

Perturbative Untersuchung der skalaren
Propagatoren in einem
 $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Yukawa-Modell auf dem Gitter

Als Diplomarbeit im August 1995 vorgelegt von
Bernd Nottelmann

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Theoretische Physik I
Wilhelm-Klemm-Straße 9
48149 Münster

Perturbative Untersuchung der skalaren Propagatoren in einem $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -
Yukawa-Modell auf dem Gitter

Als Diplomarbeit im August 1995 vorgelegt von
Bernd Nottelmann

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Theoretische Physik I
Wilhelm-Klemm-Straße 9
48149 Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Yukawa-Wirkung	5
1.1 Standardmodell der elektrisch schwachen Wechselwirkung	5
1.2 Yukawa-Wirkung auf dem Gitter	6
1.3 Phase mit gebrochener Symmetrie	11
1.3.1 Wirkung für das skalare Feld	11
1.3.2 Fermionen-Propagator in der gebrochenen Phase	14
1.3.3 Feynman-Regeln	15
1.4 Symmetrische Phase	17
2 Propagatoren in der gebrochenen Phase	19
2.1 Definitionen der Propagatoren	19
2.1.1 Skalare Propagatoren und Vakuumerwartungswert	19
2.1.2 Fermionen-Propagator	20
2.2 Propagatoren in 1-Loop-Ordnung	21
2.2.1 Skalare Propagatoren	21
2.2.2 Vakuumerwartungswert des σ -Feldes	25
2.2.3 Fermionen-Propagator	25
3 Renormierung in der gebrochenen Phase	28
3.1 Definition der renormierten Parameter	28
3.1.1 Skalare Parameter	28
3.1.2 Fermionische Parameter	29
3.2 Entwicklung der renormierten Parameter im Fall $G_{0\chi} = 0$	31
3.2.1 Entwicklung skalarer Größen	31
3.2.2 Entwicklung fermionischer Größen	34
3.2.3 Golterman-Petcher-Theorem	36
3.3 Renormierte Störungstheorie im Fall $G_{0\chi} = 0$	38
3.3.1 Renormierte Störungsentwicklung skalarer Größen	38
3.3.2 Renormierte Störungsentwicklung fermionischer Größen	41
4 Numerische Ergebnisse	42
4.1 Aufbereitung der Monte-Carlo-Daten	42
4.1.1 Berechnung der Zeitscheiben-Korrelationsfunktionen	42

4.1.2	Zeitscheiben-Korrelationsfit	45
4.1.3	Berechnung der Renormierungskonstanten	46
4.2	1-Loop-Analyse des π -Propagators	47
4.2.1	Eigenschaften der skalaren Propagatoren	47
4.2.2	Fit-Ansatz für den π -Propagator	48
4.2.3	Parameterkonfigurationen in der Fitfunktion	51
4.2.4	Realisierung des Fitalgorithmus	53
4.2.5	Ergebnisse des 1-Loop-Fittings	57
4.2.6	Vergleich der Methoden	61
4.2.7	Graphische Darstellung der Fits	61
Zusammenfassung		72
A Einfache Definitionen und Konventionen		74
A.1	γ -Matrizen im Euklidischen	74
A.2	Sonstige Bezeichnungen	75
B Erzeugende Funktionale und Greensfunktionen		76
B.1	Konventionen für die Gitternotation	76
B.2	Erzeugendes Funktional für unverbundene Greensfunktionen	77
B.3	Erzeugendes Funktional für die verbundenen Greensfunktionen	77
B.4	Volle 1-Loop-Ausdrücke der skalaren Propagatoren	80
C Zeitscheiben-Korrelationsfunktionen		82
D Gittersummenalgorithmus		85
Literaturverzeichnis		86

Einleitung

Das Standardmodell (SM) als Grundlage der Elementarteilchenphysik umfaßt die Theorie der starken und der elektroschwachen Wechselwirkung. Die starke Wechselwirkung als Wirkung der Quarks untereinander wird durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben. Die entsprechende Eichsymmetriegruppe ist die nicht-abelsche Gruppe $SU(3)_C$ (der Index C ist eine Abkürzung für *color*; [CL84, FGL73]). Die elektroschwache Wirkung hingegen wirkt zwischen allen Teilchen. Die sie beschreibende Theorie ist das *Glashow-Salam-Weinberg-Modell* (GSW-Modell, [GSW]). Renormierbar wird dieses durch die Einführung einer Austauschwechselwirkung mit eichinvariant erzeugten Vektorbosonen bei der effektiven 4-Fermionenkopplung. Diese Bosonen werden mit W^\pm und Z^0 bezeichnet.

Da aber der Massecharakter der Vektorbosonen die für die Renormierbarkeit entscheidende Eichinvarianz bei der Erzeugung dieser Bosonen verletzt, wird ein zusätzliches skalares Feld (auch Higgs-Feld genannt) mit quartischer Selbstkopplung $\lambda\phi^4$ hinzugefügt, bei dem eine massenerzeugende *spontane Symmetriebrechung* (SSB) auftritt [HIG66]. Diesen Vorgang nennt man *Higgs-Mechanismus*. Das entsprechende Feldquant heißt Higgs-Boson, dessen Masse vom Wert der renormierten quartischen Selbstkopplung λ_R abhängt. Es konnte bisher noch nicht experimentell bestätigt werden.

Die Größe der Fermionenmassen hängt ebenfalls über die Yukawa-Wechselwirkung mit der SSB zusammen. Die dieser chiralen Theorie zugeordnete Eichsymmetriegruppe ist die $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Gruppe. Der Index L dabei bedeutet, daß die $SU(2)_L$ -Eichfelder nur an die linkshändigen Fermionen-Anteile koppeln, Y symbolisiert die schwache Hyperladung.

Wichtige Näherungsmodelle für die GSW-Theorie sind die Higgs-Yukawa-Modelle, in denen das Higgs-Boson dem σ -Teilchen mit Masse m_σ entspricht. Die Eichgruppe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ wird auf eine mathematisch relativ einfach handhabbare $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Gruppe erweitert [MON87]. Dabei unterscheidet man zwischen Higgs-Modellen, bei denen man die Yukawa-Kopplungen, also die Kopplungen der Fermionen an das skalare Feld, vernachlässigt (was nicht die Beschreibung des Top-Quarks mit einschließt) und wo die Fermionen nur über die chiralen Eichfelder mit den skalaren Komponenten wechselwirken, und den Yukawa-Modellen, bei denen die Yukawa-Kopplungen als stark angenommen werden (was beim Top-Quark der Fall ist); diese können auf die Massenschränken des Higgs-Bosons Einfluß ausüben. Die Eichfelder werden dabei in der Regel vernachlässigt [MM94].

Aus der Diskretisierung der Modelle mittels der Gitterregularisierung resultiert das Problem der Fermionen-Verdopplung [NN81]. Dieses wird durch Hinzufügung eines Spiegelfermionenfeldes χ und eines chiral invarianten Wilson-Terms [WIL75, MON87] beseitigt, der im Kontinuums-Limes verschwindet. Dieser Term sorgt dafür, daß den Doppelfermionen Massen in der Größe des Cutoffs verliehen wird. Dabei reduziert sich die Mindestanzahl der beschriebenen Fermionen-Paare auf zwei.

Um die Spiegelfermionen im Kontinuums-Limes wieder zum Verschwinden zu bringen, kann man sie auskoppeln, indem man ihre Massen und Kopplungen gleich Null setzt, was im ungeeichten Fall —wie im hier behandelten Modell— mit dem Theorem von Golterman und Petcher gezeigt wird [GP89]. Diese Vorgehensweise hat vor allem den numerischen Aufwand bei den entsprechenden Berechnungen verringert.

Thema dieser Arbeit ist die Untersuchung von numerischen Datenmaterial [LMMP93] eines global $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -invarianten Yukawa-Modells in der gebrochenen Phase mit störungstheoretischen Methoden. Hauptgegenstand dabei sind die Propagatoren der skalaren Goldstone-Felder, die einer derartigen Untersuchung am leichtesten zugänglich sind.

Die Arbeit gliedert sich in vier Teile:

Im ersten Kapitel wird die Zusammensetzung der Wirkung des Modells vorgestellt, woraus sich dann die entsprechenden Feynman-Regeln ergeben.

In Kapitel 2 werden die Selbstenergien der Bosonen und Fermionen mit den Regeln in 1-Loop-Ordnung entwickelt.

Kapitel 3 stellt die Renormierung des Modells und die 1-Loop-Ausdrücke der renormierten Parameter in der Entkopplung $G_\chi = 0$ dar. Durch die “Umkehrung” dieser Terme gelangt man zur renormierten Störungstheorie. Das Verschwinden der Spiegelfermionen-Parameter wird durch das Golterman-Petcher-Theorem gezeigt.

Die renormierte Störungstheorie dient in Kapitel 4 dazu, Näherungsfunktionen für den inversen Goldstone-Propagator aufzustellen, mit denen sich wichtige Kenngrößen des Modells durch Anpassung der Parameter in diesen Ausdrücken —dem sog. “Fitting”, d.h. der Nachbildung der numerischen Werte durch die Näherungsausdrücke— ermitteln lassen. Dabei wird untersucht, welche von mehreren inbetracht zu ziehenden Parameterkonfigurationen die günstigsten sind.

Kapitel 1

Yukawa-Wirkung

1.1 Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung

Im SM ist die elektroschwache Wechselwirkung in eichinvariante Darstellung durch die Summe

$$S = S_\varphi + S_\Psi + S_E \quad (1.1)$$

in Minkowski-Metrik gegeben. S_φ ist der Higgs-Anteil,

$$S_\varphi \equiv \int d^4x \{(D_\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) - m^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2\} \quad (1.2)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - i \frac{g_2}{2} \tau^j A_\mu^j - i \frac{g_1}{2} B_\mu. \quad (1.3)$$

Der Index μ bezeichnet die 4 Raumrichtungen, also die Richtungen 1 bis 4. A_μ^j und B_μ sind die Eichfelder der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Eichsymmetriegruppe, g_1 und g_2 bezeichnen die Eichkopplungen, die τ_j die Pauli-Matrizen und

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

mit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}$ ist das Higgs-Dublett. Im allgemeinen bezeichnet gemäß den üblichen Konventionen ein griechischer Buchstabe die Indizes 1 bis 4, ein lateinischer die von 1 bis 3. Doppelt vorkommende Indizes in einer Multiplikation bedeuten Einstein-Konvention, d.h. auch ohne explizites Summenzeichen wird addiert.

Der Fermionen-Term S_Ψ besteht aus den Komponenten

$$S_\Psi = S_F + S_Y, \quad (1.5)$$

wobei man die Wirkung eines freien Fermions,

$$S_F \equiv \int d^4x \bar{\Psi} i\gamma^\mu D_\mu \Psi \quad (1.6)$$

1.2. YUKAWA-WIRKUNG AUF DEM GITTER

mit

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.7)$$

(in **Minkowski-Metrik**) und die Yukawa-Wechselwirkung

$$S_Y \equiv \sum_{jk} G_{jk} \int d^4x \{\bar{\Psi}_{Lj} \varphi \psi_{Rk} + \bar{\psi}_{Rj} \varphi^\dagger \Psi_{Lk}\} \quad (1.8)$$

mit der Kopplungsmatrix G_{jk} hat. Der Eich-Anteil lautet

$$S_E \equiv -\frac{1}{4} \int d^4x \{F_{\mu\nu}^j F^{j\mu\nu} + B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}\} \quad (1.9)$$

mit $F_{\mu\nu}^j \equiv \partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j + g_2 \epsilon^{jkl} A_\mu^k A_\nu^l$ und $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. Die Ψ_L sind die Spinoren des linkshändigen $SU(2)_L$ -Dubletts, die ψ_R diejenigen des rechtshändigen $U(1)_Y$ -Singulett. Beispiele sind die leptonischen Materiefelder

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \psi_R = e_R \quad (1.10)$$

in der 1. Generation, oder

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \quad \psi_R = \mu_R \quad (1.11)$$

in der 2. Generation. ν_e bezeichnet das Elektroneutrino, e natürlich das Elektron, ν_μ das Myonneutrino und μ das Myon, wobei μ_R nicht mit der gleichlautenden Bezeichnung für die später auftauchende renormierte Fermionenmischmasse verwechselt werden sollte! Bei den Quarks wäre beispielhaft

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} t^\alpha \\ b^\alpha \end{pmatrix}_L, \quad \psi_R = t_R^\alpha, b_R^\alpha \quad (1.12)$$

in der 3. Generation zu nennen. t und b sind Symbole für top- und bottom-Quark, α ist der Farbindex.

1.2 Yukawa-Wirkung auf dem Gitter

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung der skalaren Propagatoren im Higgs-Yukawa-Sektor des Standardmodells. Dabei werden mehrere erhebliche Einschränkungen und Vereinfachungen vorgenommen.

Zum einen werden die Eichkopplungen g_1 , g_2 aufgrund ihrer mit Niederenergie-Experimenten gemessenen geringen Größe vernachlässigt. Das bedeutet $S_E = 0$ und damit eine globale $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Eichinvarianz.

Zum anderen werden nur wenige schwere Fermionen-Dubletts berücksichtigt, da das massivste Fermion die nicht-perturbativen Eigenschaften des Higgs-Yukawa-Sektors bestimmt [FRI93]. Es wird zudem angenommen, daß die Isospin-Partner des linkshändigen Dubletts die gleiche Masse haben und damit die Massenaufspaltung der

Dublett-Partner ignorierbar ist. Das rechtshändige Singulett wird auf ein Dublett erweitert, für das dieselben Annahmen wie für das linkshändige Dublett gelten. Dies bedeutet eine Vergrößerung der $U(1)_Y$ -Symmetrie auf eine $SU(2)_R$ -Symmetrie, womit man insgesamt eine **globale** $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Eichsymmetrie vorliegen hat. Außerdem wird die Generationenstruktur der Materiefelder ignoriert.

Da dem Theorem von Nielsen und Ninomiya zufolge auf dem Gitter zu jedem Fermionen-Dublett ein Fermionen-Dublett mit spiegelbildlicher Chiralität, also ein *Spiegelfermionen*-Paar existieren muß [NN81], resultieren aus den Vereinfachungen nur noch zwei Yukawa-Kopplungsparameter G_ψ und G_χ statt einer komplizierten Matrix G_{jk} wie in (1.8). G_ψ ist dabei die Yukawa-Kopplung der Fermionen, G_χ die der Spiegelfermionen [MON87].

Dieses Modell bezeichnet man als *Yukawa-Modell*. Die letzten Schritte sind der Übergang zur Euklidischen Formulierung und die Gitterregularisierung [JER89],

$$\int d^4x \rightarrow \sum_x , \quad \partial_\mu f(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(x) \rightarrow \partial_\mu f_x \equiv f_{x+\hat{\mu}} - f_x. \quad (1.13)$$

Die $\hat{\mu}$ symbolisieren die Einheitsvektoren in die 4 Raumrichtungen. Das Summenzeichen \sum_x steht für

$$\sum_x \equiv \sum_{x \in \Lambda}, \quad (1.14)$$

wobei das Gitter Λ der Definition

$$\Lambda \equiv \{x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{Z}^4; 0 \leq x_\alpha < L_\alpha, \alpha = 1, \dots, 4\} \quad (1.15)$$

entspricht und speziell $L_1 = L_2 = L_3 \equiv L$ und $L_4 \equiv T$ gilt. Dabei ist L die Gitterausdehnung in Raumrichtung und T die Ausdehnung in Zeitrichtung.

Die (Higgs-)Yukawa-Wirkung auf dem Gitter in der $\psi\chi$ -Notation ist die Summe

$$S \equiv S_\varphi + S_\Psi. \quad (1.16)$$

S_φ ist die skalare Wirkung, sie besitzt die Form

$$S_\varphi \equiv \sum_x \left\{ -\kappa \sum_{\pm\mu} \frac{1}{2} \text{Tr}(\varphi_{x+\hat{\mu}}^\dagger \varphi_x) + \frac{\mu_\phi^2}{2} \text{Tr}(\varphi_x^\dagger \varphi_x) + \frac{\lambda}{4} \text{Tr}^2(\varphi_x^\dagger \varphi_x) \right\}, \quad (1.17)$$

wobei κ den skalaren Hopping-Parameter, μ_ϕ die nackte skalare Masse und λ die quartische Kopplung bezeichnen. $\pm\mu$ unter dem Summenzeichen bedeutet, daß μ sämtliche 8 Raumrichtungen durchläuft, also $\pm 1, \dots, \pm 4$. Das skalare Feld entspricht

$$\varphi_x = \begin{pmatrix} \varphi_{4x} + i\varphi_{3x} & \varphi_{2x} + i\varphi_{1x} \\ -\varphi_{2x} + i\varphi_{1x} & \varphi_{4x} - i\varphi_{3x} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

bzw. in kompakter Darstellung

$$\varphi_x = \varphi_{4x} \mathbf{1} + i\varphi_{jx} \tau_j. \quad (1.19)$$

1.2. YUKAWA-WIRKUNG AUF DEM GITTER

Die τ_j sind die Paulimatrizen. Für sie gilt $\tau_j^\dagger = \tau_j$ und $\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \tau_k$, und es ist

$$\text{Tr}(\varphi_x^\dagger \varphi_x) = 2\varphi_{\alpha x} \varphi_{\alpha x}. \quad (1.20)$$

S_Ψ setzt sich aus drei Termen zusammen gemäß

$$S_\Psi \equiv S_F + S_W + S_Y, \quad (1.21)$$

dabei ist

$$S_F \equiv \sum_x \left\{ \mu_{\psi\chi} (\bar{\chi}_x \psi_x + \bar{\psi}_x \chi_x) - K \sum_{\pm\mu} (\bar{\psi}_{x+\hat{\mu}} \gamma_\mu \psi_x + \bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} \gamma_\mu \chi_x) \right\} \quad (1.22)$$

die Wirkung für Fermionen und Spiegelfermionen,

$$S_W \equiv -rK \sum_x \left\{ \sum_{\pm\mu} (\bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} \psi_x - \bar{\chi}_x \psi_x + \bar{\psi}_{x+\hat{\mu}} \chi_x - \bar{\psi}_x \chi_x) \right\} \quad (1.23)$$

der chiral invariante Wilson-Term [MON87, WIL75], der die Entkopplung der unerwünschten Doppel-Fermionen [NN81, KS81] durch Erzeugung sehr großer Doppel-Fermionenmassen im Kontinuum-Limes gewährleistet, und

$$S_Y \equiv \sum_x \left\{ G_\psi (\bar{\psi}_{Rx} \varphi_x^\dagger \psi_{Lx} + \bar{\psi}_{Lx} \varphi_x \psi_{Rx}) + G_\chi (\bar{\chi}_{Rx} \varphi_x \chi_{Lx} + \bar{\chi}_{Lx} \varphi_x^\dagger \chi_{Rx}) \right\} \quad (1.24)$$

ist der Yukawa-Wechselwirkungsterm, der die Fermionen an das skalare Feld koppelt. Die Indizes L und R korrespondieren zu den entsprechend indizierten $SU(2)$ -Eichgruppen.

Der Parameter K ist der fermionische Hopping-Parameter, der für Fermionen sowie Spiegelfermionen aufgrund der Freiheit bei der Normierung gleich gewählt wird, $\mu_{\psi\chi}$ ist die nackte Fermionen-Mischmasse und r bezeichnet den Wilson-Parameter. Ohne den Wilson-Term (1.23) würde der Ausdruck (1.21) die Beschreibung von 32 Fermionen-Zuständen umfassen, mit ihm, d.h. wenn $0 < r \leq 1$ ist, reduziert sich der Formalismus auf zwei Zustände. Für $\mu_{\psi\chi}$ wählt man die Normierung

$$\mu_{\psi\chi} + 8rK = 1. \quad (1.25)$$

Zusammengefaßt ergibt sich

$$\begin{aligned} S_\Psi = & \sum_x \left\{ \mu_{\psi\chi} (\bar{\chi}_x \psi_x + \bar{\psi}_x \chi_x) - K \sum_{\pm\mu} (\bar{\psi}_{x+\hat{\mu}} \gamma_\mu \psi_x + \bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} \gamma_\mu \chi_x) \right. \\ & - rK \sum_{\pm\mu} (\bar{\chi}_{x+\hat{\mu}} \psi_x - \bar{\chi}_x \psi_x + \bar{\psi}_{x+\hat{\mu}} \chi_x - \bar{\psi}_x \chi_x) \\ & \left. + G_\psi (\bar{\psi}_{Rx} \varphi_x^\dagger \psi_{Lx} + \bar{\psi}_{Lx} \varphi_x \psi_{Rx}) + G_\chi (\bar{\chi}_{Rx} \varphi_x \chi_{Lx} + \bar{\chi}_{Lx} \varphi_x^\dagger \chi_{Rx}) \right\}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Hierbei ist ψ_x das Fermionen- und χ_x das Spiegelfermionen-Feld; beide sind charakterisiert durch ihr Verhalten bei chiralen Transformationen der bereits oben erwähnten $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Gruppe.

Die γ -Matrizen gehorchen im **Euklidischen** der Vertauschungsrelation

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad (1.27)$$

(vgl. mit (1.7)). Aus ihnen definiert man sich zusätzlich

$$\gamma_5 \equiv \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4, \quad (1.28)$$

für dieses ist

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5.$$

Im übrigen ist

$$\gamma_{-\mu} \equiv -\gamma_\mu.$$

Eine mögliche Darstellung für die γ -Matrizen ist die folgende:

$$\gamma_j = i \begin{pmatrix} 0 & \tau_j \\ -\tau_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Setzt man

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5) \quad (1.30)$$

und

$$P_R \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5), \quad (1.31)$$

so ergeben sich links- und rechtshändige Komponenten durch

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \psi_R = P_R \psi, \quad \chi_L = P_L \chi, \quad \chi_R = P_R \chi. \quad (1.32)$$

Bei den adjungierten Spinoren gilt:

$$\bar{\psi}_L = \bar{\psi} P_R, \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L, \quad \bar{\chi}_L = \bar{\chi} P_R, \quad \bar{\chi}_R = \bar{\chi} P_L. \quad (1.33)$$

Die Felder transformieren sich nun gemäß

$$\psi_L \rightarrow U_L \psi_L, \quad \chi_L \rightarrow U_R \chi_L, \quad \psi_R \rightarrow U_R \psi_R, \quad \chi_R \rightarrow U_L \chi_R \quad (1.34)$$

und

$$\bar{\psi}_L \rightarrow \bar{\psi}_L U_L^\dagger, \quad \bar{\chi}_L \rightarrow \bar{\chi}_L U_R^\dagger, \quad \bar{\psi}_R \rightarrow \bar{\psi}_R U_R^\dagger, \quad \bar{\chi}_R \rightarrow \bar{\chi}_R U_L^\dagger, \quad (1.35)$$

wobei $U_L \in \text{SU}(2)_L$, $U_R \in \text{SU}(2)_R$.

Den Yukawa-Anteil

$$S_Y = \sum_x \left\{ G_\psi (\bar{\psi}_{Rx} \varphi_x^\dagger \psi_{Lx} + \bar{\psi}_{Lx} \varphi_x \psi_{Rx}) + G_\chi (\bar{\chi}_{Rx} \varphi_x \chi_{Lx} + \bar{\chi}_{Lx} \varphi_x^\dagger \chi_{Rx}) \right\} \quad (1.36)$$

1.2. YUKAWA-WIRKUNG AUF DEM GITTER

kann man infolgedessen auch umformen in

$$\begin{aligned} S_Y &= \sum_x \{G_\psi(\bar{\psi}_x P_L \varphi_x^\dagger P_L \psi_x + \bar{\psi}_x P_R \varphi_x P_R \psi_x) + G_\chi(\bar{\chi}_x P_R \varphi_x^\dagger P_R \chi_x + \bar{\chi}_x P_L \varphi_x P_L \chi_x)\} \\ &= \sum_x \{G_\psi \bar{\psi}_x (P_L \varphi_x^\dagger P_L + P_R \varphi_x P_R) \psi_x + G_\chi \bar{\chi}_x (P_R \varphi_x^\dagger P_R + P_L \varphi_x P_L) \chi_x\}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &4(P_L \varphi_x^\dagger P_L + P_R \varphi_x P_R) \\ &= (\mathbf{1} + \gamma_5)(\varphi_{4x} \mathbf{1} - i\varphi_{jx} \tau_j)(\mathbf{1} + \gamma_5) + (\mathbf{1} - \gamma_5)(\varphi_{4x} \mathbf{1} + i\varphi_{jx} \tau_j)(\mathbf{1} - \gamma_5) \\ &= \varphi_{4x} \mathbf{1} - i\varphi_{jx} \tau_j + \varphi_{4x} \gamma_5 - i\varphi_{jx} \tau_j \gamma_5 + \varphi_{4x} \gamma_5 - i\varphi_{jx} \tau_j \gamma_5 + \varphi_{4x} \mathbf{1} - i\varphi_{jx} \gamma_5 \tau_j \gamma_5 \\ &+ \varphi_{4x} \mathbf{1} + i\varphi_{jx} \tau_j - \varphi_{4x} \gamma_5 - i\varphi_{jx} \tau_j \gamma_5 - \varphi_{4x} \gamma_5 - i\varphi_{jx} \tau_j \gamma_5 + \varphi_{4x} \mathbf{1} + i\varphi_{jx} \gamma_5 \tau_j \gamma_5 \\ &= 4(\varphi_{4x} \mathbf{1} - i\varphi_{jx} \gamma_5 \tau_j). \end{aligned}$$

Analog gilt

$$P_R \varphi_x^\dagger P_R + P_L \varphi_x P_L = \varphi_{4x} \mathbf{1} + i\varphi_{jx} \gamma_5 \tau_j.$$

Definiert man

$$\Gamma_j \equiv -i\gamma_5 \tau_j \quad , \quad \Gamma_4 \equiv \mathbf{1}, \quad (1.37)$$

erhält man schließlich für die Yukawa-Kopplung den Ausdruck

$$S_Y = \sum_x (G_\psi \bar{\psi}_x \Gamma_\alpha \varphi_{\alpha x} \psi_x + G_\chi \bar{\chi}_x \Gamma_\alpha^\dagger \varphi_{\alpha x} \chi_x). \quad (1.38)$$

Mit den Definitionen

$$\Psi_x \equiv \begin{pmatrix} \psi_x \\ \chi_x \end{pmatrix}, \quad \bar{\Psi}_x \equiv \begin{pmatrix} \bar{\psi}_x \\ \bar{\chi}_x \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

der ‘‘Umnormierung’’ (wodurch man zur formalen Ähnlichkeit zur Kontinuumstheorie gelangt, was die Aufstellung der Feynman-Regeln erleichtert)

$$\Psi_{0x} \equiv \sqrt{2K} \Psi_x, \quad \bar{\Psi}_{0x} \equiv \sqrt{2K} \bar{\Psi}_x, \quad \varphi_{0\alpha x} \equiv \sqrt{2\kappa} \varphi_{\alpha x} \quad (1.40)$$

und

$$G_{0\psi} \equiv \frac{G_\psi}{2K\sqrt{2\kappa}}, \quad G_{0\chi} \equiv \frac{G_\chi}{2K\sqrt{2\kappa}} \quad (1.41)$$

lautet der Ausdruck dann

$$S_\Psi = \sum_{xy} \bar{\Psi}_{0x} (P_{xy} + V_{xy}(\varphi_0)) \Psi_{0y} \quad (1.42)$$

mit der Fermionenmatrix

$$P_{xy} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sum_{\pm\mu} \gamma_\mu \delta_{x+\hat{\mu} y} & (\frac{\bar{\mu}}{2K} \delta_{xy} - \frac{r}{2} \sum_{\pm\mu} \delta_{x+\hat{\mu} y}) \mathbf{1} \\ (\frac{\bar{\mu}}{2K} \delta_{xy} - \frac{r}{2} \sum_{\pm\mu} \delta_{x+\hat{\mu} y}) \mathbf{1} & \frac{1}{2} \sum_{\pm\mu} \gamma_\mu \delta_{x+\hat{\mu} y} \end{pmatrix}, \quad (1.43)$$

der Kopplungsmatrix

$$V_{xy}(\varphi_0) \equiv V_{xy}^\alpha \varphi_{0\alpha x}, \quad (1.44)$$

wobei

$$V_{xy}^\alpha \equiv \delta_{xy} \begin{pmatrix} G_{0\psi} \Gamma_\alpha & 0 \\ 0 & G_{0\chi} \Gamma_\alpha^\dagger \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

und

$$\bar{\mu} \equiv \mu_{\psi\chi} + 8rK. \quad (1.46)$$

Die P -Matrix ist translationsinvariant, d.h. $P_{xy} = P_{x+z y+z}$.

Die 8×8 -Matrizen Γ_α gehorchen den Beziehungen

$$\gamma_\mu \Gamma_\nu = \Gamma_\nu^\dagger \gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu \gamma_\nu = \gamma_\nu \Gamma_\mu^\dagger, \quad \gamma_5 \Gamma_\nu = \Gamma_\nu \gamma_5, \quad \gamma_5 \Gamma_\nu^\dagger = \Gamma_\nu^\dagger \gamma_5 \quad (1.47)$$

und

$$\Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_i^\dagger \Gamma_j^\dagger = -\delta_{ij} - i \epsilon_{ijk} \tau_k, \quad \Gamma_i^\dagger \Gamma_j = \Gamma_i \Gamma_j^\dagger = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \tau_k. \quad (1.48)$$

Außerdem ist

$$\text{Tr}(\Gamma_\mu \Gamma_\nu^\dagger) = 8\delta_{\mu\nu}. \quad (1.49)$$

1.3 Phase mit gebrochener Symmetrie

1.3.1 Wirkung für das skalare Feld

In der gebrochenen oder FM-Phase dient die Definition

$$S_\varphi \equiv \sum_x \left\{ \frac{1}{4} \sum_\mu \text{Tr}(\partial_\mu \varphi_{0x}^\dagger \partial_\mu \varphi_{0x}) - \frac{m_0^2}{8} \text{Tr}(\varphi_{0x}^\dagger \varphi_{0x}) + \frac{g_0}{96} \text{Tr}^2(\varphi_{0x}^\dagger \varphi_{0x}) \right\} \quad (1.50)$$

$$= \sum_x \left\{ \frac{1}{2} \sum_\mu (\partial_\mu \varphi_{0\alpha x} \partial_\mu \varphi_{0\alpha x}) - \frac{m_0^2}{4} \varphi_{0\alpha x} \varphi_{0\alpha x} + \frac{g_0}{4!} (\varphi_{0\alpha x} \varphi_{0\alpha x})^2 \right\}, \quad (1.51)$$

als Ausgangspunkt für die skalare Wirkung. Die Abkürzung FM steht für *ferromagnetisch*, in Anlehnung an die Festkörperphysik, aus der aufgrund der formalen Analogie die Phasen-Unterscheidung stammt.

Die gebrochene Phase ist durch das Minuszeichen vor dem quadratischen Term gekennzeichnet. Mit Definition (1.40) wird daraus nach wenigen Umformungsschritten

$$S_\varphi = \frac{1}{2} \sum_x \left\{ (8\kappa - \frac{m_0^2}{2}\kappa) \varphi_{\alpha x} \varphi_{\alpha x} + \frac{g_0 \kappa^2}{6} (\varphi_{\alpha x} \varphi_{\alpha x})^2 - 2\kappa \sum_\mu \varphi_{\alpha x + \hat{\mu}} \varphi_{\alpha x} \right\}.$$

Durch die Ersetzungen

1.3. PHASE MIT GEBROCHENER SYMMETRIE

$$1 - 2\lambda = 8\kappa - \frac{m_0^2}{2}\kappa \quad (1.52)$$

und

$$\lambda = \frac{g_0\kappa^2}{6} \quad (1.53)$$

bekommt man schließlich

$$S_\varphi = \sum_x \left\{ \frac{1}{2}\varphi_{\alpha x}\varphi_{\alpha x} + \frac{1}{2}\lambda(\varphi_{\alpha x}\varphi_{\alpha x} - 1)^2 - \kappa \sum_\mu \varphi_{\alpha x+\mu}\varphi_{\alpha x} \right\}. \quad (1.54)$$

Mit

$$\mu_\phi = 8\kappa - \frac{m_0^2}{2}\kappa \quad (1.55)$$

erhält man (1.17).

