

Störungstheoretische und numerische Methoden  
zur Beschreibung von  
Renormierungsgruppenfixpunkten und  
-trajektorien

als Diplomarbeit im Januar 1996 vorgelegt von  
Juri Rolf







Störungstheoretische und numerische Methoden  
zur Beschreibung von  
Renormierungsgruppenfixpunkten und  
-trajektorien

Als Diplomarbeit im Januar 1996 vorgelegt von  
Juri Rolf

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Institut für Theoretische Physik I  
Wilhelm-Klemm-Straße 9  
48149 Münster



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Wilsons Renormierungsgruppe</b>	<b>5</b>
1.1 Idee der Renormierungsgruppe . . . . .	5
1.2 Wilsons Renormierungsgruppe für Gittertheorien . . . . .	6
1.2.1 Gitter, Felder, Notation . . . . .	6
1.2.2 Der Blockmitteloperator . . . . .	9
1.2.3 Gitteroperatoren für Gauß-Blockspin . . . . .	10
1.2.4 Quadratische Fixpunkte . . . . .	14
1.3 Numerische Berechnung von Gitteroperatoren . . . . .	21
1.3.1 $\delta$ -Blockspin . . . . .	21
1.3.2 Dressed Decimation . . . . .	25
1.3.3 Numerische Berechnung von Gitteroperatoren auf endlichen Gittern . . . . .	27
1.3.4 Linearisierung . . . . .	39
<b>2 Das hierarchische Modell</b>	<b>41</b>
2.1 Geschichte und Philosophie . . . . .	41
2.2 Renormierungsgruppentransformationen . . . . .	42
2.3 Gaußsche Fixpunkte . . . . .	46
2.4 Linearisierte Renormierungsgruppentransformation . . . . .	47
2.4.1 Linearisierung . . . . .	47
2.4.2 Linearisierung um $Z_{UV}$ . . . . .	49
2.4.3 Linearisierung um $Z_{HT}$ . . . . .	49
2.5 Nichtgaußsche Fixpunkte . . . . .	50
2.5.1 Existenz . . . . .	50
2.5.2 Großfeldverhalten von Infrarot-Fixpunkten . . . . .	55
2.6 Numerische Betrachtung der Transformation . . . . .	55
2.6.1 Algebraische Berechnung von Fixpunkten . . . . .	56
2.6.2 Numerische Berechnung der linearisierten Transformation . . .	60
2.6.3 Anomale Dimension des hierarchischen Modells . . . . .	61
2.6.4 Universalitätsklassen des hierarchischen Modells . . . . .	65
2.6.5 Vergleich mit dem dreidimensionalen Ising-Modell . . . . .	69

<b>3</b>	<b><math>\epsilon</math>-Entwicklung</b>	<b>72</b>
3.1	Idee der Entwicklung . . . . .	72
3.2	Herleitung der Rekursionsrelationen . . . . .	73
3.3	Numerik für die $\epsilon$ -Entwicklung . . . . .	78
3.3.1	Erste Betrachtung . . . . .	78
3.3.2	Bestimmung von Konvergenzradien . . . . .	81
3.3.3	Bestimmung von $\nu$ . . . . .	83
3.4	Anhang: Ergebnisse für die $\epsilon$ -Entwicklung . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Die hierarchische <math>\phi^4</math>-Trajektorie</b>	<b>88</b>
4.1	Einleitung . . . . .	88
4.2	Die $\phi^4$ -Trajektorie in vier Dimensionen . . . . .	89
4.2.1	Die $\phi^4$ -Trajektorie . . . . .	89
4.2.2	Störungstheorie in vier Dimensionen . . . . .	90
4.2.3	Numerische Auswertung der Störungsreihen . . . . .	94
4.3	Die $\phi^4$ -Trajektorie in beliebigen Dimensionen . . . . .	95
4.3.1	Resonanzen . . . . .	95
4.3.2	Lineare Flußfunktion . . . . .	97
4.3.3	Störungstheorie in $g$ und $\log g$ . . . . .	100
4.3.4	Numerische Berechnung der renormierten Trajektorie . . . . .	102
4.4	Observablen . . . . .	106
4.4.1	Observablen und Eigenwerte . . . . .	106
4.4.2	Fusionsregeln . . . . .	109
4.4.3	Numerische Berechnung von Observablen und Eigenwerten . . . . .	110
4.5	$\phi^4$ -Trajektorie in den Hochtemperaturfixpunkt . . . . .	115
4.5.1	Definition . . . . .	115
4.5.2	Berechnung der $\phi^4$ -Trajektorie . . . . .	116
4.5.3	Berechnung von laufenden Eigenvektoren . . . . .	117
4.5.4	Numerische Betrachtung . . . . .	118
4.6	Diskussion der freien Parameter . . . . .	121
<b>5</b>	<b>RGDGL</b>	<b>124</b>
5.1	Einleitung . . . . .	124
5.2	Die RGDGL für die reskalierten Impulsraumkerne . . . . .	125
5.2.1	Die RGDGL . . . . .	125
5.2.2	Die RGDGL in Polchinski-Form . . . . .	127
5.2.3	RGDGL für die Impulsraumkerne des Potentials . . . . .	128
5.2.4	Reskalierung . . . . .	130
5.3	Störungstheorie für die lokale Näherung . . . . .	133
5.3.1	Definition der lokalen Näherung . . . . .	133
5.3.2	Störungstheorie in der laufenden Kopplung . . . . .	134
5.3.3	Auflösung der Rekursion . . . . .	136
5.3.4	Numerische Auswertung der Lösungen . . . . .	140
5.3.5	Resonanzen . . . . .	142



5.3.6	Störungstheorie in der laufenden Kopplung und ihrem Logarithmus . . . . .	143
5.3.7	Auflösung der Rekursion . . . . .	146
5.3.8	Beseitigung der Resonanzen . . . . .	148
5.3.9	Numerische Auswertung der Lösungen . . . . .	150
5.4	Störungstheorie bei schwacher Impulsabhängigkeit . . . . .	152
5.4.1	Definition der Näherung . . . . .	152
5.4.2	Störungstheorie in der laufenden Kopplung und ihrem Logarithmus . . . . .	153
5.4.3	Auflösung der Rekursion . . . . .	156
5.4.4	Diskussion der Lösungen . . . . .	157
<b>Zusammenfassung</b>		<b>159</b>
<b>A Gaußsche Maße und Normalordnung</b>		<b>162</b>
A.1	Gaußsche Maße . . . . .	162
A.2	Normalordnung . . . . .	166
<b>B Gitter-Laplaceoperator</b>		<b>169</b>



# Einleitung

Das Ziel der statistischen Physik ist die mikroskopische Begründung von thermodynamischen Prozessen. Dabei werden unterschiedliche Systeme wie Gase oder Magneten betrachtet, die eine hohe Zahl von Freiheitsgraden besitzen. Häufig ist man an Phasenübergängen des Systems interessiert, besonders wenn an diesen Phasenübergängen viele Freiheitsgrade des Systems miteinander wechselwirken. Viele Systeme der statistischen Physik weisen solche kritischen Punkte oder kontinuierlichen Phasenübergänge auf, an denen die thermodynamischen Potentiale und ihre ersten Ableitungen stetig sind, Response-Funktionen wie etwa die Suszeptibilität aber divergieren. Charakteristischerweise divergiert auch die Korrelationslänge  $\xi$ , das heißt die exponentielle Zerfallslänge der Zweipunktfunktion des Systems, wenn die äußeren Parameter, etwa die Temperatur und das Volumen oder ein Magnetfeld, gegen ihre kritischen Werte gehen. Am kritischen Punkt selbst sind alle Freiheitsgrade des Systems, das unendlich groß gegenüber der Reichweite der Wechselwirkung zwischen seinen Komponenten sein soll, miteinander korreliert. Man findet, daß Systeme mit verschiedener mikroskopischer Wechselwirkung das gleiche kritische Verhalten besitzen können. Dieses Phänomen wird als Universalität bezeichnet; wegen der Universalität sind kritische Phänomene für Physiker besonders interessant. Äquivalenzklassen von Systemen mit gleichem kritischem Verhalten (Universalitätsklassen) werden durch die Dimension der Systeme, ihre Symmetriegruppe und durch die Komponentenanzahl eines Ordnungsparameters charakterisiert [ZJ93, Sta71]. Typischerweise verhalten sich physikalische Größen in der Nähe von kritischen Punkten nach Potenzgesetzen mit universellen, sogenannten kritischen Exponenten oder Indizes, die nur von der Universalitätsklasse des Systems abhängen. Wenn zum Beispiel außer der Temperatur  $T$ , die durch  $\epsilon = \frac{T-T_c}{T_c}$  parametrisiert wird ( $T_c$ : kritische Temperatur), alle anderen äußeren Parameter gleich ihren kritischen Werten gesetzt werden, so divergiert die Korrelationslänge für  $\epsilon \rightarrow 0$  wie

$$\xi \sim |\epsilon|^{-\nu}, \tag{0.1}$$

mit dem universellen kritischen Exponenten  $\nu$ . Genauere Definitionen und weitere kritische Indizes findet man etwa in [ZJ93, Sta71].

Wilsons Renormierungsgruppe [Wil71, KW74] hat sich in den letzten 25 Jahren als gute Methode zum Verständnis und zur quantitativen Analyse von kritischem Verhalten erwiesen. Vielleicht ist es noch wichtiger, daß in dieser Zeit viele Beziehungen zwischen der statistischen Physik und der Quantenfeldtheorie entdeckt

werden konnten, durch die beide Seiten sehr profitiert haben. Wilsons Renormierungsgruppe hat vor allem bei der Definition von Funktionalintegralen eine besondere Bedeutung. Eine Renormierungsgruppentransformation bildet eine Wirkung, die eine Theorie definiert, auf eine effektive Wirkung ab. Dabei werden Freiheitsgrade der Theorie ausintegriert. Die resultierende effektive Theorie besitzt ein glatteres Wahrscheinlichkeitsmaß, ist aber typischerweise weniger lokal. Das Ziel dieser Arbeit ist es, Ideen für die Renormierungsgruppenanalyse von Modellen der Quantenfeldtheorie und der statistischen Physik zu entwickeln. Daher wird in Kapitel 1 Wilsons Renormierungsgruppe erklärt und für Gitterfeldtheorien formalisiert.

Es gibt Modelle, deren Renormierungsgruppentransformation exakt lokalitätserhaltend ist. Dies sind die hierarchischen Modelle, die in Kapitel 3 erläutert werden. Hierarchische Modelle bilden eine Approximation an die Renormierungsgruppe für Gittertheorien, die im Kontrast zu den hierarchischen Modellen auch als volle Modelle bezeichnet werden. Zunächst wird die hierarchische Renormierungsgruppentransformation aus der vollen Transformation hergeleitet. Die Herleitung macht deutlich, daß man das hierarchische Modell als Approximation an das volle Modell auffassen kann. Daher werden anschließend kritische Größen des hierarchischen Modells berechnet und mit denen des vollen Modells verglichen. Dabei werden numerische Methoden, die in [PPW94] entwickelt wurden, benutzt und verallgemeinert. Durch diese Verallgemeinerungen kann man die Universalitätsklassen von (skalaren) hierarchischen Modellen bestimmen.

Kritische Indizes können in einer Entwicklung in einem Parameter  $\epsilon$  berechnet werden, der die Abweichung zu einer kritischen Dimension darstellt [WF72]. In [PPW94] wurden Rekursionsrelationen für die  $\epsilon$ -Entwicklung des hierarchischen Modells vorgestellt, die eine präzise Ermittlung des kritischen Index  $\nu$  möglich gemacht haben. Diese Entwicklung wird in Kapitel 3 so umformuliert, daß sie Gittertheorien besser angepaßt ist. Dabei wird die Dimension  $d$  des unterliegenden Raumes festgehalten. Solche Entwicklungen wurden von Gawedzki und Kupiainen [GK83] erfunden aber nie zur Berechnung von kritischem Verhalten benutzt. In Kapitel 3 wird die Entwicklung numerisch ausgewertet. Diese Untersuchungen am hierarchischen Modell bereiten den Weg für eine Verallgemeinerung auf volle Modelle.

Durch infinitesimale Renormierungsgruppenschritte werden im Raum der Theorien (Potentiale) Trajektorien erzeugt, die Fixpunkte der Transformation miteinander verbinden. Eine Theorie auf einer solchen Trajektorie wird durch eine Renormierungsgruppentransformation auf eine andere Theorie auf der Trajektorie abgebildet. Renormierte Theorien stellt man sich als Grenzwerte einer unendlichfachen Iteration von Renormierungsgruppenschritten ausgehend von einer nackten Wirkung vor. Damit dieser Limes existiert muß man Kontrolle über Kopplungen bekommen, die unter iterierten Transformationen anwachsen. Dieses Schema hat man störungstheoretisch und nichtstörungstheoretisch implementiert [GK84a, Pol84, Gal85]. Bisher gab es aber noch keine Formulierung dieser Idee, die ohne nackte Wirkungen auskommt. Eine solche Analyse wurde von Wiecezkowski vorgeschlagen und in [WX94, RW95] begonnen. Dieses Programm besitzt eine gewisse Verwandtschaft mit den perfekten Wirkungen von Hasenfratz und Niedermayer [HN94]. Es wird daher gelegentlich auch als Verbesserungsprogramm bezeichnet. In

Kapitel 4, das den Kern der Arbeit bildet, wird das Verbesserungsprogramm am Beispiel der hierarchischen  $\phi^4$ -Theorie ausgearbeitet. In Kapitel 5 werden diese Ideen zur Behandlung der Renormierungsgruppen-Differentialgleichung (RGDGL) verwendet. In zwei Näherungen wird gezeigt, wie man vom hierarchischen Modell zum vollen Modell gelangt.

In einer Zusammenfassung werden die wichtigsten Ergebnisse dargestellt und weitere Ideen angesprochen.



# Kapitel 1

## Wilsons Renormierungsgruppe

### 1.1 Idee der Renormierungsgruppe

Eine zentrale Rolle im Rahmen der Renormierungsgruppe nimmt der Begriff Skala ein. Laut Polchinski [Pol94] hat Wilson als erster erkannt, daß Feldtheorien, und damit Funktionalintegrale, nicht nach Diagrammen sondern nach Skalen organisiert werden sollen.

An einem kritischen Punkt gibt es Fluktuationen in jeder Größenordnung. Die Summation beziehungsweise Integration über diese Fluktuationen wird im Sinne der Renormierungsgruppe in eine Summe über Fluktuationen einer Skala gefolgt von einer Summe über alle Skalen organisiert. Gut bekannt ist zum Beispiel der Kadanoff-Wilson-Zugang [Kad66, Wil71, KW74]; dabei faßt man Spins, die auf einem Gitter definiert sind, zu Blockspins zusammen, die auf einem größeren Gitter definiert sind, so daß die Zustandssumme des Systems unverändert bleibt; ein Teil der Summe wird dadurch ausgeführt. Durch die Blockgröße  $L$  ist eine Skala in das System eingeführt worden, nach der die Zustandssumme organisiert werden kann. Durch einen solchen Schritt wird eine Theorie auf eine effektive Theorie abgebildet, deren Korrelationslänge um einen Faktor  $\frac{1}{L}$  kleiner ist. Diese effektive Theorie kann dann (nach einigen Schritten) mit Standardmethoden, zum Beispiel Monte-Carlo-Verfahren, ausgewertet werden. Wenn die Ausgangstheorie eine unendlich große Korrelationslänge besitzt, ist das auch für alle weiteren effektiven Theorien so, und die iterierte Anwendung von Blockspintransformationen führt zu einem Renormierungsgruppenfixpunkt.

Zur Definition von Funktionalintegralen stellt man sich die Quantenfeldtheorie, die durch ein erzeugendes Funktional gegeben ist, oft im Impulsraum vor. Die Theorie wird dann durch einen Cutoff  $\Lambda$  für große Impulse regularisiert, der sehr kurzwellige Fluktuationen verhindert. Wenn man die Theorie auf einem Gitter definiert, entspricht die Gitterkonstante  $a$  dem Cutoff  $\Lambda = \frac{1}{a}$ . Der Limes  $a \rightarrow 0$  führt zu einer Kontinuumsdefinition des betrachteten Funktionalintegrals; er wird daher als Kontinuumslimes bezeichnet.

Durch eine Renormierungsgruppentransformation im Impulsraum werden Fluktuationen eines bestimmten Frequenzbereichs ausintegriert, die verbleibende Theorie besitzt nur noch längerwellige Fluktuationen. In diesem Zusammenhang spricht

man häufig von Impulsscheiben. Eine Theorie ist oft durch eine Wirkung gegeben, die bestimmte Wechselwirkungsterme beinhaltet, deren Stärke durch Kopplungen charakterisiert sind. Renormierung setzt dann Kopplungen auf verschiedenen Impulsskalen oder bei verschiedenen Gitterkonstanten miteinander in Beziehung. Diese Beziehung kann durch eine Vergrößerungstransformation à la Kadanoff gefunden werden. Die neue Wirkung sollte die gleiche Struktur besitzen, wie die alte, nur werden die „nackten“ Kopplungen durch die „renormierten“ Kopplungen ersetzt.

Wenn man eine infinitesimale Renormierungsgruppentransformation durchführt, erhält man eine Differentialgleichung, die RGDGL, durch die Trajektorien in dem Raum der Theorien erzeugt werden. Der Fluß entlang einer Trajektorie ist immer in Richtung des gröberen Gitters orientiert, das heißt in Richtung wachsender Längenskala. Wenn  $A$  und  $B$  zwei Punkte auf der Trajektorie sind, die von  $A$  nach  $B$  fließen soll, entspricht  $A$  dem nackten System,  $B$  entspricht dem renormierten System. Der Cutoff  $\Lambda$  erscheint nicht explizit in den Wirkungen auf der Trajektorie, da die Einheiten stets so gewählt werden können, daß  $\Lambda = 1$  ist. Der Wert des Cutoffs ist vielmehr durch die Größe der Kopplungen gegeben. Der wirkliche Wert des Cutoffs kann nur durch die Berechnung einer physikalischen Größe, wie etwa der Korrelationslänge, ermittelt werden. Der einzige Weg, den Kontinuumslimit  $\Lambda \rightarrow \infty$  durchzuführen, besteht daher darin, eine nackte Theorie zu suchen, die unendliche Korrelationslänge besitzt. Da die Längenskala unter Renormierungsgruppentransformationen ansteigt, muß eine solche Theorie einem Fixpunkt der Transformation entsprechen, an dem das System invariant unter Renormierungsgruppentransformationen ist. Wenn eine Trajektorie in der Vergrößerungsrichtung in einen Fixpunkt fließt, ist der Fixpunkt für Systeme auf der Trajektorie infrarot und stellt den Grenzwert der Theorie bei kleinen Energien dar. Wenn eine Trajektorie aus einem Fixpunkt herausfließt, ist dieser Fixpunkt für Theorien auf der Trajektorie ultraviolett und entspricht dem Hochenergie-Grenzwert der Theorien. Fixpunkte von Renormierungsgruppentransformationen mit unendlich großer Korrelationslänge sind also sowohl für kritische Phänomene als auch zur Definition von Funktionalintegralen von Bedeutung.

Entlang von Trajektorien in der Umgebung von Fixpunkten können Kopplungen abfallen; solche Kopplungen werden als irrelevant bezeichnet. Oder die Kopplungen steigen an und werden als relevant bezeichnet. Die Umgebung eines Fixpunktes wird mit der Linearisierung der Renormierungsgruppentransformation untersucht. Die führenden Eigenwerte der Linearisierung legen das kritische Verhalten fest; durch sie wird bestimmt, wie schnell eine gestörte Theorie unkritisch wird.

## 1.2 Wilsons Renormierungsgruppe für Gittertheorien

### 1.2.1 Gitter, Felder, Notation

Im folgenden wird eine Gittertheorie betrachtet, bei der die Spins, die auf den Gitterplätzen definiert sind, Werte aus den reellen Zahlen annehmen können. Das Git-



ter  $\Lambda$ , auf dem die Spins definiert werden, ist der Einfachheit halber ein einfaches kubisches Gitter:

$$\Lambda = \left( a\mathbb{Z}_{\geq 0}^{<N} \right)^d. \quad (1.1)$$

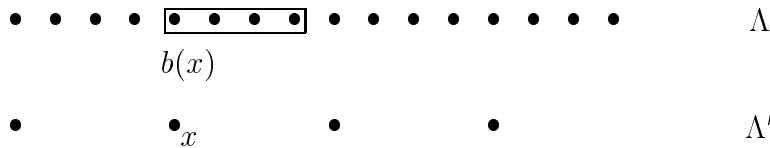
Dabei ist  $N$  die Ausdehnung des Gitters in jeder der  $d$  Raumrichtungen. Mit  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{<N}$  wird die Darstellung des Torus  $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$  bezeichnet, die durch die Zahlen von Null bis  $N-1$  gegeben ist, die Gitter besitzen also periodische Randbedingungen. Durch die Gitterkonstante  $a$  besitzt die noch zu definierende Theorie einen Ultraviolett-Cutoff; wenn das Gitter nur endlich groß ist, hat man gleichzeitig einen Infrarot-Cutoff eingeführt. Auch die Grenzfälle  $a \rightarrow 0$  und  $N \rightarrow \infty$  sollen in dieser Bezeichnung enthalten sein. Im Bild des Kadanoff-Blockspins werden Spins über Blöcke gemittelt. Die gemittelten Spins werden auch Blockspins genannt. Sie können die Freiheitsgrade der effektiven Theorie darstellen, wie im letzte Abschnitt erklärt wurde. Die Blockspins leben auf dem Blockspingitter  $\Lambda'$ , das durch

$$\Lambda' = \left( La\mathbb{Z}_{\geq 0}^{<\frac{N}{L}} \right)^d \quad (1.2)$$

definiert wird.  $L$  ist die Blocklänge;  $N$  soll durch  $L$  teilbar sein, für eine iterative Behandlung ist  $N = L^m$  nützlich. Das Blockgitter  $\Lambda'$  hat eine um den Faktor  $L$  größere Gitterkonstante  $La$  als das Gitter  $\Lambda$ . Für Punkte  $x \in \Lambda'$  definiert man den Block  $b(x)$  um  $x$  durch

$$b(x) = \{y \in \Lambda \mid \exists m \in (a\mathbb{Z}_{\geq 0}^{<L})^d : y = x + m\}. \quad (1.3)$$

Dies unterscheidet sich von der üblichen Konvention, bei der  $x$  im Mittelpunkt des Blockes liegt, was den Nachteil hat, daß man gerade und ungerade Werte von  $L$  unterschiedlich behandeln muß. Für  $L = 4$  und  $d = 1$  hat man also die folgende Situation:



Es ist üblich,  $x$  mit  $b(x)$  zu identifizieren. Statt  $y \in b(x)$  schreibt man  $y \in x$ . Gelegentlich wird in dieser Arbeit für einen Punkt  $z \in \Lambda$  der Punkt  $Lz \in \Lambda'$  mit dem Block  $b(Lz)$  identifiziert.  $Lz \in \Lambda'$ , sowie die Addition von Punkten in  $\Lambda$  und in  $\Lambda'$ , ist immer nach einer kanonischen Einbettung zu verstehen. Diese Konzepte und Notationen kann man leicht verallgemeinern und der iterativen Struktur der Renormierungsgruppe anpassen. Dazu definiert man ein Multigrid. Damit ist ein System von Gitterschichten mit zunehmender Gitterkonstante gemeint. Zwischen den Schichten gibt es Beziehungen der Art (1.3). Ferner führt man verschiedene Operatoren auf und zwischen den Schichten ein. In einem gewissen Sinne ist

das Multigrid eine dem Renormierungsgruppenfluß optimal angepasste Menge von Blöcken. Eine ausführliche Definition dieser Menge und ihrer Anwendung bei der mathematischen Kontrolle des Renormierungsgruppenflusses findet man in [Por90]. Im folgenden wird die Gitterkonstante  $a = 1$  gesetzt.

Auf dem Gitter  $\Lambda$  werden Felder als Abbildungen  $\phi \in \mathbb{R}^\Lambda$ , das heißt  $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Felder auf einem Gitter werden auch als Spins bezeichnet. Das Feld  $\phi$  an der Stelle  $x$  wird mit  $\phi_x$  bezeichnet. Für Felder  $\phi$  und  $\psi$  aus  $\mathbb{R}^\Lambda$  kann man durch

$$(\phi, \psi)_\Lambda = \sum_{y \in \Lambda} \phi_y \psi_y \quad (1.4)$$

ein Skalarprodukt aufstellen. Analog werden Felder auf dem größeren Gitter  $\Lambda'$  als Abbildungen  $\phi' : \Lambda' \rightarrow \mathbb{R}$ , das heißt  $\phi' \in \mathbb{R}^{\Lambda'}$  eingeführt. Auch für die Blockspinfelder definiert man ein gewöhnliches Skalarprodukt, das durch

$$(\phi', \psi')_{\Lambda'} = L^d \sum_{x \in \Lambda'} \phi'_x \psi'_x \quad (1.5)$$

gegeben ist.

Durch Reskalierung kann man alle Felder auf einem Einheitsgitter definieren. Für ein Feld  $\xi \in \mathbb{R}^{\Lambda'}$  wird der Skalierungsoperator  $\mathcal{S} : \mathbb{R}^{\Lambda'} \rightarrow \mathbb{R}^\Lambda$  durch

$$(\mathcal{S}\xi)_y = \beta^{-1} \xi_{Ly} \quad (1.6)$$

definiert. Dann gilt für  $\phi \in \mathbb{R}^\Lambda$

$$(\mathcal{S}^{-1}\phi)_x = \beta \phi_{\frac{x}{L}}, \quad (1.7)$$

und für den adjungierten Operator  $\mathcal{S}^+$  erhält man  $\mathcal{S}^+ = \frac{1}{L^d \beta^2} \mathcal{S}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}^+ \phi, \xi)_{\Lambda'} &= \frac{L^d}{L^d \beta} \sum_{x \in \Lambda'} \phi_{\frac{x}{L}} \xi_x \\ &= \sum_{y \in \Lambda} \phi_y \beta^{-1} \xi_{Ly} = (\phi, \mathcal{S}\xi)_\Lambda. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Die Wahl  $\beta = L^{1-\frac{d}{2}}$  wird als kanonische Skalierung eines Feldes  $\phi$  auf  $\Lambda$  bezeichnet. In Abschnitt 5.2.4 wird dies explizit ausgeführt.

Für ein endliches Gitter  $\Lambda$  wird mit  $[d\phi]_\Lambda$  das Integrationsmaß  $\prod_{y \in \Lambda} d\phi_y$  bezeichnet. Wenn klar ist, welches Gitter gemeint ist, wird dies in der Bezeichnung nicht explizit angegeben. Für unendliche Gitter, oder wenn  $\Lambda$  ein Kontinuum bezeichnet, existieren diese Maße nur formal. Oft betrachtet man aber Gaußsche Maße, die formal aus dem obigen Symbol und dem Exponential einer quadratischen Form aufgebaut werden können, siehe Anhang A.

### 1.2.2 Der Blockmitteloperator

Der Blockmitteloperator  $C$  operiert zwischen den Gitterschichten  $\Lambda$  und  $\Lambda'$ . Durch ihn werden Felder auf dem feinen Gitter  $\Lambda$  auf ihre Blockmittelwerte abgebildet:

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^\Lambda &\rightarrow \mathbb{R}^{\Lambda'}, \\ (C\phi)_x &= L^{-d} \sum_{y \in \Lambda: y \underline{\subseteq} x} \phi_y. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Für den Operator Kern  $C(x, y)$  von  $C$ , der durch

$$(C\phi)_x = \sum_{y \in \Lambda} C(x, y) \phi_y \quad (1.10)$$

für  $x \in \Lambda'$  definiert wird, gilt also:

$$C(x, y) = L^{-d} \chi_x(y) = \begin{cases} L^{-d}, & y \underline{\subseteq} x, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Durch den zu  $C$  bezüglich der gewöhnlichen Skalarprodukte adjungierten Operator  $C^+$  werden blockkonstante Felder auf  $\Lambda$  definiert. Für  $\phi \in \mathbb{R}^\Lambda$  und  $\psi \in \mathbb{R}^{\Lambda'}$  setzt man:

$$\begin{aligned} C^+ : \mathbb{R}^{\Lambda'} &\rightarrow \mathbb{R}^\Lambda, \\ (\psi, C\phi)_{\Lambda'} &= (C^+\psi, \phi)_\Lambda. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Aus dieser Beziehung erhält man für den Operator Kern  $C^+(y, x)$  von  $C^+$ :

$$C^+(y, x) = \chi_x(y) = L^d C(x, y). \quad (1.13)$$

Damit folgt dann

$$(C^+\psi)_y = \psi_{x(y)}, \quad (1.14)$$

wobei mit  $x(y)$  der eindeutig bestimmte Block  $x \in \Lambda'$  bezeichnet wird, in dem  $y$  liegt:

$$y \underline{\subseteq} x \Leftrightarrow x = x(y). \quad (1.15)$$

$C^+$  bettet also Blockspinfelder in  $\mathbb{R}^\Lambda$  ein. Aus (1.14) folgt:

$$C^+\psi = 0 \Leftrightarrow \psi = 0. \quad (1.16)$$

Durch den Operator  $C^+C : \mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^\Lambda$  wird nun ein Projektionsoperator definiert. Wegen

$$CC^+ = \mathbb{1}_{\Lambda'} \quad (1.17)$$

folgt nämlich  $(C^+C)^2 = C^+C$ . Auf einer geeigneten Teilmenge von  $\mathbb{R}^\Lambda$  ist  $C^+C$  außerdem selbstadjungiert.  $C^+C$  projiziert auf den Unterraum der blockkonstanten Felder in  $\mathbb{R}^\Lambda$ . Es gilt:

$$C^+C(y_1, y_2) = L^{-d} \delta_{x(y_1)x(y_2)}. \quad (1.18)$$

Mit  $C^+C$  ist natürlich auch  $\mathbb{1}_\Lambda - C^+C$  ein Projektionsoperator.

Der reskalierte Blockmitteloperator  $\mathcal{C} : \mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}^\Lambda$  wird durch

$$(\mathcal{C}\phi)_x = (\mathcal{S}C\phi)_x = \frac{1}{L^d\beta} \sum_{y \in Lx} \phi_y \quad (1.19)$$

erklärt. Aus den Eigenschaften des Skalierungsoperators  $\mathcal{S}$  folgt  $\mathcal{C}\mathcal{C}^+ = \frac{1}{L^d\beta^2} \mathbb{1}$  und  $\mathcal{C}^+\mathcal{C} = \frac{1}{L^d\beta^2} C^+C$ . Formal besteht der Unterschied zwischen reskalierten und nicht-reskalierten Gitteroperatoren im nächsten Abschnitt nur in der Verwendung von  $\mathcal{C}$  beziehungsweise von  $C$  als Blockmitteloperator.

### 1.2.3 Gitteroperatoren für Gauß-Blockspin

Man betrachte ein System mit einer Zustandssumme  $F$ , die durch eine Wirkung  $H : \mathbb{R}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben wird:

$$F = \int [d\phi] e^{-H(\phi)}. \quad (1.20)$$

Das Ziel ist es nun, die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems so zu vermindern, daß die Zustandssumme unverändert bleibt. Dazu definiert man auf dem größeren Gitter eine Wirkung  $H_{\text{eff}} : \mathbb{R}^{\Lambda'} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$e^{-H_{\text{eff}}(\psi)} = \int [d\zeta]_\Lambda P(\psi, \zeta) e^{-H(\zeta)}, \quad (1.21)$$

wobei das Funktional  $P$

$$\int [d\psi]_{\Lambda'} P(\psi, \zeta) = 1 \quad (1.22)$$

erfüllen soll. Die effektive Zustandssumme ist dann unverändert:

$$F' = \int [d\psi] e^{-H_{\text{eff}}(\psi)} = F. \quad (1.23)$$

Durch die Wahl von  $P$  werden die Eigenschaften der effektiven Wirkung beeinflußt. Häufig wählt man  $P$  als Gaußsches Funktional, was auch als Gauß-Blockspin bezeichnet wird. In Abschnitt 1.3 wird die Iteration von freien Renormierungsgruppenflüssen bei Verwendung von  $\delta$ -artigen Blockspins numerisch untersucht. Hier wähle ich aber

$$P(\phi', \phi) = \mathcal{N} \exp \left( -\frac{\alpha}{2} \|\phi' - C\phi\|_{\Lambda'}^2 \right) \quad (1.24)$$

und erhalte mit  $Z(\phi) = e^{-H(\phi)}$  die Renormierungsgruppentransformation

$$(\mathcal{T}Z)(\psi) = \mathcal{N} \int [d\zeta] e^{-\frac{\alpha}{2} \|\psi - C\zeta\|_{\Lambda'}^2} Z(\zeta). \quad (1.25)$$

$\mathcal{N}$  ist dabei ein Normierungsfaktor, der so gewählt wird, daß (1.22) erfüllt ist;  $\mathcal{N}$  wird in den folgenden Formeln weggelassen. Die Norm  $\|\cdot\|_{\Lambda'}$  soll durch das Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)_{\Lambda'}$  gegeben sein.  $\mathcal{T}$  hängt von den Parametern  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $L \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  ab. Für große Werte von  $\alpha$  gilt näherungsweise  $\psi = C\zeta$ , das bedeutet, das Blockspinfeld gleicht ungefähr dem Blockmittelfeld. Durch die Transformation  $\mathcal{T}$  wird die Zahl der Freiheitsgrade reduziert, da die effektive Theorie auf dem kleineren Gitter  $\Lambda'$  definiert ist. Die neue effektive Theorie ist aber typischerweise komplizierter in dem Sinne, daß sie nichtlokal ist. Diese verstärkte Nichtlokalität entlang des Renormierungsgruppenflusses ist eines der zentralen technischen Probleme bei der mathematischen und numerischen Renormierungsgruppenanalyse von Modellen. Laut [BW74] besitzt die Renormierungsgruppentransformation  $\mathcal{T}$  für  $\alpha = O(1)$  die besten Lokalitätseigenschaften. Der Gauß-Blockspin ist eine Verallgemeinerung des  $\delta$ -Blockspins, der in Abschnitt 1.3 behandelt wird.

Nun wählt man  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ . Die Renormierungsgruppentransformation  $\mathcal{T}$  besitzt keine Fixpunkte, da sie Funktionale auf  $\mathbb{R}^\Lambda$  auf Funktionale auf  $\mathbb{R}^{\Lambda'}$  abbildet. Durch Reskalierung kann man aber eine Transformation auf einem Einheitsgitter erhalten. Dies mündet in dem Ausdruck

$$\frac{\alpha}{2} \|\mathcal{S}^{-1}\psi - C\zeta\|_{\Lambda'}^2, \quad (1.26)$$

in dem nun alle Größen, die sich auf das Gitter  $\Lambda'$  beziehen, in solche, die sich auf  $\Lambda$  beziehen, transformiert werden:

$$\frac{\alpha}{2} \|\mathcal{S}^{-1}\psi - C\zeta\|_{\Lambda'}^2 = \frac{a}{2} \|\psi - \mathcal{C}\zeta\|_{\Lambda}^2. \quad (1.27)$$

Dabei wurde  $a = \alpha\beta^2 L^d$  gesetzt. Die reskalierte Blockspintransformation  $\mathcal{R}$  ist damit durch

$$(\mathcal{R}Z)(\psi) = \int [d\zeta] e^{-\frac{a}{2} \|\psi - \mathcal{C}\zeta\|_{\Lambda}^2} Z(\zeta), \quad (1.28)$$

mit  $Z(\phi) = e^{-H(\phi)}$ , gegeben. Die Parameter von (1.28) sind  $a$ ,  $L$  und  $\beta$ .

Die Wirkung  $H$  sei nun aus einem quadratischen Term

$$H_0(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, v^{-1}\phi) \quad (1.29)$$

und einer Wechselwirkung  $V(\phi)$  zusammengesetzt. Dabei ist der Propagator  $v$  ein reeller, positiver und auf einer geeigneten Einschränkung von  $\mathbb{R}^\Lambda$  selbstadjungierter Operator. Das kanonische Beispiel für  $v$  ist der Operator  $(-\Delta)^{-1}$  modulo Nullmoden, der den freien, skalaren Propagator darstellt, siehe auch Anhang B. Der (reskalierte) Renormierungsgruppenfluß  $H \rightarrow H_{\text{eff}}$  kann in einen Fluß  $v \rightarrow \nu$  des Propagators und in einen Fluß  $V \rightarrow V_{\text{eff}}$  der Wechselwirkung zerlegt werden. Die Idee, die zur

Zerlegung des Renormierungsgruppenflusses führt, besteht darin, den Propagator  $v$  in einen Blockspinpropagator  $\nu$  und in einen Fluktuationspropagator  $\Gamma$  aufzuspalten. Dabei sollen Fluktuationen auf der Gitterschicht  $\Lambda$  in der Größenordnung der Gitterkonstanten  $a$  durch den Fluktuationspropagator beschrieben werden, während der Blockspinpropagator (vor Reskalierung) auf einer gröberen Skala arbeitet und die Summe aller längerwelligen Fluktuationen darstellt. Das Ergebnis ist:

$$e^{-V_{\text{eff}}(\psi)} = \int d\mu_{\Gamma}(\zeta) e^{-V(\mathcal{A}\psi + \zeta)}, \quad (1.30)$$

mit

$$\Gamma = (v^{-1} + a\mathcal{C}^+\mathcal{C})^{-1}, \quad (1.31)$$

$$\mathcal{A} = a\Gamma\mathcal{C}^+, \quad (1.32)$$

sowie

$$\nu = \mathcal{C}v\mathcal{C}^+ + \frac{1}{a}\mathbb{1}. \quad (1.33)$$

Der Operator  $\mathcal{A}$  wird als  $\mathcal{A}$ -Kern bezeichnet. Der  $\mathcal{A}$ -Kern geht zurück auf Gawędzki und Kupiainen, die Kontinuumsfelder exakt auf Gitterfelder abgebildet haben [GK80]. Für Gittertheorien vermittelt dieser Operator zwischen den Schichten eines Multigrids<sup>1</sup> in Richtung feinerer Gitter, also umgekehrt wie  $\mathcal{C}$ . Bei vorgegebenem äußeren Feld  $\psi$  ist  $\mathcal{A}\psi$  der stationäre Punkt des Gaußintegrals, das sich aus (1.28) bei  $V = 0$  ergibt. Der Propagator  $\Gamma$  und der  $\mathcal{A}$ -Kern haben Kerne, die exponentiell abfallen. Das folgende Lemma, das zum Beispiel durch Fouriertransformation gezeigt werden kann [Por90], wird hier ohne Beweis angegeben:

**Lemma 1** *Es gibt zwei Konstanten  $K_1$  und  $K_2$ , für die gilt:*

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(x, y)| &\leq K_1 L^d e^{-K_2|x-y|} \\ |\Gamma(x, y)| &\leq K_1 e^{-K_2|x-y|}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Das bedeutet, daß  $\mathcal{A}$  und  $\Gamma$  exponentiell mit der Zerfallslänge  $K_2^{-1}$  abfallen.  $\square$

Bei der Berechnung dieser Gitteroperatoren gibt es einen Evolutionsprozeß, der zu einer immer eleganteren Darstellung führt [GK84a, Tim, Por95]. Auch hier sind kleine Verbesserungen eingeführt worden. Das Ziel der Rechnung ist die Trennung des Flusses für  $H$  in einen Fluß für den Propagator  $v$  und einen Fluß für die Wechselwirkung  $V$ . Dazu betrachtet man zunächst die freie Feldtheorie ( $V = 0$ ). Aus (1.28) wird dann ein Gaußintegral, das mit Methoden aus dem Anhang (Lemma 4) berechnet werden kann. Man findet:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}Z)(\psi) &= \int [d\zeta] e^{-\frac{a}{2}\|\psi - \mathcal{C}\zeta\|_{\Lambda}^2 - \frac{1}{2}(\zeta, v^{-1}\zeta)} \\ &= \int [d\zeta] e^{-\frac{a}{2}(\psi, \psi) + a(\mathcal{C}^+\psi, \zeta) - \frac{1}{2}(\zeta, (v^{-1} + \mathcal{C}^+\mathcal{C})\zeta)} \\ &\stackrel{\text{bis auf}}{\underset{\text{Normierung}}{=}} e^{\frac{1}{2}(a\mathcal{C}^+\psi, (v^{-1} + a\mathcal{C}^+\mathcal{C})^{-1}a\mathcal{C}^+\psi) - \frac{a}{2}(\psi, \psi)}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

---

<sup>1</sup>In dem gewählten Aufbau besteht das Multigrid aus übereinanderliegenden, ineinander verschachtelten Schichten von  $\mathbb{Z}^d$ .

da mit  $v$  auch  $v^{-1} + a\mathcal{C}^+\mathcal{C}$  reell, symmetrisch und positiv, und damit invertierbar ist ( $(\phi, \mathcal{C}^+\mathcal{C}\phi) = \|\mathcal{C}\phi\|^2 \geq 0$ ). Der Fluktuationspropagator  $\Gamma$  kann dann durch (1.31) definiert werden. Die Definition (1.32) des  $\mathcal{A}$ -Kerns ergibt sich über den stationären Punkt  $\phi_{\max} = a\Gamma\mathcal{C}^+\psi =: \mathcal{A}\psi$  des Gaußintegrals.

$\mathcal{R}Z$  läßt sich damit weiter zusammenfassen:

$$(\mathcal{R}Z)(\psi) = e^{-\frac{a}{2}}(\psi, (\mathbb{1} - a\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}^+)\psi). \quad (1.36)$$

Der Operator  $a\mathbb{1} - a^2\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}^+$  ist das Inverse des reellen, positiven und symmetrischen Blockspinpropagators  $\nu$ , der durch (1.33) gegeben ist. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} (a\mathbb{1} - a^2\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}^+) \left( \mathcal{C}v\mathcal{C}^+ + \frac{1}{a}\mathbb{1} \right) &= \mathbb{1} - a\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}^+ + a\mathcal{C}v\mathcal{C}^+ - a^2\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}^+\mathcal{C}v\mathcal{C}^+ \\ &= \mathbb{1} - a\mathcal{C}\Gamma(\mathbb{1} - \Gamma^{-1}v + a\mathcal{C}^+\mathcal{C}v)\mathcal{C}^+ \\ \stackrel{\Gamma^{-1}=v^{-1}+a\mathcal{C}^+\mathcal{C}}{=} &\mathbb{1}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Der Renormierungsgruppenfluß eines freien Feldes ist damit durch

$$(\mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}(\cdot, v^{-1}\cdot)})(\psi) = e^{-\frac{1}{2}(\psi, \nu^{-1}\psi)} \quad (1.38)$$

gegeben.

Der  $\mathcal{A}$ -Kern kann durch die Formel  $\mathcal{A} = v\mathcal{C}^+\nu^{-1}$  ausgedrückt werden. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} v\mathcal{C}^+\nu^{-1} &= av\mathcal{C}^+ - a^2v\mathcal{C}^+\mathcal{C}\Gamma\mathcal{C}^+ \\ &\stackrel{a\mathcal{C}^+\mathcal{C}=\Gamma^{-1}-v^{-1}}{=} av\mathcal{C}^+ - av(\Gamma^{-1} - v^{-1})\Gamma\mathcal{C}^+ \\ &= \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Wenn man nun den Propagator  $v$  über

$$\begin{aligned} v - \mathcal{A}\nu\mathcal{A}^+ &= v - \mathcal{A}\nu\nu^{-1}\mathcal{C}v = v - \mathcal{A}\mathcal{C}v \\ &= v - a\Gamma\mathcal{C}^+\mathcal{C}v \\ &= v - \Gamma(\Gamma^{-1} - v^{-1})v \\ &= \Gamma \end{aligned} \quad (1.40)$$

in die Summe  $v = \Gamma + \mathcal{A}\nu\mathcal{A}^+$  zerlegt, kann man in dem Renormierungsintegral (1.28) mit Wechselwirkung die Faltungsformel für Gaußsche Maße (A.7) anwenden. Nach Anwendung von Formel (A.9) bekommt man dann:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}Z)(\psi) &\stackrel{(A.7)}{=} \int d\mu_{\mathcal{A}\nu\mathcal{A}^+}(\phi) \int d\mu_{\Gamma}(\zeta) e^{-V(\phi+\zeta) - \frac{a}{2}\|\psi - \mathcal{C}\phi - \mathcal{C}\zeta\|^2} \\ &\stackrel{(A.9)}{=} \int d\mu_{\nu}(\phi) \int d\mu_{\Gamma}(\zeta) e^{-V(\mathcal{A}\phi+\zeta) - \frac{a}{2}\|\psi - \mathcal{C}\mathcal{A}\phi - \mathcal{C}\zeta\|^2} \\ &\stackrel{\xi=\mathcal{A}\phi+\zeta}{=} \int d\mu_{\nu}(\phi) \int d\mu_{\Gamma}(\xi) e^{-\frac{1}{2}(\phi, \mathcal{A}^+\Gamma^{-1}\mathcal{A}\phi) + (\phi, \mathcal{A}^+\Gamma^{-1}\xi) - V(\xi) - \frac{a}{2}\|\psi - \mathcal{C}\xi\|^2}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Das Integral über  $\phi$  ist quadratisch und kann mit den Methoden von Lemma 4 im Anhang berechnet werden. In dem Ergebnis taucht der Operator  $\Gamma^{-1}\mathcal{A}(\nu^{-1} + \mathcal{A}^+\Gamma^{-1}\mathcal{A})^{-1}\mathcal{A}^+\Gamma^{-1}$  auf, den man in den Operator  $a\mathcal{C}^+\mathcal{C}$  umformen kann. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^+\Gamma^{-1}\mathcal{A} &= a\nu^{-1}\mathcal{C}v\mathcal{C}^+ = \nu^{-1}(a\nu - \mathbf{1}) \\ &= a\mathbf{1} - \nu^{-1}.\end{aligned}\tag{1.42}$$

Der obige Operator wird damit zu  $\frac{1}{a}\Gamma^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^+\Gamma^{-1} = a\mathcal{C}^+\mathcal{C}$ . Aus (1.41) wird also das Integral

$$\begin{aligned}&\int d\mu_\Gamma(\xi)e^{-V(\xi)-\frac{1}{2}(\xi,\Gamma^{-1}\xi)-\frac{a}{2}(\psi,\psi)+a(\mathcal{C}^+\psi,\xi)} \\ &\stackrel{\zeta=\xi-\mathcal{A}\psi}{=} \int d\mu_\Gamma(\zeta)e^{-V(\mathcal{A}\psi+\zeta)-\frac{1}{2}(\psi,(\mathcal{A}^+\Gamma^{-1}\mathcal{A}+a\mathbf{1}-2a\mathcal{C}\mathcal{A})\psi)} \\ &\stackrel{\mathcal{A}^+\Gamma^{-1}\mathcal{A}=a\mathbf{1}-\nu^{-1}}{=} e^{-\frac{1}{2}(\psi,\nu^{-1}\psi)} \int d\mu_\Gamma(\zeta)e^{-V(\mathcal{A}\psi+\zeta)}.\end{aligned}\tag{1.43}$$

Wenn man nun das effektive Potential durch (1.30) definiert, hat man den Fluß von  $H$  in einen Fluß für den freien Anteil  $v$  und in einen Fluß für das Potential  $V$  aufgespalten.

### 1.2.4 Quadratische Fixpunkte

Wenn man  $V = 0$  setzt, muß man nur den Fluß des Propagators betrachten. Fixpunkte dieses Flusses sind quadratische Fixpunkte der Transformation  $\mathcal{R}$ . Eine Theorie mit unendlicher Korrelationslänge  $\xi$  wird durch eine kleine Störung mit einem (quadratischen) Massenterm unkritisch, das heißt  $\xi$  wird endlich. Durch Anwendung von Renormierungsgruppentransformationen schrumpft  $\xi$  in jedem Schritt ungefähr um einen Faktor  $\frac{1}{L}$ . Eine unendlichfache Iteration ergibt damit eine Theorie mit der Korrelationslänge Null, also eine vollständig ungeordnete Hochtemperaturphase. Man erwartet daher, daß diese Phase ein quadratischer Fixpunkt der Transformation  $\mathcal{R}$  ist, der vollständig faktorisiert. Daher macht man den Ansatz

$$v = \gamma\mathbf{1},\tag{1.44}$$

und bestimmt  $\gamma$  so, daß  $v = \nu$  gilt. Das bedeutet:

$$\gamma\mathbf{1} = \gamma\mathcal{C}\mathcal{C}^+ + \frac{1}{a}\mathbf{1} = \gamma L^{-d}\beta^{-2}\mathbf{1} + \frac{1}{a}\mathbf{1}.\tag{1.45}$$

Also ergibt sich als Fixpunkt

$$\gamma_{\text{HT}} := \frac{a^{-1}}{1 - L^{-d}\beta^{-2}} = \frac{a^{-1}}{1 - L^{-2}};\tag{1.46}$$

im letzten Schritt wurde die kanonische Dimension  $\beta = L^{1-\frac{d}{2}}$  eingesetzt. Damit erhält man für den  $\mathcal{A}$ -Kern

$$\mathcal{A} = v\mathcal{C}^+\nu^{-1} = \mathcal{C}^+,\tag{1.47}$$



und für den Fluktuationspropagator  $\Gamma$ :

$$\Gamma = v - \mathcal{A}\nu\mathcal{A}^+ = \gamma_{\text{HT}}(\mathbb{1} - \mathcal{C}^+\mathcal{C}) \quad (1.48)$$

Die Renormierungstransformation mit abgespaltenem Hochtemperaturfixpunkt hat damit die einfache Gestalt:

$$e^{-V_{\text{eff}}(\psi)} = \int d\mu_{\gamma_{\text{HT}}(\mathbb{1} - \mathcal{C}^+\mathcal{C})}(\zeta) e^{-V(\mathcal{C}^+\psi + \zeta)}. \quad (1.49)$$

Aus dieser Transformation kann die Renormierungsgruppentransformation des hierarchischen Modells (siehe Kapitel 2) elegant hergeleitet werden.

Durch unendlich häufige Iteration der Transformation (1.33) für den Blockspinpropagator, ausgehend von  $v = (-\Delta)^{-1}$  mit dem Laplaceoperator  $\Delta$ , erhält man einen quadratischen Fixpunkt mit unendlicher Korrelationslänge, der perfekter Laplaceoperator genannt wird. Der perfekte Laplaceoperator wird mit Fouriertransformation berechnet. Der Gitter-Laplaceoperator  $\Delta$  wird in Anhang B eingeführt.

Für die  $k$ -te Iterierte  $\nu_k$  des Blockspinpropagators ( $\nu_0 = v$ ), bekommt man den Ausdruck

$$\begin{aligned} \nu_k &= \mathcal{C}^k v \mathcal{C}^{+k} + a^{-1} \sum_{l=0}^{k-1} (\mathcal{C}\mathcal{C}^+)^l \\ &= \mathcal{C}^k v \mathcal{C}^{+k} + a_k^{-1}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

mit  $a_k = a \frac{1-(L^d\beta^2)^{-1}}{1-(L^d\beta^2)^{-k}}$ . Der Operator  $\mathcal{C}^k$  bei den Parametern  $L$  und  $\beta$  gleicht dem Operator  $\mathcal{C}$  bei den Parametern  $L^k$  und  $\beta^k$ . Daher wird zuerst der Operator  $\mathcal{C}v\mathcal{C}^+$  fouriertransformiert, anschließend werden die Parameter modifiziert. Zunächst zeigt man, daß mit  $v$  auch  $\nu$  translationsinvariant ist:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}v\mathcal{C}^+)_{x,y} &= \sum_{z_1, z_2 \in \Lambda} \mathcal{C}_{x,z_1} v_{z_1,z_2} \mathcal{C}_{z_2,y}^+ = \rho^2 \sum_{z_1 \in Lx, z_2 \in Ly} v_{0,z_2-z_1} \\ &= \rho^2 \sum_{z_1 \in L0, z_2 \in L(y-x)} v_{z_1,z_2} \\ &= (\mathcal{C}v\mathcal{C}^+)_{0,y-x}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

mit  $\rho = \frac{1}{L^d\beta}$ . Dann berechnet man die Fouriertransformierte von  $\mathcal{C}v\mathcal{C}^+$ :

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mathcal{C}v\mathcal{C}^+})_p &= \sum_{x \in \Lambda} e^{ipx} (\mathcal{C}v\mathcal{C}^+)_{0,x} = \rho^2 \sum_{x \in \Lambda} e^{ipx} \sum_{z_1 \in L0, z_2 \in Lx} v_{z_1,z_2} \\ &= \rho^2 \sum_{x \in \Lambda} \sum_{z_1 \in L0, z_2 \in L0} e^{ipx} v_{0,Lx+z_2-z_1}, \end{aligned} \quad (1.52)$$

da  $v$  translationsinvariant ist. Durch Fouriertransformation von  $v$  ergibt sich

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mathcal{C}v\mathcal{C}^+})_p &= \rho^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{(2\pi)^d} \tilde{v}_q \sum_{x \in \Lambda} e^{i(p-Lq)x} \sum_{z_1 \in L0} e^{iqz_1} \sum_{z_2 \in L0} e^{-iqz_2} \\ &= \rho^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{(2\pi)^d} \tilde{v}_q \sum_{x \in \Lambda} e^{i(p-Lq)x} |u(q)|^2. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Dabei wurde die Funktion  $|u|^2$  durch

$$\begin{aligned} |u(q)|^2 &= \left| \sum_{z \in L0} e^{iqz} \right|^2 = \left| \prod_{\mu=1}^d \frac{1 - e^{iq_\mu L}}{1 - e^{iq_\mu}} \right|^2 \\ &= \prod_{\mu=1}^d \frac{\sin^2 \frac{q_\mu L}{2}}{\sin^2 \frac{q_\mu}{2}} \end{aligned} \quad (1.54)$$

definiert und mit Hilfe der geometrischen Reihe berechnet. Die Summe  $\sum_{x \in \Lambda} e^{i(p-Lq)x}$  entspricht einer Summe von  $\delta$ -Distributionen:

$$\sum_{x \in \Lambda} e^{i(p-Lq)x} = \sum_{t \in \tilde{\Lambda}} \delta(t - p + Lq), \quad (1.55)$$

mit  $\tilde{\Lambda} = (2\pi\mathbb{Z})^d$ . Um die Notation zu vereinfachen sei  $L$  ungerade. Zum Integral über  $q$  tragen dann nur die Werte von  $t$  bei, für die  $t \in \tilde{B} = \left(2\pi\mathbb{Z}_{\geq -b(L)}^{\leq b(L)}\right)^d$  gilt, mit  $b(L) = \frac{L+1}{2} - 1$ , da das Integral endliche Grenzen hat und  $-\pi \leq p \leq \pi$  ist. Das Ergebnis besitzt also die Gestalt

$$(\widetilde{\mathcal{C}v\mathcal{C}^+})_p = \rho^2 L^{-d} \sum_{t \in \tilde{B}} \tilde{v}_{\frac{t-p}{L}} |u(\frac{t-p}{L})|^2. \quad (1.56)$$

Daher lautet die Fouriertransformierte von  $\nu_k$ :

$$\begin{aligned} (\tilde{\nu}_k)_p &= (\widetilde{\mathcal{C}^k v \mathcal{C}^{+k}})_p + a_k^{-1} \\ &= (\rho^2 L^{-d})^k \sum_{l_1, \dots, l_d = -b(L^k)}^{b(L^k)} \tilde{v}_{\frac{2\pi l + p}{L^k}} \prod_{\mu=1}^d \frac{\sin^2 \frac{p_\mu}{2}}{\sin^2 \left( \frac{2\pi l_\mu - p_\mu}{2L^k} \right)} + a_k^{-1} \\ &\stackrel{(B.9)}{=} (\rho^2 L^{-d})^k \sum_{l_1, \dots, l_d = -b(L^k)}^{b(L^k)} \frac{\prod_{\mu=1}^d \frac{\sin^2 \frac{p_\mu}{2}}{\sin^2 \left( \frac{2\pi l_\mu + p_\mu}{2L^k} \right)}}{m^2 + 4 \sum_{\mu=1}^d \sin^2 \left( \frac{2\pi l_\mu + p_\mu}{2L^k} \right)} + a_k^{-1}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Dabei ist mit  $l$  der Vektor  $(l_1, \dots, l_d)$  gemeint. In dem letzten Schritt wurde die Fouriertransformierte des Propagators  $v = (-\Delta + m^2 \mathbf{1})^{-1}$  eingesetzt, mit dem die Iteration startet. Außerdem wurde von der Symmetrie der Summe über  $l_1, \dots, l_d$  Gebrauch gemacht. Die Taylorentwicklung von  $\sin^2 x$  hat die Gestalt [GR94]

$$\sin^2 x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1} x^{2k}}{(2k)!} = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + O(x^6); \quad (1.58)$$

dies setzt man in (1.57) ein. Nur für die kanonische Wahl der Skalierungskonstanten  $\beta$  hat die Summe (1.57) einen Grenzwert ungleich Null oder Unendlich. Man setzt

also  $\beta = L^{1-\frac{d}{2}}$ ; dann ist  $\rho^2 L^{-d} = L^{-(2+2d)}$ . Im Limes  $k \rightarrow \infty$  besitzt  $a_k$  den Grenzwert  $a(1 - L^{-2})$ . Insgesamt erhält man:

$$(\tilde{\nu}_k)_p = \sum_{l_1, \dots, l_d = -b(L^k)}^{b(L^k)} \frac{\prod_{\mu=1}^d \frac{\sin^2 \frac{p_\mu}{2}}{k_\mu^2 - \frac{1}{3} \frac{k_\mu^4}{L^{2k}} + \dots}}{L^{2k} m^2 + 4 \sum_{\mu=1}^d \left( k_\mu^2 - \frac{1}{3} \frac{k_\mu^4}{L^{2k}} + \dots \right)} + a_k^{-1}, \quad (1.59)$$

mit  $k_\mu = \frac{p_\mu}{2} + \pi l_\mu$ . Wenn man den Grenzwert  $k \rightarrow \infty$  innen zuerst ausführt, geht dieser Ausdruck gegen den quadratischen Fixpunkt von Bell und Wilson [BW74], wenn man die Masse  $m = 0$  wählt. Massen ungleich Null werden mit dem Faktor  $L^{2k}$  aufgeblasen. Das Ergebnis lautet:

$$\tilde{\nu}_p^{\text{perf}} = \sum_{l_1, \dots, l_d = -\infty}^{\infty} \frac{1}{|p + 2\pi l|^2} \prod_{\mu=1}^d \frac{\sin^2 \frac{p_\mu}{2}}{\left(\frac{p_\mu}{2} + \pi l_\mu\right)^2} + \frac{1}{a(1 - L^{-2})}. \quad (1.60)$$

Das Inverse dieses Propagators wird perfekter Laplaceoperator genannt. Die Lokalitätseigenschaften von  $\nu^{\text{perf}}$  hängen stark von  $a$  ab. Dies wird in Abbildung 1.1

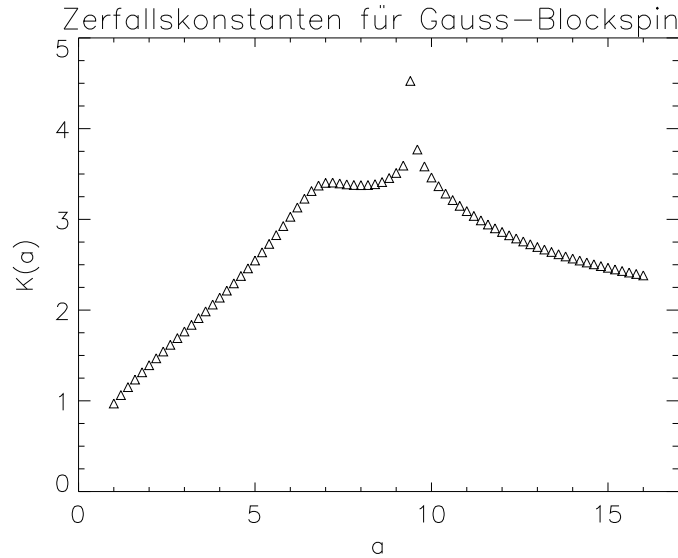


Abbildung 1.1: Exponentielle Zerfallskonstante  $K(a)$  für den perfekten Laplaceoperator im Ortsraum.

verdeutlicht. Im Ortsraum fällt  $\nu_{0,x}^{\text{perf}}$  exponentiell mit  $|x|$  ab. Die Zerfallskonstante habe ich mit einem automatisierten Verfahren an dem Abfall entlang der  $x_2$ -Achse gemessen. Die optische Sichtung der Daten zeigt, daß die Fehler bei dieser Bestimmung im Bereich des Plateaus und des Peaks besonders groß sind. Anhand dieser Abbildung kann man also aussagen, daß der perfekte Laplaceoperator für  $a$  zwischen 6 und 10 eine exponentielle Zerfallskonstante größer als 3.25 besitzt. Für größere oder kleinere Werte von  $a$  ist  $\nu^{\text{perf}}$  sehr viel weniger lokal.

Was macht den perfekten Laplaceoperator perfekt, warum ist er also für Physiker interessant? Die Diskretisierung einer Quantenfeldtheorie auf einem Gitter erfordert die Ersetzung des Laplaceoperators in der freien Wirkung durch einen Gitter-Laplaceoperator, der in der einfachsten Version durch (B.3) gegeben ist. Ein subtilerer Effekt dieser Ersetzung ist die Änderung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung für freie, masselose Teilchen, die auf einem Kontinuum durch

$$E(\vec{p}) = |\vec{p}| \quad (1.61)$$

gegeben ist. Die 1-Komponente eines Vektors soll der zeitartigen Koordinate entsprechen.  $\vec{p}$  bezeichnet die räumlichen Anteile des Impulses  $p$ ,  $E(\vec{p})$  ist die Energie eines freien, masselosen Teilchens mit dem Impuls  $\vec{p}$ . Auf einem Einheitsgitter  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$  lautet die Dispersionsrelation eines freien, masselosen Teilchens mit Propagator  $(-\Delta)^{-1}$

$$E(\vec{p}) = \log \left( 1 + 2 \sum_{\mu=2}^d \sin^2 \frac{p_\mu}{2} + \sqrt{4 \left( \sum_{\mu=2}^d \sin^2 \frac{p_\mu}{2} \right)^2 + 2 \sum_{\mu=2}^d \sin^2 \frac{p_\mu}{2}} \right). \quad (1.62)$$

Diese Beziehungen sind in Abbildung 1.2 im zweidimensionalen Fall dargestellt. Die durchgezogene Linie entspricht der Kontinuumsbeziehung (1.61), die Kreuze sind die Werte für den Gitter-Laplaceoperator. Der Impuls  $p_2$  läuft dabei über eine

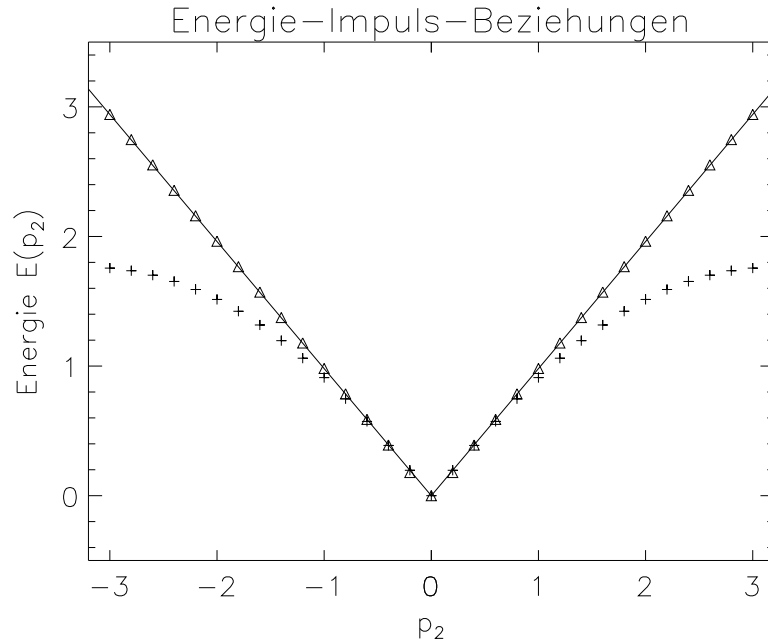


Abbildung 1.2: *Energie-Impuls-Beziehung auf dem Kontinuum (durchgezogen), für den Gitter-Laplaceoperator (Kreuze) und für den perfekten Laplaceoperator (Dreiecke) in zwei Dimensionen.*

Brillouin-Zone. Wenn  $p_2$  klein ist, sind die Dispersionsbeziehungen auf dem Gitter und auf dem Kontinuum sehr ähnlich. Bei größeren Impulsen gibt es aber deutliche Abweichungen. Zur Herleitung von Gleichung (1.62) bemerkt man zunächst, daß die Energie eines 1-Teilchen-Zustandes durch den exponentiellen Abfall der Zweipunktfunktion im Impulsraum für große zeitliche Abstände definiert werden kann:

$$\langle \tilde{\phi}^*(t, \vec{p}) \tilde{\phi}(0, \vec{p}) \rangle \propto e^{-tE(\vec{p})}, \quad (1.63)$$

für genügend große  $t$ . Eine freie Theorie auf dem Gitter besitzt die Wirkung

$$H_0(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, (-\Delta + m^2 \mathbf{1})\phi) \quad (1.64)$$

mit der Masse  $m$ . Dabei ist  $\Delta$  der Gitter-Laplaceoperator. Die freie Zweipunktfunktion ist einfach der Propagator, also das Inverse von  $-\Delta + m^2 \mathbf{1}$ , vergleiche Lemma 8, Gleichung (A.11). Wenn man noch die Fouriertransformation des Gitter-Laplaceoperators verwendet (Gleichung (B.9)), erhält man für die Zweipunktfunktion den Ausdruck

$$\langle \tilde{\phi}^*(t, \vec{p}) \tilde{\phi}(0, \vec{p}) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{p_1}{2\pi} e^{itp_1} \frac{1}{\frac{m^2}{2} + \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos p_\mu)}. \quad (1.65)$$

Allgemeiner betrachte ich nun das Integral

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{e^{itx}}{B - \cos x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{e^{itx}}{B - \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} dz \frac{z^t}{Bz - \frac{1}{2}(z^2 + 1)}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Zur Vereinfachung nimmt man an, daß  $t$  ganze Werte größer als Eins annimmt. Der Nenner des Integranden ist gleich Null, wenn

$$z = z_+ := B + \sqrt{B^2 + 1} \quad (1.67)$$

oder

$$z = z_- := B - \sqrt{B^2 + 1} \quad (1.68)$$

ist. Wenn  $B > 1$  ist, ist auch  $|z_+| > 1$ , und wegen  $z_- = \frac{1}{z_+}$  liegt nur  $z_-$  im Inneren des Kreises  $|z| = 1$ . Mit dem Residuensatz folgt:

$$I = \text{Res}_{z=z_-} \left\{ \frac{z^t}{(z - z_+)(z - z_-)} \right\} = \frac{z_-^t}{z_- - z_+}. \quad (1.69)$$

Zur Berechnung der Zweipunktfunktion wird dies mit  $B = \frac{m^2}{2} + 1 + \sum_{\mu=2}^d (1 - \cos p_\mu)$  angewendet. Also:

$$\langle \tilde{\phi}^*(t, \vec{p}) \tilde{\phi}(0, \vec{p}) \rangle \propto e^{-t \log(B + \sqrt{B^2 + 1})}, \quad (1.70)$$

was im Limes  $m^2 \rightarrow 0$  die Beziehung (1.62) ergibt. Nebenbei kann man bemerken, daß die Energie eines freien Teilchens mit Masse  $m \neq 0$  für  $\vec{p} = 0$  von Null verschieden ist. Dies wird als Massenglücke bezeichnet; für die Massenglücke  $m_g$  erhalte ich den Ausdruck

$$m_g = \log \left( 1 + m \sqrt{1 + \left( \frac{m}{2} \right)^2} + \frac{m^2}{2} \right), \quad (1.71)$$

und im Bereich kleiner Massen ergibt sich

$$m_g = m - \frac{m^3}{24} + \frac{3m^5}{640} + O(m^7). \quad (1.72)$$

Die Massenglücke wird in Abbildung 1.3 veranschaulicht, in der die Energie-Impuls-

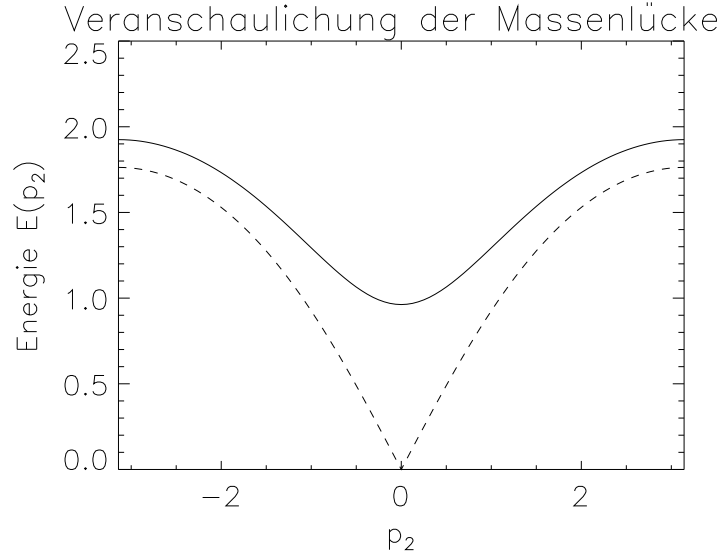


Abbildung 1.3: *Energie-Impuls-Beziehung des masselosen (gestrichelt) und des massebehafteten Gitter-Laplaceoperators bei  $m = 1$ .*

Beziehungen für ein masseloses Teilchen und für ein Teilchen mit der Masse  $m = 1$  in zwei Dimensionen dargestellt sind.

Bei der Diskretisierung der freien Kontinuumswirkung ist a priori nicht klar, ob der kanonische Gitter-Laplaceoperator eine gute Wahl einer Diskretisierung des Laplaceoperators ist. Neben nächsten Nachbarn könnten auch weiter entfernt liegende Punkte gekoppelt werden, um eine Energie-Impuls-Beziehung zu erhalten, die näher an der des Kontinuums liegt. Der perfekte Laplaceoperator ist in diesem Sinn perfekt, da er genau die Energie-Impuls-Beziehung (1.61) besitzt;  $\nu^{\text{perf}}$  bildet also die perfekte Diskretisierung von  $-\Delta$ . Die Energie-Impuls-Beziehung für den perfekten Laplaceoperator (1.60) im Limes  $a \rightarrow \infty$  ist in Abbildung 1.2 mit der Dispersionsbeziehung auf dem Kontinuum und der Beziehung für den naiven Gitter-Laplaceoperator verglichen worden. Die Daten für den perfekten Laplaceoperator

wurden durch Fast-Fourier-Transformationen mit der Routine C06FAF aus [Num91] erhalten. Dabei wird  $p_2$  festgehalten. Die erhaltenen Daten zeigen den erwarteten exponentiellen Abfall. Mit einem automatisierten Least-Square-Fit wurde die Zerfallskonstante bestimmt und in Abbildung 1.2 eingetragen. Bei der Summation des Ausdrucks (1.60) genügt es, 60 Terme zu berücksichtigen.

Der perfekte Laplaceoperator bildet also eine perfekte Gitterwirkung, die physikalische Vorhersagen unabhängig von der Gitterkonstanten, das heißt unabhängig von dem Cutoff, macht. Das Spektrum ist exakt. Wilsons Renormierungsgruppe liefert die richtigen Argumente zur Begründung. Wenn man sich vorstellt, daß aus dem Fixpunkt  $\nu^{\text{perf}}$  eine Renormierungsgruppentrajektorie herausläuft, so ist der Fixpunkt für Theorien auf der Trajektorie ultraviolett. Unter Renormierungsgruppenschritten wächst die Längenskala an, in dem gewählten Schema in jedem Schritt um die Blockgröße  $L$ . Ein Punkt auf der Trajektorie in unmittelbarer Umgebung des Fixpunktes wird mit dem Fixpunkt durch unendlich viele Schritte verbunden. Wenn man dies zusammenfügt sieht man, daß die infinitesimale Umgebung des Fixpunktes im Kontinuumslimites ist, in dem es keine Cutoff-Effekte gibt. Weiter folgt, daß ein beliebiger Punkte auf der Trajektorie Kontinuumsphysik beschreibt, da das erzeugende Funktional unter Renormierungsgruppentransformationen invariant ist. Das gleiche Argument kann man auch für wechselwirkende Theorien anbringen. In diesem Fall ist es jedoch ungleich komplizierter, Theorien auf der renormierten Trajektorie systematisch zu berechnen. Von Hasenfratz und Niedermayer [HN94] wurde 1993 ein Weg vorgeschlagen, der Theorien in der Nähe der renormierten Trajektorie berechnet. Die zentrale Idee besteht darin, die klassische Approximation der Gleichung für Renormierungsgruppenfixpunkte zu lösen. Ein anderer Weg wurde im November 1994 von Christian Wiecekowski aufgezeigt und in seiner Arbeitsgruppe ausgearbeitet [WX94, RW95]. In Kapitel 4 und 5 werden Teile dieser Arbeit behandelt.

