

Theoretische Physik

Kompaktifizierungen der heterotischen Stringtheorie auf Tori und Orbifolds

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von

Thomas Mohaupt

aus Essen

-1993-

Dekanin: Prof.'in Dr. Elisabeth Peveling

Erster Gutachter: Prof. Dr. Gernot Münster

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Manfred Stingl

Tag der mündlichen Prüfungen: 12.7., 13.7. und 14.7.1993

Tag der Promotion: 14.7.1993

In diesem Exemplar wurden gegenüber dem von der Fakultät angenommenen Original geringfügige stilistische und inhaltliche Verbesserungen vorgenommen und orthographische Fehler korrigiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
1.1	Stringtheorie	5
1.2	Zur Themenstellung	7
1.3	Gliederung der Arbeit	8
2	Bosonische Stringtheorien	11
2.1	Klassische bosonische Strings	11
2.1.1	Die Weltfläche	11
2.1.2	Die Nambu–Goto–Wirkung	12
2.1.3	Die Polyakov–Wirkung	13
2.1.4	Die Bewegungsgleichungen	16
2.1.5	Die Zwangsbedingungen	18
2.2	Die Quantisierung der bosonischen Stringtheorie	21
2.2.1	Die kovariante Operator–Quantisierung	23
2.2.2	Die Lichtkegel–Quantisierung und das physikalische Spektrum	26
2.2.3	Vertexoperatoren	28
2.2.4	Die Pfadintegralquantisierung der bosonischen Stringtheorie	31
2.2.5	Wechselwirkungen im Pfadintegralformalismus	37
2.2.6	Übersicht über bosonische Stringtheorien	39
2.3	Hintergrundfelder und Gravitation	39
2.3.1	Hintergrund–Gravitationsfelder	39
2.3.2	Andere Hintergrundfelder	41
2.3.3	Strings und Gravitation	42
2.4	Stringtheorie und zweidimensionale konforme Feldtheorie	45
2.4.1	Der euklidische Operatorformalismus	45
2.4.2	Zweidimensionale konforme Feldtheorie	51
2.4.3	Stringtheorien und konforme Feldtheorien	52
3	Fermionische und supersymmetrische Stringtheorien	55
3.1	Fermionische Stringtheorien	55
3.1.1	Von der eichinvarianten Wirkung zum RNS–Modell	55
3.1.2	Das klassische RNS–Modell	57
3.1.3	Das quantisierte RNS–Modell	58
3.2	Superstrings	62
3.2.1	Pfadintegralquantisierung	64
3.2.2	Übersicht über Superstringtheorien	66
3.3	Der euklidische Operatorformalismus	67
4	Toroidale Kompaktifizierungen und heterotische Stringtheorien	69
4.1	Die Kompaktifizierung des geschlossenen bosonischen Strings	70
4.1.1	Die klassische Theorie	70
4.1.2	Kanonische Quantisierung und Fockraum	72
4.1.3	Untersuchung des Spektrums	76

4.1.4	Der Higgs-Effekt	79
4.1.5	Die Dualitätssymmetrie	80
4.1.6	Der Frenkel-Kac-Konstruktion	81
4.1.7	Die Sugawara-Konstruktion	84
4.2	Heterotische Stringtheorien	86
4.2.1	Heterotische Stringtheorien in zehn Dimensionen	86
4.2.2	Die Kompaktifizierung des heterotischen Strings	88
4.2.3	Eichsymmetrie und Hintergrundfelder: Bestandsaufnahme und Problemstellung	92
5	Toroidale Kompaktifizierungen mit beliebigen Hintergrundfeldern	95
5.1	Die Parametrisierung des Gitters	95
5.2	Reguläre Unteralgebren halbeinfacher Lie-Algebren	96
5.3	Toroidale Kompaktifizierungen mit einer Wilsonlinie	98
5.3.1	Formulierung des Symmetriebrechungsproblems	98
5.3.2	Die Standard-Lösung des Symmetriebrechungsproblems	99
5.3.3	Alle Lösungen des Symmetriebrechungsproblems	104
5.3.4	Halbeinfache Unteralgebren maximalen Ranges	106
5.3.5	Unteralgebren beliebigen Ranges und kontinuierliche Parameter	109
5.3.6	Symmetrievergrößerung mit einer Wilsonlinie	111
5.4	Symmetriebrechung und Symmetrieerhöhung mit beliebigen Hintergrundfeldern	113
5.5	Kritische Hintergrundfelder und Verschiebungsvektoren	120
6	Orbifold-Kompaktifizierungen	123
6.1	Orbifolds: Grundlegende Definitionen	123
6.2	Die Geometrie von $\mathbf{Z}_N$ -Orbifolds	126
6.3	Symmetrische $\mathbf{Z}_N$ -Orbifolds: Die Konstruktion des Hilbertraumes	127
6.3.1	Der ungetwistete Sektor	127
6.3.2	Die getwisteten Sektoren	134
6.3.3	Modulare Invarianz	137
6.4	Orbifolds und Lie-Algebra-Automorphismen	138
6.4.1	Lie-Algebra-Automorphismen	138
6.4.2	Reinterpretation von speziellen Orbifolds als Tori	141
6.4.3	Getwistete Kac-Moody-Algebren	144
6.5	Orbifold-Kompaktifizierungen mit Wilsonlinien: Bestandsaufnahme und offene Fragen	146
7	Symmetrische Orbifolds mit kontinuierlichen Hintergrundfeldern	149
7.1	Bestimmung der Konsistenzbedingungen	150
7.1.1	Untersuchung der Basisvektoren $\mathbf{k}^i$	150
7.1.2	Untersuchung der Basisvektoren $\bar{\mathbf{k}}_i$	150
7.1.3	Untersuchung der Basisvektoren $\mathbf{l}_A$	151
7.2	Untersuchung der Konsistenzgleichungen	152
7.2.1	Diskrete und kontinuierliche Wilsonlinien	152
7.2.2	Die Lösung der verallgemeinerten Kommutatorgleichung	155
7.2.3	Bestimmung der Anzahl der Moduli	159
7.2.4	Modulare Invarianz	162
7.3	$\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds mit kontinuierlichen und diskreten Wilsonlinien	163
7.3.1	Die geometrische Interpretation der metrischen Moduli	163
7.3.2	$\mathbf{Z}_3$ -Twists ohne Wilsonlinien	164
7.3.3	Brechung der E_8 durch kontinuierliche Wilsonlinien im $\mathbf{Z}_3$ -Orbifold mit $A_2^{\oplus 3}$ -Twist	167

8 Diskussion der Ergebnisse	177
8.1 Zusammenfassung der Ergebnisse	177
8.2 Übersicht über vierdimensionale Stringtheorien	182
8.2.1 Calabi-Yau-Kompaktifizierungen	182
8.2.2 Konforme Feldtheorien und vierdimensionale Stringtheorien	184
8.2.3 Moduli und marginale Operatoren	185
8.3 Ausblick	186
A Elemente der Kohomologie- und Erweiterungstheorie	189
B Lie-Algebren	195
B.1 Endlich-dimensionale Lie-Algebren	195
B.1.1 Grundbegriffe	195
B.1.2 Die Struktur der einfachen komplexen Lie-Algebren	199
B.1.3 Darstellungen komplexer, einfacher Lie-Algebren	208
B.1.4 Reelle einfache und halbeinfache Lie-Algebren	210
B.1.5 Reelle Lie-Gruppen	211
B.1.6 Darstellungen reeller Lie-Algebren und reeller Lie-Gruppen	213
B.2 Kac-Moody-Algebren	213
B.2.1 Verallgemeinerte Cartan-Matrizen	213
B.2.2 Affine ungetwistete Kac-Moody-Algebren	214
B.2.3 Die Standardrealisierung einer affinen ungetwisteten Kac-Moody-Algebra	218
B.2.4 Getwistete Kac-Moody-Algebren	220
B.2.5 Darstellungen von Kac-Moody-Algebren	222
B.3 Dynkin-Diagramme	223
C Gitter	227
C.1 Euklidische und pseudoeuklidische Gitter	227
C.2 Lie-Algebra Gitter	228
C.2.1 Spezielle Lie-Algebra-Gitter	229
C.2.2 Pseudoeuklidische Lie-Algebra-Gitter	231

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Stringtheorie

Unter **Stringtheorie** versteht man einerseits die relativistische Quantentheorie eindimensionaler ausgedehnter Objekte im allgemeinen und andererseits eine Theorie, die die konkrete physikalische Struktur der Welt auf dem kosmologischen und auf dem Elementarteilchenniveau beschreiben soll. Im Gegensatz zur „normalen“ Quantenfeldtheorie gibt es keine scharfe Trennung zwischen der „allgemeinen Theorie quantisierter Strings“ (in Analogie zur „general theory of quantized fields“) und der Suche nach speziellen Theorien für konkrete Phänomene: Aufgrund der wesentlich restriktiveren Konsistenzbedingungen gibt es nur wenige Stringtheorien, von denen eine einzige, die **heterotische** Stringtheorie, für die Beschreibung des uns bekannten Universums in Frage kommt. Allerdings ist es bisher nicht gelungen, die Stringtheorie axiomatisch, etwa durch die Angabe eines feldtheoretischen Wirkungsprinzips, in geschlossener Form zu definieren. Gelungen ist hingegen die Konstruktion einer bisher unübersehbaren Fülle von **Lösungen** der Stringtheorie. Der Begriff Lösung ist angesichts des Fehlens einer vollständigen Definition der Theorie erklärungsbedürftig: Man versteht darunter Modelle oder Theorien, die die Propagation und Wechselwirkung von Strings in einem fixierten Raum-Zeit-Hintergrund, etwa dem vierdimensionalen Minkowski-Raum, und mit fixierter Eichgruppe beschreiben. Die Interpretierbarkeit all dieser Theorien als Lösungen einer einzigen Theorie ergibt sich daraus, daß Stringtheorien automatisch immer auch Gravitationstheorien sind: Das Spektrum enthält einen masselosen Spin-2-Zustand, der wie ein Graviton an den vollen Energie-Impuls-Tensor koppelt. In der vollständigen Stringtheorie ist daher die Geometrie der Raum-Zeit keine unabhängige, sondern eine abhängige Größe, die durch die Dynamik festgelegt wird. Damit stellt sich automatisch die Aufgabe, eine Synthese von Quanten- und Gravitationstheorie zu finden. Weiter erzwingen die Konsistenzbedingungen der Stringtheorie die Einführung zusätzlicher innerer Freiheitsgrade oder zusätzlicher, kompaktifizierter Raumdimensionen, deren Struktur oder Geometrie einerseits in der vollen Theorie durch die Dynamik festgelegt wird und die andererseits, wenn man sie als fixierten Hintergrund betrachtet, ihrerseits die Eichgruppe und das Spektrum der Theorie fixieren. Nicht nur die Raum-Zeit-Struktur, sondern auch das Spektrum und die Eichwechselwirkungen sind damit abhängige Größen. Da außerdem auch die **Supersymmetrie**, in ihrer lokalen Ausprägung als **Supergravitation** eine Konsistenzbedingung zu sein scheint, beinhaltet und verallgemeinert die Stringtheorie alle aus Quantentheorie, Quantenfeldtheorie und Gravitationstheorie bekannten Symmetrien. Dies macht es plausibel, daß die noch unverstandene volle Theorie auf einem neuen fundamentalen Naturprinzip beruht, das Quanten- und Gravitationstheorie auf konsistente Weise in sich schließt.

Neben solchen systematischen und strukturellen Gründen, die dafür sprechen, Stringtheorien zu untersuchen, gibt es eine zweite, mehr an der konkreten Elementarteilchenphysik orientierte Motivkette. Der Ausgangspunkt ist dabei das Standard-Modell der Elementarteilchenphysik, das alle bekannten Kräfte mit Ausnahme der Gravitation durch die Wechselwirkungen elementarer Quarks, Leptonen und Eichbosonen beschreibt, wobei die Massen der Fermionen und der

massiven Eichbosonen durch den Higgs-Mechanismus erzeugt werden. Trotz seines großen Erfolges weist das Standard-Modell eine Reihe von redundanten Zügen auf, die auf die Existenz einer fundamentalen Theorie hindeuten: Der Materiesektor besteht aus drei Familien, die sich nur durch ihre Massen unterscheiden, die Massen aller Teilchen sind freie Parameter, und es gibt drei unabhängige Kopplungskonstanten, weil die Eichgruppe keine einfache Gruppe ist. Da sie darüber hinaus auch nicht halbeinfach ist, ist noch nicht einmal klar, warum das Verhältnis der elektrischen Ladungen von Quarks und Leptonen rational ist, d.h. warum es eine einheitliche Elementarladung gibt.

Für die Physik jenseits des Standard-Modells gibt es zwei Ansätze: Zum einen könnten die Quarks und Leptonen aus gemeinsamen Bausteinen aufgebaut sein, zum anderen könnten höhere, verborgene Symmetrien existieren. Die zweite Denkrichtung führt auf natürliche Weise zu den Stringtheorien und soll kurz verfolgt werden. Unter höherer Symmetrie ist zunächst eine einfache Lie-Gruppe zu verstehen, die groß genug ist, um die Eichgruppe des Standard-Modells zu beinhalten, etwa $SU(5)$, $SO(10)$ oder $E(6)$. Man spricht in diesem Zusammenhang von großen vereinheitlichten Theorien oder kurz von GUT-Theorien (GUT = grand unified theory). Da die Eichgruppe einfach ist, gibt es nur eine Kopplungskonstante und alle Ladungen sind gequantelt. Außerdem können nun beide Arten von Fermionen, die Quarks und die Leptonen, in den gleichen Multipletts liegen. Das GUT-Szenario wird dadurch gestützt, daß sich die laufenden Kopplungen des Standard-Modells bei etwa 10^{15} GeV approximativ treffen. Zugleich stellt sich aber das **Hierarchieproblem**, das heißt man braucht einen natürlichen Mechanismus, der die Symmetriebrechungsskalen der vereinheitlichten Gruppe und die der elektroschwachen Gruppe gegeneinander stabilisiert. Gelingt das nicht, so kann man nicht erklären, warum leichte Teilchen mit Massen von einigen MeV oder GeV in einer Theorie existieren, deren typische Energieskala 15 Größenordnungen höher liegt. Eine Lösung ist die **Supersymmetrie**, die Fermionen (Materie) und Bosonen (Kraft) in gemeinsamen Multipletts vereinigt. Sie ist zudem die einzige Erweiterung der Poincaré-Symmetrie, die kein direktes Produkt ist. Bei N-fach erweiterten Supersymmetrien tritt zusätzlich die Gruppe $SO(N)$ als Symmetriegruppe auf. Damit bietet sich im Prinzip die Möglichkeit, alle inneren und äußeren Symmetrien durch eine erweiterte Supersymmetrie zu einer Symmetrie zusammenzufassen. Die maximale Erweiterung, die Darstellungen mit $\text{Spin} \leq 2$ hat¹, ist aber $N=8$, und in die $SO(8)$ kann die Standard-Modell Eichgruppe nicht eingebettet werden². Neu stellt sich auch das Problem der Supersymmetrie-Brechung, da die Natur offensichtlich nicht manifest supersymmetrisch ist. Sie muß natürlich so erfolgen, daß das Hierarchieproblem weiterhin gelöst wird. Durch die Supersymmetrie wird das Ultraviolett-Verhalten von Quantenfeldtheorien so weit verbessert, daß sogar endliche Theorien existieren. Damit ergibt sich die Chance, auch Theorien mit Spin 2, z.B. die Gravitationstheorie neu in Angriff zu nehmen. Dies führt zu Theorien mit lokalen Realisierungen der Supersymmetrie, den Supergravitationstheorien. Trotz anfänglicher Hoffnungen ist aber heute deren Endlichkeit bzw. Renormierbarkeit fraglich. Auf der Suche nach einer Vereinheitlichung aller Wechselwirkungen einschließlich der Gravitation wurde auch an die von Kaluza und Klein vorgeschlagene Einführung zusätzlicher, kompaktifizierter Raumdimensionen angeknüpft. Dabei werden Supergravitationstheorien in höheren Dimensionen formuliert und anschließend für die zusätzlichen Dimensionen eine kompakte Mannigfaltigkeit, z.B. ein Torus, eine Sphäre oder homogene Räume von Lie-Gruppen gewählt. Während vom höherdimensionalen Standpunkt aus alle Teilchen ein einziges Supergravitationsmultiplett bilden, gibt es in vier Dimensionen mehrere Multipletts, Eichsymmetrien und Supersymmetrie. Zusätzlich zum Problem der Endlichkeit (renormierbar können diese Theorien nicht sein) ist es schwierig, geeignete Eichgruppen und insbesondere chirale Fermionen zu bekommen, und es muß erklärt werden, wie die Kompaktifizierung dynamisch zustande kommt. Trotz großer Anstrengungen gab es auch hier nur partielle Erfolge, ein großer Durchbruch gelang jedoch nicht.

¹Die dabei auftretenden Teilchen mit $\text{Spin} > 1$ sind das Graviton (Spin 2) und das Gravitino (Spin 3/2). Die Supersymmetrie ist dann automatisch als lokale Symmetrie realisiert (s.u.). Beschränkt man sich auf Teilchen mit $\text{Spin} \leq 1$, so ist $N \leq 4$ [105].

²Es gibt allerdings die Möglichkeit höherer, nichtlinear realisierter Symmetrien, etwa mit der Eichgruppe $SU(8)$, die die Standard-Modell-Eichgruppe enthält. Hier ist aber das Problem der Symmetriebrechung sehr schwierig [105].

Die nächste und bisher letzte Erhöhung der Symmetrie stellt die Stringtheorie dar. Wie bereits erwähnt wurde, und in der Arbeit erläutert wird, treten alle genannten Symmetrien sowie zusätzliche Raumdimensionen in ihr automatisch auf. Zugleich werden sie auf noch nicht völlig verstandene Weise immens vergrößert und verallgemeinert: Bereits bei der Beschreibung von Strings in einem festen Raum-Zeit-Hintergrund treten unendlich-dimensionale Lie-Algebren auf. In einem gewissen Sinn stellen Stringtheorien das Maximum an erreichbarer Symmetrie dar, denn sowohl Theorien mit punktförmigen Objekten als auch solche mit höherdimensionalen ausgedehnten Objekten haben weniger Symmetrien. Das liegt an dem zusätzlichen Auftreten der konformen Invarianz auf der verallgemeinerten Weltlinie: Verzichtet man auf die geometrische Interpretation, so sind die Lösungen der Stringtheorie zweidimensionale konform invariante Quantenfeldtheorien mit einigen zusätzlichen Eigenschaften. Der enge Zusammenhang mit konformen Feldtheorien hat auch methodisch große Bedeutung, da in diesem Fall ein immenses Arsenal an zusätzlichen Hilfsmitteln zur Verfügung steht.

Beide zur Stringtheorie führenden Argumentationsketten besitzen zwar ihre innere Logik, sind aber zugegebenerweise spekulativ. Ich möchte daher darauf hinweisen, daß sich die Aufgabe einer Theorie nicht darin erschöpfen kann, bekannte Phänomene zu beschreiben. Das Verhältnis von Theorie und Experiment ist vielmehr wechselseitig, denn ohne einen theoretischen Hintergrund gibt es keine formulierbaren Fragen und damit keine Experimente. Die reiche innere Struktur der Stringtheorie qualifiziert sie als eine Rahmentheorie innerhalb derer sinnvolle Fragen gestellt und beantwortet werden können. Die dabei entstehenden mathematischen und theoretisch-methodischen Nebenprodukte, wie Vertexoperator-Darstellungen von Kac-Moody-Algebren oder ein alternativer Blick auf konforme Feldtheorien im speziellen, auf die Quantenfeldtheorie im allgemeinen oder auf das Problem der Quantengravitation sind durchaus sehenswert.

Die Antwort auf die Frage, ob denn Stringtheorien derzeit erfolgreiche empirische Voraussagen machen können bzw. falsifizierbar sind, hängt davon ab, welche Ansprüche man dabei stellt. Zwar gibt es eine bisher unübersehbare Fülle vierdimensionaler Stringtheorien mit den verschiedensten Spektren und Eichgruppen, aber dies gilt in wesentlich höherem Maße für die Quantenfeldtheorie, in der unendlich viele störungstheoretisch renormierbare und Anomalie-freie Theorien mit verschiedenen Spektren und Eichgruppen existieren. Jede Lösung der Stringtheorie kann für niedrige Energien durch eine effektive Quantenfeldtheorie approximiert werden, aber die Menge der Quantenfeldtheorien, die von der Stringtheorie als effektive Theorien induziert werden, ist verschwindend klein. Angesichts der sehr restriktiven Konsistenzbedingungen ist es nicht trivial, daß Stringtheorien überhaupt konsistent sind bzw. noch nicht als inkonsistent nachgewiesen wurden, und die Tatsache, daß es möglich erscheint, das Standard-Modell in die Stringtheorie einzubetten, kann bei exzessiver Auslegung des Begriffs als erfolgreiche empirische Vorhersage gewertet werden. Weiterhin ist es in der Stringtheorie mit erstaunlich geringem Aufwand möglich, Lösungen zu finden, die dem Standard-Modell nahe kommen. Insbesondere ist es möglich, Theorien mit chiralen Fermion-Familien zu konstruieren. Auch verglichen mit Kaluza-Klein-Supergravitationstheorien sind Stringtheorien also phänomenologisch erfolgreich. Durch das ständig wachsende Wissen über die vierdimensionalen Lösungen können auch immer größere Teile des Lösungsraums identifiziert werden, in denen das Standard-Modell **nicht** liegen kann [53]. Die Theorie wird somit immer schärferen Tests unterworfen und kann sehr wohl an der Erfahrung scheitern. Die Hoffnung, schon demnächst das Standard-Modell aus der Stringtheorie herleiten zu können oder die Probleme der Quantengravitation zu lösen, ist angesichts der Komplexität der Probleme freilich übertrieben optimistisch. Dennoch hat es in den letzten Jahren einen stetigen, wenn auch nicht mehr explosionsartigen Fortschritt gegeben. Und schließlich lehrt auch ein Blick in die Wissenschaftsgeschichte, daß nur eine bessere Theorie eine vorhandene ersetzen kann, und die ist bisher nicht in Sicht.

1.2 Zur Themenstellung

Mit dieser Arbeit soll ein Beitrag zum Studium vierdimensionaler Lösungen der heterotischen Stringtheorie geleistet werden. Gerade hier ist der Zusammenhang zwischen fundamentalen und

phänomenologischen Aspekten der Stringtheorie besonders eng: Einerseits werden die Lösungen und ihre Abhängigkeit von kontinuierlichen Parametern (Moduli genannt) untersucht, um Aufschluß über die fundamentalen Symmetrien und Eigenschaften der vollen Theorie zu gewinnen, andererseits versucht man Symmetriebrechungsmuster zu finden, die zu Standard-Modell-artigen Lösungen führen.

Die einfachsten vierdimensionalen Lösungen der heterotischen Stringtheorie erhält man durch die Kompaktifizierung der zusätzlichen Raumdimensionen mittels toroidaler oder getwisteter toroidaler Randbedingungen. In diesen Fällen bleibt die Theorie exakt lösbar. Im Falle der Kompaktifizierung auf Orbifolds gibt es zudem viele semirealistische, Standard-Modell-artige Lösungen. Obwohl heute auch über wesentlich kompliziertere Lösungen viel bekannt ist, gibt es hier eine Reihe von Fragen und Problemen, die in der Literatur bisher nicht behandelt worden sind. Dies betrifft insbesondere die Rolle von konstanten Hintergrund-Eichfeldern, sogenannten Wilsonlinien. Sie sind vor allem deshalb interessant, weil sie die realisierte Eichgruppe maßgeblich mitbestimmen.

Im einzelnen wird in dieser Arbeit untersucht, wie die Wilsonlinien mit ihren 96 kontinuierlichen Parametern in toroidalen Kompaktifizierungen die Eichgruppe festlegen, brechen und erweitern. Darauf aufbauend wird die Frage gestellt, welche Werte der Wilsonlinien und der anderen Hintergrundfelder mit getwisteten Randbedingungen in den kompaktifizierten Dimensionen verträglich sind und wie dadurch die Eichgruppe modifiziert wird.

1.3 Gliederung der Arbeit

In den beiden folgenden Kapiteln 2 und 3 gebe ich eine Einführung in die Stringtheorie. In Kapitel 2 werden an Hand der bosonischen Stringtheorie die wichtigsten Prinzipien und Eigentümlichkeiten von Stringtheorien erläutert: Die verschiedenen Methoden der Quantisierung, das Auftreten von Anomalien, die die Zahl der Raum-Zeit-Dimensionen fixieren, die Beschreibung von Wechselwirkungen mit Hilfe von Vertexoperatoren, die Charakterisierung klassischer Lösungen durch zweidimensionale konforme Feldtheorien und der Zusammenhang zwischen Stringtheorien und der Gravitation. In Kapitel 3 werden die für fermionische Stringtheorien nötigen Modifikationen beschrieben. Dabei spielt die Supersymmetrie eine Schlüsselrolle. In Kapitel 4 wird die Kompaktifizierung auf Tori zunächst an Hand der bosonischen Theorie beschrieben. Die Kompaktifizierung führt auf einem natürlichen Weg zu nichtabelschen Eichsymmetrien. Weitere Aspekte sind die Dualitätssymmetrie zwischen großen und kleinen Radien, der Higgs-Effekt und das Auftreten von Kac-Moody-Algebren. Zugleich werden alle Hilfsmittel eingeführt, die man zur Konstruktion heterotischer Stringtheorien, zunächst in 10, dann in 4 Raum-Zeit-Dimensionen benötigt. Am Ende gebe ich einen Überblick über die bisher in der Literatur dokumentierten Resultate in Bezug auf toroidale Kompaktifizierungen der heterotischen Stringtheorie und stelle die dabei offen bleibenden Fragen zusammen. In Kapitel 5 präsentiere ich dann die Ergebnisse meiner Untersuchungen zu diesen Fragen. Dabei wird mit Hilfe mathematischer Hilfsmittel aus der Theorie der Lie-Algebren ein systematisches und konstruktives Verfahren beschrieben und in mehreren Beispielen angewendet, das den Zusammenhang zwischen den Hintergrundfeldern und der Eichgruppe transparent macht. Der Zusammenhang mit der sogenannten Verschiebungsvektor-Methode wird aufgeklärt. In Kapitel 6 gebe ich einen Überblick über die Konstruktion vierdimensionaler heterotischer Stringtheorien mit Hilfe getwisteter toroidaler Randbedingungen und erläutere, wann diese Konstruktion als Kompaktifizierung auf einem sogenannten Orbifold interpretiert werden kann. Es folgt eine systematische Darstellung des Zusammenhanges zwischen Orbifolds, Lie-Algebra-Automorphismen und getwisteten Kac-Moody-Algebren. Dieser Teil ist ausführlich gehalten, weil die darin zusammengefaßten Ergebnisse in der Literatur auf etwa ein Dutzend Arbeiten verstreut sind, wodurch die Zusammenhänge ziemlich im dunkeln bleiben. Insbesondere gebe ich eine einfache Realisierung für getwistete Versionen von affinen Kac-Moody-Algebren mit Hilfe von Vertexoperatoren an, die leicht zu finden ist, in der mir bekannten Literatur aber nirgendwo vollständig durchgeführt wurde. Abschließend fasse ich den bisherigen Kenntnisstand über die Rolle von Hintergrundfeldern in Orbifold-Kompaktifizierungen zusammen. In Kapitel 7 werden

die allgemeinen Konsistenzbedingungen zwischen einem symmetrischen Twist und den Hintergrundfeldern hergeleitet. Dann werden sie für ein etwas eingeschränktes Problem gelöst und geometrisch interpretiert. Der Zusammenhang zwischen der Eichgruppe und kontinuierlichen und diskreten Wilsonlinien wird an Hand eines Beispiels illustriert, bei dem für zwei neun-dimensionale Teilräume des Moduliraumes der $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds die realisierbaren Eichgruppen klassifiziert werden. In Kapitel 8 werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefaßt. Nach einem Überblick über die anderen Methoden der Konstruktion vierdimensionaler Stringtheorien, können sie in die gegenwärtige Forschungssituation eingebettet werden. Abschließend werden mögliche Anwendungen und Verallgemeinerungen vorgeschlagen.

Um die Arbeit weitgehend selbstkonsistent zu machen, habe ich in den drei Anhängen die wichtigsten mathematischen Hilfsmittel zusammengestellt. Von zentraler Bedeutung ist die Theorie der Lie-Algebren, sowohl die der endlich-dimensionalen, als auch die der Kac-Moody-Algebren. Dieser Anhang ist ausführlich gehalten, da die benötigten Ergebnisse aus mehreren Quellen zusammengesucht werden müssen. Insbesondere werden die in der Arbeit verwendeten Konventionen erläutert und ihr Zusammenhang mit anderen in der Literatur üblichen Konventionen offengelegt. In Anhang A werden die an verschiedenen Stellen benötigten Begriffe Kozykel und zentrale Erweiterung erläutert. Anhang C enthält die für die Arbeit notwendigen Informationen über euklidische und pseudoeuklidische Gitter.

Kapitel 2

Bosonische Stringtheorien

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Konzepte und Methoden der Stringtheorie eingeführt¹. Dies geschieht am Beispiel der **bosonischen Stringtheorie**, die, wie der Name andeutet, nur bosonische Zustände besitzt. Kompliziertere Stringtheorien, die auch Fermionen beschreiben, können als Verallgemeinerungen der bosonischen Theorie unter Hinzunahme eines weiteren Prinzips, der Supersymmetrie, konstruiert werden. Es ist daher vorteilhaft, zunächst die einfachere bosonische Theorie zu studieren.

2.1 Klassische bosonische Strings

2.1.1 Die Weltfläche

Als erstes soll ein knapper Abriss der klassischen relativistischen Mechanik eines eindimensionalen Objektes, eines Strings (einer Saite), gegeben werden, der sich ohne Wechselwirkung im flachen D -dimensionalen Minkowski-Raum $\mathbf{M}^D$ bewegt. Es werden natürliche Einheiten verwendet ($c = \hbar = 1$); der metrische Tensor wird in der Stringtheorie (wie auch in der Gravitationstheorie, aber im Gegensatz zu den in der Elementarteilchenphysik üblichen Konventionen) als

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

gewählt². Ein String wird durch eine parametrisierte Kurve

$$X^i : \sigma \rightarrow X^i(\sigma), \quad \sigma \in [0, \pi], \quad i = 1, \dots, D-1, \quad (2.2)$$

beschrieben. Es können sowohl **geschlossene** Strings,

$$X^i(\sigma + \pi) = X^i(\sigma), \quad (2.3)$$

als auch **offene** Strings, bei denen Anfangs- und Endpunkt verschieden sind, betrachtet werden. Beobachter in einem Inertialsystem können einen String zur Zeit t durch die Vierervektoren

$$\mathbf{X} = (t, X^i(\sigma, t)), \quad \sigma \in [0, \pi], \quad (2.4)$$

charakterisieren. Durch die Zeitentwicklung ergibt sich eine Fläche, die verallgemeinerte Weltlinie oder **Weltfläche** (world-sheet) des Strings. Um zu einer kovarianten Formulierung zu gelangen sind zwei Verallgemeinerungen nötig:

¹Neben dem Standard-Lehrbuch [1] eignen sich auch [2],[3],[4] als Einführungen in die Stringtheorie.

²Man beachte, daß in dieser Metrik zeitartige Größen, z.B. der Impuls, ein **negatives** Normquadrat haben.

1. Die Beschreibung der Weltfläche soll manifest Poincaré-invariant, und nicht nur Rotations- und Translationsinvariant sein. Durch einen Lorentzboost geht die Nullkomponente des Vierervektors (2.4) in eine Funktion X^0 von σ und t über. Diese Form ist dann Poincaré-kovariant.
2. Vom geometrischen Standpunkt ist es natürlich, t durch einen mit σ gleichberechtigten Flächenparameter τ zu ersetzen. Die Beschreibung der Fläche wird dadurch kovariant bezüglich Reparametrisierungen. Da die Weltfläche aber in jedem Punkt eine raumartige und eine zeitartige Tangente haben muß, wird vereinbart, daß σ eine raumartige, τ eine zeitartige Koordinate ist:

$$\dot{X}^2 = \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu < 0, \quad \dot{X}^\mu := \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad \tau \in (-\infty, \infty), \quad (2.5)$$

$$X'^2 = X'^\mu X'_\mu > 0, \quad X'^\mu := \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}, \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (2.6)$$

Die bezüglich der Raum-Zeit und bezüglich der Weltfläche kovariante Beschreibung der Trajektorie eines Strings ist also gegeben durch ein D -tupel von Abbildungen,

$$\mathbf{X} : \Sigma \longrightarrow \mathbf{M}^D : (\sigma, \tau) \longrightarrow \mathbf{X}(\sigma, \tau) = (X^0(\sigma, \tau), \dots, X^{D-1}(\sigma, \tau)). \quad (2.7)$$

Der Definitionsbereich dieser Abbildungen kann als eine abstrakte zweidimensionale reelle C^∞ -Mannigfaltigkeit Σ aufgefaßt werden. Sie besitzt die Topologie eines unendlichen Streifens $\mathbf{R} \times I$ bzw., bei geschlossenen Strings, die eines unendlichen Zylinders $\mathbf{R} \times S^1$. Das Bild dieser Mannigfaltigkeit unter $\mathbf{X}$ beschreibt ihre Einbettung in den D -dimensionalen Minkowski-Raum und damit die Bahn eines Strings.

Die spezielle Parametrisierung (2.4) erhält man durch die Forderung, daß $X^0(\sigma, \tau)$ gleich der in einem bestimmten Inertialsystem gemessenen Zeit t ist, die zugleich als zeitartige Koordinate auf der Weltfläche dient.

2.1.2 Die Nambu-Goto-Wirkung

Auf der eingebetteten Fläche wird durch die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ die Metrik

$$h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = \partial_\alpha X^\mu(\tau, \sigma) \partial_\beta X^\nu(\tau, \sigma) \eta_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

induziert. Dabei beziehen sich die Indizes $\alpha, \beta = 0, 1$ auf die Weltfläche, die Indizes $\mu, \nu = 0, \dots, D-1$ auf die Raum-Zeit. Mit Hilfe der induzierten Metrik können ein Flächenelement auf und damit der Flächeninhalt der Weltfläche definiert werden. Da das Wirkungsfunktional für ein freies relativistisches Punktteilchen durch die Länge seiner Weltlinie (multipliziert mit der Masse) gegeben ist, ist es naheliegend, als Wirkung für einen freien relativistischen String die **Nambu-Goto-Wirkung** [65], [43]

$$S_{NG} = T \int \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})} = T \int d\sigma d\tau \sqrt{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}')^2 - (\dot{\mathbf{X}})^2 \mathbf{X}'^2} \quad (2.9)$$

zu postulieren. Weil das Integral gerade den Flächeninhalt der Weltfläche liefert, hat der Parameter T die Dimension Energie zum Quadrat oder Energie pro Länge und wird als Stringspannung interpretiert. Er ist der einzige fundamentale Parameter der Theorie.

Die Nambu-Goto-Wirkung ist sowohl invariant unter Reparametrisierungen der Weltfläche als auch unter Poincaré-Transformationen der Raum-Zeit. Daraus ergibt sich die folgende Komplikation: Bildet man die zu den Koordinaten X^μ kanonisch konjugierten Impulse

$$\Pi_\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} = T \dot{X}_\mu(\tau, \sigma), \quad L = T \sqrt{(\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X}')^2 - (\dot{\mathbf{X}})^2 \mathbf{X}'^2}, \quad (2.10)$$

so sind diese nicht unabhängig, sondern es gilt die Identität

$$\Pi \cdot \Pi + T^2 \mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}' = 0. \quad (2.11)$$

Da keine τ -Ableitungen auftreten, ist dies keine Bewegungsgleichung, sondern eine **Zwangsbedingung**³. Aus ihr folgt unmittelbar, daß die Lagrangedichte L singulär ist, d.h. die zugehörige Hamiltondichte verschwindet:

$$H = \Pi \cdot \dot{\mathbf{X}} - L = 0. \quad (2.12)$$

Singuläre Lagrangedichten und Zwangsbedingungen treten in der Mechanik und Feldtheorie typischerweise dann auf, wenn der Wunsch, Symmetrien (relativistische Kovarianz, Reparametrisierungsinvarianz oder Eichsymmetrien) manifest zu machen, um den Preis redundanter Freiheitsgrade erkaufte wird [127]. Durch die Zwangsbedingung kommt zum Ausdruck, daß der physikalische Phasenraum ein echter Teilraum des zur kovarianten Beschreibung des Systems benutzten Phasenraumes ist.

Bemerkung: Das vielleicht einfachste Beispiel für diesen Sachverhalt ist das freie relativistische Teilchen [2]. Eine manifest Poincaré-invariante Beschreibung bezüglich der Raum-Zeit und reparametrisierungsinvariante Beschreibung bezüglich der Weltlinie (mit Kurvenparameter τ) ist durch die Wirkung

$$S = \int L d\tau = m \int \sqrt{-\dot{\mathbf{x}}^2(\tau)} d\tau, \quad \mathbf{x} = (x^0, \vec{x}) \quad (2.13)$$

gegeben. Hier ist der kanonische Impuls gleich dem kinetischen und die Zwangsbedingung ist gerade die Massenschalenbedingung

$$H = \mathbf{p}^2 + m^2 = 0. \quad (2.14)$$

Will man eine nicht-singuläre Lagrangedichte, so muß man auf die Kovarianz verzichten: Da die kovariante Lagrangedichte homogen vom Grade 1 in den Koordinaten ist, liegt es nahe, durch Übergang zu homogenen Koordinaten eine Koordinate zu eliminieren [94]. Man wählt etwa $x^0 = t$ als Kurvenparameter und erhält die nicht-kovariante Wirkung

$$S' = \int L' dt = m \int \sqrt{1 - \vec{v}^2} dt, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (2.15)$$

Der kanonische Impuls bezüglich dieser Wirkung (mit fixierter Parametrisierung) besteht aus den räumlichen Komponenten $\vec{p}$ des relativistischen Impulses, die Hamiltondichte ist gerade dessen Nullkomponente, also die Energie:

$$H' = \vec{p} \cdot \vec{v} - L' = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} = p^0 = E. \quad (2.16)$$

Auf die physikalische Interpretation der Zwangsbedingungen beim relativistischen String werde ich später (in Abschnit 2.2) ausführlich eingehen. Weitere Beispiele für Systeme mit Zwangsbedingungen (constrained systems) sind die allgemeine Relativitätstheorie und die lokalen Eichtheorien [127].

2.1.3 Die Polyakov-Wirkung

Die Einführung der Polyakov-Wirkung ermöglicht es, die Stringtheorie mit den Methoden der (zweidimensionalen) Feldtheorie zu behandeln. Faßt man nicht die Minkowski-Raum-Zeit, sondern die abstrakte Weltflächen-Mannigfaltigkeit Σ als das primäre Objekt auf, so sind die Koordinaten $X^\mu(\tau, \sigma)$ Skalarfelder auf dieser Mannigfaltigkeit, deren Wertebereich (target space) der Minkowski-Raum ist. Vom Standpunkt der Weltfläche aus betrachtet ist die Poincaré-Symmetrie des Minkowski-Raumes eine globale innere Symmetrie. Führt man auf der Weltfläche eine intrinsische (pseudo-) Riemannsche Metrik $g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ ein, so wird sie zu einer (pseudo-) Riemannschen Mannigfaltigkeit, d.h. physikalisch gesprochen zu einer zweidimensionalen Raum-Zeit, mit der Metrik als Gravitationsfeld⁴. Die natürliche Wirkung für die

³Dirac bemerkte als erster, daß die Analyse von Zwangsbedingungen mechanischer und feldtheoretischer Systeme für die Definition der quantisierten Theorie wesentlich ist. Der von ihm entwickelte Formalismus [100] wurde von einer Vielzahl von Autoren auf Eichtheorien [113] und geometrische Theorien (relativistisches Punktteilchen, relativistischer String, allgemeine Relativitätstheorie) angewendet [127] und weiterentwickelt [94], [101], [102]. Für eine allgemein Einführung in die „constrained dynamics“ siehe [127].

⁴Vergleicht man die geometrische Struktur der Gravitationstheorie mit der von Eichtheorien [106], so erscheint es angemessen, den Krümmungstensor als Gravitationsfeld, die Zusammenhangsform (Christoffel-Symbole) als Gravitationspotential zu bezeichnen. Da in dieser Arbeit aber fast immer die Metrik auftritt, bezeichne ich sie als Gravitationsfeld.

Skalarfelder ist dann die **Polyakov–Wirkung** [73]

$$S_P = \frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu \eta_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

mit

$$(g^{\alpha\beta}) = (g_{\alpha\beta})^{-1} \text{ und } g = |\det(g_{\alpha\beta})|. \quad (2.18)$$

An dieser Stelle liegt es nahe, zur Wirkung einen Einstein–Hilbert–Term

$$S_{EH} = \int d\tau d\sigma \sqrt{g} R \quad (2.19)$$

zu addieren, der die Dynamik des Gravitationsfeldes beschreibt (R ist dabei der der Metrik zugeordnete Krümmungsskalar). In zwei Dimensionen ist dieser Term aber eine Konstante, genauer eine topologische Invariante der Mannigfaltigkeit, und zwar ein Vielfaches der Euler–Zahl [1]. Zweidimensionale klassische Gravitationsfelder sind daher nicht dynamisch und die Polyakov–Wirkung beschreibt Skalarfelder in einem „Hintergrund“-Gravitationsfeld. Die Bewegungsgleichung für $g_{\alpha\beta}$, die sich durch Variation der Polyakov–Wirkung ergibt, enthält keine Zeit–Ableitung und ist daher eine Zwangsbedingung:

$$\frac{\delta S_P}{\delta g^{\alpha\beta}} = 0 \Leftrightarrow g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}. \quad (2.20)$$

Die Polyakov–Wirkung wird bezüglich der intrinsischen Metrik extremal, wenn diese mit der induzierten übereinstimmt. Benutzt man dies, um $g_{\alpha\beta}$ aus der Polyakov–Wirkung zu eliminieren, so erhält man die Nambu–Goto–Wirkung, d.h. beide Wirkungen beschreiben die gleiche Physik [1]. Der Vorteil der Polyakov–Wirkung ist, daß sie die Gestalt einer freien zweidimensionalen Feldtheorie hat. Insbesondere eignet sie sich für die Pfadintegralquantisierung, da die zugehörige Zustandssumme bezüglich der Koordinatenfelder auf ein Gaußsches Integral führt.

Indem der geometrische Standpunkt durch den feldtheoretischen ergänzt wird, ergeben sich neue Einsichten in die Struktur der Theorie. Die Größe

$$T_{\alpha\beta} := \frac{2}{T\sqrt{g}} \frac{\delta S_P}{\delta g^{\alpha\beta}} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \partial_\gamma X^\mu \partial_\delta X_\mu \stackrel{(2.20)}{=} 0 \quad (2.21)$$

ist z.B. gerade der Energie–Impuls–Tensor der zweidimensionalen Feldtheorie⁵. Sein Verschwinden laut Gleichung (2.20) bedeutet nicht, daß die betrachtete Theorie trivial ist, denn die Gleichung gilt nicht im gesamten Phasenraum, sondern stellt eine Nebenbedingung dar, die zusätzlich zur dynamischen Bewegungsgleichung $\delta S_P / \delta X^\mu = 0$ erfüllt sein muß. Das Verschwinden des Energie–Impuls–Tensors in diesem „schwachen“ Sinn ist die notwendige Folge einer Symmetrie der Polyakov–Wirkung, nämlich der Reparametrisierungsinvarianz.

Neben der Invarianz unter Reparametrisierungen und globalen Poincaré–Transformationen, die die Polyakov–Wirkung mit der Nambu–Goto–Wirkung teilt, besitzt sie noch eine weitere Symmetrie, nämlich die unter Weyl–Transformation, d.h. unter ortsabhängigen Skalentransformationen der Metrik

$$g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \rightarrow g'_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = \exp(\Lambda(\tau, \sigma)) g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma). \quad (2.22)$$

Diese Transformationen werden auch als konforme Transformationen bezeichnet. Es handelt sich dabei um **aktive** Transformationen, die die metrische Struktur der WF–Mannigfaltigkeit ändern, indem Längen lokal reskaliert werden, aber die konforme Struktur (die Winkel) respektieren. Sie sind zu unterscheiden von den konformen Koordinatentransformationen, d.h. denjenigen Koordinatentransformationen,

$$\tau, \sigma \rightarrow \tilde{\tau}, \tilde{\sigma}, \quad (2.23)$$

⁵In der Feldtheorie wird der Energie–Impuls–Tensor meist mit Hilfe des Noether–Theorems definiert [98]. Die hier verwendete Definition ist allgemeiner und wird in der Gravitationstheorie [114] und in der Feldtheorie in gekrümmten Räumen [97] verwendet. Im flachen Raum unterscheiden sich beide Definitionen höchstens um eine totale Ableitung. Der „normale“ feldtheoretische Energie–Impuls–Tensor ist im allgemeinen nicht symmetrisch, der hier verwendete ist es per definitionem.

die die koordinatenabhängige Darstellung der Metrik gemäß

$$g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \rightarrow \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma}) = \exp(\Lambda(\tau, \sigma)) g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \quad (2.24)$$

ändern. Aus der Weyl-Invarianz der Polyakov-Wirkung folgt, **ohne** Benutzung der Bewegungsgleichungen, die Spurfreiheit des Energie-Impuls-Tensors

$$\text{Spur}(T) = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.25)$$

Die Weyl-Invarianz der Polyakov-Wirkung stellt eine Auszeichnung der Stringtheorie gegenüber Theorien mit Punktteilchen, Membranen und höher-dimensionalen ausgedehnten Objekten dar: Wirkungen vom Polyakov-Typ kann man für beliebige „p-Branen“ ($p = 0, 1, 2, \dots$) formulieren, aber nur für Strings ($p = 1$) ist die Wirkung nicht nur Poincaré- und Reparametrisierungs-invariant sondern auch noch Weyl-invariant. Stringtheorien bieten also ein Maximum an Symmetrie [1].

Bemerkung: Konforme Invarianz in klassischen Feldtheorien.

Bei der Diskussion der konformen Invarianz ist es wichtig, zu unterscheiden, ob man sich im flachen oder im gekrümmten Raum befindet, und ob man eine klassische oder eine quantisierte Theorie untersucht. Wir betrachten zunächst ein klassisches, masseloses Skalarfeld Φ in der gekrümmten d -dimensionalen Raum-Zeit, mit der in Φ bilinearen Wirkung

$$S = \int d^d x \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \xi R \Phi^2). \quad (2.26)$$

Diese ist genau dann konform invariant, wenn gilt [97]:

$$\xi = \frac{1}{4} \frac{d-2}{d-1}. \quad (2.27)$$

Konforme Invarianz in $d > 2$ Dimensionen erfordert also eine nichttriviale Kopplung an den Krümmungsskalar R . (Für eine geometrische Interpretation als Theorie $d-1$ -dimensionaler Objekte braucht man aber $\xi = 0$, daher ist nur die Stringtheorie Weyl-invariant.) Im flachen d -dimensionalen Minkowski-Raum reduziert sich die Wirkung auf die eines freien masselosen Skalarfeldes

$$S = \int d^d x \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi, \quad (2.28)$$

die für beliebiges d konform invariant ist [119], [60]. Ähnliche Unterschiede gibt es beim masselosen Spin-1-Feld, das im gekrümmten Raum nur in 4 Dimensionen konform invariant ist [97].

Eine konform invariante physikalische Theorie ist insbesondere skaleninvariant; in einer konform invarianten Welt sind Längen rein konventionelle Größen, nur die konforme Struktur ist observabel, nicht die metrische. Durch die Einführung von Massentermen wird die Skaleninvarianz und damit die konforme Invarianz explizit gebrochen. Dies läßt sich an der Spur des Energie-Impuls-Tensors ablesen, die daher auch als konforme Anomalie bezeichnet wird. Jede massive Theorie enthält einen observablen Längenparameter (die inverse Masse) und ist somit sensitiv für die metrische Struktur der Raum-Zeit. In der Stringtheorie sind die konforme und metrische Struktur der Weltfläche reine Hilfskonstruktionen und nicht observabel. Die Weyl-Invarianz ist aber eine wichtige zusätzliche Symmetrie, die dazu führt, daß die klassischen Lösungen der Stringtheorie konforme Feldtheorien sind. (Siehe Abschnitte 2.2.4, 2.3.1 und 2.4.3; dort werden auch die durch die Quantisierung einer konformen Feldtheorie hinzukommenden Aspekte behandelt.)

Dimensionsanalyse

Das Skalenverhalten physikalischer Größen wird durch die Zuordnung einer Dimension beschrieben. Einer Größe, die bezüglich Skalentransformation eine homogene Funktion vom Grade n ist, wird die Dimension (Länge) n zugeordnet. Dieser Dimensionsbegriff fällt (auf klassischem Niveau) mit dem der Dimension im Sinne eines Einheitensystems zusammen, wenn man $c = \hbar = 1$ setzt. Die Wirkung ist dann dimensionslos, während Massen die Dimension einer inversen Länge haben.

In der Stringtheorie treten zwei Arten von Skalentransformationen, damit zwei Dimensionsbegriffe auf. Betrachtet man Skalentransformationen der Raum-Zeit-Koordinaten X^μ (geometrischer Standpunkt), so sind die Weltflächenkoordinaten dimensionslos, während die Stringkoordinaten die Dimension Länge haben. Um die Wirkung dimensionslos zu machen, muß daher die Stringspannung die Dimension einer inversen Fläche, bzw. Energie pro Länge haben. Im feldtheoretischen Formalismus wird die Weltfläche als zweidimensionale Raum-Zeit betrachtet; man betrachtet Skalentransformationen der Weltflächenkoordinaten, die also die Dimension Länge haben. Die Raum-Zeit-Koordinaten sind Skalarfelder und damit in zwei Dimensionen (naiv⁶) dimensionslos. Die Stringspannung ist ein dimensionsloser Vorfaktor der Wirkung.

2.1.4 Die Bewegungsgleichungen

Da die Polyakov-Wirkung unter drei lokalen (d.h. ortsabhängigen) Transformationen, nämlich den Reparametrisierungen

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau}(\tau, \sigma), \quad \sigma \rightarrow \tilde{\sigma}(\tau, \sigma) \quad (2.29)$$

und den Weyl-Transformationen ist, kann man die Weltflächenmetrik $g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma)$ lokal (d.h. in einer Umgebung jedes beliebigen Punktes⁷) auf die Form einer zweidimensionalen Minkowski-

Metrik $\eta_{ab} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ transformieren [1]. Man übernimmt die in Eichtheorien übliche

Terminologie und bezeichnet diese Parametrisierung als die **kovariante Eichung**. Die eichfixierte Wirkung ist [1]

$$S_{kov} = \frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (2.30)$$

Die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung ist eine zweidimensionale Wellengleichung:

$$\frac{\delta S_{kov}}{\delta X_\mu} = 0 \Rightarrow \square X^\mu(\tau, \sigma) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right) X^\mu(\tau, \sigma) = 0. \quad (2.31)$$

Zunächst sei betont, weil dies nicht offensichtlich ist, daß man das gleiche Ergebnis erhält, wenn man zuerst die eichinvariante Polyakov- oder Nambu-Goto-Wirkung variiert und dann die kovariante Eichung wählt [82]. Die eichfixierte Wirkung ist aber nur dann der eichinvarianten Wirkung äquivalent, wenn man gleichzeitig die Zwangsbedingung $T_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = 0$ (also die Bewegungsgleichung des durch die Eichfixierung eliminierten Feldes) fordert.

Vom geometrischen Standpunkt ist die Bewegungsgleichung aus folgendem Grund plausibel: Aus der Differentialgeometrie ist bekannt, daß Minimalflächen dadurch lokal charakterisiert werden, daß sie harmonisch sind [142]; das Minkowski-Raum-Analogon dieser Eigenschaft ist ja gerade die Wellengleichung.

Randbedingungen

Bei der Variation der eichfixierten Wirkung treten auch Randterme auf. Im Falle offener Strings verschwinden sie bei der Wahl der natürlichen Randbedingungen

$$X'^\mu = 0, \text{ für } \sigma = 0, \pi. \quad (2.32)$$

Da $\mathbf{X}'$ der Impulsfluß auf der Weltfläche ist, garantiert diese Bedingung die Impulserhaltung an den Rändern der Weltfläche. Für geschlossene Strings folgt das Verschwinden der Randterme aus den periodischen Randbedingungen

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + \pi). \quad (2.33)$$

⁶In einer quantisierten Theorie ist das Skalenverhalten im allgemeinen anders als in der klassischen. Dies wird dann durch anomale Dimensionen beschrieben. Die Raum-Zeit-Koordinaten X^μ haben in der quantisierten Theorie überhaupt kein definiertes Skalenverhalten mehr (siehe 2.4.1).

⁷Für einen Zylinder oder Streifen gilt das offensichtlich auch global, d.h. auf der ganzen Weltflächen-Mannigfaltigkeit. Später werden wir aber andere Weltflächen betrachten müssen, die nicht intrinsisch flach sind und diese Eichung nur lokal zulassen.

Die allgemeine Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung ist die Summe zweier beliebiger (hinreichend glatter) Funktionen in den Lichtkegel-Koordinaten $\tau \pm \sigma$:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma). \quad (2.34)$$

Im Falle geschlossener Strings braucht man Lösungen mit periodischen Randbedingungen und findet durch einen Fourier-Ansatz:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + \frac{i}{2} l \sum_{n \neq 0} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)} + \frac{i}{2} l \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}, \quad (2.35)$$

$$X_R^\mu(\tau - \sigma) = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l^2 p^\mu (\tau - \sigma) + \frac{i}{2} l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad (2.36)$$

$$X_L^\mu(\tau + \sigma) = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l^2 p^\mu (\tau + \sigma) + \frac{i}{2} l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}. \quad (2.37)$$

Man beachte, daß in τ -Richtung keine Randbedingungen zu erfüllen sind; daher ist ein in τ linearer Term zulässig. Die hier gewählte Parametrisierung der Lösung ergibt sich aus der im folgenden erläuterten physikalischen Interpretation.

- x^μ ist der Ort des Schwerpunktes des Strings zur Weltflächenzeit $\tau = 0$:

$$x_S^\mu(\tau = 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X^\mu(\tau = 0, \sigma) d\sigma = x^\mu. \quad (2.38)$$

- p^μ ist der Gesamtimpuls des Strings. Aus der Translationsinvarianz der Polyakov-Wirkung (bezüglich des Minkowski-Raumes) ergibt sich der erhaltene Gesamtimpuls P^μ nach der Noether-Methode [1]:

$$P^\mu = T \int_0^\pi \dot{X}^\mu(\tau, \sigma) d\sigma = p^\mu, \text{ mit } l^2 = \frac{1}{\pi T}. \quad (2.39)$$

Der durch die Stringspannung T ausdrückbare fundamentale Längenparameter l wurde in die Lösung eingefügt, um p^μ die Dimension eines Impulses zu geben. (τ ist in der Raum-Zeit-Interpretation dimensionslos!) Durch die Setzung $l = \hbar = c = 1$ erhält man ein Einheitensystem in dem alle physikalischen Größen Vielfache von fundamentalen Naturkonstanten sind. Darauf kommen wir zurück, wenn Stringtheorien später als (Quanten-)Gravitationstheorien interpretiert werden sollen (siehe 2.3.3).

- Der Schwerpunkt des Strings bewegt sich auf einer Geraden

$$x_S^\mu(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi X^\mu(\tau, \sigma) d\sigma = x^\mu + p^\mu l^2 \tau. \quad (2.40)$$

Dies entspricht der Bewegung eines freien relativistischen Teilchens.

- Die nichtkonstanten, periodischen Terme beschreiben Schwingungen, genauer entkoppelte rechts- und linkslaufende Wellen auf dem String. Ein relativistischer String muß offensichtlich schwingen, da es keinen relativistischen starren Körper geben kann. Aus der Realität von X^μ folgen die Beziehungen

$$\alpha_n^* = \alpha_{-n}, \quad \tilde{\alpha}_n^* = \tilde{\alpha}_{-n} \quad (2.41)$$

zwischen den Fourierkoeffizienten. Die hier gewählte Parametrisierung entspricht der in der Stringtheorie üblichen Konvention. Insbesondere werden die Fourierkoeffizienten durch Herausziehen eines Faktors l dimensionslos gemacht.

Die Lösung der Bewegungsgleichung für offene Strings kann man durch formale Verdopplung des Definitionsbereiches von σ aus der des geschlossenen Strings extrahieren [1]. Es ergibt sich

$$X^\mu = x^\mu + l^2 p^\mu \tau + i l \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-i n \tau} \cos n \sigma. \quad (2.42)$$

Hier überlagern sich links- und rechtslaufende Wellen zu stehenden Wellen.

Aus der Invarianz der Polyakov-Wirkung unter Lorentz-Transformationen folgt die Erhaltung (d.h. Divergenzfreiheit) des relativistischen Drehimpulstensors [1]

$$J^{\mu\nu} = T \int_0^\pi d\sigma (X^\mu \dot{X}^\nu - \dot{X}^\mu X^\nu). \quad (2.43)$$

Die relativistische Drehimpulserhaltung bedeutet Erhaltung des Drehimpulses und „Erhaltung“, d.h. freie Bewegung, des Schwerpunktes [124]. Indem man eine geeignete rotierende Stringkonfiguration betrachtet, kann man zeigen, daß T tatsächlich die Stringspannung, d.h. die pro Längeneinheit gespeicherte Energie ist [1]. Die Betrachtung einer anderen Konfiguration lehrt, daß der maximale mögliche totale Drehimpuls eines Strings proportional zum Massenquadrat⁸ ist [1]:

$$J_{MAX} = \alpha' m^2, \text{ mit } \alpha' = \frac{1}{2\pi T}. \quad (2.44)$$

Die Größe α' wird als Regge-Parameter (Regge slope) bezeichnet. Da das Spektrum der Hadronen in einer gewissen Näherung ein Regge-Verhalten zeigt, kann man Stringtheorien als (effektive) Theorien der starken Wechselwirkung zwischen Hadronen benutzen. Dies war historisch auch der Anlaß zu ihrer Entdeckung [1].

2.1.5 Die Zwangsbedingungen

Wir kommen nun zur Diskussion der Zwangsbedingungen

$$T_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = 0, \quad (2.45)$$

die zusätzlich zu den dynamischen Bewegungsgleichungen erfüllt werden müssen. Zunächst ist klar, daß der zweidimensionale Energie-Impuls-Tensor $T_{\alpha\beta}$ unabhängig von den Bewegungsgleichungen symmetrisch und spurfrei ist:

$$\eta^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0, \quad T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha}. \quad (2.46)$$

Dadurch reduziert sich die Zahl der unabhängigen Komponenten auf zwei. Außerdem folgt aus der Invarianz der Wirkung unter zweidimensionalen Translationen, d.h. unter Translationen der Weltflächenparameter τ und σ , daß der Energie-Impuls-Tensor erhalten ist:

$$\partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.47)$$

Wertet man diese Relationen bezüglich der Lichtkegelkoordinaten $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$ aus, so hat $T_{\mu\nu}$ zwei Komponenten, die jeweils nur Funktionen **einer** Variablen sind:

$$T_{++} = T_{++}(\sigma^+), \quad \left(T_{++} := \frac{1}{2}(T_{00} + T_{01}) \right), \quad (2.48)$$

$$T_{--} = T_{--}(\sigma^-), \quad \left(T_{--} := \frac{1}{2}(T_{00} - T_{01}) \right). \quad (2.49)$$

⁸Masse ist dabei die Gesamtenergie im Ruhesystem. Eine Formel für die Masse wird im nächsten Abschnitt angegeben.

Bei geschlossenen Strings sind diese Komponenten, wenn man Lösungen der Bewegungsgleichungen einsetzt („on shell“) periodisch in σ und in τ und damit auch in $\sigma^\pm$. Aus jeder Komponente kann man daher unendlich viele Erhaltungsgrößen konstruieren [1]:

$$Q(f) = \int_0^\pi d\sigma f(\sigma^+) T_{++}(\sigma^+) \text{ mit } f(x) = f(x + \pi), \quad (2.50)$$

denn aus der Periodizität von f und T_{++} folgt

$$\frac{d}{d\tau} Q = 0. \quad (2.51)$$

Üblicherweise wählt man die Erhaltungsgrößen als Fourierkomponenten des Energie-Impuls-Tensors zur Weltflächen-Zeit $\tau = 0$: Für geschlossene Strings erhält man mit

$$f(x) = f_m(x) = \frac{T}{2} e^{2imx}, \quad m \in \mathbf{Z} \quad (2.52)$$

die Erhaltungsgrößen

$$L_m = \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{-2im\sigma} T_{--} d\sigma = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n, \quad m \in \mathbf{Z}, \quad (2.53)$$

$$\tilde{L}_m = \frac{T}{2} \int_0^\pi e^{2im\sigma} T_{++} d\sigma = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n} \cdot \tilde{\alpha}_n, \quad m \in \mathbf{Z}. \quad (2.54)$$

Bei offenen Strings koppeln die rechts- und linkslaufenden Freiheitsgrade über die Randbedingungen und es gibt nur eine Familie von Erhaltungsgrößen:

$$L_m = T \int d\sigma (e^{im\sigma} T_{++} + e^{-im\sigma} T_{--}) = \frac{1}{4\alpha'} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n. \quad (2.55)$$

Aus der Realität des Energie-Impuls-Tensors folgt:

$$L_m^* = L_{-m} \text{ und } \tilde{L}_m^* = \tilde{L}_{-m}. \quad (2.56)$$

Damit ist zweierlei gezeigt. Zum einen folgen aus dem Verschwinden des Energie-Impuls-Tensors unendlich viele Bedingungen an die Lösungen der dynamischen Bewegungsgleichungen:

$$L_m = \tilde{L}_m = 0, \quad m \in \mathbf{Z}. \quad (2.57)$$

Zweitens sind diese Bedingungen mit der Zeitentwicklung verträglich, da es sich um Erhaltungsgrößen handelt. Es macht daher Sinn, sie als Anfangsbedingungen zu stellen, denn sie sind genau dann immer erfüllt, wenn sie zu irgend einer Zeit erfüllt sind.

Das Auftreten der unendlich vielen Erhaltungsgrößen L_m hängt mit einer Symmetrie der eichfixierten Wirkung zusammen [1]: Die Wirkung S_{kov} ist zwar nicht mehr unter beliebigen Reparametrisierungen invariant, aber immer noch invariant unter Reparametrisierungen der Form

$$\sigma^+ \rightarrow \tilde{\sigma}^+ = \tilde{\sigma}^+(\sigma^+), \quad \sigma^- \rightarrow \tilde{\sigma}^- = \tilde{\sigma}^-(\sigma^-), \quad (2.58)$$

wenn diese mit einer geeigneten Weyl-Transformation kombiniert werden. Diese Reparametrisierungen sind nämlich konforme Koordinatentransformationen d.h., sie ändern die Metrik nur um eine positive Funktion und durch die anschließende Weyl-Transformation kann die Metrik wieder auf die Form $\eta_{\alpha\beta}$ gebracht werden. Anders ausgedrückt: Die kovariante Eichung ist keine vollständige Eichfixierung; es gibt noch eine Restsymmetrie unter konformen Transformationen. In ein und zwei Dimensionen bilden die (lokalen⁹) konformen Transformationen

⁹ Lokal bedeutet hier, daß die Transformation nicht global, d.h. auf der ganzen Mannigfaltigkeit, sondern nur auf einer offenen Menge wohldefiniert sein muß.

im Gegensatz zu höheren Dimensionen eine unendlich dimensionale Gruppe. Genauer gesagt gilt folgendes: Die infinitesimalen konformen Transformationen $l_m, m \in \mathbf{Z}$ in einer Dimension erfüllen die unendlich-dimensionale **Witt-Algebra**

$$[l_m, l_n] = i(m - n)l_{m+n}, \quad m, n \in \mathbf{Z}. \quad (2.59)$$

In zwei Dimensionen erhält man eine direkte Summe von zwei Witt-Algebren. Durch Exponentiation infinitesimaler Transformationen erhält man lokale konforme Transformationen, die aber nicht notwendig global, d.h. auf der ganzen betrachteten Mannigfaltigkeit definiert sein müssen. Ein typisches Beispiel für eine sogar in beliebiger Dimension konforme Transformation, die keine Isometrie ist, ist die Raum-Inversion, bei der der Koordinaten-Ursprung ins Unendliche abgebildet wird. Im Zusammenhang mit globalen konformen Transformationen fügt man daher auf geeignete Weise unendlich ferne Punkte hinzu [60], [117].

Beispiel 1 In einer Dimension ist das Standard-Beispiel der Kreis S^1 . Parametrisiert man ihn durch eine Winkelvariable $\theta \in [0, 2\pi]$, so werden die infinitesimalen konformen Transformationen durch die Vektorfelder

$$l_m = ie^{im\theta} \frac{d}{d\theta}, \quad m \in \mathbf{Z} \quad (2.60)$$

erzeugt. In diesem Fall führen alle infinitesimalen Transformationen zu globalen Transformationen, d.h. die globale konforme Gruppe besteht aus allen Diffeomorphismen von S^1 . Der eindimensionale Fall ist besonders einfach, weil die Metrik nur eine Komponente hat. Damit sind alle global definierten Transformationen automatisch konform.

Beispiel 2 In zwei Dimensionen kann man bei euklidischer Metrik lokal komplexe Koordinaten $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ einführen. Aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß gerade die holomorphen und antiholomorphen Abbildungen konform sind¹⁰. Die erzeugenden Vektorfelder sind

$$l_m = z^{m+1} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \tilde{l}_m = \bar{z}^{m+1} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad m \in \mathbf{Z}. \quad (2.61)$$

Wohldefinierte globale Transformationen erhält man auf der Riemannschen Zahlenkugel $S^2 \simeq \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Die globale konforme Gruppe wird durch die Vektorfelder generiert, die sowohl in 0 als auch in ∞ (anti-) holomorph sind. Dies ist für $m = -1, 0, 1$ der Fall. Die Gruppe ist $\text{Sl}(2, \mathbf{C})$ [1].

Beispiel 3 Die lokalen konformen Transformationen im zweidimensionalen Minkowski-Raum sind die Diffeomorphismen in den Lichtkegelkoordinaten $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$. Auch hier zerfällt die Lie-Algebra der infinitesimalen konformen Transformationen in eine direkte Summe zweier Witt-Algebren. Die globale konforme Gruppe, die auf der konformen Kompaktifizierung des zweidimensionalen Minkowski-Raumes operiert ist $\text{Sl}(2, \mathbf{R}) \otimes \text{Sl}(2, \mathbf{R})$ [60]. Der Unterschied zum euklidischen Fall ergibt sich dadurch, daß man jeweils verschiedene reelle Formen¹¹ der Witt-Algebra bzw. ihrer A_1 -Unteralgebra wählen muß.

Die Weltfläche $\mathbf{R} \times S^1$ des geschlossenen Strings besitzt die gleichen infinitesimalen konformen Transformationen wie der zweidimensionale Minkowski-Raum. Die erzeugenden Vektorfelder sind

$$l_m = ie^{2im\sigma^+} \frac{\partial}{\partial \sigma^+}, \quad \tilde{l}_m = ie^{2im\sigma^-} \frac{\partial}{\partial \sigma^-}. \quad (2.62)$$

Der Zusammenhang zwischen den infinitesimalen konformen Transformationen und den erhaltenen Fourier-Koeffizienten $L_m, \tilde{L}_m$ des Energie-Impuls-Tensors ergibt sich folgendermaßen: Die

¹⁰Als antiholomorph bezeichnet man die Komposition einer holomorphen Abbildungen mit der komplexen Konjugation.

¹¹Siehe Anhang B.1.4.

Poisson-Klammern der Stringtheorie (sowohl als einer Theorie eines eindimensionalen Kontinuums im Sinne der Mechanik als auch, was in Bezug auf die kanonische Struktur nur ein anderer Name ist, als einer zweidimensionalen Feldtheorie) sind [127]:

$$[A(\tau, \sigma), B(\tau, \sigma')]_P := \sum_{\mu} \int d\sigma'' \left(\frac{\delta A}{\delta \Pi^{\mu}(\tau, \sigma'')} \frac{\delta B}{\delta X_{\mu}(\tau, \sigma'')} - \frac{\delta B}{\delta \Pi^{\mu}(\tau, \sigma'')} \frac{\delta A}{\delta X_{\mu}(\tau, \sigma'')} \right). \quad (2.63)$$

Dabei spielt σ die Rolle eines kontinuierlichen Index. Die L_m erfüllen bezüglich dieser Poisson-Klammern die Witt-Algebra

$$[L_m, L_n]_P = i(m-n)L_{m+n}, \quad [\tilde{L}_m, \tilde{L}_n]_P = i(m-n)L_{m+n} \quad (2.64)$$

und generieren daher die infinitesimalen konformen Transformationen der klassischen Observablen.

Bemerkung: Die klassische konforme Gruppe in $d > 2$ Dimensionen [60], [117], [97].

In mehr als zwei Dimensionen gibt es wesentlich weniger infinitesimale konforme Transformationen, weil die Bedingung, daß die Metrik nur um einen multiplikativen Faktor geändert werden darf, restriktiver ist. Betrachtet man den $\mathbf{R}^d$ mit einer Metrik vom Typ (p, q) , $p+q=d$ so erfüllen die infinitesimalen konformen Transformationen die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(p+1, q+1)$. Im Falle eines d -dimensionalen Euklidischen Raumes bzw. einer d -dimensionalen Minkowski-Raum-Zeit erhält man speziell $\mathfrak{so}(d+1, 1)$ bzw. $\mathfrak{so}(d, 2)$. Wohldefinierte globale konforme Transformationen erhält man auf S^d bzw. $S^{d-1} \times \mathbf{R}$. Die globale konforme Gruppe ist $\mathrm{SO}(p+1, q+1)$. Die zweidimensionale globale konforme Gruppe ergibt sich als Spezialisierung mittels der lokalen¹² Isomorphismen:

$$p = q = 1 : \mathrm{SO}(2, 2) \simeq \mathrm{SO}(2, 1) \otimes \mathrm{SO}(1, 2), \quad \mathrm{SO}(2, 1) \simeq \mathrm{SO}(1, 2) \simeq \mathrm{Sl}(2, \mathbf{R}), \quad (2.65)$$

$$p = 2, q = 0 : \mathrm{SO}(3, 1) \simeq \mathrm{Sl}(2, \mathbf{C}). \quad (2.66)$$

Die Bedingungen an die Fouriermoden des Energie-Impuls-Tensors haben eine direkte physikalische Bedeutung. Zum Beispiel ergibt sich aus der Bedingung $L_0 = 0$ für offene Strings durch Auflösen nach dem Impuls p^{μ} und mit Hilfe der Massenschalenbedingung $\mathbf{p}^2 + M^2 = 0$ eine Formel für die Masse M :

$$M^2 = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n. \quad (2.67)$$

Für geschlossene Strings erhält man auf die gleiche Weise aus $L_0 + \tilde{L}_0 = 0$:

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n \neq 0} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n} \cdot \tilde{\alpha}_n). \quad (2.68)$$

Aus der Zwangsbedingung $L_0 - \tilde{L}_0 = 0$ folgt, daß die links- und rechtslaufenden Anregungen symmetrisch zur Masse beitragen. Da $L_0 - \tilde{L}_0$ der Generator der starren Translationen in σ ist, gibt es auch eine geometrische Interpretation: Auf einem geschlossenen String gibt es keinen ausgezeichneten Punkt, die Wahl eines Koordinatenursprunges ist konventionell.

Die Bedeutung der anderen Virasoro-Bedingungen wird in Abschnitt 2.2.2 erläutert.

2.2 Die Quantisierung der bosonischen Stringtheorie

Ein wesentlicher Unterschied zwischen der Stringtheorie und der „normalen“ Quantenfeldtheorie besteht darin, daß in der Stringtheorie überwiegend der Formalismus der ersten Quantisierung und nicht der der zweiten oder Feld-Quantisierung verwendet wird¹³. Es ist daher an

¹² Lokal isomorphe Lie-Gruppen besitzen zwar die gleiche Lie-Algebra, können sich aber um zentrale diskrete Untergruppen und damit in ihren globalen topologischen Eigenschaften unterscheiden. Siehe auch Anhang B.1.5.

¹³ Manche Autoren halten die Vorstellung, man müsse eine Quantentheorie durch die „Quantisierung“ einer klassischen Theorie definieren, für überholt [120], [108]. Bei der Aufstellung konkreter Theorien, insbesondere in der relativistischen Quantentheorie, ist das Konzept der Quantisierung bisher aber nicht eliminierbar. Auch in der Stringtheorie wird allgemein davon ausgegangen, daß es sich um ein sinnvolles heuristisches Verfahren zur Definition von Theorien handelt. Das beinhaltet aber keine Vorentscheidung in Bezug auf strittige Interpretationsfragen der Quantentheorie, wie z.B. den Sinn der Begriffe Korrespondenzprinzip, klassischer Limes oder Quantisierung [160], [161], [163].

dieser Stelle nützlich, sich die vier grundlegenden Quantisierungs-Verfahren in Erinnerung zu rufen, die sich aus einer zweifachen Alternative ergeben. Die erste Wahlmöglichkeit besteht darin, daß man von einer Theorie der klassischen (relativistischen) Mechanik oder von einer klassischen (relativistischen) Feldtheorie ausgehen kann. Die Entdeckung, daß man von beiden Startpunkten, also von physikalisch inäquivalenten klassischen Theorien zur selben Quanten(feld)theorie geführt wird, wird gerne als Überwindung des Teilchen-/Feld-Dualismus der klassischen Physik gedeutet. Die zweite Wahlmöglichkeit besteht darin, für die klassische Theorie den Hamilton- oder den Lagrange-Formalismus zu Grunde zu legen. Das erste führt zur Operator-Quantisierung, das zweite zur Pfadintegral- bzw. Funktionalintegral-Quantisierung. Durch Kombination dieser zwei Optionen ergeben sich vier Grundschemata.

Diese Schemata lassen sich am Beispiel des massiven Teilchens, bzw. des massiven Skalarfeldes illustrieren.

1. Bei der Operatorquantisierung eines Teilchens [2], [127] werden die Koordinate und der kanonische Impuls durch Operatoren x^μ und p^μ ersetzt, für die man die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad (2.69)$$

fordert. Die Vertauschungsrelationen folgen aus den Poisson-Klammern der klassischen Theorie durch die Ersetzungsvorschrift $[\cdot, \cdot]_P \rightarrow -i[\cdot, \cdot]$.

2. Bei der Pfadintegralquantisierung des klassischen Teilchens [103] postuliert man, daß nicht nur die klassischen Bahnen, die die klassische Wirkung stationär machen, sondern alle Bahnen, gewichtet mit einem aus der Wirkung zu berechnenden Faktor, zu jedem Prozeß beitragen. Durch die analytische Fortsetzung zu imaginären Zeiten kann die Minkowski-Raum-Quantentheorie auf ein System der statistischen Physik im euklidischen Raum abgebildet werden (euklidische Formulierung) [107], [123]. Diese Vorschrift soll hier durch die Zustandssumme

$$Z = \int D x e^{-S[x]} \quad (2.70)$$

repräsentiert werden.

3. Bei der Operator-Quantisierung eines klassischen Feldes werden das Feld, als überabzählbarer Satz von verallgemeinerten Koordinaten eines physikalischen Systems mit unendlich vielen Freiheitsgraden, und der dazu kanonisch konjugierte Impuls durch Operatoren (genauer operatorwertige Distributionen [107], [136]) $\Phi(x)$, $\Pi(x)$ ersetzt, für die die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\Phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.71)$$

gelten sollen [110], [98] (oder jedes andere Lehrbuch der Quantenfeldtheorie).

4. In der Funktionalintegral-Quantisierung wird das Feld zu einer verallgemeinerten Zufallsvariable¹⁴ [123], über die im Funktionalintegral integriert wird:

$$Z = \int D\Phi e^{-S[\Phi]}. \quad (2.72)$$

Die Wohldefiniertheit und Äquivalenz dieser vier Schemata kann zunächst nur für die freie Theorie nachgewiesen werden. Bereits hier erfordert aber die mathematisch korrekte Definition der oben verwendeten Symbole einigen Aufwand. In der wechselwirkenden Theorie gibt es keine allgemeine und einfache Lösung. Man kann aber Fallweise mittels Durchführung des Renormierungsprogrammes die Existenz einer Theorie sichern und sie zugleich (auf ziemlich implizite Weise) definieren. Um begriffliche Verwirrungen bei der Diskussion der Quantisierung von Stringtheorien zu vermeiden, ist die hier gegebene formale Gegenüberstellung aber ausreichend.

¹⁴Das „Feld“ Φ hat also mindestens viererlei verschiedene Bedeutung: Es repräsentiert das klassische Feld, in 3 den Feldoperator, in 4 ein stochastisches Feld und in 1 den Zustandsvektor $|\Phi\rangle$ in der Ortsdarstellung: $\Phi(x) = \langle x|\Phi\rangle$. Diese müssen durch die Notation unterschieden werden, wenn der Sinn nicht aus dem Zusammenhang klar ist.

Ein wichtiger Unterschied zwischen der Teilchen- und der Feld-Quantisierung besteht darin, das erstere zunächst nur zur Einteilchen-Theorie, letztere aber (etwa über den Fockraum in Verfahren 3) unmittelbar zu einer Vielteilchen-Theorie führt. Darüberhinaus lassen sich im Rahmen der Feld-Quantisierung wechselwirkende Theorien auf geschlossene und natürliche Weise durch ein Wirkungsfunktional mit nichtlinearen Bewegungsgleichungen (zumindest formal) definieren. In der Stringtheorie erweist sich die Feld-Quantisierung als sehr kompliziert. Klassische Stringfelder $\Phi(C, t)$ hängen nicht von Punkten, sondern von Kurven C ab, sind also Funktionen von unendlich vielen Variablen. Daher ist bereits der Hilbertraum der Zustände eines Strings von überabzählbarer Dimension. Trotz großer Anstrengungen ist die Stringfeldtheorie¹⁵ noch nicht soweit entwickelt wie der Zugang über die erste Quantisierung, der in diesem Abschnitt behandelt werden wird. Die Definition von Wechselwirkungen im Rahmen der ersten Quantisierung ist umständlich: Man definiert die Matrixelemente des S-Operators explizit in Form einer „Störungs“-Reihe, ohne die volle Theorie geschlossen charakterisieren zu können. Die Wechselwirkungen werden in der Operator-Quantisierung (Verfahren 1) durch sogenannte **Vertexoperatoren**, in der Pfadintegralquantisierung (Verfahren 2) durch die Topologie der Weltfläche, d.h. durch das Sichverzweigen und Sichvereinigen von Weltflächen-Zylindern, bzw. Weltflächen-Streifen beschrieben. Die zweite Variante entspricht der Zufallspfad-Darstellung [104] der Quantenfeldtheorie.

Bei der Diskussion der Quantisierung kann auf feldtheoretische Methoden zurückgegriffen werden, da sich die Stringtheorie, wie beschrieben wurde, als zweidimensionale Feldtheorie reinterpretieren läßt. Die erste Quantisierung einer Theorie ausgedehnter Objekte entspricht der zweiten Quantisierung der assoziierten Feldtheorie. (Die oben erwähnten Probleme der ersten Quantisierung werden dadurch natürlich nicht beseitigt.)

Ähnlich wie in Eichtheorien [98], [123], [127] und in der Gravitationstheorie [114], [125] gibt es in der Stringtheorie aufgrund der lokalen Symmetrien der Wirkung einen Konflikt zwischen manifester Poincaré-Kovarianz und manifester Unitarität [1], [2]. Quantisiert man die Theorie in einer kovarianten Eichung, muß die Unitarität nachgewiesen werden. Fixiert man die Eichung vollständig, so ist zwar die Unitarität der Theorie manifest, aber die Kovarianz muß gezeigt werden.

2.2.1 Die kovariante Operator-Quantisierung

Bei der kovarianten Operator-Quantisierung ist der Ausgangspunkt die Polyakov-Wirkung (oder auch die Nambu-Goto-Wirkung) in der kovarianten Eichung. Wir setzen ab jetzt $l = c = \hbar = 1$, (d.h. $T = 1/\pi$, $\alpha' = 1/2$) und fordern für die Stringkoordinaten und die konjugierten Impulse die kanonischen Vertauschungsrelationen

$$[\Pi^\mu(\sigma), X^\nu(\sigma')]_{\tau=\tau'} = -i\delta(\sigma - \sigma')\eta^{\mu\nu}. \quad (2.73)$$

Dabei tritt auf der rechten Seite die periodische δ -Funktion mit Periode π auf. Durch Einsetzen der Fourierentwicklung erhält man die entsprechenden Vertauschungsrelationen für die Operatoren des Schwerpunkts, des Impulses und der Schwingungsmoden:

$$[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}, \quad (2.74)$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, \quad m, n \neq 0. \quad (2.75)$$

Bei geschlossenen Strings gelten entsprechende Relationen für die $\tilde{\alpha}_m^\mu$. Da das klassische X^μ -Feld reell ist, soll das quantisierte hermitesch sein. Daraus folgen die Hermitizitätsrelationen

$$x^{\mu+} = x^\mu, \quad p^{\mu+} = p^\mu, \quad \alpha_m^{\mu+} = \alpha_{-m}^\mu. \quad (2.76)$$

Wir kommen nun zur Interpretation der Vertauschungsrelationen. Die Relation zwischen den Nullmoden des X^μ -Feldes, d.h. zwischen Schwerpunkt und Impuls ist genau dieselbe wie für

¹⁵Für eine Einführung siehe [85], sowie [1], [2] und die dort zitierte Literatur. Eine der wichtigsten Arbeiten auf diesem Gebiet ist [91]. Wegen der in letzter Zeit gemachten Fortschritte siehe [93].

ein freies relativistisches Teilchen. Entsprechend kann man bei der Konstruktion des Zustandsraumes vorgehen: Der Grundzustand $|0\rangle$ soll translationsinvariant sein, also definiert man ihn durch

$$p^\mu |0\rangle = 0. \quad (2.77)$$

Durch Anwendung des Operatores $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ können dann Impulseigenzustände erzeugt werden:

$$p^\mu |\mathbf{k}\rangle = k^\mu |\mathbf{k}\rangle, \text{ wobei } |\mathbf{k}\rangle := e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} |0\rangle. \quad (2.78)$$

Die Vertauschungsrelationen zwischen den Fourierkoeffizienten α_m und $\alpha_{-m} = \alpha_m^\dagger$ sind, wenn man von der Normierung und dem Auftreten des η -Tensors anstelle eines Kronecker-Symbols absieht, die eines harmonischen Oszillators. Daher wird α_{-m}^μ , $m > 0$ als Erzeuger, α_m^μ , $m > 0$ als Vernichter eines Schwingungsquantums der m -ten Schwingungsmode des Strings bezüglich der μ -ten Raum-Zeit-Richtung interpretiert. Der Schwingungsgrundzustand muß dann

$$\alpha_m^\mu |0\rangle = 0, \quad \forall m > 0 \quad (2.79)$$

erfüllen. Der Gesamt-Fockraum eines freien Strings ist also das Tensorprodukt des Fockraumes eines relativistischen Teilchens mit unendlich vielen Oszillator-Fockräumen. Aus dem Auftreten der indefiniten Minkowski-Metrik in den Vertauschungsrelationen folgt aber, daß es auf diesem Fockraum kein (lorentzinvariantes) Skalarprodukt, sondern nur eine indefinite Bilinearform gibt; man betrachte etwa

$$(\alpha_{-m}^\mu |0\rangle, \alpha_{-n}^\nu |0\rangle) = \langle 0 | \alpha_m^\mu \alpha_{-n}^\nu | 0 \rangle = m \eta^{\mu\nu} \delta_{m-n,0} \langle 0 | 0 \rangle. \quad (2.80)$$

Dieser Ausdruck nimmt für $m = n$, $\mu = \nu$ sowohl positive als auch negative Werte an. Ein analoges Problem ergibt sich bei der kovarianten Operator-Quantisierung von Eichtheorien, z.B. der Quantenelektrodynamik. Dort kann man, indem man die Lorentz-Eichbedingung in „schwacher“ Form für physikalische Zustände fordert, einen Unterraum $\mathcal{F}_{phys}$ des Fockraums $\mathcal{F}$ definieren, der zumindest positiv semidefinit ist. Den eigentlichen Hilbertraum erhält man dann durch Äquivalenzklassenbildung modulo Norm-Null Zustände (Gupta-Bleuler-Verfahren, [98]). Bei der kovarianten Quantisierung der Stringtheorie kann man analog vorgehen [1]. An die Stelle der Lorentz-Bedingung treten dabei die Nebenbedingungen $L_m = \tilde{L}_m = 0$. Es war übrigens von vornherein zu erwarten, daß sie in irgendeiner Form auf dem Fockraum implementiert werden müssen, denn die Polyakov-Wirkung in der kovarianten Eichung (2.30) ist nur zusammen mit diesen Nebenbedingungen der ursprünglichen, reparametrisierungsinvarianten Wirkung (2.17) äquivalent.

Die Operatoren $L_m, \tilde{L}_m$ sind, wie bei der Diskussion der klassischen Theorie gezeigt wurde, bilineare Funktionen des Impulses und der Oszillatoren. Bei der Quantisierung können daher Anordnungs-Mehrdeutigkeiten auftreten. Für $m \neq 0$ folgt aber aus den Vertauschungsrelationen, daß die Operatoren L_m automatisch normalgeordnet sind:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n. \quad (2.81)$$

Wir diskutieren daher zunächst den Fall $m \neq 0$.

Zunächst kann man sich überzeugen, daß es nicht sinnvoll ist, die Nebenbedingungen als starke Gleichungen zu implementieren: Fordert man nämlich

$$L_m |\Phi\rangle = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z} \quad \forall |\Phi\rangle \in \mathcal{F}_{phys}, \quad (2.82)$$

so folgt aus den Vertauschungsrelationen, daß alle Zustände der Form $\alpha_{-m}^\mu |\mathbf{k}\rangle$ unphysikalisch sind. Um einen sinnvollen Raum $\mathcal{F}_{phys}$ physikalischer Zustände zu definieren, werden die Nebenbedingungen nur in schwacher Form gefordert:

$$L_m |\Phi\rangle = 0 \quad \forall m > 0 \quad \forall |\Phi\rangle \in \mathcal{F}_{phys}. \quad (2.83)$$

Dies ist immer noch hinreichend dafür, daß Matrix-Elemente aller L_m , $m \neq 0$ zwischen physikalischen Zuständen verschwinden, da $L_m^+ = L_{-m}$ ist.

Bei dem Operator L_0 tritt ein Normalordnungsproblem auf: Der normalgeordnete Operator

$$L_0 = \frac{1}{8}p^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n \quad (2.84)$$

unterscheidet sich von dem ursprünglichen formal um eine unendliche Konstante. Außerdem kann noch eine endliche Konstante a hinzukommen, die, wie der Casimir-Effekt [110] lehrt, durchaus physikalische Bedeutung haben kann. Der endliche Teil der Normalordnungskonstante soll hier als freier Parameter angesetzt werden; sie wird nicht in L_0 , sondern in die Nebenbedingung hineindefiniert:

$$(L_0 - a)|\Phi\rangle = 0 \quad \forall |\Phi\rangle \in \mathcal{F}_{phys}. \quad (2.85)$$

Bei offenen Strings ergibt sich aus dieser Gleichung die Masse des physikalischen Zustandes $|\Phi\rangle$, denn

$$M^2 = -2a + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n \quad (2.86)$$

ist der Massenquadratoperator.

Auch bei der Quantisierung des relativistischen Teilchens muß die Massenschalen-Bedingung als Nebenbedingung implementiert werden [2], [127]. Der Fockraum ist dabei der gleiche wie der der Nullmoden x^μ, p^μ eines Strings.

$$|\Phi\rangle \in \mathcal{F}_{phys} \Leftrightarrow (p^2 + m^2)|\Phi\rangle = 0. \quad (2.87)$$

Wertet man diese Bedingung in der Ortsdarstellung aus, so erhält man die Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\square + m^2)\Phi(\vec{x}, t) = 0, \text{ mit } \Phi(\vec{x}, t) = \langle \vec{x} | \Phi \rangle_t. \quad (2.88)$$

Diese Gleichung läßt sich gruppentheoretisch interpretieren: Der Fockraum trägt eine nicht-unitäre, unendlich-dimensionale Darstellung der Lorentz-Gruppe, der durch die Klein-Gordon-Gleichung definierte Unterraum (bei komplexen Feldern nach Trennung von Teilchen und Antiteilchen) eine unitäre Darstellung der Poincaré-Gruppe mit Masse m und Spin 0. Analoge Charakterisierungen gibt es für Teilchen mit Spin > 0 . Da ein String außer Masse und Spin auch noch innere Anregungen besitzt, ist die mit den L_m -Zwangsbedingungen verbundene algebraische Struktur, die wir unten kennenlernen werden, sehr viel reicher.

Bei geschlossenen Strings existieren zwei Familien von Zwangsbedingungs-Operatoren. Da in der klassischen Theorie die linkslaufenden und die rechtslaufenden Freiheitsgrade symmetrisch zur Masse beitragen, liegt es nahe, das gleiche in der Quantentheorie zu verlangen. Dann muß die Normalordnungskonstante für Rechts- und Linksläufer die gleiche sein:

$$(L_0 - a)|\Phi\rangle = (\tilde{L}_0 - a)|\Phi\rangle = 0. \quad (2.89)$$

Daraus ergibt sich die Massenformel für geschlossene Strings:

$$M^2 = -8a + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n = -8a + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\alpha}_{-n} \tilde{\alpha}_n \quad (2.90)$$

Auch die Algebra der L_m wird durch die Quantisierung modifiziert. Eine sorgfältige Analyse zeigt, daß ein anomaler c -Zahl-Term hinzukommt:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{1}{12}D(m^3 - m)\delta_{m+n}. \quad (2.91)$$

Diese Algebra ist eine zentrale Erweiterung¹⁶ der Witt-Algebra und wird als **Virasoro-Algebra** bezeichnet. Auf dem Fockraum $\mathcal{F}$ wird das zentrale Element c durch die Zahl

¹⁶Der Begriff der zentralen Erweiterung wird in Anhang A erklärt. Die Virasoro-Algebra ist (bis auf Isomorphie) die einzige zentrale Erweiterung der Witt-Algebra [40].

$D = \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}$, also durch die Dimension der Raum-Zeit dargestellt. Bei geschlossenen Strings erhält man eine direkte Summe zweier Virasoro-Algebren. Die überragende Bedeutung der Virasoro-Algebra für die Stringtheorie ergibt sich dadurch, daß die Virasoro-Bedingungen das physikalische Spektrum definieren. Der Grundzustand $|0\rangle$ des Fockraums ist kein physikalischer Zustand, da er die Massenschalenbedingung nicht erfüllt. Den physikalischen Grundzustand der Stringtheorie werden wir im Rahmen der Lichtkegelquantisierung kennenlernen. Der Zustand $|0\rangle$ wird als feldtheoretisches Vakuum bezeichnet und erfüllt

$$L_m|0\rangle = 0, \quad m \geq -1. \quad (2.92)$$

Aufgrund des anomalen Terms in den Vertauschungsrelationen ist er nicht unter der vollen Virasoro-Algebra, sondern nur unter der von L_{-1}, L_0, L_1 und im Falle von geschlossenen Strings zusätzlich unter der von $\tilde{L}_{-1}, \tilde{L}_0, \tilde{L}_1$ erzeugten Unter algebra invariant.

Um zu beweisen, daß der Raum $\mathcal{F}_{phys}$ positiv semidefinit ist und um den eigentlichen Hilbertraum zu konstruieren, bedient man sich der Darstellungstheorie der Virasoro-Algebra. Der Beweis [13], [41] (siehe auch [1], [40]) ist ziemlich aufwendig und zeigt, daß die Unitarität auf subtile Weise von der Raum-Zeit-Dimension abhängt:

Satz 2.2.1 [No ghost theorem] Der Raum $\mathcal{F}_{phys}$ der physikalischen Zustände ist genau dann positiv semidefinit, wenn gilt:

$$(a) \quad D = 26, \quad a = 1,$$

oder

$$(b) \quad D \leq 25, \quad a \leq 1.$$

Im Fall (a) spricht man auch von kritischen Strings, da 26 die maximale Raum-Zeit-Dimension ist, in der unitäre Stringtheorien existieren können. Dieser Fall ist gegenüber (b) mehrfach ausgezeichnet. So kann etwa der Unitaritätsbeweis auf höhere Ordnungen der später zu definierenden Störungstheorie ausgedehnt werden. Ferner existiert eine maximale Anzahl masseloser Zustände und es sind genau die transversalen Anregungen physikalisch, d.h. man erhält das gleiche Ergebnis wie bei der Quantisierung in der Lichtkegel-Eichung. Die meisten Arbeiten auf dem Gebiet der Stringtheorie beschäftigen sich mit diesem Fall. Über die nichtkritischen Strings, (b) ist sehr viel weniger bekannt, obwohl sie in den letzten Jahren im Zusammenhang mit der Liouville-Theorie und der zweidimensionalen Quantengravitation starkes Interesse gefunden haben [3]. In dieser Arbeit werden nur kritische Strings betrachtet und es soll untersucht werden, wie man durch die Kompaktifizierung der zusätzlichen Raum-Dimensionen zu einer Theorie in vier Raum-Zeit-Dimensionen kommt.

In der kovarianten Quantisierung sind die eigentlichen Zustände, die Elemente des Hilbertraumes, Äquivalenzklassen von Zuständen aus $\mathcal{F}_{phys}$. Ein besonders anschauliches System von Repräsentanten erhält man durch die Lichtkegel-Eichung.

2.2.2 Die Lichtkegel-Quantisierung und das physikalische Spektrum

Bei der Lichtkegel-Quantisierung wird vor der Quantisierung die in der kovarianten Eichung noch bestehende Restsymmetrie durch eine weitere Eichbedingung fixiert [1]. Die Bedingung wird mit Hilfe der Lichtkegelkoordinaten

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^{D-1})$$

formuliert:

$$X^+(\sigma, \tau) = x^+ + p^+ \tau. \quad (2.93)$$

Durch Einsetzen der Virasoro-Bedingungen kann dann X^- eliminiert werden. In dieser Eichung bleiben nur noch die **transversalen** Schwingungsmoden übrig. Während bei Punktteilchen nur masselose Teilchen rein transversal sein können, ist dies für Strings unabhängig von der Masse

möglich. Durch die Eliminierung der zeitartigen und longitudinalen Moden ist die Unitarität der Theorie jetzt manifest. Der Hilbertraum wird durch die Zustände

$$\alpha_{-m_1}^{i_1} \cdots \alpha_{-m_n}^{i_n} |\mathbf{k}\rangle, \quad i_j = 1, \dots, D-2, \quad m_k > 0, \quad \mathbf{k}^2 + M^2 = 0 \quad (2.94)$$

aufgespannt. (Bei geschlossenen Strings treten auch noch die $\tilde{\alpha}$ -Oszillatoren auf.) Der Massenoperator für offene Strings ist

$$M^2 = -2a + 2N, \quad N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i. \quad (2.95)$$

Dabei ist a wieder eine Normalordnungskonstante, die als Parameter behandelt wird¹⁷. Der Operator N wird aufgrund seiner Vertauschungsrelationen mit den Oszillatoren

$$[N, \alpha_{-m}^i] = m \alpha_{-m}^i \quad (2.96)$$

als **Anzahloperator** bezeichnet. Für geschlossene Strings existieren zwei Anzahloperatoren, je einer für die links- und die rechtslaufenden Moden. Die Massenformel lautet:

$$M^2 = -8a + 8N = -8a + 8\tilde{N}. \quad (2.97)$$

Der Preis, den man für die manifeste Unitarität der Theorie zahlt, ist, daß die Theorie aufgrund der zusätzlichen Eichbedingung nicht mehr manifest Lorentz-kovariant ist. Man muß daher die Lorentz-Kovarianz nachweisen, in dem man die Wirkung der Generatoren der Lorentz-Transformationen auf dem Hilbertraum studiert und nachweist, daß man eine Darstellung der Lorentzgruppe erhält. Es stellt sich heraus, daß im allgemeinen eine Anomalie auftritt und die Lorentz-Algebra nur schließt, wenn $a = 1$ und $D = 26$ gewählt wird [1].

Die gefundenen physikalischen Zustände bilden Multipletts der transversalen Drehgruppe $SO(D-2)$. Um sie bestimmten Elementarteilchen zuordnen zu können, muß man sie zu Multipletts der Poincaré-Gruppe $ISO(1, D-1)$ zusammenfassen. Irreduzible Darstellungen der Poincaré-Gruppe sind durch ihre Masse, (d.h. durch ihr Verhalten unter der Translations-Untergruppe) und durch die Darstellung der sogenannten kleinen Gruppe gegeben, durch die die betrachtete Darstellung der Poincaré-Gruppe induziert wird [108], [128], [124]. Die kleine Gruppe ist im Falle masseloser Darstellungen die transversale Drehgruppe $SO(D-2)$, bei massiven Darstellungen die Drehgruppe $SO(D-1)$ [137], [146]. Das kann man sich dadurch plausibel machen und merken, daß masselose Teilchen sich nur auf dem Lichtkegel bewegen können, der unter einer $SO(D-2)$ -Untergruppe invariant ist, während massive Teilchen ein Ruhesystem besitzen, daß unter $SO(D-1)$ -Drehungen fest bleibt.

Was in unserem Fall zu tun bleibt, ist, die gegebenen $SO(24)$ -Multipletts bei den massiven Zuständen zu $SO(25)$ -Multipletts zusammenzusetzen. Solange nicht zu viele Zustände existieren läßt sich das leicht, etwa mit Hilfe von Young-Tableaux [146], [141], vollziehen. Die niedrigsten Anregungszustände eines offenen Strings sind z.B.:

Anregung	Zustand	$SO(24)$ -Darstellung	M^2	Interpretation
$N = 0$	$ 0; \mathbf{k}\rangle$	Skalar	-2	Skalares Tachyon
$N = 1$	$\alpha_{-1}^i 0; \mathbf{k}\rangle$	Vektor	0	Eichboson
$N = 2$	$\alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j 0; \mathbf{k}\rangle$	Tensor 2.Stufe	$+2$	Massives „Spin 2“-Teilchen
	$\alpha_{-2}^i 0; \mathbf{k}\rangle$	Vektor	$+2$	

Der Grundzustand ist ein Tachyon-Skalar. Die damit verbundenen Probleme [124] werden im folgenden ignoriert, da der Einbau fermionischer Freiheitsgrade diesen Zustand auf natürliche

¹⁷Eine Berechnung von a mit Hilfe der ζ -Funktion-Regularisierung liefert $a = 1$ [1]. Dies ist wie im Text erörtert wird, der einzige Wert, der zu einer Poincaré-kovarianten Theorie führt.

Weise aus der Theorie eliminiert. Da ein masseloses Vektorteilchen (in der normalen Quantenfeldtheorie) immer an erhaltene Ströme koppeln muß, wird der erste angeregte Zustand als Eichboson („Photon“) interpretiert. Der zweite angeregte Zustand ist massiv, wobei der $SO(24)$ -Vektor die notwendigen longitudinalen Freiheitsgrade beisteuert. Die Kennzeichnung als Spin 2 ist cum grano salis zu nehmen, da das Konzept des Spins sich zunächst einmal auf vier Raum-Zeit-Dimensionen bezieht. Reduziert man das zugehörige Poincaré-Multipllett bezüglich einer seiner $ISO(1,3)$ -Untergruppe aus, so ist der maximale auftretende Spin gleich 2.

Die leichtesten Anregungen eines geschlossenen Strings sind hingegen

Anregung	Zustand	$SO(24)$ -Darstellung	M^2	Interpretation
$N = 0$	$ 0; \mathbf{k}\rangle$	Skalar	-8	Tachyon
$N = 1$	$\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j 0; \mathbf{k}\rangle$	Tensor 2.Stufe	0	Graviton, Skalar („Dilaton“) und antisymmetrischer Tensor

Wieder ist der Grundzustand ein Tachyon-Skalar. Der erste angeregte Zustand ist ein masseloser $SO(24)$ -Tensor zweiter Stufe. Seine irreduziblen Anteile sind der spurfrei-symmetrische Anteil, die Spur selbst und der antisymmetrische Anteil. Ein masseloser symmetrischer spurfreier Tensor beschreibt in vier Raum-Zeit-Dimensionen ein Spin-2-Teilchen, das die Gravitationswechselwirkung vermittelt, das sogenannte Graviton. Darauf werde ich später ausführlicher zurückkommen.

Die kovariante Beschreibung des Spektrums

An dieser Stelle möchte ich noch erläutern, wie man mit Hilfe der Virasoro-Bedingungen physikalische Zustände im kovarianten Formalismus beschreiben kann. Als Beispiel betrachte man den Zustand

$$|\Phi\rangle := \xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |\mathbf{k}\rangle \quad \xi_\mu \in \mathbf{R} \quad (2.98)$$

und werte die Virasoro-Bedingungen aus. Die erste Bedingung ist

$$(L_0 - 1)|\Phi\rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{k}^2 |\Phi\rangle = 0. \quad (2.99)$$

Dies liefert also die Massenschalenbedingung $\mathbf{k}^2 = 0$. Die zweite Bedingung liefert

$$L_1 |\Phi\rangle = 0 \Leftrightarrow \xi_\mu k^\mu |\Phi\rangle = 0, \quad (2.100)$$

während die weiteren Bedingungen ($m > 1$) identisch erfüllt sind. Da ξ_μ die Polarisation des Zustandes $|\Phi\rangle$ beschreibt, ist die zweite Bedingung die **Transversalitätsbedingung** für einen masselosen Vektorzustand. Analog erhält man bei komplizierteren Anregungen aus der L_0 -Bedingung die Massenschalenbedingung und aus den anderen Bedingungen kovarianten Polarisationsbedingungen, die die unphysikalischen Anregungen eliminieren.

2.2.3 Vertexoperatoren

Die Beschreibung von Wechselwirkungen im Rahmen der 1. Quantisierung läßt sich nicht, wie bei der 2., der Feldquantisierung, durch eine Modifikation des Wirkungsprinzipes erreichen. Wechselwirkungsprozesse zwischen Strings sollten offensichtlich durch Weltflächen beschrieben werden, bei denen zwei oder mehrere einlaufende Weltflächenzylinder oder Weltflächenstreifen, die Anfangszustände, sich vereinigen und wieder trennen. Dabei ist die Wechselwirkung nirgendwo auf der Weltfläche lokalisiert, denn diese ist, welche Topologie man auch wählt, immer

eine differenzierbare Mannigfaltigkeit¹⁸. Das Wirkungsprinzip sollte auch für die Weltflächen gültig sein, die Wechselwirkungen beschreiben; um einen gewissen Streuprozess zu beschreiben, muß man über alle möglichen Weltflächen, insbesondere über alle Topologien summieren, die zu diesem Prozess beitragen. Es stellt sich nun aber die Frage, wie man die einlaufenden und auslaufenden Zustände beschreibt. Dieses Problem wird durch das Konzept des Vertexoperators gelöst. Ein Vertexoperator $V(\tau, \sigma; \mathbf{k}, \Lambda)$ ist ein lokales Weltflächen-Feld, daß die Erzeugung oder Vernichtung eines freien Zustandes mit Impuls $\mathbf{k}$ und sonstigen Quantenzahlen Λ am Weltflächenort (τ, σ) beschreibt. Es scheint zunächst dem Grundkonzept einer Stringtheorie zu widersprechen, einen Wechselwirkungsprozess durch einen **lokalen** Operator zu beschreiben. Die dahinter steckende Idee ist, daß man mit Hilfe konformer Transformationen die ein- und auslaufenden Streifen oder Zylinder stets auf Punktierungen abbilden kann, in denen sich dann Operatoren mit den Quantenzahlen des ein- oder auslaufenden Zustandes befinden¹⁹. Vertexoperatoren für offene Strings können sich nur auf den Rändern der Weltfläche befinden, Vertexoperatoren für geschlossene Strings nur im Inneren. Um Übergangsamplituden zu definieren, muß man über alle möglichen Lokalisierungen der lokalen Vertexoperatoren integrieren und erhält Operatoren der Form

$$V(\mathbf{k}, \Lambda) = \int_{\Sigma} d\tau d\sigma V(\tau, \sigma; \mathbf{k}, \Lambda) \text{ bzw. } V(\mathbf{k}, \Lambda) = \int_{\partial\Sigma} d\tau V(\tau; \mathbf{k}, \Lambda). \quad (2.101)$$

N-Teilchen-Streuamplituden der Stringtheorie können dann als Vakuum Erwartungswerte der korrespondierenden zweidimensionalen Feldtheorie berechnet werden:

$$A(\mathbf{k}_1, \Lambda_1; \dots; \mathbf{k}_N, \Lambda_N) = \langle 0 | V(\mathbf{k}_1, \Lambda_1) \cdots V(\mathbf{k}_N, \Lambda_N) | 0 \rangle. \quad (2.102)$$

Dieses Postulat definiert auf implizite Weise (nämlich durch die Angabe von on shell S-Matrixelementen), was wir unter einer wechselwirkenden Stringtheorie verstehen. Es erscheint (und ist in einem gewissen Sinne) als eine ad-hoc-Setzung, die sich aber zumindest a posteriori an Hand der Eigenschaften der Streuamplituden rechtfertigen läßt. Diese besitzen alle für S-Matrixelemente notwendigen Eigenschaften und ein besonders „weiches“ Ultraviolett-Verhalten [1], [2]. Historisch wurden zuerst die Amplituden an Hand dieser Eigenschaften definiert und erst nachträglich durch Nambu und Goto festgestellt, daß sie durch eine Stringtheorie realisiert werden können. Eines der wichtigsten Ziele ist natürlich weiterhin, eine Beschreibung im Formalismus der zweiten Quantisierung zu finden. Dies würde dann das Studium der „off shell“-Eigenschaften ermöglichen.

Ein Weltflächen-Feld ist nur dann ein zulässiger Vertexoperator, wenn es die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Die Streuamplituden müssen reparametrisierungsinvariant und damit im Rahmen der kovarianten Eichung konform invariant sein. Daraus folgt, daß die integrierten Vertexoperatoren ebenfalls invariant sein müssen, was implizit das kovariante Transformationsverhalten der lokalen Vertexoperatoren festlegt [1].
2. Die lokalen Vertexoperatoren sollen physikalische Zustände erzeugen, d.h. solche, die die Virasoro-Bedingungen erfüllen. Dies impliziert bestimmte Vertauschungsrelationen mit den Virasoro-Generatoren.

Da die Virasoro-Generatoren nicht nur das Spektrum definieren, sondern auch die konformen Transformationen erzeugen, sind beide Probleme miteinander verwandt. Um die simultane

¹⁸ Dies ist bei Punktteilchen ganz anders: Dort muß in der wechselwirkenden Theorie über **Graphen** summiert werden [1], [2], [104]. Die Wechselwirkung ist dabei in den Vertices lokalisiert. Im Prinzip kann für jede Art von Vertices eine eigene Kopplung eingeführt werden: Es gibt also unendlich viele verschiedene relativistische Punktteilchentheorien. In der bosonischen Stringtheorie besteht diese Willkür nicht, da die Wechselwirkung nicht lokalisiert ist. Alle Kopplungskonstanten lassen sich durch die Stringsannung parametrisieren [1], [2]. Die einzigen Wahlmöglichkeiten sind die zwischen offenen und geschlossenen sowie zwischen orientierten und nicht-orientierten Strings, siehe Abschnitt 2.2.6.

¹⁹ Später wird erläutert, daß die konforme Invarianz gerade die klassischen Lösungen der Stringtheorie charakterisiert. Daher sind die ein- und auslaufende Zustände auf der Massenschale, und folglich kann man in diesem Formalismus nur on shell S-Matrix-Elemente definieren und berechnen.

Lösung anzugeben, brauchen wir den Begriff der konformen Dimension oder des **konformen Gewichtes** eines Operators. Zunächst sei gesagt, daß die Konstruktion von Vertexoperatoren immer auf Felder zurückgeführt werden kann, die nur von einer WF-Koordinate abhängen. Vertexoperatoren für offene Strings sind ja am Rand der Weltfläche lokalisiert und hängen daher nur von der Zeitkoordinate τ ab. Weiter kann der Fockraum geschlossener Strings auf ein Tensorprodukt von Fockräumen offener Strings zurückgeführt werden (vgl. Abschnitt 2.2.2). Entsprechend werden die Vertexoperatoren Produkte von Vertexoperatoren für links- und rechtslaufende Anregungen sein, die dann Funktionen einer der Lichtkegelkoordinaten $\sigma^\pm$ sind. Transformiert nun ein Operator $V(x)$ unter Transformationen $x \rightarrow \tilde{x}(x)$ gemäß

$$V(x) \rightarrow \left(\frac{dx}{d\tilde{x}} \right)^J V(x), \quad (2.103)$$

so sagt man, er habe das konforme Gewicht oder die konforme Dimension J . Bei geschlossenen Strings gibt es je ein konformes Gewicht für die Links- und Rechtsläufer. Betrachtet man speziell die durch L_m erzeugte infinitesimale Transformation $x \rightarrow x - \epsilon i e^{imx}$, so erfüllt ein Operator mit konformem Gewicht J die Vertauschungsrelation [1]

$$[L_m, V(x)] = e^{imx} \left(-i \frac{d}{dx} + mJ \right) V(x). \quad (2.104)$$

Die integrierten Vertexoperatoren sind offensichtlich genau dann konform invariant, wenn die lokalen Vertexoperatoren das konforme Gewicht 1 bzw. (1,1) haben. Es stellt sich heraus, daß diese Bedingung auch hinreichend dafür ist, daß die Vertexoperatoren physikalische Zustände erzeugen [1]. Die Vertauschungsrelation (2.104) ist also das Analogon der Virasoro-Bedingungen für Vertexoperatoren.

Als einfachstes Beispiel soll nun der Vertexoperator für den Grundzustand des offenen Strings konstruiert werden. Da der Grundzustand ein Skalar ist, hat der einfachste Ansatz die Form einer verallgemeinerten ebenen Welle:

$$V(\tau, \sigma = 0; \mathbf{k}) =: \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(\tau, 0)) :. \quad (2.105)$$

Der explizite Ausdruck für die normalgeordnete Exponentialfunktion ist

$$\exp \left(-k_\mu \sum_{n < 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}\tau} \exp \left(-k_\mu \sum_{n > 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in\tau} \right). \quad (2.106)$$

Die Vertauschungsrelation mit dem Impulsoperator zeigt, daß der Vertexoperator tatsächlich den Impuls $\mathbf{k}$ aus dem Vakuum erzeugt²⁰:

$$[p^\mu, : \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(\tau, 0)) :] = k^\mu : \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(\tau, 0)) :. \quad (2.107)$$

Damit die Beschreibung durch Vertexoperatoren mit der Beschreibung durch Fockraum-Zustände konsistent ist, muß die Anwendung des Vertexoperators in der unendlichen Vergangenheit $\tau \rightarrow -\infty$ gerade den Zustand $|\mathbf{k}\rangle$ erzeugen. Mit Hilfe einer geeigneten „ $i\epsilon$ -Vorschrift“ für diesen Limes findet man tatsächlich

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow -\infty} : \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(\tau - i\epsilon, 0)) : |0\rangle = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} |0\rangle = |\mathbf{k}\rangle. \quad (2.108)$$

Das Ausführen der Kommutatoren mit den L_m zeigt, daß $V(\tau, \sigma = 0; \mathbf{k})$ genau dann ein physikalischer Vertexoperator, d.h. vom konformen Gewicht 1 ist, wenn der Impuls $\mathbf{k}$ die Massenschalenbedingung für das Tachyon erfüllt. Man stellt ganz allgemein fest, daß das konforme Gewicht eines normalgeordneten Exponentials

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{k}^2 \quad (2.109)$$

²⁰Bei Verwendung innerhalb von Streuamplituden bedeutet die Erzeugung von $\mathbf{k}$ auf der Weltfläche, daß ein äußerer Zustand mit einlaufendem Impuls $\mathbf{k}$ von der Weltfläche absorbiert oder ein Zustand mit auslaufendem Impuls $-\mathbf{k}$ von der Weltfläche emittiert wird.

ist. Aus $J = 1$ folgt dann $\mathbf{k}^2 = 2$, d.h. $M^2 = -2$. Um höher angeregte Zustände zu erzeugen, benötigt man das normalgeordnete Exponential, um den entsprechenden Impuls zu beschreiben. Hinzu kommen weitere Operatoren, die den Spin des Zustandes spezifizieren. Durch Ausprobieren findet man z.B. folgende Operatoren für offene und geschlossene Strings, die sich im Limes $\tau \rightarrow -\infty$ auf die angegebenen Zustände reduzieren:

Zustand	Vertexoperator
offene Strings	
$\alpha_{-1}^\mu \mathbf{k}\rangle$	$\partial_\tau X^\mu e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}}$
$\alpha_{-1}^\mu \alpha_{-1}^\nu \mathbf{k}\rangle$	$\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}}$
$\alpha_{-2}^\mu \mathbf{k}\rangle$	$\partial_\tau^2 X^\mu e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}}$
geschlossene Strings	
$\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu \mathbf{k}\rangle$	$\partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}}$

Allgemein kann man zeigen, daß X^μ kein wohldefiniertes konformes Gewicht besitzt²¹, wohingegen ein n -fach differenziertes Feld das Gewicht n hat. Damit ein Operator der Form

$$: F(\dot{\mathbf{X}}, \ddot{\mathbf{X}}, \dots) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(\tau, 0)) : \quad (2.110)$$

das vorgeschriebene konforme Gewicht 1 hat, muß, wenn insgesamt N Ableitungen auftreten, der Impuls die Massenschalenbedingung für das N -te Anregungsniveau,

$$M^2 = -\mathbf{k}^2 = 2(N - 1), \quad (2.111)$$

erfüllen. Durch das Auswerten der Virasorobedingung für Vertexoperatoren (2.104) erhält man auch die zu einer kovarianten Charakterisierung des Spektrums gehörenden Polarisationsgleichungen. So ist etwa der Vertexoperator

$$V(\tau; \mathbf{k}, \xi) := \xi_\mu : \partial_\tau X^\mu \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(\tau, 0)) :, \quad \xi_\mu \in \mathbf{R}, \quad (2.112)$$

genau dann physikalisch, wenn außer der Massenschalenbedingung $\mathbf{k}^2 = 0$ auch die Transversalitätsbedingung $\xi \cdot \mathbf{k} = 0$ erfüllt ist. Dies ist dann der lokale Vertexoperator für die Beschreibung des masselosen Vektorzustandes mit Polarisation ξ .

2.2.4 Die Pfadintegralquantisierung der bosonischen Stringtheorie

Die grundlegende Idee der Pfadintegralquantisierung ist das von R. Feynman angegebene Prinzip der Summation über alle Pfade [103]. Es besagt, daß man die quantenmechanische Amplitude für einen Vorgang erhält, indem man über alle möglichen „Pfade“, die Anfangs- und Endzustand verbinden, summiert (summation over histories) und jeden Pfad mit einem Faktor $\exp \frac{i}{\hbar} S$ gewichtet, wobei S die Wirkung des Pfades ist. Das Wort Pfad ist dabei teils, z.B. beim nichtrelativistischen Teilchen wörtlich, teils im Sinne von Konfiguration gemeint, z.B. bei relativistischen Quantenfeldtheorien, bei denen über alle Werte der Felder an jedem Raum-Zeit-Punkt integriert wird. Eine mathematisch befriedigende Definition von Pfadintegralen erfordert die analytische Fortsetzung der betrachteten Quantentheorie zu rein imaginären Zeiten, d.h. die Verwendung der euklidischen Formulierung [107], [123]. Die euklidische Formulierung einer D -dimensionalen Quantenfeldtheorie definiert einen verallgemeinerten stochastischen Prozeß in D euklidischen Raumdimensionen. Pfadintegrale sind dann stochastische Integrale mit einem (dank der euklidischen Fortsetzung) positiven Maß. Alle physikalischen Eigenschaften der Theorie können aus den Momenten dieses Maßes gewonnen werden, z.T. direkt, z.T. nach

²¹ Als klassische Koordinate hat X^μ das konforme Gewicht 0, aber der zugehörige Operator transformiert anomal unter der Virasoro-Algebra [1].

analytischer Fortsetzung in die Minkowski–Raum–Zeit. Die präzise Definition des Maßes ist ein schwieriges Problem und beinhaltet im Falle einer wechselwirkenden Theorie alle Probleme der (nichtstörungstheoretischen) Renormierung.

Anstelle des Maßes wird meist die Zustandssumme angegeben, die als Pfadintegral über alle geschlossenen Pfade ausgedrückt werden kann. Die Quantisierung der Nambu–Goto–Wirkung ist z.B. durch

$$Z = \int D\mathbf{X}_\ell e^{-S_{NG}[\mathbf{X}]} \quad (2.113)$$

gegeben. Dabei ist $D\mathbf{X}_\ell e^{-S_{NG}[\mathbf{X}]}$ eine formale Schreibweise für das Maß bei der Integration über alle Pfade, d.h. über alle möglichen Einbettungen der Weltflächenmannigfaltigkeit in die Raum–Zeit, bzw. den Raum²². Da sich die Integration über alle geschlossenen Pfade erstrecken soll, muß dabei auch über alle möglichen Topologien der Weltfläche summiert werden.

Anstelle der Nambu–Goto–Wirkung kann man auch die Polyakov–Wirkung zu Grunde legen. Hierbei muß dann zusätzlich über die Weltflächen–Metrik integriert werden.

$$Z = \int Dg D\mathbf{X}_\ell e^{-S_P[g, \mathbf{X}]} \quad (2.114)$$

Da die beiden klassischen Wirkungen äquivalent sind, erwartet man, daß auch die zugehörigen Quantentheorien äquivalent sind. Dies scheint auch so zu sein, ist aber noch kontrovers, da, wie angedeutet, die präzise Definition des Maßes schwierig ist [64]. Da die Polyakov–Wirkung den großen Vorteil hat, daß die $\mathbf{X}$ –Integration auf ein Gaußsches (Funktional-)Integral führt, wird sie allgemein bevorzugt. Für die Auswertung der Zustandssumme und allgemeinerer Pfadintegrale gibt es zwei Strategien:

1. Das Pfadintegral wird durch formale Umformungen im Kontinuum in einen mathematisch wohldefinierten Ausdruck umgeformt. Diese Methode besitzt eine große Ähnlichkeit zur Faddeev–Popov–Methode [119], [110] bei nichtabelschen Eichtheorien. Da einige für uns wesentliche Resultate aus ihr resultieren, soll sie gleich beschrieben werden.
2. Man betrachtet zunächst diskretisierte Zufallsflächen und versucht dann den Kontinuumsliches auszuführen [3], [104]. Diese Methode ist neu und wird zur Zeit viel untersucht. Da wir von ihr keinen Gebrauch machen müssen, gehe ich nicht weiter auf sie ein.

Ich möchte im Folgenden skizzieren, wie man durch die Verwendung von Resultaten der Differentialgeometrie und komplexen Analysis die Zustandssumme in einen wohldefinierten Ausdruck umformt²³.

Bei der Ausführung des Pfadintegrals stößt man auf das gleiche Problem wie bei Funktionalintegralen in Eichtheorien: Die Wirkung ist invariant unter lokalen Symmetrietransformationen (Reparametrisierungen und Weyltransformationen bzw. Eichtransformationen) und man muß bei der Integration sicherstellen, daß jede physikalisch inäquivalente Konfiguration genau einmal gezählt wird. Um das Mitzählen von Kopien zu verhindern, stellt man Eichbedingungen und versucht das Pfadintegral in ein Integral über die Eichorbits und eines über die physikalisch inäquivalenten Konfigurationen zu zerlegen. Aufgrund der Eichinvarianz der Wirkung faktorisiert das Integral über die Eichorbits und liefert einen unendlichen Faktor, der als Volumen der Eichgruppe interpretiert werden kann. Er kann daher durch eine unendliche Normierungskonstante kompensiert werden²⁴. Diese von Faddeev und Popov für Eichtheorien erfundene Methode läßt sich auch auf die Stringtheorie anwenden. Es sei hier noch erinnert, daß im allgemeinen folgende zwei Probleme auftreten können [110], [119]:

²² Man setzt hier sowohl die Weltfläche als auch die Raum–Zeit ins Euklidische fort.

²³ Ein sehr guter Übersichtsartikel über Pfadintegrale in der Stringtheorie ist [18]. Eine Übersicht über die in der Stringtheorie relevanten Teile der Theorie Riemannscher Flächen findet man in dem Buch [158]. Beide Werke geben zugleich einen Überblick über die sonstige relevante Literatur. Knappere Darstellungen findet man in den Lehrbüchern [1], [2], [4] der Stringtheorie.

