

WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



institut für
theoretische physik

Diplomarbeit

Die räumlich diskretisierte
Einstein-Hilbert-Wirkung in synchronisierten
Bezugssystemen

ANNA LUSIEWICZ

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für Theoretische Physik
Arbeitsgruppe Prof. Dr. G. Münster

Juli 2013

Diese korrigierte Version unterscheidet sich nur geringfügig von der im Prüfungsamt am 26. Juli 2013 eingereichten Diplomarbeit. Die Änderungen betreffen hauptsächlich Tippfehler sowie Notation. Es wurden keine inhaltlichen Aussagen verändert.

Münster, 24. September 2013

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1. Allgemeine Relativitätstheorie	9
1.1. Prinzipien und Konzepte	9
1.1.1. Zusammenhang mit der SRT	9
1.1.2. Äquivalenzprinzip	10
1.1.3. Korrespondenzprinzip	11
1.1.4. Kovarianzprinzip	12
1.2. Differentialgeometrische Grundlagen der ART	12
1.2.1. Metrischer Tensor und pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit . .	12
1.2.2. Transformationsverhalten physikalischer Größen	13
1.2.3. Kovariante Ableitung und affiner Zusammenhang	15
1.2.4. Paralleltransport und Krümmungstensor	17
1.2.5. Geodätengleichung	19
1.3. Theorie der Gravitation	20
1.3.1. Energie-Impuls-Tensor	20
1.3.2. Einsteinsche Feldgleichungen	21
1.3.3. Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen	22
1.3.4. Herleitung der Einsteinschen Feldgleichungen aus einem Variati- onsprinzip	23
1.4. Kosmologie als Anwendung der ART	25
1.4.1. Robertson-Walker-Metrik und Friedmann-Gleichungen	25
1.4.2. Evolutionsszenario	27
2. Einführung in den Regge-Kalkül	29
2.1. Motivation	29
2.2. Triangulierung und Defizitwinkel	29
3. Berechnung der Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH} im Kontinuum	33
3.1. Berechnung der Christoffel-Symbole $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$	33
3.2. Berechnung der Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors $R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta}$	36

3.3. Berechnung der Komponenten des Ricci-Tensors $R_{\alpha\beta}$	40
3.4. Berechnung des Krümmungsskalars R und der Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH}	43
3.5. Invarianz der Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH} unter räumlichen Transformationen	45
4. Spezialfälle der untersuchten Einstein-Hilbert-Wirkung	49
4.1. Statisches Universum	49
4.2. Robertson-Walker-Metrik	50
4.2.1. Herleitung mit den Euler-Lagrange-Gleichungen	52
4.2.2. Einsetzen in die Einsteinschen Feldgleichungen	52
5. Überführung der Einstein-Hilbert-Wirkung in den Regge-Kalkül	55
5.1. Flächengeometrische Vorüberlegungen für den zweidimensionalen Fall .	55
5.2. Diskretisierung der Metrik im dreidimensionalen Fall	56
6. Zusammenfassung und Ausblick	61
A. Anhang	63
A.1. Nachweis der Symmetrie zwischen R_{i0} und R_{0i}	63
A.2. Die expliziten Werte der Einstein-Hilbert-Wirkung im diskretisierten Fall	63
B. Literaturverzeichnis	69
C. Danksagung	71

Einleitung

Von den vier Grundkräften der Physik (elektromagnetische Wechselwirkung, starke Kernkraft, schwache Kernkraft, Gravitation) lassen sich die ersten drei genannten mit Hilfe des Standardmodells der Elementarteilchenphysik verstehen. Einzig die Gravitation entzieht sich dieser Beschreibung, da Gegenstand ihrer Theorie nicht in Raum und Zeit eingebettete Felder sind, sondern die Raumzeit selbst die Quelle der Bewegung darstellt.

Durch diesen Umstand ist es noch nicht geglückt, eine verallgemeinerte Theorie der Quantengravitation zu finden. Da eine Beschreibung im Rahmen der Quantenfeldtheorien versagt, wurde nach alternativen Ansätzen gesucht, eine Quantentheorie der Gravitation anzugeben. Eine Möglichkeit ist die Diskretisierung der Raumzeit im Rahmen des Regge-Kalküls.

Der Regge-Kalkül diene historisch zunächst dazu, komplexe Probleme zum Zweck der numerischen Simulation auf wenige Freiheitsgrade zu reduzieren; er kann jedoch mit dem Pfadintegralformalismus als Ausgangspunkt für eine Quantengravitation dienen. Im Regge-Kalkül wird die Raumzeit mit (vierdimensionalen) Simplicialkomplexen trianguliert.

In dieser Diplomarbeit wird die vierdimensionale Mannigfaltigkeit in einen dreidimensionalen, diskretisierten Raum und eine kontinuierliche zeitliche Untermannigfaltigkeit separiert. Die Diskretisierung des Raumes wird dadurch erreicht, dass dieser mit bestimmten Platonischen Körpern, in diesem Falle mit Tetraedern, überdeckt und damit trianguliert wird. Dann kann der metrische Tensor, der die Geometrie der Raumzeit angibt, allein durch die Kantenlängen der gewählten Triangulierung ausgedrückt werden. Ist der metrische Tensor bekannt, so lässt sich die Einstein-Hilbert-Wirkung angeben, aus der die Bewegungsgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie hergeleitet werden können.

Es wird zunächst die Einstein-Hilbert-Wirkung für eine Metrik in Blockgestalt, die die oben genannte Bedingung der Aufteilung in 3+1 Dimensionen erfüllt, im kontinuierlichen Fall berechnet. Diese spezielle Form der Metrik wird mit dem Begriff „synchronisiertes Bezugssystem“ bezeichnet. Anhand zweier bekannter Spezialfälle wird daraufhin die Gültigkeit dieses Ausdrucks gezeigt. Schließlich wird die Wirkung in eine

diskretisierte Form gebracht. Die dafür benötigten mathematischen Voraussetzungen werden in den ersten Kapiteln bereitgestellt.

1. Allgemeine Relativitätstheorie

Um das Phänomen der Gravitation zu beschreiben, bedient man sich der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART). Anders als in den übrigen Feldtheorien, werden die Felder hier nicht als in Raum und Zeit eingebettet verstanden, sondern es ist die Raumzeit selbst, die als dynamisches Feld wirkt. Dies wird durch die Krümmungseigenschaft erreicht und ist in den Einsteinschen Feldgleichungen beschrieben. In diesem Kapitel werden die grundlegenden Aussagen und Definitionen zusammengefasst, die für die Aufstellung dieser Gleichungen nötig sind. Die Kenntnis der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) wird vorausgesetzt. Zur Vereinfachung der Rechnungen wird mit natürlichen Einheiten gerechnet: $c = 1$. Griechische Indizes $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ bezeichnen die Komponenten $0, 1, 2, 3$; lateinische Indizes $(a, b, i, j, \dots)$ beziehen sich auf die räumlichen Komponenten $1, 2, 3$. Zudem gilt die Einsteinsche Summenkonvention, das heißt, dass über einen Index summiert wird, wenn dieser sowohl oben (kontravariant) als auch unten (kovariant) steht. Das Summenzeichen wird dann weggelassen:

$$x_{\mu\nu}y^{\mu\nu} := \sum_{\nu=0}^3 \left(\sum_{\mu=0}^3 x_{\mu\nu}y^{\mu\nu} \right). \quad (1.1)$$

1.1. Prinzipien und Konzepte

Die folgenden Aussagen dienen zur Veranschaulichung der wesentlichen Konzepte in der ART und lassen sich in vielen Lehrbüchern finden. Die hier aufgeführten sind hauptsächlich [1] entnommen.

1.1.1. Zusammenhang mit der SRT

In der SRT werden Phänomene in Inertialsystemen beschrieben. Inertialsysteme (IS) bezeichnen eine Klasse von Bezugssystemen, die nicht zueinander beschleunigt sind. Die zugehörige Raumzeit ist der Minkowski-Raum, in dem das Linienelement die Form

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (1.2)$$

besitzt. $\eta_{\alpha\beta}$ bezeichnet den metrischen Tensor einer flachen Raumzeit:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

wobei die Signatur $(+, -, -, -)$ von der gewählten Konvention abhängt^{1.1}. ξ^μ ist eine Kurzschreibweise für den Vierer-Vektor, der jedem Punkt der (flachen) Raumzeit einen Wert zuweist. Gemeint ist das Tupel $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ oder auch (t, x, y, z) . Die Gesetze der SRT sind lorentzkovariant formuliert, das heißt, dass sie unter Lorentz-Transformationen dieselbe Form besitzen.

In der ART behandelt man im Allgemeinen beschleunigte Bezugssysteme, die nur lokal (also in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Raumzeitpunktes) als IS aufgefasst werden können. Die Koordinatentransformation in das Koordinatensystem KS

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \quad (1.4)$$

liefert den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (1.5)$$

und damit das Linienelement

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (1.6)$$

für einen Riemannschen Raum, der im Allgemeinen nicht global in einen Minkowski-Raum transformiert werden kann.

Im lokalen Grenzfall geht die ART hingegen in die SRT über, so dass die Gesetze der ART - wie die der SRT - ebenfalls lorentzkovariant formuliert sein müssen. Der mathematische Rahmen hierfür ist in Kapitel 1.2. beschrieben.

1.1.2. Äquivalenzprinzip

Das Äquivalenzprinzip liefert den Grundgedanken zur Aufstellung der ART. Häufig wird es in zwei Fälle gegliedert:

Das **schwache Äquivalenzprinzip** drückt aus, dass schwere Masse m_s und träge Masse m_t gleich sind: $m_t = m_s$. Bereits in der Newtonschen Gravitationstheorie ist das Verhältnis von träger zu schwerer Masse $\frac{m_t}{m_s}$ konstant und es ist plausibel, ihre

^{1.1}Einen Überblick über die verschiedenen Vorzeichenkonventionen für relevante Größen in der ART bietet der Einband von [2] für ausgewählte Autoren.

Gleichheit anzunehmen. Durch eine geeignete Koordinatentransformation in ein beschleunigtes Bezugssystem können Gravitationskräfte in Trägheitskräfte umgeschrieben werden (vgl. Abb. 1.1). Ein Beobachter in einem frei fallenden Labor spürt dementsprechend keine Gravitation. Dies definiert aber gerade ein lokales Inertialsystem, sofern die Ausdehnung des Labors klein genug ist, damit Inhomogenitäten im Gravitationsfeld, die sich als Gezeitenkräfte bemerkbar machen, keine Rolle spielen.

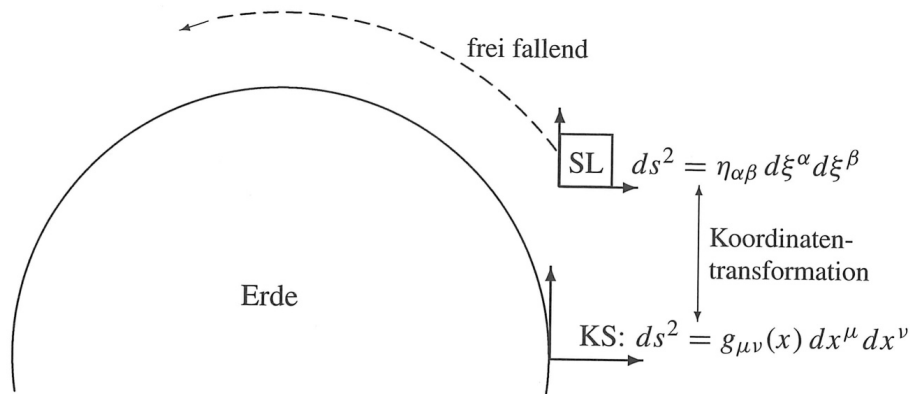


Abbildung 1.1.: Das Äquivalenzprinzip drückt aus, dass im Satellitenlabor SL die gleichen Gesetze ohne Gravitation gelten wie im KS mit Gravitation (auf der Erde), wenn eine allgemeine Koordinatentransformation durchgeführt wird (aus [1, Kap. 10])

Geht man nun davon aus, dass sowohl die Trägheitskräfte als auch die Gravitationskräfte nur Ausprägungen einer gemeinsamen Ursache darstellen, wird die Unterscheidung von träger und schwerer Masse von vornherein aufgehoben. Albert Einstein erweiterte das Prinzip: Nicht nur die Gesetze der Mechanik sollen sich derart transformieren, sondern alle physikalischen Gesetze laufen in einem frei fallenden Koordinatensystem so ab, als ob kein Gravitationsfeld vorhanden sei.

Anders ausgedrückt: Lokal ist das frei fallende Koordinatensystem ein Inertialsystem. Dies wird als das **starke Äquivalenzprinzip** oder auch **Einsteinsche Äquivalenzprinzip** bezeichnet: In einem Gravitationsfeld kann in jedem Weltpunkt ein lokales Inertialsystem so gewählt werden, so dass alle physikalischen Gesetze (abgesehen von der gravitativen Wechselwirkung) wie in der speziellen Relativitätstheorie gelten.

1.1.3. Korrespondenzprinzip

Bei der Formulierung einer neuen Theorie ist es nötig, dass bekannte Theorien, die richtige Ergebnisse geliefert haben, in die neue Theorie eingebettet sein müssen. Beispielsweise liefert die SRT für kleine Geschwindigkeiten die gleichen Vorhersagen wie die

Newtonsche Mechanik. Die ART ist eine Erweiterung dieser beiden Theorien und enthält die Newtonsche Gravitation als Grenzfall schwacher Felder und die SRT in kleinen Raumzeitbereichen durch das Äquivalenzprinzip. Die Beziehung zur Quantenmechanik erweist sich jedoch als problematisch. Beide Theorien sind in ihrem jeweiligen Gültigkeitsbereich sehr erfolgreich, eine Vereinigung ist bislang aber noch nicht gelungen. Das liegt an der Nichtlinearität der Feldgleichungen und an den nichtphysikalischen Freiheitsgraden in der Metrik (siehe [1, S.126]). Es wird jedoch angenommen, dass sich beide im Rahmen einer übergeordneten Theorie ebenfalls als Grenzfall integrieren lassen.

1.1.4. Kovarianzprinzip

An die Gesetze der ART werden aufgrund des Äquivalenzprinzips bestimmte Bedingungen gestellt. Zum einen wird eine Kovarianz unter allgemeinen (also auch nichtlinearen) Koordinatentransformationen gefordert, was bedeutet, dass die Gesetze als Riemann-Tensorgleichung (siehe Kapitel 1.2) formuliert werden müssen. Zum anderen muss nach dem Übergang in ein lokales Inertialsystem das entsprechende Gesetz der SRT reproduziert werden. Dieser Sachverhalt wird als **allgemeine Kovarianz** bezeichnet. Die für die Aufstellung solcher Gesetze benötigten mathematischen Größen und Operationen werden im folgenden Kapitel eingeführt. Eine Ausnahme bildet die Theorie der Gravitation selbst, da für diese kein vergleichbares Gesetz in der SRT vorhanden ist und das Kovarianzprinzip nicht direkt anwendbar ist. In Kapitel 1.3. ist formuliert, welche Gleichungen stattdessen benutzt werden.

1.2. Differentialgeometrische Grundlagen der ART

In diesem Kapitel werden die mathematischen Werkzeuge bereit gestellt, mit denen die ART behandelt werden kann. Der Großteil der Formeln und Gesetze wurde [3] entnommen; auf eine mathematisch vollständige Herleitung des Begriffes der pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten wurde jedoch aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. In [4], [5] sowie [6] können die dafür benötigten Definitionen nachgelesen werden.

1.2.1. Metrischer Tensor und pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit

In Kap. 1.1.1. wurde bereits der Riemannsche Raum durch das Wegelement (1.6) eingeführt. Mit der dadurch definierten Metrik lassen sich auf einer Mannigfaltigkeit Abstände

de und Winkel angeben. Sie beschreibt also die Geometrie der betrachteten Raumzeit und ist aus diesem Grund invariant gegenüber allgemeinen Koordinatentransformationen. Wenn die Determinante

$$\det(g_{\alpha\beta}) = g \quad (1.7)$$

nicht verschwindet, was gefordert wird, dann gibt es eine zu $g_{\alpha\beta}$ inverse Metrik $g^{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\kappa} g^{\kappa\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (1.8)$$

Für den Abstand zweier Raumzeit-Punkte (auch Ereignisse genannt) gibt es die folgende Unterscheidung:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \begin{cases} > 0 & \text{zeitartig} \\ = 0 & \text{lichtartig} \\ < 0 & \text{raumartig} \end{cases} . \quad (1.9)$$

Diese Eigenschaft der Metrik, dass auch negative (damit raumartige) Abstände zugelassen sind, ist der Grund, weshalb der Begriff der pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit streng genommen treffender ist, da die Metrik in einem Riemannschen Raum immer positiv-definit sein muss [4, S.25]. Die Raumzeit der ART wird also mit einer pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit beschrieben.

Physikalische Größen werden durch Tensorfelder beschrieben, die Abbildungen auf der Mannigfaltigkeit darstellen. Wie diese definiert sind, zeigt das folgende Kapitel.

1.2.2. Transformationsverhalten physikalischer Größen

Wie in der SRT werden auch in der ART Größen danach definiert, wie sich ihre Komponenten unter Koordinatentransformationen von einem Koordinatensystem KS mit Koordinaten x^{μ} ins Koordinatensystem KS' mit Koordinaten x'^{μ} verhalten.

Für Skalarfelder gilt:

$$\phi'(x') = \phi'(x'(x)) = \phi(x), \quad (1.10)$$

d.h., dass Skalare ihren Wert bei allen Koordinatentransformationen beibehalten.

