

# Bachelorarbeit

## Behandlung von Beugungsphänomenen mit Pfadintegralen

SS 2014

von: **Dennis Niemeier**

Prüfer: **Prof. Dr. Münster**  
Zweitgutachter: **Prof. Dr. Klasen**

Diese Version der Arbeit enthält geringfügige Veränderungen gegenüber der im  
Prüfungsamt abgegebenen Fassung

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Berechnung des Pfadintegrals für das freie Teilchen</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Notation</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Approximation</b>	<b>5</b>
4.1	Mehrfaches Durchtreten der Blende . . . . .	5
4.2	Aufteilung des Zeitintervalls . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Wahl der Parameter</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Spezielle Blendenfunktionen</b>	<b>11</b>
6.1	Allgemeine Blendenfunktionen . . . . .	11
6.2	Blendenfunktionen unabhängig von $y$ . . . . .	12
6.3	Kante . . . . .	13
6.4	Einfachspalt . . . . .	15
6.5	Doppelspalt . . . . .	16
6.6	Dünner Doppelspalt . . . . .	18
<b>7</b>	<b>Behandlung mit Wellenoptik</b>	<b>19</b>
7.1	Beugungsintegrale . . . . .	19
7.2	Kante . . . . .	20
7.3	Einfachspalt . . . . .	21
7.4	Doppelspalt . . . . .	21
7.5	Dünner Doppelspalt . . . . .	22
<b>8</b>	<b>Vergleich und Darstellung der Ergebnisse</b>	<b>22</b>
8.1	Wahl des Abstandes $z_S$ . . . . .	22
8.2	Kante . . . . .	23
8.2.1	Vergleich der Ergebnisse . . . . .	23
8.2.2	Darstellung der Ergebnisse . . . . .	23
8.3	Einzelspalt . . . . .	25
8.3.1	Vergleich der Ergebnisse . . . . .	25
8.3.2	Darstellung der Ergebnisse . . . . .	26
8.4	Doppelspalt . . . . .	27
8.4.1	Vergleich der Ergebnisse . . . . .	27
8.4.2	Darstellung der Ergebnisse . . . . .	28
8.5	Dünner Doppelspalt . . . . .	29
8.5.1	Vergleich der Ergebnisse . . . . .	29
<b>9</b>	<b>Fazit</b>	<b>30</b>

# 1 Einleitung

Diese Arbeit befasst sich mit Beugungsphänomenen, wie sie beispielsweise auftreten, wenn man Licht auf ein Gitter einfallen lässt und das wieder austretende Licht beobachtet. Die Beobachtungen konnten von Kirchhoff, Fraunhofer und Fresnel erklärt werden, indem der Wellencharakter des Lichts sowie das Huygenssche Prinzip ausgenutzt wurden. Erst später wurden auch Beugungsexperimente mit Teilchen, insbesondere mit Elektronen, durchgeführt. Die Ergebnisse, nämlich die aus der Optik bekannten Beugungsmuster, bestätigten den Welle-Teilchen-Dualismus. Unter den Beugungsexperimenten spielt die Doppelspaltanordnung eine große Rolle, da anhand dieses Experiments häufig auch grundlegende Quanteneigenschaften diskutiert werden.

Statt jedoch aus den Welleneigenschaften ausführlich die Ergebnisse herzuleiten, wird in dieser Arbeit ein anderer Ansatz gewählt: Mithilfe der Feynmanschen Pfadintegrale soll das Interferenzmuster, welches von einer Blende erzeugt wird, berechnet werden. Anschließend wird versucht, die erhaltenen Ergebnisse zu verifizieren, das heißt, mit den experimentell bestätigten Ergebnissen der klassischen, wellenoptischen Beugungstheorie zu vergleichen.

Die quantenmechanischen Pfadintegrale stellen neben der Schrödingergleichung einen alternativen Zugang zur Quantenmechanik dar. Anschaulich gesprochen, summiert ein Pfadintegral alle für ein Teilchen möglichen Pfade von einem Ort zu einem anderen mit einem bestimmten Gewicht. Die Summation lässt sich formal durch ein Integral kennzeichnen. Das Ergebnis der Berechnung ist die Übergangsamplitude, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, dass ein Teilchen in einer bestimmten Zeit von einem Start- zu einem Zielort gelangen kann.

Es sei an dieser Stelle noch bemerkt, dass der Pfadintegralformalismus zwar Grundlage dieser Arbeit ist, allerdings nicht explizit benötigt wird. Das Gedankenexperiment lässt sich mithilfe der Pfadintegrale aber erheblich besser verstehen und die Idee zu dieser Art von Anwendung wurde von Feynman selbst gegeben (siehe [4]). In dieser Arbeit wird statt in einer jedoch in drei Dimensionen gearbeitet und versucht, die Ergebnisse der Quantenmechanik mit denen der Wellenoptik in Einklang zu bringen.

## 2 Berechnung des Pfadintegrals für das freie Teilchen

Der Pfadintegralformalismus wird im wesentlichen nur für den Fall des freien Teilchens explizit benötigt. Deshalb soll dieser Ausdruck hier kurz hergeleitet sowie die Notation der Übergangsamplitude  $K$  festgelegt werden.

Zunächst einmal gilt per Definition:

$$K(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) = \langle \vec{r}_f | U(t_f, t_i) | \vec{r}_i \rangle , \quad (1)$$

wobei  $U$  der Zeitentwicklungsoperator für einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator ist:

$$U(t_f, t_i) = e^{-\frac{i}{\hbar} H \cdot (t_f - t_i)} \quad (2)$$

Die obigen Zustände  $|\vec{r}_i\rangle$  respektive  $\langle\vec{r}_f|$  sind die Eigenzustände des Ortsoperators  $\vec{Q}$  für die jeweiligen Orte. Der Index  $i$  steht immer für den Anfangs-,  $f$  immer für den Endort.

Um die Übergangsamplitude des freien Teilchen zu erhalten, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man kann diese direkt berechnen oder aber die Methode der Pfadintegrale nutzen. Hier wird das Problem auf die erste Methode gelöst werden<sup>1</sup>.

Die direkte Berechnung fußt auf der Kenntnis des Skalarproduktes aus Impuls- und Ortsoperatoreigenfunktionen. Ein bestimmter Zustand  $|f\rangle$  ist in Ortsdarstellung gegeben durch  $f(\vec{r}) = \langle\vec{r}|f\rangle$ . Sei  $f(\vec{p})$  die Impulsdarstellung (also  $\langle\vec{p}|f\rangle$ ). Der Wechsel von der Orts- in die Impulsdarstellung wird durch das Einschieben einer  $\mathbb{1}$ , also durch  $\int d^3p |\vec{p}\rangle \langle\vec{p}| = \mathbb{1}$  vermittelt.

$$f(\vec{r}) = \langle\vec{r}|f\rangle = \int d^3p \langle\vec{r}|\vec{p}\rangle \langle\vec{p}|f\rangle \quad (3)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} \int d^3p e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} f(\vec{p}) \quad (4)$$

In der letzten Zeile wurde der bekannte Ausdruck für diese Operation, nämlich die Fouriertransformation, eingesetzt. Aus der Vergleich ergibt sich:

$$\langle\vec{r}|\vec{p}\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} \quad (5)$$

Der Hamiltonoperator des freien Teilchens besitzt kein Potential, er lautet daher:  $H = \frac{1}{2m}\vec{P}^2$ . Dabei ist  $m$  die Masse des Teilchens und  $\vec{P}$  der Impulsoperator. Im Impulsraum ist die Anwendung des Hamiltonoperators demnach trivial. Dies wird nun ausgenutzt:

---

<sup>1</sup>die andere Methode findet sich für den ersten Fall bspw. in [1], S. 36 ff

$$K(\vec{r}_f, t_f; \vec{r}_i, t_i) \equiv \langle \vec{r}_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | \vec{r}_i \rangle \quad (6)$$

$$= \int d^3 p \langle \vec{r}_f | \vec{p} \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{\vec{p}^2}{2m} t} \langle \vec{p} | \vec{r}_i \rangle \quad (7)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{it}{2m\hbar} (\vec{p}^2 - \frac{2m}{t} \vec{p} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_i))} \quad (8)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \prod_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} dp_k e^{-\frac{it}{2m\hbar} (p_k^2 - p_k \frac{2m}{t} (r_{k,f} - r_{k,i}))} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \prod_{k=1}^3 e^{-\frac{im}{2\hbar t} (r_{k,f} - r_{k,i})^2} \int_{-\infty}^{\infty} dp_k e^{-\frac{it}{2m\hbar} (p_k - \frac{m}{t} (r_{k,f} - r_{k,i}))^2} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \prod_{k=1}^3 e^{-\frac{im}{2\hbar t} (r_{k,f} - r_{k,i})^2} \int_{-\infty}^{\infty} da e^{-\frac{it}{2m\hbar} a^2} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \prod_{k=1}^3 e^{-\frac{im}{2\hbar t} (r_{k,f} - r_{k,i})^2} \sqrt{\frac{2m\pi\hbar}{it}} \quad (12)$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \left( \frac{2m\pi\hbar}{it} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{im}{2\hbar t} (\vec{r}_f - \vec{r}_i)^2} \quad (13)$$

$$= \left( \frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{im}{2\hbar t} (\vec{r}_f - \vec{r}_i)^2} \quad (14)$$

Dabei ist  $t = t_f - t_i$ . Diese Übergangsamplitude bildet nun den Ausgangspunkt der weiteren Überlegungen.

### 3 Notation

Im weiteren Verlauf sollen mithilfe des Pfadintegralformalismus einige Beugungsexperimente quantenmechanisch analysiert werden. Dies geschieht zunächst für eine allgemeine Blende, bevor bekannte Anordnungen betrachtet werden. Der grundlegende Aufbau ist in Abb. 1 zu sehen:

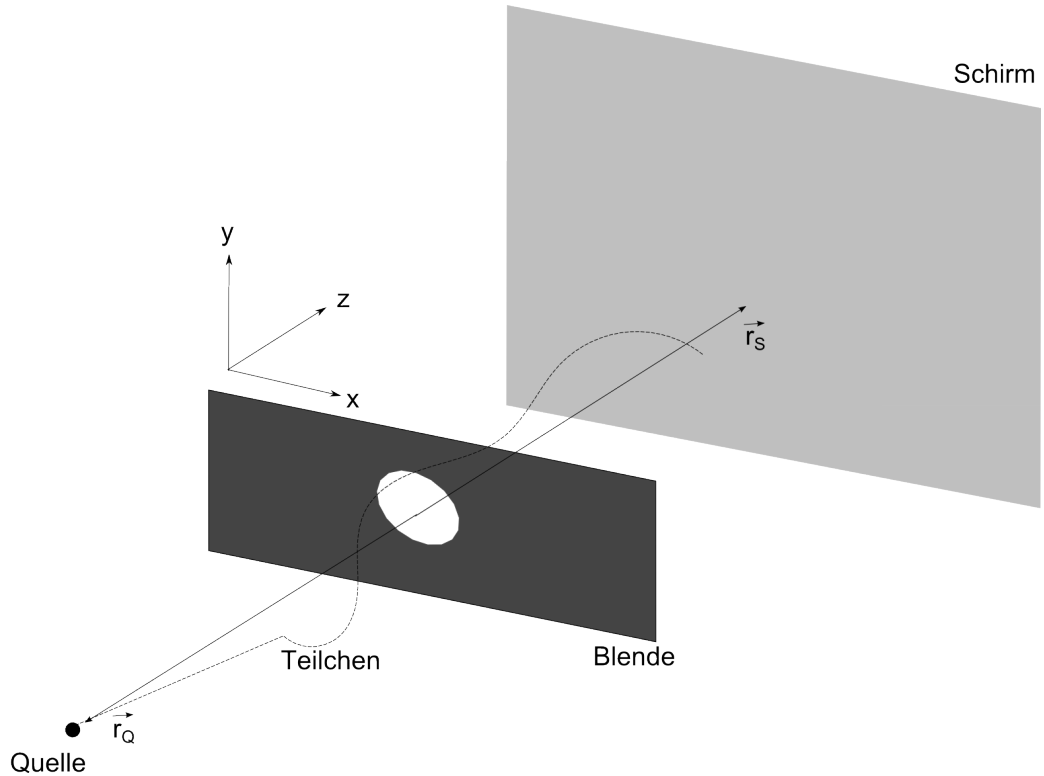


Abbildung 1: Grundlegender Aufbau der Experimente. Der gestrichelte Weg des Teilchens sowie die Form der Blende sind in der Zeichnung beliebig gewählt.

In den Rechnungen ist es von Vorteil, das Koordinatensystem so zu wählen, wie oben dargestellt: Die Blende sei am Ort  $z = 0$ , die Quelle bei  $\vec{r}_Q = (0, 0, z_Q)$  und die Flächennormale des Schirms liege bei  $\vec{r}_S = (0, 0, z_S)$ . Der Schirm und die Blende seien unendlich ausgedehnt, die Quelle sei annähernd punktförmig.

Die Blende kann in dieser Anordnung durch ihre Blendenfunktion  $B(x, y)$  beschrieben werden. Dabei ist - je nach Durchlässigkeit -  $B(x, y) \in [0, 1]$ , ist der Wert 1, so heißt dies, dass das Teilchen immer passieren kann. An Stellen mit  $B(x, y) = 0$  ist die Blende undurchlässig. Dazwischen gibt der Wert die Durchtrittswahrscheinlichkeit an.

