

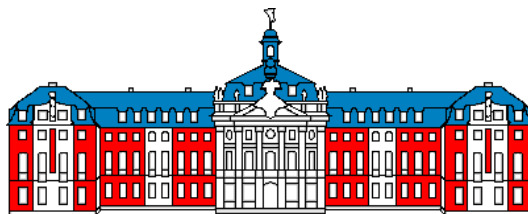
institut für
theoretische physik

Transfer-Matrix und Reflexionspositivität in der Gittereichtheorie

als Diplomarbeit vorgelegt von
Cem Pulathaneli

März 2003

Institut für Theoretische Physik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster



Die vorliegende Version unterscheidet sich nur geringfügig von derjenigen, die beim Prüfungssekretariat eingereicht wurde.

Münster, im Juni 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Über das Gitter	5
1.2	Über Supersymmetrie	6
1.3	Reflexionspositivität	7
1.4	Gliederung dieser Arbeit	8
2	Fermionische Funktionalintegrale	9
2.1	Grassmann-Algebra	9
2.2	Integration über Grassmann-Variablen	11
3	Transfer-Matrix-Formalismus	15
3.1	Ising-Modell	15
3.1.1	Transfer-Matrix des Ising-Modells	17
3.2	Transfer-Matrix des harmonischen Oszillators	19
3.3	Transfer-Matrix für Feldtheorien	25
3.4	Verbindungen zwischen statistischer Mechanik und Feldtheorie	27
4	Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter	33
4.1	Eichfelder	33
4.1.1	Im Kontinuum	33
4.1.2	Eichfelder auf dem Gitter	35
4.1.3	Wilson-Wirkung	37
4.2	Transfer-Matrix	40
4.3	Zeitreflexion und Reflexionspositivität	42
4.3.1	Site-Reflection	43
4.3.2	Link-Reflection	44

INHALTSVERZEICHNIS

5	Transfer-Matrix für Fermionen	47
5.1	Hamilton-Formalismus	47
5.2	Euklidische Formulierung: Wilson-Wirkung	51
5.3	Reflexionspositivität	53
5.3.1	Link-Reflection	54
5.3.2	Site-Reflection	56
6	Majorana-Fermionen auf dem Gitter	63
6.1	Wirkung für Majorana-Fermionen	63
6.2	Reflexionspositivität	67
6.2.1	Link-Reflection	67
6.2.2	Site-Reflection	69
7	Zusammenfassung	75
A	Dirac-Matrizen	77
A.1	Pauli-Matrizen	77
A.2	Dirac-Matrizen	77
B	Generatoren der Lie-Algebra	79
C	Weyl,- Dirac- und Majorana-Spinoren	81
	Literaturverzeichnis	83

Kapitel 1

Einleitung

Seit einiger Zeit wissen wir, dass es zwei verschiedene Sorten von Teilchen gibt: Fermionen und Bosonen. Die Fermionen haben halbzahligen Spin und erfüllen die Fermi-Dirac-Statistik. Die Bosonen haben ganzzahligen Spin und genügen der Bose-Einstein-Statistik. Die Materie-Teilchen, die aus Fermionen bestehen, wechselwirken via Bosonen.

Es gibt zwei fundamentale Sorten von Fermionen: Quarks und Leptonen. Beide werden in drei Generationen zusammengefasst. Jedes Quark verfügt über eine der drei Farbladungen rot, grün und blau.

Nach unserem bisherigen Wissen gibt es vier Sorten von Wechselwirkungen zwischen den Materie-Teilchen: Die Gravitation, die schwache, die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung. Die letzten drei lassen sich mit Lagrange-Dichten von Feldern beschreiben, die unter kontinuierlichen Raum-Zeit- und inneren Feldtransformationen invariant sind. Sie bilden das heutige Standardmodell der Elementarteilchen. Nach dem Noether-Theorem (1918) existiert dann eine bestimmte erhaltene Größe für jede dieser Transformationen [2].

1.1 Über das Gitter

Quantenfeldtheorie, unsere Beschreibung der fundamentalen Kräfte in der Natur, wurde zuerst in der kontinuierlichen Raum-Zeit formuliert, wo sie verwirrende Unendlichkeiten hervorruft, die von einem Prozess, namens Renormierung, eliminiert werden müssen. Eine einfache, aber rigorose Formulierung kann durch die Ersetzung der kontinuierlichen Raum-Zeit durch eine diskrete Menge der Punkten auf einem Gitter erreicht werden. Dies wurde zum ersten Mal von Wilson [12] vorgeschlagen.

Nach dieser Vorgehensweise werden die Felder nur auf den Gitterpunkten definiert und zwischen den Gitterpunkten gibt es sogenannte *Links*, auf denen die *Link-Variablen*, die Paralleltransporter der Theorie, *leben*.

Einige Rechnungen, die man im Kontinuum nicht durchführen kann, sind auf dem Gitter möglich. Nachher muss man natürlich den Kontinuums-Limes bil-

1. Einleitung

den, damit man von der gitterregularisierten Raum-Zeit wieder zur kontinuierlichen gelangt.

1.2 Über Supersymmetrie

Ein System, das nach einer Bewegung seine Struktur beibehält, bezeichnet man als symmetrisch. Wenn die Form eines mathematischen Gesetzes nach einer Transformation von Parametern des Systems invariant bleibt, spricht man von einer Symmetrie.

Es ist ein äusserst seltener Fall, in der Natur idealen Symmetrien zu begegnen. In unseren mathematischen Modellen haben wir gerne exakte Symmetrien, da diese mathematisch elegant und einfacher zu handhaben sind. Sie ermöglichen eine übersichtliche mathematische Formulierung und vereinfachen die Lösungen der Bewegungsgleichungen, da sie die Dynamik des zu untersuchenden Systems einschränken. Aber in meisten Fällen sind Symmetrien nur näherungsweise richtig [9].

Allgemein gibt es den direkten Zusammenhang zwischen einer Symmetrie und einem Erhaltungssatz. Jede Symmetrie führt zu einer Entartung und diese Tatsache benutzt man in der Quantentheorie zur Klassifizierung der Elementarteilchen.

Wie zuvor erwähnt, tragen Bosonen ganzzahligen Spin, während der Spin eines Fermions halbzahlig ist. Deshalb verhalten sich Bosonen wie Tensoren und Fermionen wie Spinoren unter Drehungen. In der klassischen Physik benutzt man c - (komplexe) Zahlen für Bosonen und Grassmann- oder a -Zahlen für Fermionen. Nach der Quantisierung erhält man aus Zahlen Operatoren, die bei Bosonen Vertauschungs- und bei Fermionen Antivertauschungsrelationen aufweisen.

Folglich haben Bosonen und Fermionen ganz unterschiedliche Eigenschaften. Mitte der 70er Jahre kam der Vorschlag der Supersymmetrie, diese voneinander so stark abweichenden Welten zusammenzubringen und unter einer Symmetrietransformation zusammenzufassen. Nach den Annahmen dieser Theorie gibt es eine Symmetrie zwischen den Bosonen und Fermionen, die besagt, dass es zu jedem Fermion und zu jedem Boson entsprechende supersymmetrische Partner-Teilchen, nämlich ein Boson für jedes Fermion und ein Fermion für jedes Boson gibt. Diese haben dieselben Eigenschaften wie ihre Partner-Teilchen, mit Ausnahme der Spins.

Wenn man Bosonen und Fermionen im selben Rahmen betrachtet, muss man natürlich mit Erweiterungen in der Theorie rechnen, z.B. hat man dann in Symmetrie-Algebren zugleich Kommutatoren und Antikommutatoren. Man benötigt Operatoren, die Fermionen in Bosonen und umgekehrt, Bosonen in Fermionen umwandeln. Man braucht einen Hyperraum, in dem man beide Sorten der Teilchen beschreiben kann.

Bisher wurden jedoch keine supersymmetrischen Teilchen gefunden, d.h., dass diese größere Massen haben müssen. Damit ist die Supersymmetrie gebrochen, sie ist also nicht exakt. Hier muss man aber hinzufügen, dass man in der Physik

diesem Phänomen oft begegnet.

Dagegen hat Supersymmetrie wichtige Vorteile, z.B. löst sie das *Hierarchieproblem*, und die Quantenfeldtheorien mit Supersymmetrie haben weniger problemverursachende Divergenzen. In der lokalen Supersymmetrie vereinheitlichen sich die Gravitation und die schwache und die starke Wechselwirkungen.

Das Standardmodell ist lediglich als ein Niederenergie-Limes einer *Grand Unified Theory* (GUT) zu verstehen, da sich die drei laufenden Kopplungen des Standardmodells in höheren Energien nicht schneiden, was von einer GUT zu erwarten ist.

Supersymmetrie scheint ein notwendiger Bestandteil einer Quantentheorie der Gravitation zu sein. Die einfachsten supersymmetrischen Eichtheorien sind die $N=1$ supersymmetrischen Yang-Mills-Theorien. Neben den Eichfeldern beinhalten sie auch masselose Majorana-Fermionen in adjungierter Darstellung, die i.A. als Gauginos bezeichnet werden. Im Kontext der starken Wechselwirkungen nennt man die Eichfelder *Gluons* und die Gauginos *Gluinos* [27]. Je nachdem wieviele neu eingeführte Generatoren (Majorana-Spinoren) vorhanden sind, ändert sich der Name der Theorie ($N=1$, $N=2$, usw.). In adjungierter Darstellung transformieren sich die Majorana-Spinoren wie die Eichfelder. Im einfachen Fall der Eichgruppe $SU(N_c)^1$ hat die adjungierte Darstellung $N_c^2 - 1$ Dimensionen, deshalb existieren $N_c^2 - 1$ Gluons und ebenso viele Gluinos.

Die nichtperturbativen Features der supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie können in einer Gitter-Formulierung untersucht werden. Wie bei der Diskretisierung üblich ist, ist die Wirkung nicht eindeutig [26]. Eine mögliche Formulierung, die von der DESY-Münster-Kollaboration untersucht wird, wurde von Curci und Veneziano [18] gegeben. Diese basiert auf der bekannten Gitter-Formulierung der QCD, die von Wilson eingeführt war.

1.3 Reflexionspositivität

Wenn man mit auf dem Gitter formulierten Eichtheorien arbeitet, muss man gewisse Bedingungen prüfen, damit man sicher sein kann, dass die Rechnungen über eine Gültigkeit verfügen.

Eine wichtige Bedingung ist die *Reflexionspositivität*, oder die *Osterwalder-Schrader-Positivität* [15]. Sie impliziert die Existenz einer positiven selbstadjungierten Transfer-Matrix $\hat{T} = e^{-a\hat{H}}$ mit einem selbstadjungierten Hamilton-Operator der Theorie $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$.

Dadurch wird die Positivität der Korrelationsfunktionen² $\langle(\theta F) F\rangle$ für jede eichinvariante Funktion F bei jeder euklidischen Zeit-Separation, die für Monte-Carlo-Rechnungen von Bedeutung ist, gesichert [17].

Leider werden einige Symmetrien des Modells zerstört, wenn man das System auf einem Gitter formuliert. Diese sollten dann im Kontinuums-Limes wiedergewonnen werden. Bei einigen Cutoffs ist es sogar der Fall, dass die Positivität der

¹c steht hier für Farbe (Colour).

²Diese entsprechen gleichzeitig den Erwartungswerten der euklidischen Quantenfeldtheorie.

1. Einleitung

Metrik des Hilbert-Raumes verlorengeht. Dies sollte vermieden werden, denn es scheint ziemlich kompliziert zu sein, Positivität als eine Eigenschaft darzustellen, die lediglich im no-Cutoff-Limes erfüllt wird. Ein *guter* Cutoff sollte daher Positivität und die meisten Symmetrien erhalten. Vor Allem sollte er Eichinvarianz erhalten. Die Gitter-Näherung, die zuerst von Wilson und Polyakov eingeführt wurde, erfüllt diese Eigenschaften [16].

1.4 Gliederung dieser Arbeit

In dieser Arbeit geben wir zuerst im zweiten Kapitel eine kurze Einführung in die Berechnung fermionischer Integrale. Danach führen wir den Transfer-Matrix-Formalismus und die Beziehung zwischen der Transfer-Matrix und dem Hamilton-Operator der Theorie anhand einfacher Beispiele ein. Dazu wird zunächst vom Ising-Modell und dann vom eindimensionalen harmonischen Oszillator Gebrauch gemacht. Mit kleinen Ergänzungen definieren wir nachfolgend die Transfer-Matrix für Feldtheorien und schließlich zeigen wir mit Hilfe der Transfer-Matrix die Gemeinsamkeiten zwischen der statistischen Mechanik und den Feldtheorien.

Als nächstes wird im vierten Kapitel die Transfer-Matrix nach einer kurzen Zusammenfassung des Falles im Kontinuum für die reine Eichtheorie auf dem Gitter eingeführt und die Reflexionspositivität dieser Theorie wird untersucht. In diesem Kapitel sowie in den nachfolgenden, in denen wir die Reflexionspositivität untersuchen, wird dies mit beiden Arten der Reflexion, der sogenannten *Site-Reflection* und der *Link-Reflection* durchgeführt.

Das fünfte Kapitel handelt von Fermionen. Nachdem wir die reine Eichtheorie auf dem Gitter definiert und die Reflexionspositivität im diesem Falle untersucht haben, wollen wir nun die Fermion-Felder hinzufügen und die ganze Prozedur diesmal mit diesem allgemeineren Fall durchführen.

In Kapitel 6 haben wir einen Spezialfall, nämlich die Majorana-Fermionen. Diese sind supersymmetrische Teilchen, die unter Ladungskonjugation in sich übergehen. Im Anhang [C] befindet sich eine kurze Zusammenfassung ihrer Eigenschaften. Wir benutzen Majorana-Spinoren in der adjungierten Darstellung. Die Wilson-Wirkung, die im vorherigen Kapitel definiert wurde, wird nun für die Majorana-Spinoren modifiziert. Als letztes wird die Reflexionspositivität der Theorie mit dieser speziellen Wirkung untersucht.

In der ganzen Arbeit benutzen wir ein hyperkubisches Gitter mit dem Gitterabstand a . Wegen technischer Gründe wählen wir ein symmetrisches Gitter. Einfachheitshalber nehmen wir an, dass der Gitterabstand a gleich 1 ist, falls nicht anders angegeben.

Kapitel 2

Fermionische Funktionalintegrale

Die fundamentalen Materiefelder in der Natur haben Spin $\frac{1}{2}$ [6]. Da das Pauli-Prinzip erfüllt werden muss, kann man den Pfadintegralformalismus, den man bei bosonischen Feldern benutzt, für die Materiefelder nicht einfach ohne Änderungen anwenden [1]. Fermion-Felder antikommutieren im Limes $\hbar \rightarrow 0$ und werden deshalb in diesem Limes Elemente einer antikommutierenden Algebra. Somit erwarten wir, dass die Pfadintegraldarstellung von fermionischen Greenschen Funktionen antikommutierende Variablen beinhalten muss.

In diesem kurzen Kapitel diskutieren wir die Integrationsregeln, die man in der Pfadintegraldarstellung der fermionischen Greenschen Funktionen benutzen muss, und wenden anschließend unsere Entdeckungen bei gewissen Integralen an.

2.1 Grassmann-Algebra

Um mit Fermionen umgehen zu können, muss man den Raum der normalen (reellen oder komplexen) Zahlen verlassen und stattdessen mit antikommutierenden Zahlen arbeiten. Tatsächlich wurden derartige Objekte schon 1855 von dem Mathematiker Hermann Grassmann eingeführt.

Die Menge der antikommutierenden Zahlen (oder Grassmann-Variablen) wird als Grassmann-Algebra oder äussere Algebra bezeichnet. Die Elemente η_1, \dots, η_N nennt man die Generatoren einer Grassmann-Algebra, wenn sie untereinander antivertauschen, d.h. wenn

$$\{\eta_i, \eta_j\} = \eta_i \eta_j + \eta_j \eta_i = 0 \quad \text{für } i, j = 1, \dots, N. \quad (2.1)$$

Daraus findet man, dass

2. Fermionische Funktionalintegrale

$$\eta_i^2 = 0. \quad (2.2)$$

Ein allgemeines Element der Grassmann-Algebra lässt sich als eine Reihe über Produkte von Generatoren η_i entwickeln. Wegen (2.2) hat diese Reihe nur endlich viele Terme:

$$f(\eta) = f_0 + \sum_i f_i \eta_i + \sum_{i \neq j} f_{ij} \eta_i \eta_j + \dots + f_{12\dots N} \eta_1 \eta_2 \dots \eta_N. \quad (2.3)$$

Als Beispiel nehmen wir die Funktion

$$g(\eta) = \exp \left\{ - \sum_{i,j=1}^N \eta_i A_{ij} \eta_j \right\}. \quad (2.4)$$

Diese ist als eine Reihen-Entwicklung einer Exponentialfunktion definiert. Da die Terme in der Summe, die quadratisch in den Grassmann-Variablen sind, untereinander vertauschen, können wir die Funktion auch als ein Produkt schreiben:

$$g(\eta) = \prod_{i,j} \exp \{ -\eta_i A_{ij} \eta_j \}. \quad (2.5)$$

Wenn man nun die Antivertauschung der Grassmann-Variablen benutzt, findet man

$$g(\eta) = \prod_{i,j=1}^N (1 - \eta_i A_{ij} \eta_j) \quad \text{mit } i \neq j. \quad (2.6)$$

Um unseren Blick über Funktionen mit Grassmann-Variablen erweitern zu können, gehen wir jetzt von dem Fall mit N Variablen in den Fall mit $2N$ Grassmann-Variablen $\eta_1, \dots, \eta_N, \bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_N$ über:

$$h(\eta, \bar{\eta}) = \exp \left\{ - \sum_{i,j} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j \right\}. \quad (2.7)$$

Wenn man genau wie bei der Funktion mit N Variablen vorgeht, findet man dieses Mal

$$h(\eta, \bar{\eta}) = \prod_{i,j=1}^N (1 - \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j). \quad (2.8)$$

2.2 Integration über Grassmann-Variablen

In diesem Abschnitt werden Integrale der Form

$$\int \prod_{i=1}^N d\eta_i f(\eta) \tag{2.9}$$

untersucht und die Rechenregeln für diese aufgezeigt.

Bei dem Versuch, eine Integration über Grassmann-Variablen einzuführen, muss man auf viele Eigenschaften verzichten. Die bekannte Konstruktion über die Riemannsche Summe ist hier nicht möglich. Auch der Versuch, ein unbestimmtes Integral einzuführen, kann nicht gelingen. Um eine Integration zu definieren, muss man daher formal vorgehen, und kann nur einige der fundamentalen Eigenschaften auf die Grassmann-Variablen übertragen.