Für Vektoren V und Vektorfelder $V(x)$ gibt es zwei verschiedene Darstellungen. Wenn von „kontravarianten Vektoren V^{μ} “ die Rede ist, sind eigentlich die kontravarianten Komponenten des Vektors $\vec{V} = V^{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$ mit den Basisvektoren $\vec{e}_{\alpha}$ gemeint. Daneben gibt es auch die kovarianten Komponenten V_{μ} . Jede Größe, die sich wie

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \quad (1.11)$$

transformiert, wird als kontravarianter Vektor bezeichnet. Die Transformation für kovariante Vektoren ist wie folgt gegeben:

$$V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} V_{\nu}. \quad (1.12)$$

Die Ableitung eines Skalarfeldes liefert einen kovarianten Vektor:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \phi' = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \quad (1.13)$$

Die kovarianten Komponenten eines Vektors können durch Überschiebung aus den kontravarianten gewonnen werden:

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\nu}. \quad (1.14)$$

Ein Tensor r -ter Stufe ist eine Größe mit N^r Komponenten (N bezeichnet die Dimension, in der ART gilt normalerweise $N = 4$), die sich bezüglich jedem unteren Index wie ein kovarianter Vektor transformiert und bezüglich jedem oberen wie ein kontravarianter Vektor:

$$T'_{\nu_1 \dots \nu_n}{}^{\mu_1 \dots \mu_m} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\alpha_m}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_n}}{\partial x'^{\nu_n}} T_{\beta_1 \dots \beta_n}{}^{\alpha_1 \dots \alpha_m}. \quad (1.15)$$

Häufig werden Tensoren mit zwei Indizes betrachtet; für diese seien die entsprechenden Transformationsregeln explizit genannt:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}, \quad (1.16)$$

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha\beta}, \quad (1.17)$$

sowie

$$T'^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T^{\alpha}_{\beta}. \quad (1.18)$$

Für den letzten Fall gibt es eine Einschränkung: Im Allgemeinen gilt $T^{\nu}_{\mu} \neq T_{\mu}^{\nu}$, die Indizes dürfen nur dann übereinander geschrieben werden, wenn der Tensor symmetrisch ist. Bei allen in dieser Arbeit vorkommenden Größen ist dies jedoch der Fall (wenn nicht anders gekennzeichnet).

Darüberhinaus ist die Verjüngung eines Tensors als Kontraktion zweier Indizes definiert. Aus einem Tensor zweiter Stufe ergibt sich nach Verjüngung ein Skalar:

$$T = T_{\alpha}^{\alpha}. \quad (1.19)$$

Dies gilt auch für Tensoren höherer Stufe (vgl. Kap. 1.2.4).

Für Tensoren gelten die üblichen Rechengesetze (Linearkombination, direktes Produkt). Für die Differentiation ist jedoch eine weitere, neue Operation nötig, die im folgenden Abschnitt eingeführt wird.

1.2.3. Kovariante Ableitung und affiner Zusammenhang

Da die (partielle) Ableitung eines Skalarfeldes ein kovariantes Vektorfeld ergibt, könnte die Idee entstehen, dass die Ableitung eines Vektorfeldes ein Tensorfeld liefert. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht der Fall. Um den Tensorcharakter bei Transformationen zu erhalten und damit die Forderungen des Äquivalenzprinzips zu erfüllen, müssen gewöhnliche Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ auf kovariante Ableitungen erweitert werden. Für die explizite Berechnung dieser wird wie folgt vorgegangen: Zunächst betrachte man die partielle Ableitung im lokalen IS und transformiere diese nach den Regeln im vorherigen Abschnitt. Das impliziert, dass sich kovariante Ableitungen im lokalen IS auf partielle Ableitungen reduzieren.

Dafür ist es sinnvoll, vorher die Koeffizienten des affinen Zusammenhangs, die auch als Christoffel-Symbole bezeichnet werden, zu definieren:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{g^{\gamma\lambda}}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\lambda}} \right). \quad (1.20)$$

Diese sind nur von den ersten Ableitungen der Metrik abhängig und geben Auskunft über die geometrische Struktur. Sie erfüllen folgende Symmetrierelation:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}. \quad (1.21)$$

Es ergeben sich folgende kovariante Ableitungen:

- Für einen kovarianten Vektor:

$$V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} V_{\lambda} \quad (1.22)$$

- Für einen kontravarianten Vektor:

$$V^{\mu}_{;\nu} = \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} V^{\lambda} \quad (1.23)$$

- Für einen Tensor zweiter Stufe, dessen beide Indizes kontravariant sind:

$$T^{\mu\nu}_{;\lambda} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\mu} T^{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\rho}^{\nu} T^{\mu\rho} \quad (1.24)$$

- Für einen Tensor zweiter Stufe, dessen beide Indizes kovariant sind:

$$T_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho T_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho T_{\mu\rho} \quad (1.25)$$

- Und schließlich einen Tensor zweiter Stufe mit gemischten Indizes (wobei auch hier vorausgesetzt wird, dass T_{μ}^ν symmetrisch ist):

$$T_{\nu;\lambda}^\mu = \frac{\partial T_{\nu}^\mu}{\partial x^\lambda} + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu T_{\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho T_{\rho}^\mu. \quad (1.26)$$

Für die kovariante Ableitung gelten die üblichen, für Ableitungen bekannten Rechenregeln; insbesondere auch die Kettenregel. Analog zu der kovarianten Ableitung ; kann die partielle Ableitung mit , bezeichnet werden:

$$\frac{\partial A}{\partial x^\mu} =: A_{,\mu} \quad (1.27)$$

Die Christoffel-Symbole $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ sind keine Tensoren. Dies wird nach einer Koordinatentransformation durch die Betrachtung der Komponenten deutlich:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^{\prime\lambda} &= \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}} \\ &= \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\prime\mu}} \left(\frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\prime\nu}} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau} \right) \\ &= \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left[\frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau} + \frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\prime\nu}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} \right] \\ &= \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau} + \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\prime\nu}} \Gamma_{\sigma\tau}^\rho. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Da

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\tau} = \delta_\tau^\rho, \quad (1.29)$$

gibt dieses:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\prime\lambda} = \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\prime\nu}} \Gamma_{\sigma\tau}^\rho + \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}}. \quad (1.30)$$

Die Existenz des zweiten Summanden zerstört den Tensorcharakter.

Eine weitere Eigenschaft ist

$$V_{\mu;\lambda} = g_{\mu\nu} V_{;\lambda}^\nu, \quad (1.31)$$

was bedeutet, dass die Operation der kovarianten Ableitung mit der Operation des Überschiebens eines Index vertauscht werden darf.

Für den metrischen Tensor existieren die folgenden Relationen:

$$g_{\mu\nu;\lambda} \equiv 0, \quad (1.32)$$

$$g^{\mu\nu}_{;\lambda} \equiv 0. \quad (1.33)$$

Die zweiten Ableitungen der Metrik verschwinden im Allgemeinen jedoch nicht; diese Tatsache ist geometrischen Ursprungs und wird in der Definition des Krümmungstensors (Kap. 1.2.4) ausgedrückt.

Mit diesen Regeln ist die Bedingung, dass Tensorgleichungen kovariant unter allgemeinen Koordinatentransformationen sein sollen, erfüllt, da alle physikalischen Größen und die Ableitung als Operator kovariant formuliert sind. Damit haben solche Gleichungen dieselbe Form in lokalen IS wie in KS mit Gravitation.

1.2.4. Paralleltransport und Krümmungstensor

Das Konzept der Krümmung lässt sich gut mittels des Paralleltransports veranschaulichen. Im euklidischen, nicht gekrümmten Raum wird ein Vektor entlang eines geschlossenen Weges wieder in sich selbst überführt (Abb. 1.2 (a)). Auf einer gekrümmten Fläche, wie beispielsweise der Kugeloberfläche, führt der Paralleltransport eines Vektors entlang einer geschlossenen Kurve zu einer Änderung des Vektors (Abb. 1.2 (b)). Dies gilt ebenso für einen pseudo-Riemannschen Raum (Abb. 1.2 (c)). Es ist dabei von Bedeutung, auf welchem Weg die Parallelverschiebung stattfindet.

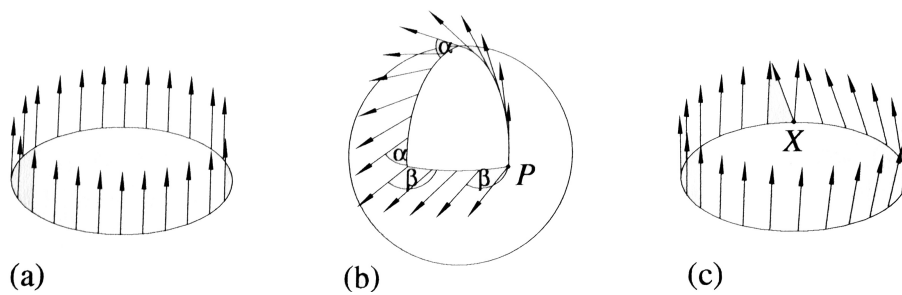


Abbildung 1.2.: Der Paralleltransport: (a) in einem euklidischen Raum, (b) auf einer Kugeloberfläche, (c) in einem pseudo-Riemannschen Raum, aus [3, S. 224]

Es kann gezeigt werden ([1, Kap. 16]), dass das Maß für die Abweichung der Endvektoren bei Vertauschung der Reihenfolge durch den Krümmungstensor $R^{\beta}_{\alpha\gamma\kappa}$ gegeben ist:

$$\oint \delta A_\alpha = \oint \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta A_\beta dx^\gamma = -\frac{1}{2} R_{\alpha\gamma\kappa}^\beta A_\beta df^{\gamma\kappa}. \quad (1.34)$$

Hierbei umgrenzt das Kurvenintegral eine infinitesimale Fläche $df^{\gamma\kappa}$, innerhalb derer der Vektor A_α parallelverschoben wird. Alternativ lässt sich dieses auch mit der kovarianten Ableitung ausdrücken:

$$V_{;\mu;\nu}^\kappa - V_{;\nu;\mu}^\kappa = R_{\lambda\mu\nu}^\kappa V^\lambda \quad (1.35)$$

Mit dem Riemannschen Krümmungstensor lässt sich eine Aussage darüber treffen, ob die Raumzeit gekrümmt ist oder nicht. Verschwindet er in einem KS ($R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0$), so ist er aufgrund der Kovarianz in allen KS gleich Null: Die Raumzeit ist euklidisch. Besitzt er einen von Null verschiedenen Wert, so ist die Raumzeit unabhängig vom gewählten KS gekrümmt.

Eine weitere Definition des Krümmungstensors ist durch

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\delta = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\delta}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\delta}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\beta}^\delta - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\delta \quad (1.36)$$

gegeben. Da er eine Kombination aus ersten und zweiten Ableitungen der (geometrisch vorgegebenen) Metrik darstellt, gibt er die (innere) Krümmung als intrinsische Eigenschaft der Mannigfaltigkeit an (anders als die zweidimensionale Mantelfläche eines Zylinders, die durch die Einbettung in drei Dimensionen ihre Krümmung erhält).

Er ist antisymmetrisch in Vertauschung der beiden letzten Indizes:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\delta = -R_{\alpha\gamma\beta}^\delta. \quad (1.37)$$

Um weitere Symmetrieeigenschaften zu erhalten, ist es von Vorteil, den vollständig kovarianten Tensor zu betrachten:

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= g_{\kappa\sigma} R_{\lambda\mu\nu}^\sigma \\ &= \frac{1}{2} (g_{\kappa\mu,\lambda,\nu} + g_{\lambda\nu,\kappa,\mu} - g_{\lambda\mu,\kappa,\nu} - g_{\kappa\nu,\lambda,\mu}) + g_{\rho\sigma} (\Gamma_{\kappa\mu}^\rho \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma - \Gamma_{\kappa\nu}^\rho \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Daraus folgen dann direkt die folgenden Relationen:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}. \quad (1.39)$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu} = R_{\lambda\kappa\nu\mu}. \quad (1.40)$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} + R_{\kappa\mu\nu\lambda} + R_{\kappa\nu\lambda\mu} = 0. \quad (1.41)$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft wird als Bianchi-Identität bezeichnet:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu;\alpha} + R_{\kappa\lambda\alpha\mu;\nu} + R_{\kappa\lambda\nu\alpha;\mu} \equiv 0. \quad (1.42)$$

Die Gesamtheit dieser Relationen liefert 236 Bedingungen für die 256 Komponenten des Krümmungstensors. Es verbleiben nur noch 20 unabhängige Komponenten.

Aus dem Krümmungstensor lassen sich noch zwei weitere Größen herleiten. Der Ricci-Tensor $R_{\alpha\beta}$ ergibt sich als Verjüngung des Riemannschen Krümmungstensors:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\rho\beta}^{\rho} \\ &= \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\alpha}^{\rho}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\rho}^{\rho} - \Gamma_{\alpha\rho}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\beta}^{\rho}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Darüber hinaus erhält man den Krümmungsskalar R durch die Verjüngung des Ricci-Tensors, weshalb diese Größe auch als Ricci-Skalar bezeichnet wird:

$$R = g^{\mu\rho} R_{\mu\rho}. \quad (1.44)$$

Für den Ricci-Tensor gibt es ebenfalls eine Bianchi-Identität:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right)_{;\mu} \equiv 0 \quad (1.45)$$

und er ist symmetrisch:

$$R^{\mu\nu} = R^{\nu\mu}. \quad (1.46)$$

Wie ein Raum gekrümmt ist, wird eindeutig durch die Einsteinschen Feldgleichungen (siehe Kapitel 1.3.) festgelegt. Der Ricci-Tensor und der Krümmungsskalar gehen beide in diese Gleichungen ein.

1.2.5. Geodätengleichung

Ein Teilchen, auf das keine äußeren Kräfte^{1,2} wirken, bewegt sich auf einer geodätischen Linie. Geodäten sind Linien zwischen zwei Raumzeitpunkten A und B , deren Länge - im Verhältnis zu allen möglichen Linien zwischen diesen beiden Punkten - minimal wird. Das kann mit einem Variationsprinzip wie in der analytischen Mechanik ausgedrückt werden:

$$\delta \int_A^B ds = 0. \quad (1.47)$$

^{1,2}Damit sind beispielsweise elektromagnetische Kräfte gemeint. Die gravitative Wechselwirkung ist eine Konsequenz aus der Raumzeit-Krümmung und hier nicht gemeint.

Der Weg, den ein Teilchen in der Raumzeit beschreibt, wird Weltlinie genannt. Für die explizite Berechnung der Bewegungsgleichungen muss eine beliebige Weltlinie parametrisiert werden. Als Beispiel sei hier die Eigenzeit τ verwendet; die gesuchte Kurve ist dann $x^\mu(\tau)$:

$$\delta \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}(x)} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau = 0. \quad (1.48)$$

Der Integrand hat die Form einer Lagrange-Funktion und kann mit dem Hamiltonschen Prinzip berechnet werden. Als Bewegungsgleichungen ergeben sich dann:

$$\frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (1.49)$$

Auf einer Mannigfaltigkeit sind in jedem Punkt Geodäten in jeder Richtung definiert. Daher ist es notwendig, Anfangsbedingungen vorzugeben, um eine eindeutige Lösung für $x^\mu(\tau)$ angeben zu können.

1.3. Theorie der Gravitation

Das Kovarianzprinzip besagt, dass ein Gesetz der ART aus dem entsprechenden Gesetz in der SRT abgeleitet werden kann. Für die Gravitation gelingt dies jedoch nicht (siehe [1, S. 113 f.]). An die Feldgleichungen der Gravitation können aber bestimmte Forderungen gestellt werden, um daraus ein entsprechendes Gesetz aufzustellen. Während im letzten Kapitel ein besonderer Fokus auf die Krümmung und damit die mathematische Struktur der Raumzeit gelegt wurde, soll nun die diese Krümmung bewirkende Energiedichte näher betrachtet werden.

1.3.1. Energie-Impuls-Tensor

Im Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$ werden alle auftretenden Energieformen, die als Quellen für das Gravitationsfeld wirken, zusammengefasst. Der explizite Ausdruck des Tensors ist von der Wahl der betrachteten Quellen abhängig. Für materielle Systeme wird sich die Wahl des Energie-Impuls-Tensors einer idealen Flüssigkeit

$$T_M^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p \quad (1.50)$$

anbieten, da sich der Anwendungsbereich über Systeme erstreckt, die sich durch eine Massendichte ρ , ein Geschwindigkeitsfeld u^μ und isotropen Druck p beschreiben lassen [7, Kap 6.5].

Der aus der SRT bekannte Erhaltungssatz $T_{,\beta}^{\alpha\beta} = 0$ für ein abgeschlossenes System erweitert sich in der ART auf die kovariante Form: $T_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$.

Eine Methode, um den entsprechenden Energie-Impuls-Tensor für ein System zu finden, ist durch das Wirkungsintegral gegeben (siehe Kap. 1.3.4).

1.3.2. Einsteinsche Feldgleichungen

In Kapitel 1.2.5 wurde festgelegt, wie sich Materie aufgrund der Geometrie bewegt. Nun soll geklärt werden, wie der Raum durch die Materie gekrümmt wird. Dies ist in den zentralen Einsteinschen Feldgleichungen beschrieben. Für die Herleitung dieser werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Gleichungen sollen aufgrund des Äquivalenzprinzips als kovariante Tensorgleichungen formuliert sein.
- Alle Quellen des Gravitationsfeldes sind durch den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor der Materie- und Feldverteilung angegeben.
- Wie alle Feldgleichungen sollen es partielle Differentialgleichungen von höchstens zweiter Ordnung für die Funktionen $g_{\mu\nu}$ sein. In den zweiten Ableitungen sind sie linear.