Aus (1.36) und (1.34) kann man das Transformationsverhalten ablesen:

$$\varphi_x \rightarrow U_L \varphi_x U_R^\dagger. \quad (1.56)$$

Der Grundzustand des freien skalaren φ -Feldes aus S_φ ergibt sich durch Bestimmung des Minimums des effektiven Potentials der zugehörigen Lagrange-Dichte.

Das effektive Potential ist

$$\begin{aligned} V_{eff}(\varphi) &= -\frac{m_0^2}{4}\varphi_{0\alpha}\varphi_{0\alpha} + \frac{g_0}{4!}(\varphi_{0\alpha}\varphi_{0\alpha})^2 \\ &= \lambda(\varphi_\alpha\varphi_\alpha)^2 - (8\kappa - 1 + 2\lambda)\varphi_\alpha\varphi_\alpha. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Mit der Ersetzung $\varphi_{\alpha x}\varphi_{\alpha x} \rightarrow \phi^2$ bekommt man

$$V_{eff} = \lambda\phi^2 - (8\kappa - 1 + 2\lambda)\phi^4,$$

was an der Stelle

$$\phi^2 = s^2 \equiv \frac{1}{2\lambda}(8\kappa - 1 + 2\lambda) = \frac{3m_0^2}{2\kappa g_0} \quad (1.58)$$

ein Minimum annimmt. Mit diesem Minimum hat man den Grundzustand gefunden, welcher das Vakuum definiert. Setzt man

$$\sigma_x \equiv \varphi_{4x} - s, \quad \pi_{jx} \equiv \varphi_{jx} \quad (1.59)$$

und

$$\sigma_{0x} \equiv \sqrt{2\kappa}\sigma_x, \quad \pi_{0jx} \equiv \sqrt{2\kappa}\pi_{jx}, \quad (1.60)$$

erhält man die Gleichung

$$S_\varphi = \sum_x \left\{ \frac{1}{2} \sum_\mu [(\partial_\mu \sigma_{0x})^2 + \partial_\mu \pi_{0jx} \partial_\mu \pi_{0jx}] + \frac{m_0^2}{2} \sigma_{0x}^2 + \frac{\sqrt{3} g_0 m_0}{3!} \sigma_{0x} [\sigma_{0x}^2 + \pi_{0jx} \pi_{0jx}] + \frac{g_0}{4!} [\sigma_{0x}^2 + \pi_{0jx} \pi_{0jx}]^2 \right\}. \quad (1.61)$$

Da in diesem Ausdruck keine π_j^2 -Terme vorkommen, erhält man für die π_j Masselosigkeit, die Konstituenten der Felder π_j sind damit als *Goldstone-Bosonen* definiert. Dagegen ist für das σ -Teilchen Masse erzeugt worden, da ein entsprechender quadratischer Term vorkommt. Das skalare Feld

$$\varphi'_x = \sigma_x \mathbf{1} + i \pi_{jx} \tau_j \quad (1.62)$$

transformiert sich nicht mehr nach (1.56), die Symmetrie ist spontan gebrochen worden.

Anders ausgedrückt lautet (1.61)

$$S_\varphi = \sum_x \left\{ 4\kappa(\sigma_x^2 + \pi_{jx} \pi_{jx}) - \kappa \sum_\mu (\sigma_{x+\hat{\mu}} \sigma_x + \pi_{jx+\hat{\mu}} \pi_{jx}) + \frac{1}{2} \lambda [(\sigma_x^2 + \pi_{jx} \pi_{jx}) + 2s \sigma_x]^2 \right\} \quad (1.63)$$

bzw.

$$S_\varphi = \frac{1}{2} \kappa \sum_{xy} \left\{ \sigma_x A_{xy}^\sigma \sigma_y + \pi_{jx} A_{xy}^\pi \pi_{jy} \right\} + \frac{1}{2} \lambda \sum_x \left\{ (\sigma_x^2 + \pi_{jx} \pi_{jx})^2 + 4s \sigma_x (\sigma_x^2 + \pi_{jx} \pi_{jx}) \right\} \quad (1.64)$$

mit den Matrizen

$$A_{xy}^\sigma = 4(2 + \frac{\lambda s^2}{\kappa}) \delta_{xy} - \sum_{\pm \mu} \delta_{x+\hat{\mu}} y \quad (1.65)$$

und

$$A_{xy}^\pi = 8\delta_{xy} - \sum_{\pm \mu} \delta_{x+\hat{\mu}} y. \quad (1.66)$$

Die inversen Fouriertransformierten sind der freie Propagator vom σ -Feld,

$$\Delta_\sigma(q) = (\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1}, \quad (1.67)$$

und derjenige der π -Felder,

$$\Delta_\pi(q) = (\hat{q}^2)^{-1} \quad (1.68)$$

mit dem Gitterimpuls

$$\hat{q}_\mu \equiv 2 \sin \frac{q_\mu}{2}. \quad (1.69)$$

1.3. PHASE MIT GEBROCHENER SYMMETRIE

1.3.2 Fermionen-Propagator in der gebrochenen Phase

In der gebrochenen Phase ist

$$V_{xy}(\varphi) = V_{xy}^\alpha \varphi_{0\alpha x} = V_{xy}^4 \left(\sqrt{2\kappa}(\sigma_x + s) \right) + V_{xy}^j \sqrt{2\kappa} \pi_{jx} = V_{xy}(\varphi'_0) + V_{xy}^4 s_0 \quad (1.70)$$

mit dem umnormierten skalaren Feld

$$\varphi'_0 = \sqrt{2\kappa} \varphi' \quad (1.71)$$

und dem analog umnormierten Minimum

$$s_0 \equiv \sqrt{2\kappa} s. \quad (1.72)$$

Definiere die “Impulsmatrix”

$$\mathcal{P}_{xy} \equiv P_{xy} + s_0 V_{xy}^4. \quad (1.73)$$

Die Fouriertransformierte davon lautet

$$\tilde{\mathcal{P}}(q) = \begin{pmatrix} i \sum_\mu \sin q_\mu \gamma_\mu + G_{0\psi} s_0 \mathbf{1} & (\frac{\bar{\mu}}{2K} - r \sum_\mu \cos q_\mu) \mathbf{1} \\ (\frac{\bar{\mu}}{2K} - r \sum_\mu \cos q_\mu) \mathbf{1} & i \sum_\mu \sin q_\mu \gamma_\mu + G_{0\chi} s_0 \mathbf{1} \end{pmatrix}. \quad (1.74)$$

Einführung der (Massen-)Parameter

$$\mu_0 \equiv \frac{\mu_{\psi\chi}}{2K}, \quad \mu_{0\psi} \equiv G_{0\psi} s_0, \quad \mu_{0\chi} \equiv G_{0\chi} s_0 \quad (1.75)$$

sowie des Gitterimpulses

$$\bar{q}_\mu \equiv \sin q_\mu \quad (1.76)$$

und

$$\mu_q \equiv (\frac{\bar{\mu}}{2K} - r \sum_\mu \cos q_\mu) = \mu_0 + \frac{r}{2} \hat{q}^2 \quad (1.77)$$

liefert den kompakteren Ausdruck

$$\tilde{\mathcal{P}}(q) = \begin{pmatrix} \mu_{0\psi} \mathbf{1} + i \sum_\mu \bar{q}_\mu \gamma_\mu & \mu_q \mathbf{1} \\ \mu_q \mathbf{1} & \mu_{0\chi} \mathbf{1} + i \sum_\mu \bar{q}_\mu \gamma_\mu \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

bzw.

$$\tilde{\mathcal{P}}(q) = \begin{pmatrix} \mu_{0\psi} & \mu_q \\ \mu_q & \mu_{0\chi} \end{pmatrix} + i \bar{q} \cdot \gamma \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (1.79)$$

wobei

$$\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4). \quad (1.80)$$

Die Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ hinter Matrixelementen ungleich $\mathbf{1}$ wurde zwecks Vereinfachung der Schreibweise weggelassen.

Die inverse Matrix stellt den freien Fermionen-Propagator in der gebrochenen Phase dar; mit

$$\tilde{\mathcal{D}}(q) \equiv (\bar{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi})^2 + (\mu_{0\psi} + \mu_{0\chi})^2 \bar{q}^2 \quad (1.81)$$

gilt für ihn:

$$\begin{aligned} \Delta_\Psi(q) &\equiv \begin{pmatrix} \Delta_{\psi\psi} & \Delta_{\psi\chi} \\ \Delta_{\chi\psi} & \Delta_{\chi\chi} \end{pmatrix}(q) \equiv \tilde{\mathcal{P}}^{-1}(q) = \\ \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(q) &\left[\begin{pmatrix} \mu_{0\psi}\bar{q}^2 - \mu_{0\chi}(\mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}) & (\bar{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi})\mu_q \\ (\bar{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi})\mu_q & \mu_{0\chi}\bar{q}^2 - \mu_{0\psi}(\mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}) \end{pmatrix} \right. \\ &\left. - i\bar{q} \cdot \gamma \begin{pmatrix} \bar{q}^2 + \mu_q^2 + \mu_{0\chi}^2 & -(\mu_{0\psi} + \mu_{0\chi})\mu_q \\ -(\mu_{0\psi} + \mu_{0\chi})\mu_q & \bar{q}^2 + \mu_q^2 + \mu_{0\psi}^2 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (1.82)$$

1.3.3 Feynman-Regeln

Die Feynman-Regeln sind die folgenden (in Abwandlung von [CL84, HUA82, MM94]):

1. Jeder nicht-orientierten Linie wird der entsprechende skalare Propagator, jeder orientierten Linie (mit Pfeil) der entsprechende Fermionen-Propagator zugeordnet.
2. Jedem Vertex wird der entsprechende Ausdruck als Faktor zugeordnet.
3. Bei inneren Vertizes gilt Impulserhaltung modulo 2π .
4. Zusammenhängende Vertizes werden kontrahiert; daraus resultiert eine Spur für Fermionenschleifen.
5. Loop-Impulse werden im unendlichen Volumen über die erste Brillouin-Zone integriert, d.h. $\int_q \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} d^4q$, im endlichen Volumen wird dementsprechend summiert, d.h.

$$\int_q \equiv \frac{1}{L^3 T} \sum_{\substack{-L/2 < n_j \leq L/2 \\ -T/2 < n_4 \leq T/2}} \equiv \frac{1}{L_1 L_2 L_3 L_4} \sum_{-L_\mu < n_\mu \leq L_\mu} \quad (1.83)$$

mit $q_j = \frac{2\pi}{L} n_j$ und $q_4 = \frac{2\pi}{T} n_4$.

6. Berücksichtigt werden muß auch noch jeweils ein Symmetriefaktor, der sich gemäß der Gleichung

$$S_{\mathcal{G}} = \frac{N_{\mathcal{G}} P_{\mathcal{G}}}{\prod_{i=1}^{m_{\mathcal{G}}} m_i! \prod_{j=1}^{M_{\mathcal{G}}} M_j!} \quad (1.84)$$

1.3. PHASE MIT GEBROCHENER SYMMETRIE

zusammensetzt. Dabei ist $N_{\mathcal{G}}$ das Produkt aus der Gesamtzahl der Verbindungs möglichkeiten der an einem Graphen \mathcal{G} beteiligten Vertizes nach außen und der verbleibenden Zahl der möglichen Verknüpfungen der Vertizes untereinander, $P_{\mathcal{G}}$ die Anzahl der Möglichkeiten, die äußeren Beine spiegelungs- und rotationsfrei zu vertauschen (tritt in dieser Arbeit nicht auf), $M_{\mathcal{G}}$ ist die Anzahl der an dem jeweiligen Graphen beteiligten Vertizes, die M_j bezeichnen die Zahl der Verbindungs möglichkeiten eines Vertex j bei gegebener Anordnung nach außen, $m_{\mathcal{G}} \leq M_{\mathcal{G}}$ beziffert die Vertexarten und die m_i zählen die innerhalb eines Graphen auftretenden Vertizes einer Art i . Zudem muß noch für Fermionenschleifen ein Faktor -1 berücksichtigt werden, der von der Verwendung der Grassmann-Variablen herröhrt.

1.3.3.1 Skalarer Anteil

Aus (1.61) lassen sich direkt die Diagramme ablesen:

$$\sigma \text{ ————— } \sigma = \Delta_{\sigma}(q), \quad (1.85)$$

$$\pi_i \text{----- } \pi_j = \delta_{ij} \Delta_{\pi}(q) \quad (1.86)$$

für die freien Propagatoren. Für die Dreipunkt-Vertizes ergibt sich

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \sigma \text{ — } \text{—— } \text{—— } \sigma \\ \sigma \end{array} = -\sqrt{3g_0} m_0, \quad (1.87)$$

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \sigma \text{ — } \text{—— } \text{—— } \pi_i \\ \sigma \end{array} = -\sqrt{g_0/3} m_0 \delta_{ij} \quad (1.88)$$

und für die quartische Kopplung

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \sigma \text{ — } \text{—— } \text{—— } \sigma \\ \sigma \end{array} = -g_0, \quad (1.89)$$

$$\begin{array}{c} \sigma \\ \sigma \text{ — } \text{—— } \text{—— } \pi_i \\ \sigma \end{array} = -\frac{1}{3} g_0 \delta_{ij}, \quad (1.90)$$

$$\begin{array}{c}
 \pi_i \quad \quad \quad \pi_j \\
 \diagup \quad \quad \quad \diagdown \\
 \quad \quad \quad = -\frac{1}{3}g_0(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \\
 \diagdown \quad \quad \quad \diagup \\
 \pi_l \quad \quad \quad \pi_k
 \end{array} \tag{1.91}$$

1.3.3.2 Fermionischer Anteil

Der freie Fermionen-Propagator in der gebrochenen Phase ist wegen seines Matrixcharakters gerichtet und lautet

$$\alpha \longrightarrow \beta = \Delta_{\alpha\beta}(q), \tag{1.92}$$

wobei $\alpha, \beta = \psi, \chi$. Die Yukawa-Kopplung wird mit den Vertizes

$$\begin{array}{c}
 \sigma \\
 | \\
 \diagup \quad \quad \quad \diagdown \\
 \alpha \quad \quad \quad \beta \\
 \quad \quad \quad = - \begin{pmatrix} G_{0\psi} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & G_{0\chi} \mathbf{1} \end{pmatrix}
 \end{array} \tag{1.93}$$

und

$$\begin{array}{c}
 \pi_i \\
 | \\
 \diagup \quad \quad \quad \diagdown \\
 \alpha \quad \quad \quad \beta \\
 \quad \quad \quad = - \begin{pmatrix} G_{0\psi} \Gamma_i & 0 \\ 0 & G_{0\chi} \Gamma_i^\dagger \end{pmatrix}
 \end{array} \tag{1.94}$$

ausgedrückt.

1.4 Symmetrische Phase

Auf die physikalisch nicht relevante symmetrische Phase, die auch PM-Phase genannt wird, gehe ich nur kurz ein, um sie zumindest vergleichend zur gebrochenen Phase vorzustellen (PM ist die Abkürzung für *paramagnetisch*). Mit geringerem mathematischem Aufwand können einige Phänomene untersucht werden, die auch in der gebrochenen Phase auftauchen.

Die skalare symmetrische Wirkung wird als

$$S_\varphi \equiv \sum_x \left\{ \frac{1}{4} \sum_\mu \text{Tr}(\partial_\mu \varphi_{0x}^\dagger \partial_\mu \varphi_{0x}) + \frac{m_0^2}{4} \text{Tr}(\varphi_{0x}^\dagger \varphi_{0x}) + \frac{g_0}{96} \text{Tr}^2(\varphi_{0x}^\dagger \varphi_{0x}) \right\} \tag{1.95}$$

1.4. SYMMETRISCHE PHASE

$$= \sum_x \left\{ \frac{1}{2} \sum_\mu (\partial_\mu \varphi_{0\alpha x} \partial_\mu \varphi_{0\alpha x}) + \frac{m_0^2}{2} \varphi_{0\alpha x} \varphi_{0\alpha x} + \frac{g_0}{4!} (\varphi_{0\alpha x} \varphi_{0\alpha x})^2 \right\} \quad (1.96)$$

angesetzt. Der positive quadratische Term kennzeichnet den symmetrischen Charakter. Durch die Ersetzungen

$$1 - 2\lambda = 8\kappa + m_0^2 \kappa \quad (1.97)$$

und (1.53) erhält man (1.54) und mit

$$\mu_\phi = 8\kappa + m_0^2 \kappa \quad (1.98)$$

gelangt man zur Wirkung (1.17).

Ähnlich wie in Abschnitt 1.3.1 berechnet man die freien Propagatoren, dabei erhält man als massebehaftete skalare Propagatoren

$$\Delta_{ij}(q) = \delta_{ij} (\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} \quad (1.99)$$

und den Fermionen-Propagator

$$\Delta_\Psi(q) = (\bar{q}^2 + \mu_q^2)^{-1} \begin{pmatrix} -i\bar{q} \cdot \gamma & \mu_q \\ \mu_q & -i\bar{q} \cdot \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.100)$$

Daß der skalare Propagatorausdruck (1.99) (bis auf das Kronecker- δ) dem Propagator (1.67) gleicht, verdankt er der 4 im Nenner des Faktors $\frac{m_0^2}{4}$ von Definition (1.95), was den Unterschied zum analogen Faktor im Wirkungsausdruck (1.50) der gebrochenen Phase erklärt.

Kapitel 2

Propagatoren in der gebrochenen Phase

In diesem Kapitel werden die Störungsentwicklungen für die nackten Selbstenergien in 1-Loop-Ordnung angegeben, die der Schlüssel für die entsprechenden Entwicklungen der renormierten Parameter im nächsten Kapitel sind. Zu diesem Zweck werden zunächst einmal die Propagatoren und die 2-Punkt-Vertex-Funktionen (also die inversen Propagatoren) definiert, anschließend mit den Feynman-Regeln aus Abschnitt 1.3.3 die 1-Loop-Graphen aufgestellt und schließlich deren Summen als Selbstenergien gebildet.

2.1 Definitionen der Propagatoren

2.1.1 Skalare Propagatoren und Vakuumerwartungswert

Die Definitionen für die skalaren Propagatoren im Ortsraum lauten

$$G_{\sigma,xy} \equiv \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_c \equiv \langle \sigma_x \sigma_y \rangle - \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_y \rangle \quad (2.1)$$

und

$$G_{\pi,ij,xy} \equiv \langle \pi_{ix} \pi_{jy} \rangle. \quad (2.2)$$

Im Impulsraum erhält man den skalaren σ -Propator einfach mittels Fouriertransformation,

$$G_{\sigma}(p) = \frac{1}{V} \sum_{xy} \langle \sigma_x \sigma_y \rangle_c e^{ip(x-y)}, \quad (2.3)$$

analog zum skalaren π -Propagator,

$$G_{\pi,ij}(p) = \frac{1}{V} \sum_{xy} \langle \pi_{ix} \pi_{jy} \rangle e^{ip(x-y)}, \quad (2.4)$$

2.1. DEFINITIONEN DER PROPAGATOREN

wobei $V = L^3 T = \sum_x 1$ das Gittervolumen ist, L^3 steht symbolisch für $L_1 L_2 L_3$, das Produkt der Gitterlängen in Raumrichtung, T stellt die Längenausdehnung in Zeitrichtung dar. Der nicht mit ij indizierte π -Propagator ist einfach der Mittelwert

$$G_\pi(p) \equiv \frac{1}{3V} \sum_{ij} G_{\pi,ij}(p) = \frac{1}{3V} \sum_i G_{\pi,ii}(p). \quad (2.5)$$

Die Inversion liefert die 2-Punkt-Funktionen

$$\begin{aligned} \Gamma_\sigma^{(2,0)}(p) &\equiv -G_\sigma^{-1}(p), \\ \Gamma_{\pi,ij}^{(2,0)}(p) &\equiv \begin{cases} G_{\pi,ij}^{-1}(p) & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die umnormierten inversen Propagatoren gehorchen der Proportionalbeziehung

$$\Gamma_0^{(2,0)}(p) = \frac{1}{2\kappa} \Gamma^{(2,0)}(p). \quad (2.7)$$

Der Vakuumerwartungswert (VEV = *Vacuum Expectation Value*) des Feldes $\varphi_{0\alpha}$ ist

$$v_0 \equiv s_0 + \langle \sigma_0 \rangle, \quad (2.8)$$

wobei $\langle \sigma_0 \rangle$ der oberhalb des Baumgraphen-Niveaus (engl. *tree level*) nicht verschwindende VEV des Feldes σ_0 ist.

2.1.2 Fermionen-Propagator

Analog zu den skalaren Propagatoren definiert man den fermionischen Propagator, der im Unterschied zu den Erstgenannten Matrixcharakter hat:

$$G_{\alpha\beta}(p) \equiv \langle \alpha\beta \rangle \quad (2.9)$$

mit $\alpha, \beta = \psi, \chi$. Der inverse Propagator wird durch Matrixinversion gewonnen,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{(0,2)}(p) = -G_{\alpha\beta}^{-1}(p), \quad (2.10)$$

der volle Propagator hat die Gestalt

$$\Gamma_\Psi^{(0,2)}(p) = \begin{pmatrix} \Gamma_{\psi\psi}^{(0,2)} & \Gamma_{\psi\chi}^{(0,2)} \\ \Gamma_{\chi\psi}^{(0,2)} & \Gamma_{\chi\chi}^{(0,2)} \end{pmatrix}(p). \quad (2.11)$$

Den 0-indizierten vollen Propagator erhält man aus

$$\Gamma_{0\Psi}^{(0,2)}(p) = \frac{1}{2K} \Gamma_\Psi^{(0,2)}(p). \quad (2.12)$$

2.2 Propagatoren in 1-Loop-Ordnung

2.2.1 Skalare Propagatoren

Die 2-Punkt-Vertex-Funktionen in 1-Loop-Ordnung haben folgende Form:

$$\Gamma^{(2,0)}(p) = -\Delta^{-1}(p) + \Sigma(p), \quad (2.13)$$

wobei $\Sigma(p)$ die Selbstenergie darstellt. Daher kann man wegen (2.6) bzw. (B.26) nun die skalaren Propagatoren folgendermaßen entwickeln:

$$G(p) = \frac{\Delta(p)}{1 - \Delta(p)\Sigma(p)} \approx \Delta(p)[1 + \Delta(p)\Sigma(p)]. \quad (2.14)$$

Aus den Feynman-Regeln (1.85) bis (1.91) und (1.92) bis (1.94) ergeben sich für den σ -Propagator in 1-Loop-Ordnung folgende Graphen (die äußereren Beine dienen nur der Unterscheidbarkeit, werden aber nicht mitberücksichtigt):

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{36}{2!3!^2} 3 g_0 m_0^2 \int_q \Delta_\sigma(p+q) \Delta_\sigma(q), \quad (2.15)$$

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{4}{2!2!^2} g_0 m_0^2 \int_q \Delta_\pi(p+q) \Delta_\pi(q), \quad (2.16)$$

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = -\frac{2}{2!} N_f \int_q \text{Tr} \left(V_0^4 \Delta_\Psi(p+q) V_0^4 \Delta_\Psi(q) \right), \quad (2.17)$$

wobei V_0^4 gemäß

$$V_0^\alpha \equiv \begin{pmatrix} G_{0\psi} \Gamma_\alpha & 0 \\ 0 & G_{0\chi} \Gamma_\alpha^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

definiert ist,

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{12}{4!} g_0 \int_q \Delta_\sigma(q), \quad (2.19)$$

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = \frac{36}{2!3!^2} g_0 \int_q \Delta_\sigma(q), \quad (2.20)$$

2.2. PROPAGATOREN IN 1-LOOP-ORDNUNG

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: a horizontal line with a dashed circle loop attached to its left end.} \\ \hline \end{array} = -\frac{2}{2!^2} g_0 \int_q \Delta_\pi(q), \quad (2.21)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: a horizontal line with a dashed circle loop attached to its left end, and a vertical line segment extending downwards from the center of the loop.} \\ \hline \end{array} = \frac{6}{2! 3!} 3 g_0 \int_q \Delta_\pi(q), \quad (2.22)$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram: a horizontal line with a dashed circle loop attached to its left end, and a vertical line segment extending upwards from the center of the loop, with a curved arrow indicating a clockwise direction.} \\ \hline \end{array} = \frac{6}{3!} \frac{\sqrt{3} g_0}{m_0} \int_q \text{Tr} \left(V_0^4 \Delta_\Psi(q) \right). \quad (2.23)$$

Für die Spurausdrücke gelten folgende Relationen:

$$\text{Tr} \left(V_0^4 \Delta_\Psi(q) \right) = 8 \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(q) \left[(G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) \bar{q}^2 - 2 G_{0\psi} G_{0\chi} (\mu_q^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) \right] s_0 \quad (2.24)$$

und

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr} \left(V_0^4 \Delta_\Psi(p+q) V_0^4 \Delta_\Psi(q) \right) = \\
 & 8 \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(p+q) \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(q) \\
 & \times \left((G_{0\psi}^2 \mu_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2 \mu_{0\chi}^2) \overline{p+q}^2 \bar{q}^2 \right. \\
 & - (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) \mu_{0\psi} \mu_{0\chi} \left[\overline{p+q}^2 (\mu_q^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) + \bar{q}^2 (\mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) \right] \\
 & + 2 G_{0\psi} G_{0\chi} \left[\mu_{0\psi} \mu_{0\chi} (\mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) (\mu_q^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) \right. \\
 & \quad \left. \left. + \mu_{p+q} \mu_q (\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) (\bar{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) \right] \right. \\
 & - \overline{p+q} \bar{q} \left\{ (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) (\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2) (\bar{q}^2 + \mu_q^2) \right. \\
 & \quad + 2 G_{0\psi} G_{0\chi} \mu_{0\psi} \mu_{0\chi} \left[(\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2) + (\bar{q}^2 + \mu_q^2) \right] \\
 & \quad \left. \left. + 2 (G_{0\psi} + G_{0\chi})^2 \mu_{0\psi} \mu_{0\chi} \mu_{p+q} \mu_q + (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) (\mu_{0\psi} \mu_{0\chi})^2 \right\} \right), \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

wobei N_f die Zahl der Fermion-Spiegelfermion-Paare darstellt. Für den π -Propagator findet man fünf Diagramme:

$$i \cdots \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} j = \frac{8}{2! 2!^2} \frac{1}{3} \delta_{ij} g_0 m_0^2 \int_q \Delta_\sigma(p+q) \Delta_\pi(q), \quad (2.26)$$

$$i \cdots \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} j = -\frac{2}{2!} \frac{1}{3} \delta_{ij} N_f \int_q \text{Tr} \left(V_0^k \Delta_\Psi(p+q) V_0^k \Delta_\Psi(q) \right), \quad (2.27)$$

$$i \cdots \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} j = -\frac{2}{2!^2} \frac{1}{3} \delta_{ij} g_0 \int_q \Delta_\sigma(q), \quad (2.28)$$

$$i \cdots \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} j = \frac{6}{2! 3!} \delta_{ij} g_0 \int_q \Delta_\sigma(q). \quad (2.29)$$

Bei den nächsten beiden Graphen ist der Aufbau des Vorfaktors zu aufwendig, deswegen sei er nur einfach angegeben:

$$i \cdots \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} j = -\frac{5}{6} \delta_{ij} g_0 \int_q \Delta_\pi(q), \quad (2.30)$$

$$i \cdots \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} j = \frac{1}{2} \delta_{ij} g_0 \int_q \Delta_\pi(q), \quad (2.31)$$

$$i \cdots \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} j = \frac{2}{2!} \delta_{ij} N_f \sqrt{\frac{g_0}{3m_0^2}} \int_q \text{Tr} \left(V_0^4 \Delta_\Psi(q) \right), \quad (2.32)$$

wobei für die Spur von (2.27) unter Ausnutzung der Relationen (1.47) und (1.48) gilt:

2.2. PROPAGATOREN IN 1-LOOP-ORDNUNG

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left(V_0^k \Delta_\Psi(p+q) V_0^k \Delta_\Psi(q) \right) = \\
& -3 \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(p+q) \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(q) \\
& \times \left((G_{0\psi}^2 \mu_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2 \mu_{0\chi}^2) \overline{p+q}^2 \overline{q}^2 \right. \\
& - (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) \mu_{0\psi} \mu_{0\chi} \left[\overline{p+q}^2 (\mu_q^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) + \overline{q}^2 (\mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) \right] \\
& + 2 G_{0\psi} G_{0\chi} \left[\mu_{0\psi} \mu_{0\chi} (\mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) (\mu_q^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) \right. \\
& \quad \left. \left. - \mu_{p+q} \mu_q (\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) (\overline{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi} \mu_{0\chi}) \right] \right. \\
& + \overline{p+q} \overline{q} \left\{ (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) (\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2) (\overline{q}^2 + \mu_q^2) \right. \\
& \quad + 2 G_{0\psi} G_{0\chi} \mu_{0\psi} \mu_{0\chi} \left[(\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2) + (\overline{q}^2 + \mu_q^2) \right] \\
& \quad \left. \left. - 2 (G_{0\psi} + G_{0\chi})^2 \mu_{0\psi} \mu_{0\chi} \mu_{p+q} \mu_q + (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) (\mu_{0\psi} \mu_{0\chi})^2 \right\} \right).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Mit $G_{0\chi} = 0$ stößt man dann auf die Ausdrücke

$$-\Gamma_{0\sigma}^{(2,0)}(p) = \hat{p}^2 + m_0^2 - \Sigma_\sigma(p) \tag{2.34}$$

und

$$-\Gamma_{0\pi,ij}^{(2,0)}(p) = \delta_{ij} \left\{ \hat{p}^2 - \Sigma_\pi(p) \right\} \tag{2.35}$$

mit den Selbstenergien

$$\begin{aligned}
\Sigma_\sigma(p) = & \frac{1}{2} g_0 m_0^2 \int_q \left[3(\overline{p+q}^2 + m_0^2)^{-1} (\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\overline{p+q}^2)^{-1} (\hat{q}^2)^{-1} \right] \\
& + g_0 \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] \\
& - 8 N_f G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\overline{q}^2}{(\overline{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \overline{q}^2} \\
& - 8 N_f G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\mu_{0\psi}^2 \overline{p+q}^2 \overline{q}^2 - \overline{p+q} \cdot \overline{q} (\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2) (\overline{q}^2 + \mu_q^2)}{[(\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \overline{p+q}^2][(\overline{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \overline{q}^2]}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

und

$$\begin{aligned}
\Sigma_\pi(p) = & \frac{1}{3} g_0 m_0^2 \int_q \left[(\overline{p+q}^2 + m_0^2)^{-1} (\hat{q}^2)^{-1} \right] \\
& + \frac{1}{3} g_0 \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} - (\hat{q}^2)^{-1} \right] \\
& - 8 N_f G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\overline{q}^2}{(\overline{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \overline{q}^2} \\
& + 8 N_f G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\mu_{0\psi}^2 \overline{p+q}^2 \overline{q}^2 + \overline{p+q} \cdot \overline{q} (\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2) (\overline{q}^2 + \mu_q^2)}{[(\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \overline{p+q}^2][(\overline{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \overline{q}^2]}.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Die vollen Ausdrücke mit beliebigen $G_{0\psi}$ und $G_{0\chi}$ stehen im Anhang (Gleichungen (B.29) und (B.30)).

