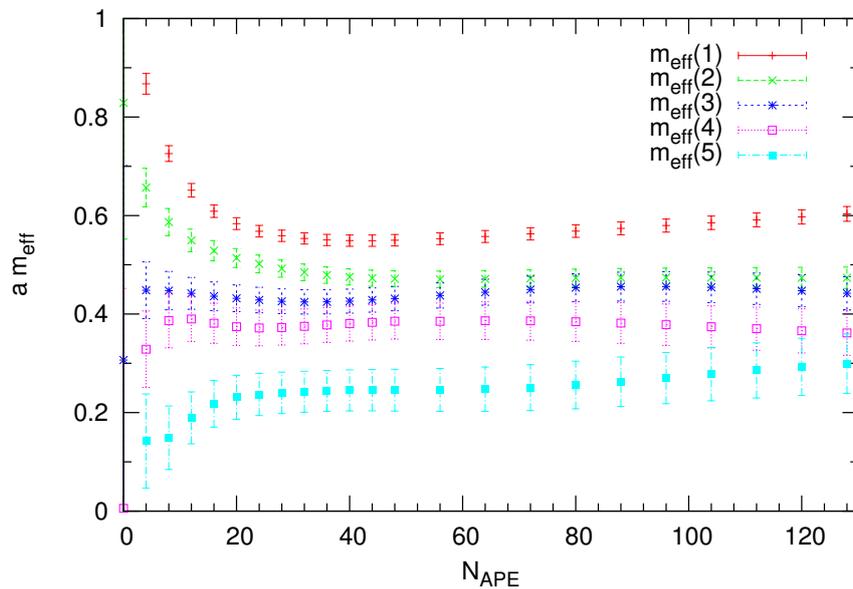


Abbildung A.6.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion des Smearing-Llevels  $N_{\text{HYP}}$ . Die Daten entsprechen Abbildung A.3 (Seite 157), mit einem größeren Ausschnitt von  $N_{\text{HYP}}$ .

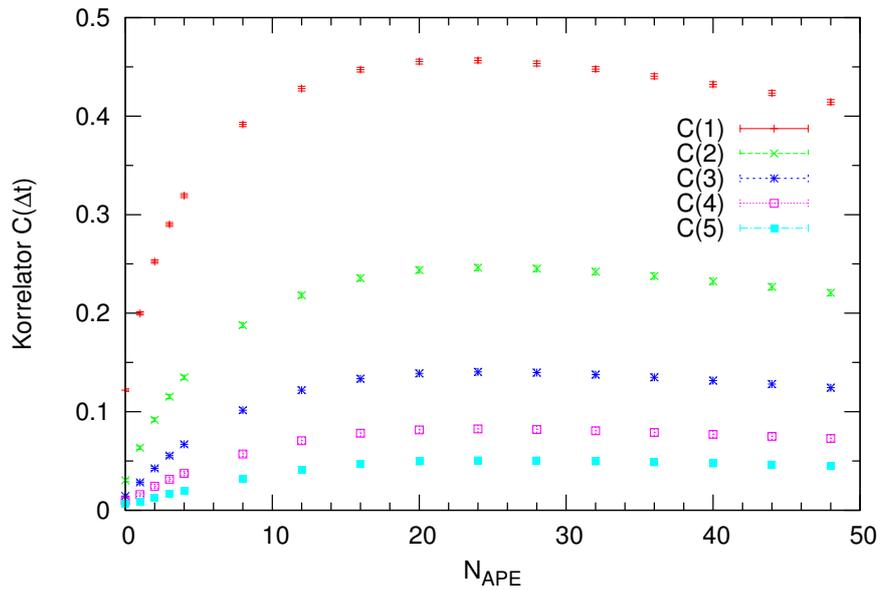


Abbildung A.7.: Korrelator  $C(\Delta t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion von  $N_{\text{APE}}$  bei Verwendung von jeweils fünf verschiedenen Operatoren. Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1350$ , 10056 Konfigurationen.

