

WESTFÄLISCHE
WILHELMUS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



Diplomarbeit

$\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung der $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Störungstheoretische Berechnung des Sheikholeslami-Wohlert-
Koeffizienten c_{sw} für Majorana-Fermionen in adjungierter Darstellung

SVEN MUSBERG

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Theoretische Physik

März 2013

Diese Version der Arbeit unterscheidet sich geringfügig von der am 27. März 2013 im Prüfungsamt eingereichten Arbeit. Rechtschreibfehler wurden korrigiert, wogegen Ergebnisse und Folgerungen unverändert bleiben.

Münster, 2. Mai 2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1. Die $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie	11
1.1. Die $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie im Kontinuum	11
1.1.1. Wirkung einer Yang-Mills-Theorie für die Eichgruppe $SU(N_c)$.	11
1.1.2. Wirkung der $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie im Kontinuum .	14
1.1.3. Pfadintegrale und euklidische Raum-Zeit	16
1.2. Die $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter	18
1.2.1. Funktionen auf dem Gitter	18
1.2.2. Naive Diskretisierung der Fermionen-Wirkung	20
1.2.3. Wilsonsche Fermionen-Wirkung	22
1.2.4. Wilsonsche Eichwirkung	23
1.2.5. Wirkung der $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter .	24
1.2.6. Pfadintegrale auf dem Gitter	26
2. $\mathcal{O}(a)$-Verbesserung der Fermionen-Wirkung	27
2.1. Symanzik-Verbesserung	27
2.2. Der Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient c_{SW}	29
3. Störungstheorie der $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter	33
3.1. Entwicklung der Eichwirkung	34
3.1.1. Gluonen-Propagator der Wilsonschen Eichwirkung	35
3.1.2. 3-Gluonen-Vertex der Wilsonschen Eichwirkung	36
3.2. Entwicklung der Fermionen-Wirkung	36
3.2.1. Gluino-Propagator der Wilsonschen Fermionen-Wirkung	38
3.2.2. Gluon-Gluino-Vertizes der Wilsonschen Fermionen-Wirkung .	38
3.2.3. Gluon-Gluino-Vertizes des Clover-Terms	40
3.3. Propagatoren und Wechselwirkungsvertizes	42
3.3.1. Gluonen-Propagator und 3-Gluonen-Vertex	42
3.3.2. Gluino-Propagator und Gluonen-Gluino-Vertizes	42

4. Berechnung des Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizienten	45
4.1. Koeffizient $c_{\text{SW}}^{(0)}$ auf Tree-Level	46
4.2. Koeffizient $c_{\text{SW}}^{(1)}$ in 1-Loop-Ordnung	47
4.2.1. Beiträge der Diagramme (a), (b), (c), (e) und (f)	49
4.2.2. Beitrag des Diagramms (d)	53
4.2.3. Summen der einzelnen Beiträge	57
Zusammenfassung und Ausblick	59
A. Anhang	61
A.1. Dirac-Matrizen	61
A.2. Lie-Gruppen $SU(N)$	62
A.2.1. Fundamentale Darstellung	62
A.2.2. Adjungierte Darstellung	68
A.3. Gluon-Quark-Vertizes des Clover-Terms für Dirac-Fermionen	71
A.4. Entwicklungen zu Diagramm (d)	72
A.4.1. Entwicklung des 3-Gluonen-Gluino-Vertex der Wilsonschen Fermionen-Wirkung	72
A.4.2. Entwicklung des 3-Gluonen-Gluino-Vertex des Clover-Terms	72
B. Abbildungsverzeichnis	79
C. Literaturverzeichnis	81

Einleitung

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (SM) ist ein Modell, mit dem sich die bekannten Elementarteilchen unter Einfluss der starken, schwachen sowie der elektromagnetischen Wechselwirkung beschreiben lassen. Insbesondere die Quantenelektrodynamik (QED) und die Quantenchromodynamik (QCD), die Prozesse unter Einfluss der elektromagnetischen beziehungsweise der starken Wechselwirkung beschreiben, haben sich als äußerst erfolgreiche Theorien erwiesen. Da die QCD im Gegensatz zur QED nicht abelsch ist, wechselwirken auch die Austauschteilchen der Wechselwirkung miteinander, wodurch die Kopplung mit steigenden Energien abnimmt. Dies führt dazu, dass störungstheoretische Berechnungen für kleine Energien nicht möglich sind.

Alternativ ist jedoch eine Beschreibung der QCD durch Computersimulationen im Rahmen der Gitterfeldtheorie möglich, die 1974 von K. G. Wilson formuliert wurde [1]. Dabei wird die Raum-Zeit durch ein vierdimensionales Gitter approximiert, sodass nur endliche Größen auftreten. Die Gitterfeldtheorie liefert beeindruckende Ergebnisse, wie zum Beispiel die ab-initio Berechnung der Massen von Elementarteilchen:

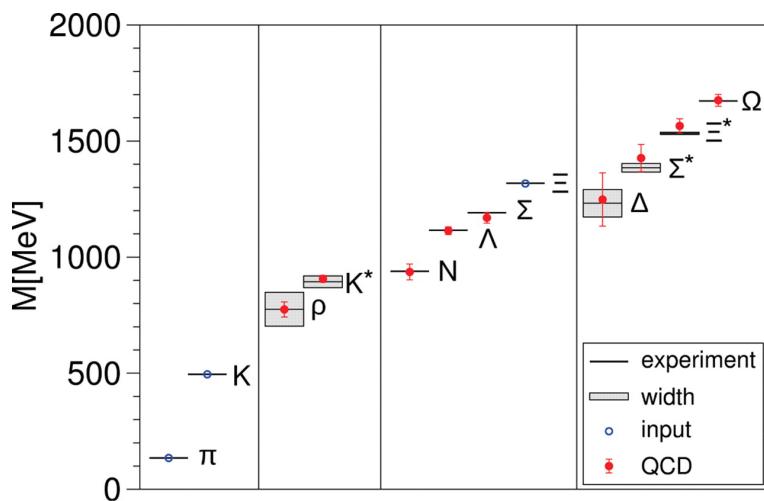


Abbildung 0.1.: Gitterberechnungen des Spektrums der leichten Hadronen der QCD im Vergleich mit experimentellen Werten. Abbildung aus [2].

Neben dem Erfolg des Standardmodells bei der Beschreibung eines Großteils der mess-

baren Elementarteilchenprozesse gibt es vermehrt Hinweise auf eine Physik jenseits dieses Modells. Da das Konzept der Symmetrie in der Elementarteilchenphysik äußerst erfolgreich ist, scheint es plausibel, auch die Physik jenseits des Standardmodells durch eine zusätzliche Symmetrie zu erklären. Eine mögliche Erweiterung des Standardmodells ist die Supersymmetrie (SUSY). Dabei wird die Raum-Zeit-Symmetrie der Poincaré-Gruppe um zusätzliche Symmetrietransformationen erweitert.

Alle Elementarteilchen lassen sich anhand des Verhaltens eines quantenmechanischen Systemzustands unter Vertauschung zweier gleichartiger Teilchen klassifizieren. Während sich der Systemzustand bei Vertauschung zweier gleichartiger Bosonen nicht ändert, ändert sich das Vorzeichen der quantenmechanischen Wellenfunktion des Systems bei Vertauschung gleichartiger Fermionen. Bosonen vermitteln die Wechselwirkungen, während die Materie aus Fermionen aufgebaut ist.

1975 wurde von R. Haag, J. T. Lopuszanski und M. Sohnius gezeigt [3], dass die einzige mögliche Erweiterung der Poincaré-Algebra, die mit den Symmetrien der S -Matrix verträglich ist, die sogenannte Super-Poincaré-Algebra ist. Diese erweitert die Poincaré-Algebra um Symmetrien zwischen Bosonen und Fermionen. Durch die zusätzliche Symmetrie-Transformation lässt sich zu jedem Teilchen des Standardmodells ein sogenannter Superpartner erzeugen. Dann hat jedes Boson einen fermionischen und jedes Fermion einen bosonischen Superpartner. Die Supersymmetrie verdoppelt demnach die Anzahl der Elementarteilchen. Das einfachste supersymmetrische Modell wurde 1974 von J. Wess und B. Zumino aufgestellt [4].

Supersymmetrie kann keine exakte Symmetrie sein, bei der Teilchen und Superpartner jeweils gleiche Massen hätten. Da noch kein supersymmetrisches Teilchen bisher experimentell entdeckt wurde, muss die Supersymmetrie so gebrochen sein. Die supersymmetrischen Teilchen müssen größere Massen als ihre jeweiligen Partner haben.

Bis jetzt steht der experimentelle Nachweis eines supersymmetrischen Teilchens noch aus. So liefern unter anderem die aktuellsten Auswertungen der ATLAS-Kollaboration [5] und der CMS-Kollaboration [6] der Daten des Large Hadron Collider in CERN noch keine Hinweise auf supersymmetrische Teilchen.

Und doch bringt diese Theorie vielversprechende Erweiterungen der bestehenden physikalischen Theorien mit sich. So liefert die Supersymmetrie Kandidaten für dunkle Materie, durch die sich der Materieüberschuss im Universum erklären ließe [7]. Darüber hinaus ergibt sich daraus eine mögliche Vereinheitlichung von Gravitation mit den drei Grundkräften des Standardmodells durch die Supergravitation, die 1973 nach D. V. Volkov und V. A. Soroka [8] und 1976 nach D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen und S. Ferrara [9] formuliert wurde.

Supersymmetrische Prozesse lassen sich ähnlich den Prozessen der QCD beschreiben.

Insbesondere sind diese Prozesse damit im Rahmen der Gitterfeldtheorie beschreibbar. In dieser Arbeit wird eine Verbesserung der Gitterreichtheorie untersucht, die in der QCD erfolgreich angewendet wird. Im Wesentlichen ist diese Verbesserung vom sogenannten Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizienten c_{sw} abhängig, der für die QCD bereits mit verschiedenen Methoden, wie zum Beispiel der Störungstheorie nach R. Wohlert [10] und S. Aoki und Y. Kuramashi [11], berechnet wurde.

Diese Rechnung wird auf das supersymmetrische Modell übertragen. Dazu werden zuerst das verwendete Modell sowie die Grundzüge der Gitterfeldtheorie vorgestellt. Anschließend erfolgen die Übertragung der Verbesserung der QCD auf dieses Modell und es werden die benötigten Feynman-Regeln zur störungstheoretischen Rechnung bereitgestellt. Schließlich wird der entsprechende Koeffizient berechnet.

Die Grundlagen der Quantenfeldtheorie und insbesondere des Lagrange-Formalismus werden vorausgesetzt. Wie üblich werden natürliche Einheiten $\hbar = 1$ und $c = 1$ verwendet, bezüglich derer Massen und Energien gleiche Einheiten und Längen und Zeiten dazu inverse Einheiten haben.

1. Die $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie

Grundlage der Beschreibung einer Yang-Mills-Theorie ist die Wirkung der Theorie. Diese wird zuerst für eine allgemeine Yang-Mills-Theorie im Kontinuum bestimmt und auf ein supersymmetrisches Modell übertragen. Anschließend werden die Grundzüge der Gittertheorie vorgestellt und die Wirkung des supersymmetrischen Modells für diese Theorie bestimmt. Dies erfolgt ausführlich, da viele Ausdrücke von Konventionen abhängig sind, und so der Vergleich mit Rechnungen anderer Konventionen gewährleistet ist.

1.1. Die $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie im Kontinuum

Ein mögliches Modell zur Beschreibung von Supersymmetrie ist die Beschreibung im Rahmen einer Yang-Mills-Theorie. Die Wirkung dieses Modells wird im Folgenden zuerst für Dirac-Fermionen bestimmt und dann auf ein supersymmetrisches Modell mit Majorana-Fermionen in adjungierter Darstellung übertragen.

1.1.1. Wirkung einer Yang-Mills-Theorie für die Eichgruppe $SU(N_c)$

In diesem Abschnitt wird die Wirkung einer Yang-Mills-Theorie für die Eichgruppe $SU(N_c)$ im Kontinuum nach [12] konstruiert. Fermionen wie zum Beispiel Quarks werden durch Dirac-Felder $\psi_\alpha^i(x)$ mit $i = 1, \dots, N_c$ und dem Dirac-Index $\alpha = 1, 2, 3, 4$ beschrieben. Die Dirac-Gleichung ist für diese Felder erfüllt, falls der kinetische Term $\mathcal{L}_F^{(0)}$ der Lagrange-Dichte durch

$$\mathcal{L}_F^{(0)}(x) = \bar{\psi}(x) \left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) \quad (1.1)$$

gegeben ist. Dabei sind

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0 \quad (1.2)$$

das zu ψ adjungierte Feld und $(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ die Dirac-Matrizen nach (A.2).

Gebundene Zustände in der QED und der QCD sind invariant unter Transformationen der unitären Gruppe $U(1)$ beziehungsweise der speziellen unitären Gruppe $SU(3)$. Die Achsenrichtungen in diesem sogenannten Farbraum müssen an beliebigen Raum-Zeit-Punkten frei wählbar sein, da sie unbeobachtet sind. Diese Überlegung führt zum physikalischen Postulat der Invarianz der fundamentalen Lagrange-Dichte unter lokalen Eichtransformationen der Dirac-Felder im Farbraum mit $U(x) \in SU(N_c)$:

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= U(x)\psi(x), \\ \bar{\psi}'(x) &= \bar{\psi}(x)U(x)^\dagger. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Der kinetische Term der Lagrange-Dichte ist unter diesen Transformationen nicht invariant, da sie lokal sind. Deshalb wird durch diesen Term nur die Bewegung freier Fermionen beschrieben. Um eine eichinvariante Lagrange-Dichte zu konstruieren, werden zusätzliche Felder, die Eichbosonen, eingeführt. In der QED entsprechen diese den Photonen und in der QCD den Gluonen. Die Eichbosonen werden im Folgenden allgemein als Gluonen bezeichnet. Diese werden durch Eichfelder $A_\mu^a(x)$ mit dem Farb-Index^{1.1} $a = 1, \dots, N_c^2 - 1$ und dem Lorentz-Index^{1.2} $\mu = 0, 1, 2, 3$ beschrieben. Die Eichfelder entsprechen den $N_c^2 - 1$ linear unabhängigen Erzeugenden der Eichgruppe $SU(N_c)$:

$$A_\mu(x) = \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a(x) T^a. \quad (1.4)$$

Dabei sind $(T^a)^{ij}$ die Generatoren der Gruppe $SU(N_c)$, die nach (A.20) eine Drehimpulsalgebra mit

$$[T^a, T^b]_- = i \sum_{c=1}^{N_c^2-1} f^{abc} T^c \quad (1.5)$$

erzeugen^{1.3}. Die lokalen Eichtransformationen der Eichfelder werden durch

$$A'_\mu(x) = U(x)A_\mu(x)U(x)^\dagger - \frac{i}{g}U(x)\left(\partial_\mu U(x)^\dagger\right) \quad (1.6)$$

^{1.1}Im Folgenden werden alle Farb-Indizes durch lateinische Kleinbuchstaben a, b, c, \dots gekennzeichnet.

^{1.2}Lorentz-Indizes werden durch griechische Kleinbuchstaben μ, ν, ρ, \dots gekennzeichnet.

^{1.3} $[A, B]_- = AB - BA$ bezeichnet den Kommutator und $[A, B]_+ = AB + BA$ den Antikommutator.

definiert. Diese Felder koppeln durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu(x) := \partial_\mu + igA_\mu(x) \quad (1.7)$$

an die Dirac-Felder. Dabei ist g eine dimensionslose Kopplungskonstante analog der elektrischen Ladung in der QED. Damit lässt sich der eichinvariante Fermionen-Anteil \mathcal{L}_F der Lagrange-Dichte für Dirac-Fermionen konstruieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F(x) &= \bar{\psi}(x) \left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu D_\mu(x) - m \right) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) \left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \left(\partial_\mu + ig \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a(x) T^a \right) - m \right) \psi(x). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Daraus ergeben sich nach den Euler-Lagrange-Gleichungen die Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} \left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu D_\mu(x) - m \right) \psi(x) &= 0, \\ \bar{\psi}(x) \left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu D_\mu(x) - m \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Damit die Eichfelder A_μ keine äußeren, vorgegebenen Felder sind, muss es einen zusätzlichen Anteil an der Lagrange-Dichte für Eichbosonen geben. Dazu wird der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ analog zur Elektrodynamik durch die Eichfelder definiert:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &:= -\frac{i}{g} [D_\mu(x), D_\nu(x)]_- \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig [A_\mu(x), A_\nu(x)]_-. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Die Komponenten dieser spurlosen, hermiteschen Matrix sind im Farbraum nach (1.4) definiert durch:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= \sum_{a=1}^{N_c^2-1} F_{\mu\nu}^a(x) T^a, \\ F_{\mu\nu}^a(x) &= \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g \sum_{b,c=1}^{N_c^2-1} f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Dabei kommt der nicht-abelsche Charakter der Farbgruppe für $N_c \geq 2$ zum Ausdruck. Unter lokalen Eichtransformationen (1.6) mit $U(x) \in \text{SU}(N_c)$ gilt:

$$F'_{\mu\nu}(x) = -\frac{i}{g} [D'_\mu(x), D'_\nu(x)]_- = U(x) F_{\mu\nu}(x) U(x)^\dagger. \quad (1.12)$$

Daraus lässt sich der eichinvariante Eichanteil \mathcal{L}_G der Lagrange-Dichte konstruieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_G(x) &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \text{Spur}(F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)) \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} \sum_{\mu, \nu=0}^3 F^{\mu\nu a}(x)F_{\mu\nu}^a(x).\end{aligned}\quad (1.13)$$

Insgesamt ist die eichinvariante Lagrange-Dichte \mathcal{L} für Dirac-Fermionen und Eichbosonen gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}_G(x) + \mathcal{L}_F(x) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \text{Spur}(F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)) + \bar{\psi}(x) \left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu D_\mu(x) - m \right) \psi(x).\end{aligned}\quad (1.14)$$

Daraus ergibt sich die Wirkung einer Yang-Mills-Theorie für Dirac-Fermionen mit der Eichgruppe $SU(N_c)$:

$$\begin{aligned}S[A, \psi, \bar{\psi}] &= \int \mathcal{L}(x) d^4x \\ &= -\frac{1}{2} \int \text{Spur} \left(\sum_{\mu, \nu=0}^3 F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) \right) d^4x \\ &\quad + \int \bar{\psi}(x) \left(i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu D_\mu(x) - m \right) \psi(x) d^4x.\end{aligned}\quad (1.15)$$

1.1.2. Wirkung der $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie im Kontinuum

Das hier betrachtete supersymmetrische Modell der $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie verwendet einen supersymmetrischen Generator. Die Beschreibung dieses Modells im Rahmen einer Yang-Mills-Theorie wurde 1973 von S. Ferrara und B. Zumino [13], [14] entwickelt und 1974 von A. Salam und J. Strathdee [15] auf nicht-abelsche Eichgruppen übertragen. Sie konstruierten eine Lagrange-Dichte, die sowohl unter Yang-Mills-Transformationen als auch unter supersymmetrischen Transformationen invariant ist.

Die einfachste Lagrange-Dichte dieses Modells enthält den Eichanteil (1.13) der Lagrange-Dichte und die entsprechenden fermionischen Superpartner der Gluonen, die Gluinos. Der Fermionen-Anteil der Lagrange-Dichte enthält neben den Eichfeldern $A_\mu^a(x)$ die Gluino-Felder $\lambda_\alpha^a(x)$. Damit die Eichfelder und die Fermionen-Felder die gleiche Anzahl an Freiheitsgraden besitzen, werden die Gluino-Felder durch Majorana-Felder λ in adjungierter Darstellung beschrieben. Diese Fermionen-Felder sind Elemente

te der Lie-Algebra mit den Komponenten

$$\begin{aligned}\lambda(x) &= \sum_{a=1}^{N_c^2-1} \lambda^a(x) T^a, \\ \lambda^a(x) &= 2 \operatorname{Spur}(\lambda(x) T^a)\end{aligned}\quad (1.16)$$

nach (A.12), deren adjungierte Felder (1.2) die Majorana-Eigenschaft

$$\bar{\lambda}(x) = \lambda^T(x) C \quad (1.17)$$

mit der Ladungskonjugationsmatrix $C = i\gamma_2\gamma_0$ erfüllen. Dadurch sind Felder und adjungierte Felder nicht mehr unabhängig, wodurch die Anzahl der Freiheitsgrade halbiert wird. Für Felder in der adjungierten Darstellung sind die lokalen Eichtransformationen mit $U(x) \in \operatorname{SU}(N_c)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}\lambda'(x) &= U(x)\lambda(x)U(x)^\dagger, \\ \bar{\lambda}'(x) &= U(x)\bar{\lambda}(x)U(x)^\dagger.\end{aligned}\quad (1.18)$$

Unter diesen Transformationen ist der Fermionen-Anteil der Lagrange-Dichte mit der kovarianten Ableitung (1.7) nicht invariant. Deshalb wird die Kopplung für Felder in der adjungierten Darstellung durch die symmetrische kovariante Ableitung

$$D_\mu \lambda(x) := \partial_\mu \lambda(x) + ig[A_\mu(x), \lambda(x)]_- \quad (1.19)$$

beschrieben. Die Komponenten dieser kovarianten Ableitung sind nach (1.4), (1.16) und (A.20) definiert durch:

$$\begin{aligned}D_\mu \lambda(x) &= \sum_{a=1}^{N_c^2-1} D_\mu \lambda^a(x) T^a, \\ D_\mu \lambda^a(x) &= \partial_\mu \lambda^a(x) - g \sum_{b,c=1}^{N_c^2-1} f^{abc} A_\mu^b(x) \lambda^c(x).\end{aligned}\quad (1.20)$$

Unter lokalen Eichtransformationen (1.18) und (1.6) mit $U(x) \in \operatorname{SU}(N_c)$ gilt:

$$D_\mu \lambda'(x) = \partial_\mu \lambda'(x) + ig[A'_\mu(x), \lambda'(x)]_- = U(x) (D_\mu \lambda(x)) U(x)^\dagger. \quad (1.21)$$

Daraus lässt sich der eichinvariante Fermionen-Anteil \mathcal{L}_F der Lagrange-Dichte für adjungierte Majorana-Fermionen konstruieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_F(x) &= \operatorname{Spur} \left(i\bar{\lambda}(x) \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu D_\mu \lambda(x) - m\bar{\lambda}(x)\lambda(x) \right) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} \sum_{\mu=0}^3 \bar{\lambda}^a(x) \gamma^\mu D_\mu \lambda^a(x) - \frac{m}{2} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} \bar{\lambda}^a(x) \lambda^a(x).\end{aligned}\quad (1.22)$$

Der Massenterm bricht die Supersymmetrie weich. Die vollständige Lagrange-Dichte ergibt sich aus diesem Fermionen-Anteil und dem Eichanteil (1.13). Der Fermionen-Anteil und der Eichanteil sind dabei unabhängig voneinander. Deshalb ist eine Beschreibung in der adjungierten Darstellung für Fermionen und in der fundamentalen Darstellung für Eichbosonen möglich.

Daraus ergibt sich die Wirkung einer Super-Yang-Mills-Theorie für adjungierte Majorana-Fermionen mit der Eichgruppe $SU(N_c)$:

$$\begin{aligned} S[A, \lambda] &= S_G[A] + S_F[A, \lambda] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=0}^3 \int \text{Spur} (F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x)) d^4x \\ &\quad + i \int \text{Spur} \left(\bar{\lambda}(x) \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu D_\mu \lambda(x) \right) d^4x - m \int \text{Spur} (\bar{\lambda}(x) \lambda(x)) d^4x. \end{aligned} \quad (1.23)$$

1.1.3. Pfadintegrale und euklidische Raum-Zeit

Zur Übertragung der Theorie von der kontinuierlichen Raum-Zeit auf eine diskrete Raum-Zeit wird die Minkowski-Raum-Zeit durch die euklidische Raum-Zeit ersetzt. Dann entsprechen Abstände euklidischen Abständen, wodurch Computersimulationen ermöglicht werden. Die folgenden Überlegungen sind [16] und [17] entnommen.