2.2.2 Vakuumerwartungswert des σ -Feldes

Drei Graphen findet man in 1-Loop-Ordnung für den σ -VEV:

$$\text{---} \bigcirc = -\frac{3}{3!} \frac{\sqrt{3g_0}}{m_0} \int_q \Delta_\sigma(q), \quad (2.38)$$

$$\text{---} \bigcirc = -\frac{1}{2!} \frac{\sqrt{3g_0}}{m_0} \int_q \Delta_\pi(q), \quad (2.39)$$

$$\text{---} \bigcirc \rightarrow = \frac{N_f}{m_0^2} \int_q \text{Tr}(V_0^4 \Delta_\Psi(q)). \quad (2.40)$$

Somit hat man dann den VEV

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0 \rangle &= -\frac{\sqrt{3g_0}}{2m_0} \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] \\ &+ \frac{8N_f s_0}{m_0^2} \int_q \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(q) \left[(G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) \bar{q}^2 - 2G_{0\psi}G_{0\chi}(\mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}) \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

und somit im Entkopplungsfall $G_{0\chi} = 0$

$$\langle \sigma_0 \rangle = -\frac{g_0 s_0}{2m_0^2} \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] + \frac{8N_f s_0}{m_0^2} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2}. \quad (2.42)$$

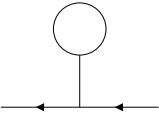
2.2.3 Fermionen-Propagator

In der Struktur entspricht der Fermionen-Propagator den skalaren Propagatoren,

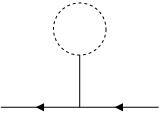
$$-\Gamma_{0\Psi}^{(2,0)}(p) = \Delta_\Psi^{-1}(p) - \Sigma_\Psi(p) = \tilde{\mathcal{P}}(p) - \Sigma_\Psi(p), \quad (2.43)$$

wobei $\Sigma_\Psi(p)$ die Fermionen-Selbstenergie ist. In 1-Loop-Ordnung ergeben sich die Graphen

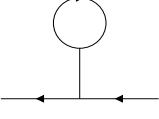
2.2. PROPAGATOREN IN 1-LOOP-ORDNUNG



$$= \frac{3}{3!} V_0^4 \frac{\sqrt{3g_0}}{m_0} \int_q \Delta_\sigma(q), \quad (2.44)$$

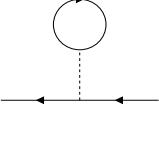


$$= \frac{1}{2!} V_0^4 \frac{\sqrt{3g_0}}{m_0} \int_q \Delta_\pi(q), \quad (2.45)$$



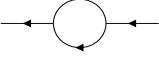
$$= -\frac{2}{2!} V_0^4 \frac{N_f}{m_0^2} \int_q \text{Tr}(V_0^4 \Delta_\Psi(q)). \quad (2.46)$$

Man erhält also durch diese drei Graphen eine Proportionalität zum VEV des σ -Feldes gemäß $-V_0^4 \langle \sigma_0 \rangle$. Ebenso gilt in 1-Loop-Level die Proportionalbeziehung

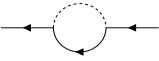


$$= -V_0^j \langle \pi_{0j} \rangle, \quad (2.47)$$

dieser Anteil wird nicht berücksichtigt, da $\langle \pi_{0j} \rangle = 0$. Die übrigen Graphen sind



$$= \frac{2}{2!} \int_q \Delta_\sigma(p+q) V_0^4 \Delta_\Psi(q) V_0^4, \quad (2.48)$$



$$= \frac{2}{2!} \int_q \Delta_\pi(p+q) V_0^j \Delta_\Psi(q) V_0^j. \quad (2.49)$$

Mit (1.47) und (1.48) ergibt sich für die Matrixprodukte mit $G_{0\chi} = 0$

$$V_0^4 \Delta_\Psi(q) V_0^4 = G_{0\psi}^2 \frac{\mu_{0\psi} \bar{q}^2 - i \bar{q} \cdot \gamma (\bar{q}^2 + \mu_q^2)}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

sowie

$$V_0^j \Delta_\Psi(q) V_0^j = -3 G_{0\psi}^2 \frac{\mu_{0\psi} \bar{q}^2 + i \bar{q} \cdot \gamma (\bar{q}^2 + \mu_q^2)}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

und somit insgesamt für die Selbstenergie die Beziehung

$$\begin{aligned} \Sigma_\Psi(p) = & \\ & - \begin{pmatrix} G_{0\psi} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \langle \sigma_0 \rangle - G_{0\psi} \int_q \frac{\mu_{0\psi} \bar{q}^2 - i \bar{q} \cdot \gamma (\bar{q}^2 + \mu_q^2)}{(\widehat{p+q}^2 + m_0^2) [(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2]} \right. \\ & \left. + 3 G_{0\psi} \int_q \frac{\mu_{0\psi} \bar{q}^2 + i \bar{q} \cdot \gamma (\bar{q}^2 + \mu_q^2)}{\widehat{p+q}^2 [(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Ohne auf ihre Berechnung näher einzugehen, sei hier auch noch die 3-Punkt-Funktion erwähnt. Sie hat die Form [WIT92]

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\pi,j,\psi\psi}^{(1,2)}(p) = & - \begin{pmatrix} G_{0\psi} \Gamma_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \times \left\{ 1 + G_{0\psi}^2 \int_q \frac{[(\widehat{p+q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\widehat{p+q}^2)^{-1}] \bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \right. \\ & \left. + 2m_0 \sqrt{\frac{g_0}{3}} G_{0\psi} \int_q \frac{\mu_{0\psi} \overline{p+q}^2}{[(\widehat{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \overline{p+q}^2] (\widehat{q}^2 + m_0^2) \widehat{q}^2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

wobei j der Index des Goldstone-Feldes und p der äußere Fermionenimpuls ist.

Kapitel 3

Renormierung in der gebrochenen Phase

Inhalt dieses Kapitels ist die 1-Loop-Störungsentwicklung der in dieser Arbeit relevanten renormierten Parameter nach den nackten Größen im Entkopplungsfall $G_{0\chi} = 0$. Eine Umkehrung der Reihen liefert die renormierte Störungstheorie, bei der nach renormierten Parametern entwickelt wird. Da die renormierten Parameter immer auf kleine Werte begrenzt sind, was bei den nackten nicht der Fall ist, zeigen die renormierten Störreihen ein gutes Konvergenzverhalten.

3.1 Definition der renormierten Parameter

3.1.1 Skalare Parameter

Das Auftauchen von Goldstone-Bosonen in der gebrochenen Phase verursacht starke Infrarot-Divergenzen beim inversen Propagator des Feldes σ_0 , worauf ich in Abschnitt 3.2.1 etwas eingehen werde. Anzumerken bleibt, daß diese Divergenzen in der geeichten Theorie nicht auftauchen [VIO94].

Zunächst wende ich mich den π -Propagatoren zu. Mit Hilfe der Zweipunktfunktion $\Gamma_{0\pi,ij}^{(2,0)}(p)$ führt man eine Renormierungskonstante Z_π ein:

$$\Gamma_{0\pi,ij}^{(2,0)}(p) = -Z_\pi^{-1} \delta_{ij} \hat{p}^2 = -Z_\pi^{-1} \delta_{ij} \{p^2 + \mathcal{O}(p^4)\} \quad \text{bei } p^2 \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Damit bestimmt sich Z_π^{-1} zu

$$Z_\pi^{-1} \delta_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \hat{p}^2} \Gamma_{0\pi,ij}^{(2,0)}(p) \Big|_{p=0} = -\frac{1}{8} \sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial p_\mu^2} \Gamma_{0\pi,ij}^{(2,0)}(p) \Big|_{p=0}. \quad (3.2)$$

Die renormierte Zweipunktfunktion lautet dann einfach

$$\Gamma_{R\pi,ij}^{(2,0)}(p) \equiv Z_\pi \Gamma_{0\pi,ij}^{(2,0)}(p). \quad (3.3)$$

Mit dem VEV (2.8) hängt der renormierte VEV über

$$v_R = Z_\pi^{-1/2} v_0 \quad (3.4)$$

zusammen.

Die renormierte σ -Masse $m_{R\sigma}$ ist durch das Verhalten des renormierten σ -Propagators

$$\Gamma_{R\sigma}^{(2,0)}(p) \equiv Z_\sigma \Gamma_{0\sigma}^{(2,0)}(p) \quad (3.5)$$

bei kleinen Impulsen definiert:

$$-\Gamma_{R\sigma}^{(2,0)}(p) = p^2 + m_{R\sigma}^2 + \mathcal{O}(p^4) \quad \text{bei } p^2 \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Hingegen ist die physikalische σ -Masse $m_{phys} \equiv m_\sigma$ zusammen mit der Zerfallsbreite Γ_σ als Pol des zugehörigen Propagators in der komplexen Energie-Ebene, d.h. durch die Gleichung

$$\Gamma_{0\sigma}^{(2,0)}(\tilde{p}) \equiv 0 \quad \text{mit } \tilde{p} = (\mathbf{0}, im_\sigma + \frac{1}{2}\Gamma_\sigma) \quad (3.7)$$

festgelegt [LW88, LMWM91b].

In Analogie zu Gleichung (1.58),

$$s_0^2 = \frac{3m_0^2}{g_0},$$

ist die renormierte skalare Kopplung g_R (v_R entspricht dabei s_0) gemäß

$$g_R \equiv \frac{3m_{R\sigma}^2}{v_R^2} \quad (3.8)$$

definiert (eine hier notwendige Alternativdefinition folgt in Abschnitt 3.2.1).

3.1.2 Fermionische Parameter

Der inverse Fermionen-Propagator hat die Form

$$-\Gamma_{0\alpha\beta}^{(0,2)}(p) = \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(p) - \Sigma_{\alpha\beta}(p),$$

Ausdruck (1.79) legt für $p^2 \rightarrow 0$ die allgemeine Struktur

$$-\Gamma_{0\Psi}^{(0,2)}(p) = M_0 + ip \cdot \gamma N_0 + \mathcal{O}(p^2) \quad \text{bei } p^2 \rightarrow 0 \quad (3.9)$$

nahe ($\alpha, \beta = \psi, \chi$). M_0 und N_0 haben die Form

$$M_0 = \begin{pmatrix} m_{\psi\psi} & m_{\psi\chi} \\ m_{\chi\psi} & m_{\chi\chi} \end{pmatrix}, \quad N_0 = \begin{pmatrix} n_{\psi\psi} & n_{\psi\chi} \\ n_{\chi\psi} & n_{\chi\chi} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Symmetrieverlegungen ergeben $m_{\psi\chi} = m_{\chi\psi} \equiv m$ und $n_{\psi\chi} = n_{\chi\psi} \equiv n$.

Wenn man $\Gamma_{0\alpha\beta}^{(0,2)}$ mit der Wellenfunktionsrenormierungsmatrix $Z_\Psi^{1/2}$ multipliziert, erhält man die renormierte Fermionen-2-Punkt-Funktion:

$$\Gamma_{R\Psi}^{(0,2)} \equiv Z_\Psi^{1/2T} \Gamma_{0\Psi}^{(0,2)} Z_\Psi^{1/2}. \quad (3.11)$$

3.1. DEFINITION DER RENORMIERTEN PARAMETER

Die Renormierungsbedingung lautet

$$-\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Gamma_{R\Psi}^{(0,2)} \Big|_{p=0} = i\gamma_\mu \mathbf{1}, \quad (3.12)$$

daher fordert man, daß die Multiplikation von $Z_\Psi^{1/2}$ die Matrix N_0 in die Einheitsmatrix überführt, d.h. daß

$$Z_\Psi^{1/2T} N_0 Z_\Psi^{1/2} = \mathbf{1} \quad (3.13)$$

gelten muß. Dann ergeben sich mit dem Ansatz

$$Z_\Psi^{1/2} = \begin{pmatrix} \cos \zeta & -\sin \zeta \\ \sin \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_\psi} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_\chi} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

für die Komponenten Z_ψ , Z_χ und ζ von $Z_\Psi^{1/2}$ folgende Gleichungen:

$$Z_\psi^{-1} = \frac{1}{2} \left[n_{\psi\psi} + n_{\chi\chi} + \operatorname{sgn}(n_{\psi\psi} - n_{\chi\chi}) \sqrt{(n_{\psi\psi} - n_{\chi\chi})^2 + 4n^2} \right], \quad (3.15)$$

$$Z_\chi^{-1} = \frac{1}{2} \left[n_{\psi\psi} + n_{\chi\chi} - \operatorname{sgn}(n_{\psi\psi} - n_{\chi\chi}) \sqrt{(n_{\psi\psi} - n_{\chi\chi})^2 + 4n^2} \right] \quad (3.16)$$

und

$$\cos(2\zeta) = \operatorname{sgn}(n_{\psi\psi} - n_{\chi\chi}) \frac{n_{\psi\psi} - n_{\chi\chi}}{\sqrt{(n_{\psi\psi} - n_{\chi\chi})^2 + 4n^2}}, \quad (3.17)$$

$$\sin(2\zeta) = \operatorname{sgn}(n_{\psi\psi} - n_{\chi\chi}) \frac{2n}{\sqrt{(n_{\psi\psi} - n_{\chi\chi})^2 + 4n^2}}. \quad (3.18)$$

Die renormierte Massen-Matrix

$$M_R \equiv \begin{pmatrix} \mu_{R\psi} & \mu_R \\ \mu_R & \mu_{R\chi} \end{pmatrix} \equiv Z_\Psi^{1/2T} M_0 Z_\Psi^{1/2} \quad (3.19)$$

ist durch die Relationen

$$\mu_{R\psi} = Z_\psi \left[\frac{m_{\psi\psi} + m_{\chi\chi}}{2} + \frac{m_{\psi\psi} - m_{\chi\chi}}{2} \cos(2\zeta) + m \sin(2\zeta) \right], \quad (3.20)$$

$$\mu_{R\chi} = Z_\chi \left[\frac{m_{\psi\psi} + m_{\chi\chi}}{2} - \frac{m_{\psi\psi} - m_{\chi\chi}}{2} \cos(2\zeta) + m \sin(2\zeta) \right], \quad (3.21)$$

$$\mu_R = \sqrt{Z_\psi Z_\chi} \left[m \cos(2\zeta) - \frac{m_{\psi\psi} - m_{\chi\chi}}{2} \sin(2\zeta) \right] \quad (3.22)$$

gegeben.

Mit Hilfe dieser Größen, der renormierten Masse des Fermions, $\mu_{R\psi}$, und derjenigen des Spiegelfermions, $\mu_{R\chi}$, sowie des renormierten VEV v_R kann man entsprechend (1.75) die renormierten Yukawa-Kopplungen durch

$$\mu_{R\psi} \equiv G_{R\psi} v_R, \quad \mu_{R\chi} \equiv G_{R\chi} v_R \quad (3.23)$$

definieren bzw. alternativ auch gemäß dem Vertex (1.94) mit der Dreipunktfunktion

$$\Gamma_{R\pi,j,\alpha\beta}^{(1,2)}(p) = Z_\pi^{1/2} Z_\Psi^{1/2T} \Gamma_{0\pi,j,\alpha\beta}^{(1,2)} Z_\Psi^{1/2} \quad (3.24)$$

die Definitionsgleichung

$$\begin{pmatrix} G_{R\psi}^{(3)} \Gamma_j & 0 \\ 0 & G_{R\chi}^{(3)} \Gamma_j^\dagger \end{pmatrix} \equiv -\Gamma_{R\pi,j,\alpha\beta}^{(1,2)}(p)|_{p=p_0} \quad (3.25)$$

formulieren, wobei p_0 einen festen äußeren Impuls darstellt.

Die Diagonalisierung der Massen-Matrix kann mittels einer Rotation um den renormierten Winkel α_R , d.h. durch

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_R & \sin \alpha_R \\ -\sin \alpha_R & \cos \alpha_R \end{pmatrix} M_R \begin{pmatrix} \cos \alpha_R & -\sin \alpha_R \\ \sin \alpha_R & \cos \alpha_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_{1R} & 0 \\ 0 & \mu_{2R} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

vollzogen werden. Für μ_{1R} , μ_{2R} und α_R gelten dann die Beziehungen

$$\mu_{1R} = \frac{1}{2} \left[\mu_{R\psi} + \mu_{R\chi} + \operatorname{sgn}(\mu_{R\psi} - \mu_{R\chi}) \sqrt{(\mu_{R\psi} - \mu_{R\chi})^2 + 4\mu_R^2} \right], \quad (3.27)$$

$$\mu_{2R} = \frac{1}{2} \left[\mu_{R\psi} + \mu_{R\chi} - \operatorname{sgn}(\mu_{R\psi} - \mu_{R\chi}) \sqrt{(\mu_{R\psi} - \mu_{R\chi})^2 + 4\mu_R^2} \right] \quad (3.28)$$

und

$$\sin \alpha_R = \frac{\sqrt{2}\mu_R}{\sqrt{(\mu_{R\psi} - \mu_{R\chi})^2 + 4\mu_R^2 + |\mu_{R\psi} - \mu_{R\chi}| \sqrt{(\mu_{R\psi} - \mu_{R\chi})^2 + 4\mu_R^2}}}. \quad (3.29)$$

3.2 Entwicklung der renormierten Parameter im Fall $G_{0\chi} = 0$

3.2.1 Entwicklung skalarer Größen

Aus Definition (3.7) und der 1-Loop-Form des inversen σ -Propagators, (2.34), folgt, aufgegliedert nach Real- und Imaginärteil,

$$\begin{aligned} 4 \sinh^2 \frac{m_\sigma}{2} - 4 \sin^2 \frac{\Gamma_\sigma}{4} \cosh m_\sigma &= m_0^2 - \operatorname{Re} \Sigma_\sigma(\tilde{p}), \\ 2 \sin \frac{\Gamma_\sigma}{2} \sinh m_\sigma &= \operatorname{Im} \Sigma_\sigma(\tilde{p}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

In 1-Loop-Ordnung muß die Zerfallsbreite Γ_σ nicht weiter beachtet werden, da sie in *tree level* verschwindet [LW88, MW88, LMWM91b]. Damit gilt dann für den zur physikalischen σ -Masse m_σ korrespondierenden Gitterimpuls:

3.2. ENTWICKLUNG DER RENORMIERTEN PARAMETER IM FALL $G_{0\chi} = 0$

$$\hat{\tilde{p}} = \left(\mathbf{0}, 2i \sinh \frac{m_\sigma}{2} \right). \quad (3.31)$$

Für die σ -Masse auf Baumgraphen-Niveau, $m_\sigma^{(0)}$, resultiert daraus die Beziehung

$$-\hat{\tilde{p}}^2 = 4 \sinh^2 \frac{m_\sigma^{(0)}}{2} = m_0^2 \quad (3.32)$$

und damit

$$m_\sigma^{(0)} = 2 \operatorname{arsinh} \frac{m_0}{2} = 2 \log \left(\frac{m_0}{2} + \sqrt{\frac{m_0^2}{4} + 1} \right). \quad (3.33)$$

Folglich erhält man mit (3.30) für die physikalische σ -Masse in 1-Loop-Ordnung

$$m_\sigma = m_\sigma^{(0)} - \frac{1}{2 \sinh m_\sigma^{(0)}} \operatorname{Re} \Sigma_\sigma(\tilde{p}^{(0)}) \quad (3.34)$$

mit $\tilde{p}^{(0)} = (\mathbf{0}, i m_\sigma^{(0)})$ und der Selbstenergie $\Sigma_\sigma(p)$ aus Gleichung (2.36). Die renormierte Masse entspricht in *tree level*

$$m_{R\sigma}^{(0)} = m_0 \quad (3.35)$$

und damit gilt wiederum für die physikalische Masse

$$m_\sigma^{(0)} \stackrel{\text{tree}}{=} \operatorname{arsinh} \frac{m_{R\sigma}}{2} = 2 \log \left(\frac{m_{R\sigma}}{2} + \sqrt{\frac{m_{R\sigma}^2}{4} + 1} \right). \quad (3.36)$$

Aus (3.6) folgt die Renormierungsbedingung

$$Z_\sigma \frac{\partial}{\partial \tilde{p}^2} \Gamma_{0\sigma}^{(2,0)}(p) \Big|_{p=0} = -1. \quad (3.37)$$

Damit hat man für Z_σ die Gleichung

$$Z_\sigma^{-1} = 1 - \frac{\partial}{\partial \tilde{p}^2} \Sigma_\sigma(p) \Big|_{p=0} = 1 - \frac{1}{8} \sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial p_\mu^2} \Sigma_\sigma(p) \Big|_{p=0} \quad (3.38)$$

gefunden. Die 1-Loop-Entwicklung der renormierten Masse erhält man dann aus

$$m_{R\sigma}^2 = Z_\sigma \{m_0^2 - \Sigma_\sigma(0)\}. \quad (3.39)$$

Wie aber bereits zu Anfang von Abschnitt 3.1 gesagt wurde, divergiert aufgrund der Goldstone-Bosonen der Term $\frac{\partial \Sigma_\sigma}{\partial \tilde{p}^2}(0)$ in (3.38). Man könnte diesen Ausdruck durch einen Differenzenquotienten mit Hilfe des betragsmäßig kleinsten nicht verschwindenden Impulses

$$p_{min} \equiv \left(\mathbf{0}, \frac{2\pi}{T} \right) \quad (3.40)$$

(wobei $T > L$ gefordert wird) nähern:

$$\frac{\partial \Sigma_\sigma(0)}{\partial \hat{p}^2} \approx \frac{\Sigma_\sigma(0, \frac{2\pi}{T}) - \Sigma_\sigma(0)}{4 \sin^2 \frac{\pi}{T}}. \quad (3.41)$$

Mit Hilfe der Definition

$$\bar{\bar{q}}_\mu \equiv \frac{1}{2} \sin(2q_\mu) \quad (3.42)$$

ergibt sich für die Renormierungskonstante Z_π laut (3.2) in 1-Loop-Ordnung im Entkopplungsfall $G_{0\chi} = 0$ folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} Z_\pi^{-1} = & 1 - \frac{1}{3} g_0 m_0^2 \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} \bar{q}^2 + \frac{1}{8} \hat{q}^2 - 1 \right] (\hat{q}^2 + m_0^2)^{-2} (\hat{q}^2)^{-1} \\ & - N_f G_{0\psi}^2 \int_q \left[8 \tilde{\mathcal{D}}^{-4}(q) \left\{ 4(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 (\bar{\bar{q}}^2 + 2r\mu_q \bar{q} \bar{\bar{q}} + r^2 \mu_q^2 \bar{q}^2) \right. \right. \\ & \quad \left. + 4 \mu_{0\psi}^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2) (\bar{\bar{q}}^2 + r\mu_q \bar{q} \bar{\bar{q}}) + \mu_{0\psi}^4 \bar{q}^2 \right\} \\ & \quad \left. - 4 \tilde{\mathcal{D}}^{-3}(q) \left(\left\{ 2(\bar{q}^2 + 2r\mu_q \bar{q} \bar{\bar{q}} + r^2 \mu_q^2 \bar{q}^2) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. - (\bar{q}^2 + \mu_q^2) \left[(4 - 2r^2) \bar{q}^2 + r\mu_q \hat{q}^2 - 8r\mu_q - 8 \right] \right\} \\ & \quad \times \left\{ \bar{q}^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 (\bar{q}^2)^2 \right\} \\ & \quad \left. + \left\{ 2(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 \left[(\bar{q}^2 + \mu_q^2) (\bar{\bar{q}}^2 + r\mu_q \bar{q} \bar{\bar{q}}) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. + 2 \bar{q}^2 (\bar{\bar{q}}^2 + 2r\mu_q \bar{q} \bar{\bar{q}} + r^2 \mu_q^2 \bar{q}^2) \right] \\ & \quad \left. + 4 \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2) (\bar{\bar{q}}^2 + r\mu_q \bar{q} \bar{\bar{q}}) \right. \\ & \quad \left. + \mu_{0\psi}^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2) \left[(\bar{q}^2 + \mu_q^2) \bar{q}^2 + 2 \bar{q}^2 (\bar{\bar{q}}^2 + r\mu_q \bar{q} \bar{\bar{q}}) \right] \right. \\ & \quad \left. + 2 \mu_{0\psi}^4 \bar{q}^2 \bar{\bar{q}}^2 \right\} \\ & + \tilde{\mathcal{D}}^{-2}(q) \left(\left\{ 4(\bar{q}^2 + r\mu_q \bar{q} \bar{\bar{q}}) - \bar{q}^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2) \right. \right. \\ & \quad \left. - \bar{q}^2 \left[(4 - 2r^2) \bar{q}^2 + r\mu_q \hat{q}^2 - 8r\mu_q - 8 \right] \right\} (\bar{q}^2 + \mu_q^2) \\ & \quad \left. - \mu_{0\psi}^2 (8 - 4\bar{q}^2) \bar{q}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

mit

$$\tilde{\mathcal{D}}(q) = (\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2. \quad (3.44)$$

Mit (2.41), (2.8), (3.4) und der Entwicklung

$$Z_\pi^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 + (Z_\pi - 1)}} \approx 1 - \frac{1}{2}(Z_\pi - 1) \quad (3.45)$$

ist der renormierte Vakuumerwartungswert

3.2. ENTWICKLUNG DER RENORMIERTEN PARAMETER IM FALL $G_{0\chi} = 0$

$$v_R = s_0 \left\{ 1 - \frac{g_0}{2m_0^2} \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] + \frac{8N_f}{m_0^2} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} - \frac{1}{2} (Z_\pi - 1) \right\}. \quad (3.46)$$

Aufgrund der Divergenz bei der 1-Loop-Entwicklung von $m_{R\sigma}$, Gleichung (3.39) wird die renormierte quartische Kopplung abweichend von (3.8) mit der physikalischen Masse definiert:

$$g_R \equiv \frac{3m_\sigma^2}{v_R^2}. \quad (3.47)$$

(In der geeichten Theorie kann Definition (3.8) beibehalten werden [Vio94].) Die renormierte quartische Kopplung ist dann mit (3.47) und (3.34) durch

$$g_R = \frac{3m_\sigma^{(0)2}}{s_0^2} \left\{ 1 + \frac{g_0}{m_0^2} \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] - \frac{16N_f}{m_0^2} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} + (Z_\pi - 1) - \frac{1}{m_\sigma^{(0)} \sinh m_\sigma^{(0)}} \operatorname{Re} \Sigma_\sigma(\tilde{p}^{(0)}) \right\} \quad (3.48)$$

gegeben.

3.2.2 Entwicklung fermionischer Größen

Die Matrix M_0 aus (3.9) wird im Entkopplungsfall entsprechend

$$M_0 = \begin{pmatrix} \mu_{0\psi} & \mu_0 \\ \mu_0 & 0 \end{pmatrix} - \Sigma_\Psi(0) \quad (3.49)$$

gemäß der Gleichungen (1.79) und (2.43) entwickelt. Da Integrale der Form $\int_q q_\mu f(q_\mu)$ mit $f(-q_\mu) = f(q_\mu)$ verschwinden, bekommt man für die Matrixelemente die Ausdrücke

$$m_{\psi\psi} = \mu_{0\psi} \left\{ 1 - \frac{g_0}{2m_0^2} \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] + \frac{8N_f}{m_0^2} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} - G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} - 3(\hat{q}^2)^{-1} \right] \right\}, \quad (3.50)$$

$$m = \mu_0, \quad (3.51)$$

$$m_{\chi\chi} = 0. \quad (3.52)$$

Äquivalent dazu verläuft die Entwicklung von N_0 :

$$N_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} + \frac{i}{4} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma_\Psi(p) \Big|_{p=0} \quad (3.53)$$

mit den Matrixelementen

$$n_{\psi\psi} = 1 - \frac{1}{2} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{(\bar{q}^2 + \mu_q^2) \bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-2} + 3(\hat{q}^2)^{-2} \right], \quad (3.54)$$

$$n = 0, \quad (3.55)$$

$$n_{\chi\chi} = 1. \quad (3.56)$$

Mit (3.15) und (3.16) erhält man die Relationen

$$Z_\psi = 1 + \frac{1}{2} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2)}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-2} + 3(\hat{q}^2)^{-2} \right] \quad (3.57)$$

und

$$Z_\chi = 1. \quad (3.58)$$

Die renormierte Fermionenmasse ist

$$\begin{aligned} \mu_{R\psi} = \mu_{0\psi} & \left\{ 1 - \frac{g_0}{2m_0^2} \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] \right. \\ & + \frac{8N_f}{m_0^2} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \\ & - G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} - 3(\hat{q}^2)^{-1} \right] \\ & \left. + \frac{1}{2} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{(\bar{q}^2 + \mu_q^2) \bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-2} + 3(\hat{q}^2)^{-2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Die renormierte χ -Masse hat im Entkopplungsfall den Wert

$$\mu_{R\chi} = 0. \quad (3.60)$$

Die Mischmasse gehorcht in 1-Loop-Ordnung der Gleichung

$$\mu_R = \mu_0 \left\{ 1 + \frac{1}{4} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2)}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-2} + 3(\hat{q}^2)^{-2} \right] \right\}. \quad (3.61)$$

Für die Yukawa-Kopplung bekommt man schließlich durch (3.23)

$$\begin{aligned} G_{R\psi} = G_{0\psi} & \left\{ 1 - G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} - 3(\hat{q}^2)^{-1} \right] \right. \\ & + \frac{1}{2} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2 (\bar{q}^2 + \mu_q^2)}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-2} + 3(\hat{q}^2)^{-2} \right] \\ & \left. + \frac{1}{2} (Z_\pi - 1) \right\}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

3.2. ENTWICKLUNG DER RENORMMIERTEN PARAMETER IM FALL $G_{0\chi} = 0$

3.2.3 Golterman-Petcher-Theorem

Um das Verschwinden der spiegelfermionischen Parameter —insbesondere das der “Dreipunktkopplung” $G_{R\chi}^{(3)}$ — im Entkopplungsfall $G_{0\chi} = 0$ zu zeigen, benutzt man im ungeeichten Modell die Golterman-Petcher-Identitäten [GP89, LW92]. Sie gelten gleichermaßen für die symmetrische und für die gebrochene Phase und erweisen sich bei numerischen Simulationen als äußerst nützlich.

