

Silke Luckmann

Supersymmetrische Feldtheorien
auf dem Gitter

2001

Theoretische Physik

Supersymmetrische Feldtheorien auf dem Gitter

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von
Silke Luckmann
aus Hiltrup
– 2001 –

Dekan:

Prof. Dr. W. Lange

Erster Gutachter:

Prof. Dr. G. Münster

Zweiter Gutachter:

Prof. Dr. M. Stingl

Tag der mündlichen Prüfungen:

Tag der Promotion:

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Theorie der Supersymmetrie	9
1.1 Gebrochene Supersymmetrie	9
1.2 Poincaré-Superalgebra	10
1.2.1 Graduierung	10
1.2.2 Weyl-Spinoren	12
1.3 Supersymmetrisches Teilchenspektrum	12
1.3.1 Casimir-Operatoren	12
1.3.2 Das chirale Supermultiplett	14
1.3.3 Das Vektor-Supermultiplett	14
1.4 Darstellung im Raum der Superfelder	14
1.4.1 Chirale Superfelder	17
1.4.2 Vektor-Superfelder	17
1.5 Supersymmetrische Lagrangedichten	18
1.6 Nicht-abelsche Eichtheorie: Yang-Mills-Theorie	19
1.7 $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie	20
1.7.1 Supersymmetrische Transformationen	21
1.7.2 Massenmultipletts	22
1.8 Experimentelle Beobachtungen	23
2 Supersymmetrische Feldtheorien auf dem Gitter	27
2.1 Der Gitterformalismus	28
2.2 Gitterreichtheorie	30
2.3 NIELSEN-NINOMIYA-Theorem	32
2.4 Konstruktion der Gitterwirkung für Majorana-Fermionen	34
3 Grassmann-Algebra	37
3.1 Integration über Grassmann-Variablen	38
3.2 Majorana-Fermionen	39
3.3 Integrale über Majorana-Fermionen	40
3.4 Erwartungswerte für Majorana-Fermion-Felder	42

4 Einige Aspekte der Gruppentheorie	45
4.1 Abelsche und nicht-abelsche Gruppen	45
4.1.1 Morphismen und Darstellungen	45
4.1.2 Liegruppen und Liealgebra	47
4.2 Rotationsgruppe $SO(3)$	47
4.2.1 Darstellungen der Gruppe $SO(3)$	47
4.3 $SU(2)$	49
4.4 Gruppenintegration	50
4.5 Gruppen-Charakter-Funktion	61
4.5.1 Integrationsregeln	62
5 Hoppingparameter-Entwicklung	65
5.1 Supersymmetrisches Modell ohne Farbe	67
5.1.1 Ordnung K^0	68
5.1.2 Ordnung K^2	69
5.1.3 Ordnung K^4	70
5.1.4 Berechnung der freien Energie	72
5.1.5 Ordnung K^6	72
5.2 Supersymmetrisches Modell mit Farbe	76
5.2.1 Ordnung K^0	77
5.2.2 Ordnung K^2	78
5.2.3 Der total antisymmetrische Tensor vierter Stufe	79
5.2.4 Ordnung K^4	80
5.2.5 Ordnung K^6	84
5.2.6 Ordnung K^8	88
5.3 Graphen mit von null verschiedenem β	92
5.3.1 Ordnung K^4, β^2	92
5.3.2 Ordnung K^4, β^4	94
5.3.3 Ordnung K^6, β^4	95
5.3.4 Regeln zur Berechnung von Graphen mit einzelnen Kanten	97
5.3.5 Ordnung K^6, β^6	97
5.3.6 Ordnung K^8, β^2	101
5.3.7 Ordnung K^8, β^4	102
5.3.8 Berechnung der freien Energie	107
5.3.9 Ordnung K^8, β^6	108
5.3.10 Ordnung K^8, β^8	111
6 Massenbestimmung	115
6.1 Korrelationsfunktionen für kleine T -Distanzen	116
6.1.1 Graph 1	116
6.1.2 Graph 2	125
6.2 Analytische Ergänzungen	127
6.3 Numerischer Weg	130

6.4	Gluino-Glue-Masse	135
7	Monte-Carlo-Methoden in der Physik	143
7.1	Multi-bosonischer Algorithmus mit Korrekturen	145
7.2	Update der Felder	146
7.3	Meßkorrekturen	148
7.4	Präkonditionierung	148
8	String-Spannung	151
8.1	Statisches Potential	151
8.1.1	Verbesserung des Grundzustandes	152
8.2	Bestimmung der String-Spannung	154
8.3	Creutz-Ratios	154
8.4	Potential-Fit	155
8.5	Zwei-Fit-Verfahren	157
8.6	Gitterprobleme	160
8.6.1	Finite-Size-Effekte	160
8.6.2	Gittereffekte	161
8.7	Smearing	161
8.7.1	Teper-Blocking	161
8.7.2	APE-Smeering	163
8.8	Auswertung	163
9	Massenbestimmung des 0^{-+}-Glueballs	169
9.1	Leichte Grundzustandsmassen	169
9.2	Glueball-Zustände	169
9.3	Massenbestimmung auf dem Gitter	171
9.4	Operator für den 0^{-+} -Glueball	173
9.5	Fehlerbestimmung von sekundären Größen	173
9.5.1	Jackknife-Analyse	175
9.6	Auswertung	176
10	Zusammenfassung und Ausblick	185
A	Majorana-Fermionen	189
A.1	Ableitungen von Majorana-Spinoren	189
A.2	γ -Matrizen	190
A.3	Fermionmatrix	190
A.4	Entwicklung der Exponentialreihe	191
B	Korrekturen zur Massenbestimmung	193
C	Lineare Algebra	195

D Numerische Ergebnisse für die String-Spannung	197
E Resultate für den pseudoskalaren 0^{-+} -Glueball	199
Literaturverzeichnis	201

Einleitung

Es ist seit jeher ein Traum der Menschheit, mit einigen wenigen einfachen Gesetzen die Natur zu beschreiben und zu erklären, warum die Dinge gerade so sind wie sie sind. Am leichtesten läßt sich dieser Traum verwirklichen, wenn man die im Universum vorkommende Materie untersucht.

Schon die Griechen interessierten sich für den Aufbau des Universums. Sie nahmen an, daß dieses aus winzigen, unzerteilbaren Teilchen, den sogenannten Atomen¹, besteht. Diese Vorstellung hat auch heute noch, nach zweitausend Jahren, nicht an Bedeutung verloren. Allerdings entsprechen die Atome der Griechen heute den bekannten Elementen, die sich in einen Atomkern mit einer Elektronenhülle zerlegen lassen. Der Kern wiederum setzt sich zusammen aus Protonen, die eine positive Elementarladung tragen und Neutronen die, wie der Name schon sagt, keine Ladung tragen. Aber auch das ist noch nicht alles. Obwohl man lange Zeit sicher war, damit nun die wirklichen Fundamentalteilchen gefunden zu haben, zeigte sich 1968, daß auch die Protonen und Neutronen wieder aus je drei Quarks bestehen. Ob diese Quarks ebenfalls eine Substruktur haben, kann zur Zeit weder ausgeschlossen, noch bestätigt werden. Einige Experimente scheinen auf eine Substruktur hinzuweisen, doch bis jetzt ist noch kein signifikantes Signal aufgetreten. Zusätzlich zu den massebehafteten Teilchen gibt es natürlich auch noch die masselosen Teilchen, wie zum Beispiel das *Photon* (Vermittler der elektromagnetischen Kraft), das *Graviton* (Vermittler der Gravitationskraft) und das Neutrino. Des Weiteren finden sich noch einige kurzlebige Teilchen in der kosmischen Höhenstrahlung. Die großen Beschleuniger können zudem noch etliche Teilchen mit noch kürzeren Lebensdauern erzeugen.

All diese verschiedenen Elementarteilchen unterliegen offenbar nur vier verschiedenen Wechselwirkungen. Zum einen gibt es die *Gravitationskraft*, die auf alle Teilchen wirkt und unter anderem verantwortlich dafür ist, daß alle Gegenstände, die wir fallen lassen, zu Boden gehen. Die *elektromagnetische Kraft* wirkt auf alle Teilchen, die eine Ladung besitzen, und wirkt so zum Beispiel zwischen Elektronen und Atomkernen. Damit bestimmt sie die chemischen und physikalischen Eigenschaften von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen. Sowohl die Gravitationskraft wie auch die elektromagnetische Kraft haben, verglichen mit den beiden Kernkräften, eine große Reichweite (vgl. Tabelle (2)). Die *starke Kraft* hat eine Reichweite von ca. 10^{-15} Metern und ist im Atomkern verantwortlich dafür, daß Protonen und Neutronen zusammen bleiben. Zu guter Letzt gibt es noch die *schwache*

¹Das Wort Atom leitet sich von dem griechischen Wort *atomos* ab und bedeutet *unteilbar*.

Teilchenzoo

Teilchenart	Teilchen	Ladung	Masse in MeV/c^2	Lebensdauer in s
Lepton (Spin 1/2)	e	-1	0,5109906	∞
Lepton (Spin 1/2)	ν_e	0	< 0,0000051	∞
Lepton (Spin 1/2)	μ	-1	105,658389	$2,197 \cdot 10^{-6}$
Lepton (Spin 1/2)	ν_μ	0	< 0,27	∞
Lepton (Spin 1/2)	τ	-1	1777,1	$2,956 \cdot 10^{-13}$
Lepton (Spin 1/2)	ν_τ	0	< 31	∞
Eichboson (Spin 1)	Gluon (g)	0	0	∞
Eichboson (Spin 1)	Photon (γ)	0	0	∞
Eichboson (Spin 1)	W^\pm	± 1	81,800	80,22
Eichboson (Spin 1)	Z^0	0	92,600	91,187
Baryon (Spin 1/2)	p	+1	938,27231	∞
Baryon (Spin 1/2)	n	0	939,56563	887
Baryon (Spin 1/2)	Λ	0	1115,684	$2,632 \cdot 10^{-10}$
Baryon (Spin 1/2)	Σ^+	+1	1189,37	$0,799 \cdot 10^{-10}$
Baryon (Spin 1/2)	Σ^0	0	1192,55	$7,4 \cdot 10^{-20}$
Baryon (Spin 1/2)	Σ^-	-1	1197,436	$1,479 \cdot 10^{-10}$
Mesonen (Spin 0)	π^\pm	± 1	139,56995	$2,603 \cdot 10^{-8}$
Mesonen (Spin 0)	π^0	0	134,9764	$8,4 \cdot 10^{-17}$
Mesonen (Spin 0)	K^\pm	± 1	493,677	$1,2371 \cdot 10^{-8}$

Tabelle 1: Einige Elementarteilchen mit ihren physikalischen Eigenschaften.

Kraft mit einer Reichweite unter 10^{-17} Metern. Diese ist zum Beispiel an dem β -Zerfall beteiligt, der Grundlage der Kernfusion in der Sonne ist.

Will man versuchen, die Welt zu verstehen, so läuft dies zwangsläufig auf eine Art der Vereinheitlichung heraus. Letztendlich möchte man eine Theorie (GUT) haben, die alle Naturgesetze erklären kann. Das bedeutet, daß es eine ursprüngliche Kraft gibt, die sich in die vier beobachtbaren Kräfte aufsplittet.

Da es in dieser Arbeit um Quantenfeldtheorie geht, sollen hierzu ein paar erklärende Worte geliefert werden. Die Quantenfeldtheorie entstand auf natürliche Weise, als man versuchte, die spezielle Relativitätstheorie mit der Quantenmechanik zu verbinden. Nach der Einsteinschen Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit dafür verantwortlich, daß sich kein Signal, und somit auch keine Kraft, schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten kann. Wird also auf ein Teilchen eine Kraft ausgeübt (z. B. durch einen Stoß), so bedingt die Relativitätstheorie eine Verzögerung. Gleichwohl müssen natürlich die klassischen Erhaltungssätze wie Energie- und Impulserhaltung ihre Gültigkeit beibehalten. Die Vorstellung der Physiker ist nun, daß das angestoßene Teilchen ein Feld um

sich herum hervorruft, das den Impuls und die Energie des Stoßes aufnimmt und durch den Raum auf das benachbarte Teilchen überträgt. Der Unterschied der klassischen Mechanik zur Quantenmechanik besteht darin, daß Größen wie Energie und Impuls in der Quantenmechanik nur in diskreten Quanten auftreten können. Diese werden in der Quantenfeldtheorie mit elementaren Teilchen identifiziert. Somit erklärt die Quantenfeldtheorie die Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen durch den Austausch von virtuellen², elementaren Botenteilchen.

Die Reichweiten der vier Grundkräfte, die in Tabelle (2) angegeben sind, ergeben sich aus der Orts-Impuls-Unschärferelation. Daraus folgt, daß die Reichweite einer Kraft umgekehrt proportional zur Masse des Botenteilchens ist. Da das Photon keine Masse besitzt ist die Reichweite der elektromagnetischen Kraft proportional zu $\frac{1}{0} \rightarrow \infty$.

	Gravitation	Elektro-Magnetismus	starke Kraft	schwache Kraft
Reichweite	∞	∞	$10^{-15} m$	$< 10^{-17} m$
Stärke	$G_{\text{Newton}} = 5,9 \cdot 10^{-39}$	$e^2 = \frac{1}{137}$	$g^2 \approx 1$	$G_{\text{Fermi}} = 1,02 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 2: Reichweiten der vier verschiedenen Grundkräfte mit ihren Stärken, die durch dimensionslose Zahlen charakterisiert werden, die jeweils auf die gängigen Beobachtungsbedingungen abgestimmt sind.

Schon immer haben Symmetrien einen großen Einfluß auf die Entwicklung physikalischer Theorien gehabt. Viele Feldgleichungen in der Quantenfeldtheorie werden mittels Symmetriprinzipien aufgestellt. Dies ist eng mit dem sogenannten NOETHER-THEOREM verbunden. Danach existiert zu jeder kontinuierlichen Symmetrie einer Feldtheorie eine erhaltene Größe. Am bekanntesten sind wohl die räumlichen bzw. geometrischen Symmetrien. Allgemein werden Symmetrien in zwei Gruppen unterteilt: die globalen und die lokalen Symmetrien. Bei globalen Symmetrien muß eine Symmetrie-Transformation gleichzeitig überall wirken. Ist eine Eichtheorie invariant unter einer lokalen Symmetrie-Transformation, so bleibt diese auch dann unverändert, wenn an unterschiedlichen Orten und zu unterschiedlichen Zeiten verschiedene Transformationen durchgeführt werden.

Inspiriert durch die Eleganz der elektromagnetischen Theorie und der Gravitationstheorie, die durch die lokale Symmetrie verursacht wird, versuchten C. N. YANG und R. L. MILLS (und unabhängig von ihnen auch R. SHAW) 1954 eine Eichtheorie für die starke Wechselwirkung aufzustellen. Dabei gingen sie von einer globalen Symmetrie, der Isospin-Symmetrie, aus und versuchten, daraus eine lokale Theorie zu entwickeln. Die Isospin-Symmetrie bedeutet, daß man alle Protonen im Universum durch Neutronen ersetzt und

²Virtuell, weil die Wechselwirkungsteilchen nur sehr kurzlebig sind.

alle Neutronen durch Protonen, ohne daß sich die starke Wechselwirkung ändert. Dabei setzt man voraus, daß die positive Ladung des Protons für diese Betrachtung ausgeschaltet ist. Sie ruft nur eine geringe Abweichung von der exakten Isospin-Symmetrie hervor. Durch die Einführung von mehreren Vektorfeldern läßt sich aus der globalen Symmetrie eine lokale Symmetrie machen. Dies geschieht in Anlehnung an das elektrische Feld. Dabei treten neben Feldern, die das Photon beschreiben, auch Felder auf, die das elektrische und magnetische Feld geladener Vektorteilchen beschreiben.

In der Yang-Mills-Theorie entspricht die lokale Symmetrie-Transformation einer Drehung des Isospin-Vektors. Dabei ist jedoch bei mehreren Transformationen die Reihenfolge entscheidend. Man spricht daher von einer *nicht-abelschen* Eichtheorie, im Gegensatz zu einer *abelschen* Eichtheorie bei der die Reihenfolge der Transformationen beliebig ist.

	<i>Quarks</i>	<i>Leptonen</i>
1. Familie	<i>u</i> up	<i>e</i> Elektron
	<i>d</i> down	ν_e Elektron Neutrino
2. Familie	<i>c</i> charm	μ Myon
	<i>s</i> strange	ν_μ Myon Neutrino
3. Familie	<i>t</i> top	τ Tau
	<i>b</i> bottom	ν_τ Tau Neutrino

Tabelle 3: Übersicht über die drei Teilchenfamilien nach dem Standardmodell.

Ein großes Problem der Yang-Mills-Theorie in dieser Form ist, daß sie eine exakte Symmetrie des Isospins voraussagt. Demnach dürfte es keine Unterschiede zwischen Protonen und Neutronen geben, was aber bedingt durch die Protonladung nicht der Fall ist. Weit schwerwiegender sind die Konsequenzen, die sich aus einem masselosen geladenen Photon ergeben. Da ein solches Teilchen nicht existiert, hat man den geladenen Photonen eine Masse gegeben und damit die Reichweite der zugehörigen Felder eingeschränkt. Die Massen wurden entsprechend hoch gewählt, so daß die Reichweite nur sehr kurz ist. Die neutralen Yang-Mills-Felder hingegen haben eine große Reichweite. Damit konnte der Unterschied zwischen Proton und Neutron wieder erklärt werden: er muß in der Ladung der Teilchen bestehen. Durch die beschriebenen Veränderungen der Yang-Mills-Theorie ist die lokale Isospin-Symmetrie nicht mehr exakt erfüllt. Dies ist aber ein in der Natur häufig vorkommendes Phänomen.

Sämtliches Wissen über die Struktur der Materie wird gegenwärtig durch das sogenannte Standardmodell beschrieben. Dieses beschreibt die Elementarteilchen und drei der vier Kräfte. Obwohl es durch mehrere Experimente in vielen wichtigen Punkten bestätigt wurde, hat es erhebliche Mängel. So schließt das Standardmodell Einsteins allgemeine Relativitätstheorie nicht ein. Zudem ist es gegenwärtig ein absolutes Mysterium, warum

es zwei „unnötige“ extra Familien gibt (siehe Tabelle 3), wo doch zur Erklärung der im Universum typischerweise auftretenden Teilchen wie Protonen, Neutronen und Elektronen allein die erste Familie genügen würde. Passend dazu gibt es ein Zitat von ISAAC RABI: „Wer hat eigentlich das Myon bestellt?“

Das Higgs-Teilchen, das laut dem Higgs-Mechanismus dafür sorgt, daß die Teilchen ihre Masse erhalten, konnte bislang nicht experimentell nachgewiesen werden.

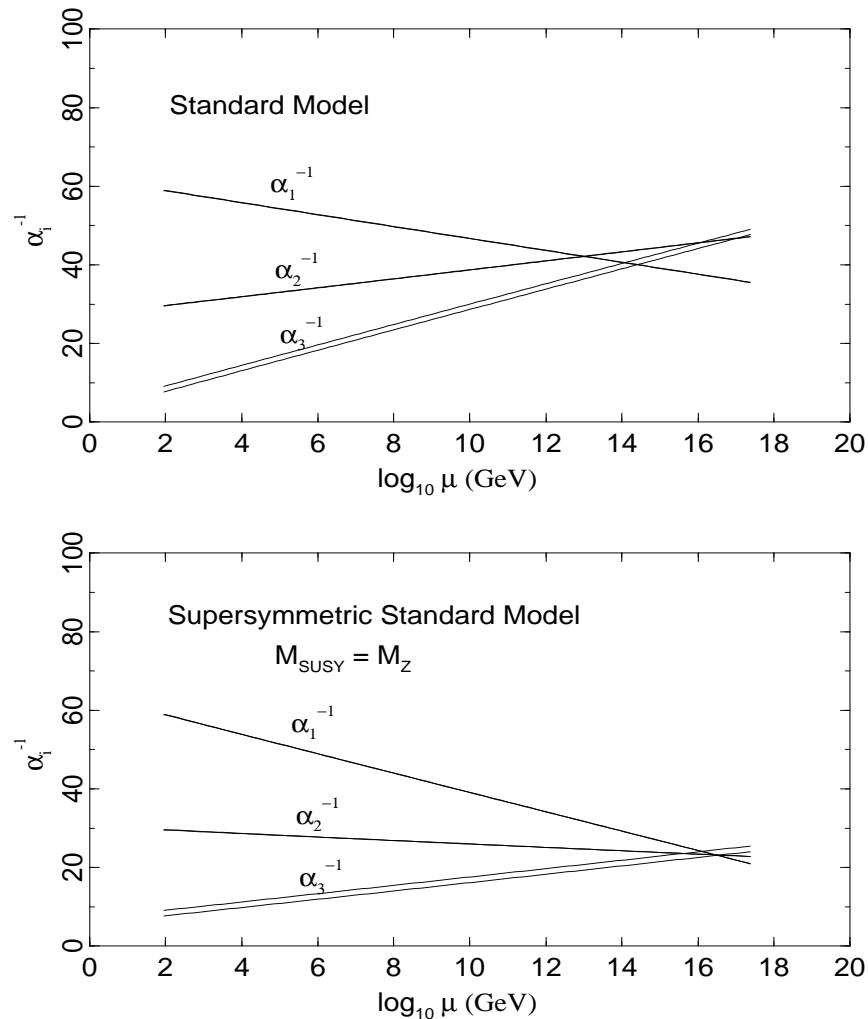


Abbildung 1: Laufende Kopplungen für das Standardmodell und das minimal supersymmetrische Standardmodell (MSSM) mit zwei Higgs Dubletts für $M_{\text{SUSY}} = M_Z$. M_Z bezeichnet die Masse des Z -Bosons [34].

In den allumfassenden Theorien löst die Supersymmetrie das sogenannte *Hierarchie-Problem*. Die drei Eichkopplungen des Standardmodells sind abhängig von der Energieskala, bei der sie gemessen werden. Man bezeichnet sie daher auch als laufende Kopp-

lungen. In den allumfassenden Theorien geht man davon aus, daß sich die drei Kopplungen bei höheren Energien schneiden werden. Rechnungen zeigen, daß dies beim Standardmodell nicht der Fall ist. Dadurch wird erneut bestätigt, daß das Standardmodell keine endgültige Theorie darstellt, sondern allenfalls als Niederenergie-Limes einer allumfassenden Theorie verstanden werden kann. Die Abbildung (1) skizziert den Verlauf der drei Eichkopplungen α_1 , α_2 und α_3 in Abhängigkeit von der Skala für das Standardmodell und für das minimale supersymmetrische Standardmodell. Es gibt noch eine Vielzahl an offenen Fragen, von denen hier nur ein paar aufgegriffen wurden.

Eine Verbesserung des Standardmodells bietet die Theorie der Supersymmetrie (SUSY). Diese stellt eine Beziehung zwischen Teilchen mit unterschiedlichen Spins her und vereint so Fermionen und Bosonen in Symmetrie-Multipletts. Ein Vorteil der lokalen Supersymmetrie ist die automatische Erfassung der Gravitation. Zudem reichen weniger Parameter zur Beschreibung der Elementarteilchen aus als beim Standardmodell. Auch wenn die Voraussagen weit von den experimentell beobachtbaren entfernt sind³, erscheint die Theorie der Supersymmetrie sehr vielversprechend. Um diese Theorie soll es in der vorliegenden Arbeit gehen.

Diese Arbeit, die im Rahmen der DESY-Münster-Kollaboration angefertigt wurde, die 1996 I. MONTVAY und G. MÜNSTER ins Leben riefen, gliedert sich in zwei Teile. In dem ersten Part wird zunächst durch Kapitel 1 eine Einführung in die Theorie der Supersymmetrie gegeben. Dabei wird speziell die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie beschrieben. Danach folgt in Kapitel 2 eine Diskussion über Gitterphysik wobei wieder insbesondere die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie aufgegriffen wird. Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Grassmann-Natur der Fermionen und nimmt insbesondere Rücksicht auf die spezielle Natur der Majorana-Fermionen. Für diese werden Integrationsregeln und Formeln für Erwartungswerte aufgestellt. Das nachfolgende Kapitel 4 greift einige wichtige Aspekte der Gruppentheorie auf und beschreibt besonders die Gruppen $SO(3)$ und $SU(2)$. Der zweite Teil des Kapitels 4 beschäftigt sich mit Regeln für die Gruppenintegration $SU(2)$ in Anlehnung an ein von M. CREUTZ entwickeltes Verfahren. Dabei stellte sich heraus, daß für $SU(2)$ abweichend von $SU(N)$ zusätzlicher Rechenaufwand erforderlich war und, daß das von M. CREUTZ berechnete Verfahren nicht direkt für $N = 2$ angewendet werden konnte. Diese Rechnungen erwiesen sich damit als komplizierter als zunächst angenommen wurde. Die vorangegangenen Kapitel dienen der Vorbereitung für Kapitel 5. In diesem wird eine Hoppingparameter-Entwicklung für die fermionische Wirkung des $N = 1$ Super-Yang-Mills-Modells durchgeführt. Abschließend zum analytischen Teil der Arbeit wird mittels der Hoppingparameter-Entwicklung die Masse des Gluino-Glue-Teilchens in erster Näherung durch Kapitel 6 bestimmt.

In dem numerischen Part findet zunächst eine Einführung in Monte-Carlo-Methoden und deren Anwendung auf eine $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie statt. Kapitel 7 stellt kurz

³Nach Gerard 't Hooft „war das bei der ersten Yang-Mills-Theorie 1954 auch nicht anders“.

das C^{++} Projekt, das in unserer Kollaboration durchgeführt wurde, vor. In dem nachfolgenden Kapitel wird dann auf unterschiedlichen Gittergrößen die String-Spannung aus dem Potential berechnet. Kapitel 9 beschäftigt sich mit der numerischen Berechnung der Masse des 0^{-+} -Glueballs. Abschließend wird ein Ausblick auf zukünftige Forschungsergebnisse gegeben.

Im Anhang finden sich zunächst Ergänzungen zum analytischen Teil der Arbeit und im Anhang D und E weitere numerische Ergebnisse für die String-Spannung und den 0^{-+} -Glueball.

Kapitel 1

Theorie der Supersymmetrie

Die Theorie der Supersymmetrie stellt eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen her. Sie fordert eine Lagrangedichte, die invariant unter Transformationen ist, die bosonische und fermionische Freiheitsgrade mischen. In den supersymmetrischen Theorien bilden die Fermionen und Bosonen mit gleichen inneren Quantenzahlen sogenannte Supermultipletts. Bei einer ungebrochenen Symmetrie hätten die Teilchen und ihre Superpartner die gleiche Masse. Da dieses experimentell nicht bestätigt werden kann, muß die Supersymmetrie gebrochen sein. Das bedeutet, daß die supersymmetrischen Partner eine wesentlich höhere Masse haben als die bislang beobachtbaren Teilchen.

1.1 Gebrochene Supersymmetrie

Die Supersymmetrie beschreibt Transformationen, die bosonische Zustände in fermionische Zustände umwandeln und umgekehrt. Diese Transformationen werden durch die supersymmetrischen Generatoren Q_α vermittelt:

$$Q_\alpha |\text{Fermion}\rangle \sim |\text{Boson}\rangle, \quad Q_\alpha |\text{Boson}\rangle \sim |\text{Fermion}\rangle. \quad (1.1)$$

Ist eine Symmetrie *spontan gebrochen*, respektiert der Generator G einer Transformation, die mit dem Hamilton-Operator kommutiert $[H, G] = 0$, den Grundzustand dieser Symmetrie nicht:

$$G|0\rangle \neq 0. \quad (1.2)$$

Bei einer exakten Symmetrie bleibt der Grundzustand unter der Symmetrie invariant und es gilt:

$$G|0\rangle = 0. \quad (1.3)$$

Mit Hilfe des WITTEN-Indexes [63]

$$\Delta = n_b^0 - n_f^0, \quad (1.4)$$

läßt sich eindeutig feststellen, ob die Supersymmetrie exakt oder gebrochen ist. Dabei geben n_b^0 und n_f^0 die Anzahl der bosonischen und fermionischen Zustände bei der Energie $E = 0$ an. Bei gebrochener Symmetrie treten alle Zustände gepaart auf und es gilt $\Delta = 0$. Ist die Supersymmetrie exakt, bleibt der Grundzustand ungepaart und der WITTEN-Index lautet $\Delta = 1$. Formal definiert sich der WITTEN-Index zu

$$\Delta := \text{Tr}(-1)^{N_F}. \quad (1.5)$$

Der Operator $(-1)^{N_F}$, der den Teilchenzahl-Operator im Exponenten enthält, besitzt den Eigenwert +1 wenn er auf einen bosonischen Zustand (N_f gerade) wirkt und den Eigenwert -1 wenn er auf einen fermionischen Zustand (N_f ungerade) angewendet wird. Mit Hilfe des WITTEN-Indexes läßt sich die Boson-Fermion-Regel ableiten. Diese besagt, daß die Anzahl der bosonischen und fermionischen Zustände in einem supersymmetrischen Modell übereinstimmen muß.

1.2 Poincaré-Superalgebra

In diesem Abschnitt wird die Poincaré-Superalgebra hergeleitet und die daraus resultierenden Supermultipletts abgeleitet. Hierzu wird zunächst der mathematische Begriff der *Graduierung* benötigt.

1.2.1 Graduierung

Eine *graduierte* Algebra ist eine Algebra, die aus einem Vektorraum \mathcal{L} besteht, der sich in eine direkte Summe aus n Unterräumen \mathcal{L}_i zerlegen läßt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{n-1}. \quad (1.6)$$

Des Weiteren muß ein Produkt mit den folgenden Eigenschaften:

$$x_j \circ x_k \in \mathcal{L}_{j+k \bmod n} \quad \forall x_i \in \mathcal{L}_i, \quad (1.7)$$

bestehen. Diese Algebra bezeichnet man als \mathcal{Z}_n graduierte Algebra. Insbesondere gilt für $n = 2$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1. \quad (1.8)$$

Für das Produkt folgt

$$x_1 \circ x_2 \in \mathcal{L}_0 \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{L}_0, \quad (1.9)$$

$$x \circ y \in \mathcal{L}_1 \quad \forall x \in \mathcal{L}_0, \forall y \in \mathcal{L}_1, \quad (1.10)$$

$$y_1 \circ y_2 \in \mathcal{L}_0 \quad \forall y_1, y_2 \in \mathcal{L}_1. \quad (1.11)$$

Das ist die bekannte \mathcal{Z}_2 graduierte Algebra.

Ausgehend von einer \mathcal{Z}_2 graduierten Algebra gelangt man zu einer *graduierten Liealgebra*, wenn das in den Gleichungen (1.9), (1.10) und (1.11) definierte Produkt außer der Graduierung noch die folgenden Eigenschaften hat:

$$\text{Supersymmetrie: } x_i \circ x_j = -(-1)^{i,j} x_j \circ x_i, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi-Identität: } & x_k \circ (x_l \circ x_m) (-1)^{k \cdot m} + x_l \circ (x_m \circ x_k) (-1)^{l \cdot k} \\ & + x_m \circ (x_k \circ x_l) (-1)^{m \cdot l} = 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

mit $x_i \in \mathcal{L}_i$ und $i = 0, 1$. Das Produkt kann nach Gleichung (1.12) sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch sein. Dieses Verhalten wird Supersymmetrie genannt.

Wie schon ganz zu Beginn des Kapitels angedeutet wurde, stellt die Supersymmetrie eine Erweiterung der Poincaré-Algebra dar. Das bedeutet, daß der Unterraum \mathcal{L}_0 von den zehn Generatoren P_μ und $M_{\mu\nu}$ aufgespannt wird. Diese Generatoren stellen mit $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ die Raum-Zeit Rotationen und Translationen dar. Der Unterraum \mathcal{L}_0 wird nun durch die supersymmetrischen Generatoren Q_a , ($a = 1, \dots, 4N$) erweitert. Die einfachste Form der Supersymmetrie stellt sich für den Fall $N = 1$ mit vier spinorartigen Generatoren Q_a dar. Im Fall $N > 1$ spricht man von einer N -fach erweiterten Supersymmetrie. Da ein Dirac-Spinor vier komplexe Einträge besitzt und somit acht Freiheitsgrade hat, ein Majorana-Spinor jedoch nur über die Hälfte der Freiheitsgrade verfügt, liegt es nahe, Q_a als einen Majorana-Spinor aufzufassen. Für diesen gilt:

$$Q = C \overline{Q}^T, \quad \overline{Q} = Q^T C. \quad (1.14)$$

Für die Produkte in und zwischen den beiden Unterräumen \mathcal{L}_0 und \mathcal{L}_1 kann man nun die folgenden Relationen ableiten. Das Produkt in dem Unterraum \mathcal{L}_0 entspricht dem Produkt der Poincaré-Algebra und es gilt:

$$\mathcal{L}_0 \times \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0 : \quad [P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (1.15)$$

$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho), \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= -i(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} \\ &\quad + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Beim Produkt $\mathcal{L}_0 \times \mathcal{L}_1$ müssen die Vertauschungen von Q_a mit P^μ und $M^{\mu\nu}$ definiert werden. Im Fall der Translation kann man die triviale Transformation wählen und für die Lorentztransformation ergibt sich die 4×4 Matrix $\sigma_{ab}^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$:

$$\mathcal{L}_0 \times \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1 : \quad [P^\mu, Q_a] = 0, \quad (1.18)$$

$$[M^{\mu\nu}, Q_a] = -\sigma_{ab}^{\mu\nu} Q_b. \quad (1.19)$$

Für das dritte Produkt findet man unter Zuhilfenahme der Jacobi-Identität (1.13)

$$\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 : \quad \{Q_a, \overline{Q}_b\} = 2\gamma_{ab}^\mu P_\mu. \quad (1.20)$$

Durch die Gleichungen (1.15)-(1.20) ist die Poincaré-Superalgebra eindeutig festgelegt. Daß diese Algebra schon die allgemeinste Lie-Superalgebra von Symmetrien der S-Matrix ist, die konsistent mit relativistischen Quantenfeldtheorien ist, konnte 1975 von den Herren R. HAAG, J. T. LOPUSZANSKI und M. SOHNIUS [26] bewiesen werden. Zuvor hatten 1967 S. COLEMAN und J. MANDULA [15] ein no-go-Theorem aufgestellt, was besagt, daß die Poincaré-Algebra schon die allgemeinste, einfache Liealgebra zur Beschreibung von Symmetrien der S-Matrix ist. Eine Umgehung dieses no-go-Theorems unter physikalisch sinnvollen Gesichtspunkten gelingt nur, wenn man den Begriff der Liegruppe durch antikommutierende Generatoren erweitert. Dies wurde 1971 erstmals von Y. GOLFAND und E. LIKHTMAN [23] durch die graduierten Algebren vorgeschlagen, die in diesem Kapitel behandelt wurden.

1.2.2 Weyl-Spinoren

In der Literatur ist es üblich, statt Majorana-Spinoren Q_a , Weyl-Spinoren Q_A als supersymmetrische Generatoren zu wählen:

$$Q_a = \begin{pmatrix} Q_A \\ \bar{Q}^{\dot{A}} \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Die Poincaré-Superalgebra besteht dann in der indexfreien Notation aus der Poincaré-Algebra (1.15)-(1.17) und

$$[Q, P^\mu] = [\bar{Q}, P^\mu] = 0, \quad (1.22)$$

$$[Q, M^{\mu\nu}] = \sigma^{\mu\nu} Q, \quad (1.23)$$

$$\{Q, \bar{Q}\} = 2\sigma_\mu P^\mu, \quad (1.24)$$

$$\{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0. \quad (1.25)$$

1.3 Supersymmetrisches Teilchenspektrum

Die supersymmetrischen Teilchen leiten sich aus den irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Superalgebra ab.

1.3.1 Casimir-Operatoren

Unter einem Casimir-Operator versteht man einen Operator, der mit allen Generatoren vertauscht.

Eine relativistische Verallgemeinerung des Spinvektors stellt der PAULI-LUBANSKI-Vektor W_μ dar:

$$W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}. \quad (1.26)$$

Dieser Vektor erfüllt folgende Vertauschungsrelation:

$$[W_\mu, W_\nu] = i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^\alpha W^\beta. \quad (1.27)$$

Den Pauli-Lubanski-Vektor kann man verallgemeinern, so daß er nicht nur von den Generatoren P und M abhängt, sondern zudem noch von den Spinoren Q . Die einfachste Möglichkeit besteht in der Bildung eines Vierervektors aus den Weyl-Spinoren Q und \bar{Q} :

$$X^\mu = Q \sigma^\mu \bar{Q}, \quad (1.28)$$

der dann zu W^μ addiert wird. Wählt man einen Vorfaktor von $-\frac{1}{4}$ für X^μ , so ergibt sich

$$Y^\mu := W^\mu - \frac{1}{4} X^\mu. \quad (1.29)$$

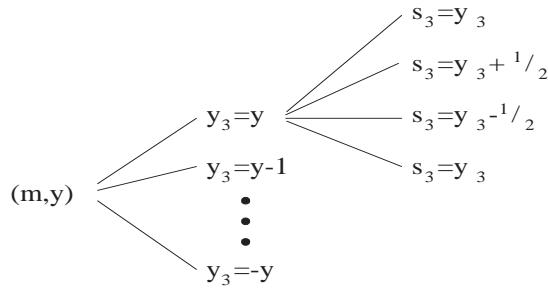


Abbildung 1.1: Graphische Darstellung des Supermultipletts.

Für den Kommutator folgt

$$[Y_\mu, Y_\nu] = i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\rho Y^\sigma. \quad (1.30)$$

Dieser besitzt die gleiche Struktur wie die relativistische Drehimpulsalgebra (1.27) und nimmt im Ruhesystem $P^\alpha = (m, 0, 0, 0)$ die folgende Form an

$$[Y_\mu, Y_\nu] = i m \epsilon^{\mu\nu\sigma} Y^\sigma. \quad (1.31)$$

Den verallgemeinerten Drehimpuls $\frac{1}{m}\mathbf{Y}$ nennt man *Superspin*. Er besitzt die Eigenwerte

$$\left(\frac{\mathbf{Y}}{m}\right)^2 = y(y+1) \quad \text{mit } y = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots. \quad (1.32)$$

Die supersymmetrische Algebra besitzt damit die beiden Casimir-Operatoren

$$P^2 = P^\mu P_\mu \quad \text{und} \quad (1.33)$$

$$C^2 = C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \quad \text{mit } C^{\mu\nu} := Y^\mu P^\nu - Y^\nu P^\mu. \quad (1.34)$$

Die Eigenwerte von C^2 lauten

$$C^2 = -2m^4 y(y+1) \quad \text{mit } y = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots . \quad (1.35)$$

Somit wird jede massive Darstellung durch die Masse m und den Superspin y charakterisiert. Innerhalb eines solchen Supermultipletts werden die Zustände nach den Eigenwerten my^3 und ms^3 des Superspins Y^3 und des Spins W^3 in z -Richtung klassifiziert. Graphisch ist das Supermultiplett in Abbildung (1.1) dargestellt.

1.3.2 Das chirale Supermultiplett

Die einfachste Darstellung der Supersymmetrie-Algebra ergibt sich für $y = 0$. Dieses chirale Supermultiplett, das in Abbildung (1.2) zu sehen ist, wird im sogenannten Wess-Zumino-Modell realisiert. Das Multiplett besteht aus einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, einem skalaren und einem pseudoskalaren Teilchen, die den Spin 0 haben. Ein *Pseudoskalar* verhält sich bezüglich der Lorentztransformation wie ein Skalar, ändert jedoch bei Raumspiegelungen sein Vorzeichen. Das chirale Multiplett beschreibt Materiefelder: Quarks und Leptonen sowie ihre Superpartner, die Squarks und Sleptonen.

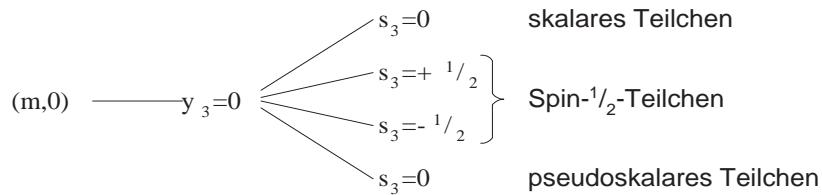


Abbildung 1.2: Graphische Darstellung des chiralen Supermultipletts.

1.3.3 Das Vektor-Supermultiplett

Die nächst höhere Darstellung, die das Vektor-Multiplett bildet, findet man für $y = \frac{1}{2}$. Es besteht aus zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, einem Vektorteilchen mit Spin 1 und einem pseudoskalaren Teilchen mit Spin 0. Dieses ist in Abbildung (1.3) dargestellt. Man benutzt das Vektor-Multiplett zur Beschreibung der Eichbosonen und ihrer Superpartner: Photonen, W-Bosonen, Z-Bosonen, Gluonen bzw. Photinos, Winos, Zinos und Gluinos.