Im Gegensatz zu diesem Verbesserungsprogramm im Sinne von Wilsons Renormierungsgruppe hat Symanzik eine Methode vorgebracht, mit der man systematisch Korrekturen in eine Gitterwirkung einführen kann, um die Ordnung in der Gitterkonstanten  $a$ , in der Gitterartefakte auftreten, zu erhöhen [Sym83, Lü84]. Der Zusammenhang zwischen Wilsons Renormierungsgruppe und Symanziks Verbesserungsprogramm wird in [Wie88] hergestellt; dort wird per Renormierungsgruppe bewiesen, daß man Symanzik-verbesserte Wirkungen finden kann.

## 1.3 Numerische Berechnung von Gitteroperatoren bei $\delta$ -artigen Blockspins

### 1.3.1 $\delta$ -Blockspin

Eine Renormierungsgruppentransformation kann man als Ausintegration von Freiheitsgraden auffassen. Dies ist am deutlichsten bei Verwendung des  $\delta$ -Blockspins, bei dem Blockspinfelder den Blockmittelfeldern entsprechen. Der  $\delta$ -Blockspin ist

durch die Wahl

$$P(\psi, \zeta) = \delta(\psi - C\zeta) := \prod_{x \in \Lambda'} \delta(\psi_x - (C\zeta)_x) \quad (1.73)$$

des Funktional  $P$  in (1.21) definiert. Die Renormierungsgruppentransformation  $\mathcal{T}$  erscheint dann in der Gestalt

$$(\mathcal{T}Z)(\psi) = \int [d\zeta] \delta(\psi - C\zeta) Z(\zeta). \quad (1.74)$$

Der  $\delta$ -Blockspin ist der Grenzwert des Gauß-Blockspins für  $\alpha \rightarrow \infty$ ; daher wird der Gauß-Blockspin gelegentlich auch als verschmierter  $\delta$ -Blockspin bezeichnet. Dies folgt daraus, daß das Gaußsche Maß bei verschwindender Kovarianz gegen das  $\delta$ -Maß geht, vergleiche Anhang A.1, Lemma 10.

Durch Reskalierung kann man analog zum Gauß-Blockspin eine Transformation  $\mathcal{R}$  auf einem Einheitsgitter definieren. Durch die Reskalierung wird in (1.74) der Blockmitteloperator  $C$  durch den reskalierten Blockmitteloperator  $\mathcal{C}$  ersetzt. Wie beim Gauß-Blockspin kann man den Renormierungsgruppenfluß in einen Fluß für den Propagator und in einen Fluß der Wechselwirkung zerlegen, wenn das Funktional  $Z$  durch  $Z(\phi) = e^{-H(\phi)}$  gegeben ist und  $H(\phi)$  aus einem quadratischen Anteil  $H_0(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, v^{-1}\phi)$  und einem Rest  $V(\phi)$  gegeben ist. Durch Berechnung des Integrals

$$(\mathcal{R}Z)(\psi) = e^{-\frac{1}{2}(\psi, \nu^{-1}\psi)} = \int [d\phi] \delta(\psi - \mathcal{C}\phi) e^{-\frac{1}{2}(\phi, v^{-1}\phi)} \quad (1.75)$$

wird dann der Blockspinpropagator  $\nu$  definiert, während durch den stationären Punkt  $\phi_{\max}$  des Integranden der  $\mathcal{A}$ -Kern durch  $\mathcal{A}\psi = \phi_{\max}$  erklärt ist. Die Berechnung des stationären Feldes und des Integrals (1.75) kann man durch Minimierung der quadratischen Form  $H_0(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, v^{-1}\phi)$  unter der Nebenbedingung  $\psi = \mathcal{C}\phi$  durchführen. Durch die Substitution  $\phi = \phi_{\max} + \zeta$  erhält man für  $H_0$  den Ausdruck  $H_0(\zeta) = \frac{1}{2}(\phi_{\max}, v^{-1}\phi_{\max}) + \frac{1}{2}(\zeta, v^{-1}\zeta)$ ; der gemischte Term verschwindet wegen der Extremaleigenschaft von  $\phi_{\max}$ . Also bekommt man:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}Z)(\psi) &= \int [d\phi] \delta(\psi - \mathcal{C}\phi) e^{-\frac{1}{2}(\phi, v^{-1}\phi)} \\ &\stackrel{\psi = \mathcal{C}\phi_{\max}}{=} \int [d\zeta] \delta(\mathcal{C}\zeta) e^{-\frac{1}{2}(\zeta, v^{-1}\zeta) - \frac{1}{2}(\phi_{\max}, v^{-1}\phi_{\max})} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\phi_{\max}, v^{-1}\phi_{\max})} (\mathcal{R}Z)(\psi = 0). \end{aligned} \quad (1.76)$$

Nach einer Normierung ist also gezeigt, daß das Integral (1.75) durch Bestimmung des stationären Punktes berechnet werden kann. (Auch die Berechnung der Normierungskonstanten ist unproblematisch und für einige Problemstellungen sinnvoll, vergleiche [NN74].) Wenn man also  $\phi_{\max} = \mathcal{A}\psi$  setzt, ist das Inverse des Blockspinpropagators  $\nu$ :

$$\nu^{-1} = \mathcal{A}^+ v^{-1} \mathcal{A}. \quad (1.77)$$



Diese Formel gibt an, wie sich die Kopplungen  $v^{-1}$  unter einem Renormierungsgruppenschritt transformieren. Der  $\mathcal{A}$ -Kern kann also bei Verwendung des  $\delta$ -Blockspins als Transformationsmatrix der Kopplungen aufgefaßt werden.

Die Minimierung der quadratischen Form  $H_0$  unter der Nebenbedingung  $\mathcal{C}\phi = \psi$  kann man mit Hilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren durchführen, um die explizite Gestalt der Gitteroperatoren zu bestimmen. Dies ist hier aber nicht nötig, da die Gitteroperatoren für  $\delta$ -Blockspin durch Bildung des Grenzwertes  $a \rightarrow \infty$  in den Ausdrücken für Gauß-Blockspin erhalten werden können. Das Ergebnis ist:

$$\text{Blockspinpropagator} \quad \nu = \mathcal{C}v\mathcal{C}^+ \quad (1.78)$$

$$\mathcal{A}\text{-Kern} \quad \mathcal{A} = v\mathcal{C}^+\nu^{-1} \quad (1.79)$$

$$\text{Fluktuationspropagator} \quad \Gamma = v - \mathcal{A}\nu\mathcal{A}^+. \quad (1.80)$$

Wie beim Gauß-Blockspin besitzen die Operatoren  $\mathcal{A}$  und  $\Gamma$  auch beim  $\delta$ -Blockspin Kerne, die exponentiell abfallen. Das Lemma 1 gilt also auch hier. Für den  $\mathcal{A}$ -Kern gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{y,x} &= (v\mathcal{C}^+\nu^{-1})_{y,x} = \sum_{z_1, z_2 \in \Lambda} v_{y,z_1} \mathcal{C}^+_{z_1, z_2} \nu^{-1}_{z_2, x} \\ &\stackrel{z'_2 = z_2 - x,}{\stackrel{z'_1 = z_1 - Lx}{=}} \sum_{z'_1, z'_2 \in \Lambda} v_{y-Lx, z'_1} \mathcal{C}^+_{z'_1, z'_2} \nu^{-1}_{z'_2, 0} \\ &= \mathcal{A}_{y-Lx, 0}, \end{aligned} \quad (1.81)$$

das heißt  $\mathcal{A}$  ist invariant unter Translation von Blöcken. In der Rechnung wurde die Translationsinvarianz von  $v$  und  $\nu$  sowie die Invarianz unter Translation von Blöcken von  $\mathcal{C}^+$  benutzt.

Einige Eigenschaften der Gitteroperatoren sind beim  $\delta$ -Blockspin am deutlichsten, zum Beispiel die Fluktuationseigenschaft von  $\Gamma$ . Dies soll in den folgenden Rechnungen herausgearbeitet werden. Zunächst werden einfache Eigenschaften der Operatoren zusammengefaßt:

$$\mathcal{C}\mathcal{A} = \mathbf{1} \quad (1.82)$$

$$\nu^{-1} = \mathcal{A}^+v^{-1}\mathcal{A} \quad (1.83)$$

$$\mathcal{C}\Gamma = \Gamma\mathcal{C}^+ = 0. \quad (1.84)$$

Dies folgt aus:

$$\mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{C}v\mathcal{C}^+\nu^{-1} = \mathbf{1}, \quad (1.85)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^+v^{-1}\mathcal{A} &= \nu^{-1}\mathcal{C}v\nu^{-1}v\mathcal{C}^+\nu^{-1} \\ &= \nu^{-1}\mathcal{C}v\mathcal{C}^+\nu^{-1} = \nu^{-1}, \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$\mathcal{C}\Gamma = \mathcal{C}(v - \mathcal{A}\nu\mathcal{A}^+) = \mathcal{C}v - \nu\nu^{-1}\mathcal{C}v = 0. \quad (1.87)$$

Außerdem ist  $\Gamma$  ein positiver Operator; dies ist in der Darstellung (1.31) von  $\Gamma$  für den Gauß-Blockspin sofort klar. Für  $\delta$ -Blockspin geht der Beweis so:

Es sei ein Feld  $\psi \in \mathbb{R}^\Lambda$  vorgegeben. Dazu definiert man durch  $\phi = v\psi$  und durch  $\phi' = \mathcal{C}\phi$  weitere Felder auf  $\Lambda$ .  $\phi$  zerlegt man dann durch  $\phi = \mathcal{A}\phi' + \zeta$ , mit einem Fluktuationfeld  $\zeta$ , für das  $\mathcal{C}\zeta = 0$  gilt. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
(\psi, \Gamma\psi) &= (v^{-1}\phi, \Gamma v^{-1}\phi) \\
&= (v^{-1}\mathcal{A}\phi, \Gamma v^{-1}\mathcal{A}\phi') + 2(v^{-1}\zeta, \Gamma v^{-1}\mathcal{A}\phi') + (v^{-1}\zeta, \Gamma v^{-1}\zeta) \\
&= (\mathcal{C}^+ v^{-1}\phi', \Gamma \mathcal{C}^+ v^{-1}\phi') + 2(v^{-1}\zeta, \Gamma \mathcal{C}^+ v^{-1}\phi') + (v^{-1}\zeta, (v - \mathcal{A}v\mathcal{A}^+)v^{-1}\zeta) \\
&\stackrel{\Gamma \mathcal{C}^+ = 0}{=} (\zeta, (\mathbb{1} - \mathcal{C}^+ v^{-1}\mathcal{C}v)v^{-1}\zeta) \\
&= (\zeta, v^{-1}\zeta) > 0, \text{ falls } \zeta \neq 0.
\end{aligned} \tag{1.88}$$

Die Fluktuationseigenschaft des Propagators  $\Gamma$  besagt, daß zu dem Integral

$$\int d\mu_\Gamma(\zeta) F(\psi + \zeta) \tag{1.89}$$

nur Felder mit Blockmittel  $\mathcal{C}\zeta = 0$  beitragen. Der Beweis benutzt die Projektionseigenschaft des Operators  $P := L^d \beta^2 \mathcal{C}^+ \mathcal{C}$  und wird mit Fouriertransformation wie folgt durchgeführt:

$$\begin{aligned}
&\int d\mu_\Gamma(\zeta) F(\psi + \zeta) \\
&= \int d\mu_\Gamma(\zeta) \int [d\phi] \delta(\phi - \zeta) F(\psi + \phi) \\
&= \int d\mu_\Gamma(\zeta) \int [d\phi] \int \left[ \frac{dq}{(2\pi)^d} \right] e^{i(q, \phi - \zeta)} F(\psi + \phi) \\
&= \int [d\phi] \int \left[ \frac{dq}{(2\pi)^d} \right] e^{-\frac{1}{2}(q, \Gamma q)} e^{i(q, \phi)} F(\psi + \phi).
\end{aligned} \tag{1.90}$$

Dies ist die bekannte Gittergasdarstellung von Feldtheorien. In der letzten Umformung hat man die Fouriertransformation von Gaußschen Maßen (A.2) benutzt. Man zerlegt nun die Impulsfelder  $q$  in blockkonstante Felder und Fluktuationen:

$$q = (\mathbb{1} - P)q + Pq. \tag{1.91}$$

Damit folgt aus (1.84):

$$\begin{aligned}
&\int d\mu_\Gamma(\zeta) F(\psi + \zeta) \\
&\stackrel{\Gamma P = 0}{=} \int [d\phi] \int \left[ \frac{dq}{(2\pi)^d} \right] e^{-\frac{1}{2}((\mathbb{1}-P)q, \Gamma(\mathbb{1}-P)q)} e^{i((\mathbb{1}-P)q + Pq, \phi)} F(\psi + \phi) \\
&= \int [d\phi] \int \left[ \frac{dq}{(2\pi)^d} \right] e^{-\frac{1}{2}((\mathbb{1}-P)q, \Gamma(\mathbb{1}-P)q) + i((\mathbb{1}-P)q, \phi)} \\
&\quad e^{i(Pq, P\phi)} F(\psi + \phi).
\end{aligned} \tag{1.92}$$

Nun setzt man  $q_1 = (\mathbb{1} - P)q$  und  $q_2 = Pq$  und integriert getrennt über  $q_1$  und  $q_2$ . Dies ist möglich, da  $P$  eine Projektion ist. Durch Bildung einer  $\delta$ -Funktion erhält

man schließlich:

$$\begin{aligned} & \int d\mu_\Gamma(\zeta) F(\psi + \zeta) \\ &= \int [d\phi] \int \left[ \frac{dq_1}{(2\pi)^d} \right] \delta(L^d \beta^2 \mathcal{C}^+ \mathcal{C} \phi) e^{-\frac{1}{2}(q_1, \Gamma q_1) + i(q_1, (\mathbf{1}-P)\phi)} F(\psi + \phi). \end{aligned} \quad (1.93)$$

Damit folgt, daß jede Konfiguration  $\phi$  mit  $\mathcal{C}\phi \neq 0$  keinen Beitrag zum Integral liefert. Dabei beachte man Gleichung (1.16). Zu dem Integral (1.89) tragen daher nur Fluktuationfelder um das Blockmittelfeld  $\mathcal{C}\zeta = 0$  bei.

Der perfekte Laplaceoperator für  $\delta$ -Blockspin ergibt sich aus (1.60) direkt im Limes  $a \rightarrow \infty$ .

Wenn man effektive Wirkungen, die durch  $\delta$ -Blockspins berechnet wurden, anschließend auf Computern mit Monte-Carlo Methoden simuliert, beobachtet man an typischen Konfigurationen häufig Gräben zwischen großen Blöcken. Der Grund ist, daß sich Information in einem Renormierungsgruppenschritt nicht über Blockgrenzen hinaus fortpflanzen kann. Der  $\delta$ -Blockspin ist offenbar eine schlechte Wahl, wenn man effektive Wirkungen zur Simulation auf einem Computer berechnen möchte.

### 1.3.2 Dressed Decimation

Die Freiheitsgrade einer effektiven Theorie können durch die Blockmittelwerte der Spins einer nackten Theorie gegeben sein. Es sind aber auch andere Verfahren denkbar, mit denen man Freiheitsgrade nach Skalen organisiert ausintegrieren kann. Beim Gauß-Blockspin etwa sind die Freiheitsgrade der effektiven Theorie nur noch näherungsweise durch die Blockmittelwerte gegeben. Noch einfacher ist es, auf die Bildung von Mittelwerten zu verzichten, und die Blockspinfelder durch Dezimierung zu erklären. Für alle Punkte  $x$  aus dem gröberen Gitter  $\Lambda'$  erhält man dann das Blockspinfeld  $\psi \in \mathbb{R}^{\Lambda'}$  durch  $\psi_x = \phi_x$  aus dem Feld  $\phi \in \mathbb{R}^\Lambda$ . Die effektiven Theorien, die man durch Dezimierung erhält, besitzen schlechte Lokaltätseigenschaften. Der Nachteil ist, daß das Blockspinfeld nur durch die Blockzentren gebildet wird. Nebenzentren können aber einfach in die Blockregel mit einbezogen werden. Dazu definiert man den Blockmitteloperator  $C^5$  [HPW95] durch

$$(C^5\psi)_x = c_0\phi_x + c_1 \sum_{y \in \Lambda: y \text{ n.n. } x} \phi_y. \quad (1.94)$$

Hier wird über alle nächsten Nachbarnpunkte von  $x$  in  $\Lambda$  summiert. Dies wurde von den Autoren von [HPW95] als Dressed Decimation bezeichnet. In zwei Dimensionen gehen fünf Punkte in einen Block ein; dann wird diese Blockung als 5-Punkt-Regel bezeichnet. Benachbarte Blöcke überlappen sich, wie in Abbildung 1.4 am zweidimensionalen Fall illustriert wird. Diese Regel kann einfach auch auf weiter entfernte Punkte ausgedehnt werden. Dies kann man so auffassen, daß das als Temperaturfeld gedachte Feld  $\phi$  sich eine kurze Zeit  $t$  in dem homogenen Gittermedium  $\Lambda$  nach der Wärmeleitungsgleichung entwickelt. Dadurch findet ein Wärmeaustausch über kurze Entfernungen statt. Blockzentren werden durch die nächsten oder übernächsten

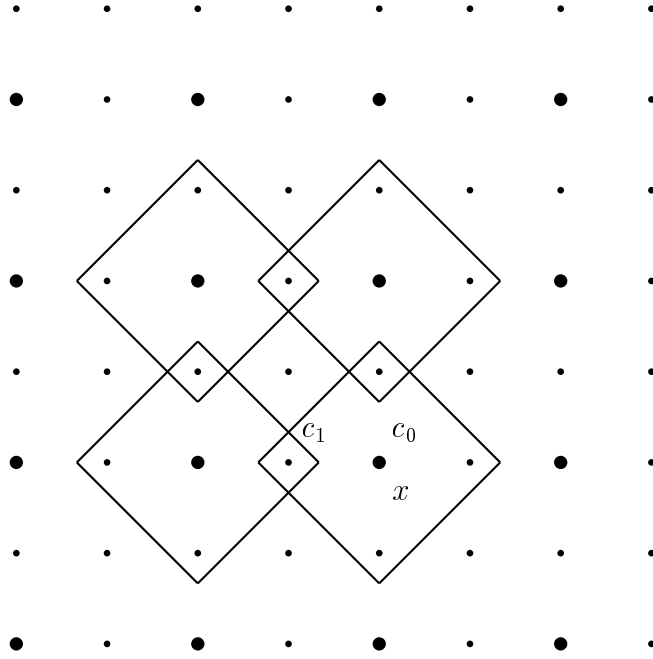


Abbildung 1.4: Veranschaulichung der 5-Punkt-Regel. Die großen Punkte sind (nach kanonischer Einbettung) Gitterpunkte von  $\Lambda'$  und von  $\Lambda$ . Die Blöcke sind rautenförmig.

Nachbarn beeinflusst. Nach einer kurzen Zeit  $t$  bildet man von dem verändert Feld  $\phi(t, x)$  durch Dezimierung das Blockspinfeld. Die Wärmeleitungsgleichung hat die Gestalt

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \phi(t, x) = 0. \quad (1.95)$$

Auf einem kontinuierlichen Raum sind Lösungen dieser Gleichung durch die Faltung der Anfangswerte mit dem sogenannten Wärmekern gegeben [Fol76]

$$\phi(t, x) = \int d\mu_{2t\mathbf{1}}(y) \phi(x + y) = (e^{t\Delta} \phi)(x), \quad (1.96)$$

unter Verwendung von Lemma 5 im Anhang. Den zweiten Ausdruck kann man in der gleichen Form auch diskretisiert auffassen, indem der Laplaceoperator durch den in Anhang B beschriebenen Gitter-Laplaceoperator ersetzt wird. Durch Entwicklung der Exponentialfunktion für kleine Zeiten bekommt man dann

$$e^{t\Delta} = \mathbf{1} + t\Delta + O(t^2). \quad (1.97)$$

Nach einer kurzen Zeit lautet das veränderte Feld also

$$\begin{aligned} \phi(t, y) &\stackrel{(B.4)}{=} ((\mathbf{1} + tN - 2dt\mathbf{1}) \phi)_y \\ &= (1 - 2dt) \phi_y + t(N\phi)_y. \end{aligned} \quad (1.98)$$

$N$  ist die Nearest-Neighbour-Matrix, die im Anhang eingeführt wird. Durch Dezmierung von  $\phi(t, \cdot)$  definiert man das Blockspinfeld  $\psi \in \mathbb{R}^{\Lambda'}$  :

$$\psi_x = \phi(t, x) = (1 - 2d t)\phi_x + t \sum_{y \in \Lambda: y \text{ n.n. } x} \phi_y. \quad (1.99)$$

Dies ist genau die Blockregel mit dem Operator  $C^5$ , wenn man  $c_1 = t$  und  $c_0 = 1 - 2d t$  wählt. Dann gilt die Beziehung  $c_0 + 2d c_1 = 1$ . Die Lokalitätseigenschaften der effektiven Theorie können durch geeignete Wahl von  $c_0$  und  $c_1$  erheblich beeinflußt werden.

Die Renormierungsgruppentransformation wird in dem obigen Sinn durch die Wahl

$$P(\psi, \zeta) = \delta(\psi - C^5 \zeta) \quad (1.100)$$

in (1.21) definiert. Natürlich kann man aber auch Gauß-Blockspins mit  $C^5$  bilden. Die Reskalierung wird in völliger Analogie zum  $\delta$ - und Gauß-Blockspin durchgeführt. Der reskalierte 5-Punkt-Blockmitteloperator wird mit  $\mathcal{C}^5$  bezeichnet. Auch die Berechnung der Gitteroperatoren  $\nu$ ,  $\Gamma$  und  $\mathcal{A}$  ist analog zum  $\delta$ -Blockspin. Man verwendet entweder den Grenzwert  $a \rightarrow \infty$  in den Formeln für Gauß-Blockspin oder minimiert die quadratische Form  $H_0$  unter der Nebenbedingung  $\mathcal{C}^5 \phi = \psi$ . Das Ergebnis sind die Ausdrücke (1.78)-(1.80), unter der Ersetzung  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^5$ .

Es ist mir nicht gelungen, den perfekten Laplaceoperator bei Verwendung der 5-Punkt-Regel exakt zu berechnen. Dies wäre zum Vergleich mit numerischen Daten nützlich. Das zentrale Problem ist die verschachtelte Struktur von  $\mathcal{C}^{5^k}$ .

### 1.3.3 Numerische Berechnung von Gitteroperatoren auf endlichen Gittern

Renormierungsgruppenflüsse können auf endlichen Gittern numerisch simuliert werden. Das Ziel meiner Berechnung ist eine Gegenüberstellung der Lokalitätseigenschaften der Gitteroperatoren bei Verwendung von  $\delta$ -Blockspin und bei Verwendung der 5-Punkt-Regel. Zur numerischen Berechnung der Gitteroperatoren genügt es, die  $\mathcal{A}$ -Kerne zu bestimmen. Mit Hilfe von Gleichung (1.77) kann man dann aus vorgegebenen Kopplungen  $K = v^{-1}$  das Inverse des Blockspinpropagators, das heißt die effektiven Kopplungen, berechnen.  $\nu$  bekommt man aus  $\nu^{-1}$  zum Beispiel durch Fouriertransformation. Der Fluktuationspropagator  $\Gamma$  ergibt sich aus  $v$ ,  $\nu$  und  $\mathcal{A}$  mit Hilfe von Gleichung (1.80). Ein anderer Weg besteht darin, zunächst  $\nu$  aus  $v$  mit Gleichung (1.78) zu berechnen und daraus mit (1.79) den  $\mathcal{A}$ -Kern zu bestimmen. Am Schluß steht wieder die Berechnung des Fluktuationspropagators. Auf diesem Weg wendet man Fouriertransformationen an. Alle numerischen Berechnungen habe ich im zweidimensionalen Fall durchgeführt.

Die Berechnung der Gitteroperatoren bei  $\delta$ -artigem Blockspin kann durch die Minimierung der quadratischen Form  $H_0(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, v^{-1}\phi)$  unter der Nebenbedingung  $\mathcal{C}\phi = \psi$  mit einem äußeren Feld  $\psi$  ausgeführt werden. Hier kann man unter dem Blockmitteloperator  $\mathcal{C}$  den gewöhnlichen Blockmitteloperator oder den 5-Punkt

Blockmitteloperator verstehen. Bei gegebenem Blockspinfeld  $\psi$  minimiert  $\mathcal{A}\psi$  die Form  $H_0$ , und es gilt  $\psi = \mathcal{C}\mathcal{A}\psi$ . Wenn man  $\psi_x = \delta_{x,0}$  wählt, gilt  $(\mathcal{A}\psi)_y = \mathcal{A}_{y,0}$ . Wegen der Translationsinvarianz über Blöcke genügt es, den  $\mathcal{A}$ -Kern für den Punkt  $x = 0$  zu berechnen.

Zur numerischen Durchführung der Minimierung von  $H_0$  macht man lokale paarweise Änderungen der Spins. Die Änderungen wählt man so, daß einerseits die Nebenbedingung eingehalten wird und andererseits  $H_0$  in Abhängigkeit von dem Variationsparameter minimiert wird. Dies wird zunächst am Beispiel des  $\delta$ -Blockspins erklärt. Die Blockgröße legt man auf  $L = 2$  fest. In einem ersten Schritt wählt man ein Hintergrundfeld  $\psi$ . Günstig ist die Wahl  $\psi_x = \delta_{x,0}$ , da dann  $(\mathcal{A}\psi)_y = \mathcal{A}_{y,0}$  gilt. Wegen der Invarianz unter Translation von Blöcken genügt es, den  $\mathcal{A}$ -Kern für den Block  $x = 0$  zu bestimmen. Nun bestimmt man aus  $\psi$  eine Startkonfiguration  $\phi$ , für die offensichtlich  $\mathcal{C}\phi = \psi$  gilt. In zwei Dimensionen und für  $\beta = 1$ ,  $L = 2$  wählt man zum Beispiel  $\phi_y = 4\delta_{y,0}$ . Zur Minimierung macht man eine Schleife über alle Blöcke. Unter den in einem (zweidimensionalen) Block sechs verschiedenen Spin-

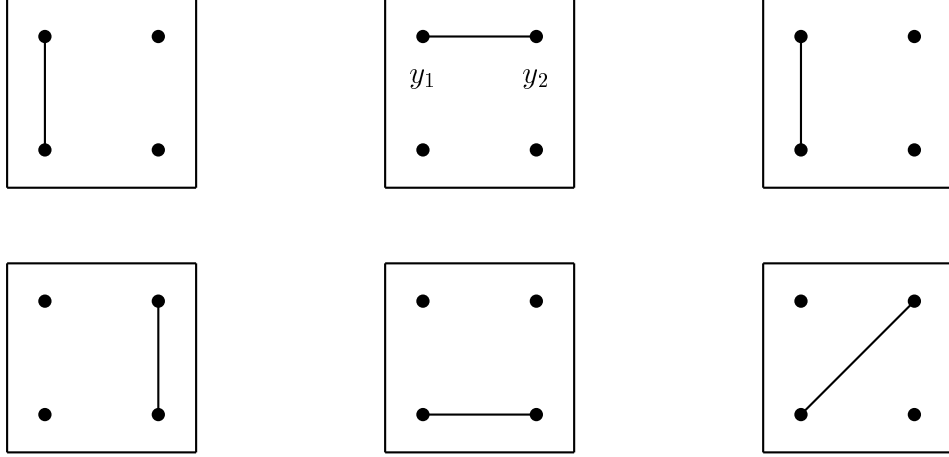


Abbildung 1.5: Situation bei der Veränderung von Feldvariablen für  $\delta$ -Blockspin.

paaren wählt man ein erstes aus; die zugehörigen Gitterpunkte werden mit  $y_1$  und  $y_2$  bezeichnet, vergleiche Abbildung 1.5. Nun wird ein neues Feld  $\phi^{\text{new}}$  durch

$$\phi_y^{\text{new}} = \begin{cases} \phi_{y_1} + h, & \text{falls } y = y_1, \\ \phi_{y_2} - h, & \text{falls } y = y_2, \\ \phi_y, & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.101)$$

definiert. Dadurch bleibt die Nebenbedingung ungeändert.  $h$  wird so gewählt, daß  $H_0$  minimiert wird. Das Ergebnis ist:

$$h = \frac{\sum_{x \in \Lambda} (K_{y_1, x} - K_{y_2, x}) \phi_x}{2(K_{y_1, y_2} - K_{0,0})}. \quad (1.102)$$

Eine beliebige Gittersumme der Gestalt  $\sum_{x, y \in \Lambda} f(x, y)$  mit  $f(x, y) = f(y, x)$  kann

man nämlich in

$$\begin{aligned} \sum_{x,y \in \Lambda} f(x,y) &= f(y_1, y_1) + f(y_2, y_2) + 2f(y_1, y_2) \\ &+ \sum_{x,y \in \Lambda \setminus \{y_1, y_2\}} f(x,y) + 2 \sum_{x \in \Lambda \setminus \{y_1, y_2\}} f(x, y_1) + 2 \sum_{x \in \Lambda \setminus \{y_1, y_2\}} f(x, y_2) \end{aligned} \quad (1.103)$$

zerlegen. Wegen  $H_0(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda} \phi_x K_{x,y} \phi_y$  und  $K_{x,y} = K_{y,x}$  unter Ausnutzung der Gittersymmetrie des Propagators kann man dies auf  $H_0$  anwenden. Also gilt

$$\begin{aligned} 2(H_0(\phi^{\text{new}}) - H_0(\phi)) &= 2K_{y_1, y_2} \left( (\phi_{y_1} + h)(\phi_{y_2} - h) - \phi_{y_1} \phi_{y_2} \right) \\ &+ K_{y_1, y_1} ((\phi_{y_1} + h)^2 - \phi_{y_1}^2) + K_{y_2, y_2} ((\phi_{y_2} - h)^2 - \phi_{y_2}^2) \\ &+ 2 \sum_{x \in \Lambda \setminus \{y_1, y_2\}} K_{x, y_1} \phi_x (\phi_{y_1} + h - \phi_{y_1}) \\ &+ 2 \sum_{x \in \Lambda \setminus \{y_1, y_2\}} K_{x, y_2} \phi_x (\phi_{y_2} - h - \phi_{y_2}) \\ &= 2h^2(K_{0,0} - K_{y_1, y_2}) \\ &+ 2h \left( (K_{0,0} - K_{y_1, y_2})(\phi_{y_1} - \phi_{y_2}) + \sum_{x \in \Lambda \setminus \{y_1, y_2\}} \phi_x (K_{y_1, x} - K_{y_2, x}) \right). \end{aligned} \quad (1.104)$$

Dieser quadratische Ausdruck der Form  $Ad^2 + 2Bd$  ist extremal an der Stelle  $d = -\frac{B}{A}$ , was gerade dem Ausdruck (1.102) entspricht. Genauso verfährt man mit den anderen Spinpaaren des Blockes. Nach jeder Schleife über die Blöcke wird  $H_0$  berechnet. Wenn sich  $H_0$  nur noch wenig ändert, wird das Verfahren gestoppt. Die letzte Feldkonfiguration ist gleich dem  $\mathcal{A}$ -Kern, wenn man die Minimierung für das Hintergrundfeld  $\psi = \delta_{x,0}$  durchführt.

Das Programm zur Bestimmung des  $\mathcal{A}$ -Kerns mit der 5-Punkt-Regel ist etwas komplizierter, da sich die Blöcke überlappen. In der Situation von Abbildung 1.6

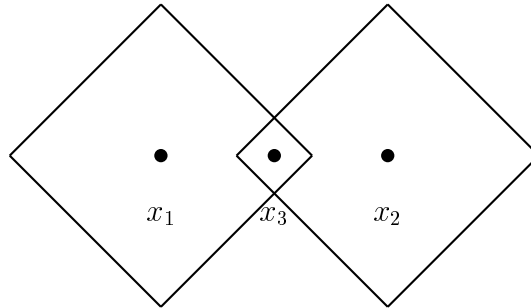


Abbildung 1.6: Situation bei der Veränderung von Überlappungspunkten.

definiert man ausgehend von einer Startkonfiguration  $\phi$  ein neues Feld  $\phi^{\text{new}}$  durch

$$\phi_x^{\text{new}} = \begin{cases} \phi_{x_1} + \frac{c_1}{c_0}h, & \text{falls } x = x_1, \\ \phi_{x_2} + \frac{c_1}{c_0}h, & \text{falls } x = x_2, \\ \phi_{x_3} - h, & \text{falls } x = x_3, \\ \phi_x, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.105)$$

Dadurch bleibt die Nebenbedingung  $\mathcal{C}^5 \phi = \mathcal{C}^5 \phi^{\text{new}} = \psi$  erhalten.  $h$  wird so gewählt, daß  $H_0(\phi^{\text{new}}) - H_0(\phi)$  extremal wird:

$$h = \frac{\sum_{x \in \Lambda} \left( \frac{c_1}{c_0} \phi_x (K_{x,x_1} + K_{x,x_2}) - \phi_x K_{x,x_3} \right)}{\frac{c_1}{c_0} (K_{x_1,x_3} + K_{x_2,x_3}) - K_{0,0} - 2 \left( \frac{c_1}{c_0} \right)^2 (K_{0,0} + K_{x_1,x_2})}. \quad (1.106)$$

Die Extremaleigenschaft von  $h$  weist man nach, indem man für die symmetrische Funktion  $f(x, y) = \phi_x K_{x,y} \phi_y$  die Summe  $2H_0(\phi) = \sum_{x,y \in \Lambda} f(x, y)$  aufspaltet und anschließend die Differenz  $H_0(\phi^{\text{new}}) - H_0(\phi)$  berechnet. Dies ist analog zum obigen Vorgehen. In einer zweiten Update-Routine verändert man die Feldvariablen, die nicht in die Blockspins eingehen. In der Situation von Abbildung 1.7 definiert man

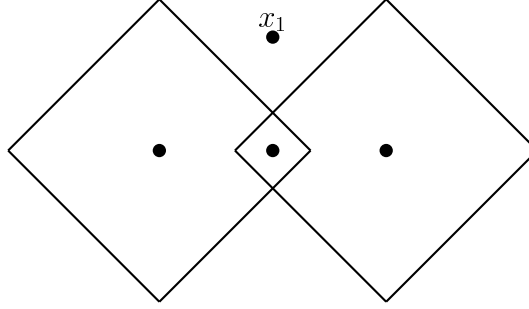


Abbildung 1.7: Situation bei der Veränderung von Punkten, die nicht in den Block mit eingehen.

das veränderte Feld  $\phi^{\text{new}}$  durch

$$\phi_x^{\text{new}} = \begin{cases} \phi_{x_1} + h, & \text{falls } x = x_1, \\ \phi_x, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.107)$$

Der extremale Wert von  $h$  ist durch

$$h = -\frac{\sum_{x \in \Lambda} \phi_x K_{x,x_1}}{K_{0,0}} \quad (1.108)$$

gegeben, da

$$\begin{aligned} 2(H_0(\phi^{\text{new}}) - H_0(\phi)) &= 2 \sum_{x \in \Lambda \setminus \{x_1\}} \phi_x K_{x,x_1} ((\phi_{x_1} + h) - \phi_{x_1}) \\ &\quad + K_{y_1,y_1} ((\phi_{x_1} + h)^2 - \phi_{x_1}^2) \\ &\stackrel{K_{x_1,x_1}=K_{0,0}}{=} 2h \sum_{x \in \Lambda} \phi_x K_{x,x_1} + h^2 K_{0,0} \end{aligned} \quad (1.109)$$



gilt, so daß der Extremum durch (1.108) gegeben ist. Über die in Abbildung 1.6 und 1.7 dargestellten Situationen kann man in einer Schleife die Energie  $H_0(\phi)$  sukzessive minimieren. Aus der letzten Konfiguration liest man wie erklärt den  $\mathcal{A}$ -Kern ab.

Um einen ersten Eindruck zu gewinnen, habe ich mit diesen Programmen zunächst  $\mathcal{A}$ -Kerne für die freie, masselose Theorie mit Kopplungen  $K = v^{-1} = -\Delta$  auf Gittern der Größe  $L = 2^k$  mit  $k \in \{4, 5, 6, 7\}$  berechnet. An Abbildung 1.8 erkennt man

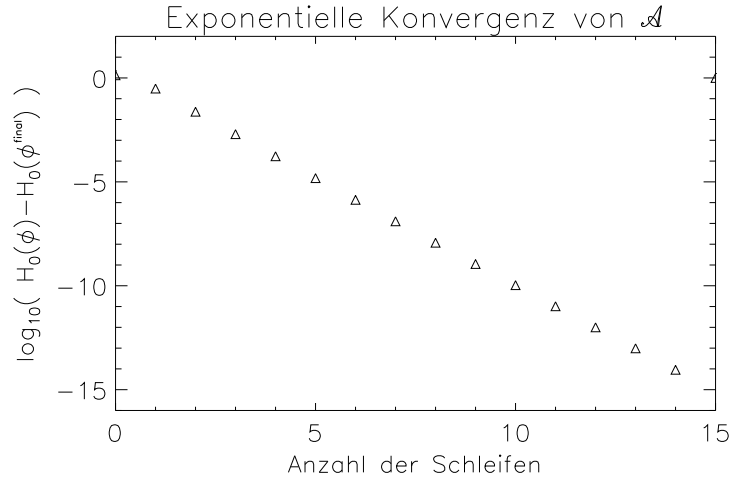


Abbildung 1.8: Exponentielle Konvergenz bei der Berechnung des  $\mathcal{A}$ -Kerns auf einem  $64 \times 64$ -Gitter. Aufgetragen ist die Energiedifferenz der Konfigurationen zur letzten Konfiguration, aus der der  $\mathcal{A}$ -Kern bestimmt wird.

zunächst, daß die vorgeschlagene Methode zur Bestimmung des  $\mathcal{A}$ -Kerns exponentiell schnell gegen einen Fixpunkt konvergiert. Die Konvergenz folgt ungefähr dem Gesetz  $H_0(\phi) - H_0(\phi^{\text{final}}) = \text{const} \times 10^{-n}$ , wenn  $\phi^{\text{final}}$  die letzte Konfiguration und  $n$  die Anzahl der durchlaufenen Schleifen ist. Nach etwa 16 Schleifen ist die Rechengenauigkeit erreicht. In Abbildung 1.9 ist der Logarithmus des Betrags des  $\mathcal{A}$ -Kerns für  $\delta$ -Blockspin gegen den Betrag des Abstands zum Ursprung für ein  $64 \times 64$ -Gitter aufgetragen. An dem linearen Verhalten der Randkurve erkennt man deutlich den exponentiellen Zerfall des  $\mathcal{A}$ -Kerns. Zunächst habe ich aus Graphen dieser Art die Abhängigkeit der Zerfallskonstanten von der Gittergröße bestimmt. Die Zerfallskonstante  $K(L)$  ist die größte Zahl für die im linearen Bereich  $K(L) \leq -\frac{c + \log |\mathcal{A}_{y,0}|}{|y|}$  gilt, wobei  $c$  eine unbedeutende Konstante ist. Durch lineare Fits habe ich  $K(L)$  für alle betrachteten Werte von  $L$  jeweils fünfmal bestimmt. Der angegebene Fehler ist die Wurzel aus der empirischen Varianz der Werte. Die Zerfallskonstante für die 5-Punkt-Regel wurde mit dem Parameter  $c_0 = 0.8$  und  $c_1 = \frac{1-c_0}{4}$  bestimmt. Die Änderung der Zerfallskonstanten mit  $c_0$  wird später untersucht. Das Ergebnis findet man in Tabelle 1.1. Die erste Beobachtung ist, daß  $K(L)$  für die 5-Punkt-Regel deutlich größer ist als für den  $\delta$ -Blockspin. Der  $\mathcal{A}$ -Kern (und die anderen Gitteroperatoren) fallen schneller ab, sind also lokaler. Die Zerfallskonstante ist bei Verwendung des  $\delta$ -Blockspins deutlich von der Größe des Gitters abhängig. Wenn

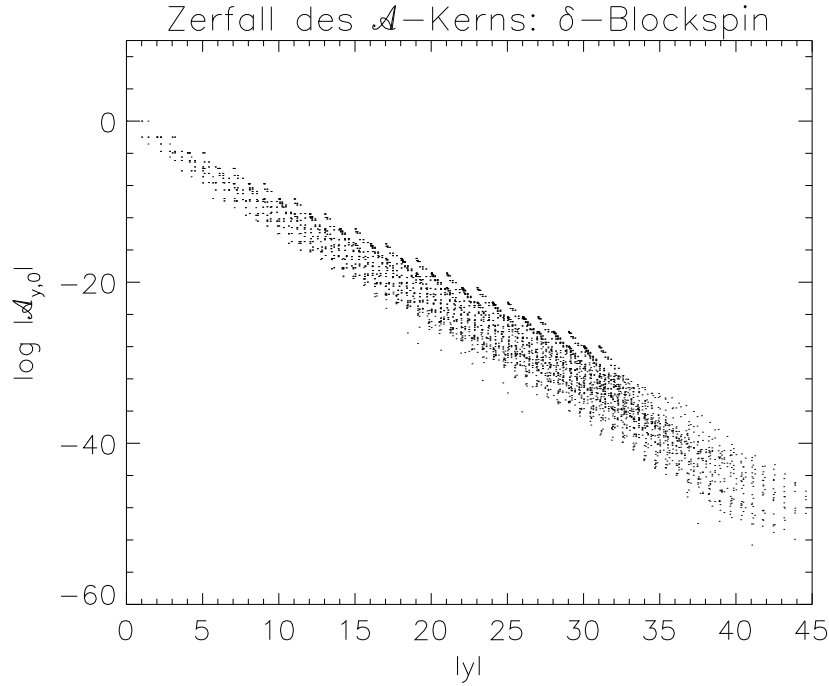


Abbildung 1.9: Exponentieller Zerfall des  $\mathcal{A}$ -Kerns bei  $\delta$ -Blockspins. Aufgetragen ist der Logarithmus von  $|\mathcal{A}_{y,0}|$  gegen  $|y|$ .

man zu größeren Gittern geht, wird der  $\mathcal{A}$ -Kern weniger lokal; dies ist ein natürliches Verhalten. Wenn man die 5-Punkt-Regel verwendet, stabilisiert sich die Zerfallskonstante bereits bei  $L = 32$  auf einen asymptotischen Wert. Auch darin drücken sich die besseren Lokalitätseigenschaften der 5-Punkt-Blockung aus.

Wie muß man bei der 5-Punkt-Regel  $c_0$  wählen, damit die Zerfallskonstante  $K(c_0)$  maximal wird? Um dies zu beantworten, habe ich den  $\mathcal{A}$ -Kern im freien, masselosen Fall ( $v^{-1} = -\Delta$ ) auf einem  $32 \times 32$ -Gitter für verschiedene Werte von  $c_0$  zwischen 0.4 und 1.0 berechnet, und die Zerfallskonstante nach dem beschriebenen Verfahren gemessen. In Abbildung 1.10 ist das Ergebnis aufgetragen. Der Fall  $c_0 = 1$  entspricht der bloßen Dezimierung. Deutlich ist zu erkennen, daß die Zerfallskonstante bei  $c_0 = 0.75$  ein scharfes Maximum mit  $K(0.75) = 1.496(7)$  annimmt. Wenn drei Viertel des Gewichtes bei der Blockung auf den Blockmittelpunkt

$L$	$\delta$ -Blockspin	5-Punkt-Regel
16	0.994(4)	1.423(6)
32	0.944(7)	1.403(8)
64	0.918(3)	1.403(2)
128	0.897(4)	1.404(3)

Tabelle 1.1:  $K(L)$  für  $\delta$ -Blockspin und 5-Punkt-Regel.

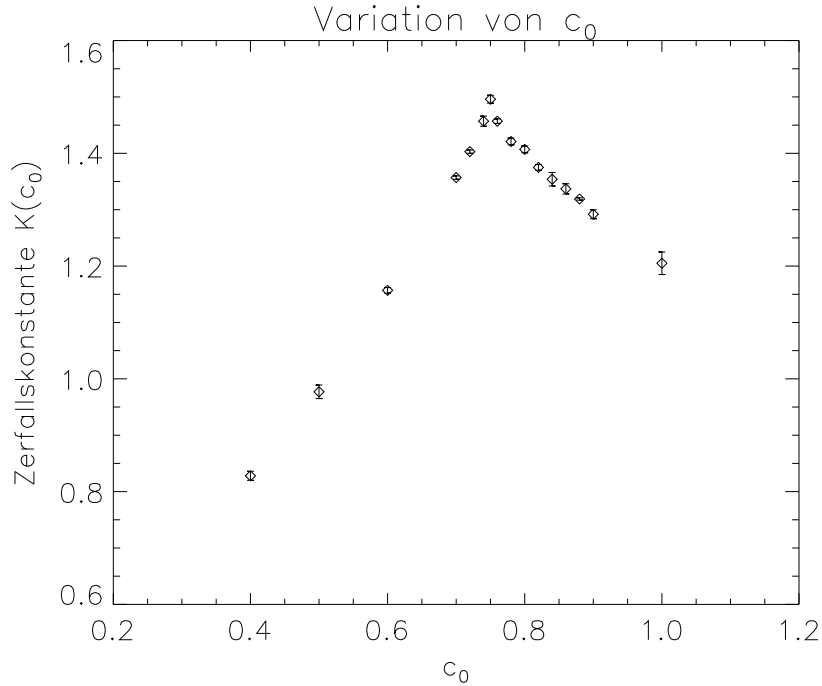


Abbildung 1.10: Bestimmung des Optimalwertes für  $c_0$  für die 5-Punkt-Regel.

fallen, ist der  $\mathcal{A}$ -Kern also optimal lokal. Die Zeit, in der sich das Feld nach der Wärmeleitungsgleichung entwickelt, ist dann  $c_1 = 0.0625$ ; sie ist so klein, daß man erwarten kann, daß es keine wesentlichen Verbesserung im Lokalitätsverhalten des  $\mathcal{A}$ -Kerns gibt, wenn man die Taylorentwicklung (1.97) erst nach höheren Ordnungen abbricht, beziehungsweise übernächste Nachbarpunkte mit in die Block-Regel einbezieht. Nach einer Mitteilung von Klaus Pinn besitzt der perfekte Laplaceoperator selbst die besten Lokalitätseigenschaften für  $c_0 = 0.80$ .

Wenn der  $\mathcal{A}$ -Kern berechnet ist, kann man mit Hilfe von Gleichung (1.77) die Blockkopplungen  $\nu^{-1}$  berechnen. Wenn man sich vorstellt, daß man  $H_0$  bei dem Hintergrundfeld

$$\psi_x = \delta_{x,x_1} + \delta_{x,x_2} \quad (1.110)$$

minimiert hat, so gilt einerseits

$$H'_0(\psi) := \frac{1}{2}(\psi, \nu^{-1}\psi) = \nu_{0,0}^{-1} + \nu_{x_1,x_2}^{-1}, \quad (1.111)$$

und andererseits

$$H'_0(\psi) = \min_{\phi \in \mathbb{R}^\Lambda: \psi = \mathcal{C}\phi} H_0(\phi) = H_0(\mathcal{A}\psi) = H_0(\mathcal{A}_{\cdot,x_1} + \mathcal{A}_{\cdot,x_2}). \quad (1.112)$$

Durch Vergleich von (1.111) und (1.112) kann man die geblockten Kopplungen  $\nu_{x_1,x_2}^{-1}$  bekommen, wenn man zuvor  $\nu_{0,0}^{-1}$  bestimmt hat. Dazu wird das Hintergrundfeld

$\psi_x = \delta_{x,0}$  gewählt; dann ist nämlich

$$H'_0(\psi) = \frac{1}{2}\nu_{0,0}^{-1} = H_0(\mathcal{A}_{\cdot,0}) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda} v_{x,y}^{-1} \mathcal{A}_{x,0} \mathcal{A}_{y,0}. \quad (1.113)$$

Aus dem  $\mathcal{A}$ -Kern kann man also sehr einfach  $\nu^{-1}$  im Ortsraum berechnen und Renormierungsgruppenschritte iterieren, bis man schließlich den perfekten Laplaceoperator gewonnen hat. Bei der Iteration ist zu beachten, daß das reskalierte Blockspingitter  $\Lambda'_R$  nicht gleich dem Gitter  $\Lambda$  ist, sondern ein kleineres Gitter, das in jeder Raumrichtung statt  $N$  nur noch  $\frac{N}{L}$  Punkte enthält. Die Kopplungen auf  $\Lambda'_R$  sind invariant unter Drehungen des Gitters um  $\frac{k\pi}{2}$  mit  $k = 0, 1, \dots$ . Daher besitzt

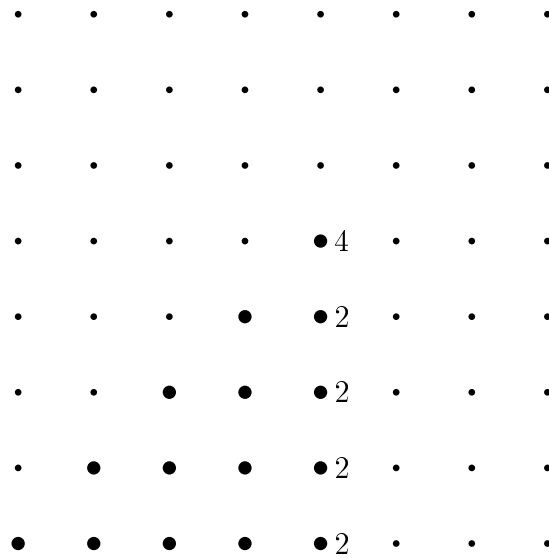


Abbildung 1.11: *Unabhängige Komponenten von  $\nu^{-1}$  auf  $\Lambda'_R$ . Die fetten Punkte entsprechen den unabhängigen Komponenten. Die Zahlen werden im Text erklärt.*

$\nu^{-1}$  nur  $\frac{1}{2} \left( \frac{N}{L} + 1 \right) \left( \frac{N}{L} + 2 \right)$  unabhängige Komponenten, siehe Abbildung 1.11. Um für die Iteration aus den Blockkopplungen  $\nu^{-1}$  auf dem kleineren Gitter  $\Lambda'_R$  neue Kopplungen  $v^{-1}$  auf  $\Lambda$  zu definieren, zerschneidet man  $\Lambda'_R$  so, daß alle Symmetrie aufgehoben ist, klebt an die verbleibenden Kopplungen so viele Nullen heran, bis man alle unabhängigen Kopplungen auf  $\Lambda$  definiert hat, und klebt diese Kopplungen gemäß der Symmetrieforderungen aneinander. Bei dem Zerschneiden muß man die Subtilität beachten, daß man einige Kopplungen durch Zwei oder durch Vier teilen muß, wenn  $\frac{N}{L}$  gerade ist. Die richtigen Faktoren sind in Abbildung 1.11 an den entsprechenden Punkten eingetragen. Wenn  $N = 32$  ist, gibt es also 45 unabhängige Kopplungen, bei  $N = 64$  gibt es 153 unabhängige Kopplungen. Die Iteration wurde bei diesen Parametern für den  $\delta$ -Blockspin und für die 5-Punkt-Regel ( $c_0 = 0.80$ ), ausgehend von der freien, masselosen Theorie, jeweils 20 mal durchgeführt. Die Ergebnisse für die Blockkopplungen nach den ersten zehn Schritten sind in Abbildung 1.12 dargestellt. Abgebildet sind die bereits geteilten Kopplungen, die auf dem Gitter  $\Lambda$  leben. Die diskreten Punkte wurden verbunden, damit die

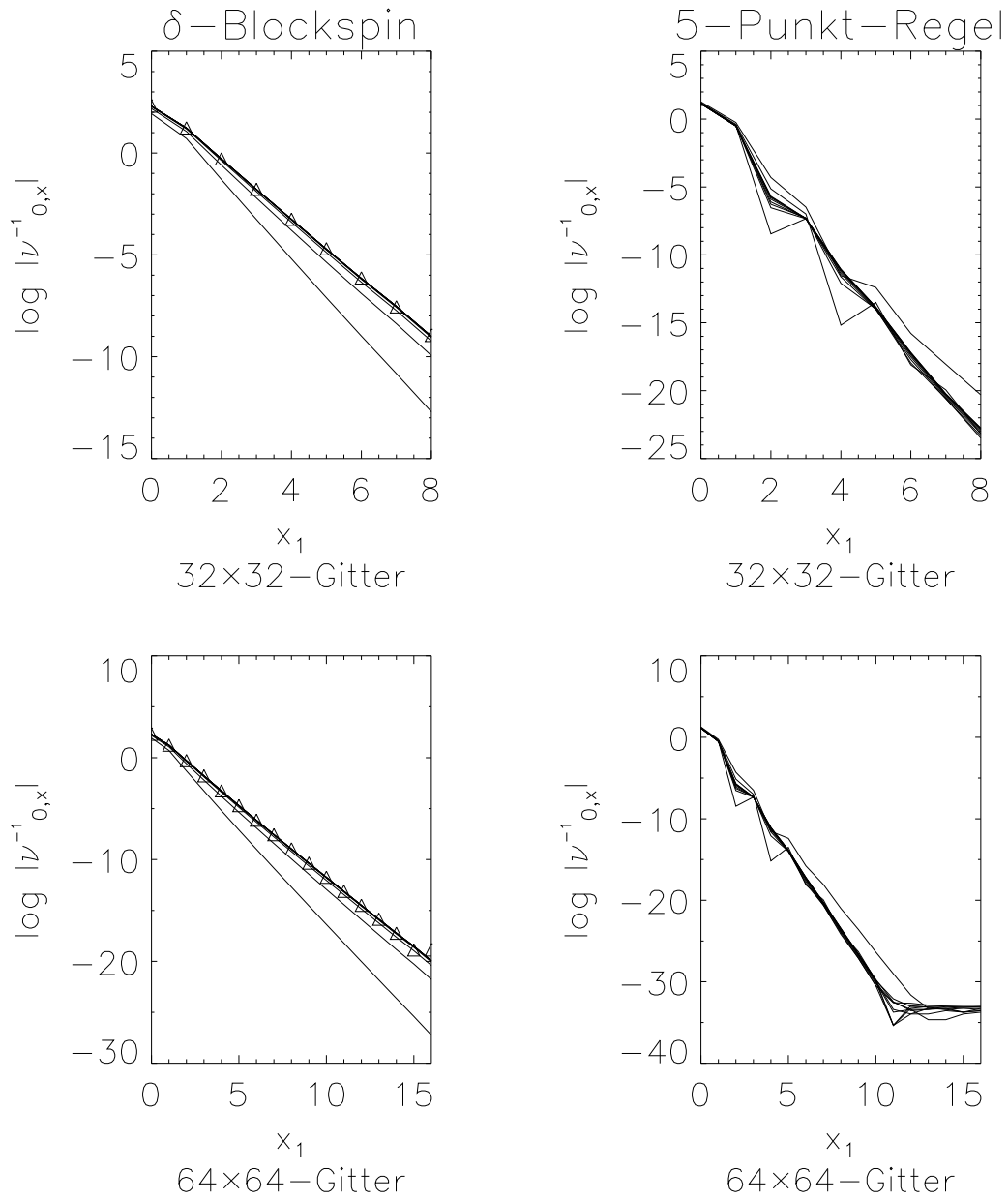


Abbildung 1.12: Iteration der Blockkopplungen auf Gittern der Größe  $N = 32$  und  $N = 64$ . Ausgangspunkt der Iteration ist die freie, masselose Theorie, die durch den Gitter-Laplaceoperator definiert wird. Es wurden jeweils zehn Iterationsschritte durchgeführt. Die Kopplungen sind durch einen Schnitt entlang der  $x_1$ -Achse dargestellt, es gilt  $x = (x_1, 0)$ . Die Dreiecke bezeichnen die exakten Werte, die aus Formel (1.60) im Limes  $a \rightarrow \infty$  erhalten wurden.

Zuordnung zu den Schritten klarer wird. Die Dreiecke beim  $\delta$ -Blockspin bezeichnen die exakten Resultate, die durch eine numerische Auswertung von Formel (1.60) im Limes  $a \rightarrow \infty$  erhalten wurden. In jedem Fall kann man eine Konvergenz zu einem Häufungspunkt beobachten. Das Ergebnis der Iteration ist der perfekte Laplaceoperator. Mit der 5-Punkt-Regel wird der Fixpunkt später erreicht, beim  $\delta$ -Blockspin konvergieren die Kopplungen erstaunlich schnell, bereits nach vier Schritten ist der perfekte Laplaceoperator erreicht. Konvergenzprobleme auf kleineren Gittern sowie Trunkationseffekte sind bereits in [Deg95] mit dieser und einer anderen Methode zur Berechnung der Blockkopplungen ausführlich untersucht und dargestellt worden.

An der logarithmischen Darstellung in Abbildung 1.12 kann man deutlich erkennen, daß die Blockkopplungen exponentiell abfallen; die Zerfallskonstante ist für den  $\delta$ -Blockspin ungefähr 1.4, während ich für die 5-Punkt-Regel etwa 3.2 erhalte. (In der Tat sind die Kurven nicht ganz linear; dies erwartet man auf endlichen Gittern, da Periodizität gefordert wird.) Auf dem  $32 \times 32$ -Gitter sind die Kopplungen bei  $x = (8, 0)$  beim  $\delta$ -Blockspin auf circa  $10^{-4}$  abgefallen, bei der 5-Punkt-Regel in der gleichen Situation bereits auf  $10^{-10}$ . Auf einem  $64 \times 64$ -Gitter bildet sich bei der 5-Punkt-Regel für  $x_1 > 11$  ein Plateau bei  $\log |\nu_{0,x}^{-1}| = -37$ , das heißt bei  $|\nu_{0,x}^{-1}| < 10^{-16}$  aus; dies liegt in der Größenordnung der Rechnergenauigkeit. (Die  $\mathcal{A}$ -Kerne und die Blockkopplungen wurden stets mit der maximal verfügbaren Genauigkeit bestimmt.) Für größere Gitter kann man also noch weiter entfernt liegende Kopplungen gleich Null setzen. In Abbildung 1.13 wird der Vergleich der Blockspinpropagatoren für die 5-Punkt-Regel bei  $c_0 = 0.75$  und  $c_0 = 0.80$  durchgeführt. Die Darstellung ist wieder logarithmisch. Ausgehend von der freien, masselosen Theorie auf einem  $32 \times 32$ -Gitter wurden die ersten zehn Renormierungsgruppenschritte für die Blockkopplungen in einem Schnitt entlang der  $x_1$ -Achse abgebildet. Zuerst bemerkt man, daß die Daten bei  $c_0 = 0.75$  sehr viel regulärer sind als bei  $c_0 = 0.80$ . Bereits nach zwei Schritten sind die Kopplungen gegen den perfekten Laplaceoperator konvergiert, während die Konvergenz bei  $c_0 = 0.8$  mindestens acht Schritte erfordert. Dieses bessere Konvergenzverhalten liegt an der optimalen Lokalität des  $\mathcal{A}$ -Kerns, mit dem sich die Kopplungen transformieren, bei  $c_0 = 0.75$ . Der perfekte Laplaceoperator fällt jedoch bei  $c_0 = 0.8$  schneller ab; für die exponentiellen Zerfallskonstanten  $K(c_0)$  erhalte ich

$$K(0.75) = 3.0 \quad (1.114)$$

$$K(0.80) = 3.2. \quad (1.115)$$

Bei der Wahl von  $c_0$  muß man also zwischen den Vorzügen schneller Konvergenz gegen den perfekten Laplaceoperator und guter Lokalität dieses Operators abwägen. In Abbildung 1.14 sind die numerisch gefundenen Energie-Impuls-Beziehungen am Beispiel des  $\delta$ -Blockspins und der 5-Punkt-Regel bei  $c_0 = 0.75$  für die Iteration auf einem  $64 \times 64$ -Gitter dargestellt. Dazu wurden die Kopplungen aus dem Ortsraum in den Impulsraum transformiert, in dem sie aufgrund der Translationsinvarianz diagonal sind. Nach einer Inversion kann man durch Fouriertransformation in der ersten Impulskoordinate die Zweipunktfunktion bestimmen, die exponentiell mit  $p_2$  abfällt. Wie oben erwähnt kann man die Zerfallskonstante automatisiert bestimmen und in die Abbildung eintragen. Dargestellt sind insgesamt sieben Punkte auf der

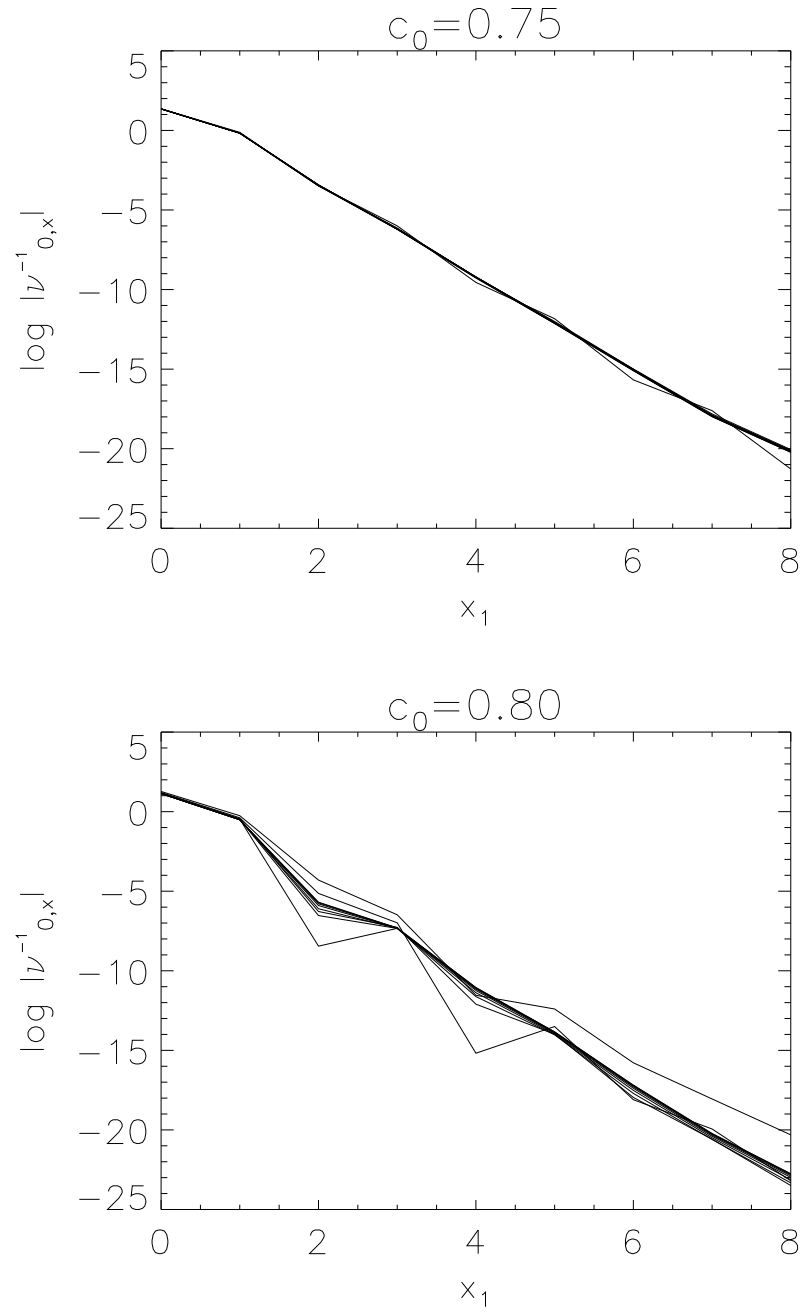


Abbildung 1.13: Vergleich der Blockkopplungen und des perfekten Laplaceoperators für die 5-Punkt-Regel bei  $c_0 = 0.75$  und bei  $c_0 = 0.8$ .

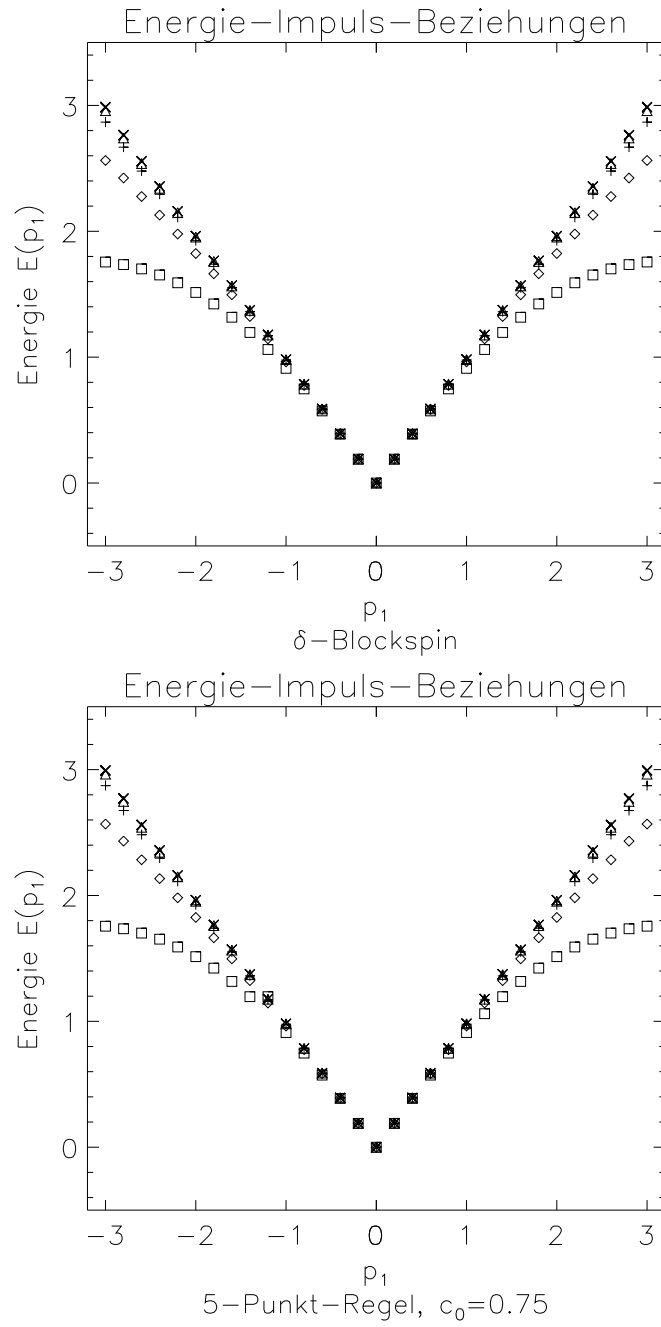


Abbildung 1.14: Energie-Impuls-Beziehungen entlang der berechneten Trajektorie vom Laplaceoperator zum perfekten Laplaceoperator für  $\delta$ -Blockspin und 5-Punkt-Regel mit  $c_0 = 0.75$  auf einem  $64 \times 64$ -Gitter. Dargestellt sind 6 Schritte, Ausgangspunkt ist der naive Gitter-Laplaceoperator (Kästchen).



Trajektorie von dem naiven Laplaceoperator, der den Kästchen entspricht, bis zu dem perfekten Laplaceoperator. Die drei letzten Schritte wurden mit dem gleichen Symbol bezeichnet; für diese drei Propagatoren ändert sich die Dispersionsrelation nur noch sehr wenig. Es ist interessant zu bemerken, daß die Energie-Impuls-Beziehungen entlang der Trajektorie vom naiven Laplaceoperator zum perfekten Laplaceoperator für  $\delta$ -Blockspin und für die 5-Punkt-Regel beinahe gleich schnell gegen die perfekte (Kontinuums-) Beziehung gehen. Dies ist unabhängig von dem Wert, den  $c_0$  annimmt.

### 1.3.4 Linearisierung

Kleine Störungen eines Renormierungsgruppenfixpunktes geben Aufschluß über das kritische Verhalten. Sie werden unter Renormierungsgruppentransformationen mit der Linearisierung, das ist die Tangentialabbildung an dem Fixpunkt, transformiert. Aus den Eigenwerten der linearisierten Abbildung bestimmt man die kritischen Exponenten. Der Fixpunkt  $H_\star(\phi)$  der (reskalierten) Transformation

$$e^{-H'(\psi)} = \int [d\phi] e^{-H(\phi)} \delta(\psi - \mathcal{C}\phi) \quad (1.116)$$

werde durch die kleine Störung  $h(\phi)$  beeinflusst. Dann ist  $H'$  von der Gestalt

$$H'(\psi) = H_\star(\psi) + h'(\psi), \quad (1.117)$$

und man erwartet, daß auch  $h'$  klein ist. Aus (1.116) wird dann

$$e^{-H_\star(\psi)} (1 - h'(\psi)) = \int [d\phi] e^{-H_\star(\phi)} (1 - h(\phi)) \delta(\psi - \mathcal{C}\phi), \quad (1.118)$$

also gilt

$$h'(\psi) = e^{H_\star(\psi)} \int [d\phi] e^{-H_\star(\phi)} h(\phi) \delta(\psi - \mathcal{C}\phi). \quad (1.119)$$

(1.119) ist die Linearisierung der Renormierungsgruppentransformation (1.116) am Fixpunkt  $H_\star$ . Wenn  $H_\star$  ein quadratischer Fixpunkt von der Form

$$H_\star(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, v^{-1}\phi) \quad (1.120)$$

ist,  $v$  ist zum Beispiel der perfekte Laplaceoperator, so kann man die Linearisierung aufgrund der Rechnungen in Abschnitt 1.2.3 und der Überlegungen in Abschnitt 1.3.1 offenbar in der Form

$$h'(\psi) = \int d\mu_\Gamma(\zeta) h(\mathcal{A}\psi + \zeta) \quad (1.121)$$

schreiben. Dabei berechnen sich die Gitteroperatoren aus  $v$  mit der gewählten Blockmittelvorschrift  $\mathcal{C}$  aus den Gleichungen (1.79) und (1.80). Diese Gleichungen gelten allgemein für beliebige Störungen eines quadratischen Fixpunktes.

Wenn man nur quadratische Störungen  $h(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, K\phi)$  eines quadratischen Fixpunktes  $v$  untersucht, ist die linearisierte Transformation noch einfacher durch

$$K' = \mathcal{A}^+ K \mathcal{A} \quad (1.122)$$

gegeben, wie man an Gleichung (1.77) abliest. Die zugehörige Transformationsmatrix kann nach Berücksichtigung aller Symmetrien numerisch diagonalisiert werden. Dazu habe ich die Routine F02AFF aus [Num91] verwendet. Die Eigenwerte der

$i$	$\lambda_i$		
	5-Punkt-Regel, $c_0 = 0.75$	5-Punkt-Regel, $c_0 = 0.80$	$\delta$ -Blockspin
0	3.999999941	3.9999999853	3.9983
1	0.999999844	1.000000009	0.9794
2	0.581276950	0.650194438	0.5350
3	0.249985627	0.250002147	0.2125
4	0.091129642	0.078685718	0.1923

Tabelle 1.2: *Eigenwerte der linearisierten Transformation am perfekten Laplaceoperator.*

Linearisierung sind in Tabelle 1.2 eingetragen. In zwei Dimensionen ist die Ingenieursdimension eines Feldes gleich Null. Das Auftreten der Eigenwerte 4, 1 und 0.25 im Spektrum ist natürlich, da es sich um eine freie Feldtheorie handelt. Für  $\delta$ -Blockspin kommt der Volumeneigenwert 4 mit einem relativen Fehler von  $4 \cdot 10^{-4}$  heraus, der Eigenwert  $\lambda_3 = 0.25$  hat schon einen relativen Fehler 0.15. Weitere Eigenwerte sind komplex. Mit der 5-Punkt-Regel erhält man sowohl bei  $c_0 = 0.75$  als auch bei  $c_0 = 0.8$  gute Resultate. Die größte relative Abweichung ist  $8 \cdot 10^{-5}$ . Der marginale Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  ist bei  $c_0 = 0.80$  sehr genau bestimmt worden. Etwas merkwürdig ist das Verhalten des Eigenwertes  $\lambda_2$ , der nicht kanonisch ist. Die Instabilität im Vergleich zwischen  $c_0 = 0.75$  und  $c_0 = 0.80$  deutet auf numerisch Probleme hin. Dies ist etwas unnatürlich, da der kleinere Eigenwert  $\lambda_3$  sehr genau bestimmt werden konnte.

# Kapitel 2

## Das hierarchische Modell

### 2.1 Geschichte und Philosophie

Hierarchische Modelle sind Modelle der statistischen Physik und der Quantenfeldtheorie. Das erste hierarchische Modell wurde 1969 von F. Dyson untersucht [Dys69]. Dysons hierarchisches Modell ist ein Modell mit einer langreichweitigen, nicht translationsunabhängigen Spin-Spin Wechselwirkung, die aber für die meisten Spin-Paare wie eine kurzreichweitige Wechselwirkung abfällt. Nach Dyson wurde das hierarchische Modell von G. A. Baker Jr. wiederentdeckt [Bak72]. Baker hat als erster die Wilsonsche Renormierungsgruppe auf diese Modelle angewendet. Da die Renormierungsgruppentransformation für hierarchische Modelle eine besonders einfache Form annimmt, war eine mathematisch fundierte Analyse der Renormierungsgruppenfixpunkte und des Renormierungsgruppenflusses möglich [CE78, BS73].

Heute betrachtet man das hierarchische Modell vor allem als lokale Näherung des vollen Modells. Die erste Formulierung dieser Art wurde von Gallavotti [Gal78] gegeben. In diesem Zusammenhang erschienen und erscheinen viele Arbeiten, vor allem aus der mathematischen Physik, da sich gezeigt hat, daß die hierarchische Approximation ein sehr gutes qualitatives Bild der Phasenübergänge des vollen Modells liefert. Dazu zählen Arbeiten von Gawedzki und Kupiainen [GK84b], die sich mit der Konstruktion nichttrivialer Kontinuumslimiten beschäftigen, die bisher einzige Konstruktion eines nichttrivialen Renormierungsgruppenfixpunktes von Koch und Wittwer [KW91], sowie Arbeiten von Pinn, Pordt und Wieczerkowski [PPW94, PW91, Por93] zu mathematischen und numerischen Aspekten von hierarchischen Modellen.