Die Antivertauschungseigenschaft der Grassmann-Variablen (2.1) ist bei der Berechnung von Mehrfach-Integralen von großer Bedeutung. Wegen dieser Eigenschaft haben wir auch die Antivertauschungsrelationen

$$\{d\eta_i, d\eta_j\} = \{d\eta_i, \eta_j\} = 0 \quad \forall \quad i, j. \tag{2.10}$$

Wenn man diese benutzt, findet man

$$\begin{aligned} \left(\int d\eta_i\right)^2 &= \int d\eta_i \int d\eta_j \\ &= \int d\eta_i d\eta_j = - \int d\eta_j d\eta_i \\ &= -\left(\int d\eta_i\right)^2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

also

$$\left(\int d\eta_i\right)^2 = 0. \tag{2.12}$$

Man setzt

$$\int d\eta_i = 0. \tag{2.13}$$

Wir sind dann frei zu definieren, dass

$$\int d\eta_i \eta_j = \delta_{ij}. \tag{2.14}$$

2. Fermionische Funktionalintegrale

Wenn man (2.10), (2.13) und (2.14) benutzt, findet man zum Beispiel:

$$\int d\eta_2 d\eta_1 \eta_1 \eta_2 = - \int d\eta_2 d\eta_1 \eta_2 \eta_1 = \int d\eta_1 d\eta_2 \eta_2 \eta_1 = 1. \quad (2.15)$$

Als erstes interessantes Beispiel betrachten wir das Integral

$$I[A] = \int \prod_{l=1}^N d\bar{\eta}_l d\eta_l \exp \left\{ - \sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j \right\}. \quad (2.16)$$

Um dieses Integral zu berechnen, schreiben wir zuerst den Integranden als

$$\exp \left\{ - \sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j \right\} = \prod_{i=1}^N \exp \left\{ - \bar{\eta}_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \eta_j \right\}. \quad (2.17)$$

Wegen (2.2) tragen nur die ersten zwei Terme in der Entwicklung der Exponentialfunktion zu diesem Produkt bei und wir erhalten

$$\exp \left\{ - \sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j \right\} = (1 - \bar{\eta}_1 A_{1i_1} \eta_{i_1}) (1 - \bar{\eta}_2 A_{2i_2} \eta_{i_2}) \dots \dots (1 - \bar{\eta}_N A_{Ni_N} \eta_{i_N}). \quad (2.18)$$

Bei dieser Gleichung ist über wiederholte Indizes i_l ($l = 1, 2, \dots, N$) zu addieren. Die Integrationsregeln (2.13) und (2.14) besagen, dass der Integrand von (2.16) das Produkt aller Grassmann-Variablen beinhalten muss. Hieraus schliessen wir, dass es zur Integralberechnung genügt, den folgenden Term zu betrachten:

$$T(\eta, \bar{\eta}) = \sum_{i_1, \dots, i_N} \eta_{i_1} \bar{\eta}_1 \eta_{i_2} \bar{\eta}_2 \dots \eta_{i_N} \bar{\eta}_N A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{Ni_N}. \quad (2.19)$$

Die Minuszeichen in dem Integranden (2.18) sind durch die Antivertauschung $\bar{\eta}_k \eta_{i_k} = -\eta_{i_k} \bar{\eta}_k$ eliminiert worden. Offensichtlich enthält diese Summe nur diejenigen Terme, für die alle Indizes i_1, \dots, i_N verschieden sind. Nun können wir die Information, dass das Produkt von Grassmann-Variablen in der obigen Summe antisymmetrisch unter der Vertauschung von jedem Paar von Indizes ist, benutzen und sagen, dass

2.2. Integration über Grassmann-Variablen

$$T(\eta, \bar{\eta}) = \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 \dots \eta_N \bar{\eta}_N \sum_{i_1, \dots, i_N} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{Ni_N}. \quad (2.20)$$

$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ ist der ϵ -Tensor in N Dimensionen. Wenn wir uns diese Summe anschauen, merken wir auch, dass diese nichts anderes als die Determinante der Matrix A ist, also

$$T(\eta, \bar{\eta}) = (\det A) \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 \dots \eta_N \bar{\eta}_N. \quad (2.21)$$

Schliesslich setzen wir diesen Ausdruck in das Integral (2.16) ein und finden

$$I[A] = \left[\prod_{i=1}^N \int d\bar{\eta}_i d\eta_i \eta_i \bar{\eta}_i \right] (\det A) = \det A. \quad (2.22)$$

Zusammengefasst lautet dieses Ergebnis

$$\int D(\bar{\eta}\eta) \exp \left\{ - \sum_{i,j=1}^N \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j \right\} = \det A,$$

mit $D(\bar{\eta}\eta) = \prod_{l=1}^N d\bar{\eta}_l d\eta_l.$ (2.23)

Ein anderes wichtiges Integral ist das erzeugende Funktional

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \int D(\bar{\eta}\eta) \exp \left\{ - \sum_{i,j} \bar{\eta}_i A_{ij} \eta_j + \sum_i (\bar{\eta}_i \rho_i + \bar{\rho}_i \eta_i) \right\}, \quad (2.24)$$

in dem alle Indizes von 1 bis N laufen und die Quellen ρ_i und $\bar{\rho}_i$ nun Elemente der antivertauschenden Grassmann-Algebra sind, die von $\eta_i, \bar{\eta}_i, \rho_i, \bar{\rho}_i$ erzeugt wird.

Um das erzeugende Funktional zu berechnen, schreiben wir es zuerst als

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \left[\int D(\bar{\eta}\eta) \exp \left\{ - \sum_{i,j} \bar{\eta}_i' A_{ij} \eta_j' \right\} \right] \exp \left\{ \sum_{i,j} \bar{\rho}_i A_{ij}^{-1} \rho_j \right\}. \quad (2.25)$$

Hier bedeuten die gestrichelten Variablen

2. Fermionische Funktionalintegrale

$$\begin{aligned}\eta'_j &\equiv \eta_j - \sum_k A_{jk}^{-1} \rho_k, \\ \bar{\eta}'_i &\equiv \bar{\eta}_i - \sum_k \bar{\rho}_k A_{ki}^{-1}.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Mit (2.23) kommen wir dann auf das Ergebnis

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \det A \exp \left\{ \sum_{i,j} \bar{\rho}_i A_{ij}^{-1} \rho_j \right\}\tag{2.27}$$

für das erzeugende Funktional.

Kapitel 3

Transfer-Matrix-Formalismus

Dieses Kapitel hat das Ziel, eine Einführung in den Transfer-Matrix-Formalismus zu geben. Hier werden die Physik und der Formalismus der Spin-Systeme sowie der Gittereichtheorie diskutiert.

Spin-Systeme sind Modelle für Magnetismus und Phasenübergänge. Gittereichtheorien sind Cutoff-Formulierungen der Eichtheorien stark wechselwirkender Teilchen. Statistische Mechanik und Feldtheorie sind verwandte Themen, und die Verbindungen zwischen diesen beiden werden hier mittels der Transfer-Matrix entwickelt.

Wir werden sehen, dass das Feldtheorie-Problem zu einem Problem der statistischen Mechanik wird, sobald eine euklidische Gittereichtheorie formuliert wird. Für dieselbe Feldtheorie können verschiedene Gitter-Formulierungen angesetzt werden. Man kann z.B. ein symmetrisches Raum-Zeit-Gitter in vier euklidischen Dimensionen benutzen. Eine ebenfalls häufig verwendete Herangehensweise ist diejenige, dass man die Zeit-Achse kontinuierlich lässt und nur die drei räumlichen Dimensionen diskretisiert [10].

3.1 Ising-Modell

Dieser Abschnitt wird von der Phänomenologie und der Physik der Phasenübergänge handeln. Als Illustrationsbeispiel wird das zweidimensionale Ising-Modell herangezogen.

Auf einem zweidimensionalen Quadrat-Gitter werden Punkte durch Vektoren, die aus zwei ganzen Zahlen bestehen, gekennzeichnet:

$$x = (x_1, x_2). \tag{3.1}$$

Auf jedem Punkt wird eine Spin-Variable $s(x)$ definiert. Die Spin-Variable hat entweder den Wert $+1$ oder den Wert -1 . Die Hamilton-Funktion in einem äusseren Feld B lautet

3. Transfer-Matrix-Formalismus

$$S = -J \sum_{x,\mu} s(x)s(x + \hat{\mu}) + B \sum_{x,\mu} s(x). \quad (3.2)$$

Sie wird im Hinblick auf den Bezug zur Feldtheorie mit S bezeichnet. Hier ist $\hat{\mu}$ ein Einheitsvektor auf dem Gitter und die Kopplungskonstante J ist positiv, d.h. die Wirkung bevorzugt Spins, die in dieselbe Richtung zeigen. Die zwei wichtigsten Eigenschaften des Ising-Modells sind:

- Nur benachbarte Spins werden gekoppelt, d.h. die Wirkung ist so lokal wie möglich und
- unter einer globalen Symmetrie, d.h. wenn alle Spins umgedreht werden, bleibt die Wirkung invariant.

Die gesamte statistische Mechanik des Systems erhält man aus der Zustandssumme über alle Konfigurationen, nämlich

$$Z = \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Konf.}}} \exp(-\beta S) \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{kT}. \quad (3.3)$$

Zum Beispiel ist die freie Energie

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad (3.4)$$

und die mittlere Magnetisierung beträgt

$$M = \left\langle \frac{1}{N} \sum_x s(x) \right\rangle = \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Konf.}}} \left[\frac{1}{N} \sum_x s(x) \frac{\exp(-\beta S)}{Z} \right] \quad (3.5)$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial B}. \quad (3.6)$$

Die Suszeptibilität, die ein Maß für die Fluktuationen der Spins bei einem äußeren Feld darstellt, ergibt sich als

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{B=0} \quad (3.7)$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{1}{NkT} \left[\langle s_{tot}^2 \rangle - \langle s_{tot} \rangle^2 \right]. \quad (3.8)$$

Dies ist das bekannte Fluktuations-Dissipationstheorem. In einer anderen Form lautet es

$$\chi = \frac{1}{NkT} \left[\sum_{x,y} \langle s(x)s(y) \rangle - \sum_x \langle s(x) \rangle^2 \right]. \quad (3.9)$$

In dieser Form kann man sehen, dass χ auch ein Maß für die Korrelationen der Spins ist.

Nun definieren wir die Spin-Spin-Korrelationsfunktion:

$$\Gamma(x) = \langle s(x)s(0) \rangle. \quad (3.10)$$

Sei $\langle s(0) \rangle = 0$, d.h. das System habe keine Magnetisierung. Dann erhalten wir für die Suszeptibilität

$$\chi = \frac{1}{kT} \sum_x \Gamma(x). \quad (3.11)$$

Bei hohen Temperaturen ($T \gg T_c$) erwartet man, dass thermische Fluktuationen die Ausrichtungstendenz der entfernten Spins dominieren. Die Korrelationsfunktion $\Gamma(x)$ nimmt mit der Entfernung zwischen den Spins für jede Temperatur mit $T > T_c$ exponentiell ab:

$$\Gamma(x) \sim \exp\left(-\frac{|x|}{\xi(T)}\right). \quad (3.12)$$

$\xi(T)$ ist die *Korrelationslänge* des Systems, sie ist ein Maß für die Grösse der Domänen korrelierter Spins in dem System. Aus dieser Beziehung werden wir später in dieser Arbeit Nutzen ziehen.

3.1.1 Transfer-Matrix des Ising-Modells

Dieser Abschnitt hat das Ziel, die Transfer-Matrix für das eindimensionale Ising-Modell darzustellen. Da für uns hier nur die Einführung der Transfer-Matrix wichtig ist, und nicht die Einzelheiten des Ising-Modells, beschränken wir uns auf den eindimensionalen Fall.

Das eindimensionale Ising-Modell ist eine Kette von N Spins. Wie zuvor erwähnt,

3. Transfer-Matrix-Formalismus

findet die Wechselwirkung nur zwischen den nächsten Nachbarn statt und für die Spin-Variable s_k auf dem k -ten Punkt der Kette gilt: $s_k \in \{-1, +1\}$. Die Hamiltonfunktion, die wir hier wegen des Bezugs zu den anderen Teilen der Arbeit mit S bezeichnen, lautet

$$S = -J \sum_{k=1}^N s_k s_{k+1}. \quad (3.13)$$

Wir fordern die periodische Randbedingung

$$s_{N+1} = s_1. \quad (3.14)$$

Die Zustandssumme (3.3) beträgt

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \exp(-\beta S) \\ &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \left[\prod_{k=1}^N \exp(\beta J s_k s_{k+1}) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sie kann mit Hilfe der Matrix-Elemente

$$\langle s | \hat{T} | s' \rangle = \exp(\beta J s s') \quad (3.16)$$

einer quadratischen Matrix \hat{T} und der periodischen Randbedingung (3.14) auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_N} \langle s_1 | \hat{T} | s_2 \rangle \langle s_2 | \hat{T} | s_3 \rangle \dots \langle s_N | \hat{T} | s_{N+1} \rangle \\ &= \sum_{s_1} \langle s_1 | \hat{T}^N | s_1 \rangle \\ &= \text{Tr } \hat{T}^N. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Diese 2×2 -Matrix besteht aus den folgenden Matrix-Elementen:

$$\begin{aligned} \langle +1 | \hat{T} | +1 \rangle &= \langle -1 | \hat{T} | -1 \rangle = e^{\beta J}, \\ \langle +1 | \hat{T} | -1 \rangle &= \langle -1 | \hat{T} | +1 \rangle = e^{-\beta J}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.2. Transfer-Matrix des harmonischen Oszillators

$$\Rightarrow \hat{T} = \begin{pmatrix} e^{\beta J} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Sie *propagiert* eine Spin-Variable auf einem Punkt der Kette in die auf dem nächsten, deshalb nennt man diese Matrix *Transfer-Matrix* [5, 23]. Diagonalisiert man \hat{T} , findet man die Eigenwerte

$$\lambda_+ = 2 \cosh(\beta J) \quad \text{und} \quad \lambda_- = 2 \sinh(\beta J). \quad (3.20)$$

Mit diesen Eigenwerten können wir nun die Zustandssumme (3.15) in die folgende Form umschreiben:

$$Z = \text{Tr} \hat{T}^N = \lambda_+^N + \lambda_-^N \quad (3.21)$$

$$= \lambda_+^N \left[1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right]. \quad (3.22)$$

Für $N \rightarrow \infty$ wird das Verhältnis $\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N$ klein und wir bekommen

$$Z \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \lambda_+^N. \quad (3.23)$$

3.2 Transfer-Matrix des harmonischen Oszillators

In diesem Teil wird die Transfer-Matrix anhand eines einfachen Beispiels, des harmonischen Oszillators, eingeführt. Wir werden hier kurz die Dynamik eines nichtrelativistischen Systems mit einem Freiheitsgrad untersuchen.

Unsere Ergebnisse werden wir dann in den nachfolgenden Teilen dieser Arbeit benutzen; in feldtheoretischen Diskussionen werden wir lediglich neue Aspekte erwähnen, denen man begegnet, wenn man sich mit mehreren Freiheitsgraden in höheren Dimensionen beschäftigt. Die Lagrange-Dichte des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2). \quad (3.24)$$

In Feynmans Formulierung der Quantenmechanik wird die Übergangsamplitude, dass ein Teilchen von dem Punkt (x_a, t_a) zu dem Punkt (x_b, t_b) propagiert, durch den Ausdruck

3. Transfer-Matrix-Formalismus

$$Z = \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Pfade}}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_M\right). \quad (3.25)$$

beschrieben. Das Teilchen kann allen erdenklichen Wege folgen und alle diese Wege tragen nach dem Superpositionsprinzip der Quantenmechanik kohärent zur Amplitude bei. S_M steht für die Wirkung im Minkowski-Raum für einen bestimmten Weg. Durch diese Wirkung wird bestimmt, wie gewichtig der jeweilige Beitrag zu dem Übergang ist [1, 2]. Sie ist

$$S_M = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L} dt. \quad (3.26)$$

Wir diskretisieren nun die Zeit-Achse und nennen den Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Zeitscheiben

$$\epsilon \equiv t_{i+1} - t_i. \quad (3.27)$$

Gl. (3.25) hat rasch oszillierende Phasen, die wir durch die Einführung der imaginären Zeitvariable $\tau \equiv it$ vermeiden können. So wird jeder Weg mit einem gedämpften Exponentialfaktor gewichtet:

$$\frac{i}{\hbar} S_M = -\frac{1}{2\hbar} \int \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 + \omega^2 x^2 \right\} d\tau. \quad (3.28)$$

Wir definieren die euklidische Wirkung durch

$$S_E \equiv \frac{1}{2} \int \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \tau} \right)^2 + \omega^2 x^2 \right\} d\tau = -i S_M. \quad (3.29)$$

Das Pfadintegral wird

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_i dx_i \exp\left(-\frac{S_E}{\hbar}\right). \quad (3.30)$$

Wenn wir jetzt die Diskretisierung der Zeit benutzen, können wir schreiben, dass

3.2. Transfer-Matrix des harmonischen Oszillators

$$S_E = \frac{1}{2}\epsilon \sum_i \left\{ \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon} \right)^2 + \omega^2 x_i^2 \right\}. \quad (3.31)$$

Die letzten zwei Gleichungen stellen ein Problem der statistischen Mechanik dar: Ein eindimensionales Gitter, dessen Punkte mit dem Index i bezeichnet worden sind. Die Variable x_i ist auf jedem Gitterpunkt i definiert und hat einen endlichen reellen Wert. Wie wir vorher erwähnt haben, sind in der Wirkung nur Terme vorhanden, die die nächsten Nachbarpunkte miteinander koppeln. Durch das Integral wird eine Summation über alle möglichen Wege durchgeführt, und diese Wege werden durch einen Exponentialfaktor gewichtet.

Wo wir nun gerade über das Integral bei der statistischen Physik gelandet sind, können wir uns auch überlegen, was die Bedeutung von \hbar sein könnte. In der statistischen Mechanik übernimmt die Temperatur die Rolle des \hbar . Die Unschärferelation sagt uns, dass \hbar ein Maß für die Fluktuationen in der Quantenmechanik ist, wobei man für die Temperatur dieselbe Vorstellung in der statistischen Mechanik benutzen kann. Für $\hbar \rightarrow 0$ wird die klassische Trajektorie des harmonischen Oszillators der einzige Weg, der zur Amplitude Z beiträgt, und die Quantenfluktuationen werden gänzlich unterdrückt. Man kann sich das statistisch-mechanische System bei $T = 0$ derart vorstellen, dass dort keine Fluktuationen auftreten. Nach diesen Überlegungen kann man behaupten, dass es eine Korrespondenz zwischen \hbar und T gibt.

Mit einer Funktion $T(x_{i+1}, x_i)$ von zwei aufeinanderfolgenden Punkten kann man die Zustandssumme Z folgenderweise aufschreiben:¹

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_i \{ dx_i T(x_{i+1}, x_i) \}. \quad (3.32)$$

Explizit hat $T(x_{i+1}, x_i)$ die Gestalt

$$T(x_{i+1}, x_i) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \left[\frac{1}{\epsilon} (x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \epsilon x_{i+1}^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \epsilon x_i^2 \right] \right\}. \quad (3.33)$$

Dieser Ausdruck ist als das Matrix-Element eines Operators anzusehen, der in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen wird. Wir werden jetzt zeigen, dass T die Äquivalenz des Pfadintegrals mit der hamiltonschen Methode der Quantenmechanik festsetzen wird.

Dazu stellen wir uns zuerst einen Zustandsraum mit den Operatoren \hat{x} und \hat{p} vor. Die Eigenzustände von \hat{x} sind die Zustände, in denen das Teilchen am Ort x lokalisiert ist, also

¹Die Funktion T sollte man nicht mit der Temperatur verwechseln, welche im Folgenden nicht weiter auftauchen wird.

3. Transfer-Matrix-Formalismus

$$\hat{x} |x\rangle = x |x\rangle. \quad (3.34)$$

Sie sind uneigentlich normiert,

$$\langle x'|x\rangle = \delta(x' - x), \quad (3.35)$$

und bilden einen vollständigen Satz:

$$\int dx |x\rangle \langle x| = 1. \quad (3.36)$$

Dieser Ortsoperator \hat{x} und der Impuls-Operator \hat{p} erfüllen die Kommutatorbeziehung

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar. \quad (3.37)$$

Mit diesen beiden Operatoren definieren wir einen Operator \hat{T} :

$$\langle x'|\hat{T}|x\rangle = T(x', x), \quad (3.38)$$

der die Eigenschaft (3.33) hat. \hat{T} ist der diskretisierte Zeitentwicklungsoperator der Quantenmechanik, der imaginäre Zeiten benutzt. Er entwickelt einen Zustand in einen anderen, der in dem zeitlichen Abstand ϵ zu dem vorherigen steht.

Die Zustandssumme kann jetzt mit Matrixelementen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_i dx_i \langle x_{i+1}|\hat{T}|x_i\rangle \\ &= \int \langle x_b|\hat{T}|x_{N-1}\rangle \dots \langle x_1|\hat{T}|x_a\rangle dx_{N-1}\dots dx_1 \\ &= \langle x_b|\hat{T}^N|x_a\rangle. \end{aligned} \quad (3.39)$$

$N - 1$ ist die Anzahl der Scheiben zwischen τ_a und τ_b , da τ_b die Zeit-Koordinate der N ten Scheibe ist. Wenn man periodische Randbedingungen voraussetzt, sieht man, dass

$$Z = \text{Tr}(\hat{T}^N). \quad (3.40)$$

3.2. Transfer-Matrix des harmonischen Oszillators

Wie wir im Abschnitt [3.1] gesehen haben, kann die gesamte statistische Mechanik des Systems aus der Zustandssumme gewonnen werden. Dies verdeutlicht die Wichtigkeit der Transfer-Matrix. Nun müssen wir einen Ausdruck für \hat{T} finden.

Hierzu folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
 \langle x' | \exp \left\{ -\frac{1}{2}\epsilon\hat{p}^2 \right\} | x \rangle &= \int dp dp' \langle x' | p' \rangle \langle p' | \exp \left\{ -\frac{1}{2}\epsilon\hat{p}^2 \right\} | p \rangle \langle p | x \rangle \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int dp dp' \exp \left\{ \frac{ip'x'}{\hbar} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2}\epsilon p^2 \right\} \\
 &\quad \times \delta(p' - p) \exp \left\{ -\frac{ipx}{\hbar} \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int dp \exp \left\{ \frac{ip(x' - x)}{\hbar} \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2}\epsilon p^2 \right\} \\
 &= C \exp \left\{ -\frac{1}{2}\epsilon\hbar^2(x' - x)^2 \right\}. \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Mit dieser Gleichung und der Gleichung (3.33) findet man dann den Operator-Ausdruck

$$\hat{T} = \exp \left\{ -\frac{1}{4\hbar}\epsilon\omega^2\hat{x}^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar}\epsilon\hat{p}^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{4\hbar}\epsilon\omega^2\hat{x}^2 \right\} \tag{3.42}$$

für den Gitter-Abstand ϵ . In diesem Operator ist die Reihenfolge der Operatoren \hat{x} und \hat{p} wichtig, da sie i.A. nicht miteinander vertauschen .