Das Experiment wird zweiteilig beschrieben:

Am Anfang ist das Teilchen zur Zeit  $t_Q$  am Ort  $\vec{r}_Q$ . Von dort fliegt es in der Zeit  $t_B$  zur Blende, also zum Ort  $\vec{q} = (x, y, 0)$ . Abhängig vom Auftretsort auf der Blende kann das Teilchen passieren oder nicht passieren. Im letzten Fall wird das Experiment abgebrochen, da nur Teilchen untersucht werden, die die Blende auch passieren. Nach der Blende fliegt das Teilchen in der Zeit  $t_S$  zum Schirm, genauer gesagt von  $\vec{q}$  zu  $\vec{r}_S + \vec{q}_S$ . Dabei ist  $\vec{q}_S = (x_S, y_S, 0)$ . Es ist zweckmäßig,  $t_Q = 0$  zu setzen. Der Gesamtweg des Teilchens ist dann von  $\vec{r}_Q$  zu  $\vec{r}_S + \vec{q}_S$  in der Zeit  $T = t_B + t_S$ . Die Zeit  $T$  wird konstant gehalten. Genau für diesen Weg soll im folgenden die Übergangsamplitude bestimmt werden, damit aus dieser das Interferenzmuster auf dem Schirm hergeleitet werden kann.

Dazu wird eine Approximation genutzt, die in den nachfolgenden Kapiteln erläutert, hier aber nicht näher diskutiert wird. Für jeden der zwei Teilwege setzt man die Übergangsamplituden eines freien Teilchens an. Dabei gilt für den Weg Quelle-Blende  $K(\vec{q}, t_B; \vec{r}_Q, 0) \equiv K_1$  sowie für den Weg Blende-Schirm  $K(\vec{r}_S + \vec{q}_S, T; \vec{q}, t_B) \equiv K_2$ . Die Übergangsamplitude des gesamten Weges sei  $K_3 \equiv K(\vec{r}_S + \vec{q}_S, T; \vec{r}_Q, 0)$ .

Um den folgenden Schritt nachvollziehen zu können, ist es wichtig, sich über die Faltungseigenschaft der Pfadintegrale Gedanken zu machen. Bewege sich ein (eindimensionales) Teilchen von einem Ort  $x_a$  über den Ort  $x_b$  zum Ort  $x_c$ , es starte zur Zeit  $t_a$  und komme bei  $x_b$  zur Zeit  $t_b$  an, analog für  $x_c$  und  $t_c$ . Dann gilt für die Übergangsamplituden (Bezeichnung analog zu oben):

$$K_c = \langle x_c | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_c - t_a)} | x_a \rangle = \int dx_b \langle x_c | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_c - t_b)} | x_b \rangle \langle x_b | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_b - t_a)} | x_a \rangle \quad (15)$$

$$= \int dx_b K_b \cdot K_a \quad (16)$$

Übertragen auf das Experiment kann also  $K_3$  als Faltung von  $K_2$  und  $K_1$  verstanden werden. Es wird mit der Blendenfunktion gewichtet, sodass ausschließlich über das für die Teilchen passierbare Gebiet integriert wird. Es ergibt sich also mit den oben eingeführten Bezeichnungen:

$$K_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy B(x,y) K_2 \cdot K_1 \quad (17)$$

Diese Gleichung bildet das Grundproblem, abhängig von der Blendenfunktion ergeben sich daraus die Interferenzmuster. Bevor diese Gleichung aber weiter umgeformt wird, soll die Tatsache, dass es sich bei diesem intuitivem Zugang um eine Approximation handelt, näher erläutert werden.

## 4 Approximation

In diesem Abschnitt wird darauf eingegangen, dass das angestrebte Verfahren nur eine Approximation der tatsächlichen Lösung darstellt. Diese Approximation wird diskutiert und auch gerechtfertigt werden, bevor spezielle Blendenformen explizit bestimmt werden.

### 4.1 Mehrfaches Durchtreten der Blende

Im Gedankenexperiment fliegt das Teilchen zuerst von der Quelle zur Blende. Dafür benötigt es die Zeit  $t_B$ , welche für jeden Pfad festgehalten wird und dessen Wahl später zu diskutieren ist. Diese Vorstellung beinhaltet aber zwei Arten von Wegen nicht: Zum einen solche, die in der Zeit  $t_B$  einen bestimmten Punkt auf der Blende erreichen, aber schon zuvor ein- oder mehrfach durch die Blende getreten sind. Zum anderen auch die Pfade, welche die verbotenen Zonen der Blende durchqueren. Abb. 2 zeigt beispielhaft solche Wege. Teilchen, die diese Wege durchfliegen, sind in der Übergangsamplitude eines freien Teilchens  $K_1$  enthalten, für die Lösung des Problems aber unerwünscht.

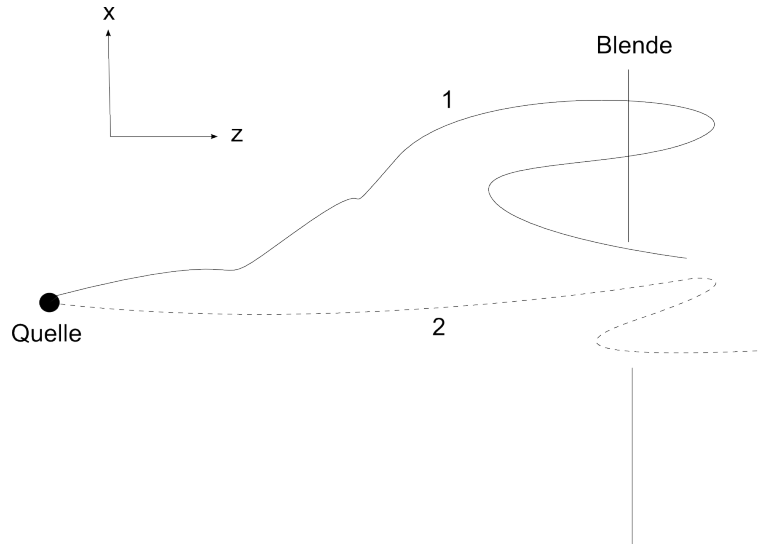


Abbildung 2: Weg 1: Ein Weg, der die Blende an einer unpassierbaren Stelle durchtritt. Weg 2 (gestrichelt): Ein Weg, der die Blendenöffnung mehrfach durchtritt.

Das Problem der Wege vom Typ 1 ist klar: Teilchen dürfen nicht an den Stellen der Blende durchtreten, wo  $B(x,y) = 0$  ist. Die Übergangsamplitude  $K_1$  enthält aber auch alle Wege, die entweder unpassierbare Bereiche durchtreten oder vor dem Durchtreten des erlaubten Bereichs schon an unpassierbaren Stellen die Blende durchtreten haben.

Bei den Mehrfachwegen ergeben sich andere Probleme: Jeder dieser Wege hätte im Gedankenexperiment eine eindeutige Zuordnung. Die Übergangsamplitude ordnet diese Wege jedoch nicht eindeutig zu. Jeder Mehrfachweg lässt sich verschiedenen Zeiten  $t_B$  zuordnen. Außerdem ist ohne vorliegendes Potential eine Bewegungsumkehr, wie sie bei Mehrfachwegen auftreten müsste, unwahrscheinlich.

Wie also kann es sein, dass der gewählte Ansatz dennoch zu einer guten Lösung des Problems führen sollte?

Alle Wege, die an unpassierbaren Stellen die Blende durchtreten würden (aber nur einmal die Blende durchtreten), werden durch die Gewichtung mit  $B(x,y)$  im Integral herausgefiltert.

Alle Mehrfachwege, auch solche, die unpassierbare Stellen durchtreten, werden aufgrund ihrer großen Abweichung von der klassischen Lösung für den Pfad stark unterdrückt. Klassisch würde ein Pfad, der wie oben beschrieben verläuft, eine Bewegungsumkehr bedeuten. Dies ist allerdings kaum möglich, da keine Kraft auf das Teilchen wirkt und auch kein Potential vorhanden ist. Etwas genauer lässt sich das Argument untersuchen, wenn man die Wirkung  $S$  für die klassische Lösung  $\vec{r}_cl$  betrachtet. Die Wirkung ist allgemein gegeben durch:

$$S[\vec{r}] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) \quad , \quad (18)$$

mit der Lagrange-Funktion  $L$ .

Für die klassische Lösung des freien Teilchens ist die Geschwindigkeit konstant, es ergibt



sich dann:

$$S[\vec{r}_{cl}] = \int_0^{t_B} dt \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_{cl}^2 = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}_{cl}^2 t_B \quad (19)$$

Ruft man sich die eigentliche Form des Pfadintegrals in Erinnerung, nämlich:

$$\langle \vec{r}_f | U(t_f, t_i) | \vec{r}_i \rangle = A \int \mathcal{D}r e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{r}]}, \quad (20)$$

so kann diese Form um den klassischen Pfad  $\vec{r}_{cl}$  entwickelt werden. Dafür werden einige Begriffe der Funktionalanalysis benötigt<sup>2</sup>. Es ergibt sich als Entwicklung (da  $\frac{\delta S}{\delta \vec{r}(t)}|_{\vec{r}=\vec{r}_{cl}} = 0$  ist):

$$S[\vec{r}] = S[\vec{r}_{cl}] - \frac{m}{2} \int dt_1 \int dt_2 \vec{\eta}(t_1) \vec{\eta}(t_2) \delta''(t_1 - t_2) \quad (21)$$

$$= S[\vec{r}_{cl}] + \frac{m}{2} \int dt \dot{\vec{\eta}}^2(t) \quad (22)$$

$$= S[\vec{r}_{cl}] + S[\vec{\eta}] \quad (23)$$

$\eta$  bezeichnet hier die Abweichungen vom klassischen Pfad, am Anfangs- und Endpunkt jedes Pfades verschwinden diese Abweichungen. Dies nutzt man in der obigen Rechnung aus, um durch partielle Integration die Wirkung  $S[\vec{\eta}]$  zu identifizieren.

Setzt man diese Entwicklung ein, so erhält man:

$$K = A e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{r}_{cl}]} \int \mathcal{D}\eta e^{\frac{i}{\hbar} S[\vec{\eta}]} \quad (24)$$

In dieser Form wird sichtbar, warum große Abweichungen vom klassischen Weg stark unterdrückt werden. In der Summe respektive dem Integral werden die Wege, welche weit von  $\vec{r}_{cl}$  entfernt sind, sich durch eine große Phasenänderung auszeichnen. Dies führt dazu, dass diese Wege mit anderen, ebenfalls weit entfernten Wegen interferieren und sich dadurch auslöschen. Wege nah am klassischen Pfad gelegen tragen jedoch sehr viel stärker in der Summe bei.

Offensichtlich enthält die mathematische Form des Pfadintegrals also schon die Begründung dafür, dass Mehrfachwege, wie im Gedankenexperiment, vernachlässigt werden können.

## 4.2 Aufteilung des Zeitintervalls

Im Gedankenexperiment fliegt das Teilchen in der Zeit  $T$  von der Quelle zum Schirm. Dieses Zeitintervall wird aufgeteilt in die Zeit, die das Teilchen von der Quelle zur Blende benötigt und die Zeit, die das Teilchen von der Blende zur Quelle benötigt. Dies wurde

---

<sup>2</sup>Siehe dazu bspw. [1], S.3 ff

im vorigen Kapitel durch  $T = t_B + t_S$  bezeichnet. Diese Zerlegung ist aber keinesfalls eindeutig, es muss also eine bestimmte Wahl der Zeit  $t_B$  getroffen werden. Diese ist abhängig von den genauen Entfernungen der Anordnung.

Um eine geeignete Wahl der Zeit  $t_B$  treffen zu können, sollte, gemäß der Überlegungen im vorigen Unterkapitel, die Wirkung des Pfades möglichst nah an der klassischen Wirkung liegen, da diese am meisten beiträgt. Man versucht also, die Wirkung eines *klassischen* Pfades zu minimieren und nimmt die von dort erhaltene Zeit im folgenden an, da die quantenmechanischen Wege dicht an der klassischen Lösung des Pfades liegen. Die klassische Wirkung ergibt sich aus Addition der zwei Teilwege, in Analogie zu den Übergangsamplituden  $K_1$  und  $K_2$  werden diese Teilwirkungen  $S_1$  und  $S_2$  genannt. Die Wirkung des klassischen Pfades ist nach Gleichung 19 gegeben. Die Situation ist noch einmal in Abb. 3 gegeben.

