



Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Theoretische Physik

**Vergleich verschiedener
Approximationen in der
chiralen Störungstheorie für
Twisted-Mass Gitter-QCD**

Diplomarbeit

Stefanie Rau

Oktober 2006

Diese korrigierte Version unterscheidet sich nur geringfügig von der am 23. Oktober 2006 im Prüfungssekretariat eingereichten Arbeit. Es wurden lediglich einige Druckfehler korrigiert.

Münster, den 1. Dezember 2006

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1 Einleitung | 5 |
| 2 Chirale Störungstheorie | 9 |
| 2.1 Standardmodell | 9 |
| 2.2 Lagrangedichten in der QCD | 10 |
| 2.3 Spontane Symmetriebrechung | 12 |
| 2.3.1 Goldstone-Theorem | 13 |
| 2.3.2 Nicht-abelsche Symmetrie | 14 |
| 2.4 Spontane Symmetriebrechung in der QCD | 15 |
| 2.5 Effektive Lagrangedichte für Goldstone-Bosonen | 15 |
| 2.5.1 Transformationsverhalten von Goldstone-Bosonen | 15 |
| 2.5.2 Die effektive Lagrangedichte | 17 |
| 2.5.3 Das Weinberg'sche Powercounting | 18 |
| 3 Gitter-QCD | 21 |
| 3.1 Euklidische Formulierung der Lagrangedichte | 21 |
| 3.2 Wilson-Wirkung | 22 |
| 3.3 Symanzik-Wirkung | 24 |
| 3.4 Lagrangedichte bis $\mathcal{O}(p^2)$ | 26 |
| 4 Twisted Mass QCD | 27 |
| 4.1 Physical basis | 30 |
| 4.2 Twisted basis | 31 |
| 5 Algorithmus nach Ferrari | 35 |
| 5.1 Vergleich der η -Werte | 40 |
| 5.1.1 Kritischer Wert der gedrehten Masse μ_c | 40 |
| 5.1.2 Pionmasse im Minimum $m_{\pi,\min}^2$ | 41 |
| 5.2 Numerische Betrachtung | 42 |
| 5.2.1 Gültigkeitsbereich von ϵ_1 | 42 |
| 5.2.2 Überprüfung der zweiten Forderung | 43 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.2.3 | Einfluss der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme | 45 |
| 5.3 | Stetigkeit des Minimums | 47 |
| 5.3.1 | ohne ϵ_4 und ϵ_5 | 47 |
| 5.3.2 | mit ϵ_4 und ϵ_5 | 48 |
| 5.3.3 | Lage des Phasensprungs | 50 |
| 6 | Vergleich der Minimumsbestimmungen | 53 |
| 6.1 | Minimum bis Leading Order | 55 |
| 6.2 | $\hat{\chi}$ -Näherung | 55 |
| 6.3 | $\hat{\eta}$ -Näherung | 57 |
| 6.4 | Vergleich in Leading Order | 58 |
| 6.5 | Vergleich in Next To Leading Order | 59 |
| 7 | Massenbestimmung | 67 |
| 7.1 | Treelevelmassen | 67 |
| 7.1.1 | Treelevel in Leading Order | 68 |
| 7.1.2 | Vergleich der Massen in Leading Order | 70 |
| 7.1.3 | Treelevel in Next To Leading Order | 71 |
| 7.2 | Schleifenrechnung | 74 |
| 7.2.1 | Renormierung | 77 |
| 7.2.2 | Größe der Schleifenbeiträge | 78 |
| 7.2.3 | Vergleich der Massen | 78 |
| 7.2.4 | Massensplitting | 82 |
| 7.2.5 | Verhalten der Massen bei $\epsilon_1 = 0$ | 85 |
| 7.3 | Ergebnisse der Massenbestimmung | 87 |
| 8 | $N_f = 3$ | 89 |
| 8.1 | Twist mit einem Drehwinkel | 90 |
| 9 | Zusammenfassung und Ausblick | 99 |
| A | $SU(N)$ | 103 |
| A.1 | $SU(2)$ | 103 |
| A.2 | $SU(3)$ | 104 |
| B | Dirac-Matrizen | 105 |
| B.1 | Dirac-Matrizen im Minkowski-Raum | 105 |
| B.2 | Dirac-Matrizen im Euklidischen Raum | 106 |
| C | Relationen der Niederenergiekonstanten | 107 |

Kapitel 1

Einleitung

Die Grundlagen der Quantenphysik wurden Anfang des 20. Jahrhunderts durch die Untersuchung der Schwarzkörperstrahlung gelegt. Max Planck erklärte die Strahlung durch diskrete Emissions- und Absorptionsstrahlung der Atome. Insbesondere ist dadurch die Energie diskret. Zur Beschreibung dieser diskreten Strahlung wurde das Plancksche Wirkungsquantum $h = 2\pi\hbar$ eingeführt. Die kleinste dieser Strahlungeinheiten wird als Quant bezeichnet. 1887 entdeckte Heinrich Hertz den photoelektrischen Effekt. Albert Einstein behandelte diesen Effekt unter Berücksichtigung der von Planck entdeckten Quantelung. 1905 veröffentlichte Einstein seine Arbeiten zu diesem Effekt. Er folgerte, dass nicht nur die Emissions- und Absorptionsstrahlung der Atome, sondern auch die elektromagnetische Strahlung selbst gequantelt ist. Das Lichtquant, auch Photon genannt, besitzt damit eine gequantelte Energie:

$$E = h\nu.$$

Die Energie des Photons ist proportional zu seiner Frequenz ν und dem Planckschen Wirkungsquantum. Der Compton-Effekt bestätigte Einsteins Interpretation des photoelektrischen Effekts. Die Interpretation des Lichts als Photon entspricht einer Deutung als Teilchen. Interferenz- und Beugungerscheinungen fordern die Deutung des Lichts als Welle. Es liegt ein Welle-Teilchen-Dualismus vor.

Ein deutlicher Unterschied zwischen Quantenmechanik und klassischer Mechanik ist die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik. 1927 stellte Werner Heisenberg die Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

auf. Ort *und* Impuls eines Teilchens sind somit nicht mehr exakt bestimmbar.

Die Quantenmechanik ist Grundlage der Quantenfeldtheorie, in der die Felder quantisiert sind. Liegt zudem Invarianz unter einer Eichtransformation vor, wird von einer Eichfeldtheorie gesprochen. Die Quantenelektrodynamik (QED) wurde in den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts formuliert. Ihr liegt die elektromagnetische Wechselwirkung zugrunde. Die Symmetriegruppe der QED ist die $U(1)$ -Symmetriegruppe, welche abelsch ist. Die Theorie der starken Wechselwirkung wird durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben mit der nicht-abelschen Symmetriegruppe $SU(3)$. Überlegungen, die QED und die QCD durch eine vereinheitlichende Theorie, GUT (Grand Unified Theory), zu beschreiben, haben bisher keine Ergebnisse hervorgebracht.

Die Untersuchung der QCD bei niedrigen Energien ist schwierig, da die Koppelungskonstante der QCD dann von der Größenordnung 1 ist. Eine störungstheoretische Behandlung ist so nicht mehr möglich. Die chirale Störungstheorie, χ PT (chiral perturbation theory), wurde in den 80er Jahren des letzten Jahrhunderts von Heinrich Leutwyler und Jürg Gasser entwickelt und stellt eine Möglichkeit der Betrachtung der QCD bei niedrigen Energien bereit. Die χ PT beinhaltet mehrere physikalische Parameter, die entweder experimentell oder durch Gittersimulationen bestimmt werden. Um diese Gittersimulationen durchführen zu können, wird die Lagrangedichte auf einem diskreten Gitter formuliert. Eine Formulierung mit Hilfe der twisted mass QCD (tmQCD) hat sich dabei als sinnvoll erwiesen.

In der tmQCD wird die Wilson-Wirkung durch eine Drehung des Massenterms modifiziert. Dadurch werden Nullmoden, sogenannte *quark zero modes* verhindert. Diese *quark zero modes* verhindern eine statistische Auswertung. Die tmQCD im Rahmen der χ PT ist bereits in mehreren Arbeiten behandelt worden, z.B. [8], [22], [24]. Häufig wurden dabei gewisse Näherungen gemacht.

In dieser Diplomarbeit sollen diese Näherungen zur Berechnung des Potentialminimums nicht benutzt werden. Diese Vorgehensweise erlaubt einen Vergleich der Minima und eine Einschätzung, in welchen Bereichen die Näherungen sinnvoll sind.

In Kapitel 2 dieser Diplomarbeit werden die Grundlagen der χ PT betrachtet. Insbesondere wird die spontane Symmetriebrechung erläutert und die Lagrangedichte diskutiert.

Diese Lagrangedichte wird im Kapitel 3 auf dem Gitter betrachtet und die nötigen Modifikationen werden eingeführt. Dazu werden die Wilson- und die Symanzik-Wirkung vorgestellt.

Schwierigkeiten, die aufgrund der Wilson-Wirkung auftreten, lassen sich durch die Einführung der tmQCD vermeiden. Dazu wird in Kapitel 4 die Lagrangedichte für $N_f = 2$ bis *next to leading order* (NLO) betrachtet. Die Feldkonfigurationsmatrix dieser Lagrangedichte wird in der physical basis und der twisted basis vorgestellt. Das Potential wird in der twisted basis auf Minima untersucht. Um diese zu berechnen, muss eine quartische Gleichung gelöst werden.

Die Lösung dieser Gleichung wird im nächsten Kapitel hergeleitet. Dazu wird der Algorithmus nach Ferrari benutzt. Da die Lagrangedichte auf dem Gitter betrachtet wird, müssen, neben den physikalischen Parametern, auch gewisse Gitterparameter angegeben werden. Einige wurden bereits in anderen Arbeiten bestimmt, z.B. [19], andere werden hier abgeschätzt. Aus der Entwicklung der Lagrangedichte bis NLO wird ein Gültigkeitsbereich der Variablen gefordert. Das Potential enthält Terme, deren Einfluss auf das Minimum nicht groß sein sollte. Dies wird in dieser Arbeit überprüft. Bei gewissen Werten der Variablen springt der Wert des Minimums. Dieser Sprung des Minimums wird hier näher untersucht.

In Kapitel 6 werden die $\hat{\eta}$ - und die $\hat{\chi}$ -Näherung vorgestellt [13], [22], [23], [24]. In beiden Näherungen wird die Annahme kleiner Massen gemacht, diese dürfen allerdings auch nicht zu klein werden. Die $\hat{\eta}$ -Näherung ist eine Erweiterung der $\hat{\chi}$ -Näherung. Hier wird zusätzlich die Annahme gemacht, dass die Gitterkonstante im Verhältnis zur Masse nicht zu groß wird. Zu jeder Näherung wird das entsprechende Minimum angegeben. Diese werden mit dem Minimum verglichen, welches mit dem Algorithmus nach Ferrari berechnet wird. Die Vergleiche werden in *leading order* (LO) und in NLO durchgeführt. Im 7. Kapitel wird die Masse der Pionen berechnet. Die Treelevelmasse in LO, die Treelevelmasse in NLO und die Schleifenbeiträge in NLO werden berechnet und renormiert. Zudem wird die Veränderung der Masse durch die Berücksichtigung der Schleifenbeiträge untersucht. Anschließend werden diese Massen mit den Massen verglichen, welche nach der $\hat{\eta}$ -Näherung berechnet werden. Das in NLO auftretende Massensplitting wird betrachtet und mit einem theoretischen Wert verglichen. Zum Schluß dieses Kapitels wird das Verhalten der Massen bei einem bestimmten Wert betrachtet und mit dem theoretisch zu erwartenden Verhalten verglichen.

Das letzte Kapitel behandelt das Potential der Lagrangedichte für $N_f = 3$. Es

wird eine mögliche Parametrisierung der Feldkonfigurationsmatrix und der Drehmatrix vorgestellt. Das Potential wird in dieser Parametrisierung auf die Existenz von Minima und deren Verhalten bei Veränderung der Koeffizienten untersucht.

Kapitel 2

Chirale Störungstheorie

2.1 Standardmodell

Das Standardmodell beschreibt die materiebildenden Teilchen und deren Wechselwirkungen [1]. Bekannt sind vier Wechselwirkungen: die Gravitation, die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung. Die Elementarteilchen des Standardmodells sind Fermionen, das sind die sechs Quarks, die Leptonen und jeweils deren Antiteilchen. Es gibt sechs Leptonen: das Elektron, das Myon, das Tauon und die dazugehörigen Neutrinos. Die sechs Quarks haben den Spin 1/2. Ihnen wird der Freiheitsgrad *flavour* zugeordnet: *Up*, *Down*, *Strange*, *Charm*, *Bottom* und *Top*. Die Flavours werden in drei Generationen eingeteilt:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ t \end{pmatrix}.$$

$N_{flavour} = N_f$ bezeichnet die Anzahl der Quarks.

Zwischen den Quarks wirkt die starke Wechselwirkung, deren Austauschteilchen, auch Eichboson genannt, das *Gluon* ist. Die Reichweite dieser Wechselwirkung liegt im Femtometer-Bereich. Aufgrund der starken Wechselwirkung liegen Quarks nur in gebundenen Zuständen vor. Dieses Phänomen wird als *Confinement* bezeichnet. Die gebundenen Zustände der Quarks sind die Hadronen. Bekannt ist die Verbindung eines Quarks mit einem Antiquark zu einem Meson oder die Verbindung dreier Quarks zu einem Baryon. Neben der starken Wechselwirkung ist für die Interaktionen zwischen den Hadronen auch die schwache Wechselwirkung, mit einer Reichweite von ca. 10^{-18} m, verantwortlich. Die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung sind das W^+ -, das W^- und das Z -Boson. Interaktionen zwischen den Hadronen können durch die Streumatrix berechnet werden. Diese kann mit Hilfe von Feynman-

Diagrammen graphisch dargestellt werden.

Jedes Quark hat eine ihm eigene Masse:

| flavour | Up | Down | Strange | Charm | Bottom | Top |
|------------|-------|-------|---------|-------|--------|-----|
| Masse(GeV) | 0,005 | 0,009 | 0,175 | 1,35 | 5,3 | 176 |

Dabei war die Masse des *Top*-Quarks experimentell lange Zeit unbekannt und wurde erst in den letzten Jahren gefunden.

Aufgrund ihrer Masse werden die Quarks *Up*, *Down* und *Strange* als leichte Quarks bezeichnet [2]. Die Quarks *Charm*, *Bottom* und *Top* werden schwere Quarks genannt. Leichte Quarks besitzen eine viel kleinere Masse als $\Lambda_{\text{QCD}} = 1\text{GeV}$. Λ_{QCD} ist eine typische Größenordnung der Quantenchromodynamik* (QCD). Sie wird als hadronische Skala bezeichnet. Die Masse der schweren Quarks ist größer als Λ_{QCD} . Der Wert 1GeV der hadronischen Skala ergibt sich aus der typischen Masse der Hadronen.

Das Proton besteht aus zwei *Up*-Quarks und einem *Down*-Quark. Allerdings gilt:

$$m_p = 0,938\text{GeV} \gg 2m_u + m_d.$$

Die Hadronenmasse entsteht offensichtlich nicht durch reines Zusammensetzen der Quarkmassen, sondern auf komplexerem Weg.

Da die Masse der leichten Quarks sehr viel kleiner ist als die hadronische Skala, stellt

$$m_u = m_d = m_s = 0$$

eine sinnvolle Näherung dar.

2.2 Lagrangedichten in der QCD

In der QCD wird jedem Quark ein weiterer Freiheitsgrad, die Farbe, auch *colour* genannt, zugeordnet. Dieser kann die Werte rot, grün oder blau annehmen. Das Quark-Feld lässt sich aus einem Vektor der drei Dirac-Spinoren darstellen:

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,\text{rot}} \\ q_{f,\text{grün}} \\ q_{f,\text{blau}} \end{pmatrix}.$$

Die Verbindung eines Quarks mit einem Antiquark wird als Meson bezeichnet. Sind drei Quarks gebunden wird dies Baryon genannt. Das Antiquark besitzt eine Antifarbe. Diese Antifarbe ist zusammen mit einer Farbe „farblos“. Ebenso sind drei Farben zusammen „farblos“. Der Freiheitsgrad colour

*Aus dem Griechischen: *chromos* = Farbe

ist somit nicht direkt beobachtbar und dient nur der mathematischen Beschreibung.

Die QCD ist unter der $SU(3)$ Symmetriegruppe invariant. Eine Symmetriegruppe spezieller unitärer Matrizen[†] mit der Dimension N wird mit $SU(N)$ bezeichnet. Sie hat $N^2 - 1$ Generatoren, welche nicht vertauschen. Somit ist die QCD eine nichtabelsche Eichtheorie. Die Generatoren der $SU(3)$ sind proportional zu den acht Gell-Mann-Matrizen[†] $T_a = \lambda_a/2$, mit $a = 1, \dots, 8$ und erfüllen die Vertauschungsrelation:

$$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2} \right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}.$$

Die Lagrangedichte der QCD lautet:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu,a} F_a^{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Dabei sind γ^μ die Dirac-Matrizen[‡] und

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} A_{\mu,a}, \quad (2.2)$$

ist die kovariante Ableitung, welche die acht Eichfelder $A_{\mu,a}$, die Eichbosonen oder *Gluonen*, enthält. Der Feldstärketensor besteht aus den Eichfeldern und ihren Ableitungen

$$F_{\mu\nu,a} = \partial_\mu A_{\nu,a} - \partial_\nu A_{\mu,a} + g f_{abc} A_{\mu,b} A_{\nu,c}, \quad (2.3)$$

ist aber unabhängig von den Quarkflavours.

Wie schon in Abschnitt 2.1 beschrieben ist es sinnvoll den Grenzfall $m_u = m_d = m_s = 0$ einzuführen. Die Lagrangedichte der leichten Quarks lautet dann:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f i\gamma^\mu D_\mu q_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu,a} F_a^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Es können nun die Projektionsoperatoren eingeführt werden, welche die Lagrangedichte (2.4) in einen linkshändigen und einen rechtshändigen Anteil aufteilen. Die Händigkeit der Lagrangedichte wird auch als Chiralität bezeichnet, bzw. die Lagrangedichte als eine chirale Lagrangedichte. Diese Projektionsoperatoren sind definiert als

$$P_R = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \quad P_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma_5)$$

[†]Siehe Anhang A

[‡]Siehe Anhang B

und haben die Eigenschaften

$$P_R + P_L = 1, \quad P_{R/L}^2 = P_{R/L} \quad \text{und} \quad P_R P_L = P_L P_R = 0.$$

Damit folgt die chirale Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=u,d,s} (\bar{q}_{R,f} i\gamma^\mu D_\mu q_{R,f} + \bar{q}_{L,f} i\gamma^\mu D_\mu q_{L,f}) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu,a} F_a^{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Diese Lagrangedichte besitzt eine globale $U(3)_L \times U(3)_R$ Symmetrie. Nach dem von Emmy Noether aufgestellten Theorem gibt es für jede globale, kontinuierliche Symmetrietransformation, welche die Lagrangedichte und die Bewegungsgleichung invariant lässt, einen klassisch erhaltenen Strom. Damit lassen sich $2 \times (8 + 1) = 18$ erhaltene Ströme finden:

$$\begin{aligned} V^{\mu,a} &= R^{\mu,a} + L^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q \\ A^{\mu,a} &= R^{\mu,a} - L^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q \\ V^\mu &= R^\mu + L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu q \\ A^\mu &= R^\mu - L^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q. \end{aligned}$$

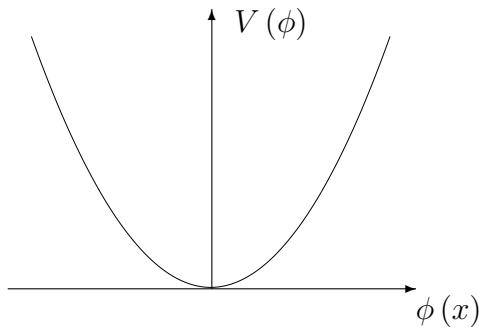
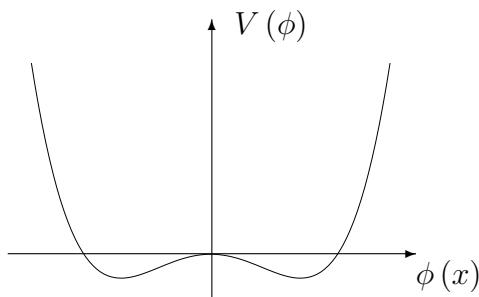
Klassisch sind diese Ströme immer erhalten, quantenmechanisch ist dies nicht immer zwingend. Der axiale Singulettstrom A^μ besitzt aufgrund von Quanteneffekten eine Anomalie. Bei der Betrachtung des Quarkmassenterms als Störung, können Aussagen über die Erhaltung der Ströme gemacht werden. Der vektorielle Oktettstrom $V^{\mu,a}$ ist nur erhalten für $m_u = m_d = m_s$, der axiale Oktettstrom $A^{\mu,a}$ dagegen nicht. Für den Fall von endlichen Quarkmassen besitzt der axiale Singulettstrom A^μ eine Divergenz. Der vektorielle Singulettstrom V^μ ist immer erhalten, hieraus folgt die Baryonenerhaltung.

2.3 Spontane Symmetriebrechung

Spontane Symmetriebrechung kann beobachtet werden, wenn der Grundzustand eines Systems entartet ist. Es muss ein Grundzustand ausgewählt werden, der nicht mehr alle Symmetrien der dazuhörigen Lagrangedichte besitzt [2], [3]. Für die genaue Untersuchung dieses Phänomens wird als Beispiel die ϕ^4 Lagrangedichte betrachtet

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mathcal{V}(\phi), \quad (2.6)$$

mit einem hermiteschen, skalaren Feld $\phi(x)$. Diese Lagrangedichte ist invariant unter der Transformation $\mathcal{R} : \phi \rightarrow -\phi$. Es wird $\lambda > 0$ gewählt. Für die Größe m werden zwei Fälle unterschieden:

Abbildung 2.1: Potential $\mathcal{V}(\phi)$ für $m^2 > 0$ im Wigner-Weyl-ModusAbbildung 2.2: Potential $\mathcal{V}(\phi)$ für $m^2 < 0$ im Nambu-Goldstone-Modus

- $m^2 > 0$: Das Potential $\mathcal{V}(\phi)$ besitzt ein Minimum für $\phi_0 = 0$, siehe Abb. 2.1. Der Grundzustand, $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \phi_0$, ist nicht entartet und invariant unter der Transformation \mathcal{R} . Diese Situation wird auch Wigner-Weyl-Modus genannt.
- $m^2 < 0$: Das Potential $\mathcal{V}(\phi)$ besitzt nun zwei Minima bei $\phi = \pm\phi_0$, wo bei $\phi_0 = \sqrt{-m^2/\lambda}$ ist, siehe Abb. 2.2. Das System besitzt zwei entartete Grundzustände, $\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle = \pm\phi_0$. Diese sind nicht mehr invariant unter der Transformation \mathcal{R} . Die Symmetrie des Systems wird durch die Wahl eines Grundzustandes spontan gebrochen. Diese Situation wird Nambu-Goldstone-Modus genannt.

2.3.1 Goldstone-Theorem

Das Goldstone-Theorem besagt, dass beim Auftreten der spontanen Symmetriebrechung kontinuierlicher Symmetrien masselose Teilchen, sogenannte *Goldstone-Bosonen* beobachtet werden.

Um diese Goldstone-Bosonen zu finden, muss nach Auswahl eines Grundzustandes das Potential um das zugehörige Minimum entwickelt werden. Aus Gleichung (2.6) ist erkennbar, dass die Masse eines Teilchens in dem zum zugehörigen Feld quadratischen Term enthalten ist.

2.3.2 Spontane Symmetriebrechung unter einer nicht-abelschen Symmetrie

Als Beispiel wird die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\vec{\phi}) = \mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{m^2}{2} \phi_i \phi_i - \frac{\lambda}{4} (\phi_i \phi_i)^2 \quad (2.7)$$

betrachtet, welche invariant unter der nichtabelschen Symmetriegruppe $SO(3)$ ist. Es sei $\lambda > 0$ und $m^2 < 0$. Die Minima des Potentials liegen auf einem Kreis mit dem Radius:

$$|\vec{\phi}_{\min}| = \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} =: v.$$

Nun muss ein Grundzustand ausgewählt werden, z.B.:

$$\vec{\phi}_{\min} = v \hat{e}_3.$$

Die Entwicklung nach dem Minimum lautet dann

$$\phi_3 = v + \eta,$$

damit ergibt sich für das Potential:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} (-2m^2) \eta^2 + \lambda v \eta (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \eta^2) + \frac{\lambda}{4} (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \eta^2)^2 - \frac{\lambda}{4} v^4.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Massen der drei Felder ϕ_1 , ϕ_2 und η ablesen:

$$\begin{aligned} m_{\phi_1} &= m_{\phi_2} &= 0 \\ m_\eta &= \sqrt{-2m^2}. \end{aligned}$$

Daher existieren zwei masselose Goldstone-Bosonen, ϕ_1 und ϕ_2 .

Die Anzahl der Goldstone-Bosonen kann gruppentheoretisch hergeleitet werden. Es gilt:

$$\text{Anzahl der Goldstone-Bosonen} = n = n_G - n_H.$$

Dabei ist n_G die Anzahl der Generatoren der Symmetriegruppe der Lagragedichte. n_H ist die Anzahl der Generatoren der Untergruppe, welche den Grundzustand invariant lassen.

In dem obigen Beispiel ist die Symmetriegruppe die $SO(3)$ -Gruppe, welche 3 Generatoren T_i mit $[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk}T_k$ besitzt. Das Minimum ist invariant bezüglich einer Drehung in \hat{e}_3 -Richtung. Diese Symmetrie hat den Generator T_3 . Somit ist die Anzahl der Goldstone-Bosonen: $3 - 1 = 2$, wie oben gefunden.

2.4 Spontane Symmetriebrechung in der QCD

In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen der spontanen Symmetriebrechung in der QCD untersucht. Dazu wird die Lagrangedichte im Grenzfall verschwindender Massen, siehe Gleichung (2.5), für $N_f = 2$ betrachtet. Dieser Grenzfall wird auch als chiraler Grenzfall bezeichnet:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=u,d} (\bar{q}_{R,f} i\gamma_\mu D^\mu q_{R,f} + \bar{q}_{L,f} i\gamma_\mu D^\mu q_{L,f}) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu,i} F_i^{\mu\nu}.$$

Diese Lagrangedichte besitzt eine $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_V$ -Symmetrie. Die $U(1)_V$ -Symmetrie ist exakt. Sowohl Lagrangedichte als auch Grundzustand sind invariant unter dieser Symmetrie, aus der die Baryonenzahlerhaltung resultiert. Die Transformationsgruppe $G = SU(2)_L \times SU(2)_R$ lässt den Grundzustand nicht invariant. Dieser ist invariant unter der Untergruppe $H = SU(2)_V$. Die Generatoren T_i für $N_f = 2$ sind proportional zu den drei Paulimatrizen[§] τ_i mit $T_i = \tau_i/2$. Es existieren demnach $n = 6 - 3 = 3$ Goldstone-Bosonen. Die 3 Goldstone-Bosonen sind die Pionen.

2.5 Effektive Lagrangedichte für Goldstone-Bosonen

Ziel der weiteren Betrachtungen ist es, eine effektive Lagrangedichte der Goldstone-Bosonen aufzustellen. Diese Lagrangedichte soll im chiralen Grenzfall invariant unter der chiralen Transformation $SU(2)_L \times SU(2)_R$ sein. Des Weiteren soll der Grundzustand die Symmetrie $SU(2)_V$ haben, damit die spontane Symmetriebrechung eintritt. Die Betrachtung der Goldstone-Bosonen erfolgt damit im Sinne einer Störungstheorie. Da die Symmetrie der Lagrangedichte die chirale Symmetrie ist, wird diese Störungstheorie auch als chirale Störungstheorie oder *chiral perturbation theory* (χ PT) bezeichnet. Um jetzt die Lagrangedichte der Goldstone-Bosonen herzuleiten, wird zunächst das Transformationsverhalten von Goldstone-Bosonen untersucht.

2.5.1 Transformationsverhalten von Goldstone-Bosonen

Zur Beschreibung des Transformationsverhaltens wird der Begriff der *Linksnenbenklasse* eingeführt.

[§]Siehe Anhang A

Definition: Sei H eine Untergruppe von G . Man bezeichnet die Menge

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

als eine *Linksnebenklasse* von H .

Als Raum der Goldstone-Bosonen wird $M = \left\{ \vec{\Pi} \mid \vec{\Pi} : M^4 \rightarrow \mathbf{R}^n \right\}$ definiert. M^4 ist der Minkowski-Raum, n ist die in Abschnitt 2.3.2 definierte Anzahl der Goldstone-Bosonen. Die Felder der Goldstone-Bosonen, oder Goldstone-Bosonen-Variablen, werden durch

$$\vec{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \vdots \\ \Pi_n \end{pmatrix}$$

dargestellt. Zwischen den Goldstone-Bosonen-Variablen $\vec{\Pi}$ und den Elementen der Linksnebenklasse existiert eine isomorphe Abbildung. Dadurch lässt sich das Transformationsverhalten der Goldstone-Bosonen ermitteln.

Zu jedem $\vec{\Pi}$ existiert genau ein $\tilde{g}H$ mit geeignetem \tilde{g} . Das transformierte $\vec{\Pi}'$ lässt sich dann durch Multiplikation von $\tilde{g}H$ mit g finden.

Die Gruppe G ist jetzt die $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ -Gruppe, welche den Grundzustand nicht invariant lässt. H ist demnach die $SU(N_f)_V$ -Gruppe. Dann ist $g = (L, R)$. Damit ergibt sich das Transformationsverhalten der Felder der Goldstone-Bosonen:

$$U(x) \rightarrow RU(x)L^\dagger. \quad (2.8)$$

U ist die Feldkonfigurationsmatrix, in der die Felder der Goldstone-Bosonen enthalten sind. Diese Matrix kann in Exponentialform dargestellt werden:

$$U(x) = e^{i \frac{\Phi(x)}{F_0}}. \quad (2.9)$$

Die Konstante F_0 hat die Dimension einer Energie, die Konfigurationsmatrix ist folglich dimensionslos. Φ ist das Feld der Goldstone-Bosonen, welches bisher mit $\vec{\Pi}$ bezeichnet wurde.

Für $N_f = 3$ gilt:

$$\Phi(x) = \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a(x) = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

λ_a sind die acht Gell-Mann-Matrizen. ϕ_a sind hermitesche Felder. Für $N_f = 3$ gibt es $n = 16 - 8 = 8$ Goldstone-Bosonen: drei Pionen $\pi^{+,-,0}$, das Eta-Teilchen η und die vier Kaonen $K^{+,-,0}$ und \bar{K}^0 .

Im Fall $N_f = 2$ werden die Gell-Mann-Matrizen durch die drei Paulimatrizen τ_i ersetzt. Die Goldstone-Bosonen sind die drei Pionen:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^3 \tau_i \phi_i(x) = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

2.5.2 Die effektive Lagrangedichte in $\mathcal{O}(p^2)$ der Impulsentwicklung

Es wird nun eine Lagrangedichte bis zur Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$ aufgestellt, welche das Transformationsverhalten aus Gleichung (2.8) besitzt. Damit die spontane Symmetriebrechung eintritt, soll der Grundzustand die Symmetrie $SU(2)_V \times U(1)_V$ besitzen. Die allgemeinste Lagrangedichte, die diesen Bedingungen genügt und chiral invariant ist, lautet:

$$\mathcal{L}_{2,\text{kin}} = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger). \quad (2.12)$$

Wird in diese Lagrangedichte die Feldkonfigurationsmatrix aus Gleichung (2.9) eingesetzt, ergibt sich die übliche Form

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^\dagger$$

des kinetischen Terms.

Der chirale Grenzfall $m_u = m_d = 0$ ist nur eine Näherung, die Massen des *Up*- und des *Down*-Quarks sind endlich. Dadurch kommt es zu einer expliziten Symmetriebrechung durch den Masseterm. Daraus folgt, dass die Pionen ebenfalls nicht masselos sind, sie werden daher *Pseudo-Goldstone-Bosonen* genannt. Die Lagrangedichte aus Gleichung (2.12) berücksichtigt nicht diese explizite Symmetriebrechung durch die endlichen Massen der Quarks. Um dies zu berücksichtigen wird die Massenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}$$

eingeführt. Mit Hilfe der Spurionanalyse findet sich der Term der Lagrangedichte, in dem die Massenmatrix vorkommt:

$$\mathcal{L}_{2,M} = \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr} (M U^\dagger + U M^\dagger). \quad (2.13)$$

B_0 ist eine Konstante mit der Dimension einer Energie. Die vollständige Lagrangedichte bis zur Ordnung $\mathcal{O}(p^2)$ ist die Summe der Terme $\mathcal{L}_{2,\text{kin}}$ und

$\mathcal{L}_{2,M}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= \mathcal{L}_{2,\text{kin}} + \mathcal{L}_{2,M} \\ &= \frac{F_0^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{F_0^2 B_0}{2} \text{Tr} (M U^\dagger + U M^\dagger).\end{aligned}$$

Die Feldkonfigurationsmatrix mit Gleichung (2.11) wird jetzt in den Feldern bis zur zweiten Ordnung entwickelt, um die Masse der Pionen zu erhalten. Es wird $m_u = m_d = m \neq 0$ gesetzt. Wie schon in Abschnitt 2.3.1 gefunden, ist die Masse eines Teilchens in dem zum zugehörigen Feld quadratischen Term enthalten. Damit gilt für die Masse der Pionen:

$$M_\pi^2 = 2B_0 m. \quad (2.14)$$

Wird der Fall $N_f = 3$ betrachtet, so muss zusätzlich das *Strange*-Quark mit der Masse m_s berücksichtigt werden. Die Massenmatrix M behält ihre Diagonalform, wird aber zu einer 3×3 -Matrix. Für die Feldkonfigurationsmatrix wird Gleichung (2.10) verwendet. Zusätzlich zu der Pionenmasse aus Gleichung (2.14) werden die Massen der Kaonen und des η -Teilchens berechnet zu

$$M_K^2 = B_0(m + m_s) \quad (2.15)$$

und

$$M_\eta^2 = \frac{2}{3} B_0(m + 2m_s). \quad (2.16)$$

Diese Massen entsprechen der Gell-Mann-Okubo-Formel:

$$4M_K^2 = 3M_\eta^2 + M_\pi^2. \quad (2.17)$$

Als nächstes wird ein von Steven Weinberg aufgestelltes Sortierschema vorgestellt. Damit lassen sich Terme in der Lagrangedichte einführen, die eine höhere Ordnungen in M haben.