Durch

$$\hat{T} = \exp \left(-\frac{\epsilon}{\hbar}\hat{H}_\epsilon \right) \tag{3.43}$$

kann man den Hamilton-Operator der Theorie definieren, wobei dieser Operator einen komplizierten Ausdruck hat. Für $\epsilon \rightarrow 0$, also für eine kontinuierliche τ -Achse, geht \hat{H}_ϵ über in $\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2\hat{x}^2)$. Um den Unterschied zwischen \hat{H}_ϵ und \hat{H} zu verstehen, betrachte man das Baker-Campbell-Hausdorff-Lemma:

$$\exp(\hat{A}) \exp(\hat{B}) = \exp \left(\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2}[\hat{A}, \hat{B}] + \dots \right). \tag{3.44}$$

Wenn man in dieser Identität $\hat{A} = -\epsilon\hat{p}^2/2\hbar$ und $\hat{B} = -\epsilon\omega^2\hat{x}^2/4\hbar$ einsetzt, sieht man, dass wegen $[\hat{A}, \hat{B}] = O(\epsilon^2)$ gilt:

3. Transfer-Matrix-Formalismus

$$\hat{T} = \exp\left(-\frac{\epsilon}{\hbar} [\hat{H} + O(\epsilon)]\right). \quad (3.45)$$

Durch die Feynman-Interpretation von Z folgt die Schrödinger-Gleichung. Dies bedeutet, dass

$$\psi(x', \tau') = \int Z(x', \tau'; x, \tau) \psi(x, \tau) dx. \quad (3.46)$$

Mit der Annahme, dass $\tau' - \tau = \epsilon$ infinitesimal ist, bekommen wir

$$\begin{aligned} Z = \langle x' | \hat{T}^N | x \rangle &= \langle x' | \exp\left(-\frac{\epsilon}{\hbar} \hat{H}\right) | x \rangle \\ &\approx \langle x' | 1 - \frac{\epsilon}{\hbar} \hat{H} | x \rangle \\ &= \delta(x' - x) - \frac{\epsilon}{\hbar} H \delta(x' - x). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Gleichung (3.46) wird dann

$$\psi(x', \tau') = \psi(x', \tau) - \frac{\epsilon}{\hbar} H \psi(x', \tau), \quad (3.48)$$

oder

$$\hbar \frac{\partial \psi(x, \tau)}{\partial \tau} + H \psi(x, \tau) = 0. \quad (3.49)$$

Dies ist die euklidische Version der Schrödinger-Gleichung. Als eine Bemerkung kann man sagen, dass wir für den freien Fall ($H = H_0 = (\vec{p}^2/2m)$) die Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung erhalten. Dies bedeutet, dass das euklidische Pfadintegral als ein Mittelwert über alle zufällige Wege, die in der Brownschen Bewegung vorkommen können, betrachtet werden kann [7].

3.3 Transfer-Matrix für Feldtheorien

Jetzt werden wir unsere Untersuchungen auf Feldtheorien erweitern. In dem nächsten Abschnitt werden wir dann anhand unserer Resultate die Gemeinsamkeiten und Korrespondenzen zwischen statistischer Mechanik und Feldtheorien finden.

Ein selbstgekoppeltes Skalarfeld in d Raum-Zeit-Dimensionen hat die Lagrange-Dichte

$$L = \int d^{(d-1)}x \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi^2 - \lambda_0 \phi^4 \right\}. \quad (3.50)$$

Wenn wir die Theorie jetzt auf einem anisotropen Raum-Zeit-Gitter mit imaginären Zeiten formulieren, haben wir die (euklidische) Wirkung²

$$S = \sum_x \left\{ \frac{1}{2\tau} a^{d-1} [\Delta_0 \phi(x)]^2 + \frac{1}{2} \tau a^{d-3} \sum_k [\Delta_k \phi(x)]^2 + \frac{1}{2} \tau a^{d-1} \mu_0^2 \phi^2(x) + \tau a^{d-1} \lambda_0 \phi^4(x) \right\}. \quad (3.51)$$

Hier bedeuten a den räumlichen und τ den zeitlichen Abstand zwischen benachbarten Gitterpunkten und Δ_μ steht für den diskreten Differenz-Operator

$$\Delta_\mu \phi(x) \equiv \phi(x + \mu) - \phi(x). \quad (3.52)$$

$\mu = 0$ ist die zeitliche Richtung und $\mu = k$ sind die räumlichen Richtungen. Entsprechend hat man den Vektor $x = (x_0, \vec{x})$.

Um die Wirkung übersichtlicher zu machen, benennen wir die Konstanten um:

$$K_\tau \equiv \frac{a^{d-1}}{2\tau}, \quad K \equiv \frac{\tau a^{d-3}}{2}, \quad b_0 \equiv \frac{\tau a^{d-1}}{2} \mu_0^2, \quad u_0 \equiv \tau a^{d-1} \lambda_0. \quad (3.53)$$

K_τ und K sind die Nächste-Nachbar-Kopplungen in zeitlichen und räumlichen Dimensionen. Es ist zu merken, dass diese Konstanten gleich sind, wenn die Abstände a und τ gleich sind. Das Ergebnis ist

$$S = \sum_x \left\{ K_\tau (\Delta_0 \phi)^2 + K \sum_k (\Delta_k \phi)^2 + b_0 \phi^2 + u_0 \phi^4 \right\}. \quad (3.54)$$

²Ab hier ist unter dem Begriff *Wirkung* die euklidische Wirkung zu verstehen.

3. Transfer-Matrix-Formalismus

Das Pfadintegral der Theorie ist

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_x d\phi(x) e^{-S}. \quad (3.55)$$

Dieses kann man sich auch als die Zustandssumme eines vierdimensionalen statistischen Mechanik-Problems denken.

Wenn wir dieselbe Methode, die wir ab der Gleichung (3.30) benutzt haben, um einen Operator-Ausdruck für die Transfer-Matrix zu finden, für die Felder $\phi(x)$ benutzen, kommen wir zunächst auf das Ergebnis

$$\begin{aligned} \langle \phi' | \hat{T} | \phi \rangle = \exp \left\{ - \sum_{\vec{x}} \left\{ K_{\tau} [\phi'(\vec{x}) - \phi(\vec{x})]^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} K \sum_k \left([\phi'(\vec{x} + k) - \phi'(\vec{x})]^2 + [\phi(\vec{x} + k) - \phi(\vec{x})]^2 \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} b_0 (\phi'^2(\vec{x}) + \phi^2(\vec{x})) + \frac{1}{2} u_0 (\phi'^4(\vec{x}) + \phi^4(\vec{x})) \right\} \right\}. \quad (3.56) \end{aligned}$$

Hier ist $\phi(\vec{x})$ das Feld auf einer Zeitscheibe und $\phi'(\vec{x})$ ist dasjenige auf der nächsten. Mit \hat{T} ist es wieder möglich, das Feld $\phi(\vec{x})$ in zeitlicher Richtung propagieren zu lassen. Vorher brauchten wir \hat{x} und \hat{p} , um einen Operator-Ausdruck für \hat{T} zu finden, deswegen führen wir jetzt die quantisierten Felder $\hat{\phi}(\vec{x})$ und $\hat{\pi}(\vec{x})$ ein. Diese Felder erfüllen die Vertauschungsrelation

$$[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{x}')] = i\delta_{\vec{x}, \vec{x}'}. \quad (3.57)$$

Wie in Kap. [3.2], finden wir dann für die Zustandssumme

$$Z = \text{Tr} \left(\hat{T}^{N+1} \right) \quad (3.58)$$

mit N Scheiben zwischen der ersten und der letzten Zeitscheibe, wenn wir auch hier periodische Randbedingungen voraussetzen. Der Operator-Ausdruck für \hat{T} ist dann

$$\begin{aligned} \hat{T} = \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_x \left\{ K \sum_k [\hat{\phi}(x+k) - \hat{\phi}(x)]^2 + b_0 \hat{\phi}^2(x) + u_0 \hat{\phi}^4(x) \right\} \right\} \\ \times \exp \left\{ - \sum_x \frac{1}{4K_{\tau}} \hat{\pi}^2(x) \right\} \\ \times \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_x \left\{ K \sum_k [\hat{\phi}(x+k) - \hat{\phi}(x)]^2 + b_0 \hat{\phi}^2(x) + u_0 \hat{\phi}^4(x) \right\} \right\} \quad (3.59) \end{aligned}$$

3.4. Verbindungen zwischen statistischer Mechanik und Feldtheorie

Aus dieser Gestalt kann man erkennen, dass \hat{T} wie bei dem harmonischen Oszillator nicht die Exponentialfunktion eines einfachen bekannten Operators ist. Bei dem Fall des symmetrischen Gitters, also wenn der Abstand zwischen den Zeitscheiben gleich dem räumlichen Abstand zwischen benachbarten Gitterpunkten ist ($\tau = a$), geht \hat{T} dann in eine Exponentialfunktion

$$\exp\left(-\hat{H}_\epsilon \tau\right) \quad (3.60)$$

über. Hier ist \hat{H}_ϵ ein *komplizierter* Hamilton-Operator.

Das statistische Mechanik-Problem ist elegant, weil dann $K_\tau = K$ ist. Im Zeit-Kontinuums-Limes haben wir $\tau \rightarrow 0$, also $K_\tau \rightarrow \infty$, $K \rightarrow 0$, aber ihr Produkt bleibt fest:

$$KK_\tau = \frac{1}{4}a^{2(d-2)}. \quad (3.61)$$

Dies ist keine Überraschung. Wie schon vorher erwähnt, kann es mehrere Gitter-Versionen einer Feldtheorie geben. Damit die Physik in verschiedenen Gitter-Formulierungen dieselbe bleibt, müssen die Kopplungen passend gewählt werden.

3.4 Verbindungen zwischen statistischer Mechanik und Feldtheorie

Wie in Kap. [3.3] gesehen, haben wir ein statistisches Mechanik-Problem auf dem symmetrischen Gitter und eine feldtheoretische Formulierung mit Operatoren $\hat{\phi}(x)$, $\hat{\pi}(x)$ und \hat{H}_ϵ , die auf dem symmetrischen Gitter definiert sind. Wir werden die folgenden Korrespondenzen zwischen diesen beiden Formulierungen finden:

statistische Mechanik	Feldtheorie
Freie-Energie-Dichte	Vakuum-Energie-Dichte
Korrelationsfunktion	Propagator
(Korrelationslänge) ⁻¹	Massenlücke (mass gap)

Da die Transfer-Matrix hermitesch ist ($\hat{T} = \hat{T}^\dagger$), kann ihr Spektrum mit einem orthonormalen Satz von Vektoren mit reellen Eigenwerten beschrieben werden.³

$$\hat{T} = \sum_i |i\rangle e^{-E_i \tau} \langle i|, \quad (3.62)$$

³Die Summe \sum_i gibt i.A. auch ein kontinuierliches Spektrum.

3. Transfer-Matrix-Formalismus

$$\Rightarrow \hat{T}^{N+1} = \sum_i |i\rangle e^{-(N+1)E_i\tau} \langle i|. \quad (3.63)$$

Mit der Annahme, dass der Eigenzustand von \hat{H}_ϵ mit dem kleinsten Eigenwert (was natürlich auch der Eigenzustand von \hat{T} mit dem grössten Eigenwert ist) nicht entartet ist, bekommen wir für $N \rightarrow \infty$

$$\hat{T}^{N+1} \rightarrow |0\rangle e^{-E_0T} \langle 0|; \quad (3.64)$$

Hier steht $T = (N+1)\tau$ für die Differenz der Anfangs- und Endzeit. Mit (3.58) erhalten wir

$$Z = e^{-E_0T}. \quad (3.65)$$

Wenn wir den Faktor β in die Definition der freien Energie hinzufügen, sieht die Relation zwischen der Zustandssumme und der freien Energie mit der Gleichung (3.4) wie folgt aus:

$$Z = e^{-F}. \quad (3.66)$$

Die freie Energie ist hier eine extensive Grösse in vier Dimensionen, daraus folgt, dass $F = fVT$ (f : Dichte der freien Energie). Wir wissen, dass E_0 ebenfalls eine extensive Grösse ist, was bedeutet, dass $E_0 = w_0V$ (w_0 : Energiedichte des Quantenvakuums). Also folgt aus dem Vergleich von (3.65) mit (3.66)

$$w_0 = f. \quad (3.67)$$

Dies ist unsere erste Korrespondenz.

Jetzt betrachten wir den feldtheoretischen Propagator im Minkowski-Raum:

$$\Delta(t, \vec{x}) = \left\langle 0 \left| T \hat{\phi}(t, \vec{x}) \hat{\phi}(0, \vec{x}) \right| 0 \right\rangle. \quad (3.68)$$

$\hat{\phi}(t, \vec{x})$ (Feld-Operator im Heisenberg-Bild) und $\phi(\vec{x})$ (Feld im Schrödinger-Bild) verbindet die folgende Relation miteinander:

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = e^{i\hat{H}_\epsilon t} \phi(\vec{x}) e^{-i\hat{H}_\epsilon t} \quad (3.69)$$

3.4. Verbindungen zwischen statistischer Mechanik und Feldtheorie

Wählt man $t > 0$, so erhält man

$$\Delta(t, \vec{x}) = \left\langle 0 \left| \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t} \hat{\phi}(\vec{0}) \right| 0 \right\rangle e^{iE_0 t}. \quad (3.70)$$

Die Verallgemeinerung der Korrelationsfunktion (3.10) in vier Dimensionen

$$\Gamma(x) = \langle s(x) s(0) \rangle \quad (3.71)$$

bekommt dann die folgende Gestalt:

$$\Gamma(x_0, \vec{x}) = \frac{1}{Z} \int \prod_{x'_0, \vec{x}'} d\phi(x'_0, \vec{x}') \phi(x_0, \vec{x}) \phi(0, \vec{0}) e^{-S_E}. \quad (3.72)$$

Nur für die Zeitscheiben mit $x'_0 = 0$ und $x'_0 = x_0$ werden die Rechnungen anders als die bei der Zustandssumme sein. So finden wir den Faktor $\langle \phi' | \hat{T} | \phi \rangle$ zwischen jedem Paar benachbarter Zeitscheiben. Vorher hatten wir für die Zustandssumme den Ausdruck $Z = \text{Tr} \left(\hat{T}^{N+1} \right)$ (3.58) gefunden. Wenn man dieselben Schritte wiederholt, erhält man den folgenden Operator-Ausdruck für die Korrelationsfunktion:

$$\Gamma(x_0, \vec{x}) = \frac{\text{Tr} \left(\hat{T}^P \hat{\phi}(\vec{x}) \hat{T}^{x_0} \hat{\phi}(\vec{0}) \hat{T}^L \right)}{\text{Tr} \left(\hat{T}^{N+1} \right)}. \quad (3.73)$$

Hier ist $P + x_0 + L = N + 1$. Wenn $P, x_0, L \rightarrow \infty$, so dass (3.64) gilt, bekommen wir für die Korrelationsfunktion

$$\Gamma(x_0, \vec{x}) = \left\langle 0 \left| \hat{\phi}(\vec{x}) e^{-x_0 \hat{H} \tau} \hat{\phi}(\vec{0}) \right| 0 \right\rangle e^{x_0 E_0 \tau}. \quad (3.74)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (3.70), so kommt man auf die Identität

$$\Gamma(x_0, \vec{x}) = \Delta(-ix_0 \tau, \vec{x}), \quad (3.75)$$

wenn man $t = -ix_0 \tau$ wählt. Das ist die zweite Korrespondenz zwischen der statistischen Mechanik und der Feldtheorie.

Durch die Berechnung der Korrelationsfunktion in der statistischen Mechanik gewinnt man also den Propagator der Feldtheorie in imaginärer Zeit. Dann

3. Transfer-Matrix-Formalismus

muss natürlich noch die analytische Fortsetzung in die reelle Zeit durchgeführt werden.

An dieser Stelle erinnern wir daran, dass die Korrelationsfunktion eines Systems, das sich nicht am kritischen Punkt befindet, exponentiell mit der Zeit abnimmt (3.12):

$$\Gamma(x_0, \vec{0}) \sim e^{-\frac{|x_0|}{\xi}} \quad \text{für } |x_0| \gg \xi. \quad (3.76)$$

Betrachtet man den Propagator $\Delta(-in\tau, \vec{0})$ mit einem vollständigen Satz von Zuständen,

$$\Delta(-in\tau, \vec{0}) = \sum_l e^{-(E_l - E_0)n\tau} \left| \langle 0 | \hat{\phi}(\vec{0}) | l \rangle \right|^2, \quad (3.77)$$

so sieht man, dass der Zustand mit der kleinsten Energiedifferenz ($E_l - E_0$) die Summe dominiert, wenn $n\tau \gg 1$. Der kleinste Wert von $(E_l - E_0)$ ist m , die physikalische Masse des Teilchens. Das Matrix-Element $|\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{0}) | l \rangle|$ hat fast nie den Wert Null in dieser Theorie. Daraus folgt

$$\Delta(-in\tau, \vec{0}) \sim e^{-mn\tau}. \quad (3.78)$$

Wenn man jetzt die Korrespondenz von der Korrelationsfunktion und dem Propagator (3.75) benutzt, kommt man auf die folgende Gleichung:

$$m = \frac{1}{\tau\xi}. \quad (3.79)$$

Und wenn man noch als zeitlichen Gitter-Abstand denselben wie den räumlichen wählt, erhält man

$$m = \frac{1}{a\xi} \quad (3.80)$$

für ein symmetrisches Raum-Zeit-Gitter.

Diese Gleichung besagt, dass die zugrunde liegende statistische Mechanik fast kritisch sein muss, damit man eine Feldtheorie mit Teilchen kleiner Massen haben kann. Im Kontinuums-Limes gibt es ein Anregungsspektrum von endlichen Massen nur dann, wenn $\xi \rightarrow \infty$.

Wir kommen jetzt zurück auf unsere Annahme, dass der Zustand mit dem größten Eigenwert der Transfer-Matrix (d.h. der Zustand mit dem kleinsten Eigenwert von dem Operator \hat{H}_ϵ) nicht entartet sei. Diese Annahme bedeutet

3.4. Verbindungen zwischen statistischer Mechanik und Feldtheorie

nichts anderes als $m \neq 0$, und deshalb muss ξ endlich sein. Anders ausgedrückt müssen die Parameter in der Wirkung so gewählt werden, dass das System nicht kritisch ist.

Man kann aus der expliziten Darstellung der Transfer-Matrix, die oben diskutiert wurde, nämlich

$$\hat{T} = \exp\left(-\hat{H}_\epsilon \tau\right), \quad (3.81)$$

schliessen, dass \hat{T} ein beschränkter, symmetrischer, positiver Operator ist. Der Begriff positiver Operator bedeutet, dass die Eigenwerte des Operators positiv sind. Die Positivität der Transfer-Matrix ist notwendig für die Existenz eines selbst-adjungierten Hamilton-Operators.

Aber in allgemeineren Fällen, in denen keine explizite Darstellung der Transfer-Matrix bekannt ist, ist die Positivität nicht garantiert.

3. Transfer-Matrix-Formalismus

Kapitel 4

Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

In diesem Kapitel geben wir zuerst eine Zusammenfassung der reinen Eichtheorie im Kontinuum und gehen dann in die Gitter-Version über. Wir benutzen wie im vorherigen Kapitel eine diskretisierte symmetrische Raum-Zeit. Dann wird die Transfer-Matrix für die Eichtheorie ohne Materiefelder eingeführt, und schliesslich wird die Reflexionspositivität anhand dieses unkomplizierten Falls definiert und untersucht.

