

**Westfälische Wilhelms-Universität Münster**

**Diplomarbeit**







# Strukturelle Untersuchung von Integrabilität am Beispiel des Calogero–Modells

Martin Rehwald

Institut für Theoretische Physik I

Westfälische Wilhelms–Universität Münster

April 1995



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>Bemerkungen zur Notation</b>	<b>5</b>
<b>1 Das Calogero–Modell</b>	<b>7</b>
1.1 Der Hamiltonian . . . . .	8
1.2 Ein symmetriangepaßter Lösungsansatz . . . . .	8
1.2.1 Die Gebundenen Zustände . . . . .	10
1.2.2 Die Streuzustände . . . . .	16
1.3 Diskussion der Vollständigkeit . . . . .	17
<b>2 Theorie Klassisch Integrierbarer Systeme</b>	<b>21</b>
2.1 Hamiltonsche Mechanik . . . . .	21
2.1.1 Der Phasenraum . . . . .	21
2.1.2 Erhaltungsgrößen: Das Noether–Theorem . . . . .	24
2.1.3 Wirkungs–Winkel–Variable . . . . .	25
2.2 Lax–Darstellung eines klassischen Systems . . . . .	27
2.2.1 $r$ –Matrizen und die klassische Yang–Baxter–Gleichung . .	30
<b>3 Quantenmechanische Integrierbarkeit</b>	<b>37</b>
3.1 Formulierung der Quantenmechanik . . . . .	37
3.2 Symmetrien und Erhaltungsgrößen . . . . .	39
3.2.1 Symmetriegruppe des Hamiltonians . . . . .	40

<b>4 Dunkl-Operatoren</b>	<b>41</b>
4.1 Die Coxeter-Gruppe . . . . .	42
4.1.1 Wurzelsysteme . . . . .	42
4.1.2 Halbeinfache Lie-Algebren . . . . .	42
4.1.3 Die Weyl-Gruppe . . . . .	45
4.2 Differential-Difference-Operatoren . . . . .	47
<b>5 Verallgemeinerte Calogero-Modelle</b>	<b>51</b>
5.1 Eine spezielle Klasse von Lax-Matrizen . . . . .	51
5.1.1 Die Lax-Matrix des Calogero-Modells . . . . .	51
5.1.2 Funktionalgleichung für Lax-Matrizen . . . . .	52
5.1.3 Elliptische Funktionen . . . . .	54
5.2 Wurzelsysteme als Wechselwirkungsdiagramme . . . . .	57
<b>6 Erhaltungsgrößen des Calogero-Modells</b>	<b>59</b>
6.1 Klassische Erhaltungsgrößen . . . . .	60
6.1.1 Spur der Lax-Matrix . . . . .	60
6.1.2 Charakteristisches Polynom der Lax-Matrix . . . . .	62
6.1.3 Die $r$ -Matrix des Calogero-Modells . . . . .	65
6.2 Quantenmechanische Erhaltungsgrößen . . . . .	68
6.2.1 Zu klassischen Erhaltungsgrößen korrespondierende Operatoren . . . . .	68
6.2.2 Erhaltungsgrößen aus den Dunkl-Operatoren . . . . .	69
<b>7 Beziehungen zu anderen Modellen</b>	<b>71</b>
7.1 Die Knizhnik-Zamolodchikov-Gleichung der konformen Feldtheorie . . . . .	71
7.2 Matrix-Modelle . . . . .	77
7.3 Hall-Effekt, Anyonen und Fractional Statistics . . . . .	77
<b>Résumé</b>	<b>79</b>
<b>A Herleitung der Identitäten aus Kapitel 1</b>	<b>81</b>

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	III
<b>B Das N-Oszillator Problem</b>	<b>86</b>
<b>C Koeffizienten des charakteristischen Polynoms</b>	<b>88</b>
<b>D Zweiteilchen <math>r</math>-Matrix</b>	<b>90</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>93</b>



*Nie erfassen wir das wahre Wesen der Dinge,  
stets nur irgendeinen Anschein von der Mitte der Dinge,  
in einer ewigen Verzweiflung darüber,  
weder ihren Ursprung noch ihr Ziel zu kennen.*

(B. Pascal)

# Einleitung

Eine der großen Motivationen, sich mit naturwissenschaftlichen Studien zu beschäftigen, ist seit jeher das Geheimnis der Dynamik bewegter Körper. Bereits in frühgeschichtlicher Zeit faszinierte die Menschheit das Phänomen der Bewegung der Gestirne, was die Vielzahl der überlieferten astronomischen Beobachtungen beweist. In der Renaissance trug die Astronomie wesentlich zur Revolutionierung der Wissenschaften bei und leitete dadurch die Veränderung des gesamten Bildungswesens ein. Entfacht wurde die Diskussion der damaligen Zeit durch das Werk „de revolutionibus“ von Nikolaus Kopernikus<sup>1</sup>. Einen vorläufigen Höhepunkt erlebte die Astronomie mit Johannes Kepler<sup>2</sup>, der Gesetze für die Planetenbewegung aufstellte. Mit irdischeren Problemen der Bewegung von Körpern beschäftigten sich unter anderen Leonardo da Vinci<sup>3</sup> und Galileo Galilei<sup>4</sup>. Letzterer faßte die Vorgänge des freien Falls und die Pendelbewegung in die Form einer Gesetzmäßigkeit. Ziel war es fortan, die Dynamik bewegter Körper als Gesetze zu formulieren und ihr so eine dem menschlichen Geist zugängliche Struktur aufzuprägen.

Ein großer Erfolg bei der Realisierung dieses Programms wurde durch Isaac Newton<sup>5</sup> erzielt, als er Mitte des 16. Jahrhunderts die Bewegung einer Masse unter dem Einfluß einer größeren Masse in Formeln faßte und damit sowohl die Bewegung eines Planeten um eine Sonne, als auch die Fallgesetze für Körper auf der Erdoberfläche vereinheitlichen konnte.

Bei der Ausweitung dieses Zentralkraftgesetzes auf ein System mit drei Massen traten jedoch bereits gravierende Probleme auf, die darin bestehen, daß weder

---

<sup>1</sup>Deutscher Mathematiker und Astronom (1473–1543) im Jahre 1543. Griff in dem erwähnten Werk die Idee Aristarchos' von einem heliozentrischen Weltbild auf.

<sup>2</sup>Deutscher Astronom (1571–1630). Stellte Gesetze für die Planetenbewegung auf und entwickelte die Theorie der Bildentstehung in einem Fernrohr.

<sup>3</sup>Italienisches Universalgenie (1442–1519). Empiriker, der die entdeckten Phänomene praktisch umzusetzen suchte. Versuchte aber auch, eine umfassende Naturbeschreibung der mechanischen Phänomene zu entwickeln.

<sup>4</sup>Italienischer Mathematiker, Physiker und Philosoph (1564–1642). Führte die Methode systematischer Versuchsreihen ein und gewann dadurch Gesetzmäßigkeiten der Pendelbewegung und des freien Falls. Weitere wichtige Beiträge zur Astronomie.

<sup>5</sup>Englischer Mathematiker, Physiker und Astronom (1643–1727). Entwickelte eine Gravitationstheorie sowie eine axiomatische Theorie der Mechanik.

eine Lösung in Form einer Funktion der Zeit, noch eine Charakterisierung dieser Bewegung angegeben werden kann.

Mit diesem Problem setzten sich Naturwissenschaftler lange Zeit auseinander, was wesentlich dazu beitrug, die Prinzipien der klassischen Mechanik in eine mathematisch sehr kompakte und klare Form zu bringen. Eine Lösung jedoch ist bis heute nur für spezielle Anordnungen von drei Körpern bekannt, die eine Ausnutzung der Symmetrie der Anordnung zulassen. Joseph Louis Lagrange<sup>6</sup> löste das Drei-Körper-Problem sowohl für auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, als auch für auf einer rotierenden Geraden angeordnete Körper. Weitere wichtige Beiträge zum Drei-Körper-Problem stammen von Henri Poincaré<sup>7</sup>, der sich mit den Erhaltungsgrößen dieses Problems beschäftigte und zeigen konnte, daß für den allgemeinen Fall die Zahl der erhaltenen Größen kleiner als die der Freiheitsgrade ist (siehe hierzu auch Kapitel 2). In einem Brief, den er kurz vor seinem Tode an Lagrange schrieb, spricht er auch von einer allgemeinen Lösung, die allerdings in seinen Aufzeichnungen nicht gefunden wurde. Bis heute ist eine solche nicht bekannt.

Im Laufe der Zeit wurden für Systeme mit einer großen Zahl von Teilchen Methoden entwickelt, die nicht die Bewegung des einzelnen Teilchens, sondern lediglich einige makroskopische, das System charakterisierende Größen, berechnen. Diese Methoden wurden unter der Bezeichnung „statistische Physik“ zu einem wichtigen Gebiet der Physik zusammengefaßt. In diesem Bereich spricht man von „Vielteilchensystemen“ im Gegensatz zu den „Wenigteilchensystemen“ wie zum Beispiel Atomen mit mehr als einem Elektron. Um für diesen Bereich neue Techniken entwickeln zu können, ist es hilfreich, eine Zahl lösbarer Systeme, also die Bewegung wechselwirkender Teilchen, zu kennen. Für die Quantenmechanik, in der störungstheoretische Methoden eine wichtige Rolle spielen, birgt jede Lösung eines neuen Systems als Basis eines Hilbertraumes die Möglichkeit, die Lösung anderer Systeme nach dieser Basis zu entwickeln.

Im klassischen Fall ist die Störungsrechnung weitaus komplexer. Es sind lediglich Aussagen über das Verhalten in der Nähe einer bekannten Lösung möglich, und diese sind auch nicht einfach zu handhaben. Für nichtlineare klassische Systeme existieren Methoden, diese als Störung eines linearen Systems zu betrachten. Dies war ein Ansatz für die Entwicklung der Chaos-Theorie.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das Calogero-Modell, bei dem es sich um ein eindimensionales, exakt lösbares  $N$ -Teilchen-System handelt. Anhand dieses Beispiels sollen einige wichtige Methoden zur Untersuchung von Integrität besprochen werden. Desweiteren behandle ich auch ausschließlich für

---

<sup>6</sup>Französischer Mathematiker und Astronom (1736–1813), bekannt durch Arbeiten in den Gebieten Mechanik, Schwingungen und Variationsrechnung.

<sup>7</sup>Jules Henri Poincaré, französischer Mathematiker, Physiker und Philosoph (1854–1912), lieferte wichtige Beiträge zur Astronomie, der Theorie des elektromagnetischen Feldes sowie der Analysis.

das Calogero-Modell anwendbare Methoden, die eine mathematische Einordnung desselben ermöglichen.



# Bemerkungen zur Notation

Vorab möchte ich einige vielleicht nicht allen Lesern geläufige Notationen besprechen.

Da es sich bei dem im folgenden behandelten Problem um ein rein mechanisches handelt, bietet sich an, die entsprechenden SI-Einheiten *Meter* (m), *Kilogramm* (kg) und *Sekunde* (s) durch eine dieser Einheiten auszudrücken, was durch Setzen von  $\hbar = 1 = \text{m}$  geschieht. Damit wird das Kilogramm einheitsfrei und die Länge erhält die Dimension der Wurzel aus einer Sekunde. Die Energie wird in diesen Einheiten als Frequenz gemessen.

Die Tatsache, daß dem behandelten N-Körper-Problem eine paarweise Wechselwirkung der Teilchen zugrunde liegt, bedingt, daß des öfteren Mehrfachsummen und -produkte auftreten. Da diese meist nicht über alle natürlichen Zahlen von 1 bis N laufen, bietet sich die Verwendung der Summenkonvention nicht an. Um das Ganze dennoch einigermaßen übersichtlich zu gestalten, verwende ich in der Regel nur ein Summenzeichen, aus dessen Indizierung hervorgeht, worüber summiert werden soll. So gelten in der Regel beispielsweise folgende Ersetzungen:

$$\sum_{j < i} \equiv \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1}$$
$$\sum_{i \neq j} \equiv \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N$$

Dabei ist darauf zu achten, daß über Indizes, die auf der linken Seite einer Gleichung frei sind, auf der rechten Seite selbstverständlich nicht summiert wird. An diese Notation sollte man sich innerhalb kürzester Zeit gewöhnt haben, weshalb ich sie von Beginn an verwenden werde.

Eine weitere, oft anzutreffende Schreibweise ist das Ersetzen partieller Ableitungen nach der Standard-Variable  $x_i$  durch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i$$

Auch wenn dies in meinen Augen die Lesbarkeit nicht immer verbessert, werde ich mich im folgenden dieser Konvention bedienen.

Aus der Tatsache, daß der von mir behandelte Themenkomplex häufig auf Mehrfachsummen führt, resultierte im Verlauf meiner Arbeit die Frage nach einem geeigneten Symbol für die imaginäre Einheit. In der mathematischen sowie physikalischen Literatur wird hierfür im allgemeinen der Buchstabe „ $i$ “ verwendet; in der Elektrotechnik benutzt man, um Verwechslungen mit dem elektrischen Strom vorzubeugen, den Buchstaben „ $j$ “. Für mich stellte sich die auch in einigen Computerprogrammen zur symbolischen Algebra verwendete Symbolik „ $\hat{i}$ “ als sehr vorteilhafte und auch nicht mit extrem gesteigerten Schreibaufwand verbundene Lösung heraus. Diese habe ich auch in den vorliegende Drucksatz übernommen.

*Vor dem Vielen ist das Eine,  
von dem her auch das Viele ist.*

(Plotin)

## Kapitel 1

# Das Calogero–Modell

Den Anlaß zu dieser Arbeit bot unter anderem eine Arbeit von Francesco Calogero aus dem Jahre 1971 mit dem Titel „Solution of the One-Dimensional  $N$ -Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials“. Diese verfaßte er während eines Aufenthaltes an der Universität in Moskau. Heute lehrt er als Professor für Theoretische Physik an der Universität „La Sapienza“ in Rom. Sein Hauptinteresse richtet sich auf die Untersuchung nicht-linearer Differentialgleichungen unter Verwendung der Methode der „inversen Streuung“ (siehe hierzu Kapitel 2) und der Verallgemeinerung dieser Methode auf die Analyse und Klassifizierung physikalischer Systeme.

### 1.1 Der Hamiltonian

Die Untersuchungen von F. Calogero aus dem Jahre 1971 beschäftigen sich mit einem System, das der klassischen Schrödinger–Gleichung

$$\hat{i} \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \hat{H}_{\text{Cal}} \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

genügt. Das Potential setzt sich dabei aus einem attraktiven, paarweise wirkenden Oszillator–Potential und einem „Zentrifugalpotential“, das je nach Kopplung attraktiv oder repulsiv geschaltet werden kann, zusammen. Der Energie–Operator hat damit die folgende Form:

$$\hat{H}_{\text{Cal}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \sum_{j < i}^N \left( \frac{m\omega^2}{4} (x_i - x_j)^2 + \frac{g}{(x_i - x_j)^2} \right). \quad (1.1)$$

Da dieses Potential keine Zeitabhängigkeit besitzt, reduziert sich das Problem auf die Lösung der stationären Schrödinger–Gleichung. Weil das Vorgehen bei der Berechnung der Lösung dieses Problems nirgends ausführlich dokumentiert ist, und man über einen geschickten Ansatzes auf einige interessante Funktionen der mathematischen Physik stößt, soll die Vorgehensweise im folgenden etwas ausführlicher besprochen werden.

## 1.2 Ein symmetriengepaßter Lösungsansatz

Eine unmittelbar auffallende Symmetrie des Hamiltonians ist die Translationsinvarianz  $x_i \rightarrow x_i + a$ . Außerdem ist der Hamiltonian invariant unter Teilchenvertauschung, was bedeutet, daß es ein Eigenfunktionensystem bestehend aus geraden und ungeraden Funktionen gibt.

Zur Vereinfachung führt man folgende Definitionen ein:

$$\begin{aligned} z &= \prod_{j < i}^N (x_i - x_j) \\ r^2 &= \frac{1}{N} \sum_{j < i} (x_i - x_j)^2 . \end{aligned}$$

Für die Wellenfunktion bezüglich der Schwerpunktkoordinaten wählt man nun folgenden Ansatz:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = z^\nu \varphi(r) P_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_N) , \quad (1.2)$$

wobei die Funktion  $P_\alpha$  folgende Bedingungen erfüllen soll:

1. Translationsinvarianz
2. Homogenität vom Grade  $\alpha$ , also ein Polynom
3. Sie genüge der folgenden Differentialgleichung:

$$\left( \sum_i \partial_i^2 + 2\nu \sum_{j < i} \frac{\partial_i - \partial_j}{x_i - x_j} \right) P_\alpha = 0 \quad (1.3)$$

Calogero zeigt in seiner Arbeit, daß aus der Differentialgleichung (1.3) unmittelbar die Symmetrie der Lösungen dieser Gleichung folgt. Inwieweit diese letzte Bedingung eine Einschränkung der Lösungsmenge bedeutet, wird im folgenden noch diskutiert.

Der Operator der kinetischen Energie wirkt in Einheiten  $\hbar = m = 1$  wie folgt auf den obigen Ansatz (1.2) für die Wellenfunktion:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) &= \frac{1}{2} \sum_i \left\{ (\partial_i^2 z^\nu) \varphi P_\alpha + z^\nu (\partial_i^2 \varphi) P_\alpha + z^\nu \varphi (\partial_i^2 P_\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + 2(\partial_i z^\nu) (\partial_i \varphi) P_\alpha + 2(\partial_i z^\nu) \varphi (\partial_i P_\alpha) + 2z^\nu (\partial_i \varphi) (\partial_i P_\alpha) \right\} . \end{aligned}$$

Dabei gelten folgende, in Anhang A gezeigte Identitäten:

$$\sum_i \partial_i^2 z^\nu = 2\nu(\nu - 1) z^\nu \sum_{j < i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \quad (1.4a)$$

$$\sum_i (\partial_i z^\nu) (\partial_i P_\alpha) = -\frac{1}{2} z^\nu \sum_i \partial_i^2 P_\alpha \quad (1.4b)$$

$$\sum_i (\partial_i z^\nu) (\partial_i \varphi) = \frac{1}{2} z^\nu \frac{\nu N(N-1)}{r} \frac{d\varphi}{dr} \quad (1.4c)$$

$$\sum_i \partial_i^2 \varphi = \frac{N-2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \quad (1.4d)$$

$$\sum_i (\partial_i \varphi) (\partial_i P_\alpha) = \frac{\alpha}{r} \frac{d\varphi}{dr} P_\alpha \quad (1.4e)$$

### 1.2.1 Die Gebundenen Zustände

Die Schrödingergleichung des Calogero-Modells schreibt sich mit dem Ansatz (1.2) sowie den Identitäten (1.4) als folgende Differentialgleichung für die Funktion  $\varphi(r)$ :

$$-\frac{1}{2}\varphi'' - \left\{ \frac{N-2}{2r} + \frac{N(N-1)\nu}{2r} + \frac{\alpha}{r} \right\} \varphi' - \{ \nu(\nu - 1) - g \} \sum_{j < i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \varphi + \left\{ \frac{\omega^2}{4} \sum_{j < i} (x_i - x_j)^2 - E \right\} \varphi = 0 .$$

Wählt man den Parameter  $\nu$  nun so, daß die Gleichung  $\nu(\nu - 1) = g$  erfüllt ist,  $\nu$  also die Werte

$$\nu = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + g}$$

annimmt, verschwindet der dritte Summand in dieser Gleichung. Es fällt auf, daß für  $g < \frac{\hbar^2}{4m}$  (in den SI-Einheiten) der Wert für  $\nu$  eine komplexe Zahl wird. Dies führt dazu, daß die Lösungen nicht mehr normierbar sind, was hier jedoch noch nicht zu sehen ist. Bei Thirring [Thi79] findet sich jedoch eine Diskussion des quantenmechanischen  $1/r^2$ -Potentials, die zum Ergebnis hat, daß gerade für den obigen Fall der Kopplung der resultierende Hamiltonian nicht mehr beschränkt ist.

Mit den Abkürzungen

$$\mu = N - 2 + N(N - 1)\nu + 2\alpha$$

schreibt sich die, nunmehr gewöhnliche, Differentialgleichung für die Funktion  $\varphi(r)$  wie folgt:

$$\varphi'' + \frac{\mu}{r} \varphi' - \left( \frac{N\omega^2}{2} r^2 - 2E \right) \varphi = 0 .$$

Der Ansatz

$$\varphi(r) = r^{-\sigma} u(r)$$

führt auf die Differentialgleichung

$$u'' + \frac{\mu - 2\sigma}{r} u' + \left\{ \frac{\sigma(\sigma+1) - \mu\sigma}{r^2} - \frac{N\omega^2}{2} + 2E \right\} u = 0 .$$

Geht man hierin zu der Variable  $x := \sqrt[4]{\frac{N\omega^2}{2}} r$  über, was die Transformationen

$$\begin{aligned} u(r) &\rightarrow v(x) \\ \Rightarrow u'(r) &\rightarrow \frac{x}{r} v'(x) \end{aligned}$$

induziert, und wählt  $\sigma = \frac{1}{2}\mu$ , erhält man folgende Form:

$$v'' + \left\{ \frac{\sigma(\sigma+1) - 2\sigma^2}{x^2} - x^2 - 2\sqrt{\frac{N\omega^2}{2}} E \right\} v = 0 . \quad (1.5)$$

In Werken über spezielle Funktionen der mathematischen Physik, wie zum Beispiel dem von Magnus, Oberhettinger und Soni [MOS66], findet sich die Differentialgleichung

$$f'' + \left( \frac{1-4\beta^2}{4x^2} 4n - x^2 + 2\beta + 2 \right) f = 0 \quad (1.6)$$

mit der Lösung

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) x^{\beta+\frac{1}{2}} L_n^{(\beta)}(x^2) ,$$

wobei die  $L_n^{(\beta)}$  die verallgemeinerten Laguerre-Polynome sind.

Ein Vergleich der Gleichungen (1.5) und (1.6) zeigt, daß sie für

$$\begin{aligned} \beta &= \sigma - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\mu - 1) \\ n &= \frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{2}{N}} E - \mu - 1 \end{aligned}$$

identisch sind. Durch Rückeinsetzen erhält man schließlich

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \propto z^\nu \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{2}}\omega r^2\right) L_n^{(\beta)}\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\omega r^2\right) \cdot P_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (1.7)$$

$$E_{n,\alpha} = \omega \sqrt{\frac{N}{2}} (2n + \beta + 1) \quad (1.8)$$

mit  $\beta = N - \frac{3}{2} + N(N-1)\nu + 2\alpha$ .

Dies sind die (nicht normierten) Lösungen sowie die dazugehörigen Energieeigenwerte des Calogero-Modells, wobei sowohl  $n$  als auch  $\alpha$  ganzzahlige, nicht negative Werte annehmen können. Die Energie hängt jedoch nur von der Summe  $2n + \alpha$  ab, was dazu Anlaß gibt, als Hauptquantenzahl  $s := 2n + \alpha$  einzuführen. Eine Nebenquantenzahl dient dann zur eindeutigen Charakterisierung der Eigenfunktionen, die aufgrund der Tatsache, daß verschiedene Tupel  $(n, \alpha)$  auf ein und dasselbe  $s$  führen und zu einem  $\alpha$  auch mehrere Polynome  $P_\alpha$  existieren, nicht alleine durch die Quantenzahl  $s$  gegeben ist. Die Zahl der

erlaubten Werte der Nebenquantenzahl liefert den Entartungsgrad des Energieeigenwertes  $E_s$ .

Eine sehr ausführliche und gut nachvollziehbare Diskussion des Entartungsgrades findet sich bei Calogero [Ca71]. Aus diesem Grund möchte ich hier nur kurz die wesentlichen Resultate wiedergeben.

Der Entartungsgrad bei gegebener Teilchenzahl  $N$  ist durch die Zahl der erlaubten Tupel  $(n, \alpha)$ , die auf das gleiche  $s$  führen, gegeben. Da das  $n$  als Index der verallgemeinerten Legendre–Polynome keiner anderen Einschränkung als der Positivitätsbedingung unterliegt, spielt das  $\alpha$  die entscheidende Rolle. Dabei ist die nackte Bezeichnung  $\alpha$  irreführend, da dieses selbst indiziert sein müßte, weil zu gegebenem Homogenitätsgrad durchaus mehrere,  $\mathbb{R}$ –linear unabhängige Polynome existieren können. In die Entartung geht also die Zahl der Polynome  $P_{(s-2n)}$ , die den obigen Anforderungen genügen, wesentlich ein. Die allgemeine Form solcher Polynome ist durch folgende Formel ausgedrückt:

$$P_\alpha = \sum_{\substack{\{m_l\} \\ m_l > 0}} a_{m_l} \delta_{\alpha, \sum_{l=2}^N l \cdot m_l} \prod_{l=2}^N \left\{ \sum_i \left[ x_i - \frac{1}{N} \sum_j x_j \right]^l \right\}^{m_l} .$$

Dabei sind die  $a_{n_l}$  frei wählbare Koeffizienten. Die maximale Zahl  $g(N, k)$  solcher voneinander unabhängiger Polynome ergibt sich also als Anzahl paarweise verschiedener Tupel  $(m_2, m_3, \dots, m_N)$ , so daß die Summe  $\sum_{l=2}^N l m_l$  gerade den Homogenitätsgrad  $\alpha$  ergibt. Für dieses kombinatorische Problem existiert keine Darstellung in geschlossener Form. Sie lassen sich jedoch über mehrere Größenordnungen hinweg leicht unter Zuhilfenahme moderner Rechner bestimmen. Für die Fälle  $N=3$  bis  $N=10$  ergeben sich für  $\alpha$  kleiner 11 die in Tabelle 1.1 aufgelisteten Werte.