Neben skalaren hierarchischen Modellen untersucht man auch Random Walks auf hierarchischen Gittern [BEI92], hierarchische Modelle für Flächen [CM94] oder das hierarchische  $O(N)$ -Modell [GS96].

Wie in [PPW94] herausgestellt wird, gibt es mindestens drei Motivationen für die Beschäftigung mit hierarchischen Modellen. Zunächst kann man diese Modelle als Spielwiese und Testgelände zur Entwicklung von Methoden für eine Renormierungsgruppenanalyse von vollen Theorien betrachten. Entscheidend dabei ist die einfache lokalitätserhaltende Renormierungsgruppentransformation. Die Tatsache, daß die volle Transformation nicht lokalitätserhaltend ist, wird bei diesem Zugang

als technische Komplikation gesehen [GJ87, BY90, BDH95, CM94, Gal85].

Zweitens kann man das hierarchische Modell als Approximation an volle Modelle betrachten. Leider gibt es bisher keinen systematischen Weg, Korrekturen über die hierarchische Situation hinaus zu berechnen. Ansätze dazu kann man in Kapitel 5 und in [PRW] finden.

Schließlich kann man hierarchische Modelle als eigenständige und vollkommen nichttriviale Modelle der euklidischen Quantenfeldtheorie untersuchen, die für sich interessant sind, obwohl sie nicht in den Minkowski-Raum fortgesetzt werden können.

## 2.2 Hierarchische Renormierungsgruppentransformationen

Das hierarchische Modell ist eine Approximation der vollen Renormierungsgruppentransformation, die man auf verschiedene Arten erklären kann. Der eleganteste Weg führt über die volle Transformation (1.49) nach Abspaltung des Hochtemperaturfixpunktes. Dadurch erhält man eine Form der hierarchischen Renormierungsgruppentransformation im Hochtemperatur-Bild, das heißt bei abgespaltenem Hochtemperaturfixpunkt. Das Hochtemperatur-Bild und das Ultraviolett-Bild, in dem der Hochtemperaturfixpunkt nicht abgespalten ist, werden im folgenden einander gegenübergestellt.

In (1.49) ersetzt man den Propagator  $\Gamma = \gamma_{\text{HT}}(\mathbf{1} - \mathcal{C}^+ \mathcal{C})$  durch den diagonalen Propagator  $\Gamma = \gamma \mathbf{1}$ . Wenn man die Transformation nach dieser Näherung für ein lokales Potential  $V(\phi) = \sum_{y \in \Lambda} V_y(\phi_y)$  anwendet, faktorisiert das Integral:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}_{\text{eff}}(\psi) &= \mathcal{N} \int \prod_{y \in \Lambda} d\zeta_y e^{-\frac{1}{2\gamma} \zeta_y^2} \mathcal{Z}_y((\mathcal{C}^+ \psi)_y + \zeta_y) \\
 &= \prod_{x \in \Lambda} \left\{ \prod_{y \in Lx} \int d\mu_\gamma(\zeta_y) \mathcal{Z}_y(L^{-1-\frac{d}{2}} \psi_x + \zeta_y) \right\} \\
 &\stackrel{\text{Translations-}}{\stackrel{\text{invarianz}}{=}} \prod_{x \in \Lambda} \left\{ \int d\mu_\gamma(\zeta) \mathcal{Z}_0(L^{-1-\frac{d}{2}} \psi_x + \zeta) \right\}^{L^d}. \tag{2.1}
 \end{aligned}$$

Dabei hat man  $\mathcal{Z}(\phi) = e^{-V(\phi)}$  gesetzt.  $d\mu_\gamma(\zeta)$  in (2.1) ist das eindimensionale Gaußsche Maß mit Mittelwert Null und Kovarianz  $\gamma$ .  $\mathcal{C}^+ \psi$  ist eine blockkonstante Funktion; wenn man daher fordert, daß alle  $\mathcal{Z}_y$  die gleiche Gestalt besitzen, faktorisiert auch  $\mathcal{Z}_{\text{eff}}$ . Die Transformation  $\mathcal{T}'$  für einen Punkt wird die hierarchische Renormierungsgruppentransformation im Hochtemperatur-Bild genannt. Sie wirkt auf Funktionen  $Z(\phi)$  von einem reellen Argument und hat die Gestalt

$$(\mathcal{T}' Z)(\psi) = \left\{ \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta' \psi + \zeta) \right\}^{L^d}, \tag{2.2}$$

mit  $\beta' = L^{-1-\frac{d}{2}}$ . Häufiger als  $\mathcal{T}'$  wird die Transformation  $\mathcal{T}$  benutzt, die durch

$$(\mathcal{T}Z)(\psi) = \left\{ \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\psi + \zeta) \right\}^{L^d}, \quad (2.3)$$

mit  $\beta = L^{1-\frac{d}{2}}$  gegeben ist. Diese Transformation erhält man aus der vollen Transformation, wenn man, wie in [PPW94] erklärt wird, ohne den Hochtemperaturfixpunkt abzuspalten, die Kerne der Gitteroperatoren durch Stufenfunktionen nähert. Dies ist wegen des exponentiellen Zerfalls dieser Operatoren gerechtfertigt.  $\mathcal{T}$  ist die hierarchische Transformation im Ultraviolett-Bild.

Durch eine Ähnlichkeitstransformation kann man aus  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  Renormierungsgruppentransformationen  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}'$  erhalten, bei der die Integration mit dem Potenzieren mit  $L^d$  vertauscht ist:

$$\mathcal{R} = \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{S}, \text{ mit } \mathcal{R}Z(\psi) = \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\psi + \zeta)^{L^d}, \quad (2.4)$$

wobei  $\mathcal{S}Z(\psi) = Z(\psi)^{L^d}$  ist. Aus Fixpunkten von  $\mathcal{T}$  erhält man damit auch Fixpunkte von  $\mathcal{R}$ . Beide Transformationen sind äquivalent, aus numerischen Gründen kann aber die Bevorzugung einer Transformation sinnvoll sein (siehe Abschnitt 2.6.1 und 2.6.4). Der Zusammenhang zwischen  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}'$  wird durch den hierarchischen Hochtemperaturfixpunkt  $Z_{\text{HT}}$  vermittelt, der als Fixpunkt von  $\mathcal{R}$  durch

$$Z_{\text{HT}} = L^{\frac{1}{L^d-1}} e^{-\frac{L^2-1}{2\gamma L^d} \phi^2} \quad (2.5)$$

gegeben ist. Die Fixpunkteigenschaft weist man durch Gaußintegration nach, vergleiche Abschnitt 2.3. Wenn man den Multiplikationsoperator mit  $Z_{\text{HT}}$  als  $\mathcal{Z}_{\text{HT}}$  bezeichnet, und in (2.4)  $Z(\phi) = Z_{\text{HT}}(\phi)F(\phi)$  setzt, gelangt man zu  $\mathcal{R}'$  durch die Ähnlichkeitstransformation

$$\mathcal{R}' = \mathcal{Z}_{\text{HT}}^{-1} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{Z}_{\text{HT}}, \quad (2.6)$$

wobei  $\mathcal{R}'$  durch

$$\mathcal{R}'F(\psi) = \int d\mu_{\gamma'}(\zeta) F(\beta'\psi + \zeta)^{L^d} \quad (2.7)$$

gegeben ist, mit  $\gamma' = L^{-2}\gamma$  und  $\beta' = L^{-2}\beta$ . Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}'F)(\psi) &= \frac{1}{Z_{\text{HT}}(\psi)} \int d\mu_\gamma(\zeta) (F(\beta\psi + \zeta) Z_{\text{HT}}(\beta\psi + \zeta))^{L^d} \\ &= L^{-\frac{1}{L^d-1}} e^{\frac{L^2-1}{2\gamma L^d} \psi^2} L^{\frac{L^d}{L^d-1}} \int d\mu_\gamma(\zeta) F(\beta\psi + \zeta)^{L^d} e^{-\frac{L^2-1}{2\gamma L^d} (\beta\psi + \zeta)^2} \\ &= L e^{\left(\frac{L^2-1}{2\gamma L^d} - \frac{L^2-1}{2\gamma L^d} \beta^2\right) \psi^2} \int d\mu_\gamma(\zeta) F(\beta\psi + \zeta)^{L^d} e^{-\frac{\beta(L^2-1)\psi\zeta}{\gamma} - \frac{L^2-1}{2\gamma} \zeta^2} \\ &= e^{-\frac{(L^2-1)^2}{2\gamma L^d} \psi^2} \int d\mu_{L^{-2}\gamma}(\zeta) F(\beta\psi + \zeta)^{L^d} e^{-\frac{L^{-2}\beta(L^2-1)\psi\zeta}{L^{-2}\gamma}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Durch die Substitution  $\zeta' = \beta'(L^2 - 1)\psi + \zeta$  bekommt man die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \beta\psi + \zeta &= \beta\psi + \zeta' - \beta(1 - L^{-2})\psi = \zeta' + \beta'\psi, \\ -\frac{1}{2\gamma'}\zeta^2 &= -\frac{1}{2\gamma'}\zeta'^2 + \frac{\beta'(L^2 - 1)\psi\zeta'}{\gamma'} - \frac{\beta'^2(L^2 - 1)^2\psi^2}{2\gamma'}, \\ -\frac{\beta'(L^2 - 1)\psi\zeta}{\gamma'} &= -\frac{\beta'(L^2 - 1)\psi\zeta'}{\gamma'} + \frac{\beta'^2(L^2 - 1)^2\psi^2}{\gamma'}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Durch Einsetzen und Zusammenfassen erkennt man die Gültigkeit von (2.7). Die zusätzlichen Faktoren  $L^{-2}$  in dem Dimensionsfaktor  $\beta'$  und der Kovarianz  $\gamma'$  sind insbesondere im konstruktiven Zugang von Koch und Wittwer [KW91] sowie für numerische Zwecke von Bedeutung.

Wenn eine der genannten Transformationen, zum Beispiel  $\mathcal{R}$ , auf eine gerade Funktion  $Z$  mit  $Z(-\phi) = Z(\phi)$  wirkt, ist auch  $\mathcal{R}Z$  gerade:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}Z(-\psi) &= \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(-\beta\psi + \zeta)^{L^d} \\ &= \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\psi - \zeta)^{L^d} \\ &= \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\psi + \zeta)^{L^d} \\ &= \mathcal{R}Z(\psi). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Daher werden die Transformationen oft nur für symmetrische Funktionen betrachtet.

Die hierarchischen Renormierungsgruppentransformationen bilden eine Halbgruppe, die durch Kompositionen definiert wird. Diese Halbgruppe ist aber keine Darstellung der Dilatationshalbgruppe, da die Komposition zweier Transformationen nicht einer Transformation mit der Blocklänge  $2L$  entspricht. Das bedeutet, daß man durch Vergrößerung von  $L$  nicht auf den Trajektorien entlangfährt, die aus den Fixpunkten herauslaufen, vergleiche Abschnitt 1.1. Der Grund ist, daß das hierarchische Gitter für unterschiedliche Werte von  $L$  eine andere Symmetriegruppe besitzt. Dies ist auch der Grund dafür, daß die Universalitätsklassen des hierarchischen Modells von  $L$  abhängen, siehe Abschnitt 2.6.4.

Das erste hierarchische Modell, das von Dyson erfunden wurde, um ein eindimensionales Spinmodell mit einem Phasenübergang zu finden, hat wiederum eine andere Renormierungsgruppentransformation, die aber über eine wichtige Beziehung mit  $\mathcal{R}$  verwandt ist [KW91]. Dysons hierarchisches Modell ist ein Modell einer eindimensionalen Spinkette. Die Spins sind auf einem Gitter  $\Lambda = \mathbb{Z}_{\geq 0}^{\leq N}$  mit  $N = 2^M$  Gitterplätzen definiert, sie sollen Werte in den reellen Zahlen annehmen. Die Wechselwirkung der Spins ist durch die Hamiltonfunktion

$$H_N(\phi) = T_N(\phi) + V_N(\phi) \quad (2.11)$$

gegeben [CE78]. Dabei ist  $V$  ein lokales Potential mit

$$V_N(\phi) = \sum_{i \in \Lambda} \mathcal{V}(\phi_i). \quad (2.12)$$

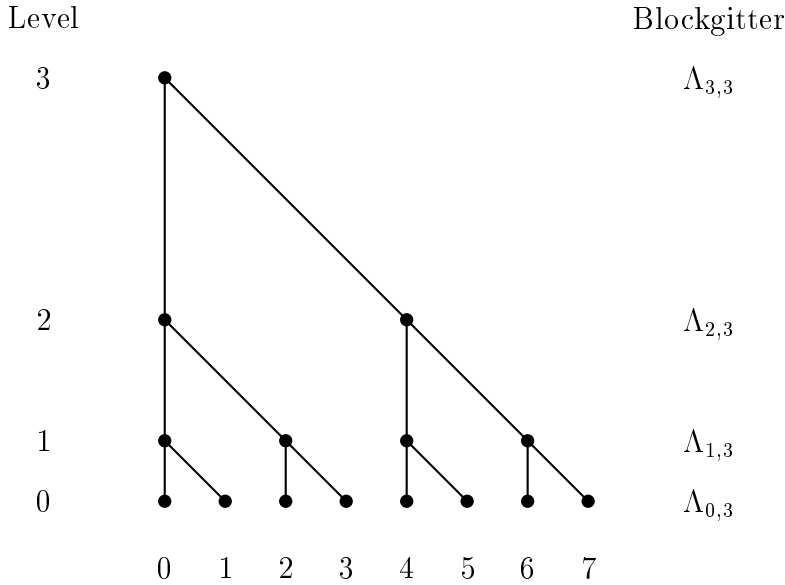
Der kinetische Teil der Wirkung  $T_N$  besitzt eine hierarchische Struktur. Auf einem Level  $k$  werden je  $2^k$  benachbarte Spins zu einem Blockspin  $\sum_{i=0}^{2^k-1} \phi_{j+i}$  zusammengefaßt, der mit sich selbst quadratisch wechselwirkt. Für  $0 \leq k \leq M$  sei

$$\Lambda_{k,M} = 2^k \mathbb{Z}_{\geq 0}^{< \frac{N}{2^k}} \quad (2.13)$$

das Blockgitter auf dem Level  $k$ . Dann ist  $T_N$  durch

$$T_N(\phi) = - \sum_{k=1}^M \frac{c^k}{2^{2k+1}} \sum_{j \in \Lambda_{k,M}} \left( \sum_{i=0}^{2^k-1} \phi_{j+i} \right)^2 \quad (2.14)$$

gegeben. Die Struktur dieser Wechselwirkung ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



$T_N$  ist nicht translationsinvariant. Diese Struktur der hierarchischen Wechselwirkung kann mit Hilfe von  $p$ -adischen Zahlen algebraisiert werden. Unter anderem ist klar, daß man zur Definition von Blöcken Ultrametrien verwenden kann. Anregungen für diese Konzepte, die hier nicht wichtig sein werden, kann man in [BEI92, Chr92] finden. Im Unterschied zum hierarchischen Modell à la Gallavotti kann die Stärke der Wechselwirkung durch den Parameter  $c$  verändert werden, während die Dimension fixiert ist.

Für das statistische System, das durch (2.11) gegeben ist, betrachtet man die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_N$  für Summen von Spins. Indem man  $P_{2N}$  und  $P_N$  in Beziehung setzt, erhält man die hierarchische Renormierungsgruppentransformation  $\mathcal{R}_{\text{Dyson}}$  für das lokale Potential  $\mathcal{V}$  in der Form von Baker [Bak72]:

$$(\mathcal{R}_{\text{Dyson}} \mathcal{V})(\psi) = 2\beta \int d\mu_\gamma(\zeta) \mathcal{V}(\beta\psi + \zeta) \mathcal{V}(\beta\psi - \zeta), \quad (2.15)$$

mit  $\gamma = \frac{4(2\beta^2-1)}{4\beta^2-1}$ , und  $4\beta^2 - 1 = \frac{k_B T}{c}$ . Dabei ist  $T$  die Temperatur. Die Parameter dieser Transformation sind bereits so geschrieben, daß ein Zusammenhang

zwischen  $\mathcal{R}$  und  $\mathcal{R}_{\text{Dyson}}$  hergeleitet werden kann. Mit  $\mathcal{C}_{\text{HT}}$  wird die Faltung mit  $Z_{\text{HT}}$  bezeichnet. Dann gilt [KW91]:

$$\mathcal{C}_{\text{HT}} \circ \mathcal{R}_{\text{Dyson}} = \mathcal{R} \circ \mathcal{C}_{\text{HT}}. \quad (2.16)$$

Die Rechnung ist eine Anwendung von Gaußintegrationen, die hier nicht vorgeführt wird.

## 2.3 Gaußsche Fixpunkte

Fixpunkte der Transformation  $\mathcal{R}$  sind durch die Beziehung  $Z_\star = \mathcal{R}Z_\star$  erklärt. Die entsprechenden Fixpunktpotentiale  $V_\star$  werden durch  $V_\star = -\log Z_\star$  erklärt. Auf die Bedeutung von Fixpunkten wurde bereits hingewiesen. Die Umgebung von Fixpunkten wird im nächsten Abschnitt mit Hilfe der Linearisierung der Renormierungsgruppentransformation betrachtet.

Für die folgenden Überlegungen wählt man zunächst das UV-Bild. Einige Fixpunkte von  $\mathcal{R}$  sind einfach zu finden. Der triviale Fixpunkt  $Z_{\text{UV}} = 1$  entspricht dem Potential  $V_{\text{UV}} = 0$ . Der triviale Fixpunkt wird auch als Ultraviolett-Fixpunkt bezeichnet. Er korrespondiert mit dem freien, masselosen Fixpunkt mit unendlicher Korrelationslänge des vollen Modells. Der Ultraviolett-Fixpunkt wird in Kapitel 3, 4 und 5 als Ausgangspunkt für Störungstheorien dienen.

Der bereits erwähnte Fixpunkt

$$Z_{\text{HT}}(\phi) = L^{\frac{1}{L^d-1}} e^{-\frac{L^2-1}{2\gamma L^d} \phi^2} \quad (2.17)$$

wird als Hochtemperaturfixpunkt, Gaußscher Fixpunkt oder auch als quadratischer Fixpunkt bezeichnet. Er entspricht dem Potential

$$V_{\text{HT}}(\phi) = \frac{L^2-1}{2\gamma L^d} \phi^2 - \frac{1}{L^d-1} \log L. \quad (2.18)$$

Der Hochtemperaturfixpunkt korrespondiert mit der ungeordneten, symmetrischen Hochtemperaturphase mit Korrelationslänge Null des vollen Modells. Wenn man die Gaußschen Fixpunkte der Transformation  $\mathcal{R}$  unvoreingenommen bestimmen möchte, macht man den allgemeinen Ansatz  $Z(\phi) = Ae^{-\frac{1}{2B}\phi^2}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}Z(\psi) &= \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\psi + \zeta)^{L^d} \\ &= \frac{A^{L^d}}{\sqrt{2\pi\gamma}} e^{-\frac{\beta^2}{2L^{-d}B}} \int d\zeta e^{-\frac{\zeta^2}{2}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{L^{-d}B}\right) - \frac{\beta\psi}{L^{-d}B}\zeta} \\ &= A^{L^d} \sqrt{\frac{L^{-d}B}{\gamma + L^{-d}B}} e^{-\frac{\beta^2\psi^2}{2L^{-d}B} \frac{L^{-d}B}{\gamma + L^{-d}B}}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

wobei die charakteristische Funktion des eindimensionalen Gaußschen Maßes mit Kovarianz  $\frac{\gamma L^{-d}B}{\gamma + L^{-d}B}$  benutzt wurde, siehe Anhang (Lemma 4). Ein Fixpunkt bei



endlichen Parameterwerten ergibt sich also, wenn  $B = \beta^{-2}(\gamma + L^{-d}B)$  gilt, und mit  $\beta^{-2} = L^{d-2}$  wird dies zu

$$B = \frac{\gamma L^d}{L^2 - 1}. \quad (2.20)$$

$A$  ist invariant, wenn

$$A^{L^d-1} = \sqrt{\frac{\gamma + L^{-d}B}{L^{-d}B}} = L \quad (2.21)$$

gilt. Durch diesen Ansatz stellt man also fest, daß es außer  $Z_{UV}$  ( $A = 1, B = \infty$ ) und  $Z_{HT}$  keine weiteren endlichen Gaußschen Fixpunkte gibt.

Durch Iteration von Renormierungsgruppentransformationen wird ein Fluß von Potentialen definiert. Für  $d > 4$  fließt jede Theorie in den Hochtemperaturfixpunkt, die Landau-Theorie [LL87, ZJ93, Sta71] ist exakt. Für  $d < 4$  gibt es einen Phasenübergang, und somit neben der Hochtemperaturphase eine gebrochene Phase. Die gebrochene Phase entspricht hier einem unendlich tiefen Potential mit zwei Minima<sup>1</sup>. Zusätzlich gibt es unendlich tiefe Potentiale mit drei Minima, die numerisch gefunden werden können.

Im Hochtemperaturbild, das heißt bezüglich  $\mathcal{R}'$ , haben die oben angegebenen Fixpunkte eine andere Gestalt:

$$\begin{aligned} Z'_{UV}(\phi) &= L^{\frac{1}{L^d-1}} e^{\frac{1-L^{-2}}{2\gamma' L^d} \phi^2} \\ Z'_{HT}(\phi) &= 1, \end{aligned} \quad (2.22)$$

mit  $\gamma' = L^{-2}\gamma$ . Obwohl  $Z_{UV}$  im HT-Bild nicht nach oben beschränkt ist, ist das Integral  $\int d\mu_{\gamma'}$  über  $Z_{UV}$  ausführbar. Es gilt nämlich  $-\frac{1}{2\gamma'} + \frac{1-L^{-2}}{2\gamma' L^d} < 0$  für alle Paare  $(d, L)$  mit  $d > 0$  und  $L > 0$ , wie man durch Kurvendiskussion zeigt.

Außer diesen leicht zu bestimmenden Gaußschen Fixpunkten kann es für  $d < 4$  weitere Fixpunkte geben, die ebenfalls mit dem oben erwähnten Phasenübergang korrespondieren, siehe Abschnitt 2.5.

## 2.4 Linearisierte Renormierungsgruppentransformation

### 2.4.1 Linearisierung

Neben den Fixpunkten kann man auch Trajektorien untersuchen, die die Fixpunkte über unendlich viele Renormierungsgruppentransformationen verbinden. In diesem Zusammenhang spricht man auch von Renormierungsgruppenflüssen. In der Umgebung eines Fixpunktes kann man mit Hilfe der linearisierten Renormierungsgruppentransformation die Richtungen der ein- beziehungsweise auslaufenden Trajektorien bestimmen, sowie die Stabilität des Fixpunktes unter Störungen angeben.

---

<sup>1</sup>Dies erkennt man an Flußbildern: Mit jedem Renormierungsgruppenschritt werden die zwei Minima tiefer und entfernen sich vom Ursprung.

Die linearisierte Renormierungsgruppentransformation an einem Punkt im Definitionsbereich ist als Fréchet-Ableitung der Renormierungsgruppentransformation an diesem Punkt definiert.

Das Konzept der Fréchet-Ableitung wird hier kurz wiederholt [BP70].  $E$  und  $F$  seien normierte lineare Räume über  $\mathbb{R}$ . Mit  $f : A \rightarrow F$  sei eine Abbildung zwischen  $E$  und  $F$  definiert. Dabei sei  $\emptyset \neq A \subset E$  eine offene Teilmenge von  $E$ .  $f$  heißt differenzierbar an einem Punkt  $a \in A$ , wenn es eine lineare Abbildung  $T : E \rightarrow F$  gibt, so daß es für alle  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so daß für alle  $x \in A$  mit  $\|x - a\|_E < \delta$  gilt:

$$\|f(x) - f(a) - T(x - a)\|_F \leq \epsilon \|x - a\|_E. \quad (2.23)$$

Hier fordert man aber nicht die Beschränktheit von  $T$ . Wenn  $T$  mit den obigen Eigenschaften existiert, so ist  $T$  eindeutig. Die lineare Abbildung  $T$ , die (2.23) erfüllt, wird auch als Fréchet-Ableitung von  $f$  am Punkt  $a$  bezeichnet.

In praktischen Rechnungen ist die folgende Definition der Linearisierung  $\mathcal{L}_Z \mathcal{R}$  von  $\mathcal{R}$  am Punkt  $Z$  bequemer. Man betrachtet  $\mathcal{R}$  auf einem Banach- oder Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Für reelle  $z$  und  $G \in \mathcal{H}$  definiert man:

$$(\mathcal{L}_Z \mathcal{R})G = \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_{z=0} \mathcal{R}(Z + zG). \quad (2.24)$$

Für die Transformation  $\mathcal{R}$  erhält man damit die Gestalt

$$(\mathcal{L}_Z \mathcal{R})(G)(\psi) = L^d \int d\mu_\gamma Z(\beta\psi + \zeta)^{L^d-1} G(\beta\psi + \zeta). \quad (2.25)$$

Die Eigenvektoren dieser Transformation geben ein natürliches Koordinatensystem für die Untersuchung von Renormierungsgruppentransformationen in der Umgebung von  $Z$ . Dies ist besonders nützlich, wenn  $Z = Z_\star$  ein Fixpunkt ist.

An einem Fixpunkt  $Z_\star$  ist  $L^d$  stets ein Eigenwert zum Eigenvektor  $Z_\star$ , der trivialer Eigenwert oder Volumeneigenwert genannt wird. Er entspricht einer Störung von  $Z_\star$  in Richtung von  $Z_\star$ , und damit einer Normierung von  $Z_\star$ . Durch die anderen Eigenwerte von  $\mathcal{L}_{Z_\star} \mathcal{R}$  erfährt man, wie schnell sich Störungen eines Fixpunktes in Richtung von Eigenvektoren aufschaukeln beziehungsweise abbauen. Für einen Eigenvektor  $v$  mit Eigenwert  $\lambda$  gilt nämlich näherungsweise  $\mathcal{R}^n(Z_\star + \epsilon v) = Z_\star + \epsilon \lambda^n v$ , solange  $\epsilon \lambda^n v$  hinreichend klein ist. Für  $\lambda < 1$  wird eine kleine Störung in Richtung von  $v$  durch Anwendung von Renormierungsgruppentransformationen verkleinert. Solche Eigenvektoren und Eigenwerte nennt man irrelevant. Eigenvektoren mit Eigenwerten  $\lambda > 1$  nennt man relevant. Kleine Störungen in diese Richtungen wachsen an. Eigenrichtungen mit  $\lambda = 1$  werden als marginal bezeichnet. Marginale Eigenwerte spielen eine wichtige Rolle im Bifurkationsszenario der nichttrivialen Fixpunkte, die sich vom trivialen Fixpunkt in Richtung von marginalen Eigenvektoren abspalten (siehe Abschnitt 2.5). Um die Richtung des Renormierungsgruppenflusses von marginalen Störungen zu bestimmen, muß man Rechnungen zweiter Ordnung machen.

Aus den Eigenwerten der linearisierten Renormierungsgruppentransformation kann man das kritische Verhalten des hierarchischen Modells bestimmen. Der kritische Exponent  $\nu$  hängt mit dem zweitgrößten Eigenwert  $\lambda$  an einem Fixpunkt über

$$\nu = \frac{\log L}{\log \lambda} \quad (2.26)$$

zusammen [Bel91]. Dieser kritische Exponent kann an den Gaußschen Fixpunkten exakt und an den nichttrivialen Fixpunkten zumindest mit sehr großer Genauigkeit bestimmt werden.

### 2.4.2 Linearisierung um $Z_{UV}$

Am Ultraviolett-Fixpunkt  $Z_{UV}(\phi) = 1$  hat (2.25) die Gestalt

$$(\mathcal{L}_{Z_{UV}}\mathcal{R})(G)(\psi) = L^d \int d\mu_\gamma G(\beta\psi + \zeta). \quad (2.27)$$

Die Eigenvektoren dieser Transformation sind durch die normalgeordneten Potenzen

$$v_n(\psi) =: \psi^n :_{\gamma'} = \left(\frac{\gamma'}{2}\right)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\psi}{\sqrt{2\gamma'}}\right) = \frac{\partial^n}{\partial j^n} \Big|_{j=0} \exp(j\psi - \frac{j^2\gamma'}{2}) \quad (2.28)$$

gegeben. Dabei ist die normalordnende Kovarianz  $\gamma' = \frac{\gamma}{1-\beta^2}$ , mit  $H_n$  werden die  $n$ -ten Hermite Polynome bezeichnet. Einen Beweis findet man im Anhang (Korollar 3). Wenn man zum Beispiel den Hilbertraum  $L_2(\mathbb{R}, d\mu_\gamma)$  zugrunde legt, was nur heuristisch möglich ist (siehe Abschnitt 2.5), so weiß man wegen der Vollständigkeit der Hermite-Polynome auf diesem Raum bereits, daß es keine weiteren Eigenvektoren geben kann. Die zugehörigen Eigenwerte sind  $\lambda_n = L^d \beta^n = L^{d+n(1-\frac{d}{2})}$ . Der Eigenwert von  $:\psi^4:_{\gamma'}$  ist  $\lambda_4 = L^{4-d}$ . Dieser Eigenvektor ist damit für  $d < 4$  relevant, für  $d = 4$  marginal und für  $d > 4$  irrelevant. Für  $n > 2$  wachsen die Eigenwerte mit abnehmender Dimension. Der Eigenwert von  $v_2$  ist unabhängig von  $d$  gleich  $L^2$ . Massenterme am Ultraviolett-Fixpunkt sind daher stets relevant. Wenn man den trivialen Fixpunkt mit einem Massenterm stört, schaukelt sich diese Störung sehr schnell auf und das System fließt in den Hochtemperaturfixpunkt. Für  $d \rightarrow 2$  nimmt die Zahl der relevanten Richtungen am Ultraviolett-Fixpunkt zu. In zwei Dimensionen sind alle (unendlich vielen) Richtungen relevant. Daher ist der Limes  $d \rightarrow 2$  noch weitgehend unerforscht.

### 2.4.3 Linearisierung um $Z_{HT}$

Um das Spektrum am quadratischen Fixpunkt  $Z_\star = Z_{HT}$  zu berechnen, linearisiert man  $\mathcal{R}$  am Punkt  $Z = Z_{HT}$ . Dies geht am einfachsten, wenn man  $\mathcal{R}$  mit Hilfe von (2.6) durch  $\mathcal{R}'$  ausdrückt. Dann gilt

$$\mathcal{R}(Z_{HT} + zF) = Z_{HT} \cdot (\mathbf{1} + z(\mathcal{L}_1\mathcal{R}')(F/Z_{HT}) + O(z^2)). \quad (2.29)$$

Daraus folgt durch Ableitung nach  $z$  an der Stelle  $z = 0$ :

$$\mathcal{L}_{Z_{\text{HT}}} \mathcal{R}(F) = Z_{\text{HT}} \cdot (\mathcal{L}_1 \mathcal{R}')(F/Z_{\text{HT}}). \quad (2.30)$$

Die Linearisierung  $\mathcal{L}_1 \mathcal{R}'$  von  $\mathcal{R}'$  am Punkt  $Z(\phi) = 1$  gleicht der Linearisierung von  $\mathcal{R}$  am trivialen Fixpunkt, wenn man  $\beta$  und  $\gamma$  durch  $\beta' = L^{-2}\beta$  und  $\gamma' = L^{-2}\gamma$  ersetzt. Die Eigenvektoren  $v_n$  von  $\mathcal{L}_{Z_{\text{HT}}} \mathcal{R}$  sind demnach die Funktionen

$$v_n(\phi) = Z_{\text{HT}}(\phi) : \phi^n :_{\hat{\gamma}}, \quad (2.31)$$

mit  $\hat{\gamma} = \frac{\gamma'}{1-\beta'^2}$ . Die zugehörigen Eigenwerte  $\lambda_n$  sind:

$$\lambda_n = L^d \beta'^n = L^{d-n(1+\frac{d}{2})}. \quad (2.32)$$

Die Eigenwerte am quadratischen Fixpunkt sind damit für  $n > 1$  irrelevant. Wenn man sich auf einen Raum mit geraden Funktionen beschränkt, den die Renormierungsgruppentransformation auf sich abbildet, ist der einzige relevante Eigenwert der Volumeneigenwert  $L^d$ . Dies wird in späteren Kapiteln von Bedeutung sein. Für das volle Modell gibt es Rechnungen von Halpern und Huang, die nichtpolynomiale relevante Eigenrichtungen am Hochtemperaturfixpunkt belegen [HH95a, HH95b], vergleiche aber auch [Mor96]. Für das hierarchische Modell hat man ähnliche Richtungen noch nicht gefunden.

## 2.5 Nichtgaußsche Fixpunkte

Wie oben dargestellt wurde, besitzt  $\mathcal{R}$  unabhängig von der Dimension  $d$  mindestens zwei verschiedene Fixpunkte. Durch numerische Untersuchungen kann man zeigen, daß in Dimensionen  $2 < d < 4$  weitere Fixpunkte von  $\mathcal{R}$  existieren, die keine Gaußsche Gestalt besitzen können. Diese Fixpunkte werden als nichttriviale Fixpunkte oder als Infrarot-Fixpunkte bezeichnet.

### 2.5.1 Existenz

Mit einem leider heuristischen Beweis, der aber vermutlich zu einer rigorosen Version ausgebaut werden kann, kann man sich die Existenz von nichttrivialen Fixpunkten der Transformation  $\mathcal{R}$  klarmachen. Der Beweis liefert ferner ein Bild für das sich ergebende Bifurkationsszenario um den trivialen Fixpunkt in Abhängigkeit von der Dimension  $d$ . Einen ähnlichen Existenzbeweis für Dysons hierarchisches Modell kann man in [CE78] finden.

Um die Existenz von nichttrivialen Renormierungsgruppenfixpunkten zu beweisen, betrachtet man  $\mathcal{R}$  als einen Integraloperator auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , der auf diesem Hilbertraum stetig differenzierbar sein soll. Die Konstruktion eines solchen Hilbertraumes ist bisher nicht gelungen. Es liegt nahe,  $\mathcal{R}$  auf  $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}, d\mu_\gamma)$  zu definieren. Die Funktion  $Z(\phi) = e^{(\frac{1}{4\gamma} - \epsilon)\phi^2}$  für kleine  $\epsilon$  zeigt aber für  $L^d > 2$ , daß  $\mathcal{R}$  nicht auf allen Elementen von  $L_2(\mathbb{R}, d\mu_\gamma)$  definiert ist. Daher betrachtet man eine

geeignete Teilmenge  $\mathcal{H}$  von  $L_2(\mathbb{R}, d\mu_\gamma)$ , die einen Hilbertraum bildet. Man kann auch umgekehrt vorgehen, und einen geeigneten Abschluß der normalgeordneten Potenzen  $\phi^n :_{\gamma'}$  als Hilbertraum definieren. Beide Wege haben bisher noch nicht zum Ziel geführt. Da der Kern des unten stehenden Beweises aber der Satz über implizite Funktionen ist, der auch auf Banachräumen gilt, kann man vermutlich auf die Konstruktion eines Hilbertraumes ganz verzichten. Stattdessen muß man dann dem Beweis einige technische Details hinzufügen. Banachräume werden auch in der Konstruktion von Koch und Wittwer [KW91] als Grundlage benutzt. Ein Vorschlag für einen Banachraum, auf dem  $\mathcal{R}$  operiert, ist der Raum der mit der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  beschränkten Funktionen  $L_\infty(\mathbb{R}, d\mu_\gamma)$ , denn es gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}Z\|_\infty &= \sup_{\psi \in \mathbb{R}} \left| \int d\mu_\gamma Z(\beta\psi + \zeta)^{L^d} \right| \\ &\leq \int d\mu_\gamma \sup_{\psi \in \mathbb{R}} |Z(\beta\psi + \zeta)^{L^d}| \\ &= \|Z\|_\infty^{L^d}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Die Potentiale, die zu diesen Boltzmannfunktionen gehören, sind nach unten beschränkt, was physikalisch sinnvoll ist. Allerdings gibt es keinen Grund, warum ein Potential nicht linear nach unten unbeschränkt sein sollte.  $L_\infty$  ist eine Teilmenge von  $L_2(\mathbb{R}, d\mu_\gamma)$ ; um mit  $L_\infty$  arbeiten zu können, kann man noch Polynome hinzufügen. In  $L_\infty$  liegt der Ultraviolett-Fixpunkt am Rand.

Wenn man sich im HT-Bild befindet, kann man übrigens einen Hilbertraum angeben, auf dem  $\mathcal{R}'$  ein Integraloperator ist. Dieser hat aber für die folgenden Überlegungen keinen Nutzen, da sich die nichttrivialen Fixpunkte vom Ultraviolett-Fixpunkt abspalten, der im HT-Bild gleich  $L^{\frac{1}{L^d-1}} e^{\frac{L^2-1}{2\gamma L^d} \phi^2}$  ist.

Man betrachtet also die Renormierungsgruppentransformation  $\mathcal{R}$ .  $\mathcal{R}$  ist abhängig von der Dimension  $d$ , die Werte aus einem Intervall  $I$  annehmen kann (zum Beispiel  $I = ]2, \infty[$ ), und wird auf Funktionen  $Z$  in einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  angewendet, der als Teilmenge von  $L_2(\mathbb{R}, d\mu_{\gamma'})$  betrachtet wird, und der nur gerade Funktionen enthalten soll. Für den folgenden Existenzbeweis ist  $\mathcal{R}$  also als eine Abbildung  $\mathcal{R} : I \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  aufzufassen, die in beiden Argumenten in einer Umgebung des trivialen Fixpunktes  $Z_{UV} = 1$  stetig differenzierbar ist. Mit  $D_1$  beziehungsweise  $D_2$  wird die Fréchet-Ableitung nach dem ersten beziehungsweise dem zweiten Argument bezeichnet.

Wie  $\mathcal{R}$  sei nun eine Abbildung  $\mathcal{F} : I \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  gegeben. Man fordert die Stetigkeit von  $\mathcal{F}$ , von  $D_2\mathcal{F}$  und von  $D_1D_2\mathcal{F}$ . Eine feste Dimension  $d_0$  sei in  $I$  enthalten. Dann gilt der folgende Satz:

**Satz 1** *Für eine Funktion  $Z_0 \in \mathcal{H}$  gelte:*

- 1)  $\mathcal{F}(d, Z_0) = 0$  für alle  $d \in I$ .
- 2) Null ist ein nichtentarteter, isolierter Eigenwert von  $D_2\mathcal{F}(d_0, Z_0)$  mit Eigenvektor  $v$ .

3)  $D_1 D_2 \mathcal{F}(d_0, Z_0)v$  ist nicht orthogonal zu  $v$ .

Dann existieren eine Umgebung  $U \subset \mathbb{R}$  von Null und stetige Funktionen  $r : U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $R : U \rightarrow \mathcal{H}^\perp$  ( $\mathcal{H}^\perp$  ist das orthogonale Komplement von  $v$ ), mit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(d_0 + r(\alpha), Z_0 + \alpha v + \alpha R(\alpha)) &= 0, \\ r(0) &= 0, R(0) = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

für  $\alpha \in U$ .

**Bemerkung 1** Dies bedeutet, daß man unter den obigen Voraussetzungen zu einer Lösung  $(d_0, Z_0)$  der Gleichung  $\mathcal{F}(d, Z) = 0$  weitere Lösungen finden kann, die sich von  $(d_0, Z_0)$  in Richtung des marginalen Eigenvektors  $v$  abspalten. Nach dem Beweis wird Satz 1 auf die Abbildung  $\mathcal{F} = \mathcal{R} - \mathbb{1}$  angewendet.

Beweis: Das Ziel ist es, den Satz über implizite Funktionen [BP70, Wou79] anzuwenden. Man definiert eine Funktion  $G$ :

$$G(\alpha, r, R) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \mathcal{F}(d_0 + r, Z_0 + \alpha v + \alpha R), & \text{für } \alpha \neq 0 \\ D_2 \mathcal{F}(d_0 + r, Z_0)(v + R), & \text{für } \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

$r \in \mathbb{R}$  und  $R \in \mathcal{H}^\perp$  sollen hier nicht von  $\alpha$  abhängen,  $r \in \mathbb{R}$  soll so klein sein, daß  $d_0 + r \in I$  ist.  $G$  ist stetig in  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} & D_2 \mathcal{F}(d_0 + r, Z_0)(v + R) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \{ \mathcal{F}(d_0 + r, Z_0 + \alpha(v + R)) - \mathcal{F}(d_0 + r, Z_0) \} \\ &\stackrel{1)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \mathcal{F}(d_0 + r, Z_0 + \alpha(v + R)) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} G(\alpha, r, R). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Nun wird die Abbildung  $\mathcal{G} : (r, R) \mapsto G(0, r, R)$  betrachtet. Insbesondere ist man an der Tangentenabbildung  $\mathcal{L}$  von  $\mathcal{G}$  in  $(0, 0)$  interessiert, die durch die Fréchet-Ableitung definiert wird. Durch die folgende Rechnung erhält man:

$$\mathcal{L} : (\delta_r, \delta_R) \mapsto \delta_r D_1 D_2 \mathcal{F}(d_0, Z_0)v + D_2 \mathcal{F}(d_0, Z_0)\delta_R. \quad (2.37)$$

Zunächst gilt nämlich:

$$\begin{aligned} & G(0, r + \delta_r, R + \delta_R) \\ &= D_2 \mathcal{F}(d_0 + r + \delta_r, Z_0)(v + R + \delta_R) \\ &= D_2 \mathcal{F}(d_0 + r, Z_0)(v + R + \delta_R) + D_1 D_2 \mathcal{F}(d_0 + r, Z_0)(v + R + \delta_R)\delta_r \\ &\quad + O(\delta_r^2). \end{aligned} \quad (2.38)$$

An der Stelle  $(r, R) = (0, 0)$  folgt also:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\delta_r, \delta_R) \\ &= \delta_r D_1 D_2 \mathcal{F}(d_0, Z_0)v + D_2 \mathcal{F}(d_0, Z_0)(v + \delta_R) \\ &= D_1 D_2 \mathcal{F}(d_0, Z_0)v + D_2 \mathcal{F}(d_0, Z_0)(v)\delta_R, \end{aligned} \quad (2.39)$$

da

$$\begin{aligned}
& D_2\mathcal{F}(d_0, Z_0)(v + \delta_R) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \mathcal{F}(d_0, Z_0 + \alpha(v + \delta_R)) \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \{ \mathcal{F}(d_0, Z_0 + \alpha v) + D_2\mathcal{F}(d_0, Z_0 + \alpha v) \alpha \delta_R \} \\
&= D_2\mathcal{F}(d_0, Z_0)v + D_2\mathcal{F}(d_0, Z_0)\delta_R \\
&\stackrel{2)}{=} D_2\mathcal{F}(d_0, Z_0)\delta_R
\end{aligned} \tag{2.40}$$

ist. Nun zeigt man, daß die Abbildung  $\mathcal{L}$  ein Isomorphismus ist, das heißt, daß  $\text{Kern}(\mathcal{L}) = \{(0, 0)\}$  gilt. Aus  $\mathcal{L}(\delta_r, \delta_R) = 0$  folgt

$$\delta_r D_1 D_2 \mathcal{F}(d_0, Z_0)v = -D_2 \mathcal{F}(d_0, Z_0)\delta_R, \tag{2.41}$$

das heißt  $(\delta_r, \delta_R) = (0, 0)$ , oder wegen 2) gilt  $D_1 D_2 \mathcal{F}(d_0, Z_0)v \in \mathcal{H}^\perp$ , was wegen 3) zum Widerspruch führt. Damit ist  $\mathcal{L}$  invertierbar.

Aus dem Satz über implizite Funktionen auf Hilberträumen [BP70, Wou79] folgt nun: Es gibt eine Umgebung  $U$  von Null in  $\mathbb{R}$  und  $V' \subset \mathbb{R}, V'' \subset \mathcal{H}^\perp$ , sowie stetige Abbildungen  $r : U \rightarrow V'$  und  $R : U \rightarrow V''$  mit  $G(\alpha, r(\alpha), R(\alpha)) = 0$ , für  $\alpha \in U$ .  $\square$

Nun soll Satz 1 auf die Transformation  $\mathcal{F} = \mathcal{R} - \mathbf{1}$  angewendet werden. Dann hat man die Transformationsgleichung

$$\mathcal{F}(d, Z)(\psi) = \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\psi + \zeta)^{L^d} - Z(\psi). \tag{2.42}$$

Man definiert  $Z_0(\phi) = 1$ , das heißt  $Z_0 = \mathbf{1}$ . Dann gilt:

1)  $\mathcal{F}(d, \mathbf{1}) = 0$ , für alle Dimensionen  $d$ .

2) Die Eigenvektoren  $v_{2n}$  von

$$D_2 \mathcal{F}(d_0, \mathbf{1})(\delta Z)(\psi) = L^{d_0} \int d\mu_\gamma(\zeta) \delta Z(\beta\psi + \zeta) - \delta Z(\psi) \tag{2.43}$$

sind normalgeordnete Potenzen  $v_{2n}(\psi) =: \psi^{2n} :_{\gamma'}$ , mit  $\gamma' = \frac{\gamma}{1-\beta^2}$ . Die zugehörigen Eigenwerte lauten  $\lambda_{2n} = L^{d_0} \beta^{2n} - 1$ , vergleiche Abschnitt 2.4.2. Wegen  $\beta = L^{1-\frac{d_0}{2}}$  und  $L > 1$  ist die Forderung  $\lambda_{2n} = 0$  äquivalent zu

$$d_0(n) = \frac{2n}{n-1}. \tag{2.44}$$

Wenn man also für ein  $n \in \mathbb{N}$   $d_0 = d_0(n)$  wählt, so ist Null ein nichtentarteter isolierter Eigenwert von  $D_2 \mathcal{F}(d_0, \mathbf{1})$  mit Eigenvektor  $:\psi^{2n} :_{\gamma'}$ .

3) Es gilt:

$$\begin{aligned}
& D_1 D_2 \mathcal{F}(d_0, \mathbf{1})(\delta Z)(\psi) \\
&= L^{d_0} \log L \int d\mu_\gamma(\zeta) \left\{ \delta Z(\beta\psi + \zeta) - \frac{\beta\psi}{2} \frac{\partial \delta Z}{\partial \psi}(\beta\psi + \zeta) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Die Ableitung von  $\delta Z = : \psi^n :_{\gamma'}$  ist gleich  $\frac{\partial \delta Z}{\partial \psi}(\psi) = n : \psi^{n-1} :_{\gamma'}$ , siehe Lemma 11 im Anhang. Die normalgeordneten Monome sind Eigenvektoren der linearisierten Transformation, daher folgt:

$$D_1 D_2 \mathcal{F}(d_0, \mathbf{1})(\delta Z)(\psi) = L^{d_0} \log L \left\{ \beta^n : \psi^n :_{\gamma'} - \frac{\beta^n}{2} n \psi : \psi^{n-1} :_{\gamma'} \right\}$$

Fusionsformel,  
 $\stackrel{\text{Lemma 12}}{=} L^{d_0} \log L \beta^n \left\{ \left(1 - \frac{n}{2}\right) : \psi^n :_{\gamma'} - \frac{n(n-1)}{2} : \psi^{n-2} :_{\gamma'} \right\}. \quad (2.46)$

Nun sei  $n = 2k$  gerade. Der bezüglich des Skalarproduktes in  $L_2(\mathbb{R}, d\mu_{\gamma'})$  zu  $: \psi^{2k} :_{\gamma'}$  nicht orthogonale Anteil von (2.45) ist dann gleich

$$(1 - k) \beta^{2k} L^{d_0} \log L : \psi^{2k} :_{\gamma'} \quad (2.47)$$

Für alle  $k > 1$  ist dies ungleich Null. Für  $n = 1$  wäre  $d_0(k) = \infty$ , die Störung zum trivialen Fixpunkt wäre quadratisch. Im folgenden werden also nur Werte  $k > 1$  betrachtet.

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt; die Stetigkeit von  $\mathcal{F}$  und der Ableitungen kann ohne Angabe des Definitionsbereiches nicht bewiesen werden. Man folgert also, daß in den Dimensionen  $d_n := \frac{2n}{n-1}$  von dem trivialen Fixpunkt nicht-triviale Fixpunkte in Richtung des marginalen Eigenvektors in der Dimension  $d_n$  abspalten.

Es wird allgemein angenommen, daß die nichttrivialen Fixpunkte nur in Dimensionen  $d < d_n$  existieren, die obige Beweisskizze liefert aber auch Fixpunkte für  $d > d_n$ . Da man mit  $Z_{UV}$  einen Punkt am Rande des Hilbertraumes betrachtet, fallen die Fixpunkte für  $d > d_n$  aber weg. Mir ist dazu kein rigoroser Beweis bekannt. Es wäre interessant eine Version des Satzes über implizite Funktionen zu zeigen, der dieser Situation angemessen ist. Gewöhnlich schließt man die Existenz von nichttrivialen  $n$ -Well-Fixpunkten (siehe unten) in Dimensionen  $d \geq d_n$  mit dem Argument aus, daß durch  $\epsilon$ -Entwicklung gezeigt wird, daß diese instabil wären. Es ist jedoch unklar, ob solche Fixpunkte als analytische Fortsetzungen zu negativen Kopplungen existieren können. Hier wird aber der „Mainstream-Meinung“ gefolgt, die aussagt, daß die Dimensionen  $d_n$  Bifurkationsdimensionen sind, so daß für  $d < d_n$  Infrarot-Fixpunkte existieren, für  $d \geq d_n$  jedoch nicht.

Die Bifurkationsdimensionen  $d_n$  sind gerade die Dimensionen, in denen marginale Eigenvektoren existieren. Dies kann man verstehen, wenn man sich vorstellt, daß zwei Fixpunkte mit zunehmender Dimension zu einem Fixpunkt zusammenfließen. Wenn es zwischen den beiden Fixpunkten eine Renormierungsgruppentrajektorie gibt, so ist deren Richtung an einem Fixpunkt relevant und am anderen Fixpunkt irrelevant. Wenn die Fixpunkte zusammenfließen, müssen die Richtungen der Trajektorie an den Fixpunkten marginal werden. Die Eigenwerte  $\lambda_n$  am Ultraviolett-Fixpunkt fallen für  $n > 2$  mit zunehmender Dimension ab, daher ist die Trajektorie, die den trivialen mit dem nichttrivialen Fixpunkt verbindet immer vom trivialen zum nichttrivialen Fixpunkt gerichtet.

Da die Fixpunkte sich in Richtung des marginalen Eigenvektors vom Ultraviolett-Fixpunkt abspalten, werden sie nach diesen Eigenvektoren benannt. Die Funktion



$v_n(\phi)$  besitzt  $n$  Minima, also wird der entsprechende Infrarot-Fixpunkt als  $n$ -Well-Fixpunkt bezeichnet. Der Infrarot-Fixpunkt mit  $n = 2$  wird speziell auch Double-Well-Fixpunkt genannt. Man erhält damit in Dimensionen  $2 < d < 4$  ein reiches Bifurkationsszenario; bei  $d = 2$  gibt es eine Häufung von nichttrivialen Fixpunkten. Dies ist numerisch und analytisch ein großes Problem. Für  $d > 4$  gibt es keine nichttrivialen Fixpunkte. Kritische Exponenten nichttrivialer Fixpunkte werden hier mit verschiedenen Methoden in Abschnitt 2.6.2 und Abschnitt 3.3.3 berechnet.

### 2.5.2 Großfeldverhalten von Infrarot-Fixpunkten

Das Großfeldverhalten von nichttrivialen Fixpunkten wurde von Koch und Wittwer untersucht [KW91]. Die folgende heuristische und etwas vereinfachte Argumentation kommt zu den gleichen Ergebnissen.

Die Betrachtung geschieht am einfachsten anhand der Transformation  $\mathcal{T}'$ , die durch

$$Z'(\psi) = \left\{ \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta'\psi + \zeta) \right\}^{L^d} \quad (2.48)$$

gegeben ist. Wie gewöhnlich ist  $\beta' = L^{-1-\frac{d}{2}}$ . Der Überlegung liegt die Idee zugrunde, daß in einem Fixpunkt  $Z_\star$  für sehr große Felder  $\psi$   $Z_\star(\psi) \approx Z_\star(\beta'\psi)^{L^d}$  gelten soll. Wenn

$$\left| \int d\mu_\gamma(\zeta) \left\{ \frac{Z_\star(\beta'\psi + \zeta)}{Z_\star(\beta'\psi)} - 1 \right\} \right| \ll 1 \quad (2.49)$$

ist, so besitzt  $Z_\star$  das gleiche asymptotische Verhalten wie  $Z_\star(\beta'\cdot)^{L^d}$ . Der Ansatz  $Z_\star(\psi) \sim e^{c\psi^x}$  ergibt dann  $1 = L^d \beta'^x$ , das heißt

$$x = \frac{2d}{d+2}. \quad (2.50)$$

In drei Dimensionen hat das Fixpunktpotential von  $\mathcal{T}$  also ein asymptotisches Verhalten wie  $\exp(c\psi^{\frac{6}{5}})$ . Die entsprechenden Fixpunkte von  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{R}$  haben aber ein quadratisches asymptotisches Verhalten, das durch die Multiplikation mit  $Z_{\text{HT}}$  entsteht. Es ist zu beachten, daß die gleiche Argumentation für die Transformation  $\mathcal{T}$  dieses asymptotische Verhalten nicht wiedergibt, sondern zu dem falschen Resultat  $x = \frac{2d}{d-2}$  führt.

In [KW91] wird das Verhalten, das durch Gleichung (2.50) beschrieben wird, vermutet und durch numerische Untersuchungen unterstützt. Rigorose Aussagen zum Großfeldverhalten von hierarchischen Modellen kann man bisher noch nicht machen.

## 2.6 Numerische Berechnung von Renormierungsgruppenfixpunkten

Renormierungsgruppentransformationen können numerisch relativ einfach iteriert werden. Dabei kann man zum Beispiel Standardintegrationsverfahren benutzen.

Die Qualität einer Berechnungsmethode wird entscheidend durch die Wahl der Parametrisierung der Funktion  $Z$  beeinflusst. Falls man nicht zu viele Parameter bei der Integration benötigt, kann man numerische Fixpunktalgorithmen mit den Iterationsprogrammen verknüpfen, und so Fixpunkte direkt bestimmen. Andernfalls kann man nichttriviale Fixpunkte durch präzise Wahl der Anfangsfunktionen erreichen, was man mit Hilfe der Intervallhalbierungsmethode macht.

### 2.6.1 Algebraische Berechnung von Fixpunkten

In [PPW94] wird eine algebraische Methode vorgestellt, die es erlaubt, Renormierungsgruppenfixpunkte von  $\mathcal{R}$  direkt zu berechnen. Dabei verwendet man die Transformation im HT-Bild, bei der der Hochtemperaturfixpunkt abgespalten ist. Dadurch wird das quadratische Großfeldverhalten eines Fixpunktes automatisch implementiert. Dann entwickelt man  $Z(\phi)$  in eine Taylorreihe um Null. Diese Entwicklung hat gegenüber einer ähnlichen Entwicklung für die Boltzmann-Funktion im UV-Bild den Vorteil, daß die Koeffizienten nicht im Vorzeichen alternieren.

Die zugrunde liegende Transformation ist also  $\mathcal{R}'$ , gegeben durch

$$Z'(\psi) = \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta'\psi + \zeta)^{L^d}, \quad (2.51)$$

mit  $\beta' = L^{-1-\frac{d}{2}}$ .  $Z$  wird durch  $Z(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\gamma^n N_n} \phi^{2n}$  parametrisiert. Dabei ist  $N_n$  eine Normierung, die nach praktischen Gesichtspunkten gewählt wird. Dies soll weiter unten geschehen. Außerdem hat man durch  $\gamma^n$  geteilt, damit die Relationen für die Koeffizienten unabhängig von  $\gamma$  werden. Die Koeffizienten  $a_l$  werden auch als Kopplungen bezeichnet. Man beschränkt sich zunächst auf gerade Funktionen. Nun wählt man  $L^d = 2$ . Dies wird weiter unten verallgemeinert; die verallgemeinerte Methode wird dann zur Demonstration der Abhängigkeit der kritischen Indizes von  $L$  benutzt, siehe Abschnitt 2.6.2. Wenn  $L^d = 2$  ist, gilt  $\beta' = 2^{-\frac{d+2}{2d}}$ . Durch Quadrieren von  $Z(\phi)$  und Einsetzen von  $\beta'\psi + \zeta$  folgt:

$$Z(\beta'\psi + \zeta) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a_m a_n}{\gamma^{m+n} N_m N_n} \sum_{l=0}^{2m+2n} \binom{2m+2n}{l} (\beta'\psi)^l \zeta^{2m+2n-l}. \quad (2.52)$$

Mit den Integralen  $\int d\mu_\gamma(\zeta) \zeta^{2k} = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^k \frac{(2k)!}{k!}$ , siehe Lemma 8 im Anhang, ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} Z'(\psi) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a_m a_n}{N_m N_n} \sum_{l=0}^{m+n} \frac{(2m+2n)! 2^{l-m-n}}{(2l)!(m+n-l)! \gamma^l} (\beta'\psi)^{2l} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a'_l}{\gamma^l N_l} \psi^{2l}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

mit

$$a'_l = \beta'^{2l} \sum_{m,n=0}^{\infty} C_l^{m,n} a_m a_n. \quad (2.54)$$

Die Koeffizienten  $C_l^{m,n}$  sind wie folgt definiert<sup>2</sup>:

$$C_l^{m,n} = \begin{cases} \frac{2^{l-m-n}(2m+2n)!N_l}{(2l)!(m+n-l)!N_mN_n}, & \text{falls } 0 \leq l \leq m+n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (2.55)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.54) kann man Renormierungsgruppenschritte iterieren. Diese Relationen sind unabhängig von  $\gamma$ . In einem Fixpunkt erhält man das folgende quadratische Gleichungssystem mit unendlich vielen Gleichungen:

$$a_l - \beta^{l2l} \sum_{m,n \geq 0} C_l^{m,n} a_m a_n = 0. \quad (2.56)$$

Zur numerischen Lösung dieser Gleichung muß man das Gleichungssystem trunkieren, das heißt alle Koeffizienten  $a_l$  für  $l > l_{\max}$  gleich Null setzen. Dadurch wird aus (2.56) ein endliches System, das man mit numerischen Fixpunktalgorithmen lösen kann. In meinen Programmen habe ich sowohl die Routine C05NBF [Num91] als auch die Routine mnewt [FPTV92] verwendet. Diese Algorithmen, die auf der Newton-Raphson-Methode beruhen, verlangen eine Approximation des gesuchten Fixpunktes als Eingabewert. Wählt man schlechte Startwerte, so finden die Routinen entweder den trivialen Fixpunkt mit Kopplungen  $a_l = \delta_{l,0}$  oder überhaupt keinen Fixpunkt. Geeignete Anfangswerte kann man zum Beispiel durch  $\epsilon$ -Entwicklung (siehe Kapitel 3) oder durch vernünftiges Raten finden. Die Normierung  $N_n$  wird so gewählt, daß der Fixpunktalgorithmus gut funktioniert. In [PPW94] wird die Normierung gleich  $N_n = 2^{2n} \sqrt{(2n)!}$  gesetzt. Diese Wahl hat sich auch in meinen Programmen als gut geeignet herausgestellt. Nach der Theorie in Abschnitt 2.5 existieren nichttriviale  $n$ -Well-Fixpunkte von  $\mathcal{R}$ , und damit von  $\mathcal{R}'$ , in Dimensionen  $d < d_n = \frac{2n}{n-1}$ . Die Bifurkationsdimension für 2-Well-Fixpunkte ist  $d_2 = 4$ , ferner gilt  $d_3 = 3$  und  $d_4 = \frac{8}{3}$ . In Tabelle 2.1 sind die Fixpunkt koppungen des nichttrivialen Fixpunktes in drei Dimensionen für  $l_{\max} = 10$  sowie die Abweichung  $r_l$  vom Fixpunkt nach einer Iteration dargestellt. Im allgemeinen ist der Trunkationsparameter  $l_{\max} = 10$  zu klein für die Suche nach Fixpunkten. Für die meisten 2-Well-Fixpunkte wurde  $l_{\max} = 20$  verwendet, 3- und 4-Well-Fixpunkte wurden mit  $l_{\max} = 40$  berechnet. Diese Werte haben sich nach systematischer Untersuchung von Trunkationseffekten als geeignet herausgestellt. Potentiale definiert man wie gewöhnlich durch  $V(\phi) = -\log Z(\phi)$ . In Abbildung 2.1 sind die Potentiale der 2-Well-Fixpunkte für  $2.1 < d < 3.8$  in Schritten von 0.1 dargestellt. Dabei wurde  $\gamma = \frac{1}{2}$  gesetzt. Das tiefste Potential entspricht  $d = 2.1$ . Mit zunehmender Dimension werden die Potentiale immer flacher, und bei  $d = 4$  verschwindet der Double-Well-Fixpunkt. An diesem Punkt sollten alle Eigenschaften des nichttrivialen Fixpunktes in die des trivialen Fixpunktes übergehen. Wegen der Symmetrie dieser Potentiale sind nur Werte mit  $\phi \geq 0$  abgebildet. Damit man die Struktur der flachen Potentiale besser erkennt, ist in dieser und in den folgenden Abbildungen die Linie  $V(\phi) = 0$  gestrichelt dargestellt. 3-Well-Fixpunktpotentiale werden in

---

<sup>2</sup>Die Koeffizienten sind  $C_l^{m,n}$  sind Strukturkoeffizienten einer nichtassoziativen Algebra, deren Multiplikation durch (2.54) gegeben ist, siehe [PPW94, Por95].

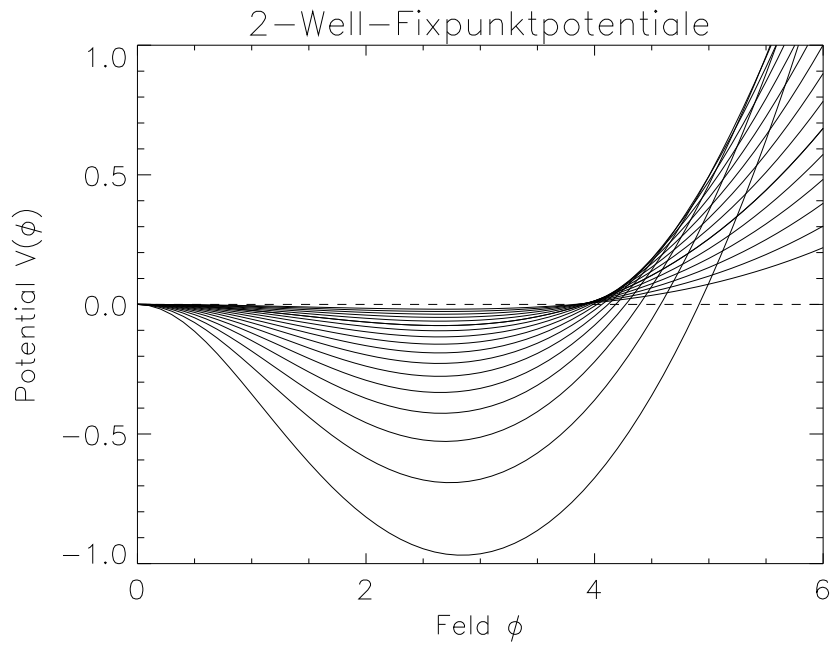


Abbildung 2.1: *Double-Well-Fixpunktpotentiale in Dimensionen  $d$  zwischen 3.8 und 2.1. Das tiefste Potential entspricht dabei  $d = 2.1$ .*

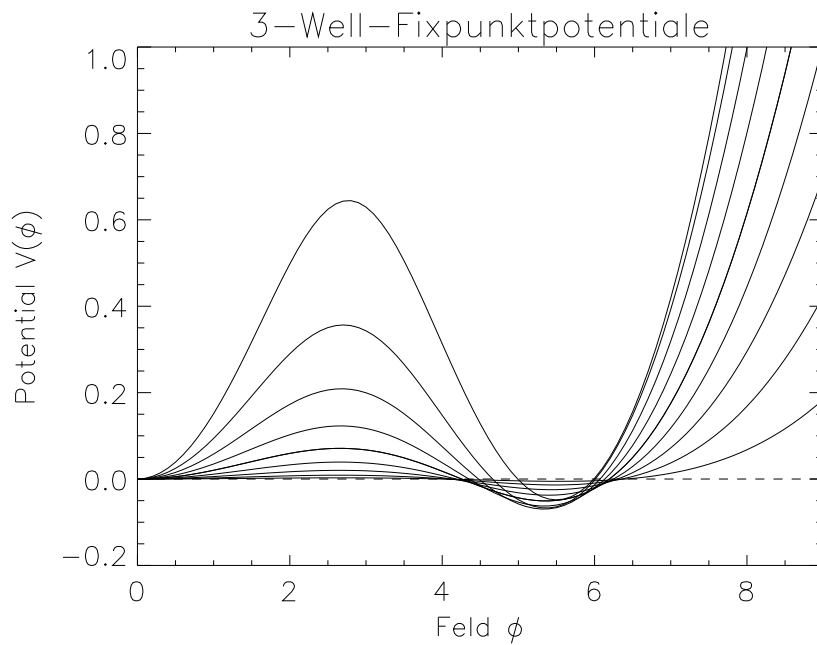


Abbildung 2.2: *3-Well-Fixpunktpotentiale in Dimensionen  $d$  zwischen 2.9 und 2.1. Das flachste Potential entspricht dabei  $d = 2.9$ .*

$l$	$a_l$	$r_l$
0	$7.528067083975 \cdot 10^{-1}$	$0.000000000000 \cdot 10^0$
1	$4.812727115254 \cdot 10^{-1}$	$0.000000000000 \cdot 10^0$
2	$3.135067819591 \cdot 10^{-1}$	$0.000000000000 \cdot 10^0$
3	$1.862610455556 \cdot 10^{-1}$	$-2.775557561562 \cdot 10^{-17}$
4	$1.006961656372 \cdot 10^{-1}$	$0.000000000000 \cdot 10^0$
5	$4.992707216145 \cdot 10^{-2}$	$-6.938893903907 \cdot 10^{-18}$
6	$2.289298735236 \cdot 10^{-2}$	$0.000000000000 \cdot 10^0$
7	$9.775636562905 \cdot 10^{-3}$	$0.000000000000 \cdot 10^0$
8	$3.907180971366 \cdot 10^{-3}$	$-8.673617379884 \cdot 10^{-19}$
9	$1.465467849706 \cdot 10^{-3}$	$-2.168404344971 \cdot 10^{-19}$
10	$5.154975901164 \cdot 10^{-4}$	$1.084202172485 \cdot 10^{-19}$

Tabelle 2.1: Fixpunktkopplungen des Infrarot-Fixpunktes in drei Dimensionen für  $l_{\max} = 10$  und Abweichungen vom Fixpunkt nach einem Renormierungsgruppenschritt.

Abbildung 2.2 in Dimensionen  $d$  zwischen 2.1 und 2.9 in Schritten von 0.1 gezeigt. Das flachste Potential entspricht dabei  $d = 2.9$ . Mit abnehmender Dimension wird die 3-Well-Struktur immer ausgeprägter. Auch hier und für die 4-Well-Potentiale in Abbildung 2.3 gilt  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Die 4-Well-Potentiale sind in Dimensionen zwischen 2.1

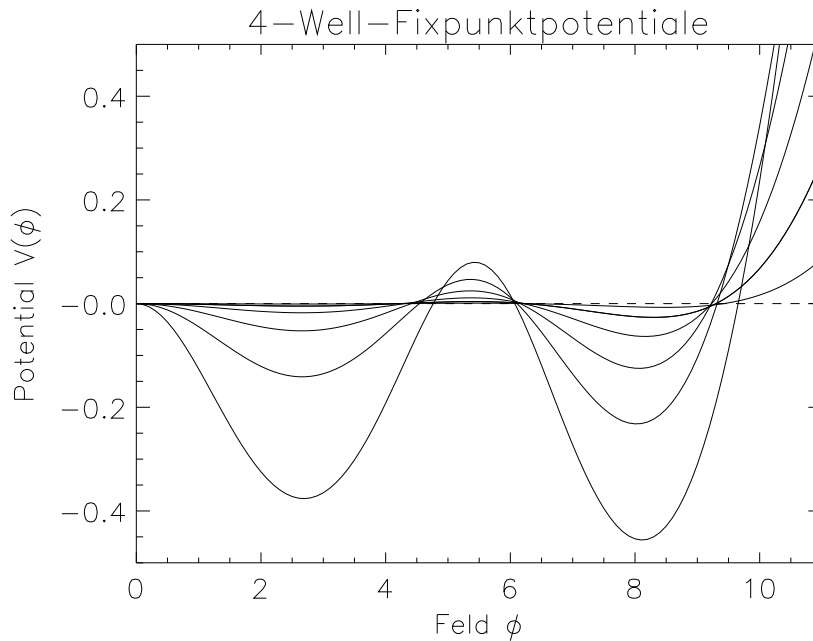


Abbildung 2.3: 4-Well-Fixpunktpotentiale in Dimensionen  $d$  zwischen 2.6 und 2.1. Das tiefste Potential entspricht dabei  $d = 2.1$ .

$i$	$\lambda_{2i}$		
	2-Well	3-Well	4-Well
0	2.00000	2.00000	2.00000
1	1.17118	1.91695	1.92425
2	0.67910	1.16450	1.44160
3	0.33156	0.77967	1.15427
4	0.14596	0.48006	0.84175
5	0.06058	0.27066	0.57893

Tabelle 2.2: Die führenden sechs Eigenwerte am 2-, 3- und 4-Well-Fixpunkt in  $d = 2.1$  Dimensionen.

und 2.6 abgebildet. Die Suche nach 4-Well-Fixpunkten ist bereits recht mühsam, da neben den abgebildeten physikalischen Fixpunkten auch nichtphysikalische Fixpunkte gefunden werden, die bei höheren Trunktationsparametern  $l_{\max}$  verschwinden. Solche Pseudo-Fixpunkte erkennt man am Wachstumsverhalten der Kopplungen.

### 2.6.2 Numerische Berechnung der linearisierten Transformation

Die Linearisierung der Transformation (2.54) ist als Ableitung nach den Kopplungen  $a_n$  gegeben. In der im vorigen Abschnitt gewählten Parametrisierung erhält man also die Matrix

$$M_{l,n} = \frac{\partial a'_l}{\partial a_n} = 2\beta'^{2l} \sum_{m=0}^{\infty} C_l^{m,n} a_m \quad (2.57)$$

mit unendlich vielen Einträgen als Darstellung der Linearisierung am Punkt  $(a_l)$ . Dabei wurde die Symmetrie  $C_l^{m,n} = C_l^{n,m}$  ausgenutzt. Wenn  $(a_l)$  ein Fixpunkt ist, beschreibt die Linearisierung die Renormierungsgruppentransformation von kleinen Störungen. Durch Trunkation wird  $M$  zu einer Matrix auf  $\mathbb{R}^{l_{\max}+1}$ . Diese endlich-dimensionale Matrix kann numerisch mit Standardmethoden diagonalisiert werden. Auch hier wurde die Abhängigkeit von  $l_{\max}$  untersucht und  $l_{\max}$  hinreichend groß gewählt. Zur Diagonalisierung wird  $M$  zunächst mit den Routinen F01AKF und F01APF [Num91] auf die Hessenberg-Form transformiert, anschließend bestimmt man mit der Routine F02AQF [Num91] die Eigenvektoren und Eigenwerte von  $M$ , die mit den Routinen M01DAF und M01ZAF nach ihrer Größe sortiert werden. Schneller, und damit für große Werte von  $l_{\max}$  besser geeignet, sind die Routinen balanc, elmhes und hqr aus [FPTV92].