Der Erwartungswert einer quantenmechanischen Observablen O in Abhängigkeit eines Felds ϕ ist mit dem erzeugenden Funktional \mathcal{Z} durch das Pfadintegral

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \exp(iS^{(M)}[\phi]) O[\phi] \mathcal{D}[\phi], \\ \mathcal{Z} &= \int \exp(iS^{(M)}[\phi]) \mathcal{D}[\phi] \end{aligned} \quad (1.24)$$

gegeben. Dabei bezeichnet $S^{(M)}$ die Wirkung in der Minkowski-Raum-Zeit. In der Minkowski-Raum-Zeit hat das Pfadintegral für das Feld ϕ das Maß

$$\mathcal{D}[\phi] = \prod_x d\phi(x). \quad (1.25)$$

Haben die Generatoren der Zeittranslation ein positives Energiespektrum, ist eine analytische Fortsetzung $t \rightarrow -it$ der Zeit möglich. Für kontravariante Orte $x^{(M)} = (x^{(M)0}, x^{(M)1}, x^{(M)2}, x^{(M)3})$ in Minkowski-Raum-Zeit werden die euklidischen Komponenten für $i = 1, 2, 3$ definiert durch:

$$x^{(E)i} := x^{(M)i}, \quad x^{(E)4} := ix^{(M)0}. \quad (1.26)$$

Dann entsprechen raum-zeitliche Abstände euklidischen Abständen und Skalarprodukte dem euklidischen Skalarprodukt

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \sum_{\mu=1}^4 x^{(E)\mu} y^{(E)\mu} = \sum_{\mu,\nu=1}^4 \delta_{\mu\nu} x^{(E)\mu} y^{(E)\nu} \\ &= - \sum_{\mu,\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^{(M)\mu} y^{(M)\nu} = - \sum_{\mu=0}^3 x^{(M)\mu} y^{(M)\mu} \end{aligned} \quad (1.27)$$

mit der Metrik $\delta_{\mu\nu}$. Kovariante und kontravariante Komponenten sind im Euklidischen für alle $\mu = 1, 2, 3, 4$ identisch:

$$x_\mu^{(E)} = x^{(E)\mu}. \quad (1.28)$$

Diese Transformationen gelten für alle kovarianten Vektorfelder, wie zum Beispiel für Eichfelder A_μ . Werden die Dirac-Matrizen (A.4) in der euklidischen Raum-Zeit mit $i = 1, 2, 3$ durch

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(E)} &:= -i\gamma^{(M)i}, \\ \gamma_4^{(E)} &:= \gamma^{(M)0} \end{aligned} \quad (1.29)$$

definiert, so gelten:

$$\begin{aligned} i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^{(M)\mu} \partial_\mu^{(M)} &= - \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu^{(E)} \partial_\mu^{(E)}, \\ \sum_{\mu=0}^3 \gamma^{(M)\mu} A_\mu^{(M)} &= i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu^{(E)} A_\mu^{(E)}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Daraus folgen

$$i \sum_{\mu=0}^3 \gamma^{(M)\mu} D_\mu^{(M)}(x) = - \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu^{(E)} D_\mu^{(E)}(x) \quad (1.31)$$

für die kovariante Ableitung und

$$\sum_{\mu,\nu=0}^4 F^{(M)\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}^{(M)}(x) = \sum_{\mu,\nu=0}^4 F_{\mu\nu}^{(E)}(x) F_{\mu\nu}^{(E)}(x) \quad (1.32)$$

für den Feldstärketensor (1.10). Damit lässt sich die euklidische Wirkung nach $S^{(E)} = -iS^{(M)}$ aus der Minkowski-Wirkung (1.23) für adjungierte Majorana-Fermionen bestimmen:

$$\begin{aligned} S^{(E)}[A^{(E)}, \lambda] &= \frac{1}{2} \int \text{Spur} \left(\sum_{\mu,\nu=1}^4 F_{\mu\nu}^{(E)} F_{\mu\nu}^{(E)} \right) d^4 x^{(E)} \\ &\quad + \int \text{Spur} \left(\bar{\lambda} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu^{(E)} D_\mu^{(E)} \lambda \right) d^4 x^{(E)} + m \int \text{Spur} (\bar{\lambda} \lambda) d^4 x^{(E)}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Der Erwartungswert einer Observablen O ist dann allgemein durch

$$\begin{aligned}\langle O \rangle &= \frac{1}{Z} \int \exp(-S^{(E)}[\phi]) O[\phi] \mathcal{D}[\phi], \\ Z &= \int \exp(-S^{(E)}[\phi]) \mathcal{D}[\phi]\end{aligned}\tag{1.34}$$

gegeben. Im Folgenden werden alle Größen nur noch in der euklidischen Raum-Zeit mit dem Lorentz-Index $\mu = 1, 2, 3, 4$ angegeben. Die Kennzeichnung (E) wird unterdrückt.

1.2. Die $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Die Gitterfeldtheorie stellt eine mathematisch wohldefinierte Möglichkeit zur Berechnung einer Quantenfeldtheorie dar. Dabei wird die Raum-Zeit durch ein Gitter mit diskreten Abständen zwischen den einzelnen Gitterpunkten diskretisiert. Dadurch ergibt sich eine minimale Wellenlänge und so eine Ultraviolett-Regulierung, die die Berechnung ermöglicht. Bei der Diskretisierung der Raum-Zeit ist es zweckmäßig, alle Größen in der euklidischen Raum-Zeit zu betrachten, in der sich zeitliche und räumliche Koordinaten gleich verhalten. Die folgende Einführung in die Gitterfeldtheorie orientiert sich an den Darstellungen nach [18] und [19].

Zur Diskretisierung der Raum-Zeit wird das vierdimensionale Gitter

$$\Lambda_N := \{n = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^4 : 0 \leq n_\mu \leq N_\mu - 1\}\tag{1.35}$$

mit $N := |\Lambda_N| = N_1 N_2 N_3 N_4$ Gitterpunkten definiert. Jedem Punkt dieses Gitters lässt sich durch

$$x_\mu = n_\mu a\tag{1.36}$$

für $\mu = 1, 2, 3, 4$ ein Punkt $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ der Raum-Zeit zuordnen. So wird die Raum-Zeit durch dieses Gitter mit äquidistanten Punkten mit einem Gitterabstand a approximiert. Im Folgenden sei $N_1 = N_2 = N_3 = N_L$.

Mit einem solchen Gitter lässt sich ein physikalisches Volumen $L^3 T$ mit konstanten Längen $L = a N_L$ und $T = a N_4$ durch den Kontinuumsgrenzwert beschreiben. Dabei läuft der Gitterabstand a gegen Null und die Anzahl N der Gitterpunkte entsprechend gegen Unendlich, sodass L und T konstant bleiben. Dadurch wird die kontinuierliche Raum-Zeit des Volumens $L^3 T$ durch das Gitter $\{x : x = na, n \in \Lambda_N\}$ angenähert.

1.2.1. Funktionen auf dem Gitter

Eine beliebige stetige Funktion f auf dem Raum-Zeit-Volumen $L^3 T$ lässt sich durch eine entsprechende Funktion $f : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Gitter approximieren. Ist $\hat{\mu}$ der

Einheitsvektor in Richtung μ auf dem Gitter, so werden die partielle Rechtsableitung ∂_μ^R und die partielle Linksableitung ∂_μ^L der Funktion f auf dem Gitter definiert durch:

$$\begin{aligned}\partial_\mu^R f(n) &:= \frac{f(n + \hat{\mu}) - f(n)}{a}, \\ \partial_\mu^L f(n) &:= \frac{f(n) - f(n - \hat{\mu})}{a}.\end{aligned}\quad (1.37)$$

Damit werden die partielle Ableitung ∂_μ der Funktion f in Richtung μ und der d'Alembert-Operator \square auf dem Gitter definiert durch:

$$\begin{aligned}\partial_\mu f(n) &:= \frac{1}{2} (\partial_\mu^R f(n) + \partial_\mu^L f(n)) = \frac{f(n + \hat{\mu}) - f(n - \hat{\mu})}{2a}, \\ \square f(n) &:= \sum_{\rho=1}^4 \partial_\rho^R \partial_\rho^L f(n) = \sum_{\rho=1}^4 \frac{f(n + \hat{\rho}) - 2f(n) + f(n - \hat{\rho})}{a^2}.\end{aligned}\quad (1.38)$$

Sowohl die partielle Rechts- beziehungsweise Linksableitung als auch die partielle Ableitung konvergieren im Kontinuumsgrenzwert mit $a \rightarrow 0$ für stetige Funktionen gegen die partielle Ableitung im Kontinuum. Der Umstand, dass sich Größen im Kontinuum nicht eindeutig durch bestimmte Größen auf dem Gitter beschreiben lassen, ist wesentlich für die Verbesserung der Wirkung in den folgenden Kapiteln. Die partielle Ableitung auf dem Gitter approximiert die partielle Ableitung mit der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$, wogegen die partielle Rechts- und Linksableitung diese nur mit der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ approximieren.

Das Integral der Funktion f auf dem Gitter ergibt sich durch die Riemannsche Summe

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ a \rightarrow 0}} \sum_{n \in \Lambda_N} f(n) (\Delta x)^4 = \int_T \int_{L^3} f(x) d^3x dx_4 = \int f(x) d^4x,\quad (1.39)$$

wobei $\Delta x = a$ der Abstand der Gitterpunkte ist und

$$\sum_{n \in \Lambda_N} := \prod_{\mu=1}^4 \sum_{n_\mu=0}^{N_\mu-1}\quad (1.40)$$

verwendet wurde. Weiterhin wird das zu Λ_N zugehörige Impulsgitter definiert durch:

$$\tilde{\Lambda}_N := \left\{ p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{Z}^4 : p_\mu = \frac{2\pi}{aN_\mu} (k_\mu + \theta_\mu), -\frac{N_\mu}{2} + 1 \leq k_\mu \leq \frac{N_\mu}{2} \right\}. \quad (1.41)$$

Für ein gegebenes physikalisches Volumen und einen Gitterabstand a haben die Impulse einen Cut-Off $-\frac{\pi}{a} < p_\mu \leq \frac{\pi}{a}$ und dadurch eine natürliche Regularisierung durch das Gitter.

Die Fourier-Transformation $\tilde{f} : \tilde{\Lambda}_N \rightarrow \mathbb{R}$ einer Funktion $f : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Gitter lässt sich auf dem Impuls-Gitter mit $p \cdot n = \sum_{\mu=1}^4 p_\mu n_\mu = \frac{2\pi}{a} \sum_{\mu=1}^4 \frac{k_\mu n_\mu}{N_\mu}$ definieren:

$$\tilde{f}(p) := a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} f(n) e^{-ip \cdot na}. \quad (1.42)$$

Es gelten

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n \in \Lambda_N} e^{i(p-p') \cdot na} &= \delta_{p,p'}, \\ \frac{1}{N} \sum_{p \in \tilde{\Lambda}_N} e^{ip \cdot (n-n')a} &= \delta_{n,n'}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

wobei

$$\sum_{p \in \tilde{\Lambda}_N} := \prod_{\mu=1}^4 \sum_{k_\mu = -N_\mu/2+1}^{N_\mu/2} \quad (1.44)$$

verwendet wurde. Damit ist die inverse Fourier-Transformation gegeben durch:

$$f(n) = \frac{1}{a^4 N} \sum_{p \in \tilde{\Lambda}_N} \tilde{f}(p) e^{ip \cdot na}. \quad (1.45)$$

Für einen festen Gitterabstand a und ein festes physikalisches Volumen ergibt sich

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p \in \tilde{\Lambda}_N} \tilde{f}(p) \frac{(\Delta p)^4}{(2\pi)^4} = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \tilde{f}(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \quad (1.46)$$

wobei $\Delta p_\mu = \frac{2\pi}{aN_\mu}$ der Abstand der Punkte des Impulsgitters ist. Die Fourier-Transformation auf dem Gitter entspricht in diesem Grenzwert der Fourier-Transformation im Kontinuum, bei der die Impulse auf die Brillouin-Zone $(-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$ beschränkt sind. Deshalb werden im Folgenden auf dem Gitter die Notationen

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} &:= \frac{1}{a^4 N} \sum_{p \in \tilde{\Lambda}_N}, \\ (2\pi)^4 \delta(p, p') &:= a^4 N \delta_{p,p'} = a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} e^{i(p-p') \cdot na} \end{aligned} \quad (1.47)$$

verwendet.

1.2.2. Naive Diskretisierung der Fermionen-Wirkung

Wie bereits für die Wirkung im Kontinuum wird zunächst die Wirkung einer Yang-Mills-Theorie für die Eichgruppe $SU(N_c)$ für Dirac-Felder $\psi_\alpha^i(n)$ und Eichfelder $A_\mu^a(n)$ auf dem Gitter konstruiert. Für freie Fermionen ergibt sich eine naive Fermionen-Wirkung auf dem Gitter mit den Diskretisierungen (1.38) der partiellen Ableitung und (1.39) des Integrals direkt aus der Lagrange-Dichte (1.1) für freie Fermionen im Kontinuum:

$$S_F^{(0)}[\psi, \bar{\psi}] = a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \left(\bar{\psi}(n) \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{\psi(n + \hat{\mu}) - \psi(n - \hat{\mu})}{2a} + m \bar{\psi}(n) \psi(n) \right). \quad (1.48)$$

Auf dem Gitter entsprechen die lokalen Eichtransformationen (1.3) der Dirac-Felder den Transformationen

$$\begin{aligned}\psi'(n) &= U(n)\psi(n), \\ \bar{\psi}'(n) &= \bar{\psi}(n)U(n)^\dagger\end{aligned}\tag{1.49}$$

mit $U(n) \in \mathrm{SU}(N_c)$. Jedoch sind die diskretisierten Ableitungen in der naiven Fermionen-Wirkung im Allgemeinen nicht invariant unter diesen Transformationen. Zur Konstruktion einer eichinvarianten Fermionen-Wirkung auf dem Gitter werden deshalb Felder $U_\mu(n) \in \mathrm{SU}(N_c)$ der Eichgruppe eingeführt, die auf jedem Gitterpunkt definiert sind und von einem Richtungsindex μ abhängen. Sie werden als Linkvariablen bezeichnet, da sie den Gitterpunkt n mit dem Gitterpunkt $n + \hat{\mu}$ verbinden. Dabei wird zusätzlich $U_0(n) := \mathbb{1}$ definiert. Die Linkvariable $U_{-\mu}(n)$, die auch auf dem Punkt n definiert ist, verbindet diesen Punkt hingegen mit dem Punkt $n - \hat{\mu}$ in entgegengesetzter Richtung. Insbesondere verbindet das Produkt der Linkvariablen $U_\mu(n - \hat{\mu})$ und $U_{-\mu}(n)$ den Gitterpunkt $n - \hat{\mu}$ mit sich selbst. Aus Gründen der Konsistenz wird daher

$$U_{-\mu}(n) = U_\mu(n - \hat{\mu})^\dagger\tag{1.50}$$

gefordert. Linkvariablen entsprechen deshalb Paralleltransportern auf den Gitterkanten.

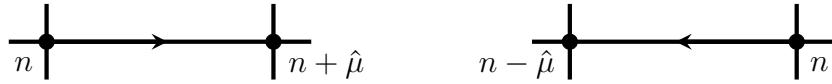


Abbildung 1.1.: Linkvariablen $U_\mu(n)$ und $U_{-\mu}(n)$

Sie lassen sich als diskretisierte Version der Eichtransporter interpretieren, die im Kontinuum zwei Raum-Zeit-Punkte miteinander verbinden. Zu einer Linkvariable $U_\mu(n) \in \mathrm{SU}(N_c)$ existiert nach (A.9) ein Feld $A_\mu(n) \in \mathfrak{su}(N_c)$ mit

$$U_\mu(n) = \exp(iagA_\mu(n)).\tag{1.51}$$

Damit wird das Integral des Pfades von n nach $n + \hat{\mu}$ durch $agA_\mu(n)$ angenähert. Es zeigt sich, dass die Felder $A_\mu(n)$ den Eichfeldern auf dem Gitter entsprechen. Nach (1.50) folgt:

$$A_{-\mu}(n) = -A_\mu(n - \hat{\mu}).\tag{1.52}$$

Die Kopplung der Eichfelder durch die Linkvariablen an die Dirac-Felder wird durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu(n)\psi(n) := \frac{U_\mu(n)\psi(n + \hat{\mu}) - U_{-\mu}(n)\psi(n - \hat{\mu})}{2a}\tag{1.53}$$

beschrieben. Mit der Entwicklung $U_\mu(n) = \mathbb{1} + i a g A_\mu(n) + \mathcal{O}(a^2)$ nach (1.51) und der Taylor-Entwicklung $\psi(n + \hat{\mu}) = \psi(n) + \mathcal{O}(a)$ zeigt sich, dass diese eine Diskretisierung der kovarianten Ableitung (1.7) im Kontinuum ist:

$$D_\mu(x)\psi(x) = (\partial_\mu + i g A_\mu(n))\psi(n) + \mathcal{O}(a). \quad (1.54)$$

Dies bestätigt die Interpretation der Felder $A_\mu(n)$ als Eichfelder auf dem Gitter. Damit lässt sich mit $\gamma_{-\mu} := -\gamma_\mu$ die eichinvariante naive Fermionen-Wirkung auf dem Gitter konstruieren:

$$\begin{aligned} S_F[\psi, \bar{\psi}, U] &= a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \bar{\psi}(n) \left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{U_\mu(n)\psi(n + \hat{\mu}) - U_{-\mu}(n)\psi(n - \hat{\mu})}{2a} + m\psi(n) \right) \\ &= a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \bar{\psi}(n) \left(\frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \gamma_\mu U_\mu(n)\psi(n + \hat{\mu}) + m\psi(n) \right). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Im naiven Kontinuumsgrenzwert für $a \rightarrow 0$ konvergiert diese gegen die entsprechende Fermionen-Wirkung (1.15) im Kontinuum.

1.2.3. Wilsonsche Fermionen-Wirkung

Der Fermionen-Propagator, der sich aus der naiven Fermionen-Wirkung (1.55) ergibt, hat zusätzlich zum Pol des entsprechenden Propagators im Kontinuum 15 weitere Pole in den Ecken der Brioullin-Zone. Jedoch stimmt nur der Pol $p = (0, 0, 0, 0)$ mit dem einzelnen Fermion überein, das durch den Propagator im Kontinuum beschrieben wird. Diese 15 zusätzlichen, unphysikalischen Teilchen für Impulskomponenten $p_\mu = 0$ oder $p_\mu = \pi/a$ werden als Doppler bezeichnet.

Nach dem no-go Theorem nach H. B. Nielsen und M. Ninomiya [20] von 1981 ist es nicht möglich, eine Wirkung auf dem Gitter zu konstruieren, die die Doppler entfernt und die chirale Symmetrie erhält. Eine Möglichkeit, die Doppler zu entfernen, ist die Verwendung von Wilson-Fermionen nach K. G. Wilson. Dabei wird ein weiterer Term zur Fermionen-Wirkung hinzugefügt, durch den die zusätzlichen Pole verschwinden:

$$\begin{aligned} S_F[U, \psi, \bar{\psi}] &= a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \left(m + \frac{4r}{a} \right) \bar{\psi}(n)\psi(n) \\ &\quad + a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \bar{\psi}(n) \left(\frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\gamma_\mu - r) U_\mu(n)\psi(n + \hat{\mu}) \right). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Dabei ist r der sogenannte Wilson-Parameter. Diese Wirkung ist eichinvariant, erhält den physikalischen Pol und entspricht für $r = 0$ der naiven Fermionen-Wirkung. Der zusätzliche Term entspricht dem Hinzufügen eines Teilchens der Masse $m + \frac{4r}{a}$. Deshalb verschwindet das Teilchen im Kontinuumsgrenzwert aus dem physikalischen Spektrum

und die Wilsonsche Fermionen-Wirkung konvergiert gegen die Wirkung (1.15) im Kontinuum.

Diese Wirkung lässt sich durch den Wilson-Dirac-Operator D_{Wilson} für Dirac-Fermionen ausdrücken:

$$S_F[U, \psi, \bar{\psi}] = a^4 \sum_{n, m \in \Lambda_N} \bar{\psi}(n) D_{\text{Wilson}}(n|m) \psi(m),$$

$$D_{\text{Wilson}}(n|m) = \left(m + \frac{4r}{a} \right) \delta_{n,m} + \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\gamma_\mu - r) U_\mu(n) \delta_{n+\hat{\mu}, m}. \quad (1.57)$$

Wird der Wilson-Parameter nach [21] durch

$$r = 1 \quad (1.58)$$

gewählt, so werden Zustände mit unphysikalischen Energien beseitigt.

1.2.4. Wilsonsche Eichwirkung

Da die Linkvariablen auf dem Gitter den Eichtransportern im Kontinuum entsprechen, liegt es nahe, aus diesen eine Eichwirkung auf dem Gitter zu konstruieren. Dazu wird ein Produkt von Paralleltransportern entlang einer geschlossenen Bahn betrachtet. Im einfachsten Fall einer solchen Bahn auf dem Gitter, einem Quadrat, ist dies durch die Plaketten

$$U_{\mu\nu}(n) := U_\mu(n) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_{-\mu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu}) U_{-\nu}(n + \hat{\nu})$$

$$= U_\mu(n) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_\mu(n + \hat{\nu})^\dagger U_\nu(n)^\dagger \quad (1.59)$$

gegeben.