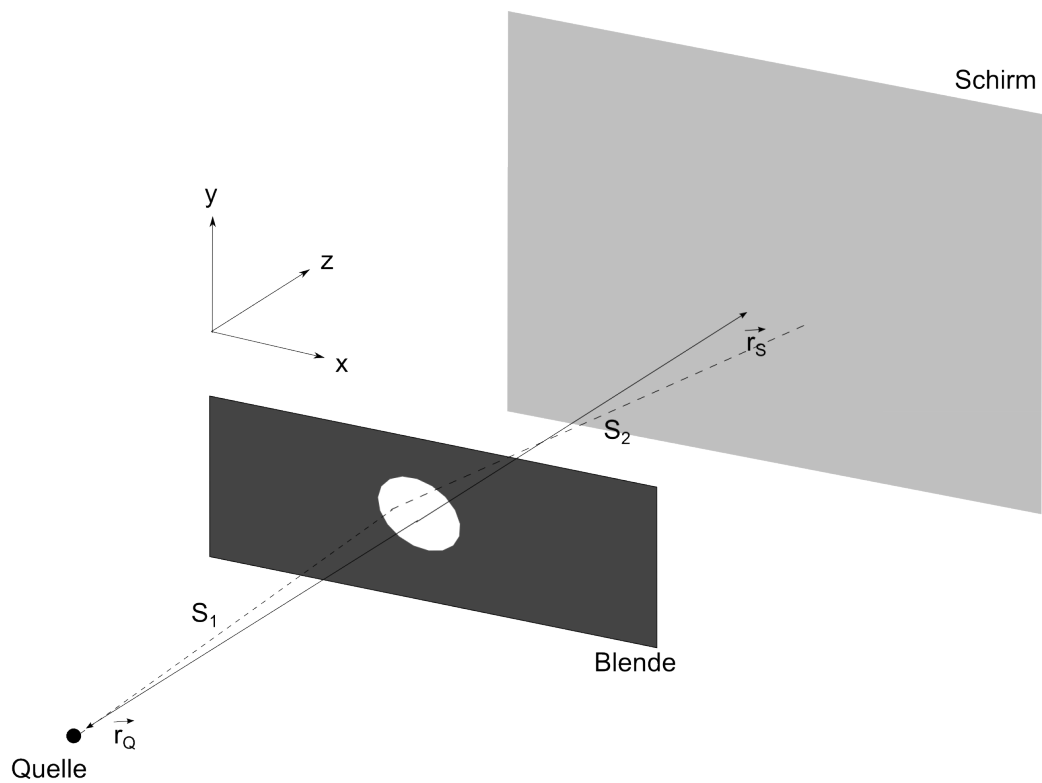


Abbildung 3: Versuchsanordnung mit zwei Pfaden, wie sie als Lösung des klassischen Problems auftreten würden (geradlinig und gestrichelt). Die Wirkungen  $S_1$  und  $S_2$  sind eingetragen.

Es gilt jetzt  $S = S_1 + S_2$  für die klassischen Lösungen der Wege von  $\vec{r}_Q$  über  $\vec{q}$  zu  $\vec{r}_S + \vec{q}_S$ . Die Geschwindigkeit auf den Teilwegen bleibt jeweils konstant, es gilt  $\vec{v} = (\vec{r}_f - \vec{r}_i)/(t_f - t_i)$ .

Mit den gegebenen Abständen und Zeiten ergibt sich für  $S$ :

$$S = S_1 + S_2 = \frac{mt_B}{2} \frac{(\vec{\varrho} - \vec{r}_Q)^2}{t_B^2} + \frac{m}{2} \frac{(\vec{\varrho} - \vec{r}_S - \vec{\varrho}_S)^2}{t_S^2} (T - t_B) \quad (25)$$

$$= \frac{m}{2} \left[ \frac{x^2 + y^2 + z_Q^2}{t_B} + \frac{(x_S - x)^2 + (y_S - y)^2 + z_S^2}{T - t_B} \right] \quad (26)$$

$$\equiv \frac{m}{2} \left[ \frac{l_B^2}{t_B} + \frac{l_S^2}{T - t_B} \right] \quad (27)$$

$t_B$  soll nun so gewählt sein, dass die Wirkung  $S$  stationär wird, wie es für einen klassischen Pfad notwendig ist.  $t_B$  wird also für jeden Pfad unterschiedlich und in Abhängigkeit der Orte gewählt.

$$\frac{d}{dt_B} S \stackrel{!}{=} 0 \quad (28)$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_B^2}{t_B^2} - \frac{l_S^2}{(T - t_B)^2} = 0 \quad (29)$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_B^2}{t_B^2} = \frac{l_S^2}{(T - t_B)^2} \quad (30)$$

$$\Leftrightarrow \frac{l_B}{t_B} = \frac{l_S}{(T - t_B)} \quad (31)$$

$$\Leftrightarrow t_B = \frac{l_B}{l_B + l_S} T \quad (32)$$

$$\Leftrightarrow \quad (33)$$

$$\Leftrightarrow t_B = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z_Q^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_Q^2} + \sqrt{(x_S - x)^2 + (y_S - y)^2 + z_S^2}} T \quad (34)$$

Mit dieser Wahl von  $t_B$  kann, da die Abweichungen vom klassischen Pfad sehr klein sind, die Zeit  $T$  approximativ zerlegt werden. Es ist leicht zu sehen, dass es sich dabei um eine nach der Länge der Strecken gewichtete Zerlegung handelt und diese letztlich auch von den Orten, an denen das Teilchen auftritt (also  $x$  und  $y$ ), abhängt. Dies wird in der nachfolgenden Rechnung allerdings nicht berücksichtigt, da ansonsten die Integrale nur numerisch lösbar wären.

Für gegen  $x$  und  $y$  große  $|z_Q|$  kann allerdings  $l_B \approx |z_Q|$  gesetzt werden. Für gegen  $x_S$ ,  $y_S$ ,  $x$  und  $y$  große  $z_S$  hingegen kann, unter Vernachlässigung von  $x$ ,  $y$  und  $y_S$ ,  $l_S$  durch  $\sqrt{x_S^2 + z_S^2}$  genähert werden. Dabei ist mit Blick auf spätere Ergebnisse absichtlich die Abhängigkeit von  $x_S$  beibehalten worden. Falls  $z_S$  sehr groß gegen  $x_S$  wird (Fraunhofer-Näherung), kann allerdings auch  $l_S \approx z_S$  gesetzt werden.

Mit den Näherungen ergibt sich für die Zeit  $t_B$  damit:

$$t_B(x_S) \approx \frac{|z_Q|}{|z_Q| + \sqrt{x_S^2 + z_S^2}} T \quad (35)$$

Falls  $z_S$  sehr groß gegen  $x_S$  ist, so kann noch weiter genähert werden. Es ergibt sich dann:

$$t_B \approx \frac{|z_Q|}{|z_Q| + z_S} T \quad (36)$$

$$t_S \approx \frac{z_S}{|z_Q| + z_S} T \quad (37)$$

Sollten beide  $z$ -Abstände gleich groß sein, so kann  $t_S = t_B = T/2$  gesetzt werden.

## 5 Wahl der Parameter

Grundsätzlich gilt bei Beugungsexperimenten, dass das Hindernis nicht zu groß, aber auch nicht zu klein gegenüber der Wellenlänge des einfallenden Lichts oder der einfallenden Teilchen sein darf. Dies entspricht der Forderung, dass die Abmessungen auf der Blende und auf dem Schirm kleiner als die beiden Abstände  $|z_Q|$  und  $z_S$  sind. Dies wird bei der Wahl der Abmessungen der Spalte berücksichtigt werden, wenn deren Parameter eingeführt werden.

Damit die Formeln, die sich in der weiteren Rechnung ergeben werden, mit denen aus der klassischen Optik vergleichbar werden, muss  $|z_Q|$  sehr groß sein. Dies entspricht der Forderung nach dem Auftreffen (nahezu) ebener Wellen auf der Blende.

Aus der Schrödingergleichung für freie Teilchen ergibt sich die einfache Energie-Impuls-Beziehung  $\hbar^2 k^2 = 2mE$ , wobei  $\hbar k = p$  ist. Mit  $k = 2\pi/\lambda$  ergibt sich daraus die Wellenlänge in Abhängigkeit von  $E$  als  $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ <sup>3</sup>.

Die Wahl des Teilchens fällt auf ein Elektron, welches aus der Quelle austritt, nachdem es durch eine Spannung von 1000 V beschleunigt wurde. Die Energie beträgt dann  $E = 1$  keV. Damit ergeben sich folgende Werte:  $\lambda \approx 39$  pm.

Bei der Wahl der Zeit  $T$  lassen sich zum Kapitel 4.2 analoge Überlegungen anstellen, siehe dazu auch Abb. 3. Das Teilchen bewegt sich mit einer mittleren Geschwindigkeit von  $v_B = l_B/t_B$  von der Quelle zur Blende und mit einer mittleren Geschwindigkeit von  $v_S = l_S/t_S$  von der Blende zum Schirm, wobei die Strecken  $l_B$  und  $l_S$  schon im Kapitel 4.2 näher angegeben wurden. Die mittleren Impulse wählen sich dann wegen  $p = mv$  analog. Wegen der Beziehungen  $p = \hbar k$  und  $k = 2\pi/\lambda$  ergibt sich  $p = h/\lambda$ . Es lässt sich also ein Zusammenhang zwischen den Zeiten und der Wellenlänge herstellen. Setzt man die in Kapitel 4.2 berechneten Unterteilungen<sup>3</sup> ein, so ergibt sich:

$$p_B = m_e l_B \frac{1}{t_B} \quad (38)$$

$$= m_e l_B \frac{1}{\frac{l_B}{l_B + l_S} T} \quad (39)$$

$$= m_e \frac{l_S + l_B}{T} \quad (40)$$

Für  $p_S$  ergibt sich das gleiche Ergebnis. Problematisch ist an dieser Stelle, wie schon im Kapitel 4.2 angesprochen, die Abhängigkeit von  $l_S$  und  $l_B$  von  $x, y$  und  $y_S$ . Die verschie-

<sup>3</sup>Siehe für diese Überlegungen [2], S.2

denen Näherungen für die Längen sind am Ende von Kapitel 4.2 zu finden. Es ergibt sich damit für die Zeiten:

$$T = \frac{m_e \lambda}{h} (|z_Q| + \sqrt{x_S^2 + z_S^2}) \quad (41)$$

$$t_B = \frac{m_e \lambda}{h} |z_Q| \quad (42)$$

$$t_S = \frac{m_e \lambda}{h} \sqrt{x_S^2 + z_S^2} \quad (43)$$

An dieser Stelle fehlt noch die Wahl von  $z_S$  und  $z_Q$ . Wie schon erwähnt, muss  $z_Q$  sehr viel größer sein als die Ausdehnung der Blende. Die Wahl fällt auf  $|z_Q| = 5 \text{ m}$ , was, falls die Blendenmaße im Nano- bis Mikrometerbereich liegen, dem  $10^6$ - bis  $10^8$ -fachen der Blendenmaße entspricht. Die Größe  $z_S$  soll später diskutiert werden. Ist  $z_S$  jedoch sehr viel größer als  $x_S$ , so kann  $x_S$  vernachlässigt werden. Es ergibt sich in diesem Fall (Fraunhofer-Näherung):

$$T = \frac{m_e \lambda}{h} (|z_Q| + z_S) \quad (44)$$

$$t_B = \frac{m_e \lambda}{h} |z_Q| \quad (45)$$

$$t_S = \frac{m_e \lambda}{h} z_S \quad (46)$$

## 6 Spezielle Blendenfunktionen

### 6.1 Allgemeine Blendenfunktionen

Aus den vorigen Kapiteln ist bekannt, dass zur Lösung des Problems ein Integral über die Blendenfunktion  $B$  gelöst werden muss. Genauer:

$$K(\vec{r}_S + \vec{\varrho}_S, T; \vec{r}_Q, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy B(x, y) K(\vec{r}_S + \vec{\varrho}_S, T; \vec{\varrho}, t_B) K(\vec{\varrho}, t_B; \vec{r}_Q, 0) \quad (47)$$

Mit der Übergangsamplitude des freien Teilchens nach Gleichung 14 und den eingeführten Abkürzungen ergibt sich dieses längliche Integral zu:

$$K_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy B(x, y) \left( \frac{m}{2\pi i \hbar t_S} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar t_B} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \exp \left[ -\frac{im}{2\hbar} \left( \frac{(\vec{r}_S + \vec{\varrho}_S - \vec{\varrho})^2}{t_S} + \frac{(\vec{\varrho} - \vec{r}_Q)^2}{t_B} \right) \right] \quad (48)$$

Da die Rechnung andernfalls unübersichtlich wird, erfolgt das Umformen des Exponenten der Exponentialfunktion separat - der Vorfaktor wird dabei ausgelassen.

$$\frac{(\vec{r}_S + \vec{\varrho}_S - \vec{\varrho})^2}{t_S} + \frac{(\vec{\varrho} - \vec{r}_Q)^2}{t_B} = \frac{(x_S - x)^2 + (y_S - y)^2 + z_S^2}{t_S} + \frac{x^2 + y^2 + z_Q^2}{t_B} \quad (49)$$

$$= \frac{x_S^2 + y_S^2 + z_S^2}{t_S} + \frac{z_Q^2}{t_B} - \frac{2}{t_S}(x_S x + y_S y) + \left(\frac{1}{t_S} + \frac{1}{t_B}\right)(x^2 + y^2) \quad (50)$$

$$= \frac{(\vec{r}_S + \vec{\varrho}_S)^2}{t_S} + \frac{z_Q^2}{t_B} + \frac{t_S + t_B}{t_S t_B} \left( x^2 + y^2 - \frac{2t_B}{(t_S + t_B)}(x_S x + y_S y) \right) \quad (51)$$

Die ersten beiden Summanden sind von  $x$  und  $y$  unabhängig, können also aus dem Integral herausgezogen werden. Mit der Einführung der Konstanten  $A$ ,

$$A = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar}\right)^3 \left(\frac{1}{t_S t_B}\right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[ -\frac{im}{2\hbar} \left( \frac{(\vec{r}_S + \vec{\varrho}_S)^2}{t_S} + \frac{z_Q^2}{t_B} \right) \right], \quad (52)$$

ergibt sich das Integral zu

$$K_3 = A \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy B(x,y) \exp \left[ -\frac{im(t_S + t_B)}{2\hbar t_S t_B} \left( x^2 + y^2 - \frac{2t_B}{(t_S + t_B)}(x_S x + y_S y) \right) \right]. \quad (53)$$

Dieses Integral ist abhängig von der Blendenfunktion zu lösen.