1.4 Darstellung im Raum der Superfelder

Eine Vereinfachung in der Beschreibung von supersymmetrischen Theorien stellt die Einführung des Superraum-Formalismus dar [6, 7]. Dazu betrachtet man anstelle gewöhnlich-

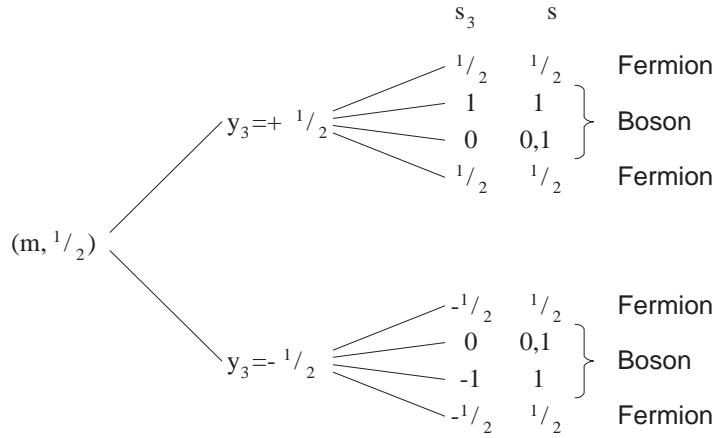


Abbildung 1.3: Graphische Darstellung des Vektor-Supermultipletts.

cher Felder, die nur von den Raum-Zeit-Koordinaten x abhängen, sogenannte Superfelder $S(x, \theta, \bar{\theta})$, die zusätzlich eine Funktion der antikommutierenden Grassmann-Variablen sind. Nachdem die supersymmetrische Algebra durch die Gleichungen (1.15)-(1.20) festgelegt ist, kann jedes endliche Element der zugehörigen Gruppe geschrieben werden als

$$G(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = \exp(i(\theta Q + \bar{\theta} \bar{Q} - x^\mu P_\mu)). \quad (1.36)$$

Da für das Produkt zweier solcher Gruppenelemente mit Hilfe der BAKER-CAMPBELL-HAUSDORFF-Formel folgendes gilt:

$$G(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) G(a^\mu, \zeta, \bar{\zeta}) = G(x^\mu + a^\mu - i\zeta \sigma^\mu \bar{\theta} + i\theta \sigma^\mu \bar{\zeta}, \theta + \zeta, \bar{\theta} + \bar{\zeta}), \quad (1.37)$$

ist eine supersymmetrische Translation in dem Superraum definiert durch

$$(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow (x^\mu + a^\mu - i\zeta \sigma^\mu \bar{\theta} + i\theta \sigma^\mu \bar{\zeta}, \theta + \zeta, \bar{\theta} + \bar{\zeta}). \quad (1.38)$$

Die Wirkung der supersymmetrischen Algebra $S(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ bezogen auf die Superfelder transformiert sich demnach zu

$$S(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \exp(i(\zeta Q + \bar{\zeta} \bar{Q} - a^\mu P_\mu)) S(x^\mu, \theta, \bar{\theta}), \quad (1.39)$$

und wird generiert durch

$$P_\mu = i \partial_\mu, \quad (1.40)$$

$$i Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad (1.41)$$

$$i \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i \theta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu. \quad (1.42)$$

Das allgemeine Superfeld $\mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ läßt sich in eine Potenzreihe in θ und $\bar{\theta}$ entwickeln. Dabei treten nur Terme zweiter Ordnung in θ und $\bar{\theta}$ auf, da θ und $\bar{\theta}$ zweikomponentige Grassmann-Variablen sind:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta \phi(x) + \bar{\theta} \bar{\chi}(x) + \theta \theta M(x) \\ & + \bar{\theta} \bar{\theta} N(x) + \theta \sigma^\mu \bar{\theta} A_\mu(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\lambda}(x) \\ & + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \alpha(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} D(x).\end{aligned}\quad (1.43)$$

Der Teilchengehalt des Supermultipletts ergibt sich aus den Komponentenfeldern. Fordert man, daß das Superfeld selbst ein Lorentzskalar ist, ergibt sich daraus das Verhalten der einzelnen Komponentenfelder unter Lorentztransformationen. Man findet dann

- 4 komplexe skalare Felder: $f(x), M(x), N(x), D(x)$,
- 2 linkshändige Weyl-Spinorfelder: $\phi(x), \alpha(x)$,
- 2 rechtshändige Weyl-Spinorfelder: $\bar{\chi}(x), \bar{\lambda}(x)$,
- 1 komplexes Vektorfeld: $A_\mu(x)$.

Insgesamt gibt es damit 16 reelle bosonische und 16 reelle fermionische Freiheitsgrade. Durch die Gleichung (1.43) hat man eine lineare Darstellung der supersymmetrischen Algebra konstruiert. Um von der reduziblen Darstellung zu irreduziblen Darstellungen zu gelangen, betrachtet man nur solche Superfelder, die bestimmten kovarianten Bedingungen genügen. So können beispielsweise fermionische Ableitungen, die mit den auf die Superfelder wirkenden Generatoren antikommutieren, wie folgt definiert werden:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + i (\sigma^\mu \bar{\theta})_\alpha \partial_\mu, \quad (1.44)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i (\tilde{\sigma}^\mu \theta)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu. \quad (1.45)$$

Die erweiterten Pauli-Matrizen sind dabei gegeben durch $\tilde{\sigma}^\mu \in (\mathbb{1}, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$. Die kovarianten Ableitungen erfüllen die folgende Algebra:

$$\{D, \bar{D}\} = -2i \sigma^\mu \partial_\mu, \quad (1.46)$$

$$\{D, D\} = \{\bar{D}, \bar{D}\} = 0. \quad (1.47)$$

Über diese Ableitungen unterscheidet man chirale und antichirale Superfelder:

- chirales Superfeld: $\bar{D}_{\dot{\alpha}} \Phi = 0$,
- antichirales Superfeld: $D_\alpha \Phi^\dagger = 0$.

1.4.1 Chirale Superfelder

Die allgemeinste Lösung für ein chirales Superfeld ist

$$\Phi = \Phi(y^\mu, \theta), \quad (1.48)$$

mit der komplexen Raumkoordinate $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$. Die Taylorentwicklung nach Potenzen von θ und $\bar{\theta}$ ergibt

$$\Phi(y^\mu, \theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\bar{\theta}F(y). \quad (1.49)$$

Dabei sind φ und F skalare Felder und ψ ist ein linkshändiges Weyl-Spinor-Feld. Im reellen Superraum $(x, \theta, \bar{\theta})$ nimmt das chirale Superfeld die folgende Form an:

$$\begin{aligned} \Phi(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) &= \varphi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\bar{\theta}F(y) + i\partial_\mu\varphi(x)\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \\ &\quad + i\sqrt{2}\theta\partial_\mu\psi(x)\theta\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x)\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Benutzt man Majorana-Fermionen anstelle der Weyl-Fermionen, so stimmt das obige Multiplett mit dem Wess-Zumino-Modell [61] überein, was unter anderem in meiner Diplomarbeit [38] ausführlich diskutiert wird.

1.4.2 Vektor-Superfelder

Das Vektor-Superfeld erfüllt die folgende kovariante Bedingung:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (1.51)$$

Es besitzt zwei Weyl-Spinorfelder ϕ und λ , von denen jedes zwei komplexe Komponenten hat, also acht reelle fermionische Freiheitsgrade. Bei den bosonischen Feldern gibt es zwei reelle Felder f und d , ein komplexes Feld M und ein reelles Vektorfeld A_μ . Man hat also wieder acht reelle Freiheitsgrade. Das Vektor-Superfeld ist invariant unter einer speziellen Eichtransformation mit chiralen und antichiralen Feldern:

$$V \rightarrow V' = V + (\Phi + \Phi^\dagger). \quad (1.52)$$

Dabei verhält sich das reelle Vektorfeld wie bei der lokalen Eichtransformation ($\psi(x) \rightarrow e^{i\Lambda(x)}\psi(x)$):

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - 2\partial_\mu\Lambda \quad \text{mit } \Lambda = \text{Im } \varphi. \quad (1.53)$$

Ebenso ist der eichinvariante Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ invariant.

In der Wess-Zumino-Eichung nimmt das Vektor-Superfeld die Form

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \theta\bar{\theta}\bar{\theta}\bar{\theta}D \quad (1.54)$$

an. Durch diese Eichung wird die Zahl der 16 Freiheitsgrade auf die Hälfte reduziert. Das Multiplett besteht dann aus einem reellen skalaren Feld $D(x)$, einem komplexen Weyl-Spinorfeld $\lambda(x)$ und einem reellen Vektorfeld $A_\mu(x)$. Dieses werden im folgenden die Zutaten für die in dieser Arbeit betrachteten $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie sein.

1.5 Supersymmetrische Lagrangedichten

Aus den vorangegangenen linearen Darstellungen der supersymmetrischen Algebra werden in diesem Abschnitt Wirkungen konstruiert, die invariant unter supersymmetrischen Transformationen sind:

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad \text{mit} \quad (1.55)$$

$$\delta_\epsilon S = 0. \quad (1.56)$$

Bei der Konstruktion der supersymmetrischen Lagrangedichte ist zu berücksichtigen, daß sich die höchsten Komponenten eines Superfeldes wie Viererdivergenzen transformieren. Speziell für das allgemeine Superfeld $\mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta})$ und das chirale Superfeld $\Phi(y, \theta)$ sind diese gegeben durch:

$$\delta D = \frac{i}{2} \partial_\mu (\epsilon \sigma^\mu \bar{\lambda} - \alpha \sigma^\mu \bar{\epsilon}), \quad (1.57)$$

$$\delta F = i\sqrt{2} \partial_\mu (\bar{\epsilon} \tilde{\sigma}^\mu \psi). \quad (1.58)$$

Dabei sind ϵ und $\bar{\epsilon}$ Weyl-spinorielle Parameter. Man unterscheidet die Felder nach F - und D -Feldern je nachdem, ob sie zur $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ -Komponente oder zur $\theta\theta$ -Komponente gehören.

Verknüpft man Superfelder mittels Addition oder Multiplikation, ergeben sich wieder Superfelder, von denen sich die höchste Komponente ebenfalls unter supersymmetrischen Transformationen wie eine Viererdivergenz transformiert. Das Raum-Zeit-Integral über eine Viererdivergenz trägt nur mit einem Oberflächen-Term bei, der bei genügend ausgedehnten Raumbereichen verschwindet. Die Lagrangedichte supersymmetrischer Theorien zeichnet sich somit durch die höchste Komponente der Superfelder oder die höchste Komponente von Produkten von Superfeldern aus:

$$\mathcal{L} = (\text{Superfelder}) \Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + (\text{chirale Superfelder}) \Big|_{\theta\theta y \rightarrow x} + \text{HC}. \quad (1.59)$$

Die höchste Komponente ist durch den vertikalen Strich gekennzeichnet. Um eine reelle Lagrangedichte zu erhalten, werden zum Schluß noch alle hermitesch konjugierten Terme addiert.

Konstruiert man eine Lagrangedichte aus F -Termen von chiralen Superfeldern und D -Termen von Vektorsuperfeldern, so ist die zugehörige Wirkung automatisch invariant.

Die Lagrangedichte für Vektor-Superfelder wird, ausgehend von dem supersymmetrischen Feldstärketensor

$$W_A(y, \theta, \bar{\theta}) = -\frac{1}{4} (D\bar{D}) D_A V(x, \theta, \bar{\theta}), \quad (1.60)$$

konstruiert zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} W^A W_A \Big|_{\theta\theta y \rightarrow x} + \text{HC}. \quad (1.61)$$

Mit $V(x, \theta, \bar{\theta})$ wird das supersymmetrische Potential beschrieben. Betrachtet man die höchste Komponente von $W^A W_A$, ergibt sich nach einigen Umformungen die Lagrangedichte zu

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2} (\lambda \sigma^\mu \partial \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \tilde{\sigma}^\mu \partial \lambda) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2D^2. \quad (1.62)$$

Diese Lagrangedichte ist wegen der Eichinvarianz der masselosen Felder λ , $F_{\mu\nu}$ und D ebenfalls eichinvariant. Die Eichinvarianz wird zerstört, wenn ein Massenterm der Form

$$\mathcal{L}_m := \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \quad (1.63)$$

hinzugefügt wird.

1.6 Nicht-abelsche Eichtheorie: Yang-Mills-Theorie

Zur Vorbereitung auf die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie wird zunächst ein kurzer Einblick in die gewöhnliche Yang-Mills-Theorie gegeben (siehe z. B. [49]).

In der Yang-Mills-Theorie wird der Feldstärke-Tensor beschrieben durch:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_0 f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (1.64)$$

Dabei ist g_0 die nackte Kopplungskonstante und f_{abc} die Strukturkonstante für eine unitäre Eichgruppe G . Ein Element g aus G kann mittels Generatoren parametrisiert werden zu

$$g = e^{i\omega^a T^a}. \quad (1.65)$$

Die hermitischen Matrizen T^a stellen die Generatoren der Gruppe dar und ω^a sind Parameter. Die Strukturkonstanten werden über die Kommutatorrelation definiert:

$$[T^a, T^b] = i f_{abc} T^c. \quad (1.66)$$

Die Generatoren sind in der Regel orthonormiert und es gilt

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}. \quad (1.67)$$

Für die Gruppe $SU(2)$ werden die Generatoren durch die Pauli-Matrizen definiert

$$T^a = \frac{1}{2} \sigma^a, \quad (1.68)$$

$$f_{abc} = \epsilon_{abc}. \quad (1.69)$$

Die kovariante Ableitung ist in der nicht-abelschen Theorie definiert durch

$$(D_\mu F_{\mu\nu})^a = \partial_\mu F_{\mu\nu}^a + g_0 f_{abc} A_\mu^b F_{\mu\nu}^c. \quad (1.70)$$

Mit Hilfe der Gruppengeneratoren werden A_μ und $F_{\mu\nu}$ wie folgt definiert:

$$A_\mu = -ig A_\mu^a T^a, \quad (1.71)$$

$$F_{\mu\nu} = -ig F_{\mu\nu}^a T^a \quad (1.72)$$

oder umgekehrt

$$A_\mu^a = 2 \frac{i}{g} \text{Tr} (T^a A_\mu). \quad (1.73)$$

Drückt man $F_{\mu\nu}$ durch A_μ aus gilt:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (1.74)$$

Schließlich ergibt sich für die Yang-Mills-Wirkung

$$S_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (1.75)$$

Im nicht-abelschen Fall wird eine Eichtransformation definiert durch die Abbildung des Raums auf die Eichgruppe. Mit jedem Punkt wird ein Gruppenelement $g(x)$ assoziiert. Das Matrixpotential transformiert sich dann unter einer Eichtransformation zu

$$A_\mu \mapsto g^{-1} A_\mu g + \frac{i}{g_0} g^{-1} \partial_\mu g. \quad (1.76)$$

Der Feldstärketensor verhält sich unter Eichtransformationen wie:

$$F_{\mu\nu} \mapsto g^{-1} F_{\mu\nu} g. \quad (1.77)$$

1.7 $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie

Die Wirkung für eine $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie hat formal Ähnlichkeit mit der Wirkung der Quantenchromodynamik. Allerdings beschreibt die supersymmetrische Theorie Gluinos und Gluonen. Dies führt dazu, daß man in der Wirkung einen gewöhnlichen Eichanteil und einen Anteil für das Majorana-Fermion in der adjungierten Darstellung findet. Die Wirkung formuliert sich dann wie folgt:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{i}{2} \bar{\psi}^a \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^a. \quad (1.78)$$

Die kovariante Ableitung \mathcal{D}_μ definiert sich analog zum nicht-supersymmetrischen Fall, der in Gleichung (1.70) behandelt wird:

$$\mathcal{D}_\mu \psi^a = \partial_\mu \psi^a + g f_{abc} A_\mu^b \psi^c. \quad (1.79)$$

Die in Gleichung (1.78) angegebene Lagrangedichte beschreibt eine gewöhnliche $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie mit einem Majorana-Fermion in der adjungierten Darstellung. Wie schon aus dem vorangegangenen allgemeinen Teil über Supersymmetrie bekannt ist, wird die Supersymmetrie gebrochen, wenn man den Teilchen eine Masse gibt. Für das Gluino entspräche das einem Massenterm der Form

$$\mathcal{L}_m = m_{\tilde{g}} (\bar{\psi} \psi). \quad (1.80)$$

Dadurch wird die Supersymmetrie *weich* gebrochen, was bedeutet, daß elementare Eigenschaften, wie zum Beispiel das Nicht-Renormierungs-Theorem und die Aufhebung von Divergenzen, erhalten bleiben.

Betrachtet man nochmal den masselosen Fall $m_{\tilde{g}} = 0$, so ist die $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie invariant unter der chiralen $U(1)$ -Transformation:

$$\psi \rightarrow e^{-i\phi\gamma_5}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{-i\phi\gamma_5}. \quad (1.81)$$

Im Superraum entspricht dies einer Transformation der Superkoordinaten θ und $\bar{\theta}$

$$\theta_A \rightarrow e^{i\phi}\theta_A, \quad \bar{\theta} \rightarrow e^{-i\phi}\bar{\theta}. \quad (1.82)$$

Diese Symmetrie besitzt in der quantentheoretischen Beschreibung eine Anomalie, so daß der zugehörige Noether-Strom $j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ nicht erhalten ist. Im Fall einer $SU(N_c)$ -Theorie bleibt jedoch für den anomalen Strom eine \mathcal{Z}_{2N_c} Symmetrie übrig:

$$\phi = \phi_k = \frac{k\pi}{N_c} \quad \text{mit } k = 0, 1, \dots, 2N_c - 1. \quad (1.83)$$

Des Weiteren bricht, analog zur QCD, ein nicht-verschwindendes Gluino-Kondensat

$$\langle \bar{\lambda}\lambda \rangle \neq 0, \quad (1.84)$$

die verbleibende \mathcal{Z}_{2N_c} Symmetrie weiter auf eine \mathcal{Z}_2 Symmetrie $\lambda \rightarrow -\lambda$ herunter. Es gibt auch Argumente, die für eine chiral-symmetrische Phase mit verschwindendem Gluino-Kondensat sprechen [33, 52].

Instanton-Rechnungen zeigen, daß es im Fall $SU(2)$ zwei entartete Grundzustände gibt, die sich im Vorzeichen des Gluino-Kondensats unterscheiden [3]. Hat man nun eine von null verschiedene Gluino-Masse, so wird je nach Vorzeichen der eine oder der andere Zustand eingenommen. Beim Übergang $m_{\tilde{g}} \rightarrow 0$ erwartet man daher einen Phasenübergang erster Ordnung.

1.7.1 Supersymmetrische Transformationen

Die aus der Gleichung (1.78) folgende Wirkung ist invariant unter den folgenden supersymmetrischen Transformationen:

$$\delta A_\mu^a = 2i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\psi^a, \quad (1.85)$$

$$\delta\psi^a = -i\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}\epsilon, \quad (1.86)$$

$$\delta\bar{\psi}^a = i\bar{\epsilon}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}. \quad (1.87)$$

Dabei ist ϵ ein Raum-Zeit-unabhängiger antikommutierender Majorana-Spinor. Ein detaillierter Beweis findet sich in meiner Diplomarbeit [38].

Führt man eine imaginäre Zeit ein, um so in den euklidischen Raum überzugehen, gelangt man zu der euklidischen Lagrangedichte:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} \bar{\psi}^a \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^a. \quad (1.88)$$

1.7.2 Massenmultipletts

Zur Beschreibung von Symmetrien und Niederenergie-Spektren ist es sinnvoll, effektive Wirkungen, die aus geeigneten farblosen Operatoren zusammengesetzt sind, auszunutzen. Bei einer verschwindenden Gluino-Masse $m_{\tilde{g}} = 0$, wodurch der supersymmetrische Punkt definiert ist, erwartet man analog zur Quantenchromodynamik farblose Bindungszustände zwischen Gluonen und/oder Gluinonen, die supersymmetrische Multipletts bilden.

Das niedrigste Supermultiplett besteht nach der effektiven Wirkung von G. VENEZIANO und S. YANKIELOWICZ [59] aus den folgenden Teilchen:

1. $\bar{\psi} \gamma_5 \psi \simeq$ pseudoskalares Boson, das sich aus zwei Gluinonen zusammensetzt. Es besitzt die Masse $m_{\tilde{g}\tilde{g}}^{0-}$ und hat den Spin 0. In der Quantenchromodynamik (QCD) gibt es einen analogen Zustand, der mit η' bezeichnet wird. Analog erhält das supersymmetrische Teilchen den Namen: $a - \eta'$, wobei das a für die adjungierte Darstellung steht.
2. $\bar{\psi} \psi \simeq$ skalares Boson, das ebenfalls aus zwei Gluinonen besteht und den Spin 0 hat. Die Masse beträgt $m_{\tilde{g}\tilde{g}}^{0+}$. In Analogie zur QCD bekommt das Teilchen den Namen $a - f_0$.
3. $F_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \psi \simeq$ Majorana-Fermion, das aus einem Gluon und einem Gluino besteht und den Spin $\frac{1}{2}$ hat. Die Masse lautet $m_{g\tilde{g}}$. Für dieses Teilchen gibt es kein Analogon in der QCD, man bezeichnet den Zustand auch als *Gluino-Glueball*.

Das Problem der VENEZIANO-YANKIELOWICZ-Wirkung ist, daß sie keine dynamischen Freiheitsgrade enthält, die rein gluonischen Größen entsprechen. Es gibt aber keine physikalische Begründung, warum es nicht auch Gluon-Gluon-Zustände (sogenannte *Glueballs*) geben sollte. Des Weiteren werden dynamische Effekte vernachlässigt, die durch die Kopplung von Gluebällen an $a - \eta'$ und $a - f_0$ Zuständen auftreten können.

Die Lösung besteht in einer effektiven Wirkung von G. R. FARRAR, G. GABADADZE und M. SCHWETZ [22], die aus zwei chiralen Supermultiplett-Operatoren besteht. Diese Wirkung sagt zwei verschiedene Multipletts voraus, in denen die Massen der einzelnen Teilchen jeweils übereinstimmen. Die beiden Multipletts selbst haben verschiedene Massen;

es gibt ein leichtes und ein schweres Multiplett. Letzteres stimmt mit dem VENEZIANO-YANKIEWICZ-Multiplett überein. Das leichtere Supermultiplett besteht aus den Teilchen:

1. $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \simeq 0^+$ Glueball,
2. $F_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \simeq 0^-$ Glueball,
3. Gluino-Glueball-Grundzustand, in Analogie zur VENEZIANO-YANKIEWICZ-Wirkung.

Durch die Einführung einer nicht-verschwindenden Gluino-Masse $m_{\tilde{g}} \neq 0$, wird die Supersymmetrie weich gebrochen und die beiden Supermultipletts spalten in ihre unterschiedlichen Massen auf. Dies ist in Abbildung (1.4) zu sehen.

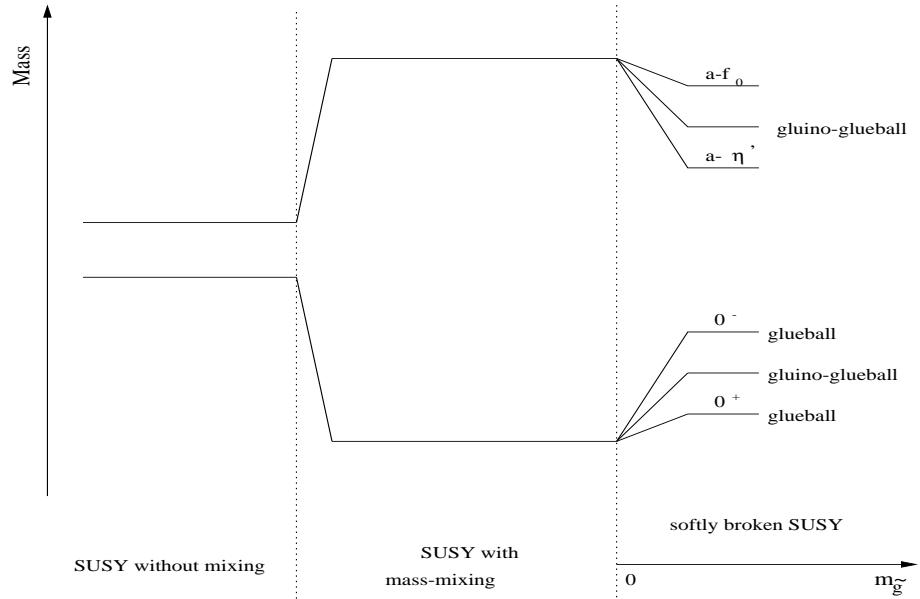


Abbildung 1.4: Graphische Darstellung der Massen nach der effektiven Wirkung von G. R. FARRAR, G. GABADADZE und M. SCHWETZ.

1.8 Experimentelle Beobachtungen

Nach den einleitenden Abschnitten über Supersymmetrie mag es verwundern, daß es bislang keine eindeutigen experimentellen Resultate gibt, die die Supersymmetrie bestätigen. Bislang ist es so, daß es zwar einige Hinweise gibt, die zeigen, daß das Standardmodell unzulänglich ist und die sich mit Hilfe von supersymmetrischen Theorien erklären lassen, es konnten aber noch keine supersymmetrischen Teilchen experimentell in Beschleunigern

nachgewiesen werden. Die experimentelle Bestätigung der Supersymmetrie soll im Jahre 2005 erfolgen. Dann wird der 27 km lange, kreisförmige Tunnel unter der französisch-schweizerischen Grenze bei Genf fertig gebaut sein. Mit diesem Detektor (LHC = Large Hadron Collider) sollen Protonen mit 99,999999 Prozent der Lichtgeschwindigkeit frontal zusammenprallen. Die dadurch hervorgerufenen Quarkkollisionen haben sich schon einmal 10^{-12} Sekunden nach dem Urknall ereignet. Man erhofft sich damit Hinweise auf supersymmetrische Teilchen und das Higgs-Boson. Der LHC wird einen Energiebereich von 14 TeV abdecken. Details finden sich in [5].

Ein sehr interessantes, ganz aktuelles Ergebnis konnte ein internationales Forscherteam am Brookhaven National Laboratory in Upton/New York vor kurzem bekannt geben. In einem dreijährigen Experiment haben Wissenschaftler aus den USA, Russland, Japan und Deutschland am Brookhaven National Laboratory die Spin-Anomalie des Myons genauer als je zuvor bestimmt. Dabei ergab sich ein verblüffendes Ergebnis, denn der Wert war geringfügig größer als die theoretisch berechnete Spin-Anomalie, die mit Hilfe des Standardmodells ermittelt wurde. Legt man supersymmetrische Rechnungen zugrunde, lässt sich diese Abweichung durch supersymmetrische Teilchen erklären.

Bei der Suche nach den supersymmetrischen Partnern der elektroschwachen Eichbosonen und Higgs-Bosonen, den *Charginos* und *Neutralinos*, schaut man sich die Reaktionen bei Elektron-Positron-Kollisionen an. Dort werden *Charginos* und *Neutralinos* paarweise erzeugt: $e^+e^- \rightarrow \tilde{\chi}^{\pm}\tilde{\chi}^{\mp}$ und $\tilde{\chi}^0\tilde{\chi}^0$. Da sie in nicht-detektierbare leichtere Neutralinos zerfallen, sucht man bei Chargino-Ereignissen nach Leptonpaaren plus einer fehlenden Energie. Die untere Massengrenze, die auf diese Weise bei dem LEP (Large Electron-Positron Collider) gewonnen wurde, liegt bei $m(\tilde{\chi}^{\pm}) \geq 100$ GeV [27].

Ein großes Interesse gilt dem leichtesten Neutralino $\tilde{\chi}_1^0$, da dieses Teilchen ein bevorzugter Kandidat für kalte dunkle Materie im Universum ist [20]. Für dieses Teilchen kann man aufbauend auf theoretischen Überlegungen eine Massengrenze von $m(\tilde{\chi}_1^0) \geq 37$ GeV angeben.

Die Sleptonen werden auf dem gleichen Weg erzeugt wie im vorangegangenen Fall: $e^+e^- \rightarrow \tilde{l}^+\tilde{l}^-$. Die Massengrenzen stimmen daher ungefähr mit den Charginos überein.

Die Squarks und Gluinos tragen Farbladungen und lassen sich daher in Hadroncollidern erzeugen. Wieder ist das Hauptmerkmal ihrer Entdeckung die fehlende Energie und der fehlende Impuls. Gegenwärtig liegen die Grenzen bei $m(\tilde{q}) \sim m(\tilde{g}) \sim 200$ GeV.

Ein großer Vorteil der Supersymmetrie ist die Einbindung der Gravitation. Durch die lokale Eichinvarianz wird die Einführung von masselosen Vektorfeldern erzwungen. Überträgt man dieses Konzept auf die Supersymmetrie, so erzwingt dies die Existenz eines Spin- $\frac{3}{2}$ -Feldes und eines masselosen Spin-2-Feldes. Dieses Spin-2-Feld kann mit dem Gravitationsfeld identifiziert werden. Dadurch stellt die Supersymmetrie eine nicht-triviale Verbindung zwischen Elementarteilchen und Gravitation dar.

Schließlich läßt sich der im Standardmodell künstlich eingeführte Higgs-Mechanismus in supersymmetrischen Theorien dynamisch ableiten. Die supersymmetrischen Partner der Higgs-Teilchen erlauben zudem weitere Mechanismen des Proton-Zerfalls, so daß die theoretisch erwartete Lebensdauer des Protons mit den experimentellen Befunden übereinstimmt. Ohne den Austausch der supersymmetrischen Teilchen liegen die theoretischen Vorhersagen weit über dem experimentellen Sensitivitätsbereich.

Kapitel 2

Supersymmetrische Feldtheorien auf dem Gitter

Die Quantenchromodynamik, die die Wechselwirkung zwischen den Quarks beschreibt, sollte auch den Quark-Einschluß erklären. Die Suche nach einer theoretischen Erklärung, warum die Quarks nie einzeln, sondern nur als Bestandteil des Protons und vieler anderer Elementarteilchen auftreten, wird durch die komplizierte mathematische Struktur der QCD sehr erschwert. Für gewöhnlich werden Probleme dieser Art bewältigt, indem man störungstheoretische Rechnungen anstellt, um so genaue Lösungen zu erhalten. Für die Beschreibung des Farbfeldes zwischen zwei Quarks läßt sich die Feldstärke mit einer Störungsreihe jedoch nicht beliebig genau nähern. Der Grund ist, daß die Störungsreihe nicht wie sonst üblich gegen einen konstanten Wert konvergiert. Da die Korrekturen für die Vakuumfluktuationen nicht mit zunehmender Ordnung verschwinden, können solche Prozesse nicht störungstheoretisch berechnet werden. Eine Methode, die komplexen Fluktuationen des quantenmechanischen Feldes zu berücksichtigen, wurde 1974 von K. G. WILSON mit der Gitterreichtheorie eingeführt. Ausgangspunkt ist dabei ein vierdimensionales kubisches Gitter in Raum und Zeit. Durch den Übergang zu einer diskreten Raum-Zeit können nun Rechnungen durchgeführt werden, die im Kontinuum unmöglich sind. Natürlich muß diese Regularisierung später wieder rückgängig gemacht werden, indem man durch Verkleinern des Gitterabstandes zur Kontinuumsphysik zurückkehrt. Die entsprechenden Teilchen werden in der Gittertheorie auf den Gitterplätzen definiert, wohingegen die Feldstärken ausschließlich auf den Verbindungslinien leben.

Die Gitterformulierung stellt eine sehr gute Möglichkeit dar, Quantenfeldtheorien nicht-perturbativ zu untersuchen. Insbesondere wird der enge Zusammenhang zwischen Feldtheorie und statistischer Physik wegen der Pfadintegraldarstellung nach FEYNMAN durch das Gitter sichtbar.

Damit eine Theorie auf dem Gitter beschrieben werden kann, muß man von der minkowskischen Form der Wirkung übergehen zur euklidischen Formulierung, in der man die imaginäre Zeit einführt. In der euklidischen Raum-Zeit ist ein Pfadintegral äquivalent zur Zustandssumme eines analogen statistischen Systems. K. G. WILSON's Formulierung

beruht auf dem Konzept von Eichfeldern als pfadabhängige Phasenfaktoren. Bei einer nicht-abelschen Eichtheorie assoziiert man mit jedem Weg ein Element der Eichgruppe. Betrachtet man einen Weg

$$x_\mu(s), \quad s \in [0, 1] \quad (2.1)$$

der durch s parametrisiert ist, kann man ein Gruppenelement für den Anteil des Weges von $x_\mu(0)$ bis $x_\mu(s)$ durch folgende Gleichung definieren:

$$\frac{d}{ds} U(s) = -\frac{dx_\mu}{ds} A_\mu(x_\mu(s)) U(s). \quad (2.2)$$

Mit der Anfangsbedingung

$$U(0) = 1, \quad (2.3)$$

ergibt sich die Lösung von Gleichung (2.2) nach DYSON's Formel zu

$$U(s) = \mathcal{P} e^{-\int_0^s ds \frac{dx_\mu}{ds} A_\mu} \quad (2.4)$$

$$\equiv \mathcal{P} e^{-\int_0^s dx_\mu A_\mu}. \quad (2.5)$$

Durch das \mathcal{P} wird gekennzeichnet, daß es sich hier um pfadgeordnete Integrale für die nicht-kommutierenden Matrizen A_μ handelt.

Unter einer lokalen Eichtransformation transformiert sich $U(s)$ wie folgt

$$U(s) \mapsto g^{-1}(x_\mu(s)) U(s) g(x_\mu(0)). \quad (2.6)$$

2.1 Der Gitterformalismus

Um über die Störungstheorie hinaus zu gehen, nutzt man die Pfadintegral-Formulierung von Quantenfeldtheorien. Man kann sie dann in ein Problem aus der statistischen Mechanik überführen. Für diesen Zweck muß man von der realen Zeit zur imaginären Zeit übergehen, $t \rightarrow -it$. Mit Hilfe dieses euklidischen Tricks verwandelt sich der Phasenfaktor $\exp(-iS)$ einer gegebenen Feldkonfiguration in ein reelles Gewicht, das bereits als ein klassisches Boltzmann-Gewicht interpretiert werden kann. Die Vorgehensweise ist daher wie folgt: Man bestimmt das Pfadintegral durch die Erzeugung eines repräsentativen Ensembles von Feldkonfigurationen, die der Boltzmann-Verteilung genügen

$$P(\phi) \simeq e^{-S[\phi]}. \quad (2.7)$$

Dieses geschieht durch einen stochastischen Prozeß. In diesem Ensemble können nun Observablen „gemessen“ werden. Die Diskretisierung der Raum-Zeit impliziert eine Gitterregularisierung und daher eine passende Definition der eigentlichen Kontinuumstheorie. Auf einem hyperkubischen Gitter

$$\Lambda = a\mathbf{Z} = \left\{ x \left| \frac{x_\mu}{a} \in \mathbf{Z} \right. \right\} \quad (2.8)$$

mit der Gitterkonstanten a werden die skalaren Felder $f(x)$ nur auf den Gitterplätzen definiert.

Im Gegensatz zur Kontinuumsableitung gibt es auf dem Gitter sowohl eine Vorwärts- wie auch eine Rückwärts-Ableitung

$$\Delta_\mu^f f(x) := \frac{1}{a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x)), \quad (2.9)$$

$$\Delta_\mu^b f(x) := \frac{1}{a} (f(x) - f(x - a\hat{\mu})). \quad (2.10)$$

Dabei beschreibt $\hat{\mu}$ einen Einheitsvektor in μ -Richtung ($\mu \in \{1, 2, 3, 4\}$).

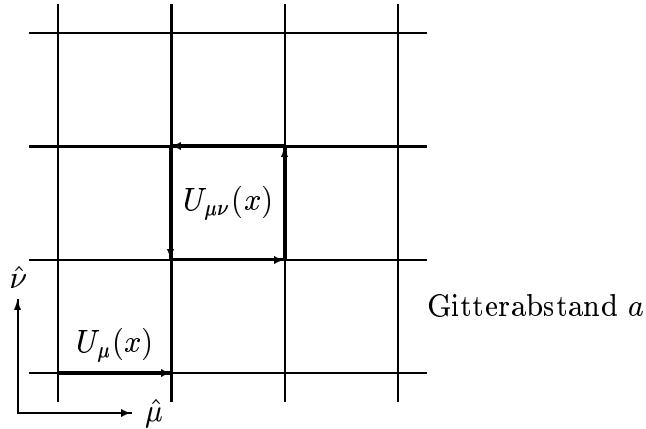


Abbildung 2.1: Anordnung der Eichfelder auf dem Gitter. Mit dicken Linien ist eine Linkvariable $U_\mu(x)$ und eine Plaquette $U_P = U_{\mu\nu}(x)$ dargestellt. $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$ geben die Einheitsvektoren in Richtung μ und ν an.

Im Gegensatz zum Kontinuum, wo die Eichfelder als Paralleltransporter entlang infinitesimaler Distanzen definiert sind, ist die kleinstmögliche Distanz auf dem Gitter die Gitterkonstante a . Die elementaren Paralleltransporter auf dem Gitter sind daher die, die mit den Verbindungen assoziiert werden, die nächste Nachbargitterpunkte miteinander verbinden. Ein Paralleltransporter wird geschrieben als

$$U_\mu(x) = U(x + a\hat{\mu}, x) \in \text{Eichgruppe}, \quad (2.11)$$

und erfüllt

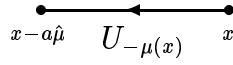
$$U(x, y) = U^{-1}(y, x) = U^\dagger(y, x). \quad (2.12)$$

Dazu kann man folgende graphische Darstellung verwenden:



Definiert man den Paralleltransporter auch für negative Richtungen, gilt analog:

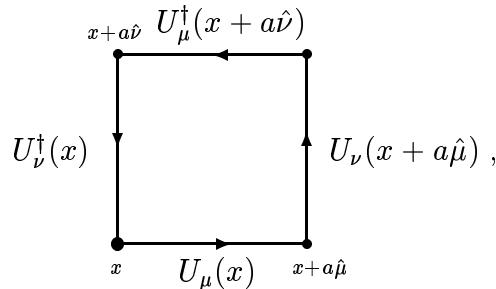
$$U_{-\mu}(x) \equiv U(x - a\hat{\mu}, x) = U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}). \quad (2.13)$$



2.2 Gitterreichtheorie

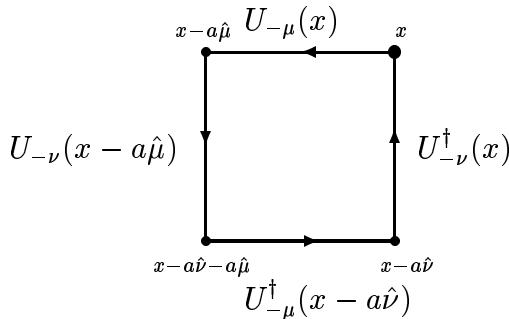
Die Gitterformulierung für die reine Eichwirkung wurde zuerst von K. G. WILSON formuliert. Analog zum Kontinuum, wo zur Berechnung des Feldstärketensors das Integral (2.5) auf einem infinitesimalen Rechteck der Größe $dx \times dy$ ausgewertet wird, betrachtet man auf dem Gitter das kleinst mögliche Rechteck. Dieses Rechteck mit den Eckpunkten $x, x + a\hat{\mu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}$ und $x + a\hat{\nu}$ ($\mu, \nu \in \{1, 2, 3, 4\}$) ist zum Beispiel in Abbildung (2.1) zu sehen. Die durch das Rechteck definierte Plaquette lautet

$$U_P = U_{\mu\nu} = U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x). \quad (2.14)$$



Für negative Richtungen hat man analog

$$\begin{aligned} U_{-\mu-\nu}(x) &= U_{-\nu}^\dagger(x) U_{-\mu}^\dagger(x - a\hat{\nu}) U_{-\nu}(x - a\hat{\mu}) U_{-\mu}(x) \\ &= U_\nu(x - a\hat{\nu}) U_\mu(x - a\hat{\nu} - a\hat{\mu}) U_\nu^\dagger(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}). \end{aligned} \quad (2.15)$$



Damit lautet die Wilson-Wirkung für ein $SU(N)$ Eichfeld

$$\begin{aligned} S[U] &= -\beta \sum_P \left\{ \frac{1}{2\text{Tr } \mathbf{1}} (\text{Tr } U_P + \text{Tr } U_P^{-1}) - 1 \right\} \\ &= \beta \sum_P \left(1 - \frac{1}{N} \text{ReTr } U_P \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Die Summe über alle Plaquetten P geht nur über Plaquetten mit der gleichen Orientierung:

$$\sum_P \equiv \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4}. \quad (2.17)$$

Mit

$$U_\mu(x) \equiv e^{-aA_\mu(x)} = \mathbf{1} - aA_\mu(x) + \frac{a^2}{2} A_\mu(x)^2 \pm \dots, \quad (2.18)$$

$$A_\nu(x + a\hat{\mu}) = A_\nu(x) + a \triangle_\mu^f A_\nu(x), \quad (2.19)$$

und der CAMPBELL-BAKER-HAUSDORFF-Formel

$$e^x e^y = e^{x+y+\frac{1}{2}[x,y]+\dots}, \quad (2.20)$$

zeigt man

$$U_{\mu\nu}(x) = e^{-a^2 G_{\mu\nu}(x)}. \quad (2.21)$$

Dabei ist $G_{\mu\nu}$ gegeben durch:

$$G_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a). \quad (2.22)$$

Der Feldstärketensor definiert sich auf dem Gitter analog zum Kontinuum durch

$$F_{\mu\nu}(x) = \triangle_\mu^f A_\nu(x) + \triangle_\nu^f A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (2.23)$$

Entwickelt man nun die Gitterwirkung (2.16) nach der Gitterkonstanten a , so erhält man

$$\text{Tr } (U_P + U_P^{-1}) = 2\text{Tr } \mathbf{1} + a^4 \text{Tr } F_{\mu\nu}(x)^2 + \mathcal{O}(a^5). \quad (2.24)$$

Die Spur über das Quadrat des Feldstärketensors kann umgeschrieben werden zu

$$\sum_P \text{Tr } F_{\mu\nu}(x)^2 = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu,\nu} \text{Tr } F_{\mu\nu}(x)^2. \quad (2.25)$$

Damit folgt für die WILSON-Wirkung

$$S = -\frac{\beta}{4N} \sum_x a^4 \text{Tr}(F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)) + \mathcal{O}(a^5). \quad (2.26)$$

Die Gitterwirkung geht somit im Limes $a \mapsto 0$ über in die Kontinuumstheorie, wenn

$$\beta = \frac{2N}{g^2} \quad (2.27)$$

gilt. Mit g wird die nackte Kopplungskonstante der Gittertheorie bezeichnet.