An allen im vorigen Abschnitt bestimmten Fixpunkten wurde das Spektrum der Eigenwerte berechnet. Exemplarisch sind in Tabelle 2.2 die sechs führenden Eigenwerte des 2-, 3- und 4-Well-Fixpunktes in 2.1 Dimensionen eingetragen. Man erkennt, daß der 2-Well-Fixpunkt außer dem Volumeneigenwert 2 nur eine relevante Richtung besitzt, während am 3-Well-Fixpunkt zwei und am 4-Well-Fixpunkt drei nichttriviale Richtungen relevant sind. Das in Abschnitt 2.5 beschriebene Bifur-

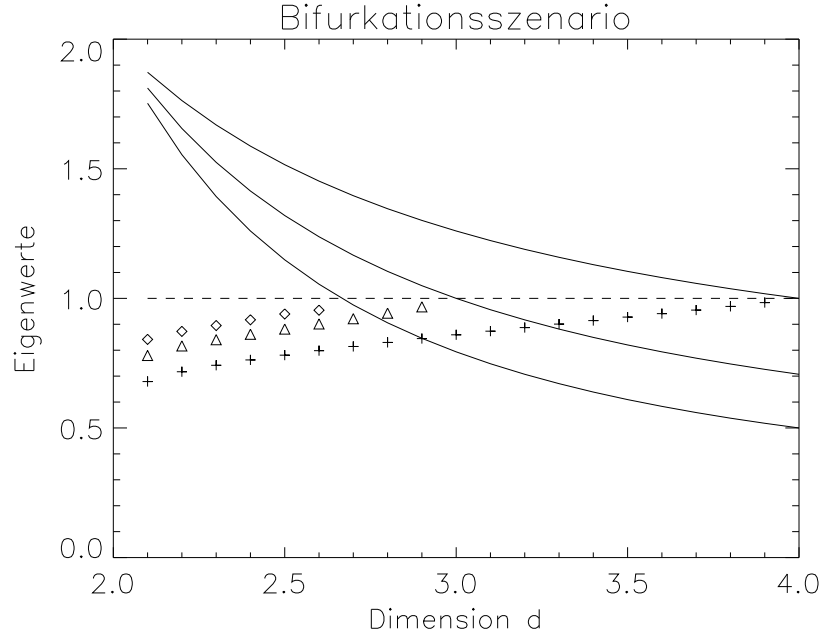


Abbildung 2.4: Bifurkationsszenario am trivialen Fixpunkt. Die durchgezogenen Linien entsprechen den Eigenwerten  $\lambda_4$ ,  $\lambda_6$  und  $\lambda_8$  am trivialen Fixpunkt. Die Kreuze bezeichnen die Eigenwerte  $\lambda_4$  am 2-Well-Fixpunkt. Die Dreiecke bezeichnen die Eigenwerte  $\lambda_6$  am 3-Well-Fixpunkt. Die Rauten bezeichnen die Eigenwerte  $\lambda_8$  am 4-Well-Fixpunkt.

kationsszenario wird durch Abbildung 2.4 illustriert. In dieser Abbildung sind mit durchgezogenen Linien die Eigenwerte  $\lambda_{2n} = L^{d+2n(1-\frac{d}{2})}$  für  $n = 2, 3$  und  $4$  am trivialen Fixpunkt dargestellt. Diese werden mit den Eigenwerten  $\lambda_4$  am 2-Well-Fixpunkt,  $\lambda_6$  am 3-Well-Fixpunkt und  $\lambda_8$  am 4-Well-Fixpunkt verglichen. Man erkennt gut, daß es für  $d = 4$  und  $d = 3$  eine Bifurkation gibt. Das in Abschnitt 2.5 erwartete Bild wird bestätigt.

Mit Hilfe von Formel (2.26) kann man aus den Daten für die Eigenwerte den kritischen Exponenten  $\nu$  gewinnen. In Tabelle 2.3 ist  $\nu$  in verschiedenen Dimensionen dargestellt. Bei abnehmender Dimension wächst  $\nu$ . Wenn die Dimension von unten gegen die Bifurkationsdimension geht, geht  $\nu$  gegen den Wert 0.5 für freie Feldtheorien. Für  $d \leq 2.3$  nimmt  $\nu$  unphysikalische Werte größer als Eins an. Für die 3- und 4-Well-Fixpunkte ist  $\nu$  ungefähr 0.5; die Fixpunktpotentiale sind besonders in der Nähe der Bifurkationsdimensionen sehr flach und ähneln damit dem Potential am trivialen Fixpunkt.

### 2.6.3 Anomale Dimension des hierarchischen Modells

Ein kritisches System besitzt keine intrinsische Skala. Aus allgemeinen Überlegungen [ZJ93] folgt daher, daß die Zweipunktfunktion der Theorie nur nach einem Potenz-

$d$	$\nu$		
	2-Well	3-Well	4-Well
2.1	2.088862068	0.507226270	0.504279099
2.2	1.362344075	0.508753554	0.502894726
2.3	1.099159520	0.507742592	0.501260692
2.4	0.957038487	0.505859227	0.500379147
2.5	0.865336779	0.503930563	0.500066526
2.6	0.799849067	0.502319468	0.500002203
2.7	0.749926695	0.501150891	
2.8	0.710110390	0.500427259	
2.9	0.677293829	0.500081789	
3.0	0.649570365		
3.1	0.625700476		
3.2	0.604841450		
3.3	0.586399823		
3.4	0.569946095		
3.5	0.555163274		
3.6	0.541814954		
3.7	0.529725635		
3.8	0.518769943		
3.9	0.508867326		

Tabelle 2.3:  $\nu$  in Abhängigkeit von der Dimension für 2-, 3- und 4-Well-Fixpunkte.

gesetz  $|x|^{-\alpha}$  mit dem Abstand  $|x|$  der beiden Punkte abfallen kann (zum Beispiel bei einem Exponentialabfall  $e^{-m|x|}$  wäre  $\frac{1}{m}$  eine intrinsische Skala des Systems). Die freie Feldtheorie ergibt  $\alpha = d - 2$ ; ein freies Feld besitzt daher die Skalierungsdimension  $1 - \frac{d}{2}$ , die als kanonische Dimension oder als Ingenieursdimension bezeichnet wird. An einem nichttrivialen Fixpunkt muß  $\alpha$  aber nicht durch  $d - 2$  gegeben sein, das Feld muß also nicht die kanonische Dimension besitzen. Die anomale Dimension  $\eta$  ist durch die Abweichung zur kanonischen Felddimension  $1 - \frac{d}{2}$  am nichttrivialen Fixpunkt definiert, das heißt durch  $\alpha = d - 2 + \eta$  gegeben. Die Dimension des Feldes  $\phi$  wird damit zu

$$d_\phi = 1 - \frac{d}{2} - \frac{\eta}{2}. \quad (2.58)$$

Es wird allgemein angenommen, daß man keinen nichttrivialen Renormierungsgruppenfixpunkt findet, wenn man bei Renormierungsgruppentransformationen die anomale Dimension ignoriert und kanonisch reskaliert.

Das hierarchische Modell besitzt die anomale Dimension  $\eta = 0$ . Dies wird schon dadurch ausgedrückt, daß man trotz kanonischer Reskalierung nichttriviale Renormierungsgruppenfixpunkte findet. Der exakte Beweis ist auch einfach. Wenn man einen beliebigen hierarchischen Fixpunkt  $Z(\psi)$  der Transformation  $\mathcal{R}$  betrachtet, so



gilt

$$Z(\psi) = \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\psi + \zeta)^{L^d}. \quad (2.59)$$

Durch Differentiation nach  $\psi$  beweist man, daß  $Z'(\psi) = \frac{\partial Z}{\partial \psi}$  ein Eigenvektor der linearisierten Transformation mit Eigenwert  $L^d\beta$  ist:

$$Z'(\psi) = L^d\beta \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\psi + \zeta)^{L^d-1} Z'(\beta\psi + \zeta). \quad (2.60)$$

Der Eigenwert  $L^d\beta = L^{d+(1-\frac{d}{2})}$  ist der Eigenwert  $\lambda_1$  am trivialen Fixpunkt, daher gilt  $\eta = 0$ . Das gleiche Argument kann man auch im Hochtemperaturbild mit der Transformation  $\mathcal{R}'$  durchführen. An jedem hierarchischen Fixpunkt erwartet man daher auch den Eigenwert  $\lambda_3 = L^{d-(1+\frac{d}{2})}$ .

$\eta$  kann auch numerisch bestimmt werden. Dazu muß die Transformation, die bisher nur für gerade Potentiale betrachtet wurde, auf beliebige Funktionen verallgemeinert werden. Das Ergebnis für  $\eta$  gibt eine Abschätzung des Fehlers bei der numerischen Berechnung der kritischen Exponenten. Mit der verallgemeinerten Algebra kann man das gesamte Spektrum am nichttrivialen Fixpunkt bestimmen und nach Fixpunkten suchen, die entweder antisymmetrisch sind, oder keine definierte Parität besitzen. Eine antisymmetrische Boltzmannfunktion ist unphysikalisch, da sie nicht positiv ist. Falls  $L^d$  gerade ist, kann es keinen antisymmetrischen Fixpunkt  $Z_\star(\psi)$  von  $\mathcal{R}'$  geben, da die Annahme  $Z_\star(-\psi) = -Z_\star(\psi)$  wegen

$$\begin{aligned} Z_\star(-\psi) &= \int d\mu_\gamma(\zeta) Z_\star(-\beta'\psi + \zeta)^{L^d} \\ &= \int d\mu_\gamma(\zeta) Z_\star(-\beta'\psi - \zeta)^{L^d} \\ &= (-1)^{L^d} \int d\mu_\gamma(\zeta) Z_\star(\beta'\psi + \zeta)^{L^d} \\ &= Z_\star(\psi) \end{aligned} \quad (2.61)$$

zum Widerspruch führt. Ich konnte aber in keiner Dimension Fixpunkte mit undefinierter Parität beobachten, die durch diese Betrachtung nicht ausgeschlossen werden.

Die anomale Dimension ergibt sich aus dem  $\phi$ -Eigenwert, der also als

$$\lambda_1 = L^{d+(1-\frac{d}{2}-\frac{\eta}{2})} \quad (2.62)$$

angesetzt wird; dabei ist der Faktor  $L^d$  ein Volumenfaktor, vergleiche Abschnitt 2.4.1 und 2.4.2. Daraus erhält man

$$\eta = 2 + d - \frac{2 \log \lambda_1}{\log L} \quad (2.63)$$

in Abhängigkeit von  $\lambda_1$ .

Die Berechnung der Strukturkoeffizienten  $K_l^{m,n}$  in diesem Fall ist analog zu Abschnitt 2.6.1:

Wenn man  $Z(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\gamma^{\frac{n}{2}} N_n} \phi^n$  entwickelt, bekommt die Renormierungsgruppentransformation (2.51) für  $L^d = 2$  die Gestalt

$$\begin{aligned} Z'(\psi) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a_m a_n}{\gamma^{\frac{m+n}{2}} N_m N_n} \sum_{l=0}^{m+n} \binom{m+n}{l} (\beta' \psi)^l I(m+n-l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \psi^l \beta'^l \sum_{m,n=0}^{\infty} \binom{m+n}{l} \frac{a_m a_n}{\gamma^{\frac{m+n}{2}} N_m N_n} I(m+n-l), \end{aligned} \quad (2.64)$$

mit  $I(l) = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{l}{2}} \frac{l!}{(l/2)!} \chi_{\text{even}}(l)$ , falls  $l \geq 0$ , und  $I(l) = 0$ , falls  $l < 0$ . Dabei ist  $\chi_{\text{even}}(l) = 1 - l \bmod 2$  die charakteristische Funktion der geraden Zahlen. Für die Entwicklungskoeffizienten  $a'_l$  von  $Z'$  gilt demnach

$$a'_l = \beta'^l \sum_{m,n=0}^{\infty} K_l^{m,n} a_m a_n, \quad (2.65)$$

mit

$$K_l^{m,n} = \left\{ \frac{(m+n)! N_l}{2^{-\frac{m+n-l}{2}} \left(\frac{m+n-l}{2}\right)! N_m N_n} \chi_{\text{even}}(m+n-l) \right\}. \quad (2.66)$$

In den numerischen Untersuchungen wurde  $N_n = 2^n \sqrt{n!}$  gewählt; dies entspricht der Wahl der Normierung oben. Die Renormierungsgruppentransformation hat damit die gleiche Gestalt wie Gleichung (2.54). Die Linearisierung  $M$  muß demnach ebenfalls von der Form (2.57) sein:

$$M_{l,n} = 2\beta'^l \sum_{m=0}^{\infty} K_l^{m,n} a_m. \quad (2.67)$$

Die Linearisierung wird am 2-Well-Fixpunkt in drei Dimensionen berechnet, der symmetrisch ist ( $a_{2k+1} = 0$ ). Da  $K_l^{m,n} = 0$  für ungerade  $m+n-l$  gilt, verschwindet  $M_{l,n}$ , wenn  $n-l$  ungerade ist. Die Struktur der Matrix  $M$  ist jedoch nicht so einfach, daß sofort klar wäre, daß  $\lambda_1$  trivial ist.

Die numerische Behandlung von  $M$  wird mit dem Programm durchgeführt, das oben verwendet wurde. In Tabelle 2.4 sind die ersten elf Eigenwerte der linearisierten Transformation am 2-Well-Fixpunkt in drei Dimensionen dargestellt, die bei einem Trunkationsparameter  $l_{\max} = 40$  berechnet wurden. Aus  $\lambda_1 = 1.781797436$  erhält man mit  $d = 3$  und  $L = 2^{\frac{1}{3}}$  in (2.63):

$$\eta = 1.39 \cdot 10^{-9}. \quad (2.68)$$

Dies zeigt eindrucksvoll die Kraft der algebraischen Methode zur Bestimmung von nichttrivialen Fixpunkten. Der Fehler bei der Bestimmung von kritischen Exponenten liegt also in der Größenordnung  $10^{-9}$ . Auch der Eigenwert  $\lambda_3 = 2^{\frac{1}{5}} =$

$k$	$\lambda_k$
0	2.0000000000
1	1.781797436
2	1.427172478
3	1.122462048
4	0.859411649
5	0.646673370
6	0.479637303
7	0.351573076
8	0.255127916
9	0.183539204
10	0.131034627

Tabelle 2.4: *Spektrum am nichttrivialen 2-Well-Fixpunkt in drei Dimensionen.*

1.122462048 findet sich wie erwartet im Spektrum. Der zugehörige Eigenvektor ist die Ableitung des Fixpunktes nach  $\psi$  im Hochtemperaturbild. Die weiteren Eigenwerte beschreiben Korrekturen zum Skalenverhalten. Wie weit sie universell, sind ist unklar.

$k$	$v_1^{(k)}$
1	0.947243911
3	0.872613698
5	0.635057022
7	0.396578965
9	0.219981737

Tabelle 2.5: *Koeffizienten für  $v_1$ .*

In Tabelle 2.5 sind die ersten zehn Entwicklungskoeffizienten  $v_1^{(k)}$  des Eigenvektors  $v_1$  zum Eigenwert  $\lambda_1$  dargestellt.  $v_1$  ist antisymmetrisch. In Abbildung 2.5 sind die Eigenvektoren  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3 = Z'$  in Abhängigkeit von dem Feld  $\phi$  abgebildet.  $v_2$  ist im Gegensatz zu  $v_1$  symmetrisch.

#### 2.6.4 Universalitätsklassen des hierarchischen Modells

Die algebraische Methode zur Berechnung von hierarchischen Renormierungsgruppenfixpunkten kann auf einfache Weise auf beliebige ganzzahlige Werte von  $L^d$  verallgemeinert werden. Die Strukturkoeffizienten haben dann einfach  $L^d + 1$  Indizes. Wenn zum Beispiel  $L^d = 8$  ist, gibt es bei  $l_{\max} = 10$  circa  $11^9$  Strukturkoeffizienten. Auch wenn sich diese Anzahl durch Symmetrien erheblich reduziert, ist es offenbar hoffnungslos, die Iteration und die Fixpunktsuche mit einer naiven Verallgemeinerung von (2.54) und (2.56) durchzuführen. Wenn man die Boltzmann-Faktoren aber

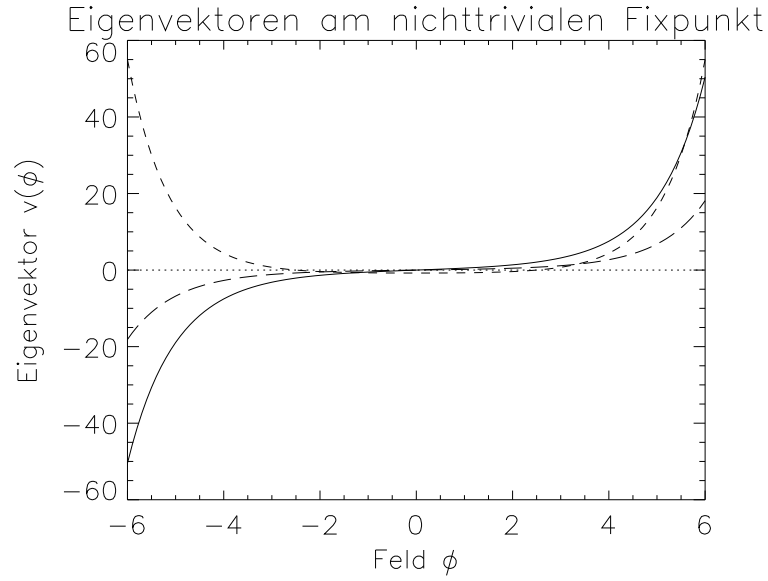


Abbildung 2.5: Die Eigenvektoren  $v_1$  (durchgezogen) und  $v_2$  (kurzgestrichelt) und  $Z'$  (langgestrichelt) am nichttrivialen Fixpunkt in drei Dimensionen bei  $\gamma = 1$ .

sukzessive aneinander multipliziert, reduziert sich der Aufwand dieses Problems erheblich. Dabei verwendet man iterativ die Formel

$$\left( \sum_{m=0}^{\infty} b_m \psi^{2m} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi^{2n} \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \psi^{2l} \sum_{n=0}^l b_{l-n} c_n. \quad (2.69)$$

Für eine derartige Behandlung ist die Transformation

$$Z'(\psi) = (\mathcal{T}'Z)(\psi) = \left\{ \int d\mu_{\gamma}(\zeta) Z(\beta'\psi + \zeta) \right\}^{L^d} \quad (2.70)$$

am geeignetsten, da man erst nach der Integration mit der Multiplikationsroutine beginnen muß. Sonst müßte man, um Fehler durch die Trunkation zu vermeiden, in der Multiplikationsroutine auch höhere Potenzen als  $\psi^{2l_{\max}}$  berücksichtigen. Alle weiteren Ideen zur Fixpunktsuche bleiben gleich. Es stellt sich heraus, daß man zur Bestimmung des Fixpunktes mit dieser Transformation (2.70) mehr Kopplungen benötigt. Man kann aber ohne weiteres mit den Algorithmen aus [FPTV92] bis zu  $l_{\max} = 200$  gehen.

Um den verbesserten Algorithmus auch für die Linearisierung auszunutzen, muß man  $Z'$  nach den Kopplungen  $a_n$  ableiten. Es sei also  $Z$  durch  $Z(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\gamma^n N_n} \phi^{2n}$

parametrisiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Z'(\psi)}{\partial a_n} &= L^d \left\{ \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta'\psi + \zeta) \right\}^{L^d-1} \int d\mu_\gamma(\zeta) \frac{\partial Z(\beta'\psi + \zeta)}{\partial a_n} \\
&= L^d \left\{ \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta'\psi + \zeta) \right\}^{L^d-1} \frac{1}{\gamma^n N_n} \int d\mu_\gamma(\zeta) (\beta'\psi + \zeta)^{2n} \\
&= L^d \left\{ \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta'\psi + \zeta) \right\}^{L^d-1} \sum_{k=0}^n \psi^{2k} \frac{\beta^{2k} \gamma^{-k} (2n)!}{N_n 2^{n-k} (2k)! (n-k)!}.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

An dieser Stelle kann man den obigen Multiplikationsalgorithmus einsetzen. Das Matricelement  $M_{l,n}$  ist bis auf Normierung der Koeffizient von  $\psi^{2l}$  in der zuletzt übrig bleibenden Summe.

Für  $L = 2$  und  $d = 3$  erhält man dann durch Anwendung der Diagonalisierungsroutinen für den Eigenwert  $\lambda_2$  am nichttrivialen Fixpunkt bei 61 Kopplungen:

$$\lambda_2 = 2.904071533. \tag{2.72}$$

Koch und Wittwer [KW88] geben für diesen Eigenwert die exakten Schranken

$$2.9040714905322 \leq \lambda_2 \leq 2.9040715072204 \tag{2.73}$$

an. Für den kritische Index, der sich daraus mit (2.26) berechnet, findet man

$$0.6501625176789 \leq \nu \leq 0.65016252118340. \tag{2.74}$$

Dies ist nicht der Wert, der sich für  $L^d = 2$  ergeben hat. Die gute Übereinstimmung mit den exakten Schranken zeigt, daß das Berechnungsverfahren nicht die Ursache für die Abweichung sein kann. Daher folgt, daß die Universalitätsklasse des hierarchischen Modells von  $L$  abhängt. Dies kann man auch erwarten, da das hierarchische Gitter für verschiedene Werte von  $L$  verschiedene Symmetriegruppen besitzt. In Tabelle 2.6 wird die Abhängigkeit von  $\nu$  in drei Dimensionen etwas ausführlicher untersucht. Mit zunehmendem  $L$  wächst auch  $\nu$ . Die Abhängigkeit von  $L$  ist aber nur schwach. Mit Gauß-Hermite Integration<sup>3</sup> kann man beliebige Werte von  $L^d$  betrachten. Dabei stellt sich heraus, daß der kritische Index im Limes  $L \rightarrow 1$  gegen sehr große Werte geht. Dies ist in Tabelle 2.7 und in Abbildung 2.6 dargestellt. Für  $L \rightarrow 1$  wird  $\nu$  groß, der Limes selbst muß aber mit anderen Methoden erforscht werden. Im Limes  $L \rightarrow 1$  ist die hierarchische Renormierungsgruppentransformation linear und besitzt nur triviale Fixpunkte. Auch der Limes  $L \rightarrow \infty$  kann numerisch weder mit der dargestellten algebraischen Methode noch mit Gauß-Hermite Integration untersucht werden, da für  $L > 4$  die Fehler stark anwachsen. In Abbildung 2.7 wird  $\nu$  im Bereich zwischen  $L = 1.2$  und  $L = 4.0$

---

<sup>3</sup>Für die Überlassung von Daten, die mit Hilfe von Gauß-Hermite Integration erzeugt wurden, bin ich Andreas Pordt zu Dank verpflichtet. Die Programm-Logik ist der Logik beim algebraischen Verfahren ähnlich, man koppelt ein Integrationsprogramm mit einem Fixpunktalgorithmus. Der Vorteil bei der rein numerischen Berechnung des Integrals liegt darin, daß die Beschränkung  $L^d \in \mathbb{Z}_{>1}$  aufgehoben ist.

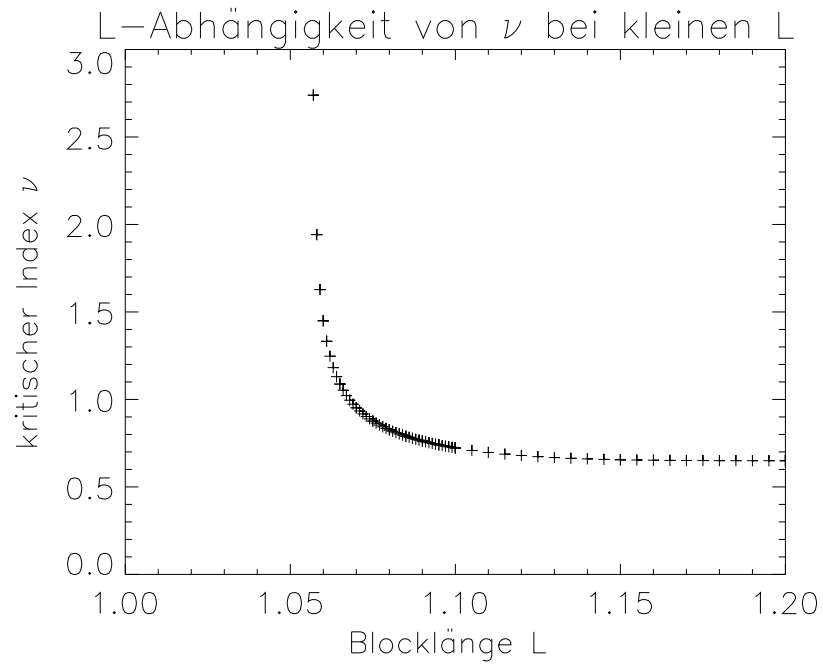


Abbildung 2.6: Der kritische Index  $\nu$  als Funktion der Blockgröße  $L$ .

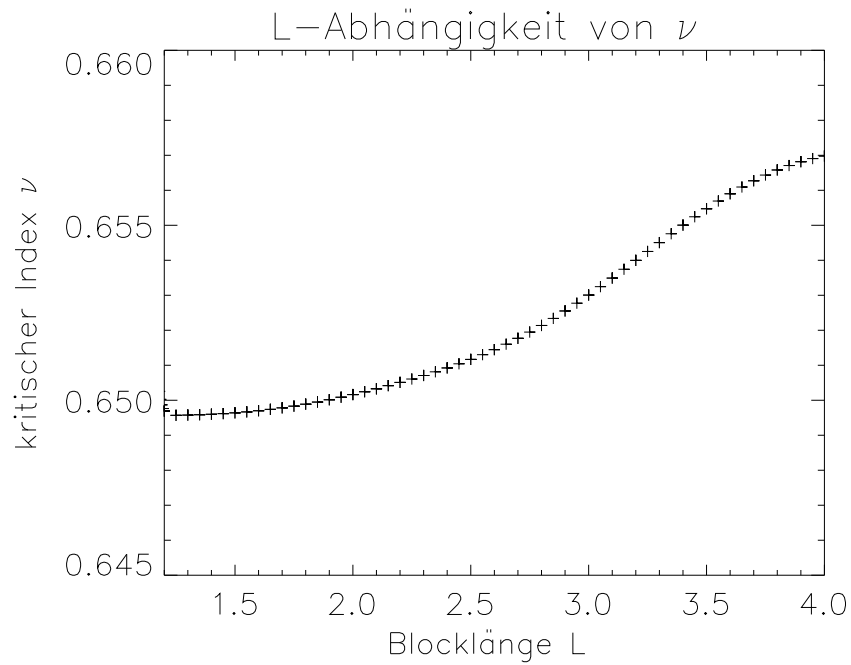


Abbildung 2.7: Der kritische Index  $\nu$  als Funktion der Blockgröße  $L$  zwischen 1.2 und 4.0.

$L^3$	$\nu$
2	0.649570352
3	0.649614470
4	0.649691712
5	0.649791859
6	0.649906976
7	0.650031700
8	0.650162514
9	0.650296941
10	0.650433316
11	0.650570510
12	0.650707685

Tabelle 2.6:  $\nu$  für verschiedene Werte von  $L$  in drei Dimensionen.

$L$	$\nu$
1.100	0.7226156
1.095	0.7400395
1.090	0.7617491
1.085	0.7893770
1.080	0.8257109
1.075	0.8760511
1.070	0.9521799
1.065	1.0878892
1.060	1.4498673

Tabelle 2.7:  $\nu$  als Funktion von  $L$  bei kleinen Werten von  $L$ .

dargestellt.  $\nu$  wächst für große  $L$  langsamer. Das Minimum  $\nu = 0.649570$  wird bei  $L \approx 1.25$  angenommen.

Die Universalitätsklassen des skalaren hierarchischen Modells werden also durch die Dimension  $d$  und die Blockgröße  $L$  parametrisiert, während im vollen Modell die Universalitätsklasse unabhängig von der Blockgröße ist. Die Abhängigkeit von  $L$  ist eine Beobachtung, die im nachhinein einfach zu verstehen ist, da das hierarchische Gitter bei unterschiedlichen Werten von  $L$  eine andere Symmetriegruppe besitzt. Die Limiten  $L \rightarrow 1$  und  $L \rightarrow \infty$  sind noch Terra incognita.

### 2.6.5 Vergleich mit dem dreidimensionalen Ising-Modell

Die Herleitung der hierarchischen Renormierungsgruppentransformation in Abschnitt 2.2 hat gezeigt, daß man das hierarchische Modell als Approximation an das volle Modell auffassen kann. Um zu klären, wie gut diese Approximation ist, vergleicht man die Resultate für die kritischen Exponenten  $\nu_{\text{hiera}}$  und  $\eta_{\text{hiera}}$  des dreidimensionalen hierarchischen Modells mit den kritischen Exponenten  $\nu$  und  $\eta$  der Uni-

versalitätsklasse des dreidimensionalen Ising-Modells [Isi25]. Die folgende Tabelle gibt zunächst eine Übersicht über die im Moment zuverlässigsten Resultate für  $\nu$  und  $\eta$ . Der Wert  $\nu = 0.630$  ergibt sich bei der Verwendung der Reihenentwicklun-

$\nu$	Methode	Literatur
0.6300(15)	dreidimensionale Renormierungsgruppe	[GZJ80]
0.6298(7)		[BB85]
0.630		[Nic91]
0.6305(25)	Renormierungsgruppe, $\epsilon$ -Entwicklung	[GZJ85]
0.6301	Hochtemperaturreihen	[Rei95]
0.6300(15)	Hochtemperaturreihen für bcc-Gitter	[NR90]
0.6289(8)	Monte-Carlo-Methoden	[FL91]
0.6301(8)		[BLH95]
0.625(1)	Monte-Carlo-Renormierungsgruppe	[GT96]
$\eta$	Methode	Literatur
0.031(4)	dreidimensionale Renormierungsgruppe	[GZJ80]
0.037(3)	Renormierungsgruppe, $\epsilon$ -Entwicklung	[GZJ85]
0.035(3)	Hochtemperaturreihen	[ZJ81]
0.029(8)		[Rei95]
0.037(3)	Monte-Carlo-Methoden	[BLH95]
0.025(6)	Monte-Carlo-Renormierungsgruppe	[GT96]

Tabelle 2.8: *Ergebnisse für  $\nu$*

gen oder von Monte-Carlo-Methoden. Mit der Monte-Carlo-Renormierungsgruppe erhält man  $\nu = 0.625$ , was deutlich unter den anderen Werten liegt. In [GT96] werden die Monte-Carlo-Daten daher auch mit Finite-Size-Scaling analysiert. Das Ergebnis ist dann  $\nu = 0.6348(48)$ ,  $\nu = 0.6298(27)$  oder  $\nu = 0.6295(27)$ , je nach Verfahren. Diese Abweichung wird durch fehlende Corrections-to-Scaling Terme bei dieser Analyse erklärt. Die Diskussion der Einschätzung von systematischen Fehlern scheint noch in Bewegung zu sein. In dem schönen Artikel von Blöte et. al. [BLH95] werden auch experimentelle Resultate zitiert.

Selbst wenn man dies mit dem minimalen hierarchischen kritischen Exponenten in drei Dimensionen

$$\nu_{\text{hiera}} = 0.649750 \quad (2.75)$$

vergleicht, ist das hierarchische Modell hier also eher schlecht. Da die Universalitätsklassen des hierarchischen Modells von  $L$  abhängen, kann man die Exponenten des hierarchischen Modells nur ungut mit denen des vollen Modells vergleichen. Wenn  $L$  gegen Eins geht, nimmt  $\nu$  unphysikalisch große Werte an. Diese neue Beobachtung ist etwas enttäuschend für diejenigen, die das hierarchische Modell auch quantitativ im Hinblick auf das volle Modell auswerten möchten. Als Approximation an das volle Modell liefert das hierarchische Modell in der gegenwärtigen Form also schlechte Resultate. Qualitative Analogien haben sich aber bei dem Verständnis



von vollen Renormierungsgruppenflüssen als sehr nützlich erwiesen [BEI92, CM94, GK84b].

# Kapitel 3

## $\epsilon$ -Entwicklung

### 3.1 Idee der Entwicklung

In [PPW94] ist eine rekursive Entwicklung zur Berechnung des kritischen Index  $\nu$  von hierarchischen Modellen vorgeschlagen worden. Der Entwicklungsparameter  $\epsilon$  ist die Differenz  $d - d_n$  zwischen der Dimension  $d$ , in welcher der kritische Exponent des  $n$ -Well-Fixpunktes berechnet wird, und seiner Bifurkationsdimension  $d_n$ . Die Idee dieser  $\epsilon$ -Entwicklung geht auf [WF72] zurück. Ähnliche, etwas einfachere Rekursionsrelationen als in [PPW94], kann man auch mit einer Spielart der  $\epsilon$ -Entwicklung erhalten, die zuerst im Rahmen der konstruktiven Feldtheorie vorgeschlagen und benutzt wurde [GK83]. Diese Entwicklung wird hier zur Berechnung hierarchischer kritischer Exponenten eingesetzt. Der Vorteil der neuen  $\epsilon$ -Entwicklung besteht darin, daß sie auch für volle Gittertheorien durchgeführt werden kann, da man ein unterliegendes Gitter zum Beispiel in drei Dimensionen fixiert, während die  $\epsilon$ -Entwicklung à la [PPW94] nicht so direkt auf volle Modelle übertragen werden kann. Dieses Projekt bildet damit die Vorstufe für ähnliche Überlegungen am vollen Modell. Analoge Entwicklungen wurden unabhängig von diesem Projekt von Brydges [Bry] im Rahmen der konstruktiven Feldtheorie wiederentdeckt.

Die Idee einer  $\epsilon$ -Entwicklung besteht darin, eine Störungstheorie um die Bifurkationspunkte  $d_n$  durchzuführen. Dazu entwickelt man die hierarchische Renormierungsgruppentransformation

$$Z'(\psi) = \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\psi + \zeta)^{L^d}, \quad (3.1)$$

mit  $\beta = L^{1-\frac{d}{2}}$  und  $d = d_n - \epsilon$  in  $\epsilon$ . Da  $\epsilon$ -Entwicklung eine Störungstheorie ist, entwickelt man um den Ultraviolett-Fixpunkt. Einen geeigneten Rahmen für eine derartige Entwicklung bietet die in Abschnitt 2.6.1 eingeführte Renormierungsgruppen-Algebra.

Die Idee der Entwicklung à la Gawedzki und Kupiainen ist nun, die Gitterstruktur des hierarchischen Gitters festzuhalten und die Dimensionsabhängigkeit der Renormierungsgruppentransformation auf einen Parameter  $\alpha$  zu übertragen. Man wählt also eine feste Dimension  $d_0$ , zum Beispiel  $d_0 = 3$ , die das Gitter definiert,

und betrachtet die Renormierungsgruppentransformation

$$Z'(\psi) = \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\psi + \zeta)^{L^{d_0}}, \quad (3.2)$$

mit  $\beta = L^{-\alpha}$ . Durch Vergleich von  $L^{d_0}$  und  $L^{-\alpha}$  mit  $\tilde{L}^d$  und  $\tilde{L}^{1-\frac{d}{2}}$  findet man die Beziehung

$$\alpha = d_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{d} \right) \quad (3.3)$$

zwischen dem Parameter  $\alpha$  und der Dimension  $d$ . Bifurkationswerte  $\alpha_n$  von  $\alpha$  sind durch

$$\alpha_n = d_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{d_n} \right) = \frac{d_0}{2n} \quad (3.4)$$

gegeben. Die Entwicklung wird in dem Parameter

$$\epsilon = \alpha_n - \alpha \quad (3.5)$$

für einen festen Wert von  $n$  (zum Beispiel  $n = 2$ ) durchgeführt. Wenn die Universalitätsklasse  $(d, \tilde{L})$  betrachtet werden soll, wählt man einfach  $d_0 = d$  und  $L = \tilde{L}$ . Für  $d_0 = 3$  und  $d_n = 4$ , das heißt  $n = 2$ , muß man zu  $\epsilon = \frac{1}{4}$  extrapolieren, um Aussagen für den kritischen Exponenten  $\nu$  in drei Dimensionen zu machen.

## 3.2 Herleitung der Rekursionsrelationen

Wenn man  $L^{d_0} = 2$  setzt, und  $Z(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma'^{-n} : \phi^{2n} :_{\gamma'}$  in der Basis von Eigenvektoren der linearisierten Transformation am trivialen Fixpunkt entwickelt ( $\gamma' = \frac{\gamma}{1-\beta^2}$ ), so gilt für den Integranden in (3.2):

$$\begin{aligned} Z(\phi)^2 &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a_m a_n}{\gamma'^{m+n}} : \phi^{2m} :_{\gamma'} : \phi^{2n} :_{\gamma'} \\ &\stackrel{\text{Lemma 12}}{=} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a_m a_n}{\gamma'^{m+n}} \sum_{k=0}^{\min\{2m, 2n\}} k! \binom{2m}{k} \binom{2n}{k} \gamma'^k : \phi^{2m+2n-2k} :_{\gamma'}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dabei hat man die Fusionsformel für normalgeordnete Monome aus dem Anhang benutzt. Durch Integration mit Hilfe von Korollar 3 im Anhang folgt:

$$\begin{aligned} Z'(\psi) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{a_m a_n}{\gamma'^{m+n}} \sum_{k=0}^{\min\{2m, 2n\}} k! \binom{2m}{k} \binom{2n}{k} \gamma'^k \beta^{2m+2n-2k} : \psi^{2m+2n-2k} :_{\gamma'} \\ &\stackrel{l=m+n-k}{=} \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{l=|m-n|}^{m+n} \frac{a_m a_n}{\gamma'^l} (m+n-l)! \binom{2m}{m+n-l} \binom{2n}{m+n-l} \beta^{2l} : \psi^{2l} :_{\gamma'} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a'_l}{\gamma'^l} : \psi^{2l} :_{\gamma'}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

mit

$$a'_l = \beta^{2l} \sum_{m,n=0}^{\infty} \mathcal{C}_l^{m,n} a_m a_n, \quad (3.8)$$

wobei  $\beta = L^{-\alpha}$  ist. Damit in (3.8) die Kovarianz  $\gamma'$  nicht enthalten ist, hat man in der Entwicklung von  $Z$  durch  $\gamma'^m$  geteilt. Die Koeffizienten  $\mathcal{C}_l^{m,n}$  sind durch

$$\mathcal{C}_l^{m,n} = \begin{cases} \frac{(2m)!(2n)!}{(m+n-l)!(n+l-m)!(l+m-n)!}, & \text{falls } |m-n| \leq l \leq m+n, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.9)$$

gegeben. Man fixiert  $l_*$  und betrachtet den nichttrivialen  $l_*$ -Well-Fixpunkt mit dem Ziel, den entsprechenden kritischen Index  $\nu$  zu bestimmen.  $\alpha_{l_*}$  wird im folgenden mit  $\alpha_*$  bezeichnet. Durch Einsetzen der Entwicklungsansätze

$$\begin{aligned} \beta^{-2l} &= 2^{\frac{l}{l_*}} \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_l^{(k)} \epsilon^k, \\ a_n &= \sum_{k=0}^{\infty} a_n^{(k)} \epsilon^k \end{aligned} \quad (3.10)$$

in die zu (3.8) korrespondierende Fixpunktgleichung erhält man die Gleichung

$$\sum_{N=0}^{\infty} \epsilon^N 2^{\frac{N}{l_*}} \sum_{k=0}^N \kappa_l^{(k)} a_l^{(N-k)} = \sum_{N=0}^{\infty} \epsilon^N \sum_{k=0}^N \sum_{m,n \geq 0} \mathcal{C}_l^{m,n} a_m^{(k)} a_n^{(N-k)}. \quad (3.11)$$

Da man um  $Z(\phi) = 1$  entwickelt, setzt man  $a_l^{(0)} = \delta_{l,0}$ . Also folgt aus (3.11) nach Koeffizientenvergleich und unter Ausnutzung von  $\mathcal{C}_l^{m,n} = \mathcal{C}_l^{n,m}$ :

$$\begin{aligned} & 2^{\frac{l}{l_*}} \{ a_l^{(N)} + \sum_{k=1}^{N-1} \kappa_l^{(k)} a_l^{(N-k)} + \kappa_0^{(N)} \} \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}_l^{0,m} a_m^{(N)} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m,n \geq 0} \mathcal{C}_l^{m,n} a_m^{(k)} a_n^{(N-k)} \\ &= 2a_l^{(N)} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{m,n \geq 0} \mathcal{C}_l^{m,n} a_m^{(k)} a_n^{(N-k)}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die letzte Zeile folgt dabei aus  $\mathcal{C}_l^{0,m} = \delta_{l,m}$ , vergleiche (3.9). Durch die folgende Rechnung werden die Koeffizienten  $\kappa_l^{(k)}$  bestimmt. Aus  $\beta^{-2l} = L^{2l\alpha}$ ,  $\alpha = \alpha_* - \epsilon$  und  $\alpha_* = \frac{d_0}{2l_*}$  sowie  $L = 2^{\frac{1}{d_0}}$  folgt

$$\begin{aligned} \beta^{-2l} &= 2^{\frac{2l\alpha_*}{d_0}} e^{-\frac{2l\epsilon \log 2}{d_0}} \\ &= 2^{\frac{l}{l_*}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( -\frac{2l \log 2}{d_0} \right)^k \epsilon^k, \end{aligned} \quad (3.13)$$

das heißt

$$\kappa_l^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{k!} \left( -\frac{2l \log 2}{d_0} \right)^k, & \text{für } k > 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Für  $k > 0$  folgt insbesondere  $\kappa_0^{(k)} = 0$ . Aus (3.12) bekommt man für Ordnungen  $N \geq 1$ :

$$\left( 2^{\frac{l}{l_*}} - 2 \right) a_l^{(N)} = \sum_{k=1}^{N-1} \left( -2^{\frac{l}{l_*}} \kappa_l^{(k)} a_l^{(N-k)} + \sum_{m,n \geq 0} \mathcal{C}_l^{m,n} a_m^{(k)} a_n^{(N-k)} \right). \quad (3.15)$$

Aus dieser Beziehung erhält man alle Koeffizienten  $a_l^{(N)}$  der Ordnung  $N$ , für die  $l \neq l_*$  gilt. Für  $l = l_*$  schlüsselt man die rechte Seite von (3.15) weiter auf. Für  $N = 1$  hat (3.15) die Gestalt

$$\left( 2^{\frac{l}{l_*}} - 2 \right) a_l^{(1)} = 0. \quad (3.16)$$

Daraus folgt  $a_l^{(1)} = \rho \delta_{l,l_*}$  mit einem noch unbekannten Faktor  $\rho \in \mathbb{R}$ , der aus der Gleichung für die zweite Ordnung bestimmt wird. Für  $l = l_*$  und  $N = 2$  gilt nämlich

$$\begin{aligned} 0 &= -2\kappa_{l_*}^{(1)} a_{l_*}^{(1)} + \sum_{m,n \geq 0} \mathcal{C}_{l_*}^{m,n} a_m^{(1)} a_n^{(1)} \\ &= -2\kappa_{l_*}^{(1)} \rho + \rho^2 \mathcal{C}_{l_*}^{l_*,l_*}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Daraus folgert man  $\rho = 0$  oder  $\rho = \frac{2\kappa_{l_*}^{(1)}}{\mathcal{C}_{l_*}^{l_*,l_*}}$ . Die Lösung  $\rho = 0$  führt zu trivialen Lösungen. Durch Benutzung dieser Beziehungen erhält man für  $l = l_*$  und  $N \geq 3$  aus (3.15):

$$\begin{aligned} 0 &= -2\kappa_{l_*}^{(1)} a_{l_*}^{(N-1)} - 2 \sum_{k=2}^{N-2} \kappa_{l_*}^{(k)} a_{l_*}^{(N-k)} - 2\kappa_{l_*}^{(N-1)} \rho \\ &\quad + 2\rho \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_{l_*}^{l_*,n} a_n^{(N-1)} + \sum_{k=2}^{N-2} \sum_{m,n \geq 0} \mathcal{C}_{l_*}^{m,n} a_m^{(k)} a_n^{(N-k)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Durch Zusammenfassung und Indexverschiebung erhält man die allgemeine Formel für  $a_{l_*}^{(N)}$ :

$$\begin{aligned} a_{l_*}^{(N)} &= (2\kappa_{l_*}^{(1)})^{-1} \left\{ 2 \sum_{k=2}^{N-1} \kappa_{l_*}^{(k)} a_{l_*}^{(N+1-k)} - \sum_{k=2}^{N-1} \sum_{m,n \geq 0} \mathcal{C}_{l_*}^{m,n} a_m^{(k)} a_n^{(N+1-k)} \right. \\ &\quad \left. + 2\rho \kappa_{l_*}^{(N)} - 2\rho \sum_{n \geq 0, n \neq l_*} \mathcal{C}_{l_*}^{l_*,n} a_n^{(N)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Wegen  $l_\star > 0$  ist  $\kappa_{l_\star}^{(1)}$  ungleich Null. Für die Koeffizienten  $a_N^{(k)}$  des Fixpunktes hat man mit (3.15) und (3.19) also Rekursionsrelationen erhalten. Um eine Reihenentwicklung für den kritischen Exponenten  $\nu$  zu bekommen, berechnet man nun auf ähnliche Weise Rekursionsrelationen für die Eigenwerte und Eigenvektoren der linearisierten Transformation am Fixpunkt, der durch die Relationen (3.15) und (3.19) definiert wird. Diese Berechnung ist analog zur Rayleigh-Schrödinger Störungstheorie.

Die Linearisierung der Renormierungsgruppentransformation (3.8) an einem Fixpunkt  $a$  der Koeffizienten ist durch die Abbildung

$$U(a) : (\delta a_l)_l \mapsto \left( 2\beta^{2l} \sum_{m,n \geq 0} \mathcal{C}_l^{m,n} a_m \delta a_n \right)_l \quad (3.20)$$

gegeben (siehe (2.57)).  $U(a)$  kann als Matrix

$$U(a)_{l,n} = 2\beta^{2l} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}_l^{m,n} a_m \quad (3.21)$$

aufgefaßt werden. Für Vektoren  $x$  und  $y$  definiert man das Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  durch  $(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} x_l y_l$ .  $U(a)$  ist nicht symmetrisch bezüglich  $(\cdot, \cdot)$ . Durch  $(x, y)' := \sum_{l=0}^{\infty} \beta^{-2l} (2l)! x_l y_l$  ist aber ein Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)'$  gegeben, bezüglich dem  $U(a)$  symmetrisch ist. Daher sind alle Eigenwerte von  $U(a)$  reell. Um eine Entwicklung für die Matrix  $U(a)_{l,n}$  anzugeben, macht man den Ansatz  $U(a)_{l,n} = \sum_{k=0}^{\infty} U(a)_{l,n}^{(k)} \epsilon^k$ . Die Entwicklung von  $\beta^{2l}$  findet man aus (3.13) durch Einsetzen negativer Werte für  $l$ . Für die  $N$ -te Ordnung bekommt man dann die Entwicklung für  $U(a)$ :

$$U(a)_{l,n}^{(N)} = 2^{1-\frac{l}{l_\star}} \sum_{k=0}^N \kappa_{-l}^{(k)} \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{C}_l^{m,n} a_m^{(N-k)}. \quad (3.22)$$

Für die Ordnung  $\epsilon^0$  erhält man daraus mit  $a_m^{(0)} = \delta_{m,0}$  und  $\mathcal{C}_l^{0,n} = \delta_{l,n}$

$$U(a)_{l,n}^{(0)} = 2^{1-\frac{l}{l_\star}} \delta_{l,n}. \quad (3.23)$$

Dies ist natürlich die Linearisierung der Renormierungsgruppentransformation (3.8) am trivialen Fixpunkt in der Dimension  $d_{l_\star} = \frac{2l_\star}{l_\star-1}$ , die man in nullter Ordnung erhält, da man um diesen Fixpunkt entwickelt. Die Eigenwerte  $\lambda_l^{(0)}$  und die zugehörigen Eigenvektoren  $v_l^{(0)}$  von  $U(a)^{(0)}$  bilden zugleich die nullten Ordnungen für die Entwicklungen der Eigenwerte  $\lambda_l$  und der entsprechenden Eigenvektoren  $v_l$  der Transformation  $U(a)$ , die durch  $\lambda_l = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_l^{(k)} \epsilon^k$  und  $v_l = \sum_{k=0}^{\infty} v_l^{(k)} \epsilon^k$  definiert werden. Komponenten von  $v_l$  werden im folgenden mit  $v_l(m)$  bezeichnet, um Verwechslungen zu vermeiden. Die nullte Ordnung der Entwicklung läßt sich einfach angeben:

$$\lambda_l^{(0)} = 2^{1-\frac{l}{l_\star}}, \quad v_l^{(0)}(m) = \delta_{l,m}, \quad (3.24)$$

in Übereinstimmung mit den in Abschnitt 2.4.2 angegebenen Beziehungen.

Die Eigenwertgleichung

$$U(a)v_l = \lambda_l v_l \quad (3.25)$$

für  $U(a)$  kann durch Einsetzen der Entwicklungsansätze für  $U(a)$ ,  $v_l$  und  $\lambda_l$  in eine Gleichung für jede Ordnung  $\epsilon^N$  umgeformt werden:

$$\sum_{k=0}^N U(a)^{(k)} v_l^{(N-k)} = \sum_{k=0}^N \lambda_l^{(k)} v_l^{(N-k)}. \quad (3.26)$$

Für  $N = 1$  hat man also zum Beispiel

$$U(a)^{(0)} v_l^{(1)} + U(a)^{(1)} v_l^{(0)} = \lambda_l^{(0)} v_l^{(1)} + \lambda_l^{(1)} v_l^{(0)}. \quad (3.27)$$

Die Eigenvektoren  $v_l^{(0)}$  von  $U(a)^{(0)}$  sind bezüglich des Skalarproduktes  $(\cdot, \cdot)$  ortho-normiert. Durch Bildung des Skalarproduktes von (3.27) mit  $v_n^{(0)}$  bekommt man dann wegen  $U(a)_{n,l}^{(1)} = (v_n^{(0)}, U(a)^{(1)} v_l^{(0)})$ :

$$\lambda_n^{(0)} (v_n^{(0)}, v_l^{(1)}) + U(a)_{n,l}^{(1)} = \lambda_l^{(0)} (v_n^{(0)}, v_l^{(1)}) + \lambda_l^{(1)} \delta_{n,l}, \quad (3.28)$$

das heißt

$$\lambda_l^{(1)} \delta_{n,l} = (\lambda_n^{(0)} - \lambda_l^{(0)}) (v_n^{(0)}, v_l^{(1)}) + U(a)_{n,l}^{(1)}. \quad (3.29)$$

Daraus bekommt man  $\lambda_l^{(1)}$ , wenn man  $n = l$  setzt. Für alle  $n \neq l$  bekommt man außerdem die Entwicklungskoeffizienten  $v_l^{(1)}(n)$ . Für  $n = l$  fordert man zusätzlich  $v_l^{(1)}(l) = (v_l^{(0)}, v_l^{(1)}) = 0$ . Eine analoge Forderung wird unten an die Korrekturen an  $v_l^{(0)}$  höherer Ordnungen gestellt. Die gesamte Korrektur zu  $v_l^{(0)}$  soll also bildlich gesprochen senkrecht auf  $v_l^{(0)}$  stehen. Dies ist keine Einschränkung und kann durch eine Normierung erzielt werden, siehe unten.

Die gleiche Strategie wird auch für höhere Ordnungen  $N$  verfolgt. Aus (3.26) bekommt man durch Bildung des Skalarproduktes mit  $v_l^{(0)}$ :

$$\begin{aligned} \lambda_n^{(0)} (v_n^{(0)}, v_l^{(N)}) + \sum_{k=1}^N (v_n^{(0)}, U(a)^{(k)} v_l^{(N-k)}) = \\ \lambda_l^{(0)} (v_n^{(0)}, v_l^{(N)}) + \lambda_l^{(N)} \delta_{n,l} + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_l^{(k)} (v_n^{(0)}, v_l^{(N-k)}), \end{aligned} \quad (3.30)$$

das bedeutet

$$\begin{aligned} \lambda_l^{(N)} \delta_{n,l} = & (\lambda_n^{(0)} - \lambda_l^{(0)}) (v_n^{(0)}, v_l^{(N)}) + \sum_{k=1}^N (v_n^{(0)}, U(a)^{(k)} v_l^{(N-k)}) \\ & - \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_l^{(k)} (v_n^{(0)}, v_l^{(N-k)}). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Für  $n \neq l$  kann man hieraus die Komponenten  $v_l^{(N)}(n)$  bestimmen. Wie oben bereits angedeutet setzt man für  $N > 0$  zusätzlich

$$(v_l^{(0)}, v_l^{(N)}) = 0. \quad (3.32)$$

Dies ist keine Einschränkung. Wenn nämlich zunächst  $(v_l^{(0)}, v_l^{(N)}) = \eta$  gilt, so kann man ein  $\tilde{v}_l^{(N)}$  mit der Eigenschaft  $\tilde{v}_l^{(N)}(l) = 0$  durch  $\tilde{v}_l^{(N)} = v_l^{(N)} - \eta v_l^{(0)}$  definieren, und es gilt  $(U(a)^{(0)} - \lambda_l^{(0)} \mathbf{1}) \tilde{v}_l^{(N)} = (U(a)^{(0)} - \lambda_l^{(0)} \mathbf{1}) v_l^{(N)}$ . Die Länge von  $v_l$  in Richtung von  $v_l^{(0)}$  wird außerdem durch eine Normierung festgelegt. Für den Koeffizienten  $\lambda_l^{(N)}$  der  $N$ -ten Ordnung des Eigenwertes  $\lambda_l$  von  $U(a)$  folgt damit aus (3.31):

$$\lambda_l^{(N)} = \sum_{k=1}^N (v_l^{(0)}, U(a)^{(k)} v_l^{(N-k)}). \quad (3.33)$$

Die Gleichungen für die Komponenten der Eigenvektoren kann man noch besser verstehen, wenn man versucht, die Eigenvektoren koordinatenfrei zu bestimmen. Aus (3.26) bekommt man

$$(U(a)^{(0)} - \lambda_l^{(0)} \mathbf{1}) v_l^{(N)} = \sum_{k=1}^N (\lambda_l^{(k)} \mathbf{1} - U(a)^{(k)}) v_l^{(N-k)}. \quad (3.34)$$

Da der Eigenwert  $\lambda_l^{(0)}$  von  $U(a)^{(0)}$  nicht entartet ist, was hier aus (3.23) und (3.24) folgt, gilt also

$$v_l^{(N)} = (U(a)^{(0)} - \lambda_l^{(0)} \mathbf{1})^{-1} \left( \sum_{k=1}^N (\lambda_l^{(k)} \mathbf{1} - U(a)^{(k)}) v_l^{(N-k)} \right)^\perp, \quad (3.35)$$

wobei mit  $u^\perp$  der zu  $v_l^{(0)}$  orthogonale Anteil von  $u$  bezeichnet ist. Auf dem orthogonalen Komplement von  $v_l^{(0)}$  ist  $U(a)^{(0)} - \lambda_l^{(0)} \mathbf{1}$  invertierbar.

## 3.3 Numerik für die $\epsilon$ -Entwicklung

### 3.3.1 Erste Betrachtung

Die Rekursionsrelationen (3.15), (3.19) und (3.33) können mit Hilfe des Computeralgebra-Paketes Maple V Release 3 ausgewertet werden. Dazu müssen die Entwicklungen trunziert, das heißt bei einer bestimmten Ordnung  $k_{\max}$  abgebrochen werden. Hier werden die Entwicklungen maximal bis zur sechzehnten Ordnung berechnet. Bis zur sechsten Ordnung kann man die exakten analytischen Ausdrücke für die Entwicklung berechnen. In Abschnitt 3.4 findet man die Resultate für die Entwicklungskoeffizienten  $a_l^{(k)}$  bis zur dritten Ordnung für  $l_* = 2$  und  $d_0 = 3$ . Für  $k > 6$  wurde zur Berechnung eine numerische Version des Programmes eingesetzt, deren Fehler aber durch eine hinreichend große Stellenanzahl beliebig klein gemacht werden kann.



Da die  $\epsilon$ -Entwicklung divergent ist, wie auch weiter unten illustriert werden wird, muß man zur Auswertung dieser endlichen Reihen Summationsmethoden verwenden.

Wenn man die Entwicklung nach einer Ordnung  $k_{\max}$  abbricht, sind alle Koeffizienten mit  $l > l_{\star} k_{\max}$  oder  $k > k_{\max}$  gleich Null.  $l_{\star}$  ist dabei die Anzahl der Minima des nichttrivialen Fixpunktes, der durch die Entwicklung beschrieben werden soll. Im folgenden werden hier stets die Parameter  $l_{\star} = 2$  und  $d_0 = 3$  gesetzt. Die Bifurkationsdimension  $d_{l_{\star}}$  für den Double-Well-Fixpunkt ist  $d_{l_{\star}} = 4$ . Entsprechend gilt  $\alpha_{\star} = \frac{3}{4}$ . Das Ziel ist also, zu  $d = 3$ , das heißt  $\alpha = \frac{1}{2}$  zu extrapolieren. Dann ist  $\epsilon = \frac{1}{4}$ .

$k$	$\frac{a_0^{(k)}}{k!}$	$\frac{a_1^{(k)}}{k!}$	$\frac{a_2^{(k)}}{k!}$
10	$5.036590 \cdot 10^1$	$3.252972 \cdot 10^2$	$-2.013945 \cdot 10^3$
11	$-1.847783 \cdot 10^2$	$-1.187205 \cdot 10^3$	$7.734870 \cdot 10^3$
12	$6.598781 \cdot 10^2$	$4.222525 \cdot 10^3$	$-2.881935 \cdot 10^4$
13	$-2.297454 \cdot 10^3$	$-1.465376 \cdot 10^4$	$1.044291 \cdot 10^5$
14	$7.813242 \cdot 10^3$	$4.970444 \cdot 10^4$	$-3.689562 \cdot 10^5$
15	$-2.600825 \cdot 10^4$	$-1.650984 \cdot 10^5$	$1.274177 \cdot 10^6$
16	$8.491539 \cdot 10^4$	$5.380824 \cdot 10^5$	$-4.311386 \cdot 10^6$

Tabelle 3.1: *Illustration der Divergenz der  $\epsilon$ -Entwicklung.*

Die Divergenz der  $\epsilon$ -Entwicklung wird anhand von Tabelle 3.1 illustriert, in der  $\frac{a_0^{(k)}}{k!}$ ,  $\frac{a_1^{(k)}}{k!}$  und  $\frac{a_2^{(k)}}{k!}$  für  $10 \leq k \leq 16$  dargestellt sind. An dem Anwachsen dieser Größen erkennt man, daß die Koeffizienten  $a_l^{(k)}$  mit  $k$  stärker als faktoriell anwachsen. Wie vermutet, bedeutet dies, daß die entsprechenden Potenzreihen für die Koeffizienten  $a_l$  divergieren. Man erkennt ferner, daß die Koeffizienten  $a_l^{(k)}$  mit  $k$  alternierende Vorzeichen besitzen.

Für kleine Werte von  $\epsilon$  kann die naive Auswertung der Reihen für die Koeffizienten  $a_l^{(k)}$  im Sinne von asymptotischen Potenzreihen [Pit72] sinnvoll sein. Um einen ersten Eindruck zu gewinnen, sind daher in Abbildung 3.1 die Potentiale  $V$ , die man aus  $Z(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \gamma'^{-n} : \phi^{2n} :_{\gamma'}$  durch die Definition  $V(\phi) = -\log Z(\phi)$  erhält, naiv für  $\epsilon = \frac{3}{76}$  und  $\frac{3}{38}$  (entsprechend mit  $d = 3.8$  und  $d = 3.6$ ) ausgewertet und dargestellt worden. Dabei wurde die Entwicklung nach der zweiten, dritten oder vierten Ordnung abgebrochen. Zum Vergleich sind mit durchgezogenen Linien die entsprechenden numerisch bestimmten (exakten) Fixpunktpotentiale abgebildet. Im Bereich  $0 \leq \phi \leq 4$  sind die dargestellten Potentiale sehr flach. Dennoch läßt sich ohne Mühe die typische Double-Well-Struktur erkennen, die auch von den Potentialen der  $\epsilon$ -Entwicklung angenommen wird. Während für  $d = 3.8$ , also für einen kleineren Wert von  $\epsilon$ , die naive endliche Aufsummation ein zufriedenstellendes Resultat liefert, ist diese Approximation an das exakte Potential für  $d = 3.6$  weniger gut. Für große Felder gibt es in beiden Fällen Abweichungen.

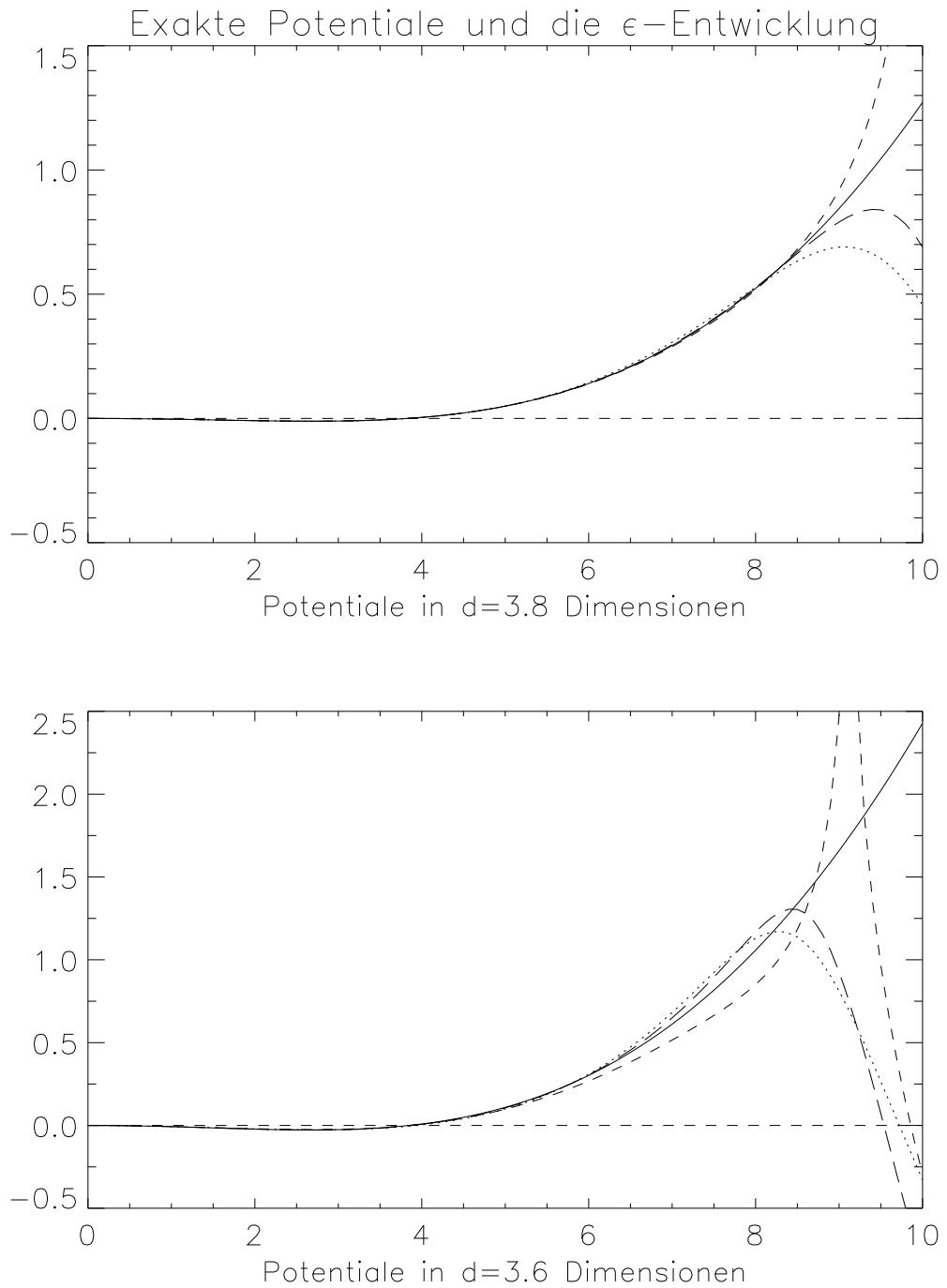


Abbildung 3.1: Vergleich des exakten Potentials mit den Potentials der  $\epsilon$ -Entwicklung der Ordnungen 2 bis 4 in den Dimensionen 3.8 und 3.6. Die durchgezogene Linie korrespondiert mit den exakten Daten. Die gepunktete Linie entspricht der zweiten Ordnung, die kurzgestrichelte Linie entspricht der dritten Ordnung, die langgestrichelte Linie entspricht der vierten Ordnung  $\epsilon$ -Entwicklung.

### 3.3.2 Bestimmung von Konvergenzradien

Da die in Tabelle 3.1 dargestellten Werte selbst nicht faktoriell mit  $k$  anwachsen, werden die Boreltransformierten  $\mathcal{B}_l$  der Reihen  $a_l = \sum_{k=0}^{\infty} a_l^{(k)} \epsilon^k$ , die durch

$$\mathcal{B}_l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_l^{(k)}}{k!} z^k \quad (3.36)$$

definiert sind, Konvergenzradien  $R_l$  größer als Null besitzen.

Zur Bestimmung von Konvergenzradien werden hier drei Methoden vorgestellt. Dazu betrachtet man eine Potenzreihe  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$  mit einem Konvergenzradius  $R$ .  $R$  kann nach Hadamard als Grenzwert

$$R = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|f_k|}} \quad (3.37)$$

bestimmt werden. Das ist numerisch jedoch nur selten sinnvoll [Jä90], da eine Extrapolation notwendig ist, wenn man nur eine endliche Teilsumme von  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$  kennt, und da der Grenzwert (3.37) nur langsam erreicht wird.

Mehr Information erhält man mit Hilfe der Quotientenmethode [Yeo92, Jä90]. Dabei nimmt man an, daß die erste Singularität von  $f$  an der Stelle  $z_c$  von der Form  $g(z) = (z_c - z)^\lambda$  ist. Wenn man  $g$  für  $|z| < |z_c|$  in eine Potenzreihe  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$  entwickelt, stellt man fest, daß für Quotienten aufeinanderfolgender Koeffizienten  $g_n$  und  $g_{n-1}$  gilt:

$$\frac{g_n}{g_{n-1}} = \frac{1}{z_c} - \frac{\lambda + 1}{z_c} \frac{1}{n}. \quad (3.38)$$

Dieses Verhalten erwartet man asymptotisch, also für große  $n$ , auch für die Quotienten  $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ . Zur Analyse des singulären Verhaltens und des Konvergenzradius  $R$  trägt man in einem Diagramm die Quotienten  $\frac{f_n}{f_{n-1}}$  gegen  $\frac{1}{n}$  auf. Falls sich für große  $n$  das lineare Verhalten (3.38) einstellt, kann man durch Extrapolation  $R$  und  $\lambda$  bestimmen.

Mit Hilfe der Padé-Methode erhält man, wie man anhand von Beispielen zeigt, die zuverlässigsten Resultate. Dabei bestimmt man alle Polstellen der  $(M, N)$ -Padé-Approximanten der Reihe  $f(z)$ , wenn diese bis zur Ordnung  $M + N$  bekannt ist. Ein  $(M, N)$ -Padé-Approximant an die Funktion  $f$  ist eine gebrochen rationale Funktion  $\frac{P_M}{Q_N}$  mit Zählergrad  $M$  und Nennergrad  $N$ , für die

$$\frac{P_M(z)}{Q_N(z)} = \sum_{n=0}^{M+N} f_n z^n + O(z^{M+N+1}) \quad (3.39)$$

gilt, siehe [ZJ93, De74, LG82] und darin enthaltene Referenzen. Falls  $M = N$  gilt, bezeichnet man  $\frac{P_M}{Q_M}$  auch als Diagonal-Padé Approximanten. Die Polstellen bildet man in einem Diagramm ab. Charakteristischerweise gibt es neben zahlreichen zufälligen Polen einen Häufungspunkt von Polstellen, der der wahren Singularität

entspricht. Das Arbeiten mit rationalen Approximanten hat den Nachteil, daß man nur schwer Aussagen über Fehler machen kann.

Für alle vorgestellten Methoden muß man viele Ordnungen der Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$  kennen. Weitere ausgefeiltere Methoden zur Bestimmung von  $R$  kann man in [De74] finden.

In Abbildung 3.2 sind die ersten 16 Glieder der zu  $\mathcal{B}_l$  gehörigen Hadamard-Folgen

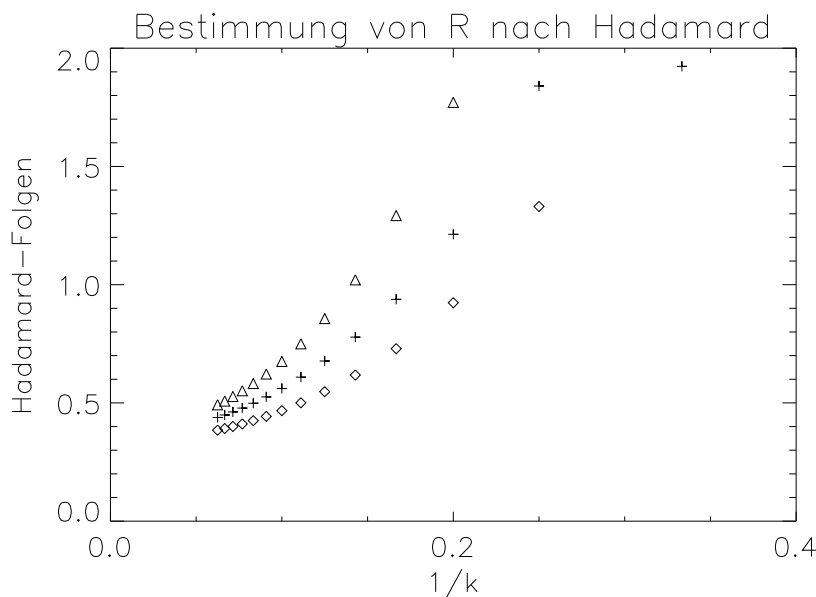


Abbildung 3.2: Bestimmung der Konvergenzradien  $R_l$ ,  $l = 0, 1, 2$ , nach Hadamard und mit der Quotientenmethode. Die Dreiecke entsprechen  $l = 0$ , die Kreuze entsprechen  $l = 1$ , die Rauten entsprechen  $l = 2$ . Oben sind die Hadamard-Folgen  $H_l^{(k)}$  gegen  $\frac{1}{k}$  aufgetragen.

$H_l = (H_l^{(k)})_k$  mit  $H_l^{(k)} = \frac{1}{\sqrt[k]{|a_l^{(k)}|/k!}}$  für  $l = 0, 1, 2$  gegen  $\frac{1}{k}$  aufgetragen. Hier und in den folgenden Abbildungen wird  $l = 0$  mit Dreiecken,  $l = 1$  mit Kreuzen und  $l = 2$  mit Rauten bezeichnet. Man erkennt, daß die Hadamard-Folgen streng monoton abfallen. Das Verhalten der Folgen ist sehr gleichmäßig; daher erscheint die Extrapolation zu  $k \rightarrow \infty$  zulässig. Dadurch erhält man für alle drei Radien den Wert

$$R = 0.35 \pm 0.1. \quad (3.40)$$

Die Quotientenmethode zur Bestimmung von  $R_0$ ,  $R_1$  und  $R_2$  ergibt ebenfalls für alle drei Radien den gleichen Wert

$$R = 0.43 \pm 0.05. \quad (3.41)$$

Dies kann man mit Hilfe von Abbildung 3.3 ermitteln, in der die Quotienten

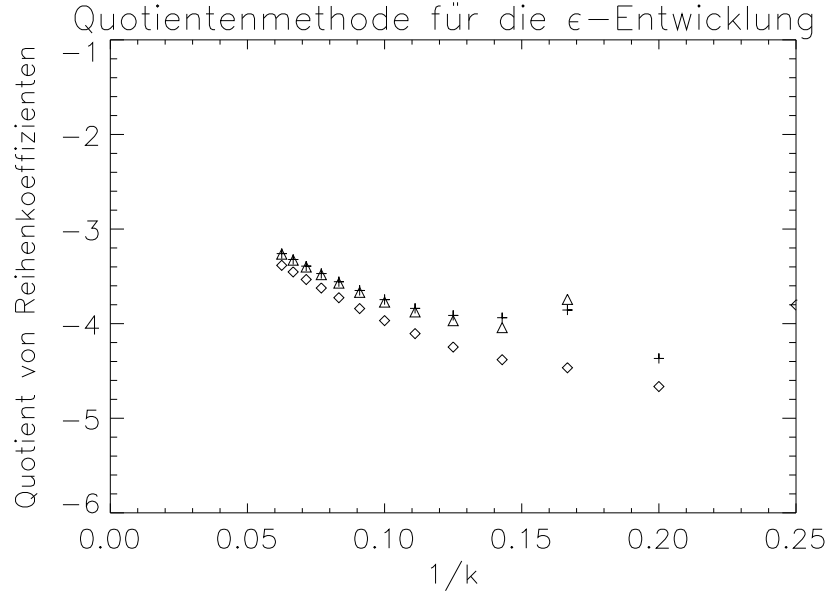


Abbildung 3.3: Bestimmung der Konvergenzradien von  $\mathcal{B}_0$  (Dreiecke),  $\mathcal{B}_1$  (Kreuze) und  $\mathcal{B}_2$  (Rauten) mit Hilfe der Quotientenmethode.

$\frac{a_l^{(k)}/k!}{a_l^{(k-1)}/(k-1)!}$  für  $l = 0, 1, 2$  gegen  $\frac{1}{k}$  für  $k \leq 16$  aufgetragen sind. Für  $k > 10$  erkennt man ein annähernd lineares Verhalten. Durch Extrapolation zu  $k \rightarrow \infty$  bestimmt man  $\frac{1}{R_l}$ . Die Polstellen der  $(M, N)$ -Padé-Approximanten für  $\mathcal{B}_l$ ,  $l = 0, 1, 2$  und  $M + N = 16$  sind in Abbildung 3.4 in der komplexen Ebene abgebildet. Im Gebiet  $-0.32 < \Re(z) < -0.29$ ,  $-0.15 < \Im(z) < 0.15$  häufen sich die Polstellen (unabhängig von  $l$ ). Nach dem oben beschriebenen Verfahren erhält man damit

$$R = 0.305 \pm 0.015. \quad (3.42)$$

Die erste Singularität der Boreltransformierten  $\mathcal{B}_l$  der Koeffizienten  $a_l$  liegt auf der negativen reellen Achse. Die Ergebnisse legen die Vermutung nahe, daß alle Boreltransformierten den gleichen Konvergenzradius besitzen, der einfach eine Eigenschaft der Entwicklung ist.