2.5.3 Das Weinberg'sche Powercounting

Dem Weinberg'schen Powercounting liegt ein Theorem zugrunde [2], das besagt, dass die allgemeinste S-Matrix, welche der Konsistenzbedingungen der

Analytizität, der Unitarität, der Kausalität und gewissen Symmetriebedingungen genügen soll, perturbativ durch eine effektive, allgemeine Lagrangedichte berechnet werden kann. Die Terme dieser Lagrangedichte sollen unabhängig sein und ebenfalls der Symmetrie genügen. Jeder mögliche Term wird dabei berücksichtigt.

Aufgrund der Beziehung $M_\pi^2 \propto m$, siehe Gleichung (2.14), wird der Quarkmasse die gleiche Ordnung wie zwei Ableitungen zugeordnet. Die Ableitungen treten immer in gerader Anzahl auf, so dass sie zu Lorentzskalaren kontrahieren. Daher lässt sich die Lagrangedichte nach Ordnungen der Masse und der Impulse ordnen und in der Form

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}_{2i} = \sum_D \mathcal{L}_D = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \dots$$

schreiben. Es treten somit nur gerade Ordnungen der Lagrangedichte auf.

Das Weinberg'sche Zählschema liefert eine Möglichkeit Feynman-Diagrammen eine Ordnung der Lagrangedichte zuzuordnen, diese wird mit D bezeichnet. Aus der Reskalierung der Impulse und Massen der externen Mesonen ergibt sich das Verhalten der Amplitude:

$$\mathcal{M}(tp, t^2 M^2) = t^D \mathcal{M}(p, M^2).$$

Für jeden Vertex \mathcal{L}_{2n} des Diagramms ergibt sich ein Reskalierungsverhalten von t^{2n} für den Vertexfaktor und t^{-4} für die impulserhaltende Deltafunktion. Jeder Vertex ergibt damit einen Beitrag zur Ordnung D von:

$$\sum_{n=1}^{\infty} N_{2n} (2n - 4).$$

Dabei ist N_{2n} die Anzahl der Vertizes im Diagramm. Die inneren Mesonenlinien werden durch das Integral

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon}$$

berechnet und reskalieren wie:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \stackrel{M^2 \rightarrow t^2 M^2}{\stackrel{k \rightarrow tk}{=}} t^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon}.$$

Dies ergibt den Beitrag

$$2N_I,$$

mit N_I Anzahl der innere Mesonenlinien, zur Ordnung D . Die Erhaltung des Viererimpulses ergibt den zusätzlichen Term +4. Damit lautet die Gleichung für die Ordnung D :

$$D = 4 + 2N_I + \sum_{n=1}^{\infty} N_{2n} (2n - 4). \quad (2.18)$$

Mit Hilfe der Relation $N_L = N_I - (\sum_n N_{2n} - 1)$ lässt sich D durch die Anzahl der Vertizes und der unabhängigen Schleifen N_L ausdrücken:

$$D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n} + 2N_L. \quad (2.19)$$

Aus dieser Gleichung lässt sich ablesen, dass die Schleifendiagramme mindestens die Ordnung $D = 4$ haben.

Terme in der Lagrangedichte, welche die Ordnung $D = 2$ haben, werden als Terme führender Ordnung oder als *leading order* (LO) Terme bezeichnet. Terme mit der Ordnung $D = 4$ werden als nächstführende Ordnungsterme oder als *next to leading order* (NLO) Terme bezeichnet.

Gesucht wird die Lagrangedichte bis NLO, d.h. bis $D = 4$. Die allgemeinste, effektive, chirale Lagrangedichte bis zur Ordnung $D = 2$ wurde bereits in Abschnitt 2.5.2 hergeleitet. Es wird die Abkürzung

$$\chi = 2B_0 M$$

eingeführt. Damit ergibt sich für die Lagrangedichte bis LO:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \left\langle \partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger \right\rangle + \frac{F_0^2}{4} \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle. \quad (2.20)$$

Hierbei wird die Schreibweise $\text{Tr} \rightarrow \langle \rangle$ verwendet. Die Lagrangedichte bis NLO ergibt sich aus denselben Überlegungen, wie die Lagrangedichte bis LO. Zuvor wird ermittelt, wie sich die Lagrangedichte auf dem Gitter verändert.

Kapitel 3

Gitter-QCD

In diesem Kapitel wird die Lagrangedichte zur Betrachtung auf dem Gitter modifiziert. Durch Gittersimulationen, z.B. Monte-Carlo-Rechnungen, lassen sich viele Daten zur Verifizierung der Theorie berechnen. Dabei müssen auch Effekte berücksichtigt und eingeschätzt werden, welche durch die Gittersimulationen entstehen.

3.1 Euklidische Formulierung der Lagrangedichte

Für die Formulierung der Lagrangedichte auf dem Gitter wird vom Minkowski-Raum in den Euklidischen Raum gewechselt. Die euklidische Wirkung S_E , und insbesondere e^{-S_E} , ist reell und verhindert damit Oszillationen [4].

Der metrische Tensor des Minkowski-Raums

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

geht über in den metrischen Tensor des Euklidischen Raums

$$g_{\mu\nu}^E = \text{diag}(1, 1, 1, 1).$$

Dies wird durch den Übergang $t \rightarrow it$ von reellen zu imaginären Zeiten erreicht. Dadurch kommt es zu einer Drehung um $\pi/2$ in der komplexen Zeit-Ebene, einer *Wick-Rotation*. Die Indizes werden von $\mu = 0, 1, 2, 3$ umbenannt in $\mu = 1, 2, 3, 4$. Dabei geht die Zeitkoordinate des Minkowski-Raums x_0 im Euklidischen Raum über in x_4 .

Zur Modifizierung der Lagrangedichte wird die Bedingung

$$[\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E]_+ = 2\delta_{\mu\nu}$$

an den Anti-Kommutator der Dirac-Matrixen* gestellt. Dies wird z.B. realisiert durch:

$$\gamma_i^E = i\gamma^i \quad \gamma_4^E = -\gamma_0 \quad i\gamma^\mu \partial_\mu = -\gamma_\mu^E \partial_\mu^E.$$

Damit lautet die Lagrangedichte bis LO (2.20) im euklidischen Raum:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \left\langle \partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger \right\rangle - \frac{F_0^2}{4} \left\langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \right\rangle. \quad (3.1)$$

3.2 Wilson-Wirkung

In der Gittertheorie wird der Abstand der Gitterpunkte mit a und die Richtung mit $\mu = 0, 1, 2, 3$ bezeichnet. Eine Möglichkeit die Wirkung auf dem Gitter zu formulieren, ist die Ableitungen durch endliche Differenzen und die Integrale durch Summen über die Gitterplätze auszutauschen. Dieser Weg hat allerdings einige Nachteile, da die Wirkung für $a \neq 0$ nicht mehr eichinvariant ist. Aufgrund des Renormierungsverhaltens ist dies auch für $a \rightarrow 0$ der Fall. Eine Alternative zu dieser einfachen Umformulierung hat Kenneth G. Wilson vorgeschlagen [5]. Dabei hat er zuerst eine Eichinvarianz für das Gitter formuliert und danach die Wirkung angepasst. Das Ergebnis ist die eichinvariante Wilson-Wirkung.

Auf dem Gitter ist das Produkt der Fermionfelder $\bar{\psi}(x) \cdot \psi(y)$ nicht eichinvariant. Deswegen wird eine Matrix $U(x, y) \in \text{SU}(N)$ eingeführt, welche transformiert wie

$$U(x, y) \rightarrow \Lambda(x)U(x, y)\Lambda^{-1}(y),$$

mit $\Lambda \in \text{SU}(N)$ [4]. Durch das Transformationsverhalten der Matrix $U(x, y)$ ist das Produkt $\bar{\psi}(x) \cdot U(x, y) \cdot \psi(y)$ eichinvariant. Die Matrix $U(x, y)$ wird *Paralleltransporter* genannt und ist im Kontinuum definiert als:

$$U(x, y, \mathcal{C}) =: P \exp \left[ig_0 \int_x^y A_\mu^a(z) T_a dz^\mu \right].$$

Das Integral von x nach y wird entlang eines Pfades \mathcal{C} berechnet. Der *Paralleltransporter* ist somit pfadabhängig. P bezeichnet das pfadgeordnete Produkt, analog zu dem zeitgeordnetem Produkt. A_μ^a sind die Eichfelder und T_a die Generatoren der Symmetriegruppe.

*Siehe Anhang B

Um die Eichinvarianz auf dem Gitter zu erreichen, wird der kleinste *Paralleltransporter* $U(x, y, \mathcal{C})$ benutzt. Dieser wird als *Link-Variable* bezeichnet und der dazugehörige Pfad als *Link*:

$$U(x + a\hat{\mu}, x) =: U_{x\mu} =: \exp [ig_0 a A_\mu^b(x) T_b] \in \mathrm{SU}(N).$$

Hierbei ist $\hat{\mu}$ der Einheitsvektor in μ -Richtung. Damit wird eine eichinvariante Wirkung erhalten:

$$\sum_{x,y} \bar{\psi}(x + a\hat{\mu}, x) \cdot U_{x\mu} \psi(x).$$

Die *Plaquette-Variable*, welche ein Produkt aus mehreren *Link-Variablen* ist, lässt sich definieren als:

$$U(p) = U_{x\mu\nu} =: U_{(x+a\hat{\nu})(-\nu)} U_{(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})(-\mu)} U_{(x+a\hat{\mu})\nu} U_{x\mu}.$$

Der Pfad der *Link-Variablen* ist die *Plaquette* p .

Die Wilson-Wirkung hat die Form

$$S[U, \bar{\psi}, \psi] = S_G[U] + S_F[U, \bar{\psi}, \psi], \quad (3.2)$$

wobei S_G die Wilson-Plaquette-Wirkung und S_F die Wilson-Quark-Wirkung ist [6],[7]. Die Wilson-Plaquette-Wirkung wird durch die Gleichung

$$S_G[U] = \frac{1}{g_0^2} \sum_p \mathrm{Tr} (1 - U(p)) \quad (3.3)$$

beschrieben. Hierbei ist g_0 die nackte Kopplungskonstante und $U(p)$ der Paralleltransporter um die Plaquette p . Die Summe läuft über alle orientierten Plaquetten.

Die Wilson-Quark-Wirkung genügt der Gleichung:

$$S_F[U, \bar{\psi}, \psi] = a^4 \sum_x \bar{\psi}(x) (D_W + m_0) \psi(x). \quad (3.4)$$

m_0 ist die nackte Quarkmasse und D_W der Wilson-Dirac-Operator mit:

$$D_W = \frac{1}{2} [\gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) - ar \nabla_\mu^* \nabla_\mu]. \quad (3.5)$$

r bezeichnet den Wilson-Parameter. Die Ableitungen ∇_μ^* und ∇_μ sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \psi(x) &= \frac{1}{a} [U(x, \mu) \psi(x + a\hat{\mu}) - \psi(x)] \\ \nabla_\mu^* \psi(x) &= \frac{1}{a} [\psi(x) - U^\dagger(x - a\hat{\mu}, \mu) \psi(x - a\hat{\mu})].\end{aligned}$$

Die sehr leichten Quarkmassen lassen sich in Simulationen nur durch sehr hohen Rechenaufwand realisieren. Da die Rechenleistung der heutigen Computer noch zu gering ist um mit der physikalischen Masse der leichten Quarks zu rechnen, wird mit einer schwereren als der physikalischen Quarkmasse gerechnet. Durch chirale Extrapolation werden die physikalischen Quarkmassen erreicht. Hierbei wird zuerst der Kontinuum-Limes $a \rightarrow 0$ genommen. Danach wird der chirale Limes gebildet, d.h. die Massen gehen gegen Null, bzw. werden sehr klein.

3.3 Symanzik-Wirkung

In der Symanzik-verbesserten Wirkung werden zusätzliche Terme der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ eingeführt. Diese Terme wirken als Gegenterme zu den Termen, welche Gittereffekte der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ verursachen und lassen sie somit verschwinden. Die Symanzik-verbesserte Wirkung hat damit keine $\mathcal{O}(a)$ -Terme und erreicht schneller den Kontinuums-Limes [6],[7].

Zuerst wird die Symanzik'sche effektive Wirkung betrachtet:

$$S_{\text{eff}} = S_0 + aS_1 + a^2S_2 + \dots \quad (3.6)$$

S_0 ist die Wirkung im Kontinuum. Zu dieser Wirkung werden die Gitterterme

$$a^i S_i$$

addiert. Die Symanzik'sche effektive Wirkung ist somit eine Gitterwirkung im Kontinuum. Um die Symanzik-verbesserte Wirkung zu erreichen werden Korrekturterme mit Hilfe der Gleichung

$$S_k = \int d^4 \mathcal{L}_k(x) \quad (3.7)$$

berechnet. Die Terme $\mathcal{L}_k(x)$ haben die Dimension $4 + k$, ihre Anzahl wird darüberhinaus durch die Integration über x eingeschränkt. An die restlichen Terme wird die Forderung der Eichinvarianz und der Invarianz unter $U(1) \times SU(N_f)$ -Transformationen gestellt. Für die Lagrangedichte \mathcal{L}_1 ergibt sich damit, dass sie eine Linearkombination folgender Felder sein muss:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_1 &= \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi \\ \mathcal{O}_2 &= \bar{\psi} D_\mu D_\mu \psi + \bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu \psi \\ \mathcal{O}_3 &= m \text{Tr} \{ F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \} \\ \mathcal{O}_4 &= m \{ \bar{\psi} \gamma_\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{D}_\mu \gamma_\mu \psi \} \\ \mathcal{O}_5 &= m^2 \bar{\psi} \psi.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Wie für die Wirkung lässt sich auch eine effektive Theorie für die Felder aufstellen:

$$\phi_{\text{eff}}(x) = \phi_0(x) + a\phi_1(x) + a^2\phi_2(x) + \dots\tag{3.9}$$

Für diese Felder lassen sich Bewegungsgleichungen aufstellen, welche mit den Korrelationsfunktionen verknüpft sind und zu Redefinitionen der Felder führen. Mit Hilfe dieser Redefinitionen lassen sich die Felder \mathcal{O}_2 und \mathcal{O}_4 aus der Gleichung (3.8) eliminieren.

Mit den restlichen Feldern lässt sich eine verbesserte Gitter-Wirkung aufstellen. Die Lagrangedichte \mathcal{L}_1 wird durch die Einführung eines Gegenterms

$$a^5 \sum_x \{ c_1 \widehat{\mathcal{O}}_1 + c_3 \widehat{\mathcal{O}}_3 + c_5 \widehat{\mathcal{O}}_5 \}$$

verbessert. Die Felder $\widehat{\mathcal{O}}_k$ sind Darstellungen der Felder \mathcal{O}_k auf dem Gitter. Die Konstanten c_k haben die Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$.

Die Symanzik-verbesserte Wirkung lautet schließlich

$$S_{\text{impr}}[U, \bar{\psi}, \psi] = S[U, \bar{\psi}, \psi] + \delta S[U, \bar{\psi}, \psi],\tag{3.10}$$

wobei $S[U, \bar{\psi}, \psi]$ die Wilson-Wirkung ist und

$$\delta S[U, \bar{\psi}, \psi] = a^5 \sum_x c_{\text{SW}} \bar{\psi}(x) \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \widehat{F}_{\mu\nu}(x) \psi(x)\tag{3.11}$$

gilt. $\widehat{F}_{\mu\nu}$ ist eine Gitterdarstellung des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}$. c_{SW} ist der Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient.

3.4 Lagrangedichte bis $\mathcal{O}(p^2)$

Für die zusätzlichen Gitterterme gilt das gleiche Transformationsverhalten wie für die Massenterme aus Abschnitt 2.5.2. Zur Einführung der Gitterkonstanten a wird die Matrix

$$\rho = \rho_0 \mathbf{1} = 2W_0 a \mathbf{1}$$

definiert, welche die Konstante W_0 enthält. Damit ergibt sich bis $\mathcal{O}(p^2)$ für den Gitterterm:

$$-\frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle. \quad (3.12)$$

Dieser Term korrespondiert mit Gleichung (3.11). Der Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient c_{SW} geht ein in die Konstante W_0 . $a^4 \sum_x$ geht über in ein Integral und nur a bleibt übrig. Dieses a ist in der Matrix ρ enthalten. Folglich lautet die euklidische Lagrangedichte bis $\mathcal{O}(p^2)$ auf dem Gitter:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} \left\langle \partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger \right\rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle. \quad (3.13)$$

Auf demselben Weg wird die Lagrangedichte bis $\mathcal{O}(p^4)$ gefunden. Diese wird im nächsten Kapitel betrachtet.

Kapitel 4

Twisted Mass QCD

In der *twisted mass QCD* (tmQCD) im Kontinuum wird die Massenmatrix axial gedreht [8], [9]:

$$M(\omega) = M' e^{i\omega\gamma_5\tau_3}.$$

Die Form der Lagrangedichte ist unter dieser Transformation invariant, falls die Quarkfelder wie

$$\psi(\omega) = e^{-\frac{i}{2}\omega\gamma_5\tau_3}\psi'$$

transformieren. Der Masseterm in der Lagrangedichte behält mit diesen Transformationen seine Form:

$$\bar{\psi}M\psi = \bar{\psi}'M'\psi'.$$

Die Physik wird durch die tmQCD nicht verändert. Lediglich der Vakuumzustand bei der spontanen Symmetriebrechung erhält eine andere Richtung.

Auf dem Gitter dagegen wird die Physik durch die tmQCD verändert. Durch die explizite Brechung der chiralen Symmetrie auf dem Gitter kommt es zur ω -Abhängigkeit. Ein Vorteil der tmQCD auf dem Gitter besteht in der automatischen $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung [10]. Bei vollständig getwisteter Massenmatrix, $\omega = \pi/2$, verschwinden die Terme, welche proportional zu a sind. Zudem wird in der tmQCD schneller der Kontinuumslimes erreicht.

In der Wilson-Wirkung treten sogenannte *quark zero modes* auf [11]. Im Wilson-Dirac-Operator existieren bei endlichen Quarkmassen verschwindend kleine Eigenwerte, die entsprechenden Eigenvektoren werden quark zero modes genannt. In der QCD nehmen die Eigenwerte des Wilson-Dirac-Operator allerdings nur dann den Wert Null an, wenn die Quarkmassen ebenfalls verschwinden. Aufgrund der quark zero modes kommt es zu Fluktuationen der

Fermionen Observablen. Dadurch verändert sich deren Standardabweichung und eine statistische Auswertung ist nicht mehr möglich. Die tmQCD bietet eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen [12]. Eine gedrehte Wirkung führt dazu, dass es nur dann verschwindende Eigenwerte gibt, wenn auch die Quarkmassen verschwinden. Die Drehung wirkt auf den Wilson-Dirac-Operator, dieser Fall wird *physical basis* genannt. Durch eine geeignete Transformation ist es möglich die Drehung auf den Masseterm wirken zu lassen, dieser Fall wird *twisted basis* genannt.

Die Masse m_q ist die Differenz von nackter und kritischer Quarkmasse:

$$m_q = m_0 - m_{\text{cr}}.$$

Der Wilson-Dirac-Operator D_W aus Gleichung (3.5) geht damit über in

$$\begin{aligned} D_{W,m} &= D_W + m_{\text{cr}} \\ &= \frac{1}{2} \gamma_\mu (\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) + \left[-\frac{1}{2} ar \nabla_\mu^* \nabla_\mu + m_{\text{cr}} \right] \\ &=: D + D_m, \end{aligned} \quad (4.1)$$

womit die Wirkung der physical basis lautet:

$$S_F^{\text{pb}} [U, \bar{\psi}_{\text{pb}}, \psi_{\text{pb}}] = a^4 \sum_x \bar{\psi}_{\text{pb}}(x) (D_{W,t} + m_q) \psi_{\text{pb}}(x). \quad (4.2)$$

Der gedrehte Wilson-Dirac-Operator $D_{W,t}$ ist durch

$$D_{W,t} = D + D_m e^{-i\omega \gamma_5 \tau_3}$$

definiert. In der twisted basis ist der Wilson-Dirac-Operator ungedreht und die Masse ist gedreht:

$$S_F^{\text{tb}} [U, \bar{\psi}_{\text{tb}}, \psi_{\text{tb}}] = a^4 \sum_x \bar{\psi}_{\text{tb}}(x) (D_{W,m} + m_{q,t}) \psi_{\text{tb}}(x). \quad (4.3)$$

Die gedrehte Masse $m_{q,t}$ ist definiert durch:

$$m_{q,t} = m_q e^{i\omega \gamma_5 \tau_3}.$$

Die tmQCD wird jetzt auf die effektive Lagrangedichte der Goldstone-Bosonen auf dem Gitter, siehe Gleichung (3.13), angewendet. Dazu wird die Gasser-Leutwyler-Lagrangedichte bis NLO, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4$, auf dem Gitter betrachtet [7]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 \\
&= \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle \\
&\quad - L_1 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle^2 - L_2 \langle \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \rangle^2 - L_3 \langle (\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger)^2 \rangle \\
&\quad + L_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle + W_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle \\
&\quad + L_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) \rangle + W_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (\rho^\dagger U + U^\dagger \rho) \rangle \\
&\quad - L_6 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle^2 - W_6 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle \\
&\quad - W'_6 \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle^2 - L_7 \langle \chi^\dagger U - U^\dagger \chi \rangle^2 \\
&\quad - W_7 \langle \chi^\dagger U - U^\dagger \chi \rangle \langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \rangle - W'_7 \langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \rangle^2 \\
&\quad - L_8 \langle \chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi \rangle - W_8 \langle \rho^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \chi \rangle \\
&\quad - W'_8 \langle \rho^\dagger U \rho^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \rho \rangle, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

wobei L_i , mit $i = 1, \dots, 8$, die Gasser-Leutwyler-Koeffizienten sind und W_i , mit $i = 1, \dots, 8$, die Gitterdynamik-Parameter. χ ist proportional zur Masse und ρ ist proportional zur Gitterkonstanten a . U ist die Feldkonfigurationsmatrix. Die Gasser-Leutwyler-Koeffizienten und die Gitterdynamik-Parameter werden auch als Niederenergiekonstanten, bzw. *low energy constants* (LEC), bezeichnet.

Das betrachtete Potential V muss im Minimum nach den Feldern entwickelt werden, um die Pionenmasse zu berechnen. Deswegen wird in diesem Kapitel das Minimum des Potentials gesucht. V lässt sich aus der Lagrangedichte ablesen: $\mathcal{L} = T + V$, woraus folgt:

$$\begin{aligned}
V(U) &= -\frac{F_0^2}{4} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle - \frac{F_0^2}{4} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle \\
&\quad - L_6 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle^2 - W_6 \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle \\
&\quad - W'_6 \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle^2 - L_7 \langle \chi^\dagger U - U^\dagger \chi \rangle^2 \\
&\quad - W_7 \langle \chi^\dagger U - U^\dagger \chi \rangle \langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \rangle - W'_7 \langle \rho^\dagger U - U^\dagger \rho \rangle^2 \\
&\quad - L_8 \langle \chi^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \chi U^\dagger \chi \rangle \\
&\quad - W_8 \langle \rho^\dagger U \chi^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \chi \rangle \\
&\quad - W'_8 \langle \rho^\dagger U \rho^\dagger U + U^\dagger \rho U^\dagger \rho \rangle. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Um das Minimum zu bestimmen wird nun die Parametrisierung

$$U = u_0 \mathbf{1} + i \sum_{i=1}^3 u_i \tau_i \quad (4.6)$$

der Feldkonfigurationsmatrix verwendet. Hierbei sind τ_i mit $i = 1, \dots, 3$ die Paulimatrizen. Zusätzlich gilt die Nebenbedingung

$$u_0^2 + \bar{u}^2 = 1, \quad (4.7)$$

welche aus der Unitarität der Feldkonfigurationsmatrix und der Bedingung $\det U = 1$ folgt.

Diese Parametrisierung wird nun in das Potential eingesetzt, welches dann eine Funktion der Variablen u_0, \dots, u_3 ist. In [13] wurde die Vakuumorientierung in NLO untersucht für den Fall, dass nicht $a/m \ll 1$ gelten muss. Die Vakuumorientierung beschränkt sich auf die $\mathbf{1}$ - und τ_3 -Richtung. Deswegen gilt hier der Spezialfall:

$$\begin{aligned} U &= u_0 \mathbf{1} + i u_3 \tau_3 \\ u_0^2 + u_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Neben der Parametrisierung der Feldkonfigurationsmatrix werden zur expliziten Berechnung des Potentials noch Parametrisierungen der Massenmatrix χ und der Gittermatrix ρ benötigt. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten, die twisted basis oder die physical basis.

4.1 Physical basis

In der physical basis wird die Gittermatrix ρ gedreht. Dies hat den Vorteil, dass der Masseterm unverändert in seiner Form bleibt. Es wird im Folgenden der Isospin-Limit ($m_u = m_d = m_{q0}$) und die Notation nach [14] benutzt. Der Gitterterm wird durch die Transformation

$$U = e^{-i \frac{\omega}{2} \tau_3} U' e^{-i \frac{\omega}{2} \tau_3}$$

gedreht. Der gedrehte Gitterterm lautet dann

$$\rho(\omega) = 2W_0 a e^{i\omega \tau_3} = \rho_0 \mathbf{1} + i \rho_3 \tau_3,$$

welcher sich in zwei Teile, einen Real- und einen Imaginärteil, aufteilen lässt

$$\rho_0 = 2W_0 a \cos(\omega) \quad \text{und} \quad \rho_3 = 2W_0 a \sin(\omega).$$

Für den Masseterm gilt weiterhin die Bedingung:

$$\chi = \chi_0 \mathbf{1} = 2B_0 m_{q0} \mathbf{1}.$$

Mit Hilfe der Transformationsvorschrift der Feldkonfigurationsmatrix ist erkennbar, dass der gedrehte Gitterterm und der ungedrehte Gitterterm dieselbe Form haben:

$$\begin{aligned} \langle \rho U^\dagger + U \rho^\dagger \rangle &= \langle \rho e^{i\frac{\omega}{2}\tau_3} U'^\dagger e^{i\frac{\omega}{2}\tau_3} + e^{-i\frac{\omega}{2}\tau_3} U' e^{-i\frac{\omega}{2}\tau_3} \rho^\dagger \rangle \\ &= \langle \rho(\omega) U'^\dagger + U' \rho^\dagger(\omega) \rangle. \end{aligned}$$

U' ist die Feldkonfigurationsmatrix in der physical basis. Zudem wurde

$$\rho(\omega) = \rho e^{i\omega\tau_3} = e^{i\frac{\omega}{2}\tau_3} \rho e^{i\frac{\omega}{2}\tau_3}$$

benutzt.

Die physical basis wird hier nicht zur Berechnung des Minimums verwendet. Im Folgenden Abschnitt wird die twisted basis vorgestellt. Diese Parametrisierung eignet sich besser zur Untersuchung der Phasenstruktur der Minima.

4.2 Twisted basis

Nun werden die Auswirkungen der getwisteten Massenmatrix in der chiralen Störungstheorie betrachtet. Die Massen des *Up*- und des *Down*-Quarks werden gleichgesetzt $m_u = m_d = m_{q0}$ und die Notation nach [14] benutzt. Der Masseterm wird mit Hilfe der Transformationsvorschrift

$$U = e^{i\frac{\omega}{2}\tau_3} U' e^{i\frac{\omega}{2}\tau_3}$$

gedreht. Der gedrehte Masseterm lautet dann

$$\chi(\omega) = \chi e^{-i\omega\tau_3} = 2B_0 (\tilde{m} \mathbf{1} - i\mu \tau_3) = \tilde{\chi}_0 \mathbf{1} + i\chi'_3 \tau_3,$$

dieser lässt sich ebenfalls in Real- und Imaginärteil aufteilen. Für die gedrehten Massen gelten die Gleichungen

$$\tilde{m} = m_{q0} \cos(\omega) \quad \text{und} \quad \mu = m_{q0} \sin(\omega).$$

Hier bleibt der Gitterterm ungedreht:

$$\rho = \rho_0 \mathbf{1} = 2W_0 a \mathbf{1}.$$

Die Drehung des Masseterms lässt seine Form invariant:

$$\begin{aligned} \langle \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle &= \langle \chi e^{-i\frac{\omega}{2}\tau_3} U'^\dagger e^{-i\frac{\omega}{2}\tau_3} + e^{i\frac{\omega}{2}\tau_3} U' e^{i\frac{\omega}{2}\tau_3} \chi^\dagger \rangle \\ &= \langle \chi(\omega) U'^\dagger + U' \chi^\dagger(\omega) \rangle. \end{aligned}$$

U' ist die Feldkonfigurationsmatrix in der twisted basis. Zudem wurde

$$\chi(\omega) = \chi e^{-i\omega\tau_3} = e^{-i\frac{\omega}{2}\tau_3} \chi e^{-i\frac{\omega}{2}\tau_3}$$

benutzt.

Zur Vereinfachung des Potentials werden die Abkürzungen

$$\chi'_0 = \tilde{\chi}_0 + \rho_0 = 2B_0 m'_0 \quad \text{und} \quad \chi'_3 = -2B_0 \mu$$

eingeführt. Hierbei ist m'_0 der Abstand zur kritischen, nackten Quarkmasse. Als Nächstes wird die Berechnung der Spurterme durchgeführt. Es ist sinnvoll, für die LEC X die Abkürzung*

$$X_{ij} = 2X_j + X_i \quad (4.9)$$

einzu führen. Damit werden die Terme im Potential vereinfacht zu:

$$V(u_0, u_3) = -c_1 u_0 + c_2 u_0^2 + c_3 u_3 + c_4 u_3^2 + c_5 u_0 u_3 + L_{const.} \quad (4.10)$$

Hierbei werden die Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_1 &= F_0^2 \chi'_0 \\ c_2 &= -8 [L_{86} \chi'_0{}^2 - (2L_{86} - W_{86}) \chi'_0 \rho_0 + (L_{86} - W_{86} + W'_{86}) \rho_0^2] \\ c_3 &= -F_0^2 \chi'_3 \\ c_4 &= -8L_{86} \chi'_3{}^2 \\ c_5 &= -16L_{86} \chi'_0 \chi'_3 + 8(2L_{86} - W_{86}) \chi'_3 \rho_0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

und

$$L_{const} = -L_8 \left(-4\chi'_0{}^2 + 8\chi'_0 \rho_0 - 4\rho_0^2 - 3\chi'_3{}^2 \right) + W_8 (4\chi'_0 \rho_0 + 4\rho_0^2) + 4W'_8 \rho_0^2$$

benutzt. Mit Hilfe der Nebenbedingung aus Gleichung (4.8) hängt das Potential nur noch von der Größe u_0 ab:

$$\begin{aligned} V_{\pm}(u_0) &= -c_1 u_0 + c_2 u_0^2 \pm c_3 \sqrt{1 - u_0^2} + c_4 \\ &\quad - c_4 u_0^2 \pm c_5 u_0 \sqrt{1 - u_0^2} + L_{const.} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dieses Potential wird nach u_0 abgeleitet, um das Minimum zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{\pm}(u_0)}{\partial u_0} &= -c_1 + 2c_2 u_0 \mp c_3 \frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2}} \\ &\quad - 2c_4 u_0 \pm c_5 \sqrt{1 - u_0^2} \mp c_5 \frac{u_0^2}{\sqrt{1 - u_0^2}} \\ &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

*Siehe Anhang C

Umgeformt wird aus dieser Gleichung die quartische Gleichung

$$\begin{aligned}
 & (-4c_2^2 - 4c_4^2 - 4c_5^2 + 8c_2c_4)u_0^4 \\
 & + (4c_1c_2 - 4c_1c_4 - 4c_3c_5)u_0^3 \\
 & + (4c_2^2 + 4c_4^2 + 4c_5^2 - c_1^2 - c_3^2 - 8c_2c_4)u_0^2 \\
 & + (4c_1c_4 - 4c_1c_2 + 2c_3c_5)u_0 \\
 & + (c_1^2 - c_5^2) = 0, \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

bzw.

$$Au_0^4 + Bu_0^3 + Cu_0^2 + Du_0 + E = 0. \tag{4.15}$$

Diese quartische Gleichung kann mit dem Algorithmus nach Ferrari [15] gelöst werden.