2.3 Nielsen-Ninomiya-Theorem

Nachdem nun mit Gleichung (2.16) die Wirkung für das Eichfeld in diskreter Form vorliegt, muß noch der fermionische Teil der Wirkung diskretisiert werden. Bringt man aber Fermionen auf ein Gitter, so stellt sich einem immer das Fermionverdopplungs-Problem: Statt einem Fermion erhält man 2^d Fermionen auf dem Gitter, wobei d die Anzahl der Dimensionen bezeichnet. Betrachtet man zum Beispiel das $3+1$ dimensionale naive Modell der Weyl-Gleichung auf dem Gitter und startet mit der Weyl-Gleichung im Kontinuum, so ist diese gegeben durch:

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}) = \frac{1}{i} \vec{\sigma} \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial \vec{x}}. \quad (2.28)$$

In der naiven Diskretisierung in der man die Ableitungen durch Differenzen ersetzt, geht die Gleichung (2.28) über in¹

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2i} \sigma_i \{u(\vec{x} + \vec{n}_i) - u(\vec{x} - \vec{n}_i)\}. \quad (2.29)$$

In der Impulsdarstellung erhält man die folgende Gleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(\vec{p}) = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \sin(p_i) \tilde{u}(\vec{p}). \quad (2.30)$$

Der Term $\sigma_i \sin(p_i)$ entspricht dem räumlichen Anteil des inversen Fermionpropagators. Dieser ist wegen der sin-Funktion eine periodische Funktion mit der Periode 2π . Beschränkt man sich auf eine Brillouin-Zone von $-\pi, \dots, +\pi$ stellt sich einem das folgende Problem: Da ein Teilchen zu den Nullstellen des inversen Propagators korrespondiert und die sin-Funktion außer bei $p = 0$ auch noch Nullstellen an den Ecken der Brillouin-Zone hat, gibt es auf dem Gitter nun statt einem Fermion acht Fermionen².

¹Bei diesem Beispiel wird nur der Raum diskretisiert, die Zeit bleibt kontinuierlich.

²Die Punkte $-\pi$ und $+\pi$ sind identisch.

In vier Dimensionen hat man nicht nur Pole bei $p = (0, 0, 0, 0)$ sondern auch noch bei $p = (\pi, 0, 0, 0), \dots, (\pi, \pi, \pi, \pi)$. Das sind insgesamt 16 Pole und damit 16 Fermionen. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu lösen, besteht in der Wahl eines inversen Propagators, der einen endlichen Sprung über der Impulsachse hat. Dies impliziert jedoch eine nicht-lokale Gitterwirkung. Nichtlokalitäten weisen bei der numerischen Implementierung erhebliche Schwierigkeiten auf und man ist daher bemüht solche Wirkungen zu vermeiden. Im Wilson-Formalismus wird dieses Problem mit Hilfe des sogenannten Wilson-Parameters r gelöst. Dieser wird in den nachfolgenden Rechnungen auf 1 fixiert. Durch die Einführung eines Wilson-Terms werden die Fermion-Doppler im Kontinuumslimes beseitigt. Dabei gibt man den zusätzlichen Fermionen eine Masse, die proportional zur inversen Gitterkonstanten a ist. Im Kontinuumslimes $a \rightarrow 0$ werden diese Massen dann unendlich groß und verschwinden somit aus dem Spektrum. Die Einführung solch eines Massenterms bricht natürlich explizit die chirale Symmetrie der Wirkung.

Das Fazit des oben Beprochenen ist, daß eine Regularisierung von Theorien mit Weyl-Fermionen, zum Beispiel durch das Gitter, erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Nach H. B. NIELSEN und M. NINOMIYA [47, 48] gibt es ein no-go Theorem für die Regularisierung des chiralen Teils des Standardmodells. Für die Übertragung der schwachen Wechselwirkung auf das Gitter ist unter einigen wenigen milden Annahmen das Auftauchen von gleich vielen rechts- und links-händigen Weyl-Fermionen eine unvermeidbare Konsequenz der Gittertheorie. Diese Annahmen bzw. Voraussetzungen, die über die Wirkung gemacht werden, lauten wie folgt:

- Lokalität der Wechselwirkung: Der Hamilton-Operator $H(\vec{x} - \vec{y})$ geht schnell genug gegen null wenn $|\vec{x} - \vec{y}|$ groß wird in dem Sinne, daß die Fouriertransformierte von $H(x)$ eine kontinuierliche erste Ableitung hat.
- Translations-Invarianz auf dem Gitter.
- Hermitezität des $N \times N$ Hamilton-Operators.

Die Konsequenz des no-go Theorems für die Gitter QCD ist, daß die chirale Invarianz nicht erhalten werden kann. Unter chiraler Symmetrie versteht man im masselosen Fall die Invarianz unter der Transformation

$$\psi \mapsto e^{i\Theta\gamma_5} \psi, \quad \text{mit } \gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4. \quad (2.31)$$

Nach dem Noether-Theorem ist damit ein erhaltener Strom

$$j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \quad (2.32)$$

verbunden.

2.4 Konstruktion der Gitterwirkung für Majorana-Fermionen

Für die Beschreibung einer Yang-Mills-Theorie mit einem Majorana-Fermion auf dem Gitter bietet sich zunächst eine Betrachtung der gleichen Theorie mit gewöhnlichen Dirac-Fermionen an [40]. Die Gitterwirkung ist dann für die Formulierung mit Wilson-Fermionen aus [43] gut bekannt. Bezeichnet man die fermionischen Grassmann-Felder in der adjunktiven Darstellung mit $\psi^a(x)$ und $\bar{\psi}^a(x)$, wobei a der Index der adjunktiven Darstellung ist ($a = 1, \dots, N_c^2 - 1$ für $SU(N_c)$), so ist der fermionische Teil der Gitterwirkung gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_f &= \sum_x \left\{ \bar{\psi}^a(x) \psi^a(x) \right. \\ &\quad \left. - K \sum_{\mu=1}^4 \left[\bar{\psi}^a(x + \hat{\mu}) V_{x\mu}^{ab} (1 + \gamma_\mu) \psi^b(x) + \bar{\psi}^a(x) (V^T)_{x\mu}^{ab} (1 - \gamma_\mu) \psi^b(x + \hat{\mu}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dabei ist K der Hoppingparameter und V die Matrix für das Eichfeld in der adjunktiven Darstellung:

$$K = \frac{1}{2aM_0 + 8r}, \quad (2.34)$$

$$V_{x\mu}^{ab} \equiv V_{x\mu}^{ab}[U] \equiv 2\text{Tr} (U_\mu^\dagger(x) T^a U_\mu(x) T^b) = (V^*)_{x\mu}^{ab} = (V^{-1T})_{x\mu}^{ab}. \quad (2.35)$$

Für die Konstruktion einer Gitterwirkung mit Majorana-Fermionen werden zunächst die Majorana-Feldkomponenten

$$\lambda^{(1)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi + C\bar{\psi}^T), \quad \lambda^{(2)} \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} (-\psi + C\bar{\psi}^T), \quad (2.36)$$

mit der Ladungskonjugationsmatrix C eingeführt. Diese erfüllen die Majorana-Bedingung

$$\bar{\lambda}^{(j)} = \lambda^{(j)T} C, \quad (j = 1, 2). \quad (2.37)$$

Die inverse Relation zu (2.36) ist:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda^{(1)} + i\lambda^{(2)}), \quad \psi_c \equiv C\bar{\psi}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda^{(1)} - i\lambda^{(2)}). \quad (2.38)$$

Mit Hilfe von zwei Majorana-Feldern kann die Fermionwirkung S_f in Gleichung (2.33) geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} S_f &= \frac{1}{2} \sum_x \sum_{j=1}^2 \left\{ \bar{\lambda}_x^{(j)a} \lambda_x^{(j)a} - K \sum_{\mu=1}^4 \left[\bar{\lambda}_{x+\hat{\mu}}^{(j)a} V_{x\mu}^{ab} (1 + \gamma_\mu) \lambda_x^{(j)b} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \bar{\lambda}_x^{(j)a} (V^T)_{x\mu}^{ab} (1 - \gamma_\mu) \lambda_{x+\hat{\mu}}^{(j)b} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

An dieser Stelle bietet es sich an, die *Fermionmatrix* Q einzuführen:

$$\begin{aligned} Q_{yx}^{ab} &\equiv Q_{yx}^{ab}[U] \\ &= \delta_{yx}\delta_{ab} - K \sum_{\mu=1}^4 \left[\delta_{y,x+\hat{\mu}} (1 + \gamma_\mu) V_{x\mu}^{ab} + \delta_{y+\hat{\mu},x} (1 - \gamma_\mu) (V^T)_{y\mu}^{ab} \right]. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Ausgedrückt durch die Fermionmatrix ergibt sich für die Wirkung S_f :

$$S_f = \sum_{xy,ab} \bar{\psi}_y^a Q_{yx}^{ab} \psi_x^b \quad (2.41)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \sum_{xa,yb} \bar{\lambda}_y^{(j)a} Q_{yx}^{ab} \lambda_x^{(j)b}. \quad (2.42)$$

Das fermionische Pfadintegral kann dann, wie im folgenden Kapitel gezeigt wird, geschrieben werden als:

$$\int [d\bar{\psi} d\psi] e^{-S_f} = \int [d\bar{\psi} d\psi] e^{-\bar{\psi} Q \psi} = \det Q \quad (2.43)$$

$$= \prod_{j=1}^2 \int [d\lambda^{(j)}] e^{-\frac{1}{2} \bar{\lambda}^{(j)} Q \lambda^{(j)}}. \quad (2.44)$$

Für Majorana-Felder reicht im Pfadintegral ein $d\lambda^{(j)}$. Die Gleichung (2.44) impliziert für $\lambda \equiv \lambda^{(1)}$ oder $\lambda \equiv \lambda^{(2)}$

$$\int [d\lambda] e^{-\frac{1}{2} \bar{\lambda} Q \lambda} = \pm \sqrt{\det Q}. \quad (2.45)$$

Die Festlegung des Vorzeichens ist zunächst nicht so einfach. Es kann zum Beispiel für eine gegebene Eichkonfiguration über die *Pfaffsche Form* der Fermionmatrix geschehen [40]. Dabei entspricht die Wurzel der Determinante gerade einer Pfaffschen Form. Diese kann für eine allgemeine komplexe antisymmetrische Matrix $M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha}$ mit einer geraden Anzahl von Dimensionen ($1 \leq \alpha, \beta \leq 2N$) durch ein Grassmann-Integral wie folgt definiert werden:

$$\text{pf}(M) \equiv \int [d\phi] e^{-\frac{1}{2} \phi_\alpha M_{\alpha\beta} \phi_\beta} \quad (2.46)$$

$$= \frac{1}{2^N N!} \epsilon_{\alpha_1\beta_1 \dots \alpha_N\beta_N} M_{\alpha_1\beta_1} \dots M_{\alpha_N\beta_N}. \quad (2.47)$$

Dabei ist ϵ wieder der total antisymmetrische Einheitstensor und $[d\phi] \equiv d\phi_{2N} \dots d\phi_1$. Mit dem oben angewandten Verdopplungstrick der Grassmann-Variablen kann man leicht zeigen [45], daß

$$[\text{pf}(M)]^2 = \det M \quad (2.48)$$

gilt. Durch diese Gleichung wird der Zusammenhang zwischen der Pfaffschen Form und der Determinante bewiesen.

Mit dem oben Berechneten kann man nun die Wirkung für ein Majorana-Fermion $\lambda^r(x)$ in der adjungierten Darstellung wie folgt definieren:

$$S_f = \frac{1}{2} \bar{\lambda} Q \lambda \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sum_x \left\{ \bar{\lambda}_x^{(j)a} \lambda_x^{(j)a} \right. \\ &\quad \left. - K \sum_{\mu=1}^4 \left[\bar{\lambda}_{x+\hat{\mu}}^{(j)a} V_{x\mu}^{ab} (1 + \gamma_\mu) \lambda_x^{(j)b} + \bar{\lambda}_x^{(j)a} (V^T)_{x\mu}^{ab} (1 - \gamma_\mu) \lambda_{x+\hat{\mu}}^{(j)b} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Das Pfadintegral über λ wird durch die Pfaffsche Form

$$\text{pf}(CQ) = \pm \sqrt{\det(CQ)} = \pm \sqrt{\det Q} \quad (2.51)$$

definiert. Da sich das Vorzeichen durch Gleichung (2.47) eindeutig bestimmen lässt, gibt es keine Vorzeichenwahl. Zusammenfassend ergibt sich somit die Wirkung für die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie als Summe der reinen Eichwirkung (2.16) und der fermionischen Wirkung (2.50).

Kapitel 3

Grassmann-Algebra

Die Elemente $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N$ werden Generatoren einer Grassmann-Algebra genannt, wenn sie untereinander antikommutieren:

$$\{\psi_i, \psi_j\} = \psi_i \psi_j + \psi_j \psi_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (3.1)$$

Aus dieser Definition folgt:

$$\psi_i^2 = 0. \quad (3.2)$$

Ein gewöhnliches Element einer Grassmann-Algebra ist definiert durch eine Potenzreihe in den ψ 's. Diese hat jedoch wegen (3.2) nur eine endliche Anzahl von Termen. So kann man zum Beispiel die Funktion

$$f(\psi) = e^{-\sum_{i,j=1}^N \psi_i A_{ij} \psi_j}, \quad (3.3)$$

schreiben als

$$f(\psi) = \prod_{i,j} e^{-\psi_i A_{ij} \psi_j} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N (1 - \psi_i A_{ij} \psi_j). \quad (3.4)$$

Im folgenden soll eine Grassmann-Algebra bestehend aus $2 \times N$ Generatoren

$$\psi_1, \dots, \psi_N, \bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_N, \quad (3.5)$$

betrachtet werden, wobei ψ und $\bar{\psi}$ unabhängig voneinander sind. Für die Gauß-Funktion h , die von den beiden Variablen ψ und $\bar{\psi}$ abhängt, gilt nun analog:

$$\begin{aligned} h(\psi, \bar{\psi}) &= e^{-\sum_{i,j} \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j} \\ &= \prod_{i,j=1}^N (1 - \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dieser Ausdruck enthält jedoch im Unterschied zu (3.4) auch Diagonalelemente.

3.1 Integration über Grassmann-Variablen

Für die Berechnung eines beliebigen Grassmann-Integrals werden die folgenden Regeln definiert:

$$\int d\psi_i = 0, \quad (3.7)$$

$$\int d\psi_i \psi_i = 1. \quad (3.8)$$

Bei der Berechnung von Mehrfachintegralen ist darauf zu achten, daß die Integrationsmaße sowohl mit sich selbst antikommutieren wie auch mit allen ψ_i ,

$$\{d\psi_i, d\psi_j\} = \{d\psi_i, \psi_j\} = 0, \quad \forall i, j. \quad (3.9)$$

Die obigen Integrationsregeln reichen aus, um eine Pfadintegraldarstellung für fermionische Greensche-Funktionen zu erhalten. Als Beispiel soll das folgende Integral betrachtet werden:

$$I[A] = \int \prod_{l=1}^N d\bar{\psi}_l d\psi_l e^{-\sum_{i,j=1}^N \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j}. \quad (3.10)$$

Für die Berechnung dieses Integrals wird (3.10) zunächst auf die nachstehende Form gebracht:

$$e^{-\sum_{i,j=1}^N \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j} = \prod_{i=1}^N e^{-\bar{\psi}_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \psi_j}. \quad (3.11)$$

Da $\bar{\psi}_i^2 = 0$ gilt, geben bei der Entwicklung der Exponentialfunktion nur die ersten beiden Terme einen Beitrag. Es ergibt sich also:

$$e^{-\sum_{i,j=1}^N \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j} = (1 - \bar{\psi}_1 A_{1i_1} \psi_{i_1}) (1 - \bar{\psi}_2 A_{2i_2} \psi_{i_2}) \dots (1 - \bar{\psi}_N A_{Ni_N} \psi_{i_N}), \quad (3.12)$$

wobei über gleiche Indices i_l ($l = 1, \dots, N$) summiert wird. Nach den Grassmannregeln (3.7) und (3.8) muß der Integrand (3.10) das Produkt von allen Grassmann Variablen enthalten. Zur Berechnung reicht somit die Betrachtung des folgenden Terms:

$$M(\psi, \bar{\psi}) = \sum_{i_1, \dots, i_N} \psi_{i_1} \bar{\psi}_1 \psi_{i_2} \bar{\psi}_2 \dots \psi_{i_N} \bar{\psi}_N A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{Ni_N}. \quad (3.13)$$

Das Minuszeichen, das in Gleichung (3.12) auftritt, wurde in der obigen Formel mit Hilfe von $\bar{\psi}_k \psi_{i_k} = -\psi_{i_k} \bar{\psi}_k$ eliminiert. Die Summation enthält natürlich nur Terme, bei denen alle Indices i_1, \dots, i_N verschieden sind. Da das Produkt von Grassmann-Variablen in (3.13) antisymmetrisch unter dem Wechsel von Indexpaaren i_l und $i_{l'}$ ist, kann (3.13) geschrieben werden als:

$$M(\psi, \bar{\psi}) = \psi_1 \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_2 \dots \psi_N \bar{\psi}_N \sum_{i_1, \dots, i_N} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{Ni_N}, \quad (3.14)$$

mit dem ϵ -Tensor $\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ in N Dimensionen. Mit Hilfe der Standarddarstellung für die Determinante der Matrix A findet man:

$$M(\psi, \bar{\psi}) = (\det A) \psi_1 \bar{\psi}_1 \psi_2 \bar{\psi}_2 \cdots \psi_N \bar{\psi}_N. \quad (3.15)$$

Ersetzt man nun die Exponentialfunktion in (3.10) durch diesen Ausdruck, so erhält man

$$I[A] = \left[\prod_{l=1}^N \int d\bar{\psi}_l d\psi_l \psi_l \bar{\psi}_l \right] \det A = \det A. \quad (3.16)$$

Zusammenfassend ergibt sich somit:

$$\int \mathcal{D}(\bar{\psi} \psi) e^{-\sum_{i,j=1}^N \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j} = \det A, \quad (3.17)$$

$$\mathcal{D}(\bar{\psi} \psi) = \prod_{l=1}^N d\bar{\psi}_l d\psi_l. \quad (3.18)$$

3.2 Majorana-Fermionen

Bei Majorana-Fermionen handelt es sich um Grassmann-Variablen λ und $\bar{\lambda}$, die nicht unabhängig voneinander sind. Sie sind über die Beziehung $\bar{\lambda} = \lambda^T C$ miteinander verknüpft. Vergleicht man somit die einzelnen Komponenten von λ mit $\bar{\lambda}$, so stellt letzteres lediglich einen transponierten λ -Spinor mit umsortierten Komponenten dar, die abwechselnd ein positives oder negatives Vorzeichen besitzen. Damit sind auch die Ableitungen $\frac{\delta}{\delta \lambda}$ und $\frac{\delta}{\delta \bar{\lambda}}$ voneinander abhängig. Anders als bei den gewöhnlichen Grassmann-Variablen erhält man daher für die Ableitungen $\frac{\delta \lambda}{\delta \bar{\lambda}}$ und $\frac{\delta \bar{\lambda}}{\delta \lambda}$ einen von null verschiedenen Wert. Der genaue Zusammenhang findet sich im Anhang (A.1).

Für Majorana-Fermionen ist das erzeugende Funktional mit einer Quelle gegeben durch:

$$Z_0[\bar{\eta}] = \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\lambda e^{-S_g - \frac{1}{2} \bar{\lambda} Q \lambda + \bar{\eta} \lambda}. \quad (3.19)$$

Dabei beschreibt $S_g \equiv S_g[U]$ die reine Eichwirkung und Z_M ist definiert als:

$$Z_M = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\lambda e^{-S_g - \frac{1}{2} \bar{\lambda} Q \lambda} = \pm \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q}. \quad (3.20)$$

Das Ziel ist es nun, einen Ausdruck für die Gleichung (3.19) zu finden derart, daß die Integration über λ ausgeführt werden kann. Identifiziert man

$$P(\lambda) = -\frac{1}{2} \bar{\lambda} Q \lambda + \bar{\eta} \lambda, \quad (3.21)$$

so wird dieser Ausdruck minimiert durch den folgenden λ -Wert:

$$\lambda_m = Q^{-1} \eta. \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{\lambda}_m &= \lambda_m^T C = \eta^T (Q^{-1})^T C = \bar{\eta} C^{-1} (Q^{-1})^T C \\ &= \bar{\eta} Q^{-1}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Matrix Q ein Inverses besitzt. Dieses ist aber durch die Definition der Fermionmatrix leicht ersichtlich. Der kleinste Wert von P ist dann gegeben durch

$$P_m(\lambda_m) = -\frac{1}{2} \bar{\lambda}_m Q \lambda_m + \bar{\eta} \lambda_m \quad (3.24)$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\eta} Q^{-1} \eta. \quad (3.25)$$

Mit Hilfe von P_m läßt sich P wie folgt schreiben:

$$P(\lambda) = P_m(\lambda_m) - \frac{1}{2} (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_m) Q (\lambda - \lambda_m). \quad (3.26)$$

Mit diesem Ausdruck für P erhält man das erzeugende Funktionalintegral zu:

$$Z_0[\bar{\eta}] = \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}\lambda e^{-S_g} e^{-\frac{1}{2}(\bar{\lambda}-\bar{\lambda}_m)Q(\lambda-\lambda_m)} e^{\frac{1}{2}\bar{\eta}Q^{-1}\eta} \quad (3.27)$$

$$= \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \left(\pm \sqrt{\det Q} \right) e^{\frac{1}{2}\bar{\eta}Q^{-1}\eta}. \quad (3.28)$$

In dem letzten Schritt wurde der Term $e^{\frac{1}{2}\bar{\eta}Q^{-1}\eta}$ außerhalb des Integrals über $\mathcal{D}\lambda$ gestellt, da P_m unabhängig von λ bzw. $\bar{\lambda}$ ist. Die verbleibende Integration über die Exponentialfunktion wurde mit Hilfe von Gleichung (2.45) aus Kapitel 2 gelöst. Für die folgenden Rechnungen beschränke ich mich bei dem Vorzeichen auf den positiven Fall.

3.3 Integrale über Majorana-Fermionen

In diesem Abschnitt sollen Integrale über mehrere Majorana-Fermionen gebildet werden. Diese werden in dem Kapitel 5 bei der Hoppingparameter-Entwicklung benötigt und sind Bestandteil jeder Reihenentwicklung in einem supersymmetrischen Modell. Betrachtet werden dazu Integrale, die von der Form

$$\int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) e^{-\frac{1}{2} \sum_{b=1}^3 \bar{\psi}^b(x) \psi^b(x)} \psi_\gamma^c(x) \dots \psi_\phi^f(x) \quad (3.29)$$

sind. Analog zu (3.19) wird die folgende Zustandsfunktion definiert:¹

$$Z_0[\eta] := \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a e^{-\frac{1}{2} \sum_{\gamma,\delta,a} \psi_\gamma^a C_{\gamma\delta} \psi_\delta^a + \sum_{\alpha,\beta} \eta_\alpha^b C_{\alpha\beta} \psi_\beta^b} \quad (3.30)$$

$$= Z_0[0] e^{\frac{1}{2} \sum_{\rho,\tau,d} \eta_\rho^d C_{\rho\tau} \eta_\tau^d}. \quad (3.31)$$

¹Da die Majorana-Teilchen η und $\bar{\eta}$ abhängig voneinander sind, reicht eine Quelle zur Beschreibung des Funktionalintegrals aus.

Nach (2.45) lässt sich $Z_0[0]$ berechnen zu:

$$Z_0[0] = \pm \sqrt{\det C}. \quad (3.32)$$

Das Vorzeichen von $Z_0[0]$ lässt sich mit (A.10) oder den Gleichungen (A.8) und (A.20) eindeutig bestimmen und es ergibt sich

$$Z_0[\eta] = -e^{\frac{1}{2} \sum_{\rho,\tau,d} \eta_\rho^d C_{\rho\tau} \eta_\tau^d}. \quad (3.33)$$

Ableiten der obigen Zustandsfunktion nach der Quelle $\bar{\eta}$ ergibt die einzelnen Erwartungswerte.

$$\frac{\delta Z_0[\eta]}{\delta \bar{\eta}_\gamma^c} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \left(C_{\gamma\delta}^{-1} \delta_{\alpha\delta} \delta_{ca} C_{\alpha\beta} \eta_\beta^a - \eta_\alpha^a C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta}^{-1} \delta_{\delta\beta} \delta_{ac} \right) e^{\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,a} \eta_\alpha^a C_{\alpha\beta} \eta_\beta^a} \quad (3.34)$$

$$= - \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a e^{-\frac{1}{2} \bar{\psi}\psi} \left(\sum_{\alpha,\beta} C_{\gamma\delta} \delta_{\alpha\delta} \delta_{bc} C_{\alpha\beta} \psi_\beta^b \right) e^{\sum_{\epsilon,\phi,d} \eta_\epsilon^d C_{\epsilon\phi} \psi_\phi^d} \quad (3.35)$$

$$\left. \frac{\delta^2 Z_0[\eta]}{\delta \bar{\eta}_\tau^t \delta \bar{\eta}_\gamma^c} \right|_{\bar{\eta}=0} = -\frac{1}{2} \sum_a \left(C_{\gamma\delta}^{-1} \delta_{\alpha\delta} \delta_{ca} C_{\alpha\beta} C_{\tau\rho}^{-1} \delta_{\rho\beta} \delta_{at} - C_{\tau\rho}^{-1} \delta_{\rho\alpha} \delta_{at} C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta}^{-1} \delta_{\delta\beta} \delta_{ac} \right) \quad (3.36)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \left(C_{\gamma\alpha}^{-1} C_{\alpha\beta} C_{\tau\beta}^{-1} \delta_{ct} - C_{\tau\alpha}^{-1} C_{\alpha\beta} C_{\gamma\beta}^{-1} \delta_{ct} \right) \quad (3.37)$$

$$= -\frac{1}{2} (C_{\gamma\tau} - C_{\tau\gamma}) \delta_{ct} = -C_{\gamma\tau} \delta_{ct} \quad (3.38)$$

$$= - \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a e^{-\frac{1}{2} \bar{\psi}\psi} \left(\sum_{\alpha,\beta} C_{\gamma\delta} \delta_{\alpha\delta} \delta_{bc} C_{\alpha\beta} \psi_\beta^b \right) \left(\sum_{\epsilon,\phi} C_{\tau\rho} \delta_{\rho\epsilon} \delta_{dt} C_{\epsilon\phi} \psi_\phi^d \right) \quad (3.39)$$

$$= - \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a e^{-\frac{1}{2} \bar{\psi}\psi} \left(\sum_{\alpha,\beta} C_{\gamma\alpha} C_{\alpha\beta} \psi_\beta^c \right) \left(\sum_{\epsilon,\phi} C_{\tau\epsilon} C_{\epsilon\phi} \psi_\phi^t \right) \quad (3.40)$$

$$= - \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a e^{-\frac{1}{2} \bar{\psi}\psi} \sum_\beta \mathbf{1}_{\gamma\beta} \psi_\beta^c \sum_\phi \mathbf{1}_{\tau\phi} \psi_\phi^t \quad (3.41)$$

$$= - \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a e^{-\frac{1}{2} \bar{\psi}\psi} \psi_\gamma^c \psi_\tau^t \quad (3.42)$$

$$\int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a e^{-\frac{1}{2} \bar{\psi}\psi} \psi_\gamma^c \psi_\tau^t = C_{\gamma\tau} \delta_{tc} \quad (3.43)$$

Durch aufwendiges Ableiten berechnen sich die höheren Erwartungswerte zu:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^4 Z_0[\eta]}{\delta \bar{\eta}_\delta^d \delta \bar{\eta}_\rho^s \delta \bar{\eta}_\tau^t \delta \bar{\eta}_\gamma^c} \right|_{\bar{\eta}=0} &= \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a e^{-\frac{1}{2} \bar{\psi}\psi} \psi_\gamma^c \psi_\tau^t \psi_\rho^s \psi_\delta^d \\ &= -C_{\gamma\tau} C_{\rho\delta} \delta_{ct} \delta_{sd} + C_{\gamma\rho} C_{\tau\delta} \delta_{cs} \delta_{td} + C_{\gamma\delta} C_{\rho\tau} \delta_{cd} \delta_{ts}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Abgekürzt kann der obige Ausdruck auch in Form eines ϵ -Tensors geschrieben werden, bei dem die Farben paarweise gleich sein müssen.

$$\int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a e^{-\frac{1}{2}\bar{\psi}\psi} \psi_\gamma^c \psi_\tau^t \psi_\rho^s \psi_\delta^d = \epsilon_{\gamma\tau\rho\delta}^{cts}. \quad (3.45)$$

Dabei ist $\epsilon_{\gamma\tau\rho\delta}^{cts}$ definiert als

$$\epsilon_{\gamma\tau\rho\delta}^{cts} = -C_{\gamma\tau} C_{\rho\delta} \delta_{ct} \delta_{sd} + C_{\gamma\rho} C_{\tau\delta} \delta_{cs} \delta_{td} + C_{\gamma\delta} C_{\rho\tau} \delta_{cd} \delta_{ts}. \quad (3.46)$$

Der Erwartungswert für sechs Majorana-Fermionen ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^6 Z_0[\eta]}{\delta \bar{\eta}_\xi^j \delta \bar{\eta}_\Phi^i \delta \bar{\eta}_\delta^d \delta \bar{\eta}_\rho^s \delta \bar{\eta}_\tau^t \delta \bar{\eta}_\gamma^c} \right|_{\bar{\eta}=0} &= - \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a e^{-\frac{1}{2}\bar{\psi}\psi} \psi_\gamma^c \psi_\tau^t \psi_\rho^s \psi_\delta^d \psi_\Phi^i \psi_\xi^j \\ &= - \left(-C_{\gamma\tau} \delta_{ct} \epsilon_{\rho\delta\Phi\xi}^{sdis} + C_{\gamma\rho} \delta_{cs} \epsilon_{\tau\delta\Phi\xi}^{tdis} - C_{\gamma\delta} \delta_{cd} \epsilon_{\tau\rho\Phi\xi}^{tsis} \right. \\ &\quad \left. + C_{\gamma\Phi} \delta_{ci} \epsilon_{\tau\rho\delta\xi}^{tsdi} - C_{\gamma\xi} \delta_{cj} \epsilon_{\tau\rho\delta\Phi}^{tsdi} \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

3.4 Erwartungswerte für Majorana-Fermion-Felder

Das in dem letzten Abschnitt diskutierte Verfahren lässt sich auf beliebige Matrizen erweitern. Man erhält dann die Erwartungswerte von Majorana-Fermion-Feldern, wie in der QCD, durch mehrfaches Ableiten des Funktionalintegrals nach den Quellen.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta^n Z_0[\bar{\eta}]}{\delta \eta(x_n) \delta \bar{\eta}(y_n) \cdots \delta \eta(x_1) \delta \bar{\eta}(y_1)} \right|_{\bar{\eta}=0} &= \\ \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\lambda \lambda(y_1) \bar{\lambda}(x_1) \cdots \lambda(y_n) \bar{\lambda}(x_n) e^{-S_g - S_f} \\ &\equiv \langle \lambda(y_1) \bar{\lambda}(x_1) \cdots \lambda(y_n) \bar{\lambda}(x_n) \rangle \end{aligned} \quad (3.48)$$

Mit Gleichung (3.28) sollen im folgenden die Ableitungen nach den Quellen berechnet werden. Die erste Ableitung nach $\bar{\eta}_\alpha$ ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \frac{\delta Z_0[\bar{\eta}]}{\delta \bar{\eta}_\alpha(y_1)} &= \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_\alpha(y_1)} \left(\frac{1}{2} \bar{\eta}_\gamma(y) Q_{y\gamma,x\delta}^{-1} \eta_\delta(x) \right) e^{\frac{1}{2} \bar{\eta} Q_{yx}^{-1} \eta} \\ &= \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q} \left\{ \frac{1}{2} Q_{y_1\alpha,x\beta}^{-1} \eta_\delta(x) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_\gamma(y) Q_{y\gamma,y_1\epsilon}^{-1} C_{\epsilon\alpha} \right\} \\ &\quad \times e^{\frac{1}{2} \bar{\eta} Q_{yx}^{-1} \eta}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Leitet man nun noch nach η_β ab, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z_0[\bar{\eta}]}{\delta \eta_\beta(x_1) \delta \bar{\eta}_\alpha(y_1)} &= \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q} \left\{ \left(\frac{1}{2} Q_{y_1\alpha, x_1\beta}^{-1} - \frac{1}{2} C_{\beta\phi} Q_{x_1\phi, y_1\epsilon}^{-1} C_{\epsilon\alpha}^{-1} \right) \right. \\ &\quad \times e^{\frac{1}{2} \bar{\eta} Q_{yx}^{-1} \eta} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} Q_{y_1\alpha, x_\delta}^{-1} \eta_\delta(x) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_\gamma(y) Q_{y\gamma, y_1\epsilon}^{-1} C_{\epsilon\alpha}^{-1} \right) \\ &\quad \times \left. \left(\frac{1}{2} C_{\beta\rho} Q_{x_1\rho, x_\delta}^{-1} \eta_\delta(x) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_\gamma(y) Q_{y\gamma, x_1\beta}^{-1} \right) e^{\frac{1}{2} \bar{\eta} Q_{yx}^{-1} \eta} \right\}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Nullsetzen der Quellen führt zu

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z_0[\bar{\eta}]}{\delta \eta_\beta(x_1) \delta \bar{\eta}_\alpha(y_1)} \Big|_{\bar{\eta}=0} &= \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q} \left(\frac{1}{2} Q_{y_1\alpha, x_1\beta}^{-1} + \frac{1}{2} \underbrace{C_{\epsilon\alpha}}_{=C_{\alpha\epsilon}^{-1}} (Q_{y_1\epsilon, x_1\phi}^{-1})^T C_{\phi\beta} \right) \\ &\stackrel{(3.23)}{=} \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q} \left(\frac{1}{2} Q_{y_1\alpha, x_1\beta}^{-1} + \frac{1}{2} Q_{y_1\alpha, x_1\beta}^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q} Q_{y_1\alpha, x_1\beta}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Für $n = 1$ hat man somit

$$\langle \lambda(y) \bar{\lambda}(x) \rangle = \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q} Q_{yx}^{-1}. \quad (3.52)$$

Um den wichtigen Fall $n = 2$ zu berechnen, benötigt man die Ableitung des Funktionalintegrals bis zur vierten Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 Z_0[\bar{\eta}]}{\delta \bar{\eta}_{\tilde{\alpha}}(y_2) \delta \eta_\beta(x_1) \delta \bar{\eta}_\alpha(y_1)} &= \\ \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q} &\left\{ Q_{y_1\alpha, x_1\beta}^{-1} \left(\frac{1}{2} Q_{y_2\tilde{\alpha}, x_\delta}^{-1} \eta_\delta(x) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_\gamma(y) Q_{y\gamma, y_2\mu}^{-1} C_{\mu\tilde{\alpha}} \right) e^{\frac{1}{2} \bar{\eta} Q_{yx}^{-1} \eta} \right. \\ &- \left(\frac{1}{2} C_{\nu\tilde{\alpha}} Q_{y_1\alpha, y_2\nu}^{-1} - \frac{1}{2} Q_{y_2\tilde{\alpha}, y_1\epsilon}^{-1} C_{\epsilon\alpha} \right) \left(\frac{1}{2} C_{\beta\rho} Q_{x_1\rho, x_\delta}^{-1} \eta_\delta(x) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_\gamma(y) Q_{y\gamma, x_1\beta}^{-1} \right) \\ &\quad \times e^{\frac{1}{2} \bar{\eta} Q_{yx}^{-1} \eta} \\ &+ \left(\frac{1}{2} Q_{y_1\alpha, x_\delta}^{-1} \eta_\delta(x) - \frac{1}{2} \bar{\eta}_\gamma(y) Q_{y\gamma, y_1\epsilon}^{-1} C_{\epsilon\alpha} \right) \left(\frac{1}{2} C_{\beta\rho} Q_{x_1\rho, y_2\tau}^{-1} C_{\tau\tilde{\alpha}} - \frac{1}{2} Q_{y_2\tilde{\alpha}, x_1\beta}^{-1} \right) \\ &\quad \times e^{\frac{1}{2} \bar{\eta} Q_{yx}^{-1} \eta} \left. + \mathcal{O}(\eta^2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^4 Z_0[\bar{\eta}]}{\delta \eta_{\tilde{\beta}}(x_2) \delta \bar{\eta}_\alpha(y_2) \delta \eta_\beta(x_1) \delta \bar{\eta}_\alpha(y_1)} \Big|_{\bar{\eta}=0} = \\
& \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q} \left\{ Q_{y_1\alpha, x_1\beta}^{-1} \left(\frac{1}{2} Q_{y_2\tilde{\alpha}, x_2\tilde{\beta}}^{-1} - \frac{1}{2} C_{\tilde{\beta}\tau} Q_{x_2\tau, y_2\mu}^{-1} C_{\mu\tilde{\alpha}} \right) \right. \\
& - \left(\frac{1}{2} C_{\nu\tilde{\alpha}} Q_{y_1\alpha, y_2\nu}^{-1} - \frac{1}{2} Q_{y_2\tilde{\alpha}, y_1\epsilon}^{-1} C_{\epsilon\alpha} \right) \left(\frac{1}{2} C_{\beta\rho} Q_{x_1\rho, x_2\tilde{\beta}}^{-1} - \frac{1}{2} C_{\tilde{\beta}\phi} Q_{x_2\phi, x_1\beta}^{-1} \right) \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} Q_{y_1\alpha, x_2\tilde{\beta}}^{-1} - \frac{1}{2} C_{\tilde{\beta}\sigma} Q_{x_2\sigma, y_1\epsilon}^{-1} C_{\epsilon\alpha} \right) \left(\frac{1}{2} C_{\beta\rho} Q_{x_1\rho, y_2\tau}^{-1} C_{\tau\tilde{\alpha}} - \frac{1}{2} Q_{y_2\tilde{\alpha}, x_1\beta}^{-1} \right) \right\}. \tag{3.54}
\end{aligned}$$

Durch Umformung der Gleichung $C^{-1} (Q^{-1})^T C$ ergibt sich

$$(Q^{-1})^T C = C Q^{-1} \tag{3.55}$$

und damit

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta^4 Z_0[\bar{\eta}]}{\delta \eta_{\tilde{\beta}}(x_2) \delta \bar{\eta}_\alpha(y_2) \delta \eta_\beta(x_1) \delta \bar{\eta}_\alpha(y_1)} \Big|_{\bar{\eta}=0} = \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q} \\
& \left\{ Q_{y_1\alpha, x_1\beta}^{-1} Q_{y_2\tilde{\alpha}, x_2\tilde{\beta}}^{-1} \right. \\
& + Q_{y_2\tilde{\alpha}, y_1\epsilon}^{-1} C_{\epsilon\alpha} C_{\beta\rho} Q_{x_1\rho, x_2\tilde{\beta}}^{-1} \\
& \left. - Q_{y_1\alpha, x_2\tilde{\beta}}^{-1} Q_{y_2\tilde{\alpha}, x_1\beta}^{-1} \right\}. \tag{3.56}
\end{aligned}$$

Man erhält somit für $n = 2$:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(y_1) \bar{\lambda}(x_1) \lambda(y_2) \bar{\lambda}(x_2) \rangle &= \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}U e^{-S_g} \sqrt{\det Q} \\
&\times \left\{ Q_{y_1x_1}^{-1} Q_{y_2x_2}^{-1} + (Q^{-1}C)_{y_2y_1} (CQ^{-1})_{x_1x_2} \right. \\
&\left. - Q_{y_1x_2}^{-1} Q_{y_2x_1}^{-1} \right\}. \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Kapitel 4

Einige Aspekte der Gruppentheorie

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Begriffen Transformation einer Gruppe und ihren Darstellungen, wobei insbesondere die beiden Gruppen $SO(3)$ und $SU(2)$ betrachtet werden. Nach einigen allgemeinen gruppentheoretischen Erläuterungen werden Integrationsregeln für verschiedene Arten von Gruppenintegralen hergeleitet.

4.1 Abelsche und nicht-abelsche Gruppen

Seit der Einführung der Relativitätstheorie hat der Begriff der Transformationen zwischen Inertialsystemen spezielle mathematische Strukturen angenommen. So geben zwei nacheinander ausgeführte Transformationen aus dem Satz von Transformationen \mathcal{P} wieder eine Transformation aus \mathcal{P} . Außerdem gibt es zu jeder Transformation aus \mathcal{P} genau eine inverse Transformation, die wiederum in \mathcal{P} liegt. Der Satz von Transformationen \mathcal{P} formuliert somit eine *Gruppe*, in der die Gruppen-Multiplikationsregeln durch die Verknüpfungen der Transformationen festgelegt sind.