²⁴ Bei einer sorgfältigeren Behandlung müßte man die betrachtete Theorie zunächst so regularisieren, daß alle betrachteten Größen endlich sind, dann die angegebenen Umformungen durchführen und abschließend die ursprüngliche Theorie in einem geeigneten Limes wiedergewinnen. Der Einfachheit halber soll hier aber formal mit divergenten Größen hantiert werde.

1. In Eichtheorien gibt es im allgemeinen keine global eindeutigen Eichfixierungen. Es treten Gribov-Kopien auf, die zwar bei der störungstheoretischen Behandlung ignoriert werden können, prinzipiell aber die Gültigkeit des Verfahrens in Frage stellen.
2. Eine Symmetrie der klassischen Wirkung braucht nicht unbedingt zu einer Symmetrie des Pfadintegralmaßes und damit der Quantentheorie zu führen. Man spricht dann von einer Anomalie.

Zur besseren Orientierung sind einige mathematischen Vorbemerkungen angebracht. Auf der Weltflächenmannigfaltigkeit spielen die folgenden fünf Strukturen eine Rolle:

1. **Die topologische Struktur:** Bei geschlossenen Strings muß über alle kompakten orientierbaren Flächen summiert werden. Diese werden durch eine einzige topologische Invariante, das Genus oder Geschlecht, beschrieben, die alle nichtnegativen ganzen Zahlen durchläuft [159]. Eine Fläche mit Genus 0 besitzt die Topologie einer Kugel²⁵, Flächen mit komplizierterer Topologie entstehen durch das Anheften von $g > 0$ Hantel an eine Kugel. Für $g = 1$ erhält man z.B. einen Torus. Die Hanteln interpretiert man als quantenmechanische Selbstwechselwirkung. Dies ist analog zu einer quantenfeldtheoretischen Zustandssumme, die als Summe über alle Feynman-Graphen ohne äußere Zustände geschrieben werden kann [122]. Auch hier beschreiben die Graphen mit Schleifen die Quantenfluktuationen. Bei offenen Strings summiert man entsprechend über berandete Flächen, wobei die Ränder die Endpunkte des Strings beschreiben. Die einfachsten dabei auftretenden Flächen sind die Kreisscheibe, der Kreisring und (falls man den offenen String nicht mit einer Orientierung versieht) das Möbiusband [1].
2. **Die differenzierbare Struktur:** Jede zweidimensionale reelle topologische Mannigfaltigkeit kann man auf genau eine Weise zu einer differenzierbaren C^∞ -Mannigfaltigkeit machen [158]. Wir haben von Anfang an davon Gebrauch gemacht, daß die Einführung einer differenzierbaren Struktur auf der Weltfläche eindeutig und möglich ist.
3. **Die komplexe Struktur:** Eine orientierbare²⁶, zweidimensionale reelle C^∞ -Mannigfaltigkeit kann immer zu einer Riemannschen Fläche, d.h. zu einer komplex-eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit gemacht werden [158]. Die Einführung einer komplexen Struktur ist aber im allgemeinen nicht eindeutig. Die inäquivalenten komplexen Strukturen auf einer Fläche mit fester Topologie werden durch kontinuierliche komplexe Parameter, die Moduli beschrieben. Auf der Kugel gibt es 0 Moduli, also nur eine komplexe Struktur, auf dem Torus ($g = 1$) einen Modulus, und für die höheren Genera ($g \geq 2$) existieren $3g - 3$ Moduli. Die Moduli bilden einen komplexen Raum, den sogenannten Moduli-Raum $\mathcal{M}_g$ [158]. Diese und die folgenden Überlegungen beziehen sich auf geschlossene Strings. Die Verallgemeinerungen für offene (und nicht-orientierte geschlossene) Strings benötigen wir nicht, da alle später zu betrachtenden Theorien nur geschlossene, orientierte Strings beinhalten.
4. **Die konforme Struktur:** Identifiziert man zwei Metriken auf einer Mannigfaltigkeit genau dann, wenn sie sich um eine Weyl-Transformation unterscheiden, so definiert jede dieser Äquivalenzklassen eine konforme Struktur. Mit Hilfe der konformen Struktur lassen sich Winkel definieren, aber keine Längen. Bei Riemannschen Flächen entsprechen sich die komplexen und die konformen Strukturen eineindeutig, da genau die holomorphen Abbildungen konform sind. Die Moduli parametrisieren also auch die inäquivalenten konformen Strukturen [2].

²⁵ Wir hatten oben gesehen, daß die Weltfläche eines freien geschlossenen Strings ein unendlicher Zylinder ist. Dieser ist topologisch äquivalent zu einer zweifach punktierten Kugel, wobei die Punktierungen die Erzeugung des Anfangs- und die Vernichtung des Endzustandes beschreiben. Anfangs- und Endzustand wären dabei im Pfadintegral durch die Spezifizierung von Randbedingungen anzugeben. Bei der Zustandssumme wird über alle Zustände, d.h. über alle Randbedingungen summiert, d.h. die Punktierungen fallen weg und man erhält eine Kugel.

²⁶ Geschlossene Strings sind a priori orientiert, da man rechts- und linkslaufende Anregungen unterscheiden kann. Dies definiert die Orientierung der Weltfläche.

5. **Die metrische Struktur:** Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit kann durch die Einführung einer Riemannschen Metrik zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit gemacht werden [155]. Schon ganz am Anfang hatten wir die Weltfläche mit einer intrinsischen Metrik versehen. Da im Pfadintegral über alle Metriken integriert wird, müssen wir nach einer Eichbedingung Ausschau halten, die es uns ermöglicht, diese Integration im Rahmen des Faddeev–Popov–Verfahrens zu faktorisieren. Wie bereits erwähnt, ist es im allgemeinen nicht möglich die Metrik global, d.h. auf der ganzen Fläche, auf die Form $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ zu transformieren (das kann ja höchstens auf intrinsisch flachen Mannigfaltigkeiten gehen, also z.B. nicht auf einer Kugel.). Es ist in zwei Dimensionen aber immer möglich, die Metrik global auf die konform flache Form

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = e^{\phi} \delta_{\alpha\beta} \quad (2.115)$$

zu transformieren, wobei ϕ eine C^∞ -Funktion und $\hat{g}_{\alpha\beta}$ eine Metrik mit konstanter Krümmung ist (d.h. der zugehörigen Krümmungsskalar ist konstant) [2], [158]. Mittels dieser sogenannten **konformen Eichung** ist also eine globale Eichfixierung möglich; in der Stringtheorie tritt daher keine Gribov–Ambiguität auf. Außerdem existiert in jeder konformen Äquivalenzklasse von Metriken genau eine Metrik konstanter Krümmung. Diese Metriken werden also ebenfalls durch die Moduli parametrisiert.

Wir wenden nun die Faddeev–Popov–Methode auf die Zustandssumme für geschlossene Strings an. Dabei ist es zweckmäßig, die Summation über die Topologien explizit zu machen:

$$Z = \sum_{g=0}^{\infty} Z_g = \sum_{g=0}^{\infty} N_g \int Dg D\mathbf{X} e^{-S[g, \mathbf{X}]}. \quad (2.116)$$

Über die Normierungskonstanten N_g soll später verfügt werden, um das faktorisierte Volumen der Eichgruppe zu kompensieren. Die Summation über die Genera wird als Störungsreihe interpretiert.

Um die Faddeev–Popov–Methode anwenden zu können, muß die Integration über alle Metriken in eine Integration über Symmetrietransformationen, d.h. über Reparametrisierungen und Weyl–Transformationen verwandelt werden. Dies ist möglich, wenn man folgende Punkte berücksichtigt [2]:

- Die Metrik kann in einen Spurteil $s_{\alpha\beta}$ und in einen spurfreien symmetrischen Anteil $h_{\alpha\beta}$ zerlegt werden.

$$g_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (2.117)$$

$$s_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\gamma\delta} g^{\gamma\delta}) \delta_{\alpha\beta}, \quad h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - s_{\alpha\beta}. \quad (2.118)$$

- Es gibt Deformationen der Metrik, die nicht durch Reparametrisierungen erzeugt werden können. Der Raum dieser Deformationen ist isomorph zum Moduli–Raum der komplexen Strukturen.
- Es gibt Reparametrisierungen, die den Spurteil der Metrik ändern. Die global definierten Reparametrisierungen mit dieser Eigenschaft sind gerade die globalen konformen Transformationen.
- Abgesehen von den beiden vorhergehenden Ausnahmen gibt es eine eindeutige Beziehung zwischen Reparametrisierungen und Weyltransformationen einerseits und spurfreien und Spur–Deformationen der Metrik andererseits.

Man kann daher die Integration über die Metriken in eine Integration über die Reparametrisierungen und Weyl–Transformationen umwandeln, wenn man wie folgt vorgeht [2]:

- Beim Umschreiben der Integration tritt eine Jacobiante auf, die in Analogie zu den Eichtheorien als Faddeev–Popov–Determinante bezeichnet wird. Sie kann als (ζ -regularisierte²⁷) Determinante eines Differentialoperators oder als Pfadintegral über die Faddeev–Popov–Geistfelder c^α und $b_{\alpha\beta}$ geschrieben werden [1], [2]:

$$J = \int D\mathbf{b} D\mathbf{c} e^{-\int d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} c^\gamma \nabla_\alpha b_{\beta\gamma}}. \quad (2.119)$$

Die Integration über die Reparametrisierungen und Weyl–Transformationen faktorisiert von der $\mathbf{X}$ –Integration, da die Wirkung invariant ist und liefert eine divergente Konstante, die man durch eine divergente Normierungskonstante kompensiert.

- Über die nicht durch Reparametrisierungen erzeugbaren Deformationen der Metrik muß zusätzlich integriert werden. Das Integrationsmaß ist das natürliche Maß auf dem Moduli–Raum, das sogenannte Weyl–Peterson–Maß $d\mu(\mathbf{m})$ [2], [158]. Dieses Integral kann als ein Integral über alle komplexen bzw. konformen Strukturen der Weltfläche aufgefaßt werden, d.h. als ein Integral über alle Riemannschen Flächen mit gegebener Topologie. Es faktorisiert nicht, da das $\mathbf{X}$ –Integral von den Moduli abhängt (s.u.).
- Bei der Integration über die Metriken werden die globalen konformen Transformationen einmal gezählt, bei der Integration über die Symmetriegruppe doppelt, da sie sowohl von den Weyl–Transformationen als auch von gewissen Reparametrisierungen erzeugt werden. Die Variablentransformation führt zu einer zusätzlichen (je nach Fall endlichen oder unendlichen) Konstante V_{GKG}^{-1} wobei V_{GKG} als Volumen der globalen konformen Gruppe interpretiert werden kann. Diese Konstante hängt nur von der Topologie, nicht von den Moduli ab und faktorisiert daher [2], [1].

Nach Ausführung der $\mathbf{g}$ –Integration lautet die Zustandssumme für Genus g :

$$Z_g = N_g V_{\text{Rep} \times \text{Weyl}} V_{GKG}^{-1} \int_{\mathcal{M}_g} d\mu(\mathbf{m}) J(\mathbf{m}) \int D\mathbf{X} e^{-S[\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{m}), \mathbf{X}]}. \quad (2.120)$$

Abschließend kann die $\mathbf{X}$ –Integration durchgeführt werden, da es sich um ein Gaußsches Integral handelt. Das Ergebnis ist im wesentlichen die Quadratwurzel der inversen Determinante des Laplace–Operators bezüglich der Metrik $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{m})$. Dabei muß man zuvor die Nullmoden des Laplace–Operators in Form einer divergenten Konstante V_{RZ} abfaktorisieren, die als Volumen der Raum–Zeit gedeutet werden kann [2]. Die Determinante des Laplace–Operators ist als das ζ –regularisierte Produkt aller nichtverschwindenden Eigenwerte (die alle positiv sind) definiert. Als weiterer, endlicher Normierungsfaktor tritt das Volumen der Weltfläche

$$V_{WF} = \int d^2\sigma \sqrt{g} \quad (2.121)$$

auf. Diese Konstante kann, im Gegensatz zu V_{RZ} nicht aus dem Integral herausgezogen werden, da sie von den Moduli abhängt [2]. Insgesamt liefert die $\mathbf{X}$ –Integration (bis auf weitere, irrelevante, endliche Konstanten)

$$\int D\mathbf{X} e^{-S[\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{m}), \mathbf{X}]} = V_{RZ} (V_{WF} (\det' \Delta_{g, \hat{\mathbf{g}}})^{-1})^{D/2}. \quad (2.122)$$

²⁷ Die ζ –Funktion–Regularisierung [42], [121] ermöglicht es divergenten Summen und Produkten durch analytische Fortsetzung einen eindeutigen, endlichen Wert zuzuweisen. Sie ist konform [1] und modular [4] invariant. Da elliptische Differentialoperatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten (verallgemeinerte Laplace–Operatoren) ein diskretes positives Spektrum und einen endlich–dimensionalen Kern und Ko–Kern besitzen [135], können (bei getrennter Behandlung der Nullmoden) mit dieser Methode Determinanten von unbeschränkten Operatoren definiert werden. Durch „Quadratwurzelziehen“ können auch die Determinanten von Differentialoperatoren erster Ordnung definiert werden, wie sie z.B. bei den FP–Geistfeldern auftreten. Der Prototyp dieser Konstruktion ist die „Quillen–Determinante“ von $\bar{\partial}$ [165].

Die konforme Anomalie

Die obige Darstellung ist unter der Voraussetzung korrekt, daß die Integration über die Weyl-Transformationen faktorisiert, was aber nur unter gewissen zusätzlichen Bedingungen der Fall ist. Im allgemeinen tritt eine Anomalie, die konforme Anomalie auf, d.h. die auf klassischem Niveau vorhandene konforme Symmetrie wird durch Quanteneffekte gebrochen. Im Funktionalintegralformalismus manifestiert sich das dadurch, daß zwar die klassische Wirkung, nicht aber das Integrationsmaß konform invariant ist. Obwohl die Weltflächenmetrik $g_{\alpha\beta}$ auf klassischem Niveau ein reiner Eichfreiheitsgrad ist, wird durch die konforme Anomalie der Spurfreiheitsgrad Φ in der quantisierten Theorie zu einem physikalischen Freiheitsgrad, dessen Dynamik durch die Liouville-Wirkung [2]

$$S[g, \Phi] = \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi + \mu^2 (e^\Phi - 1) + R_g \Phi \right) \quad (2.123)$$

beschrieben wird. Im Falle der kritischen Stringtheorie, d.h. in 26 Dimensionen verschwindet die konforme Anomalie aufgrund eines dimensionsabhängigen Vorfaktors. Nur in dieser Dimensionszahl faktorisiert die Integration über die Weyl-Transformationen wie oben angegeben.

Bemerkung: *Liouville-Theorie, zweidimensionale Quantengravitation und nicht-kritische Strings.* Der Name der Liouville-Wirkung rührt daher, daß die zugehörigen Bewegungsgleichung die Liouville-Gleichung

$$\Delta\phi = e^\phi \quad (2.124)$$

ist. Die durch die Liouville-Wirkung definierte Quantentheorie ist in den letzten Jahren aus zwei Gründen der Gegenstand vieler Arbeiten gewesen [6]: Zum einen besteht eine weitgehende Analogie zwischen der Liouville-Theorie und (Quanten-)Gravitationstheorien in höheren Dimensionen. Sie wird daher auch als zweidimensionale Quantengravitation bezeichnet. Die Quantisierung wird dadurch erschwert, daß die klassische Wirkung aufgrund der exponentiellen Selbstwechselwirkung ihr Minimum für $\Phi \rightarrow -\infty$ annimmt. Ein physikalisch interessanter Gesichtspunkt ergibt sich, wenn man höherdimensionale Quantengravitationstheorien im Hamilton-Formalismus mit Hilfe der Wheeler-de-Witt-Gleichung studiert, die eine Art Schrödinger-Gleichung für die räumlichen Komponenten der Metrik ist [116]. Hierbei tritt außer den beiden dynamischen Freiheitsgraden der Metrik (den beiden Polarisierungen des Gravitons, in feldtheoretischer Sprechweise) ein weiterer Freiheitsgrad auf, der dem Liouville-Feld entspricht und mit der (kosmischen) Zeit (in einem hinreichend symmetrischen Universum) identifiziert wird. Dies ist möglicherweise ein Schritt im Rahmen des Programmes Raum und Zeit als semiklassische Größen im Rahmen einer Quantengravitationstheorie zu rekonstruieren.

Der zweite Grund ist der Versuch, nicht-kritische Stringtheorien, d.h. solche in $D \neq 26$, zu konstruieren. Hier stellt sich das zusätzliche Problem der physikalischen Interpretation des Liouville-Feldes im Rahmen der Stringtheorie und der Klärung des Zusammenhanges zwischen Stringtheorie und zweidimensionaler Quantengravitation. Dabei ist z.B. versucht worden, Liouville-Strings als Strings in einem speziellen Raum-Zeit-Hintergrund zu interpretieren, wobei das Liouville-Feld die Rolle der Einbettungszeit X^0 spielt (in diesem Beispiel ergibt sich die Minkowski-Signatur automatisch). Dieses Beispiel suggeriert, daß kritische und nicht-kritische Strings verschiedene Zustände innerhalb einer einzigen Theorie beschreiben und ist ferner auch ein weiteres Indiz für den Zusammenhang von Strings und D -dimensionaler Quantengravitation [9], [72].

Die modulare Invarianz

Eine weitere für die Stringtheorie wichtige Symmetrie, die Invarianz unter modularen Transformationen, soll an dieser Stelle noch explizit diskutiert werden; implizit spielte sie bereits bei der Auswertung der Zustandssumme eine Rolle. Auf mehrfach zusammenhängenden Weltflächen existieren globale Transformationen, die nicht kontinuierlich mit der identischen Transformation verbunden sind: Man kann die Mannigfaltigkeit, bildlich gesprochen, entlang einer nicht-kontrahierbaren Kurve aufschneiden, um einen vollen Winkel verdrehen und wieder verkleben [1], [158]. Die Berücksichtigung der modularen Invarianz ist nicht nur für die Stringtheorie, sondern auch für konforme Feldtheorien auf allgemeinen Riemannschen Flächen und für Systeme der statistischen Mechanik mit entsprechenden Randbedingungen eine wichtige und sehr einschneidende Konsistenzbedingung [42].

Bei der Integration über die Moduli in der Zustandssumme ist darauf zu achten, daß Riemannsche Flächen, die durch modulare Transformationen ineinander übergehen, nur einmal gezählt werden. Die Integration über Reparametrisierungen wird aber auf eine Integration über infinitesimale Reparametrisierungen zurückgeführt²⁸, die keine modularen Transformationen erzeugen können. Entsprechend wird bei der Restintegration über infinitesimale Deformationen der komplexen Struktur zunächst über einen Überlagerungsraum des Moduli-Raumes $\mathcal{M}_g$, den Teichmüllerraum $\mathcal{T}_g$ integriert. Bezeichnet man mit Diff , bzw Diff_0 die Gruppen der differenzierbaren Reparametrisierungen, bzw. diejenige Zusammenhangskomponente, die die identische Transformation enthält, so gilt

$$\mathcal{M}_g = \frac{\text{Metriken}}{\text{Diff} \times \text{Weyl}}, \quad \mathcal{T}_g = \frac{\text{Metriken}}{\text{Diff}_0 \times \text{Weyl}}. \quad (2.125)$$

Die Gruppe der modularen Transformationen, auch Abbildungsklassengruppe genannt, ist dann:

$$\text{MOD} = \frac{\text{Diff}}{\text{Diff}_0}. \quad (2.126)$$

Um die modularen Kopien zu eliminieren, muß man die Integration über den Teichmüllerraum auf einen Fundamentalbereich bezüglich modularer Transformationen einschränken, der dann dem Modulraum äquivalent ist. Sowohl der Teichmüller- als auch der Moduli-Raum können als Untermengen eines geeigneten $\mathbf{C}^N$ repräsentiert werden, wobei die genaue Spezifizierung der Ränder sehr kompliziert ist [2]. Insbesondere trägt der Moduli-Raum zwar selbst eine komplexe Struktur, ist aber keine Mannigfaltigkeit [158]. Für die Genera $g > 2$ ist die Beschreibung des Moduli-Raumes zwar im Prinzip bekannt, aber so implizit, daß kaum explizite Rechnungen möglich sind.

Abschließend soll das Endergebnis der Faddeev-Popov-Methode für geschlossene Strings angegeben werden. Durch geeignete Wahl der Normierungskonstanten N_g eliminiert man die abgesparten Symmetriefaktoren und erhält:

$$Z_g = \int_{\mathcal{M}_g} d\mu(\mathbf{m}) J(\mathbf{m}) \left(\frac{\det'(\Delta_g \hat{g})}{\int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}}} \right)^{-D/2}. \quad (2.127)$$

Mit Hilfe des Mumford-Theorems [158] kann die Zustandssumme (für $D = 26$) auf eine andere Form umgeschrieben werden, in der nur noch komplex-analytische Größen auftreten:

$$Z_g = \int_{\mathcal{M}_g} \frac{\eta \wedge \bar{\eta}}{(\text{Im } \Omega)^{13}}. \quad (2.128)$$

Dabei ist η eine bestimmte holomorphe $3g-3$ Form auf dem Modulraum und Ω die Periodenmatrix [144] der Riemannschen Fläche. Die Tatsache, daß der Integrand in einen holomorphen und einen antiholomorphen Anteil zerfällt, wird als holomorphe Faktorisierung bezeichnet. Physikalisch bedeutet das, daß auch für höhere Genera die links- und die rechtslaufenden Anregungen eines geschlossenen Strings entkoppeln; dies ist wesentlich bei der später zu diskutierenden Konstruktion heterotischer Stringtheorien. Für $D \neq 26$ gilt dies nicht, da hier die sogenannte holomorphe Anomalie auftritt [11]. Ihr Verschwinden für $D = 26$ ist eine Aussage des Mumford-Theorems.

2.2.5 Wechselwirkungen im Pfadintegralformalismus

Im Pfadintegralformalismus gibt es eine elegante Definition für die Übergangsamplituden, die im Prinzip auch off shell Zustände zuläßt: Man integriere über alle möglichen Flächen mit entsprechenden Randbedingungen. Bei einer N -String-Amplitude für geschlossene Strings repräsentiert man die äußeren Zustände durch das Herausschneiden von N Kreisscheiben und muß, für jedes Genus, über den Moduli-Raum $\mathcal{M}_{g,b_1,\dots,b_N}$ der Riemannschen Flächen mit Rändern

²⁸Für die Diskussion von Details sei noch einmal auf die Literatur verwiesen.

$b_i, i = 1, \dots, N$ integrieren und anschließend über alle Topologien sprich Genera summieren²⁹ [19], [12]. Dieses Integral ist ein Funktional der auf den N kreisförmigen Rändern zu spezifizierenden Randbedingungen. Schematisch:

$$A(1, \dots, N) = \sum_g \int_{\mathcal{M}_{g, b_1, \dots, b_N}} d\mu(\mathbf{m}) J(\mathbf{m}) \int_{RB} D\mathbf{X} e^{-S}. \quad (2.129)$$

Es stellt sich natürlich die Frage, welche Randbedingungen den on shell Zuständen der Operator-Quantisierung entsprechen. Die Antwort ist einfach: Man ziehe die Ränder zu Punktierungen p_i zusammen und lokalisiere dort die entsprechenden Vertexoperatoren [19], [12]. Um die Übergangsamplitude zwischen on shell Zuständen zu berechnen, muß man also folgendes tun:

1. Für festes Genus und feste komplexe Struktur berechnet man die Korrelationsfunktion der lokalen Vertexoperatoren $V_i(z_i, \bar{z}_i) = V(z_i, \bar{z}_i; \mathbf{k}_i, \Lambda_i)$. Dabei sind die z_i lokale komplexe Koordinaten auf der Weltfläche und die $\bar{z}_i$ die komplex-konjugierten Größen. Aufgrund der holomorphen Faktorisierung zerfallen die Vertexoperatoren in chirale Felder, die analytisch in z_i bzw. $\bar{z}_i$ sind und linkslaufende bzw. rechtslaufende Anregungen beschreiben. Die Jacobiannte wird dabei als Integral über die Faddeev-Popov-Geistfelder ausgedrückt.

$$\langle V_1(z_1, \bar{z}_1), \dots, V_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle_{g, \mathbf{m}} = \quad (2.130)$$

$$\int D\mathbf{b} D\mathbf{c} D\mathbf{X} e^{-S[\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{m}), \mathbf{X}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]} V_1(z_1, \bar{z}_1), \dots, V_N(z_N, \bar{z}_N).$$

Dies ist die Korrelationsfunktion gewisser zusammengesetzter Felder einer konformen Feldtheorie auf einer festen Riemannschen Fläche und hängt sowohl von der Topologie, als auch von den Moduli ab.

2. Anschließend integriert man über die Lokalisierungen $(z_i, \bar{z}_i)$ der Vertexoperatoren und erhält die Korrelationsfunktion der entsprechenden integrierten Vertexoperatoren $V_i = V(\mathbf{k}_i, \Lambda_i)$, die nur noch eine Funktion der Topologie, der Moduli und der ein- und auslaufenden Zustände ist.

$$\langle V_1 \cdots V_N \rangle_{g, \mathbf{m}} = \int d\mu(z_1, \dots, \bar{z}_N) \langle V_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots V_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle_{g, \mathbf{m}}. \quad (2.131)$$

3. Schließlich muß über den Moduliraum integriert und über die Genera summiert werden:

$$A(1, \dots, N) = \sum_{g=0}^{\infty} \int_{\mathcal{M}_g} d\mu(\mathbf{m}) \langle V_1 \cdots V_N \rangle_{g, \mathbf{m}}. \quad (2.132)$$

Die Korrelationsfunktion kann selbst als Funktionalintegral oder mit Hilfe des (euklidischen) Operatorkalküls (siehe 2.4.1) berechnet werden. Für die höheren Genera sind konkrete Rechnungen bisher kaum möglich. Bei der zweiten Methode bräuchte man einen bisher erst in Ansätzen vorhandenen globalen Operatorkalkül, der die Struktur der Weltfläche berücksichtigt [158]. In jedem Fall muß die Integration über die Moduli ausgeführt werden.

Die Zustandssumme kann für festes Genus und feste komplexe Struktur durch die Einführung von Quelltermen für die Vertexoperatoren als erzeugendes Funktional der Korrelationsfunktion der korrespondierenden konformen Feldtheorie aufgefaßt werden. Auch nach Differentiation nach den Quellen bleibt das Funktionalintegral gaußisch und kann exakt (und nichtperturbativ) ausgeführt werden. Die volle Zustandssumme ist hingegen, wenn man die Weltflächen als Feynman-Graphen auffaßt, das erzeugende Funktional aller zusammenhängenden Graphen der Stringtheorie. Die Summation über die Genera wird als Störungstheorie interpretiert. Es

²⁹Diese Vorschrift läßt sich auch für offene Stringtheorien formulieren [54]. Hier treten zwei Arten von WF-Rändern auf: Raumartige Ränder beschreiben Anfangs- und Endzustände, zeitartige Ränder sind die Bahnen der Anfangs- und Endpunkte von Strings.

ist darüber spekuliert worden, wie nichtperturbative Effekte beschrieben werden können, etwa durch Flächen vom Genus ∞ [2]. Einen anderen Zugang zu nichtperturbativen Größen stellt die Summation über diskretisierte Zufallsflächen dar, da hier nicht nach der Topologie sortiert wird. Z ist auch proportional zur (quantenmechanisch induzierten) kosmologischen Konstanten, die ja durch die Energiedichte der Quantenfluktuationen und damit durch die Vakuumdiagramme der Theorie gegeben ist [129]. Bei der Integration über die Moduli beschreiben die Beiträge vom Rand des Moduli-Raumes das Faktorisieren einer gegebenen Fläche in solche von niedrigerem Genus [158]. Mit Hilfe des Pfadintegralformalismus kann man zeigen, daß die Amplituden auch für höheres Genus alle notwendigen Eigenschaften besitzen; dazu gehören insbesondere auch die Faktorisierungseigenschaften [1], [2]. Schwierigkeiten macht noch der exakte Beweis der vermuteten Endlichkeit der Amplituden für alle Genera. Im Falle der bosonischen Theorie wird diese Eigenschaft durch das Auftreten des Tachyons auf jeden Fall zerstört; man hofft aber, sie wenigstens für supersymmetrische Stringtheorien zeigen zu können³⁰.

2.2.6 Übersicht über bosonische Stringtheorien

Aus der Betrachtung der bosonischen Stringtheorie für höhere Genera ergeben sich Konsistenzbedingungen, die die Anzahl der konsistenten Theorien (von der Endlichkeit / Renormierbarkeit einmal abgesehen) einschränken. Zu Anfang waren Theorien mit offenen und geschlossenen Strings eingeführt worden; erstere sind a priori nicht orientiert, letztere a priori orientiert. Indem man bei offenen Strings explizit eine Orientierung einführt bzw. bei geschlossenen Strings den Fockraum symmetrisiert, ergeben sich insgesamt vier Möglichkeiten. Aber nicht alle Möglichkeiten sind konsistent, denn:

- Theorien mit offenen Strings müssen immer auch geschlossene Strings einschließen, und
- Theorien mit nicht-orientierten geschlossenen Strings müssen immer auch offene Strings einschließen.

Dies ergibt sich daraus, daß durch die Beiträge der höheren Genera zu den Streuamplituden automatisch entsprechende Pole auftreten. Geometrisch entspricht dem, daß bei der Pfadintegration Flächen auftreten, die on shell Propagatoren für die entsprechenden Stringmoden sind [1]. Diese Beiträge kommen von den Rändern des Moduliraumes, wo diejenigen Flächen lokalisiert sind, die in Flächen von niedrigerem Genus faktorisieren, die durch einen langen Streifen bzw. Zylinder verbunden sind.

Auf diese Weise gibt es höchstens³¹ drei bosonische Stringtheorien: Die erste besteht aus unorientierten offenen und geschlossenen, die zweite aus orientierten offenen und geschlossenen Strings und die dritte aus orientierten geschlossenen Strings.

2.3 Hintergrundfelder und Gravitation

2.3.1 Hintergrund-Gravitationsfelder

Bisher haben wir die Propagation von Strings in einem flachen D -dimensionalen Minkowski-Raum betrachtet. Ersetzt man in der Polyakov-Wirkung die flache Metrik $\eta_{\mu\nu}$ durch eine Riemannsche Metrik $G_{\mu\nu}(\mathbf{X})$,

$$S' = \int d\tau d\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta}(\tau, \sigma) \partial_\alpha X^\mu(\tau, \sigma) \partial_\beta X^\nu(\tau, \sigma) G_{\mu\nu}(\mathbf{X}), \quad (2.133)$$

so kann man statt dessen die Propagation von Strings in einer allgemeinen Raum-Zeit beschreiben [1]. Eine Riemannsche Metrik bzw. ihr Abweichen von der flachen Minkowski-Form beschreibt ein klassisches Gravitationsfeld

$$G_{\mu\nu}(\mathbf{X}) = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}(\mathbf{X}). \quad (2.134)$$

³⁰Siehe hierzu [61].

³¹Die zweite der im folgenden genannten Möglichkeiten entfällt aufgrund von Eichanomalien, siehe Kapitel 3 und [1].

Im folgenden wird $f_{\mu\nu}$ als Gravitationsfeld bezeichnet. Genau wie in der normalen Quantenfeldtheorie kann ein klassisches Gravitationsfeld als kohärenter Zustand von Gravitonen, masselosen Spin-2-Teilchen, beschrieben werden. Vergleicht man nämlich die zur Polyakov-Wirkung S und die zu der verallgemeinerten Wirkung S' gehörenden Zustandssumme, so findet man

$$Z' = \int D\mathbf{g} D\mathbf{X} e^{-S'} = \int D\mathbf{g} D\mathbf{X} e^{-S} \exp V, \quad (2.135)$$

wobei V ,

$$V = \int d\tau d\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu f_{\mu\nu}(\mathbf{X}) \quad (2.136)$$

der Vertexoperator für Gravitonen mit der Wellenfunktion $f_{\mu\nu}$ ist³². Folglich ist $\exp(V)$ der Vertexoperator für einen kohärenten Zustand von Gravitonen mit dieser Wellenfunktion.

Wir bemerken an dieser Stelle eine Eigentümlichkeit der Stringtheorie. Das Gravitationsfeld geht, zumindest in unserer Beschreibung, auf zweierlei Weise ein. Zum einen spezifiziert man die Raum-Zeit als Hintergrund in der verallgemeinerten Polyakov-Wirkung explizit, zum anderen tritt im Spektrum der Theorie das Graviton auf. In der noch zu bestimmenden endgültigen Form der Stringtheorie muß dieser Dualismus überwunden werden, wahrscheinlich in Form einer Quantengravitationstheorie, in der die Raum-Zeit-Struktur aus fundamentalen Prinzipien hergeleitet wird. In der hier zur Verfügung stehenden Formulierung kann lediglich die Konsistenz der Stringpropagation mit dem Hintergrund überprüft werden.

Der wesentliche Unterschied zwischen den Wirkungen S und S' besteht darin, daß die Wirkung S' keine freie Theorie ist. In der kovarianten Eichung erhält man die Wirkung eines allgemeinen nichtlinearen σ -Modells [33], [132], mit der Riemannschen Raum-Zeit als „target space“,

$$S'_{kov} = \int d\tau d\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X^\nu G_{\mu\nu}(\mathbf{X}). \quad (2.137)$$

Zusätzlich ist das Verschwinden des Energie-Impuls-Tensors zu fordern, um die Äquivalenz mit der reparametrisierungsinvarianten Wirkung zu sichern. Während im flachen Raum aufgrund der Weyl-Invarianz die Spur des Energie-Impuls-Tensors verschwindet, tritt im gekrümmten Raum eine Anomalie auf. Die Ursache ist der Zusammenbruch der Skaleninvarianz des nichtlinearen σ -Modells. Er kommt, wie immer in solchen Fällen [99], [132], dadurch zustande, daß die Renormierung eine Skala in die ursprünglich skaleninvariante Theorie einführt³³. Diese Brechung kann durch die β -Funktion ausgedrückt werden, die die Abhängigkeit der Kopplung von der Renormierungsskala mißt. In unserem σ -Modell ist $G_{\mu\nu}(\mathbf{X})$ als ortsabhängige Kopplung aufzufassen, daher ist auch die β -Funktion eine Funktion $\beta_{\mu\nu}(\mathbf{X})$ des Ortes. Die Bewegungsgleichung $T_{\alpha\beta} = 0$ der Stringtheorie kann nur erfüllt sein, wenn die β -Funktion verschwindet. Berechnet man die β -Funktion in der Ein-Schleifen-Ordnung (der σ -Modell-Störungstheorie, wobei die Weltfläche die Sphäre, also die führende Ordnung der Stringstörungstheorie, ist), so findet man [1]

$$T_{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow \beta_{\mu\nu}(\mathbf{X}) = 0 \stackrel{1\text{ loop}}{\Rightarrow} R_{\mu\nu}(\mathbf{X}) = 0. \quad (2.138)$$

Dabei ist $R_{\mu\nu}$ der Ricci-Tensor der D -dimensionalen Raum-Zeit, d.h. aus der Forderung nach Skalen- und damit konformer Invarianz auf der Weltfläche folgen die Einstein-Gleichungen im Vakuum, also die klassische Bewegungsgleichung des Gravitationsfeldes bzw. des Gravitons.

Allgemeiner kann man argumentieren, daß jedes konform invariante σ -Modell eine **klassische** Lösung der Stringtheorie beschreibt [1]: Das Charakteristikum einer Lösung der Stringtheorie ist, daß die Vertexoperatoren aller physikalischen Zustände verschwindende Erwartungswerte haben

$$\langle V \rangle = 0. \quad (2.139)$$

³²Wir hatten früher den Vertexoperator für Gravitonen kennengelernt, deren Wellenfunktion eine ebene Welle $\xi_{\mu\nu} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}}$ ist. Durch lineare Superposition erhält man allgemeinere Vertexoperatoren.

³³Dies ist von der oben besprochen konformen Anomalie zu unterscheiden.

Man kann zeigen, daß dies für die Weltfläche mit Genus 0, und nur für diese, äquivalent zur konformen Invarianz der WF-Feldtheorie ist. Da die Genus 0 Weltfläche als „Baumgraph“ interpretiert wird, beschreiben konform invariante Theorien klassische Lösungen der Stringtheorie.

Wenn man höhere Schleifenordnungen der β -Funktion berechnet, werden die Einstein-Gleichungen durch weitere Terme modifiziert, die aus dem Krümmungstensor gebildet werden; jede höhere Ordnung ist dabei gegenüber der vorhergehenden um eine Potenz des Regge-Parameters α' unterdrückt³⁴. Auf diese Weise erhält man stringtheoretische Korrekturen zur allgemeinen Relativitätstheorie [1]. Dahinter sollte sich ein neues geometrisches Prinzip verbergen, das dasjenige der klassischen Gravitationstheorie ablöst; leider ist es bisher nicht möglich, die Potenzreihe für die β -Funktion zu summieren.

2.3.2 Andere Hintergrundfelder

Als weitere Verallgemeinerung kann man auch andere Zustände der Stringtheorie als Hintergrundfelder verwenden. Als Beispiel sollen hier die beiden anderen masselosen Moden des geschlossenen Strings, das Dilaton und der antisymmetrische Tensor, betrachtet werden. Man kann zeigen, daß das Dilaton in Form eines Zusatzterms

$$S[\Phi] = \int d\tau d\sigma \sqrt{g} \Phi(\mathbf{X}) R^{(2)} \quad (2.140)$$

zur Wirkung berücksichtigt werden muß; $R^{(2)}$ ist der zweidimensionale Krümmungsskalar. Das Dilaton spielt eine ähnliche Rolle wie der Brans–Dicke–Skalar [114], [125] in nichtminimalen Skalar–Tensor–Theorien der Gravitation [1]: Dies ergibt sich, wenn man die Frage stellt, ob bei der Beschreibung von Stringwechselwirkungen eine zweite fundamentale Konstante, nämlich eine Kopplungskonstante κ , eingeführt werden muß. Eine N -Teilchen Genus- g -Amplitude müßte eigentlich $M + g - 2$ Potenzen dieser Konstante tragen, $M - 2$ für die äußeren Zustände und g für die „Schleifen“. Da zu den Wechselwirkung u.a. die Gravitation gehört, ist κ im wesentlichen die Gravitationskonstante. Wäre diese von α' unabhängig, so gäbe es eine willkürliche fundamentale Konstante $\alpha'/\kappa^{1/6}$, durch die eine einparametrische Schar inäquivalenter Stringtheorien parametrisiert wird. Dies ist jedoch nicht der Fall: Man kann zeigen, daß κ durch den Vakuum Erwartungswert des Dilatonfeldes ausgedrückt werden kann³⁵. Verschiedene Kopplungskonstanten beschreiben also nicht verschiedene Theorien, sondern verschiedene Vakua (Grundzustände) einer Theorie. Es sei noch darauf hingewiesen, daß auch der Vakuum Erwartungswert des Gravitons eine physikalische Bedeutung hat, nämlich die der Raum–Zeit–Metrik; er spezifiziert also den Raum–Zeit–Hintergrund.

Während das Dilaton und das Graviton schon aus der konventionellen Gravitations- und Quantenfeldtheorie bekannt sind, ist das antisymmetrische Tensorfeld eine stringtypisches Novum, das später im Zusammenhang mit kompaktifizierten Raumdimensionen noch ausführlich behandelt wird. Als Hintergrundfeld im σ -Modell kann es durch einen Zusatzterm

$$S[\mathbf{B}] = \int d\tau d\sigma \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}(\mathbf{X}) \quad (2.141)$$

in der Wirkung berücksichtigt werden. Fordert man nun die konforme Invarianz (das Verschwinden der β -Funktion) für die σ -Modell-Wirkung mit allen drei Hintergrundfeldern, so erhält man bereits in niedrigster Ordnung drei gekoppelte Bewegungsgleichungen für Graviton, Dilaton und antisymmetrischen Tensor. Anstelle der Gleichungen möchte ich hier eine 26-dimensionale feldtheoretische Wirkung angeben, aus der sie als Euler–Lagrange–Gleichungen folgen [1]:

$$S^{(26)} = -\frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}x \sqrt{G} e^{-2\Phi} \left(R - 4D_\mu \Phi D^\mu \Phi + \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right). \quad (2.142)$$

³⁴ An dieser Stelle muß man das natürliche Einheitensystem verlassen, um einen Entwicklungsparameter zu haben. Der eigentliche, dimensionslose Entwicklungsparameter der σ -Modell-Störungstheorie ist der inverse Hauptkrümmungsradius der betrachteten Stelle im target space gemessen in Einheiten von $\sqrt{\alpha'}$ [1].

³⁵ Die feldabhängige Gravitationskonstante ist eine typische Eigenschaft von Skalar–Tensor–Theorien der Gravitation.

Dabei ist D_μ die kovariante Ableitung in der Raum-Zeit und

$$H_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\rho B_{\mu\nu} + \partial_\nu B_{\rho\mu} \quad (2.143)$$

der Feldstärkentensor des $\mathbf{B}$ -Feldes. Die Wirkung $S^{(26)}$ definiert eine effektive Feldtheorie, die die Dynamik der drei berücksichtigten Stringzustände im Limes $\alpha' \rightarrow 0$, also in führender Ordnung beschreibt. Das Studium effektiver Feldtheorien ist ein wichtiges Hilfsmittel bei der Analyse phänomenologischer Aspekte der Stringtheorie.

2.3.3 Strings und Gravitation

Nachdem sich gezeigt hat, daß Hintergrund-Gravitationsfelder in der Stringtheorie die Einsteinschen Gleichungen (plus Korrekturen) erfüllen müssen, soll als nächstes die Wechselwirkung zwischen den im Spektrum auftretenden masselosen Spin-2-Zuständen untersucht werden, um festzustellen, ob es sich tatsächlich um Gravitonen handelt. Dazu muß zunächst daran erinnert werden, wie man (etwa) die Dreigravitonenkopplung in der normalen Quantenfeldtheorie definiert. Dies geschieht mit Hilfe einer feldtheoretischen Umformulierung der Einsteinschen Gravitationstheorie [125], [114].

Man betrachtet zunächst die freie, klassische Feldtheorie eines masselosen Spin-2-Teilchens, beschrieben durch ein symmetrisches Tensorfeld $\psi_{\mu\nu}$. Die Wirkung ist

$$S = \int d^4x \partial_\rho \psi_{\mu\nu} \partial^\rho \psi^{\mu\nu} + S_{\text{Proj}}, \quad (2.144)$$

wobei S_{Proj} auf die Komponenten mit der Helizität ± 2 projiziert. Die Wirkung ist invariant unter lokalen Eichtransformationen

$$\psi_{\mu\nu} \rightarrow \psi_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu. \quad (2.145)$$

Daraus folgt, daß das ψ -Feld nur an einen erhaltenen, symmetrischen Tensor zweiter Stufe koppeln kann,

$$S_{\text{int}} = -\kappa^2 \int d^4x \psi_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (2.146)$$

Es kann gezeigt werden [125], [114], daß die einzige sinnvolle³⁶ Wahl der volle Energie-Impuls-Tensor, gebildet aus allen Feldern einschließlich des ψ -Feldes, ist. Im feldtheoretischen Formalismus muß man immer höhere Selbstkopplungen des Gravitons einführen und kann die Selbstwechselwirkungsterme schließlich zur vollen nichtpolynomialen Einstein-Hilbert-Wirkung aufsummieren. Man erhält auch das Äquivalenzprinzip und die Universalität der Gravitation (die Existenz von nur einer Kopplungskonstanten) als Folgerungen. Die Eichsymmetrie der Wirkung ist eine lokale Poincaré-Symmetrie. Obwohl die ursprüngliche Theorie in einem flachen Minkowski-Raum formuliert wurde, ist aufgrund der Eichsymmetrie in der vollen Theorie nur noch die Größe

$$\eta_{\mu\nu} + 2\kappa^2 \psi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (2.147)$$

beobachtbar. $g_{\mu\nu}$ ist die Riemannsche Metrik der allgemeinen Relativitätstheorie, und die Kopplungskonstante κ kann durch die Newtonsche Gravitationskonstante G ausgedrückt werden:

$$\kappa = \sqrt{\frac{8\pi G}{c^2}}. \quad (2.148)$$

Bemerkung: Die Tatsache, daß die Einsteinsche Gravitationstheorie als Feldtheorie in einer flachen, nichtobservablen Raum-Zeit formuliert werden kann, ist auch unter wissenschaftstheoretischen Gesichtspunkten interessant. Einstein legt einen empirischen Geometriebegriff zu Grunde, d.h. Raum ist für ihn etwas, daß mit physikalischen Gegenständen ausgemessen werden kann. Dabei muß man die verwendeten Maßstäbe als a priori invariant voraussetzen; die Frage welche Geometrie der Raum

³⁶Es ist bisher nicht **bewiesen**, daß die Gravitationstheorie die einzige konsistente Theorie für ein masseloses Spin-2-Teilchen ist. Alle anderen bisher in Erwägung gezogenen Möglichkeiten sind aber „pathologisch“ [1].

hat, ist eine empirische Frage und Einsteins Theorie behauptet, daß diese Geometrie eine Riemannsche ist [163]. Daneben gibt es aber auch apriorische Geometrieauffassungen, z.B. Kants Philosophie, Poincarés Konventionalismus [163] oder die zeitgenössische konstruktivistische Wissenschaftstheorie [162]. In diesem Rahmen kann man die feldtheoretische Version der Gravitationstheorie so interpretieren, daß die Raum-Zeit a priori (d.h. unabhängig von aller Erfahrung) die flache Minkowski-Form besitzt. Mit endlichen physikalischen Objekten läßt sich diese Geometrie aber nicht realisieren, da das Gravitationsfeld alle Maßstäbe deformiert. Obwohl beide Theorien in allen empirischen Aussagen (modulo Fragen nach der globalen Struktur der Raum-Zeit) vollkommen übereinstimmen, sind sie realistisch interpretiert verschieden [163], [125], [114]. Natürlich ist bereits die Frage, ob es sich hier überhaupt um verschiedene Theorien handelt, eine Facette des philosophischen Realismusproblems. Die These, daß es zu jeder Menge von Sinnes- oder Beobachtungsdaten mehrere (unendlich viele) inäquivalente Theorien gibt, ist von Duhem und insbesondere von Quine [165] vertreten worden [166]. Die Haltung der meisten Physiker angesichts dieser philosophischen Fragen ist pragmatisch: Man verwendet den geometrischen oder den feldtheoretischen Formalismus, je nachdem, welcher für eine gegebene Fragestellung bequemer oder anschaulicher ist [114], [125].

Die feldtheoretische Formulierung der Gravitationstheorie kann nun mit den üblichen Methoden quantisiert werden. Insbesondere kann man Störungstheorie betreiben und Feynmanregeln angeben. Es stellt sich heraus, daß die Theorie im störungstheoretischen Sinn weder renormierbar noch endlich ist [116]. Dies ist ein (technischer) Aspekt des Problems der Quantisierung der Gravitation³⁷. Es ist also nicht möglich, über das Niveau von Baumgraphen hinauszugehen³⁸.

Man kann nun die Struktur der Graviton-Graviton (oder Graviton-Materie) Wechselwirkung in der quantisierten Gravitationstheorie und der Stringtheorie miteinander vergleichen. Dabei kann man sich einen beliebigen Vertex aussuchen, da in beiden Theorien die Wechselwirkungen universell sind und jeweils nur eine Kopplungskonstante, κ bzw. α' , existieren. Die Kopplungsstruktur der Stringtheorie extrahiert man aus Korrelationsfunktionen von Vertexoperatoren auf der Genus-0-Weltfläche, die im Rahmen der Stringtheorie die Baumgraphenordnung beschreibt. Es ergibt sich folgendes [1]:

- Die Struktur beider Kopplungen ist in führender Ordnung dieselbe, wobei die Stringtheorie zusätzliche Terme liefert, die von höherer Ordnung in α' sind. Dieser Befund ist der gleiche wie bei den Hintergrundfeldern.
- Die Stärke der Wechselwirkungen ist in führender Ordnung gleich, wenn in natürlichen Einheiten ($\hbar = c = 1$) der Regge-Parameter (bis auf irrelevante numerische Faktoren) gleich der Newtonschen Gravitationskonstante ist³⁹

$$\alpha' \approx G. \quad (2.149)$$

Durch die Forderung, daß die Gravitationswechselwirkung die richtige Stärke hat, läßt sich also der einzige in der Stringtheorie auftretende dimensionsbehaftete Parameter fixieren.

An dieser Stelle ist es angebracht, den fundamentalen Parameter der Stringtheorie in den in der Elementarteilchenphysik üblichen Einheiten anzugeben, damit wir uns eine Vorstellung von der typischen Anregungsenergie eines Strings machen können. Zuvor möchte ich aber einige Bemerkungen über Einheitensysteme machen:

Im natürlichen Einheitensystem der Elementarteilchenphysik setzt man $c = \hbar = 1$ und mißt alle Größen in Einheiten der Energie. Masse und Energie haben z.B. die gleiche Dimension und Längen sowie Zeiten die Dimension (Energie)⁻¹. Es stellt sich nun die Frage, ob es eine weitere Naturkonstante gibt, die es dann ermöglicht alle physikalischen Größen in Natur-gegebenen

³⁷ Auch eine störungstheoretisch renormierbare Gravitationstheorie, so nützlich sie wäre, würde natürlich nicht automatisch die immensen physikalischen und begrifflichen Probleme einer Quantengravitationstheorie lösen. Die störungstheoretische Renormierbarkeit der QCD beantwortet ja auch nicht die Frage nach der Physik der starken Wechselwirkung auf dem Niveau der Hadronen.

³⁸ Eine Übersicht über die verschiedenen bei der Quantisierung der Gravitation auftretenden Probleme gibt [116]. Neuere Ansätze im Rahmen der Hamiltonschen Formulierung werden in [126] besprochen.

³⁹ Die Beobachtung, daß Stringtheorien bei dieser Wahl Gravitationstheorien sind, wurde zuerst von J. Scherk und J. Schwarz gemacht [83].

(natürlichen) Einheiten auszudrücken. Bereits Max Planck wußte, daß dies mit Hilfe der Newtonschen Gravitationskonstante möglich ist [118]. Die natürlichen Maßstäbe für Masse, Energie und Länge sind dann

$$M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2,2 \cdot 10^{-8} kg = 22 \mu g, \quad (2.150)$$

$$M_{Pl} c^2 = 1,2 \cdot 10^{28} eV = 1,2 \cdot 10^{19} GeV, \quad (2.151)$$

$$L_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,6 \cdot 10^{-33} cm \simeq 8,2 \cdot 10^{-20} (GeV)^{-1} = M_{Pl}^{-1}, \quad \text{für } \hbar = c = 1. \quad (2.152)$$

Bemerkenswerterweise erlaubt auch die Stringtheorie die Definition eines natürlichen Einheitensystems. Sie enthält einen fundamentalen Parameter mit einer geeigneten Dimension, nämlich wahlweise die Stringspannung T , mit der Dimension Energie pro Länge oder (mit $\hbar = c = 1$) inverse Fläche, den Regge-Parameter α' , mit der Dimension Fläche, oder den Längenparameter l :

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T}, \quad l = \frac{1}{\sqrt{\pi T}}. \quad (2.153)$$

Da, wie oben argumentiert, der Reggeparameter von der Ordnung der Newton-Konstanten sein muß, können die Stringparameter jetzt in SI - oder Hochenergie-Einheiten angegeben werden:

$$T \approx \frac{M_{Pl} c^2}{L_{Pl}} = 1,2 \cdot 10^{44} J/m \simeq M_{Pl}^2, \quad (2.154)$$

$$\alpha' \approx 6,67 \cdot 10^{-39} (GeV)^{-2} = L_{Pl}^2, \quad l \approx L_{Pl} \quad (\hbar = c = 1). \quad (2.155)$$

Durch Wiedereinsetzen des Regge-Parameters in die Massenformel kann man die typischen Anregungsenergie eines Strings bestimmen. Sie ist von der Größenordnung der Planck-Energie, d.h. die leichteste Anregung eines Strings besitzt die Masse eines Staubkornes.

Diese Tatsache läßt es zunächst unrealistisch erscheinen, massive Elementarteilchen im Rahmen der Stringtheorie zu beschreiben. Es ist aber zu bedenken, daß die im Standardmodell auftretenden Massen verglichen mit der Planck-Masse ungefähr 0 sind. Man kann daher versuchen, alle bekannten Elementarteilchen dem masselosen Spektrum der Stringtheorie zuzuordnen und hoffen, daß die auftretenden kleinen Massen durch noch zu findende Quanten- oder Symmetriebrechungseffekten zu Stande kommen. Wir werden später Stringtheorien kennenlernen, deren masseloses Spektrum reichhaltig genug ist, um das Standard-Modell beinhalten zu können. Außerdem wird im Zusammenhang mit der Kompaktifizierung von Raumdimensionen gezeigt werden, daß auch kleine Massendifferenzen zwischen Stringzuständen auftreten.

Eine weitere, verwandte Parallele zwischen Gravitations- und Stringtheorie ist das Auftreten einer minimalen Längenskala. Sie ergibt sich im Rahmen der Quantengravitation auf folgende Weise:

- Durch ein Gedankenexperiment, bei der an einem Teilchen in der Riemannschen Raum-Zeit eine Ortsmessung vorgenommen wird, kann man plausibel machen, daß, wenn man die Gültigkeit von Quantentheorie und Relativitätstheorie voraussetzt, die beste mögliche Ortsauflösung von der Ordnung der Plancklänge ist [116]. Dies ist paradox, weil in keiner der beiden verwendeten Theorien Platz für eine solche Minimallänge ist. Sie sollte also in einer übergreifenden Theorie erklärt werden.
- In einer Quantengravitationstheorie erwartet man, daß Fluktuationen der Geometrie und Topologie auftreten. Die natürliche Skala, bei der solche Effekte wirksam werden sollten, ist dadurch definiert, daß die Compton-Wellenlänge $\hbar/mc$ eines Elementarteilchen gleich dem Schwarzschildradius $2Gm/c^2$ wird. Auch diese Länge ist von der Ordnung der Planck-Länge. (Genauer gesagt ist sie gleich $\sqrt{2}L_{Pl}$.)

Diese Argumente sind natürlich heuristisch, weil ja ohne die übergreifende Theorie gar nicht klar ist, was Fluktuationen der Raum-Zeit sein sollen, etc. (Es sei daran erinnert, daß einige

Väter der Quantentheorie die Verwendung der Begriffe Raum und Zeit bereits in der nichtrelativistischen Quantentheorie für problematisch hielten [161].)

In der Stringtheorie treten analoge Effekte auf. So kann man, durch eine (wiederum heuristische) Auswertung der Streuung von Strings bei kleinen Winkeln und hohen Energien zeigen, daß es in der Stringtheorie eine, wiederum durch die Plancklänge gegebene, kleinste auflösbare Länge gibt [3]. Bei der Besprechung der Kompaktifizierung von Raumdimensionen wird sich ebenfalls zeigen, daß auch hier dieselbe kleinste Länge auftritt (Abschnitt 4.1.5).

Es sind zwei extreme Standpunkte denkbar:

- Das Auftreten einer Minimallänge in der Stringtheorie ist eine Folge der endlichen Ausdehnung von Strings, hat aber nichts mit der Struktur der Raum-Zeit „an sich“ zu tun.
- Betrachtet man Raum und Zeit als empirisch gegeben, so wird es in einer durch die Stringtheorie beschriebenen Welt der Raumbegriff modifiziert.

Beide Standpunkte gehen von verschiedenen erkenntnistheoretischen Prämissen aus. Eine rein empirische Entscheidung ist daher unmöglich. Im Laufe der Weiterentwicklung der Theorie könnte sich aber einer der Standpunkte als der natürlichere und effektivere durchsetzen. Die Stringtheorie wird sich aber noch weiter entwickeln müssen, ehe diese Fragen präziser gestellt und untersucht werden können.

2.4 Stringtheorie und zweidimensionale konforme Feldtheorie

2.4.1 Der euklidische Operatorformalismus

In der Stringtheorie, wie auch in der zweidimensionalen konformen Feldtheorie, sind Operatorproduktentwicklungen ein sehr wichtiges Hilfsmittel [2], [3], [4], [42]. Im Gegensatz zu anderen Anwendungsgebieten dieser Methode [119] arbeitet man ausschließlich im Ortsraum, und zwar in der euklidischen Formulierung, d.h. bei imaginären Zeiten. In der Stringtheorie dient der Operatorformalismus unter anderem zur Konstruktion der Vertexoperatoren und der Generatoren von Eichgruppen. Die auftretenden algebraische Strukturen werden in diesem Zugang besonders transparent.

Als Beispiel wählen wir die geschlossene bosonische Stringtheorie. Die Fortsetzung zu imaginären Weltflächenzeiten geschieht durch die Ersetzung

$$\tau \rightarrow -i\sigma^2, \quad \tau, \sigma^2 \in [-\infty, \infty], \quad \sigma \rightarrow \sigma^1, \quad \sigma, \sigma^1 \in [0, \pi]. \quad (2.156)$$

Die Koordinaten σ^1, σ^2 parametrisieren einen Weltflächen-Zylinder mit euklidischer Metrik. Durch die Einführung der komplex-konjugierten Koordinaten

$$z = e^{2(\sigma^2 + i\sigma^1)}, \quad \bar{z} = e^{2(\sigma^2 - i\sigma^1)} \quad (2.157)$$

wird dieser auf die im Ursprung punktierte komplexe Ebene $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ abgebildet. Diese entspricht der in $z = 0$ und $z = \infty$ punktierten Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, die die Topologie einer zweidimensionalen Sphäre S^2 hat. Die Sphäre ist die Weltfläche mit minimalem Genus und beschreibt die Propagation eines geschlossenen Strings⁴⁰, die Punktierungen in der unendlichen euklidischen Vergangenheit $\sigma^2 = -\infty \Leftrightarrow z = 0$ und in der unendlichen euklidischen Zukunft $\sigma^2 = \infty \Leftrightarrow z = \infty$ beschreiben den asymptotischen Anfangs- und Endzustand.

Die Modenentwicklung des Koordinatenfeldes nimmt im Euklidischen die folgende Gestalt an:

$$X^\mu(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} (X^\mu(z) + X^\mu(\bar{z})). \quad (2.158)$$

⁴⁰ Beiträge mit höherem Genus beschreiben „Strahlungskorrekturen“.

$$X^\mu(z) = x_L^\mu - ip_L^\mu \log(z) + i \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^\mu}{m} z^{-m}, \quad X^\mu(\bar{z}) = x_R^\mu - ip_R^\mu \log(\bar{z}) + i \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n} \bar{z}^{-n}, \quad (2.159)$$

mit

$$x_L^\mu = x_R^\mu = x^\mu \text{ und } p_L^\mu = p_R^\mu = \frac{1}{2}p^\mu. \quad (2.160)$$

Die Aufspaltung in links- und rechtslaufende Anregungen drückt sich in der komplexen Ebene durch die funktionale Abhängigkeit von z bzw. $\bar{z}$ aus. Aufgrund der Faktorisierung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur den linkslaufende Anteil $X^\mu(z)$ betrachten.

Bei einer Operatorprodukt-Entwicklung (OPE) [110], [119] wird das Produkt zweier Operatoren durch eine im allgemeinen unendliche Reihe von normalgeordneten Operatoren dargestellt. Alle im Operatorprodukt auftretenden Singularitäten stecken dabei in den Koeffizienten, die singuläre Funktionen (Distributionen) sind. Das Beispiel des Koordinatenfeldes ist insofern untypisch, als man bei diesem freien Feld das Produkt mit Hilfe der Vertauschungsrelationen

$$[x_L^\mu, p_L^\mu] = i\delta^{\mu\nu}, \quad [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m\delta^{\mu\nu}\delta_{m+n,0} \quad (2.161)$$

exakt ausführen kann. Die Normalordnung wird dadurch definiert, daß die Operatoren, die den Grundzustand $|0\rangle$ „vernichten“, also p_L^μ und α_m^μ , $m > 0$, nach rechts umgeordnet werden. Wir vergleichen nun das Operatorprodukt und das normalgeordnete Operatorprodukt und finden:

$$X^\mu(z)X^\nu(w) - :X^\mu(z)X^\nu(w): = -i[p_L^\mu, x_L^\nu] \log(z) + i^2 \sum_{m>0} \sum_{n<0} [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] \frac{z^{-m}}{m} \frac{w^{-n}}{n}. \quad (2.162)$$

Mit Hilfe der Vertauschungsrelationen der Oszillatoren kann in der Doppelsumme eine Summation ausgeführt werden. Die zweite Summe konvergiert nur, wenn das Operatorprodukt radialgeordnet ist:

$$\sum_{m>0} \frac{1}{m} \left(\frac{w}{z}\right)^m = -\log\left(1 - \frac{w}{z}\right), \quad \text{für } |z| > |w|. \quad (2.163)$$

Zusammen mit dem Beitrag der Nullmoden erhalten wir:

$$X^\mu(z)X^\nu(w) = -\delta^{\mu\nu} \log(z-w) + :X^\mu(z)X^\nu(w):. \quad (2.164)$$

Die übliche Form der Operatorprodukt-Entwicklung würden wir erhalten, wenn wir den normalgeordneten bilokalen Operator auf der rechten Seite um $\frac{1}{2}(z+w)$ entwickeln. Man erhielte dann normalgeordnete Produkte von beliebig hohen Ableitungen. Die hier angegebene Formel ist nicht nur kompakter, sondern auch ausreichend, da es vor allem auf den singulären Anteil der OPE ankommt, aus dem sich die Zweipunktfunktion des X^μ -Feldes ergibt. Berücksichtigt man noch den Beitrag des rechtslaufenden Anteils $X^\mu(\bar{z})$, so findet man

$$\langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(w, \bar{w}) \rangle = -\frac{1}{4} \delta^{\mu\nu} \log(|z-w|^2), \quad (2.165)$$

da der Erwartungswert eines normalgeordneten Feldes per Definition verschwindet. Die OPE hat den richtigen zweidimensionalen Propagator geliefert, denn

$$G(z) = \frac{1}{\pi} \log|z|^2 \quad (2.166)$$

ist die Greensche Funktion des zweidimensionalen Laplace-Operators, d.h. es gilt

$$\Delta G(z) = \delta^{(2)}(z), \quad (2.167)$$

wie man durch Fourier-Entwicklung oder Integration mit geeigneten Testfunktionen zeigen kann. Sowohl die Korrelationsfunktion, als auch die chiralen Korrelationsfunktionen und die Modenentwicklungen der Koordinaten enthalten den Logarithmus, der keine auf der ganzen Ebene global wohldefinierte Funktion ist. Daraus ergibt sich als physikalische Konsequenz, daß der Feldoperator eines freien masselosen Skalarfeldes in zwei Dimensionen nicht wohldefiniert

ist. In der Minkowski-Formulierung manifest sich dies durch Infrarot-Divergenzen, die die Wightman-Positivität zerstören [95]. Bereits früher war erwähnt worden, daß das quantisierte X^μ -Feld kein wohldefiniertes konformes Gewicht hat.

Trotzdem lassen sich mit Hilfe des Koordinatenfeldes wohldefinierte Größen bilden und zwar durch Differentiation und Exponentiation. Bei den OPE dieser Größen, die wir gleich berechnen werden, treten als Singularitäten keine Verzweigungspunkte, sondern höchstens Pole auf; man sagt, die Theorie sei **lokal**. Während die Lokalität der vollen Korrelationsfunktion eine notwendige Bedingung für eine wohldefinierte Theorie ist, könnte man übrigens bei den chiralen Korrelationsfunktionen Verzweigungspunkte endlicher Ordnung zulassen, solange sich diese in der vollen Korrelationsfunktion gegenseitig kompensieren. Dieser kompliziertere Fall tritt in allgemeineren konformen Feldtheorien tatsächlich auf [42].

Den ersten Typ wohldefinierter konformer Felder erhält man durch (Wirtinger-) Differentiation, z.B.

$$\partial_z X^\mu(z) = \partial_z X^\mu(z, \bar{z}) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu z^{-n-1}, \quad (2.168)$$

wobei

$$\alpha_0^\mu := p_L^\mu \quad (2.169)$$

gesetzt wurde. Die OPE für $\partial_z X^\mu(z)$ kann mit Hilfe der Vertauschungsrelationen oder durch Differentiation der OPE von $X^\mu(z)$ berechnet werden:

$$\partial_z X^\mu(z) \partial_w X^\nu(w) = \frac{-1}{(z-w)^2} + : \partial_z X^\mu(z) \partial_w X^\nu(w) : . \quad (2.170)$$

Diesmal erhält man eine wohldefinierte Schwingerfunktion, d.h. euklidische Zweipunktfunktion eines Quantenfeldes. Sie ist insbesondere symmetrisch in den Argumenten z und w , wie es bei einer bosonischen Zweipunktfunktion im Euklidischen sein muß [107], [123]. Da die chirale OPE diesmal lokal, d.h. eine Reihe in ganzzahligen Potenzen von z , ist, kann man aus dem singulären Teil der OPE durch **radialgeordnete Kurvenintegration** alle Vertauschungsrelationen zwischen den Moden α_m^μ rekonstruieren.

Bevor ich diese Methode vorführe, sei zunächst daran erinnert, daß der Minkowski-Operator-Formalismus sich nicht einfach ins Euklidische fortsetzen läßt. Oben hatten wir ja an einem einfachen Beispiel gesehen, daß überhaupt nur radialgeordnete Produkte definierbar sind. Daher kann man keine euklidischen Vertauschungsrelationen für Feldoperatoren aufstellen. Dies zeigt sich auch daran, daß die ins Euklidische fortgesetzten Korrelationsfunktionen bosonischer Felder symmetrisch sind. Daher interpretiert man die euklidischen Felder üblicherweise nicht als Operatorfelder, sondern als verallgemeinerte stochastische Variablen und die Korrelationsfunktionen als Momente eines Wahrscheinlichkeitsmaßes [123]. In diesem Zugang verwendet man dann den Funktionalintegralformalismus. In der Stringtheorie und zweidimensionalen konformen Feldtheorie hat man einen euklidischen Operatorkalkül entwickelt, für den die Existenz der radialgeordneten euklidischen Operatorprodukte ausreicht. Um daraus Vertauschungsrelationen zu konstruieren, bedient man sich eines Kunstgriffes, den ich jetzt an Hand des Feldes $\partial_z X^\mu(z)$ erläutern werde [2], [42].

Zunächst kann man durch geeignete komplexe Kurvenintegrale aus einer Potenzreihe jeden Koeffizienten extrahieren. Aus der Moden-Entwicklung (2.168) erhält man

$$\oint_{z=0} \frac{dz}{2\pi i} i \partial_z X^\mu(z) z^m = \alpha_m^\mu. \quad (2.171)$$

Dabei integriert man auf einem kleinen Kreis um die Singularität bei $z = 0$. Um die Kommutatoren der Moden zu berechnen, interpretiert man das Integral

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = \left[\oint_{z=0} \frac{dz}{2\pi i} i \partial_z X^\mu(z) z^m, \oint_{w=0} \frac{dz}{2\pi i} i \partial_w X^\nu(w) z^w \right] \quad (2.172)$$

als

$$\oint_{w=0} \frac{dw}{2\pi i} \left(\oint_{z=0,w} \frac{dz}{2\pi i} \mathcal{R}(i\partial_z X^\mu(z) i\partial_w X^\nu(w)) z^{m-1} - \oint_{z=0} \frac{dz}{2\pi i} \mathcal{R}(i\partial_z X^\mu(z) i\partial_w X^\nu(w)) w^{n-1} \right). \quad (2.173)$$

$\mathcal{R}$ bezeichnet das radialgeordnete Produkt. Im ersten Summanden führt man die z -Integration auf einem Kreis um $z = 0$ aus, der die Singularitäten bei $z = w$ mit umschließt, das radialgeordnete Operatorprodukt kann durch die OPE (2.168) mit $|z| > |w|$ ersetzt werden. Im zweiten Fall liegt die Singularität bei $z = w$ außerhalb des Integrationsweges der z -Integration. Durch die Differenzbildung wird der Beitrag der Singularitäten bei $z = w$ isoliert und übrig bleibt

$$\oint_w \frac{dw}{2\pi i} \oint_{z=w} \frac{dz}{2\pi i} \left(\frac{-\delta^{\mu\nu}}{(z-w)^2} z^{m-1} w^{n-1} + \dots \right). \quad (2.174)$$

Der für $z \rightarrow w$ reguläre Anteil (der oben durch $\dots$ angedeutet ist) liefert keinen Beitrag zum Integral. Der Beitrag des singulären Teils der OPE kann mit der Cauchyschen Integralformel berechnet werden. Die z -Integration liefert

$$\oint_{w=0} \frac{dw}{2\pi i} w^n (-\delta^{\mu\nu}) \left(-\frac{d}{dz} z^m \right)_{z=w} = \oint_{w=0} \frac{dw}{2\pi i} \delta^{\mu\nu} m w^{n+m-1}. \quad (2.175)$$

Durch Ausführen der w -Integration erhalten wir schließlich die Vertauschungsrelation

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = m \delta_{m+n,0} \delta^{\mu\nu}. \quad (2.176)$$

Als zweites Beispiel betrachten wir den Energie-Impuls-Tensor. Den Lichtkegel-Komponenten $T_{++}(\sigma^+)$ und $T_{--}(\sigma^-)$ entsprechen bezüglich der komplexen Koordinaten die Felder

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu :, \quad \bar{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{2} : \partial_{\bar{z}} X^\mu \partial_{\bar{z}} X_\mu :. \quad (2.177)$$

Die Normalordnung kann statt durch das Umordnen von Moden auch durch die allgemeinere Vorschrift, den singulären Teil der OPE zu subtrahieren, definiert werden:

$$: \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu : (z) = \lim_{w \rightarrow z} \left(\partial_z X^\mu(z) \partial_z X_\mu(w) - \frac{-1}{(z-w)^2} \right). \quad (2.178)$$

Diese Vorschrift kann benutzt werden, um aus beliebigen, nicht notwendig freien, Feldern neue, zusammengesetzte Felder zu konstruieren. Für beliebige Energie-Impuls-Tensoren zweidimensionaler konformer Feldtheorien kann allgemein gezeigt werden, daß die OPE die Form

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{z-w} \partial_w T(w) \quad (2.179)$$

hat⁴¹. Der reelle Parameter c wird als zentrale Ladung bezeichnet. Jedes freie bosonische Feld trägt einen Beitrag von 1 zu c bei, wie man durch explizite Rechnung nachweisen kann. In der bosonischen Stringtheorie ist die zentrale Ladung der Koordinatenfelder gleich der Dimensionszahl $D = \delta^{\mu\nu} \delta_{\mu\nu}$. Da der Energie-Impuls-Tensor die Reparametrisierungen, also bei festgehaltener komplexer Struktur (d.h. in der konformen Eichung) die analytischen und damit konformen Transformationen

$$z \rightarrow w(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z}) \quad (2.180)$$

erzeugt, legt die OPE eines Feldes $\Phi(z, \bar{z})$ mit den beiden Komponenten des Energie-Impuls-Tensors das Transformationsverhalten des Feldes fest. Felder die unter konformen Transformationen als Tensoren vom Typ $(h, \bar{h})$ transformieren,

$$\Phi(z, \bar{z}) \rightarrow \Phi'(w, \bar{w}) = \left(\frac{dw}{dz} \right)^h \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} \right)^{\bar{h}} \Phi(w, \bar{w}), \quad (2.181)$$

⁴¹Der einzige mir bekannte vollständig ausformulierte Beweis [60] bedient sich allerdings der Wightmanschen Formulierung. Berechnet wird dann der Kommutator zwischen den Lichtkegelkomponenten der Energie-Impuls-Tensoren, der mit der OPE (2.179) äquivalent ist.

werden als **konforme Felder** oder **primäre Felder** bezeichnet. Die Größen $(h, \bar{h})$ werden als **konforme Dimensionen** oder **konforme Gewichte** bezeichnet. Wählt man als konforme Transformationen speziell Skalentransformationen $z' = \lambda z$, $\lambda \in \mathbf{R}^+$ oder Drehungen $z' = e^{i\phi} z$, so erkennt man, daß $h + h'$ das Skalengewicht und $h - h'$ der „Spin“ bezüglich der euklidischen Lorentz-Gruppe $SO(2)$ ist. Besonders einfach sind **chirale Felder**, d.h. solche mit $h' = 0$ oder mit $h = 0$. Sie hängen offensichtlich von nur einer der Koordinaten $z, \bar{z}$ ab. Aufgrund der in der geschlossenen Stringtheorie und in der zweidimensionalen konformen Feldtheorie auftretenden Faktorisierung in links- und rechtslaufende Freiheitsgrade, kann man alle OPE und Korrelationsfunktionen auf chirale OPE und Korrelationsfunktionen zurückführen [42].

Mit Hilfe der Kurvenintegral-Methode kann man zeigen, daß ein Feld genau dann ein konformes Feld mit Gewicht $(h, 0)$ ist, wenn es die OPE

$$T(z)\Phi(w) = h \frac{\Phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w \Phi(w)}{z-w} + \dots \quad (2.182)$$

mit dem Energie-Impuls-Tensor hat. Dieser ist selbst ein Beispiel für ein Feld, daß ein komplizierteres Transformationsverhalten aufweist und kein primäres Feld ist. Das Auftreten des zusätzlichen Pols vierter Ordnung in der OPE des Energie-Impuls-Tensors mit sich selbst führt nämlich dazu, daß $T(z)$ nicht als primäres Feld mit Gewicht $(2, 0)$ sondern mit einem zusätzlichen anomalen Term transformiert

$$T(z) \rightarrow \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 T(w) + \frac{1}{12} S(w, z) c. \quad (2.183)$$

Dabei bezeichnet $S(w, z)$ die Schwartzsche Ableitung [10], [145]:

$$S(w, z) = \frac{\left(\frac{d^3 w}{dz^3} \right)}{\left(\frac{dw}{dz} \right)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2 w}{dz^2}}{\frac{dw}{dz}} \right)^2. \quad (2.184)$$

Die durch Differentiation aus dem Koordinatenfeld gewonnenen Felder $\partial_z X^\mu$, $\partial_{\bar{z}} X^\mu$ sind primäre Felder mit den Gewichten $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$. Durch weiteres Ableiten gewinnt man Felder, deren Gewichte durch die Anzahl der Ableitungen ∂_z bzw. $\partial_{\bar{z}}$ gegeben sind. Die so erzeugten Felder sind aber, wie der Energie-Impuls-Tensor keine primären Felder. Unsere Beispiele sind auch insofern typisch, als alle auftretenden nicht-primären, „sekundären“ Felder aus den primären durch Differentiation, OPE, etc. erzeugt werden können. Die primären chiralen Felder sind die einfachsten Bausteine einer konformen Feldtheorie (siehe Abschnitt 2.4.2).

Die OPE des Energie-Impuls-Tensors mit sich selbst ist äquivalent zur Virasoro-Algebra. Diese Konstruktion ist universell und hängt nicht davon ab, welche zweidimensionale konforme Feldtheorie man betrachtet. Man definiert nur die Laurentkoeffizienten des Energie-Impuls-Tensors durch

$$L_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} T(z) z^{m+1} \quad (2.185)$$

und erhält dann mit der Kurvenintegrations-Methode die Virasoro-Algebra

$$[L_m, L_n] = (m - n) L_{m+n} + \frac{1}{12} c (m^3 - m) \delta_{m+n, 0}. \quad (2.186)$$

Der Wert der zentralen Ladung c ist natürlich modellabhängig. Für die Koordinatenfelder, die ja freie Skalarfelder sind, kann man, wie schon erwähnt, z.B. durch die Vertauschungsrelationen der Moden, zeigen, daß c gleich der Dimensionszahl ist.

Durch geeignete Kurvenintegrale kann man auch die Wirkung der Virasoro-Generatoren auf einem chiralen Feld mit Gewicht h berechnen:

$$[L_m, \Phi_h(z)] = h(m+1) z^m \Phi_h(z) + z^{m+1} \partial_z \Phi_h(z). \quad (2.187)$$

In dem man in der Formel (2.181) für konforme Transformationen speziell $z \rightarrow z + \epsilon z^m$ setzt, erhält man in führender Ordnung gerade die rechte Seite von (2.187). Die Virasoro-Generatoren

erzeugen also tatsächlich die konformen Transformationen der primären Felder (siehe auch Abschnitt 2.2.3).

Die zweite, bisher noch nicht erwähnte Sorte wohldefinierter Felder, die aus dem Koordinatenfeld X^μ konstruiert werden kann, sind die normalgeordneten Exponentialfelder, die auch in der Minkowski-Formulierung schon als Bausteine der Vertexoperatoren aufgetreten waren:

$$: e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(z)} := \exp \left(- \sum_{n>0} \mathbf{k} \cdot \alpha_n z^{-n} \right) \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_L} \cdot z^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_L} \cdot \exp \left(- \sum_{n<0} \mathbf{k} \cdot \alpha_n z^{-n} \right). \quad (2.188)$$

Die OPE mit dem Energie-Impuls-Tensor zeigt, daß es sich um ein chirales primäres Feld mit dem Gewicht $\frac{1}{2}\mathbf{k}^2$

$$T(z) : e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(w)} := \frac{1}{2}\mathbf{k}^2 : e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(w)} : + \dots \Rightarrow h = \frac{1}{2}\mathbf{k}^2 \quad (2.189)$$

handelt. Die Berechnung der OPE mit Hilfe der Vertauschungsrelationen wäre in diesem Fall sehr mühsam. Es ist einfacher, die äquivalente OPE für das X^μ -Feld zusammen mit dem Wick'schen Theorem für normalgeordnete Produkte zu verwenden. Man muß dann nur alle möglichen Kontraktionen zwischen den Bestandteilen zweier normalgeordneter, zusammengesetzter Felder ausführen [98].

Für später notieren wir noch die OPE zwischen zwei normalgeordneten Exponentialfeldern:

$$: e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}} : (z) : e^{i\mathbf{l} \cdot \mathbf{X}} : (w) = (z-w)^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} : e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(z) + i\mathbf{l} \cdot \mathbf{X}(w)} := (z-w)^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}} : e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{l}) \cdot \mathbf{X}(w)} (1 + \dots) :. \quad (2.190)$$

Im euklidischen Operatorkalkül lassen sich auch die Vertexoperatoren besonders leicht handhaben. Ein integrierter Vertexoperator in der geschlossenen Stringtheorie hat im Euklidischen die Form

$$V(\mathbf{k}) = \int \frac{dz \wedge d\bar{z}}{2i} V(z, \bar{z}; \mathbf{k}). \quad (2.191)$$

Er ist genau dann konform invariant definiert, wenn der Integrand eine komplexe (1,1)-Form, d.h. wenn der lokale Vertexoperator ein primäres Feld vom Typ (1,1) ist. Dieses Transformationsverhalten ist äquivalent zu den Virasoro-Bedingungen für Vertexoperatoren (vgl. 2.2.3). In der offenen Stringtheorie sind die Vertexoperatoren an den Rändern der Weltfläche lokalisiert, die lokalen Vertexoperatoren sind primäre Felder vom Gewicht 1 auf den Rändern.

Die lokalen Vertexoperatoren der geschlossenen Stringtheorie zerfallen in zwei chirale Anteile. Der linkslaufende Teil ist ein (1,0)-Feld, der rechtslaufende ein (0,1)-Feld. Es reicht also, chirale Felder vom Gewicht 1 zu betrachten. Jeder chirale Vertexoperator besitzt einen Exponentialanteil zur Erzeugung des Impulses:

$$V_L(z; \mathbf{k}_L) =: \Phi_{h'}(z) e^{i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{X}(z)} : \quad (2.192)$$

Dabei ist $\Phi_{h'}$ ein Feld mit Gewicht h' . Da das Gesamtgewicht von $V_L(z; \mathbf{k}_L)$ gleich 1 sein muß, gilt:

$$\frac{1}{2}\mathbf{k}_L^2 + h' \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow M^2 = -\mathbf{k}_L^2 = 2(h' - 1). \quad (2.193)$$

Bei offenen Strings ist dies die Massenformel. Bei geschlossenen Strings gibt es eine entsprechende Formel für den rechtslaufenden Teil des Gesamt-Vertexoperators und man erhält die Massenformel und die Balance-Beziehung, wenn man für den Eigenwert des Anzahloperators das konforme Gewicht des Feldes $\Phi_{h'}$ einsetzt. In der bosonischen Stringtheorie sind die $\Phi_{h'}$ Polynome in den Wirtinger-Ableitungen des Koordinatenfeldes. Die Polarisationsbedingungen erhält man ebenfalls aus der OPE mit dem Energie-Impuls-Tensor, indem man das Verschwinden von Koeffizienten von Polen höherer als zweiter Ordnung fordert. Zum Beispiel beim masselosen Vektor der offenen Stringtheorie:

$$T(z) : \xi \cdot \partial_w \mathbf{X}(w) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(w)} := \xi \cdot \mathbf{k} \frac{1}{(z-w)^3} + \dots \Rightarrow \xi \cdot \mathbf{k} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.194)$$

Der Zusammenhang zwischen den Vertexoperatoren und den Zuständen des Fockraumes läßt sich auf zweierlei Weise herstellen. Entweder man wertet den Vertexoperator im Limes $z \rightarrow 0$, der ja der euklidischen Zeit $\sigma^2 \rightarrow -\infty$ entspricht, aus oder man integriert auf einer geeigneten Kontur in der komplexen Ebene:

$$\alpha_{-1}^\mu |0\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} i \partial_z X^\mu(z) |0\rangle = \oint_{z=0} \frac{dz}{2\pi i} z^{-1} i \partial_z X^\mu(z) |0\rangle, \quad (2.195)$$

$$|\mathbf{k}\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} : e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}(z)} : |0\rangle = \oint_{z=0} \frac{dz}{2\pi i} z^{-1} e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}(z)} |0\rangle. \quad (2.196)$$

2.4.2 Zweidimensionale konforme Feldtheorie

Bereits im vorigen Abschnitt war an mehreren Stellen darauf hingewiesen worden, wie der euklidische Operatorformalismus auf allgemeine zweidimensionale konforme Feldtheorien angewandt werden kann. Für die spätere Diskussion vierdimensionaler Stringtheorien sind einige allgemeine Bemerkungen über konforme Feldtheorien nötig⁴².

Die Konstruktion zweidimensionaler konformer Feldtheorien kann als ein darstellungstheoretisches Problem formuliert werden [10], [40], [42]. Durch die Anwendung eines chiralen primären Feldes $\Phi_h(z)$ mit konformem Gewicht h auf den feldtheoretischen Grundzustand $|0\rangle$,

$$L_m |0\rangle = 0, \quad m \geq -1 \quad (2.197)$$

mittels

$$|h\rangle := \Phi_h(0) |0\rangle \quad (2.198)$$

erhält man Zustände höchsten Gewichtes der Virasoro-Algebra:

$$L_m |h\rangle = 0, \quad \text{für } m > 0, \quad L_0 |h\rangle = h |h\rangle. \quad (2.199)$$

Mit Hilfe der Absteigeoperatoren L_{-m} , $m > 0$ ergibt sich daraus eine höchste Gewichts-Darstellung der Virasoro-Algebra die von den Zuständen

$$L_{-m_1} \cdots L_{-m_N} |h\rangle, \quad m_i > 0 \quad (2.200)$$

aufgespannt wird.

Eine Quantenfeldtheorie ist durch die Angabe aller N-Punkt-Funktionen vollständig definiert. Im Falle zweidimensionaler konformer Feldtheorien ist es mit Hilfe von Ward-Identitäten möglich, alle Korrelationsfunktionen auf solche zwischen chiralen primären Feldern zurückzuführen [10]. Diese wiederum lassen sich auf Dreipunkt-Funktionen zurückführen. Da jedes primäre chirale Feld eine Darstellung der Virasoro-Algebra generiert, ist die Berechnung der Dreipunkt-Funktion äquivalent zu dem darstellungstheoretischen Problem ein Tensorprodukt von Darstellungen in irreduzible Darstellungen zu zerlegen. Eine konforme Feldtheorie ist durch den Wert der zentralen Ladung c und die Gewichte der primären chiralen Felder eindeutig festgelegt. Da man aus physikalischen Gründen nur an unitären Darstellungen interessiert ist⁴³, entspricht die Klassifikation aller zweidimensionalen konformen Feldtheorien der aller unitären höchsten GewichtsDarstellungen der Virasoro-Algebra.

Bemerkung: Die quantenmechanische konforme Gruppe

Wenn die zentrale Ladung c ungleich 0 ist, ist der Grundzustand nicht unter der gesamten Virasoro-Algebra, sondern nur unter der durch L_{-1}, L_0, L_1 und $\tilde{L}_{-1}, \tilde{L}_0, \tilde{L}_1$ erzeugten Unterálgebra invariant. Diese ist isomorph zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ in der euklidischen bzw. zu $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ in der Minkowski-Formulierung. Daher ist die Virasoro-Algebra in der konformen Feldtheorie keine Symmetrie-Algebra,

⁴² Dieses Gebiet ist in schneller Entwicklung begriffen. Einen Überblick über die wichtigsten für die Stringtheorie relevanten Aspekte bietet [3].

⁴³ Unter Umständen ist man auch an nicht-unitären Theorien interessiert, z.B. im Zusammenhang mit der zweidimensionalen Quantengravitation (hier ist die Zeitentwicklung möglicherweise nicht-unitär) oder bei den Faddeev-Popov-Geistfeldern der Stringtheorie (siehe Abschnitt 2.4.3).

sondern eine Spektrum-erzeugende Algebra⁴⁴ [60]. Die quantenmechanische konforme Gruppe (in der Minkowski-Formulierung) ist die universelle Überlagerungsgruppe $\widetilde{\mathrm{SO}}(2, 1) \otimes \mathrm{SO}(1, 2)$ der klassischen globalen konformen Gruppe, die auf der unendlich-blättrigen Überlagerung $\mathbf{R} \times S^1$ des Minkowski-Raumes operiert [60].

In $d > 2$ Dimensionen ist die quantenmechanische konforme Gruppe übrigens $\widetilde{\mathrm{SO}}(p + 1, q + 1)$, $d = p + q$ und operiert auf $\mathbf{R} \times S^{d-1}$.

Die Klassifikation der zweidimensionalen konformen Feldtheorien ist bereits teilweise gelungen [40]. Unitäre Theorien existieren nur für $c \geq 0$ und für $c = 0$ ist nur die triviale Darstellung unitär. Für $0 < c < 1$ existiert eine diskrete Schar unitärer Theorien, die als minimale Modelle bezeichnet werden. Das einfachste Modell besitzt $c = 1/2$ und beschreibt ein freies chirales masseloses Fermion. Es ist mit dem kritischen zweidimensionalen Ising-Modell äquivalent [42]. In der minimalen Reihe treten weitere i.a. nicht freie Feldtheorien auf, die die kritischen Punkte anderer bekannter Systeme der statistischen Mechanik, z.B. des Dreizustand-Potts-Modells, sind. Die minimalen Modelle sind alle exakt lösbar. Für $c \geq 1$ existiert ein Kontinuum von Theorien. Die zugehörigen Deformationsparameter werden als Moduli bezeichnet. Modelle mit $c \geq 1$ sind im allgemeinen nur dann lösbar, wenn zusätzliche Symmetrien existieren [76]: Beispiele für solche erweiterten chiralen Algebren sind die WF-Supersymmetrie und die Kac-Moody-Algebren, die wir noch kennenlernen werden. Die Lösbarkeit beruht darauf, daß bezüglich der erweiterten chiralen Algebra nur endlich viele primäre Felder existieren, was bezüglich der Virasoro-Algebra alleine für $c \geq 1$ nicht mehr der Fall ist. Theorien mit endlich vielen primären Feldern werden als rationale Theorien bezeichnet, da die zentrale Ladung dann nur rationale Werte annehmen kann [3]. Für die Konstruktion nichtminimaler konformer Feldtheorien existiert eine große Zahl von Konstruktionsverfahren. Eine vollständige Klassifikation ist bisher nicht gelungen.

2.4.3 Stringtheorien und konforme Feldtheorien

Die Stringtheorie im flachen Minkowski-Raum wird durch eine sehr speziell konforme Feldtheorie, nämlich durch D freie Skalarfelder beschrieben, deren jedes die zentrale Ladung 1 trägt. Genauer gesagt sind die Skalarfelder selber keine konformen Felder, wohl aber die Vertexoperatoren der physikalischen Zustände. Jeder physikalische Zustand ist per Definition ein höchster Gewichts-Zustand mit Gewicht 1 der Virasoro-Algebra. Die Bildung der Äquivalenzklassen stellt sicher, daß man eine unitäre Darstellung erhält. Obwohl die konforme Weltflächen-Feldtheorie weder eine minimale noch eine rationale Theorie ist, ist sie trivialerweise lösbar, da es sich (im flachen Minkowski-Raum) um eine freie Theorie handelt.

Früher war betont worden, daß Stringtheorien in der kritischen Dimension konform invariant sind. Wie ist dies mit dem Auftreten einer zentralen Ladung $c \neq 0$ im Fockraum zu vereinbaren, die ja dazu führt, daß die Virasoro-Algebra keine Symmetrie-Algebra ist? Um die konforme Symmetrie manifest zu machen, muß man den Fockraum der Koordinatenfelder um denjenigen der Faddeev-Popov-Geistfelder erweitern, etwa im Rahmen der BRS-Quantisierung⁴⁵. Die Geistfelder bilden eine nichtunitäre konforme Feldtheorie mit der zentralen Ladung $c = -26$ [2], [4]. Die Abwesenheit der zentralen Ladung in diesem Zugang entspricht dem Verschwinden der konformen Anomalie im Pfadintegral. Zur Kompensation des Beitrages der Geister muß man eine Theorie mit $c = 26$ hinzunehmen, z.B. 26 freie, als Raum-Zeit-Koordinaten interpretierbare Skalarfelder. Kombiniert man dies mit der Beobachtung, daß konforme Feldtheorien klassische Lösungen der Stringtheorie sind, so kann man die allgemeinsten vierdimensionalen Lösungen charakterisieren: Sie enthalten vier Koordinatenfelder und eine interne konforme Feldtheorie mit $c = 22$, um den Beitrag der Geister zur konformen Anomalie zu kompensieren.

⁴⁴In der Stringtheorie ist der Fall etwas anders gelagert, siehe 2.4.3.

⁴⁵Obwohl die BRS-Symmetrie meist im Zusammenhang mit der Faddeev-Popov-Prozedur bei der Pfadintegralquantisierung von Eichtheorien diskutiert wird [110], [119], handelt es sich hier um ein Verfahren der Operatorquantisierung, bei dem Kovarianz und Unitarität gleichzeitig manifest sind. Anwendungsgebiete sind naturgemäß nichtabelsche Eichtheorien [96], [113], relativistische Teilchen und relativistische Strings, sowie deren supersymmetrische Verallgemeinerungen, siehe [2] und die dort aufgeführte Literatur. Die Geister kompensieren dabei die Beiträge der unphysikalischen Moden, die die Kovarianz sichern. Physikalische Zustände werden als Kohomologieklassen des nilpotenten BRS-Operators definiert [1].

ren. Die zusätzlichen Felder müssen nicht unbedingt kompaktifizierte Koordinaten sein. Im allgemeinen Fall interpretiert man sie besser als innere Freiheitsgrade.

Kapitel 3

Fermionische und supersymmetrische Stringtheorien

3.1 Fermionische Stringtheorien

Der Einbau fermionischer Freiheitsgrade in die Stringtheorie ist unverzichtbar, wenn man alle Elementarteilchen als Anregungszustände von Strings beschreiben will. Dabei wird man zwingend auf die Supersymmetrie als Konsistenzbedingung geführt. Genauer gesagt, gibt es in der Stringtheorie zwei Arten von Supertransformationen, solche bezüglich der Raum-Zeit (RZ-Supersymmetrie) und solche bezüglich der Weltfläche (WF-Supersymmetrie). Beide Arten der Supersymmetrie treten auf und sind, wie wir sehen werden, miteinander verwoben.

Für die Einführung von Fermionen gibt es zwei Methoden, die sich im nachhinein als äquivalent erweisen: Beim Green-Schwarz-Superstring [84] werden zur Wirkung Felder mit RZ-Spinorindizes hinzugefügt, beim Ramond-Neveu-Schwarz-String [75], [70] werden Fermionen bezüglich der Weltfläche eingeführt. Ich skizziere im folgenden die zweite Methode.

3.1.1 Von der eichinvarianten Wirkung zum RNS-Modell

Einen systematischen Weg, die Polyakov-Wirkung zu einer lokal supersymmetrischen Wirkung zu verallgemeinern, bietet der Superraum-Formalismus¹. Man ersetzt die Weltfläche durch eine Supermannigfaltigkeit mit lokalen Koordinaten $(\tau, \sigma; \theta^1, \theta^2)$. Die bosonischen (reellen) Koordinaten bilden einen Vektor, die fermionischen (reell-Graßmannwertigen) einen Majorana-Spinor:

$$\vec{\sigma} = (\sigma^0, \sigma^1) = (\tau, \sigma), \quad \theta = (\theta^1, \theta^2). \quad (3.1)$$

Reparametrisierungen im Superraum beinhalten die normalen Reparametrisierungen, die bosonische und fermionische Koordinaten nicht mischen, und die Supertransformationen, die gerade das tun. An die Stelle der Skalarfelder $X^\mu(\tau, \sigma)$ treten die reellen Superfelder $\mathbf{X}^\mu(\tau, \sigma; \theta, \bar{\theta})$; dabei ist es bequem, an Stelle der θ^a , den Spinor θ und den adjungierten Spinor $\bar{\theta}$ als fermionische Variablen zu wählen. Da die fermionischen Koordinaten antikommutierende Größen sind, bricht die Taylor-Entwicklung eines Superfeldes nach dem dritten Term ab:

$$\mathbf{X}^\mu(\tau, \sigma; \theta, \bar{\theta}) = X^\mu(\tau, \sigma) + \bar{\theta}\psi^\mu(\tau, \sigma) + \bar{\theta}\theta C^\mu(\tau, \sigma). \quad (3.2)$$

¹Das Standard-Lehrbuch der Supersymmetrie ist [131]. Eine knappe Darstellung der wichtigsten Elemente samt einem historischen Überblick findet man in [105]. Für eine Diskussion der phänomenologischen Aspekte siehe [115].

Das Feld $\psi^\mu = (\psi_a^\mu)$, $a = 1, 2$ ist ein WF-Majorana-Spinor, der einen RZ-Vektorindex trägt. Das WF-Skalarfeld C^μ ist ein nichtdynamisches Hilfsfeld, das eingeführt wird, damit die Symmetrien der Wirkung ohne Benutzung der Bewegungsgleichungen (off shell) bestehen.

Um die Spinorfelder an die zweidimensionale Gravitation zu koppeln, muß man die Gravitationstheorie in eine lokale Eichtheorie der Lorentz-Gruppe umformulieren².

Das Zweibein ist durch

$$g_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = e_\alpha^\rho(\tau, \sigma) e_\beta^\sigma(\tau, \sigma) \eta_{\rho\sigma} \quad (3.3)$$

definiert. $e_\alpha^\rho(\tau, \sigma)$ ist die ρ -te Komponente des Tangentialvektors an die α -Richtung im Punkt mit den Koordinaten (τ, σ) . Das 2-Bein besitzt eine supersymmetrische Verallgemeinerung, das Super-2-Bein

$$(E_A^R) = \begin{pmatrix} e_\alpha^\rho & e_a^\rho \\ e_\alpha^r & e_a^r \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Dabei beschreiben die Komponenten e_α^ρ das WF-Graviton und die gemischten Komponenten dessen supersymmetrischen Partner, das WF-Gravitino, ein masseloses Spin^{3-3/2} WF-Feld $g_{\alpha a}(\tau, \sigma)$. Die restlichen Komponenten sind die für die off shell Realisierung der Supersymmetrie benötigten Hilfsfelder. Das WF-Gravitino koppelt an den supersymmetrischen Partner des WF-Energie-Impuls-Tensors, den (erhaltenen) WF-Superstrom $T^{(F)}(\tau, \sigma)$.

Mit Hilfe des Super-2-Beins und dessen Superdeterminante $\mathbf{E}$ können kovariante Superfeldableitungen ∇_A und das invariante Volumenelement auf der Super-Weltfläche definiert werden.

Die supersymmetrisierte Polyakov-Wirkung [113]

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma d^2\theta \sqrt{\mathbf{E}} \nabla_A \mathbf{X}_\mu \nabla^A \mathbf{X}^\mu \quad (3.5)$$

ist eine superkonforme Supergravitationstheorie, d.h. sie ist invariant unter lokalen Superreparametrisierungen (Reparametrisierungen und Supertransformationen) und Super-Weyl-Transformationen. Sie ist einfacher als analoge Theorien in höheren Dimensionen: Graviton und Gravitino sind keine dynamischen Freiheitsgrade, da für sie keine kinetischen Terme eingeführt werden können. Außerdem treten keine zusätzlichen Krümmungsterme auf, die man sonst braucht, um die Symmetrien zu realisieren [1].

Die Wirkung kann auf zweierlei Weise vereinfacht werden, wenn man auf manifeste Symmetrie verzichtet.

- Man kann die Integration über die Graßmannvariablen durchführen und die Supersymmetrie-Hilfsfelder mittels ihrer Bewegungsgleichungen eliminieren. Dadurch erhält man eine Wirkung, die zwar noch die gleichen Symmetrien besitzt, aber nur noch bei Berücksichtigung der Bewegungsgleichungen (on shell).
- Da das WF-Graviton und das WF-Gravitino keine dynamischen Freiheitsgrade sind, kann man sie mit Hilfe der superkonformen Eichung

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha a} = 0 \quad (3.6)$$

eliminieren.

Kombiniert man diese Möglichkeiten, so ergibt sich eine eichfixierte Wirkung, die das RNS-Modell definiert [75], [70]:

$$S_{RNS} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \left(\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - i \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu \right). \quad (3.7)$$

²Die normale kovariante Ableitung bezüglich des Riemann-Christoffel-Zusammenhangs besitzt nur Vektorindizes und kann nur auf Tensorfeldern, nicht auf Spinorfeldern operieren. Man kann aber statt dessen den Levi-Civita-Zusammenhang verwenden, der nicht auf dem Tangentialbündel, mit der Strukturgruppe $SO(1, d-1)$, sondern auf dem Spinbündel mit der Strukturgruppe $\text{Spin}(1, d-1)$ operiert. Siehe z.B. [1].

³Der Begriff Spin bezieht sich auf die realisierte Darstellung der Strukturgruppe $\text{Spin}(1, 1)$, s.u.

Sie beschreibt freie WF-Skalare und WF-Majorana-Spinoren und ist nur noch unter superkonformen Transformationen, d.h. unter konformen Transformationen⁴ und globalen WF-Supertransformationen invariant. Die zweidimensionalen Spinmatritzen

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

sind rein imaginär. Folglich ist der Diracoperator $i\rho^a\partial_a$ reell, was für die Konsistenz der Majorana-Bedingung notwendig ist. Die Generatoren einer zweidimensionalen Majorana-Darstellung der zweidimensionalen Lorentz-Gruppe $SO(1,1)$ sind

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\rho_\alpha, \rho_\beta], \quad \rho_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\rho^\beta. \quad (3.9)$$

Die Gruppe $SO(1,1)$ ist abelsch (eine nichtkompakte reelle Form⁵ der Gruppe $U(1)$); alle ihre irreduziblen Darstellungen sind daher eindimensional und werden durch ganze Zahlen, die Spinordarstellungen durch halbganze Zahlen klassifiziert. Da es in einer zweidimensionalen Raum-Zeit keine kontinuierliche Drehgruppe gibt, bezeichnet man diese Größe als Spin oder Helizität.

Damit die eichfixierte Wirkung der ursprünglichen äquivalent bleibt, sind die Bewegungsgleichungen für die eliminierten Freiheitsgrade als Nebenbedingungen zu fordern:

$$T_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = 0, \quad T_{\alpha a}^{(F)}(\tau, \sigma) = 0, \quad (3.10)$$

wobei [1]

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{i}{4} \bar{\psi}^\mu \rho_\alpha \partial_\beta \psi_\mu + \frac{i}{4} \bar{\psi}^\mu \rho_\beta \partial_\alpha \psi_\mu - \text{Spur} \quad (3.11)$$

und

$$T_{\alpha a}^{(F)} = \frac{1}{2} \rho^\beta \rho_\alpha \psi_a^\mu \partial_\beta X_\mu. \quad (3.12)$$

3.1.2 Das klassische RNS-Modell

In der RNS-Wirkung koppeln die bosonischen und fermionischen Felder nicht. Die Diskussion des X^μ -Feldes liefert also die gleichen Ergebnisse wie in der bosonischen Theorie und wir brauchen im folgenden nur das ψ^μ -Feld zu betrachten. Durch Variation der RNS-Wirkung erhalten wir die klassischen Bewegungsgleichungen, die in Lichtkegelkoordinaten eine besonders einfache Form annehmen:

$$\rho^\alpha \partial_\alpha \psi^\mu = 0 \Leftrightarrow \partial_+ \psi_-^\mu = \partial_- \psi_+^\mu = 0, \quad (3.13)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\psi_L^\mu = \psi_+^\mu(\sigma^+), \quad \psi_R^\mu = \psi_-^\mu(\sigma^-). \quad (3.14)$$

Der Majorana-Spinor ψ_α^μ zerfällt in zwei einkomponentige Majorana-Weyl-Spinoren⁶:

$$\psi^\mu(\tau, \sigma) = \begin{pmatrix} \psi_-^\mu(\sigma^-) \\ \psi_+^\mu(\sigma^+) \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

⁴Das Wortpaar global-lokal wird in (mindestens) zwei Bedeutungen gebraucht. In Eichtheorien unterscheidet man globale (=starre, rigid) Transformationen, die ortsunabhängig sind, von lokalen, bei denen die gewählte Transformation von Ort zu Ort stetig variieren kann. Die konformen Transformationen sind in diesem Sinne global. Andererseits unterscheidet man globale Transformationen, die auf der ganzen Mannigfaltigkeit wohldefiniert sind, von lokalen Transformationen, die nur auf einer offenen Menge wohldefiniert zu sein brauchen und infinitesimalen, die im Tangentialraum an einen Punkt (punktuell) definiert sind. In diesem Sinn meinen wir hier infinitesimale und lokale Transformationen. Ob und welche von ihnen global definiert sind, hängt von der Topologie der Weltfläche ab.

⁵Siehe Anhang B.1.4.

⁶Majorana-Weyl-Spinoren existieren nur, wenn die Signatur der Raum-Zeit modulo 8 gleich 0 ist [105], also z.B. im zehn- und im zweidimensionalen Minkowski-Raum und im achtdimensionalen euklidischen Raum.

d.h. auch hier entkoppeln links- und rechtslaufende Anregungen.

Als nächstes sind die bei der Variation der Wirkung auftretenden Randterme zu untersuchen. Fordert man ihr Verschwinden, so legt dies bei offenen Strings nur das relative Vorzeichen von ψ_+ und ψ_- an einem der beiden Enden fest, während am anderen Ende zwei inäquivalente Möglichkeiten bestehen [1]:

$$\psi_+^\mu(\tau, 0) = \psi_-^\mu(\tau, 0), \quad \psi_+^\mu(\tau, \pi) = \pm \psi_-^\mu(\tau, \pi). \quad (3.16)$$

Die erste Wahl definiert den Ramond- die zweite den Neveu-Schwarz-Sektor des Modells. Die (verallgemeinerten) Fourierreihen für die Lösungen sind dann

$$(R) \quad \psi_\mp^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau \mp \sigma)}, \quad (3.17)$$

$$(NS) \quad \psi_\mp^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu e^{-ir(\tau \mp \sigma)}. \quad (3.18)$$

Aus der Majorana-Bedingung folgt

$$d_m^{\mu*} = d_{-m}^\mu, \quad b_r^{\mu*} = b_{-r}^\mu. \quad (3.19)$$

Auch der Weltflächen-Superstrom hat zwei Arten von Fourier-Moden

$$(R) \quad F_m = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi d\sigma (e^{im\sigma} T_+^{(F)} + e^{-im\sigma} T_-^{(F)}), \quad (3.20)$$

$$(NS) \quad G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi d\sigma (e^{ir\sigma} T_+^{(F)} + e^{-ir\sigma} T_-^{(F)}). \quad (3.21)$$

Die Fourierkoeffizienten des Energie-Impuls-Tensors erhalten sowohl von den Bosonen als auch von den Fermionen Beiträge:

$$L_m = L_m^{(X)} + L_m^{(\psi)}. \quad (3.22)$$

Die Fourierkomponenten von $T_{\alpha\beta}$ und $T_\alpha^{(F)}$ sind erhaltene Ladungen und generieren die superkonformen Transformationen. Die Nebenbedingungen fordern, daß sie für Lösungen der klassischen Bewegungsgleichungen verschwinden müssen.

Bei geschlossenen Strings können wir für die Rechts- und Linksläufer unabhängig voneinander periodische oder antiperiodische Randbedingungen fordern. Dies führt zu den Modenentwicklungen

$$(R) \quad \psi_-^\mu = \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)}, \quad \psi_+^\mu = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \tilde{d}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)}, \quad (3.23)$$

$$(NS) \quad \psi_-^\mu = \sum_{r \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}} b_r^\mu e^{-2ir(\tau - \sigma)}, \quad \psi_+^\mu = \sum_{r \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}} \tilde{b}_r^\mu e^{-2ir(\tau + \sigma)}. \quad (3.24)$$

Diese Theorie hat demzufolge vier Sektoren und vier Arten von WF-Superladungen ($F_m, \tilde{F}_m, G_r, \tilde{G}_r$).

3.1.3 Das quantisierte RNS-Modell

Die kovariante Operator-Quantisierung erfolgt nach dem gleichen Schema wie im bosonischen Fall. Ich konzentriere mich im folgenden auf die durch das ψ -Feld neu hinzukommenden Aspekte und beginne mit dem NS-Sektor bei offenen Strings.

Der NS-Sektor

Aus der kanonischen Anti-Vertauschungsrelation

$$\{\psi_a^\mu(\tau, \sigma), \psi_b^\nu(\tau, \sigma')\} = \pi \eta^{\mu\nu} \delta_{ab} \delta(\sigma - \sigma') \quad (3.25)$$

für die fermionischen Felder folgen die Antikommutatoren der Moden:

$$\{b_r^\mu, b_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r+s}. \quad (3.26)$$

Der Grundzustand des NS-Sektors muß zusätzlich zu den bosonischen Bedingungen

$$b_r^\mu |0\rangle = 0, \quad r > 0, \quad (3.27)$$

erfüllen. Die Super-Virasoro-Bedingungen definieren die physikalischen Zustände. Aus der Bedingung

$$(L_0 - a)|\Phi\rangle = 0 \quad (3.28)$$

folgt wieder die Massenschalenbedingung

$$M^2 = 2(N - a). \quad (3.29)$$

Der Operator L_0 enthält jetzt auch fermionische Beiträge:

$$L_0 = N + \frac{1}{2} \mathbf{p}^2, \quad N = N^{(\alpha)} + N^{(b)}. \quad (3.30)$$

Dabei ist $\mathbf{p}$ der Impulsoperator, $N^{(\alpha)}$ der Anzahloperator der bosonischen Oszillatoren und

$$N^{(b)} = \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r} \cdot b_r \quad (3.31)$$

der Anzahloperator der b -Moden:

$$[N^{(b)}, b_{-r}^\mu] = r b_{-r}^\mu. \quad (3.32)$$

Die weiteren Bedingungen an physikalische Zustände sind:

$$L_m |\Phi\rangle = 0, \quad m > 0; \quad G_r |\Phi\rangle = 0, \quad r > 0. \quad (3.33)$$

Insgesamt generieren die Operatoren L_m, G_r eine Darstellung der **Super-Virasoro-Algebra** auf dem NS-Fockraum:

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m - n) L_{m+n} + A(m) \delta_{m+n}, \\ [L_m, G_r] &= \left(\frac{1}{2} m - r\right) G_{m+r}, \\ \{G_r, G_s\} &= 2 L_{r+s} + B(r) \delta_{r+s}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

mit

$$A(m) = \frac{1}{8} D(m^3 - m), \quad B(r) = \frac{1}{2} D\left(r^2 - \frac{1}{4}\right). \quad (3.35)$$

Diese Darstellung ist unitär, d.h. der Raum der physikalischen Zustände ist positiv semidefinit, wenn

$$D = 10 \text{ und } a = \frac{1}{2} \quad (3.36)$$

gewählt wird [1]. Die kritische Dimensionszahl für RNS-Strings ist also 10 und nicht 26. Repräsentanten für die physikalischen Zustände findet man wieder durch Übergang zur Lichtkegelequation

$$(NS) \quad |\Phi\rangle = \alpha_{-m_1}^{i_1} \cdots \alpha_{-m_b}^{i_b} b_{-r_1}^{j_1} \cdots b_{-r_c}^{j_c} |\mathbf{k}\rangle, \quad m_l, r_k > 0, \quad \mathbf{k}^2 + M^2 = 0. \quad (3.37)$$

Um die zugehörigen Teilchen (Poincaré-Multipletts) zu bestimmen, müssen bei massiven Zuständen die $SO(8)$ -Multipletts zu Multipletts der kleinen Gruppe $SO(9)$ zusammengefaßt werden. Als leichteste Zustände findet man:

Anregung	Zustand	$SO(8)$ -Darstellung	M^2	Interpretation
$N = 0$	$ \mathbf{k}\rangle$	Skalar	-1	Skalares Tachyon
$N = \frac{1}{2}$	$b_{-1/2}^i \mathbf{k}\rangle$	Vektor	0	Masseloser Vektor
$N = 1$	$\alpha_{-1}^i \mathbf{k}\rangle$	Vektor	1	Antisym.
	$b_{-1/2}^i b_{-1/2}^j \mathbf{k}\rangle$	antisym. Tensor	1	Tensor
$N = 2$	$b_{-3/2}^i \mathbf{k}\rangle$	Vektor	2	Sym. spurf. Tensor 2. Stufe
	$\alpha_{-1}^i b_{-1/2}^j \mathbf{k}\rangle$	Tensor 2. Stufe	2	und
	$b_{-1/2}^i b_{-1/2}^j b_{-1/2}^k \mathbf{k}\rangle$	Antisym. Tensor 3. Stufe	2	Antisym. Tensor 3. Stufe

Der R-Sektor

Im R-Sektor erhält man für die d -Moden die Anti-Vertauschungsrelationen

$$\{d_m^\mu, d_n^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{m+n,0}. \quad (3.38)$$

Insbesondere erzeugen die Nullmoden d_0^μ die Clifford-Algebra $C(1,9)$

$$\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}. \quad (3.39)$$

Da sie mit den das Spektrum definierenden Operatoren L_m, F_m kommutieren, ist auf den physikalischen Zuständen eine Darstellung dieser Algebra realisiert. Der Grundzustand ist ein Majorana-Spinor der RZ-Lorentzgruppe $SO(1,9)$ und wird daher als $|a\rangle$, $a = 1, \dots, 2^{D/2} = 32$ bezeichnet⁷. Da alle Moden RZ-Vektor-Indizes tragen, sind die Zustände im Ramond-Sektor **RZ-Fermionen**. Der Grundzustand erfüllt

$$d_m^\mu |a\rangle = 0, \quad m > 0. \quad (3.40)$$

Die Massenschalenbedingung lautet

$$(L_0 - \tilde{a})|\Psi\rangle = 0 \Rightarrow M^2 = \frac{1}{2}(N - \tilde{a}), \quad (3.41)$$

mit

$$L_0 = N + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2, \quad N = N^{(\alpha)} + N^{(d)}. \quad (3.42)$$

$N^{(d)}$ ist der Anzahloperator der d -Moden:

$$N^{(d)} = \sum_{m=1}^{\infty} m d_{-m} \cdot d_m, \quad [N^{(d)}, d_{-m}^\mu] = m d_{-m}^\mu. \quad (3.43)$$

Die weiteren Bedingungen an physikalische Zustände sind

$$L_m |\Psi\rangle = 0, \quad F_m |\Psi\rangle = 0, \quad m > 0 \quad (3.44)$$

und

$$(F_0 - \mu) |\Psi\rangle = 0, \quad (3.45)$$

⁷Die Darstellungen von Clifford-Algebren und ihr Zusammenhang mit Spinordarstellungen von Drehgruppen werden in [105] vollständig abgehandelt.

wobei die Konstante μ aufgrund der Normalordnungsmehrdeutigkeit von F_0 eingeführt wird. Die Operatoren L_m, F_m erzeugen eine Darstellung der Super-Virasoro-Algebra auf dem R-Fockraum

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + A(m)\delta_{m+n}, \\ [L_m, F_n] &= \left(\frac{1}{2}m-n\right)F_{m+n}, \\ \{F_m, F_n\} &= 2L_{m+n} + C(m)\delta_{m+n}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

mit

$$A(m) = \frac{1}{8}Dm^3, \quad C(m) = \frac{1}{8}Dm^2. \quad (3.47)$$

Die Theorie ist unitär, wenn

$$D = 10, \quad \tilde{a} = 0, \quad \mu = 0 \quad (3.48)$$

gewählt wird [1]. Da sich die gleiche kritische Dimension $D = 10$ ergibt, kann das RNS-Modell sowohl RZ-Bosonen als auch RZ-Fermionen beschreiben. Repräsentanten der physikalischen Zustände liefert wieder die Lichtkegleichung

$$|\Psi\rangle = \alpha_{-m_1}^{i_1} \cdots \alpha_{-m_b}^{i_b} d_{-n_c}^{j_1} \cdots d_{-n_c}^{j_c} |\mathbf{k}, a\rangle, \quad m_l, n_k > 0, \quad \mathbf{k}^2 + M^2 = 0. \quad (3.49)$$

Die leichtesten Zustände im Ramond-Sektor sind demnach⁸:

Anregung	Zustand	SO(8)-Darstellung	M^2	Interpretation
$N = 0$	$ \mathbf{k}, a\rangle$	Majorana-Spinor	0	Masseloser M-Spinor
$N = 1$	$\alpha_{-1}^{i_1} \mathbf{k}, a\rangle$	M-Vektor-Spinor u. M-Spinor	2	M-Vektor-Spinor
	$d_{-1}^{j_1} \mathbf{k}, a\rangle$	M-Vektor-Spinor u. M-Spinor	2	M-Vektor-Spinor

Geschlossene Strings

Bei der Quantisierung geschlossener RNS-Strings muß die gleiche Prozedur wie bei offenen Strings auf die Links- und die Rechtsläufer angewendet werden. Die Massenformel lautet:

$$M^2 = 8(N_L - a) = 8(N_R - a), \quad a = \begin{cases} \frac{1}{2} & (NS) \\ 0 & (R) \end{cases} \quad (3.50)$$

Das tachyonische und masselose Spektrum für geschlossene RNS-Strings ergibt sich durch die Kombination aller Zustände aus den vier Sektoren, die der Massenformel (insbesondere der Balance-Beziehung zwischen Rechts- und Linksläufern) genügen:

Anregung	Zustand	SO(8)-Darstellung	M^2	Interpretation
$N = 0$	$ \mathbf{k}\rangle \otimes \mathbf{k}\rangle$	Skalar	-4	Tachyon
$N = 1$	$b_{-1/2}^{i_1} \mathbf{k}\rangle \otimes b_{-1/2}^{j_1} \mathbf{k}\rangle$	Tensor 2. Stufe	0	Graviton, antisymmetrischer Tensor, Skalar
	$b_{-1/2}^{i_1} \mathbf{k}\rangle \otimes \mathbf{k}, a\rangle$	Vektor-Spinor und Spinor	0	Gravitino und Spinor
	$ \mathbf{k}, a\rangle \otimes b_{-1/2}^{j_1} \mathbf{k}\rangle$	Vektor-Spinor und Spinor	0	Gravitino und Spinor
	$ \mathbf{k}, a\rangle \otimes \mathbf{k}, b\rangle$	Spinor 2. Stufe	0	Je ein antisymmetrischer Tensor jeder möglichen Stufe

⁸ Wie in der Physik üblich, spreche ich von Spinordarstellungen der $SO(n)$ statt von Darstellungen der Überlagerungsgruppe $\text{Spin}(n)$.

3.2 Superstrings

Weder das Spektrum der geschlossenen noch das der offenen fermionischen Stringtheorie ist Tachyon-frei oder RZ-supersymmetrisch. Aus dem Spektrum der geschlossenen Stringtheorie ergibt sich eine weitere Quelle möglicher Inkonsistenzen: Das Auftreten von „Gravitinos“, d.h. von masselosen Vektor-Spinoren („Spin 3/2“). Gravitinos müssen an einen erhaltenen Strom, den RZ-Superstrom, koppeln, der natürlich nur in einer RZ-supersymmetrischen Theorie erhalten ist. Dies sollte dann zu einer **lokal** RZ-supersymmetrischen, d.h. einer **Supergravitationstheorie** führen [105].

Es ist daher ein sinnvoller Ansatz, nach einer Projektion zu suchen, die das Spektrum RZ-supersymmetrisch macht. Dabei müssen insbesondere alle RZ-Bosonen mit ganzer Anregungszahl, also auch das Tachyon, eliminiert werden. Um diese Projektion zu bestimmen, betrachten wir die masselosen Zustände des offenen fermionischen Strings: Hier tritt ein Vektor (8 bosonische Freiheitsgrade) und ein Majorana-Spinor (16 fermionischen Freiheitsgrade) auf. Da in 10 RZ-Dimensionen die Majorana- und die Weyl-Bedingung gleichzeitig gestellt werden können, fordert man, daß der Grundzustand des Ramond-Sektors eine definierte (positive) Chiralität hat, und kann dann den Vektor und den Majorana-Weyl-Spinor zu einem Vektor-Supermultiplett zusammenfassen. Es sei $\bar{\Gamma}$ der Chiralitäts-Operator:

$$|a\rangle = |a^{(+)}\rangle \oplus |a^{(-)}\rangle \text{ mit } \bar{\Gamma}|a^{(\pm)}\rangle = \pm|a^{(\pm)}\rangle. \quad (3.51)$$

Dann ist der gesuchte Projektor für masselose Zustände $\frac{1}{2}(1 + \bar{\Gamma})$. Dies kann aber noch nicht der gesuchte Projektor im R-Sektor sein, da massive Spinoren nicht chiral sind, also die Weyl-Bedingung nicht erfüllen können. Der von Gliozzi, Scherk und Olive gefundene richtige „GSO-Projektor“ ist [39]:

$$P_{GSO} = \frac{1}{2}(1 + \bar{\Gamma})(-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^8 d_{-n}^i d_n^i}. \quad (3.52)$$

Er kommutiert mit allen Spektrumsbedingungen und ist auch für massive Zustände konsistent. Das folgende Beispiel illustriert dies für das leichteste massive RZ-Fermion⁹:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{-1}^i |\mathbf{k}, a\rangle &\longrightarrow \alpha_{-1}^i |\mathbf{k}, a^{(+)}\rangle \\ d_{-1}^i |\mathbf{k}, a\rangle &\longrightarrow d_{-1}^i |\mathbf{k}, a^{(-)}\rangle \end{aligned} \right\} \text{Massiver Spinor.} \quad (3.53)$$

Im NS-Sektor müssen alle Zustände mit ganzer Anregungszahl eliminiert werden: Anders gesagt, muß jeder Zustand eine ungerade Anzahl an b -Moden enthalten. Dies leistet der Projektor

$$P_{GSO} = -(-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} \sum_{i=1}^8 b_{-r}^i b_r^i}. \quad (3.54)$$

Wir bemerken noch, daß der Grundzustand der durch die GSO-Projektion definierten offenen Superstring-Theorie ein U(1)-Super-Yang-Mills-Multiplett ist und gehen zum Fall geschlossener Strings über. Es stellt sich heraus, daß hier 3 konsistente Varianten der GSO-Projektion existieren [1].

1. Es werden im links- und im rechtslaufenden Sektor R-Grundzustände verschiedener Chiralität gewählt. Dann bilden die masselosen Zustände ein sogenanntes II-A-Supergravitations-Multiplett, das als RZ-Bosonen neben dem Graviton, dem antisymmetrischen Tensor und dem Dilaton noch einen Vektor und einen antisymmetrischen Tensor 3. Stufe enthält. Die auftretenden RZ-Fermionen sind zwei Gravitinos (Vektor-Spinoren) und zwei Spinoren jeweils verschiedener Chiralität. Insgesamt treten folgende SO(8)-Darstellungen auf:

$$\left. \begin{aligned} \text{Bosonen:} & \quad 35_R \oplus 28_R \oplus 1_R \oplus 8_V \oplus 56_V \\ \text{Fermionen:} & \quad 56_S \oplus 56_C \oplus 8_S \oplus 8_C \end{aligned} \right\} \text{II-A-SuGra} \quad (3.55)$$

⁹Die beiden Weyl-Spinoren gehören zwar zu **zwei** irreduziblen Darstellungen der eingeschränkten Drehgruppe, sind aber keine Darstellungen der vollen Drehgruppe, da sie bei Raumspiegelungen aufeinander abgebildet werden. Zusammen bilden sie **eine** irreduzible Darstellung der vollen Drehgruppe (einen Dirac-Spinor).