Den hieraus resultierenden Entartungsgrad

$$g_s = \sum_{n=1}^{[s/2]} g(N, s - 2n)$$

zeigt Tabelle 1.2:

Bei dieser Aufstellung wurde jedoch nicht berücksichtigt, daß zu einer Kopplung „g“ zwei Werte von  $\nu$  gehören, die unter Umständen für eine Vergrößerung des Entartungsgrades verantwortlich sein können. Dies tritt genau dann ein, wenn gilt

$$N(N-1) \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + g} \in \mathbb{N} . \quad (1.9)$$

Diese Möglichkeit wurde von Calogero nicht diskutiert, da die Eigenzustände zu den beiden verschiedenen Werten von  $\nu$  unterschiedliche Symmetrien aufweisen und somit verschiedenen „Klassen“ von Teilchen angehören. Verzichtet man auf diese statistische Klassifizierung, so kann der dadurch resultierende erhöhte

$N \rightarrow$ $\downarrow \alpha$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	2	2	2	2	2	2	2
5	0	1	1	2	2	2	2	2	2
6	1	2	3	3	4	4	4	4	4
7	0	1	2	3	3	4	4	4	4
8	1	2	4	5	6	6	7	7	7
9	0	2	3	5	6	7	7	8	8
10	1	2	5	7	9	19	11	11	12

Tabelle 1.1: Anzahl symmetrischer translationsinvarianter Polynome zu gegebenem Homogenitätsgrad  $\alpha$

$N \rightarrow$ $\downarrow s$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	1	1	1
4	3	2	3	3	3	3	3	3	3
5	0	2	2	3	3	3	3	3	3
6	4	4	6	6	7	7	7	7	7
7	0	3	4	6	6	7	7	7	7
8	5	6	10	13	13	13	14	14	14
9	0	5	7	11	12	14	14	15	15
10	6	8	15	18	22	23	25	25	26

Tabelle 1.2: Entartungsgrad der ersten Zustände für kleine Teilchenzahlen

Entartungsgrad nur für bekanntes  $g$  tabellarisiert werden, was lediglich eine große Menge von Zahlenkolonnen ohne wesentlichen Informationsgehalt hervorbringen würde.

Eine interessante Eigenschaft der Energieeigenwerte ist, daß sie bei Zuschalten einer invers quadratischen Paarwechselwirkung lediglich eine von der Teilchenzahl sowie der Stärke der Kopplung abhängige Anhebung erfahren, die von dem Zustand völlig unabhängig ist. Man spricht hier auch von dem „Calogero–Teilchen“ im Oszillator–Potential, wobei das Calogero–Teilchen durch die Eigenzustände zu  $\hat{H}_{\text{Ca1}}$  mit  $\omega = 0$  gegeben ist.

Das System mit  $g=0$ , also ohne invers quadratische Wechselwirkung, wurde bereits früher durch Einführen der sogenannten Jacobi–Koordinaten gelöst (siehe Anhang B). Man erhält dort gerade die Lösungen mit  $\nu = 0$ . Das Spektrum zu dem Wert  $\nu = 1$  erhält man durch den Übergang von der Quantenzahl  $s$  zu der Quantenzahl  $s' := s + \frac{1}{2}N(N-1)$ , die wieder eine natürliche Zahl darstellt, da für  $N > 1$  der Term  $N(N-1)$  ein ganzzahliges Vielfaches von zwei wird. Es ist also in dem Spektrum für den Wert  $\nu = 0$  enthalten und beginnt lediglich mit einer höheren, von der Teilchenzahl streng monoton steigend abhängigen Grundzustandsenergie.

### 1.2.2 Die Streuzustände

Der Fall  $\omega = 0$  ist mit obiger Rechnung nicht abgedeckt, da der Übergang von der Variable  $r$  zu der Variablen  $x := \sqrt[4]{\frac{N\omega^2}{2}}r$  keine Isomorphie mehr darstellt. Die Lösung dieses Sonderfalles erhält man jedoch auf ganz ähnlichem Wege. Unter Ausnutzung der Identitäten (1.4) verbleibt nach Anwenden der Hamiltonians (1.1) mit  $\omega = 0$  auf den Ansatz (1.2) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-\frac{1}{2} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + (1+2b) \frac{d}{dr} + p^2 \right\} \varphi(r) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} b &= N - 2 + N(N-1)\nu + \alpha \quad \text{und} \\ p^2 &= 2E \quad . \end{aligned}$$

Der Ansatz  $\varphi(r) = r^{-b}\chi(r)$  liefert

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left( p^2 - \frac{b^2}{r^2} \right) \right\} \chi(r) = 0$$

und durch die Substitution  $x = p \cdot r$  für die Funktion  $v(x)$  folgende Differentialgleichung:

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + \left( 1 - \frac{b^2}{x^2} \right) \right\} v(x) = 0 \quad .$$

Dies ist die modifizierte Besselsche Differentialgleichung, die aus der Bessel–Differentialgleichung durch die Substitution  $z \rightarrow iz$  hervorgeht. Die Lösungen hierzu findet man wiederum zum Beispiel bei [MOS63]. Sie lauten:

$$v(x) = I_b(x) \quad ,$$

wobei die  $I_b(x)$  die modifizierten Bessel–Funktionen sind. Diese hängen wie folgt mit den Bessel–Funktionen zusammen:

$$I_b(z) = \exp(-\frac{1}{2}\pi i b) J_b(\frac{1}{2}\pi i z) \quad .$$

Dabei sind für den Index  $b$  beliebige komplexe Zahlen zugelassen.

Die Wellenfunktionen und die Energien des Calogero–Modells mit invers quadratischem Potential sind also von der folgenden Gestalt:

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \propto z^\nu r^{-b} I_b(p \cdot r) P_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (1.10)$$

$$E_p = \frac{1}{2} p^2 \quad . \quad (1.11)$$

Das Energiespektrum dieses Systems ist damit kontinuierlich und rein positiv. Der Entartungsgrad ist durch die Unabhängigkeit der Energie von der Wahl des Homogenitätsgrades  $\alpha$  der Polynome  $P_\alpha$  unendlich. Wegen der Positivität der Energie spricht man hier von einem Streuproblem. Calogero zeigte, daß als Resultat dieses Streuprozesses lediglich die Impulse der Teilchen untereinander vertauscht werden. Es entstehen also keine neuen Impulse.

### 1.3 Diskussion der Vollständigkeit

Die Vollständigkeit der Lösungen eines quantenmechanischen Problems ist ein Begriff, der sich aus der Theorie der Struktur des Raumes, den die Wellenfunktionen als normierte, komplexwertige Lösungen einer linearen Differentialgleichung aufspannen. Als solche liefern sie eine Orthonormalbasis dieses Raumes der quadratintegralen Funktionen mit dem üblichen Skalarprodukt

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x) \cdot g(x) dx \quad .$$

Die Vollständigkeit dieses Raumes geht auf die Cauchysche Definition der Vollständigkeit von Folgen zurück, die verlangt, daß der Grenzwert einer jeden konvergenten Folge in diesem Raum Element desselben ist. Da man über ein positiv definites, reellwertiges Skalarprodukt sofort eine Norm in einem Raum gegeben hat, läßt sich in diesem dann auch von Konvergenz und somit von Vollständigkeit reden.

In dem Hilbertraum  $\mathcal{L}_2$  der quadratintegralen Funktionen sehen die Bedingungen für Orthonormalität und Vollständigkeit für abzählbare Lösungen wie

folgt aus:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_i, \Psi_j \rangle &= \delta_{i,j} \quad \text{Orthonormalität,} \\ \sum_{i=1}^{\infty} |\langle \Psi_i | \Psi_i \rangle| &= 1 \quad \text{Vollständigkeit.} \end{aligned}$$

Die Orthogonalität bezüglich der Hauptquantenzahl Klein  $s$  ergibt sich aus der Tatsache, daß es sich um Eigenfunktionen zu einem selbstadjungierten Differentialoperator handelt, analog zu der Orthogonalität von Eigenräumen Hermitescher Matrizen. Die Orthogonalität in der Nebenquantenzahl ist nicht von vornherein klar, begründet sich allerdings damit, daß die durch sie indizierten symmetrischen Polynome ein orthogonales Funktionensystem bilden (siehe hierzu auch [Dun88]).

Verbleibt die Frage nach der Vollständigkeit der Lösungen, die durch den Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren beantwortet wäre, wenn es sich bei den von Calogero gefundenen Lösungen bereits um sämtliche Lösungen zu diesem Eigenwertproblem handelte. Da jedoch der Ansatz (1.2) durch die Anforderungen an die Funktion  $P_\alpha$  wie Homogenität und Erfüllung der Differentialgleichung (1.3) sehr speziell ist, kann nicht erwartet werden, daß man damit bereits sämtliche Lösungen erhält. Die Überprüfung durch direktes Nachrechnen der Orthogonalitätsrelation erweist sich jedoch als nicht problemlos und wurde bisher nicht ausgeführt.

Eine Möglichkeit, dennoch Aussagen über dieses Problem treffen zu können, bietet hier die Betrachtung von Grenzfällen der Kopplung. Für die Gebundenen Zustände ist die vollständige Lösung des Problems für Kopplung  $g=0$  bekannt. Hier tritt der oben erwähnte Fall ein, daß durch die Wahl von  $g$  eine zusätzliche Entartung hervorgerufen wird, da für  $N$  größer als zwei einer der Faktoren  $N$  und  $(N-1)$  aus (1.9) in jedem Fall die 2 als Primfaktor enthält. Den gesamten Entartungsgrad erhält man für dieses System aus Tabelle (1.2) durch Addition der um  $N(N-1)$  nach unten verschobenen Spalte zu der Teilchenzahl  $N$  zu sich selbst. Es zeigt sich jedoch sofort, daß die entstehenden Werte unter denen aus Tabelle (B.1) liegen, was bedeutet, daß die von Calogero gefundenen Lösungen nicht die vollständige Lösungsmenge sind.

Einen alternativen Lösungsansatz, der eventuell für das Auffinden der fehlenden Lösungen hilfreich sein könnte, kann man aus einer näheren Betrachtung der Energieeigenwerte ableiten. Diese ergeben sich im Fall eines Calogero-Teilchens im Oszillator-Potential aus den Energien des  $N$ -Oszillator-Problems um einen konstanten Betrag in positive Richtung verschoben. Das legt die Vermutung nahe, daß sich die vollständige Lösung des Calogero-Problems aus den Eigenfunktionen des Oszillator-Problems (siehe Anhang B) multipliziert mit von dem Parameter  $\nu$  abhängigen Funktionen in den  $x_i$  zusammensetzen. Genauer sollten die Wellenfunktionen sogar von der folgenden Form sein:

$$\Psi_{\text{Cal}}(x_1, \dots, x_N) = \Psi_{\text{Osz}}(x_1, \dots, x_N) \cdot \exp\left(g \cdot \chi(x_1, \dots, x_N)\right).$$

Die Energie des Calogero-Modells ergibt sich dann als

$$E_{\text{Cal}} = E_{\text{Osz}} + E_{\text{Shift}} .$$

Dabei sind die Energien  $E_{\text{Shift}}$  durch folgende Differentialgleichung für die Funktion  $\chi$  gegeben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g \sum_i \partial_i^2 \chi + g^2 \sum_i (\partial_i \chi)^2 - g\sqrt{\frac{N}{2}}\omega \frac{1}{N} \sum_{j \neq i} (x_i - x_j) \partial_i \chi + \\ + g\sqrt[4]{\frac{N}{2}\omega^2} \sum_{i > 1} \frac{H'_{n_{i-1}}(\sqrt[4]{\frac{N}{2}\omega^2}y_{i-1})}{H_{n_{i-1}}(\sqrt[4]{\frac{N}{2}\omega^2}y_{i-1})} \cdot (i-1) \partial_i \chi + \\ - g\sqrt[4]{\frac{N}{2}\omega^2} \sum_{j \geq i} \frac{H'_{n_j}(\sqrt[4]{\frac{N}{2}\omega^2}y_j)}{H_{n_j}(\sqrt[4]{\frac{N}{2}\omega^2}y_j)} \partial_i \chi + \\ + g \sum_{j < i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} = E_{\text{Shift}} \end{aligned}$$

Die  $y_i$  als Funktionen der  $\{x_k\}$  sind in Anhang B definiert.

Diese Differentialgleichung bereitet jedoch beträchtliche Schwierigkeiten, die zur Folge haben, daß ich keine Lösung angeben kann.

*Unsichtbare Harmonie ist stärker  
als sichtbare.*

(Heraklit)

## Kapitel 2

# Theorie Klassisch Integrierbarer Systeme

### 2.1 Hamiltonsche Mechanik

Die für das strukturelle Verständnis der mathematischen Theorie mechanischer Systeme fruchtbarsten Zugänge sind die von Joseph Louis Lagrange und die, mittels Legendre<sup>1</sup>-Transformation daraus hervorgehende, von Sir William Rowan Hamilton<sup>2</sup> formulierte Hamiltonsche Mechanik.

#### 2.1.1 Der Phasenraum

Sowohl in der Lagrangeschen als auch in der Hamiltonschen Formulierung der Mechanik wird der *Konfigurationsraum*, der durch die direkte Summe der Teilchenkoordinaten aufgespannte Raum, als Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  behandelt. Im Falle eines  $N$ -Teilchensystems im dreidimensionalen Raum ist der Konfigurationsraum nicht durch Zwangsbedingungen an eine Hyperfläche gebundener Teilchen somit eine  $3N$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Auf der Konfigurationsmannigfaltigkeit lassen sich nun Koordinaten einführen, die als *verallgemeinerte Koordinaten* bezeichnet werden. Die vertrauteste, aber nicht notwendigerweise geschickteste Wahl für diese Koordinaten sind die *Ortskoordinaten*.

---

<sup>1</sup>Adrien Marie Legendre, französischer Mathematiker (1752–1833), bekannt durch Arbeiten über elliptische Funktionen und in der Zahlentheorie, sowie die Methode der kleinsten Quadrate.

<sup>2</sup>Irischer Mathematiker (1805–1865), bekannt durch die Formulierung der Hamiltonschen Mechanik sowie der Theorie der Quaternionen.

Die Tangentialvektoren an diese Mannigfaltigkeit werden *verallgemeinerte Geschwindigkeiten* genannt. Im Falle der Wahl von Ortskoordinaten auf dem Konfigurationsraum handelt es sich bei den Tangentialvektoren um aus den Teilchengeschwindigkeiten zusammengesetzte Vektoren.

Der Unterschied zwischen Lagrangescher und Hamiltonscher Formulierung besteht aus heutiger Sicht darin, daß Lagrange mit dem Tangentialbündel  $TM$  arbeitete, während Hamilton die Mechanik unter Verwendung des Kotangentialbündels  $T^*M$  formulierte. Dabei bezeichnet der Begriff des Bündels die Basismannigfaltigkeit erweitert durch in jedem Punkt mit ihr verklebte Räume, in diesem Fall den Fasern. Das Bündel  $\Gamma := T^*M$  mit einer zusätzlichen Struktur wird als *Phasenraum* bezeichnet. Diese zusätzliche Struktur bewirkt, daß eine Identifikation von Tangential- und Kotangentialbündel der Mannigfaltigkeit  $M$  durch eine Abbildung  $\iota : T^*M \rightarrow TM$  möglich wird. Alternativ geschieht das durch Einführen einer schiefsymmetrischen, bilinearen Abbildung  $\{ \cdot, \cdot \} : C^\infty(\Gamma) \times C^\infty(\Gamma) \rightarrow C^\infty(\Gamma)$ , der *Poisson<sup>3</sup>-Klammer*, oder aber über einen schiefsymmetrischen 2-Tensor  $w \in TM \otimes TM$ , den *Poisson-Bivektor*. Mit dem Poisson-Bivektor läßt sich eine schiefsymmetrische 2-Form  $\omega := (\iota \otimes \iota)^{-1}(w)$  definieren. Ist diese nicht entartet, so spricht man von  $T^*M$  mit der zusätzlichen Struktur als einer *symplektischen Mannigfaltigkeit*. Die Form  $\omega$  ist genau dann geschlossen, wenn die Poisson-Klammer die Jacobi<sup>4</sup>-Identität erfüllt. In lokalen Koordinaten hat  $\omega$  die Form  $\omega = dp \wedge dq$ .

Für Systeme, in denen das Potential keine explizite Zeitabhängigkeit aufweist, wird die Bewegung der Teilchen in der Lagrange-Mechanik durch die Lagrange-Funktion  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  und im Hamiltonschen Falle durch die Funktion  $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  bestimmt. Bei Lagrange ergeben sich nun die Phasenbahnen  $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow TM$  als Extrema des Funktionals

$$S(\gamma(t)) := \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t)) dt \quad , \quad (2.1)$$

dem sogenannten Wirkungsfunktional. Hieraus lassen sich mit Hilfe des Hamiltonschen Variationsprinzips die Lagrangeschen beziehungsweise Hamiltonschen Bewegungsgleichungen herleiten. Die Hamiltonschen Differentialgleichungen haben die Form

$$\begin{aligned} \iota^{-1}(\dot{\gamma}(t)) &:= \omega_{|\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \cdot) = dH_{|\gamma(t)} \\ \Leftrightarrow \dot{\gamma}(t) &= \iota_{|\gamma(t)} dH_{|\gamma(t)} \quad , \end{aligned} \quad (2.2)$$

wobei die Kurven auf  $T^*M$  über die Abbildung  $\iota$  mit den Kurven auf  $TM$  identifiziert werden können, weshalb hier nicht zwischen ihnen unterschieden wird.

<sup>3</sup>Denis Poisson, französischer Mathematiker und Physiker (1781–1840). Lieferte wichtige Beiträge für die Analysis, die Wahrscheinlichkeitstheorie sowie die Thermodynamik.

<sup>4</sup>Carl Gustav Jacob Jacobi, deutscher Mathematiker (1804–1851). Verfaßte wichtige Arbeiten auf den Gebieten elliptischer Funktionen, partieller Differentialgleichungen sowie der Variationsrechnung, Mechanik und Algebra.

In den lokalen Orts–Impuls–Koordinaten  $(p, q)$  hat  $\iota$  die Gestalt

$$\iota = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} .$$

Damit ergibt sich die aus der Koordinatenschreibweise bekannte Form der Bewegungsgleichungen. Die Lösungen  $\gamma(t)$  zeichnen sich im Fall natürlicher Systeme, das heißt für nicht dissipative Systeme, dadurch aus, daß entlang ihnen die Hamilton–Funktion  $H(\gamma(t))$  konstant ist.

Die Abbildung  $\iota_{|\cdot} dH_{|\cdot} : \Gamma \rightarrow T\Gamma$  ist ein Vektorfeld auf dem Phasenraum. Es wird auch *Hamiltonsches Vektorfeld* genannt. Mit ihm verknüpft ist der Hamiltonsche Fluß  $g_H^t$ , eine 1–parametrische Diffeomorphismengruppe, für die das Vektorfeld  $\iota dH$  das zugehörige Geschwindigkeitsfeld darstellt.

Diese Formulierungen der klassischen Mechanik haben sich auch im Zusammenhang mit der Erweiterung dieser als fruchtbar erwiesen, da sich Quantenmechanik und Quantenfeldtheorien auf ähnliche Weise formulieren lassen. Hier interessiert jedoch nur die aus dieser Art der Darstellung resultierende Form der Erhaltungsgrößen eines mechanischen Systems.

### 2.1.2 Erhaltungsgrößen: Das Noether–Theorem

Erhaltungsgrößen eines mechanischen Systems sind Funktionen auf dem Phasenraum  $\Gamma$ , die entlang den Phasenbahnen konstant bleiben. Das heißt, ist  $\gamma(t) : \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$  ein Extremum des Wirkungsfunktional  $S(\gamma(t))$  und  $I$  eine Funktion auf  $\Gamma$  mit  $I(\gamma(t)) = \text{const} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , so nennt man diese Funktion eine Erhaltungsgröße. Im Falle nicht dissipativer Systeme ist mit der Hamilton–Funktion bereits eine Erhaltungsgröße bekannt. Diese wird auch als Energie–Funktion bezeichnet. Eine Möglichkeit, Erhaltungsgrößen aus den Symmetrien der Lagrange–Funktion herzuleiten, bietet der nach Emmy Noether<sup>5</sup> benannte Satz. In lokalen Koordinaten ergibt sich folgendes Bild:

**Satz: (Noethersches Theorem)**

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $L$  eine Lagrange–Funktion auf  $M$ ,  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  und  $h^s$  eine 1–parametrische Diffeomorphismengruppe, unter der  $L$  invariant bleibt, das heißt

$$L(v) = L(h_*^s(v)) \quad \forall s \in \mathbb{R}, v \in M .$$

Dann besitzt das zu der Funktion  $L$  gehörige Lagrange–System die Erhaltungsgröße  $I : TM \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$I(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{dh^s(q)}{ds} \Big|_{s=0} . \quad (2.3)$$

---

<sup>5</sup>Deutsche Mathematikerin (1882–1935), bekannt durch Arbeiten auf den Gebieten der Algebra und Invariantentheorie.

Dabei ist für  $TM \ni v = (p, q)$  die Form  $h_* v$  das Differential von  $h^s$  im Punkte  $q \in M$ . Es vermittelt eine lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen in den Punkten  $q$  und  $h(q)$ .

Für die Erhaltungsgrößen eines mechanischen Systems existiert ein notwendiges und hinreichendes Kriterium, das es ermöglicht, für Phasenraumfunktionen auch ohne Kenntnis der Lösung des Systems oder der Symmetrie der Lagrange-Funktion, für deren Rückgewinnung aus den Erhaltungsgrößen im übrigen keine Vorschrift existiert, die Eigenschaft, eine Konstante der Bewegung zu sein, zu verifizieren. Diese Möglichkeit bietet die Poisson-Klammer. Für zwei Phasenraumfunktionen  $F, G$  ist sie über die symplektische Form  $\omega$  wie folgt gegeben:

**Def.: (Poisson-Klammer)**

Seien  $F, G \in C^\infty(\Gamma)$  Phasenraumfunktionen. Dann ist

$$\{F, G\} := \omega(\iota dF, \iota dG) \quad (2.4)$$

die *Poisson-Klammer* von  $F$  und  $G$ . Dabei vermittelt  $\iota$  den Isomorphismus zwischen Tangential- und Kotangentialraum.

In der mathematischen Literatur spricht man auch von der Lie-Klammer zweier Vektorfelder, was anhand der Formulierung in (2.4) unmittelbar einsichtig ist. Hier schließt sich unmittelbar die Theorie der Lie-Gruppen und Lie-Algebren an. Als Literatur hierzu verweise ich auf das Buch von Robert Gilmore [Gil74].

Ich möchte jedoch nur auf die Relevanz der Poisson-Klammer für die Integrierbarkeit klassischer mechanischer Systeme eingehen. Hier stößt man auf eine geeignete Wahl von lokalen Koordinaten auf dem Phasenraum, die Wirkungs-Winkel-Variablen.

### 2.1.3 Wirkungs-Winkel-Variable

**Satz: (Liouillescher<sup>6</sup> Satz über integrable Systeme)**

Seien  $I_1, I_2, \dots, I_n$  Funktionen auf einer  $2n$ -dimensionalen symplektischen Mannigfaltigkeit  $\Gamma$ , für die

$$\{I_i, I_j\} = 0 \quad \forall i, j \text{ .}$$

Die Menge  $M_{f_1, f_2, \dots, f_n}$  der Phasenraumpunkte zu gegebenen konstanten Werten der Erhaltungsgrößen sei wie folgt definiert:

$$M_f := \{x \in \Gamma \mid I_i(x) = f_i \quad \forall i = 1 \dots n\} \text{ .}$$

Die Funktionen  $I_i$  seien auf dieser Mannigfaltigkeit unabhängig, das heißt, in jedem Punkte  $x \in M_f$  gilt

$$TM_f|_x = \text{Span}\{\iota_x dI_i|_x, i = 1 \dots n\} \text{ .}$$

Dann besitzt  $M_f$  folgende Eigenschaften:

- $M_f$  ist eine  $n$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit von  $\Gamma$ .
- $M_f$  ist eine glatte Mannigfaltigkeit, invariant unter dem Phasenfluß mit Hamiltonscher Funktion  $H = I_1$ .
- Ist  $M_f$  kompakt und zusammenhängend, so ist sie diffeomorph zu dem  $n$ -dimensionalen Torus  $T^n$ .