Allgemein versteht man unter einer Gruppe \mathcal{G} einen Satz von Elementen $\{g, h, \dots\}$, wobei jedem geordneten Paar (g, h) von Elementen ein Produkt gh in \mathcal{P} zugeordnet wird, so daß die folgenden Gruppen-Axiome erfüllt sind:

1. $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$.
2. Es gibt ein Element $e \in \mathcal{G}$, so daß $eg = ge = g$ für alle $g \in \mathcal{G}$.
3. Für jedes Element $g \in \mathcal{G}$ gibt es ein Element $g^{-1} \in \mathcal{G}$, so daß $g^{-1}g = gg^{-1} = e$ gilt.

Eine Gruppe heißt *abelsche* oder *kommutative* Gruppe, wenn überall in \mathcal{G} gilt $gh = hg$. Andernfalls spricht man von einer *nicht-abelschen* Gruppe.

4.1.1 Morphismen und Darstellungen

Die Abbildung einer Gruppe \mathcal{G} auf eine Gruppe $D(\mathcal{G})$ heißt *homomorph* bzw. stellt einen *Homomorphismus* dar, wenn jedem Element $g \in \mathcal{G}$ eindeutig ein Element $D(g) \in D(\mathcal{G})$

zugeordnet ist derart, daß folgendes gilt

$$gh \mapsto D(g)D(h) = D(gh). \quad (4.1)$$

Unter einer Darstellung einer gegebenen Gruppe \mathcal{G} versteht man einen Homomorphismus dieser Gruppe auf eine andere Gruppe $\tilde{\mathcal{G}}$, die durch Matrizen realisiert ist. Normalerweise ist die Gruppe $\tilde{\mathcal{G}}$ eine bekannte oder einfachere Gruppe, über die man dann mehr von der eigentlichen Gruppe \mathcal{G} erfährt.

Die einzelnen Darstellungen kann man in *reduzible* und *irreduzible* Darstellungen unterteilen. Handelt es sich um eine kompakte Gruppe, ermöglicht eine reduzible Darstellung $D(g)$ für alle g eine Schreibweise in der Block-Diagonalform:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^1(g) & 0 & 0 \\ 0 & D^2(g) & 0 \\ 0 & 0 & D^3(g) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Andernfalls heißt die Darstellung irreduzibel. Jede Gruppe verfügt über eine unendliche Anzahl von Darstellungen, die aber alle aus irreduziblen Darstellungen konstruiert werden können. Zur Erläuterung des Begriffs der Darstellung betrachtet man zum Beispiel die Lorentzgruppe. Die Lorentzgruppe ist eine Gruppe von Transformationen. Das bedeutet, daß es zu jedem Gruppenelement eine Lorentztransformation $L(g)$ gibt, so daß folgendes gilt:

$$\bar{u}^i = L_k^i(g) u^k, \quad \bar{u} = L(g) u, \quad (4.3)$$

mit

$$(u^i) = (u^0, u^1, u^2, u^3)^T \quad \text{und} \quad (\bar{u}^i) = (\bar{u}^0, \bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3)^T. \quad (4.4)$$

Dabei bleiben skalare Produkte invariant:

$$u \mapsto L(g) u, \quad v \mapsto L(g) v, \quad u v = (L(g) u)(L(g) v). \quad (4.5)$$

Per Definition des Produktes $g_1 g_2$ zweier Gruppenelemente wird dieses abstrakte Element der Produkt-Transformation $L(g_1)L(g_2)$ zugewiesen:

$$g_1 \leftrightarrow L(g_1), \quad g_2 \leftrightarrow L(g_2), \quad g_1 g_2 \leftrightarrow L(g_1)L(g_2). \quad (4.6)$$

Das Einheitselement e der abstrakten Gruppe gehört zu der Identitäts-Transformation $E = L(e)$ und das inverse Element g^{-1} von g gehört zu der inversen Transformation $L(g^{-1}) = L^{-1}(g)$. Nimmt man nun die abstrakte Gruppe als Anfangsobjekt, stellt die Zuweisung $g \mapsto L(g)$ eine Realisierung der abstrakten Gruppe als eine Gruppe von Transformationen, die auf einen Raum wirkt, dar. Diese Zuweisung, die die folgenden Eigenschaften hat:

$$g_1 \mapsto L(g_1), \quad g_2 \mapsto L(g_2), \quad g_1 g_2 \mapsto L(g_1)L(g_2), \quad e \mapsto \text{id}, \quad (4.7)$$

charakterisiert, per Definition, eine allgemeine Gruppen-Wirkung. id stellt die identische Transformation des Raumes dar. In dem obigen Fall ist der Raum ein Vektorraum und die Realisierung geschieht durch lineare Transformationen des Vektorraumes. Eine lineare Realisierung der diskutierten Art wird *Darstellung* der Gruppe genannt.

4.1.2 Liegruppen und Liealgebra

Im folgenden sollen die Begriffe *Liealgebra* und *Liegruppen* eingeführt werden. Dazu wird zunächst der Begriff der *Mannigfaltigkeit* benötigt. Man nennt eine Menge M eine Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt von M eine offene Umgebung U_i hat, für die es eine stetige eindeutige Abbildung ϕ_i auf eine offene Untermenge U'_i des \mathcal{R}^n gibt. M ist mindestens lokal so wie der \mathcal{R}^n und hat die Dimension n . Unter einer Liegruppe versteht man eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die lokal wie der \mathcal{R}^n ist.

Wenn eine Liegruppe von mehreren Parametern α_i abhängt, lassen sich ihre Elemente schreiben als

$$U = e^{i\alpha_i J_i}. \quad (4.8)$$

Dabei werden die Generatoren mit J_i bezeichnet. Die obige Exponentialfunktion bildet das Bindeglied zwischen der Liealgebra und der Liegruppe. Damit die Elemente U eine Gruppe bilden, muß das Produkt zweier Gruppenelemente ebenfalls ein Element nach (4.8) ergeben. Diese Bedingung fordert für den Kommutator zweier Generatoren

$$[J_i, J_j] = i f_{ijk} J_k. \quad (4.9)$$

Über die Vertauschungsrelationen der Generatoren wird die der Liegruppe zugrundeliegende Liealgebra eindeutig charakterisiert. Die Koeffizienten f_{ijk} bezeichnet man als *Strukturkonstanten*.

4.2 Rotationsgruppe $SO(3)$

Der einfachste Vertreter einer nicht-abelschen Liegruppe ist die Gruppe $SO(3)$ ¹. Unter der Rotationsgruppe versteht man die Gruppe der homogenen linearen Transformationen

$$\vec{x}' = R\vec{x} \quad (4.10)$$

eines euklidischen dreidimensionalen Vektorraums in sich selbst, die Länge und Orientierung erhalten.

4.2.1 Darstellungen der Gruppe $SO(3)$

Im folgenden werden einige Darstellungen der Gruppe $SO(3)$ mit ihren Generatoren vorgestellt.

$j = 0$: Einzige eindimensionale Darstellung, die auch triviale Darstellung genannt wird, da die drei Generatoren alle null sind

$$\mathbf{J} = 0. \quad (4.11)$$

¹Die Matrizen des Eichfeldes sind Elemente der Gruppe $SO(3)$.

$j = 1$: Dreidimensionale Darstellung, die mit definierender Darstellung bezeichnet wird.

In dieser Darstellung wird jedem Gruppenelement eine reelle, orthogonale 3×3 Matrix zugeordnet. Aufgrund der Orthogonalitätsforderung, $R R^T = \mathbb{1}$, sind nur drei der neun Matrixeinträge frei wählbar. Bezeichnet man die freien Parameter mit φ_1, φ_2 und φ_3 , besitzt die Drehmatrix die folgende Form

$$R = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \varphi_i J_i \right). \quad (4.12)$$

Die Generatoren haben die folgende Form

$$\begin{aligned} J_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & J_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ J_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Da diese Darstellung mit

$$(J_i)_{jk} = -\epsilon_{ijk} \quad (4.14)$$

über die Strukturkonstanten festgelegt wird, stimmt sie mit der adjunktiven Darstellung überein.

Die fundamentalen Vertauschungsrelationen für die Generatoren der Drehgruppe lauten:

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k. \quad (4.15)$$

Die Drehmatrix kann umgeschrieben werden zu

$$R = e^{\vec{\varphi} \cdot \mathbf{J}}, \quad (4.16)$$

wenn man die drei Drehwinkel φ_i zu einem Vektor $\vec{\varphi} = \vec{n}\varphi$ zusammenfaßt. Dabei beschreibt \vec{n} den Einheitsvektor in Richtung der Drehachse und φ den Drehwinkel um die entsprechende Achse.

Geht man über zur Quantenmechanik, so verwendet man statt \mathbf{J} die hermitischen Operatoren $\mathbf{J}' = i\mathbf{J}$ um so eine unitäre Form der adjunktiven Darstellung zu bekommen:

$$R = e^{-i\vec{\varphi} \cdot \mathbf{J}'}. \quad (4.17)$$

Für die hermitischen Generatoren gilt

$$(J'_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}, \quad (4.18)$$

$$[J'_i, J'_j] = i\epsilon_{ijk} J'_k. \quad (4.19)$$

$j = \frac{1}{2}$: Zweidimensionale Spinor-Darstellung, die die Pauli-Matrizen als Generatoren besitzt, $\mathbf{J} = \mathbf{1}/2\sigma$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

4.3 $SU(2)$

Die Matrixengruppe $SU(2)$ bildet die spezielle unitäre Gruppe in zwei Dimensionen. Für die komplexen 2×2 Matrizen mit den Eigenschaften

$$U^\dagger U = \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \det U = 1, \quad (4.21)$$

findet man die folgende Form

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

mit

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (4.23)$$

Wie bei der Gruppe $SO(3)$ hat man zwei komplexe Zahlen a, b und eine Bedingung (4.23) und somit drei unabhängige reelle Parameter.

In der Spinor-Darstellung wählt man als Generatoren die Pauli-Matrizen und erhält für die Gruppenelemente

$$U = e^{-\frac{i}{2}\vec{\varphi} \cdot \mathbf{J}}. \quad (4.24)$$

Obwohl $SO(3)$ und $SU(2)$ die gleichen Liealgebren haben, unterscheiden sich ihre Gruppenelemente um einen Faktor $1/2$ im Exponenten

$$R = e^{-i\vec{\varphi} \cdot \mathbf{J}}, \quad U = e^{-\frac{i}{2}\vec{\varphi} \cdot \mathbf{J}}. \quad (4.25)$$

Die Konsequenzen sind, daß für einen Winkel $\varphi = 2\pi$ einerseits $R(2\pi) = R(0) = \mathbf{1}$ gilt, andererseits $U(2\pi) = -\mathbf{1}$ folgt. Das bedeutet, daß die Gruppe $SO(3)$ eine 2π -Periodizität besitzt, wohingegen die Gruppe $SU(2)$ eine 4π -Periodizität aufweist. Die beiden verschiedenen Elemente $U(0)$ und $U(2\pi)$ aus der Gruppe $SU(2)$ werden auf ein Element, nämlich auf das Einselement, der Gruppe $SO(3)$ abgebildet. Das heißt, daß der Kern des Homomorphismus' $SU(2) \rightarrow SO(3)$ aus zwei Elementen

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.26)$$

besteht, die die Untergruppe \mathcal{Z}_2 bilden. Mathematisch lautet die Beziehung zwischen $SO(3)$ und $SU(2)$:

$$SO(3) \cong SU(2)/\mathcal{Z}_2. \quad (4.27)$$

Wichtig für die Teilchenphysik ist die Aussage, daß die Gruppe $SU(2)$ keine Spiegelungen beschreibt. Weiterführende Informationen finden sich zum Beispiel in [29] oder [53].

Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, die Elemente der Gruppen $SO(3)$ und $SU(2)$ in Zusammenhang zu bringen. Die Methode, die diesem Verfahren zugrunde liegt, ist zurückzuführen auf HAMILTON (1843), der bei der Suche nach einer Erweiterung der komplexen Zahlen die Quaternionen entdeckte [29]. Dabei wird jedem Vektor eine 2×2 Matrix zugeordnet. Das Resultat ist ein Zusammenhang zwischen der Tensor- und Spinor-Darstellung:

$$\begin{aligned} R^{kj} &= \frac{1}{2} \text{Tr} (\sigma^k U \sigma^j U^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} (\sigma^k U \sigma^j U^{-1}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Ersetzt man in der obigen Gleichung die Pauli-Matrizen durch die Generatoren $2T$, folgt Gleichung (2.35) für die Eichfeld-Matrix V .

Natürlich ist es auch umgekehrt möglich U in Form von R auszudrücken, da für jede 2×2 Matrix M die folgende Identität gilt

$$\sigma_\nu M \sigma_\nu = 2 \text{Tr} M \cdot \mathbf{1} - M. \quad (4.29)$$

Multipliziert man die folgende Gleichung mit σ_ν

$$R_{\mu\nu} \sigma_\mu = U \sigma_\nu U^\dagger = U \sigma_\nu U^{-1}, \quad (4.30)$$

ergibt sich mit (4.29)

$$R_{\mu\nu} \sigma_\mu \sigma_\nu = U (2 \text{Tr} U^\dagger \cdot \mathbf{1} - U^\dagger). \quad (4.31)$$

Bildet man schließlich die Spur, führt dies zu

$$2 (\text{Tr}(U))^2 = 2 (1 + \text{Tr}(R)) \quad (4.32)$$

und damit auf

$$U = \pm \frac{\mathbf{1} + R_{\mu\nu} \sigma_\mu \sigma_\nu}{2\sqrt{1 + \text{Tr}(R)}}. \quad (4.33)$$

4.4 Gruppenintegration

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einigen allgemeinen Eigenschaften von invarianten Integralen über kompakte Liegruppen. Dabei werden speziell für die Gruppe $SU(2)$ einige Integrale explizit berechnet. Solche Integrale spielen in dem noch folgenden Kapitel 5 eine große Rolle bei der Hoppingparameter-Entwicklung. Zudem läuft jede Reihenentwicklung der Zustandsfunktion auf eine Integration über die Eichgruppe hinaus. Die kommenden Abschnitte bilden die Grundlage für Rechnungen dieser Art.

Für jede kompakte Liegruppe gibt es ein Integrationsmaß mit den folgenden Eigenschaften:

$$\int dU f(U) = \int dU f(U_0 U U_1) = \int dU f(U^{-1}), \quad (4.34)$$

$$\int dU = 1. \quad (4.35)$$

Dabei ist U das Gruppenelement über das integriert wird, $f(U)$ ist eine beliebige Funktion von U und U_0 und U^{-1} sind willkürlich festgelegte Gruppenelemente. Insbesondere für die Gruppe $SU(N)$ repräsentiert U eine unitäre $N \times N$ Matrix mit Determinante eins². Im folgenden soll es um die Berechnung von Integralen des Typs

$$I = \int dU U_{i_1 j_1} \cdots U_{i_n j_n} U_{k_1 l_1}^{-1} \cdots U_{k_m l_m}^{-1} \quad (4.36)$$

gehen. Die Matrixindices von U bzw. U^{-1} sind in dem obigen Integral explizit gekennzeichnet. Für solche Integrale kann man eine erzeugende Funktion

$$W(J, K) = \int dU e^{\text{Tr}(JU + KU^{-1})} \quad (4.37)$$

mit beliebigen $N \times N$ Matrizen einführen. Integrale, die von der Form (4.36) sind, erhält man aus $W(J, K)$ durch Differentiation

$$I = \left(\frac{\partial}{\partial J_{j_1 i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial J_{j_n i_n}} \frac{\partial}{\partial K_{l_1 k_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial K_{l_m k_m}} W(J, K) \right) \Big|_{J=K=0}. \quad (4.38)$$

Wegen der Invarianz des Gruppenmaßes erhält W die folgenden Symmetrie-Eigenschaften:

$$W(J, K) = W(K, J) = W(U_0^{-1} J U_1, U_1^{-1} K U_0). \quad (4.39)$$

Die erzeugende Funktion erfüllt ein wichtiges System von Differentialgleichungen. Wegen $UU^{-1} = 1$ hat man

$$\frac{\partial}{\partial K_{ik}} \frac{\partial}{\partial J_{kj}} W(J, K) = \delta_{ij}. \quad (4.40)$$

²Auch die Elemente der Gruppe $SO(N)$ sind Matrizen dieses Typs.

Zudem gilt

$$\det \frac{\partial}{\partial J} W(J, K) = 1, \quad (4.41)$$

da die Determinante einer $SU(N)$ Matrix eins ist. Zusammen mit der Anfangsbedingung

$$W(0, 0) = 1, \quad (4.42)$$

genügen diese Differentialgleichungen zur Bestimmung von W . Im Limes für große N ist dieses Problem schon vor einigen Jahren von BROWER und NAUENBERG (1980) [12] und BARS (1981) [10] betrachtet worden. Hier sollen diese Gleichungen iterativ in Potenzen von J und K gelöst werden. Außerdem wird ein graphischer Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten in dieser Entwicklung angegeben.

Zunächst wird die K -Abhängigkeit in W durch das Ausdrücken von U^{-1} durch die Kofaktoren von U eliminiert

$$\begin{aligned} U_{ij}^{-1} &= (\text{cof}(U))_{ij} \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \epsilon_{j,i_1,\dots,i_{N-1}} \epsilon_{i,j_1,\dots,j_{N-1}} U_{i_1 j_1} \cdots U_{i_{N-1} j_{N-1}}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Man kann nun Gleichung (4.40) lösen, indem man die Ableitungen nach K durch Ableitungen nach J ersetzt:

$$W(J, K) = e^{\text{Tr}(K \text{cof} \frac{\partial}{\partial J})} W(J) \quad (4.44)$$

$$W(J) = W(J, K=0) = \int dU e^{\text{Tr} J U}. \quad (4.45)$$

Für die Entwicklung von $W(J)$ braucht man die Invarianzbeziehung (4.39), die sich jetzt schreiben lässt als:

$$W(J) = W(U_0^{-1} J U_1). \quad (4.46)$$

1978 hat M. CREUTZ bewiesen, daß jede analytische Funktion von J , die die obigen Symmetrieeigenschaften erfüllt, nur von der Determinante abhängt [16]. Man kann deshalb J als Potenzreihe in der Determinante von J entwickeln:

$$W(J) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (\det J)^i. \quad (4.47)$$

Wegen der Normierung des Integrationsmaßes gilt

$$a_0 = 1. \quad (4.48)$$

Man kann nun eine Rekursionsformel für weitere a_i aufstellen. $W(J)$ muß die folgende

Differentialgleichung erfüllen:

$$\left(\det \frac{\partial}{\partial J} \right) W(J) = W(J). \quad (4.49)$$

Eine aufwendige kombinatorische Rechnung von M. CREUTZ [17] ergibt

$$\left(\det \frac{\partial}{\partial J} \right) (\det J)^i = \frac{(i+N-1)!}{(i-1)!} (\det J)^{i-1}. \quad (4.50)$$

Aus den Gleichungen (4.47), (4.49) und (4.50) erhält man

$$a_i = \frac{(i-1)!}{(i+N-1)!} a_{i-1}. \quad (4.51)$$

Diese Gleichung wird mit (4.48) gelöst durch

$$a_i = \frac{2!3!\cdots(N-1)!}{i!(i+1)!\cdots(i+N-1)!}. \quad (4.52)$$

Schließlich lautet die Potenzreihe für $W(J)$:

$$W(J) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2!\cdots(N-1)!}{i!(i+N-1)!} (\det J)^i. \quad (4.53)$$

Die Determinante einer Matrix kann durch den antisymmetrischen ϵ -Tensor ausgedrückt werden:

$$\det J = \frac{1}{N!} \epsilon_{i_1\cdots i_N} \epsilon_{j_1\cdots j_N} J_{i_1 j_1} \cdots J_{i_N j_N}. \quad (4.54)$$

Um die Ableitungen in (4.38) berechnen zu können, bietet sich eine graphische Notation an. Dabei werden Gruppenelemente durch gerichtete Linien dargestellt. In Abbildung (4.1) repräsentieren nach oben gerichtete Linien Faktoren von U und nach unten gerichtete Linien Faktoren von U^{-1} . An den Linienenden stehen die Matrixindices der entsprechenden Elemente. Die Abbildung (4.2) zeigt wie das allgemeine Integral (4.36) in dieser Notation aussieht.

$$U_{ij} = \begin{array}{c} j \\ \uparrow \\ i \end{array} \quad U_{kl}^{-1} = \begin{array}{c} k \\ \downarrow \\ l \end{array}$$

Abbildung 4.1: Graphische Repräsentation von U und U^{-1} nach M. CREUTZ [17].

$$I = \begin{array}{cccc} j_1 & j_n & k_1 & k_m \\ \uparrow & \uparrow & \downarrow & \downarrow \\ i_1 & \dots & i_n & l_1 \dots l_m \end{array}$$

Abbildung 4.2: Graphische Repräsentation des Standardintegrals (4.36).

Das Kronecker-Delta-Symbol δ_{ij} wird durch eine ungerichtete Linie gekennzeichnet, die die Punkte i und j miteinander verbindet und ist in Abbildung (4.3) zu sehen.

In der Entwicklung der Gruppenintegrale treten sehr oft Produkte von ϵ -Termen auf. Einige wichtige Identitäten sind:

$$\epsilon_{i_1 \dots i_N} \epsilon_{i_1 \dots i_N} = N!, \quad (4.55)$$

$$\epsilon_{i,i_1 \dots i_{N-1}} \epsilon_{j,i_1 \dots i_{N-1}} = (N-1)! \delta_{ij}, \quad (4.56)$$

$$\epsilon_{i,j,i_1 \dots i_{N-2}} \epsilon_{k,l,i_1 \dots i_{N-2}} = (N-2)! (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (4.57)$$

Das obige Verfahren ermöglicht einem nun die Berechnung der Gruppenintegrale, indem die gerichteten Linien in der Abbildung (4.2) durch Vertices und ungerichtete Linien ersetzt werden, um so ein Ergebnis in Form von ϵ - und δ -Terminen zustande kommen zu lassen. Dabei wandelt man zunächst alle nach unten gerichtete Linien mit Hilfe von Gleichung (4.43) in nach oben gerichtete Linien um. Gibt es in dem Integral zu Beginn eine größere Anzahl von nach unten gerichteten Linien im Vergleich zu den nach oben gerichteten Linien, ist es sinnvoll zunächst alle Richtungen umzudrehen. Dieses simultane Ändern der Pfeilrichtungen wird durch die Gleichung (4.34) ausgedrückt. Wenn alle Linien die gleiche Richtung haben, benutzt man die Gleichungen (4.53) und (4.54), um das Integral in eine Summe von antisymmetrischen Tensoren zu zerlegen. Wie leicht zu erkennen ist, verschwindet das Integral automatisch, wenn die Anzahl der Linien kein Vielfaches von

N ist.

$$\delta_{ij} = i \text{ —— } j$$

Abbildung 4.3: Graphische Repräsentation des Kronecker Symbols.

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \text{---}$$

Abbildung 4.4: Graphische Repräsentation des antisymmetrischen Tensors.

Nimmt man an, daß es Np Linien gibt, wobei p eine ganze Zahl ist, kann (4.36) graphisch durch die Abbildung (4.5) dargestellt werden.

$$\left(\uparrow \uparrow \dots \uparrow \right)^p = \frac{2! 3! \dots (N-1)!}{(p+1)! \dots (p+N-1)!} \left(\text{---} \right)^p + \text{Permutationen}$$

Abbildung 4.5: Graphische Entwicklung des Standardintegrals (4.36).

Betrachtet man die Gruppe $SU(2)$, sind in der Summe über die Permutationen alle topologisch verschiedenen Arten, wie die Gruppenindices zu Paaren von Vertices zusammengefaßt werden können, enthalten. Die Vorgehensweise ist dabei die folgende: Zunächst verknüpft man die unteren Indices auf jede erdenkliche Weise. Dabei ist zu beachten, daß zu jeder Permutation der unteren Indices die gleiche Permutation der obigen Indices gehört. Ein Mischen der verschiedenen Verknüpfungen führt nicht zu topologisch unterschiedlichen Permutationen. Sie werden daher in der Summe aus Abbildung (4.5) nicht berücksichtigt. Speziell für die Gruppe $SU(2)$, in der der antisymmetrische ϵ -Tensor nur zwei Indices hat, gibt es in der obigen Summe genau $(2p)!/(p!2^p)$ Terme.

Ein Beispiel ist die Berechnung des Integrals $\int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1}$. Es gilt mit (4.43)

$$U_{k_1 l_1}^{-1} = \epsilon_{l_1 t} \epsilon_{k_1 s} U_{ts}, \quad (4.58)$$

$$U_{k_2 l_2}^{-1} = \epsilon_{l_2 u} \epsilon_{k_2 v} U_{uv}. \quad (4.59)$$

Die Verwendung von Abbildung (4.5) liefert

$$\begin{aligned} \int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1} &= \frac{1}{6} \epsilon_{l_1 t} \epsilon_{k_1 s} \epsilon_{l_2 u} \epsilon_{k_2 v} \left(\epsilon_{i_1 t} \epsilon_{i_2 u} \epsilon_{j_1 s} \epsilon_{j_2 v} \right. \\ &\quad + \epsilon_{i_1 i_2} \epsilon_{t u} \epsilon_{j_1 j_2} \epsilon_{s v} \\ &\quad \left. + \epsilon_{i_1 u} \epsilon_{t i_2} \epsilon_{j_1 v} \epsilon_{s j_2} \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Unter Ausnutzung der ϵ -Identitäten (4.55), (4.56) und (4.57) ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} \int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1} &= \frac{1}{3} \left(\delta_{i_1 l_1} \delta_{j_1 k_1} \delta_{i_2 l_2} \delta_{j_2 k_2} + \delta_{i_2 l_1} \delta_{j_2 k_1} \delta_{i_1 l_2} \delta_{j_1 k_2} \right) \\ &- \frac{1}{6} \left(\delta_{i_1 l_1} \delta_{j_1 k_2} \delta_{i_2 l_2} \delta_{j_2 k_1} + \delta_{i_2 l_1} \delta_{j_1 k_1} \delta_{i_1 l_2} \delta_{j_2 k_2} \right). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Dieses Ergebnis kann man auch aus den nachstehenden Überlegungen erhalten. Da die δ -Distributionen anfänglich nur durch eine ungerade Anzahl von ϵ -Vertices verknüpft werden können, ist es unmöglich, daß ein Kronecker δ die Indices i_1 und i_2 oder j_1 und j_2 miteinander verbindet. Man kann daher schon schließen, daß das Integral folgende Gestalt haben muß:

$$\begin{aligned} I &= a \left(\delta_{i_1 l_1} \delta_{j_1 k_1} \delta_{i_2 l_2} \delta_{j_2 k_2} + \delta_{i_2 l_1} \delta_{j_2 k_1} \delta_{i_1 l_2} \delta_{j_1 k_2} \right) \\ &+ b \left(\delta_{i_1 l_1} \delta_{j_1 k_2} \delta_{i_2 l_2} \delta_{j_2 k_1} + \delta_{i_2 l_1} \delta_{j_1 k_1} \delta_{i_1 l_2} \delta_{j_2 k_2} \right). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Die Koeffizienten erhält man durch Multiplikation mit $\delta_{j_1 k_1}$ und Ausnutzung der Abbildung (4.6).

$$\int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} = \frac{1}{N} \delta_{j_1 k_1} \delta_{i_1 l_1} \quad (4.63)$$

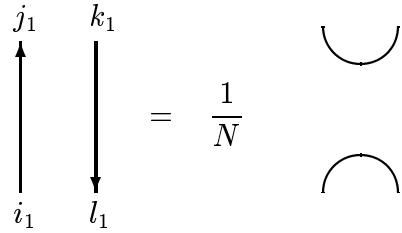


Abbildung 4.6: Graphische Repräsentation des Integrals $\int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1}$.

Die Berechnung des Integrals $\int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1}$ mit der oben genannten graphischen Methode funktioniert so für die Gruppe $SU(2)$ ohne Probleme [17]. Die graphische Repräsentation ist in Abbildung (4.7) zu sehen.

Eine Schwierigkeit tritt erst auf, wenn man das nächsthöhere Integral berechnen will. Auf analytischem Weg ist diese Rechnung zwar etwas langatmig, führt aber zum Ziel und man erhält:

$$\int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{array}{c} j_1 \quad k_1 \quad j_2 \quad k_2 \\ \uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow \\ i_1 \quad l_1 \quad i_2 \quad l_2 \end{array} \\
 &= \frac{1}{3} \left(\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{6} \left(\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Abbildung 4.7: Graphische Entwicklung des Integrals $\int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1}$ für die Gruppe $SU(2)$.

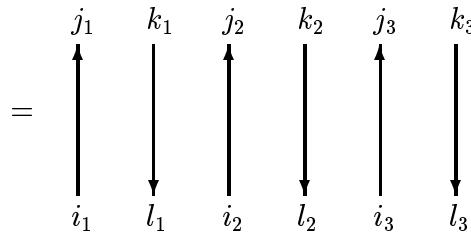
$$\begin{aligned}
 \int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1} U_{i_3 j_3} U_{k_3 l_3}^{-1} &= \\
 \frac{1}{6} \delta_{i_1 l_1} \delta_{i_2 l_2} \delta_{i_3 l_3} \delta_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_2} \delta_{j_3 k_3} + \text{Permutationen} \\
 - \frac{1}{24} \delta_{i_1 l_1} \delta_{i_2 l_2} \delta_{i_3 l_3} \delta_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_3} \delta_{j_3 k_2} + \text{Permutationen}. &
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Versucht man das Integral graphisch zu lösen, gibt es, wie schon oben erwähnt, Probleme bei der Bestimmung der Koeffizienten. Die graphische Repräsentation des Integrals $\int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1} U_{i_3 j_3} U_{k_3 l_3}^{-1}$ ist in Abbildung (4.8) zu sehen. Multipliziert man diesen Ausdruck mit $\delta_{j_1 k_1}$ und benutzt die Abbildung (4.7), so erhält man das Gleichungssystem aus Abbildung (4.9). Wie man durch eine Rechnung sieht, lassen sich die Koeffizienten hieraus nicht sinnvoll bestimmen. Dieses gelingt für allgemeines N , nicht jedoch für $N = 2$. Verantwortlich hierfür sind die speziellen Eigenschaften der Gruppe $SU(2)$. Nutzt man die folgende, nur für $SU(2)$ geltende, Gleichung aus

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{j_1 j_2 j_3} \epsilon_{k_1 k_2 k_3} &= \delta_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_2} \delta_{j_3 k_3} - \delta_{j_1 k_1} \delta_{j_2 k_3} \delta_{j_3 k_2} - \delta_{j_1 k_2} \delta_{j_2 k_1} \delta_{j_3 k_3} + \\
 &\quad \delta_{j_1 k_2} \delta_{j_2 k_3} \delta_{j_3 k_1} - \delta_{j_1 k_3} \delta_{j_2 k_2} \delta_{j_3 k_1} + \delta_{j_1 k_3} \delta_{j_2 k_1} \delta_{j_3 k_2} \stackrel{!}{=} 0,
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

und ersetzt die entsprechenden Terme in dem durch die Abbildung (4.9) dargestellten Gleichungssystem, so erhält man das analytische Ergebnis (4.64) mit $A = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{24}$ und $C = 0$.

$$\int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1} U_{i_3 j_3} U_{k_3 l_3}^{-1}$$



$$\begin{aligned}
 &= A \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagup \quad \diagup \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} \right) \\
 &+ B \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagup \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \quad \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagdown \quad \diagup \\ \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + C \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right. + \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \end{array} \\
 & + \begin{array}{c} \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \\ \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \\ \text{Diagram 31} \\ \text{Diagram 32} \end{array} \\
 & \left. + \begin{array}{c} \text{Diagram 33} \\ \text{Diagram 34} \\ \text{Diagram 35} \\ \text{Diagram 36} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 37} \\ \text{Diagram 38} \\ \text{Diagram 39} \\ \text{Diagram 40} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 41} \\ \text{Diagram 42} \\ \text{Diagram 43} \\ \text{Diagram 44} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 45} \\ \text{Diagram 46} \\ \text{Diagram 47} \\ \text{Diagram 48} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Abbildung 4.8: Entwicklung des Integrals $\int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1} U_{i_3 j_3} U_{k_3 l_3}^{-1}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right) \\
 & - \frac{1}{6} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right) \\
 = A & \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \\ \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \end{array} \right. \\
 & \left. + \begin{array}{c} \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \\ \text{Diagram 31} \\ \text{Diagram 32} \end{array} \right) \\
 + B & \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 33} \\ \text{Diagram 34} \\ \text{Diagram 35} \\ \text{Diagram 36} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 37} \\ \text{Diagram 38} \\ \text{Diagram 39} \\ \text{Diagram 40} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 41} \\ \text{Diagram 42} \\ \text{Diagram 43} \\ \text{Diagram 44} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 45} \\ \text{Diagram 46} \\ \text{Diagram 47} \\ \text{Diagram 48} \end{array} \right. \\
 & \left. + \begin{array}{c} \text{Diagram 49} \\ \text{Diagram 50} \\ \text{Diagram 51} \\ \text{Diagram 52} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 53} \\ \text{Diagram 54} \\ \text{Diagram 55} \\ \text{Diagram 56} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 57} \\ \text{Diagram 58} \\ \text{Diagram 59} \\ \text{Diagram 60} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 61} \\ \text{Diagram 62} \\ \text{Diagram 63} \\ \text{Diagram 64} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{(diagram 1)} + \text{(diagram 2)} + \text{(diagram 3)} + \text{(diagram 4)} \\
& + \text{(diagram 5)} + \text{(diagram 6)} + \text{(diagram 7)} + \text{(diagram 8)} \\
& + \text{(diagram 9)} + \text{(diagram 10)}) \\
& + c \left(\text{(diagram 11)} + \text{(diagram 12)} + \text{(diagram 13)} + \text{(diagram 14)} \right. \\
& \quad \left. + \text{(diagram 15)} + \text{(diagram 16)} + \text{(diagram 17)} + \text{(diagram 18)} \right. \\
& \quad \left. + \text{(diagram 19)} + \text{(diagram 20)} + \text{(diagram 21)} + \text{(diagram 22)} \right)
\end{aligned}$$

Abbildung 4.9: Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten des Integrals $\int dU U_{i_1 j_1} U_{k_1 l_1}^{-1} U_{i_2 j_2} U_{k_2 l_2}^{-1} U_{i_3 j_3} U_{k_3 l_3}^{-1}$.

In meinen Rechnungen sind die auftretenden Integrationen Integrale über mehrere V 's. Da sich jedes V nach Gleichung (2.35) zerlegen lässt in einen Teil, der proportional zu U und einen Teil, der proportional zu U^{-1} ist, erhält man Integrale, die mit den anfangs beschriebenen Mitteln berechnet werden können. Die Integrale über mehrere V 's ergeben dabei Integrale über die doppelte Anzahl von U 's und es wird somit immer schwieriger, sie zu berechnen. Da die Matrizen V der Gruppe $SO(3)$ angehören, entspricht eine Integration über V der Integration über die Gruppe $SO(3)$. Schaut man sich die Herleitung der oben angegebenen Regeln in dem Artikel [17] an, so stellt man fest, daß es keinen Unterschied macht, ob man die Gruppe $SU(3)$ oder $SO(3)$ betrachtet. Es ist also einfacher, die auftretenden Integrale über V direkt auszurechnen und sie nicht erst in Integrale über

U zu zerlegen. Dabei nutzt man aus, daß

$$V^T = V^{-1} \quad (4.66)$$

gilt.

Mit dieser Methode ergeben sich die folgenden Lösungen:

$$\int dU V^{a_1 b_1} = 0, \quad (4.67)$$

$$\int dU V^{a_1 b_1} V^{a_2 b_2} = \frac{1}{3} \delta_{a_1 a_2} \delta_{b_1 b_2}, \quad (4.68)$$

$$\int dU V^{a_1 b_1} V^{a_2 b_2} V^{a_3 b_3} = \frac{1}{6} \epsilon_{a_1 a_2 a_3} \epsilon_{b_1 b_2 b_3}, \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \int dU V^{a_1 b_1} V^{a_2 b_2} V^{a_3 b_3} V^{a_4 b_4} &= \frac{1}{8} (\delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4} \delta_{b_1 b_2} \delta_{b_3 b_4} + \delta_{a_1 a_4} \delta_{a_2 a_3} \delta_{b_1 b_4} \delta_{b_2 b_3}) \\ &\quad - \frac{1}{24} (\delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4} \delta_{b_1 b_4} \delta_{b_2 b_3} + \delta_{a_1 a_4} \delta_{a_2 a_3} \delta_{b_1 b_2} \delta_{b_3 b_4}), \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\int dU V^{a_1 b_1} V^{a_2 b_2} V^{a_3 b_3} V^{a_4 b_4} V^{a_5 b_5} V^{a_6 b_6} = \frac{7}{120} T_1 - \frac{1}{40} T_2 + \frac{1}{60} T_3. \quad (4.71)$$

Dabei ergeben sich T_1 , T_2 und T_3 nach Abbildung (4.6) wie folgt:

$$T_1 = \delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4} \delta_{a_5 a_6} \delta_{b_1 b_2} \delta_{b_3 b_4} \delta_{b_5 b_6} + \dots, \quad (4.72)$$

$$T_2 = \delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4} \delta_{a_5 a_6} \delta_{b_1 b_2} \delta_{b_3 b_6} \delta_{b_4 b_5} + \dots, \quad (4.73)$$

$$T_3 = \delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4} \delta_{a_5 a_6} \delta_{b_1 b_6} \delta_{b_2 b_3} \delta_{b_4 b_5} + \dots. \quad (4.74)$$

4.5 Gruppen-Charakter-Funktion

In diesem Abschnitt sollen einige Aspekte über die *Charakter*-Funktion aufgegriffen werden. Bezeichnet man mit j eine unitäre Darstellung einer kompakten Liegruppe G , so sind die zugehörigen Matrizen, die die Gruppenelemente U repräsentieren, gegeben durch

$$D^{(j)}(U). \quad (4.75)$$

Unter dem *Charakter* von j versteht man die Funktion

$$\chi_j(U) \equiv \text{Tr}(D^{(j)}(U)). \quad (4.76)$$

Bei $\mathbf{1}$ hat diese Funktion den Wert

$$\chi_j(\mathbf{1}) = d_j, \quad (4.77)$$

und entspricht damit der Dimension der Darstellung j . Für $SU(2)$ werden die irreduziblen Darstellungen mit $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ bezeichnet und besitzen die Dimensionen $d_j = 2j + 1$. Charaktere sind invariante Funktionen bzw. Klassen-Funktionen bezüglich der Gruppe. Das bedeutet

$$\chi_j(VUV^{-1}) = \chi_j(U), \quad U, V \in G. \quad (4.78)$$

Eine besondere Bedeutung kommt den unitären irreduziblen Darstellungen und ihren Charakteren zu. Im folgenden wird mit \hat{G} der Satz aller nicht-äquivalenten, unitären, irreduziblen Darstellungen von G bezeichnet. Sind j und k aus \hat{G} , gilt wegen der Orthogonalität der Charaktere

$$\int dU \bar{\chi}_j(U) \chi_k(U) = \delta_{jk}. \quad (4.79)$$

4.5.1 Integrationsregeln

Von den Gruppen-Integrationsregeln aus Kapitel 4.4 lassen sich mit Hilfe der Charakter-Funktionen allgemeinere Regeln ableiten, die Integrationen über große *Graphen* stark vereinfachen [44]. Unter einem Graphen \mathcal{G} versteht man eine Abbildung, die jeder Plaquette P eine Darstellung r_P zuordnet. Die Anzahl der Plaquetten in einem Graphen wird durch $|\mathcal{G}|$ definiert:

$$P \in |\mathcal{G}| \Leftrightarrow r_P \neq 0. \quad (4.80)$$

Im Zusammenhang mit der in Kapitel 5 folgenden Starkkopplungsentwicklung treten Graphen auf, wobei diesen Graphen Plaquetten bestimmter Darstellung zugeordnet werden. Dies führt zu Integration über Plaquetts-Variablen. So gilt zum Beispiel bei einem rechteckigen Graphen für die innere Integration über U

$$\int dU d_f \text{Tr}(UV_1) d_f \text{Tr}(U^{-1}V_2) = d_f \text{Tr}(V_1 V_2). \quad (4.81)$$

Graphisch ist diese Integrationsregel in Abbildung (4.10) zu sehen. In dem obigen Fall

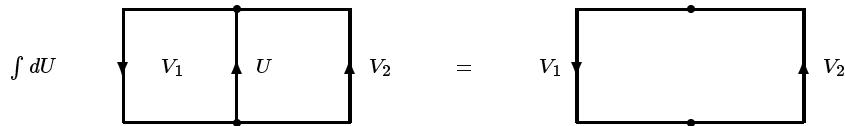


Abbildung 4.10: Graphische Darstellung der Integrationsregel (4.81).

befinden sich die Plaquette-Variablen in der Fundamentaldarstellung, was durch d_f gekennzeichnet ist. Für die Gruppe $SU(2)$ ergibt die Gleichung (4.81)

$$\int dU \text{Tr}(UV_1) \text{Tr}(U^{-1}V_2) = \frac{1}{2} \text{Tr}(V_1 V_2). \quad (4.82)$$

Natürlich läßt sich die obige Integration auch mit den Regeln aus Abschnitt 4.4 lösen. Die Rechnungen sind etwas aufwendiger, führen aber auf das gleiche Ergebnis wie Gleichung (4.82).