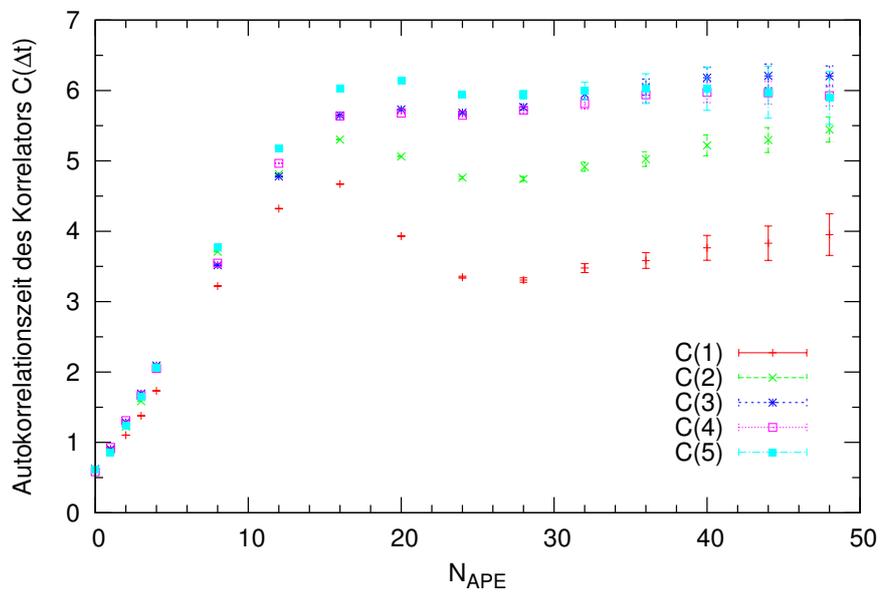


Abbildung A.8.: Autokorrelationszeit der Korrelatoren  $C(t)$  aus Abbildung A.7.

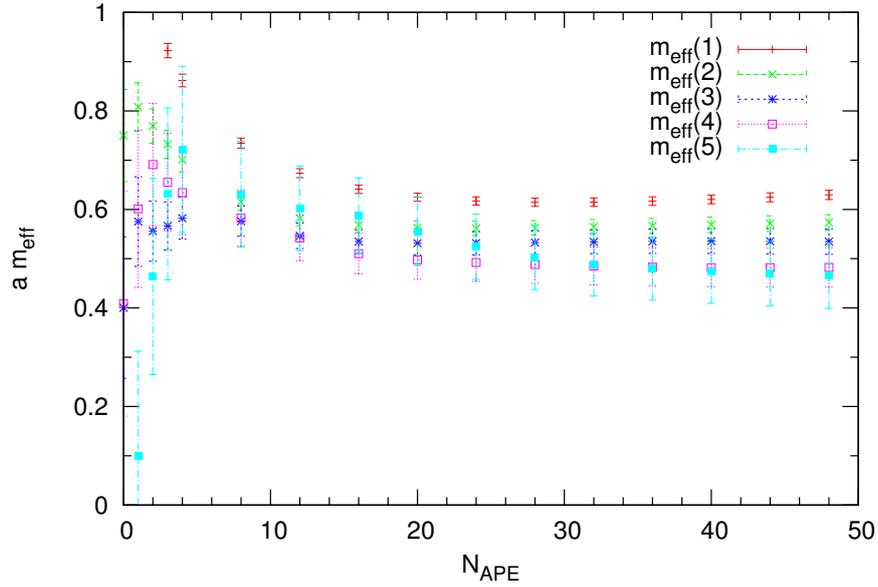


Abbildung A.9.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion von  $N_{\text{APE}}$  bei Verwendung von jeweils fünf verschiedenen Operatoren. Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1350$ , 10056 Konfigurationen.