Aus diesen Plaketten konstruierte K. G. Wilson [1] 1974 eine eichinvariante Eichwirkung auf dem Gitter für die Eichgruppe $SU(N_c)$:

$$S_G[U] = \frac{1}{g^2} \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^4 \text{Re Spur} (1 - U_{\mu\nu}(n))$$

$$= \beta \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu < \nu}}^4 \left(1 - \frac{1}{N_c} \text{Re Spur} U_{\mu\nu}(n) \right) \quad (1.60)$$

Dabei enthält der Parameter $\beta = 2N_c/g^2$ die Kopplung. Mit der Entwicklung der Linkvariablen nach (1.51) lassen sich auch die Plaketten entwickeln:

$$U_{\mu\nu}(n) = \exp \left(i a^2 g \left(\partial_\mu A_\nu(n) - \partial_\nu A_\mu(n) + i g [A_\mu(n), A_\nu(n)]_- \right) + \mathcal{O}(a^3) \right)$$

$$= 1 + i a^2 g F_{\mu\nu}(n) - \frac{a^4}{2} g^2 F_{\mu\nu}(n)^2 + \mathcal{O}(a^5). \quad (1.61)$$

Daher konvergiert die Wilsonsche Eichwirkung wie die Fermionen-Wirkung auf dem Gitter im naiven Kontinuumsgrenzwert für $a \rightarrow 0$ gegen die entsprechende Eichwirkung (1.15) im Kontinuum. Insgesamt ist die eichinvariante Wirkung für Dirac-Fermionen und Eichbosonen auf dem Gitter mit (1.57) gegeben durch:

$$S_G[U] + S_F[U, \psi, \bar{\psi}] = \frac{1}{g^2} \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^4 \text{Re Spur} (\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)) + a^4 \sum_{n, m \in \Lambda_N} \bar{\psi}(n) D_{\text{Wilson}}(n|m) \psi(m). \quad (1.62)$$

1.2.5. Wirkung der $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Zur Konstruktion der Wirkung der $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter werden analog zu den Dirac-Feldern die Majorana-Felder $\lambda(n)$ nach (1.16) in adjungierter Darstellung

$$\lambda(n) = \sum_{a=1}^{N_c^2-1} \lambda^a(n) T^a \quad (1.63)$$

auf dem Gitter betrachtet. Auf dem Gitter entsprechen die lokalen Eichtransformationen (1.18) dieser Felder den Transformationen

$$\begin{aligned} \lambda'(n) &= U(n) \lambda(n) U(n)^\dagger, \\ \bar{\lambda}'(n) &= U(n) \bar{\lambda}(n) U(n)^\dagger \end{aligned} \quad (1.64)$$

mit $U(n) \in \text{SU}(N_c)$. Analog zur kovarianten Ableitung (1.53) für Dirac-Felder auf dem Gitter wird die Kopplung der Eichfelder an die adjungierten Majorana-Felder durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu \lambda(n) = \frac{U_\mu(n) \lambda(n + \hat{\mu}) U_\mu(n)^\dagger - U_{-\mu}(n) \lambda(n - \hat{\mu}) U_{-\mu}(n)^\dagger}{2a} \quad (1.65)$$

beschrieben. Mit der Entwicklung $U_\mu(n) = \mathbb{1} + i a g A_\mu(n) + \mathcal{O}(a^2)$ nach (1.51) und der Taylor-Entwicklung $\psi(n + \hat{\mu}) = \psi(n) + \mathcal{O}(a)$ zeigt sich auch hier, dass diese eine Diskretisierung der kovarianten Ableitung (1.19) im Kontinuum ist:

$$D_\mu \lambda(n) = \partial_\mu \lambda(n) + i g [A_\mu(n), \lambda(n)]_- + \mathcal{O}(a). \quad (1.66)$$

Damit lässt sich wie nach (1.68) die eichinvariante Wilsonsche Fermionen-Wirkung für adjugierte Majorana-Fermionen konstruieren:

$$\begin{aligned}
 S_F[V, \lambda] &= a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \left(m + \frac{4r}{a} \right) \text{Spur} \left(\bar{\lambda}(n) \lambda(n) \right) \\
 &\quad + a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \text{Spur} \left(\bar{\lambda}(n) \left(\frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\gamma_\mu - r) U_\mu(n) \lambda(n + \hat{\mu}) U_\mu(n)^\dagger \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \left(m + \frac{4r}{a} \right) \bar{\lambda}^a(n) \lambda^a(n) \\
 &\quad + \sum_{b,a=1}^{N_c^2-1} a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \bar{\lambda}^b(n) \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\gamma_\mu - r) \text{Spur} \left(T^b U_\mu(n) T^a U_\mu(n)^\dagger \right) \lambda^a(n + \hat{\mu}). \tag{1.67}
 \end{aligned}$$

Diese Wirkung entspricht den in [22], [23] verwendeten Wirkungen, deren Verbesserung in dieser Arbeit untersucht wird. Wie im Fall der Dirac-Fermionen lässt sich diese Wirkung durch den Wilson-Dirac-Operator D_{Wilson} für adjugierte Majorana-Fermionen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 S_F[V, \lambda] &= \frac{1}{2} \sum_{b,a=1}^{N_c^2-1} a^4 \sum_{n,m \in \Lambda_N} \bar{\lambda}^b(n) D_{\text{Wilson}}(n|m)^{ba} \lambda^a(m), \\
 D_{\text{Wilson}}(n|m)^{ba} &= \left(m + \frac{4r}{a} \right) \delta_{n,m} \delta^{ba} + \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\gamma_\mu - r) V_\mu^{ba}(n) \delta_{n+\hat{\mu},m}. \tag{1.68}
 \end{aligned}$$

Dabei wird die Matrix V_μ verwendet, deren Komponenten durch

$$V_\mu^{ba}(n) = 2 \text{Spur} \left(T^b U_\mu(n) T^a U_\mu(n)^\dagger \right) = 2 \text{Spur} \left(U_\mu(n)^\dagger T^b U_\mu(n) T^a \right) \tag{1.69}$$

definiert sind. Diese Matrix entspricht den Linkvariablen (1.51) in der adjunktiven Darstellung (A.42). Für diese gilt nach (1.50):

$$\begin{aligned}
 V_{-\mu}^{ba}(n) &= 2 \text{Spur} \left(T^b U_{-\mu}(n) T^a U_{-\mu}(n)^\dagger \right) \\
 &= 2 \text{Spur} \left(T^b U_\mu(n - \hat{\mu})^\dagger T^a U_\mu(n - \hat{\mu}) \right) \\
 &= V_\mu^{ba}(n - \hat{\mu})^\dagger. \tag{1.70}
 \end{aligned}$$

Insgesamt ist die eichinvariante Wirkung für adjungierte Majorana-Fermionen und Eichbosonen auf dem Gitter mit der Eichwirkung nach (1.60) gegeben durch:

$$\begin{aligned}
S_G[U] + S_F[V, \lambda] = & \beta \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu < \nu}}^4 \left(1 - \frac{1}{N_c} \operatorname{Re} \operatorname{Spur} U_{\mu\nu}(n) \right) \\
& + \frac{1}{2} a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} \left(m + \frac{4r}{a} \right) \bar{\lambda}^a(n) \lambda^a(n) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{b,a=1}^{N_c^2-1} a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \bar{\lambda}^b(n) \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\gamma_\mu - r) V_\mu^{ba}(n) \lambda^a(n + \hat{\mu}). \quad (1.71)
\end{aligned}$$

Im naiven Kontinuumsgrenzwert für $a \rightarrow 0$ konvergiert diese gegen die entsprechende Wirkung (1.23) im Kontinuum.

1.2.6. Pfadintegrale auf dem Gitter

Wie im Kontinuum ergibt sich der Erwartungswert einer quantenmechanischen Observablen O in Abhängigkeit der Gluino-Felder λ und der Eichfelder U mit dem erzeugenden Funktional \mathcal{Z} durch das Pfadintegral

$$\begin{aligned}
\langle O \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \int O[\lambda, U] \exp(-S[\lambda, U]) \mathcal{D}[\lambda] \mathcal{D}[U], \\
\mathcal{Z} &= \int \exp(-S[\lambda, U]) \mathcal{D}[\lambda] \mathcal{D}[U] \quad (1.72)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}[\lambda] &= \prod_{n \in \Lambda_N} \prod_{\alpha, a} d\lambda_\alpha^a(n), \\
\mathcal{D}[U] &= \prod_{n \in \Lambda_N} \prod_{\mu=1}^4 dU_\mu(n). \quad (1.73)
\end{aligned}$$

Dabei muss die Majorana-Eigenschaft der Fermionen berücksichtigt werden. Erwartungswerte von Produkten von Fermionen-Feldern sind weiterhin unter Vertauschungen der Quanten-Zahlen n, α, a antisymmetrisch. Dies wird durch die Verwendung von Graßmann-Zahlen berücksichtigt. Für Einzelheiten sei an dieser Stelle nur auf [18] oder [16] verwiesen.

2. $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung der Fermionen-Wirkung

Jede Diskretisierung der Wirkung einer Yang-Mills-Theorie führt zu unerwünschten Diskretisierungseffekten. Diese verschwinden zwar im Kontinuumsgrenzwert für $a \rightarrow 0$, jedoch sind Simulationen mit beliebig kleinen Gitterabständen sehr aufwendig. Bei der hier betrachteten Diskretisierung sind diese Effekte nach (1.66) der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ bei der Fermionen-Wirkung und nach (1.61) der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$ bei der Eichwirkung.

Die Beschreibung von Funktionen auf dem Gitter, die zum selben Kontinuumsgrenzwert führt, ist nicht eindeutig. K. Symanzik kam deshalb 1983 auf die Idee, zur Wirkung einer gewählten Diskretisierung Terme hinzuzufügen, die im Kontinuumsgrenzwert verschwinden [24], [25]. Durch die Wahl passender Terme lassen sich die Diskretisierungseffekte verringern. Diese Effekte der Fermionen-Wirkung der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ sollen durch Hinzufügen eines geeigneten Terms um eine Ordnung verringert werden. Für die QCD mit Wilson-Fermionen wurde dies 1985 von B. Sheikholeslami und R. Wohlert systematisch formuliert [21]. Insgesamt ergeben sich dann Diskretisierungseffekte der Ordnung $\mathcal{O}(a^2)$. Eine solche Verbesserung heißt $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung.

2.1. Symanzik-Verbesserung

Zuerst wird die $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung für Dirac-Fermionen vorgestellt, die sich wesentlich an der Beschreibung in [18] orientiert. Dies wird dann auf adjungierte Majorana-Fermionen übertragen. Der Ausgangspunkt einer solchen Verbesserung der Fermionen-Wirkung ist die einfache Diskretisierung (1.62). Die möglichen Korrekturterme werden im Kontinuum identifiziert und nach Symmetrien und ihrer Dimension geordnet. Dann werden diskretisierte Versionen der Korrekturterme mit passenden Koeffizienten so hinzugefügt, dass die Korrekturen bis zur gewünschten Ordnung verschwinden. Aufgrund der Nichtlinearität der Theorie und der notwendigen Renormalisierung lassen sich die zu bestimmenden Koeffizienten nur störungstheoretisch oder mit anderen aufwändigen Methoden bestimmen.

Die effektive Theorie lässt sich im Kontinuum durch eine Lagrange-Dichte für Dirac-

Fermionen beschreiben, die sich in eine Potenzreihe in der Gitterkonstanten a entwickeln lässt:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + a\mathcal{L}_1(x) + a^2\mathcal{L}_2(x) \dots \quad (2.1)$$

Dabei ist \mathcal{L}_0 die Lagrange-Dichte (1.14) für Dirac-Fermionen im Kontinuum. Die Terme \mathcal{L}_k für $k \geq 1$ sind zusätzliche Korrekturterme höherer Ordnung. Diese werden so aus Produkten von Fermionen- und Eichbosonenfeldern zusammengesetzt, dass sie die Dimension $4+k$ haben. Dann haben die Terme $a^k\mathcal{L}_k$ die Dimension der unverbesserten Lagrange-Dichte.

Für eine $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung werden nur Terme erster Ordnung hinzugefügt. In der allgemeinsten Form kann der führende Korrekturterm \mathcal{L}_1 als Linearkombination

$$\mathcal{L}_1(x) = c_1 O_1(x) + c_2 O_2(x) + c_3 O_3(x) + c_4 O_4(x) + c_5 O_5(x) \quad (2.2)$$

von Operatoren

$$\begin{aligned} O_1(x) &= \bar{\psi}(x) \left(\frac{g}{2i} \sum_{\mu, \nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right) \psi(x) \\ O_2(x) &= \left(\sum_{\mu=1}^4 D_\mu(x) D_\mu(x) \bar{\psi}(x) \right) \psi(x) + \bar{\psi}(x) \left(\sum_{\mu=1}^4 D_\mu(x) D_\mu(x) \psi(x) \right) \\ O_3(x) &= mg^2 \text{Spur} \left(\sum_{\mu, \nu=1}^4 F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \right) \\ O_4(x) &= m \left(\sum_{\mu=1}^4 D_\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \right) \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu D_\mu(x) \psi(x) \right) \\ O_5(x) &= m^2 \bar{\psi}(x) \psi(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

der Dimension 5 ausgedrückt werden. Dies sind alle Terme dieser Dimension, die die Symmetrien der Wirkung haben. Dabei sind $F_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor (1.10)

$$F_{\mu\nu}(x) = -\frac{i}{g} [D_\mu(x), D_\nu(x)]_- \quad (2.4)$$

und $\sigma_{\mu\nu}$ definiert durch

$$\sigma_{\mu\nu} := \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]_- \quad (2.5)$$

Durch Anwenden der Feldgleichung ergeben sich mit $\delta_{\mu\nu} = \gamma_\mu \gamma_\nu - \sigma_{\mu\nu}$ nach (A.3) zwei Relationen zwischen diesen Termen:

$$\begin{aligned} O_2(x) &= O_1(x) + 2O_5(x), \\ O_4(x) &= -2O_5(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dadurch lassen sich die Operatoren O_2 und O_4 eliminieren:

$$\mathcal{L}_1(x) = (c_1 + c_2)O_1(x) + c_3O_3(x) + (c_5 + 2c_2 - 2c_4)O_5(x). \quad (2.7)$$

Die Terme O_3 und O_5 sind bis auf die Vorfaktoren bereits in der unverbesserten Lagrange-Dichte (1.14) enthalten, sodass diese durch Neudefinition der nackten Parameter m und g eingebunden werden können. Deshalb ist es für eine $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung der Wirkung ausreichend, den Pauli-Term O_1 mit dem einzigen verbleibenden Koeffizienten $c := 2(c_1 + c_2)$ zum Fermionen-Anteil der Lagrange-Dichte für Dirac-Fermionen in fundamentaler Darstellung hinzuzufügen:

$$\mathcal{L}_F(x) = \bar{\psi}(x) \left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu D_\mu(x) + m \right) \psi(x) + a \frac{c}{2} \bar{\psi}(x) \left(\frac{g}{2i} \sum_{\mu,\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x) \right) \psi(x). \quad (2.8)$$

2.2. Der Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient c_{sw}

Zur Diskretisierung der $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung der Wirkung wird eine symmetrisierte Diskretisierung des Feldstärketensors (1.10) auf dem Gitter benötigt. Dazu wird die symmetrisierte Summe

$$Q_{\mu\nu}(n) := U_{\mu,\nu}(n) + U_{\nu,-\mu}(n) + U_{-\mu,-\nu}(n) + U_{-\nu,\mu}(n) \quad (2.9)$$

von Plaketten (1.59) in der μ - ν -Ebene verwendet. Diese lassen sich nach (1.61) in der Form

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}(n) - Q_{\nu\mu}(n) &= iag^2 \left(F_{\mu,\nu}(n) + F_{\nu,-\mu}(n) + F_{-\mu,-\nu}(n) + F_{-\nu,\mu}(n) \right. \\ &\quad \left. - F_{\nu,\mu}(n) - F_{\mu,-\nu}(n) - F_{-\nu,-\mu}(n) - F_{-\mu,\nu}(n) + \mathcal{O}(a^2) \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

entwickeln. Dabei gelten

$$\begin{aligned} F_{\nu,\mu}(n) &= -F_{\mu,\nu}(n) \\ F_{\mu,-\nu}(n) &= -F_{\nu,\mu}(n) + \mathcal{O}(a) \end{aligned} \quad (2.11)$$

mit $\partial_{-\mu} A_\nu(n) = -\partial_\mu A_\nu(n)$ nach (1.38) und $A_{-\mu}(n) = -A_\mu(n) + \mathcal{O}(a)$ nach (1.52). Eine mögliche symmetrisierte Diskretisierung des Feldstärketensors ist deswegen gegeben durch

$$F_{\mu\nu}(n) = -\frac{i}{g} \frac{1}{8a^2} (Q_{\mu\nu}(n) - Q_{\nu\mu}(n)) + \mathcal{O}(a). \quad (2.12)$$

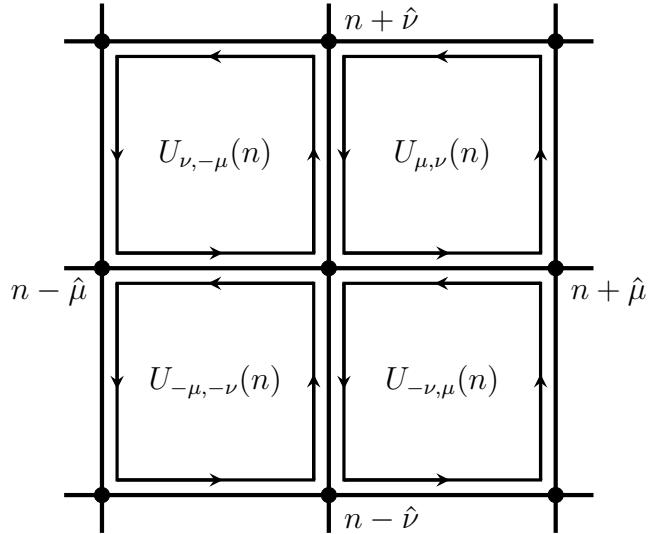


Abbildung 2.1.: Grafische Darstellung der Summe $Q_{\mu\nu}(n)$ der Plaketten in der μ - ν -Ebene

Da die Form dieser Terme an ein Kleeblatt erinnert, wird dies auch als Clover-Term und die $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung der Wirkung als Clover-Verbesserung bezeichnet. Die Fermionen-Wirkung für diese Verbesserung lässt sich auf dem Gitter durch einen Dirac-Operator D für Dirac-Fermionen ausdrücken:

$$S_F[U, \psi, \bar{\psi}] = a^4 \sum_{n, m \in \Lambda_N} \bar{\psi}(n) D(n|m) \psi(m),$$

$$D(n|m) = D_{\text{Wilson}}(n|m) + D_{\text{Clover}}(n|m). \quad (2.13)$$

Zusätzlich zum Wilson-Dirac-Operator (1.57) ist

$$D_{\text{Clover}}(n|m) = -\frac{c_{\text{sw}}}{2a} \frac{1}{16} \sum_{\mu, \nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} (Q_{\mu\nu}(n) - Q_{\nu\mu}(n)) \delta_{n,m} \quad (2.14)$$

der Dirac-Operator des Clover-Terms. Der Koeffizient c_{sw} heißt nach den Autoren von [21] Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient.

Bei der Beschreibung von adjungierten Majorana-Fermionen wird aufgrund des anderen Transformationsverhaltens auch für die Linkvariablen (1.69) und damit für die Plaketten in der Diskretisierung des Feldstärketensors die adjungierte Darstellung

$$V_{\mu\nu}^{ba}(n) = \left(V_{\mu}(n) V_{\nu}(n + \hat{\mu}) V_{\mu}(n + \hat{\nu})^{\dagger} V_{\nu}(n)^{\dagger} \right)^{ba} \quad (2.15)$$

verwendet. Mit $c_{\text{sw}} \rightarrow \frac{1}{2} c_{\text{sw}}$ ^{2.1} gilt dann für die Fermionen-Wirkung (1.68) für adjungierte

^{2.1}Durch diese Wahl des Koeffizienten stimmen der Wert für Dirac-Fermionen und adjungierte Majorana-Fermionen auf Tree-Level überein.

gierte Fermionen mit Clover-Verbesserung:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{F}}[V, \lambda] = & \frac{1}{2} a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} \left(m + \frac{4r}{a} \right) \bar{\lambda}^a(n) \lambda^a(n) \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{b,a=1}^{N_c^2-1} a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \bar{\lambda}^b(n) \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\gamma_\mu - r) V_\mu^{ba}(n) \lambda^a(n + \hat{\mu}) \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{b,a=1}^{N_c^2-1} a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \bar{\lambda}^b(n) \frac{c_{\text{SW}}}{2a} \frac{1}{16} \sum_{\mu,\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} (Q_{\mu\nu}^{ba}(n) - Q_{\nu\mu}^{ba}(n)) \lambda^a(n). \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Diese Wirkung lässt sich durch einen Dirac-Operator ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 S_{\text{F}}[V, \lambda] = & \frac{1}{2} \sum_{b,a=1}^{N_c^2-1} a^4 \sum_{n,m \in \Lambda_N} \bar{\lambda}^b(n) D(n|m)^{ba} \lambda^a(m), \\
 D(n|m)^{ba} = & D_{\text{Wilson}}(n|m)^{ba} + D_{\text{Clover}}(n|m)^{ba}. \quad (2.17)
 \end{aligned}$$

Zusätzlich zum Dirac-Operator D_{Wilson} ist

$$D_{\text{Clover}}(n|m)^{ba} = -\frac{c_{\text{SW}}}{2a} \frac{1}{16} \sum_{\mu,\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} (Q_{\mu\nu}^{ba}(n) - Q_{\nu\mu}^{ba}(n)) \delta_{n,m} \quad (2.18)$$

der Dirac-Operator des Clover-Terms für adjugierte Majorana-Fermionen.

Der Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient c_{SW} soll im Folgenden störungstheoretisch so bestimmt werden, dass die Diskretisierungseffekte der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ verschwinden.

3. Störungstheorie der $\mathcal{N} = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Bereits durch die Diskretisierung durch das Gitter werden nicht-störungstheoretische Berechnungen ermöglicht. Dennoch ist die Störungstheorie auch auf dem Gitter ein hilfreiches Instrument. Dabei kommt es zu einer zusätzlichen Regularisierung ähnlich der Störungstheorie im Kontinuum, zu der es jedoch wesentliche Unterschiede gibt.

Im Rahmen der Störungstheorie wird die Wirkung in Ordnungen der Kopplungskonstanten g entwickelt. Prozesse beliebiger Ordnungen lassen sich dann entsprechend der Feynman-Regeln aus den Propagatoren und Wechselwirkungsvertizes konstruieren. Im Gegensatz zur Störungstheorie im Kontinuum ergeben sich auf dem Gitter zusätzliche Wechselwirkungsvertizes in jeder Ordnung von g und es muss die Beschränkung der Impulse auf die erste Brillouin-Zone berücksichtigt werden.

Um den Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizienten störungstheoretisch bis zur 1-Loop-Ordnung zu berechnen, werden Wechselwirkungsvertizes bis zur dritter Ordnung in g benötigt. Ausgangspunkt zur Bestimmung dieser Vertizes sind die Wilsonsche Eichwirkung (1.60)

$$S_G[U] = \frac{1}{g^2} \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^4 \text{Re Spur} (\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)) \quad (3.1)$$

und die Wilsonsche Fermionen-Wirkung (2.17)

$$S_F[V, \lambda] = \frac{1}{2} \sum_{b,a=1}^{N_c^2-1} a^4 \sum_{n,m \in \Lambda_N} \bar{\lambda}^b(n) D(n|m)^{ba} \lambda^a(m) \quad (3.2)$$

mit Clover-Verbesserung. Die Wechselwirkung ist in diesen Wirkungen in den Linkvariablen enthalten. Diese lassen sich in den Eichfeldern entwickeln, wodurch sich eine Störreihe in g ergibt. Anschließend werden die Eichfelder durch die Fourier-Komponenten \tilde{A}_μ nach (1.45) ausgedrückt:

$$A_\mu(n) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \tilde{A}_\mu(k) e^{ik \cdot (n + \frac{\mu}{2})a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (3.3)$$

Da die Eichfelder durch die Linkvariablen benachbarte Gitterpunkte verbinden, wird die Fourier-Transformation der Eichfelder auf dem Gitter zwischen den Gitterpunkten definiert. Durch die Wahl des Vorzeichens der Fourier-Transformation der Eichfelder sind Eichbosonen grundsätzlich in die Vertizes einlaufend.

Die Entwicklung der Eichwirkung kann vollständig von [16] übernommen werden, da für das in dieser Arbeit betrachtete Modell dieselbe Eichwirkung verwendet wird. Die Fermionen-Wirkung wird analog zum Vorgehen in [16] entwickelt. Dabei wird zusätzlich der Clover-Term entwickelt. Die adjungierte Darstellung der Fermionen-Felder wird in den Vertizes berücksichtigt.

Die Majorana-Eigenschaft kann auf verschiedene Weisen berücksichtigt werden. Die von C. Gebert [26] vorgestellte Möglichkeit verwendet zusätzliche fermionenzahlverletzende Vertizes. Dies ist jedoch bei Rechnungen in der 1-Loop-Ordnung äußerst aufwändig. Alternativ können die Feynman-Regeln nach [16] um die Feynman-Regeln nach A. Denner, E. Eck, O. Hahn und J. Küblbeck [27], [28] ergänzt werden. Danach können der gewöhnliche Fermionen-Propagator und Vertizes ohne explizite Ladungskonjugationsmatrix verwendet werden. Es zeigt sich, dass diese die Rechnungen bis zur 1-Loop-Ordnung unverändert lassen. In der folgenden Herleitung der Gluonen-Gluino-Vertizes wird deshalb im Vergleich zu den Gluonen-Quark-Vertizes für Dirac-Fermionen nur die Darstellung der Generatoren angepasst.

3.1. Entwicklung der Eichwirkung

Der Gluonen-Propagator und die Gluonen-Vertizes ergeben sich aus der Entwicklung der Plaketten (1.59) nach (1.51) aus der Wilsonschen Eichwirkung (1.60). Zusätzlich muss auch eine Eichfixierung

$$\begin{aligned} S_{\text{GF}}[A] &= \frac{1}{\alpha_0} a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{\mu=1}^4 \text{Re Spur} \left(\partial_\mu^L A_\mu(n) \right)^2 \\ &= -\frac{1}{\alpha_0} a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} \sum_{\mu, \nu=1}^4 \text{Re Spur} \left(A_\mu(n) \partial_\mu^R \partial_\nu^L A_\nu(n) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

in Abhängigkeit eines Parameters α_0 berücksichtigt werden. Damit lässt sich die Eichwirkung in eine Reihe

$$S_G[A] + S_{\text{GF}}[A] = S_G^{(0)}[A] + \sum_{s=3}^{\infty} S_G^{(s)}[A] \quad (3.5)$$

entwickeln. Weitere Anteile sind durch die Transformation von Linkvariablen zu Eichfeldern im Integrationsmaß und die Faddev-Popov-Determinante gegeben. Diese liefern jedoch nur Beiträge, die bis zu der hier betrachteten 1-Loop-Ordnung nicht auftreten.