Kapitel 5

Algorithmus nach Ferrari

In diesem Kapitel wird die quartische Gleichung

$$Au_0^4 + Bu_0^3 + Cu_0^2 + Du_0 + E = 0 \quad (5.1)$$

aus Abschnitt 4.2 mit Hilfe des Algorithmus nach Lodovico Ferrari (1522-1565) [15] gelöst. Dieser Algorithmus wurde 1545 von seinem Lehrer Gerolamo Cardano in dem Buch „*Ars magna de Regulis Algebraicis*“ veröffentlicht. Bei diesem Algorithmus wird die quartische Gleichung durch drei Substitutions-schritte auf eine quadratische Gleichung gebracht. Diese kann mit Hilfe der bekannten Verfahren gelöst werden. Zuerst wird die Gleichung (5.1) umge-formt

$$u_0^4 + a_3u_0^3 + a_2u_0^2 + a_1u_0 + a_0 = 0, \quad (5.2)$$

mit

$$a_3 = \frac{B}{A}, \quad a_2 = \frac{C}{A}, \quad a_1 = \frac{D}{A} \quad \text{und} \quad a_0 = \frac{E}{A}.$$

Nun wird die quartische Gleichung durch Substitution auf eine kubische Glei-chung gebracht

$$y^3 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0,$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha &= -a_2 \\ \beta &= a_1a_3 - 4a_0 \\ \gamma &= 4a_0a_2 - a_1^2 - a_3^2a_0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat drei Lösungen. Um diese Lösungen zu finden, werden die Größen

$$k = \frac{3\beta - \alpha^2}{9} \quad \text{und} \quad l = \frac{9\alpha\beta - 27\gamma - 2\alpha^3}{54}$$

eingeführt. Damit ergibt sich

$$R = k^3 + l^2$$

und

$$S = \sqrt[3]{l + \sqrt{R}} \quad T = \sqrt[3]{l - \sqrt{R}}.$$

Die Lösungen der kubischen Gleichung lauten mit diesen Größen

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{3}\alpha + (S + T) \\ &= \frac{1}{3}a_2 + S + T, \end{aligned}$$

$$y_2 = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}(S + T) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T)$$

und

$$y_3 = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}(S + T) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(S - T).$$

Die Lösungen y_2 und y_3 sind nur reell, wenn $S = T$, bzw. $R = 0$ gilt. Mit den hier zu verwendenden Werten ist $R \neq 0$, so dass als Lösung für die kubische Gleichung y_1 verwendet werden muss. Diese Größe wird für den dritten Substitutionsschritt verwendet:

$$K = \sqrt{\frac{1}{4}a_3^2 - a_2 + y_1}$$

$$L_m = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{4}a_3^2 - K^2 - 2a_2 + m\frac{4a_3a_2 - 8a_1 - a_3^3}{4K}} & \text{für } K \neq 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4}a_3^2 - 2a_2 + 2m\sqrt{y_1^2 - 4a_0}} & \text{für } K = 0. \end{cases}$$

Damit lautet die Lösungsgleichung zur Bestimmung des Minimums:

$$u_{0;1,2,3,4} = -\frac{1}{4}a_3 + m\frac{1}{2}K + n\frac{1}{2}L_m. \quad (5.3)$$

Zum Erhalt aller vier Lösungen müssen $m, n \in \{-1; 1\}$ gewählt werden. Um die physikalische Lösung zu bekommen, wird χ'_3 festgesetzt und χ'_0 läuft gegen $\pm\infty$. Dabei wird die physikalische Lösung, das gesuchte Minimum, für $\chi'_0 > 0$ gegen $+1$ laufen, reell sein und nicht größer als 1 werden. Für $\chi'_0 < 0$ läuft das Minimum gegen -1 , ist ebenfalls reell und der Betrag der Lösung wird nicht größer als 1. Die Größe c_1 ist proportional zu χ'_0 und wird deswegen als Variable benutzt. Zur Bestimmung des Minimums wird c_1 größer und kleiner Null gewählt, was $\chi'_0 > 0$ bzw. $\chi'_0 < 0$ entspricht. Die Größe c_3 ist proportional zu $-\chi'_3$ und damit proportional zu μ . c_3 wird im Folgenden

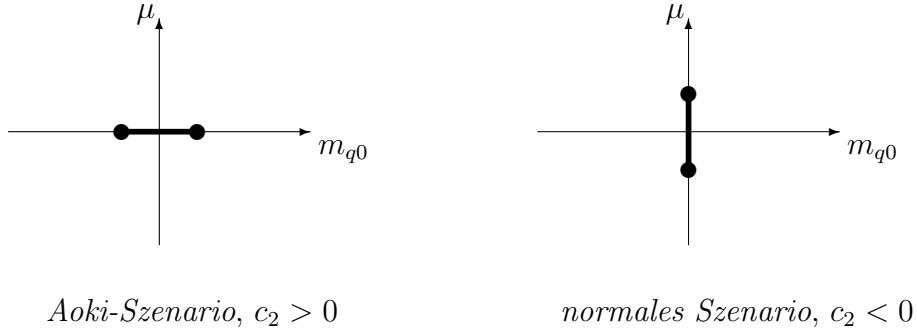


Abbildung 5.1: Phasendiagramm im *Aoki*- und im *normalen Szenario*

immer positiv gewählt.

Um das Minimum zu bestimmen, werden zunächst die Konstanten c_4 und c_5 vernachlässigt, welche das Verhalten des Minimums für große $|\chi'_0|$ nicht wesentlich beeinflussen. Die Größe c_2 wird noch zur Minimumsbestimmung benötigt. Das Vorzeichen von c_2 bestimmt, ob eine Aoki-Phase [16] auftritt oder nicht. Bei positivem Vorzeichen kann das *Aoki-Szenario* beobachtet werden und bei negativem Vorzeichen das *normale Szenario* [17], siehe Abb. 5.1. Im *Aoki-Szenario* tritt ein Phasenübergang zweiter Ordnung in der $m_{q0} - \mu$ -Ebene auf, sobald $|m_{q0}|$ gleich einem kritischen Wert $m_{q0,c}$ ist. Hier verschwinden die Massen des neutralen und der geladenen Pionen. Für $|m_{q0}| < m_{q0,c}$, der Aoki-Phase, ist die Masse der geladenen Pionen endlich, die des neutralen Pions nicht. Die Flavour-Symmetrie ist somit gebrochen. Im *normalen Szenario* ist ein Phasenübergang erster Ordnung erkennbar, siehe Abb. 5.2. Dieser Phasenübergang äußert sich in einem Sprung des Minimums bei $m_{q0} = 0$, bzw. $c_1 = 0$, für $|\mu|$ kleiner einem kritischen Wert μ_c . Bei starker Kopplung, d.h. $\beta = 6/g_0^2 < 4,6$, herrscht das *Aoki-Szenario* vor, bei schwacher Kopplung das *normale Szenario* [18]. Im Folgenden wird das *normale Szenario* betrachtet, und damit

$$c_2 < 0$$

gewählt.

Da in einem ersten Schritt die Größen c_4 und c_5 Null gesetzt werden, werden die Koeffizienten

$$\begin{aligned} A &= -4c_2^2, \\ B &= 4c_1c_2, \\ C &= 4c_2^2 - c_1^2 - c_3^2, \\ D &= -4c_1c_2, \end{aligned}$$

und

$$E = c_1^2$$

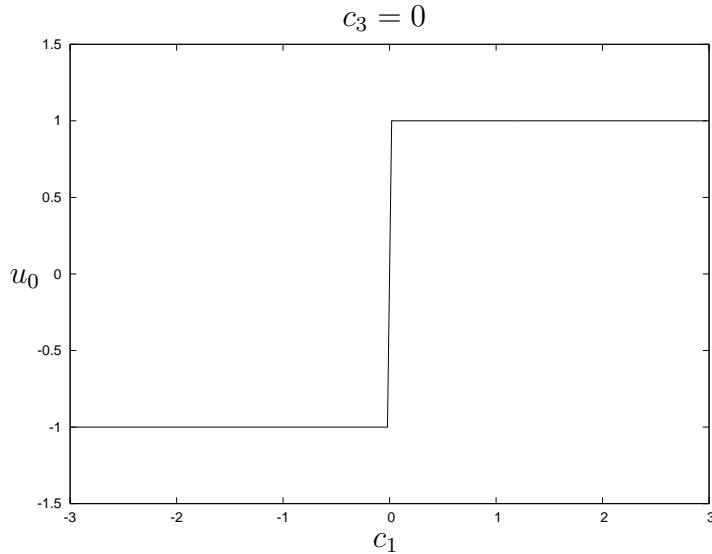


Abbildung 5.2: Verlauf des Minimums u_0 bei $c_3 = 0$ im *normalen Szenario*

zur Minimumsbestimmung benutzt. Das Minimum ist dann nur von den Koeffizienten c_1 bis c_3 abhängig. Aufgrund der Länge der Gleichungen wird davon abgesehen, diese explizit anzugeben.

Nun werden die dimensionslosen Größen ϵ_1 , ϵ_2 und ϵ_3 eingeführt. Zur Normierung wird die Konstante

$$\hat{c}_2 := -8(L_{86} - W_{86} + W'_{86})\rho_0^2 \quad < 0 \quad (5.4)$$

benutzt. Werden die Größen W' und η mit*

$$W' := \frac{1}{2}(L_{86} - W_{86} + W'_{86})$$

bzw.

$$\eta := W' \cdot W_0^2,$$

eingeführt, lässt sich \hat{c}_2 schreiben als

$$\hat{c}_2 = -64 \cdot \eta \cdot a^2.$$

Im Folgenden wird das Minimum in Abhängigkeit der Variablen ϵ_1 , bei einem festen Wert für ϵ_3 betrachtet. Die Größe ϵ_2 wird durch diese Variablen

*Siehe Anhang C

ausgedrückt:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{c_1}{2|\hat{c}_2|} \\ \epsilon_2 &= \frac{c_2}{\hat{c}_2} = 1 + 64 \frac{w \cdot a}{F_0^2} \cdot \epsilon_1 + 2048 \frac{L_{86} \cdot a^2}{F_0^4} \cdot \eta \cdot \epsilon_1^2 \\ \epsilon_3 &= \frac{c_3}{2|\hat{c}_2|}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

In der Gleichung der Größe ϵ_2 werden die Abkürzungen[†]

$$W := \frac{1}{2} (W_{86} - 2L_{86})$$

und

$$W \cdot W_0 =: w$$

verwendet.

Die Normierungskonstante \hat{c}_2 ist so gewählt, dass sie unabhängig von der Masse ist. Eine Normierung mit einer massenabhängigen Größe hat eine falsche Massenabhängigkeit der Variablen zur Folge. Dadurch resultieren Peaks im Graphen des Minimums im Bereich kleiner Werte für ϵ_1 .

Mit den dimensionslosen Variablen ergibt sich die quartische Gleichung:

$$(-\epsilon_2^2)u_0^4 + (-2\epsilon_1\epsilon_2)u_0^3 + (\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2 - \epsilon_3^2)u_0^2 + (2\epsilon_1\epsilon_2)u_0 + \epsilon_1^2 = 0.\tag{5.6}$$

Diese lässt sich plotten und das Verhalten betrachten.

Im *normalen Szenario* gibt es bis zu einem kritischen Wert μ_c einen Sprung des Minimums. Dieser befindet sich für den Fall $c_4 = 0$ und $c_5 = 0$ bei $c_1 = 0$. Ist $c_4 \neq 0$ und $c_5 \neq 0$ kann nicht ausgeschlossen werden, dass dieser Sprung bei $c_1 \neq 0$ zu beobachten ist. Es ist aber anzunehmen, dass der c_1 -Wert, bei dem das Minimum springt, nicht stark von 0 abweicht. Diese Annahme wird in Abschnitt 5.3.3 überprüft.

Zunächst wird angenommen, dass der Sprung des Minimums bei $c_1 = 0$ zu beobachten ist, und die Abweichung von diesem Wert zu vernachlässigen ist. Das Minimum setzt sich dann aus zwei der vier möglichen Lösungen zusammen. Für $\epsilon_1 \geq 0$ muss die Lösung mit $m = n = +1$ gewählt werden, für $\epsilon_1 \leq 0$ dagegen die Lösung mit $m = n = -1$.

Im nächsten Schritt werden die Koeffizienten c_4 und c_5 wieder eingeführt. Dazu werden die dimensionslosen Größen

$$\begin{aligned}\epsilon_4 &= \frac{c_4}{2|\hat{c}_2|} = -1024 \frac{L_{86} \cdot \eta \cdot a^2}{F_0^4} \epsilon_3^2 \\ \epsilon_5 &= \frac{c_5}{2|\hat{c}_2|} = 32 \frac{w \cdot a}{F_0^2} \epsilon_3 + 2048 \frac{L_{86} \cdot \eta \cdot a^2}{F_0^4} \epsilon_1 \epsilon_3\end{aligned}\tag{5.7}$$

[†]Siehe Anhang C

verwendet. Diese werden durch die Variablen ϵ_1 und ϵ_3 ausgedrückt. Mit diesen Größen ergibt sich die quartische Gleichung:

$$\begin{aligned}
 & (-\epsilon_2^2 - 4\epsilon_2\epsilon_4 - 4\epsilon_4^2 - 4\epsilon_5^2)u_0^4 \\
 & + (-2\epsilon_1\epsilon_2 - 4\epsilon_1\epsilon_4 - 4\epsilon_3\epsilon_5)u_0^3 \\
 & + (\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2 - \epsilon_3^2 + 4\epsilon_2\epsilon_4 + 4\epsilon_4^2 + 4\epsilon_5^2)u_0^2 \\
 & + (2\epsilon_1\epsilon_2 + 4\epsilon_1\epsilon_4 + 2\epsilon_3\epsilon_5)u_0 \\
 & + (\epsilon_1^2 - \epsilon_5^2) = 0. \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

ϵ_1 und ϵ_3 werden als Variablen benutzt. Für alle anderen Größen, die in den Größen ϵ_2 , ϵ_4 und ϵ_5 enthalten sind müssen Zahlenwerte eingegeben werden. Die Größen L_{86} und F_0 haben eine physikalische Bedeutung im Kontinuum. Sie lassen sich phänomenologisch oder durch Gitter-Rechnungen abschätzen. F_0 ist die Pion-Zerfallskonstante. Im Folgenden wird $L_{86} = 0,8 \cdot 10^{-3}$ und $F_0 = 86\text{MeV}$ benutzt[‡]. Die Größen a , w und η sind Gittergrößen. Sie müssen für die betrachtete Wirkung, hier die Wilson-Wirkung, durch Gittersimulationen[‡] ermittelt werden. Für a wird als typischer Wert $a = 0,1\text{fm}$ gewählt. w ist in [19] mit ungefähr $w = 10^4\text{MeV}^3$ angegeben. Im Folgenden werden die Werte

| F_0 | L_{86} | a | w |
|----------------|---------------------|----------------|--------------------|
| 86MeV | $0,8 \cdot 10^{-3}$ | $0,1\text{fm}$ | 10^4MeV^3 |

benutzt, solange kein anderer Wert angegeben ist.

Für η ist kein Zahlenwert bekannt. Der Wert wird deshalb abgeschätzt.

5.1 Vergleich der η -Werte

Um das Minimum des Potentials berechnen zu können, ist ein Zahlenwert für η notwendig. Dieser wird jetzt abgeschätzt. Dabei werden zwei Relationen benutzt, mit deren Hilfe anhand numerischer Ergebnisse die jeweiligen η -Werte berechnet werden können. Bei der Betrachtung dieser Werte muss beachtet werden, dass teilweise eine andere als die Wilson-Wirkung, z.B. die DBW2-Wirkung, benutzt wurde und die η -Werte wirkungsabhängig sind.

5.1.1 Kritischer Wert der gedrehten Masse μ_c

Der Sprung des Minimums bei $\epsilon_1 = 0$ ist nur bis zu einem bestimmten ϵ_3 -Wert zu beobachten. Sobald $\epsilon_3 > 1$ ist, ist das Minimum stetig in $\epsilon_1 = 0$.

[‡]Siehe Anhang C

Anhand der Definition von ϵ_3 in Gleichung (5.5), lässt sich für $\epsilon_3 = 1$ ein kritischer Wert der gedrehten Masse μ finden:

$$\mu_c = \frac{|\hat{c}_2|}{F_0^2 \cdot B_0} = 64 \frac{\eta \cdot a^2}{F_0^2 \cdot B_0}. \quad (5.9)$$

η wird für die DBW2-Wirkung [19] und für die Wilson-Wirkung [20] berechnet. Die Werte für μ_c und a wurden dabei aus den jeweiligen Quellen entnommen, für B_0 wurde der Wert $B_0 = 3,1 \text{ GeV}$ verwendet[§]. Für die DBW2-Wirkung wurde kein kritischer Wert für die gedrehte Masse μ_c angegeben, sondern ein Wert der gedrehten Masse μ mit $\mu > \mu_c$. Die Ergebnisse für die DBW2-Wirkung sind damit nur als obere Grenze zu verstehen.

| | μ_c (MeV) | a (fm) | η (MeV ⁶) |
|----------------|---------------|----------|----------------------------|
| Wilson-Wirkung | 100 | 0,16 | $5,447 \cdot 10^{13}$ |
| DBW2-Wirkung | | | |
| $\beta = 0,67$ | 11,2 | 0,176 | $5,042 \cdot 10^{12}$ |
| $\beta = 0,74$ | 11,4 | 0,13 | $9,407 \cdot 10^{12}$ |

5.1.2 Pionmasse im Minimum $m_{\pi,\min}^2$

Für die Pionmasse im Minimum gilt die Gleichung [17]:

$$m_{\pi,\min}^2 = \frac{2|\hat{c}_2|}{F_0^2} = 128 \frac{\eta a^2}{F_0^2}. \quad (5.10)$$

Mit dieser Gleichung lässt sich η in der DBW2-Wirkung [19], in der Wilson-Wirkung [20] und in der Symanzik-Wirkung [21] berechnen. Dafür wurden die Werte für $m_{\pi,\min}^2$ und a aus den jeweiligen Quellen genommen.

| | β | $m_{\pi,\min}^2$ | a (fm) | η (MeV ⁶) |
|------------------|---------|------------------|----------|----------------------------|
| Wilson-Wirkung | 3,65 | 450 | 0,13 | $2,701 \cdot 10^{13}$ |
| | 3,75 | 400 | 0,12 | $2,504 \cdot 10^{13}$ |
| | 3,90 | 280 | 0,10 | $1,767 \cdot 10^{13}$ |
| DBW2-Wirkung | 0,74 | 280 | 0,13 | $1,046 \cdot 10^{13}$ |
| Symanzik-Wirkung | 3,75 | 370 | 0,12 | $2,138 \cdot 10^{13}$ |
| | 3,90 | 279 | 0,12 | $1,216 \cdot 10^{13}$ |

Die meisten η -Werte sind im Bereich $\eta = 10^{13} \text{ MeV}^6$. Lediglich für die DBW2-Wirkung gibt es auch kleinere Werte mit $\eta = 10^{12} \text{ MeV}^6$. Ein η -Wert von $\eta = 10^{13} \text{ MeV}^6$ kann als typischer Wert für die Wilson-Wirkung angenommen werden. Dieser Wert wird in den folgenden numerischen Betrachtungen des Minimums benutzt.

[§]Siehe Anhang C

5.2 Numerische Betrachtung

Zur numerischen Betrachtung der Lösungsgleichung (5.3) für das gesuchte Minimum und später auch zur Betrachtung der Masse wurde das Programm MAPLE benutzt. Die einzelnen Werten wurden dabei mit einer selbst verfassten Routine berechnet.

Die betrachtete Lagrangedichte entspricht einer Entwicklung bis NLO. Die Lagrangedichte wird nach dem Weinberg'schen Powercounting nach Termen der Gitterkonstanten entwickelt. Es wird angenommen, dass die Gitterkonstante und entsprechende Terme klein sind, so dass die Entwicklung abgebrochen werden kann. Daraus resultieren drei Forderungen:

1. Der ϵ_2 -Term darf nicht stark von 1 abweichen.
2. Insbesondere muss der Einfluss des zu a^2 proportionalen Terms in ϵ_2 gering sein.
3. Der Einfluss der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme auf das Verhalten des Minimums darf nicht groß sein. Das Minimum, für das $\epsilon_4 \neq 0$ und $\epsilon_5 \neq 0$ gilt darf daher nicht stark von dem Minimum, für das $\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$ gilt abweichen.

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob diese Forderungen für $\eta = 10^{13} \text{ MeV}^6$ erfüllt werden.

Aus der ersten Forderung lässt sich ein Gültigkeitsbereich der Variablen ϵ_1 bestimmen.

5.2.1 Gültigkeitsbereich von ϵ_1

Bei einem festen η -Wert von $\eta = 10^{13} \text{ MeV}^6$ wird der Gültigkeitsbereich von ϵ_1 untersucht. Hierzu wird die Gleichung

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= 1 + 64 \frac{w \cdot a}{F_0^2} \cdot \epsilon_1 + 2048 \frac{L_{86} \cdot a^2}{F_0^4} \cdot \eta \cdot \epsilon_1^2 \\ &\approx 1 + 0,0438 \cdot \epsilon_1 + 0,0768 \cdot \epsilon_1^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

betrachtet. Die Werte für ϵ_2 dürfen nicht stark von 1 abweichen. Es wird untersucht, für welche Werte von ϵ_1 dieses der Fall ist. Dabei wird eine Abweichung von 0,5 als akzeptabel erachtet. Hierbei ergibt sich, dass gelten muss $-2,85 \leq \epsilon_1 \leq 2,28$. Wird

$$-2 \leq \epsilon_1 \leq 2$$

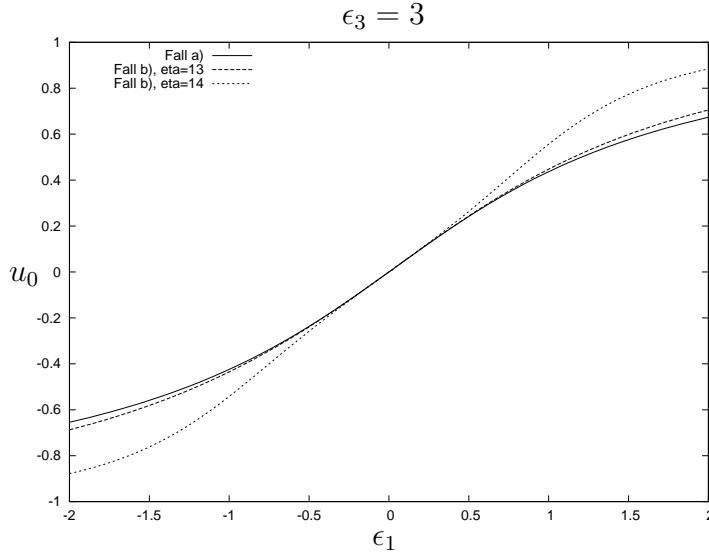


Abbildung 5.3: Vergleich des Minimums u_0 bei $\epsilon_3 = 3$, $\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$ im Fall a) und im Fall b), hier wurde $\eta = 10^{13}\text{MeV}^6$ und $\eta = 10^{14}\text{MeV}^6$ gesetzt

gewählt, beträgt die maximale Abweichung der Größe ϵ_2 vom Wert 1 nur 0,39.

Mit $\epsilon_1 = 2$, $\eta = 10^{13}\text{MeV}^6$ und a, F_0 und B_0 aus Anhang C kann ein Wert für m'_0 berechnet werden:

$$m'_0 = \frac{64\eta a^2 \epsilon_1}{F_0^2 B_0} \cong 14\text{MeV}.$$

5.2.2 Überprüfung der zweiten Forderung

Grundlage der Entwicklung bis NLO ist die Annahme, dass die Gitterkonstante a und entsprechende Terme klein sind und eine Entwicklung damit abgebrochen werden kann. Die Größe ϵ_2 besteht aus einem konstanten Term, einem zu a proportionalen Term und einem zu a^2 proportionalen Term. Dieser Term darf das Verhalten des Minimums nicht stark beeinflussen. In diesem Teil ist die Größe η enthalten. Wird diese zu groß gewählt, ist der Einfluss dieses Terms ebenfalls groß.

$$\epsilon_2 = \frac{c_2}{\hat{c}_2} = 1 + 64 \frac{w \cdot \epsilon_1}{F_0^2} \cdot a + 2048 \frac{L_{86} \cdot \eta \cdot \epsilon_1^2}{F_0^4} \cdot a^2$$

Es wird jetzt untersucht, ob die Wahl $\eta = 10^{13}\text{MeV}^6$ günstig ist. Um dieses zu überprüfen, wird zuerst das Minimum betrachtet, für das $\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$ gilt. Im Folgenden wird:

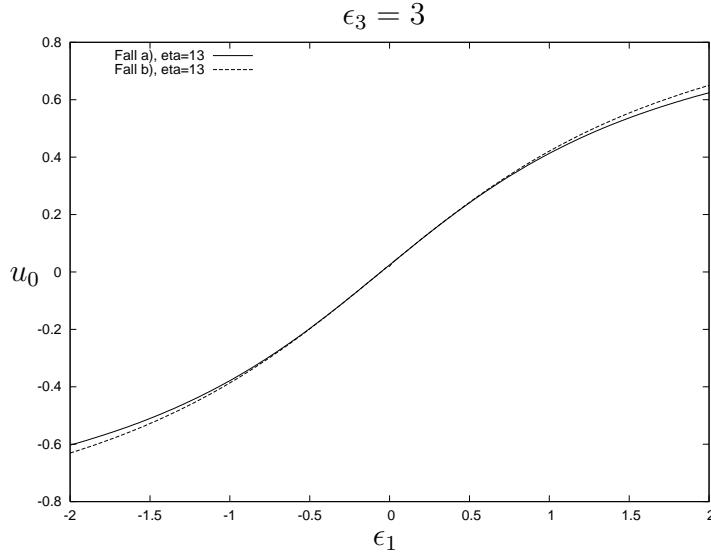


Abbildung 5.4: Vergleich des Minimums u_0 bei $\epsilon_3 = 3$, mit $\epsilon_4 \neq 0$ und $\epsilon_5 \neq 0$ im Fall a) und im Fall b), es wurde $\eta = 10^{13} \text{ MeV}^6$ gesetzt

- a) im Minimum der Term in ϵ_2 vernachlässigt, welcher proportional zu a^2 ist.
- b) der Term in ϵ_2 einbezogen, welcher proportional zu a^2 ist.

Das Minimum wird für mehrere η -Werte und mehrere ϵ_3 -Werte geplottet und das Verhalten der Graphen im Fall a) und b) verglichen. Die Graphen dürfen dabei nicht wesentlich voneinander abweichen.

Für $\eta = 10^{14} \text{ MeV}^6$ ist im Fall b) bei $\epsilon_3 = 3$, siehe Abb. 5.3, im Vergleich zu Fall a) ein viel steilerer Anstieg des Minimums erkennbar. Für $\eta \leq 10^{13} \text{ MeV}^6$ ist das Verhalten der Graphen in beiden Fällen etwa gleich. Das Verhalten des Minimums wird nur gering durch den Term, der proportional zu a^2 ist beeinflusst. Ein Wert von $\eta \leq 10^{13} \text{ MeV}^6$ ist damit nicht zu groß.

Als nächstes werden ϵ_4 und ϵ_5 miteinbezogen. Diese Variablen werden als Funktionen von ϵ_1 und ϵ_3 ausgedrückt:

$$\epsilon_2 = 1 + 64 \frac{w}{F_0^2} \cdot a \cdot \epsilon_1 + 2048 \frac{L_{86} \cdot \eta}{F_0^4} \cdot a^2 \cdot \epsilon_1^2$$

$$\epsilon_4 = -1024 \frac{L_{86} \cdot \eta}{F_0^4} \cdot a^2 \cdot \epsilon_3^2$$

$$\epsilon_5 = 32 \frac{w}{F_0^2} \cdot a \cdot \epsilon_3 + 2048 \frac{L_{86} \cdot \eta}{F_0^4} \cdot a^2 \cdot \epsilon_1 \cdot \epsilon_3.$$

Aus dem Verlauf der Graphen in Abb. 5.4 ist erkennbar, dass der Einfluss des zu a^2 proportionalen Terms in ϵ_2 nicht groß ist. Die Graphen für den Fall a) und den Fall b) weichen nur gering voneinander ab. Für den Fall a) muss jetzt ebenfalls ein η -Wert angegeben werden, da diese Größe in ϵ_4 und ϵ_5 enthalten ist und diese nicht mehr Null gesetzt werden.

Bei einem η -Wert von $\eta = 10^{13} \text{ MeV}^6$ ist der Einfluss des zu a^2 proportionalen Terms in ϵ_2 auf das Minimum nur gering. Das bedeutet, dass die Entwicklung der Lagragedichte bis NLO abgebrochen werden kann.

5.2.3 Einfluss der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme auf das Minimum untersucht. Diese Terme sind proportional zu a oder a^2 und müssen deshalb klein sein, damit eine Entwicklung bis NLO berechtigt ist. Dazu wird zuerst das Minimum, für das $\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$ gilt berechnet. Dieses wird mit dem Minimum, für das $\epsilon_4 \neq 0$ und $\epsilon_5 \neq 0$ gilt verglichen:

$$\begin{aligned}\epsilon_4 &= -1024 \frac{L_{86} \cdot \eta}{F_0^4} \cdot a^2 \cdot \epsilon_3^2 \\ \epsilon_5 &= 32 \frac{w}{F_0^2} \cdot a \cdot \epsilon_3 + 2048 \frac{L_{86} \cdot \eta}{F_0^4} \cdot a^2 \cdot \epsilon_1 \cdot \epsilon_3.\end{aligned}$$

Es wird erwartet, dass der Einfluss der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme bei größeren Werten von ϵ_3 zunimmt, da diese Terme proportional zu ϵ_3 bzw. ϵ_3^2 sind. Bei $\epsilon_1 = 0$ liefern diese Terme einen Beitrag, so dass sich an dieser Stelle der Wert des Minimums verändern müsste.

Diese Erwartungen werden mit den drei angeführten Abbildungen bestätigt. Bei kleinen ϵ_3 -Werten ist kaum ein Unterschied zwischen den Graphen erkennbar, siehe Abb. 5.5. Bei großen ϵ_3 -Werten ist der Unterschied deutlicher, siehe Abb. 5.7. Zudem ist aus dieser Abbildung ablesbar, dass für $\epsilon_4 \neq 0$ und $\epsilon_5 \neq 0$ das Minimum bei $\epsilon_1 = 0$ nicht durch den Ursprung geht. Die Länge des Sprungs des Minimums bei $\epsilon_1 = 0$ wird kürzer, siehe Abb. 5.6.

Insgesamt ist der Einfluss der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme sehr gering, wird $\eta = 10^{13} \text{ MeV}^6$ gewählt. Die Graphen weichen kaum voneinander ab. Insbesondere verändert die Berücksichtigung der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme das Verhalten des Minimums nicht. Der Sprung des Minimums bei $\epsilon_1 = 0$ wird weiterhin beobachtet, lediglich die Länge dieses Sprungs ändert sich geringfügig. Weitere Diskussionen hierzu folgen im nächsten Abschnitt.

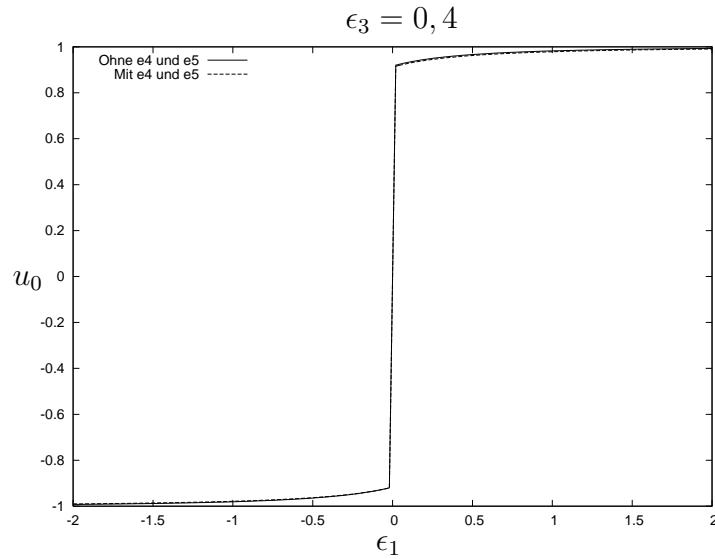


Abbildung 5.5: Vergleich des Minimums u_0 mit $\epsilon_4 \neq 0, \epsilon_5 \neq 0$ zu dem Minimum u_0 mit $\epsilon_4 = 0, \epsilon_5 = 0$ bei $\epsilon_3 = 0, 4$, es wurde $\eta = 10^{13} \text{MeV}^6$ gesetzt

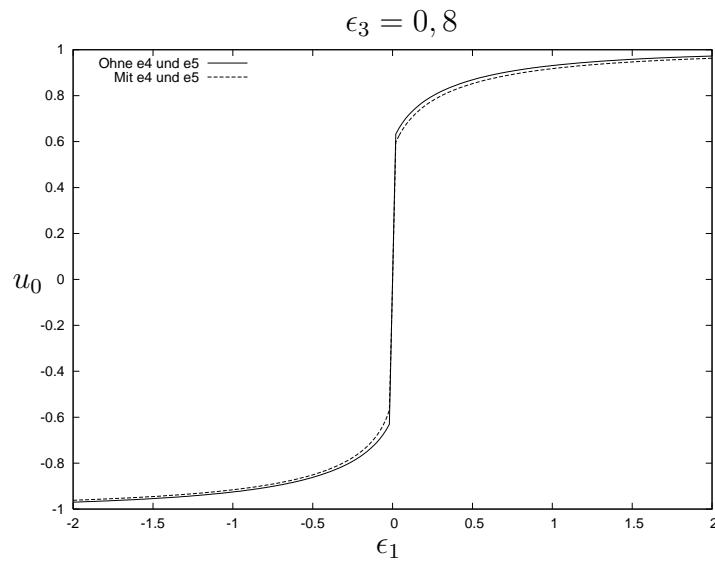


Abbildung 5.6: Vergleich des Minimums u_0 mit $\epsilon_4 \neq 0, \epsilon_5 \neq 0$ zu dem Minimum u_0 mit $\epsilon_4 = 0, \epsilon_5 = 0$ bei $\epsilon_3 = 0, 8$, es wurde $\eta = 10^{13} \text{MeV}^6$ gesetzt

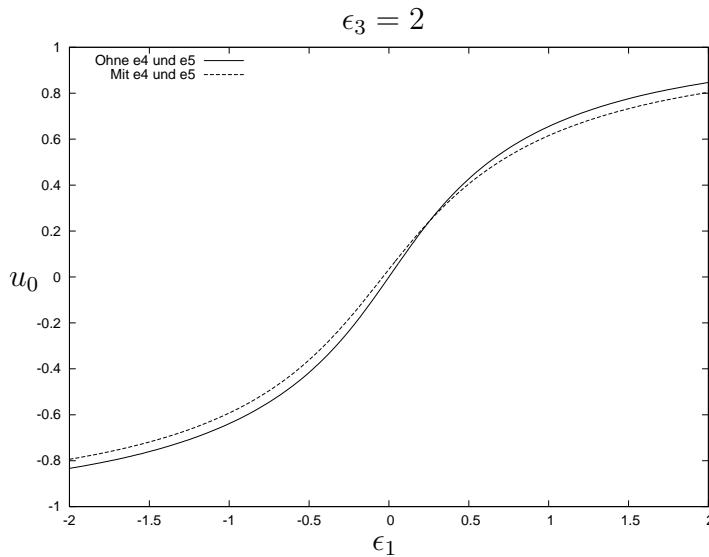


Abbildung 5.7: Vergleich des Minimums u_0 mit $\epsilon_4 \neq 0, \epsilon_5 \neq 0$ zu dem Minimum u_0 mit $\epsilon_4 = 0, \epsilon_5 = 0$ bei $\epsilon_3 = 2$, es wurde $\eta = 10^{13} \text{ MeV}^6$ gesetzt

5.3 Stetigkeit des Minimums

Bei der Betrachtung des Graphen mit $\epsilon_3 < 1$ fällt auf, dass es einen Sprung der Graphen gibt, siehe Abb. 5.8. Dieser Phasensprung wird im Folgenden näher untersucht. Dazu wird zuerst die Annahme gemacht, dass der Phasensprung bei einem ϵ_1 -Wert von $\epsilon_1 = 0$ liegt.