Die Reihenfolge der Darstellungen entspricht der im Text. Es wird jeweils die Dimension der Darstellung und ihre Konjugationsklasse angegeben¹⁰. Da zwei Gravitinos auftreten, müssen zwei erhaltene RZ-Superströme existieren. Das masselose Spektrum ist nicht chiral (nicht-chirale N=2-Supergravitation).

2. Es werden im links- und rechtslaufenden Sektor R-Grundzustände gleicher Chiralität gewählt. Diesmal ergibt sich ein II-B-Supergravitationsmultiplett, mit einem Graviton, einem selbstdualen antisymmetrischen Tensor vierte Stufe, zwei antisymmetrischen Tensoren und zwei Skalaren, sowie zwei Gravitinos und zwei Spinoren mit gleicher Chiralität (chirale N=2-Supergravitation). Der SO(8) Inhalt eines II-B-Supergravitations-Multipletts ist:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Bosonen:} & 35_R \oplus 35'_R \oplus 1_R \oplus 1_R \oplus 28_R \oplus 28_R \\ \text{Fermionen:} & 56_S \oplus 56_S \oplus 8_S \oplus 8_S \end{array} \right\} \text{II-B-SuGra} \quad (3.56)$$

Hier sind zwei darstellungstheoretische Bemerkungen angebracht: Zunächst könnte man auch einen Spinorgrundzustand der entgegengesetzten Chiralität wählen. Dies macht sich bemerkbar, sobald wir den Spinorkonjugationsklassen die physikalischen Attribute linkshändig und rechtshändig zuweisen. Zweitens tritt hier eine Besonderheit von SO(8)-Darstellungen auf [86]: In der R-Konjugationsklasse gibt es drei verschiedene 35-dimensionale Darstellungen, den symmetrischen Tensor zweiter Stufe, sowie den selbstdualen und den antiselbstdualen antisymmetrischen Tensor vierter Stufe. Viele Autoren bezeichnen diese Darstellungen mit 35_V , 35_S und 35_C . Dieser Konvention schließe ich mich nicht an, weil diese Darstellungen wie gesagt der Konjugationsklasse der adjungierten Darstellung angehören. Außerdem ist es verwirrend, eine RZ-bosonische Darstellung mit dem Index S = Spinor zu versehen.

3. Im zweiten Fall kann man das Spektrum auch noch bezüglich der Vertauschung von Links- und Rechtsläufern symmetrisieren. Dann erhält man ein chirales N=1-Supergravitations-Multiplett aus Graviton, antisymmetrischem Tensor und Skalar, sowie Gravitino und einem Spinor:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Bosonen:} & 35_R \oplus 28_R \oplus 1_R \\ \text{Fermionen:} & 56_S \oplus 8_S \end{array} \right\} \text{I-SuGra} \quad (3.57)$$

Diese Variante führt, im Gegensatz zu den beiden vorherigen, zu nicht-orientierten geschlossenen Strings [1].

Um zu überprüfen, ob die GSO-Projektion wirklich für alle Massenniveaus dazu führt, daß gleich viele RZ-Bosonen und RZ-Fermionen auftreten, benötigt man ein Hilfsmittel, die Zustandssumme, die als

$$Z(\beta) = \text{Spur} (e^{-\beta H}) = \sum_{\Phi} \langle \Phi | e^{-\beta H} | \Phi \rangle \quad (3.58)$$

definiert ist. Die Spurbildung bzw. Summation erstreckt sich über alle Zustände des jeweils betrachteten Modells. H ist der Hamilton-Operator, in unserem Fall der WF-Hamilton-Operator (Generator der τ -Translationen) $L_0 - a$ für offene, $L_0 + \tilde{L}_0 - a'$ für geschlossene Strings. Die Normalordnungskonstanten a, a' hängen von den Randbedingungen (offen - geschlossen, NS - R) ab. Der Parameter β ist in der stochastischen Interpretation des Modells die inverse Temperatur ($k_B = 1$). Die Gleichheit der Zustandssummen des Neveu-Schwarz- und des Ramond-Sektors bei offenen Strings,

$$Z^{(R)}(\beta) = Z^{(NS)}(\beta), \quad (3.59)$$

ist äquivalent zu der Aussage, daß auf jedem Massenniveau gleich viele R- und NS-Zustände existieren. Denn die Summation, die explizit ausgeführt werden kann, liefert eine Potenzreihe in

¹⁰Die Einordnung von Darstellungen in Konjugationsklassen wird in den Anhängen B und C erläutert.

$e^{-\beta}$ mit einem durch die Masse bestimmten Exponenten und der Anzahl der Zustände gegebener Masse als Koeffizienten. In diesem Zusammenhang ist es üblich, die fermionische Zustandssumme mit einem relativen Minuszeichen zu definieren. Die Gesamtzustandssumme wird dann zu einer Superspur über den Zustandsraum, deren Verschwinden RZ-Supersymmetrie signalisiert. Dieses Vorzeichen kann auch physikalisch interpretiert werden: Die Zustandssumme hängt eng mit der Vakuumenergie und der kosmologischen Konstanten zusammen, zu der RZ-Bosonen und RZ-Fermionen mit umgekehrtem Vorzeichen beitragen. Insbesondere verschwinden diese Größen in RZ-supersymmetrischen Theorien.

Die Zustandssumme des ursprünglichen RNS-Modells ist, wie wir schon an Hand der niedrigsten Anregungen feststellen konnten, nicht supersymmetrisch. Berücksichtigt man jedoch die GSO-Projektion durch

$$Z^{(A)}(\beta) = \text{Spur}_{(A)} \left(e^{-\beta H^{(A)}} P_{GSO} \right) \quad A = NS, R, \quad (3.60)$$

so folgt das Verschwinden der supersymmetrischen Zustandssumme aufgrund der 1829 von Jacobi gefundenen „*aequatio identica satis abstrusa*“ [1]. Für die drei Varianten von geschlossenen Superstrings läßt sich die Supersymmetrie des Spektrums auf analoge Weise zeigen.

Die Gleichheit der Anzahl bosonischer und fermionischer Zustände gegebener Masse ist natürlich nur eine notwendige Bedingung für eine RZ-supersymmetrische Theorie. Man muß zeigen, daß auf dem Hilbertraum eine Darstellung der Super-Poincare-Gruppe realisiert ist, und insbesondere die Generatoren der Supertransformationen, die RZ-Superladungen konstruieren. Dies kann mit Hilfe des Vertexoperator-Kalküls durchgeführt werden, vergleiche Abschnitt 3.3.

Es sei noch erwähnt, daß die in der Green-Schwarz-Formulierung auftretenden Probleme dual zu denen in der RNS-Formulierung sind. Der Green-Schwarz-Superstring ist manifest RZ-supersymmetrisch, aber die Theorie ließ sich ursprünglich nur in der Lichtkegel-Eichung formulieren und quantisieren [1]. Inzwischen existiert eine RZ-kovariante Verallgemeinerung, in der zahlreiche Hilfsfelder eingeführt werden müssen. Obwohl beide Formulierungen der Superstringtheorie(n) äquivalent sind, existiert bisher keine vereinheitlichte Formulierung, in der alle WF- und RZ-Symmetrien (off shell) manifest sind.

3.2.1 Pfadintegralquantisierung

Die Pfadintegralquantisierung der Superstringtheorie verläuft formal nach dem gleichen Schema wie die der bosonischen. Allerdings ist die Mathematik der zahlreichen benötigten supersymmetrischen Verallgemeinerungen üblicher Begriffe (Super-Mannigfaltigkeit, Super-Riemannsche Flächen, etc.) noch nicht voll entwickelt und der Formalismus ist sehr kompliziert (siehe [2] und dort zitierte Literatur). Ich werde daher auf diese Dinge nicht systematisch eingehen, sondern nur einige Aspekte herausheben, die für das Verständnis der Theorie nützlich sind.

Als erstes soll der Zusammenhang zwischen der oben im Operatorformalismus eingeführten Zustandssumme und der früher mit Hilfe von Funktionalintegralen definierten Zustandssumme erklärt werden. Dazu betrachten wir zunächst als Vorbereitung eine skalare Quantenfeldtheorie. Hier definiert man die Zustandssumme als Funktionalintegral über das Maß mit periodischen Randbedingungen in Zeit-Richtung [122]. Die Periode ist dann die inverse Temperatur der stochastischen Formulierung. Dieses Funktionalintegral kann mit Hilfe der Feynman-Kac-Formel [123], [107] in den Operator-Formalismus übersetzt werden, und man erhält die Spur des euklidischen Zeitentwicklungsoperators bzw. des „Boltzmann-Gewichtes“:

$$\int_{t \simeq t + \beta} D\Phi e^{-S[\Phi]} = \text{Spur} \left(e^{-\beta H} \right). \quad (3.61)$$

Die geschlossene bosonische Stringtheorie kann als zweidimensionale skalare Feldtheorie mit periodischen Randbedingungen in Raum-Richtung aufgefaßt werden. Das Stellen von periodischen Randbedingungen in Raum- und Zeit-Richtung entspricht einer Weltfläche mit der Topologie eines Torus. Die im String-Operator-Formalismus als Spur über den Zustandsraum definierte Zustandssumme entspricht daher der Genus-1-Zustandssumme des Pfadintegralformalismus. Wir können jetzt auch den Parameter β geometrisch deuten. Früher war erwähnt

worden, daß die Zustandssummen für höhere Genera von der komplexen Struktur, d.h. von den Moduli der Weltfläche abhängen. Im Falle des Torus (Genus 1) gibt es einen komplexen Modulus. Wenn man den Torus als Parallelogramm in der komplexen Ebene mit periodischen Randbedingungen darstellt, so kann dieses Parallelogramm durch konforme (=holomorphe) Transformationen auf eine Standardgestalt gebracht werden, bei der die vier Eckpunkte die Zahlen $0, 1, \tau, \tau + 1$, $\Im(\tau) > 0$ sind. Die Zahl τ ist dann der komplexe Strukturmodulus¹¹. Bei dieser Parametrisierung sind die Skalarfelder X^μ aber nicht bezüglich der Zeitrichtung (der imaginären Richtung in der komplexen Ebenen) sondern bezüglich der τ -Richtung periodisch:

$$X^\mu(x, y) = X^\mu(x + 1, y) = X^\mu(x + \Re(\tau), y + \Im(\tau)). \quad (3.62)$$

Im Operatorformalismus werden diese „schiefen“ Randbedingungen durch den WF-Impulsoperator $P = L_0 - \tilde{L}_0$ implementiert, der die Translationen in der Raumrichtung (der reellen Richtung in der komplexen Ebene) erzeugt:

$$Z_1(\tau) = \text{Spur} \left(e^{2\pi i (\Re(\tau)P + i\Im(\tau)H)} \right) = \text{Spur} \left(q^{L_0 - 1} \tilde{q}^{\tilde{L}_0 - 1} \right), \quad q = e^{2\pi i \tau}. \quad (3.63)$$

Die Zustandssumme wurde im zweiten Schritt so umgeschrieben, daß die holomorphe Faktorisierung sichtbar ist. Dies erlaubt es, die entsprechende Zustandssumme für einen offenen bosonischen String abzulesen (die hier zu betrachtende Weltfläche wäre eine Kreisring mit dem Verhältnis der Radien als Modulus):

$$Z_1(q) = \text{Spur} (q^{L_0 - 1}) = \text{Spur} (e^{-\beta H}), \quad \text{mit } H = L_0 - 1 \text{ und } e^{-\beta} = q = e^{2\pi i \tau}. \quad (3.64)$$

Wir kommen nun zur Verallgemeinerung für Superstrings. In der Quantenfeldtheorie eines Spinorfeldes muß man bei der Berechnung der Zustandssumme in der Pfadintegralformel antiperiodische Randbedingungen in Zeitrichtung wählen. Die Randbedingungen in der räumlichen Richtung sind im RNS-Modell entweder periodisch oder antiperiodisch, wobei wir bei geschlossenen Strings rechts- und linkslaufende WF-Fermionen getrennt betrachten können. Dem Einschieben des GSO-Projektors in die Spur der Operatorformel entspricht im Pfadintegral eine Änderung der Randbedingungen in Zeitrichtung von periodisch auf antiperiodisch und vice versa. Damit treten bei der Berechnung der Zustandssumme für Superstrings alle vier möglichen Kombinationen von Randbedingungen auf. Dabei entspricht jede Wahl von Randbedingungen einer **Spinstruktur**.

Spinstrukturen

Bisher wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß WF-Spinorfelder auch auf Flächen von höherem Genus **global** definierbar sind. Dies ist aber nicht selbstverständlich: Eine orientierbare N -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit muß zusätzliche Bedingungen erfüllen, damit sie eine oder mehrere **Spinstrukturen** besitzt [155]. Spinstrukturen sind Äquivalenzklassen von Spinbündeln, und Spinbündel werden ausgehend vom N -Bein-Bündel konstruiert, indem man die reduzierte Strukturgruppe $SO(N)$ durch deren zweifache Überlagerungsgruppe $\text{Spin}(N)$ ersetzt. Die möglichen Obstruktionen sind Elemente der $\mathbf{Z}_2$ -wertigen zweiten Kohomologiegruppe $H^2(M; \mathbf{Z}_2)$ der Mannigfaltigkeit [155]. Das Problem besteht kurz gesagt darin, daß man das richtige Transformationsverhalten von Spinorfeldern unter Koordinatentransformationen nachrechnen muß. Die dabei möglicherweise auftretenden „Anomalien“ sind, mathematisch ausgedrückt, Čech-Kozykeln [145]¹². In zwei Dimensionen läßt sich diese Bedingung einfacher ausdrücken [145]: Die betrachtete Mannigfaltigkeit, in unserem Fall die Weltfläche, muß eine gerade Euler-Zahl besitzen. Dies ist für kompakte geschlossene Riemannsche Flächen, d.h. für die Weltflächen geschlossener orientierter Strings immer erfüllt.

¹¹ Leider wird auch die zeitartige Koordinate in der Minkowski-Formulierung mit τ bezeichnet. Eine Verwechslung kann aber kaum auftreten, da die geometrischen Aspekte der Weltfläche in der euklidischen Formulierung behandelt werden.

¹² Die Kohomologie-theoretischen Begriffe werden in Anhang A erklärt.

Wenn überhaupt Spinstrukturen auf einer orientierbaren Mannigfaltigkeit existieren, gibt es im allgemeinen mehrere inäquivalente. Sie werden durch die Generatoren der ersten $\mathbf{Z}_2$ -wertigen Kohomologiegruppe klassifiziert [1]. Eine äquivalente Charakterisierung ist die Spezifizierung periodischer oder antiperiodischer Randbedingungen entlang der Generatoren der 1. Homologiegruppe, also entlang einer Menge von Generatoren von Repräsentanten derjenigen geschlossenen Kurven, die keine Ränder sind. Auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Genus g , gibt es $2g$ Homologiegeneratoren und damit 2^{2g} inäquivalente Spinstrukturen. Im Falle des Torus gibt es die vier oben angegebenen Möglichkeiten.

In Theorien mit nichtorientierten Strings treten auch nichtorientierbare WF-Mannigfaltigkeiten auf, z.B. die Kleinsche Flasche. Hier ist die Konstruktion von Spinorfeldern aufwendiger, da die reduzierte Strukturgruppe $O(N)$ mehrere Zusammenhangskomponenten und damit mehrere in Frage kommende Überlagerungsgruppen besitzt. Ein explizites Beispiel für Spinoren auf einer nicht-orientierbaren Mannigfaltigkeit findet man in [135]. In der mir bekannten Literatur werden diese Probleme dadurch umgangen, daß man zur Berechnung der entsprechenden Amplituden den Green-Schwarz-Formalismus verwendet.

In Theorien mit offenen Strings besitzt die WF-Mannigfaltigkeit zudem Ränder. Aufgrund der Randbedingungen lassen sich aber der links- und der rechtslaufende Anteil eines RNS-Fermions zu einem periodischen oder antiperiodischen Spinorfeld zusammenfassen, das auf einer verdoppelten Weltfläche definiert ist [1]. Die verdoppelte Weltfläche ist dann wieder geschlossen (randlos). Die auf ihr definierte Theorie besitzt eine diskrete $\mathbf{Z}_2$ -Symmetrie. Theorien mit offenen Strings lassen sich so auf Theorien mit geschlossenen Strings zurückführen [27].

Wir können nun erklären, wieso die RZ-Supersymmetrie bei fermionischen Stringtheorien eine Konsistenzbedingung ist¹³. Die (Super-)Reparametrisierung auf der Weltfläche schließt für die höheren Genera die Invarianz unter globalen Reparametrisierungen, die wir als modularen Transformationen bezeichnen, ein. Diese Transformationen haben die Eigenschaft die Spinstrukturen zu mischen. Im Falle des Torus wird die modulare Gruppe durch die Transformationen [1]

$$\tau \rightarrow \tau + 1, \quad \tau \rightarrow \frac{1}{\tau} \quad (3.65)$$

des modularen Parameters erzeugt. Die zweite Transformation vertauscht die reelle und die imaginäre Richtung des Parallelogramms. Durch explizite Transformation der Zustandssumme erkennt man, daß nur die Spinstruktur $(++)$, mit periodischen Randbedingungen in beiden Richtungen, invariant ist, während die anderen drei aufeinander abgebildet werden. Will man RZ-Bosonische und RZ-Fermionische Zustände in der Theorie, so muß über alle Spinstrukturen summiert werden, und diese Summation entspricht der GSO-Projektion des Operatorformalismus. Bei der Summation bleiben gewisse Phasenfaktoren frei. Durch Untersuchung der modularen Transformationen für die höheren Genera reduziert sich die Wahlmöglichkeiten auf die drei oben gefundenen Theorien [1], [4].

Im Rahmen der Pfadintegralquantisierung lassen sich auch andere Konsistenzbedingungen der Theorie formulieren. Genau wie in der bosonischen Theorie sind offene und geschlossene Stringtheorien nicht unabhängig, und man kann nur unorientierte offene und geschlossene Strings oder orientierte geschlossene Strings haben. Für Theorien mit geschlossenen, orientierten Superstrings (Typ-II-Theorien) wurde kürzlich gezeigt, daß die Amplituden Ordnung für Ordnung endlich sind [61].

3.2.2 Übersicht über Superstringtheorien

Unter Berücksichtigung aller Konsistenzbedingungen kann man 3 verschiedene Superstringtheorien konstruieren. Außer den Alternativen offen - geschlossen und orientiert - nicht orientiert kann man noch zwischen den 3 Varianten der GSO-Projektion, d.h. zwischen ein oder zwei RZ-Supersladungen und zwischen chiralen und nicht chiralen Theorien wählen. Allerdings sind diese Alternativen nicht unabhängig voneinander [1].

¹³ Es werden im folgenden der Einfachheit halber nur geschlossene orientierte Strings betrachtet.

- Theorien mit offenen Superstrings enthalten ein masseloses Super-YM-Multiplett. Durch Einführung von Ladungen an den Enden des Strings kann man versuchen, eine Eichgruppe einzuführen. Die Forderung der Anomalie-Freiheit läßt aber nur eine Eichgruppe, $SO(32)$, zu [1]. Die Theorie besteht automatisch aus nichtorientierten Strings. Außerdem muß man die entsprechenden nichtorientierten geschlossenen Strings mit aufnehmen. Diese Theorie wird als die Typ I Superstringtheorie bezeichnet, da sie N=1-RZ-Supersymmetrie besitzt.
- Theorien, in denen nur geschlossene Strings auftreten, sind immer N=2-RZ-supersymmetrisch und werden daher als Typ II Theorien bezeichnet. Sie bestehen aus orientierten Strings und es ist nicht möglich eine Eichgruppe einzuführen. Die nicht-chirale Variante wird als II-A, die chirale als II-B bezeichnet.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die konsistenten Superstringtheorien und ihre Eigenschaften.

Typ	offen/geschlossen	orientiert	chiral	Masseloses Spektrum
I	beides	nein	ja	N=1-Supergravitation und $SO(32)$ -Super-Yang-Mills
II A	geschlossen	ja	nein	II A-Supergravitation
II B	geschlossen	ja	ja	II B-Supergravitation

3.3 Der euklidische Operatorformalismus

Einige Elemente des euklidischen Operatorformalismus für WF-Fermionen und für superkonforme Feldtheorien sind zum Verständnis fermionischer Stringtheorien nützlich oder werden später verwendet.

Auf dem Minkowski- oder dem euklidischen WF-Zylinder sind die R-Fermionen periodisch, die NS-Fermionen antiperiodisch. Geht man durch eine konforme Transformation in die komplexe Ebene, so gilt genau das Umgekehrte, wie eine explizite Rechnung leicht zeigt. Die Bewegungsgleichung für ein chirales periodisches Fermion in der z -Ebene ist

$$\partial_{\bar{z}}\psi^\mu = 0. \quad (3.66)$$

Die Greensche Funktion $G(z) = \frac{1}{\pi z}$ legt den singulären Teil der OPE fest:

$$\psi^\mu(z)\psi^\nu(w) = \frac{-\delta^{\mu\nu}}{z-w} + \cdots. \quad (3.67)$$

Der Energie-Impuls-Tensor für die WF-Fermionen ist

$$T(z) = \frac{1}{2} : (\partial_z \psi^\mu(z)) \psi_\mu(z) :. \quad (3.68)$$

Die OPE

$$T(z)\psi^\mu(w) = \frac{1}{2} \frac{1}{(z-w)^2} \psi^\mu(w) + \frac{1}{z-w} \partial_w \psi^\mu(w) + \cdots, \quad (3.69)$$

$$T(z)T(w) = \frac{d/2}{2(z-w)^4} + \cdots, \quad (3.70)$$

zeigen, daß jedes Fermion das konforme Gewicht $1/2$ und die zentrale Ladung $1/2$ trägt.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft zweidimensionaler Feldtheorien ist, daß Fermionen als nichtlineare Funktionen von Bosonen realisiert werden können (Bose- / Fermi-Äquivalenz)¹⁴. Dies hängt damit zusammen, daß in zwei Dimensionen kein Spin im üblichen Sinn existiert

¹⁴Für eine allgemeine Diskussion siehe [95].

und der Zusammenhang zwischen „Spin“ und Statistik komplizierter ist als in vier Dimensionen (Zopf-Statistik statt Permutations-Statistik [2]). Bei einer geraden Anzahl $d = 2n$ freier Fermionen wählt man zunächst eine komplexe Basis

$$\psi^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi^\mu + i\psi^{\mu-1}), \quad \psi^{-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^\mu + i\psi^{\mu-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad \mu = 2i. \quad (3.71)$$

Die einzige singuläre OPE ist dann

$$\psi^j(z)\psi^{-k}(w) = \frac{\delta^{jk}}{z-w} + \dots \quad (3.72)$$

Dann wählt man n freie Bosefelder $X^j(z)$ und bildet die Operatoren [56]:

$$V^{\pm i}(z) = e^{\pm iX^i(z)} c_j \quad (3.73)$$

mit

$$c_j = (-1)^{N_1 + \dots + N_{j-1}} \text{ und } N_j = \oint \frac{dz}{2\pi i} \partial_z X^j(z). \quad (3.74)$$

Dann erfüllen die Operatoren $V^{\pm i}$ die gleichen OPE wie die $\psi^{\pm i}$. Da nicht nur der Propagator sondern auch die konformen Gewichte und zentralen Ladungen und damit die gesamte Struktur der ψ -Theorie reproduziert wird, sind beide Formulierungen äquivalent.

Die „Kozykeloperatoren“ c_j dienen nur der Entfernung unerwünschter Phasenfaktoren. Die im nächsten Kapitel durchgeführte Diskussion toroidaler Kompaktifizierungen zeigt, daß die Werte der Felder X^i als Koordinaten des Torus $\mathbf{R}^n/2\pi\mathbf{Z}^n$ interpretiert werden können. Antiperiodische Randbedingungen können durch die Halbierung des Radius implementiert werden.

Allgemein kann der Übergang von periodischen zu antiperiodischen Randbedingungen und damit vom NS- in zum R-Sektor durch ein sogenanntes **Spinfeld** $S^a(z)$ beschrieben werden [34]. Für seine Konstruktion werden die Faddeev-Popov-Supergeistfelder und Methoden der BRS-Quantisierung benötigt. Die Anwendung des Spinfeldes auf den $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ -Grundzustand des NS-Sektors, liefert den Grundzustand des R-Sektors

$$|a\rangle = S^a(0)|0\rangle. \quad (3.75)$$

Die Super-Virasoro-Algebra kann durch die OPE des Energie-Impuls-Tensors und des WF-Superstroms formuliert werden [2], [4]. Durch Hinzunahme des Spinfeldes kann der Zusammenhang zwischen WF-Supersymmetrie und RZ-Supersymmetrie aufgeklärt werden [8], [57]. Die in den zitierten Arbeiten aufgeführten Argumente beruhen auf der Struktur der OPE und gelten auch für allgemeine vierdimensionale Stringtheorien, bei denen die inneren Freiheitsgrade durch eine konforme Feldtheorie realisiert werden. Die notwendigen und hinreichenden Bedingung für die verschiedenen möglichen RZ-Supersymmetrien in geraden Dimensionszahlen sind eine (jeweils verschiedene) erweiterte globale WF-Supersymmetrie zusammen mit einer zusätzlichen Symmetrie bezüglich einer exzeptionellen Lie-Algebra [57].

Kapitel 4

Toroidale Kompaktifizierungen und heterotische Stringtheorien

Das Haupthindernis bei der physikalischen Interpretation von Stringtheorien ist das Auftreten zusätzlicher Raumdimensionen. Das Studium von Theorien mit verborgenen Dimensionen ist aber an sich nichts neues; tatsächlich hat ihre Einführung eine Tradition, die mindestens in das Jahr 1921 zurückreicht. Damals hatte T. Kaluza [111] bemerkt, daß die vierdimensionale Einsteinsche Gravitationstheorie sich mit der Maxwellschen Theorie des Elektromagnetismus vereinigen läßt, wenn man eine fünfdimensionale Version der Gravitationstheorie betrachtet und die fünfte Dimension auf einem Kreis mit hinreichend kleinem Radius kompaktifiziert. Diese Idee wurde von O. Klein [112] weiterentwickelt, und auch Einstein beschäftigte sich in den letzten 30 Jahren seines Lebens immer wieder mit ihr [164].

Die Ideen von Kaluza und Klein wurden später im Zusammenhang mit den Supergravitationstheorien [105] wieder aufgegriffen. Dabei sollte eine höherdimensionale (zehn- oder elfdimensionale) Supergravitationstheorie als vereinheitlichte Theorie aller Wechselwirkungen etabliert werden. Durch die Kompaktifizierung der zusätzlichen Dimensionen ergibt sich in vier Dimensionen eine Supergravitationstheorie und eine Super-Yang-Mills-Theorie, deren Eichgruppe, diejenigen der starken und elektroschwachen beinhalten sollte¹. Vom höherdimensionalen Standpunkt aus betrachtet, gibt es nur eine Kraft, die Gravitation, und alle Teilchen stammen aus einem einzigen Super-Multiplett. Die Probleme dieses Ansatzes sind so groß, wie die Idee ästhetisch: Die Renormierbarkeit oder Endlichkeit konnte nicht bewiesen werden und gilt inzwischen als zweifelhaft; bei der Kompaktifizierung bekommt man nicht die gewünschten vereinheitlichten Eichgruppen, man hat Schwierigkeiten chirale Fermionen zu erhalten und weder der Mechanismus der Kompaktifizierung noch der der Symmetriebrechung ist völlig verstanden².

Im Rahmen der Stringtheorie ist man gezwungen, diese Fragen wieder aufzugreifen. Dabei ergeben sich neue, String-spezifische Aspekte, ohne daß freilich die oben angesprochenen Probleme schon gelöst wären. Dennoch lassen sich in der Stringtheorie bereits mit vergleichsweise Weise geringem Aufwand „semirealistische“ Spektren realisieren, d.h. solche mit drei oder vier Generationen chiraler Fermionen und Eichgruppen, die die des Standardmodells als direkten Faktor enthalten.

¹ Bei der Kompaktifizierung auf Räumen mit konstanter Krümmung ist die manifeste Eichgruppe die Gruppe der Isometrien der internen Mannigfaltigkeit, also im Falle der Torus $\mathbf{T}^d$ die Gruppe $U(1)^d$, im Falle der Sphäre $\mathbf{S}^d$ die Gruppe $SO(d+1)$. Die Eichgruppe kann aber durchaus größer sein, etwa bei nichtlinearen Realisierungen [105].

² Für eine Übersicht siehe [105].

4.1 Die Kompaktifizierung des geschlossenen bosonischen Strings

Viele wesentliche Aspekte der Kompaktifizierung lassen sich bereits am einfachsten Beispiel, der Theorie geschlossener bosonischer Strings, erklären. Da alle Theorien mit semirealistischen Spektren aus orientierten geschlossenen Strings bestehen, werden im folgenden keine offenen Strings mehr betrachtet. Als interne Mannigfaltigkeit wird die einfachste Möglichkeit, der Torus, gewählt. Folgende Punkte sollen erläutert werden:

- In Theorien mit geschlossenen Strings kan man durch toroidale Kompaktifizierung **nicht-abelsche** Eichgruppen erhalten. Der Rang der Eichgruppe ist gleich der Anzahl der internen Dimensionen. Es sei daran erinnert, daß geschlossene Stringtheorien in der maximalen Dimension keine Eichgruppen zuließen; das masselose Spektrum war ein reines Gravitations-Multiplett.
- Die Abhängigkeit des Spektrums und insbesondere der Eichgruppe von der Geometrie der kompakten Dimensionen kann explizit angegeben werden. Sie wird durch kontinuierliche Parameter beschrieben, die als **Moduli**³ bezeichnet werden. Die Moduli hängen mit den Vakuumenergiewerten gewisser masseloser Skalarfelder zusammen. Verschiedene Kompaktifizierungen werden daher nicht als verschiedene Theorien, sondern als verschiedenen „Vakua“ oder klassische Lösungen einer Theorie interpretiert. Es gibt **kritische Werte** der Moduli, für die die Symmetrie des Spektrums besonders groß ist.
- Es gibt eine sogenannte **Dualitätssymmetrie** zwischen kleinen und großen Kompaktifizierungsradien. Sie legt nahe, daß die kleinste sinnvolle Länge in der Theorie von der Ordnung der Planck-Länge ist.

4.1.1 Die klassische Theorie

Die toroidale Geometrie der internen Dimensionen

Wir betrachten jetzt den geschlossenen bosonischen String nicht mehr im 26-dimensionalen Minkowski-Raum $\mathbf{M}^{26}$, sondern in einer Raum-Zeit der Form $\mathbf{M}^{26-d} \times \mathbf{T}^d$ und konzentrieren uns auf den kompakten Teil, den Torus $\mathbf{T}^d$:

$$\mathbf{T}^d = \frac{\mathbf{R}^d}{2\pi\Lambda}. \quad (4.1)$$

Λ ist ein d -dimensionales Gitter, daß durch die Vektoren $\{\mathbf{e}_i | i = 1, \dots, d\}$ aufgespannt wird:

$$\Lambda = \langle \mathbf{e}_i | i = 1, \dots, d \rangle_{\mathbf{Z}} := \{m^i \mathbf{e}_i | m^i \in \mathbf{Z}\}. \quad (4.2)$$

Die Gitterbasis von Λ ist natürlich auch eine $\mathbf{R}$ -Basis des $\mathbf{R}^d$. Wir benötigen im folgenden auch noch eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_\mu | \mu = 1, \dots, d\}$. Die Matrix der Skalarprodukte der Gitterbasisvektoren,

$$G_{ij} := \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad (4.3)$$

wird auch als **Gittermetrik** bezeichnet; genauer gesagt ist sie die Matrix der Standard-Metrik bezüglich der Gitterbasis:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^d, \mathbf{v} &= v^i \mathbf{e}_i = v^\mu \mathbf{e}_\mu, \mathbf{w} = w^i \mathbf{e}_i = w^\mu \mathbf{e}_\mu \\ \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= v^i w^j G_{ij} = v^\mu w^\nu \delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Häufig wird die folgende, äquivalente Formulierung benutzt: Die Kompaktifizierung erfolgt auf dem d -dimensionalen Einheitsgitter $\mathbf{Z}^d$, aber der $\mathbf{R}^d$ wird mit einer Nichtstandard-Metrik mit Matrix G_{ij} versehen. Die Gitterbasisvektoren $\mathbf{e}_i$ sind in dieser Formulierung an

³Diese Moduli sind von den WF-Moduli, die die komplexe Strukturen der Weltfläche parametrisieren, zu unterscheiden.

sich, d.h. bezüglich der Standard-Metrik, orthonormiert, werden aber durch ein konstantes Gravitationsfeld⁴ verzerrt, daß die Standardmetrik deformiert. Beide Formulierungen sind gleichwertig, weil, wie früher erläutert wurde, Raum-Zeit-Struktur und Graviationsfeld nicht empirisch, sondern nur konventionell getrennt werden können⁵. Man könnte auch Kompaktifizierungen auf nichtorthonormierten Gittern in einer Raum-Zeit mit konstantem Gravitationsfeld betrachten, aber dies führt nur zum Auftreten redundanter Parameter.

Die zweite Formulierung habe ich vor allem eingeführt, weil sie es erlaubt, die geometrischen Parameter G_{ij} , die das Gitter Λ eindeutig charakterisieren⁶, physikalisch zu interpretieren. Die G_{ij} sind die d^2 rein internen Komponenten der 26-dimensionalen Metrik, d.h. des Vakuum Erwartungswertes des 26-dimensionalen Gravitons bezüglich der d kompakten Dimensionen. Vom $(26 - d)$ -dimensionalen Standpunkt, also von der nichtkompakten Raum-Zeit her betrachtet, sind diese Komponenten die Vakuum Erwartungswerte masselose Skalarfelder. Dies legt es nahe, auch Vakuum Erwartungswerte für die anderen masselosen Skalarfelder einzuführen, was später geschehen wird.

Die Lösungen der klassischen Bewegungsgleichungen

Die Kompaktifizierung auf dem Torus kann exakt behandelt werden, da ein Torus keine (intrinsische) Krümmung besitzt, und die Bewegungsgleichungen linear bleiben; genauer gesagt ändern sich die Bewegungsgleichungen überhaupt nicht; es treten lediglich allgemeinere Randbedingungen auf, da ein geschlossener String nur noch modulo Gittervektoren periodisch sein muß:

$$\mathbf{X}(\sigma + \pi, \tau) = \mathbf{X}(\sigma, \tau) + 2\pi \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \Lambda; \quad \mathbf{X} = (X^i)_{i=1}^d. \quad (4.5)$$

Die Modenentwicklung enthält dann auch einen in σ linearen Term [1]:

$$\mathbf{X}(\sigma, \tau) = \mathbf{x} + \mathbf{p}\tau + 2\mathbf{w}\sigma + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{-2in(\tau+\sigma)} + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n}{n} e^{-2in(\tau-\sigma)}. \quad (4.6)$$

Der neu aufgetretene Vektor $\mathbf{w} \in \Lambda$ beschreibt die verschiedenen nun möglichen Windungszustände und wird daher als **Windungsvektor** bezeichnet. Seine Komponenten w^i bezüglich der Gitterbasis sind ganzzahlig und geben die Windungszahlen des Strings bezüglich der internen Dimension an.

Das Koordinatenfeld kann, wie früher, in den links- und den rechtslaufenden Anteil zerlegt werden:

$$\mathbf{X}(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_L(\tau + \sigma) + \mathbf{X}_R(\tau - \sigma)), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{X}_L(\tau + \sigma) = \mathbf{x}_L + 2\mathbf{p}_L(\tau + \sigma) + i \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} e^{-2in(\tau+\sigma)}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{X}_R(\tau - \sigma) = \mathbf{x}_R + 2\mathbf{p}_R(\tau - \sigma) + i \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n}{n} e^{-2in(\tau-\sigma)}. \quad (4.9)$$

Der Zusammenhang zwischen den rechts- und linkslaufenden Koordinaten $\mathbf{x}_{R,L}$ und Impulsen $\mathbf{p}_{R,L}$ einerseits und dem Schwerpunktsimpuls $\mathbf{p}$, der Schwerpunktskoordinate $\mathbf{x}$ und dem Windungsvektor $\mathbf{w}$ andererseits ist:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_L + \mathbf{x}_R), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_L + \mathbf{p}_R, \quad 2\mathbf{w} = \mathbf{p}_L - \mathbf{p}_R, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{p}_L = \frac{1}{2}\mathbf{p} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{p}_R = \frac{1}{2}\mathbf{p} - \mathbf{w}. \quad (4.11)$$

Bemerkung: Die zu $\mathbf{w}$ kanonisch konjugierte Variable tritt nicht in der Modenentwicklung auf. Die chiralen Koordinaten $\mathbf{x}_R, \mathbf{x}_L$ sind daher nicht eindeutig bestimmt.

⁴ Als Gravitationsfeld bezeichne ich hier der Einfachheit halber wieder die Differenz zwischen dem metrischen Tensor und dem Minkowski- η -Tensor. Vgl. Abschnitt 2.3.3.

⁵ Dies wurde in Abschnitt 2.3.3 erläutert.

⁶ Orthogonale Transformationen von Λ im $\mathbf{R}^d$ ändern die Geometrie der Raum-Zeit nicht.

Die klassische Wirkung

In der Wirkung für die d kompakten Dimensionen sollen die rein internen Komponenten aller masselosen Zustände durch konstante Hintergrundfelder berücksichtigt werden. Neben dem symmetrischen Tensor (Graviton und Dilaton) enthält das Spektrum der 26-dimensionalen geschlossenen bosonischen Stringtheorie noch einen antisymmetrischen Tensor. Außer der symmetrischen Matrix G_{ij} hat man noch eine antisymmetrische Matrix B_{ij} einzuführen, die die Komponenten des antisymmetrischen Tensorfeldes bezüglich der Gitterbasis enthält. Die Wirkung für die d freien Weltflächenskalarfelder ist dann die allgemeinste bilineare aus den ersten Ableitungen konstruierbare und lautet (in Gitterkoordinaten) [67]:

$$S_{NSW} = \frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma (G_{ij} \partial^\alpha X^i \partial^\beta X^j \eta_{\alpha\beta} + B_{ij} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j \epsilon^{\alpha\beta}). \quad (4.12)$$

Der zweite Summand in der Wirkung ist lokal eine totale Ableitung und ändert die Bewegungsgleichungen nicht. Er macht sich aber durch eine relative Verschiebung von kinetischem Impuls $\mathbf{p}$ und kanonischem Impuls $\mathbf{p}^{KAN}$ bemerkbar:

$$\Pi_i \equiv \frac{\delta S}{\delta \partial_0 X^i} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial L}{\partial \partial_0 X^i} = \frac{1}{\pi} (G_{ij} p^j + 2B_{ij} w^j) + \dots \quad (4.13)$$

$$\Rightarrow p_i^{KAN} = G_{ij} p^j + 2B_{ij} w^j. \quad (4.14)$$

Die Ungleichheit von kinetischem und kanonischem Impuls hat wichtige Konsequenzen für die Quantentheorie, denn bei der kanonischen Quantisierung wird der *kanonische* Impuls durch den Impulsoperator ersetzt (besser gesagt erfüllt der quantisierte kanonische Impuls die einfachen kanonischen Vertauschungsrelationen und nicht unbedingt der quantisierte kinetische Impuls).

Da für die Quantisierung der Theorie der kanonische Impuls wichtig ist, ist es zweckmäßig, mittels Gleichung (4.14) den kinetischen Impuls zu eliminieren:

$$X^i(\tau, \sigma) = x^i + (G^{ij} p_j^{KAN} - 2G^{ij} B_{jk} w^k) \tau + 2\sigma w^i + \dots \quad (4.15)$$

Die zu (G_{ij}) inverse Matrix (G^{ij}) kann auch durch die Basis $\{\mathbf{e}^{*i}\}$ des zu Λ dualen Gitters Λ^* ausgedrückt werden:

$$G^{ij} = \mathbf{e}^{*i} \cdot \mathbf{e}^{*j}, \text{ wobei } \mathbf{e}^{*i} \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i. \quad (4.16)$$

Auch die links- und rechtslaufenden Impulse können durch den kanonischen statt durch den kinetischen Impuls ausgedrückt werden:

$$p_L^i = \frac{1}{2} p^i + w^i = \frac{1}{2} G^{ij} p_j^{KAN} - G^{ij} B_{jk} w^k + w^i, \quad (4.17)$$

$$p_R^i = \frac{1}{2} p^i - w^i = \frac{1}{2} G^{ij} p_j^{KAN} - G^{ij} B_{jk} w^k - w^i. \quad (4.18)$$

4.1.2 Kanonische Quantisierung und Fockraum

Bei der kanonischen Quantisierung werden die Poissonklammern der klassischen Theorie durch Kommutatoren, multipliziert mit $-i$, ersetzt ($\hbar = 1$). Bezüglich einer Gitterbasis von Λ erhält man, wenn man den *kanonischen* Impuls durch den Impulsoperator ersetzt⁷:

$$[x^i, p^j] = iG^{ij}. \quad (4.19)$$

Auch dem Windungsvektor soll in der Quantentheorie ein Operator zugeordnet werden; da aber die zu $\mathbf{w}$ kanonisch konjugierte Größen in der Theorie (bisher) nicht auftritt, kommutiert er mit allen anderen Operatoren. Geht man zu den chiralen Koordinaten und Impulsen über, so sind deren Vertauschungsrelationen unterbestimmt. Eine plausible Lösung des Problems besteht darin, daß man postuliert, daß

⁷ Es sei daran erinnert, daß man auch in der nichtrelativistischen Quantenmechanik, bei der Schrödingergleichung für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld, so vorgehen muß.

1. links- und rechtslaufende Größen miteinander kommutieren, und
2. links- und rechtslaufende Größen jeweils unter sich die gleichen Vertauschungsrelationen erfüllen.

Dies führt zu den Relationen⁸:

$$[x_L^i, p_L^i] = iG^{ij}, \quad [x_R^i, p_R^i] = iG^{ij}, \quad (4.20)$$

die wieder die kanonische Form haben. Wie in der nicht kompaktifizierten Theorie hat man ferner die folgenden Vertauschungsrelationen für die Oszillatoren:

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = m\delta_{m+n,0}G^{ij}, \quad [\tilde{\alpha}_m^i, \tilde{\alpha}_n^j] = m\delta_{m+n,0}G^{ij}. \quad (4.21)$$

Da die Operatoren in zwei miteinander kommutierende Familien, die der linkslaufenden und die der rechtslaufenden zerfallen, können wir den Fockraum der inneren Anregungen als Tensorprodukt zweier isomorpher Fockräume konstruieren

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_L \otimes \mathcal{F}_R \quad (4.22)$$

und betrachten zunächst nur $\mathcal{F}_L$. Der linkslaufende Grundzustand $|0\rangle_L$ wird durch

$$\mathbf{p}_L|0\rangle_L, \quad \alpha_m^i|0\rangle_L, \quad m > 0 \quad (4.23)$$

definiert. Durch Anwendung des Operators $e^{i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}_L}$ erhält man Eigenzustände $|\mathbf{k}_L\rangle$ des linkslaufenden Impulsoperators $\mathbf{p}_L$ mit dem Eigenwert $\mathbf{k}_L$:

$$p_L^i|\mathbf{k}_L\rangle \equiv p_L^i e^{i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}_L} |0\rangle = k_L^i e^{i\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}_L} |0\rangle \equiv k_L^i |\mathbf{k}_L\rangle. \quad (4.24)$$

Schwingungen in den internen Dimensionen erzeugt man durch Anwendung der Operatoren α_{-m}^i , $m > 0$. Da der Fockraum der rechtslaufenden Anregungen die gleiche Struktur hat, erzeugen die Vektoren

$$\alpha_{-m}^i \cdots \tilde{\alpha}_{-n}^j \cdots |(\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_R)\rangle \quad (4.25)$$

den Fockraum der inneren Anregungen. Durch Anwendung der Formeln (4.17), (4.18) auf die Eigenwerte des links- und rechtslaufenden Impulses,

$$k_L^i = \frac{1}{2}G^{ij}k_j - G^{ij}B_{jk}w^k + w^i, \quad k_R^i = \frac{1}{2}G^{ij}k_j - G^{ij}B_{jk}w^k - w^i, \quad (4.26)$$

sieht man, daß ein Zustand mit den Quantenzahlen $(\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_R)$ den Windungsvektor $\mathbf{w}$ und den internen Impuls $\mathbf{k}$ trägt. Wir können nun auch den zum Windungszahloperator W^i kanonisch konjugierten Operator V^i angeben⁹. Der Windungszahloperator selbst, sowie der Impulsoperator $\mathbf{p}$ und der Ortsoperator $\mathbf{x}$ sind bereits durch die Gleichungen (4.10), (4.17) und (4.18) festgelegt:

$$x^i = \frac{1}{2}(x_L^i + x_R^i), \quad W^i = \frac{1}{2}(p_L^i - p_R^i), \quad (4.27)$$

$$p^i = p_L^i + p_R^i + G^{ij}B_{jk}(p_L^k + p_R^k). \quad (4.28)$$

Den Operator V^i kann man durch Auflösen der Gleichung

$$\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}_L + \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{x}_R \stackrel{!}{=} \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{V} \quad (4.29)$$

bestimmen und erhält

$$V^i = x_L^i - x_R^i + G^{ij}B_{jk}(x_L^k + x_R^k). \quad (4.30)$$

⁸Manche Autoren definieren die chiralen Koordinaten ohne den Faktor $\frac{1}{2}$ in Formel (4.10), was zu einem Faktor $\frac{1}{2}$ in den Vertauschungsrelationen führt. Außerdem gibt es andere sinnvolle Möglichkeiten, die Nullmoden zu quantisieren [77]. Für unsere Zwecke ist die hier verwendete Standard-Variante am bequemsten.

⁹In der quantisierten Theorie bezeichnen $\mathbf{k}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ die Eigenwerte der Operatoren $\mathbf{p}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$.

Durch Nachrechnen mit Hilfe der Vertauschungsrelationen (4.20) erhält man tatsächlich

$$[x^i, p^j] = iG^{ij} = [V^i, W^j] \quad (4.31)$$

Der Operator

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{V})} = e^{i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{x}_L + \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{x}_R)} \quad (4.32)$$

erzeugt also Zustände mit Impuls $\mathbf{k}$ und Windung $\mathbf{w}$, die den chiralen Impulsen $\mathbf{k}_L$ und $\mathbf{k}_R$ entsprechen.

Das Impulsgitter

Aus der Quantentheorie ist bekannt, daß der Impulsoperator bei periodischen Randbedingungen, wie sie z.B. in der Festkörperphysik auftreten, ein diskretes Spektrum besitzt. Das Gleiche geschieht in der Stringtheorie bei toroidalen (also periodischen) Randbedingungen bezüglich der d kompaktifizierten Raumdimensionen. Wir haben sicherzustellen, daß der Vertexoperator, der die $(\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_R)$ -Eigenzustände erzeugt, wohldefiniert ist. Dieser Vertexoperator wird mit der quantisierten Version der Lösung der klassischen Bewegungsgleichungen mit toroidalen Randbedingungen konstruiert und enthält daher einen in σ linearen Anteil im Exponenten, der zu einer nicht-trivialen Bedingung führt:

$$e^{i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{X}_L(\tau, \sigma) + \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{X}_L(\tau, \sigma))} \stackrel{!}{=} e^{i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{X}_L(\tau, \sigma + \pi) + \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{X}_L(\tau, \sigma + \pi))} \Rightarrow e^{2\pi i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{p}_L - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{p}_R)} = 1 \quad (4.33)$$

Diese Bedingung gilt auf dem ganzen internen Fockraum, wenn sie für alle Zustände der Form $|(\mathbf{k}'_L; \mathbf{k}'_R)\rangle$ erfüllt ist, da die Impulsoperatoren mit den Oszillatoren vertauschen. Damit erhält man

$$e^{2\pi i(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{p}_L - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{p}_R)} |(\mathbf{k}'_L; \mathbf{k}'_R)\rangle \stackrel{!}{=} |(\mathbf{k}'_L; \mathbf{k}'_R)\rangle$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_R) \cdot (\mathbf{k}'_L; \mathbf{k}'_R) := \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{k}'_L - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{k}'_R \in \mathbb{Z} \quad (4.34)$$

Die Menge aller links- und rechtslaufenden Impulse der Theorie muß also bezüglich eines indefiniten Skalarproduktes mit der Signatur $(+)^d(-)^d$ ganzzahlig sein. Diese Menge ist daher diskret und bildet ein **ganzzahliges Gitter**¹⁰. Indem man die links- und rechtslaufenden Impulse durch die Impuls- und Windungszahlen ausdrückt, erhält man

$$(\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_R) \cdot (\mathbf{k}'_L; \mathbf{k}'_R) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{k}' + \mathbf{k} \cdot \mathbf{w}' \in \mathbb{Z}. \quad (4.35)$$

Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn alle Impulse ganzzahlige Skalarprodukte mit allen Windungsvektoren haben. *Beweis:* Die Bedingung ist notwendig, denn wenn man sie für einen beliebigen Impulseigenzustand ohne Windung ($\mathbf{w} = 0$) und einen beliebigen Windungseigenzustand ohne Impuls ($\mathbf{k}' = 0$) auswertet, erhält man

$$\forall \mathbf{w}' \in \Lambda : \mathbf{k} \cdot \mathbf{w}' \in \mathbb{Z}. \quad (4.36)$$

Die Bedingung ist offensichtlich auch hinreichend. Sie zeigt gleichzeitig, daß das Impulsgitter ein **gerades Gitter** ist, d.h. alle Skalarprodukte von Vektoren mit sich selbst sind bezüglich des indefiniten Skalarproduktes gerade Zahlen.

Damit ist gezeigt, daß die internen Impulse $\mathbf{k}$ in dem zum Raumgitter Λ dualen Gitter Λ^* liegen,

$$\mathbf{k} \in \Lambda^* : \Leftrightarrow \forall \mathbf{w} \in \Lambda : \mathbf{k} \cdot \mathbf{w} \in \mathbb{Z}, \quad (4.37)$$

genau wie das auch in der Festkörperphysik bei periodischen Randbedingungen der Fall ist¹¹. Die Komponenten k_i des Impulses bezüglich der dualen Gitterbasis $\{\mathbf{e}^{*i}\}$ sind ganzzahlig und zählen die Impulsquanten bezüglich der i -ten kompakten Raumrichtung.

¹⁰Die hier verwendeten Begriffe aus der Theorie euklidischer und pseudo-euklidischer Gitter werden in Anhang C erklärt.

¹¹Der Eindeutigkeit des Vertexoperators entspricht dabei die Forderung nach Eindeutigkeit der Wellenfunktion.

Wir können nun noch einen näheren Blick auf das Impulsgitter, d.h. durch das von den links- und rechtslaufenden Impulsen gebildete, 2d-dimensionale Gitter werfen. Es trägt eine indefinite Metrik der Signatur $(+)^d(-)^d$ und wird daher im folgenden als $\Gamma_{d;d}$ bezeichnet. Da jeder Vektor des Impulsgitters durch Windungs- und Impulsvektoren (sowie die Hintergrundfelder) ausgedrückt werden kann, liegt es nahe, eine Gitterbasis für $\Gamma_{d;d}$ ausgehend von den Gitterbasen von Λ und Λ^* zu konstruieren. An Hand der Formeln (4.14) kann man zeigen, daß die Vektoren

$$\mathbf{k}^i = \left(\frac{1}{2} \mathbf{e}^{*i}; \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*i} \right), \quad \bar{\mathbf{k}}_i = (\mathbf{e}_i + B_{ij} \mathbf{e}^{*j}; -\mathbf{e}_i + B_{ij} \mathbf{e}^{*j}), \quad i = 1, \dots, d, \quad (4.38)$$

eine **Z**-Basis von $\Gamma_{d;d}$ bilden. Ihre Skalarprodukte sind:

$$\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{k}^j = 0, \quad \mathbf{k}^i \cdot \bar{\mathbf{k}}_j = \delta_j^i, \quad \bar{\mathbf{k}}_i \cdot \bar{\mathbf{k}}_j = 0. \quad (4.39)$$

Wie man sieht, geht das B_{ij} -Feld nicht in die Skalarprodukte ein. Die Entwicklungskoeffizienten eines beliebigen Gittervektors bezüglich dieser Basis sind die (ganzzahligen) Impuls- und Windungsquantenzahlen:

$$(\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_L) = k_i \mathbf{k}^i + w^j \bar{\mathbf{k}}_j. \quad (4.40)$$

Mit Hilfe der Basis (4.38) kann man auch noch zeigen, daß das Impulsgitter nicht nur ganzzahlig und gerade, sondern auch **selbstdual** ist:

$$\Gamma_{d;d} = \Gamma_{d;d}^*. \quad (4.41)$$

Ein Blick auf die Skalarprodukte (4.39) zeigt nämlich, daß die Basisvektoren $\mathbf{k}^i$ und $\bar{\mathbf{k}}_i$ zueinander dual sind; die Selbstdualität ist also manifest. Die Selbstdualität ist eine sehr starke Eigenschaft, von der an vielen Stellen Gebrauch gemacht werden wird. Außerdem ist die Selbstdualität des Impulsgitters äquivalent zur modularen Invarianz der Zustandssumme [71]. Es stellt sich damit die Frage, ob wir mit unserer Konstruktion alle gerade selbstdualen Gitter vom Typ $(+)^d(-)^d$ erhalten können, denn **jedes** solche Gitter definiert eine konsistente Theorie (modulo der schon in der nicht-kompakten bosonischen Stringtheorie auftretenden Probleme). Um dies beantworten zu können, benutzen wir, daß selbstduale gerade Gitter mit nichteuklidischer Metrik nur existieren, wenn die Signatur modulo 8 verschwindet, dann aber, für feste Dimension und Signatur isometrisch sind [58]. Mit anderen Worten erhält man in unserem Fall alle zulässigen Impulsgitter aus einem gegebenen durch $O(d;d)$ -Transformationen. Drehungen des linken oder rechten Teiles des Gitters ändern aber die Physik des Modells nicht (der Fockraum bleibt derselbe) und Gitter, die sich nur um eine $O(d) \otimes O(d)$ -Transformationen unterscheiden, können identifiziert werden. Nur „Boosts“, die durch die Elemente des homogenen Raumes

$$\frac{O(d;d)}{O(d) \otimes O(d)} \quad (4.42)$$

repräsentiert werden, führen zu physikalisch inäquivalenten Modellen [58]. Später werden wir sehen, daß der Moduli-Raum der toroidalen Kompaktifizierungen nur lokal isomorph zu (4.42) ist. Die Dimension des Moduli-Raumes ist

$$\frac{1}{2} 2d(2d-1) - 2 \left(\frac{1}{2} d(d-1) \right) = d^2. \quad (4.43)$$

Da die Hintergrundfelder G_{ij} und B_{ij} zusammen gerade d^2 kontinuierliche Parameter enthalten, und (wie wir gleich sehen werden) diese Parameter voneinander unabhängig sind (in dem Sinne, daß die mit ihrer Änderung verbundenen Änderungen der Physik unabhängig voneinander sind) hat die oben durchgeführte Konstruktion tatsächlich alle konsistenten Kompaktifizierungen geliefert.

Den Prototyp für ein selbstduales gerades Gitter der Dimension $2d$ und Signatur 0 erhält man, wenn man speziell $B_{ij} = 0$ und $G_{ij} = \delta_{ij}$ setzt. Die Wahl der Gittermetrik entspricht der Wahl eines kubischen Einheitsgitters für Λ . Das so entstehende Impulsgitter besteht aus d Kopien

des zweidimensionalen pseudo-euklidischen Standard-Gitters $D_{1,1}$. Man erhält es als Spezialfall der Englert-Neveu-Konstruktion [58], indem man zwei Kopien des „Gewichtsgitters“¹² D_1 der zweifachen Überlagerungsgruppe $\text{Spin}(2)$ der $\text{SO}(2)$ nimmt, und die diagonale Kombinationen $(R; R)$, $(V; V)$, $(S; S)$ und $(C; C)$ der Konjugationsklassen wählt:

$$\Gamma_{d;d} = d \cdot D_{1,1}, \quad D_{1,1} = (D_1 D_1)_{(R;R),(V;V),(S;S),(C;C)}. \quad (4.44)$$

4.1.3 Untersuchung des Spektrums

Der Gesamt-Fockraum der kompaktifizierten Theorie ist das Produkt des im vorigen Abschnitt behandelten Fockraums der d kompaktifizierten **inneren Freiheitsgrade** mit dem Fockraum der $26-d$ nicht kompaktifizierten **Raum-Zeit-Freiheitsgrade**. In der kovarianten Operator-Quantisierung müssen die physikalischen Zustände die Virasoro-Bedingungen erfüllen. Änderungen gegenüber der nicht kompaktifizierten Theorie ergeben sich bei der Massenschalen- und bei der Balance-Relation

$$(L_0 + \tilde{L}_0 - 2)|\Phi\rangle = 0, \quad (L_0 - \tilde{L}_0)|\Phi\rangle = 0. \quad (4.45)$$

Die Operatoren $L_0, \tilde{L}_0$ können durch den RZ-Impulsoperator $\mathbf{p}_{RZ} = (p^\mu)_{\mu=0}^{26-d-1}$, die internen links- und rechtslaufenden Impulsoperatoren $\mathbf{p}_L, \mathbf{p}_R$ und die Anzahloperatoren $N, \tilde{N}$ ausgedrückt werden:

$$L_0 = \frac{1}{8}\mathbf{p}_{RZ}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{p}_L^2 + N, \quad (4.46)$$

$$\tilde{L}_0 = \frac{1}{8}\mathbf{p}_{RZ}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{p}_R^2 + \tilde{N}. \quad (4.47)$$

Die Begriffe Masse und Spin beziehen sich jetzt auf die $26-d$ dimensionale Raum-Zeit. Daraus ergibt sich mit $M^2 = -\mathbf{k}_{RZ}^2$ die **Massenformel**

$$\frac{1}{4}M^2 = \frac{1}{2}\mathbf{k}_R^2 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_L^2 + N + \tilde{N} - 2. \quad (4.48)$$

Die **Balanceformel**, die nur Zustände zuläßt, bei denen die rechts- und linkslaufenden Anregungen gleich viel zur Masse beitragen, lautet:

$$N + \frac{1}{2}\mathbf{k}_L^2 = \tilde{N} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_R^2. \quad (4.49)$$

Bemerkung: Da die Spektren der Anzahloperatoren ganzzahlig sind, muß $\mathbf{k}_L^2 - \mathbf{k}_R^2$ ebenfalls ganzzahlig sein. Auch hieraus folgt, daß das Impulsgitter ganzzahlig sein muß.

Die physikalischen Zustände, bzw. einen Satz von Repräsentanten, erhält man wieder durch die transversalen Moden, also in der Lichtkegleichung. Eine Basis für die transversalen Zustände ist

$$\alpha_{-m_1}^{a_1} \cdots \alpha_{-n_1}^{i_1} \cdots \tilde{\alpha}_{-k_1}^{b_1} \cdots \tilde{\alpha}_{-l_1}^{j_1} \cdots |(\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_R), \mathbf{k}_{RZ}\rangle, \quad m_i, n_i, k_i, l_i > 0. \quad (4.50)$$

Die transversalen RZ-Indizes a_i, b_i durchlaufen die Werte 1 bis $26-d-2$, die internen Indizes i_k, j_k die Werte 1 bis d . Den RZ-Impuls $\mathbf{k}_{RZ}$ werde ich in Zukunft bei der Angabe von Zuständen nicht mehr mitschreiben, da er aus der Massenformel jederzeit rekonstruiert werden kann.

Für die „Phänomenologie“ ist das masselose Spektrum maßgeblich, da die typische Massenskala für Anregungen die Planck-Masse ist. Die kontinuierlichen Symmetrien der effektiven Feldtheorie werden durch die masselosen Vektorbosonen der Stringtheorie festgelegt (da diese an erhaltene Ströme koppeln sollten). Daher soll nun das masselose Spektrum analysiert werden.

¹²Der Begriff des Gewichtsgitters ist eigentlich nur für nichtabelsche, halbeinfache Lie-Algebren definiert. Das D_1 -Gitter besteht aber aus allen halbganzen Zahlen, parametrisiert also die Darstellungen und Spinordarstellungen der Gruppe $\text{SO}(2)$. Näheres zu den in diesem Kapitel auftretenden Lie-Algebra-Gittern erfährt man in Anhang C.

Es gibt zwei Arten von masselosen Zuständen: Die erste Klasse existiert immer, unabhängig von der Wahl der Hintergrundfelder, und besteht aus Zuständen bei denen je ein links- und rechtslaufender Oszillator der niedrigsten Schwingungsmoden angewendet wird. Der links- und rechtslaufende Impuls, bzw. Windungszahl und innerer Impuls müssen dann verschwinden:

$$N = \tilde{N} = 1 \text{ und } M^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{k}_L = \mathbf{k}_R = 0 \Leftrightarrow \mathbf{w} = \mathbf{k} = 0. \quad (4.51)$$

Die generischen masselosen Zustände einer kompaktifizierten Theorie geschlossener bosonischer Strings sind damit:

Zustände	SO(24-d)-Darstellungen	Interpretation
$\alpha_{-1}^a \tilde{\alpha}_{-1}^b (0; 0)\rangle$	Spurfreier symmetrischer Tensor, antisymmetrischer Tensor 2. Stufe, Skalar	Graviton, antisymmetrischer Tensor, Dilaton
$\alpha_{-1}^a \tilde{\alpha}_{-1}^j (0; 0)\rangle$	d Vektoren	$U(1)^d$ -Eichbosonen
$\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^b (0; 0)\rangle$	d Vektoren	$U(1)^d$ -Eichbosonen
$\alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j (0; 0)\rangle$	d^2 Skalare	d^2 Skalare

Der „Spin“ eines Zustandes wird durch die kleine Gruppe, also bei masselosen Zuständen durch die transversale Drehgruppe $SO(24-d)$, definiert. Betrachtet man speziell eine vierdimensionale Raum-Zeit, also $d = 22$, so hat das Graviton zwei Komponenten mit den Helizitäten ± 2 und der antisymmetrische Tensor hat eine Komponente und ist äquivalent zu einem Pseudoskalar¹³. Für ihn hat sich die Bezeichnung Axion¹⁴ eingebürgert. Durch die Kompaktifizierung haben sich die gemischten Komponenten des 26-dimensionalen Gravitons in $2d$ masselose Vektorbosonen verwandelt. Dieser Effekt ist typisch für die Kompaktifizierung höherdimensionaler Gravitationstheorien und tritt auch in normalen Feldtheorien auf. Daher stammt die Bezeichnung als Kaluza-Klein-Bosonen. Die Interpretation als Eichbosonen wird weiter unten durch die Konstruktion einer Darstellung der Eichgruppe gerechtfertigt. Die generische Eichgruppe einer geschlossenen bosonischen Stringtheorie mit d kompakten Dimensionen ist also

$$G = G_L \otimes G_R = U(1)^d \otimes U(1)^d. \quad (4.52)$$

Die zweite Klasse von masselosen Zuständen ergibt sich aus den drei weiteren Lösungen der Gleichung $M^2 = 0$

$$\begin{aligned} &N = 0, \quad \mathbf{k}_L^2 = 2, \quad \tilde{N} = 1, \quad \mathbf{k}_R = 0 \\ \text{oder} \quad &N = 1, \quad \mathbf{k}_L = 0, \quad \tilde{N} = 0, \quad \mathbf{k}_R^2 = 2 \\ \text{oder} \quad &N = 0, \quad \mathbf{k}_L^2 = 2, \quad \tilde{N} = 0, \quad \mathbf{k}_R^2 = 2. \end{aligned} \quad (4.53)$$

¹³Die Parität eines Zustandes ergibt sich aus der Kenntnis der vorliegenden Tensordarstellung der $SO(3)$ [146]. Die masselosen Darstellungen der $ISO(1,3)$ müssen dazu in massive eingebettet werden. Physikalisch entspricht dies der Hinzunahme eines Massenterms. Dadurch erhöht sich die Zahl der Freiheitsgrade und man erhält statt der betrachteten $SO(2)$ -Darstellung die durch sie induzierte $SO(3)$ -Darstellung. Die zusätzlichen Freiheitsgrade entkoppeln im Limes verschwindender Masse. Im hier vorliegenden Fall liefert die Einbettung der antisymmetrischen Tensordarstellung der $SO(2)$ den antisymmetrischen Tensor zweiter Stufe der $SO(3)$, mit drei Komponenten. Diese Darstellung ist zur Vektordarstellung der $SO(3)$ äquivalent, transformiert aber unter Paritätstransformationen mit einem zusätzlichen Vorzeichen. Der Ersatzvektor für einen antisymmetrischen Tensor ist ein Axialvektor. Geht man jetzt wieder zu Darstellungen der $SO(2)$ über, so entkoppeln die Komponenten mit den Helizitäten ± 1 . Übrig bleibt die Komponente mit Helizität 0, die unter Paritätstransformationen mit einem zusätzlichen Vorzeichen transformiert, also ein Pseudoskalar.

¹⁴Durch das Studium der vierdimensionalen effektiven Feldtheorie und der String-Propagation in nichtkonstanten Hintergrundfeldern kann gezeigt werden, daß dieses Feld wie ein Peccei-Quinn-Axion an den Yang-Mills-Sektor koppelt. Seine Anwesenheit im Gravitationsmultiplett ist Teil eines subtilen Mechanismus, der (sowohl in zehn als auch in vier Dimensionen) die Anomaliefreiheit der Theorie garantiert. In Folge der axionischen Kopplung erhält es durch Instanton-Beiträge eine Masse, die in unserer Formulierung nicht festgestellt werden kann. (Ähnliches gilt für das Dilaton.) Siehe [1].

Diesen Zuständen ist gemeinsam, daß sie nichtverschwindende Windungs- und Impuls-Quantenzahlen tragen. Die Bedingung für masselose Zustände kann nur erfüllt werden, wenn entsprechende Vektoren im Impulsgitter existieren. Daher existieren sie nur, wenn die Hintergrundfelder G_{ij} und B_{ij} , bzw. das Raumgitter Λ und das B_{ij} -Feld, bzw. das Impulsgitter $\Gamma_{d,d}$ auf spezielle Weise gewählt werden. Die zugehörigen Werte der Hintergrundfelder werden als kritische Werte bezeichnet. Im nächsten Kapitel werde ich ein systematisches Verfahren zur Konstruktion kritischer Hintergrundfelder angeben.

Der erste Typ von nichtgenerischen masselosen Zuständen existiert, wenn das Impulsgitter Vektoren der Form

$$(\mathbf{k}_L; 0), \text{ mit } \mathbf{k}_L^2 = 0 \quad (4.54)$$

enthält. Die Zustände sind:

Zustände	SO(24-d)-Darstellungen	Interpretation
$\tilde{\alpha}_{-1}^a (\mathbf{k}_L; 0)\rangle$	Vektor	Eichboson mit der Ladung $\mathbf{k}_L$
$\tilde{\alpha}_{-1}^i (\mathbf{k}_L; 0)\rangle$	d Skalare	d Skalare mit der Ladung $\mathbf{k}_L$, Higgsteilchen

Es treten zusätzliche Eichbosonen auf, die diskrete ladungsartige Quantenzahlen, nämlich Impuls und Windung, tragen. Dies ist ein stringspezifischer Effekt, da bei punktförmigen Teilchen keine Windungszustände existieren. Die Quantenzahlen können tatsächlich mit denen von Eichbosonen in einer nichtabelschen Eichtheorie identifiziert werden. Dies sieht man wie folgt: Die Vektoren $(\mathbf{k}_L; 0)$ liegen in dem ganzzahligen Gitter $\Gamma_{d,d}$; daher sind insbesondere alle Skalarprodukte der $\mathbf{k}_L$ untereinander ganzzahlig, denn

$$(\mathbf{k}_L; 0) \cdot (\mathbf{k}'_L; 0) = \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{k}'_L. \quad (4.55)$$

wobei auf der linken Seite das indefinite Skalarprodukt auf dem Impulsgitter, auf der rechten Seite das euklidische Skalarprodukt auf der linken Teilgitter gebildet wird. Da weiter $\mathbf{k}_L^2 = 2$ ist, nehmen diese Skalarprodukte nur die Werte $0, \pm 1, \pm 2$ an. (Hier kann die Schwarzsche Ungleichung verwendet werden, da das Skalarprodukt auf dem betrachteten Teilraum positiv definit ist.) Damit folgt, daß das von den $\mathbf{k}_L$ erzeugte euklidische Untergitter das Wurzelgitter Γ_R einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist; die $\mathbf{k}_L$ sind die Wurzeln, d.h. die Ladungen (Eigenwertvektoren) der adjungierten Darstellung¹⁵. Dies rechtfertigt die Bezeichnung der zusätzlichen Vektorbosonen als geladene Eichbosonen. Der Rang l der Eichgruppe ist durch die maximale Zahl linear unabhängiger Wurzeln gegeben. Offensichtlich ist

$$1 \leq l = \text{Rang}(\mathfrak{g}) \leq d. \quad (4.56)$$

Die Zahl l ist zugleich die Dimension des Wurzelgitters. Die diesen Richtungen zugeordneten l ungeladenen Eichbosonen vervollständigen die adjungierte Darstellung. Die vergrößerte Eichgruppe, bzw. ihr linker Anteil, ist

$$\mathbf{G}_L = \mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{d-l}, \quad (4.57)$$

wobei $\mathbf{G}^{(l)}$ eine halbeinfache, reelle, kompakte Lie-Gruppe vom Rang l ist. Da die Wurzeln aufgrund der Bedingung für masselose Zustände alle die gleiche Länge haben, gehört die Gruppe zum „einfach verbundenen“ (simply laced) Typ. Ihre (komplexifizierte) Lie-Algebra ist eine direkte Summe von einfachen komplexen „ADE“-Lie-Algebren $A_l, l \geq 1, D_l, l \geq 2, E_6, E_7$, oder E_8 . Zusammen mit den Eichbosonen treten masselose Skalare auf, die ebenfalls nach der adjungierten Darstellung der Eichgruppe transformieren. Wenn die erhöhte Symmetrie durch eine kleine Deformation der Hintergrundfelder gestört wird, werden einige Vektorbosonen massiv und die Skalare mit den gleichen Quantenzahlen werden von ihnen „gefressen“, d.h. sie

¹⁵Die relevanten Aussagen über Lie-Algebren und ihre Wurzel- und Gewichtsgitter sind in den Anhängen B und C zusammengestellt.

verwandeln sich in den longitudinalen Freiheitsgrad des Vekorteilchens. Wir interpretieren die Skalare daher als Higgs-Teilchen (s.u.).

Die Diskussion der Zustände mit Quantenzahlen $(0; \mathbf{k}_R)$ verläuft genau analog. Wir können darüber hinaus zeigen, daß im rechten Teilgitter genau dieselben Wurzeln auftreten müssen wie im linken. *Beweis:* Das Impulsgitter ist selbstdual, d.h. ein Vektor liegt genau dann im Gitter, wenn er mit allen Gittervektoren ein ganzzahliges Skalarprodukt hat. Es reicht natürlich, diese Eigenschaft an Hand einer Gitterbasis nachzuprüfen. Hat aber ein Vektor $(\mathbf{k}; 0)$ ein ganzzahliges Skalarprodukt mit den Basisvektoren $\mathbf{k}^i$, $\bar{\mathbf{k}}_i$ so auch der Vektor $(0; \mathbf{k})$ und umgekehrt:

$$\Gamma_{d,d} = \Gamma_{d,d}^* \implies (\mathbf{k}; 0) \in \Gamma_{d,d} \Leftrightarrow (0; \mathbf{k}) \in \Gamma_{d,d}. \quad (4.58)$$

Also enthalten insbesondere das linke und rechte Teilgitter die gleichen Wurzeln, qed.

Damit folgt auch, daß die linke und die rechte Eichgruppe isomorph sind. Die erweiterte Eichgruppe ist

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_L \otimes \mathbf{G}_R = \mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{d-l} \otimes \mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{d-l}. \quad (4.59)$$

Der dritte Typ von nichtgenerischen masselosen Zuständen besteht aus Impuls- / Windungszuständen ohne Oszillatoren

Zustände	SO(24-d)-Darstellungen	Interpretation
$ (\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_R)\rangle$	Skalare	Higgsteilchen

Bei Modellen mit erhöhter Eichsymmetrie erhält man für jedes Paar von linken und rechten Wurzeln einen weiteren masselosen Skalar. Alle masselosen Teilchen, ohne das Dilaton, bilden eine irreduzible Darstellung der Eichgruppe, die isomorph zum direkten Produkt der adjungierten Darstellungen der linken und rechten Komponente ist¹⁶.

4.1.4 Der Higgs-Effekt

Durch $O(d) \otimes O(d)$ -Transformationen können Wurzeln $(\mathbf{k}_L; 0)$, $\mathbf{k}_L^2 = 2$ des Gitters kontinuierlich in Gittervektoren der Form $(\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_R)$ mit $\mathbf{k}_L^2 - \mathbf{k}_R^2 = 2$ deformiert werden. Das der Wurzel zugeordnete Eichboson wird dadurch massiv:

$$\tilde{\alpha}_{-1}^a |(\mathbf{k}_L; 0)\rangle \longrightarrow \tilde{\alpha}_{-1}^a |(\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_R)\rangle, \text{ mit } M^2 = 4\frac{1}{2}\mathbf{k}_R^2 = 2\mathbf{k}_R^2. \quad (4.60)$$

Da gleichzeitig die d Skalare $\tilde{\alpha}_{-1}^i |(\mathbf{k}_L^2; 0)\rangle$ die gleiche Masse erhalten,

$$\tilde{\alpha}_{-1}^i |(\mathbf{k}_L; 0)\rangle \longrightarrow \tilde{\alpha}_{-1}^i |(\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_R)\rangle, \text{ mit } M^2 = 2\mathbf{k}_R^2, \quad (4.61)$$

wurden sie oben bereits als Higgsteilchen interpretiert. In der Lichtkegel-Formulierung ist allerdings nicht klar, welcher der Skalare sich in den longitudinalen Freiheitsgrad des Eichbosons verwandelt. Um die Zustände in Multipletts der kleinen Gruppe massiver Zustände, der $SO(25-d)$, einzuordnen, müssen wir zur kovarianten Formulierung übergehen und betrachten die Zustände

$$\xi_\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\mu |(\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_R)\rangle, \quad \mu = 0, \dots, 24-d \quad (4.62)$$

und

$$\xi_i \tilde{\alpha}_{-1}^i |(\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_R)\rangle, \quad i = 1, \dots, d. \quad (4.63)$$

(Linearkombinationen von $\tilde{\alpha}_{-1}^\mu$ und $\tilde{\alpha}_{-1}^i$ sind keine Zustände, weil sie unterschiedliche $26-d$ dimensionale Spins mischen.) Die Auswertung der Polarisationsbedingung $\tilde{L}_{-1}|\Phi\rangle = 0$ liefert die Transversalitätsbedingungen

$$\xi_\mu \mathbf{k}_{RZ}^\mu = 0 \text{ bzw. } \xi_i \mathbf{k}^i = 0 \quad (4.64)$$

¹⁶Das Tensorprodukt einer irreduziblen Darstellung einer Gruppe $\mathbf{G}$ mit sich selbst ist als Darstellung von $\mathbf{G}$ im allgemeinen reduzibel, aber als Darstellung von $\mathbf{G} \otimes \mathbf{G}$ irreduzibel. Die adjungierte Darstellung eines direkten Produktes ist die direkte Summe der adjungierten Darstellungen der Faktoren.

Die erste dieser kovarianten Nebenbedingungen eliminiert den Spin 0 Anteil des $SO(26 - d)$ Vektors $\tilde{\alpha}_{-1}^\mu$. Übrig bleiben die $25 - d$ Komponenten eines massiven Vektors. Die zweite Nebenbedingung zeigt, daß von den d massiven Skalaren, die einen Vektor bezüglich der internen $SO(d)$ -Gruppe (der Tangentialraumgruppe des internen d -dimensionalen RZ-Torus) bilden, nur die $d - 1$ transversalen Kombinationen physikalisch sind. In der Lichtkegeleichung werden die zwei Polarisationsbedingungen durch die Eliminierung von zwei Raumdimensionen ersetzt. Durch Vergleich beider Formulierungen schließen wir, daß der longitudinale Freiheitsgrad des massiven Vektors dabei in die longitudinale Kombination der internen Skalare übergeht¹⁷.

Die Äquivalenz der Virasoro-Bedingungen mit der Lichtkegeleichung ist ein Spezifikum der Stringtheorie und die Durchführung des Beweises ist sehr aufwendig. Vom Standpunkt normaler Feldtheorien aus ist es überraschend, daß auch das massive Spektrum einer Lorentz-kovarianten Theorie rein transversal sein kann.

4.1.5 Die Dualitätssymmetrie

Das Spektrum einer kompaktifizierten Stringtheorie besitzt eine Symmetrie, die sich am leichtesten am Beispiel der eindimensionalen Kompaktifizierung aufspüren läßt. Die hier auftretenden eindimensionalen Impuls- und Windungsvektoren können durch den Radius R der internen Dimension und durch die Impuls- und die Windungsquantenzahl parametrisiert werden.

$$\mathbf{k} = \frac{k}{R}, \quad \mathbf{w} = wR, \quad k, w \in \mathbf{Z}. \quad (4.65)$$

Der Radius ist offensichtlich der einzige kontinuierliche Parameter (Modulus) einer eindimensionalen Kompaktifizierung. Setzt man diese Parametrisierung in die Massenformel ein, so erhält man

$$\frac{1}{4}M^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{k}{R} + Rw \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{k}{R} - Rw \right)^2 + N + \tilde{N} - 2. \quad (4.66)$$

Die Massenformel ist manifest invariant unter der diskreten Transformation [37]

$$R \rightarrow \frac{1}{2R}, \quad w \leftrightarrow k, \quad (4.67)$$

bei der große auf kleine Abstände abgebildet und Impuls- und Windungsquantenzahlen gegeneinander ausgetauscht werden. Der Fixpunkt dieser **Dualitätstransformation** ist

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \quad (4.68)$$

Da jede Kompaktifizierung auf einem Kreis mit Radius $R < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ zu einer Kompaktifizierung mit $R > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ äquivalent ist, ist die geometrische Interpretation zweideutig. Der kritische Radius $R = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist von der Ordnung der Planck-Länge und wird daher als die kleinste in der Stringtheorie sinnvolle Längeneinheit gedeutet.

Die Dualitätssymmetrie läßt sich auf mehrdimensionale toroidale Kompaktifizierungen verallgemeinern [37]. Dort existieren weitere diskrete Symmetrietransformationen. Insgesamt besitzt der Narain-Modulraum die diskrete Symmetriegruppe

$$\frac{O(d, d; \mathbf{Z})}{O(d; \mathbf{Z}) \otimes O(d, \mathbf{Z})}, \quad (4.69)$$

die meist als „modulare Gruppe des Target-Raumes“ bezeichnet wird.

Die Dualitätssymmetrie tritt auch in allgemeineren Stringkompaktifizierungen auf und ist in den letzten Jahren sehr intensiv untersucht worden. Dabei bemüht man sich herauszufinden, ob sie wirklich eine fundamentale Symmetrie der Stringtheorie ist, und die Symmetriegruppen

¹⁷Die Kompaktifizierung einer 26-dimensionalen massiven Vektordarstellung würde ein anderes Resultat ergeben, nämlich einen massiven Vektor und d zusätzliche Skalare. Dies illustriert noch einmal, daß Windungszustände ein Spezifikum der Stringtheorie sind.

der Moduliräume allgemeinerer Kompaktifizierungen explizit zu bestimmen. Aus der Dualitätssymmetrie können im Rahmen effektiver Feldtheorien Konsistenzbedingungen hergeleitet werden, die auch von phänomenologischem Interesse sind, da sie sagen, auf welche Weise man das Standard-Modell nicht aus der Stringtheorie herleiten kann.

4.1.6 Der Frenkel–Kac–Konstruktion

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß auf dem Fockraum einer kompaktifizierten Stringtheorie eine Darstellung der an Hand des Spektrums identifizierten Eichgruppe $\mathbf{G} = \mathbf{G}_L \otimes \mathbf{G}_R$ realisiert ist. Wir betrachten oBdA nur den linkslaufenden kompaktifizierten Sektor und zeigen als erstes, daß die Eichgruppe mindestens $\mathbf{G}_L = U(1)^d$ ist. Die Konstruktion der Darstellung erfolgt mit Hilfe des euklidischen Operatorkalküls¹⁸.

Zunächst erinnern wir uns daran, daß die Ströme

$$H^\mu(z) := i\partial_z X^\mu(z), \quad \mu = 1, \dots, d \quad (4.70)$$

die OPE

$$H^\mu(z) H^\nu(w) = \frac{\delta^{\mu\nu}}{(z-w)^2} \quad (4.71)$$

erfüllen. (Die Indizes μ, ν beziehen sich auf eine Orthonormalbasis für die d kompaktifizierten Dimensionen.) Durch Kurvenintegrale definiert man nun die Ladungen

$$H_m^\mu := \oint_{z=0} \frac{dz}{2\pi i} H^\mu(z) z^m = \alpha_m^\mu, \quad m \in \mathbf{Z}, \quad (4.72)$$

deren Vertauschungsrelationen

$$[H_m^\mu, H_n^\nu] = m\delta_{m+n,0} \delta^{\mu\nu} \quad (4.73)$$

sind. Diese Algebra ist offensichtlich $\mathbf{Z}$ -graduiert. Die Grad-0-Unteralgebra ist die d -dimensionale abelsche Lie-Algebra $u(1)^d$:

$$[H_0^\mu, H_0^\nu] = 0. \quad (4.74)$$

Die durch die Relationen (4.73) definierte unendlich dimensionale Lie-Algebra ist eine zentrale Erweiterung $\widehat{u}(1)^d$ der Loop-Algebra $\widetilde{u}(1)^d$, d.h. der Lie-Algebra der Gruppe $\text{Diff}(S^1, U(1)^d)$ [157], [150]:

$$\widehat{u}(1)^d = \widetilde{u}(1)^d \oplus \langle k \rangle. \quad (4.75)$$

Auf dem Fockraum wird das zentrale Element k durch den Einheitsoperator dargestellt, d.h. es handelt sich um eine Level-1-Darstellung (siehe auch Anhang B). Die Virasoro-Algebra wird in unserer Theorie auf eine spezielle Weise realisiert, nämlich mit Hilfe einer Darstellung der erweiterten chiralen Algebra $\widehat{u}(1)^d$. Die Virasoro-Generatoren sind bilineare Ausdrücke in den H_m^μ (vgl. (2.53)):

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^d \sum_{n \in \mathbf{Z}} : H_{m+n}^\mu H_{-n}^\mu :. \quad (4.76)$$

Die Virasoro-Algebra und die $\widehat{u}(1)^d$ bilden eine semidirekte Summe, wobei die Virasoro-Algebra gemäß

$$[L_m, H_n^\mu] = -n H_{m+n}^\mu \quad (4.77)$$

auf der chiralen Algebra operiert. Die Grad-0-Unteralgebra $u(1)^d$ kommutiert sogar mit der Virasoro-Algebra,

$$[L_m, H_0^\mu] = 0 \quad (4.78)$$

¹⁸In die früher abgeleiteten Formel sind jetzt die links- und rechtslaufende Impulse der kompaktifizierten Theorie einzusetzen.

und ist daher eine Symmetrie-Algebra, d.h. sie besteht aus Symmetrie-Transformationen des physikalischen Spektrums. Da

$$H_L^\mu = \alpha_0^\mu = p_L^\mu \quad (4.79)$$

ist, ist die Ladung eines Zustandes durch den linkslaufenden Impuls $\mathbf{k}_L$ gegeben. Diese Ladung kann durch die diskreten Windungs- und Impulsquantenzahlen ausgedrückt werden.

In einem weiteren Schritt kann man auch noch durch die Berechnung von Korrelationsfunktionen die Wechselwirkung der Eichbosonen $\alpha_{-1}^\mu|\mathbf{k}\rangle$, $\mathbf{k}^2 = 0$ mit geladenen Zuständen untersuchen. In führender Ordnung in α' erhält man die gleiche Kopplung wie in einer abelschen Eichtheorie, was die Bezeichnung Eichboson endgültig rechtfertigt. Genau wie beim Graviton gibt es höhere, String-spezifische Korrekturen [1].

Bemerkung: Die WF-Felder $H^\mu(z)$ sind erhaltene Ströme, denn aus der euklidischen Bewegungsgleichung

$$\Delta X^\mu(z, \bar{z}) = \partial_z \partial_{\bar{z}} X^\mu(z, \bar{z}) = 0 \quad (4.80)$$

folgt, daß die chiralen Ströme $\partial_z X^\mu(z)$ und $\partial_{\bar{z}} X^\mu(\bar{z})$ divergenzfrei, also „erhalten“ sind. Die Größen H_m^μ sind die zugehörigen erhaltenen Ladungen, denn die Integration entlang einem Kreis $|z| = \text{const.}$ entspricht einer Integration über eine zeitartige Hyperfläche in der Minkowski-Formulierung.

In der euklidischen Formulierung ist es bequem, den Differentialformen-Kalkül zu verwenden. Die erhaltenen Ströme repräsentieren dann komplexe $(1,0)$ bzw. $(0,1)$ -Formen:

$$\partial X^\mu(z) = \partial_z X^\mu(z) dz, \quad \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) = \partial_{\bar{z}} X^\mu(\bar{z}) d\bar{z}. \quad (4.81)$$

Aus der Bewegungsgleichung folgt, daß sie geschlossen sind

$$\Delta X^\mu(z, \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \partial \bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) = 0 \Rightarrow d\partial X^\mu = d\bar{\partial} X^\mu = 0. \quad (4.82)$$

Durch die Singularitäten in $z = 0$ sind sie aber in Umgebungen von 0 nicht exakt. Die Integration entlang von Wegen, die $z = 0$ einmal im positiven Sinn umschließen, liefert daher nicht 0, sondern das Residuum.

Wir kommen nun zur Frenkel-Kac-Konstruktion [140] (siehe auch [150] und [40]), mit der man die Darstellung einer vergrößerten nichtabelschen Eichgruppe $\mathbf{G}_L = \mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{d-l}$ konstruieren kann, wenn das linke Impulsgitter ein l -dimensionales Wurzelgitter $\Gamma_R(\mathbf{g}^{(l)})$ enthält. Die Wurzeln der Lie-Algebra $\mathbf{g}^{(l)}$ seien die Vektoren

$$\Delta = \{\mathbf{k}, 1, \dots\} = \{\mathbf{k} | \mathbf{k}^2 = 2 \text{ und } (\mathbf{k}; 0) \in \Gamma_{d,d}\}. \quad (4.83)$$

Aus Δ kann eine maximal linear unabhängige Menge aus l **einfachen Wurzeln** ausgewählt werden:

$$\Pi = \{\alpha_i | i = 1, \dots, l\}. \quad (4.84)$$

Die Vertexoperatoren $:\exp(i\mathbf{k}\mathbf{X}(z)):$ der geladenen Eichbosonen $|(\mathbf{k}; 0)\rangle$ haben für $\mathbf{k}^2 = 2$ das konforme Gewicht 1. Wir können daher versuchen sie als die erhaltenen Ströme der vergrößerten Eichsymmetrie aufzufassen. Die OPE mit den Strömen $H^\mu(z)$ zeigt, daß es sich um geladene Ströme mit den Ladungen $\mathbf{k} \in \Delta$ handelt:

$$\mathbf{H}(z) e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}(w)} = \mathbf{k} \frac{1}{z-w} e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}(w)} + \dots \quad (4.85)$$

Die natürlichen Kandidaten für die Generatoren der erweiterten chiralen Algebra sind

$$A_m^{\mathbf{k}} = \oint_{z=0} \frac{dz}{2\pi i} e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}(w)} z^m, \quad (4.86)$$

wobei die Operatoren $A_0^{\mathbf{k}}$ die Wurzelgeneratoren der nichtabelschen halbeinfachen Lie-Algebra $\mathbf{g}^{(l)}$ sein sollten. Um diese Vermutung zu prüfen, ist es hinreichend, die Chevalley-Generatoren $H^{\alpha_i}, E^{\alpha_i}, E^{-\alpha_i}$ $i = 1, \dots, l$ zu konstruieren. Hierzu betrachten wir die Ströme $H^{\alpha_i}(z) = \alpha_i \cdot \mathbf{H}(z)$ und $:\exp(i\alpha_i \mathbf{X}(z)):$. Aus der OPE

$$H^{\alpha_i}(z) e^{i\alpha_j \cdot \mathbf{X}(w)} = \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{z-w} e^{i\alpha_j \cdot \mathbf{X}(w)} + \dots \quad (4.87)$$

folgen die Vertauschungsrelationen

$$[H_m^{\alpha_i}, A_n^{\alpha_j}] = (\alpha_i \cdot \alpha_j) A_{m+n}^{\alpha_j} \quad (4.88)$$

und die entsprechenden Relationen für die $A_n^{-\alpha_j}$.

Da $(\alpha_i \cdot \alpha_j)_{i,j=1}^l$ die Cartan-Matrix der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}^{(l)}$ ist, erhält man für $m = 0 = n$ die richtigen Vertauschungsrelationen zwischen den Cartan-Generatoren $H_0^{\alpha_i}$ und den Wurzel-Generatoren von $\mathfrak{g}^{(l)}$ bezüglich einer Chevalley-Basis. Damit bleiben nur noch die Vertauschungsrelationen der Wurzel-Generatoren untereinander zu prüfen. Die OPE der geladenen Ströme untereinander sind

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}(z)} \cdot e^{i\mathbf{l}\mathbf{X}(w)} = (z-w)^{\mathbf{k}\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{X}(w)} + \dots \text{ für } |z| > |w|, \quad (4.89)$$

$$e^{i\mathbf{l}\mathbf{X}(w)} \cdot e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}(z)} = S(\mathbf{k}, \mathbf{l}) (z-w)^{\mathbf{k}\mathbf{l}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{l})\mathbf{X}(w)} \dots \text{ für } |z| < |w|, \quad (4.90)$$

$$(4.91)$$

mit $S(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = (-1)^{\mathbf{k}\mathbf{l}}$. Falls das Skalarprodukt $\mathbf{k}\mathbf{l}$ ungerade ist, ist die OPE nicht symmetrisch, sondern antisymmetrisch unter Vertauschung der Argumente. In diesem Fall erhält man keine Vertauschungs- sondern Antivertauschungsrelationen zwischen den Generatoren

$$A_m^{\mathbf{k}} A_n^{\mathbf{l}} - (-1)^{\mathbf{k}\mathbf{l}} A_n^{\mathbf{l}} A_m^{\mathbf{k}} = \begin{cases} A_{m+n}^{\mathbf{k}+\mathbf{l}}, & \text{falls } \mathbf{k}\mathbf{l} = -1, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_{m+n} + m\delta_{m+n, 0}, & \text{falls } \mathbf{k}\mathbf{l} = -2, \\ 0, & \text{falls } \mathbf{k}\mathbf{l} = 0, 1, 2. \end{cases} \quad (4.92)$$

Um zu Vertauschungsrelationen zu gelangen muß man Operatoren $c(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \Delta$ finden, die die Gleichung

$$c(\mathbf{k})c(\mathbf{l}) = S(\mathbf{k}, \mathbf{l})c(\mathbf{l})c(\mathbf{k}) \quad (4.93)$$

erfüllen, denn dann besitzen die modifizierten Vertexoperatoren

$$E(\mathbf{k}, z) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}(z)} c(\mathbf{k}) \quad (4.94)$$

eine symmetrische OPE. Eine Lösung der Gleichung (4.93) ist äquivalent zu dem gruppentheoretischen Problem eine zentrale Erweiterung $(\hat{\Gamma}_R, \cdot)$ des Wurzelgitters $(\Gamma_R, +) \simeq (\mathbf{Z}^l, +)$ mit gruppentheoretischem Kommutator $S(\mathbf{k}, \mathbf{l})$, $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \Gamma_R$ zu finden [140] (siehe auch Anhang A). Der Kern der Erweiterung ist die (multiplikativ geschriebene) Gruppe $(\mathbf{Z}_2, \cdot)$. Die (nichtabelsche) Multiplikation in $\hat{\Gamma}_R$ hängt mit der Addition in Γ durch einen 2-Kozykel $\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ zusammen:

$$c(\mathbf{k})c(\mathbf{l}) = \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l})c(\mathbf{k}+\mathbf{l}), \quad \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l})\epsilon(\mathbf{l}, \mathbf{k})^{-1} = S(\mathbf{k}, \mathbf{l}). \quad (4.95)$$

Der Kommutator $S(\cdot, \cdot)$ und der Kozykel $\epsilon(\cdot, \cdot)$ nehmen Werte in der zentralen $\mathbf{Z}_2$ -Untergruppe von $\hat{\Gamma}$ an.

Sobald diese Konstruktion geglückt ist, kann die OPE der modifizierten Vertexoperatoren berechnet werden:

$$E(\mathbf{k}, z) E(\mathbf{l}, w) = (z-w)^{\mathbf{k}\mathbf{l}} \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l}) E(\mathbf{k}+\mathbf{l}, w) + \dots \text{ für } |z| \neq |w| \text{ mit } \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l}) = \pm 1. \quad (4.96)$$

Die Vertauschungsrelationen für die zugehörigen Moden $E_m^{\mathbf{k}}$ sind

$$[E_m^{\mathbf{k}}, E_n^{\mathbf{l}}] = \begin{cases} \epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l}) E_{m+n}^{\mathbf{k}+\mathbf{l}}, & \text{falls } \mathbf{k}\mathbf{l} = -1, \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{H}_{m+n} + m\delta_{m+n, 0}, & \text{falls } \mathbf{k}\mathbf{l} = -2, \\ 0, & \text{falls } \mathbf{k}\mathbf{l} = 0, 1, 2, \end{cases} \quad (4.97)$$

und

$$[H_m^{\alpha_i}, E_n^{\mathbf{k}}] = (\alpha_i \cdot \mathbf{k}) E_{m+n}^{\mathbf{k}}. \quad (4.98)$$

Um zu zeigen, daß die Operatoren $E_0^{\mathbf{k}}$ Wurzelgeneratoren von $\mathfrak{g}^{(l)}$ sind, ist es hinreichend, die $3l$ Chevalley-Generatoren anzugeben. Wir brauchen nur noch die Vertauschungsrelationen der Operatoren $E_0^{\pm\alpha_i}$ zu prüfen (siehe B.1.14):

$$[E_0^{\alpha_i}, E_0^{-\alpha_j}] = \delta_{ij} H_0^{\alpha_i}, \quad (\text{ad} E_0^{\alpha_i})^{1-C_{ij}} E_0^{\alpha_j} = 0, \quad i \neq j, \quad (\text{ad} E_0^{-\alpha_i})^{1-C_{ij}} E_0^{-\alpha_j} = 0, \quad i \neq j. \quad (4.99)$$

Dabei ist $C_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j$ die Cartan-Matrix. Statt die Kommutatoren auszuführen, ist es bequemer, die entsprechenden OPE zu betrachten. Beiträge zu Kommutatoren können nur durch Pole 1. Ordnung erzeugt werden. Berücksichtigt man noch die Skalarprodukte der einfachen Wurzeln untereinander, so sieht man mit Hilfe von (4.91), daß alle Bedingungen für $i \neq j$ erfüllt sind. Im Falle $i = j$ stellt nur die erste Gleichung eine Bedingung. Die OPE beginnt in diesem (und nur in diesem) Fall mit einem Pol zweiter Ordnung und man muß das Exponential entwickeln:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha_i \cdot \mathbf{X}(z)} \cdot e^{-i\alpha_i \cdot \mathbf{X}(w)} &= (z-w)^2 e^{i\alpha_i \cdot \mathbf{X}(z) - i\alpha_i \cdot \mathbf{X}(w)} \\ &= (z-w)^2 (1 + (z-w)i\alpha_i \cdot \partial_w X^\mu(w) + \dots) = \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w} H^{\alpha_i}(w) + \dots \end{aligned} \quad (4.100)$$

Diese OPE liefert nach Integration den gesuchten Kommutator. Insbesondere erhält man keine weiteren Bedingung an den 2-Kozykel $\epsilon(\cdot, \cdot)$, d.h. jede Wahl, die das in Anhang A beschriebene gruppentheoretische Problem löst, liefert konsistente, ganzzahlige Strukturkonstanten. Daß man keine zusätzlichen Bedingungen an die $\epsilon(\mathbf{k}, \mathbf{l})$ erhält, liegt daran, daß die Jacobi-Identität aus der Kozykleigenschaft folgt. Die übrigen Wurzel-Generatoren der Lie-Algebra erhält man als iterierte Kommutatoren aus den $E_0^{\pm\alpha_i}$.

Damit ist bewiesen, daß die Operatoren $H_0^{\alpha_i}$, $E_0^{\mathbf{k}}$, $i = 1, \dots, l$, $\mathbf{k} \in \Delta$ eine Darstellung der Lie-Algebra $\mathfrak{g}^{(l)}$ auf dem Fockraum realisieren. Die durch die Operatoren $H_{-1}^{\alpha_i} = \alpha_{-1}^i$ und $E_{-1}^{\mathbf{k}} = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{p}_L)$ erzeugten Zustände $\alpha_{-1}^i|0\rangle$ und $|(\mathbf{k}; 0)\rangle$ transformieren nach der adjungierten Darstellung, was ihrer Bezeichnung als Eichbosonen rechtfertigt¹⁹.

Die Operatoren $H_m^{\alpha_i}$, $E_m^{\mathbf{k}}$ erzeugen die erweiterte chirale Algebra. Aufgrund der Vertauschungsrelationen schließen wir, daß es sich um die Standardrealisierung $\hat{\mathfrak{g}}$ der ungetwisteten affinen Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}^{[1]}$ handeln muß (siehe Anhang B.2.3),

$$\mathfrak{g}^{[1]} = (\oplus_{m \in \mathbb{Z}} t^m \otimes \mathfrak{g}) \oplus \langle k \rangle \oplus \langle d \rangle, \quad (4.101)$$

bei der das zentrale Element k durch den 1-Operator dargestellt wird (Level-1-Darstellung). Den letzten noch fehlenden Generator, die Derivation d kann man mit Hilfe der **Sugawara-Konstruktion** [88] (siehe auch [150] und [40]) erhalten.

4.1.7 Die Sugawara-Konstruktion

Die Sugawara-Konstruktion kann durchgeführt werden, wenn auf dem Hilbertraum einer Stringtheorie oder zweidimensionalen Feldtheorie die Level- k -Darstellung einer affinen Kac-Moody-Algebra realisiert ist:

$$[T_m^a, T_n^b] = f^{abc} T_{m+n}^c + k m \delta_{m+n,0} \delta^{ab}. \quad (4.102)$$

In unserem Fall ist $k = 1$ und die Orthonormalbasis T_m^a der Kac-Moody-Algebra könnte aus den Generatoren $H_m^{\alpha_i}$, $E_m^{\mathbf{k}}$ konstruiert werden²⁰. Mit Hilfe der Symmetriegeneratoren erhält man die erhaltenen Ströme

$$J^a(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}} T_m^a z^{-n-1}. \quad (4.103)$$

¹⁹Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, daß man nicht nur eine Darstellung auf dem Fockraum, sondern auf dem Hilbertraum der physikalischen Zustände hat, der durch die Virasoro-Bedingungen definiert ist.

²⁰Die Generatoren $H_m^{\alpha_i}$, $E_m^{\mathbf{k}}$ sind bezüglich der durch die Killing-Form auf der Kac-Moody-Algebra induzierten komplexen Bilinearform so normiert, daß die Strukturkonstanten eine besonders einfache Form annehmen. Solche Basen sind weder für endlich dimensionale Lie-Algebren noch für Kac-Moody-Algebren orthonormal. In beiden Fällen kann man sich aber leicht eine Orthonormalbasis der „kompakten reellen Form“ beschaffen, siehe [150] und für endlich-dimensionale Lie-Algebren Anhang B.

Die Vertauschungsrelationen der Kac–Moody–Algebra sind äquivalent zu den OPE

$$J^a(z)J^b(w) = \frac{k\delta^{ab}}{2(z-w)^2} + \frac{f^{abc}}{z-w}J^c(w) + \dots \quad (4.104)$$

Sugawaras Idee bestand darin, den Energie–Impuls–Tensor $T(z)$ aus den erhaltenen Strömen zu rekonstruieren:

$$T_S(z) = N \sum_a : J^a(z)J^a(z) : \quad (4.105)$$

Die Laurent–Koeffizienten

$$\mathcal{L}_m = N \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_a : T_{m+n}^a T_{-n}^a : \quad (4.106)$$

erfüllen genau dann die Virasoro–Algebra

$$[\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_n] = (m-n)\mathcal{L}_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \quad (4.107)$$

wenn die Normierungskonstante N als

$$N = \frac{1}{2k + 2\tilde{h}} \quad (4.108)$$

gewählt wird, wobei k der Level und $\tilde{h}$ die duale Coxeterzahl der einfachen Lie–Algebra $\mathfrak{g}$ ist, zu der die Kac–Moody–Algebra korrespondiert. Der Wert der zentralen Ladung ist dann

$$c = \frac{k \dim(\mathfrak{g})}{k + \tilde{h}}. \quad (4.109)$$

In unserem Fall besitzt die Lie–Algebra nur Wurzeln von einer Länge und die duale Coxeter–Zahl²¹ ist:

$$\tilde{h} = \frac{\dim(\mathfrak{g}) - l}{l}, \quad (l = \text{rang}(\mathfrak{g})). \quad (4.110)$$

Mit $k = 1$ folgt:

$$c = l. \quad (4.111)$$

Andererseits erzeugt auch der aus den l internen WF–Bosonen konstruierte Standard–Energie–Impuls–Tensor eine Virasoro–Algebra mit $c = l$. Die Standard–Konstruktion kann als Sugawara–Konstruktion bezüglich der Cartan–Subalgebra $u(1)^l$ von $\mathfrak{g}$ interpretiert werden:

$$\dim(u(1)^l) = l, \quad \tilde{h} = 0, \quad k = 1 \Rightarrow c = l. \quad (4.112)$$

Da beide Darstellungen der Virasoro–Algebra unitär sind und die gleiche zentrale Ladung c tragen, können sie sich nur um eine unitäre Darstellung mit $c = 0$, d.h. um die triviale Darstellung unterscheiden. Daher sind die Standard– und die Sugawara–Form des Energie–Impuls–Tensors und der Virasoro–Algebra auf dem Hilbertraum äquivalent und können identifiziert werden („Quanten–Äquivalenztheorem“ [40])

$$T(z) = T_S(z), \quad L_m = \mathcal{L}_m. \quad (4.113)$$

Aus der Sugawara–Konstruktion ergibt sich, daß die Kac–Moody–Algebra und die Virasoro–Algebra eine semidirekte Summe bilden:

$$[L_m, T_n^a] = -nT_{m+n}^a. \quad (4.114)$$

Damit ist der noch fehlende Kac–Moody–Generator, die Derivation d , gefunden:

$$d = -L_0 \Rightarrow [d, T_m^a] = mT_m^a. \quad (4.115)$$

²¹ Siehe Anhang B.

Die restlichen Chevalley-Generatoren der Kac-Moody-Algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ sind:

$$H_0 = -H_0^{\alpha_H} + k, \quad E_0 = E_1^{-\alpha_H}, \quad F_0 = E_{-1}^{\alpha_H}, \quad (4.116)$$

$$H_i = H_0^{\alpha_i}, \quad E_i = E_0^{\alpha_i}, \quad F_i = E_0^{-\alpha_i}, \quad (4.117)$$

mit $i = 1, \dots, l$, vgl. (B.118). α_H ist die höchste Wurzel von $\mathfrak{g}$.

Aus (4.114) folgt auch, daß die halbeinfache Unteralgebra $\mathfrak{g}$ von $\hat{\mathfrak{g}}$ mit der das Spektrum definierenden Virasoro-Algebra vertauscht, und damit eine Symmetrie-Algebra ist. Die physikalischen Zustände einer kompaktifizierten Stringtheorie bilden daher Multipletts der vergrößerten Eichgruppe $\mathbf{G}$, wenn das Impulsgitter die Wurzeln dieser Gruppe enthält.

In einem weiteren Schritt kann die Kopplung der Eichbosonen untereinander und an andere geladene Teilchen untersucht werden. Man findet, analog zum Fall des Gravitons, daß die Kopplungen in führender Ordnung wie bei einer Yang-Mills-Theorie sind [1]. Hinzu kommen dann String-spezifische Korrekturen. Als Ergebnis dieses Abschnittes möchte ich festhalten, daß durch die Kompaktifizierung von Raumdimensionen in einer Theorie geschlossener Strings auf natürliche Weise nichtabelsche Eichsymmetrien entstehen.

4.2 Heterotische Stringtheorien

4.2.1 Heterotische Stringtheorien in zehn Dimensionen

An dieser Stelle wäre es zu erwarten, daß nun die toroidale Kompaktifizierung von supersymmetrischen Stringtheorien behandelt wird. Man kann aber zeigen, daß (unter sehr schwachen Voraussetzungen) beliebige Kompaktifizierungen der Superstringtheorien zwar vierdimensionale Supergravitationstheorien zusammen mit Super-Yang-Mills-Theorien und supersymmetrischer Materie liefern, aber niemals das Spektrum des supersymmetrisierten Standard-Modells (in der masselosen Approximation) reproduzieren können [20].

Dies würde Stringtheorien als Theorien der Elementarteilchenphysik ausschließen, wenn es nicht einen weiteren Typ von Stringtheorien gäbe, mit denen dieses „no-go-theorem“ umgangen werden kann. Bei der Konstruktion **heterotischer Stringtheorien** wird von der Beobachtung Gebrauch gemacht, daß kompaktifizierte bosonische Koordinaten und fermionische Koordinaten vollständig in links- und rechtslaufende Anteile faktorisieren. Man versucht daher eine linkslaufende bosonische Stringtheorie mit einer rechtslaufenden Superstringtheorie zu kombinieren. Neben den 10 bosonischen Koordinaten $X^\mu(\tau, \sigma)$ enthält eine heterotische Stringtheorie 10 rechtslaufende WF-Fermionen $\psi_R^\mu(\sigma^-)$ und 16 kompaktifizierte linkslaufende bosonische Koordinaten $X_L^\mu(\sigma^+)$. Man erhält also eine Theorie von geschlossenen Strings im zehndimensionalen Minkowski-Raum, wobei die 16 zusätzlichen WF-Bosonen als innere Freiheitsgrade interpretiert werden. Später werden wir Kompaktifizierungen dieser Theorie betrachten.

Es muß natürlich gezeigt werden, daß die Eliminierung der linkslaufende Anteile der WF-Fermionen und der rechtslaufenden Anteile der kompaktifizierten WF-Bosonen auf reparametrisierungsinvariante Weise vorgenommen werden kann. Das geringere Problem sind dabei die Fermionen, weil hier die Faktorisierung mit einem darstellungstheoretischen Phänomen, der Existenz von (Majorana-)Weyl-Darstellungen zusammenhängt. Bei nichtkompaktifizierten bosonischen Koordinaten faktorisieren die Nullmoden x^μ und p^μ , die die Bewegung des Schwerpunktes beschreiben, nicht spontan und können nur durch Vergrößerung des Phasenraumes getrennt werden. Bei kompaktifizierten bosonischen Koordinaten muß die zur Windungszahl konjugierte Variable hinzugenommen werden.

Gross, Harvey, Martinec und Rohm [44], [45] konnten eine Wirkung angeben, bei der durch entsprechende Lagrange-Parameter die unerwünschten rechtslaufenden kompaktifizierten Bosonen über ihre Bewegungsgleichungen entfernt werden. Die Wirkung ist Poincaré-invariant, reparametrisierungsinvariant und invariant unter lokalen Supertransformationen der rechtslaufenden Freiheitsgrade. Die chirale Variante der WF-Supersymmetrie wird als (0,1)-Supersymmetrie bezeichnet, weil keine linkslaufende und eine rechtslaufende WF-Superladung

existiert. Mit Hilfe des Superraum-Formalismus kann man die lokalen Symmetrien als chirale Superreparametrisierungen auf einer chiralen Super-Weltfläche interpretieren [5]. In der superkonformen Eichung reduziert sich die Wirkung auf:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d\tau d\sigma (\partial^\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu + \partial^\alpha X^I \partial_\alpha X_I + i\psi^\mu \rho^- \partial_- \psi_\mu + \lambda_I (\partial_- X^I)^2), \quad (4.118)$$

mit den Bewegungsgleichungen

$$\square X^\mu = 0, \square X^I = 0, \partial_- X^I = 0, \rho^- \partial_- \psi^\mu = 0. \quad (4.119)$$

Das Feld λ_I ist der Lagrange-Parameter für die Eliminierung der $X_R^I(\sigma^-)$. Bei der Quantisierung der Theorie muß diese Nebenbedingung als starke, d.h. als Operatoridentität realisiert werden, um X_R^I als Freiheitsgrad der Quantentheorie zu eliminieren. Im Rahmen der Operatorquantisierung kann dies mit Hilfe von Dirac-Klammern geschehen [44]. Der Fockraum der Theorie ist dann, wie beabsichtigt, das Produkt aus dem linkslaufenden Fockraum eines bosonischen Strings mit 16 kompakten und 10 nichtkompakten Koordinaten und dem rechtslaufenden Fockraum eines zehndimensionalen Superstrings.

Die linkslaufenden Virasoro- und rechtslaufenden Super-Virasoro-Bedingungen liefern wieder die Massenschalen- und Balance-Bedingung, sowie Polarisationsbedingungen. Die Massenschalenbedingung ist:

$$\frac{1}{4}M^2 = N + \tilde{N} + \frac{1}{2}\mathbf{k}_L^2 - 1. \quad (4.120)$$

Dabei ist N der Anzahloperator für alle linkslaufenden und $\tilde{N}$ der Anzahloperator für alle (bosonischen und fermionischen) rechtslaufenden Moden. Die Normalordnungskonstante des rechtslaufenden NS -Sektors wurde dabei in die Definition von $\tilde{N}$ aufgenommen. Der Beitrag der linkslaufenden diskreten Impulse ist $\frac{1}{2}\mathbf{k}_L^2$ und -1 ist die Normalordnungskonstante des linkslaufenden bosonischen Sektors. Die Balance-Bedingung lautet:

$$\tilde{N} = N - 1 + \frac{1}{2}\mathbf{k}_L^2. \quad (4.121)$$

Da das Spektrum der Anzahloperatoren ganzzahlig ist, muß der linkslaufende diskrete Impuls ein gerades Normquadrat besitzen. Weil es keine rechtslaufenden diskreten Impulse gibt, bilden die diskreten Impulse ein 16-dimensionales Gitter Γ_{16} mit euklidischer Signatur. Das Impulsgitter muß, wie wir gerade gesehen haben, ein gerades Gitter sein. Aus der Forderung nach modularer Invarianz der Torus-Zustandssumme ergibt sich, wie bei kompaktifizierten bosonischen Theorien, daß das Impulsgitter selbstdual sein muß [44]:

$$\Gamma_{16} = \Gamma_{16}^*. \quad (4.122)$$

Gerade selbstduale Gitter mit euklidischer Signatur gibt es nur, wenn die Zahl der Dimensionen ein Vielfaches von 8 ist²². In 16 Dimensionen existierten bis auf Drehungen genau zwei solche Gitter, nämlich das Wurzelgitter der Lie-Algebra $E_8 \oplus E_8$ und das aus den Wurzeln und Spinorgewichten der Lie-Algebra D_{16} gebildete Gitter $D_{16}^{(R)(S)}$. Es gibt daher zwei verschiedene Theorien mit den Eichgruppen $E(8) \otimes E(8)$ und $SO(32)$ ²³.

Aufgrund der GSO-Projektion im rechtslaufenden Sektor gibt es kein Tachyon und die leichtesten Zustände sind masselos und bilden ein Supergravitations- und ein Super-Yang-Mills-Multiplett mit einer der beiden zulässigen Eichgruppen. Die Repräsentanten bezüglich der Lichtkegel-Eichung sind:

²²Siehe Anhang C.

²³Genauer gesagt ist die Eichgruppe die Gruppe $\text{Spin}(32)/\mathbb{Z}_2$, eine Gruppe, die sich von $SO(32)$ um diskrete Faktoren unterscheidet. Auf dem Fockraum macht sich das dadurch bemerkbar, daß die auftretenden Darstellungen in den Konjugationsklassen der adjungierten Darstellung und der Spinor-Darstellung positiver Chiralität liegen [137], siehe auch Anhang B.

Anregung	Zustände	SO(8)-Darstellung	G-Darstellung
$N = 1$ $\tilde{N} = 0$ $\mathbf{k}_L = 0$	$\alpha_{-1}^i 0\rangle \otimes b_{-1/2}^j 0\rangle$	35_V (Graviton)	1
		28 (Antis. Tensor)	
		1 (Dilaton)	
	$\alpha_{-1}^i 0\rangle \otimes a\rangle$	56_S (Gravitino)	
		8_S (Dilatino)	
$N = 1, \tilde{N} = 0$ $\mathbf{k}_L = 0$	$\alpha_{-1}^I 0\rangle \otimes b_{-1/2}^j 0\rangle$	8_V (Eichboson)	Ad = 496
	$\alpha_{-1}^I 0\rangle \otimes a\rangle$	8_S (Eichbosino)	
$N = 0, \tilde{N} = 0$ $\mathbf{k}_L^2 = 2$	$ \mathbf{k}_L\rangle \otimes b_{-1/2}^j 0\rangle$	8_V (Eichboson)	
	$ \mathbf{k}_L\rangle \otimes a\rangle$	8_S (Eichbosino)	

Die adjungierten Darstellungen beider Eichgruppen haben die gleiche Dimension 496. Dies hängt damit zusammen, daß beide Gitter 480 Wurzeln haben. Durch Berechnung der Zustandssumme kann man zeigen, daß beide Theorien sogar auf jedem beliebigen Massenniveau gleich viele Zustände besitzen.

Der Beweis der modularen Invarianz kann auch auf die höheren Genera ausgedehnt werden. Sie wird wesentlich dadurch garantiert, daß die bosonische bzw. die Superstringtheorie die Eigenschaft der holomorphen Faktorisierung besitzen, so daß Links- und Rechts-Läufer auch auf den Weltflächen von höherem Genus entkoppeln [44], [18]. Nur dadurch ist die Konstruktion heterotischer Strings durch die Kombination von bosonischen und supersymmetrischen Strings auch auf dem Quanten-Niveau konsistent.

Da sich bei der Diskussion der Kompaktifizierung zeigen wird, daß man, sobald mindestens eine Dimension kompaktifiziert wird, zwischen den Eichgruppen $E(8) \otimes E(8)$ und $SO(32)$ kontinuierlich interpolieren kann, ist es möglich, beide Theorien als verschiedene zehndimensionale Lösungen einer einzigen Theorie zu interpretieren. Die allgemeinsten vierdimensionalen Lösungen der Theorie können wieder durch die interne konforme Feldtheorie charakterisiert werden. Die Konsistenzbedingungen sind neben der modularen Invarianz die lokale (0,1) WF-Supersymmetrie und zentrale Ladungen (22,9). Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für RZ-Supersymmetrie in vier Dimensionen sind ebenfalls bekannt: Die Existenz einer $N = 1, 2, 4$ RZ-Supersymmetrie ist äquivalent zu einer erweiterten globalen (0,2) WF-Supersymmetrie zusammen mit der Existenz einer E_6, E_7 bzw. E_8 -Symmetrie im rechtslaufenden Sektor [8], [57].

Eine weitergehende Frage ist, wie viele verschiedene Stringtheorien es überhaupt gibt. Es ist z.B. der Versuch unternommen worden, supersymmetrische und heterotische Stringtheorien als spezielle Lösungen der bosonischen Stringtheorie aufzufassen [35], [26]. Wenn dies gelänge, gäbe es nur noch eine orientierte Stringtheorie mit geschlossenen und eine nicht-orientierte mit offenen und geschlossenen Strings. Aber auch zwischen diesen beiden Theorien gibt es eine Verbindung: Einerseits bildet die orientierte Stringtheorie einen Sektor der nichtorientierten, andererseits kann man offene Strings mit den in Kapitel 6 eingeführten Methoden als getwistete geschlossene Strings interpretieren [27]. Möglicherweise gibt es also nur eine Stringtheorie. Aber selbst, wenn es doch ein halbes Dutzend verschiedene konsistente Stringtheorien gibt, so ist dies immer noch ein großer Unterschied zur Quantenfeldtheorie mit ihren unendlich vielen konsistenten Theorien. Und nur eine der Stringtheorien, die heterotische, hat Aussichten, die uns bekannte Elementarteilchenphysik beschreiben zu können.

4.2.2 Die Kompaktifizierung des heterotischen Strings

Wir kommen nun zum eigentlichen Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit, den vierdimensionalen heterotischen Stringtheorien. Das einfachste Konstruktionsverfahren besteht in der toroidalen Kompaktifizierung von sechs Dimensionen der zehndimensionalen Theorie. Die vier

bosonischen Koordinaten $X^\mu(\tau, \sigma)$ bilden zusammen mit den vier chiralen Fermionen $\psi_R^\mu(\sigma^-)$ den Raum-Zeit-Sektor der Theorie. Der interne Sektor der Theorie besteht aus den sechs kompaktifizierten Koordinaten $X^i(\tau, \sigma)$, den sechs internen WF-Fermionen $\psi_R^\mu(\sigma^-)$ und den sechszehn zusätzlichen chiralen WF-Bosonen $X^I(\sigma^+)$. Die rechtslaufenden bosonischen Koordinaten X_R^μ und X_R^i sind jeweils durch WF-Supertransformationen vom Typ $(0,1)$ mit ihren fermionischen Partnern verknüpft.

Der sechsdimensionale Torus wird durch ein sechsdimensionales Gitter Λ definiert:

$$\mathbf{X} = (X^i)_{i=1}^6 \in \mathbf{T}^6 = \frac{\mathbf{R}^6}{2\pi\Lambda}. \quad (4.123)$$

Wir können nun die bei der Kompaktifizierung bosonischer Strings und bei der Konstruktion heterotischer Strings gewonnenen Resultate kombinieren und die Impuls- und Windungsquantenzahlen durch ein Impulsgitter beschreiben:

$$(k^I, k_L^i; k_R^i) \in \Gamma_{16} \oplus \Gamma_{6;6} = \Gamma_{22;6}. \quad (4.124)$$

Dabei ist $\Gamma_{6;6}$ durch Λ und das Hintergrundfeld B_{ij} gegeben. In dieser Formulierung sind die Gitter Γ_{16} und $\Gamma_{6;6}$ zueinander orthogonal und jedes für sich ist gerade und selbstdual. Diese Forderung läßt sich aber abschwächen: K.S. Narain konnte beweisen, das man eine konsistente, d.h. modular invariante Theorie bereits dann erhält, wenn das gesamte Impulsgitter $\Gamma_{22;6}$ gerade und selbstdual bezüglich einer Metrik vom Typ $(+)^{22}(-)^6$ ist [66]. Alle Gitter dieses Types sind isometrisch und der Raum der physikalisch inäquivalenten Theorien wird daher (lokal) durch den homogenen Raum

$$\frac{\mathrm{O}(22;6)}{\mathrm{O}(22) \otimes \mathrm{O}(6)} \quad (4.125)$$

parametrisiert. Die im Narain-Modell neu hinzukommenden Lösungen erhält man durch $\mathrm{O}(22;6)$ -Boosts, die die internen chiralen Koordinaten X_L^i und X_R^i mit den sechszehn zusätzlichen Feldern X^I mischen:

$$(X^I, X_L^i; X_R^i) \in \mathbf{T}^{22;6} = \frac{\mathbf{R}^{22+6}}{\Gamma_{22;6}}. \quad (4.126)$$

In einer späteren Arbeit zeigten Narain, Sarmadi und Witten, daß sich das Narain-Modell als Kompaktifizierung der Koordinaten X^i auf dem Standard-Torus $\mathbf{R}^6/2\pi\mathbf{Z}^6$ in Gegenwart von Hintergrundfeldern reinterpretieren läßt [67]. Aus der Besprechung der bosonischen Theorie kennen wir bereits die Hintergrundfelder G_{ij} und B_{ij} , die den $\mathrm{O}(6;6)$ -Boosts des Impulsgitters zugeordnet werden. Sie liefern aber nur 36 der insgesamt $(16+6) \cdot 6 = 132$ kontinuierlichen Parameter. Ein Blick auf das Spektrum der zehndimensionalen Theorie lehrt, daß die fehlenden 96 Parameter Hintergrund-Eichfelder parametrisieren müssen.