Eine weitere Forderung an die Feldgleichungen ist, dass sie im Grenzfall schwacher Felder und für Geschwindigkeiten $v \ll c$ in die Poisson-Gleichung aus Newtons Gravitationstheorie übergehen sollen:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \tag{1.51}$$

mit dem Gravitationspotential Φ , der Gravitationskonstante G und der Materiedichte ρ . Die Form der Gleichungen muss demnach

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \tag{1.52}$$

lauten. Man stellt fest, dass die Forderungen an das $G_{\mu\nu}$ durch eine Kombination des Ricci-Tensors $R_{\mu\nu}$ und des Krümmungsskalars R erfüllt werden. Tatsächlich ist die einzige Gleichung, die alle Bedingungen erfüllt,

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{1.53}$$

mit einer kosmologischen Konstante Λ und einer Gravitationskonstante κ . Λ wurde zunächst nur als Art Integrationskonstante eingeführt, dessen Wert experimentell zu bestimmen ist. Es zeigte sich jedoch, dass diese Größe für die Kosmologie von entscheidender Bedeutung ist (siehe Kapitel 1.4)

Aufgrund der Symmetrierelation

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \quad (1.54)$$

sind nur 10 der 16 Gleichungen unabhängig voneinander. Das Ziel ist es, die 10 Komponenten der Metrik $g_{\mu\nu}$ zu einem gegebenen Energie-Impuls-Tensor zu finden. Das Problem hierbei ist jedoch die Unterbestimmtheit, die durch die Bianchi-Identitäten

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (1.55)$$

bewirkt wird. Allerdings sind auch die $g_{\mu\nu}$ nicht vollständig bestimmt, da sie der Freiheit der Koordinatenwahl unterliegen. Damit können Bedingungen an den metrischen Tensor gestellt werden, unter denen sich die Feldgleichungen lösen lassen ([8, Kap. 13]).

1.3.3. Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen

Wegen der Nichtlinearität der Feldgleichungen ist das Auffinden einer Lösung eine nichttriviale Aufgabe, da das Superpositionsprinzip hier nicht gilt. Es gibt mehrere Möglichkeiten, um dennoch eine passende Metrik zu finden, die die Gleichungen erfüllt. Ein Verfahren ist das Linearisieren der Feldgleichungen für schwache Gravitationsfelder $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ mit $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ([3, Kap. 12]), das jedoch die Rückkopplung des Gravitationsfeldes auf seine Quellen vernachlässigt. Daher sind diese Lösungen nur unter der Voraussetzung, dass annähernd flache Raumgebiete betrachtet werden, eine gute Näherung.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, der gesuchten Metrik bestimmte Symmetrien aufzuerlegen, um die Unterbestimmtheit zu umgehen. Die erste geschlossene Lösung wurde von Schwarzschild aufgestellt und beschreibt das Außenfeld einer kugelsymmetrischen Materieverteilung; damit ist sie die gängige Metrik für stellare Objekte:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1.56)$$

mit dem Schwarzschild-Radius r_s . Ein weiterer Spezialfall ist die Robertson-Walker-Metrik, die im Kapitel 1.4 genauer untersucht wird. Sie beschreibt das Universum als Gesamtes, indem von einer homogenen und isotropen Materieverteilung ausgegangen wird.

1.3.4. Herleitung der Einsteinschen Feldgleichungen aus einem Variationsprinzip

Für lorentzinvariante Feldtheorien gilt, dass sich die Feldgleichungen aus einem Variationsprinzip herleiten lassen ([9, Kap. 3.4]). Die folgende Rechnung ist an [6] und [3] angelehnt.

Das Wirkungsfunktional ist durch

$$W = \int \mathcal{L} d^4x = \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (1.57)$$

($g = \det(g_{\mu\nu})$) gegeben. Es wird nach den dynamischen Variablen $g_{\mu\nu}$ variiert:

$$\delta \int_G (-R + \kappa \mathcal{L}) \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (1.58)$$

Auf dem Rand ∂G des Integrationsgebietes gelten die Bedingungen $\delta g_{\mu\nu} = 0$ und $\delta g_{\mu\nu,\lambda} = 0$. Das Wirkungsfunktional ist kovariant, weil es sich aus dem kovarianten Volumenelement $\sqrt{-g} d^4x$ und einer skalaren Größe zusammensetzt.

Es ist von Vorteil, die Wirkung in zwei Teile aufzuspalten. Es soll zuerst die Gravitationswirkung $\int R \sqrt{-g} d^4x$ variiert werden:

$$\delta(R\sqrt{-g}) = \sqrt{-g}(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R) + R\delta\sqrt{-g}. \quad (1.59)$$

Dann berechnet man

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} \delta g_{\alpha\beta} \quad (1.60)$$

und

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta \Gamma_{\mu\rho,\nu}^\rho - \delta \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho + (\delta \Gamma_{\mu\rho}^\sigma) \Gamma_{\sigma\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\nu}^\rho - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma) \Gamma_{\sigma\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\rho}^\rho \\ &= (\delta \Gamma_{\mu\rho,\nu}^\rho - \Gamma_{\mu\rho,\nu}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\rho}^\rho) - (\delta \Gamma_{\mu\nu,\rho}^\rho + \Gamma_{\sigma\rho}^\rho \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \delta \Gamma_{\sigma\nu}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \delta \Gamma_{\mu\rho}^\sigma) \\ &= (\delta \Gamma_{\mu\rho}^\rho)_{;\nu} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\rho)_{;\rho}, \end{aligned} \quad (1.61)$$

wobei im ersten Schritt die Definition 1.36 eingesetzt wurde, im zweiten Schritt die Terme sortiert wurden und im dritten Schritt die Gesetze für kovariante Ableitungen aus Abschnitt 1.2.3 ausgenutzt wurde. Dieser letzte Schritt ist jedoch nur möglich, weil die $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ Tensoren sind, anders als die Christoffel-Symbole $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ allein.

Damit erhält man soweit

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g}\left[(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\rho}^{\rho})_{;\nu} - (g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_{;\rho}\right], \quad (1.62)$$

was auch als Identität von Palatini bekannt ist.

Für die Variation der Quadratwurzel der Metrikdeterminante gilt

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \quad (1.63)$$

Setzt man diese Relationen in die Gravitationswirkung ein, so ergibt sich

$$\delta\int(-R\sqrt{-g})d^4x = \int(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R)\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}d^4x, \quad (1.64)$$

was schon Ähnlichkeiten mit den Feldgleichungen besitzt.

Nun wird das Materie-Wirkungsintegral $\int\kappa\mathcal{L}\sqrt{-g}d^4x$ untersucht. Dazu:

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) &= \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} + \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\delta g_{\mu\nu,\alpha} \\ &= \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}}\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\right)_{,\alpha}\right]\delta g_{\mu\nu} + \left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\delta g_{\mu\nu}\right)_{,\alpha} \\ &= \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} + \left(\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g_{\mu\nu,\alpha}}\delta g_{\mu\nu}\right)_{,\alpha} \end{aligned} \quad (1.65)$$

wobei im letzten Schritt die Variationsableitung

$$\frac{\delta f}{\delta g_{\mu\nu}} := \frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu}} - \left(\frac{\partial f}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\right)_{,\alpha} \quad (1.66)$$

eingeführt wurde.

Letztlich ergibt sich der folgende Ausdruck für das Wirkungsintegral

$$\int\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R + \frac{\kappa}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g_{\alpha\beta}}\right)\delta g_{\alpha\beta}\sqrt{-g}d^4x = 0. \quad (1.67)$$

Da die Metrik $g_{\alpha\beta}$ beliebig gewählt werden kann, reduziert sich dieser Zusammenhang mit

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g_{\alpha\beta}} \quad (1.68)$$

auf Gleichung (1.53). Aus der letzten Relation folgt bei bekanntem Ansatz der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ ein Ausdruck für den Energie-Impuls-Tensor $T^{\alpha\beta}$, wie in 1.3.1 bereits erwähnt wurde.

1.4. Kosmologie als Anwendung der ART

Die Kosmologie befasst sich mit dem Universum, einem einmaligen Objekt, von dem wir nur einen kleinen Teilbereich kennen. Die Unkenntnis des gesamten Universums erzwingt, dass sich eine dafür geeignete Theorie auf plausible Annahmen stützen muss ([3, Kap. 14]). Eine wesentliche Annahme ist die Tatsache, dass die einzige auf großen Skalen wirkende Kraft die Gravitation sein muss, da sich elektromagnetische Kräfte auf diesen Skalen kompensieren und die beiden Kernkräfte zu kurzreichweitig sind, um in kosmologischen Größenordnungen eine Rolle zu spielen. Deshalb muss die Dynamik des Universums mit den Einsteinschen Feldgleichungen beschrieben werden.

1.4.1. Robertson-Walker-Metrik und Friedmann-Gleichungen

Eine weitere, wichtige Annahme ist das **kosmologische Prinzip**. Es besagt, dass das Universum auf hinreichend großer Skala für jeden Beobachter unter gleichen Voraussetzungen im Mittel gleich aussieht. Man kann sagen, dass das Universum im Mittel homogen und isotrop ist, wobei die Homogenität schon aus der Isotropie folgt ([9, Kap. 5.1]).

Es lässt sich zeigen ((z.B. [8])), dass aus dieser Annahme eine spezielle Form der Metrik folgt, die als Robertson-Walker-Metrik bezeichnet wird. In dieser ist die Raumzeit für $t = 0$ konstant gekrümmt, was aus der Isotropie folgt. Das zugehörige Linienelement ist dann:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right). \quad (1.69)$$

Hierbei ist $a(t)$ explizit zeitabhängig und heißt kosmischer Skalenfaktor. Der Parameter k beschreibt die Geometrie:

- Für den Fall $k = 1$ ist der Raum eine dreidimensionale Hyperkugel (Sphäre). Bei $r = 1$ besitzt diese eine Koordinatensingularität, die sich aber nicht auf die Eigenschaften des Raumes auswirkt ([1]). Ein solches Universum besitzt endliches Volumen (dazu Kapitel 4.2), die Topologie ist geschlossen.
- Ist der Parameter $k = 0$, so liegt ein unendlich ausgedehnter, euklidischer Raum vor, die Topologie entspricht dem des $\mathbb{R}^4$, ist also offen.
- Für $k = -1$ ist der Raum ein dreidimensionales Hyperboloid im vierdimensionalen Minkowski-Raum. Das dreidimensionale Volumen ist unendlich, die Topologie ist offen.

Wird diese Metrik in die Einsteinschen Feldgleichungen (1.53) eingesetzt, so ergeben sich daraus die Friedmann-Gleichungen, wenn der Energie-Impuls-Tensor für eine ideale Flüssigkeit verwendet wird:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (1.70)$$

wobei ρ die totale Energiedichte und p den Druck bezeichnen. Diese Relation gilt allerdings nur im Ruhesystem der Flüssigkeit. In beliebigen Systemen gilt Relation (1.50). Die Friedmann-Gleichungen lauten:

$$\kappa\rho + \Lambda = 3\frac{k + \dot{a}^2}{a^2} \quad (1.71)$$

und

$$\kappa p - \Lambda = -\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}. \quad (1.72)$$

Zusammen mit der Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ können daraus $p(t)$, $\rho(t)$ und $a(t)$ bestimmt werden. Für kosmologische Modelle muss die Energie-Impuls-Dichte des Vakuums, die kosmologische Konstante Λ , mit berücksichtigt werden. Dies hat zum einen den Grund, dass das Vakuum aufgrund von Erzeugung und Vernichtung virtueller Teilchenpaare zu einem Energiebeitrag führt und zum anderen, dass sonst kein Absolutbeitrag für die Energiedichte bestimmt werden kann, was aber in der ART benötigt wird ([9]).

In den Feldgleichungen stellt sich die Kosmologische Konstante als perfektes Fluid mit negativem Druck dar und ist eine außergewöhnliche Form von Materie bzw. Energie. Die heutige Bezeichnung dafür ist dunkle Energie und sie bildet den größten Teil ($\Omega_\Lambda = 0,693 \pm 0,019$, aus [10]) der Energiedichte unseres heutigen Universums.

Gleichung (1.71) kann in

$$\dot{a}^2 = \frac{\kappa\rho a^2}{3} - k + \frac{1}{3}\Lambda a^2 \quad (1.73)$$

umgeschrieben werden. Diese Gleichung drückt aus, welche Terme die Entwicklung des Universums dominieren. Für den Fall druckfreier, inkohärenter Materie ist $p = 0$; dieser beschreibt ein materiedominiertes Universum und ist eine gute Näherung für das jetzige Universum. Gilt hingegen $p = \frac{\rho}{3}$, so liegt der Fall eines strahlungsdominierten Universums vor: Dieser ist eine zulässige Beschreibung für die frühe Phase (siehe Kap. 1.4.2.). Dominiert in Gleichung (1.73) der Term in k , so heißt das Universum krümmungsdominiert, überwiegt der letzte Term, so dominiert die dunkle Energie.

Mögliche Szenarien für die Entwicklung von a in Abhängigkeit der Parameter Λ und k sind in Abb. 1.3 gezeigt.

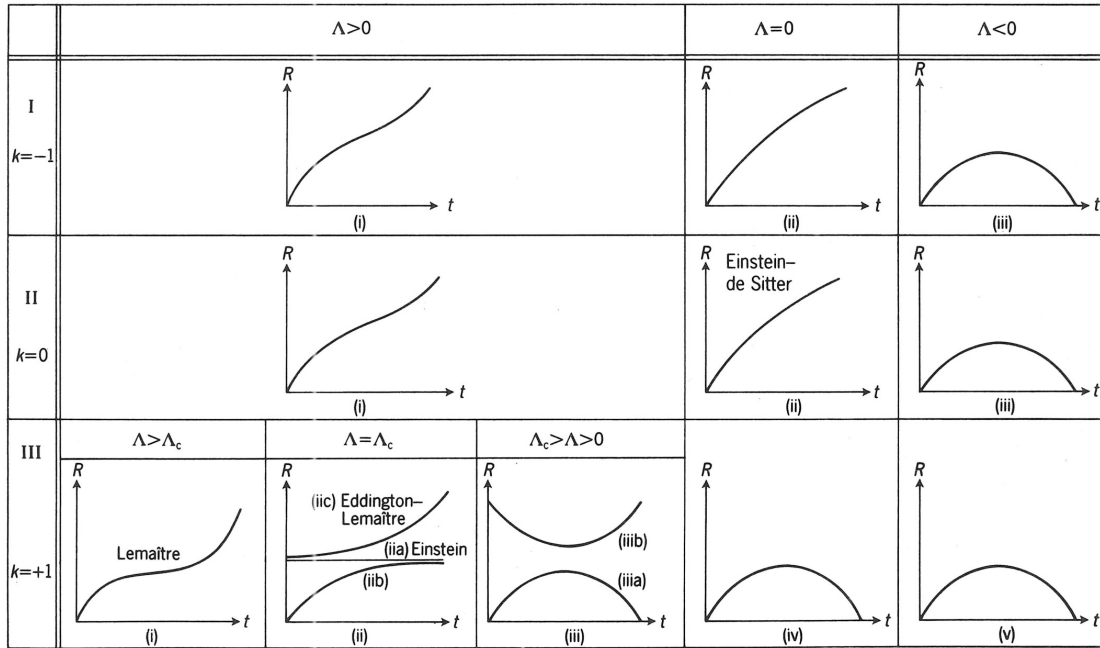


Abbildung 1.3.: Die verschiedenen Friedmann-Modelle in Abhängigkeit der Parameter Λ und k (aus [8]).

Diese bilden die Klasse der Friedmann-Modelle und können im Einzelnen bei [8, S. 484 ff.] nachgelesen werden. Alle Friedmann-Modelle gehen von einer Expansion des Universums aus, was eine Anfangssingularität

$$a \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad (1.74)$$

zur Folge hat, welche als Urknall oder Big Bang bezeichnet wird. Die Expansion des Universums ist ein experimenteller Befund, was im Hubble-Gesetz formuliert ist. Es besagt, dass Galaxien mit zunehmender Entfernung eine linear wachsende Rotverschiebung in den Spektrallinien aufweisen. Die Proportionalitätskonstante wird auch Hubble-Konstante H_0 genannt und ist eine der sechs Parameter des Lambda-CDM-Modells, das derzeit das beste Modell zur Beschreibung der Entwicklung des Universums darstellt.

1.4.2. Evolutionsszenario

Mit der Hubble-Zeit

$$t_H = \frac{1}{H_0} \quad (1.75)$$

kann eine Höchstgrenze für das Alter des Universums angegeben werden ([3, Kap. 19.2]). Sie beträgt nach aktuellen Messdaten aus der Planck-Kollaboration [10] $13,796 \pm 0,058 \cdot 10^9$ a. Wird in der Zeit zurück gegangen, so bewirkt die Verringerung des Skalenfaktors eine Aufheizung des Universums (siehe Abb.1.4). Der Zustand des Universums zum Zeitpunkt des Urknalls entzieht sich der Beschreibung durch die Gesetze der Physik, weil diese in dieser Singularität nicht bekannt sind. Auch in der Planck-Ära bis $t_P = 5,31 \cdot 10^{-44}$ s nach dem Urknall sind keine Aussagen möglich, weil die ART ohne Annahmen der Quantentheorie auskommt, in dieser Größenordnung aber Quanteneffekte berücksichtigt werden müssen [3, Kap. 21.2]. In Abb. 1.4 sind die Stadien schematisch eingezeichnet, die das Universum nach der Planck-Ära durchläuft.