### 3.3.3 Bestimmung von $\nu$

Für den kritischen Index  $\nu$  des Infrarot-Fixpunktes in drei Dimensionen gilt die Beziehung

$$\nu = \frac{\log 2}{d \log \lambda_2}. \quad (3.43)$$

In Tabelle 3.2 sind zunächst die Koeffizienten  $\frac{\lambda_2^{(k)}}{k!}$  der Entwicklung der Boreltrans-

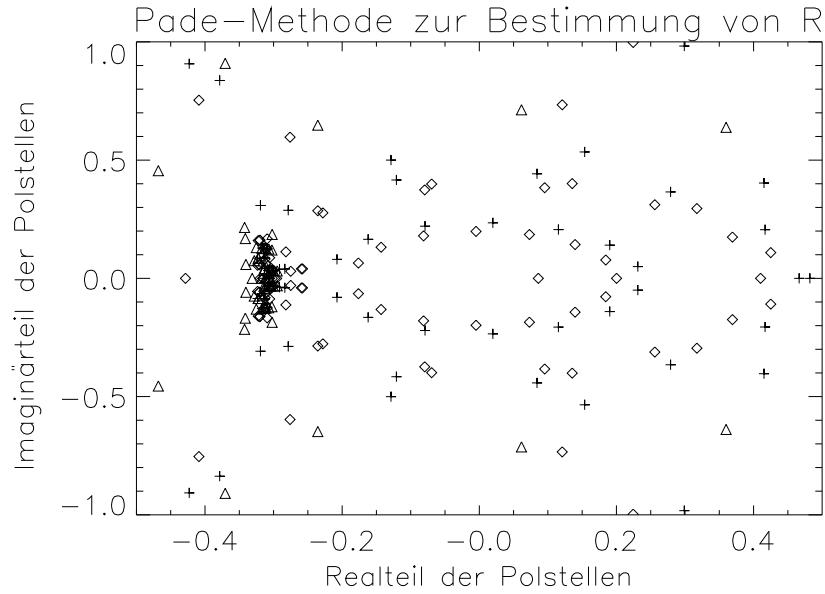


Abbildung 3.4: Bestimmung der Konvergenzradien von  $\mathcal{B}_0$  (Dreiecke),  $\mathcal{B}_1$  (Kreuze) und  $\mathcal{B}_2$  (Rauten) mit Hilfe der Padé-Methode.

formierten von  $\lambda_2$  für  $10 \leq k \leq 16$  dargestellt. Auch die Potenzreihe für  $\lambda_2$  divergiert und ist borelsummierbar.

Aus der Entwicklung von  $\lambda_2$  kann man mit (3.43) die  $\epsilon$ -Entwicklung für  $\nu$  angeben, die durch  $\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu^{(k)} \epsilon^k$  definiert wird. Die Koeffizienten  $\nu^{(k)}$  für  $0 \leq k \leq 16$  sind in Tabelle 3.3 eingetragen. Aus diesen Daten ist nun ein verlässlicher Schätzwert für  $\nu$  bei  $\epsilon = \frac{1}{4}$  zu bestimmen. Anhand von Abbildung 3.1 wurde bereits gezeigt, daß die Summation der Reihe für kleine  $\epsilon$  vernünftige Ergebnisse liefert. Daher ist zunächst der kritische Index für verschiedene Dimensionen  $d$  zwischen 3.9 und 3.0 durch Aufsummation der Reihe für  $\lambda_2$  bis zu verschiedenen Ordnungen  $k$  zwischen 1 und 6 bestimmt worden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.4 dargestellt. Für  $d = 3.9$  und  $d = 3.8$  sind die Werte bis zur sechsten Ordnung  $k = 6$  recht stabil. Bei Werten

$k$	$\frac{\lambda_2^{(k)}}{k!}$
10	$-3.408849 \cdot 10^4$
11	$1.306653 \cdot 10^5$
12	$-4.861021 \cdot 10^5$
13	$1.759290 \cdot 10^6$
14	$-6.209632 \cdot 10^6$
15	$2.142765 \cdot 10^7$
16	$-7.245656 \cdot 10^7$

Tabelle 3.2: Koeffizienten der Boreltransformierten von  $\lambda_2$ .

$k$	$\nu^{(k)}$	$k$	$\nu^{(k)}$
0	$6.666667 \cdot 10^{-1}$	9	$-4.402838 \cdot 10^9$
1	$-2.962963 \cdot 10^{-1}$	10	$1.737168 \cdot 10^{11}$
2	$1.712059 \cdot 10^0$	11	$-7.307089 \cdot 10^{12}$
3	$-1.340401 \cdot 10^1$	12	$3.255575 \cdot 10^{14}$
4	$2.123198 \cdot 10^2$	13	$-1.529128 \cdot 10^{16}$
5	$-4.520362 \cdot 10^3$	14	$7.544994 \cdot 10^{17}$
6	$1.182966 \cdot 10^5$	15	$-3.900244 \cdot 10^{19}$
7	$-3.570790 \cdot 10^6$	16	$2.107692 \cdot 10^{21}$
8	$1.200627 \cdot 10^8$		

Tabelle 3.3: Koeffizienten für die  $\epsilon$ -Entwicklung des kritischen Exponenten  $\nu$  bis zur 16. Ordnung.

Dimension	3.90	3.80	3.70	3.60	3.50
$k = 1$	0.508481	0.517268	0.526380	0.535836	0.545657
$k = 2$	0.508916	0.519116	0.530811	0.544269	0.559827
$k = 3$	0.508853	0.518566	0.528777	0.538954	0.548357
$k = 4$	0.508873	0.518927	0.530834	0.546351	0.569194
$k = 5$	0.508865	0.518617	0.528114	0.533100	0.523210
$k = 6$	0.508869	0.518941	0.532515	0.563448	0.685021
Padé Ord.6	0.508867	0.518790	0.527718	0.541039	0.553854
Padé Ord.16	0.508867	0.518769	0.529726	0.541815	0.555164
BP Ord. 6	0.508867	0.518769	0.529723	0.541804	0.555135
BP Ord.16	0.508867	0.518769	0.529726	0.541815	0.555163
exakt	0.508867	0.518769	0.529725	0.541815	0.555163
BP Ord.6 [PPW94]		0.51877	0.52973	0.54183	0.55525
Dimension	3.40	3.30	3.20	3.10	3.00
$k = 1$	0.555866	0.566489	0.577553	0.589088	0.601129
$k = 2$	0.577924	0.599140	0.624253	0.654341	0.690934
$k = 3$	0.555991	0.560606	0.560758	0.554980	0.542063
$k = 4$	0.607132	0.678401	0.838580	1.388938	-8.389390
$k = 5$	0.482710	0.404735	0.308848	0.225200	0.166242
$k = 6$	2.593126	-1.195697			
Padé Ord.6	0.567649	0.582511	0.598513	0.615739	0.634288
Padé Ord.16	0.569949	0.586410	0.604875	0.625797	0.649823
BP Ord. 6	0.569892	0.586331	0.604830	0.628627	0.649933
BP Ord.16	0.569946	0.586399	0.604836	0.625681	0.649501
exakt	0.569946	0.586400	0.604841	0.625700	0.649570
BP Ord.6 [PPW94]	0.56973	0.58791	0.60136	0.62599	

Tabelle 3.4: Bestimmung des kritischen Index  $\nu$  mit verschiedenen Methoden, die im Text näher erklärt werden.

von  $\epsilon$  kleiner als  $\frac{3}{76}$  erzielt man also bereits durch diese einfache Summation gute Resultate. Für größere Werte von  $\epsilon$ , das heißt für kleinere Dimensionen, erkennt man jedoch, daß diese naive Auswertung der Reihe für  $\nu$  nicht mehr stabil ist. Für  $k = 6$  und  $d < 3.5$  liefert die Aufsummation unvernünftige Resultate, für  $d < 3.3$  ergibt die naive Auswertung der Reihe von  $\lambda$  negative Werte. Um das Lesen der Tabelle zu erleichtern, sind in der vorletzten Zeile die exakten (numerischen) Resultate für  $\nu$  für  $L = 2^{\frac{1}{d}}$ , die in Abschnitt 2.6.2 berechnet wurden, eingetragen. Insbesondere der Vergleich mit diesen Daten verdeutlicht den Bedarf nach einer geeigneten Summationsmethode. Das einfachste Verfahren ist die Verwendung von rationalen Approximanten, speziell Padé-Approximanten, die die gleiche Taylorentwicklung wie  $\nu$  haben, jedoch als gebrochen rationale Funktionen von  $\epsilon$  geschrieben werden.

Die Ergebnisse für den kritischen Exponenten bei Verwendung eines Diagonal-Padé-Approximanten sind ebenfalls in Tabelle 3.4 eingetragen. Dabei wurde die Reihe bis zur sechsten und bis zur sechzehnten Ordnung verwendet. Während die Resultate sechster Ordnung für Dimensionen kleiner als 3.6 stark von den exakten Werten abweichen, treten in sechzehnter Ordnung starke Abweichungen von den wahren Werten erst ab  $d = 3.2$  auf. Alle Approximanten sechster Ordnung liefern zu kleine Resultate, während alle Werte sechzehnter Ordnung zu groß sind.

Noch bessere Ergebnisse können mit Hilfe der Borel-Padé Summation erhalten werden, da, wie oben demonstriert wurde, die Boreltransformierten der Potenzreihen in  $\epsilon$  mit einem Konvergenzradius größer als Null existieren.

Die Boreltransformierte einer Potenzreihe  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)} x^k$ , die durch  $\mathcal{B}_f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} z^k$  definiert ist, sei bis zur Ordnung  $k_{\max} = M + N$  bekannt. Wenn man diese Reihe durch einen  $M, N$ -Padé-Approximanten darstellt,

$$\mathcal{B}_f(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)} + O(z^{M+N+1}), \quad (3.44)$$

so gilt wegen  $k! = \Gamma(k+1) = \int_0^{\infty} dt \, t^k e^{-t}$  also näherungsweise

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} dt \, e^{-t} \frac{P_M(tx)}{Q_N(tx)} + \int_0^{\infty} dt \, e^{-t} O((tx)^{M+N+1}) \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{\infty} dt \, e^{-\frac{t}{x}} \frac{P_M(t)}{Q_N(t)} + O(x^{M+N+1}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Das Integral in (3.45) wird mit numerischen Standardmethoden, etwa der Simpsonregel, beliebig genau ausgewertet.

Zur Berechnung der Borel-Padé-Summation für  $\nu$  wurde die sechste und die sechzehnte Ordnung  $\epsilon$ -Entwicklung verwendet. Das Ergebnis für verschiedene Dimensionen bei Verwendung von Diagonal-Padé Approximanten ist in Tabelle 3.4 eingetragen. Für  $d = 3.9$  und  $d = 3.8$  weichen die beiden Ordnungen nicht voneinander ab. Für  $d = 3.1$  unterscheiden sich die 6. und die 16. Ordnung am meisten voneinander. In der letzten Zeile der Tabelle sind die Resultate der Borel-Padé Summation der gewöhnlichen  $\epsilon$ -Entwicklung bis zur sechsten Ordnung aus [PPW94] aufgetragen. Für  $d = 3$  entwickelt der Diagonal-Padé der Boreltransformierten der



gewöhnlichen  $\epsilon$ -Entwicklung eine nichtintegrable Singularität auf der positiven reellen Achse. Ein Vorteil der neuen  $\epsilon$ -Entwicklung ist, daß solche Pole nicht auftreten. Die Konvergenzanalyse der Boreltransformierten läßt vielmehr erwarten, daß man ohne Probleme bis zu  $\epsilon = 0.3$ , das heißt  $d = 2.8$  extrapolieren kann. Die Entwicklung wurde jedoch durch Wahl von  $d_0 = 3$  auf die dreidimensionalen Universalitätsklassen maßgeschneidert.

### 3.4 Anhang: Ergebnisse für die $\epsilon$ -Entwicklung

In den folgenden Formeln wurde  $R = \log 2$  gesetzt.

$$\begin{aligned}
a_0^{(0)} &= 1 \\
a_0^{(1)} &= 0 \\
a_2^{(1)} &= -\frac{R}{27} \\
a_0^{(2)} &= -\frac{8 R^2}{243} \\
a_1^{(2)} &= \frac{32 R^2}{243 \sqrt{2} - 486} \\
a_2^{(2)} &= \frac{2 R^2 (-171 \sqrt{2} + 324)}{-6561 \sqrt{2} + 8748} \\
a_3^{(2)} &= \frac{8 R^2}{729 \sqrt{2} - 729} \\
a_4^{(2)} &= \frac{R^2}{1458} \\
a_0^{(3)} &= \frac{32 R^3 (-171 \sqrt{2} + 324)}{-59049 \sqrt{2} + 78732} \\
a_1^{(3)} &= \frac{64 R^3 (189 \sqrt{2} - 378)}{196830 \sqrt{2} - 275562} \\
a_2^{(3)} &= \frac{32 R^3 (-2592 \sqrt{2} + 4158)}{-4251528 \sqrt{2} + 6022998} \\
a_3^{(3)} &= \frac{16 R^3 (270 \sqrt{2} - 432)}{413343 \sqrt{2} - 590490} \\
a_4^{(3)} &= \frac{2 R^3 (315 \sqrt{2} - 324)}{-177147 \sqrt{2} + 236196} \\
a_5^{(3)} &= -\frac{8 R^3}{19683 \sqrt{2} - 19683} \\
a_6^{(3)} &= -\frac{R^3}{118098}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

# Kapitel 4

## Die hierarchische $\phi^4$ -Trajektorie

### 4.1 Einleitung

In dem Block-Spin-Renormierungsschema von Wilson [Wil71, KW74] entsprechen renormierte Theorien renormierten Trajektorien von effektiven Wirkungen. Wenn man mit einer nackten Wirkung startet, wird die renormierte Trajektorie durch unendlich viele Iterationen von Block-Spin-Transformationen erreicht. Damit dieser Grenzwert existiert, müssen die nackten Kopplungen geändert werden, wenn die Anzahl der Iterationen erhöht wird.

Betrachtet man ein asymptotisch freien Modell im Bereich schwacher Kopplungen, muß man Kontrolle über die relevanten Kopplungen gewinnen, die unter Block-Spin-Transformationen anwachsen. Bei schwacher Kopplung kann man die relevanten Kopplungen durch naive Dimensionsbetrachtungen bestimmen. Die renormierte Trajektorie wird als instabile Mannigfaltigkeit eines trivialen (asymptotisch freien) Fixpunktes betrachtet. Dieses Renormierungsschema ist sowohl in Störungstheorie als auch darüber hinausgehend studiert worden, zum Beispiel in Arbeiten von Polchinski [Pol84], Gawedzki und Kupiainen [GK84a], Gallavotti [Gal85], Rivasseau [Riv91] und vielen anderen.

Obwohl dieses Bild seit den Anfängen der Renormierungsgruppe existiert [KW74], gibt es bisher nur wenige Vorschläge für eine Formulierung ohne nackte Wirkungen. In diesem Kapitel wird ein solcher Vorschlag am Beispiel der hierarchischen  $\phi^4$ -Trajektorie ausgearbeitet. Das hierarchische  $O(N)$ -Modell wurde in [WX94, WX95] auf ähnliche Weise untersucht, in [Wie96b] wurden die Ideen dieses Kapitels auf das volle Modell übertragen und zu einem sehr einfachen Renormierbarkeitsbeweis entwickelt.

Die  $\phi^4$ -Trajektorie wird als Kurve definiert, die vom trivialen Fixpunkt in  $\phi^4$ -Richtung ausgeht. Diese Kurve wird mit einer renormierten Störungsentwicklung in einer laufenden Kopplung berechnet. Im dreidimensionalen Fall wird die Entwicklung in einer laufenden Kopplung und ihrem Logarithmus durchgeführt. Zumindest in Störungstheorie ist die renormierte Trajektorie durch die Forderung festgelegt, daß sie invariant unter Renormierungsgruppentransformationen sein soll.

Eine renormierte Theorie erscheint im obigen Bild immer zusammen mit einer Kaskade von Theorien, die durch weitere Block-Spin Transformationen entstehen.

Obwohl die Transformation diskret ist, liegen diese Potentiale auf einer kontinuierlichen Kurve, die stabil unter Renormierungsgruppentransformationen ist. Diese Kurve soll hier berechnet werden. Das Ergebnis ist eine iterative Form von renormierter Störungstheorie, die eng mit der renormierten Baumentwicklung von Gallavotti et al. [GN85a, GN85b, FHRW88] verwandt ist. Die hier beschriebene Entwicklung ist aber von Anfang an frei von Divergenzen, die in einer Standard-Störungstheorie durch unendlich viele Renormierungsgruppentransformationen angehäuft werden. Es werden keine nackte Kopplungen benötigt. Ein Renormierungsgruppenschritt auf der  $\phi^4$ -Trajektorie wird zu einer Transformation der laufenden Kopplung mit einer Flußfunktion. Insbesondere werden auch Koordinaten betrachtet, bei deren Wahl die Flußfunktion linear ist. Eine ähnliche Idee wird in [EW84] und darin enthaltenen Verweisen verwendet.

Überraschenderweise weist die renormierte Störungsreihe in bestimmten diskreten Dimensionen Pole auf, die man auf Resonanzbedingungen zurückführen kann. Solche Singularitäten treten zum Beispiel in drei Dimensionen auf; sie werden durch eine Doppelentwicklung in der laufenden Kopplung und ihrem Logarithmus aufgelöst. Mit der Berechnung der laufenden Eigenvektoren und Eigenwerte entlang der renormierten Trajektorie sowie deren Fusionsregeln werden die Überlegungen fortgesetzt. Die renormierten Potentiale werden mit numerischen Ergebnissen verglichen.

Eine ähnliche Analyse kann man auch ausgehend vom Hochtemperaturfixpunkt durchführen. Die Störungsreihen, die man dadurch erhält, sind frei von Resonanzen.

## 4.2 Die $\phi^4$ -Trajektorie in vier Dimensionen

### 4.2.1 Die $\phi^4$ -Trajektorie

In diesem Kapitel wird die hierarchische Renormierungsgruppentransformation  $\mathcal{T}$  zugrunde gelegt.  $\mathcal{T}$  hat die Form

$$\mathcal{T}Z(\psi) = \left( \int d\mu_\gamma(\zeta) Z(\beta\psi + \zeta) \right)^{L^d}, \quad (4.1)$$

mit  $\beta = L^{1-\frac{d}{2}}$ . Wenn man ein Potential  $V$  durch  $Z(\phi) = e^{-V(\phi)}$  definiert, so hat die Renormierungsgruppentransformation für das Potential  $V$  die Gestalt

$$\mathcal{T}V(\psi) = -L^d \log \int d\mu_\gamma(\zeta) \exp(-V(\beta\psi + \zeta)). \quad (4.2)$$

Auch diese Transformation wird mit  $\mathcal{T}$  bezeichnet. Im folgenden werden nur gerade Potentiale betrachtet. Auch das effektive Potential ist dann gerade.

Im Raum der möglichen Potentiale wird nun eine Kurve  $V(\phi, g)$  definiert, die durch eine lokale Koordinate  $g$  parametrisiert wird. Diese Potentiale werden in der Basis (2.28) von Eigenvektoren der Transformation (4.1) am trivialen Fixpunkt  $V_* = 0$  entwickelt:

$$V(\phi, g) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{2n}(g) : \phi^{2n} :_{\gamma'}, \quad (4.3)$$

mit  $\gamma' = \frac{\gamma}{1-\beta^2}$ .

In der Nähe des trivialen Fixpunktes  $V_* = 0$  ist eine natürliche Koordinate  $g$  die  $:\phi^4$ -Kopplung, die durch

$$g = V_4(g) \quad (4.4)$$

definiert wird. Diese Koordinate wird zunächst verwendet. Als  $\phi^4$ -Trajektorie werden dann die Kurven  $V(\phi, g)$  bezeichnet, die durch die beiden folgenden Bedingungen festgelegt sind:

- 1)  $V(\phi, g)$  ist stabil unter  $\mathcal{T}$ . Dann folgt, daß es eine Funktion  $\beta(g)$  gibt, so daß

$$\mathcal{T}V(\phi, g) = V(\phi, \beta(g)) \quad (4.5)$$

gilt. Das bedeutet, daß sich eine Renormierungsgruppentransformation auf der renormierten Trajektorie durch eine Änderung der Koordinate ausdrücken läßt. Die Funktion  $\beta(g)$  ist natürlich von der Wahl der Koordinate abhängig. Wenn man die  $:\phi^4$ -Kopplung als Koordinate verwendet, wird die Funktion  $\beta$  als Flußfunktion bezeichnet.

- 2) An der Stelle  $g = 0$  ist die Kurve  $V(\phi, g)$  durch  $V(\phi, g = 0) = 0$  definiert. Die Tangente an  $V(\phi, g)$  am Punkt  $V(\phi, g = 0)$  ist durch

$$\left. \frac{\partial}{\partial g} \right|_{g=0} V(\phi, g) = :\phi^4 :_{\gamma'} \quad (4.6)$$

gegeben. Das bedeutet, daß die Kurve aus dem trivialen Fixpunkt in  $:\phi^4$ -Richtung heraus- oder hineinläuft. Die Bedingung (4.6) ist äquivalent zu  $V_4(g) = g + O(g^2)$ , zusammen mit  $V_{2n}(g) = O(g^2)$ , für  $n \neq 2$ .

Wie man später sehen kann, reichen diese Bedingungen nicht immer aus, um die  $\phi^4$ -Trajektorie eindeutig festzulegen. Um die Eindeutigkeit zu gewährleisten, kann man höhere Ableitungen am trivialen Fixpunkt vorgeben.

### 4.2.2 Störungstheorie in vier Dimensionen

Die  $\phi^4$ -Trajektorie kann durch eine Störungstheorie in  $g$  als Lösung der Bedingungen (4.5) und (4.6) berechnet werden. Potentiale auf der  $\phi^4$ -Trajektorie werden als skalierend bezeichnet. Ein Potential heißt skalierend in der Ordnung  $s$  in  $g$ , wenn es ein Funktion

$$\begin{aligned} \beta(g) &= \beta^{(s)}(g) + O(g^{s+1}) , \\ \beta^{(s)}(g) &= \sum_{r=1}^s b_r g^r \end{aligned} \quad (4.7)$$

gibt, so daß

$$\begin{aligned} V(\phi, g) &= V^{(s)}(\phi, g) + O(g^{s+1}) , \\ \mathcal{T}V^{(s)}(\phi, g) &= V^{(s)}(\phi, \beta(g)) + O(g^{s+1}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

und

$$V^{(1)}(\phi, g) = g : \phi^4 :_{\gamma'} \quad (4.9)$$

gelten. Sind  $\beta^{(s)}(g)$  und  $V^{(s)}(\phi, g)$  in einer bestimmten Ordnung  $s$  vorgegeben, so berechnet man daraus induktiv  $\beta^{(s+1)}(g)$  und  $V^{(s+1)}(\phi, g)$ . In vier Dimensionen und mit den Parametern  $L = 2$ ,  $\gamma = 1$  und  $\gamma' = \frac{4}{3}$  kann man diese induktive Berechnung gut demonstrieren.

Der Startpunkt der Iteration ist durch (4.9) gegeben. Mit Hilfe der Transformation  $\mathcal{T}$  bestimmt man aus dem nackten Potential  $V$  das effektive Potential. In zweiter Ordnung macht man den Ansatz

$$V^{(2)}(\phi, g) = c_0 g^2 + c_2 g^2 : \phi^2 : + g : \phi^4 : + c_6 g^2 : \phi^6 : . \quad (4.10)$$

Die Koeffizienten  $c_0$ ,  $c_2$  und  $c_6$  werden durch die Forderung bestimmt, daß (4.8) in zweiter Ordnung erfüllt sein soll. Unter einer Renormierungsgruppentransformation wird (4.10) auf

$$\begin{aligned} \mathcal{T}V^{(2)}(\phi, g(g')) &= (16c_0 - \frac{5440}{9})g'^2 + (4c_2 - 448)g'^2 : \phi^2 : \\ &\quad + g' : \phi^4 : + (\frac{c_6}{4} - 2)g'^2 : \phi^6 : + O(g'^3) \end{aligned} \quad (4.11)$$

abgebildet. Dabei wird die effektive Kopplung  $g'$  als Koeffizient von  $: \phi^4 :$  in dem Effektivpotential definiert.  $g'(g)$  ist durch

$$g'(g) = g - 60g^2 + O(g^3) \quad (4.12)$$

gegeben. Durch den Vergleich des Effektivpotentials als Funktion der effektiven Kopplung mit dem nackten Potential als Funktion der nackten Kopplung  $g$  und der Forderung, daß (4.8) in zweiter Ordnung erfüllt sein soll, schließt man, daß auf der  $\phi^4$ -Trajektorie

$$c_0 = \frac{1088}{27}, \quad c_2 = \frac{448}{3}, \quad c_6 = -\frac{8}{3} \quad (4.13)$$

gilt. Die Koeffizienten der Flußfunktion bis zur zweiten Ordnung sind durch

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -60 \quad (4.14)$$

gegeben. Daran erkennt man, daß die  $\phi^4$ -Kopplung in vier Dimensionen marginal irrelevant ist.

Damit ist der erste Schritt durchgeführt. Wenn man dieses Schema iteriert, kann man Ordnung für Ordnung vorgehen. Das heißt, daß man jeden Koeffizienten nur einmal bestimmen muß. Ein Koeffizient der Ordnung  $k$  kann nämlich keine Koeffizienten niedrigerer Ordnung als  $k$  erzeugen und so auch nicht auf bereits bestimmte Koeffizienten von niedrigerer Ordnung als  $k$  zurückwirken. Das Gleichungssystem, das man zur Berechnung der Koeffizienten der Ordnung  $k$  lösen muß, ist linear und

hat eine besonders einfache Gestalt. Dies sieht man besonders deutlich, wenn man den Ansatz (4.10) für die zweite Ordnung graphisch darstellt:

$$\begin{aligned}
 V(\phi) = & c_0 g^2 \quad \bullet \quad + c_2 g^2 \text{ --- } \bullet \text{ --- } + g \text{ --- } \bullet \text{ --- } \\
 & + c_6 g^2 \text{ --- } \bullet \text{ --- } + O(g^3). \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Die Vertices in dieser Gleichung können durch  $\gamma$ -Linien, die man Propagatoren nennt, zu komplizierteren Diagrammen kombiniert werden. Eine solche Verbindung zweier Vertexbeine durch einen Propagator nennt man auch Kontraktion. Die Ordnung eines durch Kontraktionen entstandenen Diagramms ist die Summe der Ordnungen seiner Vertices. Aufgrund der Normalordnung in (4.10) sind Selbstkontraktionen verboten. Das bedeutet, daß ein Propagator nicht zwei Beine eines Vertex verbinden darf. Das Effektivpotential, das sich aus (4.15) ergibt, kann dann als

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}V(\phi) = & \left\{ \bullet + \text{---} \bullet \text{---} \right\} + \left\{ \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \right\} \\
 & + \left\{ \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \right\} + \left\{ \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \right\} \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

dargestellt werden. Dabei sind alle dynamisch erzeugten  $\phi^4$ -Diagramme zweiter Ordnung berücksichtigt worden. Nun drückt man die Kopplung  $g$  durch die effektive Kopplung  $g'$  aus, die durch die  $\phi^4$ -Terme von Gleichung (4.16) gegeben ist. In der effektiven Kopplung kommen keine Koeffizienten des Ansatzes vor. Dies liegt an der Normalordnung, die in diesem Beispiel etwa einen  $\phi^4$ -Term

$$\text{---} \bullet \text{---} \tag{4.17}$$

verbietet.  $g'$  kann damit nur von niedrigeren Ordnungen abhängen. Durch den Übergang zur effektiven Kopplung findet damit auch keine Mischung zwischen den

zu bestimmenden Koeffizienten statt. Man erhält die einfache Form

$$\begin{aligned} \mathcal{T}V(\phi) = & \left(16c_0 - \frac{5440}{9}\right) g'^2 \quad \bullet \quad + (4c_2 - 448) g'^2 \text{ — } \bullet \text{ — } \\ & + g' \quad \text{— } \bullet \text{ — } + \left(\frac{c_6}{4} - 2\right) g'^2 \text{ — } \bullet \text{ — } + O(g'^3), \end{aligned} \quad (4.18)$$

unter Identifikation einiger Diagramme. Da die hierarchische Renormierungsgruppentransformation eine Renormierungsgruppe an einem Punkt ist, sind die dargestellten Diagramme keine Feynman-Graphen, die mit Integralen korrespondieren. Die Diagramme dienen vielmehr nur der Veranschaulichung. Aus (4.18) und den obigen Überlegungen ist nun klar, warum man zur Bestimmung der oben vorgeschlagenen Störungsreihen nur lineare Gleichungssysteme lösen muß. Außerdem ist klar, daß diese Gleichungssysteme in Systeme von linearen Gleichungen für je einen Störungskoeffizienten zerfallen.

Die allgemeine Form der störungstheoretischen Approximation an die  $\phi^4$ -Trajektorie bis zur Ordnung  $s$  lautet:

$$\begin{aligned} V^{(s)}(\phi, g) &= \sum_{n=0}^{s+1} c_{2n}^{(s)}(g) : \phi^{2n} : , \\ c_{2n}^{(s)}(g) &= \sum_{r=2}^s c_{2n,r} g^r , \quad n \leq 1 , \\ c_4^{(s)}(g) &= g , \\ c_{2n}^{(s)}(g) &= \sum_{r=n-1}^s c_{2n,r} g^r , \quad n \geq 3 . \end{aligned} \quad (4.19)$$

In (4.19) sind alle normalgeordneten Produkte einbezogen, die durch (4.2) aus (4.9) in der Ordnung  $s$  erzeugt werden können. Bei der Iteration fährt man wie oben fort unter Benutzung des Ansatzes (4.19) in der Ordnung  $s+1$ . Die Forderung (4.8) ergibt für die Koeffizienten der Ordnung  $s+1$  ein lineares Gleichungssystem. Dieses Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung: die  $\phi^4$ -Trajektorie. Der Koeffizient  $b_{s+1}$  der Flußfunktion ist bereits durch  $V^{(s)}(\phi, g)$  bestimmt.

### 4.2.3 Numerische Auswertung der Störungsreihen

Die oben vorgeschlagene Entwicklung kann man ohne Probleme bis zur zwölften Ordnung berechnen. In dritter Ordnung findet man zum Beispiel

$$\begin{aligned} c_0^{(3)}(g) &= \frac{1088}{27}g^2 - \frac{54784}{27}g^3, \\ c_2^{(3)}(g) &= \frac{448}{3}g^2 - \frac{497408}{27}g^3, \\ c_6^{(3)}(g) &= -\frac{8}{3}g^2 + 352g^3, \\ c_8^{(3)}(g) &= \frac{32}{3}g^3. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Außerdem gilt für die Flußfunktion in dritter Ordnung

$$\beta^{(3)}(g) = g - 60g^2 + 8880g^3. \tag{4.21}$$

In Tabelle 4.1 sind die Entwicklungskoeffizienten der Flußfunktion und exempla-

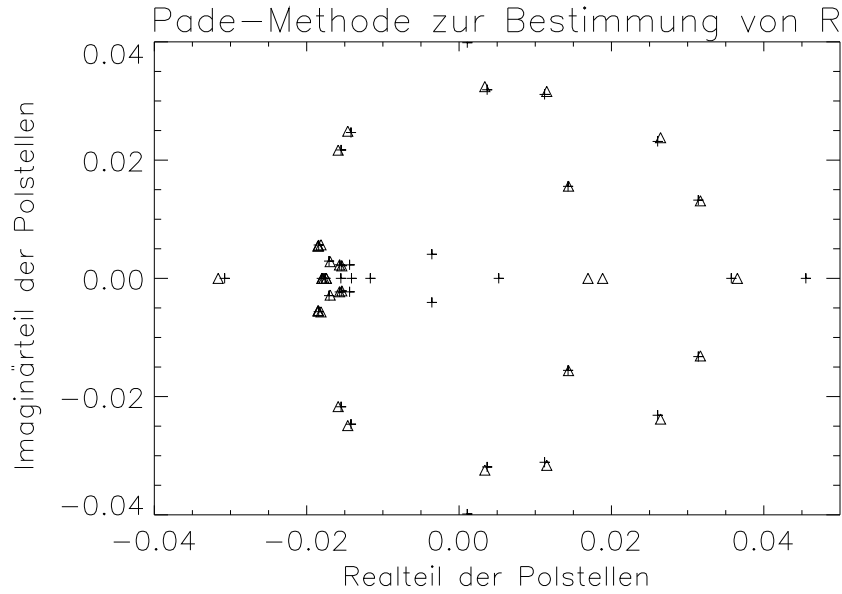
$k$	$b_k$	$c_{2,k}$	$c_{6,k}$
1	$1.000000 \cdot 10^0$	$0.000000 \cdot 10^0$	$0.000000 \cdot 10^0$
2	$-6.000000 \cdot 10^1$	$1.493333 \cdot 10^2$	$-2.666667 \cdot 10^0$
3	$8.880000 \cdot 10^3$	$-1.842252 \cdot 10^4$	$3.520000 \cdot 10^2$
4	$-2.106987 \cdot 10^6$	$4.542199 \cdot 10^6$	$-8.602548 \cdot 10^4$
5	$6.604897 \cdot 10^8$	$-1.504639 \cdot 10^9$	$2.836148 \cdot 10^7$
6	$-2.497771 \cdot 10^{11}$	$6.006543 \cdot 10^{11}$	$-1.130674 \cdot 10^{10}$
7	$1.085474 \cdot 10^{14}$	$-2.744995 \cdot 10^{14}$	$5.173130 \cdot 10^{12}$
8	$-5.267356 \cdot 10^{16}$	$1.395313 \cdot 10^{17}$	$-2.637661 \cdot 10^{15}$
9	$2.802384 \cdot 10^{19}$	$-7.748998 \cdot 10^{19}$	$1.471678 \cdot 10^{18}$
10	$-1.614629 \cdot 10^{22}$	$4.646171 \cdot 10^{22}$	$-8.877047 \cdot 10^{20}$
11	$9.987590 \cdot 10^{24}$	$-2.982658 \cdot 10^{25}$	$5.739832 \cdot 10^{23}$
12	$-6.590817 \cdot 10^{27}$	$2.037661 \cdot 10^{28}$	$-3.953788 \cdot 10^{26}$

Tabelle 4.1: *Entwicklungskoeffizienten der Flußfunktion, des Massenterms und des  $\phi^6$ -Terms bis zur zwölften Ordnung.*

risch die Entwicklungskoeffizienten von  $c_2(g)$  und  $c_6(g)$  bis zur zwölften Ordnung dargestellt. Die Koeffizienten haben alternierende Vorzeichen. Betragsmäßig wachsen sie stärker als  $k!$  an. Daher kann man nicht erwarten, daß die entsprechenden Potenzreihen Konvergenzradien größer als Null besitzen. Mit Hilfe der in Kapitel 3 erklärten Methoden kann man dies weiter untermauern.

Mit diesen Methoden kann man auch demonstrieren, daß die Potenzreihen  $c_{2n}(g)$  borelsummierbar sind. Die Boreltransformierten  $\mathcal{B}_{2n}(z)$  von  $c_{2n}(g)$  werden durch  $\mathcal{B}_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{2n,k}}{k!} z^k$  definiert. Exemplarisch werden die Konvergenzradien  $R_2$  von  $\mathcal{B}_2$  und  $R_6$  von  $\mathcal{B}_6$  mit Hilfe der Padé-Methode in Abbildung 4.1 untersucht. Mit Kreuzen werden die Daten für den Massenterm bezeichnet, mit Dreiecken die Daten



Abbildung 4.1: Padé-Methode für  $\mathcal{B}_2$  und  $\mathcal{B}_6$ .

für  $\mathcal{B}_6$ . In dem Gebiet  $-0.02 < \Re(z) < -0.01$ ,  $-0.08 < \Im(z) < 0.08$  häufen sich die Polstellen der Padé-Approximanten. Dadurch ergibt sich für  $R_2$  und  $R_6$  der Wert

$$R_2 = R_6 = 0.015 \pm 0.005. \quad (4.22)$$

Mit Hilfe der Quotientenmethode erhält man

$$R_2 = R_6 = 0.023 \pm 0.01, \quad (4.23)$$

mit der Hadamard-Methode bekommt man schließlich

$$R_2 = 0.02 \pm 0.01, \quad R_6 = 0.03 \pm 0.01. \quad (4.24)$$

Die Extrapolation, die bei diesen Methoden notwendig ist, erscheint zulässig, da das Verhalten der Hadamard-Folge und der Quotientenfolge sehr regulär ist.

Mit Hilfe der Padé-Methode kann man die Vermutung unterstützen, daß alle Konvergenzradien  $R_{2n}$  gleich sind.

## 4.3 Die $\phi^4$ -Trajektorie in beliebigen Dimensionen

### 4.3.1 Resonanzen

Das in Abschnitt 4.2.2 erklärte Schema kann auch in Dimensionen ungleich Vier angewendet werden, um die hierarchische  $\phi^4$ -Trajektorie zu berechnen. Die Lösung ist dann ebenfalls von der Gestalt (4.19). Dabei muß man aber ein neues Phänomen

berücksichtigen. Die Verbesserungsparameter  $c_{2n}^{(s)}$  haben als Funktion der Dimension  $d$  Pole an bestimmten diskreten Punkten. Diese Pole werden hier als Resonanzen bezeichnet. Die Resonanzen kann man darauf zurückführen, daß bestimmte Skalierungsparameter an diesen Punkten einander gleichen. Dieses Phänomen tritt insbesondere im dreidimensionalen Fall auf.

Wenn man die Renormierungsgruppentransformation (4.2) mit der Blocklänge  $L = 2$  und der Kovarianz  $\gamma = 1$  betrachtet, die Dimension aber als freien Parameter nicht spezifiziert, sondern durch die Variable  $\alpha = L^d$  parametrisiert, so erhält man in dritter Ordnung die Verbesserungskoeffizienten

$$\begin{aligned}
c_0^{(3)} &= \frac{12\alpha^3(\alpha+4)(\alpha^2+16)}{(\alpha^3-256)(\alpha-4)^3}g^2 \\
&\quad - \frac{288\alpha^4(\alpha^5+32\alpha^3+512\alpha^2+4096)(\alpha+4)^2}{(\alpha+8)(\alpha-8)(\alpha^2+64)(\alpha^3-256)(\alpha-4)^4}g^3, \\
c_2^{(3)} &= \frac{48\alpha^2(\alpha^2+4\alpha+16)}{(\alpha-8)(\alpha+8)(\alpha-4)^2}g^2 \\
&\quad - \frac{384\alpha^3(7\alpha^5+46\alpha^4+288\alpha^3+1728\alpha^2-1024\alpha-22528)}{(\alpha+8)(\alpha-8)(\alpha^3-1024)(\alpha-4)^3}g^3, \\
c_6^{(3)} &= -\frac{8}{3}g^2 - \frac{576\alpha(\alpha+6)}{(\alpha-4)(\alpha-64)}g^3, \\
c_8^{(3)} &= \frac{32}{3}g^3.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Diese Koeffizienten sind also als gebrochen rationale Funktionen gegeben. Die Flußfunktion ist in dieser Ordnung gleich

$$\begin{aligned}
\beta^{(3)}(g) &= \frac{16}{\alpha}g - \frac{576(\alpha+4)}{\alpha(\alpha-4)}g^2 \\
&\quad + \frac{256(215\alpha^4+1400\alpha^3-10128\alpha^2)}{\alpha(\alpha-8)(\alpha+8)(\alpha-4)^2}g^3 \\
&\quad - \frac{256(95744\alpha+355328)}{\alpha(\alpha-8)(\alpha+8)(\alpha-4)^2}g^3.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Singularitäten findet man an den folgenden positiven Dimensionen:

	$g^2$			$g^3$	
$\alpha$	4	$256^{\frac{1}{3}}$	8	$1024^{\frac{1}{3}}$	64
$d$	2	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$	6

Tabelle 4.2: Polstellen der Ausdrücke (4.25) und (4.26) in der Ordnung  $g^2$  bzw.  $g^3$ , ausgedrückt durch die Dimension  $d$  und durch  $\alpha = L^d$ .

Wenn man zu höheren Ordnungen in  $g$  vorgeht, findet man in den Verbesserungskoeffizienten immer mehr Pole. Um dieses Verhalten genauer zu studieren, kann

man den dreidimensionalen Pol in zweiter Störungsordnung etwas näher betrachten. Wenn man den Ansatz (4.10) in drei Dimensionen in (4.2) einsetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{TV}^{(2)}(\phi, g(g')) &= (2c_0 - 360) + (c_2 - 336) g'^2 : \phi^2 : \\ &+ g' : \phi^4 : + \left(\frac{c_6}{4} - 2\right) g'^2 : \phi^6 : + O(g'^3). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Die Parameter von (4.2) sind  $d = 3$ ,  $L = 2$  und  $\gamma = 1$ . Die normalordnende Kovarianz ist  $\gamma' = 2\gamma$ . Die Flußfunktion ist zu dieser Ordnung durch

$$g'(g) = 2g - 216g^2 + O(g^3) \quad (4.28)$$

gegeben. Man erkennt, daß die  $:\phi^4:-$ Kopplung in drei Dimensionen relevant ist. Aus (4.27) würde man

$$c_0 = 360, \quad c_6 = -\frac{8}{3} \quad (4.29)$$

schließen. Aber die Gleichung

$$c_2 = c_2 - 336 \quad (4.30)$$

für  $c_2$  wird nur durch  $c_2 = \infty$  gelöst. Daraus folgt, daß die  $:\phi^2:-$ Kopplung in drei Dimensionen auf der  $\phi^4$ -Trajektorie nicht durch eine Potenzreihe in der  $:\phi^4:-$ Kopplung ausgedrückt werden kann. Durch Iteration von (4.27) erkennt man, daß die  $:\phi^2:-$ Kopplung wie

$$-336 n 2^{2n} \quad (4.31)$$

fließt. Zur Berechnung der  $\phi^4$ -Trajektorie in den resonanten Dimensionen wird hier daher eine Entwicklung in der Kopplung  $g$  und ihrem Logarithmus  $\log g$  vorgeschlagen.

### 4.3.2 Lineare Flußfunktion

Bisher wurde die  $:\phi^4:-$ Kopplung als Koordinate auf der  $\phi^4$ -Trajektorie verwendet. Diese natürliche Koordinate ist durch die Bedingung  $V_4(g) = g$  definiert, vergleiche (4.4). Wenn man aber etwa  $\log g$  durch die effektive Kopplung  $g'$  ausdrücken möchte, führt dies zu Komplikationen. Man kann aber genausogut die Flußfunktion vorgeben, und dadurch eine Koordinate auf der  $\phi^4$ -Trajektorie definieren. Am einfachsten ist die lineare Koordinate, die durch die Bedingung

$$\beta(g) = L^{4-d} g \quad (4.32)$$

auf der  $\phi^4$ -Trajektorie definiert ist. Wenn man diese Koordinate verwendet, sieht eine Renormierungsgruppentransformation genau wie die linearisierte Transformation aus.

Wenn man die obige Entwicklung mit der linearen Flußfunktion durchführt, wird auch der  $\phi^4$ -Koeffizient

$$V_4(g) = g + \sum_{r=2}^{\infty} V_{4,r} g^r \quad (4.33)$$

zu einer Potenzreihe, die berechnet werden muß. Die Strategie zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten bleibt dabei gleich. Für  $L = 2$  und  $\gamma = 1$  ist die  $\phi^4$ -Trajektorie in dritter Ordnung durch

$$\begin{aligned} V_0^{(3)} &= \frac{12\alpha^3(\alpha+4)(\alpha^2+16)}{(\alpha^3-256)(\alpha-4)^3} g^2 \\ &\quad + \frac{576\alpha^4(\alpha^3+8\alpha^2+8\alpha+256)(\alpha+4)^2}{(\alpha-16)(\alpha+8)(\alpha-8)(\alpha^2+64)(\alpha-4)^4} g^3, \\ V_2^{(3)} &= \frac{48\alpha^2(\alpha^2+4\alpha+16)}{(\alpha-8)(\alpha+8)(\alpha-4)^2} g^2 \\ &\quad + \frac{768\alpha^3(\alpha^6+69\alpha^5+368\alpha^4-2880\alpha^3)}{(\alpha-16)(\alpha+8)(\alpha-8)(\alpha^3-1024)(\alpha-4)^3} g^3 \\ &\quad + \frac{768\alpha^3(-22528\alpha^2-144384\alpha-475136)}{(\alpha-16)(\alpha+8)(\alpha-8)(\alpha^3-1024)(\alpha-4)^3} g^3, \\ V_4^{(3)} &= g + \frac{36\alpha(\alpha+4)}{(\alpha-4)(\alpha-16)} g^2 \\ &\quad - \frac{16\alpha^2(53\alpha^5-3336\alpha^4-24752\alpha^3)}{(\alpha+8)(\alpha-8)(\alpha+16)(\alpha-16)^2(\alpha-4)^2} g^3 \\ &\quad - \frac{16\alpha^2(149248\alpha^2+1342464\alpha+5685248)}{(\alpha+8)(\alpha-8)(\alpha+16)(\alpha-16)^2(\alpha-4)^2} g^3, \\ V_6^{(3)} &= -\frac{8}{3} g^2 - \frac{384\alpha(2\alpha^2-45\alpha-272)}{(\alpha-4)(\alpha-16)(\alpha-64)} g^3, \\ V_8^{(3)} &= \frac{32}{3} g^3 \end{aligned} \quad (4.34)$$

gegeben. In jeder Ordnung Störungstheorie findet man ein System von linearen Gleichungen mit einer eindeutigen Lösung. Die Koeffizienten sind abermals gebrochen rationale Funktionen in  $\alpha = L^d$  mit Polen an resonanten Dimensionen. Zusätzlich zu den Dimensionen in Tabelle 4.2 findet man hier auch einen Pol bei  $d = 4$ . In vier Dimensionen wird (4.32) zur Identität, und (4.5) wird eine Fixpunktgleichung.

Resonanzen kann man nun gut verstehen. Zur Ordnung  $k$  wirkt die Transformation (4.2) wie

$$\begin{aligned} cg^k : \phi^{2n} &\mapsto L^{d+n(2-d)} cg^k : \phi^{2n} : \\ &= L^{d+n(2-d)-k(4-d)} c\beta(g)^k : \phi^{2n} : . \end{aligned} \quad (4.35)$$

Eine Resonanz entsteht, wenn

$$d + n(2-d) - k(4-d) = 0 \quad (4.36)$$

gilt. In drei Dimensionen wird diese Bedingung zu

$$3 - n - k = 0 . \quad (4.37)$$

Da hier  $m \geq 2$  ist, gibt es in drei Dimensionen nur zwei resonante Terme  $(n, k)$ , nämlich  $(1, 2)$  und  $(0, 3)$ . Die erste Singularität ist eine Massenresonanz in zweiter Ordnung, die zweite Singularität ist eine Vakuumresonanz. Die resonanten Dimensionen sind rational und durch

$$d = \frac{4k - 2n}{k + 1 - n} \quad (4.38)$$

gegeben. Insbesondere wird Tabelle 4.2 durch diese Vorschrift reproduziert.

Nun sollen die resonanten Dimensionen und die interessantesten resonanten Terme etwas genauer klassifiziert werden. Für  $d \neq 2$  folgt aus (4.36):

$$n = k + 1 - \frac{2(k - 1)}{d - 2}. \quad (4.39)$$

Wenn man oberhalb von vier Dimensionen  $d - 2 = \frac{p}{q} > 2$  setzt, so ist  $p > 2q$ . Man wählt  $k - 1 = p$ . Daraus folgt

$$n = p + 2 - 2q \geq 3. \quad (4.40)$$

Da die Ungleichung  $n \leq k + 1$  erfüllt ist, ist der Term  $(n, k) = (p - 2q + 2, p + 1)$  resonant. Das bedeutet, daß oberhalb von  $d = 4$  jede rationale Dimension resonant ist.

Nun betrachtet man die Funktion

$$d(n, k) = \frac{4k - 2n}{k + 1 - n} \quad (4.41)$$

für  $1 \leq k < \infty$  und  $0 \leq n \leq k$ . Es gilt  $d(2, k) = 4$ . Durch Induktion kann man zeigen, daß für gegebenes  $k$  die Folge  $(d(n, k))_n$  streng monoton wachsend ist. Wenn man sich auf Dimensionen zwischen Zwei und Vier beschränkt, gibt es also nur Vakuumresonanzen ( $n = 0$ ) und Massenresonanzen ( $n = 1$ ). Für  $k \geq 2$  gilt:

$$\begin{aligned} d(1, k) &= 4 - \frac{2}{k} \\ d(0, k) &= \frac{4k}{k + 1}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Zwischen zwei und vier Dimensionen kennt man also alle resonanten Terme und die Ordnungen in denen sie auftreten. Oberhalb von  $d = 4$  liegen die resonanten Dimensionen dicht. Aus (4.42) geht hervor, daß die resonanten Dimensionen  $2 < d < 4$  diskret liegen und sich nur bei  $d = 4$  häufen. Pro Dimension kann es maximal zwei resonante Terme geben.

Eine interessante Spielart der linearen Flußfunktion ist die quadratische Flußfunktion. Dabei definiert man:

$$\begin{aligned}\beta(g) &= b_1 g + b_2 g^2, \\ b_1 &= L^{4-d}, \\ b_2 &= 36 L^{4-d} \frac{L^2 + L^d}{L^2 - L^d}.\end{aligned}\tag{4.43}$$

Das bedeutet, daß die Flußfunktion (4.5) zur zweiten Ordnung Störungstheorie in der  $\phi^4$ -Kopplung  $g$  trunkiert wird. Allgemeiner kann man auch bei höheren Ordnungen trunkieren. Diese Flußfunktion hat einen Fixpunkt bei endlichen Werten von  $g$ , falls  $d < 4$  gilt. Wenn man annimmt, daß die Entwicklung auf irgendeine Art summierbar ist, so folgt, daß sich der nichttriviale 2-Well-Fixpunkt auf der  $\phi^4$ -Trajektorie befindet. Ein Fixpunkt der Flußfunktion macht (4.5) zur Fixpunktgleichung. Durch einen Fixpunkt von (4.43) erhält man also einen Fixpunkt von  $\mathcal{T}$ . Für eine Doppelentwicklung in der Kopplung und ihrem Logarithmus ist aber die lineare Flußfunktion am besten geeignet.

### 4.3.3 Störungstheorie in $g$ und $\log g$

Bei der Berechnung der  $\phi^4$ -Trajektorie in drei Dimensionen hat man das Problem, daß  $c_2$  in (4.27) nicht so bestimmt werden kann, daß die Wirkung zur zweiten Ordnung invariant unter Renormierungsgruppentransformationen ist. Um dieses Problem zu untersuchen, benutzt man die lineare Flußfunktion und entwickelt das Potential in  $g$  und  $\kappa = \log g$ . In dieser Entwicklung wird  $\kappa$  als unabhängige Variable der Ordnung  $g^0$  behandelt. In der Entwicklung tritt  $\kappa$  aber stets in der Kombination  $g^l \kappa$  mit  $l > 1$  auf, so daß es im Limes  $g \rightarrow 0$  keine Probleme gibt. In zweiter Ordnung in  $g$  wird der Ansatz (4.10) durch

$$V^{(2)}(\phi, g) = c_0 g^2 + (c_2 + c_{2,1} \kappa) g^2 : \phi^2 : + (g + c_4 g^2) : \phi^4 : + c_6 g^2 : \phi^6 : \tag{4.44}$$

ersetzt. Alle Terme, die sich hinterher als Null auf der  $\phi^4$ -Trajektorie ergeben, wurden hier von vornherein weggelassen. Die effektiven Entwicklungsparameter sind durch  $g' = 2g$  und  $\kappa' = \kappa + \log 2$  gegeben. Drückt man das Effektivpotential, das man aus (4.44) mit der Transformation (4.2) erhält, durch diese Koordinaten aus, so erhält man:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}V^{(2)}(\phi, g(g')) &= (2c_0 - 360) g'^2 \\ &+ (c_2 - \log 2 c_{2,1} - 336 + c_{2,1} \kappa') g'^2 : \phi^2 : \\ &+ \left( g' + \left( \frac{c_4}{2} - 54 \right) g'^2 \right) : \phi^4 : \\ &+ \left( \frac{c_6}{4} - 2 \right) g'^2 : \phi^6 : + O(g'^3).\end{aligned}\tag{4.45}$$

Daraus folgt, daß der Ansatz (4.44) sich genau dann bis auf eine Änderung der laufenden Kopplung (4.32) reproduziert, wenn

$$c_0 = 360, \quad c_4 = -108, \quad c_6 = -\frac{8}{3}, \quad c_{2,1} = -\frac{336}{\log 2} \tag{4.46}$$

gilt. Der Parameter  $c_2$  ist frei wählbar. Zu zweiter Ordnung in  $g$  findet man damit eine einparametrische Schar von Lösungen für (4.5) und (4.6). Der freie Parameter  $c_2$  korrespondiert mit der Massenresonanz  $(1, 2)$  von (4.37). Auch in dritter Ordnung erwartet man einen freien Parameter, der von der Vakuumresonanz  $(0, 3)$  stammt. Dies tritt tatsächlich ein. In dritter Ordnung lautet die allgemeine Lösung von (4.5) und (4.6):

$$\begin{aligned}
V^{(3)}(\phi, g) = & 360g^2 + \frac{54432}{\log 2}g^3\kappa + c_0g^3 \\
& + \left( c_2g^2 - \frac{336}{\log 2}g^2\kappa + (116928 - 36c_2)g^3 + \frac{12096}{\log 2}g^3\kappa \right) : \phi^2 : \\
& + \left( g - 108g^2 + (17520 - \frac{8}{3}c_2)g^3 + \frac{896}{\log 2}g^3\kappa \right) : \phi^4 : \\
& + \left( -\frac{8}{3}g^2 + 864g^3 \right) : \phi^6 : \\
& + \frac{32}{3}g^3 : \phi^8 : .
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Dabei sind  $c_0$  und  $c_2$  als freie Parameter enthalten. Da es in höheren Ordnungen keine weiteren Resonanzen gibt, erwartet man auch keine zusätzlichen freien Parameter. Das bedeutet, daß die Forderungen (4.5) und (4.6) zur eindeutigen Definition der  $\phi^4$ -Trajektorie in drei Dimensionen nicht ausreichen. Zusätzlich muß man durch zwei Bedingungen  $c_0$  und  $c_2$  festlegen. Hier wird

$$c_0 = 0, \quad c_2 = 0 \tag{4.48}$$

gewählt, so daß die Störungsreihe eine minimale Anzahl von Vertices besitzt. Man kann (4.48) als zusätzliche Renormierungsbedingungen betrachten. Eine Diskussion der freien Parameter findet man in Abschnitt 4.6. In höheren Ordnungen iteriert das oben erklärte Schema. Die allgemeine Form des Potentials in der Ordnung  $s$  ist

$$\begin{aligned}
V^{(s)}(\phi, g) &= \sum_{n=0}^{s+1} V_{2n}^{(s)}(g) : \phi^{2n} : , \\
V_{2n}^{(s)}(g) &= \sum_{r=2}^s \sum_{t=0}^{[r/2]} V_{2n,r,t} g^r \kappa^t, \quad n \leq 1, \\
V_4^{(s)}(g) &= g + \sum_{r=2}^s \sum_{t=0}^{[r/2]} V_{4,r,t} g^r \kappa^t, \\
V_{2n}^{(s)}(g) &= \sum_{r=n-1}^s \sum_{t=0}^{[r/2]} V_{2n,r,t} g^r \kappa^t, \quad n \geq 3.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Die Koeffizienten dritter Ordnung sind dabei durch (4.47), zum Beispiel ergänzt mit (4.48), gegeben. In jeder weiteren Ordnung Störungstheorie erhält man ein System von linearen Gleichungen, das eine eindeutige Lösung für die Koeffizienten besitzt: die  $\phi^4$ -Trajektorie, ausgedrückt durch eine Doppelentwicklung. In (4.49) sollte  $\kappa$  durch  $\log g$  substituiert werden.

#### 4.3.4 Numerische Berechnung der renormierten Trajektorie

Hierarchische Renormierungsgruppenflüsse können mit Standardmethoden numerisch verfolgt werden. An dieser Stelle wird eine numerische Analyse der Transformation (4.2) durchgeführt, um den Gültigkeitsbereich der Entwicklung (4.49) in  $g$  und  $\log g$  zu ermitteln. Außerdem soll das Verhalten der Entwicklung für große Felder bestimmt werden. Für die Iteration wird ein spezielles Verfahren gewählt, damit der Großfeldbereich möglichst mitberücksichtigt wird. Die Iteration mit der algebraischen Methode in Abschnitt 2.6.4 reicht dazu nicht aus. Um die Transformation (4.2) iterativ zu bestimmen, wird das Potential  $V$  an  $N$  äquidistanten Stützstellen zwischen 0 und  $\phi_{\max}$  gespeichert. Dann wird mit Hilfe von kubischen Splines interpoliert und integriert [Num91]. Um Randeffekte bei  $\phi = \phi_{\max}$  zu vermindern, wird  $\phi_{\max}$  stets so gewählt, daß  $V(\phi_{\max}) = V_{\max}$  gilt, wobei  $V_{\max}$  hinreichend groß ist. Es ergibt sich, daß  $V_{\max} = 20$  ausreichend ist. Für  $\phi > \phi_{\max}$  wird das quadratische Großfeldverhalten berücksichtigt. Dazu macht man den Ansatz

$$V(\phi) = V_{\text{HT}}(\phi - a) - b, \quad (4.50)$$

und wählt  $a$  und  $b$  so, daß die erste Ableitung von  $V$  an der Stelle  $\phi_{\max}$  stetig ist.  $V_{\text{HT}}$  soll dabei das Potential des quadratischen Fixpunktes von  $\mathcal{T}$  sein. Das bedeutet, daß die numerische Analyse durch die Erwartung unterstützt wird, daß die Potentiale auf der renormierten Trajektorie das asymptotische Verhalten des Hochtemperaturfixpunktes besitzen. Das Fluktuationsfeld  $\zeta$  variiert zwischen den Werten  $-\zeta_{\max}$  und  $\zeta_{\max}$ , mit  $\zeta_{\max} = 20$ . Dadurch entstehende Fehler können vernachlässigt werden. Auch hier wird nur der Raum der symmetrischen Potentiale betrachtet. Alle Potentiale werden mit den Parametern  $L = 2$ ,  $D = 3$ ,  $\gamma = 1$  und  $N = 401$  berechnet. Um die renormierte Trajektorie nach der Definition in Abschnitt 4.2.1 zusammen mit (4.48) zu berechnen, startet man mit dem nackten Potential

$$\begin{aligned} V = & \left( -\frac{336}{\log 2} g_0^2 \kappa + 116928 g_0^3 + \frac{12096}{\log 2} g_0^3 \kappa \right) : \phi^2 : \\ & + \left( g_0 - 108 g_0^2 + 17520 g_0^3 + \frac{896}{\log 2} g_0^3 \kappa \right) : \phi^4 : \\ & + \left( -\frac{8}{3} g_0^2 + 864 g_0^3 \right) : \phi^6 : \\ & + \frac{32}{3} g_0^3 : \phi^8 : \end{aligned} \quad (4.51)$$

und wählt  $g_0$  hinreichend klein. Hinreichend klein heißt in diesem Zusammenhang, daß eine Iteration, die bei  $L^{-m} g_0$ ,  $m > 0$  startet, die gleiche Trajektorie ergibt. Hier wurde  $g_0 = 10^{-6}$  gewählt. Man ist gezwungen, die dritte Ordnung Störungstheorie als Startpunkt zu wählen, da die zweite Ordnung aufgrund des Verhaltens bei großen Feldern nicht stabil unter der Integration wäre. Es ist üblich, das Potential durch die Bedingung  $V(\phi = 0) = 0$  zu normieren. Das numerisch bestimmte Potential wird im folgenden als exakt bezeichnet. Es werden zwölf Renormierungsgruppenschritte durchgeführt.



Die zugehörigen störungstheoretischen Potentiale werden aus der Lösung der Gleichung

$$g_0 = V_4(\tilde{g}_0) \quad (4.52)$$

bestimmt. Die Kopplung  $\tilde{g}_0$  legt die Anfangskopplung und damit das Startpotential fest. Ein Renormierungsgruppenschritt entspricht der Multiplikation der laufenden Kopplung mit  $L = 2$ , siehe (4.32). Für diesen Vergleich, der in den folgenden Abbildungen dargestellt ist, wurde das störungstheoretische Potential siebter Ordnung verwendet. Die exakten Potentiale entsprechen dabei stets den durchgezogenen

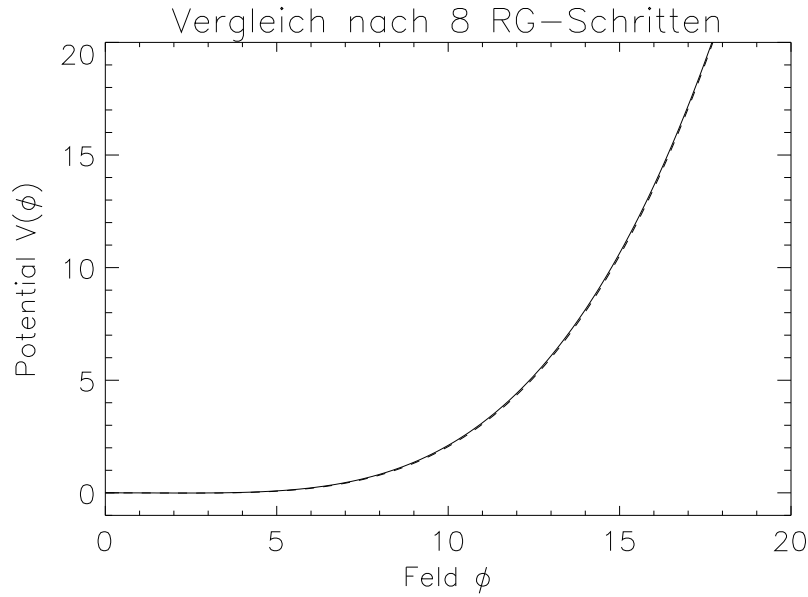


Abbildung 4.2: *Exaktes und störungstheoretisches Potential nach 8 Renormierungsgruppenschritten.*

Linien, während die perturbativen Potentiale mit den gestrichelten Linien korrespondieren. In Abbildung 4.2 erkennt man, daß nach acht Renormierungsgruppenschritten die exakten und die perturbativen Daten beinahe übereinstimmen. Wenn die Anzahl der durchgeführten Renormierungsgruppenschritte Neun überschreitet, kann man eine klare Abweichung zwischen den Potentialen für  $\phi \geq 18$  erkennen. Dies ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Im Großfeldbereich ist die Entwicklung also nicht gut. Dies liegt daran, daß das asymptotische Verhalten des exakten Potentials quadratisch ist, während sich das störungstheoretische Potential in siebter Ordnung wie  $\phi^{14}$  verhält. In Abbildung 4.4 wird gezeigt, daß die Störungsentwicklung nur noch für sehr kleine Felder gut ist, wenn die Zahl der Renormierungsgruppenschritte auf der  $\phi^4$ -Trajektorie größer als Zehn ist. Daraus schließt man, daß die Entwicklung für  $g \gtrsim 10^{-3}$  nicht mehr gut ist. Dies liegt vor allem am falschen Verhalten für große Felder. Wenn man mit Padé-Approximanten arbeitet, kann man

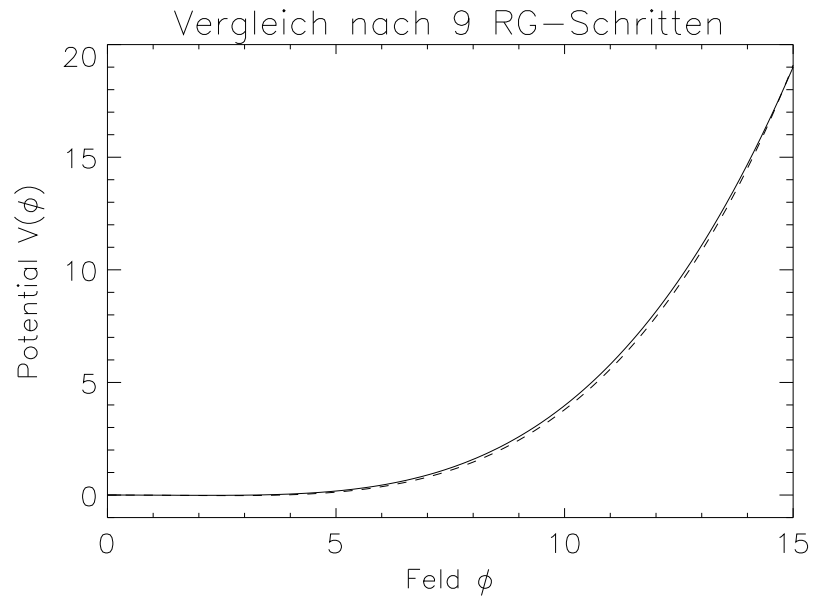


Abbildung 4.3: *Exaktes und störungstheoretisches Potential nach 9 Renormierungsgruppenschritten.*

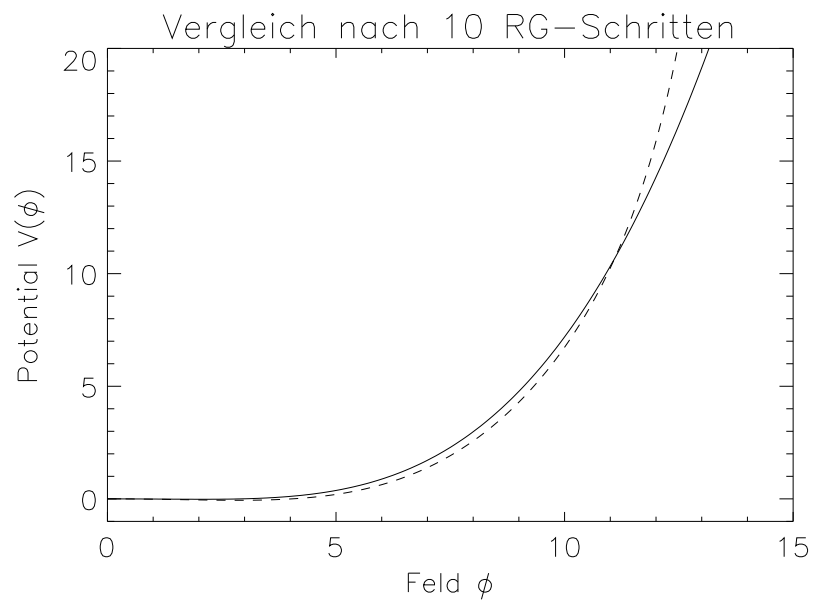


Abbildung 4.4: *Exaktes und störungstheoretisches Potential nach 10 Renormierungsgruppenschritten.*

Vergleich nach 11 Schritten mit Padé-Approximation

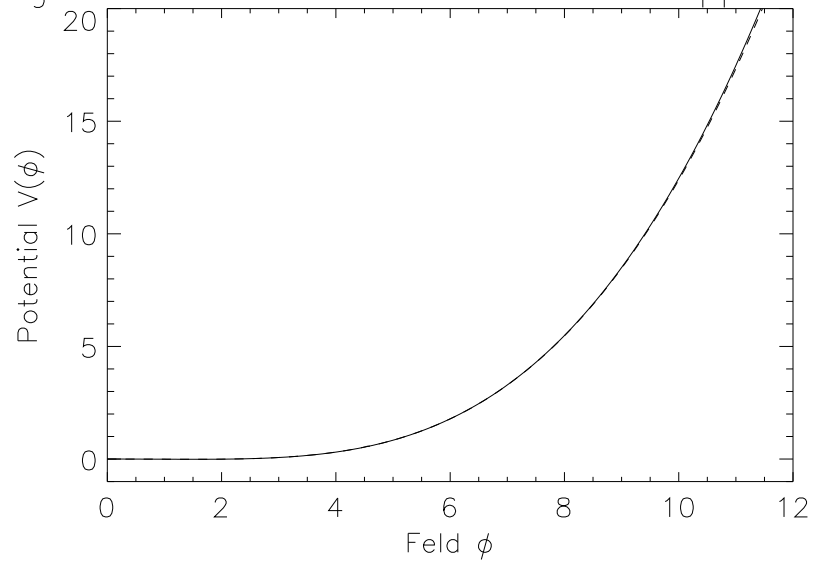


Abbildung 4.5: *Exaktes Potential und Padé-Approximant des störungstheoretischen Potentials nach 11 Renormierungsgruppenschritten.*

Vergleich nach 12 Schritten mit Padé-Approximation

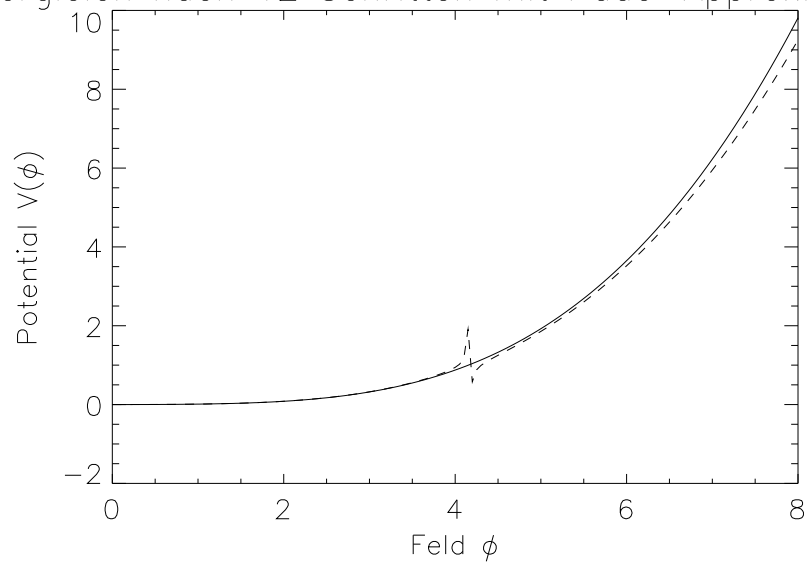


Abbildung 4.6: *Exaktes Potential und Padé-Approximant des störungstheoretischen Potentials nach 12 Renormierungsgruppenschritten.*

die störungstheoretischen Daten verbessern. In Abbildung 4.5 wird der  $(9, 7)$ -Padé-Approximant der Störungsreihen in der Feldvariablen  $\phi$  mit dem exakten Potential nach elf Renormierungsgruppenschritten verglichen. Der  $(9, 7)$ -Padé-Approximant ist eine gebrochen rationale Funktion mit Zählergrad Neun und Nennergrad Sieben. Das asymptotische Verhalten ist damit quadratisch. Überraschenderweise stimmen beide Funktionen nahezu überein. Wenn man auf der Trajektorie weiter fortschreitet, entwickelt der Padé-Approximant einen unphysikalischen Pol bei reellen Werten von  $\phi$ . Dies sieht man in Abbildung 4.6. Dieser Pol bleibt auch nach weiteren Renormierungsgruppenschritten bestehen. Das bedeutet, daß man Padé-Approximanten in der Feldvariablen nicht unkritisch zum Abschätzen der Qualität der Entwicklung verwenden sollte. Zur Verbesserung der erhaltenen Reihen können sie aber bedeutsam werden.

## 4.4 Observablen

### 4.4.1 Observablen und Eigenwerte

Neben dem Potential auf der renormierten Trajektorie ist auch die infinitesimale Umgebung der Trajektorie von physikalischer Bedeutung. Diese Umgebung kann mit Hilfe von bestimmten verallgemeinerten Eigenvektoren der linearisierten Renormierungsgruppe betrachtet werden. Am trivialen Fixpunkt sind diese Eigenvektoren einfach die in Abschnitt 2.4.2 besprochenen normalgeordneten Potenzen. Durch deren Eigenwerte sind die Skalierungsdimensionen und die (trivialen) kritischen Exponenten festgelegt. Wenn man sich vom trivialen Fixpunkt fortbewegt, kann man diese normalgeordneten Produkte mit zweifacher Intention deformieren. Zunächst gibt es zu einer Renormierungsgruppentransformation immer eine Transformation lokaler Operatoren, bei der Erwartungswerte erhalten bleiben. Die Deformationen, die hier beschrieben werden, sind insbesondere Eigenvektoren dieser Transformation, und werden dabei also nur mit einer Zahl multipliziert. Zweitens kann man die Frage untersuchen, wie schnell die renormierte Trajektorie unter infinitesimalen Störungen verlassen wird. Dieses Verhalten wird von dem führenden Eigenwert bestimmt.