3.1.1. Gluonen-Propagator der Wilsonschen Eichwirkung

Der freie Anteil der Eichwirkung (3.5) lässt sich darstellen als

$$S_G^{(0)}[A] = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{N_c^2-1} \sum_{\mu,\nu=1}^4 a^4 \sum_{n,m \in \Lambda_N} A_\mu^a(n) \Omega(n|m)_{\mu\nu}^{ab} A_\nu^b(m), \quad (3.6)$$

wobei sich die Matrix

$$\Omega(n|m)_{\mu\nu}^{ab} = \left(-\delta_{\mu\nu} \square + \left(1 - \frac{1}{\alpha_0} \right) \partial_\mu^R \partial_\nu^L \right) \delta^{ab} \delta_{n,m} \quad (3.7)$$

mit den partiellen Rechts- und Linksableitungen (1.37) und dem d'Alembert-Operator (1.38) auf dem Gitter ergibt. Damit lässt sich der freie Anteil der Eichwirkung durch die Fourier-Komponenten nach (3.3) ausdrücken:

$$S_G^{(0)}[A] = \sum_{a,b=1}^{N_c^2-1} \sum_{\mu,\nu=1}^4 \iint_{-\pi/a}^{\pi/a} \tilde{A}_\mu^a(k) \tilde{\Omega}(k|k')_{\mu\nu}^{ab} \tilde{A}_\nu^b(k') \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4}. \quad (3.8)$$

Die Matrix

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}(k|k')_{\mu\nu}^{ab} &= a^4 \sum_{n,m \in \Lambda_N} e^{ik \cdot (n + \frac{\hat{\mu}}{2}) a} \Omega(n|m)_{\mu\nu}^{ab} A_\nu(m) e^{ik' \cdot (m + \frac{\hat{\mu}}{2}) a} \\ &= (2\pi)^4 \delta(k + k') \delta^{ab} \left(\delta_{\mu\nu} \tilde{k}^2 - \left(1 - \frac{1}{\alpha_0} \right) \tilde{k}_\mu \tilde{k}_\nu \right) \\ &= (2\pi)^4 \delta(k + k') \delta^{ab} D_{\mu\nu}(k)^{-1} \end{aligned} \quad (3.9)$$

ergibt sich direkt aus der Matrix $\Omega(n|m)$. Dabei ist

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{\tilde{k}^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \alpha_0) \frac{\tilde{k}_\mu \tilde{k}_\nu}{\tilde{k}^2} \right) \quad (3.10)$$

der Gluonen-Propagator, wobei die Definitionen

$$\begin{aligned} \tilde{k}_\mu &:= \frac{2}{a} \sin \left(\frac{k_\mu a}{2} \right), \\ \tilde{k}^2 &:= \frac{4}{a^2} \sum_{\mu=1}^4 \sin^2 \left(\frac{k_\mu a}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

benutzt wurden. Im Folgenden werden die Feynman-Eichung mit $\alpha_0 = 1$ und die Notation

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(k) &= D(k) \delta_{\mu\nu}, \\ D(k) &:= \frac{1}{\tilde{k}^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

verwendet.

3.1.2. 3-Gluonen-Vertex der Wilsonschen Eichwirkung

In der niedrigsten Ordnung enthält die Wirkung (3.5) die Wechselwirkung von drei Gluonen:

$$S_G^{(3)}[A] = \sum_{a,b,c=1}^{N_c^2-1} \sum_{\mu,\nu,\rho=1}^4 a^3 g \sum_{n \in \Lambda_N} \left(A_\mu^a(n) + \frac{a}{2} \partial_\nu^R A_\mu^a(n) \right) \left(\partial_\mu^R A_\nu^b(n) \right) A_\rho(n) \delta_{\nu\rho} f^{abc}. \quad (3.13)$$

Dadurch kommt die Selbstwechselwirkung der Gluonen durch die nicht-abelsche Eichgruppe zum Ausdruck. Die Eichfelder werden durch die Fourier-Komponenten nach (3.3) ausgedrückt:

$$S_G^{(3)}[A] = \sum_{a,b,c=1}^{N_c^2-1} \sum_{\mu,\nu,\rho=1}^4 \iiint_{-\pi/a}^{\pi/a} \tilde{A}_\mu^a(k) \tilde{A}_\nu^b(k') \tilde{A}_\rho^c(k'') (2\pi)^4 \delta(k + k' + k'') V_G^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k''}{(2\pi)^4}. \quad (3.14)$$

Für den 3-Gluonen-Vertex gilt symmetrisiert in den Gluonen-Impulsen k, k', k'' , Lorentz-Indizes μ, ν, ρ und Farbindizes a, b, c :

$$V_G^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{abc} = -i \frac{g}{6} \left(\frac{2}{a} \sin \left(\frac{(k' - k)_\rho a}{2} \right) \cos \left(\frac{k''_\mu a}{2} \right) \delta_{\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{2}{a} \sin \left(\frac{(k'' - k')_\mu a}{2} \right) \cos \left(\frac{k_\nu a}{2} \right) \delta_{\nu\rho} \right. \\ \left. + \frac{2}{a} \sin \left(\frac{(k - k'')_\nu a}{2} \right) \cos \left(\frac{k'_\rho a}{2} \right) \delta_{\mu\rho} \right) f^{abc}. \quad (3.15)$$

Dabei lässt sich der von den Impulsen abhängige Anteil des Vertex vom Farbfaktor trennen:

$$V_G^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{abc} = V_G^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho} i f^{abc}. \quad (3.16)$$

3.2. Entwicklung der Fermionen-Wirkung

Um den Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizienten störungstheoretisch zu bestimmen, werden der Gluino-Propagator und die Wechselwirkungsvertizes der Wilsonschen Fermionen-Wirkung (2.17) mit der Clover-Verbesserung für adjungierte Majorana-Fermionen benötigt. Der Dirac-Operator dieser Wirkung lässt sich in einen freien Anteil

$$D^{(0)}(n|m)^{ba} = \left(m + \frac{4r}{a} \right) \delta^{ba} \delta_{n,m} + \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\gamma_\mu - r) \delta^{ba} \delta_{n+\mu,m}, \quad (3.17)$$

aus dem sich der Gluino-Propagator ergibt, und einen Anteil

$$D^{(\text{WW})}(n|m)^{ba} = \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\gamma_\mu - r)(V_\mu(n) - \mathbb{1})^{ba} \delta_{n+\hat{\mu},m} - \frac{c_{\text{SW}}}{2a} \frac{1}{16} \sum_{\mu,\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} (Q_{\mu\nu}^{ba}(n) - Q_{\nu\mu}^{ba}(n)) \delta_{n,m} \quad (3.18)$$

der Wechselwirkung, aus dem sich die Wechselwirkungsvertizes ergeben, zerlegen. Der Anteil der Wechselwirkung lässt sich nach der Entwicklung (1.51) der Linkvariablen wiederum in eine Reihe in der Kopplungskonstanten g entwickeln:

$$D^{(\text{WW})}(n|m)^{ba} = \sum_{s=1}^{\infty} (D_{\text{Wilson}}^{(s)}(n|m)^{ba} + D_{\text{Clover}}^{(s)}(n|m)^{ba}). \quad (3.19)$$

Zusätzlich zu den Eichfeldern werden auch die Fermionen-Felder durch ihre Fourier-Komponenten $\tilde{\lambda}$ und $\tilde{\bar{\lambda}}$ nach (1.45) ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \lambda(m) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \tilde{\lambda}(p) e^{ip \cdot ma} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \\ \bar{\lambda}(n) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \tilde{\bar{\lambda}}(p') e^{-ip' \cdot na} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Hier sind die Vorzeichen der Fourier-Transformationen so gewählt, dass die Gluinos λ in die Vertizes einlaufend und die adjungierten Gluinos $\bar{\lambda}$ aus den Vertizes herauslaufend sind. Damit lässt sich die Fermionen-Wirkung durch die Fourier-Komponenten darstellen:

$$\begin{aligned} S_F[A, \lambda] &= \frac{1}{2} \sum_{b,a=1}^{N_c^2-1} \iint_{-\pi/a}^{\pi/a} \tilde{\lambda}^b(p') \widetilde{D}(p'|p)^{ba} \tilde{\bar{\lambda}}^a(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4}, \\ \widetilde{D}(p'|p)^{ba} &= a^4 \sum_{n,m \in \Lambda_N} e^{-ip' \cdot na} D(n|m)^{ba} e^{ip \cdot ma}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Die Wilsonsche Fermionen-Wirkung und der Clover-Term werden getrennt voneinander betrachtet und die entsprechenden Gluon-Gluino-Vertizes bestimmt.

3.2.1. Gluino-Propagator der Wilsonschen Fermionen-Wirkung

Nach (3.21) und (1.43) gilt für den freien Anteil (3.17) des Dirac-Operators:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{D}^{(0)}(p'|p)^{ba} &= a^4 \sum_{n,m \in \Lambda_N} e^{-ip' \cdot na} D^{(0)}(n|m)^{ba} e^{ip \cdot ma} \\
 &= a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} e^{-i(p' - p) \cdot na} \delta^{ba} \left(\left(m + \frac{4r}{a} \right) + \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\gamma_\mu - r) e^{ip_\mu a} \right) \\
 &= (2\pi)^4 \delta(p', p) \delta^{ba} \left(m + \frac{r}{a} \sum_{\mu=1}^4 (1 - \cos(p_\mu a)) + \frac{i}{a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \sin(p_\mu a) \right) \\
 &= (2\pi)^4 \delta(p', p) \delta^{ba} \tilde{S}_F(p)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dabei ist

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{M(p) - \frac{i}{a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \sin(p_\mu a)}{M(p)^2 + \frac{1}{a^2} \sum_{\mu=1}^4 \sin^2(p_\mu a)} \tag{3.23}$$

nach (A.6) der Gluino-Propagator, wobei

$$M(p) := m + \frac{r}{a} \sum_{\mu=1}^4 (1 - \cos(p_\mu a)) \tag{3.24}$$

die vom Impuls abhängige Masse ist, in der der Wilson-Term berücksichtigt wird.

3.2.2. Gluon-Gluino-Vertizes der Wilsonschen Fermionen-Wirkung

Zur Bestimmung der Gluon-Gluino-Vertizes der Wilsonschen Fermionen-Wirkung wird die Entwicklung

$$\begin{aligned}
 (V_\mu(n) - 1)^{ba} &= \exp \left(iag \sum_{c=1}^{N_c^2-1} A_\mu^c(n) T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} - \delta^{ba} \\
 &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(iag)^s}{s!} \sum_{c_1, \dots, c_s=1}^{N_c^2-1} A_\mu^{c_1}(n) \dots A_\mu^{c_s}(n) \left(T_{\text{adj}}^{c_1} \dots T_{\text{adj}}^{c_s} \right)^{ba}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

der Linkvariablen nach (1.51) in adjungierter Darstellung mit (A.45) verwendet. Mit dieser Entwicklung folgt für den Anteil des Wilson-Dirac-Operators am Anteil (3.18) der Wechselwirkung:

$$\begin{aligned}
 D_{\text{Wilson}}^{(s)}(n|m)^{ba} &= \frac{1}{2a} \frac{(iag)^s}{s!} \sum_{c_1, \dots, c_s=1}^{N_c^2-1} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\gamma_\mu - r) A_\mu^{c_1}(n) \dots A_\mu^{c_s}(n) \left(T_{\text{adj}}^{c_1} \dots T_{\text{adj}}^{c_s} \right)^{ba} (\gamma_\mu - r) \delta_{n+\hat{\mu}, m}.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Wiederum nach (3.21) gilt

$$\begin{aligned}
 \widetilde{D}_{\text{Wilson}}^{(s)}(p'|p)^{ba} &= a^4 \sum_{n,m \in \Lambda_N} e^{-ip' \cdot na} D_{\text{Wilson}}^{(s)}(n|m)^{ba} e^{ip \cdot ma} \\
 &= \sum_{c_1, \dots, c_s=1}^{N_c^2-1} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} \int \dots \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \tilde{A}_\mu^{c_1}(k_1) \dots \tilde{A}_\mu^{c_s}(k_s) \\
 &\quad \frac{1}{2a} \frac{(\text{i}ag)^s}{s!} (\gamma_\mu - r) e^{\frac{\text{i}}{2}(p+p')_\mu a} (T_{\text{adj}}^{c_1} \dots T_{\text{adj}}^{c_s})^{ba} \\
 &\quad (2\pi)^4 \delta(p' - p, k_1 + \dots + k_s) \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_s}{(2\pi)^4}, \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

wobei die Eichfelder durch ihre Fourier-Komponenten (3.3) ersetzt wurden und

$$(2\pi)^4 \delta(p' - p, k_1 + \dots + k_s) = a^4 \sum_{n \in \Lambda_N} e^{-\text{i}(p' - p - (k_1 + \dots + k_s)) \cdot na} \quad (3.28)$$

nach (1.43) verwendet wurde. Damit lassen sich nach (3.31) die Summanden

$$\begin{aligned}
 \widetilde{D}_{\text{Wilson}}^{(s)}(p'|p)^{ba} &= \frac{1}{s!} \sum_{c_1, \dots, c_s=1}^{N_c^2-1} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_s=1}^4 \int \dots \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \tilde{A}_{\mu_1}^{c_1}(k_1) \dots \tilde{A}_{\mu_s}^{c_s}(k_s) V_{\text{Wilson}}^{(s)}(p, p')_{\mu_1 \dots \mu_s}^{ab; c_1 \dots c_s} \\
 &\quad (2\pi)^4 \delta(p' - p, k_1 + \dots + k_s) \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_s}{(2\pi)^4} \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

durch die Gluon-Gluino-Vertizes

$$\begin{aligned}
 V_{\text{Wilson}}^{(s)}(p, p')_{\mu}^{ab; c_1 \dots c_s} &= \frac{(\text{i}ag)^s}{2a} \left((\gamma_\mu - r) e^{\frac{\text{i}}{2}(p+p')_\mu a} - (-1)^s (\gamma_\mu + r) e^{-\frac{\text{i}}{2}(p+p')_\mu a} \right) (T_{\text{adj}}^{c_1} \dots T_{\text{adj}}^{c_s})^{ba} \\
 & \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

ausdrücken, wobei

$$\tilde{A}_{-\mu}(k) = -\tilde{A}_\mu(k). \quad (3.31)$$

nach (1.50) verwendet wurde. Für diese Vertizes erster, zweiter und dritter Ordnung gelten:

$$V_{\text{Wilson}}^{(1)}(p, p')_\mu = g \left(\text{i} \gamma_\mu \cos \left(\frac{(p+p')_\mu a}{2} \right) + r \sin \left(\frac{(p+p')_\mu a}{2} \right) \right), \quad (3.32)$$

$$V_{\text{Wilson}}^{(2)}(p, p')_{\mu\nu} = -ag^2 \left(\text{i} \gamma_\mu \sin \left(\frac{(p+p')_\mu a}{2} \right) - r \cos \left(\frac{(p+p')_\mu a}{2} \right) \right) \delta_{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

$$V_{\text{Wilson}}^{(3)}(p, p')_{\mu\nu\rho} = -a^2 g^3 \left(\text{i} \gamma_\mu \cos \left(\frac{(p+p')_\mu a}{2} \right) + r \sin \left(\frac{(p+p')_\mu a}{2} \right) \right) \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho}. \quad (3.34)$$

Wie für den 3-Gluonen-Vertex wurden dabei die symmetrierten Farbfaktoren von den von den Impulsen abhängigen Anteilen der Vertizes getrennt:

$$\begin{aligned}
V_{\text{Wilson}}^{(1)}(p, p')_{\mu}^{ab;c} &= V_{\text{Wilson}}^{(1)}(p, p')_{\mu} \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}, \\
V_{\text{Wilson}}^{(2)}(p, p')_{\mu\nu}^{ab;cd} &= V_{\text{Wilson}}^{(2)}(p, p')_{\mu\nu} \frac{1}{2} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d + T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}, \\
V_{\text{Wilson}}^{(3)}(p, p')_{\mu\nu\rho}^{ab;cd} &= V_{\text{Wilson}}^{(3)}(p, p')_{\mu\nu\rho} \frac{1}{6} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^e + T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d + T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c \right. \\
&\quad \left. + T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c + T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^d + T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e \right)^{ba}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

3.2.3. Gluon-Gluino-Vertizes des Clover-Terms

Analog zum Anteil des Wilson-Dirac-Operators an der Wechselwirkung lässt sich der Clover-Term (2.18) durch Gluon-Gluino-Vertizes darstellen:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{D}_{\text{Clover}}^{(s)}(p'|p)^{ba} \\
&= \frac{1}{s!} \sum_{c_1, \dots, c_s=1}^{N_c^2-1} \sum_{\mu_1, \dots, \mu_s=1}^4 \int \dots \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \widetilde{A}_{\mu_1}^{c_1}(k_1) \dots \widetilde{A}_{\mu_s}^{c_s}(k_s) V_{\text{Clover}}^{(s)}(k_1, \dots, k_s)_{\mu_1 \dots \mu_s}^{ab;c_1 \dots c_s} \\
&\quad (2\pi)^4 \delta(p' - p, k_1 + \dots + k_s) \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 k_s}{(2\pi)^4}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Die Gluon-Gluino-Vertizes des Clover-Terms für adjungierte Majorana-Fermionen ergeben sich aus den Gluon-Gluino-Vertizes (A.57), (A.58) und (A.59) des Clover-Terms für Dirac-Fermionen in der fundamentalen Darstellung. Da beim Übergang von Plaketten in der fundamentalen Darstellung zu Plaketten in der adjungierten Darstellung nur die Generatoren geändert werden, müssen auch in den Vertizes nur die Generatoren in der fundamentalen Darstellung durch die entsprechenden Generatoren (A.45) in der adjungierten Darstellung ersetzt werden. Für diese Vertizes erster und zweiter Ordnung gelten:

$$V_{\text{Clover}}^{(1)}(k)_{\mu}^{ab;c} = -g \frac{c_{\text{SW}}}{2} \cos \left(\frac{k_{\mu} a}{2} \right) \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} \sin(k_{\nu} a) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}, \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
&V_{\text{Clover}}^{(2)}(k, k')_{\mu\nu}^{ab,cd} \\
&= ag^2 \frac{c_{\text{SW}}}{2} \left(\sin \left(\frac{(k+k')_{\mu} a}{2} \right) \sum_{\rho=1}^4 \sigma_{\mu\rho} (\sin(k'_{\rho} a) - \sin(k_{\rho} a)) \delta_{\mu\nu} \right. \\
&\quad \left. + \left(4 \cos \left(\frac{(k+k')_{\mu} a}{2} \right) \cos \left(\frac{k_{\nu} a}{2} \right) \cos \left(\frac{(k+k')_{\nu} a}{2} \right) \cos \left(\frac{k'_{\mu} a}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \cos \left(\frac{k_{\mu} a}{2} \right) \cos \left(\frac{k'_{\nu} a}{2} \right) \right) \sigma_{\mu\nu} \right) \frac{1}{2} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d - T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Die Farbfaktoren lassen sich direkt separieren:

$$\begin{aligned} V_{\text{Clover}}^{(1)}(k)_\mu^{ab;c} &= V_{\text{Clover}}^{(1)}(k)_\mu \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\ V_{\text{Clover}}^{(2)}(k, k')_{\mu\nu}^{ab;cd} &= V_{\text{Clover}}^{(2)}(k, k')_{\mu\nu} \frac{1}{2} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d - T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Da sich vom Vertex dritter Ordnung nicht insgesamt ein Farbfaktor separieren lässt, wird dieser in zwei Summanden $W_{\text{Clover}}^{(3,1)}$ und $W_{\text{Clover}}^{(3,2)}$ aufgeteilt, für die sich Farbfaktoren separieren lassen:

$$\begin{aligned} &V_{\text{Clover}}^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{ab;cde} \\ &= W_{\text{Clover}}^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{ab;cde} + W_{\text{Clover}}^{(3)}(k'', k, k')_{\rho\mu\nu}^{ab;cde} + W_{\text{Clover}}^{(3)}(k', k'', k)_{\nu\rho\mu}^{ab;cde}, \\ &W_{\text{Clover}}^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{ab;cde} \\ &= W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^e \right)^{ba} \\ &\quad + W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho} \frac{1}{2} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^e + T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}, \\ &W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho} \\ &= a^2 g^3 c_{\text{sw}} \cos \left(\frac{(k + k' + k'')_\mu a}{2} \right) \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \left(\frac{1}{6} \sin((k + k' + k'')_\tau a) \right. \\ &\quad \left. - \cos \left(\frac{(k + k' + k'')_\tau a}{2} \right) \cos \left(\frac{(k'' - k)_\tau a}{2} \right) \sin \left(\frac{k'_\tau a}{2} \right) \right) \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho}, \\ &W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho} \\ &= a^2 g^3 c_{\text{sw}} \sin \left(\frac{(k + 2k' + k'')_\mu a}{2} \right) \cos \left(\frac{(k + k' + k'')_\nu a}{2} \right) \cos \left(\frac{(k - k'')_\nu a}{2} \right) \sigma_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} \\ &\quad + a^2 g^3 c_{\text{sw}} \left(2 \cos \left(\frac{(k + k' + k'')_\mu a}{2} \right) \cos \left(\frac{(k + k' + k'')_\nu a}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin \left(\frac{k_\nu a}{2} \right) \cos \left(\frac{(k' + k'')_\mu a}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(\frac{(k + 2k')_\mu a}{2} \right) \sin \left(\frac{(k' + k'')_\nu a}{2} \right) \right) \sigma_{\mu\nu} \delta_{\nu\rho}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.3. Propagatoren und Wechselwirkungsvertizes

Zusammengefasst werden die folgenden Propagatoren und Wechselwirkungsvertizes zur Rechnung in der 1-Loop-Ordnung benötigt.

3.3.1. Gluonen-Propagator und 3-Gluonen-Vertex



Abbildung 3.1.: Gluonen-Propagator $D_{\mu\nu}(k)$ nach (3.10).

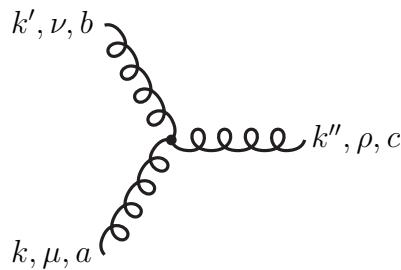


Abbildung 3.2.: 3-Gluonen-Vertex $V_G^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{abc}$ nach (3.15).

3.3.2. Gluino-Propagator und Gluonen-Gluino-Vertizes

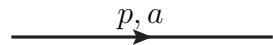


Abbildung 3.3.: Gluino-Propagator $\tilde{S}_F(p)$ nach (3.23).

Die Gluonen-Gluino-Vertizes der Wilsonschen Fermionen-Wirkung und des Clover-Terms werden zusammengefasst:

$$V_F^{(s)}(p, p'; k_1, \dots, k_s)_{\mu_1 \dots \mu_s}^{ab; c_1 \dots c_s} = V_{\text{Wilson}}^{(s)}(p, p')_{\mu_1 \dots \mu_s}^{ab; c_1 \dots c_s} + V_{\text{Clover}}^{(s)}(k_1, \dots, k_s)_{\mu_1 \dots \mu_s}^{ab; c_1 \dots c_s}. \quad (3.41)$$

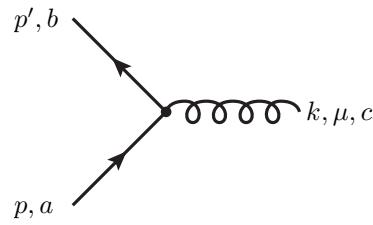


Abbildung 3.4.: 1-Gluon-Gluino-Vertex $V_F^{(1)}(p, p'; k)_{\mu}^{ab;c}$ nach (3.32) und (3.37).