Die letzte Eigenschaft gibt nun Anlaß zur Einführung lokaler Koordinaten auf  $\Gamma$ , indem man zunächst auf  $M_f$  die Koordinaten  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$  einführt und diese zu Koordinaten auf  $\Gamma$  ergänzt. Die einfachste Wahl ist, sich der Erhaltungsgrößen  $I_i$  zu bedienen, und als Basis auf  $\Gamma$  die  $2n$ -Tupel  $(I_1, I_2, \dots, I_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  zu wählen. Diese sind allerdings in der Regel nicht mehr symplektisch, das heißt, die 2-Form  $dI \wedge d\varphi$  stellt keine symplektische Form mehr da. Es lassen sich jedoch immer  $n$  Funktionen  $J_1, J_2, \dots, J_n$  der Erhaltungsgrößen finden, so daß die Tupel  $(J_1, \dots, J_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  symplektische Koordinaten auf  $\Gamma$  mit der Poincaréschen Integral-Invarianten  $\omega = dJ \wedge d\varphi$  bilden.

Mit folgender Definition eines integrablen klassischen Systems:

**Def.: (Integrables System)**

Ein klassisches System mit Hamiltonscher Funktion  $H$  mit  $n$  Freiheitsgraden heißt integrabel im Liouvilleschen Sinne, wenn es neben  $H$  weitere  $(n - 1)$ , voneinander unabhängige Funktionen  $I_i : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so daß deren Flüsse paarweise untereinander vertauschen und jede mit dem Hamiltonschen Fluß vertauscht.

kann man also sagen, daß integrable Systeme die Einführung von Wirkungs-Winkel-Variablen als lokale Koordinaten des Phasenraumes zulassen. In diesen Koordinaten nehmen die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen folgende einfache Gestalt an: annehmen:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= 0 \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(J) \quad . \end{aligned}$$

Eine für die störungstheoretische Behandlung klassischer Systeme interessante Eigenschaft dieser Koordinaten ist, daß sich der Phasenraum in einer Umgebung der Untermannigfaltigkeit  $M_f$  als direktes Produkt des Torus mit einer  $n$ -dimensionalen Kreisscheibe darstellen läßt:

$$\Gamma \simeq T^n \times D^n \quad \text{in } U_\epsilon(M_f) \quad .$$

Die Einführung solcher Koordinaten setzt in jedem Falle die Existenz einer der Zahl der Freiheitsgrade des Systems entsprechenden Anzahl unabhängiger Erhaltungsgrößen in jedem Punkt des Phasenraumes voraus. Im Falle der Existenz von Kollisionsbahnen, wie sie zum Beispiel beim 3-Körper-Problem auftreten, existieren solche unabhängigen Erhaltungsgrößen nicht mehr in jedem Punkt. Es liegt somit ein nicht integrables System vor. Die Nichtintegrabilität von Systemen sagt also nichts über die Nichtexistenz einer Lösung oder gar des Systems als physikalisch realisierbares System aus, sondern lediglich, daß die Bewegungsgleichungen nicht auf die obige, einfache Form gebracht werden können.

Zum Beweis der Integrabilität ist es also nicht ausreichend, die Lösung anzugeben. Man muß vielmehr sämtliche Erhaltungsgrößen finden und deren Unabhängigkeit in jedem Punkt des Phasenraumes zeigen. Das Auffinden dieser Erhaltungsgrößen ist nun nicht immer ganz einfach und, wie zum Beispiel im Falle des Runge-Lenz-Vektors für das Zwei-Körper-Problem, oftmals mit viel Intuition verbunden. Allerdings existieren durchaus auch systematische Vorgehensweisen, Erhaltungsgrößen zu konstruieren. Eine sehr einfache Methode ist der sogenannte *Lax-Trick*.

## 2.2 Lax-Darstellung eines klassischen Systems

Die Idee zu dieser Darstellung, aus der Erhaltungsgrößen unmittelbar konstruiert werden können, geht auf Peter D. Lax zurück [Lax68]. Lax selbst entwickelte diese Methode zur Konstruktion von Erhaltungsgrößen der sogenannten Kortweg-de Vries-Gleichung, einer Differentialgleichung, deren Lösungen für Zeiten  $t \rightarrow \pm\infty$  Überlagerungen von Solitonen sind. Die Kortweg-de Vries-Gleichung, kurz auch KdV-Gleichung genannt, hat die Form

$$u_t = 6u u_x - u_{xxx} .$$

Die Adaption der Laxschen Vorgehensweise auf klassische Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden geht wohl auf Calogero zurück [Cal75]. Der wesentliche Schritt hierbei ist die Konstruktion zweier Hermitescher Matrizen  $L$  und  $M$ , gelegentlich auch als *Lax-Paar* bezeichnet, so daß die  $n^2$  Gleichungen

$$\dot{L} = [L, M] \tag{2.5}$$

den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems äquivalent sind. Dabei ist die Lie-Klammer  $[\cdot, \cdot]$  die auf Matrixalgebren verwendete antisymmetrische Abbildung

$$[X, Y] := XY - YX . \tag{2.6}$$

Die Lax-Gleichung ist von der Form der Heisenberg-Gleichung der Quantenmechanik. Ersetzt man die Matrix  $M$  durch den Hamilton-Operator eines quantenmechanischen Systems, so ist durch die Gleichung (2.5) die Zeitentwicklung

des Operators  $L$  bestimmt. Diese Parallele wirft die Frage auf, inwieweit sich aus der Lax-Darstellung eine alternative Möglichkeit zur Quantisierung eines mechanischen Systems ergibt. Zu dieser Frage habe ich in der Literatur keine Ansätze entdecken können. Bei der Diskussion der quantenmechanischen Erhaltungsgrößen des Calogero-Modells wird jedoch die Möglichkeit des korrespondenzmäßigen Ersetzens der Einträge der Lax-Matrix durch die entsprechenden Operatoren noch besprochen.

Die Matrizen  $L$  und  $M$  sind, damit Gleichung (2.5) den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen äquivalent sein kann, Phasenraumfunktionen.

Aus der Gleichung (2.5) folgt sofort, daß die Spur  $\text{tr}(\dot{L})$  verschwindet, also die Spur  $\text{tr}(L)$  selbst zeitunabhängig und somit erhalten ist. Es gilt sogar die viel stärkere Aussage, daß die Eigenwerte von  $L$  jeder für sich zeitunabhängig sind. Das heißt, daß die Hermitesche Matrix  $L$  die Form

$$L(t) = S(t) \Lambda S^{-1}(t) \quad (2.7)$$

mit unitärem  $S$  und der Diagonalmatrix  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  mit  $\lambda_i \neq \lambda_j(t) \quad \forall i = 1 \dots n$ , also nicht von der Zeit abhängigen Einträgen. Damit folgt dann sofort, daß jede unter Ähnlichkeitstransformation des Arguments invariante Funktion, wie zum Beispiel die Spur, angewendet auf Potenzen von  $L$  Erhaltene Größen liefert.

Einen Beweis beziehungsweise Verweise auf einen Beweis für die nicht unmittelbar einsichtige Gleichung (2.7) fand sich in keiner der Referenzen. Daher möchte ich diesen kurz führen.

**Beh.:**

Sei  $L$  eine Hermitesche Matrix mit von einer Variablen  $t$  abhängigen Einträgen. Weiterhin gelte für die Ableitung nach diesem Parameter die Identität  $\dot{L} = [L, M]$ . Dann sind die Eigenwerte der Matrix  $L$  nicht von der Zeit abhängig und die Gleichung (2.7) ist erfüllt.

**Bew.:**

Aufgrund der Hermitezität von  $L$  existiert eine unitäre Transformation  $S(t)$ , so daß  $L(t) = S(t)\Lambda(t)S^{-1}(t)$  mit diagonalem  $\Lambda(t)$ . Differentiation nach  $t$  liefert dann

$$\dot{L} = (S \Lambda S^{-1})' = S \dot{\Lambda} S^{-1} - [L, \dot{S} S^{-1}] \quad (2.8)$$

Ausnutzen der Identität für  $\dot{L}$  führt dann auf

$$\dot{\Lambda} = [\Lambda, S^{-1} \dot{S} - S^{-1} M S] \quad .$$

Der Kommutator einer Matrix  $X$  mit einer Diagonalmatrix  $\Lambda$  ergibt sich zu der Matrix  $[\Lambda, X]_{ij} = X_{ij}(\lambda_i - \lambda_j)$ , besitzt also verschwindende Diagonalelemente. Somit ist die Matrix  $\Lambda$  also nicht von dem Parameter  $t$  abhängig.  $\square$

In der Laxschen Darstellung eines Systems reduziert sich das Auffinden von Erhaltungsgrößen also auf die Bestimmung von Eigenwerten der Lax-Matrix  $L$ , die das Hamiltonsche System repräsentiert. Aus Gleichung (2.8) folgt nämlich, daß die Matrix  $M$  des Lax-Paares bis auf die Eichfreiheit, mit der Matrix  $L$  kommutierende Matrizen zu  $M$  zu addieren, von der Gestalt  $M \simeq -\dot{S}S^{-1}$  ist. Desweiteren muß die Matrix  $L$  nicht notwendigerweise Hermitesch sein. Es genügt zu fordern, daß sie über eine Ähnlichkeitstransformation auf Diagonalgestalt gebracht werden kann, also Gleichung (2.7) erfüllbar ist. Aus diesem Grunde schlage ich folgende abgeänderte Formulierung des Lax-Tricks vor:

**Satz: (Lax-Trick)**

Sei  $\Gamma$  der  $2n$ -dimensionale Phasenraum eines Hamiltonschen Systems,  $L$  eine Abbildung von  $\Gamma$  in die diagonalisierbaren Homomorphismen einer Algebra. Der  $L$  diagonalisierende Homomorphismus sei mit  $S$  bezeichnet. Stellt dann die Zeitentwicklung  $\dot{L} = [L, -\dot{S}S^{-1}]$  von  $L$  ein den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen des Systems äquivalentes Differentialgleichungssystem dar, so sind die Eigenwerte von  $L$  Erhaltungsgrößen des Hamiltonschen Systems.

Die Laxsche Darstellung Hamiltonscher Systeme wird in der Literatur bisweilen auch *inverse spektrale Transformation*, *isospektrale Deformation* oder, was sich durchzusetzen scheint, *Methode der inversen Streuung (inverse scattering method)* genannt. Ihr kommt eine große Bedeutung bei der Behandlung weiterer nichtlinearer Differentialgleichungen der mathematischen Physik neben der KdV-Gleichung, wie der nichtlinearen Schrödingergleichung, der Sine-Gordon-Gleichung, dem Heisenbergschen Ferromagneten und der Toda-Gitter-Gleichung zu. Hier sei auf das Buch von Ludwig D. Faddeev [FT87] und die darin aufgeführte Literatur verwiesen. Faddeev gibt in diesem Buch eine etwas abgewandelte Form der Laxschen Darstellung an, die eine geometrische Interpretation zuläßt. Statt mit der Lax-Gleichung (2.5) arbeitet er mit der Gleichung

$$U_t - V_x + [U, V] = 0 \quad , \quad U, V : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \quad ,$$

die als Verträglichkeitsbedingung für das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} F_x &= U F \\ F_t &= V F \end{aligned}$$

mit  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$  fungiert. Interpretiert man  $F$  als Abbildung der Basis  $\mathbb{R}^2$  in die Faser  $\mathbb{C}^2$  des Vektorbündels  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$ , so stellt das Paar  $(U, V)$  einen flachen Zusammenhang und die Abbildung  $F$  einen kovariant konstanten Vektor dar.

Wir wollen jedoch weiter die Laxsche Darstellung verwenden und die von Babelon und Viallet [BV90] erkannte Bedeutung einiger Ergebnisse von Fadeev für diese Darstellung diskutieren. Diese gehören dem Komplex der  $r$ -Matrizen und der mit ihnen verbundenen Yang-Baxter-Gleichungen an.

### 2.2.1 $r$ -Matrizen und die klassische Yang-Baxter-Gleichung

Zu Beginn müssen hier einige neue Strukturen eingeführt werden, auf die dieses Kalkül zurückgreift.

Wie bereits im vorigen Abschnitt erwähnt, ist die Lax-Matrix eine  $g$ -wertige Phasenraumfunktion, wobei  $g$  die diagonalisierbare Untergruppe einer Algebra von Homomorphismen ist. Auf dem Raum dieser Funktionen ist die Lie-Klammer (2.6) definiert. Weiterhin ist für die Komponenten als Phasenraumfunktionen mit (2.4) eine Poisson-Klammer gegeben. Neu eingeführt wird nun die Tensoralgebra  $g \otimes g$ , die die folgende kanonische, dennoch möglicherweise nicht allen Lesern geläufige Matrixdarstellung besitzt:

#### **Def.:** (Tensorprodukt)

Seien  $A, B \in g$  zwei Matrizen. Definiere dann das Tensorprodukt  $A \otimes B$  wie folgt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots \\ b_{21} & b_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots \\ a_{21}B & a_{22}B & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Mit dieser Darstellung des Tensorprodukts folgt sofort, daß der so erzeugte Raum eine Vektorraumstruktur hat. Für die Addition gilt folgende Identität:

$$(A \otimes B) + (A \otimes C) = A \otimes (B + C) .$$

Der Vektorraum bildet mit dem Produkt

$$(U \otimes V) \cdot (X \otimes Y) = UX \otimes VY$$

eine nicht kommutative Algebra.

Damit läßt sich sofort eine Lie-Klammer der Gestalt (2.6) einführen. Außerdem läßt sich ein Zusammenhang zwischen den Elementen  $A \otimes B$  und  $B \otimes A$  angeben, der auf der Eigenschaft beruht, daß die Algebra  $g \otimes g$  eine Untergruppe der Endomorphismen auf  $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$  ist. Es gilt:

$$(B \otimes A) = P(A \otimes B)P ,$$

wobei die Abbildung  $P$  gerade die Komponenten des Tensorprodukts  $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$  vertauscht. Dabei ist  $P$  selbst im allgemeinen kein Element von  $g \otimes g$ , da sich zwei Elemente von  $\mathbb{C}^n$  nicht notwendigerweise durch eine diagonalisierbare Transformation ineinander überführen lassen. Fadeev hat nun eine weitere Struktur auf  $g \otimes g$  eingeführt, die im folgenden *Fadeev-Klammer* genannt werden soll.

**Def.: (Fadeev-Klammer)**

Sei  $\Gamma$  der Phasenraum eines Hamiltonschen Systems mit Poisson-Klammer  $\{\cdot, \cdot\}$ . Die Matrixalgebra  $g$  sei die Menge der Funktionen auf  $\Gamma$  mit Werten in den Hermiteschen  $n \times n$  Matrizen. Dann läßt sich auf dem Tensorprodukt  $g \otimes g$  die folgende Abbildung einführen:

$$\{\cdot \otimes \cdot\} : g \otimes g \rightarrow g \otimes g ,$$

$$X, Y \mapsto \{X \otimes Y\} := \begin{pmatrix} \{a_{11}, b_{11}\} & \{a_{11}, b_{12}\} & \cdots \\ \{a_{11}, b_{21}\} & \{a_{11}, b_{22}\} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} .$$

Eine alternative, von Babelon und Viallet [BV90] verwendete Schreibweise für die Fadeev-Klammer  $\{X \otimes Y\}$  ist  $\{X \otimes 1, 1 \otimes Y\}$ , wobei die  $(i, j)$ -Komponente gerade der Kommutator der  $(i, j)$ -Komponenten von  $X \otimes 1$  und  $1 \otimes Y$  ist.

Für die Fadeev-Klammer gelten folgende, leicht zu verifizierende Identitäten:

$$\bullet \{A \otimes B\} = -P\{B \otimes A\}P \quad (2.10a)$$

$$\bullet \{A \otimes BC\} = \{A \otimes B\}(1 \otimes C) + (1 \otimes B)\{A \otimes C\} \quad (2.10b)$$

$$\{AB \otimes C\} = (A \otimes 1)\{B \otimes C\} + \{A \otimes C\}(B \otimes 1)$$

$$\bullet \{A^{-1} \otimes B\} = -(A^{-1} \otimes 1)\{A \otimes B\}(A^{-1} \otimes 1) \quad (2.10c)$$

$$\{B \otimes A^{-1}\} = -(1 \otimes A^{-1})\{B \otimes A\}(1 \otimes A^{-1})$$

Die letzten beiden Identitäten (2.10c) lassen sich aus der Gleichung

$$0 = \{1 \otimes X\} = \{A^{-1}A \otimes X\}$$

mit (2.10b) zeigen.

Unter Zuhilfenahme dieser Struktur  $(g, [\cdot, \cdot], \{\cdot \otimes \cdot\})$  läßt sich der folgende Satz beweisen.

**Satz: (Erhaltungsgrößen und die r-Matrix)**

Sei  $g \ni L = SAS^{-1}$  die Lax-Matrix eines Hamiltonschen Systems. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

$$(i) \quad \text{Die Eigenwerte von } L \text{ besitzen paarweise verschwindende Poisson-Klammern } \{\lambda_i, \lambda_j\} = 0 \quad \forall i, j \quad (2.11)$$

$$(ii) \quad \exists r \in g \otimes g \mid \{L \otimes L\} = [r, L \otimes 1] - [PrP, 1 \otimes L] . \quad (2.12)$$

Der Beweis dieses Satzes bei Babelon und Viallet [BV90] ist konstruktiv und soll aus diesem Grund hier vorgeführt werden.

**Bew.:**

(ii)  $\Rightarrow$  (i):

$$\begin{aligned}
\{L^n \otimes L^m\} &\stackrel{(2.10b)}{=} \sum_{p=0}^{n-1} (L^{n-p-1} \otimes 1) \{L \otimes L^m\} (L^p \otimes 1) \\
&\stackrel{(2.10b)}{=} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} (L^{n-p-1} \otimes L^{m-q-1}) \{L \otimes L\} (L^p \otimes L^q) \\
&\stackrel{\text{Vor.}}{=} \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} \left( [(L^{n-p-1} \otimes L^{m-q-1}) r(L^p \otimes L^q), L \otimes 1] + \right. \\
&\quad \left. - [(L^{n-p-1} \otimes L^{m-q-1}) P r P (L^p \otimes L^q), 1 \otimes P] \right)
\end{aligned}$$

Mit der unmittelbar aus der Definition der Fadeev-Klammer folgenden Identität

$$\text{tr}(\{A \otimes B\}) = \{\text{tr}(A), \text{tr}(B)\}$$

ergibt sich, daß die Poisson-Klammern der Spuren von Potenzen der Matrix  $L$  verschwinden.

$$\{\text{tr}(L^n), \text{tr}(L^m)\} = 0 = \{\text{tr}(\Lambda^n), \text{tr}(\Lambda^m)\} \quad \forall n, m$$

Hier bleibt nun noch zu zeigen, daß aus dieser Gleichung die Kommutativität der Eigenwerte  $\lambda_i$  selbst folgt. Um dieses bei Babelon und Viallet nicht diskutierte Problem zu lösen, muß ich auf Formel (6.2) aus Kapitel 6 verweisen. Diese gibt eine Darstellung der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms in Termen der Spuren von Potenzen der Matrix an. Da sich die Eigenwerte einer Matrix als in Potenzreihen entwickelbare Funktion der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms schreiben lassen, sind diese somit Potenzreihen von Spuren von Potenzen dieser Matrix. Aufgrund der oben gezeigten Kommutatoreigenschaft für diese Spuren ist damit auch die Kommutativität der Eigenwerte bewiesen.

Zum Beweis der verbleibenden Richtung (i)  $\Rightarrow$  (ii):

Definiere zunächst folgende Größen:

$$q := (S^{-1} \otimes S^{-1}) \{S \otimes \Lambda\} (1 \otimes S) \quad (2.13)$$

$$k := (S^{-1} \otimes S^{-1}) \{S \otimes S\}$$

$$a := -q + \frac{1}{2}[k, 1 \otimes L]$$

$$b := PqP + \frac{1}{2}[k, L \otimes 1] \quad (2.14)$$

Unter Ausnutzung der Identitäten (2.10a) - (2.10c) folgt dann nach einer nicht verschwindenden Zahl von Umformungen

$$\{L \otimes L\} - ([a, L \otimes 1] + [b, 1 \otimes L]) = (S^{-1} \otimes S^{-1})\{\Lambda \otimes \Lambda\}(S \otimes S) \quad .$$

Aus der Voraussetzung (i) resultiert das Verschwinden von  $\{\Lambda \otimes \Lambda\}$ . Die Symmetrie von  $\{L \otimes L\}$  gestattet die folgende Schreibweise:

$$\{L \otimes L\} = \frac{1}{2} \left( \{L \otimes L\} - P\{L \otimes L\}P \right)$$

Führt man nun die Variable  $r := \frac{1}{2}(a - PbP)$  ein, so erhält man die Aussage (ii). □

Mit der Lax-Matrix  $L$  hat man aufgrund ihrer Diagonalisierbarkeit sofort einen Satz kommutierender Erhaltungsgrößen, da die Matrix  $r$  aus den die Lax-Matrix diagonalisierenden Homomorphismen  $S$  und  $S^{-1}$  und der Diagonalmatrix  $\Lambda$  direkt konstruiert werden kann. Die Frage, die sich nun unmittelbar stellt, ist die nach einem Kriterium für die Existenz einer Lax-Matrix. Hier gilt folgendes:

**Satz: (Existenz von Lax-Matrizen)**

Zu jedem im Liouvilleschen Sinne integrierbaren klassischen Modell existiert eine Lax-Matrix  $L$ , so daß die Bewegungsgleichungen dem Differentialgleichungssystem (2.2) äquivalent sind.

**Bew.:**

Seien die Tupel  $(J, \varphi)$  die Wirkungs-Winkel-Variablen des Hamiltonschen Systems, die nach Voraussetzung der Liouvilleschen Integrierbarkeit existieren. Wähle dann Vektoren  $H_1, \dots, H_n, E_1, \dots, E_n$  aus einer Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$ , so daß sie den Bedingungen

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0 \\ [E_i, E_j] &= 0 \\ [H_i, E_j] &= 2\delta_{ij}E_j \end{aligned}$$

genügen. Dann erfüllen die Matrizen

$$\begin{aligned} L &:= \sum_{i=1}^n J_i H_i + 2J_i \varphi_i E_i \\ M &:= \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial J_i} E_i \end{aligned}$$

die Bedingungen für die Äquivalenz der Gleichung (2.5) mit den Bewegungsgleichungen. □

Dieser Satz geht ebenfalls auf Babelon und Viallet [BV90] zurück.

Für spezielle  $r$ -Matrizen aus  $g \otimes g$  existieren interessante Beziehungen zu neueren Entwicklungen in der Algebra. Ist  $r$  eine schiefssymmetrische Matrix, so daß Gleichung (2.12) die Form

$$\{L \otimes L\} = [r, L \otimes L]$$

annimmt, so gelten für ein einfaches  $r = r_1 \otimes r_2$  die Identitäten

$$(i) [r_1 \otimes r_2 + r_2 \otimes r_1, L \otimes L] = 0 \quad (2.15)$$

$$(ii) [[[r, r]], L \otimes L \otimes L] = 0, \quad (2.16)$$

wobei die Abbildung  $[[\cdot, \cdot]]$  wie folgt definiert ist:

$$[[r, r]] = [r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}].$$

Die auftretenden Lie-Klammern für ein allgemeines  $r = \sum_{i,j} r_{ij} e_i \otimes e_j$  haben hierin die Form

$$[r_{12}, r_{13}] = \sum_{i,j,k,l} r_{ij} r_{kl} [e_i, e_k] \otimes e_j \otimes e_l$$

$$[r_{12}, r_{23}] = \sum_{i,j,k,l} r_{ij} r_{kl} e_i \otimes [e_j, e_k] \otimes e_l$$

$$[r_{13}, r_{23}] = \sum_{i,j,k,l} r_{ij} r_{kl} e_i \otimes e_k \otimes [e_j, e_l].$$

Für ein schiefssymmetrisches, konstantes  $r = r_1 \otimes r_2$  in  $g \otimes g$ , das die *klassische Yang-Baxter-Gleichung*  $[[r, r]] = 0$  erfüllt, läßt sich auf der Lie-Algebra  $g$  ein Cokommutator  $\delta : g \rightarrow g \otimes g$  wie folgt definieren:

$$\delta(X) := [X, r_1] + [X, r_2].$$

Mit dieser zusätzlichen Struktur wird die Lie-Algebra  $g$  zu einer quasitriangulären Lie-Bialgebra. Dabei ist die quasitriangularität genau dann gegeben, wenn  $r$  die klassische Yang-Baxter-Gleichung erfüllt.