In der hierarchischen Approximation ist eine lokale Observable eine Funktion  $\mathcal{O}(\phi)$ ,  $\phi \in \mathbb{R}$ . Observablen werden mit der linearisierten Renormierungsgruppe transformiert. Die Linearisierung  $\mathcal{L}_V \mathcal{T} \mathcal{O}$  der Transformation (4.2) in der Richtung  $\mathcal{O}$  am Potential  $V$  ist durch

$$\mathcal{L}_V \mathcal{T} \mathcal{O}(\psi) = \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_{z=0} \mathcal{T}(V + z\mathcal{O})(\psi) \quad (4.53)$$

definiert. Sie ist nach Division durch  $L^d$  durch

$$\mathcal{O}'(\psi) = \frac{\int d\mu_\gamma(\zeta) \mathcal{O}(L^{1-\frac{D}{2}}\psi + \zeta) \exp(-V(L^{1-\frac{D}{2}}\psi + \zeta))}{\int d\mu_\gamma(\zeta) \exp(-V(L^{1-\frac{D}{2}}\psi + \zeta))} \quad (4.54)$$

gegeben. Dies ist analog zur linearen Blockspintransformation von lokalen Observablen in vollen Modellen. Eine Observable wird als laufender Eigenvektor bezeichnet,

wenn sie die Invarianz-Bedingung

$$\mathcal{O}'(\phi, g) = e(\beta(g))\mathcal{O}(\phi, \beta(g)) \quad (4.55)$$

erfüllt.  $e(g)$  ist der zugehörige laufende Eigenwert. Diese Definition ist nicht eindeutig.  $\mathcal{O}$  kann immer noch mit einer Funktion  $f(g)$  multipliziert werden, ohne daß die Form von Gleichung (4.55) geändert wird. Bei einer solchen Transformation wird aber nicht nur die Observable geändert, sondern auch der Eigenwert. Der Ursprung dieser Freiheit ist einfach, daß in dem Tangentialraum an jedem Punkt der Trajektorie eine andere Normierung gewählt werden kann. Daher muß zu (4.55) eine Normierungsbedingung hinzugefügt werden. Die laufenden Eigenvektoren werden mit einer ganzen Zahl  $n$  numeriert und als  $\mathcal{O}_n$  bezeichnet.  $n$  gibt an, daß  $\mathcal{O}_n$  durch die Deformation von  $:\phi^n:_{\gamma'}$  entsteht. Die Normierung wird dann so gewählt, daß der Koeffizient von  $:\phi^n:_{\gamma'}$  in  $\mathcal{O}_n$  gleich Eins ist, wenn  $\mathcal{O}_n$  in der Basis der normalgeordneten Potenzen ausgedrückt wird. Dann kann der laufende Eigenwert einfach als Koeffizient von  $:\phi^n:$  der effektiven Observable identifiziert werden. Das Konzept des laufenden Eigenvektorsystems wurde in [WX95] eingeführt, jedoch ohne die Normierungsfrage zu erläutern.

Der Startpunkt der Iteration für die laufenden Eigenvektoren sind die normalgeordneten Monome am trivialen Fixpunkt. Mit Hilfe von Störungstheorie können dann Korrekturen in  $g$  berechnet werden. Dadurch bekommt man ein laufendes Bezugssystem im Tangentialraum an die renormierte Trajektorie. Die Ordnung  $s$  von  $\mathcal{O}_n$  wird als  $\mathcal{O}_n^{(s)}$  bezeichnet. Die Anfangsbedingung ist  $\mathcal{O}_n^{(s)}(\phi, 0) = :\phi^n:_{\gamma'}$ . Der zugehörige Eigenwert in der Ordnung  $s$  wird als  $e_n^{(s)}(g)$  bezeichnet.

Nun wird die Observable  $\mathcal{O}_2^{(1)}(\phi, g)$  in drei Dimensionen unter Verwendung der linearen Flußfunktion berechnet. In erster Ordnung Störungstheorie erwartet man

$$\mathcal{O}_2^{(1)}(\phi, g) = c_{4,0}g : \phi^4 : + : \phi^2 : + (c_{0,0} + c_{0,1}\kappa)g. \quad (4.56)$$

Die effektive Observable berechnet man mit Hilfe von Transformation (4.54):

$$\begin{aligned} \mathcal{O}'^{(1)}_2(\phi, g) &= \left( \frac{1}{8}c_{4,0} - 1 \right) g : \phi^4 : \\ &+ \left( \frac{1}{2} - 9g \right) : \phi^2 : + \left( \frac{1}{2}c_{0,0} + \frac{1}{2}c_{0,1}(\kappa - \log 2) \right) g. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Daraus schließt man, daß der laufende Eigenwert  $e_2^{(1)}(g)$  zur ersten Ordnung durch

$$e_2^{(1)}(g) = \frac{1}{2} - 9g \quad (4.58)$$

gegeben wird. Die effektive Observable ergibt sich schließlich nach Division mit  $e_2^{(1)}(g)$  und nach Skalierung der Koordinate  $g$  als

$$\mathcal{O}_{2,\text{eff}}^{(1)} = \left( \frac{1}{4}c_{4,0} - 2 \right) g : \phi^4 : + : \phi^2 : + (c_{0,0} + c_{0,1}(\kappa - \log 2))g. \quad (4.59)$$

Damit gilt die geforderte Invarianz zur ersten Ordnung, wenn man

$$c_{4,0} = -\frac{8}{3}, \quad c_{0,1} = 0 \quad (4.60)$$

setzt.  $c_{0,0}$  bleibt unbestimmt; das heißt, daß es für diese Observable in erster Ordnung eine zusätzliche Renormierungsbedingung gibt.

Allgemein tritt dieser Fall unter den folgenden Umständen ein. Ein Term  $cg^k : \psi^m :$  der Observablen  $\mathcal{O}_n$  in  $k$ -ter Ordnung Störungstheorie wird unter der Transformation (4.55) auf

$$cL^{m(1-\frac{d}{2})+k(d-4)-n(1-\frac{d}{2})}\beta(g)^k : \psi^m : \quad (4.61)$$

abgebildet, da durch  $e_n(g)$  geteilt wird. Das bedeutet, daß für die Observablen Resonanzen unter der Bedingung

$$d = \frac{8k + 2n - 2m}{2k + n - m} \quad (4.62)$$

oder

$$m = \frac{2k(4-d)}{2-d} + n \quad (4.63)$$

eintreten. Wegen  $m \geq n - 2k$  umfaßt (4.62) alle Dimensionen, in denen das Potential auf der Trajektorie resonant ist, bis auf  $d = \frac{8}{3}$ . Ferner folgt daraus sofort, daß es für  $d < 3$  keine zusätzlichen Resonanzen gibt. Im resonanten Fall gibt es aber für fast alle Observablen Zusatzbedingungen. Im Fall  $d = 3$  bedeuten die Relationen (4.62) und (4.63)

$$m = n - 2k. \quad (4.64)$$

Für die Observable  $\mathcal{O}_4$  bekommt man damit zum Beispiel zwei freie Parameter. Zu jeder Observablen gibt es nur endlich viele freie Parameter. In der folgenden Tabelle werden die ersten drei Observablen angegeben. Dabei wurden die Parameter  $L = 2$ ,

$d = 3$  und  $\gamma = 1$  verwendet. Alle freien Parameter sind gleich Null gesetzt.

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_0^{(3)}(\phi, g) &= 1, \\
\mathcal{O}_1^{(3)}(\phi, g) &= :\phi:_{\gamma'} \\
&\quad + \left( -\frac{4}{3}g + 144g^2 - 896\frac{\kappa g^3}{\log 2} - 23360g^3 \right) : \phi^3 :_{\gamma'} \\
&\quad + \left( \frac{16g^2}{3} - 1728g^3 \right) : \phi^5 :_{\gamma'} \\
&\quad - \frac{256g^3}{9} : \phi^7 :_{\gamma'}, \\
\mathcal{O}_2^{(3)}(\phi, g) &= -960g^2 + \frac{2016\kappa g^2}{\log 2} - 632448g^3 \\
&\quad + : \phi^2 :_{\gamma'} \\
&\quad + \left( -\frac{8g}{3} + 432g^2 - \frac{1792g^3\kappa}{\log 2} - \frac{483072g^3}{5} \right) : \phi^4 :_{\gamma'} \\
&\quad + \left( \frac{112g^2}{9} - \frac{164160g^3}{31} \right) : \phi^6 :_{\gamma'} \\
&\quad - \frac{640g^3}{9} : \phi^8 :_{\gamma'}. \tag{4.65}
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Eigenwerte haben die Gestalt

$$\begin{aligned}
e_0^{(3)} &= 1, \\
e_1^{(3)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{84\sqrt{2}\kappa g^2}{\log 2} + 28\sqrt{2}g^2 - \frac{3528\sqrt{2}\kappa g^3}{\log 2} - 34608\sqrt{2}g^3, \\
e_2^{(3)} &= 1/2 - 9g + \frac{168\kappa g^2}{\log 2} + 1232g^2 - \frac{17136g^3\kappa}{\log 2} - 287736g^3. \tag{4.66}
\end{aligned}$$

Die laufenden Eigenvektoren und Eigenwerte habe ich bis zur zwölften Ordnung berechnet. Diese Störungsreihen werden für die Fusionsregeln und für den Vergleich mit numerischen Daten in den nächsten Abschnitten benötigt.

#### 4.4.2 Fusionsregeln

Aus den Observablen  $\mathcal{O}_n$  auf der renormierten Trajektorie kann man mit Hilfe von Fusionsregeln allgemeinere Korrelationsfunktionen berechnen. Wenn zwei Observablen  $\mathcal{O}_n(\phi, g)$  und  $\mathcal{O}_m(\phi, g)$  vorgegeben sind, sind die Fusionsregeln durch

$$\mathcal{O}_n(\phi, g)\mathcal{O}_m(\phi, g) = \sum_{l=0}^{\infty} N_{nm}^l(g)\mathcal{O}_l(\phi, g) \tag{4.67}$$

definiert. Der Koeffizient  $N_{nm}^0$  induziert eine symmetrische Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf dem Raum der Observablen, die durch

$$\langle \mathcal{O}_n(\phi, g), \mathcal{O}_m(\phi, g) \rangle := N_{nm}^0(g) \tag{4.68}$$

definiert wird. Die Störungsentwicklung für die Fusionskoeffizienten hat die Form

$$N_{nm}^{l(s)}(g) = \sum_{k=0}^s N_{nm,k}^l g^k. \quad (4.69)$$

In nullter Ordnung erhält man die bekannten Fusionsregeln für normalgeordnete Produkte, die im Anhang (Korollar 3) berechnet sind, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^{(0)}(\phi, g) \mathcal{O}_1^{(0)}(\phi, g) &= 2\mathcal{O}_0^{(0)}(\phi, g) + \mathcal{O}_2^{(0)}(\phi, g), \\ \mathcal{O}_2^{(0)}(\phi, g) \mathcal{O}_2^{(0)}(\phi, g) &= 8\mathcal{O}_0^{(0)}(\phi, g) + 8\mathcal{O}_2^{(0)}(\phi, g) + \mathcal{O}_4^{(0)}(\phi, g). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Dabei ist die normalordnende Kovarianz  $\gamma' = 2$ . In zweiter Ordnung bekommt man:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^{(2)}(\phi, g) \mathcal{O}_1^{(2)}(\phi, g) &= \\ &\left( 2 + g^2 \left( -2016 \frac{\kappa}{\log 2} + \frac{3136}{3} \right) \right) \mathcal{O}_0^{(2)}(\phi, g) \\ &+ (1 - 16g + 1856g^2) \mathcal{O}_2^{(2)}(\phi, g) - 48g^2 \mathcal{O}_4^{(2)}(\phi, g), \\ \mathcal{O}_1^{(2)}(\phi, g) \mathcal{O}_2^{(2)}(\phi, g) &= \\ &\left( 4 + g \left( 168 \frac{\kappa}{\log 2} - 32 \right) + g^2 \left( 8736 \frac{\kappa}{\log 2} - \frac{165856}{3} \right) \right) \mathcal{O}_1^{(2)}(\phi, g) \\ &+ \left( 1 - 32g + g^2 \left( 224 \frac{\kappa}{\log 2} + 5504 \right) \right) \mathcal{O}_3^{(2)}(\phi, g) - 96g^2 \mathcal{O}_5^{(2)}(\phi, g), \\ \mathcal{O}_2^{(2)}(\phi, g) \mathcal{O}_2^{(2)}(\phi, g) &= \\ &\left( 8 - 720g + g^2 \left( -179424 \frac{\kappa}{\log 2} + \frac{169472}{3} \right) \right) \mathcal{O}_0^{(2)}(\phi, g) \\ &+ \left( 8 + g \left( 672 \frac{\kappa}{\log 2} - 256 \right) + 8g^2 \left( 69888 \frac{\kappa}{\log 2} - \frac{917312}{3} \right) \right) \mathcal{O}_2^{(2)}(\phi, g) \\ &+ \left( 1 - 64g + g^2 \left( 1792 \frac{\kappa}{\log 2} + 14720 \right) \right) \mathcal{O}_4^{(2)}(\phi, g) \\ &- 192g^2 \mathcal{O}_6^{(2)}(\phi, g). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Alle freien Parameter in diesen Formeln sind gleich Null gewählt worden.

#### 4.4.3 Numerische Berechnung von Observablen und Eigenwerten

In Analogie zu den Potentialen auf der renormierten Trajektorie werden hier die Eigenwerte und Eigenvektoren in drei Dimensionen numerisch berechnet, mit dem Ziel, den Gültigkeitsbereich der Störungsentwicklung in  $g$  und  $\log g$  für die Eigenwerte und Observablen zu bestimmen. Dazu wird die Wirkung der linearisierten Renormierungsgruppentransformation (4.54) auf einen endlichdimensionalen Raum von Observablen eingeschränkt, der durch

$$\phi^m, \quad 0 \leq m \leq M \quad (4.72)$$



aufgespannt wird. Durch Differentiation kann man nach diesen Vektoren entwickeln. Dadurch erhält man eine endlichdimensionale Matrixdarstellung  $L$  der linearisierten Renormierungsgruppentransformation

$$\mathcal{L}_{V_{RT}} \mathcal{T} \phi^i = \sum_{j=0}^M L_{i,j} \phi^j . \quad (4.73)$$

Die Eigenwerte und Eigenvektoren von  $L$  werden mit Standardverfahren berechnet, siehe Abschnitt 2.6.2. Da  $L$  nur eine Approximation an die Transformation (4.54) bildet, muß  $M$  groß genug gewählt werden. Hier wurde  $M = 8$  gewählt; daher kann man erwarten, daß die Trunkationsfehler der ersten vier Eigenwerte und Eigenvektoren klein sind. Andere Verfahren waren dieser Methode deutlich unterlegen. In

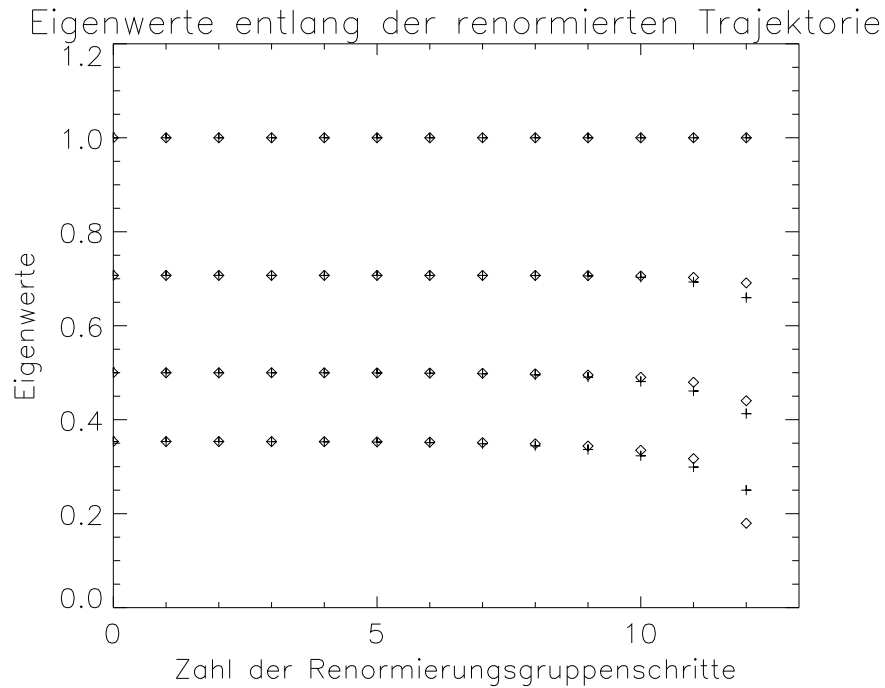


Abbildung 4.7: *Exakte und störungstheoretische Eigenwerte von Transformation (4.54) auf der renormierten Trajektorie als Funktion der Anzahl von Renormierungsgruppenschritten.*

Abbildung 4.7 sind die vier größten Eigenwerte von (4.54) als Funktion der Anzahl von Renormierungsgruppenschritten auf der  $\phi^4$ -Trajektorie dargestellt. Die Kreuze entsprechen den numerischen Werten, die als exakt bezeichnet werden, die Kästchen korrespondieren mit den störungstheoretischen Daten. Die Iteration wird mit dem störungstheoretischen Potential bei einer Kopplung  $g_0 = 10^{-6}$  in unmittelbarer Nähe des trivialen Fixpunktes gestartet. Dann wird die  $\phi^4$ -Trajektorie mit numerischen und störungstheoretischen Renormierungsgruppenschritten verfolgt. Nach sechs Renormierungsgruppenschritten, das heißt bei einer störungstheoretischen Koordinate

$g = 2^6 g_0$ , erkennt man die ersten kleinen Abweichungen zwischen den exakten und den störungstheoretischen Eigenwerten. Nach zehn Schritten weichen beide Daten stark voneinander ab. Hier ist  $g = 1.0 \cdot 10^{-3}$ . Die Entwicklung ist also für  $g \gtrsim 10^{-3}$  nicht mehr direkt geeignet, die Eigenwerte der linearisierten Renormierungsgruppen transformation zu berechnen.

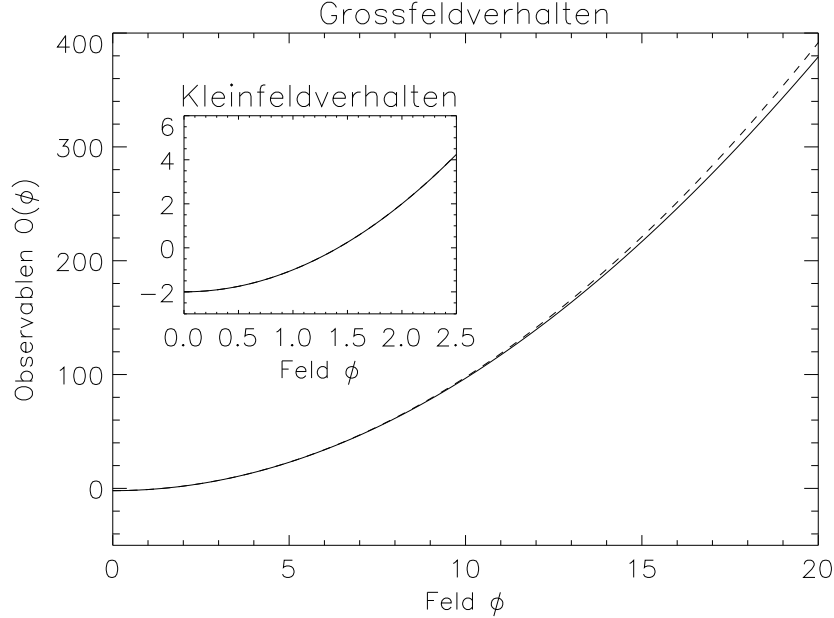


Abbildung 4.8:  $\mathcal{O}_2(\phi)$  exakt und störungstheoretisch nach vier Renormierungsgruppenschritten.

In Abbildung 4.8 bis 4.11 sind die exakten und störungstheoretischen Observablen  $\mathcal{O}_2$  und  $\mathcal{O}_3$  nach vier beziehungsweise sechs Renormierungsgruppenschritten abgebildet. Die störungstheoretischen Daten entsprechen den gestrichelten Kurven. Für große Felder gibt es bei beiden Observablen Abweichungen, die zum Teil auf die Trunkation der Transformation (4.54) zurückgeführt werden können. In den kleinen Bildern ist zusätzlich das Verhalten für kleine Felder dargestellt. Dadurch wird illustriert, daß die Trunkation auf die Observable  $\mathcal{O}_3$  einen größeren Einfluß hat. Ferner erkennt man das richtige Verhalten der Kurven bei  $\phi = 0$ . Dies ist einfach die approximative Normalordnung in der Nähe des trivialen Fixpunktes.

Da die Reihe für den Eigenwert  $e_2(g)$  durch Störungstheorie berechnet wurde, kann man nicht erwarten, daß sie in irgendeiner Weise konvergiert. Die Erfahrung aus Kapitel 3 zeigt jedoch, daß mit Hilfe von Summationsmethoden auch aus divergenten Reihen zuverlässige Werte für den kritischen Index erhalten werden können. Bisher hat jedoch noch kein Summationsschema, daß ich auf die Reihen in  $g$  und  $\log g$  angewendet habe, zufriedenstellende Resultate erbracht.

In [LG82] wird bei einer Doppelentwicklung empfohlen, nach Abhängigkeiten zwischen den Entwicklungsparametern zu suchen, und dadurch eine Variable zu

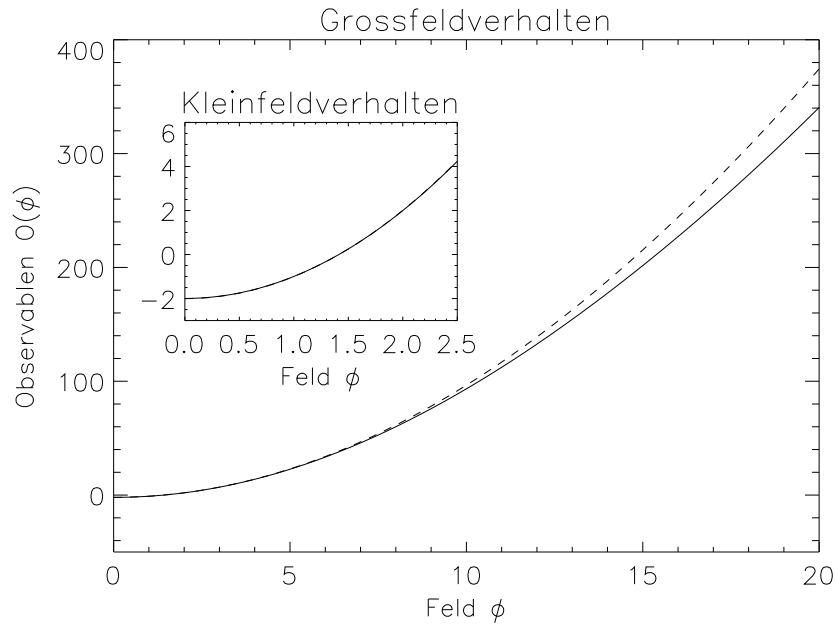


Abbildung 4.9:  $\mathcal{O}_2(\phi)$  exakt und störungstheoretisch nach sechs Renormierungsgruppenschritten.

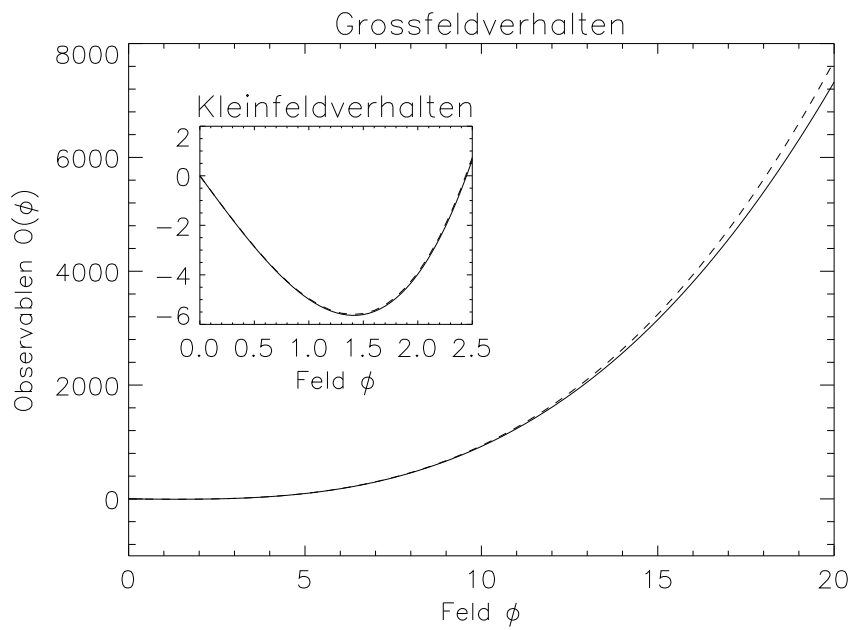


Abbildung 4.10:  $\mathcal{O}_3(\phi)$  exakt und störungstheoretisch nach vier Renormierungsgruppenschritten.

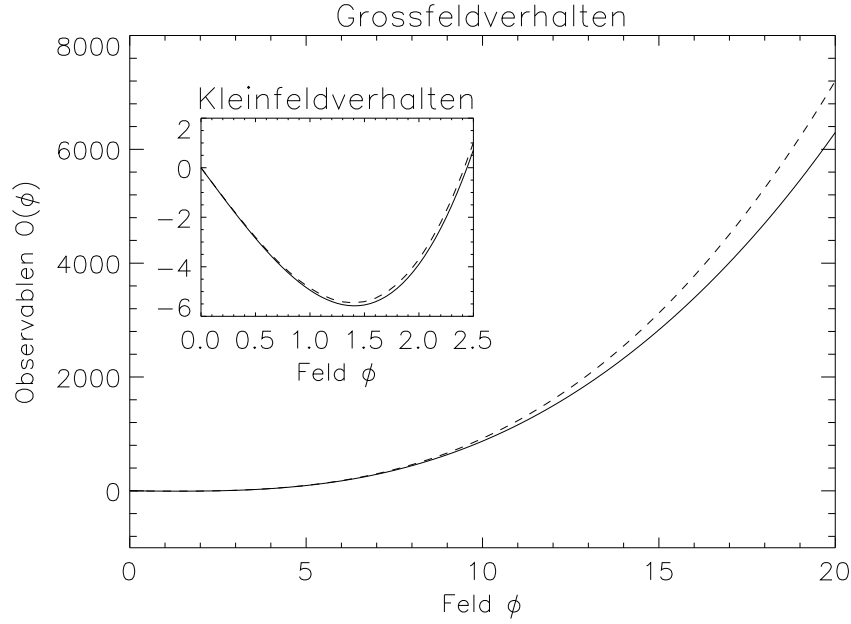


Abbildung 4.11:  $\mathcal{O}_3(\phi)$  exakt und störungstheoretisch nach sechs Renormierungsgruppenschritten.

eliminieren. Die Summationstechniken für asymptotische Reihen in einer Variablen können dadurch angewendet werden. Dies habe ich auch am intensivsten versucht, die Abhängigkeit  $\kappa = \log g$  ist ja eine zusätzliche Bedingung bei der Auswertung der Reihen. Da die Funktion  $\log g$  nicht analytisch um Null ist, kann man aber nach Einsetzen von  $\kappa = \log g$  keine Taylorreihe um Null bilden. Padé-Approximation kann damit nicht angewendet werden. Daran scheitern letztlich die Versuche, die Summation auf die Summation von Potenzreihen in einer Variablen zurückzuführen.

Wenn man den Eigenwert  $e_s$  als Funktion der beiden unabhängigen Variablen  $g$  und  $\kappa$  betrachtet, kann man zwar auf eine bestimmte Weise zu  $g \rightarrow \infty$  und  $\kappa \rightarrow \infty$  extrapolieren; diese Methode scheitert aber daran, daß man die Abhängigkeit von  $\kappa$  von  $g$  nicht berücksichtigt. Man kann zum Beispiel den Eigenwert als Potenzreihe in  $g$  betrachten, und mit Hilfe von Padé-Approximanten aufsummieren. Wenn man fordert, daß im Limes  $g \rightarrow \infty$  der Eigenwert endlich groß ist, muß man einen Diagonal-Padé-Approximanten verwenden. Dieser hat die Gestalt

$$\frac{\sum_{i=0}^n f_i(\kappa) g^i}{\sum_{j=0}^n g_j(\kappa) g^j} \xrightarrow{g \rightarrow \infty} \frac{f_n(\kappa)}{g_n(\kappa)}, \quad (4.74)$$

und besitzt den angegebenen Grenzwert. Die Funktionen  $f_i$  und  $g_j$  sind Polynome in  $\kappa$ . Nun betrachtet man  $\kappa \rightarrow \infty$ ; damit dieser Grenzwert physikalisch sinnvoll existiert, müssen  $f_n$  und  $g_n$  den gleichen Grad haben. Es stellt sich heraus, daß dies auch eintritt. Bis zur zwölften Ordnung kann man dann die folgende Tabelle 4.3 mit extrapolierten Werten für den Eigenwert  $e_2$  aufstellen: Da man Diagonal-

$k$	extrapolierter Wert für $e_2$
2	5.000000e-01
4	-4.545455e-02
6	-4.545455e-02
8	3.125000e-02
10	2.859250e-02
12	3.125000e-02

Tabelle 4.3: *Extrapolation von  $e_2(g)$  mit Hilfe von Padé-Approximanten in verschiedenen Ordnungen.*

Approximanten verwendet, muß man mit geraden Ordnungen arbeiten. Man erkennt, daß keine Stabilisation der Werte bis zur zwölften Ordnung auftritt. In vierter und sechster Ordnung treten unphysikalische negative Resultate auf. Es ist interessant, daß die Ergebnisse der Extrapolation für die vierte und sechste wie für die achte und zwölfte Ordnung die gleichen Werte liefert.

Man kann auch umgekehrt vorgehen und zunächst  $e_2$  als Potenzreihe in  $\kappa$  betrachten, dafür einen Padé-Approximanten finden und extrapolieren. Dann stellt man aber fest, daß der Zählergrad und der Nennergrad in  $g$  des Grenzwertes  $\kappa \rightarrow \infty$  unterschiedlich sind.

Andere, exotischere Methoden haben bisher auch nicht zum Erfolg geführt. Es wäre sehr interessant einen Weg zu finden, die Entwicklung in  $g$  und  $\log g$  aufzusummieren, um die kritischen Exponenten am nichttrivialen Fixpunkt zu berechnen.

## 4.5 $\phi^4$ -Trajektorie in den Hochtemperaturfixpunkt

### 4.5.1 Definition

Es ist ebenfalls interessant, die Trajektorien, die von Infrarot-Fixpunkten zum Hochtemperaturfixpunkt laufen, ausgehend vom Hochtemperaturfixpunkt zu berechnen. Potentiale, die auf solchen Trajektorien liegen, sind unkritisch, da die Korrelationslänge des Hochtemperaturfixpunktes gleich Null ist. Zur Berechnung solcher Trajektorien wählt man das HT-Bild. Dabei verwendet man die Transformation  $\mathcal{T}'$ , die durch

$$(\mathcal{T}'V)(\psi) = -L^d \log \int d\mu_\gamma(\zeta) \exp(-V(\beta'\psi + \zeta)) \quad (4.75)$$

gegeben ist.  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  sind bis auf die Ersetzung von  $\beta$  durch  $\beta' = L^{-2}\beta = L^{-1-\frac{d}{2}}$  gleich. Viele Strategien zur Berechnung der Trajektorien können damit aus Abschnitt 4.2 und 4.3.3 übernommen werden. Durch die folgenden Bedingungen wird dann die  $:\phi^4$ -Trajektorie von Potentialen  $V(\phi, g)$ , die durch eine lokale Koordinate  $g$  parametrisiert sind, in den Hochtemperaturfixpunkt definiert:

- 1)  $V(\phi, g)$  ist stabil unter  $\mathcal{T}'$ . Es gibt also eine Funktion  $\beta(g)$ , so daß

$$\mathcal{T}'V(\phi, g) = V(\phi, \beta(g)) \quad (4.76)$$

gilt. Im folgenden wird die Koordinate  $g$  durch die Vorgabe der Funktion  $\beta$  festgelegt. Dabei wird  $\beta$  linear gewählt:

$$\beta(g) = L^{-4-d}g. \quad (4.77)$$

Dies entspricht der Skalierung der  $:\phi^4:-$ Kopplung am Hochtemperaturfixpunkt.

- 2) An der Stelle  $g = 0$  gilt  $V(\phi, g = 0) = 0$ . Die Trajektorie läuft in  $:\phi^4:-$ Richtung in den Hochtemperaturfixpunkt  $V = 0$  ein:

$$\left. \frac{\partial}{\partial g} \right|_{g=0} V(\phi, g) = :\phi^4:_{\gamma'}, \quad (4.78)$$

mit  $\gamma' = \frac{\gamma}{1-\beta^2}$ . Wenn man

$$V(\phi, g) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(g) : \phi^{2n} :_{\gamma'} \quad (4.79)$$

entwickelt, so folgt aus (4.78)  $c_4 = g + O(g^2)$  und  $c_{2n}(g) = O(g^2)$  für  $n \neq 2$ .

Auch wenn diese Ausdrücke den Gleichungen in Abschnitt 4.1 sehr ähneln, muß man bemerken, daß sich die Potentiale dort und hier um einen quadratischen Term unterscheiden.  $\mathcal{T}'$  ist gerade die Transformation  $\mathcal{T}$  nach Abspaltung des quadratischen Fixpunktes.

### 4.5.2 Berechnung der $\phi^4$ -Trajektorie

Der iterative Vorgang zur Berechnung der  $\phi^4$ -Trajektorie, der oben beschrieben wird, läßt sich nun unmittelbar auf die Berechnung der Trajektorie am Hochtemperaturfixpunkt übertragen. Im Unterschied zur  $\phi^4$ -Trajektorie vom Ultraviolett-Fixpunkt aus, treten bei der Berechnung der Trajektorie vom Hochtemperaturfixpunkt aus auch für Dimensionen  $-2 < d < \infty$  keine Resonanzen auf. Resonant sind nur die negativen Dimensionen  $d$ , für die  $d = -d(n, k)$  gilt.  $d(n, k)$  wurde in Abschnitt 4.3.2 definiert. sind. In der Ordnung  $k$  wirkt die Transformation  $\mathcal{T}'$  nämlich wie

$$\begin{aligned} cg^k : \phi^{2n} : &\mapsto L^{d-n(2+d)} cg^k : \phi^{2n} : \\ &= L^{d-n(2+d)+k(4+d)} c\beta(g)^k : \phi^{2n} : . \end{aligned} \quad (4.80)$$

Resonante Dimensionen sind also durch die Bedingung

$$d - n(2 + d) + k(4 + d) = 0 \quad (4.81)$$

festgelegt. Man erhält Resonanzen damit in den Dimensionen

$$d = \frac{2n - 4k}{k + 1 - n} = -d(n, k). \quad (4.82)$$

Die resonanten Dimensionen werden also gespiegelt. In Abschnitt 4.3.2 wurde gezeigt, daß  $d(n, k) > 0$  gilt. Daher muß man bei der Berechnung der  $\phi^4$ -Trajektorie vom Hochtemperaturfixpunkt aus keine Resonanzen berücksichtigen. Insbesondere muß man dann auch keine Doppelentwicklung in  $g$  und  $\log g$  durchführen.

Um das Potential  $V^{(s)}$  in der Störungsordnung  $s$  zu bestimmen, startet man mit  $V^{(1)}(\phi, g) = g : \phi^4 :_{\gamma'}$ . Dann macht man einen Ansatz für die zweite Ordnung und berechnet die Verbesserungskoeffizienten aus der Invarianzforderung (4.76), ergänzt durch (4.77). So geht man bis zur Ordnung  $s$  weiter, deren allgemeine Form durch 4.19 gegeben ist. Für die dritte Ordnung erhält man in drei Dimensionen und für  $L = 2$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\gamma' = \frac{32}{31}$ :

$$\begin{aligned}
 V^{(3)}(\phi, g) = & \frac{53202124800}{3904736161}g^2 + \frac{21991116245041152}{31234159007935}g^3 \\
 & + \left( \frac{9895936}{187395}g^2 + \frac{26674268725051392}{4159197606785}g^3 \right) : \phi^2 : \\
 & + \left( g + \frac{152064}{3937}g^2 + \frac{2395094175186944}{389901720195}g^3 \right) : \phi^4 : \\
 & + \left( \frac{32}{3}g^2 + \frac{498991104}{287401}g^3 \right) : \phi^6 : \\
 & + \frac{512}{3}g^3 : \phi^8 : .
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Diese Entwicklung kann man ohne Probleme bis zur zwölften Ordnung berechnen.

### 4.5.3 Berechnung von laufenden Eigenvektoren

In dem Sinn von Abschnitt 4.4 kann man ein laufendes System von Eigenvektoren entlang der Trajektorie berechnen. Die Observablen, die am Hochtemperaturfixpunkt den Eigenvektoren  $: \phi^n :_{\gamma'}$  der linearisierten Transformation entsprechen, werden mit  $\mathcal{O}_n(\phi, g)$  bezeichnet. Auch die Verbesserungskoeffizienten für die Observablen können als Funktion der Dimension Pole aufweisen. Ein Term der Ordnung  $k$  der Observablen  $\mathcal{O}_n$ ,  $cg^k : \psi^m :$ , wird unter der Transformation (4.54) auf

$$cL^{-m(1+\frac{d}{2})+k(4+d)+n(1+\frac{d}{2})}\beta(g)^k : \psi^m : \tag{4.84}$$

abgebildet. Resonante Dimensionen sind also durch

$$d = -\frac{8k + 2n - 2m}{2k + n - m} \tag{4.85}$$

gegeben. Dies ist das Negative der resonanten Dimensionen aus Abschnitt 4.4.1. Daraus folgt, daß es keine positiven resonanten Dimensionen für die Observablen entlang der  $\phi^4$ -Trajektorie vom Hochtemperaturfixpunkt aus gibt. In dritter Ord-

nung erhält man zum Beispiel für  $\mathcal{O}_2$  in drei Dimensionen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_2^{(3)} = & \frac{295119047622656}{1015237211105}g^2 + \frac{2383133244889754539439161344}{100415573216826004279357}g^3 \\
& + : \phi^2 : \\
& + \left( \frac{32}{3}g + \frac{249495552}{287401}g^2 + \frac{693889264181164638208}{4011422094639765}g^3 \right) : \phi^4 : \\
& + \left( \frac{1792}{9}g^2 + \frac{30108020244480}{588309847}g^3 \right) : \phi^6 : \\
& + \frac{40960}{9}g^3 : \phi^8 : .
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Dabei sind die gleichen Parameter wie oben gewählt worden. Der zugehörige Eigenwert lautet:

$$\begin{aligned}
e_2^{(3)} = & 1/32 - \frac{1584}{31}g - \frac{13768026054656}{23799165}g^2 \\
& - \frac{619385544562888686080628883456}{51400374709667478755}g^3 .
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Diese Größen wurden bis zur zwölften Ordnung berechnet.

#### 4.5.4 Numerische Betrachtung

Da die oben berechnete Trajektorie durch eine einfache Entwicklung in einer Koordinate  $g$  ausgedrückt wird, kann man mit Hilfe von Padé-Approximanten und Borel-Padé Methoden versuchen, die Reihen zu summieren und zu  $g \rightarrow \infty$  zu extrapolieren. Insbesondere ist man am Grenzwert von  $e_2(g)$  für  $g \rightarrow \infty$  interessiert. Wenn man annimmt, daß die Trajektorie von dem Infrarot-Fixpunkt zum Hochtemperaturfixpunkt führt, und daß Eigenvektoren entlang der Trajektorie wieder in Eigenvektoren transformiert werden, so hängt  $e_2$  direkt mit dem kritischen Index  $\nu$  zusammen.

Alle in diesem Abschnitt dargestellten Ergebnisse wurden bei den Parameterwerten  $d = 3$ ,  $L = 2$  und  $\gamma = 1$  erhalten. Eine Konvergenzanalyse für die Boreltransformierten  $\mathcal{B}_{2n}$  der Verbesserungskoeffizienten  $c_{2n}$  ergibt die Konvergenzradien  $R_{2n}$ , die im Rahmen der Genauigkeit übereinstimmen. Mit Hilfe von Abbildung 4.12 wird dies anhand der Padé-Methode illustriert. Der Konvergenzradius  $R$  ist

$$R = 0.018 \pm 0.003. \tag{4.88}$$

Die Reihen für die Verbesserungskoeffizienten selbst besitzen den Konvergenzradius Null. An Abbildung 4.12 erkennt man, daß die erste Singularität der Boreltransformierten auf der positiven reellen Achse liegt. Das bedeutet, daß die Borelrücktransformation, die in Abschnitt 3.3.3 definiert wurde, nicht gebildet werden kann.

Mit Hilfe der Padé-Methode wurde auch der Konvergenzradius der Boreltransformierten des Eigenwertes  $e_2$  untersucht. Dies ist in Abbildung 4.13 dargestellt.



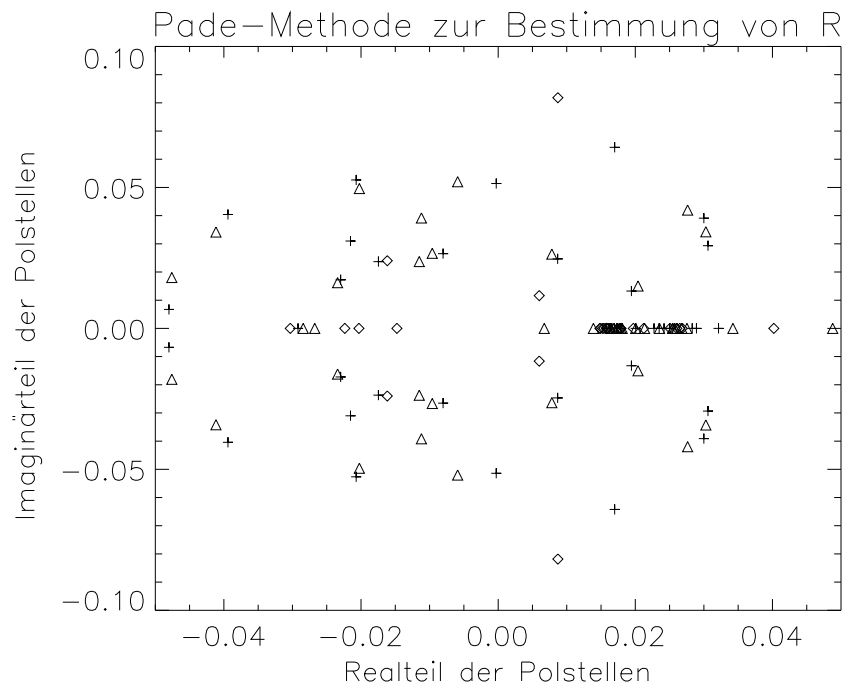


Abbildung 4.12: Konvergenzanalyse für die Boreltransformierten der Verbesserungskoeffizienten  $c_0$  (Dreiecke),  $c_2$  (Kreuze) und  $c_4$  (Rauten).

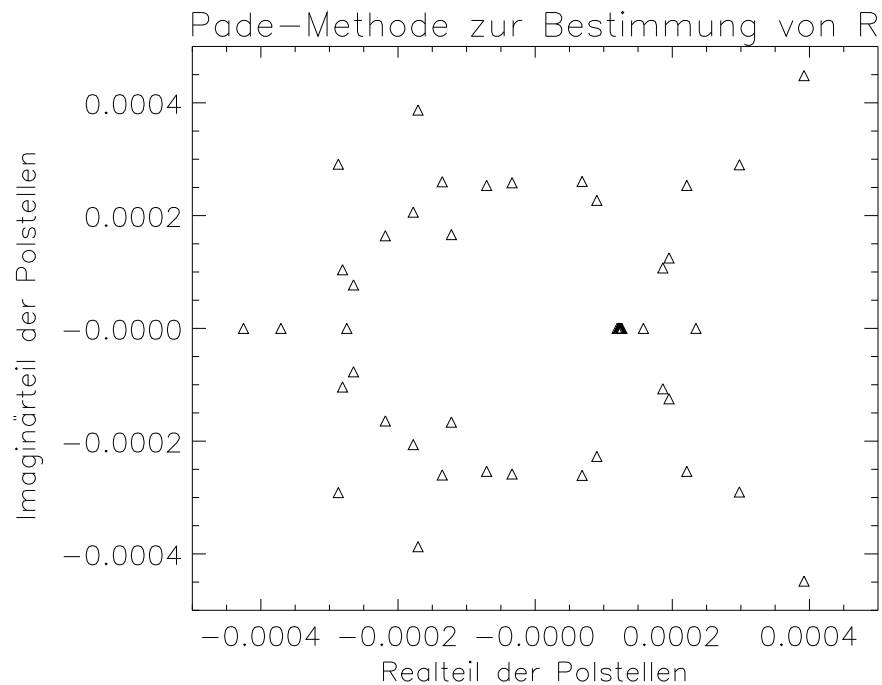


Abbildung 4.13: Konvergenzradius der Boreltransformierten des Eigenwertes  $e_2$ .

Man erkennt, daß man anhand dieser Abbildung nur schwer eine Aussage über den Konvergenzbereich der Reihe machen kann. Das bedeutet, daß zur verlässlichen Bestimmung des Konvergenzradius die Berechnung höherer Ordnungen erforderlich ist. Man kann aber vermuten, daß sich die Nullstellen der Padé-Approximanten im Bereich  $10^{-4} < \Re(z) < 2 \cdot 10^{-4}$  häufen. Der Konvergenzradius ist sehr klein, da der Eigenwert durch die reskalierte Koordinate ausgedrückt wird. Wenn man  $g$  mit  $L^{4+d}$  multipliziert, liegt der Wert in der Ordnung der oben bestimmten Radien. Abbildung 4.13 deutet an, daß auch hier die erste Singularität auf der positiven reellen Achse liegt, so daß die Borelrücktransformation nicht durchgeführt werden kann. Weder die Boreltransformierte des Potentials noch der Eigenwerte existieren also in diesem Fall.

Um den Eigenwert aufzusummieren kann man einen Diagonal-Padé-Approximanten benutzen und auswerten. Ein Diagonal-Approximant konvergiert für  $g \rightarrow \infty$  gegen einen endlichen Wert. Da man am Infrarot-Fixpunkt ein Plateau erwartet, wird so das richtige asymptotische Verhalten erzeugt. In Tabelle 4.4 wird zunächst

$k$	$g = 10^{-5}$	$g = 10^{-4}$
2	0.245449	$1.62842 \cdot 10^{-1}$
3	0.245353	$6.64402 \cdot 10^{-2}$
4	0.245326	$-2.02660 \cdot 10^{-1}$
5	0.245316	$-1.21879 \cdot 10^0$
6	0.245311	$-5.91930 \cdot 10^0$
7	0.245309	$-3.17424 \cdot 10^1$
8	0.245307	$-1.95855 \cdot 10^2$
9	0.245306	$-1.38112 \cdot 10^3$
10	0.245305	$-1.09752 \cdot 10^4$
11	0.245304	$-9.70544 \cdot 10^4$
12	0.245303	$-9.45367 \cdot 10^5$

Tabelle 4.4: Naive Auswertung der Reihe für den Eigenwert  $e_2$  bis zur Ordnung  $k$  für verschiedene Werte von  $g$ .

die naive Summation der Reihe für  $8 \cdot e_2$  bis zur zwölften Ordnung dargestellt. Der Faktor 8 ist der Volumenfaktor, durch den in Gleichung (4.54) geteilt wurde. Man erkennt, daß für  $g = 10^{-5}$  stabile Resultate erhalten werden. Für  $g = 10^{-4}$  werden unphysikalische Werte erreicht. Dies ist mit den Ergebnissen für Summation mit Hilfe von Diagonal-Padé-Approximanten in Tabelle 4.5 zu vergleichen. Hier haben sich die Werte für  $g \geq 10^{-4}$  in der zwölften Ordnung noch nicht stabilisiert. Für  $g = 10^{-5}$  wird der gleiche Wert wie bei der naiven Auswertung erhalten. Die Divergenz der Reihen verhindert also eine Extrapolation mit Hilfe von einfachen Padé-Verfahren. Die Reihe für  $e_2$  ist also weder borelsummierbar noch mit einfachen Methoden extrapolierbar.

$k$	$g = 10^{-5}$	$g = 10^{-4}$	$g \rightarrow \infty$
2	0.24539	0.55925	0.286105
4	0.245314	0.180015	0.308223
6	0.245306	0.263807	0.452341
8	0.245302	0.440785	0.256965
10	0.245311	-0.143368	0.277311
12	0.245302	0.109427	0.283449

Tabelle 4.5: Auswertung und Extrapolation der Reihe für  $e_2$  mit Padé-Approximanten der Ordnung  $k$ .

## 4.6 Diskussion der freien Parameter

Nachdem die Trajektorien berechnet sind, muß man noch die freien Parameter, die bei der Entwicklung in  $g$  und  $\log g$  in drei Dimensionen auftreten, erklären. Freie Parameter bilden im Hinblick auf eine Renormierung ohne nackte Wirkungen keine Probleme, solange es nur endlich viele gibt. Diese werden einfach als zusätzliche Renormierungsbedingungen gestellt.

Wichtiger ist aber, das Bild, das hinter der Berechnung der Trajektorien steht, zu verstehen. Zunächst wurde in Abschnitt 4.3.1 gezeigt, daß eine Trajektorie, die nach Abschnitt 4.2.1 definiert wird, in drei Dimensionen in einer Entwicklung in der Kopplung  $g$  nicht existiert. Dies liegt daran, daß dynamisch Massenterme erzeugt werden, die nicht mit dem Ansatz in Abschnitt 4.2.1 kompensiert werden können, da ein explizit in der Wirkung auftretender Massenterm in zweiter Ordnung Störungstheorie mit dem Faktor 1 skaliert. Der Massenterm fließt aufgrund der dynamisch erzeugten Diagramme wie  $g^2 \log g$  (vergleiche die Diskussion in Abschnitt 4.3.1). Wenn man die Trajektorie mit einer Störungsentwicklung in zwei Parametern, nämlich der Kopplung  $g$  und ihrem Logarithmus  $\kappa = \log g$  berechnet, kann die Invarianzforderung (4.5) mit einer endlichen Wirkung erfüllt werden. Man stellt aber fest, daß die Trajektorie durch ihre Richtung am trivialen Fixpunkt und durch die Invarianzforderung noch nicht eindeutig festgelegt ist. Es gibt vielmehr zwei freie Parameter  $c_0$  und  $c_2$ .  $c_0$  kommt nur in Vakuumbeiträgen zum Potential vor, mit einer Normierung des Potentials, zum Beispiel durch  $V(\phi = 0) = 0$ , bleibt also nur  $c_2$  als freier Parameter übrig.

Das Auftreten von freien Parametern in der Entwicklung wurde teilweise mit dem Argument kritisiert, daß die Trajektorien, die durch die RGDGL<sup>1</sup> erzeugt werden, durch eine Differentialgleichung erster Ordnung also, sehr wohl durch die Richtung am trivialen Fixpunkt eindeutig bestimmt sein sollten. Eine Entwicklung, die diese Eindeutigkeit verletzt, wäre demnach denkbar schlecht, auf jeden Fall aber nur ein erster Schritt zu der Parametrisierung der Trajektorien durch eine Koordinate.

Es tritt also der folgende Fragenkomplex auf:

- Ist die Kritik berechtigt?

---

<sup>1</sup>Die RGDGL wurde in der Einleitung erwähnt; in Kapitel 5 wird für diese Differentialgleichung ebenfalls eine Störungsentwicklung in zwei Parametern vorgeschlagen

- Sind die Logarithmen vermeidbar?
- Was bedeuten die freien Parameter?

Die Diskussion hat hier noch keinen endgültigen Stand erreicht. Die Kritik ist jedoch nicht anwendbar, da das Anfangswertproblem für die renormierte Trajektorie durch einen Punkt auf der Trajektorie gelöst wird, der kein Fixpunkt ist, jedoch nicht durch eine Anfangsrichtung am trivialen Fixpunkt. Durch die angegebenen Störungsreihen wird gerade versucht, einen solchen unbekannten Punkt auf der Trajektorie zu finden. Es wäre dennoch interessant, eine Differentialgleichung für die gesamte Trajektorie zu finden, um weitere Einblicke in die Ursache der Resonanzen zu bekommen. Durch eine Umformulierung der Invarianzforderung für die RGDGL kann man das Anfangswertproblem so umformulieren, daß an die Stelle von Anfangsdaten die Forderung nach Regularität tritt [Wie96a].

Mit Hilfe der in diesem Kapitel verfügbaren Information kann man sich davon überzeugen, daß die Probleme, die man bei der Berechnung der Trajektorien hat, Parametrisierungsprobleme und keine physikalischen Probleme sind. Dafür spricht, daß die Trajektorie für  $d = \frac{8}{3}$  nicht existiert, wohl aber formal das System von laufenden Eigenvektoren entlang der Trajektorie. Man kann zum Beispiel vermuten, daß die Koordinate  $g$  selbst durch die Forderung einer linearen Flußfunktion nicht eindeutig ist. Dies wird unterstützt durch die Bemerkung, daß für  $d = 4$  bei Verwendung der linearen Flußfunktion ein zusätzlicher Pol in den Verbesserungskoeffizienten auftritt. Dann würden die freien Parameter die Koordinate selbst eindeutig bestimmen. Diese Ansicht vertrete ich jedoch nicht, da auch bei der Verwendung der  $\phi^4$ -Kopplung als Koordinate Resonanzen auftreten. In vier Dimensionen gibt es ferner ein physikalisches Ereignis: die Trajektorie vom trivialen zum nichttrivialen Fixpunkt reduziert sich auf einen Punkt. Diese Trajektorie ist also nur ein Grenzfall, für den man ohnehin merkwürdige Eigenschaften erwarten kann.

Aus obigen Gründen kann man also ebensowenig erwarten, daß eine Trajektorie, die nach Abschnitt 4.2.1 definiert wird, in drei Dimensionen in der Entwicklung in der Kopplung  $g$  existiert, wie man erwarten kann, daß die Trajektorie in einer Doppelentwicklung eindeutig festgelegt ist. Der Bezug auf die RGDGL ist in beiden Fällen ein Scheinargument, da der Fluß mit Koordinaten parametrisiert wird, die wie die Kurve selbst, Bedingungen erfüllen müssen. Die Mehrdeutigkeit der Trajektorie kann verschiedene Ursachen haben. Am interessantesten wäre es wohl, den freien Parameter  $c_2$  als Konstante zu verstehen, mit der die Trajektorie kritisch gemacht werden kann. Das bedeutet, daß es einen Wert von  $c_2$  gibt, für den die berechnete Trajektorie vom Ultraviolett-Fixpunkt zum Infrarot-Fixpunkt läuft. Für alle anderen Werte von  $c_2$  läuft die Trajektorie entweder in den unendlich tiefen 2-Well-Fixpunkt oder in den Hochtemperaturfixpunkt. Da für zu  $d = 3$  benachbarte Dimensionen (zum Beispiel  $d = 3.01$ ) die Trajektorie nach der obigen Definition zumindest in Störungstheorie existiert und eindeutig ist, müßte man dann die freien Parameter als Bonus auffassen, der der Entwicklung in bestimmten Dimensionen hinzugefügt wird, und mit dessen Hilfe man die Theorien kritisch machen kann. Numerische Ergebnisse zeigen, daß die Trajektorie in drei Dimensionen mit  $c_2 = 0$  nicht kritisch ist, und daß es einen Wert von  $c_2$  gibt, so daß numerische Iteration

in den nichttrivialen Fixpunkt läuft. (Dieser „kritische“ Wert von  $c_2$  wurde mit der Intervallhalbierungsmethode gefunden.) Es kann aber sein, daß nach einer Aufsummation der gesamten unendlichen Störungsreihe das Ergebnis unabhängig von  $c_2$  wird, das angeführte numerische Ergebnis wäre dann ein Trunkationseffekt.

Andererseits gibt es für die  $\phi^4$ -Trajektorie vom Hochtemperaturfixpunkt aus keine freien Parameter in drei Dimensionen. Man würde aber erwarten, daß man die Schar von Theorien sieht, die vom Ultraviolett-Fixpunkt in  $:\phi^4:-$ Richtung mit nichtkritischen Parameterwerten  $c_2$  wegläuft, und in den Hochtemperaturfixpunkt fließt. Aufgrund der starken Divergenz der Entwicklung ist dieses Argument ebenfalls stark geschwächt.

Sind die Logarithmen unvermeidlich? Auch wenn man dies wahrscheinlich nur durch ein Gegenbeispiel endgültig beantworten kann, kann man sich davon überzeugen, daß das Auftreten von Logarithmen zumindest sehr natürlich ist. Dazu stellt man sich den Fluß nicht mehr durch eine Kopplung  $g$  parametrisiert vor, sondern durch den natürlichsten Parameter, nämlich  $L$ . In drei Dimensionen wächst dann  $:\phi^2:$  wie  $L^2 f(\log L)$ . Die Funktion  $f$  gibt dynamische Korrekturen zum trivialen Verhalten an. Hier treten also auch Logarithmen auf, während in nichtresonanten Dimensionen  $f$  eine analytische Funktion von  $L$  ist. Die Frage, ob es im vollen Modell eine Wahl des Blockspins gibt, so daß sich dieses Bild ändert, ist offen. Wenn man die Trajektorien mit mehreren Parametern ausdrückt, kann man eine Entwicklung ohne Logarithmen zwar angeben. Natürlich wäre es etwa, jede relevante Kopplung als Koordinate zu verwenden. Das physikalische Verhalten stellt sich aber vermutlich ein, wenn die Massenkopplung proportional zum Logarithmus der  $\phi^4$ -Kopplung ist.

# Kapitel 5

## RGDGL

### 5.1 Einleitung

Renormierungsgruppentransformationen sind diskrete Schritte in einem Raum von Theorien, die zum Beispiel durch Potentiale gegeben sein können. Die Renormierungsgruppen-Differentialgleichung (RGDGL) bietet dagegen die Möglichkeit, infinitesimale Kontrolle über Renormierungsgruppentransformationen zu gewinnen. Dieser Vorteil wurde am beeindruckendsten von Polchinski [Pol84] genutzt. In der Literatur der mathematischen Physik spielt die RGDGL eine große Rolle. Hier möchte ich zum Beispiel Arbeiten in Störungstheorie von Keller und Kopper [KK94] sowie von Hurd [Hur89] erwähnen. Auch für die Clusterentwicklungen von Brydges und Yau [BY90], Brydges, Dimock und Hurd [BDH95] und anderen ist die RGDGL von Bedeutung. Numerisch wird die RGDGL vor allem in einer Heidelberger Gruppe um Wetterich untersucht, zum Beispiel in [ABB<sup>+</sup>95]. Des weiteren gibt es zahlreiche Arbeiten zur Quantenelektrodynamik. Das Verbesserungsprogramm, von dem ein kleiner Ausschnitt in diesem Kapitel und in Kapitel 4 behandelt wird, wurde von C. Wieczorkowski begründet; es ist ein aktuelles Forschungsgebiet. Auch die Behandlung im Rahmen der RGDGL ist bei weitem noch nicht abgeschlossen.

Wegen der Bedeutung der RGDGL werden die Entwicklungen aus dem letzten Kapitel in ein rekursives Lösungsschema zur Lösung der RGDGL in verschiedenen Näherungen übertragen. Am intensivsten wird eine lokale Näherung untersucht, die dem hierarchischen Modell entspricht. Es werden aber auch Ideen zur Behandlung des vollen Modells notiert. Das Ziel der Entwicklungen ist die Berechnung der  $\phi^4$ -Trajektorie vom trivialen Fixpunkt aus, und damit eine Beschreibung der Renormierung ohne nackte Wirkungen im Rahmen der RGDGL. Aufgrund des rekursiven Charakters der Lösungen kann man die Entwicklungen zu hohen Ordnungen treiben und entsprechend numerisch analysieren.

## 5.2 Herleitung der RGDGL für die reskalierten Impulsraumkerne des Potentials

### 5.2.1 Die RGDGL

Wenn die Wirkung einer Feldtheorie wie in Abschnitt 1.2.3 durch einen quadratischen Term und einen Wechselwirkungsterm gegeben ist,

$$H(\phi) = \frac{1}{2}(\phi, v^{-1}\phi) + V(\phi), \quad (5.1)$$

kann man den Propagator auch im Impulsraum nach Skalen organisieren. Dazu sei die Theorie auf einem  $d$ -dimensionalen Kontinuum  $T$ , am bequemsten, aber häufig ohne Regularisierung nicht möglich, auf  $\mathbb{R}^d$  definiert. Auf  $T$  sei durch

$$(f, g) = \int_T dx f(x)g(x) \quad (5.2)$$

ein Skalarprodukt gegeben. Felder  $\phi$  sind als Abbildungen von  $T$  nach  $\mathbb{R}$  erklärt. Das erzeugende Funktional der Feldtheorie ist dann durch

$$F(\psi) = \int d\mu_v(\phi) Z(\psi + \phi) \quad (5.3)$$

definiert, mit  $Z(\phi) = e^{-V(\phi)}$ . Durch  $(\Lambda_k)_{k=-\infty}^{\infty}$  sei eine streng monoton ansteigende Folge von Impuls-Werten mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda_k = \infty$  und  $\lim_{k \rightarrow -\infty} \Lambda_k = 0$  gegeben. Für den Propagator  $v$  gelte die folgende Zerlegung:

$$v = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(\Lambda_k) - C(\Lambda_{k+1}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(\Lambda_k, \Lambda_{k+1}). \quad (5.4)$$

Dabei ist  $v(\Lambda_k, \Lambda_{k+1}) = C(\Lambda_{k+1}) - C(\Lambda_k)$  ein Propagator für eine Impulsscheibe mit Impulsen zwischen  $\Lambda_k$  und  $\Lambda_{k+1}$ . Die Fouriertransformierte  $\tilde{C}$  von  $C$  kann man aus einer Cutoff-Funktion  $f$  und den Fourierkomponenten von  $v$  zusammensetzen. Die Cutoff-Funktion  $f$  muß euklidisch invariant, unendlich oft differenzierbar und streng monoton fallend sein, außerdem sollen  $f(0) = 1$  und  $f(x \gg 1) \approx 0$  gelten. Ein typisches Beispiel ist der Exponential-Cutoff  $f(x) = e^{-x}$ . Falls  $v$  dann der Laplace-Operator ist, hat man also:

$$\tilde{C}(\Lambda) = \frac{1}{p^2} e^{-\frac{p^2}{\Lambda^2}}. \quad (5.5)$$

Durch Trunkation der Summe (5.4) für große Werte von  $k$  kann man eine Ultraviolett-Regularisierung erreichen, durch Trunkation für kleine Werte von  $k$  kann man eine Infrarot-Regularisierung bekommen. Mit Hilfe der Faltungsformel für Gaußsche Maße kann man das Integral (5.3) in ein Produkt von Gaußintegralen mit Kovarianz  $v(\Lambda_k, \Lambda_{k+1})$  zerlegen. In jedem Integrationsschritt wird also eine Impulsscheibe integriert. Ein Schritt ist durch die Renormierungsgruppentransformation

$$Z(\psi, \Lambda) = \int d\mu_{v(\Lambda, \Lambda')}(\zeta) Z(\psi + \zeta, \Lambda') \quad (5.6)$$

gegeben. Dabei ist  $\Lambda'$  eine festgelegte Impulsskala.

Durch Ableiten von (5.6) nach  $\Lambda$  erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} Z(\psi, \Lambda) = \frac{1}{2} \Delta_{\dot{C}} Z(\psi, \Lambda), \quad (5.7)$$

die als RGDGL bezeichnet wird. Dabei ist mit  $\Delta_{\dot{C}}$  der Laplace-Operator

$$\Delta_{\dot{C}} = \int dx dy \frac{\delta}{\delta \psi(x)} \dot{C}(x, y) \frac{\delta}{\delta \psi(y)} \quad (5.8)$$

bezeichnet. Ferner gilt  $\dot{C} = \frac{\partial}{\partial \Lambda} C(\Lambda)$ . Die RGDGL für das erzeugende Funktional  $Z$  läßt sich in eine RGDGL für die Wechselwirkung  $V$  umformulieren, die durch

$$Z(\psi, \Lambda) = \exp(-V(\psi, \Lambda)) \quad (5.9)$$

definiert ist. Dann erhält man aus (5.6):

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} V = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\delta V}{\delta \psi}, \dot{C} \frac{\delta V}{\delta \psi} \right) - \Delta_{\dot{C}} V \right\}. \quad (5.10)$$

Gleichung (5.10) wird ebenfalls als RGDGL bezeichnet.

In dem Rest dieses Abschnitts wird Gleichung (5.7) unter bestimmten Voraussetzungen bewiesen.

**Satz 2** *Es sei  $Z(\psi, \Lambda)$  ein glattes Funktional mit einer Taylorentwicklung in jeder Variablen.  $v$  sei differenzierbar und  $\dot{v}$  sei ein negativer Operator. Ferner soll  $\dot{v}$  auf geeigneten Räumen operieren; in diesen Räumen sind die Funktionalableitungen von  $Z$  Maße mit bestimmten Eigenschaften. Dann folgt aus (5.6):*

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} Z(\psi, \Lambda) = \frac{1}{2} \Delta_{\dot{C}} Z(\psi, \Lambda). \quad (5.11)$$

Beweis: Für einen rigorosen Beweis fehlen hier die funktionalanalytischen und maßtheoretischen Begriffe. Auf die Frage nach Räumen und anderen Details wird daher nicht eingegangen.

Es sei also  $v(\Lambda, \Lambda_0) = C(\Lambda_0) - C(\Lambda)$  in (5.6). Die Ableitung von  $Z$  nach  $\Lambda$  an der Stelle  $\Lambda_1$  ist durch

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} \Big|_{\Lambda=\Lambda_1} Z(\psi, \Lambda) = \lim_{\Lambda \rightarrow \Lambda_1} \frac{Z(\psi, \Lambda) - Z(\psi, \Lambda_1)}{\Lambda - \Lambda_1} \quad (5.12)$$

definiert. Zunächst betrachtet man den Zähler des Differenzenquotienten. Dazu schreibt man  $v(\Lambda_1, \Lambda_0) = v(\Lambda, \Lambda_0) + v(\Lambda_1, \Lambda)$  und wendet die Faltungseigenschaft für Gaußsche Maße (Lemma 6 im Anhang) an:

$$\begin{aligned} & Z(\psi, \Lambda) - Z(\psi, \Lambda_1) \\ &= \int d\mu_{v(\Lambda, \Lambda_0)}(\zeta) Z(\psi + \zeta, \Lambda_0) - \int d\mu_{v(\Lambda_1, \Lambda_0)}(\zeta) Z(\psi + \zeta, \Lambda_0) \\ &= \int d\mu_{v(\Lambda, \Lambda_0)}(\zeta) Z(\psi + \zeta, \Lambda_0) - \\ & \quad \int d\mu_{v(\Lambda, \Lambda_0)}(\phi) \int d\mu_{v(\Lambda_1, \Lambda)}(\zeta) Z(\psi + \phi + \zeta, \Lambda_0). \end{aligned} \quad (5.13)$$



Durch eine Taylorentwicklung von  $Z(\psi + \phi + \zeta, \Lambda_0)$  bis zur zweiten Ordnung in  $\zeta$  berechnet man nun das letzte Integral. Es gilt

$$\begin{aligned} Z(\psi + \phi + \zeta, \Lambda_0) &= Z(\psi + \phi, \Lambda_0) + \int dx \frac{\delta Z(\psi + \phi, \Lambda_0)}{\delta \psi(x)} \zeta(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\delta^2 Z(\psi + \phi, \Lambda_0)}{\delta \psi(x) \delta \psi(y)} \zeta(x) \zeta(y) + \dots, \end{aligned} \quad (5.14)$$

also folgt mit Lemma 8 im Anhang

$$\begin{aligned} \int d\mu_{v(\Lambda_1, \Lambda)}(\zeta) Z(\psi + \phi + \zeta, \Lambda_0) &= Z(\psi + \phi, \Lambda_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int dx dy \frac{\delta^2 Z(\psi + \phi, \Lambda_0)}{\delta \psi(x) \delta \psi(y)} v_{x,y}(\Lambda_1, \Lambda) + O(v(\Lambda_1, \Lambda)^2). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Durch Einsetzen in (5.13) und eine weitere Taylorentwicklung erhält man:

$$\begin{aligned} Z(\psi, \Lambda) - Z(\psi, \Lambda_1) &= \frac{1}{2} \int d\mu_{v(\Lambda, \Lambda_0)}(\phi) \int dx dy \frac{\delta^2 Z(\psi + \phi, \Lambda_0)}{\delta \psi(x) \delta \psi(y)} v_{x,y}(\Lambda_1, \Lambda) \\ &= \frac{1}{2} \Delta_{\dot{C}(\Lambda_1)} Z(\psi, \Lambda) (\Lambda - \Lambda_1) + O((\Lambda - \Lambda_1)^2). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Durch Bildung des Differentialquotienten folgt die Behauptung.  $\square$

### 5.2.2 Die RGDGL in Polchinski-Form

Die RGDGL (5.10) kann im Impulsraum dargestellt werden. Die Gleichung lautet dann:

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} V = \frac{1}{2} \int \frac{dp}{(2\pi)^d} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{C}(p) \left( \frac{\delta V}{\delta \tilde{\phi}(p)} \frac{\delta V}{\delta \tilde{\phi}(-p)} - \frac{\delta^2 V}{\delta \tilde{\phi}(p) \delta \tilde{\phi}(-p)} \right). \quad (5.17)$$

Dies wird als Polchinski-Form der RGDGL bezeichnet [Pol84]. Um (5.17) zu zeigen, betrachtet man die Fouriertransformierte  $\tilde{\phi}$  von  $\phi$ , die durch

$$\tilde{\phi}(p) = \int dx e^{-ip \cdot x} \phi(x) \quad (5.18)$$

definiert ist; analog wird auch  $\tilde{C}$  erklärt. Der Kovarianzoperator  $C$  soll translationsinvariant sein. Für differenzierbare Funktionale  $F(\phi)$  erhält man aus

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(\phi + t\psi) &= \int dx \frac{\delta}{\delta \phi(x)} F(\phi) \psi(x) \\ &= \int \frac{dp}{(2\pi)^d} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}(p)} F(\phi) \tilde{\psi}(p) \end{aligned} \quad (5.19)$$

durch Fouriertransformation von  $\tilde{\psi}$  gemäß (5.18) die Beziehung

$$\frac{\delta}{\delta \phi(x)} F(\phi) = \int \frac{dp}{(2\pi)^d} e^{-ip \cdot x} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}(p)} F(\phi). \quad (5.20)$$

Aus (5.20) und (5.10) kann man dann (5.17) herleiten.

### 5.2.3 RGDGL für die Impulsraumkerne des Potentials

Um aus (5.17) ein Differentialgleichungssystem für die Impulsraumkerne von  $V$  zu erhalten, wird  $V$  durch seine Taylorentwicklung

$$V(\phi) = V(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) V_n(x_1, \dots, x_n) \quad (5.21)$$

dargestellt. Dabei ist  $V_n$  die  $n$ -te Funktionalableitung von  $V$ :

$$\begin{aligned} V_n(x_1, \dots, x_n) &= \left. \frac{\delta}{\delta\phi(x_1)} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi(x_n)} V(\phi) \right|_{\phi=0} \\ &= \int \prod_{k=1}^n \left( \frac{dp_k}{(2\pi)^d} e^{-ip_k \cdot x_k} \right) \frac{\delta^n V(\phi=0)}{\delta\tilde{\phi}(p_1) \cdots \delta\tilde{\phi}(p_n)}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Wenn man fordert, daß die betrachtete Theorie translationsinvariant ist, kann man

$$\frac{\delta^n V(\phi=0)}{\delta\tilde{\phi}(p_1) \cdots \delta\tilde{\phi}(p_n)} = (2\pi)^d \delta(p_1 + \dots + p_n) \tilde{V}_n(p_1, \dots, p_n; \Lambda) \quad (5.23)$$

setzen. An dieser Gleichung kann man ablesen, daß die Kerne  $\tilde{V}_n(p_1, \dots, p_n; \Lambda)$  symmetrisch in den Impulsen  $p_1, \dots, p_n$  sind. Damit bekommt die Taylorentwicklung von  $V$  die Gestalt

$$\begin{aligned} V(\phi) &= V(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{dp_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{dp_n}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(p_1) \cdots \tilde{\phi}(p_n) \\ &\quad \times (2\pi)^d \delta(p_1 + \dots + p_n) \tilde{V}_n(p_1, \dots, p_n; \Lambda). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Um die Notation zu vereinfachen, wird hier

$$\int_{p_1, \dots, p_n} f(p_1, \dots, p_n) := \int \frac{dp_1}{(2\pi)^d} \cdots \frac{dp_n}{(2\pi)^d} f(p_1, \dots, p_n), \quad (5.25)$$

$$P_n := \sum_{k=1}^n p_k, \text{ für } n \geq 1 \quad (5.26)$$

definiert. Für einige Umformungen ist das folgende Lemma recht nützlich:

**Lemma 2** Für  $m_0 \geq m_1, n_0 \geq n_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{(m-m_1)!} a_m \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(n-n_1)!} b_n &= \\ \sum_{m=m_0+n_0}^{\infty} \frac{1}{(m-m_1-n_1)!} \sum_{n=n_0}^{m-m_0} \binom{m-m_1-n_1}{n-n_1} a_{m-n} b_n. \quad \square \end{aligned} \quad (5.27)$$

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man die Taylorentwicklung (5.24) von  $V$  in (5.17) einsetzen. Wegen der Symmetrie der Kerne  $\tilde{V}_n$  gilt zunächst:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}(q)} V(\phi, \Lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \int_{p_1, \dots, p_{n-1}} \tilde{\phi}(p_1) \cdots \tilde{\phi}(p_{n-1}) \\ &\quad \times (2\pi)^d \delta(P_{n-1} + q) \tilde{V}_n(p_1, \dots, p_{n-1}, q; \Lambda). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Für die zweifache Funktionalableitung erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}(q_1)} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}(q_2)} V(\phi, \Lambda) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \int_{p_1, \dots, p_{n-2}} \tilde{\phi}(p_1) \cdots \tilde{\phi}(p_{n-2}) \\ &\quad \times (2\pi)^d \delta(P_{n-2} + q_1 + q_2) \tilde{V}_n(p_1, \dots, p_{n-2}, q_1, q_2; \Lambda). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Unter Verwendung von Lemma 2 wird aus dem ersten Term von (5.17):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_p \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \Lambda}(p) \frac{\delta^2 V}{\delta \tilde{\phi}(p) \delta \tilde{\phi}(-p)} &= \\ \frac{1}{2} \int_q \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \Lambda}(q) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-2}{m-1} \int_{p_1, \dots, p_{n-2}} &\tilde{\phi}(p_1) \cdots \tilde{\phi}(p_{n-2}) \\ \times (2\pi)^d \delta(P_{m-1} + q) \tilde{V}_m(p_1, \dots, p_{m-1}, q; \Lambda) & \\ \times (2\pi)^d \delta(P_{n-2} - P_{m-1} - q) \tilde{V}_{n-m}(p_m, \dots, p_{n-2}, -q; \Lambda). & \end{aligned} \quad (5.30)$$

Durch Ausintegration einer  $\delta$ -Funktion und durch Summationsindexverschiebung folgt dafür der Ausdruck

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{p_1, \dots, p_n} \tilde{\phi}(p_1) \cdots \tilde{\phi}(p_n) (2\pi)^d \delta(P_n) \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \Lambda}(-P_m) \\ \times \tilde{V}_{m+1}(p_1, \dots, p_m, -P_m; \Lambda) \tilde{V}_{n-m+1}(p_{m+1}, \dots, p_n, P_m; \Lambda). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Mit Hilfe von (5.29) zeigt man analog für den zweiten Term in (5.17) die Beziehung:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_p \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \Lambda}(p) \frac{\delta^2 V}{\delta \tilde{\phi}(p) \delta \tilde{\phi}(-p)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{p_1, \dots, p_n} \tilde{\phi}(p_1) \cdots \tilde{\phi}(p_n) \\ \times (2\pi)^d \delta(P_n) \left( -\frac{1}{2} \right) \int_q \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \Lambda}(q) \tilde{V}_{n+2}(p_1, \dots, p_n, q, -q; \Lambda). \end{aligned} \quad (5.32)$$

(5.31) und (5.32) ergeben zusammen die RGDGL für die Impulsraumkerne  $\tilde{V}_n$ . Das Resultat ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{V}_n(p_1, \dots, p_n; \Lambda) &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left\{ \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \Lambda}(-P_m) \tilde{V}_{m+1}(p_1, \dots, p_m, -P_m; \Lambda) \right. \\ &\quad \times \tilde{V}_{n-m+1}(p_{m+1}, \dots, p_n, P_m; \Lambda) \Big\}_{S_n} - \frac{1}{2} \int_q \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \Lambda}(q) \tilde{V}_{n+2}(p_1, \dots, p_n, q, -q; \Lambda). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Mit  $\{\cdots\}_{S_n}$  wird die Symmetrisierung bezüglich der äußeren Impulse  $p_1, \dots, p_n$  bezeichnet. Diese Operation macht die Symmetrie der Kerne  $\tilde{V}_n(p_1, \dots, p_n; \Lambda)$  unter Vertauschung der Impulse explizit sichtbar.