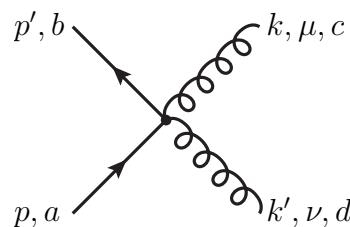


Abbildung 3.5.: 2-Gluonen-Gluino-Vertex $V_F^{(2)}(p, p'; k, k')_{\mu\nu}^{ab;cd}$ nach (3.33) und (3.38).

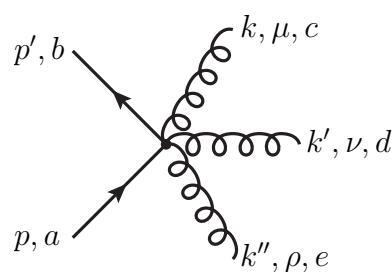


Abbildung 3.6.: 3-Gluonen-Gluino-Vertex $V_F^{(3)}(p, p'; k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{ab;cd;e}$ nach (3.34) und (3.40).

4. Berechnung des Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizienten

Der Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient der Fermionen-Wirkung (2.17) mit Clover-Verbesserung lässt sich durch verschiedene Methoden so optimieren, dass die Diskretisierungseffekte der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ verschwinden. In einer störungstheoretischen Rechnung wurde dies bereits 1987 von R. Wohlert für Dirac-Fermionen in fundamentaler Darstellung der Eichgruppe $SU(N_c)$ für $N_c = 2$ und $N_c = 3$ durchgeführt [10] und 1993 von S. Naik bestätigt [29]. Bei diesen Berechnungen wurde die Vertex-Funktion bis zur 1-Loop-Ordnung störungstheoretisch entwickelt und der Koeffizient so gewählt, dass Effekte der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ entfernt werden. Dabei wurden verdrehte antiperiodische Randbedingungen zur Infrarot-Regularisierung verwendet. Unabhängig davon wurde das Ergebnis 1996 von M. Lüscher und P. Weisz in einer störungstheoretischen $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung des axialen Stroms bestätigt [30]. Weitere erwähnenswerte Rechnungen stammen von M. Lüscher, S. Sint, R. Sommer, P. Weisz und U. Wolff [31] von 1996 sowie von T. R. Klassen [32] von 1997, bei denen die Optimierung des Koeffizienten durch nicht-störungstheoretische Berechnungen mit dem Schrödinger-Funktional durchgeführt wurden.

Diese Arbeit orientiert sich hingegen wesentlich an der Rechnung von S. Aoki und Y. Kuramashi [11] von 2003. Dabei wurden wie schon bei R. Wohlert die Vertex-Funktion bis zur 1-Loop-Ordnung störungstheoretisch entwickelt und Effekte der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ entfernt. Jedoch wurden zur Infrarot-Regularisierung keine verdrehten antiperiodischen Randbedingungen verwendet, sondern es wird eine virtuelle Gluonen-Masse eingeführt.

Die Vertex-Funktion Λ für ein einlaufendes Gluino mit einem Impuls p und einem Farbindex a und ein auslaufendes Gluino mit einem Impuls p' und einem Farbindex b bei der Streuung an einem einlaufenden Gluon mit einem Farbindex c und einem Lorentz-Index μ lässt sich störungstheoretisch in eine Reihe der Form

$$\Lambda(p, p')_\mu^{ab;c} = \sum_{s=0}^{\infty} \Lambda^{(s)}(p, p')_\mu^{ab;c} \quad (4.1)$$

entwickeln, wobei $\Lambda^{(s)}$ ohne $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung der Ordnung g^{2s+1} ist. Die Diskretisierungseffekte der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ lassen sich Ordnung für Ordnung entfernen, wenn der

Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient c_{SW} als Störreihe in der Kopplungskonstanten g der Form

$$c_{\text{SW}} = \sum_{s=0}^{\infty} g^{2s} c_{\text{SW}}^{(s)} \quad (4.2)$$

angesetzt wird. Im Folgenden wird die Vertex-Funktion störungstheoretisch bis zur 1-Loop-Ordnung entwickelt. Damit werden $c_{\text{SW}}^{(0)}$ auf Tree-Level und $c_{\text{SW}}^{(1)}$ in 1-Loop-Ordnung bestimmt.

4.1. Koeffizient $c_{\text{SW}}^{(0)}$ auf Tree-Level

Auf Tree-Level hat nur der 1-Gluon-Gluino-Vertex nach Abbildung 3.4 einen Beitrag zur Vertex-Funktion (4.1):

$$\Lambda^{(0)}(p, p')_{\mu}^{ab;c} = V_{\text{F}}^{(1)}(p, p')_{\mu}^{ab;c}. \quad (4.3)$$

Der Vertex wird nach (A.60) in den äußeren Impulsen $p + p'$ und $p' - p$ entwickelt und c_{SW} nach (4.2) auf Tree-Level verwendet:

$$\begin{aligned} & \Lambda^{(0)}(p, p')_{\mu}^{ab;c} \\ &= g \left(i\gamma_{\mu} + \left(\frac{r}{2}(p + p')_{\mu} - \frac{c_{\text{SW}}^{(0)}}{2} \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu}(p' - p)_{\nu} \right) a + \mathcal{O}(a^2) \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} + \mathcal{O}(g^3) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Daraus folgt mit den on-shell Gluino-Zuständen \bar{u}^b und u^a :

$$\begin{aligned} & \bar{u}^b(p') \Lambda^{(0)}(p, p')_{\mu}^{ab;c} u^a(p) \\ &= \bar{u}^b(p') \left(g \left(i\gamma_{\mu} + \frac{1}{2}(p + p')_{\mu} a \left(r - c_{\text{SW}}^{(0)} \right) + \mathcal{O}(a^2) \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \right) u^a(p) + \mathcal{O}(g^3). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dabei wurde die Gordon-Identität

$$\bar{u}^b(p') \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu}(p' - p)_{\nu} u^a(p) = \bar{u}^b(p') (p + p')_{\mu} u^a(p) \quad (4.6)$$

verwendet, die sich direkt aus den Feldgleichungen (1.9) unter Anwendung von (A.3) ergibt. Wie für Dirac-Fermionen in fundamentaler Darstellung verschwinden die Effekte der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ auf Tree-Level, wenn der Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient in dieser Ordnung durch den Wilson-Parameter (1.58)

$$c_{\text{SW}}^{(0)} = r \quad (4.7)$$

gewählt wird. Nach B. Sheikholeslami und R. Wohlert [21] wird der Wert $r = 1$ verwendet.

4.2. Koeffizient $c_{\text{SW}}^{(1)}$ in 1-Loop-Ordnung

In 1-Loop-Ordnung hat die Vertex-Funktion (4.1) im Allgemeinen die Form

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)}(p, p')_{\mu}^{ab;c} &= g^3 \left(i\gamma_{\mu}F_1 + \sum_{\nu=1}^4 (\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}p_{\nu}F_2 + \gamma_{\mu}\gamma_{\nu}p'_{\nu}F_3)a \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(p+p')_{\mu}aG + \frac{1}{2}(p-p')_{\mu}aH + \mathcal{O}(p^2, p'^2, p \cdot p') + \mathcal{O}(a^2) \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

wobei die Größen F_1, F_2, F_3, G und H unabhängig von den äußeren Impulsen p, p' und dem Gitterabstand a sind. Für masselose Gluinos verschwinden die Beiträge F_2 und F_3 durch Anwenden der Feldgleichung mit on-shell Gluino-Zuständen \bar{u}^b und u^a :

$$\begin{aligned} \bar{u}^b(p') \sum_{\nu=1}^4 \gamma_{\nu}\gamma_{\mu}p_{\nu}u^a(p)F_2 &= 0, \\ \bar{u}^b(p') \sum_{\nu=1}^4 \gamma_{\mu}\gamma_{\nu}p_{\nu}u^a(p)F_3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Der Anteil H tritt aus Symmetriegründen nie auf, da sich der Operator, aus dem die Beiträge zu H stammen, unter Ladungskonjugation anders verhält als $\bar{\lambda}(x)\gamma_{\mu}\lambda(x)$ (vgl. [11]). Insgesamt bleiben daher nur die Anteile F_1 und G an der Vertex-Funktion in dieser Ordnung. Mit der Entwicklung $c_{\text{SW}} = c_{\text{SW}}^{(0)} + g^2c_{\text{SW}}^{(1)} + \mathcal{O}(g^4)$ nach (4.2) haben der 1-Gluon-Gluino-Vertex (3.37) des Clover-Terms und die Vertex-Funktion $\Lambda^{(1)}$ Beiträge zur Ordnung g^3 :

$$\begin{aligned} \bar{u}^b(p') \left(g^3 \left(-\frac{c_{\text{SW}}^{(1)}}{2}(p+p')_{\mu}a \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} + \Lambda^{(1)}(p, p')_{\mu}^{ab;c} \right) u^a(p) \\ = \bar{u}^b(p') \left(g^3 \left(i\gamma_{\mu}F_1 + \frac{1}{2}(p+p')_{\mu}a(G - c_{\text{SW}}^{(1)}) \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{O}(p^2, p'^2, p \cdot p') + \mathcal{O}(a^2) \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \right) u^a(p). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Hier wurde wieder die Gordon-Identität (4.6) angewendet. Damit verschwinden die Effekte der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ in der 1-Loop-Ordnung, wenn der Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient in dieser Ordnung durch

$$c_{\text{SW}}^{(1)} = G \quad (4.11)$$

gegeben ist. Zu G tragen die sechs möglichen Diagramme der 1-Loop-Ordnung bei.

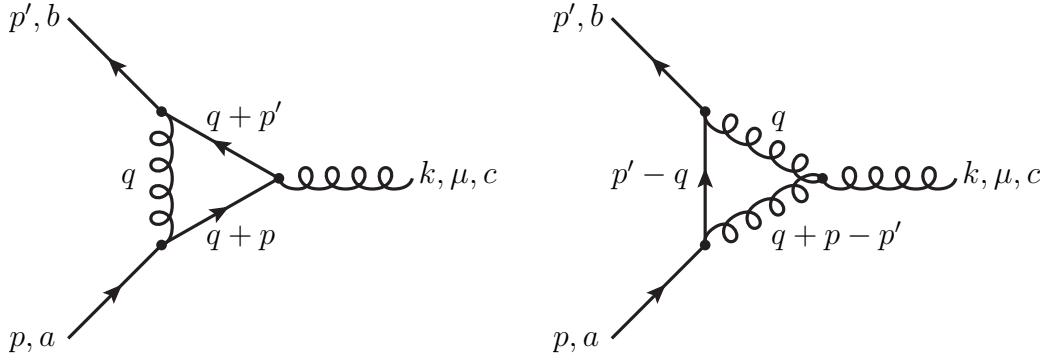


Abbildung 4.1.: Diagramme (a) und (b) nach [10], [11].

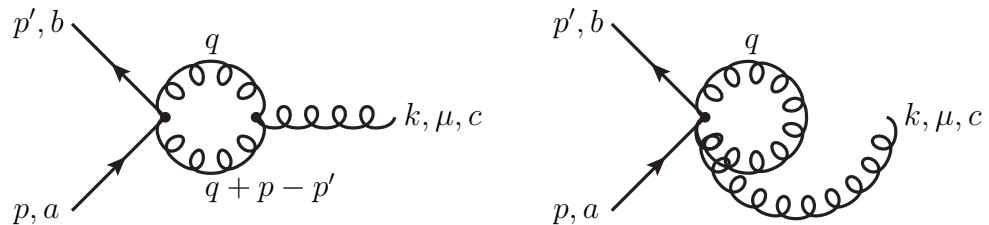


Abbildung 4.2.: Diagramme (c) und (d) nach [10], [11].

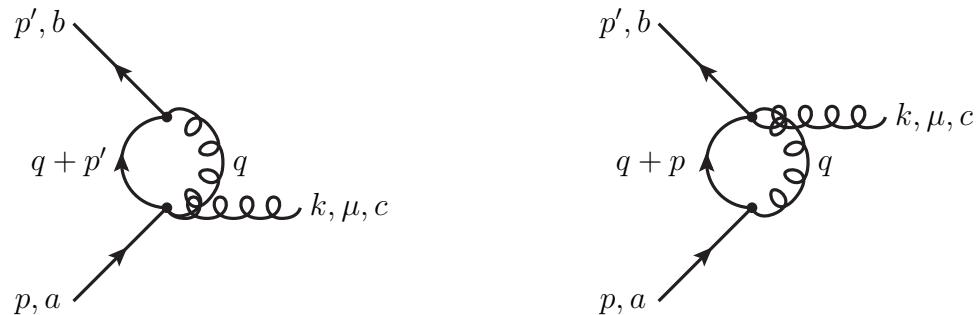


Abbildung 4.3.: Diagramme (e) und (f) nach [10], [11].

Von diesen Diagrammen treten (a) und (b) auch im Kontinuum auf. Die Diagramme (c), (d), (e) und (f) enthalten Gluon-Gluino-Vertizes höherer Ordnung und kommen deshalb nur auf dem Gitter vor. Es werden nun die einzelnen Beiträge $\Lambda^{(1,i)}$ der Diagramme (i) zur Vertex-Funktion $\Lambda^{(1)}$ bestimmt:

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)}(p, p')_{\mu}^{ab;c} &= \sum_{i=a, \dots, f} \Lambda^{(1,i)}(p, p')_{\mu}^{ab;c}, \\ \Lambda^{(1,i)}(p, p')_{\mu}^{ab;c} &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} I^{(1,i)}(p, p'; q)_{\mu}^{ab;c} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dabei sind $I^{(1,i)}(p, p'; q)_{\mu}^{ab;c}$ die zugehörigen Integranden, die sich aus den Feynman-Regeln auf dem Gitter nach S. Capitani [33] ergeben. Daraus folgen dann die Anteile

$G^{(i)}$:

$$G = \sum_{i=a,\dots,f} G^{(i)}. \quad (4.13)$$

4.2.1. Beiträge der Diagramme (a), (b), (c), (e) und (f)

Bei den Diagrammen (a), (b), (c), (e) und (f) lassen sich die Farbfaktoren ohne explizite Berechnung der Gittersummen von den Integranden separieren. Deshalb werden nachfolgend nur die entsprechenden Farbfaktoren $C_{(i)}^{\text{adj}}$ für die adjungierte Darstellung aus den Feynman-Regeln bestimmt. Für die fundamentale beziehungsweise die Darstellung ergeben sich diese Faktoren aus den Relationen (A.34) und (A.55) für Produkte der Generatoren.

Die benötigten Gittersummen werden direkt von [11] übernommen. Teilweise treten konventionsbedingt andere Vorzeichen und Vorfaktoren auf, die von den Farbfaktoren separiert und mit den Gittersummen verrechnet werden.

Jedes dieser Diagramme hat divergente Gittersummen. In der Summe verschwinden die Divergenzen der einzelnen Diagramme für die fundamentale Darstellung, und es wird an geeigneter Stelle gezeigt, dass dies auch für die adjungierte Darstellung der Fall ist.

Nach S. Aoki, Y. Kayaba und Y. Kuramashi [34], [11], [35] findet die Infrarot-Regularisierung durch Einführung einer virtuellen Gluonen-Masse λ statt. Dadurch können die Rechnungen in der gewöhnlichen Störungstheorie durchgeführt werden. Die Infrarot-Divergenzen werden durch einen Ausdruck $\tilde{I}^{(1,i)}(p, p'; q, \lambda)_\mu$ extrahiert, der analytisch integrierbar ist und dasselbe Infrarot-Verhalten wie $I^{(1,i)}(p, p'; q)_\mu$ hat:

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1,i)}(p, p')_\mu &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \theta(Q^2 - q^2) \tilde{I}^{(1,i)}(p, p'; q, \lambda)_\mu \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \\ &+ \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \left(I^{(1,i)}(p, p'; q)_\mu - \theta(Q^2 - q^2) \tilde{I}^{(1,i)}(p, p'; q, \lambda)_\mu \right) \Big|_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dabei wird die Heavyside-Funktion $\theta(Q^2 - q^2)$ mit einem Cut-Off $Q \leq \pi/a$ eingeführt, um das Integrationsgebiet auf eine Hyperkugel mit dem Radius Q zu beschränken, wodurch das Integral analytisch lösbar wird. Da nur Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(g^2 a)$ relevant sind, können die Integranden $\tilde{I}^{(1,i)}(p, p'; q, \lambda)_\mu$ aus Entwicklungen der Propagatoren und Vertizes bis zur Ordnung $\mathcal{O}(a)$ zusammengesetzt werden. Wie die Gittersummen werden auch diese Beiträge in Abhängigkeit von

$$L := \frac{1}{16\pi^2} \ln \left| \frac{\pi^2}{\lambda^2 a^2} \right| \quad (4.15)$$

direkt von [11] übernommen. Die folgende Separation der Farbfaktoren erfolgt für alle Diagramme nach dem gleichen Schema.

4.2.1.1. Diagramm (a)

Nach Abbildung 4.1 gilt:

$$\begin{aligned}
 I^{(1,a)}(p, p'; q)_\mu^{ab;c} &= \sum_{d,e,f=1}^{N_c^2-1} \sum_{\nu=1}^4 V_F^{(1)}(p' + q, p'; -q)_\nu^{db;f} \tilde{S}_F(p' + q) \\
 &\quad V_F^{(1)}(p + q, p' + q; p' - p)_\mu^{ed;c} \tilde{S}_F(p + q) \\
 &\quad V_F^{(1)}(p, p + q; q)_\nu^{ae;f} D(q) \\
 &= I^{(1,a)}(p, p'; q)_\mu \sum_{d,e,f=1}^{N_c^2-1} (T_{\text{adj}}^f)^{bd} (T_{\text{adj}}^c)^{de} (T_{\text{adj}}^f)^{ea}. \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nach (A.34):

$$\begin{aligned}
 \sum_{d,e,f=1}^{N_c^2-1} (T_{\text{adj}}^f)^{bd} (T_{\text{adj}}^c)^{de} (T_{\text{adj}}^f)^{ea} &= \sum_{f=1}^{N_c^2-1} (T_{\text{adj}}^f T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^f)^{ba} = \frac{N_c}{2} (T_{\text{adj}}^c)^{ba}, \\
 C_{(a)}^{\text{adj}} &:= \frac{N_c}{2}. \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Damit hat das Diagramm (a) an G den Beitrag

$$G^{(a)} = \left([-0,02743(1)] + L^{(a)} \right) C_{(a)}^{\text{adj}} \quad (4.18)$$

mit

$$L^{(a)} = -2 \left(1 - 2c_{\text{SW}}^{(0)} \right) L. \quad (4.19)$$

4.2.1.2. Diagramm (b)

Nach Abbildung 4.1 gilt:

$$\begin{aligned}
 I^{(1,b)}(p, p'; q)_\mu^{ab;c} &= \sum_{d,e,f=1}^{N_c^2-1} \sum_{\nu,\rho=1}^4 V_F^{(1)}(p' - q, p'; q)_\nu^{db;f} \tilde{S}_F(p' - q) \\
 &\quad V_F^{(1)}(p, p' - q; p' - p - q)_\nu^{ad;e} D(q + p - p') \\
 &\quad V_G^{(3)}(p - p' + q, -q, p' - p)_{\mu\nu\rho}^{cef} D(q) \\
 &= I^{(1,b)}(p, p'; q)_\mu i \sum_{d,e,f=1}^{N_c^2-1} f^{cef} (T_{\text{adj}}^f)^{bd} (T_{\text{adj}}^e)^{da}. \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nach (A.34):

$$\begin{aligned} i \sum_{d,e,f=1}^{N_c^2-1} f^{cef} (T_{\text{adj}}^f)^{bd} (T_{\text{adj}}^e)^{da} &= -i \sum_{e,f=1}^{N_c^2-1} f^{cef} (T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^f)^{ba} = \frac{N_c}{2} (T_{\text{adj}}^e)^{ba}, \\ C_{(b)}^{\text{adj}} &:= \frac{N_c}{2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Damit hat das Diagramm (b) an G den Beitrag

$$G^{(b)} = \left(-[-0,05541(2)] + L^{(b)} \right) C_{(b)}^{\text{adj}} \quad (4.22)$$

mit

$$L^{(b)} = 3 \left(1 - 2c_{\text{SW}}^{(0)} \right) L. \quad (4.23)$$

4.2.1.3. Diagramm (c)

Nach Abbildung 4.2 gilt:

$$\begin{aligned} I^{(1,c)}(p, p'; q)_\mu^{ab;c} &= \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} \sum_{\nu,\rho=1}^4 V_{\text{F}}^{(2)}(p, p'; p' - p - q, q)^{ab;de} D(q + p - p') \\ &\quad V_{\text{G}}^{(3)}(p' - p, q + p - p', -q)^{cde}_{\mu\nu\rho} D(q) \\ &= I_{\text{Wilson}}^{(1,c)}(p, p'; q)_\mu \frac{i}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} f^{cde} (T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^e + T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^d)^{ab} \\ &\quad + I_{\text{Clover}}^{(1,c)}(p, p'; q)_\mu \frac{i}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} f^{cde} (T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^e - T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^d)^{ab}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Daraus ergibt sich nach (A.34):

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} f^{cde} (T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^e + T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^d)^{ba} &= 0 \\ \frac{i}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} f^{cde} (T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^e - T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^d)^{ba} &= -\frac{N_c}{2} (T_{\text{adj}}^e)^{ba}, \\ C_{(c)}^{\text{adj}} &:= -\frac{N_c}{2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Damit hat das Diagramm (c) an G den Beitrag

$$G^{(c)} = \left(\frac{1}{2} [0,10844(4)] + L^{(c)} \right) C_{(c)}^{\text{adj}} \quad (4.26)$$

mit

$$L^{(c)} = -3c_{\text{SW}}^{(0)} L. \quad (4.27)$$

4.2.1.4. Diagramm (e)

Nach Abbildung 4.3 gilt:

$$\begin{aligned}
 I^{(1,e)}(p, p'; q)_\mu^{ab;c} &= \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} \sum_{\nu=1}^4 V_F^{(1)}(p' + q, p'; -q)_\nu^{db;e} \tilde{S}_F(p' + q) \\
 &\quad V_F^{(2)}(p, p' + q; p' - p, q)_\mu^{ad;ce} D(q) \\
 &= I_{\text{Wilson}}^{(1,e)}(p, p'; q)_\mu \frac{1}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^e \right)^{bd} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e + T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c \right)^{da} \\
 &\quad + I_{\text{Clover}}^{(1,e)}(p, p'; q)_\mu \frac{1}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^e \right)^{bd} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e - T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c \right)^{da}. \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nach (A.34):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^e \right)^{bd} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e + T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c \right)^{da} &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e + T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{N_c}{2} + C_2^{\text{adj}} \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}, \\
 C_{(e),\text{Wilson}}^{\text{adj}} &:= \frac{1}{2} \left(C_{(a)}^{\text{adj}} + C_2^{\text{adj}} \right), \\
 \frac{1}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^e \right)^{bd} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e - T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c \right)^{da} &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e - T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{N_c}{2} - C_2^{\text{adj}} \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}, \\
 C_{(e),\text{Clover}}^{\text{adj}} &:= \frac{1}{2} \left(C_{(a)}^{\text{adj}} - C_2^{\text{adj}} \right). \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

Damit hat das Diagramm (e) an G den Beitrag

$$\begin{aligned}
 G^{(e)} &= \left(-[-0,011266(7)] + L_{\text{Wilson}}^{(e)} \right) C_{(e),\text{Wilson}}^{\text{adj}} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} [0,06439(1)] + L_{\text{Clover}}^{(e)} \right) C_{(e),\text{Clover}}^{\text{adj}} \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 L_{\text{Wilson}}^{(e)} &= -L, \\
 L_{\text{Clover}}^{(e)} &= -c_{\text{SW}}^{(0)} L. \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