4.1 Eichfelder

4.1.1 Im Kontinuum

Die Wirkung eines komplexen Vektorfeldes $\phi(x)$ mit N komplexen Komponenten $\phi^i(x)$ ($i = 1, \dots, N$) auf dem euklidischen Kontinuum lautet

$$S = \int d^4x \{ \phi(x)(\square + m^2)\phi(x) + U(\phi(x)\phi(x)) \}. \quad (4.1)$$

Diese Wirkung ist invariant unter globalen Eichtransformationen

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \Lambda \phi(x) \quad (4.2)$$

mit $\Lambda \in \text{SU}(N)$, d.h. es ist eine $N \times N$ Matrix mit $\Lambda^\dagger \Lambda = \mathbf{1}$ und $\det \Lambda = 1$. Diese Wirkung ist aber nicht invariant unter den lokalen Eichtransformationen

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \Lambda(x)\phi(x). \quad (4.3)$$

4. Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Um die Eichinvarianz unter lokalen Eichtransformationen herzustellen, benötigt man die kovariante Ableitung, die ein Ergebnis des Konzepts *Paralleltransporter* ist [7]. Dieser ist eine $SU(N)$ -Matrix, die die Elemente eines Vektorraums in die eines anderen abbildet:

$$U(y, x) : V_x \mapsto V_y. \quad (4.4)$$

Dieser bewirkt eine parallele Verschiebung des Vektors $\phi(x) \in V_x$ entlang einer Kurve von dem Punkt x zu einem anderen Punkt y .

Die Wirkung der lokalen Eichtransformationen auf den Paralleltransporter lautet folgendermaßen:

$$U(y, x) \rightarrow U'(y, x) = \Lambda(y)U(y, x)\Lambda^{-1}(x). \quad (4.5)$$

Für infinitesimale Abstände enthält man

$$U(x + dx, x) = \mathbf{1} - A_\mu(x)dx^\mu. \quad (4.6)$$

A_μ ist das Eichfeld und ein Element der $\mathfrak{su}(N)$ (Lie-Algebra der $SU(N)$). Es transformiert sich unter lokalen Eichtransformationen wie folgt:

$$A'_\mu(x) = \Lambda(x) [\partial_\mu + A_\mu(x)] \Lambda^{-1}(x). \quad (4.7)$$

Somit lässt sich die kovariante Ableitung definieren als

$$D_\mu \phi(x) = [\partial_\mu + A_\mu(x)] \phi(x). \quad (4.8)$$

Sie transformiert sich auch auf kovariante Weise, also in derselben Weise wie das Feld $\phi(x)$ selbst:

$$D'_\mu \phi'(x) = \Lambda(x) D_\mu \phi(x) \quad (4.9)$$

Die Feldstärke ist

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (4.10)$$

Für den Paralleltransporter um ein infinitesimales Parallelogramm mit den Seiten dx und dy in μ und ν -Richtungen haben wir dann

$$U_{inf}(x, x) = \mathbf{1} - F_{\mu\nu}(x)dx^\mu dy^\nu. \quad (4.11)$$

Mit den Transformationsgesetzen des Eichfeldes und der kovarianten Ableitung lässt sich dann einfach finden, dass sich auch die Feldstärke kovariant transformiert:

$$F'_{\mu\nu}(x) = \Lambda(x)F_{\mu\nu}(x)\Lambda^{-1}(x). \quad (4.12)$$

Sowohl $A_\mu(x)$ als auch $F_{\mu\nu}(x)$ sind Elemente der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(N)$. Das bedeutet, dass man diese als Linearkombinationen der hermiteschen Generatoren T_a der $\mathfrak{su}(N)$ schreiben kann (B.5):

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= -igA_\mu^a(x)T_a, \\ F_{\mu\nu}(x) &= -igF_{\mu\nu}^a(x)T_a. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Als invariante Wirkung findet man schliesslich den folgenden Ausdruck mit den kovarianten Ableitungen:

$$S_\phi = \int d^4x \{ D_\mu\phi(x)D_\mu\phi(x) + m^2\phi(x)\phi(x) + U[\phi(x)\phi(x)] \}. \quad (4.14)$$

Hier haben wir von dem Feld $\phi(x)$ Gebrauch gemacht, um Eichfelder und Paralleltransporter einzuführen, die wir ab dem nächsten Unterkapitel dieser Arbeit oft verwenden werden. Das Eichfeld mit seiner Yang-Mills-Wirkung kann auch alleine untersucht werden (reine Eichtheorie). Die Yang-Mills-Wirkung ist

$$S_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (4.15)$$

4.1.2 Eichfelder auf dem Gitter

Der kinetische Teil der Wirkung auf einem hyperkubischen Gitter lautet

$$S_k = \frac{1}{2} \sum_x a^4 \Delta_\mu^f \phi \Delta_\mu^f \phi = - \sum_{\langle x,y \rangle} a^2 \phi(x)\phi(y) + 4 \sum_x a^2 \phi(x)\phi(x). \quad (4.16)$$

Das Materiefeld $\phi(x)$ ist nun nur auf den Gitterpunkten definiert. Das Symbol $\langle x, y \rangle$ hat die Bedeutung, dass man über alle Nächste-Nachbar-Paare summieren muss.

4. Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Auf dem hyperkubischen Gitter ist der kleinste Abstand zwischen den Gitterpunkten a . In dieser Wirkung wurde von der Gitter-Vorwärts-Ableitung

$$\Delta_\mu^f \phi(x) \equiv \frac{1}{a} [\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x)] \quad (4.17)$$

Gebrauch gemacht.

Die Gitter-Rückwärts-Ableitung und die symmetrische Gitter-Ableitung sind folgendermaßen definiert:

$$\Delta_\mu^b \phi(x) \equiv \frac{1}{a} [\phi(x) - \phi(x - a\hat{\mu})], \quad (4.18)$$

$$\Delta_\mu^{sym} \phi(x) \equiv \frac{1}{2a} [\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x - a\hat{\mu})]. \quad (4.19)$$

Die Wirkung (4.16) ist jedoch unter lokalen Eichtransformationen nicht invariant. Deswegen muss man wie bei dem Kontinuums-Fall vorgehen. Während wir im Kontinuums-Fall Paralleltransporter entlang infinitesimaler Abstände benutzt haben, können wir diesmal nur den kleinstmöglichen Abstand auf dem Gitter (a) nehmen. Die Paralleltransporter auf dem Gitter muss man mit den Verbindungen zwischen den nächsten Nachbarpunkten auf dem Gitter assoziieren. Da diese jetzt auf den sogenannten *Links* (Verbindungen zwischen den nächsten Nachbarpunkten) leben, nennt man sie auch *Link-Variablen* (in einigen Texten auch einfach nur *Links* genannt):

$$U(b) \equiv U(x + a\hat{\mu}, x) \equiv U_\mu(x). \quad (4.20)$$

Sie sind Elemente der Eichgruppe und haben folgende Eigenschaft:

$$U(y, x) = U^{-1}(x, y) = U^\dagger(x, y). \quad (4.21)$$

Eine Beziehung, die wir bei der Konstruktion der eichinvarianten Eichfeld-Wirkung benutzen werden, ist

$$U_{-\mu}(x + a\hat{\mu}) \equiv U(x, x + a\hat{\mu}) = U^{-1}(x + a\hat{\mu}, x) = U_\mu^{-1}(x) = U_\mu^\dagger(x). \quad (4.22)$$

Da sich die Paralleltransporter auf dem Gitter aus den Link-Variablen bilden lassen, betrachtet man die Konfiguration der Link-Variablen $\{U(b)\}$ als das Gittereichfeld. Unter lokalen Eichtransformationen transformiert sich die Link-Variable wie folgt:

$$U_\mu^\dagger(x) = U^\dagger(x + a\hat{\mu}, x) = \Lambda(x + a\hat{\mu}) U(x + a\hat{\mu}, x) \Lambda^{-1}(x). \quad (4.23)$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass ein Kopplungsterm wie

$$\sum_{\langle x,y \rangle} \phi(x)U(x,y)\phi(y) \quad (4.24)$$

unter solchen Eichtransformationen invariant bleibt.

Für die invariante Wirkung unter lokalen Eichtransformationen kann man dann den folgenden Ausdruck aufschreiben:

$$\frac{1}{2} \sum_x a^4 D_\mu \phi D_\mu \phi = -a^2 \sum_{\langle x,y \rangle} \phi(x)U(x,y)\phi(y) + 4a^2 \sum_x \phi^2(x). \quad (4.25)$$

Die kovariante Gitter-Vorwärts-Ableitung D_μ ist mit Hilfe der Link-Variable definiert als

$$D_\mu \phi(x) = \frac{1}{a} [U_\mu^{-1}(x)\phi(x + a\hat{\mu}) - \phi(x)]. \quad (4.26)$$

Wenn man sich die Transformation der Link-Variablen (4.23) anschaut, sieht man, dass Ausdrücke wie $\phi(x)U(x,y)\phi(y)$ und $\text{Tr } U(x,x)$ (Spur eines Paralleltransporters um eine geschlossene Kurve) invariant sind und deshalb in eichinvarianten Größen benutzt werden können.

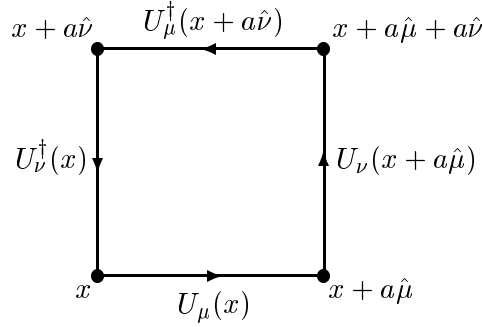
4.1.3 Wilson-Wirkung

Eine Plaquette definieren wir als das kleinste Parallelogramm auf dem Gitter, das aus vier Links und vier Gitterpunkten, nämlich

$$x, \quad x + a\hat{\mu}, \quad x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu} \quad \text{und} \quad x + a\hat{\nu} \quad (4.27)$$

besteht. Wie wir vorher erwähnt haben, besteht ein Paralleltransporter auf dem Gitter aus dem Produkt aufeinanderfolgender Link-Variablen. Speziell definieren wir die Plaquette-Variable als

4. Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter



$$U_p \equiv U_{\mu\nu}(x) \equiv U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x). \quad (4.28)$$

Die Reihenfolge der Link-Variablen in diesem Produkt ist in einer abelschen Theorie nicht wichtig, aber in einer nicht-abelschen Theorie spielt sie eine Rolle, da die Link-Variablen in einer solchen Theorie nicht vertauschen.

Nach Wilsons Vorschlag [12] definiert man die Wirkung für die reine Eichtheorie als eine Summe der Wirkungen über den einzelnen Plaquetten:

$$S[U] = \sum_p S_p(U_p) \quad (4.29)$$

mit

$$\begin{aligned} S_p(U_p) &= -\beta \left[\frac{1}{2\text{Tr}\mathbf{1}} (\text{Tr } U_p + \text{Tr } U_p^{-1}) - 1 \right] \\ &= -\beta \left[\frac{1}{N} \text{Re} \{ \text{Tr } U_p \} - 1 \right] \quad \text{für } \text{SU}(N). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Diese Summation, der wir später öfters begegnen werden, bedeutet

$$\sum_p \equiv \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} = \frac{1}{2} \sum_x \sum_{\mu \neq \nu}. \quad (4.31)$$

Der konstante Term in dieser Wirkung ändert die Physik des Systems nicht und wird in der Literatur deshalb häufig weggelassen. Auch in der Berechnung der Reflexionspositivität in dem letzten Abschnitt dieses Kapitels werden wir auf diesen Term verzichten. Die Wilson-Wirkung ist reell, positiv und verfügt über Eichinvarianz, da $\text{Tr } U_p' = \text{Tr } U_p$.

Bevor wir anfangen, uns mit der Transfer-Matrix zu beschäftigen, vergleichen

wir die Wilson-Wirkung mit der Yang-Mills-Wirkung im Kontinuum.
Das Eichfeld $A_\mu(x)$ ist ein Element der Lie-Algebra $SU(N)$ (4.13):

$$A_\mu(x) = -igA_\mu^a(x)T_a. \quad (4.32)$$

Der mit ihm verbundene Paralleltransporter auf dem Gitter ist

$$U_\mu(x) \equiv e^{-aA_\mu(x)} = 1 - aA_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2A_\mu(x)^2 + \dots \quad (4.33)$$

Wegen der Unvertauschbarkeit der Eichfelder hat man für die Plaquette-Variable U_p das Baker-Campbell-Hausdorff-Lemma (3.44) zu benutzen, um sie als eine Exponentialfunktion der Feldstärke

$$F_{\mu\nu}(x) = \Delta_\mu^f A_\nu(x) - \Delta_\nu^f A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (4.34)$$

schreiben zu können. So findet man

$$U_p = U_{\mu\nu}(x) = \exp(-a^2 F_{\mu\nu}(x) + O(a^3)). \quad (4.35)$$

Schliesslich, wenn man noch die Identität (4.31) benutzt, findet man für die Wilson-Wirkung der reinen Eichtheorie den Ausdruck

$$S = -\frac{\beta}{4N} \sum_x a^4 \text{Tr} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + O(a^5). \quad (4.36)$$

Mit der Wahl

$$\beta = \frac{2N}{g^2} \quad (4.37)$$

der Konstante β bekommt man im Kontinuums-Limes ($a \rightarrow 0$) die Yang-Mills-Wirkung

$$S_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.38)$$

4.2 Transfer-Matrix

Der nächste Schritt bei der Quantisierung der Eichfelder besteht aus der Definition des Funktionalintegrals.

Im Kontinuum hat man für den Erwartungswert einer Observable den Ausdruck

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int D[A_\mu] O e^{-S[A_\mu]} . \quad (4.39)$$

Auf dem Gitter sind die Observablen Funktionen von Link-Variablen: $O(\{U(b)\})$. Wenn man die Korrelationsfunktionen der Link-Variablen berechnen möchte, kann man die Wilson-Wirkung in einer Pfadintegralformulierung benutzen. Sie ist eine eichinvariante Gitter-Wirkung, die im kontinuierlichen Fall mit der Yang-Mills-Wirkung übereinstimmt. Damit diese Eichinvarianz in dem Integrationsprozess nicht zerstört wird, muss man ein eichinvariantes Gruppenmaß dU definieren. Dieses nennt man Haar-Maß der Eichgruppe und es ist invariant unter Eichtransformationen gemäß (4.23).

Für den Erwartungswert hat man dann

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_b dU(b) O e^{-S(U)} \quad \text{mit } Z = \int \prod_b dU(b) e^{-S(U)}. \quad (4.40)$$

In der Anwesenheit von Materiefeldern sieht der Erwartungswert wie folgt aus:

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_b dU(b) \int \prod_x d\phi(x) O e^{-S(U,\phi)}. \quad (4.41)$$

Im Folgenden werden wir für $\prod_b dU(b)$ einfach dU schreiben, wenn keine bestimmte Links gemeint werden. Wenn aber über bestimmte Links integriert wird, wird das in der Schreibweise angedeutet.

Die Transfer-Matrix gibt die Beziehung zwischen Funktionalintegral und dem Hamilton-Operator an. Hier ist es unser Ziel, die Transfer-Matrix in dem Sinne des Funktionalintegrals einzuführen.

Mit B_t bezeichnen wir die Menge aller Links, die zwischen den Gitterpunkten mit der Zeitkoordinate $x_4 = t$ liegen. $B_{t+1,t}$ bedeutet entsprechend die Menge aller Links, die zwischen den Zeitscheiben $x_4 = t$ und $x_4 = t + 1$ liegen. Die Konfigurationen der Link-Variablen auf den Links von B_t bilden \mathcal{U}_t und die auf den Links von $B_{t+1,t}$ bilden $\mathcal{U}_{t+1,t}$. P_t enthält alle Plaquetten, deren Links gänzlich in B_t sind und die Plaquetten aus $P_{t+1,t}$ sind diejenigen, die die Zeitscheiben $x_4 = t$ und $x_4 = t + 1$ verbinden.

Mit diesen Definitionen erhalten wir jetzt die Wirkung als eine Summe der Lagrange-Funktionen über alle Zeiten:

$$S = \sum_t L [\mathcal{U}_{t+1}, \mathcal{U}_{t+1,t}, \mathcal{U}_t]. \quad (4.42)$$

In dieser Summe ist die Lagrange-Funktion

$$L [\mathcal{U}_{t+1}, \mathcal{U}_{t+1,t}, \mathcal{U}_t] = \frac{1}{2} L_1 [\mathcal{U}_{t+1}] + \frac{1}{2} L_1 [\mathcal{U}_t] + L_2 [\mathcal{U}_{t+1}, \mathcal{U}_{t+1,t}, \mathcal{U}_t] \quad (4.43)$$

selbst eine Summe von L_1 , das von Link-Variablen einer einzelnen Zeitscheibe abhängt

$$L_1 [\mathcal{U}_t] = -\frac{\beta}{N} \sum_{p \in P_t} \operatorname{Re} \{ \operatorname{Tr} U_p \}, \quad (4.44)$$

und von L_2 , das von Link-Variablen sowohl aus \mathcal{U}_t als auch aus $\mathcal{U}_{t+1,t}$ abhängt:

$$L_2 [\mathcal{U}_{t+1}, \mathcal{U}_{t+1,t}, \mathcal{U}_t] = -\frac{\beta}{N} \sum_{p \in P_{t+1,t}} \operatorname{Re} \{ \operatorname{Tr} U_p \}. \quad (4.45)$$

Die Transfer-Matrix-Elemente sind dann

$$\hat{T} [\mathcal{U}_{t+1}, \mathcal{U}_t] = \int \prod_{b \in B_{t+1,t}} dU(b) \exp(-L [\mathcal{U}_{t+1}, \mathcal{U}_{t+1,t}, \mathcal{U}_t]). \quad (4.46)$$

\hat{T} entwickelt einen Zustand in einen anderen, der sich auf einem Punkt in der nächsten Zeitscheibe befindet:

$$|\psi_{t+1}\rangle = \hat{T} |\psi_t\rangle \quad (4.47)$$

Wie wir in Kapitel 3 gezeigt haben, ergibt sich die Zustandssumme auf einem Gitter mit N Zeitscheiben mit periodischen Randbedingungen als die Spur über \hat{T}^N :

$$Z = \operatorname{Tr} (\hat{T}^N) = \int \prod_t \left(T [\mathcal{U}_{t+1}, \mathcal{U}_t] \prod_{b \in B_t} dU(b) \right). \quad (4.48)$$

Wie bereits früher erwähnt, ist die Positivität der Transfer-Matrix für die Existenz eines selbstadjungierten Hamilton-Operators nötig, da

$$\hat{H} \equiv -\frac{1}{a} \ln \hat{T}. \quad (4.49)$$

4.3 Zeitreflexion und Reflexionspositivität

In diesem Abschnitt wird zunächst der Reflexionsoperator definiert. Wir definieren ihn sowohl für Eichfelder, als auch für Fermion-Felder. Dann definieren wir die Reflexionspositivität und befassen wir uns damit im Falle der reinen Eichtheorie. Die Diskussion über die Reflexionspositivität mit Fermion-Feldern folgt dann in den nächsten Kapiteln.

Der Reflexionsoperator θ wird als eine antilineare Abbildung definiert:

$$\begin{aligned}\theta(\vec{x}, x_4) &= (\vec{x}, -x_4), \\ \theta\psi(x) &= \bar{\psi}(\theta x)\gamma_4, \\ \theta\bar{\psi}(x) &= \gamma_4\psi(\theta x), \\ \theta U(y, x) &= \overline{U(\theta y, \theta x)}, \\ \theta G(U) &= G^*(\theta U)\end{aligned}\tag{4.50}$$

mit der Matrix

$$\gamma_4 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\tag{4.51}$$

Man kann somit sagen, dass θ das euklidische Äquivalent der hermiteschen Konjugation im Minkowski-Raum ist. Diese ändert das Zeichen in dem Zeitentwicklungsoperator $e^{-i\hat{H}t}$. Deshalb braucht man auch eine Zeitreflexion im euklidischen Raum.

Nun sei F eine Funktion von Feldern mit einer Zeitkoordinate $x_4 \geq 0$. Dann ist (θF) eine Funktion von Feldern, die nur von den Zeitkoordinaten $x_4 \leq 0$ abhängen.

Reflexionspositivität besagt nun, dass der Erwartungswert $\langle(\theta F)F\rangle$ nicht negativ ist:

$$\langle(\theta F)F\rangle = \frac{1}{Z} \int dU e^{-S} (\theta F) F \geq 0.\tag{4.52}$$

Es gibt zwei Sorten von Reflexionen auf dem Gitter. Bei dem ersten Fall (Site-Reflection) reflektiert man bezüglich einer Hyperebene, auf der es alle Gitterpunkte (sites) mit gleicher Zeitkoordinate (z.B. $x_4 = 0$) gibt, während bei der Link-Reflection die Reflexionsebene in der Mitte zweier Zeitscheiben liegt (z.B. $x_4 = 1/2$). Sie wird durch die Links geschnitten, daher der Name. In der Literatur ist θ in diesen beiden Fällen oft unterschiedlich definiert, nämlich durch

$$\begin{aligned}\theta_s : x_4 &\rightarrow -x_4 && \text{für Site-Reflection,} \\ \theta_l : x_4 &\rightarrow 1 - x_4 && \text{für Link-Reflection.}\end{aligned}\tag{4.53}$$

4.3. Zeitreflexion und Reflexionspositivität

In dieser Arbeit verwenden wir in beiden Fällen die Konvention

$$\theta x_4 \rightarrow -x_4 \quad (4.54)$$

und definieren die Zeitkoordinaten der Gitterpunkte bei Link-Reflection als halbzahlig.