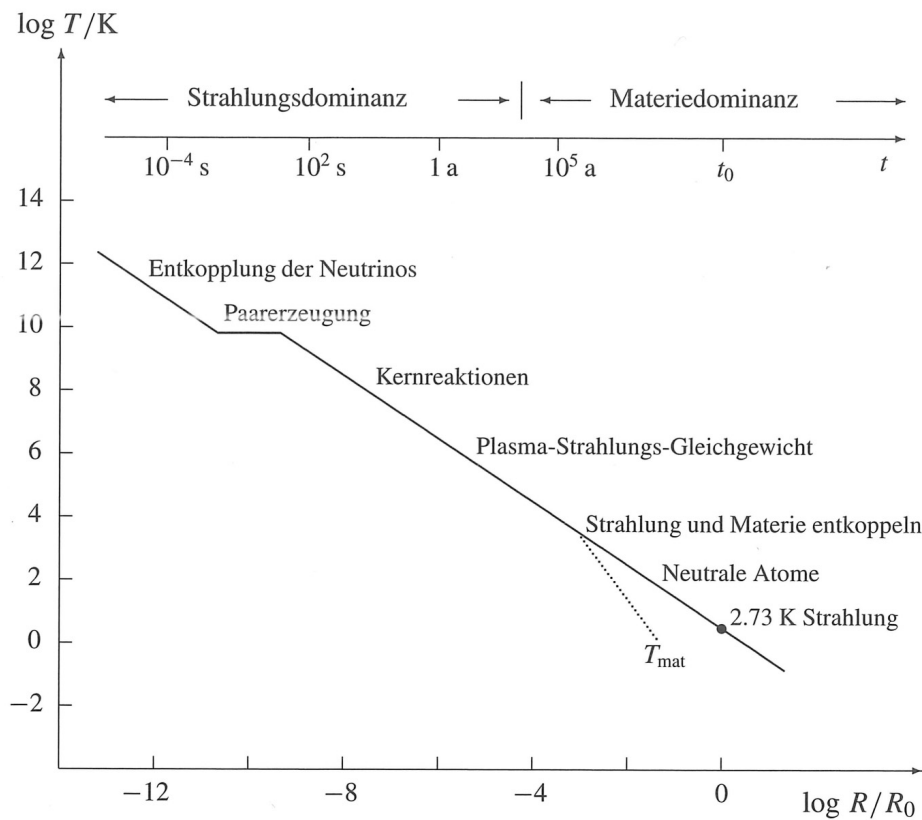


Abbildung 1.4.: Die Temperatur T des Universums in Abhängigkeit von der relativen Größe $\frac{R}{R_0}$. Hierbei bezeichnet R den Skalenfaktor (im Text a genannt), R_0 ist der heutige Wert. Am oberen Rand ist die Zeitskala $R = R(t)$ gezeigt. Nach der Entkopplung von Strahlung und Materie sind die jeweiligen Temperaturentwicklungen einzeln aufgetragen (aus [1]).

2. Einführung in den Regge-Kalkül

In diesem Kapitel werden die grundsätzlichen Konzepte des Regge-Kalküls vorgestellt, der einen Ansatzpunkt dafür bildet, die Einsteinsche Gravitationstheorie in einem diskretisierten Zusammenhang zu betrachten. Die hier vorgestellten Aussagen sind [2, Kap. 42] sowie [11] und [12] entnommen.

2.1. Motivation

Die Kontinuums-ART liefert analytische Lösungen nur für Raumzeiten, die in ihrer Komplexität eingeschränkt sind, beispielsweise die kugelsymmetrische Schwarzschild-Metrik oder das isotrope Friedmann-Universum. Will man jedoch Situationen betrachten, die keine Symmetrie aufweisen und keinen störungstheoretischen Zugang zulassen, werden neue Methoden benötigt. Der Regge-Kalkül liefert eine solche Methode, indem komplexe Probleme auf eine endliche Anzahl von Freiheitsgraden reduziert werden. Dies geschieht mittels einer Annäherung kontinuierlicher, glatter Geometrien mit Skelettartigen Strukturen. Wegen der endlichen Freiheitsgrade ist es dann möglich, numerische Simulationen durchzuführen. Ein weiterer Grund, den Regge-Kalkül zu betrachten, ist die Möglichkeit einer Theorie der Quantengravitation, wenn der Pfadintegralformalismus zugrunde gelegt wird. Mit diesem Formalismus lassen sich Quantenfeldtheorien diskretisiert behandeln.

2.2. Triangulierung und Defizitwinkel

Die in der ART betrachteten Mannigfaltigkeiten sind stets kontinuierlich, jedem Raumzeitpunkt kann ein Wert zugeordnet werden. Die erforderliche Diskretisierung wird dadurch erzielt, dass der Raumzeit eine Gitterstruktur durch Triangulierung auferlegt wird. Dies soll für den Fall zweier Dimensionen ($d = 2$) verdeutlicht werden: Eine ursprünglich kontinuierliche, beliebige zweidimensionale Fläche kann mit einem Polyeder angenähert werden, der aus Dreiecken zusammengesetzt ist. Die Approximation ist umso besser, je kleiner die einzelnen Dreiecke und damit je größer die Anzahl benutzter Dreiecke ist.

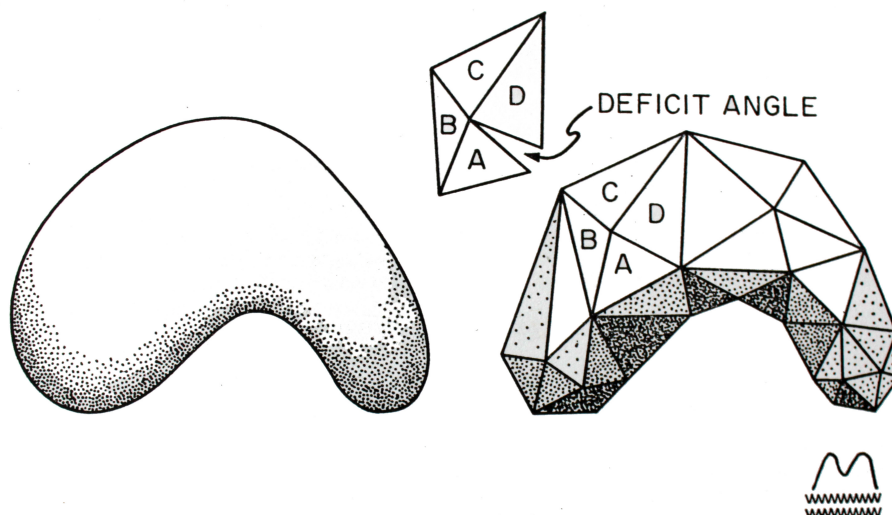


Abbildung 2.1.: Eine 2-dimensionale gekrümmte Oberfläche, einmal kontinuierlich, einmal trianguliert dargestellt. „Deficit angle“ bezeichnet den Defizitwinkel δ , der die Krümmung innerhalb der Figur $ABCD$ angibt (aus [2, Kap. 42]).

Das in Abb. 2.1 gezeigte Objekt kann mit Dreiecken angenähert werden. Die Figur $ABCD$, die einen Teil der Triangulierung bildet, ist sowohl als Polyeder auf der gekrümmten Oberfläche, als auch aufgeklappt auf eine flache Ebene dargestellt. Es hat zunächst den Anschein, als sei die Krümmung entlang der Kanten enthalten. Dies ist jedoch nicht der Fall; die gesamte Krümmung ist in den Vertices δ -funktionsartig enthalten.

Mithilfe der Parallelverschiebung eines Vektors lässt sich dies verdeutlichen: Wird ein Vektor von A über B und C nach D parallel verschoben, so ändert sich seine Ausrichtung nicht. Klappt man die Figur beispielsweise zwischen dem Dreieck A und dem Dreieck B auf, so würde ein Paralleltransport von B über C und D ebenfalls keine Änderung ergeben.

Erst bei einem vollen Umlauf, indem beispielsweise von A nach B transportiert wird, dann Dreieck A zu D geklappt wird, so dass der Defizitwinkel zwischen A und B vorliegt und schließlich den restlichen Weg von B nach A parallelverschoben wird, ändert sich die Richtung des Vektors. Nach Kapitel 1.2.4 bedeutet dies, dass der Krümmungstensor einen von Null verschiedenen Wert besitzt und die betrachtete Fläche damit gekrümmt ist.

In diesem Fall entspricht die Summe der Defizitwinkel über alle Vertices genau dem halben Integral über die kontinuierlich verteilte Skalar Krümmung:

$$\sum_{\text{Skelett-Geometrie}} \delta_i = \frac{1}{2} \int_{\text{glatte Geometrie}} R^{(2)} d(\text{Oberfläche}) = 4\pi. \quad (2.1)$$

Im Fall dreier Dimensionen ist der flache Baustein der Triangulierung durch Tetraeder gegeben. Dann ist die Krümmung in den Kanten konzentriert. Der Beitrag der Krümmung ist durch die Summe der Kantenlängen multipliziert mit den Defizitwinkeln über einen kleinen Bereich gegeben, der Kontinuums Grenzwert ist der Ausdruck $\int R^{(3)} \sqrt{g^{(3)}} d^3x$.

Dies setzt sich für höhere Dimensionen fort. Im vierdimensionalen Fall der ART geschieht die Triangulierung mit Simplizes^{2.1}, welche nicht mehr veranschaulicht werden können.

^{2.1}Eine genaue Definition von Simplizes und Simplizialkomplexen findet sich z.B. in [13]

3. Berechnung der Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH} im Kontinuum

In diesem Teil soll - im Rahmen der kontinuierlichen ART - die Einstein-Hilbert-Wirkung für einen metrischen Tensor berechnet werden, der die folgende Blockgestalt besitzt:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ 0 & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 0 & \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_{ij}(\vec{x}, t) \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Diese Metrik wird in [14, §99] als synchronisiertes Bezugssystem bezeichnet. Um kenntlich zu machen, dass die räumlichen Komponenten der Matrix $\gamma_{ij}(\vec{x}, t)$ jeweils abhängig von dem Vierervektor x^μ sind, wird dieser hier in expliziter Form in einen räumlichen Anteil $\vec{x}$ und einen zeitlichen t ausgeschrieben. Bei einigen Autoren ist es üblich, dass die räumlichen Komponenten mit einem negativen Vorzeichen versehen werden. Dies wird hier der Übersichtlichkeit halber weggelassen, da die Rechnungen dadurch nicht beeinflusst werden.

Bei der Berechnung der Einstein-Hilbert-Wirkung wird schrittweise vorgegangen. Zunächst werden die Christoffel-Symbole berechnet, danach die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors, schließlich die Komponenten des Ricci-Tensors und des Krümmungsskalars. Dieser geht letztlich in die gesuchte Wirkung ein.

3.1. Berechnung der Christoffel-Symbole $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$

In der Definition der Christoffel-Symbole (1.20) treten Ableitungen der Metrik auf. Trivialerweise gilt

$$\partial_\mu g_{0\nu} = \partial_\mu g_{\nu 0} = 0. \quad (3.2)$$

Die nicht-trivialen Ableitungen lauten wie folgt:

$$\partial_0 g_{ij} = \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} =: \dot{\gamma}_{ij}, \quad (3.3)$$

sowie

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k \gamma_{ij}. \quad (3.4)$$

Die Symmetrie der Christoffel-Symbole (1.21) wird in den Rechnungen für diesen Spezialfall verifiziert.

Es ist zweckmäßig, die insgesamt 64 Christoffel-Symbole in acht verschiedene Fälle zu unterscheiden. Dabei wird so vorgegangen, dass zeitliche und räumliche Anteile separat betrachtet werden. Dieses gibt die folgenden Christoffel-Symbole:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \underbrace{\frac{g^{0\lambda}}{2}}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda=0} \left(\frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} \right) \\ &= \frac{g^{00}}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0}}_{=0} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{i0}^0 &= \underbrace{\frac{g^{0\lambda}}{2}}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda=0} \left(\frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^\lambda} \right) \\ &= \frac{g^{00}}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^0}}_{=0} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0j}^0 &= \underbrace{\frac{g^{0\lambda}}{2}}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda=0} \left(\frac{\partial g_{j\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^\lambda} \right) \\ &= \frac{g^{00}}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^0}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0}}_{=0} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ij}^0 &= \underbrace{\frac{g^{0\lambda}}{2}}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda=0} \left(\frac{\partial g_{j\lambda}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} \right) \\
 &= \frac{g^{00}}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial g_{j0}}{\partial x^i}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}}_{(3.3)} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij},
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{00}^k &= \underbrace{\frac{g^{k\lambda}}{2}}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} \left(\frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda} \right) \\
 &= \frac{g^{ka}}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial g_{0a}}{\partial x^0}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{0a}}{\partial x^0}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial g_{00}}{\partial x^a}}_{=0} \right) \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{i0}^k &= \underbrace{\frac{g^{k\lambda}}{2}}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} \left(\frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^\lambda} \right) \\
 &= \frac{g^{ka}}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial g_{0a}}{\partial x^i}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial g_{ia}}{\partial x^0}}_{(3.3)} - \underbrace{\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^a}}_{=0} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \gamma^{ka} \dot{\gamma}_{ia},
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{0j}^k &= \underbrace{\frac{g^{k\lambda}}{2}}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} \left(\frac{\partial g_{j\lambda}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0\lambda}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^\lambda} \right) \\
 &= \frac{g^{ka}}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^0}}_{(3.3)} + \underbrace{\frac{\partial g_{0a}}{\partial x^j}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^a}}_{=0} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \gamma^{ka} \dot{\gamma}_{ja} = \Gamma_{i0}^k,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

und

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ij}^k &= \underbrace{\frac{g^{k\lambda}}{2}}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} \left(\frac{\partial g_{j\lambda}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\lambda}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\lambda} \right) \\
 &= \frac{g^{ka}}{2} \left(\frac{\partial g_{ja}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ia}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^a} \right) \\
 &=: \tilde{\Gamma}_{ij}^k.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die vom letzten Ausdruck auftretenden zeitlichen Ableitungen werden mit $\dot{\tilde{\Gamma}}_{ij}^k$ gekennzeichnet.

3.2. Berechnung der Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors $R_{\alpha\beta\gamma}^\delta$

Nachdem die verschiedenen Christoffel-Symbole im vorherigen Abschnitt berechnet worden sind, sollen nun die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors ermittelt werden. Wie zuvor ist es sinnvoll, die insgesamt 256 verschiedenen Einträge des Tensors in 16 verschiedene Fälle zu gliedern, bei denen jeweils nach zeitlichen und räumlichen Komponenten unterschieden wird.

Es zeigt sich, dass es nützlich ist, folgende Vereinfachung zu benutzen:

$$\begin{aligned}
 \gamma^{mi}\gamma_{il} &= \delta_l^m, \\
 \frac{\partial}{\partial t} \dot{\gamma}^{mi}\gamma_{il} + \gamma^{mi}\dot{\gamma}_{il} &= 0, \\
 \gamma^{mi}\dot{\gamma}_{il} &= -\dot{\gamma}^{mi}\gamma_{il}.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Diese Nebenrechnung ermöglicht es, die auftretenden Terme auf folgende Weise zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}
 \gamma^{li}\dot{\gamma}_{ik} \underbrace{\gamma^{mj}\dot{\gamma}_{jl}}_{(3.13)} &= -\gamma^{li}\dot{\gamma}_{ik}\dot{\gamma}^{mj}\gamma_{jl} \\
 &= -\underbrace{\gamma^{li}\gamma_{jl}}_{=\delta_j^i} \dot{\gamma}_{ik}\dot{\gamma}^{mj} \\
 &= -\dot{\gamma}_{ik}\dot{\gamma}^{mi}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Die 16 unterschiedlichen Fälle werden nun mit Hilfe der allgemeinen Definition (1.36) berechnet. Zudem wird sich in den Rechnungen zeigen, dass die Symmetrieeigenschaft (1.37) des Riemannschen Krümmungstensors erfüllt wird.