## 6.2 Blendenfunktionen unabhängig von $y$

Es gelte nun  $B(x,y) = B(x)$ . In diesem Fall lässt sich die Integration über  $y$  ausführen, da es sich prinzipiell um ein Gaußintegral handelt. Um die Rechnung kurz zu halten, wird hier ausschließlich der Teil des Integrals berechnet, der  $y$ -Abhängigkeit aufweist. Es ist zu lösen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left[ -\frac{im(t_S + t_B)}{2\hbar t_S t_B} \left( y^2 - \frac{2t_B}{(t_S + t_B)} y_S y \right) \right]. \quad (54)$$

Durch quadratische Ergänzung im Exponenten erhält man daraus

$$I = \exp \left[ \frac{imt_B}{2\hbar t_S(t_S + t_B)} y_S^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left[ -\frac{im(t_S + t_B)}{2\hbar t_S t_B} \left( y - \frac{t_B}{(t_S + t_B)} y_S \right)^2 \right], \quad (55)$$

was sich durch Substitution leicht lösen lässt. Es ergibt sich als Lösung des  $y$ -Anteils

$$I = \sqrt{\frac{2\pi \hbar t_S t_B}{im(t_S + t_B)}} \exp \left[ \frac{imt_B}{2\hbar t_S(t_S + t_B)} y_S^2 \right]. \quad (56)$$

Das Ergebnis fließt in die Konstante  $A$  ein, sie wird zu  $A'$ :

$$A' = I \cdot A = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^2 \frac{1}{t_B t_S} \sqrt{\frac{im}{2\pi\hbar T}} \exp \left[ -\frac{im}{2\hbar} \left( \frac{(\vec{r}_S + \vec{\varrho}_S)^2}{t_S} + \frac{z_Q^2}{t_B} - \frac{t_B}{t_S(t_S + t_B)} y_S^2 \right) \right]. \quad (57)$$

Damit ergibt sich das verbleibende, zu lösende Integral zu

$$K_3 = A' \int_{-\infty}^{\infty} dx B(x) \exp \left[ -\frac{im(t_S + t_B)}{2\hbar t_S t_B} \left( x^2 - \frac{2t_B}{(t_S + t_B)} x_S x \right) \right]. \quad (58)$$

### 6.3 Kante

Die Kante ist eine sehr einfache Form der Blende. Bis zum Punkt  $x = a$  ist diese undurchlässig, danach durchlässig. Der Punkt  $a$  kann beliebig gelegt werden, allerdings sollte er nicht zu weit vom Quellort entfernt sein, da ansonsten die im Kapitel 5 angesprochenen Näherungen nicht mehr gültig sind (die Blendenabmessungen wären nicht mehr klein gegen die Abstände auf der  $z$ -Achse). Zweckmäßig ist eine Wahl von  $a = 0$ , dies wird jedoch erst später vorgenommen. Die Definition der Blendenfunktion erfolgt zunächst allgemein.

$$B(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ 1 & \text{für } x \geq a \end{cases} \quad (59)$$

Das Einführen der Blendenfunktion sorgt dafür, dass die untere Integralgrenze sich verändert:

$$K_3 = A' \int_a^{\infty} dx \exp \left[ -\frac{im(t_S + t_B)}{2\hbar t_S t_B} \left( x^2 - \frac{2t_B}{(t_S + t_B)} x_S x \right) \right]. \quad (60)$$

Zuerst wird das Integral durch quadratische Ergänzung des Exponenten umgeformt. Dies geschieht analog zum  $y$ -Integral. Man erweitert die Konstante  $A'$  erneut zu

$$A'' \equiv A' \cdot \exp \left[ \frac{imt_B}{2\hbar t_S T} x_S^2 \right]. \quad (61)$$

Damit ist das Integral

$$K_3 = A'' \int_a^{\infty} dx \exp \left[ -\frac{imT}{2\hbar t_S t_B} \left( x - \frac{t_B}{T} x_S \right)^2 \right]. \quad (62)$$

Über die Substitution

$$w \equiv \sqrt{\frac{mT}{\pi\hbar t_S t_B}} \left( x - \frac{t_B}{T} x_S \right) \quad (63)$$

gelangt man nach Einführen von

$$w_a \equiv \sqrt{\frac{mT}{\pi\hbar t_S t_B}} \left( a - \frac{t_B}{T} x_S \right) \quad (64)$$

zu der vereinfachten Form des Integrals:

$$K_3 = A''' \int_{w_a}^{\infty} dw e^{-i\frac{\pi}{2}w^2} \quad . \quad (65)$$

Die Konstante hat nun den Wert

$$A''' = \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^2 \frac{1}{T} \sqrt{\frac{i}{2t_S t_B}} \exp \left[ \frac{im}{2\hbar} \left( \frac{(\vec{r}_S + \vec{\varrho}_S)^2}{t_S} + \frac{z_Q^2}{t_B} - \frac{t_B}{t_S T} \vec{\varrho}_S^2 \right) \right] \quad (66)$$

Im weiteren wird lediglich das Integral bestimmt. Es gilt gemäß allgemeiner Integralrechenregeln:

$$I = \int_{w_a}^{\infty} dw e^{-i\frac{\pi}{2}w^2} = \int_0^{\infty} dw e^{-i\frac{\pi}{2}w^2} - \int_0^{w_a} dw e^{-i\frac{\pi}{2}w^2} \quad (67)$$

$$= \int_0^{\infty} dw \cos \frac{\pi}{2}w^2 - i \int_0^{\infty} dw \sin \frac{\pi}{2}w^2 - \int_0^{w_a} dw \cos \frac{\pi}{2}w^2 + i \int_0^{w_a} dw \sin \frac{\pi}{2}w^2 \quad (68)$$

$$= C(\infty) - iS(\infty) + iS(w_a) - C(w_a) \quad (69)$$

$$= \frac{1}{2} - C(w_a) - i \left( \frac{1}{2} - S(w_a) \right) \quad (70)$$

Im letzten Schritt wurde die Fresnel-Integrale gefunden. Für diese gilt <sup>4</sup>:

$$S(x) = \int_0^x dt \sin \left( \frac{\pi}{2}t^2 \right) \quad (71)$$

und

$$C(x) = \int_0^x dt \cos \left( \frac{\pi}{2}t^2 \right) \quad . \quad (72)$$

Ferner gilt  $C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$  (vgl. Bsp.17.10 mit geeigneter Substitution in [3]).

Interessant für die Beantwortung der Frage nach dem Interferenzmuster ist an dieser Stelle nicht  $K_3$ , sondern  $|K_3|^2 \equiv \varphi$ . Für die Konstante  $A'''$  gilt

$$|A'''|^2 = \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^4 \frac{1}{2t_S t_B T^2} \quad . \quad (73)$$

---

<sup>4</sup>siehe [5]



Dabei wurden die bekannten Relationen  $|\sqrt{i}| = 1$  sowie  $|\exp[ix]| = 1$  genutzt. Zusammengefasst ergibt sich

$$\varphi = |K_3|^2 = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^4 \frac{1}{2t_S t_B T^2} \left| \frac{1}{2} - C(w_a) - i \left( \frac{1}{2} - S(w_a) \right) \right|^2 \quad (74)$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^4 \frac{1}{2t_S t_B T^2} \left[ \left( \frac{1}{2} - C(w_a) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} - S(w_a) \right)^2 \right]. \quad (75)$$

Dieses sowie alle folgenden Ergebnisse werden in späteren Kapiteln aufgegriffen und mit den Ergebnissen aus der Optik verglichen. Interessant ist dabei das Argument der Fresnel-Funktionen  $w_a$ , welches für große  $|z_Q|$  genähert werden kann. Für die Zeiten ergibt sich nach Kapitel 5:  $T = \frac{m\lambda}{h}(|z_Q| + l_S)$ ,  $t_B = \frac{m\lambda}{h}|z_Q|$ ,  $t_S = \frac{m\lambda}{h}l_S$ , mit  $l_S = \sqrt{z_S^2 + x_S^2}$ . Eingesetzt in  $w_a$  erhält man

$$w_a = \sqrt{\frac{mT}{\pi\hbar t_S t_B}} \left( a - \frac{t_B}{T} x_S \right) = \sqrt{\frac{2mT}{\hbar t_S t_B}} \left( a - \frac{t_B}{T} x_S \right) \quad (76)$$

$$= \sqrt{\frac{2m^2 h^2 \lambda (|z_Q| + l_S)}{\hbar^2 m^2 \lambda^2 l_S |z_Q|}} \left( a - \frac{|z_Q|}{l_S + |z_Q|} x_S \right) \quad (77)$$

$$= \sqrt{\frac{2(|z_Q| + l_S)}{\lambda l_S |z_Q|}} \left( a - \frac{|z_Q|}{l_S + |z_Q|} x_S \right). \quad (78)$$

Im Grenzfall von sehr großen  $|z_Q|$  lässt sich  $l_S$  gegenüber  $|z_Q|$  vernachlässigen, woraus sich Gleichung 79 ergibt, die in späteren Kapiteln wieder aufgegriffen und mit dem sich aus der Wellenoptik ergebenden Argument verglichen wird.

$$w_a \approx \sqrt{\frac{2}{\lambda l_S}} (a - x_S) \quad (79)$$

## 6.4 Einfachspalt

Der Einfachspalt mit der Breite  $B = 2b$  um die Stelle  $a$  beschrieben durch die nachfolgende Blendenfunktion.

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a - b, a + b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (80)$$

Die Breite des Spaltes  $B$  sollte geeignet gewählt sein. Aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit soll die Breite des Einzelspaltes der Breite der beiden Einzelspalte des Doppelspaltes entsprechen. Diese wird zu  $B = 334$  nm gewählt. Grundlage für die Wahl ist das unter [7] aufrufbare Programm, welches ein Doppelspaltexperiment simuliert. Nach Probieren verschiedener Parameter wurden die in dieser Arbeit verwendeten gefunden.  $a$  wird später gleich 0 gesetzt.

Um den Einfachspalt zu lösen, muss nicht wie bei der Kante von Anfang an gerechnet werden, abgesehen von den genauen Grenzen des Integrals ist die Vorgehensweise komplett analog zum vorigen Kapitel. Nach Nutzen der gleichen Substitution erhält man

$$K_3 = A''' \int_{w_1}^{w_2} dx e^{-i\frac{\pi}{2}w^2} . \quad (81)$$

Die Grenzen sind in Gleichung (82) und (83) angegeben.

$$w_1 \equiv \sqrt{\frac{mT}{\pi\hbar t_S t_B}} \left( a - b - \frac{t_B}{T} x_S \right) \quad (82)$$

$$w_2 \equiv \sqrt{\frac{mT}{\pi\hbar t_S t_B}} \left( a + b - \frac{t_B}{T} x_S \right) \quad (83)$$

Es wird wieder versucht, die Fresnelintegrale zu identifizieren:

$$K_3 = A''' \int_{w_1}^{w_2} dx e^{-i\frac{\pi}{2}w^2} \quad (84)$$

$$= A''' \left[ \int_0^{w_2} dx e^{-i\frac{\pi}{2}w^2} - \int_0^{w_1} dx e^{-i\frac{\pi}{2}w^2} \right] \quad (85)$$

$$= A''' [C(w_2) - C(w_1) + i(S(w_1) - S(w_2))] . \quad (86)$$

Auch an dieser Stelle interessiert nur das Betragsquadrat, welches für die Konstante  $A'''$  aus dem vorigen Kapitel zu entnehmen ist. Es gilt

$$\varphi = \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^4 \frac{1}{2t_S t_B T^2} |C(w_2) - C(w_1) + i(S(w_1) - S(w_2))|^2 \quad (87)$$

$$= \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^4 \frac{1}{2t_S t_B T^2} [\{C(w_2) - C(w_1)\}^2 + \{S(w_1) - S(w_2)\}^2] . \quad (88)$$

Bevor der Doppelspalt behandelt wird, sollen die Argumente  $w_i$  für den Fall großer  $z_Q$  betrachtet werden. Offensichtlich ist die Form der Argumente sehr ähnlich zu dem Argument  $w_a$  der Kante. Es ergibt sich also die gleiche Approximation für große  $z_Q$ :

$$w_1 \approx \sqrt{\frac{2}{\lambda l_S}} (a - b - x_S) . \quad (89)$$

Für  $w_2$  ist die Näherung komplett analog durchzuführen. Für gegen  $x_S$  große  $z_S$ , also im Fraunhofer-Limes gilt  $l_S \approx z_S$ .

## 6.5 Doppelspalt

Die Abmessungen des Doppelspalts sind nach Abb. 4 gegeben.