Die Wahl konstanter Hintergrundfelder stellt sicher, daß man Vakuum-Lösungen der Stringtheorie erhält, da die zugehörigen Feldstärken, der Riemann-Christoffel-Tensor R_{ijkl} und der Feldstärkentensor H_{ijk} verschwinden. Man muß daher nach Eichfeldern mit Feldstärke Null suchen. Der Feldstärkentensor einer Yang-Mills-Theorie kann als eine Lie-Algebra-wertige 1-Form aufgefaßt werden [106]:

$$\mathbf{F} = F_{ij} dx^i \wedge dx^j, \quad F_{ij} = F_{ij}^a T_a, \quad (4.127)$$

wobei die T_a Generatoren der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ der Eichgruppe $\mathbf{G} = E(8) \otimes E(8)$ oder $SO(32)$ sind. Das Eichfeld ist dann eine $\mathfrak{g}$ -wertige 1-Form, deren kovariante äußere Ableitung $\mathbf{F}$ ist:

$$\mathbf{F} = D\mathbf{A} = d\mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}. \quad (4.128)$$

Eichfelder, die sich nur um eine Eichtransformation unterscheiden, liefern die gleiche Feldstärke und können identifiziert werden:

$$\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}' \Leftrightarrow \mathbf{A}' = g\mathbf{A}g^{-1} + g dg^{-1}, \quad g \in \mathbf{G}. \quad (4.129)$$

Reine Eichfelder $\mathbf{A} = g dg^{-1}$ können durch eine Eichtransformation eliminiert werden. Um Vakuum-Eichfelder $\mathbf{F} = D\mathbf{A} = 0$ zu finden, fordern wir zunächst das Verschwinden des inhomogenen Beitrags $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A}$ zur Feldstärke. Da

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{2}[A_i, A_j]dx^i \wedge dx^j \quad (4.130)$$

ist, müssen die Eichfelder dann Werte in einer Cartan-Subalgebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ annehmen. Zu lösen bleibt dann

$$d\mathbf{A} = 0. \quad (4.131)$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß $\mathbf{A}$ lokal ein reines Eichfeld ist. Global gilt dieses aber nur, wenn der Raum, auf dem das Eichfeld definiert ist einfach zusammenhängend ist. Während also die Minkowski-Raum-Komponenten des Eichfeldes trivial sind, gilt dies nicht für die sechs internen Raumrichtungen. Die nichttrivialen Lösungen, also geschlossene aber nicht exakte Eichfelder, stehen in eindeutigen Zusammenhang mit den Generatoren γ_i der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbf{T}^6)$ des Torus. Durch die Normierung mit Hilfe eichinvarianter Kurvenintegrale entlang der nichtkontrahierbaren Richtungen,

$$\oint_{C_k} \mathbf{A}^{(i)} = \delta_{ik} \mathbf{A}_i, \quad (4.132)$$

können die nichtäquivalenten nichttrivialen Lösungen $\mathbf{A}^{(i)}$, $i = 1, \dots, 6$ durch sechs Elemente $\mathbf{A}_i$ der Cartan-Subalgebra parametrisiert werden. Da die Cartan-Subalgebra einer reellen Lie-Algebra vom Rang 16 isomorph zum $\mathbf{R}^{16}$ ist, können wir sie nach einer Basis $\mathbf{e}_I$ $I = 1, \dots, 16$ entwickeln,

$$\mathbf{A}_i = A_i^I \mathbf{e}_I \quad (4.133)$$

und erhalten die gesuchten Parameter, die alle nichtäquivalenten Vakuum-Eichfelder beschreiben [67]. Bereits aus der Quantenmechanik ist bekannt, daß quantisierte Eichfelder durch ihre Feldstärken unterbestimmt sind. Insbesondere gibt es in topologisch nichttrivialen Situationen observable Effekte bei verschwindender Feldstärke, z. B. beim Aharonov-Bohm-Effekt.

Um das Narain-Modell durch ein Wirkungsfunktional zu beschreiben, müssen die Hintergrundfelder in die Wirkung aufgenommen werden. Die von Narain, Sarmadi und Witten gefundene Wirkung für die internen WF-Bosonen ist [67]:

$$S_{NSW} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma (G_{ij} \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j + B_{ij} \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^i \partial_\beta X^j + \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^I \partial_\beta X_I + \epsilon^{\alpha\beta} A_i^I \partial_\alpha X^i \partial_\beta X_I) \quad (4.134)$$

Durch die Hintergrundfelder verschiebt sich, wie bereits an Hand der bosonischen Theorie erläutert wurde, der kanonische Impuls relativ zum kinetischen. Dadurch ändert sich auch der Zusammenhang zwischen den links- und rechtslaufenden Impulsen einerseits und den Windungs- und Impulsquantenzahlen andererseits. Wenn man das Impulsgitter $\Gamma_{22,6}$ mit Hilfe der Gitterbasen $\mathbf{e}_i$ von Λ und $\mathbf{e}_I$ von Γ_{16} parametrisiert, erhält man

$$(\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_R) = (k_L^I \mathbf{e}_I + k_L^i \mathbf{e}_i; k_R^i \mathbf{e}_i) \in \Gamma_{22,6}, \quad (4.135)$$

mit

$$k_L^I = k^I + A_i^I w^i, \quad (4.136)$$

$$k_L^i = \frac{1}{2}k^i - G^{ij} B_{jk} w^k - \frac{1}{2} G_{IJ} G^{ij} k^I A_j^J - \frac{1}{4} G_{IJ} G^{ij} A_j^I A_k^J w^k + w^i, \quad (4.137)$$

$$k_R^i = \frac{1}{2}k^i - G^{ij} B_{jk} w^k - \frac{1}{2} G_{IJ} G^{ij} k^I A_j^J - \frac{1}{4} G_{IJ} G^{ij} A_j^I A_k^J w^k - w^i. \quad (4.138)$$

Die Spezifizierung der Gittermetriken

$$G_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \quad G^{ij} = \mathbf{e}^{*i} \cdot \mathbf{e}^{*j}, \quad G_{IJ} = \mathbf{e}_I \cdot \mathbf{e}_J, \quad (4.139)$$

ist äquivalent zur Angabe der Gitter Λ , Γ_{16} selbst, wobei für Γ_{16} aber nur zwei diskrete Wahlmöglichkeiten bestehen, während Λ kontinuierlich deformiert werden darf. Es gibt drei äquivalente Beschreibungen

$$\Gamma_{22,6} \leftrightarrow (\Lambda, B_{ij}, A_i^I) \leftrightarrow (G_{ij}, B_{ij}, A_i^I), \quad (4.140)$$

als interne konforme Feldtheorie mit Impulsgitter $\Gamma_{22,6}$ und als Kompaktifizierung auf dem Gitter Λ oder als Kompaktifizierung auf dem Gitter $\mathbf{Z}^d$ mit den jeweiligen Hintergrundfeldern. Da alle gerade selbstdualen Gitter $\Gamma_{22,6}$ isometrisch sind, sind es insbesondere auch die Gitter

$$E_8 \oplus E_8 \oplus \Gamma_{6,6} \text{ und } D_{16}^{(R)(S)} \oplus \Gamma_{6,6} \text{ mit } \Gamma_{6,6} = \Gamma_{6,6}^*, \quad (4.141)$$

d.h. man kann zwischen den Kompaktifizierungen der beiden zehndimensionalen Theorien kontinuierlich interpolieren²⁴.

Wir können jetzt das masselose Spektrum einer beliebigen Narain-Kompaktifizierung angeben. Masselose linkslaufende Zustände erhält man in der Lichtkegeleichung durch die Anwendung eines Oszillators α_{-1}^a , $a = 1, 2$ bezüglich der beiden transversalen nichtkompaktifizierten Richtungen oder durch die Anwendung eines der internen Oszillatoren α_{-1}^i , $i = 1, \dots, 6$, α_{-1}^I , $I = 1, \dots, 16$. Die Einordnung in Poincaré-Multipletts erfolgt wieder durch die Zuordnung zu einer Darstellung der kleinen Gruppe masseloser Teilchen. Durch die Kompaktifizierung ändert sich die kleine Gruppe von $SO(8)$ zu $SO(2)$. Die Aufteilung der Indizes in RZ-Indizes und interne Indizes entspricht gruppentheoretisch der Ausreduktion der Vektordarstellung bezüglich der Untergruppe $SO(2) \otimes SO(6)$:

$$\mathbf{8}_V = (\mathbf{2}_V, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{6}_V). \quad (4.142)$$

Die $SO(6)$ ist die Tangentialraumgruppe des internen Raumes $\mathbf{T}^6$ und damit eine innere Symmetrie der kompaktifizierten Theorie. Ihre Rolle werden wir im Zusammenhang mit den Rechtsläufern aufklären können. Die kleine Gruppe $SO(2)$ ist abelsch und ihre irreduziblen Darstellungen daher eindimensional. Sie werden bei Vektordarstellungen durch ganzzahlige, bei Spinordarstellungen durch halbzahlige Helizitäten klassifiziert; ein masseloser Vektor hat z. B. zwei Komponenten mit den Helizitäten ± 1 . Falls das Impulsgitter Wurzeln der Form $(\mathbf{k}_L; 0)$ hat, existierten zusätzliche masselose Zustände. Bei den rechtslaufenden Zuständen muß zwischen dem NS-Sektor und dem R-Sektor unterschieden werden. Der NS-Sektor enthält RZ-Bosonen und die Kompaktifizierung des Grundzustandes ergibt einen Vektor und sechs Skalare. Bei der Kompaktifizierung des R-Grundzustandes, der ein RZ-Spinor ist, muß die achtdimensionale Majorana-Weyl-Darstellung von $SO(8)$ bezüglich der $SO(2) \otimes SO(6)$ ausreduziert werden:

$$\mathbf{8}_S = (+\frac{1}{2}, \mathbf{4}_S) \oplus (-\frac{1}{2}, \mathbf{4}_C) \quad (4.143)$$

und man erhält Weyl-Spinoren bezüglich der Gruppen $SO(2)$ und $SO(6)$. Alle Anregungen mit internen rechtslaufenden Impulsen sind massiv. Damit ist das rechtslaufende masselose Spektrum universell und hängt nicht von der Wahl des Impulsgitters ab. Insgesamt gibt es die folgenden chiralen masselosen Zustände:

Zustand	SO(2)	SO(6)	SO(8)	Zustand	SO(2)	SO(6)	SO(8)
$\alpha_{-1}^m 0\rangle$	± 1	$\mathbf{1}$	$\mathbf{8}_V$	$b_{-1/2}^m 0\rangle$	± 1	$\mathbf{1}$	$\mathbf{8}_V$
$\alpha_{-1}^i 0\rangle$	0	$\mathbf{6}_V$		$b_{-1/2}^i 0\rangle$	0	$\mathbf{6}_V$	
$\alpha_{-1}^I 0\rangle$	0	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$ (a_1^+, a_2^+)\rangle$	$+\frac{1}{2}$	$\mathbf{4}_S$	$\mathbf{8}_S$
$ (\mathbf{k}_L; \mathbf{0})\rangle$	0	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$ (a_1^-, a_2^-)\rangle$	$-\frac{1}{2}$	$\mathbf{4}_C$	

²⁴P. Ginsparg hat eine explizite Realisierung angegeben. In seiner Arbeit werden die $O(22;6)$ -Transformationen durch die Hintergrundfelder ausgedrückt [38].

Bei der Zusammensetzung dieser chiralen Anregungen zu masselosen Zuständen ergeben sich zwei Multipletts der N=4 Super-Poincaré-Gruppe [105]. Diese ist eine supersymmetrische Erweiterung der Poincaré-Gruppe mit 4 fermionischen Generatoren (Superladungen). Der bosonische Teil besteht aus der Poincaré-Gruppe und einer internen Symmetrie-Gruppe, der SO(6). Sie entsteht durch Kompaktifizierung der zehndimensionalen N=1 Super-Poincaré-Gruppe, wobei die Tangentialraumgruppe der internen Mannigfaltigkeit zur inneren Symmetriegruppe wird. Alle Zustände, die einen linkslaufenden RZ-Oszillator enthalten, bilden zusammen ein Supergravitations-Multiplett:

Zustand	Helizität	SO(6)	Interpretation
$\alpha_{-1}^m 0\rangle \otimes b_{-1/2}^n 0\rangle$	± 2	1	Graviton
	0	1	Dilaton
	$0^{(-)}$	1	Axion
$\alpha_{-1}^m 0\rangle \otimes b_{-1/2}^i 0\rangle$	± 1	6_V	6 Vektorbosonen
$\alpha_{-1}^m 0\rangle \otimes (a_1^+, a_2^+)\rangle$	$+\frac{3}{2}$	4_S	4 Gravitinos, 4 Dilatinos
	$-\frac{1}{2}$	4_S	
$\alpha_{-1}^m 0\rangle \otimes (a_1^-, a_2^-)\rangle$	$+\frac{1}{2}$	4_C	
	$-\frac{3}{2}$	4_C	
N=4 Supergravitation			

Zusammen mit dem Graviton tritt wie immer das Dilaton und der antisymmetrische Tensor auf, der in vier Dimensionen nur eine unabhängige Komponente hat und zu einem Pseudoskalar, dem Axion äquivalent ist. In Folge der erweiterten Supersymmetrie gibt es zusätzlich 6 Eichbosonen. Der fermionische Anteil besteht aus 4 Gravitinos und 4 Spin 1/2 Teilchen („Dilatinos“).

Zustände, die eine skalare linkslaufende Anregung $|L\rangle$ enthalten, bilden N=4 Vektor-Supermultipletts.

Zustand	Helizität	SO(6)	Interpretation
$ L\rangle \otimes b_{-1/2}^m 0\rangle$	± 1	1	Eichboson
$ L\rangle \otimes b_{-1/2}^i 0\rangle$	0	6_V	6 Eichskalare
$ L\rangle \otimes (a_1^+, a_2^+)\rangle$	$+\frac{1}{2}$	4_S	4 Eichbosinos
$ L\rangle \otimes (a_1^-, a_2^-)\rangle$	$-\frac{1}{2}$	4_C	
N=4 Vektor-Supermultiplett			

Jedes Eichboson wird durch 6 Skalare und 4 Spin 1/2 Eichbosinos begleitet. Falls nicht-abelsche Eichsymmetrien existieren, können die Vektor-Supermultipletts zu entsprechenden N=4 Super-Yang-Mills-Multipletts zusammengefaßt werden. Wie wir sehen, kommen alle Eichsymmetrien aus dem linkslaufenden, die RZ-Supersymmetrien aus dem rechtslaufenden Sektor. Während die letzteren universell sind, hängen die Eichsymmetrien von der Wahl des Impulsgitters ab.

4.2.3 Eichsymmetrie und Hintergrundfelder: Bestandsaufnahme und Problemstellung

Über die Eichgruppe **G** einer Narain-Kompaktifizierung können unmittelbar bzw. unter Hinzuziehung der Literatur folgenden Aussagen gemacht werden:

- Bei einer generischen Wahl der Hintergrundfelder existieren keine Wurzeln im Gitter, denn die kontinuierlichen Parameter sind bei zufälliger Wahl mit der Wahrscheinlichkeit 1 irrationale Zahlen. Die generische Eichgruppe ist daher

$$\mathbf{G} = U(1)^{22}. \quad (4.144)$$

Wenn l linear unabhängige Wurzeln existieren, hat die Eichgruppe einen halbeinfachen Faktor vom Rang l :

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{22-l}. \quad (4.145)$$

In diesem Fall spricht man von kritischen Hintergrundfeldern. Der Rang der Eichgruppe ist durch die Anzahl der internen rechtslaufenden Koordinaten gegeben und daher immer gleich 22.

- Kompaktifiziert man eine der beiden zehndimensionalen Theorien bei generischen Werten von G_{ij} und B_{ij} , aber ohne Wilsonlinien, $\mathbf{A}_i = 0$, so ist das Impulsgitter von der Form $\Gamma_{16} \oplus \Gamma_{6,6}$ und die Eichgruppe ist

$$\mathbf{G} = E(8) \otimes E(8) \otimes U(1)^6 \text{ bzw. } \mathbf{G} = SO(32) \otimes U(1)^6. \quad (4.146)$$

Durch das Einschalten der Wilsonlinien wird der halbeinfache Teil gebrochen.

- Für gewisse „multikritische“ Wilsonlinien wird die Eichgruppe nicht kleiner, sondern größer. Ginsparg gibt Werte für die Hintergrundfelder an, die zu den Eichgruppen

$$\mathbf{G} = SO(32 + 2k) \otimes U(1)^{6-k}, \quad k = 1, \dots, 6 \quad (4.147)$$

führen [38]. Es ist insbesondere möglich, die halbeinfache Eichgruppe $\mathbf{G} = SO(44)$ zu realisieren.

- Wählt man $\mathbf{A}_i = 0$ und setzt G_{ij} gleich der Cartan-Matrix einer halbeinfachen Lie-Gruppe $\mathbf{G}^{(l)}$ vom ADE-Typ und mit Rang $l \leq 6$ und B_{ij} modulo $1/2$ gleich G_{ij} , so ist die Eichgruppe

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{(16)} \otimes \mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{6-l}. \quad (4.148)$$

Man kann also zusätzlich zu $\mathbf{G}^{(16)} = E(8) \otimes E(8)$ oder $SO(32)$ jede beliebige halbeinfache ADE-Lie-Gruppe (plus abelsche Faktoren) mit Rang ≤ 6 bekommen [38].

Daraus ergeben sich die folgenden Fragen und Probleme: Die kritischen Werte der Felder G_{ij} und B_{ij} hängen auf eindeutige Weise mit der die Symmetrie-Gruppe charakterisierenden Cartan-Matrix zusammen. Da man weiß, daß jede überhaupt denkbare Gruppe realisiert werden kann, sind die Kenntnisse über diese Felder auch vollständig. Im Falle der Wilsonlinien ist das Wissen weder systematisch noch vollständig, da in der Literatur nur Beispiele aufgeführt werden. Die Wilsonlinien sind aber gerade deswegen interessant, weil sie die bei der Kompaktifizierung ohne Wilsonlinien auftretenden Eichgruppen $\mathbf{G}^{(16)}$ nicht nur erweitern, sondern auch brechen können. Dies ist natürlich notwendig, um den Kontakt zum Standard-Modell mit seiner Eichgruppe $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ oder zu den GUT-Eichgruppen wie z.B. $SU(5)$, $SO(10)$ und $E(6)$ herstellen zu können. Im nächsten Kapitel werde ich eine systematische und konstruktive Methode vorstellen, mit der die Symmetriebrechung und Symmetrieerweiterung durch Wilsonlinien behandelt werden kann.

Kapitel 5

Toroidale Kompaktifizierungen mit beliebigen Hintergrundfeldern

5.1 Die Parametrisierung des Gitters

Die ökonomischste Charakterisierung des Impulsgitters ist die Angabe einer Gitter-Basis. Für die Beschreibung gerader selbstdualer pseudoeuklidischer Gitter gibt es eine Standardbasis, die die Durchführung der folgenden Untersuchungen wesentlich erleichtert. Diese Standardbasis wird mit Hilfe der Gitterbasen $\{\mathbf{e}_i | i = 1, \dots, 6\}$, $\{\mathbf{e}^{*i} | i = 1, \dots, 6\}$ und $\{\mathbf{e}_A | A = 1, \dots, 16\}$ der Gitter Λ , Λ^* und Γ_{16} konstruiert. Zunächst betrachtet man die Kompaktifizierung auf Λ ohne Hintergrundfelder, d.h. mit $B_{ij} = 0$ und $\mathbf{A}_i = 0$. Das Impulsgitter zerfällt dann in zwei Teile, die jeder für sich selbstdual sind

$$\Gamma_{22,6} = \Gamma_{16} \oplus \Gamma_{6,6}. \quad (5.1)$$

Die natürliche Basis dieses speziellen Gitters ist [38]:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^i &= \left(0, \frac{1}{2}\mathbf{e}^{*i}, \frac{1}{2}\mathbf{e}^{*i}\right), \\ \bar{\mathbf{k}}_i &= (0, \mathbf{e}_i; -\mathbf{e}_i), \\ \mathbf{l}_A &= (\mathbf{e}_A, 0; 0). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Die nichtverschwindenden pseudoeuklidischen Skalarprodukte zwischen den Basisvektoren sind

$$\mathbf{k}^i \bar{\mathbf{k}}_j = \delta_j^i, \quad \mathbf{l}_A \mathbf{l}_B = G_{AB}, \quad (5.3)$$

wobei G_{AB} die Gittermetrik von Γ_{16} ist. Das Einschalten der Hintergrundfelder B_{ij} und $\mathbf{A}_i$ entspricht geometrisch der Anwendung von $O(22;6)$ -Boosts, also von Isometrien auf das Impulsgitter. Daher bleiben die Relationen (5.3) zwischen den Basisvektoren erhalten. Was sich ändert, ist der Zusammenhang zwischen dem Impulsgitter und den anderen Gittern und damit auch der Zusammenhang zwischen den Basisvektoren. Die Standard-Basisvektoren des neuen Gitters sind [38]:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'^i &= \left(0, \frac{1}{2}\mathbf{e}^{*i}, \frac{1}{2}\mathbf{e}^{*i}\right), \\ \bar{\mathbf{k}}'_i &= \left(\mathbf{A}_i, -B_{ji}\mathbf{e}^{*j} - \frac{1}{4}(\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_i)\mathbf{e}^{*j} + \mathbf{e}_i; -B_{ji}\mathbf{e}^{*j} - \frac{1}{4}(\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_i)\mathbf{e}^{*j} - \mathbf{e}_i\right), \\ \mathbf{l}'_A &= \left(\mathbf{e}_A, -\frac{1}{2}(\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{A}_i)\mathbf{e}^{*i}, -\frac{1}{2}(\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{A}_i)\mathbf{e}^{*i}\right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Durch Variation der Hintergrundfelder kann jedes Impulsgitter vom Typ $\Gamma_{22,6}$ erzeugt werden. Bei einem selbstdualen Gitter ist es besonders einfach zu prüfen, ob ein gegebener Vektor (z.B. ein bestimmter Wurzelvektor) im Gitter liegt: Ein Vektor liegt genau dann im Gitter, wenn er ganzzahlige Skalarprodukte mit allen Gittervektoren hat. Es ist natürlich hinreichend, diese Bedingung an Hand einer Gitterbasis zu überprüfen.

Durch das Einschalten von Wilsonlinien wird die vorher präsente Eichgruppe $\mathbf{G}^{(16)}$ gebrochen. Um die durch die Variation der 96 Parameter A_i^I entstehenden Möglichkeiten der Symmetriebrechung unter Kontrolle zu bekommen, kann auf die von Dynkin entwickelte Theorie der Unteralgebren halbeinfacher Lie-Algebren zurückgegriffen werden.

5.2 Reguläre Unteralgebren halbeinfacher Lie-Algebren

Jede halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ kann in eine Cartan-Subalgebra $\mathfrak{h}$ und in die eindimensionalen Wurzelräume $\mathfrak{g}_\alpha$ zerlegt werden, die den Wurzelvektoren $\alpha \in \Delta$ der Lie-Algebra zugeordnet sind¹

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha. \quad (5.5)$$

Die Wurzeln sind eine linear abhängige Menge l -dimensionaler Vektoren, wobei l der Rang von $\mathfrak{g}$ ist. Sie lassen sich als ganzzahlige Linearkombinationen von l linear unabhängigen **einfachen** Wurzeln

$$\Pi = \{\alpha_i | i = 1, \dots, l\} \quad (5.6)$$

ausdrücken. Die Kenntnis der Längenverhältnisse und der Winkel zwischen den einfachen Wurzeln ist hinreichend und notwendig, um eine halbeinfache Lie-Algebra bis auf Isomorphie festzulegen. Diese Information kann mit Hilfe der Cartan-Matrix oder durch Dynkin-Diagramme auf kompakte Weise codiert werden.

Eine Unteralgebra $\mathfrak{g}'$ von $\mathfrak{g}$ wird **regulär** genannt, wenn sie die Zerlegung (5.5) respektiert, d.h. wenn $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$ und $\Delta' \subset \Delta$ ist. Mit Hilfe von Wilsonlinien können, wie noch gezeigt wird, auf kontrollierte Weise Wurzeln entfernt werden, während die von den internen Oszillatoren erzeugte Cartan-Subalgebra immer die gleiche bleibt. Es werden also reguläre Unteralgebren auftreten. **Irreguläre** Unteralgebren respektieren die Zerlegung (5.5) nicht. Man erhält sie durch Einbettung kleinerer Lie-Algebren mittels Darstellungen. So besteht z.B. die dreidimensionale Darstellung von $\mathfrak{su}(2)$ aus $\mathfrak{so}(3)$ Matrizen, die eine Unteralgebra von $\mathfrak{su}(3)$ bilden. Dies definiert dann eine irreguläre $\mathfrak{su}(2)$ -Unteralgebra von $\mathfrak{su}(3)$ [138]. Da bei irregulären Unteralgebren die Cartan-Subalgebra der Oberalgebra mit Wurzelräumen gemischt wird, kann dies nicht durch Wilsonlinien auf dem Hilbertraum der Stringzustände implementiert werden.

Um die Unteralgebren einer halbeinfachen Lie-Algebra systematisch zu erfassen, benötigt man einen weiteren Begriff. Eine Unteralgebra $\mathfrak{g}'$ heißt eine **maximale** Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, wenn es „zwischen“ den beiden keine weiteren Unteralgebren gibt, d.h. für alle Unteralgebren $\tilde{\mathfrak{g}}$ gilt:

$$\mathfrak{g}' \subset \tilde{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{g} \implies \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}' \text{ oder } \tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}. \quad (5.7)$$

Die Unteralgebren einer halbeinfachen Lie-Algebra müssen natürlich nicht selbst halbeinfach sein. Da wir im Zusammenhang mit nichtabelschen Eichsymmetrien aber primär an halbeinfachen Unteralgebren interessiert sind, suchen wir nach **maximalen halbeinfachen** Unteralgebren, d.h. nach denen, die maximal in der Kategorie der halbeinfachen Unteralgebren sind.

Um die Unteralgebren halbeinfacher Lie-Algebren zu klassifizieren, reicht es natürlich, Unteralgebren einfacher Lie-Algebren zu betrachten. Außerdem kann man Unteralgebren miteinander identifizieren, wenn sie zueinander konjugiert sind, also durch innere Automorphismen ineinander überführt werden können. Solche Unteralgebren sind auf die gleiche Weise in $\mathfrak{g}$ eingebettet, nur bezüglich verschiedener Cartan-Zerlegungen (5.5). Isomorphe Unteralgebren,

¹ Alle benötigten Hilfsmittel aus der Theorie der Lie-Algebren werden in Anhang B1 bereitgestellt. Die in diesem Abschnitt gegebene Dargestellung der Theorie regulärer Unteralgebren folgt [138] unter Zuhilfenahme von [143] und [153].

die durch äußere Automorphismen verknüpft sind, dürfen nicht identifiziert werden, weil sie auf verschiedene Weise in $\mathfrak{g}$ eingebettet sind. Dies kann sich zum Beispiel bei der Ausreduktion von Darstellungen bemerkbar machen.

Das Problem der Klassifizierung der halbeinfachen regulären Unteralgebren einer einfachen Lie-Algebra wurde von Dynkin gelöst [139]. Die Regeln lassen sich auf elegante und übersichtliche Weise mit Hilfe von Dynkin-Diagrammen formulieren:

Satz 5.2.1 Wenn man aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm von $\mathfrak{g}$ einen Punkt entfernt, so erhält man das Dynkin-Diagramm einer maximalen regulären halbeinfachen Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ oder $\mathfrak{g}$ selbst. Entfernt man auf jede mögliche Weise einen Punkt aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm, so erhält man **alle** maximalen regulären halbeinfachen Unteralgebren. Iteriert man diese Prozedur, so erhält man alle regulären Unteralgebren maximalen Ranges.

Dynkins Beweis dieser Regel war lückenhaft, und es gibt 5 Ausnahmefälle bei denen man keine maximale Unteralgebra, sondern die maximale Unteralgebra einer maximalen Unteralgebra erhält. Daher muß die folgende Zusatzregel beachtet werden [143]:

Satz 5.2.2 Die in der linken Spalte der folgenden Tabelle auftretenden Lie-Algebren ergeben sich zwar durch Eliminierung eines Punktes aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm der jeweils rechts stehenden Lie-Algebra, sind aber nicht maximal. Sie sind maximale Unteralgebren der jeweils in der Mitte angegebenen maximalen Unteralgebren.

$$\begin{array}{llll}
 A_3 \oplus A_3 \oplus A_1 & \subset & D_6 \oplus A_1 & \subset E_7, \\
 A_3 \oplus D_5 & \subset & D_8 & \subset E_8 \\
 A_1 \oplus A_2 \oplus A_5 & \subset & A_2 \oplus E_6 & \subset E_8, \\
 A_1 \oplus A_7 & \subset & A_1 \oplus E_7 & \subset E_8, \\
 A_3 \oplus A_1 & \subset & B_4 & \subset F_4.
 \end{array} \tag{5.8}$$

Um die halbeinfachen regulären Unteralgebren nicht-maximalen Ranges zu konstruieren, benötigt man eine weitere Regel [153]:

Satz 5.2.3 Entfernt man k Punkte, $0 < k < l$ aus dem Dynkin-Diagramm einer einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ vom Range l , so erhält man das Dynkin-Diagramm einer regulären halbeinfachen Unteralgebra vom Rang $l - k$. Indem man auf alle möglichen Weisen k Punkte aus den Dynkin-Diagrammen aller Unteralgebren maximalen Ranges von $\mathfrak{g}$ entfernt, erhält man alle regulären halbeinfachen Unteralgebren vom Range $l - k$.

Für die Anwendungen im Narain-Modell ist die Klassifizierung der halbeinfachen Unteralgebren ausreichend, weil die allgemeinsten Lie-Algebren, die auftreten können von der Form halbeinfach $\oplus$ abelsch sind. Eine einfache Lie-Algebra besitzt zwar auch auflösbare und nilpotente Unteralgebren, aber diese sind bezüglich der Cartan-Zerlegung (5.5) dadurch charakterisiert, daß zwar der Wurzelraum $\mathfrak{g}_\alpha$, nicht aber $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ auftritt. Dies kann im Narain-Modell nicht passieren, da das Impulsgitter, wie jedes Gitter, mit einem Vektor α immer auch $-\alpha$ enthält. Physikalisch kommen nilpotente und auflösbare Lie-Gruppen auch deswegen nicht in Frage, weil ja zu gewissen Eichbosonen mit Ladung α die jeweiligen Antiteilchen fehlen würden. Dies verletzt u.a. die CPT-Symmetrie².

Die Strategie, die sich anbietet, ist, nach Wilsonlinien zu suchen, die die Lie-Algebra $E_8 \oplus E_8$ oder D_{16} auf eine gegebene Unteralgebra brechen. Die Wilsonlinien können dabei nur den Rang des halbeinfachen Teiles reduzieren. Die halbeinfache Unteralgebra wird von so vielen abelschen Idealen begleitet, daß der Rang unverändert bleibt.

²Es ist allerdings nicht a priori klar, daß das CPT-Theorem in der Stringtheorie seine Gültigkeit behält. In einer kürzlich erschienen Arbeit wird sogar argumentiert, daß in der Stringtheorie die CPT-Symmetrie gebrochen wird und daß sich das möglicherweise sogar im $K^0\overline{K}^0$ -System beobachten läßt [25]. Diese Effekte führen aber nicht zur Nicht-Existenz des Antiteilchens sondern nur zu einer Lebensdauer, die sich von der des Teilchens unterscheidet.

5.3 Toroidale Kompaktifizierungen mit einer Wilsonlinie

5.3.1 Formulierung des Symmetriebrechungsproblems

Der Ausgangspunkt der Untersuchung ist eine Kompaktifizierung mit $B_{ij} = 0$ und $A_i^I = 0$. Das Impulsgitter ist von der Form $\Gamma_{16} \oplus \Gamma_{6,6}$ und der halbeinfache Teil $\mathbf{G}^{(16)}$ der Eichgruppe ist je nach Wahl von Γ_{16} entweder $E(8) \otimes E(8)$ oder $SO(32)$. Als erstes sollen die Wurzelvektoren der Eichgruppe durch die Basis des Impulsgitters ausgedrückt werden, um dann deren „Schicksal“ bei einer Variation der Wilsonlinien verfolgen zu können.

1. Fall: $\Gamma_{16} = E_8 \oplus E_8$. Dieses Gitter ist das Wurzelgitter einer Lie-Algebra und daher bilden die einfachen Wurzeln α_A , $A = 1, \dots, 16$ eine Gitterbasis. Damit ist:

$$\mathbf{e}_A = \alpha_A \text{ und } \mathbf{l}_A = (\alpha_A, \mathbf{0}; \mathbf{0}). \quad (5.9)$$

2. Fall: $\Gamma_{16} = D_{16}^{(R),(S)}$. Dieses Gitter wird durch die Wurzeln und die Spinorgewichte positiver Chiralität von $SO(32)$ erzeugt. Die einfachen Wurzeln α_A generieren nur das Untergitter $D_{16}^{(R)}$. Um eine Gitterbasis von Γ_{16} zu erhalten, kann man 15 einfache Wurzeln und ein davon linear unabhängiges Spinorgewicht wählen [137]:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{2} \sum_{A=1}^8 \alpha_{2A-1}, \quad \mathbf{e}_A = \alpha_A, \quad A = 2, \dots, 16. \quad (5.10)$$

Die fehlende einfache Wurzel erhält man als ganzzahlige Linearkombination:

$$\alpha_1 = 2\mathbf{e}_1 - \sum_{A=1}^7 \mathbf{e}_{2A+1}. \quad (5.11)$$

In beiden Fällen erhält man durch Einbettung der einfachen Γ_{16} -Wurzeln in das Impulsgitter eine maximal linear unabhängige Menge von Wurzeln des Impulsgitters

$$\hat{\alpha}_A = (\alpha_A, \mathbf{0}; \mathbf{0}), \quad (5.12)$$

die die anderen Wurzeln erzeugen. Ich bezeichne sie daher als die einfachen Wurzeln des Impulsgitters. Beide Wahlmöglichkeiten für Γ_{16} können weitgehend parallel behandelt werden, da die Eichgruppe alleine durch die Wurzeln des Impulsgitters festgelegt wird. Die $SO(32)$ -Spinorgewichte sind zwar für die Selbstdualität des Gitters unerlässlich, machen sich im Spektrum aber nur dadurch bemerkbar, welche Darstellungen der Eichgruppe auftreten.

Um mit einem möglichst einfachen Problem zu beginnen, soll zunächst nur eine Wilsonlinie $\mathbf{A}_1$ eingeschaltet werden. Diejenige Richtung $\mathbf{e}_1$ auf dem Torus T_6 , der die Wilsonlinie zugeordnet ist soll außerdem orthogonal zu den anderen fünf Richtungen sein. Dann faktorisiert das Impulsgitter immer noch in der Form

$$\Gamma_{22,6} = \Gamma_{17,1} \oplus \Gamma_{5,5}, \quad (5.13)$$

und wir können den $\Gamma_{5,5}$ -Summanden vorerst ignorieren. $\Gamma_{17,1}$ wird durch die Vektoren $\mathbf{k}^1$, $\bar{\mathbf{k}}_1$ und $\mathbf{l}_A$ erzeugt. Zur Deformation des Gitters stehen immerhin 17 Parameter zur Verfügung, die 16 Wilson-Parameter A_1^A und der Radius $\sqrt{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1}$ der 1-Richtung von $\mathbf{T}^6$. Bei Variationen der Wilsonlinie bleibt der Basisvektor $\mathbf{k}_1$ invariant. Die Bilder der einfachen Wurzeln $\hat{\alpha}_A$ des ursprünglichen Gitters Γ im mit $\mathbf{A}_1$ geboosteten Gitters $\Gamma' = \Gamma(\mathbf{A}_1)$ sind:

$$\hat{\alpha}'_A = \left(\alpha_A, -\frac{1}{2}(\alpha_A \cdot \mathbf{A}_1)\mathbf{e}^{*1}; -\frac{1}{2}(\alpha_A \cdot \mathbf{A}_1)\mathbf{e}^{*1} \right) = \hat{\alpha}_A - (\alpha_A \cdot \mathbf{A}_1)\mathbf{k}^1. \quad (5.14)$$

Aus der Invarianz von $\mathbf{k}^1$ folgt, daß die Wurzel $\hat{\alpha}_A$ von Γ genau dann auch im neuen Gitter Γ' auftritt, wenn das Skalarprodukt $\alpha_A \cdot \mathbf{A}_1$ ganzzahlig ist:

$$\hat{\alpha}_A \in \Gamma' \Leftrightarrow \alpha_A \cdot \mathbf{A}_1 \in \mathbb{Z}. \quad (5.15)$$

Beweis: Wenn das Skalarprodukt ganzzahlig ist, ist $\hat{\alpha}_A$ eine ganzzahlige Linearkombination der Vektoren $\hat{\alpha}'_A, \mathbf{k}^1 \in \Gamma'$ und damit selbst ein Vektor des Gitters Γ' . Ist das Skalarprodukt $\alpha_A \cdot \mathbf{A}_1$ nicht ganzzahlig, so ist auch das pseudo-euklidische Skalarprodukt des Vektors $\hat{\alpha}_A \in \Gamma$ mit dem Vektor $\bar{\mathbf{k}}_1 \in \Gamma'$ nicht ganzzahlig. Da Γ' selbstdual ist, folgt daraus $\hat{\alpha}_A \notin \Gamma'$.

Aus Dynkins Regeln kann hergeleitet werden, unter welchen Bedingungen die Wilsonlinie $\mathbf{A}_1$ die ursprüngliche Lie-Algebra $\mathfrak{g}^{(16)}$ zu einer maximalen regulären halbeinfachen Unteralgebra bricht. Die Vorschrift, einen Punkt aus dem **erweiterten** Dynkin-Diagramm zu entfernen, bedeutet, daß die diesem Punkt zugeordnete einfache Wurzel entfernt werden muß. Gleichzeitig muß aber dafür gesorgt werden, daß die niedrigste Wurzel $\alpha_0 = -\alpha_h$ nicht eliminiert wird. Ohne diesen Zusatz würde sich die Anzahl der einfachen Wurzeln verringern und damit auch der Rang des halbeinfachen Teils der Lie-Algebra. Dynkins Regel garantiert, daß man nicht nur eine Unteralgebra maximalen Ranges, sondern sogar eine maximale Unteralgebra erhält.

Das Bild der eingebetteten höchsten Wurzel $\hat{\alpha}_h$ von $\mathfrak{g}^{(16)}$ ist

$$\hat{\alpha}'_h = \hat{\alpha}_h - (\alpha_h \cdot \mathbf{A}_1) \mathbf{k}^1. \quad (5.16)$$

Die Implementierung von Dynkins Regel für maximale Unteralgebren ist damit klar:

Satz 5.3.1 Wenn die Wilson-Linie $\mathbf{A}_1$ die Lie-Algebra $\mathfrak{g}^{(16)}$ auf diejenige Unteralgebra $\mathfrak{g}^{[I]}$ bricht, die durch Eliminierung der l -ten einfachen Wurzel aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm von $\mathfrak{g}^{(16)}$ definiert ist, dann gilt:

$$\alpha_I \cdot \mathbf{A}_1 \notin \mathbb{Z}, \quad (5.17)$$

$$\alpha_A \cdot \mathbf{A}_1 \in \mathbb{Z}, \quad (A \neq I) \quad (5.18)$$

$$\alpha_h \cdot \mathbf{A}_1 \in \mathbb{Z}. \quad (5.19)$$

Das Problem, Lösungen dieser (Un-)Gleichungen zu finden, bezeichne ich als das **Symmetriebrechungsproblem**. Ich werde nun zeigen wie die Gesamtheit seiner Lösungen konstruiert werden kann.

5.3.2 Die Standard-Lösung des Symmetriebrechungsproblems

Die Existenz von Lösungen des Symmetriebrechungsproblems (5.17) - (5.19) zu beweisen, ist einfach: Zusammengenommen besagen die Gleichungen, daß $\mathbf{A}_1$ ein Gewichtsvektor der Unteralgebra $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}^{[I]}$, aber kein Gewichtsvektor der Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(16)}$ ist:

$$\mathbf{A}_1 \in \Gamma_W(\mathfrak{g}') - \Gamma_W(\mathfrak{g}). \quad (5.20)$$

Solche Vektoren existieren immer, denn zwischen den Wurzel- und Gewichtsgittern einer Lie-Algebra und einer Unteralgebra bestehen die folgenden Inklusionen:

$$\Gamma_R(\mathfrak{g}') \subset \Gamma_R(\mathfrak{g}) \subset \Gamma_W(\mathfrak{g}) \subset \Gamma_W(\mathfrak{g}'). \quad (5.21)$$

Für die praktischen Anwendungen und für spätere Verallgemeinerungen wird aber eine explizite Lösung benötigt. Ich werde zunächst eine spezielle Lösung, die **Standard-Lösung** konstruieren. Dies soll ganz allgemein für eine beliebige einfache „einfach verbundene“ Lie-Algebra vom Rang l geschehen. Die Verallgemeinerung auf den halbeinfachen Fall ist dann trivial.

Es sei $\mathfrak{g}$ eine einfache, einfach verbundene Lie-Algebra vom Range l mit einfachen Wurzel $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ und höchster Wurzel α_h . Sei ferner $\mathfrak{g}'$ die halbeinfache reguläre Unteralgebra vom Rang l , die die einfachen Wurzeln

$$\{\beta_1, \dots, \beta_l\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{I-1}, -\alpha_h, \alpha_{I+1}, \dots, \alpha_l\} \quad (5.22)$$

besitzt. Zunächst ist klar, daß jede Wilsonlinie der Form

$$\mathbf{A}_1 = p\alpha_I^*, \quad p \notin \mathbf{Z} \quad (5.23)$$

die Gleichungen (5.17) und (5.18) erfüllt und den I-ten Punkt aus dem Dynkin-Diagramm eliminiert. Dies definiert aber nur eine Unteralgebra vom Rang $l - 1$, weil nicht klar ist, wann auch Gleichung (5.19) gilt. Die Situation wird übersichtlicher, wenn alle auftretenden Größen durch Wurzeln und Gewichte der gesuchten Unteralgebra ausgedrückt werden.

Wenn die Gleichungen (5.18) und (5.19) erfüllt sind, ist $\mathbf{A}_1$ ein Gewichtsvektor von $\mathfrak{g}'$ und damit eine ganzzahlige Linearkombination der fundamentalen Gewichte β_A^* von $\mathfrak{g}'$:

$$\mathbf{A}_1 = \sum_{A=1}^l a^A \beta_A^*, \quad a^A \in \mathbf{Z}. \quad (5.24)$$

Die höchste Wurzel α_h von $\mathfrak{g}$ ist eine ganzzahlige Linearkombination der einfachen Wurzeln von $\mathfrak{g}$, bei der die Kac-Label k^A als Koeffizienten auftreten:

$$\alpha_h = \sum_{A=1}^l k^A \alpha_A, \quad k^A \in \mathbf{Z}, k^A \geq 1. \quad (5.25)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können die einfachen Wurzeln von $\mathfrak{g}$ als rationale Linearkombinationen der einfachen Wurzeln der Unteralgebra $\mathfrak{g}'$ geschrieben werden:

$$\alpha_I = \frac{1}{k^I} \left(\alpha_h - \sum_{A \neq I} k^A \alpha_A \right) = \frac{1}{k^I} \left(-\beta_I - \sum_{A \neq I} k^A \beta_A \right), \quad (5.26)$$

$$\alpha_A = \beta_A, \quad \text{für } A \neq I. \quad (5.27)$$

Falls $k^I = 1$ ist, ist α_I eine Wurzel von $\mathfrak{g}'$ und damit $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$. Diese Situation entspricht den Fällen in Dynkins Regel, bei denen man keine echte Unteralgebra, sondern $\mathfrak{g}$ selbst erhält. Falls $k^I > 1$ ist, sind die Gleichungen (5.18) und (5.19) erfüllt. Da nach Definition $\beta_A^* \cdot \beta_B = \delta_{AB}$ ist, ergibt sich durch Einsetzen von (5.24) in (5.17):

$$\alpha_I \cdot \mathbf{A}_1 = -\frac{1}{k^I} a^I - \sum_{A \neq I} \frac{k^A a^A}{k^I}. \quad (5.28)$$

Durch die Wahl $\mathbf{A}_1 = \beta_I^*$, d.h. $a^A = \delta_{AI}$ folgt

$$\alpha_I \cdot \mathbf{A}_1 = -\frac{1}{k^I} \notin \mathbf{Z}, \quad (5.29)$$

weil nach Voraussetzung $k^I > 1$ ist. Diese Lösung des Symmetriebrechungsproblems ist besonders natürlich, weil als Wilsonlinie dann das einzige fundamentale Gewicht

$$\mathbf{A}_1 = \beta_I^* \quad (5.30)$$

von $\mathfrak{g}'$ gewählt wird, das kein Gewicht von $\mathfrak{g}$ ist. Diese Lösung bezeichne ich daher als die **Standard-Lösung**. Auch die ausprojizierte Wurzel kann als Gewicht der Unteralgebra ausgedrückt werden. Unmittelbar aus dem Dynkin-Diagramm liest man ab:

$$\alpha_I = \sum_{A=1}^l m_A \beta_A^*, \quad \text{wobei } m_A = \begin{cases} -1, & \text{falls } \alpha_I \cdot \beta_A \neq 0, \\ 0, & \text{falls } \alpha_I \cdot \beta_A = 0. \end{cases} \quad (5.31)$$

Insbesondere ist α_I zwar keine Wurzel, aber immer ein Gewicht von $\mathfrak{g}'$. Um den Formalismus zu illustrieren, soll je ein Beispiel für jede der beiden $\mathfrak{g}^{(16)}$ -Algebren durchgerechnet werden.

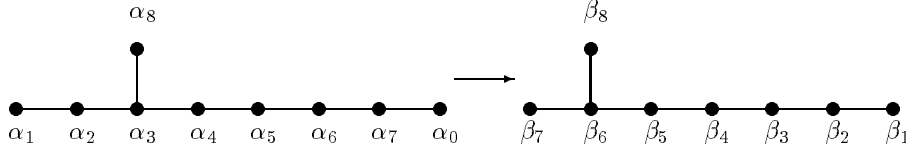


Abbildung 5.1: Durch die Wilsonlinie $\mathbf{A}_1$ wird die Lie-Algebra E_8 durch Eliminierung der Wurzel α_1 aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm auf eine maximale D_8 -Unteralgebra gebrochen.

Beispiel 1: Es sei $\mathfrak{g}^{(16)} = E_8 \oplus E_8$. Da diese Lie-Algebra halbeinfach ist, reicht es, einen der beiden Summanden $\mathfrak{g} = E_8$ zu betrachten. Wenn man den der ersten einfachen Wurzel zugeordneten Punkt aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm streicht, erhält man das Dynkin-Diagramm von D_8 , der komplexifizierten Lie-Algebra der Gruppe $SO(16)$. Dies wird in der Abbildung (5.1) illustriert, die auch die Numerierung der einfachen Wurzeln von E_8 und D_8 festlegt.

Sieben der einfachen Wurzeln der D_8 Unteralgebra sind auch einfache Wurzeln der E_8 . Bezüglich der Standard-Numerierung der Wurzeln gilt:

$$\beta_2 = \alpha_7, \beta_3 = \alpha_6, \dots, \beta_6 = \alpha_2 \text{ und } \beta_8 = \alpha_8. \quad (5.32)$$

An die Stelle der E_8 -Wurzel α_1 tritt jedoch die niedrigste Wurzel von E_8 als erste Wurzel von D_8 :

$$\beta_1 = \alpha_0 = - \left(\sum_{A=1}^8 k^A \alpha_A \right). \quad (5.33)$$

Die Koeffizienten k^A können auf folgende Weise gefunden werden: Die höchste Wurzel ist das höchste Gewicht der adjungierten Darstellung. Falls man sie nicht explizit konstruieren will, was nach dem in dem Buch von Cahn [138] angegebenen Algorithmus geschehen könnte, entnimmt man einer Darstellungstabelle dieses Gewicht als Funktion der fundamentalen Gewichte α_A^* , die durch

$$\alpha_A^* \cdot \alpha_B = \delta_{AB} \quad (5.34)$$

definiert sind. Im Fall der E_8 ergibt sich $\alpha_h = \alpha_7^*$. Die gleiche Information ergibt sich auch durch einen Blick auf das erweiterte Dynkin-Diagramm, der ja zeigt, daß die niedrigste Wurzel α_0 orthogonal zu allen Wurzeln außer α_7 ist, und mit α_7 das Skalarprodukt -1 hat. Damit folgt:

$$\alpha_h = -\alpha_0 = \alpha_7^*. \quad (5.35)$$

Bei einer einfach verbundenen Lie-Algebra ist die Cartan-Matrix zugleich die Metrik im Gewichtsraum, und die Zeilen der inversen Cartan-Matrix sind die Entwicklungskoeffizienten der fundamentalen Gewichte nach den einfachen Wurzeln:

$$\alpha_A^* = \sum_B C(\mathfrak{g})_{AB}^{-1} \alpha_B. \quad (5.36)$$

Will man sich die Matrixinversion sparen, so kann man im Anhang F des Buches von Cornwell [137] nachschlagen. Aus der siebten Zeile der inversen Cartanmatrix von E_8 ergeben sich dann die Koeffizienten:

$$\alpha_0 = -(2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 6\alpha_3 + 5\alpha_4 + 4\alpha_5 + 3\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8). \quad (5.37)$$

Die Standard-Wilsonlinie, die die Symmetriebrechung $E_8 \rightarrow D_8$ bewirkt, ist

$$\mathbf{A}_1 = \beta_1^*. \quad (5.38)$$

Man beachte, daß zwar $\beta_1 = \alpha_0$, aber $\beta_1^* \neq \alpha_0^*$ ist, weil der reziproke Vektor einmal bezüglich der α_i , das andere mal bezüglich der β_i gebildet wird. Explizit ist

$$\beta_1^* = \sum_{A=1}^8 C(D_8)_{1A}^{-1} \beta_A \quad (5.39)$$

und

$$\alpha_0^* = -\alpha_7^* = -\sum_{A=1}^8 C(E_8)_{7A}^{-1} \alpha_A. \quad (5.40)$$

Insbesondere ist

$$\alpha_0^* \cdot \alpha_1 = -\alpha_7^* \cdot \alpha_1 = 0, \quad (5.41)$$

aber

$$\mathbf{A}_1 \cdot \alpha_1 = \beta_1^* \cdot \alpha_1 = -\beta_1^* \cdot \left(\frac{1}{2} \beta_1 + \sum_{A=2}^8 \frac{k^A}{2} \beta_A \right) = -\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}. \quad (5.42)$$

Insgesamt hat dieses Beispiel gezeigt, wie man die auftretenden Wurzeln α_i , β_i mit Hilfe von Cartan-Matrizen ineinander umrechnen kann. Diese Charakterisierung ist gleichzeitig explizit und ökonomisch. Es wäre vollkommen überflüssig und verwirrend, die einfachen Wurzeln durch konkrete achtdimensionale Vektoren zu realisieren, obwohl das natürlich leicht möglich ist. Bedenkt man außerdem, daß die Lie-Algebra E_8 240 Wurzeln besitzt und 248-dimensional ist, so ist klar welchen Vorteil es bedeutet, mit 8 einfachen Wurzeln und dem Dynkin-Diagramm auskommen zu können.

Durch die Anwendung anderer Standard-Wilsonlinien kann man auch jede beliebige andere einfache Wurzel aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm von E_8 eliminieren. Insgesamt gibt es die folgenden acht Möglichkeiten:

Wurzel	α_1	α_2	α_3	α_4
Unteralgebra	D_8	$A_1 \oplus A_7$	$A_2 \oplus A_1 \oplus A_5$	$A_4 \oplus A_4$
Eichgruppe	$SO(16)$	$SU(2) \otimes SU(8)$	$SU(3) \otimes SU(2) \otimes SU(6)$	$SU(5) \otimes SU(5)$
Wurzel	α_5	α_6	α_7	α_8
Unteralgebra	$D_5 \oplus A_3$	$E_6 \oplus A_2$	$E_7 \oplus A_1$	A_8
Eichgruppe	$SO(10) \otimes SU(4)$	$E(6) \otimes SU(3)$	$E(7) \otimes SU(2)$	$SU(9)$

Dabei treten 3 der 5 Ausnahmen zu Dynkins Regel auf: Die Unteralgebren 2, 3 und 5 sind nicht maximal, sondern Unteralgebren der Unteralgebren 7, 6 und 1. Die Auswirkungen auf den Symmetriebrechungsformalismus werden später untersucht.

Beispiel 2: Es sei $\mathbf{g}^{(16)} = D_{16}$. Durch Entfernung der achten Wurzel aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm zerfällt D_{16} in die direkte Summe zweier D_8 -Algebren. Die eleganteste Beschreibung ermöglichen wieder die in Abbildung (5.2) gezeigten Dynkin-Diagramme. Die Eichgruppe ist $SO(16) \otimes SO(16)$.

Die gleiche Eichgruppe erhält man ausgehend vom $E_8 \oplus E_8$ -Modell, wenn man in jeder der beiden E_8 -Algebren die erste einfache Wurzel entfernt. P. Ginsparg [38] hat gezeigt, wie man zwischen den Kompaktifizierungen der $E_8 \oplus E_8$ -Theorie und der D_{16} -Theorie interpolieren kann. Dabei drückt er die verwendeten Hintergrundfelder explizit durch $SO(17;1)$ -Transformationen aus. Der Wechsel zwischen den beiden Γ_{16} -Basen erfordert eine $SO(17)$ -Drehung, die die linkslaufenden Eich- und Kompaktifizierungsfreiheitsgrade mischt und wieder trennt.

Aus dem Dynkin-Diagramm geht hervor, wie die D_{16} -Algebra aus zwei zueinander orthogonalen D_8 -Algebren zusammengesetzt werden kann: Aus den einfachen Wurzeln $(\beta_A, \mathbf{0})$ und $(\mathbf{0}, \gamma_A)$, $A = 1, \dots, 8$ der $D_8 \oplus D_8$ erhält man die Wurzeln α_B , $B = 0, \dots, 7, 9, \dots, 16$, also

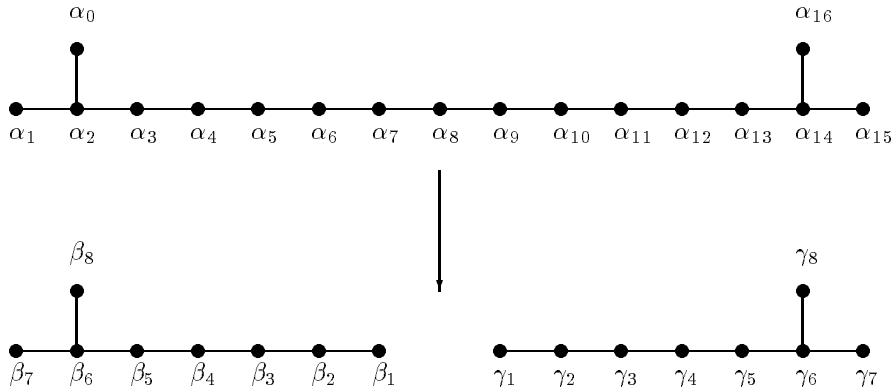


Abbildung 5.2: Die Wilsonlinie $\mathbf{A}_1$ bricht die Lie-Algebra D_{16} auf die maximale Unter algebra $D_8 \oplus D_8$

die niedrigste Wurzel von D_{16} und alle einfachen Wurzeln außer α_8 . Die Wurzel α_8 verknüpft die beiden D_8 -Lie-Algebren zu der größeren einfachen Lie-Algebra D_{16} , weil sie mit je einer einfachen Wurzeln beider Unter algebren ein nichtverschwindendes Skalarprodukte hat³. Sie ist Darstellungstheoretisch ein Vektorgewicht bezüglich jeder der beiden Unter algebren.

Umgekehrt kann die D_{16} zu ihrer maximalen $D_8 \oplus D_8$ Unter algebra gebrochen werden, indem man die Wurzel α_8 durch eine Wilsonlinie ausprojiziert. Die Standardlösung besteht darin, den reziproken Vektor der bei der Brechung neu hinzukommenden einfachen Wurzel zu nehmen, also

$$\mathbf{A}_1 = (\beta_8^*, \mathbf{0}). \quad (5.43)$$

Dieser Vektor ist ein Spinorgewicht der ersten D_8 -Unter algebra und hat damit (wie die oben entwickelte allgemeine Theorie bereits bewiesen hat) ein nichtganzzahliges Skalarprodukt mit α_8 . Das Beispiel zeigt auch, daß viele weitere Lösungen des Symmetriebrechungsproblems existieren, denn offensichtlich hat jedes Gewicht aus der (S,R)-Konjugationsklasse von $D_8 \oplus D_8$ diese Eigenschaft. Aus der Symmetrie des erweiterten Dynkin-Diagramms von D_{16} folgt, daß auch

$$\mathbf{A}'_1 = (\mathbf{0}, \gamma_8^*) \quad (5.44)$$

und damit jedes Gewicht aus der (R,S)-Konjugationsklasse eine Lösung ist. Bevor ich die Klassifizierung der Lösungen durchführe, sollen noch die maximalen Unter algebren von D_{16} aufgelistet werden. Aus Symmetriegründen gibt es nur 8 verschiedene Möglichkeiten, einen Punkt aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm zu entfernen.

Wurzel	α_1	α_2	α_3	α_4
Unter algebra	D_{16}	$A_1 \oplus A_1 \oplus D_{14}$	$A_3 \oplus D_{13}$	$D_4 \oplus D_{12}$
Eichgruppe	$SO(32)$	$SU(2) \otimes SU(2) \otimes SO(28)$	$SU(4) \otimes SO(26)$	$SO(8) \otimes SO(24)$
Wurzel	α_5	α_6	α_7	α_8
Unter algebra	$D_5 \oplus D_{11}$	$D_6 \oplus D_{10}$	$D_7 \oplus D_9$	$D_8 \oplus D_8$
Eichgruppe	$SO(10) \otimes SO(22)$	$SO(12) \otimes SO(20)$	$SO(14) \otimes SO(18)$	$SO(16) \otimes SO(16)$

³Man kann natürlich nicht beliebige Dynkin-Diagramme auf diese Art miteinander verknüpfen. Es muß insgesamt wieder ein zulässiges Dynkin-Diagramm entstehen.

5.3.3 Alle Lösungen des Symmetriebrechungsproblems

Als nächstes stellt sich die Frage, wie viele weitere Lösungen des Symmetriebrechungsproblems (5.17) - (5.19) existieren. Da die Wilsonlinie auf jeden Fall ein Gewichtsvektor der Unteralgebra $\mathfrak{g}'$ sein muß, ist die allgemeine Lösung von der Form:

$$\mathbf{A}_1 = \beta_I^* + \mathbf{v}, \text{ mit } \mathbf{v} \in \Gamma_W(\mathfrak{g}'). \quad (5.45)$$

Es sei nun Γ das ursprüngliche Gitter ohne Wilsonlinie, Γ' das Gitter der Standard-Lösung $\mathbf{v} = 0$ und Γ'' das Gitter einer anderen Lösung mit $\mathbf{v} \neq 0$. Die einfachste Art, diese Gitter miteinander zu vergleichen, ist, ihre Basen zu betrachten. Zunächst gibt es eine Reihe von Basisvektoren, die invariant sind und daher in allen drei Gittern liegen:

$$\mathbf{k}''^i = \mathbf{k}'^i = \mathbf{k}^i \quad \forall i, \quad \bar{\mathbf{k}}_i'' = \bar{\mathbf{k}}_i' = \bar{\mathbf{k}}_i \text{ für } i \neq 1, \quad (5.46)$$

$$\hat{\alpha}_A = \hat{\alpha}'_A = \hat{\alpha}''_A = (\alpha_A, 0; 0), \text{ für } A \neq I. \quad (5.47)$$

Die I-te Wurzel von $\mathfrak{g}$ ist hingegen nicht invariant:

$$\hat{\alpha}_I = (\alpha_I, \mathbf{0}; \mathbf{0}), \quad (5.48)$$

$$\hat{\alpha}'_I = \left(\alpha_I, -(\alpha_I \cdot \beta_I^*) \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*1}; -(\alpha_I \cdot \beta_I^*) \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*1} \right), \quad (5.49)$$

$$\hat{\alpha}''_I = \left(\alpha_I, -(\alpha_I \cdot \beta_I^* + \alpha_I \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*1}; -(\alpha_I \cdot \beta_I^* + \alpha_I \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*1} \right). \quad (5.50)$$

Im Falle $\Gamma_{16} = D_{16}$ gibt es einen Basisvektor $\mathbf{l}_1$, der keine Wurzel, sondern ein Spinorgewicht ist. Ich werde zunächst den $E_8 \oplus E_8$ -Fall untersuchen und die zusätzliche Komplikation später behandeln. Weiter brauchen wir die Bilder der höchsten Wurzel $\hat{\alpha}_h$ von Γ in den beiden anderen Gittern:

$$\hat{\alpha}'_h = \hat{\alpha}_h + (-\alpha_h \cdot \beta_I^*) \mathbf{k}^1 = \hat{\alpha}_h + \mathbf{k}^1, \quad (5.51)$$

$$\hat{\alpha}''_h = \hat{\alpha}_h + (1 - \alpha_h \cdot \mathbf{v}) \mathbf{k}^1, \text{ wobei } -\alpha_h \cdot \mathbf{v} \in \mathbf{Z}. \quad (5.52)$$

Schließlich gibt es einen weiteren nicht invarianten Basisvektor, nämlich

$$\bar{\mathbf{k}}_1 = (\mathbf{0}, \mathbf{e}_1; -\mathbf{e}_1), \quad (5.53)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_1' = \left(\beta_I^*, -\frac{1}{2}(\beta_I^*)^2 \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*1} + \mathbf{e}_1; -\frac{1}{2}(\beta_I^*)^2 \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*1} - \mathbf{e}_1 \right), \quad (5.54)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_1'' = \left(\beta_I^* + \mathbf{v}, -\frac{1}{2}((\beta_I^* + \mathbf{v})^2) \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*1} + \mathbf{e}_1; -\frac{1}{2}((\beta_I^* + \mathbf{v})^2) \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*1} - \mathbf{e}_1 \right). \quad (5.55)$$

Um die Analyse zu vereinfachen, beginne ich mit einem Spezialfall und nehme an, daß $\mathbf{v}$ nicht nur ein Gewicht von $\mathfrak{g}'$ sondern sogar ein Gewicht von $\mathfrak{g}$ ist. Dann ist $\alpha_I \cdot \mathbf{v} \in \mathbf{Z}$, und da somit die Vektoren $\hat{\alpha}'_I$ und $\hat{\alpha}''_I$ beide in $\Gamma' \cap \Gamma''$ liegen, unterscheiden sich die Gitter Γ' , Γ'' nur um die Basisvektoren $\bar{\mathbf{k}}_1'$, $\bar{\mathbf{k}}_1''$. Falls $\mathbf{v}$ außerdem im Wurzelgitter von $\mathfrak{g}'$ ist, kann nach den einfachen Wurzeln $\hat{\beta}_A$ der Unteralgebra entwickelt werden:

$$\hat{\mathbf{v}} \equiv (\mathbf{v}, \mathbf{0}; \mathbf{0}) = \sum_{A=1}^l v^A (\beta_A, \mathbf{0}; \mathbf{0}) \equiv \sum_{A=1}^l v^A \hat{\beta}_A, \text{ mit } v^A \in \mathbf{Z}, \quad (5.56)$$

und damit ist $\hat{\mathbf{v}} \in \Gamma''$. Da $\mathbf{v}$ im Wurzelgitter und β_I^* im Gewichtsgitter von $\mathfrak{g}'$ ist, gilt $\mathbf{v}^2 \in 2\mathbf{Z}$, $\mathbf{v} \cdot \beta_I^* \in \mathbf{Z}$ und somit

$$\bar{\mathbf{k}}_1'' - \bar{\mathbf{k}}_1' = \hat{\mathbf{v}} - (\beta_I^* \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2) \mathbf{k}^1. \quad (5.57)$$

Da diese Differenz in Γ'' liegt, folgt auch $\bar{\mathbf{k}}_1' \in \Gamma''$. Damit liegen alle Basisvektoren von Γ' in Γ'' und umgekehrt und somit sind die beiden Gitter gleich. *Inäquivalente Lösungen des*

Symmetriebrechungsproblems erhält man nur wenn $\mathbf{v} \notin \Gamma_R(\mathbf{g}')$ ist. Lösungen, die sich nur um Elemente von $\Gamma_R(\mathbf{g}')$ unterscheiden, definieren das gleiche Gitter und damit sind die Spektren der zugehörigen Theorien gleich.

Bisher war zusätzlich vorausgesetzt worden, daß $\mathbf{v}$ ein Gewichtsvektor von $\mathbf{g}$ ist. Läßt man diese Annahme fallen, können sich Γ' und Γ'' auch in den Basisvektoren $\hat{\alpha}'_I, \hat{\alpha}''_I$ unterscheiden. Nun ist

$$\hat{\alpha}''_I = \hat{\alpha} - (\alpha_I \cdot \beta_I^* + \alpha_I \cdot \mathbf{v})\mathbf{k}^1 = \hat{\alpha}'_I - (\alpha_I \cdot \mathbf{v})\mathbf{k}^1. \quad (5.58)$$

Falls $\alpha_I \cdot \mathbf{v} \notin \mathbf{Z}$ d.h. $\mathbf{v} \notin \Gamma_W(\mathbf{g})$ ist, gilt $\hat{\alpha}''_I \notin \Gamma'$ und damit $\Gamma'' \neq \Gamma'$. Es ist aber stets $\mathbf{v} \in \Gamma_W(\mathbf{g}')$ und mit (5.26)

$$k^I \alpha_I = -\beta_I - \sum_{A \neq I} k^A \beta_A \in \Gamma_R(\mathbf{g}'). \quad (5.59)$$

Daraus folgt

$$\alpha_I \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{k^I} \bmod \mathbf{Z}, \quad \exists m \in \{1, \dots, k^I\}. \quad (5.60)$$

Da α_I und $\mathbf{v}$ Gewichte von $\mathbf{g}'$ sind werden ihre Skalarprodukte modulo $\mathbf{Z}$ durch ihre Konjugationsklassen bestimmt [58]. Betrachtet man jetzt noch den Fall $\Gamma_{16} = D_{16}$, so kann der Basisvektor $\mathbf{l}_1$ genauso behandelt werden wie zuvor $\bar{\mathbf{k}}_1$. Das Bild von $\mathbf{l}_1$ ist nämlich

$$\mathbf{l}'_1 = \mathbf{l}_1 - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{A}_1)\mathbf{k}^1. \quad (5.61)$$

Da $\mathbf{e}_1$ ein (Spinor-)Gewicht von Γ_{16} ist, ist er insbesondere ein Gewicht von $\mathbf{g}'$, genau wie $\mathbf{A}_1$. Wieder kommt es nur darauf an in welcher Restklasse von $\Gamma_W(\mathbf{g}')$ modulo $\Gamma_R(\mathbf{g}')$ die Wilsonlinie ist. In jedem Fall legt bereits die Wahl dieser Restklasse das Gitter vollständig fest. Also gilt:

Satz 5.3.2 Die inäquivalenten Lösungen des Symmetriebrechungsproblems (5.17) - (5.19) werden durch die Elemente der Gruppe der Konjugationsklassen von Darstellungen der Unter algebra $\mathbf{g}'$

$$\Gamma_W(\mathbf{g}')/\Gamma_R(\mathbf{g}') \quad (5.62)$$

parametrisiert. Insbesondere gibt es nur endlich viele inäquivalente Lösungen.

Ein Spezialfall muß gesondert betrachtet werden, der Fall $m = 1$ in Gleichung (5.60). Denn dann gilt:

$$\alpha_I \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{k^I} \Rightarrow \alpha_I \cdot \beta_I^* + \alpha_I \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \hat{\alpha}_I \in \Gamma''. \quad (5.63)$$

Damit sind alle Wurzeln von $\mathbf{g}$ in Γ'' und die Symmetriealgebra ist nicht $\mathbf{g}'$, sondern $\mathbf{g}$. Das liegt daran, daß die Bedingung (5.17), durch die die Wurzel α_I eliminiert wird, nicht erfüllt ist, denn $\mathbf{A}_1 = \beta_I^* + \mathbf{v} \in \Gamma_W(\mathbf{g})$. Für $m = 1$ erhält man daher keine Lösung des Symmetriebrechungsproblems. Falls $\mathbf{A}_1 \in \Gamma_R(\mathbf{g})$, sind alle Basisvektoren von Γ'' in Γ und da beide Gitter selbst dual sind, folgt daraus bereits $\Gamma'' = \Gamma$. Falls $\mathbf{A}_1 \notin \Gamma_R(\mathbf{g})$, sind zwar die Wurzeln und damit die Eichgruppen beider Theorien gleich, nicht aber die Gitter insgesamt, d.h. die Spektren sind verschieden. Dieses Beispiel erinnert daran, daß

$$\mathbf{A}_1 \in \Gamma_W(\mathbf{g}') - \Gamma_W(\mathbf{g}) \quad (5.64)$$

eine **notwendige** Bedingung dafür ist, daß die Symmetrie wirklich gebrochen wird. Wenn $\mathbf{g}'$ eine maximale Unter algebra ist, gibt es keine Unter algebren „zwischen“ $\mathbf{g}$ und $\mathbf{g}'$, und die Bedingung ist auch **hinreichend** dafür, daß die Symmetriealgebra $\mathbf{g}'$ ist, da sie eine echte Unter algebra von $\mathbf{g}$ definiert, die $\mathbf{g}'$ enthält.

5.3.4 Halbeinfache Unteralgebren maximalen Ranges

Durch die Iteration des Dynkinschen Verfahrens können nach und nach alle halbeinfachen Unteralgebren maximalen Ranges gewonnen werden. Auch das Symmetriebrechungsproblem und die Standardlösung können natürlich iteriert werden, was ich später an Beispielen zeigen werde. Der Rechenaufwand, obwohl er mit Unterstützung durch ein algebraisches Rechenprogramm kein Problem darstellen dürfte, steigt dabei wie bei jedem iterativen Verfahren von Stufe zu Stufe. Um Arbeit zu sparen und die Übersicht zu behalten, ist eine Verallgemeinerung der Umformulierung (5.64) des Symmetriebrechungsproblems von Nutzen.

Zunächst ist klar, daß jede halbeinfache Unteralgebra maximalen Ranges von $\mathfrak{g}$ zu mindestens einer Kette von maximalen halbeinfachen Unteralgebren

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \dots \quad (5.65)$$

gehört. Da für die Wurzel- und Gewichtsgitter von einfach verbundenen Lie-Algebren

$$\Gamma_R \subset \Gamma_W = \Gamma_R^* \quad (5.66)$$

ist, induziert jede Kette (5.65) von maximalen Unteralgebren eine Kette von Gittern

$$\dots \Gamma_R(\mathfrak{g}^{(2)}) \subset \Gamma_R(\mathfrak{g}^{(1)}) \subset \Gamma_R(\mathfrak{g}) \subset \Gamma_W(\mathfrak{g}) \subset \Gamma_W(\mathfrak{g}^{(1)}) \subset \Gamma_W(\mathfrak{g}^{(2)}) \dots \quad (5.67)$$

Jede Wahl

$$\mathbf{A}_1 \in \Gamma_W(\mathfrak{g}^{(n)}) - \Gamma_W(\mathfrak{g}^{(n-1)}) \quad (5.68)$$

einer Wilsonlinie bricht $\mathfrak{g}$ auf die Unteralgebra $\mathfrak{g}^{(n)}$, falls diese in nur einer Kette der Form (5.65) auftritt. *Beweis:* Da $\mathbf{A}_1$ ein Gewicht von $\mathfrak{g}^{(n)}$ ist, haben alle Wurzeln von $\mathfrak{g}^{(n)}$ ein ganzzahliges Skalarprodukt mit $\overline{\mathbf{K}}_1'$ und damit mit allen Basisvektoren von Γ' , dem durch $\mathbf{A}_1$ definierten Impulsgitter. Da das Impulsgitter selbstdual ist, sind sie damit Gittervektoren

$$\mathbf{A}_1 \cdot \alpha \in \mathbf{Z} \implies \overline{\mathbf{K}}_1' \cdot \hat{\alpha} \in \mathbf{Z} \implies \hat{\alpha} \in \Gamma'. \quad (5.69)$$

Die zu Γ' gehörende Lie-Algebra enthält also $\mathfrak{g}'$. Da andererseits $\mathbf{A}_1$ kein Gewicht von $\mathfrak{g}^{(n-1)}$ ist, gibt es mindestens eine Wurzel von $\mathfrak{g}^{(n-1)}$, die nicht in Γ' liegt und die Lie-Algebra ist kleiner als $\mathfrak{g}^{(n-1)}$. Da $\mathfrak{g}^{(n)}$ eine maximale Unteralgebra von $\mathfrak{g}^{(n-1)}$ ist, ist die ungebrochene Lie-Algebra $\mathfrak{g}^{(n)}$.

Falls eine Unteralgebra in mehreren Inklusionsketten auftritt, muß man in (5.68) die Gewichtsgitter aller Oberalgebren der gewünschten ungebrochenen Lie-Algebra ausschließen. Ein wirkungsvoller Test, ob eine unerwartete Symmetrieerhöhung vorliegt, besteht darin, die Dimension der adjungierten Darstellung mit der Gesamtzahl der Wurzeln von Γ' zu vergleichen. Stimmen sie überein, so kann man sicher sein, daß die richtige Lie-Algebra vorliegt; übersehene Symmetrieerweiterungen machen sich durch zusätzliche Wurzeln bemerkbar. Als Beispiel dafür, daß die Menge der Unteralgebren einer einfachen Lie-Algebra bezüglich Inklusion nicht linear geordnet ist, mag die Rang 8 Unteralgebra $A_1 \oplus A_1 \oplus D_6$ von E_8 dienen. Mit Hilfe der Dynkinschen Regel folgen die Inklusionen (als jeweils maximale Unteralgebren)

$$\begin{aligned} A_1 \oplus A_1 \oplus D_6 &\subset D_8 && \subset E_8, \\ A_1 \oplus A_1 \oplus D_6 &\subset E_7 \oplus A_1 && \subset E_8. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Das gleiche Problem tritt bei den 5 Ausnahmen zu Dynkins Regel auf, von denen 4 für die Brechungen von E_8 relevant sind. Da bei der Formulierung des Symmetriebrechungsproblems genau die Dynkinsche Regel implementiert wurde, ist hier nicht klar, ob eine gegebene Lösung von (5.17) – (5.19) die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf die nichtmaximale Unteralgebra bricht, die Dynkins Regel angibt, oder die zwischen dieser Unteralgebra und $\mathfrak{g}$ liegende Lie-Algebra. Diese Frage soll in dem folgenden Beispiel untersucht werden, in dem außerdem explizit vorgeführt wird, wie man das für maximale Unteralgebren entwickelte Verfahren iteriert.

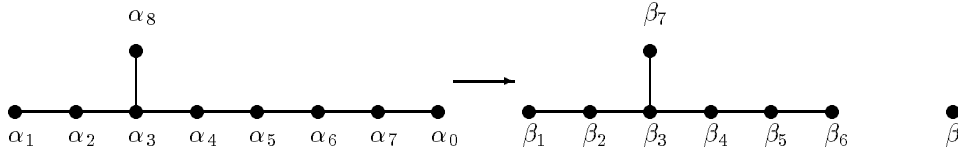


Abbildung 5.3: Die Wilsonlinie $\mathbf{A}_1 = \beta^* = -\alpha_7^*$ eliminiert die siebte Wurzel von E_8 . Dadurch entsteht die Unteralgebra $E_7 \oplus A_1$.

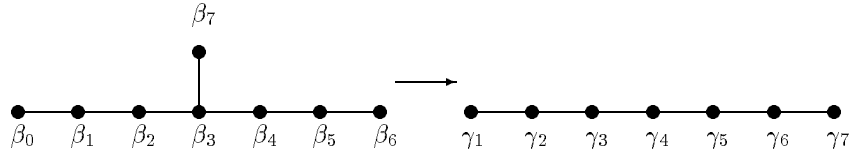


Abbildung 5.4: Durch Addition von γ_1^* zur Wilsonlinie wird die E_7 weiter zur A_7 gebrochen. Der A_1 -Summand bleibt davon unberührt und ist in dieser Abbildung nicht eingezeichnet.

Beispiel: Ausgangspunkt sei die Lie-Algebra E_8 mit den einfachen Wurzeln α_i , $i = 1, \dots, 8$ und der höchsten Wurzel $\alpha_h = \alpha_7^*$. Durch Entfernen der siebten einfachen Wurzel erhält man die maximale Unteralgebra $E_7 \oplus A_1$, siehe Abbildung (5.3).

Die einfachen Wurzeln der Unteralgebra können durch die der E_8 ausgedrückt werden:

$$E_7 : \beta_A = \alpha_A, A = 1, \dots, 6, \beta_7 = \alpha_8, \quad A_1 : \beta = -\alpha_7^*. \quad (5.71)$$

Die Standard-Wilsonlinie ist, wie immer, der duale Vektor der neuen einfachen Wurzel, wobei sich dual auf die $E_7 \oplus A_1$ -Unteralgebra bezieht:

$$\mathbf{A}_1 = \beta^* = \frac{\beta}{\beta \cdot \beta}. \quad (5.72)$$

Um die E_7 weiter zu brechen, betrachtet man das erweiterte Dynkin-Diagramm von E_7 . Die höchste Wurzel ist β_1^* . Durch Entfernung der siebten einfachen Wurzel β_7 entsteht die maximale Unteralgebra A_7 , wie in Abbildung (5.4) gezeigt.

Die einfachen Wurzeln der $A_7 \oplus A_1$ -Unteralgebra von $E_7 \oplus A_1$ sind:

$$A_7 : \gamma_1 = -\beta_1^* = \sum_{A=1}^7 C(E_7)^{-1}_{1A} \beta_A, \quad \gamma_A = \beta_{A-1}, A = 2, \dots, 7, \quad A_1 : \beta. \quad (5.73)$$

Die Standard-Wilsonlinie für die Brechung $E_8 \rightarrow A_7 \oplus A_1$ ist daher

$$\mathbf{A}_1 = \beta^* + \gamma_1^*, \quad \gamma_1^* = \sum_{A=1}^7 C(A_7)^{-1}_{1A} \gamma_A. \quad (5.74)$$

Die Unteralgebra $A_7 \oplus A_1 \subset E_8$ ist eine der Ausnahmen zu Dynkins Regel, da sie nicht maximal ist, aber durch die Entfernung der zweiten einfachen Wurzel aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm von E_8 erzeugt werden kann. Die durch die Dynkin-Regel definierte $A_7 \oplus A_1$ Unteralgebra besitzt, wie man Abbildung (5.5) entnimmt, die folgenden einfachen Wurzeln:

$$A_7 : \gamma'_1 = \alpha_8, \gamma'_A = \alpha_{A+1}, A = 2, \dots, 6, \gamma'_7 = -\alpha_7^*, \quad A_1 : \beta' = \alpha_1, \quad (5.75)$$

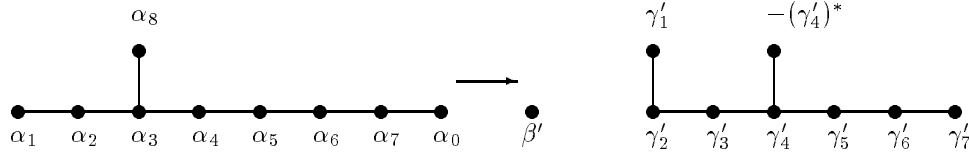


Abbildung 5.5: Auch durch die Eliminierung der zweiten Wurzel von E_8 erhält man eine $A_7 \oplus A_1$ Unteralgebra. Falls die Wilsonlinie das A_7 -Gewicht $-(\gamma'_4)^*$ nicht ausprojiziert, wird die ungebrochene Algebra zur $E_7 \oplus A_1$ erweitert.

und die Standard-Wilsonlinie ist

$$\mathbf{A}_1 = (\gamma'_7)^* = \sum_{A=1}^7 C(A_7)^{-1}_{7A} \gamma'_A. \quad (5.76)$$

Man beachte, daß diese Unteralgebra nicht mit der vorhin konstruierten identisch ist, da sie verschiedene Wurzeln besitzen⁴. Da $A_7 \oplus A_1$ keine maximale Unteralgebra ist, ist aber nicht klar, ob die Standard-Wilsonlinie E_8 wirklich auf $A_7 \oplus A_1$ bricht oder ob zusätzliche Wurzeln die Projektion überleben und die Symmetrie auf $E_7 \oplus A_1$ vergrößern. Um dies festzustellen, müssen wir die einfachen Wurzeln dieser Oberalgebra finden. Ein Blick auf die relevanten Dynkin-Diagramme zeigt, daß das Dynkin-Diagramm von A_7 durch die Hinzunahme des Gewichtes $-(\gamma'_4)^*$ zum erweiterten Dynkin-Diagramm von E_7 wird⁵. Anders ausgedrückt bilden die A_7 -Gewichte $-(\gamma'_4)^*, \gamma'_2, \dots, \gamma'_7$ ein System von einfachen Wurzeln der E_7 . Dies wird durch Abbildung (5.5) illustriert.

Der Vektor $(\gamma'_4)^*$ liegt genau dann im Impulsgitter, wenn $(\gamma'_4)^*$ ein ganzzahliges Skalarprodukt mit α_2 und mit der Wilsonlinie $\mathbf{A}_1$ hat, denn die einzigen Basisvektoren mit denen $(\gamma'_4)^*$ möglicherweise ein nicht ganzzahliges Skalarprodukt hat sind $\hat{\alpha}'_2$ und $\hat{\mathbf{K}}'_1$. Aus

$$(\gamma'_4)^* \cdot \alpha_2 = \sum_{A=1}^7 C(A_7)^{-1}_{4A} (\gamma'_A \cdot \alpha_2) = C(A_7)^{-1}_{42} (-1) = \frac{8}{8} (-1) = -1 \in \mathbf{Z} \quad (5.77)$$

folgt, daß es nur von der Wilsonlinie abhängt. Die Standardwahl $\mathbf{A}_1 = (\gamma'_7)^*$ ergibt

$$\mathbf{A}_1 \cdot (\gamma'_4)^* = (\gamma'_7)^* \cdot (\gamma'_4)^* = C(A_7)^{-1}_{74} = \frac{4}{8} \notin \mathbf{Z}, \quad (5.78)$$

und die Symmetrie wird auf $A_7 \oplus A_1$ gebrochen.

Als Beispiel für eine höhere Symmetrie diene die Wilsonlinie $\mathbf{A}_1 = 2(\gamma'_7)^*$. Sie eliminiert zwar die zweite einfache Wurzel der E_8 , da

$$2(\gamma'_7)^* \cdot \alpha_2 = 2C(A_7)^{-1}_{72} (-1) = 2 \frac{2}{8} = \frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}. \quad (5.79)$$

ist aber verträglich mit der E_7 -Wurzel $-(\gamma'_4)^*$:

$$2(\gamma'_7)^* \cdot (\gamma'_4)^* = 2 \frac{4}{8} = 1 \in \mathbf{Z} \quad (5.80)$$

⁴Die beiden $A_7 \oplus A_1$ Unteralgebren sind verschieden, aber konjugiert, d.h. sie können durch innere Automorphismen ineinander überführt werden [143]. Sie sind daher auf die gleiche Weise in die E_8 eingebettet. Daher gelingt es im Text auch, die $E_7 \oplus A_1$ Oberalgebra der von den γ'_A erzeugten $A_7 \oplus A_1$ zu konstruieren.

⁵Die (offensichtliche) Umkehrung von Dynkins Regel lautet: Eine halbeinfache Lie-Algebra kann genau dann in eine andere halbeinfache Lie-Algebra als maximale Unteralgebra eingebettet werden, wenn sie ein Gewicht besitzt, das das Dynkin-Diagramm der Unteralgebra zum erweiterten Dynkin-Diagramm der Oberalgebra erweitert. Dabei sind die fünf Ausnahmefälle zu berücksichtigen.

Die ungebrochene Algebra ist also $E_7 \oplus A_1$.

Im Falle der E_8 ist es einfach, alle halbeinfachen Unteralgebren maximalen Ranges niederzuschreiben. Das Verfahren bricht spätestens im vierten Iterationsschritt ab, und es gibt nur 19 nichtisomorphe echte Rang-8-Unteralgebren von E_8 . Ihre Zahl hält sich nicht zuletzt deswegen in Grenzen, weil einfache Lie-Algebren vom Typ A_l überhaupt keine echten regulären Unteralgebren maximalen Ranges besitzen: Durch Streichen eines beliebigen Punktes aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm erhält man immer nur das alte Dynkin-Diagramm. Trotzdem gibt es auch hier interessante Symmetriebrechungsmöglichkeiten, die zu maximalen Unteralgebren mit einem abelschen Summanden führen. Symmetriebrechungen, bei denen sich der Rang des halbeinfachen Teils verringert, werden im nächsten Abschnitt besprochen.

5.3.5 Unteralgebren beliebigen Ranges und kontinuierliche Parameter

Aufgrund der Ergebnisse der beiden vorangehenden Abschnitte ist eine diskrete⁶ Menge von Punkten im Narain-Modulraum bekannt, an denen die Symmetrieralgebra eine Unteralgebra maximalen Ranges der ursprünglichen Algebra $\mathfrak{g}^{(16)}$ ist. Ein Vorteil des Arbeitens mit Basisvektoren ist, daß die Abhängigkeit des Impulsgitters und damit des Spektrums von den Hintergrundfeldern explizit bekannt ist. Dies soll jetzt benutzt werden, um zwischen kritischen Punkten vom Typ 16 kontinuierlich zu interpolieren.

Es sei $\mathfrak{g}_I^{(16)}$ diejenige Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die man durch Streichen der I-ten Wurzel aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm erhält. Die Standard-Wilsonlinie ist dann β_I^* und es bietet sich an, eine einparametrische Schar von Wilsonlinien

$$\mathbf{A}_1 = p\beta_I^*, \quad p \in \mathbf{R}, \quad (5.81)$$

zu betrachten, die zwischen dem Modell ohne Hintergrundfelder und dem mit der Standard-Wilsonlinie interpolieren. Die Basisvektoren des deformierten Impulsgitter $\Gamma(p)$ sind

$$\bar{\mathbf{k}}_1 = \left(p\beta_I^*, -\frac{1}{2}p^2(\beta_I^* \cdot \beta_I^*)\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1} + \mathbf{e}_1; -\frac{1}{2}p^2(\beta_I^* \cdot \beta_I^*)\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1} - \mathbf{e}_1 \right), \quad (5.82)$$

$$\hat{\alpha}'_I = \left(\alpha_I, \frac{p}{k^I}\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1}; \frac{p}{k^I}\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1} \right) = \hat{\alpha}_I + \frac{p}{k^I}\mathbf{k}^1, \quad (5.83)$$

$$\hat{\alpha}'_A = (\alpha_A, \mathbf{0}; \mathbf{0}) = \hat{\alpha}_A, \quad A \neq I, \quad (5.84)$$

$$\hat{\alpha}'_h = \left(\alpha_h, p\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1}; p\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1} \right) = \hat{\alpha}_h + p\mathbf{k}^1, \quad (5.85)$$

wobei ich darauf verzichtet habe, die invarianten Basisvektoren mit aufzulisten.

Für $p \notin \mathbf{Z}$ sind weder $\hat{\alpha}_I$ noch $\hat{\alpha}_h$ in $\Gamma(p)$. Die ungebrochene Symmetrieralgebra ist

$$\mathfrak{g}(p) = \mathfrak{g}_I^{(15)} \oplus u(1), \quad (5.86)$$

wobei $\mathfrak{g}_I^{(15)}$ diejenige halbeinfache Rang 15 Unteralgebra ist, die man durch Entfernung des I-ten Punktes aus dem Dynkin-Diagramm (nicht dem erweiterten!) erhält. Die Wilsonlinie erfüllt zwar die Gleichungen (5.17) und (5.18) des Symmetriebrechungsproblems, nicht aber (5.19). Dadurch wird Dynkins zweite Regel implementiert.

Für ganzzahlige Werte von p erhöht sich der Rang des halbeinfachen Teils wieder auf 16. Für $p = 1$ ergibt sich natürlich die Standard-Lösung, da jetzt auch Gleichung (5.19) erfüllt ist, und die niedrigste Wurzel von $\mathfrak{g}^{(16)}$ das Dynkin-Diagramm von $\mathfrak{g}_I^{(15)}$ zu dem von $\mathfrak{g}_I^{(16)}$ erweitert:

$$\mathfrak{g}(1) = \mathfrak{g}_I^{(16)}. \quad (5.87)$$

⁶Der Radius der 1-Richtung wird ja zur Zeit konstant gehalten.

Ein anderer Wert von herausgehobener Bedeutung ist $p = k^I$. Denn es ist

$$\beta_I^* \cdot \alpha_I = -\frac{1}{k^I} \text{ und } \beta_I^* \cdot \alpha_J = 0, \forall J \neq I \quad (5.88)$$

und damit $\beta_I^* = -\frac{1}{k^I} \alpha_I^*$. Damit ist

$$\mathbf{A}_1 = -k^I \beta_I^* = \alpha_I^* \in \Gamma_W(\mathfrak{g}). \quad (5.89)$$

In diesem Fall sind sowohl $\hat{\alpha}_I$ als auch $\hat{\alpha}_h$ im Gitter und daher gilt

$$\mathfrak{g}(k^I) = \mathfrak{g}. \quad (5.90)$$

Das gleiche gilt für alle ganzzahligen Vielfachen von k^I . Die Gitter $\Gamma(0)$ und $\Gamma(k^I)$ sind genau dann gleich, wenn $\alpha_I^* \in \Gamma_R(\mathfrak{g})$ ist. In jedem Fall existiert eine Zahl $M \in \mathbf{Z}$, so daß $M\alpha_I^* \in \Gamma_R(\mathfrak{g})$. Zusammenfassend gilt

$$\mathfrak{g}(nk^I) = \mathfrak{g}, (\forall n \in \mathbf{Z}), \quad \Gamma(Mk^I) = \Gamma, (\exists M \in \mathbf{Z}^+). \quad (5.91)$$

Für alle ganzzahligen Werte von p , die keine Vielfachen von k^I sind, ist die realisierte Lie-Algebra nur $\mathfrak{g}_I^{(16)}$. Ob $\Gamma(p)$ dann gleich $\Gamma(1)$ ist, hängt davon ab, ob $\beta_I^* \cdot \beta_I^*$ eine ganze Zahl ist oder nicht.

Man gelangt also, egal in welche der 16 linear unabhängigen Richtungen β_I^* man sich bewegt, bei endlichen Parametern zum ursprünglichen Gitter zurück. Offensichtlich gibt es einen beschränkten Fundamentalbereich, der bereits alle inäquivalenten Gitter und Modelle enthält. Es ist wohlbekannt, daß der Narain-Modulraum (wie auch alle anderen bekannten Modulräume konformer Feldtheorien) diskrete Symmetrien besitzen, so daß der homogene Raum $O(22;6) / (O(22) \otimes O(6))$ die Theorienschar nur lokal charakterisiert. Ein expliziter Vergleich der hier gefundenen Kopien mit den durch Dualitätstransformationen gefundenen wäre daher wünschenswert.

Für alle nichtganzzahligen Werte von p wird der halbeinfache Teil der Eichgruppe reduziert. Durch die Parametrisierung mittels der Standard-Wilsonlinien ist es gelungen, diejenigen Richtungen zu identifizieren, in denen der Rang nur um 1 sinkt und genau eine bestimmte einfache Wurzel entfernt wird. Es ist natürlich nicht nötig, sich auf die maximalen Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ zu beschränken. Wenn δ_I die einfachen Wurzeln irgendeiner der Unteralgebren maximalen Ranges ist, die wie im letzten Abschnitt gezeigt, alle konstruiert werden können, so wird durch eine Wilsonlinie proportional zu δ_I^* genau die I -te Wurzel entfernt. Auf diese Weise können nach Dynkins zweiter Regel alle Rang 15 Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ erzeugt werden. Sie treten in einparametrische Scharen auf, die kritische Punkte besitzen, an denen der Rang sich auf 16 erhöht.

Beispiel: Es sei $\mathfrak{g}^{(16)} = E_8 \oplus E_8$. Durch Entfernung der sechsten Wurzel aus dem Dynkin-Diagramm einer der beiden E_8 -Algebren erhält man eine $E_6 \oplus A_1$ (Abbildung 5.6), die sich an kritischen Punkten auf eine $E_6 \oplus A_2$ vergrößert (Abbildung 5.7). Bezeichnet man die Wurzeln dieser maximalen Unteralgebra mit $\beta_1, \dots, \beta_6, \gamma_1, \gamma_2$, so ist die Standard-Wilsonlinie $\mathbf{A}_1 = \gamma_1^*$. Da der sechste Koeffizient der höchsten Wurzel von E_8 gleich 3 ist, erhält man für $\mathbf{A}_1 = 3\gamma_1^*$ wieder die volle E_8 -Symmetrie. Da die Lie-Algebra E_8 nur eine Konjugationsklasse besitzt, sind alle Gewichte auch Wurzeln. Daher erhält man wieder das ursprüngliche Gitter.

Durch Iteration des Verfahrens kann der Rang des halbeinfachen Teils immer weiter gesenkt werden, wobei sich die Zahl der kontinuierlich variierbaren Parameter entsprechend erhöht. Das Symmetriebrechungsproblem (5.17) - (5.19) wurde so formuliert, daß man es auch für halbeinfache Unteralgebren beliebigen Ranges stellen und lösen kann. An die Stelle von Γ_{16} tritt dabei das von den einfachen Wurzeln der betreffenden Lie-Algebra erzeugte Wurzelgitter. Aus Dynkins zweiter Regel folgt, daß man alle Unteralgebren vom Typ halbeinfach $\oplus$ abelsch realisieren kann. Beispiele für Multiparameterfamilien von Unteralgebren nichtmaximalen Ranges werde ich später im Zusammenhang mit allgemeineren Hintergrundfeldern betrachten.

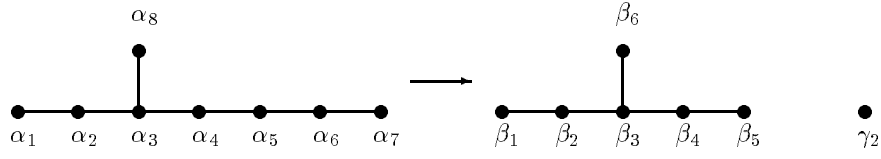


Abbildung 5.6: Durch die Wilsonlinie $\mathbf{A}_1 = p\gamma_1^*$, die die sechste Wurzel $\alpha_6 = (-\beta_5^*, -\gamma_2^*)$ aus dem Dynkin-Diagramm von E_8 gestrichen. Übrig bleibt die Rang 7 Unteralgebra $E_6 \oplus A_1$. Mit β_i, γ_i werden dabei die einfachen Wurzeln der maximalen $E_6 \oplus A_2$ Unteralgebra bezeichnet.

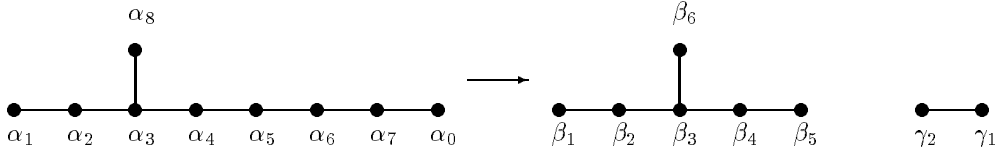


Abbildung 5.7: Für kritische Wilsonlinien $\mathbf{A}_1 = p\gamma_1^*$ erhöht sich die ungebrochene Symmetrie auf $E_6 \oplus A_2$. Falls $p \in 3\mathbf{Z}$ ist, erhält man die E_8 .

5.3.6 Symmetrievergrößerung mit einer Wilsonlinie

Unter „kritischen“ oder „multikritischen“ Wilsonlinien versteht man im allgemeinen Werte der Wilsonlinien, die den Rang der halbeinfachen Eichgruppe auf Werte größer als 16 erhöhen. Auch dies ist bisher nicht systematisch untersucht worden. Das von Ginsparg angegebene Beispiel zeigt, wie die D_{16} zur D_{17} erweitert werden kann, bzw. zur D_{16+d} , wenn d Wilsonlinien verwendet werden. Ich werde ein allgemeineres Problem behandeln, beschränke mich aber vorerst auf Impulsgitter der Form $\Gamma_{17;1} \oplus \Gamma_{5;5}$ und damit auf den Fall einer nicht-verschwindenden Wilsonlinie. Im Eichsektor sei irgendeine halbeinfache Lie-Algebra vom Rang $l \leq 16$ realisiert, d.h. die Wilsonlinie ist so gewählt, daß l einfache Wurzeln der Form

$$\hat{\alpha}_A = (\alpha_A, \mathbf{0}; \mathbf{0}), \quad A = 1, \dots, l \quad (5.92)$$

im Gitter liegen. Wir können nun nach einer zusätzlichen Wurzel der Form

$$\hat{\alpha}_{l+1} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}; \mathbf{0}) \quad (5.93)$$

suchen, die das Wurzelsystem erweitert. Dies ist genau dann der Fall, wenn die $l+1$ linear unabhängigen Wurzeln die Cartan-Matrix einer halbeinfachen Lie-Algebra vom Range $l+1$ realisieren:

$$\hat{\alpha}_A \cdot \hat{\alpha}_B = C_{AB}^{(l+1)}, \quad A, B = 1, \dots, l+1, \quad (5.94)$$

Ein Blick auf die Gitterbasis zeigt, daß der allgemeinste Ansatz für die zusätzliche Wurzel

$$\hat{\alpha}_{l+1} = \bar{\mathbf{k}}_1 + m\mathbf{k}^1, \quad m \in \mathbf{Z} \quad (5.95)$$

$$= \left(\mathbf{A}_1, -\frac{1}{2}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1) \frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1} + \mathbf{e}_1; -\frac{1}{2}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1) \frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1} - \mathbf{e}_1 \right) + m \left(\mathbf{0}, \frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1}; \frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1} \right)$$

ist. Da $\mathbf{R}^d/2\pi\Lambda$ der Torus ist, auf dem die sechs zusätzlichen Raumdimensionen kompaktifiziert wurden, ist die Quadratwurzel aus $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1$ der Radius der 1-Richtung auf dem Torus, die orthogonal zu den anderen fünf Richtungen gewählt wird. Damit gilt:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = R^2, \quad \mathbf{e}^{*1} \cdot \mathbf{e}^{*1} = \frac{1}{R^2}, \quad \mathbf{e}_1 = R^2 \mathbf{e}^{*1}. \quad (5.96)$$

Es ist nützlich $\bar{\mathbf{K}}'_1$ umzuschreiben:

$$\bar{\mathbf{K}}'_1 = \left(\mathbf{A}_1, 2\mathbf{e}_1 + D\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1}; D\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*1} \right), \quad D = 2 \left(-R^2 - \frac{1}{4}(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1) \right), \quad (5.97)$$

denn nun sieht man unmittelbar, daß $\hat{\alpha}_{l+1}$ nur dann im Impulsgitter Γ' liegen kann, wenn

$$D = -m \in \mathbf{Z} \quad (5.98)$$

ist, und daß die zusätzliche einfache Wurzel die Gestalt

$$\hat{\alpha}_{l+1} = (\mathbf{A}_1, 2\mathbf{e}_1; \mathbf{0}) \quad (5.99)$$

haben muß. Damit dieser Vektor wirklich eine Wurzel ist, muß gelten:

$$\hat{\alpha}_{l+1} \cdot \hat{\alpha}_{l+1} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 + 4\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 2. \quad (5.100)$$

Aus (5.98) und (5.100) folgen zwei Bedingungen an die kontinuierlichen Parameter R und $\mathbf{A}_1$:

$$2R^2 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 = m \in \mathbf{Z}, \quad (5.101)$$

$$4R^2 + \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 = 2. \quad (5.102)$$

Zusammen implizieren sie $m = 1$ und eine Relation zwischen dem Radius der 1-Richtung und der Norm der Wilsonlinie

$$R^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1. \quad (5.103)$$

Dies zeigt, daß die Symmetrienerhöhung nur für spezielle Werte des Radius R auftritt. Da $R^2 > 0$ und $\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 \geq 0$, müssen die folgenden Schranken respektiert werden:

$$0 < R \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad 0 \leq \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 \leq 2. \quad (5.104)$$

Eine obere Schranke für den Radius, die wegen der Verwendung natürlicher Einheiten von der Ordnung der Planck-Länge ist, erscheint zunächst kontraintuitiv. Es sei daher daran erinnert, daß die geometrische Interpretation einer Stringtheorie aufgrund der Dualitätssymmetrie zwischen kleinen und großen Abständen mehrdeutig ist. Auch für die hier betrachtete Schar von Modellen mit kleinem Radius R gibt es eine äquivalente Geometrie, in der der Radius der 1-Richtung $R' = 1/2R$ ist.

Um die Bedingung (5.94) weiter analysieren zu können, muß die Art der Symmetrienerweiterung näher spezifiziert werden.

1. Wenn die Extra-Wurzel mit genau einer der l anderen Wurzeln, z.B. der l -ten, ein nichtverschwindendes Skalarprodukt hat, so gilt

$$\hat{\alpha}_{l+1} \cdot \hat{\alpha}_A = \mathbf{A}_1 \cdot \alpha_A = -\delta_{Al} \Rightarrow \mathbf{A}_1 = -\alpha_l^* + \mathbf{v}, \quad (5.105)$$

wobei $\mathbf{v}$ orthogonal zu den l Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ ist.

2. Wenn die Extra-Wurzel ein verschwindendes Skalarprodukt mit allen l anderen einfachen Wurzeln hat, wird die Lie-Algebra um einen direkten $\mathbf{A}_1$ Summanden erweitert. Ist insbesondere $\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$, so folgt $R = 1/\sqrt{2}$. Dieser Fall ist aus eindimensionalen Kompaktifizierungen und konformen Feldtheorien mit $c = 1$ wohlbekannt [1],[42].
3. Wenn die Wilson-Linie ein nichtverschwindendes Skalarprodukt mit mehr als einer der anderen einfachen Wurzeln haben soll, muß sie eine geeignete Linearkombination aus fundamentalen Gewichten von $\mathfrak{g}^{(l)}$ und einem beliebigen dazu orthogonalen Anteil sein.

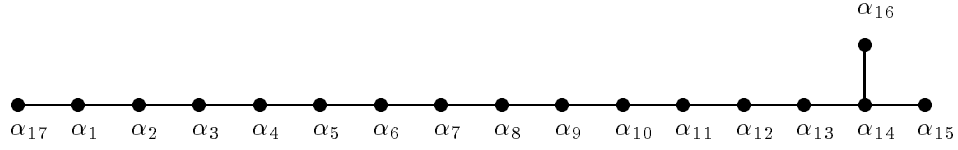


Abbildung 5.8: Das Dynkin-Diagramm von D_{16} kann zu dem von D_{17} erweitert werden. Die zusätzliche Wurzel muß von der Form $(-\alpha_1^*, 1)$ sein.

Zur Illustration mögen die folgenden beiden Beispiele dienen.

Beispiel: Es sei $\mathfrak{g}^{(16)} = D_{16}$ und $\mathbf{A}_1 = 0$. Die zusätzliche Wurzel ist dann von der Form

$$\hat{\alpha}_{17} = (\mathbf{0}, 2\mathbf{e}_1; \mathbf{0}), \quad (5.106)$$

mit

$$2\mathbf{e}_1 = (\sqrt{2}, \vec{0}). \quad (5.107)$$

Diese einfache Wurzel erzeugt eine A_1 Algebra. Der Radius der 1-Richtung ist

$$R = |\mathbf{e}_1| = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad (5.108)$$

also liegt der Standardfall der Symmetrienerhöhung bei eindimensionaler Kompaktifizierung vor. Die Symmetriealgebra ist insgesamt

$$\mathfrak{g}^{(17)} = D_{16} \oplus A_1. \quad (5.109)$$

Beispiel: Es sei wieder $\mathfrak{g}^{(16)}$, aber diesmal soll das Beispiel von Ginsparg reproduziert werden, also die Symmetrienerhöhung $D_{16} \rightarrow D_{17}$. Die zusätzliche Wurzel muß, wie in der Abbildung (5.8) gezeigt in das Dynkin-Diagramm eingebaut werden. Die zusätzliche Wurzel ist also

$$\hat{\alpha}_{17} = (-\alpha_1^*, (1, \vec{0}); \mathbf{0}). \quad (5.110)$$

Diesmal ist der Radius der 1-Richtung

$$R = \frac{1}{2}, \text{ denn } \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(1, \vec{0}). \quad (5.111)$$

Ein komplizierteres Beispiel, das zum dritten der aufgelisteten Fälle gehört, wird später angegeben. Übrigens haben wir jetzt spezielle Werte für alle 17 Moduli von $\Gamma_{17,1}$, die Wilsonlinie und den Radius gefunden. Der nächste Schritt kann daher nur das Studium allgemeinerer Hintergrundfelder sein.

5.4 Symmetriebrechung und Symmetrienerhöhung mit beliebigen Hintergrundfeldern

In diesem Abschnitt kehren wir zum allgemeinen Fall zurück und lassen beliebige Hintergrundfelder zu. Jetzt können die $6 + 6$ Dimensionen des Kompaktifizierungssektors mit den 16 Dimensionen des Eichsektors so gemischt werden, daß das Impulsgitter nicht mehr faktorisiert. Die direkteste Verallgemeinerung der bisher erarbeiteten Resultate besteht darin, die Rolle, die bisher von einer Wilsonlinie gespielt wurde, auf mehrere Wilsonlinien zu verteilen. Da es aber bereits mit einer Wilsonlinie möglich ist, $\mathfrak{g}^{(16)}$ auf eine beliebige Unteralgebra zu brechen, führt

dies nicht zu neuen Eichgruppen sondern nur zu anderen Spektren. Ich konzentriere mich daher auf die neuen Möglichkeiten der Symmetrienerhöhung und Symmetriebrechung, die nun möglich werden.

Die Untersuchung soll in zwei Schritten erfolgen. Als erstes wird festgestellt, für welche Werte der Hintergrundfelder zusätzliche Wurzeln im Kompaktifizierungssektor auftreten. In einem zweiten Schritt werden die Auswirkungen auf den Eichsektor untersucht. Aus der folgenden Parametrisierung der Gitterbasis kann direkt abgelesen werden, wie zusätzliche Wurzeln zu Stande kommen können:

$$\mathbf{k}'^i = \left(0, \frac{1}{2}\mathbf{e}^{*i}; \frac{1}{2}\mathbf{e}^{*i}\right) = \mathbf{k}^i, \quad (5.112)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_i = \left(\mathbf{A}_i, 2\mathbf{e}_i + D_{ij}\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*j}; D_{ij}\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*j}\right), \quad (5.113)$$

$$l'_A = \left(\mathbf{e}_A, -(\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{A}_k)\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*k}; -(\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{A}_k)\frac{1}{2}\mathbf{e}^{*k}\right), \quad (5.114)$$

mit

$$D_{ij} = 2 \left(B_{ij} - G_{ij} - \frac{1}{4}(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j) \right). \quad (5.115)$$

Die einzigen Kandidaten für zusätzliche Wurzeln sind die Linearkombinationen

$$\hat{\alpha}_{16+i} \equiv \bar{\mathbf{K}}_i - D_{ij}\mathbf{k}^j = (\mathbf{A}_i, 2\mathbf{e}_i; \mathbf{0}). \quad (5.116)$$

Sie liegen genau dann im Impulsgitter Γ' , wenn

$$D_{ij} \in \mathbf{Z}. \quad (5.117)$$

Die zusätzlichen Wurzeln erzeugen genau dann das Wurzelsystem einer halbeinfachen einfach verbundenen Lie-Algebra mit der Cartan-Matrix C_{ij} , wenn gilt:

$$\hat{\alpha}_{16+i} \cdot \hat{\alpha}_{16+j} = \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j + 4G_{ij} = C_{ij}. \quad (5.118)$$

Dabei ist zu beachten, daß die in der Mitte auftretenden Matrizen nicht beliebige Werte annehmen dürfen: G_{ij} ist die Gittermetrik von Λ und daher positiv definit, $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j$ ist eine Matrix von Skalarprodukten und daher positiv semidefinit. Daher gibt es zum Beispiel keine zulässigen Lösungen von (5.118), wenn eine der Wilsonlinien ein Normquadrat ≥ 2 hat, denn dann hat G_{ij} einen nichtpositiven Eigenwert.

Um sicherzustellen, daß die zusätzlichen Wurzeln im Impulsgitter liegen, muß D_{ij} ganzzahlig sein. Kombiniert man (5.115) und (5.118), so ist dies äquivalent zu

$$B_{ij} = G_{ij} + \frac{1}{4}\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j = \frac{1}{4}C_{ij} \bmod \frac{1}{2} \quad (5.119)$$

Diese Bedingung an das antisymmetrische Hintergrundfelder kann immer erfüllt werden, weil bei der Cartan-Matrix C_{ij} einer einfach verbundenen Lie-Algebra die Diagonalelemente gleich 2 und die Nichtdiagonalelemente gleich -1 oder 0 sind. Daher ist die Cartan-Matrix modulo 2 antisymmetrisch und (5.119) ist immer lösbar. Die Standard-Lösung ist [38]

$$B_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4}C_{ij}, & i < j, \\ -\frac{1}{4}C_{ij}, & i > j, \\ 0, & i = j. \end{cases} \quad (5.120)$$

Aber die Transformationen

$$B_{ij} \rightarrow B_{ij} + \frac{1}{2}M_{ij}, \quad M_{ij} = -M_{ji} \in \mathbf{Z} \quad (5.121)$$

und

$$B_{ij} \rightarrow -B_{ij} \quad (5.122)$$

führen auf das gleiche Impulsgitter und damit auf die gleiche Theorie. Diese Transformationen sind ein Beispiel für die verallgemeinerten Dualitätstransformationen, die in mehrdimensionalen Kompaktifizierungen mit Hintergrundfeldern auftreten.

Die Bedingung (5.118) an den symmetrischen Teil

$$D_{(ij)} = -2 \left(G_{ij} + \frac{1}{4} \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j \right) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2} C_{ij} \quad (5.123)$$

von D_{ij} fixiert die Wahl von G_{ij} und der $\mathbf{A}_i$ nicht vollständig, sondern läßt uns die Freiheit, die Metrik kontinuierlich zu deformieren und dies durch eine Änderung der Wilsonlinien zu kompensieren oder umgekehrt. Modelle mit erhöhter Symmetrie im Kompaktifizierungssektor bilden daher Hyperflächen im Narain-Modulraum.

Folgende Spezialfälle sind interessant:

- Setzt man speziell $\mathbf{A}_i = 0$ so wird das alte Ergebnis [38] über Symmetrieerhöhung durch das B_{ij} -Feld reproduziert. Das Gitter ist von der Form $\Gamma_{16} \oplus \Gamma_{6,6}$ und im Kompaktifizierungssektor tritt eine zusätzliche halbeinfache Eichgruppe vom Rang $l \leq 6$ auf. Die Hintergrundfelder sind:

$$G_{ij} = \frac{1}{4} C_{ij}, \quad B_{ij} = \frac{1}{4} C_{ij} \bmod \frac{1}{2}, \quad \mathbf{A}_i = 0. \quad (5.124)$$

Das RZ-Gitter Λ ist proportional zum Wurzelgitter der Eichgruppe:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \Gamma_R. \quad (5.125)$$

Man kompaktifiziert sozusagen auf dem maximalen Torus der Eichgruppe. Die Gesamt-Eichgruppe ist:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{(16)} \otimes \mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{6-l}. \quad (5.126)$$

- Andererseits kann man auch $B_{ij} = 0$ setzen und versuchen, Extra-Wurzeln allein mit Hilfe der Wilsonlinien und der Gittermetrik zu konstruieren. Wenn (5.118) und $D_{ij} \in \mathbf{Z}$ ohne B_{ij} erfüllt werden sollen, darf die Cartan-Matrix keine Nebendiagonaleinträge -1 besitzen. Denn

$$B_{ij} = 0 \Rightarrow C_{ij} = 0 \bmod 2 \Rightarrow C_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j. \quad (5.127)$$

Die im Kompaktifizierungssektor entstehende Lie-Algebra ist daher eine direkte Summe von A_1 -Algebren. Die Eichgruppe des Eichsektors wird im allgemeinen gebrochen.

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{(k)} \otimes (SU(2))^l \otimes U(1)^{22-k-l}. \quad (5.128)$$

Kombiniert man die Effekte aller Arten von Hintergrundfeldern miteinander, so treten Symmetriebrechung und Symmetrieerhöhung durch die Wilsonlinien und Symmetriebrechung durch das B_{ij} -Feld auf. Wenn Extra-Wurzeln (5.116) mittels nichtverschwindender Wilsonlinien konstruiert werden, so werden diese die Symmetrieralgebra $\mathfrak{g}^{(16)}$ des Eichsektors im allgemeinen brechen. Die Wilsonlinien können aber auch ganzzahlige Skalarprodukte mit den dabei übrig bleibenden Wurzeln haben und so die Wurzelsysteme des Eichsektors und des Kompaktifizierungssektors zu einem größeren zusammenschließen.

Die Symmetriebrechung im Eichsektor läßt sich noch ganz allgemein diskutieren: Eine Wurzel

$$\hat{\alpha} = (\alpha, \mathbf{0}; \mathbf{0}) \quad (5.129)$$

ist genau dann im neuen Gitter Γ' , wenn gilt

$$\alpha \cdot \mathbf{A}_i \in \mathbf{Z} \quad (i = 1, \dots, 6), \quad (5.130)$$

denn das Impulsgitter ist selbstdual. Wählt man die Wilsonlinien so, daß sie im Kompaktifizierungssektor zusätzliche Wurzeln erzeugen, so werden sie im allgemeinen $\mathfrak{g}^{(16)}$ nicht nur zu einer maximalen Unteralgebra oder Unteralgebra maximalen Ranges brechen, sondern den Rang des halbeinfachen Teils reduzieren, denn für die Brechung zu einer maximalen Unterlgebra müssen die zusätzlichen Bedingungen (5.17) - (5.19) erfüllt sein. Die Situation läßt sich am besten an Hand des folgenden Beispiels analysieren, das typisch für Modelle mit zwei Wilsonlinien ist.

Beispiel: Wir beginnen mit $\mathfrak{g}^{(16)} = D_{16}$ und wählen zwei nichtverschwindende Wilsonlinien $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$. Die Metrik G_{ij} wird blockdiagonal gewählt, so daß die 1- und 2- Richtung auf dem Torus orthogonal zu den anderen vier Richtungen ist. Im Kompaktifizierungssektor können wir die beiden einfach verbundenen halbeinfachen Lie-Algebren vom Rang 2 realisieren, $A_1 \oplus A_1$ und A_2 . Dafür setzt man B_{ij} auf seinen kritischen Wert (5.119) und löst (5.118) mit

$$C_{ij}^{(A_1 \oplus A_1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ oder } C_{ij}^{(A_2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.131)$$

Beide Fälle können parallel untersucht werden. Die verbleibende Freiheit bei der Wahl der Wilsonlinien soll genutzt werden, um D_{16} auf die Unteralgebra $A_3 \oplus A_3 \oplus D_{10}$ zu brechen. Dazu soll die erste Wilsonlinie die dritte Wurzel aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm von D_{16} entfernen, was zu der maximalen Unteralgebra $A_3 \oplus D_{13}$ führt. Die zweite Wilsonlinie muß dann die dritte Wurzel aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm der D_{13} entfernen. Die einfachen Wurzeln der so entstehenden $A_3 \oplus A_3 \oplus D_{10}$ Algebra sollen mit $\gamma_1, \dots, \gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_6, \gamma_7, \dots, \gamma_{16}$ bezeichnet werden. Bezüglich dieser Basis kann das Symmetriebrechungsproblem durch die Wilsonlinien

$$\mathbf{A}_1 = \gamma_3^*, \quad \mathbf{A}_2 = \gamma_6^* \quad (5.132)$$

gelöst werden. Durch Einsetzen der Skalarprodukte

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 = \gamma_3^* \cdot \gamma_3^* = \frac{3}{4}, \quad (5.133)$$

$$\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_2 = \gamma_6^* \cdot \gamma_6^* = \frac{3}{4} \quad (5.134)$$

und

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \gamma_3^* \cdot \gamma_6^* = 0 \quad (5.135)$$

in Gleichung (5.118) ergibt sich, daß die Metrik G_{ij} als

$$(G_{ij})_{i,j=1}^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad (5.136)$$

bzw.

$$(G_{ij})_{i,j=1}^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}. \quad (5.137)$$

gewählt werden muß. Beide Lösungen sind positiv definit und daher zulässig. Aus den Skalarprodukten zwischen den Extra-Wurzeln

$$\hat{\gamma}_{17} = -(\gamma_3^*, 2\mathbf{e}_1; 0), \quad (5.138)$$

$$\hat{\gamma}_{18} = -(\gamma_6^*, 2\mathbf{e}_2; 0) \quad (5.139)$$

und den einfachen Wurzeln $\hat{\gamma}_A$, $A = 1, \dots, 16$ von $A_3 \oplus A_3 \oplus D_{10}$

$$\hat{\gamma}_A \cdot \hat{\gamma}_{17} = -\gamma_A \cdot \gamma_3^* = -\delta_{A3}, \quad (5.140)$$

$$\hat{\gamma}_A \cdot \hat{\gamma}_{18} = -\gamma_A \cdot \gamma_6^* = -\delta_{A6} \quad (5.141)$$

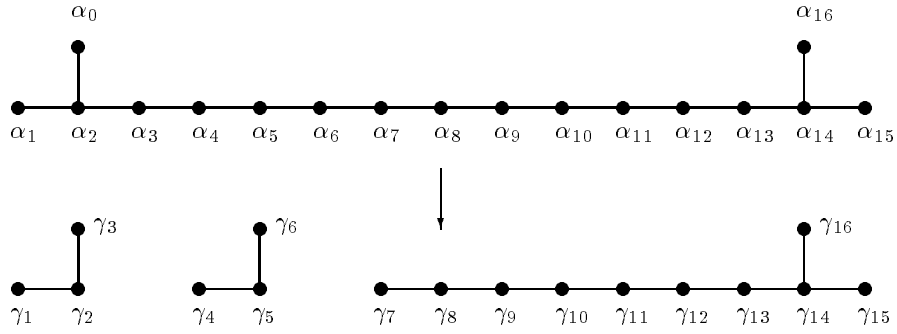


Abbildung 5.9: Durch zwei Wilsonlinien kann die Lie-Algebra D_{16} auf die Unter algebra $A_3 \oplus A_3 \oplus D_{10}$ gebrochen werden.

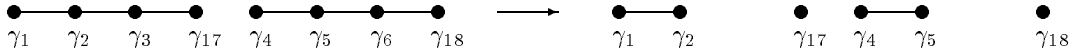


Abbildung 5.10: Wählt man die Wilsonlinien so, daß im Kompaktifizierungssektor eine zusätzlich $A_1 \oplus A_1$ Lie-Algebra entsteht, so wird der $A_3 \oplus A_3$ Summand der Symmetrieralgebra des Eichsektors zur $A_4 \oplus A_4$ erweitert. Eine kleine Deformation der Wilsonlinien projiziert zwei einfache Wurzeln des Eichsektors aus, und die Symmetrie wird zu $A_2 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_1$ gebrochen.

folgt, daß die einfachen Wurzeln insgesamt das Wurzelsystem von $A_4 \oplus A_4 \oplus D_{10}$ bzw. $A_8 \oplus D_{10}$ erzeugen. Bemerkenswerterweise hat der halbeinfache Teil der neuen Lie-Algebra einen höheren Rang als die ursprüngliche Lie-Algebra D_{16} , ist aber nicht durch einfache Erweiterung des alten Wurzelsystems zustande gekommen. Das Beispiel zeigt, wie die Effekte der Symmetriebrechung und Symmetrienerhöhung kombiniert werden können. Dabei können aus den einfachen Wurzeln des Eich- und des Kompaktifizierungssektors neue einfache Lie-Algebren gebildet werden, die durchaus zu interessanten Eichgruppen, wie hier zu $SU(5)$ und $SU(9)$ führen.