Die Positivität des Erwartungswertes $\langle (\theta F)F \rangle$ impliziert die Positivität des Skalarproduktes im Hilbert-Raum [15]:

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0. \quad (4.55)$$

Es ist wichtig, die Reflexionspositivität bei euklidischen Korrelationsfunktionen zu prüfen, da die Hilbert-Raum-Formulierung mit einem wohldefinierten Hamilton-Operator erst dann garantiert werden kann. Das sichert auch die Existenz eines selbstadjungierten Hamilton-Operators. Man kann nicht für alle feldtheoretische Modelle eine explizite Darstellung der Transfer-Matrix angeben. Deshalb braucht man eine Charakterisierung in Abhängigkeit von Erwartungswerten.

Es genügt, Reflexionspositivität entweder mit Link-Reflection oder mit Site-Reflection zu zeigen, um einen Hamilton-Operator definieren zu können. Im Kontinuums-Limes ($a \rightarrow 0$) hat man dann keine Probleme. Aber bei endlichen Gitterabständen ist es am besten, wenn man Positivität beider Sorten hat, da es dann möglich ist, eine positive Transfer-Matrix zu definieren und Korrelationsfunktionen jedes Abstandes zu betrachten.

Nun wird zuerst gezeigt, wie man die Reflexionspositivität anhand der reinen Eichtheorie prüfen kann. Da es zwei Sorten von Reflexionen auf dem Gitter gibt, führen wir diese Rechnung in beiden Fällen durch.

4.3.1 Site-Reflection

Um die Positivität der Reflexion bezüglich einer Ebene mit Gitterpunkten zu untersuchen, empfiehlt es sich, als erstes die Wirkung in drei Terme aufzuspalten:

$$S = S_+ + S_- + S_0. \quad (4.56)$$

Hier hängen S_+ von Variablen mit Zeitkoordinaten $x_4 \geq 0$ und S_- von Variablen mit $x_4 \leq 0$ ab. Für den dritten Term gilt

$$S_0 = L_1 [\mathcal{U}_0], \quad (4.57)$$

4. Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

da er nur aus Plaquette-Variablen in der Zeitscheibe $x_4 = 0$ besteht. Diese Aufspaltung hat den Vorteil, den Exponentialfaktor im Funktionalintegral für den Erwartungswert $\langle(\theta F)F\rangle$ als ein Produkt von drei Exponentialfaktoren zu schreiben, da ein Term der reflektierte des anderen ist:

$$S_- = \theta S_+. \quad (4.58)$$

Der Erwartungswert (4.52) ist dann

$$\langle(\theta F)F\rangle = \frac{1}{Z} \int dU e^{-S_0} \theta(F e^{-S_+}) F e^{-S_+}. \quad (4.59)$$

Mit der Abkürzung

$$\mathcal{F}[\mathcal{U}_0] \equiv \int \prod_{\substack{b \in B_{t+1,t} \\ \text{mit } t > 0}} dU(b) F e^{-S_+} \quad (4.60)$$

folgt

$$\int \prod_{b \in B_0} dU(b) e^{-S_0} |\mathcal{F}[\mathcal{U}_0]|^2 \quad (4.61)$$

für den Zähler des Erwartungswertes. Hier ist der Integrand positiv definit und man hat

$$\langle(\theta F)F\rangle \geq 0. \quad (4.62)$$

4.3.2 Link-Reflection

Auch bei der Link-Reflection spalten wir die Wirkung in drei Terme auf:

$$S = S_+ + S_- + S_C. \quad (4.63)$$

Dieses Mal hängt S_+ nur von Feldern mit positiven Zeitkoordinaten und S_- nur von denen mit negativen Zeitkoordinaten ab. Wie wir zuvor erwähnt haben, benutzen wir jetzt halbzahlige Zeitkoordinaten, und die Abbildung θ ist identisch mit jener der Site-Reflection (4.54). Wir fixieren die Eichung auf den

4.3. Zeitreflexion und Reflexionspositivität

Links zwischen den Zeitscheiben $x_4 = -1/2$ und $x_4 = +1/2$: $U_4(\vec{x}, -\frac{1}{2}) = 1$.
Man erhält wieder

$$S_- = \theta S_+. \quad (4.64)$$

Der Erwartungswert (4.52) beträgt nun

$$\frac{1}{Z} \int dU e^{-S_C} \theta(F e^{-S_+}) F e^{-S_+}. \quad (4.65)$$

Der dritte Term in der Wirkung besteht aus Variablen, die auf den Links leben, die sowohl in der positiven als auch in der negativen Zeithälfte liegen. Er hat die folgende Gestalt:

$$S_C = L_2[\mathcal{U}_{1/2}, \mathbf{1}, \mathcal{U}_{-1/2}] = -\frac{\beta}{N} \sum_{\vec{x}} \sum_{k=1}^3 \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{Tr} U_k^\dagger \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) U_k \left(\vec{x}, -\frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (4.66)$$

Um die Positivität von e^{-S_C} zu zeigen, werden wir Charaktere der Eich-Gruppe benutzen.

Hierzu folgende Definitionen:

r sei eine unitäre Darstellung der kompakten Lie-Gruppe G . Die Matrizen, die die Gruppenelemente darstellen, sind als

$$D^{(r)}(U) \quad (4.67)$$

bezeichnet. Die unter Ähnlichkeitstransformationen invariante Funktion

$$\chi_r(U) \equiv \operatorname{Tr} D^{(r)}(U). \quad (4.68)$$

beschreibt den Charakter von r . Man hat

$$\chi_r(\mathbf{1}) = d_r, \quad (4.69)$$

die Dimension der Darstellung r . \hat{G} sei die Menge aller inäquivalenten unitären irreduziblen Darstellungen des G , der kompakten Lie-Gruppe.

Jeder Term in der Summe (4.66) trägt zum Funktionalintegral des Erwartungswertes bei. Mit $U_k^\dagger \equiv U_k^\dagger(\vec{x}, \frac{1}{2})$ und $U_k \equiv U_k(\vec{x}, -\frac{1}{2})$ ist die Charakterentwicklung von jedem Beitrag

$$\begin{aligned} & \sum_{r \in \hat{G}} d_r c_r \chi_r(U_k^\dagger U_k) \\ = & \sum_{r \in \hat{G}} d_r c_r \sum_{i,j} \left\{ \left[\theta D_{ij}^{(r)}(U_k) \right] D_{ij}^{(r)}(U_k) \right\}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

4. Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Wenn alle Charakter-Entwicklung-Koeffizienten c_r positiv sind, können wir e^{-S_C} wie folgt als eine Summe schreiben:

$$\begin{aligned} e^{-S_C} &= \prod_{k=1,2,3}^{\vec{x}} \left\{ \sum_{r \in \hat{G}} d_r c_r \chi_r(U_k^\dagger U_k) \right\} \\ &= \sum_m b_m (\theta S_m) S_m \quad \text{mit } b_m > 0. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Zur Positivität der Koeffizienten c_r :

$$d_r c_r = \int dU \overline{\chi_r}(U) e^{-S_p(U)} \quad (4.72)$$

Da $d_r > 0$ und

$$\int dU \overline{\chi_r}(U) (\text{Tr } U)^m (\text{Tr } U^\dagger)^n \quad (4.73)$$

nicht negativ ist, haben wir positive Koeffizienten c_r und somit ist e^{-S_C} positiv. So erhalten wir für den Zähler des Erwartungswertes (4.65)

$$\sum_m b_m \left| \int \prod_{x_4 > 0} dU(x) S_m F e^{-S_+} \right|^2. \quad (4.74)$$

Dieser Ausdruck ist positiv.

Kapitel 5

Transfer-Matrix für Fermionen

Zuvor haben wir gesehen, dass die Gitter-Formulierung von Eichfeldern keine Probleme verursacht.

Andererseits tauchen bei Fermionen Schwierigkeiten auf, die bereits beim Dirac-Feld zutage treten [6]. Aus diesem Grund haben wir zuerst den Fall mit Eichfeldern diskutiert und die Reflexionspositivität für diese geprüft. Nun wollen wir aber die Transfer-Matrix auch für die Materiefelder einführen und die Reflexionspositivität für diese prüfen.

Betrachtet man Fermionen auf dem Gitter, zwingt uns das Gitter, auf die sogenannte *naive Diskretisierung* zu verzichten, um die *Fermionen-Verdopplung* zu vermeiden. Die bekanntesten zwei Vorschläge dazu stammen von Wilson [13] (Wilson-Fermionen) und von Kogut und Susskind [14] (staggered Fermions). In diesem Kapitel führen wir Wilson-Fermionen ein und diskutieren ihre Reflexionspositivität.

5.1 Hamilton-Formalismus

Der Hamilton-Operator des freien Fermion-Feldes lautet

$$H = \int d^3 \vec{x} \chi_\gamma^\dagger(\vec{x}) \mathcal{H}_{Dirac, \gamma\delta} \chi_\delta(\vec{x}) \quad (5.1)$$

mit dem Dirac-Hamilton-Operator

$$\mathcal{H}_{Dirac} = m\beta - i\alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (5.2)$$

eines freien Fermions.

5. Transfer-Matrix für Fermionen

Die Feld-Operatoren $\chi_\alpha(\vec{x})$, die das Multi-Fermion-System beschreiben, erfüllen die folgenden Antivertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned}\{\chi_\alpha(\vec{x}), \chi_\beta(\vec{y})\} &= \{\chi_\alpha^+(\vec{x}), \chi_\beta^+(\vec{y})\} = 0, \\ \{\chi_\alpha^+(\vec{x}), \chi_\beta(\vec{y})\} &= \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).\end{aligned}\quad (5.3)$$

Die α_k ($k = 1, 2, 3$) und β -Matrizen sind definiert durch

$$\alpha_k \equiv i\gamma_4\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \equiv \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\quad (5.4)$$

Wenn man den Hamilton-Operator mit den symmetrisierten Ableitungen schreibt, erhält man

$$H = \int d^3\vec{x} \chi_\gamma^+(\vec{x}) \left\{ m\beta + \frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial} - \overrightarrow{\partial} \right) \alpha_k \right\}_{\gamma\delta} \chi_\delta(\vec{x}).\quad (5.5)$$

Nun wollen wir die Theorie auf einem dreidimensionalen symmetrischen Raumgitter definieren. Unser Ziel ist, den Hamilton-Operator des dreidimensionalen Gitters zu bestimmen und auf diesem Wege die dazugehörige Wirkung zu finden [7]. Der Abstand zwischen den nächsten Nachbarnpunkten bleibt unverändert a , und alle Punkte haben drei ganzzahlige Koordinaten. In allen drei Richtungen hat das Gitter L Punkte. Das bedeutet, dass das Volumen des Gitters $(aL)^3$ beträgt.

Jetzt sind die Felder nur noch auf den Gitterpunkten definiert. Die kontinuierliche Ableitung wird zur Gitter-Vorwärts-Ableitung in drei Dimensionen (4.17):

$$\frac{\partial\chi_\alpha(\vec{x})}{\partial x_k} \rightarrow \Delta_k^f \chi_\alpha(\vec{x}) \equiv \frac{1}{a} \left[\chi_\alpha(\vec{x} + \hat{k}) - \chi_\alpha(\vec{x}) \right].\quad (5.6)$$

Die Antivertauschungsrelationen der diskretisierten Felder lauten

$$\begin{aligned}\{\chi_\alpha(\vec{x}), \chi_\beta(\vec{y})\} &= \{\chi_\alpha^+(\vec{x}), \chi_\beta^+(\vec{y})\} = 0, \\ \{\chi_\alpha^+(\vec{x}), \chi_\beta(\vec{y})\} &= \frac{1}{a^3} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\vec{x}\vec{y}}.\end{aligned}\quad (5.7)$$

Diese sogenannte *naive Diskretisierung* erzeugt aus dem Hamilton-Operator (5.5) die folgende Form für das Gitter:

$$H = \sum_{\vec{x}} a^3 \left\{ \chi_{\gamma}^{+}(\vec{x}) m \beta_{\gamma\delta} \chi_{\delta}(\vec{x}) + \frac{i}{2a} \sum_{k=1}^3 \left[\chi_{\gamma}^{+}(\vec{x} + \hat{k}) \alpha_{k,\gamma\delta} \chi_{\delta}(\vec{x}) - \chi_{\gamma}^{+}(\vec{x}) \alpha_{k,\gamma\delta} \chi_{\delta}(\vec{x} + \hat{k}) \right] \right\}. \quad (5.8)$$

Wir nehmen periodische Randbedingungen in allen orthogonalen Richtungen des L^3 -Würfels an. Dann sind die möglichen Impuls-Komponenten auch diskrete Punkte in der Brillouin-Zone:

$$\vec{q} \equiv \left\{ q_k = \frac{2\pi}{L} \nu_k; k = 1, 2, 3 \right\} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \nu_k \leq L - 1. \quad (5.9)$$

Wegen der Periodizität können wir die Brillouin-Zone statt in $0 \leq q_k \leq 2\pi$ auch in $-\pi \leq q_k \leq \pi$ definieren.

Jetzt schreiben wir den Hamilton-Operator im Impuls-Raum mit den fourier-transformierten Feldkomponenten $\tilde{\chi}_{\alpha}(\vec{q})$:

$$\tilde{\chi}_{\alpha}(\vec{q}) = \sum_{\vec{x}} a^3 e^{-iq_k x_k} \chi_{\alpha}(\vec{x}), \quad \chi_{\alpha}(\vec{x}) = \frac{1}{(aL)^3} \sum_{\vec{q}} e^{iq_k x_k} \tilde{\chi}_{\alpha}(\vec{q}); \quad (5.10)$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{(aL)^3} \sum_{\vec{q}} \tilde{\chi}_{\gamma}^{+}(\vec{q}) \left\{ m\beta + \frac{1}{a} \alpha_k \sin q_k \right\}_{\gamma\delta} \tilde{\chi}_{\delta}(\vec{q}). \quad (5.11)$$

Die Eigenwerte der Matrix in geschweiften Klammern betragen

$$E_{\vec{q}} = \pm \left(m^2 + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{a^2} \sin^2 q_k \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.12)$$

Wenn man den Kontinuums-Limes zieht ($a \rightarrow 0$), erhält man die gewöhnliche Energie-Impuls-Beziehung

$$E_{\vec{q}}^2 = m^2 + \vec{p}^2 + O(a^2). \quad (5.13)$$

mit dem Impulsvektor $\vec{p} = \frac{\vec{q}}{a}$.

5. Transfer-Matrix für Fermionen

Die naive Diskretisierung wirft nun jedoch ein Problem auf. Da $\sin(q + \pi) = -\sin(q)$, bekommt man aus (5.12) die gleichen Werte der Energie-Quadrate für Impulse \vec{q} und $\vec{q} + \vec{q}_\pi$ mit

$$\vec{q}_\pi \in \left\{ (0, 0, 0), (\pi, 0, 0), (0, \pi, 0), (0, 0, \pi), \right. \\ \left. (\pi, \pi, 0), (\pi, 0, \pi), (0, \pi, \pi), (\pi, \pi, \pi) \right\}. \quad (5.14)$$

Diese acht Vektoren stellen die acht Ecken der Brillouin-Zone dar. Wegen der Vervielfachung nennt man dies die *naive Diskretisierung*. Wir erhalten dadurch pro Feld-Komponente insgesamt acht Fermionen-Zustände. Mit jeder neuen Richtung verdoppelt sich die Anzahl der Zustände, im Fall mit vier Dimensionen Fall hat man z.B. 16 Zustände.

Zur Problemlösung gibt es zahlreiche Vorschläge in der Literatur. Wie zuvor erwähnt, greifen wir einen der zwei bekanntesten Vorschläge, nämlich den von Wilson [13], auf: Er fügt einen zusätzlichen Term zweiter Ordnung im Hamilton-Operator mit einem Parameter r ($0 < r \leq 1$) ein:

$$H = \sum_{\vec{x}} a^3 \left\{ \chi_\gamma^+(\vec{x}) \left(m + \frac{3r}{a} \right) \beta_{\gamma\delta} \chi_\delta(\vec{x}) \right. \\ \left. + \frac{i}{2a} \sum_{k=1}^3 \left[\chi_\gamma^+(\vec{x} + \hat{k}) \alpha_{k,\gamma\delta} \chi_\delta(\vec{x}) - \chi_\gamma^+(\vec{x}) \alpha_{k,\gamma\delta} \chi_\delta(\vec{x} + \hat{k}) \right] \right. \\ \left. - \frac{r}{2a} \sum_{k=1}^3 \left[\chi_\gamma^+(\vec{x} + \hat{k}) \beta_{\gamma\delta} \chi_\delta(\vec{x}) + \chi_\gamma^+(\vec{x}) \beta_{\gamma\delta} \chi_\delta(\vec{x} + \hat{k}) \right] \right\}. \quad (5.15)$$

Der Hamilton-Operator im Impuls-Raum bekommt dann eine neue Gestalt:

$$H = \frac{1}{(aL)^3} \sum_{\vec{q}} \tilde{\chi}_\gamma^+(\vec{q}) \left\{ m\beta + \frac{r}{a}\beta \sum_{k=1}^3 (1 - \cos q_k) + \frac{1}{a} \alpha_k \sin q_k \right\}_{\gamma\delta} \tilde{\chi}_\delta(\vec{q}). \quad (5.16)$$

Die dazugehörigen Energie-Eigenwerte ändern sich auch dementsprechend:

$$E_{\vec{q}} = \pm \left(\left[m + \frac{r}{a} \sum_{k=1}^3 (1 - \cos q_k) \right]^2 + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{a^2} \sin^2 q_k \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.17)$$

Wenn man jetzt mit diesen den Kontinuums-Limes untersucht, sieht man, dass für $a \rightarrow 0$ der Massenterm m durch $m + \frac{2r}{a} n_\pi$ ersetzt wird. n_π ist die Anzahl der Impuls-Komponenten, die gleich π sind. Man kann erkennen, dass in diesem Fall die Zustände mit $n_\pi \neq 0$ unendlich schwer werden und man deshalb nur ein Fermion mit einer endlichen Masse erhält. Es entspricht der Null-Ecke der Brillouin-Zone.

5.2 Euklidische Formulierung: Wilson-Wirkung

Die Felder $\bar{\chi}(\vec{x})$ sind definiert als

$$\bar{\chi}(\vec{x}) \equiv \chi^\dagger(\vec{x})\gamma_4, \quad (5.18)$$

und sie erfüllen die Antivertauschungsrelationen

$$\{\bar{\chi}(\vec{x}), \chi(\vec{y})\} = \frac{1}{a^3}\gamma_4\delta_{\vec{x},\vec{y}}. \quad (5.19)$$

Somit findet man den folgenden normalgeordneten Hamilton-Operator:

$$H = \sum_{\vec{x}} a^3 \left\{ : \left(\bar{\chi}(\vec{x}) \left[m + \frac{3r}{a} \right] \chi(\vec{x}) \right) : - \frac{1}{2a} \sum_{k=\pm 1}^{\pm 3} \left(\bar{\chi}(\vec{x} + \hat{k}) [r + \gamma_k] \chi(\vec{x}) \right) \right\}. \quad (5.20)$$

$\sum_{k=\pm 1}^{\pm 3}$ bedeutet, dass man über drei positive und drei negative Richtungen summieren muss und $\gamma_{-k} \equiv -\gamma_k$.