5.3.1 ohne ϵ_4 und ϵ_5

Es werden zunächst ϵ_4 und ϵ_5 gleich Null gesetzt. Die quartische Gleichung lautet nun:

$$-\epsilon_2^2 u_0^4 - 2\epsilon_1\epsilon_2 u_0^3 + (\epsilon_2^2 - \epsilon_1^2 - \epsilon_3^2) u_0^2 + 2\epsilon_1\epsilon_2 u_0 + \epsilon_1^2 = 0. \quad (5.12)$$

Wird $\epsilon_1 = 0$ gewählt, so gilt $\epsilon_2 = 1$. Die Gleichung (5.12) vereinfacht sich dann zu

$$-u_0^4 + (1 - \epsilon_3^2) u_0^2 = 0,$$

mit der Lösung $u_{0,\pm} = \pm\sqrt{1 - \epsilon_3^2}$. Somit gibt es für $\epsilon_3 < 1$ zwei Lösungen der quartischen Gleichung bei $\epsilon_1 = 0$. Dieses Ergebnis ist in den Graphen als Sprung von u_0 zu erkennen, u_0 wechselt hier das Vorzeichen. Die Länge des Phasensprungs lässt sich theoretisch durch $|u_{0,+} - u_{0,-}|$ berechnen.

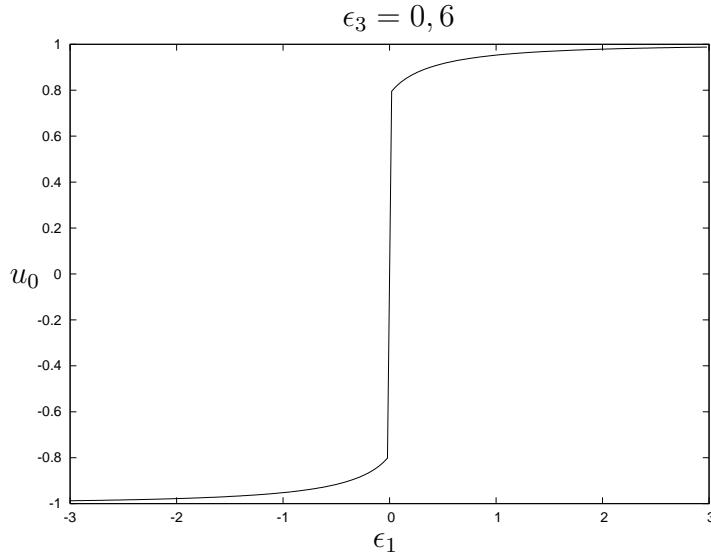


Abbildung 5.8: Verlauf von u_0 bei $\epsilon_3 = 0,6$ mit $\epsilon_4 \neq 0$ und $\epsilon_5 \neq 0$, es wurde $\eta = 10^{13} \text{MeV}^6$ gesetzt

5.3.2 mit ϵ_4 und ϵ_5

Werden ϵ_4 und ϵ_5 in der Gleichung (5.8) nicht vernachlässigt, so lässt sich die Lösung der quartischen Gleichung für den Fall $\epsilon_1 = 0$ und somit die Länge des Phasensprungs nicht mehr in einer einfachen Formel angeben. Es werden jetzt für einzelne η -Werte die Punkte dieser Phasensprünge ohne ϵ_4 und ϵ_5 mit den Punkten der Phasensprünge mit ϵ_4 und ϵ_5 verglichen.

$$\eta = 10^{13} \text{MeV}^6$$

| ϵ_3 | theoretisch ($\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$) | numerisch ($\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$) | numerisch ($\epsilon_4 \neq 0$ und $\epsilon_5 \neq 0$) |
|--------------|--|--|--|
| 0 | +1 -1 | +1 -1 | +1 -1 |
| 0,2 | +0,980 -0,980 | +0,980 -0,980 | +0,979 -0,981 |
| 0,4 | +0,917 -0,917 | +0,917 -0,917 | +0,912 -0,917 |
| 0,6 | +0,8 -0,8 | +0,801 -0,801 | +0,784 -0,790 |
| 0,8 | +0,6 -0,6 | +0,601 -0,601 | +0,560 -0,584 |
| 1 | +0 -0 | +0,084 -0,084 | +0,209 -0,012 |

$$\eta = 10^{12} \text{MeV}^6$$

| ϵ_3 | theoretisch ($\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$) | numerisch ($\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$) | numerisch ($\epsilon_4 \neq 0$ und $\epsilon_5 \neq 0$) |
|--------------|--|--|--|
| 0 | +1 -1 | +1 -1 | +1 -1 |
| 0,2 | +0,980 -0,980 | +0,980 -0,980 | +0,980 -0,980 |
| 0,4 | +0,917 -0,917 | +0,917 -0,917 | +0,914 -0,919 |
| 0,6 | +0,8 -0,8 | +0,801 -0,801 | +0,796 -0,802 |
| 0,8 | +0,6 -0,6 | +0,601 -0,601 | +0,601 -0,581 |
| 1 | +0 -0 | +0,084 -0,084 | +0,312 -0,011 |

$$\eta = 10^{11} \text{MeV}^6$$

| ϵ_3 | theoretisch ($\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$) | numerisch ($\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$) | numerisch ($\epsilon_4 \neq 0$ und $\epsilon_5 \neq 0$) |
|--------------|--|--|--|
| 0 | +1 -1 | +1 -1 | +1 -1 |
| 0,2 | +0,980 -0,980 | +0,980 -0,980 | +0,980 -0,980 |
| 0,4 | +0,917 -0,917 | +0,917 -0,917 | +0,914 -0,919 |
| 0,6 | +0,8 -0,8 | +0,801 -0,801 | +0,797 -0,804 |
| 0,8 | +0,6 -0,6 | +0,601 -0,601 | +0,610 -0,587 |
| 1 | +0 -0 | +0,084 -0,084 | +0,323 -0,011 |

$$\eta = 10^{10} \text{MeV}^6$$

| ϵ_3 | theoretisch ($\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$) | numerisch ($\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$) | numerisch ($\epsilon_4 \neq 0$ und $\epsilon_5 \neq 0$) |
|--------------|--|--|--|
| 0 | +1 -1 | +1 -1 | +1 -1 |
| 0,2 | +0,980 -0,980 | +0,980 -0,980 | +0,979 -0,981 |
| 0,4 | +0,917 -0,917 | +0,917 -0,917 | +0,914 -0,919 |
| 0,6 | +0,8 -0,8 | +0,801 -0,801 | +0,797 -0,804 |
| 0,8 | +0,6 -0,6 | +0,601 -0,601 | +0,610 -0,588 |
| 1 | +0 -0 | +0,084 -0,084 | +0,324 -0,011 |

Bei den Werten aus den numerischen Rechnungen muss beachtet werden, dass für diese nicht $\epsilon_1 = 0$ gilt, sondern $\epsilon_1 = \pm 2,5 \cdot 10^{-4} \simeq 0$. Dieses ist der kleinste Wert, für den keine numerischen Fehler auftreten. Das erklärt die Tatsache, dass die numerischen Werte ohne ϵ_4 und ϵ_5 teilweise von den theoretisch berechneten Werten abweichen, insbesondere bei $\epsilon_3 = 1$. Die Steigung von u_0 im Bereich kleiner ϵ_1 -Werte ist hier sehr groß, die Werte ändern sich stark. Für $\epsilon_3 < 1$ ist die Abweichung sehr gering und meist im Bereich 10^{-3} bis 10^{-2} . Die Vernachlässigung der Größen ϵ_4 und ϵ_5 führt demnach im Bereich des Phasensprungs nicht zu einer bedeutenden Veränderung des Minimums. Trotzdem stellt die Vernachlässigung der Größen ϵ_4 und ϵ_5 nur eine Näherung dar und das Minimum ist nur unter Berücksichtigung dieser Größen bis NLO exakt.

Die Werte des Phasensprungs unterscheiden sich für die verschiedenen η -Werte kaum. Der Einfluss der Terme, in denen die Größe η vorkommt, ist somit gering. η kommt nur in Verbindung mit der Größe a^2 vor. Somit sind Terme die proportional zu a^2 sind klein. Dies bestätigt die Ergebnisse aus Abschnitt 5.2.2 und Abschnitt 5.2.3. Im Rahmen des Weinberg'schen Power-countings wurde die Lagrangedichte nach der Gitterkonstanten a entwickelt und diese Entwicklung bei a^2 abgebrochen. Daraus resultiert die Lagrangedichte bis NLO. Die Gültigkeit dieser Entwicklung ist in diesem Kapitel bestätigt worden.

5.3.3 Lage des Phasensprungs

Bisher wurde die Annahme gemacht, dass der Sprung des Minimums bei $\epsilon_1 = 0$, bzw. $c_1 = 0$ zu beobachten ist. Dieser Wert ergibt sich aus Betrachtungen des Minimums ohne die ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme [17]. Durch die Berücksichtigung dieser Terme verschiebt sich die Lage des Phasensprungs. Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, dass der Einfluss der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme sehr gering ist. Die Lage des Phasensprungs kann sich daher durch diese Terme nicht stark ändern.

Der Algorithmus nach Ferrari liefert vier mögliche Lösungen. Die physikalische Lösung wird durch das absolute Minimum bestimmt, d.h. das Minimum mit dem das Potential den niedrigsten Wert annimmt. Damit lässt sich die Lage des Sprungs des Minimums durch Vergleich bestimmen. Wichtig ist zudem, dass das Minimum reelle Werte annimmt. Gibt es einen nicht verschwindenden Imaginärteil handelt es sich nicht um die physikalische Lösung.

Die Potentialwerte werden für $-0,02 \leq \epsilon_1 \leq 0,02$ in Schritten von $\epsilon_1 = 0,001$ bestimmt. Für $\epsilon_3 = 0$, $\epsilon_3 = 0,2$ und $\epsilon_3 = 0,4$ ist mit diesen Werten keine Abweichung der Lage des Phasensprungs zu erkennen. Bei $\epsilon_3 = 0,6$ ist der Sprung des Minimums bei $\epsilon_1 = 0,007$ beobachtbar und bei $\epsilon_3 = 0,8$ bei einem ϵ_1 -Wert von 0,006.

Wie erwartet ist der Einfluss der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme auf die Lage des Phasensprungs nicht groß. Nur für $\epsilon_3 = 0,6$ und $\epsilon_3 = 0,8$ gibt es minimale Abweichungen, die zu vernachlässigen sind. Der Sprung des Minimums kann damit bei einem ϵ_1 -Wert von $\epsilon_1 \approx 0$ beobachtet werden.

Kapitel 6

Vergleich der Minimumsbestimmungen

Im letzten Kapitel wurde das Minimum des Potentials der Gasser-Leutwyler-Lagrangedichte auf dem Gitter bis NLO bestimmt. Der Algorithmus nach Ferrari erlaubte dabei eine Bestimmung ohne weitere Annahmen. In anderen Arbeiten von Tobias Sudmann [22], [23], Peter Hofmann [24] und Luigi Scorzato [13] wurde ebenfalls das Minimum des Potentials der Gasser-Leutwyler-Lagrangedichte bis NLO unter Zuhilfenahme bestimmter Annahmen berechnet. In diesem Kapitel werden diese Ergebnisse mit dem nach Ferrari berechneten Minimum verglichen. In den genannten Arbeiten wurde das Minimum in der physical basis bestimmt. Um die Ergebnisse vergleichen zu können, wird der Winkel ω und die Masse m_{q0} in Abhängigkeit der in der twisted basis benutzten Variablen ϵ_1 und ϵ_3 berechnet. Hierbei werden die Beziehungen für die twisted basis aus Abschnitt 4.2 benutzt. Der Winkel ω ist der Drehwinkel aus Abb. 6.1 und m_{q0} ist proportional zum Betrag der gedrehten Masse: $2B_0m_{q0} = |\vec{m}|$. Damit ergibt sich:

$$\omega = \arctan \left(\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1 - \frac{W_0 F_0^2}{64\eta a}} \right) \quad (6.1)$$

$$m_{q0} = 64 \frac{\eta a^2}{B_0 F_0^2} \sqrt{\left(\epsilon_1 - \frac{W_0 F_0^2}{64\eta a} \right)^2 + \epsilon_3^2}. \quad (6.2)$$

Zur Berechnung der Werte für m_{q0} und ω wird ein Zahlenwert für die Größe W_0 benötigt.

In Gleichung (6.1) wird der Drehwinkel angegeben als Steigungswinkel des

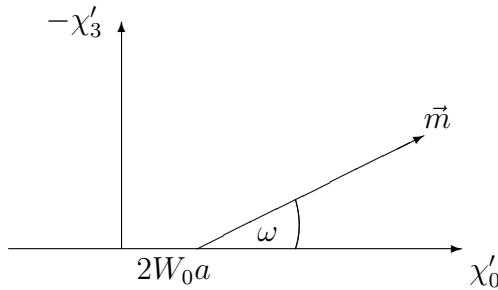


Abbildung 6.1: Die gedrehte Masse in Abhängigkeit der Größen χ'_0 und χ'_3 für $\omega \leq \pi/2$.

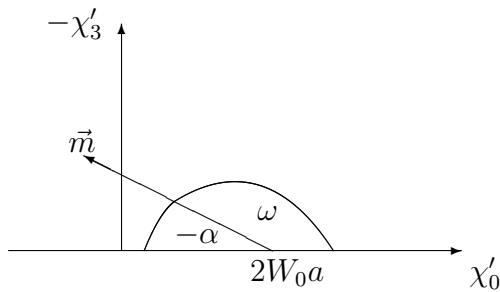


Abbildung 6.2: Die gedrehte Masse in Abhängigkeit der Größen χ'_0 und χ'_3 für $\omega > \pi/2$.

Vektors \vec{m} . Dies ist richtig, solange $\omega \leq \pi/2$ ist, siehe Abb. 6.1. Für $\omega > \pi/2$ entspricht der Drehwinkel ω nicht mehr dem Steigungswinkel α , siehe Abb. 6.2, α ist nun negativ. Der Drehwinkel wird für $\omega > \pi/2$ berechnet durch:

$$\omega = \arctan \left(\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1 - \frac{W_0 F_0^2}{64\eta a}} \right) + \pi. \quad (6.3)$$

ω nimmt dann den Wert $\pi/2$ an, wenn das Argument des Arkustangens in Gleichung (6.1) oder in Gleichung (6.3) den Wert „ ∞ “ hat, also wenn der Zähler gleich Null wird. Damit findet sich anhand der Gleichung (6.1) ein kritischer Wert für ϵ_1 :

$$\epsilon_{1,c} = \frac{W_0 F_0^2}{64\eta a}. \quad (6.4)$$

Für $\epsilon_1 = \epsilon_{1,c}$ ist $\omega = \pi/2$ gegeben. Bei $\epsilon_1 < \epsilon_{1,c}$ wird für den Drehwinkel die Gleichung (6.3) verwendet und bei $\epsilon_1 \geq \epsilon_{1,c}$ die Gleichung (6.1). Der Wert von $\epsilon_{1,c}$ ist positiv. Bei großen positiven Werten von ϵ_1 gilt damit die Gleichung (6.1), der Zähler des Arguments muss positiv sein. Bei großen negativen Werten von ϵ_1 ist die Gleichung (6.3) zu benutzen, hier ist der

Zähler des Arguments negativ. Damit lässt sich, unter Beachtung des in Abschnitt 5.2.1 berechneten Gültigkeitsbereich von ϵ_1 , für die Größe W_0 eine erste Abschätzung finden:

$$-10^7 \text{MeV}^3 \leq W_0 \leq 10^7 \text{MeV}^3.$$

Um das Ergebnis von der physical basis in die twisted basis zu transformieren muss zudem noch folgende Transformationsvorschrift beachtet werden:

$$U' = e^{-i\omega \frac{\tau_3}{2}} U e^{-i\omega \frac{\tau_3}{2}}. \quad (6.5)$$

U' ist die Feldkonfigurationsmatrix in der twisted basis. U ist die Feldkonfigurationsmatrix in der physical basis. ω ist der oben angeführte Drehwinkel. Mit Hilfe dieser Transformation wird die Drehung der Gittermatrix in der physical basis auf die Massenmatrix übertragen, so dass in der twisted basis gerechnet wird.

Das Minimum wird nicht nur in NLO, sondern auch in LO verglichen. Bisher wurde das Minimum immer in NLO betrachtet.

6.1 Minimum bis Leading Order

Das Potential aus Gleichung (4.10) vereinfacht sich in LO zu:

$$\begin{aligned} V &= -c_1 u_0 + c_3 u_3 \\ &= -c_1 u_0 \pm c_3 \sqrt{1 - u_0^2}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Somit lautet das Minimum:

$$u_{0,LO} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_3^2}}. \quad (6.7)$$

Für $\epsilon_1 = 0$ gibt es nur die Lösung $u_{0,LO} = 0$ für alle $\epsilon_3 > 0$. Somit gibt es hier keinen Sprung der Lösung, siehe Abb. 6.3. Bei $\epsilon_3 = 0$ gibt es die Lösung $u_{0,LO} = \pm 1$. Hier existiert auch weiterhin der Sprung des Minimums, siehe Abb. 5.2.

6.2 $\hat{\chi}$ -Näherung

In der Arbeit von L.Scorzato wurde das Minimum des Potentials unter der Annahme, dass die Größe

$$\hat{\chi} = \frac{2B_0 m_{q0}}{F_0^2}$$

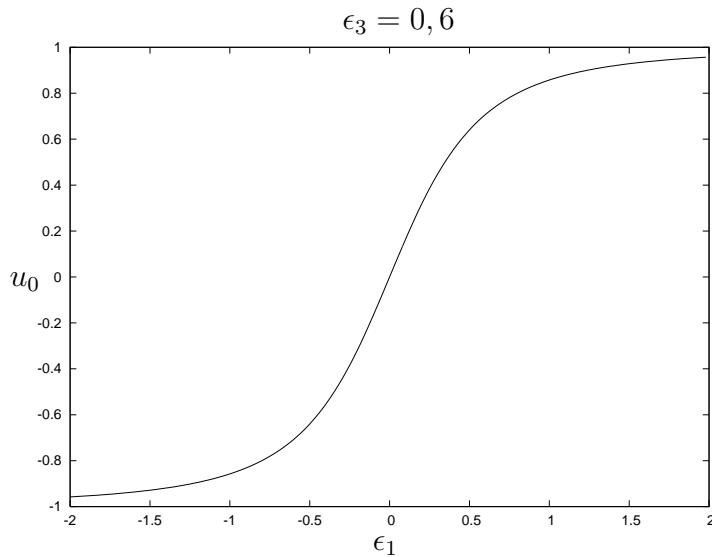


Abbildung 6.3: Verlauf von u_0 bei $\epsilon_3 = 0,6$ in LO

klein ist, bestimmt. Allerdings darf $\hat{\chi}$ nicht zu klein werden. Es wurde die Parametrisierung

$$U = \cos(\theta)\mathbf{1} + i\tau_3 \sin(\theta) \cos(\phi) + i\tau_1 \sin(\theta) \sin(\phi)$$

verwendet. Im Minimum gilt $\phi = 0$ und somit:

$$U = \cos(\theta)\mathbf{1} + i \sin(\theta)\tau_3.$$

Womit die Identifizierung

$$\begin{aligned} u_0 &= \cos(\theta - \omega) \\ u_3 &= \sin(\theta - \omega), \end{aligned} \tag{6.8}$$

unter Zuhilfenahme der Transformation (6.5) folgt. Zur Bestimmung des Minimums wird der Vakuum-Orientierungswinkel θ in LO und in NLO angegeben. Da nur kleine $\hat{\chi}$ betrachtet werden, kann in dieser Größe entwickelt werden. Die Größe $\hat{\chi}$ taucht allerdings erst in NLO auf, in LO wurde demnach nicht entwickelt.

Der Vakuum-Orientierungswinkel θ lautet in LO:

$$\theta_{\text{LO}} = \tau + \begin{cases} 0 & \text{für } \hat{\eta} \cos(\omega) + 1 > 0 \\ \pi & \text{für } \hat{\eta} \cos(\omega) + 1 < 0 \text{ und } \sin(\omega) > 0 \\ -\pi & \text{für } \hat{\eta} \cos(\omega) + 1 < 0 \text{ und } \sin(\omega) < 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

Dafür werden die Abkürzung

$$\hat{\eta} = \frac{W_0 a}{B_0 m_{q0}}$$

und

$$\tau = \tan^{-1} \left(\frac{\hat{\eta} \sin(\omega)}{\hat{\eta} \cos(\omega) + 1} \right)$$

benutzt.

Mit Hilfe des Ansatzes $\theta_{\text{NLO}} = \theta_{\text{LO}} + \hat{\chi} \cdot \Theta$ und einer Entwicklung nach $\hat{\chi}$ wird der Vakuum-Orientierungswinkel θ in NLO berechnet:

$$\begin{aligned} \theta_{\text{NLO}} &= \theta_{\text{LO}} + 8 \frac{\hat{\chi}}{\sqrt{\hat{\eta}^2 + 2 \cos(\omega) \hat{\eta} + 1}} \cdot \\ &\quad [-\sin(2\tau)L_{86} + \sin(2\omega - 2\tau)W'_{86}\hat{\eta}^2 + \sin(\omega - 2\tau)W_{86}\hat{\eta}] \\ &= \theta_{\text{LO}} + 8\chi (\hat{\eta}^2 + 2 \cos(\omega) \hat{\eta} + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \\ &\quad [L_{86} (\hat{\eta}^2 \sin(2\omega - 2\tau) + 2\hat{\eta} \sin(\omega - 2\tau) - \sin(2\tau)) \\ &\quad + \frac{2 \cdot w \cdot \hat{\eta}^2}{W_0} \sin(2\omega - 2\tau) + \frac{2 \cdot \eta \cdot \hat{\eta}^2}{W_0^2} \sin(2\omega - 2\tau) \\ &\quad + \frac{2 \cdot w \cdot \hat{\eta}}{W_0} \sin(\omega - 2\tau)]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

6.3 $\hat{\eta}$ -Näherung

In den Arbeiten von T.Sudmann und P.Hofmann wurde das Minimum des Potentials unter den Annahmen kleiner $\hat{\chi}$ und $\hat{\eta} = (W_0 a) / (B_0 m_{q0}) \ll 1$ bestimmt. Die Ergebnisse die in diesem Abschnitt angeführt werden, können durch Benutzung der Annahme $\hat{\eta} \ll 1$ aus den Ergebnissen des Abschnittes 6.2 hergeleitet werden. Die $\hat{\eta}$ -Näherung führt bei numerischen Betrachtungen zu der Schwierigkeit, dass die Quarkmasse nicht zu klein gewählt werden darf. Dies hätte zur Folge, dass die Gitterkonstante a ebenfalls sehr klein gewählt werden müsste, was einen hohen Rechenaufwand bedeuten würde.

Für die Feldkonfigurationsmatrix wird die Parametrisierung

$$U = e^{\frac{i}{F_0} \tau_i \tilde{\pi}_i},$$

mit $i = 1, \dots, 3$, verwendet. $\tilde{\pi}_i$ sind die Pionenfelder im Minimum, hier gilt $\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = 0$. Die Orientierung des Minimums liegt in $\tilde{\pi}_3$ -Richtung. Folglich kann die Feldkonfigurationsmatrix im Minimum auch geschrieben werden als:

$$U = e^{\frac{i}{F_0} \tau_3 \tilde{\pi}_3} = \cos \left(\frac{\tilde{\pi}_3}{F_0} \right) \mathbf{1} + i \cdot \sin \left(\frac{\tilde{\pi}_3}{F_0} \right) \tau_3.$$

Beim Vergleich dieser Parametrisierung mit der Parametrisierung aus Gleichung (4.8) und mit Hilfe der Transformation aus Gleichung (6.5) findet sich:

$$\begin{aligned} u_0 &= \cos \left(\frac{\tilde{\pi}_3}{F_0} - \omega \right) \\ u_3 &= \sin \left(\frac{\tilde{\pi}_3}{F_0} - \omega \right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

In LO gilt für das Minimum die Gleichung [22]:

$$\tilde{\pi}_{3,LO} = \frac{\rho_3 F_0}{\chi_0} = \frac{F_0 W_0 a \sin(\omega)}{B_0 m_{q0}}. \quad (6.12)$$

In NLO wird diese Gleichung erweitert zu:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{3,NLO} &= \frac{\rho_3}{F_0} \left[\frac{F_0^2}{\chi_0} - 16L_{86} + 8W_{86} + \frac{\rho_0}{\chi_0} \left(-\frac{F_0^2}{\chi_0} + 32L_{86} - 24W_{86} + 16W'_{86} \right) \right] \\ &= \left(1 - \frac{W_0 a}{B_0 m_{q0}} \cos(\omega) \right) \cdot \left(\frac{F_0 W_0}{B_0 m_{q0}} + 32 \frac{w}{F_0} \right) \cdot a \cdot \sin(\omega) \\ &\quad + 64 \frac{\eta a^2}{F_0 B_0 m_{q0}} \cdot \cos(\omega) \cdot \sin(\omega). \end{aligned} \quad (6.13)$$

6.4 Vergleich in Leading Order

Im Folgenden wird das Minimum, welches mit dem Algorithmus nach Ferrari berechnet wurde mit $u_{0,F}$ bezeichnet. $u_{0,SU}$ wird für das Minimum verwendet, welches mit Hilfe der $\hat{\chi}$ -Näherung gefunden wurde. $u_{0,SC}$ kennzeichnet das Minimum der $\hat{\chi}$ -Näherung.

$$\underline{W_0 = 10^5 \text{ MeV}^3}$$

Mit Gleichung (6.4) ergibt sich, dass $\epsilon_{1,c} = 0,002$ ist. $u_{0,F}$, $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ sind für alle ϵ_1 und für alle ϵ_3 identisch. Aus den Werten für W_0 , η und w^* folgt:

$$\begin{aligned} W' &= 10^3 & W &= 10^{-1} \\ W_{86} &= 2 \cdot 10^{-1} & W'_{86} &= 2 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

*Siehe Anhang C

$$\underline{W_0 = 10^6 \text{MeV}^3}$$

Als kritischer Wert für ϵ_1 ergibt sich $\epsilon_{1,c} = 0,02$. $u_{0,F}$, $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ sind für alle $|\epsilon_1| > \epsilon_{1,c}$ und für alle ϵ_3 identisch. Bei $|\epsilon_1| \leq \epsilon_{1,c}$ zeigen sich minimalste Abweichungen von $u_{0,SU}$ zu $u_{0,F}$. Mit den Werten für W_0 , η und w werden die Größen

$$\begin{array}{ll} W' = 10^1 & W = 10^{-2} \\ W_{86} = 1,84 \cdot 10^{-2} & W'_{86} = 2 \cdot 10^1 \end{array}$$

berechnet.

$$\underline{W_0 = 10^7 \text{MeV}^3}$$

Aus der Gleichung (6.4) ergibt sich $\epsilon_{1,c} = 0,23$. $u_{0,F}$ und $u_{0,SC}$ sind für alle $|\epsilon_1| \geq \epsilon_{1,c}$ und für alle ϵ_3 identisch. $u_{0,SU}$ zeigt im Bereich kleiner Werte für ϵ_1 oder ϵ_3 sehr geringe Abweichungen zu $u_{0,F}$ oder $u_{0,SC}$ von ca. 1%. Aus den Werten für W_0 , η und w folgt:

$$\begin{array}{ll} W' = 10^{-1} & W = 10^{-3} \\ W_{86} = 3,6 \cdot 10^{-3} & W'_{86} = 2 \cdot 10^{-1}. \end{array}$$

$u_{0,F}$ und $u_{0,SC}$ sind unabhängig vom W_0 -Wert für alle ϵ_1 und für alle ϵ_3 identisch, da, wie schon in Abschnitt 6.2 dargestellt wurde, die χ -Näherung erst bei NLO benutzt wurde.

$u_{0,SU}$ zeigt im Bereich kleiner ϵ_1 -Werte nur minimale Abweichungen zu $u_{0,F}$. Für Bereiche großer ϵ_1 -Werte ist $u_{0,SU}$ identisch mit $u_{0,F}$.

Kleinere Werte für W_0 als $W_0 = 10^5 \text{MeV}^3$ wurden nicht betrachtet, da bereits bei $W_0 = 10^5 \text{MeV}^3$ die Werte für W_{86} und W'_{86} im Verhältnis zu L_{86} sehr groß sind. Es ist anzunehmen, dass die Werte für W_{86} und W'_{86} nicht viel größer sind als L_{86} .

6.5 Vergleich in Next To Leading Order

Für die Minima $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ wurde die $\hat{\chi}$ -Näherung verwendet. Dabei werden kleine Werte der Größe $\hat{\chi}$ und damit der Masse m_{q0} angenommen. Allerdings dürfen diese Werte auch nicht zu klein werden. In NLO wird der Gültigkeitsbereich der Näherungen untersucht. Dazu werden tabellarisch für jeden W_0 -Wert die $\hat{\chi}$ - und $\hat{\eta}$ -Werte angegeben. Wird der $\hat{\eta}$ -Wert zu groß, weicht das Minimum $u_{0,SU}$ vom Minimum $u_{0,SC}$ ab.