Für spezielle  $r$ -Matrizen ist somit ein direkter Zusammenhang zwischen klassischen integrablen Modellen und Lie-Bialgebren gegeben. Weitere Aspekte hierzu finden sich bei Fuchs [Fu92] sowie Chari und Presley [CP94].



## Kapitel 3

# Quantenmechanische Integrabilität

Einige Prinzipien der Quantenmechanik wurden bereits im ersten Kapitel im Rahmen der Diskussion, inwieweit der zur Lösung des quantenmechanischen Calogero-Modells führende Ansatz auf sämtliche Lösungen führt, erwähnt. In diesem Kapitel soll die mathematische Struktur der Quantenmechanik nun in kompakter Form systematisch dargestellt werden, um damit den Begriff der Erhaltungsgröße einführen zu können und über diesen eine, dem im letzten Kapitel behandelten klassischen Fall analoge Definition von Integrabilität zu liefern.

### 3.1 Formulierung der Quantenmechanik

Ein quantenmechanisches System ist durch eine Hamilton-Funktion  $\hat{H}$  gegeben, die auf einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  operiert und die Zeitentwicklung des quantenmechanischen Systems bestimmt.

Die Meßgrößen, auch Observable  $\hat{O}$  genannt, sind Hermitesche Elemente einer  $C^*$ -Algebra. Ihr Spektrum liefert die möglichen Meßergebnisse. In der Darstellung  $\hat{O}$  auf einem Hilbert-Raum als stetig lineare Abbildung ergibt sich das Spektrum eines Operators als Eigenwertschar desselben. Aufgrund der Unendlichdimensionalität des Hilbert-Raumes ergeben sich hier zusätzliche, im Endlichdimensionalen nicht auftretende Eigenschaften des Spektrums. So enthält das Spektrum eines Hilbert-Raum-Operators diskrete, kontinuierliche und auch singuläre Anteile, wobei letztere nicht von Bedeutung für die Beschreibung physikalischer Systeme sind. Beispiele für Operatoren mit rein diskretem Spektrum sind endlichdimensionale Matrix-Darstellungen. Reine Multiplikationsoperatoren hingegen liefern ein rein kontinuierliches Spektrum.

Als reiner Zustand zu einem Operator  $\hat{a}$  wird ein normiertes Element des Hilbert-Raumes bezeichnet, auf das  $\hat{a}$  als Multiplikationsoperator wirkt. Der

Faktor ist dann ein Element des Spektrums von  $\hat{a}$ . Wie im endlichdimensionalen Fall tritt auch hier das Phänomen der Entartung auf, was bedeutet, daß zu einem Wert des Spektrums der Observable mehrere reine Zustände existieren. Zur Charakterisierung eines reinen Zustandes von Hermiteschen Operatoren genügt also nicht die Angabe des Eigenwertes, sondern es bedarf einer zusätzlichen Klassifizierung durch Angabe einer Basis des Eigenraumes.

In der Sprache der Quantenmechanik nennt man den Eigenwert beziehungsweise eine bijektive Funktion dieses Werts auch *Hauptquantenzahl*; bei der Nummerierung der Basis der Eigenräume spricht man von *Nebenquantenzahlen*. Die Eigenräume zu Hermiteschen Operatoren definieren eine Zerlegung des Hilbertraumes  $\mathcal{H}$  in eine direkte Summe  $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}_i$ . Man spricht dann auch von der  $\hat{a}$ -Darstellung.

Die Hamilton-Funktion  $\hat{H}$  des physikalischen Systems ist ebenfalls ein formal Hermitescher Operator auf  $\mathcal{H}$ . Im Gegensatz zu den Observablen handelt es sich hierbei jedoch manchmal um nicht beschränkte Operatoren. Für diese folgt aus der Hermitezität nicht unmittelbar die Selbstadjungiertheit, so daß man Begriffe wie *wesentliche Selbstadjungiertheit* einführen muß. Die von solchen Operatoren beschriebenen Systeme sind jedoch nur dann als physikalische Systeme zu bezeichnen, wenn durch Beschränkung des Systems erreicht wird, daß die Hamilton-Funktion auf diesem eingeschränkten Definitionsbereich einen selbstadjungierten Operator darstellt. Ein Fall, in dem dies notwendig ist, ist das Calogero-Modell, wie bereits in Kapitel 1 erwähnt.

Das Spektrum eines selbstadjungierten Hamilton-Operators wird auch als Energie-Spektrum bezeichnet, die zugehörige Darstellung des Hilbertraumes in Eigenfunktionen zu  $\hat{H}$  als *Energiedarstellung*.

Im folgenden Abschnitt soll nun das Phänomen der Entartung genauer untersucht werden.

## 3.2 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Die auf einen Hilbertraum wirkenden Operatoren bilden eine Algebra. Auf dieser läßt sich eine Lie-Klammer der Form (2.6) einführen. Man kann nun leicht zeigen, daß zwei Hermitesche Operatoren genau dann eine verschwindende Lie-Klammer besitzen, wenn sie ein gemeinsames Eigenfunktionensystem besitzen. Die Tatsache, daß aus der Existenz eines gemeinsamen Eigenfunktionensystems zu zwei Operatoren das Verschwinden ihres Kommutators folgt, läßt sich durch Anwenden des Kommutators auf die Eigenfunktionen zeigen. Da Hermitesche Operatoren ein vollständiges Eigenfunktionensystem, das eine Basis des Hilbertraumes darstellt, besitzen, läßt sich nun jede Funktion als Linearkombination von Basisfunktionen darstellen. Definiert man die Identität zweier Operatoren dadurch, daß sie auf sämtliche Funktionen des Hilbertraumes in gleicher Weise

wirken, so hat man den Kommutator als „Null-Operator“ identifiziert. Gilt die Identität  $[A, B] = 0$  mit Hermiteschen Operatoren  $A$  und  $B$ , so betrachtet man die Wirkung des Operators  $B$  auf die Eigenräume  $\mathcal{H}_n = \{\varphi_{n,\alpha} \mid A\varphi_{n,\alpha} = a_n\varphi_{n,\alpha} \forall \alpha \in I_n\}$ . Es zeigt sich, daß  $B$  diese Eigenräume invariant läßt. Der Hermitesche Operator  $B$  läßt sich also auf  $\mathcal{H}_n$  diagonalisieren. Die Vereinigung der Eigenfunktionen von  $B$  auf den  $\mathcal{H}_n$  stellt somit ein Eigenfunktionensystem von  $A$  und  $B$  dar.

Induktiv kann man nun unter Verwendung dieses Satzes zeigen, daß simultan kommutierende Operatoren ein gemeinsames Eigenfunktionensystem besitzen. Ein System von Operatoren, das das Eigenfunktionensystem eindeutig festlegt, so daß keine zwei Basiselemente existieren, die für alle Operatoren dieses Systems jeweils dieselben Eigenwerte besitzen, wird als *vollständiger Satz kommutierender Operatoren* bezeichnet:

$T_1, T_2, \dots, T_n$  Operatoren mit  $[T_i, T_j] = 0 \quad \forall i, j, \quad \{\varphi_k\}$  gemeinsames Eigenfunktionensystem zu diesen. Gilt dann

$$\forall k_1, k_2 \quad k_1 \neq k_2 \exists T_s \mid T_s(\varphi_{k_1} - \varphi_{k_2}) \neq 0 ,$$

so handelt es sich bei den  $T_i$  um einen vollständigen Satz kommutierender Operatoren.

Hat man einen solches System von Operatoren gefunden, so spricht man auch von einer Aufhebung der Entartung, da mit ihnen ein Satz von Quantenzahlen zur Verfügung steht, der die Eigenfunktionen eindeutig charakterisiert.

In der Quantenmechanik spricht man nun von einem *vollständig integrierbarem System* genau dann, wenn ein die Eigenfunktionen eindeutig charakterisierender Satz von Quantenzahlen bekannt ist.

Der vollständige Satz kommutierender Operatoren ist eng verknüpft mit der Symmetrie des Hamilton-Operators.

### 3.2.1 Symmetriegruppe des Hamiltonians

Die Symmetriegruppe eines Operators wird erzeugt von eine Menge parameterabhängiger Operatoren  $\{U_i(\omega)\}$ , die sämtlich mit diesem Operator kommutieren. Besitzt diese Menge eine Lie-Gruppenstruktur, also sind die Transformationen von der Form

$$U(\omega) = \exp\left(\hat{1} \sum_k \omega_k T^k\right) ,$$

so schreibt die Invarianz des Hamilton-Operators wie folgt:

$$U_i(\omega) \hat{H} U_i^{-1}(\omega) = \hat{H} .$$

Dies stellt eine globale Eichtransformation dar, die Symmetrie des Hamiltonians. Die Lie-Algebra dieser Lie-Gruppe wird von den  $T^k$  erzeugt. Handelt es sich bei dieser Lie-Algebra um eine halbeinfache Lie-Algebra (siehe hierzu Kapitel 4) mit Rang  $l$ , so existieren nach dem Racah<sup>1</sup>-Theorem  $2l$  Erhaltungsgrößen des Systems. Diese sind durch den folgenden Satz gegeben:

**Satz: (Racah-Theorem)**

Sei  $g$  eine halbeinfache Lie-Gruppe mit Rang  $r$ . Dann existieren  $l$  unabhängige Operatoren  $C_{\lambda_i}(T^1, \dots, T^l)$ , die sogenannten *Casimir-Operatoren* dergestalt, daß  $[T^i, C_{\lambda_j}] = 0 \quad \forall i, j$  und der Kommutator  $[C_{\lambda_i}, C_{\lambda_j}] = 0 \quad \forall i, j$ . Die Eigenwerte heben die Entartung vollständig auf.

Damit bilden die  $l$  Elemente der Cartan-Unteralgebra sowie die  $l$  Casimir-Operatoren einen vollständigen Satz von Erhaltungsgrößen eines Hamilton-Operators mit halbeinfacher Lie-Gruppe als Symmetriegruppe. Bei den Eigenfunktionen zu einem Casimir-Operator spricht man von einem Multiplett; die Zustände dieses Multipletts werden durch die Generatoren der Cartan-Unteralgebra charakterisiert.

---

<sup>1</sup>Giulio Racah, italienischer Physiker (1909–1965).M Arbeitete in den Bereichen Atom- und Kernphysik.

# Kapitel 4

## Dunkl–Operatoren

Die Dunkl–Operatoren wurden 1989 von Charles F. Dunkl im Zusammenhang mit der Untersuchung symmetrischer Polynome eingeführt. Da diese auch in den Lösungen des Calogero–Modells eine Rolle spielen, ist es nicht sehr verwunderlich, daß die Dunkl–Operatoren in einer gewissen Beziehung zu diesem Problem stehen. In diesem Kapitel sollen diese Operatoren sowie einige, zu ihrem Verständnis notwendige, Konstruktionen besprochen werden. Von großer Bedeutung ist dabei eine endliche, durch Spiegelungen erzeugte Gruppe, die Coxeter–Gruppe.

### 4.1 Die Coxeter–Gruppe

Bevor eine Definition dieser Gruppe gegeben wird, seien hier noch einige grundlegende Konstruktionen besprochen.

#### 4.1.1 Wurzelsysteme

Wurzelsysteme sind diskrete Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume, die unter bestimmten Spiegelungen auf sich selbst abgebildet werden. Sie besitzen einige interessante Eigenschaften, die sich aus der folgenden Definition ergeben:

**Def.: (Wurzelsystem)**

Sei  $E$  ein euklidischer Vektorraum, also ein endlichdimensionaler Vektorraum mit einer nicht entarteten, positiv definiten Bilinearform  $(\cdot, \cdot)$ . Eine Spiegelung in diesem Vektorraum wird dann durch die Abbildung  $s_\alpha(x) = x - \frac{2(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$  vermittelt. Sie spiegelt den Vektor  $x$  an der senkrecht auf dem Vektor  $\alpha$  stehenden Hyperebene. Eine Teilmenge  $R \subset E$  mit der Eigenschaft

$$s_\alpha(\alpha') \in R \quad \forall \alpha, \alpha' \in R$$

heißt *Wurzelsystem*.

**Def.: (Positive Wurzeln)**

Da ein Vektor durch Spiegelung an der Hyperebene, für die er selbst Normalenvektor ist, in sein Negatives überführt wird, ist ein Wurzelsystem schon durch die Hälfte seiner Vektoren eindeutig bestimmt. Aus diesem Grunde führt man den Begriff des *einfachen* Wurzelsystems ein, das lediglich die auf einer Seite einer keine Wurzel enthaltenden Hyperebene liegenden Wurzeln umfaßt.

$$R_+ := \{\alpha \in R \mid (\alpha, \beta) > 0, \beta \notin R \text{ beliebig, fest}\}$$

**Def.: (Einfache Wurzeln)**

Die einfachen Wurzeln sind eine linear unabhängige Teilmenge eines positiven Wurzelsystems, also eine Basis des Wurzelraumes.

**Def.: (Kristallographisches Wurzelsystem)**

Dies ist ein Spezialfall eines Wurzelsystems, für den folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{2(\alpha, \alpha')}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha, \alpha' \in R .$$

Da die Elemente eines Wurzelsystems durch Spiegelung auseinander hervorgehen, lassen sich durch Drehung des gesamten Systems aus einem Wurzelsystem sofort unendlich viele weitere erzeugen. Betrachtet man die möglichen Kristallographischen Wurzelsysteme eines  $n$ -dimensionalen Vektorraumes modulo dieser Isomorphismen, so ergibt sich eine endliche Zahl paarweise verschiedener Wurzelsysteme, aus denen sich sämtliche Wurzelsysteme zusammensetzen lassen. Diese Wurzelsysteme heißen irreduzibel und dienen als Prototypen für eine Klassifizierung. Sie sind in Tabelle (4.1) aufgeführt.

Typ	Anzahl Wurzeln	Wurzelsystem
$A_n$	$\frac{1}{2}n(n-1)$	$\{e_i - e_j ; i \neq j\}$
$B_n$	$n^2$	$\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j ; i \neq j\}$
$C_n$	$n^2$	$\{\pm 2e_i, \pm e_i \pm e_j ; i \neq j\}$
$D_n$	$n(n-1)$	$\{\pm e_i \pm e_j ; i \neq j\}$
$E_8$	120	$\{\pm e_i \pm e_j ; i \neq j, \frac{1}{2} \sum_i e_i^{m(i)} ; m(i) \in \{0, 1\}\}$
$E_7$	63	Teil von $E_8$ , der $\perp (e_7 + e_8)$
$E_6$	36	Teil von $E_8$ , der $\perp (e_6 + e_7 - e_8)$
$F_4$	24	$\{\pm e_i, \pm e_i \pm e_j\} ; i \neq j, \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}$
$G_2$	6	$\{e_i - e_j ; i \neq j, \pm(2e_i - e_j - e_k) ; i \neq j \neq k\}$

Tabelle 4.1: Einfache Wurzelsysteme

Die letzten fünf Typen, die nicht für beliebige Dimensionen existieren bezeichnet man auch mit dem Terminus *Exzeptionelle Wurzelsysteme*. Die ersten vier

Typen werden als die *Klassischen Wurzelsysteme* bezeichnet. Bei diesen kristallographischen Wurzelsysteme fallen zwei Eigenschaften ins Auge:

- Es treten maximal zwei verschiedene Längen der Wurzeln auf.
- Als Winkel zwischen den Wurzeln tauchen lediglich die Werte  $\pi/2$ ,  $\pi$ ,  $3\pi/4$  und  $5\pi/6$  auf.

Da diese Informationen über Wurzelsysteme für das Verständnis der weiteren Konstruktionen vollkommen ausreichen, soll hier nicht tiefer in die Materie der Wurzelsysteme eingedrungen werden, wo dann Begriffe wie Weyl-Kammern, maximale Wurzeln und Dynkin-Diagramme ihren Ursprung haben. Es soll jedoch kurz die Verbindung dieser Theorie zu einem weiteren, für die Physik sehr bedeutsamen Gebiet der Mathematik angedeutet werden, nämlich der Theorie der halbeinfachen Lie-Algebren.

#### 4.1.2 Halbeinfache Lie-Algebren

Die Bezeichnung Lie-Algebra geht auf den norwegischen Mathematiker Marius Sophus Lie zurück, der um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert wirkte. Sein Hauptinteresse galt der Gruppentheorie, insbesondere den kontinuierlichen, parameterabhängigen Gruppen, die nach ihm Lie-Gruppen benannt wurden. Die Theorie der Lie-Algebren beschäftigt sich mit den Generatoren solcher Gruppen, durch welche die Gruppe eindeutig bestimmt ist. Diese besitzen die folgenden, eine Lie-Algebra definierenden Eigenschaften:

**Def.: (Lie-Algebra)**

Sei  $g$  ein  $K$ -Vektorraum zusammen mit einer bilinearen Abbildung  $[\cdot, \cdot] : g \times g \rightarrow g$ , so daß

- (i)  $[x, x] = 0 \quad \forall x \in g$  Antisymmetrie
- (ii)  $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \quad \forall x, y, z \in g$  Jacobi-Identität

Die Abbildung  $[\cdot, \cdot]$  heißt *Lie-Klammer*.

Durch Einführen einer Basis  $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$  des Vektorraumes  $g$  läßt sich die Lie-Klammer auch durch die sogenannten *Strukturkonstanten*, die sich als Komponenten der Kommutatoren der Basisvektoren ergeben, eindeutig festlegen. Die Schreibweise ist dann die folgende:

$$[T^a, T^b] = f^ab_c T^c,$$

wobei über den Index  $c$  summiert wird.

Eine von ihrer Struktur her besonders gut zu fassende, in ihren Resultaten jedoch sehr fruchtbare Klasse von Lie-Algebren ist die der *halbeinfachen* Lie-Algebren. Um den Begriff der Halbeinfachheit einführen zu können, bedarf es einiger vorbereitender Definitionen.

**Def.: (Ideal)**

Das Ideal einer Lie-Algebra ist ein Untervektorraum, der unter Kommutation mit Elementen der Lie-Algebra in sich selbst abbildet:

$$\begin{aligned} u + v &\in h \quad \forall u, v \in h \subset g \\ \alpha v &\in h \quad \forall v \in h, \alpha \in K \\ [u, x] &\in h \quad \forall u \in h, x \in g \end{aligned}$$

Der Vektorraum  $h$  mit der Lie-Klammer  $[\cdot, \cdot]$  heißt *Ideal* von  $g$ .

Der Begriff des Ideals lehnt sich an den der Ringtheorie an, in welcher eine unter Addition abgeschlossene Teilmenge, für die die Multiplikation mit beliebigen Elementen des Ringes wieder in sich selbst führt, als Ideal bezeichnet wird.

Eine weitere wichtige Definition ist die der Ableitung.

**Def.: (Abgeleitete Lie-Algebra)**

Die abgeleitete Lie-Algebra ist die Lie-Algebra, die von sämtlichen Kommutatoren einer Lie-Algebra aufgespannt wird. Man schreibt dafür auch:

$$g' := [g, g],$$

wobei mit  $[g, g]$  die Menge  $[x, y] \mid x, y \in g$  gemeint ist.

Der Begriff *Ableitung* begründet sich mit der Tatsache, daß die Lie-Klammer die Derivationseigenschaft besitzt.

Mit diesen Definitionen kann man nun die Einfachheit einer Lie-Algebra fassen:

**Def.: (Einfache Lie-Algebra)**

Sei  $g$  eine Lie-Algebra. Gilt dann

- (i)  $g' \neq \emptyset$
- (ii)  $g$  besitzt außer sich selbst und der leeren Menge keine weiteren Ideale,

so heißt  $g$  *einfach*.

**Def.: (Halbeinfachheit)**

Läßt sich eine Lie-Algebra  $g$  darstellen als

$$g = \bigoplus_{i \in I} g_i \quad g_i \text{ Einfache Lie-Algebren}$$

mit der Lie-Klammer

$$[\cdot, \cdot] := \sum_{i \in I} [\cdot, \cdot]_i,$$

so spricht man von einer *halbeinfachen* Lie-Algebra

Für halbeinfache Lie-Algebren besteht nun die Möglichkeit der Einführung einer der Lie-Klammer-Struktur auf dem Vektorraum besonders gut angepaßten Basis, der *Chevalley-Basis*. Diese besteht aus einer Basis der Cartan-Unteralgebra, also der maximalen Abelschen<sup>1</sup> Unteralgebra in  $g$ , und aus einer Basis des Komplementärtraumes. Eine gegebene Basis  $\{H_i \mid i = 1 \dots r\}$  der Cartan-Unteralgebra läßt sich zu einer Basis der Lie-Algebra ergänzen, die der Eigenschaft

$$[H_i, E^{\alpha^{(k)}}] = \alpha_i^{(k)} E^{\alpha^{(k)}} \quad i = 1 \dots r$$

genügt.

Die so definierte, nicht eindeutige Basis trägt den Namen *Cartan-Weyl Basis*. In der Sprache der Darstellungstheorie sind die die Basis vervollständigenden Vektoren Eigenvektoren der adjungierten Darstellung der Cartan-Unteralgebra. Die sich aus den Eigenwerten konstituierenden, die Basis indizierenden Vektoren  $\alpha$  besitzen nun die Eigenschaften eines Wurzelsystems. Daraus folgt zum Beispiel sofort, daß neben dem Vektor  $E^\alpha$  auch der Vektor  $E^{-\alpha}$  ein Element der Basis ist. Diese Paare werden auch Auf- beziehungsweise Absteigeoperatoren genannt, was seine Begründung in der Darstellungstheorie findet. Von eine Behandlung derselben wird hier aus Platzgründen abgesehen, zumal sie für das Verständnis der weiteren Darstellung nicht notwendig ist.

Aus der Cartan-Weyl Basis läßt sich nun die für die mathematische Behandlung von Lie-Algebren geeignetste Basis, die *Chevalley-Basis*, konstruieren.

**Def.: (Chevalley-Basis)**

Für eine halbeinfache Lie-Algebra existiert eine Basis  $\{H_i \mid i = 1 \dots r\} \cup \{E^\alpha \mid \alpha \in \phi\}$  mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} [E^\alpha, E^{-\alpha}] &= H^\alpha \\ [H^\alpha, H^\beta] &= 0 \\ [H^\alpha, E^{\pm\alpha}] &= \pm 2E^{\pm\alpha} . \end{aligned}$$

Die Chevalley Basis geht aus der Cartan-Weyl Basis durch Wechsel der Basis der Cartan-Unteralgebra via  $H^\alpha := \sum_i \frac{2\alpha_i}{(\alpha, \alpha)} H_i$  hervor.

Da die Eigenschaften der Lie-Algebren durch die Kommutatoren festgelegt sind, lassen sich halbeinfache Lie-Algebren somit durch Wurzelsysteme klassifizieren.

### 4.1.3 Die Weyl-Gruppe

Eng verbunden mit Wurzelsystemen ist die Weyl-Gruppe. Sie ist die bei Komposition aus den Spiegelungen bezüglich Wurzeln erzeugte Gruppe:

<sup>1</sup>Niels Henrik Abel, norwegischer Mathematiker (1802–1829). Arbeiten im Bereich der Algebra, über elliptische Funktionen und Potenzreihen.

**Def.: (Weyl-Gruppe)**

Sei  $R \subset E$  ein Wurzelsystem in einem euklidischen Vektorraum. Dann nennt man die von den Spiegelungen erzeugte Gruppe

$$W := \text{comp} \{s_\alpha \mid \alpha \in R\}$$

mit Komposition durch Hintereinanderschaltung von Spiegelungen die *Weyl-Gruppe* des Wurzelsystemes  $R$ . Oft schreibt man auch  $W(R)$ .

Die Weyl-Gruppe zu endlichen Wurzelsystemen ist eine endliche Gruppe.

Als Beispiel für ein Wurzelsystem sei hier das im folgenden noch Verwendung findende System  $A_n$  näher untersucht.

Das Wurzelsystem  $A_n$  ist wurde im vorigen Abschnitt angegeben. Es lautet

$$R = \{e_i - e_j; i \neq j\} \quad .$$

Die Abgeschlossenheit unter der Wirkung von  $W(A_n)$  läßt sich leicht explizit nachrechnen. Eine Teilmenge positiver Wurzeln erhält man zum Beispiel mit dem System

$$R_+ := \{e_i - e_j; j < i\} \quad .$$

Als Normalenvektor der das Wurzelsystem teilenden Hyperebene dient hier der Vektor  $a = \sum_k k e_k$ . Das Skalarprodukt mit den Wurzeln  $(a, \alpha_{ij})$  ergibt sich so zu  $i - j$ , ist also aufgrund der Bedingung  $i \neq j$  für die Wurzel  $\alpha_{ij}$  immer ungleich 0. Die Positivitätsbedingung  $(a, \alpha_{ij}) > 0$  verlangt, daß  $i > j$  gelten muß.