Allgemein gilt die folgende Regel für die Integration zweier Charakter-Funktionen

$$\int dU \chi_j(VU) \chi_{j'}(U^{-1}W) = \delta_{jj'} \frac{1}{d_j} \chi_j(VW). \quad (4.83)$$

Dabei nutzt man zum einen aus, daß die Integration

$$\int dU \chi_j(U) = \delta_{j,0} \quad (4.84)$$

keinen Beitrag gibt, wenn nicht die triviale Darstellung enthalten ist, was mit Gleichung (4.35) übereinstimmt. Im Fall $SU(2)$ gelten die folgenden Matrixdarstellungen für die Gruppenelemente:

$$\chi_0(U) = 1, \quad (4.85)$$

$$\chi_{\frac{1}{2}}(U) = \text{Tr}(U), \quad (4.86)$$

$$\chi_1(U) = \text{Tr}(V). \quad (4.87)$$

Zum anderen kann man das Quadrat zweier Charakter-Funktionen in der Fundamentaldarstellung zusammenfassen zu

$$\chi_{\frac{1}{2}}(U) \chi_{\frac{1}{2}}(U) = 1 + \chi_1(U), \quad (4.88)$$

$$\Leftrightarrow \text{Tr}(U) \text{Tr}(U) = 1 + \text{Tr}(V). \quad (4.89)$$

Kapitel 5

Hoppingparameter-Entwicklung

Die Behandlung von Fermionen auf dem Gitter ist seit jeher ein großes Problem. In der reinen Eichtheorie können Korrelationsfunktionen numerisch mit Hilfe von Monte-Carlo-Methoden berechnet werden (siehe Kapitel 7). Bei Pfadintegralen, die Grassmannvariablen enthalten, ist dieses zunächst nicht möglich. Gelöst wird das Problem, indem man zuerst die Fermionen ausintegriert, wodurch sich das Pfadintegral in einen Ausdruck verwandelt, der nur noch bosonische Variablen enthält. Dieses kann dann mittels Monte-Carlo-Verfahren simuliert werden. Die benötigte CPU-Zeit ist allerdings trotz der Nutzung von Parallelrechnern sehr hoch. Um mehr über die Dynamik der Fermionen zu lernen, sucht man einen analytischen Weg zur Berechnung der Effekte von dynamischen Fermionen auf physikalische Observablen. Eine sinnvolle Alternative zur Störungstheorie bietet sich in einer Entwicklung um den Hoppingparameter $K = 0$ an. Der Hoppingparameter beschreibt die Kopplung zwischen den Feldern benachbarter Gitterpunkte. Da diese Entwicklung nur legitim für kleine Werte von K ist, was einer großen Masse M_0 entspricht, befindet man sich weit entfernt vom Kontinuumslimes der für $M_0 = M_{\text{cr}}$ erreicht wird. Wegen der Analogie zur statistischen Mechanik wird diese Entwicklung in der Literatur oft als Hochtemperatur-Entwicklung bezeichnet.

Im Limes $K = 0$ ist die Theorie „exakt“ lösbar und die fermionische Wirkung

$$S_f = \frac{1}{2} \sum_x \left\{ \bar{\psi}_x^a \psi_x^a - K \sum_{\mu=1}^4 \left[\bar{\psi}_{x+\hat{\mu}}^a V_{x\mu}^{ab} (1 + \gamma_\mu) \psi_x^b + \bar{\psi}_x^a (V^T)_{x\mu}^{ab} (1 - \gamma_\mu) \psi_{x+\hat{\mu}}^b \right] \right\} \quad (5.1)$$

$$:= \frac{1}{2} \sum_{x,y} \left\{ \bar{\psi}_y^a \delta_{yx} \psi_x^a - K \bar{\psi}_y^a M_{yx}^{ab} \psi_x^b \right\} \quad (5.2)$$

reduziert sich auf eine Summe nicht-wechselwirkender Terme

$$S_f = \frac{1}{2} \sum_x \bar{\psi}_x^a \psi_x^a. \quad (5.3)$$

Die Zustandsfunktion faktorisiert somit in ein Produkt von Zustandsfunktionen, die nur von einem Gitterplatz abhängen:

$$Z_f = \prod_x Z_1 = (Z_1)^V, \quad Z_1 = \int d\psi e^{-\frac{1}{2}\bar{\psi}^a \psi^a}. \quad (5.4)$$

In ähnlicher Weise faktorisieren auch die Greenschen Funktionen.

Bei den nachfolgenden Rechnungen beschränke ich mich bei der Hoppingparameter-Entwicklung zunächst auf den Fall $\beta = 0$. Dies führt dazu, daß die Eichwirkung

$$S_g = \sum_P -\beta \left\{ \frac{1}{2\text{Tr} \mathbf{1}} (\text{Tr} U_P + \text{Tr} U_P^{-1}) - 1 \right\} \quad (5.5)$$

keinen Beitrag liefert.

Im folgenden soll der Boltzmann-Faktor in ein Produkt über Kanten $\langle xy \rangle$ geschrieben werden. Dies erfordert eine Anpassung der Fermionmatrix $M_{ya,xb}$. Dabei ist darauf zu achten, daß jede Kante nur einmal gezählt wird. Legt man nun zwei benachbarte Punkte x und y auf dem Gitter fest, kann man zunächst offen lassen ob x größer oder kleiner als y sein soll. y ist größer als x , wenn der Differenzvektor nur positive Einträge hat. Mit Hilfe der Majorana-Eigenschaft (A.1) und den Majorana-Rechenregeln aus [38] läßt sich der Wechselwirkungsbeitrag der Fermionwirkung wie folgt umformen:

$$S_w = -\frac{K}{2} \sum_x \sum_{\mu=1}^4 \left\{ \bar{\psi}_{x+\hat{\mu}}^a V_{x\mu}^{ab} (1 + \gamma_\mu) \psi_x^b + \bar{\psi}_x^a (V^T)_{x\mu}^{ab} (1 - \gamma_\mu) \psi_{x+\hat{\mu}}^b \right\} \quad (5.6)$$

$$= -K \sum_x \sum_{\mu=1}^4 \left\{ \bar{\psi}_{x+\hat{\mu}}^a V_{x\mu}^{ab} (1 + \gamma_\mu) \psi_x^b \right\} = -K \sum_x \sum_{\mu=1}^4 \left\{ \bar{\psi}_x^a (V^T)_{x\mu}^{ab} (1 - \gamma_\mu) \psi_{x+\hat{\mu}}^b \right\}. \quad (5.7)$$

Die Gleichung (5.7) kann mit der Einführung der Fermionmatrix M als eine Summe über Paare $\langle xy \rangle$ benachbarter Gitterpunkte x, y mit $y = x + a\hat{\mu}$ geschrieben werden:

$$S_w = -K \sum_{\langle xy \rangle} \left\{ \bar{\psi}_y^a V_{x\mu}^{ab} (1 + \gamma_\mu) \psi_x^b \right\} = -\frac{K}{2} \sum_{\langle xy \rangle} \bar{\psi}_y^a M_{yx}^{ab} \psi_x^b, \quad \text{mit} \quad (5.8)$$

$$M_{yx}^{ab} = 2 \sum_{\mu=1}^4 \delta_{y,x+a\hat{\mu}} V_{x\mu}^{ab} (1 + \gamma_\mu). \quad (5.9)$$

Beschränkt man sich auf den Fall y größer x besteht die Fermionmatrix nur aus einem Term der proportional zu $\delta_{y,x+a\hat{\mu}}$ ist. Da sie damit eindeutig festgelegt ist, verzichte ich in den nachfolgenden Rechnungen auf den Zusatz des δ -Symbols in der Fermionmatrix. Bei der Summenbildung über die Gitterpunkte x und y kommt nun jede Kante $\langle xy \rangle$ genau einmal vor und zwar für den Fall $y = x + a\hat{\mu}$.

5.1 Supersymmetrisches Modell ohne Farbe

Für die allgemeine Struktur ist es sinnvoll, sich zunächst mit einem vereinfachten Modell zu beschäftigen. Die nachfolgenden Überlegungen beschränken sich daher auf eine supersymmetrische Yang-Mills-Theorie ohne Farbe auf einem zweidimensionalen Gitter. In der Wirkung entfällt damit die Summation über die Farbindices und die Integration über die Farbgruppe $SU(2)$:

$$Z_f = \int \prod_x d\psi(x) \prod_x e^{-\frac{1}{2}\bar{\psi}(x)\psi(x)} \prod_{<xy>} e^{\frac{K}{2}\bar{\psi}(y)M(y,x)\psi(x)} \quad (5.10)$$

$$= \int \prod_{x,\alpha} d\psi_\alpha(x) \prod_x e^{-\frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^4 \psi_\beta(x)C_{\beta\gamma}\psi_\gamma(x)} \prod_{<xy>} e^{\frac{K}{2}\sum_{\delta,\epsilon=1}^4 \psi_\delta(y)D_{\delta\epsilon}(y,x)\psi_\epsilon(x)}, \quad (5.11)$$

mit $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$. Dabei ist $D_{\delta\epsilon}$ definiert durch

$$D_{\delta\epsilon} = \sum_k C_{\delta k} M_{k\epsilon}. \quad (5.12)$$

Das Produkt $\prod_{<xy>}$ steht für ein Produkt über alle Kanten auf dem Gitter, ohne Doppelzählung. Führt man eine Reihenentwicklung für die erste Exponentialfunktion durch, so bricht diese, wegen der Grassmann-Natur der Fermionen, nach dem dritten Term ab. Man kann maximal vier verschiedene ψ_α 's auf einem Gitterplatz haben. Aus dem gleichen Grund ergibt die Entwicklung des zweiten Terms nach Potenzen von K nur Beiträge bis zur Ordnung K^4 :

$$\begin{aligned} Z_f = & \int \prod_{x,\alpha} d\psi_\alpha(x) \\ & \times \prod_x \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{\beta,\gamma} \psi_\beta(x) C_{\beta\gamma} \psi_\gamma(x) + \frac{1}{8} \sum_{\delta,\epsilon,\varphi,\chi} \psi_\delta(x) C_{\delta\epsilon} \psi_\epsilon(x) \psi_\varphi(x) C_{\varphi\chi} \psi_\chi(x) \right) \\ & \times \prod_{<x,y>} \left(1 + \frac{K}{2} \sum_{\tau,\sigma} \psi_\tau(y) D_{\tau\sigma}(y,x) \psi_\sigma(x) \right. \\ & \quad + \frac{K^2}{8} \sum_{\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma},\hat{\delta}} \psi_{\hat{\alpha}}(y) D_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(y,x) \psi_{\hat{\beta}}(x) \psi_{\hat{\gamma}}(y) D_{\hat{\gamma}\hat{\delta}}(y,x) \psi_{\hat{\delta}}(x) \\ & \quad + \frac{K^3}{48} \sum_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta},\tilde{\epsilon},\tilde{\varphi}} \psi_{\tilde{\alpha}}(y) D_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(y,x) \psi_{\tilde{\beta}}(x) \psi_{\tilde{\gamma}}(y) D_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}(y,x) \psi_{\tilde{\delta}}(x) \\ & \quad \times \psi_{\tilde{\epsilon}}(y) D_{\tilde{\epsilon}\tilde{\varphi}}(y,x) \psi_{\tilde{\varphi}}(x) \\ & \quad + \frac{K^4}{384} \sum_{\dot{\alpha},\dot{\beta},\dot{\gamma},\dot{\delta},\dot{\epsilon},\dot{\varphi},\dot{\tau},\dot{\sigma}} \psi_{\dot{\alpha}}(y) D_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(y,x) \psi_{\dot{\beta}}(x) \psi_{\dot{\gamma}}(y) D_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}(y,x) \psi_{\dot{\delta}}(x) \\ & \quad \times \psi_{\dot{\epsilon}}(y) D_{\dot{\epsilon}\dot{\varphi}}(y,x) \psi_{\dot{\varphi}}(x) \psi_{\dot{\tau}}(y) D_{\dot{\tau}\dot{\sigma}}(y,x) \psi_{\dot{\sigma}}(x) \Big). \quad (5.13) \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Entwicklung ergeben sich unterschiedliche Graphen G zu den einzelnen Ordnungen von K . Unter einem Graphen versteht man eine Kollektion von Kanten, die einen nicht-verschwindenden Beitrag zur Zustandsfunktion geben. Dabei sind Multiplizitäten der einzelnen Kanten erlaubt. Somit stellen die einem Graphen zugeordneten Kanten eine Abbildung in die natürlichen Zahlen dar, wobei die Abbildung gerade der Multiplizität entspricht. Es bietet sich daher noch eine etwas andere Schreibweise für die Zustandsfunktion an:

$$Z_f = \int \prod_{x,\alpha} d\psi_\alpha \prod_x P(\psi(x)) \sum_G \left(\frac{K}{2}\right)^{|G|} c(G) \prod_{\langle xy \rangle \in G} \psi_\alpha(y) D_{\alpha,\beta}(y, x) \psi_\beta(x). \quad (5.14)$$

Dabei ist

$$P(\psi(x)) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^4 \psi_\alpha C_{\alpha\beta} \psi_\beta(x)} \quad (5.15)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \psi(x) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(x) \psi(x) \right)^2 \quad (5.16)$$

und

$$c(G) = \prod_{\langle xy \rangle \in G} \frac{1}{m(x,y)!}, \quad (5.17)$$

wobei $m(x,y)$ die Multiplizität einer Kante $\langle xy \rangle$ in dem Graphen G angibt. Mit $|G|$ wird die Anzahl der Kanten in einem Graphen angegeben.

5.1.1 Ordnung K^0

Der leere Graph $G_0 = \emptyset$ führt zu einem Integral, bei dem man vier ψ 's an jedem Gitterpunkt hat¹.

$$\begin{aligned} N_0 &= \int \prod_\alpha d\psi_\alpha(x) P(\psi(x)) \\ &= \int d\psi_1(x) d\psi_2(x) d\psi_3(x) d\psi_4(x) \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^4 \psi_\alpha(x) C_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^4 \psi_\alpha(x) C_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \psi_\gamma(x) C_{\gamma\delta} \psi_\delta(x) \right) \\ &= \frac{1}{8} \int d\psi_1(x) d\psi_2(x) d\psi_3(x) d\psi_4(x) \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^4 \psi_\alpha(x) C_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \psi_\gamma(x) C_{\gamma\delta} \psi_\delta(x) \\ &= \frac{1}{8} (-8) \int d\psi_1(x) d\psi_2(x) d\psi_3(x) d\psi_4(x) \psi_1(x) \psi_2(x) \psi_3(x) \psi_4(x) \\ &= -1 \end{aligned} \quad (5.19)$$

¹Da es keinen Farbindex gibt, existieren insgesamt vier verschiedene ψ 's.

Eine alternative Form, das obige Ergebnis zu erhalten, besteht in der Benutzung der Formel (A.10). Für die Zustandsfunktion gilt dann:

$$Z_0 = \prod_x N_0 = N_0^V = (-1)^V. \quad (5.20)$$

5.1.2 Ordnung K^2

Der Graph der Ordnung K^2 besteht aus zwei Kanten:

$$G_2 : \text{Diagramm mit zwei vertikalen Kanten}$$

$$\begin{aligned} N_2 &= \int d\psi_1(x) d\psi_2(x) d\psi_3(x) d\psi_4(x) d\psi_1(y) d\psi_2(y) d\psi_3(y) d\psi_4(y) \\ &\quad \times \left(-\frac{1}{2} \psi_\alpha(x) C_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) \right) \left(-\frac{1}{2} \psi_\gamma(y) C_{\gamma\delta} \psi_\delta(y) \right) \\ &\quad \times \frac{K^2}{8} \sum_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}=1}^4 \psi_{\tilde{\alpha}}(y) D_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(y, x) \psi_{\tilde{\beta}}(x) \psi_{\tilde{\gamma}}(y) D_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}(y, x) \psi_{\tilde{\delta}}(x) \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{K^2}{4} \left\{ -(D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21}) + (D_{13}D_{24} - D_{23}D_{14}) + (D_{31}D_{42} - D_{41}D_{32}) \right. \\ &\quad \left. - (D_{33}D_{44} - D_{43}D_{34}) \right\} \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$= -\frac{K^2}{8} \sum_{\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}} D_{\alpha\tilde{\alpha}} D_{\beta\tilde{\beta}} [\epsilon_{\alpha\beta}^{12} - \epsilon_{\alpha\beta}^{34}] [\epsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{12} - \epsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{34}] \quad (5.23)$$

Das Auftreten der ϵ -Tensoren liegt an der Entwicklung von

$$e^{-\frac{1}{2}\bar{\psi}\psi} = 1 - \psi_1\psi_2 + \psi_3\psi_4 \pm \mathcal{O}(\psi_i\psi_j\psi_k\psi_l). \quad (5.24)$$

Der Ausdruck $\epsilon_{\alpha\beta}^{12} - \epsilon_{\alpha\beta}^{34}$ stimmt exakt mit der Ladungskonjugationsmatrix $C_{\alpha\beta}$ überein. Im folgenden werden daher sämtliche ϵ -Tensoren in Form von C -Matrizen geschrieben. Für N_2 gilt dann:

$$N_2 = -\frac{K^2}{8} \sum_{\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}} D_{\alpha\tilde{\alpha}} D_{\beta\tilde{\beta}} C_{\alpha\beta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}. \quad (5.25)$$

Da es für die Plazierung von N_2 auf einem zweidimensionalen Gitter mit Volumen V genau $2V$ Möglichkeiten gibt, erhält man für den Beitrag zur Zustandsfunktion:

$$Z_2 = \left(\prod_{x \notin G_2} N_0 \right) 2VN_2 = N_0^{V-2} 2VN_2 = 2VZ_0 \frac{N_2}{N_0^2} \equiv 2VZ_0 \Phi(G_2). \quad (5.26)$$

5.1.3 Ordnung K^4

$$G_4^1 : \quad \text{Diagram showing two separate pairs of nodes connected by horizontal lines.}$$

$$N_4^1 = N_2(x, y) N_2(v, w) \quad (5.27)$$

G_4^1 besteht aus zwei Teil-Graphen. Für den ersten gibt es wieder $2V$ Möglichkeiten. Der zweite Graph darf den ersten weder berühren, noch direkt auf ihm liegen. Deshalb gibt es für diesen nur $(2V - 7)$ Möglichkeiten. Das Produkt muß schließlich noch durch zwei geteilt werden, um eine Doppelzählung gleicher Graphen zu vermeiden.

$$Z_4^1 = \frac{2V(2V - 7)}{2} Z_0 \frac{N_4^1}{N_0^4} \quad (5.28)$$

$$G_4^2 : \quad \text{Diagram showing three nodes in a row, with the first and third nodes connected by double lines.}$$

$$\begin{aligned} N_4^2 &= \int d\psi_1(x) d\psi_2(x) d\psi_3(x) d\psi_4(x) d\psi_1(y) d\psi_2(y) d\psi_3(y) d\psi_4(y) \\ &\quad \times \frac{K^4}{384} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}} \psi_{\tilde{\alpha}}(y) D_{\tilde{\alpha}\alpha}(y, x) \psi_{\alpha}(x) \psi_{\tilde{\beta}}(y) D_{\tilde{\beta}\beta}(y, x) \psi_{\beta}(x) \\ &\quad \times \psi_{\tilde{\gamma}}(y) D_{\tilde{\gamma}\gamma}(y, x) \psi_{\gamma}(x) \psi_{\tilde{\delta}}(y) D_{\tilde{\delta}\delta}(y, x) \psi_{\delta}(x) \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$= \frac{K^4}{384} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}} D_{\tilde{\alpha}\alpha}(y, x) D_{\tilde{\beta}\beta}(y, x) D_{\tilde{\gamma}\gamma}(y, x) D_{\tilde{\delta}\delta}(y, x) \quad (5.30)$$

Ähnlich wie für G_2 gibt es genau $2V$ Möglichkeiten für die Verteilung von G_4^2 auf einem Gitter mit dem Volumen V .

$$Z_4^2 = Z_0 2V \Phi(G_4^2) = 2V Z_0 \frac{N_4^2}{N_0^4} \quad (5.31)$$

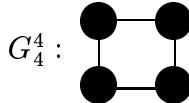
$$G_4^3 : \quad \text{Diagram showing three nodes in a row, with the first and second nodes connected by double lines.}$$

$$\begin{aligned}
N_4^3 &= \int \prod_{\alpha} d\psi_{\alpha}(x) d\psi_{\alpha}(y) d\psi_{\alpha}(z) \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(x)\psi(x) \right) \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(z)\psi(z) \right) \\
&\quad \times \left(\frac{K^2}{8} \sum_{\alpha,\beta,\tilde{\alpha},\tilde{\beta}=1}^4 \psi_{\alpha}(y) D_{\alpha\tilde{\alpha}}\psi_{\tilde{\alpha}}(x) \psi_{\beta}(y) D_{\beta\tilde{\beta}}(y,x)\psi_{\tilde{\beta}}(x) \right) \\
&\quad \times \left(\frac{K^2}{8} \sum_{\gamma\delta,\tilde{\gamma},\tilde{\delta}=1}^4 \psi_{\tilde{\gamma}}(z) D_{\tilde{\gamma}\gamma}(z,y)\psi_{\gamma}(y) \psi_{\tilde{\delta}}(z) D_{\tilde{\delta}\delta}(z,y)\psi_{\delta}(y) \right) \quad (5.32) \\
&= \frac{K^4}{64} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\tilde{\alpha}}(y,x) D_{\beta\tilde{\beta}}(y,x) D_{\tilde{\gamma}\gamma}(z,y) D_{\tilde{\delta}\delta}(z,y) \\
&\quad \times C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}} \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Man kann G_4^3 auf sechs unterschiedliche Arten darstellen. Auf einem Gitter mit Volumen V gibt es somit $6V$ Möglichkeiten.

$$Z_4^3 = Z_0 6V \Phi(G_4^3) = 6V Z_0 \frac{N_4^3}{N_0^3} \quad (5.34)$$

Berechnet man die Anzahl der obigen drei Möglichkeiten für zwei „Doppelbonds“, so erhält man $(2V^2 + V)$ Möglichkeiten. Dieses Ergebnis stimmt mit der Anzahl der kombinatorischen Möglichkeiten für die Verteilung von zwei „Doppelbonds“ auf einem Gitter mit dem Volumen V überein: $\frac{2V(2V-1)}{2} + 2V$.



$$\begin{aligned}
N_4^4 &= \int \prod_{\alpha} d\psi_{\alpha}(x) d\psi_{\alpha}(y) d\psi_{\alpha}(v) d\psi_{\alpha}(w) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(x)\psi(x) \right) \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(y)\psi(y) \right) \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(v)\psi(v) \right) \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(w)\psi(w) \right) \\
&\quad \times \frac{K^4}{16} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}=1}^4 \psi_{\alpha}(y) D_{\alpha\tilde{\alpha}}(y,x)\psi_{\tilde{\alpha}}(x) \psi_{\gamma}(w) D_{\gamma\beta}(w,y)\psi_{\beta}(x) \\
&\quad \times \psi_{\tilde{\gamma}}(v) D_{\tilde{\gamma}\delta}(v,w)\psi_{\delta}(w) \psi_{\tilde{\beta}}(x) D_{\tilde{\beta}\delta}(x,v)\psi_{\delta}(v) \\
&= \frac{K^4}{16} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}(y,x) D_{\gamma\beta}(w,y) D_{\tilde{\gamma}\delta}(v,w) D_{\tilde{\beta}\delta}(x,v) \\
&\quad \times C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}} C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} \quad (5.35)
\end{aligned}$$

G_4^4 lässt sich V mal auf einem Gitter mit Volumen V verteilen.

$$Z_4^4 = Z_0 V \Phi(G_4^4) = V Z_0 \frac{N_4^4}{N_0^4} \quad (5.36)$$

Für K^4 ergibt sich damit insgesamt:

$$Z = Z_0 \{ \Phi(G_2)^2 V(2V - 7) + \Phi(G_4^2) 2V + \Phi(G_4^3) 6V + \Phi(G_4^4) V \}. \quad (5.37)$$

5.1.4 Berechnung der freien Energie

$$\begin{aligned} Z_f &= Z_0 \left(1 + \underbrace{2V\Phi(G_2) + V(2V - 7)\Phi(G_2)^2 + 2V\Phi(G_4^2) + 6V\Phi(G_4^3) + V\Phi(G_4^4)}_{\equiv A} \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(K^6) \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\ln Z_f = \underbrace{\ln Z_0}_{=0} + \ln(1 + A) = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 + \mathcal{O}(A^3) \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} &= 2V\Phi(G_2) + V(2V - 7)\Phi(G_2)^2 + 2V\Phi(G_4^2) + 6V\Phi(G_4^3) + V\Phi(G_4^4) \\ &\quad - \frac{1}{2}(2V)^2\Phi(G_2)^2 + \mathcal{O}(K^6) \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$\frac{\ln Z_f}{V} = 2\Phi(G_2) + 2\Phi(G_4^2) + 6\Phi(G_4^3) + \Phi(G_4^4) - 7\Phi(G_2)^2 + \mathcal{O}(K^6) \quad (5.41)$$

Die freie Energie wird definiert durch $F = -\frac{\ln Z_f}{V}$ und ist demnach gegeben durch den folgenden Ausdruck:

$$F = \Phi(G_2)(7\Phi(G_2) - 2) - 2\Phi(G_4^2) - 6\Phi(G_4^3) - \Phi(G_4^4) + \mathcal{O}(K^6). \quad (5.42)$$

5.1.5 Ordnung K^6

Im Fall K^6 gibt es wieder mehrere Möglichkeiten für die einzelnen Graphen. Zunächst tragen drei „Doppelbonds“, die sich *nicht* berühren, zur Ordnung K^6 bei. Bei der Abzählung dieser Graphen auf einem Gitter muß man drei Fälle unterscheiden:

- Zwei der drei „Doppelbonds“ liegen nicht nebeneinander und befinden sich auch nicht im Abstand von einem Gitterpunkt zueinander:



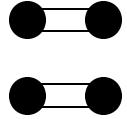
Die Anzahl der Möglichkeiten diese Graphen auf einem Gitter zu verteilen beträgt dann $\frac{1}{3!} 2V(2V - 7 - 14 - 2)(2V - 14)$.

- Zwei der drei „Doppelbonds“ befinden sich im Abstand von einem Gitterpunkt zueinander:



Diese Graphen kann man auf $\frac{1}{3!} 2V 14 (2V - 13)$ Arten auf einem Gitter mit Volumen V verteilen.

- Zwei der drei „Doppelbonds“ liegen nebeneinander:



Für diese Graphen gibt es $\frac{1}{3!} 2V 2 (2V - 12)$ Möglichkeiten.

Insgesamt ergibt sich damit für Z_6^1 :

$$Z_6^1 = \left(\frac{(2V)^3}{3!} - 14V^2 + \frac{232}{3!}V \right) Z_0 \frac{N_6^1}{N_0^6}, \quad (5.43)$$

$$N_6^1 = N_2 \cdot N_2 \cdot N_2 \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{K^6}{512} \left(\sum_{\alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}} D_{\alpha \tilde{\alpha}} D_{\beta \tilde{\beta}} C_{\alpha \beta} C_{\tilde{\alpha} \tilde{\beta}} \right) \left(\sum_{\gamma, \delta, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}} D_{\gamma \tilde{\gamma}} D_{\delta \tilde{\delta}} C_{\gamma \delta} C_{\tilde{\gamma} \tilde{\delta}} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{\epsilon, \phi, \tilde{\epsilon}, \tilde{\phi}} D_{\epsilon \tilde{\epsilon}} D_{\phi \tilde{\phi}} C_{\epsilon \phi} C_{\tilde{\epsilon} \tilde{\phi}} \right). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Man kann auch einen Graphen konstruieren, bei dem alle drei „Doppelbonds“ miteinander verknüpft sind:

$$G_6^2 : \quad \text{Diagram of a graph with four nodes in a row, where the first three nodes are connected by a horizontal line and the last two nodes are connected by a horizontal line, forming a chain-like structure.}$$

Dafür gibt es $18V$ Möglichkeiten. Zusätzlich zu diesen Graphen gibt es noch $4V$ Möglichkeiten für den folgenden Graphen:

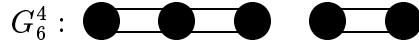
$$G_6^3 : \quad \text{Diagram of a graph with four nodes in a row. The first three nodes form a triangle with a vertical bond between the middle node and the third node, and a horizontal bond between the first and second nodes. The fourth node is connected to the second node by a horizontal bond.}$$

Da dieser jedoch keinen Beitrag zu Φ gibt, gilt:

$$Z_6^2 = 18V Z_0 \Phi(G_6^2) = 18V Z_0 \frac{N_6^2}{N_0^4}. \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned}
N_6^2 &= \int \prod_{\alpha} d\psi_{\alpha}(x) d\psi_{\alpha}(y) d\psi_{\alpha}(v) d\psi_{\alpha}(w) \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(x)\psi(x) \right) \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(w)\psi(w) \right) \\
&\quad \times \left(\frac{K^2}{8} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta=1}^4 \psi_{\alpha}(y) D_{\alpha\beta}(y, x) \psi_{\beta}(x) \psi_{\gamma}(y) D_{\gamma\delta}(y, x) \psi_{\delta}(x) \right) \\
&\quad \times \left(\frac{K^2}{8} \sum_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}=1}^4 \psi_{\tilde{\alpha}}(v) D_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(v, y) \psi_{\tilde{\beta}}(y) \psi_{\tilde{\gamma}}(v) D_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}(v, y) \psi_{\tilde{\delta}}(y) \right) \\
&\quad \times \left(\frac{K^2}{8} \sum_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}=1}^4 \psi_{\hat{\alpha}}(v) D_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(v, y) \psi_{\hat{\beta}}(y) \psi_{\hat{\gamma}}(v) D_{\hat{\gamma}\hat{\delta}}(v, y) \psi_{\hat{\delta}}(y) \right) \\
&= -\frac{K^6}{512} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}(y, x) D_{\beta\tilde{\beta}}(y, x) D_{\tilde{\alpha}\gamma}(v, y) D_{\tilde{\beta}\delta}(v, y) \\
&\quad \times D_{\tilde{\gamma}\tilde{\gamma}}(w, v) D_{\tilde{\delta}\tilde{\delta}}(w, v) C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} C_{\hat{\gamma}\hat{\delta}}. \tag{5.47}
\end{aligned}$$

Berühren sich nur zwei der drei „Doppelbonds“, so gibt es dafür genau $6V(2V - 10)$ Möglichkeiten.



$$Z_6^4 = (12V^2 - 60V) Z_0 \Phi(G_6^4) \tag{5.48}$$

$$= (12V^2 - 60V) Z_0 \frac{N_6^4}{N_0^5} \tag{5.49}$$

$$N_6^4 = N_4^2 \cdot N_2 \tag{5.50}$$

Weitere Graphen, die sich aus drei „Doppelbonds“ konstruieren lassen, gibt es auf einem zweidimensionalen Gitter nicht. Es besteht jedoch noch die Möglichkeit, einen vierer Bond mit einem „Doppelbond“ zu kombinieren oder aber ein Quadrat aus einzelnen Bonds in Kombination mit einem „Doppelbond“ zu verknüpfen.

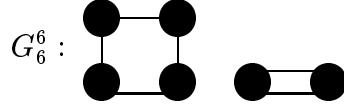


Für diesen Graphen gibt es $2V(2V - 7)$ Möglichkeiten.

$$Z_6^5 = (4V^2 - 14V) Z_0 \Phi(G_6^5) \tag{5.51}$$

$$= (4V^2 - 14V) Z_0 \frac{N_6^5}{N_0^4} \tag{5.52}$$

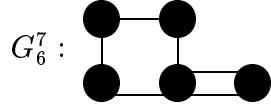
$$N_6^5 = N_4^3 \cdot N_2 \tag{5.53}$$



$$Z_6^6 = (2V^2 - 12V)Z_0\Phi(G_6^6) \quad (5.54)$$

$$= (2V^2 - 12V)Z_0 \frac{N_6^6}{N_0^6} \quad (5.55)$$

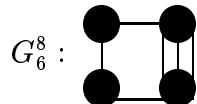
$$N_6^6 = N_4^4 \cdot N_2 \quad (5.56)$$



$$Z_6^7 = 8VZ_0\Phi(G_6^6) = 8VZ_0 \frac{N_6^7}{N_0^5}, \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} N_6^7 &= \int \prod_{\alpha} d\psi_{\alpha}(x) d\psi_{\alpha}(y) d\psi_{\alpha}(v) d\psi_{\alpha}(w) d\psi_{\alpha}(a) \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(a)\psi(a) \right) \\ &\quad \times \frac{K^4}{16} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}=1}^4 \psi_{\alpha}(y) D_{\alpha\beta}(y, x) \psi_{\beta}(x) \psi_{\gamma}(w) D_{\gamma\delta}(w, y) \psi_{\delta}(y) \\ &\quad \times \psi_{\tilde{\alpha}}(v) D_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(v, w) \psi_{\tilde{\beta}}(w) \psi_{\tilde{\gamma}}(x) D_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}(x, v) \psi_{\tilde{\delta}}(v) \\ &\quad \times \frac{K^2}{8} \sum_{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}=1}^4 \psi_{\tilde{\alpha}}(a) D_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(a, y) \psi_{\tilde{\beta}}(y) \psi_{\tilde{\gamma}}(a) D_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}(a, y) \psi_{\tilde{\delta}}(y) \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{K^6}{128} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\alpha\hat{\alpha}}(y, x) D_{\hat{\gamma}\beta}(w, y) D_{\tilde{\alpha}\hat{\delta}}(v, w) D_{\hat{\beta}\tilde{\beta}}(x, v) \\ &\quad \times D_{\tilde{\gamma}\gamma}(a, y) D_{\tilde{\delta}\delta}(a, y) C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} C_{\hat{\gamma}\hat{\delta}} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}} \end{aligned} \quad (5.59)$$



$$Z_6^8 = 4VZ_0\Phi(G_6^7) = 4VZ_0 \frac{N_6^8}{N_0^4}, \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned}
N_6^8 &= \int \prod_{\alpha} d\psi_{\alpha}(x) d\psi_{\alpha}(y) d\psi_{\alpha}(v) d\psi_{\alpha}(w) \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(x)\psi(x) \right) \left(\frac{1}{2} \bar{\psi}(v)\psi(v) \right) \\
&\quad \times \frac{K^4}{16} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}=1}^4 \psi_{\alpha}(y) D_{\alpha\beta}(y, x) \psi_{\beta}(x) \psi_{\gamma}(w) D_{\gamma\delta}(w, y) \psi_{\delta}(y) \times \\
&\quad \psi_{\tilde{\alpha}}(v) D_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}(v, w) \psi_{\tilde{\beta}}(w) \psi_{\tilde{\gamma}}(x) D_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}(x, v) \psi_{\tilde{\delta}}(v) \\
&\quad \times \frac{K^2}{8} \sum_{\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}=1}^4 \psi_{\hat{\alpha}}(w) D_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(w, y) \psi_{\hat{\beta}}(y) \psi_{\hat{\gamma}}(w) D_{\hat{\gamma}\hat{\delta}}(w, y) \psi_{\hat{\delta}}(y)
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$= -\frac{K^6}{128} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}} D_{\alpha\hat{\alpha}}(y,x) D_{\tilde{\alpha}\beta}(w,y) D_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}}(v,w) D_{\tilde{\beta}\hat{\delta}}(x,v) \\ \times D_{\tilde{\gamma}\gamma}(w,y) D_{\tilde{\delta}\delta}(w,y) C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} C_{\tilde{\gamma}\hat{\delta}} \quad (5.62)$$

$$Z(K^6) = Z_0 \Phi(G_6^1) \frac{1}{3!} (2V)^3 + \mathcal{O}(V^2, V) \quad (5.63)$$

$$= Z_0 \left(\Phi(G_2) \right)^3 \frac{1}{3!} (2V)^3 + \mathcal{O}(V^2, V) \quad (5.64)$$

Die Terme, die in den einzelnen Graphen auftreten, sind denen im nachfolgenden Abschnitt sehr ähnlich. Die expliziten Rechnungen verlaufen daher analog.

5.2 Supersymmetrisches Modell mit Farbe

Nimmt man nun, ausgehend von dem bisher betrachteten Modell, die Farbe als zusätzlichen Parameter hinzu, so können sich an einem Gitterpunkt statt vier verschiedener ψ 's nun zwölf Majorana-Spinoren gleichzeitig aufhalten². Die Integration in (5.11) wird deshalb zu einer Integration über zwölf ψ 's:

$$Z_f = \int dU \prod_{x,\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) \prod_x e^{-\frac{1}{2} \sum_a \bar{\psi}^a(x) \psi^a(x)} \prod_{<xy>} e^{\frac{K}{2} \sum_{\alpha,\beta,a,b} \bar{\psi}_\alpha^a(y) D_{\alpha\beta}^{ab}(y,x) \psi_\beta^b(x)} \quad (5.65)$$

$$= \int dU \prod_{x,\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) \prod_x P(\psi(x)) \sum_G \left(\frac{K}{2}\right)^{|G|} c(G) \prod_{<xy>\in G} \psi_\alpha^a(y) D_{\alpha\beta}^{ab}(y,x) \psi_\beta^b(x), \quad (5.66)$$

mit $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $a, b \in \{1, 2, 3\}$. Die Matrix $D_{\alpha\beta}^{ab}$ ist definiert durch

$$D_{\alpha\beta}^{ab} = \sum_k C_{\alpha k} M_{k\beta}^{ab}. \quad (5.67)$$

²Es gibt wegen der Dirac-Indices vier verschiedene ψ 's, die jeweils in drei unterschiedlichen Farben auftreten können.

Die einzelnen Graphen entsprechen den unterschiedlichen Ordnungen in der Entwicklung der beiden in der Zustandsfunktion auftretenden Exponentialfunktionen. Die Vorgehensweise ist dabei wie folgt: Zunächst betrachtet man die Entwicklung des Wechselwirkungsterms. Die Anzahl der Majorana-Fermionen die aus der ersten Exponentialfunktion stammen, wird dann entsprechend ergänzt, so daß sich an jedem Gitterpunkt des Graphens zwölf Fermionen befinden. Jetzt kann man sich ausgehend von der Entwicklung überlegen, wie die ψ 's aussehen, die aus dem Wechselwirkungsterm stammen. Dieses Verfahren wird am Beispiel von N_2 erläutert.

Eine andere Möglichkeit, die einem mehr algebraischen Zugang entspricht, besteht in der Berechnung von Majorana-Erwartungswerten mittels Quelltermen. Dadurch entfällt eine explizite Entwicklung der ersten Exponentialfunktion und die Methode erscheint mathematisch eleganter. Die entsprechenden Berechnungen hierzu finden sich in Kapitel 3. Zunächst ist es jedoch physikalisch anschaulicher, wenn man die Majorana-Fermionen aus der Entwicklung der Exponentialreihe anschaut, um so einen Eindruck über die vorhandenen Farbkombinationen zu bekommen. Diese Entwicklung wird durch die Gleichung (A.19) beschrieben. Daran kann man zum Beispiel für den Graphen N_2 ablesen, daß die zwei Fermionen, die sich jeweils an dem Gitterpunkt x und y befinden, zum einen die gleiche Farbe haben müssen und zum anderen entweder durch $+\psi_1 \psi_2$ oder $-\psi_3 \psi_4$ (plus Permutationen) dargestellt werden können. Mit der Ladungskonjugationsmatrix, bei der nur die Einträge $C_{12} = 1$, $C_{21} = -1$, $C_{34} = -1$ und $C_{43} = 1$ von null verschieden sind, wird dieses Verhalten exakt beschrieben.

Im folgenden wird mit \hat{N}_i^j der Wert eines Graphen vor der U -Integration angegeben.