Dazu sei an dieser Stelle noch mal die umnormierte Wirkung (1.26) angeführt:

$$S_\Psi = \sum_x \left\{ \frac{1}{2} \sum_\mu (\bar{\psi}_{0x} \gamma_\mu \Delta_\mu \psi_{0x} + \bar{\chi}_{0x} \gamma_\mu \Delta_\mu \chi_{0x}) + (\mu_0 + 4r) (\bar{\chi}_{0x} \psi_{0x} + \bar{\psi}_{0x} \chi_{0x}) \right. \\ \left. - \frac{r}{2} \sum_\mu [(\bar{\chi}_{0x+\hat{\mu}} + \bar{\chi}_{0x-\hat{\mu}}) \psi_{0x} + (\bar{\psi}_{0x+\hat{\mu}} + \bar{\psi}_{0x-\hat{\mu}}) \chi_{0x}] \right. \\ \left. + G_{0\psi} \bar{\psi}_{0x} \Gamma_\alpha \varphi_{0\alpha x} \psi_{0x} \right\}, \quad (3.63)$$

wobei $\Delta_\mu f_x \equiv f_{x+\hat{\mu}} - f_{x-\hat{\mu}}$ ist. Die Ableitungen von (1.16) nach den Feldern $\bar{\chi}_0$ und χ_0 ergeben

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{\chi}_{0x}} = \frac{1}{2} \sum_\mu \gamma_\mu \Delta_\mu \chi_{0x} + (\mu_0 + 4r) \psi_{0x} - \frac{r}{2} \sum_\mu (\psi_{0x+\hat{\mu}} + \psi_{0x-\hat{\mu}}), \\ \frac{\partial S}{\partial \chi_{0x}} = \frac{1}{2} \sum_\mu \Delta_\mu \bar{\chi}_{0x} \gamma_\mu - (\mu_0 + 4r) \bar{\psi}_{0x} + \frac{r}{2} \sum_\mu (\bar{\psi}_{0x+\hat{\mu}} + \bar{\psi}_{0x-\hat{\mu}}). \quad (3.64)$$

Das S_Ψ in (3.63) und damit die Gesamtwirkung S ist invariant unter **globalen** Transformationen

$$\chi_{0x} \rightarrow \chi_{0x} + \epsilon, \quad \bar{\chi}_{0x} \rightarrow \bar{\chi}_{0x} + \bar{\epsilon}, \quad (3.65)$$

falls $\mu_0 = 0$ ist, denn dann gilt für beliebige $\bar{\epsilon}$ und ϵ

$$S \rightarrow S + \sum_x \left\{ \bar{\epsilon} \frac{\partial S}{\partial \bar{\chi}_{0x}} - \frac{\partial S}{\partial \chi_{0x}} \epsilon \right\} = S. \quad (3.66)$$

Das erzeugende Funktional (B.5) in umnormierter Form,

$$Z(J_0, \zeta_0, \bar{\zeta}_0, \chi_0, \bar{\chi}_0) = \\ \int \mathcal{D}\varphi_0 \mathcal{D}\Psi_0 \mathcal{D}\bar{\Psi}_0 \exp \left\{ -S - \sum_x (J_{0\alpha x} \varphi_{0\alpha x} + \bar{\zeta}_{0x} \psi_{0x} + \bar{\psi}_{0x} \zeta_{0x} + \bar{\eta}_{0x} \chi_{0x} + \bar{\chi}_{0x} \eta_{0x}) \right\}, \quad (3.67)$$

ist —was auch allgemein gültig ist— invariant unter den **lokalen** Transformationen

$$\chi_{0x} \rightarrow \chi_{0x} + \epsilon_x, \quad \bar{\chi}_{0x} \rightarrow \bar{\chi}_{0x} + \bar{\epsilon}_x, \quad (3.68)$$

womit man zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\epsilon}_x} Z(J_0, \zeta_0, \bar{\zeta}_0, \chi_0, \bar{\chi}_0) \Big|_{\bar{\epsilon}=\epsilon=0} &= \\ - \int \mathcal{D}\varphi_0 \mathcal{D}\Psi_0 \mathcal{D}\bar{\Psi}_0 \exp \left\{ -S - \sum_x (J_{0\alpha x} \varphi_{0\alpha x} + \bar{\zeta}_{0x} \psi_{0x} + \bar{\psi}_{0x} \zeta_{0x} + \bar{\eta}_{0x} \chi_{0x} + \bar{\chi}_{0x} \eta_{0x}) \right\} \\ &\times \left(\frac{\partial S}{\partial \bar{\chi}_{0x}} + \eta_{0x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \epsilon_x} Z(J_0, \zeta_0, \bar{\zeta}_0, \chi_0, \bar{\chi}_0) \Big|_{\bar{\epsilon}=\epsilon=0} &= \\ - \int \mathcal{D}\varphi_0 \mathcal{D}\Psi_0 \mathcal{D}\bar{\Psi}_0 \exp \left\{ -S - \sum_x (J_{0\alpha x} \varphi_{0\alpha x} + \bar{\zeta}_{0x} \psi_{0x} + \bar{\psi}_{0x} \zeta_{0x} + \bar{\eta}_{0x} \chi_{0x} + \bar{\chi}_{0x} \eta_{0x}) \right\} \\ &\times \left(\frac{\partial S}{\partial \chi_{0x}} - \bar{\eta}_{0x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.70)$$

gelangt. Dies entspricht Variationen von Z um $\bar{\chi}_{0x}$ und χ_{0x} . Mit der Legendre-Transformation (B.13)

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi_0, \psi_0, \bar{\psi}_0, \chi_0, \bar{\chi}_0) &= W(J_0, \zeta_0, \bar{\zeta}_0, \eta_0, \bar{\eta}_0) \\ &- \sum_x \left[J_{0\alpha x} \varphi_{0\alpha x} + \bar{\zeta}_{0x} \psi_{0x} + \bar{\psi}_{0x} \zeta_{0x} + \bar{\eta}_{0x} \chi_{0x} + \bar{\chi}_{0x} \eta_{0x} \right] \end{aligned}$$

erhält man die Beziehungen

$$\chi_{0x} = \frac{\partial W}{\partial \bar{\eta}_{0x}}, \quad \bar{\chi}_{0x} = -\frac{\partial W}{\partial \eta_{0x}}, \quad \eta_{0x} = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\chi}_{0x}}, \quad \bar{\eta}_{0x} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \chi_{0x}} \quad (3.71)$$

und aus (3.69) sowie (3.70) schließlich die **Golterman-Petcher-Identitäten**

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\chi}_{0x}} = \frac{\partial S}{\partial \bar{\chi}_{0x}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial \chi_{0x}} = \frac{\partial S}{\partial \chi_{0x}}. \quad (3.72)$$

Ein kurzer Blick auf (3.64) genügt, um zu erkennen, daß die Dreipunktfunktionen $\Gamma_{0\sigma\bar{\chi}\chi}^{(1,2)}$ und $\Gamma_{0\pi,j,\bar{\chi}\chi}^{(1,2)}$ (unabhängig von μ_0) verschwinden, z.B.

$$\Gamma_{0\sigma\bar{\chi}\chi}^{(1,2)} = \frac{\partial^3 \Gamma}{\partial \sigma_0 \partial \bar{\chi}_0 \partial \chi_0} = 0. \quad (3.73)$$

Da die Renormierung (3.24) multiplikativ ist, folgt, daß die durch (3.25) definierte Yukawa-Kopplung für beliebige Mischmassen μ_0 verschwindet,

$$G_{R\chi}^{(3)} = 0 \quad (3.74)$$

und damit auch

$$G_{R\chi} = 0. \quad (3.75)$$

3.3. RENORMIERTE STÖRUNGSTHEORIE IM FALL $G_{0\chi} = 0$

Die Forderung nach der Verschiebungssymmetrie (3.65) führt selbstverständlich zu $\mu_0 = 0$ und mit der Normierung (1.25) bei $r = 1$ zu

$$K = 1/8, \quad \mu_R = 0. \quad (3.76)$$

Bei numerischen Simulationen wählt man günstigerweise den in der Nähe liegenden Wert

$$K = \frac{1}{8 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{2T}} \quad (3.77)$$

[FLMM93, LMPM93, WIT92].

3.3 Renormierte Störungstheorie im Fall $G_{0\chi} = 0$

Die renormierte Störungstheorie zeichnet sich dadurch aus, daß die einzusetzenden renormierten Kopplungskonstanten einen wesentlich kleineren Wertebereich einnehmen als die nackten, und infolgedessen besitzt sie eine bessere Konvergenz als die nackte Störungstheorie. Zu ihr gelangt man, indem man die Ausdrücke für die renormierten Parameter nach den nackten auflöst.

3.3.1 Renormierte Störungsentwicklung skalarer Größen

Da sich die nackte Masse von der (physikalischen) σ -Masse auf Baumgraphenniveau, $m_\sigma^{(0)}$ wegen Gleichung (3.33) unterscheidet, ist ihre Berechnung nicht so einfach wie in der symmetrischen Phase [WIT92]. Auf Baumgraphenniveau gilt:

$$m_0^{(0)} = 2 \sinh \frac{m_\sigma}{2}. \quad (3.78)$$

Mit (3.34) folgt

$$m_\sigma = 2 \operatorname{arsinh} \frac{m_0}{2} - \frac{1}{2m_0 \sqrt{1 + \frac{m_0^2}{4}}} \operatorname{Re} \Sigma_\sigma(\mathbf{0}, 2i \operatorname{arsinh} \frac{m_0}{2}). \quad (3.79)$$

Setzt man

$$\tilde{m}_\sigma \equiv 2 \sinh \frac{m_\sigma}{2}, \quad (3.80)$$

so gelangt man mit $\tilde{p}^{(0)} = (\mathbf{0}, 2i \operatorname{arsinh} \frac{m_0}{2})$ zu

$$\frac{\tilde{m}_\sigma}{2} = \frac{m_0}{2} \cosh \frac{\operatorname{Re} \Sigma_\sigma(\tilde{p}^{(0)})}{4m_0 \sqrt{1 + \frac{m_0^2}{4}}} - \sqrt{1 + \frac{m_0^2}{4}} \sinh \frac{\operatorname{Re} \Sigma_\sigma(\tilde{p}^{(0)})}{4m_0 \sqrt{1 + \frac{m_0^2}{4}}}. \quad (3.81)$$

Die Reihenentwicklungen der hyperbolischen Funktionen liefern

$$m_0 = \tilde{m}_\sigma + \frac{1}{2m_0} \operatorname{Re} \Sigma_\sigma(\tilde{p}^{(0)}). \quad (3.82)$$

Die Parameter auf der rechten Seite im Ausdruck $\text{Re } \Sigma_\sigma(p)$ werden in nullter Ordnung folgendermaßen ersetzt:

$$\begin{aligned} m_0 &\rightarrow \widetilde{m}_\sigma, \\ g_0 &\rightarrow g_R \frac{\widetilde{m}_\sigma^2}{m_\sigma^2}, \\ G_{0\psi} &\rightarrow G_{R\psi}, \\ \mu_0 &\rightarrow \mu_R, \\ \mu_{0\psi} &\rightarrow \mu_{R\psi} \end{aligned} \quad (3.83)$$

(die Ersetzung von g_0 röhrt von der abgeänderten g_R -Definition (3.47) her, was weiter unten noch genauer erklärt wird), womit sich schließlich als 1-loop-Resultat

$$m_0 = \widetilde{m}_\sigma + \widetilde{m}_\sigma^{(1)} \quad (3.84)$$

mit

$$\widetilde{m}_\sigma^{(1)} = \frac{1}{2\widetilde{m}_\sigma} \text{Re } \Sigma_{R\sigma}(\mathbf{0}, i\widetilde{m}_\sigma) \quad (3.85)$$

ergibt. Die Ersetzungen (3.83) im Ausdruck $\Sigma_\sigma(p)$ werden durch das R im Index von $\Sigma_{R\sigma}(p)$ gekennzeichnet, dieses lautet

$$\begin{aligned} \Sigma_{R\sigma}(p) &= \frac{1}{2} g_R \frac{\widetilde{m}_\sigma^4}{m_\sigma^2} \int_q \left[3(p \widehat{+} q^2 + \widetilde{m}_\sigma^2)^{-1} (\hat{q}^2 + \widetilde{m}_\sigma^2)^{-1} + (p \widehat{+} q^2)^{-1} (\hat{q}^2)^{-1} \right] \\ &\quad + g_R \frac{\widetilde{m}_\sigma^2}{m_\sigma^2} \int_q \left[(\hat{q}^2 + \widetilde{m}_\sigma^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] \\ &\quad - 8 N_f G_{R\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2 + \mu_{R\psi}^2 \bar{q}^2} \\ &\quad - 8 N_f G_{R\psi}^2 \int_q \frac{\mu_{R\psi}^2 \bar{p} + \bar{q}^2 \bar{q}^2 - p + q \cdot \bar{q} (\bar{p} + \bar{q}^2 + \mu_{Rp+q}^2) (\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)}{[(\bar{p} + \bar{q}^2 + \mu_{Rp+q}^2)^2 + \mu_{R\psi}^2 \bar{p} + \bar{q}^2][(\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2 + \mu_{R\psi}^2 \bar{q}^2]}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

wobei $\mu_{Rq} = \mu_R + \frac{r}{2} \hat{q}^2 = \frac{1}{2} \hat{q}^2$. Das Massenquadrat m_0^2 wird damit in 1. Ordnung ersetzt durch

$$m_0^2 = \widetilde{m}_\sigma^2 + \text{Re } \Sigma_{R\sigma}(\mathbf{0}, i\widetilde{m}_\sigma). \quad (3.87)$$

Nun zur Berechnung von g_0 : es muß beachtet werden, daß

$$g_0 = \frac{3m_0^2}{s_0^2} \neq \frac{3m_\sigma^{(0)2}}{s_0^2} \quad (3.88)$$

ist [WIT92]. Zunächst betrachtet man den Quotienten

$$C \equiv \frac{m_\sigma^{(0)}}{m_0} = \frac{2 \log \left(\frac{m_0}{2} + \sqrt{1 + \frac{m_0^2}{4}} \right)}{m_0}. \quad (3.89)$$

3.3. RENORMIERTE STÖRUNGSTHEORIE IM FALL $G_{0\chi} = 0$

In diesen setzt man nun die 1-Loop-Entwicklung von m_0 , (3.84) ein und entwickelt den Ausdruck nach $\tilde{m}_\sigma^{(1)}$:

$$C = C^{(0)} + C^{(1)}, \quad (3.90)$$

wobei

$$C^{(0)} = \frac{2 \log(\frac{\tilde{m}_\sigma}{2} + \sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_\sigma^2}{4}})}{\tilde{m}_\sigma} = \frac{m_\sigma}{\tilde{m}_\sigma} \quad (3.91)$$

und

$$C^{(1)} = \frac{\tilde{m}_\sigma^{(1)}}{\tilde{m}_\sigma} \left\{ \frac{1 + \frac{\tilde{m}_\sigma}{2} / \sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_\sigma^2}{4}}}{\frac{\tilde{m}_\sigma}{2} + \sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_\sigma^2}{4}}} - C^{(0)} \right\}. \quad (3.92)$$

Damit folgt aus (3.48):

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{g_R}{C^2} - \frac{3g_0}{s_0^2} \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] + \frac{48N_f}{s_0^2} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_q^2)^2 + \mu_{0\psi}^2 \bar{q}^2} \\ &\quad - \frac{3m_\sigma^{(0)2}}{s_0^2} \frac{1}{C^2} (Z_\pi - 1) + \frac{3}{C s_0^2 \sqrt{1 + \frac{m_0^2}{4}}} \operatorname{Re} \Sigma_\sigma(\tilde{p}^{(0)}). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Wiederum ersetzt man die Parameter gemäß (3.83) zuzüglich $s_0 \rightarrow v_R$ und benutzt die Reihenansätze

$$\begin{aligned} Z_\pi - 1 &\approx -2(Z_\pi^{-\frac{1}{2}} - 1), \\ \frac{1}{C} &\approx \frac{1}{C^{(0)}}, \\ \frac{1}{C^2} &\approx \frac{1}{C^{(0)2}} - \frac{2C^{(1)}}{C^{(0)3}}, \\ g_R &\approx \frac{3m_\sigma^{(0)2}}{s_0^2}, \end{aligned} \quad (3.94)$$

womit man zu

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{g_R}{C^{(0)2}} - 2g_R \frac{C^{(1)}}{C^{(0)3}} - \frac{3g_R}{C^{(0)2}v_R^2} \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] \\ &\quad + \frac{48N_f}{v_R^2} G_{R\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2 + \mu_{R\psi}^2 \bar{q}^2} + 2 \frac{g_R}{C^{(0)2}} (Z_\pi^{-\frac{1}{2}} - 1) \\ &\quad + \frac{3}{C^{(0)}v_R^2 \sqrt{1 + \frac{\tilde{m}_\sigma^2}{4}}} \operatorname{Re} \Sigma_{R\sigma}(\mathbf{0}, i\tilde{m}_\sigma) \end{aligned} \quad (3.95)$$

gelangt. Für den VEV bekommt man die Relation

$$\begin{aligned}
 s_0 &= v_R \left\{ 1 + \frac{g_R}{2 C^{(0)} \tilde{m}_\sigma^2} \int_q \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] \right. \\
 &\quad - \frac{8 N_f}{\tilde{m}_\sigma^2} G_{R\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2 + \mu_{R\psi}^2 \bar{q}^2} \\
 &\quad \left. + (Z_\pi^{-\frac{1}{2}} - 1) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.96}$$

3.3.2 Renormierte Störungsentwicklung fermionischer Größen

Aus (3.59) erhält man die Umkehrrelation für die nackte Fermionenmasse

$$\begin{aligned}
 \mu_{0\psi} &= \mu_{R\psi} \left\{ 1 + \frac{g_R}{2 C^{(0)} \tilde{m}_\sigma^2} \int_q \left[(\hat{q}^2 + \tilde{m}_\sigma^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1} \right] \right. \\
 &\quad - \frac{8 N_f}{\tilde{m}_\sigma^2} G_{R\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2 + \mu_{R\psi}^2 \bar{q}^2} \\
 &\quad + G_{R\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2 + \mu_{R\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + \tilde{m}_\sigma^2)^{-1} - 3(\hat{q}^2)^{-1} \right] \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} G_{0\psi}^2 \int_q \frac{(\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2) \bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2 + \mu_{R\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + \tilde{m}_\sigma^2)^{-2} + 3(\hat{q}^2)^{-2} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

Für die Spiegelfermionen- und die Mischmasse ergeben sich

$$\mu_{0\chi} = \mu_0 = 0 \tag{3.98}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 G_{0\psi} &= G_{R\psi} \left\{ 1 + G_{R\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2}{(\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2 + \mu_{R\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} - 3(\hat{q}^2)^{-1} \right] \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2} G_{R\psi}^2 \int_q \frac{\bar{q}^2 (\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)}{(\bar{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2 + \mu_{R\psi}^2 \bar{q}^2} \left[(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-2} + 3(\hat{q}^2)^{-2} \right] \\
 &\quad \left. + (Z_\pi^{-\frac{1}{2}} - 1) \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.99}$$

Kapitel 4

Numerische Ergebnisse

Im vierten Kapitel wird die renormierte Störungstheorie, wie sie in Kapitel 3 vorgestellt wurde, auf die Analyse von Datenmaterial zu Artikel [LMMP93] angewandt.

4.1 Aufbereitung der Monte-Carlo-Daten

4.1.1 Berechnung der Zeitscheiben-Korrelationsfunktionen

In der gebrochenen Phase werden durch das Auftauchen der drei masselosen Goldstone-Bosonen die numerischen Untersuchungen des hier zugrundeliegenden Modells, deren Ziel die Berechnung der Massen und Kopplungsstärken ist, außerordentlich erschwert.

Wie bei [WIT92] erwähnt wird, müssen skalare und fermionische Massen zusammen bestimmt werden. Der Quotient $m_\sigma/\mu_{R\psi}$ kann dabei nur schwierig kontrolliert werden, da man finite size-Effekte möglichst vermeiden und sich gleichzeitig nahe an der kritischen Linie in der κ - K -Parameterebene halten muß, die gebrochene und symmetrische Phase voneinander trennt [LMMP93].

Wird die Mischmasse μ_R nach Null hin “gedrückt”, beispielsweise durch entsprechendes Einstellen von K nahe des kritischen Wertes $1/8$ (siehe (3.77) in Abschnitt 3.2.3; [FLMM93, LMPM93]), kann κ dazu benutzt werden, m_σ auf einen gewünschten Wert zu bringen. Die Fermionenmasse $\mu_{R\psi}$ wird dabei nur durch $G_{R\psi}$ fixiert, es gibt keinen weiteren Massenparameter, der dies bei gegebenen nackten Kopplungen leistet.

Da sich auf einem endlichen Gitter keine Symmetriebrechung herauskristallisiert, sondern deren Richtung sich permanent ändert, muß man noch beim Messen der Observablen diese Drift berücksichtigen, d.h. man muß die Richtung stabilisieren. Dies geschieht durch Anlegen eines äußeren Feldes, welches unter Ausnutzung der $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Symmetrie das skalare Feld in Richtung der (reellen) Komponente φ_4 ausrichtet bzw. rotiert [HJLN87, HJJL89], was im folgenden erläutert wird.

Die Magnetisierung des Feldes als ein Maß für das gewählte Vakuum ist definiert als

$$|\varphi| \equiv \sqrt{\sum_{\alpha} \phi_{\alpha}^2} \quad (4.1)$$

mit

$$\phi_{\alpha} \equiv \frac{1}{L^3 T} \sum_x \phi_{\alpha x}. \quad (4.2)$$

Eine Rotation des Feldes wird durch

$$\varphi'_x = U_L \varphi_x U_R^\dagger \quad (4.3)$$

ausgedrückt. U_R setzt man auf $U_R = \mathbf{1}$, U_L muß dann so beschaffen sein, daß

$$\varphi' \equiv \frac{1}{L^3 T} \sum_x \varphi'_x = |\varphi| \mathbf{1} \quad (4.4)$$

bzw.

$$\phi'_4 \equiv |\varphi| \quad (4.5)$$

gilt. Eine geeignete Wahl für U_L ist nun

$$U_L = \begin{pmatrix} e^{-i\omega} \cos \zeta & -e^{i\theta} \sin \zeta \\ e^{-i\theta} \sin \zeta & e^{i\omega} \cos \zeta \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

mit

$$\cos \zeta = \frac{\sqrt{\phi_3^2 + \phi_4^2}}{|\varphi|}, \quad \sin \zeta = \frac{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}}{|\varphi|} \quad (4.7)$$

und

$$e^{i\omega} = \frac{\phi_4 + i\phi_3}{\sqrt{\phi_3^2 + \phi_4^2}}, \quad e^{i\theta} = \frac{\phi_2 + i\phi_1}{\sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}}. \quad (4.8)$$

Nach der Rotation kann das skalare Feld in einen longitudinalen (Index L) und drei transversale Komponenten (Index Tj) gemäß

$$\varphi' = \phi_{Lx} \mathbf{1} + i\tau_j \phi_{Tjx} \quad (4.9)$$

zerlegt werden, wobei gilt:

$$v \equiv \langle \phi_L \rangle = \langle |\varphi| \rangle \quad (4.10)$$

und

$$\langle \phi_{Tj} \rangle = 0. \quad (4.11)$$

Der VEV $v = \langle \phi_L \rangle$ korrespondiert also zur σ -Komponente des skalaren Feldes und die ϕ_{Tj} korrespondieren zu den π -Komponenten. Folglich sind damit die Mittelwerte der Zeitscheiben der skalaren Korrelationsfunktionen durch

4.1. AUFBEREITUNG DER MONTE-CARLO-DATEN

$$C_L(t) \equiv \frac{1}{L^3} \sum_{xy} \langle \phi_{Lyt} \phi_{Lx0} \rangle_c \equiv \frac{1}{L^3} \sum_{xy} (\langle \phi_{Lyt} \phi_{Lx0} \rangle - v^2), \quad (4.12)$$

$$C_T(t) \equiv \frac{1}{3L^3} \sum_{xy} \langle \phi_{Tjyt} \phi_{Tjx0} \rangle \quad (4.13)$$

definiert. Kurz heißen sie auch einfach *Zeitscheiben-Korrelationsfunktionen* und verkörpern die Propagatoren der Feldteilchen in Zeitrichtung. Sie werden mit der Hybrid-Monte-Carlo-Methode (HMC-Algorithmus) berechnet [DKPR87, WIT92]. Aus diesem Grund betrug auch die minimale Anzahl der damit numerisch simulierten Fermionen-Dubletts $N_f = 2$.

Wegen der periodischen Randbedingungen wurden die Zeitscheiben-Korrelationsfunktionen als T -periodisch angenommen. Den Propagator im Impulsraum erhält man mittels Fouriertransformation,

$$G_{\sigma,\pi}(\mathbf{0}, p_4) \equiv G_{L,T}(p_4) = \sum_{t=0}^{T-1} C_{L,T}(t) e^{-ip_4 t} = \sum_{t=0}^{T-1} C_{L,T}(t) \cos(p_4 t), \quad (4.14)$$

mit $p_4 \in \frac{2\pi}{T} \mathbb{Z}$. (Eigentlich liegen die $C_{L,T}(t)$ schon 2κ -normiert vor, was hier aus Gründen der Vereinfachung ‘verschwiegen’ wird.) Die Umformung rechts beruht darauf, daß aus den Monte-Carlo-Datensätzen nur die Werte $C(0)$ bis $C(\frac{T}{2})$ extrahiert werden können, die restlichen Werte $C(\frac{T}{2} + 1), \dots, C(T - 1)$ bekommt man durch Spiegelung; dies geht wegen $C(t) = C(-t)$ und $C(T + t) = C(t)$ (beide Gleichungen beruhen auf der Gitterperiodizität).

Diesem und den nachfolgenden Abschnitten liegen drei Datensätze zugrunde, die in Artikel [LMMP93] benutzt wurden, und die im folgenden —in Übereinstimmung mit Tabelle 1 aus diesem Artikel — mit den Bezeichnungen **BB**, **C** und **DD** versehen sind. Die Zahlenwerte wurden typischerweise aus 10000 Trajektorien gewonnen, bei **C** aus 5000. Die Datensätze unterscheiden sich auch in den nackten Kopplungen und den verwendeten Gittergrößen (siehe Tabelle 4.1). Bei allen drei wurde $G_\chi = 0$ (Entkopplungsfall) und die nackte quartische Kopplung auf $\lambda = \infty$ gesetzt.

Tabelle 4.1: *Gittergrößen, Inputparameter, VEV und physikalische Massen aus dem Zeitscheiben-Korrelationsfit*

Bezeichnung	Gitter	G_ψ	κ	K	v_0	m_σ
BB	$8^3 \times 16$	0.3	0.27	0.126	0.2703(18)	0.74(18)
C	$6^3 \times 12$	0.6	0.18	0.126	0.3524(20)	1.18(16)
DD	$8^3 \times 16$	0.6	0.18	0.126	0.3389(13)	1.20(21)

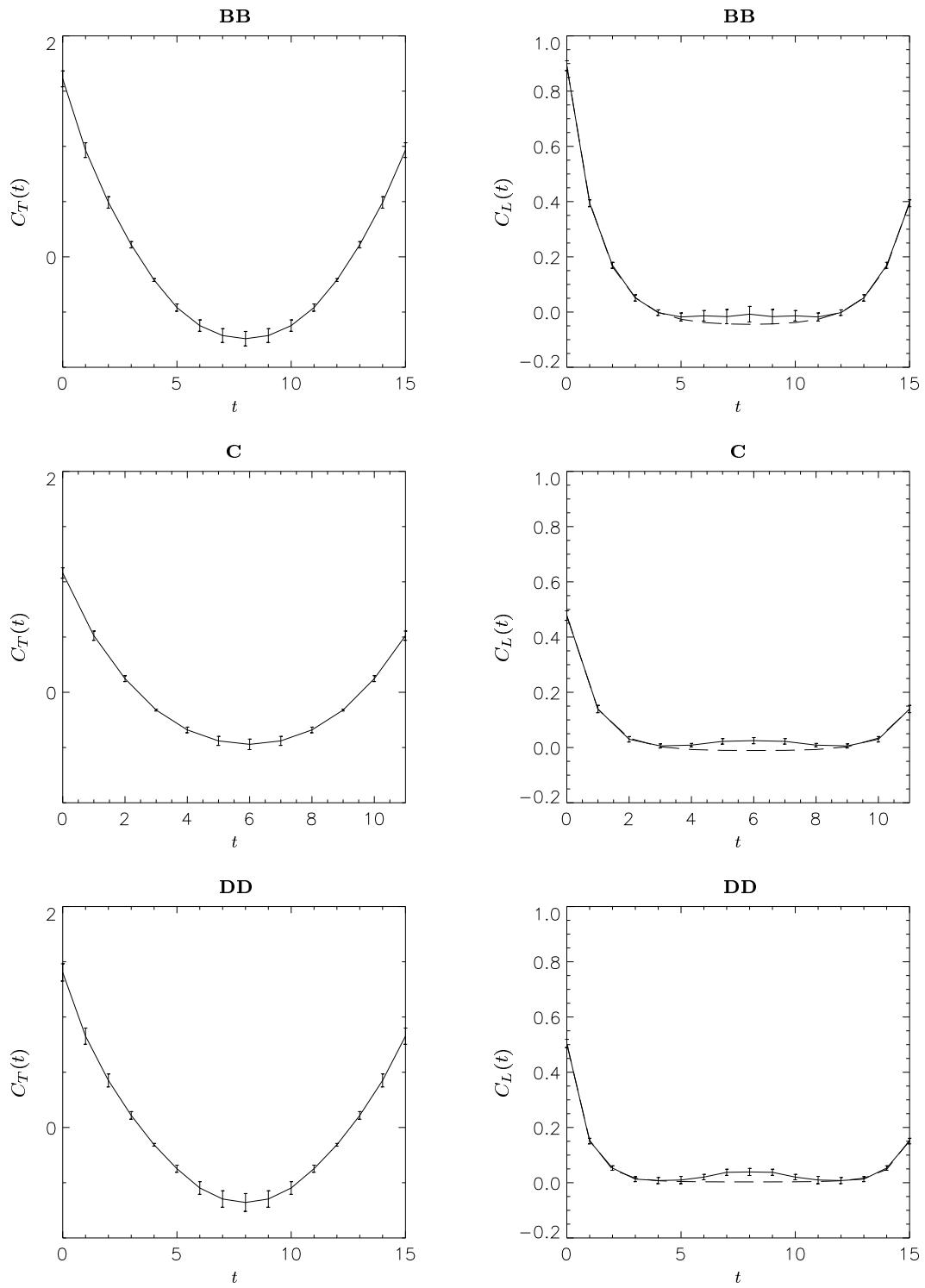


Abbildung 4.1: Transversale und longitudinale Zeitscheiben-Korrelationsfunktionen (rechts) sowie longitudinale \cosh -Fits (gestrichelt)

4.1.2 Zeitscheiben-Korrelationsfit

Aus der Zeitscheiben-Korrelationsfunktion $C_L(t)$ lässt sich mittels Fitting die physikalische Masse $m_\sigma \equiv m_{phys}$ bestimmen [MW87, WIT92], die in den skalaren Teil

4.1. AUFBEREITUNG DER MONTE-CARLO-DATEN

der 1-Loop-Fit-Funktion (siehe Abschnitt 4.2.2) eingeht.

Für große t und T hat man ein asymptotisches Zeitverhalten mit einem cosh-Verlauf, das in Anhang C hergeleitet wird:

$$C_L(t) \simeq a(e^{-m_\sigma t} + e^{-m_\sigma(T-t)}) + b. \quad (4.15)$$

Eigentlich müßte man eine Fitfunktion mit exponentiellem Abfall benutzen, der cosh-Verlauf erklärt sich jedoch aus der Tatsache heraus, daß die Korrelationsfunktion in negativer Zeitrichtung wegen der Periodizität das gleiche Verhalten wie in positiver Richtung aufweist. Der asymptotische Charakter des Fits kommt darin zum Ausdruck, daß zum Fitten nur die letzten fünf (beim $8^3 \times 16$ -Gitter) bzw. vier (beim $6^3 \times 12$ -Gitter) benutzt werden; das Ergebnis ist in Abb. 4.1 zu sehen, die Vakuumerwartungswerte $v_0 \equiv \langle \phi_{0L} \rangle$ und die Massen aus meinen Fits stehen in Tabelle 4.1.

Die sich in der Mitte der longitudinalen Korrelationsfunktionen in Abb. 4.1 andeutende Erhebung kann durchaus bei anderen Gittergrößen oder Einführung von Eichfeldern anwachsen und das Fitverhalten negativ beeinflussen, z.B. in [VIO94]. Die Summe der transversalen Korrelationsfunktionen verschwindet aufgrund von (4.4),

$$\sum_{t=0}^{T-1} C_T(t) = 0.$$

Daran erkennt man, daß $G_\pi(\mathbf{0}, p_4 = 0) = 0$ ist und der inverse Propagator $\Gamma_\pi^{(2,0)}(\mathbf{0}, p_4)$ an der Stelle $p_4 = 0$ divergiert. Deshalb sollte $\Gamma_\pi^{(2,0)}(0)$ beim Fitten nicht beachtet werden.

4.1.3 Berechnung der Renormierungskonstanten

Man kann zwei verschiedene Wege beschreiten, um aus den Zeitscheiben-Korrelationsfunktionen die Wellenfunktions-Renormierungskonstante zu bestimmen:

1. Mit dem kleinsten Impuls $p_{4,min} = \frac{2\pi}{T}$ und der physikalischen Masse m_σ erhält man aus (4.14) die Gleichung

$$Z_\sigma = \frac{1}{2\kappa} (\hat{p}_{4,min}^2 + m_\sigma^2) G_\sigma(\mathbf{0}, p_{4,min}). \quad (4.16)$$

Analog gilt [LMWM91b]

$$Z_\pi = \frac{1}{2\kappa} \hat{p}_{4,min}^2 G_\pi(\mathbf{0}, p_{4,min}). \quad (4.17)$$

2. Man berechnet sie aus dem inversen Propagator mit Hilfe der Gleichung

$$-\Gamma_{0\sigma}^{(2,0)}(p) = \frac{1}{2\kappa} G_\sigma^{-1}(p) = Z_\sigma^{-1} \{ \hat{p}^2 + m_\sigma^2 - \Sigma_\sigma(p) \}. \quad (4.18)$$

Mit

$$\Gamma_{0\sigma}^{(2,0)}(\mathbf{0}, p_{4,min}) - \Gamma_{0\sigma}^{(2,0)}(0) = -Z_\sigma^{-1} \hat{p}_{4,min}^2 \quad (4.19)$$

gewinnt man schließlich

$$Z_\sigma^{-1} = -\frac{\Gamma_{0\sigma}^{(2,0)}(\mathbf{0}, p_{4,min}) - \Gamma_{0\sigma}^{(2,0)}(0)}{\hat{p}_{4,min}^2}. \quad (4.20)$$

Für Z_π bekommt man unter Berücksichtigung der Renormierungsbedingung (3.1)

$$Z_\pi^{-1} = -\frac{\Gamma_{0\pi}^{(2,0)}(\mathbf{0}, p_{4,min})}{\hat{p}_{4,min}^2}, \quad (4.21)$$

womit man (4.17) verifiziert hat.