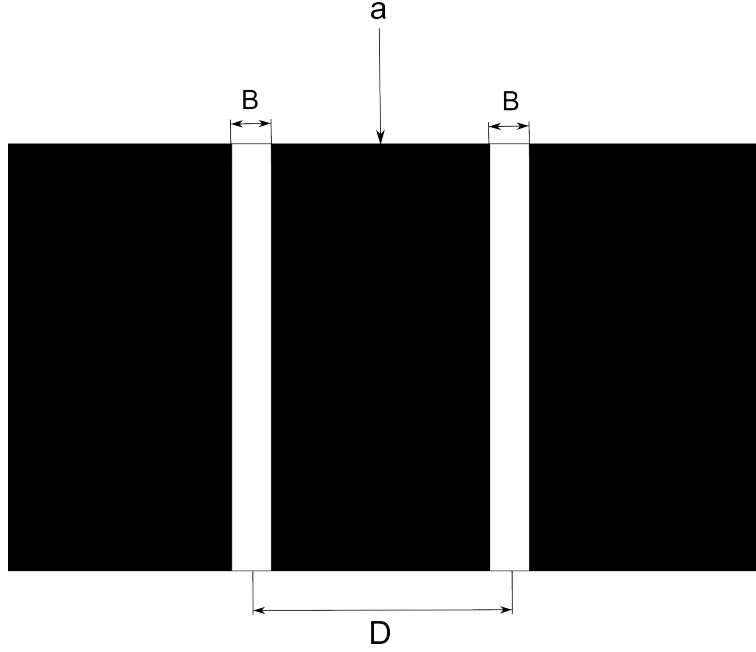


Abbildung 4: Doppelspalt um den Punkt  $a$  mit Spaltabstand (Mitte zu Mitte)  $D = 2d$  und Spaltbreite  $B = 2b$ .

Aus der Skizze kann die Blendenfunktion hergeleitet werden, siehe Gleichung (90).

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a - d - b, a - d + b] \\ 1 & \text{für } x \in [a + d - b, a + d + b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (90)$$

Für die spätere Darstellung der Ergebnisse werden  $a$  und  $B$  wie beim Einzelspalt gewählt. Für den Abstand wird  $D = 1000 \text{ nm}$ , beziehungsweise  $D \approx 3B$  angesetzt.

Mit den Bezeichnungen  $s_1 = a - d - b, s_2 = a - d + b, s_3 = a + d - b$  und  $s_4 = a + d + b$  kann man das zu lösende Integral praktikabel umgeschrieben werden zu

$$K_3 = A'' \left[ \int_{s_1}^{s_2} dx \exp \left[ -\frac{imT}{2\hbar t_s t_B} \left( x - \frac{t_B}{T} x_s \right)^2 \right] + \int_{s_3}^{s_4} dx \exp \left[ -\frac{imT}{2\hbar t_s t_B} \left( x - \frac{t_B}{T} x_s \right)^2 \right] \right] \quad (91)$$

$$= A''' \left[ \int_{w_1}^{w_2} dw e^{-i\frac{\pi}{2}w^2} + \int_{w_3}^{w_4} dw e^{-i\frac{\pi}{2}w^2} \right] \quad (92)$$

$$= A''' [C(w_4) + C(w_2) - C(w_3) - C(w_1) + i(S(w_1) + S(w_3) - S(w_2) - S(w_4))] \quad (93)$$

Dabei gilt  $\forall i = 1, 2, 3, 4$

$$w_i = \sqrt{\frac{mT}{\pi\hbar t_s t_B}} \left( s_i - \frac{t_B}{T} x_s \right) \quad (94)$$

In völliger Analogie zur Kante und zum Einzelspalt wird wieder das Betragsquadrat bestimmt:

$$\varphi = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^4 \frac{1}{2t_S t_B T^2} \cdot \left(\{C(w_2) + C(w_4) - C(w_1) - C(w_3)\}^2 + \{S(w_1) + S(w_3) - S(w_2) - S(w_4)\}^2\right). \quad (95)$$

Die Argumente  $w_i$  können genähert werden. Die Diskussion dieser Näherung ist in den zwei vorigen Kapiteln zu finden, es ergibt sich

$$w_i \approx \sqrt{\frac{2}{\lambda_S}}(s_i - x_S) \quad . \quad (96)$$

## 6.6 Dünner Doppelspalt

Der dünne Doppelspalt besteht aus zwei Spalten mit verschwindend geringer Breite. Für  $b = 0$  muss bei Gleichung 91 angesetzt und die Integrationsgrenzen angepasst werden, an der Wahl von  $D$  ändert sich aber nichts, es gilt weiterhin  $D = 1000$  nm. Es ergibt sich

$$K_3 = A'' \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx [\delta(a + d - x) + \delta(a - d - x)] \exp \left[ -\frac{imT}{2\hbar t_S t_B} \left( x - \frac{t_B}{T} x_S \right)^2 \right] \right\} \quad (97)$$

$$= A'' \left[ \exp \left[ -\frac{imT}{2\hbar t_S t_B} \left( (a + d) - \frac{t_B}{T} x_S \right)^2 \right] + \exp \left[ -\frac{imT}{2\hbar t_S t_B} \left( (a - d) - \frac{t_B}{T} x_S \right)^2 \right] \right] \quad (98)$$

$$= A'''' \left[ \exp \left[ -\frac{imTd}{\hbar t_S t_B} \left( a - \frac{t_B}{T} x_S \right) \right] + \exp \left[ \frac{imTd}{\hbar t_S t_B} \left( a - \frac{t_B}{T} x_S \right) \right] \right] \quad (99)$$

$$= 2A'''' \cos \left[ \frac{mTd}{\hbar t_S t_B} \left( a - \frac{t_B}{T} x_S \right) \right] \quad . \quad (100)$$

Dabei ist die Konstante  $A''''$  durch

$$A'''' = A'' \exp \left[ -\frac{imT}{2\hbar t_S t_B} \left( a^2 + d^2 + \frac{t_B^2 x_S^2}{T^2} - \frac{2at_B x_S}{T} \right) \right] \quad (101)$$

gegeben.

Das Betragsquadrat ergibt sich folglich zu

$$\varphi = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^5 \frac{4}{t_S^2 t_B^2 T} \cos^2 \left[ \frac{mTd}{\hbar t_S t_B} \left( a - \frac{t_B}{T} x_S \right) \right] \quad . \quad (102)$$

Das Argument des Kosinus kann für große  $z_Q$  genähert werden:

$$\frac{mTd}{\hbar t_S t_B} \left( a - \frac{t_B}{T} x_S \right) \approx \frac{kd}{l_S} (a - x_S) \quad . \quad (103)$$

Dabei wurde  $k = 2\pi/\lambda$  genutzt.

## 7 Behandlung mit Wellenoptik

### 7.1 Beugungsintegrale

Aus der skalaren Wellengleichung lässt sich - auf recht komplizierte Art und Weise - die Kirchhoff'sche Beugungstheorie herleiten (vgl. [6], S. 823ff (und Anhang)). Diese Theorie lässt sich allerdings nur schwer berechnen, man muss bei den meisten Problemen auf analytische Lösbarkeit verzichten. Fresnel und Fraunhofer entwickelten jeweils andere Lösungsmöglichkeiten, die sich letztlich als Näherungen aus der Kirchhoff'schen Formel herleiten lassen. Alle drei Ansätze fußen auf der Annahme, dass eine ebene Welle auf ein Hindernis unterschiedlicher Durchlässigkeit trifft und dann von jedem Punkt, an dem die Wellenfront die Blende passieren kann, eine Kugelwelle emittiert wird. Die Aufgabe ist es, die Kugelwellen phasenrichtig aufzuaddieren. Durch die unendlich vielen Kugelwellen stellt sich dies als Integral über die Koordinaten der Blende dar.

Eine nähere Herleitung der Kirchhoff'schen Formel findet sich in [6], S. 823ff<sup>5</sup>, hier sei nur das Ergebnis in Gleichung (104) wiedergegeben.

$$E(x_S, y_S) = \frac{E_0}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy B(x, y) \frac{\exp[ik|\vec{\varrho} - \vec{r}_Q| + |\vec{\varrho} - \vec{r}_S - \vec{\varrho}_S|]}{|\vec{\varrho} - \vec{r}_Q| \cdot |\vec{\varrho} - \vec{r}_S - \vec{\varrho}_S|} \cdot \left[ \frac{(\vec{\varrho} - \vec{r}_Q) \cdot \vec{e}_z}{|\vec{\varrho} - \vec{r}_Q|} - \frac{(\vec{\varrho} - \vec{r}_S - \vec{\varrho}_S) \cdot \vec{e}_z}{|\vec{\varrho} - \vec{r}_S - \vec{\varrho}_S|} \right]. \quad (104)$$

Der letzte Faktor wird Neigungsfaktor genannt. Diese Formel ist kaum analytisch berechenbar. Für große Abstände  $z_Q$  und  $z_S$  im Vergleich zu allen anderen Größen, können jedoch Näherungen vorgenommen werden: Zum einen werden die Skalarprodukte im Neigungsfaktor durch 1 und  $-1$  approximiert, da die Vektoren fast parallel bzw. antiparallel zur  $z$ -Achse verlaufen. Der Neigungsfaktor entfällt dadurch. Des Weiteren lassen sich die Beträge durch ihre Taylorentwicklungen nähern, wobei im Exponenten aufgrund der höheren Phasenempfindlichkeit eine Ordnung mehr genommen werden muss als im Nenner, wo die grobe Abschätzung  $|\vec{\varrho} - \vec{r}_Q| \approx z_Q$  und  $|\vec{\varrho} - \vec{r}_S - \vec{\varrho}_S| \approx z_S$  genügt. Es ergibt sich dann die Fresnel'sche Beugungsformel:

$$E(x_S, y_S) = \frac{E_0}{i\lambda z_Q z_S} e^{ik(z_Q + z_S)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy B(x, y) \exp \left[ \frac{ik}{2} \left( \frac{x^2 + y^2}{z_Q} + \frac{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2}{z_S} \right) \right]. \quad (105)$$

Eine weitere Näherung ergibt sich durch noch größere Abstände, nämlich für  $(x^2 + y^2) \ll z_Q$  und  $(x^2 + y^2) \ll z_S$ . Dadurch fallen viele der Exponentialfunktionen weg und es ergibt sich die Fraunhofer-Beugungsformel für das Fernfeld:

<sup>5</sup>Wobei der Neigungsfaktor in [6] von dem in dieser Arbeit verwendeten abweicht. Ich habe diesen aus [8] übernommen.

$$E(x_S, y_S) = \frac{E_0}{i\lambda z_Q z_S} e^{ik(z_Q+z_S)} e^{\frac{ik}{2z_S}(x_S^2+y_S^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy B(x, y) e^{-\frac{ik}{2z_S}(xx_S+yy_S)} . \quad (106)$$

Man erkennt schon anhand der Formeln, dass die Fresnel-Näherung die größte Ähnlichkeit mit den aus der Quantenmechanik hergeleiteten Formeln hat. Tatsächlich wird es nötig sein, auch auf die Fresnel-Näherung zuzugreifen, obwohl insbesondere der Fraunhofer-Limes von Interesse ist. Es sei noch erwähnt, dass die Fraunhofer-Beugung eine Fouriertransformation der Blende darstellt.<sup>6</sup>

## 7.2 Kante

Da das Integral der Fraunhofer-Beugung nicht konvergiert, muss auf die Fresnel-Beugung zurückgegriffen werden. Es ergibt sich nach recht elementarer Rechnung die Feldstärke  $E$  zu

$$E = C \left[ \left( \frac{1}{2} - C(w_a) + i \left( \frac{1}{2} - S(w_a) \right) \right) \right] , \quad (107)$$

mit den Konstanten

$$w_a = \sqrt{\frac{k(z_S + z_Q)}{\pi z_S z_Q}} \left( a - \frac{z_Q}{z_S + z_Q} x_S \right) \quad (108)$$

und

$$C = \frac{E_0}{2(z_S + z_Q)} (1 - i) \exp \left[ ik \left( \frac{x_S^2 + y_S^2}{2(z_S + z_Q)} + (z_Q + z_S) \right) \right] . \quad (109)$$

Quadratiert ergibt sich damit die Intensität<sup>7</sup>

$$I \propto \frac{E_0^2}{2(z_S + z_Q)^2} \left[ \left( \frac{1}{2} - C(w_a) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} - S(w_a) \right)^2 \right] \quad (110)$$

$$\equiv I_0 \left[ \left( \frac{1}{2} - C(w_a) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} - S(w_a) \right)^2 \right] . \quad (111)$$

Für gegen  $z_S$  große  $z_Q$  und mit  $k = 2\pi/\lambda$  ergibt sich für das Argument  $w_a$

$$w_a \approx \sqrt{\frac{2}{\lambda z_S}} (a - x_S) . \quad (112)$$

Dies stimmt beinahe mit Gleichung 79 überein. Für gegen  $x_S$  große  $z_S$ , also im Fraunhofer-Limes, gehen beide Formeln ineinander über, da dann  $l_S \approx z_S$  gilt. Die Ergebnisse aus Quantenmechanik und Optik stimmen dann überein.

<sup>6</sup>Alle Näherungen und Entwicklungen finden sich auch in den jeweiligen Kapiteln in [6]. In dieser Arbeit wurde jedoch im Unterschied zum Buch von E. Hecht ein anderer Ansatz gewählt: Statt aus allgemeinen Überlegungen die Fresnel- und Fraunhofer-Beugungsformeln herzuleiten, wurden diese als Näherung der Kirchhoff-Formel verstanden.