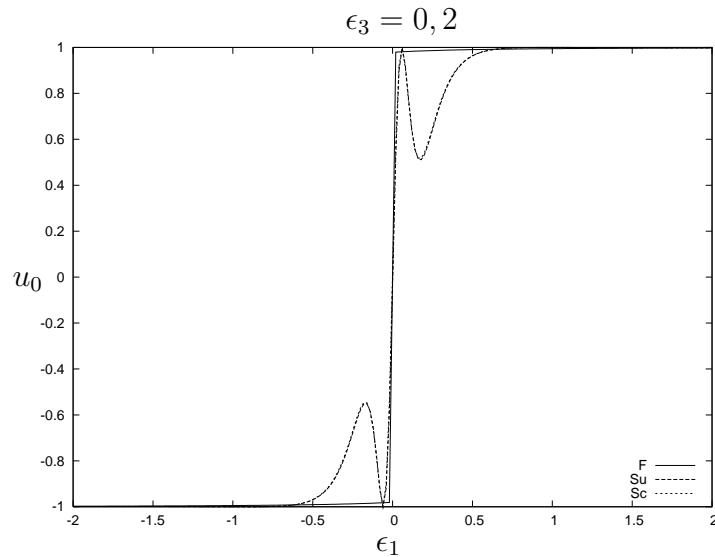


Abbildung 6.4: Vergleich der Minima $u_{0,F}$, $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ bei $\epsilon_3 = 0, 2$ und $W_0 = 10^5 \text{MeV}^3$

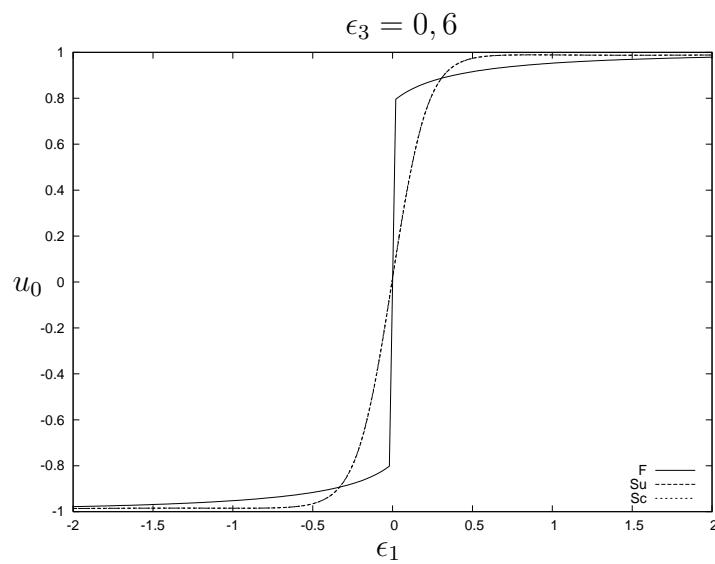


Abbildung 6.5: Vergleich der Minima $u_{0,F}$, $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ bei $\epsilon_3 = 0, 6$ und $W_0 = 10^5 \text{MeV}^3$

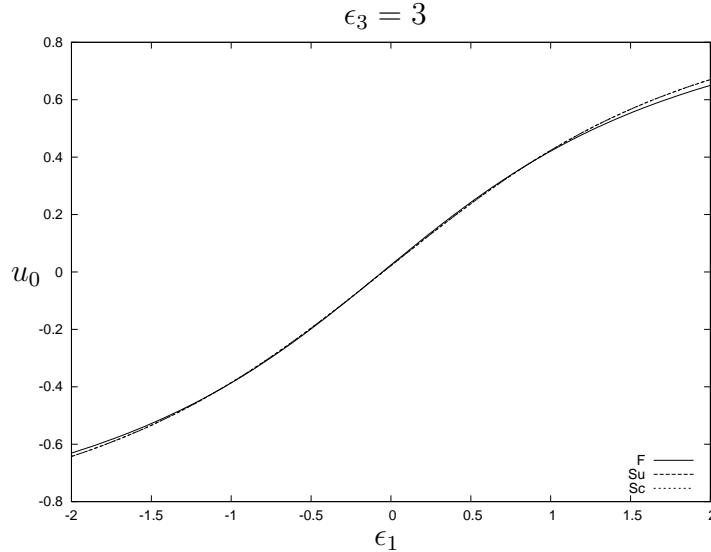


Abbildung 6.6: Vergleich der Minima $u_{0,F}$, $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ bei $\epsilon_3 = 3$ und $W_0 = 10^5 \text{ MeV}^3$

$$W_0 = 10^5 \text{ MeV}^3$$

| ϵ_3 | $\epsilon_1 = 0$ | | $\epsilon_1 = 0,5$ | | $\epsilon_1 = 1$ | | $\epsilon_1 = 2$ | |
|--------------|------------------|--------------|--------------------|--------------|------------------|--------------|------------------|--------------|
| | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ |
| 0 | 0,01 | 1 | 3,0 | 0,005 | 6,0 | 0,002 | 12,0 | 0,001 |
| 0,2 | 1,2 | 0,01 | 3,2 | 0,004 | 6,1 | 0,002 | 12,0 | 0,001 |
| 0,4 | 2,4 | 0,006 | 3,8 | 0,004 | 6,4 | 0,002 | 12,2 | 0,001 |
| 0,6 | 3,6 | 0,004 | 4,7 | 0,003 | 7,0 | 0,002 | 12,5 | 0,001 |
| 0,8 | 4,8 | 0,003 | 5,7 | 0,002 | 7,7 | 0,002 | 12,9 | 0,001 |
| 1 | 6,0 | 0,002 | 6,7 | 0,002 | 8,5 | 0,002 | 13,4 | 0,001 |
| 2 | 12,0 | 0,001 | 12,4 | 0,001 | 13,4 | 0,001 | 17,0 | 0,0008 |
| 3 | 18,0 | 0,0008 | 18,2 | 0,0008 | 19,0 | 0,0007 | 21,6 | 0,0006 |

$u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ stimmen für alle ϵ_1 und ϵ_3 überein, weichen aber von $u_{0,F}$ ab. Es fällt besonders auf, dass $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ für $\epsilon_3 \leq 1$ keinen Phasensprung aufweisen, sondern durch den Ursprung gehen und sich anschließend $u_{0,F}$ annähern, siehe Abb. 6.5. Bei $\epsilon_3 = 0,2$ tritt noch die Besonderheit auf, dass $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ im Bereich kleiner ϵ_1 -Werte zuerst steigen, danach fallen und sich schließlich $u_{0,F}$ annähern. Je größer ϵ_3 wird, desto besser stimmt auch das qualitative Verhalten der Minima bei kleinen Werten für ϵ_1 überein. Für Werte $\epsilon_3 \geq 1$ weisen die Minima im Bereich $\epsilon_1 \approx 1$ einen Schnittpunkt auf, im weiteren Verlauf wird die Differenz der Minima wieder größer, siehe Abb. 6.6.

Bei $\epsilon_3 = 0$ sind alle Minima identisch.

Die maximale Differenz der Minima ist bei $\epsilon_1 = \epsilon_{1,c}$ und $\epsilon_3 = 0,2$ mit 90% feststellbar. Minimal gibt es eine Abweichung von $2 \cdot 10^{-2}\%$ bei $\epsilon_1 = 2$ und $\epsilon_3 = 0,2$. Für $\epsilon_1 \geq 0,5$ liegen die Abweichungen im Bereich von 6% bis $2 \cdot 10^{-2}\%$.

Die Werte von $\hat{\chi}$ wachsen für steigendes ϵ_1 und ϵ_3 . Der minimale Wert von $\hat{\chi} = 0,01$ liegt bei $\epsilon_1 = 0$ und $\epsilon_3 = 0$, der maximale Wert von $\hat{\chi} = 21,6$ bei $\epsilon_1 = 2$ und $\epsilon_3 = 3$. Die $\hat{\eta}$ -Werte dagegen werden für steigende ϵ_1 und ϵ_3 -Werte kleiner. Maximal wird ein $\hat{\eta}$ -Wert von 1 bei $\epsilon_1 = 0$ und $\epsilon_3 = 0$ beobachtet und minimal ein Wert von $6 \cdot 10^{-4}$ bei $\epsilon_1 = 2$ und $\epsilon_3 = 3$. u_{SU} und u_{SC} weichen für $\epsilon_3 \leq 1$ ab einem Wert von $\epsilon_1 = 1$ höchstens um 5% von u_{F} ab. Die Differenz der Minima ist hier sehr gering. Für $\epsilon_3 > 1$ ist die Differenz dieser Minima im gesamten Gültigkeitsbereich von ϵ_1 sehr gering.

Für $\hat{\chi}$ bietet sich damit ein Gültigkeitsbereich von $6,0 \leq \hat{\chi} \leq 21,6$ an. Da die Minima $u_{0,\text{SU}}$ und $u_{0,\text{SC}}$ nicht voneinander abweichen, liegen Werte von $\hat{\eta} \leq 0,01$ im Gültigkeitsbereich der $\hat{\eta}$ -Näherung.

$$\underline{W_0 = 10^6 \text{MeV}^3}$$

Für $u_{0,\text{SU}}$ und $u_{0,\text{SC}}$ ist nur ein minimaler Unterschied zwischen dem Verhalten bei $W_0 = 10^6 \text{MeV}^3$ und bei $W_0 = 10^5 \text{MeV}^3$ auszumachen, siehe Abb. 6.7. Bei großen Werten für ϵ_1 unterscheiden sich die beiden Minima nur um ca. 0,2% oder weniger. Im Bereich kleiner ϵ_1 -Werte ist die Abweichung der Minima teilweise größer, aber trotzdem so klein, dass sie vernachlässigt werden kann. Die Differenz von $u_{0,\text{SU}}$ und $u_{0,\text{SC}}$ zu $u_{0,\text{F}}$ hat sich für $W_0 = 10^6 \text{MeV}^3$ im Vergleich zu $W_0 = 10^5 \text{MeV}^3$ kaum verändert. Für große ϵ_1 und ϵ_3 -Werte ist das Verhalten gleich geblieben. Für kleine ϵ_1 und ϵ_3 -Werte hat sich die Abweichung von $u_{0,\text{SC}}$ zu $u_{0,\text{F}}$ verringert, während sie für $u_{0,\text{SU}}$ etwa gleich geblieben ist.

Das Verhalten bei $\epsilon_3 = 0$ ist bei allen drei Minima identisch.

Die $\hat{\chi}$ -Werte weisen nur minimale Unterschiede zu den $\hat{\chi}$ -Werten bei $W_0 = 10^5 \text{MeV}^3$ auf. Der Gültigkeitsbereich dieser Näherung bleibt damit bei $6,0 \leq \hat{\chi} \leq 21,6$.

Die $\hat{\eta}$ -Werte sind um den Faktor 10 größer geworden. Die Abweichungen der Minima $u_{0,\text{SU}}$ und $u_{0,\text{SC}}$ sind so gering, dass sie vernachlässigt werden können. Der Gültigkeitsbereich der $\hat{\eta}$ -Näherung kann deshalb auf $\hat{\eta} \leq 0,1$ erweitert werden.

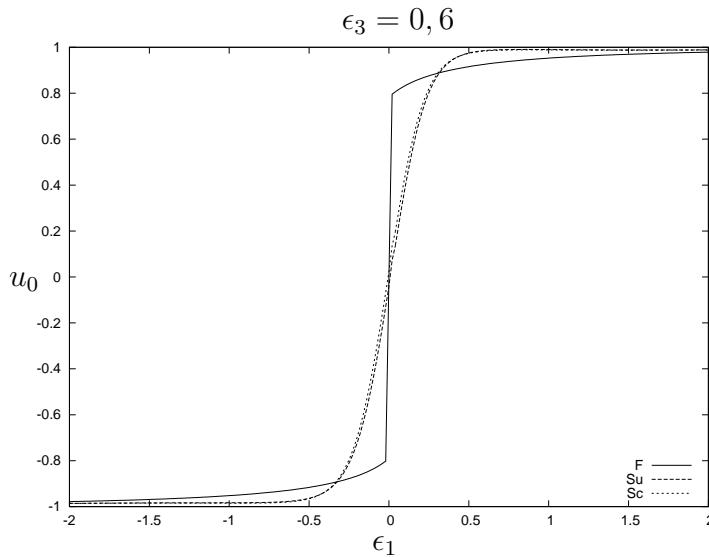


Abbildung 6.7: Vergleich der Minima $u_{0,F}$, $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ bei $\epsilon_3 = 0,6$ und $W_0 = 10^6 \text{MeV}^3$

| ϵ_3 | $\epsilon_1 = 0$ | | $\epsilon_1 = 0,5$ | | $\epsilon_1 = 1$ | | $\epsilon_1 = 2$ | |
|--------------|------------------|--------------|--------------------|--------------|------------------|--------------|------------------|--------------|
| | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ |
| 0 | 0,17 | 1 | 2,9 | 0,05 | 5,9 | 0,02 | 11,9 | 0,01 |
| 0,2 | 1,2 | 0,1 | 3,1 | 0,04 | 6,0 | 0,02 | 11,9 | 0,01 |
| 0,4 | 2,4 | 0,06 | 3,7 | 0,04 | 6,3 | 0,02 | 12,1 | 0,01 |
| 0,6 | 3,6 | 0,04 | 4,6 | 0,03 | 6,9 | 0,02 | 12,4 | 0,01 |
| 0,8 | 4,8 | 0,03 | 5,6 | 0,02 | 7,6 | 0,02 | 12,8 | 0,01 |
| 1 | 6,0 | 0,02 | 6,6 | 0,02 | 8,4 | 0,02 | 13,3 | 0,01 |
| 2 | 12,0 | 0,01 | 12,3 | 0,01 | 13,4 | 0,01 | 16,9 | 0,008 |
| 3 | 18,0 | 0,008 | 18,2 | 0,008 | 18,9 | 0,007 | 21,6 | 0,006 |

$$W_0 = 10^7 \text{MeV}^3$$

| ϵ_3 | $\epsilon_1 = 0$ | | $\epsilon_1 = 0,5$ | | $\epsilon_1 = 1$ | | $\epsilon_1 = 2$ | |
|--------------|------------------|--------------|--------------------|--------------|------------------|--------------|------------------|--------------|
| | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ | $\hat{\chi}$ | $\hat{\eta}$ |
| 0 | 1,4 | 1 | 1,6 | 0,8 | 4,6 | 0,3 | 10,6 | 0,1 |
| 0,2 | 1,8 | 0,6 | 2,0 | 0,7 | 4,8 | 0,3 | 10,7 | 0,1 |
| 0,4 | 2,8 | 0,5 | 2,9 | 0,5 | 5,2 | 0,3 | 10,9 | 0,1 |
| 0,6 | 3,9 | 0,4 | 4,0 | 0,3 | 5,9 | 0,2 | 11,2 | 0,1 |
| 0,8 | 5,0 | 0,3 | 5,1 | 0,3 | 6,7 | 0,2 | 11,7 | 0,1 |
| 1 | 6,2 | 0,2 | 6,2 | 0,2 | 7,6 | 0,2 | 12,2 | 0,1 |
| 2 | 12,1 | 0,1 | 12,0 | 0,1 | 12,9 | 0,1 | 16,0 | 0,09 |
| 3 | 18,0 | 0,08 | 18,1 | 0,08 | 18,6 | 0,07 | 20,9 | 0,07 |

Im Fall $W_0 = 10^7 \text{MeV}^3$ vergrößert sich die Abweichung von $u_{0,SU}$ zu $u_{0,SC}$, siehe Abb. 6.8, 6.9, 6.10. Besonders auffällig ist dies im Bereich kleiner ϵ_1 -Werte für $\epsilon_3 \leq 1$. Für große ϵ_1 -Werte und $\epsilon_3 > 1$ ist die Abweichung ebenfalls

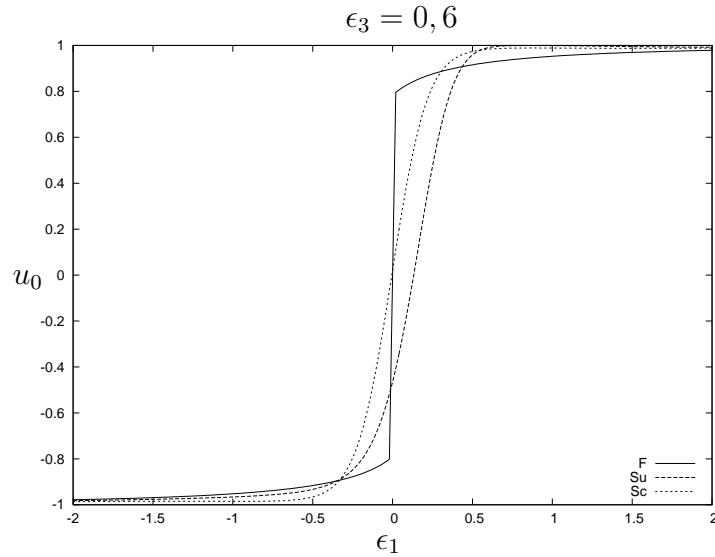


Abbildung 6.8: Vergleich der Minima $u_{0,F}$, $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ bei $\epsilon_3 = 0,6$ und $W_0 = 10^7 \text{MeV}^3$

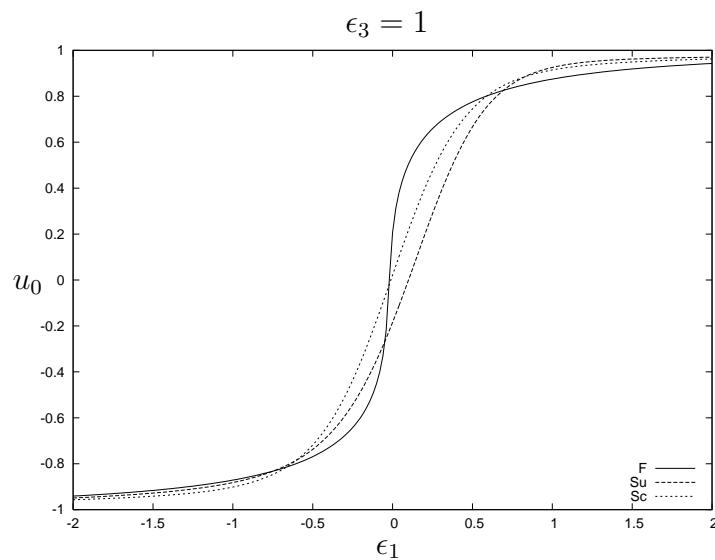


Abbildung 6.9: Vergleich der Minima $u_{0,F}$, $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ bei $\epsilon_3 = 1$ und $W_0 = 10^7 \text{MeV}^3$

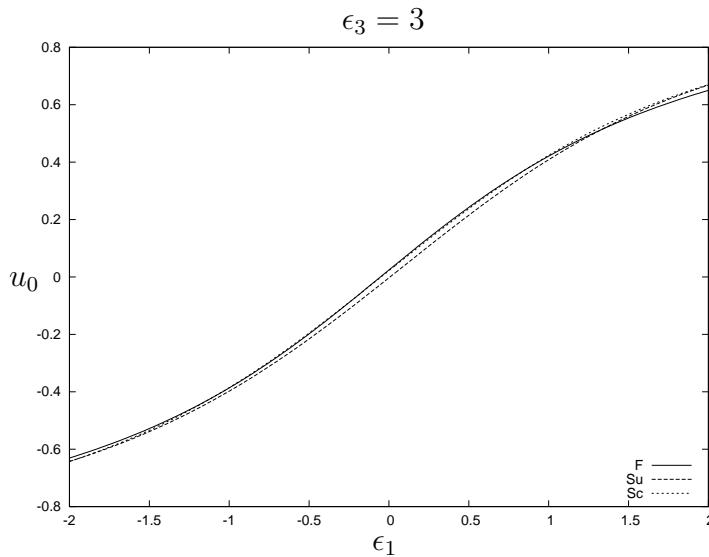


Abbildung 6.10: Vergleich der Minima $u_{0,F}$, $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ bei $\epsilon_3 = 3$ und $W_0 = 10^7 \text{ MeV}^3$

größer, liegt aber im Bereich von 0,06% bis 1% und kann deshalb vernachlässigt werden.

Beim Vergleich von $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ mit $u_{0,F}$ sind die Abweichungen im Bereich großer ϵ_1 -Werte etwa gleich geblieben. Sie liegen dort im Bereich von 0,1% bis 4%. Für $\epsilon_1 \approx \epsilon_{1,c}$ ist die Abweichung kleiner als bei den vorherigen Fällen.

Das Verhalten bei $\epsilon_3 = 0$ ist bei allen drei Minima identisch.

Die $\hat{\chi}$ -Werte sind kleiner als zuvor. Der maximale Wert ist nun $\hat{\chi} = 20,9$. Allerdings kann erst bei größeren $\hat{\chi}$ -Werten als $\hat{\chi} = 6$ die Abweichung der Minima vernachlässigt werden. Der Gültigkeitsbereich der $\hat{\chi}$ -Näherung wird damit erweitert zu $7,0 \leq \hat{\chi} \leq 20,9$.

Die $\hat{\eta}$ -Werte sind um den Faktor 10 gegenüber den $\hat{\eta}$ -Werten bei $W_0 = 10^6 \text{ MeV}^3$ angewachsen. Im Bereich kleiner ϵ_1 - und ϵ_3 -Werte ist die Gültigkeit der $\hat{\eta}$ -Näherung nicht mehr gegeben. Der Gültigkeitsbereich verändert sich nicht deutlich: $\hat{\eta} \leq 0,2$.

In LO ist nur $u_{0,SU}$ genähert, $u_{0,SC}$ und $u_{0,F}$ sind ohne Näherungen berechnet worden. Die Abweichung von $u_{0,SU}$ zu $u_{0,SC}$ und $u_{0,F}$ aufgrund der Näherung ist sehr gering.

In NLO sind die Abweichungen von $u_{0,SU}$ und $u_{0,SC}$ zu $u_{0,F}$ größer geworden.

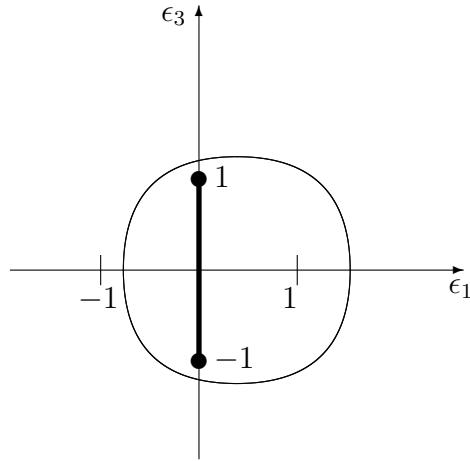


Abbildung 6.11: Der Gültigkeitsbereich der $\hat{\chi}$ -Näherung für $W_0 = 10^7 \text{ MeV}^3$ liegt außerhalb des Kreises, für den $\hat{\chi} = 7$ gilt.

$u_{0,\text{SC}}$ ist in NLO nicht mehr exakt, sondern genähert. Besonders das Verhalten der Minima für $\epsilon_3 \leq 1$ und kleinen ϵ_1 -Werten kann nicht mit $u_{0,\text{SU}}$ und $u_{0,\text{SC}}$ beschrieben werden. Beide Lösungen weisen keinen Phasensprung auf. Für große ϵ_1 - und ϵ_3 -Werte stellen $u_{0,\text{SU}}$ und $u_{0,\text{SC}}$ eine gute Näherung dar.

Das Verhalten bei $\epsilon_3 = 0$ ist bei allen drei Minima für alle Werte von W_0 identisch. Für $\epsilon_3 = 0$ ist $\omega = 0$ für alle ϵ_1 . Dies ist der nicht gedrehte Fall mit $\chi'_3 = \rho_3 = 0$.

Die Minima der $\hat{\chi}$ - und der $\hat{\eta}$ -Näherung basieren beide auf der Annahme, dass die Größe $\hat{\chi}$ zwar klein ist, aber dennoch nicht zu klein. Es gibt also eine untere Grenze für $\hat{\chi}$, bis zu der die die $\hat{\chi}$ - und die $\hat{\eta}$ -Näherungen das Verhalten des Minimums beschreiben. Der Gültigkeitsbereich der Größe $\hat{\chi}$ ist für die verschiedenen W_0 -Werte etwa gleich und kann zu

$$7,0 \leq \hat{\chi} \leq 21,6$$

gewählt werden, siehe Abb. 6.11. In diesem Bereich stellen $u_{0,\text{SU}}$ und $u_{0,\text{SC}}$ eine sinnvolle Näherung dar. Mit diesem Gültigkeitsbereich der Größe $\hat{\chi}$ kann der Phasensprung des Minimums nicht beschrieben werden.

Der Gültigkeitsbereich der $\hat{\eta}$ -Näherung wird durch die Abweichung der Minima $u_{0,\text{SU}}$ und $u_{0,\text{SC}}$ festgelegt. Die beiden Minima können als gleich angesehen werden, solange

$$\hat{\eta} \leq 0,2$$

ist.

Kapitel 7

Massenbestimmung

Zur Bestimmung der Masse der Pionen wird die Lagrangedichte (4.4) bis NLO betrachtet. Dabei sind sowohl Terme aus dem Potential als auch Terme aus dem kinetischen Teil der Lagrangedichte relevant. Im Potential sind die *Treelevel*-Terme enthalten. Zudem müssen noch Schleifenterme berücksichtigt werden. Die Schleifenterme, oder *loop*-Terme, berücksichtigen die Selbstwechselwirkung der Felder. Diese Selbstwechselwirkung beeinflusst die Masse des Pions. Zur Berechnung der Schleifenbeiträge sind sowohl Terme im Potential, als auch im kinetischen Teil der Lagrangedichte zu benutzen. Nach Gleichung (2.19) haben Einschleifenterme bereits $D = 4$, d.h. sie sind NLO. Terme mit mehr als einer Schleife müssen demnach nicht mitberücksichtigt werden, da sie bereits NNLO (*next to next to leading order*) oder höherer Ordnung sind.

7.1 Treelevelmassen

Wie in Abschnitt 2.3.1 dargestellt, ist die Masse in dem Term enthalten, welcher quadratisch im Feld ist. Folglich muss das Potential zwei mal nach dem Pionfeld abgeleitet werden:

$$m_\pi^2 \propto \sum_i m_{\pi_i}^2 \propto \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i^2} \Big|_{\pi_{\text{Min}}} . \quad (7.1)$$

Um die Masse der Pionen π_1 , π_2 oder π_3 zu finden wird nach dem entsprechendem Feld abgeleitet. Mit Hilfe der Ableitungs-Kettenregel ergibt sich

eine Schreibweise, welche von den Größen u_0, \dots, u_3 abhängt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i^2} \Big|_{\pi_{\text{Min}}} &= \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial u_0} \frac{\partial u_0}{\partial \pi_i} + \frac{\partial V}{\partial u_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \pi_i^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \pi_i} + \frac{\partial V}{\partial u_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \pi_i^2} \\ &+ \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \pi_i} + \frac{\partial V}{\partial u_2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \pi_i^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial \pi_i} + \frac{\partial V}{\partial u_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \pi_i^2}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

In Abschnitt 6.3 ist eine Parametrisierung angeführt, welche die Pionfelder direkt enthält. Beim Vergleich dieser Parametrisierungen, ergeben sich folgende Relationen:

$$\begin{aligned} u_0 &= \cos\left(\frac{|\pi|}{F_0}\right), \\ u_i &= \frac{\pi_i}{|\pi|} \sin\left(\frac{|\pi|}{F_0}\right), \\ \pi_i &= \pm \frac{F_0 \arcsin\left(\sqrt{1-u_0^2}\right)}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}} u_i. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Hierbei wird die Abkürzung $|\pi| = \sqrt{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2} =: P$ verwendet. Der Zählindex i läuft von 1 bis 3. Damit lassen sich die Ableitungen aus Gleichung (7.2) berechnen.

7.1.1 Treelevel in Leading Order

Zur Massenbestimmung muss für die Größen u_0, \dots, u_3 der Wert im Minimum angegeben werden. Die Größen u_1 und u_2 verschwinden im Minimum, siehe Kapitel 4. Das Potential in LO ist linear abhängig von den Variablen u_0 und u_3 . Die Variablen u_1 und u_2 treten aufgrund der Spureigenschaften der Pauli-Matrizen* nicht auf.

Damit vereinfacht sich Gleichung (7.2) für die Masse der drei Pionen zu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i^2} \Big|_{\pi_{\text{Min}}} = \frac{\partial V}{\partial u_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \pi_i^2} + \frac{\partial V}{\partial u_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \pi_i^2}. \quad (7.4)$$

Für u_0 und u_3 ergibt sich aus Gleichung (6.7) die Bedingung im Minimum. Die Ableitungen zur Berechnung der Massen der drei Pionen lauten

$$V''_{1,2} = \frac{c_1 u_3}{F_0 \pi_3} - \frac{c_3 u_3}{\pi_3^2} + \frac{c_3 u_0}{F_0 \pi_3} \quad (7.5)$$

*Siehe Anhang A

und

$$V''_3 = \frac{c_1 u_0}{F_0^2} - \frac{c_3 u_3}{F_0^2}. \quad (7.6)$$

Die Konstanten c_1 bis c_5 sind in Abschnitt 4.2 aufgelistet.

Der inverse Propagator hat die Gestalt:

$$G_i^{-1}(p) = k_i (p^2 + m_{\pi_i}^2).$$

Zur Renormierung der Massen müssen die einzelnen Konstanten k_i bestimmt werden, so dass gilt:

$$m_{\pi_i}^2 = \frac{V''_i}{k_i}.$$

Zur Bestimmung der Renormierungskonstanten der Massen wird der kinetischen Teil der Lagrangedichte T betrachtet:

$$\mathcal{L}_{LO} = \frac{1}{2} k_i [(\partial_\mu \pi_i)^2 + m_{\pi_i}^2 \pi_i^2] + \text{WW-Terme} = T + V + \text{WW-Terme}. \quad (7.7)$$

Die Konstanten werden mit Hilfe der Relation

$$k_i = \frac{\partial^2 T}{\partial (\partial_\mu \pi_i)^2} \quad (7.8)$$

berechnet. Der kinetische Teil in LO der betrachteten Lagrangedichte lautet:

$$T = \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle.$$

Nach Einsetzen der Parametrisierung ergibt sich eine Gleichung zur Berechnung der einzelnen Konstanten k_i :

$$\begin{aligned} k_{i,LO} = & u_i^2 + F_0^2 \left(\frac{u_i}{\pi_i} \delta_{i1} - \frac{\pi_1}{P^2} u_i + \frac{\pi_1 \pi_i}{P^2 F_0} u_0 \right)^2 + F_0^2 \left(\frac{u_i}{\pi_i} \delta_{i2} - \frac{\pi_2}{P^2} u_i + \frac{\pi_2 \pi_i}{P^2 F_0} u_0 \right)^2 \\ & + F_0^2 \left(\frac{u_i}{\pi_i} \delta_{i3} - \frac{\pi_3}{P^2} u_i + \frac{\pi_3 \pi_i}{P^2 F_0} u_0 \right)^2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Für alle Felder wird jeweils der Wert im Minimum benutzt. Damit ergibt sich

$$\pi_3 = P = F_0 \arcsin(u_3) \quad \text{und} \quad \frac{u_i}{\pi_i} = \frac{u_3}{\pi_3} \quad \forall i.$$

Für die Masse $m_{\pi_{1,2}}$ wird die Konstante

$$k_{1,2} = \frac{u_3^2}{\arcsin^2(u_3)}$$

und für die Masse m_{π_3} die Konstante

$$k_3 = 1$$

verwendet. Damit lautet die renormierte Masse:

$$m_{\pi_1}^2 = m_{\pi_2}^2 = m_{\pi_3}^2 = \frac{128\eta a^2}{F_0^2} (\epsilon_1 u_0 - \epsilon_3 u_3). \quad (7.10)$$

Die Masse $m_{\pi_{1,2}}$ ist identisch mit der Masse m_{π_3} . Die Renormierung hebt das Massensplitting auf. u_0 bzw. u_3 ist das Minimum des Potentials bis LO. Werden für diese Größen die Ergebnisse aus Abschnitt 6.1 eingesetzt, ergibt sich für die Massen:

$$\begin{aligned} m_{\pi_i}^2 &= \frac{128\eta a^2}{F_0^2} \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_3^2} \\ &= 2B_0 \sqrt{m_0'^2 + \mu^2}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Die Treelevelmasse in LO ist damit proportional zu $\sqrt{m_0'^2 + \mu^2}$.

7.1.2 Vergleich der Massen in Leading Order

In Kapitel 6 wurde das Minimum nach Ferrari mit Minima verglichen, welche auf andere Weise berechnet wurden. Zur Berechnung der Masse wird das Minimum benötigt. Somit ergeben verschiedene Minima verschiedene Massen. Die Auswirkung einer Näherung des Minimums auf die Masse bis LO wird in diesem Abschnitt betrachtet. In den Arbeiten von T.Sudmann [22] und P.Hofmann [24] wurde die $\hat{\eta}$ -Näherung zur Bestimmung des Minimums und auch zur Bestimmung der Masse benutzt. In diesen Arbeiten wird ebenfalls in LO kein Massensplitting beobachtet. Die Gleichung für die exakt bestimmte Masse [22]

$$m_{\pi_i}^2 = (\chi_0 + \rho_0) \cos\left(\frac{\pi_3}{F_0}\right) + \rho_3 \sin\left(\frac{\pi_3}{F_0}\right),$$

mit $\pi_3 = \pi_{3,\min}$, hat dieselbe Struktur wie die in Abschnitt 7.1.1 dargestellte Gleichung für die Masse (7.10). Die $\hat{\eta}$ -Näherung für diese Gleichung lautet:

$$m_{\pi_i}^2 = (\chi_0 + \rho_0) + \frac{\rho_3^2}{2\chi_0}. \quad (7.12)$$

$$\underline{W_0 = 10^5 \text{MeV}^3}$$

Der Index „g“ verdeutlicht, dass es sich um die genäherte Masse aus Gleichung (7.12) handelt. Für die Masse m_{q0} und den Winkel ω werden die Gleichungen (6.1), (6.3) und (6.2) benutzt. Aus diesen Formeln folgt eine W_0 -Abhängigkeit der Massen $m_{\pi_{1,2,3,g}}^2$. Die Massen $m_{\pi_{1,2,3}}^2$ sind nicht direkt abhängig von W_0 . Diese Größe kommt nur als Produkt mit W , W' oder \tilde{W} vor[†]:

$$\begin{aligned} W \cdot W_0 &= w \\ W' \cdot W_0^2 &= \eta \\ \tilde{W} \cdot W_0 &= \tilde{w}. \end{aligned}$$

Der Wert von w , η und \tilde{w} ist konstant, lediglich die Faktoren können variieren. Daher sind die Massen $m_{\pi_{1,2,3}}^2$ bei festen Werten für ϵ_1 und ϵ_3 für alle W_0 -Werte gleich.

Die Massen $m_{\pi_{1,2,3}}^2$ unterscheiden sich im Rahmen der Rechengenauigkeit nicht von $m_{\pi_{1,2,3,g}}^2$ für alle ϵ_1 .

$$\underline{W_0 = 10^6 \text{MeV}^3}$$

Im Bereich $|\epsilon_1| < 0,4$ werden für $\epsilon_3 = 0,2$ minimale Abweichungen von ca. 0,1% beobachtet. Die genäherte Masse ist dabei größer als die exakte Masse.

$$\underline{W_0 = 10^7 \text{MeV}^3}$$

Im Bereich $|\epsilon_1| < 1$ für ϵ_3 -Werte von $\epsilon_3 = 0,2$ bis $\epsilon_3 = 0,8$ gibt es nur kleine Abweichungen. Für $\epsilon_3 = 0,2$ sind diese Abweichungen mit maximal ca. 11% recht groß, werden für $\epsilon_3 = 0,8$ mit maximal ca. 0,2% aber sehr klein. Ebenso wie für den Fall $W_0 = 10^6 \text{MeV}^3$, ist auch hier die genäherte Masse größer als die exakte Masse.