Als nächstes soll die durch

$$\mathbf{A}_1 = p_1 \gamma_3^*, \quad \mathbf{A}_2 = p_2 \gamma_6^* \quad (5.142)$$

definierte zweiparametrische Familie von Modellen untersucht werden. Falls beide $p_1 \notin \mathbf{Z}$ sind, werden die Wurzeln γ_3 und γ_6 ausprojiziert und die Symmetrie reduziert sich auf

$$A_2 \oplus A_2 \oplus D_{10} \oplus \begin{cases} A_1 \oplus A_1, \\ A_2. \end{cases} \quad (5.143)$$

Man erhält eine zweidimensionale kritische Hyperfläche von Rang-16-Modellen im Modulraum. Wenn einer der beiden Parameter ganzzahlig gewählt wird, ergeben sich kritische Linien von Rang-17-Modellen auf dieser Fläche. Sie schneiden sich in den Punkten, in denen beide Parameter ganzzahlig sind. Dort ist der Rang der halbeinfachen Eichgruppe 18. Um die globale Geometrie der kritischen Fläche zu untersuchen, muß die Bedingung, daß G_{ij} positiv definit ist, ausgewertet werden. Sie schränkt den Bereich der Parameter ein, und zwar auf

$$0 < p_i^2 < \frac{8}{3}, \quad i = 1, 2 \quad (5.144)$$

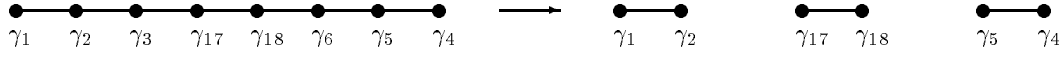


Abbildung 5.11: Wählt man die Wilsonlinien so, daß im Kompaktifizierungssektor eine zusätzliche A_2 Lie-Algebra entsteht, so wird der $A_3 \oplus A_3$ Summand der Symmetriealgebra des Eichsektors zur A_8 erweitert. Eine kleine Deformation der Wilsonlinien projiziert zwei einfache Wurzeln des Eichsektors aus, und die Symmetrie wird zu $A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$ gebrochen.

im $A_1 \oplus A_1$ -Fall und auf

$$0 < p_1^2 < \frac{8}{3} \text{ and } \left(2 - \frac{3}{4}p_1^2\right) \left(2 - \frac{3}{4}p_2^2\right) - 1 > 0 \quad (5.145)$$

im A_2 -Fall.

Es ist klar, daß das hier untersuchte Beispiel typisch für die bei allgemeinen Hintergrundfeldern auftretenden Phänomene ist. Eine interessante Verallgemeinerung ist der Fall in dem der RZ-Torus das Produkt von drei $SU(3)$ -Tori ist und sechs Wilsonlinien eingeschaltet werden. Dieser Bereich des Narain-Moduliraumes ist der natürliche Ausgangspunkt für die Konstruktion von $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds mit kontinuierlichen Wilsonlinien. Darauf komme ich später zurück.

Es stellt sich nun die Frage, ob jede Symmetrienerweiterung im Kompaktifizierungssektor, bei der Wilsonlinien beteiligt sind, mit jeder Symmetriebrechung im Eichsektor verträglich ist. Dazu werde ich die einfachste nichttriviale Möglichkeit vollständig analysieren. Es gebe daher eine nichtverschwindende Wilsonlinie $\mathbf{A}_1$ und die Extra-Wurzel $(\mathbf{A}_1, 2\mathbf{e}_1; \mathbf{0})$ habe ein nichtverschwindendes Skalarprodukt mit genau einer der anderen Extra-Wurzeln $(\mathbf{0}, 2\mathbf{e}_i; \mathbf{0})$, $i = 2, \dots, l \leq 6$. Die einzige zu erfüllende Bedingung ist, daß die Matrix

$$G_{ij} = \frac{1}{4}(C_{ij} - \mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 - \mathbf{a}^2 & -1 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & * & \\ \vdots & * & \ddots & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \quad (5.146)$$

positiv definit sein muß, mit $\mathbf{a}^2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 > 0$. Diejenige Matrix, die sich durch Streichen der ersten Zeile und Spalte ergibt, ist die Cartan-Matrix einer halbeinfachen Lie-Algebra und daher positiv definit. Daher müssen wir nur noch prüfen, ob und wann die Determinante von G_{ij} positiv ist. Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}^{(6)}$ des Kompaktifizierungssektors ist eine der Lie-Algebren

$$A_l \oplus X_{6-l}, \quad 1 \leq l \leq 6, \quad D_l \oplus X_{6-l}, \quad 4 \leq l \leq 6, \quad E_6, \quad (5.147)$$

wobei X_{6-l} ein direkter Summand ist, dessen einfache Wurzeln alle orthogonal zu $(\mathbf{A}_1, 2\mathbf{e}_1)$ sind. Durch Entwickeln können die Determinante von G_{ij} durch $\mathbf{a}^2$ und die Determinanten der Cartan-Matrizen der Unteralgebren von $\mathfrak{g}^{(6)}$ ausgedrückt werden. Die Quadratwurzel der Determinante der Cartan-Matrix einer einfach verbundenen Lie-Algebra ergibt das Volumen der durch die einfachen Wurzeln aufgespannten Fundamentalzelle des Wurzelgitters

$$\text{vol}(\Gamma_R) = \sqrt{\det C(\mathfrak{g})}. \quad (5.148)$$

Das Gewichtsgitter ist zum Wurzelgitter dual, das Produkt der Volumina der Fundamentalzellen beider Gitter ist daher 1, und somit gilt:

$$\text{vol}(\Gamma_W) = \frac{1}{\sqrt{\det C(\mathfrak{g})}}. \quad (5.149)$$

Andererseits ist der Quotient beider Gitter (als abelsche Gruppen mit der Vektoraddition als Verknüpfung) die endliche Gruppe der Konjugationsklassen, deren Mächtigkeit die Anzahl N der Konjugationsklassen ist. Daraus folgt [58]:

$$N = \left| \frac{\Gamma_W}{\Gamma_R} \right| = \left(\frac{\text{vol}(\Gamma_W)}{\text{vol}(\Gamma_R)} \right)^{-1} = \left(\sqrt{\det C(\mathbf{g})} \right)^2 = \det C(\mathbf{g}). \quad (5.150)$$

Da die Anzahl der Konjugationsklassen bekannt ist, kann die Determinante der Cartan-Matrix einer beliebigen einfachen einfach verbundenen Lie-Algebra ohne Rechnung angegeben werden:

$$\det C(A_l) = (l+1), \quad \det C(D_l) = 4, \quad \det C(E_{6,7,8}) = 3, 2, 1. \quad (5.151)$$

Die Determinante von G_{ij} kann jetzt Fall für Fall ausgerechnet werden:

1. $\mathbf{g}^{(6)} = A_l \oplus X_{6-l}$, mit $l \geq 3$. Dann ist

$$\det(G_{ij}) = ((1 - \mathbf{a}^2)l + 1) \cdot \det C(X_{6-l}), \quad (5.152)$$

wie man durch explizite Entwicklung der entsprechenden Determinante zeigt. Da $\det C(X_{6-l})$ positiv ist, gilt

$$\det(G_{ij}) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}^2 < \frac{l+1}{l}; \quad 3 \leq l \leq 6. \quad (5.153)$$

2. $\mathbf{g}^{(6)} = A_l \oplus X_{6-l}$, mit $l = 1, 2$. Dann ergibt sich:

$$l = 1 : \quad \det(G_{ij}) = (2 - \mathbf{a}^2) \cdot \det C(X_5), \quad (5.154)$$

$$l = 2 : \quad \det(G_{ij}) = (3 - 2\mathbf{a}^2) \cdot \det C(X_4). \quad (5.155)$$

3. $\mathbf{g}^{(6)} = D_l \oplus X$, $l \geq 4$. (Es gilt ja: $D_3 = A_3$, $D_2 = A_1 \oplus A_1$.) Dann ist

$$\det(G_{ij}) = 4(1 - \mathbf{a}^2) \cdot \det C(X_{6-l}), \quad (5.156)$$

also

$$\det(G_{ij}) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}^2 < 1. \quad (5.157)$$

4. $\mathbf{g}^{(6)} = E_6$. Entwickeln liefert

$$\det(G_{ij}) = (2 - \mathbf{a}^2) \cdot \det C(D_5) - \det C(A_4) = (2 - \mathbf{a}^2)4 - 5. \quad (5.158)$$

Damit gilt

$$\det \mathbf{G} > 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}^2 < \frac{13}{4}. \quad (5.159)$$

Das Endergebnis sind die folgenden oberen Schranken an $\mathbf{a}^2$:

$$\det(G_{ij}) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}^2 < \begin{cases} \frac{l+1}{l}, & \mathbf{g}^{(6)} = A_l \oplus X_{6-l}, \\ 1, & \mathbf{g}^{(6)} = D_l \oplus X_{6-l}, \\ \frac{13}{4}, & \mathbf{g}^{(6)} = E_6. \end{cases} \quad (5.160)$$

Diese Schranken können jetzt mit den minimalen Längen verglichen werden, die die Wilsonlinie haben muß, um $\mathbf{g}^{(16)}$ zu einer gegebenen Unteralgebra zu brechen. Für alle Unteralgebren, die durch Entfernen eines Punktes aus dem erweiterten Dynkin-Diagramm von $\mathbf{g}^{(16)}$ entstehen, ist die Standard-Wilsonlinie der duale Vektor der niedrigsten Wurzel von $\mathbf{g}^{(16)}$ bezüglich der jeweiligen Unteralgebra. Ihre Länge kann daher aus der inversen Cartan-Matrix der Unteralgebra abgelesen werden. Die niedrigste Wurzel ist bezüglich der Unteralgebra, wie sich aus

den Dynkin-Diagrammen ergibt, entweder Teil einer A-Typ Lie-Algebra oder einer D-Typ Lie-Algebra.

Im ersten Fall ist sie die erste oder letzte Wurzel

$$-\alpha_h = \beta_i, \quad i = 1, l \Rightarrow \mathbf{A} = \beta_i^* \quad i = 1, l \quad (5.161)$$

und das duale Gewicht hat das Normquadrat $l/(l+1) < 1$, denn es gilt

$$C(A_l)_{11}^{-1} = C(A_l)_{ll}^{-1} = \frac{l}{l+1}. \quad (5.162)$$

Die Gleichung (5.160) kann dann für jede Wahl von $\mathbf{g}^{(6)}$ erfüllt werden.

Im zweiten Fall ist die niedrigste Wurzel von $\mathbf{g}^{(16)}$ immer die letzte oder vorletzte Wurzel der D-Typ Subalgebra.

$$-\alpha_h = \beta_i, \quad 1 = l-1, l \Rightarrow \mathbf{A}_1 = \beta_i^*, \quad 1 = l-1, l. \quad (5.163)$$

Nun ist

$$C(D_l)_{l-1, l-1}^{-1} = C(D_l)_{ll}^{-1} = \frac{l}{4}, \quad (5.164)$$

also ist das Normquadrat der Standard-Wilsonlinie gleich $l/4$, also größer oder gleich 1 für $l \geq 4$. Man kann versuchen, dieses Problem durch Nichtstandard-Lösungen des Symmetriebrechungsproblems zu lösen. So ist z.B. die Differenz zwischen letztem und vorletztem fundamentalen Gewicht der D-Unteralgebra eine Lösung des Symmetriebrechungsproblems mit Normquadrat 1, denn

$$(\beta_{l-1}^* - \beta_l^*) \cdot (\beta_{l-1}^* - \beta_l^*) = C(D_l)_{l-1, l-1}^{-1} - 2C(D_l)_{ll}^{-1} + C(D_l)_{ll}^{-1} = \frac{l}{4} - 2\frac{l-2}{4} + \frac{l}{4} = 1. \quad (5.165)$$

Für $l \geq 4$ ist das aber schon die minimale Länge eines Gewichtes, denn modulo 2 ist das Normquadrat eines Gewichtes aus der Konjugationklasse der adjungierten Darstellung gleich 2, das eines Vektorgewichtes gleich 1 und das eines Spinorgewichtes gleich $l/4$. Daraus folgt, daß im zweiten Fall $\mathbf{g}^{(6)}$ nicht vom Typ $D_l \oplus X_{6-l}$ sein kann. Selbst bei nur einer Wilsonlinie existieren also bereits Fälle, in denen Symmetriebrechung im Eichsektor und Symmetrieerhöhung im Kompaktifizierungssektor nicht beliebig kombinierbar sind.

5.5 Kritische Hintergrundfelder und Verschiebungsvektoren

Die sogenannte Verschiebungsvektor-Methode [58], [81] ist genau wie die hier entwickelte Methode zur Konstruktion kritischer Wilsonlinien ein Verfahren, das es ermöglicht, Eichgruppen zu brechen und zu erweitern. Daher sollen jetzt der Zusammenhang zwischen beiden Methoden hergestellt und ihre Vor- und Nachteile gegeneinander abgewogen werden.

Die Verschiebungsvektor-Methode kann immer angewendet werden, wenn eine Theorie durch ein gerades selbstduales Gitter $\Gamma_{p,q}$ beschrieben wird. Man startet mit einem Gitter Γ und wählt einen „Verschiebungsvektor“ $\mathbf{s} \notin \Gamma$, mit $N\mathbf{s} \in \Gamma$, wobei N positiv und minimal sein soll. Das definiert das „invariante Untergitter“ Γ_0 von Γ ,

$$\Gamma_0 = \{\mathbf{v} \in \Gamma \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} \in \mathbf{Z}\}. \quad (5.166)$$

Falls $\mathbf{s}^2 = 2m/N$, mit $m \in \mathbf{Z}$ ist, dann ist das Gitter

$$\tilde{\Gamma} = \sum_{k=0}^{N-1} (\Gamma_0 + k\mathbf{s}) \quad (5.167)$$

genau dann gerade und selbstdual, wenn Γ gerade und selbstdual ist. Wendet man mehrere Verschiebungsvektoren nacheinander an, so hängt das Ergebnis im allgemeinen von der Reihenfolge ab. Nur wenn alle Skalarprodukte zwischen den Verschiebungsvektoren ganzzahlig sind, ist die Reihenfolge egal; die Verschiebungsvektoren werden dann „kompatibel“ genannt. Dann sind alle Verschiebungsvektoren Elemente von $\tilde{\Gamma}$, was sonst nur für den zuletzt angewandten Verschiebungsvektor gilt.

Beim Vergleich dieser Methode mit der Abhängigkeit von Gitterbasen von den Hintergrundfeldern ist es naheliegend, diejenigen Basisvektoren, die sich ändern, als Verschiebungsvektoren zu benutzen. Da die Basisvektoren immer ganzzahlige Skalarprodukte untereinander und gerades Normquadrat haben, sind sie automatisch kompatibel im oben eingeführten Sinn. Auch die Forderung an das Normquadrat von Verschiebungsvektoren ist automatisch erfüllt. Ein durch die Deformation von Hintergrundfeldern erzeugtes Gitter kann nur dann aus dem ursprünglichen durch Verschiebungsvektoren hervorgehen, wenn die neuen Basisvektoren rationale Linearkombinationen der alten sind, denn die Konstruktion von $\tilde{\Gamma}$ beruht darauf, daß ein Vielfaches des Verschiebungsvektors in Γ liegt. Die Hintergrundfelder müssen daher rationale Werte annehmen. Es sei nun Γ ein Impulsgitter, Γ' ein weiteres, das durch die Hinzunahme rationaler Hintergrundfelder entsteht, und $\tilde{\Gamma}$ dasjenige Gitter, das aus Γ durch die Anwendung der neuen Basisvektoren von Γ' als Verschiebungsvektoren entsteht. Da alle Basisvektoren von Γ' in $\tilde{\Gamma}$ liegen, gilt

$$\Gamma' \subset \tilde{\Gamma}. \quad (5.168)$$

Die dualen Gitter erfüllen dann

$$\Gamma'^* \supset \tilde{\Gamma}^*. \quad (5.169)$$

Da die Gitter Γ' und $\tilde{\Gamma}$ selbstdual sind folgt

$$\Gamma' \supset \tilde{\Gamma} \quad (5.170)$$

und damit

$$\Gamma' = \tilde{\Gamma}. \quad (5.171)$$

Beide Methoden liefern also, wie erwartet, das gleiche Ergebnis.

Eine Gegenüberstellung der Vor- und Nachteile beider Methoden zeigt, daß sie sich gut ergänzen können. Vollständig verloren geht bei der Verschiebungsvektormethode die Information über die kontinuierlichen Parameter. Dies ist der Hauptnachteil gegenüber meiner Methode. Die konkrete Konstruktion von $\tilde{\Gamma}$ erfolgt durch Auflisten aller Konjugationsklassen und wird um so aufwendiger, je kleiner die Eichgruppe wird. Selbst um nur die Eichgruppe zu bestimmen, muß im Prinzip das Gitter explizit konstruiert werden, was auf die Auflistung von Hunderten oder sogar Tausenden von Konjugationsklassen hinausläuft. Bei praktischen Anwendungen versucht man mit einer erzeugenden Liste von Konjugationsklassen auszukommen. Durch Abschätzung der minimalen Länge von Gewichten einer Konjugationsklasse kann man versuchen, sich auf diejenigen zu beschränken, die zum masselosen Spektrum beitragen.

Mit der Angabe einer Basis als Funktion der Hintergrundfelder hat man natürlich automatisch eine erzeugende Liste der Konjugationsklassen in Händen, zusätzlich aber noch die explizite Abhängigkeit von den Moduli. Hat man nur die Basis, so kann das ganze Gitter auch in Form einer Konjugationsklassenliste angegeben werden. Die Stärke der Verschiebungsvektormethode ist, daß man sehr leicht durch entsprechende Wahl von Verschiebungsvektoren unerwünschte Zustände ausprojizieren oder erwünschte Vektoren in das Gitter hineinbringen kann. Bei Symmetrieerhöhungen und beim Kombinieren von Faktoren aus dem Eich- und Kompaktifizierungssektor ist es meiner Erfahrung nach leichter, passende Verschiebungsvektoren zu finden, als die entsprechenden Hintergrundfelder anzugeben. So kann man etwa mit einem Verschiebungsvektor vom $E_8 \oplus E_8$ Modell zum D_{16} Modell kommen, während die Bestimmung der entsprechenden Hintergrundfelder schwierig ist. Allerdings ist gerade die Abhängigkeit von den Moduli heute eine der begehrtesten Informationen. Die Bestimmung eines Verschiebungsvektors kann natürlich beim Auffinden der entsprechenden Hintergrundfelder helfen, allerdings kenne ich bisher kein allgemeines Verfahren. Der umgekehrte Übergang ist, wie oben ausgeführt,

immer möglich. Die Brechung der $E_8 \oplus E_8$ und D_{16} auf beliebige Unteralgebren, kann im Verschiebungsvektorformalismus mit Hilfe der alternativen Formulierung des Symmetriebrechungsproblems durchgeführt werden. Dabei muß der Verschiebungsvektor (wie sonst die Wilsonlinie) so gewählt werden, daß unerwünschte Wurzeln ausprojiziert werden und erwünschte Wurzeln nicht. Wenn der Verschiebungsvektor Einträge im Kompaktifizierungssektor des Impulsgitters hat, kann man auch zusätzliche Wurzeln erzeugen, was in der Regel nicht erwünscht ist.

Insgesamt ergänzen sich die beiden Methoden also gut. Das drückt sich auch darin aus, daß ich in diesem Kapitel nicht nur Dynkin-Diagramme sondern auch die erstmals im Rahmen der Verschiebungsvektormethode angewandte Konjugationsklassen-Arithmetik angewendet habe.

Kapitel 6

Orbifold–Kompaktifizierungen

Die toroidalen Kompaktifizierungen der heterotischen Stringtheorie sind für die Elementarteilchenphysik aus mehreren Gründen unbefriedigend. Die RZ–Supersymmetrie ist nicht in ihrer minimalen Form, sondern als erweiterte N=4 Supersymmetrie realisiert. Ansätze für Elementarteilchenphysik jenseits des Standardmodells verwenden die Supersymmetrie zur Lösung des Hierarchieproblems und zur Verbesserung des Ultraviolett–Verhaltens. Weitere strukturelle und ästhetische Gründe sind die Vereinigung von Kraft (Bosonen) und Materie (Fermionen) sowie die Einbeziehung der Gravitation. All dies ist auch mit der minimalen Supersymmetrie möglich. Erweiterte Supersymmetrien erhöhen die Anzahl der vorhergesagten neuen Teilchen, ohne eine erkennbare Funktion zu erfüllen¹. Die Probleme der Supersymmetriebrechung werden natürlich größer. Außerdem gibt es in Theorien mit erweiterter Supersymmetrie keine chiralen Fermionen, das heißt es ist nicht möglich, daß die links- und rechtshändigen Komponenten in verschiedenen, nicht zueinander isomorphen Darstellungen der Eichgruppe liegen. Da das Standardmodell aber in diesem Sinne chiral ist, spricht das gegen erweiterte Supersymmetrien². Ein weiterer Nachteil des Narain–Modells ist, daß sich zwar die Eichgruppe brechen läßt, ihr Rang aber immer 22 bleibt, was verglichen mit dem Rang 4 der Standardmodell–Eichgruppe viel zu hoch ist. Außerdem fehlen bisher akzeptable Kandidaten für die Materie–Multipletts. Erstaunlicherweise lassen sich alle diese Forderungen, minimale Supersymmetrie, chirale Fermionen, eine GUT–Eichgruppe und Materie in interessanten Darstellungen der Eichgruppe, durch eine relativ einfache Modifikation, die Kompaktifizierung auf Orbifolds, lösen. Ein Vorteil dieser minimalen Verallgemeinerung ist, daß die Stringtheorie exakt lösbar bleibt.

6.1 Orbifolds: Grundlegende Definitionen

Ein d –dimensionaler **toroidaler Orbitraum** oder **Orbifold**³ $\mathbf{O}^d$ ist ein Quotientenraum des $\mathbf{R}^d$ mit einer diskreten Teilgruppe S der euklidischen Gruppe $\text{Euk}(d)$ des $\mathbf{R}^d$

$$\mathbf{O}^d = \frac{\mathbf{R}^d}{S}. \quad (6.1)$$

¹ Erweiterte Supersymmetrien können freilich dazu führen, daß sich in einer Quantenfeldtheorie alle auftretenden Divergenzen ohne Renormierung wegheben. Das gilt allerdings nicht für die Supergravitation [105]. Daher erscheint es heute plausibel, daß die Ultraviolett–Probleme sich nur im Rahmen der vollen Stringtheorie und nicht durch die Supersymmetrie allein lösen lassen.

² Es ist natürlich denkbar, daß die erweiterte Supersymmetrie so gebrochen wird, daß die chiralen Partner der beobachteten Fermionen „Spiegelfamilien“ sehr hoher Masse bilden. Das wird indirekt dadurch gestützt, daß es bisher nicht möglich war, chirale Fermionen in befriedigender Weise im Rahmen der Gitterfeldtheorie zu behandeln, was wiederum die Existenz chiraler Eichtheorien im nichtstörungstheoretischen Sinn in Frage stellt. Andererseits ist nur sicher, daß in der Natur auf die eine oder andere Weise chirale Fermionen realisiert sind. Daher ist es sicher sinnvoll nach Stringkompaktifizierungen zu suchen, die dies beschreiben.

³ Die grundlegenden Arbeiten über Stringtheorien und Orbifolds sind [23], [24] und [68]. Die Bezeichnung Orbifold wurde in [23] eingeführt.

Die euklidische Gruppe ist das semidirekte Produkt der Drehgruppe $O(d)$ mit der Translationsgruppe $T(d) \simeq (\mathbf{R}^d, +)$

$$\text{Euk}(d) = O(d) \odot T(d). \quad (6.2)$$

Falls S nicht frei auf dem $\mathbf{R}^d$ operiert, sondern Fixpunkte besitzt, so hat $\mathbf{O}^d$ dort konische Singularitäten und ist keine Mannigfaltigkeit; allerdings ist $\mathbf{O}^d$ außerhalb dieser Punkte flach, so daß die Bewegungsgleichungen der Stringtheorie lösbar bleiben. Ein Element $g \in S$ operiert auf dem $\mathbf{R}^d$ gemäß

$$g\mathbf{x} = \theta\mathbf{x} + \mathbf{v}, \quad \theta \in O(d), \quad \mathbf{v} \in \mathbf{R}^d, \quad (6.3)$$

d.h. $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$ wird gedreht und verschoben.

Die Untergruppe

$$\Lambda = \{g \in S | g = (1, \mathbf{v})\} < S \quad (6.4)$$

von S ist ein Gitter, und

$$\mathbf{T}^d = \frac{\mathbf{R}^d}{\Lambda} \quad (6.5)$$

ist der zugehörige Torus. Die Gruppe

$$P = \{\theta \in O(d) | \exists \mathbf{v} \in \mathbf{R}^d : (\theta, \mathbf{v}) \in S\} \quad (6.6)$$

wird als **Punktgruppe** bezeichnet; sie ist eine Untergruppe der Automorphismengruppe von Λ , aber im allgemeinen keine Untergruppe von S , da $(\theta, \mathbf{0})$ nicht unbedingt in S liegen muß. Dennoch kann man $\mathbf{O}^d$ stets als Quotienten des Torus $\mathbf{T}^d$ mit einer diskreten Gruppe $\overline{P}$ schreiben,

$$\mathbf{O}^d = \frac{\mathbf{T}^d}{\overline{P}}, \quad (6.7)$$

indem man

$$\overline{P} = \frac{S}{\Lambda} < S \quad (6.8)$$

verwendet. $\overline{P}$ entsteht aus S durch die Identifizierung

$$(\theta, \mathbf{u}) \cong (\theta, \mathbf{v}) \Leftrightarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \Lambda. \quad (6.9)$$

In der Stringtheorie gibt es zwei „Philosophien“ bei der Konstruktion von Orbifolds mit dem Narain-Modell als Startpunkt. Die erste Möglichkeit [23], [24] besteht darin, den Torus

$$\mathbf{T}^6 = \frac{\mathbf{R}^6}{\Lambda} \quad (6.10)$$

mit einer Gruppe $S^{(6)}$ zu twisten. Das Twisten ist hier im Ortsraum definiert, Ausgangspunkt ist eine Kompaktifizierung der 10-dimensionalen heterotischen Theorie, die geometrische Interpretation als Kompaktifizierung der zehndimensionalen Theorie auf $\mathbf{O}^6$ ist manifest. Damit interessante Theorien mit nicht zu großer Eichgruppe und Materiemultipletts in nichttrivialen Darstellungen dieser Eichgruppe entstehen, muß der Twist auf die 16 internen Freiheitsgrade, den Kompaktifizierungssektor, erweitert werden. Dies geschieht in einem zweiten gesonderten Schritt. Diese Vorgehensweise werde ich als den geometrischen Standpunkt bezeichnen.

Der andere, der algebraische Standpunkt geht vom Impulsraum und vom Impulsgitter $\Gamma_{22,6}$ aus: Hier wird der Torus

$$\mathbf{T}^{22+6} = \frac{\mathbf{R}^{22+6}}{\Gamma_{22,6}} \quad (6.11)$$

getwistet [68]. Diese Methode ist allgemeiner, da Rechtsläufer und Linksläufer ohne Rücksicht auf eine geometrische Interpretation getwistet werden können⁴. Die 16 zusätzlichen Linksläufer werden nicht gesondert behandelt, aber es ist natürlich nicht zulässig, daß der

⁴Natürlich sind die Twists nicht beliebig. Die Konsistenzbedingungen werden später untersucht.

Twist Links- und Rechtsläufer miteinander mischt (holomorphe Faktorisierung und modulare Invarianz); daher ist die Twistgruppe von der Form

$$S = S_L^{(22)} \otimes S_R^{(6)}. \quad (6.12)$$

Diese Impulsraumkonstruktion kann auch symmetrisch durchgeführt werden und ist dann äquivalent zur Ortsraumkonstruktion. Dazu wählt man man eine Twistgruppe der speziellen Form

$$S = S_L^{(16)} \otimes S_L^{(6)} \otimes S_R^{(6)} \text{ mit } S_L^{(6)} \cong S_R^{(6)}. \quad (6.13)$$

Da jetzt die Felder X_L^i und X_R^i $i = 1, \dots, 6$ auf die gleiche Weise behandelt werden, können sie zu einer internen Koordinate X^i zusammengefaßt werden und die oben beschriebene geometrische Interpretation ist wieder möglich. Durch die Ortsraumkonstruktion oder die symmetrische Impulsraumkonstruktion erhält man **symmetrische Orbifolds**. Die durch die allgemeine, nicht symmetrische Impulsraumkonstruktion konstruierten Modelle werden hingegen als **asymmetrische Orbifolds** bezeichnet. Sie wurden bisher in der Literatur weniger untersucht, da bei ihnen zusätzliche technische Probleme auftreten. Narain, Sarmadi und Vafa konnten allerdings zeigen [68], daß sich asymmetrische Orbifolds im Prinzip auf symmetrische zurückführen lassen. Dazu verdoppelt man die Zahl der Freiheitsgrade und bettet das Gitter $\Gamma_{22,6}$ in ein symmetrisches Gitter $\Gamma_{22+6,22+6}$ ein. Die symmetrischen Orbifolds heterotischer Stringtheorien lassen sich in einem gewissen Sinn als asymmetrische Orbifolds auffassen, da die sechzehn internen Bosonen keine rechtslaufenden Partner besitzen. Die Konstruktion des Hilbertraumes für die internen Bosonen muß daher nach dem asymmetrischen Formalismus erfolgen, nicht nach dem symmetrischen (siehe 6.3.2).

Es werden noch einige weitere Definitionen benötigt: Man spricht von einem **abelschen Orbifold**, wenn die Punktgruppe P abelsch ist; dabei ist zu beachten, daß die Twistgruppe S dann durchaus nichtabelsch sein kann. Da man immer voraussetzt, daß die auftretenden diskreten Gruppen von endlicher Ordnung sind, ist P ein Produkt endlich vieler zyklischer Gruppen:

$$P = \mathbf{Z}_{m_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{Z}_{m_k}. \quad (6.14)$$

Im einfachsten Fall ist $P = \mathbf{Z}_N$ ($\mathbf{Z}_N$ -Orbifold). Orbifolds mit nichtabelschem P (**nichtabelsche Orbifolds**) sind bisher in der Literatur kaum diskutiert worden, da sie sehr kompliziert sind (siehe [24], [31]). Wenn die Twistgruppe durch Translationen $(1, \mathbf{v})$ erzeugt wird, sagt man, der Twist sei durch Verschiebungen realisiert. Wird sie hingegen durch Rotationen $(\theta, \mathbf{0})$ generiert, so spricht man von der Rotations- oder Drehungsrealisierung, oder da dann ja $\theta \in \text{Aut}(\Lambda)$ ist, von der Realisierung durch Gitterautomorphismen.

Die geometrische und algebraische Konstruktion von Orbifolds haben je eine wichtige Verallgemeinerung. Im geometrischen Zugang ist dies die Kompaktifizierung auf Orbifolds von allgemeinen sechsdimensionalen Mannigfaltigkeiten. Für die Stringtheorie sind dabei die sogenannten Calabi-Yau-Räume von Bedeutung [14]. Diese reduzieren sich in einem Limes, bei dem die Krümmung auf diskrete Punkte konzentriert wird, auf toroidale Orbifolds. Da CY-Kompaktifizierungen nicht mehr exakt lösbar sind, spielen die toroidalen Orbifolds auch als Grenzfälle dieser allgemeineren Konstruktion eine Rolle. Vom algebraischen Standpunkt aus spricht man auch von den Orbifolds einer konformen Feldtheorie [42]. Ist eine Zustandssumme mit einer gewissen diskreten Symmetrie gegeben, so kann diese „ausdividiert“ werden. Asymmetrische Orbifolds fallen in diese Kategorie. Auch toroidale Kompaktifizierungen sind in diesem allgemeinen Sinne Orbifolds, bei denen eine diskrete Untergruppe der Translationsgruppe ausdividiert wird.

Der allgemeinste Ansatz für die inneren Freiheitsgrade einer vierdimensionalen heterotischen Stringtheorie ist eine konforme Feldtheorie mit lokaler $(0,1)$ WF-Supersymmetrie und zentralen Ladungen $(22,9)$. Auch hier kann eine gegebene Theorie durch das Ausdividieren diskreter Symmetrien verändert werden.

6.2 Die Geometrie von $\mathbf{Z}_N$ -Orbifolds

In diesem Abschnitt wird die Geometrie eines d -dimensionalen Orbifolds

$$\mathbf{O}^d = \frac{\mathbf{T}^d}{\overline{P}} \quad (6.15)$$

beschrieben, bei dem die Gruppe $\overline{P}$ von einer Drehung der Ordnung N erzeugt wird [23], [68]:

$$\overline{P} = \langle \Theta \rangle \cong \mathbf{Z}_N, \text{ mit } \Theta \equiv (\theta, \mathbf{0}) \in \mathrm{O}(d) < \mathrm{Euk}(d) \text{ und } \Theta^N = 1. \quad (6.16)$$

Das Gitter sei Γ , der Torus $\mathbf{T}^d = \mathbf{R}^d/2\pi\Gamma$. Je nachdem, ob die Ortsraum- oder die Impulsraumkonstruktion betrachtet, ob bosonische oder heterotischen Stringtheorien oder einzelne chirale Sektoren konstruiert werden sollen, steht Γ stellvertretend für das Ortsraumgitter Λ , das vollständige Impulsgitter $\Gamma_{L,R}$ oder dessen chirale Teile Γ_L, Γ_R . Die im folgenden angeordneten Überlegungen lassen sich in allen Fällen anwenden.

Im hier betrachteten Fall ist offensichtlich $P = \overline{P} = \mathbf{Z}_N$, und Θ muß ein Automorphismus des Gitters Γ sein. Daher sind die Wahlmöglichkeiten für N eingeschränkt. Im Falle $d = 2$ gibt es z.B., wie aus der Kristallographie bekannt ist, nur die Möglichkeiten $N = 1, 2, 3, 4, 6$, d.h. die Identität, die Spiegelung und 3-, 4- oder 6-zählige Symmetrieachsen. Für $d = 6$ gilt $N = 1, \dots, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 24, 30$ [24]. Die singulären Punkte des Orbifolds entsprechen den Fixpunkten der Wirkung von Θ auf dem Torus; diese sind Lösungen der **Fixpunktgleichung**

$$\Theta \mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\pi \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \Gamma. \quad (6.17)$$

Über ihre Lösungen müssen wir folgendes wissen [68]:

1. Fall: $\det(1 - \Theta) \neq 0$. Dann existiert $(1 - \Theta)^{-1}$ und es gilt:

$$\mathbf{x}_f = 2\pi(1 - \Theta)^{-1} \mathbf{v}. \quad (6.18)$$

Ersetzt man $\mathbf{v} \in \Gamma$ durch $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (1 - \Theta)\mathbf{w} \in \Gamma$, mit $\mathbf{w} \in \Gamma$, so erhält man den gleichen Fixpunkt auf dem Torus $\mathbf{T}^d$

$$\mathbf{x}'_f = 2\pi(1 - \Theta)^{-1} \mathbf{v} + 2\pi \mathbf{w} \cong \mathbf{x}_f. \quad (6.19)$$

Eine eindeutige Charakterisierung der Fixpunkte erhält man also durch

$$\{\mathbf{x}_f\} \leftrightarrow \frac{\Gamma}{(1 - \Theta)\Gamma}. \quad (6.20)$$

Ihre Anzahl folgt aus dem Fixpunktsatz von Lefschetz:

$$\sharp\{\mathbf{x}_f\} = \det(1 - \Theta). \quad (6.21)$$

2. Fall: $\det(1 - \Theta) = 0$. Dann ist die Zahl 1 ein Eigenwert von Θ , d.h. es existieren invariante Richtungen und folglich Fixtori und nicht nur diskrete Fixpunkte. Da aber Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind, kann man Θ auf das orthogonale Komplement des 1-Eigenraumes einschränken und so den 2. Fall auf den 1. zurückführen. Die Charakterisierung der Fixpunkte im Unterraum erfordert noch eine kleine Überlegung: Der „invariante Teil“ I von Γ besteht aus den punktweise invarianten Gittervektoren

$$I = \{\mathbf{v} \in \Gamma | \Theta \mathbf{v} = \mathbf{v}\}. \quad (6.22)$$

Als „nicht invarianten Teil“ N bezeichnet man das orthogonale Komplement von I in Γ :

$$N = \{\mathbf{w} \in \Gamma | \mathbf{w} \cdot I = 0\}. \quad (6.23)$$

Die direkte Summe der beiden ist im allgemeinen ein echtes Untergitter von Γ

$$I \oplus N \subset \Gamma. \quad (6.24)$$

Ein Beispiel für das Nichtbestehen der Gleichheit ist das Gitter

$$\Gamma = (A_2 E_6)_{KK} \quad (6.25)$$

mit den Konjugationsklassen (R, R) , (F, F) und $(\overline{F}, \overline{F})$, wenn Θ auf dem A_2 -Teil eine Drehung um 120 Grad und auf dem E_6 -Teil die Identität ist. Denn dann gilt:

$$I = (0, R), \quad N = (R, 0). \quad (6.26)$$

Von I und N zu unterscheiden sind auch die Projektionen $\tilde{I}$ und $\tilde{N}$ von Γ auf die I - bzw. N -Richtung. Diese erfüllen

$$\Gamma \subset \tilde{I} \oplus \tilde{N}. \quad (6.27)$$

Im obigen Beispiel gilt

$$\tilde{I} = (0, R) + (0, F) + (0, \overline{F}), \quad \tilde{N} = (R, 0) + (F, 0) + (\overline{F}, 0). \quad (6.28)$$

Für die Charakterisierung von Fixpunkten ist folgende Aussage entscheidend:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2\pi}(1 - \Theta)\mathbf{x}_f, \quad \mathbf{v} \in \Gamma \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \in N. \quad (6.29)$$

Beweis: Sei $\mathbf{u} \in I$, beliebig und $\mathbf{v}$ wie oben. Dann ist

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2\pi}\mathbf{u} \cdot (1 - \Theta)\mathbf{x}_f = \frac{1}{2\pi}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}_f - \Theta^{-1}\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}_f) = 0 \quad (\forall \mathbf{u} \in I). \quad (6.30)$$

Daher ist $v \in N$, qed.

Da im Falle 1 ($\det(1 - \theta) \neq 0$), $\Gamma = N$ (und $I = \{0\}$) ist, gilt in beiden Fällen:

$$\{\mathbf{x}_f\} \cong \frac{N}{(1 - \theta)\Gamma}. \quad (6.31)$$

Weil die rechte Seite eine endliche abelsche Gruppe ist, kann man auf der Menge der Fixpunkte eine Gruppenstruktur definieren und erhält so die **Fixpunktgruppe**, die bei der Beschreibung von Stringwechselwirkungen [22], [47], und der Konstruktion des Hilbertraumes auftritt [24], [68].

6.3 Symmetrische $\mathbf{Z}_N$ -Orbifolds: Die Konstruktion des Hilbertraumes

6.3.1 Der ungetwistete Sektor

In diesem Abschnitt wird für die symmetrischen $\mathbf{Z}_N$ Orbifolds bosonischer und heterotischer Stringtheorien der Hilbertraum konstruiert, um die physikalischen Zustände zu identifizieren. Es werden keine Wilsonlinien zugelassen, $\mathbf{A}_i = 0$. Das Impulsgitter faktorisiert also in der Form $\Gamma_{16} \oplus \Gamma_6$. Wir beginnen mit d bosonischen Freiheitsgraden, also mit einer bosonischen Theorie oder den WF-bosonischen Freiheitsgraden der heterotischen.

Ausgangspunkt der Konstruktion [24] sind der Ortsraumtorus

$$\mathbf{T}^d = \frac{\mathbf{R}^d}{2\pi\Lambda} \quad (6.32)$$

und eine Gruppe von Automorphismen des Gitters Λ :

$$P = \overline{P} = \langle \Theta \rangle \cong \mathbf{Z}_N. \quad (6.33)$$

Durch die Identifizierung

$$\mathbf{X} \equiv \Theta\mathbf{X} + 2\pi\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \Lambda \quad (6.34)$$

entsteht der Orbifold

$$\mathbf{O}^d = \frac{\mathbf{T}^d}{P}. \quad (6.35)$$

Der Hilbertraum $\mathcal{H}_T$ des Torus-Modells, der durch Anwendung der Oszillatoren $\alpha_{-n}^i, \tilde{\alpha}_{-n}^i$ auf den Grundzustand $|0\rangle$, bzw auf die Impuls-/Windungszustände $|\mathbf{k}_L, \mathbf{k}_R\rangle$ entsteht, muß jetzt auf die unter Θ invarianten Zustände projiziert werden. Um die Wirkung

$$\alpha_{-n}^i \rightarrow \Theta^{ij} \alpha_{-n}^j, \quad (\Theta^{ij}) \in O(d) \quad (6.36)$$

auf die Oszillatoren möglichst einfach zu beschreiben, kann ausgenutzt werden, daß sich jede orthogonale Matrix durch eine unitäre Transformation (also i.a. durch Übergang ins Komplexe!) diagonalisieren läßt:

$$\Theta' = U \Theta U^+, \quad U \in U(d), \quad (6.37)$$

mit

$$\Theta' = \begin{pmatrix} e^{2\pi i \phi_1} & & & & & \\ & e^{-2\pi i \phi_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (6.38)$$

Die Eigenwerte 1 entsprechen den invarianten Richtungen, die Eigenwerte -1 charakterisieren Richtungen in den Θ als reine Spiegelung wirkt. Den Richtungen, in den der Twist als Drehung (oder Drehspiegelung) wirkt, sind Paare von komplex konjugierten Eigenwerten zugeordnet. In diesen Richtungen müssen die reellen⁵ Koordinatenfelder X^i zu komplexen Koordinatenfeldern $X^a, X^{\bar{a}} = (X^a)^*$ zusammengefaßt werden. Da $\Theta^N = 1$ ist, sind alle Eigenwerte N-te Einheitswurzel.

Die Projektion auf invariante Zustände wird am günstigsten so ausgeführt, daß man zunächst sowohl im linken als auch im rechten Hilbertraum Eigenzustände von Θ konstruiert und dann die invarianten Kombinationen (unter Beachtung der Massenformel und der Balance-Beziehung) bildet. Im linken Hilbertraum $\mathcal{H}_L$ erhält man die Eigenzustände, indem man die komplexen Koordinatenfelder nach Oszillatoren entwickelt:

$$\begin{aligned} \text{Eigenzustand: } \beta_{-n}^a |0\rangle, \quad \text{Eigenwert: } e^{2\pi i \phi_a}, \\ \text{Eigenzustand: } \bar{\beta}_{-n}^{\bar{a}} |0\rangle, \quad \text{Eigenwert: } e^{-2\pi i \phi_a}, \end{aligned} \quad (6.39)$$

mit $a = 1, 2, 3$ und $\bar{a} = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$. Die kanonischen Vertauschungsrelationen bezüglich der komplexen Koordinaten sind

$$[\beta_m^a, \bar{\beta}_n^{\bar{b}}] = m \delta^{a\bar{b}} \delta_{m+n, 0}. \quad (6.40)$$

Als Standardbeispiel betrachte ich im folgenden die Kompaktifizierung von 2 Dimensionen der bosonischen oder heterotischen Stringtheorie auf dem Wurzelgitter der Lie-Algebra A_2 mit nichtkritischem B_{ij} -Feld. Als Automorphismus wird dabei eine Drehung um 120 Grad gewählt, die die erste einfache Wurzel α_1 auf die zweite einfache Wurzel α_2 abbildet. Als erstes wird diese Drehung diagonalisiert:

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & \sin(2\pi/3) \\ -\sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix} \rightarrow \Theta' = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/3} \end{pmatrix}. \quad (6.41)$$

⁵Die Charakterisierung „reell“ ist immer als „reell in der Minkowski-Formulierung“ zu lesen.

Die Oszillatoren bezüglich der Diagonalbasis sind:

$$\beta^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^1 + i\alpha^2), \quad (6.42)$$

$$\beta^{\bar{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^1 - i\alpha^2). \quad (6.43)$$

und entsprechende Rechtsläufer. Man erkennt, daß die generische $U(1)_L^2 \otimes U(1)_R^2$ -Symmetrie der bosonischen Theorie gebrochen wird, da die Eichbosonen Kombinationen aus nicht-invarianten internen Oszillatoren und invarianten Oszillatoren mit vierdimensionalen Raum-Zeit Indizes sind:

$$\beta_{-1}^1 \tilde{\alpha}_{-1}^\mu |0\rangle : e^{2\pi i/3} \cdot 1 \neq 1, \quad (6.44)$$

$$\beta_{-1}^{\bar{1}} \tilde{\alpha}_{-1}^\mu |0\rangle : e^{-2\pi i/3} \cdot 1 \neq 1 \quad (6.45)$$

und entsprechend für die $U(1)_R^2$ -Eichbosonen. Im Falle der heterotischen Theorie gilt, wie wir noch sehen werden, das gleiche für die generischen $U(1)^2 = U(1)_L^2$ Eichgruppe.

Bei der allgemeinen Diskussion der Projektion wurden bisher die links- und rechtslaufenden Impulseigenzustände $|\mathbf{k}_L; \mathbf{k}_R\rangle$ ausgeklammert. (Ich betrachte der Einfachheit halber nur die Linksläufer.) Sie transformieren „dual“ zu den Koordinatenfeldern, denn es gilt:

$$\exp(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{X}(z)) \rightarrow \exp(\mathbf{k}_L \cdot \Theta \mathbf{X}(z)) = \exp(\Theta^{-1} \mathbf{k}_L \cdot \mathbf{X}(z)). \quad (6.46)$$

In den Richtungen, in denen Θ nicht identisch wirkt, sind die Zustände $|\mathbf{k}_L\rangle$ nicht invariant. Daher werden auch geladene Eichbosonen

$$|\mathbf{k}_L\rangle \otimes \text{RZ-Vektor}, \quad (6.47)$$

die bei kritischen Werten von B_{ij} auftreten ($\mathbf{k}_L^2 = 2$), i.a. ausprojiziert. Allerdings kann man durch Summation über die Orbits von Θ immer invariante Linearkombinationen erhalten, denn

$$\sum_{i=1}^N \Theta^i |\mathbf{k}_L\rangle \quad (6.48)$$

ist offensichtlich invariant. Durch Bilden weiterer, komplexer Linearkombinationen kann man wie bei den Oszillatoren alle Zustände zu Eigenzuständen von Θ zusammenfassen und dann aus den links- und rechtslaufenden Zuständen invariante Kombinationen bilden. Falls Θ keine Fixrichtungen besitzt, existieren genau d invariante Kombinationen, die eine $u(1)^d$ -Algebra erzeugen. Falls darüber hinaus $0 < l \leq d$ invariante Richtungen existieren, gibt es auch geladene invariante Zustände und die erzeugte Algebra ist $\mathfrak{g}^{(l)} \oplus u(1)^{d-l}$, wobei $\mathfrak{g}^{(l)}$ eine halbeinfache Lie-Algebra vom Range l ist⁶ [46]. Die durch das Twisten erzielte Brechung der Eichgruppe (bei kritischem B_{ij} -Feld) ist also

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_L^{(d)} \otimes \mathbf{G}_R^{(d)} &\rightarrow (\mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{d-l})_L \otimes (\mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{d-l})_R \quad (\text{bosonisch}), \\ \mathbf{G}^{(d)} &\rightarrow \mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{d-l} \quad (\text{heterotisch}). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Als Beispiel betrachten wir den zweidimensionalen $\mathbf{Z}_3$ -Orbifold, mit kritischem B_{ij} -Feld [59]. Dann enthält der linkslaufende Teil des Torus-Modells 6 geladenene masselose Zustände, die den 6 Wurzeln $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)$ der Lie-Algebra A_2 zugeordnet sind. Unter Θ transformieren diese Zustände wie folgt:

$$|\alpha_1\rangle \rightarrow |-(\alpha_1 + \alpha_2)\rangle \rightarrow |\alpha_2\rangle \rightarrow |\alpha_1\rangle \rightarrow \cdots \quad (6.50)$$

$$|-\alpha_1\rangle \rightarrow |(\alpha_1 + \alpha_2)\rangle \rightarrow |-\alpha_2\rangle \rightarrow |-\alpha_1\rangle \rightarrow \cdots \quad (6.51)$$

⁶Die allgemeine Diskussion erfolgt in Abschnitt 6.4.

Die Eigenzustände und ihre Eigenwerte sind:

$$\begin{aligned} |\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle + |-(\alpha_1 + \alpha_2)\rangle & \quad \text{EW: } 1 \\ |-\alpha_1\rangle + |-\alpha_2\rangle + |\alpha_1 + \alpha_2\rangle & \quad \text{EW: } 1 \end{aligned} \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} |\alpha_1\rangle + e^{2\pi i/3}|\alpha_2\rangle + e^{4\pi i/3}|-(\alpha_1 + \alpha_2)\rangle & \quad \text{EW: } e^{2\pi i/3} \\ |-\alpha_1\rangle + e^{2\pi i/3}|-\alpha_2\rangle + e^{4\pi i/3}|\alpha_1 + \alpha_2\rangle & \quad \text{EW: } e^{2\pi i/3} \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} |\alpha_1\rangle + e^{4\pi i/3}|\alpha_2\rangle + e^{2\pi i/3}|-(\alpha_1 + \alpha_2)\rangle & \quad \text{EW: } e^{4\pi i/3} \\ |-\alpha_1\rangle + e^{4\pi i/3}|-\alpha_2\rangle + e^{2\pi i/3}|\alpha_1 + \alpha_2\rangle & \quad \text{EW: } e^{4\pi i/3} \end{aligned} \quad (6.54)$$

Es gibt zwei invariante (ungeladene) Zustände. Die Symmetriebrechung ist

$$SU(3)_L \rightarrow U(1)_L^2, \quad (6.55)$$

wie es die oben referierte allgemeine Theorie voraussagt. Eine vierdimensionale $\mathbf{Z}_3$ -Orbifoldtheorie erhält man durch die Kompaktifizierung auf dem Gitter

$$\Lambda = A_2 \oplus A_2 \oplus A_2, \quad (6.56)$$

wobei der Twist jetzt auf jedem der A_2 -Gitter auf die oben beschriebene Weise wirkt. Dieses Modell ist der am meisten studierte, der Standard-Orbifold.

Um die für uns eigentlich interessanten heterotischen Orbifoldtheorien zu konstruieren, muß noch die Wirkung des Twistes auf die WF-Fermionen festgelegt werden. Sie wird durch die Forderung nach ungebrochener WF-Supersymmetrie, die eine unaufgebbare Konsistenzbedingung ist, bestimmt [24] (siehe auch [81] und [58]). Die drei komplexen rechtslaufenden WF-Bosonen $X^a(\bar{z})$ bilden zusammen mit den drei entsprechenden komplexen Fermionen $\psi^a(\bar{z})$ den WF-Superstrom

$$T_F(\bar{z}) = \psi^a \partial_{\bar{z}} X_{\bar{a}} + \bar{\psi}^{\bar{a}} \partial_{\bar{z}} X_a. \quad (6.57)$$

Aus der Twist-Invarianz von T_F folgt, daß die WF-Fermionen wie ihre bosonischen Partner transformieren:

$$\Theta : \psi^a \rightarrow e^{2\pi i \phi_a} \psi^a. \quad (6.58)$$

Für die WF-Fermionen können periodische oder antiperiodische Randbedingungen gestellt werden, es gibt daher einen RZ-bosonischen NS-Sektor und einen RZ-fermionischen R-Sektor. Um das Transformationsverhalten der zugehörigen Zustände zu bestimmen, muß man nur wissen, zu welcher Darstellung der internen $SO(6)$ -Gruppe sie gehören. Der Rotationsteil des Twistes erzeugt eine diskrete Untergruppe dieser $SO(6)$, die ja die Drehgruppe der kompaktifizierten Dimensionen ist. Der Translationsanteil wirkt sich nicht auf das Feld $\partial_{\bar{z}} X^a$ und damit auch nicht auf den Superstrom und die WF-Fermionen aus. Die Fermionen transformieren also unter dem Twist gemäß der durch den Rotationsanteil induzierten Darstellung der internen Drehgruppe. Wieder kann man im Komplexen Linearkombinationen bilden, die bezüglich dieser Wirkung diagonal sind und als Eigenzustände mit einer Phase transformieren, die eine N-te oder bei Spinordarstellungen eine 2N-te Einheitswurzel ist [24], [46].

Als Beispiel konstruiere ich nun den universellen Teil des Spektrums eines vierdimensionalen heterotischen $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds, d.h. den Teil, der nicht davon abhängt, wie der Twist als Eichtwist auf die 16 internen Bosonen $X^I(z)$ fortgesetzt wird. Es ist also

$$G_{ij} = C(A_2^{\oplus 3})_{ij}, \quad B_{ij} = 0, \quad \mathbf{A}_i = 0 \quad (6.59)$$

und

$$\Lambda = \Gamma_R(A_2^{\oplus 3}) \quad \Gamma_{22;6} = \Gamma_{16} \oplus \Gamma_{6;6}. \quad (6.60)$$

(Die Hintergrundfelder können auch allgemeiner gewählt werden. Die Feststellung der dabei zulässigen Werte wird im nächsten Kapitel Gegenstand einer ausführlichen Untersuchung sein.)

Das Verhalten der bosonischen Oszillatoren ist bereits bestimmt worden. Das Gleiche gilt für die fermionischen NS- und R- Moden. Gruppentheoretisch liegt diesen Überlegungen die Einbettungskette

$$\mathbf{Z}_3 \subset SU(3) \subset SO(6) \quad (6.61)$$

zu Grunde. Die Einbettung $SU(3) \subset SO(6)$ kommt dadurch zustande, daß die diagonalisierte Twistmatrix mit der $U(3)$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} e^{2\pi i \phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \phi_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\pi i \phi_3} \end{pmatrix} \quad (6.62)$$

identifiziert. In unserem Fall ist $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \frac{1}{3}$. Da die Determinante gleich 1 ist, liegt die Twistmatrix sogar in der $SU(3)$. Die Twistmatrix generiert dann offensichtlich eine zentrale $\mathbf{Z}_3$ -Untergruppe der $SU(3)$. Die RZ-Oszillatoren sind $SO(6)$ -Skalare und damit Twist-invariant. Sie sind Vektoren bezüglich der kleinen Gruppe $SO(2)$ der vierdimensionalen Poincaré-Gruppe. Die internen Oszillatoren sind dagegen Vektoren der $SO(6)$ und RZ-Skalare. Die Vektordarstellung zerfällt bezüglich der $SU(3)$ als

$$\mathbf{6}_V = \mathbf{3}_F \oplus \mathbf{3}_{\overline{F}}, \quad (6.63)$$

wobei die diagonalisierten Zustände der $\mathbf{3}$ mit der Phase $e^{2\pi i/3}$ und die der $\mathbf{3}_{\overline{F}}$ mit der Phase $e^{-2\pi i/3}$ unter dem Twist transformieren. Insgesamt gilt für die WF-bosonischen masselosen Zustände: (ohne Impuls-/Windungszustände und Eichsektor)

Zustand	$\mathbf{Z}_3$	$SU(3)$	$SO(2)$	Zustand	$\mathbf{Z}_3$	$SU(3)$	$SO(2)$
$\alpha_{-1}^m 0\rangle$	1	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	$b_{-1/2}^m 0\rangle$	1	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$
$\beta_{-1}^a 0\rangle$	$e^{2\pi i/3}$	$\mathbf{3}_F$	$\mathbf{1}$	$b_{-1/2}^a 0\rangle$	$e^{2\pi i/3}$	$\mathbf{3}_F$	$\mathbf{1}$
$\beta_{-1}^{\overline{a}} 0\rangle$	$e^{-2\pi i/3}$	$\mathbf{3}_{\overline{F}}$	$\mathbf{1}$	$b_{-1/2}^{\overline{a}} 0\rangle$	$e^{-2\pi i/3}$	$\mathbf{3}_{\overline{F}}$	$\mathbf{1}$

(6.64)

Der Grundzustand $|(a_1^{(+)}, a_2^{(+)})\rangle \oplus |(a_1^{(-)}, a_2^{(-)})\rangle$ des R-Sektors einer toroidalen Kompaktifizierung transformiert bekanntlich nach Darstellung $(\frac{1}{2}, \mathbf{4}_S) \oplus (-\frac{1}{2}, \mathbf{4}_C)$ der Gruppe $SO(2) \otimes SO(6)$. Die Bestimmung des Twistverhaltens kann mit Hilfe des lokalen Isomorphismus

$$SU(4) \simeq SO(6) \quad (6.65)$$

dadurch erfolgen, daß die $SU(4)$ -Darstellungen in $SU(3)$ -Darstellungen zerlegt werden. Die $SU(4)$ -Darstellungen zerfallen gemäß

$$\mathbf{4}_S = \mathbf{3}_F \oplus \mathbf{1}, \quad (6.66)$$

$$\mathbf{4}_C = \mathbf{3}_{\overline{F}} \oplus \mathbf{1}, \quad (6.67)$$

wobei die twistdiagonalen Linearkombinationen der $SU(3)$ Darstellungen $\mathbf{1}$, $\mathbf{3}_F$, $\mathbf{3}_{\overline{F}}$ mit den Phasen 1, $e^{2\pi i/3}$, $e^{-2\pi i/3}$ transformieren. Die masselosen R-Zustände sind daher:

Zustand	$\mathbf{Z}_3$	$SU(3)$	$SO(2)$
$ (+\frac{1}{2}, \mathbf{3}_F)\rangle$	$e^{2\pi i/3}$	$\mathbf{3}_F$	$+\frac{1}{2}$
$ (+\frac{1}{2}, \mathbf{1})\rangle$	1	$\mathbf{1}$	$+\frac{1}{2}$
$ (-\frac{1}{2}, \mathbf{3}_{\overline{F}})\rangle$	$e^{-2\pi i/3}$	$\mathbf{3}_{\overline{F}}$	$-\frac{1}{2}$
$ (-\frac{1}{2}, \mathbf{1})\rangle$	1	$\mathbf{1}$	$-\frac{1}{2}$

(6.68)

Der universelle Teil des masselosen Spektrums entsteht durch das Bilden invarianter Kombination aus den obigen links- und rechtslaufenden Zuständen. Zunächst gibt es die Zustände

Zustand	Helizität	Interpretation
$\alpha_{-1}^m b_{-1/2}^n 0\rangle$	± 2	Graviton
	0	Dilaton
	$0^{(-)}$	Axion
$\alpha_{-1}^m (+\frac{1}{2}, \mathbf{3}_F)\rangle$	$\pm \frac{3}{2}$	Gravitino
$\alpha_{-1}^m (-\frac{1}{2}, \mathbf{3}_{\overline{F}})\rangle$	$\pm \frac{1}{2}$	Dilatino

(6.69)

Das Graviton und das Gravitino bilden eine N=1 Supergravitationsmultiplett. Durch das Twisten ist also die erweiterte auf die minimale RZ-Supersymmetrie gebrochen worden. Das Dilatino bildet zusammen mit dem Dilaton und dem Axion zwei konjugierte chirale Supermultipletts, die weiterhin als String-spezifischen Besonderheit das Graviton begleiten.

Mit Hilfe der internen Oszillatoren können supersymmetrische Materiemultipletts konstruiert werden:

Zustand	Helizität	Interpretation
$\beta_{-1}^a \bar{b}_{-1/2}^{\bar{b}} 0\rangle$	0	9 Skalare
$\beta_{-1}^a (-\frac{1}{2}, \mathbf{3}_{\overline{F}})\rangle$	$-\frac{1}{2}$	9 linkshändige Spinoren
$\beta_{-1}^{\bar{a}} b_{-1/2}^b 0\rangle$	0	9 Skalare
$\beta_{-1}^{\bar{a}} (+\frac{1}{2}, \mathbf{3}_F)\rangle$	$+\frac{1}{2}$	9 rechtshändige Spinoren

(6.70)

Das sind 18 konjugierte chirale Supermultipletts, die 9 Familien von masselosen Fermionen und ihre supersymmetrischen Partner beschreiben. Sie tragen keine weiteren Quantenzahlen, sind also ungeladen. Die innere Symmetriegruppe der N=4 RZ-Supersymmetrie wird durch das Twisten zum Organisator einer Familienstruktur bei den neu entstehenden Materiemultipletts umfunktioniert. Bei $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds ist die Anzahl der so entstehenden Familien ein Vielfaches von 3⁷.

Bisher nicht berücksichtigt wurden die Zustände des Eichsektors. Ihr Transformationsverhalten hängt davon ab, wie die Twistwirkung auf die Felder X^I mit ihrem Gitter Γ_{16} fortgesetzt wird. Um einen Eindruck zu geben, referiere ich auch hier für ein Standard-Beispiel. Man wählt $\mathbf{A}_i = 0$ und das Impulsgitter ist

$$\Gamma_{16} \oplus \Gamma_{6,6}. \quad (6.71)$$

Als Eichgruppe wird $\mathbf{G}^{(16)} = E(8) \otimes E(8)$ gewählt. Die Twistgruppe $\mathbf{Z}_3$ muß in die auf den X^I operierende euklidische Gruppe Euk(16) eingebettet werden. Diese nehmen ihre Werte auf dem Torus

$$\mathbf{T}^{16} = \frac{\mathbf{R}^{16}}{\Gamma_{16}} \quad (6.72)$$

an. Realisiert man den Twist als eine Drehung, so muß dieser auf Γ_{16} als Automorphismus wirken. Da Γ_{16} das Gewichtsgitter der Eichgruppe ist, definiert das wiederum einen Automorphismus von $E(8) \otimes E(8)$. Der Twist muß die Ordnung 3 haben. Die Standardwahl besteht darin, einen Automorphismus zu wählen, der auf einem der $A_2^{\oplus 3}$ Untergitter von Γ_{16} genau so operiert, wie der Ortsraumtwist, also durch eine Drehung um 120 Grad. Die Twistgruppe ist in die alte Eichgruppe $E(8)$ als Zentrum einer $SU(3)$ Untergruppe eingebettet:

$$\mathbf{Z}_3 \subset SU(3) \subset (SU(3))^4 \subset SU(3) \otimes E(6) \subset E(8). \quad (6.73)$$

⁷Vielleicht liegt hier die Antwort auf die Frage eines verblüfften Physikers bei der Entdeckung des Myons ("Who ordered that?") verborgen, wobei natürlich zu klären wäre, ob $\mathbf{Z}_3$ -Kompaktifizierungen in der Stringtheorie dynamisch bevorzugt sind.

Die unter dem dadurch definierten Lie-Algebra-Automorphismus invariante Unter algebra ist [46]:

$$\mathbf{g}_0^{(16)} = A_2 \oplus E_6 \oplus E_8. \quad (6.74)$$

Die Eichgruppe des Orbifold-Modells ist daher $SU(3) \otimes E(6) \otimes E(8)$. Für dieses Modell gibt es, wie für jeden zu einem inneren Lie-Algebra-Automorphismus führenden Twist, eine äquivalente Verschiebungs-Realisierung durch eine Translation $(1, \mathbf{v})$ im $\mathbf{R}^{16}$ [24], [46]. Da für die X^I bereits toroidale Randbedingungen bezüglich Γ_{16} gefordert wurden, wird hier insgesamt durch

$$\mathbf{O}^{16} = \mathbf{T}'^{16} = \frac{\mathbf{T}^{16}}{\langle (1, \mathbf{v}) \rangle} \quad (6.75)$$

ein neuer Torus definiert. Da der Twist von N -ter Ordnung sein muß ($N=3$ im hier betrachteten Beispiel) gilt $N\mathbf{v} \in \Gamma_{16}$. Daher ist der neue Torus wohldefiniert, was nicht der Fall, wäre, wenn die alten und die neuen toroidalen Randbedingungen inkommensurabel sind. Die Verschiebungs-Realisierung hängt übrigens mit der früher beschriebenen Verschiebungsvektormethode eng zusammen (siehe 6.4).

Wir können nun den Beitrag des Eichsektors zum Spektrum angeben. Die adjungierte Darstellung der $E(8) \otimes E(8)$ zerfällt bezüglich der invarianten Untergruppe $SU(3) \otimes E(6) \otimes E(8)$ in⁸

$$(248, 1) \oplus (1, 248) = (8_R, 1, 1) \oplus (1_R, 78, 1) \oplus (1_R, 1, 248) \oplus (3_F, 27_F, 1) \oplus (3_{\overline{F}}, 27_{\overline{F}}, 1). \quad (6.76)$$

Das Twist-Transformationsverhalten hängt von der Konjugationsklasse der $SU(3)$ -Darstellung ab: Zustände in der $R, F, \overline{F}$ Konjugationsklasse transformieren mit der Phase $1, e^{2\pi i/3}, e^{-2\pi i/3}$. Damit gibt es folgende Twist-invariante Zustände:

Links	Rechts	Helizität	Supermultiplett
$(8_R, 1, 1)$	$b_{-1/2}^m 0\rangle$	± 1	Super-YM-Multiplett mit Eichgruppe $SU(3) \otimes E(6) \otimes E(8)$
$(1_R, 78, 1)$	$ (+\frac{1}{2}, 1)\rangle$	$+\frac{1}{2}$	
$(1_R, 1, 248)$	$ (-\frac{1}{2}, 1)\rangle$	$-\frac{1}{2}$	
$(3_F, 27_F, 1)$	$b_{-1/2}^{\overline{a}} 0\rangle$	0	3 geladene chirale
	$ (-\frac{1}{2}, 3_{\overline{F}})\rangle$	$-\frac{1}{2}$	Supermultipletts
$(3_{\overline{F}}, 27_{\overline{F}}, 1)$	$b_{-1/2}^a 0\rangle$	0	3 geladene chirale
	$ (+\frac{1}{2}, 3_F)\rangle$	$+\frac{1}{2}$	Supermultipletts

(6.77)

Es gibt also außer den Eichbosonen 3 Familien von Fermionen in der fundamentalen Darstellung $(3_F, 27)$ der $SU(3) \otimes E(6)$ und die supersymmetrischen Partner, Eichbosinos und Skalare. Interpretiert man die $SU(3)$ als horizontale (Familien-) Symmetrie, so gibt es 9 Familien in der fundamentalen Darstellung 27 der Gruppe $E(6)$. Dies schlägt die Brücke von den Stringkompaktifizierungen zur GUT-Phänomenologie, denn die $E(6)$ ist eine der favorisierten GUT-Eichgruppen. Da die 27_F Darstellung komplex (nicht selbstkonjugiert), also nicht zu $27_{\overline{F}}$ isomorph ist, sind die Fermionfamilien chiral. Der Teilcheninhalt des Standard-Modells läßt sich in eine vereinheitlichte $E(6)$ -Theorie einbetten. Die ungebrochene $E(8)$ koppelt nur über die Gravitation an die normale Materie und tritt nur als „Schattenmaterie“ in Erscheinung⁹. Mit vergrößertem Aufwand bei der Konstruktion lassen sich noch wesentlich „realistischere“ Kompaktifizierungen erzeugen. Angesichts des Umstandes, daß die Konstruktion so einfach

⁸Diese Zerlegung erhält man, wie alle anderen in dieser Arbeit angegebenen auch, entweder durch Nachschlagen in Tabellen [86], [154] oder durch die in [138] und [137] angegebenen Methoden. Die Kenntnis des in den Anhängen B und C zusammengestellten Materials ist im Prinzip ebenfalls hinreichend, obwohl ich dort auf Zerfallsregeln (branching rules) nicht explizit eingehe.

⁹Damit ist neuer Kandidat für dunkle Materie im Universum gefunden.

ist, daß die Bewegungsgleichungen der Stringtheorie exakt lösbar bleiben und verglichen mit Kaluza–Klein–Supergravitationstheorien ist das ein großer Erfolg der Stringtheorie.

Bereits früher war gezeigt worden, daß die generische $U(1)^6$ -Eichgruppe des Kompaktifizierungssektors durch das Twisten vollständig gebrochen wird. (Der einzige Rest dieser Symmetrie ist die diskrete $\mathbf{Z}_3$ -Invarianz unter den Twists.) Dadurch reduziert sich der Rang der Eichgruppe von 22 auf 16. Falls kritische Hintergrundfelder gewählt werden,

$$G_{ij} = \frac{1}{4}C_{ij} \Leftrightarrow \Lambda = \frac{1}{2}\Gamma_R, \quad B_{ij} = \frac{1}{4}C_{ij} \bmod \frac{1}{2}, \quad (6.78)$$

vergrößert sich die Eichgruppe im Kompaktifizierungssektor des toroidalen Modell auf

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{6-l}. \quad (6.79)$$

Der Twist bricht die $U(1)$ Faktoren vollständig, von der halbeinfachen Eichgruppe überlebt aber mindestens eine $U(1)^l$ -Untergruppe. Die tatsächliche Eichgruppe muß fallweise bestimmt werden, genau wie bei der Eichgruppe des Eichsektors. Beim Standard- $\mathbf{Z}_3$ -Orbifold gilt:

$$\mathbf{G} = (SU(3))^k \otimes U(1)^{6-2k} \rightarrow \mathbf{G} = U(1)^{2k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (6.80)$$

je nachdem, ob die Hintergrundfelder bezüglich 1, 2 oder 3 der A_2 -Tori kritisch sind. Da sich der Rang der Eichgruppe wieder auf bis zu 22 erhöht, sind diese Modelle weniger von phänomenologischem als vielmehr von systematischem Interesse. Modelle mit erhöhter Symmetrie spielen eine wichtige Rolle für die Struktur des Moduliraums.

Einige Züge des hier gewählten Beispiels sind nicht repräsentativ für allgemeine Orbifold-Kompaktifizierungen: Zum einen kann die RZ-Supersymmetrie vollständig gebrochen werden, zum anderen kann die Tachyon-Freiheit verloren gehen. Für $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds kann allgemein gezeigt werden, daß ungebrochene RZ-Supersymmetrie und Tachyon-Freiheit äquivalent sind [24].

6.3.2 Die getwisteten Sektoren

Mit der Projektion des toroidalen Hilbertraumes auf die twistinvarianten Zustände ist die Konstruktion des Hilbertraumes einer Orbifold-Kompaktifizierung noch nicht abgeschlossen, da das durch die Projektion definierte Modell nicht modular invariant ist. Die Forderung nach modularer Invarianz der Genus-1-Zustandssumme erzwingt die Einbeziehung weiterer „getwisteter“ Sektoren¹⁰. Die Argumente, die dazu führen, ähneln denen, die bei der Diskussion der Spinstrukturen gebraucht wurden. Die Projektion auf Θ -invariante Zustände entspricht der Summation über alle getwisteten Randbedingungen in zeitlicher Richtung auf dem WF-Torus:

$$\mathbf{X}(z + \tau) = \Theta^i \mathbf{X}(z) \bmod 2\pi\Lambda. \quad (6.81)$$

Durch die Transformation $\tau \rightarrow -1/\tau$ werden die raumartige und die zeitartige Richtung auf dem WF-Torus vertauscht. Die Zustandssumme des projizierten Modells ist daher nicht modular invariant. Der einfachste Ausweg besteht darin, über alle getwisteten Randbedingungen in Raum- und Zeitrichtung zu summieren. Falls die Operation der modularen Gruppe in mehrere Orbits zerfällt, z.B. bei $\mathbf{Z}_N$ -Orbifolds, bei denen N keine Primzahl ist, könnte man auch einzelne Orbits wählen oder relative Phasen („diskrete Torsion“) einführen [42], [90]. Das entspricht zusätzlichen Projektionen im unten erläuterten Hilbertraum-Formalismus. Normalerweise summiert man über alle Randbedingungen. Bei Primzahl- $\mathbf{Z}_N$ -Orbifolds ist das auch die einzige Lösung. Die modulare Invarianz der Genus-1-Zustandssumme ist bei abelschen Orbifolds nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die modulare Invarianz auf Weltflächen von beliebigem Genus. Bei nichtabelschen Orbifolds kommen zusätzliche Bedingungen hinzu [31], [32].

Die Summation über alle Randbedingungen muß nun in die Konstruktion des Hilbertraumes übersetzt werden. Die Gesamt-Hilbertraum $\mathcal{H}_O$ eines Orbifold-Modells ist dann eine direkte

¹⁰Siehe [24], sowie für allgemeine Orbifolds konformer Feldtheorien [42].

Summe von Hilberträumen $\mathcal{H}_i$,

$$\mathcal{H}_O = \bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathcal{H}_i, \quad (6.82)$$

wobei

1.) der Raum $\mathcal{H}_i$ aus Feldern mit den Randbedingungen

$$\mathbf{X}(\sigma^1 + \pi, \sigma^0) = \Theta^i \mathbf{X}(\sigma^1, \sigma^0) + 2\pi \mathbf{v} \quad (\text{Minkowski-Formulierung}) \quad (6.83)$$

bzw.

$$\mathbf{X}(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i} \bar{z}) = \Theta^i \mathbf{X}(z, \bar{z}) + 2\pi \mathbf{v} \quad (\text{Euklidische Formulierung}) \quad (6.84)$$

konstruiert wird, was der Summation über alle Randbedingungen in Raumrichtung entspricht, und

2.) in jedem der Räume $\mathcal{H}_i$ auf Θ -invariante Zustände projiziert wird, was der Summation über alle Randbedingungen in Zeitrichtung entspricht.

Um Verwechslungen mit dem modularen Parameter τ zu vermeiden, habe ich die Koordinaten auf dem Minkowski-WF-Zylinder mit σ^0, σ^1 bezeichnet. Man beachte auch, daß in Formel (6.84) die euklidische Weltfläche die komplexe Ebene, nicht der Torus ist.

Die Konstruktion des 0. oder ungetwisteten Sektors wurde im vorigen Abschnitt durchgeführt. Als repräsentatives Beispiel für die getwisteten Sektoren diskutierte ich im folgenden den 1. getwisteten Sektor. Die Konstruktion der anderen Sektoren ist danach klar.

Um die Gestalt des Koordinatenfeldes im 1. Sektor zu bestimmen muß der allgemeine Ansatz

$$\mathbf{X}(z, \bar{z}) = \mathbf{x} - \frac{i}{2} \mathbf{k}_L \log z - \frac{i}{2} \mathbf{k}_R \log \bar{z} + \frac{i}{2} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{p} \beta_p z^{-p} + \frac{i}{2} \sum_{q \neq 0} \frac{1}{q} \tilde{\beta}_q \bar{z}^{-q} \quad (6.85)$$

für die Modenentwicklung in die Gleichung

$$\mathbf{X}(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i} \bar{z}) = \Theta \mathbf{X}(z, \bar{z}) + 2\pi \mathbf{v} \quad (6.86)$$

für die Randbedingungen eingesetzt werden. Durch Vergleich der logarithmischen Terme folgt:

$$\Theta \mathbf{k}_L = \mathbf{k}_L \quad \Theta \mathbf{k}_R = \mathbf{k}_R. \quad (6.87)$$

d.h. nur (punktweise) invariante Impulse sind erlaubt: Interne Impulse und Windungen sind entlang der Richtungen, auf die Θ nicht-trivial wirkt, verboten. Der Vergleich der konstanten Terme liefert:

$$\mathbf{x} + \pi(\mathbf{k}_L - \mathbf{k}_R) = \theta \mathbf{x} + 2\pi \mathbf{v}. \quad (6.88)$$

Falls es keine invarianten Richtungen gibt, ist $\mathbf{k}_L = \mathbf{k}_R = 0$, und wir erhalten die schon bekannte Fixpunktgleichung. Die Lage des Schwerpunktes des Strings ist demnach in den getwisteten Sektoren quantisiert und muß gleich einem der Fixpunkte sein; insbesondere ist jedem Fixpunkt $\mathbf{x}_f$ ein Grundzustand $|0, \mathbf{x}_f\rangle$ zugeordnet und alle diese Grundzustände sind entartet, solange keine Wilsonlinien auftreten. Falls invariante Richtungen existieren, gilt eine modifizierte Fixpunktgleichung. Entlang der invarianten Richtungen sind nichttriviale Windungszustände erlaubt und der Schwerpunkt verschiebt sich um einen Betrag

$$\pi(\mathbf{k}_L - \mathbf{k}_R) = 2\pi \mathbf{w}, \quad (6.89)$$

der proportional zum Windungsvektor $\mathbf{w}$ ist.

Die Betrachtung der Potenzterme liefert schließlich Gleichungen für die Oszillatoren. Wir betrachten nur den linkslaufenden, holomorphen Anteil

$$\Theta \beta_p = e^{-2\pi i p} \beta_p, \quad (6.90)$$

wobei $p \in \frac{1}{N}\mathbf{Z}$, da ja $\Theta^N = 1$ sein muß. Durch Ausschreiben in Komponenten (bezüglich einer komplexen Diagonalbasis) erhält man daraus

$$(\Theta\beta_p)^a = e^{2\pi i\phi_a} \beta_p^a \stackrel{!}{=} e^{-2\pi ip} \beta_p^a \Rightarrow p = -\phi_a \pmod{\mathbf{Z}} \quad (6.91)$$

und durch Betrachtung der komplex konjugierten Linerarkombination

$$(\Theta\beta_p)^{\bar{a}} = e^{-2\pi i\phi_a} \beta_p^{\bar{a}} \stackrel{!}{=} e^{-2\pi ip} \beta_p^{\bar{a}} \Rightarrow p = \phi_a \pmod{\mathbf{Z}}. \quad (6.92)$$

Bezüglich der Diagonalbasis sind die auftretenden Indizes in jeder Richtung um ein gewisses Vielfaches von $1/N$ verschoben. Das in die Konstruktion der Vertexoperatoren (für Nicht-Windungszustände) eingehende Feld $\partial\mathbf{X}$ ist jetzt keine eindeutige, sondern eine N -deutige Funktionen in der komplexen Ebene mit Verzweigungspunkten bei 0 und ∞ :

$$i\partial_z X_L^a(z) = \sum_{p \in \mathbf{Z} - \phi_a/N} \beta_p^a z^{-p} = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \beta_{m - \phi_a/N}^a z^{-p}, \quad (6.93)$$

$$i\partial_z X^{\bar{a}}(z) = \sum_{p \in \mathbf{Z} + \phi_a/N} \beta_p^{\bar{a}} z^{-p} = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \beta_{m + \phi_a/N}^{\bar{a}} z^{-p}. \quad (6.94)$$

Damit ist jetzt klar, wie der getwistete linkslaufende Hilbertraum zu konstruieren ist: Er entsteht durch Anwendung der „Oszillatoren“ $\beta_{-p}^a, \beta_{-p}^{\bar{a}}$ auf die den Fixpunkten zugeordneten Grundzustände. Die kanonische Quantisierung liefert die gewohnten Vertauschungsrelationen für die Oszillatoren, allerdings jetzt mit gebrochen-zahligen Indizes:

$$[X^a(\sigma, \tau), P^{\bar{b}}(\sigma', \tau)] = \delta^{a\bar{b}} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.95)$$

$$\Rightarrow [\beta_p^a, \beta_q^{\bar{b}}] = p \delta^{a\bar{b}} \delta_{p+q, 0}. \quad (6.96)$$

Der zu β_p^a adjungierte Zustand ist also

$$(\beta_p^a)^+ = \beta_{-p}^{\bar{a}}. \quad (6.97)$$

Die Massenformel besitzt die allgemeine Form

$$\frac{1}{8}M^2 = N + a = \tilde{N} + \tilde{a}. \quad (6.98)$$

Der aus den gebrochenzahligen Oszillatoren konstruierte Anzahl-Operator erfüllt die gewohnte Vertauschungsrelation

$$[N, \beta_{-p}] = p\beta_{-p}. \quad (6.99)$$

Die Normalordnungskonstante a muß neu (mit Hilfe der ζ -Funktion-Regularisierung) berechnet werden: Für jedes Feld X^a oder $X^{\bar{a}}$ (die komplex konjugierten Felder müssen extra gezählt werden!) erhält man einen Beitrag

$$b = -\frac{1}{24} + \frac{\phi_a}{N} \left(1 - \frac{\phi_a}{N}\right) \quad (6.100)$$

zu a [42]. Ein normales (d.h. ungetwistetes) reelles Koordinatenfeld liefert also $b = -1/24$ was bei 24 Feldern (bosonische Stringtheorie in der Lichtkegelequation) den bekannten Wert $a = 1$ liefert. In der heterotischen Stringtheorie müssen analoge Betrachtungen für die WF-Fermionen $\psi^a, \psi^{\bar{a}}$ angestellt werden. Auch hier gibt es dann getwistete Moden-Operatoren. Die bereits ohne Twist halbzahligen Moden der NS-Fermionen sind dabei als zusätzlicher $\mathbf{Z}_2$ -Twist zu behandeln. Der Beitrag eines getwisteten Fermions zur Normalordnungskonstante ist genau $-b$. Im R-Sektor kompensieren sich daher die Normalordnungskonstanten von WF-Bosonen und WF-Fermionen. Bei den WF-Fermionen schließt die Summation über alle getwisteten

Randbedingungen eine Summation über alle Spinstrukturen ein. Man spricht daher auch von der verallgemeinerten GSO-Projektion.

Falls der Twist Fixrichtungen besitzt, sind bezüglich dieser auch diskrete Impuls- / Windungszustände möglich. Da in diesen Richtungen auch die Modenentwicklung ganzzahlig ist, entspricht die Hilbertraumkonstruktion hier der bei einer toroidalen Kompaktifizierung (siehe 6.4). Es ist wichtig zu bemerken, daß das Gitter Λ im allgemeinen nicht orthogonal ist. Daher faktorisiert ein Orbifold mit Fixrichtungen im allgemeinen nicht in das Produkt eines Orbifolds ohne Fixrichtungen und eines Torus. Entsprechend faktorisiert auch der Hilbertraum nicht, und die Impuls- / Windungszustände sind fixrichtungsabhängig [68].

Eine weitere Modifikation des Formalismus ist beim Twisten der Eichfreiheitsgrade zu betrachten. Das Fehlen der rechtslaufenden chiralen Anteile, macht sich bei der Diskussion der Nullmoden, d.h. der Fixpunkte, bemerkbar [24]. Die Konstruktion des Hilbertraums kann als Spezialfall der Konstruktion asymmetrischer Orbifolds behandelt werden [68]. Zunächst konstruiert man einen normalen, nicht-chiralen Orbifold mit Gitter $\Gamma_{16,16}$. Der Hilbertraum zerfällt in einen links- und einen rechtslaufenden Anteil, und man möchte den rechtslaufenden weglassen. Um diese Prozedur (das „Quadratwurzelziehen aus dem Hilbertraum“) auf den Fixpunktsektor auszudehnen, muß die Darstellungstheorie der Fixpunktgruppe zu Hilfe genommen werden. Man kann zeigen, daß die Zahl der Fixpunkte eine Quadratzahl ist, und daß jedem chiralen Sektor gerade so viele Fixpunkte zugeordnet werden müssen, wie die Wurzel aus der Anzahl der geometrischen Fixpunkte beträgt. Versäumt man das, so ist die Darstellung der Fixpunktgruppe in der chiralen Theorie reduzibel, und die zusätzlichen Zustände zerstören die modulare Invarianz [68].

Nachdem man sowohl den links- als auch den rechtslaufenden Hilbertraum konstruiert hat, erfolgt die Projektion auf Θ -invariante Zustände wieder durch Bilden aller invarianten Kombinationen aus rechten und linken Eigenzuständen. Die anderen getwisteten Hilberträume erhält man offensichtlich, indem man statt Θ die entsprechenden höheren Potenzen in den obigen Überlegungen zu Grunde legt.

Die Einführung der getwisteten Sektoren bereichert das Spektrum eines Orbifold-Modells um zusätzliche Materiemultipletts. Im Fall des Standard- $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds gibt es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Fixpunkte. Getwistete Zustände sind daher 27-fach entartet. Beide getwisteten Sektoren liefern zusammen 27 masselose Fermionfamilien in der $(\mathbf{1}, \mathbf{27}, \mathbf{1})$ und $3 \cdot 27 = 81$ masselose Fermionfamilien in der $(\mathbf{3}_{\overline{F}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ Darstellung der Eichgruppe, sowie die skalaren Superpartner. Dadurch gewinnt das Modell natürlich nicht gerade an phänomenologischer Attraktivität. Es sei aber noch einmal darauf hingewiesen, daß sich durch aufwendigere Konstruktionen noch wesentlich realistischere Spektren erzielen lassen.

6.3.3 Modulare Invarianz

Die Einbeziehung der getwisteten Sektoren ist zwar notwendig, aber noch nicht hinreichend für die modulare Invarianz der Stringtheorie. Die zusätzlichen Bedingungen die ein allgemeiner, asymmetrischer Twist erfüllen muß, wurden von Narain, Sarmadi und Vafa angegeben [68], [69]. Wir benötigen dieses Ergebnis für den Fall, daß der Twist eine reine Drehung ist, d.h.

$$\Theta = (\Theta_L, \Theta_R) \in O(22) \otimes O(6). \quad (6.101)$$

Die Twistordnung sei N und die Eigenwerte von Θ_L und Θ_R seien:

$$e^{\pm 2\pi i l_m / N} \text{ und } e^{\pm 2\pi i r_i / N} \text{ mit } m = 1, \dots, 11, i = 1, 2, 3. \quad (6.102)$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $N \in 2\mathbf{Z}$. Dann müssen die Eigenwerte des Twistes die Gleichung

$$\sum_{m=1}^{11} (l_m)^2 = 0 \bmod N \quad (6.103)$$

erfüllen.

2. $N \in 2\mathbf{Z} + 1$. Dann müssen die Eigenwerte des Twistes die Gleichungen

$$\sum_{m=1}^{11} (l_m)^2 = 0 \bmod 2N \text{ und } \sum_{i=1}^3 (r_i)^2 = 0 \bmod 2 \quad (6.104)$$

erfüllen und es muß zusätzlich gelten:

$$\forall \mathbf{v} \in \Gamma_{22,6} : \mathbf{v} \cdot \Theta^{N/2} \mathbf{v} = 0 \bmod 2. \quad (6.105)$$

6.4 Orbifolds und Lie-Algebra-Automorphismen

Als nächstes möchte ich die Besonderheiten näher erläutern, die auftreten, wenn das zu twistende Narain-Modell eine halbeinfache Lie-Algebra als Symmetrie-Algebra besitzt. Dieser Fall tritt immer auf, wenn die Hintergrundfelder kritische Werte annehmen. Darunter fällt auch die Situation mit verschwindenden Wilsonlinien, da dann Γ_{16} ein Lie-Algebra-Gitter ist und (mindestens) eine Lie-Algebra vom Range 16 realisiert wird. Zunächst sollen die benötigten Fakten über Lie-Algebra-Automorphismen¹¹ zusammengestellt werden; anschließend werden die Konsequenzen für die Konstruktion von Orbifolds diskutiert.

6.4.1 Lie-Algebra-Automorphismen

Im folgenden sei $\mathfrak{g}$ eine reelle, einfache Lie-Algebra vom kompakten Typ und $\mathbf{G}$ die zugehörige reelle, einfache und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe. Ein Automorphismus

$$\Theta \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \quad (6.106)$$

von $\mathfrak{g}$ ist ein Vektorraum-Isomorphismus, der die Lie-Algebra-Struktur respektiert, d.h.

$$[\Theta(a), \Theta(b)] = \Theta([a, b]) \quad \forall a, b \in \mathfrak{g}. \quad (6.107)$$

Wir betrachten nur Automorphismen der endlichen Ordnung N :

$$\exists N \in \mathbf{N} : \Theta^N = \mathbf{1}. \quad (6.108)$$

Die Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ kann im Komplexen in Eigenräume des Twistes zerlegt werden:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{m=0}^{N-1} \mathfrak{g}_m \text{ wobei } x_m \in \mathfrak{g}_m \Leftrightarrow \Theta x_m = e^{2\pi i m/N} x_m. \quad (6.109)$$

Bei Orbifold-Kompaktifizierungen wird die Symmetrie-Algebra $\mathfrak{g}$ der toroidalen Kompaktifizierung auf die Θ -invariante Unterálgebra $\mathfrak{g}_0$ gebrochen.

Eine wichtige Untergruppe von $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ sind die inneren Automorphismen, d.h. diejenigen Automorphismen, die durch Konjugation mit Elementen aus $\mathbf{G}$ beschrieben werden können:

$$\Theta \in \text{Int}(\mathfrak{g}) \Leftrightarrow \exists A \in \mathbf{G} \forall a \in \mathfrak{g} \psi(a) = AaA^{-1}. \quad (6.110)$$

Zwei Automorphismen heißen zueinander konjugiert, wenn sie durch Konjugation mit einem inneren Automorphismus ineinander überführt werden können:

$$\Theta \cong \Theta' \Leftrightarrow \exists \Phi \in \text{Int}(\mathfrak{g}) : \Theta' = \Phi\Theta\Phi^{-1}. \quad (6.111)$$

Durch Konjugation können Lie-Algebra-Automorphismen auf eine bestimmte Standardgestalt gebracht werden [137]. Es gibt nur endlich viele Konjugationsklassen von Automorphismen, wobei jede Klasse durch einen „Hauptautomorphismus“ repräsentiert werden kann. Durch

¹¹ Für die Mathematik siehe [137], [150], [134] und [149]. Von Physikern geschriebene Zusammenfassungen der relevanten Fakten sind in [81] und [46] enthalten.

Klassifikation der Hauptautomorphismen gewinnt man daher einen vollständigen Überblick über $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

In den Stringtheorien werden zwei Methoden benutzt, um Automorphismen von Lie-Algebren zu konstruieren. Die sogenannte **kanonische Realisierung** entspricht dem Fall der Orbifold-Konstruktion, bei dem der Twist durch eine Drehung realisiert wird, der ein Automorphismus des Gitters sein muß. Die **Verschiebungs-Realisierung** tritt auf, wenn die Verschiebungsvektor-Methode verwendet wird oder ein Orbifold-Twist als Verschiebung realisiert, was, wie wir sehen werden im wesentlichen dasselbe ist.

Zuerst soll die kanonische Realisierung beschrieben werden. Falls das Gitter ein Lie-Algebra-Gitter ist, also im Falle kritischer Hintergrundfelder, erhält man den zu einem Gitterautomorphismus gehörenden Lie-Algebra-Automorphismus durch die folgende Konstruktion: Zunächst sei [137]

$$R = O(d) \cap S(\Delta) \quad (6.112)$$

die Menge aller Drehungen, die die Wurzeln Δ untereinander permutieren. Eine wichtige Untergruppe von R ist die Weylgruppe W , die von den Reflektionen r_i an den Hyperflächen orthogonal zu den einfachen Wurzeln α_i erzeugt wird:

$$W = \langle r_i, i = 1, \dots, l = \text{rang}(\mathfrak{g}) \rangle, \quad r_i(\lambda) = \lambda - 2 \frac{\lambda \cdot \alpha_i}{\alpha_i \cdot \alpha_i} \alpha_i. \quad (6.113)$$

Tatsächlich ist W sogar ein Normalteiler von R ; die Quotientengruppe R/W wird weiter unten untersucht. Die Weylgruppe kann zu einer diskreten Untergruppe $\widetilde{W}$ von G „geliftet“ werden [81]; auf diese Weise definiert jeder „Weyltwist“ $w \in W$ einen inneren Automorphismus von $\mathbf{G}$. $\widetilde{W}$ wird durch die Lifte $\widetilde{r}_i$ der Weylspiegelungen r_i generiert. Der Standardlift von r_i ist [81]

$$\widetilde{r}_i = \exp \left(\frac{i\pi}{2} (E_{\alpha_i} + E_{-\alpha_i}) \right). \quad (6.114)$$

Der zugehörige Automorphismus kann durch seine Wirkung auf die Cartan-Subalgebra und auf die Generatoren der Wurzelräume charakterisiert werden. Durch die Einbettung des Wurzelgitters in den Gewichtsraum $\mathfrak{h}^*$ operiert der Twist auf den Gewichten λ . Die Wirkung auf das einem Gewicht zugeordnete Element H_λ der Cartan-Subalgebra ist:

$$\widetilde{r}_i H_\lambda \widetilde{r}_i^{-1} = \widetilde{r}_i \left(\sum_j \lambda_j H_{\alpha_j^*} \right) \widetilde{r}_i^{-1} = \sum_j (r_i \lambda)_j H_{r_j(\lambda)}. \quad (6.115)$$

Die Koordinaten $\vec{\lambda} = (\lambda_i)$ bezüglich der Basis $H_{\alpha_i^*}$ sind, wie sich später herausstellen wird, im Zusammenhang mit inneren Automorphismen besonders zweckmäßig. Die Wurzelräume werden durch den Automorphismus gemäß r_i rotiert, wobei allerdings Phasen auftreten, die im allgemeinen nicht alle gleich 1 gewählt werden können [81]:

$$\widetilde{r}_i E_\alpha \widetilde{r}_i^{-1} = c_i(\alpha) E_{r_i(\alpha)} \quad |c_i(\alpha)|^2 = 1. \quad (6.116)$$

Die für die Klassifizierung der Weyl-Automorphismen entscheidende Aussage ist, daß konjugierte Elemente der Weylgruppe konjugierte Automorphismen definieren. Die Klassifizierung der Konjugationsklassen der Weylgruppen der einfachen Lie-Algebren ist bekannt und kann mit Hilfe sogenannter Carter-Diagramme diagrammatisch angegeben werden [149], [81], [134]. (Die bekannten Dynkin-Diagramme sind Spezialfälle von Carter-Diagrammen und beschreiben die sogenannten Coxeter-Twists, bei denen sukzessive an allen einfachen Wurzeln gespiegelt wird. Der Standard- $\mathbf{Z}_3$ -Twist ist der Coxeter-Twist von A_2 : Die Drehung, die die erste auf die zweite einfache Wurzel abbildet, entsteht durch Weyl-Spiegelungen bezüglich der beiden einfachen Wurzeln.)

Nach dieser Untersuchung der Weylgruppe bleibt noch die Behandlung der Quotientengruppe R/W übrig. Hier stellt sich heraus, daß sie alle äußeren Automorphismen modulo

innerer Automorphismen beschreibt, denn es gilt [137]:

$$\frac{R}{W} = \frac{\text{Aut}(\mathfrak{g})}{\text{Int}(\mathfrak{g})}. \quad (6.117)$$

Die Elemente von R/W können als Automorphismen des Dynkin-Diagrammes von $\mathfrak{g}$ realisiert werden. Im Falle der Lie-Algebra D_4 ist diese Gruppe daher die Permutationsgruppe von 3 Objekten; in allen anderen Fällen besitzt das Dynkindiagramm entweder eine Symmetrieachse oder überhaupt keine Symmetrie: Die zugehörigen Gruppen sind $\mathbf{Z}_2$ bzw. die triviale (da ein-elementige) Gruppe. Falls der bei der Orbifold-Konstruktion gewählte Gitter-Automorphismus kein Weyl-Automorphismus ist, induziert er einen äußeren Automorphismus. Ein Beispiel dafür wird später auftreten.

Mit Hilfe der Verschiebungsrealisierung kann man alle inneren, aber keine äußeren Automorphismen von $\mathfrak{g}$ konstruieren. Dabei wählt man das dem Automorphismus zugeordnete Gruppenelement $\tilde{w}$ im maximalen Torus von $\mathbf{G}$, was durch Konjugation stets zu erreichen ist, denn die Konjugation eines inneren Automorphismen bedeutet die Konjugation des den Automorphismus beschreibenden Gruppenelementes und jedes Gruppenelement kann in den maximalen Torus konjugiert werden. Die Cartan-Subalgebra ist dann (punktweise) invariant, während die Wurzelräume g_α auf sich abgebildet werden. Die Standardform für das Gruppenelement ist

$$\tilde{w} = \exp \left(2\pi i \sum_j \lambda_j H_{\alpha_j^*} \right). \quad (6.118)$$

Dabei wird der Koordinatenvektor $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \in \mathbf{R}^l$ als **Verschiebungsvektor** bezeichnet. Die Wirkung des Twistes auf eine Basis H^i, E^α von $\mathfrak{g}$ ist

$$\Theta_\lambda(H^i) = \tilde{w} H^i \tilde{w}^{-1}, \quad (6.119)$$

$$\begin{aligned} \Theta_\lambda(E^\alpha) &= \exp \left(2\pi i \sum_{j=1} \lambda_j H_{\alpha_j^*} \right) E_\alpha \exp \left(-2\pi i \sum_{j=1} \lambda_j H_{\alpha_j^*} \right) \\ &= \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^l \lambda_j (\alpha_j^*, \alpha) \right) E_\alpha = e^{2\pi i (\lambda, \alpha)} E_\alpha, \end{aligned} \quad (6.120)$$

wobei in der letzten Zeile $\lambda = \sum \lambda_j \alpha_j^* \in \mathfrak{h}^*$ ist. Der Verschiebungsvektor ist offensichtlich nur bis auf die Addition von Gewichten $\lambda' \in \Gamma_W$ festgelegt. Den Standard-Repräsentanten erhält man, wenn man verlangt, daß die Länge von λ minimal und λ ein dominantes Gewicht ist, also ein positives Skalarprodukt mit allen einfachen Wurzeln besitzt.

Die Beschreibung des durch λ definierten inneren Automorphismus kann in zwei Stufen weiter vereinfacht werden. Zunächst wird die Wirkung des Twistes bereits durch die Wirkung auf die 3l Chevalley-Generatoren festgelegt:

$$\Theta H^i = H^i, \quad \Theta E^i = e^{2\pi i s_i / N} E^i, \quad \Theta F^i = e^{-2\pi i s_i / N} F^i \quad i = 1, \dots, l. \quad (6.121)$$

Die Zahlen s_i hängen mit dem Standard-Verschiebungsvektor offensichtlich durch

$$\lambda = \frac{s_i}{N} \alpha_i^* \quad (6.122)$$

zusammen. Diese Charakterisierung ist jedoch nur ein Zwischenschritt. Da bereits die $l+1$ Generatoren E^0, E^i ganz $\mathfrak{g}$ erzeugen, braucht man nicht die Wirkung auf H^i und F^i , sondern nur auf E^i und E^0 spezifizieren, letztere durch

$$\Theta E^0 = e^{2\pi i s_0 / N}. \quad (6.123)$$

Kac konnte zeigen, welche Wahlen von $\mathbf{s} = (s_i)_{i=1}^l$ zu inäquivalenten inneren Automorphismen führen und so alle inneren Automorphismen klassifizieren [150]. Definiert man den Twist durch einen Verschiebungsvektor, so ist s_0 durch

$$\frac{s_0}{N} = \alpha_0 \cdot \delta \quad (6.124)$$

festgelegt. Man kann für jedes inäquivalente $\mathbf{s}$ -Tupel einen Verschiebungsvektor finden.

Ein Vorteil der Verschiebungs- gegenüber der kanonischen Realisierung ist, daß die Basisvektoren von $\mathfrak{g}$ die Twist-Eigenräume aufspannen:

$$\mathfrak{g}_0 = \langle \{H^i, E^\alpha | i = 1, \dots, l, \alpha \in \Delta, \alpha \cdot \delta \in \mathbf{Z}\} \rangle, \quad (6.125)$$

$$\mathfrak{g}_1 = \langle \{E^\alpha | \alpha \cdot \delta \in \mathbf{Z} + \frac{1}{N}\} \rangle \quad (6.126)$$

und

$$\mathfrak{g}_m = \langle \{E^\alpha | \alpha \cdot \delta \in \mathbf{Z} + \frac{m}{N}\} \rangle, \quad m = 2, \dots, N-1. \quad (6.127)$$

Insbesondere kann die invariante Unteralgebra $\mathfrak{g}_0$ direkt angegeben werden. Man sieht z.B. sofort, daß jeder innere Automorphismus immer mindestens eine $u(1)^l$ invariant läßt und daß folglich $\mathfrak{g}_0$ immer den gleichen Rang wie $\mathfrak{g}$ hat. Es gibt übrigens auch eine diagrammatische Charakterisierung von $\mathfrak{g}_0$: Trägt man die Koeffizienten $\mathbf{s}$ in das erweiterte Dynkin-Diagramm von $\mathfrak{g}$ ein und streicht alle Punkte mit $s_i \neq 0$, so erhält man das Dynkin-Diagramm des halbeinfachen Teils von $\mathfrak{g}_0$.

Die Kacsche Klassifizierung der inneren Automorphismen kann mit der der äußeren zu einer Aussage zusammengefaßt werden [150]:

Satz 6.4.1 [Kacscher Klassifikationssatz für Lie-Algebra-Automorphismen] Jeder Automorphismus kann durch Konjugation auf die Form

$$\Theta = \psi_\tau \exp(ad(H)) \quad (6.128)$$

gebracht werden. Dabei ist ψ_τ der dem Diagrammautomorphismus $\tau \in R/W$ zugeordnete äußere Automorphismus von $\mathfrak{g}$, $H \in \mathfrak{h}$ ein Element der Cartan-Subalgebra und ad steht für die adjungierte Darstellung. Es sei $k = 1, 2$ oder 3 die minimale Zahl, so daß Θ^k ein innerer Automorphismus ist, während $s = (s_0, \dots, s_l)$ die Eigenwerte auf den Wurzelräumen charakterisiere. Jeder Automorphismus $\Theta = \Theta_{\mathbf{s}, k}$ ist durch seine Eigenwerte auf den Eigenräumen g_{α_i} und $g_{-\alpha_H}$ und die Potenz k eindeutig festgelegt. Einen nicht redundanten Satz von Repräsentanten der Konjugationsklassen von $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ der Ordnung N erhält man, indem man auf jede mögliche Weise Zahlen s_i positiv und teilerfremd und so wählt, daß

$$k \sum_{i=0}^l k_i s_i = N \quad (6.129)$$

gilt. Zwei Automorphismen $\Theta_{\mathbf{s}, k}$ und $\Theta_{\mathbf{s}', k'}$ sind genau dann konjugiert, wenn $k = k'$ gilt und es einen Diagramm-Automorphismus von $\mathfrak{g}$ gibt, der das Tupel $\mathbf{s}$ auf das Tupel $\mathbf{s}'$ abbildet.

6.4.2 Reinterpretation von speziellen Orbifolds als Tori

Aus dem Klassifikationstheorem folgt insbesondere, daß jeder durch einen Weyltwist definierte innere Automorphismus in die Verschiebungsvektorform überführt werden kann. Dies geschieht durch eine Basistransformation

$$H^i, E^\alpha \implies H'^i, E'^\alpha, \quad i = 1, \dots, l, \alpha \in \Delta, \quad (6.130)$$

bei der im allgemeinen ein gestrichener Generator eine Linearkombination aus **beiden** Arten von ungestrichenen Generatoren ist [78], [79], [81]. Mit anderen Worten wird die Cartan-Subalgebra bei der Transformation mit Wurzelräumen gemischt. Die kanonische Realisierung von inneren Automorphismen entspricht der Drehungsrealisierung eines Orbifold-Twists, falls

das Impulsgitter ein Lie-Algebra-Gitter und der Twist ein Element der Weyl-Gruppe ist. Ein Unterschied in der Notation ergibt sich, wenn der Twist im Ortsraum definiert wird, da er dann auf den Feldern $\mathbf{X}$, d.h. auf der Cartan-Subalgebra (bzw. auf einer Darstellung derselben) definiert ist, statt auf deren Dualraum, wie in der mathematischen Literatur üblich. Dies führt dazu, daß die Zustände der Stringtheorie mit Θ^{-1} statt mit Θ transformieren (vergleiche (6.115), (6.116) mit (6.46)); die Konstruktionen sind sozusagen dual zueinander.

$$\mathbf{X} \rightarrow \Theta \mathbf{X} \Rightarrow |\mathbf{k}\rangle \rightarrow |\Theta^{-1} \mathbf{k}\rangle, \quad (6.131)$$

denn

$$|\mathbf{k}\rangle = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}(0)} |0\rangle. \quad (6.132)$$

Die Basistransformation der Lie-Algebra (6.130) entspricht einer Basistransformation der darstellenden Vertexoperatoren

$$\partial X^i, \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}) \rightarrow \partial X'^i, \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}'), \quad i = 1, \dots, l, \quad \alpha \in \Delta, \quad (6.133)$$

die den Automorphismus auf dem Fockraum in die Verschiebungsvektorform bringt. Da bei der Transformation die ∂X^i mit den Exponentialfeldern gemischt werden, handelt es sich dabei nicht um eine Basistransformation im Ortsraum.

In der neuen Basis operiert der Automorphismus durch Verschiebungen statt durch Drehungen [79]:

$$\mathbf{X} \rightarrow \Theta \mathbf{X} \longleftrightarrow \mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}' + 2\pi\lambda. \quad (6.134)$$

In beiden Fällen müssen die getwisteten Sektoren berücksichtigt werden, um die modulare Invarianz zu gewährleisten. In der neuen Basis sind die getwisteten Randbedingungen modifizierte toroidale Randbedingungen, d.h. es ergeben sich Identifizierungen zwischen Kompaktifizierungen auf Tori mit solchen auf toroidalen Orbifolds [79]:

$$\mathbf{X}(e^{2\pi i} z) = \Theta^m \mathbf{X}(z) \longleftrightarrow \mathbf{X}'(e^{2\pi i} z) = \mathbf{X}(z) + 2\pi m\lambda. \quad (6.135)$$

Die Bestimmung des Impulsgitters Γ' der toroidalen Realisierung geschieht nach dem Muster der Konstruktion des Orbifold-Hilbertraumes: Die Projektion auf invariante Zustände unter dem Automorphismus entspricht der Projektion

$$\Gamma \rightarrow \Gamma_0 = \{\mathbf{v} \in \Gamma : \mathbf{v} \cdot \lambda \in \mathbb{Z}\} \quad (6.136)$$

Durch Berücksichtigung der getwisteten Sektoren erhält man insgesamt

$$\Gamma' = \sum_{n=0}^{N-1} \Gamma_0 + n\lambda. \quad (6.137)$$

Diese Konstruktion ist wie angekündigt mit der früher vorgestellten Verschiebungsvektor-Konstruktion identisch.

Unsere Überlegungen können auch auf den Fall verallgemeinert werden, daß der Twist nur auf einem Teil des Impulsgitters als Weyl-Automorphismus realisiert ist. Die oben beschriebene Basis-Transformation kann dann nur auf den entsprechenden Teil des Hilbertraumes angewandt werden. Die Orbifold-Randbedingungen können in ein Gemisch von Orbifold- und toroidalen Randbedingungen umgewandelt werden, wobei die Dimension des Torus durch den Rang der Weyl-getwisteten Lie-Algebra gegeben ist¹² [79], [78]:

$$\mathbf{O}^d \rightarrow \mathbf{T}^l \times \mathbf{O}^{d-l}. \quad (6.138)$$

Damit ergeben sich einige wichtige Folgerungen in Bezug auf toroidale und Orbifoldkompaktifizierungen in der Stringtheorie:

¹²Es ist wichtig, die Projektion auf invariante Zustände im Gesamt-Hilbertraum durchzuführen: Tut man dies für den Torus- und den Orbifold-Sektor separat übersieht man unter Umständen invariante Zustände, die für die modulare Invarianz unverzichtbar sind.

- Zunächst folgt, daß das Twisten eines beliebigen Narain-Modells mit einer reinen Verschiebung wieder ein Narain-Modell ergibt. Um die RZ-Supersymmetrie zu reduzieren und den Rang der Eichgruppe von 22 auf höchstens 16 zu reduzieren, wählt man den Twist im Kompaktifizierungssektor als Drehung. Bei Modellen ohne Wilsonlinien ist das Impulsgitter von der Form $\Gamma_{16} \oplus \Gamma_{6,6}$. Da Γ_{16} immer ein Lie-Algebra-Gitter ist, kann der Eichtwist auf äquivalente Weise als Gitterautomorphismus oder als Verschiebung realisiert werden. Die Verschiebungsrealisierung ist wesentlich einfacher und wird daher bevorzugt. Weiterhin gibt es im Moduliraum kritische Punkte, an denen der Rang der Eichgruppe sich auf 22 erhöht. Wenn $\Gamma_{6,6}$ ein Lie-Algebra Gitter ist, kann auch hier der Twist als Verschiebung realisiert werden. Diese multikritischen Orbifolds besitzen aber im allgemeinen keine N=4 RZ-Supersymmetrie und sind daher nicht äquivalent zu Narain-Modellen. Zum Teil können sie durch sogenannte kovariante Gitter beschrieben werden.
- Die kovarianten Gitter [58] definieren eine Klasse von Gittermodellen, die das Narain-Modell auf algebraische Weise verallgemeinern. Sie machen von der in zweidimensionalen Feldtheorien möglichen Bosonisierung von Fermionen Gebrauch. Bosonisiert man die sechs internen WF-Fermionen, so erhält man ein vergrößertes Impulsgitter der Form $\Gamma_{22,9}$. Dieses wird aus technischen Gründen in ein Gitter der Form $\Gamma_{22,14}$ eingebettet, das als kovariantes Gitter bezeichnet wird. Durch Anwendung der Verschiebungsvektormethode erhält man Modelle, die keine toroidalen Kompaktifizierungen mehr sind, da die je 6 internen WF-Bosonen und -Fermionen jetzt durch 9 nicht mehr zurückübersetzbare WF-Bosonen ersetzt sind. Die für die Konsistenz der Stringtheorie unaufgebbare (0,1)-WF-Supersymmetrie kann auch mit den 9 WF-Bosonen realisiert werden. Durch kovariante Gitter definierte Modelle haben zwar Eichgruppen mit maximalem Rang 22, aber die RZ-Supersymmetrie kann auf $N = 0, 1, 2$ reduziert werden, und es sind chirale Fermionfamilien möglich. Schellekens und Warner haben Argumente dafür angegeben, daß alle kovarianten Gitter Modelle mit $N \geq 1$ RZ-Supersymmetrie zu Rang-22-Orbifoldmodellen äquivalent sind [81]. Dabei kann jedem kovarianten Gitter ein Narain-Gitter und ein Weyltwist im Kompaktifizierungssektor zugeordnet werden. Ein explizites Beispiel für die Äquivalenz eines multikritischen $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds mit einem kovarianten Gitter Modell findet man in [59]. Für die Einbettung in den Orbifold-Moduliraum wäre es nützlich, die Werte der Hintergrundfelder im Narain-Modell und damit im durch den Twist entstehenden Orbifoldmodell zu kennen. Dieser zweite Teil des Einbettungsproblems wird durch meinen Formalismus für die Hintergrundfelder partiell gelöst. Nötig wäre noch ein Algorithmus, der Verschiebungsvektoren in Hintergrundfelder übersetzt.
- Auch bei Orbifoldmodellen mit nichtmaximalem Rang kann die Äquivalenz der Rotations- und der Verschiebungsrealisierung von Lie-Algebra-Automorphismen ausgenutzt werden. Sobald nur ein Teilgitter ein Lie-Algebra-Gitter und der Twist ein Gitterautomorphismus ist, kann der Twist im entsprechenden Sektor durch Verschiebungen realisiert werden, die sich einfacher behandeln lassen. Oben hatten wir den Eichsektor bei verschwindenden Wilsonlinien als Beispiel.
- Die Äquivalenz von Stringkompaktifizierungen auf verschiedenen internen Räumen miteinander und mit vierdimensionalen Stringtheorien die rein algebraisch definiert sind, ist ein weiteres Indiz dafür, daß der (empirische) Raumbegriff der Stringtheorie ein anderer als der klassische ist. Es ist bemerkenswert, daß Räume mit verschiedener Topologie identifiziert werden können. Vielleicht kann die volle Stringtheorie auch Änderungen der Topologie beschreiben, ein Problem, daß für die Quantengravitation wesentlich ist und zum Beispiel im Rahmen der Geometrodynamik nicht gelöst werden konnte [114].
- Die Äquivalenz beider Konstruktionen von Automorphismen ist auch für die Aufklärung der globalen Geometrie des Modulraums wichtig. Punkte erhöhter Symmetrie, die durch zwei im allgemeinen inäquivalente Twists erreicht werden können, sind Kandidaten für Schnittpunkte zwischen verschiedenen Theoriescharen [42].

6.4.3 Getwistete Kac–Moody–Algebren

Durch chirale Skalarfelder $\mathbf{X}(z)$, die getwisteten Randbedingungen genügen, können Vertexoperator–Darstellungen getwisteter Kac–Moody–Algebren konstruiert werden. In der Literatur wurde das von Lepowski [152] sowie von Kac und Peterson [151] und in einer mehr an der Physik orientierten Formulierung von Altschüler et al. [7] und von Sorba und Toresani [87] im Rahmen der Drehungsrealisierung durchgeführt. In Anlehnung an das Buch von Kac ist für innere Automorphismen eine wesentliche einfachere Realisierung durch Verschiebungsvektoren möglich, die aber in der mir bekannten Literatur nirgends ausgeführt wurde, und die ich daher an dieser Stelle präsentieren möchte.

Wir betrachten zunächst die Frenkel–Kac–Realisierung der Kac–Moody–Algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ durch chirale Skalarfelder $\mathbf{X}(z)$ mit den Randbedingungen

$$\mathbf{X}(ze^{2\pi i}) = \mathbf{X}(z) \bmod 2\pi\Gamma_W(\mathfrak{g}). \quad (6.139)$$

Die Generatoren der Kac–Moody–Algebra sind die Laurent–Koeffizienten der Vertexoperatoren

$$H^i(z), e^{\alpha \cdot \mathbf{X}(z)}, \quad i = 1, \dots, l, \quad l = \text{rang}(\mathfrak{g}), \quad \alpha \in \Delta. \quad (6.140)$$

Es sei nun Θ ein innerer Automorphismus von $\mathfrak{g}$ mit Standard–Verschiebungsvektor λ . Die Felder sollen jetzt den modifizierten toroidalen Randbedingungen

$$\mathbf{X}(ze^{2\pi i}) = \mathbf{X}(z) - 2\pi\lambda \bmod 2\pi\Gamma_W \quad (6.141)$$

genügen. Für die Vertexoperatoren folgt:

$$H^i(ze^{2\pi i}) = H^i(z) \text{ und } e^{i\alpha \cdot \mathbf{X}(ze^{2\pi i})} = e^{i\alpha \cdot \mathbf{X}(z)} e^{-2\pi i \alpha \cdot \lambda}. \quad (6.142)$$

Die Exponentialfelder mit $\alpha \cdot \lambda \notin \mathbf{Z}$ sind nicht einwertig, aber das kann durch die gebrochene z –Potenz $z^{\alpha \cdot \lambda}$ kompensiert werden. Die Integrale

$$H_m^\alpha = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m i_\alpha \cdot \partial \mathbf{X}(z) \quad (6.143)$$

und

$$E_{n+\alpha \cdot \lambda}^\alpha = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n z^{\alpha \cdot \lambda} e^{i\alpha \cdot \mathbf{X}(z)} c_\alpha \quad (6.144)$$

sind daher wohldefiniert. Mit Hilfe der Kurvenintegral–Methode erhält man die Vertauschungsrelationen¹³

$$[H_m^\alpha, H_n^\beta] = 0, \quad (6.145)$$

$$[H_m^\alpha, E_{n+\beta \cdot \lambda}^\beta] = (\alpha \cdot \beta) E_{m+n+\beta \cdot \lambda}^\beta, \quad (6.146)$$

$$[E_{m+\alpha \cdot \lambda}^\alpha, E_{n+\beta \cdot \lambda}^\beta] = \begin{cases} H_{m+n}^\alpha + m\delta_{m+n;0}, & \text{falls } \alpha \cdot \beta = -2, \\ \epsilon(\alpha, \beta) E_{m+n+(\alpha+\beta) \cdot \lambda}^{\alpha+\beta}, & \text{falls } \alpha \cdot \beta = -1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.147)$$

Aufgrund der Eigenschaften von Wurzelsystemen und der Wahl von λ als minimal und dominant, können alle Generatoren durch Kommutatoren der Chevalley–Generatoren

$$H^i = H_0^{\alpha_i} + s_i \mathbf{1}, \quad (6.148)$$

$$E^i = E_{s_i/N}^{\alpha_i}, \quad F^i = E_{-s_i/N}^{-\alpha_i}, \quad (6.149)$$

¹³Diese Vertauschungsrelationen tauchen in verschiedenen Arbeiten auf, z.B. in [40], allerdings ohne daß eine Realisierung durch Vertexoperatoren angegeben wird. Die Charakterisierung durch Chevalley–Generatoren und der genaue Zusammenhang mit Typ–s–Graduierungen wird meines Wissens nur von Kac [150] beschrieben.

$i = 0, \dots, l$ erhalten werden: Zunächst erhält man alle Generatoren $E_{\alpha \cdot \lambda}^\alpha$ durch Kommutatoren der E_i, F_i mit $i = 1, \dots, l$. Mit Hilfe der Operatoren E_0 und F_0 können dann die Wurzelgeneratoren $E_{m+\alpha \cdot \lambda}^\alpha$, $m \in \mathbf{Z}$ gebildet werden. Als Beispiel konstruiere ich $E_{-s_i/N+1}^{-\alpha_i}$, $i \neq 0$. Man beachte, daß

$$\alpha_0 = -\alpha_H = -\left(\sum_{i=1}^l k^i \alpha_i\right) \quad (6.150)$$

und

$$\sum_{i=0} k^i s_i = N, \text{ mit } k^0 = 1 \quad (6.151)$$

ist. Daher ist

$$\prod_{j=1}^l (\text{ad}(E_{s_j/N}^{\alpha_j}))^{k_j - \delta_{ij}} E_{s_0/N}^{\alpha_0} \quad (6.152)$$

proportional zu

$$E_{\frac{1}{N}(s_0 + \sum_{j=1}^l k^j s_j - s_i)}^{-\alpha_i} = E_{1-s_i/N}^{-\alpha_i}. \quad (6.153)$$

Analog erhält man alle $E_{m+\alpha \cdot \lambda}^\alpha$ und durch Kommutatoren der Wurzelgeneratoren die restlichen Generatoren H_m^i .

Die Chevalley-Generatoren erfüllen die Vertauschungsrelationen

$$[E^i, F^j] = \delta_{ij}(H_0^{\alpha_i} + s_i \mathbf{1}) = \delta_{ij} H^i \quad (6.154)$$

und

$$[H^i, E^j] = C_{ij} E^j, \quad [H^i, F^j] = -C_{ij} F^j, \quad (6.155)$$

für $i = 0, \dots, l$ wobei C_{ij} die Cartan-Matrix der affinen ungetwisteten Kac-Moody-Algebra $\hat{\mathfrak{g}}$ ist. Aus dem in Anhang B angegebenen Kriterium (B.2.3) folgt¹⁴, daß die soeben konstruierte getwistete Kac-Moody-Algebra $\hat{\mathfrak{g}}^\Theta$ isomorph zur ungetwisteten ist:

$$\hat{\mathfrak{g}}^\Theta \simeq \hat{\mathfrak{g}} \simeq \mathfrak{g}^{[1]}. \quad (6.156)$$

Trotz der Isomorphie gibt es mathematische und physikalische Unterschiede zwischen diesen beiden Kac-Moody-Algebren, die sich zeigen, wenn wir die Virasoro-Algebra hinzunehmen. Aus den OPE des Energie-Impuls-Tensors $T(z)$ folgen durch Kurvenintegrale die Vertauschungsrelationen

$$[L_m, H_n^i] = -n H_{n+m}^i, \quad (6.157)$$

$$[L_m, E_{n+\alpha \cdot \lambda}^\alpha] = -(n + \alpha \cdot \lambda) E_{m+n+\alpha \cdot \lambda}^\alpha. \quad (6.158)$$

Die in der jeweiligen Theorie realisierte Symmetrie-Algebra ist diejenige Unter algebra, die mit der Virasoro vertauscht, also die Grad-0-Unter algebra, und das ist in der ungetwisteten Theorie $\mathfrak{g}$, aber in der getwisteten nur die Twist-invarianten Unter algebra $\mathfrak{g}_0$.

Dieser Unterschied kann auch mathematisch gefaßt werden: $\hat{\mathfrak{g}}$ und $\hat{\mathfrak{g}}^\Theta$ sind isomorph, aber auf verschiedene Weise graduert. Die normierte Derivation d der getwisteten Kac-Moody-Algebra ist

$$d = -N L_0. \quad (6.159)$$

Aus den Vertauschungsrelationen mit den anderen Generatoren

$$[d, H^i] = 0, \quad [d, E^i] = s_i E^i, \quad [d, F^i] = -s_i F^i, \quad (6.160)$$

folgt, daß hier eine Darstellung der Typ $\mathfrak{s}$ -Realisierung $\hat{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ von $\mathfrak{g}^{[1]}$ vorliegt (siehe B.2.4). Das zentrale Element k wird wieder durch den $\mathbf{1}$ -Operator dargestellt.

¹⁴Die „Abbruchrelationen“ für die Wurzelgeneratoren folgen unmittelbar aus der Geometrie des Wurzelsystems und der daraus resultierenden Struktur der OPE.

Man beachte, daß der Darstellungsraum der getwisteten Kac-Moody-Algebra nicht der physikalische Hilbertraum ist, da nicht alle Generatoren Twist-invariant sind und nur die Grad-0-Unteralgebra mit der Virasoro-Algebra kommutiert. Die letztere Eigenschaft teilt sie mit der ungetwisteten Kac-Moody-Algebra der normalen Frenkel-Kac-Konstruktion. Beide Algebren sind nicht Symmetrien sondern erweiterte chirale Algebren, die die Anzahl der unabhängigen Korrelationsfunktionen reduzieren und die Berechnungen der restlichen vereinfachen und in vielen Fällen erst ermöglichen. In unserem Fall könnte man einwenden, daß eine freie Theorie auch gelöst werden kann, ohne diese algebraischen Strukturen zu beachten. Der umgekehrte Standpunkt ist fruchtbarer: Es ist die zusätzliche Symmetrie, die eine Realisierung durch freie Felder möglich macht. Deformiert man das Gitter infinitesimal, so daß es kein Lie-Algebra-Gitter mehr ist, so kann der Twist nur als Drehung realisiert werden. Der Rechenaufwand ist dann wesentlich größer. Außerdem werden die Grundzustände der getwisteten Sektoren durch Twistfelder erzeugt, die im allgemeinen keine freien Felder sind. Zwar können auch die Twistfeld-Korrelatoren noch exakt gelöst werden, bereiten aber viel Mühe [55]. Außerdem ist zu bedenken, daß die in letzter Zeit gemachten Fortschritte in der konformen Feldtheorie aus der Einsicht in algebraische Strukturen resultieren. Für die Entdeckung von Strukturen und die Entwicklung von Methoden eignen sich einfache, gelöste oder „triviale“ Theorien offensichtlich besser, als komplizierte und bisher nicht lösbare.