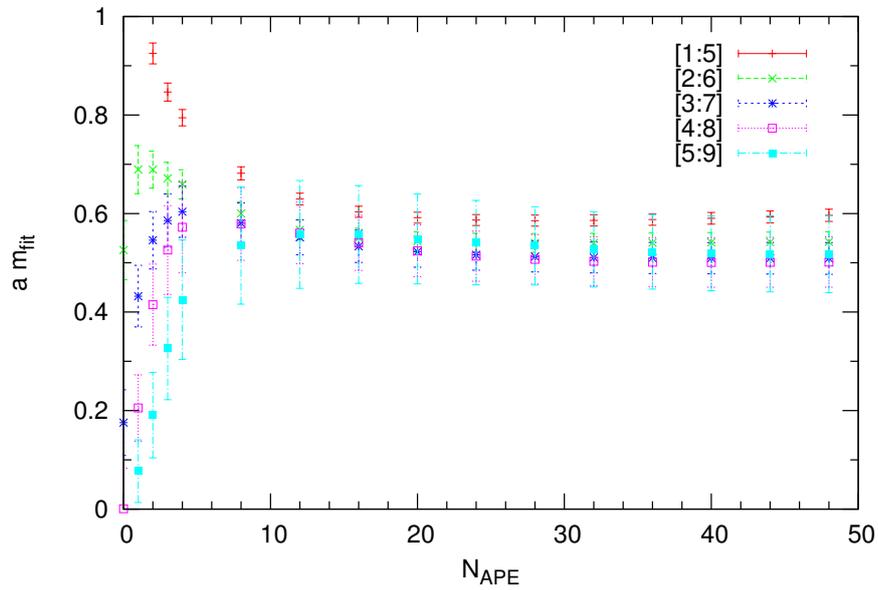


Abbildung A.10.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t = 1, 2, 3, 4, 5)$  als Funktion von  $N_{\text{APE}}$  bei Verwendung von jeweils fünf verschiedenen Operatoren. Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1350$ , 10056 Konfigurationen.

## A.2. Verwendung anderer Operatoren

Die Abbildung A.11 gehört zu Tabelle 5.4 auf Seite 91. Sie zeigt die Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  für die Fälle (a) bis (d).

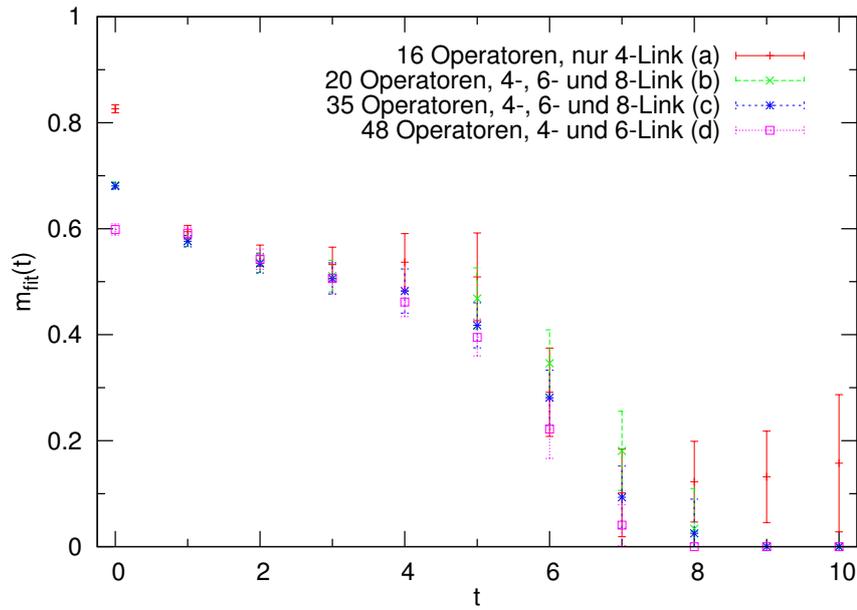


Abbildung A.11.: Vergleich der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  für verschiedene Kombinationen der Operatoren. Gittergröße  $24^3 \times 64$ ,  $\beta = 1.75$ ,  $\kappa = 0.1350$ , 10056 Konfigurationen.

### A.3. Effektive Massen und Fit-Massen

In Abschnitt 5.3, Seite 94, wurden die Ergebnisse der Massenbestimmung des  $0^{++}$ -Glueballs und des  $0^{-+}$ -Glueballs beschrieben. Bei den Untersuchungen mit  $\beta = 1.75$  war es nicht möglich, verlässliche Ergebnisse für den  $0^{-+}$ -Glueball anzugeben, siehe die Tabellen A.1 und A.2. Hier finden sich die dazu passenden Plots der effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  und der Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  bei fester Fit-Intervalllänge von fünf.