5.2.1 Ordnung K^0

Der leere Graph führt in diesem Fall auf ein Integral, bei dem sich zwölf ψ 's an jedem Gitterpunkt befinden:

$$\begin{aligned}
\hat{N}_0 &= \frac{1}{6!} \left(\frac{1}{2} \right)^6 \left(\sum_{a=1}^3 2\psi_1^a \psi_2^a - 2\psi_3^a \psi_4^a \right)^6 \\
&= - \int d\psi_1^1 d\psi_2^1 d\psi_3^1 d\psi_4^1 d\psi_1^2 d\psi_2^2 d\psi_3^2 d\psi_4^2 d\psi_1^3 d\psi_2^3 d\psi_3^3 d\psi_4^3 \\
&\quad \times \psi_1^1 \psi_2^1 \psi_3^1 \psi_4^1 \psi_1^2 \psi_2^2 \psi_3^2 \psi_4^2 \psi_1^3 \psi_2^3 \psi_3^3 \psi_4^3 \\
&= -1.
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Integriert man den leeren Graphen über U , so ergibt sich nach (4.35):

$$\int dU \hat{N}_0 = -1, \quad Z_0 = (-1)^V. \tag{5.69}$$

5.2.2 Ordnung K^2

In der zweiten Ordnung gibt es, genau wie in dem Modell ohne Farbe, einen Graphen der einen Beitrag liefert. An den Gitterpunkten befinden sich jetzt allerdings statt zwei ψ 's zehn ψ 's:

$$G_2 : \quad \begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ x \qquad y \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\hat{N}_2 &= \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) d\psi_\alpha^a(y) \frac{1}{5!} \left(-\frac{1}{2} \sum_{c=1}^3 \bar{\psi}^c(x) \psi^c(x) \right)^5 \frac{1}{5!} \left(-\frac{1}{2} \sum_{d=1}^3 \bar{\psi}^d(y) \psi^d(y) \right)^5 \\
&\quad \times \frac{K^2}{8} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \sum_{a,b,c,d} \psi_\alpha^a(y) D_{\alpha\beta}^{ab}(y,x) \psi_\beta^b(x) \psi_\gamma^c(y) D_{\gamma\delta}^{cd}(y,x) \psi_\delta^d(x) \\
&= -\frac{K^2}{8} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \sum_{a,b} D_{\alpha\beta}^{ab}(y,x) D_{\gamma\delta}^{ab}(y,x) C_{\alpha\gamma} C_{\beta\delta} \\
&= -\frac{K^2}{8} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \sum_{a,b} (CM_{yx}^{ab})_{\alpha\beta} (CM_{yx}^{ab})_{\gamma\delta} C_{\alpha\gamma} C_{\beta\delta} \\
&= -\frac{K^2}{8} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \sum_{a,b} (CM_{yx}^{ab}C)_{\alpha\delta} (C^2 M_{yx}^{ab})_{\alpha\delta} \\
&= +\frac{K^2}{8} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \sum_{a,b} (C^T (M_{yx}^T)^{ab} C^T)_{\delta\alpha} (M_{yx}^{ab})_{\alpha\delta} \\
&= +\frac{K^2}{8} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \sum_{a,b} \text{Tr} \{ M_{yx}^{ab} C (M_{yx}^T)^{ab} C \}. \tag{5.70}
\end{aligned}$$

Sowohl die Spur wie auch die Transposition wirken nur auf die Dirac-Indices. Transponiert man die Fermionmatrix bezüglich ihrer Dirac-Indices und multipliziert sie dann von beiden Seiten mit der Ladungskonjugationsmatrix, ergibt sich:³

$$\begin{aligned}
C(M^T)^{ab} C &= 2 C(1 + \gamma_\mu)^T C V^{ab} \\
&= 2 (C^2 + C \gamma_\mu^T C) V^{ab}.
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Unter Ausnutzung von Gleichung (A.6) und (A.7) erhält man daraus:

$$\begin{aligned}
C(M^T)^{ab} C &= -2 \{ (1 - \gamma_\mu) V^{ab} \} \\
&= -\tilde{M}^{ab}.
\end{aligned} \tag{5.72}$$

³Der Übersichtshalber fehlt die (hier irrelevante) Summe über μ in den folgenden Rechenschritten.

Dabei wird \tilde{M} analog zur Fermionmatrix M definiert, jedoch mit negativem μ :

$$\tilde{M}^{ab} = 2 \sum_{\mu=1}^4 (1 - \gamma_\mu) V^{ab}. \quad (5.73)$$

Für \hat{N}_2 folgt mit (5.72):

$$\hat{N}_2 = -\frac{K^2}{8} \sum_{a,b} \text{Tr}(M^{ab} \tilde{M}^{ab}). \quad (5.74)$$

Die Spur über die beiden Matrizen M und \tilde{M} ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M^{ab} \tilde{M}^{ab}) &= 2^2 \text{Tr} \{(1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu) V^{ab} V^{ab}\} \\ &= 4 \text{Tr} \{1 - \gamma_\mu + \gamma_\mu - \gamma_\mu^2\} V^{ab} V^{ab} \\ &= 4 \text{Tr} \{1 - 1\} = 0. \end{aligned} \quad (5.75)$$

N_2 gibt somit keinen Beitrag. Des Weiteren erkennt man, daß Graphen mit sogenannten Spitzen keinen Beitrag geben. Damit ist folgendes gemeint: Hat man bei einem Graphen eine einlaufende Linie in Richtung μ und muß ohne Umwege wieder in diese Richtung zurück, so ergibt dieser Graph keinen Beitrag, da dann das Produkt $(1 + \gamma_\mu) \cdot (1 - \gamma_\mu)$ berechnet werden muß, was nach (5.75) null ergibt. Die sich daraus ergebenden graphischen Verfahren werden ausführlich in den nächsten Ordnungen von K erläutert.

5.2.3 Der total antisymmetrische Tensor vierter Stufe

Das Ausrechnen des obigen Graphen ist deshalb so einfach, weil es zu jeder D -Matrix je eine C -Matrix gibt. Die Summation über alle Dirac-Indices führt schließlich zur Bildung der Spur über die Fermionmatrix. Bei den Graphen höherer Ordnung treten allerdings, wie schon im vorangegangenen Kapitel gezeigt, nicht nur C -Matrizen, sondern häufig auch ϵ -Tensoren auf. Damit wird die Symmetrie, die durch die Multiplikation der Ladungskonjugationsmatrix mit einer D -Matrix entsteht, zerstört. Eine Zusammenfassung der entsprechenden Terme gelingt jetzt nicht mehr. Da sich die Einträge der C -Matrix auf 0, 1 und -1 beschränken, liegt es nahe, für den Levi-Civita-Tensor eine Darstellung in Form von (zwei) Ladungskonjugationsmatrizen zu suchen, die die Indices des Levi-Civita-Tensors tragen. Nach einigen Experimenten ergab sich die nachstehende Gleichung:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -C_{\alpha\beta}C_{\gamma\delta} + C_{\alpha\gamma}C_{\beta\delta} + C_{\alpha\delta}C_{\gamma\beta}. \quad (5.76)$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung läßt sich zum Beispiel mit den Grassmann-Integrationsregeln für Majorana-Fermionen aus Kapitel 3 bestätigen, wenn man die Farbindices vernachlässigt. Die Gleichung (3.46) stimmt dann mit der obigen Gleichung (5.76) überein. Diese Gleichung ermöglicht einem nun die explizite Berechnung der Graphen höherer Ordnung. Da jedoch mit den Gleichungen (3.43), (3.44) und (3.47) einfache Verfahren zur Lösung des Integrationsproblems zur Verfügung stehen, wird in den folgenden Rechnungen auf diese zurückgegriffen, ohne allerdings auf die anschauliche Bedeutung der Integration zu verzichten.

5.2.4 Ordnung K^4

Der einfachste Graph der Ordnung K^4 besteht aus zwei Graphen G_2 :

$$G_4^1 : \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \hline x \quad y \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \hline v \quad w \end{array}$$

$$\hat{N}_4^1 = \hat{N}_2 \cdot \hat{N}_2 = 0. \quad (5.77)$$

Der zweite Graph, der zur Ordnung K^4 gehört, besteht aus vier übereinanderliegenden Kanten:

$$G_4^2 : \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \\ \hline x \quad y \end{array}$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_4^2 &= \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) d\psi_\alpha^a(y) e^{-\frac{1}{2} \sum_{e=1}^3 \bar{\psi}^e(x) \psi^e(x)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{f=1}^3 \bar{\psi}^f(y) \psi^f(y)} \\ &\quad \times \frac{K^4}{384} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\dots,\tilde{\delta} \\ a,b,\dots,\tilde{d}}} \psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}}(y) D_{\tilde{\alpha}\alpha}^{\tilde{a}a}(y,x) \psi_\alpha^a(x) \psi_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}}(y) D_{\tilde{\beta}\beta}^{\tilde{b}b}(y,x) \psi_\beta^b(x) \\ &\quad \times \psi_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}}(y) D_{\tilde{\gamma}\gamma}^{\tilde{c}c}(y,x) \psi_\gamma^c(x) \psi_{\tilde{\delta}}^{\tilde{d}}(y) D_{\tilde{\delta}\delta}^{\tilde{d}d}(y,x) \psi_\delta^d(x) \\ &= \frac{K^4}{384} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\dots,\tilde{\delta} \\ a,b,\dots,\tilde{d}}} D_{\tilde{\alpha}\alpha}^{\tilde{a}a}(y,x) D_{\tilde{\beta}\beta}^{\tilde{b}b}(y,x) D_{\tilde{\gamma}\gamma}^{\tilde{c}c}(y,x) D_{\tilde{\delta}\delta}^{\tilde{d}d}(y,x) \\ &\quad \times \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) \psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}}(x) \psi_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}}(x) \psi_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}}(x) \psi_{\tilde{\delta}}^{\tilde{d}}(x) e^{-\frac{1}{2} \sum_{e=1}^3 \bar{\psi}^e(x) \psi^e(x)} \\ &\quad \times \int \prod_{e,e} d\psi_\epsilon^e(y) \psi_\epsilon^a(y) \psi_\alpha^b(y) \psi_\beta^c(y) \psi_\gamma^d(y) e^{-\frac{1}{2} \sum_{f=1}^3 \bar{\psi}^f(y) \psi^f(y)}. \quad (5.78) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Integrationsregeln für vier Majorana-Fermionen (3.44) ergibt sich für die Integration über $d\psi(x)$ und $d\psi(y)$:

$$\hat{N}_4^2 = \frac{K^4}{384} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\dots,\tilde{\delta} \\ a,b,\dots,\tilde{d}}} D_{\tilde{\alpha}\alpha}^{\tilde{a}a}(y,x) D_{\tilde{\beta}\beta}^{\tilde{b}b}(y,x) D_{\tilde{\gamma}\gamma}^{\tilde{c}c}(y,x) D_{\tilde{\delta}\delta}^{\tilde{d}d}(y,x) \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd} \epsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}}. \quad (5.79)$$

Der in der Gleichung vorkommende ϵ -Tensor wurde in Kapitel 3 in der Gleichung (3.46) definiert. Damit ergibt sich für das Produkt zweier ϵ -Tensoren:

$$\begin{aligned} \hat{N}_4^2 &= \frac{K^4}{384} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \dots, \delta \\ a, b, \dots, \tilde{d}}} D_{\tilde{\alpha}\alpha}^{\tilde{a}a}(y, x) D_{\tilde{\beta}\beta}^{\tilde{b}b}(y, x) D_{\tilde{\gamma}\gamma}^{\tilde{c}c}(y, x) D_{\tilde{\delta}\delta}^{\tilde{d}d}(y, x) \\ &\quad \times \left\{ C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}} \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{\tilde{c}\tilde{d}} \right. \\ &\quad - C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} C_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}} \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} \\ &\quad - C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ &\quad - C_{\alpha\gamma} C_{\beta\delta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}} \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{\tilde{c}\tilde{d}} \\ &\quad + C_{\alpha\gamma} C_{\beta\delta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} C_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}} \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} \\ &\quad + C_{\alpha\gamma} C_{\beta\delta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{ac} \delta_{bd} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} \\ &\quad - C_{\alpha\delta} C_{\gamma\beta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}} \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{\tilde{c}\tilde{d}} \\ &\quad + C_{\alpha\delta} C_{\gamma\beta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} C_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}} \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} \\ &\quad \left. + C_{\alpha\delta} C_{\gamma\beta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Durch Umbezeichnen der Indices und unter Ausnutzung der Transponierbarkeit der C -Matrix ($C_{ij} = -C_{ji}$) reduzieren sich die obigen neun Terme auf nur noch zwei Terme. Diese werden im folgenden berechnet.

$$\begin{aligned} \hat{N}_4^2 &= \frac{K^4}{384} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \dots, \delta \\ a, b, \dots, \tilde{d}}} \left\{ 3 D_{\tilde{\alpha}\alpha}^{\tilde{a}a}(y, x) D_{\tilde{\beta}\beta}^{\tilde{b}b}(y, x) D_{\tilde{\gamma}\gamma}^{\tilde{c}c}(y, x) D_{\tilde{\delta}\delta}^{\tilde{d}d}(y, x) C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}} \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{\tilde{c}\tilde{d}} \right. \\ &\quad \left. - 6 D_{\tilde{\alpha}\alpha}^{\tilde{a}a}(y, x) D_{\tilde{\beta}\beta}^{\tilde{b}b}(y, x) D_{\tilde{\gamma}\gamma}^{\tilde{c}c}(y, x) D_{\tilde{\delta}\delta}^{\tilde{d}d}(y, x) C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} C_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}} \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} \right\} \end{aligned} \quad (5.81)$$

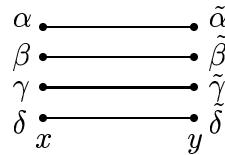


Abbildung 5.1: Spinor-Notation zur graphischen Darstellung der Fermion-Integration für den Graphen N_4^2 .

Übersichtshalber kürze ich in den nachfolgenden Rechnungen die Summe über die Dirac- und Farbindices mit $\sum_{\text{Dirac Colour}}$ ab. Damit ist eine Summenbildung über die in dem jeweili- gen Ausdruck vorhandenen Indices gemeint. Diese können in den einzelnen Termen ver- schieden sein! Die Schreibweise ist daher nicht ganz korrekt, führt aber aufgrund der

detaillierten Rechnung nicht zu Mißverständnissen.

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_4^2 &= \frac{K^4}{384} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \left\{ 3 (CM^{\tilde{a}a}C)_{\tilde{\alpha}\beta} M_{\tilde{\alpha}\beta}^{\tilde{b}b} (CM^{\tilde{c}c}C)_{\tilde{\gamma}\delta} M_{\tilde{\gamma}\delta}^{\tilde{d}d} \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{\tilde{c}\tilde{d}} \right. \\
 &\quad \left. - 6 (CM^{\tilde{a}a}C)_{\tilde{\alpha}\beta} M_{\tilde{\beta}\beta}^{\tilde{b}b} M_{\tilde{\alpha}\gamma}^{\tilde{c}c} (CM^{\tilde{d}d}C)_{\tilde{\delta}\gamma} \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} \right\} \\
 &= \frac{K^4}{384} \sum_{\text{Colour}} \left\{ 3 \text{Tr} (M^{\tilde{a}a} \tilde{M}^{\tilde{a}a}) \text{Tr} (M^{\tilde{c}c} \tilde{M}^{\tilde{c}c}) \right. \\
 &\quad \left. - 6 \text{Tr} (M^{\tilde{b}a} \tilde{M}^{\tilde{a}a} M^{\tilde{a}c} \tilde{M}^{\tilde{b}c}) \right\} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

Das Resultat der recht aufwendigen obigen Rechnung kann man einfacher durch ein graphisches Verfahren erhalten. Dazu betrachtet man den Graphen N_4^2 und versieht die einzelnen Kanten mit Spinor-Indices. Dies ist in Abbildung (5.1) zu sehen.

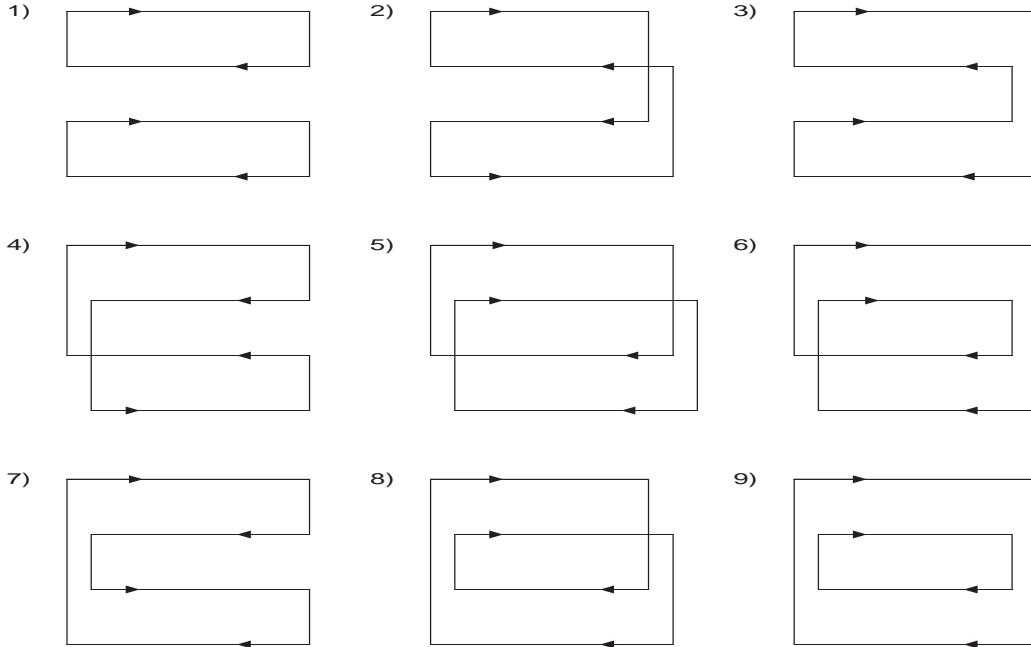
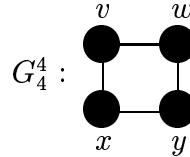


Abbildung 5.2: Graphische Darstellung der Fermion-Integration für den Graphen G_4^2 unter Berücksichtigung der Notation aus Abbildung (5.1).

Nach den Regeln für die Majorana-Fermion-Integration (3.44) ergeben sich für den Graphen N_4^2 neun Terme, die in Gleichung (5.80) berechnet wurden. Graphisch entsprechen die unterschiedlichen Terme verschiedenen Verknüpfungen der Spinor-Indices. Wie man

aus der Abbildung (5.2) sieht, gibt es zwei verschiedene Graphentypen. Die Graphen 1), 5) und 9) entsprechen dem Ausdruck $\text{Tr}(M\tilde{M})\text{Tr}(M\tilde{M})$ und geben somit keinen Beitrag. Die anderen sechs Graphen 2), 3), 4), 6), 7) und 8) sind proportional zu dem Ausdruck $\text{Tr}(M\tilde{M}M\tilde{M})$ und sind damit ebenfalls null. Man kann diesen graphischen Sachverhalt auch so formulieren, daß Graphen generell keinen Beitrag geben, wenn sie solche Spitzen enthalten, wie sie in Abbildung (5.2) zu sehen sind.



$$\begin{aligned}
 \hat{N}_4^4 &= \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) d\psi_\alpha^a(y) d\psi_\alpha^a(v) d\psi_\alpha^a(w) e^{\frac{1}{2} \sum_{b=1}^3 \bar{\psi}^e(x) \psi^e(x)} \\
 &\quad \times e^{-\frac{1}{2} \sum_{e=1}^3 \bar{\psi}^e(y) \psi^e(y)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{f=1}^3 \bar{\psi}^f(v) \psi^f(v)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{g=1}^3 \bar{\psi}^g(w) \psi^g(w)} \\
 &\quad \times \frac{K^4}{16} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\dots,\tilde{\delta} \\ a,b,\dots,\tilde{d}}} \psi_\alpha^a(y) D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y,x) \psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}}(x) \psi_\beta^b(w) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(w,y) \psi_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}}(y) \\
 &\quad \times \psi_\gamma^c(v) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{c}}(v,w) \psi_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}}(w) \psi_\delta^d(x) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(x,v) \psi_{\tilde{\delta}}^{\tilde{d}}(v) \\
 &= \frac{K^4}{16} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\dots,\tilde{\delta} \\ a,b,\dots,\tilde{d}}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y,x) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(w,y) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{c}}(v,w) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(x,v) \\
 &\quad \times \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) \psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}}(x) \psi_\delta^d(x) e^{\frac{1}{2} \sum_{b=1}^3 \bar{\psi}^e(x) \psi^e(x)} \\
 &\quad \times \int \prod_{\rho,r} d\psi_\rho^r(y) \psi_\alpha^a(y) \psi_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}}(y) e^{-\frac{1}{2} \sum_{e=1}^3 \bar{\psi}^e(y) \psi^e(y)} \\
 &\quad \times \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(w) \psi_\beta^b(w) \psi_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}}(w) e^{-\frac{1}{2} \sum_{f=1}^3 \bar{\psi}^f(v) \psi^f(v)} \\
 &\quad \times \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(v) \psi_\gamma^c(v) \psi_{\tilde{\delta}}^{\tilde{d}}(w) e^{-\frac{1}{2} \sum_{g=1}^3 \bar{\psi}^g(w) \psi^g(w)} \tag{5.83}
 \end{aligned}$$

Mit (3.43) ergibt die Integration über die Majorana-Fermionen:

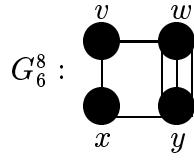
$$\begin{aligned}
 \hat{N}_4^4 &= \frac{K^4}{16} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\dots,\tilde{\delta} \\ a,b,\dots,\tilde{d}}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y,x) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(w,y) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{c}}(v,w) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(x,v) \\
 &\quad \times C_{\alpha\tilde{\beta}} C_{\tilde{\alpha}\delta} C_{\beta\tilde{\gamma}} C_{\gamma\tilde{\delta}} \delta_{ab} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} \delta_{bc} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} \delta_{cd} \delta_{\tilde{c}\tilde{d}}. \tag{5.84}
 \end{aligned}$$

Bei der U -Integration muß jeweils über eine Kante und damit über ein V integriert werden:

$$N_4^4 \sim \int dU_1 V_1^{a\tilde{a}} \int dU_2 V_2^{b\tilde{b}} \int dU_3 V_3^{c\tilde{c}} \int dU_4 V_4^{d\tilde{d}}. \quad (5.85)$$

Da diese Integrale nach Gleichung (4.68) null sind, gibt der Graph G_4^4 keinen Beitrag.

5.2.5 Ordnung K^6



$$\begin{aligned}
 \hat{N}_6^8 &= \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) d\psi_\alpha^a(y) d\psi_\alpha^a(v) d\psi_\alpha^a(w) e^{-\frac{1}{2} \sum_{e=1}^3 \bar{\psi}^e(x) \psi^e(x)} \\
 &\quad \times e^{-\frac{1}{2} \sum_{f=1}^3 \bar{\psi}^f(y) \psi^f(y)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{g=1}^3 \bar{\psi}^g(v) \psi^g(v)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 \bar{\psi}^h(w) \psi^h(w)} \\
 &\quad \times \frac{K^3}{48} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\phi \\ a,b,c,d,e,f}} \psi_\alpha^a(w) D_{\alpha\beta}^{ab}(w,y) \psi_\beta^b(y) \psi_\gamma^c(w) D_{\gamma\delta}^{cd}(w,y) \psi_\delta^d(y) \\
 &\quad \times \psi_\epsilon^e(w) D_{\epsilon\phi}^{ef}(w,y) \psi_\phi^f(y) \\
 &\quad \times \frac{K^3}{8} \sum_{\substack{\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\dots,\tilde{\delta} \\ \tilde{a},\tilde{b},\dots,\tilde{d}}} \psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}}(y) D_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{a}\tilde{b}}(y,x) \psi_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}}(x) \psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}}(v) D_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{a}\tilde{b}}(v,w) \psi_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}}(w) \\
 &\quad \times \psi_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}}(x) D_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}^{\tilde{c}\tilde{d}}(x,v) \psi_{\tilde{\delta}}^{\tilde{d}}(v) \\
 &= -\frac{K^6}{384} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\dots,\tilde{\phi} \\ a,b,\dots,\tilde{f}}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y,x) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(w,y) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{c}}(w,y) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(w,y) D_{\epsilon\tilde{\epsilon}}^{e\tilde{e}}(v,w) D_{\phi\tilde{\phi}}^{f\tilde{f}}(v,x) \\
 &\quad \times \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) \psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}}(x) \psi_{\tilde{\phi}}^{\tilde{f}}(x) e^{-\frac{1}{2} \sum_{e=1}^3 \bar{\psi}^e(x) \psi^e(x)} \\
 &\quad \times \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(v) \psi_\epsilon^e(v) \psi_\phi^f(v) e^{-\frac{1}{2} \sum_{g=1}^3 \bar{\psi}^g(v) \psi^g(v)} \\
 &\quad \times \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(w) \psi_\beta^b(w) \psi_\gamma^c(w) \psi_\delta^d(w) \psi_\epsilon^{\tilde{e}}(w) e^{-\frac{1}{2} \sum_{h=1}^3 \bar{\psi}^h(w) \psi^h(w)} \\
 &\quad \times \int \prod_{\rho,r} d\psi_\rho^r(y) \psi_\alpha^a(y) \psi_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}}(y) \psi_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}}(y) \psi_{\tilde{\delta}}^{\tilde{d}}(y) e^{-\frac{1}{2} \sum_{f=1}^3 \bar{\psi}^f(y) \psi^f(y)} \quad (5.86)
 \end{aligned}$$

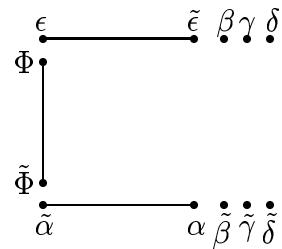


Abbildung 5.3: Spinor-Notation zur graphischen Darstellung der Fermion-Integration für den Graphen G_6^8 .

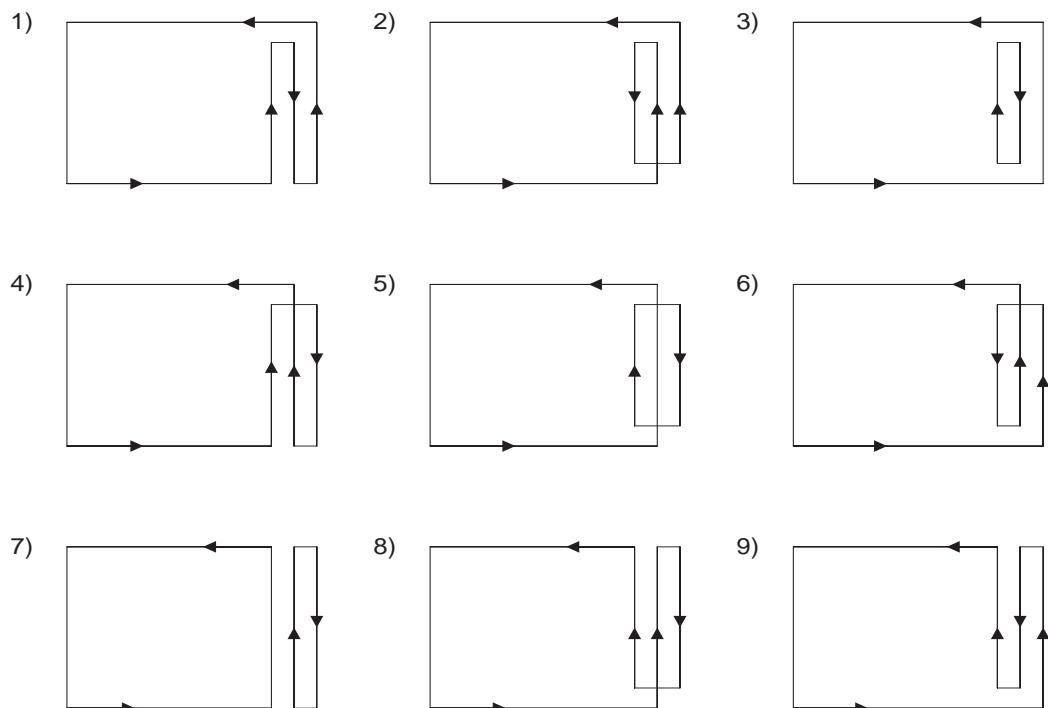


Abbildung 5.4: Graphische Darstellung der Fermion-Integration des Graphens G_6^8 unter Berücksichtigung der Notation in Abbildung (5.3).

Mit Hilfe von (3.43) und (3.44) ergibt sich für die Integration der ψ 's:

$$\begin{aligned} \hat{N}_6^8 &= -\frac{K^6}{384} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \dots, \tilde{\phi} \\ a, b, \dots, \tilde{f}}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y, x) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(w, y) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{c}}(w, y) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(w, y) D_{\epsilon\tilde{\epsilon}}^{e\tilde{e}}(v, w) D_{\phi\tilde{\phi}}^{f\tilde{f}}(v, x) \\ &\quad \times C_{\tilde{\alpha}\tilde{\phi}} \delta_{\tilde{a}\tilde{f}} C_{\epsilon\phi} \delta_{ef} \epsilon_{\beta\gamma\delta\tilde{\epsilon}}^{bcd\tilde{e}} \epsilon_{\alpha\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}^{a\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}}. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Wie auch schon bei dem vorangegangenen Graphen ergibt eine Integration über U keinen Beitrag. Eine Möglichkeit dies zu verhindern besteht in der Auffüllung des Graphens mit Plaquetten aus der Eichwirkung. Eine graphische Integration des Graphens zeigt jedoch, daß die Fermion-Integration null ergibt. Die insgesamt neun verschiedenen Beiträge, wie sie in Abbildung (5.4) zu sehen sind, sind proportional zu

$$\begin{aligned} \hat{N}_6^8 &\equiv c_1 \text{Tr} \left(M_{yx}^{ab} M_{wy}^{ca} \tilde{M}_{wv}^{cd} \tilde{M}_{vx}^{db} \right) \text{Tr} \left(M_{wy}^{ef} \tilde{M}_{wy}^{ef} \right) \\ &\quad + c_2 \text{Tr} \left(M_{yx}^{ab} M_{wy}^{ca} \tilde{M}_{wy}^{cd} M_{wy}^{ed} \tilde{M}_{wv}^{ef} \tilde{M}_{vx}^{fb} \right). \end{aligned} \quad (5.88)$$

Dabei sind die Graphen 3), 5) und 7) aus der Abbildung (5.4) proportional zu dem ersten Term der Gleichung (5.88) und die Graphen 1), 2), 4), 6), 8) und 9) sind proportional zu dem zweiten Term.

Wie auch schon die vorangegangenen Rechnungen gezeigt haben, gibt dieser Graph aufgrund der auftretenden Spitzen keinen Beitrag und verschwindet somit schon allein wegen der Fermion-Integration.

Ein weiterer Graph der von null verschieden sein könnte ist G_6^9 .

$$G_6^9 : \quad \begin{array}{c} \text{Diagramm eines Graphen mit zwei Kreisbündeln, die durch vier parallele Linien verbunden sind.} \\ x \qquad y \end{array}$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_6^9 &= \int \prod_{\alpha, a} d\psi_\alpha^a(x) d\psi_\alpha^a(y) e^{-\frac{1}{2} \sum_{e=1}^3 \bar{\psi}^e(x) \psi^e(x)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{f=1}^3 \bar{\psi}^f(y) \psi^f(y)} \\ &\quad \times \frac{K^6}{6! \cdot 64} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \dots, \tilde{\phi} \\ a, b, \dots, \tilde{d}}} \psi_\alpha^a(y) D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y, x) \psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}}(y) \psi_\beta^b(y) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(y, x) \psi_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}}(y) \\ &\quad \times \psi_\gamma^c(y) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{c}}(y, x) \psi_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}}(y) \psi_\delta^d(y) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(y, x) \psi_{\tilde{\delta}}^{\tilde{d}}(y) \\ &\quad \times \psi_\epsilon^e(y) D_{\epsilon\tilde{\epsilon}}^{e\tilde{e}}(y, x) \psi_{\tilde{\epsilon}}^{\tilde{e}}(y) \psi_\phi^f(y) D_{\phi\tilde{\phi}}^{f\tilde{f}}(y, x) \psi_{\tilde{\phi}}^{\tilde{f}}(y) \end{aligned} \quad (5.89)$$

$$\begin{aligned}
\hat{N}_6^9 &= -\frac{K^6}{6! \cdot 64} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \dots, \tilde{\phi} \\ a, b, \dots, \tilde{f}}} D_{\tilde{\alpha}\alpha}^{\tilde{a}a}(y, x) D_{\tilde{\beta}\beta}^{\tilde{b}b}(y, x) D_{\tilde{\gamma}\gamma}^{\tilde{c}c}(y, x) D_{\tilde{\delta}\delta}^{\tilde{d}d}(y, x) D_{\tilde{\epsilon}\epsilon}^{\tilde{e}e}(y, x) D_{\tilde{\phi}\phi}^{\tilde{f}f}(y, x) \\
&\quad \times \int \prod_{\alpha, a} d\psi_\alpha^a(x) \psi_\alpha^a(x) \psi_\beta^b(x) \psi_\gamma^c(x) \psi_\delta^d(x) \psi_\epsilon^e(x) \psi_\phi^f(x) e^{-\frac{1}{2} \sum_{e=1}^3 \bar{\psi}^e(x) \psi^e(x)} \\
&\quad \times \int \prod_{\alpha, a} d\psi_\alpha^a(y) \psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}}(x) \psi_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}}(x) \psi_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}}(x) \psi_{\tilde{\delta}}^{\tilde{d}}(x) \psi_{\tilde{\epsilon}}^{\tilde{e}}(x) \psi_{\tilde{\phi}}^{\tilde{f}}(x) e^{-\frac{1}{2} \sum_{f=1}^3 \bar{\psi}^f(y) \psi^f(y)}
\end{aligned} \tag{5.90}$$

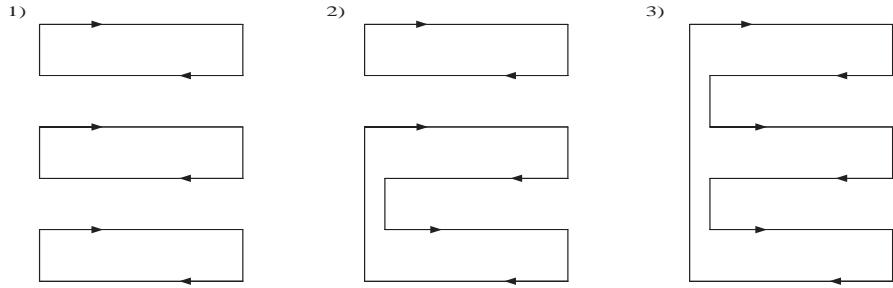


Abbildung 5.5: Graphische Darstellung der Fermion-Integration für den Graphen G_6^9 .

Die Integration über die Majorana-Fermionen ergibt mit (3.47):

$$\begin{aligned}
\hat{N}_6^9 &= -\frac{K^6}{6! \cdot 64} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \dots, \tilde{\phi} \\ a, b, \dots, \tilde{f}}} D_{\tilde{\alpha}\alpha}^{\tilde{a}a}(y, x) D_{\tilde{\beta}\beta}^{\tilde{b}b}(y, x) D_{\tilde{\gamma}\gamma}^{\tilde{c}c}(y, x) D_{\tilde{\delta}\delta}^{\tilde{d}d}(y, x) D_{\tilde{\epsilon}\epsilon}^{\tilde{e}e}(y, x) D_{\tilde{\phi}\phi}^{\tilde{f}f}(y, x) \\
&\quad \times \left\{ -C_{\alpha\beta} \delta_{ab} \epsilon_{\gamma\delta\epsilon\phi}^{cdef} + C_{\alpha\gamma} \delta_{ac} \epsilon_{\beta\delta\epsilon\phi}^{bdef} - C_{\alpha\delta} \delta_{ad} \epsilon_{\beta\gamma\epsilon\phi}^{bcef} \right. \\
&\quad \left. + C_{\alpha\epsilon} \delta_{ae} \epsilon_{\beta\gamma\delta\phi}^{bcd} - C_{\alpha\phi} \delta_{af} \epsilon_{\beta\gamma\delta\epsilon}^{bcde} \right\} \\
&\quad \times \left\{ -C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \epsilon_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}\tilde{\epsilon}\tilde{\phi}}^{\tilde{c}\tilde{d}\tilde{e}\tilde{f}} + C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} \epsilon_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\epsilon}\tilde{\phi}}^{\tilde{b}\tilde{d}\tilde{e}\tilde{f}} - C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} \epsilon_{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\epsilon}\tilde{\phi}}^{\tilde{b}\tilde{c}\tilde{e}\tilde{f}} \right. \\
&\quad \left. + C_{\tilde{\alpha}\tilde{\epsilon}} \delta_{\tilde{a}\tilde{e}} \epsilon_{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}\tilde{\phi}}^{\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}\tilde{f}} - C_{\tilde{\alpha}\tilde{\phi}} \delta_{\tilde{a}\tilde{f}} \epsilon_{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}\tilde{\epsilon}}^{\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}\tilde{e}} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.91}$$

Die obigen 225 Terme lassen sich mit Gleichung (3.46) durch Umsortieren der einzelnen Ausdrücke und durch Umbenennungen zusammenfassen zu:

$$\begin{aligned}
\hat{N}_6^9 &= -\frac{K^6}{6! \cdot 64} \sum_{\substack{\alpha, \beta, \dots, \tilde{\phi} \\ a, b, \dots, \tilde{f}}} D_{\tilde{\alpha}\alpha}^{\tilde{a}a}(y, x) D_{\tilde{\beta}\beta}^{\tilde{b}b}(y, x) D_{\tilde{\gamma}\gamma}^{\tilde{c}c}(y, x) D_{\tilde{\delta}\delta}^{\tilde{d}d}(y, x) D_{\tilde{\epsilon}\epsilon}^{\tilde{e}e}(y, x) D_{\tilde{\phi}\phi}^{\tilde{f}f}(y, x) \\
&\quad \times 3 \cdot 5 C_{\alpha\beta} C_{\gamma\delta} C_{\epsilon\phi} \left\{ -C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \epsilon_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}\tilde{\epsilon}\tilde{\phi}}^{\tilde{c}\tilde{d}\tilde{e}\tilde{f}} + 2C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \epsilon_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\epsilon}\tilde{\phi}}^{\tilde{b}\tilde{d}\tilde{e}\tilde{f}} \right. \\
&\quad \left. + 2C_{\tilde{\alpha}\tilde{\epsilon}} \delta_{\tilde{a}\tilde{e}} \epsilon_{\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}\tilde{\phi}}^{\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}\tilde{f}} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Auswerten der unterschiedlichen Terme führt zu:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_6^9 &= -\frac{15 \cdot K^6}{6! \cdot 64} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \left\{ (CM^{\tilde{a}a}C)_{\tilde{\alpha}\beta} M^{\tilde{b}b}_{\tilde{\alpha}\beta} (CM^{\tilde{c}c}C)_{\tilde{\gamma}\delta} M^{\tilde{d}d}_{\tilde{\gamma}\delta} (CM^{\tilde{e}e}C)_{\tilde{\epsilon}\phi} M^{\tilde{f}f}_{\tilde{\epsilon}\phi} \right. \\
 &\quad \times \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{ef} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{\tilde{c}\tilde{d}} \delta_{\tilde{e}\tilde{f}} \\
 &\quad + 6 (CM^{\tilde{a}a}C)_{\tilde{\alpha}\beta} M^{\tilde{b}b}_{\tilde{\alpha}\beta} (CM^{\tilde{c}c}C)_{\tilde{\gamma}\delta} M^{\tilde{d}d}_{\tilde{\phi}\delta} M^{\tilde{e}e}_{\tilde{\gamma}\epsilon} (CM^{\tilde{f}f}C)_{\tilde{\phi}\epsilon} \\
 &\quad \times \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{ef} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{\tilde{c}\tilde{e}} \delta_{\tilde{d}\tilde{f}} \\
 &\quad - 8 (CM^{\tilde{a}a}C)_{\tilde{\alpha}\beta} M^{\tilde{b}b}_{\tilde{\epsilon}\beta} M^{\tilde{c}c}_{\tilde{\alpha}\gamma} (CM^{\tilde{d}d}C)_{\tilde{\delta}\gamma} (CM^{\tilde{e}e}C)_{\tilde{\epsilon}\phi} M^{\tilde{f}f}_{\tilde{\delta}\phi} \\
 &\quad \left. \times \delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{ef} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} \delta_{\tilde{b}\tilde{e}} \delta_{\tilde{d}\tilde{f}} \right\} \\
 &= -\frac{15 \cdot K^6}{6! \cdot 64} \sum_{\text{Colour}} \left\{ \text{Tr} (M^{\tilde{a}a} \tilde{M}^{\tilde{a}a}) \text{Tr} (M^{\tilde{c}c} \tilde{M}^{\tilde{c}c}) \text{Tr} (M^{\tilde{e}e} \tilde{M}^{\tilde{e}e}) \right. \\
 &\quad - 6 \text{Tr} (M^{\tilde{a}a} \tilde{M}^{\tilde{a}a}) \text{Tr} (M^{\tilde{d}c} \tilde{M}^{\tilde{c}c} M^{\tilde{c}e} \tilde{M}^{\tilde{d}e}) \\
 &\quad \left. + 8 \text{Tr} (M^{\tilde{b}a} \tilde{M}^{\tilde{a}a} M^{\tilde{a}e} \tilde{M}^{\tilde{d}e} M^{\tilde{d}c} \tilde{M}^{\tilde{b}c}) \right\} \\
 &= 0. \tag{5.93}
 \end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis läßt sich einfach aus der graphischen Formulierung der Fermion-Integration in Abbildung (5.5) ableiten. Daran erkennt man, daß es unmöglich ist die einzelnen Kanten so miteinander zu verbinden, daß es kein Produkt $(1 + \gamma_\mu) \cdot (1 - \gamma_\mu)$ gibt. Insgesamt treten nur drei unterschiedliche Graphentypen auf, die den algebraischen Ausdrücken

$$1) = \left\{ \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu)) \right\}^3, \tag{5.94}$$

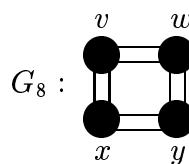
$$2) = \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu)) \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu)(1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu)), \tag{5.95}$$

$$3) = \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu)(1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu)(1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu)), \tag{5.96}$$

entsprechen.

5.2.6 Ordnung K^8

In der achten Ordnung gibt es genau einen Graphen der von null verschiedenen ist und auch ohne Korrekturen von Plaquette-Termen aus der Eichwirkung einen Beitrag gibt.