Das mit (4.21) bestimmte Z_π dient in Abschnitt 4.2.5 als Vergleichswert mit dem aus der 1-Loop-Analyse gewonnenen Z_π .

4.2 1-Loop-Analyse des π -Propagators

4.2.1 Eigenschaften der skalaren Propagatoren

Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Bestimmung der Renormierungskonstante Z_π und der renormierten Yukawa-Kopplung $G_{R\psi}$ durch die 1-Loop-Analyse des inversen π -Propagators, um mit diesen und mit Hilfe bekannter Beziehungen zwischen den einzelnen renormierten Parametern (siehe Anfang von Unterkapitel 4.2.3), wichtige Größen des Yukawa-Modells wie die Werte von v_R und g_R mit besserer Genauigkeit als bisher aus den numerischen Berechnungen zu extrahieren.

Zu diesem Zweck muß man die Eigenschaften der skalaren Impulsraum-Propagatoren auf dem Gitter kennen, bei denen einige Phänomene auftauchen, deren Ursache in der Rückwirkung der Yukawa-Wechselwirkung begründet liegt. Bei einem Modell mit naiven Fermionen, d.h. ohne Wilson-Term in der Wirkung, gelang laut [FRI93] die Untersuchung dieser Phänomene durch eine 1-Fermionen-Schleifen-Analyse. Mit dieser konnten systematische Fehler minimiert und die grundlegenden physikalischen Größen ausreichend genau bestimmt werden.

Im Grenzfall $G_{R\psi} = 0$ der Yukawa-Modelle, also bei der reinen φ^4 -Theorie, zeigen die inversen skalaren Propagatoren noch relativ exakt ein lineares Verhalten in \hat{p}^2 und sind problemlos mit einem 1-Pol-Ansatz wie etwa (bei $\kappa < 0$) der Form

$$-\Gamma^{(2,0)}(p)|_{p^2 \rightarrow 0} = Z^{-1}(\hat{p}^2 + m_R^2) \quad (4.22)$$

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

zu beschreiben, aus dem man die Wellenfunktions-Renormierungskonstante Z und die skalare Masse m ohne weiteres bestimmen kann [KLS88]. Man kann die Anwendung dieses linearen Ansatzes auch in den Bereich kleiner Yukawa-Kopplungen hinein fortsetzen. Mit wachsender Yukawa-Kopplung ergeben sich jedoch immer stärkere Abweichungen, vor allem bei denjenigen $G_{R\psi}$, bei denen die Yukawa-Kopplung die Struktur des Phasendiagramms dominiert. Dabei konnte man drei Arten von Abweichungen vom 1-Pol-Verhalten feststellen [FRI93]:

1. Überlagerung eines zweiten Poles in der $p = (\pi, \pi, \pi, \pi)$ -Ecke der Brillouin-Zone nahe der beiden multikritischen Punkte (κ, G_ψ) im Yukawa-Phasendiagramm ([FRI93], S. 50), wo sich je zwei Phasenübergangslinien kreuzen.
2. Auftreten gewisser charakteristischer, unstetiger Strukturen um $\hat{p}^2 = 4, 8, 12$ (dies hängt mit der Rückwirkung der Fermionen auf das skalare Feld zusammen).
3. Ausbildung einer signifikanten Krümmung bei kleinen Impulsen in den schwachen Kopplungsregionen (was ebenfalls mit der Rückwirkung der Fermionen zusammenhängt).

Bei den ersten beiden Phänomenen handelt es sich um Gitterartefakte, das letzte tritt auch im Kontinuum auf.

Die Frage lautet nun, ob sich derartige Effekte auch bei dem hier betrachteten Modell zeigen. Da in [FRI93] wesentlich mehr Datenpunkte pro Datensatz zur Verfügung standen, insbesondere Propagatorwerte außerhalb der Impulsachse $p = (\mathbf{0}, p_4)$ mit $p_4 \in \frac{2\pi}{T}\mathbb{Z}$, konnte ich die Punkte 1. und 2. nicht bestätigen (siehe Abschnitt 4.2.7).

4.2.2 Fit-Ansatz für den π -Propagator

Um die im letzten Unterkapitel erwähnten Fehler zu umgehen, wurde für das Fitzen in [BDFJ92] und [FRI93] folgender Ansatz, der die 1-Loop-Korrektur miteinbezieht, vorgeschlagen:

$$-\Gamma_{0\pi}^{(2,0)}(p) = Z_{\pi,L}^{-1}\{\hat{p}^2 + m_{R\pi,L}^2 - \Sigma_{R\pi,L}(p)\}, \quad (4.23)$$

wobei die renormierte π -Masse (höchstens) Gitterartefakt-Charakter besitzt, d.h. sie verschwindet im unendlichen Volumen, muß aber bei endlichem Volumen formal korrekt eingebaut werden.

$\Sigma_{R\pi,L}(p) = \Sigma_{R\pi,L}(p; m_{\sigma,L}, g_{R,L}, G_{R\psi,L}^{(3)}, v_{R,L}, \mu_{R\psi,L})$ ist dabei der Gittervolumen-abhängige Selbstenergie-Beitrag in renormierter Störungsrechnung. Der Ansatz resultiert aus der Form des Propagators (2.35). $\Sigma_{R\pi,L}(p)$ muß den Renormierungsbedingungen

$$\Sigma_{R\pi,\infty}(0; m_{\sigma,\infty}, g_{R,\infty}, G_{R\psi,\infty}^{(3)}, v_{R,\infty}, \mu_{R\psi,\infty}) = 0, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{p}^2} \Sigma_{R\pi,\infty}(p; m_{\sigma,\infty}, g_{R,\infty}, G_{R\psi,\infty}^{(3)}, v_{R,\infty}, \mu_{R\psi,\infty})|_{p=0} = 0 \quad (4.25)$$

genügen. Die erste Bedingung hängt mit der Massen-Renormierung und die zweite mit der Wellenfunktions-Renormierung (3.1) zusammen.

Die in Unterkapitel 4.2.1 erwähnten Anomalien beziehen sich auf den 1-Fermionen-Schleifen-Beitrag, hier wird jedoch der Selbstenergie-Beitrag beider **p -abhängiger** Feynman-Diagramme (2.26) und (2.27) bei dem Ansatz berücksichtigt (die p -unabhängigen Terme verschwinden bei der Normierung; vgl. mit (2.37)) und die nackten Parameter werden der Vorschrift (3.83) entsprechend ersetzt:

$$\begin{aligned} \Sigma'_{R\pi,L}(p; m_{\sigma,L}, g_{R,L}, G_{R\psi,L}^{(3)}, v_{R,L}, \mu_{R\psi,L}) = \\ \frac{1}{3} \left\{ g_{R,L} \frac{\widetilde{m}_{\sigma,L}^4}{m_{\sigma,L}^2} \int_q \Delta_\sigma(p+q) \Delta_\pi(q) - N_f \int_q \text{Tr}(V_0^k \Delta_\Psi(p+q) V_0^k \Delta_\Psi(q)) \right\}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Konkret ergibt sich damit als Ansatz für die Selbstenergie

$$\begin{aligned} \Sigma'_{R\pi,L}(p; m_{\sigma,L}, g_{R,L}, G_{R\psi,L}^{(3)}, v_{R,L}, \mu_{R\psi,L}) = \\ \frac{1}{3} g_{R,L} \frac{\widetilde{m}_{\sigma,L}^4}{m_{\sigma,L}^2} \int_q \left[(\widehat{p+q}^2 + \widetilde{m}_{\sigma,L}^2)^{-1} (\widehat{q}^2)^{-1} \right] \\ + 8 N_f G_{R\psi,L}^{(3)} \int_q \frac{\mu_{R\psi,L}^2 \overline{p+q}^2 \overline{q}^2 + \overline{p+q} \cdot \overline{q} (\overline{p+q}^2 + \mu_{R,p+q}^2) (\overline{q}^2 + \mu_{Rq}^2)}{[(\overline{p+q}^2 + \mu_{R,p+q}^2)^2 + \mu_{R\psi,L}^2 \overline{p+q}^2][(\overline{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2 + \mu_{R\psi,L}^2 \overline{q}^2]} \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit $\mu_{Rq} = \frac{1}{2} \widehat{q}^2$.

Den Parameter $g_{R,L}$ kann man gemäß der 1-Loop-Definition (3.47) nach $m_{\sigma,L}$ und $v_{R,L}$ auflösen, und durch Ausnutzung von (3.23) kann eventuell die Anzahl der Fitparameter nochmals vermindert werden, obwohl das $G_{R\psi,L}^{(3)}$ hier aus der Definition (3.25) stammt, wie es der hochgestellte Index (3) kennzeichnet (siehe [FRI93], S.79)). So verliert man zwar Freiheitsgrade beim Fitten und die gefittete Kurve kann durchaus nicht mehr so gut an der gemessenen liegen, andererseits würde es aber bei den gegebenen Gittergrößen merkwürdig erscheinen, mit z.B. fünf Fitparametern neun Meßgrößen anzufitten (wie es beim $8^3 \times 16$ -Gitter der Fall ist). Denn trotz größerer Annäherung der Fitkurve an die Meßpunkte sind die Unsicherheiten bei den einzelnen Parametern zu groß, da der Spielraum jedes einzelnen Fitparameters zugenommen hat.

Also benutzt man schließlich unter Annahme von $G_{R\psi,L}^{(3)} \approx G_{R\psi,L}$ den Selbstenergieansatz

$$\Sigma'_{R\pi,L}(p; m_{\sigma,L}, G_{R\psi,L}, v_{R,L}, \mu_{R\psi,L}) = \frac{3 \widetilde{m}_{\sigma,L}^4}{v_{R,L}^2} I_{\pi B}(p) + G_{R\psi,L}^2 I_{\pi F}(p) \quad (4.28)$$

mit

$$I_{\pi B}(p) = \frac{1}{3} \int_q \left[(\widehat{p+q}^2 + \widetilde{m}_{\sigma,L}^2)^{-1} (\widehat{q}^2)^{-1} \right] \quad (4.29)$$

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

und

$$I_{\pi F}(p) = 8 N_f \int_q \frac{\mu_{R\psi,L}^2 \overline{p+q}^2 \overline{q}^2 + \overline{p+q} \cdot \overline{q} (\overline{p+q}^2 + \mu_{Rp+q}^2) (\overline{q}^2 + \mu_{Rq}^2)}{[(\overline{p+q}^2 + \mu_{Rp+q}^2)^2 + \mu_{R\psi,L}^2 \overline{p+q}^2][(\overline{q}^2 + \mu_{Rq}^2)^2 + \mu_{R\psi,L}^2 \overline{q}^2]}. \quad (4.30)$$

Das Integral \int_q wird im Fall $L < \infty$ mit einer in Anhang D erläuterten, sehr effizienten Gittersummierungsmethode berechnet, die $L = \infty$ -Terme wurden mit einer NAG-Integrationsroutine (**D01FCF**: *Multi-dimensional adaptive quadrature over hyper-rectangle*, [NAG91]) ausgewertet.

Die Näherung $G_{R\psi,L}^{(3)} \approx G_{R\psi,L}$ lässt sich mit der Feststellung rechtfertigen, daß in der renormierten Störungstheorie in 1-Loop-Ordnung für den äußeren Impuls $p_0 = 0$ aus Definitionsgleichung (3.25) $G_{R\psi}^{(3)}$ und $G_{R\psi}$ exakt übereinstimmen, was auch die entsprechenden Werte in Tabelle 1 aus Artikel [LMMP93] hervorragend bestätigen. Eigentlich aber mißt $G_{R\psi}^{(3)}$ die Stärke des Yukawa-Vertex, während $G_{R\psi}$ mit (3.23) direkt zur Fermionen-Masse proportional ist [WIT92].

Um die Normierungsbedingungen (4.24) zu erfüllen, konstruiert man aus dem Ansatz (4.28) nun $\Sigma_{R\pi,L}$:

$$\begin{aligned} \Sigma_{R\pi,L}(p; m_{\sigma,L}, G_{R\psi,L}, \mu_{R\psi,L}) = \\ \Sigma'_{R\pi,L}(p; m_{R\sigma,L}, G_{R\psi,L}, \mu_{R\psi,L}) - \Sigma'_{R\pi,\infty}(0; m_{R\sigma,\infty}, G_{R\psi,\infty}, \mu_{R\psi,\infty}) \\ - \hat{p}^2 \frac{\partial \Sigma'_{R\pi,\infty}}{\partial \hat{p}^2}(0; m_{R\sigma,\infty}, G_{R\psi,\infty}, \mu_{R\psi,\infty}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Da die Größen von $m_{\sigma,\infty}, G_{R\psi,\infty}, \mu_{R\psi,\infty}$ wegen des endlichen Charakters des Gitters unbekannt sind, werden sie —was sich allerdings aufgrund von möglichen Volumeneffekten als weitere Fehlerquelle herausstellen könnte— mit den L -indizierten Parametern gleichgesetzt, der Index L bzw. ∞ wird also in Zukunft weggelassen,

$$m_\sigma \equiv m_{\sigma,L} \equiv m_{\sigma,\infty}, \quad G_{R\psi} \equiv G_{R\psi,L} \equiv G_{R\psi,\infty}, \quad \mu_{R\psi} \equiv \mu_{R\psi,L} \equiv \mu_{R\psi,\infty}. \quad (4.32)$$

Ein (4.23) ähnlicher Ansatz für den σ -Propagator,

$$-\Gamma_{0\sigma}^{(2,0)}(p) = Z_{\sigma,L}^{-1} \{ \hat{p}^2 + m_{R\sigma,L}^2 - \Sigma_{R\sigma,L}(p) \},$$

scheitert zunächst einmal an der durch die Goldstone-Bosonen verursachten Infrarotdivergenz, die sich bei den Renormierungsbedingungen

$$\begin{aligned} \Sigma_{R\sigma,\infty}(0) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \hat{p}^2} \Sigma_{R\sigma,\infty}(p) \Big|_{p=0} &= 0 \end{aligned}$$

herauskristallisiert. $\Sigma_{R\sigma,L}$ kann ebenfalls wie (4.31) konstruiert werden, es taucht aber —wie bereits in Abschnitt 3.1 erwähnt— aufgrund der Goldstone-Bosonen im Term $\frac{\partial \Sigma'_{R\sigma,\infty}}{\partial \hat{p}^2}(0)$ eine Divergenz auf: z.B. geht der Beitrag

$$\frac{\partial}{\partial \hat{p}^2} \int_q (\widehat{p+q}^2)^{-1} (\hat{q}^2)^{-1} \Big|_{p \rightarrow (0, i m_\sigma)}$$

über alle Schranken. Hier könnte man sich mit einer größeren Näherung als beim π -Propagator (siehe auch [LMWM91a]) behelfen: Man berechnet einfach den Differenzenquotienten mit dem betragsmäßig kleinsten zur Verfügung stehenden Gitterimpuls, nämlich $p_4 = \pm \frac{2\pi}{T}$ (siehe Gleichungen (3.38) bis (3.41)). Dies geht für $T > L$, denn die Reihenentwicklung der Selbstenergie wird dann weniger stark durch Symmetrieverbindungen eingeschränkt als im unendlichen Volumen. Leider kann dieser grobe Differenzenquotient hier eine zusätzliche Fehlerquelle sein, diese Maßnahme lohnt sich wahrscheinlich erst bei größeren Gittern als den hier betrachteten.

4.2.3 Parameterkonfigurationen in der Fitfunktion

Um die 1-Loop-Fitfunktion auszutesten, wurden mit Hilfe der Relationen zwischen den einzelnen renormierten Größen,

$$v_R = Z_\pi^{-1/2} v_0 \quad (3.4), \quad g_R = \frac{3 m_\sigma^2}{v_R^2} \quad (3.47), \quad G_{R\psi} = \frac{\mu_{R\psi}}{v_R} \quad (3.23)$$

sowie daraus folgend

$$g_R = 3 G_{R\psi} \frac{m_\sigma^2}{\mu_{R\psi}^2} \quad (4.33)$$

drei verschiedene Ausdrücke als Fitfunktion untersucht:

$$f(p_4; a) \equiv -\Gamma_{0\pi}^{(2,0)}(\mathbf{0}, p_4) = Z_\pi^{-1} \left\{ \hat{p}_4^2 + m_{R\pi}^2 - \left[\Sigma'_{R\pi,L}(\mathbf{0}, p_4) - \Sigma'_{R\pi,\infty}(0) - \hat{p}_4^2 \frac{\partial \Sigma'_{R\pi,\infty}(0)}{\partial \hat{p}_4^2} \right] \right\} \quad (4.34)$$

mit den Selbstenergie-Varianten

$$Z_\pi^{-1} \Sigma'_{R\pi,L}(\mathbf{0}, p_4) = Z_\pi^{-1} G_{R\psi}^2 \left\{ \frac{3 \tilde{m}_\sigma^4}{\mu_{R\psi}^2} I_{\pi B}(p_4) + I_{\pi F}(p_4) \right\} \quad (4.35)$$

$$= \frac{3 \tilde{m}_\sigma^4}{v_0^2} I_{\pi B}(p_4) + Z_\pi^{-1} G_{R\psi}^2 I_{\pi F}(p_4) \quad (4.36)$$

$$= \frac{1}{v_0^2} \left\{ 3 \tilde{m}_\sigma^4 I_{\pi B}(p_4) + \mu_{R\psi}^2 I_{\pi F}(p_4) \right\}, \quad (4.37)$$

wobei a den Parametervektor darstellt, z.B. $a = (Z_\pi, m_{R\pi}, G_{R\psi})$.

Einige Parameter mußten als Input aus den mir vorliegenden Daten extrahiert werden: die physikalische Masse m_σ mit dem Zeitscheiben-Korrelationsfit (4.15) sowie —direkt aus den Datensätzen— die Fermionenmasse $\mu_{R\psi}$ und der Vakuumerwartungswert v . Die Inputparameter und die zu fittenden Variablen sind in Tabelle 4.2 aufgelistet.

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

Tabelle 4.2: *Fitarten mit 1-Loop-Korrektur*

Bezeichnung	Input	Fitfunktion	Gefittete Parameter
1a	$m_\sigma, \mu_{R\psi}$	(4.35)	$Z_\pi, m_{R\pi}, G_{R\psi}$
1b	m_σ, v_0	(4.36)	$Z_\pi, m_{R\pi}, G_{R\psi}$
2	$m_\sigma, \mu_{R\psi}, v_0$	(4.37)	$Z_\pi, m_{R\pi}$
3a	m_σ	(4.35)	$Z_\pi, \mu_{R\psi}, G_{R\psi}$
3b	m_σ, v_0	(4.36)	$Z_\pi, \mu_{R\psi}, G_{R\psi}$

Der VEV v_0 als Inputparameter hatte den großen Vorteil, nur geringfügig fehlerbehaftet zu sein, er war also ein relativ “sicherer” und damit genauer Wert.

Um den Einfluß des bosonischen Anteils $I_{\pi B}$ der Selbstenergie zu untersuchen, wurde bei den Fits noch zusätzlich dieser Anteil einfach weggelassen:

$$Z_\pi^{-1} \Sigma'_{\pi, L}(\mathbf{0}, p_4) = Z_\pi^{-1} G_{R\psi}^2 I_{\pi F}(p_4) \quad (4.38)$$

$$= \frac{\mu_{R\psi}^2}{v_0^2} I_{\pi F}(p_4). \quad (4.39)$$

Die entsprechenden Fitarten stehen in Tabelle 4.3.

Tabelle 4.3: *Fitarten mit rein fermionischer 1-Loop-Korrektur*

Bezeichnung	Input	Fitfunktion	Gefittete Parameter
1a'	$\mu_{R\psi}$	(4.38)	$Z_\pi, m_{R\pi}, G_{R\psi}$
1b'	v_0	(4.38)	$Z_\pi, m_{R\pi}, G_{R\psi}$
2'	$\mu_{R\psi}, v_0$	(4.39)	$Z_\pi, m_{R\pi}$
3a'	—	(4.38)	$Z_\pi, \mu_{R\psi}, G_{R\psi}$
3b'	v_0	(4.38)	$Z_\pi, \mu_{R\psi}, G_{R\psi}$

Bei den Fits 3a, 3b, 3a' und 3b' wurde $m_{R\pi} = 0$ angenommen. 1a', 1b' und 3a', 3b' unterscheiden sich nur in den Inputparametern, was zu den selben Fitergebnissen führt und deshalb zu 1' zusammengefaßt wurde (siehe Abschnitt 4.2.5).

Zur Veranschaulichung der Selbstenergieanteile der letztgenannten Fits sind in Abb. 4.2 die dreidimensionalen Plots der Funktionen $I_{\pi F}(p_4; \mu_{R\psi})$ und $\mu_{R\psi}^2 I_{\pi F}(p_4; \mu_{R\psi})$ dargestellt.

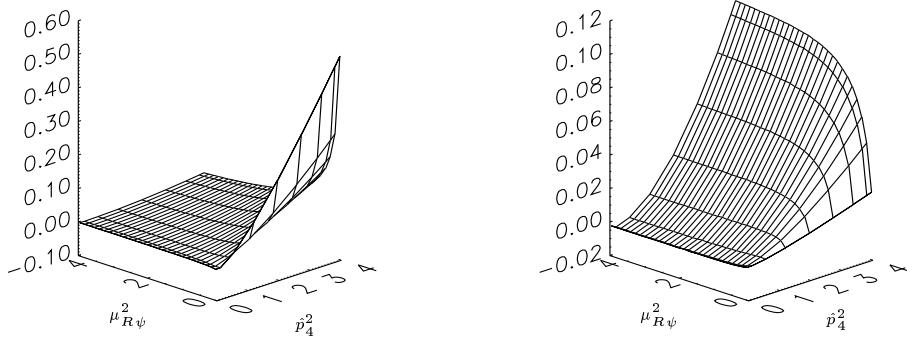


Abbildung 4.2: *Plots der Funktionen $I_{\pi F}(p_4; \mu_{R\psi})$ und $\mu_{R\psi}^2 I_{\pi F}(p_4; \mu_{R\psi})$ beim $8^3 \times 16$ -Gitter im Bereich von $\mu_{R\psi}^2 = 0.04 \dots 1.0$*

Um eine Vorstellung vom Größenverhältnis zwischen dem bosonischen und dem fermionischen Anteil der Selbstenergie zu geben, sind beide in Abb. 4.3 beispielhaft aufgetragen. (Die durchgezogenen Linien stellen Schnitte durch den rechten Plot der Abb. 4.2 an den Stellen $\mu_{R\psi} = 0.72$ und $\mu_{R\psi} = 0.86$ dar.)

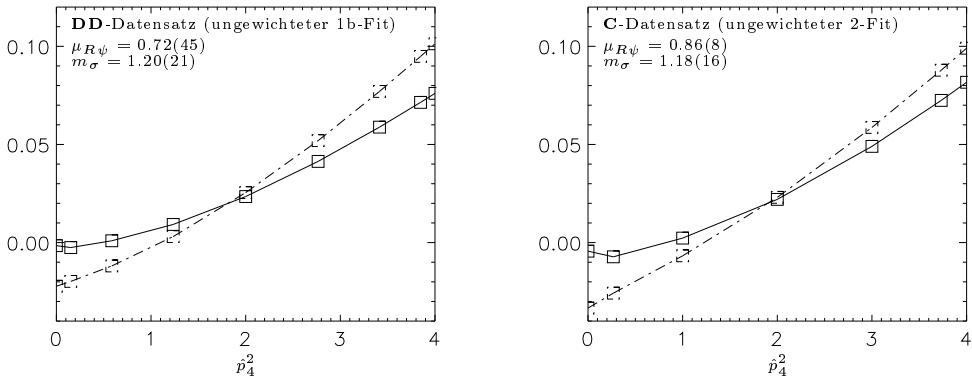


Abbildung 4.3: *Plots der Funktionen $\mu_{R\psi}^2 I_{\pi F}(p_4; \mu_{R\psi})$ (durchgezogene Linie) und $3 \tilde{m}_\sigma^4 I_{\pi B}(p_4)$ (Punkt-Strich-Linie)*

4.2.4 Realisierung des Fitalgorithmus

Zum Fitten der Daten wurde ein teilweise selbstentwickelter Algorithmus benutzt, der nach einem Zufallsprinzip arbeitet: Durch die Übergabe der Parametergrenzen (siehe Tabelle 4.4) wird ein Parameterhyperkubus mit einer durch die Anzahl der Fitparameter bestimmten Dimension festgelegt.

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

Tabelle 4.4: Beispiel für die Parametergrenzen des Fitalgorithmus

Fitparameter	Z_π	$G_{R\psi}^2$	m_σ^2	$m_{R\pi}^2$	$\mu_{R\psi}^2$
Minimum	0.1	0.1	0	0	0
Maximum	2	8	2	1	4

Aus diesem werden mittels eines *NAG*-Zufallszahlengenerators (**G05CAF**: *Pseudo-random real numbers, uniform distribution over (0,1)*, [NAG91]) willkürlich Parameterkonfigurationen (wie z.B. Pionen-Masse m_π , renormierte Yukawa-Kopplung $G_{R\psi}$ und Renormierungskonstante Z_π ; siehe Abschnitt 4.2.3) für die Fitfunktion erzeugt. Dann wird der Abstand der Fitfunktion zu den Meßpunkten mittels

$$\chi^2(a) \equiv \sum_{p_4} w(p_4) \left(f(p_4; a) - y(p_4) \right)^2 \quad (4.40)$$

berechnet und mit dem bisher kleinsten verglichen (*Methode der kleinsten quadratischen Abweichung*). Dabei ist \sum_{p_4} die Summe über die Gitterimpulse, $w(p_4)$ eine Gewichtung, $f(p_4; a)$ die Fitfunktion mit den Fitparametern $a = (a_1, \dots, a_n)$ und $y(p_4)$ der Datenwert [PFTV86]. (Wegen der Symmetrie des Propagators wurden nur die Impulse $p_4 = \frac{2\pi}{T}n_4$ mit $n_4 = 0, \dots, \frac{T}{2}$ benötigt.) Wurde ein bestes χ^2 gefunden, so wird noch ein Gradientenverfahren zur Optimierung gestartet,

$$a^{k+1} \equiv a^k - \sigma \nabla_a \chi^2(a)|_{a=a^k}, \quad (4.41)$$

wobei $\sigma > 0$ eine konstante Schrittweite ist (in der Größenordnung um 0.001). a^0 ist der Zufallspunkt aus dem Parameterraum, und a^k die im Schritt k des Gradientenverfahrens gefundenen Parameter.

Der Gradient $\nabla_a \chi^2(a)$ wird rein numerisch ermittelt, er muß dem Fitalgorithmus also nicht explizit angegeben werden. (4.41) ist eine Abwandlung eines in [BS89] erwähnten Algorithmus; eine variable, bei jedem Schritt neu festzulegende Schrittweite erbrachte gegenüber der konstanten, weniger programmieraufwendigen, keine erkennbaren Vorteile.

Zufallspunkte wurden deshalb benötigt, um eventuelle Subminima, in die ein reiner Gradientenfit hineingleiten kann, und die keinen physikalisch sinnvollen Werten entsprechen können, quasi zu “brechen”, sie also einer Art *Evolutionsprinzip* zu unterwerfen. Bei jedem Durchlauf wurden so ca. $4 \cdot 10^6$ Parameterkonfigurationen geprüft, d.h. bei 3 Fitparametern pro Parameterachse um die 150 Punkte. Bei den Parametergrenzen habe ich mich an Literaturgrößenordnungen orientiert, siehe [LMMP93]. Die Definition von Parametergrenzen hatte noch den Vorteil, parameterabhängige Integrale mit in die Fitfunktion aufzunehmen zu können: diese mußten aus rechenökonomischen Gründen schon vor dem eigentlichen Fitting in Felder abgelegt werden, und aufgrund der Festlegung der Parametergrenzen konnte der Fitalgorithmus auch nicht die Feldgrenzen überschreiten.

4.2.4.1 Fehlerabschätzung

Um die Fehler der 2-Punkt-Funktion $\Gamma_{\pi}^{(2,0)}(p)$ zu berechnen, die man zur Fehlerabschätzung der Fitparameter und für die gewichteten Fits benötigt, wurde folgendermaßen vorgegangen [WIT94]: den vorliegenden Monte-Carlo-Datensätzen waren neben den eigentlichen Zeitscheiben-Korrelationsfunktionen $C(t)$ auch die sog. *Binnings* angegeben, die —abhängig von der Anzahl der Bins, also der Zahl der Unterteilungen einer Trajektorie— die Fehler dieser Mittelwerte als Standardabweichungen $\sigma(t)$ angeben. Hier wurden sie bei Bin-Zahlen von 2 bis 8210 in 13 Schritten (beim $8^3 \times 16$ -Gitter) bzw. von 2 bis 5800 in 12 Schritten (beim $6^3 \times 12$ -Gitter) gemessen. Dies entspricht Bin-Längen von 2 bis 8192 bzw. von 2 bis 4096 in Verdopplungsschritten.

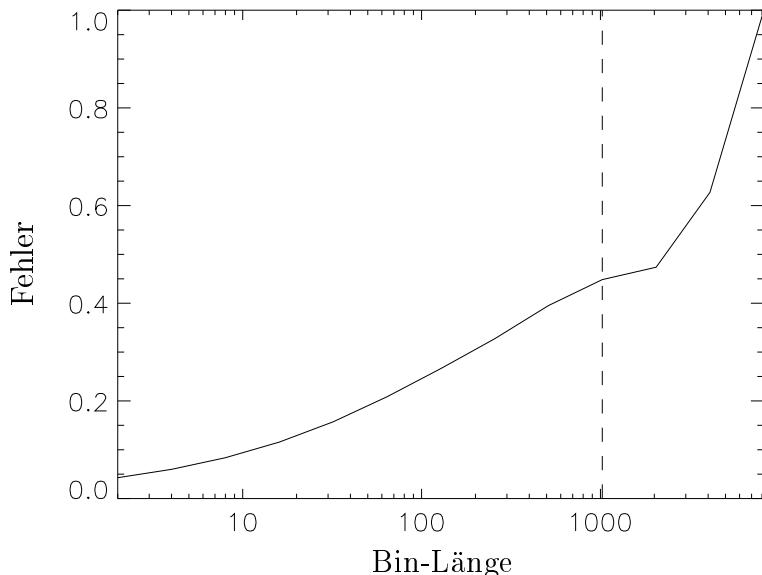


Abbildung 4.4: Abhängigkeit der Fehlergröße von der Bin-Länge bei der transversalen Zeitscheiben-Korrelationsfunktion $C_T(t)$

Je kleiner die Bin-Zahl bzw. je größer die Bin-Länge ist, desto größer wird der Fehler, bis er theoretisch bei der viertletzten Bin-Länge (in der obigen Abbildung gleich 1024, markiert durch eine gestrichelte Linie) einen Sättigungswert erreichen sollte [WIT94]. In Abb. 4.4 ist der mit dem Fehler bei der größten Bin-Länge normierte und über die Zeiten 0 bis $T/2$ gemittelte Verlauf der Fehlergröße bei der transversalen Zeitscheiben-Korrelationsfunktion von Datensatz **BB** in Abhängigkeit von der Bin-Länge aufgetragen. Ein Sättigungsplateau, wie es in Artikel [FP89] anhand eines einfachen Ising-Modells beschrieben wird, ist (bei der gestrichelten Linie) nur schwach zu erkennen. Dies liegt sehr wahrscheinlich daran, daß man aufgrund der auftretenden numerischen Komplexität des Modells eine höchst unzureichende Statistik hat. Der genannte viertletzte Wert $\sigma(t)$ geht in einen normalverteilten Zufallszahlenalgorithmus um den Mittelwert $C(t)$ ein ($0 \leq t \leq T/2$), d.h. es werden um die $C(t)$ herum mit der *NAG* Zufallszahlen $C_k(t)$ erzeugt (**G05DDF: Pseudo-random real numbers, Normal distribution**, [NAG91]), die der Normalverteilung

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

$$p(C_k(t); C(t), \sigma(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)} e^{-\frac{(C_k(t) - C(t))^2}{2\sigma^2(t)}} \quad (4.42)$$

gehorchen [WIT94]. Anschließend werden diese Fouriertransformiert:

$$G_k(\mathbf{0}, p_4) = C_k(0) + C_k(T/2) \cos(\pi p_4) + 2 \sum_{t=1}^{T/2-1} C_k(t) \cos(p_4 t). \quad (4.43)$$

Diese Prozedur wird n mal wiederholt. Die daraus gewonnenen Standardabweichungen der inversen Fouriertransformierten,

$$\tilde{\sigma}(p_4) \equiv \sqrt{\frac{\langle (G_k^{-1}(\mathbf{0}, p_4))^2 \rangle - (G_k^{-1}(\mathbf{0}, p_4))^2}{n-1}}, \quad (4.44)$$

wobei $G(\mathbf{0}, p_4) = -(\Gamma^{(2,0)}(\mathbf{0}, p_4))^{-1}$ aus der Gleichung

$$G(\mathbf{0}, p_4) = C(0) + C(T/2) \cos(\pi p_4) + 2 \sum_{t=1}^{T/2-1} C(t) \cos(p_4 t), \quad (4.45)$$

stammt und $\langle (G_k^{-1}(\mathbf{0}, p_4))^2 \rangle \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (G_k^{-1}(\mathbf{0}, p_4))^2$ gilt, werden quadratisch reziprok als Gewichte eingesetzt [PFTV86]:

$$w(p_4) \equiv \frac{1}{\tilde{\sigma}^2(p_4)}. \quad (4.46)$$

Für die Berechnung der Gewichte war $n = 1000$, aber um die Fehler der Fitparameter zu ermitteln, wurden (aus Zeitgründen nur) $n = 100$ dieser Verteilungen erzeugt, durch diese wurde dann gefittet, und mit den damit berechneten gestreuten Fitparametern wurden die Standardabweichungen der Mittelwert-Fitparameter generiert (analog (4.44)).