Wir wollen jetzt die Zustandssumme der Theorie finden und darüber zum Ziel dieses Abschnittes, nämlich zur Wirkung kommen. Zwischen der Zustandssumme und dem Hamilton-Operator gibt es wegen (3.58) und (3.81) die Relation

$$Z = \text{Tr} e^{-H\beta} \quad \text{mit } \beta = T\tau. \quad (5.21)$$

Hier ist T die Anzahl der Intervalle in temporaler Richtung (vgl. Abschnitt [3.3]). Wir führen nun das vierdimensionale Gitter und die Grassmann-wertigen Felder $\psi(\vec{x})$ und $\bar{\psi}(\vec{x})$ auf diesem ein. Die vierte Dimension erhalten wir durch die Hinzufügung der imaginären Zeit. Das Gitter ist symmetrisch, da wir den temporalen Abstand (τ) gleich dem räumlichen (a) gewählt haben. Die Felder erfüllen die Antivertauschungsrelationen

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = \{\bar{\psi}(x), \bar{\psi}(y)\} = \{\bar{\psi}(x), \psi(y)\} = 0. \quad (5.22)$$

Die Zustandssumme ist ein Grassmannsches Funktionalintegral (2.16) und (2.22):

$$Z \equiv \int d\bar{\psi} d\psi e^{-S} \equiv \int d\bar{\psi} d\psi e^{-\bar{\psi}Q\psi} = \det Q \quad (5.23)$$

5. Transfer-Matrix für Fermionen

mit der Fermion-Matrix Q und der Wirkung

$$S = \sum_x a^4 \left\{ \left[m + \frac{4}{a} \right] (\bar{\psi}(x)\psi(x)) - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\bar{\psi}(x + \hat{\mu})[1 + \gamma_\mu]\psi(x)) \right\} \quad (5.24)$$

für $r = 1$. Diese Wirkung kann man verallgemeinern zu

$$S = \sum_x a^4 \left\{ \left[m + \frac{4r}{a} \right] (\bar{\psi}(x)\psi(x)) - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\bar{\psi}(x + \hat{\mu})[r + \gamma_\mu]\psi(x)) \right\}, \quad (5.25)$$

obwohl man diese generalisierte Form nicht in derselben Weise vom Hamilton-Operator herleiten kann.

Benutzt man die Normierungen sowie den Hopping-Parameter

$$a^{\frac{3}{2}}(am + 4r)^{\frac{1}{2}}\psi(x) \rightarrow \psi(x), \quad a^{\frac{3}{2}}(am + 4r)^{\frac{1}{2}}\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x),$$

$$K \equiv (2am + 8r)^{-1}, \quad (5.26)$$

kann man die Wirkung in verkürzter Form schreiben:

$$\begin{aligned} S &= \sum_x \left\{ [\bar{\psi}(x)\psi(x)] - K \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} [\bar{\psi}(x + \hat{\mu})[r + \gamma_\mu]\psi(x)] \right\} \\ &\equiv \sum_{x,y} \left\{ \bar{\psi}(y) Q_{y,x} \psi(x) \right\}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

$Q_{y,x}$ sind die Fermion-Matrix-Elemente

$$Q_{y,x} \equiv \delta_{y,x} - K \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \delta_{y,x+\hat{\mu}} [r + \gamma_\mu]. \quad (5.28)$$

Um die Eichinvarianz dieser Fermionen-Wirkung zu garantieren, müssen wir noch eine letzte Überlegung anstellen. Bilineare Terme wie $\bar{\psi}(x)\psi(y)$ verhalten sich unter lokalen Eichtransformationen folgendermaßen:

$$\bar{\psi}(x)\psi(y) \rightarrow \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}(x)\Lambda(y)\psi(y). \quad (5.29)$$

Dies verursacht im ersten Term der Wirkung (5.27) zwar keine Probleme, jedoch im zweiten. Hier benötigt man einen Faktor zwischen den beiden Feldern, der sich genauso wie (4.23) transformiert, damit der zweite Term unter lokalen Eichtransformationen invariant bleibt.

Also führen wir noch die folgende Modifizierung durch:

$$\bar{\psi}(x + \hat{\mu})[r + \gamma_\mu]\psi(x) \rightarrow \bar{\psi}(x + \hat{\mu})[r + \gamma_\mu]U_\mu(x)\psi(x). \quad (5.30)$$

Das bedeutet, dass die eichinvariante fermionische Wirkung mit Link-Variablen wie folgt aussieht:

$$S_F = \sum_x \left\{ \bar{\psi}(x)\psi(x) - K \sum_{\mu=1}^4 \left[\bar{\psi}(x + \hat{\mu})[r + \gamma_\mu]U_\mu(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)[r - \gamma_\mu]U_\mu^\dagger(x)\psi(x + \hat{\mu}) \right] \right\}. \quad (5.31)$$

5.3 Reflexionspositivität

Dieser Abschnitt ist der Reflexionspositivität der Wilson-Wirkung gewidmet. Wie bereits in Kapitel 4 werden wir die Positivität beider Arten von Reflexionen untersuchen. Der Unterschied ist, dass wir diesmal auch Fermion-Felder haben. Die Wirkung besteht aus zwei Teilen, einem Eich-Teil S_G (G für Gauge) und einem fermionischen Teil S_F :

$$S = S_G + S_F \quad (5.32)$$

mit

$$S_G = -\frac{1}{2g^2} \sum_x \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} \left\{ U_\nu^\dagger(x)U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu})U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu(x) \right\} + \text{kompl. Konj.} \quad (5.33)$$

und

$$S_F = \sum_x \left\{ \bar{\psi}(x)\psi(x) - K \sum_{\mu=1}^4 \left[\bar{\psi}(x + \hat{\mu})[r + \gamma_\mu]U_\mu(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)[r - \gamma_\mu]U_\mu^\dagger(x)\psi(x + \hat{\mu}) \right] \right\}. \quad (5.34)$$

5. Transfer-Matrix für Fermionen

Offensichtlich sieht der Erwartungswert mit Fermion-Feldern anders aus als im Fall nur mit Eichfeldern:

$$\langle (\theta F) F \rangle = \frac{1}{Z} \int dU d\bar{\psi} d\psi e^{-S} (\theta F) F. \quad (5.35)$$

5.3.1 Link-Reflection

Als erstes spalten wir die Wirkung in drei Terme auf:

$$S = S_+ + S_- + S_C. \quad (5.36)$$

Hier bestehen S_+ und S_- aus Feldern, die jeweils nur von positiven und nur von negativen Zeitkoordinaten abhängen. S_C ist derjenige Term, der die Zeitscheiben $x_4 = -1/2$ und $x_4 = 1/2$ miteinander verbindet.

Aufgrund der Relation

$$S_- = \theta S_+ \quad \Rightarrow \quad S = S_+ + \theta S_+ + S_C \quad (5.37)$$

bekommt der Erwartungswert (5.35) die folgende Gestalt:

$$\langle (\theta F) F \rangle = \frac{1}{Z} \int dU d\bar{\psi} d\psi e^{-S_C} F e^{-S_+} \theta (F e^{-S_+}). \quad (5.38)$$

Aus diesem Grund ist es nur wichtig, S_C zu diskutieren.

In dieser Untersuchung ist der erste Schritt die Eichfixierung: Man wählt die Eichung $U_4(x) = 1$. Es ist ausreichend, diese lediglich auf den Links, die von der Reflexionsebene geschnitten werden, zu fordern.

S_C teilen wir ebenfalls in zwei Terme auf; einer (S_{CG}) ist die Eich-Wirkung, der andere (S_{CF}) hat den fermionischen Beitrag zu S_C :

$$S_C = S_{CG} + S_{CF} \quad (5.39)$$

mit

$$\begin{aligned} S_{CG} &= -\frac{1}{2g^2} \sum_{\vec{x}, k} \text{Tr} \left\{ U_k^\dagger \left(\vec{x}, -\frac{1}{2} \right) U_k \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right\} + \text{k.K.} \\ &= -\frac{1}{2g^2} \sum_{\vec{x}, k} \text{Tr} \left\{ \theta \left[U_k \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right] U_k \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right\} + \text{k.K.} \end{aligned} \quad (5.40)$$

und

$$\begin{aligned}
 S_{CF} &= -K \sum_{\vec{x}} \left\{ \bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) [r + \gamma_4] \psi \left(\vec{x}, -\frac{1}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\psi} \left(\vec{x}, -\frac{1}{2} \right) [r - \gamma_4] \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right\} \\
 &= -K \sum_{\vec{x}} \left\{ \bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) [1 + r\gamma_4] \theta \left[\bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right)^T [1 - r\gamma_4]^T \left(\theta \left[\psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right] \right)^T \right\}. \quad (5.41)
 \end{aligned}$$

Um den letzten Schritt zu begründen, schauen wir uns die Umwandlungen in den zwei Termen des S_{CF} getrennt an:

Der erste Term:

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) [r + \gamma_4] \psi \left(\vec{x}, -\frac{1}{2} \right) &= \bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) [r + \gamma_4] \gamma_4 \theta \bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \\
 &= \bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) [1 + r\gamma_4] \theta \bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right). \quad (5.42)
 \end{aligned}$$

Der zweite Term:

$$\begin{aligned}
 \bar{\psi} \left(\vec{x}, -\frac{1}{2} \right) [r - \gamma_4] \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) &= \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right)^T [\gamma_4 - r]^T \bar{\psi} \left(\vec{x}, -\frac{1}{2} \right)^T \\
 &= \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right)^T [\gamma_4 - r]^T \gamma_4 \left(\theta \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right)^T \\
 &= \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right)^T [1 - r\gamma_4]^T \left(\theta \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right)^T. \quad (5.43)
 \end{aligned}$$

Bei Letzterem haben wir in der ersten Zeile von der Grassmann-Eigenschaft der Variablen Gebrauch gemacht.

Mit den Definitionen $\psi \equiv \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right)$ und $\bar{\psi} \equiv \bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 e^{-S_{CF}} &= \exp \left\{ K \sum_{\vec{x}} \bar{\psi} [1 + r\gamma_4] \theta \bar{\psi} + K \sum_{\vec{x}} \psi^T [1 - r\gamma_4]^T (\theta \psi)^T \right\} \\
 &= \exp \left\{ K \sum_{\vec{x}} \bar{\psi} [1 + r\gamma_4]^{\frac{1}{2}} [1 + r\gamma_4]^{\frac{1}{2}} \theta \bar{\psi} \right\} \\
 &\quad \times \exp \left\{ K \sum_{\vec{x}} \psi^T ([1 - r\gamma_4]^T)^{\frac{1}{2}} ([1 - r\gamma_4]^T)^{\frac{1}{2}} (\theta \psi)^T \right\}. \quad (5.44)
 \end{aligned}$$

5. Transfer-Matrix für Fermionen

Nun benutzen wir ein Lemma aus [16] zum Zeigen der Positivität des obigen Wirkung-Exponentials (5.44).

Hierzu einige Definitionen:

\mathcal{V}_4^+ : Menge der Funktionen, die von Variablen mit $x_4 > 0$ abhängen,

\mathcal{V}_4^- : Menge der Funktionen, die von Variablen mit $x_4 < 0$ abhängen,

\mathcal{P} : Der Kegel, der von positiven Funktionen der Form $(\theta F)F$ mit $F \in \mathcal{V}_4^+$ erzeugt wird.

Lemma: \mathcal{P} ist ein multiplikativer Kegel, d.h. wenn $A, B \in \mathcal{P}$, so ist auch $(AB) \in \mathcal{P}$.

Beweis:

Seien

$$A \equiv \sum (\theta A_i) A_i \quad \text{und} \quad B \equiv \sum (\theta B_i) B_i \quad \text{mit} \quad A_i, B_j \in \mathcal{V}_4^+. \quad (5.45)$$

Wir können annehmen, dass A und B homogene Elemente der Grassmann-Algebra vom Grad a_i bzw. b_j sind. Dann ist

$$AB = \sum_{i,j} (\theta A_i)(\theta B_j) A_i B_j (-1)^{(a_i b_j)} \quad (5.46)$$

$$= \sum_{i,j} \theta(B_j A_i)(A_i B_j) (-1)^{(a_i b_j)} \quad (5.47)$$

$$= \sum_{i,j} \theta(A_i B_j)(A_i B_j) \in \mathcal{P}. \quad (5.48)$$

Durch geeignete Wahl von A und B gelangt man zu dem Ergebnis, dass

$$e^{-S_{CF}} \quad (5.49)$$

positiv ist. Damit erhält (5.38) die folgende Form:

$$\langle (\theta F) F \rangle = \sum_i \left| \int dU d\bar{\psi} d\psi \mathcal{F}_i(U, \psi, \bar{\psi}) \right|^2 \geq 0. \quad (5.50)$$

5.3.2 Site-Reflection

Der Beweis für die Site-Reflection-Positivität ist ein bisschen länger. In diesem Abschnitt wird er für den Fall $r = 1$ durchgeführt. Hier bedeuten \mathcal{V}_4^+ den Halbraum mit $x_4 > 0$, \mathcal{V}_4^- den Halbraum mit $x_4 < 0$ und \mathcal{V}_3^0 den dreidimensionalen, in den vierdimensionalen Raum eingebetteten Raum mit $x_4 = 0$. Es ist diesmal

anschaulicher, die Eich- und Fermionenteile getrennt zu betrachten. Wir schreiben deshalb

$$S = S_G + S_F \quad (5.51)$$

mit jeweiligen Aufspaltungen in drei Terme

$$S_G = S_G^+ + S_G^- + S_G^0, \quad (5.52)$$

und

$$S_F = S_F^+ + S_F^- + S_F^0. \quad (5.53)$$

S_G^+ und S_F^+ hängen von Variablen aus \mathcal{V}_4^+ ab; S_G^- und S_F^- hingegen von Variablen aus \mathcal{V}_4^- ; S_G^0 und S_F^0 wiederum von Variablen aus \mathcal{V}_3^0 .

Um die Abhängigkeit von S_F^+ und S_F^- von Fermi-Variablen mit $x_4 = 0$ zu diskutieren, müssen wir die Terme in der fermionischen Lagrange-Funktion, die zwei verschiedene Zeitscheiben miteinander verbinden, untersuchen [17]. Diese sind

$$A \equiv -K \left\{ \bar{\psi}(x + \hat{4})[1 + \gamma_4]U_4(x)\psi(x) + \bar{\psi}(x)[1 - \gamma_4]U_4^\dagger(x)\psi(x + \hat{4}) \right\}. \quad (5.54)$$

Mit den zweikomponentigen Weyl-Spinoren

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v^+ \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_4 = (u^+, -v) \quad (5.55)$$

und den Operatoren

$$[1 + \gamma_4] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [1 - \gamma_4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.56)$$

bekommen wir für diese Terme

$$\begin{aligned} A &= -K \left\{ (u^+(x + \hat{4}), -v(x + \hat{4})) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_4(x) \begin{pmatrix} u(x) \\ v^+(x) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (u^+(x), -v(x)) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U_4^\dagger(x) \begin{pmatrix} u(x + \hat{4}) \\ v^+(x + \hat{4}) \end{pmatrix} \right\} \\ &= -2K \left\{ u^+(x + \hat{4})U_4(x)u(x) - v(x)U_4^\dagger(x)v^+(x + \hat{4}) \right\}. \quad (5.57) \end{aligned}$$

5. Transfer-Matrix für Fermionen

Somit erhält man

$$\begin{aligned} S_F^+ &= \mathcal{S}(U, \psi, \bar{\psi}, u(\vec{x}, 0), v(\vec{x}, 0)) \\ \text{und } S_F^- &= \tilde{\mathcal{S}}^*(\theta U, \theta\psi, \theta\bar{\psi}, u^+(\vec{x}, 0), v^+(\vec{x}, 0)) \quad \text{mit } U, \psi, \bar{\psi} \in \mathcal{V}_4^+. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Das Symbol $\tilde{}$ bedeutet, dass die Reihenfolge der Fermi-Variablen umgedreht werden muss. S_G^+ und S_G^- sind jeweils Funktionen von U und θU .

Nun haben wir für den Erwartungswert (5.35) bei der Site-Reflection den Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle (\theta F) F \rangle &= \frac{1}{Z} \int \prod_{\vec{x}, k} dU_k(\vec{x}, 0) d\bar{\psi}(\vec{x}, 0) d\psi(\vec{x}, 0) e^{-(S_F^0 + S_G^0)} \\ &\times \tilde{\mathcal{S}}^*(U(\vec{x}, 0), u^+(\vec{x}, 0), v^+(\vec{x}, 0)) \times \mathcal{S}(U(\vec{x}, 0), u(\vec{x}, 0), v(\vec{x}, 0)). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Die Integration wurde über alle fermionischen Variablen aus \mathcal{V}_4^+ und \mathcal{V}_4^- durchgeführt.

S_G^0 hat die Gestalt

$$S_G^0 = -\frac{1}{2g^2} \sum_{\substack{\vec{x}, \\ k \neq l}} \text{Tr} \left\{ U_l^\dagger(\vec{x}) U_k^\dagger(\vec{x} + \hat{l}) U_l(\vec{x} + \hat{k}) U_k(\vec{x}) \right\} + \text{k. K.} \quad (5.60)$$

und verursacht keine Probleme in der Positivität.

Wichtig ist es noch, die Wirkung S_F^0 zu untersuchen. In expliziter Form lautet sie

$$\begin{aligned} S_F^0 &= \sum_{\vec{x}} \left\{ \bar{\psi}(\vec{x}, 0) \psi(\vec{x}, 0) - K \sum_{k=1}^3 \left[\bar{\psi}(\vec{x} + \hat{k}, 0) [1 + \gamma_k] U_k(\vec{x}, 0) \psi(\vec{x}, 0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{\psi}(\vec{x}, 0) [1 - \gamma_k] U_k^\dagger(\vec{x}, 0) \psi(\vec{x} + \hat{k}, 0) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Hier wird über alle Punkte in der Zeitscheibe $x_4 = 0$ summiert. Der Grund, warum die Summe $\sum_{k=1}^3$, und nicht $\sum_{\mu=1}^4$ benutzt wird, ist die Tatsache, dass diejenigen Terme, die die $x_4 = 0$ -Scheibe mit den anderen Zeitscheiben verbinden, bereits in S_F^+ und S_F^- enthalten sind.

Unsere Arbeit wird erleichtert, wenn wir S_F^0 als eine Summe von drei Termen schreiben:

$$S_F^0 = S_1 + S_2 + S_3,$$

$$\text{mit } S_1 = u^+ B u - v B v^+, \quad S_2 = u^+ C v^+ \quad \text{und} \quad S_3 = v C u. \quad (5.62)$$

In dieser Aufspaltung sind B und C selbstadjungierte Matrizen und sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} B_{\vec{y}, \vec{x}} &= \delta_{\vec{y}, \vec{x}} - K \sum_{k=1}^3 \left[\delta_{\vec{y}, \vec{x} + \hat{k}} U_k(\vec{x}, 0) + \delta_{\vec{y} + \hat{k}, \vec{x}} U_k^\dagger(\vec{y}, 0) \right], \\ C_{\vec{y}, \vec{x}} &= iK \sum_{k=1}^3 \left[\delta_{\vec{y}, \vec{x} + \hat{k}} \sigma_k U_k(\vec{x}, 0) - \delta_{\vec{y} + \hat{k}, \vec{x}} \sigma_k U_k^\dagger(\vec{y}, 0) \right]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Mit dieser Aufspaltung der Wirkung S_F^0 erhalten wir für die fermionische Integration in (5.59) den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} P(U) &\equiv \int \prod du^+(\vec{x}, 0) du(\vec{x}, 0) dv^+(\vec{x}, 0) dv(\vec{x}, 0) \\ &\quad \times \exp \{ -u^+ B u - v^+ B^T v \} \times \exp \{ -u^+ C v^+ - v C u \} \\ &\quad \times \tilde{\mathbb{S}}^*(U, u^+, v^+) \times \mathbb{S}(U, u, v). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Jetzt wollen wir diskutieren, unter welcher Bedingung die Matrix B positiv ist, da diese eine wichtige Rolle in der Positivität des $P(U)$ spielt.

B ist eine $N \times N$ -Matrix, die zum Teil für die Selbstkopplungen der Felder auf den Gitterpunkten sorgt und zum Teil Nächste-Nachbar-Punkte miteinander koppelt. Hier ist $N = 2V N_c$ mit $V = L^3$ Gitterpunkten auf der Zeitscheibe $x_4 = 0$ und mit N_c Farbfreiheitsgraden. Der Faktor 2 kommt von Weyl-Spinoren. Die Link-Variablen U_k sind $N_c \times N_c$ -Matrizen [24].

Dass die Matrix B positiv definit ist, bedeutet

$$(a, Ba) \geq 0 \quad \text{für beliebige Vektoren } a, \quad (5.65)$$

$$\text{d.h.} \quad \sum_{i,j} a_i^* B_{ij} a_j \geq 0. \quad (5.66)$$

Wir nehmen an, dass die Indizes i und j sowohl für Ortskoordinaten \vec{y} und \vec{x} als auch für Farbindizes s und r ($s, r \in \{1, 2\}$) stehen¹:

$$i \mapsto \vec{y}, s \quad \text{und} \quad j \mapsto \vec{x}, r. \quad (5.67)$$

Dann erhalten wir von (5.66)

$$\sum_{\substack{\vec{x}, \vec{y} \\ r, s}} a_s^*(\vec{y}) B_{sr}(\vec{y}, \vec{x}) a_r(\vec{x}) \geq 0. \quad (5.68)$$

¹Bezüglich der Spinor-Indizes ist B proportional zur Einheitsmatrix

5. Transfer-Matrix für Fermionen

B ist eine Matrix der Form $\mathbf{1} - KM$ (vgl. (5.63)) mit einer Matrix M , d.h. (5.68) können wir wie folgt umschreiben:

$$\sum_{\vec{x}, r} a_r^*(\vec{x}) a_r(\vec{x}) - K \sum_{\substack{\vec{x}, \vec{y} \\ r, s}} a_s^*(\vec{y}) M_{sr}(\vec{y}, \vec{x}) a_r(\vec{x}) \geq 0, \quad (5.69)$$

was nichts anderes ist, als

$$(a, a) - K(a, Ma) \geq 0. \quad (5.70)$$

Nun kann die Norm des Vektors a ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich 1 gesetzt werden: $\|a\| = 1 \Rightarrow (a, a) = 1$.