7.1.3 Treelevel in Next To Leading Order

Das Potential in NLO besitzt auch Terme, welche nichtlinear in den Variablen sind. Daher müssen zusätzliche Terme zur Berechnung der Massen berücksichtigt werden:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i^2} \Big|_{\pi_{\text{Min}}} = \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial u_0} \frac{\partial u_0}{\partial \pi_i} + \frac{\partial V}{\partial u_0} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \pi_i^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_i \partial u_3} \frac{\partial u_3}{\partial \pi_i} + \frac{\partial V}{\partial u_3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \pi_i^2}. \quad (7.13)$$

[†]Siehe Anhang C

Für die einzelnen Massen ergibt sich damit

$$\begin{aligned} V''_{1,2} = & \frac{c_1 u_3}{F_0 \pi_3} - 2 \frac{c_2 u_0 u_3}{F_0 \pi_3} + \frac{c_3 u_0}{F_0 \pi_3} - \frac{c_3 u_3}{\pi_3^2} + 2 \frac{c_4 u_3 u_0}{F_0 \pi_3} \\ & - 2 \frac{c_4 u_3^2}{\pi_3^2} - \frac{c_5 u_0 u_3}{\pi_3^2} + \frac{c_5 u_0^2}{F_0 \pi_3} - \frac{c_5 u_3^2}{F_0 \pi_3} \end{aligned} \quad (7.14)$$

und

$$V''_3 = \frac{1}{F_0^2} (c_1 u_0 + 2c_2 u_3^2 - 2c_2 u_0^2 - c_3 u_3 + 2c_4 u_0^2 - 2c_4 u_3^2 - 4c_5 u_0 u_3). \quad (7.15)$$

Die Konstanten c_1 bis c_5 sind in Abschnitt 4.2 aufgelistet. Für u_0 , bzw. $u_3 = \pm \sqrt{1 - u_0^2}$, muss der Minimumswert bis NLO eingesetzt werden. Die Größe u_0 im Minimum wurde in Kapitel 5 mit dem Algorithmus nach Ferrari berechnet. Um die Massen bis NLO zu renormieren, wird das gleiche Verfahren wie im Abschnitt 7.1.1 verwendet. Der kinetische Teil bis NLO lautet:

$$\begin{aligned} T = & \frac{F_0^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle - L_1 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle^2 - L_2 \langle \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \rangle^2 - L_3 \langle (\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger)^2 \rangle \\ & + L_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \chi^\dagger U + U^\dagger \chi \rangle + W_4 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger \rangle \langle \rho^\dagger U + U^\dagger \rho \rangle \\ & + L_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (\chi^\dagger U + U^\dagger \chi) \rangle + W_5 \langle \partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger (\rho^\dagger U + U^\dagger \rho) \rangle. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Dabei muss beachtet werden, dass nun nach zweimaligem Ableiten auch Terme auftauchen, welche noch von $\partial_\mu \pi_i$ abhängig sind:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial (\partial_\mu \pi_i)^2} = k_i + a \partial_\mu \pi_i + b (\partial_\mu \pi_i)^2 + \dots$$

Diese stammen von Wechselwirkungstermen und werden somit zur Bestimmung der Konstanten k_i nicht benutzt. Die Gleichung zur Bestimmung der k_i lautet nun:

$$k_{i,NLO} = k_{i,LO} \left(1 + \frac{8}{F_0^2} (L_{54} (\chi'_0 u_0 + \chi_3 u_3) + 2 \tilde{W} \rho_0 u_0) \right). \quad (7.17)$$

Hierbei werden die Gleichung (4.9) und die Relation[‡]

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} (W_{54} - L_{54})$$

verwendet.

Für sämtliche Felder ist der Wert im Minimum zu nehmen. Damit ergibt sich für die Massen $m_{\pi_{1,2}}$ die Renormierungskonstante

$$k_{1,2} = \frac{u_3^2}{\arcsin^2(u_3)} \left(1 + \frac{8}{F_0^2} (L_{54} (\chi'_0 u_0 + \chi_3 u_3) + 2 \tilde{W} \rho_0 u_0) \right),$$

[‡]Siehe Anhang C

und für die Masse m_{π_3} die Renormierungskonstante

$$k_3 = 1 + \frac{8}{F_0^2} \left(L_{54} (\chi'_0 u_0 + \chi_3 u_3) + 2\tilde{W} \rho_0 u_0 \right).$$

Die renormierten NLO Treelevelmassen lauten dann

$$\begin{aligned} m_{\pi_{1,2}}^2 = & \left(F_0^2 + 1024 \frac{L_{54} \eta a^2}{F_0^2} (\epsilon_1 u_0 - \epsilon_3 u_3) + 16 \tilde{W} \rho_0 u_0 \right)^{-1} \\ & 32 \eta a^2 \left[4 \left(\epsilon_1 u_3 + \epsilon_3 u_0 - \frac{\epsilon_3 u_3}{\arcsin(u_3)} \right) \right. \\ & + \left(8192 \frac{L_{86} \eta a^2 \epsilon_1^2}{F_0^4} + 128 \frac{W \rho_0 \epsilon_1}{F_0^2} + 4 \right) u_0 u_3 \\ & + 64 \frac{\epsilon_3}{F_0^2} \left(128 \frac{L_{86} \eta a^2 \epsilon_1}{F_0^2} + W \rho_0 \right) \left(u_0^2 - u_3^2 - \frac{u_0 u_3}{\arcsin(u_3)} \right) \\ & \left. + 8192 \frac{L_{86} \eta a^2 \epsilon_3^2 u_3}{F_0^4} \left(\frac{u_3}{\arcsin(u_3)} - u_0 \right) \right] \frac{\arcsin(u_3)}{u_3^2} \end{aligned} \quad (7.18)$$

und

$$\begin{aligned} m_{\pi_3}^2 = & \left(F_0^2 + 1024 \frac{L_{54} \eta a^2}{F_0^2} (\epsilon_1 u_0 - \epsilon_3 u_3) + 16 \tilde{W} \rho_0 u_0 \right)^{-1} \\ & 32 \eta a^2 \left[4 (\epsilon_1 u_0 - \epsilon_3 u_3) - 256 u_0 u_3 \left(128 \frac{L_{86} \eta a^2 \epsilon_1 \epsilon_3}{F_0^4} + \frac{W \rho_0 \epsilon_3}{F_0^2} \right) \right. \\ & \left. - (u_3^2 - u_0^2) \left(8192 \frac{L_{86} \eta a^2 (\epsilon_1^2 - \epsilon_3^2)}{F_0^4} + 128 \frac{W \rho_0 \epsilon_1}{F_0^2} + 4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.19)$$

In LO wird für die renormierten Massen kein Massensplitting beobachtet. In NLO ist ein Massensplitting für die renormierten Massen vorhanden. Für $\epsilon_3 = 0$ sind die Massen aller drei Pionen gleich und für $\epsilon_3 > 0$ gilt:

$$m_{\pi_{1,2}}^2 > m_{\pi_3}^2.$$

Für das Feld u_3 muss die Relation $u_3 = \pm \sqrt{1 - u_0^2}$ eingesetzt werden. Die Masse ist abhängig vom Vorzeichen dieser Wurzel, anders als das Minimum. Um das richtige Vorzeichen zu erhalten, wird das Potential betrachtet und die Lage des Minimums mit den Ergebnissen aus Kapitel 5 verglichen. Die Minima des Potentials für $u_3 = +\sqrt{1 - u_0^2}$ liegen immer bei $u_0 = \pm 1$. Wird $u_3 = -\sqrt{1 - u_0^2}$ gesetzt haben die Minima die gleiche Lage wie die in Kapitel 5 ermittelten Minima. Es muss demnach

$$u_3 = -\sqrt{1 - u_0^2}$$

eingesetzt werden.

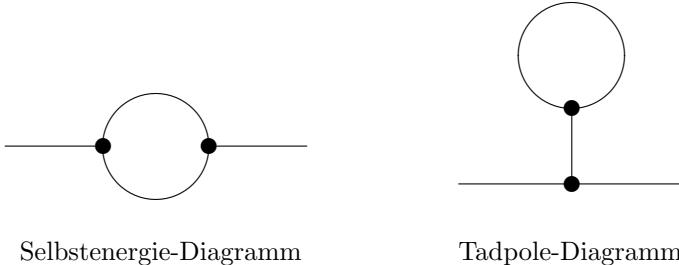


Abbildung 7.1: 3-Vertices

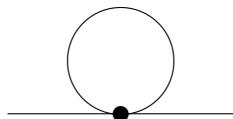


Abbildung 7.2: 4-Vertex

Für die Renormierungskonstante $k_i = (1 + x)$, wobei x eine Funktion der LEC ist, kann auch die Näherung $k_i^{-1} = 1 - x$ eingesetzt werden. Terme der Ordnung x^2 haben die Ordnung NNLO und müssen somit nicht berücksichtigt werden. Die Massen $m_{\pi_{1,2,3}}^2$ werden dadurch kleiner, was den Abstand zu den Massen $m_{\pi_{1,2,3,g}}^2$ verändert. Die Abstände werden für alle W_0 -Werte größer, außer für die Masse $m_{\pi_3}^2$ bei $\epsilon_3 = 2$ und $\epsilon_3 = 3$.

7.2 Schleifenrechnung

Um die genaue Masse der Pionen bis NLO zu bekommen, müssen noch die Schleifenterme berücksichtigt werden. Mögliche Schleifenterme können einen 3-Vertex oder 4-Vertex beinhalten.

Zu den Schleifendiagrammen mit 3-Vertex zählen das Tadpole- und das Selbstenergie-Diagramm, siehe Abb. 7.1. Beide tragen zur Selbstenergie bei. In NLO gibt es nur ein Schleifendiagramm mit 4-Vertex, Abb. 7.2.

In [22] wurde bereits gezeigt, dass eine symmetrisierte Parametrisierung der Feldkonfigurationsmatrix in der Schleifenrechnung vorteilhaft ist. Aufgrund

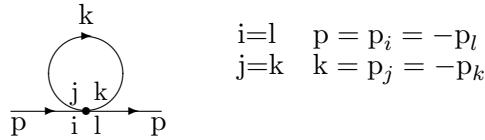


Abbildung 7.3: 4-Vertex mit Indices

dessen wird hier sofort diese Parametrisierung verwendet, in der die Diagramme mit 3-Vertex verschwinden und nur noch das Diagramm mit 4-Vertex übrig bleibt.

In der symmetrisierten Parametrisierung hat die Feldkonfigurationsmatrix folgende Gestalt:

$$U = \exp \left[\frac{i}{2F_0} \tilde{\pi}_i \tau_i \right] \exp \left[\frac{i}{F_0} \hat{\pi}_i \tau_i \right] \exp \left[\frac{i}{2F_0} \tilde{\pi}_i \tau_i \right].$$

Die Größe $\hat{\pi}_i$ ist eine Funktion der Pionfelder im Minimum, $\tilde{\pi}_i$, und der Pionfelder π_i .

In dieser Parametrisierung lautet die Wechselwirkungs-Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{WW} = \frac{1}{6F_0^2} \left(\left(\vec{\hat{\pi}} \partial_\mu \vec{\hat{\pi}} \right)^2 - |\vec{\hat{\pi}}|^2 \left(\partial_\mu \vec{\hat{\pi}} \right)^2 \right) - \frac{m_0^4}{24F_0^2} |\vec{\hat{\pi}}|^4. \quad (7.20)$$

Diese Lagrangedichte wird nun vollständig symmetrisiert [22]

$$\mathcal{L}_{WW} = -\frac{1}{4!} \sum_n v^{(n)} V_{ijkl}^{(n)} \pi_i \pi_j \pi_k \pi_l \quad (7.21)$$

mit

$$\begin{aligned} V_{ijkl}^{(1)} &= -\frac{1}{12} [\delta_{ij} \delta_{kl} (p_i + p_j) (p_k + p_l) \\ &\quad + \delta_{ik} \delta_{jl} (p_i + p_k) (p_j + p_l) \\ &\quad + \delta_{il} \delta_{jk} (p_i + p_l) (p_j + p_k)], \\ V_{ijkl}^{(2)} &= -\frac{1}{6} [\delta_{ij} \delta_{kl} (p_i p_j + p_k p_l) \\ &\quad + \delta_{ik} \delta_{jl} (p_i p_k + p_j p_l) \\ &\quad + \delta_{il} \delta_{jk} (p_i p_l + p_j p_k)] \end{aligned}$$

und

$$V_{ijkl}^{(3)} = \frac{1}{3} [\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}].$$

Die Indizes werden nun dem Diagramm aus Abb. 7.3 zugeordnet. Aufgrund

der vollständigen Parametrisierung lässt sich nun der 4-Vertex einfach berechnen. Da die Selbstwechselwirkung keinen Einfluss auf die Art des Teilchens hat, muss δ_{il} gelten. Zudem muss das Teilchen in der Schleife immer dasselbe Teilchen sein, woraus δ_{jk} folgt. Der 4-Vertex ist damit durch

$$V_4 = \sum_n v^{(n)} V_{ijkl}^{(n)} \delta_{il} \delta_{jk} = \frac{1}{3F_0^2} (5m_0^2 + 4p^2 + 4k^2)$$

gegeben. Dieser wird zur Berechnung der Selbstenergie benutzt:

$$\sum_4 = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{V_4}{k^2 + m_0^2}.$$

Die Masse m_0^2 entspricht der renormierten Treelevelmasse bis LO. Durch den Symmetriefaktor $1/2$ werden Vertauschungen der inneren Linien berücksichtigt. Zur Berechnung des Integrals wird dieses in zwei Integrale aufgeteilt, welche mit Hilfe der dimensionellen Regularisierung [25] renormiert werden:

$$\sum_4 (p^2) = \frac{1}{6F_0^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_0^2 + 4p^2}{k^2 + m_0^2} + \frac{4}{6F_0^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_0^2 + k^2}{m_0^2 + k^2}.$$

Nach der dimensionellen Regularisierung verschwindet das zweite Integral, so dass nur noch das erste Integral betrachtet werden muss:

$$\frac{1}{6F_0^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{m_0^2 + 4p^2}{k^2 + m_0^2} = \frac{m_0^2 + 4p^2}{6F_0^2} I(m_0^2).$$

Das Integral $I(m_0^2)$ wird nun von 4 Dimensionen zu d Dimensionen fortgesetzt:

$$I(m_0^2) \longrightarrow I(m_0^2, \Lambda^2, d) = \Lambda^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + m_0^2}.$$

Die Renormierungsskala Λ hat die Dimension einer Masse und wurde eingeführt, damit sich die Dimension des Propagators nicht verändert. Das Integral $I(m_0^2, \Lambda^2, d)$ ist in [25] berechnet worden:

$$I(m_0^2, \Lambda^2, d) = \frac{m_0^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{4\pi\Lambda^2}{m_0^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right).$$

Die Gammafunktion Γ hat bei $d = 4$ einen Pol, deshalb wird nun die Größe $\epsilon = 4 - d$ eingeführt und die Gammafunktion nach kleinen ϵ entwickelt:

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma + \mathcal{O}(\epsilon).$$

Hierbei ist γ die Euler-Mascheroni-Konstante, welche den Wert $\gamma = 0,577$ hat. Mit Hilfe der Entwicklung $a^\epsilon = 1 + \epsilon \ln a$ und der divergenten Konstanten $R = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma - \ln(4\pi)$ ergibt sich schließlich für die Selbstenergie der Ausdruck:

$$\sum_4(p^2) = \frac{m_0^2 + 4p^2}{6F_0^2} \frac{m_0^2}{(4\pi)^2} \left[R + \ln\left(\frac{m_0^2}{\Lambda^2}\right) \right]. \quad (7.22)$$

Die renormierte Treelevelmasse m_0 in LO wird jetzt umbenannt in m_π . Damit ergeben sich für die Schleifenanteile

$$\sum_{m^2}^{\pi_i} = \frac{1}{24\pi^2 F_0^2} \frac{m_\pi^4}{4} \left[R + \ln\left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right) \right]$$

und

$$\sum_{p^2}^{\pi_i} = \frac{1}{24\pi^2 F_0^2} m_\pi^2 \left[R + \ln\left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}\right) \right].$$

Die Masse der Pionen bis NLO einschließlich der Schleifenterme lautet demnach: [22]

$$M_\pi^2 = \hat{M}_\pi^2 + \sum_{m^2}^{\pi_i} - m_\pi^2 \sum_{p^2}^{\pi_i}. \quad (7.23)$$

Hierbei ist \hat{M}_π^2 die renormierte Treelevelmasse bis NLO und m_π^2 die renormierte Treelevelmasse bis LO.

7.2.1 Renormierung

Die Masse M_π^2 enthält die divergente Konstante R und muss daher noch renormiert werden. Die Divergenzen aus den Schleifenbeiträgen werden gerade durch die Divergenzen der Treelevelbeiträge aufgehoben.

Dazu werden die LEC durch deren renormierte Größe plus ein Vielfaches der Konstanten R ersetzt. Dadurch verschwindet die Divergenz R und die Masse ist renormiert. Die Hintergrundfeld-Methode [26], [27] bietet eine Möglichkeit die LEC X zu renormieren:

$$X_i = X_i^r + \frac{\gamma_i}{32\pi^2} R. \quad (7.24)$$

Die einzelnen Werte der γ_i für die verschiedenen LEC X sind im Anhang C angegeben.

Um die renormierte Masse zu erhalten, werden nun sämtliche LEC in den Schleifenbeiträgen, in den Treelevelbeiträgen bis NLO und bis LO durch

deren renormierte Größe X^r ersetzt und die divergente Konstante R weggelassen. Damit lautet die renormierte Masse M_π^2 :

$$M_\pi^2 = \hat{M}_\pi^2 - \frac{m_\pi^4}{32\pi^2 F_0^2} \ln \left(\frac{m_\pi^2}{\Lambda} \right). \quad (7.25)$$

Für die Treelevelmassen bis NLO, bzw. LO werden jeweils die renormierten Massen eingesetzt. Für die renormierte Treelevelmasse bis LO m_π wird das Minimum bis LO aus Abschnitt 6.1 und für die renormierte Treelevelmasse \hat{M}_π bis NLO das Minimum aus Kapitel 5 benutzt.

Werden nur die Treelevelbeiträge betrachtet und die Schleifenbeiträge vernachlässigt, sind die LEC unrenormiert. Da aber bekannt ist, dass die Schleifenbeiträge diese Divergenzen aufheben, werden in diesem Fall die LEC als renormiert angesehen.

7.2.2 Größe der Schleifenbeiträge

In diesem Abschnitt wird untersucht, welchen Einfluss die Schleifenbeiträge auf die Massen haben. Dabei sollten die Massen nur gering größer werden.

Für $\epsilon_3 \leq 1$ weichen die Massen mit den Schleifenbeiträgen m_S und die reinen Treelevelmassen m_T kaum voneinander ab, siehe Abb. 7.4. Bei kleinen ϵ_1 - und ϵ_3 -Werten ist der Abstand $\Delta_m = m_S - m_T = 0$. Bei größeren Werten nimmt Δ_m zu und beträgt bei $\epsilon_1 = 2$ etwa 8%.

Bei $\epsilon_3 > 1$ nimmt der Einfluss der Schleifenbeiträge zu und Δ_m vergrößert sich. Für wachsendes ϵ_1 ändert sich der Betrag von Δ_m nicht, siehe Abb. 7.5. Δ_m wird bei $\epsilon_3 = 3$ für die Masse $M_{\pi_3}^2$ mit etwa 15% maximal.

7.2.3 Vergleich der Massen

Im letzten Abschnitt wurde die Größe der Schleifenbeiträge im Vergleich zur Treelevelmasse bis NLO untersucht. Die Schleifenbeiträge tragen demnach nicht wesentlich zur Masse bei. Der Vergleich der Treelevelmassen bis NLO aus Abschnitt 7.1.3 mit den Treelevelmassen bis NLO der $\hat{\eta}$ -Näherung wird hier deswegen nicht angeführt. Anstatt dessen werden sofort die Massen bis NLO inklusive der Schleifenbeiträge betrachtet. Es können nun die Ergebnisse aus Abschnitt 7.1.1 und Abschnitt 7.1.3 in die Gleichung (7.25) eingesetzt werden. Die Renormierungsskala Λ wird zu $\Lambda = 4\pi F_0$ gewählt. In [22] wurde ebenfalls die Masse bis NLO einschließlich der Schleifenbeiträge mit Hilfe der $\hat{\eta}$ -Näherung bestimmt. Zur Unterscheidung wird diese Masse mit dem Index „g“ versehen.

Zur Renormierung wird die ungenäherte Renormierungskonstante verwendet.

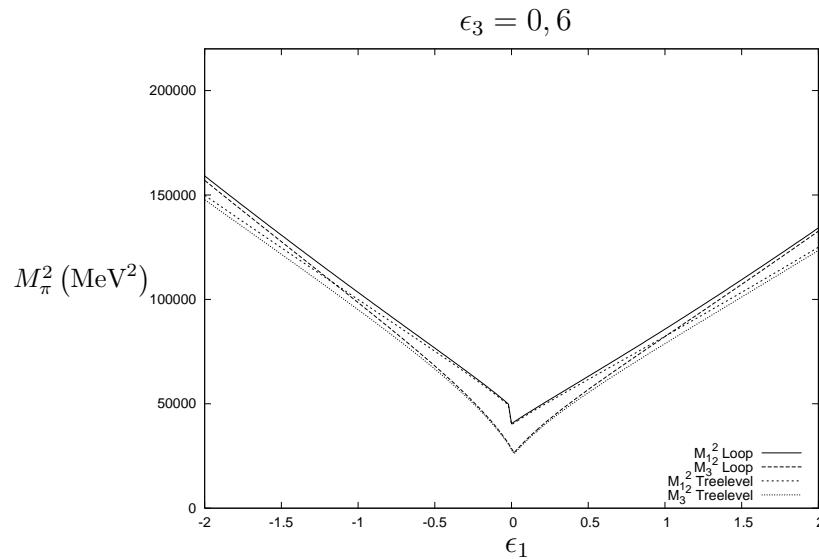


Abbildung 7.4: Vergleich der Masse $M_{\pi,S}^2$ mit Schleifenbeiträgen zu der Masse $M_{\pi,T}^2$ ohne Schleifenbeiträge bei $\epsilon_3 = 0, 6$

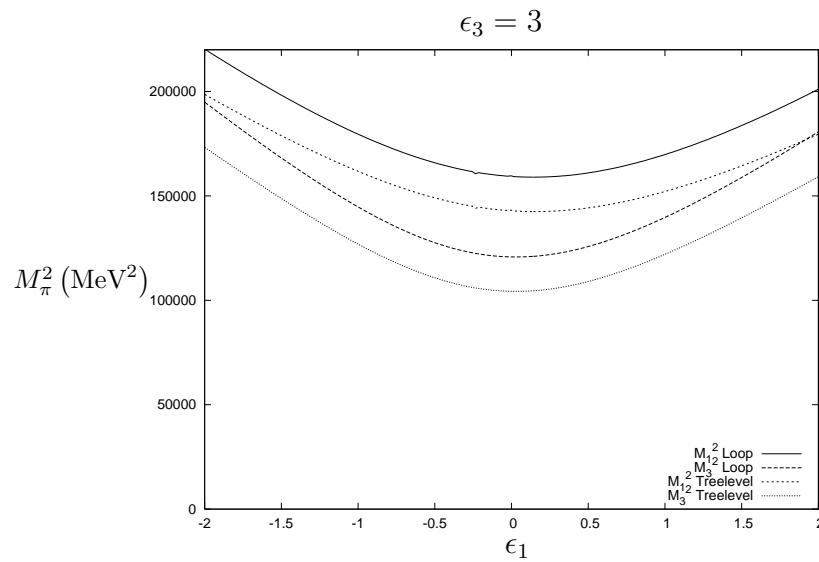


Abbildung 7.5: Vergleich der Masse $M_{\pi,S}^2$ mit Schleifenbeiträgen zu der Masse $M_{\pi,T}^2$ ohne Schleifenbeiträge bei $\epsilon_3 = 3$

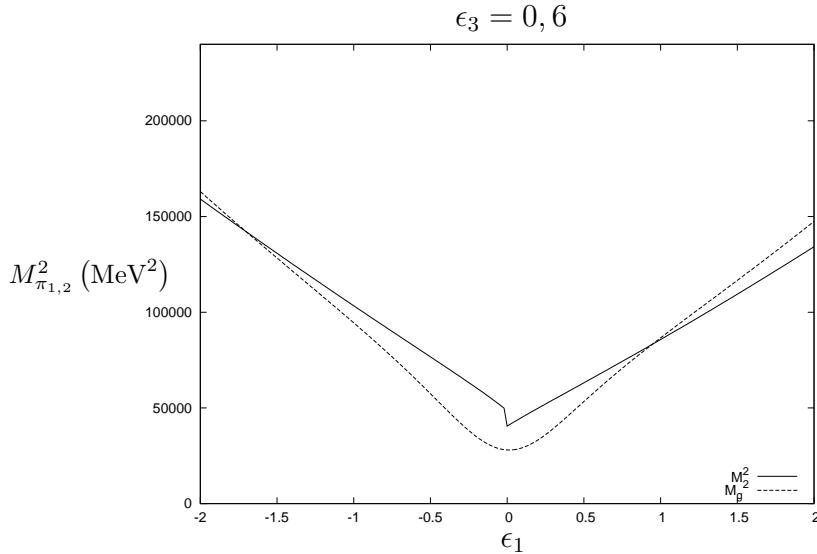


Abbildung 7.6: Vergleich der Massen $M_{\pi_{1,2}}^2$ mit den Massen $M_{\pi_{1,2,g}}^2$ der $\hat{\eta}$ -Näherung bei $\epsilon_3 = 0,6$ und $W_0 = 10^5 \text{ MeV}^3$

Bei Benutzung der genäherten Renormierungskonstanten werden die Abstände von M_{π}^2 zu $M_{\pi_g}^2$ größer, außer bei $\epsilon_3 = 3$ und $M_{\pi_3}^2$.

Da sich die Massen für $W_0 = 10^5 \text{ MeV}^3$, $W_0 = 10^6 \text{ MeV}^3$ und $W_0 = 10^7 \text{ MeV}^3$ nur minimal unterscheiden, wird davon abgesehen, die Vergleiche für die jeweiligen W_0 -Werte auch einzeln anzuführen.

Für $\epsilon_3 = 0$ ist $M_{\pi_{1,2,3}}^2 < M_{\pi_{1,2,3,g}}^2$ für alle ϵ_1 .

Bei $0,2 \leq \epsilon_3 \leq 1$ und kleine Werte für $|\epsilon_1|$ ist die Abweichung von M_{π}^2 zu $M_{\pi_g}^2$ relativ groß, mit teilweise bis zu 50% oder mehr, siehe Abb. 7.6, 7.7.

Zudem ist das Massenquadrat $M_{\pi_{3,g}}^2$ für kleine $|\epsilon_1|$ negativ. Dieses Verhalten ist unphysikalisch. Wie schon bei der Betrachtung des Minimums, Abschnitt 6.5, zeigt sich auch hier, dass die $\hat{\eta}$ -Näherung für kleine ϵ_1 und ϵ_3 keine Gültigkeit hat.

Für $\epsilon_1 > 1$ nähern sich die Massen an, und die Abweichung wird mit etwa 9% kleiner.

Für $\epsilon_3 = 2$ und $\epsilon_3 = 3$ wird die Abweichung von M_{π}^2 zu $M_{\pi_g}^2$ hin zu größeren ϵ_1 größer und ist maximal bei $\epsilon_1 = 2$, siehe Abb. 7.8, 7.9.

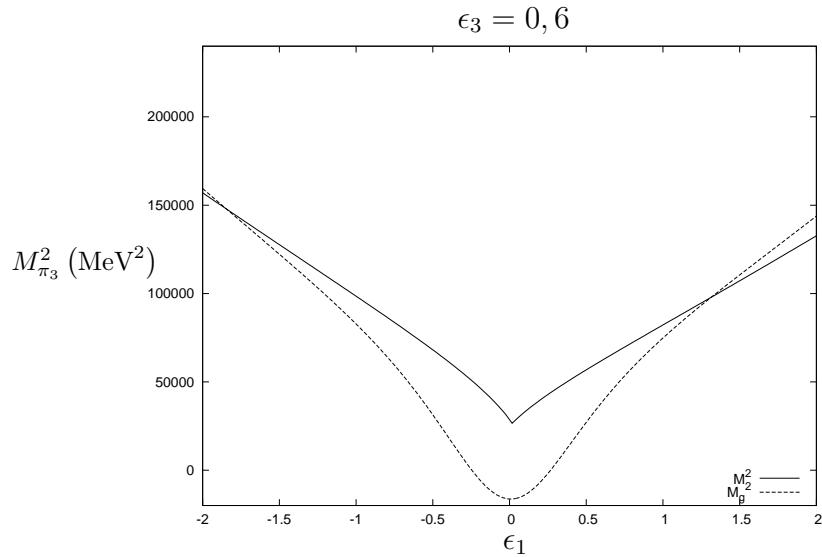


Abbildung 7.7: Vergleich der Masse $M_{\pi_3}^2$ mit der Masse $M_{\pi_{3,g}}^2$ der $\hat{\eta}$ -Näherung bei $\epsilon_3 = 0, 6$ und $W_0 = 10^5 \text{ MeV}^3$

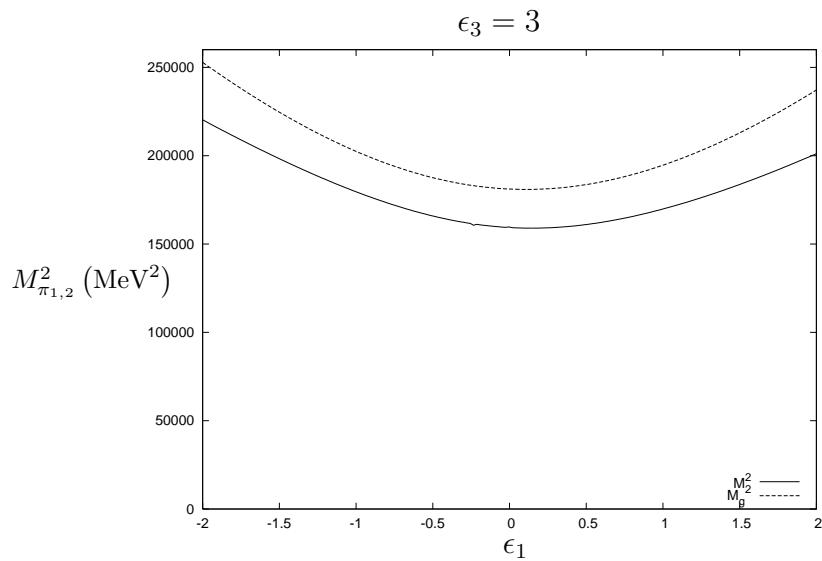


Abbildung 7.8: Vergleich der Massen $M_{\pi_{1,2}}^2$ mit den Massen $M_{\pi_{1,2,g}}^2$ der $\hat{\eta}$ -Näherung bei $\epsilon_3 = 3$ und $W_0 = 10^5 \text{ MeV}^3$

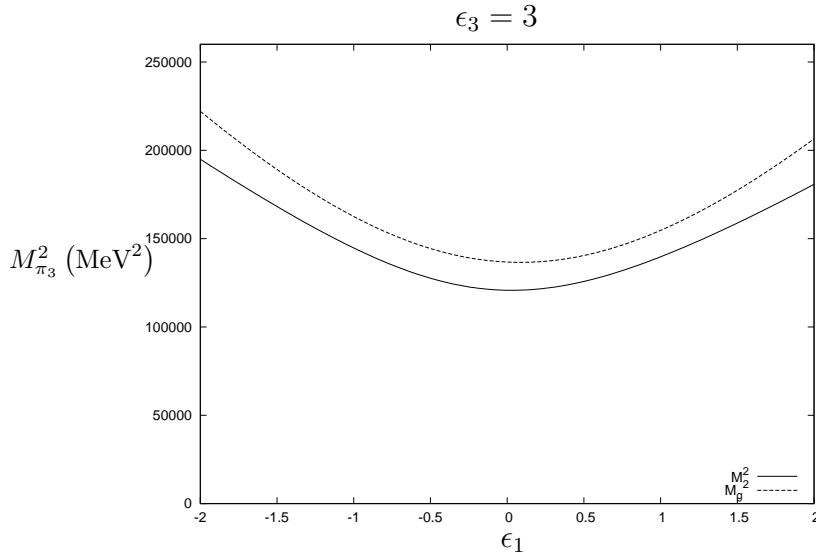


Abbildung 7.9: Vergleich der Masse $M_{\pi_3}^2$ mit der Masse $M_{\pi_{3,g}}^2$ der $\hat{\eta}$ -Näherung bei $\epsilon_3 = 3$ und $W_0 = 10^5 \text{ MeV}^3$

7.2.4 Massensplitting

Für die Masse aus Gleichung (7.25) wird nun das Massensplitting untersucht. Dieses ist durch

$$\Delta M_{\pi,N}^2 = \frac{M_{\pi_{1,2}}^2 - M_{\pi_3}^2}{M_{\pi_{1,2}}^2} \quad (7.26)$$

definiert. $M_{\pi_{1,2}}^2$ und $M_{\pi_3}^2$ werden mit Gleichung (7.25) berechnet. Die Größe ΔM_{π}^2 wird zur besseren Darstellung durch $M_{\pi_{1,2}}^2$ normiert. Die Schleifenbeiträge sind nur von der renormierten Treelevelmassen in LO, m_{π}^2 , abhängig, für welche kein Massensplitting existiert. Damit ist das Massensplitting unabhängig von den Schleifenbeiträgen. Zusätzlich ist das Massensplitting nicht abhängig vom W_0 -Wert, da die in diesem Kapitel berechneten Massen selber unabhängig vom W_0 -Wert sind[§].