$$\begin{aligned}
 R_{000}^0 &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^0}}_{=0} + \underbrace{\Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^0}_{=0} - \underbrace{\Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^0}_{=0} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
 R_{i00}^0 &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{i0}^0}{\partial x^0}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{0i}^0}{\partial x^0}}_{=0} + \Gamma_{i0}^\lambda \underbrace{\Gamma_{\lambda 0}^0}_{=0} - \Gamma_{i0}^\lambda \underbrace{\Gamma_{\lambda 0}^0}_{=0} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}
 R_{0j0}^0 &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^j}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{j0}^0}{\partial x^0}}_{=0} + \underbrace{\Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^0}_{=0} - \Gamma_{0j}^\lambda \underbrace{\Gamma_{\lambda 0}^0}_{=0} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
 R_{00k}^0 &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{0k}^0}{\partial x^0}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{00}^0}{\partial x^k}}_{=0} + \Gamma_{0k}^\lambda \underbrace{\Gamma_{\lambda 0}^0}_{=0} - \underbrace{\Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda k}^0}_{=0} \\
 &= 0 = -R_{0k0}^0
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
 R_{ij0}^0 &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{i0}^0}{\partial x^j}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{ji}^0}{\partial x^0}}_{(3.8)} + \underbrace{\Gamma_{i0}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^0}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} - \Gamma_{ij}^\lambda \underbrace{\Gamma_{\lambda 0}^0}_{=0} \\
 &= -\partial_0 \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ji} \right) + \underbrace{\Gamma_{i0}^b}_{(3.10)} \underbrace{\Gamma_{bj}^0}_{(3.8)} \\
 &= \frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{ji} + \left(\frac{1}{2} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ia} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{bj} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{ji} - \frac{1}{4} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ia} \dot{\gamma}_{bj}
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
 R_{i0k}^0 &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{ik}^0}{\partial x^0}}_{(3.8)} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{0i}^0}{\partial x^k}}_{=0} + \Gamma_{ik}^\lambda \underbrace{\Gamma_{\lambda 0}^0}_{=0} - \underbrace{\Gamma_{i0}^\lambda \Gamma_{\lambda k}^0}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} \\
 &= \partial_0 \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ik} \right) - \underbrace{\Gamma_{i0}^b}_{(3.10)} \underbrace{\Gamma_{bk}^0}_{(3.8)} \\
 &= -\frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{ik} - \left(\frac{1}{2} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ia} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{bk} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{ik} + \frac{1}{4} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ia} \dot{\gamma}_{bk} = -R_{ik0}^0
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
R_{0jk}^0 &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{0k}^0}{\partial x^j}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{j0}^0}{\partial x^k}}_{=0} + \underbrace{\Gamma_{0k}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^0}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} - \underbrace{\Gamma_{0j}^\lambda \Gamma_{\lambda k}^0}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} \\
&= \underbrace{\Gamma_{0k}^b}_{(3.11)} \underbrace{\Gamma_{bj}^0}_{(3.8)} - \underbrace{\Gamma_{0j}^b}_{(3.11)} \underbrace{\Gamma_{bk}^0}_{(3.8)} \\
&= \left(\frac{1}{2} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ka} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{bj} \right) - \left(\frac{1}{2} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ja} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{bk} \right) \\
&= \frac{1}{4} \gamma^{ba} (\dot{\gamma}_{ja} \dot{\gamma}_{bk} - \dot{\gamma}_{ka} \dot{\gamma}_{bj})
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
R_{ijk}^0 &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{ik}^0}{\partial x^j}}_{(3.8)} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{ji}^0}{\partial x^k}}_{(3.8)} + \underbrace{\Gamma_{ik}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^0}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} - \underbrace{\Gamma_{ij}^\lambda \Gamma_{\lambda k}^0}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} \\
&= \partial_j \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ik} \right) - \partial_k \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \right) + \underbrace{\Gamma_{ik}^b}_{(3.12)} \underbrace{\Gamma_{bj}^0}_{(3.8)} - \underbrace{\Gamma_{ij}^b}_{(3.11)} \underbrace{\Gamma_{bk}^0}_{(3.8)} \\
&= \frac{1}{2} \partial_k \dot{\gamma}_{ij} - \frac{1}{2} \partial_j \dot{\gamma}_{ik} + \tilde{\Gamma}_{ik}^b \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{bj} \right) - \tilde{\Gamma}_{ij}^b \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{bk} \right)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
R_{000}^l &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{00}^l}{\partial x^0}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{00}^l}{\partial x^0}}_{=0} + \underbrace{\Gamma_{00}^\lambda}_{=0} \Gamma_{\lambda 0}^l - \underbrace{\Gamma_{00}^\lambda}_{=0} \Gamma_{\lambda 0}^l \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
R_{i00}^l &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{i0}^l}{\partial x^0} - \frac{\partial \Gamma_{0i}^l}{\partial x^0}}_{=0 \text{ wegen (1.21)}} + \underbrace{\Gamma_{i0}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^l - \Gamma_{i0}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^l}_{=0} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
 R_{0j0}^l &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{00}^l}{\partial x^j}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{j0}^l}{\partial x^0}}_{(3.10)} + \underbrace{\Gamma_{00}^\lambda}_{=0} \Gamma_{\lambda j}^l - \underbrace{\Gamma_{0j}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^l}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} \\
 &= -\partial_0 \left(\frac{1}{2} \gamma^{la} \dot{\gamma}_{ja} \right) - \underbrace{\Gamma_{0j}^b}_{(3.11)} \underbrace{\Gamma_{b0}^l}_{(3.10)} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\dot{\gamma}^{la} \dot{\gamma}_{ja} + \gamma^{la} \ddot{\gamma}_{ja} \right) - \underbrace{\left(\frac{1}{2} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ja} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \gamma^{lc} \dot{\gamma}_{bc} \right)}_{(3.14)} \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\dot{\gamma}^{la} \dot{\gamma}_{ja} + \gamma^{la} \ddot{\gamma}_{ja} \right) + \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ja} \dot{\gamma}^{la} \\
 &= -\frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ja} \dot{\gamma}^{la} - \frac{1}{2} \gamma^{la} \ddot{\gamma}_{ja}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
 R_{00k}^l &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{0k}^l}{\partial x^0}}_{(3.11)} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{00}^l}{\partial x^k}}_{=0} + \underbrace{\Gamma_{0k}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^l}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} - \underbrace{\Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda k}^l}_{=0} \\
 &= \partial_0 \left(\frac{1}{2} \gamma^{la} \dot{\gamma}_{ka} \right) + \underbrace{\Gamma_{0k}^b}_{(3.11)} \underbrace{\Gamma_{b0}^l}_{(3.10)} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\dot{\gamma}^{la} \dot{\gamma}_{ka} + \gamma^{la} \ddot{\gamma}_{ka} \right) + \underbrace{\left(\frac{1}{2} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ka} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \gamma^{lc} \dot{\gamma}_{bc} \right)}_{(3.14)} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\dot{\gamma}^{la} \dot{\gamma}_{ka} + \gamma^{la} \ddot{\gamma}_{ka} \right) - \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ka} \dot{\gamma}^{la} \\
 &= \frac{1}{4} \dot{\gamma}^{la} \dot{\gamma}_{ka} + \frac{1}{2} \gamma^{la} \ddot{\gamma}_{ka} = -R_{0k0}^l
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
 R_{i0j}^l &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{i0}^l}{\partial x^j}}_{(3.10)} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{ji}^l}{\partial x^0}}_{(3.12)} + \underbrace{\Gamma_{i0}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^l}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} - \underbrace{\Gamma_{ij}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^l}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} \\
 &= \partial_j \left(\frac{1}{2} \gamma^{la} \dot{\gamma}_{ia} \right) - \partial_0 \tilde{\Gamma}_{ji}^l + \Gamma_{i0}^b \Gamma_{bj}^l - \Gamma_{ij}^b \Gamma_{b0}^l \\
 &= \frac{1}{2} \partial_j \left(\gamma^{la} \dot{\gamma}_{ia} \right) - \dot{\tilde{\Gamma}}_{ji}^l + \left(\frac{1}{2} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ia} \right) \tilde{\Gamma}_{bj}^l - \tilde{\Gamma}_{ij}^b \left(\frac{1}{2} \gamma^{la} \dot{\gamma}_{ba} \right)
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
 R_{i0k}^l &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^0}}_{(3.12)} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{0i}^l}{\partial x^k}}_{(3.11)} + \underbrace{\Gamma_{ik}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^l}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} - \underbrace{\Gamma_{i0}^\lambda \Gamma_{\lambda k}^l}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} \\
 &= \partial_0 \tilde{\Gamma}_{ik}^l - \partial_k \left(\frac{1}{2} \gamma^{la} \dot{\gamma}_{ia} \right) + \Gamma_{ik}^b \Gamma_{b0}^l - \Gamma_{i0}^b \Gamma_{bk}^l \\
 &= \dot{\tilde{\Gamma}}_{ik}^l - \frac{1}{2} \partial_k \left(\gamma^{la} \dot{\gamma}_{ia} \right) + \tilde{\Gamma}_{ik}^b \left(\gamma^{la} \dot{\gamma}_{ba} \right) - \left(\frac{1}{2} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ia} \right) \tilde{\Gamma}_{bk}^l = -R_{ik0}^l
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
R_{0jk}^l &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{0k}^l}{\partial x^j}}_{(3.11)} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{j0}^l}{\partial x^k}}_{(3.10)} + \underbrace{\Gamma_{0k}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^l}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} - \underbrace{\Gamma_{0j}^\lambda \Gamma_{\lambda k}^l}_{\neq 0, \text{ falls } \lambda \neq 0} \\
&= \partial_j \left(\frac{1}{2} \gamma^{la} \dot{\gamma}_{ka} \right) - \partial_k \left(\frac{1}{2} \gamma^{la} \dot{\gamma}_{ja} \right) + \underbrace{\Gamma_{0k}^b}_{(3.11)} \underbrace{\Gamma_{bj}^l}_{(3.12)} - \underbrace{\Gamma_{0j}^b}_{(3.11)} \underbrace{\Gamma_{bk}^l}_{(3.12)} \\
&= \frac{1}{2} \partial_j (\gamma^{la} \dot{\gamma}_{ka}) - \frac{1}{2} \partial_k (\gamma^{la} \dot{\gamma}_{ja}) + \left(\frac{1}{2} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ka} \right) \tilde{\Gamma}_{bj}^l - \left(\frac{1}{2} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ja} \right) \tilde{\Gamma}_{bk}^l \\
&= \frac{1}{2} \left[\partial_j (\gamma^{la} \dot{\gamma}_{ka}) - \partial_k (\gamma^{la} \dot{\gamma}_{ja}) + \gamma^{ba} (\dot{\gamma}_{ka} \tilde{\Gamma}_{bj}^l - \dot{\gamma}_{ja} \tilde{\Gamma}_{bk}^l) \right] \tag{3.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ijk}^l &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^l - \Gamma_{ij}^\lambda \Gamma_{\lambda k}^l \\
&= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^a \Gamma_{aj}^l - \Gamma_{ij}^a \Gamma_{ak}^l}_{=: \tilde{R}_{ijk}^l} + \Gamma_{ik}^0 \Gamma_{0j}^l - \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0k}^l \\
&= \tilde{R}_{ijk}^l + \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ik} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \gamma^{la} \dot{\gamma}_{ja} \right) - \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \gamma^{la} \dot{\gamma}_{ka} \right) \\
&= \tilde{R}_{ijk}^l + \frac{1}{4} \gamma^{la} (\dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ka} - \dot{\gamma}_{ik} \dot{\gamma}_{ja}) \tag{3.30}
\end{aligned}$$

3.3. Berechnung der Komponenten des Ricci-Tensors $R_{\alpha\beta}$

Analog zu dem Vorgehen in den vorherigen Kapiteln soll nun der Ricci-Tensor (1.43) errechnet werden. Es wird wiederum unterschieden zwischen räumlichen und zeitlichen Komponenten, was sich bei den 16 Einträgen in vier verschiedenen Kombinationen äußert. Die vier verschiedenen Komponentenarten werden im Folgenden berechnet:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= R_{0\rho 0}^\rho \\
&= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{00}^\rho}{\partial x^\rho}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{\rho 0}^\rho}{\partial x^0}}_{\neq 0, \text{ falls } \rho \neq 0} + \underbrace{\Gamma_{00}^\lambda \Gamma_{\lambda \rho}^\rho}_{=0} - \underbrace{\Gamma_{0\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^\rho}_{\neq 0, \text{ falls } \rho, \lambda \neq 0} \\
&= -\partial_0 \underbrace{\Gamma_{d0}^d}_{(3.10)} - \underbrace{\Gamma_{0e}^d}_{(3.11)} \underbrace{\Gamma_{d0}^e}_{(3.10)} \\
&= -\partial_0 \left(\frac{1}{2} \gamma^{da} \dot{\gamma}_{da} \right) - \left(\frac{1}{2} \gamma^{da} \dot{\gamma}_{ea} \right) \left(\frac{1}{2} \gamma^{eb} \dot{\gamma}_{db} \right) \\
&= -\frac{1}{2} (\dot{\gamma}^{da} \dot{\gamma}_{da} + \gamma^{da} \ddot{\gamma}_{da}) - \frac{1}{4} \gamma^{da} \gamma^{eb} \dot{\gamma}_{ea} \dot{\gamma}_{db}, \tag{3.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{i0} &= R_{i\rho 0}^\rho \\
 &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{i0}^\rho}{\partial x^\rho}}_{\neq 0, \text{ falls } \rho \neq 0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{\rho i}^\rho}{\partial x^0}}_{\neq 0, \text{ falls } \rho \neq 0} + \underbrace{\Gamma_{i0}^\lambda \Gamma_{\lambda \rho}^\rho}_{\neq 0, \text{ falls } \rho, \lambda \neq 0} - \underbrace{\Gamma_{i\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda 0}^\rho}_{\neq 0, \text{ falls } \rho, \lambda \neq 0} \\
 &= \partial_d \Gamma_{0i}^d - \partial_0 \Gamma_{di}^d + \Gamma_{de}^d \Gamma_{0i}^e - \Gamma_{0e}^d \Gamma_{di}^e \\
 &= \partial_d \left(\frac{1}{2} \gamma^{da} \dot{\gamma}_{ia} \right) - \dot{\Gamma}_{di}^d + \tilde{\Gamma}_{de}^d \left(\frac{1}{2} \gamma^{ea} \dot{\gamma}_{ia} \right) - \tilde{\Gamma}_{di}^e \left(\frac{1}{2} \gamma^{da} \dot{\gamma}_{ea} \right), \tag{3.32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{0j} &= R_{0\rho j}^\rho \\
 &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{0j}^\rho}{\partial x^\rho}}_{\neq 0, \text{ falls } \rho \neq 0} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma_{\rho 0}^\rho}{\partial x^j}}_{\neq 0, \text{ falls } \rho \neq 0} + \underbrace{\Gamma_{j0}^\lambda \Gamma_{\lambda \rho}^\rho}_{\neq 0, \text{ falls } \rho, \lambda \neq 0} - \underbrace{\Gamma_{0\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^\rho}_{\neq 0, \text{ falls } \rho, \lambda \neq 0} \\
 &= \partial_d \Gamma_{j0}^d - \partial_j \Gamma_{d0}^d + \Gamma_{de}^d \Gamma_{j0}^e - \Gamma_{je}^d \Gamma_{d0}^e \\
 &= \partial_d \left(\frac{1}{2} \gamma^{da} \dot{\gamma}_{ja} \right) - \partial_j \left(\frac{1}{2} \gamma^{da} \dot{\gamma}_{da} \right) + \tilde{\Gamma}_{de}^d \left(\frac{1}{2} \gamma^{ea} \dot{\gamma}_{ja} \right) - \tilde{\Gamma}_{je}^d \left(\frac{1}{2} \gamma^{ea} \dot{\gamma}_{da} \right), \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 R_{ij} &= R_{i\rho j}^\rho \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{ij}^\rho}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\rho i}^\rho}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^\lambda \Gamma_{\lambda \rho}^\rho - \Gamma_{i\rho}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^\rho \\
 &= \left(\partial_0 \Gamma_{ji}^0 + \partial_d \Gamma_{ji}^d \right) - \partial_j \Gamma_{di}^d + \Gamma_{d\lambda}^d \Gamma_{ji}^\lambda - \left(\Gamma_{j\lambda}^0 \Gamma_{0i}^\lambda + \Gamma_{j\lambda}^d \Gamma_{di}^\lambda \right) \\
 &= \partial_0 \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ji} \right) + \partial_d \tilde{\Gamma}_{ji}^d - \partial_j \tilde{\Gamma}_{di}^d + \left(\Gamma_{d0}^d \Gamma_{ji}^0 + \Gamma_{de}^d \Gamma_{ji}^e \right) \\
 &\quad - \left[\left(\Gamma_{j0}^0 \Gamma_{0i}^0 + \Gamma_{je}^0 \Gamma_{0i}^e \right) + \left(\Gamma_{j0}^d \Gamma_{di}^0 + \Gamma_{je}^d \Gamma_{di}^e \right) \right] \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ji} + \partial_d \tilde{\Gamma}_{ji}^d - \partial_j \tilde{\Gamma}_{di}^d + \left[\left(\frac{1}{2} \gamma^{da} \dot{\gamma}_{da} \right) \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ji} \right) + \tilde{\Gamma}_{de}^d \tilde{\Gamma}_{di}^e \right] \\
 &\quad - \left[\left(\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{je} \right) \left(\frac{1}{2} \gamma^{ea} \dot{\gamma}_{ia} \right) \right] + \left[\left(\frac{1}{2} \gamma^{da} \dot{\gamma}_{ja} \right) \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{di} \right) + \tilde{\Gamma}_{je}^d \tilde{\Gamma}_{di}^e \right] \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ji} + \partial_d \tilde{\Gamma}_{ji}^d - \partial_j \tilde{\Gamma}_{di}^d - \frac{1}{4} \gamma^{da} \dot{\gamma}_{da} \dot{\gamma}_{ji} + \tilde{\Gamma}_{de}^d \tilde{\Gamma}_{ji}^e \\
 &\quad + \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{je} \gamma^{ea} \dot{\gamma}_{ia} + \frac{1}{4} \gamma^{da} \dot{\gamma}_{ja} \dot{\gamma}_{di} - \tilde{\Gamma}_{je}^d \tilde{\Gamma}_{di}^e. \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Alternativ lassen sich die Ricci-Tensoren mit den Ergebnissen aus dem letzten Abschnitt berechnen:

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= R_{0\rho 0}^\rho \\
 &= \underbrace{R_{000}^0}_{(3.15)} + \underbrace{R_{0k0}^k}_{(3.25)} \\
 &= -\frac{1}{4}\dot{\gamma}_{ka}\dot{\gamma}^{ka} - \frac{1}{2}\gamma^{ka}\ddot{\gamma}_{ka},
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
 R_{i0} &= R_{i\rho 0}^\rho \\
 &= \underbrace{R_{i00}^0}_{(3.16)} + \underbrace{R_{ik0}^k}_{(3.27)} \\
 &= \frac{1}{2}\partial_k(\gamma^{ka}\dot{\gamma}_{ia}) - \dot{\tilde{\Gamma}}_{ki}^k + \left(\frac{1}{2}\gamma^{ba}\dot{\gamma}_{ia}\right) \cdot \tilde{\Gamma}_{bk}^k - \tilde{\Gamma}_{ik}^b \left(\frac{1}{2}\gamma^{ka}\dot{\gamma}_{ba}\right),
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
 R_{0j} &= R_{0\rho j}^\rho \\
 &= \underbrace{R_{00j}^0}_{(3.18)} + \underbrace{R_{0kj}^k}_{(3.29)} \\
 &= \frac{1}{2}\left[\partial_k(\gamma^{ka}\dot{\gamma}_{ja}) - \partial_j(\gamma^{ka}\dot{\gamma}_{ka}) + \gamma^{ba}(\dot{\gamma}_{ja}\tilde{\Gamma}_{bk}^k - \dot{\gamma}_{ka}\tilde{\Gamma}_{bj}^k)\right],
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 R_{ij} &= R_{i\rho j}^\rho \\
 &= \underbrace{R_{i0j}^0}_{(3.20)} + \underbrace{R_{ikj}^k}_{(3.30)} \\
 &= -\frac{1}{2}\ddot{\gamma}_{ij} + \frac{1}{4}\gamma^{ba}\dot{\gamma}_{ia}\dot{\gamma}_{bj} + \tilde{R}_{ikj}^k + \frac{1}{4}\gamma^{ka}(\dot{\gamma}_{ik}\dot{\gamma}_{ja} - \dot{\gamma}_{ij}\dot{\gamma}_{ka}).
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Die Ergebnisse (3.37) bis (3.40) entsprechend den Ergebnissen (3.31) bis (3.36), wenn alle Indizes d in k sowie alle e in b umgenannt werden, die Symmetrien der Christoffel-Symbole und die Beziehung (3.14) ausgenutzt werden.