Die Weyl-Gruppe der  $A_n$  hat eine überraschend einfache Form. Die zur Wurzel  $\alpha_{ij} = e_i - e_j$  gehörige Spiegelung wirkt nämlich auf einen Vektor  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  wie folgt:

$$\begin{aligned} s_{\alpha_{ij}}(x) &= x - (e_i - e_j, x) (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{-1}_j, 0, \dots, 0) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) - (0, \dots, 0, \underbrace{x_i - x_j}_i, 0, \dots, 0, \underbrace{x_j - x_i}_j, 0, \dots, 0) \\ &= (x_1, x_2, \dots, \underbrace{x_j}_i, \dots, \underbrace{x_i}_j, \dots, x_n) \\ &= P_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad . \end{aligned}$$

Die Weyl-Gruppe der  $A_n$  ist also gerade die Permutationsgruppe  $S_n$  der Komponenten von Vektoren eines  $n$ -dimensionalen Raums. In dieser Tatsache liegt auch die Möglichkeit begründet, die Darstellungen der  $A_n$  Lie-Algebren mit Hilfe von Young-Tableaus, die der Darstellungstheorie der Permutationsgruppe  $S_n$  entstammen, zu behandeln.

Zum Abschluß dieses Abschnittes sei nun noch die Definition der als Namensgeber fungierenden Coxeter-Gruppe gegeben.

**Def.: (Coxeter–Gruppe)**

Sei  $E$  ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ ,  $E' \subset E$ . Die Gruppe  $G$  entstehe als Komposition der durch  $E'$  gegebenen Spiegelungen in  $E$ :

$$G := \text{comp} \{s_\alpha \mid \alpha \in E'\} .$$

Ist diese Gruppe endlich, so heißt sie *Coxeter–Gruppe*.

Die Weyl–Gruppen sind also durch die zusätzliche Bedingung für die Teilmenge  $E'$  ein Spezialfall der Coxeter–Gruppen. Die Vermutung, daß aufgrund der Forderung nach Endlichkeit der Gruppe jede Coxeter–Gruppe schon eine Weyl–Gruppe sei, trifft nicht zu.

## 4.2 Differential–Difference–Operatoren

Diese Abbildungen operieren auf der Algebra der Polynome mit komplexen Koeffizienten in  $N < \infty$  Variablen, für die man auch kurz  $\mathbb{C}[E]$  schreibt, wobei  $E$  ein  $N$ –dimensionaler euklidischer Vektorraum ist. Exakter wäre hier die Schreibweise  $\mathbb{C}[E^*]$ , da die Elemente  $p$  dieser Algebra ja eine Abbildung  $p : E \rightarrow \mathbb{C}$  darstellen. Aufgrund der Euklidizität von  $E$  ist jedoch die Identifizierung mit dem Dualraum kanonisch und bedarf somit keiner Ausweitung der Notation. Bei Einführen einer Orthonormalbasis  $\{e_i\}$  von  $E$  hat ein Polynom  $p \in \mathbb{C}[E]$  die Form

$$p(\cdot) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} \alpha_{i_1, i_2, \dots, i_N} (e_1, \cdot)^{i_1}, \dots, (e_N, \cdot)^{i_N} .$$

Sei  $R$  nun ein Wurzelsystem in  $E$  mit dazugehöriger Weyl–Gruppe  $W(R)$ . Dann kann man folgende, auf Polynomen  $p \in \mathbb{C}[E]$  operierende Endomorphismen einführen:

- $\omega : p(x) \mapsto \omega p(x) := p(\omega x) \quad \omega \in W(R)$
- $p(x) \mapsto \partial_\xi p(x) := \frac{d}{dt} p(x + t\xi)|_{t=0} \quad \forall \xi \in E \quad (\text{Richtungsableitung})$
- $\Delta_\alpha p(x) := \frac{p(x) - p(s_\alpha(x))}{(\alpha, x)} \quad \forall \alpha \in R$

Hiermit konstruierte Dunkl nun den folgenden Operator

$$D_\xi := \partial_\xi + \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha(\alpha, \xi) \Delta_\alpha , \tag{4.1}$$

wobei  $R_+$  eine positive Teilmenge der Wurzelsystems  $R$  darstellt und die Koeffizienten  $k_\alpha$  der Bedingung  $k_\alpha = k_{\omega(\alpha)} \quad \forall \omega \in W(R)$  genügen.

Eine wichtige, von Dunkl bewiesene Eigenschaft dieser Operatoren ist, daß sie die Gleichung

$$D_\xi D_\eta = D_\eta D_\xi \quad (4.2)$$

erfüllen, also eine kommutative Algebra erzeugen.

Dunkl untersuchte in seiner Arbeit nun Polynome im Kern des Operators

$$\Delta_h := \sum_i D_{e_i}^2 \quad (4.3)$$

mit einer Orthonormalbasis  $\{e_i\}$ , der einen Endomorphismus auf dem Raum der unter der Wirkung von  $W(R)$  invarianten Polynome darstellt. Aufgegriffen wurden die Dunkl-Operatoren von Gerrit J. Heckman im Jahre 1989 [Hec89]. Von ihm wurde eine Restriktionsabbildung eingeführt, die einen Operator  $D : \mathbb{C}[E] \rightarrow \mathbb{C}[E]$  auf den Operator  $\text{Res}(D) : \mathbb{C}^W[E] \rightarrow \mathbb{C}^W[E]$  auf  $W$ -invarianten Polynomen abbildet. Für diese restringierten Operatoren gilt dann

$$\omega \text{Res}(D) \omega^{-1} = D$$

für alle  $\omega$  aus  $W(R)$ .

Auf die Dunkl-Operatoren (4.1) wirkt diese Transformation wie folgt:

$$\omega D_\xi \omega^{-1} = D_{\omega(\xi)} . \quad (4.4)$$

Nach Heckman kommutieren nun die Restriktionen von Operatoren  $D_\pi = D_{\xi_1^{d_1} \xi_2^{d_2} \dots \xi_n^{d_n}} := D_{\xi_1}^{d_1} \cdot D_{\xi_2}^{d_2} \cdot \dots \cdot D_{\xi_n}^{d_n}$  mit unter der Wirkung von  $W$  invarianten  $\pi \in \mathbb{C}^W[E]$  paarweise.

Ein weiteres wichtiges Resultat Heckmans Arbeit ist die Konstruktion von Auf- und Absteigeoperatoren, die zwischen Operatoren mit Parametern  $k_\alpha$  und  $k_\alpha \pm 1$  vermitteln. Da die allgemeine Form dieser Operatoren eine Reihe weiterer Definitionen erfordert und hier nicht benötigt wird, sei auf die Originalarbeit von Heckman verwiesen.

Sämtliche Aussagen dieses Abschnittes gelten auch für leicht veränderte Dunkl-Operatoren

$$\nabla_\xi := \partial_\xi + \sum_{\alpha \in R_+} k_\alpha(\alpha, \xi) \frac{s_\alpha}{(\alpha, x)} , \quad (4.5)$$

die über die Transformation

$$\nabla_\xi = \prod (\alpha, x)^{-k_\alpha} D_\xi \prod (\alpha, x)^{k_\alpha} \quad (4.6)$$

mit den ursprünglichen Operatoren zusammenhängen.

Für die Beweise der obigen Aussagen sind Identitäten für aus Spiegelungen und Multiplikationen gebildete Operatoren entscheidend, welche in den beiden Arbeiten von Dunkl und Heckman in großer Zahl gefunden werden können.

In einer Arbeit von 1994 untersuchen Buchstaber, Felder und Veselov Erweiterungen der Dunkl–Operatoren, in denen der Anteil  $\frac{k_\alpha}{(\alpha, \xi)}$  in (4.5) durch Funktionen  $f(\alpha, \xi)$  ersetzt wird, so daß die Kommutatoreigenschaft (4.2) sowie die Invarianzeigenschaft (4.4) erhalten bleiben. Dies führt auf eine Funktionalgleichung, deren Lösungen von den Wurzelsystemen  $R$  abhängen. Für einfache Wurzelsysteme mit Ausnahme von  $A_1$  und  $B_2$  zeigt sich, daß sämtliche Lösungen auf den Dunkl–Operator (4.5) führen. Der Spezialfall  $B_2$  führt auf die Jacobi–elliptischen Funktionen  $sn$ , der uninteressante Fall  $A_1$  liefert selbstverständlich keine einschränkende Bedingung für die Funktion  $f(\alpha, \xi)$ .

Gibt man die Invarianzforderung (4.4) auf, so führt dies auf komplizierte, parameterabhängige Funktionen, die im Grenzübergang des Parameters gegen 0 auf die Weierstraßsche elliptische Funktion führen.

Diese Funktion sowie eine erste Anwendung der Dunkl–Operatoren auf das Calogero–Problem werden in der zweiten Hälfte des folgenden Kapitels besprochen.



## Kapitel 5

# Verallgemeinerte Calogero–Modelle

In diesem Kapitel soll das Calogero–Modell systematisch in eine allgemeinere Klasse von Modellen eingeordnet werden. Diese umfaßt das Sutherland–Modell [Sut71], in welchem die Teilchen über ein Potential der Form  $\sin^{-2}(x_i - x_j)$  interagieren sowie die von Olshanetsky und Perelomov [OP81] untersuchten Modelle, bei denen nicht sämtliche Teilchen miteinander in Wechselwirkung stehen.

Bie diesen Verallgemeinerungen spielen die Methode der Lax–Matrix sowie die Dunkl–Operatoren eine wichtige Rolle.

### 5.1 Eine spezielle Klasse von Lax–Matrizen

#### 5.1.1 Die Lax–Matrix des Calogero–Modells

Hier taucht zum ersten Mal das klassische Calogero–Modell auf. Nachdem in den Jahren 1969 bis 1975 verschiedene Modifikationen des ursprünglichen quantenmechanischen Calogero–Modelles intensiv untersucht wurden, sind erste Erkenntnisse über das klassische Analogon erst im Jahre 1975 von F. Calogero und J. Moser veröffentlicht worden. Dies liegt nicht zuletzt daran, daß die Lösungen im quantenmechanischen Falle über einen geschickten Ansatz gewonnen wurden, also mehr oder weniger auf ein systematisches Raten zurückgehen. Aus den quantenmechanischen Lösungsfunktionen lassen sich nun nicht unmittelbar Aussagen über das klassische System respektive dessen Lösungen ableiten. Entscheidend für die Fortschritte bei der Behandlung des klassischen Falles war das Auffinden der zugehörigen Lax–Matrix.

Für das klassische Calogero–Modell mit invers quadratischem Potential, also

der Hamiltonschen Funktion

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_i p_i^2 + g \sum_{j < i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \quad (5.1)$$

besitzt die Lax-Matrix die Form

$$L_{ij} = \delta_{ij} p_i + (1 - \delta_{ij}) \hat{1} \sqrt{g} \frac{1}{x_i - x_j} \quad (5.2)$$

Die zugehörige Matrix M des Lax-Paares ergibt sich zu

$$M_{ij} = \delta_{ij} \hat{1} \sqrt{g} \sum_{k \neq i} \frac{1}{(x_i - x_k)^2} - (1 - \delta_{ij}) \hat{1} \sqrt{g} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \quad .$$

Für den Kommutator  $[L, M]$  der beiden Matrizen erhält man

$$\begin{aligned} [L, M]_{ij} &= L_{ik} M_{kj} - L_{kj} M_{ik} \\ &= -\delta_{ij} 2g \sum_{k \neq i} \frac{1}{(x_k - x_i)^3} - (1 - \delta_{ij}) \hat{1} \sqrt{g} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} (p_i - p_j) \quad . \end{aligned}$$

Aus der zeitlichen Ableitung der Lax-Matrix L resultiert folgende Matrix:

$$\dot{L} = \delta_{ij} \dot{p}_i - (1 - \delta_{ij}) \hat{1} \sqrt{g} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} (\dot{x}_i - \dot{x}_j) \quad .$$

Die Lax-Gleichung  $\dot{L} = [L, M]$  liefert in Komponentenschreibweise somit das folgende System von Gleichungen:

$$\dot{p}_i = 2g \sum_{k \neq i} \frac{1}{(x_k - x_i)^3} \quad (= -\partial_i \mathcal{H}) \quad (5.3)$$

$$\dot{x}_i = p_i \quad (5.4)$$

Dies sind gerade die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen (2.2) in den kanonischen Variablen  $x_i$  und  $p_i$ . Das Calogero-Modell ist somit äquivalent durch die Lax-Matrix (5.2) gegeben. Von der Struktur her der Form (5.2) ähnliche Matrizen ergeben mit dem Calogero-Modell verwandte Systeme. Der allgemeinste Ansatz für solche Lax-Matrizen führt auf eine Funktionalgleichung, die im nächsten Abschnitt behandelt werden soll.

### 5.1.2 Funktionalgleichung für Lax-Matrizen

Die Lax-Matrix (5.2) ist von der Form

$$L_{ij} = \delta_{ij} p_i + (1 - \delta_{ij}) \hat{1} \sqrt{g} u(x_i - x_j) \quad ; \quad (5.5)$$

die Matrix M hat die Gestalt

$$M_{ij} = \delta_{ij} \hat{1} \sqrt{g} \sum_{k \neq i} v(x_i - x_k) - (1 - \delta_{ij}) \hat{1} \sqrt{g} w(x_i - x_j)$$

mit symmetrischen Funktionen  $u$  und  $w$ , sowie antisymmetrischer Funktion  $v$ . Für den Kommutator von  $L$  und  $M$  ergeben sich die folgenden Komponenten:

$$\begin{aligned} [L, M]_{ij} &= \delta_{ij} 2g \sum_{k \neq i} u(x_i - x_k) w(x_k - x_i) \\ &\quad - (1 - \delta_{ij}) \hat{1} \sqrt{g} w(x_i - x_j) (p_i - p_j) + \\ &\quad + (1 - \delta_{ij}) g u(x_i - x_j) \left\{ \sum_{k \neq j} v(x_j - x_k) - \sum_{k \neq i} v(x_i - x_k) \right\} + \\ &\quad - (1 - \delta_{ij}) g \sum_{k \neq i, j} u(x_k - x_j) w(x_i - x_k) - u(x_i - x_k) w(x_k - x_j). \end{aligned}$$

Auf der linken Seite der Lax-Gleichung verbleibt

$$\dot{L}_{ij} = \delta_{ij} \dot{p}_i + (1 - \delta_{ij}) \hat{1} \sqrt{g} u'(x_i - x_j) (\dot{x}_i - \dot{x}_j) .$$

Aus der Diagonale der Lax-Gleichung resultieren damit die  $N$  Gleichungen

$$\dot{p}_i = -2g \sum_{k \neq i} u(x_i - x_k) w(x_i - x_k) .$$

Die Nichtdiagonalelemente liefern unter der Voraussetzung, daß die Funktion  $u(r)$  reellwertig sein soll und der Identifikation  $p_i = \dot{x}_i$  die folgenden  $N(N-1)$  Gleichungen:

$$u'(x_i - x_j) = -v(x_i - x_j) \quad (5.6)$$

$$u(x_i - x_j) \sum_{k \neq i, j} \{v(x_j - x_k) - v(x_i - x_k)\} = \sum_{k \neq i, j} \{w(x_i - x_k) u(x_k - x_j) + w(x_k - x_j) u(x_i - x_k)\} \quad (5.7)$$

Das Potential des zugehörigen Hamiltonschen Systems ergibt sich dann aus

$$\partial_i V = 2g \sum_{k \neq i} u(x_i - x_k) u'(x_i - x_k) .$$

Eine Lösung dieser  $N$  Differentialgleichungen ist von der Form

$$V = g \sum_{j < i} u^2(x_i - x_j) ,$$

wobei die Antisymmetrieeigenschaft von  $u(\xi)$  wesentlich ist.

Die Gleichungen (5.6,5.7) werden sicherlich durch Funktionen  $u$  und  $v$  erfüllt, die der Funktionalgleichung

$$u(\xi + \eta) \{v(\eta) - v(\xi)\} = u(\xi) u'(\eta) - u(\eta) u'(\xi) \quad (5.8)$$

genügen. Die nichttrivialen, im Nullpunkt differenzierbaren Lösungen dieser Funktionalgleichung ergeben eine Konstante für die Funktion  $v$  sowie eine Exponentialfunktion für die Funktion  $u$ . Dies führt auf die sogenannte „Toda Gitter-Gleichung“, die auch gelegentlich im Zusammenhang mit dem Calogero-Modell

genannt wird, was hiermit eine Rechtfertigung findet. Sie genügt allerdings nicht der Symmetrieforderung für die Funktion  $u$ . Interessante Lösungen sind somit in der Klasse der im Nullpunkt nicht regulären Funktionen zu suchen.

Der einfachste Ansatz für die Funktion  $u$  hat dann die Form

$$u(\xi) = c_{-1}\xi^{-1} + c_1\xi^1 + \mathcal{O}(\xi^3) . \quad (5.9)$$

Zur Behandlung der Funktion  $u(\xi + \eta)$  ist die folgende Formel sehr nützlich:

**Satz: (Verschiebung von Laurentreihen)**

Sei  $T(x)$  eine Laurentreihe der Form  $T(x) = \sum_{i=-1}^{\infty} a_i x^i$  und bezeichne  $T^{(n)}(x)$  die  $n$ -te Ableitung dieser. Dann gilt:

$$T(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y^k T^{(k)}(x) .$$

**Bew.:**

$$\begin{aligned} \sum_{k=-1}^{\infty} a_k (x+y)^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+y)^k + a_{-1} (x+y)^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_k x^k)^{(k)}}{k!} y^k + a_{-1} x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{(a_k x^k)^{(k)}}{k!} + \frac{(a_{-1} x^{-1})^{(k)}}{k!} \right) y^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T(x)^{(k)}}{k!} y^k \end{aligned}$$

□

Dies ist lediglich die Taylorreihenentwicklung der Laurentreihe um einen nicht singulären Punkt. Vorteil dieser elementaren Vorgehensweise ist, daß man durch Verwenden der geometrischen Reihe unmittelbar den Konvergenzradius ablesen kann.

Um die Funktion  $v$  einzuschränken erweist es sich als geschickt, die Funktionalgleichung (5.8) mit  $\frac{1}{\eta-\xi}$  zu multiplizieren und den Grenzübergang  $\eta \rightarrow \xi$  durchzuführen. Es verbleibt dann folgende Funktionalgleichung:

$$u(2\xi) v'(\xi) = u(\xi) u''(\xi) - u'(\xi) u'(\xi) . \quad (5.10)$$

Geht man mit dem Ansatz (5.9) für die Funktion  $u$  in diese Gleichung, so zeigt sich, daß die Funktion  $v$  von der Form

$$v(\xi) = c_{-1}\xi^{-2} + a_0 + \mathcal{O}(\xi^2)$$

sein muß, um in niedrigster Ordnung der Gleichung (5.10) sowie den Symmetriebedingungen zu genügen. Alternativ kann man einen Laurentreihenansatz für  $v$  in die Gleichung (5.8) einsetzen und die niedrigste Ordnung in  $\eta$  betrachten. Dies wurde von Olshanetsky und Perelomov [OP81] mit demselben Resultat ausgeführt, verlangt jedoch etwas mehr Aufwand.

Mit dem obigen Satz sowie unter Ausnutzung der Formen der Funktionen  $u(\eta)$  und  $v(\eta)$  erhält man durch Vergleich in der Ordnung  $\eta^0$  für  $|\eta| \ll |\xi|$  die folgende Identität:

$$v(\xi) = -c_{-1} \frac{u''(\xi)}{2u(\xi)} + 1 .$$

Da die Funktion  $v$  aus der Funktionalgleichung lediglich bis auf ein konstantes Glied bestimmt ist, läßt sich die additive Konstante zum Verschwinden bringen, was schließlich auf die Form

$$v(\xi) := -c_{-1} \frac{u''(\xi)}{2u(\xi)} \quad (5.11)$$

führt. Damit schreibt sich die Funktionalgleichung (5.8) folgendermaßen:

$$u'(\xi)u(\eta) - u(\xi)u'(\eta) = -\frac{c_{-1}}{2} \left( \frac{u''(\xi)}{u(\xi)} - \frac{u''(\eta)}{u(\eta)} \right) u(\xi + \eta) . \quad (5.12)$$

Die allgemeinste bekannte Lösung dieser Funktionalgleichung ist nach Calogero [Ca75a] die Weierstraßsche elliptische Funktion  $\wp(\xi)$ .

### 5.1.3 Elliptische Funktionen

Die elliptischen Funktionen sind meromorphe Abbildungen von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  mit zwei Perioden  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , die über  $\mathbb{R}$  linear unabhängig sind. Es handelt sich also um doppelt periodischer Funktionen.

Die Perioden der elliptischen Funktionen bilden in der komplexen Ebene ein Parallelogramm. Die Integration über ein solches Parallelogramm verschwindet aufgrund der Periodizität identisch, so daß im Inneren dieser Gebiete die Summe der Residuen verschwinden muß. Dies bedingt durch die Überdeckung von  $\mathbb{C}$  mit solchen Parallelogrammen, daß elliptische Funktionen keine ungepaarten Pole erster Ordnung besitzen können. Dabei ist mit „gepaart“ gemeint, daß ein weiterer Pol existiert, so daß sich die Summe der Residuen zu Null addiert. Die einfachste elliptische Funktion ist somit von der Gestalt

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + h(z)$$

mit einer holomorphen Funktion  $h(z)$ .

Fordert man nun Pole an den Stellen  $\omega := m_1\omega_1 + m_2\omega_2$  mit  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ , so ist die Funktion aufgrund des Satzes von Mittag-Leffler bis auf eine Konstante

eindeutig bestimmt. Das Resultat ist die sogenannte *Weierstraßsche elliptische Funktion*,  $\wp(z)$  mit der Laurent Entwicklung

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{i \neq j} \left( \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) .$$

Es stellt sich heraus, daß die Weierstraßsche Funktion die negative Ableitung der Weierstraßschen Zeta-Funktion ist:  $\wp(z) = -\zeta'(z)$ . Die Funktion  $\wp(z)$  hängt wie folgt mit den Jacobi-elliptischen Funktionen zusammen:

$$\frac{1}{a} \wp\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot z\right) + C = \frac{cn^2(z)}{sn^2(z)} .$$

Dabei hängen die Konstanten  $a$  und  $C$  von den beiden Perioden der Weierstraßschen Funktion zusammen (siehe zum Beispiel [MOS66], S. 389).

Mit den Funktionalgleichungen für die Jacobi-elliptischen Funktionen läßt sich nun zeigen, daß dies eine Lösung der Gleichung (5.12) darstellt.

Damit erweist sich die Funktion

$$V = g^2 a^2 \sum_{i \neq j} \wp(a(x_i - x_j))$$

als Potential für ein „Calogero-Ähnliches“ System. Hier stellt sich die Frage, inwieweit das ursprüngliche Calogero-Modell einen Grenzfall dieses Systems darstellt. Diese Fragestellung führt auf Spezialfälle der Weierstraßschen elliptischen Funktion für bestimmte Werte der beiden Perioden  $\omega_1$  und  $\omega_2$ . In der Literatur [Abr65] findet sich hierzu folgendes:

$$\bullet \quad \lim_{\substack{\omega_1 \rightarrow \infty \\ \omega_2 \rightarrow i\infty}} a^2 \wp(a z) = a^2 z^{-2} \quad (5.13)$$

$$\bullet \quad \lim_{\substack{\omega_1 = \pi/2 \\ \omega_2 \rightarrow i\infty}} a^2 \wp(a z) - \frac{1}{3} = a^2 \sin^{-2}(a z) \quad (5.14)$$

$$\bullet \quad \lim_{\substack{\omega_1 \rightarrow \infty \\ \omega_2 = i\pi/2}} a^2 \wp(a z) = a^2 \sinh^{-2}(a z) \quad (5.15)$$

Hier finden sich also die von Calogero (5.13) und Sutherland (5.14) untersuchten Modelle wieder, sowie auch die häufig untersuchte Verallgemeinerung (5.15) dieser beiden, wobei (5.13) aus (5.15) als Limes  $a \rightarrow 0$  und (5.14) durch den Grenzübergang  $a \rightarrow i$  hervorgehen.

Mit der allgemeinsten Lösung, der Funktion  $\wp(z)$ , hat man aufgrund der doppelten Periodizität dieser Funktion ein „Calogero-Modell“ auf dem Torus gegeben, was die einfachste Erweiterung weg von der euklidischen Ebene darstellt und in der mathematischen Physik eine beliebtes Objekt darstellt.