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$32^3 \times 64$	1.75	0.1490	4859	0.778(67)(307)	2	5	0.847(97)	3
$32^3 \times 64$	1.75	0.1492	6196	0.976(68)(354)	2	5	1.030(23)	4
$32^3 \times 64$	1.75	0.1494	5471	0.849(59)(212)	2	5	0.933(33)	3
$32^3 \times 64$	1.75	0.1495	1887	0.719(77)(271)	2	5	0.803(28)	2
$24^3 \times 48$	1.75	0.1490	9350	0.674(47)(163)	2	6	0.705(34)	3
$24^3 \times 48$	1.75	0.1492	10027	0.825(59)(229)	2	5	0.877(56)	5
$24^3 \times 48$	1.75	0.14925	7224	0.770(65)(230)	2	6	0.859(71)	4
$24^3 \times 48$	1.75	0.1493	10250	--	--	--	--	--

Tabelle A.1.: Masse des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing.

Gitter	$\beta$	$\kappa$	$N_{\text{conf}}$	$m_{\text{fit}}(t_1, t_2)$			$m_{\text{hist}}(t), \#\text{Fits}$	
$24^3 \times 64$	1.75	0.1350	10056	--	--	--	--	--
$24^3 \times 64$	1.75	0.1355	10311	0.873(57)(186)	2	5	0.881(39)	2
$24^3 \times 64$	1.75	0.1360	10023	0.919(59)(373)	2	5	0.957(42)	2
$24^3 \times 64$	1.75	0.1365	9666	0.949(59)(252)	2	4	1.000(76)	2
$24^3 \times 64$	1.75	0.1368	10188	0.928(55)(185)	2	5	0.938(37)	2

Tabelle A.2.: Masse des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 3 Level Stout-Smearing.

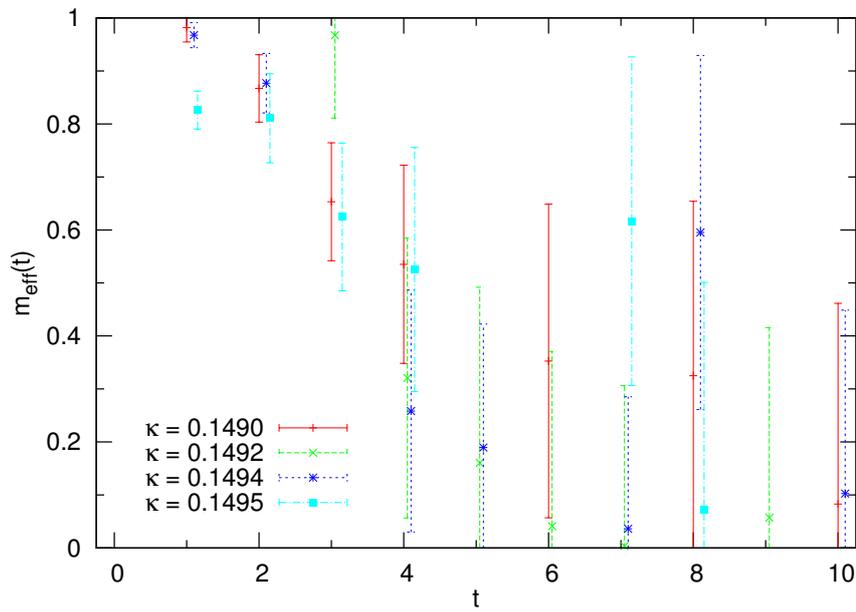


Abbildung A.12.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $32^3 \times 64$ .