### 5.2.4 Reskalierung

Aus (5.33) kann man durch Reskalierung mit  $\Lambda$  die RGDGL in der Form herleiten, die anschließend in meinen Rechnungen benutzt wird. Die Reskalierung entspricht dem Übergang zu dimensionslosen Größen. Da die Gleichungen im Impulsraum ausgedrückt werden, ist es zweckmäßig, mit Massendimensionen zu arbeiten, die im folgenden mit  $[\cdot]$  bezeichnet werden. Die Dimensionen der Größen in Gleichung (5.33) bekommt man durch die Forderung, daß die Wirkung dimensionslos sein soll.

Dimensionslose Felder  $\Phi$ , die von dimensionslosen Argumenten  $z = \Lambda x$ ,  $x \in T$  abhängen, werden durch

$$\phi(x) = \Lambda^{[\phi]} \Phi(\Lambda x) \quad (5.34)$$

definiert. Ein Massenterm in einer Wirkung hat die Gestalt

$$m^2 \int dx \phi(x)^2, \quad (5.35)$$

mit einer Masse  $m$ . Dafür folgt:

$$m^2 \int dx \phi(x)^2 = \Lambda^{2-d+2[\phi]} \left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2 \int dz \Phi(z)^2. \quad (5.36)$$

Da die Wirkung dimensionslos sein soll, ergibt sich  $[\phi] = \frac{d}{2} - 1$ . Damit hat man für die Fouriertransformierte des Feldes:

$$\tilde{\phi}(p) = \Lambda^{-(1+\frac{d}{2})} \int dz e^{-i\frac{p}{\Lambda} \cdot z} \Phi(z). \quad (5.37)$$

Wenn man also die dimensionslose Fouriertransformierte des dimensionslosen Feldes  $\Phi$  durch

$$\tilde{\Phi}(q) = \int dz e^{-iq \cdot z} \Phi(z) \quad (5.38)$$

definiert, so gilt

$$\tilde{\phi}(p) = \Lambda^{-1-\frac{d}{2}} \tilde{\Phi}\left(\frac{p}{\Lambda}\right) \quad (5.39)$$

$$\tilde{\Phi}(q) = \Lambda^{1+\frac{d}{2}} \tilde{\phi}(\Lambda q). \quad (5.40)$$

Es sei nun  $\Lambda = t\Lambda_R$  bezüglich einer Renormierungsskala  $\Lambda_R$ . Dann kann man die Reskalierung wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(p) &= \Lambda^{-(\frac{d}{2}+1)} \tilde{\Phi}\left(\frac{p}{\Lambda}\right) \\ &= \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_R}\right)^{-(\frac{d}{2}+1)} \Lambda_R^{-(\frac{d}{2}+1)} \tilde{\Phi}\left(\frac{\Lambda_R}{\Lambda} \frac{p}{\Lambda_R}\right) \\ &= t^{-(\frac{d}{2}+1)} \tilde{\phi}_R\left(\frac{p}{t}\right), \end{aligned} \quad (5.41)$$

mit  $\tilde{\phi}_R(p) = \Lambda_R^{-(\frac{d}{2}+1)} \tilde{\Phi}(\frac{p}{\Lambda_R})$ . Am einfachsten ist die Wahl  $\Lambda_R = 1$ , bei der man  $\Lambda = t$  als dimensionslosen Skalenparameter betrachten kann.

Dimensionslose Impulsraumkerne  $\tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_n; \Lambda)$ , die von dimensionslosen Argumenten  $q_1, \dots, q_n$  abhängen, werden durch

$$\tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_n; \Lambda) = \Lambda^{-[\tilde{V}_n]} \tilde{V}_n(\Lambda q_1, \dots, \Lambda q_n; \Lambda) \quad (5.42)$$

definiert. Dies setzt man in die Taylorentwicklung von  $V$  ein und erhält daraus

$$\begin{aligned} \int_{dp_1, \dots, dp_n} \tilde{\phi}(p_1) \cdots \tilde{\phi}(p_n) (2\pi)^d \delta(P_n) \tilde{V}_n(p_1, \dots, p_n; \Lambda) = \\ \Lambda^{n(\frac{d}{2}-1)-d+[\tilde{V}_n]} \int_{dq_1, \dots, dq_n} \tilde{\Phi}(q_1) \cdots \tilde{\Phi}(q_n) (2\pi)^d \delta(Q_n) \tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_n; \Lambda). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Dabei hat man analog zu (5.25)  $Q_n = \sum_{k=1}^n q_k$  definiert. Wenn man  $[V] = 0$  verlangt, folgt daraus

$$D_n := [\tilde{V}_n] = d + n - n \frac{d}{2}. \quad (5.44)$$

Als Kovarianz wird das Inverse des Laplaceoperators auf  $T$  mit einer glatten, dimensionslosen Cutoff-Funktion  $f$  verwendet. Im Impulsraum gilt also

$$\tilde{C}(p; \Lambda) = \frac{1}{p^2} f(p^2/\Lambda^2). \quad (5.45)$$

Dann ist

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \Lambda}(p; \Lambda) = -\frac{2}{\Lambda^3} f'(p^2/\Lambda^2). \quad (5.46)$$

Daraus folgt, daß  $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \Lambda}$  die Dimension  $[\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \Lambda}] = -3$  besitzt.

Damit hat man die Dimensionen aller an Gleichung (5.33) beteiligten Größen bestimmt. Für die linke Seite der RGDGL (5.33) ist damit folgende Umformung gültig:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \tilde{V}_n(p_1, \dots, p_n) = \\ \Lambda^{D_n-1} \left( D_n + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} - \sum_{i=1}^n q_i \cdot \nabla_{q_i} \right) \tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_n; \Lambda) \Big|_{q_l = \frac{p_l}{\Lambda}, \forall l}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Insgesamt bekommt man also nach Übergang zu dimensionslosen Größen ein Differentialgleichungssystem für die reskalierten Impulsraumkerne des Potentials:

$$\begin{aligned} \left( D_n + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} - \sum_{i=1}^n q_i \cdot \nabla_{q_i} \right) \tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_n; \Lambda) \Big|_{q_l = \frac{p_l}{\Lambda}, \forall l} = \\ \int_q f'(q^2) \tilde{\mathcal{V}}_{n+2}(q_1, \dots, q_n, q, -q; \Lambda) \\ - \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \left\{ f'(Q_m^2) \tilde{\mathcal{V}}_{m+1}(q_1, \dots, q_m, -Q_m; \Lambda) \right. \\ \left. \times \tilde{\mathcal{V}}_{n-m+1}(q_{m+1}, \dots, q_n, Q_m; \Lambda) \right\} \Big|_{S_n \Big|_{q_l = \frac{p_l}{\Lambda}, \forall l}}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Wenn das Potential als Funktion des Feldes gerade ist, verschwinden alle Kerne  $\tilde{\mathcal{V}}_n$ , für die  $n$  ungerade ist. Durch eine Umnummerierung der Kerne wird aus (5.48):

$$\begin{aligned} & \left( D_{2n} + \mathcal{D} - \sum_{i=1}^{2n} q_i \cdot \nabla_{q_i} \right) \tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_{2n}; \Lambda) = \\ & \int_q f'(q^2) \tilde{\mathcal{V}}_{n+1}(q_1, \dots, q_{2n}, q, -q; \Lambda) \\ & - \sum_{m=1}^n \binom{2n}{2m-1} \left\{ f'(Q_{2m-1}^2) \tilde{\mathcal{V}}_m(q_1, \dots, q_{2m-1}, -Q_{2m-1}; \Lambda) \right. \\ & \quad \left. \times \tilde{\mathcal{V}}_{n-m+1}(q_{2m}, \dots, q_{2n}, Q_{2m-1}; \Lambda) \right\}_{S_{2n}}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Dabei wurde  $\mathcal{D} = \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda}$  definiert. Diese Gleichungen kann man graphisch interpretieren, indem der Kern  $\tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_{2n}; \Lambda)$  als Graph mit  $2n$  Beinen dargestellt wird. An den Beinen sollen die Impulse  $q_1, \dots, q_{2n}$  einlaufen. Dann kann (5.49) wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} & \left( D_{2n} + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} - \sum_{i=1}^{2n} q_i \cdot \nabla_{q_i} \right) \text{Diagram} \\ & = \text{Diagram} + \sum_{m=1}^n \text{Diagram} \cdot \text{Diagram}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

The diagrammatic representation of equation (5.50) shows the operator  $(D_{2n} + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} - \sum_{i=1}^{2n} q_i \cdot \nabla_{q_i})$  acting on a circle with  $2n$  external legs. This is equal to the same circle with a self-loop labeled  $f'(q^2)$ , plus a sum over  $m$  from 1 to  $n$  of a circle with  $2m-1$  legs connected to another circle with  $2n-2m+1$  legs, with a propagator line between them labeled  $f'(Q_{2m-1}^2)$ .

Die Ableitung auf der linken Seite wird also durch einen Propagator-Term  $f'$  erzeugt. Dieser Term kann zwei Linien eines Diagramms verbinden; dann läuft durch die Propagatorlinie ein Impuls  $q$ , über den integriert wird. Oder es werden zwei Kerne durch eine Propagatorlinie verbunden, durch die der Impuls  $Q_{2m-1}$  läuft.

Das System (5.49) von gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen wird als RGDGL für die reskalierten Impulsraumkerne des Potentials oder kurz als RGDGL bezeichnet. Im Unterschied zu der Polchinski-Form (5.17) der RGDGL ist das System (5.49) ein Differentialgleichungssystem direkt für die renormierte Theorie. Vielleicht ist es nicht überflüssig, hier noch einmal zu betonen, daß man Trajektorien im Raum von Potentials unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachten kann. Einerseits kann man ein Anfangswertproblem lösen, was der Analyse eines Renormierungsgruppenflusses, ausgehend von einer nackten Wirkung, entspricht. Andererseits kann man ein gemischtes Randwertproblem betrachten, bei dem die relevanten und die irrelevanten Kopplungen unterschiedlich behandelt werden. Die relevanten Parameter werden auf einer niedrigeren Skala vorgegeben, die irrelevanten auf einer höheren Skala; dies ist im Sinn von Polchinski. Ein drittes Problem ist das verallgemeinerte Fixpunktproblem, das hier aufgestellt, und in zwei Näherungen durch

rekursive Störungstheorien in laufenden Kopplungen gelöst wird. An die Stelle von Anfangsdaten oder Randwerten tritt hier die Forderung nach Regularität.

## 5.3 Störungstheorie für die lokale Näherung

Die Näherung an die Gleichungen (5.49), bei der die Impulsraumkerne nicht mehr von den Impulsen abhängen, wird als lokale Näherung bezeichnet; sie hängt direkt mit dem hierarchischen Modell zusammen. In der lokalen Näherung kann man die  $\phi^4$ -Trajektorie mit Hilfe der RGDGL rekursiv berechnen. Wie in Kapitel 4 gibt es auch hier unter bestimmten Bedingungen Resonanzen.

### 5.3.1 Definition der lokalen Näherung

Die einfachste Näherung für die Kerne  $\tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_{2n}; \Lambda)$  besteht darin, ihre Impulsabhängigkeit vollständig auszuschalten. Die nicht mehr impulsabhängigen Kerne werden mit  $a_n$  bezeichnet. In dieser lokalen Näherung haben die Gleichungen (5.49) die Gestalt

$$(\mathcal{D} + D_{2n}) a_n(\Lambda) = \gamma a_{n+1}(\Lambda) - \gamma \sum_{m=1}^n \binom{2n}{2m-1} a_m(\Lambda) a_{n-m+1}(\Lambda). \quad (5.51)$$

Dabei wurde die Ableitung  $f'(q^2)$  der Cutoff-Funktion durch die Zahl  $\gamma$  ersetzt.

Gleichung (5.51) kann ausgehend vom hierarchischen Modell hergeleitet werden, wenn man die Renormierungsgruppentransformation

$$Z(\psi, \Lambda) = \int d\mu_{v(\Lambda, \Lambda_0)}(\zeta) Z(\beta\psi + \zeta, \Lambda_0)^{L^d} \quad (5.52)$$

betrachtet. Hier ist die Kovarianz  $v$  von einem Parameter  $\Lambda$  abhängig. Wie üblich gilt  $\beta = L^{1-\frac{d}{2}}$ . Mit  $d\mu_{v(\Lambda, \Lambda_0)}(\zeta)$  wird das gewöhnliche, eindimensionale Gaußsche Maß mit Mittelwert Null bezeichnet. Nach partieller Integration erhält man für die Ableitung von  $Z$  nach  $\Lambda$ :

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} Z(\psi, \Lambda) = \frac{\dot{v}\beta^{-2}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} Z(\psi, \Lambda), \quad (5.53)$$

mit  $\dot{v} = \frac{\partial}{\partial \Lambda} v$ . Wenn man nun  $Z = \exp(-V)$  setzt, erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} V = \frac{\dot{v}\beta^{-2}}{2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} - \frac{\partial V}{\partial \psi} \frac{\partial V}{\partial \psi} \right). \quad (5.54)$$

Nach Entwicklung des (geraden, normierten) Potentials nach Potenzen des Feldes,

$$V(\psi, \Lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} b_n(\Lambda) \psi^{2n}, \quad (5.55)$$

folgt mit Hilfe von Lemma 2 und nach Summationsindexverschiebungen:

$$\frac{\partial}{\partial \Lambda} b_n = \frac{\dot{\nu} \beta^{-2}}{2} \left( b_{n+1} - \sum_{m=1}^n \binom{2n}{2m-1} b_m b_{n-m+1} \right). \quad (5.56)$$

Hier erfolgt eine Reskalierung analog zu Abschnitt 5.2.4.  $V$  soll wie dort dimensionslos sein, das heißt  $[V] = 0$ . Daraus ergibt sich  $[\psi^{2n}] + [b_n] = 0$ , und mit  $[\psi] = \frac{d}{2} - 1$  folgt  $[b_n] = 2n - nd$ . Daraus kann man nun  $[\dot{\nu}] = d - 3$  schließen. Definiert man dann noch

$$\begin{aligned} d_{2n} &= 2n - nd = [b_n], \\ \frac{\dot{\nu} \beta^{-2}}{2} &= \Lambda^{d-3} \gamma \quad \text{und} \\ a_n &= \Lambda^{-d_{2n}} b_n, \end{aligned} \quad (5.57)$$

so ergibt sich das Differentialgleichungssystem (5.51), in dem  $D_{2n}$  durch  $d_{2n}$  ersetzt ist. Dieses System wird als hierarchische RGDGL bezeichnet.

### 5.3.2 Störungstheorie in der laufenden Kopplung

Um eine Störungsentwicklung in einer laufenden Kopplung für die hierarchische RGDGL anzugeben, verwendet man als laufende Kopplung die  $\phi^4$ -Kopplung  $g$ , die durch

$$g(\Lambda) = a_2(\Lambda) \quad (5.58)$$

definiert ist. Die Kopplung  $g$  muß demnach eine Lösung der Gleichung

$$(\mathcal{D} + d_4)g = \gamma a_3(\Lambda) - 8\gamma g a_1(\Lambda) \quad (5.59)$$

sein. Zur Lösung des Systems (5.51) macht man den Ansatz

$$\begin{aligned} a_1(\Lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-1} a_1^{(k)} g(\Lambda)^k, \\ a_n(\Lambda) &= \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} a_n^{(k)} g(\Lambda)^k, \quad \text{für } n \geq 3. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Dabei sollen die Koeffizienten  $a_n^{(k)}$  nicht von  $\Lambda$  abhängen. Eine Entwicklung der Gestalt (5.60) wird heuristisch nahegelegt. Damit werden alle Terme berücksichtigt, die mit Feynman-Diagrammen einer  $\phi^4$ -Theorie korrespondieren. Diese Diagramme sind aus  $\phi^4$ -Vertices  $\text{---}\!\!\!\!\text{---}\!\!\!\!\text{---}$  mit der Kopplung  $g$  aufgebaut. Beine von Vertices können durch den Propagator  $\gamma$  verbunden werden. Die Potenz von  $\gamma$  gibt dann die Zahl der inneren Linien eines Diagramms wieder. Für den Massenterm  $a_1(\Lambda)$  etwa kann man also bildlich schreiben:

$$a_1(\Lambda) = \text{---}\!\!\!\!\text{---}\!\!\!\!\text{---} \overset{\gamma}{\bigcirc} \text{---}\!\!\!\!\text{---}\!\!\!\!\text{---} + \text{---}\!\!\!\!\text{---}\!\!\!\!\text{---} \bigcirc \text{---}\!\!\!\!\text{---}\!\!\!\!\text{---} + \text{---}\!\!\!\!\text{---}\!\!\!\!\text{---} \bigcirc \text{---}\!\!\!\!\text{---}\!\!\!\!\text{---} + \dots \quad (5.61)$$

$g$                        $\gamma^3 g^2$                        $\gamma^5 g^3$



Die Potenz von  $g$  gibt die Zahl der  $\phi^4$ -Vertices und damit die Störungsordnung der Diagramme an. Man beachte, daß  $a_n^{(k)}$  für  $k < n - 1$  in (5.60) gleich Null gesetzt wurde. Zum Beispiel wird ein  $\phi^6$ -Term aus  $\phi^4$ -Vertices erst in zweiter Ordnung erzeugt:

$$a_3(\Lambda) = \begin{array}{c} | \\ \hline | \\ \hline | \end{array} + \dots \quad (5.62)$$

$\gamma g^2$

Da das hierarchische Modell auf Punkten, also nulldimensionalen Mengen lebt, haben die Feynman-Diagramme nur eine sehr eingeschränkte Bedeutung. Um Ideen zur Lösung der hierarchischen RGDGL zu bekommen, sind sie aber gut geeignet, vergleiche auch Abschnitt 4.2.2.

Die Koeffizienten  $a_n^{(k)}$  werden rekursiv bestimmt. Dazu setzt man den Ansatz (5.60) in Gleichung (5.51) ein, und transformiert beide Seiten von (5.51) auf eine Gestalt, die einen Koeffizientenvergleich ermöglicht. Auf der linken Seite von (5.51) muß  $\mathcal{D}a_n(\Lambda)$  gebildet werden. Wenn man die Störungsreihe (5.60) einsetzt, sieht man, daß dies auf eine Bestimmung von  $\mathcal{D}g$  hinausläuft.  $\mathcal{D}g$  ergibt sich aus (5.59):

$$\mathcal{D}g = -d_4g + \gamma a_3 - 8\gamma g a_1. \quad (5.63)$$

Durch Einsetzen der Entwicklung für die Kerne erhält man daraus

$$\mathcal{D}g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-2} g^k (\mathcal{D}g)^{(k)}, \quad (5.64)$$

mit

$$(\mathcal{D}g)^{(k)} = \begin{cases} -d_4, & \text{falls } k = 1, \\ a_3^{(k)} - 8ka_1^{(k-1)}, & \text{falls } k > 1. \end{cases} \quad (5.65)$$

Man beachte, daß  $\mathcal{D}g$  in der ersten Ordnung nur von der Skalierung  $d_4$  abhängt. Mit Hilfe von Lemma 2, das bei den nun folgenden Umformungen immer wieder nützlich ist, erhält man für  $n > 2$  aus dem Ansatz:

$$\mathcal{D}a_n = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k (\mathcal{D}a_n)^{(k)}. \quad (5.66)$$

Dabei gilt:

$$(\mathcal{D}a_n)^{(k)} = \sum_{l=1}^{k-n+2} \binom{k}{l} a_n^{(k-l+1)} (\mathcal{D}g)^{(l)}. \quad (5.67)$$

Auf der rechten Seite von Gleichung (5.51) ergibt sich für  $n > 2$  nach Einsetzen der Störungsreihen mit Lemma 2:

$$\begin{aligned} \gamma a_{n+1} - \gamma \sum_{m=1}^n \binom{2n}{2m-1} a_m a_{n-m+1} &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k a_{n+1}^{(k)} \\ &- \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \sum_{m=1}^n \binom{2n}{2m-1} \sum_{l=n-m}^{k-m+1} \binom{k}{l} a_m^{(k-l)} a_{n-m+1}^{(l)}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Damit wird aus Gleichung (5.51) für  $n > 2$  die Beziehung

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \left( d_{2n} a_n^{(k)} - d_4 k a_n^{(k)} + \sum_{l=2}^{k-n+2} \binom{k}{l} a_n^{(k-l+1)} (\mathcal{D}g)^{(l)} \right) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k a_{n+1}^{(k)} \\
&\quad - \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \sum_{m=1}^n \binom{2n}{2m-1} \sum_{l=n-m}^{k-m+1} \binom{k}{l} a_m^{(k-l)} a_{n-m+1}^{(l)}. \tag{5.69}
\end{aligned}$$

Für  $n = 1$  erhält man durch eine analoge Rechnung aus (5.51) die Gleichung

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-1} g^k \left( d_2 a_1^{(k)} + (\mathcal{D}a_1)^{(k)} \right) \\
&= \gamma g - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-1} g^k \sum_{l=1}^{k-1} 2 \binom{k}{l} a_1^{(k-l)} a_1^{(l)}, \tag{5.70}
\end{aligned}$$

mit

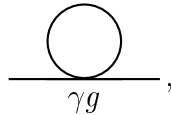
$$(\mathcal{D}a_1)^{(k)} = -d_4 k a_1^{(k)} + \sum_{l=2}^k \binom{k}{l} a_1^{(k-l+1)} (\mathcal{D}g)^{(l)}. \tag{5.71}$$

Diese Gleichungen dienen als Ausgangspunkt für die rekursive Berechnung der Entwicklungskoeffizienten  $a_n^{(k)}$ . Im folgenden soll gezeigt werden, wie ein solches Rekursionsschema aussieht.

### 5.3.3 Auflösung der Rekursion

Ein Rekursionsschema zu finden, durch das die hierarchische RGDGL gelöst wird, ist leider etwas technisch, da die in den Ausdrücken (5.64)-(5.70) vorkommenden Koeffizienten Ordnung für Ordnung analysiert werden müssen. Das allgemeine Schema ist nach Störungsordnungen organisiert. Zunächst wird  $a_1^{(1)}$  berechnet. Damit sind alle Koeffizienten erster Ordnung bestimmt. Nun nimmt man an, daß alle Koeffizienten der Ordnung  $l < k$  bereits bestimmt sind. In  $k$ -ter Ordnung wird zunächst  $a_{k+1}^{(k)}$  berechnet, dann  $a_k^{(k)}$ , usw. Zum Schluß wird  $a_1^{(k)}$  berechnet. Wenn man gezeigt hat, daß diese Induktion möglich ist, hat man ein Verfahren zur störungstheoretischen Lösung der hierarchischen RGDGL angegeben.

Anschaulich ist klar, daß dieses Schema zur Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten funktioniert.  $a_1^{(1)}$  entspricht dem Ein-Schleifen-Diagramm



das aus einem  $\phi^4$ -Vertex erzeugt wird. Da der Koeffizient  $a_2^{(1)}$  für den  $\phi^4$ -Vertex natürlich vorgegeben ist, kann man  $a_1^{(1)}$  berechnen. Der Baumgraph mit  $2k + 2$  äußeren Beinen, der mit dem Koeffizienten  $a_{k+1}^{(k)}$  korrespondiert, kann nicht aus anderen Diagrammen der Ordnung  $k$  zusammengesetzt sein. Er wird vielmehr von Baumgraphen niedrigerer Ordnung erzeugt, was man zum Beispiel an Gleichung (5.77) und (5.79) erkennt. Also hängt  $a_{k+1}^{(k)}$  nur von Koeffizienten niedrigerer Ordnung ab. Wenn man die Baumgraphen-Terme bestimmt hat, kann man auch die daraus und aus niedrigeren Ordnungen erzeugten Ein-Schleifen-Terme berechnen, usw. Man erkennt, daß das Rekursionsschema aufgeht.

Bevor die allgemeine Form der Koeffizienten ermittelt wird, illustriere ich das Schema anhand der ersten und der zweiten Ordnung Störungstheorie. Für  $k = 1$  folgt aus (5.70)

$$(d_2 - d_4)a_1^{(1)} = 1. \quad (5.72)$$

Falls  $d_2 - d_4 \neq 0$  ist, hat man also

$$a_1^{(1)} = \frac{1}{d_2 - d_4}. \quad (5.73)$$

Wegen  $d_n = n - n\frac{d}{2}$  gilt aber  $d_2 - d_4 = d - 2$ , das heißt, für  $d \neq 2$  läßt sich  $a_1^{(1)}$  bestimmen.

In der zweiten Ordnung Störungstheorie muß man  $a_3^{(2)}$  und  $a_1^{(2)}$  berechnen. Für  $a_3^{(2)}$  ergibt sich aus (5.69)

$$(-2d_4 + d_6)a_3^{(2)} = -40a_1^{(1)}, \quad (5.74)$$

also folgt, falls  $d_6 - 2d_4 \neq 0$  gilt,

$$a_3^{(2)} = \frac{40a_1^{(1)}}{2d_4 - d_6} = -\frac{40}{(d-2)^2}. \quad (5.75)$$

Für  $a_1^{(2)}$  erhält man aus (5.70):

$$(d_2 - 2d_4)a_1^{(2)} = -4a_1^{(1)2} - a_1^{(1)}(a_3^{(2)} - 16a_1^{(1)}). \quad (5.76)$$

Dabei ist  $d_2 - 2d_4 = 3(d - 2)$ , also kann man  $a_1^{(2)}$  in Dimensionen  $d \neq 2$  berechnen.

Diese Rechnungen zeigen bereits die allgemeine Struktur der Gleichungen, die man in höheren Ordnungen bekommt. Für jeden Koeffizienten, den man bestimmen möchte, erhält man über die Skalierungsdimensionen  $d_n$  der Kerne des hierarchischen Modells eine Bedingung an die Dimension  $d$ , in der die Störungstheorie definiert wird.

In der Ordnung  $k \geq 3$  wird zunächst  $a_{k+1}^{(k)}$  unter der Annahme, daß die Koeffizienten der niedrigeren Ordnungen bereits berechnet sind, bestimmt. Für  $n > k + 1$  sind die Koeffizienten  $a_n^{(k)}$  gleich Null. Aus (5.69) folgt mit  $n = k + 1$  wegen  $a_1^{(0)} = 0$ :

$$(d_{2k+2} - kd_4)a_{k+1}^{(k)} = -\sum_{m=2}^k \binom{2k+2}{2m-1} \binom{k}{k+1-m} a_m^{(m-1)} a_{k+2-m}^{(k+1-m)}. \quad (5.77)$$

Alle Koeffizienten auf der rechten Seite sind schon bekannt. Also folgt: Falls für alle  $k \geq 2$

$$d_{2k+2} - kd_4 \neq 0 \quad (5.78)$$

gilt, kann man in (5.77) stets nach  $a_{k+1}^{(k)}$  auflösen und  $a_{k+1}^{(k)}$  berechnen. Die Forderung (5.78) wird weiter unten analysiert.

An dem Ausdruck für  $a_{k+1}^{(k)}$  erkennt man, daß die höchsten Koeffizienten nur von den höchsten Koeffizienten anderer Ordnungen abhängen. Dies bedeutet gerade, daß Baumgraphen einer Ordnung  $k$  nur von Baumgraphen niedrigerer Ordnungen erzeugt werden können. Gleichung (5.77) kann man anschaulich als

$$\underbrace{\begin{array}{c} | & | & | & | \\ \hline & \dots & \end{array}}_{k \text{ Vertices}} = \sum_{m=1}^{k-1} \underbrace{\begin{array}{c} | & | \\ \hline & \dots & \end{array}}_{m \text{ Vertices}} \cdot \underbrace{\begin{array}{c} | & | \\ \hline & \dots & \end{array}}_{k-m \text{ Vertices}} \quad (5.79)$$

schreiben. Innerhalb der Rekursion gibt es also eine Unterrekursion, die nur aus Baumgraphen besteht. Dies kann für Beweise exakter Abschätzungen nützlich sein.

Nun sei ein  $n$  mit  $k \geq n \geq 3$  gegeben. Ferner seien die Koeffizienten  $a_m^{(k)}$  für  $k+1 \geq m \geq n+1$  bereits bekannt. Dann erhält man für  $a_n^{(k)}$  aus (5.69) die Beziehung

$$\begin{aligned} (d_{2n} - kd_4)a_n^{(k)} + \sum_{l=2}^{k-n+2} \binom{k}{l} a_n^{(k-l+1)} (\mathcal{D}g)^{(l)} \\ = a_{n+1}^{(k)} - \sum_{m=1}^n \binom{2n}{2m-1} \sum_{l=n-m}^{k-m+1} \binom{k}{l} a_m^{(k-l)} a_{n-m+1}^{(l)}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

wobei  $(\mathcal{D}g)^{(l)}$  durch (5.65) gegeben ist. Zunächst sieht man, daß in  $(\mathcal{D}g)^{(l)}$  für  $2 \leq l \leq k-n+2$  nur Koeffizienten von niedrigerer Ordnung als  $k$  auftreten. Dann bekommt man durch Anwendung von  $a_1^{(0)} = 0$ :

$$\begin{aligned} (d_{2n} - kd_4)a_n^{(k)} \\ = a_{n+1}^{(k)} - \sum_{l=2}^{k-n+2} \binom{k}{l} a_n^{(k-l+1)} (\mathcal{D}g)^{(l)} \\ - \sum_{m=2}^{n-1} \binom{2n}{2m-1} \sum_{l=n-m}^{k-m+1} \binom{k}{l} a_m^{(k-l)} a_{n-m+1}^{(l)} - 4n \sum_{l=1}^{k-n+1} a_n^{(k-l)} a_1^{(l)}. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Bei dieser Umformung wurde ausgenutzt, daß die Terme mit  $m=1$  und  $m=n$  in der Summe über  $m$  in (5.80) gleich sind. Auf der rechten Seite von Gleichung (5.81) stehen nur Koeffizienten von niedrigerer Ordnung als  $k$  oder solche, die laut Annahme schon berechnet worden sind. Falls nun  $d_{2n} - kd_4 \neq 0$  gilt, kann man (5.81) nach  $a_n^{(k)}$  auflösen. Um die Berechnung der Ordnung  $k$  abzuschließen muß

man noch  $a_1^{(k)}$  bestimmen. Dies geschieht aus (5.70) analog zur Bestimmung von  $a_n^{(k)}$ . Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} & (d_2 - kd_4) a_1^{(k)} \\ &= - \sum_{l=2}^k \binom{k}{l} a_1^{(k-l+1)} (\mathcal{D}g)^{(l)} - 2 \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} a_1^{(k-l)} a_1^{(l)}, \end{aligned} \quad (5.82)$$

was unter der Bedingung  $d_2 - kd_4 \neq 0$  stets nach  $a_1^{(k)}$  aufgelöst werden kann. Insgesamt erhält man den folgenden Satz:

**Satz 3** *Die Koeffizienten der Störungsreihe in der laufenden Kopplung  $g$  für das Potential in lokaler Näherung, die durch (5.55), (5.57) und (5.60) definiert sind, können rekursiv als Lösung der hierarchischen RGDGL (5.51) berechnet werden, falls für alle Ordnungen  $k \geq 1$  gilt:*

$$d_{2n} - kd_4 \neq 0, \text{ für alle } n \text{ mit } n = 1 \text{ oder } k + 1 \geq n \geq 3. \quad (5.83)$$

Dies ist für

$$d \neq 2 \quad (5.84)$$

erfüllt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= \frac{1}{d_2 - d_4}, \\ a_2^{(1)} &= 1, \\ a_{k+1}^{(k)} &= \frac{1}{kd_4 - d_{2k+2}} \sum_{m=2}^k \binom{2k+2}{2m-1} \binom{k}{k+1-m} a_m^{(m-1)} a_{k+2-m}^{(k+1-m)}, \text{ für } k \geq 2, \\ a_n^{(k)} &= \frac{1}{d_{2n} - kd_4} \left\{ a_{n+1}^{(k)} - \sum_{l=2}^{k-n+2} \binom{k}{l} a_n^{(k-l+1)} (\mathcal{D}g)^{(l)} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=2}^{n-1} \binom{2n}{2m-1} \sum_{l=n-m}^{k-m+1} \binom{k}{l} a_m^{(k-l)} a_{n-m+1}^{(l)} - 4n \sum_{l=1}^{k-n+1} a_n^{(k-l)} a_1^{(l)} \right\}, \\ &\quad \text{für } k \geq n \geq 3, \text{ und} \\ a_1^{(k)} &= \frac{1}{d_2 - kd_4} \left\{ - \sum_{l=2}^k \binom{k}{l} a_1^{(k-l+1)} (\mathcal{D}g)^{(l)} - 2 \sum_{l=1}^{k-1} \binom{k}{l} a_1^{(k-l)} a_1^{(l)} \right\}, \\ &\quad \text{für } k \geq 2. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Beweis: Es ist nur noch zu zeigen, daß (5.83) für  $d \neq 2$  erfüllt ist. Dazu sei an die Definition (5.57) von  $d_{2n}$  erinnert:

$$d_{2n} = 2n - nd = n(2 - d).$$

Speziell gilt für  $n = 2$ :

$$d_4 = 2(2 - d). \quad (5.86)$$

Es ist

$$\begin{aligned} d_{2n} - kd_4 &= n(2-d) - 2k(2-d) \\ &= (n-2k)(2-d). \end{aligned} \quad (5.87)$$

Es sei zunächst  $n = 1$ . Wegen  $k \geq 1$  ist dann (5.87) nur für  $d = 2$  gleich Null. Nun sei  $3 \leq n \leq k+1$ . Wegen  $k \geq 2$  ist dann  $n-2k \leq -1$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

### 5.3.4 Numerische Auswertung der Lösungen

Bei der Auswertung der Rekursion (5.85) sind Ordnungen wie  $k = 60$  ohne Probleme zu erreichen. Zur Berechnung der Störungsreihen mit dem Ziel, die Borelsummierbarkeit zu demonstrieren, können daher alle in Kapitel 3 eingeführten Methoden verwendet werden.

Die Koeffizienten  $a_n$  werden als Potenzreihen in der Kopplung  $g$  betrachtet. Dazu setzt man  $a_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_n^{(k)} g^k$  mit  $A_n^{(k)} = \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} a_n^{(k)}$ . Alle Resultate in diesem Abschnitt sind in  $d = 3$  Dimensionen und für  $\gamma = \frac{1}{2}$  erzielt worden. In Tabelle 5.1

$k$	$A_1^{(k)}$	$A_3^{(k)}$
10	$1.535236 \cdot 10^5$	$-1.176511 \cdot 10^6$
11	$7.460180 \cdot 10^5$	$5.761047 \cdot 10^6$
12	$4.545132 \cdot 10^6$	$-7.490394 \cdot 10^7$
13	$1.953388 \cdot 10^7$	$6.003548 \cdot 10^8$
14	$1.564284 \cdot 10^8$	$-6.965057 \cdot 10^9$
15	$3.399267 \cdot 10^8$	$7.292302 \cdot 10^{10}$
16	$7.695109 \cdot 10^9$	$-8.793771 \cdot 10^{11}$
17	$-2.566975 \cdot 10^{10}$	$1.077037 \cdot 10^{13}$
18	$7.113525 \cdot 10^{11}$	$-1.416040 \cdot 10^{14}$
19	$-7.224525 \cdot 10^{12}$	$1.941698 \cdot 10^{15}$
20	$1.141224 \cdot 10^{14}$	$-2.801842 \cdot 10^{16}$
21	$-1.593986 \cdot 10^{15}$	$4.225699 \cdot 10^{17}$
22	$2.484713 \cdot 10^{16}$	$-6.660273 \cdot 10^{18}$

Tabelle 5.1: Entwicklungskoeffizienten des Massenterms und des  $\phi^6$ -Terms bis zur Ordnung  $k = 22$ .

ist das Verhalten der Entwicklungskoeffizienten am Beispiel des Massenkoeffizienten und des  $\phi^6$ -Koeffizienten dargestellt. Ab einer bestimmten Ordnung alternieren diese Folgen. Die Koeffizienten wachsen nicht faktoriell an, sie wachsen aber zum Beispiel stärker als  $\sqrt{k!}$  an. Daher kann man erwarten, daß die Potenzreihen  $a_n$  divergieren.

Dagegen werden die Boreltransformierten  $\mathcal{B}_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A_n^{(k)} z^k$  von  $a_n$  Konvergenzradien größer als Null besitzen. Dies wird durch Abbildung 5.1 illustriert, in der die Nullstellen der Padé-Approximanten an die Potenzreihen  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_3$  und  $\mathcal{B}_4$  bis

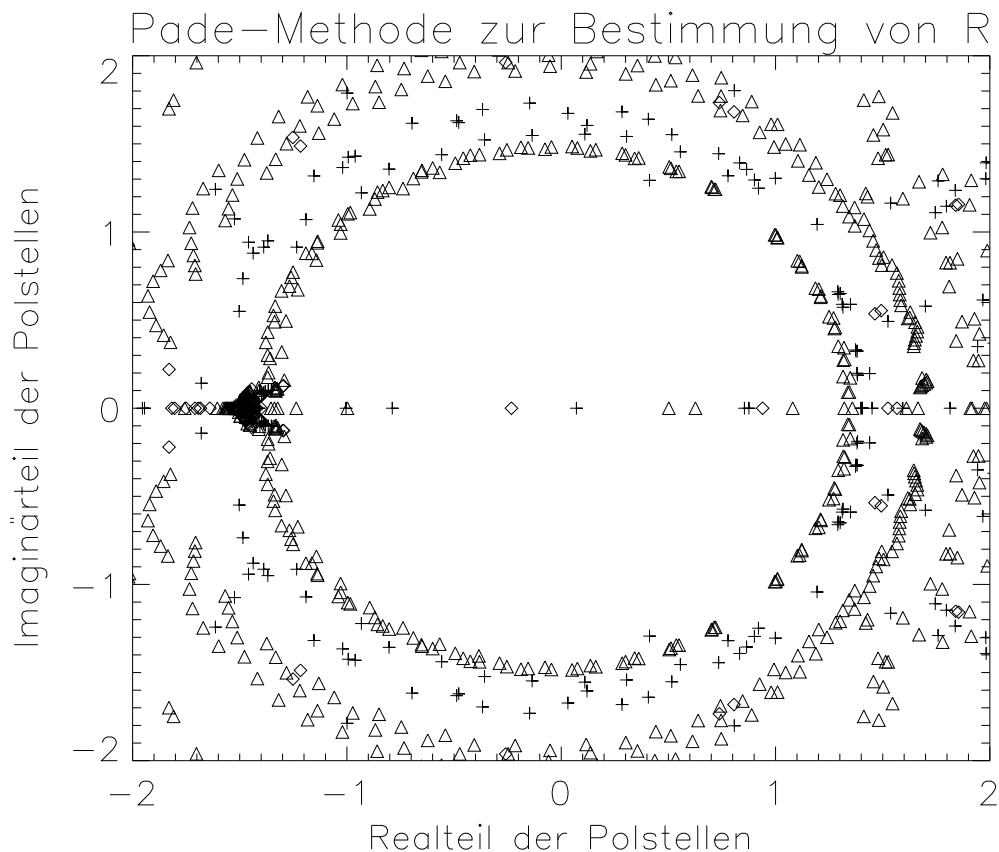


Abbildung 5.1: Anwendung der Padé-Methode zur Bestimmung des Konvergenzverhaltens von  $\mathcal{B}_1$  (Dreiecke),  $\mathcal{B}_3$  (Kreuze) und  $\mathcal{B}_4$  (Rauten).

zur Ordnung  $k = 60$  abgebildet sind. An der Häufung der Nullstellen bei Realteilen um  $-1.48$  erkennt man, daß der Konvergenzradius dieser Potenzreihen

$$R = 1.48 \pm 0.05 \quad (5.88)$$

ist. Die erste Singularität liegt auf der negativen reellen Achse. Mit Hilfe der Hadamard-Methode erhält man  $R = 1.45 \pm 0.1$ , aus der Quotientenmethode ergibt sich  $R = 1.47 \pm 0.05$ . Bei diesen beiden Methoden entstehen die geschätzten Fehler durch die Extrapolation.

Zur Vorbereitung von exakten Abschätzungen ist es auch nützlich zu wissen, wie sich die Koeffizienten  $a_n^{(k)}$  mit  $n$  verhalten. Daher sind in Tabelle 5.2 die Koeffizienten der Ordnung 20 dargestellt. Man sieht, daß für eine feste Ordnung die Koeffizienten, die zu den Baumgraphen gehören, die größten Werte annehmen.

Die Potentiale, die man als Lösungen der hierarchischen RGDGL erhält, sind in zweiter bis sechster Ordnung Störungstheorie in Abbildung 5.2 bei Kopplungen  $g = 10^{-5}$  und  $g = 10^{-4}$  dargestellt. Die zweite Ordnung entspricht der kurzgestrichelten Linie, die langgestrichelte Linie korrespondiert mit der dritten Ordnung

$n$	$a_n^{(20)}$	$n$	$a_n^{(20)}$
1	$4.690793 \cdot 10^{-5}$	11	$-2.309128 \cdot 10^{+13}$
2	$0.000000 \cdot 10^0$	12	$-1.556500 \cdot 10^{+15}$
3	$-1.151646 \cdot 10^{-2}$	13	$-9.921156 \cdot 10^{+16}$
4	$-1.082265 \cdot 10^0$	14	$-5.937788 \cdot 10^{+18}$
5	$-9.700888 \cdot 10^1$	15	$-3.305778 \cdot 10^{+20}$
6	$-8.404017 \cdot 10^3$	16	$-1.690021 \cdot 10^{+22}$
7	$-7.028941 \cdot 10^5$	17	$-7.785485 \cdot 10^{+23}$
8	$-5.664419 \cdot 10^7$	18	$-3.137873 \cdot 10^{+25}$
9	$-4.387625 \cdot 10^9$	19	$-1.051685 \cdot 10^{+27}$
10	$-3.257178 \cdot 10^{+11}$	20	$-2.649550 \cdot 10^{+28}$

Tabelle 5.2: Koeffizienten der Ordnung 20.

Störungstheorie. Zusätzlich ist jeweils die Linie  $V(\phi) = 0$  gestrichelt eingetragen, damit man erkennt, daß es sich nicht, oder höchstens um sehr schwache, 2-Well-Potentiale handelt. Bei dieser Darstellung sind keine Summationsmethoden verwendet worden.

### 5.3.5 Resonanzen

Bisher wurde die lokale Näherung der RGDGL als hierarchische RGDGL betrachtet. Die Konsequenz war, daß in Gleichung (5.51)  $D_{2n}$  durch  $d_{2n}$  ersetzt wurde. Wenn die lokale Näherung wirklich als Näherung an die volle RGDGL aufgefaßt werden soll,

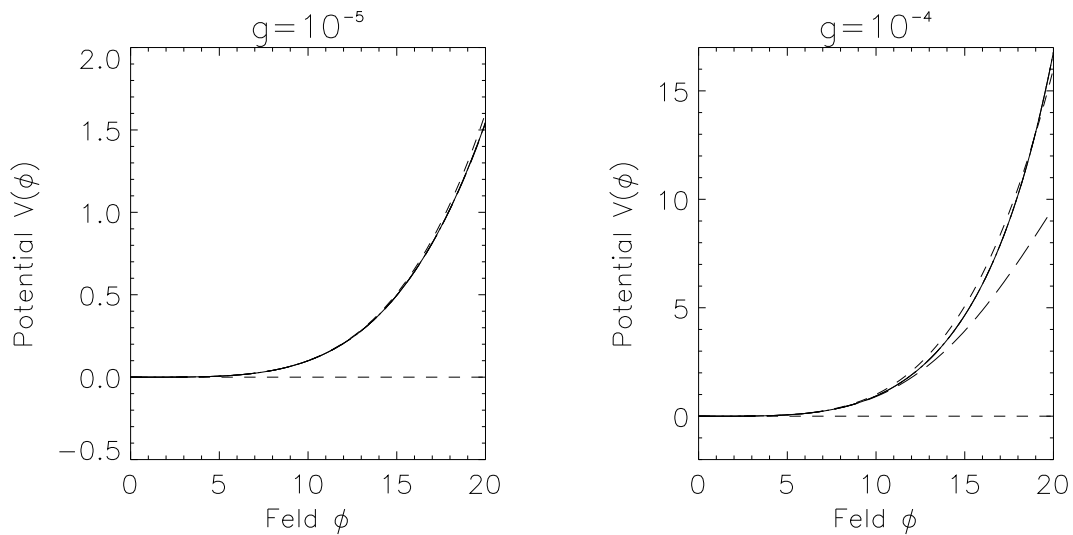


Abbildung 5.2: *Potential der lokalen Näherung für die Ordnungen 2 bis 6 bei der Kopplung  $g = 10^{-5}$ .*



müssen die Skalierungsdimensionen  $D_{2n}$  des vollen Modells verwendet werden. In Abschnitt 5.3.3 wurde ein Rekursionsverfahren untersucht, das Lösungen der hierarchischen RGDGL ergibt. Alle formalen Schritte, die zu den Rekursionsrelationen (5.85) führen, ändern sich nicht, wenn  $d_{2n}$  durch  $D_{2n}$  ersetzt wird. Lediglich die Dimensionen, in denen die Rekursion aufgeht, müssen neu bestimmt werden. Das sind die Dimensionen  $d$ , in denen für alle Ordnungen  $k \geq 1$  gilt:

$$D_{2n} - kD_4 \neq 0, \text{ für alle } n \text{ mit } n = 1 \text{ oder } k + 1 \geq n \geq 3. \quad (5.89)$$

Dabei ist  $D_{2n} = d + n(2 - d)$ , also gilt:

$$D_{2n} - kD_4 = d(k + 1 - n) - 4k + 2n. \quad (5.90)$$

Dimensionen, in denen (5.89) nicht gilt, werden als resonant bezeichnet. Mit (5.90) folgt, daß die resonanten Dimensionen den resonanten Dimensionen aus Abschnitt 4.3.2 gleichen; der Fall  $n = 0$  ist hier aber ausgeschlossen, da Vakuumterme in der Entwicklung nicht berücksichtigt werden. Damit sind die resonanten Dimensionen durch  $d(k) = 4 - \frac{2}{k}$ ,  $k \geq 1$  und durch  $d \in \mathbb{Q}_{\geq 4}$  gegeben. Es gibt keine ganzzahlige Dimension größer als Eins, in der (5.89) gilt, in der also die Rekursion aufgeht. Der interessanteste Fall ist  $d = 3$ ; dann kann der Massenkoeffizient  $a_1^{(2)}$  in zweiter Ordnung ( $k = 2$ ) nicht bestimmt werden. Dies führte in Abschnitt 4.3.3 zu einer Störungsentwicklung in einer laufenden Kopplung und ihrem Logarithmus. Mit den gleichen Argumenten wird nun zur Lösung der RGDGL in der lokalen Näherung eine Doppelentwicklung in der Kopplungskonstanten  $g$  und ihrem Logarithmus verwendet.

### 5.3.6 Störungstheorie in der laufenden Kopplung und ihrem Logarithmus

Für eine Störungsentwicklung in der Kopplungskonstanten  $g = a_2(\Lambda)$  und ihrem Logarithmus  $\kappa = \log g$  für die lokale Näherung (5.51) der RGDGL für die reskalierten Impulsraumkerne des Potentials macht man den Ansatz

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-1} g^k \kappa^t a_1^{(k,t)}, \\ a_n &= \sum_{k=n-1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \kappa^t a_n^{(k,t)}, \text{ für } n \geq 3. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Dabei soll zusätzlich

$$a_n^{(k,t)} = 0, \text{ für } t > \left\lceil \frac{k+1-n}{2} \right\rceil \quad (5.92)$$

gelten. Hier ist mit  $\lceil \cdot \rceil$  die Gaußklammer gemeint. Dieser Ansatz wird wieder durch Feynman-Graphen motiviert. Diese sind aus  $\phi^4$ -Vertices  $\text{---}\!\!\!\!+ \text{---}$  mit der Kopplung  $g$  und aus  $\phi^2$ -Vertices  $\text{---}\!\!\!\!\times \text{---}$  mit der Kopplung  $g^2 \kappa$  zusammengesetzt. Die Ordnung eines

Graphen ist durch die Ordnung in  $g$  gegeben. Für den Massenterm hat man bis zur zweiten Ordnung die folgenden Diagramme:

$$a_1(\Lambda) = \text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\times\text{---} + \text{---}\bigcirc\text{---} + \dots \quad (5.93)$$

$\gamma g \qquad \gamma^3 g^2 \kappa \qquad \gamma^3 g^2$

Die Bedingung (5.92) wird durch das Bedürfnis erklärt, eine minimale Anzahl von Termen in der Entwicklung mitzuführen. Anders formuliert bedeutet dies, daß nur Graphen berücksichtigt werden, die aus den beiden oben angeführten Vertices aufgebaut werden können. Dann hat der erste  $\phi^6$ -Graph mit einem  $\kappa$ -Einschub die Gestalt

$$\text{---}\text{---}\times\text{---} \quad (5.94)$$

$\gamma^5 g^4 \kappa$

Dieser Graph ist von vierter Ordnung. Für  $a_3$  stellt man sich also die folgende Summe vor:

$$a_3 = \text{---}\text{---}\text{---} + \text{---}\text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\text{---}\times\text{---} + \text{---}\text{---}\bigcirc\text{---} + \dots \quad (5.95)$$

$\gamma g^2 \qquad \gamma^3 g^3 \qquad \gamma^5 g^4 \kappa \qquad \gamma^5 g^4$

Analog kann man sich für andere  $n$  davon überzeugen, daß der Ansatz (5.91) und die Bedingung (5.92) sinnvoll sind. Wie im letzten Abschnitt wird (5.91) nun in die Gleichungen (5.51) eingesetzt, mit deren Hilfe Rekursionsgleichungen für die Koeffizienten  $a_n^{(k,t)}$  aufgestellt werden. An die Stelle von Lemma 2 tritt

**Lemma 3** Für  $k_0, l_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  gilt:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f(k, t) \sum_{l=l_0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{l!} g(l, s) \\ &= \sum_{k=k_0+l_0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=l_0}^{k-k_0} \sum_{s=0}^t \binom{k}{l} f(k-l, t-s) g(l, s). \quad \square \end{aligned} \quad (5.96)$$

Beim Einsetzen von (5.91) in die Differentialgleichungen (5.51) treten Terme  $\mathcal{D}(g^k \kappa^t)$  auf. Für diese findet man:

$$\mathcal{D}(g^k \kappa^t) = g^{k-1} (t \kappa^{t-1} + k \kappa^t) \mathcal{D}g. \quad (5.97)$$

Die Berechnung einer Entwicklung für  $\mathcal{D}g$  geschieht mit Hilfe der RGDGL für  $n = 2$ , und zwar aus der Gleichung

$$(\mathcal{D} + D_4)g = \gamma a_3 - 8\gamma g a_1. \quad (5.98)$$

Daraus wird durch Einsetzen der Störungsreihen für die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}g &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-2} g^k \kappa^t (\mathcal{D}g)^{(k,t)}, \text{ mit} \\ (\mathcal{D}g)^{(k,t)} &= \begin{cases} -D_4, & \text{für } (k,t) = (1,0), \\ a_3^{(k,t)} - 8ka_1^{(k-1,t)}, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.99)$$

Damit kann man die linke Seite der RGDGL nach einigen Umformungen unter Verwendung von Lemma 3 für  $n \geq 3$  auf die Gestalt

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} + D_{2n})a_n &= \sum_{k=n-1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \kappa^t \left\{ D_{2n}a_n^{(k,t)} + (\mathcal{D}a_n)^{(k,t)} \right\} \end{aligned} \quad (5.100)$$

bringen, die einen Koeffizientenvergleich der linken und der rechten Seite ermöglichen wird. Dabei ist  $(\mathcal{D}a_n)^{(k,t)}$  durch

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}a_n)^{(k,t)} &= \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{k-n+2} \binom{k+1}{l} \sum_{s=0}^t (\mathcal{D}g)^{(l,s)} \\ &\quad \times \left\{ (t+1-s)a_n^{(k+1-l,t+1-s)} + (k+1-l)a_n^{(k+1-l,t-s)} \right\} \end{aligned} \quad (5.101)$$

definiert. Der Fall  $n = 1$  muß wieder gesondert behandelt werden. Für  $n = 1$  erhält die linke Seite von (5.51) die Form:

$$(\mathcal{D} + D_2)a_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-1} g^k \kappa^t \left\{ D_2a_1^{(k,t)} + (\mathcal{D}a_1)^{(k,t)} \right\}. \quad (5.102)$$

Für  $(\mathcal{D}a_1)^{(k,t)}$  hat man die Beziehung

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}a_1)^{(k,t)} &= \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^k \binom{k+1}{l} \sum_{s=0}^t (\mathcal{D}g)^{(l,s)} \\ &\quad \times \left\{ (t+1-s)a_1^{(k+1-l,t+1-s)} + (k+1-l)a_1^{(k+1-l,t-s)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Die Betrachtung der linken Seite der RGDGL ist damit abgeschlossen. Durch Einsetzen der Störungsreihen für die Koeffizienten  $a_n$  auf der rechten Seite der RGDGL ergibt sich

$$\gamma a_{n+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \kappa^t a_{n+1}^{(k,t)}, \text{ für } n \geq 3, \quad (5.104)$$

während für den quadratischen Term gilt:

$$\begin{aligned}
& -\gamma \sum_{m=1}^n \binom{2n}{2m-1} a_m a_{n-m+1} = \\
& -4n \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \kappa^t \sum_{l=n-1}^{k-1} \sum_{s=0}^t \binom{k}{l} a_1^{(k-l, t-s)} a_n^{(l, s)} \\
& - \sum_{k=n-1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \kappa^t \sum_{m=2}^{n-1} \binom{2n}{2m-1} \sum_{l=n-m}^{k-m+1} \sum_{s=0}^t \binom{k}{l} a_m^{(k-l, t-s)} a_{n-m+1}^{(l, s)}.
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Im Fall  $n = 1$  lautet das Ergebnis:

$$\text{r.S.} = \gamma g - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-1} g^k \kappa^t \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{s=0}^t \binom{k}{l} a_1^{(k-l, t-s)} a_1^{(l, s)}. \tag{5.106}$$

Damit ist die linke und die rechte Seite der RGDGL in Form von Doppelentwicklungen in  $g$  und  $\kappa = \log g$  dargestellt.

### 5.3.7 Auflösung der Rekursion

Die obigen Gleichungen werden durch das folgende Rekursionsschema formal gelöst. In erster Ordnung ist nur  $a_1^{(1,0)}$  zu bestimmen, alle anderen Koeffizienten sind gleich Null. Wenn alle Koeffizienten bis zu einer Ordnung  $k$  berechnet sind, bestimmt man zunächst den höchsten Koeffizienten  $a_{k+1}^{(k,0)}$ . Der zugehörige Feynman-Graph hat  $2k+2$  äußere Beine; er muß also aus  $k$   $\phi^4$ -Vertices aufgebaut sein. Graphen mit  $2k+2$  äußeren Beinen in  $k$ -ter Ordnung können noch keine  $\kappa$ -Einschübe besitzen, das heißt  $a_{k+1}^{(k,t)} = 0$  für  $t > 0$ , vergleiche (5.92). Dann bestimmt man den Koeffizienten  $a_k^{(k,0)}$ . Die zugehörigen Graphen sind Ein-Schleifen-Diagramme. Als nächstes wird  $a_{k-1}^{(k,1)}$  und danach  $a_{k-1}^{(k,0)}$  berechnet. Analog bestimmt man die Familie  $a_n^{(k,t)}$  von Koeffizienten bei festem  $n$  mit sinkendem  $t$ . Der letzte Koeffizient, der berechnet wird, ist  $a_1^{(k,0)}$ . Grob gesprochen werden also die Koeffizienten mit wachsender Ordnung bestimmt. In einer Ordnung werden zunächst Graphen mit vielen äußeren Beinen behandelt. Von diesen wiederum werden zuerst diejenigen betrachtet, die die meisten  $\kappa$ -Einschübe besitzen. Dieses Schema hat die anschauliche Grundlage, daß zum Beispiel Massendiagramme einer bestimmten Ordnung durch Kontraktion von Linien eines Graphen derselben Ordnung erzeugt werden können. Der Koeffizient des Massenterms wird damit im allgemeinen Koeffizienten von höheren Feldpotenzen derselben Ordnung beinhalten. Diese müssen zuerst bestimmt werden. Ferner werden aus  $g^2 \kappa$ -Vertices einfache  $g^2$ -Diagramme erzeugt. Daher muß man mit fallendem  $t$  vorgehen.

Die Koeffizienten  $a_n^{(k,t)}$  werden durch Koeffizientenvergleich der Terme der Ordnungen  $g^k \kappa^t$  bestimmt. Zunächst wird hier  $a_1^{(1,0)}$  berechnet. Aus (5.102) und (5.106) bekommt man die Gleichung

$$(D_2 - D_4) a_1^{(1,0)} = 1. \tag{5.107}$$

Daraus folgt die formale Auflösbarkeit nach  $a_1^{(1,0)}$ . In der Ordnung  $k$  folgt für  $n = k + 1$  aus (5.101):

$$(\mathcal{D}a_{k+1})^{(k,0)} = -D_4\{a_{k+1}^{(k,1)} + ka_{k+1}^{(k,0)}\} = -kD_4a_{k+1}^{(k,0)}. \quad (5.108)$$

Insgesamt erhält man für  $a_{k+1}^{(k,0)}$  die Gleichung

$$(D_{2k+2} - kD_4)a_{k+1}^{(k,0)} = -\sum_{m=2}^k \binom{2k+2}{2m-1} \binom{k}{k+1-m} a_m^{(m-1,0)} a_{k-m+2}^{(k+1-m,0)}, \quad (5.109)$$

was natürlich Gleichung (5.77) entspricht. Man erkennt wieder, daß die höchsten Koeffizienten nur durch die höchsten Koeffizienten der niedrigeren Ordnungen getrieben werden. Dies wird durch die symbolische Gleichung (5.79) verdeutlicht. Auf der rechten Seite von (5.109) kommen nur Entwicklungskoeffizienten beziehungsweise Graphen von niedrigeren Ordnungen als  $k$  vor. Damit hat man die formale Auflösbarkeit nach  $a_{k+1}^{(k,0)}$  gezeigt.

Nun untersucht man die Koeffizienten  $a_n^{(k,t)}$  für  $3 \leq n < k+1$ . Alle Koeffizienten, die zu höheren Feldpotenzen gehören, seien schon berechnet. Für ein beliebiges  $t$  gilt:

$$(\mathcal{D}a_n)^{(k,t)} = -D_4\{(t+1)a_n^{(k,t+1)} + ka_n^{(k,t)}\} + \mathcal{F}_n(k,t). \quad (5.110)$$

Dabei hat man die Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n(k,t) = & \frac{1}{k+1} \sum_{l=2}^{k-n+2} \binom{k+1}{l} \sum_{s=0}^t (a_3^{(l,s)} - 8la_1^{(l-1,s)}) \\ & \times \left\{ (t+1-s)a_n^{(k+1-l,t+1-s)} + (k+1-l)a_n^{(k+1-l,t-s)} \right\} \end{aligned} \quad (5.111)$$

verwendet. In diesem Ausdruck treten nur Koeffizienten  $a_m^{(i,j)}$  mit  $i < k$  auf, die schon bekannt sind. Für  $t = \lfloor \frac{k+1-n}{2} \rfloor$  lautet die linke Seite damit:

$$(D_{2n} - kD_4)a_n^{(k,t)} + \mathcal{F}_n(k,t). \quad (5.112)$$

Auf der rechten Seite muß man nun zusätzlich den linearen Term  $\gamma a_{n+1}$  beachten. Dieser gibt den Beitrag  $a_{n+1}^{(k,t)}$  und ist somit als bekannt vorausgesetzt. Die anderen Terme auf der rechten Seite sind von niedrigerer Ordnung als  $k$ , siehe (5.105). Für  $0 \leq t < \lfloor \frac{k+1-n}{2} \rfloor$  hat die linke Seite die Gestalt

$$(D_{2n} - kD_4)a_n^{(k,t)} - (t+1)D_4a_n^{(k,t+1)} + \mathcal{F}_n(k,t). \quad (5.113)$$

Die rechte Seite ist wiederum aus bekannten Koeffizienten zusammengesetzt. Damit hat man die formale Auflösbarkeit nach allen Koeffizienten  $a_n^{(k,t)}$  mit  $n \geq 3$  gezeigt. Der Fall  $n = 1$  wird gesondert betrachtet:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}a_1)^{(k,t)} = & -D_4\{(t+1)a_1^{(k,t+1)} + ka_1^{(k,t)}\} \\ & + \frac{1}{k+1} \sum_{l=2}^k \sum_{s=0}^t \binom{k+1}{l} (a_3^{(l,s)} - 8la_1^{(l-1,s)}) \\ & \times \left\{ (t+1-s)a_1^{(k+1-l,t+1-s)} + (k+1-l)a_1^{(k+1-l,t-s)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.114)$$

Da  $a_3^{(k,s)}$  schon bekannt ist, läßt sich das oben angeführte Schema wiederholen. Insgesamt hat man damit die formale Auflösbarkeit nach den Entwicklungskoeffizienten gezeigt.

### 5.3.8 Beseitigung der Resonanzen

Verschwindet der Ausdruck  $D_{2n} - kD_4$ , so kann die Familie  $\{a_n^{(k,t)} | 0 \leq t \leq [\frac{k+1-n}{2}]\}$  von Koeffizienten aus den obigen Gleichungen nicht arithmetisch bestimmt werden, wie man an (5.112) erkennt. Eine solche Familie wird dann als resonant bezeichnet. Zu einer bestimmten resonanten Dimension  $d$  mit  $2 < d < 4$  gibt es maximal eine solche resonante Familie von Entwicklungskoeffizienten, da nur der Massenterm resonant sein kann. Man erwartet, daß die Lösung der RGDGL erst dann Logarithmen aufweist, wenn dies zur Beseitigung einer Resonanz notwendig ist. Das bedeutet, daß in einer resonanten Dimension alle Koeffizienten  $a_n^{(k,t)}$  mit  $t > 0$  für niedrigere Ordnungen  $k$  als die resonante Ordnung  $k_R$  verschwinden. Außerdem erwartet man, daß in der resonanten Ordnung alle Koeffizienten  $a_n^{(k_R,t)}$  mit  $n > 1$  für  $t > 0$  gleich Null sind. Wenn man dann den höchsten Koeffizienten  $a_1^{(k_R,t_{\max})}$  der resonanten Familie betrachtet, so kann noch kein Graph mit Logarithmen erzeugt worden sein. ( $t_{\max}$  wird also gleich Eins sein.) Daher wird die Gleichung für  $a_1^{(k_R,t_{\max})}$  die Gestalt

$$(D_2 - k_R D_4) a_1^{(k_R,t_{\max})} = 0 \quad (5.115)$$

haben.  $a_1^{(k_R,t_{\max})}$  ist frei wählbar, da  $D_2 - k_R D_4$  verschwindet. Dies drückt die Tatsache aus, daß Graphen mit  $g^2\kappa$ -Vertices in die Entwicklung eingeführt werden, um die Resonanzen zu beseitigen. Dabei bekommt  $a_1^{(k_R,t_{\max})}$  ein solches Gewicht, daß die dynamisch erzeugten Massendiagramme mit  $t_{\max} - 1$   $g^2\kappa$ -Vertices der Ordnung  $k_R$  kompensiert werden, indem  $a_1^{(k_R,t_{\max})}$  so definiert wird, daß  $a_1^{(k_R,t_{\max}-1)}$  frei wählbar ist. Wie erwartet, ist dies für alle Dimensionen  $d \neq 4$  möglich, wie man an Gleichung (5.113) erkennen kann, da für  $D_4 \neq 0$  für  $d \neq 4$  gilt. In vier Dimensionen wird die  $:\phi^4:$ -Richtung am trivialen Renormierungsgruppenfixpunkt marginal, daher kann die Idee, Logarithmen der Kopplungskonstanten in die Entwicklung einzuführen, um dynamisch erzeugte Terme durch Reskalierung der Kopplung zu kompensieren, nicht mehr funktionieren.

Die Behauptungen und Erwartungen über die Struktur der Gleichungen für resonante Koeffizienten sind noch nicht in beliebigen Dimensionen bewiesen worden, da dies auf eine etwas ermüdende Indexanalyse hinausführen würde. Es ist auch denkbar, daß außer der Lösung der Art, wie sie eben beschrieben wurde, auch Lösungen der RGDGL existieren, die anders aufgebaut sind. Bei solchen Lösungen hätte man dann mehr  $g^2\kappa$ -Vertices in den Diagrammen der Entwicklung. Die Gestalt von Gleichung (5.115) müßte sich dann ergeben, indem sich Terme auf der linken und rechten Seite der Bestimmungsgleichung für  $a_1^{(k_R,t_{\max})}$  geeignet aufheben. In dem interessantesten Fall  $d = 3$  sind die obigen Behauptungen aber erfüllt. In drei Dimensionen ist der Massenterm in zweiter Ordnung resonant. Im folgenden werden daher alle Entwicklungskoeffizienten bis zur zweiten Ordnung Störungstheorie berechnet.

Aus Gleichung (5.107) entnimmt man mit Hilfe von (5.90), daß in drei Dimensionen gilt:

$$a_1^{(1,0)} = 1. \quad (5.116)$$

In zweiter Ordnung muß man die folgenden drei Koeffizienten berechnen:

$$\begin{array}{ll}
 a_3^{(2,0)} & \begin{array}{c} | \\ \hline | \end{array} \\
 a_1^{(2,1)} & \begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \end{array} \\
 a_1^{(2,0)} & \begin{array}{c} \bigcirc \\ \text{---} \end{array} .
 \end{array} \tag{5.117}$$

Zuerst betrachtet man den Baumgraphen. Für  $a_3^{(2,0)}$  erhält man aus (5.109) die Gleichung

$$\begin{aligned} & (D_6 - 2D_4)a_3^{(2,0)} \\ &= -\sum_{m=2}^2 \binom{6}{3} \binom{2}{1} a_2^{(1,0)} a_2^{(1,0)} = -40. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Aus (5.90) folgt damit

$$a_3^{(2,0)} = 20. \quad (5.119)$$

Für  $a_1^{(2,1)}$  bekommt man aus (5.102) und (5.106) die Gleichung

$$(D_2 - 2D_4)a_1^{(2,1)} = -2 \sum_{l=1}^1 \sum_{s=0}^1 \binom{2}{l} a_1^{(1,1-s)} a_1^{(1,s)} = 0. \quad (5.120)$$

In drei Dimensionen ist (5.120) einfach die Identität  $0 = 0$ .  $a_1^{(2,1)}$  ist also frei wählbar. Für  $a_1^{(2,0)}$  gilt:

$$(D_2 - 2D_4)a_1^{(2,0)} - D_4a_1^{(2,1)} + a_1^{(1,0)}(a_3^{(2,0)} - 16a_1^{(1,0)}) = -4a_1^{(1,0)^2}. \quad (5.121)$$

Nun wählt man  $a_1^{(2,1)}$  so, daß diese Gleichung nicht widersprüchlich ist:

$$a_1^{(2,1)} = \frac{1}{D_4} \left( a_1^{(1,0)} a_3^{(2,0)} - 12 a_1^{(1,0)^2} \right). \quad (5.122)$$

Im dreidimensionalen Fall folgt also:

$$a_1^{(2,1)} = 8, \quad (5.123)$$

und aus (5.121) ist die Identität  $0 = 0$  geworden.  $a_1^{(2,0)}$  kann aus den Gleichungen nicht weiter bestimmt werden. Damit ist die Lösung der lokalen Näherung der RGDGL in drei Dimensionen bis zur zweiten Ordnung angegeben. Die Strategie zur Beseitigung der Resonanzen konnte an diesem Beispiel besonders gut illustriert werden.

### 5.3.9 Numerische Auswertung der Lösungen

Der Aufwand zur Berechnung der Koeffizienten der Doppelentwicklung ist deutlich höher als in Abschnitt 5.3.4. Dennoch kann man ohne Mühe zu Ordnungen zwischen 20 und 40 vorstoßen. Bevor man die Koeffizienten berechnet, muß man den freien Parameter  $a_1^{(2,0)}$  wählen. Bis auf weiteres wird hier  $a_1^{(2,0)} = 0$  gesetzt.

$k$	$a_1^{(k,0)}$	$a_3^{(k,0)}$
1	$1.000000 \cdot 10^0$	$0.000000 \cdot 10^0$
2	$0.000000 \cdot 10^0$	$2.000000 \cdot 10^1$
3	$7.680000 \cdot 10^2$	$7.200000 \cdot 10^2$
4	$-1.016640 \cdot 10^5$	$-2.064000 \cdot 10^5$
5	$1.058833 \cdot 10^8$	$3.148368 \cdot 10^8$
6	$-2.612777 \cdot 10^{+11}$	$-1.048067 \cdot 10^{+12}$
7	$1.333723 \cdot 10^{+15}$	$6.690815 \cdot 10^{+15}$
8	$-1.243967 \cdot 10^{+19}$	$-7.484249 \cdot 10^{+19}$
9	$1.965376 \cdot 10^{+23}$	$1.378654 \cdot 10^{+24}$
10	$-4.963545 \cdot 10^{+27}$	$-3.977172 \cdot 10^{+28}$
11	$1.911207 \cdot 10^{+32}$	$1.722187 \cdot 10^{+33}$
12	$-1.078703 \cdot 10^{+37}$	$-1.079727 \cdot 10^{+38}$

Tabelle 5.3: Entwicklungskoeffizienten des Massenterms und des  $\phi^6$ -Terms ohne  $g^2\kappa$ -Einschub bis zur zwölften Ordnung.

Das Verhalten der Koeffizienten mit der Ordnung  $k$  wird durch Tabelle 5.3 illustriert, in der die Entwicklungskoeffizienten des Massenterms und des  $\phi^6$ -Terms für  $t = 0$  bis zur zwölften Ordnung eingetragen sind. Ab einer bestimmten Ordnung alternieren die Vorzeichen der Koeffizienten, ihr Betrag wächst stärker als faktoriell an. Diese Tabelle ist mit Tabelle 5.4 zu vergleichen, wo man die entsprechenden Koeffizienten für  $t = 1$  findet. Es entspricht den Erwartungen, daß die Koeffizienten in Tabelle 5.4 etwas kleiner sind, da Diagramme mit  $g^2\kappa$ -Vertices später erzeugt werden, als solche ohne. Dies kann man auch an Tabelle 5.5 erkennen, in der die Entwicklungskoeffizienten des Massenterms in der Ordnung 20 als Funktion der Anzahl der  $g^2\kappa$ -Vertices dargestellt sind.