Mit der Vorgehensweise dieses Abschnittes wurde ausgehend von der Lax-Matrix für das klassische Calogero-Modell dieses systematisch in eine größere Klasse von Modellen eingeordnet, deren Teilchen über ein Potential von

der Form einer Weierstraßschen Funktion wechselwirken. Diese Wechselwirkung wurde auch für den quantenmechanischen Fall untersucht und findet noch heute unter dem Namen *elliptisches Calogero–Moser–Modell* Interesse.

Die nun folgende Erweiterung geht vom quantenmechanischen Fall aus und führt auf die Möglichkeit, daß nur einige Teilchen des Systems miteinander wechselwirken.

## 5.2 Wurzelsysteme als Wechselwirkungsdiagramme

In Abschnitt 4.2 wurden die sogenannten Dunkl–Operatoren eingeführt. In diesem Zusammenhang tauchte auch der Operator (4.3) auf, ein Endomorphismus auf den unter der Wirkung der Weyl–Gruppe eines Wurzelsystems invarianten Polynomen. Konstruiert man diesen Operator analog mit den modifizierten Dunkl–Operatoren, so erhält man die Form

$$\sum_i \nabla_i^2 = \Delta + \sum_{\alpha \in R_+} \frac{(\alpha, \alpha)}{(\alpha, x)^2} k_\alpha (k_\alpha + s_\alpha) .$$

Wählt man nun als Spezialfall das Wurzelsystem  $A_n$  sowie einen konstanten Wert  $\nu$  für die  $k_\alpha$ , die der Forderung der Invarianz unter der Wirkung der Weyl–Gruppe  $W(A_n)$  genügen, so ergibt sich für die Wirkung auf  $W(A_n)$ –invariante, also nach Kapitel 4 symmetrische beziehungsweise antisymmetrische Polynome der Operator

$$\sum_i \nabla_i^2 = \Delta + \nu(\nu \pm 1) \sum_{j < i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} ,$$

also gerade der Hamilton–Operator (1.1) des quantenmechanischen Calogero–Modells aus Kapitel 1.

Die weiteren Wurzelsysteme (siehe Tabelle (4.1) in Kapitel 4) liefern nun Hamiltonians für dem Calogero–Modell verwandte Systeme. Diese wurden auch im klassischen Fall untersucht.

Für eine explizite Auflistung der untersuchten, Calogero–Ähnlichen Modelle sei auf die beiden Review–Artikel von M.A. Olshanetsky und A.M. Perelomov aus den Jahren 1981 und 1983 verwiesen [OP81, OP83]. In diesen finden die Dunkl–Operatoren selbstverständlich noch keine Verwendung, da sie erst im Jahre 1989 zum ersten Mal auftraten.



## Kapitel 6

# Erhaltungsgrößen des Calogero–Modells

Wie in den Kapiteln zwei und drei gesehen, ist die Integrabilität sowohl von klassischen als auch quantenmechanischen Systemen nicht durch die Angabe einer Lösungsfunktion beziehungsweise eines vollständigen Eigenfunktionensystem definiert. Dies würde denn auch unweigerlich auf die Frage führen, ob diese Lösungen in Termen „elementarer“ Funktionen (ein Begriff, der zuvor exakt definiert werden müßte) angegeben werden sollen oder ob man sich mit dem Beweis der Existenz einer Lösung zufrieden geben will, was die Physik als eine rein mathematische Wissenschaft identifizieren würde. Vielmehr spricht man erst dann von einem integrablen Modell, wenn ein Satz von Erhaltungsgrößen für dieses bekannt ist, deren Zahl im klassischen Fall von der Zahl der Freiheitsgrade und in der Quantenmechanik von der Entartung der Lösungen abhängt.

### 6.1 Klassische Erhaltungsgrößen

Nach dem Liouvilleschen Satz spricht man in der klassischen Mechanik dann von einem integrablen Modell, wenn ein Satz von  $n$ , im Sinne von Kapitel 2 unabhängigen, Phasenraumfunktionen zur Verfügung steht, die entlang der Phasenbahnen konstant bleiben. Dabei ist  $n$  die Zahl der Freiheitsgrade des Systems.

Bei dem Calogero–Modell handelt es sich um ein 1–Dimensionales  $N$ –Körper Problem, bei dem die Teilchen keiner weiteren Einschränkung unterliegen. Die Zahl der Freiheitsgrade ist somit mit der Teilchenzahl identisch. Da die Hamilton–Funktion selbst nicht explizit von der Zeit abhängt bleibt die Energie in diesem System konstant, so daß man lediglich  $(N - 1)$  weitere Erhaltungsgrößen auffinden muß, um die Integrabilität nachzuweisen. Mit der Lax–Matrix (5.2) und den Erkenntnissen aus Kapitel 2 steht nun eine einfache

Möglichkeit zur Verfügung, weitere erhaltene Größen zu gewinnen.

### 6.1.1 Spur der Lax-Matrix

Da die Lax-Matrix (5.2) des Calogero-Modells eine Hermitesche Matrix ist, läßt sie sich mit einer unitären Transformation diagonalisieren. Damit gilt nicht nur, daß die Größen

$$I_n := \operatorname{tr}(L^n)$$

zeitlich konstant sind, sondern auch paarweise kommutieren. Für Systeme mit Hermitescher Lax-Matrix hat man nach Kapitel 2 immer paarweise kommutierende Größen  $I_n$ . Diese Folgerung aus der Existenz einer Lax-Matrix ist noch relativ neu. Zuvor mußte der Kommutator  $\{I_n, I_m\}$  explizit berechnet werden, um das Verschwinden nachzuweisen. Eine Variante eines solchen Beweises für das Calogero-Modell sowie Verweise auf alternative Möglichkeiten finden sich in dem Review-Artikel von Olshanetsky und Perelomov [OP81]. Auf eine Variante soll im folgenden Abschnitt aufgrund der dort auftretenden interessanten Identitäten noch näher eingegangen werden. Allen diesen Beweisen ist gemein, daß man auf große rechentechnische Schwierigkeiten stößt.

Desweiteren sind die Größen  $I_n$  noch darauf zu untersuchen, inwieweit gegenseitige Abhängigkeiten auftreten oder einzelne  $I_n$  verschwinden. Die Trivialitäten sind sofort ausgeschlossen, wenn es sich bei den  $I_n$  um im Sinne des Liouvilleschen Satzes (siehe 2.1.3) unabhängige Phasenraumfunktionen handelt. Dies nachzuprüfen ist jedoch nicht praktikabel, da die aus den Spuren der Lax-Matrix gewonnenen Erhaltungsgrößen durch das Potenzieren der Matrix  $L$  sehr schnell eine sehr komplexe Form annehmen und so die Mannigfaltigkeit  $M_f$  nicht angegeben werden kann.

Es sei hier auf die Aussage bei Olshanetsky und Perelomov verwiesen, wonach sich die  $I_n$  nicht als Polynome der Erhaltungsgrößen niedrigerer Ordnung darstellen lassen. Dies liegt daran, daß die Spuren der Potenzen von  $L$  symmetrische Polynome in den Impulsen  $p_i$  von der Ordnung des Exponenten von  $L$  sind. Dadurch ist allerdings nicht sichergestellt, daß keine trivialen Integrale  $I_n = 0$  erzeugt werden. Ebenfalls nicht ausgeschlossen ist der Fall, in einem Punkt von  $M_f$  lineare Abhängigkeit zu erhalten.

Die Integrabilität im Liouvilleschen Sinne ist daher bis heute nicht streng bewiesen.

Von der Folge bekannter Erhaltungsgrößen möchte ich hier zumindest die ersten Glieder angeben.

Die Größe  $I_1$  ergibt sich als Spur der Lax-Matrix  $L$  zum Gesamtimpuls des Systems. Die Erhaltung dieses Impulses läßt sich auch unmittelbar aus der Hamilton-Funktion ablesen, da diese translationsinvariant ist.

Die zweite Erhaltungsgröße  $I_2$  berechnet sich zu folgendem Wert:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(L^2) &= \sum_{i,j} (\delta_{ij} p_i + (1 - \delta_{ij}) \hat{1} \sqrt{g} \frac{1}{x_i - x_j}) (\delta_{ij} p_i - (1 - \delta_{ij}) \hat{1} \sqrt{g} \frac{1}{x_i - x_j}) \\
&= \sum_i p_i^2 + g \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \\
&= 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \sum_i p_i^2 + g \sum_{j < i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \right) \\
&= 2 \mathcal{H}_{\text{Cal}} = 2E .
\end{aligned}$$

Dies ist gerade die, wie oben erwähnt, erhaltene Energie des Systems.

Die folgenden Erhaltungsgrößen gestatten keine derart einfache Interpretation. Die Größe  $I_3$  sei hier der Vollständigkeit halber noch angegeben:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \sum_i p_i^3 + 3g \sum_{i \neq j} p_i \frac{1}{(x_i - x_j)^2} + \\
&\quad - \hat{1} g^{3/2} \sum_{\substack{i \neq j \neq k \\ i \neq k}} \frac{1}{(x_i - x_j)(x_j - x_k)(x_k - x_i)}
\end{aligned}$$

Für das Calogero-Modell taucht in dieser Folge kein verschwindendes Glied auf. Für Calogero-Ähnliche Modelle wurde jedoch gezeigt, daß Nullfunktionen als Erhaltungsgrößen auftreten können. Sollte also ein strenger Beweis der vollständigen Integrabilität für das Calogero-Modell gelingen, so ist zu erwarten, daß sich dieser nicht sofort auf sämtliche Calogero-Ähnlichen Modelle übertragen läßt.

Im folgenden Abschnitt wird eine Linearkombination der Erhaltungsgrößen  $I_n$  untersucht, die beim Beweis der simultanen Kommutativität eine Rolle spielen.

### 6.1.2 Charakteristisches Polynom der Lax-Matrix

Im Jahre 1975 untersuchten Sawada und Kotera [SK75] die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms  $\chi_L(x) = \sum_i x^{N-i} J_i$  der Lax-Matrix (5.2). Sie gingen dabei von der Darstellung

$$J_k = \exp \left\{ -\frac{1}{2} g \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2} \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial p_j} \right\} \prod_{i=1}^k p_i \quad (6.1)$$

nach Newton aus. Dabei ist die Exponentialfunktion aus der Sicht der Quantenfeldtheorie ein Normalordnungsoperator. In diesem Fall ist die Normalordnung bezüglich der Matrix  $M$  des Lax-Paares mit herausgenommener Diagonale gebildet.

Ich möchte hier eine alternative Darstellung einführen, die den Zusammenhang der Größen  $J_k$  mit den Integralen  $I_n$  unmittelbar deutlich macht. Hierzu entwickeln wir das charakteristische Polynom in folgender Weise:

$$\begin{aligned}
\chi_L(x) &= \det(xE - L) = x^N \det(E - x^{-1}L) \\
&= x^N \exp \left\{ \operatorname{tr} [\ln(E - x^{-1}L)] \right\} \\
&\stackrel{(*)}{=} x^N \exp \left\{ \operatorname{tr} \left[ - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} L^i \right] \right\} \\
&= x^N \prod_{i=1}^{\infty} \exp \left[ - \frac{x^i}{i} \operatorname{tr}(L^i) \right] \\
&= x^N \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{-i \cdot j}}{j!} [\operatorname{tr}(L^i)]^j \\
&= \sum_{k=0}^{N \text{ bzw. } \infty} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ \sum_i i m_i = k}} x^{N-k} \prod_{i=1}^k (-1)^{m_i} \frac{1}{i^{m_i} m_i!} [\operatorname{tr}(L^i)]^{m_i} \\
&=: \sum_{k=0}^N J_k x^{N-k} .
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Diese Entwicklung hat aufgrund des Schrittes (\*) zunächst nur Gültigkeit, wenn die Bedingung  $\|x^{-1}L\| < 1$  erfüllt ist. Mit der Supremumsnorm ist diese Bedingung gleichbedeutend mit

$$|x| > \max\{L_{ij} \mid i, j = 1 \dots N\} .$$

Für  $x$ , die dieser Forderung genügen, bricht nun die Summe über  $k$  in (6.2) bei  $k=N$  ab. Alle weiteren Summanden verschwinden identisch. Da diese Identität somit für eine offene Teilmenge in  $\mathbb{C}$  gilt, ist sie nach dem Identitätssatz für Polynome schon auf ganz  $\mathbb{C}$  erfüllt.

Die Formel (6.2) stellt demnach das charakteristische Polynom einer beliebigen Matrix  $L$  mit komplexwertigen Einträgen, also auch komplexwertigen Funktionen dar. Für jede solche Matrix bricht die Summe über  $k$  ab.

Eine direkte Herleitung ausgehend von der Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_i a_{i \sigma(i)} \tag{6.3}$$

für die Determinante ist mir bisher nicht gelungen. Dennoch möchte ich hier kurz die Ansätze darstellen, nicht zuletzt, da diese auf eine Darstellung der Spur von Potenzen Matrizen führt, die eventuell für andere Bereiche der Physik wie die statistische Physik interessant sein könnte. Ausgangspunkt der Rechnungen sind die folgenden drei Formeln:

- $(1 - A^n) = - \prod_{i=1}^n (A - \exp(2\pi i \frac{i}{n}))$

- $\prod_{i=1}^N (a_i + b_i) = \sum_{\sigma \in S_N} \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!(N-i)!} \prod_{k=1}^i a_{\sigma(k)} \prod_{k=i+1}^N b_{\sigma(k)}$
- $\text{tr}(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ 1 - \det(E - \varepsilon A) \}$

Aus diesen läßt sich die folgende Darstellung gewinnen:

$$\begin{aligned} \text{tr}(L^n) &= (-1)^{N+1} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_n \\ \sum m_i = n \\ m_i < N \forall i}} \prod_{i=1}^n \frac{\exp(2\pi i \frac{N-m_i}{n} i)}{m_i! \cdot (N-m_i)!} \sum_{\sigma, \sigma'} \text{sgn}(\sigma) \cdot \\ &\cdot \prod_{j=1}^{m_i} L_{\sigma(j), \sigma'(j)} \prod_{j=m_i+1}^N \delta_{\sigma(j), \sigma'(j)} \end{aligned}$$

Das Einsetzen dieser Formel in die Darstellung (6.2) erbrachte bisher jedoch keine wesentliche Annäherung an die aus der Leibniz-Darstellung gewonnene Form.

Für die Determinante ergibt sich aus der Darstellung (6.2) folgende Darstellung:

$$\det(A) = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ \sum_i i m_i = N}} \prod_{i=1}^N (-1)^{m_i} \frac{1}{i^{m_i} m_i!} [\text{tr}(L^i)]^{m_i} . \quad (6.4)$$

Mit der Darstellung (6.2) kann man nun folgenden interessanten Zusammenhang für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms einer Matrix  $A$  zeigen:

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial J_k}{\partial A_{ii}} = -N(N-k+1) J_{k-1} . \quad (6.5)$$

Der Beweis hierzu findet sich in Anhang C.

Dies bedeutet für die Lax-Matrix des Calogero-Modells, daß folgende Relation erfüllt ist:

$$\left\{ \sum_i x_i, J_k \right\} = N(N-k+1) J_{k-1} . \quad (6.6)$$

Da die Matrix  $L$  ausschließlich translationsinvariante Einträge besitzt, folgt, daß auch die  $J_k$  translationsinvariante Größen sind. Es gilt somit:

$$\{ J_k, \sum_i p_i \} = 0 .$$

Die Summe über die  $p_i$  läßt sich alternativ als die Poisson-Klammer

$$\{ \mathcal{H}_{\text{Cal}}, \sum_i x_i \} = \sum_i p_i$$

schreiben. Mit der Jacobi-Identität folgt nun bei Verschwinden der Poisson-Klammer von  $\mathcal{H}_{\text{Cal}}$  mit einem  $J_n$  sofort, daß auch sämtliche  $J_k$  mit  $k < n$  erhaltene Größen sind. In diesen frühen Veröffentlichungen war nun also zu zeigen, daß die Determinante von  $L$  erhalten ist. Hierzu wurde mit Symmetrieargumenten unter Verwendung der Leibniz-Formel für die Determinante argumentiert. Nicht klar war dann jedoch das Kommutieren der  $J_k$  untereinander.

Mit der Darstellung (6.2) sowie der Kenntnis, daß die Spuren der Potenzen von  $L$  kommutieren, sind diese beiden Probleme bereits gelöst.

### 6.1.3 Die $r$ -Matrix des Calogero-Modells

In Kapitel 2 wurde eine Konstruktionsvorschrift für die Matrix  $r$  angegeben (2.14). Diese setzt sich aus der Diagonalmatrix  $\Lambda$  der Eigenwerte von  $L$  sowie dem  $L$  diagonalisierenden Isomorphismus  $S$  sowie den Fadeev-Klammern zwischen  $S$  und  $\Lambda$  und  $S$  und  $S$  zusammen. Die Definitionen seien hier zur Erinnerung nochmals angegeben:

$$\begin{aligned} q &:= (S^{-1} \otimes S^{-1})\{S \otimes \Lambda\}(1 \otimes S) \\ k &:= (S^{-1} \otimes S^{-1})\{S \otimes S\} \\ a &:= -q + \frac{1}{2}[k, 1 \otimes L] \\ b &:= PqP + \frac{1}{2}[k, L \otimes 1] \\ r &:= \frac{1}{2}(a - PbP) . \end{aligned}$$

Diese Konstruktion liefert nun im allgemeinen keine antisymmetrische Matrix  $r$ , wie sie in der Theorie der klassischen  $r$ -Matrizen auftritt. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die  $r$ -Matrix des Calogero-Modells näher zu untersuchen und so zu überprüfen, inwieweit es sich bei diesem Modell um ein integrables Modell handelt, das nicht durch die Theorie der klassischen  $r$ -Matrizen erfaßt wird.

Die Berechnung der  $r$ -Matrix für das Calogero-Modell wird durch die Tatsache, daß die Lax-Matrix (5.2) eine Hermitesche Matrix ist, stark vereinfacht. Für diese Art von Matrizen sind gangbare Wege zur Berechnung der diagonalisierenden Abbildung  $S$  aus der linearen Algebra bekannt.

Für den Fall zweier Teilchen, also einer  $2 \times 2$ -Lax-Matrix läßt sich dies mit EDV-Unterstützung leicht durchführen. Für die Matrix  $a$  aus (2.14) ergibt sich folgende Gestalt:

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

mit reellwertigen rationalen Phasenraumfunktionen  $\alpha$  und  $\beta$ , die in Anhang D angegeben sind.

Auffällig bei der Berechnung ist zum einen, daß die Matrix  $a$  ein einfaches Element des Tensorproduktes ist, was aufgrund der Verwendung der Fadeev-Klammer bei der Konstruktion dieser nicht selbstverständlich ist. Entscheidend hierfür ist das Verschwinden der Klammer  $\{S \otimes S\}$  für die unitäre Transformation  $S$ . Interessant ist hier die Frage, für welche Klasse von Lax-Matrizen dies gilt. Unmittelbare Folge des Verschwindens der Fadeev-Klammer von  $S$  und  $S$  ist aufgrund des Verschwindens von  $k$ , daß die Matrix  $a$  bereits die gesuchte Matrix  $r$  aus (2.12) ist.

Im Fall des 3-Teilchen Calogero-Modells ist die Berechnung der Matrix  $r$  mit Programmen zur Computer-Algebra nicht mehr durchführbar, da dieses Problem auf das Diagonalisieren einer beliebigen Hermiteschen Matrix führt. Hier müssen von Hand einige Vorbereitungen getroffen werden. Die Lax-Matrix hat in diesem Fall die Gestalt

$$L = \begin{pmatrix} p_1 & \frac{i\sqrt{g}}{x_1-x_2} & \frac{i\sqrt{g}}{x_1-x_3} \\ \frac{i\sqrt{g}}{x_2-x_1} & p_2 & \frac{i\sqrt{g}}{x_2-x_3} \\ \frac{i\sqrt{g}}{x_3-x_1} & \frac{i\sqrt{g}}{x_3-x_2} & p_3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix hat die Form

$$\chi_L = x^3 + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_2 &= -p_1 - p_2 - p_3 \\ c_1 &= p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 + \frac{g}{(x_1-x_2)^2} + \frac{g}{(x_1-x_3)^2} + \frac{g}{(x_2-x_3)^2} \\ c_0 &= -g \left( \frac{p_3}{(x_1-x_2)^2} + \frac{p_2}{(x_1-x_3)^2} + \frac{p_1}{(x_2-x_3)^2} \right). \end{aligned}$$

Unter der Annahme paarweise verschiedener Eigenwerte, was aufgrund der stetigen Abhängigkeit der Eigenwerte von den Variablen  $\{p_i, x_i\}$  bis auf Mengen vom Maß 0 im Lebesgueschen Sinne zutrifft, sind die Eigenvektoren als Funktionen der Eigenwerte  $\lambda_i$  von der Gestalt

$$e(\lambda_i) = \begin{pmatrix} -g(p_1 - \lambda_i)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) - i\sqrt{g}(p_1 - \lambda_i)(p_2 - \lambda_i)(x_1 - x_2)^2 \\ -g(p_1 - \lambda_i)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3) - i\sqrt{g}(p_1 - \lambda_i)^2(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3) \\ (p_1 - \lambda_i)^2(p_2 - \lambda_i)(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) + g(p_1 - \lambda_i)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \end{pmatrix}$$

Setzt man hier die Eigenwerte  $\lambda_i$  ein, so konnte ich die auftretenden Objekte mit den zur Zeit der Entstehung dieser Arbeit auf dem Markt befindlichen Paketen zur symbolischen Manipulation algebraischer Ausdrücke nicht mehr handhaben. Es war mir daher nicht möglich, die Eigenvektoren zu normieren, daraus die Matrix  $S$  zu konstruieren und die Fadeev-Klammern rechnergestützt zu erhalten. Eine Möglichkeit, mit diesem Ausdruck für die Eigenvektoren weiterzuarbeiten besteht nun darin, das charakteristische Polynom auszunutzen. Aus der Ableitung von  $\chi_L$  nach einer Variablen  $\xi$  erhält man

$$\partial_\xi \lambda_i = -\frac{\lambda_i^2 \partial_\xi c_2 + \lambda_i \partial_\xi c_1 + \partial_\xi c_0}{3\lambda_i^2 + 2c_2 \lambda_i + c_1}. \quad (6.7)$$

Setzt man nun für die Länge der Eigenvektoren  $e(\lambda_i)$  die Funktion  $l(\lambda_i)$  ein und nutzt die Derivationseigenschaft der Poisson-Klammer aus, so schreibt sich die Klammer  $\{S_{ij}, S_{kl}\}$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \{S_{ij}, S_{kl}\} &= \frac{1}{l(\lambda_j)l(\lambda_l)} \left[ \{e_i(\lambda_j), e_k(\lambda_l)\} + \frac{e_i(\lambda_j)e_k(\lambda_l)}{l^2(\lambda_j)l^2(\lambda_l)} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \sum_{\alpha, \beta} e_\alpha(\lambda_j)e_\beta(\lambda_l) \{e_\alpha(\lambda_j), e_\beta(\lambda_l)\} + \\ &\quad - \frac{e_i(\lambda_j)}{l^2(\lambda_j)} \cdot \sum_{\alpha} e_\alpha(\lambda_j) \{e_\alpha(\lambda_j), e_k(\lambda_l)\} + \\ &\quad \left. - \frac{e_k(\lambda_l)}{l^2(\lambda_l)} \cdot \sum_{\alpha} e_\alpha(\lambda_l) \{e_i(\lambda_j), e_\alpha(\lambda_l)\} \right]. \end{aligned}$$

Für den Kommutator  $\{S_{ij}, \Lambda_u\}$  leitet man analog folgenden Ausdruck her:

$$\begin{aligned} \{S_{ij}, \Lambda_u\} &= \frac{1}{l(\lambda_j)} \left[ \{e_i(\lambda_j), \lambda_l\} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{e_i(\lambda_j)}{l^2(\lambda_j)} \cdot \sum_{\alpha} e_\alpha(\lambda_j) \{e_\alpha(\lambda_j), \lambda_l\} \right]. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Ableitungen der Eigenwerte (6.7) ergeben sich für die Einträge der Matrix  $\{S \otimes S\}$  Funktionen, die für eine Vereinfachung durch das Programm Maple noch zu komplex sind.

Aus diesem Grund ist mir die Berechnung der  $r$ -Matrix des 3-Teilchen Calogero-Modells bisher nicht gelungen.