Der Beitrag des Graphens G_8 berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_8 &= \int \prod_{\alpha, a} d\psi_\alpha^a(x) d\psi_\alpha^a(y) d\psi_\alpha^a(v) d\psi_\alpha^a(w) e^{-\frac{1}{2} \sum_{b=1}^3 \bar{\psi}^e(x) \psi^e(x)} \\
 &\quad \times e^{-\frac{1}{2} \sum_{e=1}^3 \bar{\psi}^e(y) \psi^e(y)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{f=1}^3 \bar{\psi}^f(v) \psi^f(v)} e^{-\frac{1}{2} \sum_{g=1}^3 \bar{\psi}^g(w) \psi^g(w)} \\
 &\quad \times \left(\frac{K^2}{8}\right)^4 \sum_{\substack{\alpha, \beta, \dots, \hat{\delta} \\ a, b, \dots, \hat{d}}} \psi_\alpha^a(y) D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y, x) \psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}}(x) \psi_\beta^b(y) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(y, x) \psi_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}}(x) \\
 &\quad \times \psi_{\hat{\alpha}}^{\hat{a}}(w) D_{\hat{\alpha}\gamma}^{\hat{a}c}(w, y) \psi_\gamma^c(y) \psi_{\hat{\beta}}^{\hat{b}}(w) D_{\hat{\beta}\delta}^{\hat{b}d}(w, y) \psi_\delta^d(y) \\
 &\quad \times \psi_{\hat{\gamma}}^{\hat{c}}(w) D_{\hat{\gamma}\epsilon}^{\hat{c}e}(w, v) \psi_\epsilon^e(v) \psi_{\hat{\delta}}^{\hat{d}}(w) D_{\hat{\delta}\phi}^{\hat{d}f}(w, v) \psi_\phi^f(v) \\
 &\quad \times \psi_\rho^r(v) D_{\rho\tilde{\gamma}}^{r\tilde{c}}(v, x) \psi_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}}(x) \psi_\tau^t(v) D_{\tau\tilde{\delta}}^{t\tilde{d}}(v, x) \psi_{\tilde{\delta}}^{\tilde{d}}(x) \\
 &= \left(\frac{K^8}{8}\right)^4 \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y, x) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(y, x) D_{\hat{\alpha}\gamma}^{\hat{a}c}(w, y) D_{\hat{\beta}\delta}^{\hat{b}d}(w, y) \\
 &\quad \times D_{\hat{\gamma}\epsilon}^{\hat{c}e}(w, v) D_{\hat{\delta}\phi}^{\hat{d}f}(w, v) D_{\rho\tilde{\gamma}}^{r\tilde{c}}(v, x) D_{\tau\tilde{\delta}}^{t\tilde{d}}(v, x) \\
 &\quad \times \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd} \epsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}} \epsilon_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}^{\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}} \epsilon_{\epsilon\phi\rho\tau}^{efrt}. \tag{5.97}
 \end{aligned}$$

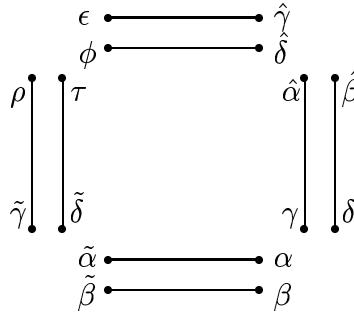


Abbildung 5.6: Spinor-Notation zur graphischen Darstellung der Fermion-Integration für den Graphen G_8 .

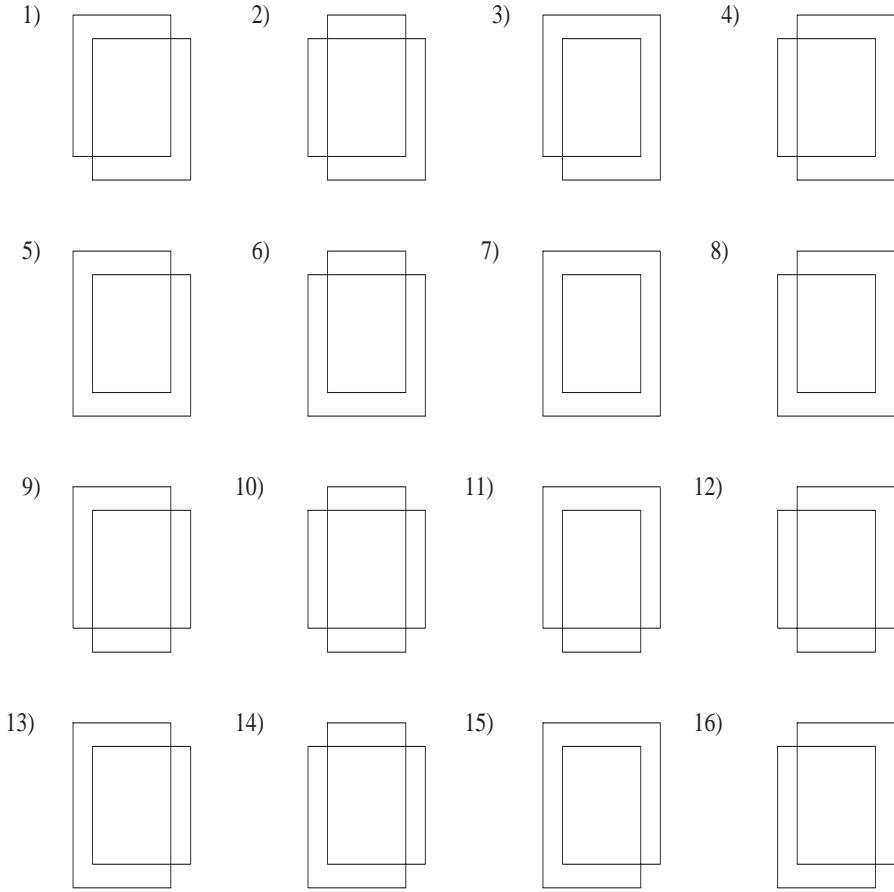
Gleichung (5.97) liefert insgesamt 81 Terme. Analog zu den anderen Graphen kann man sich wieder unter Zuhilfenahme der graphischen Methode überlegen, welche Terme von den 81 überhaupt einen von null verschiedenen Beitrag liefern. Da alle Graphen mit sogenannten Spitzen null ergeben, tragen alle Terme, die proportional sind zu $C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$, $C_{\alpha\beta}$, $C_{\gamma\delta}$, $C_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, $C_{\hat{\gamma}\hat{\delta}}$, $C_{\epsilon\phi}$, $C_{\rho\tau}$ oder $C_{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}$, nicht zum Ergebnis bei. Dies kann man leicht mit der in Abbildung (5.6) angegebenen Notation nachvollziehen. Es gibt dann nur 16 Graphen, die einen Beitrag geben. Ihre graphische Darstellung ist in Abbildung (5.7) zu sehen. Sie

sind von der folgenden algebraischen Form:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_8 &= \left(\frac{K^8}{8}\right)^4 \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y, x) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(y, x) D_{\hat{\alpha}\gamma}^{\hat{a}c}(w, y) D_{\hat{\beta}\delta}^{\hat{b}d}(w, y) \\
 &\quad \times D_{\hat{\gamma}\epsilon}^{\hat{c}e}(w, v) D_{\hat{\delta}\phi}^{\hat{d}f}(w, v) D_{\rho\tilde{\gamma}}^{r\tilde{c}}(v, x) D_{\tau\tilde{\delta}}^{t\tilde{d}}(v, x) \\
 &\quad \times \left\{ C_{\alpha\gamma} \delta_{ac} C_{\beta\delta} \delta_{bd} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} C_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} C_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \delta_{\hat{a}\hat{c}} C_{\hat{\beta}\hat{\delta}} \delta_{\hat{b}\hat{d}} C_{\epsilon\rho} \delta_{er} C_{\phi\tau} \delta_{ft} \right. \\
 &\quad + C_{\alpha\gamma} \delta_{ac} C_{\beta\delta} \delta_{bd} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} C_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} C_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \delta_{\hat{a}\hat{c}} C_{\hat{\beta}\hat{\delta}} \delta_{\hat{b}\hat{d}} C_{\epsilon\tau} \delta_{et} C_{\rho\phi} \delta_{fr} \\
 &\quad + C_{\alpha\gamma} \delta_{ac} C_{\beta\delta} \delta_{bd} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} C_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} C_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} \delta_{\hat{a}\hat{d}} C_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \delta_{\hat{b}\hat{c}} C_{\epsilon\rho} \delta_{er} C_{\phi\tau} \delta_{ft} \\
 &\quad + C_{\alpha\gamma} \delta_{ac} C_{\beta\delta} \delta_{bd} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} C_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} C_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} \delta_{\hat{a}\hat{d}} C_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \delta_{\hat{b}\hat{c}} C_{\epsilon\tau} \delta_{et} C_{\rho\phi} \delta_{fr} \\
 &\quad + C_{\alpha\gamma} \delta_{ac} C_{\beta\delta} \delta_{bd} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} C_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \delta_{\hat{a}\hat{c}} C_{\hat{\beta}\hat{\delta}} \delta_{\hat{b}\hat{d}} C_{\epsilon\rho} \delta_{er} C_{\phi\tau} \delta_{ft} \\
 &\quad + C_{\alpha\gamma} \delta_{ac} C_{\beta\delta} \delta_{bd} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} C_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \delta_{\hat{a}\hat{c}} C_{\hat{\beta}\hat{\delta}} \delta_{\hat{b}\hat{d}} C_{\epsilon\tau} \delta_{et} C_{\rho\phi} \delta_{fr} \\
 &\quad + C_{\alpha\gamma} \delta_{ac} C_{\beta\delta} \delta_{bd} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} C_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} \delta_{\hat{a}\hat{d}} C_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \delta_{\hat{b}\hat{c}} C_{\epsilon\rho} \delta_{er} C_{\phi\tau} \delta_{ft} \\
 &\quad + C_{\alpha\gamma} \delta_{ac} C_{\beta\delta} \delta_{bd} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} C_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} \delta_{\hat{a}\hat{d}} C_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \delta_{\hat{b}\hat{c}} C_{\epsilon\tau} \delta_{et} C_{\rho\phi} \delta_{fr} \\
 &\quad + C_{\alpha\delta} \delta_{ad} C_{\gamma\beta} \delta_{bc} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} C_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} C_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \delta_{\hat{a}\hat{c}} C_{\hat{\beta}\hat{\delta}} \delta_{\hat{b}\hat{d}} C_{\epsilon\rho} \delta_{er} C_{\phi\tau} \delta_{ft} \\
 &\quad + C_{\alpha\delta} \delta_{ad} C_{\gamma\beta} \delta_{bc} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} \delta_{\tilde{a}\tilde{c}} C_{\tilde{\beta}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{d}} C_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} \delta_{\hat{a}\hat{d}} C_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \delta_{\hat{b}\hat{c}} C_{\epsilon\tau} \delta_{et} C_{\rho\phi} \delta_{fr} \\
 &\quad + C_{\alpha\delta} \delta_{ad} C_{\gamma\beta} \delta_{bc} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} C_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} \delta_{\hat{a}\hat{c}} C_{\hat{\beta}\hat{\delta}} \delta_{\hat{b}\hat{d}} C_{\epsilon\rho} \delta_{er} C_{\phi\tau} \delta_{ft} \\
 &\quad + C_{\alpha\delta} \delta_{ad} C_{\gamma\beta} \delta_{bc} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} C_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} \delta_{\hat{a}\hat{d}} C_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \delta_{\hat{b}\hat{c}} C_{\epsilon\tau} \delta_{et} C_{\rho\phi} \delta_{fr} \\
 &\quad + C_{\alpha\delta} \delta_{ad} C_{\gamma\beta} \delta_{bc} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} C_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} \delta_{\hat{a}\hat{d}} C_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \delta_{\hat{b}\hat{c}} C_{\epsilon\tau} \delta_{et} C_{\rho\phi} \delta_{fr} \\
 &\quad + C_{\alpha\delta} \delta_{ad} C_{\gamma\beta} \delta_{bc} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} C_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} \delta_{\hat{a}\hat{d}} C_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \delta_{\hat{b}\hat{c}} C_{\epsilon\rho} \delta_{er} C_{\phi\tau} \delta_{ft} \\
 &\quad + C_{\alpha\delta} \delta_{ad} C_{\gamma\beta} \delta_{bc} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} C_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} \delta_{\hat{a}\hat{d}} C_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \delta_{\hat{b}\hat{c}} C_{\epsilon\tau} \delta_{et} C_{\rho\phi} \delta_{fr} \\
 &\quad \left. + C_{\alpha\delta} \delta_{ad} C_{\gamma\beta} \delta_{bc} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} C_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{b}\tilde{c}} C_{\hat{\alpha}\hat{\delta}} \delta_{\hat{a}\hat{d}} C_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} \delta_{\hat{b}\hat{c}} C_{\epsilon\tau} \delta_{et} C_{\rho\phi} \delta_{fr} \right\} \\
 &= \left(\frac{K^8}{8}\right)^4 \cdot 8 \sum_{\text{Colour}} \left\{ \text{Tr} \left(M_{yx}^{a\tilde{a}} \tilde{M}_{vx}^{t\tilde{a}} \tilde{M}_{wv}^{\hat{a}t} M_{wy}^{\hat{a}a} \right) \text{Tr} \left(M_{yx}^{b\tilde{b}} \tilde{M}_{vx}^{r\tilde{b}} \tilde{M}_{wv}^{\hat{b}r} M_{wy}^{\hat{b}b} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \text{Tr} \left(M_{yx}^{a\tilde{a}} \tilde{M}_{vx}^{r\tilde{a}} \tilde{M}_{wv}^{\hat{b}r} M_{wy}^{\hat{b}b} M_{yx}^{b\tilde{b}} \tilde{M}_{vx}^{t\tilde{b}} \tilde{M}_{wv}^{\hat{a}t} M_{wy}^{\hat{a}a} \right) \right\}. \quad (5.98)
 \end{aligned}$$

Im folgenden soll der Wert des Graphens für zwei bestimmte aber beliebige Gamma-Matrizen γ_μ und γ_ν mit $\mu \neq \nu$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 N_8 &= \left(\frac{K^8}{8}\right)^4 \cdot 8 \sum_{\text{Colour}} \left\{ \left[2^4 \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\nu)(1 - \gamma\mu)(1 + \gamma_\nu)) \right]^2 \right. \\
 &\quad \times V_{yx}^{a\tilde{a}} V_{vx}^{t\tilde{a}} V_{wv}^{\hat{a}t} V_{wy}^{\hat{a}a} V_{yx}^{b\tilde{b}} V_{vx}^{r\tilde{b}} V_{wv}^{\hat{b}r} V_{wy}^{\hat{b}b} \\
 &\quad - 2^8 \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\nu)(1 - \gamma\mu)(1 + \gamma_\nu) \\
 &\quad \times (1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\nu)(1 - \gamma\mu)(1 + \gamma_\nu)) \\
 &\quad \times V_{yx}^{a\tilde{a}} V_{vx}^{r\tilde{a}} V_{wv}^{\hat{b}r} V_{wy}^{\hat{b}b} V_{yx}^{b\tilde{b}} V_{vx}^{t\tilde{b}} V_{wv}^{\hat{a}t} V_{wy}^{\hat{a}a} \right\} \quad (5.99)
 \end{aligned}$$

Abbildung 5.7: Graphische Darstellung der Fermion-Integration für den Graphen G_8 .

$$\begin{aligned}
 N_8 = & \left(\frac{K^8}{8} \right)^4 \cdot 8 \sum_{\text{Colour}} \left\{ 2^4 \cdot (-8) V_{yx}^{a\bar{a}} V_{vx}^{t\bar{a}} V_{wv}^{\hat{a}t} V_{wy}^{\hat{a}a} \cdot 2^4 \cdot (-8) V_{yx}^{b\bar{b}} V_{vx}^{r\bar{b}} V_{wv}^{\hat{b}r} V_{wy}^{\hat{b}b} \right. \\
 & \quad \left. - 2^8 \cdot 32 V_{yx}^{a\bar{a}} V_{vx}^{r\bar{a}} V_{wv}^{\hat{b}r} V_{wy}^{\hat{b}b} V_{yx}^{b\bar{b}} V_{vx}^{t\bar{b}} V_{wv}^{\hat{a}t} V_{wy}^{\hat{a}a} \right\}
 \end{aligned} \tag{5.100}$$

Eine Integration über U ergibt mit den Gruppenintegrationsregeln (4.69)

$$\begin{aligned}
 N_8 = & K^8 \sum_{\text{Colour}} \left\{ 32 \cdot \int dU V^{a\bar{a}} V^{b\bar{b}} \int dU V^{t\bar{a}} V^{r\bar{b}} \int dU V^{\hat{a}t} V^{\hat{b}r} \int dU V^{\hat{a}a} V^{\hat{b}b} \right. \\
 & \quad \left. - 16 \cdot \int dU V^{a\bar{a}} V^{b\bar{b}} \int dU V^{r\bar{a}} V^{t\bar{b}} \int dU V^{\hat{b}r} V^{\hat{a}t} \int dU V^{\hat{b}b} V^{\hat{a}a} \right\}
 \end{aligned} \tag{5.101}$$

$$\begin{aligned}
N_8 &= K^8 \sum_{\text{Colour}} \left\{ \frac{32}{3^4} \cdot \delta_{ab} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{tr} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{\hat{a}\hat{b}} \delta_{tr} \delta_{\hat{a}\hat{b}} \delta_{ab} \right. \\
&\quad \left. - \frac{16}{3^4} \cdot \delta_{ab} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{rt} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} \delta_{\hat{b}\hat{a}} \delta_{rt} \delta_{\hat{b}\hat{a}} \delta_{ab} \right\} \\
&= 16 K^8.
\end{aligned} \tag{5.102}$$

5.3 Graphen mit von null verschiedenen β

In diesem Abschnitt sollen Graphen betrachtet werden, die nur aus einzelnen Kanten bestehen. Da eine Integration über U zwangsläufig null ergeben würde, benötigt man aus der Eichwirkung Plaquette-Terme, um dies zu vermeiden. Das ist gleichbedeutend mit einer Entwicklung der Eichwirkung in Abhängigkeit von der Eichkopplung β . Im folgenden findet daher eine Doppelentwicklung nach dem Hoppingparameter und der Eichkopplung statt. Dabei werden Graphen bis zur Ordnung K^8 berechnet, wobei zu einer festen K -Ordnung Graphen der niedrigsten Ordnung und der ersten Korrektur in β berücksichtigt werden.

5.3.1 Ordnung K^4, β^2

Der einfachste Graph lässt sich aus vier Kanten bilden und wurde schon in dem letzten Abschnitt durch G_4^4 berechnet:

$$\begin{aligned}
\hat{N}_4^4 &= -\frac{K^4}{16} \text{Tr}(M_{yx}^{a\tilde{a}} \tilde{M}_{vx}^{\tilde{c}\tilde{a}} \tilde{M}_{wv}^{b\tilde{c}} M_{wy}^{ba}) \\
&= -\frac{K^4}{16} \cdot 2^4 \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\nu)(1 - \gamma_\mu)(1 + \gamma_\nu)) \\
&\quad \times \text{Tr}(V_{yx} V_{vx}^T V_{wv}^T V_{wy}) \\
&= 8 K^4 \text{Tr}(V_{yx} V_{wy} V_{wv}^T V_{vx}^T).
\end{aligned} \tag{5.103}$$

Damit dieser Graph einen Beitrag gibt, muß er mit zwei Plaquetten aus der Eichwirkung gefüllt werden. Dies ist in Abbildung (5.8) zu sehen. Eine Entwicklung der Eichwirkung nach der Kopplungskonstante führt für die Eichgruppe $SU(2)$ zu:

$$\begin{aligned}
e^{-S[U]} &= e^{-\beta \sum_P \left\{ 1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_P \right\}} \\
&= 1 - \beta \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(U_P) \right) + \frac{1}{2} \beta^2 \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(U_P) \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{6} \beta^3 \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(U_P) \right)^3 + \frac{1}{24} \beta^4 \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr}(U_P) \right)^4 + \dots
\end{aligned} \tag{5.104}$$

In niedrigster Ordnung in β muß der Graph \hat{N}_4^4 nach Gleichung (5.104) mit dem Term

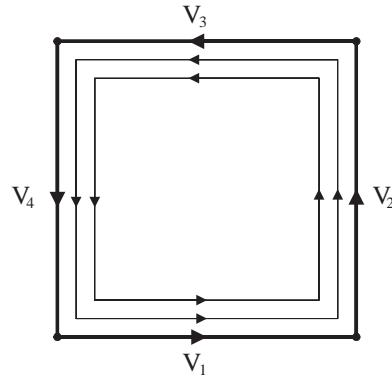


Abbildung 5.8: Graphische Darstellung des Graphens G_4^4 . Die fett gezeichneten Linien kennzeichnen $V_1 - V_4$, die dünneren Linien stellen die entsprechenden Eichplaketten dar.

$\frac{1}{8} \beta^2 (\text{Tr}(U_P))^2$ multipliziert werden, damit er einen Beitrag gibt. Für N_4^4 ergibt sich dann:

$$N_4^4 = 8 K^4 \frac{\beta^2}{8} \int \prod_{i=1}^4 dU_i \text{Tr}(V_1 V_2 V_3^T V_4^T) (\text{Tr}(U_P))^2. \quad (5.105)$$

Für die Lösung dieses Integrals gibt es verschiedene Möglichkeiten. Natürlich ist es möglich, das obige Integral mit den Gleichungen (2.35) und (2.14) in vier Integrale zu zerlegen und jedes dann mit der Integrationsregel (4.61) zu lösen. In Anbetracht der Tatsache, daß die Integrationsregeln mit zunehmender Anzahl der U 's immer komplexer werden, wird hier allerdings nach Kapitel 4 auf die Charakter-Funktion zurückgegriffen.

In dem Integral (5.105) kann man eine Umbenennung durchführen, indem man folgende U - bzw. V -Matrizen definiert:

$$U := U_P, \quad (5.106)$$

$$V := V_1 V_2 V_3^T V_4^T. \quad (5.107)$$

Damit läßt sich das Integral (5.105) schreiben als:

$$N_4^4 = K^4 \beta^2 \int dU \text{Tr}(V) (\text{Tr}(U))^2. \quad (5.108)$$

Mit der Charakter-Funktion folgt

$$\begin{aligned} N_4^4 &= K^4 \beta^2 \int dU \text{Tr}(V) (1 + \chi_1(U)) \\ &= K^4 \beta^2 \int dU \text{Tr}(V) (1 + \text{Tr}(V)) \\ &= K^4 \beta^2 \int dU (\text{Tr}(V))^2 \\ &= K^4 \beta^2. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Auf einem vierdimensionalen Gitter mit Volumen V gibt es $6V$ Möglichkeiten für die Plazierung des Graphens G_4^4 .

5.3.2 Ordnung K^4, β^4

Die erste Ergänzung zu dem Graphen G_4^4 erhält man durch das Hinzufügen einer weiteren Doppelplaque. Die Entwicklung der Eichwirkung ergibt nach Gleichung (5.104) einen Faktor

$$\frac{1}{384} \beta^4 (\text{Tr}(U_P))^4. \quad (5.110)$$

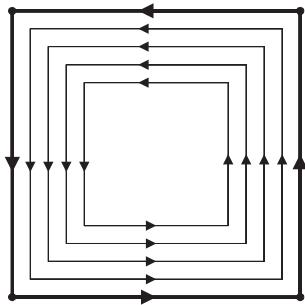


Abbildung 5.9: Graphische Darstellung des Graphens G_5^4 . Die vier fett gezeichneten Linien bezeichnet man mit V und die dünneren Linien stellen die vier Eichplaketten U dar.

Dieser Graph G_4^5 , der in Abbildung (5.9) zu sehen ist, berechnet sich damit wie folgt:

$$\begin{aligned} \hat{N}_4^5 &= 8 K^4 \frac{1}{384} \beta^4 \text{Tr}(V) (\text{Tr}(U))^4 \\ &= \frac{1}{48} K^4 \beta^4 \text{Tr}(V) \left(1 + 2\text{Tr}(V) + (\text{Tr}(V))^2 \right). \end{aligned} \quad (5.111)$$

Für die U -Integration bleiben die folgenden zwei Integrale zu lösen:

$$N_4^5 = \frac{1}{48} K^4 \beta^4 \left\{ 2 \int dU (\text{Tr}(V))^2 + \int dU (\text{Tr}(V))^3 \right\}. \quad (5.112)$$

Das erste Integral ist schon aus der vorherigen Rechnung für den Graphen G_4^4 bekannt. Das zweite Integral ergibt sich mit den Gleichungen (4.69) und (4.55) zu:

$$\begin{aligned} \int dU (\text{Tr}(V))^3 &= \int dU V^{aa} V^{bb} V^{cc} \\ &= \frac{1}{6} \epsilon_{abc} \epsilon_{abc} = 1. \end{aligned} \quad (5.113)$$

Somit gibt es für den Graphen G_4^5 das nachstehende Ergebnis:

$$N_4^5 = \frac{1}{48} K^4 \beta^4 \cdot 3 = \frac{1}{16} K^4 \beta^4. \quad (5.114)$$

Die nächsthöheren Korrekturen in β sind von der Ordnung β^6 und werden nicht mehr berücksichtigt.

5.3.3 Ordnung K^6, β^4

Der erste Graph der Ordnung K^6 ist doppelt so groß wie G_4^4 und ist in Abbildung (5.10) zu sehen. Die Berechnung des Graphens vor der U -Integration ergibt:

$$\begin{aligned} \hat{N}_6^1 &= \left(\frac{K}{2}\right)^6 \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} D_{\alpha\tilde{\gamma}}^{a\tilde{c}}(y, x) D_{\tilde{\alpha}\beta}^{\tilde{a}b}(z, y) D_{\tilde{\epsilon}\tilde{\beta}}^{\tilde{e}\tilde{b}}(w, z) D_{\tilde{\phi}\rho}^{\tilde{f}r}(w, v) D_{\tau\epsilon}^{te}(v, m) D_{\phi\tilde{\delta}}^{f\tilde{d}}(m, x) \\ &\quad \times C_{\alpha\beta} \delta_{ab} C_{\gamma\delta} \delta_{\tilde{c}\tilde{d}} C_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} C_{\tilde{\epsilon}\tilde{\phi}} \delta_{\tilde{e}\tilde{f}} C_{\rho\tau} \delta_{rt} C_{\epsilon\phi} \delta_{ef} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2\right)^2 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 \\ &= \left(\frac{K}{2}\right)^6 \sum_{\text{Colour}} \text{Tr}(M_{yx}^{a\tilde{c}} \tilde{M}_{mx}^{e\tilde{c}} \tilde{M}_{vm}^{re} \tilde{M}_{wv}^{\tilde{e}\tilde{r}} M_{wz}^{\tilde{e}\tilde{a}} M_{zy}^{\tilde{a}a}) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2\right)^2 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 \\ &= \left(\frac{K}{2}\right)^6 \cdot 2^6 \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\nu)(1 - \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu)(1 + \gamma_\nu)(1 + \gamma_\mu)) \\ &\quad \times \sum_{\text{Colour}} V_{yx}^{a\tilde{c}} V_{mx}^{e\tilde{c}} V_{vm}^{re} V_{wv}^{\tilde{e}\tilde{r}} V_{wz}^{\tilde{e}\tilde{a}} V_{zy}^{\tilde{a}a} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2\right)^2 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2. \end{aligned} \quad (5.115)$$

P_1 und P_2 kennzeichnen die zwei verschiedenen Eichplaketten, die in dem Graphen G_6^1 vorkommen.

$$\begin{aligned} \hat{N}_6^1 &= -24 K^6 \text{Tr}(V_{yx} V_{mx}^T V_{vm}^T V_{wv}^T V_{wz} V_{zy}) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2\right)^2 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 \\ &= -24 K^6 \text{Tr}(V_{yx} V_{zy} V_{wz} V_{wv}^T V_{vm}^T V_{mx}^T) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2\right)^2 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 \\ &\equiv -24 K^6 \text{Tr}(V_1 V_2) \left(\frac{1}{8} \beta^2\right)^2 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2. \end{aligned} \quad (5.116)$$

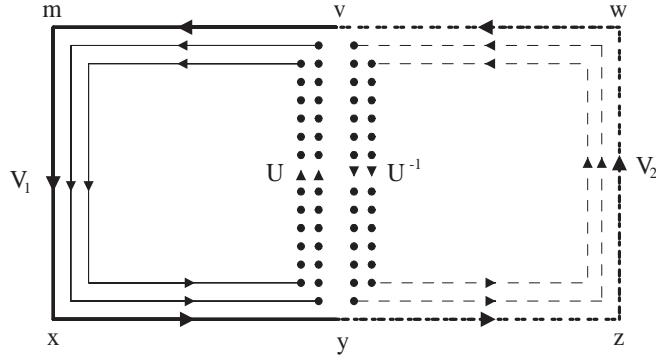


Abbildung 5.10: Graphische Darstellung des Graphens G_6^1 . Die drei durchgezogenen Linien stellen V_1 bzw. U_1 dar, wohingegen V_2 und U_2 durch drei gestrichelte Linien gekennzeichnet sind. Die gepunkteten Linien stehen stellvertretend für U und U^{-1} .

$U_{1,2}$ und $V_{1,2}$ werden in Abbildung (5.10) definiert. Bei der Eichfeldintegration geht man nun so vor, daß zunächst die inneren Links ausintegriert werden:

$$\begin{aligned}
 N_6^1 &= -24 K^6 \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^2 \int dU_1 dU_2 dU (\text{Tr}(UU_1))^2 (\text{Tr}(U^{-1}U_2))^2 \text{Tr}(V_1V_2) \\
 &= -24 K^6 \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^2 \int dU_1 dU_2 dU (1 + \chi_1(UU_1)) (1 + \chi_1(U^{-1}U_2)) \text{Tr}(V_1V_2) \\
 &= -24 K^6 \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^2 \int dU_1 dU_2 dU (1 + \chi_1(UU_1) \chi_1(U^{-1}U_2)) \text{Tr}(V_1V_2) \\
 &= -24 K^6 \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^2 \int dU_1 dU_2 \left(1 + \frac{1}{3} \chi_1(U_1U_2) \right) \text{Tr}(V_1V_2) \\
 &\stackrel{\tilde{U} := U_1U_2}{=} -24 K^6 \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^2 \int d\tilde{U} \left(1 + \frac{1}{3} \chi_1(\tilde{U}) \right) \text{Tr}(\tilde{V}) \\
 &= -24 K^6 \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^2 \int d\tilde{U} \left\{ \text{Tr}(\tilde{V}) + \frac{1}{3} (\text{Tr}(\tilde{V}))^2 \right\} \\
 &= -24 K^6 \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^2 \int d\tilde{U} \frac{1}{3} (\text{Tr}(\tilde{V}))^2 \\
 &= -24 K^6 \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^2 \frac{1}{3} = -\frac{1}{8} K^6 \beta^4. \tag{5.117}
 \end{aligned}$$

Nach [9] gibt es für diesen Graphen G_6^1 auf einem vierdimensionalen Gitter 60 V verschiedene Möglichkeiten der Plazierung.

5.3.4 Regeln zur Berechnung von Graphen mit einzelnen Kanten

Aus den obigen Graphen lassen sich einige allgemeine Regeln zur Berechnung von Graphen ableiten, die aus einer beliebigen Anzahl von einzelnen Kanten bestehen. Die nachfolgenden Regeln geben den analytischen Ausdruck für einen gewählten Graphen vor der U -Integration an.

- Pro Kante gibt es einen Faktor K .
- Generell hat der Graph ein Minuszeichen.
- Für jede positive Richtung gibt es einen Faktor $+(1 + \gamma_\mu)$.
- Für jede negative Richtung gibt es einen Faktor $-(1 - \gamma_\mu)$.
- Über alle Dirac-Terme ist die Spur zu bilden:

$$\text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu) \cdots). \quad (5.118)$$

- Ebenso bildet man die Farbspur über die zugehörigen V -Matrizen. Dabei gibt es für positive Richtungen je ein V und für negative Richtungen je ein V^T :

$$\text{Tr}(VV^T \cdots). \quad (5.119)$$

5.3.5 Ordnung K^6, β^6

Die einfachste Möglichkeit einen Graphen der Ordnung K^6 und β^6 zu konstruieren besteht in dem Hinzufügen einer Doppelplaquette in eine Hälfte des Graphens G_6^1 . Dieser Graph G_6^2 , der in der Abbildung (5.11) dargestellt ist, ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} N_6^2 &= -24 K^6 \frac{1}{8} \beta^2 \frac{1}{384} \beta^4 \int dU dU_1 dU_2 \text{Tr}(V_1 V_2) (\text{Tr}(U U_1))^2 (\text{Tr}(U^{-1} U_2))^4 \\ &= -\frac{1}{128} K^6 \beta^6 \int dU dU_1 dU_2 \text{Tr}(V_1 V_2) \{1 + \chi_1(U U_1)\} \\ &\quad \times \left\{1 + 2 \chi_1(U^{-1} U_2) + (\chi_1(U^{-1} U_2))^2\right\}. \end{aligned} \quad (5.120)$$

Für die Integration über U gibt es vier Integrale, die von null verschieden sind. Für das erste Integral gilt:

$$\begin{aligned} \int dU (\chi_1(U^{-1} U_2))^2 &= \int dU (\text{Tr}(V^T V_2))^2 \\ &= \int dU V^{ba} V_2^{ba} V^{dc} V_2^{dc} \\ &= V_2^{ba} V_2^{dc} \frac{1}{3} \delta_{bd} \delta_{ac} \\ &= \frac{1}{3} \text{Tr}(V_2 V_2^T). \end{aligned} \quad (5.121)$$

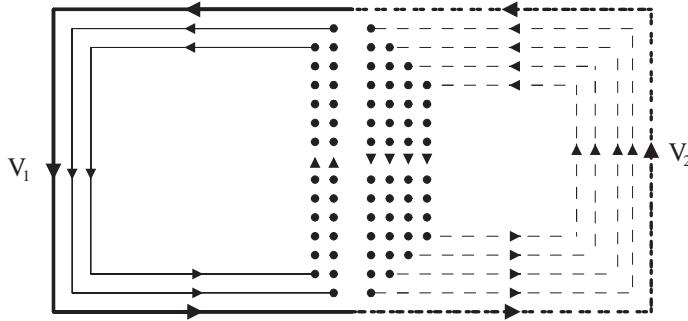


Abbildung 5.11: Graphische Darstellung des Graphens G_6^2 . Die Bezeichnung der einzelnen Kanten ist analog zu dem Graphen G_6^2 . Die durchgezogenen Linien stellen V_1 und U_1 dar, die gestrichelten Linien kennzeichnen V_2 und U_2 und die gepunkteten Linien geben U und U^{-1} an.

Das zweite Integral über U ergibt

$$2 \int dU \chi_1(U U_1) \chi_1(U^{-1} U_2) = \frac{2}{3} \chi_1(U_1 U_2). \quad (5.122)$$

Das dritte U -Integral lautet:

$$\begin{aligned} \int dU \chi_1(U U_1) (\chi_1(U^{-1} U_2))^2 &= \int dU \text{Tr}(V V_1) \text{Tr}(V^T V_2) \text{Tr}(V^T V_2) \\ &= \int dU V^{ab} V_1^{ba} V^{dc} V_2^{dc} V^{fe} V_2^{fe} \\ &= V_1^{ba} V_2^{dc} V_2^{fe} \frac{1}{6} \epsilon_{adf} \epsilon_{bce}. \end{aligned} \quad (5.123)$$

Die vierte Integration

$$\int dU 1 = 1, \quad (5.124)$$

trägt mit einem Faktor eins bei. Damit gilt für den Graphen G_6^2

$$\begin{aligned} N_6^2 &= -\frac{1}{128} K^6 \beta^6 \int dU_1 dU_2 \text{Tr}(V_1 V_2) \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{1}{3} \text{Tr}(V_2 V_2^T) + \frac{2}{3} \text{Tr}(V_1 V_2) + \frac{1}{6} \epsilon_{adf} \epsilon_{bce} V_1^{ba} V_2^{dc} V_2^{fe} \right\}. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Zunächst soll die Integration über U_1 ausgeführt werden. Es gibt zwei von null verschiedene Integrale. Das erste Integral berechnet sich zu

$$\begin{aligned} I_{U_1}^1 &= \frac{2}{3} \int dU_1 (\text{Tr}(V_1 V_2))^2 = \frac{2}{3} \int dU_1 V_1^{gh} V_2^{hg} V_1^{ab} V_2^{ba} \\ &= \frac{2}{3} V_2^{hg} V_2^{ba} \frac{1}{3} \delta_{ga} \delta_{hb} = \frac{2}{9} \text{Tr}(V_2 V_2^T). \end{aligned} \quad (5.126)$$

Für das zweite Integral gilt:

$$\begin{aligned} I_{U_1}^1 &= \frac{1}{6} \epsilon_{adf} \epsilon_{bce} \int dU_1 \text{Tr}(V_1 V_2) V_1^{ba} V_2^{dc} V_2^{fe} = \frac{1}{6} \epsilon_{adf} \epsilon_{bce} \int dU_1 V_1^{gh} V_2^{hg} V_1^{ba} V_2^{dc} V_2^{fe} \\ &= \frac{1}{6} \epsilon_{adf} \epsilon_{bce} V_2^{hg} V_2^{dc} V_2^{fe} \frac{1}{3} \delta_{gb} \delta_{ah} = \frac{1}{18} \epsilon_{adf} \epsilon_{bce} V_2^{ab} V_2^{dc} V_2^{fe}. \end{aligned} \quad (5.127)$$

Der Graph G_6^2 besteht jetzt nur noch aus einem Integral über U_2 :

$$N_6^2 = -\frac{1}{128} K^6 \beta^6 \int dU_2 \left\{ \frac{2}{9} \text{Tr}(V_2 V_2^T) + \frac{1}{18} \epsilon_{adf} \epsilon_{bce} V_2^{ab} V_2^{dc} V_2^{fe} \right\}. \quad (5.128)$$

Für diese beiden Integrale gilt:

$$\begin{aligned} I_{U_2}^1 &= \frac{2}{9} \int dU_2 \text{Tr}(V_2 V_2^T) = \frac{2}{9} \int dU_2 V_2^{ab} V_2^{ab} \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} \delta_{aa} \delta_{bb} = \frac{2}{3}, \\ I_{U_2}^2 &= \frac{1}{18} \epsilon_{adf} \epsilon_{bce} \int dU_2 V_2^{ab} V_2^{dc} V_2^{fe} = \frac{1}{18} \epsilon_{adf} \epsilon_{bce} \frac{1}{6} \epsilon_{adf} \epsilon_{bce} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Der Graph G_6^2 lautet somit

$$N_6^2 = -\frac{1}{128} K^6 \beta^6 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{128} K^6 \beta^6. \quad (5.130)$$

Einen weiteren Graphen der Ordnung K^6 und β^6 , der von null verschieden ist, zeigt die Abbildung (5.12). Mit den oben genannten Regeln berechnet sich dieser Graph zu:

$$\begin{aligned} \hat{N}_6^3 &= -K^6 (-1)^3 \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 + \gamma_\nu)(1 - \gamma_\rho)(1 - \gamma_\mu)(1 - \gamma_\nu)(1 + \gamma_\rho)) \\ &\quad \times \text{Tr}(V_3^T V_4^T V_5^T V_6 V_1 V_2) \\ &\quad \times \left(\frac{\beta^2}{8}\right)^3 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 (\text{Tr}(U_{P_3}))^2 \\ &= -16 K^6 \text{Tr}(V_3^T V_4^T V_5^T V_6 V_1 V_2) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2\right)^3 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 (\text{Tr}(U_{P_3}))^2. \end{aligned} \quad (5.131)$$

Die Integration über die Eichplaketten teilen sich auf in drei innere Integrationen und eine äußere Integration über den Rand des Graphens G_6^3 . Im folgenden sollen zunächst

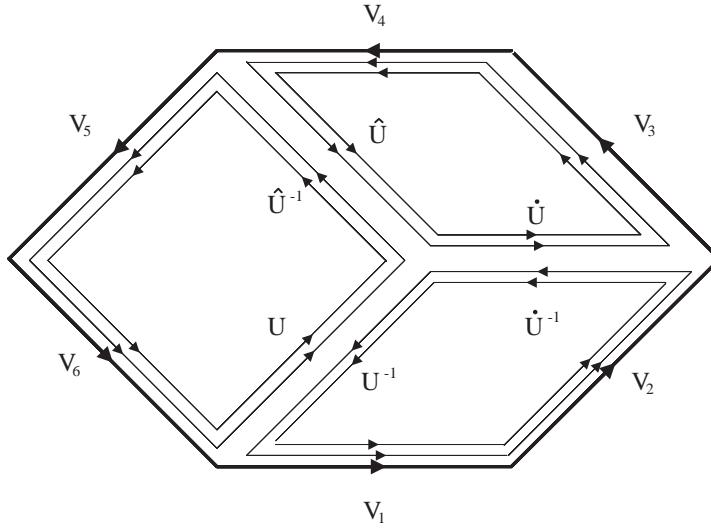


Abbildung 5.12: Graphische Darstellung des Graphens G_6^3 . Die dicken Linien kennzeichnen $V_1 - V_6$ und die dünneren Linien bezeichnen die zugehörigen Eichplaketten.

die inneren Integrationen ausgeführt werden. Die erste Integration über U ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 & \int dU \left(\text{Tr}(U \hat{U}^{-1} U_5^{-1} U_6) \right)^2 \left(\text{Tr}(U^{-1} U_1 U_2 \dot{U}^{-1} U^{-1}) \right)^2 \\
 &= \int dU \left(1 + \chi_1(U \hat{U}^{-1} U_5^{-1} U_6) \right) \left(1 + \chi_1(U^{-1} U_1 U_2 \dot{U}^{-1}) \right) \\
 &= \int dU \left(1 + \chi_1(U \hat{U}^{-1} U_5^{-1} U_6) \chi_1(U^{-1} U_1 U_2 \dot{U}^{-1}) \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{3} \chi_1(\hat{U}^{-1} U_5^{-1} U_6 U_1 U_2 \dot{U}^{-1}) \\
 &= 1 + \frac{1}{3} \chi_1(\dot{U}^{-1} \hat{U}^{-1} U_5^{-1} U_6 U_1 U_2).
 \end{aligned} \tag{5.132}$$

Die zweite und dritte Integration über \dot{U} und \hat{U} können zu einer Integration über \tilde{U} zusammengefaßt werden, wenn folgende Variablenumbenennung durchgeführt wird:

$$\tilde{U} := \hat{U} \dot{U} \quad \text{und} \quad \tilde{U}^{-1} := \dot{U}^{-1} \hat{U}^{-1}. \tag{5.133}$$

Es ergibt sich dann das folgende Integral:

$$\begin{aligned}
 & \int d\tilde{U} \left(\text{Tr}(\tilde{U} U_3^{-1} U_4^{-1}) \right)^2 \left(1 + \frac{1}{3} \chi_1(\tilde{U}^{-1} U_5^{-1} U_6 U_1 U_2) \right) \\
 &= \int d\tilde{U} \left(1 + \chi_1(\tilde{U} U_3^{-1} U_4^{-1}) \right) \left(1 + \frac{1}{3} \chi_1(\tilde{U}^{-1} U_5^{-1} U_6 U_1 U_2) \right) \\
 &= \int d\tilde{U} \left(1 + \frac{1}{3} \chi_1(\tilde{U} U_3^{-1} U_4^{-1}) \chi_1(\tilde{U}^{-1} U_5^{-1} U_6 U_1 U_2) \right) = 1 + \frac{1}{9} \chi_1(U_3^{-1} U_4^{-1} U_5^{-1} U_6 U_1 U_2).
 \end{aligned} \tag{5.134}$$

Zum Schluß wird das Integral über den Rand des Graphens G_6^3 berechnet. Dazu führt man die folgende Notation ein:

$$\bar{U} := U_3^{-1} U_4^{-1} U_5^{-1} U_6 U_1 U_2, \quad (5.135)$$

$$\bar{V} := V_3^T V_4^T V_5^T V_6 V_1 V_2. \quad (5.136)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int d\bar{U} \left(1 + \frac{1}{9} \chi_1(\bar{U}) \right) \text{Tr}(\bar{V}) &= \int d\bar{U} \left(1 + \frac{1}{9} \text{Tr}(\bar{U}) \right) \text{Tr}(\bar{V}) \\ &= \int d\bar{U} \frac{1}{9} (\text{Tr}(\bar{U}))^2 = \frac{1}{9}. \end{aligned} \quad (5.137)$$

Somit berechnet sich der Graph G_6^3 zu

$$N_6^3 = -16 K^6 \left(\frac{\beta^2}{8} \right)^3 \frac{1}{9} = -\frac{1}{288} K^6 \beta^6. \quad (5.138)$$

Für diesen Graphen gibt es auf einem vierdimensionalen Gitter laut [9] 32 V Möglichkeiten der Plazierung. Der nächsthöhere Graph ist von der Ordnung β^8 . Da er zwei Größenordnungen über dem kleinsten Graphen G_6^1 liegt, der von der Ordnung β^4 ist, wird er nicht mehr berücksichtigt.