Es bleibt die Frage, ob die berechneten Ricci-Tensoren die Symmetrierelation (1.46) erfüllen. Dies ist der Fall:

- R_{i0} führt auf R_{0i} (siehe A.1).
- R_{ij} liefert bei Vertauschung von i und j dasselbe Resultat.

Mit Hilfe dieser Ricci-Tensoren lässt sich im nächsten Kapitel die Skalarkrümmung ermitteln.

3.4. Berechnung des Krümmungsskalars R und der Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH}

Mittels (1.44) kann durch wiederholte Verjüngung der Ricci-Skalar berechnet werden. In dem hier untersuchten Fall lautet er:

$$\begin{aligned}
 R &= g^{\mu\rho} R_{\mu\rho} \\
 &= \underbrace{g^{00}}_{=1} R_{00} + \underbrace{g^{0r}}_{=0} R_{0r} + \underbrace{g^{m0}}_{=0} R_{m0} + \underbrace{g^{mr}}_{=\gamma^{mr} \text{ (3.40)}} R_{mr} \\
 &= R_{00} + \gamma^{hf} R_{hf} \\
 &= \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ka} \dot{\gamma}^{ka} - \frac{1}{2} \gamma^{ka} \ddot{\gamma}_{ka} + \gamma^{mr} \left(-\frac{1}{2} \ddot{\gamma}_{mr} + \frac{1}{4} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ma} \dot{\gamma}_{br} + \tilde{R}_{mkr}^k + \frac{1}{4} \gamma^{ka} (\dot{\gamma}_{mk} \dot{\gamma}_{ra} - \dot{\gamma}_{mr} \dot{\gamma}_{ka}) \right) \\
 &= -\frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ka} \dot{\gamma}^{ka} - \underbrace{\frac{1}{2} \gamma^{ka} \ddot{\gamma}_{ka} - \frac{1}{2} \gamma^{mr} \ddot{\gamma}_{mr}}_{\text{werden zusammengefasst}} + \underbrace{\frac{1}{4} \gamma^{mr} \gamma^{ba} \dot{\gamma}_{ma} \dot{\gamma}_{br}}_{=-\frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}^{ab}, \text{ vgl. (3.14)}} \\
 &\quad + \underbrace{\gamma^{mr} \tilde{R}_{mkr}^k}_{=: \tilde{R}} + \underbrace{\frac{1}{4} \gamma^{mr} \gamma^{ka} \dot{\gamma}_{mk} \dot{\gamma}_{ra}}_{=-\frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ka} \dot{\gamma}^{ka}, \text{ vgl. (3.14)}} - \frac{1}{4} \gamma^{mr} \gamma^{ka} \dot{\gamma}_{mr} \dot{\gamma}_{ka} \\
 &= -\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ka} \dot{\gamma}^{ka} - \gamma^{ka} \ddot{\gamma}_{ka} - \frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}^{ab} + \tilde{R} - \frac{1}{4} \gamma^{mr} \gamma^{ka} \dot{\gamma}_{mr} \dot{\gamma}_{ka}. \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Eine Umbenennung der Zählindizes liefert schließlich den folgenden Ausdruck für den Krümmungsskalar:

$$R = -\frac{3}{4} \dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}^{ab} - \gamma^{ab} \ddot{\gamma}_{ab} + \tilde{R} - \frac{1}{4} (\dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab})^2. \tag{3.42}$$

Die Einsteinschen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie können aus einem Variationsprinzip hergeleitet werden. Das Wirkungsintegral ist durch

$$S_{EH} = \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-g} d^4x \tag{3.43}$$

über die betrachtete Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ gegeben, wobei $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ die Einsteinsche Gravitationskonstante, R den Ricci-Skalar, Λ die Vakuumenergiedichte, $\mathcal{L}_M$ die Lagrange-Dichte und g die Determinante der Metrik bezeichnet. In dieser Arbeit soll ein freies Gravitationsfeld $T_{ik} = 0$ angenommen werden; in diesem Fall verschwindet die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_M$:

$$S_{EH,0} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x. \tag{3.44}$$

Mit Hilfe der Berechnungen aus den vorherigen Kapiteln kann also die Einstein-Hilbert-Wirkung explizit angegeben werden:

$$S_{EH,0} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} \left(-\frac{3}{4} \dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}^{ab} - \gamma^{ab} \ddot{\gamma}_{ab} + \tilde{R} - \frac{1}{4} (\dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab})^2 - 2\Lambda \right) \sqrt{-\gamma} d^4x. \quad (3.45)$$

Aus der analytischen Mechanik ist bekannt, dass das Wirkungsfunktional mechanischer Systeme häufig die Form

$$S\{\vec{q}(t)\} = \int L(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t), t) dt \quad (3.46)$$

besitzt. Vergleicht man nun das Ergebnis dieses Abschnittes damit, so fällt auf, dass der zweite Summand des Ricci-Skalars eine zweite Ableitung nach der Zeit enthält. Deshalb soll versucht werden, diesen Term mit Hilfe von partieller Integration auf eine Form zu bringen, die nur erste Ableitungen nach der Zeit enthält.

Es ist zweckmäßig, sich dafür die Ableitung der Determinante der Metrik $\partial_\mu g$ genauer anzusehen. Die folgende Formel ist [14, Kap. 86.4] entnommen:

$$\begin{aligned} \partial_\mu g &= g \cdot g^{\alpha\beta} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \\ &= g \left(g^{00} \underbrace{\partial_\mu g_{00}}_{=0} + g^{i0} \underbrace{\partial_\mu g_{i0}}_{=0} + g^{0j} \underbrace{\partial_\mu g_{0j}}_{=0} + \underbrace{g^{ij}}_{\gamma^{ij}} \partial_\mu \underbrace{g_{ij}}_{\gamma_{ij}} \right) \\ &= g \cdot \gamma^{ij} \partial_\mu \gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Mit $g = \det(g_{ij}) = \det(1) \cdot \det(\gamma_{ij}) =: \gamma$ erhält man so einen Ausdruck für die Ableitung der Determinante:

$$\partial_\mu \gamma = \gamma \gamma^{ij} \partial_\mu \gamma_{ij}, \quad (3.48)$$

mit dem Spezialfall der zeitlichen Ableitung:

$$\begin{aligned} \partial_0 \gamma &= \dot{\gamma} \\ &= \gamma \gamma^{ij} \dot{\gamma}_{ij}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Wegen des Satzes von Fubini darf das vierdimensionale Integral in die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} \gamma^{ab} \ddot{\gamma}_{ab} \sqrt{-\gamma} d^4x = \frac{1}{2\kappa} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{M}_3} \gamma^{ab} \ddot{\gamma}_{ab} \sqrt{-\gamma} d^3x \right) dt. \quad (3.50)$$

Der Integrand, der dem L aus Gleichung (3.46) entspricht, ist selbst ein Integral über die drei Raumdimensionen und lässt sich unter Ausnutzung der Kettenregel umschreiben:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}_3} \gamma^{ab} \ddot{\gamma}_{ab} \sqrt{-\gamma} d^3x &= \int_{\mathcal{M}_3} \left[\frac{d}{dt} (\dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab} \sqrt{-\gamma}) - \dot{\gamma}_{ab} \frac{\partial}{\partial t} (\gamma^{ab} \sqrt{-\gamma}) \right] d^3x \\ &= - \int_{\mathcal{M}_3} \dot{\gamma}_{ab} \frac{\partial}{\partial t} (\gamma^{ab} \sqrt{-\gamma}) d^3x + \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{M}_3} \dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab} \sqrt{-\gamma} d^3x \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Ebenfalls aus der analytischen Mechanik ist bekannt, dass eine mechanische Eichtransformation der Form

$$L \rightarrow L + \frac{d}{dt} F \quad (3.52)$$

die Bewegungsgleichung unverändert lässt (siehe [15, Kap. 2.5]). Deshalb kann der zweite Summand hinter dem letzten Gleichheitszeichen vernachlässigt werden. Das erste Integral kann (nach wiederholter Vertauschung der Integrationsgebiete) weiter umgeformt werden:

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\gamma}_{ab} \frac{\partial}{\partial t} (\gamma^{ab} \sqrt{-\gamma}) dt &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\gamma}_{ab} \left(\dot{\gamma}^{ab} \sqrt{-\gamma} + \gamma^{ab} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{-\gamma} \right) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}^{ab} \sqrt{-\gamma} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab} \frac{-1}{2\sqrt{-\gamma}} \gamma \gamma^{ij} \dot{\gamma}_{ij} dt \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}^{ab} \sqrt{-\gamma} dt - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab} \frac{1}{2} \sqrt{-\gamma} \gamma^{ij} \dot{\gamma}_{ij} dt. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Mit Hilfe dieser Umformung vereinfacht sich die Einstein-Hilbert-Wirkung zu dem folgenden Ausdruck:

$$S_{EH,0} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}^{ab} + \frac{1}{4} (\dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab})^2 + \tilde{R} - 2\Lambda \right) \sqrt{-\gamma} d^4x. \quad (3.54)$$

3.5. Invarianz der Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH} unter räumlichen Transformationen

Die Einstein-Hilbert-Wirkung sollte unter rein räumlichen Transformationen invariant sein. Diese Eigenschaft wird in den späteren Berechnungen im Regge-Kalkül eine notwendige Voraussetzung sein, weshalb nun getestet wird, ob sie für den vorliegenden Ausdruck der Wirkung gegeben ist.

Die Wirkung setzt sich im Wesentlichen aus drei Summanden zusammen: einem Ausdruck mit zeitlichen Ableitungen der Metrik $\dot{\gamma}_{ab}\dot{\gamma}^{ab}$, einem Ausdruck $(\dot{\gamma}_{ab}\gamma^{ab})^2$, der quadratisch in den zeitlichen Ableitungen ist und dem auf den räumlichen Anteil reduzierten Ricci-Krümmungsskalar $\tilde{R}$. Vorfaktoren werden nicht berücksichtigt, weil sie für das Transformationsverhalten keine Rolle spielen.

Beim rein räumlichen Ricci-Krümmungsskalar $\tilde{R}$ ist die Invarianz bereits aufgrund der Tatsache gegeben, dass dieser auf die dreidimensionale Untermannigfaltigkeit beschränkt ist. Nicht ganz so augenscheinlich ist dies für die Ausdrücke mit zeitlichen Ableitungen. Hier müssen die Invarianzen explizit nachgerechnet werden. Wie in Kapitel 1.2.2. erläutert, werden Tensoren bei einer Koordinatentransformation von x^μ nach x'^μ wie folgt transformiert:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}. \quad (3.55)$$

Die Transformationen sind derart, dass die Zeit t dabei invariant bleibt:

$$t \rightarrow t' = t. \quad (3.56)$$

Für die Transformation der rein räumlichen Koordinaten ($a, b = 1, 2, 3$)

$$x^a \rightarrow x'^a = x'^a(x^b) \quad (3.57)$$

muss deshalb gelten, dass diese einzig von den rein räumlichen Koordinaten der alten Basis x^b abhängig sind (und nicht etwa zusätzlich noch von der Zeit t). Der auf die dreidimensionale Untermannigfaltigkeit reduzierte metrische Tensor γ_{ab} transformiert sich demnach wie folgt:

$$\gamma_{ab} \rightarrow \gamma'_{ab} = \underbrace{\frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b}}_{\text{unabhängig von } t} \gamma_{cd}. \quad (3.58)$$

Für die Ableitung dieser Metrik gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}'_{ab} &= \frac{\partial}{\partial t} \gamma'_{ab} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \gamma_{cd} \right) \\ &= \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{cd} \\ &= \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \dot{\gamma}_{cd}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

so dass sich auch die $\dot{\gamma}_{ab}$ wie Tensoren 2. Stufe transformieren.

Nun die kontravarianten Indizes:

$$\gamma^{ab} \rightarrow \gamma'^{ab} = \underbrace{\frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d}}_{\text{unabhängig von } t} \gamma^{cd}. \quad (3.60)$$

Analog zu $\dot{\gamma}'_{ab}$ wird auch das Transformationsverhalten der zeitlichen Ableitung $\dot{\gamma}'^{ab}$ betrachtet:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}'^{ab} &= \frac{\partial}{\partial t} \gamma'^{ab} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} \gamma^{cd} \right) \\ &= \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} \dot{\gamma}^{cd}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Es müssen nun nur noch die in der Einstein-Hilbert-Wirkung auftretenden Terme zusammengesetzt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}'_{ab} \gamma'^{ab} &= \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \dot{\gamma}_{cd} \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} \gamma^{cd} \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d}}_{=1} \dot{\gamma}_{cd} \gamma^{cd} \\ &= \dot{\gamma}_{cd} \gamma^{cd}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Der Term $\dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab}$ ist also invariant unter räumlichen Transformationen und damit auch $(\dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab})^2$.

Gleiches gilt für den Ausdruck $\dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}^{ab}$:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}'_{ab} \dot{\gamma}'^{ab} &= \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \dot{\gamma}_{cd} \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d} \dot{\gamma}^{cd} \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} \frac{\partial x'^a}{\partial x^c} \frac{\partial x'^b}{\partial x^d}}_{=1} \dot{\gamma}_{cd} \dot{\gamma}^{cd} \\ &= \dot{\gamma}_{cd} \dot{\gamma}^{cd}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Somit ist die Wirkung insgesamt unter rein räumlichen Transformationen invariant.

4. Spezialfälle der untersuchten Einstein-Hilbert-Wirkung

Nachdem im vorherigen Abschnitt die allgemeine Form der Einstein-Hilbert-Wirkung für eine Metrik in Blockgestalt berechnet wurde, soll diese in zwei Spezialfällen überprüft werden. Zunächst wird der Fall eines statischen Universums betrachtet; danach soll die Robertson-Walker-Metrik untersucht werden, die als exakte Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen ein homogenes und isotropes Universum beschreibt.

4.1. Statisches Universum

Ein statisches Universum zeichnet sich dadurch aus, dass keine zeitliche Entwicklung stattfindet. Aus der Kosmologie ist jedoch bekannt, dass dies keine Beschreibung unseres Universums sein kann, da das Standardmodell der Kosmologie, welches unserem derzeitigen Wissenstand entspricht, von einem zeitlich expandierenden, veränderlichen Universum ausgeht. Dieser Fall kann jedoch zunächst als Vereinfachung angenommen werden.

In einem statischen Universum ist die Metrik konstant, die Ableitungen der Metrik nach der Zeit verschwinden:

$$\dot{\gamma}_{ij} = 0, \quad (4.1)$$

so dass für die Einstein-Hilbert-Wirkung sofort gilt:

$$S_{\text{EH, stat.}} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} (\tilde{R} - 2\Lambda) \sqrt{-\gamma} d^4x. \quad (4.2)$$

Die Wirkung ist also nur noch von dem auf die räumlichen Komponenten reduzierten Ricci-Skalar $\tilde{R}$ sowie der kosmologischen Konstanten Λ abhängig.

4.2. Robertson-Walker-Metrik

Ein weiterer Spezialfall ist durch die RW-Metrik gegeben. Wie in Kapitel 1.4. beschrieben, kann der Faktor k die Werte $+1$, -1 oder 0 annehmen. Da hier ein sphärisches Universum untersucht werden soll, wird in der Metrik der Wert $k = 1$ gesetzt.

Das Linienelement

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (4.3)$$

beschreibt eine Diagonalmetrik, so dass die inverse Metrik $g^{\mu\nu}$ bereits durch die Inversen der Einträge von $g_{\mu\nu}$ gegeben ist. Explizit ermittelt man

$$\gamma^{11} = -\frac{1-r^2}{a^2(t)}, \quad (4.4)$$

$$\gamma^{22} = -\frac{1}{a^2(t)r^2}, \quad (4.5)$$

$$\gamma^{33} = -\frac{1}{a^2(t)r^2\sin^2\theta}; \quad (4.6)$$

und als Ableitungen

$$\dot{\gamma}_{11} = -\frac{2a(t)\dot{a}(t)}{1-r^2}, \quad (4.7)$$

$$\dot{\gamma}_{22} = -2a(t)\dot{a}(t)r^2, \quad (4.8)$$

$$\dot{\gamma}_{33} = -2a(t)\dot{a}(t)r^2\sin^2\theta; \quad (4.9)$$

sowie

$$\dot{\gamma}^{11} = 2\dot{a}(t)\frac{1-r^2}{a^3(t)}, \quad (4.10)$$

$$\dot{\gamma}^{22} = 2\dot{a}(t)\frac{1}{a^3(t)r^2}, \quad (4.11)$$

$$\dot{\gamma}^{33} = 2\dot{a}(t)\frac{1}{a^3(t)r^2\sin^2\theta}. \quad (4.12)$$

Die Determinante γ ist das Produkt der Diagonaleinträge:

$$\gamma = \det(\gamma_{ab}) = \left(-\frac{a^2(t)}{1-r^2} \right) \left(-a^2(t)r^2 \right) \left(-a^2(t)r^2\sin^2(\theta) \right) = -\frac{a^6(t)r^4\sin^2(\theta)}{1-r^2}, \quad (4.13)$$

und damit ist das kovariante Volumenelement durch den Ausdruck

$$\sqrt{-\gamma} d^4x = \frac{a^3(t)r^2\sin(\theta)}{\sqrt{1-r^2}} d^4x \quad (4.14)$$

gegeben. Für die Berechnung des Integranden aus der Wirkung wird der auf den Raumanteil reduzierte Ricci-Skalar benötigt. Dazu findet man in [14, Kap. XI, §106] den folgenden Ausdruck:

$$\tilde{R}_{\text{RW}} = \frac{6k}{a^2(t)} = \frac{6}{a^2(t)} \quad (4.15)$$

Da in [14] eine andere Vorzeichenkonvention für den Riemannschen Krümmungstensor als in dieser Arbeit vorliegt, muss $\tilde{R}_{\text{RW}}$ in den folgenden Rechnungen mit einem negativen Vorzeichen versehen werden.