Allerdings muß einschränkend gesagt werden, daß eben wegen der genannten mangelhaften Statistik die Fehler eher überbewertet worden sind. Die einzelnen Gewichte unterscheiden sich um mehrere 10er-Potenzen (wie in Tabelle 4.5 beispielhaft aufgeführt), so daß Propagatorwerte bei höheren Impulsen beim Fitten praktisch keinen Einfluß mehr haben, was man in Abschnitt 4.2.7 auch gut erkennen kann.

Tabelle 4.5: Maximums-normierte Gewichte des **BB**-Propagators

$\frac{T}{2\pi} p_4$	0	1	2	3	4
$w(p_4)$	1.00	0.00772	$7.88 \cdot 10^{-5}$	$3.25 \cdot 10^{-6}$	$4.77 \cdot 10^{-7}$

$\frac{T}{2\pi} p_4$	5	6	7	8
$w(p_4)$	$4.34 \cdot 10^{-8}$	$3.52 \cdot 10^{-9}$	$1.91 \cdot 10^{-10}$	$6.55 \cdot 10^{-11}$

4.2.5 Ergebnisse des 1-Loop-Fittings

Die in den folgenden Tabellen 4.6 bis 4.11 aufgeführten Werte ergeben sich bei den jeweiligen Fitarten wie folgt:

Name	Z_π	$G_{R\psi}$	$\mu_{R\psi}$	$m_{R\pi}$	v_R	g_R
Literatur	$Z_{\pi,Lit}$	$G_{R\psi,Lit}$	$\mu_{R\psi,Lit}$	—	$v_{R,Lit}$	$g_{R,Lit}$
1a, 1a'	Z_π	$G_{R\psi}$	$Z_\pi^{-1/2} G_{R\psi} v_0$	$m_{R\pi}$		
1b, 1b'	Z_π	$G_{R\psi}$	$Z_\pi^{-1/2} G_{R\psi} v_0$	$m_{R\pi}$		
2, 2'	Z_π	$Z_\pi^{1/2} / v_0$	—	$m_{R\pi}$		
3a, 3a'	Z_π	$G_{R\psi}$	$\mu_{R\psi}$	0		
3b, 3b'	Z_π	$G_{R\psi}$	$\mu_{R\psi}$	0		
					$Z_\pi^{-1/2} v_0$	$3 Z_\pi m_\sigma^2 / v_0^2$

g_R entspricht hier der Definition (3.47). Die *Lit*-indizierten Werte stammen ebenso wie v_0 aus [LMMP93]. Die Auflistung der v_R - und g_R -Werte dient als Gütekriterium für die einzelnen Fits.

Ebenfalls als eine Art Kontrollinstanz für die Definitionsgleichung (3.23) (außer bei den Fits 2, 2') dient der $\mu_{R\psi}$ -Wert. Bei den Fits 2 und 2' spielt er als Fitparameter keine Rolle und bei 3a, 3a', 3b, 3b' wird er direkt mitgefittet.

4.2.5.1 Ungewichtete Fits

Die ungewichteten Fitfunktionen zeichnen sich dadurch aus, daß sie die Propagatorfunktionen sehr gut nachvollziehen (siehe auch Abschnitt 4.2.7). Besonders die Krümmung des Propagators bei kleinen Impulsen wird gut wiedergegeben. Ihre Aussagekraft wird aber durch die fehlende Gewichtung geschmälert, die Werte bei großen Impulsen müßten eigentlich einen wesentlich geringeren Einfluß auf den Verlauf der Kurve haben als diejenigen bei kleinen Impulsen. Andererseits haben die Gewichte —wie bereits in Abschnitt 4.2.4.1 gesagt wurde— selbst einen qualitativ minderwertigen Informationsgehalt, so daß die ungewichtete Methode insgesamt wieder zuverlässiger erscheint: Belegt wird diese Aussage auch durch die relativ gute Übereinstimmung der $\mu_{R\psi}$ -, v_R - und g_R -Werte mit den Literaturwerten.

Die bemerkenswert hohen Fehler erklären sich nicht nur aus den bereits in Abschnitt 4.2.4.1 genannten Gründen, sondern auch aus der geringen Anzahl der Durchläufe des Fitprogramms zur Ermittlung der Fitparameter-Fehler ($n = 100$, siehe ebenfalls 4.2.4.1); um zuverlässigere Abschätzungen zu erzielen, müßte man wahrscheinlich um die 300 bis 500 mal die gestreuten Propagatorwerte anfitten (da sich ungefähr bei diesen Zahlen auch der Propagatorfehler $\tilde{\sigma}(p_4)$ stabilisierte), was in einem vernünftigen Zeitrahmen nicht zu schaffen war (auf den mir zur Verfügung stehenden schnellsten Rechnern, IBM RS/6000-390 bzw. 590 schätzungsweise 3 bis 4 Tage; das Queue-Rechenzeit-Limit auf diesen Maschinen betrug aber nur 1 Tag und eine Aufteilung der Jobs hätte einen erheblichen Mehraufwand beim Programmieren bedeutet, vor allem auch wegen der längeren Debugging-Zeiten auf der Queue). Bei

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

Tabelle 4.6: **BB**-Datensatz, ungewichteter Fit

Bezeichnung	Z_π	$G_{R\psi}$	$\mu_{R\psi}$	$m_{R\pi}$	v_R	g_R
Literatur	1.14(9)	1.36(12)	0.341(2)	—	0.25(1)	31(4)
1a	1.16(48)	1.61(1.07)	0.40(45)	0.00(23)	0.25(5)	26(24)
1b	1.16(47)	1.64(1.09)	0.41(43)	0.00(28)	0.25(5)	26(23)
2	1.26(47)	1.41(27)	-	0.20(65)	0.24(5)	28(24)
3a	1.16(50)	1.64(50)	0.35(3.54)	0	0.25(6)	26(24)
3b	1.13(49)	1.54(1.37)	0.26(4.86)	0	0.25(6)	25(23)
1'	1.15(47)	1.72(1.03)	0.43(40)	0.00(29)	0.25(5)	26(23)
2'	1.28(48)	1.43(27)	-	0.22(57)	0.24(5)	29(25)
3a'	1.06(44)	1.44(36)	0.15(8.49)	0	0.26(6)	24(22)
3b'	1.06(44)	1.44(1.52)	0.15(8.49)	0	0.26(6)	24(22)

Tabelle 4.7: **C**-Datensatz, ungewichteter Fit

Bezeichnung	Z_π	$G_{R\psi}$	$\mu_{R\psi}$	$m_{R\pi}$	v_R	g_R
Literatur	0.98(8)	2.4(3)	0.86(8)	—	0.36(2)	36(6)
1a	1.14(37)	2.41(90)	0.79(29)	0.00(48)	0.33(6)	38(23)
1b	1.15(38)	2.37(88)	0.78(29)	0.00(48)	0.33(6)	39(23)
2	1.12(34)	2.58(4.23)	-	0.00(41)	0.33(5)	38(22)
3a	1.16(33)	2.79(1.16)	1.08(92)	0	0.33(5)	39(22)
3b	1.16(34)	2.82(1.05)	1.13(87)	0	0.33(5)	39(22)
1'	1.13(38)	2.57(92)	0.85(30)	0.00(49)	0.33(6)	38(23)
2'	1.13(35)	2.60(4.26)	-	0.00(42)	0.33(5)	38(22)
3a'	1.15(34)	2.80(1.17)	1.02(1.00)	0	0.33(5)	39(22)
3b'	1.15(34)	2.80(1.01)	1.02(1.00)	0	0.33(5)	39(22)

Tabelle 4.8: **DD**-Datensatz, ungewichteter Fit

Bezeichnung	Z_π	$G_{R\psi}$	$\mu_{R\psi}$	$m_{R\pi}$	v_R	g_R
Literatur	1.00(10)	2.5(3)	0.86(11)	—	0.339(16)	38(4)
1a	1.18(59)	2.36(80)	0.74(38)	0.23(63)	0.31(8)	44(38)
1b	1.18(59)	2.31(81)	0.72(45)	0.23(64)	0.31(8)	44(38)
2	1.10(58)	2.67(1.49)	-	0.09(2.13)	0.32(9)	41(36)
3a	1.05(50)	1.40(42)	0.26(4.35)	0	0.33(8)	39(33)
3b	0.81(39)	1.32(1.78)	0.05(23.34)	0	0.38(9)	30(25)
1'	1.17(60)	2.49(78)	0.78(42)	0.23(65)	0.31(8)	44(38)
2'	1.12(58)	2.69(1.50)	-	0.16(1.20)	0.32(8)	42(37)
3a'	0.85(41)	1.39(40)	0.09(12.69)	0	0.37(9)	32(27)
3b'	0.85(41)	1.39(1.65)	0.09(12.69)	0	0.37(9)	32(27)

der Rechenzeit schlug dabei nicht nur das eigentliche Fitting sondern auch die Berechnung der ($L = \infty$)-Kontinuums-Ausdrücke mit der *NAG* zu Buche. Man sollte daher vielleicht besser auf den *NAG*-Einsatz ganz verzichten und stattdessen einfach die entsprechenden Ausdrücke mit dem Gittersummenalgorithmus bei größeren Vo-

lumina berechnen, der die vollen Symmetrien ausnutzt. Entscheidender Vorteil der **NAG**-Integrationsroutinen war aber, daß sich deren Genauigkeit exakt steuern ließ, was sich gerade bei den Ableitungen nach \hat{p}^2 als sehr nützlich erwiesen hat.

Während für alle drei Datensätze die Fits 1a und 1b gut miteinander übereinstimmende Werte in allen Parametern lieferten, was in erster Linie auf den gleichen Fitparametern beruhte, trifft dies bei 3a und 3b nur für **BB**- und **C** zu, beim **DD**-Datensatz weichen vor allen Dingen die Fermionenmassen sehr stark voneinander ab. Letzterer war aber auch der einzige, bei dem 1a und 1b für $m_{R\pi}$ von 0 abweichende Werte produzierten.

3a und 3b lieferten ebenfalls bis auf den **DD**-Datensatz für Fermionenmasse und Renormierungskonstante relativ zuverlässig erscheinende Werte, bei **DD** wichen die Fermionenmassen leider zu stark nach unten ab ($\mu_{R\psi} = 0.26, 0.05$ gegenüber dem Literaturwert von 0.86), was darin begründet liegen mag, daß bei den Fitfunktionen (4.35) und (4.36) die Parameter untereinander zuviel Spielraum haben; in beiden Fällen hat man Fitfunktionen der Form

$$f(p; Z_\pi, \mu_{R\psi}, G_{R\psi}) = Z_\pi^{-1} \{ \hat{p}^2 + G_{R\psi}^2 g(p; \mu_{R\psi}) \},$$

wo $G_{R\psi}$ und $\mu_{R\psi}$ im zweiten Summanden auf der rechten Seite zu große “Bewegungsmöglichkeiten” haben, d.h. mehrere Kombinationen dieser Werte können dieselben Fitkurven produzieren, was die Aussagekraft dieser Fits enorm mindert. Daselbe gilt auch für 3a’ und 3b’. Diese Begründung und die großen Fehler lassen den Schluß zu, daß die Werte aus diesen Fits bei den anderen Datensätzen nur zufällig im richtigen Bereich liegen könnten.

Zu den Zwei-Parameter-Fits 2 und 2’ bleibt anzumerken, daß die Renormierungs- konstanten beim **BB**-Datensatz gegenüber 1a und 1b nach oben, bei den übrigen nach unten abweichen (außer 2’), bei der Yukawa-Kopplung ist es genau umgekehrt.

Die gestrichenen Fits unterscheiden sich von den ungestrichenen dadurch, daß in der Regel die Renormierungskonstanten ein wenig kleiner sind, dagegen bei $G_{R\psi}$ und $\mu_{R\psi}$ zwei unterschiedliche “Trends” auszumachen sind: Bei 1a’ bis 2’ wachsen sie verglichen mit den ungestrichenen, bei 3a’ und 3b’ schrumpfen sie (bis auf die **C**-Daten).

Die dennoch geringen Abweichungen lassen darauf schließen, daß insgesamt der bosonische Einfluß auf die Fitparameter gering ist, anders, als es Abb. 4.3 suggeriert. Das bedeutet im Endeffekt, daß der Krümmungsverlauf des fermionischen Teils wesentlich mehr Einfluß auf die Fitparameter ausübt als dessen Absolutwerte, der bosonische Teil hat bereits eine größere \hat{p}^2 -Konformität “eingebaut”, was auch mit der Aussage übereinstimmt, daß bei schwachen Yukawa-Kopplungen ein 1-Pol-Ansatz der Form (4.22) genügt, wo der bosonische Term schlicht überflüssig ist.

4.2.5.2 Gewichtete Fits

Das größte Manko beim gewichteten Fitten ist —wie schon früher in 4.2.4.1 beschrieben— der Größenunterschied der Gewichte untereinander aufgrund der mangelhaften Statistik, obwohl die Gewichtung eigentlich das korrektere Verfahren darstellt.

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

Tabelle 4.9: **BB**-Datensatz, gewichteter Fit

Bezeichnung	Z_π	$G_{R\psi}$	$\mu_{R\psi}$	$m_{R\pi}$	v_R	g_R
Literatur	1.14(9)	1.36(12)	0.341(2)	—	0.25(1)	31(4)
1a	1.29(10)	0.87(34)	0.207(82)	0.113(59)	0.24(1)	29(16)
1b	1.36(13)	0.53(67)	0.12(16)	0.151(63)	0.23(1)	31(18)
2	1.28(6)	1.43(3)	-	0.00(6)	0.24(1)	29(15)
3a	1.27(8)	2.69(1.09)	1.13(55)	0	0.24(1)	29(16)
3b	1.23(8)	2.72(82)	1.57(52)	0	0.24(1)	28(15)
1'	1.35(13)	0.60(62)	0.14(16)	0.167(64)	0.23(1)	30(18)
2'	1.25(6)	1.41(4)	-	0.01(35)	0.24(1)	28(15)
3a'	1.27(10)	2.69(1.09)	1.13(52)	0	0.24(1)	29(16)
3b'	1.27(10)	2.69(86)	1.13(52)	0	0.24(1)	29(16)

Tabelle 4.10: **C**-Datensatz, gewichteter Fit

Bezeichnung	Z_π	$G_{R\psi}$	$\mu_{R\psi}$	$m_{R\pi}$	v_R	g_R
Literatur	0.98(8)	2.4(3)	0.86(8)	—	0.36(2)	36(6)
1a	1.22(21)	1.79(86)	0.57(27)	0.17(18)	0.32(3)	41(18)
1b	1.25(15)	1.65(86)	0.52(27)	0.17(17)	0.32(2)	42(17)
2	1.28(20)	2.77(8.02)	-	0.00(18)	0.31(3)	43(19)
3a	1.19(8)	2.07(88)	0.80(53)	0	0.32(1)	40(14)
3b	1.20(12)	2.31(60)	1.00(35)	0	0.32(2)	40(15)
1'	1.25(14)	1.71(90)	0.54(28)	0.22(12)	0.32(2)	42(16)
2'	1.23(17)	2.71(6.98)	-	0.00(21)	0.32(2)	41(17)
3a'	1.18(12)	2.29(1.01)	0.82(38)	0	0.32(2)	40(15)
3b'	1.18(12)	2.29(53)	0.82(38)	0	0.32(2)	40(15)

Tabelle 4.11: **DD**-Datensatz, gewichteter Fit

Bezeichnung	Z_π	$G_{R\psi}$	$\mu_{R\psi}$	$m_{R\pi}$	v_R	g_R
Literatur	1.00(10)	2.5(3)	0.86(11)	—	0.339(16)	38(4)
1a	1.03(8)	0.87(1.12)	0.29(33)	0.03(14)	0.33(1)	39(17)
1b	1.08(9)	0.32(2.48)	0.10(71)	0.02(14)	0.33(1)	41(18)
2	1.26(9)	2.85(1.25)	-	0.00(4)	0.30(1)	47(20)
3a	1.03(7)	2.06(49)	1.66(32)	0	0.33(1)	39(16)
3b	1.02(8)	2.81(69)	1.86(45)	0	0.34(1)	38(17)
1'	1.03(10)	1.19(96)	0.40(28)	0.00(10)	0.33(2)	39(17)
2'	1.17(11)	2.75(1.14)	-	0.00(10)	0.31(2)	44(20)
3a'	1.02(11)	2.60(82)	1.66(47)	0	0.34(2)	38(18)
3b'	1.02(11)	2.60(67)	1.66(47)	0	0.34(2)	38(18)

Auffallend ist, daß die Z_π -Werte bei allen Fits größer als die Literaturwerte sind. Ursache hierfür ist, daß wegen der sehr schwachen Gewichtung der Propagatorwerte bei hohen Impulsen die Krümmung durch die Fitfunktion nicht mehr nachvollzogen werden kann, was die Renormierungskonstante dämpfen würde. Auch die Werte für

die Yukawa-Kopplung sind als schlecht anzusehen, da sich die Selbstenergie ja erst bei größeren Impulsen bemerkbar macht.

Insgesamt sind die berechneten Renormierungskonstanten —bei **BB** und **C** sogar um mehr als 10 %— größer als die Literaturwerte aus [LMMP93]. Den übrigen Fitparametern muß man leider die Zuverlässigkeit absprechen, die Abweichungen untereinander und von den Literaturwerten sind teilweise erheblich. Im Gegensatz dazu sind die Parameter-Fehler geringer als bei der ungewichteten Methode, dies beruhte aber darauf, daß die gewichteten Fitfunktionen leichter in die Minima der Abstandsmeßfunktion (4.40) hineingelangen konnten.

Diese Fitmethode macht wahrscheinlich erst dann Sinn, wenn die Statistik der zugrundeliegenden Daten, die sich in den Fehlern der Zeitkorrelationsfunktionen äußert, wesentlich verbessert wird, d.h. die Zahl der HMC-Trajektorien erhöht wird.

4.2.6 Vergleich der Methoden

Rückblickend ist bei den hier vorliegenden Datensätzen die ungewichtete Methode der gewichteten vorzuziehen, insbesondere kristallisierten sich die Fits 1a und 1b als die Fitting-Formeln mit den plausibelsten Ergebnissen heraus, da vor allem ihre $G_{R\psi}$ - und $\mu_{R\psi}$ -Werte durchweg den Literaturwerten am nächsten waren. Zudem läßt sich konstatieren, daß bei ihnen —auch im Gegensatz zur gewichteten Methode— die renormierte Yukawa-Kopplung mit zunehmender nackter Yukawa-Kopplung wächst, was ein zusätzliches Kriterium für ihre Anwendbarkeit ist.

4.2.7 Graphische Darstellung der Fits

Anhand der Plots mit den Fits (gestrichelte Kurve) und den Meßwerten (durchgezogene Linie) kann man gut die Qualität der unterschiedlichen Fitausdrücke beurteilen. Man erkennt, daß die gewichteten Fitkurven wesentlich stärker von den gemessenen Werten abweichen. Durch, die Fehler $\tilde{\sigma}(p_4)$ entstehen in der Gewichtung die großen Unterschiede, die Propagatorwerte bei größeren Impulsen kommen beim Fitten praktisch nicht zum Zuge.

Die Abweichung als ein Maß für die Güte der Fitfunktion wurde nach der Formel

$$\chi^2 = \frac{1}{T/2 + 1} \sum_{n_4=0}^{T/2} \left(f\left(\frac{2\pi}{T}n_4; a\right) + \Gamma_{0\pi}^{(2,0)}(\mathbf{0}, \frac{2\pi}{T}n_4) \right)^2 \quad (4.47)$$

bestimmt, wobei $f(x; a)$ die Fitfunktion ist.

Wie man anhand der **BB**-Plots erkennt, kann man Punkt 3 aus der Liste der Abweichungen aus Abschnitt 4.2.1 bestätigen: Schon bei der relativ schwachen nackten Yukawa-Kopplung $G_\psi = 0.3$ kann bei kleinen Impulsen eine recht signifikante Krümmung festgestellt werden, welche durch die nicht-gewichteten Fits auch gut nachvollzogen werden kann.