Mit der Näherung $\hat{\eta} \ll 1$ findet sich folgende Gleichung zur theoretischen Berechnung des Massensplittings [22]:

$$\Delta M_{\pi}^2 = 128\eta \frac{\sin^2(\omega)a^2}{F_0^2} = -2\hat{c}_2 \frac{\sin^2(\omega)}{F_0^2}. \quad (7.27)$$

Das Vorzeichen von ΔM_{π}^2 ist abhängig von \hat{c}_2 , Gleichung (7.27), und somit abhängig von der Wahl des Szenarios. In dieser Arbeit wurde $c_2 < 0$ und

[§]siehe Abschnitt 7.1.2

somit $\hat{c}_2 < 0$ gewählt, woraus das *normale Szenario* und $M_{\pi_{1,2}}^2 > M_{\pi_3}^2$ folgt. Zudem folgt durch das Einsetzen des Winkels ω eine Abhängigkeit vom W_0 -Wert und damit für ϵ_1 die Existenz eines kritischen Wertes $\epsilon_{1,c}$.

Das theoretisch berechnete Massensplitting nach Gleichung (7.27) wird ebenfalls mit der Masse $M_{\pi_{1,2}}^2$ normiert. Dazu wird die Masse $M_{\pi_{1,2}}^2$ aus Gleichung (7.25) benutzt:

$$\Delta M_{\pi,T}^2 = 128\eta \frac{\sin^2(\omega)a^2}{F_0^2 \cdot M_{\pi_{1,2}}^2}. \quad (7.28)$$

Es wird nun das theoretisch berechnete Massensplitting $\Delta M_{\pi,T}^2$ nach Gleichung (7.28) mit dem numerisch berechneten Massensplitting $\Delta M_{\pi,N}^2$ nach Gleichung (7.26) verglichen. Zusätzlich wird das dimensionlose Verhältnis $\mathcal{V} = (\Delta M_{\pi,N}^2)/(\Delta M_{\pi,T}^2)$ betrachtet.

$$\epsilon_3 = 0, 6$$

| ϵ_1 | $\Delta M_{\pi,T}^2$ | | | $\Delta M_{\pi,N}^2$ |
|--------------|----------------------|--------------|--------------|----------------------|
| | $W_0 = 10^5$ | $W_0 = 10^6$ | $W_0 = 10^7$ | |
| 0 | 1,11 | 1,11 | 0,97 | 0,39 |
| 0,5 | 0,43 | 0,44 | 0,60 | 0,10 |
| 1,0 | 0,14 | 0,15 | 0,20 | 0,04 |
| 1,5 | 0,06 | 0,06 | 0,08 | 0,02 |
| 2,0 | 0,03 | 0,03 | 0,04 | 0,01 |

| ϵ_1 | \mathcal{V} | | |
|--------------|---------------|--------------|--------------|
| | $W_0 = 10^5$ | $W_0 = 10^6$ | $W_0 = 10^7$ |
| 0 | 0,35 | 0,35 | 0,40 |
| 0,5 | 0,24 | 0,23 | 0,17 |
| 1,0 | 0,30 | 0,29 | 0,21 |
| 1,5 | 0,37 | 0,36 | 0,28 |
| 2,0 | 0,42 | 0,41 | 0,34 |

$$\epsilon_3 = 1$$

| ϵ_1 | $\Delta M_{\pi,T}^2$ | | | $\Delta M_{\pi,N}^2$ |
|--------------|----------------------|--------------|--------------|----------------------|
| | $W_0 = 10^5$ | $W_0 = 10^6$ | $W_0 = 10^7$ | |
| 0 | 0,97 | 0,97 | 0,93 | 0,86 |
| 0,5 | 0,53 | 0,54 | 0,62 | 0,23 |
| 1,0 | 0,26 | 0,26 | 0,32 | 0,10 |
| 1,5 | 0,13 | 0,13 | 0,16 | 0,05 |
| 2,0 | 0,07 | 0,07 | 0,08 | 0,03 |

| ϵ_1 | \mathcal{V} | | |
|--------------|---------------|--------------|--------------|
| | $W_0 = 10^5$ | $W_0 = 10^6$ | $W_0 = 10^7$ |
| 0 | 0,89 | 0,87 | 0,93 |
| 0,5 | 0,44 | 0,43 | 0,38 |
| 1,0 | 0,40 | 0,39 | 0,32 |
| 1,5 | 0,43 | 0,42 | 0,34 |
| 2,0 | 0,46 | 0,45 | 0,38 |

$$\epsilon_3 = 3$$

| ϵ_1 | $\Delta M_{\pi,T}^2$ | | | $\Delta M_{\pi,N}^2$ |
|--------------|----------------------|--------------|--------------|----------------------|
| | $W_0 = 10^5$ | $W_0 = 10^6$ | $W_0 = 10^7$ | |
| 0 | 0,31 | 0,31 | 0,31 | 0,27 |
| 0,5 | 0,30 | 0,30 | 0,31 | 0,24 |
| 1,0 | 0,26 | 0,26 | 0,27 | 0,20 |
| 1,5 | 0,22 | 0,22 | 0,23 | 0,15 |
| 2,0 | 0,17 | 0,17 | 0,18 | 0,11 |

| ϵ_1 | \mathcal{V} | | |
|--------------|---------------|--------------|--------------|
| | $W_0 = 10^5$ | $W_0 = 10^6$ | $W_0 = 10^7$ |
| 0 | 0,87 | 0,87 | 0,87 |
| 0,5 | 0,82 | 0,81 | 0,80 |
| 1,0 | 0,75 | 0,75 | 0,72 |
| 1,5 | 0,70 | 0,70 | 0,66 |
| 2,0 | 0,66 | 0,66 | 0,62 |

Die Tabelle für $\epsilon_3 = 0$ ist hier nicht aufgeführt. Es ist kein Massensplitting zu beobachten, die Massen $M_{\pi_{1,2}}^2$ und $M_{\pi_3}^2$ sind hier gleich.

Das Massensplitting wird in allen Fällen für wachsendes ϵ_1 kleiner.

\mathcal{V} nimmt ab, für steigendes W_0 . Allerdings gibt es hierzu bei $\epsilon_1 = 0$ Ausnahmen. Zwischen den Verhältnissen bei $W_0 = 10^5 \text{ MeV}^3$ und $W_0 = 10^6 \text{ MeV}^3$ liegt höchstens eine Differenz von 0,02, die Werte bei $W_0 = 10^7 \text{ MeV}^3$ weichen mit einer Differenz von bis zu 0,09 stärker ab.

Wird ϵ_3 größer, nimmt das Verhältnis \mathcal{V} zu. Bei $\epsilon_3 = 0,6$ liegen die Werte im Bereich von $\mathcal{V} = 0,17$ und $\mathcal{V} = 0,42$. Für $\epsilon_3 = 1$ ist bei einem ϵ_1 -Wert von $\epsilon_1 = 0$ ein maximaler Wert von $\mathcal{V} = 0,93$ zu beobachten. Sobald $\epsilon_1 > 0$ ist, sind die \mathcal{V} -Werte mit maximal $\mathcal{V} = 0,46$ deutlich kleiner. Ist $\epsilon_3 = 3$ liegen die \mathcal{V} -Werte zwischen $\mathcal{V} = 0,62$ und $\mathcal{V} = 0,87$.

Die Größe $\Delta M_{\pi,T}^2$ wurde unter der Annahme $\hat{\eta} \ll 1$ hergeleitet. Diese Annahme ist gerade für große Werte von ϵ_1 und ϵ_3 und bei kleinen Werten der

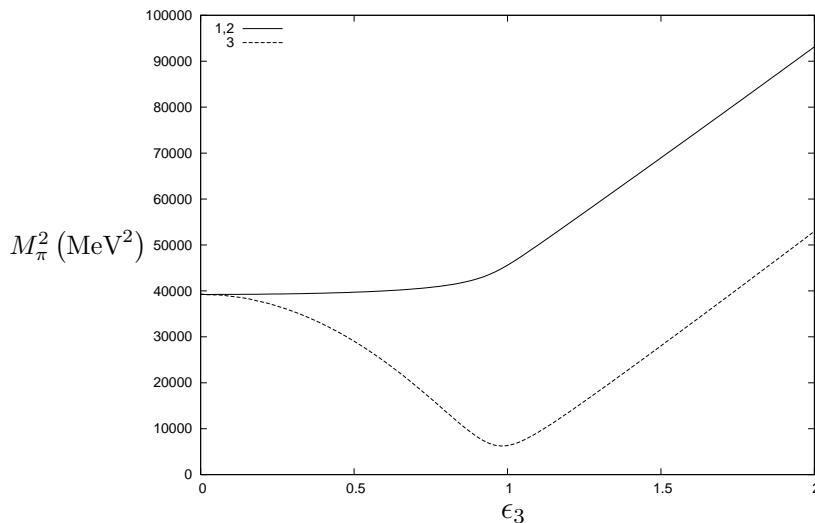


Abbildung 7.10: Verlauf der Masse M_π^2 bei $\epsilon_1 = 2,5 \cdot 10^{-4}$

Größe W_0 erfüllt. Für $\epsilon_3 \leq 1$, $\epsilon_1 > 1$ und $W_0 = 10^5 \text{ MeV}^3$ nimmt \mathcal{V} Werte von 0,30 bis 0,46 an. Die auf unterschiedliche Art ermittelten Massensplittings sind hier somit nicht gleich. Ist $\epsilon_3 > 1$ und $W_0 = 10^5 \text{ MeV}^3$ liegt \mathcal{V} zwischen 0,66 und 0,87. Die Werte der verschiedenen Massensplittings sind hier ebenfalls nicht gleich. Die Gleichung (7.27) kann nur als Näherungsgleichung verstanden werden, sie gibt nicht den exakten Wert des Massensplittings an, sondern nur die Tendenz. Nimmt das Massensplitting $\Delta M_{\pi, N}^2$ stark oder leicht ab, so nimmt auch $\Delta M_{\pi, T}^2$ stark, bzw. leicht ab. Die Proportionalität des Massensplittings zu $\sin^2(\omega)$ kann damit bestätigt werden.

7.2.5 Verhalten der Massen bei $\epsilon_1 = 0$

Bei $\epsilon_1 = 0$ wird ein bestimmtes Verhalten der Massen $M_{\pi_{1,2}}^2$ und $M_{\pi_3}^2$ erwartet. Für $\epsilon_3 = 0$ sollten die Werte der Massen sehr nah beieinander liegen. Für $\epsilon_3 > 0$ wächst $M_{\pi_{1,2}}^2$ stetig an, während $M_{\pi_3}^2$ zuerst fällt, bei $\epsilon_3 = \epsilon_{3,c}$ den Wert Null annimmt und danach wächst. $\epsilon_{3,c}$ ist durch

$$\epsilon_{3,c} = \epsilon_3 (\mu = \mu_c)$$

definiert, d.h. für $\epsilon_3 < \epsilon_{3,c}$ ist ein Phasensprung zu beobachten, für $\epsilon_3 \geq \epsilon_{3,c}$ nicht mehr. In Abschnitt 5.3 wurde $\epsilon_{3,c} = 1$ für ein Potential ohne die ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme gefunden. Unter Beachtung dieser Terme lässt sich der $\epsilon_{3,c}$ -Wert nicht mehr berechnen. Aus dem Verhalten des Minimums lässt sich aber schließen, dass der Wert nicht stark von 1 abweichen sollte. Der genaue

Wert für $\epsilon_{3,c}$ wird im Folgenden durch das Verhalten der Massen bestimmt. Für $\epsilon_1 = 2,5 \cdot 10^{-4} \approx 0$ werden die Massen $M_{\pi_{1,2}}^2$ und $M_{\pi_3}^2$ für $0 \leq \epsilon_3 \leq 2$ untersucht. $\epsilon_1 = 2,5 \cdot 10^{-4}$ ist der kleinste ϵ_1 -Wert, für den keine numerischen Fehler auftreten.

Bei $\epsilon_3 = 0$ sind die Massen $M_{\pi_{1,2}}^2$ und $M_{\pi_3}^2$ fast identisch, Abb. 7.10. Der Graph von $M_{\pi_{1,2}}^2$ wächst stetig. Bei $\epsilon_3 \approx 1$ wird ein Zuwachs der Steigung beobachtet. Der Graph von $M_{\pi_3}^2$ besitzt keine Nullstelle, aber ein Minimum bei $\epsilon_3 = 0,984 \approx 1$. In diesem Minimum nimmt $M_{\pi_3}^2$ den Wert 6229 MeV^2 , bzw. M_{π_3} den Wert 79 MeV an. Dieser Wert ist klein, aber nicht gleich Null, da ϵ_1 ebenfalls nicht identisch Null ist. Nach Gleichung (2.14) gilt für die Masse der Pionen bis LO im Kontinuum:

$$m_\pi^2 = 2B_0 m'_0.$$

Die Größe m'_0 ist bereits in Abschnitt 5.2.1 berechnet worden. m_π^2 kann somit durch die Variable ϵ_1 ausgedrückt werden:

$$m_\pi^2 = \frac{128\eta a^2}{F_0^2} \epsilon_1.$$

Mit dem Wert $\epsilon_1 = 2,5 \cdot 10^{-4}$ ergibt sich damit $m_\pi^2 = 11 \text{ MeV}^2$, bzw. $m_\pi = 3,3 \text{ MeV}$. Dieser Wert unterscheidet sich zwar deutlich von dem Wert $M_{\pi_3} = 79 \text{ MeV}$, allerdings ist m_π^2 nur die Masse bis LO. Sämtliche NLO-Terme sind nicht in m_π^2 enthalten. Da aber nicht gilt $\epsilon_1 \equiv 0$, tragen diese Terme zur Masse $M_{\pi_3}^2$ bei.

Für $\epsilon_3 > 1$ verlaufen die beiden Graphen etwa parallel. Die Schleifenbeiträge verändern die Masse kaum, siehe Abschnitt 7.2.2. Eine Betrachtung der Treelevelmassen, Gleichung (7.14) und (7.15), reicht somit aus, das Verhalten der Massen für große ϵ_3 abzuschätzen. Die Treelevelmassen sind linear in c_3 und damit auch in ϵ_3 . Die c_4 - und c_5 -Terme bewirken nur eine minimale Korrektur. Aus der Proportionalität von c_3 zu μ folgt daher, dass auch die Massen $M_{\pi_{1,2}}^2$ für große ϵ_3 proportional zu μ , bzw. $2B_0\mu$ sein sollten. Das Verhältnis

$$\mathcal{V}_{1,2} = \frac{M_{\pi_{1,2}}^2}{2B_0\mu}$$

und auch das Verhältnis

$$\mathcal{V}_3 = \frac{M_{\pi_3}^2}{2B_0\mu}$$

muss dann für große ϵ_3 -Werte etwa konstant sein.

| ϵ_3 | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|
| $\mathcal{V}_{1,2}$ | 1,03 | 1,03 | 1,03 | 1,04 | 1,04 | 1,05 |
| \mathcal{V}_3 | 0,14 | 0,26 | 0,37 | 0,46 | 0,54 | 0,60 |

Das Verhältnis $\mathcal{V}_{1,2} = 1$ ist für $1 \leq \epsilon_3 \leq 2$ konstant. Die Werte für das Verhältnis \mathcal{V}_3 wachsen dagegen. Hier kann das Verhältnis für $\epsilon_3 \geq 1,6$ mit $\mathcal{V}_3 \approx 0,5$ als etwa konstant angesehen werden.

Das hier ermittelte kritische $\epsilon_{3,c} = 0,984$ weicht nur minimal von dem Ergebnis aus Abschnitt 5.3 mit $\epsilon_{3,c} = 1$ ab. Aus dem dort untersuchten Phasensprung lies sich folgern, dass die ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme im Potential nicht wesentlich zum Verhalten beitragen. Dies wird hier bestätigt. Die Beachtung dieser Terme verschiebt $\epsilon_{3,c}$ nur minimal.

7.3 Ergebnisse der Massenbestimmung

In LO sind die genäherten und ungenäherten Treelevelmassen fast identisch. Lediglich für großes W_0 und kleine ϵ_1 und ϵ_3 sind minimale Abweichungen zu erkennen. Dieses Ergebnis gibt das Verhalten von u_{SU} zu u_F wieder. Die Abweichungen der Minima sind ebenfalls sehr gering.

In NLO kommen zu den Treelevelmassen noch Schleifenbeiträge durch die Selbstwechselwirkung. Dabei verändert sich die Masse durch Beachtung der Schleifenbeiträge nur gering.

Die Unterschiede der genäherten und der ungenäherten Massen sind in NLO größer als in LO. Dieses Verhalten entspricht ebenfalls dem Verhalten der Minima zueinander. Für $\epsilon_3 \leq 1$ ist die Differenz der beiden Massen im Bereich kleiner ϵ_1 groß. Besonders auffällig ist, dass das genäherte Massenquadrat im Bereich kleiner $|\epsilon_1|$ teilweise negativ ist. Dieses Verhalten ist unphysikalisch. Für $\epsilon_3 > 1$ ist die Differenz für alle ϵ_1 etwa gleich, wobei der Betrag der Differenz größer ist als für die Fälle $\epsilon_3 \leq 1$.

Bei Verwendung der $\hat{\eta}$ -Näherung kann eine Gleichung zur Berechnung des Massensplittings theoretisch hergeleitet werden. Ohne diese Näherung ist dies nicht möglich, da die Gleichung zur Berechnung der Masse zu kompliziert wird. Das Massensplitting muss numerisch ermittelt werden. Beim Vergleich der auf diese beiden Arten ermittelten Massensplittings ist für $\epsilon_3 \leq 1$ ein deutlicher Unterschied erkennbar, für $\epsilon_3 > 1$ nicht mehr.

In NLO sind die Abweichungen der genäherten und der ungenäherten Massen deutlich erkennbar. Das qualitative Verhalten der genäherten Masse weicht für kleine ϵ_1 und ϵ_3 vom Verhalten der ungenäherten Masse ab. Für große ϵ_1 und ϵ_3 gibt die genäherte Masse das qualitative Verhalten der ungenäherten Masse wieder, allerdings gibt es quantitative Unterschiede.

Ist $\epsilon_3 < \epsilon_{3,c}$ springt bei $\epsilon_1 = 0$ das Minimum vom negativen Bereich für $\epsilon_1 < 0$ in den positiven Bereich für $\epsilon_1 > 0$. Das $\epsilon_{3,c}$ lässt sich theoretisch zu

$\epsilon_{3,c} = 1$ berechnen, falls die Größen ϵ_4 und ϵ_5 zu Null gewählt werden. Unter Beachtung dieser beiden Größen ist $\epsilon_{3,c}$ nicht mehr theoretisch berechenbar. Die Masse des Pions π_3 verschwindet für $\epsilon_1 = 0$ und $\epsilon_3 = \epsilon_{3,c}$. Damit lässt sich die Größe $\epsilon_{3,c}$ numerisch ermitteln. Das Ergebnis $\epsilon_{3,c} = 0,984$ weicht nicht stark vom theoretisch berechneten Wert ab. Bereits in Kapitel 5 wurde gezeigt, dass die Größen ϵ_4 und ϵ_5 keinen großen Einfluss auf die Lage des Minimums haben, dies wird hier bestätigt.

Kapitel 8

$$N_f = 3$$

In diesem Kapitel wird der Fall $N_f = 3$ betrachtet. Die Symmetriegruppe ist die SU(3)-Gruppe, deren Generatoren die Gell-Mann-Matrizen* sind. Es wird weiterhin die Gasser-Leutwyler-Lagrangedichte auf dem Gitter, siehe Gleichung (4.4), betrachtet. Für die Feldkonfigurationsmatrix U ist eine entsprechende Parametrisierung zu wählen. Für $N_f = 2$ kann ein bestimmtes Verhalten des Minimums beobachtet werden. Die folgenden Betrachtungen dienen der ersten Abschätzung des Verhaltens des Minimums, bzw. der Minima für $N_f = 3$. Eine Möglichkeit für die Feldkonfigurationsmatrix im Minimum besteht in der Parametrisierung durch die Gell-Mann-Matrizen λ_3 und λ_8 , welche vertauschen,

$$U = e^{i(\phi_3 \lambda_3 + \phi_8 \sqrt{3} \lambda_8)} = e^{i(\phi_3 \lambda_3)} \cdot e^{i(\phi_8 \sqrt{3} \lambda_8)}. \quad (8.1)$$

Dabei sind ϕ_3 und $\phi_8 \in [-\pi, \pi]$. Die Feldkonfigurationsmatrix hat Diagonalgestalt. Das Potential ist in dieser Parametrisierung sehr kompliziert, so dass Abschätzungen nicht möglich sind. Eine andere Möglichkeit ist die Parametrisierung:

$$U = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ia_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 + ib_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + ic_2 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

Aus der Unitarität und der Bedingung $\det U = +1$ folgen die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} a_2^2 &= 1 - a_1^2 & a_2 &= r \sqrt{1 - a_1^2} \\ b_2^2 &= 1 - b_1^2 & b_2 &= s \sqrt{1 - b_1^2} \\ c_2^2 &= 1 - c_1^2 & c_2 &= t \sqrt{1 - c_1^2} \end{aligned} \quad (8.3)$$

*Siehe Anhang A

und

$$c_1 = -rs\sqrt{1-a_1^2}\sqrt{1-b_1^2} + a_1b_1. \quad (8.4)$$

Dabei sind $r, s, t \in \{-1, 1\}$. Damit wird die Anzahl der Variablen auf zwei reduziert: a_1 und b_1 .

In die Massenmatrix muss jetzt auch das *Strange*-Quark miteinbezogen werden:

$$\chi = 2B_0 \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}.$$

Diese Massenmatrix wird analog zu Abschnitt 4.2 mit einer Matrix \mathcal{D} gedreht:

$$\chi(\omega) = \chi \cdot \mathcal{D}.$$

Die diagonale Drehmatrix \mathcal{D} kann dabei einen Drehwinkel, oder mehrere Drehwinkel beinhalten. Dabei muss für

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma} \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

die Relation $\alpha + \beta + \gamma = 0$ erfüllt sein.

8.1 Twist mit einem Drehwinkel

Für $N_f = 2$ wird die Drehmatrix mit nur einem Winkel und der Matrix τ_3 benutzt. Analog kann für $N_f = 3$ eine Drehmatrix mit einem Winkel bestimmt werden. Die Matrix τ_3 wird durch den entsprechenden Generator λ_3 in $N_f = 3$ ersetzt. Damit lautet die Drehmatrix

$$\mathcal{D} = e^{-i\omega\lambda_3}, \quad (8.6)$$

welche zu der gedrehten Massenmatrix

$$\chi(\omega) = \begin{pmatrix} \chi_0 + i\chi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_0 - i\chi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_s \end{pmatrix}$$

führt. Dabei sind χ_0 und χ_3 die in Abschnitt 4.2 definierten Größen. Es wird der Spezialfall $m_u = m_d = m_{q0} \neq m_s$ betrachtet. χ_s ist definiert durch:

$$\chi_s = 2B_0 m_s.$$

Die Drehung der Massenmatrix hat auf die Masse des *Strange*-Quarks keine Auswirkung. Lediglich die Massen des *Up*- und des *Down*-Quarks werden gedreht.

Das Potential hat mit diesen Parametrisierungen die Form:

$$\begin{aligned} V(a_1, b_1, c_1) = & -A(a_1 + b_1) + A_c c_1 + B(a_1^2 + b_1^2) + B_c c_1^2 \\ & + C a_1 b_1 + C_c (a_1 + b_1) c_1 \\ & + D(r\sqrt{1-a_1^2} - s\sqrt{1-b_1^2}) + E a_1 r \sqrt{1-a_1^2} \\ & + F b_1 r \sqrt{1-a_1^2} + F_c c_1 (r\sqrt{1-a_1^2} - s\sqrt{1-b_1^2}) \\ & + G a_1 s \sqrt{1-b_1^2} + G_c (a_1 - b_1) t \sqrt{1-c_1^2} \\ & + H b_1 s \sqrt{1-b_1^2} + J r \sqrt{1-a_1^2} s \sqrt{1-b_1^2} \\ & + J_c (\sqrt{1-a_1^2} + s\sqrt{1-b_1^2}) t \sqrt{1-c_1^2}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Das Potential ist in Abhängigkeit der drei Variablen a_1 , b_1 und c_1 angegeben. Mit diesen drei Variablen hat das Potential eine einfache Form. Für spätere Betrachtungen wird die Variable c_1 wieder über die Variablen a_1 und b_1 ausgedrückt.

Es werden die Koeffizienten

$$A = \frac{1}{2} F_0^2 \chi'_0, \quad (8.8)$$

$$A_c = -\frac{1}{2} F_0^2 (\chi_s + \rho_0), \quad (8.9)$$

$$\begin{aligned} B = & 2 \left[\rho_0^2 (W_8 - 2W_7 - 2L_8 - 2L_7 - 2W' - 2W'_7 - W'_8) \right. \\ & + \rho_0 \chi'_0 (2W_7 + 4L_7 - 2W - W_8 + 4L_8) \\ & \left. + (\chi_3^2 - \chi'_0^2) (2L_7 + L_{86} + 2L_8) \right], \end{aligned} \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} B_c = & 2 \left[-\rho_0^2 (W'_{86} + 2W'_7 + W'_8) - \chi_s^2 (2L_7 + 2L_8 + L_{86}) \right. \\ & \left. + \chi_s \rho_0 (2W_7 - W_8 - W_{86}) \right], \end{aligned} \quad (8.11)$$

$$C = 4 \left[\rho_0 \chi'_0 (W_8 - 2L_8 - 2W) - 2L_7 \chi_3^2 + \chi'_0^2 (L_8 - L_{86}) + \rho_0^2 (L_8 + W'_8 - 2W' - W_8) \right], \quad (8.12)$$

$$C_c = 2 \left[2\chi_s (\chi'_0 - \rho_0) (L_8 - L_{86}) + \rho_0 (\chi_s + \chi'_0) (W_8 - W_{86}) + \rho_0^2 (W_{86} + 2W'_8 - 2W'_{86} - W_8) \right], \quad (8.13)$$

$$D = -\frac{1}{2} F_0^2 \chi_3, \quad (8.14)$$

$$E = 2 \left[2\chi_3 (\rho_0 - \chi'_0) (2L_7 + L_8 + L_{86}) + \chi_3 \rho_0 (2W_7 - W_8 - W_{86}) \right], \quad (8.15)$$

$$F = 2 \left[2\chi_3 (\chi'_0 - \rho_0) (2L_7 + L_8 - L_{86}) - \chi_3 \rho_0 (2W_7 - W_8 + W_{86}) \right], \quad (8.16)$$

$$F_c = 2 \left[2\chi_3 \chi_s (2L_8 - L_{86}) + \chi_3 \rho_0 (W_8 - W_{86}) \right], \quad (8.17)$$

$$G = 2 \left[2\chi_3 (\rho_0 - \chi'_0) (2L_7 + 2L_8 - L_{86}) + \chi_3 \rho_0 (2W_7 - W_8 + W_{86}) \right], \quad (8.18)$$

$$G_c = 4 \left[-2L_7 \chi_3 \chi_s + W_7 \chi_3 \rho_0 \right], \quad (8.19)$$

$$H = 2 \left[2\chi_3 (\chi'_0 - \rho_0) (2L_7 + 2L_8 + L_{86}) - \chi_3 \rho_0 (2W_7 - W_8 - W_{86}) \right], \quad (8.20)$$

$$J = 4 \left[2L_7 \chi'_0^2 - 2\rho_0 \chi'_0 (2L_7 + W_7) + \chi_3^2 (L_{86} - 2L_8) + 2\rho_0^2 (L_7 + W'_7 + W_7) \right] \quad (8.21)$$

und

$$J_c = 4 \left[\chi'_0 (2L_7 \chi_s - W_7 \rho_0) - \chi_s \rho_0 (2L_7 + W_7) + \rho_0^2 (2W'_7 + W_7) \right] \quad (8.22)$$

benutzt. Für die Gittermatrix wurde die bereits in Kapitel 4.2 gewählte Parametrisierung $\rho = \rho_0 \mathbf{1} = 2W_0 a \mathbf{1}$ verwendet. Diese Koeffizienten sind teilweise

ähnlich zu den Koeffizienten c_i aus Abschnitt 4.2. A entspricht exakt c_1 und ist damit für positive Massen m_{q0} positiv. Die Masse des *Strange*-Quark wird festgesetzt, wobei die *Strange*-Quarkmasse positiv gewählt wird, $m_s > 0$. Da-her ist A_c negativ. Der Koeffizient B ist ähnlich zu c_2 . Das Vorzeichen von c_2 entscheidet, ob das *Aoki-Szenario* eintritt oder das *normale-Szenario*. Der Koeffizient D muss positiv sein, da $\chi_3 = -2B_0\mu$ negativ ist. Damit gilt für die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} A &\sim m_{q0} \\ A_c &< 0 \\ D &\sim \mu. \end{aligned}$$

Zur ersten Abschätzung des Potentials werden die Koeffizienten D bis J_c Null gesetzt. Die Größe D wird in einem zweiten Schritt miteinbezogen und die Veränderung des Potentials untersucht.

Das Potential wird auf die Existenz von Minima untersucht. Dafür werden die Koeffizienten größer oder kleiner Null gewählt. Wenn kein Betrag der Koeffizienten angegeben ist, wird dieser immer gleich 1 gewählt. Die einzelnen Terme sind somit noch nicht gewichtet.

Die Berücksichtigung des D -Terms bewirkt entweder eine Veränderung des Randes des Potentials, oder die Wölbung des Potentials dreht sich um. Da-durch bilden sich neue Minima oder sie verschwinden. Der D -Term ist entwe-der proportional zu r oder zu s . Es ist daher von Bedeutung, ob $r = -1$ und $s = +1$ gewählt wird, oder umgekehrt. Ohne Berücksichtigung dieses Terms ist es egal, welche der beiden Größen positiv gewählt wird, da r und s im-mer als Produkt auftauchen. Es muss dann nur unterschieden werden, ob die beiden Größen dasselbe Vorzeichen haben oder unterschiedliche. Wird der D -Term berücksichtigt und wird $r = +1$ und $s = -1$ gewählt, dann gibt es nur in zwei Fällen Minima des Potentials. In diesen Fällen existiert das Minimum auch für $r = -1$ und $s = +1$. Werden die Koeffizienten $A, B, C, C_c > 0$ und $B_c < 0$ gewählt, gibt es für beide Realisierungen, d.h. $r = \mp 1$ und $s = \pm 1$, ein Minimum des Potentials, ebenso für $B, C > 0$ und $A, B_c, C_c < 0$.

Wie im Fall $N_f = 2$ wird auch für $N_f = 3$ die Masse m_{q0} größer oder kleiner als Null gewählt. Für $N_f = 2$ kann ein Phasensprung beobachtet werden. Die Existenz eines Minimums für $m_{q0} > 0$ und $m_{q0} < 0$ ist Voraussetzung für einen Phasensprung. Deswegen sind besonders die Fälle interessant, in denen sowohl für $A < 0$ als auch für $A > 0$ Minima existieren.

Es werden im Folgenden die Fälle aufgelistet, in denen auch nach Berücksich-tigung des D -Terms mindestens ein Minimum existiert. Angegeben wird die Anzahl der Minima. Dabei werden globale Minima, die am Rand liegen und für die die Ableitung von V nicht den Wert Null annimmt nicht betrachtet.

Zur Vereinfachung der anschließenden Diskussion wird jedem in der Tabelle aufgelisteten Fall eine Nummer zugeordnet.

| | B | B_c | C | C_c | r | s | $A > 0$ $D = 0$ | $A < 0$ $D = 0$ | $A > 0$ $D > 0$ | $A < 0$ $D > 0$ |
|----|-------|-------|-------|-------|---------|---------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | < 0 | > 0 | > 0 | > 0 | -1 | +1 | 2 | 0 | 2 | 1 |
| 2 | | | < 0 | < 0 | -1 | +1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | | | > 0 | < 0 | -1 | +1 | 0 | 2 | 1 | 2 |
| 4 | | < 0 | > 0 | > 0 | -1 | +1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | | | < 0 | < 0 | -1 | +1 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 6 | | | > 0 | < 0 | -1 | +1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 7 | | | < 0 | > 0 | -1 | +1 | 1 | 1 | 2 | 1 |
| 8 | > 0 | > 0 | > 0 | > 0 | -1 | +1 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 9 | | | < 0 | < 0 | -1 | +1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | | | > 0 | < 0 | -1 | +1 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| 11 | | | < 0 | > 0 | -1 | +1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 12 | | < 0 | > 0 | > 0 | ∓ 1 | ± 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 13 | | | < 0 | < 0 | ± 1 | ± 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 14 | | | | | -1 | +1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 15 | | | | | +1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 16 | | | > 0 | < 0 | -1 | +1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 17 | | | | | +1 | -1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 18 | | | < 0 | > 0 | -1 | +1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Es werden jetzt die Fälle untersucht, für die in allen Varianten von A und D mindestens ein Minimum vorhanden ist. Zur Veranschaulichung werden zweidimensionale Skizzen des Potentials angeführt. Um die Lage des Minimums zu bestimmen, werden allerdings dreidimensionale Graphiken betrachtet, in denen das Potential $V(a_1, b_1)$ über der a_1 - und der b_1 -Achse aufgetragen wird. Es reicht aus, das Potential in einer zweidimensionalen Ebene \mathcal{E} zu betrachten, um das Verhalten der Minima zu untersuchen. Die Ebene \mathcal{E} ist bestimmt durch $a_1 = b_1$, d.h. durch die Diagonale der a_1 - b_1 -Ebene.