## 6.2 Quantenmechanische Erhaltungsgrößen

### 6.2.1 Zu klassischen Erhaltungsgrößen korrespondierende Operatoren

Die einfachste Möglichkeit, quantenmechanische Erhaltungsgrößen zu gewinnen, besteht darin, in den klassischen Erhaltungsgrößen die Variablen durch die korrespondierenden Operatoren zu ersetzen und zu überprüfen, inwieweit sich daraus ein Satz kommutierender Operatoren ergibt.

Ersetzt man in der Lax-Matrix (5.2) den Impuls durch die partielle Ableitung, so fällt auf, daß die Matricelemente aus verschiedenen Zeilen und Spalten, also die  $L_{ij}$  und  $L_{kl}$  mit  $i \neq k$  und  $j \neq l$  miteinander kommutieren. Eine wichtige Folgerung daraus ist die Wohldefiniertheit der Determinante von  $L$ , da es aufgrund dieser Vertauschungseigenschaft bei Verwendung der Leibniz-Formel (6.3) zu keinen Anordnungsproblemen innerhalb der einzelnen Produkte kommt.

Die Identität (6.6) für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms läßt sich vollkommen analog dem klassischen Fall zeigen. Hier tritt jedoch das Problem auf, daß man die Anordnung der Faktoren beachten muß, da das Kommutieren der Spuren  $\text{tr}(\hat{L}^n)$  und  $\text{tr}(\hat{L}^m)$  nicht trivialerweise gegeben ist. Da jedoch die Determinante auch im quantenmechanischen Fall nach obiger Bemerkung wohldefiniert ist, sind auch die operatorwertigen Koeffizienten des charakteristischen Polynoms in eindeutiger Weise als Summen von Produkten kommutierender Operatoren festgelegt. Dies zeigt, daß die Potenzen von Spuren auch als Operatoren kommutieren und desweiteren, aufgrund des Kommutierens der in den Summanden auftretenden Faktoren, wohldefiniert sind.

Der aus der Lax–Matrix erhaltene Satz unter der Poisson–Klammer kommutierender Erhaltungsgrößen läßt sich somit unmittelbar in einen System paarweise kommutierender Erhaltungsgrößen des quantenmechanischen Calogero–Modells durch korrespondenzmäßiges Ersetzen der Variablen überführen.

Dabei erhält man als Erhaltungsgröße  $I_1$  den Gesamtimpuls des Systems und als  $I_2$  den Hamilton–Operator (1.1).

### 6.2.2 Erhaltungsgrößen aus den Dunkl–Operatoren

Nach der Bemerkung bei Heckman ergibt sich aus den Restriktionen gewisser Produkte von Dunkl–Operatoren ein Satz kommutierender Operatoren, zu denen auch der Hamilton–Operator (1.1) gehört. Die entstehenden Operatoren sind von der Ordnung der Summe der Exponenten in den Impulsoperatoren, so daß sich hier die Frage nach einem Zusammenhang mit den aus Spuren von Potenzen der Lax–Matrix gebildeten Erhaltungsgrößen stellt. Da wir jedoch keine explizite Form der Restriktionsabbildung zur Verfügung hatten und auch bei Vernachlässigen dieser keinen einfachen Zusammenhang zwischen den Operatoren  $\text{tr}(L^n)$  und  $\sum_i \nabla_i^n$  finden konnten, kann hier kein Isomorphismus zwischen diesen Größen angegeben werden.



*Jedes Stück Materie kann gleichsam als ein Garten voller Pflanzen oder als ein Teich voller Fische aufgefaßt werden. Aber jeder Zweig der Pflanze, jedes Glied des Tieres, jeder Tropfen seiner Säfte ist wieder ein solcher Garten und ein solcher Teich.*

(Leibniz)

## Kapitel 7

# Beziehungen zu anderen Modellen

### 7.1 Die Knizhnik–Zamolodchikov–Gleichung der konformen Feldtheorie

Die Knizhnik–Zamolodchikov–Gleichung, im folgenden kurz KZ–Gleichung genannt, spielt eine Rolle in der Darstellungstheorie affiner Lie–Algebren, einer unendlichdimensionalen Erweiterung der Theorie der Lie–Algebren. Dies ist der Hauptgrund für das Auftauchen der KZ–Gleichung in der konformen Feldtheorie, die sich mit Feldern befaßt, die neben der Poincaré–Invarianz auch eine konforme Invarianz aufweisen. Lösungen der KZ–Gleichungen sind in diesen Theorien gerade die  $N$ –Punkt Funktionen.

In der Theorie der Quantengruppen gewinnt man über die Monodromien von mit universellen R–Matrizen verknüpfte KZ–Gleichungen Darstellungen. Näheres hierzu findet man bei [Fu92] und [CP94].

Die KZ–Gleichung zu einer klassischen  $r$ –Matrix ist von der Form

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N r_{ij}(z_i - z_j)(f), \quad i = 1 \dots N. \quad (7.1)$$

Dabei ist  $r(z)$  eine holomorphe Abbildung von  $\mathbb{C}$  in die universelle Einhüllende  $U(g)$  einer Lie–Algebra  $g$ . Sind  $\rho_1, \dots, \rho_N$  Darstellungen von  $g$  auf Vektorräumen  $V_1, \dots, V_N$ , dann operiert  $r_{ij}(z_i - z_j)$  auf dem Tensorprodukt  $V_1 \otimes \dots \otimes V_m$  über die Darstellungen  $\rho_i(r(z_i - z_j))$  und  $\rho_j(r(z_i - z_j))$  auf den Komponenten  $V_i$  und  $V_j$ , sowie als Identität auf den restlichen Komponenten. Die Funktion  $f$  ist eine Abbildung von  $\mathcal{D}_N(\mathbb{C}) := \mathbb{C}^N \setminus \{v \in \mathbb{C}^N \mid \exists (i, j) \text{ mit } v_i = v_j\}$  nach

$V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_N$ . Genügt die Matrix  $r$  der klassischen Yang–Baxter Gleichung, so wird durch die 1–Form  $\Gamma^r$  auf  $\mathcal{D}_N$  mit

$$\Gamma^r = \sum_{j < i} r_{ij}(z_i - z_j)(dz_i - dz_j)$$

ein flacher Zusammenhang gegeben. Wählt man als  $r$ –Matrix die Abbildung

$$r(z_i - z_j) = \frac{t}{z_i - z_j}$$

mit einer  $g$ –invarianten, symmetrischen Funktion  $t$  aus  $g \times g$ , so ergibt sich für die KZ–Gleichung folgende Form:

$$\partial_i f = k \sum_{j \neq i} \frac{(\rho_i \otimes \rho_j)(t)}{z_i - z_j}(f) .$$

Von A. Matsuo und I.V. Cherednik wurde die folgende, der Knizhnik–Zamolodchikov ähnliche Differentialgleichung untersucht:

$$\partial_i f = \left( k \sum_{j \neq i} \frac{P^{(ij)}}{z_i - z_j} + \lambda^{(i)} \right) f . \quad (7.2)$$

Dabei sind die Darstellungen so gewählt, daß  $V_i = V_j = V \forall i, j$  gilt. Die Operatoren  $P^{(ij)}$  wirken durch Vertauschung der  $i$ ten und der  $j$ ten Komponente des Tensorproduktes. Die Abbildung  $\lambda^{(i)}$  operiert auf der  $i$ ten Komponente als Multiplikation mit der Diagonalmatrix  $\Lambda$  mit paarweise verschiedenen Einträgen, ansonsten als Identität.

Auf Lösungen dieser Gleichungen, die von der Form

$$f = \sum_{\sigma \in S_N} f_\sigma e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(N)} \quad (7.3)$$

sind, wirken die Abbildungen in der KZ–Gleichungen wie folgt:

$$P^{(ij)} f_\sigma = f_{\sigma \circ P_{ij}} \quad (7.4a)$$

$$\lambda^{(i)} f = \sum_{\sigma \in S_N} \Lambda_{\sigma(i) \sigma(i)} f_\sigma e_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(N)} . \quad (7.4b)$$

Zur Bestimmung der  $f_\sigma$  ergeben sich daraus die Differentialgleichungen

$$\partial_i f_\sigma = k \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} f_{\sigma \circ P_{ij}} + \Lambda_{\sigma(i) \sigma(i)} f_\sigma . \quad (7.5)$$

Für die Lösungen (7.3) definiert man die Matsuo–Abbildung  $m(f)$  sowie die Cherednik–Abbildung  $ch(f)$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi &= m(f) := \sum_{\sigma \in S_N} f_\sigma \\ \psi &= ch(f) := \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) f_\sigma . \end{aligned}$$

Setz man nun  $E := -\text{tr}(\Lambda^2)$ , so erfüllen die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  die Differentialgleichungen

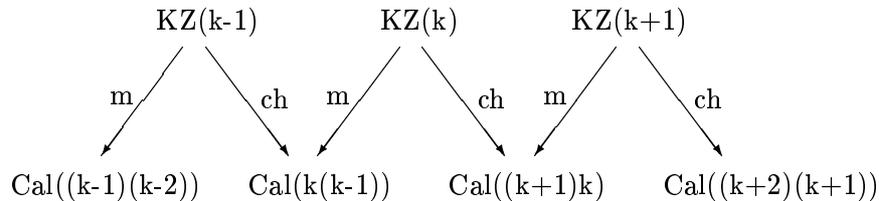
$$\begin{aligned} \left( -\Delta + k(k-1) \sum_{i \neq j} \frac{1}{(z_i - z_j)^2} \right) \varphi &= E \varphi \\ \left( -\Delta + k(k+1) \sum_{i \neq j} \frac{1}{(z_i - z_j)^2} \right) \psi &= E \psi . \end{aligned}$$

Die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  sind also aus Lösungen der KZ–Gleichung gewonnene Lösungen des Calogero–Modells (1.1) mit Werten  $\omega = 0$  und  $g = \begin{Bmatrix} k(k-1) \\ (k+1)k \end{Bmatrix}$ , also  $\nu = \begin{Bmatrix} k \\ (k+1) \end{Bmatrix}$ .

Zum Beweis, daß die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  Lösungen darstellen, summiert man die Gleichung (7.5) über sämtliche Permutationen  $\sigma \in S_n$ , wobei man für den Fall  $g=(k+1)k$  zuvor mit der Signatur  $\text{sgn}(\sigma)$  multipliziert. Differenzieren und Ausnutzen der Gleichung (7.5) als Identität für  $\partial_i f_\sigma$  führt dann mit einigen, bereits bei der Lösung der Schrödinger–Gleichung des Calogero–Modells in Anhang A aufgeführten Vorgehensweisen bei der Behandlung von Summen auf die Schrödinger–Gleichungen für  $\varphi$  und  $\psi$ .

Die Abbildungen  $m(f)$  und  $ch(f)$  machen jedoch nur Sinn, wenn Lösungen der KZ–Gleichung existieren, die von der Form (7.3) sind. Dies wird durch Tatsache sichergestellt, daß die beiden Abbildungen für den Fall paarweise verschiedener Einträge der Matrix  $\Lambda$  Isomorphismen vermitteln, was von Matsuo und Cherednik gezeigt werden konnte. Da in Kapitel 1 Lösungen der Schrödinger–Gleichung angegeben wurden, lassen sich daraus durch Anwenden der inversen Matsuo– beziehungsweise Cherednik–Abbildung Lösungen der Form (7.3) der KZ–Gleichung gewinnen. Die zur Lösung der geöhnlichen KZ–Gleichung verwendeten Verfahren liefern direkt Lösungen der genannten Form. Für die modifizierte KZ–Gleichung, wie sie von Cherednik und Matsuo verwendet wird ist mir aus der Literatur kein entsprechendes Verfahren bekannt.

Desweiteren lassen sich mit diesen Abbildungen Beziehungen zwischen Calogero–Modellen mit unterschiedlichen Kopplungen auf folgende Weise konstruieren:



Die Abbildungen  $m^{-1} \circ ch$  vermitteln also zwischen dem Calogero–Modell mit Kopplung  $\nu(\nu-1)$  und  $(\nu+1)\nu$ , die Abbildung  $ch \circ m^{-1}$  zwischen KZ–Gleichungen mit Kopplungen  $k$  und  $k+1$ . Führt man die Bezeichnungen

$\hat{D} := m^{-1} \circ ch$  und  $\hat{D}_{\text{KZ}} := ch \circ m^{-1}$  ein, so läßt sich obiges Diagramm zu einem kommutativen Diagramm ergänzen.

Von Felder und Vesolov wurde nun der Zusammenhang zwischen den hier konstruierten „Shift-Operatoren“ für das Calogero-Modell und den von Heckman gefundenen Operatoren [Hec89] untersucht.

Für das Wurzelsystem  $A_N$  haben Heckmans Operatoren die Form

$$\hat{D}_{\text{Hec}} = \sum_{\sigma \in S_N} \text{sgn}(\sigma) \text{Res}(\nabla_{\sigma(\xi)}^d) \quad (7.6)$$

mit

$$d = \frac{N(N-1)}{2}$$

$$\xi \in \mathbb{R}^N, \text{ so daß } \delta(\xi) := \prod_{j < i} (\xi_i - \xi_j) \neq 0 .$$

Der Dunkl-Operator (4.5) hat im  $A_N$ -Fall die Form

$$\nabla_{x_i} = \partial_{\xi_i} - \tilde{k} \sum_{j \neq i} \frac{\xi_i - \xi_j}{x_i - x_j} P_{ij} ,$$

wobei für die Konstruktion des Operatore  $\hat{D}_{\text{Hec}}$  der Wert  $\tilde{k} = \frac{1}{2}k$  eingesetzt werden muß.

In ihrer Arbeit zeigen Felder und Vesolov die folgende Identität:

$$\hat{D}_{\text{Hec}} = C_N \delta(\Lambda) \delta(\xi) \hat{D} \quad (7.7)$$

mit  $C_N = \frac{d!}{1!2!\dots(N-1)!}$ .

Der Beweis ist in [FV93] recht ausführlich dargestellt, so daß ich hier nur einige wesentliche Schritte wiedergeben möchte. Aus der Gleichung (7.5) folgt

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_i} f_{\sigma} &= \xi^i \partial_i f_{\sigma} \\ &= \left\{ \frac{1}{2}k \sum_{j \neq i} \frac{\xi_i - \xi_j}{x_i - x_j} P_{ij} + (\sigma(\xi), \lambda) \right\} f_{\sigma} . \end{aligned}$$

Unter Verwendung dieses Zusammenhanges läßt sich mittels Induktion zeigen, daß

$$\text{Res}(\nabla_{\xi}^m) m(f) = \sum_{\sigma \in S_N} (\sigma(\xi), \lambda)^m f_{\sigma} .$$

Dabei findet Verwendung, daß die Abbildung  $\text{Res}(\cdot)$  linear ist, also  $\text{Res}(\nabla_{\xi}^{m+1}) = \text{Res}(\nabla_{\xi}^m) \cdot \text{Res}(\nabla_{\xi})$  gilt.

Mit dieser Formel folgt nun unmittelbar der Zusammenhang

$$\hat{D}_{\text{Hec}} m(f) = ch(f) \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) (\sigma(\xi), \lambda)^d .$$

Für die Identität (7.7) verbleibt nun noch zu zeigen, daß

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) (\sigma(\xi), \lambda)^d = C_N \delta(\Lambda) \delta(\xi)$$

gültig ist. Dabei gehen Umformungen dieser Art ein:

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{i=1}^N x_i \right\}^m &= \sum_{\substack{k_1, \dots, k_N \\ \sum_i k_i = m}} \frac{m!}{k_1! \dots k_N!} x_1^{k_1} \dots x_N^{k_N} \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \frac{m!}{1! \dots (N-1)!} x_1^{\sigma(1)} \dots x_N^{\sigma(N)} \\ \det((x_i^{j-1})_{i,j}) &= \prod_{j < i} (x_i - x_j) \\ \det((\xi^j \lambda_i)^{k_i}) &= \prod_i \lambda_i^{k_i} \det((\xi_j^{k_i})_{i,j}) \\ \det((\xi_j^{\sigma(k_i)})_{i,j}) &= \operatorname{sgn}(\sigma) \det((\xi_j^{k_i})_{i,j}) \end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber sei hier noch eine weitere Abbildung erwähnt, die von Felder und Veselov in diesem Artikel neben der expliziten Konstruktion der inversen Matsuo-Abbildung  $m^{-1}$  untersucht wurde. Diese wirkt auf Lösungen der KZ-Gleichung (7.3) in der Weise

$$* \sum f_{\sigma} e_{\sigma} = \sum \operatorname{sgn}(\sigma) f_{\sigma} e_{\sigma}$$

und vermittelt zwischen Lösungen  $KZ(k)$  und  $KZ(-k)$  der KZ-Gleichung.

Eine Idee zu dieser Arbeit war, aufgrund dieser Isomorphie die volle Symmetrie des Calogero-Modells abzuleiten. Die Symmetrie der KZ-Gleichung ist jedoch nur für den Fall  $\Lambda = 0$  zugänglich, und dieser ist durch Verletzen der Bedingung paarweise verschiedener Einträge für  $\Lambda$  uninteressant, da dann mit  $m$  und  $ch$  keine Isomorphismen mehr vorliegen. Desweiteren ist nicht absehbar, wie sich die Symmetrien der Lösungen der KZ-Gleichung unter den Abbildungen  $m$  und  $ch$  verhalten.

## 7.2 Matrix-Modelle

Bei der Konstruktion des Calogero-Hamiltonians aus den Dunkl-Operatoren tauchte in diesem der Permutationsoperator auf, der im Falle der Wirkung auf Funktionen vorgegebener Symmetrie durch seinen Eigenwert ersetzt wurde und so auf den ursprünglichen Calogero-Hamiltonian führte. Ersetzt man den Permutationsoperator nun durch eine  $M$ -Darstellung der  $S_N$ , so wirkt der entstehende Operator auf  $M$ -komponentige Wellenfunktionen. Dies führt dann auf sogenannte Matrix-Modelle. Von Dodolov, Konstein und Vasiliev [DKV93] wurde gezeigt, daß man genau dann nichtsinguläre Lösungen der Matrix-Modelle

erhält, wenn die Darstellung der  $S_N$  auf die Komponenten der Wellenfunktion als Permutationsoperator wirkt, man also komponentenweise wieder das ursprüngliche Calogero-Modell erhält.

### 7.3 Hall-Effekt, Anyonen und Fractional Statistics

Der Quanten-Hall-Effekt beschreibt das Verhalten zweidimensionaler Elektronen unter dem Einfluß von Magnetfeldern senkrecht zu dieser Fläche. Der Hamiltonian für ein solches Elektron hat in den Einheiten  $e = \hbar = c = 1$  die Form

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}((p_x - A_x)^2 + (p_y + A_y)^2) =: \frac{1}{2m}(\Pi_x^2 + \Pi_y^2) .$$

Durch Einführen des Vernichtungsoperators  $a := \frac{1}{\sqrt{2B}}(\Pi_x - i\Pi_y)$  mit dem Kommutator  $[a, a^+] = 1$  schreibt sich der Energieoperator wie folgt:

$$\hat{H} = \frac{B}{m}(a a^+ + \frac{1}{2}) .$$

In sehr starken Magnetfeldern kondensieren nun sämtliche Elektronen im niedrigsten Landau-Niveau, so daß lediglich ein Freiheitsgrad verbleibt. Dieser wird am elegantesten durch die Variable  $X := x - \frac{1}{B}\Pi_x$  mit kanonisch konjugiertem Impuls  $Y := y + \frac{1}{B}\Pi_x$  beschrieben. Der niedrigste Eigenzustand zu  $X$  ist dann durch die Bedingung  $a \phi_0 = 0$  eindeutig charakterisiert.

In symmetrischer Eichung ergibt sich die folgende Grundzustands-Wellenfunktion als eindimensionale Darstellung des  $N$ -Teilchen Laughlin-Zustandes auf der Kreisscheibe in der  $X$ -Darstellung:

$$\Psi(s_1, \dots, s_N) = \exp(-B \sum_I \frac{1}{2}s_i^2) \cdot \exp(-\frac{1}{4B} \sum_i \partial_i^2) \prod_{j < i} (s_i - s_j)^m ,$$

was für große Magnetfelder  $B$  die Form

$$\Psi(s_1, \dots, s_N) = \exp(-B \sum_I \frac{1}{2}s_i^2) \cdot \prod_{j < i} (s_i - s_j)^m$$

annimmt.

Dies ist gerade die Grundzustands-Wellenfunktion des Calogero-Hamiltonians (1.1) mit  $\omega = \frac{B}{2}$  und  $\nu = m$ .

Verwendet man die 1-dimensionale Darstellung der Laughlin-Zustände auf dem Zylinder, so erhält man in der  $X$ -Darstellung den Grundzustand des Sutherland-Problems mit  $V(s_1, \dots, s_N) = \prod_{j < i} \sin^{-2}(\frac{\pi}{L_x}(s_i - s_j))$ . Dabei fällt auf, daß hier kein weiteres Potential wie im Falle der Kreisscheibe das Oszillator-Potential wirkt. Dies ist auf die Periodizität der Sutherland-Zustände zurückzuführen. In der Impuls-Darstellung transformiert sich die

Wellenfunktion in Eigenzustände zu dem verallgemeinerten Potential mit dem Sinushyperbolicus anstelle des Sinus im Nenner.

Da die Symmetrie der Wellenfunktionen (1.7) und (1.10) durch den Faktor  $\prod_{j < i} (x_i - x_j)^\nu$  bestimmt ist, liegt bei  $\nu \notin \mathbb{N}$  eine gebrochene Statistik vor, die auch bei der Behandlung des Hall-Effektes eine wichtige Rolle spielt.



# Résumé

Immanuel Kant konstatiert in seiner „Logik“ [Kan23]:

„Ja, der Verstand ist als der Quell und das Vermögen anzusehen, Regeln überhaupt zu denken. Denn so wie die Sinnlichkeit das Vermögen der Anschauungen ist, so ist der Verstand das Vermögen zu denken, d.h. die Vorstellungen der Sinne unter Regeln zu bringen. Er ist daher begierig, Regeln zu suchen, und befriedigt, wenn er sie gefunden hat.“

Der Themenkomplex, in den diese Arbeit eingeführt hat, gehört nun sicherlich zu den Gebieten, die der Geist noch nicht in einer ihn befriedigenden Form gedacht hat. Hierauf weist nicht zuletzt die große Zahl der innerhalb der letzten Jahre erschienenen Arbeiten aus dem Bereich der Quantengruppen hin. Ziel dieser Forschungen ist letztendlich, die von den Physikern behandelten Modelle als unterschiedliche Darstellungen eines algebraischen Objekts zu entlarven. Das Calogero-Modell ist mit seiner  $r$ -Matrix ein Beispiel dafür, daß dies mit der Theorie der Lie-Bialgebren und deren Quantisierungen noch nicht gelungen ist.

Klar wurde in dieser Arbeit jedoch auch, daß mit dem Begriff der Integrabilität nicht immer ganz sorgfältig umgegangen wird. So sind für das Calogero-Modell weder sämtliche Lösungen des quantenmechanischen Falls bekannt, noch existiert ein strenger Beweis für die Integrabilität des klassischen Modells im Liouvilleschen Sinne.

Das siebte Kapitel deutet an, daß das von Calogero 1971 gelöste System trotz seines Modellcharakters in vielen Bereichen der Physik wieder auftaucht. Auch wenn es nicht mit dem harmonischen Oszillator konkurrieren kann, der wohl als das fundamentalste und zugleich wichtigste lösbare Problem bezeichnet werden muß, so ist das Calogero-Modell doch ein grundlegendes System von großer Bedeutung für die Theoretische Physik.



## Anhang A

# Herleitung der Identitäten aus Kapitel 1

In diesem Anhang werden die Identitäten 1.4a–1.4e aus Kapitel 1 bewiesen.