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

4.2.7.1 Ungewichtete Fits mit voller 1-Loop-Korrektur

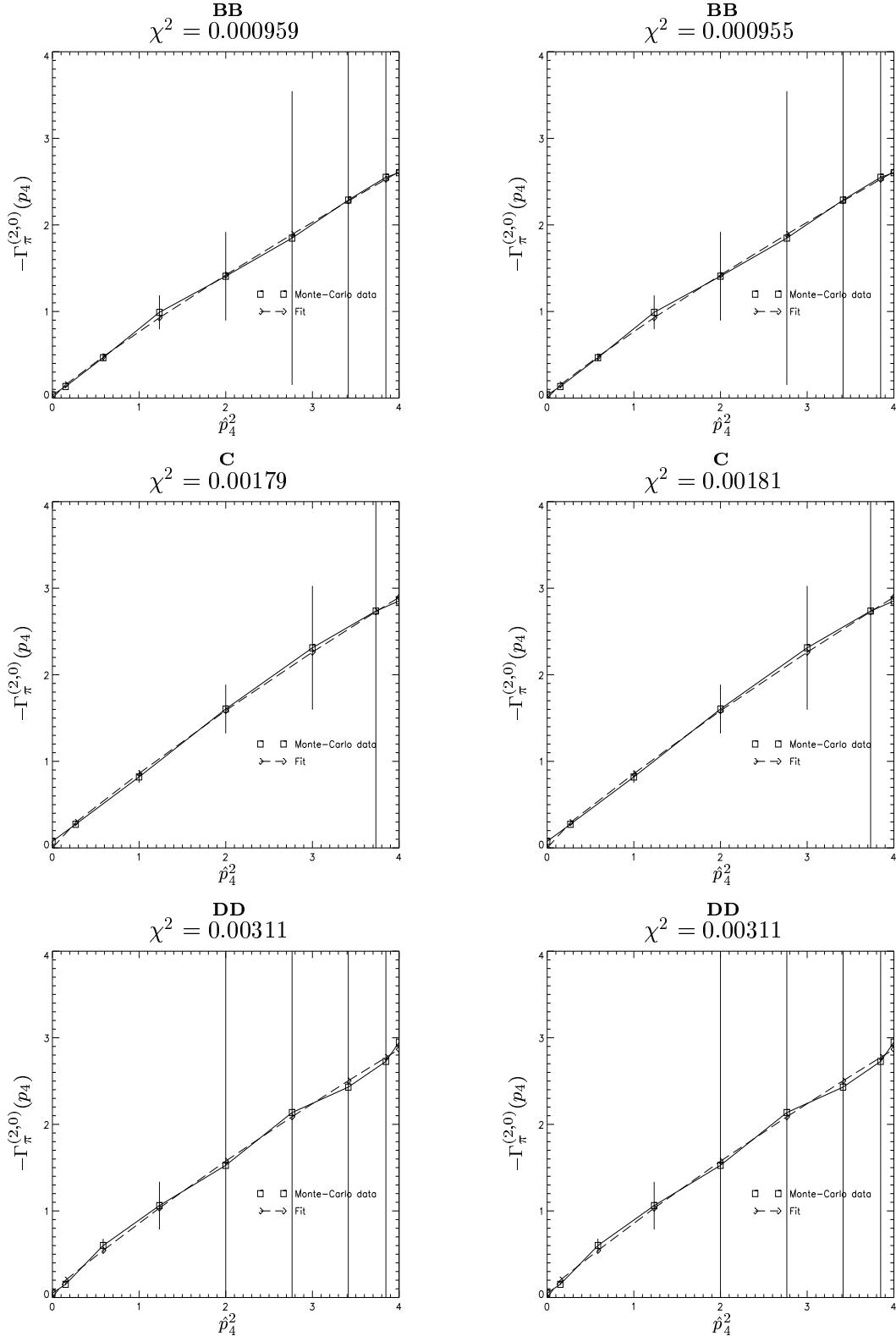


Abbildung 4.5: 1a- und 1b-Fit, ungewichtet

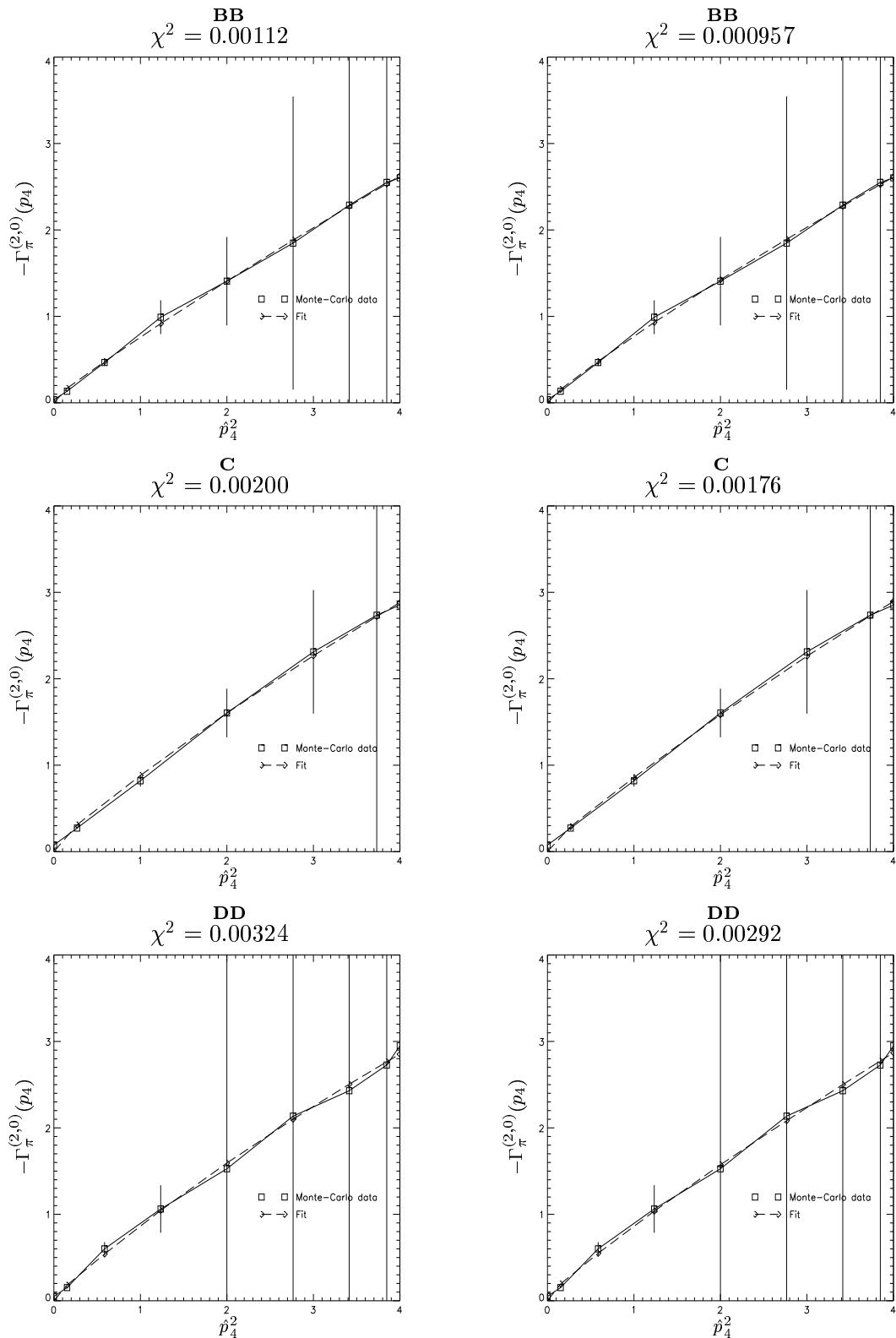


Abbildung 4.6: 2- und 3a-Fit, ungewichtet

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

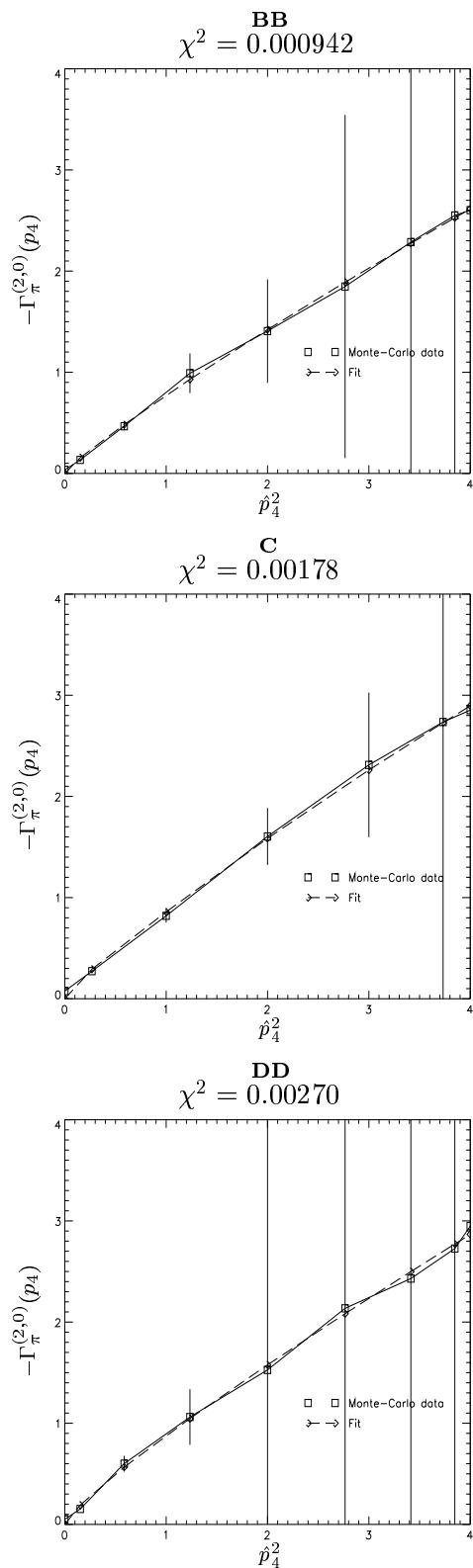


Abbildung 4.7: 3b-Fit, ungewichtet

4.2.7.2 Ungewichtete Fits nur mit 1-Fermionen-Loop-Korrektur

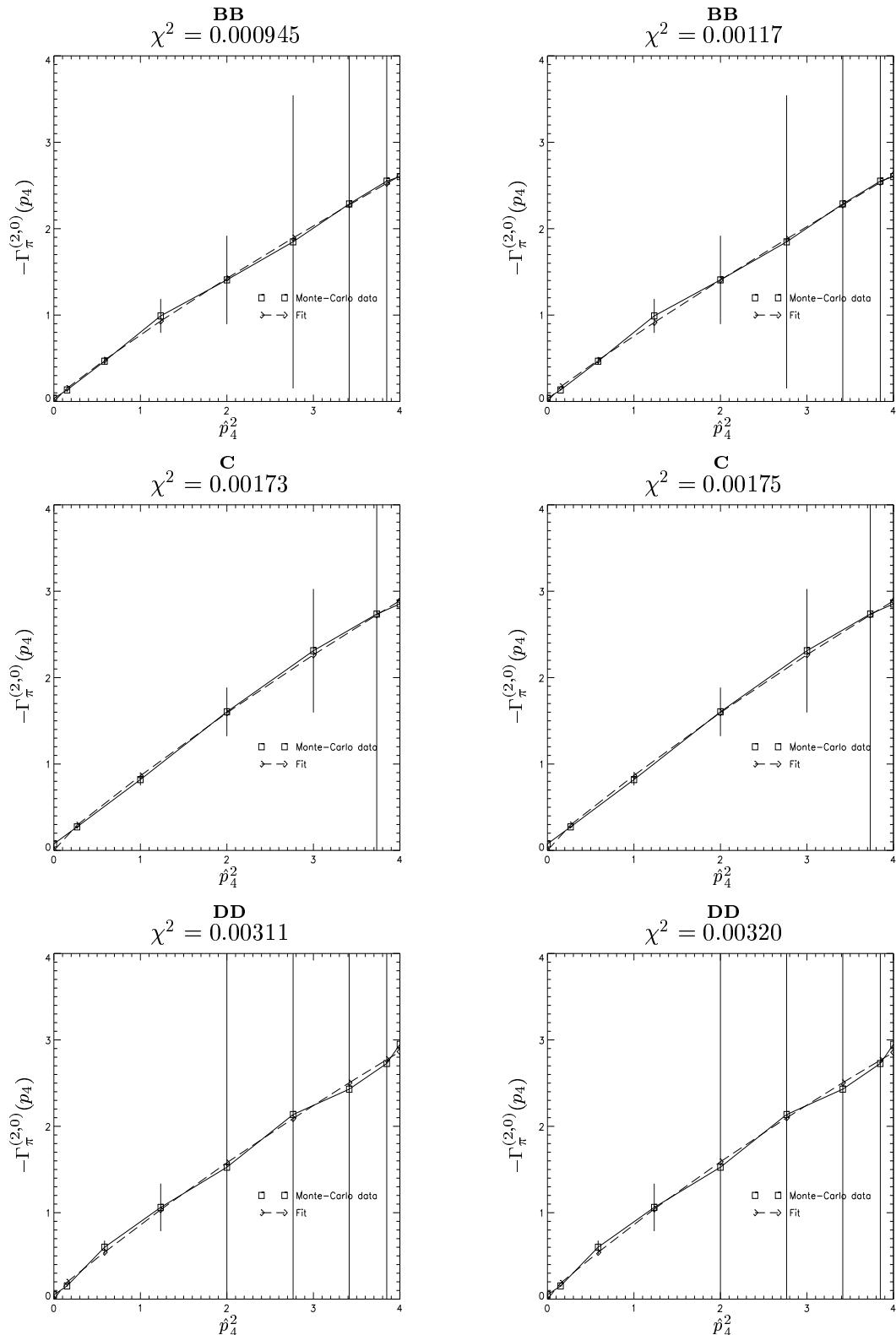


Abbildung 4.8: 1'- und 2'-Fit, ungewichtet

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

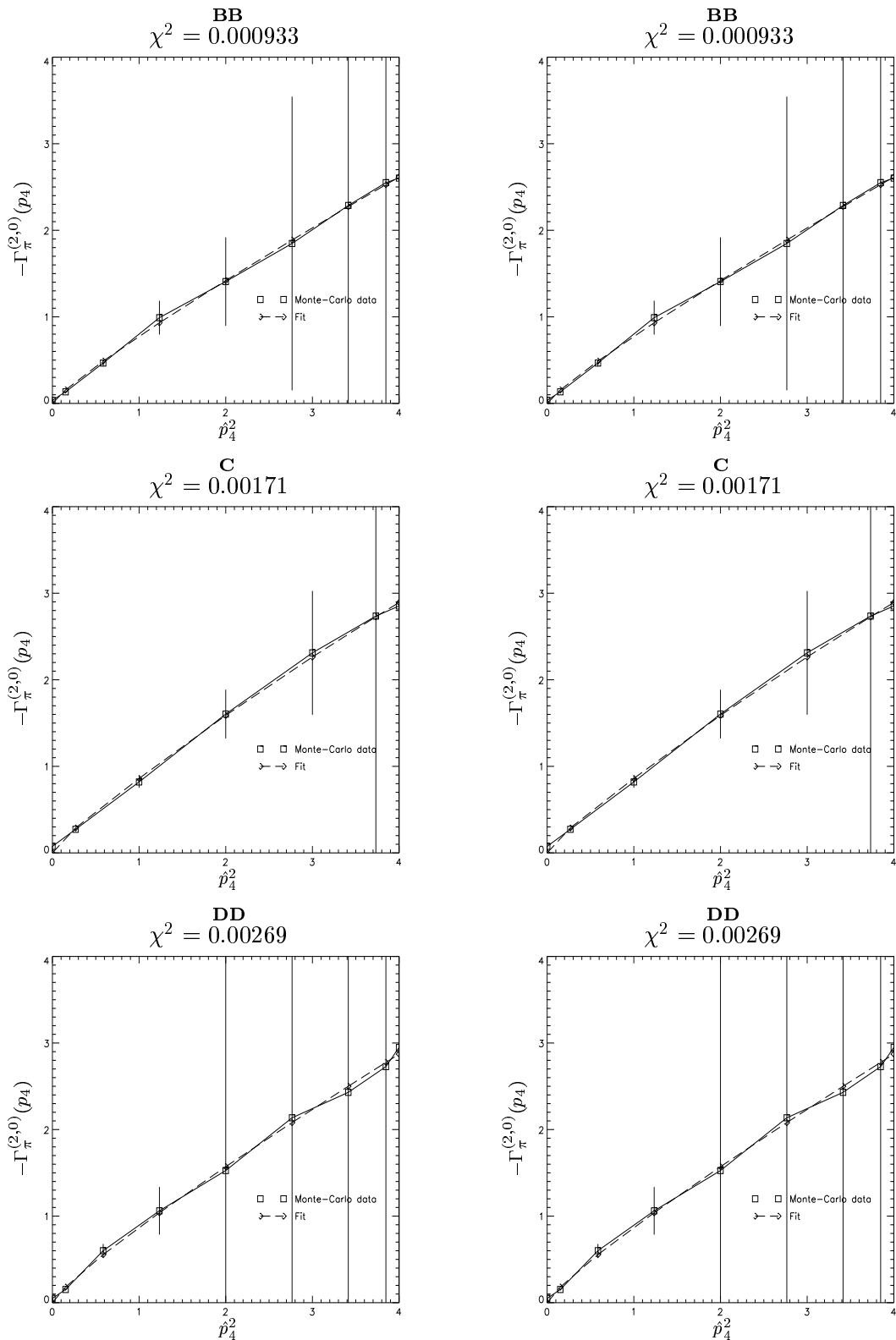


Abbildung 4.9: $3a'$ - und $3b'$ -Fit, ungewichtet

4.2.7.3 Gewichtete Fits mit voller 1-Loop-Korrektur

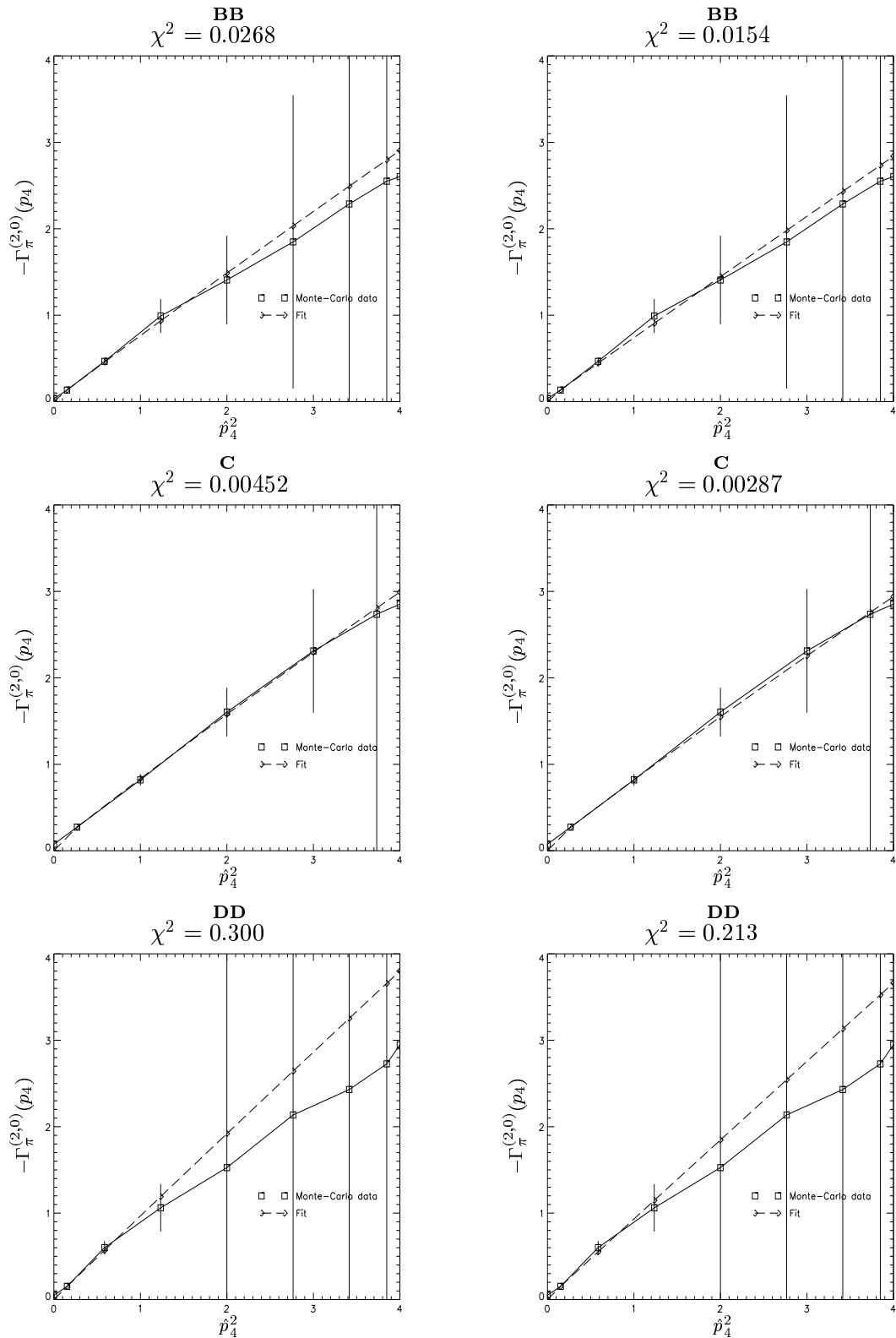


Abbildung 4.10: 1a- und 1b-Fit, gewichtet

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

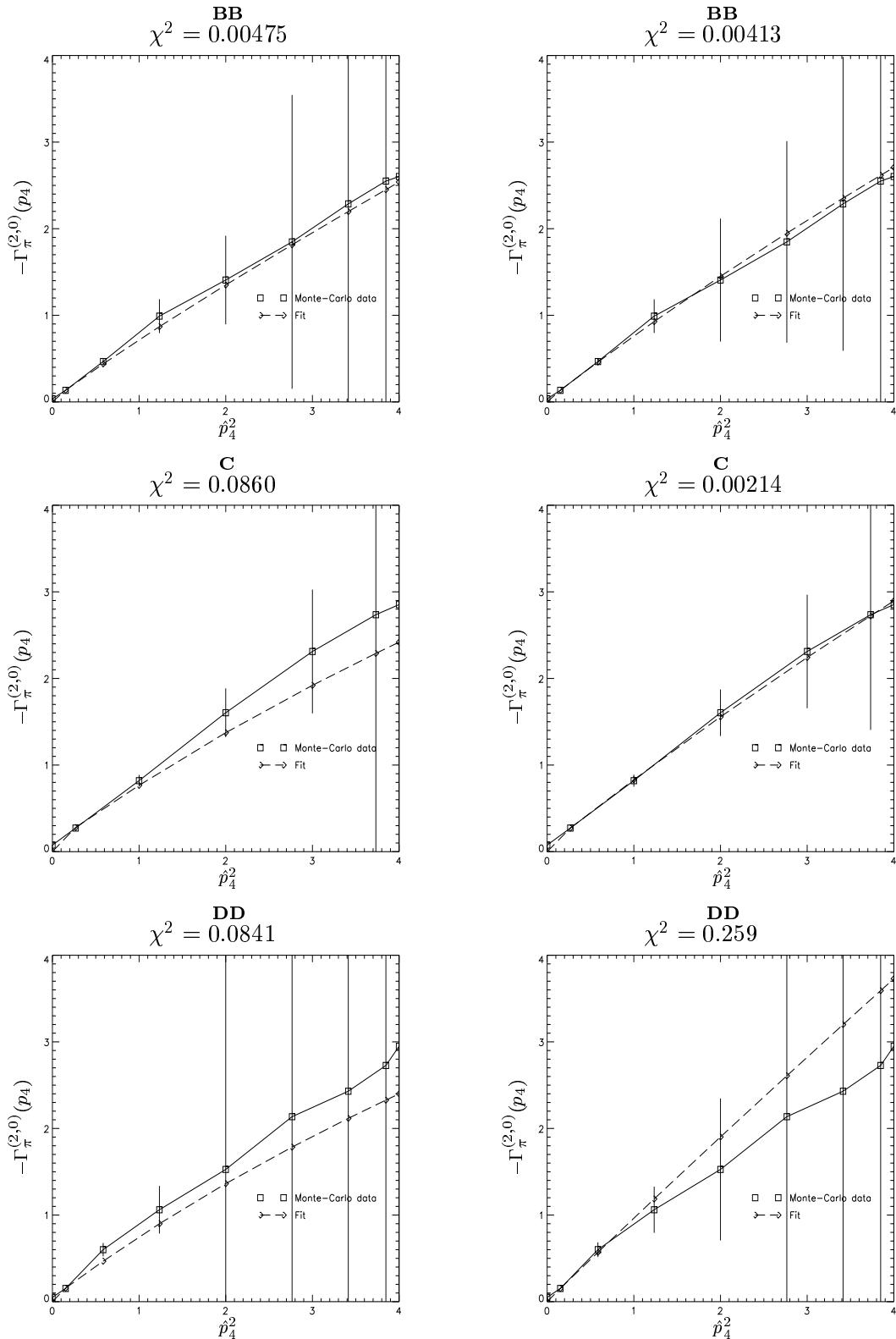


Abbildung 4.11: 2- und 3a-Fit, gewichtet

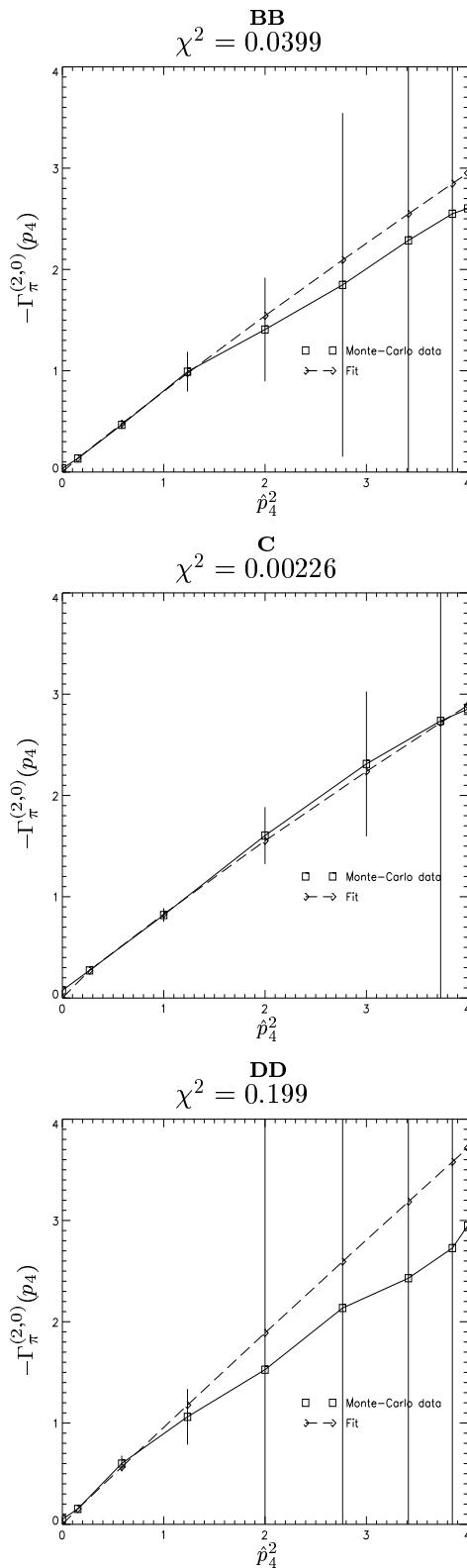


Abbildung 4.12: 3b-Fit, gewichtet

4.2. 1-LOOP-ANALYSE DES π -PROPAGATORS

4.2.7.4 Gewichtete Fits nur mit 1-Fermionen-Loop-Korrektur

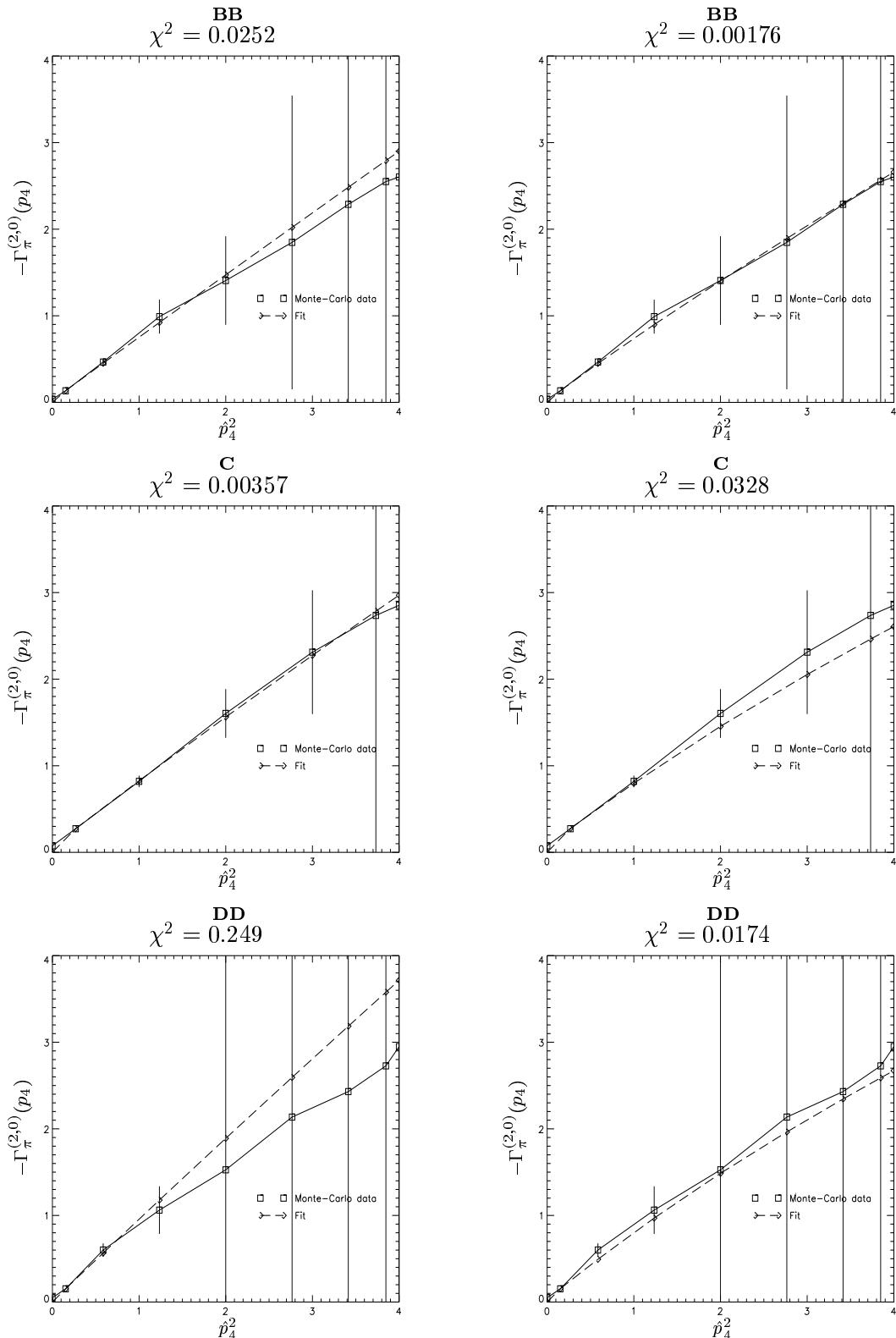


Abbildung 4.13: 1'- und 2'-Fit, gewichtet

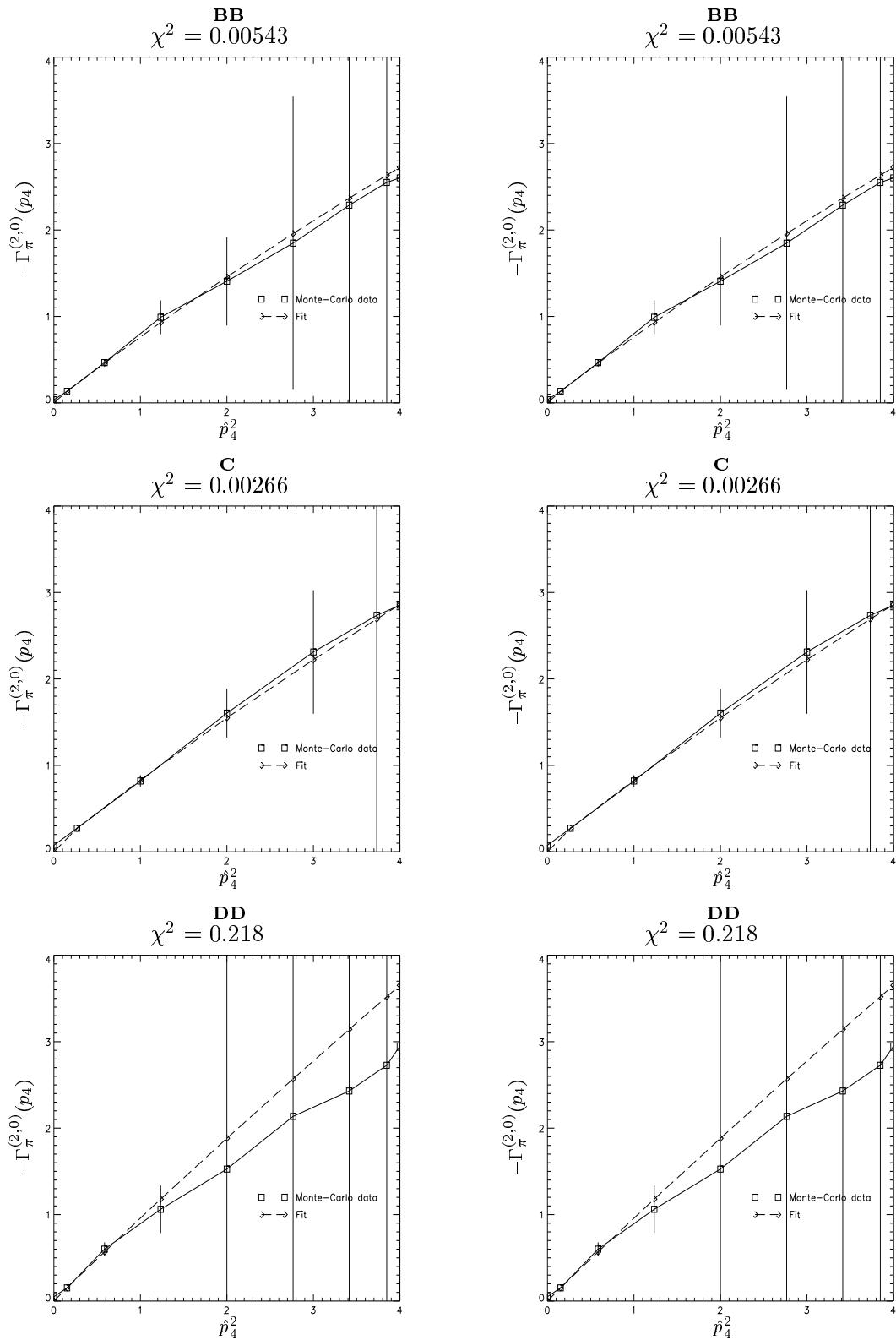


Abbildung 4.14: $3a'$ - und $3b'$ -Fit, gewichtet

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde ein Yukawa-Modell in der Phase mit gebrochener Symmetrie unter globaler $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -Eichsymmetrie störungstheoretisch untersucht.

Im ersten Kapitel wurden dazu die Feynman-Regeln aufgestellt und im zweiten Kapitel die Ausdrücke der skalaren Propagatoren sowie die des Fermionen-Propagators und des Vakuumerwartungswertes im Entkopplungsfall $G_{0\chi} = 0$ bis zur 1-Loop-Ordnung entwickelt.

Nach der Definition des Renormierungsschemas wurden im dritten Kapitel die Störungsreihen der renormierten Parameter als Funktionen der nackten Parameter aufgestellt, z.T. unter Ausnutzung der Golterman-Petcher-Identitäten. Anschließend wurden diese Funktionen wieder nach den nackten Parametern aufgelöst (renormierte Störungstheorie)

Diese Berechnungen dienten als Vorbereitung für die numerische Auswertung von Datensätzen, die die Meßergebnisse einer Hybrid-Monte-Carlo-Simulation enthielten, insbesondere die Zeitscheiben-Korrelationsfunktionen der skalaren Teilchen. Bei dieser Auswertung wurde die in Kapitel 3 vorgestellte renormierte Störungsrechnung angewandt, indem die transversale Zeitscheiben-Korrelationsfunktion in den skalaren π -Propagator Fourier-transformiert, invertiert und dann an diesen die renormierte 1-Loop-Störungsentwicklung des inversen π -Propagators $\Gamma_\pi^{(2,0)}(p)$ als Fitfunktion gelegt wurde.

Geprüft wurden dabei mehrere, zueinander äquivalente Parametrisierungen dieser Fitfunktion, und geprüft wurde auch, ob eine statistisch korrekte Gewichtung des Fittings sinnvoll ist. Dabei stellte sich heraus, daß ein gewichtetes Fitten wegen der den Datensätzen zugrunde liegenden unzureichenden Statistik nicht möglich war, da die ermittelten Parameter zu stark von den Literaturwerten abwichen. Dies konnte man auch deutlich an den Abweichungen der Fitfunktionen von den Meßpunkten in den entsprechenden Plots sehen.

Beim ungewichteten Fitting stellten sich zwei Parametrisierungen (mit der transversalen Renormierungskonstante Z_π , der renormierten Yukawa-Kopplung $G_{R\psi}$ und der Pseudo-Pionenmasse $m_{R\pi}$) als besonders günstig und mit den Literaturwerten relativ konform heraus, wobei die entsprechenden Fitfunktionen auch den Verlauf des gemessenen Propagators hervorragend wiedergaben. Die anderen Fitfunktionen besaßen entweder zu wenig Fitparameter, oder ihre einzelnen Fitparameter konnten in mehreren Werte-Kombinationen dieselbe Fitfunktion reproduzieren, waren also nicht eindeutig.

Zentrales Thema dieser Arbeit war es nun, dieses sich von den für gewöhnlich angewandten Methoden unterscheidende Berechnungsverfahren auf seine Verwendbarkeit zu testen, und zu prüfen, ob es eventuell eine den herkömmlichen Verfahren überlegene, präzisere Auswertung von numerischen Daten im Yukawa-Modell ermöglicht. Die Frage nach der Verwendbarkeit der hier vorgestellten Fitmethode mit 1-Loop-Korrektur lässt sich mit ja beantworten. Die Überlegenheit dieser Methode konnte allerdings noch nicht bewiesen werden, da einerseits die Fehlertoleranzen im Datensatz zu groß waren (obwohl die einzelnen Meßwerte einen relativ zuverlässigen Eindruck machten), und andererseits in das Fitverfahren als Input auch herkömmlich berechnete Parameter, wie z.B. die Fermionenmasse μ_R oder die mit dem Zeitscheiben-Korrelationsfit ermittelte physikalische Masse m_σ eingingen.

Um die genannten Probleme zu beseitigen, sollte man zu größeren Gittervolumina (ab $V = 16^3 \times 32$) und mehr HMC-Trajektorien übergehen (deutlich mehr als 10000). Im Vergleich zu den hier gemessenen Werten lassen sich dann auch Volumeneffekte besser untersuchen. Außerdem wäre im störungstheoretisch erfaßbaren Bereich ein wesentlich aufwendigeres, selbstkonsistentes Fitverfahren interessant, welches ausschließlich auf der Verwendung von 1-Loop-Störungsentwicklungen sowohl des σ - als auch des π -Propagators beruht und nicht zur Hälfte auf “klassisch” berechneten Inputparametern wie z.B der Fermionenmasse $\mu_{R\psi}$. Von wesentlichem Interesse wäre dabei, ob solch ein Verfahren überhaupt möglich ist, und wenn, wie hoch der Zeitaufwand für Realisation und Ausführung ist.

Anhang A

Einfache Definitionen und Konventionen

A.1 γ -Matrizen im Euklidischen

Zwischen den γ -Matrizen γ_μ im Euklidischen und denen in Minkowski-Metrik, γ_μ^M , besteht der Zusammenhang

$$\gamma_j = i\gamma_j^M \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.1})$$

sowie

$$\gamma_4 = \gamma_4^M. \quad (\text{A.2})$$

Daraus wird γ_5 durch

$$\gamma_5 \equiv \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \quad (\text{1.28})$$

definiert. Im Euklidischen gehorchen die γ -Matrizen der Vertauschungsrelation

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (\text{1.27})$$

Weiterhin gilt

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu \quad , \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5 \quad (\text{A.3})$$

sowie

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4 \quad , \quad (\bar{\psi} \gamma_4 \psi)^\dagger = -\bar{\psi} \gamma_4 \psi. \quad (\text{A.4})$$

Als letztes sei noch die Spurrelation

$$\text{Tr}\gamma_\mu = 0 \quad (\text{A.5})$$

genannt.