6.5 Orbifold-Kompaktifizierungen mit Wilsonlinien: Bestandsaufnahme und offene Fragen

Alle bisherigen Überlegungen mit Ausnahme der in Kapitel 6.4 angestellten und insbesondere die vorgestellten Beispiele bezogen sich auf Orbifold-Modelle ohne Wilsonlinien. Durch die Hinzunahme von Wilsonlinien wird die Handhabung von Orbifold-Modellen (im Fall der Drehungs-Realisierung) wesentlich aufwendiger und komplizierter. Ich referiere im Folgenden die wichtigsten Resultate der bisherigen Literatur [51], [50], [48], um auf die offen bleiben den Fragen hinzuweisen. Im nächsten Kapitel werde ich über die Ergebnisse meiner eigenen Untersuchungen zu einigen dieser Fragen berichten.

Bereits früher wurde ausgeführt, daß der Twist im Kompaktifizierungssektor immer als Drehung realisiert wird, um den Rang der Eichgruppe und die Zahl der RZ-Supersymmetrien zu reduzieren. In den meisten Arbeiten, und insbesondere in den Arbeiten, in denen Spektren oder Kopplungen von Orbifold-Modellen systematisch untersucht werden, wird der Twist im Eichsektor als Verschiebung realisiert. Dies hat ausschließlich pragmatische Gründe, da der Arbeitsaufwand sonst wesentlich größer wäre [48]. Da aber nur das Ausdividieren von Drehungen gegenüber dem Narain-Modell neue Effekte hervorbringt, handelt es sich eigentlich um eine Hybrid-Konstruktion aus Orbifold und toroidaler Kompaktifizierung, die nur ganz spezielle Punkte im Orbifold-Modulraum erreichen kann. Der Einbau von Wilsonlinien in diese Modelle kann so interpretiert werden, daß die sechsdimensionale Translationsgruppe in die sechszehndimensionale Translationsgruppe und dadurch mittelbar in den maximalen Torus der Eichgruppe eingebettet wird [51]:

$$i : (1, \mathbf{e}_i) \rightarrow (1, \mathbf{A}_i) \rightarrow \mathbf{A}_i. \quad (6.161)$$

Zusammen mit der Einbettung der Ortsraumtwistgruppe¹⁵ wird so die sechsdimensionale Raumgruppe in die Eichgruppe eingebettet:

$$(\theta, \mathbf{0}) \rightarrow (1, \mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{v}. \quad (6.162)$$

Die Wilsonlinien wirken in dieser Formulierung wie zusätzliche Verschiebungsvektoren. Da der Twist von N-ter Ordnung sein soll, folgt [48]:

$$N\mathbf{A}_i \in \Gamma_{16} \quad N\mathbf{v} \in \Gamma_{16}. \quad (6.163)$$

¹⁵Die Verschiebungs-Realisierung des Twistes setzt natürlich mindestens voraus, daß die Punktgruppe abelsch ist. Wir betrachten hier aber nur Modelle, bei denen die Twistgruppe sogar zyklisch ist.

Daraus folgt, daß für die Wilsonlinien nur diskrete Werte erlaubt sind. Eine weitere Konsistenzbedingung ist, daß Twist und Einbettung kommutieren müssen [48]:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{e}_i & \xrightarrow{i} & \mathbf{A}_i =: \mathbf{A}_{\mathbf{e}_i} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \theta \mathbf{e}_i & \xrightarrow{i} & \mathbf{A}_{\theta \mathbf{e}_i} \stackrel{!}{=} \Theta \mathbf{A}_i
 \end{array} \tag{6.164}$$

Weil die Wilsonlinien nicht mehr unabhängig gewählt werden dürfen, verringert sich die Zahl der frei wählbaren Parameter.

Da die Wilsonlinien wie zusätzliche Verschiebungsvektoren wirken, ergeben sich zusätzliche Projektionen, die die Eichgruppe brechen, ohne den Rang erniedrigen zu können. In den getwisteten Sektoren wird die Entartung der Fixpunkte aufgehoben: Das Spektrum der angeregten Zustände ist jetzt in jedem Fixpunktsektor gesondert zu bestimmen [50].

Insgesamt kann durch die Hinzunahme von Wilsonlinien das Spektrum eines Orbifoldmodells, innerhalb der beschriebenen Grenzen, dem des Standard-Modells weiter angenähert werden [48]. Die Grenzen des Verfahrens rühren offenbar daher, daß die Wilsonlinien erst nachträglich, sozusagen als zusätzliche Eichtwists eingeführt werden. Natürlicher wäre der umgekehrte Weg, bei dem man einen beliebigen Punkt, oder einen ganzen Unterraum des Narain-Moduliraumes betrachtet, und dann fragt, welche Twists mit den realisierten Hintergrundfeldern verträglich sind. Diese Vorgehensweise ist bei Verwendung der Drehungsrealisierung möglich und wird später zu Grunde gelegt werden.

Die Drehungsrealisierung eines Eichtwistes ist, solange keine Wilsonlinien zugelassen werden, aufgrund des Kacschen Theorems mit der Verschiebungsrealisierung äquivalent. Die Unterschiede machen sich bemerkbar, sobald Wilsonlinien hinzutreten. Diesmal wird durch

$$(\theta, \mathbf{0}) \rightarrow (\Theta, \mathbf{0}), \quad (1, \mathbf{e}_i) \rightarrow (1, \mathbf{A}_i) \tag{6.165}$$

die sechsdimensionale Raumgruppe in die sechszehndimensionale eingebettet [48], [50]. Selbst bei abelschen Punktgruppen ist die Raumgruppe im allgemeinen nicht abelsch, und der Rang der Eichgruppe sinkt. In diesem Formalismus sind auch kontinuierliche Wilsonlinien möglich. Genauer gesagt, darf der unter dem Twist nicht invariante Teil einer Wilsonlinie kontinuierlich variiert werden, während der invariante Teil diskret ist [48]. Als weitere Verallgemeinerung kann man die Konstruktion asymmetrischer Orbifolds ansehen [68]. Da hier ein beliebiges Narain-Gitter der Ausgangspunkt sein darf, treten implizit auch Wilsonlinien auf.

Für die systematische Untersuchung von Modellen mit Hintergrundfeldern ist vor allem wichtig,

- welche Hintergrundfelder mit einem gegebenen Twist verträglich sind,
- wieviele unabhängige Parameter (Hintergrundfelder) ein Orbifoldmodell charakterisieren und welche davon kontinuierlich, welche nur diskret variiert werden dürfen,
- wie die Eichgruppe von den Hintergrundfeldern abhängt.

Diese Fragen werden in der bisherigen Literatur nicht vollständig gelöst. In [48] wird das Problem, welche Hintergrundfelder mit einem gegebenen Twist verträglich sind für alle oben erwähnten Typen von Orbifolds systematisch angegangen. Die dort gefundenen Konsistenzbedingungen werden jedoch nicht bis zu dem Punkt ausgewertet, an dem für die Zahl der Moduli eine geschlossene Formel angegeben werden oder die Konsistenzbedingungen in auch intuitiv einleuchtende geometrische Aussagen übersetzt werden können¹⁶. Die Idee, die Konsistenzbedingungen zwischen Twist und Hintergrundfeldern mittels einer Basis des Impulsgitters zu formulieren, habe ich übernommen, insbesondere weil sie sich ja auch bei der Behandlung von Wilsonlinien im Narain-Modell bewährt hat.

¹⁶Dies mag daran liegen, daß die Konstruktion, für die ich weitergehende Resultate vorlegen werde, zwar erwähnt, aber nicht explizit durchgerechnet wurde.

Für den Fall symmetrischer bosonischer $\mathbf{Z}_N$ -Orbifolds bzw. heterotischer Orbifolds ohne Wilsonlinien wurden die mit einem gegebenen Twist verträglichen Hintergrundfelder in [28] bestimmt. Insbesondere können Formeln für die Dimension des Moduliraumes angegeben werden. Ich werde im nächsten Kapitel zeigen, wie diese Resultate auf Orbifolds mit Wilsonlinien verallgemeinert werden können.

Kapitel 7

Symmetrische Orbifolds mit kontinuierlichen Hintergrundfeldern

In diesem Kaptitel soll die Frage geklärt werden, welches die allgemeinsten Hintergrundfelder sind, die mit einem gegebenen symmetrischen Twist verträglich sind. Der Twist wird dabei im Eichsektor ebenfalls als Drehung realisiert werden.

Zunächst sei Λ das sechsdimensionale Ortsraumgitter und Γ_{16} eines der beiden euklidischen, geraden selbstdualen Gitter der Dimension 16. Ich beschränke mich auf Z_N -Orbifolds und wähle zwei Drehungen, den Ortsraumtwist $\theta \in O(6)$, der den Orbifold, auf dem kompaktifiziert wird, definiert und den Eichtwist $\theta' \in O(16)$; beide sollen von der Ordnung N sein. Die Wirkung des Twistes auf die Basisvektoren $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^{*i}$ und $\mathbf{e}_A$, $i = 1, \dots, 6$, $A = 1, \dots, 16$ von Λ , Λ^* und Γ_{16} kann durch Matrizen beschrieben werden:

$$\Theta : \begin{cases} \mathbf{e}_i & \rightarrow & \theta \mathbf{e}_i & = & \theta_i^j \mathbf{e}_j, \\ \mathbf{e}^{*i} & \rightarrow & \theta \mathbf{e}^{*i} & = & \theta_j^i \mathbf{e}^{*j}, \\ \mathbf{e}_A & \rightarrow & \theta' \mathbf{e}_A & = & \theta_A^B \mathbf{e}_B. \end{cases} \quad (7.1)$$

Da die $\mathbf{e}_i$ im allgemeinen keine Orthonormalbasis bilden, sind die Matrizen (θ_i^j) und (θ_j^i) (i.a.) nicht orthogonal, obwohl die durch sie beschriebene Abbildung es ist.

Das zu twistende Narain-Modell ist durch sein Impulsgitter $\Gamma_{22,6}$ eindeutig charakterisiert. Dieses kann wiederum durch seine Basis spezifiziert werden. Eine besonders zweckmäßige Wahl ist wie früher die folgende:

$$\mathbf{k}^i = \left(0, \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*i}; \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*i} \right), \quad (7.2)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_i = \left(\mathbf{A}_i, 2\mathbf{e}_i + D_{ij} \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*j}; D_{ij} \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*j} \right), \quad (7.3)$$

$$\mathbf{l}_A = \left(\mathbf{e}_A, -(\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{A}_k) \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*k}; -(\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{A}_k) \frac{1}{2} \mathbf{e}^{*k} \right), \quad (7.4)$$

mit

$$D_{ij} = 2 \left(B_{ij} - G_{ij} - \frac{1}{4} (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j) \right). \quad (7.5)$$

Damit durch das Twisten dieses Narain-Modells wieder ein konsistentes Modell entsteht, muß der Twist eine Symmetrie des Hilbertraumes sein, d.h. Zustände auf Zustände abbilden. Im vorliegenden Fall heißt das, daß die durch θ und θ' induzierte Isometrie ein Automorphismus

des Impulsgitters sein muß. Die sich daraus ergebenden Bedingungen an die Hintergrundfelder sollen im folgenden ausgearbeitet werden. Zugleich soll die Matrix des Narain-Twistes Θ bezüglich der Standardbasis durch den Ortsraum- und den Eichtwist sowie die Hintergrundfelder ausgedrückt werden.

7.1 Bestimmung der Konsistenzbedingungen

7.1.1 Untersuchung der Basisvektoren $\mathbf{k}^i$

Eine Möglichkeit, die Konsistenz von Twist und Hintergrundfeldern sicherzustellen, ist die Forderung, daß das Bild jedes Basisvektors von $\Gamma_{22,6}$ unter dem Twist Θ wieder ein Gittervektor, also eine ganzzahlige Linearkombination von Gittervektoren ist. Angewendet auf die Basisvektoren $\mathbf{k}^i$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Theta \mathbf{k}^i &= \left(0, \frac{1}{2}\theta_j^i \mathbf{e}^{*j}; \frac{1}{2}\theta_j^i \mathbf{e}^{*j}\right) \\ &\stackrel{!}{=} M_j^i \mathbf{k}^j + M^{ij} \bar{\mathbf{k}}_j + M^{iA} \mathbf{1}_A,\end{aligned}\tag{7.6}$$

mit $M_j^i, M^{ij}, M^{iA} \in \mathbf{Z}$. Aus der Gestalt der Basisvektoren folgt sofort:

$$M_j^i = \theta_j^i, \quad M^{ij} = 0, \quad M^{iA} = 0.\tag{7.7}$$

Die Ganzzahligkeit der Matrix θ_j^i impliziert, daß θ ein Automorphismus von $(\Lambda^*$ und damit von Λ sein muß. Die geometrische Bedeutung dieser Bedingung ist offensichtlich: Der Ortsraumtwist muß eine Symmetrie des Ortsraumtorus sein, um einen wohldefinierten Orbitraum zu definieren.

Um die Konsistenzgleichung

$$\theta \in \text{Aut}(\Lambda)\tag{7.8}$$

in eine Bedingung an die Hintergrundfelder umzuwandeln, verwendet man die Definition der Gittermetrik G_{ij} und daß θ isometrisch ist:

$$G_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \theta \mathbf{e}_i \cdot \theta \mathbf{e}_j = \theta_i^l \theta_j^k G_{lk}.\tag{7.9}$$

Die Matrizen (θ_i^j) und (θ_j^i) erfüllen eine verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation:

$$\delta_j^i = \mathbf{e}^{*i} \cdot \mathbf{e}_j = \theta_l^i \theta_j^k \mathbf{e}^{*l} \cdot \mathbf{e}_k = \theta_k^i \theta_j^k.\tag{7.10}$$

Durch Kombinieren der beiden letzten Gleichungen ergibt sich die gesuchte Konsistenzbedingung zwischen Twist und Hintergrundfeld:

$$G_{ij} \theta_k^j - \theta_i^j G_{jk} = 0.\tag{7.11}$$

Umgekehrt folgt aus (7.11), daß θ eine orthogonale Abbildung ist. Zusammen mit der Ganzzahligkeit der Matrizen folgt dann, daß θ ein Gitterautomorphismus von Λ und Λ^* ist. Etwas lax ausgedrückt müssen der Ortsraumtwist und die Metrik kommutieren. (Diese Aussage ist genau dann buchstäblich wahr, wenn man die Gleichung auf ein orthonormales Koordinatensystem bezieht. Siehe auch Abschnitt 7.2.2.)

7.1.2 Untersuchung der Basisvektoren $\bar{\mathbf{k}}_i$

Für den zweiten Satz von Basisvektoren muß die folgende Gleichung gelten:

$$\begin{aligned}\Theta \bar{\mathbf{k}}_i &= \left(\theta' \mathbf{A}_i, 2\theta_i^j \mathbf{e}_j + \frac{1}{2} D_{ij} \theta_k^j \mathbf{e}^{*k}; \frac{1}{2} D_{ij} \theta_k^j \mathbf{e}^{*k}\right) \\ &\stackrel{!}{=} M_{ij} \mathbf{k}^j + M_i^j \bar{\mathbf{k}}_j + M_i^A \mathbf{1}_A,\end{aligned}\tag{7.12}$$

mit M_{ij} , M_i^j , $M_i^A \in \mathbf{Z}$. Durch Einsetzen der Definition der Basisvektoren erhält man drei Gleichungen, eine für die ersten 16 Komponenten und je eine für die beiden folgenden Sechsergruppen. Die Differenz der zweiten und dritten Gleichung lautet:

$$2\theta_i^j \mathbf{e}_j = 2M_i^j \mathbf{e}_j. \quad (7.13)$$

Da die $\mathbf{e}_i$ linear unabhängig sind, folgt

$$\theta_i^j = M_i^j, \quad (7.14)$$

und dies ist äquivalent zu der bereits oben gefundenen Bedingung $\theta \in \text{Aut}(\Lambda)$. Unter Berücksichtigung dieser Beziehung nehmen die erste und die dritte Gleichung die folgende Gestalt an:

$$\theta' \mathbf{A}_i = \theta_i^j \mathbf{A}_j + M_i^A \mathbf{e}_A, \quad (7.15)$$

$$D_{ij} \theta_k^j - \theta_i^j D_{jk} = M_{ik} - M_i^A (\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{A}_k). \quad (7.16)$$

Damit sind zwei neue Konsistenzbedingungen gefunden: Die Wilsonlinien müssen unter dem Eichtwist bis auf einen Vektor aus Γ_{16} genau so transformieren wie die ihnen zugeordneten Basisvektoren des Ortsraumgitters unter dem Ortsraumtwist. Dies beschreibt die Einbettung der sechsdimensionalen Translationsgruppe in die sechszehndimensionale Raumgruppe, bzw. in die Eichgruppe. Zweitens erfüllen die D-Matrix und der Twist eine verallgemeinerte Vertauschungsrelation (im oben eingeführten Sinne), diesmal mit nichtverschwindender rechter Seite.

Die weitere Untersuchung der beiden neu gefundenen Konsistenzgleichungen soll aufgeschoben werden, bis alle Konsistenzgleichungen gefunden sind. Abschließend sollen sie aber noch nach den in ihnen implizit auftretenden M-Parametern aufgelöst werden, um die Matrix des Narain-Twistes angeben zu können. Zur Bestimmung von M_i^A benutzt man, daß

$$\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{e}_B = G_{AB} \quad (7.17)$$

die Metrik des Gitters Γ_{16} ist. Die Komponenten der inversen Matrix seien G^{AB} . Die Gleichung (7.15) kann dann aufgelöst werden:

$$M_i^A = G^{AB} \left((\theta' \mathbf{A}_i - \theta_i^j \mathbf{A}_j) \cdot \mathbf{e}_B \right). \quad (7.18)$$

Setzt man dies in (7.16) ein, so erhält man auch noch M_{ik} :

$$M_{ik} = D_{ij} \theta_k^j - \theta_i^j D_{jk} + (\theta' \mathbf{A}_i - \theta_i^j \mathbf{A}_j) \cdot \mathbf{A}_k. \quad (7.19)$$

7.1.3 Untersuchung der Basisvektoren $\mathbf{l}_A$

Als Konsistenzbedingung ergibt sich diesmal

$$\Theta \mathbf{l}_A = \left(\theta' \mathbf{e}_A, -\frac{1}{2} (\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{A}_i) \theta_j^i \mathbf{e}^{*j}; -\frac{1}{2} (\mathbf{e}_A \cdot \mathbf{A}_i) \theta_j^i \mathbf{e}^{*j} \right) \quad (7.20)$$

$$\stackrel{!}{=} M_{Ai} \mathbf{k}^i + M_A^i \bar{\mathbf{k}}_i + M_A^B \mathbf{l}_B,$$

mit M_{Ai} , M_A^i , $M_A^B \in \mathbf{Z}$. Komponentenweise gelesen ergeben sich wieder drei Gleichungen. Die Differenz der zweiten und dritten Gleichung lautet:

$$0 = M_A^i 2\mathbf{e}_i. \quad (7.21)$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der $\mathbf{e}_i$ folgt

$$M_A^i = 0. \quad (7.22)$$

Berücksichtigt man dies, so erhält man aus der ersten Gleichung

$$\theta' \mathbf{e}_A = M_A^B \mathbf{e}_B, \quad (7.23)$$

d.h. der Eichtwist θ' muß ein Automorphismus von Γ_{16} sein. Mit (7.1) kann man auch

$$M_A^B = \theta_A^B \quad (7.24)$$

schreiben. Unter Berücksichtigung der bisher gefundenen Resultate kann man die dritte Gleichung umformen:

$$\mathbf{e}_A \cdot (\theta'^{-1} \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_i \theta_j^i) = M_{Aj}. \quad (7.25)$$

Diese Gleichung besagt, daß $(\theta'^{-1} \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_i \theta_j^i)$ ein Vektor aus Γ_{16} sein muß. Dies ist aber keine neue Bedingung, da sie aus (7.15) folgt, wenn man berücksichtigt, daß mit θ' auch θ'^{-1} ein Automorphismus ist. Zum Beweis wendet man θ' $N-2$ mal auf Gleichung (7.15) an und erhält

$$\theta'^{N-1} \mathbf{A}_i - \underbrace{\theta_i^j \cdots \theta_j^k}_{N-1 \text{ Faktoren}} \mathbf{A}_k \in \Gamma_{16}. \quad (7.26)$$

Nun folgt aus

$$\theta'^N = 1, \quad \underbrace{\theta_i^j \cdots \theta_j^k}_N = \delta_i^k \quad (7.27)$$

mit (7.10) daß

$$\theta'^{N-1} = \theta'^{-1}, \quad \underbrace{\theta_i^j \cdots \theta_j^k}_{N-1 \text{ Faktoren}} = \theta_k^i \quad (7.28)$$

und damit

$$\theta'^{-1} \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_i \theta_j^i \in \Gamma_{16}, \quad (7.29)$$

was aufgrund der Selbstdualität von Γ_{16} zu (7.25) äquivalent ist.

Damit sind alle M-Koeffizienten bestimmt und alle Konsistenzbedingungen gefunden: Der Ortsraumtwist und der Eichtwist müssen Automorphismen von Λ bzw Γ_{16} sein und es müssen die verallgemeinerte Einbettungsgleichung (7.15) und die verallgemeinerte Vertauschungsrelation (7.16) zwischen Twist und D -Feld erfüllt sein.

7.2 Untersuchung der Konsistenzgleichungen

7.2.1 Diskrete und kontinuierliche Wilsonlinien

Bei den in der Literatur behandelten Beispielen von Orbifolds, bei denen der Eichtwist als Gitterautomorphismus realisiert wird, treten die oben gefundenen Konsistenzgleichungen in einfacherer Form auf. Nach dem Vorbild der Einbettung des Spinzusammenhangs (des sechsdimensionalen kompakten Raumes) in den Eichzusammenhang, wie er bei den Calabi-Yau-Modellen auftritt, wählt man ein zu Λ isomorphes Untergitter (oder zwei, was aus Dimensionsgründen auch noch möglich ist) und definiert den Eichtwist dadurch, daß man auf diesem Untergitter den Ortsraumtwist operieren läßt. Dies wurde am Beispiel der $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds in der Literatur erörtert [50]. Bei dieser Konstruktion transformieren die Wilsonlinien unter dem Eichtwist exakt (nicht nur modulo Gittervektoren) so wie die ihnen zugeordneten Richtungen unter dem Ortsraumtwist (Einbettung der Raumgruppe in die Eichgruppe):

$$\theta' \mathbf{A}_i = \theta_i^j \mathbf{A}_j. \quad (7.30)$$

Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen für die drei folgenden M-Koeffizienten:

$$M_i^A = M_{Ai} = 0, \quad (7.31)$$

$$M_{ik} = D_{ij} \theta_k^j - \theta_i^j D_{jk}. \quad (7.32)$$

Es stellt sich jetzt die Frage, ob Lösungen der oben gefundenen allgemeineren Gleichungen existieren.

Als ersten Schritt zur Untersuchung der inhomogenen Gleichung (7.15) werden die Wilsonlinien in einen invarianten und einen nicht invarianten Teil zerlegt. Da beide Teile in verschiedenen Eigenräumen des Eichtwistes liegen, ist diese Zerlegung orthogonal und direkt (eindeutig).

$$\mathbf{A}_i = \widehat{\mathbf{A}}_i + \widetilde{\mathbf{A}}_i \quad \theta' \widetilde{\mathbf{A}}_i = \widetilde{\mathbf{A}}_i, \quad (7.33)$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_i \cdot \widetilde{\mathbf{A}}_j = 0 \quad \forall i, j. \quad (7.34)$$

Durch entsprechende Zerlegung des inhomogenen Terms $M_i^A \mathbf{e}_A$ erhält man zwei Gleichungen:

$$\theta' \widetilde{\mathbf{A}}_i = \theta_i^j \widetilde{\mathbf{A}}_j + \widetilde{\mathbf{v}}_i, \quad (7.35)$$

$$\theta' \widehat{\mathbf{A}}_i = \theta_i^j \widehat{\mathbf{A}}_j + \widehat{\mathbf{v}}_i. \quad (7.36)$$

Eine weitere Vereinfachung kann erreicht werden, wenn man annimmt, daß die Matrix des Ortsraumtwistes bezüglich der Gitterbasis auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$(\theta_i^j) = \begin{pmatrix} \theta_a^b & 0 \\ 0 & \delta_m^n \end{pmatrix}, \quad (7.37)$$

wobei θ_a^b nicht den Eigenwert 1 besitzt. Diese Blockgestalt ist zwar bezüglich einer Eigenvektorbasis stets möglich, bezüglich der Gitterbasis aber nicht immer. Dieser Spezialfall kann als Kompaktifizierung auf einem Produktraum aus einem Torus und einem Orbifold aufgefaßt werden. Aufgrund der Blockgestalt des Twistes zerfallen die beiden obigen Gleichungen in vier entkoppelte Gleichungen.

1. Nicht invariante Wilsonlinie einer nicht invarianten Richtung:

$$\theta' \widehat{\mathbf{A}}_a - \theta_a^b \widehat{\mathbf{A}}_b = \widehat{\mathbf{v}}_a. \quad (7.38)$$

Die homogene Gleichung ($\widehat{\mathbf{v}}_a = 0$) besitzt ein Kontinuum von Lösungen, wenn man den Eichtwist durch Einbettung definiert.

2. Invariante Wilsonline einer nicht invarianten Richtung:

$$\widetilde{\mathbf{A}}_a - \theta_a^b \widetilde{\mathbf{A}}_b = \widetilde{\mathbf{v}}_a. \quad (7.39)$$

Die linke Seite verschwindet nur, wenn alle $\widetilde{\mathbf{A}}_a$ identisch verschwinden, da θ_a^b nicht den Eigenwert 1 besitzt. Die homogene Gleichung hat also nur die triviale Lösung. Daraus folgt, daß diese Art von Wilsonlinien nur diskrete Werte annehmen kann.

3. Nicht invariante Wilsonlinie einer invarianten Richtung

$$\theta' \widehat{\mathbf{A}}_m - \widehat{\mathbf{A}}_m = \widehat{\mathbf{v}}_m. \quad (7.40)$$

Auch hier kann die linke Seite nur trivial verschwinden, denn $\widehat{\mathbf{A}}_m$ hat keinen invarianten Anteil. Diese Sorte von Wilsonlinien ist ebenfalls diskret.

4. Invariante Wilsonlinien einer invarianten Richtung

$$\theta' \widetilde{\mathbf{A}}_m - \widetilde{\mathbf{A}}_m = 0 = \widetilde{\mathbf{v}}_m. \quad (7.41)$$

Diese Art von Wilsonlinien ist also kontinuierlich und durch den Twist nicht eingeschränkt, sondern beliebig wählbar.

Damit ist eine Klasse von Lösungen der allgemeineren, inhomogenen Einbettungsgleichung (7.15) gefunden. Gleichzeitig wurde ermittelt, wann Wilsonlinien diskrete und wann kontinuierliche Werte annehmen dürfen. Diese Lösungen beschreiben die Situation in der der sechsdimensionale Kompaktifizierungsraum das Produkt eines twistinvarianten Torus und eines fixtorusfreien Orbifolds ist; dies ist nicht der allgemeine Fall. Die (nicht-)invarianten Teile von Wilsonlinien von (nicht-)invarianten Richtungen können kontinuierlich variiert werden; im Fall 1 sind die Wilsonlinien durch die Einbettung voneinander abhängig, was die Anzahl kontinuierlicher Parameter reduziert. Ihre genaue Anzahl soll später bestimmt werden. Fall 4 entspricht einer simplen toroidalen Kompaktifizierung. Daher sind die Wilsonlinien hier überhaupt nicht eingeschränkt. Außerdem besteht die Möglichkeit, sozusagen über Kreuz, nichtinvarianten Richtungen invariante Wilsonlinien zuzuordnen und umgekehrt. In diesem Fall sind aber nur diskrete Werte möglich. Die Bestimmung des Wertebereiches soll als nächstes erfolgen. Fall 2 ähnelt der Realisierung des Eichtwistes durch Verschiebungsvektoren.

Um den zulässigen Wertebereich für die diskreten Wilsonlinien zu bestimmen, geht man von der verallgemeinerten Einbettungsgleichung (7.15) aus, die verlangt, daß sich $\theta' \mathbf{A}_i$ und $\theta_i^j \mathbf{A}_j$ nur durch einen Vektor aus Γ_{16} unterscheiden dürfen. Dies kann auch so ausgedrückt werden:

$$\mathbf{e}_A \cdot (\theta' \mathbf{A}_i - \theta_i^j \mathbf{A}_j) \in \mathbf{Z} \quad \forall A. \quad (7.42)$$

Durch Zerlegung in den invarianten und den nicht invarianten Anteil folgt daraus für Wilsonlinien nichtinvarianter Richtungen:

$$\mathbf{e}_A \cdot (\theta' \hat{\mathbf{A}}_a + \tilde{\mathbf{A}}_a - \theta_a^b (\hat{\mathbf{A}}_b + \tilde{\mathbf{A}}_b)) \in \mathbf{Z} \quad \forall A, a. \quad (7.43)$$

Analoge Gleichungen gelten für die Potenzen θ'^n , $n = 1, \dots, N$ des Twistes. Als nächstes benutzt man, daß die Summe der ersten N Potenzen das N -fache des Projektors auf den 1-Eigenraum ist

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \theta'^n = \Pi_{(1)}. \quad (7.44)$$

Das gleiche gilt für die Matrix (θ_a^b) . Da sie aber nach Voraussetzung keinen Eigenwert 1 besitzt gilt:

$$\theta_a^b + \theta_a^c \theta_c^b + \dots + \underbrace{\theta_a^c \dots \theta_d^b}_{N \text{ Faktoren}} = 0. \quad (7.45)$$

Durch Addition der Gleichungen für alle Twistpotenzen ergibt sich daher:

$$\mathbf{e}_A \cdot N \tilde{\mathbf{A}}_a \in \mathbf{Z} \quad \forall A, a. \quad (7.46)$$

Da $\tilde{\mathbf{A}}_a$ außerdem twistinvariant ist, folgt:

$$\tilde{\mathbf{A}}_a \in \frac{1}{N} I_{\Gamma_{16}}, \quad (7.47)$$

wobei $I_{\Gamma_{16}}$, daß invariante Untergitter von Γ_{16} ist.

Wiederholt man diese Überlegung für eine twistinvariante Richtung, so erhält man

$$\hat{\mathbf{A}}_m \in \frac{1}{N} N_{\Gamma_{16}}. \quad (7.48)$$

$N_{\Gamma_{16}}$ ist das nichtinvariante Untergitter von Γ_{16} . Bei diesen Rechnungen fallen die (nicht-)invarianten Wilsonlinien zu (nicht-)invarianten Richtungen heraus. Sie unterliegen also, wie schon oben gezeigt wurde, keinen Bedingungen, die eine Beschränkung auf diskrete Werte erzwingen.

7.2.2 Die Lösung der verallgemeinerten Kommutatorgleichung

Untersuchung und Vereinfachung der Kommutatorgleichung

Das wichtigste Resultat bei der Untersuchung der Konsistenzbedingungen zwischen Twist (mit Einbettung) und Hintergrundfeldern war die verallgemeinerte Kommutatorgleichung (7.16), die nach Einsetzen der verallgemeinerten Einbettungsgleichung (7.15) die folgende Gestalt annimmt:

$$D_{ij}\theta_k^j - \theta_i^j D_{jk} = M_{ik} - (\theta' \mathbf{A}_i - \theta_i^j \mathbf{A}_j) \cdot \mathbf{A}_k. \quad (7.49)$$

Die Bedeutung dieser Gleichung liegt darin, daß sie (im wesentlichen) die Anzahl der Moduli festlegt. In der vorliegenden Form ist sie nicht gut handhabbar, da der Eichtwist explizit auftritt und die Wilsonlinien nicht nur über das D -Feld, sondern auch noch in dem zweiten Term auf der rechten Seite auftreten. In dem hier untersuchten Fall, daß Fixtoren (wenn sie überhaupt auftreten) faktorisieren, kann die Gleichung jedoch auf die einfachere Form einer verallgemeinerten Kommutatorgleichung mit konstanter rechter Seite umgeformt werden. Man hat dann eine lineare, inhomogene Matrixgleichung für D , die sich lösen läßt. Mit Hilfe einer Fallunterscheidung soll nun gezeigt werden, daß sich der störende zweite Term auf der rechten Seite durch Redefinitionen des D -Feldes bzw. der M_{ik} -Matrix absorbieren läßt. Die vier zu untersuchenden Fälle ergeben sich dadurch, daß jeder der beiden Matrixindizes entweder zu einer invarianten oder zu einer nicht-invarianten Richtung gehören kann.

1. nicht-invariant/nicht-invariant

$$D_{aj}\theta_b^j - \theta_a^j D_{jb} = \underbrace{M_{ab} - (\tilde{\mathbf{A}}_a - \theta_a^c \tilde{\mathbf{A}}_c) \cdot \tilde{\mathbf{A}}_b}_{M'_{ab}}. \quad (7.50)$$

Da die $\tilde{\mathbf{A}}_a$ nur diskrete Werte annehmen, kann man den zweiten Term auf der rechten Seite, nach dem man feste Werte gewählt hat, durch eine Redefinition von M_{ab} absorbieren. (Diese Matrix ist dann nicht mehr ganzzahlig, aber hier kommt es nur auf die Vereinfachung der Gleichung an.)

2. invariant/invariant

$$D_{mn}\delta_p^n - \delta_m^n D_{np} = 0 = M_{mp} - (\theta' \hat{\mathbf{A}}_m - \hat{\mathbf{A}}_m) \cdot \hat{\mathbf{A}}_p. \quad (7.51)$$

Diese Gleichung liefert keine Bedingung an D . Da die linke Seite identisch verschwindet, besitzt sie bereits die gewünschte Form. Man erhält aber eine Bedingung an die diskreten Wilsonlinien $\hat{\mathbf{A}}_m$.

3. nicht-invariant/invariant

$$D_{am}\delta_n^m - \theta_a^b D_{bn} = M_{an} - (\tilde{\mathbf{A}}_a - \theta_a^b \tilde{\mathbf{A}}_b) \cdot \tilde{\mathbf{A}}_n. \quad (7.52)$$

Diesmal treten auf der rechten Seite auch kontinuierliche Wilsonlinien auf. Daher wird diesmal der störende Term auf die andere Seite gebracht:

$$\underbrace{(D_{am} + \tilde{\mathbf{A}}_a \cdot \tilde{\mathbf{A}}_m)}_{D'_{am}} \delta_n^m - \theta_a^b \underbrace{(D_{bn} + \tilde{\mathbf{A}}_b \cdot \tilde{\mathbf{A}}_n)}_{D'_{bn}} = M_{an}. \quad (7.53)$$

Diesmal muß also das D -Feld redefiniert werden.

4. invariant/nicht-invariant

$$D_{mc}\theta_b^c - \delta_m^n D_{nb} = M_{mb} - (\theta' \hat{\mathbf{A}}_m - \hat{\mathbf{A}}_m) \cdot \hat{\mathbf{A}}_b. \quad (7.54)$$

Auch hier treten rechts kontinuierliche Freiheitsgrade, nämlich die $\hat{\mathbf{A}}_a$ auf. Da diese die Einbettungsgleichung ohne Γ_{16} -Term erfüllen, gilt:

$$\theta' \hat{\mathbf{A}}_m \cdot \hat{\mathbf{A}}_b = \hat{\mathbf{A}}_m \cdot \theta'^{-1} \hat{\mathbf{A}}_b = \hat{\mathbf{A}}_m \cdot \hat{\mathbf{A}}_c \theta_b^c. \quad (7.55)$$

Genau wie im dritten Fall kann man durch Redefinition des D -Feldes die Gleichung vereinfachen:

$$\underbrace{(D_{mc} + (\hat{\mathbf{A}}_m \cdot \hat{\mathbf{A}}_c))}_{D'_{mc}} \theta_b^c - \delta_m^n \underbrace{(D_{nb} + (\hat{\mathbf{A}}_n \cdot \hat{\mathbf{A}}_b))}_{D'_{nb}} = M_{mb}. \quad (7.56)$$

Damit ist gezeigt, daß es keine Einschränkung der Allgemeinheit darstellt, sich auf die Gleichung

$$D_{ij} \theta_k^j - \theta_i^j D_{jk} = M_{ik} \quad (7.57)$$

zu beschränken, die ja dem Spezialfall $M_i^A = 0$ entspricht. Der allgemeine Fall unterscheidet sich nur durch das zusätzliche Auftreten diskreter Wilsonlinien und kann durch die oben ermittelten Substitutionen mit behandelt werden. Insbesondere hängt die Anzahl der Moduli nicht von M_i^A ab, da ja das zugehörige homogene Gleichungssystem dasselbe ist.

Die Gleichung (7.57) ist die Verallgemeinerung analoger Gleichungen für das G - und das B -Feld [28] im Falle der Realisierung des Eichtwistes durch Verschiebungen und soll nun gelöst werden. Als Vorbereitung sind einige Überlegungen über den Zusammenhang zwischen der Gitterbasis und einer Orthonormalbasis nötig.

Gitterbasis und Orthonormalbasis

Die Matrizen der orthogonalen Abbildung θ bezüglich der Basen $\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}^{*i}$ sollen mit $\vartheta = (\theta_i^j)$ und $\vartheta^* = (\theta_j^i)$ bezeichnet werden. Sie sind invertierbar, aber nicht orthogonal, außer wenn die Gitterbasis selbst eine Orthonormalbasis ist. Sie erfüllen die verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation

$$\vartheta^* = \vartheta^{T-1}, \quad (7.58)$$

die die Orthogonalität der Abbildung θ ausdrückt. Ferner sind sie ganzzahlig, da θ ein Gitterautomorphismus von Λ und Λ^* ist und haben die Determinante ± 1 . Die Kommutatorgleichung lautet in Matrixnotation

$$\mathbf{D} \vartheta^* - \vartheta \mathbf{D} = \mathbf{M}, \quad (7.59)$$

mit $\mathbf{D} = (D_{ij})$ und $\mathbf{M} = (M_{ij})$.

Nun sei $\mathbf{e}_\mu$ eine beliebige Orthonormalbasis und $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}^T$ seien die durch

$$\mathbf{e}_i = T_i^\mu \mathbf{e}_\mu, \quad (7.60)$$

$$\mathbf{e}^{*i} = \mathbf{e}^{*\mu} S_\mu^i \quad (7.61)$$

definierten Basiswechselmatrizen. Es gilt

$$\mathbf{T} \mathbf{S}^T = 1. \quad (7.62)$$

Die Matrix von θ bezüglich der Orthonormalbasis ist dann

$$\vartheta' = \mathbf{T}^{-1} \vartheta \mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1} \vartheta^* \mathbf{S}. \quad (7.63)$$

Sie ist orthogonal, aber im allgemeinen nicht ganzzahlig. Transformiert man die verallgemeinerte Kommutatorgleichung in die Orthonormalbasis, so erhält man eine echte Kommutatorgleichung:

$$\mathbf{D}' \vartheta' - \vartheta' \mathbf{D}' = \mathbf{M}', \quad (7.64)$$

wobei $\mathbf{D}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T}$ und $\mathbf{M}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{T}$ ist. Bezüglich einer Orthonormalbasis läßt sich die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$[\mathbf{D}', \vartheta'] = 0 \quad (7.65)$$

besonders leicht bestimmen.

Die Lösung der homogenen Kommutatorgleichung

Die folgenden Überlegungen sind eine Verallgemeinerung der in [28] für symmetrische und antisymmetrische Matrizen angestellten Betrachtungen. Die Matrix ϑ' ist eine reelle orthogonale $d \times d$ Matrix mit der Eigenschaft $\vartheta'^N = 1$. Das Spektrum kann also aus reellen Eigenwerten ± 1 und aus Paaren komplex-konjugierter N -ter Einheitswurzeln bestehen. Um zunächst die reellen Eigenwerte zu behandeln, wählt man die $\mathbf{e}_\mu$ so, daß ϑ' die folgende Blockgestalt annimmt:

$$\vartheta' = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -1_l & 0 \\ 0 & 0 & 1_m \end{pmatrix} \quad (7.66)$$

mit

$$\tau \in SO(2n), \det(1 - \tau) \neq 0, \det(1 + \tau) \neq 0 \quad 2n + m + l = d. \quad (7.67)$$

Diese Wahl ist im Reellen mittels einer orthogonalen Basistransformation stets möglich. Dann macht man für $\mathbf{D}'$ einen entsprechenden Blockansatz und setzt in die Kommutatorgleichung ein. Aus den sich daraus ergebenden 9 Matrixgleichungen folgt

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} \mathbf{d} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{p} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{q} \end{pmatrix}. \quad (7.68)$$

Während die $l \times l$ Matrix $\mathbf{p}$ und die $m \times m$ Matrix $\mathbf{q}$ nicht weiter eingeschränkt sind, muß die $2n \times 2n$ Matrix $\mathbf{d}$ mit der Matrix τ kommutieren,

$$[\mathbf{d}, \tau] = 0, \quad (7.69)$$

die nur noch die komplexen Eigenwerte des Twistes enthält.

Um dieses reduzierte Problem zu lösen, wählt man die Orthonormalbasis so, daß die Drehung τ ihre reelle Standardform annimmt. Dies ist durch eine orthogonale Transformation stets erreichbar:

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \tau_n \end{pmatrix}. \quad (7.70)$$

Dabei gehört der 2×2 -Block τ_α zu dem α -ten Paar komplex-konjugierter Eigenwerte $\exp(2\pi i k_\alpha)$, $0 < k_\alpha < 1$, $k_\alpha \neq \frac{1}{2}$, $Nk_\alpha = 1$, $\alpha = 1, \dots, n$:

$$\tau_\alpha = \begin{pmatrix} c_\alpha & -s_\alpha \\ s_\alpha & c_\alpha \end{pmatrix}, \quad c_\alpha = \cos(2\pi i k_\alpha), \quad s_\alpha = \sin(2\pi i k_\alpha). \quad (7.71)$$

Für $\mathbf{d}$ wird nun ein Ansatz mit $n^2 \cdot 2 \times 2$ Blöcken $D_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ gemacht. Die blockweise Ausführung des Kommutators führt dann zu den Gleichungen

$$D_{\alpha\beta}\tau_\beta - \tau_\alpha D_{\alpha\beta} = 0 \quad \forall \alpha, \beta. \quad (7.72)$$

Setzt man für beliebiges, festes α, β

$$D_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix}, \quad (7.73)$$

so ergibt sich ein homogenes, lineares Gleichungssystem von vier Gleichungen für die vier Unbekannten p, q, r, t :

$$\begin{pmatrix} c_\beta - c_\alpha & s_\beta & s_\alpha & 0 \\ -s_\beta & c_\beta - c_\alpha & 0 & s_\alpha \\ -s_\alpha & 0 & c_\beta - c_\alpha & s_\beta \\ 0 & -s_\alpha & -s_\beta & c_\beta - c_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ t \end{pmatrix} = 0. \quad (7.74)$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz nichttrivialer Lösungen dieser Gleichung ist das Verschwinden der Koeffizientendeterminante. Durch Entwickeln der Determinante und Verwendung der Eigenschaften trigonometrischer Funktionen reduziert sich diese Bedingung auf

$$c_\alpha = c_\beta. \quad (7.75)$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$s_\alpha = \pm s_\beta. \quad (7.76)$$

Es gibt also zwei Typen von Lösungen.

- Im ersten Fall ist $s_\alpha = s_\beta$ und damit $k_\alpha = k_\beta$ und durch Einsetzen folgt

$$q = -r, \quad p = t. \quad (7.77)$$

- Im zweiten Fall ist $s_\alpha = -s_\beta$, d.h. $k_\beta = 1 - k_\alpha$ und

$$q = r, \quad p = -t. \quad (7.78)$$

Der Fall $s_\alpha = \pm s_\beta = 0$, d.h. $k_\alpha = k_\beta = \frac{1}{2}$, der einer Drehung um π entspricht (zwei Eigenwerte -1), wurde bereits oben untersucht und kann hier nicht mehr auftreten. In dem reduzierten Problem liefert jeder nichtverschwindende 2×2 Block 2 kontinuierliche Parameter. Die Matrizen $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ unterlagen keinen weiteren Einschränkungen und liefern m^2 bzw. l^2 kontinuierliche Parameter.

Damit sind wir jetzt in der Lage, die Dimension M_D des Lösungsraumes der homogenen Kommutatorgleichung anzugeben:

$$M_D = m^2 + l^2 + 2 \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < \frac{1}{2}} (\nu_k + \nu_{1-k})^2. \quad (7.79)$$

Dabei ist ν_k die Anzahl von 2×2 Blöcken τ_k mit gegebenem k . Da $\nu_k + \nu_{1-k}$ die Anzahl der komplexen Eigenwertpaare $\exp(2\pi i k)$ für gegebenes k ist, gilt für die Dimensionen der Eigenräume zu komplexen Eigenwerten

$$d_k = d_{1-k} = \nu_k + \nu_{1-k}. \quad (7.80)$$

Daher kann M_D durch die Dimensionen der Eigenräume ausgedrückt werden:

$$M_D = d_1^2 + d_{\frac{1}{2}}^2 + 2 \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < \frac{1}{2}} d_k^2 = \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 \leq k < 1} d_k^2. \quad (7.81)$$

Diese Beziehungen verallgemeinern die in [28] angegebenen Formeln auf den Fall mit kontinuierlichen Wilsonlinien. Allerdings ist in unserem Fall die Bestimmung der Anzahl der Moduli noch nicht beendet, da erstens bei konstantem D -Feld Metrik und Wilsonlinien relativ zueinander variiert werden können und zweitens nur die Matrix der Skalarprodukte der Wilsonlinien, also ihre Länge und relative Orientierung, nicht aber ihre absoluten Werte durch die Kommutatorgleichung eingeschränkt werden. Die zugehörigen kontinuierlichen Parameter sollen später bestimmt werden. Zuvor möchte ich noch ein Ergebnis aus [28] zitieren, das die Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Kommutatorgleichung ermöglicht.

Lösung der inhomogenen Kommutatorgleichung

Zur vollständigen Lösung der inhomogenen Kommutatorgleichung fehlt noch die Angabe einer speziellen Lösung bei gegebener Inhomogenität. Hierfür kann die Lösung von [28] übernommen werden kann. (Dort wurden nur symmetrische und antisymmetrischen Matrizen untersucht, aber diese Einschränkung ist für die folgenden Überlegungen unwesentlich.) Das Lösungsverfahren startet mit der inhomogenen Gleichung (in Matrixschreibweise)

$$\mathbf{D}\vartheta^* - \vartheta\mathbf{D} = \mathbf{M}, \quad (7.82)$$

die sich auf die Gitterbasis bezieht. Man definiert

$$\mathbf{Q} = \vartheta^* \text{ und } \mathbf{R} = \vartheta^{*T}\mathbf{M}. \quad (7.83)$$

Linksmultiplikation der Gleichung (7.82) mit ϑ^{*T} ergibt:

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{D}\mathbf{Q} - \mathbf{D} = \mathbf{R}. \quad (7.84)$$

Da $\mathbf{Q}^N = 1$ ergibt sich die notwendige Bedingung

$$\mathbf{R} + \mathbf{Q}^T\mathbf{R}\mathbf{Q} + \dots + (\mathbf{Q}^T)^{N-1}\mathbf{R}\mathbf{Q}^{N-1} = 0. \quad (7.85)$$

Diese ist auch hinreichend, denn wenn sie erfüllt ist, ist

$$\mathbf{D}_{(R)} = \sum_{n=0}^{N-2} \left(\frac{n+1}{N} - 1 \right) (\mathbf{Q}^T)^n \mathbf{R} \mathbf{Q}^n \quad (7.86)$$

eine Lösung, wie man durch Einsetzen bestätigt.

7.2.3 Bestimmung der Anzahl der Moduli

Die bisher erarbeiteten Resultate ermöglichen es, nunmehr die Bestimmung der Moduli in Angriff zu nehmen. Da Fixtori ohnehin nur in faktorisierender Form behandelt werden können, nehme ich im folgenden an, daß sie gar nicht auftreten; diese Situation könnte ja durch Verzicht auf die Kompaktifizierung der entsprechenden Dimensionen erreicht werden. Der Eichtwist sei durch das folgende Verfahren definiert, das durch Abstraktion aus der in [50] für $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds durchgeführten Konstruktion folgt: Γ_{16} enthalte ein Untergitter Λ' , so daß eine bijektive Einbettungsabbildung

$$\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda' \subset \Gamma_{16} : \mathbf{e}_i \rightarrow \hat{\mathbf{e}}_i \quad (7.87)$$

existiert. Der von Γ_{16} aufgespannte $\mathbf{R}^{16}$ kann orthogonal zerlegt werden:

$$\mathbf{R}^{16} = \langle \Gamma_{16} \rangle_{\mathbf{R}} = \langle \Lambda' \rangle_{\mathbf{R}} \oplus \langle \Lambda' \rangle_{\mathbf{R}}^{\perp}. \quad (7.88)$$

Nun wählt man den Eichtwist so, daß er auf Λ' gleich dem Ortsraumtwist und auf dem orthogonalen Komplement gleich der Identität ist:

$$\theta' | \langle \Lambda' \rangle_{\mathbf{R}} = \theta, \quad \theta' | \langle \Lambda' \rangle_{\mathbf{R}}^{\perp} = \mathbf{1}. \quad (7.89)$$

Mit anderen Worten: Die Matrix von θ' , eingeschränkt auf $\langle \Lambda' \rangle_{\mathbf{R}}$ bezüglich der Basis $\hat{\mathbf{e}}_i$ ist gerade θ_i^j :

$$M(\theta)_{\{\mathbf{e}_i\}} = (\theta_i^j) = M(\theta')_{\{\hat{\mathbf{e}}_i\}}. \quad (7.90)$$

Noch anders ausgedrückt: Der Eichtwist entsteht durch Liften des Ortsraumtwistes:

$$\theta' = \phi\theta\phi^{-1} \oplus \mathbf{1}. \quad (7.91)$$

In dieser Formulierung ist die Konsistenzbedingung besonders einfach zu formulieren: Die Einbettungsabbildung ϕ muß mit dem Twist kommutieren,

$$\theta'\phi = \phi\theta. \quad (7.92)$$

In der Literatur tritt noch eine zweite „Einbettungsabbildung“ auf, die als Einbettung der Translationsgruppe des Ortsraumes in die Eichgruppe gedeutet wird [50]:

$$\chi : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}^{16} : \mathbf{e}_i \rightarrow \mathbf{A}_i. \quad (7.93)$$

Aus der Forderung nach Verträglichkeit dieser zweiten Art von Einbettung mit dem Twist folgt die Gleichung (7.15) in ihrer **homogenen** Form ($M_i^A = 0$). Die oben angestellten Überlegungen haben gezeigt, daß das Auftreten inhomogener Terme ($M_i^A \neq 0$) mit der Möglichkeit diskreter Wilsonlinien zusammenhängt und daß diskrete Wilsonlinien Werte in $\langle \Lambda' \rangle^\perp$ kontinuierliche Werte in $\langle \Lambda' \rangle$ annehmen. (Hier wird davon Gebrauch gemacht, daß Fixtoren nicht auftreten. Die Verallgemeinerung auf faktorisierende Fixtoren ist aber offensichtlich.) Da die Dimension des Lösungsraumes nur von der homogenen Kommutatorgleichung abhängt, können wir uns auf den Fall mit rein kontinuierlichen Wilsonlinien beschränken.

Damit nehmen die Konsistenzgleichungen die einfachere Form

$$\theta' \mathbf{A}_i = \theta_i^j \mathbf{A}_j, \quad (7.94)$$

$$D_{ij} \theta_k^j - \theta_i^j D_{jk} = M_{ik} \quad (7.95)$$

an. (Bemerkung: Wenn D_{ij} ganzzahlig ist, sind die Hintergrundfelder kritisch, denn es existieren dann Kandidaten für zusätzliche Wurzeln im Narain-Modell. Auch der zugehörige Orbifold sollte eine erhöhte Symmetrie im Spektrum aufweisen. Diese kritischen Werte erfüllen offensichtlich trivialerweise immer die Kommutatorgleichung)

Um die Moduli zu bestimmen, muß D_{ij} wieder in die ursprünglichen Hintergrundfelder zerlegt werden:

$$D_{ij} = 2 \left(B_{ij} - G_{ij} - \frac{1}{4} (\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j) \right). \quad (7.96)$$

Am einfachsten erhält man die kontinuierlichen Freiheitsgrade des B -Feldes: Man zerlegt die Kommutatorgleichung in ihren symmetrischen und ihren antisymmetrischen Anteil. Da B proportional zum antisymmetrischen Teil von D ist, ergibt sich

$$B_{ij} \theta_k^j - \theta_i^j B_{jk} = \frac{1}{2} M_{[ik]}. \quad (7.97)$$

Dieselbe Gleichung tritt auch bei Modellen ohne Wilsonlinien auf. Die Dimension des Lösungsraumes der zugehörigen homogenen Gleichung kann durch Spezialisierung der Überlegung zum D -Feld auf den Fall antisymmetrischer Matrizen erhalten oder einfach der Literatur [28] entnommen werden:

$$M_B = \binom{d_{\frac{1}{2}}}{2} + \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < \frac{1}{2}} (\nu_k + \nu_{1-k})^2. \quad (7.98)$$

Der symmetrische Anteil von D_{ij} erfüllt eine entsprechende Kommutatorgleichung. Allerdings hat man bei festem D_{ij} noch die Möglichkeit, die relativen Anteile der Gittermetrik und der Wilsonlinien zu verändern, wodurch sich die Anzahl der Moduli verdoppelt. Dies läßt sich auch anders ausdrücken: Da θ ein Automorphismus von Λ ist, muß der Ortsraumtwist mit der Gittermetrik kommutieren. Daher müssen die beiden folgenden Gleichungen erfüllt sein:

$$G_{ij} \theta_k^j - \theta_i^j G_{jk} = 0, \quad (7.99)$$

$$(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j) \theta_k^j - \theta_i^j (\mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_k) = -2M_{(ik)}. \quad (7.100)$$

Die Anzahl der zugehörigen Moduli kann wieder der Literatur entnommen [28] oder durch Spezialisierung gewonnen werden:

$$M_G = M_{A,m} = \binom{d_{\frac{1}{2}} + 1}{2} + \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < \frac{1}{2}} (\nu_k + \nu_{1-k})^2. \quad (7.101)$$

Neben den Moduli, die Deformationen des Ortsraumgitters und des B -Feldes beschreiben, gibt es also Moduli, die Deformationen der Längen und der relativen Winkel der Wilsonlinien beschreiben, letztere möchte ich metrische A -Moduli nennen. Bisher nicht berücksichtigt wurde die Möglichkeit, die Wilsonlinien bei festen Längen und Winkeln, also durch eine Isometrie, relativ zu Γ_{16} zu rotieren.

Um die Anzahl dieser „isometrischen A -Moduli“ zu bestimmen, gehen wir von Werten der $\mathbf{A}_i$ aus, die die Konsistenzgleichungen erfüllen und suchen die allgemeinste kontinuierlich mit der Identität verbundene Schar von invertierbaren Abbildungen ρ , die wieder zu Lösungen führt. Jede invertierbare Abbildung kann in das Produkt einer orthogonalen und einer symmetrischen zerlegt werden (reelle Polarzerlegung). Der symmetrische Anteil ist genau der nicht-isometrische, der mit den metrischen A -Moduli zusammenhängt und oben bereits untersucht wurde. Daher lassen wir nur orthogonale Abbildungen zu. Der Definitions- und Wertebereich von ρ ist der Teilraum von $\langle \Gamma_{16} \rangle$, auf dem θ' nicht-trivial operiert:

$$\rho : \langle \Lambda' \rangle_{\mathbf{R}} \rightarrow \langle \Lambda' \rangle_{\mathbf{R}}, \quad \langle \Lambda' \rangle_{\mathbf{R}} = \langle \hat{\mathbf{e}}_i | i = 1, \dots, 6 \rangle_{\mathbf{R}} \langle \mathbf{A}_i | i = 1, \dots, 6 \rangle_{\mathbf{R}}. \quad (7.102)$$

Die Matrix der Abbildung ρ bezüglich der Basis $\mathbf{A}_i$ sei R_i^j :

$$\rho \mathbf{A}_i = R_i^j \mathbf{A}_j. \quad (7.103)$$

Damit die neuen Wilsonlinien $\rho \mathbf{A}_i$ wieder die Einbettungsgleichung erfüllen, muß der Eichtwist θ' mit der Deformation ρ kommutieren:

$$\theta' \rho = \rho \theta', \quad \theta_i^j R_j^k = R_i^j \theta_j^k. \quad (7.104)$$

Die Kommutatorgleichung ist automatisch weiter erfüllt, da ρ orthogonal ist. (θ_i^j ist laut Einbettungsgleichung die Matrix des Eichtwistes, eingeschränkt auf $\langle \Lambda' \rangle$ bezüglich der Basis $\mathbf{A}_i$. Siehe auch Anfang dieses Abschnitts.)

Wenn aber zwei Drehungen miteinander vertauschen, sind sie simultan diagonalisierbar, bzw. im Reellen, blockdiagonalisierbar. In der entsprechenden Basis nimmt die Gleichung (7.104) eine besonders einfache Form an:

$$\left[\begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1_l \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{-1} \end{pmatrix} \right] = 0. \quad (7.105)$$

Die 2×2 Matrizen θ_α gehören zu den komplexen Eigenwerten $\exp(2\pi i k_\alpha)$ des Eichtwistes, die per Konstruktion mit denen des Ortsraumtwistes übereinstimmen. Sie beschreiben den Twist durch diskrete Drehungen in paarweise orthogonalen Ebenen (2-Hyperflächen). Die Anzahl l der Eigenwerte -1 ist ebenfalls genauso groß wie bei θ , und einen 1-Eigenraum gibt es im hier betrachteten Teilraum nicht. Die 2×2 Blöcke R_α beschreiben kontinuierliche Drehungen der ausgezeichneten Ebenen und charakterisieren die gesuchten Moduli:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_\alpha) & \sin(\varphi_\alpha) \\ -\sin(\varphi_\alpha) & \cos(\varphi_\alpha) \end{pmatrix}. \quad (7.106)$$

Sie parametrisieren die zulässigen Drehungen der Wilsonlinien relativ zu Λ' durch die Drehwinkel φ_α . Für jedes komplex-konjugierte Paar von Eigenwerten hat man einen Drehwinkel frei. Der -1 Eigenraum läßt eine beliebige orthogonale $l \times l$ Matrix R_{-1} zu und liefert so weitere $\frac{1}{2}l(l-1)$ Moduli. Die Anzahl der isometrischen A -Moduli ist damit bestimmt:

$$M_{A,i} = \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < 1, k \neq \frac{1}{2}} \nu_k + \frac{1}{2}l(l-1) = \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < 1, k \neq \frac{1}{2}} \frac{1}{2}d_k + \binom{d_{\frac{1}{2}}}{2}. \quad (7.107)$$

Die Gesamtzahl der Wilsonlinien-Moduli ist:

$$M_A = d_{\frac{1}{2}}^2 + \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < \frac{1}{2}} (\nu_k + \nu_{1-k})^2 + \nu_k + \nu_{1-k}. \quad (7.108)$$

Sie kann auch durch die Anzahl der Eigenwerte ausgedrückt werden:

$$M_A = d_{\frac{1}{2}}^2 + \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < \frac{1}{2}} (d_k^2 + d_k). \quad (7.109)$$

Die doppelte Einbettung

Aus Dimensionsgründen ist es möglich, durch eine zweite Einbettungsabbildung

$$\phi' : \Lambda \rightarrow \Lambda'' \subset \Gamma_{16} \quad \Lambda'' \perp \Lambda', \quad (7.110)$$

den Eichtwist auf einem zwölfdimensionalen Untergitter von Γ_{16} zu definieren:

$$\Theta' = \phi \Theta \phi^{-1} \oplus \phi' \Theta \phi'^{-1} \oplus \mathbf{1}. \quad (7.111)$$

Dadurch verdoppelt sich die Anzahl der Wilson-Moduli. Beispiele sind $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds mit einem $A_2^{\oplus 6}$ -Twist der $E_8 \oplus E_8$ (s.u.).

7.2.4 Modulare Invarianz

Für Modelle mit Einbettungskonstruktion können die allgemeinen Formeln (6.103) für die modulare Invarianz in asymmetrischen Orbifold-Theorien spezialisiert werden. Die Eigenwerte des Eichtwists sind die gleichen wie die des Ortsraumtwists, daher gilt bei geeigneter Numerierung:

$$\begin{aligned} l_i &= r_i, \text{ für } i = 1, 2, 3, \quad l_{3+i} = r_i \quad i = 1, 2, 3, \\ l_{6+i} &= r_i \text{ oder } l_{6+i} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \\ l_j &= 0 \text{ für } j = 10, 11. \end{aligned} \quad (7.112)$$

Gilt nun

$$\sum_{i=1}^3 (r_i)^2 = m, \quad (7.113)$$

so ist der Beitrag der k Kopien im Eichsektor km . Aus Dimensionsgründen ist $k = 1, 2$. Die modifizierten mod N Bedingungen sind dann

$$m(1+k) = 0 \text{ mod } N \text{ bzw. mod } 2N. \quad (7.114)$$

Beispiel: Im Fall des $A_2^{\oplus 3}$ -Twistes ist $m = 3$ und die Bedingung für die modulare Invarianz ist für beliebiges k erfüllt. Interessanterweise ist umgekehrt die (einfache oder doppelte) Einbettung auch notwendig für die modulare Invarianz. Twistet man $l = 1, \dots, 8$ A_2 Unteralgebren der $E_8 \oplus E_8$ und läßt damit alle inneren Automorphismen dritter Ordnung zu, so ist

$$\sum_{m=4}^{11} (l_m)^2 = l. \quad (7.115)$$

Die Gleichung

$$m + l = 3 \text{ mod } 3 \quad (7.116)$$

gilt, da $m = 3$ ist, genau dann, wenn auch l ein Vielfaches von 3 ist. Daher müssen immer $A_2^{\oplus 3}$ Unteralgebren getwistet werden, was eine Definition des Eichtwistes durch Einbettung im Sinne von (7.89) erzwingt.

7.3 $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds mit kontinuierlichen und diskreten Wilsonlinien

7.3.1 Die geometrische Interpretation der metrischen Moduli

Zur Illustration der erarbeiteten Resultate soll der Modulraum der $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds dienen. Als erstes sollen die aus der Wahl des Ortsraumtwistes resultierenden Einschränkungen an die Gittermetrik G_{ij} geometrisch interpretiert werden. Dazu könnte die Standardform der Metrik bezüglich der Orthonormalbasis in die Gitterbasis transformiert werden. Es ist aber illustrativer und ökonomischer das Ergebnis in der Gitterbasis für diesen Spezialfall neu herzuleiten. Dazu sei $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, 6$ eine Gitterbasis von Λ und der Twist sei durch

$$\mathbf{e}_{2i-1} \rightarrow \mathbf{e}_{2i} \rightarrow -(\mathbf{e}_{2i-1} + \mathbf{e}_{2i}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (7.117)$$

definiert. Die Matrix des Twistes bezüglich der Gitterbasis ist dann

$$(\theta_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & -1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & -1 & -1 & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.118)$$

Die Gittermetrik ist die Matrix der Skalarprodukte der Basisvektoren. Wir fragen zunächst welchen Einschränkungen die drei 2×2 Hauptdiagonal-Untermatrizen unterworfen sind. Da $\theta \mathbf{e}_{2i-1} = \mathbf{e}_{2i}$ usw., folgt:

$$\mathbf{e}_{2i-1} \cdot \mathbf{e}_{2i-1} = \mathbf{e}_{2i} \cdot \mathbf{e}_{2i} \text{ und } \mathbf{e}_{2i-1} \cdot \mathbf{e}_{2i} = \mathbf{e}_{2i} \cdot (-\mathbf{e}_{2i-1} - \mathbf{e}_{2i}) \quad (7.119)$$

und damit

$$\mathbf{e}_{2i-1} \cdot \mathbf{e}_{2i-1} = \mathbf{e}_{2i} \cdot \mathbf{e}_{2i} = -2 \mathbf{e}_{2i-1} \cdot \mathbf{e}_{2i}. \quad (7.120)$$

Die Basisvektoren $\mathbf{e}_{2i-1}$ und $\mathbf{e}_{2i}$ müssen also die gleiche Länge R_i haben und einen Winkel von 120 Grad einschließen. Der einzige kontinuierliche Parameter ist der gemeinsame Radius R_i des zugehörigen A_2 -Torus. Die Hauptdiagonalkästchen der Gittermetrik haben die Form

$$\frac{R_i^2}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (7.121)$$

sind also proportional zur Cartan-Matrix von A_2 . Als Beispiel für eine Nebendiagonal-Untermatrix der Gittermetrik betrachten wir

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}. \quad (7.122)$$

Da der Twist eine Isometrie und $\theta^3 = \mathbf{1}$ ist, gilt:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1 \cdot \theta \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \theta \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \cdot \theta^2 \mathbf{e}_3. \quad (7.123)$$

Um zu einer geometrischen Interpretation zu gelangen, erinnern wir uns, daß

$$\cos \phi_{ij} = \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j}{\sqrt{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j)}} \quad (7.124)$$

der Cosinus des zwischen $\mathbf{e}_i$ und $\mathbf{e}_j$ eingeschlossenen Winkels ϕ_{ij} ist. Das Nebendiagonal-Kästchen der Gittermetrik hat dann die Form

$$R_1 R_3 \begin{pmatrix} \cos \phi_{13} & \cos \phi_{14} \\ -\cos \phi_{13} - \cos \phi_{14} & \cos \phi_{13} \end{pmatrix}. \quad (7.125)$$

Die beiden neu auftretenden Moduli beschreiben die relative Lage der (1,2) und der (3,4) Ebene. Die drei A_2 -Tori müssen also nicht paarweise orthogonal sein. In den anderen Nebendiagonal-Untermatrizen treten noch vier weitere Winkel $\phi_{15}, \phi_{16}, \phi_{35}, \phi_{36}$ auf. Die Gesamtzahl der Moduli ist

$$\sum_{k=1}^3 (2k-1) = 3^2 = 9. \quad (7.126)$$

Um mit der allgemeinen Theorie zu vergleichen, bemerken wir, daß der Twist die jeweils dreifach entarteten, komplex konjugierten Eigenwerte $e^{\pm 2\pi i/3}$ besitzt. Realisiert man den Twist durch Drehungen um 120 Grad in allen drei Rotationsebenen, so ist

$$\nu_{1/3} = 3, \quad \nu_{2/3} = 0. \quad (7.127)$$

Aber auch wenn man, was für WF-Fermionen einen Unterschied macht, in einer oder mehreren Ebenen um -240 Grad dreht, ist immer

$$\nu_{1/3} + \nu_{2/3} = 3 \quad (7.128)$$

und damit

$$M_G = \sum_{k \in \mathbf{Q}|0 < k < \frac{1}{2}} (\nu_k + \nu_{1-k})^2 = \sum_{1/3} (3)^2 = 9. \quad (7.129)$$

Durch eine explizite Basistransformation von der Orthonormal- in die Gitterbasis kann man zeigen, daß nicht nur die Zahl der Moduli gleich ist, sondern daß die gleichen Moduli nur verschieden parametrisiert werden. Abschließend möchte ich bemerken, daß die hier angestellten Überlegungen sich direkt auf die metrischen Wilson-Moduli übertragen lassen. Dort beschreiben die Moduli die Länge und die relativen Winkel zwischen den nicht-invarianten, kontinuierlich veränderbaren Teilen der Wilsonlinien.

7.3.2 Z_3 -Twists ohne Wilsonlinien

Die Diskussion des Eichsektors soll für den Fall $\Gamma_{16} = E_8 \oplus E_8$ Modells erfolgen, da alle bekannten Modelle mit semirealistischen Spektren aus dieser Klasse stammen. Als Eichtwist stehen in einem Modell ohne Wilsonlinien alle Automorphismen von $E_8 \oplus E_8$ zur Verfügung, die von dritter Ordnung sind ($\theta'^3 = 1$) und die zusätzlichen Bedingungen erfüllen, die die modulare Invarianz garantieren. Um zunächst eine Liste der Kandidaten aufzustellen, braucht man alle Automorphismen dritter Ordnung der Lie-Algebra E_8 [46]: Die E_8 besitzt keine äußeren Automorphismen. Die Weylgruppe hat 696729600 Elemente, die 112 Konjugationsklassen bilden [137], [46]. Da jede Konjugationsklasse einen inäquivalenten inneren Automorphismus definiert, gibt es 112 Weylautomorphismen von E_8 (und damit 12544 von $E_8 \oplus E_8$). Die 112 Automorphismen und die zugehörigen Verschiebungsvektoren und die invarianten Unteralgebren wurden von Hollowood und Myhill klassifiziert [46]. Darunter sind nur 4 Automorphismen dritter Ordnung, die durch einen simultanen Coxeter-Twist in je 1,2,3 oder 4 paarweise orthogonalen A_2 -Unteralgebren der E_8 definiert sind. Die invarianten Unteralgebren sind:

Twist	A_2	$A_2^{\oplus 2}$	$A_2^{\oplus 3}$	$A_2^{\oplus 4}$	(7.130)
Invar. Unteralgebra	$E_7 \oplus u(1)$	$D_7 \oplus u(1)$	$E_6 \oplus A_2$	A_8	
Eichgruppe	$E(7) \otimes U(1)$	$SO(14) \otimes U(1)$	$E(6) \otimes SU(3)$	$SU(9)$	

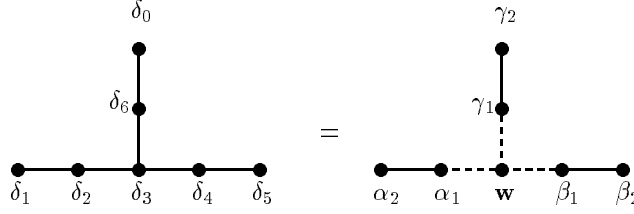


Abbildung 7.1: Die Zerlegung der E_6 bezüglich einer maximalen $A_2 \oplus A_2$ A_2 Unteralgebra. Die dritte einfache E_6 -Wurzel $\delta_3 = \mathbf{w} = -\alpha_1^* - \beta_1^* - \gamma_1^*$ verbindet die drei A_2 Unteralgebren miteinander. Die niedrigste E_6 -Wurzel ist bei der hier gewählten Parametrisierung $\delta_0 = \gamma_2$.

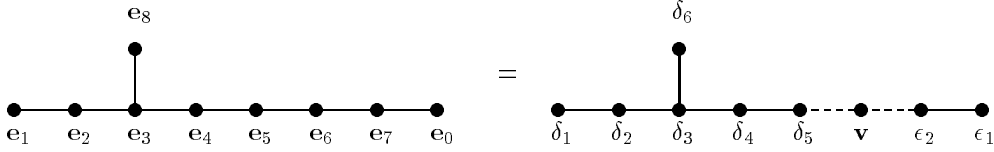


Abbildung 7.2: Die Zerlegung der E_8 bezüglich einer ihrer maximalen Unteralgebren $E_6 \oplus A_2$. Die sechste einfache Wurzel der E_8 ist $\mathbf{v} = -\delta_5^* - \epsilon_2^*$, die niedrigste Wurzel ist ϵ_1 .

Damit gibt es $4 \cdot 4 = 16$ Weyl-Automorphismen dritter Ordnung der $E_8 \oplus E_8$. Von diesen führen genau die zu einer modular invarianten Theorie, bei denen die Anzahl der gewisteten A_2 Unteralgebren ein Vielfaches von 3 ist. Damit bleiben nur vier inäquivalente Modelle übrig.

Twist	Invariante Unteralgebra	Eichgruppe
$A_2^{\oplus 3} A_2^{\oplus 0}$	$E_6 \oplus A_2 \oplus E_8$	$E(6) \otimes SU(3) \otimes E(8)$
$A_2^{\oplus 2} A_2^{\oplus 1}$	$D_7 \oplus u(1) \oplus E_7 \oplus u(1)$	$SO(14) \otimes E(7) \otimes U(1)^2$
$A_2^{\oplus 4} A_2^{\oplus 2}$	$A_8 \oplus D_7 \oplus u(1)$	$SU(9) \otimes SO(14) \otimes U(1)$
$A_2^{\oplus 3} A_2^{\oplus 3}$	$E_6 \oplus A_2 \oplus E_6 \oplus A_2$	$E(6)^2 \otimes SU(3)^2$

(7.131)

Obwohl diese invarianten Unteralgebren in der Literatur nachgeschlagen werden können, ist es instruktiv ihre Bestimmung an einem Beispiel nachzuvollziehen, um das Verfahren dann auf die allgemeine Situation mit Wilsonlinien verallgemeinern zu können¹. Die hierfür benötigte Parametrisierung der E_8 bezüglich ihrer Unteralgebren $E_6 \oplus A_2$ und $A_2^{\oplus 4}$ wird in den Abbildungen 7.2 und 7.1 spezifiziert.

Das einfachste Beispiel ist der A_2 -Twist in einer E_8 . Unmittelbar einzusehen ist die Wirkung eines Twistes auf eine geeignet gewählte maximale Unteralgebra $E_6 \oplus A_2$. Der Twist bricht die A_2 zu einer $u(1)^2$, während die E_6 invariant ist. Die invariante Unteralgebra der vollen E_8 ist aber nicht $E_6 \oplus u(1)^2$ sondern $E_7 \oplus u(1)$. Woher kommen die zusätzlichen invarianten Zustände? Ein Blick auf das relevante Dynkin-Diagramm zeigt, daß die sechste einfache Wurzel, die orthogonalen Unteralgebren E_6 und A_2 zu einer E_8 -Algebra „verklebt“. Diese Wurzel ist bezüglich der maximalen $E_6 \oplus A_2$ Unteralgebra ein Gewicht

$$\alpha_6 = -\beta_5^* - \gamma_1^*, \quad (7.132)$$

das der $(\overline{27}, \overline{3})$ Darstellung und damit der $(\overline{F}, \overline{F})$ -Konjugationsklasse angehört. Die 248 Generatoren der E_8 entstehen also dadurch, daß man zu den Generatoren der maximalen Unteralgebra alle Gewichte mit Normquadrat 2 hinzunimmt. Das erhält man auch durch die Zerlegung

¹Für die nachfolgenden Überlegungen benötigt man die Anhänge B und C, sowie die Daten aus Anhang F von [137].

der adjungierten Darstellung bezüglich der maximalen Unteralgebra:

$$\mathbf{248} = (\mathbf{78}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{8}) \oplus (\mathbf{27}, \mathbf{3}) \oplus (\overline{\mathbf{27}}, \overline{\mathbf{3}}). \quad (7.133)$$

Die die jeweils drei Gewichte der A_2 -Darstellungen $\mathbf{3}, \overline{\mathbf{3}}$ unter der 120 Grad Rotation des A_2 -Gewichtsgitter aufeinander abgebildet werden, kann man bei festem E_6 -Gewicht einen invarianten Orbit von Generatoren bilden. Daher existieren zusätzliche $2 \cdot 27$ invariante Generatoren. Insgesamt gibt es

$$78 + 2 + 27 + 27 = 134 \quad (7.134)$$

invariante Generatoren. Die invariante Unteralgebra besitzt also die Dimension 134. Außerdem ist sie eine Oberalgebra der $E_6 \oplus u(1)^2$. Die einzigen in Frage kommenden Einbettungsketten sind

$$E_6 \oplus u(1)^2 \subset E_7 \oplus u(1) \subset E_7 \oplus A_1 \subset E_8 \quad (7.135)$$

und

$$E_6 \oplus u(1)^2 \subset E_6 \oplus A_1 \oplus u(1) \subset E_6 \oplus A_2 \subset E_8. \quad (7.136)$$

Betrachtet man die Dimensionen der in Frage kommenden Unteralgebren, so hat nur die $E_7 \oplus u(1)$ die richtige Dimension $133 + 1 = 134$. Durch die Kenntnis aller Unteralgebren vom Typ halbeinfach $\oplus$ abelsch und ihrer Dimensionen kann man sich, in diesem wie in vielen andern Fällen die explizite Konstruktion der invarianten Unteralgebra sparen.

Wenn in mehr als einer A_2 -Unteralgebra getwistet wird, betrachtet man zunächst die Unteralgebra

$$A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \subset E_6 \oplus A_2 \subset E_8. \quad (7.137)$$

Die Einbettung der maximalen $A_2^{\oplus 3}$ Unteralgebra in die E_6 kann wieder dem Dynkin-Diagramm entnommen werden: Die sechs einfachen Wurzeln $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $i = 1, 2$ werden durch das Gewicht

$$w = -\alpha_1^* - \beta_1^* - \gamma_1^* \quad (7.138)$$

zu einem E_6 -Wurzelsystem erweitert. Dieses Gewicht gehört zur $(\overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{3}})$ Darstellung und damit zur $(\overline{F}, \overline{F}, \overline{F})$ Konjugationsklasse der $A_2^{\oplus 3}$. Zusammen mit der konjugierten Darstellung $(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3})$ gibt es $2 \cdot 27$ zusätzliche Generatoren, die zusammen mit den $3 \cdot 8$ Generatoren der $A_2^{\oplus 3}$ die

$$24 + 27 + 27 = 78 \quad (7.139)$$

Generatoren der E_6 bilden. Für später benötigen wir nicht nur die Zerlegung der adjungierten, sondern auch die der fundamentalen und der konjugierten Darstellung von E_6 bezüglich der $A_2^{\oplus 3}$. Dem Dynkin-Diagramm und den Tabellen entnimmt man leicht, daß das höchste Gewichte der **27**

$$(\alpha_2^*, \mathbf{0}, -\gamma_2^*) \quad (7.140)$$

ist. Es gehört der $(\overline{F}, R, F)$ Konjugationklasse an. Das höchste Gewicht der $\overline{\mathbf{27}}$ ist

$$(\mathbf{0}, \beta_2^*, -\gamma_2^*) \quad (7.141)$$

und liegt in der $(R, F, \overline{F})$ Konjugationsklasse. Damit ergeben sich die Zerlegungen der E_6 -Konjugationklassen

$$R = (R, R, R) + (F, F, F) + (\overline{F}, \overline{F}, \overline{F}), \quad (7.142)$$

$$F = (\overline{F}, R, F) + (F, \overline{F}, R) + (R, F, \overline{F}), \quad (7.143)$$

$$\overline{F} = (R, \overline{F}, F) + (\overline{F}, F, R) + (F, R, \overline{F}). \quad (7.144)$$

Daraus folgen die Zerlegungsformeln für die drei E_6 -Darstellungen

$$\mathbf{78} = (\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{8}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{8}) + (\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3}) + (\overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{3}}, \overline{\mathbf{3}}), \quad (7.145)$$

$$\mathbf{27} = (\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) + (\mathbf{3}, \overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \overline{\mathbf{3}}), \quad (7.146)$$

$$\overline{\mathbf{27}} = (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \overline{\mathbf{3}}) + (\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \overline{\mathbf{3}}, \mathbf{3}). \quad (7.147)$$

Als Anwendungsbeispiel soll in allen drei A_2 Unteralgebren der E_6 ein simultaner Coxeter–Twist durchgeführt werden. Aus den 24 $A_2^{\oplus 3}$ Generatoren können $2+2+2=6$ invariante Kombinationen gebildet werden, die eine $u(1)^2$ –Algebra erzeugen. Aus den $2 \cdot 27$ zusätzlichen E_6 –Gewichten können $2 \cdot 9 = 18$ weitere invariante Generatoren gebildet werden. Die invariante Unteralgebra der E_6 hat also die Dimension $6 + 18 = 24$. Zugleich muß sie eine $u(1)^6$ –Unteralgebra haben, also den Rang 6 besitzen. Die beiden maximalen Unteralgebren der E_6 sind die 24–dimensionale $A_2^{\oplus 3}$ und die 38–dimensionale $A_5 \oplus A_1$. Unter den Unteralgebren von $A_5 \oplus A_1$, die vom Typ halbeinfach $\oplus$ abelsch sind, gibt es genau eine, die A_4 , die die richtige Dimension 24 besitzt. Da der Rang aber $4 \neq 6$ ist, gibt es nur eine in Frage kommende Unteralgebra der E_6 , nämlich die maximale Unteralgebra $A_2^{\oplus 3}$.

Der hier untersuchte E_6 –Automorphismus kann zu einem E_8 Automorphismus erweitert werden. Die invariante Unteralgebra der maximalen Unteralgebra $E_6 \oplus A_2$ ist dann $A_2^{\oplus 4}$. Um die invariante Unteralgebra der E_8 zu bestimmen, müssen die von der sechsten einfachen E_8 –Wurzel erzeugten $E_6 \oplus A_2$ Gewichte betrachtet werden. Diese bilden, wie oben erwähnt wurde, die Darstellungen $(\mathbf{27}, \mathbf{3})$ und $(\overline{\mathbf{27}}, \mathbf{3})$ der maximalen Unteralgebra. Daraus lassen sich $2 \cdot 3 \cdot 9$ invariante Generatoren betrachten. Da die invariante Unteralgebra eine Oberalgebra der $A_2^{\oplus 4}$ sein muß, ist der einzige Kandidat die $E_6 \oplus A_2$. Die Zahl der invarianten Generatoren nimmt tatsächlich den richtigen Wert an:

$$4 \cdot 8 + 2 \cdot 27 = 86 = 78 + 8. \quad (7.148)$$

Damit haben wir auch für den $A_2^{\oplus 3}$ –Twist der E_8 die invariante Unteralgebra bestimmt.

7.3.3 Brechung der E_8 durch kontinuierliche Wilsonlinien im Z_3 –Orbifold mit $A_2^{\oplus 3}$ –Twist

Die durch kontinuierliche Wilsonlinien neu hinzukommenden Möglichkeiten sollen am Beispiel des $A_2^{\oplus 3}$ –Twistes der E_8 untersucht werden. Dieses Orbifold–Modell ist aus zwei Gründen das am meisten untersuchte: Zum einen tritt eine der interessantesten GUT–Gruppen, die $E(6)$ auf. Zum anderen handelt es sich um den Grenzfall der Kompaktifizierung auf einer Calabi–Yau–Mannigfaltigkeit und schlägt so die Brücke zu einer größeren Klasse von Kompaktifizierungen, die ebenfalls reich an semirealistischen Modellen ist. Ich möchte nun, als eigenen Beitrag, erste Schritte zu einer **systematischen** Berücksichtigung **kontinuierlicher** Wilsonlinien unternehmen.

Da der Twist bezüglich einer $A_2^{\oplus 3}$ Unteralgebra definiert wird, empfiehlt es sich im Lichte der mit toroidalen Kompaktifizierungen gemachten Erfahrungen, die sechs kontinuierlichen Wilsonlinien durch Gewichte dieser Unteralgebra zu parametrisieren. Unter Berücksichtigung der Konsistenzbedingungen und unter Verzicht auf die Variation der isometrischen Moduli gibt es neun unabhängige freie Parameter:

$$\mathbf{A}_1 = p\alpha_1^* + q\beta_1^* + r\gamma_1^*, \quad (7.149)$$

$$\mathbf{A}_2 = p(\alpha_1^* - \alpha_1) + q(\beta_1^* - \beta_1) + r(\gamma_1^* - \gamma_1), \quad (7.150)$$

$$\mathbf{A}_3 = x\alpha_1^* + y\beta_1^* + z\gamma_1^*, \quad (7.151)$$

$$\mathbf{A}_4 = x(\alpha_1^* - \alpha_1) + y(\beta_1^* - \beta_1) + z(\gamma_1^* - \gamma_1), \quad (7.152)$$

$$\mathbf{A}_5 = a\alpha_1^* + b\beta_1^* + c\gamma_1^*, \quad (7.153)$$

$$\mathbf{A}_6 = a(\alpha_1^* - \alpha_1) + b(\beta_1^* - \beta_1) + c(\gamma_1^* - \gamma_1). \quad (7.154)$$

Die Bilder der sechs einfachen Wurzeln der $A_2^{\oplus 3}$ in dem durch diese Wilsonlinien deformierten Narain–Gitter sind:

$$\hat{\alpha}' = \hat{\alpha} - (\alpha \cdot \mathbf{A}_i) \mathbf{k}^i. \quad (7.155)$$

Im einzelnen ist

$$\hat{\alpha}'_1 = \hat{\alpha}_1 - p\mathbf{k}^1 + p\mathbf{k}^2 - x\mathbf{k}^3 + x\mathbf{k}^4 - a\mathbf{k}^5 + a\mathbf{k}^6, \quad (7.156)$$

$$\hat{\alpha}'_2 = \hat{\alpha}_2 - p\mathbf{k}^2 - x\mathbf{k}^4 - a\mathbf{k}^6, \quad (7.157)$$

$$\hat{\beta}'_1 = \hat{\beta}_1 - q\mathbf{k}^1 + q\mathbf{k}^2 - y\mathbf{k}^3 + y\mathbf{k}^4 - b\mathbf{k}^5 + b\mathbf{k}^6, \quad (7.158)$$

$$\hat{\beta}'_2 = \hat{\beta}_2 - q\mathbf{k}^2 - y\mathbf{k}^4 - b\mathbf{k}^6, \quad (7.159)$$

$$\hat{\gamma}'_1 = \hat{\gamma}_1 - r\mathbf{k}^1 + r\mathbf{k}^2 - z\mathbf{k}^3 + z\mathbf{k}^4 - c\mathbf{k}^5 + c\mathbf{k}^6, \quad (7.160)$$

$$\hat{\gamma}'_2 = \hat{\gamma}_2 - r\mathbf{k}^2 - z\mathbf{k}^4 - c\mathbf{k}^6. \quad (7.161)$$

Eine gegebene Wurzel ist genau dann auch eine Wurzel des deformierten Gitters, wenn alle Koeffizienten der $\mathbf{k}^i$ ganzzahlig ist. Wenn die Wilsonlinien so gewählt sind, daß die einfachen Wurzeln α_i , $i = 1, 2$ im deformierten Gitter liegen, werde ich sie α -kritisch nennen. Die zugehörige A_2 -Unteralgebra der E_8 bezeichne ich als A_2^α . Entsprechend wird mit den anderen A_2 -Unteralgebren verfahren. Die drei Grundtypen kritischer Wilsonlinien sind demnach:

$$\begin{aligned} \alpha\text{-kritisch: } \alpha_i &\in \Gamma' \Leftrightarrow p, x, a \in \mathbf{Z}, \\ \beta\text{-kritisch: } \beta_i &\in \Gamma' \Leftrightarrow q, y, b \in \mathbf{Z}, \\ \gamma\text{-kritisch: } \gamma_i &\in \Gamma' \Leftrightarrow r, z, c \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (7.162)$$

Für die Symmetriebrechungen der $A_2^\alpha \oplus A_2^\beta \oplus A_2^\gamma$ Unteralgebra gibt es vier inäquivalente Typen:

1. Fall: Die Wilsonlinien sind (α, β, γ) -kritisch. Dann ist die Symmetriebrechung:

$$A_2^{\oplus 3} \longrightarrow u(1)^6. \quad (7.163)$$

(Vor dem Pfeil steht die Symmetrie des Torus-Modells mit Wilsonlinien, hinter ihm die des Orbifold-Modells mit den gleichen, kontinuierlichen Wilsonlinien.) Man erhält diskrete Punkte in dem neundimensionalen Teil des Moduliraumes, den wir betrachten.

2. Fall: Die Wilsonlinien sind (α, β) -kritisch (oder (α, γ) -kritisch oder (β, γ) -kritisch). Dann ist die Symmetriebrechung

$$A_2^{\oplus 2} u(1)^2 \longrightarrow u(1)^4. \quad (7.164)$$

Da jeweils drei Bedingungen wegfallen, gibt es drei dreidimensionale Hyperflächen mit diesen Symmetrien in den jeweiligen Moduliräumen. Sie schneiden sich in den kritischen Punkten.

3. Die Wilsonlinien sind α -kritisch (oder β -kritisch oder γ -kritisch). Dann ist die Symmetriebrechung

$$A_2 \oplus u(1)^4 \longrightarrow u(1)^2. \quad (7.165)$$

Es gibt drei sechsdimensionale Hyperflächen mit diesen Symmetrien. Sie schneiden sich in den drei dreidimensionalen Hyperflächen des vorigen Falles.

4. Fall: Die Wilsonlinien sind nicht kritisch. Dann ist die Symmetriebrechung

$$u(1)^6 \longrightarrow \mathbf{Z}_3. \quad (7.166)$$

Dies ist der Fall, wenn alle neun Parameter generisch gewählt werden. Die kritischen Hyperflächen sind Untermengen vom Maß Null.

Von Fall zu Fall wird die Symmetrie sowohl des Torus- als auch des Orbifold-Modells geringer, während die Zahl der frei wählbaren Parameter entsprechend ansteigt.

Um die Brechungen der E_6 -Algebra zu untersuchen, die aus der $A_2^\alpha \oplus A_2^\beta \oplus A_2^\gamma$ durch die Hinzunahme des Gewichtes

$$\mathbf{w} = -\alpha_1^* - \beta_1^* - \gamma_1^* \quad (7.167)$$

entsteht, müssen wir das Bild von $\hat{\mathbf{w}}$ in dem durch die Wilsonlinien deformierten Gitter Γ' betrachten. Es ist

$$\hat{\mathbf{w}}' = \hat{\mathbf{w}} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{A}_i) \mathbf{k}^i = \quad (7.168)$$

$$= \hat{\mathbf{w}} - \frac{1}{3}(p+q+r)(2\mathbf{k}^1 - \mathbf{k}^2) - \frac{1}{3}(x+y+z)(2\mathbf{k}^3 - \mathbf{k}^4) - \frac{1}{3}(a+b+c)(2\mathbf{k}^5 - \mathbf{k}^6).$$

Die Wilsonlinien sind genau dann $\mathbf{w}$ -kritisch, d.h. $\hat{\mathbf{w}}$ liegt in Γ' , wenn gilt:

$$p+q+r \in 3\mathbf{Z} \text{ und } x+y+z \in 3\mathbf{Z} \text{ und } a+b+c \in 3\mathbf{Z}. \quad (7.169)$$

Zusammen mit der Fallunterscheidung für kritische Wilsonlinien bezüglich der $A_2^{\oplus 3}$ Unter algebra, ergeben sich folgende zusätzliche Möglichkeiten der E_6 -Brechung:

1. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{w}, \alpha, \beta, \gamma)$ -kritisch. Dann vergrößert sich die Symmetrie im Torus-Modell auf E_6 . Die Brechung durch den Twist ist schon oben behandelt worden: Man erhält eine $A_2^{\oplus 3}$.

$$E_6 \longrightarrow A_2^{\oplus 3}. \quad (7.170)$$

Da alle neun Parameter nur diskrete Werte annehmen dürfen, erhält man eine Menge diskreter Punkte im Modulraum, die die gleiche Eichgruppe haben, wie das Modell ohne Wilsonlinien.

2. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{w}, \alpha, \beta)$ -kritisch (oder $(\mathbf{w}, \alpha, \gamma)$ -kritisch oder $(\mathbf{w}, \beta, \gamma)$ -kritisch). Dieser Fall kann nicht auftreten. Sind nämlich die Wilsonlinien schon (α, β) -kritisch, so sind insbesondere $p, q \in \mathbf{Z}$ und $r \notin \mathbf{Z}$. Dann kann aber nicht gleichzeitig $p+q+r \in 3\mathbf{Z}$ gelten, also sind die Wilsonlinien nicht $\mathbf{w}$ -kritisch.
3. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{w}, \alpha)$ -kritisch (oder $(\mathbf{w}, \beta)$ -kritisch oder $(\mathbf{w}, \gamma)$ -kritisch). Dann gibt es zusätzlich zu der ungebrochenen A_2^α des α -kritischen Falls weitere invariante Zustände. Diesmal sind es jedoch nicht alle $2 \cdot 27$ Zustände der $(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3})$ und der $(\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}})$ Darstellung, da die Wurzeln von A_2^β und A_2^γ nicht im Gitter liegen. Sie bräuchte man aber, um aus $\mathbf{w}$ und $-\mathbf{w}$ die genannten $2 \cdot 27$ Gewichte zu erzeugen. Da Wilsonlinien und Twist kompatibel sind, liegen aber alle Gewichte, die zum Twist-Orbit von $\pm \mathbf{w}$ gehören, im Gitter, also gibt es mindestens 6 zusätzliche Wurzeln.

$$\pm(-\alpha_1^* - \beta_1^* - \gamma_1^*), \quad \pm(\alpha_2^* + \beta_2^* + \gamma_2^*), \quad \pm(\alpha_1^* - \alpha_2^* + \beta_1^* - \beta_2^* + \gamma_1^* - \gamma_2^*). \quad (7.171)$$

Da außerdem die A_2^α Wurzeln im Gitter liegen, kann man sie zum α -Anteil dieser Wurzeln addieren und so diesen Anteil, unabhängig vom Rest als beliebiges $\mathbf{3}$ bzw. $\bar{\mathbf{3}}$ Gewicht der A_2^α wählen.

$$\pm(\alpha_1^* + \mathbf{v}) \in \Gamma' \Rightarrow \pm(-\alpha_2^* + \mathbf{v}), \pm(\alpha_2^* - \alpha_1^* + \mathbf{v}) \in \Gamma'. \quad (7.172)$$

Die $A_2^\alpha \oplus u(1)^4$ wird also um 18 Wurzeln erweitert. Die neue Symmetrieralgebra ist eine Oberalgebra von $A_2^\alpha \oplus u(1)^4$, eine Unter algebra von E_6 , hat den Rang 6, die Dimension 30 und 24 Wurzeln. Die einzige Möglichkeit ist daher $D_4 \oplus u(1)^2$. Durch Anwendung des Twistes wird die A_2^α -Unter algebra zur $u(1)^2$, die $u(1)^4$ wird völlig gebrochen und aus den 18 zusätzlichen Wurzel-Generatoren lassen sich 6 invariante Orbits bilden. Die Symmetrieralgebra des getwisteten Modells hat daher den Rang 2 und die Dimension 8, was nur die A_2 zuläßt.

$$D_4 \oplus u(1)^2 \longrightarrow A_2. \quad (7.173)$$

Da insgesamt vier Bedingungen an die neun Parameter gestellt werden, gibt es drei fünfdimensionale Hyperflächen mit Modellen dieser Symmetrie. Sie liegen in den drei sechsdimensionalen Hyperflächen mit α -kritischen, β -kritischen oder γ -kritischen Wilsonlinien.

4. Fall: Die Wilsonlinien sind $\mathbf{w}$ -kritisch. Da nun keine A_2^α Wurzeln mehr im Gitter sind, gibt es nur 6 zusätzliche Wurzeln. Sie erweitern die generische $u(1)^6$ zu einer zwölfdimensionalen Rang 6 Lie-Algebra mit 6 Wurzeln, also zur $A_2 u(1)^4$. Der Twist bricht die $u(1)^6$ Unter algebra vollständig und läßt von den sechs zusätzlichen Generatoren zwei invariante Kombinationen übrig. Es bleibt also eine $u(1)^2$.

$$A_2 u(1)^4 \longrightarrow u(1)^2. \quad (7.174)$$

Da die neun Parameter drei Gleichungen erfüllen müssen um $\mathbf{w}$ -kritisch zu sein, gibt es je eine sechsdimensionale Hyperfläche im Torus- und im Orbifoldmodulraum.

Die Fälle, in denen die Wilsonlinien nicht $\mathbf{w}$ -kritisch sind, wurden bereits früher untersucht. Damit sind jetzt alle Möglichkeiten zur Brechung der E_6 -Unteralgebra klassifiziert. Da uns aber eigentlich die Brechungen der E_8 interessieren, sind wir noch nicht fertig. Die bisher betrachtete E_6^δ wird mit der A_2^ϵ durch das Gewicht

$$\mathbf{e}_6 := \mathbf{v} = -\delta_5^* - \epsilon_2^*, \quad (7.175)$$

also durch die sechste einfache E_8 -Wurzel zur E_8 erweitert. Durch Zerlegung des E_6^δ Gewichtes $-\delta_5^*$ bezüglich der $A_2^{\oplus 3}$ Unteralgebra, kann man $\mathbf{e}_6$ als Gewicht der $A_2^{\oplus 4}$ Unteralgebra der E_8 ausdrücken:

$$\mathbf{v} = -\beta_2^* + \gamma_2^* - \epsilon_2^*. \quad (7.176)$$

Wir müssen nun feststellen, wann sich $\hat{\mathbf{v}}$ auch im deformierten Narain-Gitter befindet. Nun ist

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}' &= \hat{\mathbf{v}} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}_i) \mathbf{k}^i = \\ &= \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{3}(q-r)(\mathbf{k}^1 + \mathbf{k}^2) + \frac{1}{3}(y-z)(\mathbf{k}^3 + \mathbf{k}^4) + \frac{1}{3}(b-c)(\mathbf{k}^5 + \mathbf{k}^6). \end{aligned} \quad (7.177)$$

Die Wilsonlinien sind also genau dann $\mathbf{v}$ -kritisch, wenn gilt

$$(q-r) \in 3\mathbf{Z} \text{ und } (y-z) \in 3\mathbf{Z} \text{ und } (b-c) \in 3\mathbf{Z}. \quad (7.178)$$

Durch Kombination mit den Symmetriebrechungen der E_6 Unteralgebra ergeben sich folgende Möglichkeiten

1. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha, \beta, \gamma)$ -kritisch. Dann wird die Lie-Algebra E_8 im Torus-Modell realisiert und durch den Twist, wie früher gezeigt, zur $E_6 \oplus A_2$ gebrochen:

$$E_8 \longrightarrow E_6 \oplus A_2. \quad (7.179)$$

Es ergibt sich eine diskrete Menge von Modellen, die die gleiche Eichgruppe haben wie das Modell ohne Wilsonlinien.

2. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{v}, \alpha, \beta, \gamma)$ -kritisch. Im Torus-Modell gibt es eine ungebrochene $A_2^{\oplus 4}$ Unteralgebra, die durch zusätzliche Wurzeln erweitert wird. Die einzige Unteralgebra der E_8 , die eine Oberalgebra der $A_2^{\oplus 4}$ ist, ist die $A_2 \oplus E_6$. Obwohl damit die ungebrochene Symmetrie des Torus-Modells gefunden ist, ist es instruktiv, etwas ins Detail zu gehen. Zunächst ist $\alpha_i \cdot \mathbf{v} = 0$, d.h. die A_2^α Unteralgebra ist ein direkter Summand. Durch Addition der Wurzeln von A_2^β , A_2^γ und A_2^ϵ zu $\pm \mathbf{v}$ erhält man alle $2 \cdot 27$ Gewichte der $(\mathbf{3}, \overline{\mathbf{3}}, \mathbf{3})$ und der $(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{3}, \overline{\mathbf{3}})$ Darstellung. Sie erweitern die $A_2^\beta \oplus A_2^\gamma \oplus A_2^\epsilon$ zu einer E_6 . Beim Twisten bleibt die A_2^ϵ ungebrochen, die anderen drei A_2 Unteralgebren werden zu einer $u(1)^6$ gebrochen. Aus den $2 \cdot 27$ zusätzlichen Generatoren können $2 \cdot 9 = 18$ invariante Kombinationen gebildet werden. Die ungebrochene Symmetrieralgebra dieses Orbifoldmodells ist eine Unteralgebra der $A_2 \oplus E_6$, besitzt den Rang 8, die Dimension $6 + 8 + 18 = 32$ und $6 + 18 = 24$ Wurzeln. Daher handelt es sich um die $D_4 \oplus u(1)^4$:

$$A_2 \oplus E_6 \longrightarrow D_4 \oplus u(1)^4. \quad (7.180)$$

Auch hierbei handelt es sich um eine diskrete Menge von Modellen. Da, wie wir en passant bemerkten, die A_2^α faktorisiert, ergibt sich der nächste Fall ohne weitere Überlegungen.

3. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{v}, \beta, \gamma)$ -kritisch.

$$u(1)^2 \oplus E_6 \longrightarrow D_4 \oplus u(1)^2. \quad (7.181)$$

Hier entfallen die drei Bedingungsgleichungen an p, x, a , d.h. es gibt drei frei wählbare Parameter. Die sechs anderen Parameter können nur diskrete Werte annehmen, d.h. es ergibt sich je eine dreidimensionale Hyperfläche.

4. Fall: Die Wilsonlinien sind $\mathbf{v}$ -kritisch. Die generische $u(1)^6 \oplus A_2^\epsilon$ Symmetrie des Torus-Modells wird nur durch die aus $\mathbf{v}$ konstruierbaren zusätzlichen Wurzeln erweitert. Aus dem Twist-Orbit von $\pm \mathbf{v}$ erhält man sechs zusätzliche Wurzeln und da man noch A_2^ϵ Wurzeln addieren kann, gibt es insgesamt 18. Die vergrößerte Lie-Algebra besitzt insgesamt $6 + 18 = 24$ Wurzeln, die Dimension $6 + 8 + 18 = 32$ und den Rang 8. Außerdem muß sie eine Unter algebra der $u(1)^2 \oplus E_6$ und eine Ober algebra der $u(1)^6 \oplus A_2^\epsilon$ sein. Damit bleibt nur $D_4 \oplus u(1)^4$. Durch den Twist wird die $u(1)^6 \oplus A_2^\epsilon$ zur A_2^ϵ gebrochen, und aus den 18 zusätzliche Generatoren kann man 6 invariante Orbits bilden. Die ungebrochene Symmetrie algebra des Orbifold-Modells hat die Dimension $8 + 6 = 14$. Ferner muß sie den Rang zwei haben, zwölf Wurzeln besitzen, eine Ober algebra von A_2 und eine Unter algebra von D_4 sein. Die einzige Lie-Algebra, die diese Voraussetzungen erfüllt, ist die exzeptionelle Lie-Algebra G_2 . Sie ist, im Gegensatz zu allen anderen bisher aufgetretenen Lie-Algebren, nicht einfach verbunden, besitzt also Wurzeln zweierlei Länge, und ist zwar eine reguläre Ober algebra der A_2 (man erhält sie durch Eliminierung der kurzen Wurzeln) aber eine nicht-reguläre Unter algebra von D_4 . Der Grund für dieses neue Phänomen ist, daß der Twist kein innerer, sondern ein äußerer Automorphismus der D_4 ist. Genauer gesagt ist die D_4 die einzige einfache Lie-Algebra, die einen äußeren Automorphismus dritter Ordnung besitzt, und die invariante, nicht reguläre Unter algebra ist die G_2 . Alle anderen einfachen Lie-Algebren besitzen entweder keine äußeren Automorphismen oder - bis auf Konjugation - nur einen äußeren Automorphismus zweiter Ordnung. Die Symmetriebrechung ist

$$D_4 \oplus u(1)^{\oplus 4} \longrightarrow G_2. \quad (7.182)$$

Insgesamt müssen die neun Parameter drei Gleichungen erfüllen, d.h. die Dimension der Modellscharen ist sechs.

5. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{v}, \alpha)$ kritisch. Da, wie bereits erwähnt, die A_2^α faktorisiert, ergibt sich aus den Resultaten des vorangegangenen Falls

$$A_2^\alpha \oplus D_4 \oplus u(1)^2 \longrightarrow u(1)^2 \oplus G_2. \quad (7.183)$$

Man erhält eine dreidimensionale kritische Hyperfläche innerhalb der sechsdimensionalen Fläche des vorangegangenen Falls.

6. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ -kritisch. Da $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$ sind die zusätzlichen Wurzeln zueinander orthogonal. Durch die Kombination schon behandelter Fälle ergibt sich:

$$A_2 \oplus D_4 \oplus u(1)^2 \longrightarrow u(1)^2 \oplus G_2. \quad (7.184)$$

Es gibt drei freie Parameter, da sechs Gleichungen erfüllt werden müssen.

7. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha)$ -kritisch. Auch dieser Fall läßt sich auf zuvor behandelte zurückführen.

$$D_4 \oplus D_4 \oplus u(1)^2 \longrightarrow A_2 \oplus G_2. \quad (7.185)$$

Es gibt keine freien Parameter.

8. Fall: Die Wilsonlinien sind nicht $\mathbf{v}$ -kritisch. Dann faktorisiert die A_2^ϵ Unter algebra. Man erhält alle möglichen Unterfälle, indem man die bei der Brechung der E_6 auftretenden Lie-Algebren jeweils um diese A_2 erweitert. Die generische Situation, in der alle Moduli nicht kritisch sind, ist z.B.

$$u(1)^6 \oplus A_2 \longrightarrow A_2. \quad (7.186)$$

In dieser Liste wurden diejenigen Fälle ausgelassen, bei denen die Wilsonlinien nicht alle geforderten Bedingungen gleichzeitig erfüllen können. So können $\mathbf{v}$ -kritische Wilsonlinien nicht gleichzeitig (α, γ) -kritisch oder (α, β) -kritisch oder α -kritisch oder β -kritisch sein, da die entsprechenden Ganzzahligkeitsbedingungen nicht mit der modulo 3 Bedingung konsistent sind. Bei $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ -kritischen Wilsonlinien müssen zusätzlich die modulo 3 Bedingungen für $\mathbf{v}$ beachtet

werden. Die insgesamt möglichen Symmetriebrechungen durch kontinuierliche Wilsonlinien in dem gewählten neunparametrigen Unterraum stelle ich in der Tabelle 7.3 zusammen. Dort werden, geordnet nach dem Typ der Kritizität der Wilsonlinien, die Symmetrieralgebren des Torus- und Orbifold-Modells, die Eichgruppe des Orbifolds und die Anzahl der noch kontinuierlich variierbaren Moduli angegeben.

Unter den Orbifold-Eichgruppen tritt die Eichgruppe des Standard-Modells nicht auf, dafür aber einige Gruppen, die eine $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ Untergruppe besitzen, nämlich E_6 , $G(2) \otimes SU(3)$ und $SU(3) \otimes SU(3)$. Zu deren weiterer Brechung stehen immer noch drei weitere Moduli, nämlich die isometrischen Wilson-Moduli zur Verfügung, also Rotationen der Wilsonlinien relativ zum $A_2^{\oplus 3}$ Gitter. Als nächstes kann man inhomogene Lösungen der verallgemeinerten Kommutatorgleichung untersuchen, also zu den kontinuierlichen Wilsonlinien diskrete addieren, die eine zusätzliche Symmetriebrechung im α, β, γ Sektor bewirken. Außerdem kann die $A_2^{\oplus 3}$ durch diskrete Wilsonlinien gebrochen werden. Diesen Fall möchte ich noch analysieren, um auch für die Symmetriebrechung durch diskrete Wilsonlinien ein Beispiel zu geben. Wenn wir weiterhin die zweite E_8 ignorieren, so nehmen die diskreten Teile $\tilde{\mathbf{A}}_i$ der Wilsonlinien $\mathbf{A}_i$ Werte in dem von ϵ_1, ϵ_2 aufgespannten Unterraum an. Die möglichen Werte der $\tilde{\mathbf{A}}_i$ waren bereits früher bestimmt worden. Angewandt auf unser Beispiel gilt:

$$\tilde{\mathbf{A}}_i \in \frac{1}{3}I_{E_8} = \frac{1}{3}A_2^{(R)}. \quad (7.187)$$

Weiterhin müssen die diskreten Wilsonlinien modulo I_{E_8} wie die ihnen zugeordneten Richtungen von Λ transformieren. Da sie twistinvariant sind gilt:

$$\theta' \tilde{\mathbf{A}}_i - \theta_i^j \tilde{\mathbf{A}}_j = (\delta_i^j - \theta_i^j) \tilde{\mathbf{A}}_j \in A_2^{(R)}. \quad (7.188)$$

Durch Einsetzen von θ_i^j gemäß (7.118) folgt:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}_{2i-1} - \tilde{\mathbf{A}}_{2i} \in A_2^{(R)}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_{2i-1} + 2\tilde{\mathbf{A}}_{2i} \in A_2^{(R)}, \end{cases} \quad (7.189)$$

mit $i = 1, 2, 3$. Durch geeignete Addition bzw. Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt $3\tilde{\mathbf{A}}_k \in A_2^{(R)}$ $k = 1, \dots, 6$. Da

$$\tilde{\mathbf{A}}_{2i-1} + 2\tilde{\mathbf{A}}_{2i} = (\tilde{\mathbf{A}}_{2i-1} - \tilde{\mathbf{A}}_{2i}) + 3\tilde{\mathbf{A}}_{2i}, \quad (7.190)$$

ist ein äquivalenter Satz von Bedingungsgleichungen durch

$$\begin{cases} 3\mathbf{A}_k \in A_2^{(R)}, & k = 1, \dots, 6, \\ \mathbf{A}_{2i-1} - \mathbf{A}_{2i} \in A_2^{(R)}, & i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (7.191)$$

gegeben. Anders ausgedrückt: Wilsonlinien, die durch den Ortsraumtwist aufeinander abgebildeten Richtungen von Λ zugeordnet sind, müssen in der selben Nebenklasse des Gitters $\frac{1}{3}A_2^{(R)}$ bezüglich des Untergitters $A_2^{(R)}$ liegen. Es gibt $3^2 = 9$ solche Nebenklasse. Die kanonischen Repräsentanten sind

$$\frac{m}{3}\epsilon_1 + \frac{n}{3}\epsilon_2, \quad m, n = 0, 1, 2. \quad (7.192)$$

Nur drei dieser Vektoren sind Gewichte der $A_2^{\natural}$ nämlich

$$\frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 = \alpha_1^*, \quad \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 = \alpha_2^* \text{ und } \mathbf{0}. \quad (7.193)$$

Nur wenn alle sechs $\tilde{\mathbf{A}}_i$ modulo $\frac{1}{3}A_2^{(R)}$ diese Werte annehmen, wird die $A_2^{\natural}$ im Torus-Modell nicht gebrochen, und im getwisteten Modell erscheint eine entsprechende $u(1)^2$. Solche Wilsonlinien sind also ϵ -kritisch. Sobald ein Wilsonlinienpaar Werte in einer anderen Restklasse

annimmt, werden die A_2^ϵ Wurzeln ausprojiziert. Die A_2 wird durch die diskreten Wilsonlinien zur $u(1)^2$, und durch den anschließenden Twist vollständig gebrochen.

Im allgemeinen werden die Wilsonlinien $\mathbf{A}_i = \hat{\mathbf{A}}_i + \tilde{\mathbf{A}}_i$ sowohl diskrete als auch kontinuierliche Anteile besitzen. Für alle Wilsonlinien die nicht $\mathbf{v}$ -kritisch sind, ist die Verallgemeinerung einfach: In den früher gefundenen Fälle ändert sich die Eichgruppe nicht, falls der diskrete Teil ϵ -kritisch ist. Ist er es nicht, so ersetzt man bei der Lie-Algebra des Torus-Modells, die A_2^ϵ durch eine $u(1)^2$ und streicht bei der Lie-Algebra des Orbifold-Modells eine $u(1)^2$. Da der Vektor $\mathbf{v}$ ein nichttriviales Gewicht der A_2^ϵ ist, muß die Definition des Begriffes $\mathbf{v}$ -kritisch verallgemeinert werden. Die diskreten Teile der Wilsonlinien seien, modulo $A_2^{(R)}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 \simeq \tilde{\mathbf{A}}_2 = \frac{m_1}{3}\epsilon_1 + \frac{n_1}{3}\epsilon_2, \quad \tilde{\mathbf{A}}_3 \simeq \tilde{\mathbf{A}}_4 = \frac{m_2}{3}\epsilon_1 + \frac{n_2}{3}\epsilon_2, \quad \tilde{\mathbf{A}}_5 \simeq \tilde{\mathbf{A}}_6 = \frac{m_3}{3}\epsilon_1 + \frac{n_3}{3}\epsilon_2. \quad (7.194)$$

Die kontinuierlichen Teile werden wie früher parametrisiert. Dann sind die Wilsonlinien genau dann $\mathbf{v}$ -kritisch, d.h. $\hat{\mathbf{v}}$ ist im deformierten Narain-Gitter, wenn gilt

$$(q - r - n_2) \in 3\mathbf{Z} \text{ und } (y - z - n_2) \in 3\mathbf{Z} \text{ und } (b - c - n_3) \in 3\mathbf{Z}. \quad (7.195)$$

Da die n_i ganzzahlig sind, bleibt die alte Fallunterscheidung für $\mathbf{v}$ -kritische Wilsonlinien gültig. In allen Fällen, in denen die Wilsonlinien sowohl $\mathbf{v}$ -kritisch als auch ϵ -kritisch sind, erhält man die gleichen Eichgruppen wie früher. Änderungen ergeben sich nur, wenn die diskreten Wilsonlinien die A_2^ϵ brechen.

1. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha, \beta, \gamma)$ kritisch, aber nicht ϵ -kritisch. Zunächst gibt es eine $E_6 \oplus u(1)^2$ -Unteralgebra. Da die A_2^ϵ -Wurzeln nicht mehr im Gitter liegen, können ausgehend von $\pm \mathbf{v}$ nicht mehr $2 \cdot 27$ sondern nur noch $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ zusätzliche Wurzeln konstruiert werden. Durch Addition von Gewichten der $(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3})$ und $(\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}})$ Darstellung der $A_2^\alpha \oplus A_2^\beta \oplus A_2^\gamma$ verdreifacht sich diese Zahl auf 54. Das Ergebnis ist eine $78+54+2 = 134$ dimensionale Unteralgebra von E_8 , die 126 Wurzeln besitzt und eine Oberalgebra von $E_6 \oplus u(1)^2$ ist: Die $E_7 \oplus u(1)$. Beim Twisten wird die $A_2^{\oplus 3} \oplus u(1)^2$ Unteralgebra zu einer $u(1)^8$ gebrochen. Aus den restlichen $2 \cdot 54 = 108$ Wurzelgeneratoren kann man $2 \cdot 18 = 36$ invariante Generatoren konstruieren. Die Lie-Algebra des getwisteten Modells hat die Dimension $36+8 = 44$, sie ist sowohl eine Unteralgebra (via Twist) der $E_7 \oplus u(1)$ als auch (via Wilsonlinien) der $E_6 \oplus A_2$. Wie immer gibt es nur eine Möglichkeit, die $A_5 \oplus A_2 \oplus u(1)$. Die dabei verwendeten Einbettungsketten sind:

$$A_5 \oplus A_2 \subset E_7 \text{ und } A_5 \oplus u(1) \subset A_5 \oplus A_1 \subset E_6. \quad (7.196)$$

Insgesamt hat man

$$\begin{array}{ccc} \text{Torus:} & E_8 & \xrightarrow{\text{d.WL}} E_7 \oplus u(1) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \text{Orbifold:} & E_6 \oplus A_2 & \xrightarrow{\text{d.WL}} A_5 \oplus A_2 \oplus u(1) \end{array} \quad (7.197)$$

2. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{v}, \alpha, \beta, \gamma)$ kritisch, aber nicht ϵ -kritisch. Die Unteralgebra $A_2^\beta \oplus A_2^\gamma \oplus u(1)^2$ wird durch $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ zusätzliche Wurzeln erweitert. Die vergrößerte Lie-Algebra hat die Dimension $18+18 = 36$ und $18+12 = 30$ Wurzeln. Da sie zudem eine Unteralgebra der E_6 sein muß, handelt es sich um die $A_5 \oplus u(1)$. Hinzu kommt noch die A_2^α . Der Twist bricht die $A_5 \oplus u(1)$ zu einer $6+6 = 12$ dimensionalen Unteralgebra, die eine simultane Unteralgebra von $D_4 \oplus u(1)^2$ und $A_5 \oplus u(1)$ sein muß. Die einzige Möglichkeit ist $A_2 \oplus u(1)^4$. Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{array}{ccc} \text{Torus:} & A_2 \oplus E_6 & \xrightarrow{\text{d.WL}} A_2 \oplus A_5 \oplus u(1) \\ & \downarrow & \downarrow \\ \text{Orbifold:} & u(1)^4 \oplus D_4 & \xrightarrow{\text{d.WL}} u(1)^6 \oplus A_2 \end{array} \quad (7.198)$$

3. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{v}, \beta, \gamma)$ kritisch, aber nicht ϵ -kritisch. Da die A_2^α im vorherigen Beispiel faktorisiert, folgt sofort:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Torus:} & u(1)^2 \oplus E_6 & \xrightarrow{\text{d.WL}} u(1)^2 \oplus A_5 \oplus u(1) \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 \text{Orbifold:} & u(1)^2 \oplus D_4 & \xrightarrow{\text{d.WL}} u(1)^2 \oplus A_2
 \end{array} \tag{7.199}$$

4. Fall: Die Wilsonlinien sind $(\mathbf{v}, \alpha)$ -kritisch oder $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ -kritisch oder $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha)$ -kritisch oder $\mathbf{v}$ -kritisch, aber nicht ϵ -kritisch. Alle diese Fälle können, aufgrund der aus den Orthogonalitätsrelationen $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ und $\mathbf{v} \cdot \alpha_i$ resultierenden Faktorisierungen von Teilgittern, gleichzeitig behandeln. Sobald die A_2^ϵ -Wurzeln nicht mehr im Gitter liegen, kann man aus $\pm \mathbf{v}$ nur $2 \cdot 3 = 6$ zusätzliche Wurzeln konstruieren, die aufgrund der Orthogonalitätsrelationen zu einer A_2 gehören müssen, die der Twist dann zu einer $u(1)^2$ bricht. Die in all diesen Fällen vorzunehmende Substitution gegenüber dem ϵ -kritischen Fall ist:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Torus:} & D_4 & \xrightarrow{\text{d.WL}} A_2 \oplus u(1)^2 \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 \text{Orbifold:} & G_2 & \xrightarrow{\text{d.WL}} u(1)^2
 \end{array} \tag{7.200}$$

5. Fall: Die Wilsonlinien sind weder $\mathbf{v}$ -kritisch noch ϵ -kritisch. Hier muß lediglich gegenüber den entsprechenden Fällen mit ϵ -kritischen Wilsonlinien die A_2^ϵ durch eine $u(1)^2$ ersetzt werden. Diese wird durch den Twist nicht gebrochen. Dies ist zugleich der generische Fall.

Die Ergebnisse werden in der Tabelle 7.4 zusammengefasst.

Die vollständige Klassifikation der Eichgruppen von $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds mit Standard-Einbettung und allgemeinen Wilsonlinien würde jetzt noch die Hinzunahme inhomogener Lösungen der verallgemeinerten Kommutatorgleichung und der isometrischen Wilsonmoduli erfordern. Zu einer phänomenologischen Analyse würde darüber hinaus die Bestimmung des vollen Spektrums, die Berechnung von Korrelationsfunktionen², die Aufstellung einer effektiven Wirkung usw. gehören. Dies kann hier aus verständlichen Gründen nicht geleistet werden. Dennoch hat das Beispiel gezeigt, daß die von mir adaptierten bzw. neu entwickelten Methoden, eine systematische und hinsichtlich der Bestimmung der Eichgruppe ökonomische Untersuchung der Moduliräume von Orbifold-Modellen mit kontinuierlichen Wilsonlinien ermöglichen.

²Die Berechnung von Korrelationsfunktionen erfolgt mit Hilfe der konformen WF-Feldtheorie mit den in [47] und [22] entwickelten Methoden. Für eine Verallgemeinerung auf Orbifolds mit Hintergrundfeldern siehe [55].