<sup>7</sup>Vgl. auch [6], S. 817, dort aber mit anderen Konstanten

### 7.3 Einfachspalt

Der Einzelspalt ist leicht mithilfe der Fresnel-Beugungsformel berechenbar. Die Rechnung ähnelt der quantenmechanischen sehr. Es ergibt sich nach Fresnel-Beugung

$$I(x_S) = I_0 \left[ \{C(w_2) - C(w_1)\}^2 + \{S(w_2) - S(w_1)\}^2 \right] \quad , \quad (113)$$

mit den Argumenten:

$$w_1 = \sqrt{\frac{2(z_Q + z_S)}{\lambda z_Q z_S}} \left( a - b - \frac{z_Q}{z_Q + z_S} x_S \right) \quad (114)$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{2(z_Q + z_S)}{\lambda z_Q z_S}} \left( a + b - \frac{z_Q}{z_Q + z_S} x_S \right) \quad . \quad (115)$$

Hier stimmen im Fraunhofer-Limes die Argumente ebenfalls mit den Argumenten, die sich aus der Quantenmechanik ergeben, überein, in Fresnelnäherung sollte sich aber dennoch keine allzu große Abweichung ergeben, da auch hier  $l_S$  und  $z_S$  lediglich gering voneinander abweichen.

Der Einfachspalt lässt sich auch mittels der Fraunhofer-Beugungsformel behandeln. Typischerweise weist man dabei dem Spalt auch eine Ausdehnung in  $y$ -Richtung zu. Dies wird hier, um die Analogie zur quantenmechanischen Berechnung zu halten, nicht getan. Dabei ergibt sich jedoch das Problem, dass das Integral über  $y$  nicht konvergiert. Aus der Berechnung der Kante ist aber klar, dass der Beitrag der  $y$ -Richtung lediglich ein konstanter Faktor ist, sodass hier lediglich wieder eine Proportionalitätskonstante eingeführt werden muss. Mit den gleichen Bezeichnungen wie in den vorigen Kapiteln ergibt sich dann für die Intensität

$$I(x_S) = I_0 \left( \frac{\sin\left(\frac{kb}{z_S} x_S\right)}{\frac{kb}{z_S} x_S} \right)^2 \quad , \quad (116)$$

wobei  $2b$  die Breite des Spaltes ist, der Ort des Spaltes  $a$  trägt nicht bei.

### 7.4 Doppelspalt

Der Doppelspalt lässt sich analog zum Einfachspalt behandeln. Es ergibt sich in Fresnelnäherung Gleichung 117 sowie in Fraunhofer-Näherung Gleichung 118.

$$I(x_S) = I_0 \left( \{C(w_2) + C(w_4) - C(w_1) - C(w_3)\}^2 + \{S(w_2) + S(w_4) - S(w_1) - S(w_3)\}^2 \right) \quad (117)$$

$$I(x_S) = I_0 \left[ \cos\left(\frac{kd}{z_S} x_S\right) \frac{\sin\left(\frac{kb}{z_S} x_S\right)}{\frac{kb}{z_S} x_S} \right]^2 \quad (118)$$

Die Argumente sind - ähnlich denen der Quantenmechanik - mithilfe von  $s_1 = a - d - b$ ,  $s_2 = a - d + b$ ,  $s_3 = a + d - b$  und  $s_4 = a + d + b$  definiert als:

$$w_i = \sqrt{\frac{2(z_Q + z_S)}{\lambda z_Q z_S}} \left( s_i - \frac{z_Q}{z_Q + z_S} x_S \right) \quad (119)$$

Auch hier sind die Argumente der Quantenmechanik und Optik nur im Fall der Fraunhofer-Näherung identisch.

## 7.5 Dünner Doppelspalt

Der dünne Doppelspalt wird aufgrund der einfachen Grenzwertbildung ( $b \rightarrow 0$ ) nur in Fraunhofer-Näherung betrachtet. In Gleichung 118 geht für diese Blende der  $\sin(x)/x$ -Ausdruck gegen 1. Es ergibt sich damit sofort

$$I(x_S) = I_0 \cos^2 \left( \frac{kd}{z_S} x_S \right) \quad (120)$$

Vergleicht man das Argument des Kosinus mit dem aus der Quantenmechanik (Gleichung 103), so sieht man sofort, dass auch diese im Fraunhofer-Limes übereinstimmen, da dann  $l_S \approx z_S$  ist. Da die Formel aus der Optik ohnehin nur für diese Näherung gültig ist, stimmen die Ergebnisse aus Quantenmechanik und Optik überein.

## 8 Vergleich und Darstellung der Ergebnisse

### 8.1 Wahl des Abstandes $z_S$

In Kapitel 4.2 und 5 wurde die Wahl der Parameter weitgehend diskutiert. Der letzte Parameter, der noch frei gewählt werden kann, ist  $z_S$ . Die Wahl dieses Abstandes entscheidet darüber, ob Fresnel- oder Fraunhofer-Näherung genutzt werden kann. Für große  $z_S$  wird Fraunhofer-Näherung, für „mittlere“ Abstände wird Fresnel-Näherung benutzt. Tabelle 1 fasst die Wahl der Parameter zusammen. Dabei wurde für  $z_S$  in Fresnel-Näherung ein Abstand von ca. dem 1000-fachen der Wellenlänge, in Fraunhofer-Näherung der gleiche Abstand wie für  $z_Q$  eingesetzt.

Parameter	Fresnel-Näherung	Fraunhofer-Näherung
$\lambda$	39 pm	39 pm
$a$ (alle Anordnungen)	0 m	0 m
$b$ (beide Spalte)	167 nm	167 nm
$d$ (Doppelspalt)	500 nm	500 nm
$z_Q$	5 m	5 m
$z_S$	50 nm	5 m

Tabelle 1: Werte aller Parameter, die beim Plotten genutzt werden.

Die Größe  $I_0$  bei den Formeln aus der Wellenoptik wird nicht betrachtet, es wird immer  $I/I_0$ , also die auf  $I_0$ -normierte Intensität betrachtet. Für die Zeit  $T$  und auch die Aufteilungen  $t_B$  und  $t_S$  werden in beiden Näherungen die diskutierten Formeln (siehe Kapitel



4.2 und 5) benutzt, wobei im Fraunhofer-Limes die  $x_S$ -Abhängigkeit verschwindet. Alle Formeln aus der Quantenmechanik werden auf ihren Wert an der Stelle 0 normiert, da dort zumindest bei den Spalten erwartungsgemäß das Maximum liegt. Die Graphen zeigen also den qualitativen Verlauf, nicht aber den quantitativen.

Alle Graphen wurden mit Mathematica erstellt, die Plotbereiche wurden durch Probieren gefunden. Wählt man die Bereiche anders, so werden die Interferenzerscheinungen nicht sichtbar, man sieht lediglich den geometrischen Schatten der Blenden.

## 8.2 Kante

### 8.2.1 Vergleich der Ergebnisse

Die Ergebnisse sind nach Gleichung 75 und 111 gegeben. Zur Übersicht sind beide hier noch einmal angegeben.

$$\varphi = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^4 \frac{1}{2t_S t_B T^2} \left[ \left(\frac{1}{2} - C(w_{a,QM})\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - S(w_{a,QM})\right)^2 \right] \quad (121)$$

$$I = I_0 \left[ \left(\frac{1}{2} - C(w_{a,O})\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - S(w_{a,O})\right)^2 \right] \quad (122)$$

Im direkten Vergleich sind die Formeln offenbar fast identisch. Wie in den vorigen Kapiteln erwähnt, geht  $w_{a,QM}$  für sehr große  $z_Q$  in  $w_{a,O}$  über. In diesem Fall würde auch der Vorfaktor, respektive die Zeiten im Vorfaktor, nicht mehr von  $x_S$  abhängen und die Formeln hätten eine identische Abhängigkeit von  $x_S$ .

### 8.2.2 Darstellung der Ergebnisse

Die Kante muss in Fresnel-Näherung betrachtet werden, d.h.  $z_S = 50$  nm. Die  $x_S$ -Abhängigkeit von  $T$  und  $t_S$  kann nicht genähert werden, da  $z_S$  nicht groß genug ist. Die Ergebnisse sind in Abb. 5 und Abb. 6 gezeigt.

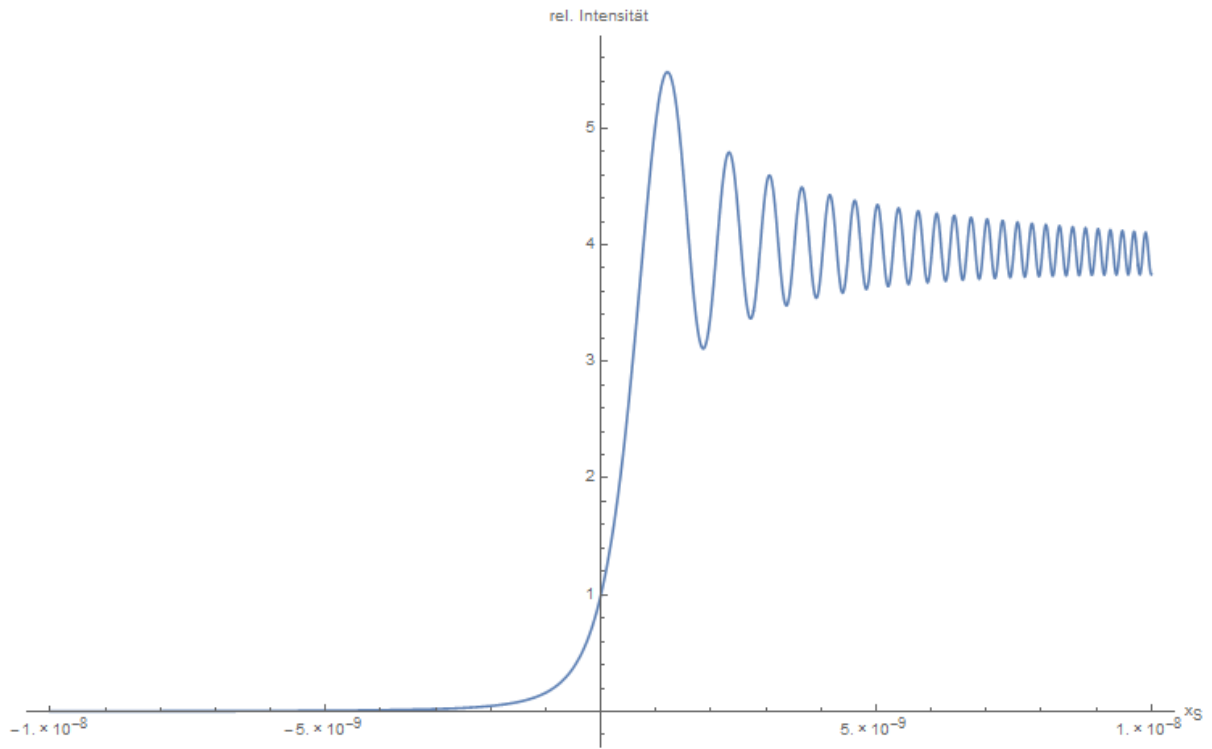


Abbildung 5: Kante nach der quantenmechanischen Formel.

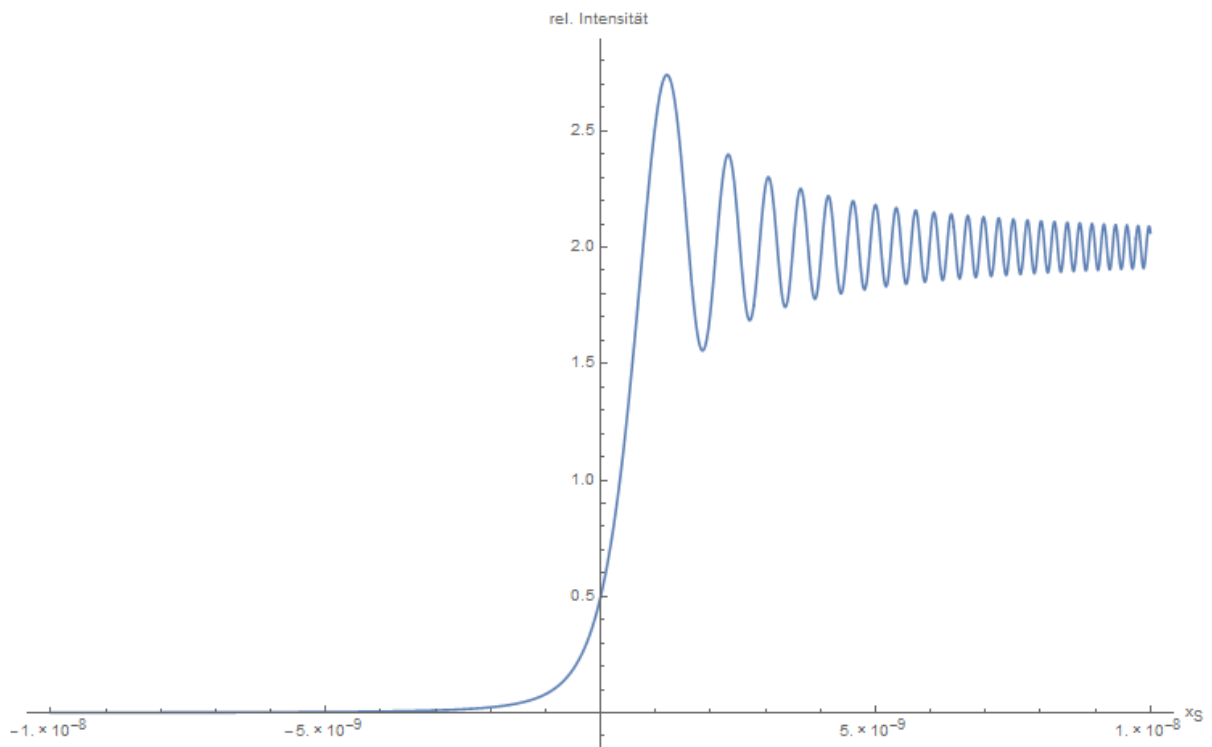


Abbildung 6: Kante nach Wellenoptik.