Also, wir müssen zeigen, dass $K(a, Ma) \leq 1$. Mit der Bedingung $K < 1/6$ bekommt das Problem die Form

$$(a, Ma) \leq 6. \quad (5.71)$$

Aufgrund der Normierung $\|a\| = 1$ bedeutet dies [25]

$$\|M\| \leq 6, \quad \text{da} \quad \|M\| \equiv \sup \frac{\|Ma\|}{\|a\|}. \quad (5.72)$$

In unserem Fall ist die Matrix M eine Summe von sechs Termen:

$$M = \sum_{i=1}^6 M_i \quad (5.73)$$

$$\text{mit z.B.} \quad M_1^{ab}(\vec{y}, \vec{x}) = \delta_{\vec{y}, \vec{x} + \hat{i}} U_1^{ab}(\vec{x}) \quad \text{für} \quad i = 1. \quad (5.74)$$

Dann gilt die Ungleichung

$$\|M\| \leq \sum_{i=1}^6 \|M_i\|. \quad (5.75)$$

Nun besitzt die Ortsmatrix $\delta_{\vec{y}, \vec{x} + \hat{k}}$ in jeder Zeile und in jeder Spalte nur ein nichtverschwindendes Matrix-Element mit dem Wert 1, und hat eine Norm $\|\delta_{\vec{y}, \vec{x} + \hat{k}}\| \leq 1$. Daraus folgt $\|M_i\| \leq 1$, da $\|U\| = 1$, denn U ist eine unitäre Matrix mit $U^\dagger U = 1$.

Somit ist $\|M\| \leq 6$ und die Positivität der Matrix B folgt für $K < 1/6$.

Unter dieser Bedingung kann man also schreiben, dass $u^+ B u = u^+ B^{1/2} B^{1/2} u$. Dies liefert für die obige Größe $P(U)$ (5.64):

$$P(U) \geq 0. \quad (5.76)$$

Hier sollte man erwähnen, dass die Definition der zweikomponentigen Spinoren u und v unsere Arbeit sehr erleichtert hat; dadurch konnten wir S_F^0 in drei Terme

trennen, was es uns ermöglicht hat, die Positivität des Exponentialfaktors in $P(U)$ zu sehen.

Der Erwartungswert (5.35) ist nun nichts anderes als das Funktionalintegral

$$\langle (\theta F) F \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{\vec{x}, k} dU_k(\vec{x}, 0) e^{-S_G^0} P(U) \geq 0. \quad (5.77)$$

5. Transfer-Matrix für Fermionen

Kapitel 6

Majorana-Fermionen auf dem Gitter

6.1 Wirkung für Majorana-Fermionen

Für die Super-Yang-Mills-Theorie, und im Allgemeineren für eine Yang-Mills-Theorie mit Majorana-Fermionen in der adjungierten Darstellung benötigen wir zuerst die Definition der Majorana-Fermionen in der euklidischen Raumzeit [24, 26].

Für Majorana-Fermionen sind die Grassmann-Variablen ψ und $\bar{\psi}$ im Gegensatz zu den Dirac-Fermionen nicht unabhängig voneinander. Es gelten (C.6), (C.7):

$$\psi = C\bar{\psi}^T \quad (6.1)$$

mit der Ladungskonjugationsmatrix

$$C \equiv -\gamma_2\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Die unter den lokalen Eichtransformationen nicht invarianten und deshalb durch (5.30) modifizierten Terme in der Wilson-Dirac-Wirkung müssen nun erneut ergänzt werden, da das Transformationsverhalten der Majorana-Felder in der adjungierten Darstellung wie folgt aussieht:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \Lambda(x)\psi(x)\Lambda^{-1}(x). \quad (6.3)$$

Terme der Form

$$\bar{\psi}(x + \hat{\mu})U_\mu(x)\psi(x) \quad (6.4)$$

6. Majorana-Fermionen auf dem Gitter

sind also jetzt nicht mehr invariant.

Anhand der Invarianz-Eigenschaft der Spur kann man aber mit Hilfe von (4.23) und (6.3) sehen, dass ein Term wie

$$\text{Tr} \left\{ \bar{\psi}(x + \hat{\mu}) U_{\mu}(x) \psi(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \right\} \quad (6.5)$$

eichinvariant ist.

Somit verfügt die folgende Fermion-Wirkung von Curci und Veneziano [18] über Eichinvarianz:

$$S_F = \sum_x \left\{ -\frac{1}{2a} \text{Tr} \sum_{\mu} \left[\bar{\psi}(x + a\hat{\mu}) [r + \gamma_{\mu}] U_{\mu}(x) \psi(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\psi}(x) [r - \gamma_{\mu}] U_{\mu}^{\dagger}(x) \psi(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \right] \right. \\ \left. + \left(M + \frac{4r}{a} \right) \text{Tr} \bar{\psi}(x) \psi(x) \right\}. \quad (6.6)$$

Man könnte diese Wirkung anhand der Komponenten-Notation (B.5)

$$\psi(x) = \psi^a(x) T^a \quad (6.7)$$

($a = 1, \dots, N_c^2 - 1$) umschreiben und zudem noch die Felder umnormieren:

$$a^{3/2} (aM + 4r)^{1/2} \psi \rightarrow \psi, \quad a^{3/2} (aM + 4r)^{1/2} \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}. \quad (6.8)$$

Mit dem Hopping-Parameter

$$K = \frac{1}{2aM + 8r} \quad (6.9)$$

liefert das die von Montvay [19] vorgeschlagene Version:

$$S_F = \frac{1}{2} \sum_x \left\{ \bar{\psi}^a(x) \psi^a(x) - K \sum_{\mu=1}^4 \left[\bar{\psi}^a(x + a\hat{\mu}) [r + \gamma_{\mu}] V_{\mu}^{ab}(x) \psi^b(x) \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{\psi}^a(x) [r - \gamma_{\mu}] (V_{\mu}^T)^{ab}(x) \psi^b(x + a\hat{\mu}) \right] \right\}. \quad (6.10)$$

6.1. Wirkung für Majorana-Fermionen

Die Matrix V für die Link-Variablen in adjungierter Darstellung ist ein Element der Gruppe $SO(3)$, ihre Definition und Eigenschaften sind:

$$V_\mu^{ab}(x) \equiv V_\mu^{ab}[U(x)] \equiv 2 \operatorname{Tr} \left[U_\mu(x) T^a U_\mu^\dagger(x) T^b \right], \quad (6.11)$$

$$V_\mu^{ab}(x) = \left(V_\mu^{ab}(x) \right)^* = \left((V_\mu^T(x))^{-1} \right)^{ab}. \quad (6.12)$$

Die Fermion-Matrix (5.28) erhält im Falle der Majorana-Fermionen die folgende Form mit Farbindizes a und b :

$$Q_{y,x}^{ab} = \frac{1}{2} \delta_{y,x} \delta^{ab} - \frac{K}{2} \sum_{\mu=1}^4 \left\{ \delta_{y,x+\hat{\mu}} [r + \gamma_\mu] V_\mu^{ab}(x) + \delta_{y+\hat{\mu},x} [r - \gamma_\mu] (V_\mu^T(y))^{ab} \right\}. \quad (6.13)$$

Hier könnte man noch anmerken, dass es mehr als eine mögliche Gitter-Version einer supersymmetrischen Feldtheorie mit Majorana-Fermionen geben kann. Eine andere, in den letzten Jahren eingeführte Version basiert z.B. auf fünfdimensionalen *domain walls* [26].

Die Wirkung (6.10) werden wir im folgenden Abschnitt beim Prüfen der Reflexionspositivität benutzen.

Einschub: Naiver ($r = 0$) Kontinuums-Limes der Curci-Veneziano-Wirkung:

Wie wir im Abschnitt [4.1.3] für die Wirkung der reinen Eichtheorie gemacht haben, wollen wir hier den Kontinuums-Limes der Wirkung mit Majorana-Feldern untersuchen.

Benutzt man (4.17), (4.32) und (4.33), gelangt man von (6.6) zur folgenden Gestalt:

$$S_F = \sum_x M \operatorname{Tr} \bar{\psi}(x) \psi(x) - \frac{1}{2a} \operatorname{Tr} \sum_{x,\mu} \left\{ \left(\bar{\psi}(x) + a \Delta_\mu^f \bar{\psi}(x) \right) \gamma_\mu (1 - a A_\mu(x)) \psi(x) (1 + a A_\mu(x)) - \bar{\psi}(x) \gamma_\mu (1 + a A_\mu(x)) \left(\psi(x) + a \Delta_\mu^f \psi(x) \right) (1 - a A_\mu(x)) + \mathcal{O}(a^2) \right\}. \quad (6.14)$$

Im Übergang zum Kontinuum ($\sum_x \rightarrow \int d^4x$ und $\Delta_\mu^f \rightarrow \partial_\mu$) bedeutet dies

6. Majorana-Fermionen auf dem Gitter

$$\begin{aligned}
S_F \rightarrow & \int d^4x M \operatorname{Tr} \bar{\psi}(x) \psi(x) \\
& - \frac{1}{2a} \int d^4x \operatorname{Tr} \left\{ (\bar{\psi}(x) + a \partial_\mu \bar{\psi}(x)) \gamma_\mu (1 - a A_\mu(x)) \psi(x) (1 + a A_\mu(x)) \right. \\
& \quad \left. - \bar{\psi}(x) \gamma_\mu (1 + a A_\mu(x)) (\psi(x) + a \partial_\mu \psi(x)) (1 - a A_\mu(x)) + \mathcal{O}(a^2) \right\} \quad (6.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \int d^4x M \operatorname{Tr} \bar{\psi}(x) \psi(x) \\
& - \frac{1}{2a} \int d^4x \operatorname{Tr} \left\{ -2a \bar{\psi}(x) \gamma_\mu [A_\mu(x), \psi(x)] \right. \\
& \quad \left. + a (\partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) - \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \partial_\mu \psi(x)) \right\} + \mathcal{O}(a) \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Anhand der Komponenten-Schreibweise der Eich- (4.13) und Majorana-Felder (6.7) gelangt man zu

$$\begin{aligned}
S_F \rightarrow & \int d^4x M \bar{\psi}^a(x) \psi^b(x) \operatorname{Tr}(T^a T^b) \\
& + \int d^4x \left\{ -ig \bar{\psi}^a(x) \gamma_\mu A_\mu^c(x) \psi^d(x) \operatorname{Tr}(T^a [T^c, T^d]) \right. \\
& \quad \left. + \bar{\psi}^a(x) \gamma_\mu \partial_\mu \psi^b(x) \operatorname{Tr}(T^a T^b) \right\} + \mathcal{O}(a) \quad (6.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= & \frac{1}{2} \int d^4x M \bar{\psi}^a(x) \psi^a(x) \\
& + \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\psi}^a(x) \gamma_\mu [\partial_\mu \psi^a(x) + g f_{cdb} A_\mu^c(x) \psi^d(x)] + \mathcal{O}(a). \quad (6.18)
\end{aligned}$$

Somit erhält man

$$S_F = \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\psi}^a(x) [\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu + M] \psi^a(x). \quad (6.19)$$

Dies ist die Wirkung im kontinuierlichen Fall.

6.2 Reflexionspositivität

In diesem Abschnitt prüfen wir die Positivität der Theorie mit Majorana-Fermionen. Da wir nur die Fermion-Wirkung modifiziert haben (6.10), nehmen wir als Eich-Teil der gesamten Wirkung denselben wie in Kapitel 5:

$$S = S_G + S_F \tag{6.20}$$

mit

$$S_G = -\frac{1}{2g^2} \sum_x \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} \left\{ U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu(x) \right\} + \text{kompl. Konj.} \tag{6.21}$$

Um die Reflexionspositivität in diesem Fall zu zeigen, müssen wir den Erwartungswert

$$\langle (\theta F) F \rangle = \frac{1}{Z} \int dU d\psi e^{-S} (\theta F) F. \tag{6.22}$$

mit der obigen Wirkung untersuchen. In diesem Funktionalintegral tritt $\bar{\psi}$ nicht auf, da dies im supersymmetrischen Fall von ψ abhängt.

6.2.1 Link-Reflection

Als erstes prüfen wir den Fall mit Link-Reflection. Mit einer geeigneten Aufspaltung der Wirkung werden wir sehen, dass der Positivitätsbeweis für Majorana-Felder in diesem Fall in den entscheidenden Punkten nicht viel anders ist als der Beweis mit Wilson-Fermionen bei der Link-Reflection. Die Aufspaltung ist wieder

$$S = S_+ + S_- + S_C \quad \text{mit} \quad S_- = \theta S_+. \tag{6.23}$$

So erhalten wir einen ähnlichen Ausdruck wie (5.38):

$$\langle (\theta F) F \rangle = \frac{1}{Z} \int dU d\psi e^{-S_C} \theta(F e^{-S_+}) F e^{-S_+} \tag{6.24}$$

Natürlich ist S_C noch zu diskutieren.

Zuerst fixieren wir die die Eichung: $U_4(x) = 1$ auf den Links zwischen den

6. Majorana-Fermionen auf dem Gitter

Zeitebenen $x_4 = -\frac{1}{2}$ und $x_4 = +\frac{1}{2}$. Spalten wir noch S_C in einen Eich- und einen fermionischen Term

$$S_C = S_{CG} + S_{CF} \quad (6.25)$$

auf, erhalten wir unter Berücksichtigung dieser Eichung

$$\begin{aligned} S_{CG} &= -\frac{1}{2g^2} \sum_{\vec{x}, k} \text{Tr} \left\{ U_k^\dagger \left(\vec{x}, -\frac{1}{2} \right) U_k \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right\} + \text{k.K.} \\ &= -\frac{1}{2g^2} \sum_{\vec{x}, k} \text{Tr} \left\{ \theta \left[U_k \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right] U_k \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right\} + \text{k.K.} \end{aligned} \quad (6.26)$$

von (6.21) und

$$\begin{aligned} S_{CF} &= -\frac{K}{2} \sum_{\vec{x}} \left[\bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) [r + \gamma_4] \psi \left(\vec{x}, -\frac{1}{2} \right) + \bar{\psi} \left(\vec{x}, -\frac{1}{2} \right) [r - \gamma_4] \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{K}{2} \sum_{\vec{x}} \left[\bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) [1 + r\gamma_4] \theta \left[\bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right)^T [1 - r\gamma_4]^T \left(\theta \left[\psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right) \right] \right)^T \right] \end{aligned} \quad (6.27)$$

von (6.10).¹

Diese Eichung bedeutet $V_4^{ab}(x) = 2 \text{Tr} [T^a T^b] = \delta_{ab}$ (B.3) und somit beträgt S_{CF} nur noch die Hälfte von (5.41).

Der Exponentialfaktor $e^{-S_{CF}}$ im Funktionalintegral (6.24) beträgt dann mit $\psi \equiv \psi \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right)$ und $\bar{\psi} \equiv \bar{\psi} \left(\vec{x}, \frac{1}{2} \right)$

$$\begin{aligned} e^{-S_{CF}} &= \exp \left\{ \frac{K}{2} \sum_{\vec{x}} \bar{\psi} [1 + r\gamma_4] \theta \bar{\psi} + \frac{K}{2} \sum_{\vec{x}} \psi^T [1 - r\gamma_4]^T (\theta \psi)^T \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{K}{2} \sum_{\vec{x}} \bar{\psi} [1 + r\gamma_4]^{\frac{1}{2}} [1 + r\gamma_4]^{\frac{1}{2}} \theta \bar{\psi} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{K}{2} \sum_{\vec{x}} \psi^T ([1 - r\gamma_4]^T)^{\frac{1}{2}} ([1 - r\gamma_4]^T)^{\frac{1}{2}} (\theta \psi)^T \right\}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Wir erhalten in derselben Weise wie bei Wilson-Fermionen die Positivität von

¹Der Schritt von der ersten zur zweiten Zeile beruht auf denselben Überlegungen wie in (5.42) und (5.43)

$$e^{-S_{CF}} \tag{6.29}$$

unter Berücksichtigung des Lemmas aus [16] wie im Abschnitt [5.3.1] und dies liefert

$$\langle (\theta F) F \rangle \geq 0. \tag{6.30}$$

6.2.2 Site-Reflection

Der Site-Reflection-Beweis wird hier für einen bestimmten Wert des Wilson-Parameters, nämlich für $r = 1$ durchgeführt. \mathcal{V}_4^+ , \mathcal{V}_4^- und \mathcal{V}_3^0 seien definiert wie im Abschnitt [5.3.2]. Die Wirkung trennen wir wie folgt in Eich- und fermionischen Teile:

$$S = S_G + S_F. \tag{6.31}$$

Es ist vorteilhaft, auch diese aufzuspalten:

$$S_G = S_G^+ + S_G^- + S_G^0, \tag{6.32}$$

$$S_F = S_F^+ + S_F^- + S_F^0. \tag{6.33}$$

Hier hängen S_G^+ und S_F^+ von Variablen mit $x_4 > 0$, S_G^- und S_F^- von Variablen mit $x_4 < 0$ ab. Die dritten Terme S_G^0 und S_F^0 bestehen aus Variablen aus der Zeitscheibe $x_4 = 0$.

Da wir diesmal die Reflexionspositivität mit Majorana-Feldern auf dem Gitter untersuchen, werden wir auch aus der Relation zwischen Weyl-Spinoren u und v (C.11) Nutzen ziehen.