Zum Abschluß werden die Lösungen der lokalen Näherung an die RGDGL dargestellt. Dazu ist das Potential aus den Entwicklungskoeffizienten für zwei Werte für die Kopplungskonstante  $g$  und für zwei Werte für den freien Parameter  $a_1^{(2,0)}$  zusammengesetzt worden.  $\kappa$  hat dabei den Wert  $\kappa = \log g$ . Diese Potentiale sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Dabei entsprechen die durchgezogenen Linien Werten  $a_1^{(2,0)} = 0$ , während für die Potentiale mit den gestrichelten Linien  $a_1^{(2,0)} = -5000$  gilt. An Abbildung 5.3 kann man erkennen, daß für kleine Werte der Kopplung ( $g < 10^{-3}$ ) der Renormierungsgruppenfluß nahezu unabhängig von der Wahl von  $a_1^{(2,0)}$  ist. Das Potential in Abbildung 5.3 ist sehr flach, man befindet sich noch in der Nähe des trivialen Fixpunktes. Bei der zehnfachen Kopplung gibt es einen deutlichen qualitativen Unterschied zwischen den Kurven: Für  $a_1^{(2,0)} = -5000$  ist das



$k$	$a_1^{(k,1)}$	$a_3^{(k,1)}$
2	$8.000000 \cdot 10^0$	$0.000000 \cdot 10^0$
3	$0.000000 \cdot 10^0$	$0.000000 \cdot 10^0$
4	$1.459200 \cdot 10^4$	$3.840000 \cdot 10^3$
5	$-3.790507 \cdot 10^6$	$-1.152000 \cdot 10^6$
6	$4.414712 \cdot 10^9$	$1.882829 \cdot 10^9$
7	$-1.328205 \cdot 10^{+13}$	$-6.803208 \cdot 10^{+12}$
8	$7.999769 \cdot 10^{+16}$	$4.884776 \cdot 10^{+16}$
9	$-8.619696 \cdot 10^{+20}$	$-6.258921 \cdot 10^{+20}$
10	$1.547229 \cdot 10^{+25}$	$1.325787 \cdot 10^{+25}$
11	$-4.379752 \cdot 10^{+29}$	$-4.373509 \cdot 10^{+29}$
12	$1.869202 \cdot 10^{+34}$	$2.144937 \cdot 10^{+34}$

Tabelle 5.4: Entwicklungskoeffizienten des Massenterms und des  $\phi^6$ -Terms mit einem  $g^2\kappa$ -Einschub bis zur zwölften Ordnung.

Potential ein 2-Well-Potential, während man für  $a_1^{(2,0)} = 0$  ein Single-Well-Potential bekommt. Daher kann man erwarten, daß die Theorie bei einer Wahl des freien Parameters kritisch wird.

$t$	$a_1^{(20,t)}$
0	$-4.702599 \cdot 10^{+79}$
1	$1.625465 \cdot 10^{+76}$
2	$-7.119308 \cdot 10^{+71}$
3	$-2.170582 \cdot 10^{+67}$
4	$-4.519471 \cdot 10^{+62}$
5	$-9.880809 \cdot 10^{+57}$
6	$-2.709200 \cdot 10^{+53}$
7	$-1.014231 \cdot 10^{+49}$
8	$-4.810181 \cdot 10^{+44}$
9	$-1.639388 \cdot 10^{+40}$
10	$-4.652273 \cdot 10^{+34}$

Tabelle 5.5: Entwicklungskoeffizienten des Massenterms in der Ordnung 20 mit  $t$   $g^2\kappa$ -Vertices.

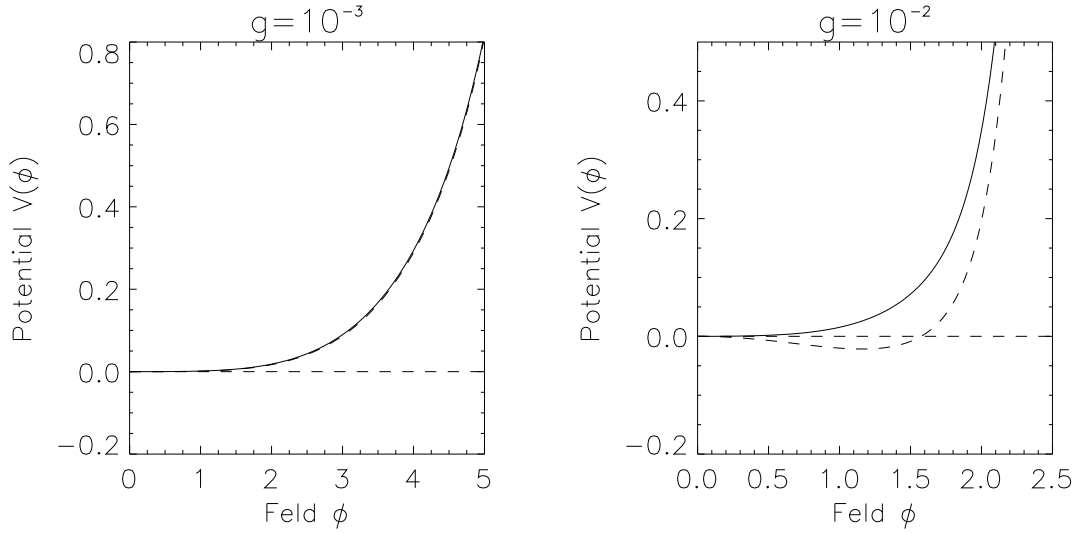


Abbildung 5.3: *Potential der lokalen Näherung in der  $g$ -log  $g$  Entwicklung in 6. Ordnung für  $a_1^{(2,0)} = 0, -5000$  bei den Kopplungen  $g = 10^{-3}$  und  $g = 10^{-2}$*

## 5.4 Störungstheorie für die Kerne bei schwacher Impulsabhängigkeit

### 5.4.1 Definition der Näherung

Die einfachste Näherung an die RGDGL (5.49) für die reskalierten Impulsraumkerne  $\tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_{2n}; \Lambda)$  des Potentials wurde in Abschnitt 5.3 untersucht. Dabei wurde die Impulsabhängigkeit dieser Kerne vollständig vernachlässigt. Nun soll die Impulsabhängigkeit der Kerne berücksichtigt werden. Hier wird allerdings gefordert, daß sich die Impulsraumkerne nur schwach mit den Impulsen ändern. Das heißt, daß der Term

$$\sum_{i=1}^{2n} q_i \cdot \nabla_{q_i} \tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_{2n}; \Lambda) \quad (5.124)$$

in den Gleichungen (5.49) gegenüber

$$\left( D_{2n} + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right) \tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_{2n}; \Lambda) \quad (5.125)$$

vernachlässigt wird. Dann haben die Gleichungen (5.49) die Gestalt

$$\begin{aligned}
 (D_{2n} + \mathcal{D}) \tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_{2n}; \Lambda) = & \\
 & \gamma \int_q f'(q^2) \tilde{\mathcal{V}}_{n+1}(q_1, \dots, q_{2n}, q, -q; \Lambda) \\
 & - \gamma \sum_{m=1}^n \binom{2n}{2m-1} \left\{ f'(Q_{2m-1}^2) \tilde{\mathcal{V}}_m(q_1, \dots, q_{2m-1}, -Q_{2m-1}; \Lambda) \right. \\
 & \left. \times \tilde{\mathcal{V}}_{n-m+1}(q_{2m}, \dots, q_{2n}, Q_{2m-1}; \Lambda) \right\}_{S_{2n}}. \tag{5.126}
 \end{aligned}$$

Dabei wurde ein Organisationsparameter  $\gamma = 1$  eingeführt, um die folgenden Überlegungen zu vereinfachen. Das System (5.126) ist die RGDGL für die reskalierten Impulsraumkerne bei schwacher Impulsabhängigkeit. Für dieses Gleichungssystem soll nun eine Störungstheorie in einer laufenden Kopplung und ihrem Logarithmus definiert werden. Diese Näherung ist eine echte Erweiterung der lokalen hierarchischen Näherung. Die Entwicklung in Impulspotenzen ist gleichzeitig eine nichtstörungstheoretische Entwicklung.

### 5.4.2 Störungstheorie in der laufenden Kopplung und ihrem Logarithmus

Nun wird in Analogie zu Abschnitt 5.3 ein störungstheoretischer Ansatz zur Lösung des Gleichungssystems (5.126) vorgeschlagen. Dabei wird eine Entwicklung in einer laufenden Kopplung  $g$  und ihrem Logarithmus  $\kappa = \log g$  benutzt, um Resonanzen zu behandeln. Als laufende Kopplung wird die  $\phi^4$ -Kopplung

$$g = \tilde{\mathcal{V}}_2(0, \dots, 0; \Lambda) \tag{5.127}$$

verwendet. Dann kann man die lokale Näherung als Impuls-Null-Fall der Näherung bei schwacher Impulsabhängigkeit betrachten. Nun wird der folgende Ansatz zur Lösung der Polchinski-Gleichungen (5.126) vorgeschlagen:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{V}}_1(q_1, q_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-1} g^k \kappa^t a_1^{(k,t)}(q_1, q_2) \\
 \tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_{2n}; \Lambda) &= \sum_{k=n-1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \kappa^t a_n^{(k,t)}(q_1, \dots, q_{2n}), \\
 &\text{für } n \geq 2. \tag{5.128}
 \end{aligned}$$

Dabei sollen die Koeffizienten  $a_n^{(k,t)}$  für zu große Werte von  $t$  verschwinden:

$$a_n^{(k,t)}(q_1, \dots, q_n) = 0, \text{ für } t > \left\lfloor \frac{k+1-n}{2} \right\rfloor. \tag{5.129}$$

Aus der Definition der Kopplung folgt also:

$$a_2^{(k,t)}(0, \dots, 0; \Lambda) = 0 \tag{5.130}$$

für  $k > 1$ . Die anschauliche Bedeutung dieses Ansatzes wurde in Abschnitt 5.3.6 erklärt. Bei der Betrachtung der linken Seite von (5.126) muß  $\mathcal{D}\tilde{\mathcal{V}}_n$  gebildet werden. Für  $\mathcal{D}(g^k \kappa^t)$  gilt

$$\mathcal{D}(g^k \kappa^t) = g^{k-1}(t\kappa^{t-1} + k\kappa^t)\mathcal{D}g. \quad (5.131)$$

Aus (5.126) und (5.127) folgt, daß für die Ableitung  $\mathcal{D}g$  der Kopplung die Beziehung

$$\mathcal{D}g = -D_4g - 8\gamma g f'(0)\tilde{\mathcal{V}}_1(0, 0; \Lambda) + \gamma \int_q f'(q^2)\tilde{\mathcal{V}}_3(0, \dots, 0, q, -q; \Lambda) \quad (5.132)$$

gilt. Nach Einsetzen des Ansatzes wird dies zu

$$\mathcal{D}g = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-2} g^k \kappa^t (\mathcal{D}g)^{(k,t)}, \quad (5.133)$$

wobei

$$(\mathcal{D}g)^{(k,t)} = \begin{cases} -D_4, & \text{falls } (k, t) = (1, 0), \\ -8kf'(0)a_1^{(k-1,t)}(0, 0) \\ + \int_q f'(q^2)a_3^{(k,t)}(0, \dots, 0, q, -q), & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.134)$$

gesetzt wurde. Damit ist man in der Lage,  $\mathcal{D}\tilde{\mathcal{V}}_n$  zu berechnen. Für  $n \geq 2$  erhält man auf der linken Seite von (5.126):

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D} + D_{2n})\tilde{\mathcal{V}}_n(q_1, \dots, q_{2n}; \Lambda) \\ &= \sum_{k=n-1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \kappa^t \\ & \quad (D_{2n}a_n^{(k,t)}(q_1, \dots, q_{2n}) + (\mathcal{D}a_n)^{(k,t)}(q_1, \dots, q_{2n})). \end{aligned} \quad (5.135)$$

Dabei wurde  $(\mathcal{D}a_n)^{(k,t)}$  durch

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D}a_n)^{(k,t)}(q_1, \dots, q_{2n}) \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^{k-n+2} \binom{k+1}{l} \sum_{s=0}^t (\mathcal{D}g)^{(l,s)} \left\{ (t+1-s)a_n^{(k+1-l, t+1-s)}(q_1, \dots, q_{2n}) \right. \\ & \quad \left. + (k+1-l)a_n^{(k+1-l, t-s)}(q_1, \dots, q_{2n}) \right\} \end{aligned} \quad (5.136)$$

definiert. Dies steht in völliger Analogie zu (5.100) und (5.101). Im Fall  $n = 1$  erhält man für die linke Seite der Gleichungen (5.126) :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D} + D_2)\tilde{\mathcal{V}}_1(q_1, q_2; \Lambda) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-1} g^k \kappa^t (D_2a_1^{(k,t)}(q_1, q_2) + (\mathcal{D}a_1)^{(k,t)}(q_1, q_2)). \end{aligned} \quad (5.137)$$

Dabei gilt nun:

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{D}a_1)^{(k,t)}(q_1, q_2) \\
&= \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^k \binom{k+1}{l} \sum_{s=0}^t (\mathcal{D}g)^{(l,s)} \left\{ (t+1-s) a_1^{(k+1-l, t+1-s)}(q_1, q_2) \right. \\
&\quad \left. + (k+1-l) a_1^{(k+1-l, t-s)}(q_1, q_2) \right\}. \tag{5.138}
\end{aligned}$$

Nun betrachtet man die rechte Seite der Gleichungen (5.126). Nach Einsetzen des störungstheoretischen Ansatzes (5.128) erhält man für  $n \geq 2$  für den linearen Term:

$$\begin{aligned}
& \gamma \int_q f'(q^2) \tilde{\mathcal{V}}_{n+1}(q_1, \dots, q_{2n}, q, -q; \Lambda) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \kappa^t \int_q f'(q^2) a_{n+1}^{(k,t)}(q_1, \dots, q_{2n}, q, -q). \tag{5.139}
\end{aligned}$$

Für den quadratischen Term ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned}
& -\gamma \sum_{m=1}^n \binom{2n}{2m-1} \left\{ f'(Q_{2m-1}^2) \tilde{\mathcal{V}}_m(q_1, \dots, q_{2m-1}, -Q_{2m-1}; \Lambda) \right. \\
&\quad \left. \times \tilde{\mathcal{V}}_{n-m+1}(q_{2m}, \dots, q_{2n}, Q_{2m-1}; \Lambda) \right\}_{S_{2n}} \\
&= -2n \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \kappa^t \\
&\quad \times \sum_{l=n-1}^{k-1} \sum_{s=0}^t \left\{ \left\{ f'(q_1^2) a_1^{(k-l, t-s)}(q_1, -q_1) a_n^{(l,s)}(q_2, \dots, q_{2n}, q_1) \right\}_{S_{2n}} \right. \\
&\quad \left. \times \left\{ f'(Q_{2n-1}^2) a_n^{(k-l, t-s)}(q_1, \dots, q_{2n-1}, -Q_{2n-1}) a_1^{(l,s)}(q_{2n}, Q_{2n-1}) \right\}_{S_{2n}} \right\} \\
&\quad - \sum_{k=n-1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-n} g^k \kappa^t \sum_{m=2}^{n-1} \binom{2n}{2m-1} \\
&\quad \times \sum_{l=n-m}^{k+1-m} \sum_{s=0}^t \binom{k}{l} \left\{ f'(Q_{2m-1}^2) a_m^{(k-l, t-s)}(q_1, \dots, q_{2m-1}, -Q_{2m-1}) \right. \\
&\quad \left. \times a_{n-m+1}^{(l,s)}(q_{2m}, \dots, q_{2n}, -Q_{2m-1}) \right\}_{S_{2n}}. \tag{5.140}
\end{aligned}$$

Nun folgt die Berechnung der rechten Seite von (5.126) für  $n = 1$ . Man bekommt für den linearen Term:

$$\begin{aligned}
& \gamma \int_q f'(q^2) \tilde{\mathcal{V}}_2(q_1, q_2, q, -q; \Lambda) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-1} g^k \kappa^t \int_q f'(q^2) a_2^{(k,t)}(q_1, q_2, q, -q). \tag{5.141}
\end{aligned}$$

Der quadratische Term ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
& -2\gamma \{f'(q_1^2)\tilde{\mathcal{V}}_1(q_1, -q_1; \Lambda)\tilde{\mathcal{V}}_1(q_2, q_1; \Lambda)\}_{S_2} \\
& = -2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \gamma^{2k-1} g^k \kappa^t \\
& \quad \times \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{s=0}^t \binom{k}{l} \left\{ f'(q_1^2) a_1^{(k-l, t-s)}(q_1, -q_1) a_1^{(l, s)}(q_2, q_1) \right\}_{S_2}. \quad (5.142)
\end{aligned}$$

Damit hat man die Entwicklung (5.128) auf der linken und rechten Seite von (5.126) eingesetzt und auf eine geeignete Gestalt umgeformt.

### 5.4.3 Auflösung der Rekursion

Nun befindet man sich in der Lage zu ermitteln, wie die Störungskoeffizienten rekursiv bestimmt werden. Das Schema aus Abschnitt 5.3.7 kann mit leichten Abweichungen übernommen werden. Eine Induktion beweist, daß die Koeffizienten rekursiv bestimmt werden können. Zuerst wird  $a_1^{(1,0)}$  berechnet. In einer vorgegebenen Ordnung  $k$  berechnet man dann zunächst die Familien von Koeffizienten, die Feynman-Graphen mit vielen äußeren Beinen entsprechen. Das heißt man geht von Baumgraphen zu Graphen mit immer mehr Schleifen vor. Innerhalb dieser Familien werden zunächst Koeffizienten mit vielen  $g^2\kappa$ -Vertices berechnet. Dieses Schema wird in Abschnitt 5.3.7 genauer erklärt. Hier wird formal gezeigt, daß man wie oben beschrieben vorgehen kann. Dazu wird ein Koeffizientenvergleich zwischen der linken und rechten Seite der RGDGL durchgeführt. Für  $n \geq 2$  erhält man:

$$\begin{aligned}
& (D_{2n} - kD_4) a_n^{(k,t)}(q_1, \dots, q_{2n}) - D_4(t+1) a_n^{(k,t+1)}(q_1, \dots, q_{2n}) \\
& + \frac{1}{k+1} \sum_{l=2}^{k-n+2} \binom{k+1}{l} \sum_{s=0}^t \left\{ -8lf'(0) a_1^{(l,s)}(0,0) + \int_q f'(q^2) a_3^{(l,s)}(0, \dots, 0, q, -q) \right\} \\
& \times \left\{ (t+1-s) a_n^{(k+1-l, t+1-s)}(q_1, \dots, q_{2n}) + (k+1-l) a_n^{(k+1-l, t-s)}(q_1, \dots, q_{2n}) \right\} \\
& = \int_q f'(q^2) a_{n+1}^{(k,t)}(q_1, \dots, q_{2n}, q, -q) \\
& - 2n \sum_{l=n-1}^{k-1} \sum_{s=0}^t \left\{ \left\{ f'(q_1^2) a_1^{(k-l, t-s)}(q_1, -q_1) a_n^{(l,s)}(q_2, \dots, q_{2n}, q_1) \right\}_{S_{2n}} \right. \\
& \quad \left. + \left\{ f'(Q_{2n-1}^2) a_n^{(k-l, t-s)}(q_1, \dots, q_{2n-1}, -Q_{2n-1}) a_1^{(l,s)}(q_{2n}, Q_{2n-1}) \right\}_{S_{2n}} \right\} \\
& - \sum_{m=2}^{n-1} \binom{2n}{2m-1} \sum_{l=n-m}^{k-m+1} \sum_{s=0}^t \binom{k}{l} \left\{ f'(Q_{2m-1}^2) a_m^{(k-l, t-s)}(q_1, \dots, q_{2m-1}, -Q_{2m-1}) \right. \\
& \quad \left. \times a_{n-m+1}^{(l,s)}(q_{2m}, \dots, q_{2n}, Q_{2m-1}) \right\}_{S_{2n}}. \quad (5.143)
\end{aligned}$$

Die analoge Gleichung für  $n = 1$  lautet:

$$\begin{aligned}
& (D_2 - kD_4)a_1^{(k,t)}(q_1, q_2) - D_4(t+1)a_1^{(k,t+1)}(q_1, q_2) \\
& + \frac{1}{k+1} \sum_{l=2}^k \binom{k+1}{l} \sum_{s=0}^t \left\{ -8lf'(0)a_1^{(l-1,s)}(0,0) + \int_q f'(q^2)a_3^{(l,s)}(0, \dots, 0, q, -q) \right\} \\
& \quad \left\{ (t+1-s)a_1^{(k+1-l,t+1-s)}(q_2, q_2) + (k+1-l)a_1^{(k+1-l,t-s)}(q_2, q_2) \right\} \\
& = \int_q f'(q^2)a_2^{(k,t)}(q_1, q_2, q, -q) \\
& \quad - 2 \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{s=0}^t \binom{k}{l} \left\{ f'(q_1^2)a_1^{(k-l,t-s)}(q_1, -q_1)a_1^{(l,s)}(q_2, q_1) \right\}_{S_2}. \tag{5.144}
\end{aligned}$$

An (5.143) und (5.144) kann man nun alle wesentlichen Gleichungen ablesen. Zunächst wird  $a_1^{(1,0)}(q_1, q_2)$  berechnet. Aus Gleichung (5.144) erhält man:

$$(D_2 - kD_4)a_1^{(1,0)}(q_1, q_2) = \int_q f'(q^2)a_2^{(1,0)}(q_1, q_2, q, -q). \tag{5.145}$$

Die Funktion  $a_2^{(1,0)}$  muß also zur Bestimmung der ersten Ordnung vorgegeben sein. Anders ausgedrückt heißt das, daß man den erzeugenden Vertex kennen muß. An (5.143) erkennt man, daß  $a_2^{(1,0)}$  in der Tat frei wählbar ist. Also muß  $a_2^{(1,0)}$  durch geeignete Forderungen festgelegt werden. Jeden weiteren Koeffizienten kann man dann berechnen. Bis auf diese Änderung können die Schemata zur Auflösung der Rekursion und zur Beseitigung der Resonanzen aus Abschnitt 5.3 übernommen werden. Damit hat man ein funktionsfähiges Schema zur Bestimmung von Lösungen der RGDGL bei schwacher Impulsabhängigkeit bekommen. Auf die Berechnung der zweiten Ordnung wird hier verzichtet, da dies analog zu Abschnitt 5.3.8 ist. Man muß lediglich den Koeffizienten  $a_2^{(2,0)}$  zusätzlich bestimmen.

#### 5.4.4 Diskussion der Lösungen

Hier wird darauf verzichtet, die Störungsreihen bei schwacher Impulsabhängigkeit explizit auszurechnen. Dazu sollte man zunächst die Probleme, die man bei der Interpretation der hierarchischen Störungsreihen in  $g$  und  $\kappa = \log g$  hat, beseitigen. Das zentrale Problem ist wohl die Frage nach einem funktionsfähigen Resummationsschema für die Reihen. Ein solches Schema sollte ebenso mächtig sein, wie zum Beispiel die Borelsummation für gewöhnliche Potenzreihen. Wenn dieses Problem geklärt ist, kann man die erhaltenen Lösungen der RGDGL vernünftig interpretieren. Mit Hilfe dieser Reihen bei schwacher Impulsabhängigkeit könnte man auch eine Basis zur Lösung der vollen RGDGL bekommen, zum Beispiel durch ein numerisches Integrationsverfahren, durch das die Impulsraumkerne rekursiv bestimmt werden können. Durch die Störungsreihen bei schwacher Impulsabhängigkeit und durch die lokale Näherung kann man Ideen bekommen, wie sich die Koeffizienten in hohen Ordnungen verhalten, siehe Abschnitt 5.3.4. Dies kann numerisch ausgenutzt werden. Es ist ebenfalls denkbar, die Impulsraumkerne durch eine numerische Iteration

zu bestimmen. Ein solches Iterationsverfahren würde als Startwert die Lösungen bei schwacher Impulsabhängigkeit besitzen. Ein solches numerisches Verfahren zu erfinden, ist jedoch ziemlich aufwendig. In kleinen numerischen Experimenten wurde eine einfache Vorwärtsiteration ausprobiert, die leider nicht konvergierte.



# Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden etablierte Methoden zur Renormierungsgruppenanalyse von Modellen der statistischen Physik und der Quantenfeldtheorie verallgemeinert, und neue Ideen entwickelt. Dabei wurde das hierarchische Modell, das aufgrund seiner Lokaltäts-erhaltenden Renormierungsgruppentransformation zur Entwicklung neuer Ideen als Testgelände ideal geeignet ist, besonders eingehend studiert.

An dem hierarchischen Modell selbst konnte ich durch eine Verallgemeinerung einer Methode aus [PPW94] zeigen, daß die Universalitätsklassen der skalaren Theorie nicht nur von der Dimension sondern auch von der Blockgröße, die das hierarchische Modell als Parameter vom vollen Modell erbt, abhängen. Damit wird es etwas schwierig, wenn nicht unglaublich, das hierarchische Modell als Approximation an das volle Modell aufzufassen. Mit einer weiteren Verallgemeinerung der erwähnten Methodik konnte ich das volle Spektrum des hierarchischen Modells an nichttrivialen Renormierungsgruppenfixpunkten berechnen. Durch analytische Argumente wurde gezeigt, daß die anomale Dimension des hierarchischen Modells verschwindet.

An dem hierarchischen Modell illustriere ich eine rekursive Entwicklung um die Bifurkationspunkte, an denen sich nichttriviale Renormierungsgruppenfixpunkte von dem trivialen Fixpunkt abspalten, die zur Bestimmung von kritischen Indizes führt. Diese Entwicklung ist eine  $\epsilon$ -Entwicklung, die aber so umformuliert ist, daß sie auch für Gittertheorien durchführbar ist. Durch das Studium des Konvergenzverhaltens der erhaltenen Reihen erhalte ich Aufschluß darüber, wie weit man in dem Parameter  $\epsilon$  extrapolieren kann.

Die zentrale neue Idee in dieser Arbeit ist eine störungstheoretische Methode zur iterativen Berechnung von Potentialen auf einer renormierten Trajektorie. Renormierte Trajektorien haben im Zusammenhang mit den perfekten Wirkungen von Hasenfratz und Niedermayer Aufsehen erregt. Als Voruntersuchung habe ich perfekte Propagatoren für Gittertheorien berechnet. Dabei wurde unter anderem eine neue Blockspin-Definition benutzt und systematisch mit bekannten Blockspin-Definitionen verglichen. Die resultierenden effektiven Hamiltonfunktionen, die mit der 5-Punkt-Regel berechnet wurden, besitzen gute Lokaltätseigenschaften; analytisch ist die 5-Punkt-Regel nur schwer handhabbar. Es ist ein offenes Problem, einen exakten Ausdruck für den perfekten 5-Punkt Laplaceoperator zu berechnen.

Die renormierte Trajektorie konnte ich am Beispiel der hierarchischen  $\phi^4$ -Theorie mit einer Störungsentwicklung in einer laufenden Kopplung um den trivialen Fixpunkt berechnen. Sie ist durch eine Invarianzforderung und durch Angabe einer Richtung festgelegt. Zum Beispiel in drei Dimensionen treten Resonanzen in der Entwicklung auf. Dieses Problem konnte durch eine Störungsentwicklung in der

laufenden Kopplung und ihrem Logarithmus gelöst werden; die resonanten Dimensionen konnte ich vollständig klassifizieren. Entlang der renormierten Trajektorie habe ich einen störungstheoretischen Algorithmus zur Berechnung eines laufenden Systems von Observablen und Eigenwerten angegeben. Mit Hilfe von Fusionsregeln kann man zusammengesetzte Observablen entlang der Trajektorie bestimmen. Analog habe ich auch um den Hochtemperaturfixpunkt Trajektorien berechnet sowie laufende Observablen angegeben. Dabei traten keine Resonanzen auf. Sowohl die Reihen um den trivialen Fixpunkt als auch die Reihen vom Hochtemperaturfixpunkt aus lassen sich mit herkömmlichen Methoden nicht aufsummieren. Wie man mit den berechneten Reihen das Spektrum am nichttrivialen Fixpunkt berechnet, ist daher noch unklar.

Trajektorien im Raum der Potentiale werden durch die RGDGL erzeugt. Daher sollte es möglich sein, die renormierte Trajektorie auch über die RGDGL zu berechnen. Dabei erhält man eine Rekursion, mit der man Aussagen über die Störungsreihen in hohen Ordnungen machen kann.

Im dargestellten Rahmen gibt es viele Möglichkeiten zur weiteren Beschäftigung:

- Man kann versuchen, Trajektorien, die aus dem Infrarot-Fixpunkt herauslaufen, zu berechnen. Dazu müssen Erwartungswerte bezüglich des nichttrivialen Fixpunktes bestimmt werden. Wenn man die Fusionsregeln für die Observablen kennt, sind auch die Erwartungswerte gegeben. Man ist versucht, dies direkt an konformen Feldtheorien auszuprobieren, für die die Operatorproduktentwicklung bekannt ist.
- Die dargestellten Methoden lassen sich direkt auf volle Modelle übertragen; dies wurde am Beispiel der  $\phi_4^4$ -Theorie in [Wie96b] gezeigt, ist aber auch für andere Dimensionen und Modelle möglich. In drei Dimensionen kann man die Idee einer Doppelentwicklung mit Logarithmen verwerten. Ein weiteres interessantes Modell ist die Quantenelektrodynamik.
- Es wäre sehr interessant, exakte Aussagen über die Eigenschaften der hergeleiteten Störungsreihen zu machen. Erste Versuch in dieser Richtung endeten durchaus vielversprechend. Vielleicht ergeben sich knappe Renormierbarkeitsbeweise und Konstruktionen innerhalb des dargestellten Rahmens.
- Es wurde gezeigt, daß das hierarchische Modell nicht als Approximation an das volle Modell betrachtet werden sollte, auch wenn es qualitativ das richtige Bild liefert. Man kann versuchen, ein Approximationsschema zwischen vollen und hierarchischen Modellen zu entwickeln. Dazu kann man die Polymerentwicklung einer Gitterfeldtheorie ausgehend von einer Monomerapproximation der Renormierungsgruppentransformation mit abgespaltenem Hochtemperaturfixpunkt systematisch um Dimere, Trimere und größere Polymere erweitern. In Arbeiten zur konstruktiven Physik wird gezeigt, daß die relevanten Teile im Renormierungsgruppenfluß durch kleine, lokale Polymere gegeben sind [BDH95]; daher sollte eine solche Approximation schnell gute Resultate für kritische Indizes liefern. Eine reine Monomerapproximation hat bisher noch keine neue Physik gezeigt.

- Ein Approximationsschema zwischen dem hierarchischen Modell und dem vollen Modell konnte in dieser Arbeit entwickelt werden, nämlich der Übergang von der lokalen Näherung der RGDGL zur Näherung bei schwacher Impulsabhängigkeit. In diesem Sinn kann man weitermachen und Korrekturen in höheren Impulsordnungen anbringen. Auf diese Weise könnte man eine numerische Industrie zur Lösung der vollen, reskalierten RGDGL entwickeln. Ähnliche Entwicklungen, aber ausgehend von anderen Gleichungen, werden in Arbeiten von Wetterich et al. [ABB<sup>+</sup>95] und anderen mit großem Erfolg betrachtet. Dies findet man auch unter dem Schlagwort Derivative Expansion.
- Die  $\epsilon$ -Entwicklung aus Kapitel 3 kann man für volle Gittertheorien berechnen. Es wäre bereits ein interessantes Projekt, bis zur zweiten Ordnung in  $\epsilon$  zu gehen, um zu sehen, inwieweit man mit der gewöhnlichen  $\epsilon$ -Entwicklung von Wilson et al. [WF72] konkurrieren kann.

# Anhang A

## Gaußsche Maße und Normalordnung

### A.1 Gaußsche Maße

Gaußintegrale sind ein- oder mehrdimensionale Integrale vom Typ  $\int dx e^{-x^2}$ . Gaußintegrale lassen sich zu Maßen auf unendlichdimensionalen und überabzählbar-dimensionalen Räumen verallgemeinern. Für solche Verallgemeinerungen und für rigorose Aussagen und Beweise sei auf [Kuo75], [GW64] und [GJ87] verwiesen.

**Definition 1** (*Gaußsche Maße auf endlichdimensionalen Räumen*)

$\Lambda$  sei ein endliches Gitter,  $C$  sei eine reelle, positive und symmetrische Matrix auf  $\mathbb{R}^\Lambda$ . Operatoren mit diesen Eigenschaften werden als Kovarianzoperatoren bezeichnet. Mit  $Z_0 = \int [d\phi] e^{-\frac{1}{2}(\phi, C^{-1}\phi)_\Lambda}$  wird dann das Gaußsche Maß  $d\mu_C$  mit Mittelwert Null und Kovarianz  $C$  durch

$$d\mu_C(\phi) = \frac{1}{Z_0} [d\phi] e^{-\frac{1}{2}(\phi, C^{-1}\phi)_\Lambda} \quad (\text{A.1})$$

definiert. Das Maß  $d\mu_C$  ist (auf Eins) normiert.

Das eindimensionale Gaußsche Maß  $d\mu_\gamma(\zeta)$  mit Kovarianz  $\gamma$  ist also durch  $\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma}} d\zeta e^{-\frac{\zeta^2}{2\gamma}}$  gegeben. Häufig werden Rechnungen bis auf eine Normierung durchgeführt.

**Lemma 4** (*Charakteristische Funktion eines Gaußschen Maßes*)

Die charakteristische Funktion  $Z(J)$  des Maßes  $d\mu_C$  ist durch:

$$Z(J) = \int d\mu_C(\phi) e^{(J, \phi)_\Lambda} = \exp \left( \frac{1}{2} (J, C J)_\Lambda \right) \quad (\text{A.2})$$

gegeben [MM94]. Wenn man  $J = iJ'$  setzt, erhält man daraus die Fouriertransformierte des Maßes. Durch Ableiten nach  $J$  bekommt man die Momente des Maßes, siehe Lemma 8. Für Gaußsche Maße auf unendlichdimensionalen Räumen kann man (A.2) als definierende Gleichung verwenden.

Beweis: Es gilt

$$-\frac{1}{2}(\phi, C^{-1}\phi) + (J, \phi) = -\frac{1}{2}(\chi, C^{-1}\chi) + \frac{1}{2}(J, CJ), \quad (\text{A.3})$$

mit  $\chi = \phi + CJ$ . Durch Substitution zeigt man dann (A.2).  $\square$

Das Feld  $\phi_{\max} = CJ$  maximiert den Integranden;  $\phi_{\max}$  wird auch als stationärer Punkt des Integrals (A.2) bezeichnet. Da  $C$  positiv ist, ist die Hessematrix der quadratischen Form im Exponenten des Gaußintegrals negativ, das heißt daß wirklich ein Maximum vorliegt.  $Z(J)$  ist bis auf eine Normierung gleich dem Integranden am stationären Punkt. Das bedeutet, daß Gaußintegrale auch durch Bestimmung des stationären Punktes berechnet werden können.

Gaußintegration kann man als Anwendung eines Differentiationsoperators auffassen. Dies sagt das

**Lemma 5** *Für Funktionale  $F$  auf Feldern  $\psi : \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}$  gilt unter geeigneten Voraussetzungen:*

$$\int d\mu_C(\phi) F(\psi + \phi) = e^{\frac{1}{2}\Delta_C} F(\psi), \quad (\text{A.4})$$

mit  $\Delta_C = \int dx dy \frac{\delta}{\delta\psi(x)} C(x, y) \frac{\delta}{\delta\psi(y)}$ . Zumindest für Polynome in den Feldern ist die Aussage gültig, da die rechte Seite dann eine endliche Reihe bildet. Als  $T$  kann hier sowohl ein kontinuierlicher als auch ein diskreter Raum aufgefaßt werden.

Beweis: Für einen raschen Überzeugungsversuch genügt es, die Aussage für das Funktional  $F(\phi) = e^{i(J, \phi)}$  zu zeigen. Dann kann die Aussage wegen Linearität auf beliebige fouriertransformierbare Funktionale ausgedehnt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}\Delta_C} F(\psi) &= e^{\frac{1}{2}\Delta_C} e^{i(J, \psi)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{2}\Delta_C \right)^n e^{i(J, \psi)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(J, CJ) + i(J, \psi)}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

da  $\Delta_C e^{i(J, \psi)} = -(J, CJ) e^{i(J, \psi)}$ . Also folgt weiter:

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}\Delta_C} F(\psi) &= e^{i(J, \psi)} \int d\mu_C(\phi) e^{i(J, \phi)} \\ &= \int d\mu_C(\phi) F(\psi + \phi). \quad \square \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

**Lemma 6** *(Faltungseigenschaft von Gaußschen Maßen)*

Für die Kovarianzoperatoren  $C$ ,  $C_1$  und  $C_2$  gelte  $C = C_1 + C_2$ . Für ein integrierbares Funktional  $F$  gilt dann:

$$\int d\mu_C(\phi) F(\phi) = \int d\mu_{C_1}(\psi) \int d\mu_{C_2}(\zeta) F(\psi + \zeta). \quad (\text{A.7})$$

Beweis: Es sei  $F(\phi) = e^{i(J,\phi)}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int d\mu_C(\phi) e^{i(J,\phi)} &= e^{-\frac{1}{2}(J,CJ)} = e^{-\frac{1}{2}(J,C_1J)} e^{-\frac{1}{2}(J,C_2J)} \\ &= \int d\mu_{C_1}(\psi) \int d\mu_{C_2}(\zeta) e^{i(J,\psi+\zeta)}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Wegen Linearität hat man damit (A.7) für jedes fouriertransformierbare Funktional gezeigt. Für allgemeinere Funktionale bildet man Grenzwerte von fouriertransformierbaren Funktionalen.  $\square$

Analog beweist man

**Lemma 7** *Für ein integrierbares Funktional  $F$  und einen reellen Operator  $A$  gilt:*

$$\int d\mu_{ACA^+}(\phi) F(\psi + \phi) = \int d\mu_C(\phi) F(\psi + A\phi). \quad \square \quad (\text{A.9})$$

Das  $n$ -te Moment  $M_n$  eines Maßes ist durch die  $n$ -te Ableitung der charakteristischen Funktion des Maßes gegeben. Das erste Moment wird als Mittelwert, das zweite als Kovarianz bezeichnet. Alle Gaußschen Maße, die im Text betrachtet werden, haben den Mittelwert Null. Allgemein gilt:

**Lemma 8** *(Momente von Gaußschen Maßen)*

*Gaußsche Maße sind vollständig durch die ersten zwei Momente charakterisiert. Es gilt:*

$$M_1(x) = \int d\mu_C(\phi) \phi_x = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$M_2(x, y) = C(x, y) = \int d\mu_C(\phi) \phi_x \phi_y. \quad (\text{A.11})$$

*Höhere Momente werden mit der Wickschen Regel (siehe zum Beispiel [GJ87]) berechnet, die im eindimensionalen Fall zu*

$$\int d\mu_\gamma(\zeta) \zeta^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{(\frac{n}{2})!}, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

*wird.*

Beweis: (A.10) ist klar, wegen der Symmetrie des Maßes. (A.11) folgt aus:

$$\begin{aligned} \int d\mu_C(\phi) \phi_x \phi_y &= \frac{\partial^2}{\partial J_x \partial J_y} \Big|_{J=0} \int d\mu_C(\phi) e^{i(J,\phi)} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial J_x \partial J_y} \Big|_{J=0} e^{\frac{1}{2}(J,CJ)} \\ &= C(x, y). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Für (A.12) wendet man das folgende Lemma 9 an. Dann folgt für  $k > 0$ :

$$\int d\mu_\gamma(\zeta) \zeta^{2k} = \int d\mu_\gamma(\zeta) \zeta \zeta^{2k-1} = \gamma(2k-1) \int d\mu_\gamma(\zeta) \zeta^{2k-2}, \quad (\text{A.14})$$

und mit Induktion nach  $k$  und der Normierung des Maßes  $d\mu_\gamma$  ergibt sich:

$$\int d\mu_\gamma(\zeta) \zeta^{2k} = \gamma^k \prod_{l=1}^k (2l-1) = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^k \frac{(2k)!}{k!}. \quad \square \quad (\text{A.15})$$

**Lemma 9** *Unter einem (eindimensionalen) Gaußintegral entspricht Multiplikation mit  $\zeta$  der Ableitung nach  $\zeta$ :*

$$\int d\mu_\gamma(\zeta) \zeta F(\psi + \zeta) = \gamma \int d\mu_\gamma(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} F(\psi + \zeta). \quad (\text{A.16})$$

Beweis: Der Beweis geht mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int d\mu_\gamma(\zeta) \zeta F(\psi + \zeta) &= -\gamma \int d\zeta \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} e^{-\frac{\zeta^2}{2\gamma}} \right) F(\psi + \zeta) \\ &= \gamma \int d\mu_\gamma(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} F(\psi + \zeta). \quad \square \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

In dem nächsten Lemma wird der Grenzwert eines Gaußschen Maßes bei verschwindender Kovarianz betrachtet. Das Lemma wird nur im eindimensionalen Fall benötigt.

**Lemma 10** *( $\delta$ -Maß als Grenzwert des Gaußschen Maßes)*

*Für beschränkte, integrierbare und bei  $x = 0$  stetige Funktionen  $f$  gilt*

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int d\mu_{\frac{1}{a}}(x) f(x) = f(0). \quad (\text{A.18})$$

Beweis: Man definiert eine Funktion  $g(x) = f(x) - f(0)$ . Wegen der Normiertheit des Gaußschen Maßes ist also

$$\int d\mu_{\frac{1}{a}}(x) f(x) = f(0) + \int d\mu_{\frac{1}{a}}(x) g(x). \quad (\text{A.19})$$

Das letzte Integral verschwindet im Limes  $a \rightarrow \infty$ . Dazu wird es in drei Teile aufgespalten; es sei  $A \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dann gilt:

$$\int d\mu_{\frac{1}{a}}(x) g(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{-A} dx e^{-\frac{a}{2}x^2} g(x) + \int_A^{\infty} dx e^{-\frac{a}{2}x^2} g(x) + \int_{-A}^A dx e^{-\frac{a}{2}x^2} g(x) \right). \quad (\text{A.20})$$

Durch die Substitution  $y = \sqrt{\frac{a}{2}}x$  sieht man unter Ausnutzung der Beschränktheit von  $f$  und  $g$ , daß die beiden ersten Integrale im Limes  $a \rightarrow \infty$  verschwinden. Für den dritten Term nutzt man die Stetigkeit bei Null aus. Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß aus  $|x| < \delta$  folgt:  $|g(x)| < \epsilon$ . Bei vorgegebenem  $\epsilon$  wählt man  $A$  so, daß  $2A < \delta$  gilt. Dann sieht man mit der Substitution  $y = \sqrt{\frac{a}{2}}x$ , daß das letzte Integral in (A.20) im Limes  $a \rightarrow \infty$  gegen  $\epsilon$  geht. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

## A.2 Normalordnung

Normalordnung kann mit verschiedenen Intentionen einführen, vergleiche [GJ87]. Hier ist wohl entscheidend, daß normalgeordnete Monome gerade die Eigenfunktionen der linearisierten Renormierungsgruppentransformation am trivialen Fixpunkt sind, siehe Korollar 3. Die Konzepte werden nur im eindimensionalen Fall benötigt und dargestellt, lassen sich aber meist leicht verallgemeinern.

**Definition 2** (*Normalordnung*)

Normalgeordnete Monome  $:\phi^n:_{\gamma}$  werden als Ableitung der erzeugenden Funktion

$$F(\phi) = :e^{j\phi}: = e^{j\phi - \frac{\gamma^2}{2}} \quad (\text{A.21})$$

definiert, die modulo Skalierungen auch die erzeugende Funktion für Hermite-Polynome ist [GR94]:

$$:\phi^n:_{\gamma} = \left. \frac{\partial^n}{\partial j^n} \right|_{j=0} e^{j\phi - \frac{\gamma^2}{2}} = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\phi}{\sqrt{2\gamma}}\right). \quad (\text{A.22})$$

Hier ist mit  $H_n$  das  $n$ -te Hermite-Polynom bezeichnet.

**Lemma 11** (*Ableitung von normalgeordneten Monomen*)

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} : \psi^n :_{\gamma} = n : \psi^{n-1} :_{\gamma}. \quad (\text{A.23})$$

Beweis: Für Hermite-Polynome ist [GR94]

$$\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x). \quad (\text{A.24})$$

Also:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} : \psi^n :_{\gamma} = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\gamma}} 2n H_{n-1}\left(\frac{\psi}{\sqrt{2\gamma}}\right) = n : \psi^{n-1} :_{\gamma}. \quad \square \quad (\text{A.25})$$

Entscheidend für den Umgang mit normalgeordneten Monomen ist die folgende Kontraktionsformel, die anschaulich sofort klar ist.

**Lemma 12** (*Fusionsformel*)

Für das Produkt von normalgeordneten Monomen gilt:

$$:\phi^m:_{\gamma} : \phi^n:_{\gamma} = \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} k! \binom{m}{k} \binom{n}{k} \gamma^k : \phi^{m+n-2k} :_{\gamma}. \quad (\text{A.26})$$

Dies ergibt sich, indem man die Linien eines  $\phi^m$ -Vertex und eines  $\phi^n$ -Vertex nach allen Möglichkeiten kontrahiert, das heißt durch Propagatorlinien  $\gamma$  verbindet, Selbstkontraktionen der Beine eines Vertex aber ausschließt. Die Binomialkoeffizienten geben an, auf wieviele Weisen man  $k$  Beine aus  $m$  beziehungsweise  $n$  Beinen auswählen kann,  $k!$  ist die Anzahl der Permutationen der Propagatorlinien.



Beweis: Für das Produkt der erzeugenden Funktionen der beiden Vertices gilt:

$$\begin{aligned} : e^{j\phi} :_{\gamma} : e^{j'\phi} :_{\gamma} &= e^{(j+j')\phi - \frac{\gamma}{2}(j^2+j'^2)} \\ &= : e^{(j+j')\phi} :_{\gamma} e^{\gamma jj'} . \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Daher folgt:

$$: \phi^m :_{\gamma} : \phi^n :_{\gamma} = \left( \frac{\partial}{\partial j} \right)^m \Big|_{j=0} \left( \frac{\partial}{\partial j'} \right)^n \Big|_{j'=0} : e^{(j+j')\phi} :_{\gamma} e^{\gamma jj'} . \quad (\text{A.28})$$

Dies berechnet man durch Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} : e^{(j+j')\phi} :_{\gamma} e^{\gamma jj'} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(j+j')^r}{r!} : \phi^r :_{\gamma} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\gamma jj')^s}{s!} \\ &= \sum_{r,s=0}^{\infty} \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} \frac{\gamma^s}{r!s!} j^{l+s} j'^{r+s-l} : \phi^r :_{\gamma} \\ &\stackrel{\substack{n=r+s-l \\ m=s+l \\ k=s}}{=} \sum_{m,n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} \frac{1}{k!(m-k)!(n-k)!} \gamma^k j^m j'^n : \phi^{m+n-2k} :_{\gamma} \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{j^m j'^n}{m!n!} \sum_{k=0}^{\min\{m,n\}} k! \binom{m}{k} \binom{n}{k} : \phi^{m+n-2k} :_{\gamma} . \quad \square \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Viele Relationen folgen aus

**Lemma 13** *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \int d\mu_{\gamma}(\zeta) : e^{j_1(a\psi+\zeta)} :_{\gamma_1} : e^{j_2(b\phi+\zeta)} :_{\gamma_2} \\ = \exp \left( aj_1\psi + bj_2\phi + \frac{\gamma-\gamma_1}{2}j_1^2 + \frac{\gamma-\gamma_2}{2}j_2^2 + \gamma j_1j_2 \right) . \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \int d\mu_{\gamma}(\zeta) : e^{j_1(a\psi+\zeta)} :_{\gamma_1} : e^{j_2(b\phi+\zeta)} :_{\gamma_2} \\ = \int d\mu_{\gamma}(\zeta) e^{j_1(a\psi+\zeta) - \frac{\gamma_1 j_1^2}{2} + j_2(b\phi+\zeta) - \frac{\gamma_2 j_2^2}{2}} \\ \stackrel{(\text{A.2})}{=} \exp \left( aj_1\psi + bj_2\phi - \frac{\gamma_1 j_1^2}{2} - \frac{\gamma_2 j_2^2}{2} + \frac{\gamma}{2}(j_1 + j_2)^2 \right) . \quad \square \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

**Korollar 1** (*Charakterisierung der Normalordnung*):

Aus (A.30) folgt sofort:

$$\int d\mu_{\gamma}(\zeta) : e^{j(\psi+\zeta)} :_{\gamma'} = e^{j\psi - \frac{\gamma'-\gamma}{2}j^2} = : e^{j\psi} :_{\gamma'-\gamma} . \quad (\text{A.32})$$

Für  $\gamma' = \gamma$  bedeutet dies:

$$\int d\mu_\gamma(\zeta) : e^{j(\psi+\zeta)} :_\gamma = e^{j\psi}, \quad (\text{A.33})$$

und in diesem Sinn sind Gaußintegration und Normalordnung invers. Für  $\gamma' = 0$  lautet (A.32):

$$\int d\mu_\gamma(\zeta) e^{j(\psi+\zeta)} =: e^{j\psi} :_{-\gamma}, \quad (\text{A.34})$$

Gaußintegration entspricht also einer Normalordnung mit negativer Kovarianz.  $\square$

**Korollar 2** (Orthogonalität der normalgeordneten Monome):

Es gilt:

$$\int d\mu_\gamma(\zeta) : \phi^m :_\gamma : \phi^n :_\gamma = \gamma^n n! \delta_{m,n}. \quad (\text{A.35})$$

Beweis: Zunächst folgt aus (A.30) für  $a = b = 0$  und  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ :

$$\int d\mu_\gamma(\zeta) : e^{j_1 \zeta} :_\gamma : e^{j_2 \zeta} :_\gamma = e^{\gamma j_1 j_2}. \quad (\text{A.36})$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int d\mu_\gamma(\zeta) : \phi^m :_\gamma : \phi^n :_\gamma &= \left( \frac{\partial}{\partial j_1} \right)^m \Big|_{j_1=0} \left( \frac{\partial}{\partial j_2} \right)^n \Big|_{j_2=0} e^{\gamma j_1 j_2} \\ &= \gamma^n n! \delta_{m,n}. \quad \square \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

**Korollar 3** (Integral über normalgeordnete Monome):

Es gilt:

$$\int d\mu_\gamma(\zeta) : (\beta\psi + \zeta)^n :_{\gamma'} = \beta^n : \psi^n :_{\beta^{-2}(\gamma' - \gamma)}. \quad (\text{A.38})$$

Die normalordnende Kovarianz  $\gamma'$  ist unter dieser Operation invariant, wenn  $\gamma' = \frac{\gamma}{1-\beta^2}$  gilt. (Dann sind die normalgeordneten Monome Eigenfunktionen der linearisierten, hierarchischen Renormierungsgruppentransformation im Ultraviolett-Bild.)

Beweis: Mit (A.30) folgt:

$$\begin{aligned} \int d\mu_\gamma(\zeta) : (\beta\psi + \zeta)^n :_{\gamma'} &\stackrel{(\text{A.30})}{=} \frac{\partial^n}{\partial j^n} \Big|_{j=0} e^{j\beta\psi - \frac{\gamma' - \gamma}{2} j^2} \\ &\stackrel{J=\beta j}{=} \beta^n \frac{\partial^n}{\partial J^n} \Big|_{J=0} e^{J\psi - \frac{\beta^{-2}(\gamma' - \gamma)}{2} J^2} \\ &= \beta^n : \psi^n :_{\beta^{-2}(\gamma' - \gamma)}. \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Die Kovarianz  $\gamma'$  ist invariant, wenn  $\gamma' = \beta^{-2}(\gamma' - \gamma)$  gilt. Für  $\beta \neq 1$  ist dies äquivalent zu  $\gamma' = \frac{\gamma}{1-\beta^2}$ . Für  $\beta = 1$  kann die normalordnende Kovarianz nicht invariant gewählt werden.  $\square$

# Anhang B

## Gitter-Laplaceoperator

Auf einem Gitter  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$  kann man die zur Bildung von Ableitungen von Funktionen  $f : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  erforderlichen Grenzwerte nicht ausführen. Die Differentialquotienten werden daher durch Differenzenquotienten ersetzt [MM94]. Dabei unterscheidet man eine Vorwärtsableitung  $\partial_\mu^f$  und eine Rückwärtsableitung  $\partial_\mu^b$ :

$$(\partial_\mu^f f)_x = f_{x+e_\mu} - f_x \quad (\text{B.1})$$

$$(\partial_\mu^b f)_x = f_x - f_{x-e_\mu}. \quad (\text{B.2})$$

$e_\mu$  ist der Einheitsvektor in der Raumrichtung  $\mu$  ( $\mu = 1, \dots, d$ ). Der Gitter-Laplaceoperator ist dann durch

$$\Delta = \sum_{\mu=1}^d \partial_\mu^b \partial_\mu^f \quad (\text{B.3})$$

definiert. Angewendet auf die Funktion  $f$  lautet dies

$$(-\Delta f)_x = \sum_{\mu=1}^d (2f_x - f_{x+e_\mu} - f_{x-e_\mu}); \quad (\text{B.4})$$

daher schreibt man auch  $-\Delta = 2d\mathbb{1} - N$ , mit der Nearest-Neighbour-Matrix  $N$ , die durch  $(Nf)_x = \sum_{\mu=1}^d f_{x+e_\mu} + f_{x-e_\mu}$  gegeben ist [GJ87, FFS92]. Der Gitter-Laplaceoperator ist ein positiv semidefiniter Operator, daher muß man ihn, bevor er invertiert wird, auf einen Definitionsbereich einschränken, in dem er positiv ist. Aus der Definition (B.4) folgt sofort, daß die Nullmoden durch affin lineare Funktionen gegeben sind. Wenn man den Operator auf einem Torus, also auf einem Gitter mit periodischen Randbedingungen definiert, sind nur die konstanten Funktionen Nullmoden. Auf einem Funktionenraum modulo konstanten Funktionen, oder äquivalent auf Funktionen mit verschwindender Impuls-Null-Komponente, ist der Laplaceoperator dann invertierbar,  $(-\Delta)^{-1}$  ist der freie, masselose Propagator eines skalaren Teilchens. Man kann diese Konstruktion auch als Projektion des Gitter-Laplaceoperators auf seinen Anteil ohne Nullmoden verstehen. Es ist ebenfalls möglich, sich den Laplaceoperator immer mit einer kleinen Masse vorzustellen, die beliebig klein gemacht werden kann.

Der massebehaftete Propagator  $v = (-\Delta + m^2 \mathbf{1})^{-1}$  kann fouriertransformiert werden. Dazu betrachtet man die Gleichung

$$\sum_{y \in \Lambda} (-\Delta + m^2)_{x,y} v_{y,z} = \delta_{x,z}. \quad (\text{B.5})$$

Der Propagator  $v$  wird über

$$v_{x,y} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{(2\pi)^d} e^{ip(y-x)} \tilde{v}_p \quad (\text{B.6})$$

durch seine Fouriertransformierte  $\tilde{v}$  ausgedrückt. Damit wird aus (B.5):

$$\sum_{y \in \Lambda} (-\Delta + m^2)_{x,y} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{(2\pi)^d} e^{ip(z-y)} \tilde{v}_p = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{(2\pi)^d} e^{ip(z-x)}, \quad (\text{B.7})$$

durch Rücktransformation folgt dann

$$\sum_{y \in \Lambda} (-\Delta + m^2)_{x,y} e^{-ipy} \tilde{v}_p = e^{-ipx}. \quad (\text{B.8})$$

In (B.7) hat man von der Impulsraumdarstellung von  $\delta_{x,y}$  Gebrauch gemacht. Aufgrund der Definition von  $-\Delta$  folgt daraus zum Schluß

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{v}_p} &= m^2 + \sum_{\mu=1}^d (2 - e^{-ipe_\mu} - e^{ipe_\mu}) \\ &= m^2 + 2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos p_\mu) \\ &= m^2 + 4 \sum_{\mu=1}^d \sin^2 \frac{p_\mu}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Durch ein schönes Random-Walk-Argument kann man zeigen, daß der Propagator  $v = (-\Delta + m^2 \mathbf{1})^{-1}$  im Ortsraum exponentiell zerfällt. Zuerst zeige ich, daß die Norm der Nearest-Neighbour-Matrix kleiner als  $2d$  ist.

**Lemma 14**

$$\|N\| \leq 2d. \quad (\text{B.10})$$

Beweis: Es seien  $f, g : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  Funktionen auf dem Gitter  $\Lambda$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} |(f, Ng)| &= \left| \sum_{x,y \in \Lambda} f_x^* N_{x,y} g_y \right| \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left( \sum_{x,y \in \Lambda} |f_x|^2 |N_{x,y}| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{x,y \in \Lambda} |g_y|^2 |N_{x,y}| \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \sup_{x \in \Lambda} \sum_{y \in \Lambda} |N_{x,y}| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sup_{y \in \Lambda} \sum_{x \in \Lambda} |N_{x,y}| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{x \in \Lambda} |f_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{y \in \Lambda} |g_y|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \left( \sup_{x \in \Lambda} \sum_{y \in \Lambda} |N_{x,y}| \right) \|f\| \cdot \|g\|, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

also folgt

$$\|N\| \leq \sup_{x \in \Lambda} \sum_{y \in \Lambda} |N_{x,y}| = 2d. \quad \square \quad (\text{B.12})$$

Damit läßt sich das Inverse von  $-\Delta + m^2 \mathbf{1}$  durch eine von Neumann-Reihe definieren, denn es gilt

$$\begin{aligned} |(-\Delta + m^2 \mathbf{1})^{-1}| &= |((2d + m^2) \mathbf{1} - N)^{-1}| \stackrel{b:=\frac{1}{2d+m^2}}{=} \left| \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+1} N^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+1} \|N\|^k \\ &\leq \frac{1}{2d + m^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{m^2}{2d}\right)^k} < \infty. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Dabei wurde  $b = \frac{1}{2d+m^2}$  definiert. Damit hat man die Existenz des Inversen gezeigt, solange  $m^2 > 0$  ist. Die Potenz  $(N^k)_{x,y}$  besitzt eine anschauliche Bedeutung, sie ist die Anzahl aller einfachen Random-Walks von  $x$  nach  $y$  der Länge  $k$  auf dem Gitter  $\Lambda$  (vergleiche auch [FFS92]):

$$(N^k)_{x,y} = \#\left\{ \text{Pfade } \omega : x \rightarrow y \mid |\omega| = k \right\}. \quad (\text{B.14})$$

Damit erhält man die detailliertere Abschätzung

$$\begin{aligned} (-\Delta + m^2 \mathbf{1})_{x,y}^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} b^{k+1} \#\left\{ \text{Pfade } \omega : x \rightarrow y \mid |\omega| = k \right\} \\ &\leq \sum_{k \geq \text{distance}(x,y)} b^{k+1} \#\left\{ \text{Pfade } \omega : x \rightarrow \cdot \mid |\omega| = k \right\} \\ &= \sum_{k \geq \text{distance}(x,y)} b^{k+1} (2d)^k \\ &= \frac{1}{2d + m^2 - 1} e^{-K \text{distance}(x,y)}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

mit der exponentiellen Zerfallskonstanten  $K = \log(1 + \frac{m^2}{2d})$ . Dabei wurde ausgenutzt, daß die Anzahl der Pfade der Länge  $k$  von  $x$  irgendwohin gleich  $(2d)^k$  ist. Für  $m^2 \rightarrow 0$  geht die Abfallskonstante  $K$  gegen Null, das exponentielle Zerfallsgesetz geht in ein Potenzgesetz über.

# Literaturverzeichnis

- [ABB<sup>+</sup>95] J. Adams, J. Berges, S. Bornholdt, F. Freire, N. Tetradis, and C. Wetterich. Solving nonperturbative flow equations. *Mod.Phys.Lett.*, A10:2367–2380, 1995.
- [Bak72] G. A. Baker. Ising model with a scaling interaction. *Phys. Rev. B*, 5(7):2622–2633, 1972.
- [BB85] C. Bagnuls and C. Bervillier. Nonasymptotic critical behaviour from field theory at  $d = 3$ ; disordered-phase case. *Phys. Rev.*, B 32:7209, 1985.
- [BDH95] D. Brydges, J. Dimock, and T. Hurd. The short distance behaviour of  $(\phi^4)_3$ . *Commun. Math. Phys.*, 1995.
- [BEI92] D. Brydges, S. N. Evans, and J. Z. Imbrie. Self-avoiding walk on a hierarchical lattice in four dimensions. *The Annals of Probability*, 20(1):82–124, 1992.
- [Bel91] M. Le Bellac. *Quantum and Statistical Field Theory*. Oxford University Press, 1991.
- [BLH95] H. Blöte, E. Luijten, and J. Heringa. Ising universality in three dimensions: A Monte Carlo study. cond-mat/9509016, September 1995. to appear in J. Phys A: Mathematical and General.
- [BP70] A. L. Brown and A. Page. *Elements of Functional Analysis*. von Norstrand Reinhold Company, London, 1970.
- [Bry] D. Brydges. Perturbation of the massless Gaussian measure in  $4 - \epsilon$  dimensions. In preparation.
- [BS73] P. M. Bleher and Ja. G. Sinai. Investigation of the critical point in models of the type of Dyson’s hierarchical models. *Commun. Math. Phys.*, 33:23–42, 1973.
- [BW74] T. Bell and K. Wilson. Finite-lattice approximations to renormalization groups. *Phys-Rev*, B11, 1974.
- [BY90] D. Brydges and H. Yau. Grad phi perturbations of massless Gaussian fields. *Commun. Math. Phys.*, 129:351–392, 1990.

- [CE78] P. Collet and J.-P. Eckmann. *A Renormalization Group Analysis of the Hierarchical Model in Statistical Mechanics*, volume 74 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, 1978.
- [Chr92] G. Christol. p-adic numbers and ultrametricity. In M. Waldschmidt, P. Moussa, J.-M. Luck, and C. Itzykson, editors, *From Number Theory to Physics*. Springer-Verlag, 1992.
- [CM94] M. Cassandro and P. K. Mitter. Renormalization group approach to interacting crumpled surfaces: The hierarchical recursion. *Nuclear Physics*, B422:634–674, 1994.
- [De74] C. Domb and M. S. Green (eds.). *Series Expansions for Lattice Models*, volume 3 of *Phase Transitions and Critical Phenomena*. Academic Press, 1974.
- [Deg95] A. Degenhard. Studien zu approximativen Renormierungsgruppenflüssen in Gitter-Spin-Modellen. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, November 1995.
- [Dys69] F. Dyson. Existence of a phase-transition in a one-dimensional Ising ferromagnet. *Commun. Math. Phys.*, 12:91–107, 1969.
- [EW84] J.-P. Eckmann and P. Wittwer. Multiplicative and additive renormalization. In Osterwalder and Stora, editors, *Les Houches 1984*, pages 455–465, 1984.
- [FFS92] R. Fernández, J. Fröhlich, and A. D. Sokal. *Random Walks, Critical Phenomena, and Triviality in Quantum Field Theory*. Springer-Verlag, 1992.
- [FHRW88] J. S. Feldman, T. R. Hurd, L. Rosen, and J. D. Wright. *QED: A Proof of Renormalizability*. Number 312 in *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1988.
- [FL91] A. M. Ferrenberg and D. P. Landau. Critical behaviour of the three-dimensional Ising model: a high-resolution Monte Carlo study. *Phys. Rev.*, B44:5081, 1991.
- [Fol76] G. B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, 1976.
- [FPTV92] B. Flannery, W. Press, S. Teukolsky, and W. Vetterling. *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1992.
- [Gal78] G. Gallavotti. Some aspects of the renormalization problem in statistical mechanics. *Memorie dell' Accademia dei Lincei*, 15:23, 1978.

- [Gal85] G. Gallavotti. Renormalization theory and ultraviolet stability for scalar fields via renormalization group methods. *Rev. Mod. Phys.*, 57(2):471, 1985.
- [GJ87] J. Glimm and A. Jaffe. *Quantum Physics*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1987.
- [GK80] K. Gawedzki and A. Kupiainen. A rigorous block spin approach to massless lattice theories. *Commun. Math. Phys.*, 77:31–64, 1980.
- [GK83] K. Gawedzki and A. Kupiainen. Non-Gaussian fixed points of the block spin transformation. Hierarchical model approximation. *Commun. Math. Phys.*, 89:191, 1983.
- [GK84a] K. Gawedzki and A. Kupiainen. Asymptotic freedom beyond perturbation theory. In Osterwalder and Stora, editors, *Les Houches 1984*, pages 185–293, 1984.
- [GK84b] K. Gawedzki and A. Kupiainen. Non-gaussian scaling limits. hierarchical model approximation. *J. Stat. Phys.*, 35:267–284, 1984.
- [GN85a] G. Gallavotti and F. Nicolo. Renormalization theory in 4 dimensional scalar fields I. *Commun. Math. Phys.*, 100:545–590, 1985.
- [GN85b] G. Gallavotti and F. Nicolo. Renormalization theory in 4 dimensional scalar fields II. *Commun. Math. Phys.*, 101:247–282, 1985.
- [GR94] I. Gradshteyn and I. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 5th edition, 1994.
- [GS96] J. Göttker-Schnetmann. Analytische und numerische Untersuchungen hierarchischer Renormierungsgruppenfixpunkte am Beispiel  $O(N)$ -invarianter Modelle. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Februar 1996.
- [GT96] R. Gupta and P. Tamayo. Critical exponents of the 3-d Ising model. cond-mat/9601048, Januar 1996.
- [GW64] I. M. Gelfand and N. J. Wilenkin. *Verallgemeinerte Funktionen*, Band IV. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1964.
- [GZJ80] J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin. Critical exponents from field theory. *Phys. Rev.*, B 21:3976, 1980.
- [GZJ85] J. C. Le Guillou and J. Zinn-Justin. Accurate critical exponents from the epsilon expansion. *J. Physique Lett.*, 46:L137, 1985.
- [HH95a] K. Halpern and K. Huang. Fixed point structure of scalar fields. *Phys. Rev. Lett.*, 74:3526–3529, 1995.



- [HH95b] K. Halpern and K. Huang. Non-trivial directions for scalar fields. hep-th/9510240, 1995.
- [HN94] P. Hasenfratz and F. Niedermayer. Perfect lattice action for asymptotically free theories. *Nucl.Phys.*, B414:785–814, 1994.
- [HPW95] M. Hasenbusch, K. Pinn, and C. Wiecekowsk. Canonical demon Monte Carlo renormalization group. In *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*, volume 42, pages 808–810, 1995.
- [Hur89] T. Hurd. A renormalization group proof of perturbative renormalizability. *Commun. Math. Phys.*, 124:153–168, 1989.
- [Isi25] E. Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Z. Phys.*, 31:253, 1925.
- [Jä90] K. Jänich. *Analysis für Physiker und Ingenieure*. Springer-Verlag, 2. Auflage, 1990.
- [Kad66] L. P. Kadanoff. *Physics*, 2:263, 1966.
- [KK94] G. Keller and C. Kopper. Perturbative renormalization of massless  $\phi^4$  in four-dimensions with flow equations. *Commun.Math.Phys.*, 161:515–532, 1994.
- [Kuo75] H.-H. Kuo. *Gaussian Measures in Banach Spaces*, volume 463 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1975.
- [KW74] J. Kogut and K. Wilson. The renormalization group and the  $\epsilon$ -expansion. *Phys. Rep. C*, 12(2):75–200, 1974.
- [KW88] H. Koch and P. Wittwer. The unstable manifold of a nontrivial RG fixed point. In *Conference Proceedings*, volume 9, pages 99–105. Canadian Mathematical Society, 1988.
- [KW91] H. Koch and P. Wittwer. On the renormalization group transformation for scalar hierarchical models. *Commun. Math. Phys.*, 138:537–568, 1991.
- [LG82] M. Levy and J.-C. Le Guillou, editors. *Proceedings of the 1980 Cargèse Summer Institute on Phase Transitions*. Plenum Press, 1982.
- [LL87] L. D. Landau und E. M. Lifschitz. *Statistische Physik, Teil 1*, Band 5 des *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Akademie-Verlag, Berlin, 7. Auflage, 1987.
- [Lü84] M. Lüscher. Improved lattice gauge theories. In Osterwalder and Stora, editors, *Les Houches 1984*, pages 359–374, 1984.

- [MM94] I. Montvay and G. Münster. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, 1994.
- [Mor96] T. Morris. On the fixed-point structure of scalar fields. hep-th/9601128, 1996.
- [Nic91] B. Nickel. Confluent singularities in 3-d continuum  $\phi^4$  theory: Resolving critical point discrepancies. *Physica*, A177:189, 1991.
- [NN74] M. Nauenberg and B. Nienhuis. *Phys. Rev. Lett.*, 33:944, 1974.
- [NR90] B. Nickel and J. Rehr. High-temperature series for scalar-field lattice models: Generation and analysis. *J. Stat. Phys.*, 61:1–50, 1990.
- [Num91] Numerical Algorithms Group Ltd. *NAG Fortran Library Manual*, mark 15 edition, 1991.
- [Pit72] F. Pittnauer. *Vorlesungen über asymptotische Reihen*, volume 301 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1972.
- [Pol84] J. Polchinski. Renormalization and effective lagrangeans. *Nucl. Phys.*, B231:269–295, 1984.
- [Pol94] J. Polchinski. What is string theory? hep-th/9411028, 1994.
- [Por90] A. Pordt. Convergent multigrid polymer expansions and renormalization for euclidean field theory. DESY preprint 90/020, 1990.
- [Por93] A. Pordt. Renormalization theory for hierarchical models. *Helv. Phys. Acta*, 66:105–154, 1993.
- [Por95] A. Pordt. Methoden zur Beschreibung nichttrivialer Renormierungsgruppenfixpunkte. Vortragsnotizen, Oktober 1995.
- [PPW94] K. Pinn, A. Pordt, and C. Wieczerkowski. Algebraic computation of hierarchical renormalization group fixed points and their  $\epsilon$ -expansions. *J. Stat. Phys.*, 77:977, 1994.
- [PRW] A. Pordt, J. Rolf, and C. Wieczerkowski. Dimer-approximation of full models. In preparation.
- [PW91] K. Pinn and C. Wieczerkowski. The hierarchical Sine Gordon model in the high temperature phase. *Int. J. Mod. Phys.*, A6:463, 1991.
- [Rei95] T. Reisz. High temperature critical  $O(N)$  field models by LCE series. *Phys. Lett.*, B360:77–82, 1995.
- [Riv91] V. Rivasseau. *From Perturbation Theory to Constructive Renormalization*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, 1991.

- [RW95] J. Rolf and C. Wiecezkowski. The hierarchical  $\phi^4$ -trajectory by perturbation theory in a running coupling and its logarithm. hep-lat/9508031, 1995. to be published in J. Stat. Phys.
- [Sta71] H. E. Stanley. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1971.
- [Sym83] K. Symanzik. Continuum limit and improved actions in lattice theories (1),(2). *Nucl. Phys.*, B226:187 and 205, 1983.
- [Tim] H. J. Timme. Blockspintransformationen. unveröffentlichtes Skript.
- [WF72] K. G. Wilson and M. E. Fisher. *Phys. Rev. Lett.*, 28:240, 1972.
- [Wie88] C. Wiecezkowski. Symanzik's improved actions from the viewpoint of the renormalization group. *Commun. Math. Phys.*, 120:149–176, 1988.
- [Wie96a] C. Wiecezkowski, 1996. Mündliche Mitteilung.
- [Wie96b] C. Wiecezkowski. The renormalized  $\phi_4^4$ -trajectory by perturbation theory in the running coupling. hep-th/9601142, 1996.
- [Wil71] K. Wilson. Renormalization group and critical phenomena I and II. *Phys. Rev.*, B4:3174–3205, 1971.
- [Wou79] A. Wouk. *A Course of Applied Functional Analysis*. John Wiley and Sons, 1979.
- [WX94] C. Wiecezkowski and Y. Xylander. Improved actions, the perfect action, and scaling by perturbation theory in Wilsons renormalization group: the two dimensional  $O(N)$ -invariant non linear  $\sigma$ -model in the hierarchical approximation. *Nucl. Phys. B*, 440:393, 1994.
- [WX95] C. Wiecezkowski and Y. Xylander. Perfect observables for the hierarchical non linear  $O(N)$ -invariant  $\sigma$ -model. DESY Preprint 95/094, 1995.
- [Yeo92] J. M. Yeomans. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1992.
- [ZJ81] J. Zinn-Justin. *J. de Physique*, 42:783, 1981.
- [ZJ93] J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Number 85 in International series of Monographs on Physics. Clarendon Press, 2nd edition, 1993.



# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die beim Zustandekommen der vorliegenden Arbeit beigetragen haben, insbesondere

- Dr. Christian Wieczerkowski für die freundschaftliche Betreuung meiner Diplomarbeit und die interessante Aufgabenstellung,
- Prof. Dr. Gernot Münster, Dr. Klaus Pinn und Dr. Andreas Pordt für zahlreiche Anregungen und Gespräche,
- Johannes Göttker-Schnetmann für einige Diskussionen,
- allen, die mir beim Korrekturlesen geholfen haben,
- meinen Eltern und meiner Freundin für ihre Unterstützung,
- der Studienstiftung des deutschen Volkes für die Förderung meines Studiums.

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, im Januar 1996

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1