4.2.1.5. Diagramm (f)

Nach Abbildung 4.3 gilt:

$$\begin{aligned}
 I^{(1,f)}(p, p'; q)_\mu^{ab;c} &= \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} \sum_{\nu=1}^4 V_F^{(2)}(p+q, p'; p'-p, -q)_{\mu\nu}^{db;ce} \tilde{S}_F(p+q) \\
 &\quad V_F^{(1)}(p, p+q; q)_\nu^{ad;e} D(q+p) \\
 &= I_{\text{Wilson}}^{(1,f)}(p, p'; q)_\mu \frac{1}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e + T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c \right)^{bd} \left(T_{\text{adj}}^e \right)^{da} \\
 &\quad + I_{\text{Clover}}^{(1,f)}(p, p'; q)_\mu \frac{1}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e - T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c \right)^{bd} \left(T_{\text{adj}}^e \right)^{da}. \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nach (A.34):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e + T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c \right)^{bd} \left(T_{\text{adj}}^e \right)^{da} &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^e + T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e \right)^{ba} \\
 &= \frac{1}{2} \left(C_2^{\text{adj}} + \frac{N_c}{2} \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}, \\
 C_{(f),\text{Wilson}}^{\text{adj}} &:= \frac{1}{2} \left(C_2^{\text{adj}} + C_{(a)}^{\text{adj}} \right), \\
 \frac{1}{2} \sum_{d,e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e - T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c \right)^{bd} \left(T_{\text{adj}}^e \right)^{da} &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^e - T_{\text{adj}}^e T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^e \right)^{ba} \\
 &= \frac{1}{2} \left(C_2^{\text{adj}} - \frac{N_c}{2} \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}, \\
 C_{(f),\text{Clover}}^{\text{adj}} &:= \frac{1}{2} \left(C_2^{\text{adj}} - C_{(a)}^{\text{adj}} \right). \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Damit hat das Diagramm (f) an G den Beitrag

$$\begin{aligned}
 G^{(f)} &= \left(-[-0,011266(7)] + L_{\text{Wilson}}^{(f)} \right) C_{(f),\text{Wilson}}^{\text{adj}} \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{2}[0,06439(1)] + L_{\text{Clover}}^{(f)} \right) C_{(f),\text{Clover}}^{\text{adj}} \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 L_{\text{Wilson}}^{(f)} &= -L, \\
 L_{\text{Clover}}^{(f)} &= c_{SW}^{(0)} L. \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

4.2.2. Beitrag des Diagramms (d)

Das Diagramm (d) hängt in nichttrivialer Weise von den Farbfaktoren des 3-Gluonen-Gluino-Vertex ab und wird deshalb explizit berechnet. Nach Abbildung 4.2 gilt:

$$I^{(1,d)}(p, p'; q)_\mu^{ab;c} = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \sum_{\nu=1}^4 V_F^{(3)}(p, p'; p'-p, -q, q)_{\mu\nu}^{ab;cdd} D(q). \quad (4.36)$$

Die Farbfaktoren (3.35) des Vertex der Wilsonschen Fermionen-Wirkung lassen sich nach (A.34) separieren:

$$\frac{1}{6} \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \left(2T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^d + 2T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d + 2T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} = \frac{1}{3} \left(2C_2^{\text{adj}} + C_{(a)}^{\text{adj}} \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}. \quad (4.37)$$

Daraus folgt mit dem Impulsanteil (A.65)

$$\begin{aligned} & \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \sum_{\nu=1}^4 V_{\text{Wilson}}^{(3)}(p, p')_{\mu\nu}^{ab; cdd} \\ &= -a^2 g^3 \left(i\gamma_\mu + \frac{r}{2}(p + p')_\mu a \right) \frac{1}{6} \left(2C_2^{\text{adj}} + \frac{N_c}{2} \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} + \mathcal{O}(a^4). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Der Vertex des Clover-Terms wird nach (3.40) in zwei Summanden aufgeteilt. Für die Farbfaktoren der auftretenden Permutationen der Farbindizes gelten nach (A.34):

$$\begin{aligned} & \sum_{d=1}^{N_c^2-1} W_{\text{Clover}}^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu}^{ab; cdd} \\ &= W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(k, k', k'')_{\mu\nu} \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^d \right)^{ba} \\ &+ W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k, k', k'')_{\mu\nu} \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^d + T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\ &= \left(W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(k, k', k'')_{\mu\nu} + W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k, k', k'')_{\mu\nu} \right) C_2^{\text{adj}} \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{d=1}^{N_c^2-1} W_{\text{Clover}}^{(3)}(k'', k, k')_{\nu\mu\nu}^{ab; dcd} \\ &= W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(k'', k, k')_{\nu\mu\nu} \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d \right)^{ba} \\ &+ W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k'', k, k')_{\nu\mu\nu} \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d + T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d \right)^{ba} \\ &= \left(W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(k, k', k'')_{\nu\mu\nu} + W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k, k', k'')_{\nu\mu\nu} \right) C_{(a)}^{\text{adj}} \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d=1}^{N_c^2-1} W_{\text{Clover}}^{(3)}(k', k'', k)_{\nu\nu\mu}^{ab;ddc} \\
 &= W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(k', k'', k)_{\nu\nu\mu} \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\
 &+ W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k', k'', k)_{\nu\nu\mu} \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \left(T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^c + T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^d T_{\text{adj}}^d \right)^{ba} \\
 &= \left(W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(k', k'', k)_{\nu\nu\mu} + W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k', k'', k)_{\nu\nu\mu} \right) C_2^{\text{adj}} \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba}. \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

Damit lassen sich nun alle im Anhang bestimmten Beiträge (A.69), (A.70), (A.71), (A.72) und (A.73) mit den zugehörigen Farbfaktoren aufsummieren:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \sum_{\nu=1}^4 V_{\text{Clover}}^{(3)}(p' - p, -q, q)_{\mu\nu\nu}^{ab;cdd} \\
 &= a^2 g^3 c_{\text{SW}}^{(0)} \left(\frac{1}{6} + 1 \right) \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau}(p' - p)_\tau a C_2^{\text{adj}} \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\
 &+ a^2 g^3 c_{\text{SW}}^{(0)} \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau}(p' - p)_\tau a \sin^2 \left(\frac{q_\tau a}{2} \right) C_2^{\text{adj}} \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\
 &+ a^2 g^3 c_{\text{SW}}^{(0)} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} - 1 \right) \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau}(p' - p)_\tau a C_{(\text{a})}^{\text{adj}} \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\
 &+ a^2 g^3 c_{\text{SW}}^{(0)} (1 + 2) \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu}(p' - p)_\nu a \sin^2 \left(\frac{q_\mu a}{2} \right) C_{(\text{a})}^{\text{adj}} \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\
 &+ a^2 g^3 c_{\text{SW}}^{(0)} \frac{1}{6} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau}(p' - p)_\tau a C_2^{\text{adj}} \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\
 &+ a^2 g^3 c_{\text{SW}}^{(0)} \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau}(p' - p)_\tau a \sin^2 \left(\frac{q_\tau a}{2} \right) C_2^{\text{adj}} \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} + \mathcal{O}(a^4) \\
 &= a^2 g^3 c_{\text{SW}}^{(0)} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau}(p' - p)_\tau a \frac{4}{3} \left(C_2^{\text{adj}} - \frac{N_c}{2} \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\
 &+ a^2 g^3 c_{\text{SW}}^{(0)} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau}(p' - p)_\tau a \sin^2 \left(\frac{q_\tau a}{2} \right) \left(C_2^{\text{adj}} + \frac{3N_c}{2} \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} + \mathcal{O}(a^4). \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Sowohl bei dem Anteil der Wilsonschen Fermionen-Wirkung als auch bei dem Anteil des Clover-Terms treten nur zwei Typen an Gittersummen auf. Im Gegensatz zu den Gittersummen der vorherigen Diagramme gibt es bei diesen keine Infrarot-Divergenzen.

Die Werte werden von [11] übernommen:

$$\begin{aligned} a^4 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{1}{4 \sum_{\lambda=1}^4 \sin^2 \left(\frac{q_\lambda a}{2} \right)} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} &= [0,15493339(1)], \\ a^4 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\sin^2 \left(\frac{q_\tau a}{2} \right)}{4 \sum_{\lambda=1}^4 \sin^2 \left(\frac{q_\lambda a}{2} \right)} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} &= \frac{1}{4 \cdot 4} = [0,0625]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Der Anteil

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{Wilson}}^{(1,d)}(p, p')_\mu^{ab;c} &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} I_{\text{Wilson}}^{(1,d)}(p, p'; q)_\mu^{ab;c} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \sum_{\nu=1}^4 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} V_{\text{Wilson}}^{(3)}(p, p')_{\mu\nu\nu}^{ab;cdd} D(q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \\ &= -\frac{1}{2} g^3 \left(i\gamma_\mu + \frac{r}{2}(p + p')_\mu a \right) [0,15493339(1)] \frac{1}{3} \left(2C_2^{\text{adj}} + C_{(a)}^{\text{adj}} \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\ &\quad + \mathcal{O}(a^4) \end{aligned} \quad (4.44)$$

der Wilsonschen Fermionen-Wirkung an der Vertex-Funktion liefert den Beitrag

$$G_{\text{Wilson}}^{(d)} = -r [0,15493339(1)] \frac{1}{6} \left(2C_2^{\text{adj}} + C_{(a)}^{\text{adj}} \right) \quad (4.45)$$

zu G . Für den Anteil des Clover-Terms gilt:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{Clover}}^{(1,d)}(p, p')_\mu^{ab;c} &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} I_{\text{Clover}}^{(1,d)}(p, p'; q)_\mu^{ab;c} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{N_c^2-1} \sum_{\nu=1}^4 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} V_{\text{Clover}}^{(3)}(p' - p, -q, q)_{\mu\nu\nu}^{ab;cdd} D(q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \\ &= a^2 g^3 \frac{c_{\text{SW}}^{(0)}}{2} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau}(p' - p)_\tau a [0,15493339(1)] \frac{4}{3} \left(C_2^{\text{adj}} - C_{(a)}^{\text{adj}} \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\ &\quad + a^2 g^3 \frac{c_{\text{SW}}^{(0)}}{2} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau}(p' - p)_\tau a [0,0625] \left(C_2^{\text{adj}} + 3C_{(a)}^{\text{adj}} \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} + \mathcal{O}(a^4). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Mit on-shell Gluino-Zuständen \bar{u}^b und u^a gilt unter Anwendung der Gordon-Identität (4.6):

$$\begin{aligned} \bar{u}^b(p') \Lambda_{\text{Clover}}^{(1,d)}(p, p')_\mu^{ab;c} u^a(p) &= a^2 g^3 \bar{u}^b(p') u^a(p) (p + p')_\mu a \left(\frac{c_{\text{SW}}^{(0)}}{2} [0,15493339(1)] \frac{4}{3} \left(C_2^{\text{adj}} - C_{(a)}^{\text{adj}} \right) \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} \\ &\quad + a^2 g^3 \bar{u}^b(p') u^a(p) (p + p')_\mu a \left(\frac{c_{\text{SW}}^{(0)}}{2} [0,0625] \left(C_2^{\text{adj}} + 3C_{(a)}^{\text{adj}} \right) \right) \left(T_{\text{adj}}^c \right)^{ba} + \mathcal{O}(a^4). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Daraus ergibt sich der Beitrag

$$G_{\text{Clover}}^{(d)} = c_{SW}^{(0)}[0,15493339(1)] \frac{4}{3} (C_2^{\text{adj}} - C_{(a)}^{\text{adj}}) + c_{SW}^{(0)}[0,0625] (C_2^{\text{adj}} + 3C_{(a)}^{\text{adj}}) \quad (4.48)$$

des Clover-Terms an G . Insgesamt hat das Diagramm (d) mit (4.7) an G den Beitrag:

$$\begin{aligned} G^{(d)} &= G_{\text{Wilson}}^{(d)} + G_{\text{Clover}}^{(d)} \\ &= [0,15493339(1)] \left(-\frac{1}{6} (2C_2^{\text{adj}} + C_{(a)}^{\text{adj}}) + \frac{4}{3} (C_2^{\text{adj}} - C_{(a)}^{\text{adj}}) \right) \\ &\quad + [0,0625] (C_2^{\text{adj}} + 3C_{(a)}^{\text{adj}}) \\ &= [0,15493339(1)] \left(C_2^{\text{adj}} - \frac{3}{2} C_{(a)}^{\text{adj}} \right) + [0,0625] (C_2^{\text{adj}} + 3C_{(a)}^{\text{adj}}). \end{aligned} \quad (4.49)$$

4.2.3. Summen der einzelnen Beiträge

In der Summe der Infrarot-Divergenzen aller Diagramme hängen nur die beiden Farbfaktoren C_2^{adj} und $C_{(a)}^{\text{adj}}$ von der gewählten Darstellung ab:

$$\begin{aligned} \sum_{i=a,\dots,f} L^{(i)} C_{(i)} &= \underbrace{-2 \left(1 - 2c_{SW}^{(0)} \right) L}_{(4.19)} \underbrace{C_{(a)}^{\text{adj}}}_{(4.17)} \\ &\quad + \underbrace{3 \left(1 - 2c_{SW}^{(0)} \right) L}_{(4.23)} \underbrace{\frac{N_c}{2}}_{(4.21)} \\ &\quad - \underbrace{3c_{SW}^{(0)} L}_{(4.27)} \underbrace{\left(-\frac{N_c}{2} \right)}_{(4.25)} \\ &\quad - \underbrace{L}_{(4.31)} \underbrace{\frac{1}{2} (C_{(a)}^{\text{adj}} + C_2^{\text{adj}})}_{(4.29)} - \underbrace{c_{SW}^{(0)} L}_{(4.31)} \underbrace{\frac{1}{2} (C_{(a)}^{\text{adj}} - C_2^{\text{adj}})}_{(4.29)} \\ &\quad - \underbrace{L}_{(4.35)} \underbrace{\frac{1}{2} (C_2^{\text{adj}} + C_{(a)}^{\text{adj}})}_{(4.33)} + \underbrace{c_{SW}^{(0)} L}_{(4.35)} \underbrace{\frac{1}{2} (C_2^{\text{adj}} - C_{(a)}^{\text{adj}})}_{(4.33)} \\ &= \left(c_{SW}^{(0)} - 1 \right) L \left(C_2^{\text{adj}} + 3C_{(a)}^{\text{adj}} - \frac{3N_c}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Insgesamt verschwinden hier auch für beliebige Darstellungen genau dann die Infrarot-Divergenzen der einzelnen Diagramme in der Summe, wenn c_{SW} auf Tree-Level (4.7) passend gewählt wird. Aus den Beiträgen aller Diagramme ergibt sich nun direkt der Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizient in der 1-Loop-Ordnung nach (4.11) für Majorana-

Fermionen in der adjungierten Darstellung:

$$\begin{aligned}
c_{\text{sw}}^{(1)} &= \sum_{i=a,\dots,f} G^{(i)} \\
&= \underbrace{[-0,02743(1)]}_{(4.18)} \underbrace{C_{(a)}^{\text{adj}}}_{(4.17)} \\
&\quad - \underbrace{[-0,05541(2)]}_{(4.22)} \underbrace{C_{(b)}^{\text{adj}}}_{(4.21)} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2}[0,10844(4)]}_{(4.26)} \underbrace{C_{(c)}^{\text{adj}}}_{(4.25)} \\
&\quad + \underbrace{\left(C_2^{\text{adj}} - \frac{3}{2}C_{(a)} \right) [0,15493339(1)] + \left(C_2^{\text{adj}} + 3C_{(a)} \right) [0,0625]}_{(4.49)} \\
&\quad - \underbrace{[-0,011266(7)]}_{(4.30)} \underbrace{C_{(e),\text{Wilson}}^{\text{adj}}}_{(4.29)} + \underbrace{\frac{1}{2}[0,06439(1)]}_{(4.30)} \underbrace{C_{(e),\text{Clover}}^{\text{adj}}}_{(4.29)} \\
&\quad - \underbrace{[-0,011266(7)]}_{(4.34)} \underbrace{C_{(f),\text{Wilson}}^{\text{adj}}}_{(4.33)} - \underbrace{\frac{1}{2}[0,06439(1)]}_{(4.34)} \underbrace{C_{(e),\text{Clover}}^{\text{adj}}}_{(4.33)}. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Die Konstanten in den Beiträgen $G^{(i)}$ sind unabhängig von N_c oder der Darstellung. Nur die beiden Farbfaktoren $C_{(b)}^{\text{adj}}$ und $C_{(c)}^{\text{adj}}$ sind darstellungsunabhängig. Werden die anderen Farbfaktoren durch die entsprechenden Faktoren $C_{(i)}$ der fundamentalen Darstellung nach (A.34) ersetzt, wird dadurch das Ergebnis für $c_{\text{sw}}^{(1)}$ nach [10] und [11] reproduziert.

Mit (4.17) und (A.51) lässt sich der Ausdruck für die adjungierte Darstellung für beliebige N_c stark vereinfachen:

$$\begin{aligned}
c_{\text{sw}}^{(1)} &= \frac{N_c}{2} \left([-0,02743(1)] - [-0,05541(2)] - \frac{1}{2}[0,10844(4)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}[0,15493339(1)] + 5[0,0625] - 3[-0,011266(7)] - \frac{1}{2}[0,06439(1)] \right) \\
&= \frac{N_c}{2}[0,36533(3)]. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Die Unsicherheit des Wertes wurde nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung aus den Unsicherheiten der einzelnen Summanden bestimmt, die ausschließlich aus den Unsicherheiten der numerischen Berechnung der Gittersummen stammen.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Ergebnisse (4.7) und (4.51) der störungstheoretischen Berechnung des Sheikholeslam-Wohlert-Koeffizienten c_{sw} reproduzieren für die Farbfaktoren in der fundamentalen Darstellung die Ergebnisse der störungstheoretischen Rechnungen [10], [29], [30], [11] und der nicht-störungstheoretischen Simulationen [31], [32]. Für Majorana-Fermionen in der adjungierten Darstellung ergibt sich insbesondere für $N_c = 2$ der Wert:

$$c_{\text{sw}} = 1 + 0,36533(3)g^2 + \mathcal{O}(g^4). \quad (4.53)$$

Da die Majorana-Eigenschaft für die verwendeten Diagramme bis zur 1-Loop-Ordnung keinen Einfluss hat, ist dieses Ergebnis mit der nicht-perturbativen Berechnung von T. Karavirta, K. Tuominen, A. Mykkonen, J. Rantaharju und K. Rummukainen [36] von 2010 für Fermionen in der adjungierten Darstellung vergleichbar:

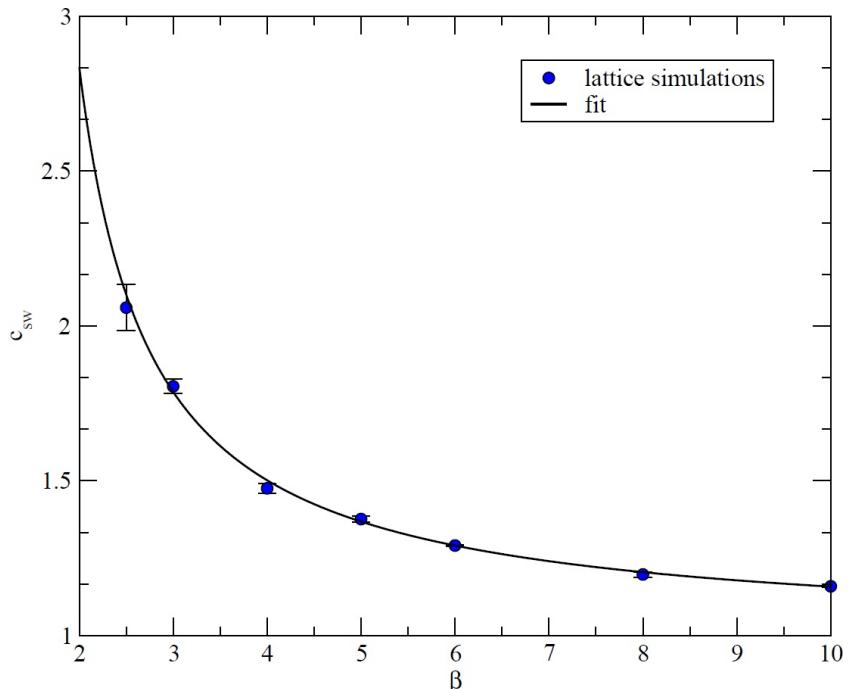


Abbildung 4.4.: $c_{\text{sw}}^{\text{adj}}$ für Fermionen in der adjungierten Darstellung in Abhängigkeit der Kopplung $\beta = 2N_c/g^2$. Abbildung aus [36].

Dabei wurde $c_{\text{sw}}^{\text{adj}}$ durch Simulationen so bestimmt, dass Diskretisierungseffekte der Ordnung $\mathcal{O}(a)$ von Korrelationsfunktionen verschwinden. Die Interpolation ergibt den Fit

$$c_{\text{sw}}^{\text{adj}} = \frac{1 + 0,032653g^2 - 0,002844g^4}{1 - 0,314153g^2}, \quad (4.54)$$

aus dem

$$\begin{aligned} c_{\text{sw}}^{\text{adj}} &= 1 + (0,314153 + 0,032653)g^2 + \mathcal{O}(g^4) \\ &= 1 + 0,346806g^2 + \mathcal{O}(g^4) \end{aligned} \quad (4.55)$$

folgt. Dieser Wert hat eine Abweichung von etwa 5% von dem Ergebnis des störungstheoretischen Ergebnisses dieser Arbeit.

In den bisherigen Rechnungen wurden nur Eichwirkungen mit Plaketten verwendet. Die störungstheoretische $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung nach [11] liefert auch Ergebnisse für verschiedene verbesserte Eichwirkungen. Dies sollte analog zu dieser Arbeit auch auf adjugierte Majorana-Fermionen übertragbar sein, durch die entsprechende Modelle verbessert werden können.

A. Anhang

A.1. Dirac-Matrizen

Für die Dirac-Matrizen $(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ werden die Konventionen nach [18] verwendet. In der Minkowski-Raum-Zeit erfüllen diese für $\mu = 0, 1, 2, 3$ die Relation

$$[\gamma^{(M)\mu}, \gamma^{(M)\nu}]_+ = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}^{A.2}. \quad (A.1)$$

Explizit sind diese Matrizen hier gegeben durch

$$\begin{aligned} \gamma^{(M)0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^{(M)1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^{(M)2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma^{(M)3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (A.2)$$

In der euklidischen Raum-Zeit sind diese für $i = 1, 2, 3$ definiert durch (1.29) und erfüllen dann für $\mu = 1, 2, 3, 4$ die Relation

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2\delta_{\mu\nu} \mathbb{1}. \quad (A.3)$$

Explizit gelten

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (A.4)$$

In dieser Darstellung sind die Dirac-Matrizen hermitesch und unitär:

$$\gamma_\mu = \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu^{-1}. \quad (A.5)$$

Für beliebige reelle Zahlen a, b_μ gilt mit $b^2 = \sum_{\mu=1}^4 b_\mu^2$:

$$\left(a + i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu b_\mu \right)^{-1} = \frac{a - i \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu b_\mu}{a^2 + b^2}. \quad (\text{A.6})$$

A.2. Lie-Gruppen $SU(N)$

Die wesentlichen Eigenschaften der speziellen unitären Gruppe $SU(N)$ und die für diese Arbeit benötigten Relationen sind in [19], [12], [37] nachzulesen. Insbesondere die nachfolgenden Herleitungen werden größtenteils von [19] übernommen. Die spezielle unitäre Gruppe $SU(N)$ ist die Menge aller unitären $N \times N$ -Matrizen U mit Determinante 1:

$$\begin{aligned} U^\dagger &= U^{-1}, \\ \det U &= 1. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Diese Menge ist eine Lie-Gruppe, die für $N \geq 2$ nicht abelsch ist. Die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{su}(N)$ ist $(N^2 - 1)$ -dimensional. Generatoren der Gruppe $SU(N)$ entsprechen einer Basis T^1, \dots, T^{N^2-1} der Algebra $\mathfrak{su}(N)$. Diese kann so gewählt werden, dass die Matrizen T^a für $a = 1, \dots, N^2 - 1$ spurlos und hermitesch sind. Die Lie-Algebra $\mathfrak{su}(N)$ ist eine Drehimpuls-Algebra mit

$$[T^a, T^b]_- = i \sum_{c=1}^{N^2-1} f^{abc} T^c, \quad (\text{A.8})$$

wobei die Strukturkonstante f^{abc} der Gruppe in (A.17) und (A.20) definiert wird. Mit Hilfe der Generatoren lässt sich jedes Gruppenelement $U \in SU(N)$ mit $N^2 - 1$ reellen Parametern ω^a durch

$$U = \exp \left(i \sum_{a=1}^{N^2-1} \omega^a T^a \right) \quad (\text{A.9})$$

darstellen.