Beide Ergebnisse passen sehr gut zueinander, auch die Größenordnung des Beugungsmusters ( $10^{-8}$ ) ist bei beiden Abbildungen gleich. Einziger Unterschied ist das Verhalten für

größere  $x_S$ , was im gewählten Plotbereich aber nicht sichtbar ist. In der Optik pendelt sich die Intensität für große  $x_S$  auf einen festen Wert ein, Ergebnis ist der Schatten der Kante. Laut Quantenmechanik fällt die Intensität rechts von der Kante ab, es ergibt sich „aus der Ferne“ eine  $\delta(x)$ -förmige Anordnung. Realistisch ist am ehesten der Mittelweg, da das Licht in einer bestimmten Distanz nicht mehr hell genug ist, um die Bereiche rechts der Kante auszuleuchten (zumindest nicht sichtbar). Der sehr schnelle Abfall der Intensität laut Quantenmechanik kann jedoch nicht beobachtet werden.

Beim Übergang zu großen  $z_S$  sind beide Formeln nach Normierung identisch. Im Fall  $z_S = 5$  m sind die Beugungsmuster, die oben dargestellt sind, weiterhin sichtbar. Statt in der Größenordnung  $10^{-8}$  liegt es dann im Bereich  $10^{-4}$ . Ist  $x_S$  aber sehr viel größer als  $10^{-4}$ , so erhält man das Bild, welches man von einer Kante erwartet (siehe Abb. 7).

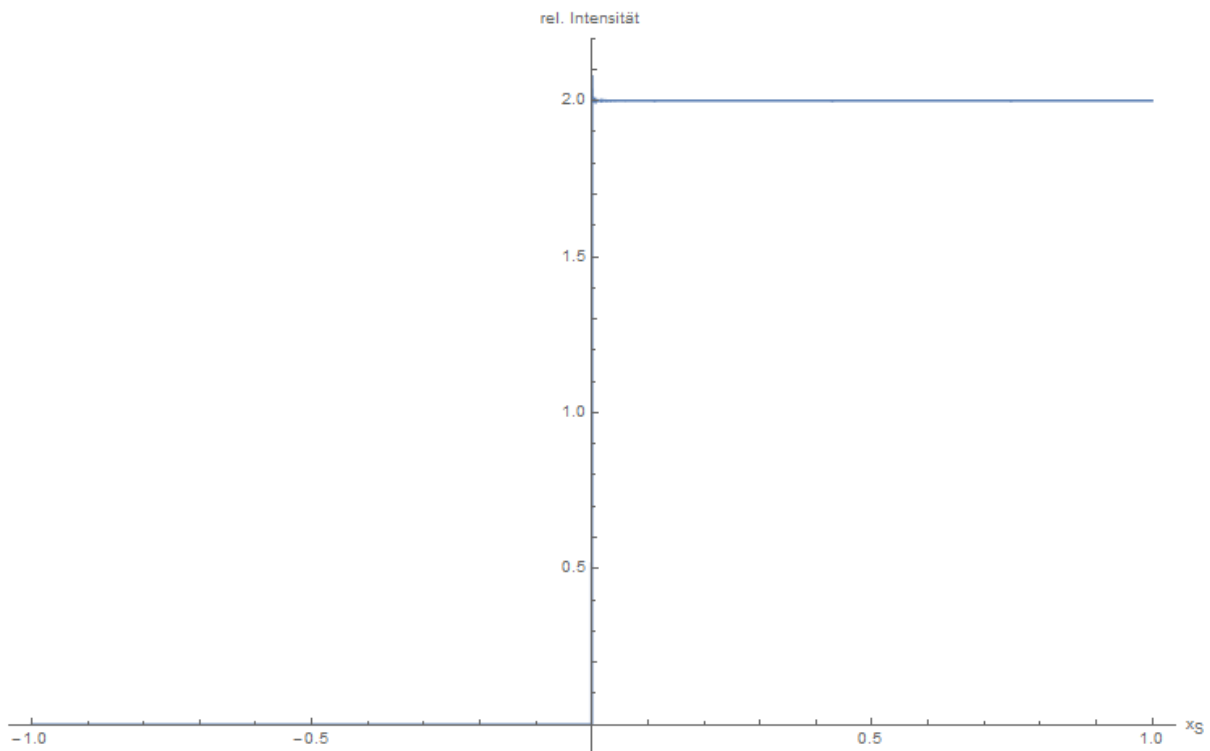


Abbildung 7: Kante in Fraunhofer-Näherung mit großen  $x_S$ . Die Interferenzstreifen um  $x_S = 0$  sind noch leicht erkennbar.

## 8.3 Einzelspalt

### 8.3.1 Vergleich der Ergebnisse

Die Formeln, die sich aus den jeweiligen Betrachtungsweisen ergeben, sind nach Gleichung 88 (Quantenmechanik) und Gleichung 116 beziehungsweise 113 (Optik) gegeben.

$$\varphi = \left(\frac{m}{2\pi\hbar}\right)^4 \frac{1}{2t_S t_B T^2} [\{C(w_2) - C(w_1)\}^2 + \{S(w_1) - S(w_2)\}^2] \quad (123)$$

Fresnel-Näherung:

$$I(x_S) = I_0 [\{C(w_2) - C(w_1)\}^2 + \{S(w_2) - S(w_1)\}^2] \quad (124)$$

Fraunhofer-Näherung:

$$I(x_S) = I_0 \left( \frac{\sin\left(\frac{kb}{z_S} x_S\right)}{\frac{kb}{z_S} x_S} \right)^2 \quad (125)$$

Der Vergleich zwischen der quantenmechanischen und der fresnel-genäherten Formel ist leicht. Würde der Vorfaktor der Quantenmechanik wegen der Zeiten nicht von  $x_S$  abhängen, so wären die Formeln von ihrer Form her sehr ähnlich. Tatsächlich gehen die Argumente für große  $z_S$  und große  $z_Q$  ineinander über (siehe Kapitel 6.4) - es gibt in diesem Fall keinerlei qualitative Unterschiede zwischen den Formeln, da auch die  $x_S$ -Abhängigkeit des Vorfaktors verschwindet. Der Vergleich zwischen Quantenmechanik und Fraunhofer-Näherung fällt hingegen schwer. Die Formeln haben offenbar überhaupt keine Ähnlichkeit. Die Erwartung ist allerdings weiterhin, dass die Formeln das gleiche beschreiben und damit auch das gleiche Interferenzmuster erzeugen.

### 8.3.2 Darstellung der Ergebnisse

Die Ergebnisse werden nur in Fraunhofer-Näherung betrachtet werden, da die Ähnlichkeit der Ergebnisse in diesem Fall nicht aus den Formeln ersichtlich ist. Nach Kapitel 5 sind die Zeiten  $T$  und  $t_S$  in diesem Fall von  $x_S$  unabhängig. Es ergeben sich folgende Ergebnisse:

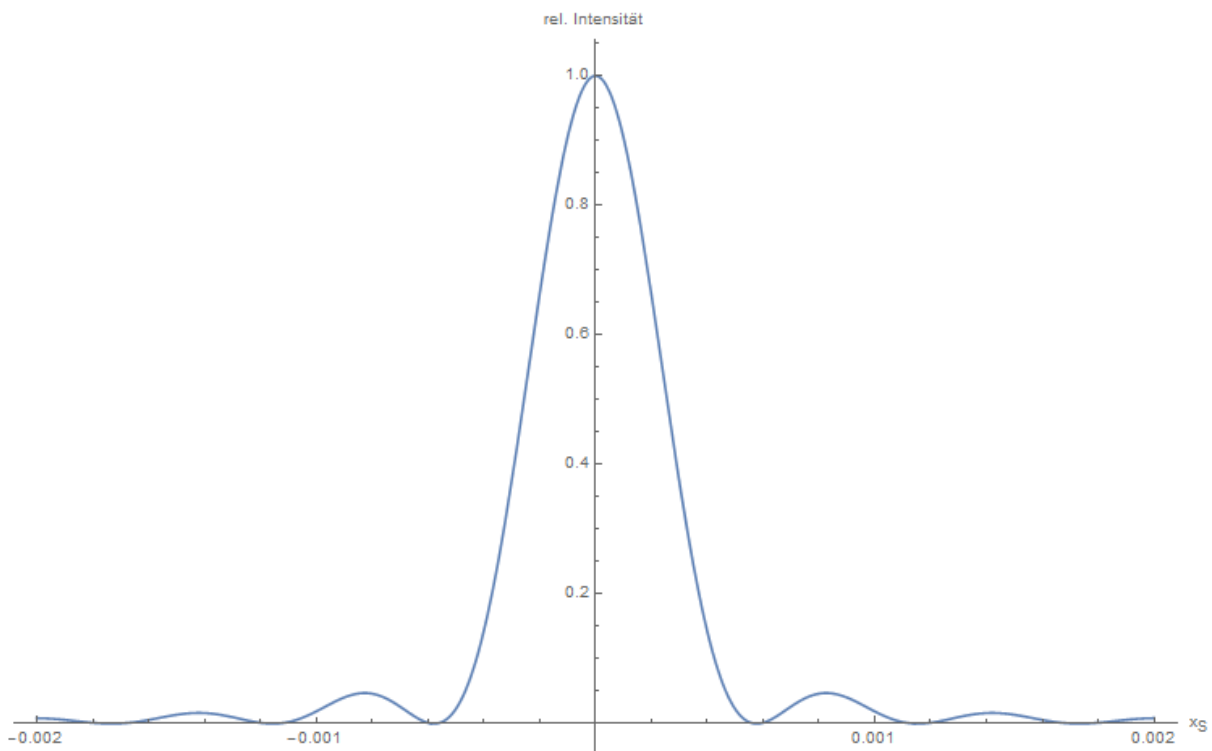


Abbildung 8: Das Ergebnis für den Einzelspalt nach der quantenmechanischen Formel. Das aus der Optik erwartete Muster ist sehr deutlich erkennbar. Da an der Stelle  $x_S = 0$  der Wert 1 erreicht wird, war die Wahl der Normierung offensichtlich sinnvoll.

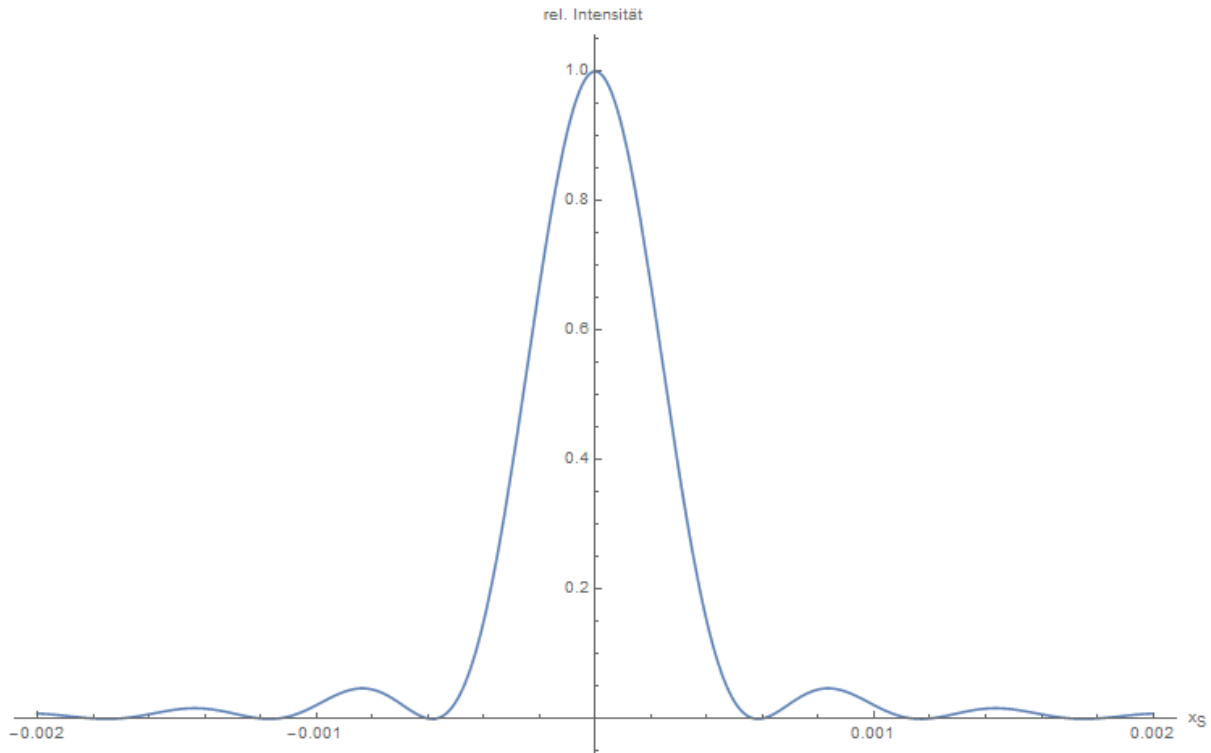


Abbildung 9: Einzelspalt nach klassischer Wellenoptik.