Kritizität	Lie-Algebra, Torus	Lie-Algebra, Orbifold	Eichgruppe	Moduli
$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha, \beta, \gamma$	E_8	$E_6 \oplus A_2$	$E(6) \otimes SU(3)$	0
$\mathbf{v}, \alpha, \beta, \gamma$	$A_2 \oplus E_6$	$D_4 \oplus u(1)^4$	$SO(8) \otimes U(1)^2$	0
$\mathbf{w}, \alpha, \beta, \gamma$	$E_6 \oplus A_2$	$A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$	$(SU(3))^4$	0
α, β, γ	$A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus A_2$	$u(1)^6 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes U(1)^6$	0
$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha$	$D_4 \oplus D_4 \oplus u(1)^2$	$A_2 \oplus G_2$	$G(2) \otimes SU(3)$	0
$\mathbf{v}, \mathbf{w}$	$A_2 \oplus D_4 \oplus u(1)^2$	$G_2 \oplus u(1)^2$	$G(2) \otimes U(1)^2$	3
$\mathbf{v}, \alpha$	$A_2 \oplus D_4 \oplus u(1)^2$	$G_2 \oplus u(1)^2$	$G(2) \otimes U(1)^2$	3
$\mathbf{v}, \beta, \gamma$	$u(1)^2 \oplus E_6$	$D_4 \oplus u(1)^2$	$SO(8) \otimes U(1)^2$	3
α, β	$A_2 \oplus A_2 \oplus u(1)^2 \oplus A_2$	$u(1)^4 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes U(1)^4$	3
α, γ	$A_2 \oplus A_2 \oplus u(1)^2 \oplus A_2$	$u(1)^4 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes U(1)^4$	3
β, γ	$A_2 \oplus A_2 \oplus u(1)^2 \oplus A_2$	$u(1)^4 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes U(1)^4$	3
$\mathbf{w}, \alpha$	$D_4 \oplus u(1)^2 \oplus A_2$	$A_2 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes SU(3)$	5
$\mathbf{w}, \beta$	$D_4 \oplus u(1)^2 \oplus A_2$	$A_2 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes SU(3)$	5
$\mathbf{w}, \gamma$	$D_4 \oplus u(1)^2 \oplus A_2$	$A_2 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes SU(3)$	5
$\mathbf{w}$	$A_2 \oplus u(1)^4 \oplus A_2$	$u(1)^2 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes U(1)^2$	6
α	$A_2 \oplus u(1)^4 \oplus A_2$	$u(1)^2 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes U(1)^2$	6
β	$A_2 \oplus u(1)^4 \oplus A_2$	$u(1)^2 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes U(1)^2$	6
γ	$A_2 \oplus u(1)^4 \oplus A_2$	$u(1)^2 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes U(1)^2$	6
$\mathbf{v}$	$D_4 \oplus u(1)^4$	G_2	$G(2)$	6
—	$u(1)^6 \oplus A_2$	A_2	$SU(3)$	9

Abbildung 7.3: Diese Tabelle enthält alle Möglichkeiten der Symmetriebrechung des Standard $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds durch metrische Wilsonmoduli. Die zweite E_8 bleibt dabei ungebrochen. Die Spalte „Kritizität“ bezieht sich auf die im Text beschriebenen Klassifizierung von Wilsonlinien. Außer den Lie-Algebren des Torus- und des Orbifold-Modells und der Eichgruppe des Orbifolds wird in der Spalte „Moduli“ die Anzahl der noch kontinuierlich variierbaren metrischen Wilsonmoduli, d.h. die Dimension der betreffenden Hyperfläche im Modulraum angegeben.

Kritizität	Lie-Algebra, Torus	Lie-Algebra, Orbifold	Eichgruppe	Moduli
$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha, \beta, \gamma$	$E_7 \oplus u(1)$	$A_5 \oplus A_2 \oplus u(1)$	$SU(6) \otimes SU(3) \otimes U(1)$	0
$\mathbf{v}, \alpha, \beta, \gamma$	$A_2 \oplus A_5 \oplus u(1)$	$u(1)^6 \oplus A_2$	$SU(3) \otimes U(1)^6$	0
$\mathbf{w}, \alpha, \beta, \gamma$	$E_6 \oplus u(1)^2$	$A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus u(1)^2$	$(SU(3))^3 \otimes U(1)^2$	0
α, β, γ	$A_2 \oplus A_2 \oplus A_2 \oplus u(1)^2$	$u(1)^8$	$U(1)^8$	0
$\mathbf{v}, \mathbf{w}, \alpha$	$D_4 \oplus A_2 \oplus u(1)^4$	$A_2 \oplus u(1)^2$	$SU(3) \otimes U(1)^2$	0
$\mathbf{v}, \mathbf{w}$	$A_2 \oplus A_2 \oplus u(1)^4$	$u(1)^4$	$U(1)^4$	3
$\mathbf{v}, \alpha$	$A_2 \oplus A_2 \oplus u(1)^4$	$u(1)^4$	$U(1)^4$	3
$\mathbf{v}, \beta, \gamma$	$u(1)^3 \oplus A_5$	$A_2 \oplus u(1)^2$	$SU(3) \otimes U(1)^2$	3
α, β	$A_2 \oplus A_2 \oplus u(1)^4$	$u(1)^6$	$U(1)^6$	3
α, γ	$A_2 \oplus A_2 \oplus u(1)^4$	$u(1)^6$	$U(1)^6$	3
β, γ	$A_2 \oplus A_2 \oplus u(1)^4$	$u(1)^6$	$U(1)^6$	3
$\mathbf{w}, \alpha$	$D_4 \oplus u(1)^4$	$A_2 \oplus u(1)^2$	$SU(3) \otimes U(1)^2$	5
$\mathbf{w}, \beta$	$D_4 \oplus u(1)^4$	$A_2 \oplus u(1)^2$	$SU(3) \otimes U(1)^2$	5
$\mathbf{w}, \gamma$	$D_4 \oplus u(1)^2 \oplus u(1)^2$	$A_2 \oplus u(1)^2$	$SU(3) \otimes U(1)^2$	5
$\mathbf{w}$	$A_2 \oplus u(1)^6$	$u(1)^4$	$U(1)^4$	6
α	$A_2 \oplus u(1)^6$	$u(1)^4$	$U(1)^4$	6
β	$A_2 \oplus u(1)^6$	$u(1)^4$	$U(1)^4$	6
γ	$A_2 \oplus u(1)^6$	$u(1)^4$	$U(1)^4$	6
$\mathbf{v}$	$A_2 \oplus u(1)^6$	$u(1)^4$	$U(1)^4$	6
—	$u(1)^8$	$u(1)^2$	$U(1)^2$	9

Abbildung 7.4: Diese Tabelle enthält alle Möglichkeiten der Symmetriebrechung des Standard $\mathbf{Z}_3$ -Orbifolds durch metrische Wilsonmoduli, bei Anwesenheit von diskreten Wilsonlinien, die die twistinvariante A_2^5 brechen.

Kapitel 8

Diskussion der Ergebnisse

In diesem letzten Kapitel werden die in den vorangegangenen Kapiteln erarbeiteten Resultate zusammengefaßt. Danach werden sie durch einen Überblick über die heute bekannten vierdimensionalen Lösungen der Stringtheorie in den Gesamtzusammenhang eingeordnet. Abschließend diskutiere ich die daraus resultierenden Anwendungsmöglichkeiten, mögliche Verallgemeinerungen und offenen Fragen.

8.1 Zusammenfassung der Ergebnisse

In dieser Arbeit wurden toroidale und Orbifold-Kompaktifizierungen der heterotischen Stringtheorie daraufhin untersucht, wie die realisierte Eichgruppe von den kontinuierlich veränderbaren Parametern, den Moduli, abhängt. Der Zusammenhang konnte durch Herausarbeiten der in diesen Modellen realisierten (Lie-) algebraischen Strukturen transparent gemacht werden.

Durch toroidale Kompaktifizierungen,

$$\mathbf{M}^{10} \rightarrow \mathbf{M}^4 \times \mathbf{T}^6, \quad (8.1)$$

erhält man die einfachsten vierdimensionalen Lösungen der heterotischen Stringtheorie. Die Geometrie der sechs internen Dimensionen wird durch das Ortsraumgitter Λ beschrieben:

$$\mathbf{T}^6 = \frac{\mathbf{R}^6}{2\pi\Lambda}. \quad (8.2)$$

Durch die Reinterpretation als Kompaktifizierung auf einem orthogonalen Torus in Anwesenheit eines konstanten Gravitationsfeldes $G_{ij} \neq \delta_{ij}$ können die dabei möglichen kontinuierlichen Deformationen von $\mathbf{T}^6$ parametrisiert werden. Im allgemeinen Fall existieren weitere Hintergrundfelder, nämlich der antisymmetrische Tensor B_{ij} und die Hintergrund-Eichfelder $\mathbf{A}_i$, die sogenannten Wilsonlinien. Zusammen parametrisieren die drei Arten von Hintergrundfeldern alle physikalisch inäquivalenten Deformationen des Impulsgitters

$$\Gamma_{22;6} = \Gamma_{22;6}(G_{ij}, B_{ij}, \mathbf{A}_i), \quad (8.3)$$

das aus den ladungsartigen Quantenzahlen aller Zustände besteht. In Kapitel 5 wurde die Abhängigkeit der Eichgruppe von den Moduli untersucht. Den Ausgangspunkt bildeten dabei Kompaktifizierungen ohne zusätzliche Hintergrundfelder, die die Eichgruppe

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^{(16)} \otimes U(1)^6, \quad (8.4)$$

mit

$$\mathbf{G}^{(16)} = E(8) \otimes E(8) \text{ oder } \mathbf{G}^{(16)} = SO(32) \quad (8.5)$$

besitzen. Zuerst wurden die durch die Hinzunahme von Wilsonlinien möglichen Symmetriebrechungen charakterisiert. Dazu wurde auf die von Dynkin entwickelte Theorie der regulären Unteralgebren von Lie-Algebren mit ihrem eleganten diagrammatischen Formalismus zurückgegriffen. Durch Implementierung der „Methode der erweiterten Dynkin-Diagramme“ wurde gezeigt, daß die Lie-Algebren $\mathfrak{g} = E_8 \oplus E_8$ und $\mathfrak{g} = D_{16}$ der beiden ursprünglichen Eichgruppen auf jede maximale reguläre Unteralgebra gebrochen werden können. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Wilsonlinien zwar Gewichte der maximalen Unteralgebra $\mathfrak{g}'$, aber nicht alle auch Gewichte der ursprünglichen Lie-Algebra sind:

$$\mathbf{A}_i \in \Gamma_W(\mathfrak{g}') - \Gamma_W(\mathfrak{g}). \quad (8.6)$$

Solche Wilsonlinien können explizit durch die Basisvektoren der auftretenden Gitter ausgedrückt werden. Im allgemeinen existieren mehrere Möglichkeiten der Brechung auf die gleiche maximale Unteralgebra, die sich durch ihr sonstiges Spektrum unterscheiden. Die inäquivalenten Lösungen können durch die endliche Menge

$$\Gamma_W(\mathfrak{g}')/\Gamma_R(\mathfrak{g}') \quad (8.7)$$

der Nebenklassen bezüglich des Wurzelgitters parametrisiert werden.

Durch die Iteration des Verfahrens erhält man alle regulären Unteralgebren maximalen Ranges. Um die n -te Unteralgebra in einer Kette maximaler regulärer Unteralgebren

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \dots \quad (8.8)$$

zu realisieren, wählt man die Wilsonlinien als Gewichte von $\mathfrak{g}^{(n)}$, aber so, daß sie keine Gewichte der nächstgrößeren Unteralgebra sind:

$$\mathbf{A}_i \in \Gamma_W(\mathfrak{g}^{(n)}) - \Gamma_W(\mathfrak{g}^{(n-1)}). \quad (8.9)$$

Da die Menge der Unteralgebren bezüglich der Inklusion nur partiell geordnet ist, gibt es Unteralgebren, die in mehreren Einbettungsketten auftreten. Dies kann zwar zu unerwünschten Symmetrievergrößerungen führen, ist aber in der Praxis kein Problem, da es sich durch Zählen der im Spektrum auftretenden Eichbosonen leicht feststellen und durch eine andere Wahl der Wilsonlinien beheben läßt.

Ausgehend von den regulären Unteralgebren maximalen Ranges können alle regulären Unteralgebren des Typs halbeinfach $\oplus$ abelsch konstruiert werden. Auch hier wird eine von Dynkin angegebene Regel implementiert und gezeigt, daß für jede Unteralgebra des maximalen Ranges explizit angebbare einparametrische kontinuierliche Deformationen der Wilsonlinien existieren, die den Rang des halbeinfachen Teils der Lie-Algebra um eins auf 15 senken. Durch Iteration des Verfahrens kann der Rang dann immer weiter reduziert werden, wobei jede Verringerung um eins einen weiteren kontinuierlichen Parameter pro Wilsonlinie liefert. Insgesamt ergibt sich so eine Hierarchie kritischer Unterräume des Modulraumes, deren Dimension in dem Maße steigt, in dem die Eichgruppe kleiner wird.

Durch die Hinzunahme der anderen Hintergrundfelder ergeben sich ganz neue Möglichkeiten, da man die ursprüngliche Eichgruppe zunächst vergrößern und dann wieder brechen kann. Die generische Eichgruppe $U(1)^6$ des Kompaktifizierungssektors kann zu jeder Gruppe der Form

$$\mathbf{G}^{(6)} = \mathbf{G}^{(l)} \otimes U(1)^{6-l} \quad (8.10)$$

erweitert werden, wobei $\mathbf{G}^{(l)}$ eine halbeinfache Lie-Gruppe vom Rang l mit einer Lie-Algebra vom ADE-Typ ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung an die Hintergrundfelder ist

$$G_{ij} + \frac{1}{4}\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j = \frac{1}{4}C_{ij} \simeq B_{ij} \pmod{\frac{1}{2}}. \quad (8.11)$$

Dabei ist C_{ij} die Cartan-Matrix von $\mathbf{G}^{(l)}$ und die zweite Gleichung braucht nur modulo $1/2$ erfüllt werden. In der bisherigen Literatur wurden nur die Spezialfälle $\mathbf{A}_i = 0$ und $B_{ij} = 0$

diskutiert. Im ersten Fall wird die Eichgruppe $\mathbf{G}^{(16)}$ nicht gebrochen, was aber im allgemeinen Fall sehr wohl stattfindet. Im zweiten Fall kann $\mathbf{G}^{(l)}$ nur aus $SU(2)$ Faktoren bestehen oder $\mathbf{G}^{(l)}$ bildet zusammen mit $\mathbf{G}^{(16)}$ eine größere einfache Lie-Gruppe. Die vielfältigen neuen Möglichkeiten, die sich durch eine Kombination symmetriebrechender und symmetrieerweiternder Effekte im allgemeinen Fall ergeben, können an einem Beispiel illustriert werden, in dem nicht nur $\mathbf{G}^{(16)}$ gebrochen und $\mathbf{G}^{(6)}$ erweitert wird, sondern aus den einfachen Faktoren beider Gruppen größere einfache Gruppen, zum Beispiel $SU(5)$ -Gruppen, gebildet werden. Auch hier gibt es für diskrete Werte der Moduli Modelle mit maximaler Symmetrie, die als Ausgangspunkt weiterer Symmetriebrechungen dienen können. Dies führt wiederum zu einer Hierarchie kritischer Hyperflächen im Modulraum.

Der Zusammenhang der von mir entwickelten Methode mit der Verschiebungsvektormethode ist in Kapitel 5.5 beschrieben worden. Beide Methoden ergänzen sich in ihren Vor- und Nachteilen. Der Hauptvorteil des Arbeitens mit kritischen Hintergrundfeldern ist, daß die Abhängigkeit von den Moduli explizit ist und sich die Eichgruppe leichter bestimmen oder vorgeben läßt. Die Konjugationsklassen-Arithmetik der Verschiebungsvektormethode ermöglicht eine leichte Konstruktion des vollständigen Spektrums und erleichtert heuristische Überlegungen, wenn alle Arten von Hintergrundfeldern gleichzeitig präsent sind.

Toroidale Kompaktifizierungen der heterotischen Stringtheorie führen zu vierdimensionalen Modellen mit vierfach erweiterter Supersymmetrie, die keine chiralen Fermionen zulassen. Der Anschluß an die Phänomenologie großer vereinheitlichter Theorien gelingt durch die Kompaktifizierung auf sechsdimensionalen Orbifolds,

$$\mathbf{M}^{10} \rightarrow \mathbf{M}^4 \times \mathbf{O}^6, \quad (8.12)$$

die durch das Ausdividieren einer diskreten Untergruppe $S^{(6)}$ der sechsdimensionalen euklidischen Gruppe definiert sind:

$$\mathbf{O}^6 = \frac{\mathbf{R}^6}{S^{(6)}}. \quad (8.13)$$

Die in dieser Arbeit betrachteten Orbifolds können äquivalent durch das Ausdividieren einer zyklischen Gruppe von Drehungen bei einem Torus realisiert werden:

$$\mathbf{O}^6 = \frac{\mathbf{T}^6}{\langle \theta \rangle}, \quad \theta \in O(6). \quad (8.14)$$

Der erzeugende Twist hat die endliche Ordnung N ,

$$\theta^N = \mathbf{1}. \quad (8.15)$$

Der Twist wird auf die Eichfreiheitsgrade ausgedehnt, um die Eichgruppe $\mathbf{G}^{(16)}$ zu brechen und um insbesondere ihren Rang zu verkleinern, was in toroidalen Kompaktifizierungen nicht möglich ist. Durch Orbifold-Kompaktifizierungen erhält man semirealistische Modelle mit einfacher Supersymmetrie, chiralen Fermionen, einer Familienstruktur und interessanten vereinheitlichten Eichgruppen, z. B. $E(6)$. In der bisherigen Literatur war jedoch das Studium von Hintergrundfeldern, insbesondere von Wilsonlinien, nicht systematisch betrieben worden. Unter Benutzung der in Kapitel 5 gewonnenen Ergebnisse über Hintergrundfelder in toroidalen Kompaktifizierungen wurden in Kapitel 7 die Konsistenzbedingungen zwischen Twist und Hintergrundfeldern formuliert und untersucht. Aus der Literatur war bekannt, daß der durch den Ortsraumtwist θ und den Eichtwist θ' induzierte Twist Θ des Impulsgitters $\Gamma_{22,6}$ ein Gitterautomorphismus sein muß. Um zu einer expliziten Charakterisierung der bei einem gegebenen Twist zulässigen Hintergrundfelder zu gelangen, wurde nach dem Vorbild von [48] geprüft, wann das Bild eines Basisvektors von $\Gamma_{22,6}$ eine ganzzahlige Linearkombination von Basisvektoren ist. Es ergaben sich vier unabhängige Bedingungen:

- Der Ortsraumtwist muß ein Automorphismus des Ortsraumgitters sein:

$$\theta \in \text{Aut}(\Lambda). \quad (8.16)$$

Eine äquivalente Charakterisierung ist, daß das Hintergrund-Gravitationsfeld eine verallgemeinerte Vertauschungsrelation mit den Matrizen von θ bezüglich der Standardbasen von Λ und Λ^* erfüllt:

$$G_{ij}\theta_k^j - \theta_i^j G_{jk} = 0 \quad (8.17)$$

Diese Bedingung tritt auch bei Orbifolds der bosonischen Stringtheorie auf [55].

- Der Eichtwist θ' muß ein Automorphismus des Gitters Γ_{16} der 16 Eichfreiheitsgrade sein:

$$\theta' \in \text{Aut}(\Gamma_{16}). \quad (8.18)$$

Diese Bedingung stellt sicher, daß in der getwisteten Theorie eine Trennung der linkslaufenden Freiheitsgrade in Eichfreiheitsgrade und Koordinaten des inneren Raumes $\mathbf{T}^6$ möglich ist.

- Der Eichtwist operiert auf den Wilsonlinien bis auf Vektoren aus Γ_{16} so, wie der Ortsraumtwist auf den entsprechenden Richtungen von $\mathbf{T}^6$ operiert:

$$\theta' \mathbf{A}_i = \theta_i^j \mathbf{A}_j \text{ mod } \Gamma_{16}. \quad (8.19)$$

In der bisherigen Literatur wurde immer verlangt, daß diese Relation exakt gilt. Sie wurde dann als Einbettung der sechsdimensionalen Translationsgruppe in die sechszehndimensionale interpretiert. Dies ist aber nicht die allgemeinste Lösung.

- Die Twistmatrizen und die Kombination

$$D_{ij} = 2 \left(B_{ij} - G_{ij} - \frac{1}{4}(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j) \right) \quad (8.20)$$

der Hintergrundfelder müssen die verallgemeinerte Kommutatorgleichung

$$D_{ij}\theta_k^j - \theta_i^j D_{jk} = M_{ik} - M_i^A (f_A \cdot \mathbf{A}_k) \quad (8.21)$$

mit ganzzahligen M -Matrizen erfüllen. Läßt man die Wilsonlinien weg, so erhält man einfachere separate Gleichungen für das G_{ij} - und das B_{ij} -Feld. Dieselben Gleichungen treten bei Orbifolds der bosonischen Stringtheorie auf [55]. Heterotische Orbifolds mit Wilsonlinien sind komplizierter, da die Wilsonlinien auf beiden Seiten der Gleichung auftreten.

In Kapitel 7 wurden die Einbettungs- und die Kommutatorgleichung für etwas spezialisierte Klassen von Twists allgemein gelöst. Dazu wird zunächst jede Wilsonlinie in einen unter dem Eichtwist invarianten und einen dazu orthogonalen nichtinvarianten Teil zerlegt:

$$\mathbf{A}_i = \tilde{\mathbf{A}}_i \oplus \hat{\mathbf{A}}_i. \quad (8.22)$$

Außerdem werden die Wilsonlinien in zwei Gruppen eingeteilt, die sich aus dem Verhalten der ihnen zugeordneten Richtungen des Torus $\mathbf{T}^6$ unter dem Ortsraumtwist ergeben. Mit $\mathbf{A}_m$ werden die einer invarianten Richtung zugeordneten Wilsonlinien bezeichnet, mit $\mathbf{A}_a$ diejenigen, die zu einer nichtinvarianten Richtung gehören. Diese Unterscheidung ist zwar stets möglich, führt aber nur dann zu einer Vereinfachung, wenn alle auftretenden invarianten Richtungen parallel zu Gittervektoren sind. Geometrisch entspricht dies dem Spezialfall, daß der Fixtorus des Ortsraumtwistes faktorisiert:

$$\mathbf{O}^6 = \mathbf{O}^k \times \mathbf{T}^{6-k}. \quad (8.23)$$

Dies ist jedoch nicht immer der Fall, da es Beispiele von nichtfaktorisierenden Fixtori gibt [29]. Dennoch ist die Einschränkung, daß nur faktorisierende Fixtori zugelassen werden, nicht zu restriktiv, da bei sehr vielen interessanten Modellen, z.B. beim Standard- $\mathbf{Z}_3$ -Orbifold und allgemeiner bei allen Orbifolds mit Coxeter-Twists überhaupt keine Fixtori auftreten.

Wenn nur faktorisierende Fixtori oder gar keine auftreten, kann die Matrix des Twistes bezüglich der Gitterbasis auf Blockdiagonalgestalt gebracht werden, und die Gleichung (8.18)

zerfällt in vier entkoppelte Gleichungen für Wilsonlinien $\hat{\mathbf{A}}_a$, $\tilde{\mathbf{A}}_a$, $\hat{\mathbf{A}}_m$ und $\tilde{\mathbf{A}}_m$. Die $\tilde{\mathbf{A}}_a$ und die $\hat{\mathbf{A}}_m$ können nur diskrete Werte annehmen. Genauer gesagt, muß der mit der Twistordnung N multiplizierte Vektor im invarianten bzw. im nichtinvarianten Teil der Gitters Γ_{16} liegen:

$$N\tilde{\mathbf{A}}_a \in I_{\Gamma_{16}}, \quad N\hat{\mathbf{A}}_m \in N_{\Gamma_{16}}. \quad (8.24)$$

Die anderen Wilsonlinien $\hat{\mathbf{A}}_a$ und $\tilde{\mathbf{A}}_m$ können hingegen kontinuierlich variiert werden. Während die $\hat{\mathbf{A}}_a$ durch den Eichtwist miteinander verknüpft werden und daher nicht unabhängig variiert werden können, gibt es für die $\hat{\mathbf{A}}_m$ keine weiteren Einschränkungen. Die aus (8.18) folgenden Bedingungen an die $\hat{\mathbf{A}}_a$ werden durch die unten beschriebene Einbettungskonstruktion automatisch erfüllt.

Falls (8.23) gilt, kann die gerade beschriebene Zerlegung der Wilsonlinien auch dazu benutzt werden, die Kommutatorgleichung (8.21) auf die einfachere Form

$$D_{ij}\theta_k^j - \theta_i^j D_{jk} = M_{ik} \quad (8.25)$$

zu transformieren. Eine spezielle Lösung dieser inhomogenen Gleichung kann der Literatur entnommen werden, die homogene Gleichung wurde in Kapitel 7 allgemein gelöst. Die Dimension des Lösungsraumes kann durch die Dimensionen d_k der Eigenräume zum Eigenwert $e^{2\pi i k/N}$ ausgedrückt werden:

$$M_D = d_1^2 + d_{\frac{1}{2}}^2 + 2 \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < \frac{1}{2}} d_k^2 = \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 \leq k < 1} d_k^2. \quad (8.26)$$

Der 1-Eigenraum des Twistes beschreibt einen Fixtorus, der nach Voraussetzung faktorisiert. Die ihm zugeordneten Hintergrundfelder unterliegen, wie immer bei toroidalen Kompaktifizierungen, keinen zusätzlichen Bedingungen. Um die Zahl der Orbifold-Moduli zu bestimmen, muß die Definition des Eichtwistes konkretisiert werden. Dazu spezifiziere ich die Vorstellung, der Eichtwist solle durch Einbettung des Ortsraumtwistes in die Eichfreiheitsgrade definiert werden, durch die Vorschrift, den Ortsraumtwist durch eine Bijektion ϕ von Λ auf ein Untergitter von Γ_{16} in den Eichtwist zu verwandeln:

$$\theta' = \phi \theta \phi^{-1} \oplus \mathbf{1}. \quad (8.27)$$

In diesem Fall sind die zulässigen Deformationen des G_{ij} - und des B_{ij} -Feldes die gleichen wie in der bosonischen Theorie. Die Zahl der Moduli ist daher [55]:

$$M_G = \binom{d_{\frac{1}{2}} + 1}{2} + \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < \frac{1}{2}} d_k^2, \quad M_B = \binom{d_{\frac{1}{2}}}{2} + \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < \frac{1}{2}} d_k^2. \quad (8.28)$$

Bei den Wilsonlinien gibt es zwei Arten von Deformationen: metrische, bei denen sich die Matrix $(\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{A}_j)$ ändert und isometrische, bei denen sich diese Matrix nicht ändert und die Wilsonlinien starr relativ zum Gitter rotiert werden. Die Anzahl der metrischen Wilsonmoduli ist gleich der der G_{ij} -Moduli

$$M_{A,m} = \binom{d_{\frac{1}{2}} + 1}{2} + \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < \frac{1}{2}} d_k^2. \quad (8.29)$$

Die Zahl der isometrischen Wilsonmoduli ist

$$M_{A,i} = \binom{d_{\frac{1}{2}}}{2} + \sum_{k \in \mathbf{Q} | 0 < k < \frac{1}{2}} d_k. \quad (8.30)$$

Geometrisch beschreiben die G_{ij} -Moduli und die metrischen Wilsonmoduli die kontinuierliche Änderung gewisser Radien und bestimmter Winkel zwischen den entsprechenden Richtungen.

Die isometrischen Wilsonmoduli entsprechen hingegen Drehwinkeln zwischen den Wilsonlinien und den Rotationsachsen des Eichtwistes. Aus Dimensionsgründen ist auch eine doppelte Einbettung des Ortsraumtwistes möglich. Dann verdoppelt sich die Zahl der Wilsonmoduli.

Um die modulare Invarianz der Orbifold-Kompaktifizierung zu garantieren, müssen gewisse Relationen zwischen den Eigenwerten des Gesamt-Twistes Θ erfüllt sein. Für die Einbettungskonstruktion können diese Bedingungen vereinfacht werden. Insbesondere sind kontinuierliche Deformationen modular invarianter Modelle wieder modular invariant.

Durch die Wilsonmoduli, die in der bisherigen Literatur nur am Rande und nicht systematisch berücksichtigt wurden, ergeben sich Möglichkeiten der Symmetriebrechung, die mit den in Kapitel 5 entwickelten Methoden behandelt werden können. Als Beispiel wurde der Standard- $\mathbf{Z}_3$ -Orbifold betrachtet, und dabei wurden alle Möglichkeiten der Brechung der Eichgruppe $E(6) \otimes SU(3) \otimes E(8)$ durch die neun metrischen Wilsonmoduli klassifiziert. Dabei ergibt sich eine Vielzahl kritischer Hyperflächen im betrachteten Teil des Orbifold-Moduliraumes, die hierarchisch ineinandergeschachtelt sind oder sich in Unterräumen höherer Symmetrie schneiden. Diese Strukturen korrespondieren mit entsprechenden Strukturen im zugeordneten Teil des toroidalen Moduliraumes. Die Klassifikation kann unmittelbar auf den Fall mit zusätzlichen diskreten Wilsonlinien übertragen werden. Der Gebrauch von Dynkin-Diagrammen erlaubt es, wie in Kapitel 5, systematisch vorzugehen. Durch die Kombination von Einbettungs- und Dimensionsargumenten können in allen Fällen die Orbifold-Eichgruppen eindeutig festgelegt werden, ohne sie explizit zu konstruieren, was wesentlich aufwendiger wäre.

Insgesamt ergibt sich das folgende Bild der Moduliräume von Orbifold und Torus-Kompaktifizierungen: Jeder Twist definiert über die Konsistenzbedingung gewisse Teilräume des toroidalen Moduliraumes, in denen er eine Symmetrie der dort liegenden Modelle ist und ausdividiert werden kann. Durch den Twist erhält man einen korrespondierenden Orbifold-Moduliraum mit der gleichen Dimension und der gleichen Geometrie der kritischen Unterräume höherer Symmetrie. Die zulässigen Hintergrundfelder parametrisieren dabei die erlaubten Deformationen. Durch Twists, diskrete Wilsonlinien und spezielle Lösungen der inhomogenen Einbettungs- und Kommutatorgleichung werden verschiedene Moduliräume aufeinander abgebildet und zwar durch Twists Teile des toroidalen Moduliraums auf Orbifold-Moduliräume und durch diskrete Parameter verschiedene Orbifold-Moduliräume und die korrespondierenden Torus-Teilmoduliräume jeweils aufeinander. Dabei werden kritische Unterräume wieder auf kritische Unterräume abgebildet.

Insgesamt wurde gezeigt, daß und wie man bei toroidalen und Orbifold-Kompaktifizierungen durch Herausarbeiten der algebraischen Struktur einen Überblick über die verwirrende Vielzahl der Modelle gewinnen kann. In Kapitel 6 wurden zudem die Zusammenhänge zwischen Orbifold-Twists, Lie-Algebra-Automorphismen und getwisteten Kac-Moody-Algebren aufgearbeitet, durch die Orbifold-Kompaktifizierungen als spezielle konforme Feldtheorien und damit als spezielle vierdimensionale Lösungen der heterotischen Stringtheorie charakterisiert werden können.

Um meine Ergebnisse in die aktuelle Forschungssituation auf diesem Gebiet einzubetten, gebe ich anschließend einen knappen Überblick über die anderen bekannten Lösungen.

8.2 Übersicht über vierdimensionale Stringtheorien

8.2.1 Calabi-Yau-Kompaktifizierungen

Der allgemeinste Ansatz für die Kompaktifizierung der zehndimensionalen heterotischen Stringtheorie ist die Ersetzung des zehndimensionalen Minkowski-Raumes durch das Produkt eines vierdimensionalen Minkowski-Raumes und einer internen, sechsdimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit.

$$\mathbf{M}^{10} \rightarrow \mathbf{M}^4 \times \mathbf{K}^6. \quad (8.31)$$

Die interne Mannigfaltigkeit $\mathbf{K}^6$ muß eine Lösung der Vakuum-Einstein-Gleichungen, also **Ricci-flach** sein. Bei einer generischen Wahl von $\mathbf{K}^6$ wird die RZ-Supersymmetrie vollständig

gebrochen und es gibt im allgemeinen keine chiralen Fermionfamilien. Obwohl die uns experimentell zugängliche Welt nicht manifest supersymmetrisch ist, wird zur Lösung des Hierarchie-Problems in vereinheitlichten Eichtheorien eine auf geeignete Weise zu brechende $N=1$ Supersymmetrie postuliert. Im Rahmen der Stringtheorie versucht man zunächst supersymmetrische vierdimensionale Lösungen zu finden und die Supersymmetrie-Brechung in einem zweiten Schritt zu behandeln. Dabei muß gleichzeitig die Tachyon-Freiheit des Spektrums gewährleistet und ein zu großer Wert der kosmologischen Konstanten [130] vermieden werden. Fordert man, daß die Kompaktifizierung eine RZ-Supersymmetrie ungebrochen läßt, so führt dies, zusammen mit einigen „technischen“ Zusatzannahmen, zwingend dazu, daß $\mathbf{K}^6$ eine **Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit**¹ sein muß [1].

Dies ergibt sich auf folgende Weise [1]: Die $N=1$ Supersymmetrie impliziert eine Einschränkung an die Wahl der **Holonomie-Gruppe**. Diese besteht aus allen Transformationen, die sich beim Paralleltransport eines Tangentialvektors entlang geschlossener Kurven auf der Mannigfaltigkeit ergeben. Bei einer generischen sechsdimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit ist sie $SO(6) \simeq SU(4)$. Die Forderung nach ungebrochener Supersymmetrie schränkt sie auf eine $SU(3)$ -Untergruppe ein. Weiter ergibt sich, daß $\mathbf{K}^6$ eine **komplexe** und sogar eine **Kähler-Mannigfaltigkeit** sein muß, d.h. die Metrik wird durch die zweifache Differentiation einer Potentialfunktion erzeugt. Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten sind kompakte komplexe Kählermannigfaltigkeiten mit Holonomiegruppe $SU(3)$, also ist $\mathbf{K}^6$ eine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit. Tori sind Spezialfälle von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Sie sind allerdings völlig untypisch, da allgemeine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten eine hochgradig nichttriviale Geometrie besitzen, die zur Folge hat, daß die zugeordnete Stringtheorie nicht mehr exakt lösbar ist. Manchmal werden sie daher in der Definition explizit ausgeschlossen [92].

Aus den Bewegungsgleichungen der Stringtheorie ergibt sich eine weitere Konsistenzbedingung, die es erzwingt, die Holonomiegruppe in die Eichgruppe einzubetten. Bei der sogenannten Standard-Einbettung wird sie mit dem $SU(3)$ -Faktor der maximalen Untergruppe $SU(3) \otimes E(6)$ einer der beiden $E(8)$ Gruppen der $E(8) \otimes E(8)$ -Theorie identifiziert. Dadurch wird die Eichgruppe auf $E(6) \otimes E(8)$ gebrochen und man erhält mit der $E(6)$ eine phänomenologisch interessante vereinheitlichte Eichgruppe mit komplexen Darstellungen, die chirale Fermionfamilien zuläßt. Die vereinheitlichte Eichgruppe $E(6)$ muß natürlich weiter gebrochen werden. Dies kann auch hier mit Hilfe von Wilsonlinien geschehen. Dabei gibt es Beispiele, in denen die Eichgruppe des Standard-Modells reproduziert wird, wobei allerdings immer zusätzliche Symmetrien und zusätzliche Teilchen auftreten.

Das Hauptproblem bei der Calabi-Yau-Kompaktifizierung ist, daß man die Metrik im allgemeinen nicht explizit angeben kann. Durch Kombination von mathematischen Methoden aus der komplexen Differentialgeometrie, algebraischen Geometrie und der algebraischen Topologie mit Methoden der Quantenfeldtheorie konnten trotzdem eine Fülle von Einsichten gewonnen werden (siehe z.B. [92]). Physikalische Eigenschaften der Stringtheorie können durch topologische Eigenschaften von $\mathbf{K}^6$ ausgedrückt werden: So ist z.B. die Zahl der chiralen $E(6)$ -Fermion-Familie gleich der Hälfte der Euler-Zahl. Es sind Modelle mit drei oder vier Familien bekannt. Eine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit wird durch ihre Topologie und ihre komplexe und Kählerstruktur eindeutig festgelegt. Die beiden letzteren Strukturen können kontinuierlich deformiert werden. Die zugehörigen Parameter bezeichnet man als **Moduli**. Da gewisse Korrelationsfunktionen exakt ausgerechnet werden können, kann man die entsprechenden Kopplungen als Funktion der komplexen und Kähler-Moduli angeben. Eine zur Zeit intensiv untersuchte und an vielen Beispielen belegte Vermutung ist, daß Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten Paare bilden, die jeweils die gleiche Stringtheorie beschreiben [92] (Spiegel-Hypothese). Dabei vertauschen die komplexen und die Kähler-Moduli ihre Rollen, wodurch sich die Zahl der exakt berechenbaren Korrelationsfunktionen verdoppelt.

Für die Konstruktion von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten gibt es zwei Methoden [15]:

- Durch algebraische Gleichungen können Hyperflächen in komplexen projektiven Räumen ($\mathbf{CP}^n$) oder verallgemeinerten gewichteten komplexen projektiven Räumen ($\mathbf{WCP}^n$) de-

¹Eine Einführung in die Mathematik der Calabi-Yau-Räume findet man in [15].

finiert werden, die Calabi–Yau–Mannigfaltigkeiten sind.

- Toroidale Orbifolds können Grenzfälle von Calabi–Yau–Mannigfaltigkeiten sein, bei denen die Krümmung auf die diskreten Fixpunkte konzentriert wird [63], [29]. Der Standard- $\mathbf{Z}_3$ -Orbifold ist der Grenzfall einer Calabi–Yau–Mannigfaltigkeit mit Standard-Einbettung. Die Holonomie-Gruppe $SU(3)$ entartet dabei zu einer $\mathbf{Z}_3$, der diskreten Holonomiegruppe des Orbifolds. Umgekehrt erhält man durch das „Aufblasen“ von Orbifold-Singularitäten Calabi–Yau–Mannigfaltigkeiten. Dazu werden zunächst die Singularitäten herausgeschnitten und an ihrer Stelle sogenannte Eguchi–Hanson–Räume eingefügt. Wenn dies so geschieht, daß keine globalen Obstruktionen der komplexen und der Kählerstruktur auftreten, erhält man eine Calabi–Yau–Mannigfaltigkeit.

Aus einer gegebenen Calabi–Yau–Mannigfaltigkeit lassen sich durch das Ausdividieren diskreter Symmetriegruppen neue Lösungen für $\mathbf{K}^6$ erzeugen. Dadurch läßt sich die bei vielen Modellen sehr hohe Zahl von Fermion-Familien reduzieren. Falls die Twistgruppe nicht frei operiert, ist der Faktorraum keine Mannigfaltigkeit mehr, sondern besitzt, wie bei den toroidalen Orbifolds, singuläre Punkte.

8.2.2 Konforme Feldtheorien und vierdimensionale Stringtheorien

Bereits früher ist erörtert worden, daß die Bewegungsgleichungen der Stringtheorie äquivalent sind zur konformen Invarianz der zweidimensionalen WF-Feldtheorie. Die allgemeinsten klassischen Lösungen der Stringtheorie sind daher zweidimensionale konforme Feldtheorien mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften. Bei den allgemeinsten RZ-supersymmetrischen vierdimensionalen Lösungen der heterotischen Stringtheorie werden die internen Freiheitsgrade durch eine modular invariante lokal (0,1) und global (0,2) WF-supersymmetrische konforme Feldtheorie mit den zentralen Ladungen (22,9) beschrieben.

Zur Konstruktion interner WF-Feldtheorien gibt es außer der Kompaktifizierung eine Fülle weiterer Verfahren. Bereits früher erwähnt wurden die asymmetrischen Orbifolds toroidaler Kompaktifizierungen und die kovarianten Gitter.

Außer freien und getwisteten freien Feldtheorien gibt es eine bisher nicht überschaubare Vielzahl konformer Feldtheorien mit allen notwendigen Eigenschaften. Eine Klassifizierung gilt als wünschenswert und möglich. Da zur Zeit eine wachsende Fülle verschiedenster Konstruktionen existiert, kann ich nur einige Beispiele nennen.

- Gepner hat eine Methode entwickelt, durch die Bildung von Tensorprodukten von Modellen der minimalen superkonformen Serie modular invariante Theorien mit globaler (2,2) WF-Supersymmetrie zu konstruieren [36], [3]. Ein Erfolg dieser Methode ist, daß gewisse Gepner-Modelle Paaren von Calabi–Yau-Kompaktifizierungen entsprechen. Dies führte dann zur Aufstellung der Spiegel-Hypothese [92]. Die Klassen der Standard-Calabi–Yau-Kompaktifizierungen und der (2,2) superkonformen Feldtheorien scheinen sich weitgehend zu decken.
- Da die zentralen Ladungen der internen konformen Feldtheorie größer als 1 sind, kann man nur solche Theorien exakt lösen, die eine erweiterte chirale Algebra, also eine Erweiterung der Virasoro-Algebra besitzen. Mit freien Bosonen kann man Level-1-Darstellungen von Kac-Moody-Algebren realisieren. Allgemeinere Level-k-Darstellungen erhält man u.a. durch Wess-Zumino-Witten-Modelle, bei denen die Felder Werte in einer Lie-Gruppe annehmen.
- Mit Hilfe der Goddard-Kent-Olive-Konstruktion können aus Level k Darstellungen von Kac-Moody-Algebren (oder Super-Kac-Moody-Algebren) durch Ausdividieren von Unteralgebren neue Theorien konstruiert werden. Möglicherweise liefert diese Konstruktion sogar alle rationalen konformen Feldtheorien. Bei jeder Konstruktion kann man immer wieder nach diskreten Symmetriegruppen suchen und durch (modular invariantes) Ausdividieren neue Theorien konstruieren [3].

8.2.3 Moduli und marginale Operatoren

Eine weitere typische Eigenschaft konformer Feldtheorien mit zentraler Ladung $c > 1$ ist die Existenz kontinuierlicher Deformationen. Solche Deformationen, die ja die konforme Invarianz nicht brechen, sind im Sinne der Wilsonschen Renormierungsgruppe marginal. Die zugehörigen Parameter werden als Moduli bezeichnet. Infinitesimale marginale Deformationen werden durch Operatoren vom konformen Gewicht $(1,1)$ erzeugt. Die Deformation kann störungstheoretisch untersucht werden, indem man den betreffenden Operator zur Wirkung addiert. Endliche marginale Deformationen und damit eine durch Moduli parametrisierte Schar von Theorien erzeugen aber nur die integrierbaren marginalen Operatoren, d.h. diejenigen, die auch in der deformierten Theorie marginal bleiben [42].

Beispiel: Wir betrachten eine kompaktifizierte Stringkoordinate. Bei generischer Wahl des Radius gibt es nur einen marginalen Operator $\partial X_L(z)\bar{\partial} X_R(\bar{z})$. Er beschreibt offensichtlich Deformationen des Radius, da er proportional zur Wirkung eines freien Bosons ist. Für die spezielle Wahl $R = \sqrt{2}$ gehören auch die marginalen Operatoren

$$e^{\pm i\sqrt{2}X_L(z) \pm i\sqrt{2}X_R(\bar{z})}, \quad e^{\pm i\sqrt{2}X_L(z)}\bar{\partial} X_R(\bar{z}), \quad \partial X_L(z)e^{\pm i\sqrt{2}X_R(\bar{z})} \quad (8.32)$$

zur konformen Feldtheorie des WF-Bosefeldes. Durch den Frenkel-Kac-Mechanismus wird gleichzeitig eine $A_1 \oplus A_1$ Kac-Moody-Algebra realisiert. Die zusätzlichen marginalen Operatoren sind zwar integrierbar, liegen aber in dem gleichen $A_1 \oplus A_1$ Multipllett wie $\partial X_L(z)\bar{\partial} X_R(\bar{z})$. Daher erzeugen alle 9 Operatoren die gleiche Deformation. Man sagt, die zusätzlichen marginalen Operatoren seien **redundant** [42].

Beispiel: Im Narain-Modell sind die $22 \cdot 6$ Operatoren $G_{ij}\partial X^i(z)\bar{\partial} X^j(\bar{z})$, $B_{ij}\partial X^i(z)\bar{\partial} X^j(\bar{z})$ und $A_j^I\partial X^I(z)\bar{\partial} X^j(\bar{z})$ marginal und erzeugen die Deformationen der Hintergrundfelder bzw. des Narain-Gitters [42].

Beispiel: In toroidalen Orbifold-Modellen existieren marginale Operatoren sowohl in den ungetwisteten als auch in den getwisteten Sektoren. Die Moduli des ungetwisteten Sektors beschreiben die zulässigen Deformationen der Hintergrundfelder, die des getwisteten Sektors sind „Aufblase-Moduli“, d.h. sie beschreiben den kontinuierlichen Übergang zu Calabi-Yau-Kompaktifizierungen durch Glätten der Singularitäten [14]. Sie hängen daher mit den Moduli der komplexen und der Kähler-Struktur der Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit zusammen.

Da die Moduli konformer Feldtheorien zugleich die klassischen Lösungen der Stringtheorie parametrisieren, sind diese Moduliräume in den letzten Jahren intensiv untersucht worden [27]. Der Schwerpunkt lag dabei auf diskreten Symmetrien, wie der Dualität und der Spiegel-Symmetrie. Die Dualitätssymmetrie identifiziert im Falle einer kompakten Stringkoordinate die Radien R und $1/(2R)$ miteinander. Im Narain-Moduli-Raum ist die Symmetriegruppe, die als modulare Gruppe des Targetraums bezeichnet wird.

$$\frac{O(d, d, \mathbf{Z})}{O(d, \mathbf{Z}) \otimes O(d, \mathbf{Z})}. \quad (8.33)$$

Ähnliche Symmetrien gibt es in den Moduliräumen toroidaler Orbifolds [89]. Auf die bei Calabi-Yau-Modellen auftretende Spiegel-Symmetrie bin ich bereits oben eingegangen.

Ein anderer wichtiger Punkt ist die Variation der Symmetrien, d.h. der Eichgruppe und der erweiterten chiralen Algebra mit den Moduli. Am Beispiel einer kompaktifizierten Stringkoordinate, d.h. der konformen Feldtheorie mit zentralen Ladungen $(1,1)$, ist explizit gezeigt worden, daß für alle rationalen Werte des Radius Erweiterungen der Virasoro-Algebra auftreten [42]. Viele dieser speziellen Punkte beschreiben das kritische Verhalten von zweidimensionalen Modellen der statistischen Mechanik, etwa des Ising-, Potts- oder diverser Vertex-Modelle. Die größte dieser Erweiterungen ist die Kac-Moody-Algebra bei $R = \sqrt{2}$. Dieses Modell ist aufgrund der Dualitätssymmetrie mit dem bei $R = 1/(2\sqrt{2})$ äquivalent. Die Eichgruppe vergrößert sich an diesen beiden Punkten des Moduliraumes von $U(1)^2$ auf $SU(2)$.

Obwohl die Moduliräume konformer Feldtheorien lokal Mannigfaltigkeiten sind, ist der Gesamt-Moduliraum nicht die disjunkte Vereinigung aller dieser Mannigfaltigkeiten, da sich die diversen Moduliräume schneiden können. Auf den Schnittflächen steigt die Anzahl der

nicht-redundanten Operatoren und damit die lokale Dimension des Moduliraumes, der daher keine globale Mannigfaltigkeit sein kann.

Beispiel: Der Moduliraum der konformen Feldtheorien mit $c = 1$ [16], [42]. Aus der Theorie eines kompakten freien Bosons können diskrete Symmetrien ausdividiert werden. Die generische Symmetrie ist eine $\mathbf{Z}_2$, bei der auf dem Kreis jeweils gegenüberliegende Punkte identifiziert werden. Da die Symmetrieachse den Kreis in zwei Punkten schneidet, gibt es zwei Fixpunkte. Die getwistete Theorie beschreibt die eindimensionale Kompaktifizierung auf dem $\mathbf{Z}_2$ -Orbifold eines Kreises. Auch hier ist der Radius fast überall der einzige Modulus. Beide Moduliräume sind Geraden, bzw. bei Berücksichtigung der Dualitätssymmetrie Halbgeraden. Ein spezielles Phänomen tritt auf, wenn der Twist bei dem Wert $R = \sqrt{2}$ des Radius ausgeführt wird, an dem die $A_1 \oplus A_1$ Kac-Moody-Algebra realisiert wird. Da der Twist dann ein Automorphismus der Lie-Algebra A_1 ist, gibt es eine äquivalente Realisierung des Twistes durch einen Verschiebungsvektor. Das Twisten mit Verschiebungsvektoren bedeutet aber das Skalieren des Kreis-Radius mit einer rationalen Zahl, in unserem Fall die Halbierung. Die Kompaktifizierung auf dem Kreis mit $R = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist also äquivalent zur Kompaktifizierung auf dem getwisteten Kreis mit $R = \sqrt{2}$. Die beiden Geraden schneiden sich in diesem Punkt. Ausgedrückt durch marginale Operatoren gibt es im Kreis-Moduliraum an diesem Punkt einen zusätzlichen marginalen Operator, der aufgrund der gebrochenen A_1 -Symmetrie nicht äquivalent zu dem generischen ist. Der zusätzliche Operator generiert dann Deformationen in die Orbifold-Richtung. Im Orbifold-Modell ist die Situation genau spiegelbildlich.

Zwei Punkte sind für Verallgemeinerungen wichtig: 1.) Die Identifizierung kommt aufgrund der Äquivalenz der Rotations- mit der Verschiebungsrealisierung des Twistes zustande und ergibt sich aus einer zusätzlichen Struktur, im vorliegenden Beispiel aus der Lie-Algebra-Struktur. 2.) Der Schnittpunkt ist ein Punkt erhöhter Symmetrie. Er ist aber kein Punkt maximaler Symmetrie, sondern kann vielmehr von einem Punkt maximaler Symmetrie aus auf zwei im allgemeinen inäquivalenten Wegen erreicht werden. Außerdem ist er ein Fixpunkt der Dualitätssymmetrie (des Kreis-Modells), denn $R = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ erfüllt die Gleichung $R = (2R)^{-1}$. Für konforme Feldtheorien mit $c = 3/2$ kann eine ähnliche Analyse durchgeführt werden. Dabei ergeben sich mehrere Geraden und mehrere Schnittpunkte [21]. Im Falle $c=2$ gibt es bereits vier generische marginale Deformationen. Der Moduliraum verzweigt sich in gewissen kritischen Unterräumen auf komplizierte Weise [17]. Für $c > 2$ gibt es bisher keine vergleichsweise vollständigen Untersuchungen, aber einige allgemeine Resultate.

8.3 Ausblick

Aus den Ergebnissen der Kapitel 5 - 7 ergibt sich im Lichte des soeben gegebenen Überblicks eine Reihe von offenen Fragen, Anwendungen, Erweiterungen und Verallgemeinerungen, mit deren Nennung ich die Arbeit beschließen möchte.

- Die Rolle der isometrischen Wilsonmoduli und der inhomogenen Lösungen der Kommutatorgleichung bei der Symmetriebrechung in Orbifold-Modellen muß untersucht werden.
- Die Auswirkung kontinuierlicher Wilsonlinien auf das gesamte Spektrum einschließlich des getwisteten Sektors muß ebenfalls untersucht werden.
- Der Fall nicht-faktorisierender Fixtori sollte sich mit erhöhtem Aufwand explizit lösen lassen.
- Es können Orbifolds mit allgemeinen abelschen Punktgruppen $\mathbf{Z}_N \otimes \mathbf{Z}_M \otimes \dots$ und nicht-abelsche Orbifolds betrachtet werden. Eine notwendige Konsistenzbedingung zwischen Twistgruppe und Hintergrundfeldern ist, daß der Twist mit allen Generatoren der Twistgruppe kompatibel ist, d.h. man erhält je einen Satz von Konsistenzgleichungen für jeden Generator. Es stellt sich aber die Frage, ob dies auch hinreichend ist, oder ob, wie im Falle der modularen Invarianz bei nichtabelschen Punktgruppen, zusätzliche Konsistenzbedingungen existieren.

- Es kann versucht werden, die Konsistenzgleichungen zwischen Twist und Hintergrundfeldern für asymmetrische Orbifolds zu lösen. Dies erscheint besonders in Hinblick auf die Ergebnisse über die Symmetriegruppen toroidaler Kompaktifizierungen wünschenswert, denn durch die Mischung von Eich- und Kompaktifizierungsfreiheitsgraden ergeben sich interessante Eichgruppen. Aus solchen Modellen sind aber kaum symmetrische Orbifolds zu konstruieren, da die Unterscheidung von Ortsraum- und Eichtwist die Kompaktifizierungs- und Eichfreiheitsgrade automatisch trennt. Das manifestiert sich u.a. darin, daß der Eichtwist ein Automorphismus des Γ_{16} -Gitters sein muß.
- Andererseits kann die geometrische Struktur symmetrischer Orbifolds und ihr Zusammenhang mit Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten ausgenutzt werden. Es wäre zu klären, ob die Präsenz kontinuierlicher Wilsonlinien mit dem Aufblasen der Orbifold-Singularitäten verträglich ist, und wenn ja, wieviel Information man über die so entstehenden Modelle gewinnen kann. Da die kontinuierlichen Wilsonlinien die im Falle der Standard-Einbettung vorhandene E_6 -Eichgruppe und damit die linkslaufende globale WF-Supersymmetrie brechen, wäre das auch ein Beitrag zu einem besseren Verständnis der (0,2) superkonformen Feldtheorien und der Einbettung der (2,2) Theorien in die größere Klasse.
- Durch die Konstruktion kritischer Werte der Wilsonlinien erhält man zugleich Modelle erhöhter Symmetrie und Kandidaten für Modelle, die aufgrund der Äquivalenz der Verschiebungs- und der Rotationsrealisierung von Lie-Algebra-Automorphismen mit anderen Modelle identifiziert werden können. Dadurch können Schnittflächen zwischen verschiedenen Moduliräumen gefunden werden. Ein möglicher Ansatz wäre die Frage, wieviele nicht-redundante marginale Operatoren an Punkten oder auf Flächen erhöhter Symmetrie existieren. Hierfür sollte eine darstellungstheoretische Charakterisierung existieren. Die zweite Frage ist dann, wie die zusätzlichen Deformationen das Modell ändern bzw. in welchen anderen Moduliraum man durch die Extra-Moduli gelangt.
- Mit Hilfe der Äquivalenz zwischen Verschiebungs- und Rotationsrealisierung sollte es möglich sein, alle Orbifolds mit Verschiebungsrealisierung des Eichtwists und wahrscheinlich auch alle durch kovariante Gitter definierten Modelle in die Moduliräume der Orbifolds mit Drehungsrealisierung einzubetten. Diese wären dann spezielle Punkte erhöhter Symmetrie. Sie sind nicht nur aus den oben genannten Gründen interessant, sondern auch, weil sich der Aufwand bei der Berechnung von Korrelationsfunktionen vereinfacht, sobald der Twist als Verschiebung realisiert werden kann. Das liegt nicht nur an der Unhandlichkeit der invarianten Orbits, sondern auch daran, daß die Twistfelder, die die Grundzustände der getwisteten Sektoren aus dem $Sl(2, \mathbb{C})$ -Vakuum erzeugen, im allgemeinen keine freien Felder sind. Nur in den Fällen, in denen eine Verschiebungsrealisierung existiert, können sie als Exponentiale freier WF-Bosonen realisiert werden. Falls die Orbifold-Eichgruppe nicht den maximalen Rang hat, kann man natürlich nicht die gesamte Theorie, wohl aber den Teil mit erhöhter Symmetrie vollständig durch freie Bosonen beschreiben. Durch die Kenntnis spezieller Punkte erhöhter Symmetrie und der Moduli-Abhängigkeit kann vielleicht auch Information über die Theorie abseits der kritischen Punkte gewonnen werden.
- Da kritische Wilsonlinien mit Symmetriebrechung zu tun haben, stellt sich die Frage nach dem Zusammenhang mit dem Higgs-Mechanismus. Falls die Symmetriebrechung durch kontinuierliche Deformationen erfolgt, muß zusammen mit jedem Eichboson auch ein Skalarfeld massiv werden. Die Lorentz-Invarianz der Stringtheorie garantiert im Prinzip, daß dies auch geschieht, sagt aber nicht, welche Skalarfelder sich in die longitudinalen Freiheitsgrade der Eichbosonen verwandeln. Der stringtheoretische Higgs-Effekt ist in der Literatur mit Hilfe der effektiven Feldtheorie untersucht worden. Insbesondere in einer supersymmetrischen Theorie ist das von Vorteil, weil dann das Superpotential zur Verfügung steht. Am Beispiel der bosonischen Theorie habe ich beschrieben, wie der Higgs-Effekt im Rahmen der kovarianten Quantisierung behandelt werden kann. Wenn sich dies auf den heterotischen Fall verallgemeinern läßt, hätte dies den Vorteil, daß man im Prinzip das

ganze Spektrum betrachten und auch große Deformationen bis zum nächsten kritischen Punkt explizit behandeln kann. Zwar wächst die Zahl der Zustände mit steigender Masse stark an, aber zumindest entlang kritischer Linien sollte sich kontrollieren lassen, was „in der Nähe“ des masselosen Spektrums vor sich geht.

- Neben dem Problem der Brechung der Eichgruppe stellt sich das der Supersymmetriebrechung. Gibt es phänomenologisch akzeptable kontinuierliche Deformationen, z.B. via Extra-Moduli, in Richtung von $(0,1)$ konformen Feldtheorien ohne RZ-Supersymmetrie?
- An verschiedenen Stellen war bemerkt worden, daß durch endliche Transformationen entlang gewisser Richtungen im Modulraum wieder ein mit dem ursprünglichen identisches Modell erreicht wird. Diese Transformationen sind entweder Elemente der bekannten Dualitätsgruppen oder erweitern diese. Der genaue Zusammenhang sollte untersucht werden.

Anhang A

Elemente der Kohomologie- und Erweiterungstheorie

Dieser Anhang dient zur Erläuterung der in der Arbeit an mehreren Stellen gebrauchten Begriffe „Kozykel“ und „zentrale Erweiterung“. Als erstes werden einige Begriffe aus der algebraischen Kohomologie-Theorie eingeführt¹. Die folgenden Aussagen beziehen sich auf diskrete Gruppen, sie können aber unter Erhalt der algebraischen Struktur auch auf Lie-Gruppen und Lie-Algebren übertragen werden, sowie auf die Homologie- und Kohomologiegruppen reeller und komplexer Mannigfaltigkeiten (Hodge/ de Rham bzw. Dolbeault-Theorie [155]).

Definition A.0.1 Es sei $(\mathbf{G}, \cdot)$ eine Gruppe und $(\mathbf{A}, +)$ eine abelsche Gruppe. Dann heißt eine Abbildung $a_n \in C^n(\mathbf{G}, \mathbf{A})$, $n > 0$

$$a_n : \times^n \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{A} : (g_1, \dots, g_n) \rightarrow a_n(g_1, \dots, g_n) \quad (\text{A.1})$$

eine n -Ko-Kette von $\mathbf{G}$ mit Werten in $\mathbf{A}$. Diese Ko-Ketten können als formale Linearkombinationen von n -Tupeln aus $\mathbf{G}$ mit Koeffizienten in $\mathbf{A}$ betrachtet werden.

Die Menge $C^n(\mathbf{G}, \mathbf{A})$ ist eine abelsche Gruppe. Es sei $C^0(\mathbf{G}, \mathbf{A}) = \mathbf{A}$. Durch eine Abbildung

$$\sigma : \mathbf{G} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{A}) \quad (\text{A.2})$$

operiere $\mathbf{G}$ auf $\mathbf{A}$.

Definition A.0.2 Durch

$$(\delta a_n)(g_1, \dots, g_{n+1}) = \sigma(g_1)a_n(g_2, \dots, g_{n+1}) + \quad (\text{A.3})$$

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i a_n(g_1, \dots, g_i \cdot g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} a_n(g_1, \dots, g_n)$$

wird eine formale äußere Ableitung

$$\delta : C^n(\mathbf{G}, \mathbf{A}) \rightarrow C^{n+1}(\mathbf{G}, \mathbf{A}), \quad \delta^2 = 0 \quad (\text{A.4})$$

definiert. δ_n sei die Einschränkung von δ auf ein bestimmtes n . Die Elemente von

$$Z_\sigma^n = \text{Kern}(\delta_n) \quad (\text{A.5})$$

heißen ($\mathbf{A}$ -wertige) n -Kozykeln, die Elemente von

$$B_\sigma^n = \text{Bild}(\delta_{n-1}) \quad (\text{A.6})$$

heißen n -Ko-Ränder.

¹ Hierbei stütze ich mich auf [133].

Es sei $\mathbf{0}$ die triviale Gruppe und δ_{-1} der triviale Homomorphismus von $\mathbf{0}$ nach $\mathbf{A}$. Die Sequenz

$$\mathbf{0} \xrightarrow{\delta_{-1}} C^0(\mathbf{G}, \mathbf{A}) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathbf{G}, \mathbf{A}) \xrightarrow{\delta_1} \dots \quad (\text{A.7})$$

erfüllt

$$\text{Bild}(\delta_{n+1}\delta_n) \text{ und } \text{Bild}(\delta_n) \subset \text{Kern}(\delta_{n+1}). \quad (\text{A.8})$$

Da in der zweiten Relation im allgemeinen keine Gleichheit besteht ist die Sequenz nicht **exakt**. Die Abweichung von der Exaktheit wird durch die Faktorgruppen

$$H_\sigma^n(\mathbf{G}, \mathbf{A}) = Z_\sigma^n(\mathbf{G}, \mathbf{A})/B_\sigma^n(\mathbf{G}, \mathbf{A}) \quad (\text{A.9})$$

gemessen, die als n -te Kohomologie-Gruppen bezeichnet werden. Kohomologie-Gruppen sind wichtige Hilfsmittel bei der Untersuchung globaler geometrischer und topologischer Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten und bei der Erweiterung algebraischer Strukturen. In der Physik treten sie da auf, wo Räume mit nichttrivialer Topologie oder wo projektive Darstellungen bzw. Erweiterungen von Symmetriestrukturen eine Rolle spielen. Letzters ist bei der Frenkel-Kac-Konstruktion der Fall.

Mit den soeben eingeführten Begriffen kann das folgende Erweiterungsproblem² gelöst werden: Es werde eine Gruppe $\widehat{\mathbf{G}}$ gesucht, so daß $\mathbf{A}$ eine Untergruppe und $\mathbf{G}$ die zugehörige Faktorgruppe ist.

$$\mathbf{A} < \widehat{\mathbf{G}}, \quad \mathbf{G} = \widehat{\mathbf{G}}/\mathbf{A}. \quad (\text{A.10})$$

Die Gruppe $\widehat{\mathbf{G}}$ ist dann eine Erweiterung von $\mathbf{G}$ mit dem (abelschen) Kern $\mathbf{A}$. Da $\mathbf{A}$ in die im allgemeinen nichtabelsche Gruppe $\widehat{\mathbf{G}}$ eingebettet wird, soll sie ab jetzt multiplikativ geschrieben werden. Das Problem kann auch so formuliert werden, daß die Sequenz

$$\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{i} \widehat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\pi} \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{1} \quad (\text{A.11})$$

exakt sein muß, denn dies ist zu (A.10) äquivalent. $\mathbf{A}$ wird mit der Untergruppe $i(\mathbf{A})$ identifiziert. Da die Gruppe $\mathbf{G}$ im allgemeinen nicht als Untergruppe in $\widehat{\mathbf{G}}$ eingebettet werden kann, kann $\widehat{\mathbf{G}}$ nicht zum direkten Produkt von $\mathbf{G}$ und $\mathbf{A}$ isomorph. Um $\widehat{\mathbf{G}}$ zu konstruieren betrachtet man zunächst das kartesische Produkt, das als triviales Faserbündel mit Basis $\mathbf{G}$ und Fasern $\mathbf{A}$ aufgefaßt werden kann. $\mathbf{G}$ kann durch die Wahl eines Schnittes

$$s: \mathbf{G} \rightarrow \widehat{\mathbf{G}}, \text{ mit } \pi s = \text{Id}_{\mathbf{G}} \quad (\text{A.12})$$

mit einer Untermenge $s(\mathbf{G})$ von $\widehat{\mathbf{G}}$ identifiziert werden. Der Schnitt wird so normiert, daß er das 1-Element von $\mathbf{G}$ auf dasjenige von $\widehat{\mathbf{G}}$ abbildet.

Das Ziel ist nun, $\widehat{\mathbf{G}}$ durch die Angabe einer Gruppenstruktur auf dem Bündel unter Beachtung von (A.10) zu definieren. Für das Produkt zweier Bilder unter dem Schnitt muß dann gelten:

$$s(g) \cdot s(g') = \epsilon(g, g') s(g \cdot g') \text{ mit } \epsilon(g, g') \in \mathbf{A}. \quad (\text{A.13})$$

Die Erweiterung $\widehat{\mathbf{G}}$ operiert auf ihrer abelschen Untergruppe durch Automorphismen:

$$\widehat{\sigma}: \widehat{\mathbf{G}} \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{A}). \quad (\text{A.14})$$

Die allgemeinste bei einer Erweiterung mit abelschem Kern auftretende Operation kann auf die Wirkung σ von $\mathbf{G}$ auf $\mathbf{A}$ zurückgeführt werden.

Da die Multiplikation in $\widehat{\mathbf{G}}$ assoziativ sein muß, kann gezeigt werden, daß

$$\epsilon(g, g') \cdot \epsilon(g \cdot g', g'') = \widehat{\sigma}(s(g)) \epsilon(g', g'') \cdot \epsilon(g, g' \cdot g'') \quad (\text{A.15})$$

gelten muß. Dies ist äquivalent zu

$$(\delta\epsilon)(g, g', g'') = e, \quad (\text{A.16})$$

² Auch dieser Teil ist eine Zusammenfassung von Material aus [133].

d.h. ϵ ist ein $\mathbf{A}$ -wertiger 2-Kozykel. Aus der Normierung des Schnittes ergibt sich die Normierung

$$\epsilon(g, e) = \epsilon(e, g) = \epsilon(e, e) = e \quad (\text{A.17})$$

des Kozykels. Die Wahl des Schnittes s und der Abbildung σ legen die Gruppenstruktur der Erweiterung bereits fest:

$$(a, g) \cdot (a', g') = (a\hat{\sigma}[s(g)](a')\epsilon(g, g'), g \cdot g'). \quad (\text{A.18})$$

Verschiedene Wahlen des Schnittes können zu isomorphen Erweiterungen führen. Dies ist genau dann der Fall, wenn zwei normierte Schnitte s und s' sich um eine normierte 1-Kokette c unterscheiden:

$$s'(g) = c(g) \cdot s(g), \quad c \in C^1(\mathbf{G}, \mathbf{A}), \quad c(e) = e. \quad (\text{A.19})$$

Die entsprechenden Kozykeln ϵ und ϵ' hängen dann so zusammen:

$$\epsilon'(g, g') = c(g)\hat{\sigma}(g)[c(g')]\epsilon(g, g')c(g \cdot g')^{-1}. \quad (\text{A.20})$$

Daraus folgt, daß sich ϵ und ϵ' nur um den $\mathbf{A}$ -wertigen Ko-Rand δc unterscheiden:

$$\epsilon'(g, g') \cdot \epsilon(g, g')^{-1} = c(g)\hat{\sigma}(g)[c(g')]\epsilon(g, g')^{-1} = (\delta c)(g, g'). \quad (\text{A.21})$$

Beide Kozykeln repräsentieren also dasselbe Element von $H_\sigma^2(\mathbf{G}, \mathbf{A})$ und es gilt:

Satz A.0.1 Die inäquivalenten Erweiterungen von $\mathbf{G}$ mit Kern $\mathbf{A}$ und Wirkung σ werden durch die Elemente der Kohomologiegruppe $H_\sigma^2(\mathbf{G}, \mathbf{A})$ parametrisiert.

Es gibt drei wichtige Spezialfälle:

1. σ wirkt trivial, $\forall g \in \mathbf{G} : \sigma(g) = Id$. Dann ist $\mathbf{A}$ eine zentrale Untergruppe, liegt also im Zentrum von $\hat{\mathbf{G}}$. Die Erweiterung wird dann als **zentrale Erweiterung** bezeichnet. Die inäquivalenten zentralen Erweiterungen werden durch die Gruppe $H^2(\mathbf{G}, \mathbf{A}) := H_{Id}^2(\mathbf{G}, \mathbf{A})$ klassifiziert. Ein Beispiel werden wir im Rahmen der Frenkel-Kac-Konstruktion kennenlernen.
2. Der Kozykel $\epsilon(\cdot, \cdot)$ ist trivial, das heißt ein Ko-Rand. Dann „splittet“ die Sequenz, d.h. sie besitzt eine partielle Umkehrung:

$$\hat{\mathbf{G}} \xleftarrow{s} \mathbf{G} \leftarrow 1. \quad (\text{A.22})$$

In diesem Fall ist $s(\mathbf{G})$ eine Untergruppe von $\hat{\mathbf{G}}$, im allgemeinen aber kein Normalteiler. Wir identifizieren $\mathbf{G}$ mit $s(\mathbf{G})$. Die Untergruppe $\mathbf{A}$ ist abelsch und somit automatisch ein Normalteiler. $\mathbf{G}$ operiert auf $\mathbf{A}$ durch σ . Die Gruppe $\hat{\mathbf{G}}$ ist ein semidirektes Produkt:

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \odot_\sigma \mathbf{A}. \quad (\text{A.23})$$

Die bekanntesten Beispiele sind die euklidische Gruppe $\text{Euk}(d) = O(d) \odot T(d)$ und die Poincare-Gruppe $P(d) = O(1, d-1) \odot T(d)$, bei der die Translationsgruppe $T(d)$ unter der Drehgruppe bzw Lorentzgruppe gemäß der d -dimensionalen Darstellung transformiert. Die inäquivalenten semidirekten Erweiterungen werden durch die Elemente von $H_\sigma^1(\mathbf{G}, \mathbf{A})$ parametrisiert.

3. Sowohl der Kozykel als auch die $\mathbf{G}$ -Wirkung sind trivial. Dann ist die Sequenz in beiden Richtungen exakt, d.h. es existiert eine zweite exakte Sequenz

$$1 \leftarrow \mathbf{A} \leftarrow \hat{\mathbf{G}} \xleftarrow{s} \mathbf{G} \leftarrow 1. \quad (\text{A.24})$$

Jetzt sind sowohl $\mathbf{G}$ als auch $\mathbf{A}$ Normalteiler von $\hat{\mathbf{G}}$, und $\hat{\mathbf{G}}$ ist ein direktes Produkt:

$$\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{G} \otimes \mathbf{A}. \quad (\text{A.25})$$

Zwei abschließende Bemerkungen zur allgemeinen Theorie:

1. Die Begriffe zentrale, direkte und semidirekte Erweiterung lassen sich direkt auf Lie-Gruppen und Lie-Algebren übertragen.
2. Erweiterungen einer Gruppe $\mathbf{G}$ mit einer nichtabelschen Gruppe $\mathbf{K}$ existieren nicht immer. Die möglichen Obstruktionen werden durch die Gruppe $H_\sigma^3(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ parametrisiert: Die Lösbarkeit des allgemeinen Erweiterungsproblems ist zur Trivialität eines gewissen 3-Kozykels äquivalent. In diesem Fall kann das Erweiterungsproblem auf ein abelsches zurückgeführt werden.

Die Kohomologietheorie besitzt nicht nur in der Mathematik sondern auch in der theoretischen Physik zahlreiche Anwendungen, etwa die Klassifizierung von Anomalien und die BRS-Quantisierung.

Im Falle der Frenkel-Kac-Konstruktion ist die zu erweiternde Gruppe ein d -dimensionales Gitter

$$(\Gamma, +) \simeq (\mathbf{Z}^d, +), \quad (\text{A.26})$$

der Kern ist $(\mathbf{Z}_2, \cdot)$, und in der erweiterten Gruppe $(\hat{\Gamma}, \cdot)$ muß gelten:

$$s(\mathbf{v})s(\mathbf{w}) = S(\mathbf{v}, \mathbf{w})s(\mathbf{w})s(\mathbf{v}) \text{ mit } S(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (-1)^{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}} \quad (\text{A.27})$$

Die Gruppenstruktur auf $\hat{\Gamma}$ wird also durch Vorgabe des Kommutators definiert. Die Erweiterung ist zentral. Der Zusammenhang zwischen Kommutator und Kozykel ergibt sich aus dem Multiplikationsgesetz in $\hat{\Gamma}$.

$$s(\mathbf{v}) \cdot s(\mathbf{w}) = \epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w})s(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = S(\mathbf{v}, \mathbf{w})s(\mathbf{w}) \cdot s(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}, \mathbf{w})\epsilon(\mathbf{w}, \mathbf{v})s(\mathbf{v} + \mathbf{w}). \quad (\text{A.28})$$

Daher braucht man einen Kozykel mit der Eigenschaft

$$\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w})\epsilon(\mathbf{w}, \mathbf{v})^{-1} = S(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (-1)^{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}. \quad (\text{A.29})$$

Die Kozykelgleichung ergibt sich aus der Spezialisierung der allgemeinen Formel auf den zentralen Fall oder wieder direkt aus der Forderung nach Assoziativität der Multiplikation in $\hat{\Gamma}$:

$$\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w})\epsilon(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{x}) = \epsilon(\mathbf{w}, \mathbf{x})\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{x}). \quad (\text{A.30})$$

Man beachte, daß in der Gruppe $(\mathbf{Z}_2, \cdot)$ gilt: $a^{-1} = a$. Der Kozykel kann oBdA normiert werden (die Normierung kann durch einen 1-Ko-Rand erzielt werden und ändert die Kohomologiekategorie nicht):

$$\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{0}) = \epsilon(\mathbf{0}, \mathbf{w}) = 1. \quad (\text{A.31})$$

Frenkel und Kac (genauer gesagt der „referee“ ihrer Arbeit) bemerkten, daß im vorliegenden Fall der Kozykel bimultiplikativ realisiert werden kann [140]:

$$\epsilon(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{x}) = \epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{x})\epsilon(\mathbf{w}, \mathbf{x}), \quad (\text{A.32})$$

$$\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{x}) = \epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w})\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{x}). \quad (\text{A.33})$$

Die Kozykelbedingung ist dann automatisch erfüllt, und der Kozykel kann durch seine Werte auf einer Gitterbasis definiert werden. Im Falle des Wurzelgitters einer Lie-Algebra sind das die einfachen Wurzeln α_i . Eine mögliche Wahl ist

$$\epsilon(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} -1, & \text{falls } \alpha_i \cdot \alpha_j = -1 \text{ und } i < j, \\ +1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.34})$$

Definiert man ein Produkt [1]

$$\mathbf{v} * \mathbf{w} = \sum_{i,j | j > i} v^i w^j \alpha_i \cdot \alpha_j, \quad (\text{A.35})$$

so kann man eine geschlossene Formel für den Kozykel angeben:

$$\epsilon(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (-1)^{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}} \quad (\text{A.36})$$

Im Rahmen der Frenkel–Kac–Konstruktion werden die Elemente $s(\mathbf{v})$ von $\hat{\Gamma}$ mit Hilfe der Impulsoperators $\mathbf{p}$ durch die Operatoren

$$c(\mathbf{v}) = (-1)^{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}} \quad (\text{A.37})$$

auf dem Hilbertraum realisiert. Ihre Kommutatoren $S(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ kompensieren die störenden Phasenfaktoren in den OPE der Vertexoperatoren und ermöglichen so die Konstruktion von Vertexoperator–Darstellungen von Lie–Algebren.

Anhang B

Lie-Algebren

B.1 Endlich-dimensionale Lie-Algebren

B.1.1 Grundbegriffe

In diesem Abschnitt möchte ich einen knappen Abriß der algebraischen Aspekte (endlich-dimensionaler) Lie-Algebren geben. Dabei folge ich [148].

Definition B.1.1 Eine Lie-Algebra L ist ein Vektorraum zusammen mit einem bilinearen, antisymmetrischen Produkt $[\cdot, \cdot]$

$$[\cdot, \cdot] : L \times L \longrightarrow L,$$

von dem zusätzlich verlangt wird, daß es die Jacobi-Identität

$$\forall a, b, c \in L : [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$$

erfüllt.

Bemerkung 1 Unter der Dimension einer Lie-Algebra wird ihre Dimension als Vektorraum verstanden. Wir betrachten hier zunächst nur endlich dimensionale Lie-Algebren.

Bemerkung 2 Alle in dieser Arbeit auftretenden Lie-Algebren haben als Grundkörper $\mathbf{K}$ die reellen Zahlen $\mathbf{R}$ oder die komplexen Zahlen $\mathbf{C}$. Die Aussagen dieses Abschnittes gelten aber über beliebigen Körpern der Charakteristik 0.

Bemerkung 3 Die Jacobi-Identität ist offensichtlich eine Modifikation des Assoziativitätsaxioms, das bei „normalen“, (d.h. assoziativen) Algebren gefordert wird. Andere in der Physik auftretende nicht-assoziative Algebren sind z.B. die Jordan-Algebren.

Beispiele:

1. Ein schon aus der Schule bekanntes Beispiel einer Lie-Algebra ist der $\mathbf{R}^3$, zusammen mit dem Vektorprodukt $\times$.
2. Zu jeder assoziativen Algebra A , mit Produkt $\cdot$ erhält man durch die Definition

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$$

eine Lie-Algebra. Das Lie-Produkt wird in diesem Fall aus offensichtlichen Gründen als Kommutator bezeichnet. Spezielle Beispiele für diese Konstruktion sind die **linearen Lie-Algebren**, d.h. Lie-Algebren von Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V , bzw., was ja im endlich-dimensionalen Fall gleichwertig ist, Lie-Algebren quadratischer Matritzen.

3. Auch für Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit kann, z.B. durch die Darstellung in lokalen Koordinaten, ein Kommutator und damit eine Lie-Algebra-Struktur definiert werden. Betrachtet man speziell linksinvariante Vektorfelder auf einer Lie-Gruppe, so ist diese Lie-Algebra isomorph zum Tangentialraum an das Einselement und legt die gesamte lokale Struktur der Gruppe fest: Zu jeder Lie-Gruppe gehört eine Lie-Algebra, und umgekehrt zu jeder Lie-Algebra mehrere Lie-Gruppen, die sich aber nur durch ihre globale, topologische Struktur unterscheiden [135].

Auf die explizite Definition der Begriffe (Lie-Algebra-)Homomorphismus, Isomorphismus, Automorphismus und Unter(-Lie-)Algebra möchte ich verzichten, da sie offensichtlich sind. Der nächste wichtige Begriff ist der des **Ideals**, der bei Lie-Algebren eine analoge Rolle zu dem des Normalteilers in der Gruppentheorie spielt.

Definition B.1.2 Eine Unter algebra I einer Lie-Algebra L heißt genau dann ein Ideal oder eine invariante Unter algebra, wenn gilt¹:

$$[L, I] \subset I,$$

d.h. wenn sie unter der adjungierten Wirkung der Lie-Algebra invariant ist.

Beispiel: Wenn L eine Matrix-Lie-Algebra ist, die nicht nur spurfreie Matrizen enthält, so bildet die Menge der skalaren Matrizen

$$\mathcal{S}(n, \mathbf{K}) = \{M \in M(n, \mathbf{K}) | M = c \cdot E, c \in \mathbf{K}\} \quad (\text{B.1})$$

ein Ideal. (E ist die Einheitsmatrix.)

Aus gegebenen Lie-Algebren können durch die Bildung von Quotienten und Summen² neue konstruiert werden. Die Menge L/I der Nebenklassen modulo I ist genau dann bezüglich des induzierten Lie-Produktes, eine Lie-Algebra wenn I ein Ideal ist. Bei Summen von Lie-Algebren L, L' , wird der direkten Summe der Vektorräume eine Lie-Algebra-Struktur aufgeprägt. Das einfachste Beispiel ist die direkte Summe $L \oplus L'$. Hierbei setzt man:

$$\forall a, b \in L : \forall a', b' \in L' : [(a, a'), (b, b')] = ([a, a'], [b, b']) \quad (\text{B.2})$$

Während hier sowohl L als auch L' als Ideale in die Summe eingebettet sind, ist dies bei semidirekten³ Summen nur für einen der Summanden der Fall. Ist z.B. $L' = A$ abelsch (s.u.) und ρ ein Lie-Algebra-Homomorphismus von L in die Automorphismen von A , so wird durch die Definition

$$\forall a, b \in L \forall a', b' \in A [(a, a'), (b, b')] = ([a, b], \rho(b)a' - \rho(a)b') \quad (\text{B.3})$$

eine semidirekte Summe $L \ltimes_{\rho} A$ definiert. **Beispiele:** Die Lie-Algebren der Poincaré-Gruppe oder der Euklidischen Gruppen.

Übersicht über die Haupttypen von Lie-Algebren

Die einfachsten Lie-Algebren sind die abelschen, bei denen die Lie-Algebra Struktur sozusagen trivial ist.

Definition B.1.3 Eine Lie-Algebra L heißt genau dann **abelsch**, wenn gilt

$$[L, L] = 0$$

d.h. wenn alle ihre Elemente paarweise kommutieren.

Beispiel 4 Die Lie-Algebra $\mathcal{D}(n, \mathbf{K})$ aller diagonalen $n \times n$ Matrizen ist abelsch. Jede abelsche Lie-Algebra ist isomorph zu einer $\mathcal{D}(n, \mathbf{K})$.

¹ Ich verwende hier an Stelle des Allquantors die suggestive und kompaktere Komplex-Schreibweise. Die in der Definition gegebene Formel bedeutet z.B. $\forall a \in L \forall i \in I [a, i] \in I$.

² Manche Autoren verwenden hier den Begriff Produkt.

³ Der allgemeine Fall kann mit den Instrumenten aus Anhang A gemeistert werden [133].

Beispiel 5 Die Lie-Algebra $u(1)$ der Lie-Gruppe $U(1)$ ist abelsch, nämlich $\mathbf{R}$ mit dem Kommutator als Lie-Produkt. Jede abelsche Lie-Algebra der Dimension n ist isomorph zur n -fachen direkten Summe $u(1)^n$ von $u(1)$ mit sich selbst (und natürlich isomorph zu $\mathcal{D}(n, \mathbf{R})$).

Eine etwas größere Klasse bilden die **nilpotenten** Lie-Algebren. Die induktiv definierten Ideale L^i ,

$$L^0 = L, \quad L^{i+1} = [L, L^i], \quad i = 0, 1, \dots \quad (\text{B.4})$$

bilden die absteigende zentrale Serie von L .

Definition B.1.4 Eine Lie-Algebra L heißt genau dann **nilpotent**, wenn gilt

$$\exists n \in \mathbf{N} : L^n = 0$$

Beispiel 6 Die Lie-Algebra $\mathcal{N}(n, \mathbf{K})$,

$$\mathcal{N}(n, \mathbf{K}) = \{M \in M(n, \mathbf{K}) \mid M_{ij} = 0, 1 \leq j \leq i \leq n\} \quad (\text{B.5})$$

der echten oberen Dreiecksmatrizen ist nilpotent. Jede nilpotente lineare Lie-Algebra ist isomorph zu einer Unter algebra einer geeigneten $\mathcal{N}(n, \mathbf{K})$ (Satz von Engel).

Bemerkung 4 Offensichtlich ist jede abelsche Lie-Algebra nilpotent, aber die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Bemerkung 5 Die aus der Quantenphysik bekannte Heisenberg-Lie-Algebra

$$[a, a^+] = 1 \quad (\text{B.6})$$

ist dreidimensional und nilpotent. Aus Wielandts Theorem [147] folgt, daß mindestens einer der beiden Operatoren a, a^+ unbeschränkt sein muß. Daher besitzt diese Lie-Algebra keine endlich dimensional Darstellungen und ist nicht linear.

Durch eine weitere Abschwächung kommt man zu dem Begriff der **auf lösbaren** Lie-Algebra. Die induktiv definierten Ideale $L^{(i)}$

$$L^{(0)} = L, \quad L^{(i+1)} = [L^{(i)}, L^{(i)}], \quad i = 0, 1, \dots \quad (\text{B.7})$$

bilden die derivierte Serie von L . Insbesondere wird $[L, L]$, also die von allen Kommutatoren erzeugt Lie-Algebra, die derivierte Algebra von L genannt.

Definition B.1.5 Eine Lie-Algebra L heißt **auf lösbär**, wenn gilt

$$\exists n \in \mathbf{N} : L^{(n)} = 0$$

Beispiel 7 Die Lie-Algebra $\mathcal{T}(n, \mathbf{K})$,

$$\mathcal{T}(n, \mathbf{K}) = \{M \in M(n, \mathbf{K}) \mid M_{ij} = 0, 1 \leq j < i \leq n\} \quad (\text{B.8})$$

der oberen Dreiecksmatrizen ist auflösbar. Jede lineare auflösbare Lie-Algebra ist isomorph zu einer Unter algebra einer geeigneten $\mathcal{T}(n, \mathbf{K})$ (Satz von Lie).

Bemerkung 6 Jede nilpotente Lie-Algebra ist auflösbar, aber nicht umgekehrt.

Eine Lie-Algebra ist im allgemeinen nicht auflösbar, z.B. sind $gl(V) = \text{End}(V)$, die Lie-Algebra der Endomorphismen des Vektorraumes V und $gl(n, \mathbf{K}) = M(n, \mathbf{K})$, die Lie-Algebra aller $n \times n$ Matrizen nicht auflösbar. Jede Lie-Algebra besitzt aber ein eindeutig bestimmtes maximales auflösbares Ideal, das **Radikal** $R = \text{Rad}(L)$ von L . Bei auflösbaren Lie-Algebren ist $L = R$. Der andere Extremfall soll nun betrachtet werden.

Definition B.1.6 Eine Lie-Algebra L heißt genau dann **halbeinfach**, wenn gilt $\text{Rad}(L) = 0$.

Bemerkung 7 Eine halbeinfache Lie-Algebra ist in dem Sinne maximal nicht-abelsch, daß $[L, L] = L$ ist, d.h. die derivierte Algebra ist gleich der ursprünglichen und nicht wie im allgemeinen Falle kleiner oder wie im abelschen Fall 0.

Eine äquivalente Charakterisierung für halbeinfach ist:

Satz B.1.1 Eine Lie-Algebra L ist genau dann halbeinfach, wenn sie keine abelschen Ideale außer dem 0-Ideal $0 = \{0\}$ besitzt.

Dieser Sachverhalt legt eine neue Definition nahe:

Definition B.1.7 Eine Lie-Algebra L heißt **einfach**, genau dann wenn sie keine nichttrivialen Ideale besitzt und die derivierte Algebra ungleich 0 ist. Als triviale Ideale gelten 0 und L .

Bemerkung 8 Jede einfache Lie-Algebra ist halbeinfach, aber die Umkehrung ist im allgemeinen falsch. Die zweite Bedingung der Definition schließt abelsche Lie-Algebren aus. Würde man auf sie verzichten wären eindimensionale Lie-Algebren einfach, und zwar aus dem trivialen Grunde, daß eine eindimensionale Lie-Algebra gar keine nichttrivialen Ideale besitzen kann. Sie ist zudem automatisch abelsch; somit wären eindimensionale abelsche Lie-Algebren einfach, höherdimensionale abelsche Lie-Algebren hingegen weder einfach noch halbeinfach. Mit der hier gewählten Definition sind alle abelschen Lie-Algebren weder einfach noch halbeinfach, was sicher sinnvoller ist⁴.

Der Begriff der Einfachheit erweist sich dadurch als sinnvoll, daß nun jede halbeinfache Lie-Algebra in kleinste Bausteine zerlegt werden kann.

Satz B.1.2 [Cartan, Killing] Jede halbeinfache Lie-Algebra L ist eine direkte Summe einfacher Ideale L_i .

$$L = \bigoplus_{i=1}^m L_i.$$

Beispiel 8 Die Lie-Algebra $su(n)$ der spurfreien, komplexen, antihermiteschen Matrizen und die Lie-Algebren $sl(n, \mathbf{K})$, der spurfreien, $so(n, \mathbf{K})$ der spurfreien, antisymmetrischen und $sp(n, \mathbf{K})$ der spurfreien, symplektischen Matrizen über $\mathbf{K}$ sind einfach. Direkte Summen dieser Lie-Algebren sind halbeinfach. Die im Standard-Modell der Elementarteilchenphysik auftretende Lie-Algebra $su(3) \oplus su(2) \oplus u(1)$ ist nicht halbeinfach, da die $u(1)$ ein abelsches Ideal ist.

Unsere Überlegungen kommen dadurch zu einem Abschluß, daß man auch die Struktur einer allgemeinen, d.h. weder auflösbaren noch halbeinfachen Lie-Algebra L angeben kann. Der Ausgangspunkt ist dabei die Tatsache, daß der Quotient $L/Rad(L)$ halbeinfach ist [133]:

Satz B.1.3 [Levi, Malcev] Jede Lie-Algebra ist isomorph zur semidirekten Summe einer auflösbaren und einer halbeinfachen Lie-Algebra, nämlich des Radikals und der dazu gehörenden Quotienten-Lie-Algebra:

$$L = \frac{L}{Rad(L)} \ltimes Rad(L).$$

Darstellungen von Lie-Algebren

Definition B.1.8 Unter einer Darstellung (V, Φ) einer Lie-Algebra L versteht man einen $\mathbf{K}$ -Vektorraum V , zusammen mit einem Lie-Algebra Homomorphismus von L in die Endomorphismen von V .

$$\Phi : L \longrightarrow gl(V).$$

⁴ Allerdings finden sich in der Literatur auch andere Definitionen für einfach und halbeinfach, sogar solche, nach denen eindimensionale Lie-Algebren zwar einfach, aber nicht halbeinfach sind!

Beispiel 9 Die adjungierte Darstellung (L, ad) von L ist definiert durch $V = L$ und

$$ad : a \rightarrow ad a, \quad ad a(b) = [a, b], \quad a, b \in L. \quad (\text{B.9})$$

Bemerkung 9 Definiert man mit Hilfe der Darstellung ein Produkt

$$\cdot : L \times V \longrightarrow V \quad a \cdot v = \Phi(a)v \quad a \in L, v \in V, \quad (\text{B.10})$$

so erhält V die Struktur eines L -Moduls, denn das Produkt ist bilinear und mit dem Lie-Produkt verträglich:

$$[a, b] \cdot v = a \cdot b \cdot v - b \cdot a \cdot v \text{ für alle } a, b \in L, v \in V.$$

Die wichtigsten Begriffe der Darstellungstheorie seien schnell wiederholt: Eine Darstellung heißt **irreduzibel**, wenn der Darstellungsraum keine echten invarianten Teilräume besitzt, andernfalls heißt sie **reduzibel**. Zerfällt der Darstellungsraum in eine direkte Summe invarianter Teilräume so wird die Darstellung **vollreduzibel** genannt. In einer irreduziblen Darstellung gilt: Wenn ein Endomorphismus $\Psi \in gl(V)$ mit alle $\Phi(a)$ vertauscht, so ist er konstant (Schur'sches Lemma).

Generatoren und Relationen

Eine wohlbekannte Beschreibung von Lie-Algebren ist die folgende: Man wählt eine Vektorraum-Basis $t_a, a = 1, \dots, d, d = \dim(L)$ von L und bildet alle Kommutatoren:

$$[t_a, t_b] = f_{abc} t_c \quad (\text{B.11})$$

Die (Basisabhängigen) Strukturkonstanten $f_{abc} \in \mathbf{K}$ charakterisieren dann L vollständig. Allerdings ist diese Beschreibung in hohem Maße redundant: So ist z.B. die Lie-Algebra E_8 248-dimensional, kann aber bereits durch 9 geeignet gewählte Generatoren erzeugt werden. Dieses Verfahren empfiehlt sich natürlich auch aus ökonomischen Gründen. Um es verstehen und anwenden zu können, brauchen wir den Begriff der **freien Lie-Algebra** und die Charakterisierung einer Lie-Algebra durch **Generatoren und Relationen**.

Definition B.1.9 Die **freie Lie-Algebra** $\mathcal{F} = \mathcal{F}(m, \mathbf{K})$ in m Generatoren über $\mathbf{K}$ wird wie folgt konstruiert: Man nehme m Objekte a_i , genannt Buchstaben. $\mathcal{F}(m, \mathbf{K})$ besteht dann aus allen Wörtern, die man durch Bildung von Kommutatoren und $\mathbf{K}$ -Linearkombinationen bilden kann. Zwei Wörter werden dabei genau dann identifiziert, wenn sie durch Anwendung der Lie-Algebra-Axiome ineinander überführt werden können.

Auf diese Weise ist $\mathcal{F}$ eine Lie-Algebra mit minimaler Struktur, in dem Sinne, daß eine maximale Anzahl von Wörtern verschieden ist. Man kann weitere Identifizierungen vornehmen, indem man gewisse Wörter, Relationen genannt, mit 0 identifiziert, und kann so der Lie-Algebra mehr Struktur aufprägen. Durch die Wahl einer geeigneten freien Lie-Algebra und geeigneter Relationen $r_k \cong 0$ kann jede Lie-Algebra in der Form

$$L \simeq \mathcal{F} / \cong \quad (\text{B.12})$$

realisiert werden. Ohne Relationen existieren im allgemeinen beliebig lange Worte, die von den kürzeren Wörtern linear unabhängig sind. Eine freie Lie-Algebra ist daher in der Regel unendlich dimensional.

B.1.2 Die Struktur der einfachen komplexen Lie-Algebren

Cartan-Subalgebren und Wurzeln

In diesem Abschnitt soll die Struktur einer einfachen komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ beschrieben werden⁵. (Die folgenden Überlegungen gelten auch für Lie-Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0.) Zunächst verschafft man sich eine möglichst große abelsche Unter algebra.

⁵Für den Rest von Anhang B1 verwende ich [137] und insbesondere [138].

Definition B.1.10 Ein Unter algebra $\mathfrak{h}$ von $\mathfrak{g}$ heißt genau dann eine **Cartan-Subalgebra**, wenn sie eine maximale abelsche Unter algebra und die adjungierte Darstellung auf ihr vollreduzibel ist.

Satz B.1.4 Jede einfache komplexe Lie-Algebra besitzt eine Cartan-Subalgebra, und diese ist eindeutig bis auf Konjugation mit Gruppenelementen.

Bemerkung 10 Hierbei wird benutzt, daß jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra einer Lie-Gruppe $\mathbf{G}$ ist, und daß die adjungierte Wirkung der Gruppe auf sich, eine entsprechende Wirkung auf der Lie-Algebra induziert ($x \rightarrow gxg^{-1}$, $x \in \mathfrak{g}$, $g \in \mathbf{G}$).

Definition B.1.11 Die Dimension der Cartan-Subalgebra wird als der **Rang** der Lie-Algebra bezeichnet.

$$\text{rang}(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{h}).$$

Um die Cartan-Zerlegung einer einfachen komplexen Lie-Algebra angeben zu können, wird noch der Begriff des Gewichtes benötigt.

Definition B.1.12 Der Dualraum $\mathfrak{h}^*$ von $\mathfrak{h}$ heißt der Gewichtsraum von $\mathfrak{g}$, seine Elemente **Gewichte**.

Man kann nun die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ betrachten. Wählt man eine Basis $h_i, i = 1, \dots, l$ der Cartan-Subalgebra, so kann man sie derart zu einer Basis der Lie-Algebra ergänzen, daß die weiteren Basisvektoren e_α , $\alpha \in \Delta$, Δ diskrete, endliche Indexmenge, simultane Eigenvektoren zu alle $\text{ad } h_i$ sind. Die Eigenwerte $N_{i,\alpha}$ die e_α als Eigenvektor der $\text{ad } h_i$ charakterisieren,

$$\text{ad } h_i(e_\alpha) = [h_i, e_\alpha] = N_{i,\alpha} e_\alpha, \quad (\text{B.13})$$

definieren gerade ein Funktional auf $\mathfrak{h}$. Da darüber hinaus alle diese Funktione paarweise verschieden sind, werden sie als Indexmenge verwendet: $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$,

$$\alpha \in \Delta : \alpha(h_i) := N_{i,\alpha}. \quad (\text{B.14})$$

Insgesamt gilt:

Satz B.1.5 [Cartan] Jede einfache komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist als direkte Summe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$$

darstellbar. Dabei ist $\mathfrak{h}$ eine Cartan-Subalgebra und die Räume $\mathfrak{g}_\alpha$ sind eindimensional. Wählt man eine Basis $h_i, e_\alpha, i = 1, \dots, l, \alpha \in \Delta$, so lauten die Vertauschungsrelationen der Lie-Algebra:

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0, \\ [h_i, e_\alpha] &= \alpha(h_i) e_\alpha, \\ [e_\alpha, e_\beta] &= \begin{cases} N_{\alpha,\beta} e_{\alpha+\beta}, & \text{falls } \alpha + \beta \in \Delta, \\ \sum_{i=1}^l \alpha(h_i) h_i, & \text{falls } \alpha + \beta = 0. \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$. Die Funktione $\alpha \in \Delta$ heißen die **Wurzeln** von $\mathfrak{g}$. Die Kenntnis der Wurzeln legt die Lie-Algebra bereits eindeutig fest.

In dieser Darstellung existieren zwei Arten von bisher unbestimmten Strukturkonstanten: Die $\alpha(h_i)$ charakterisieren die Lie-Algebra vollständig. Für die Klassifikation ist dabei nachteilig, daß die Funktione α linear abhängig ist. Die Angabe aller Wurzeln ist in hohem Maße redundant. So hat die Lie-Algebra E_8 240 Wurzeln, der Gewichtsraum ist aber nur achtdimensional. Tatsächlich ist die Angabe von 8 „einfachen“ Wurzeln hinreichend, um die gesamte Algebra zu konstruieren. Um dies zu verstehen, müssen wir uns zuvor mit Bilinearformen und der Geometrie des Wurzelsystems beschäftigen. Die $N_{\alpha,\beta}$ enthalten hingegen keine weitere Information. Einige von ihnen können frei gewählt werden; der Rest wird dann durch die Jacobi-Identität fixiert.

Bilinearformen und Wurzeln**Definition B.1.13** Die symmetrische und invariante Bilinearform

$$K : L \times L \longrightarrow \mathbf{K} : K(a, b) = \text{Sp}(ad a \, ad b)$$

auf einer $\mathbf{K}$ -Lie-Algebra L heißt die Killing-Form von L . Als Invarianz oder Assoziativität (im Sinne der Jacobi-Identität) bezeichnet man dabei die Eigenschaft

$$\forall a, b, c \in L : K([a, b], c) = K(a, [b, c]).$$

In der allgemeinen Theorie kann man mit Hilfe der Killing-Form ein nützliches Kriterium für die Halbeinfachheit formulieren.

Satz B.1.6 [Cartans 2. Kriterium] Ein Lie-Algebra L ist genau dann halbeinfach, wenn die Killing-Form nicht entartet ist.

Wir wenden uns jetzt wieder den einfachen komplexen Lie-Algebren zu. Da die Einschränkung der Killingform auf die Cartan-Subalgebra $\mathbf{h}$ ebenfalls eine symmetrische, invariante und *nicht entartete* Bilinearform ist, definiert die Gleichung

$$\forall h \in \mathbf{h} : K(h_\alpha, h) = \alpha(h) \quad (\text{B.16})$$

für jedes feste $\alpha \in \mathbf{h}^*$ ein eindeutig bestimmtes $h_\alpha \in \mathbf{h}$, d.h. es existiert ein natürlicher Isomorphismus zwischen Gewichtsraum und Cartan-Subalgebra:

$$\mathbf{h}^* \rightarrow \mathbf{h} : \alpha \rightarrow h_\alpha. \quad (\text{B.17})$$

Durch

$$\langle \alpha, \beta \rangle := K(h_\alpha, h_\beta) = \alpha(h_\beta) \quad (\text{B.18})$$

wird dann eine symmetrische, invariante, nicht entartete Bilinearform auf $\mathbf{h}^*$ definiert.

Betrachtet man die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ speziell auf den Wurzeln von $\mathfrak{g}$ so ergibt sich:

Satz B.1.7 [Rationalitätseigenschaft der Wurzeln] Für $\alpha, \beta \in \Delta$ gilt:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbf{Q}, \quad \langle \alpha, \alpha \rangle > 0.$$

Wählt man aus den Wurzeln eine Basis $\beta_i, i = 1, \dots, l$ aus $l = \text{rang}(\mathfrak{g})$ $\mathbf{h}^*$ aus, so läßt sich jede Wurzel als **rationale** Linearkombination schreiben.

Bildet man nun die reellen linearen Hüllen (die Mengen der reellen Linearkombinationen) der β_i und der h_{β_i} , so erhält man reelle Unterräume von $\mathbf{h}^*$, $\mathbf{h}$ auf denen die Bilinearformen **positiv definit** sind. Es gilt:

Satz B.1.8 Der reelle Unterraum

$$\mathbf{h}_0 = \langle \{h_{\beta_i} | i = 1, \dots, l\} \rangle$$

der Cartan-Subalgebra ist unabhängig von der Wahl der β_i . Die Einschränkungen der Killing-Form K auf $\mathbf{h}_0$ und der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbf{h}_0^*$ sind reelle Skalarprodukte.

Als Vorbereitung der weiteren Schritte muß nun eine Ordnungsrelation auf $\mathbf{h}_0^*$ eingeführt werden. Dazu wählt man eine Basis β_i aus den Wurzeln aus und definiert:

Definition B.1.14 Seien $\gamma = \sum_{i=1}^l g_i \beta_i$ und $\delta = \sum_{i=1}^l d_i \beta_i$ Vektoren aus $\mathbf{h}_0^*$ (d.h. $g_i, d_i \in \mathbf{R}$). Dann ist $\gamma > \delta$, genau dann wenn $g_1 - b_1 > 0$ oder $g_1 = b_1$ und $g_2 - b_2 > 0$ oder usw. ist. Insbesondere heißt ein Vektor positiv bzw. negativ, wenn er größer bzw. kleiner als 0 ist. Mit Δ^+, Δ^- werden die Mengen der positiven bzw. negativen Wurzeln bezeichnet.

Die Gestalt der Vertauschungsrelationen vereinfacht sich bei Benutzung der eingeführten Bilinearformen:

$$[h_\alpha, e_\beta] = \langle \alpha, \beta \rangle e_\beta, \quad (\text{B.19})$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = K(e_\alpha, e_{-\alpha}) h_\alpha, \quad (\text{B.20})$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha, \beta} e_{\alpha+\beta}, \text{ für } \alpha + \beta \in \Delta, \quad (\text{B.21})$$

mit $K(e_\alpha, e_{-\alpha}) = B_\alpha \in \mathbf{C} - \{0\}$ und $N_{\alpha, \beta} \in \mathbf{C} - \{0\}$.

Da man zeigen kann, daß für alle Wurzeln $K(e_\alpha, e_\alpha) = 0$ ist, kann man die Killing-Form nicht benutzen, um die e_α zu normieren. Eine Analyse der verbleibenden Willkür ergibt [137]:

Satz B.1.9 Für beliebige B_α kann man erreichen, daß entweder für alle Wurzeln $N_{\alpha, \beta} = N_{-\alpha, -\beta}$ ist oder daß für alle Wurzeln $N_{\alpha, \beta} = -N_{-\alpha, -\beta}$ ist. Will man alle $N_{\alpha, \beta}$ reell wählen, so muß man im ersten Fall alle B_α negativ, im zweiten Fall alle B_α positiv wählen. Zwei Standardwahlen sind dann $B_\alpha = -1$ (Konvention A, Cornwell) und $B_\alpha = 1$ (Konvention B, Helgason).

Im folgenden wird Konvention A verwendet. Die so normierten Wurzelgeneratoren e_α bilden zusammen mit einer Basis der Cartan-Subalgebra eine Cartan-Weyl-Basis von $\mathfrak{g}$. Die Vertauschungsrelationen sind:

$$[H, e_\alpha] = \alpha(H) e_\alpha \quad \forall H \in \mathfrak{h}, \quad (\text{B.22})$$

$$[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha, \beta} e_{\alpha+\beta}, \alpha + \beta \in \Delta, \quad (\text{B.23})$$

$$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = -h_\alpha. \quad (\text{B.24})$$

Da die h_α linear abhängig sind, gibt es keine natürliche Wahl für eine Basis von $\mathfrak{h}$. Eine Wahlmöglichkeit sind die Bilder h_{β_i} einer Basis β_i des Gewichtsraumes. Eine andere Wahl der Basis von $\mathfrak{h}$ ist für viele physikalische Anwendungen sinnvoll und erlaubt zugleich eine geometrische Reinterpretation des Wurzelsystems, die auch rein mathematisch wichtig ist. Da die Killing-Form eingeschränkt auf $\mathfrak{h}_0$ ein reelles Skalarprodukt ist, kann man durch

$$K(h_i, h_j) = \delta_{i,j} \quad (\text{B.25})$$

eine reelle Orthonormalbasis von $\mathfrak{h}_0$ definieren und nach dem Gramm-Schmidt-Verfahren konstruieren (diese ist natürlich dann eine $\mathbf{C}$ -Basis der Cartan-Subalgebra). Die Entwicklung eines beliebigen $h_\alpha, \alpha \in \mathfrak{h}_0$ ist dann

$$h_\alpha = \sum_{i=1}^l \alpha(h_i) h_i. \quad (\text{B.26})$$

In der physikalischen Literatur (und in der algebraischen Theorie der Wurzelsysteme) wird für $\alpha \in \Delta$ der Vektor

$$(\alpha(h_1), \dots, \alpha(h_l)) \in \mathbf{R}^l \quad (\text{B.27})$$

selbst als Wurzel (oder als Wurzelvektor) bezeichnet. Die folgende begriffliche Klärung ist angebracht, um Mißverständnissen vorzubeugen:

Vereinbarung über die Beschreibung von Wurzeln: Es sei ϵ_i eine Orthonormalbasis und α_i eine weitere, beliebige Basis von $\mathfrak{h}_0^*$. Die Entwicklung eines beliebigen reellen Gewichtes α sei

$$\alpha = \sum_{i=1}^l a_i \alpha_i = \sum_{i=1}^l x_i \epsilon_i \quad (\text{B.28})$$

Durch den (nicht kanonischen!) isometrischen Vektorraum-Isomorphismus

$$\mathfrak{h}_0 \rightarrow \mathbf{R}^l : \quad \epsilon_i \rightarrow \mathbf{e}_i \quad (\text{B.29})$$

wird der Wurzel $\alpha \in \mathfrak{h}_0^*$ der Wurzelvektor $\vec{\alpha} \in \mathbf{R}^l$ zugeordnet:

$$\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^l a_i \vec{\alpha}_i = \sum_{i=1}^l x_i \mathbf{e}_i. \quad (\text{B.30})$$

(Dabei sind die $\tilde{\alpha}_i$ die Bilder der α_i unter dem Isomorphismus.) Im allgemeinen führt es zu keinen Schwierigkeiten, wenn man beide Räume identifiziert und die Vektorpfeile wegläßt. Allerdings muß man, insbesondere bei Verwendung von nicht orthogonalen Basen, die Vektoren $\alpha, \tilde{\alpha}$ von ihren Komponenten bezüglich gewählter Basen in $\mathbf{h}_0^*, \mathbf{R}^l$, die ihrerseits wieder Vektoren in $\mathbf{R}^l$ sind, zu unterscheiden. In unserem Fall ist

$$\underline{a} := (a_i)_{i=1}^l = (M_{\{\tilde{\alpha}_i\}}(\tilde{\alpha}))_{i=1}^l = (M_{\{\alpha_i\}}(\alpha))_{i=1}^l, \quad (\text{B.31})$$

$$\underline{x} := (x_i)_{i=1}^l = (M_{\{\epsilon_i\}}(\tilde{\alpha}))_{i=1}^l = (M_{\{\epsilon_i\}}(\alpha))_{i=1}^l. \quad (\text{B.32})$$

Bei einer Koordinatentransformation (Basistransformation) $\epsilon_i \rightarrow \alpha_i$ bleiben die Vektoren $\alpha, \tilde{\alpha}$ fest, während sich ihre Komponenten gemäß $\underline{x} \rightarrow \underline{a}$ ändern. Da, wie sich bei der Diskussion der Cartan-Matrix herausstellen wird, alle Information in den Skalarprodukten der Wurzeln steckt, also Basis-invariant ist, kann man sich die jeweils bequemste Beschreibung aussuchen. Die Skalarprodukte sind:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta} = \underline{a}^T \underline{G} \underline{b} \quad (\text{B.33})$$

Der letzte Term ist im Sinne des Matrix-Kalküls zu lesen, wobei die Koordinatenvektoren als Spaltenvektoren ($l \times 1$ Matritzen) gemeint sind. $\underline{G}$ ist die Matrix des Skalarproduktes bezüglich der gewählten Basis; wählt man eine nicht orthonormale Basis, so ist sie von der Einheitsmatrix verschieden.

Neben den Cartan-Weyl-Basen gibt es auch noch **Chevalley-Basen**, die sich dadurch auszeichnen, daß alle Strukturkonstanten ganze Zahlen sind. Durch die Umskalierung

$$E_\alpha := \sqrt{\frac{2}{(\alpha, \alpha)}} e_\alpha, \quad E_{-\alpha} := -\sqrt{\frac{2}{(\alpha, \alpha)}} e_{-\alpha}, \quad \text{für } \alpha > 0 \quad (\text{B.34})$$

werden zunächst die $N_{\alpha, \beta}$ ganzzahlig. Diese Wahl von Wurzelgeneratoren entspricht den Konventionen von Bourbaki bzw. Chevalley je nachdem ob bei den Cartan-Weyl-Generatoren B_α negativ oder positiv gewählt worden ist. Die passend normierten Cartan-Generatoren erhält man, indem man die h_α gemäß

$$H_\alpha := \frac{2}{(\alpha, \alpha)} h_\alpha \quad \text{für } \alpha > 0 \quad (\text{B.35})$$

reskaliert. (Dabei wird eine Basis von $\mathbf{h}_0^*$ aus positiven Wurzeln gewählt.) Man beachte, daß im Gegensatz zu den h_α

$$H_{\alpha+\beta} \neq H_\alpha + H_\beta \quad (\text{B.36})$$

ist, wenn α und β Wurzeln unterschiedlicher Länge sind.

Die Vertauschungsrelationen der reskalierten Generatoren sind:

$$[H_\alpha, E_\beta] = \beta(H_\alpha) E_\beta = 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} E_\beta, \quad (\text{B.37})$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, \quad (\text{B.38})$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = N'_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta} \quad \text{falls } \alpha + \beta \in \Delta, \quad (\text{B.39})$$

mit $\beta(H_\alpha), N'_{\alpha, \beta} \in \mathbf{Z}$. Über die Bestimmung der Strukturkonstanten und die Wahl einer Basis für die Cartan-Subalgebra wird weiter unten berichtet. An dieser Stelle bemerken wir, daß für jede Wurzel α die Generatoren $H_\alpha, E_\alpha, E_{-\alpha}$ die Algebra

$$[H_\alpha, E_{\pm\alpha}] = \pm 2 E_{\pm\alpha}, \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha \quad (\text{B.40})$$

erfüllen. Diese komplexe einfache Lie-Algebra wird als A_1 bezeichnet und ist die gemeinsame Komplexifizierung der reellen einfachen Lie-Algebren $su(2)$ und $sl(2, \mathbf{R})$. Offensichtlich sind alle einfachen komplexen Lie-Algebren aus A_1 Unteralgebren zusammengesetzt. Die von den obigen Generatoren erzeugte reelle Lie-Algebra ist $sl(2, \mathbf{R})$, trotzdem wird in der Literatur manchmal auch von $su(2)$ Unteralgebren gesprochen.

Die Cartan-Matrix

Die Klassifizierung der einfachen komplexen Lie-Algebren wurde von Cartan mit Hilfe der von eingeführten Cartan-Matrizen durchgeführt. Zu ihrer Definition benötigt man den wichtigen Begriff ist der **einfachen** Wurzel.

Definition B.1.15 Eine positive Wurzel heißt genau dann **einfach**, wenn sie nicht als Summe zweier anderer positiver Wurzeln geschrieben werden kann.

Der Begriff einfach hängt, wie der Begriff positiv, von der Auswahl einer Basis aus den Wurzeln ab. Insbesondere kann jede Wurzel als einfache Wurzel gewählt werden. Die Bedeutung der einfachen Wurzeln liegt daran, daß sie die elementaren Bausteine des Wurzelsystems sind. Genauer gilt:

Satz B.1.10 Jedes System einfacher Wurzeln $\{\alpha_i\} = \Pi$ bildet eine $\mathbf{R}$ -Basis von $\mathfrak{h}_0^*$ (und damit eine $\mathbf{C}$ -Basis von $\mathfrak{h}^*$). Insbesondere gibt es genau $l = \text{rang}(\mathfrak{g})$ einfache Wurzeln und diese sind linear unabhängig. Jede Wurzel ist als **ganzzahlige** Linearkombination der einfachen Wurzeln, mit entweder nur nichtnegativen oder nur nichtpositiven Entwicklungskoeffizienten darstellbar:

$$\alpha = \pm \sum_{i=1}^l a_i \alpha_i, \quad a_i \in \mathbf{N}.$$

Die Wurzeln mit den nichtnegativen Koeffizienten sind genau die positiven Wurzeln.

Mit Hilfe der einfachen Wurzeln kann nun die Cartan-Matrix definiert werden.

Definition B.1.16 Die aus den einfachen Wurzeln gebildete Matrix

$$C_{i,j} = 2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle}$$

heißt die Cartan-Matrix der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$.

Die überragende Bedeutung der Cartan-Matrix ergibt sich aus dem folgenden Satz:

Satz B.1.11 Die Cartan-Matrix hängt nicht von der Wahl der einfachen Wurzeln ab, d.h. zu jeder einfachen, komplexen Lie-Algebra gehört genau eine Cartan-Matrix. Jede Cartan-Matrix hat die folgenden Eigenschaften: $C_{ii} = 2$, $C_{ij} \neq 0 \Rightarrow C_{ji} \neq 0$, $C_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ und alle Hauptminoren sind positiv. Jede Matrix, die diese vier Bedingungen erfüllt, ist die Cartan-Matrix einer Lie-Algebra und zu jeder Cartan-Matrix, die nicht direkte Summe zweier Cartan-Matrizen ist, gehört genau eine einfache komplexe Lie-Algebra. (Direkte Summen von Cartan-Matrizen beschreiben halbeinfache komplexe Lie-Algebren und man kann alle diese Lie-Algebren so erhalten.)

Bemerkung 11 In dem Buch [138] findet man einen Algorithmus, der es erlaubt aus einer gegebenen Cartan-Matrix alle Wurzeln und damit die Lie-Algebra selbst zu rekonstruieren.

Eine geometrische Interpretation der Cartan-Matrix ergibt sich, wenn man die Wurzeln, wie oben erläutert, als Vektoren im $\mathbf{R}^l$ auffaßt. Dies dient nicht nur zur Veranschaulichung, sondern kann auch bei der Lösung des Klassifikationsproblems benutzt werden. Zunächst sei daran erinnert, daß eine Spiegelung r_α an der Hyperebene P_α senkrecht zu einem Vektor $\alpha \in \mathbf{R}^l$

$$P_\alpha = \{\beta \in \mathbf{R}^l \mid \beta \cdot \alpha = 0\} \tag{B.41}$$

durch

$$r_\alpha : \beta \rightarrow r_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha} \alpha \tag{B.42}$$

beschrieben wird. Dann gilt [148]:

⁶Wie oben angedeutet, werden $\mathfrak{h}_0$ und $\mathbf{R}^l$ identifiziert, d.h. Vektorpfeile weggelassen.

Satz B.1.12 Jedes Wurzelsystem Δ einer halbeinfachen Lie-Algebra besitzt die folgenden Eigenschaften

1. $|\Delta| < \infty$, $0 \notin \Delta$, $\langle \Delta \rangle_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^l$.
2. $\alpha \in \Delta$ und $m\alpha \in \Delta \Rightarrow m = \pm 1$.
3. $\alpha \in \Delta \Rightarrow r_\alpha$ bildet Δ auf Δ ab.
4. $\alpha, \beta \in \Delta \Rightarrow C(\beta, \alpha) := 2 \frac{\beta \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha} \in \mathbf{Z}$.

Umgekehrt ist jedes solche System von Vektoren ein Wurzelsystem. Die Winkel zwischen den Wurzeln sind Vielfache von 30 Grad oder von 45 Grad. Es gibt höchstens zwei verschiedene Längen von Wurzeln. Das Verhältnis der Normquadrate zweier Wurzeln ist stets gleich 1 oder 2 oder 3.

Um auch noch die einfachen Wurzeln geometrisch charakterisieren zu können, muß wieder eine Ordnungsrelation eingeführt werden. Zunächst soll aber noch der Begriff der **Weyl-Kammer** eingeführt werden:

Definition B.1.17 Die Zusammenhangskomponenten der Menge $\mathbf{R}^l - \bigcup_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$ heißen die (offenen) **Weylkammern** von Δ . Ein Vektor $\gamma \in \mathbf{R}^l$ heißt genau dann **regulär**, wenn er in einer Weylkammer liegt.

Zwei Vektoren liegen genau dann in derselben Weyl-Kammer, wenn sie auf der selben Seite jeder der Hyperflächen P_α liegen. Wählt man einen beliebigen regulären Vektor γ , so nennt man einen Vektor genau dann positiv (negativ), wenn sein Skalarprodukt mit γ positiv (negativ) ist. Δ zerfällt dann in zwei gleichgroße, disjunkte Teilmengen. Diese Zerlegung hängt nur von der gewählten Weyl-Kammer ab. Eine einfache Wurzel ist dann wieder eine positive Wurzel, die man nicht als Summe zweier anderer positiver Wurzeln schreiben kann. Jede Wahl einer Weyl-Kammer definiert genau ein System einfacher Wurzeln und alle diese Systeme sind verschieden. Die dem System $\Pi = \{\alpha_i | i = 1, \dots, l\}$ zugeordnete Weyl-Kammer ist dadurch charakterisiert, daß alle in ihr liegenden Vektoren positive Skalarprodukte mit allen einfachen Wurzeln haben. Die wichtigsten Eigenschaften der einfachen Wurzeln sind:

Satz B.1.13 Jedes System Π einfacher Wurzeln einer halbeinfachen Lie-Algebra besitzt folgende Eigenschaften

1. Π ist eine **R-Basis** von $\mathbf{R}^l$.
2. Jede Wurzel ist eine ganzzahlige Linearkombination mit entweder nur nichtnegativen oder nur nichtpositiven Koeffizienten.

Umgekehrt ist jedes System von Vektoren mit diesen Eigenschaften ein System einfacher Vektoren einer halbeinfachen Lie-Algebra. Die aus den einfachen Wurzeln konstruierte Matrix

$$C_{i,j} = 2 \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_i \cdot \alpha_i} \quad (\text{B.43})$$

ist gerade die Cartan-Matrix der Lie-Algebra. Der Winkel zwischen zwei einfachen Wurzeln beträgt 90, 120, 135 oder 150 Grad.

Bemerkung 12 Wurzelsysteme, die nicht in disjunkte kleinere Wurzelsysteme zerlegt werden können, heißen irreduzibel. Sie gehören zu einfachen Lie-Algebren, die anderen zu halbeinfachen.

Da bereits die einfachen Wurzeln $\{\alpha_i | i = 1, \dots, l\}$, genauer die Cartan-Matrix, die Lie-Algebra eindeutig (bis auf Isomorphie) festlegen, liegt die Vermutung nahe, daß bereits die Generatoren H_{α_i} , E_{α_i} , $E_{-\alpha_i}$ ausreichen um die gesamte Lie-Algebra zu erzeugen, obwohl sie bei weitem keine Vektorraum-Basis bilden. Die nichttriviale Frage ist dann, welche Relationen man für eine Menge von $3l$ Generatoren fordern muß, damit sie eine gegebene einfache Lie-Algebra vom Range l generieren. Die Antwort liefert der folgende Satz [148].

Satz B.1.14 [Serre] Sei Δ ein Wurzelsystem mit einfachen Wurzeln $\Pi = \{\alpha_i\}$. Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra, die von $3l$ Generatoren mit den folgenden Relationen erzeugt wird:

1. $[H_i, H_j] = 0, \quad [E_i, F_j] = \delta_{ij} H_i,$
2. $[H_i, E_j] = C_{ij} E_j, \quad [H_i, F_j] = -C_{ij} F_j,$
3. $(ad E_i)^{1-C_{ij}} E_j = 0, \quad (ad F_i)^{1-C_{ij}} F_j = 0, \quad i \neq j,$

wobei $C_{ij} = 2(\alpha_i \cdot \alpha_j) / (\alpha_i \cdot \alpha_i)$. Dann ist $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra mit Wurzelsystem Δ und Cartan-Matrix C_{ij} .

Die Chevalley-Generatoren zu einer Chevalley-Basis von $\mathfrak{g}$ sind $H_i = H_{\alpha_i}$, $E_i = E_{\alpha_i}$ und $F_i = E_{-\alpha_i}$. Die letzten beiden Relationen (3) sind uns im Gegensatz zu den anderen bisher nicht begegnet. Läßt man sie weg, so erhält man eine unendlich dimensionale Lie-Algebra, da man beliebig große Worte aus den Generatoren $E_{\pm\alpha_i}$ bilden. Nimmt man diese Endlichkeitsbedingungen hinzu, so ist ein Wort der Form

$$[E_{\alpha_i}, [E_{\alpha_j}, [\dots, E_{\alpha_k}] \dots]]$$

genau dann ungleich 0, wenn

$$\alpha_i + \alpha_j + \dots + \alpha_k = \alpha \in \Delta$$

ist und alle Worte mit gleicher „Quersumme“ α sind linear abhängig. Hierdurch wird die Lie-Algebra endlich dimensional. Der normierte Generator E_α des eindimensionalen Wurzelraumes $\mathfrak{g}_\alpha$ ergibt sich als iterierter Kommutator von Chevalley-Generatoren $E_{\pm\alpha_i}$ unter Berücksichtigung der Strukturkonstanten $\epsilon(\alpha, \beta)$. Eine Möglichkeit der konsistenten Wahl ist der Frenkel-Kac-Kozykel. Die gesamte Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ kann mit nur $l+1$ Generatoren erzeugt werden. Dazu kann man zum Beispiel die l Wurzeloperatoren E_{α_i} und den der niedrigsten Wurzel $-\alpha_H$ zugeordneten normierten Generator $E_{-\alpha_H}$. In der adjungierten Darstellung kann man zeigen, daß durch iterierte Anwendung der Aufsteige-Operatoren E_{α_i} auf den niedrigsten Gewichts-Zustand (Vakuum) $E_{-\alpha_H}$ die ganze Darstellung erzeugt wird [150].