A.2.1. Fundamentale Darstellung

In der fundamentalen Darstellung der Gruppe $SU(N)$ sind die Generatoren T^a durch

$$\text{Spur} (T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (\text{A.10})$$

normiert. Die Matrizen T^1, \dots, T^{N^2-1} bilden eine Basis der Algebra $\mathfrak{su}(N)$ und spannen deshalb einen $(N^2 - 1)$ -dimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{C}^{N \times N}$ auf. Da die Matrizen spurlos sind, ist insbesondere $\mathbb{1}_N$ ^{A.3} nicht Element dieses Untervektorraums. Ist $T^0 := \frac{1}{\sqrt{2N}} \mathbb{1}_N$, so ist

^{A.3} $\mathbb{1}_N$ bezeichnet die $N \times N$ Einheitsmatrix.

die Menge $\{T^0, \dots, T^{N^2-1}\}$ linear unabhängig und damit eine Basis der Menge $\mathbb{C}^{N \times N}$ aller komplexen $N \times N$ -Matrizen. Eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{C}^{N \times N}$ lässt sich deshalb eindeutig als Linearkombination

$$A = \sum_{a=0}^{N^2-1} A^a T^a \quad (\text{A.11})$$

darstellen. Die Komponenten A^a der Matrix bezüglich dieser Basis sind durch

$$A^a = 2 \sum_{b=0}^{N^2-1} A^b \text{Spur}(T^b T^a) = 2 \text{Spur}(AT^a) \quad (\text{A.12})$$

gegeben. Da die Menge $\{T^0, \dots, T^{N^2-1}\}$ eine Basis ist, existieren insbesondere zu dem Produkt $T^a T^b$ zweier Generatoren N^2 komplexe Zahlen Λ^{abc} mit

$$T^a T^b = \frac{1}{2} \sum_{c=0}^{N^2-1} \Lambda^{abc} T^c, \quad (\text{A.13})$$

wobei

$$\frac{1}{2} \Lambda^{abc} = 2 \text{Spur}(T^a T^b T^c) \quad (\text{A.14})$$

gilt. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \text{Spur}(T^a T^b T^c) \pm \text{Spur}(T^a T^b T^c)^* &= \text{Spur}(T^a T^b T^c) \pm \text{Spur}((T^c)^\dagger (T^b)^\dagger (T^a)^\dagger) \\ &= \text{Spur}(T^a T^b T^c) \pm \text{Spur}(T^c T^b T^a) \\ &= \text{Spur}(T^a T^b T^c) \pm \text{Spur}(T^b T^a T^c) \\ &= \text{Spur}([T^a, T^b]_\pm T^c). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

d^{abc} sei definiert als der Realteil und f^{abc} als der Imaginärteil von Λ^{abc} :

$$d^{abc} := \text{Re } \Lambda^{abc} = \frac{1}{2} (\Lambda^{abc} + (\Lambda^{abc})^*) = 2 \text{Spur}([T^a, T^b]_+ T^c), \quad (\text{A.16})$$

$$i f^{abc} := i \text{Im } \Lambda^{abc} = \frac{1}{2} (\Lambda^{abc} - (\Lambda^{abc})^*) = 2 \text{Spur}([T^a, T^b]_- T^c). \quad (\text{A.17})$$

Insbesondere sind d^{abc} vollständig symmetrisch und f^{abc} vollständig antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Indizes. Da $[T^0, T^b]_+ = \sqrt{\frac{2}{N}} T^b$ und $[T^0, T^b]_- = 0$ gelten, folgen $d^{ab0} = \sqrt{\frac{2}{N}} \delta^{ab}$ und $f^{ab0} = 0$. Damit lässt sich ein Produkt zweier Generatoren durch

$$T^a T^b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} \delta^{ab} \mathbb{1}_N + \sum_{c=1}^{N^2-1} (d^{abc} + i f^{abc}) T^c \right) \quad (\text{A.18})$$

ausdrücken. Daraus ergeben sich direkt die Vertauschungsrelationen

$$[T^a, T^b]_+ = \frac{1}{N} \delta^{ab} \mathbb{1}_N + \sum_{c=1}^{N^2-1} d^{abc} T^c \quad (\text{A.19})$$

$$[T^a, T^b]_- = i \sum_{c=1}^{N^2-1} f^{abc} T^c \quad (\text{A.20})$$

der Generatoren in der fundamentalen Darstellung.

Im Folgenden werden einige Relationen für die Generatoren bestimmt, mit denen sich das Ergebnis des Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizienten für die fundamentale Darstellung nach [11] überprüfen lässt. Zuerst wird der quadratische Casimir-Operator in der fundamentalen Darstellung berechnet. Dazu sei die Matrix $A_{(kl)} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ für alle $1 \leq k, l \leq N$ definiert durch

$$A_{(kl)}^{ij} \stackrel{\text{A.4}}{:=} 2\delta^{il}\delta^{jk}, \quad (\text{A.21})$$

die sich nach (A.11) in der Form

$$A_{(kl)} = \sum_{a=0}^{N^2-1} A_{(kl)}^a \stackrel{\text{A.5}}{=} T^a \quad (\text{A.22})$$

entwickeln lässt. Nach (A.12) gilt für die Komponenten der Matrix bezüglich dieser Basis:

$$A_{(kl)}^a = 2 \operatorname{Spur} (A_{(kl)} T^a) = 2 \sum_{i,j=1}^N A_{(kl)}^{ij} (T^a)^{ji} = 4 (T^a)^{kl}. \quad (\text{A.23})$$

Mit der Entwicklung nach (A.11) folgt daraus:

$$A_{(kl)}^{ij} = 4 \sum_{a=0}^{N^2-1} (T^a)^{ij} (T^a)^{kl}. \quad (\text{A.24})$$

Nach Definition der Matrix $A_{(kl)}$ ergibt sich die Relation

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} (T^a)^{ij} (T^a)^{kl} = \frac{1}{2} \left(\delta^{il}\delta^{jk} - \frac{1}{N} \delta^{ij}\delta^{kl} \right). \quad (\text{A.25})$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{N^2-1} (T^a T^a)^{ij} &= \sum_{a=1}^{N^2-1} \sum_{k=1}^N (T^a)^{ik} (T^a)^{kj} \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{2} \delta^{ij}\delta^{kk} - \frac{1}{2N} \delta^{ik}\delta^{kj} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) \delta^{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Damit lässt sich der quadratische Casimir-Operator $C_2 \mathbb{1}_N$ in der fundamentalen Darstellung angeben:

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^{N^2-1} T^a T^a &= C_2 \mathbb{1}_N, \\ C_2 &= \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Darüber hinaus wird eine benötigte Relation für die Strukturkonstante (A.17) bestimmt. Für diese gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{abc} f^{bcd} &= - \sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{bca} f^{dcg} \\
&= 2i \sum_{b,c=1}^{N^2-1} \text{Spur} \left([T^b, T^c]_- T^a \right) f^{dcg} \\
&= 4i \sum_{b,c=1}^{N^2-1} \text{Spur} \left(T^b T^c T^a \right) f^{dcg} \\
&= 8 \sum_{b,c=1}^{N^2-1} \text{Spur} \left(T^b T^c T^a \right) \text{Spur} \left([T^d, T^c]_- T^b \right) \\
&= 8 \sum_{b,c=1}^{N^2-1} \sum_{i,j,k,l=1}^N (T^b)^{ij} (T^c T^a)^{ji} \left([T^d, T^c]_- \right)^{kl} (T^b)^{lk}. \tag{A.28}
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit (A.25):

$$\begin{aligned}
\sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{abc} f^{bcd} &= 4 \sum_{b,c=1}^{N^2-1} \sum_{i,j,k,l=1}^N \left(\delta^{ik} \delta^{jl} - \frac{1}{N} \delta^{ij} \delta^{lk} \right) (T^c T^a)^{ji} \left([T^d, T^c]_- \right)^{kl} \\
&= 4 \sum_{c=1}^{N^2-1} \sum_{i,j=1}^N (T^c T^a)^{ji} \left([T^d, T^c]_- \right)^{ij} \\
&\quad - \frac{4}{N} \sum_{c=1}^{N^2-1} \sum_{i,k=1}^N (T^c T^a)^{ii} \left([T^d, T^c]_- \right)^{kk}. \tag{A.29}
\end{aligned}$$

Dabei gilt nach (A.20):

$$\sum_{k=1}^N \left([T^d, T^c]_- \right)^{kk} = i \sum_{b=1}^{N^2-1} f^{dcg} \text{Spur}(T^b) = 0. \tag{A.30}$$

Weiterhin folgt mit (A.25) und (A.10):

$$\begin{aligned}
\sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{abc} f^{bcd} &= 4 \sum_{c=1}^{N^2-1} \sum_{i,j=1}^N (T^c T^a)^{ji} \left([T^d, T^c]_- \right)^{ij} \\
&= 4 \sum_{c=1}^{N^2-1} \sum_{i,j,k,l=1}^N (T^c)^{jk} (T^a)^{ki} \left((T^d)^{il} (T^c)^{lj} - (T^c)^{il} (T^d)^{lj} \right) \\
&= 2 \sum_{c=1}^{N^2-1} \sum_{i,j,k,l=1}^N \left(\delta^{jj} \delta^{kl} - \frac{1}{N} \delta^{jk} \delta^{lj} \right) (T^a)^{ki} (T^d)^{il} \\
&\quad - 2 \sum_{c=1}^{N^2-1} \sum_{i,j,k,l=1}^N \left(\delta^{jl} \delta^{ki} - \frac{1}{N} \delta^{jk} \delta^{il} \right) (T^a)^{ki} (T^d)^{lj}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(N \sum_{i,k=1}^N (T^a)^{ki} (T^d)^{ik} - \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N (T^a)^{ji} (T^d)^{ij} \right) \\
&\quad - 2 \left(\sum_{i,j=1}^N (T^a)^{ii} (T^d)^{jj} - \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N (T^a)^{ji} (T^d)^{ij} \right) \\
&= 2 \left(N - \frac{1}{N} + \frac{1}{N} \right) \text{Spur}(T^a T^d) \\
&= N \delta^{ad}.
\end{aligned} \tag{A.31}$$

Mit dieser Relation ergibt sich:

$$\sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{abc} T^b T^c = \frac{1}{2} \sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{abc} [T^b, T^c]_- = \frac{i}{2} \sum_{b,c,d=1}^{N^2-1} f^{abc} f^{bcd} T^d = i \frac{N}{2} T^a. \tag{A.32}$$

Daraus folgt mit (A.20) und (A.27):

$$\begin{aligned}
\sum_{b=1}^{N^2-1} T^b T^a T^b &= \sum_{b=1}^{N^2-1} \left([T^b, T^a]_- + T^a T^b \right) T^b \\
&= i \sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{bac} T^c T^b + T^a \sum_{b=1}^{N^2-1} T^b T^b \\
&= -\frac{N}{2} T^a + \frac{1}{2} \left(N - \frac{1}{N} \right) T^a \sum_{b=1}^{N^2-1} T^b T^b \\
&= -\frac{1}{2N} T^a.
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Zusammengefasst ergeben sich so mit dem Casimir-Operator (A.27) die benötigten Relationen für Produkte von Generatoren in der fundamentalen Darstellung:

$$\begin{aligned}
\sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{abc} T^b T^c &= i \frac{N}{2} T^a, \\
\sum_{b=1}^{N^2-1} T^b T^a T^b &= -\frac{1}{2N} T^a, \\
\sum_{b=1}^{N^2-1} T^a T^b T^b &= C_2 T^a, \\
\sum_{b=1}^{N^2-1} T^b T^b T^a &= C_2 T^a.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

A.2.1.1. SU(2) in der fundamentalen Darstellung

Die Generatoren T^a der Gruppe SU(2) lassen sich mit Pauli-Matrizen σ^a mit $a = 1, 2, 3$ darstellen:

$$T^a = \frac{1}{2} \sigma^a. \tag{A.35}$$

Für die Pauli-Matrizen gelten nach [12]:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Die Strukturkonstante ist dann durch das Levi-Civita-Symbol $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$ gegeben und es gilt $d^{abc} = 0$.

A.2.1.2. $SU(3)$ in der fundamentalen Darstellung

Die Generatoren T^a der Gruppe $SU(3)$ lassen sich mit Gell-Mann-Matrizen λ^a mit $a = 1, \dots, 8$ darstellen:

$$T^a = \frac{1}{2} \lambda^a. \quad (\text{A.37})$$

Für die Gell-Mann-Matrizen gelten nach [12]:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

abc	f^{abc}	abc	d^{abc}
123	1	118	$1/\sqrt{3}$
147	$1/2$	146	$1/2$
156	$-1/2$	157	$1/2$
246	$1/2$	228	$1/\sqrt{3}$
257	$1/2$	247	$-1/2$
345	$1/2$	256	$1/2$
367	$-1/2$	338	$1/\sqrt{3}$
458	$\sqrt{3}/2$	344	$1/2$
678	$\sqrt{3}/2$	355	$1/2$
		366	$-1/2$
		377	$-1/2$
		448	$-1/(2\sqrt{3})$
		558	$-1/(2\sqrt{3})$

abc	f^{abc}	abc	d^{abc}
668	$-1/(2\sqrt{3})$	778	$-1/(2\sqrt{3})$
888	$-1/\sqrt{3}$		

Tabelle A.1.: Unabhängige, nicht verschwindende Komponenten von f^{abc} und d^{abc} [12]

A.2.2. Adjungierte Darstellung

Bezüglich einer beliebigen Darstellung D der Lie-Gruppe $SU(N)$ existieren zu jedem Gruppenelement $U \in SU(N)$ in dieser Darstellung mit Generatoren $T_D^1, \dots, T_D^{N^2-1}$ reelle Parameter ω_D^a mit

$$D(U) = \exp \left(i \sum_{a=1}^{N^2-1} \omega_D^a T_D^a \right). \quad (\text{A.39})$$

Dabei erfüllen die Generatoren wiederum die Relation (A.20) für eine Drehimpuls-Algebra. Jedoch ist die Spur abhängig von der Darstellung:

$$\text{Spur}_D (T_D^a) = \sum_{i=1}^{\dim(D)} (T_D^a)^{ii}. \quad (\text{A.40})$$

Um die adjungierte Darstellung zu konstruieren, werden die Komponenten der Matrix $V_D \in \mathbb{C}^{N \times N}$ definiert durch die Transformation

$$D(U)^\dagger T_D^a D(U) = \sum_{b=1}^{N^2-1} V_D^{ab} T_D^b \quad (\text{A.41})$$

der Generatoren in der Darstellung D . Nach (A.12) folgt

$$V_D^{ab} = 2 \text{Spur}_D \left(D(U)^\dagger T_D^a D(U) T_D^b \right) \quad (\text{A.42})$$

für die Komponenten dieser Matrix. In Abhängigkeit eines Parameters x sei $D(U)(x)$ definiert durch:

$$D(U)(x) := \exp \left(i \sum_{a=1}^{N^2-1} \omega_D^a T_D^a x \right). \quad (\text{A.43})$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} V_D^{ab}(x) &= -2i \sum_{c=1}^{N^2-1} \omega_D^c \text{Spur}_D \left(D(U)(x)^\dagger [T_D^c, T_D^a]_- D(U)(x) T_D^b \right) \\
&= \sum_{c,d=1}^{N^2-1} f^{cad} \omega_D^c V_D^{db}(x) \\
&= i \sum_{c,d=1}^{N^2-1} \omega_D^c (T_{\text{adj}}^c)^{ad} V_D^{db}(x) \\
&= i \sum_{c=1}^{N^2-1} \omega_D^c \left(T_{\text{adj}}^c V_D(x) \right)^{ab}
\end{aligned} \tag{A.44}$$

Dabei ist die Matrix $T_{\text{adj}}^a \in \mathbb{C}^{(N^2-1) \times (N^2-1)}$ definiert durch

$$(T_{\text{adj}}^a)^{bc} := -if^{abc}, \tag{A.45}$$

mit der sich die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x) = i \sum_{a=1}^{N^2-1} \omega_D^a T_{\text{adj}}^a V(x) \tag{A.46}$$

ergibt. Diese wird gelöst, falls gilt:

$$V_D = \exp \left(i \sum_{a=1}^{N^2-1} \omega_D^a T_{\text{adj}}^a \right). \tag{A.47}$$

Zu einem beliebigen Gruppenelement U in der Darstellung D lässt sich die Matrix V_D bezüglich der Matrizen T_{adj}^a mit denselben Parametern ω_D^a in der Form (A.9) darstellen. Deshalb sind $T_{\text{adj}}^1, \dots, T_{\text{adj}}^{N^2-1}$ die Generatoren dieser adjungierten Darstellung. Die Generatoren sind unabhängig von der Darstellung D gegeben durch (A.45). Aus der Symmetrie der Strukturkonstanten (A.17) folgt

$$T_{\text{adj}}^a = -(T_{\text{adj}}^a)^* = -(T_{\text{adj}}^a)^T. \tag{A.48}$$

Deshalb sind die Gruppenelemente V in der adjungierten Darstellung hermitesch und orthogonal:

$$\begin{aligned}
V_D &= V_D^*, \\
V_D^T &= V_D^{-1}.
\end{aligned} \tag{A.49}$$

Wie bereits für die fundamentale Darstellung werden dieselben Relationen für die Generatoren in der adjungierten Darstellung bestimmt. Zur Bestimmung des quadratischen Casimir-Operator in der adjungierten Darstellung werden (A.45) und (A.31) verwendet:

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} (T_{\text{adj}}^a T_{\text{adj}}^a)^{bc} = \sum_{a,d=1}^{N^2-1} (T_{\text{adj}}^a)^{bd} (T_{\text{adj}}^a)^{dc} = - \sum_{a,d=1}^{N^2-1} f^{abd} f^{adc} = N \delta^{bc}. \tag{A.50}$$

Damit lässt sich der quadratische Casimir-Operator $C_2^{\text{adj}} \mathbb{1}_{N^2-1}$ in der adjungierten Darstellung direkt angeben:

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} T_{\text{adj}}^a T_{\text{adj}}^a = C_2^{\text{adj}} \mathbb{1}_{N^2-1},$$

$$C_2^{\text{adj}} = N. \quad (\text{A.51})$$

Weiterhin gilt mit (A.20):

$$\begin{aligned} \sum_{b=1}^{N^2-1} T_{\text{adj}}^b T_{\text{adj}}^a T_{\text{adj}}^b &= \sum_{b=1}^{N^2-1} \left([T_{\text{adj}}^b, T_{\text{adj}}^a]_- + T_{\text{adj}}^a T_{\text{adj}}^b \right) T_{\text{adj}}^b \\ &= i \sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{bac} T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^b + T_{\text{adj}}^a \sum_{b=1}^{N^2-1} T_{\text{adj}}^b T_{\text{adj}}^b. \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Dabei gilt wiederum mit (A.20) und (A.31):

$$i \sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{bac} T_{\text{adj}}^c T_{\text{adj}}^b = \frac{i}{2} \sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{bac} [T_{\text{adj}}^c, T_{\text{adj}}^b]_- = -\frac{1}{2} \sum_{b,c,d=1}^{N^2-1} f^{bac} f^{cbd} T_{\text{adj}}^d = -\frac{N}{2} T_{\text{adj}}^a. \quad (\text{A.53})$$

Damit folgt mit (A.51):

$$\sum_{b=1}^{N^2-1} T_{\text{adj}}^b T_{\text{adj}}^a T_{\text{adj}}^b = \left(-\frac{N}{2} + N \right) T_{\text{adj}}^a = \frac{N}{2} T_{\text{adj}}^a. \quad (\text{A.54})$$

Insgesamt gelten mit dem Casimir-Operator (A.51) in der adjungierten Darstellung:

$$\begin{aligned} \sum_{b,c=1}^{N^2-1} f^{abc} T_{\text{adj}}^b T_{\text{adj}}^c &= i \frac{N}{2} T_{\text{adj}}^a, \\ \sum_{b=1}^{N^2-1} T_{\text{adj}}^b T_{\text{adj}}^a T_{\text{adj}}^b &= \frac{N}{2} T_{\text{adj}}^a, \\ \sum_{b=1}^{N^2-1} T_{\text{adj}}^a T_{\text{adj}}^b T_{\text{adj}}^b &= C_2^{\text{adj}} T_{\text{adj}}^a, \\ \sum_{b=1}^{N^2-1} T_{\text{adj}}^b T_{\text{adj}}^b T_{\text{adj}}^a &= C_2^{\text{adj}} T_{\text{adj}}^a. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

A.2.2.1. SU(2) in der adjungierten Darstellung

Die Generatoren der Gruppe SU(2) ergeben sich in der adjungierten Darstellung direkt aus $(T_{\text{adj}}^a)^{bc} = -i\varepsilon^{abc}$:

$$T_{\text{adj}}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad T_{\text{adj}}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_{\text{adj}}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.56})$$

A.3. Gluon-Quark-Vertizes des Clover-Terms für Dirac-Fermionen

Die Gluon-Quark-Vertizes erster und zweiter Ordnung des Clover-Terms für Dirac-Fermionen in der fundamentalen Darstellung sind nach [10], [11] gegeben durch:

$$V_{\text{Clover}}^{(1)}(k)_\mu^a = -g \frac{c_{\text{SW}}}{2} \cos\left(\frac{k_\mu a}{2}\right) \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} \sin(k_\nu a) T^a, \quad (\text{A.57})$$

$$\begin{aligned} V_{\text{Clover}}^{(2)}(k, k')_{\mu\nu}^{ab} &= ag^2 \frac{c_{\text{SW}}}{2} \left(\sin\left(\frac{(k+k')_\mu a}{2}\right) \sum_{\rho=1}^4 \sigma_{\mu\rho} (\sin(k'_\rho a) - \sin(k_\rho a)) \delta_{\mu\nu} \right. \\ &\quad + \left(4 \cos\left(\frac{(k+k')_\mu a}{2}\right) \cos\left(\frac{k_\nu a}{2}\right) \cos\left(\frac{(k+k')_\nu a}{2}\right) \cos\left(\frac{k'_\mu a}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cos\left(\frac{k_\mu a}{2}\right) \cos\left(\frac{k'_\nu a}{2}\right) \right) \sigma_{\mu\nu} \right) \frac{1}{2} (T^a T^b - T^b T^a). \quad (\text{A.58}) \end{aligned}$$

Für den Gluon-Quark-Vertex dritter Ordnung wird der Farbanteil direkt separiert:

$$\begin{aligned} &V_{\text{Clover}}^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{abc} \\ &= W_{\text{Clover}}^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{abc} + W_{\text{Clover}}^{(3)}(k'', k, k')_{\rho\mu\nu}^{abc} + W_{\text{Clover}}^{(3)}(k', k'', k)_{\nu\rho\mu}^{abc}, \\ &W_{\text{Clover}}^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{abc} \\ &= W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho} (T^a T^b T^c) \\ &\quad + W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho} \frac{1}{2} (T^a T^b T^c + T^c T^b T^a), \\ &W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho} \\ &= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \cos\left(\frac{(k+k'+k'')_\mu a}{2}\right) \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \left(\frac{1}{6} \sin((k+k'+k'')_\tau a) \right. \\ &\quad \left. - \cos\left(\frac{(k+k'+k'')_\tau a}{2}\right) \cos\left(\frac{(k''-k)_\tau a}{2}\right) \sin\left(\frac{k'_\tau a}{2}\right) \right) \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} \\ &W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho} \\ &= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sin\left(\frac{(k+2k'+k'')_\mu a}{2}\right) \cos\left(\frac{(k+k'+k'')_\nu a}{2}\right) \cos\left(\frac{(k-k'')_\nu a}{2}\right) \sigma_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} \\ &\quad + a^2 g^3 c_{\text{SW}} \left(2 \cos\left(\frac{(k+k'+k'')_\mu a}{2}\right) \cos\left(\frac{(k+k'+k'')_\nu a}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \sin\left(\frac{k_\nu a}{2}\right) \cos\left(\frac{(k'+k'')_\mu a}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\frac{(k+2k')_\mu a}{2}\right) \sin\left(\frac{(k'+k'')_\nu a}{2}\right) \right) \sigma_{\mu\nu} \delta_{\nu\rho} \quad (\text{A.59}) \end{aligned}$$

A.4. Entwicklungen zu Diagramm (d)

Zur Berechnung des Beitrags des Diagramms (d) zum Sheikholeslami-Wohlert-Koeffizienten in 1-Loop-Ordnung wird eine Entwicklung des Impulsanteils des 3-Gluonen-Gluino-Vertex nach Abbildung 3.6 in den äußeren Impulsen p und p' benötigt. Dazu werden die Taylor-Entwicklungen

$$\sin(x) = \frac{1}{2}x + \mathcal{O}(x^3) \quad (\text{A.60})$$

$$\cos(x) = 1 + \mathcal{O}(x^2) \quad (\text{A.61})$$

und die Additionstheoreme

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad (\text{A.62})$$

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad (\text{A.63})$$

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) \quad (\text{A.64})$$

verwendet.