Vergleicht man den Integranden aus (3.54) mit (3.43), so gilt für den geometrischen Anteil R'_{RW} hier die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} R'_{\text{RW}} &:= \frac{1}{4}\dot{\gamma}_{ab}\dot{\gamma}^{ab} + \frac{1}{4}(\dot{\gamma}_{ab}\gamma^{ab})^2 + \tilde{R}_{\text{RW}} \\ &= \frac{1}{4}\dot{\gamma}_{aa}\dot{\gamma}^{aa} + \frac{1}{4}(\dot{\gamma}_{aa}\gamma^{aa})^2 - \frac{6}{a^2(t)} \\ &= -3\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 + 9\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 - \frac{6}{a^2(t)} \\ &= 6H^2 - \frac{6}{a^2(t)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

mit dem Hubble-Parameter $H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. Von der ersten zur zweiten Zeile wurde ausgenutzt, dass die Metrik nur auf der Diagonalen von Null verschiedene Einträge enthält, weshalb die Summation $\gamma_{ab}\gamma^{ab}$ in die Summation $\gamma_{aa}\gamma^{aa}$ übergeht.

Insgesamt erhält man das folgende Integral:

$$S_{\text{EH, RW}} = \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{1}{2\kappa} \left(6H^2 - \frac{6}{a^2(t)} - 2\Lambda \right) + \mathcal{L}_{\text{M}} \right] \frac{a^3(t)r^2\sin(\theta)}{\sqrt{1-r^2}} d^4x. \quad (4.17)$$

Um nachzuweisen, dass die RW-Metrik mit den Ergebnissen der letzten Abschnitte auf die Friedmann-Gleichungen führt, gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Das Wirkungsintegral wird mit Hilfe der Metrik berechnet. Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen erhält man die Friedmann-Gleichungen.
2. Die berechneten Größen für R und $R_{\mu\nu}$ werden in die Einsteinschen Feldgleichungen eingesetzt und in die Friedmann-Gleichungen überführt.

Im Folgenden wird die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors $a(t)$ nicht mehr ausgeschrieben.

4.2.1. Herleitung mit den Euler-Lagrange-Gleichungen

Die Materiefelder werden hier vernachlässigt, da hier nur die geometrische Seite der Friedmann-Gleichungen (rechte Seite in (1.71) bzw. (1.72)) betrachtet werden soll. Deshalb wird $\mathcal{L}_M = 0$ gesetzt.

$$\begin{aligned}
 S_{\text{EH,RW}} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} (6\dot{a}^2 a - 6a - 2\Lambda a^3) \frac{r^2 \sin(\theta)}{\sqrt{1-r^2}} dt dr d\theta d\phi \\
 &= \frac{1}{2\kappa} 4\pi \int_0^1 \left[\int_0^\infty (6\dot{a}^2 a - 6a - 2\Lambda a^3) dt \right] \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} dr \\
 &= \frac{\pi^2}{2\kappa} \int_0^\infty (6\dot{a}^2 a - 6a - 2\Lambda a^3) dt
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4}, \tag{4.19}$$

weil die Koordinate r in der RW-Metrik nur von $[0, 1)$ definiert ist.

Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial L}{\partial a} = 0 \tag{4.20}$$

kann man aus dieser Wirkung die Bewegungsgleichung herleiten:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial L}{\partial a} = 12(\dot{a}^2 + a\ddot{a}) - (6\dot{a}^2 - 6 - 6\Lambda a^2) \tag{4.21}$$

$$= 12a\ddot{a} + 6\dot{a}^2 + 6 + 6\Lambda a^2, \tag{4.22}$$

was genau die Friedmann-Gleichung (1.72) liefert, setzt man diesen letzten Ausdruck gleich 0 und teilt durch $6a^2$.

4.2.2. Einsetzen in die Einsteinschen Feldgleichungen

Die partielle Integration zusammen mit der mechanischen Eichtransformation aus Kapitel 3.4. lässt die Bewegungsgleichungen invariant, wenn weiterhin die Herleitung mittels der Wirkung zugrunde gelegt wird. Entnimmt man dem Integranden jedoch direkt Terme, so bleiben die Bewegungsgleichungen nicht zwangsläufig gleich. Deshalb muss die Konsistenzprüfung mithilfe der Einsteinschen Feldgleichungen vor dem Umschreiben der Wirkung mit dem Ausdruck (3.45) geschehen.

Dazu werden noch die zweiten Ableitungen benötigt:

$$\ddot{\gamma}_{11} = -\frac{2(\dot{a}^2 + a\ddot{a})}{1 - r^2}, \quad (4.23)$$

$$\ddot{\gamma}_{22} = -2(\dot{a}^2 + a\ddot{a})r^2, \quad (4.24)$$

$$\ddot{\gamma}_{33} = -2(\dot{a}^2 + a\ddot{a})r^2\sin^2\theta; \quad (4.25)$$

Die in (3.45) enthaltenen Summanden sind die folgenden:

$$\begin{aligned} R &= -\frac{3}{4}\dot{\gamma}_{ab}\dot{\gamma}^{ab} - \gamma^{ab}\ddot{\gamma}_{ab} + \tilde{R} - \frac{1}{4}(\dot{\gamma}_{ab}\gamma^{ab})^2 \\ &= 9\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 6\frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{a^2} - \frac{6}{a^2} - 9\frac{\dot{a}^2}{a^2} \\ &= -6\frac{\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 1}{a^2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Einsetzen in die Einsteinschen Feldgleichungen führt zu folgendem Resultat:

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{R}{2}g_{00} + \Lambda g_{00} &= -\kappa T_{00} \\ -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{1}{a^2} + \Lambda &= -\kappa T_{00} \\ \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} &= -\frac{\kappa}{3}\rho \end{aligned} \quad (4.27)$$

wobei für R_{00} ein entsprechender Ausdruck aus [1, Kap. 53] mit angepasstem Vorzeichen entnommen wurde. Man erkennt, dass (4.27) genau (1.71) entspricht. Die Überprüfung durch direktes Einsetzen in die Einsteinschen Feldgleichungen liefert somit ebenfalls das gewünschte Resultat.

5. Überführung der Einstein-Hilbert-Wirkung in den Regge-Kalkül

Nach den Berechnungen der letzten Kapitel soll nun der bislang kontinuierliche metrische Tensor in eine diskretisierte Form gebracht werden. Um das konzeptionelle Gerüst des Regge-Kalküls zu veranschaulichen, wird anfänglich eine gekrümmte Fläche in zwei Dimensionen betrachtet. Dabei spielt es keine Rolle, ob diese in drei Dimensionen eingebettet ist oder nicht. Nachdem die Methoden der Flächengeometrie auf diese angewendet wurden, können die Ergebnisse auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden.

5.1. Flächengeometrische Vorüberlegungen für den zweidimensionalen Fall

Man betrachte nun eine triangulierte, gekrümmte Fläche. Wie in Kapitel 2 erläutert, ist die gesamte Krümmung in den Vertices konzentriert und nicht - wie es zunächst den Anschein hat - in den Kanten. Der diese Krümmung beschreibende Defizitwinkel δ kann mittels Paralleltransport erhalten werden. Die Geometrie der Oberfläche lässt sich eindeutig über die Kantenlängen l_{ij} ausdrücken. Hier soll zunächst der metrische Tensor für das Innere der Dreiecke gefunden werden (siehe Abb. 5.1).

Für das Dreieck Δ_{012} kann eine (nicht orthogonale) Basis mit den Kantenlängen-Vektoren $\vec{l}_{01}$ und $\vec{l}_{02}$ gewählt werden, da diese linear unabhängig sind. Für einen Vektor $\vec{x}$ innerhalb des Dreiecks Δ_{012} gilt damit:

$$\vec{x} = x^1 \cdot \vec{l}_{01} + x^2 \cdot \vec{l}_{02}. \quad (5.1)$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ergibt sich zu:

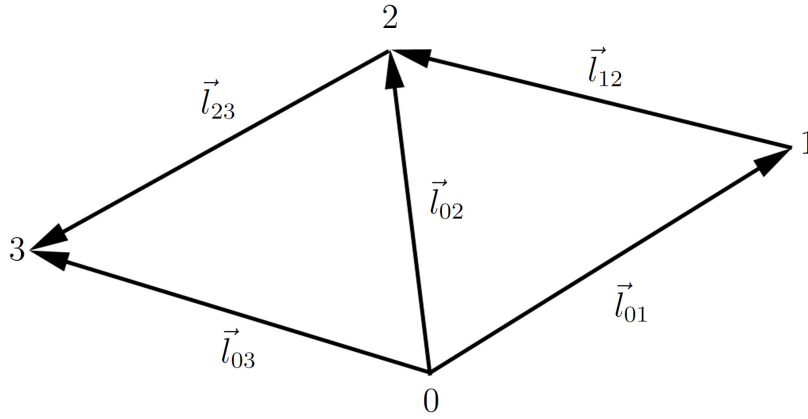


Abbildung 5.1.: Zwei Dreiecke mit Vektoren $\vec{l}_{ij}$ als Kantenlängen (eigene Zeichnung)

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{y} &= \gamma_{ab} x^a y^b \\ &= x^1 y^1 \vec{l}_{01} \vec{l}_{01} + x^1 y^2 \vec{l}_{01} \vec{l}_{02} + x^2 y^1 \vec{l}_{01} \vec{l}_{02} + x^2 y^2 \vec{l}_{02} \vec{l}_{02}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Daraus folgt für die Metrik γ_{ab} , mit deren Hilfe das Skalarprodukt berechnet werden kann, folgender Ausdruck:

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} l_{01}^2 & \vec{l}_{01} \vec{l}_{02} \\ \vec{l}_{01} \vec{l}_{02} & l_{02}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Mit dieser Vorgehensweise lässt sich also eine Metrik für die triangulierte Mannigfaltigkeit konstruieren. Sie ist innerhalb der Dreiecke konstant.

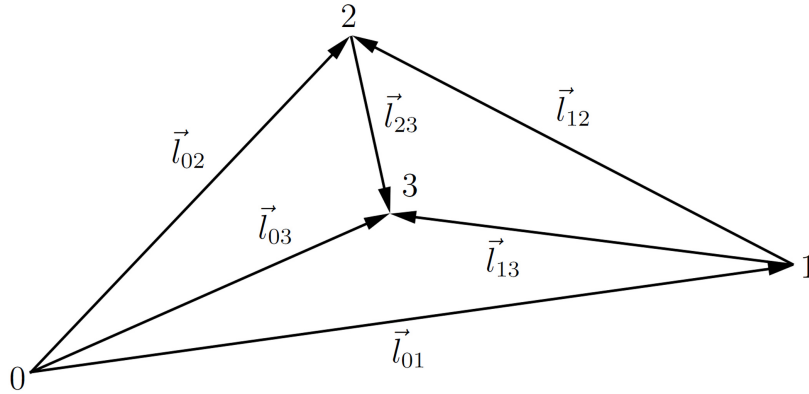
5.2. Diskretisierung der Metrik im dreidimensionalen Fall

Analog zu dem Fall zweier Dimensionen kann nun ein Vektor $\vec{x}$ in einem dreidimensionalen Tetraeder mit der Basis $\{\vec{l}_{01}, \vec{l}_{02}, \vec{l}_{03}\}$ (siehe Abb. 5.2) untersucht werden:

$$\vec{x} = x^1 \vec{l}_{01} + x^2 \vec{l}_{02} + x^3 \vec{l}_{03}. \quad (5.4)$$

Für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ergibt sich analog:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \gamma_{ab} x^a y^b \quad (5.5)$$


 Abbildung 5.2.: Ein Tetraeder mit Vektoren $\vec{l}_{ij}$ als Kantenlängen (eigene Zeichnung)

mit

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} \vec{l}_{01}\vec{l}_{01} & \vec{l}_{01}\vec{l}_{02} & \vec{l}_{01}\vec{l}_{03} \\ \vec{l}_{01}\vec{l}_{02} & \vec{l}_{02}\vec{l}_{02} & \vec{l}_{02}\vec{l}_{03} \\ \vec{l}_{01}\vec{l}_{03} & \vec{l}_{03}\vec{l}_{02} & \vec{l}_{03}\vec{l}_{03} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Problematisch an dieser Metrik sind die Einträge mit gemischten Vektoren wie beispielsweise $\vec{l}_{01}\vec{l}_{02}$. Da es das Ziel ist, einen Ausdruck zu finden, der auch für eine dynamische Triangulierung (also veränderliche Kantenlängen) gültig ist, darf dieser nur die reinen Kantenlängen l_{ij} enthalten. Das Skalarprodukt zweier Vektoren hängt aber zusätzlich von den Winkeln zwischen ihnen ab und eignet sich daher nicht zur Beschreibung. Deshalb muss die Größe $\vec{l}_{01}\vec{l}_{02}$, die hier beispielhaft verwendet wurde, umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \vec{l}_{12} &= \vec{l}_{02} - \vec{l}_{01} \\ \Leftrightarrow l_{12}^2 &= l_{02}^2 + l_{01}^2 - 2\vec{l}_{01}\vec{l}_{02} \\ \Leftrightarrow \vec{l}_{01}\vec{l}_{02} &= \frac{1}{2} (l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dies kann analog mit allen auftretenden Termen dieser Form durchgeführt werden. Als Ergebnis enthält man eine Metrik, die nur quadratische Einträge enthält:

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} l_{01}^2 & \frac{1}{2} (l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) & \frac{1}{2} (l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2) \\ \frac{1}{2} (l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) & l_{02}^2 & \frac{1}{2} (l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) \\ \frac{1}{2} (l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2) & \frac{1}{2} (l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) & l_{03}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Diese Metrik ist Ausgangspunkt für die Formulierung der in Kapitel 3.4. gefundenen Wirkung $S_{\text{EH},0} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}^{ab} + \frac{1}{4} (\dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab})^2 + \tilde{R} - 2\Lambda \right) \sqrt{-\gamma} d^4x$ in Abhängigkeit von den Kantenlängen der gewählten Triangulierung. Dafür werden noch die zeit-

liche Ableitung der Metrik $\dot{\gamma}_{ab}$, die Inverse der Metrik $\gamma^{ab} = \gamma_{ab}^{-1}$ und deren Ableitung $\dot{\gamma}^{ab}$ benötigt^{5.1}.

Die inverse Matrix zur Metrik γ_{ab} erhält man mit folgender Relation:

$$\gamma^{ab} = \gamma_{ab}^{-1} = \frac{1}{\det(\gamma_{ab})} \text{adj}(\gamma_{ab}). \quad (5.9)$$

Die Adjunkte $\text{adj}(\gamma_{ab})$ wird für die bessere Lesbarkeit in drei Spaltenvektoren aufgeteilt:

$$\text{adj}(\gamma_{a1}) = \begin{pmatrix} l_{02}^2 l_{03}^2 - \frac{1}{4}(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)^2 \\ \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)l_{03}^2 \\ \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)l_{02}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

$$\text{adj}(\gamma_{a2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)l_{03}^2 \\ l_{01}^2 l_{03}^2 - \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)^2 \\ \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) - \frac{1}{2}(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)l_{01}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

sowie

$$\text{adj}(\gamma_{a3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)l_{02}^2 \\ \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) - \frac{1}{2}(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)l_{01}^2 \\ l_{01}^2 l_{02}^2 - \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)^2 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Für die Determinante $\det(\gamma_{ab})$ findet man den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \det(\gamma_{ab}) &= l_{01}^2 l_{02}^2 l_{03}^2 - \frac{1}{4}l_{01}^2(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}l_{02}^2(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)^2 - \frac{1}{4}l_{03}^2(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Für $\dot{\gamma}_{ab}$ werden die einzelnen Einträge nach der Zeit abgeleitet:

$$\dot{\gamma}_{ab} = \begin{pmatrix} 2l_{01}\dot{l}_{01} & l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12} & l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13} \\ l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12} & 2l_{02}\dot{l}_{02} & l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23} \\ l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13} & l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23} & 2l_{03}\dot{l}_{03} \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

^{5.1}Der in der Wirkung auftretende Summand $\tilde{R}$ wird hier nicht diskretisiert. Der entsprechende Ausdruck dafür kann in [16] gefunden werden.