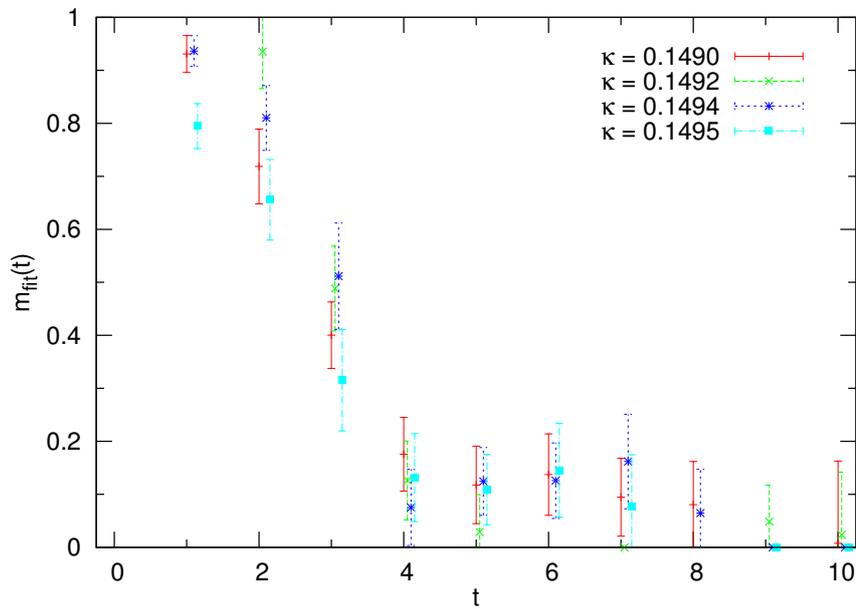


Abbildung A.13.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $32^3 \times 64$ .

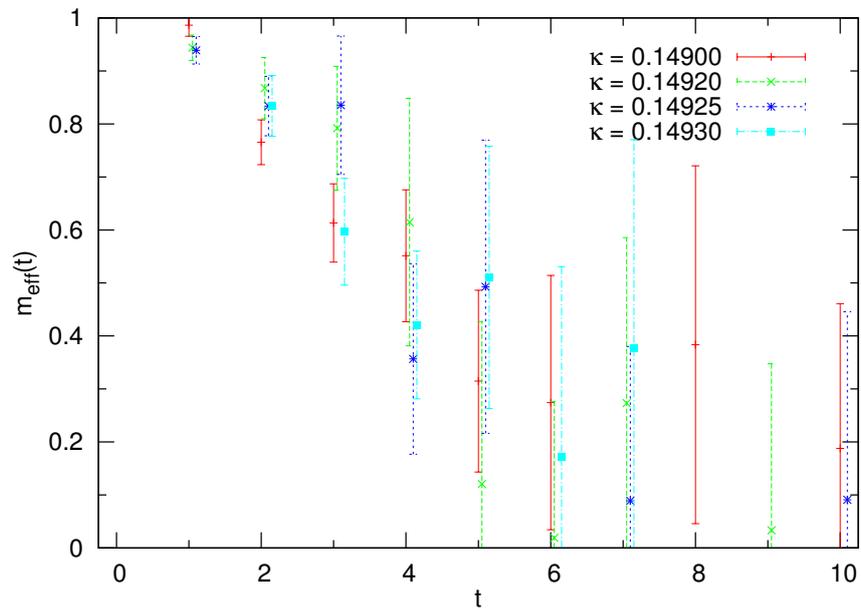


Abbildung A.14.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $24^3 \times 48$ .

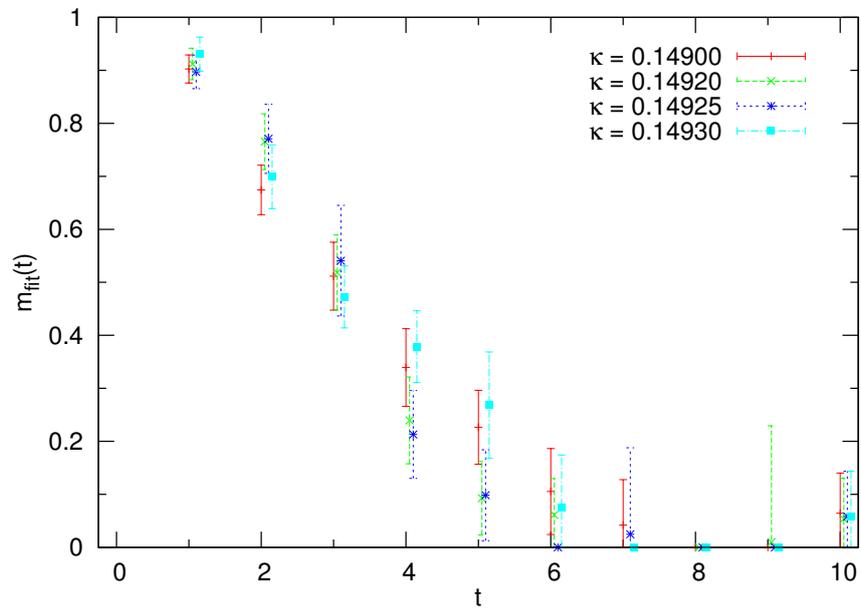


Abbildung A.15.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 1 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $24^3 \times 48$ .