Zu 1.4a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x_k} &= \partial_k \prod_{j < i} (x_i - x_j) = \prod_{\substack{j < i \\ i \neq k \neq j}} (x_i - x_j) \partial_k \left( \prod_{j < k} (x_k - x_j) \prod_{i > k} (x_i - x_k) \right) \\ &= z \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\partial_k^2 z^\nu = z^\nu \left\{ \nu(\nu - 1) \left( \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i} \right)^2 + \nu \sum_{i \neq k} \sum_{\substack{j \\ i \neq j \neq k}} \frac{1}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)} \right\}$$

Ausmultiplizieren des quadratischen Terms liefert

$$\left( \sum_{i \neq k} \frac{1}{x_k - x_i} \right)^2 = \sum_{i \neq k} \frac{1}{(x_k - x_i)^2} + \sum_{i \neq k} \sum_{\substack{j \\ i \neq j \neq k}} \frac{1}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)} .$$

**Beh.:**

$$\sum_{\substack{i, j, k \\ i \neq j \neq k \neq i}} \underbrace{\frac{1}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)}}_{=: \alpha_{i,j,k}} = 0$$

**Bew.:**

Die Summe läßt sich umschreiben in eine Summe über  $i, j$  und  $k$  mit  $i < j < k$ , die über alle Permutationen  $\alpha_{\sigma(i, j, k)}$  mit  $\sigma \in S_n$  läuft. Man sieht, daß die Summe über die geraden Permutationen sowie die über die ungeraden Permutationen einzeln verschwinden und eine Dreifachsumme über die Null verbleibt.  $\square$

Damit ergibt sich der angegebene Ausdruck:

$$\sum_i \partial_i^2 z^\nu = 2\nu(\nu - 1) z^\nu \sum_{j < i} \frac{1}{(x_i - x_j)^2}$$

Zu 1.4b:

Unter Verwendung dieser Ergebnisse schreibt sich

$$\sum_i \partial_i z \partial_i P_\alpha = \nu z^\nu \sum_{j \neq i} \frac{\partial_i}{x_i - x_j} P_\alpha .$$

Aufgrund der Antisymmetrie in  $i$  und  $j$  ergibt sich für den Differentialoperator

$$\sum_{j \neq i} \frac{\partial_i}{x_i - x_j} = \sum_{j < i} \frac{\partial_i - \partial_j}{x_i - x_j} .$$

Ausnutzen der Differentialgleichung für  $P_\alpha$  liefert damit die Identität

$$\sum_i \partial_i z^\nu \partial_i P_\alpha = -\frac{1}{2} z^\nu \sum_i \partial_i^2 P_\alpha .$$

Zu 1.4c:

Die in einigen Termen auftauchende Ableitung nach der Variable  $r$  berechnet sich via

$$\begin{aligned} \partial_i &= \sum_i (\partial_i r) \frac{d}{dr} = \frac{1}{2r} \sum_i (\partial_i r^2) \frac{d}{dr} \\ &= \frac{1}{N r} \sum_{i, j} (x_i - x_j) \frac{d}{dr} . \end{aligned}$$

Damit schreibt sich

$$\sum_i \partial_i z^\nu \partial_i \varphi = \frac{\nu}{N} \frac{1}{r} z^\nu \sum_{\substack{i, j, k \\ j \neq i \neq k}} \underbrace{\frac{x_i - x_j}{x_i - x_k}}_{=: \alpha_{i, j, k}} \frac{d\varphi}{dr} .$$

Dabei steht unter dem Summenzeichen *nicht*  $j \neq i \neq k \neq j$  !

Die Summe über die  $\alpha_{i, j, k}$  läßt sich wie folgt berechnen:

Die Terme  $\alpha_{i, j, j}$  liefern den Summanden  $N(N - 1)$ . Für die verbleibenden  $N(N - 1)(N - 2)$  Beiträge ergibt jeweils die Summe von  $\alpha_{i, j, k}$  und  $\alpha_{k, j, i}$  eine 1. Insgesamt verbleibt von dieser Summe also lediglich der Faktor  $\frac{1}{2} N^2 (N - 1)$ .

Zu 1.4d:

Zum Beweis der Identität für  $\sum_i \partial_i^2 \varphi(r)$  benötigt man einige zusätzliche Terme:

$$\begin{aligned} \partial_i r &= \frac{2}{N} \sum_{i \neq j} (x_i - x_j) \\ \Rightarrow \quad \partial_i^2 r^2 &= \frac{2}{N} (N-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_i \left\{ \sum_{j \neq i} (x_i - x_j) \right\}^2 &= \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 + 2 \sum_i \sum_{k < j} (x_i - x_j)(x_i - x_k) \\ &= \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 + N(N-1) \sum_i x_i^2 - (N-2) \sum_{i,j} x_i x_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^2 r^2 &= N \sum_{j < i} (x_i - x_j)^2 = \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 + \frac{N-2}{2} \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 \\ &= \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 + N(N-2) \sum_i x_i^2 - (N-2) \sum_{i,j} x_i x_j \\ &= \sum_i \left\{ \sum_{j \neq i} (x_i - x_j) \right\}^2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_i \partial_i^2 \varphi &= \frac{d\varphi}{dr} \sum_i \partial_i^2 r + \frac{d^2\varphi}{dr^2} \sum_i (\partial_i r)^2 \\ &= \frac{d\varphi}{dr} \sum_i \left( -\frac{1}{4r^3} (\partial_i r^2)^2 + \frac{1}{2r} \partial_i^2 r^2 \right) + \frac{d^2\varphi}{dr^2} \sum_i \frac{1}{4r^2} (\partial_i r^2)^2 \\ &= \frac{d\varphi}{dr} \left( -\frac{1}{4r^3} 4r^2 + \frac{N(N-1)}{Nr} \right) + \frac{d^2\varphi}{dr^2} \\ &= \frac{N-2}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dr^2} \end{aligned}$$

Zu 1.4e:

Für die letzte Identität benötigt man die Translationsinvarianz und die Homogenität der Polynome  $P_\alpha$ .

Aus der Homogenität folgt aus dem Satz von Euler, der sich leicht mittels Kettenregel beweisen läßt:

$$\sum_i x_i \partial_i P_\alpha = \alpha P_\alpha$$

Die Translationsinvarianz für Polynome in mehreren Veränderlichen bedeutet, daß  $f(\vec{x}) = f(\vec{x} + \vec{a})$  für ein in allen Komponenten identisches  $\vec{a}$ . Für genügend kleine  $\epsilon$  gilt dann:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x} + \epsilon \vec{a}) = f(\vec{x}) + \epsilon \vec{a} \nabla f|_{\vec{x}}$$

Daraus folgt, da  $\epsilon$  klein, aber beliebig ist die Identität

$$\vec{a}\nabla f = 0$$

und somit für  $\vec{a} = (x_i, x_i, \dots, x_i)$

$$\sum_j x_i \partial_j P_\alpha = 0 .$$

Diese Eigenschaften liefern dann

$$\begin{aligned} \sum_i (\partial_i \varphi) (\partial_i P_\alpha) &= \frac{1}{Nr} \frac{d\varphi}{dr} \sum_{i,j} (x_i - x_j) \partial_i P_\alpha \\ &= \frac{\alpha}{r} \frac{d\varphi}{dr} P_\alpha . \end{aligned}$$

## Anhang B

# Das N-Oszillator Problem

In diesem Anhang wird die Lösung des Problems von N quantenmechanischer, über ein Oszillatorpotential paarweise aneinandergekoppelter Teilchen vermittels Entkopplung durch die Einführung neuer Koordinaten, der sogenannten Jacobi-Koordinaten, besprochen.

Der Hamiltonoperator dieses Problems hat die Form

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_i \partial_i^2 + \frac{\omega^2}{4} \sum_{j < i} (x_i - x_j)^2 .$$

Als Koordinaten führt man nun folgende Variable ein:

$$y_0 := \frac{1}{N} \sum_i x_i^2$$
$$y_i := \frac{1}{\sqrt{i(i-1)}} \left\{ i x_{i+1} - \sum_{j \leq i} x_j \right\}$$

Diese Transformation vermittelt folgende Identitäten:

$$\sum_{j < i} (x_i - x_j)^2 \longrightarrow N \sum_{i=1}^{N-1} y_i^2$$
$$\sum_i \partial_i^2 \longrightarrow \frac{1}{N} \partial_0^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \partial_i^2$$

Damit entkoppelt sich das Problem in den Jacobi-Variablen bei Vernachlässigung der Schwerpunktbewegung zu N-1 harmonischen Oszillatoren.

Die Wellenfunktion ergibt sich als Produkt von (N-1) Oszillator-Eigenfunktionen mit den Frequenzen  $\omega' := \omega \sqrt{\frac{N}{2}}$  mit Energien  $E_n = \hbar\omega(n - \frac{1}{2})$ . Als Gesamtenergie ergibt sich damit:

$$E_{n_1, n_2, \dots, n_{N-1}} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + \dots + n_{N-1} - \frac{N-1}{2})$$

Die Eigenfunktionen dieses Systems haben in den Jacobi-Koordinaten die Gestalt

$$\psi_{n_1, \dots, n_{N-1}} \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{2}}\omega \sum_i y_i\right) \cdot \prod_i H_{n_i}\left(\sqrt{\frac{N}{2}}\omega y_i\right).$$

Dabei sind die Funktionen  $H_n$  die von der Lösung des harmonischen Oszillators her bekannten Hermite-Polynome. Kehrt man zu den Ortskoordinaten  $x_i$  zurück, so schreibt sich die Exponentialfunktion wie folgt:

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{N}{2}}\omega \frac{1}{N} \sum_{j < i} (x_i - x_j)^2\right).$$

Additionstheoreme für die Hermite-Polynome sind mir in der Literatur nicht begegnet, so daß ein Einsetzen der  $y_i$  keine neue Gestalt der Eigenfunktionen erbringt.

Auffällig an den Eigenfunktionen ist, daß es sich nicht ausschließlich um symmetrische und antisymmetrische Funktionen handelt. Da der Hamilton-Operator jedoch mit dem Permutationsoperator vertauscht, läßt sich eine Basis der Eigenräume als Linearkombination der obigen Eigenfunktionen finden, so daß diese ein Eigenfunktionensystem zum Permutationsoperator darstellen.

Der Entartungsgrad des N-Oszillator Problems stellt sich wie folgt dar:

N → ↓ s	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	3	6	10	15	21	28	36
3	1	4	10	20	35	56	84	120
4	1	5	15	35	70	126	210	330
5	1	6	21	56	126	252	462	1287

Tabelle B.1: Entartungsgrad der ersten Zustände für kleine Teilchenzahlen

## Anhang C

# Koeffizienten des charakteristischen Polynoms

Ausgangspunkt ist die Darstellung

$$J_k = \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ \sum_i i m_i = k}} \prod_{i=1}^k (-1)^{m_i} \frac{1}{i^{m_i} m_i!} [\operatorname{tr}(L^i)]^{m_i}$$

der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms einer Matrix  $L$ . Der Einfachheit halber seien die Diagonalelemente  $L_{ii}$  mit  $p_i$  bezeichnet. Für die Ableitung der Terme  $[\operatorname{tr}(L^i)]^j$  ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial p_i} [\operatorname{tr}(L^i)]^j = i \cdot j \cdot [\operatorname{tr}(L^i)]^{j-1} \operatorname{tr}(L^{i-1}) .$$

Dies läßt sich leicht an der ausgeschriebenen Form von  $\operatorname{tr}(L^i)$  sehen. Damit ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_k}{\partial p_i} &\stackrel{(1)}{=} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \\ \sum_i i m_i = k}} \sum_{\substack{s=1 \\ m_s \neq 0}}^k \frac{(-1)^{m_s}}{s^{m_s-1} (m_s-1)!} [\operatorname{tr}(L^s)]^{m_s-1} \operatorname{tr}(L^{s-1}) \cdot \\ &\quad \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^k \frac{(-1)^{m_i}}{i^{m_i} m_i!} [\operatorname{tr}(L^i)]^{m_i} \\ &\stackrel{(2)}{=} -\operatorname{tr}(L^{k-1}) + \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{k-1} \\ \sum_i i m_i = k}} \sum_{\substack{s=1 \\ m_s \neq 0}}^{k-1} \frac{(-1)^{m_s}}{s^{m_s-1} (m_s-1)!} \cdot \\ &\quad \cdot [\operatorname{tr}(L^s)]^{m_s-1} \operatorname{tr}(L^{s-1}) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{k-1} \frac{(-1)^{m_i}}{i^{m_i} m_i!} [\operatorname{tr}(L^i)]^{m_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{(3)} \quad & -\operatorname{tr}(L^{k-1}) + N \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{k-1} \\ \sum_i im_i = k \\ m_1 \neq 0}} \frac{(-1)^{m_1}}{(m_1-1)!} [\operatorname{tr}(L)]^{m_s-1} \prod_{i=2}^{k-1} \frac{(-1)^{m_i}}{i^{m_i}(m_i)!} [\operatorname{tr}(L^i)]^{m_i} + \\
& + \sum_{s=2}^{k-1} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{k-1} \\ \sum_i im_i = k-1 \\ m_s \neq 0}} (s-1)m_{s-1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{m_i}}{i^{m_i}(m_i)!} [\operatorname{tr}(L^i)]^{m_i} \\
\underline{(4)} \quad & -\operatorname{tr}(L^{k-1}) + N \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{k-1} \\ \sum_i im_i = k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{m_i}}{i^{m_i}(m_i)!} [\operatorname{tr}(L^i)]^{m_i} + \\
& + \sum_{s=2}^{k-1} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{k-1} \\ \sum_i im_i = k-1}} (s-1)m_{s-1} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{m_i}}{i^{m_i}(m_i)!} [\operatorname{tr}(L^i)]^{m_i} \\
\underline{(5)} \quad & -\operatorname{tr}(L^{k-1}) + N \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{k-1} \\ \sum_i im_i = k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{m_i}}{i^{m_i}(m_i)!} [\operatorname{tr}(L^i)]^{m_i} + \\
& + \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{k-1} \\ \sum_i im_i = k-1}} (k-1)(1-m_{k-1}) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{m_i}}{i^{m_i}(m_i)!} [\operatorname{tr}(L^i)]^{m_i} \\
\underline{(6)} \quad & -(N-k+1) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_{k-1} \\ \sum_i im_i = k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^{m_i}}{i^{m_i}(m_i)!} [\operatorname{tr}(L^i)]^{m_i} .
\end{aligned}$$

Da aus Platzgründen hier nicht jeder kleinste Schritt aufgeführt werden soll, bedarf es in meinen Augen einiger Kommentare zu den erfolgten Umformungen:

- (1) Hier wurde lediglich die Ableitung nach  $p_i$  unter Verwendung obiger Formel für die Ableitung der Spuren ausgeführt. Die Zusätze  $m_s \neq 0$  resultieren daraus, daß diese Terme in der Entwicklung von  $J_k$  nicht auftauchen und daher auch nicht abgeleitet werden.
- (2) Der Fall  $m_k = 1$  wird herausgezogen, da durch die Nebenbedingung für die Summe der  $m_i$  hier sämtliche  $m_i$  mit  $i \neq k$  verschwinden.
- (3) Auch der Fall  $s = 1$  wird herausgezogen, da im folgenden die Terme zu  $s$  und  $s-1$  zusammengeführt werden und ein Term zu  $(1=s)-1=0$  nicht existiert. Der Faktor  $N$  resultiert aus der Spur  $\operatorname{tr}(L^0) = \operatorname{tr}(E) = N$ . Für die Terme mit  $s > 1$  geht man von  $m_i$  zu  $\tilde{m}_i$  über, wobei folgender Zusammenhang gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{m}_{s-1} &= m_{s-1} + 1 \\
\tilde{m}_s &= m_s - 1 \\
\tilde{m}_i &= m_i \quad \text{für } i \notin \{s, s-1\} .
\end{aligned}$$

Damit lassen sich die durch das Ableiten entstandenen Terme wieder in das Produkt schreiben.

- (4) Auch für den Fall  $m_1$  läßt sich dies durchführen, da  $1^{m_1} = 1$  für alle  $m_1$ .
- (5) In dem dritten Summanden wird die Summation über  $s$  ausgeführt und dabei die Nebenbedingung für die Summe der  $m_i$  verwendet.
- (6) Das „ $1 - m_{k-1}$ “ im letzten Summanden ist gleichbedeutend mit einem  $\delta_{m_{k-1},0}$ . Dies wird durch den ersten Term  $\text{tr}(L^{k-1})$  wettgemacht. Zusammenfassen ergibt dann das geforderte Resultat.

Summiert man nun über sämtliche  $l$ , so bringt dies einen weiteren Faktor  $N$  und damit die Gleichung (6.6).

## Anhang D

# Zweiteilchen $r$ -Matrix

Die  $r$ -Matrix des Calogero-Modells für zwei Teilchen wurde in Kapitel 6 angegeben. Sie hat die Form

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Dabei sind die Funktionen  $\alpha$  und  $\beta$  von der folgenden Gestalt:

$$\alpha = 2 \operatorname{ig}(p_1 - p_2) \cdot \gamma_3 \frac{(p_1 - p_2) + \sqrt{\gamma_1}}{\gamma_2^3 \cdot \sqrt{\gamma_1}}$$
$$\beta = 4 g^2 (x_1 - x_2)^{-1} \cdot \gamma_3 \cdot \frac{(p_1 - p_2) - \sqrt{\gamma_1}}{\gamma_2^3 \cdot \sqrt{\gamma_1}} .$$

Die Gamma ergeben sich zu den Funktionen:

$$\gamma_1 = 4 g^2 (x_1 - x_2)^{-2} + (p_1 - p_2)^2$$
$$\gamma_2 = 4 g^2 + (p_1 - p_2)^2 (x_1 - x_2)^2 - \gamma_1 \cdot (p_1 - p_2)$$
$$\gamma_3 = 8 g^4 + 6 g^2 (p_1 - p_2)^2 (x_1 - x_2)^2 + 4 g^2 (p_1 - p_2) (x_1 - x_2)^2 \sqrt{\gamma_1} +$$
$$+ (p_1 - p_2)^4 (x_1 - x_2)^4 + (p_1 - p_2)^3 (x_1 - x_2)^4 .$$





# Literaturverzeichnis

- [Abr84] M. Abramowitz, I.A. Stegun: *Pocketbook of mathematical functions*. Verlag Harri Deutsch (1984).
- [Ar78] I.V. Arnold: *Mathematical Methods in Classical Mechanics*. Springer-Verlag (1978).
- [AI93] H. Azuma, S. Iso: Explicit Relation of Quantum Hall Effect and Calogero-Sutherland Modell. In: *Physics Letters B* Bd. 331 (1994), S. 107ff. Auch verfügbar als HEP-TH Preprint 9312001.
- [BV90] O. Babelon, C-M. Viallet: Hamiltonian Structures ans Lax Equations. In: *Physics Letters B*, Bd. 237 (1990), S. 411ff.
- [BV93] L. Brink, M.A. Vasiliev: Representations of the  $S_N$ -Extended Heisenberg Algebra and Relations Between Knizhnik-Zamolodchikov Equations and Quantum Calogero Model. In: *Modern Physics Letters A* Bd. 8 (1993), S. 3585ff. Auch verfügbar als HEP-TH Preprint 9310018.
- [BHV92] L. Brink, T.H. Hansson, M.A. Vasiliev: Explicit solution to the  $N$ -body Calogero problem. In: *Physics Letters B*, Bd. 286 (1992), S. 109ff.
- [BFV94] V.M. Buchstaber, G. Felder, A.P. Vesolov: *Elliptic Dunkl operators, root systems and functional equations*. HEP-TH Preprint 9403178 (1994).
- [Ca71] F. Calogero: Solution of the One-Dimensional  $N$ -Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials. In: *Journal of Mathematical Physics*, Bd. 12 (1971), S. 419ff.
- [Ca75a] F. Calogero: Exactly Solvable One-Dimensional Many Body Problems. In: *Lettere al Nuovo Cimento*, Bd. 13 (1975), S. 411ff.
- [Ca75b] F. Calogero: One-Dimensional Many-Body Problems with Pair Interaction Whose Exact Ground-State Wave Function is of Product Type. In: *Lettere al Nuovo Cimento*, Bd. 13 (1975), S. 507ff.

- [CMR75] F. Calogero, C. Marchioro, O. Ragnisco: Exact Solution of the Classical and Quantal One-Dimensional Many-Body Problems with the Two-Body Potential  $V_a(x) = g^2 a^2 / \sinh^2(ax)$ . In: *Lettera al Nuovo Cimento*, Bd. 13 (1975), S. 383ff.
- [CH64] R. Courant, A. Hurwitz: *Vorlesungen über allgemeiner Funktionen-theorie und elliptische Funktionen*. Springer-Verlag (1964).
- [CP94] V. Chari, A. Pressley: *Quantum Groups*. Cambridge University Press (1994).
- [DKV93] O.V. Dodlov, S.E.Konstein, M.A. Vasiliev: *Matrix Versions of the Calogero-Model*. HEP-TH Preprint (1993)
- [Dun88] C.F. Dunkl: Reflection Groups and Orthogonal Polynomials on the Sphere. In: *Mathematische Zeitschrift*, Bd. 197 (1988), S. 33ff.
- [Dun89] C.F. Dunkl: Differential-Difference Operators Associated to Reflection Groups. In: *Transactions of the American Mathematical Society*, Bd. 311 (1989), S. 167ff.
- [FT87] L.D. Faddeev, L.A. Takthajan: *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*. Springer-Verlag (1987).
- [FV93] G. Felder, A.P. Veselov: Shift operators for the quantum Calogero-Sutherland problems via Knizhnik-Zamolodchikov equation. In: *Communications in Mathematical Physics* Bd. 160 (1994), S. 259ff.
- [Fu92] J. Fuchs: *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*. Cambridge University Press (1992).
- [Gil74] R. Gilmore: *Lie groups, Lie algebras, and some of their applications*. John Wiley & Sons, Inc. (1974).
- [Ha57] Harish-Chandra: Differential Operators on a Semisimple Lie-Algebra. In: *American Journal of Mathematics*, Bd. 79 (1957) S. 87ff.
- [Hec89] G.J. Heckman: A Remark on the Dunkl Differential-Difference Operators. In: *Harmonic Analysis on Reductive Groups*; William Barker and Paul Sally, (Hrsg.). Birkhäuser (1989).
- [Hum72] J.E. Humphreys: *Introduction to Lie-Algebras and Representation Theory*. Springer-Verlag (1972).
- [Hop92] J. Hoppe: *Lectures on Integrable Systems*. Lecture Notes in Physics, m10; Springer-Verlag (1992).
- [Kan23] I. Kant: *Logik*. In: Kants Werke IX; Gottlob Benjamin Jäschke (Hrsg.). Königl. Preußische Akademie der Wissenschaften (1923).

- [MOS66] W. Magnus, F. Oberhettinger, R.P. Soni: *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 52; Springer-Verlag, 3. erweiterte Ausgabe (1966).
- [Mat92] A. Matsuo: Integrable connections related to zonal spherical functions. In: *Inventiones mathematicae*, Bd. 110 (1992), S. 95ff.
- [NP94] F.W. Nijhoff, G.D. Pang: *Discrete-time Calogero-Moser Model and Lattice KP Equations*. HEP-TH Preprint 9409071 (1994).
- [OP76] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov: Completely Integrable Hamiltonian Systems Connected with Semisimple Lie Algebras. In: *Inventiones Mathematicae*, Bd. 37 (1976), S. 93ff.
- [OP81] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov: Classical Integrable Finite-Dimensional Systems Related to Lie Algebras. In: *Physics Reports*, Bd. 71 (1981), S. 313ff.
- [OP83] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov: Quantum Integrable Systems Related to Lie Algebras. In: *Physics Reports*, Bd. 94 (1983), S. 313ff.
- [Pas94] V. Pasquier: *A lecture on the Calogero-Sutherland models*. HEP-TH Preprint 9405104 (1994).
- [Pol92] A.P. Polychronakos: Exchange Operator Formalism for Integrable Systems of Particles. In: *Physical Review Letters*, Bd. 69 (1992), S. 703ff.
- [SK75] K. Sawada, T. Kotera: Integrability and a Solution for the One-Dimensional N-Particle System with Inversely Quadratic Pair Potentials. In: *Journal of the Physical Society of Japan*, Bd. 39 (1975), S. 1614ff.
- [Sut71] B. Sutherland: Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. In: *Physical Review A* (1971) S. 2019ff
- [Thi79] W. Thirring: *Lehrbuch der Mathematischen Physik. 3. Quantenmechanik von Atomen und Molekülen*. Springer-Verlag (1979).





Diese Diplomarbeit entstand an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster am Institut für Theoretische Physik I. Den Rahmen bildete das Forschungsseminar Quantenfeldtheorie, betreut von den Professoren Gernot Münster und Manfred Stingl.

Besondere Erwähnung verdient hier die Arbeitsgruppe von Herrn Christian Wieczerkowski, bestehend aus Juri Rolf, Elmar Siepman und Christian Wieczerkowski sowie mir, in der ich bei meiner Arbeit an diesem Thema große Unterstützung fand. Das Thema dieser Diplomarbeit wurde von Herrn Wieczerkowski vorgeschlagen.

Weiterhin möchte ich mich für die Hilfe bei den großen und kleinen Problemen eines Menschen im Computerzeitalter bei Christoph Gutfeld, Jochen Heitger, Jens Küster, Bernd Nottelmann und Dirk Talkenberger bedanken.

Um den Anforderungen der Prüfungsordnung zu genügen sei hier, nicht ganz im Sinne von Descartes, der dereinst sprach:

„Ich denke, also bin ich.  
Ich zweifle, also bin ich.  
Ich werde getäuscht, also bin ich.“

versichert, daß ich diese Arbeit ohne fremde Hilfe verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, ganz im Sinne des Paragraphen 18, Absatz 6 der Diplom-Prüfungsordnung für Physik.

Hochachtungsvoll

(Cand. Dipl. Phys. M. Rehwald)