ANHANG A. EINFACHE DEFINITIONEN UND KONVENTIONEN

Die großen Gammas werden durch

$$\Gamma_j \equiv -i\gamma_5 \tau_j, \quad \Gamma_4 \equiv \mathbf{1} \quad (1.37)$$

definiert. Sie kommutieren entsprechend den Gleichungen

$$\gamma_\mu \Gamma_\nu = \Gamma_\nu^\dagger \gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu \gamma_\nu = \gamma_\nu \Gamma_\mu^\dagger, \quad \gamma_5 \Gamma_\nu = \Gamma_\nu \gamma_5, \quad \gamma_5 \Gamma_\nu^\dagger = \Gamma_\nu^\dagger \gamma_5 \quad (1.47)$$

und

$$\Gamma_i \Gamma_j = \Gamma_i^\dagger \Gamma_j^\dagger = -\delta_{ij} - i \epsilon_{ijk} \tau_k, \quad \Gamma_i^\dagger \Gamma_j = \Gamma_i \Gamma_j^\dagger = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \tau_k. \quad (1.48)$$

Die Spur des Produktes $\Gamma_\alpha \Gamma_\beta^\dagger$ hat den Wert

$$\text{Tr}(\Gamma_\alpha \Gamma_\beta^\dagger) = 8\delta_{\alpha\beta}. \quad (1.49)$$

A.2 Sonstige Bezeichnungen

Entsprechend den üblichen Konventionen werden noch folgende Parameter als Abkürzungen definiert:

$$\hat{q}_\mu \equiv 2 \sin \frac{q_\mu}{2}, \quad (1.69)$$

$$\overline{q}_\mu \equiv \sin q_\mu, \quad (1.76)$$

$$\overline{\overline{q}}_\mu \equiv \frac{1}{2} \sin(2q_\mu). \quad (3.42)$$

“Geschlängelte” Parameter sind definiert als

$$\widetilde{m} \equiv 2 \sinh \frac{m}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Anhang B

Erzeugende Funktionale und Greensfunktionen

B.1 Konventionen für die Gitternotation

Das Gitter ist die Menge

$$\Lambda \equiv \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{Z}^4; 0 \leq x_\alpha < L_\alpha, \alpha = 1, \dots, 4\}, \quad (1.15)$$

sein Volumen ist

$$V \equiv L_1 L_2 L_3 L_4 = L^3 T, \quad (B.1)$$

wobei L die Ausdehnung in Raumrichtung, $T = L_4$ die in Zeitrichtung ist. Die Gittersumme ist gleich

$$\sum_x \equiv \left(\prod_{\alpha=1}^4 \sum_{x_\alpha=0}^{L_\alpha-1} \right), \quad (B.2)$$

eine Fouriertransformation entspricht der Operation

$$\tilde{f}(p) \equiv \sum_x f(x) e^{-ip \cdot x}, \quad (B.3)$$

rücktransformiert wird mit

$$f(x) \equiv \frac{1}{V} \sum_x \tilde{f}(x) e^{ip \cdot x}, \quad (B.4)$$

wobei $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ und $p_\mu = \frac{2\pi}{L_\mu} n_\mu$, $n_\mu \in \{0, \dots, L_\mu - 1\}$.

Das häufig auftretende Integral über die erste Brillouin-Zone ist auf dem Gitter als die Summe

$$\int_q \equiv \frac{1}{L^3 T} \sum_{\substack{-L/2 < n_j \leq L/2 \\ -T/2 < n_4 \leq T/2}} \quad (1.83)$$

mit $q_j = \frac{2\pi}{L} n_j$ und $q_4 = \frac{2\pi}{T} n_4$ definiert.

B.2 Erzeugendes Funktional für unverbundene Greensfunktionen

Das erzeugende Funktional ist in Gitternotation definiert als

$$\begin{aligned} Z(J, \xi, \bar{\xi}) \equiv \\ N^{-1} \int \mathcal{D}\varphi' \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left\{ - \left[S(\varphi', \Psi, \bar{\Psi}) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_x \text{Tr}(J_x^\dagger \varphi'_x) + \sum_x (\bar{\zeta}_x \psi_x + \bar{\psi}_x \zeta_x + \bar{\eta}_x \chi_x + \bar{\chi}_x \eta_x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (B.5)$$

mit den Quellen

$$J_x = J_{0x} \mathbf{1} + i J_{jx} \tau_j \quad \text{und} \quad \xi_x = \begin{pmatrix} \zeta_x \\ \eta_x \end{pmatrix},$$

und der Normierungskonstante N . Sie besitzt den Wert

$$N \equiv Z(J, \xi, \bar{\xi})|_{J=\xi=\bar{\xi}=0}. \quad (B.6)$$

$\mathcal{D}\varphi'$ steht für

$$\mathcal{D}\varphi' \equiv \prod_x \prod_\alpha d\varphi'_{0\alpha x}, \quad (B.7)$$

$\mathcal{D}\Psi$ für

$$\mathcal{D}\Psi \equiv \prod_x d\Psi_x, \quad (B.8)$$

$\mathcal{D}\bar{\Psi}$ ist analog definiert.

B.3 Erzeugendes Funktional für die verbundenen Greensfunktionen

Das erzeugende Funktional für die verbundenen Greensfunktionen ist durch

$$W(J, \xi, \bar{\xi}) \equiv \log Z(J, \xi, \bar{\xi}) \quad (B.9)$$

definiert. (2.1) und (2.2) lassen sich daraus einfach berechnen:

$$G_{\sigma,xy} = -\frac{\partial^2}{\partial J_{0x} \partial J_{0y}} W(J, \xi, \bar{\xi}) \Big|_{J=\xi=\bar{\xi}=0}, \quad (B.10)$$

$$G_{\pi,ij,xy} = -\frac{\partial^2}{\partial J_{ix}\partial J_{jy}} W(J, \xi, \bar{\xi}) \Big|_{J=\xi=\bar{\xi}=0}. \quad (\text{B.11})$$

Das erzeugende Funktional für die 1-Teilchen-irreduziblen Vertizes (1 PI-Vertizes; 1 PI=one particle irreducible) ist dann mittels der Legendre-Transformation

$$\Gamma(\varphi', \Psi, \bar{\Psi}) \equiv W(J, \xi, \bar{\xi}) - \sum_x \left[\text{Tr}(J_x^\dagger \varphi'_x) + \bar{\xi}_x \Psi_x + \bar{\Psi}_x \xi_x \right] \quad (\text{B.12})$$

bzw., noch exakter formuliert, mittels

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi, \psi, \bar{\psi}, \chi, \bar{\chi}) &\equiv W(J, \zeta, \bar{\zeta}, \eta, \bar{\eta}) \\ &- \sum_x \left[\text{Tr}(J_x^\dagger \varphi'_x) + \bar{\zeta}_x \psi_x + \bar{\psi}_x \zeta_x + \bar{\eta}_x \chi_x + \bar{\chi}_x \eta_x \right] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

gegeben (der Strich bei φ' wird ab jetzt weggelassen).

Die Vertex-Funktionen $\Gamma^{(n,l)}$ für n Bosonen und l Fermionen werden auf dem Gitter einfach mittels partieller Ableitungen generiert, z.B.

$$\Gamma_{\pi,ij,xy}^{(2,0)} = \frac{\partial^2}{\partial \pi_{ix} \partial \pi_{jy}} \Gamma(\varphi, \Psi, \bar{\Psi}) \quad (\text{B.14})$$

oder

$$\Gamma_{\sigma\bar{\chi}\chi,xyz}^{(1,2)} = \frac{\partial^3}{\partial \sigma_x \partial \bar{\chi}_y \partial \chi_z} \Gamma(\varphi, \Psi, \bar{\Psi}). \quad (\text{B.15})$$

Die Umnormierung der Felder,

$$\varphi_0 = \sqrt{2\kappa} \varphi, \quad \Psi_0 = \sqrt{2K} \Psi, \quad \bar{\Psi}_0 = \sqrt{2K} \bar{\Psi}, \quad (\text{B.16})$$

führt zur Beziehung

$$\Gamma^{(n,l)} = (2\kappa)^{n/2} (2K)^{l/2} \Gamma_0^{(n,l)}. \quad (\text{B.17})$$

Beispielsweise ist (B.14) genau das negativ Inverse zu (2.2), denn es gilt:

$$-\sum_z \Gamma_{\pi,ik,xz}^{(2,0)} G_{\pi,kj,zy} = \delta_{ij} \delta_{xy}. \quad (\text{B.18})$$

Hierbei wurden die Gleichungen (B.11) und (B.12) ausgenutzt.

Ausgehend von der allgemeineren Gleichung

$$\sum_z \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \varphi_x \partial \varphi_z} \frac{\partial^2 W}{\partial J_z \partial J_y} = \delta_{xy} \quad (\text{B.19})$$

kann man dann mittels Ableitungen nach dem Feld φ noch die Beziehungen

$$\Gamma_{x_1 x_2 x_3}^{(3)} = \sum_{y_1 y_2 y_3} \Gamma_{x_1 y_1}^{(2)} \Gamma_{x_2 y_2}^{(2)} \Gamma_{x_3 y_3}^{(2)} G_{y_1 y_2 y_3}^c \quad (\text{B.20})$$

und

$$\begin{aligned} \Gamma_{x_1 x_2 x_3 x_4}^{(4)} = & \sum_{y_1 \dots y_4} \Gamma_{x_1 y_1}^{(2)} \Gamma_{x_2 y_2}^{(2)} \Gamma_{x_3 y_3}^{(2)} \Gamma_{x_4 y_4}^{(2)} \\ & \times \left[G_{y_1 y_2 y_3 y_4}^c - \sum_{y_5 y_6} \Gamma_{y_5 y_6}^{(2)} (G_{y_1 y_2 y_5}^c G_{y_3 y_4 y_6}^c + G_{y_1 y_4 y_5}^c G_{y_2 y_3 y_6}^c + G_{y_1 y_3 y_5}^c G_{y_2 y_4 y_6}^c) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

herleiten. Die G^c sind dabei die verbundenen Greensfunktionen, deren Definition

$$G_{x_1 \dots x_n}^c \equiv -\frac{\partial^n W}{\partial J_{x_1} \dots \partial J_{x_n}} \Big|_{J=0} \quad (\text{B.22})$$

lautet.

Mittels Fouriertransformation bekommt man (B.14) im Impulsraum:

$$\Gamma_{0\pi,ij}^{(2,0)}(p) = \frac{1}{V} \sum_{xy} \Gamma_{\pi,ij,xy}^{(2,0)} e^{-ip \cdot (x-y)} = \sum_x \Gamma_{\pi,ij,x0}^{(2,0)} e^{-ip \cdot x}. \quad (\text{B.23})$$

Der letzte Ausdruck resultiert aus der Translationsinvarianz der inversen Greenschen Funktionen bzw. Vertex-Funktionen, z.B.

$$\Gamma_{xy} = \Gamma_{x-y} 0. \quad (\text{B.24})$$

Allgemeiner lautet die Transformationsvorschrift

$$\begin{aligned} & \Gamma^{(n,l)}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_l) \\ &= \frac{1}{V^{n+l}} \sum_{\substack{x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_l}} \Gamma_{x_1 \dots x_n}^{(n,l)}_{y_1 \dots y_l} e^{-i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_n \cdot x_n + q_1 \cdot y_1 + \dots + q_l \cdot y_l)} \\ &= \frac{1}{V^{n+l-\text{sgn } n - \text{sgn } l}} \sum_{\substack{x_1 \dots x_{n-1} \\ y_1 \dots y_{l-1}}} \Gamma_{x_1 \dots x_{n-1} 0}^{(n,l)}_{y_1 \dots y_{l-1} 0} e^{-i(p_1 \cdot x_1 + \dots + p_{n-1} \cdot x_{n-1} + q_1 \cdot y_1 + \dots + q_{l-1} \cdot y_{l-1})}. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2.4), (B.23) und (B.18) ergibt sich auch im Impulsraum, analog zu (B.18),

$$-\Gamma_{\pi,ij}^{(2,0)}(p) G_{\pi,ij}(p) = \delta_{ij}. \quad (\text{B.26})$$

Im Impulsraum ergeben sich für (B.20) und (B.21) dann folgende Relationen:

$$\Gamma^{(3)}(p_1, p_2, p_3) = \Gamma^{(2)}(p_1) \Gamma^{(2)}(p_2) \Gamma^{(2)}(p_3) G_c(p_1, p_2, p_3) \quad (\text{B.27})$$

und

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = & \\
 \Gamma^{(2)}(p_1)\Gamma^{(2)}(p_2)\Gamma^{(2)}(p_3)\Gamma^{(2)}(p_4) & \\
 \times [G_c(p_1, p_2, p_3, p_4) & \\
 -\Gamma^{(2)}(p_1 + p_2) G_c(p_1, p_2, -p_1 - p_2) G_c(p_3, p_4, -p_3 - p_4) & \\
 -\Gamma^{(2)}(p_1 + p_4) G_c(p_1, p_4, -p_1 - p_4) G_c(p_2, p_3, -p_2 - p_3) & \\
 -\Gamma^{(2)}(p_1 + p_3) G_c(p_1, p_3, -p_1 - p_3) G_c(p_2, p_4, -p_2 - p_4)]. & \\
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

B.4 Volle 1-Loop-Ausdrücke der skalaren Propagatoren

Aus den Ausdrücken (2.15) bis (2.33) erhält man

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{0\sigma}^{(2,0)}(p) = & -\hat{p}^2 - m_0^2 \\
 + \frac{1}{2} g_0 m_0^2 \int_q [3(\hat{p}^2 + m_0^2)^{-1}(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{p}^2 + \hat{q}^2)^{-1}(\hat{q}^2)^{-1}] & \\
 + g_0 \int_q [(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} + (\hat{q}^2)^{-1}] & \\
 - 8 N_f \int_q \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(q) [(G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2)\bar{q}^2 - 2G_{0\psi}G_{0\chi}(\mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi})] & \\
 - 8 N_f \int_q \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(p+q) \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(q) & \\
 \times \left((G_{0\psi}^2\mu_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2\mu_{0\chi}^2) \overline{p+q}^2 \bar{q}^2 \right. & \\
 - (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) \mu_{0\psi}\mu_{0\chi} [\overline{p+q}^2(\mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}) + \bar{q}^2(\mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi})] & \\
 + 2G_{0\psi}G_{0\chi}[\mu_{0\psi}\mu_{0\chi}(\mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi})(\mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}) & \\
 + \mu_{p+q}\mu_q(\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi})(\bar{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi})] & \\
 - \overline{p+q} \bar{q} \left\{ (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2)(\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2)(\bar{q}^2 + \mu_q^2) \right. & \\
 + 2G_{0\psi}G_{0\chi}\mu_{0\psi}\mu_{0\chi}[(\overline{p+q}^2 + \mu_{p+q}^2) + (\bar{q}^2 + \mu_q^2)] & \\
 + 2(G_{0\psi} + G_{0\chi})^2 \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}\mu_{p+q}\mu_q & \\
 \left. + (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2)(\mu_{0\psi}\mu_{0\chi})^2 \right\} & \\
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

und

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0\pi,ij}^{(2,0)}(p) = & \delta_{ij} \left[-\hat{p}^2 + \frac{1}{3}g_0 m_0^2 \int_q [(\hat{p} + \hat{q})^2 + m_0^2)^{-1} (\hat{q}^2)^{-1}] \right. \\
& + \frac{1}{3}g_0 \int_q [(\hat{q}^2 + m_0^2)^{-1} - (\hat{q}^2)^{-1}] \\
& - 8 N_f \int_q \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(q) [(G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) \bar{q}^2 - 2G_{0\psi}G_{0\chi}(\mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi})] \\
& + 8 N_f \int_q \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(p+q) \tilde{\mathcal{D}}^{-1}(q) \\
& \times \left((G_{0\psi}^2 \mu_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2 \mu_{0\chi}^2) \bar{p}^2 + \bar{q}^2 \bar{q}^2 \right. \\
& - (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) \mu_{0\psi}\mu_{0\chi} [\bar{p}^2 + \bar{q}^2 (\mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}) \\
& \quad \left. \left. + \bar{q}^2 (\mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}) \right] \right. \\
& + 2 G_{0\psi}G_{0\chi} [\mu_{0\psi}\mu_{0\chi} (\mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi})(\mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}) \\
& \quad \left. \left. - \mu_{p+q}\mu_q (\bar{p}^2 + \bar{q}^2 + \mu_{p+q}^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. (\bar{q}^2 + \mu_q^2 - \mu_{0\psi}\mu_{0\chi}) \right] \right. \\
& + \bar{p}^2 \bar{q}^2 \{ (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) (\bar{p}^2 + \bar{q}^2 + \mu_{p+q}^2) (\bar{q}^2 + \mu_q^2) \\
& \quad + 2 G_{0\psi}G_{0\chi} \mu_{0\psi}\mu_{0\chi} [(\bar{p}^2 + \bar{q}^2 + \mu_{p+q}^2) + (\bar{q}^2 + \mu_q^2)] \\
& \quad - 2 (G_{0\psi} + G_{0\chi})^2 \mu_{0\psi}\mu_{0\chi} \mu_{p+q}\mu_q \\
& \quad \left. \left. + (G_{0\psi}^2 + G_{0\chi}^2) (\mu_{0\psi}\mu_{0\chi})^2 \right\} \right) \left. \right] \tag{B.30}
\end{aligned}$$

als 1-Loop-Resultate der inversen skalaren Propagatoren.

Anhang C

Zeitscheiben- Korrelationsfunktionen

Die partiell Fouriertransformierte (d.h. nur der Raumanteil wird transformiert)

$$C(t, \mathbf{p}) \equiv \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{xy}} G_{(\mathbf{x}, t)}^c(\mathbf{y}, 0) e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} = \sum_{\mathbf{x}} G_{(\mathbf{x}, t)}^c(0) e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}, \quad (\text{C.1})$$

wobei

$$G_{xy}^c = \langle \phi_x \phi_y \rangle_c \quad (\text{C.2})$$

der allgemeine Ausdruck für die verbundene Zweipunkt-Greenfunktion sei, hängt mit der Korrelationsfunktion der Zeitscheiben,

$$S(t, \mathbf{p}) \equiv \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{x}} \phi_{(\mathbf{x}, t)} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (\text{C.3})$$

über die Gleichung

$$C(t_1 - t_2, \mathbf{p}) = \frac{1}{L^3} \sum_{x_1 x_2} \langle \phi_{(\mathbf{x}_1, t_1)} \phi_{(\mathbf{x}_2, t_2)} \rangle_c e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} = \langle S(t_1, \mathbf{p}) S(t_2, -\mathbf{p}) \rangle_c \quad (\text{C.4})$$

zusammen [MM94]. Die Feldkonfiguration auf einer Zeitscheibe $x_4 = t$ sei durch

$$\Phi_t \equiv \{\phi_x; x_4 = t\} \quad (\text{C.5})$$

definiert. Die Wirkung ist dann

$$S(\phi) = \sum_t \mathcal{L}(\Phi_{t+1}, \Phi_t) \quad (\text{C.6})$$

mit

$$\mathcal{L}(\Phi_{t+1}, \Phi_t) = \sum_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} (\phi_{(\mathbf{x}, t+1)} - \phi_{(\mathbf{x}, t)})^2 + \frac{1}{2} [\mathcal{L}_1(\Phi_t) + \mathcal{L}_1(\Phi_{t+1})] \quad (\text{C.7})$$

sowie

$$\mathcal{L}_1(\Phi_t) = \sum_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_k (\phi_{(\mathbf{x}+k,t)} - \phi_{(\mathbf{x},t)})^2 + \frac{m}{2} \phi_{(\mathbf{x},t)}^2 + \frac{g}{4!} \phi_{(\mathbf{x},t)}^4 \right\}. \quad (\text{C.8})$$

Bezeichne nun \mathbf{T} die Transfermatrix, welche durch

$$\mathbf{T}(\Phi_{t+1}, \Phi_t) \equiv e^{\mathcal{L}(\Phi_{t+1}, \Phi_t)} \quad (\text{C.9})$$

gegeben sei. Sie ist der Kern des gleichnamigen Operators $\hat{\mathbf{T}}$, der gemäß der Gleichung

$$|\Psi_{t+1}\rangle = \hat{\mathbf{T}}|\Psi_t\rangle \quad (\text{C.10})$$

wirkt, wobei die Wellenfunktion $\Psi_t(\Phi)$ von der Feldkonfiguration $\Phi \equiv \{\phi_{\mathbf{x}}; \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3, 0 \leq x_j < L_j\} \equiv \Phi_{t_0}$ zu einer festen Zeit t_0 abhängt. Mit dem Multiplikationsoperator $\hat{\phi}_{\mathbf{x}}$, bestimmt durch die Definitionsgleichung

$$\hat{\phi}_{\mathbf{x}}\Psi_t(\Phi) \equiv \phi_{\mathbf{x}}\Psi_t(\Phi) \quad (\text{C.11})$$

ergibt sich damit für die Zweipunktfunktion ($t_0 = 0$)

$$\begin{aligned} & \langle \phi_{x_1} \phi_{x_2} \rangle \\ &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \phi_{x_1} \phi_{x_2} e^{-S(\phi)} \\ &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \phi_{x_1} \phi_{x_2} \prod_{t=0}^{T-1} \mathbf{T}(\Phi_{t+1}, \Phi_t) \\ &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\phi \left\{ \prod_{t=t_1}^{T-1} \mathbf{T}(\Phi_{t+1}, \Phi_t) \right\} \phi_{x_1} \left\{ \prod_{t=t_2}^{t_1-1} \mathbf{T}(\Phi_{t+1}, \Phi_t) \right\} \phi_{x_2} \left\{ \prod_{t=0}^{t_2-1} \mathbf{T}(\Phi_{t+1}, \Phi_t) \right\} \\ &= \frac{\text{Tr}(\hat{\mathbf{T}}^{T-t_1} \hat{\phi}_{\mathbf{x}_1} \hat{\mathbf{T}}^{t_1-t_2} \hat{\phi}_{\mathbf{x}_2} \hat{\mathbf{T}}^{t_2})}{\text{Tr}(\hat{\mathbf{T}}^T)} \\ &= \frac{\text{Tr}(\hat{\mathbf{T}}^{T-(t_1-t_2)} \hat{\phi}_{\mathbf{x}_1} \hat{\mathbf{T}}^{t_1-t_2} \hat{\phi}_{\mathbf{x}_2})}{\text{Tr}(\hat{\mathbf{T}}^T)}, \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

wobei T als Gitterausdehnung in Zeitrichtung nicht mit der Transfermatrix \mathbf{T} zu verwechseln ist! Außerdem wird dabei vorausgesetzt, daß $t_1 > t_2$ ist, und es gilt $Z = \text{Tr}(\hat{\mathbf{T}}^T)$. Die Eigenvektoren $|n\rangle$ des durch

$$\hat{\mathbf{T}} \equiv e^{-\mathbf{H}} \quad (\text{C.13})$$

definierten Hamiltonoperators gehorchen der Eigenwertgleichung $\mathbf{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, das Eigenwertspektrum sei diskret und der Zustand mit dem niedrigsten Eigenwert E_0 sei $|0\rangle$. Dann gilt mit (C.12):

$$\langle n | \phi_{x_1} \phi_{x_2} | n \rangle = \sum_{m \geq 0} \langle n | \hat{\phi}_{\mathbf{x}_1} | m \rangle \langle m | \hat{\phi}_{\mathbf{x}_2} | n \rangle e^{-(E_m - E_n)(t_1 - t_2)}. \quad (\text{C.14})$$

Mit den Annahmen, daß beim zugehörigen Dichteoperator

$$\rho \equiv \sum_{n \geq 0} p_n |n\rangle \langle n|$$

$p_1 \gg p_n$ für alle $n > 1$ ist, und daß die entsprechenden E_n wesentlich größer als E_0 und E_1 sind, kommt man für große $t_1 - t_2 > 0$ zu der Proportionalitätsbeziehung

$$\langle \phi_{x_1} \phi_{x_2} \rangle_c \propto e^{-(E_1 - E_0)(t_1 - t_2)} + \text{const.} \quad (\text{C.15})$$

Es sei noch einmal daran erinnert, daß

$$\langle \phi_{x_1} \phi_{x_2} \rangle_c = \langle \phi_{x_1} \phi_{x_2} \rangle - \langle \phi_{x_1} \rangle \langle \phi_{x_2} \rangle$$

ist, daher röhrt auch die Konstante auf der rechten Seite von (C.15).

Die Korrelationslänge ξ , die ein Maß für den exponentiellen Abfall der Zweipunktfunktion ist, bestimmt sich zu

$$\xi = (E_1 - E_0)^{-1}. \quad (\text{C.16})$$

Aus Analogiebetrachtungen erkennt man, daß $\langle \phi_{x_1} \phi_{x_2} \rangle$ der Spin-Spin-Korrelationsfunktion in der Statischen Physik entspricht, die darin vorkommende Korrelationslänge ξ , welche den (ebenfalls) exponentiellen Abfall der Korrelationsfunktion ausdrückt, ist reziprok zur Masse des leichtesten Teilchens gemäß

$$\xi = m^{-1}. \quad (\text{C.17})$$

Dieses m entspricht der physikalischen Masse m_{phys} , die aus der Energie-Impuls-Relation $E = E(\mathbf{p})$ durch die Definition

$$m_{phys} \equiv E(\mathbf{0}) \quad (\text{C.18})$$

festgelegt wird (siehe Gleichung (3.7)). Damit gelangt man schließlich für $C(t) \equiv C(t, \mathbf{0})$ zur Relation

$$C(t) = a(e^{-m_{phys}t} + e^{-m_{phys}(T-t)}) + b. \quad (\text{C.19})$$

Der zweite Exponentialterm kommt durch die Gitterperiodizität zustande.

Anhang D

Gittersummenalgorithmus

Um die numerische Auswertung der Gittersumme

$$\sum_{-L/2 < n_j \leq L/2} f(n_1, n_2, n_3)$$

mit geradem L zu beschleunigen, werden folgende, bei den Integranden in den Graphen häufig vorkommenden Symmetrien ausgenutzt:

$$f(n_1, n_2, n_3) = f(-n_1, n_2, n_3), \quad (D.1)$$

$$f(n_1, n_2, n_3) = f(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, n_{\sigma(3)}) \quad \text{für alle Permutationen } \sigma \in S_3. \quad (D.2)$$

Damit erhält man folgenden Ausdruck [MUN88]:

$$\begin{aligned} \sum_{-L/2 < n_j \leq L/2} f(n_1, n_2, n_3) = & \\ & f(0, 0, 0) + 3 f(0, 0, \frac{L}{2}) + 3 f(0, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}) + f(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}) \\ & + 2 \sum_{0 < n_1 < L/2} \left\{ 4 f(n_1, n_1, n_1) + 6 f(n_1, n_1, 0) + 6 f(n_1, n_1, \frac{L}{2}) \right. \\ & \quad \left. + 3 f(n_1, 0, 0) + 3 f(n_1, \frac{L}{2}, \frac{L}{2}) + 6 f(n_1, 0, \frac{L}{2}) \right\} \\ & + 24 \sum_{0 < n_1 < n_2 < L/2} \left\{ f(n_1, n_1, n_2) + f(n_1, n_2, n_2) + f(n_1, n_2, 0) + f(n_1, n_2, \frac{L}{2}) \right\} \\ & + 48 \sum_{0 < n_1 < n_2 < n_3 < L/2} f(n_1, n_1, n_1). \end{aligned} \quad (D.3)$$

Literaturverzeichnis

- [BDFJ92] W. Bock, A.K. De, C. Frick, J. Jersák und T. Trappenberg, Nucl. Phys. **B378** (1992) 652
- [BS89] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, 24. Auflage, Verlag Harri Deutsch 1989
- [CL84] T.-P. Cheng und L.-F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford University Press, Oxford 1984
- [DKPR87] S. Duane, A.D. Kennedy, B.J. Pendleton und D. Roweth, Phys. Lett. **195B** (1987) 216
- [FGL73] H. Fritzsch, M. Gell-Mann und H. Leutwyler, Phys. Lett. **B47** (1973) 365
- [FLMM93] C. Frick, L. Lin, I. Montvay, G. Münster, M. Plagge, T. Trappenberg und H. Wittig, Nucl. Physics **B397** (1993) 431
- [FP89] H. Flyvbjerg und H.G. Petersen, J. Chem. Phys. **91** (1989) 461
- [FRI93] C. Frick, *Nicht-perturbative Untersuchung einer starken Yukawa-Kopplung im Standardmodell auf dem Gitter*, Dissertation 1993
- [GP89] M.F.L. Golterman und D.N. Petcher, Phys. Lett. **225B** (1989) 159
- [GSW] S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579;
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264;
A. Salam, in: Elementary Particle Physics, Hrsg. N. Svartholm, Stockholm 1968, 367
- [HIG66] P.W. Higgs, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508;
Phys. Rev. **145** (1966) 1156
- [HJJL89] A. Hasenfratz, K. Jansen, J. Jersák, C.B. Lang, T. Neuhaus und H. Yoneyama, Nucl. Phys. **B317** (1989) 81
- [HJLN87] A. Hasenfratz, K. Jansen, C.B. Lang, T. Neuhaus und H. Yoneyama, Phys. Lett. **B199** (1987) 531

- [HUA82] K. Huang, *Quarks, Leptons and Gauge Fields*, World Scientific, Singapore 1982
- [JER89] J. Jersák, *Path Integral Methods in Quantum Theory*, in *Path Integral, Lattice Gauge Theory and Critical Phenomena*, Hrsg. A. Shaukat, World Scientific, Singapore 1989
- [KLS88] J. Kuti, L. Lin und Y. Shen, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 678
- [KS81] L.H. Karsten, J. Smit, Nucl. Phys. **B183** (1981) 103
- [LMMP93] L. Lin, G. Münster, I. Montvay, M. Plagge und H. Wittig, Nucl. Phys. **B317** (1993) 143
- [LMPM93] L. Lin, G. Münster, M. Plagge, I. Montvay, H. Wittig, C. Frick und T. Trappenberg, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **30** (1993) 647
- [LMWM91a] L. Lin, I. Montvay, H. Wittig und G. Münster, Nucl. Phys. **B354** (1991) 531
- [LMWM91b] L. Lin, I. Montvay, H. Wittig und G. Münster, Nucl. Phys. **B355** (1991) 511
- [LW88] M. Lüscher und P. Weisz, Phys. Lett. **212B** (1988) 472
- [LW92] L. Lin und Hartmut Wittig, Z. Phys. **C54** (1992) 331
- [MON87] I. Montvay, Phys. Lett. **199B** (1987) 89
- [MM94] G. Münster und I. Montvay, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press 1994
- [MUN88] G. Münster, Private Notizen
- [MW87] I. Montvay und P. Weisz, Nucl. Phys. **B290** [FS 20] (1987) 327
- [MW88] W. Marciano, S.S.D. Willenbrock, Phys. Rev **D37** (1988) 2509
- [NAG91] *The NAG Fortran Library Manual, Mark 15*, The Numerical Algorithms Group Limited 1991
- [NN81] H. Nielsen und M. Ninomiya, Nucl. Phys. **B185** (1981) 20; Nucl. Phys **B193** (1981) 173
- [PFTV86] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky und W.T. Vetterling, *Numerical Recipes – The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press 1986
- [VIO94] J. Viola, *Störungstheoretische Untersuchung eines gitterregularisierten abelschen Higgs-Yukawa-Modells*, Diplomarbeit 1994

- [WIL74] K.G. Wilson, Phys. Rev. **D10** (1974) 2445
- [WIL75] K.G. Wilson, *Quarks and Strings on a Lattice* (Erice Lectures 1975), in *New Phenomena in Subnuclear Physics*, Hrsg. A. Zichichi (Plenum 1977) S.69
- [WIT92] H. Wittig, *Study of a Chiral Lattice Yukawa Model with Mirror-Fermions*, Dissertation 1992
- [WIT94] H. Wittig, Private Mitteilung

Danksagung

Hiermit möchte ich allen danken, die am Zustandekommen dieser Arbeit Anteil hatten:

- Prof. Dr. Gernot Münster für die geduldige und nette Betreuung und viele hilfreiche Tips,
- Andreas Degenhard, Klaus Spanderen und Jörg Viola für die angenehme, zum Teil auch witzige Büroatmosphäre, Ratschläge und Ablenkungen (vor allen Dingen sei Klaus' Equipment, hauptsächlich bestehend aus seinem Rechner und dem Büro-Ventilator, genannt) sowie
- Christoph Gutsfeld und Roberto Izzo für etliche Verbesserungsvorschläge, was Form, Inhalt und andere Dinge anbelangte,
- Jens Küster und Dirk Talkenberger für zahlreiche aufklärende Gespräche.

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, im August 1995