Existiert nur ein Minimum, können zwei Fälle beobachtet werden:

- Das Minimum liegt sowohl für $A > 0$, als auch für $A < 0$ bei negativen Werten der Variablen a_1 und b_1 . Dieser Fall tritt bei „4“ und „7“ für $D = 0$ ein. Das Potential hat bei $A = 1$ eine in der Mitte nach oben gewölbte Form. An dem Rand, an dem die Variablen negative Werte annehmen, ist das Potential leicht geknickt, so dass ein Minimum

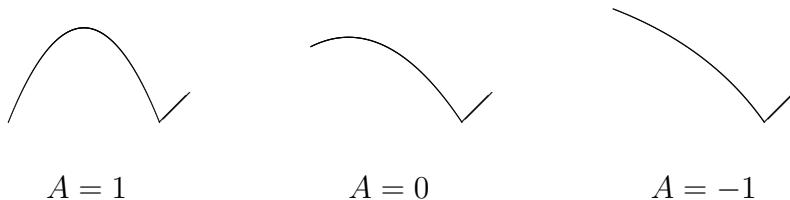


Abbildung 8.1: Das Potential in der Ebene \mathcal{E} , für den Fall, dass nur ein Minimum bei negativen Werten von a_1 und b_1 existiert

existiert. Die Krümmung des Potentials an dem Rand, an dem die Variablen positive Werte annehmen, wird für größer werdenes A immer kleiner, siehe Abbildung 8.1.

- Das Minimum ist entweder mittig oder für eine positive Masse, bzw. positives A , bei positiven Werten der Variablen und umgekehrt. Hierbei müssen zwei weitere Fälle unterschieden werden:
 - Das Potential hat in der Mitte keine große Krümmung, ähnlich einem Plateau. Das in der Mitte befindliche Minimum ist nur schwach ausgebildet. An den Rändern ist ein steiler Anstieg erkennbar. Für „4“ und $D > 0$ ist diese Form des Potentials bei $A = 1$ zu beobachten, siehe Abbildung 8.2. Für $A > 1$ wandert das Minimum zu positiven Werten der Variablen, für $A < 1$ zu negativen Werten. Das Potential kippt zu der entsprechenden Seite. Diese Veränderung ist schon bei kleinen Abweichungen, z.B. $\pm 0,1$, von $A = 1$ feststellbar. Für „6“ und $D > 0$ ist die Plateau-ähnliche Form des Potentials bei $A = -1$. Für $A < -1$ verschiebt sich das Minimum zu negativen Werten der Variablen, und bei $A > -1$ zu positiven Werten. Die Änderung des Potentials ist auch hier bei kleinen Abweichungen vom Wert $A = -1$ leicht zu erkennen.
 - Die zwei dimensionale Projektion des Potentials entspricht einer Parabel. Das Minimum für $A = -1$ liegt mittig und wandert für $A > -1$ hin zu positiven Werten der Variablen, siehe Abbildung 8.3. Für $A < -1$ verschiebt sich das Minimum in den Bereich negativer Werte der Variablen. Die Veränderung des Potentials ist erst bei größeren Abweichungen, z.B. $\pm 0,5$ deutlich zu erkennen. Dieser Fall ist bei „10“ und $D > 0$ oder bei „14“ und „16“ sowohl bei $D = 0$, als auch bei $D > 0$ zu beobachten. Für die Fälle „12“

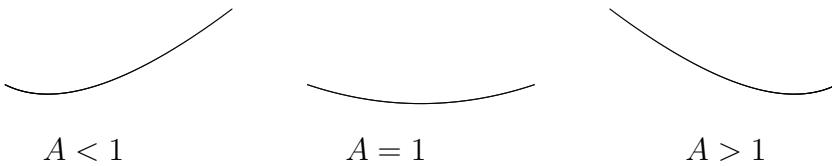


Abbildung 8.2: Das plateauauförmige Potential in der Ebene \mathcal{E} , für den Fall, dass nur ein Minimum existiert

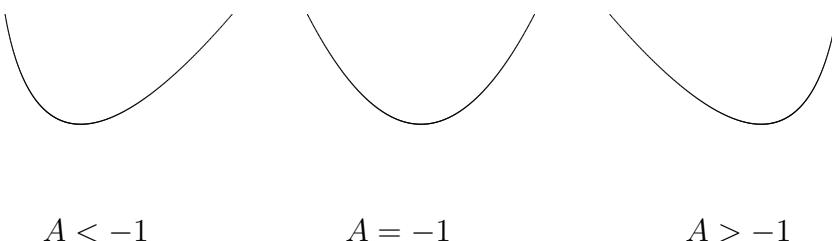


Abbildung 8.3: Das parabelförmige Potential in der Ebene \mathcal{E} , für den Fall, dass nur ein Minimum existiert

und „18“ bei $D = 0$ und bei $D > 0$ ist das Minimum des parabelförmigen Potentials bei $A = 1$ in der Mitte. Hierbei verschiebt sich das Minimum für $A < 1$ hin zu negativen Werten der beiden Variablen. Bei $A > 1$ liegt das Minimum im positiven Bereich der Variablen.

Auch bei der Existenz von zwei Minima müssen zwei Fälle unterschieden werden:

- Die beiden Minima sind bei $a_1 \approx 1, b_1 \approx 0$ und $a_1 \approx 0, b_1 \approx 1$ für $A > 0$, bzw. bei $a_1 \approx -1, b_1 \approx 0$ und $a_1 \approx 0, b_1 \approx -1$ für $A < 0$. Das Potential hat in beiden Fällen ungefähr eine Doppelmulden-Form. Wird das andere Vorzeichen von A gewählt gehen die zwei Minima über in ein Minimum. Für $|A| < 1$ wird die Wölbung in der Mitte des Doppelmulden-Potentials steiler und höher, das Potential kippt. Die beiden Minima laufen in die Mitte zusammen. Nach dem Vorzeichenwechsel von A läuft das Minimum für größer werdenes $|A|$ zum Rand. Dies kann bei „8“ sowohl für $D = 0$, als auch für $D > 0$ oder bei „10“ und $D = 0$ beobachtet werden.
- Die beiden Minima liegen am Rand, das eine bei positiven Werten der Variablen, das andere bei negativen Werten. Der Potentialwert dieser Minima ist gleich. Läuft die Größe A gegen große negative Werte wird

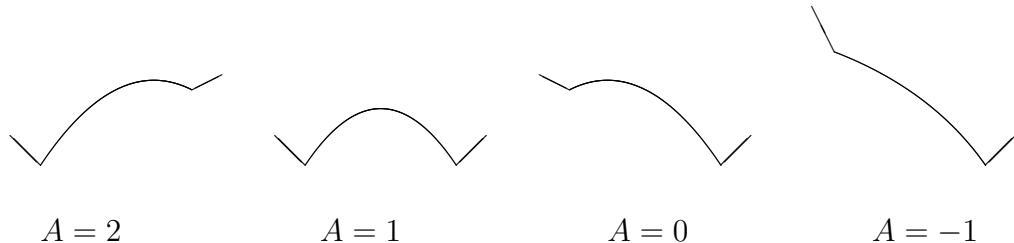


Abbildung 8.4: Das Potential in der Ebene \mathcal{E} , für den Fall, dass zwei Minima am Rand des Potentials existieren

der Graph des Potentials steiler, bzw. kippt zu einer Seite, wodurch ein Minimum verschwindet, siehe Abb. 8.4. Das Minimum liegt dann bei negativen Werten der Variablen. Läuft A gegen große positive Werte kippt das Potential zu der anderen Seite, das Minimum liegt schließlich bei positiven Werten der Variablen. Wird nur das absolute Minimum betrachtet kann somit ein Sprung dieses Minimums beobachtet werden. Im Fall „6“ und $D = 0$ gibt es zwei absolute Minima für $A = -1$. Für $A < -1$ gibt es ein absolutes Minimum bei negativen Werten der Variablen. Sobald $A > -1$ ist, gibt es ein absolutes Minimum bei positiven Werten von a_1 und b_1 . Im Fall „7“ und $D > 0$ sind bei $A = 1$ zwei absolute Minima zu beobachten.

In den Fällen „6“, $D = 0$ und „7“, $D > 0$ gibt es einen Sprung des absoluten Minimums bei $A = -1$, bzw. bei $A = 1$. In allen anderen Fällen ändert sich die Lage der Minima stetig, hier wird kein Sprung der Minima beobachtet. Besonders interessant ist hierbei der Fall „7“ und $D > 0$. Der Sprung des Minimums verschwindet im Fall „6“, sobald $D > 0$ gewählt wird.

Für $N_f = 2$ existiert bis zu einem kritischen Wert der gedrehten Masse μ , bzw. ϵ_3 , ein Sprung des Minimums. Bisher wurde $\mu \sim D = 1$ gewählt. Jetzt wird der Wert von D verändert, und der Sprung des Minimums im Fall „7“ erneut untersucht.

In allen anderen Fällen verändert sich Wölbung des Potentials, wird $D \neq 1$ gewählt. Je mehr D vom Wert 1 abweicht, umso stärker ist die Wölbung des Potentials. Dabei ist in allen Fällen

$$\begin{aligned} D > 1 &\Rightarrow \text{Wölbung nach unten} \\ D < 1 &\Rightarrow \text{Wölbung nach oben} \end{aligned}$$

beobachtbar. Dies hat teilweise Auswirkung auf die Anzahl der Minima. Auch im Fall „7“ ändert sich die Wölbung des Potentials. Wird $D < 1$ gewählt hat dies keine Auswirkungen auf den Sprung der absoluten Minima. Für $D \gg 1$ ist die Wölbung des Potentials nach unten so stark, dass das Potential ähnlich zu dem parabelförmigen Potential aus Abb. 8.3 ist. Für $D > 1$ ist bis zu einem Wert von

$$D \leq 2,5$$

der Sprung des absoluten Minimums zu beobachten. Danach ist die Wölbung des Potentials nach unten zu stark und die Lage des absoluten Minimums ändert sich stetig.

Die Minima des Potentials sind in zwei Fällen sowohl für $A = -1$, als auch bei $A = 1$ bei negativen Werten der Variablen a_1 und b_1 . In den anderen Fällen liegen die Minima für $A \geq 1$ bei positiven Werten der Variablen oder mittig und für $A \leq -1$ bei negativen Werten oder ebenfalls mittig. Allerdings gilt dies nicht unbedingt für $|A| < 1$. Zum Beispiel gibt es teilweise bereits bei kleinen, positiven Werten von A Minima bei negativen Werten der Variablen.

Durch die Berücksichtigung des D -Terms wird entweder der Rand des Potentials oder die Wölbung verändert. Wird $D \neq 1$ gewählt, wirkt sich dies auf die Wölbung aus. Je nachdem, ob $D > 1$ oder $D < 1$ gesetzt wird hat das Potential eine Wölbung nach unten bzw. oben. Dies ist umso stärker ausgebildet, je mehr D vom Wert 1 abweicht.

In zwei Fällen gibt es einen Sprung des absoluten Minimums bei $A = -1$, bzw. $A = 1$. Im Fall „6“ kann dieser Sprung beobachtet werden, wenn der D -Term nicht berücksichtigt wird. Mit Berücksichtigung des D -Terms existiert im Fall „7“ ein Sprung des absoluten Minimums bei $A = 1$ für D -Werte bis $D \leq 2,5$. Für größere Werte ändert sich die Lage des absoluten Minimums stetig.

Kapitel 9

Zusammenfassung und Ausblick

In Kapitel 2 bis Kapitel 4 wurden die Grundlagen der tmQCD im Rahmen der χ PT auf dem Gitter behandelt.

Die Gleichung zur Bestimmung des Potentialminimums wurde in Kapitel 5 mit Hilfe des Algorithmus nach Ferrari hergeleitet. Es wurden die dimensionslosen Variablen ϵ_1 und ϵ_3 eingeführt, welche proportional zu den gedrehten Massen der *twisted basis* sind. Zusätzlich ist die Variable ϵ_1 proportional zu der Gitterkonstanten. Für die Variable ϵ_3 wurde ein konstanter Wert gewählt. Zur numerischen Berechnung des Minimums musste der Gitterparameter η angegeben werden. Dieser wurde anhand der Gleichung für die kritische, gedrehte Masse μ_c und der Gleichung der Pionenmasse im Minimum $m_{\pi,\min}^2$ bestimmt. Für die Wilson-Wirkung ergab sich dabei:

$$\eta = 10^{13} \text{ MeV}^6.$$

Mit diesem η -Wert wurde die Gültigkeit der Entwicklung der Lagrangedichte nach Termen der Gitterkonstante a bis zur Ordnung a^2 überprüft. Der Einfluss der Ordnung a^2 -Terme auf das Minimum erwies sich dabei als sehr gering. Eine Entwicklung der Lagrangedichte nach dem Weinberg'schen Powercounting bis zur Ordnung a^2 , bzw. NLO war somit sinnvoll. Es lies sich zudem ein Gültigkeitsbereich der Variablen ϵ_1 von

$$-2 \leq \epsilon_1 \leq 2$$

berechnen.

Das Potential enthielt Terme, welche proportional zu der Gitterkonstanten waren und aufgrund des Weinberg'schen Powercountings klein sein müssen. Daher wurde bereits das Potential ohne diese Terme, die ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme,

untersucht. Es war daher von Interesse, ob diese Terme das Verhalten des Minimums, insbesondere in der Nähe des Phasensprungs, wesentlich beeinflussen. Entsprechende Untersuchungen ergaben, dass das Minimum mit $\epsilon_4 \neq 0$ und $\epsilon_5 \neq 0$ kaum von dem Minimum mit $\epsilon_4 = 0$ und $\epsilon_5 = 0$ abwichen. Der Einfluss der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme war somit sehr gering. Dies wurde durch Untersuchungen der Lage des Phasensprungs bestätigt. Der Phasensprung war ohne Berücksichtigung der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme im Potential bei $\epsilon_1 = 0$. Wurden diese Terme in die Rechnung miteinbezogen, verschob sich dieser Wert. Dabei war die Abweichung vom Wert $\epsilon_1 = 0$ so minimal, dass sie zu vernachlässigen war.

Im Kapitel 6 wurden die Minima der $\hat{\chi}$ - und der $\hat{\eta}$ -Näherung angeführt [13], [22], [23], [24]. Diese Minima wurden mit dem hier ermittelten Minimum verglichen. Dabei war vor allem das Verhalten der Minima der $\hat{\chi}$ - und der $\hat{\eta}$ -Näherung im Bereich des Phasensprungs von Interesse. In *leading order* (LO) war kein Unterschied zwischen dem Minimum der $\hat{\chi}$ -Näherung u_{SC} und dem Minimum nach dem Algorithmus nach Ferrari u_F zu beobachten. Das Minimum der $\hat{\eta}$ -Näherung u_{SU} unterschied sich nur minimal im Bereich großer W_0 -Werte von diesen. W_0 war ein Gitterparameter, dessen Wert nicht bekannt war und deshalb frei gewählt wurde.

In *next to leading order* (NLO) war zwischen den Minima der Näherungen und u_F bei kleinen $|\epsilon_1|$ -Werten und $\epsilon_3 \leq 1$ eine große Diskrepanz zu beobachten. Insbesondere beschrieben die Minima der Näherungen nicht den Phasensprung. Für $\epsilon_3 > 1$ war der Unterschied der Minima gering. Zudem wurde der Gültigkeitsbereich der Näherungen untersucht. Für die $\hat{\chi}$ -Näherung wurde ein Bereich von

$$7,0 \leq \hat{\chi} \leq 21,6$$

gefunden, in dem die Minima der Näherungen nicht wesentlich vom Minimum nach Ferrari abwichen. Die $\hat{\eta}$ -Näherung ist eine Erweiterung der $\hat{\chi}$ -Näherung, in der zusätzlich die Annahme gemacht wurde, dass die Größe $\hat{\eta}$ viel kleiner als 1 ist. Hier erwies sich ein Gültigkeitsbereich von

$$\hat{\eta} \leq 0,2$$

als sinnvoll.

Das in dieser Arbeit ermittelte Minimum wurde zur Berechnung der Pionenmassen benutzt. Dazu wurden in Kapitel 7 die Treelevelmassen, in LO und in NLO, und die Schleifenbeiträge der Massen berechnet.

Die Treelevelmasse in LO wurde mit der Treelevelmasse in LO der $\hat{\eta}$ -Näherung verglichen. Die Massen wichen nicht deutlich voneinander ab. Da die Schle-

fenbeiträge nicht wesentlich zu der Masse beitrugen, wurde auf einen Vergleich der Treelevelmassen in NLO verzichtet. Der Vergleich der vollständigen Massen in NLO, d.h. Treelevelmassen in LO, Treelevelmassen in NLO und die Schleifenbeiträge, wurde angeführt. Die Massen der $\hat{\eta}$ -Näherung wichen, ebenso wie das Minimum dieser Näherung, für $\epsilon_3 \leq 1$ im Bereich kleiner $|\epsilon_1|$ -Werte stark von den in dieser Arbeit berechneten Massen ab. Insbesondere nahmen die Massenquadrate der $\hat{\eta}$ -Näherung hier teilweise negative Werte an. Für $\epsilon_3 > 1$ war das qualitative Verhalten der Massen gleich, allerdings gab es quantitative Unterschiede.

Die Masse des Pions π_3 unterschied sich von der Masse des Pions π_1 oder π_2 . Dieses Massensplitting nahm für größer werdende $|\epsilon_1|$ -Werte ab. Es wurde zudem der Vergleich mit dem Massensplitting der $\hat{\eta}$ -Näherung aufgestellt. Dabei waren für $\epsilon_3 \leq 1$ deutliche Unterschiede erkennbar. Bei $\epsilon_3 > 1$ waren die Unterschiede geringer.

Von Interesse waren auch die Massen bei $\epsilon_1 = 0$. Es wurde erwartet, dass die Masse M_{π_3} für $\epsilon_{3,c} = \epsilon_3 (\mu = \mu_c)$ den Wert Null annahm. Damit konnte $\epsilon_{3,c} = 0,984$ bestimmt werden. Dieser Wert unterschied sich nicht stark von dem Wert, der mit $\epsilon_4 = \epsilon_5 = 0$ berechnet werden konnte. Der Einfluss der ϵ_4 - und ϵ_5 -Terme auf das Minimum und damit auch auf die Masse war nur gering. Dieses Ergebnis bestätigte die Untersuchungen aus Kapitel 5.

In Kapitel 8 wurde die Gasser-Leutwyler-Lagrangedichte für $N_f = 3$ betrachtet. Das Potential wurde auf Minima untersucht, um eventuelle Phasensprünge der Minima zu finden. Dazu wurden zwei mögliche Parametrisierungen der Feldkonfigurationsmatrix vorgestellt, wobei sich eine der Parametrisierungen als unvorteilhaft erwies. Auf die Massenmatrix wurde eine Drehmatrix angewandt, welche einen Drehwinkel und die Gell-Mann-Matrix λ_3 enthielt. Dadurch blieb die *Strange*-Quarkmasse ungedreht. Lediglich die *Up*- und die *Down*-Quarkmasse wurden gedreht.

Das Potential hatte mit diesen Parametrisierungen eine ähnliche Gestalt, wie das Potential für $N_f = 2$. Dadurch konnten Abschätzungen der Koeffizienten gemacht werden und gewisse Koeffizienten konnten zu Null gewählt werden. Änderungen der Größe A , welche proportional zu der gedrehten Masse und der Gitterkonstanten war, führten meist dazu, dass das Potential „gekippt“ wurde und sich dadurch die Lage der Minima verschob. Eine Veränderung des D -Wertes, welcher proportional zu der gedrehten Masse war, wirkte sich auf die Wölbung des Potentials aus. In einigen Fällen existierten zwei Minima. Für zwei mögliche Realisierungen der Koeffizienten A bis D gab es einen Sprung der Lage des absoluten Minimums. Wurde $D \neq 0$ gewählt, konnte bis zu einem D -Wert von $D \leq 2,5$ der Sprung der Minimumslage beobachtet werden.

Der Algorithmus nach Ferrari erlaubte eine exakte Berechnung des Minimums. Insbesondere beschrieb dieses Minimum das Verhalten bei kleinen Quarkmassen und somit beim Phasensprung.

Darüber hinaus kann der hier gefundene Gültigkeitsbereich der $\hat{\chi}$ - und der $\hat{\eta}$ -Näherung zur Einschätzung der Ergebnisse dieser Näherungen benutzt werden.

Besonders interessant ist die Phasenstruktur für $N_f = 3$. In Kapitel 8 wurden bereits erste Untersuchungen durchgeführt und eine mögliche Parametrisierung der Feldkonfigurationsmatrix vorgestellt. Es gab einen Sprung des Minimums für bestimmte Realisierungen der angeführten Koeffizienten.

Diese Ergebnisse können in nachfolgenden Arbeiten verwendet werden, um die Phasenstruktur genauer zu untersuchen. Zum Beispiel könnte der Phasensprung des Minimums untersucht werden, wenn alle Koeffizienten des Potentials berücksichtigt werden. Eine andere interessante Frage ist, ob sich das Verhalten der Minima für $D < 0$ gegenüber dem Verhalten der Minima für $D > 0$ ändert.

Anhang A

$\mathbf{SU}(N)$

Die Gruppe $\mathbf{SU}(N)$ ist die Gruppe der speziellen unitären Matrizen, d.h. die Determinante dieser Matrizen ist $+1$, mit der Dimension N . Die Transformationsgruppe wird durch $N^2 - 1$ Generatoren charakterisiert. Im ersten Teil dieser Arbeit wird der Fall $N_f = 2$ betrachtet, die Symmetriegruppe ist $\mathbf{SU}(2)$. In Kapitel 8 wird der Fall $N_f = 3$ behandelt, die Symmetriegruppe ist $\mathbf{SU}(3)$.

A.1 $\mathbf{SU}(2)$

Die Generatoren der Gruppe $\mathbf{SU}(2)$ werden durch die Paulimatrizen bestimmt:

$$T_i = \frac{\tau_i}{2} \quad i = 1, \dots, 3.$$

Dabei haben die Paulimatrizen folgende Gestalt:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sie erfüllen die Vertauschungsrelation

$$[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}] = i\epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2}$$

und bilden bezüglich dieses Kommutators eine Lie-Algebra.

Für ein Produkt zweier Paulimatrizen gilt die Beziehung

$$\tau_i \tau_j = i\epsilon_{ijk} \tau_k,$$

für $i \neq j$, bzw.

$$\tau_i \tau_j = \mathbf{1},$$

für $i = j$.

Die Spur über die Paulimatrizen hat den Wert Null. Damit ist die Spur über das Produkt einer geraden Anzahl von Paulimatrizen nur dann ungleich Null, wenn jeweils zwei benachbarte Paulimatrizen identisch sind. Für die Spur über das Produkt von drei Paulimatrizen gilt die Beziehung:

$$\langle \tau_i \tau_j \tau_k \rangle = 2i\epsilon_{ijk}.$$

A.2 $SU(3)$

Die Generatoren der $SU(3)$ -Gruppe sind proportional zu den Gell-Mann-Matrizen:

$$T_i = \frac{\lambda_a}{2} \quad a = 1, \dots, 8.$$

Drei der acht Gell-Mann-Matrizen sind Erweiterungen der Paulimatrizen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Gell-Mann-Matrizen bilden bezüglich des Kommutators

$$[\frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2}] = i f_{ijk} \frac{\lambda_k}{2}$$

eine Lie-Algebra. f_{ijk} ist die vollständig assymmetrische Strukturkonstante mit [25]

| f_{123} | f_{147} | f_{156} | f_{246} | f_{257} | f_{345} | f_{367} | f_{458} | f_{678} |
|-----------|---------------|----------------|---------------|---------------|---------------|----------------|----------------------|----------------------|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |

Alle weiteren möglichen Realisierungen der Strukturkonstanten haben den Wert Null.

Anhang B

Dirac-Matrizen

B.1 Dirac-Matrizen im Minkowski-Raum

Die Dirac-Matrizen erfüllen im Minkowski Raum die Anti-Kommutator-Relation:

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}.$$

Die vier Dirac-Matrizen haben die Gestalt:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_1 \\ \tau_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \tau_3 \\ \tau_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

τ_i sind die drei Pauli-Matrizen.

Damit wird eine fünfte Dirac-Matrix berechnet:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Zudem lässt sich mit den Dirac-Matrizen die antisymmetrische Matrix finden:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

B.2 Dirac-Matrizen im Euklidischen Raum

Im Euklidischen Raum erfüllen die Dirac-Matrizen die Anti-Kommutator-Relation:

$$[\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E] = 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1}.$$

Eine mögliche Realisierung der vier Dirac-Matrizen lautet:

$$\begin{aligned}\gamma_1^E &= \begin{pmatrix} 0 & -i\tau_1 \\ i\tau_1 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_2^E &= \begin{pmatrix} 0 & -i\tau_2 \\ i\tau_2 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3^E &= \begin{pmatrix} 0 & -i\tau_3 \\ i\tau_3 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_4^E &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

τ_i sind die drei Pauli-Matrizen.

Auch im Euklidischen Raum wird aus den vier Dirac-Matrizen eine fünfte Dirac-Matrix gebildet:

$$\gamma_5^E = i\gamma_1^E \gamma_2^E \gamma_3^E \gamma_4^E = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Ebenso wie im Minkowski-Raum wird mit Hilfe des Anti-Kommutators der Dirac-Matrizen eine antisymmetrische Matrix gebildet:

$$\sigma_{\mu\nu}^E = \frac{i}{2} [\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E].$$

Anhang C

Relationen der Niederenergiekonstanten

Zur Vereinfachung der LEC können folgende Relationen benutzt werden:

$$\begin{aligned}L_{54} &= 2L_4 + L_5 \\L_{86} &= 2L_6 + L_8 \\W_{54} &= 2W_4 + W_5 \\W_{86} &= 2W_6 + W_8 \\W'_{86} &= 2W'_6 + W'_8.\end{aligned}$$

Für beliebige LEC X ist die Gleichung

$$X_{ji} = 2X_i + X_j$$

zu verwenden.

Diese neuen Koeffizienten bilden die Größen:

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2}(W_{86} - 2L_{86}) \\W' &= \frac{1}{2}(L_{86} - W_{86} + W'_{86}) \\\tilde{W} &= \frac{1}{2}(W_{54} - L_{54}).\end{aligned}$$

Aus Gitterrechnungen [19] ist für die Größen W und \tilde{W} das Produkt mit W_0 bekannt:

$$\begin{aligned}W \cdot W_0 &= w = 10^4 \text{MeV}^3 \\ \tilde{W} \cdot W_0 &= \tilde{w} = 6 \cdot 10^4 \text{MeV}^3 \\ W' \cdot W_0^2 &= \eta.\end{aligned}$$

In den Gitterrechnungen [19] sind die Zahlenwerte folgender Größen ermittelt worden:

$$\begin{aligned} L_{54} &= 1 \cdot 10^{-3} \\ L_{86} &= 0,8 \cdot 10^{-3} \\ F_0 &= 86 \text{ MeV} \\ B_0 &= 3,1 \text{ GeV} \\ a &= \frac{1}{1975} \text{ MeV}^{-1} = 0,1 \text{ fm.} \end{aligned}$$

Zur Renormierung der Schleifenbeiträge der Masse werden die unrenormierten LEC X durch renormierte LEC plus das Vielfache einer divergenten Konstante R ersetzt:

$$X_i = X_i^r + \frac{\gamma_i}{32\pi^2} R.$$

Für die Konstante γ_i gilt

$$\gamma_i = \begin{cases} \Gamma_i & \text{für } X_i = L_i \quad \text{und} \quad X_i = W'_i \\ \Delta_i & \text{für } X_i = W_i. \end{cases}$$

Γ_i und Δ_i werden mit Hilfe der Gleichungen [28]

| i | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------------|---------------|-----------------|---------------------------|---|-------------------------|
| Γ_i | $\frac{1}{8}$ | $\frac{N_f}{8}$ | $\frac{N_f^2+2}{16N_f^2}$ | 0 | $\frac{N_f^2-4}{16N_f}$ |
| Δ_i | $\frac{1}{8}$ | $\frac{N_f}{8}$ | $\frac{N_f^2+2}{8N_f^2}$ | 0 | $\frac{N_f^2-4}{8N_f}$ |

berechnet. Für den Fall $N_f = 2$ ergeben sich die Renormierungskonstanten:

| i | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------------|---------------|---------------|----------------|---|---|
| Γ_i | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{32}$ | 0 | 0 |
| Δ_i | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | 0 | 0 |

Literaturverzeichnis

- [1] O.Philipsen: „*Einführung in das Standardmodell der Elementarteilchen, Vorlesungsskript SS 2005*“, Westfälische Wilhelms-Universität Münster
- [2] S.Scherer: „*Einführung in die chirale Störungstheorie, Vorlesungsskript WS 1999/2000*“, Johannes Gutenberg-Universität Mainz
- [3] F.Mandel und G.Shaw: „*Quantenfeldtheorie*“, AULA-Verlag (1993)
- [4] G.Münster und M.Walzl: „*Lattice gauge Theory - A Short Primer*“, hep-lat/0012005, PSI Zuoz Summer School(2000)
- [5] K.G.Wilson: „*Confinement of quarks*“, Phys.Rev. D10, 2445 (1974)
- [6] M.Lüscher et.al.: „*Chiral symmetry and $O(a)$ improvement in lattice QCD*“, hep-lat/9605038, Nucl.Phys. B478, 365-400 (1996)
- [7] O.Bär, G.Rupak und S.Shores: „*Chiral perturbation theory at $O(a^2)$ for lattice QCD*“, hep-lat/0306021, Phys.Rev. D70, 034508 (2004)
- [8] C.Schmidt: „*Chirale Störungstheorie für Quantenchromodynamik auf dem Gitter mit axial gedrehter Massenmatrix*“, Diplomarbeit, WWU Münster (2004)
- [9] G.Münster und C.Schmidt: „*Chiral perturbation theory for lattice QCD with a twisted mass term*“, hep-lat/0311032, Europhys.Lett. 66, 652-656 (2004)
- [10] R.Frezzotti und G.C.Rossi: „*Chirally improving Wilson fermions I. $O(a)$ improvement*“, hep-lat 0306014 (2003), JHEP 0408, 007 (2004)
- [11] R.Frezzotti: „*Wilson fermions with chirally twisted mass*“, hep-lat 0210007, Nucl.Phys. B. Proc.Suppl. 119, 140 (2003)

- [12] R.Frezzotti und G.C.Rossi: „*Twisted-mass QCD with mass non-degenerate quarks*“, hep-lat 0311008, Nucl.Phys. B. Proc.Suppl. 128, 193 (2004)
- [13] L.Scorzato: „*Pion mass splitting and phase structure in Twisted Mass QCD*“, hep-lat/0407023, Eur.Phys.J. C37, 445-445 (2004)
- [14] P.Hofmann, G.Münster und L.Scorzato: „*Some formulae for twisted mass lattice QCD from chiral perturbation theory*“, Interne Notizen (2005)
- [15] E.W.Weisstein: „*CRC Concise Encyclopedie of Mathematics*“, CHAPMAN&HALL/CRC (1999)
- [16] S.Aoki: „*New Phase structure for lattice QCD with Wilson fermions*“, Phys.Rev. D30, 2653 (1984)
- [17] G.Münster: „*On the phase structure of twisted mass lattice QCD*“, hep-lat/0407006, JHEP 09, 035 (2004)
- [18] E.M.Ilgenfritz et.al.: „*Numerical reinvestigation of the Aoki phase with $N_f = 2$ Wilson fermions at zero temperatur*“, Phys.Rev. D69, 074511 (2004)
- [19] F.Farchioni et.al.: „*Numerical simulations with two flavours of twisted-mass Wilson quarks and DBW2 gauge action*“, hep-lat 0512017 (2005), Eur.Phys.J. C47, 453-472 (2006)
- [20] A.Shindler: „*Twisted mass lattice QCD: Recent developments and results*“, hep-lat/0511002, PoS LAT2005, 014 (2005)
- [21] F.Farchioni et.al.: „*Dynamical twisted mass fermions*“, hep-lat/0509131, PoS LAT2005, 072 (2005)
- [22] T.Sudmann: „*Chirale Störungstheorie für Mesonen in der Twisted-Mass Gitter-QCD*“, Diplomarbeit, WWU Münster (2005)
- [23] G.Münster und T.Sudmann: „*Twisted mass lattice QCD with non-degenerate quark masses*“, hep-lat/0603019, JHEP 0608, 085 (2006)
- [24] P.Hofmann: „*Chirale Störungstheorie für Twisted-Mass Gitter-QCD*“, Diplomarbeit, WWU Münster (2005)
- [25] L.Ryder: „*Quantum Field Theory*“, Cambridge University Press (1996)

- [26] J.Donoghue, E.Golowich, B.Holstein: „*Dynamics of the Standard Model*“, Cambridge University Press (1994)
- [27] J.Gasser und H.Leutwyler: „*Chiral Perturbation Theory: expansions in the mass of the strange quark*“, Nucl.Phys. B250, 465-516 (1985)
- [28] qq+q Collaboration, F.Farchioni, C.Gebert, I.Montvay, E.Scholz, L.Scorzato: „*Partially quenched chiral perturbation theory and numerical simulations*“, hep-lat/0302011, Phys.Lett. B561, 102-110 (2003)

Danksagung

Bis es zum Druck dieser Diplomarbeit kam, haben mir sehr viele Menschen geholfen und mich unterstützt. Ihnen möchte ich hier danken:

- Herrn Prof. Dr. Münster möchte ich für die freundliche und umfassende Betreuung der Diplomarbeit danken.
- Tobias Sudmann danke ich für die Geduld beim Beantworten meiner Fragen und für das Korrekturlesen meiner Arbeit.
- Ich danke meiner Familie für die Unterstützung in so vielen Bereichen.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im Oktober 2006