Aus Serres Theorem folgt ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz [148].

Satz B.1.15 Zu jedem Wurzelsystem Δ existiert eine halbeinfache Lie-Algebra mit Δ als Wurzelsystem. Sind zwei Wurzelsysteme isomorph, so sind es auch die zugehörigen Lie-Algebren.

Welche Isomorphismen gibt es überhaupt? Offensichtlich kann man bei einem Wurzelsystem alle Wurzeln mit der gleichen Konstante skalieren ohne die Cartan-Matrix zu ändern, da in die Cartan-Matrix nur Verhältnisse von Skalarprodukten eingehen. Geometrisch gesprochen kommt es nicht auf die Länge der Wurzelvektoren, sondern nur auf die Winkel zwischen ihnen und auf das Längenverhältnis zwischen langen und kurzen Wurzeln an. (Abgesehen von der Über-alles-Skalierung kann man noch die Nummerierung der einfachen Wurzeln ändern. Das ist aber offensichtlich die gesamte Freiheit, die man hat.) Will man mit Werten für Skalarprodukte rechnen, so normiert man die Länge einer Wurzelsorte, gewöhnlich die der langen Wurzeln. Die Matrix der Skalarprodukte der einfachen Wurzeln ergibt sich aus der Cartan-Matrix durch Multiplikation mit einer Diagonalmatrix deren Einträge die Zahlen $\epsilon_i^{-1} = \alpha_i \cdot \alpha_i / 2$ sind.

$$G_{ij} = \alpha_i \cdot \alpha_j = \frac{\alpha_i \cdot \alpha_i}{2} 2 \frac{\alpha_i \cdot \alpha_j}{\alpha_i \cdot \alpha_i} = \epsilon_i^{-1} C_{ij} \quad (\text{B.44})$$

Für die Normierung der Skalarprodukte gibt es zwei Konventionen. Die eine Möglichkeit besteht darin, das Normquadrat der langen Wurzeln auf 2 zu normieren. Diese Wahl ist besonders bei den sogenannten einfach verbundenen („simply laced“) Lie-Algebren natürlich, die eine symmetrischen Cartan-Matrix besitzen. Bei ihnen definiert dann die Cartan-Matrix selbst das Skalarprodukt. Die in dieser Arbeit als Symmetrie-Algebren auftretenden Lie-Algebren gehören zu diesem Typ. Außerdem tritt diese Normierung auf natürliche Weise in den Vertexoperator-Darstellungen von halbeinfachen Lie-Algebren auf. Sie wird daher in dieser Arbeit gewählt.

Eine andere Konvention ergibt sich, wenn man fordert, daß das Skalarprodukt im Gewichtsraum nicht nur proportional sondern gleich der durch die Killing-Form induzierten Bilinearform sein soll. Das Normquadrat einer langen Wurzel ist dann das inverse $\tilde{h}^{-1}$ der sogenannten dualen Coxeter Zahl $\tilde{h}$:

$$\alpha \cdot \alpha = \frac{1}{\tilde{h}}, \quad \alpha \text{ lange Wurzel.} \quad (\text{B.45})$$

$\tilde{h}$ kann durch den Rang l , die Anzahl n_L, n_S der langen und kurzen Wurzeln und durch das Verhältnis der Normquadrate $\alpha_L \cdot \alpha_L, \alpha_S \cdot \alpha_S$ von langen und kurzen Wurzeln ausgedrückt werden [40]:

$$\tilde{h} = \frac{1}{l} \left(n_L + \frac{\alpha_S \cdot \alpha_S}{\alpha_L \cdot \alpha_L} n_S \right). \quad (\text{B.46})$$

Dieser Ausdruck ist offensichtlich eine Invariante der Lie-Algebra.

Dynkin-Diagramme

Eine nützliche graphische Codierung der gesamten Information, die in der Cartan-Matrix bzw. in den einfachen Wurzeln enthalten ist, sind die **Dynkin-Diagramme**. Dabei zeichnet man für jede einfache Wurzel einen Punkt und verbindet die Punkte mit 0,1,2 oder 3 Strichen, je nachdem, ob der Winkel zwischen den beiden Wurzeln 90, 120, 135 oder 150 Grad beträgt. Falls Wurzeln von zweierlei Länge existieren, orientiert man die Linien zwischen langen und kurzen Wurzeln so, daß sie von der langen Wurzel zur kurzen führen (oder bezeichnet die langen Wurzeln durch schwarze, die kurzen durch weiße Punkte). Bei einer einfachen Lie-Algebra ist das Dynkin-Diagramm (im topologischen Sinne) zusammenhängend. Mit dem Dynkin-Diagramm ist nun auch eine Charakterisierung gefunden, die keine Freiheiten mehr läßt. (Abgesehen davon, daß man das Diagramm, wenn man will, stetig deformieren kann ...)

Als nächstes soll die Liste aller einfachen, komplexen Lie-Algebren angegeben werden (In der Liste steht l wie immer für den Rang):

1. $A_l, l = 1, \dots$, die gemeinsame Komplexifizierung von $su(l+1), su(l+1-n, n)$ und $sl(l+1, \mathbf{R})$.
2. $B_l, l = 1, \dots$, die gemeinsame Komplexifizierung von $so(2l+1), so(2l+1-n, n)$.
3. $C_l, l = 1, \dots$, die gemeinsame Komplexifizierung von $sp(l), sp(l-n, n)$.
4. $D_l, l = 3, \dots$, die gemeinsame Komplexifizierung von $so(2l), so(2l-n, n)$.
5. Außer diesen vier Serien, den sogenannten **klassischen Lie-Algebren**, gibt es noch fünf weitere einfache, komplexe Lie-Algebren, die **exzeptionellen Lie-Algebren** E_6, E_7, E_8, F_4 und G_2 .

Bemerkung 13 Es gilt $A_1 \simeq B_1 \simeq C_1, B_2 \simeq C_2$ und $A_3 \simeq D_3$. Ansonsten sind alle in der Liste aufgeführten einfachen komplexen Lie-Algebren paarweise nicht-isomorph. Ferner ist $D_2 \simeq A_1 \oplus A_1$ nicht einfach, aber halbeinfach.

Bei den Lie-Algebren A_l, D_l und E_l besitzen alle Wurzeln die gleiche Länge. Der Winkel zwischen je zwei einfachen Wurzeln beträgt 90 oder 120 Grad, d.h. im Dynkin-Diagramm sind je zwei Punkte entweder nicht oder durch eine Linie verbunden. Diese Lie-Algebren heißen simply laced, was ich mit **einfach verbunden** übersetze. Die Cartan-Matrix ist in diesem Fall symmetrisch und proportional zur Matrix der Skalarprodukte zwischen den einfachen Wurzeln. Da wir die langen Wurzeln auf 2 normieren sind beide Matrizen sogar gleich.

Die Lie-Algebren A_l, D_l und E_l

Die Vertauschungsrelationen der einfach verbundenen Lie-Algebren ergeben sich aus dem allgemeinen Fall mit den zusätzlichen Beziehungen

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = C_{ij}, \quad \epsilon_i = \frac{2}{\alpha_i \cdot \alpha_i} = 1, \quad h_\alpha = H_\alpha. \quad (\text{B.47})$$

Daraus ergibt sich auch ein vereinfachtes Kriterium dafür, wann die Summe zweier Wurzeln wieder eine Wurzel ist:

$$\alpha, \beta \in \Delta \implies \begin{cases} \alpha + \beta \in \Delta & \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = -1, \\ \alpha = -\beta \in \Delta & \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = -2, \\ \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\} & \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 0, 1, 2. \end{cases} \quad (\text{B.48})$$

Für die in der Arbeit durchgeführten Rechnungen muß die Anordnung der einfachen Wurzeln spezifiziert werden. Ich gebe daher am Ende dieses Anhangs die Dynkin-Diagramme der einfach verbundenen Lie-Algebren an.

B.1.3 Darstellungen komplexer, einfacher Lie-Algebren

Es ist ebenfalls möglich eine Übersicht über die endlich dimensional irreduziblen Darstellungen zu bekommen. (Reduzible Darstellungen sind übrigens vollreduzibel, zerfallen also in direkte Summen reduzibler Darstellungen.) Gegeben sei nun eine endlich dimensionale irreduzible Darstellung (V, Φ) . Bei der Untersuchung der Struktur der Lie-Algebra wurde die adjungierte Darstellung betrachtet. Bei der Darstellungstheorie kann man ähnlich vorgehen. Zunächst kann man Unterräume finden, auf denen die Cartan-Subalgebra diagonal operiert.

Definition B.1.18 Sei $\mathbf{w} \in \mathbf{h}^*$ ein Gewicht. Dann heißt ein Unterraum $V_{\mathbf{w}}$ von V genau dann Gewichtsraum zum Gewicht $\mathbf{w}$, wenn gilt:

$$\forall h \in \mathbf{h} : \forall v_{\mathbf{w}} \in V_{\mathbf{w}} : \Phi(h)v_{\mathbf{w}} = \mathbf{w}(h)v_{\mathbf{w}} \quad (\text{B.49})$$

Im Gegensatz zu den Wurzelräumen der adjungierten Darstellung kann die Dimension eines Gewichtsraumes im allgemeinen auch größer als 1 sein. Als nächstes bestimmt man die Wirkung der Wurzeloperatoren E_α . Es ergibt sich, daß diese die Gewichtsräume aufeinander abbilden:

$$\Phi(E_\alpha) : V_{\mathbf{w}} \rightarrow V_{\mathbf{w}+\alpha} \quad (\text{B.50})$$

Die Operatoren $\Phi(E_{\pm\alpha})$, $\alpha \in \Delta^+$ können als Auf- und Absteigeoperatoren interpretiert werden. Das Analogon des Vakuums ist dabei der Vektor höchsten Gewichtes.

Definition B.1.19 Ein Vektor $v_{\mathbf{w}} \in V$ heißt genau dann **Vektor höchsten Gewichtes**, wenn er von allen Aufsteigeoperatoren vernichtet wird, d.h.

$$\forall \alpha \in \Delta^+ : \Phi(E_\alpha)v_{\mathbf{w}} = 0$$

Satz B.1.16 In einer endlich dimensional irreduziblen Darstellung gibt es genau ein höchstes Gewicht und der Gewichtsraum $V_{\mathbf{w}}$ ist eindimensional. Durch wiederholte Anwendung der Absteigeoperatoren $\Phi(E_{-\alpha})$ erhält man die ganze Darstellung, die folglich durch ihr höchstes Gewicht (bis auf Isomorphie) bereits eindeutig bestimmt ist.

Es existiert übrigens auch ein Vektor niedrigsten Gewichts, der von allen Absteigeoperatoren vernichtet wird. Das Analogon der Cartan-Zerlegung ist

$$V = \bigoplus_{\mathbf{w} \in \mathbf{W}(\Phi)} V_{\mathbf{w}}. \quad (\text{B.51})$$

Um die irreduziblen Darstellungen zu klassifizieren, ordnet man den Gewichten $\mathbf{w}$ sogenannte Dynkin-Koeffizienten $\Lambda(\mathbf{w})^i$, $i = 1, \dots, l$ zu. Diese Bildung ist der Cartan-Matrix nachempfunden:

$$\Lambda(\mathbf{w})^i := 2 \frac{\mathbf{w} \cdot \alpha_i}{\alpha_i \cdot \alpha_i}, \quad \alpha_i \in \Pi. \quad (\text{B.52})$$

Die Dynkin-Koeffizienten der Wurzeln, also der Gewichte der adjungierten Darstellung sind gerade die Elemente der Cartan-Matrix. Aber auch die Dynkin-Koeffizienten von Gewichten anderer Darstellungen haben die bemerkenswerte Eigenschaft stets **ganzzahlig** zu sein.

Betrachtet man speziell einfach verbundene Lie-Algebren, so sind sie einfach die Entwicklungskoeffizienten des Gewichtes bezüglich der zu α_i dualen oder reziproken Basis von $\mathbf{h}^*$:

$$\Lambda(\mathbf{w})^i = \mathbf{w} \cdot \alpha_i = w^i \Leftrightarrow \mathbf{w} = \sum_{i=1}^l w^i \alpha_i^* \quad (\text{B.53})$$

Die duale Basis ist dabei durch

$$\alpha_i^* \cdot \alpha_j = \delta_{ij} \quad (\text{B.54})$$

definiert. Offensichtlich gilt:

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = A_{ij} \Rightarrow \alpha_i^* \cdot \alpha_j^* = (A^{-1})_{ij}. \quad (\text{B.55})$$

Die α_i^* werden als fundamentale Gewichte bezeichnet, da alle Gewichte sich als ganzzahlige Linearkombination schreiben lassen. Dies gilt insbesondere für die einfachen Wurzeln; die Entwicklungskoeffizienten sind dann die Elemente der Cartan-Matrix

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^l A_{ij} \alpha_j^*. \quad (\text{B.56})$$

Die Menge aller Gewichte aller Darstellungen, also die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen der fundamentalen Gewichte, wird als das Gewichtsgitter der Lie-Algebra bezeichnet. Es enthält als Untergitter das Wurzelgitter, das aus den ganzzahligen Linearkombinationen der einfachen Wurzeln besteht:

$$\Lambda_W = \langle \alpha_i^*, i = 1, \dots, l \rangle, \quad \Lambda_R = \langle \alpha_i, i = 1, \dots, l \rangle, \quad \Lambda_R \subset \Lambda_W. \quad (\text{B.57})$$

Beide Gitter können als Gitter im $\mathbf{R}^l$ realisiert werden. Oben wurde gezeigt, daß die Cartan-Subalgebra die Gewichtsräume invariant läßt, während die Leiteroperatoren Gewichte immer um Wurzeln ändern. In einer irreduziblen Darstellung ist die Differenz zweier Gewichte also immer eine Wurzel. Folglich liegen alle Gewichte einer irreduziblen Darstellung in der gleichen Nebenklasse von Λ_W nach Λ_R und die Menge der irreduziblen Darstellungen zerfällt entsprechend in als Konjugationsklassen von Darstellungen bezeichnete Nebenklassen. Diese Menge ist endlich. Λ_W und Λ_R sind abelsche Gruppen und als solche isomorph zu $\mathbf{Z}^l$. Mit der Quotientengruppenstruktur ist Γ_W/Γ_R eine endliche abelsche Gruppe, die **Gruppe der Konjugationsklassen** (von Darstellungen) [58]. Für die nicht einfach verbundenen Lie-Algebren gelten analoge Resultate mit etwas komplizierteren Formeln, die in dieser Arbeit nicht benötigt werden.

Wir kommen nun auf das Klassifikationsproblem zurück: Eine irreduzible Darstellung ist durch die Dynkin-Koeffizienten ihres höchsten Gewichtes eindeutig festgelegt. Welche Gewichte sind nun aber höchste Gewichte von Darstellungen?

Satz B.1.17 Ein Gewicht $\mathbf{w}$ ist genau dann höchstes Gewicht einer irreduziblen Darstellung, wenn alle seine Dynkin-Koeffizienten nichtnegativ sind. Solche Gewichte heißen dominant und liegen in der fundamentalen Weyl-Kammer. Höchste Gewichte mit verschiedenen Dynkin-Koeffizienten liefern inäquivalente Darstellungen. Man erhält also alle inäquivalenten irreduziblen endlich dimensional Darstellungen, in dem man auf jede mögliche Weise nichtnegative Dynkin-Koeffizienten wählt.

Von besonderer Bedeutung ist das höchste Gewicht der adjungierten Darstellung, die **höchste Wurzel** α_H . Trägt man ihr negatives α_0 in das Dynkin-Diagramm ein, so erhält man das **erweiterte Dynkin-Diagramm**, mit dessen Hilfe alle regulären Unteralgebren sowie die Verzweigungsregeln (branching rules) für das Ausreduzieren von Darstellungen bezüglich einer regulären Unteralgebra gefunden werden können [138].

B.1.4 Reelle einfache und halbeinfache Lie-Algebren

Die Theorie der einfachen und halbeinfachen reellen Lie-Algebren wurde von Cartan und Killing auf die der entsprechenden komplexen Lie-Algebren zurückgeführt. Die Verbindung zwischen reellen und komplexen Lie-Algebren wird durch die Begriffe der Komplexifizierung und der reellen Form hergestellt. Zunächst muß man sich klar machen, daß die in der Physik auftretenden Lie-Algebren, wie $su(2)$, $sl(2, \mathbf{R})$, $sl(2, \mathbf{C})$, reelle Lie-Algebren sind, auch wenn sie aus komplexen Matrizen bestehen. Entscheidend ist ja der Koeffizientenkörper. Die naive Methode der Komplexifizierung besteht darin, zu komplexen Linearkombinationen überzugehen. Dies liefert zum Beispiel im Falle der reell dreidimensionalen (nichtisomorphen) Lie-Algebren $su(2)$ und $sl(2, \mathbf{R})$ dieselbe komplexe Lie-Algebra A_1 . Das Verfahren funktioniert nicht, wenn eine reelle Lie-Algebra keine Basis besitzt, die auch über $\mathbf{C}$ linear unabhängig ist. Dies ist bei der reell sechsdimensionalen Lie-Algebra $sl(2, \mathbf{C})$ der Fall, die durch Übergang zu komplexen Koeffizienten nicht größer wird.

Im allgemeinen ist die Komplexifizierung auf ähnliche Weise zu definieren, wie man $\mathbf{C}$ selbst aus dem $\mathbf{R}^2$ konstruiert: Man prägt dem Cartesischen Produkt $\mathfrak{g}_r \times \mathfrak{g}_r$ die Struktur einer komplexen Lie-Algebra auf [138]. Dort wo das naive Verfahren funktioniert, stimmt es mit dem allgemeinen überein. Im Fall der $sl(2, \mathbf{C})$ erhält man als Komplexifizierung übrigens die komplex sechsdimensionale Lie-Algebra $A_1 \oplus A_1$. Dieses Beispiel zeigt auch, daß die Komplexifizierung einer einfachen Lie-Algebra mitunter halbeinfach ist; sie ist dann aber stets die direkte Summen zweier isomorpher einfacher Lie-Algebren.

Umgekehrt heißt jede reelle Unteralgebra $\mathfrak{g}_r$ einer komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{g}_c$ eine reelle Form von $\mathfrak{g}_c$ wenn ihre Komplexifizierung eben $\mathfrak{g}_c$ ist. Offensichtlich ist jede reelle Lie-Algebra eine reelle Form, nämlich eine reelle Form ihrer eigenen Komplexifizierung.

Es gibt zwei Arten von reellen Lie-Algebren:

Definition B.1.20 Eine reelle Lie-Algebra heißt genau dann vom kompakten Typ oder einfach kompakt, wenn die Killing-Form negativ definit ist.

Diese Definition ist zunächst irritierend, da jede reelle Lie-Algebra als topologischer Vektorraum isomorph zu $\mathbf{R}^d$, $d = \dim(\mathfrak{g}_r)$, also nicht kompakt ist. Ihre Rechtfertigung erfährt sie durch den folgenden Satz:

Satz B.1.18 [Weyl] Sie G eine zusammenhängende, halbeinfache, reelle, lineare Lie-Gruppe. Dann ist G genau dann kompakt, wenn ihre Lie-Algebra vom kompakten Typ ist.

Die Klassifikation der kompakten, reellen, einfachen Lie-Algebren reduziert sich durch den folgenden Satz auf die der komplexen, einfachen Lie-Algebren:

Satz B.1.19 Jede komplexe, einfache Lie-Algebra besitzt genau eine kompakte reelle Form $\mathfrak{g}_{rk}$. Eine Basis von $\mathfrak{g}_{rk}$ ist:

$$ih_{\alpha_j}, e_{\alpha} + e_{-\alpha}, i(e_{\alpha} - e_{-\alpha}), j = 1, \dots, l, \alpha \in \Delta^+. \quad (\text{B.58})$$

Eine Orthonormalbasis bezüglich des Skalarproduktes $(,) = -K(,)$ ist gegeben durch

$$iH_j, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{\alpha} + e_{-\alpha}), \frac{i}{\sqrt{2}}(e_{\alpha} - e_{-\alpha}), j = 1, \dots, l, \alpha \in \Delta^+. \quad (\text{B.59})$$

Die kompakten, reellen Formen der klassischen, einfachen, komplexen Lie-Algebren $A_l, \dots, D_l$ sind die bekannten unitären, orthogonalen und symplektischen Lie-Algebren $su(n)$, $so(n)$, $sp(n, \mathbf{R})$.

Nichtkompakte reelle Formen gibt es im allgemeinen mehrere. Für jede reelle Form kann man eine Basis a_i derart wählen, daß sie pseudo-orthonormal bezüglich der Killing-Form ist, d.h.

$$K(a_i, a_j) = \eta_{ij}. \quad (\text{B.60})$$

Dabei ist η_{ij} eine Diagonalmatrix mit p Einträgen 1 und $q = d - p$ Einträgen -1 . Falls die Signatur $s = p - q$ gleich $-n$ ist, ist die reelle Form kompakt, sonst nicht kompakt. Gegeben die kompakte reelle Form, kann man alle nichtkompakten reellen Formen durch involutorischen Automorphismen der reellen kompakten Form konstruieren:

Satz B.1.20 Sei $\mathfrak{g}_c$ eine komplexe, einfache Lie-Algebra und $\mathfrak{g}_{rk}$ ihre kompakte reelle Form mit der Basis a_i . Sei ψ ein involutorischer Automorphismus von $\mathfrak{g}_{rk}$, d.h. $\psi^2 = id$. Wählt man eine Basis aus Eigenvektoren, so ist

$$\psi a_i = \lambda_i a_i, \text{ mit } \lambda_i = \pm 1 \quad (\text{B.61})$$

und

$$b_i = \begin{cases} a_i, & \text{falls } \lambda_i = 1, \\ ia_i, & \text{falls } \lambda_i = -1, \end{cases} \quad (\text{B.62})$$

die Basis einer nichtkompakten reellen Form $\mathfrak{g}_{rn}$ von $\mathfrak{g}_c$. Außerdem kann jede nichtkompakte reelle Form so erzeugt werden. Erweitert man ψ zu einem Automorphismus von $\mathfrak{g}_c$ so wird durch

$$(a, b) = -K(a, \psi b) \quad (\text{B.63})$$

ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}_{rn}$ definiert.

Eine Liste aller nichtkompakten, reellen, einfachen Lie-Algebren findet man in dem Buch von Cornwell. Zu den nichtkompakten reellen Formen der klassischen, einfachen, komplexen Lie-Algebren $A_l, \dots, D_l$ gehören neben den speziellen linearen, pseudounitären, pseudoorthogonalen und pseudosymplektischen Lie-Algebren $sl(n, \mathbf{R})$, $su(p, q)$, $so(p, q)$, $sp(p, q, \mathbf{R})$ auch noch einige weitere.

B.1.5 Reelle Lie-Gruppen

Aus der Klassifizierung der reellen Lie-Algebren ergibt sich auch die der reellen Lie-Gruppen [137].

Satz B.1.21 Zu jeder reellen, halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}_r$ gibt es eine zusammenhängende, lineare, halbeinfache reelle Lie-Gruppe $\hat{\mathbf{G}}$ mit der folgenden Eigenschaft: Wenn $\mathbf{G}'$ eine zusammenhängende, lineare, reelle Lie-Gruppe mit der gleichen Lie-Algebra $\mathfrak{g}_r$ ist, gilt

$$\mathbf{G}' \simeq \frac{\hat{\mathbf{G}}}{\mathcal{Z}'},$$

wobei $\mathcal{Z}'$ eine diskrete Untergruppe des Zentrums von $\hat{\mathbf{G}}$ ist.

Um jede zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}_r$ zu bekommen, muß man die universelle Überlagerungsgruppe $\tilde{\mathbf{G}}$ von $\hat{\mathbf{G}}$ bilden.

Satz B.1.22 Sei $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende, reelle Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}_r$. Dann ist

$$\mathbf{G} \simeq \frac{\tilde{\mathbf{G}}}{\mathcal{Z}'},$$

wobei $\mathcal{Z}'$ eine diskrete Untergruppe des Zentrums von $\tilde{\mathbf{G}}$ ist.

Im Falle von kompakten Lie-Algebren ist dies überflüssig:

Satz B.1.23 Wenn $\mathfrak{g}_r$ kompakt ist, so ist $\hat{\mathbf{G}}$ einfach zusammenhängend, d.h. $\hat{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{G}}$. Insbesondere ist jede kompakte, reelle Lie-Gruppe linear. Wenn $\mathfrak{g}_r$ nicht kompakt ist, so ist $\tilde{\mathbf{G}}$ eine diskrete, zentrale Erweiterung von $\mathbf{G}$.

Bemerkung 14 Nicht zusammenhängende Lie-Gruppen erhält man als diskrete Erweiterungen zusammenhängender Lie-Gruppen.

In der Arbeit werden die Elemente der universellen linearen Gruppe einer kompakten Lie-Algebra durch Exponentiation der Lie-Algebra, bzw. der darstellenden Operatoren der adjungierten Darstellung repräsentiert. Die Darstellung eines Elementes $t \in \mathbf{T}$ des maximalen Torus ist dann

$$t = \exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^l \lambda_j h_{\alpha_j} \right), \quad \lambda_j \in \mathbf{R}. \quad (\text{B.64})$$

Da die Exponentialfunktion für imaginäre Argumente periodisch ist, ist die Parametrisierung von $\mathbf{T}$ durch den Koordinatenvektor $\vec{\lambda} = (\lambda_i)_{i=1}^l$ mehrdeutig. Um diese Periodizität zu beschreiben, benutzt man daß $\exp(H)$ $H \in \mathfrak{h}_0$ genau dann das Einselement $\mathbf{1} \in G$ repräsentiert, wenn es auf **jeder** Darstellung die $\mathbf{1} \in \mathbf{G}$ darstellt [137]. Durch die Anwendung von $\exp(H)$ auf einen Zustand mit dem beliebigen Gewicht $\mathbf{w} \in \Lambda_W$, $\mathbf{w} = \sum w_i \alpha_i^*$, $w_i \in \mathbf{Z}$ folgt:

$$\exp \left(2\pi i \sum_{j=1}^l \lambda_j h_{\alpha_j} \right) |\mathbf{w}\rangle = \exp \left(2\pi i \sum_{i,j=1}^l \lambda_j (\alpha_j, \alpha_i) w_i \right) |\mathbf{w}\rangle \stackrel{!}{=} |\mathbf{w}\rangle \quad (\text{B.65})$$

$$\Leftrightarrow (\lambda, \mathbf{w}) \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda_W^* = \Lambda_R, \text{ wobei } \lambda = \sum \lambda_i \alpha_i. \quad (\text{B.66})$$

Der maximale Torus von $\mathbf{G}$ ist folglich

$$\mathbf{T}^l = \frac{\mathbf{R}^l}{\Lambda_R}. \quad (\text{B.67})$$

Er ist als Gruppe isomorph zu $U(1)^l$ und als Mannigfaltigkeit homöomorph zu $(S^1)^l$. Besonders interessant sind noch die Elemente des Zentrums $\mathcal{Z}$ von $\mathbf{G}$. Falls $\exp(H)$ ein Element des Zentrums darstellt, gilt

$$\exp(H) A \exp(-H) = A, \quad \forall A \in \mathbf{G}. \quad (\text{B.68})$$

Eine offensichtlich notwendige und hinreichende Bedingung ist (Man schreibe $A = \exp a$ mit $a \in \mathfrak{g}_r$ und entwickle):

$$\exp(H) E_{\alpha_i} \exp(-H) = E_{\alpha_i} \quad i = 1, \dots, l. \quad (\text{B.69})$$

Durch Ausrechnen der linken Seite erhält man

$$e^{2\pi i(\lambda, \alpha_i)} = 1, \quad i = 1, \dots, l \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda_R^* = \Lambda_W, \quad (\text{B.70})$$

d.h. die Elemente des Zentrums besitzen Koordinatenvektoren, die im Gewichtsgitter liegen. Als Korollar folgt

$$\mathcal{Z} = \frac{\Lambda_W}{\Lambda_R}. \quad (\text{B.71})$$

Das Zentrum von $\hat{\mathbf{G}}$ ist also isomorph zur Gruppe der Konjugationsklassen [40], [137].

Beispiel: Während die Gruppe $\text{SU}(n)$ einfach zusammenhängend ist, gilt das nicht für die Gruppe $\text{SO}(n)$. Die universelle Überlagerungsgruppe wird mit $\text{Spin}(n)$ bezeichnet. Für $n = 3$ gilt $\text{Spin}(3) = \text{SU}(2)$, aber das ist ein Ausnahmefall⁷. Die Gruppe $\text{Spin}(2n)$ mit der komplexen Lie-Algebra D_n besitzt vier Konjugationsklassen von Darstellungen, die der adjungierten Darstellung (R), die der Vektordarstellung (V) und die der beiden Spinordarstellungen (S) und (C). Das Zentrum von $\text{Spin}(2n)$ ist isomorph zu $\mathbf{Z}_4$ für gerades und isomorph zu $\mathbf{Z}_2 \otimes \mathbf{Z}_2$ für ungerades n . Die Gruppe $\text{SO}(2n)$ entsteht durch Ausdividieren einer zentralen $\mathbf{Z}_2$ Untergruppe. Für

⁷Die Konstruktion für den allgemeinen Fall wird in [137] beschrieben.

ungerades n wird dabei die diagonale Untergruppe des Zentrums ausdividiert. Alle Darstellungen in den Spinorkonjugationsklassen sind projektive Darstellungen von $SO(2n)$ aber normale Darstellungen von $Spin(2n)$. Die Gruppe $Spin(32) / \mathbf{Z}_2$ entsteht ebenfalls durch das Faktorisieren einer zentralen $\mathbf{Z}_2$ Untergruppe. Es handelt sich aber um eine andere Untergruppe als bei der Konstruktion von $SO(32)$ [137]. Alle Darstellungen in den Konjugationsklassen (R) und (S) sind (nichtprojektive) Darstellungen dieser Gruppe.

Bemerkung: Eine konkrete Realisierung der universellen linearen Gruppe einer reellen Lie-Algebra kann stets durch Exponentiation einer geeigneten Darstellung konstruiert werden [137].

B.1.6 Darstellungen reeller Lie-Algebren und reeller Lie-Gruppen

Durch geeignete Einschränkung der Darstellungen komplexer (halb-) einfacher Lie-Algebren erhält man die Darstellungen ihrer reellen Formen [137]. Die endlich-dimensionalen Darstellungen reeller kompakter Lie-Algebren und Lie-Gruppen sind unitär, diejenigen der nicht-kompakten reellen Formen nicht⁸. Da in der Quantenphysik Symmetrien immer unitär (oder antiunitär⁹) realisiert werden müssen, sind die auftretenden Darstellungen nichtkompakter Lie-Gruppen, insbesondere der Poincaré-Gruppe unendlich-dimensionale Darstellungen auf Funktionenräumen¹⁰. Innere Symmetrien (Eichsymmetrien) werden im allgemeinen durch kompakte Lie-Gruppen mit endlich-dimensionalen unitären Darstellungen beschrieben.

B.2 Kac-Moody-Algebren

B.2.1 Verallgemeinerte Cartan-Matrizen

Die Beobachtung, daß man nicht nur jede einfache Lie-Algebra durch eine Cartan-Matrix charakterisieren kann, sondern auch umgekehrt zu jeder Matrix mit den geeigneten Eigenschaften ein einfache Lie-Algebra konstruieren kann, war der Ausgangspunkt für die Suche nach Verallgemeinerungen. V. Kac und unabhängig von ihm R.V. Moody konstruierten ausgehend von **verallgemeinerten Cartan-Matrizen** unendlich dimensionale Lie-Algebren. Ich fasse hier die für den Hauptteil der Arbeit benötigten Resultate aus [150] zusammen.

Definition B.2.1 Eine quadratische ganzzahlige Matrix $\mathbf{C} = (C_{ij})$ heißt genau dann eine verallgemeinerte Cartan-Matrix, wenn gilt:

1. $C_{ii} = 2$,
2. $i \neq j \implies C_{ij} \in \{0, -1, -2, \dots\}$,
3. $i \neq j \implies (C_{ij} = 0 \Leftrightarrow C_{ji} = 0)$.

Es gibt drei Klassen von verallgemeinerten Cartan-Matrizen:

1. Es ist $\text{Det}(\mathbf{C}) = 0$. Dann handelt es sich um eine gewöhnliche Cartan-Matrix. Die zugehörigen Lie-Algebren sind die halbeinfachen Lie-Algebren, die in diesem Zusammenhang auch **endliche Kac-Moody-Algebren** genannt werden.
2. Es ist $\text{Dim}(\mathbf{C}) = \text{Rang}(\mathbf{C}) + 1$. Die verallgemeinerte Cartan-Matrix ist nicht invertierbar, aber positiv semidefinit. Ihnen entsprechen die **affinen Kac-Moody-Algebren**, die auch als Euklidische Lie-Algebren bezeichnet werden.

⁸Die Darstellungen der nichtkompakten Lie-Gruppen und Lie-Algebren können durch analytische Fortsetzung aus denen ihrer kompakten Formen erhalten werden („unitärer Trick“). Nichtkompakte **halbeinfache** Lie-Gruppe besitzen außer der trivialen Darstellung keine unitären endlich-dimensionalen Darstellungen [137]. Nichtkompakte nicht halbeinfache Lie-Gruppen können sehr wohl nichttriviale unitäre endlich-dimensionale Darstellungen besitzen: Dies ist z.B. bei der Gruppe $(\mathbf{R}, +)$ der Fall.

⁹Antiunitäre Symmetrien sind immer diskret [120].

¹⁰In freien Quantenfeldtheorien werden unendlich-dimensionale unitäre Darstellungen der Poincaré-Gruppe auf dem Fockraum realisiert [124], [120], [108].

3. In allen anderen Fällen ist die verallgemeinerte Cartan-Matrix indefinit. Die zugehörigen **indefiniten** oder **hyperbolischen Kac-Moody-Algebren** werden wir im folgenden nicht betrachten.

Zu jeder verallgemeinerten Cartan-Matrix gibt es eine Kac-Moody-Algebra und zwei Kac-Moody-Algebren sind genau dann isomorph wenn ihre Cartan-Matrizen durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten ineinander umgeformt werden können. Wenn man durch solche Umformungen die Cartan-Matrix als direkte Summe kleinerer Cartan-Matrizen schreiben kann, zerfällt auch die Kac-Moody-Algebra direkt; daher reicht es aus **unzerlegbare** Cartan-Matrizen und Kac-Moody-Algebren zu betrachten.

Die Struktur- und Darstellungstheorie der affinen Kac-Moody-Algebren ähnelt der der endlichen sehr und ist daher gut bekannt. Da in der Stringtheorie und konformen Feldtheorie nur affine Kac-Moody-Algebren auftreten, werden wir diesen Fall betrachten. Die affinen Kac-Moody-Algebren sind vollständig klassifiziert und zerfallen in zwei Typen, die **ungetwisteten** und die **getwisteten**. Bei den ungetwisteten kann die Cartan-Matrix auf die Form

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & \cdots & C_{0l} \\ C_{10} & C_{11} & \cdots & C_{1l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{l0} & C_{l1} & \cdots & C_{ll} \end{pmatrix} \quad (\text{B.72})$$

gebracht werden, wobei

$$C_{ij} = 2 \frac{(\alpha'_i, \alpha'_j)}{(\alpha'_i, \alpha'_i)}, \quad i, j = 1, \dots, l \quad (\text{B.73})$$

die Cartan-Matrix einer einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ vom Range l mit den einfachen Wurzeln $\Pi' = \{\alpha'_i | i = 1, \dots, l\}$ ist. Die restlichen Matrix-Elemente sind

$$C_{00} = 2, \quad C_{i0} = 2 \frac{(\alpha'_i, \alpha'_0)}{(\alpha'_i, \alpha'_i)}, \quad C_{0i} = 2 \frac{(\alpha'_0, \alpha'_i)}{(\alpha'_0, \alpha'_0)}. \quad (\text{B.74})$$

Dabei ist α'_0 die niedrigste Wurzel von $\mathfrak{g}$

$$\alpha'_0 = -\alpha'_H, \quad \alpha'_H = \sum_{i=1}^l k^i \alpha'_i. \quad (\text{B.75})$$

Zu jeder einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gibt es also genau eine ungetwistete affine Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}^{[1]}$, deren Dynkin-Diagramm das erweiterte Dynkin-Diagramm von $\mathfrak{g}$ ist. Die einfachen Wurzeln $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ der Kac-Moody-Algebra sind linear unabhängig und von den Wurzeln α'_i der zugeordneten einfachen Lie-Algebra zu unterscheiden, von denen ja nur je l linear unabhängig sind. Die getwisteten affinen Kac-Moody-Algebren erhält man aus den ungetwisteten durch das Twisten mit Automorphismen.

B.2.2 Affine ungetwistete Kac-Moody-Algebren

Der naheliegende Ansatz zur Definition ungetwisteter affiner Kac-Moody-Algebren ist der folgende: Die Lie-Algebra soll durch $3(l+1)$ Generatoren $H_{\alpha_i}, E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}, i = 0, \dots, l$ erzeugt werden, die den in Serres Theorem spezifizierten Relationen genügen. Die so definierte Lie-Algebra besitzt aber nicht die gewünschten Eigenschaften: Um die Strukturtheorie der einfachen Lie-Algebren verallgemeinern zu können braucht man eine mit Hilfe der Cartan-Matrix definierte, nicht entartete Bilinearformen auf der Cartan-Subalgebra und im Gewichtsraum, so wie einen kanonischen Isomorphismus zwischen diesen beiden Räumen. Dies geht aber nicht, da die Cartan-Matrix nicht invertierbar ist. Das Problem läßt sich aber dadurch lösen, daß man einen weiteren Cartan-Generator hinzunimmt und auch den Gewichtsraum entsprechend vergrößert. Bevor dies erörtert wird, zitiere ich noch die Kacsche Definition, die für beliebige Kac-Moody-Algebren gilt:

Definition B.2.2 Es sei (C_{ij}) eine verallgemeinerte Cartan-Matrix und $\tilde{\mathfrak{g}}(\mathbf{C})$ eine Lie-Algebra mit Generatoren H_i, E_i, F_i , die den Relationen (1) und (2) aus Serres Theorem genügen. Es sei $\mathbf{r}$ das maximale Ideal, das die Cartan-Subalgebra von $\tilde{\mathfrak{g}}(\mathbf{C})$ trivial schneidet. Dann ist

$$\mathfrak{g}(\mathbf{C}) = \frac{\tilde{\mathfrak{g}}(\mathbf{C})}{\mathbf{r}} \quad (\text{B.76})$$

die Kac-Moody-Algebra mit Cartan-Matrix $\mathbf{C}$.

Da diese abstrakte Definition sich nicht gut handhaben läßt, werde ich als nächstes für den Fall einer ungetwisteten affinen Kac-Moody-Algebra die Struktur des Wurzelsystems und der CSA beschreiben, um die Cartan-Weyl-Zerlegung, den kanonischen Isomorphismus, etc. angeben zu können. Auf diese Weise lassen sich auch Kriterien formulieren, um eine Kac-Moody-Algebra an Hand von Generatoren und Relationen zu definieren. Diese Kriterien werden in der Arbeit benutzt, um zu zeigen, daß die Vertexoperatoren einer Stringtheorie Darstellungen von affinen Kac-Moody-Algebren auf dem Hilbertraum der Stringzustände erzeugen. Als erstes müssen mit Hilfe der Cartan-Matrix Bilinearformen auf der Cartan-Subalgebra $\mathbf{h}$ und im Dualraum $\mathbf{h}^*$ definiert werden.

Wir betrachten zunächst einen $l+1$ dimensionalen $\mathbf{C}$ -Vektorraum $\mathbf{h}'$ und dessen Dualraum $\mathbf{h}^*$. Um die Cartan-Matrix zu realisieren wählt man Basen H_{α_i} und α_i , $i = 0, \dots, l$, mit

$$\alpha_j(H_{\alpha_i}) = C_{ij}. \quad (\text{B.77})$$

Jede affine Cartan-Matrix ist **diagonalisierbar**, d.h. es existiert eine Diagonalmatrix ϵ mit nichtverschwindenden Einträgen ϵ_i , so daß

$$C_{ij} = \epsilon_i G_{ij} \text{ mit } G_{ij} = G_{ji} \quad (\text{B.78})$$

ist. Da

$$C_{ij} = 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \quad i, j = 0, \dots, l \quad (\text{B.79})$$

gelten soll, folgt

$$(\alpha_i, \alpha_j) = G_{ij} \text{ und } \epsilon_i = \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)}. \quad (\text{B.80})$$

Dadurch sind die Bilinearform in $\mathbf{h}^*$ und die Faktoren ϵ_i bis auf eine multiplikative Konstante definiert. Wir normieren die Bilinearform zweckmäßig so, daß die langen Wurzeln das Normquadrat 2 haben. Da die Matrix G_{ij} nicht invertierbar ist, gibt es im $\mathbf{R}$ -Spann der einfachen Wurzeln einen Nullvektor

$$\delta = \sum_{i=0}^l k^i \alpha_i \text{ mit } (\delta, \alpha_i) = 0 \quad i = 0, \dots, l. \quad (\text{B.81})$$

Die Koeffizienten k^i werden als **Kac-Label** von $\mathfrak{g}^{[1]}$ bezeichnet. Es ist $k^0 = 1$ und die k^i , $i = 1, \dots, l$ sind die Koeffizienten der höchsten Wurzel der einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ bezüglich der einfachen Wurzeln:

$$\alpha'_H = \sum_{i=1}^l k^i \alpha'_i. \quad (\text{B.82})$$

Der Zusammenhang zwischen den Wurzeln α_i und den $l+1$ Cartan-Generatoren H_{α_i} wird durch die Cartan-Matrix definiert:

$$\alpha_j(H_{\alpha_i}) = C_{ij}. \quad (\text{B.83})$$

Definiert man neue Generatoren

$$h_{\alpha_i} = \frac{1}{\epsilon_i} H_{\alpha_i}, \quad (\text{B.84})$$

so wird diese Relation symmetrisch:

$$\alpha_j(h_{\alpha_i}) = G_{ij} = G_{ji} = \alpha_i(h_{\alpha_j}), \quad (\text{B.85})$$

so daß der später zu definierende Isomorphismus α_i und h_{α_i} aufeinander abbilden wird. Eine zweckmäßige Definition und Normierung der Bilinearform auf dem Erzeugnis $\mathbf{h}'$ der $l+1$ Cartan-Generatoren ist daher:

$$(h_{\alpha_i}, h_{\alpha_j}) = G_{ij} \Leftrightarrow (H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}) = \epsilon_i \epsilon_j G_{ij}. \quad (\text{B.86})$$

Um den kanonischen Isomorphismus definieren zu können, brauchen wir zwei nicht entartete Bilinearformen auf $\mathbf{h}$ und $\mathbf{h}^*$ und führen daher einen weiteren Cartan-Generator d und ein weiteres Funktional Λ_0 ein.

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}' \oplus \langle d \rangle, \quad \mathbf{h}^* = \mathbf{h}'^* \oplus \langle \Lambda_0 \rangle. \quad (\text{B.87})$$

Um die Bilinearform auf die vergrößerte CSA erweitern zu können, identifiziert man die Nullrichtung der Metrik auf $\mathbf{h}'$ und findet, daß das sogenannte zentrale Element k ,

$$k = \sum_{i=0}^l k^i h_{\alpha_i} = \sum_{i=0}^l \frac{k^i}{\epsilon_i} H_{\alpha_i}, \quad (\text{B.88})$$

ein Nullvektor ist:

$$(k, h_{\alpha_i}) = 0 = (k, H_{\alpha_i}) \quad i = 0, \dots, l. \quad (\text{B.89})$$

Durch die Definitionen

$$(d, d) = 0, \quad (d, k) = 1, \quad (d, h_{\alpha_i}) = 0, \quad i = 1, \dots, l, \quad (\text{B.90})$$

erhält man dann eine nicht entartete Bilinearform auf $\mathbf{h}$. Zur besseren Übersicht stelle ich die Werte der Bilinearform tabellarisch zusammen:

	h_0	h_1	$\dots$	h_l	d	k
h_0	G_{00}	G_{01}	$\dots$	G_{0l}	1	0
h_1	G_{10}	G_{11}	$\dots$	G_{1l}	0	0
$\vdots$					$\vdots$	$\vdots$
h_l	G_{l0}	G_{l1}	$\dots$	G_{ll}	0	0
d	1	0	$\dots$	0	0	1
k	0	0	$\dots$	0	1	0

(B.91)

Das zusätzliche Funktional Λ_0 wird so definiert:

$$\Lambda_0(H_{\alpha_i}) = \delta_{0i} \Leftrightarrow \Lambda_0(h_{\alpha_i}) = \delta_{0i} \frac{1}{\epsilon_i}, \quad i = 0, \dots, l, \quad \Lambda_0(d) = 0. \quad (\text{B.92})$$

Die Wirkung des Gewichtsraums auf der Cartan-Subalgebra ist damit

	H_0	H_1	$\dots$	H_l	d	h_0	h_1	$\dots$	h_l	k
α_0	C_{00}	C_{10}	$\dots$	C_{l0}	1	G_{00}	G_{10}	$\dots$	G_{l0}	0
α_1	C_{01}	C_{11}	$\dots$	C_{l1}	0	G_{01}	G_{11}	$\dots$	G_{l1}	0
$\vdots$					$\vdots$					$\vdots$
α_l	C_{0l}	C_{1l}	$\dots$	C_{ll}	0	G_{0l}	G_{1l}	$\dots$	G_{ll}	0
Λ_0	1	0	$\dots$	0	0	$1/\epsilon_0$	0	$\dots$	0	$1/\epsilon_0$
δ	0	0	$\dots$	0	1	0	0	$\dots$	0	0

(B.93)

Jetzt kann der Isomorphismus zwischen Gewichtsraum und Cartan-Subalgebra definiert werden

$$i : \mathbf{h}^* \rightarrow \mathbf{h} : \alpha \rightarrow h_\alpha \text{ mit } (h_\alpha, H) = \alpha(H), \forall H \in \mathbf{h}. \quad (\text{B.94})$$

Insbesondere gilt:

$$\alpha_i \rightarrow h_i = \frac{1}{\epsilon_i} H_i, \quad \Lambda_0 \rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} d \text{ und folglich } \delta \rightarrow k. \quad (\text{B.95})$$

Das induzierte Skalarprodukt im Gewichtsraum hat aufgrund der oben gewählten Normierung die folgende Form:

	α_0	α_1	$\dots$	α_l	Λ_0	δ
α_0	G_{00}	G_{01}	$\dots$	G_{0l}	$1/\epsilon_0$	0
α_1	G_{10}	G_{11}	$\dots$	G_{1l}	0	0
$\vdots$					$\vdots$	$\vdots$
α_l	G_{l0}	G_{l1}	$\dots$	G_{ll}	0	0
Λ_0	$1/\epsilon_0$	0	$\dots$	0	0	$1/\epsilon_0$
δ	0	0	$\dots$	0	$1/\epsilon_0$	0

(B.96)

Mit der Hilfe der auf der Cartan-Subalgebra und im Gewichtsraum eingeführten Strukturen kann die Strukturtheorie für ungetwistete affine Kac-Moody-Algebren nach dem Muster der einfachen Lie-Algebren entwickelt werden. Um die Cartan-Matrix durch Wurzelvektoren im $\mathbf{R}^{l+1}$ zu realisieren, wählt man einfach

$$\alpha_i = (0, \alpha'_i), \quad i = 1, \dots, l \quad \alpha_0 = (1, -\alpha'_H), \quad (\text{B.97})$$

wobei der ersten Komponente eine Nullrichtung der Metrik entspricht. Die lichtartige Wurzel δ wird also durch

$$\delta = (1, \mathbf{0}) \quad (\text{B.98})$$

realisiert. Durch Einbettung können die l einfachen Wurzeln von $\mathbf{g}$ mit den entsprechenden Wurzeln der Kac-Moody-Algebra identifiziert werden. Dabei muß man die niedrigste Wurzel $-\alpha_H$ von $\mathbf{g}$ von der zusätzlichen einfachen Wurzel $\delta - \alpha_H$ der Kac-Moody-Algebra unterscheiden: Beides wird in der Literatur gelegentlich mit α_0 bezeichnet. Das Wurzelsystem Δ von $\mathbf{g}^{[1]}$ läßt sich durch das Wurzelsystem Δ' von $\mathbf{g}$ und die lichtartige Wurzel ausdrücken:

Satz B.2.1 Die Wurzeln einer ungetwisteten affinen Kac-Moody-Algebra $\mathbf{g}^{[1]}$ sind

$$\Delta = \{m\delta + \alpha = (m, \alpha) | m \in \mathbf{Z}, \alpha \in \Delta'\}. \quad (\text{B.99})$$

Δ besteht also aus unendlich vielen Kopien von Δ' , die entlang der Null-Richtung aneinandergefügt werden. Obwohl es unendlich viele Wurzeln gibt, ist ihre Länge beschränkt, da die Projektion auf die Nullrichtung nicht zur Länge beiträgt. Die lichtartigen Wurzeln $m\delta$, $m \in \mathbf{Z}$ werden von Kac als die imaginären Wurzeln, die anderen als die reellen Wurzeln bezeichnet.

Satz B.2.2 Eine affine ungetwistete Kac-Moody-Algebra kann in die Cartan-Subalgebra und in Wurzelräume zerlegt werden: Die Cartan-Zerlegung von $\mathbf{g}^{[1]}$ ist:

$$\mathbf{g}^{[1]} = \mathbf{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbf{g}_\alpha. \quad (\text{B.100})$$

Die Gewichtsräume der reellen Wurzeln sind eindimensional, die der imaginären Wurzeln sind l -dimensional, wobei l der Rang der entsprechenden einfachen Lie-Algebra $\mathbf{g}$ ist.

$\mathfrak{g}^{[1]}$ ist eine unendlich-dimensionale Lie-Algebra, die die einfache Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ als Unter- algebra enthält. Da sie ein eindimensionales Zentrum besitzt, daß von dem zentralen Element k aufgespannt wird, ist die affine Kac-Moody-Algebra selbst weder einfach noch halbeinfach. Um festzustellen, ob eine gegebene konkrete Lie-Algebra isomorph zu $\mathfrak{g}^{[1]}$ ist, und um Darstellungen zu identifizieren, ist das folgende Kriterium nützlich, daß es erlaubt, eine affine ungetwistete Kac-Moody-Algebra an Hand von Generatoren und Relationen zu identifizieren [Kac, 9.11]:

Satz B.2.3 [Kacsches Kriterium] Es sei $\hat{\mathfrak{g}}$ eine Lie-Algebra mit Cartan-Subalgebra $\mathfrak{h}$, Cartan-Generatoren H_{α_i} , $i = 0, \dots, l$ und H_{l+1} , den weiteren Generatoren E_{α_i} und $E_{-\alpha_i}$ und den Relationen

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}] = \delta_{ij} H_{\alpha_j}, \quad (\text{B.101})$$

$$[H, E_{\pm\alpha_i}] = \pm\alpha_i(H) E_{\pm\alpha_i}, \quad \forall H \in \mathfrak{h}, \quad (\text{B.102})$$

$$(ad E_{\pm\alpha_i})^{1-C_{ij}} = 0, \quad (\text{B.103})$$

wobei C_{ij} die erweiterte Cartan-Matrix einer einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist. Dann ist

$$\hat{\mathfrak{g}} \simeq \mathfrak{g}^{[1]} \quad (\text{B.104})$$

d.h. $\hat{\mathfrak{g}}$ ist eine ungetwistete affine Kac-Moody-Algebra mit Cartan-Matrix C_{ij} .

Diese Konstruktion stellt auch den Zusammenhang mit dem ersten Definitionsversuch her: Die derivierte Algebra $\hat{\mathfrak{g}}'$ von $\hat{\mathfrak{g}}$ ist eine Lie-Algebra mit $3l$ Generatoren H_{α_i} , E_{α_i} , $E_{-\alpha_i}$ die den Relationen in Serres Theorem genügen. Umgekehrt ist $\hat{\mathfrak{g}}$ eine semidirekte Erweiterung von $\hat{\mathfrak{g}}'$ mit dem zusätzlichen Cartan-Generator H_{l+1} .

B.2.3 Die Standardrealisierung einer affinen ungetwisteten Kac-Moody-Algebra

Ausgehend von den im vorigen Abschnitt erläuterten Resultaten kann die **Standard-Realisierung** von $\mathfrak{g}^{[1]}$ konstruiert werden. Man beginnt mit der einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und bildet die Loop-Algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$, die von allen $\mathfrak{g}$ -wertigen Laurent-Polynomen in einer Variablen t erzeugt wird:

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{g}. \quad (\text{B.105})$$

$\tilde{\mathfrak{g}}$ ist die komplexifizierte Lie-Algebra der Loop-Gruppe $\text{Diff}(S^1, \mathbf{G})$, wobei $\mathbf{G}$ eine endlich dimensionale reelle Lie-Gruppe mit komplexer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist. Die Lie-Algebra-Struktur der Loop-Algebra ist durch

$$[f(t) \otimes x, g(t) \otimes y] = f(t)g(t) \otimes [x, y] \quad (\text{B.106})$$

definiert. Die Standard-Realisierung $\hat{\mathfrak{g}}$ von $\mathfrak{g}^{[1]}$ erhält man, indem man eine zentrale Erweiterung mit einem Generator k und eine semidirekte Erweiterung mit einem Generator d vornimmt:

$$\hat{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \langle k \rangle \oplus \langle d \rangle, \quad (\text{B.107})$$

mit

$$[f(t) \otimes x \oplus a, g(t) \otimes y \oplus b] = f(t)g(t) \otimes [x, y] \oplus (x, y)k \text{res}(f(t)'g(t)), \quad (\text{B.108})$$

$$[d, f(t) \otimes x \oplus a] = tf'(t) \otimes x. \quad (\text{B.109})$$

Dabei sind $a, b \in \langle k \rangle$, $(\cdot, \cdot)$ ist die Killing-Form auf $\mathfrak{g}$, res das Residuum und $'$ die formale Ableitung. Der Generator d operiert auf den Polynomen als der formale Differentialoperator $t \frac{d}{dt}$ und wird daher als „die“ Derivation auf der Kac-Moody-Algebra bezeichnet.

Eine Basis der Kac-Moody-Algebra bilden die Elemente,

$$T_m^a = t^m \otimes T^a, \quad k, \quad d \quad \text{mit } m \in \mathbb{Z}, \quad a = 1, \dots, \dim(\mathfrak{g}), \quad (\text{B.110})$$

wobei die T^a Generatoren von $\mathfrak{g}$ sind. Die nichtverschwindenden Vertauschungsrelationen zwischen diesen Generatoren sind:

$$[T_m^a, T_n^b] = f_c^{ab} T_{m+n}^c \oplus k m \delta_{m+n,0} (T^a, T^b), \quad (\text{B.111})$$

$$[d, T_m^a] = m T_m^a. \quad (\text{B.112})$$

Wählt man für die T^a Cartan-Weyl-Generatoren h_{α_i} , $i = 1, \dots, l$, e_α , $\alpha \in \Delta'$ von $\mathfrak{g}$, so erhält man:

$$[H_m^{\alpha_i}, H_n^{\alpha_j}] = k m \delta_{m+n,0} G_{ij}, \quad (\text{B.113})$$

$$[H_m^{\alpha_i}, E_n^\alpha] = (\alpha_i, \alpha) E_{m+n}^\alpha, \quad (\text{B.114})$$

$$[E_m^\alpha, E_n^\beta] = \begin{cases} \epsilon(\alpha, \beta) E_{m+n}^{\alpha+\beta}, & \text{falls } \alpha + \beta \in \Delta', \\ H_{m+n}^\alpha + k m \delta_{m+n,0}, & \text{falls } \alpha + \beta = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.115})$$

Durch Vergleich mit den Resultaten des vorigen Abschnittes ergibt sich:

1. H^{α_i} , $i = 1, \dots, l$, k und d erzeugen die $l + 2$ dimensionale Cartan-Subalgebra. Das Element k erzeugt das eindimensionale Zentrum.
2. Die Generatoren $H_m^{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, l$, $m \in \mathbf{Z}$ erzeugen eine unendlich dimensionale Heisenberg-Lie-Algebra, die Heisenberg-Subalgebra. Sie erfüllen für $k = 1$ die gleichen Vertauschungsrelationen wie die Fourier-Moden eines Strings.
3. Die Generatoren $H_m^{\alpha_i}$, $m \neq 0$ spannen die l -dimensionalen Wurzelräume der imaginären Wurzeln $m\delta$ auf. Die Generatoren E_m^α , $m \in \mathbf{Z}$ spannen die eindimensionalen Wurzelräume der reellen Wurzeln auf:

$$\mathfrak{g}_{m\delta} = \langle H_m^{\alpha_i} \rangle, \quad \mathfrak{g}_{m\delta+\alpha} = \langle E_m^\alpha \rangle \quad (\text{B.116})$$

Um zu zeigen, daß die Lie-Algebren $\mathfrak{g}^{[1]}$ und $\widehat{\mathfrak{g}}$ tatsächlich isomorph sind, müssen $3l + 4$ Generatoren von $\widehat{\mathfrak{g}}$ gefunden werden, die das Kacsche Kriterium (B.2.3) erfüllen. Dazu beginnt man mit einer Chevalley-Basis H_{α_i} , E_{α_i} , $E_{-\alpha_i}$ $i = 1, \dots, l$ von $\mathfrak{g}$. Es ist stets möglich zwei weitere Wurzelgeneratoren $E_{\alpha_H} \in \mathfrak{g}_{\alpha_H}$ und $E_{-\alpha_H} \in \mathfrak{g}_{-\alpha_H}$ zu finden, die so normiert sind, daß

$$(E_{\alpha_H}, E_{-\alpha_H}) = -1 \text{ und damit } [E_{\alpha_H}, E_{-\alpha_H}] = -H_{\alpha_H} \quad (\text{B.117})$$

gilt. Dann setzt man [Kac, 7.4]:

$$\begin{aligned} E_0 &= t \otimes E_{-\alpha_H}, & E_i &= 1 \otimes E_{\alpha_i}, & i &= 1, \dots, l, \\ F_0 &= t^{-1} \otimes E_{\alpha_H}, & F_i &= 1 \otimes E_{-\alpha_i}, & i &= 1, \dots, l, \\ H_0 &= -1 \otimes H_{\alpha_H} \oplus k, & H_i &= 1 \otimes H_{\alpha_i}, & i &= 1, \dots, l, & H_{l+1} &= d. \end{aligned} \quad (\text{B.118})$$

Diese Generatoren erfüllen einerseits die Bedingungen im Kacschen Kriterium (B.2.3), sind also Chevalley-Generatoren von $\mathfrak{g}^{[1]}$, andererseits erzeugen sie ganz $\widehat{\mathfrak{g}}$. Also sind beide Lie-Algebren tatsächlich isomorph.

Auf der Kac-Moody-Algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ existieren außer der Derivation $d = d_0$ noch viele weitere Derivationen. Eine besonders wichtige Lie-Algebra $\mathfrak{d}$ von Derivationen auf $\widehat{\mathfrak{g}}$ wird durch die Generatoren

$$d_m = t^{m+1} \frac{d}{dt} \quad (\text{B.119})$$

erzeugt, die die Witt-Algebra

$$[d_m, d_n] = (n - m) d_{m+n} \quad (\text{B.120})$$

erfüllen. Als komplexe Lie-Algebra ist sie isomorph zur Lie-Algebra der regulären Vektorfelder auf $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$. Als reelle Lie-Algebra ist sie isomorph zur Lie-Algebra $\text{Diff}(S^1)$ der Diffeomorphismen des Kreises. Auch die Generatoren von konformen Transformationen in ein und zwei Dimensionen gehorchen der Witt-Algebra. Die Derivationen-Lie-Algebra $\mathfrak{d}$ operiert so auf der Loop-Algebra $\widetilde{\mathfrak{g}}$, daß beide Lie-Algebren eine semidirekte Summe bilden. In der Stringtheorie und in den zweidimensionalen konformen Feldtheorien tritt eine zentrale Erweiterung der Witt-Algebra, die Virasoro-Algebra auf. Man kann zeigen, daß sie bis auf

Isomorphie die einzige zentrale Erweiterung der Witt-Algebra ist [40]. Aus den Generatoren einer Kac-Moody-Algebra können mit Hilfe einer feldtheoretischen Methode, der Sugawara-Konstruktion, Virasoro-Generatoren gewonnen werden. Auch hier bilden beide Algebren eine semidirekte Summe und die zentralen Elemente können zueinander in Beziehung gesetzt werden (siehe 4.1.7).

B.2.4 Getwistete Kac-Moody-Algebren

Definition B.2.3 Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra und $\mathbf{A}$ eine abelsche Gruppe. Dann heißt $\mathfrak{g}$ genau dann $\mathbf{A}$ -graduirt, wenn gilt

1. $\mathfrak{g}$ ist ein graduierter Vektorraum, d.h. es existiert eine direkte Zerlegung

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{a \in \mathbf{A}} \mathfrak{g}_a \quad (\text{B.121})$$

und eine Abbildung, der Grad

$$\deg : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{A}, \quad (\text{B.122})$$

so daß $\mathfrak{g}_a$ gerade der Unterraum aller homogenen Elemente vom Grad a , $\deg(x) = a$ ist.

2. Die Graduierung ist mit der Lie-Algebra-Struktur kompatibel,

$$[\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_b] \subset \mathfrak{g}_{a+b}. \quad (\text{B.123})$$

Die Virasoro- und die Kac-Moody-Algebren in der Standard-Realisierung sind offensichtlich $\mathbf{Z}$ -graduirt. Auf einer affinen Kac-Moody-Algebra existieren verschiedene weitere Graduierungen, die sogenannten Typ $\mathbf{s}$ Graduierungen. Sie werden durch die Festlegung des Grades der Chevalley-Generatoren definiert. Dazu sei

$$\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_l) \text{ mit } s_i \geq 0, s_i \in \mathbf{Z}. \quad (\text{B.124})$$

Alle Cartan-Generatoren sollen den Grad 0 haben, ferner soll gelten

$$\deg(E_i) = -\deg(F_i) = s_i. \quad (\text{B.125})$$

Da die Relationen zwischen den Generatoren die Grade additiv verknüpfen, wird so eine $\mathbf{Z}$ -Graduierung auf der ganzen KMA induziert. Explizit ist

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{j \in \mathbf{Z}} \mathfrak{g}_j(\mathbf{s}), \quad (\text{B.126})$$

mit

$$\mathfrak{g}_j(\mathbf{s}) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_j} \mathfrak{g}_\alpha \quad (\text{B.127})$$

und

$$\Delta_j = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha = \sum a^i \alpha_i, \sum a^i s_i = j\}. \quad (\text{B.128})$$

In der Standard-Realisierung und damit bei der Frenkel-Kac-Darstellung einer affinen ungetwisteten Kac-Moody-Algebra durch Vertexoperatoren ist die Graduierung vom Typ

$$\mathbf{s} = (1, 0, \dots, 0). \quad (\text{B.129})$$

Dies zeigt man so: Die natürliche $\mathbf{Z}$ -Graduierung der Standard-Realisierung $\hat{\mathfrak{g}}$ ist gegeben durch

$$\deg(t) = 1, \quad \deg(x) = 0, \text{ für alle } x \in \mathfrak{g}, \quad \deg(k) = 0, \quad \deg(d) = 0. \quad (\text{B.130})$$

Da $d = t \frac{d}{dt}$ ist, kann der Grad eines homogenen Elementes durch den Kommutator mit d bestimmt werden:

$$\deg(X) = j \Leftrightarrow [d, X] = jX. \quad (\text{B.131})$$

Die Grade der Chevalley-Generatoren der Standard-Realisierung sind:

$$\deg(H_i) = 0, \quad \deg(E_i) = \delta_{i0}, \quad \deg(F_i) = -\delta_{i0}, \quad i = 0, \dots, l, \quad (\text{B.132})$$

daher ist diese Graduierung vom Typ $(1, 0, \dots, 0)$.

Um andere Typ-s-Graduierungen zu konstruieren, betrachtet man gewisse Unteralgebren der Standard-Realisierung. Zunächst sei Θ ein Automorphismus der Ordnung N der einfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Dann kann $\mathfrak{g}$ in die Eigenräume $\mathfrak{g}_m$ zum Eigenwert $e^{2\pi i m/N}$ zerlegt werden:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{m=0}^{N-1} \mathfrak{g}_m. \quad (\text{B.133})$$

Dann definiert man die getwistete Kac-Moody-Algebra $\widehat{\mathfrak{g}}^\Theta$ als die Unteralgebra

$$\widehat{\mathfrak{g}}^\Theta = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} t^m \otimes \mathfrak{g}_{m|N} \oplus \langle k \rangle \oplus \langle d \rangle \quad (\text{B.134})$$

von $\widehat{\mathfrak{g}}$. ($m|N$ steht für „m modulo N“.)

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden¹¹:

1. Θ ist ein innerer Automorphismus von $\mathfrak{g}$. Dann existiert eine Basis, in der die Cartan-Subalgebra invariant ist, während die Wurzeloperatoren E_α mit dem Eigenwert $e^{2\pi i \alpha \cdot \lambda}$ transformieren. Der den Automorphismus charakterisierende Verschiebungsvektor sei

$$\lambda = \sum_{i=1}^l \frac{s_i}{N} \alpha_i^*, \quad (\text{B.135})$$

d.h. es gilt

$$s_i = N \alpha_i \cdot \lambda, \quad i = 0, 1, \dots, l. \quad (\text{B.136})$$

Die Chevalley-Generatoren von $\widehat{\mathfrak{g}}^\Theta$ sind

$$E'_i = t^{s_i} \otimes E_{\alpha_i}, \quad F'_i = t^{-s_i} \otimes E_{-\alpha_i}, \quad H'_i = 1 \otimes H_{\alpha_i} \oplus A \frac{s_i}{N} k, \quad i = 0, \dots, l, \quad H'_{l+1} = d. \quad (\text{B.137})$$

Die Normierungs-Konstante A kann so gewählt werden, daß

$$[E'_i, F'_j] = \delta_{ij} H'_i \quad (\text{B.138})$$

ist. Falls $\mathfrak{g}$ einfach verbunden ist, ist $A = 1$. Berechnet man ihre Kommutatoren, so stellt man fest, daß sie nach dem Kacschen Kriterium Chevalley-Generatoren von $\mathfrak{g}^{[1]}$ sind. Also sind die getwistete und die ungetwistete Kac-Moody-Algebra isomorph. Andererseits gilt:

$$\deg(H'_i) = 0, \quad i = 0, \dots, l+1 \quad \text{und} \quad \deg(E'_i) = -\deg(F'_i) = s_i, \quad i = 0, \dots, l. \quad (\text{B.139})$$

Die mit einem inneren Automorphismus getwistete Kac-Moody-Algebra besitzt eine Typ-s-Graduierung und wird daher als Typ-s-Realisierung von $\mathfrak{g}^{[1]}$ bezeichnet. Da die Derivation in der Frenkel-Kac-Darstellung proportional zu Weltflächen-Hamiltonoperator ist, führen verschiedene Graduierungen zu Modellen mit verschiedenen physikalischen Eigenschaften.

2. Θ ist ein äußerer Automorphismus von $\mathfrak{g}$. Dann kann er in einen inneren Automorphismus und einen Diagramm-Automorphismus des Dynkin-Diagrammes zerlegt werden. Die Ordnung k des Diagramm-Automorphismus kann nur gleich 2 oder 3 sein. Zu jedem Diagramm-Automorphismus gibt es eine getwistete affine Kac-Moody-Algebra $\mathfrak{g}^{[k]}$ und jede getwistete affine Kac-Moody-Algebra kann so konstruiert werden. Je nach Wahl des inneren Automorphismus erhält man eine bestimmte Typ-s-Realisierung von $\mathfrak{g}^{[k]}$.

¹¹ Lie-Algebra-Automorphismen werden in Kapitel 6.4 diskutiert.

Getwistete Loop-Algebren

Ein anderer Zugang zu den getwisteten Kac-Moody-Algebren ergibt sich über die getwisteten Loop-Gruppen und Loop-Algebren [157]. Die getwistete Loop-Gruppe ist durch

$$\tilde{\mathbf{G}}^\Theta = \{\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{G} \mid \phi(1) = \Theta\phi(0)\} \quad (\text{B.140})$$

definiert, wobei Θ ein Automorphismus N -ter Ordnung der endlich-dimensionalen halbeinfachen Lie-Gruppe $\mathbf{G}$ ist. Die zugehörige Lie-Algebra ist isomorph zu

$$\tilde{\mathfrak{g}}^\Theta = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} t^{m/N} \otimes \mathfrak{g}_{m|N} \quad (\text{B.141})$$

Solche Loop-Algebren bzw. ihre zentralen Erweiterungen lassen sich besonders leicht durch chirale Skalarfelder $\mathbf{X}(z)$ mit getwisteten Randbedingungen

$$\mathbf{X}(ze^{2\pi i}) = \Theta\mathbf{X}(z) \quad (\text{B.142})$$

realisieren (Θ bezeichnet außer dem Lie-Gruppen-Automorphismus auch den Lie-Algebra-Automorphismus und den entsprechenden Automorphismus des Wurzelgitters). Insbesondere liefern die Vertauschungsrelationen der Moden $\alpha_{m/N}$ eine Level-1-Darstellung der Cartan-Subalgebra

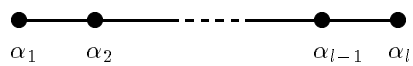
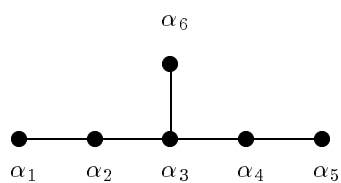
$$\tilde{\mathbf{h}} \oplus \langle c \rangle \quad (\text{B.143})$$

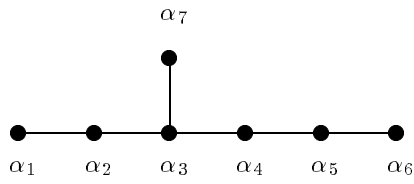
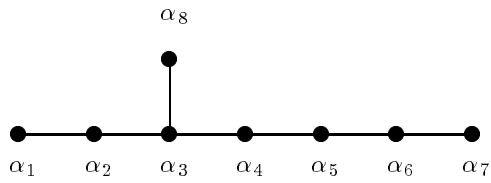
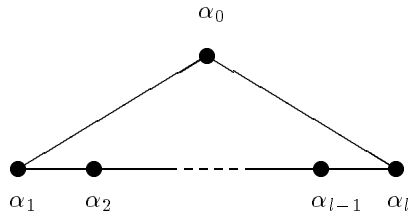
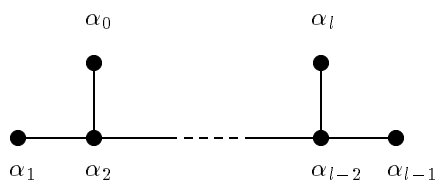
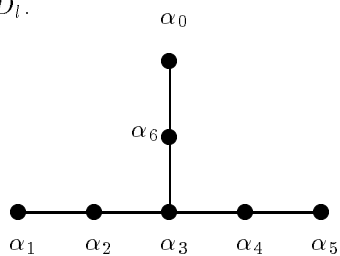
Darstellungen der vollen Algebra mit getwisteten Feldern können der Literatur entnommen werden. Durch die Derivataion $t \frac{d}{dt}$ wird wieder eine semidirekte Erweiterung definiert und auf dem Darstellungsraum gilt $d = -L_0$. Durch die Reskalierung $t \rightarrow t^N$ erhält man die oben beschriebene andere Realisierung. Der Zugang über getwistete Loop-Gruppen mit seiner $\frac{1}{N}\mathbf{Z}$ Graduierung ist besonders natürlich, wenn man mit getwisteten Feldern arbeitet, z.B. einen Orbifold-Twist als Drehung realisiert. Die getwisteten Grade geben insbesondere die konformen Gewichte der Operatoren richtig wieder. Die im vorherigen Abschnitt beschriebene Realisierung ist einfacher und entspricht der Verschiebungsrealisierung von Orbifold-Twists.

B.2.5 Darstellungen von Kac-Moody-Algebren

Die nichttrivialen Darstellungen von Kac-Moody-Algebren sind naturgemäß unendlich-dimensional. Eine wichtige Klasse sind die höchsten Gewichts Darstellungen (highest weight representations), die ausgehend von einem höchsten Gewicht durch die Anwendung von Absteige-Operatoren erzeugt werden können. Es ist möglich, den Begriff der kompakten reellen Form zu verallgemeinern und so unitäre Darstellungen zu konstruieren. Die Vertexoperator-Darstellungen waren in der Physik schon bekannt, bevor Kac und Moody begannen, die nach ihnen benannten Lie-Algebren zu studieren. Frenkel und Kac haben die Vertexoperator-Darstellungen später mathematisch präzisiert. Die Vertexoperatoren sind formale Operatoren, die nicht auf dem mathematischen Hilbertraum sondern auf dessen formaler Komplettierung operieren. Die durch Kurvenintegration gewonnenen Kac-Moody-Generatoren sind aber wohldefinierte Operatoren auf dem Hilbertraum. Bei der Frenkel-Kac-Konstruktion wird das zentrale Element k immer durch die Zahl 1 dargestellt (Level-1-Darstellung). Darstellungen mit anderen Leveln können mit Hilfe anderer konformer Feldtheorien, z.B. mit Wess-Zumino-Witten-Modellen [2] (konform invarianten σ -Modellen mit Gruppenmannigfaltigkeiten als target space) realisiert werden.

B.3 Dynkin-Diagramme

Abbildung B.1: Das Dynkin-Diagramm von A_l Abbildung B.2: Das Dynkin-Diagramm von D_l Abbildung B.3: Das Dynkin-Diagramm von E_6

Abbildung B.4: Das Dynkin-Diagramm von E_7 Abbildung B.5: Das Dynkin-Diagramm von E_8 Abbildung B.6: Das erweiterte Dynkin-Diagramm von A_l ist zugleich das Dynkin-Diagramm von $\hat{A}_l$.Abbildung B.7: Das erweiterte Dynkin-Diagramm von D_l ist zugleich das Dynkin-Diagramm von $\hat{D}_l$.Abbildung B.8: Das erweiterte Dynkin-Diagramm von E_6 ist zugleich das Dynkin-Diagramm von $\hat{E}_6$.

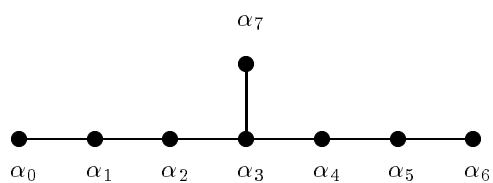


Abbildung B.9: Das erweiterte Dynkin-Diagramm von E_7 ist zugleich das Dynkin-Diagramm von $\widehat{E}_7$.

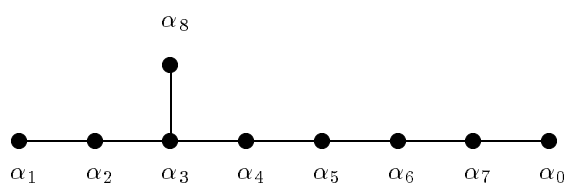


Abbildung B.10: Das erweiterte Dynkin-Diagramm von E_8 ist zugleich das Dynkin-Diagramm von $\widehat{E}_8$.

Anhang C

Gitter

Die im Zusammenhang mit der Stringtheorie wichtigen Aussagen über euklidische und pseudoeuklidische Gitter findet man in [58].

C.1 Euklidische und pseudoeuklidische Gitter

Definition C.1.1 Ein n -dimensionales Gitter im $\mathbf{R}^n$ ist der $\mathbf{Z}$ -Spann einer Basis $\{\mathbf{e}_i\}$ von $\mathbf{R}^n$

$$\Gamma = \{m^i \mathbf{e}_i | m^i \in \mathbf{Z}, i = 1, \dots, l\}. \quad (\text{C.1})$$

Die $\mathbf{e}_i$ bilden eine Gitterbasis ($\mathbf{Z}$ -Basis) von Γ . Je nachdem, ob der $\mathbf{R}^n$ mit einem definiten oder indefiniten Skalarprodukt versehen wird, spricht man von einem euklidischen bzw. pseudoeuklidischen Gitter. Die Matrix G ,

$$G_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (\text{C.2})$$

wird als die Gittermetrik bezeichnet. Isometrische Gitter werden identifiziert. Das (verallgemeinerte) Volumen der Einheitszelle von Γ ist

$$\text{vol}(\Gamma) = \sqrt{|\det G|}. \quad (\text{C.3})$$

Definition C.1.2 Das duale Gitter Γ^* besteht aus allen Vektoren, die ein ganzzahliges Skalarprodukt mit allen Vektoren aus Γ haben:

$$\Gamma^* = \{\mathbf{w} \in \mathbf{R}^n | \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \in \mathbf{Z}, \forall \mathbf{v} \in \Gamma\}. \quad (\text{C.4})$$

Die kanonische Basis von Γ^* ist die Dualbasis $\mathbf{e}^{*i}$ zu $\mathbf{e}_i$:

$$\mathbf{e}^{*i} \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i. \quad (\text{C.5})$$

Die Gittermetrik von Γ^* bezüglich der Dualbasis ist die zu G_{ij} inverse Matrix

$$\mathbf{e}^{*i} \cdot \mathbf{e}^{*j} = G^{ij}, \quad (\text{C.6})$$

und es gilt

$$\text{vol}(\Gamma) \text{vol}(\Gamma^*) = 1. \quad (\text{C.7})$$

Wir interessieren uns für die folgenden speziellen Typen von Gittern:

Definition C.1.3

$$\begin{aligned} \Gamma \text{ ganzzahlig} &\Leftrightarrow \Gamma \subset \Gamma^* \Leftrightarrow \forall \mathbf{v}, \mathbf{s} \in \Gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \in \mathbf{Z}, \\ \Gamma \text{ unimodular} &\Leftrightarrow \text{vol}(\Gamma) = 1, \\ \Gamma \text{ selbstdual} &\Leftrightarrow \Gamma = \Gamma^* \Leftrightarrow \Gamma \text{ ganzzahlig und unimodular,} \\ \Gamma \text{ gerade} &\Leftrightarrow \forall \mathbf{v} \in \Gamma \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \in 2\mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Die in der Stringtheorie wichtigen Gitter sind gerade, selbstduale euklidische und pseudo-euklidische Gitter. In der Arbeit werden die folgenden beiden Aussagen gebraucht:

Satz C.1.1 Gerade selbstduale euklidische Gitter existieren nur in Dimensionen die Vielfache von 8 sind. In 8 Dimensionen gibt es nur ein solches Gitter, das Wurzelgitter der Lie-Algebra E_8 . In 16 Dimensionen gibt es zwei verschiedene gerade selbstduale Gitter, nämlich das Wurzelgitter von $E_8 \oplus E_8$ und das Gewichtsgitter $D_{16}^{(R,S)}$, das aus den Wurzeln und den Spinorgewichten positiver Chiralität der Lie-Algebra D_{16} besteht.

Satz C.1.2 Selbstduale, gerade pseudo-euklidische Gitter existieren nur, wenn die Signatur ein Vielfaches von 8 ist. Es gibt dann bis auf Isometrien genau ein Gitter. Ist die Metrik vom Typ (p,q) , mit $p = 8m + n$ und $q = n$, $n < 8$, so ist Γ isometrisch zu

$$E_8^{\oplus m} \oplus D_{1,1}^{\oplus n} \quad (\text{C.9})$$

wobei E_8 das Wurzelgitter von E_8 und $D_{1,1}$ das zweidimensionale pseudo-euklidische Standard-Gitter ist.

Durch Äquivalenzklassenbildung in Γ bezüglich eines Untergitters maximaler Dimension Γ' erhält man eine endliche Gruppe, die Konjugationsklassengruppe von Γ bezüglich Γ' . In der Fundamentalzelle von Γ' gibt es genau einen Repräsentanten jeder Konjugationsklasse. Die Mächtigkeit N der Konjugationsklassengruppe ist daher

$$N = \frac{\text{vol}(\Gamma')}{\text{vol}(\Gamma)}. \quad (\text{C.10})$$

C.2 Lie-Algebra Gitter

Eine besondere Kategorie von Gittern sind die Gewichtsgitter Γ_W und die Wurzelgitter Γ_R von Lie-Algebren. Da die Wurzeln die Gewichte der adjungierten Darstellung sind, gilt

$$\Gamma_R \subset \Gamma_W. \quad (\text{C.11})$$

Die Konjugationsklassengruppe parametrisiert die Konjugationsklassen von Darstellungen der zugehörigen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und ist isomorph zum Zentrum $\mathcal{Z}$ der universellen linearen Gruppe $\hat{\mathbf{G}}$

$$\mathcal{Z} = \Gamma_W / \Gamma_R. \quad (\text{C.12})$$

Falls die Lie-Algebra einfach verbunden ist, kann man alle Wurzeln auf 2 normieren. Dann gilt:

$$\Gamma_W = \Gamma_R^*. \quad (\text{C.13})$$

Die Gittermetriken sind die Cartan-Matrix bzw. deren Inverse. Enthält ein Gitter eine Menge von Vektoren mit Normquadrat 2 und ganzzahligen Skalarprodukten untereinander, so ist das von ihnen erzeugt Untergitter das Wurzelgitter einer einfach verbundenen Lie-Algebra. Ist das Gitter zudem ganzzahlig, so sind alle anderen Gittervektoren Gewichte dieser Algebra. Wurzel- und Gewichtsgitter und deren Untergitter werden durch das Symbol für die entsprechende komplexe Lie-Algebra und die Angabe der auftretenden Konjugationsklassen bezeichnet

$$\Gamma = (\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n)_{KK}. \quad (\text{C.14})$$

Man beachte, daß solch ein Lie-Algebra-Gitter im allgemeinen keine direkte Summe ist. Das gilt nur für spezielle Wahlen der Liste KK der Konjugationsklassen. Für das Rechnen mit Konjugationsklassen von Lie-Algebra-Gittern, also mit Gewichtsvektoren modulo Wurzelvektoren gelten zwei Regeln:

1. Das Skalarprodukt zweier Gewichtsvektoren hängt modulo 1 nur von den jeweiligen Konjugationsklassen ab.

2. Das Normquadrat eines Gewichtsvektors hängt modulo 2 nur von der Konjugationsklasse ab.

In der Stringtheorie ist man speziell an selbstdualen Lie-Algebra-Gittern interessiert. Um diese Eigenschaft nachzuweisen, benutzt man das folgenden Kriterium für die Unimodularität: Aus

$$\Gamma_R \subset \Gamma_W = \Gamma_R^* \quad (\text{C.15})$$

folgt mit (C.7)

$$\text{vol}(\Gamma_R) = \sqrt{N} \text{ und } \text{vol}(\Gamma_W) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad (\text{C.16})$$

wobei N die Anzahl der Konjugationsklassen ist. Das volle Gewichtsgitter ist im allgemeinen zu groß, das Wurzelgitter zu klein, um selbstdual zu sein. Daher versucht man durch Auswahl von $N' < N$ Konjugationsklassen ein unimodulares Gitter Γ' zu konstruieren. Nun ist

$$\text{vol}(\Gamma') = \frac{\text{vol}(\Gamma_R)}{N'} = \frac{\sqrt{N}}{N'} \quad (\text{C.17})$$

Falls die Gesamtzahl N der Konjugationsklassen eine Quadratzahl ist, kann man durch Auswahl von $N' = \sqrt{N}$ Konjugationsklassen ein unimodulares Gitter erhalten. Falls es gleichzeitig ganzzahlig ist, ist es selbstdual.

C.2.1 Spezielle Lie-Algebra-Gitter

Für die in der Arbeit benutzten Gitter sollen Realisierungen angegeben werden.

Das Gitter von A_1

Das Wurzelgitter der Lie-Algebra A_1 ist

$$A_1^{(R)} = \{r = m\sqrt{2} | m \in \mathbf{Z}\}, \quad (\text{C.18})$$

das Gewichtsgitter ist

$$A_1^{(W)} = \{w = \frac{n}{2}\sqrt{2} | n \in \mathbf{Z}\} = A_1^{(R)} + A_1^{(S)}. \quad (\text{C.19})$$

Die Gewichte mit geradem n gehören zu den Vektordarstellungen, die mit ungeradem n zu den Spinordarstellungen von $su(2)$. Die Dimension der Darstellung mit dem höchsten Gewichte $\frac{n}{2}\sqrt{2}$ ist $n + 1$, d.h. $l = \frac{n}{2}$ ist die Spinquantenzahl.

Die Gitter von A_2 und E_6

Das Wurzelgitter $A_2^{(R)}$ der Lie-Algebra A_2 wird durch die beiden einfachen Wurzeln α_i $i = 1, 2$ erzeugt, die die Cartan-Matrix

$$C(A_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

realisieren, d.h.

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = C(A_2)_{ij}. \quad (\text{C.21})$$

Eine mögliche Wahl ist

$$\alpha_1 = (\sqrt{2}, 0), \alpha_2 = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}). \quad (\text{C.22})$$

Die anderen vier Wurzeln sind $-\alpha_1$, $-\alpha_2$, $\alpha_1 + \alpha_2$ und $-\alpha_1 - \alpha_2$. Zusammen mit dem zweifach entarteten Gewicht $\mathbf{0}$ bilden sie die acht Gewichte der adjungierten Darstellung **8**. Die dualen Vektoren

$$\alpha_1^* = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{6}\sqrt{6}), \alpha_2^* = (0, \frac{1}{3}\sqrt{6}) \quad (\text{C.23})$$

sind die höchsten Gewichte der Darstellungen $\mathbf{3}$ und $\bar{\mathbf{3}}$ und erzeugen die beiden anderen Konjugationsklassen F und $\bar{F}$. Sie realisieren offensichtlich die inverse Cartan-Matrix:

$$C(A_2)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.24})$$

Die Gewichte der beiden dreidimensionalen Darstellungen sind:

$$\mathbf{3}: \quad \alpha_1^*, -\alpha_2^*, -\alpha_1^* + \alpha_2^*, \quad (\text{C.25})$$

$$\bar{\mathbf{3}}: \quad \alpha_2^*, -\alpha_1^*, \alpha_1^* - \alpha_2^*. \quad (\text{C.26})$$

Den Zusammenhang mit der in der Physik, z.B. im Quarkmodell, üblichen Parametrisierung dieser und anderer Darstellungen brauchen wir nicht explizit. Die Umrechnung ist einfach, siehe auch [138], [137], [86].

Ein besonderes Phänomen tritt bei dem Gewichtsgitter

$$(A_2 \oplus A_2 \oplus A_2)_W \quad (\text{C.27})$$

auf. Die Gewichte der Konjugationsklassen (F, F, F) und $(\bar{F}, \bar{F}, \bar{F})$ haben modulo 2 das Normquadrat 2 und ganzzahlige Skalarprodukte untereinander und mit der Konjugationsklasse (R, R, R) . Da die aus diesen 3 Klassen bestehende Menge bezüglich der Konjugationsklassen-Addition abgeschlossen ist, entspricht ihr ein ganzzahliges gerades Untergitter. Die Vektoren minimaler Länge in den beiden zusätzlichen Konjugationsklassen sind die Gewichte der Darstellungen $(\mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{3})$ und $(\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}})$. Sie besitzen in dieser Ausnahmesituation das Normquadrat $3 \cdot \frac{2}{3} = 2$ und sind daher Wurzeln, die das Wurzel-System von $A_2^{\oplus 3}$ zu dem der exzeptionellen Lie-Algebra E_6 erweitern. Diese hat $24 + 2 \cdot 27 = 72$ Wurzeln. Das Wurzelgitter von E_6

$$E_6^{(R)} = (A_2 \oplus A_2 \oplus A_2)^{(R, R, R), (F, F, F), (\bar{F}, \bar{F}, \bar{F})} \quad (\text{C.28})$$

ist offensichtlich zwar ein Untergitter von $(A_2^{\oplus 3})_W$, aber keine direkte Summe von A_2 -Gittern, denn dazu müßten auch die Konjugationsklassen $(F, R, R), \dots$ im Gitter liegen.

Die Gitter der Lie-Algebren A_l , $l > 2$ brauchen wir nicht explizit. Man kann sie aber induktiv konstruieren, indem man die Gewichte bezüglich der maximalen Unteralgebra $A_{l-1} \oplus u(1)$ zerlegt, die bekannten A_{l-1} -Gewichte einsetzt und das $u(1)$ -Gewicht entsprechend wählt. Die Lie-Algebra A_l hat $l + 1$ Konjugationsklassen.

Die Gitter D_n und E_8

Das Gewichtsgitter der Lie-Algebra D_n , $n \geq 3$ besteht aus den folgenden 4 Konjugationsklassen:

$$\begin{aligned} R &= A_2^{(R)} &&= \{(m^1, \dots, m^n) | m^i \in \mathbf{Z}, \sum_i m^i \in 2\mathbf{Z}\}, \\ V &= A_2^{(R)} + (1, 0, \dots, 0) &&= \{(m^1, \dots, m^n) | m^i \in \mathbf{Z}, \sum_i m^i \in 2\mathbf{Z} + 1\}, \\ S &= A_2^{(R)} + (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{2}), \\ C &= A_2^{(R)} + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{2}). \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Die Gewichtsvektoren minimaler Länge gehören zu den folgenden Darstellungen:

1. Die Wurzeln

$$(\pm 1, \pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (\pm 1, 0, \dots, 0, \pm 1), \dots, (0, \dots, 0, \pm 1, \pm 1) \quad (\text{C.30})$$

gehören zu der adjungierten Darstellung. Es können l einfache Wurzeln ausgewählt werden.

2. Die $2n$ Gewichte

$$(\pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, \pm 1) \quad (C.31)$$

gehören zur Vektordarstellung.

3. Die Gewichte

$$\left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}, \dots, \pm \frac{1}{2} \right) \quad (C.32)$$

gehören, je nachdem ob die Anzahl der „-“ Zeichen gerade oder ungerade ist, zu der fundamentalen Spinordarstellung positiver oder negativer Chiralität.

Da die Zahl der Konjugationsklassen immer die Quadratzahl 4 ist, lassen sich stets unimodulare Untergitter finden. Ein spezieller Fall ergibt sich für $n = 8$, da dann die Spinorgewichte das Normquadrat 2 haben und zusätzliche Wurzeln sind. Da die Spinorkonjugationsklassen untereinander kein ganzzahliges Skalarprodukt haben, muß man sich für eine Chiralität entscheiden. Wir wählen oBdA die S-Klasse. Das so entstehende Gitter ist das Wurzelgitter der Lie-Algebra E_8 :

$$E_8 = D_8^{(R)(S)}. \quad (C.33)$$

Es ist offensichtlich unimodular und, wie die Konjugationsklassen-Arithmetik zeigt, auch ganzzahlig, also selbstdual. Da es ein Wurzelgitter ist, ist es automatisch gerade. Eine Menge von einfachen Wurzeln wird in der Arbeit beschrieben. Dort erscheint auch eine alternative Konstruktion mit Hilfe des $E_6 \oplus A_2$ Gitters. Das Gitter $D_{16}^{(R)(S)}$ ist ebenfalls gerade und selbstdual, aber die Spinorgewichte sind keine Wurzeln. Es handelt sich um das Gewichtsgitter der Gruppe $\text{Spin}(32)/\mathbf{Z}_2$. $E_8 \oplus E_8$ und $D_{16}^{(R)(S)}$ sind die beiden einzigen geraden selbstdualen euklidischen Gitter in 16 Dimensionen.

Die Definition der D_n -Gitter bleibt auch für die Fälle $n = 1, 2$ sinnvoll. Für $n = 2$ erhält man das Gewichtsgitter von $D_2 = A_1 \oplus A_1$. Für $n = 1$ besitzt das Gitter keine Wurzeln (Vektoren mit Normquadrat 2), ist also kein Lie-Algebra-Gitter.

C.2.2 Pseudoeuklidische Lie-Algebra-Gitter

Gitter der Form $\Gamma_{p,q}$, bei denen das rechte und linke Teilgitter aus Gewichten von Lie-Algebren bestehen, heißen pseudoeuklidische Lie-Algebra-Gitter. Die Impuls-Gitter der toroidalen Stringkompaktifizierungen sind solche Gitter oder enthalten solche Gitter für kritische Werte der Hintergrundfelder. Da die Regeln der Konjugationsklassen-Arithmetik auch für den pseudoeuklidischen Fall gültig bleiben, kann man sie für die Konstruktion selbstdualer pseudoeuklidischer Gitter und im Rahmen der Verschiebungsvektor-Methode benutzen. Vektoren mit pseudoeuklidischem Normquadrat 2 sind aber im allgemeinen nicht Wurzeln von Lie-Algebren, d.h. pseudoeuklidische Lie-Algebra-Gitter sind **keine** Gewichts- oder Wurzelgitter von Lie-Algebren. Als Wurzeln werden Vektoren der Form $(\mathbf{v}, 0)$ und $(0; \mathbf{v})$ bezeichnet, bei denen $\mathbf{v}$ das euklidische Normquadrat 2 hat. Sie sind Wurzeln von Lie-Algebren und die von ihnen erzeugten euklidischen Untergitter sind Wurzelgitter.

Eine Standard-Methode zur Konstruktion gerader selbstdualer pseudoeuklidischer Gitter ist die Englert-Neveu-Konstruktion. Man wählt das Gewichtsgitter Γ_m einer halbeinfachen Lie-Algebra und wählt bei dem verdoppelten Gitter

$$(\Gamma_m \oplus \Gamma_m)_W \quad (C.34)$$

die diagonale Kombination

$$(K_1, K_1), (K_2, K_2), \dots \quad (C.35)$$

der Konjugationsklassen. Dieses Gitter ist immer gerade und selbstdual bezüglich der Metrik vom Typ (m, m) . Das zweidimensionale pseudoeuklidische Standard-Gitter ist z.B.

$$D_{1,1}^{EN} = (D_1 \oplus D_1)^{(R,R),(V,V),(S,S),(C,C)}. \quad (C.36)$$

Literaturverzeichnis

Lehrbücher und Monographien, Stringtheorie

- [1] M. Green, J. Schwarz, E. Witten, **Superstring Theory**. Cambridge University Press (1987), 2 volumes.
- [2] M. Kaku, **Introduction to Superstrings**. Springer (1988).
- [3] M. Kaku, **Strings, Conformal Fields and Topology**. Springer (1991).
- [4] D. Lüst, S. Theisen, **Lectures on String Theory**. Springer (1989), Lecture Notes in Physics **346**.

Stringtheorie, konforme Feldtheorie

- [5] L. Alvarez-Gaumé, G. Moore, C. Vafa, **Theta Functions, Modular Invariance and Strings**. *Comm. Math. Phys.* **106** (1986) 1.
- [6] L. Alvarez-Gaumé, C. Gomez, **Topics in Liouville Theory**. *Cern-Th* 6175/91 and in: J. Harvey (ed.), **String Theory and Quantum Gravity '91**, World Scientific (1992).
- [7] D. Altschüler, P. Beran, J. Lacki, I. Roditi, **Twisted Vertex Operators and Representations of finite Heisenberg Groups**. *Int. Jour. Mod. Phys. A* **4** (1989) 921.
- [8] T. Banks, L. J. Dixon, D. Friedan, D. Martinec, **Phenomenology and Conformal Field Theory**. *Nucl. Phys. B* **299** (1988) 613.
- [9] T. Banks, J. Lykken, **String Theory and Two-Dimensional Quantum Gravity**. *Nucl. Phys. B* **331** (1990) 173.
- [10] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, **Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Conformal Field Theory**. *Nucl. Phys. B* **241** (1984) 333.
- [11] A. A. Belavin and V. G. Knizhnik, **Algebraic Geometry and the Geometry of Quantum Strings**. *Phys. Lett.* **168 B**.
- [12] J. Bolte, F. Steiner, **The On-Shell Limit of Bosonic Off-Shell String Scattering Amplitudes**. *Nucl. Phys. B* **361** (1991) 451. **Factorization of Bosonic String Scattering Amplitudes**. *DESY* 91-029.
- [13] R.C. Brower, K.A. Friedman, **Spectrum Generating Algebra and No-Ghost Theorem for the Neveu-Schwarz Model**. *Phys. Rev. D* **7** (1973) 535.
- [14] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger, E. Witten, **Vacuum Configurations for Superstrings**. *Nucl. Phys. B* **258** (1985) 46.
- [15] P. Candelas, **Lectures on Complex Manifolds**, in: L. Alvarez-Gaume (ed.), **Superstrings '87**, (ICTP Spring School 1987). World Scientific (1988).

- [16] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde, $c = 1$ **Conformal Field Theory on Riemann Surfaces**. *Comm. Math. Phys.* **115** (1988) 649.
- [17] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde, **On Moduli Spaces of Conformal Field Theories with $c \geq 1$** , in P. Di Vecchia (ed.) **Perspektives in String Theories**. World Scientific (1988).
- [18] E. D' Hoker, D. H. Phong, **The Geometry of String Perturbation Theory**. *Rev. Mod. Phys.* **60** (1988) 917.
- [19] E. D' Hoker, S. B. Giddings, **Unitarity of the Closed Bosonic Polyakov String**. *Nucl. Phys. B* **291** (1987) 90.
- [20] L. Dixon, V. Kaplunovsky, C. Vafa, **On Four-Dimensional Gauge Theories from Type II Superstrings**. *Nucl. Phys. B* **294** (1987) 43.
- [21] L. Dixon, P. Ginsparg, J. Harvey, $\hat{c} = 1$ **Superconformal Field Theory**. *Nucl. Phys. B* **306** (1988) 470.
- [22] L. Dixon, D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker, **The conformal field theory of Orbifolds**. *Nucl. Phys. B* **282** (1987) 13.
- [23] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, and E. Witten, **Strings on Orbifolds**. *Nucl. Phys. B* **261** (1985) 678.
- [24] L. Dixon, J. Harvey, C. Vafa, and E. Witten, **Strings on Orbifolds (II)**. *Nucl. Phys. B* **274** (1986) 285.
- [25] J. Ellis, N. E. Mavromatos and D. V. Nanopoulos, **CPT Violation in String-Modified Quantum Mechanics and the Neutral Kaon System**. *CERN-TH*. 6755/92.
- [26] F. Englert, H. Nicolai, A. Schellekens, **Superstrings from 26 Dimensions**; *Nucl. Phys. B* **274** (1986) 315.
- [27] J. Erler, **Untersuchung von Moduliräumen in Stringtheorien**. *MPI-Ph-92-21*.
- [28] J. Erler, D. Jungnickel, J. Lauer, **Dependence of Yukawa Couplings on the Axionic Background Moduli of Z_N Orbifolds**. *Phys. Rev D* **45** (1992) 3651.
- [29] J. Erler, A. Klemm, **Comment on the Generation Number in Orbifold Compactifications**. *MPI-Ph-92-60*, *HEP-Th-9207111*.
- [30] S. Ferrara, S. Theisen, **Moduli Spaces, Effective Actions and Duality Symmetry in String Compactifications**. *CERN-Th* 5652/90. Based on lectures given at the 3rd Hellenic Summer School, 1989, published in the proceedings.
- [31] D. Freed, C. Vafa **Global Anomalies on Orbifolds**. *Comm. Math. Phys.* **110** (1987) 349.
- [32] D. Freed, C. Vafa, **Comments on Global Anomalies on Orbifolds**. *Comm. Math. Phys.* **117** (1987) 349.
- [33] D. H. Friedan, **Nonlinear Models in $2 + \epsilon$ Dimensions**. *Ann. Phys.* **163** (1985) 318.
- [34] D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker, **Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory**. *Nucl. Phys. B* **271** (1986) 93.
- [35] P. G. O. Freund, **Superstrings from 26 Dimensions**. *Phys. Lett.* **151 B** (1985) 387.
- [36] D. Gepner, **Exactly solvable String Compactifications on Manifolds of $SU(N)$ Holonomy**. *Phys. Lett.* **199 B** (1987) 380.

- [37] A. Giveon, E. Rabinovici, and G. Veneziano, **Duality in String Background Spaces**. *Nucl. Phys. B* **322** (1989) 167.
- [38] P. Ginsparg, **On toroidal Compactification of heterotic Superstrings**. *Phys. Rev. D* **38** (1987) 648.
- [39] F. Gliozzi, J. Scherk, D. Olive, **Supersymmetry, supergravity and the dual spinor model**. *Nucl. Phys. B* **122** (1977) 253.
- [40] P. Goddard and D. Olive, **Kac-Moody and Virasoro Algebras in Relation to Quantum Physics**. *Int. J. Mod. Phys. A1* (1986) 303.
- [41] P. Goddard, C. B. Thorn, **Compability of the Dual Pomeron with Unitarity and the Absence of Ghosts in the Dual Resonance Model**; *Phys. Lett.* **40B** (1972) 235.
- [42] P. Ginsparg, **Applied Conformal Field Theory**. In: E. Brezin, J. Zinn-Justin (ed.), **Fields, Strings, Critical Phenomena**, (Les Houches Summer School on Theoretical Physics 1988). North Holland (1990).
- [43] T. Goto, **Relativistic Quantum Mechanics of One-Dimensional Mechanical Continuum and Subsidiary Condition of Dual Resonance Model**. *Progr. Theor. Phys.* **46** (1971) 1560.
- [44] D. Gross, J. Harvey, E. Martinec, R. Rohm, **Heterotic String Theory (Part I)**. *Nucl. Phys. B* **256** (1985) 253.
- [45] D. Gross, J. Harvey, E. Martinec, R. Rohm, **Heterotic String Theory (Part II)**. *Nucl. Phys. B* **267** (1986) 75.
- [46] T. J. Hollowood, R. G. Myhill, **The 112 Breakings of E_8** . *Int. Jour. Mod. Phys. A* **3** (1988) 899.
- [47] S. Hamidi, C. Vafa, **Interactions on Orbifolds**. *Nucl. Phys. B* **279** (1987) 465.
- [48] L. E. Ibanez, J. Mas, H. P. Nilles and F. Quevedo, **Heterotic Strings in Symmetric and Asymmetric Orbifold Backgrounds**. *Nucl. Phys. B* **301** (1988) 157.
- [49] L. E. Ibanez, **The Search for a Standard Model $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ Superstring**. CERN-Th.4769/87 and in: Y. D. Kim, C. H. Lee, **Italian Korean joint Symposium on Relativistic Astrophysics**. World Scientific (1988).
- [50] L. E. Ibanez, H. P. Nilles and F. Quevedo, **Reducing the Rank of the Gauge Group in Orbifold Compactifications of heterotic string**. *Phys. Lett. B* **192** (1987) 332.
- [51] L. E. Ibanez, H. P. Nilles and F. Quevedo, **Orbifolds and Wilson Lines**. *Phys. Lett. B* **187** (1987) 25.
- [52] L. Ibanez, W. Lerche, D. Lüst, S. Theisen, **Some Considerations about the Stringy Higgs Effect**. *Nucl. Phys. B* **352** (1991) 435.
- [53] L. Ibanez, D. Lüst, **Duality Anomaly Cancellation, Minimal String Unification and the Effective Low-Energy Lagrangian of 4-D Strings**. *Nucl. Phys. B* **382** (1992) 305.
- [54] Z. Jaskolski, **The Polykov Path Integral over Bordered Surfaces**. *Comm. Math. Phys.* **128** (1990) 285.
- [55] D. Jungnickel, **Korrelationsfunktionen zweidimensionaler getwisteter konformer Feldtheorien**. *MPI-Ph-92-27*.

- [56] V. A. Kostelecky, O. Lechtenfeld, W. Lerche, S. Samuel, W. Watamura, **Conformal Techniques, Bosonization and Tree-Level String Amplitudes**. *Nucl. Phys. B* **288** (1987) 173.
- [57] J. Lauer, D. Lüst, S. Theisen, **Supersymmetric String Theories, Superconformal Algebras and Exceptional Groups**. *Nucl. Phys. B* **309** (1988) 771.
- [58] W. Lerche, A. N. Schellekens, N. P. Warner, **Lattices and Strings**. *Phys. Rep.* **177** (1989) 1.
- [59] D. Lüst, S. Theisen, **Four-Dimensional Heterotic Strings, Orbifolds and covariant Lattices**. *Nucl. Phys. B* **302** (1988) 499.
- [60] G. Mack, **Introduction to conformal invariant Quantum Field Theory in two and more Dimensions**. In A. Jaffe (ed.), **NATO Advanced Summer Institut on Nonperturbative Quantum Field Theory: proceedings**. Plenum Press (1988).
- [61] S. Mandelstam, **The n-loop string amplitudes. Explicit formulas, finiteness and absence of ambiguities**. *Phys. Lett. B* **277** (1992) 82.
- [62] E. Martinec, **Superspace Geometry of Fermionic Strings**. *Phys. Rev D* **28** (1983) 2604.
- [63] D. G. Markushevich, M. A. Olshantetsky, A. M. Perelomov, **Description of a Class of Superstring Compactifications related to Semi-Simple Lie Algebras**. *Comm. Math. Phys.* **111** (1987) 247.
- [64] T. R. Morris, **The Quantum Equivalence of Nambu and Polyakov String Actions**. *Nucl. Phys. B* **341** (1990) 443.
- [65] Y. Nambu, **Lectures at the Copenhagen Symposium (1970)**.
- [66] K. Narain, **New heterotic string theories in uncompactified dimensions < 10** . *Phys. Lett.* **169 b** (1986) 41.
- [67] K. Narain, M. Sarmadi and E. Witten, **A Note on Toroidal Compactification of Heterotic String Theory**. *Nucl. Phys. B* **279** (1987) 369.
- [68] K. Narain, M. Sarmadi and C. Vafa, **Asymmetric Orbifolds**. *Nucl. Phys. B* **288** (1987) 551.
- [69] N. S. Narain, M.H. Sarmadi, C. Vafa, **Asymmetric Orbifolds: Path Integral and Operator Formulations**. *Nucl. Phys. B* **356** (1991) 163.
- [70] A. Neveu and J. H. Schwarz, **Factorizable Dual Models for Pions**. *Nucl. Phys. B* **31** (1971) 86.
- [71] T. Ohrndorf, **On the Compactification of the Bosonic String at higher Loops**. *Nucl. Phys. B* **281** (1987) 470.
- [72] J. Polchinsky, **A Two-Dimensional Model for Quantum Gravity**. *Nucl. Phys. B* **324** (1990) 123.
- [73] A. M. Polyakov, **Quantum Geometry of Bosonic Strings**. *Phys. Lett.* **103 B** (1981) 207.
- [74] A. M. Polyakov, **Quantum Geometry of Fermionic Strings**. *Phys. Lett.* **103 B** (1981) 211.
- [75] P. Ramond, **Dual Theory for Free Fermions**. *Phys. Rev. D* **5** (1971) 2415.

- [76] N. Ravanini, **Informal Introduction to Extended Algebras and Conformal Field Theories with $c \geq 1$** . Lectures at Program on String and Conformal Field Theories, Spring 1989, Copenhagen, Denmark. *NORDITA* 89/21 P.
- [77] M. Sakamoto, **A physical Interpretation of Cocycle Factors in Vertex Operator Representations**. *Phys. Lett. B* **258** (1989) 258.
- [78] M. Sakamoto, **Bosonization of Bosons in Vertex Operator Representations of Affine Kac Moody Algebras**. *Prog. Theor. Phys.* **84** (1990) 351.
- [79] M. Sakamoto, **Torus Orbifold Equivalence in Compactified String Theories**. *Mod. Phys. Lett. A* **5** (1990) 1131.
- [80] A. Shapere and F. Wilczek, **Self Dual Models with Theta Terms**. *Nucl. Phys. B* **320** (1989) 669.
- [81] A. N. Schellekens and N. P. Warner, **Weyl-Groups, Supercurrents and Covariant Lattices** *Nucl. Phys. B* **308** (1988) 397.
- [82] J. Scherk, **An Introduction to the Theory of Dual Models and Strings**. *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 123.
- [83] J. Scherk, J. Schwarz, **Dual Models for Non-Hadrons**. *Nucl. Phys. B* **81** (1974) 118.
- [84] J. Schwarz, **Superstring Theory**. *Phys. Rep.* **89** (1982) 223.
- [85] W. Siegel, **Introduction to String Field Theory**. World Scientific (1988).
- [86] R. Slansky, **Group Theory for Unified Model Builders**. *Phys. Rep.* **79** (1981) 1.
- [87] P. Sorba, B. Torresani, **Twisted Vertex Operator and String Theory**. *Int. Jour. Mod. Phys. A* **3** (1988) 1451.
- [88] H. Sugawara, **A Field Theory of Currents**; *Phys. Rev.* **170** (1968) 1659.
- [89] M. Spalinski, **On the discrete Symmetrie Group of Narain Orbifolds**. *Phys. Lett. B* **275** (1992) 47.
- [90] C. Vafa, **Modular Invariance and discrete Torsion on Orbifolds**. *Nucl. Phys. B* **273** (1986) 592.
- [91] E. Witten, **String Field Theory and Non-commutative Geometry**. *Nucl. Phys. B* **268** (1986) 253.
- [92] S. T. Yau (editor), **Essays on Mirror Manifolds**. International Press (1992).
- [93] B. S. Zwiebach, **Closed String Field Theory: The Quantum Action and the BV-Master Equation**. *Nucl. Phys. B* **390** (1993) 33.

Sonstige physikalische Literatur

- [94] R. Abraham, J.E. Marsden, **Foundations of Mechanics**. Benjamin and Cummings (1978), 2nd edition.
- [95] E. Abdalla, M.C.B. Abdalla, K.D. Rothe, **Nonperturbative Methodes in 2 dimensional Quantum Field Theory**. World Scientific (1991).
- [96] L. Beaulieu, **Perturbativ Gauge Theories**. *Phys. Rep.* **129** (1985) 1.
- [97] N. D. Birrel, P.C.W. Davies, **Quantum fields in curved space**. Cambridge University Press (1982).

- [98] N. N. Bogoljubov and D. V. Sirkov, **Quantenfelder**. Physik-Verlag (1984).
- [99] S. Coleman, **Aspects of Symmetry**. Cambridge University Press (1985).
- [100] P.A.M. Dirac, **Lectures on Quantum Mechanics**. Belfer Graduate School on Science, Monographs Series (1966).
- [101] L. Faddeev, R. Jackiw, **Self-Dual Fields as Charge-Density Solitons**. *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 1873.
- [102] L. Faddeev, R. Jackiw, **Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems**. *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1692–1694.
- [103] R.P. Feynman, A.P. Hibbs, **Quantum Mechanics and Path Integrals**. McGraw-Hill (1965).
- [104] R. Fernández, J. Fröhlich, A. D. Sokal, **Random Walks, Critical Phenomena and Triviality in Quantum Field Theory**. Springer (1992).
- [105] P. Freund, **Introduction to Supersymmetry**. Cambridge University Press (1986).
- [106] M. Göckeler, T. Schücker, **Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity**. Cambridge University Press (1987).
- [107] J. Glimm, A. Jaffe, **Quantum Physics**. Springer (1987) 2nd edition.
- [108] R. Haag, **Local Quantum Physics**. Springer (1992).
- [109] A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, **Constrained Hamiltonian Systems**. Contribution to the Lincoi Interdisciplinary Center for Mathematical Sciences and their Applications **22**. Academia Nazionale del Lincoi (1976).
- [110] C. Itzykson and J. B. Zuber, **Quantum Field Theory**. McGraw Hill (1980).
- [111] T. Kaluza, **On the Problem of Unity in Physics**. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* (1921) 966.
- [112] O. Klein, **Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie**; *Z. Phys.* **37** (1926) 895.
- [113] N. Marnelius, **Introduction to the Quantization of general Gauge Theories**. *Acta Physica Polonia* **B 13** (1982) 669.
- [114] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, **Gravitation**. Freeman (1973).
- [115] H. P. Nilles, **Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics**. *Phys. Rep.* **110** (1984) 1.
- [116] H. Nicolai, M. Niedermeyer, **Vom Wurmloch zum schwarzen Loch ?** *Phys. Bl.* **45** (1989) 459.
- [117] R. Penrose, W. Rindler, **Spinors and Space-Time**. Cambridge University Press (1984), 2 vols.
- [118] M. Planck, *Sitzungsber. Deut. Akad. Wiss. Berlin* (1899) 440.
- [119] S. Pokorski, **Gauge Field Theorie**. Cambridge University Press (1987).
- [120] H. Primas, **Chemistry, Quantum Mechanics and Reductionism**. Springer (1983), 2nd edition.
- [121] P. Ramond, **Field Theory**. Addison Wesley (1987).

- [122] R. J. Rivers, **Path Integral Methods in Quantum Field Theory**. Cambridge University Press (1987).
- [123] G. Roepstorff, **Pfadintegrale in der Quantenphysik**. Vieweg (1991).
- [124] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, **Relativität, Gruppen, Teilchen**. Springer (1976).
- [125] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, **Gravitation und Kosmologie**. BI-Wissenschaftsverlag (1975).
- [126] L. Smolin, **Recent Developements in Non-Perturbative Quantum Gravity**. *HEP-Th* 9202022.
- [127] K. Sundermeyer, **Constrainend Dynamics**. Springer (1982). Lecture Notes in Physics **169**.
- [128] R. F. Streater, A. S. Wightman, **PCT, Spin and Statistics, and All That**. Benjamin (1964).
- [129] K. Symanzik, **Renormalizable Models with simple Symmetry Breaking**. *Comm. Math. Phys.* **16** (1970) 48.
- [130] S. Weinberg, **The Cosmological Constant Problem**. *Rev. Mod. Phys.* **61** (1989) 1.
- [131] J. Wess, J. Bagger, **Supersymmetry and Supergravity**. Princeton University Press (1992) 2nd edition.
- [132] J. Zinn-Justin, **Quantum Field Theory and Critical Phenomena**. Oxford Science Publishers (1989).

Mathematische Literatur

- [133] J.A. de Azcarraga, **Lie Groups, Lie Algebras and Cohomology**. *DAMTP* 89–10.
- [134] R. W. Carter, **Conjugacy Classes in the Weyl Group**. *Compositio Mathematica* **25** (1972) 1.
- [135] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette, M. Dillard-Bleick, **Analysis, Manifolds and Physics**. North-Holland (1982), 2nd edition.
- [136] F. Constantinescu, **Distributionen und ihre Anwendung in der Physik**. Teubner (1974).
- [137] J. F. Cornwell, **Group Theory in Physics**. Academic Press (1984), 3 vols.
- [138] R. N. Cahn, **Semi Simple Lie Algebras and Their Representations**. Benjamin and Cummings (1984).
- [139] E. B. Dynkin, **Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras**. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **6** (1957) 111.
- [140] I. B. Frenkel, V. G. Kac, **Basic Representations of affine Lie Algebras and Dual Resonance Models**, *Invent. Math.* **62** (1980) 23.
- [141] M. Fischler, **Young-Tableaux Methods for Kronecker Products of Representations of the Classical Groups**. *Jour. Math. Phys.* **22** (1981) 637.
- [142] H. Flanders, **Differential Forms**. Academic Press (1963).
- [143] M. Golubitsky and B. Rothschild, **Primitive Subalgebras of Exceptional Lie Algebras**. *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971) 983.

- [144] R. C. Gunning, **Vorlesungen über Riemannsche Flächen**. BI Wissenschaftsverlag (1972).
- [145] N. Hawley, M. Schiffer, **Half-Order Differentials on Riemann Surfaces**. *Acta Math.* **115** (1966) 199.
- [146] M. Hamermesh, **Group Theory and its Applications to physical problems**. Addison Wesley (1964).
- [147] H. Heuser, **Funktionalanalysis**. Teubner (1992), 3. Aufl.
- [148] J. E. Humphreys, **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory**. Springer (1972).
- [149] J. E. Humphreys, **Reflection Groups and Coxeter Groups**. Cambridge University Press (1990).
- [150] V. G. Kac, **Infinite dimensional Lie algebras**. Cambridge University Press (1985).
- [151] V. G. Kac, D. Peterson, in: A. White (ed.), **Anomalies, Geometry and Topology**. World Scientific (1985).
- [152] J. Lepowski, *Proc. Nat. Acad. Sci.(USA)* **82** (1985) 8295.
- [153] M. Lorente and B. Gruber, **Classification of Semisimple Subalgebras of Simple Lie Algebras**. *J. Math. Phys.* **13** (1972) 1639.
- [154] W. B. McKay, J. Patera, **Tables of Dimensions, Indices and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras**. Marcel Dekker (1981).
- [155] C. Nash, S. Sen, **Topology and Geometry for Physicists**. Academic Press (1983).
- [156] D. Quillen, **Determinants of Cauchy–Riemann operators over Riemann surfaces**. *Funct. Anal. and Appl.* **19** (1985) 31.
- [157] A. Pressley, G. Seagel **Loop Groups**. Oxford science publishers (1986).
- [158] M. Schlichenmaier, **An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces**. Springer (1989), Lecture Notes in Physics **322**.
- [159] H. Seifert und W. Threlfall, **Lehrbuch der Topologie**. Teubner (1934).

Sonstige Literatur

- [160] J. Audretsch, K. Mainzer, **Wieviele Leben hat Schrödingers Katze ?** BI-Wissenschaftsverlag (1990).
- [161] L. Arendes, **Gibt die Physik Wissen über die Natur?** Königshausen und Neumann (1992).
- [162] P. Janich, **Euklids Erbe**. C.H. Beck (1989)
- [163] P. Mittelstaedt, **Philosophische Probleme der modernen Physik**. BI-Wissenschaftsverlag (1981).
- [164] A. Pais, **„Raffiniert ist der Herrgott . . .“ Albert Einstein. Eine wissenschaftliche Biographie**. Vieweg (1986).
- [165] W. V. O Quine, **Two Dogmas of Empiricism**, in: **From a Logical Point of View** Cambridge University Press (1961), 2nd edition.
- [166] W. Stegmüller, **Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie**. Kröner Verlag (1989), 4 Bände.

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name:	Mohaupt
Vornamen:	<u>Thomas</u> Michael
Geburtsdatum:	11.4.1963
Geburtsort:	Essen
Familienstand:	ledig
Name des Vaters:	Manfred Mohaupt
Name der Mutter:	Dr. Helga Mohaupt, geborene Moll

Schulischer Bildungsgang

1969–1973	Grundschule „Im Steeler Rott“ in Essen
1973–1982	Carl-Humann-Gymnasium in Essen
14.6.1982	Abitur in Essen

Wehr-/Zivildienst

1.7.1982 – 30.9.1983	Wehrdienst
----------------------	------------

Universitärer Bildungsgang

1983–1989	Studium der Physik an der RWTH Aachen
28.9.1989	Diplom im Fach Physik an der RWTH Aachen

Tätigkeiten

1.04.1989 – 30.09.1989	Studentische Hilfskraft am Lehrstuhl E für Theoretische Physik der RWTH Aachen
1.10.1989 – 30.09.1990	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl E für Theoretische Physik der RWTH Aachen
Seit 01.10.1990	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster

Dissertation

Oktober 1990	Beginn der Dissertation bei Prof. Dr. G. Münster am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster
--------------	--

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Gernot Münster für die Themenstellung und die umsichtige Betreuung, sowie für die stets angenehme Zusammenarbeit danken. Herrn Prof. Hans A. Kastrup bin ich zu großem Dank verpflichtet, auch dafür, daß ich nach meiner Diplomarbeit ein Jahr als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der RWTH Aachen bleiben konnte.

Meinem Kollegen aus Aachener Zeiten, Dirk Jungnickel, danke ich dafür, daß er mir per Bitnet und in direktem Kontakt geholfen hat, verschiedene Aspekte von Orbifold-Kompaktifizierungen besser zu verstehen. Die Mitarbeiter des Institutes für Theoretische Physik I, insbesondere Joachim Hein, Sabine Klessinger, Klaus Pinn, Markus Plagge und Christian Wieczerkowski waren für mich wertvolle Gesprächspartner in vielen physikalischen und nichtphysikalischen Fragen. Allen Teilnehmern des Forschungsseminars über Quantenfeldtheorie danke ich dafür, daß sie bei verschiedenen Gelegenheiten meinen Beiträgen zum Thema Stringtheorie mit aufmerksamem Interesse gefolgt sind.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern und Regina Riepe für ihre Hilfe und Unterstützung in allen Lebenslagen.