Die Ergebnisse passen, wie man den Abbildungen entnehmen kann, perfekt überein. Der Verlauf des Graphen und die Koordinaten der Maxima und Minima stimmen zumindest nach Augenmaß, die Größenordnung der Beugungsmuster sogar exakt überein. Dies entspricht der Erwartung, auch wenn dieses Ergebnis nicht aus dem Vergleich der Formeln erhalten werden kann.

## 8.4 Doppelspalt

### 8.4.1 Vergleich der Ergebnisse

Die berechneten Ergebnisse für den Doppelspalt finden sich in den Gleichungen 95 und 118 sowie 117.

$$\varphi = \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^4 \frac{1}{2t_{stB}T^2} \cdot \left( \{C(w_2) + C(w_4) - C(w_1) - C(w_3)\}^2 + \{S(w_1) + S(w_3) - S(w_2) - S(w_4)\}^2 \right) \quad (126)$$

Fresnel-Näherung:

$$I(x_S) = I_0 \left( \{C(w_2) + C(w_4) - C(w_1) - C(w_3)\}^2 + \{S(w_2) + S(w_4) - S(w_1) - S(w_3)\}^2 \right) \quad (127)$$

Fraunhofer-Näherung:

$$I(x_S) = I_0 \left[ \cos \left( \frac{kd}{z_S} x_S \right) \frac{\sin \left( \frac{kb}{z_S} x_S \right)}{\frac{kb}{z_S} x_S} \right]^2 \quad (128)$$

Die Anmerkungen, die sich an dieser Stelle machen lassen, sind im Wesentlichen dieselben, die sich auch beim Einfachspalt anbringen lassen. Zwischen Fresnel-Näherung und Quantenmechanik besteht eine große Ähnlichkeit, die Ergebnisse gehen im Fraunhofer-Limes ineinander über. Die Fraunhofer-Formel unterscheidet sich deutlich von den anderen beiden Ergebnissen. Die Erwartung, dass die Ergebnisse dennoch gleich sind, ist auch hier durch eine graphische Darstellung zu bestätigen.

#### 8.4.2 Darstellung der Ergebnisse

Es wird Fraunhofer-Näherung dargestellt:

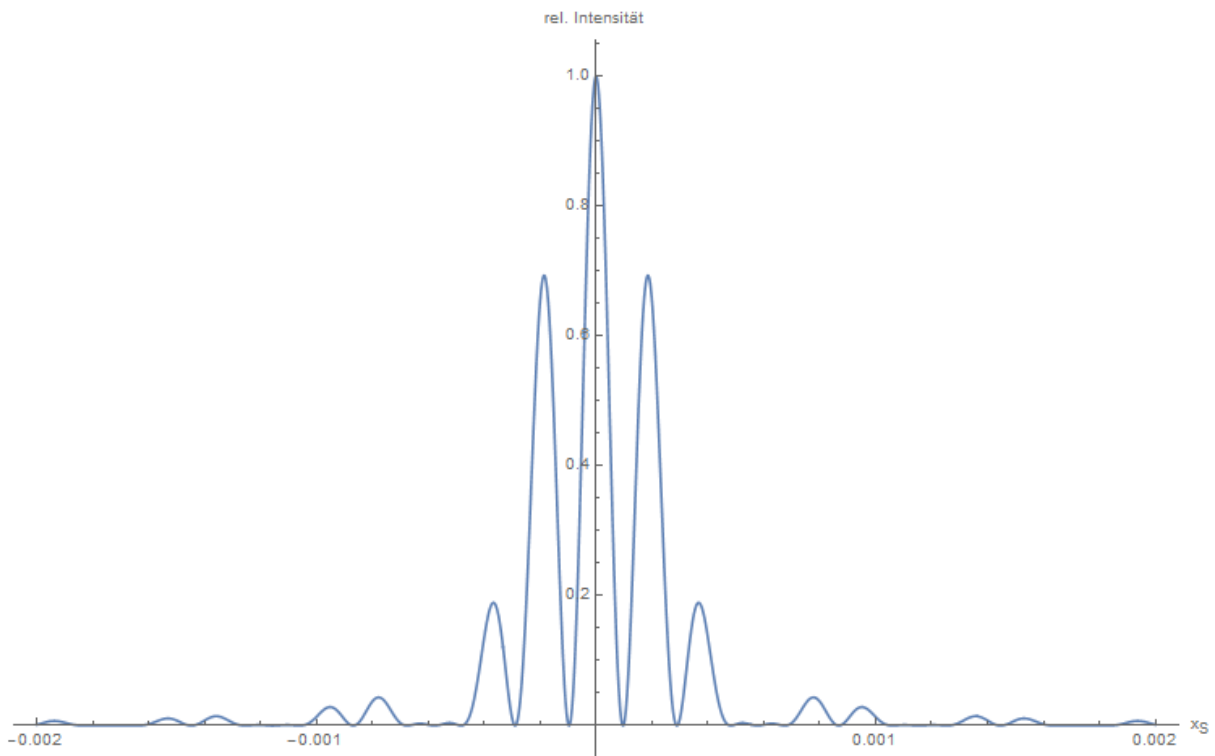


Abbildung 10: Beugungsmuster des Doppelspalt in Fraunhofer-Näherung nach der quantenmechanischen Formel. Das Beugungsmuster ist dem aus der Optik bekannten sehr ähnlich.

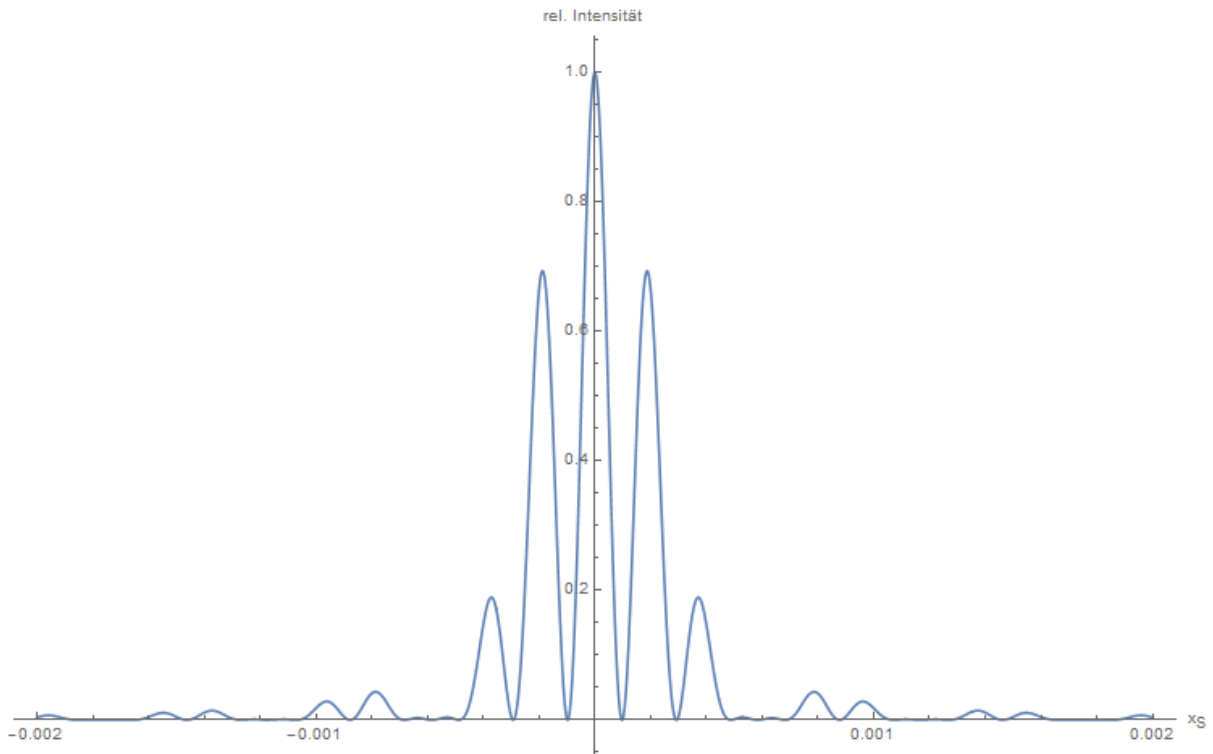


Abbildung 11: Intensitätsverteilung des Doppelspalt in Fraunhofer-Näherung, berechnet nach Wellenoptik.

An dieser Stelle kann lediglich die Anmerkung zu den Abbildungen des Einfachspaltes wiederholt werden - die Ergebnisse sind in Dimension und Verlauf wie erwartet identisch.

## 8.5 Dünner Doppelspalt

### 8.5.1 Vergleich der Ergebnisse

Der dünne Doppelspalt ist die einzige der untersuchten Blenden, der bei beiden Herleitungen auf das exakt gleiche Ergebnis führt. Die Formeln aus Gleichung 102 und 120 sind hier noch einmal wiedergegeben.

$$\varphi = \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^5 \frac{4}{t_S^2 t_B^2 T} \cos^2 \left[ \frac{mTd}{\hbar t_S t_B} \left( a - \frac{t_B}{T} x_S \right) \right] \quad (129)$$

$$I(x_S) = I_0 \cos^2 \left( \frac{kd}{z_S} x_S \right) \quad (130)$$

Beide Formeln enthalten einen  $\cos^2(x)$ -Term, abgesehen von den Konstanten scheint die Übereinstimmung gut zu sein. Wie in Kapitel 6.6 erwähnt, sind in Fraunhofer-Näherung die Argumente identisch. Eine weitere graphische Darstellung ist demnach nicht notwendig.

## 9 Fazit

Obwohl die Ergebnisse aus der Fresnel-Beugungsformel nicht perfekt mit denen aus dem Pfadintegralformalismus übereinstimmen, ist der Effekt, der bei Beugungsexperimenten zu beobachten ist, von beiden Theorien gleich beschrieben worden. Spätestens im Fraunhofer-Limes sind die Ergebnisse völlig identisch, sodass die Beugungsmuster gleich vorhergesagt werden. Im Rahmen dieser Arbeit sind die Schlussfolgerungen, die sich aus den verschiedenen Betrachtungsweisen ergeben, die gleichen. Es kann daher durchaus von einem Erfolg gesprochen werden. Die Pfadintegrale lassen sich demnach auch gut auf Beugungsexperimente anwenden. Der gravierende Nachteil, den die Beschreibung mit Pfadintegralen in vielen anderen Fällen hat, nämlich die mathematisch sehr komplizierte Handhabung, fällt bei diesem Anwendungsgebiet nicht ins Gewicht. Die Kirchhoffsche Beugungsformel ist weitaus schwieriger und meist ausschließlich numerisch berechenbar. Die Komplexität ist eher vergleichbar mit der der Fresnel-Beugung. Alles in allem stellt der Zugang mittels Pfadintegralen eine interessante und erfolgreiche Alternative zur Wellenoptik dar.



## Literatur

- [1] Ashok Das, 'Field Theory - A Path Integral Approach', World Scientific, 1993
- [2] Gernot Münster, „Quantentheorie“, 2. Auflage, De Gruyter, 2010
- [3] Raimar Wolkenhaar, „Integrationstheorie“ , Vorlesungsskript, gehalten WS 2012/2013 (aufrufbar unter <http://wwwmath.uni-muenster.de/users/raimar.wolkenhaar/lehre/WS12/Math-f-Phys-III/index.html>)
- [4] Richard P. Feynman, Albert R. Hibbs, 'Quantum Mechanics and Path Integrals', McGraw-Hill Inc., 1965
- [5] [http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel\\_integral](http://en.wikipedia.org/wiki/Fresnel_integral), zuletzt aufgerufen am 17.9.2014 (nach Abgabe der Bachelorarbeit, es wurde folglich eine vorige Version genutzt, welche aber keine relevanten Unterschiede zu der vom 12.9.2014 aufweist)
- [6] Eugene Hecht, „Optik“ , 5. Auflage, Oldenbourg Verlag, 2009
- [7] [http://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/archiv/inhalt\\_materialien/doppelspalt/index.html](http://www.didaktik.physik.uni-muenchen.de/archiv/inhalt_materialien/doppelspalt/index.html), zuletzt aufgerufen am 19.7.2014, 9.36 Uhr
- [8] Aufzeichnungen zu Physik III, gehalten an der WWU im Wintersemester 2012/2013 am 17.12.2012 von Prof. Dr. Michael Klasen

Sowie die Plagiatserklärung aus <http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/Arbeiten/fulst-BA.pdf>, zuletzt aufgerufen 1.9.2014, 16.20 Uhr

## Plagiatserklärung des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über

*Behandlung von Beugungsphänomenen mit Pfadintegralen*

selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

---

Münster, den