Die für uns wichtigen Beziehungen zwischen den einzelnen Termen der Wirkung aus den positiven und negativen Zeithälften sind

$$S_F^- = \theta S_F^+ \quad \text{und} \quad S_G^- = \theta S_G^+. \tag{6.34}$$

Nun wollen wir untersuchen, wie die fermionischen Wirkungen S_F^+ und S_F^- von Variablen aus der Zeitscheibe $x_4 = 0$ abhängen. Dazu verwenden wir die Lagrange-Funktion aus S_F zwischen zwei beliebigen Zeitscheiben:

$$\begin{aligned} A \equiv & -\frac{K}{2} \left\{ \bar{\psi}^a(x + \hat{4}) [1 + \gamma_4] V_4^{ab}(x) \psi^b(x) \right. \\ & \left. + \bar{\psi}^a(x) [1 - \gamma_4] (V_4^T(x))^{ab} \psi^b(x + \hat{4}) \right\}. \end{aligned} \tag{6.35}$$

6. Majorana-Fermionen auf dem Gitter

Mit der Einführung der zweikomponentigen Weyl-Spinoren u und v durch

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v^+ \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (u^+, -v) \quad (6.36)$$

bekommen wir für diese Terme

$$A = -K \left\{ u^{+a}(x + \hat{4}) V_4^{ab}(x) u^b(x) - v^a(x) (V_4^T(x))^{ab}(x) v^{+b}(x + \hat{4}) \right\}. \quad (6.37)$$

Benutzt man noch die Majorana-Eigenschaft (C.11)

$$v = iu^T \sigma_2 \quad \text{und} \quad v^+ = -i\sigma_2 u^*, \quad (6.38)$$

erhält man

$$\begin{aligned} A &= -K \left\{ u^{+a}(x + \hat{4}) V_4^{ab}(x) u^b(x) - (iu^{Ta}(x)\sigma_2) (V_4^T(x))^{ab}(x) (-i\sigma_2 u^{*b}(x + \hat{4})) \right\} \\ &= -K \left\{ u^{+a}(x + \hat{4}) V_4^{ab}(x) u^b(x) - u^{Ta}(x) (V_4^T(x))^{ab}(x) u^{*b}(x + \hat{4}) \right\} \\ &= -K \left\{ u^{+a}(x + \hat{4}) V_4^{ab}(x) u^b(x) + u^{+a}(x + \hat{4}) (V_4(x))^{ab}(x) u^b(x) \right\} \\ &= -2K \left\{ u^{+a}(x + \hat{4}) V_4^{ab}(x) u^b(x) \right\}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Wir liefern noch den Beweis für die folgende Relation, die im vorletzten Schritt benutzt wurde:

$$u^T(x) u^*(y) = -u^+(y) u(x). \quad (6.40)$$

$$\begin{aligned} u^T(x) u^*(y) &= \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_1^*(y) \\ \psi_2^*(y) \end{pmatrix} \\ &= \psi_1(x)\psi_1^*(y) + \psi_2(x)\psi_2^*(y) \\ &\stackrel{\text{Grassmann}}{=} -\psi_1^*(y)\psi_1(x) - \psi_2^*(y)\psi_2(x) \\ &= -\begin{pmatrix} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \\ &= -u^+(y) u(x). \end{aligned}$$

Für die fermionischen Wirkungen in der positiven und negativen Zeithälfte bedeutet das

$$\begin{aligned} S_F^+ &= \mathcal{S}(U, \psi, u(\vec{x}, 0)) \\ \text{und } S_F^- &= \tilde{\mathcal{S}}^*(\theta U, \theta\psi, u^+(\vec{x}, 0)) \quad \text{mit } U, \psi \in \mathcal{V}_4^+. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Nach einer Integration über fermionische Variablen aus \mathcal{V}_4^+ und \mathcal{V}_4^- erhalten wir nun für den Erwartungswert (6.22) bei der Site-Reflection den Ausdruck

$$\begin{aligned} \langle (\theta F) F \rangle &= \frac{1}{Z} \int \prod_{\vec{x}, k} dU_k(\vec{x}, 0) d\psi(\vec{x}, 0) e^{-(S_F^0 + S_G^0)} \\ &\quad \times \tilde{\mathcal{S}}^*(U(\vec{x}, 0), u^+(\vec{x}, 0)) \times \mathcal{S}(U(\vec{x}, 0), u(\vec{x}, 0)). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Der letzte Schritt besteht aus der Diskussion von S_F^0 . Mit $\bar{\psi}(\vec{x}) \equiv \bar{\psi}(\vec{x}, 0)$, $\psi(\vec{x}) \equiv \psi(\vec{x}, 0)$ und $V_k^{ab}(\vec{x}) \equiv V_k^{ab}(\vec{x}, 0)$ lautet sie

$$\begin{aligned} S_F^0 &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{x}} \left\{ \bar{\psi}(\vec{x}) \psi(\vec{x}) - K \sum_{k=1}^3 \left[\bar{\psi}^a(\vec{x} + \hat{k}) [1 + \gamma_k] V_k^{ab}(\vec{x}) \psi^b(\vec{x}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{\psi}^a(\vec{x}) [1 - \gamma_k] (V_k^T(x))^{ab}(\vec{x}) \psi^b(\vec{x} + \hat{k}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Führt man die selbstadjungierten Matrizen

$$\begin{aligned} B_{\vec{y}, \vec{x}}^{ab} &= \frac{1}{2} \delta_{\vec{y}, \vec{x}} \delta^{ab} - \frac{K}{2} \sum_{k=1}^3 \left[\delta_{\vec{y}, \vec{x} + \hat{k}} V_k^{ab}(\vec{x}) + \delta_{\vec{y} + \hat{k}, \vec{x}} (V_k^T(\vec{y}))^{ab} \right] \\ \text{und } C_{\vec{y}, \vec{x}}^{ab} &= \frac{iK}{2} \sum_{k=1}^3 \left[\delta_{\vec{y}, \vec{x} + \hat{k}} \sigma_k V_k^{ab}(\vec{x}) - \delta_{\vec{y} + \hat{k}, \vec{x}} \sigma_k (V_k^T(\vec{y}))^{ab} \right] \end{aligned} \quad (6.44)$$

ein, kann man S_F^0 mit Hilfe der Weyl-Spinoren wie folgt in drei Terme aufspalten:

$$S_F^0 = S_1 + S_2 + S_3$$

$$\text{mit } S_1 = u^+ B u - v B v^+, \quad S_2 = u^+ C v^+ \quad \text{und} \quad S_3 = v C u. \quad (6.45)$$

Nun wird die Majorana-Eigenschaft (C.11) noch ein Mal angewandt:

6. Majorana-Fermionen auf dem Gitter

$$\begin{aligned}
S_1 = u^\dagger B u - v B v^\dagger &= u^\dagger B u - (i u^T \sigma_2) B (-i \sigma_2 u^*) \\
&= u^\dagger B u - u^T \sigma_2 B \sigma_2 u^* \\
&= u^\dagger B u - u^T B u^* \\
&= 2 u^\dagger B u.
\end{aligned} \tag{6.46}$$

B und σ_2 vertauschen, da sie auf unterschiedliche Indizes wirken und der letzte Schritt oben folgt aufgrund (6.40).

Für die beiden anderen Terme erhalten wir

$$\begin{aligned}
S_2 &= u^\dagger C v^\dagger \\
&= u^\dagger C (-i \sigma_2 u^*) \\
&= -i u^\dagger C \sigma_2 u^* \\
&= -i \left((u^*)^\dagger (C \sigma_2)^\dagger (u^\dagger)^\dagger \right)^\dagger \\
&= (i u^T \sigma_2 C u)^\dagger \\
&= (v C u)^\dagger \\
&= S_3^\dagger,
\end{aligned} \tag{6.47}$$

da C und σ_2 selbstadjungiert sind.

Nun können wir die Integration über die fermionischen Variablen aus \mathcal{V}_3^0 im Erwartungswert (6.42) durchführen. Diese beträgt

$$\begin{aligned}
P(U) &\equiv \int \prod du^\dagger(\vec{x}, 0) du(\vec{x}, 0) e^{-2u^\dagger B u} \\
&\quad \times e^{-S_2} \times e^{-S_2^\dagger} \times \tilde{S}^*(u^\dagger) \times S(u).
\end{aligned} \tag{6.48}$$

Für den Erwartungswert (6.42) erhalten wir dann

$$\langle (\theta F) F \rangle = \frac{1}{Z} \int \prod_{\vec{x}, k} dU_k(\vec{x}, 0) e^{-S_G^0} P(U). \tag{6.49}$$

Am Ende des Abschnitts [5.3.2] haben wir uns mit der Bedingung der Positivität des $P(U)$ befasst. Dies folgt aus der Positivität der Matrix B , die für eine bestimmte Wahl des Hopping-Parameters ($K < 1/6$) erreicht wird. Dann kann man schreiben, dass $u^\dagger B u = u^\dagger B^{1/2} B^{1/2} u$, und so gelangt man zu $P(U) > 0$. Diesmal sieht die Matrix B (6.44) anders aus als (5.63). Es gelten jedoch dieselben Überlegungen. Der einzige Unterschied ist, dass die Matrix V orthogonal ist, was dazu führt, dass $\|V\| = 1$. Somit ist B positiv definit für $K < 1/6$ und $P(U)$ (6.48) ist positiv.

Wir erwähnen hier nochmals, dass dieser Beweis auf der Aufspaltung der Wirkung S_F^0 beruht. Diese Aufspaltung war ein Ergebnis der Projektionsoperatoren $[1 + \gamma_4]$ und $[1 - \gamma_4]$, mit denen wir die Majorana-Spinoren als Weyl-Spinoren schreiben und schließlich die folgende Ungleichung zeigen konnten:

$$\langle (\theta F) F \rangle \geq 0. \tag{6.50}$$

6. Majorana-Fermionen auf dem Gitter

Kapitel 7

Zusammenfassung

Als Ergebnis dieser Arbeit können wir sagen, dass sich die Reflexionspositivität der Transfer-Matrix und somit auch die Hermitizität des Hamilton-Operators für die Theorie mit Majorana-Fermionen in der adjungierten Darstellung auf dem Gitter prüfen und zeigen lassen.

Nach einer Einführung in die Methoden der Berechnung fermionischer Integrale in Kapitel 2 ging es im dritten Kapitel um den Transfer-Matrix-Formalismus, auf dem die ganze Struktur der Arbeit beruht. Mit Hilfe der Transfer-Matrix war es möglich, die Korrespondenzen zwischen statistischer Mechanik und Feldtheorien zu zeigen. Die Idee der Transfer-Matrix ermöglichte es, eine Beziehung zwischen der Zustandssumme und dem Hamilton-Operator der euklidischen Theorie zu bilden:

$$Z = \text{Tr} e^{-\hat{H}\beta}, \quad (7.1)$$

wobei β die Differenz der ersten und letzten Zeitscheiben in temporaler Richtung ist. Sie ist ein probates Mittel, um die Positivität einer Feldtheorie auf dem Gitter zu zeigen. Im kontinuierlichen Fall ist dies einfach. In der euklidischen Theorie auf dem Gitter darf man jedoch die Positivität nicht einfach ohne Überprüfung annehmen. Die zum ersten Mal in den Arbeiten von Osterwalder und Schrader [15] postulierte sogenannte *Reflexionspositivität* (Osterwalder-Schrader-Positivität) ist unbedingt zu prüfen, da ohne diese Eigenschaft die Übertragung der Feldtheorie auf das Gitter keinen Sinn macht.

Diese Bedingung wurde zuerst in Kapitel 4 im Falle reiner Eichtheorie geprüft, nachdem die Theorie auf dem Gitter formuliert wurde. Dazu wurden Konzepte wie Eichfelder und Paralleltransporter auf das Gitter übertragen. Um die Positivitätsbedingung zu prüfen wurde dann die Zeitreflexion via einer antilinearen Abbildung θ definiert, die im kontinuierlichen Fall der hermiteschen Konjugation entspricht. Da es zwei mögliche Zeitreflexionen (Site-Reflection und Link-Reflection) auf dem Gitter gibt, wurde diese Rechnung in beiden

7. Zusammenfassung

Fällen durchgeführt.

Im fünften Kapitel führten wir darüberhinaus die Fermionen ein. Die Übertragung der Theorie auf das Gitter wurde mit Hilfe des Hamilton-Formalismus durchgeführt und auf diesem Wege fanden wir die euklidische Wirkung der Theorie. Die Modifizierung der Wirkung durch den Wilson-Parameter r machte es möglich, die sogenannte *Fermionen-Verdopplung*, die durch die naive Diskretisierung entstanden war, zu vermeiden. Wie Kapitel 4 endete auch Kapitel 5 mit der Überprüfung der Reflexionspositivität.

Kapitel 6 wurde den Majorana-Fermionen in der adjungierten Darstellung gewidmet, die eine wichtige Rolle in den aktuellen Forschungen der DESY-Münster-Kollaboration spielen. Nach der Einführung der modifizierten Wirkung (Curci-Veneziano-Wirkung) für dieses Modell wurde seine Reflexionspositivität geprüft.

Anhang A

Dirac-Matrizen

A.1 Pauli-Matrizen

Die Pauli-Matrizen sind

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Als Generatoren der $SU(2)$ -Lie-Algebra erfüllen $\frac{\sigma_i}{2}$ die Vertauschungsrelation

$$\left[\frac{\sigma_j}{2}, \frac{\sigma_k}{2} \right] = i\epsilon_{jkl} \frac{\sigma_l}{2} \quad (\text{A.2})$$

mit dem total-antisymmetrischen Tensor ϵ_{jkl} dritter Stufe und

$$\sigma_i^2 = 1. \quad (\text{A.3})$$

A.2 Dirac-Matrizen

Für die Dirac-Matrizen in den euklidischen und Minkowski-Räumen gelten die Beziehungen

$$\gamma_{1,2,3}^{Euklid.} = -i\gamma_{1,2,3}^{Minkowski} \quad (\text{A.4})$$

$$\gamma_4^{Euklid.} = \gamma_0^{Minkowski} \quad (\text{A.5})$$

A. Dirac-Matrizen

Die euklidischen Dirac-Matrizen sind hermitesch, für $\mu = 1, 2, 3, 4$ gelten

$$\gamma_\mu \equiv \gamma_\mu^{Euklid.} = \gamma_\mu^\dagger \quad (\text{A.6})$$

und die Vertauschungsrelationen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

Oft benutzt man die 2×2 -Block-Schreibweise:

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_i \\ i\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{für } i=1,2,3 \quad \text{und} \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Anhang B

Generatoren der Lie-Algebra

Alle Elemente der Gruppe $SU(N)$ können mit Hilfe der Generatoren T_a der dazugehörigen Algebra $su(N)$ folgendermaßen dargestellt werden:

$$\Lambda = \exp \left\{ \sum_{a=1}^{N^2-1} i T_a w^a \right\} \quad \text{mit reellen } w^a. \quad (\text{B.1})$$

Das Einselement gehört nicht zu den Generatoren. T_a sind linear unabhängige hermitesche $N \times N$ -Matrizen, ihre Spur ist Null:

$$T_a^\dagger = T_a \quad \text{und} \quad \text{Tr } T_a = 0. \quad (\text{B.2})$$

Ihre Normierung lautet

$$2 \text{Tr} [T_a T_b] = \delta_{ab} \quad (\text{B.3})$$

Damit die Λ s eine Gruppe bilden, muss das Produkt zweier Gruppenelemente wieder ein Gruppenelement der Form (B.1) sein. Da das Produkt zweier Gruppenelemente im Falle der Lie-Gruppe durch den Kommutator ausgedrückt wird, müssen die Generatoren eine Vertauschungsrelation erfüllen, nämlich

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c. \quad (\text{B.4})$$

Hier sind die f_{abc} total-antisymmetrische reelle Strukturkonstanten.

Im Falle des $N = 2$ können die Pauli Matrizen als Generatoren der $SU(2)$ dienen[A.1].

Eichfelder, Feldstärken und Majorana-Felder in der adjungierten Darstellung

B. Generatoren der Lie-Algebra

sind Elemente der Lie-Algebra $SU(N)$ und können in der Komponenten-Notation folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} A_\mu &= -igA_\mu^a(x)T_a \\ F_{\mu\nu} &= -igF_{\mu\nu}^a(x)T_a, \\ \text{und } \psi(x) &= \psi^a(x)T^a. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Anhang C

Weyl,- Dirac- und Majorana-Spinoren

Es ist möglich, alle Spinoren der Quantenfeldtheorie aus zweikomponentigen sogenannten *Weyl-Spinoren* ψ_L und ψ_R aufzubauen [9]. ψ_L ist linkshändig, wobei ψ_R rechtshändig ist. Die Komponenten eines Spinors sind Grassmannwertig.

Dirac-Spinoren bestehen aus zwei Weyl-Spinoren

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

und können somit als

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

geschrieben werden. Sie verfügen über acht reelle Parameter, da sie vier komplexe Einträge haben. In dieser Arbeit benutzen wir statt ψ_L und ϕ_R die Bezeichnungen u und v^+ :

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v^+ \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Der konjugierte Dirac-Spinor sieht dann wie folgt aus:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_4 = (u^+, -v). \quad (\text{C.4})$$

C. Weyl-, Dirac- und Majorana-Spinoren

Um die Majorana-Spinoren zu definieren, benötigen wir zunächst den Ladungskonjugationsoperator C :

$$C \equiv -\gamma_2\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Die Transformation eines Dirac-Spinors unter Ladungskonjugation ist

$$\psi^C \equiv C\bar{\psi}^T = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}}^T = \begin{pmatrix} \phi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Die Majorana-Spinoren sind so definiert, dass sie unter Ladungskonjugation in sich übergehen:

$$\psi^C = \psi. \quad (\text{C.7})$$

Dies hat die Konsequenz, dass die Anzahl der Parameter sich halbiert, da die folgende Gleichung erfüllt werden muss:

$$\begin{pmatrix} \phi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \phi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{C.8})$$

Also, einen Majorana-Spinor schreiben wir als

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Mit u und v^+ bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} u \\ v^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^* \\ -v^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 v^T \\ -i\sigma_2 u^* \end{pmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Somit erhalten wir für die Relationen zwischen den Weyl-Spinoren

$$v = iu^T\sigma_2 \quad \text{und} \quad v^+ = -i\sigma_2 u^*. \quad (\text{C.11})$$

Literaturverzeichnis

- [1] W. Greiner: *Feldquantisierung*, Harri-Deutsch (1993).
- [2] L.H. Ryder: *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1996).
- [3] F. Halzen, A.D. Martin: *Quarks and Leptons*, Wiley (1984).
- [4] K. Huang: *Quarks, leptons and gauge fields*, World Scientific (1982).
- [5] K. Huang: *Statistische Mechanik III*, deutsche Übersetzung: I. Hertweck, Hochschultaschenbücher-Verlag (1964).
- [6] H. Rothe: *Lattice Gauge Theories - An Introduction*, World Scientific (1992).
- [7] I. Montvay, G. Münster: *Quantum Fields On a Lattice*, Cambridge University Press (1994).
- [8] J. Smit: *Introduction to Quantum Fields On a Lattice*, Cambridge University Press (2002).
- [9] H. Kalka, G. Soff: *Supersymmetrie*, Teubner (1997).
- [10] J.B. Kogut: *An Introduction to lattice gauge theory and spin systems*, Rev. Mod. Phys. 51, 4, 659 (1979).
- [11] M. Creutz: *Gauge fixing, the transfer matrix, and confinement on a lattice*, Phys. Rev. D15, 1128 (1977).

LITERATURVERZEICHNIS

- [12] K. G. Wilson: *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. D12, 3845 (1974).
- [13] K. G. Wilson: *Quarks and strings on a lattice*, in *New Phenomena in Subnuclear Physics*, ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, Part A, 69 (1975).
- [14] J.B. Kogut, L.Susskind: *Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories*, Phys. Rev. D11, 395 (1976).
- [15] K. Osterwalder, R. Schrader: *Axioms for Euclidian Green's Functions*, Commun. Math. Phys. 31, 83 (1973);
K. Osterwalder, R. Schrader: *Axioms for Euclidian Green's Functions. 2*, Commun. Math. Phys. 42, 281 (1975).
- [16] K. Osterwalder, E. Seiler: *Gauge Field Theories on a lattice*, Ann. Phys. (NY) 110, 440 (1978).
- [17] P. Menotti, A. Pelissetto: *General Proof of Osterwalder-Schrader Positivity for the Wilson Action*, Commun. Math. Phys. 113, 369 (1987).
- [18] G. Curci, G. Veneziano: *Supersymmetry and the Lattice: a Reconciliation?*, Nucl. Phys. B292, 555 (1987).
- [19] I. Montvay: *An Algorithm for Gluinos on the Lattice*, Nucl. Phys. B466, 259 (1996), hep-lat/9510042.
- [20] T. Galla: *Supersymmetrie, Skriptum* (1998).
- [21] S. Luckmann: *Ward Identitäten in der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie*, Diplomarbeit, WWU Münster (1997).
- [22] S. Wissel: *Die graphische Charakter- und Hoppingparameterentwicklung der $N = 1$ $SU(2)$ -Super-Yang-Mills-Theorie in d Dimensionen*, Diplomarbeit, WWU Münster (2002).
- [23] B. Vogt: *Energieaufspaltung im zweidimensionalen Ising-Modell*, Diplomarbeit, WWU Münster (2003)
- [24] G. Münster: *Persönliche Mitteilungen* (2002, 2003).

- [25] C. Blatter: *Analysis 2*, Springer (1974).
- [26] I. Montvay: *SYM on the lattice*, in *Theory of Elementary Particles, Proceedings of the 31st International Symposium Ahrenshoop, September 1997, Buckow, Germany*; ed. H. Dorn, D. Lüst, G. Weigt; Wiley-VCH, 361 (1998), hep-lat/9801023.
- [27] I. Campos, R. Kirchner, I. Montvay, J. Westphalen, A. Feo, S. Luckmann, G. Münster, K. Spandaren: *Monte Carlo simulation of SU(2) Yang-Mills theory with light gluinos*, in *Eur. Phys. J. C11* (1999), hep-lat/9903014.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen Menschen, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit geholfen haben, ganz herzlich danken.

Herrn Prof. Dr. Münster danke ich für die interessante Aufgabenstellung und die stets geduldige Betreuung.

Meinen Kommilitonen Alexander Ferling, Björn Vogt und Jan Wennekers aus Raum 419 danke ich für die lockere Arbeitsatmosphäre in unserem Büro.

Alex und Jan haben mich bei der Arbeit mit \LaTeX unterstützt.

Das Korrekturlesen einiger Kapitel und insbesondere den mutigen Kampf mit meinem Deutsch haben Prof. Münster, Julia Decking, Jan und Björn auf sich genommen.

Zum Schluss möchte ich noch meinen Eltern Canan und Osman Pulathaneli, sowie Fatma Arslan und meinen anderen Freunden, die mir jeder Zeit in meinem Leben beigestanden haben, meinen Dank aussprechen.

Um diese Arbeit zu schreiben, habe ich das Schreibprogramm \LaTeX benutzt.

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig angefertigt und keine außer den genannten Hilfsmitteln verwendet habe.

Cem Pulathaneli, Münster, im März 2003