Die Ableitung der inversen Metrik γ^{ab} kann mit der Quotientenregel ermittelt werden. Für jeden Eintrag in der Ableitung ergibt sich die gleiche Struktur (hierbei werden die zeitlichen Ableitungen mit adj' sowie det' gekennzeichnet):

$$\dot{\gamma}^{ab} = \frac{\text{adj}'(\gamma_{ab}) \cdot \text{det}(\gamma_{ab}) - \text{adj}(\gamma_{ab}) \cdot \text{det}'(\gamma_{ab})}{[\text{det}(\gamma_{ab})]^2}. \quad (5.15)$$

Die Ableitungen $\text{adj}'(\gamma_{ab})$ der einzelnen Adjunkten-Einträge sind die folgenden Terme:

$$\begin{aligned} \text{adj}'(\gamma_{11}) &= 2l_{02}l_{03}(\dot{l}_{02}l_{03} + l_{02}\dot{l}_{03}) \\ &\quad - (l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)(\dot{l}_{02}l_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23}), \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \text{adj}'(\gamma_{12}) &= \frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13})(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23})(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2) \\ &\quad - (l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12})l_{03}^2 \\ &\quad - (l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)l_{03}\dot{l}_{03} \\ &= \text{adj}'(\gamma_{21}), \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \text{adj}'(\gamma_{13}) &= \frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12})(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23})(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) \\ &\quad - (l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13})l_{02}^2 \\ &\quad - (l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)l_{02}\dot{l}_{02} \\ &= \text{adj}'(\gamma_{31}), \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \text{adj}'(\gamma_{22}) &= 2l_{01}l_{03}(\dot{l}_{01}l_{03} + l_{01}\dot{l}_{03}) \\ &\quad - (l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(\dot{l}_{01}l_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13}), \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned}
 \text{adj}'(\gamma_{23}) &= \frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13})(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) \\
 &\quad + \frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12})(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2) \\
 &\quad - (l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23})l_{01}^2 \\
 &\quad - (l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)l_{01}\dot{l}_{01} \\
 &= \text{adj}'(\gamma_{32}),
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}
 \text{adj}'(\gamma_{33}) &= 2l_{01}l_{02}(\dot{l}_{01}l_{02} + l_{01}\dot{l}_{02}) \\
 &\quad - (l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12}).
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Die Ableitung der Determinante $\det'(\gamma_{ab})$ liefert den folgenden Term:

$$\begin{aligned}
 \det'(\gamma_{ab}) &= 2l_{01}l_{02}l_{03}(\dot{l}_{01}l_{02}l_{03} + l_{01}\dot{l}_{02}l_{03} + l_{01}l_{02}\dot{l}_{03}) \\
 &\quad - (l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)\left[\frac{1}{2}l_{01}\dot{l}_{01}(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) + l_{01}^2 \cdot (l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23})\right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12})\right] \\
 &\quad - (l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)\left[\frac{1}{2}l_{02}\dot{l}_{02}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2) + l_{02}^2 \cdot (l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13})\right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)(l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23})\right] \\
 &\quad - (l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)\left[\frac{1}{2}l_{03}\dot{l}_{03}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) + l_{03}^2 \cdot (l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12})\right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13})\right].
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Um nun die gewünschten Terme aus der Wirkung zu erhalten, müssen die Matrizen schließlich miteinander multipliziert werden. Die expliziten Ausdrücke für $\dot{\gamma}_{ab}\dot{\gamma}^{ab}$ und $(\dot{\gamma}_{ab}\gamma^{ab})^2$ befinden sich im Anhang A.2.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, die Einstein-Hilbert-Wirkung für eine spezielle Klasse von Metriken, nämlich solche mit einem Linienelement

$$ds^2 = dt^2 + \gamma_{ij}(\vec{x}, t) dx^i dx^j,$$

zu berechnen und anschließend für die Behandlung im Rahmen des Regge-Kalküls zu diskretisieren. Das Ergebnis

$$S_{\text{EH},0} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{1}{4} \dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}^{ab} + \frac{1}{4} \left(\dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab} \right)^2 + \tilde{R} - 2\Lambda \right) \sqrt{-\gamma} d^4x$$

weist Symmetrie unter räumlichen Transformationen auf und wurde in zwei Spezialfällen auf seine Gültigkeit überprüft. Im Falle des statischen Universums mit $\dot{\gamma} = 0$ folgt ein Ausdruck, der in der Arbeit von [16] bezüglich seiner Einbettung in den Regge-Kalkül untersucht wird. Wird die Robertson-Walker-Metrik in die Wirkung eingesetzt, ergeben sich - wie erwartet - die Friedmann-Gleichungen.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigte sich mit der Frage, wie diese Wirkung in eine diskretisierte Form gebracht werden kann. Durch die vorgegebene Geometrie der Metrik bot es sich an, die Raumzeit in drei Raumdimensionen und eine (kontinuierliche) Zeit zu separieren. Die dreidimensionale Untermannigfaltigkeit wurde, analog zum Vorgehen im Regge-Kalkül, in einer mit Tetraedern triangulierten Form betrachtet. Mit einer geeigneten Wahl des Koordinatensystems lassen sich die Terme $\dot{\gamma}_{ab} \dot{\gamma}^{ab}$ und $\left(\dot{\gamma}_{ab} \gamma^{ab} \right)^2$ aus der errechneten Wirkung in Abhängigkeit der Kantenlängen der Tetraeder schreiben.

Der nächste Schritt wäre, den erzielten Ausdruck dazu zu nutzen, die zeitliche Entwicklung der betrachteten Raumzeit zu studieren. Dazu könnten numerische Analysen benutzt werden, da zeitliche Ableitungen der Kantenlängen in die erhaltenen Terme eingehen.

A. Anhang

A.1. Nachweis der Symmetrie zwischen R_{i0} und R_{0i}

Vergleicht man die Terme aus (3.38) mit denen in (3.39), so stellt man fest, dass sich drei Summanden bereits gleichen, wenn in (3.39) anstelle des Index j der Index i geschrieben wird. Diese sind

- $\frac{1}{2}\partial_k(\gamma^{ka}\dot{\gamma}_{ia})$,
- $(\frac{1}{2}\gamma^{ba}\dot{\gamma}_{ia}) \cdot \tilde{\Gamma}_{bk}^k$ und
- $\tilde{\Gamma}_{ik}^b(\frac{1}{2}\gamma^{ka}\dot{\gamma}_{ba})$.

Es soll nun gezeigt werden, dass $\dot{\tilde{\Gamma}}_{ki}^k$ mit $\frac{1}{2}\partial_j(\gamma^{ka}\dot{\gamma}_{ka})$ identisch ist. Dazu setzt man in die Definition der Christoffel-Symbole ein und formt gemäß der Produktregel um:

$$\dot{\tilde{\Gamma}}_{ki}^k = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\gamma^{ka}}{2} (\partial_k \gamma_{ia} + \partial_i \gamma_{ka} - \partial_a \gamma_{ki}) \right) \quad (\text{A.1})$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\gamma}^{ka} \partial_k \gamma_{ia} + \gamma^{ka} \partial_k \dot{\gamma}_{ia} + \dot{\gamma}^{ka} \partial_i \gamma_{ka} + \gamma^{ka} \partial_i \dot{\gamma}_{ka} - \dot{\gamma}^{ka} \partial_a \gamma_{ki} - \gamma^{ka} \partial_a \dot{\gamma}_{ki}) \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\gamma}^{ka} \partial_i \gamma_{ka} + \gamma^{ka} \partial_i \dot{\gamma}_{ka}) \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{ka} \partial_i \gamma^{ka} + \gamma^{ka} \partial_i \dot{\gamma}_{ka}) \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{2} \partial_i (\gamma^{ka} \dot{\gamma}_{ka}). \quad (\text{A.5})$$

Dieser letzte Ausdruck entspricht genau dem gesuchten Term, wenn j durch den Index i ersetzt wird.

A.2. Die expliziten Werte der Einstein-Hilbert-Wirkung im diskretisierten Fall

Die expliziten Werte für die Terme in der Einstein-Hilbert-Wirkung sind im Folgenden angegeben.

Für $\dot{\gamma}_{ab}\dot{\gamma}^{ab}$ erhält man:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{ab}\dot{\gamma}^{ab} &= \dot{\gamma}_{11}\dot{\gamma}^{11} + \dot{\gamma}_{12}\dot{\gamma}^{12} + \dot{\gamma}_{13}\dot{\gamma}^{13} \\ &\quad + \dot{\gamma}_{21}\dot{\gamma}^{21} + \dot{\gamma}_{22}\dot{\gamma}^{22} + \dot{\gamma}_{23}\dot{\gamma}^{23} \\ &\quad + \dot{\gamma}_{31}\dot{\gamma}^{31} + \dot{\gamma}_{32}\dot{\gamma}^{32} + \dot{\gamma}_{33}\dot{\gamma}^{33}\end{aligned}\tag{A.6}$$

mit

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{11}\dot{\gamma}^{11} &= 2l_{01}\dot{l}_{01} \cdot \left(2l_{02}l_{03}(\dot{l}_{02}l_{03} + l_{02}\dot{l}_{03}) \cdot \det(\gamma_{ab}) \right. \\ &\quad \left. - \left(l_{02}^2 l_{03}^2 - \frac{1}{4}(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)^2 \right) \det'(\gamma_{ab}) \right)\end{aligned}\tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{12}\dot{\gamma}^{12} &= l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13})(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23})(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12})l_{03}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)l_{03}\dot{l}_{03} \right) \det(\gamma_{ab}) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)l_{03}^2 \right) \det'(\gamma_{ab}) \right)\end{aligned}\tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{13}\dot{\gamma}^{13} &= l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12})(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23})(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13})l_{02}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)l_{02}\dot{l}_{02} \right) \det(\gamma_{ab}) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)l_{02}^2 \right) \det'(\gamma_{ab}) \right)\end{aligned}\tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_{21}\dot{\gamma}^{21} &= l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13})(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23})(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12})l_{03}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)l_{03}\dot{l}_{03} \right) \det(\gamma_{ab}) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)l_{03}^2 \right) \det'(\gamma_{ab}) \right)\end{aligned}\tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{22}\dot{\gamma}^{22} = & 2l_{02}\dot{l}_{02} \cdot \left(\left(2l_{01}l_{03}(\dot{l}_{01}l_{03} + l_{01}\dot{l}_{03}) \right. \right. \\
 & - (l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13}) \Big) \det(\gamma_{ab}) \\
 & \left. - \left(l_{01}^2 l_{03}^2 - \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)^2 \right) \det'(\gamma_{ab}) \right) \quad (\text{A.11})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{23}\dot{\gamma}^{23} = & l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13})(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12})(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2) \\
 & - (l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23})l_{01}^2 \\
 & - (l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)l_{01}\dot{l}_{01} \Big) \det(\gamma_{ab}) \\
 & \left. - \left(\frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) - \frac{1}{2}(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)l_{01}^2 \right) \det'(\gamma_{ab}) \right) \quad (\text{A.12})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{31}\dot{\gamma}^{31} = & l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12})(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2}(l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23})(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) \\
 & - (l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13})l_{02}^2 \\
 & - (l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)l_{02}\dot{l}_{02} \Big) \det(\gamma_{ab}) \\
 & \left. - \left(\frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)l_{02}^2 \right) \det'(\gamma_{ab}) \right) \quad (\text{A.13})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{32}\dot{\gamma}^{32} = & l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13})(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2}(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12})(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2) \\
 & - (l_{02}\dot{l}_{02} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{23}\dot{l}_{23})l_{01}^2 \\
 & - (l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)l_{01}\dot{l}_{01} \Big) \det(\gamma_{ab}) \\
 & \left. - \left(\frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) - \frac{1}{2}(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)l_{01}^2 \right) \det'(\gamma_{ab}) \right) \quad (\text{A.14})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{33}\dot{\gamma}^{33} = & 2l_{03}\dot{l}_{03} \cdot \left(\left(2l_{01}l_{02}(\dot{l}_{01}l_{02} + l_{01}\dot{l}_{02}) \right. \right. \\
 & - (l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)(l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12}) \Big) \det(\gamma_{ab}) \\
 & \left. - \left(l_{01}^2 l_{02}^2 - \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)^2 \right) \det'(\gamma_{ab}) \right) \quad (\text{A.15})
 \end{aligned}$$

Auch für $(\dot{\gamma}_{ab}\gamma^{ab})^2$ ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 (\dot{\gamma}_{ab}\gamma^{ab})^2 &= \left(\dot{\gamma}_{11}\gamma^{11} + \dot{\gamma}_{12}\gamma^{12} + \dot{\gamma}_{13}\gamma^{13} \right. \\
 &\quad + \dot{\gamma}_{21}\gamma^{21} + \dot{\gamma}_{22}\gamma^{22} + \dot{\gamma}_{23}\gamma^{23} \\
 &\quad \left. + \dot{\gamma}_{31}\gamma^{31} + \dot{\gamma}_{32}\gamma^{32} + \dot{\gamma}_{33}\gamma^{33} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{(\det(\gamma_{ab}))^2} \cdot \left(\dot{\gamma}_{11}\text{adj}(\gamma_{11}) + \dot{\gamma}_{12}\text{adj}(\gamma_{12}) + \dot{\gamma}_{13}\text{adj}(\gamma_{13}) \right. \\
 &\quad + \dot{\gamma}_{21}\text{adj}(\gamma_{21}) + \dot{\gamma}_{22}\text{adj}(\gamma_{22}) + \dot{\gamma}_{23}\text{adj}(\gamma_{23}) \\
 &\quad \left. + \dot{\gamma}_{31}\text{adj}(\gamma_{31}) + \dot{\gamma}_{32}\text{adj}(\gamma_{32}) + \dot{\gamma}_{33}\text{adj}(\gamma_{33}) \right)^2 \tag{A.16}
 \end{aligned}$$

mit

$$\dot{\gamma}_{11} \cdot \text{adj}(\gamma_{11}) = 2l_{01}\dot{l}_{01} \cdot l_{02}^2 l_{03}^2 - \frac{1}{4}(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)^2 \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{12} \cdot \text{adj}(\gamma_{12}) &= l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)l_{03}^2 \tag{A.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{13} \cdot \text{adj}(\gamma_{13}) &= l_{01}\dot{l}_{01} + l_{03}\dot{l}_{03} - l_{13}\dot{l}_{13} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)l_{02}^2 \tag{A.19}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{21} \cdot \text{adj}(\gamma_{21}) &= l_{01}\dot{l}_{01} + l_{02}\dot{l}_{02} - l_{12}\dot{l}_{12} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)l_{03}^2 \tag{A.20}
 \end{aligned}$$

$$\dot{\gamma}_{22} \cdot \text{adj}(\gamma_{22}) = 2l_{02}\dot{l}_{02} \cdot l_{01}^2 l_{03}^2 - \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)^2 \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{23} \cdot \text{adj}(\gamma_{23}) &= l_{02} \dot{l}_{02} + l_{03} \dot{l}_{03} - l_{23} \dot{l}_{23} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)l_{01}^2
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{31} \cdot \text{adj}(\gamma_{31}) &= l_{01} \dot{l}_{01} + l_{03} \dot{l}_{03} - l_{13} \dot{l}_{13} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)l_{02}^2
 \end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{32} \cdot \text{adj}(\gamma_{32}) &= l_{02} \dot{l}_{02} + l_{03} \dot{l}_{03} - l_{23} \dot{l}_{23} \\
 &\quad \cdot \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{03}^2 - l_{13}^2)(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(l_{02}^2 + l_{03}^2 - l_{23}^2)l_{01}^2
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\dot{\gamma}_{33} \cdot \text{adj}(\gamma_{33}) = 2l_{03} \dot{l}_{03} \cdot l_{01}^2 l_{02}^2 - \frac{1}{4}(l_{01}^2 + l_{02}^2 - l_{12}^2)^2 \tag{A.25}$$

B. Literaturverzeichnis

- [1] Thorsten Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, 4. Auflage, 2003.
- [2] Charles W. Misner, Kip S. Thorne , John Archibald Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman and company, 1973.
- [3] Eckhard Rebhan. *Theoretische Physik: Relativitätstheorie und Kosmologie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1. Auflage, 2012.
- [4] Cornelius C. Noack. Tensoranalysis - eine Einführung, 2001. URL <http://www.itp.uni-bremen.de/noack/tensors.pdf>.
- [5] Rainer Oloff. *Geometrie der Raumzeit*. Vieweg + Teubner Verlag, 5. Auflage, 2010.
- [6] Hubert Goenner. *Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1. Auflage, 1996.
- [7] U. E. Schröder. *Gravitation. Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie*. Verlag Harri Deutsch, 2011.
- [8] Ray d’Inverno. *Einführung in die Relativitätstheorie*. WILEY-VCH Verlag, 2. Auflage, 2009.
- [9] R. U. Sexl, H. K. Urbantke. *Gravitation und Kosmologie*. B.I.-Wissenschaftsverlag, 1. Auflage, 1975.
- [10] Planck Collaboration. Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. *Astronomy and Astrophysics*, 2013. doi: arXiv:1303.5062 [astro-ph.CO].
- [11] R. Friedberg , T. D. Lee. Derivation of Regge’s action from Einstein’s theory of gravitation. *Nuclear Physics*, B242:145–166, 1984.
- [12] T. Regge. General relativity without coordinates. *Il nuovo cimento*, XIX:558–571, 1961.

- [13] R. Stöcker, H. Zieschang. *Algebraische Topologie*. Teubner Verlag, 1994.
- [14] L. D. Landau, E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der Theoretischen Physik II: Klassische Feldtheorie*. Akademie Verlag Berlin, 4. Auflage, 1967.
- [15] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 2 - Analytische Mechanik*. Springer-Verlag, 7. Auflage, 2006.
- [16] A. Goertsches. Die Regge-Wirkung eines sphärischen Friedmann-Universums, 2010. URL <http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/Arbeiten/goertsches.pdf>.

C. Danksagung

Ich möchte an dieser Stelle meinen herzlichen Dank an alle aussprechen, die dazu beigetragen haben, dass ich mein Studium im Allgemeinen und diese Diplomarbeit im Speziellen erfolgreich abschließen konnte. Ich danke Prof. Dr. Gernot Münster vielmals für die hilf- und lehrreichen Gespräche und für seine Geduld und Zuversicht. Bedanken möchte ich mich auch bei meinem Zweitkorrektor Dr. Jochen Heitger. Michael Holl, Martin Kohn und Sven Musberg danke ich für die wertvollen Korrekturen und Anmerkungen, die so manche Ungereimtheit eliminiert haben - ihr seid großartig! Neben all meinen Freunden, die mich in dieser Zeit unterstützt haben, möchte ich besonders meiner Familie danken, die nie den Glauben an mich verloren und immer hinter mir gestanden hat. Auch meinem Freund möchte ich an dieser Stelle noch einmal meinen großen Dank für seine Ermutigungen und seinen Beistand aussprechen.

Plagiatserklärung des Studierenden

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über die räumlich diskretisierte Einstein-Hilbert-Wirkung in synchronisierten Bezugssystemen selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken - auch elektronischen Medien - dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Münster, 26. Juli 2013

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Münster, 26. Juli 2013