A.4.1. Entwicklung des 3-Gluonen-Gluino-Vertex der Wilsonschen Fermionen-Wirkung

Der 3-Gluonen-Gluino-Vertex (3.34) der Wilsonschen Fermionen-Wirkung lässt sich direkt im äußeren Impuls $p + p'$ entwickeln:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^4 V_{\text{Wilson}}^{(3)}(p, p')_{\mu\nu\nu} &= -a^2 g^3 \left(\underbrace{i\gamma_\mu \cos\left(\frac{(p+p')_\mu a}{2}\right)}_{(\text{A.61})} + \underbrace{r \sin\left(\frac{(p+p')_\mu a}{2}\right)}_{(\text{A.60})} \right) \\ &= -a^2 g^3 \left(i\gamma_\mu + \frac{r}{2}(p+p')_\mu a + \mathcal{O}(a^2) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

A.4.2. Entwicklung des 3-Gluonen-Gluino-Vertex des Clover-Terms

Zur Entwicklung des Impulsanteils $W_{\text{Clover}}^{(3,1)}$ des 3-Gluonen-Gluino-Vertex des Clover Terms nach (3.39) im äußeren Impuls $k + k' + k'' = p' - p$ werden zuerst die trigonometrischen Funktionen in $p' - p$ entwickelt und dann die Additionstheoreme angewendet:

$$\begin{aligned} W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho} &= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \underbrace{\cos\left(\frac{(p' - p)_\mu a}{2}\right)}_{(\text{A.61})} \frac{1}{6} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \underbrace{\sin\left((p' - p)_\tau a\right)}_{(\text{A.60})} \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} \\ &\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \underbrace{\cos\left(\frac{(p' - p)_\mu a}{2}\right)}_{(\text{A.61})} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \underbrace{\cos\left(\frac{(p' - p)_\tau a}{2}\right)}_{(\text{A.61})} \cos\left(\frac{(k'' - k)_\tau a}{2}\right) \sin\left(\frac{k'_\tau a}{2}\right) \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{6} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_\tau a \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} \\
&\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \underbrace{\cos\left(\frac{(k'' - k)_\tau a}{2}\right)}_{(\text{A.63})} \sin\left(\frac{k'_\tau a}{2}\right) \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} + \mathcal{O}(a^4) \\
&= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{6} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_\tau a \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} \\
&\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \cos\left(\frac{k_\tau a}{2}\right) \sin\left(\frac{k'_\tau a}{2}\right) \cos\left(\frac{k''_\tau a}{2}\right) \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} \\
&\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \sin\left(\frac{k_\tau a}{2}\right) \sin\left(\frac{k'_\tau a}{2}\right) \sin\left(\frac{k''_\tau a}{2}\right) \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} + \mathcal{O}(a^4). \tag{A.66}
\end{aligned}$$

Wie auch bei den anderen Termen werden beim Impulsanteil $W_{\text{Clover}}^{(3,2)}$ des 3-Gluonen-Gluino-Vertex des Clover Terms nach (3.39) alle zyklischen Permutationen von (k, μ) , (k', ν) und (k'', ρ) benötigt. Dabei stimmen jeweils zwei Lorentz-Indizes überein. Deshalb verschwindet die Permutation $W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k', k'', k)_{\nu\nu\mu}$ wegen $\sigma_{\nu\nu} = 0$ vollständig. Bei der Permutation $W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k, k', k'')_{\mu\nu\nu}$ verschwindet der Summand mit $\sigma_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} = 0$ und bei $W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k'', k, k')_{\nu\mu\nu}$ der Summand mit $\sigma_{\nu\mu} \delta_{\mu\nu} = 0$.

Mit $k'' = -k'$ gilt für die Permutation $W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k', k'', k)_{\nu\nu\mu}$:

$$\begin{aligned}
W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k, k', k'')_{\mu\nu\nu} &= a^2 g^3 c_{\text{SW}} 2 \underbrace{\cos\left(\frac{(p' - p)_\mu a}{2}\right)}_{(\text{A.61})} \underbrace{\cos\left(\frac{(p' - p)_\nu a}{2}\right)}_{(\text{A.61})} \sin\left(\frac{k_\nu a}{2}\right) \underbrace{\cos(0)}_1 \sigma_{\mu\nu} \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{SW}} \cos\left(\frac{(k + 2k')_\mu a}{2}\right) \underbrace{\sin(0)}_0 \sigma_{\mu\nu} \\
&= a^2 g^3 c_{\text{SW}} 2 \sin\left(\frac{k_\nu a}{2}\right) \sigma_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^4). \tag{A.67}
\end{aligned}$$

Für die Permutation $W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k'', k, k')_{\nu\mu\nu}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k'', k, k')_{\nu\mu\nu} \\
&= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \underbrace{\sin\left(\frac{(p' - p + k')_\nu a}{2}\right)}_{(\text{A.62})} \underbrace{\cos\left(\frac{(p' - p)_\mu a}{2}\right)}_{(\text{A.61})} \underbrace{\cos\left(\frac{(k - k'')_\mu a}{2}\right)}_{(\text{A.63})} \sigma_{\nu\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 g^3 c_{\text{sw}} \underbrace{\sin \left(\frac{(p' - p)_\nu a}{2} \right)}_{(A.60)} \cos \left(\frac{k_\mu a}{2} \right) \cos \left(\frac{k'_\nu a}{2} \right) \cos \left(\frac{(k''_\mu a}{2} \right) \sigma_{\nu\mu} \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{sw}} \underbrace{\cos \left(\frac{(p' - p)_\nu a}{2} \right)}_{(A.61)} \cos \left(\frac{k_\mu a}{2} \right) \sin \left(\frac{k'_\nu a}{2} \right) \cos \left(\frac{k''_\mu a}{2} \right) \sigma_{\nu\mu} \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{sw}} \underbrace{\sin \left(\frac{(p' - p)_\nu a}{2} \right)}_{(A.60)} \sin \left(\frac{k_\mu a}{2} \right) \cos \left(\frac{k'_\nu a}{2} \right) \sin \left(\frac{k''_\mu a}{2} \right) \sigma_{\nu\mu} \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{sw}} \underbrace{\cos \left(\frac{(p' - p)_\nu a}{2} \right)}_{(A.61)} \sin \left(\frac{k_\mu a}{2} \right) \sin \left(\frac{k'_\nu a}{2} \right) \sin \left(\frac{k''_\mu a}{2} \right) \sigma_{\nu\mu} + \mathcal{O}(a^4) \\
&= a^2 g^3 c_{\text{sw}} \frac{1}{2} (p' - p)_\nu a \cos \left(\frac{k_\mu a}{2} \right) \cos \left(\frac{k'_\nu a}{2} \right) \cos \left(\frac{k''_\mu a}{2} \right) \sigma_{\nu\mu} \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{sw}} \cos \left(\frac{k_\mu a}{2} \right) \sin \left(\frac{k'_\nu a}{2} \right) \cos \left(\frac{k''_\mu a}{2} \right) \sigma_{\nu\mu} \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{sw}} \frac{1}{2} (p' - p)_\nu a \sin \left(\frac{k_\mu a}{2} \right) \cos \left(\frac{k'_\nu a}{2} \right) \sin \left(\frac{k''_\mu a}{2} \right) \sigma_{\nu\mu} \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{sw}} \sin \left(\frac{k_\mu a}{2} \right) \sin \left(\frac{k'_\nu a}{2} \right) \sin \left(\frac{k''_\mu a}{2} \right) \sigma_{\nu\mu} + \mathcal{O}(a^4). \tag{A.68}
\end{aligned}$$

Im Folgenden werden die einzelnen zyklischen Permutationen der Impulskonfiguration $k = p' - p$, $k' = -q$ und $k'' = q$ nach Abbildung 4.2 in die Impulsanteile des Vertex eingesetzt und weiter im äußeren Impuls $p' - p$ entwickelt.

A.4.2.1. $W_{\text{Clover}}^{(3)}(p' - p, -q, q)_{\mu\nu\nu}$

Für die Permutation $W_{\text{Clover}}^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\nu}$ von (A.66) gilt:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=1}^4 W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(p' - p, -q, q)_{\mu\nu\nu} \\
&= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{6} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_\tau a \\
&+ a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \underbrace{\cos\left(\frac{(p' - p)_\tau a}{2}\right)}_{(\text{A.61})} \sin\left(\frac{q_\tau a}{2}\right) \cos\left(\frac{q_\tau a}{2}\right) \\
&+ a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \underbrace{\sin\left(\frac{(p' - p)_\tau a}{2}\right)}_{(\text{A.60})} \sin\left(\frac{q_\tau a}{2}\right) \sin\left(\frac{q_\tau a}{2}\right) + \mathcal{O}(a^4) \\
&= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{6} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_\tau a \\
&+ a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \sin\left(\frac{q_\tau a}{2}\right) \cos\left(\frac{q_\tau a}{2}\right) \\
&+ a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_\tau a \sin^2\left(\frac{q_\tau a}{2}\right) + \mathcal{O}(a^4). \tag{A.69}
\end{aligned}$$

Mit $\sigma_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} = 0$ gilt für (A.67):

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=1}^4 W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(p' - p, -q, q)_{\mu\nu\nu} = a^2 g^3 c_{\text{SW}} 2 \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} \underbrace{\sin\left(\frac{(p' - p)_\nu a}{2}\right)}_{(\text{A.60})} \\
&= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} (p' - p)_\nu a + \mathcal{O}(a^4). \tag{A.70}
\end{aligned}$$

A.4.2.2. $W_{\text{Clover}}^{(3)}(q, p' - p, -q)_{\nu\mu\nu}$

Für die Permutation $W_{\text{Clover}}^{(3)}(k'', k, k')_{\nu\mu\nu}$ von (A.66) gilt mit $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^4 W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(q, p' - p, -q)_{\nu\mu\nu} &= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{6} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_{\tau} a \\
&\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \cos\left(\frac{q_{\tau} a}{2}\right) \sin\left(\frac{(p' - p)_{\tau} a}{2}\right) \cos\left(\frac{q_{\tau} a}{2}\right) \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \sin\left(\frac{q_{\tau} a}{2}\right) \sin\left(\frac{(p' - p)_{\tau} a}{2}\right) \sin\left(\frac{q_{\tau} a}{2}\right) \\
&\quad + \mathcal{O}(a^4) \\
&= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{6} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_{\tau} a \\
&\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_{\tau} a \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_{\tau} a \sin^2\left(\frac{q_{\tau} a}{2}\right) + \mathcal{O}(a^4). \quad (\text{A.71})
\end{aligned}$$

Mit $\sigma_{\nu\mu} \delta_{\mu\nu} = 0$ und $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ gilt für (A.68):

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^4 W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(q, p' - p, -q)_{\nu\mu\nu} &= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^4 \underbrace{\sigma_{\nu\mu}}_{-\sigma_{\mu\nu}} (p' - p)_{\nu} a \cos\left(\frac{q_{\mu} a}{2}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{(p' - p)_{\nu} a}{2}\right) \cos\left(\frac{q_{\mu} a}{2}\right)}_{(\text{A.61})} \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\nu=1}^4 \underbrace{\sigma_{\nu\mu}}_{-\sigma_{\mu\nu}} \cos\left(\frac{q_{\mu} a}{2}\right) \underbrace{\sin\left(\frac{(p' - p)_{\nu} a}{2}\right) \cos\left(\frac{q_{\mu} a}{2}\right)}_{(\text{A.60})} \\
&\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^4 \underbrace{\sigma_{\nu\mu}}_{-\sigma_{\mu\nu}} (p' - p)_{\nu} a \sin\left(\frac{q_{\mu} a}{2}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{(p' - p)_{\nu} a}{2}\right) \sin\left(\frac{q_{\mu} a}{2}\right)}_{(\text{A.61})} \\
&\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\nu=1}^4 \underbrace{\sigma_{\nu\mu}}_{-\sigma_{\mu\nu}} \sin\left(\frac{q_{\mu} a}{2}\right) \underbrace{\sin\left(\frac{(p' - p)_{\nu} a}{2}\right) \sin\left(\frac{q_{\mu} a}{2}\right)}_{(\text{A.60})} + \mathcal{O}(a^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} (p' - p)_\nu a \cos^2 \left(\frac{q_\mu a}{2} \right) \\
&\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} (p' - p)_\nu a \cos^2 \left(\frac{q_\mu a}{2} \right) \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} (p' - p)_\nu a \sin^2 \left(\frac{q_\mu a}{2} \right) \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} (p' - p)_\nu a \sin^2 \left(\frac{q_\mu a}{2} \right) + \mathcal{O}(a^4) \\
&= a^2 g^3 c_{\text{SW}} 2 \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} (p' - p)_\nu a \sin^2 \left(\frac{q_\mu a}{2} \right) \\
&\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\nu=1}^4 \sigma_{\mu\nu} (p' - p)_\nu a + \mathcal{O}(a^4). \tag{A.72}
\end{aligned}$$

A.4.2.3. $W_{\text{Clover}}^{(3)}(-q, q, p' - p)_{\nu\nu\mu}$

Für die Permutation $W_{\text{Clover}}^{(3)}(k', k'', k)_{\nu\nu\mu}$ von (A.66) gilt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^4 W_{\text{Clover}}^{(3,1)}(-q, q, p' - p)_{\nu\nu\mu} \\
&= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{6} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_\tau a \\
&\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \cos \left(\frac{q_\tau a}{2} \right) \sin \left(\frac{q_\tau a}{2} \right) \underbrace{\cos \left(\frac{(p' - p)_\tau a}{2} \right)}_{(\text{A.61})} \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \sin \left(\frac{q_\tau a}{2} \right) \sin \left(\frac{q_\tau a}{2} \right) \underbrace{\sin \left(\frac{(p' - p)_\tau a}{2} \right)}_{(\text{A.60})} + \mathcal{O}(a^4) \\
&= a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{6} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_\tau a \\
&\quad - a^2 g^3 c_{\text{SW}} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} \cos \left(\frac{q_\tau a}{2} \right) \sin \left(\frac{q_\tau a}{2} \right) \\
&\quad + a^2 g^3 c_{\text{SW}} \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^4 \sigma_{\mu\tau} (p' - p)_\tau a \sin^2 \left(\frac{q_\tau a}{2} \right) + \mathcal{O}(a^4). \tag{A.73}
\end{aligned}$$

Die Permutation $W_{\text{Clover}}^{(3,2)}(k', k'', k)_{\nu\nu\mu}$ verschwindet wegen $\sigma_{\nu\nu} = 0$ vollständig.

B. Abbildungsverzeichnis

0.1. Gitterberechnungen des Spektrums der leichten Hadronen der QCD im Vergleich mit experimentellen Werten. Abbildung aus [2].	7
1.1. Linkvariablen $U_\mu(n)$ und $U_{-\mu}(n)$	21
2.1. Grafische Darstellung der Summe $Q_{\mu\nu}(n)$ der Plaketten in der μ - ν -Ebene	30
3.1. Gluonen-Propagator $D_{\mu\nu}(k)$ nach (3.10).	42
3.2. 3-Gluonen-Vertex $V_G^{(3)}(k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{abc}$ nach (3.15).	42
3.3. Gluino-Propagator $\tilde{S}_F(p)$ nach (3.23).	42
3.4. 1-Gluon-Gluino-Vertex $V_F^{(1)}(p, p'; k)_\mu^{ab;c}$ nach (3.32) und (3.37).	43
3.5. 2-Gluonen-Gluino-Vertex $V_F^{(2)}(p, p'; k, k')_{\mu\nu}^{ab;cd}$ nach (3.33) und (3.38). . .	43
3.6. 3-Gluonen-Gluino-Vertex $V_F^{(3)}(p, p'; k, k', k'')_{\mu\nu\rho}^{ab;cde}$ nach (3.34) und (3.40). .	43
4.1. Diagramme (a) und (b) nach [10], [11].	48
4.2. Diagramme (c) und (d) nach [10], [11].	48
4.3. Diagramme (e) und (f) nach [10], [11].	48
4.4. c_{sw}^{adj} für Fermionen in der adjungierten Darstellung in Abhängigkeit der Kopplung $\beta = 2N_c/g^2$. Abbildung aus [36].	59

C. Literaturverzeichnis

- [1] K. G. Wilson. Quarks and strings on a lattice. New phenomena in sub-nuclear physics, Erice Lectures, ed. A. Zichichi. *Plenum, New York*, 1974. doi:10.1103/PhysRevD.10.2445.
- [2] S. Dürr, Z. Fodor, J. Frison, C. Hoelbling, R. Hoffmann, S. D. Katz, S. Krieg, T. Kurth, L. Lellouch, T. Lippert, K. K. Szabo, G. Vulvert. Ab initio determination of light hadron masses. *Science*, 322:1224–1227, 2008. doi:10.1126/science.1163233.
- [3] R. Haag, J. T. Lopuszanski, M. Sohnius. All possible generators of supersymmetries of the S -matrix. *Nucl.Phys.*, B88:257–274, 1975. doi:10.1016/0550-3213(75)90279-5.
- [4] J. Wess, B. Zumino. Supergauge transformations in four dimensions. *Nucl.Phys.*, B70:39–50, 1974. doi:10.1016/0550-3213(74)90355-1.
- [5] ATLAS Collaboration. Searches for heavy long-lived sleptons and R -hadrons with the ATLAS detector in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. *Phys.Lett.*, B720:277–308, 2013. doi:10.1016/j.physletb.2013.02.015.
- [6] CMS Collaboration. Search for supersymmetry in events with photons and low missing transverse energy in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. *Phys.Lett.*, B719:42–61, 2013. doi:10.1016/j.physletb.2012.12.055.
- [7] G. Bertone, D. Merritt. Dark matter dynamics and indirect detection. *Mod.Phys.Lett.*, A20:3214–3218, 2005. doi:10.1142/S0217732305017391.
- [8] D. V. Volkov, V. A. Soroka. Gauge fields for symmetry group with spinor parameters. *Theoretical and Mathematical Physics*, 20:829–834, 1974.
- [9] D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, S. Ferrara. Progress toward a theory of supergravity. *Nucl.Rev.*, D13:3214–3218, 1976. doi:10.1016/0550-3213(75)90279-5.
- [10] R. Wohlert. Improved continuum limit lattice action for quarks. *DESY*, 87-069, 1987. URL http://ccdb5fs.kek.jp/cgi-bin/img_index?198709310.

- [11] S. Aoki, Y. Kuramashi. Determination of the improvement coefficient c_{sw} up to one-loop order with the conventional perturbation theory. *Phys.Rev.*, D68, 2003. doi:10.1103/PhysRevD.68.094019.
- [12] O. Nachtmann. *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*. Roman U. Sexl, 1986.
- [13] S. Ferrara, B. Zumino. Supergauge invariant Yang-Mills theories. *Nucl.Phys.*, B79: 413–421, 1973. doi:10.1016/0550-3213(74)90559-8.
- [14] S. Ferrara, B. Zumino, J. Wess. Supergauge multiplets and superfields. *Phys.Lett.*, B51:239–241, 1974. doi:10.1016/0370-2693(74)90283-4.
- [15] A. Salam, J. Strathdee. Super-symmetry and non-abelian gauges. *Phys.Lett.*, B51: 353–355, 1974. doi:10.1016/0370-2693(74)90226-3.
- [16] H. J. Rothe. *Lattice Gauge Theories - An Introduction*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1992.
- [17] I. Montvay, G. Münster. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, 1994.
- [18] C. Gattringer, C. B. Lang. *Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation*. Springer, 2010.
- [19] J. Smit. *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, 2003.
- [20] H. B. Nielsen, M. Ninomiya. A no-go theorem for regularizing chiral fermions. *Phys.Lett.*, B105:219–223, 1981. doi:10.1016/0370-2693(81)91026-1.
- [21] B. Sheikholeslami, R. Wohlert. Improved continuum limit lattice action for QCD with Wilson fermions. *Nucl.Phys.*, B259:572–596, 1985. doi:10.1016/0550-3213(85)90002-1.
- [22] G. Curci, G. Veneziano. Supersymmetry and the lattice: A reconciliation? *Nucl.Phys.*, B292:555–572, 1987. doi:10.1016/0550-3213(87)90660-2.
- [23] G. Bergner, I. Montvay, G. Münster, D. Sandbrink, U. D. Özugurel. The gluino-glue particle and relevant scales for the simulations of supersymmetric Yang-Mills theory, 2012. arXiv:1210.7767v1.
- [24] K. Symanzik. Continuum limit and improved action in lattice theories (I). *Nucl.Phys.*, B226:187–204, 1983. doi:10.1016/0550-3213(83)90468-6.

- [25] K. Symanzik. Continuum limit and improved action in lattice theories (II). *Nucl.Phys.*, B226:205–227, 1983. doi:10.1016/0550-3213(83)90469-8.
- [26] C. Gebert. Störungstheoretische Untersuchungen der $N = 1$ supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter, 1999.
- [27] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, J. Küblbeck. Feynman rules for fermion-number-violating interactions. *CERN-TH.*, 6549, 1992.
- [28] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, J. Küblbeck. Compact Feynman rules for Majorana fermions. *Phys.Lett.*, B291:278–280, 1992. doi:10.1016/0370-2693(92)91045-B.
- [29] S. Naik. $O(a)$ perturbative improvement for Wilson fermions. *Phys.Lett.*, B311:230–234, 1993. doi:10.1016/0370-2693(93)90560-5.
- [30] M. Lüscher, P. Weisz. $O(a)$ improvement of the axial current in lattice QCD to one-loop order of perturbation theory. *Nucl.Phys.*, B479:429–458, 1996. doi:10.1016/0550-3213(96)00448-8.
- [31] M. Lüscher, S. Sint, R. Sommer, P. Weisz, U. Wolff. Non-perturbative $O(a)$ improvement of lattice QCD. *Nucl.Phys.*, B491:323–343, 1996. doi:10.1016/S0550-3213(97)00080-1.
- [32] R. G. Edwards, U. M. Heller, T. R. Klassen. The Schrödinger functional and non-perturbative improvement. *Nucl.Phys.Proc.Suppl.*, 63:847–852, 1997. doi:10.1016/S0920-5632(97)00918-3.
- [33] S. Capitani. Lattice perturbation theory. *Phys.Rept.*, 382:113–302, 2003. arXiv:hep-lat/0211036v2.
- [34] Y. Kuramashi. Perturbative renormalization factors of bilinear operators for massive Wilson quarks on the lattice. *Phys.Rev.*, D58, 1998. doi:10.1103/PhysRevD.58.034507.
- [35] S. Aoki, Y. Kayaba, Y. Kuramashi. A perturbative determination of mass dependent $O(a)$ improvement coefficients in a relativistic heavy quark action. *Nucl.Phys.*, B697:271–301, 2004. doi:10.1016/j.nuclphysb.2004.07.017.
- [36] T. Karavirta, K. Tuominen, A. Mykkanen, J. Rantaharju, K. Rummukainen. Non-perturbatively improved clover action for $SU(2)$ gauge + fundamental and adjoint representation fermions, 2010. arXiv:1011.1781v2.

- [37] L. Debbio, A. Patella, C. Pica. Higher representations on the lattice: Numerical simulations. SU(2) with adjoint fermions. *Phys.Rev.*, D81, 2010. doi:10.1103/PhysRevD.81.094503.

Plagiatserklärung des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung der $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Münster, 27. März 2013

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Münster, 27. März 2013