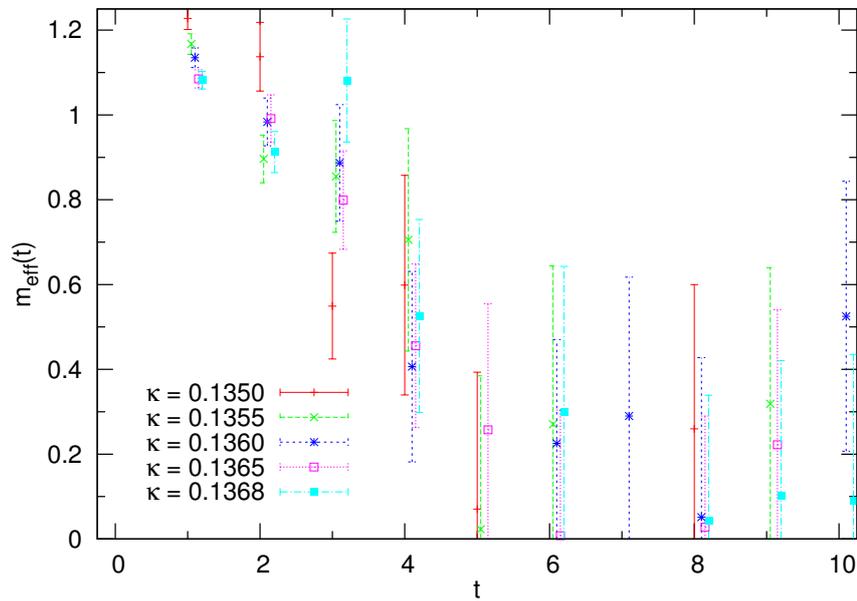


Abbildung A.16.: Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 3 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $24^3 \times 64$ .

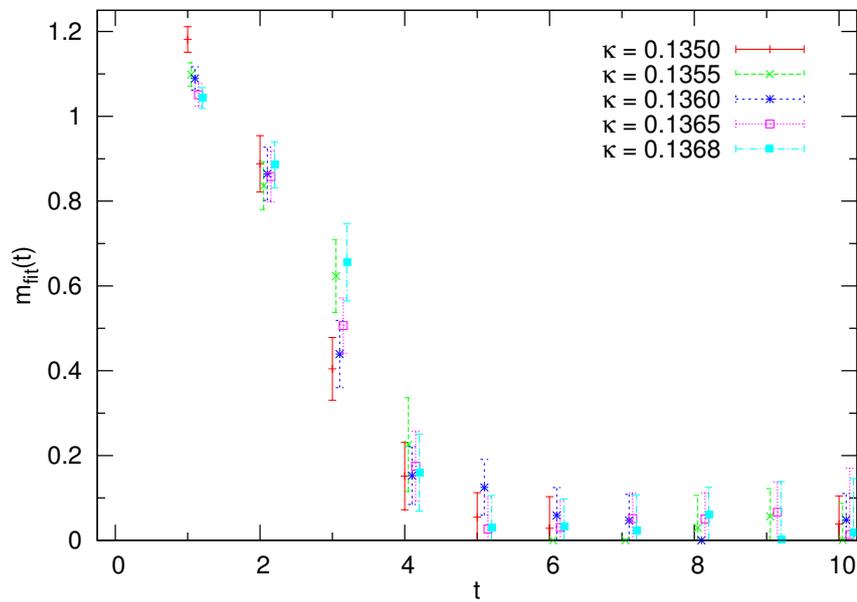


Abbildung A.17.: Fit-Masse  $m_{\text{fit}}(t)$  des  $0^{-+}$ -Glueballs bei  $\beta = 1.75$ , 3 Level Stout-Smearing, Gittergröße  $24^3 \times 64$ .