5.3.6 Ordnung K^8, β^2

Fügt man zu dem Graphen G_8 eine Doppelplaquette hinzu entsteht ein Graph G_8^1 , der von der Ordnung K^8 und β^2 ist.

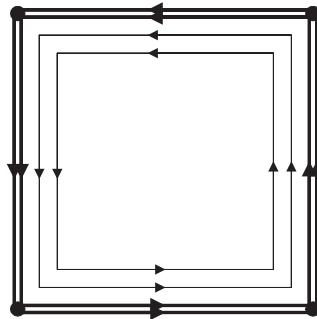


Abbildung 5.13: Graphische Darstellung des Graphens G_8^1 . Die dicken Linien kennzeichnen die V -Matrizen und die dünnen Linien bezeichnen die Eichplaquetten.

Der Beitrag dieses Graphens, der durch die Abbildung (5.13) skizziert wird, lautet wie folgt:

$$N_8^1 = K^8 \int dU \left\{ 32 \text{Tr}(V) \text{Tr}(V) - 16 \text{Tr}(VV) \right\} \frac{\beta^2}{8} (\text{Tr}(U))^2. \quad (5.139)$$

Die beiden auftretenden Integrale ergeben:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int dU (\text{Tr}(V))^2 (\text{Tr}(U))^2 \\ &= \int dU (\text{Tr}(V))^2 + \int dU (\text{Tr}(V))^3 = 2, \end{aligned} \quad (5.140)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int dU \text{Tr}(V V) (\text{Tr}(U))^2 \\ &= \int dU \text{Tr}(V V) + \int dU \text{Tr}(V V) \text{Tr}(V) \\ &= 1 + \int dU V^{ab} V^{ba} V^{cc} \\ &= 1 + \frac{1}{6} \epsilon_{abc} \epsilon_{bac} \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (5.141)$$

Damit ergibt sich für den Graphen G_8^1

$$N_8^1 = 32 K^8 \frac{\beta^2}{8} \cdot 2 = 8 K^8 \beta^2. \quad (5.142)$$

5.3.7 Ordnung K^8, β^4

Die nächsthöhere Ordnung in β ergibt sich, wenn man eine weitere Doppelplaquette in den Graphen G_8^1 legt. Dieser Graph wird durch die Abbildung (5.14) skizziert.

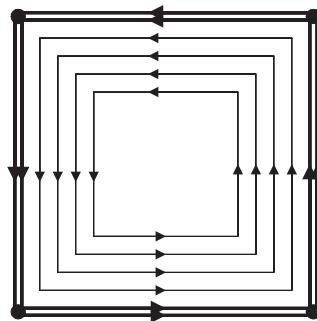


Abbildung 5.14: Graphische Darstellung des Graphens G_8^2 . Die einzelnen V -Matrizen sind wieder durch fett gezeichnete Linien gekennzeichnet und die dünnen Linien stellen die vier Eichplaquetten dar.

Der Wert des Graphens G_8^4 berechnet sich mit den schon bekannten Integrationsregeln

zu:

$$\begin{aligned}
N_8^2 &= K^8 \frac{1}{384} \beta^4 \int dU \left(32 \operatorname{Tr}(V) \operatorname{Tr}(V) - 16 \operatorname{Tr}(VV) \right) (\operatorname{Tr}(U))^4 \\
&= K^8 \frac{1}{384} \beta^4 \int dU \left(32 (\operatorname{Tr}(V))^2 - 16 \operatorname{Tr}(VV) \right) \left(1 + 2 \operatorname{Tr}(V) + (\operatorname{Tr}(V))^2 \right) \\
&= K^8 \frac{1}{384} \beta^4 \left\{ 32 \int dU (\operatorname{Tr}(V))^2 + 64 \int dU (\operatorname{Tr}(V))^3 + 32 \int dU (\operatorname{Tr}(V))^4 \right. \\
&\quad \left. - 16 \int dU \operatorname{Tr}(VV) - 32 \int dU \operatorname{Tr}(VV) \operatorname{Tr}(V) - 16 \int dU \operatorname{Tr}(VV) (\operatorname{Tr}(V))^2 \right\} \\
&= K^8 \frac{1}{384} \beta^4 \left(32 + 64 + 32 \cdot 2 - 16 + 32 - 16 \cdot \frac{5}{4} \right) \\
&= \frac{13}{32} K^8 \beta^4. \tag{5.143}
\end{aligned}$$

Die letzte Integration wurde mit der Gleichung (4.71) auf folgendem Weg gelöst:

$$\begin{aligned}
\int dU \operatorname{Tr}(VV) (\operatorname{Tr}(V))^2 &= \int dU V^{ab} V^{ba} V^{cc} V^{dd} \\
&= \frac{1}{8} (\delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{bd} \delta_{ac}) \\
&\quad - \frac{1}{24} (\delta_{ab} \delta_{cd} \delta_{ad} \delta_{bc} + \delta_{ad} \delta_{bc} \delta_{ab} \delta_{cd}) \\
&= \frac{1}{8} (9 + 9) - \frac{1}{24} (3 + 3) = \frac{5}{4}. \tag{5.144}
\end{aligned}$$

Ein anderer Graph besteht aus zwei Teilgraphen G_4^4 , die beliebig auf dem Gitter verteilt sein können:

$$N_8^3 = (K^4 \beta^2)^2 = K^8 \beta^4. \tag{5.145}$$

Bei der Abzählung der Möglichkeiten für den Graphen G_8^3 auf einem vierdimensionalen Gitter gibt es zunächst $6V$ Möglichkeiten für einen Teilgraphen G_4^4 . Für den zweiten Teilgraphen gibt es $(6V - 1 - 52 - 20)$ Möglichkeiten, da dieser nicht auf dem ersten Teilgraphen liegen darf, den ersten Teilgraphen an keiner Ecke berühren soll und keine Kanten der beiden Graphen übereinanderliegen dürfen. Damit gibt es für den Graphen G_8^3 auf einem vierdimensionalen Gitter $6V(6V - 1 - 52 - 20)/2 = 3V(6V - 73)$ Möglichkeiten.

Berühren sich die beiden Teilgraphen G_4^4 an einer Ecke ergibt sich der in Abbildung (5.15) dargestellte Graph G_8^4 . Die Fermion-Integration an den Ecken des Graphens ergibt jeweils einen Faktor $C_{\alpha\beta} \delta_{ab}$. An der Stelle wo sich vier Kanten treffen ergibt die Integration den

ϵ -Tensor $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}^{abcd}$. Für diesen Graphen G_8^4 gilt dann:

$$\begin{aligned}\hat{N}_8^4 &= \left(\frac{K^2}{2}\right)^8 \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y, x) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(q, y) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{c}}(q, p) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(p, x) \\ &\quad \times D_{\epsilon\tilde{\epsilon}}^{e\tilde{e}}(z, y) D_{\rho\tilde{\rho}}^{r\tilde{r}}(z, w) D_{\phi\tilde{\phi}}^{f\tilde{f}}(w, v) D_{\tau\tilde{\tau}}^{t\tilde{t}}(y, v) \\ &\quad \times C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{\alpha}\tilde{d}} C_{\beta\gamma} \delta_{bc} C_{\tilde{\gamma}\delta} \delta_{\tilde{c}\tilde{d}} C_{\epsilon\rho} \delta_{er} C_{\tilde{\rho}\phi} \delta_{\tilde{r}\tilde{f}} C_{\tilde{\phi}\tilde{\tau}} \delta_{\tilde{f}\tilde{t}} \epsilon_{\alpha\tilde{\beta}\tilde{\epsilon}\tau}^{ab\tilde{e}\tilde{t}} \\ &\quad \times \left(\frac{\beta^2}{8}\right)^2 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2.\end{aligned}\quad (5.146)$$

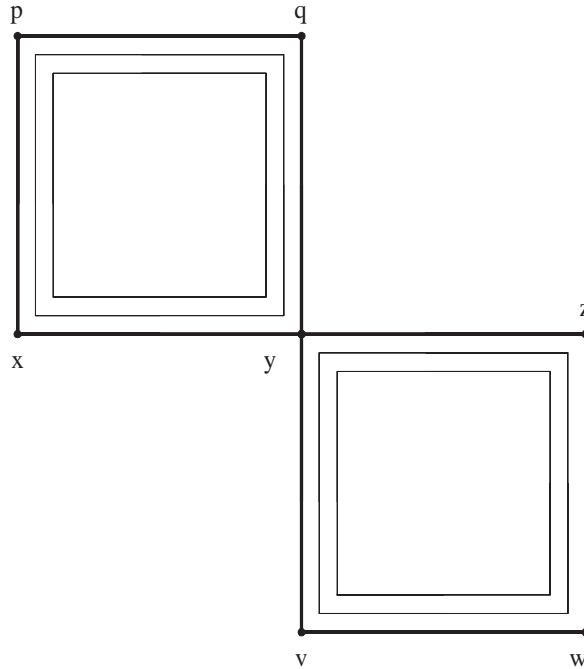


Abbildung 5.15: Graphische Darstellung des Graphens G_8^4 . Die vier oberen fett gezeichneten Linien werden mit V_1 abgekürzt und die vier unteren dickeren Linien bezeichnen V_2 . Die dünnen Linien stellen die entsprechenden Eichplaketten dar.

$$\begin{aligned}N_8^4 &= \left(\frac{K^2}{2}\right)^8 \left\{ - (2^4)^2 \cdot (-8)^2 \text{Tr}(V_1) \text{Tr}(V_2) + 2 \cdot 2^8 \cdot 64 \text{Tr}(V_1 V_2) \right\} \\ &\quad \times \left(\frac{\beta^2}{8}\right)^2 (\text{Tr}(U_1))^2 (\text{Tr}(U_2))^2.\end{aligned}\quad (5.147)$$

Die Indices 1 und 2 kennzeichnen die beiden unterschiedlichen Plaketten des Graphens G_8^4 . Für die Integration über U_1 und U_2 gibt es zwei verschiedene Integrale. Das erste ist

schon bekannt und es gilt:

$$I_1 = \int dU_1 dU_2 \text{Tr}(V_1) (\text{Tr}(U_1))^2 \text{Tr}(V_2) (\text{Tr}(U_2))^2 = 1. \quad (5.148)$$

Das zweite Integral lautet:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int dU_1 dU_2 \text{Tr}(V_1 V_2) (\text{Tr}(U_1))^2 (\text{Tr}(U_2))^2 \\ &= \int dU_2 dU_1 \text{Tr}(V_1 V_2) (1 + \text{Tr}(V_1)) (\text{Tr}(U_2))^2 \\ &= \int dU_2 dU_1 \text{Tr}(V_1 V_2) \text{Tr}(V_1) (\text{Tr}(U_2))^2 \\ &= \int dU_2 dU_1 V_1^{ab} V_2^{ba} V_1^{cc} (\text{Tr}(U_2))^2 \\ &= \int dU_2 \frac{1}{3} \delta_{ac} \delta_{bc} V_2^{ba} (\text{Tr}(U_2))^2 \\ &= \int dU_2 \frac{1}{3} \text{Tr}(V_2) (\text{Tr}(U_2))^2 = \frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (5.149)$$

Zusammenfassend ergibt sich somit für den Graphen G_8^4 :

$$N_8^4 = K^8 \left(\frac{\beta^2}{8} \right)^2 \left(-64 + \frac{128}{3} \right) = -\frac{1}{3} K^8 \beta^4. \quad (5.150)$$

Für G_8^4 gibt es auf einem vierdimensionalen Gitter $6V \cdot 52/2$ Möglichkeiten der Plazierung.

Berühren sich zwei Kanten der Graphen G_4^4 entsteht ein weiterer Graph, der in Abbildung (5.16) zu sehen ist. Für diesen gibt die Fermionintegration an den vier Ecken jeweils einen Faktor $C_{\alpha\beta} \delta_{ab}$. Die Integration über die beiden mittleren Gitterpunkte führt zu zwei vierdimensionalen ϵ -Tensoren, da über vier Majorana-Fermionen integriert werden muß.

$$\begin{aligned} \hat{N}_8^5 &= \left(\frac{K^2}{2} \right)^8 \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y, x) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(v, y) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{c}}(v, m) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(m, x) \\ &\quad \times D_{\epsilon\tilde{\epsilon}}^{e\tilde{e}}(z, y) D_{\rho\tilde{\rho}}^{r\tilde{r}}(w, z) D_{\phi\tilde{\phi}}^{f\tilde{f}}(w, v) D_{\tau\tilde{\tau}}^{t\tilde{t}}(v, y) \\ &\quad \times C_{\tilde{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\tilde{a}\tilde{d}} C_{\tilde{\gamma}\delta} \delta_{\tilde{c}d} C_{\epsilon\tilde{\rho}} \delta_{e\tilde{r}} C_{\rho\phi} \delta_{rf} \epsilon_{\alpha\beta\tilde{\epsilon}\tau}^{a\tilde{b}\tilde{e}t} \epsilon_{\beta\gamma\tilde{\phi}\tau}^{b\tilde{c}\tilde{f}t} \\ &\quad \times \left(\frac{\beta^2}{8} \right)^2 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 \end{aligned} \quad (5.151)$$

Da Graphen mit sogenannten Spitzen keinen Beitrag geben, tragen Terme die proportional

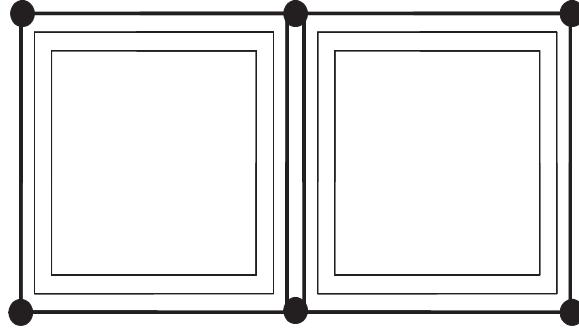


Abbildung 5.16: Graphische Darstellung des Graphens G_8^5 . Die vier linken Kanten werden mit V_1 bezeichnet und die vier rechten Kanten mit V_2 . Analog verhält es sich mit den Eichplaketten.

zu $C_{\beta\gamma} C_{\tilde{\phi}\tau}$ oder $C_{\alpha\tilde{\beta}} C_{\tilde{\epsilon}\tilde{\tau}}$ nicht bei. Die restlichen vier Terme ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_8^5 &= \left(\frac{K^2}{2}\right)^8 2 \sum_{\text{Colour}} \left\{ \text{Tr} \left(M_{yx}^{a\bar{a}} M_{vy}^{a\bar{b}} \tilde{M}_{vm}^{b\bar{c}} \tilde{M}_{mx}^{c\bar{a}} \right) \text{Tr} \left(M_{yx}^{d\bar{d}} M_{vy}^{d\bar{e}} \tilde{M}_{vm}^{e\bar{f}} \tilde{M}_{mx}^{f\bar{d}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \text{Tr} \left(\tilde{M}_{yx}^{b\bar{c}} M_{px}^{e\bar{c}} M_{qp}^{f\bar{e}} \tilde{M}_{qy}^{f\bar{g}} \tilde{M}_{yv}^{g\bar{r}} M_{wv}^{s\bar{r}} M_{zw}^{t\bar{s}} \tilde{M}_{zy}^{t\bar{b}} \right) \right\} \\
 &\quad \times \left(\frac{\beta^2}{8}\right)^2 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 \\
 &= \left(\frac{K^2}{2}\right)^8 2 \left\{ 256 (-8)^2 \text{Tr}(V_1) \text{Tr}(V_2) + 256 \cdot 32 \text{Tr}(V_1 V_2) \right\} \\
 &\quad \times \left(\frac{\beta^2}{8}\right)^2 (\text{Tr}(U_1))^2 (\text{Tr}(U_2))^2. \tag{5.152}
 \end{aligned}$$

Eine Integration über U_1 und U_2 gibt mit den schon bekannten Regeln:

$$\begin{aligned}
 N_8^5 &= \left(\frac{K^2}{2}\right)^8 2 \left\{ 256 (-8)^2 + 256 \cdot 32 \cdot \frac{1}{3} \right\} \left(\frac{\beta^2}{8}\right)^2 \\
 &= \frac{7}{3} K^8 \beta^4. \tag{5.153}
 \end{aligned}$$

Auf einem vierdimensionalen Gitter mit dem Volumen V gibt es $6V \cdot 20/2$ Möglichkeiten der Plazierung.

5.3.8 Berechnung der freien Energie

Analog zu dem Modell ohne Farbe kann auch hier die freie Energie berechnet werden. Die Zustandsfunktion bis zur Ordnung K^8 ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 \frac{Z_f}{Z_0} &= 1 + \left(6V K^4 \beta^2 + 6V \frac{1}{16} K^4 \beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6) \right) \\
 &\quad - \left(60V \frac{1}{8} K^6 \beta^4 + 60V \frac{1}{128} K^6 \beta^6 + 32V \frac{1}{288} K^6 \beta^8 + \mathcal{O}(\beta^8) \right) \\
 &\quad + \left(6V 16 K^8 + 6V 8 K^8 \beta^2 + 6V \frac{13}{32} K^8 \beta^4 + 3V(6V - 73) K^8 \beta^6 \right. \\
 &\quad \left. - 156V \frac{1}{3} K^8 \beta^8 + 60V \frac{7}{3} K^8 \beta^{10} + \mathcal{O}(\beta^{10}) \right) + \mathcal{O}(K^{10}) \\
 &= 1 + K^4 V \left(6 \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6) \right) \\
 &\quad - K^6 V \left(\frac{15}{2} \beta^4 + \frac{167}{288} \beta^6 + \mathcal{O}(\beta^8) \right) \\
 &\quad + K^8 V \left(96 + 48 \beta^2 + 18V \beta^4 - \frac{2057}{16} \beta^6 + \mathcal{O}(\beta^8) \right) + \mathcal{O}(K^{10}). \quad (5.154)
 \end{aligned}$$

Bildet man den Logarithmus des obigen Ausdrucks und entwickelt diesen in einer Taylorreihe, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln \frac{Z_f}{Z_0}}{V} &= K^4 \left(6 \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6) \right) - K^6 \left(\frac{15}{2} \beta^4 + \frac{167}{288} \beta^6 + \mathcal{O}(\beta^8) \right) \\
 &\quad + K^8 \left(96 + 48 \beta^2 + 18V \beta^4 - \frac{2057}{16} \beta^6 + \mathcal{O}(\beta^8) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2V} \left((6V K^4 \beta^2)^2 + \mathcal{O}(\beta^8) \right) + \mathcal{O}(K^{10}) \\
 &= K^4 \left(6 \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6) \right) - K^6 \left(\frac{15}{2} \beta^4 + \frac{167}{288} \beta^6 + \mathcal{O}(\beta^8) \right) \\
 &\quad + K^8 \left(96 + 48 \beta^2 - \frac{2057}{16} \beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6) \right) + \mathcal{O}(K^{10}). \quad (5.155)
 \end{aligned}$$

Die freie Energie F berechnet sich danach zu:

$$F = -\frac{\ln \frac{Z_f}{Z_0}}{V} \quad (5.156)$$

$$\begin{aligned}
 &= -K^4 \left(6 \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6) \right) + K^6 \left(\frac{15}{2} \beta^4 + \frac{167}{288} \beta^6 + \mathcal{O}(\beta^8) \right) \\
 &\quad - K^8 \left(96 + 48 \beta^2 - \frac{2057}{16} \beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6) \right) + \mathcal{O}(K^{10}). \quad (5.157)
 \end{aligned}$$

Im Limes $\beta \rightarrow 0$ geht die freie Energie über in

$$F \underset{\beta \rightarrow 0}{=} -96 K^8 + \mathcal{O}(K^{10}). \quad (5.158)$$

Der Erwartungswert des Wechselwirkungsterms $S_W := \bar{\psi}^a(y) M^{ab}(y, x) \psi^b(x)$ berechnet sich aus der Zustandsfunktion wie folgt:

$$\langle S_W \rangle = 2 \frac{\partial}{\partial K} \frac{\ln Z_f}{Z_0} \quad (5.159)$$

$$\frac{\langle S_W \rangle}{V} = -2 \frac{\partial}{\partial K} F \quad (5.160)$$

$$\begin{aligned} &= K^3 \left((48 \beta^2 + 3 \beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6)) \right) - K^5 \left(90 \beta^4 + \frac{167}{24} \beta^6 + \mathcal{O}(\beta^8) \right) \\ &\quad + K^7 \left(1536 + 768 \beta^2 - 2057 \beta^4 + \mathcal{O}(\beta^6) \right) + \mathcal{O}(K^9) \end{aligned} \quad (5.161)$$

$$\frac{\langle S_W \rangle}{V} \underset{\beta \rightarrow 0}{=} 1536 K^7 + \mathcal{O}(K^9). \quad (5.162)$$

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Methodik der Starkkopplungsentwicklung erarbeitet. Dabei wurde zunächst mit der Entwicklung der Zustandssumme begonnen, die die Grundlage für die in Kapitel 6 folgende Massenbestimmung bildet. Mit Hilfe des in Gleichung (5.161) berechneten Erwartungswertes $\langle S_W \rangle$ können Monte-Carlo-Programme weit weg von der kritischen Linie getestet werden. Berücksichtigt man noch weitere Terme in dem Erwartungswert, kann eine Reihenanalyse zur Lokalisierung der Phasenübergangsline K_c durchgeführt werden.

5.3.9 Ordnung K^8, β^6

In diesem Abschnitt sollen zwei interessante Graphen der Ordnung K^8 und β^6 berechnet werden. Der einfachste Graph dieser Ordnung besteht aus einer Verlängerung des Graphens G_6^1 um eine Plaquette und ist in Abbildung (5.17) zu sehen. Mit den angegebenen Regeln lässt sich dieser Graph wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \hat{N}_8^6 &= -K^8 (-1)^4 \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)^3 (1 + \gamma_\nu) (1 - \gamma_\mu)^3 (1 - \gamma_\nu)) \\ &\quad \times \text{Tr}(V_{vx} V_{zv} V_{oz} V_{no} V_{nm}^T V_{ml}^T V_{lk}^T V_{kx}^T) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^3 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 (\text{Tr}(U_{P_3}))^2 \\ &= 128 K^8 \text{Tr}(V_{vx} V_{zv} V_{oz} V_{no} V_{nm}^T V_{ml}^T V_{lk}^T V_{kx}^T) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^3 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 (\text{Tr}(U_{P_3}))^2. \end{aligned} \quad (5.163)$$

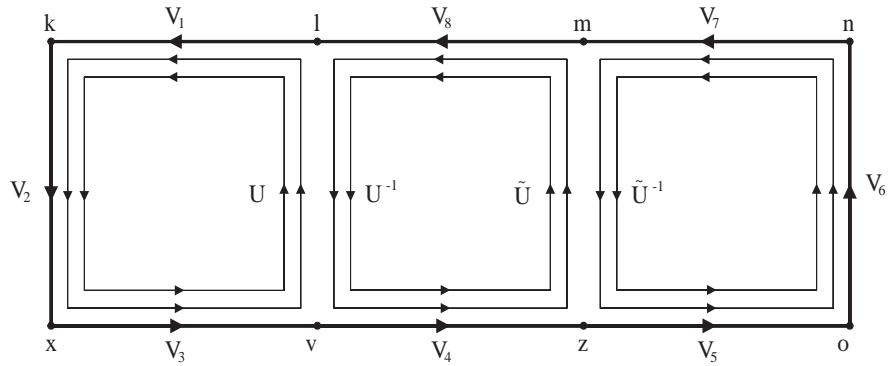


Abbildung 5.17: Graphische Darstellung des Graphens G_8^6 . Die fett gezeichneten Linien stellen die V -Matrizen dar und die dünnen Linien kennzeichnen die U -Matrizen.

Die U -Integration für diesen Graphen verläuft analog zu der von G_6^1 . Um die Rechnung möglichst übersichtlich zu gestalten, werden die einzelnen U -Integrations wieder nacheinander durchgeführt. Die erste Integration läuft über U :

$$\begin{aligned}
 & \int dU \left(\text{Tr} (UU_1^{-1}U_2^{-1}U_3) \right)^2 \left(\text{Tr}(U^{-1}U_4\tilde{U}U_8^{-1}) \right)^2 \\
 &= \int dU \left(1 + \chi_1(UU_1^{-1}U_2^{-1}U_3) \right) \left(1 + \chi_1(U^{-1}U_4\tilde{U}U_8^{-1}) \right) \\
 &= \int dU \left(1 + \chi_1(UU_1^{-1}U_2^{-1}U_3) \chi_1(U^{-1}U_4\tilde{U}U_8^{-1}) \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{3} \chi_1(U_1^{-1}U_2^{-1}U_3U_4\tilde{U}U_8^{-1}). \tag{5.164}
 \end{aligned}$$

Bei der zweiten Integration wird über \tilde{U} integriert:

$$\begin{aligned}
 & \int d\tilde{U} \left(1 + \frac{1}{3} \chi_1(U_8^{-1}U_1^{-1}U_2^{-1}U_3U_4\tilde{U}) \right) \left(\text{Tr}(\tilde{U}^{-1}U_5U_6U_7^{-1}) \right)^2 \\
 &= \int d\tilde{U} \left(1 + \frac{1}{3} \chi_1(U_8^{-1}U_1^{-1}U_2^{-1}U_3U_4\tilde{U}) \chi_1(\tilde{U}^{-1}U_5U_6U_7^{-1}) \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{9} \chi_1(U_8^{-1}U_1^{-1}U_2^{-1}U_3U_4U_5U_6U_7^{-1}) \\
 &= 1 + \frac{1}{9} \chi_1(U_3U_4U_5U_6U_7^{-1}U_8^{-1}U_1^{-1}U_2^{-1}). \tag{5.165}
 \end{aligned}$$

Die letzte Integration geht schließlich über alle Links, die den Rand des Graphens N_8^6 bilden. Dieser besteht aus $U_3, U_4, U_5, U_6, U_7^{-1}, U_8^{-1}, U_1^{-1}$ und U_2^{-1} . Führt man eine Variablenumbenennung der folgenden Form durch

$$\hat{U} := U_3U_4U_5U_6U_7^{-1}U_8^{-1}U_1^{-1}U_2^{-1}, \tag{5.166}$$

$$\hat{V} := V_3V_4V_5V_6V_7^T V_8^T V_1^T V_2^T, \tag{5.167}$$

bleibt das nachstehende Integral zu lösen

$$\begin{aligned} \int d\hat{U} \left(1 + \frac{1}{9} \chi_1(\hat{U}) \right) \text{Tr}(\hat{V}) &= \int d\hat{U} \frac{1}{9} \left(\text{Tr}(\hat{V}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned} \quad (5.168)$$

Mit diesem Ergebnis berechnet sich der Graph G_8^6 zu

$$\begin{aligned} N_8^6 &= \frac{128}{9} K^8 \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^3 \\ &= \frac{1}{36} K^8 \beta^6. \end{aligned} \quad (5.169)$$

Für diesen Graphen G_8^6 gibt es auf einem vierdimensionalen Gitter nach [9] 300 V unterschiedliche Möglichkeiten der Plazierung.

Einen weiteren Graphen der Ordnung K^8, β^6 erhält man, wenn man die eine Ecke des Graphens G_8^6 nach unten oder oben klappt. Dieser Graph ist in Abbildung (5.18) zu sehen.

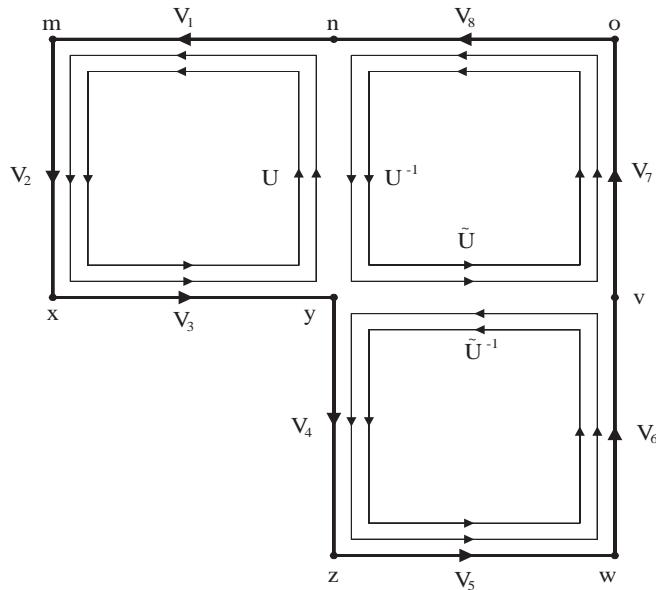


Abbildung 5.18: Graphische Darstellung des Graphens G_8^7 . Mit dicken Linien sind wieder die jeweiligen V -Matrizen gekennzeichnet und die dünnen Linien beschreiben die U -Matrizen.

Der Beitrag des Graphens G_8^7 ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_8^7 &= -K^8 (-1)^4 \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\nu)(1 + \gamma_\mu)(1 + \gamma_\nu)^2(1 - \gamma_\mu)^2(1 - \gamma_\nu)) \\
 &\quad \times \text{Tr}(V_{yx} V_{yz}^T V_{wz} V_{vw} V_{ov} V_{on}^T V_{nm}^T V_{mx}^T) \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2\right)^3 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 (\text{Tr}(U_{P_3}))^2 \\
 &= 64 K^8 \text{Tr}(V_{yx} V_{yz}^T V_{wz} V_{vw} V_{ov} V_{on}^T V_{nm}^T V_{mx}^T) \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2\right)^3 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 (\text{Tr}(U_{P_3}))^2. \tag{5.170}
 \end{aligned}$$

Der Graph G_8^7 unterscheidet sich bezüglich der U -Integration nicht von dem Graphen G_8^6 . In beiden Fällen wird zunächst über die innenliegenden Links integriert, um dann den Rand des Graphens mit der zugehörigen Spur über die V -Matrizen auszaintegrieren. Es wird daher auf eine detaillierte Rechnung verzichtet. Für den Graphen G_8^7 gilt:

$$\begin{aligned}
 N_8^7 &= \frac{64}{9} K^8 \left(\frac{1}{8} \beta^2\right)^3 \\
 &= \frac{1}{72} K^8 \beta^6. \tag{5.171}
 \end{aligned}$$

Dieser Graph G_8^7 kann nach [9] 504 V mal auf einem vierdimensionalen Gitter mit dem Volumen V vorkommen.

5.3.10 Ordnung K^8, β^8

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit zwei Graphen, die von der Ordnung K^8 und β^8 sind. Ein Graph, der sich aus acht Kanten und vier doppelten Eichplatten konstruiert lässt, besteht aus einem Quadrat, das einen viermal so großen Flächeninhalt hat wie der Graph G_4^4 . Dargestellt wird dieser durch die Abbildung (5.19).

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_8^8 &= -K^8 (-1)^4 \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)^2(1 + \gamma_\nu)^2(1 - \gamma_\mu)^2(1 - \gamma_\nu)^2) \\
 &\quad \times \text{Tr}(V_{yx} V_{yz} V_{oz} V_{mo} V_{mw}^T V_{ww}^T V_{vn}^T V_{nx}^T) \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2\right)^4 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 (\text{Tr}(U_{P_3}))^2 (\text{Tr}(U_{P_4}))^2 \\
 &= 128 K^8 \text{Tr}(V_{yx} V_{yz} V_{oz} V_{mo} V_{mw}^T V_{ww}^T V_{vn}^T V_{nx}^T) \\
 &\equiv 128 K^8 \text{Tr}(V_4 V_5 V_6 V_7 V_8^T V_1^T V_2^T V_3^T) \tag{5.172}
 \end{aligned}$$

Bei dem obigen Graphen müssen zunächst vier innere Links ausintegriert werden. Dies soll im folgenden der Reihe nach geschehen.

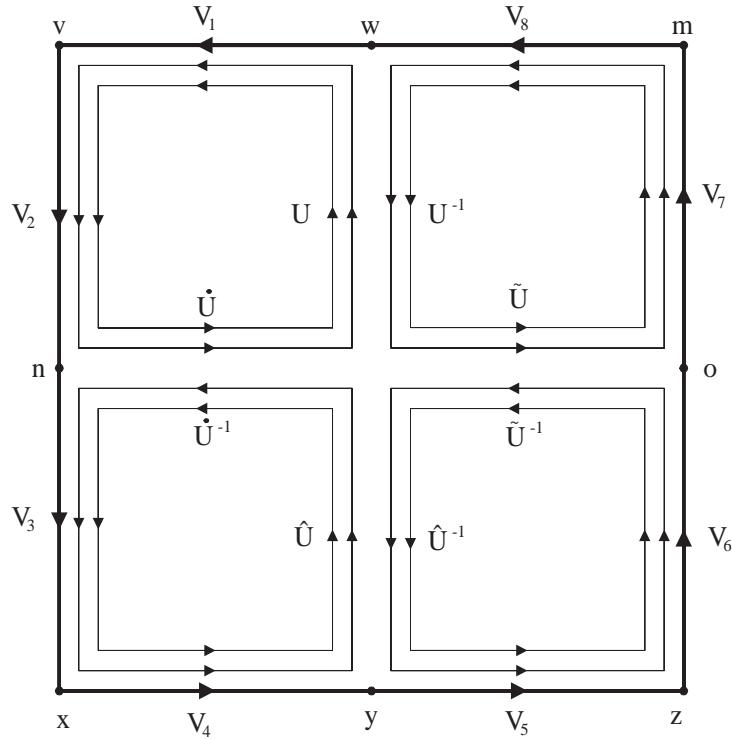


Abbildung 5.19: Graphische Darstellung des Graphens N_8^8 . Die acht V -Matrizen sind durch dicke Linien gekennzeichnet, wo hingegen die U -Matrizen durch dünne Linien dargestellt sind.

Die erste Integration wird über U durchgeführt:

$$\begin{aligned} & \int dU \left(\text{Tr}(U_1^{-1} U_2^{-1} \dot{U} U) \right)^2 \left(\text{Tr}(U^{-1} \tilde{U} U_7 U_8^{-1}) \right)^2 \\ = & 1 + \frac{1}{3} \chi_1(U_1^{-1} U_2^{-1} \dot{U} \tilde{U} U_7 U_8^{-1}) = 1 + \frac{1}{3} \chi_1(U_7 U_8^{-1} U_1^{-1} U_2^{-1} \dot{U} \tilde{U}). \end{aligned} \quad (5.173)$$

Die zweite Integration geht über \hat{U} :

$$\begin{aligned} & \int d\hat{U} \left(\text{Tr}(\dot{U}^{-1} U_3^{-1} U_4 \hat{U}) \right)^2 \left(\text{Tr}(\hat{U}^{-1} U_5 U_6 \tilde{U}^{-1}) \right)^2 \\ = & 1 + \frac{1}{3} \chi_1(\dot{U}^{-1} U_3^{-1} U_4 U_5 U_6 \tilde{U}^{-1}) = 1 + \frac{1}{3} \chi_1(\tilde{U}^{-1} \dot{U}^{-1} U_3^{-1} U_4 U_5 U_6). \end{aligned} \quad (5.174)$$

Die dritte und vierte innere Integration geht über \dot{U} und \tilde{U} . Diese beiden Integrationen lassen sich zu einer Integration über U' mit

$$U' := \dot{U} \hat{U} \quad \text{und} \quad (U')^{-1} := \hat{U}^{-1} \dot{U}^{-1} \quad (5.175)$$

zusammenfassen. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} & \int dU' \left(1 + \frac{1}{3} \chi_1(U_7 U_8^{-1} U_1^{-1} U_2^{-1} U') \right) \left(1 + \frac{1}{3} \chi_1((U')^{-1} U_3^{-1} U_4 U_5 U_6) \right) \\ = & \int dU' \left(1 + \frac{1}{9} \chi_1(U_7 U_8^{-1} U_1^{-1} U_2^{-1} U') \chi_1((U')^{-1} U_3^{-1} U_4 U_5 U_6) \right) \\ = & 1 + \frac{1}{27} \chi_1(U_7 U_8^{-1} U_1^{-1} U_2^{-1} U_3^{-1} U_4 U_5 U_6). \end{aligned} \quad (5.176)$$

Zu guter Letzt bleibt die Integration über den Rand des Graphens. Dazu wird zunächst eine Variablenumbenennung der folgenden Form vorgenommen:

$$\bar{U} := U_7 U_8^{-1} U_1^{-1} U_2^{-1} U_3^{-1} U_4 U_5 U_6, \quad (5.177)$$

$$\bar{V} := V_7 V_8^T V_1^T V_2^T V_3^T V_4 V_5 V_6. \quad (5.178)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int d\bar{U} \left(1 + \frac{1}{27} \chi_1(\bar{U}) \right) \text{Tr}(\bar{V}) &= \int d\bar{U} \frac{1}{27} \left(\text{Tr}(\bar{V}) \right)^2 \\ &= \frac{1}{27}. \end{aligned} \quad (5.179)$$

Mit den obigen Ergebnissen erhält man für den Graphen G_8^8 das nachstehende Resultat:

$$\begin{aligned} N_8^8 &= 128 K^8 \frac{1}{27} \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^4 \\ &= \frac{1}{864} K^8 \beta^8. \end{aligned} \quad (5.180)$$

Diesen Graphen G_8^8 kann man nach [9] auf $102V$ verschiedene Arten auf einem vierdimensionalen Gitter mit dem Volumen V darstellen.

Abschließend soll noch ein weiterer interessanter Graph berechnet werden. Dieser Graph G_8^9 , der in Abbildung (5.20) zu sehen ist, besteht aus einem Rand, der aus acht V 's besteht, und vier Doppelplaquetten. Die einzelnen Plaquetten werden wieder mit P_1, P_2, P_3 und P_4 bezeichnet.

Der Graph G_8^9 berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \hat{N}_8^9 &= -K^8 (-1)^4 \text{Tr}((1 + \gamma_\mu)(1 + \gamma_\nu)(1 + \gamma_\mu)(1 - \gamma_\rho)(1 - \gamma_\mu)(1 - \gamma_\mu) \\ &\quad \times (1 - \gamma_\nu)(1 + \gamma_\rho)) \\ &\quad \times \text{Tr}(V_1 V_2 V_3 V_4^T V_5^T V_6^T v_7^T V_8) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^4 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 (\text{Tr}(U_{P_3}))^2 (\text{Tr}(U_{P_4}))^2 \\ &= 32 K^8 \text{Tr}(V_1 V_2 V_3 V_4^T V_5^T V_6^T v_7^T V_8) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^4 (\text{Tr}(U_{P_1}))^2 (\text{Tr}(U_{P_2}))^2 (\text{Tr}(U_{P_3}))^2 (\text{Tr}(U_{P_4}))^2. \end{aligned} \quad (5.181)$$

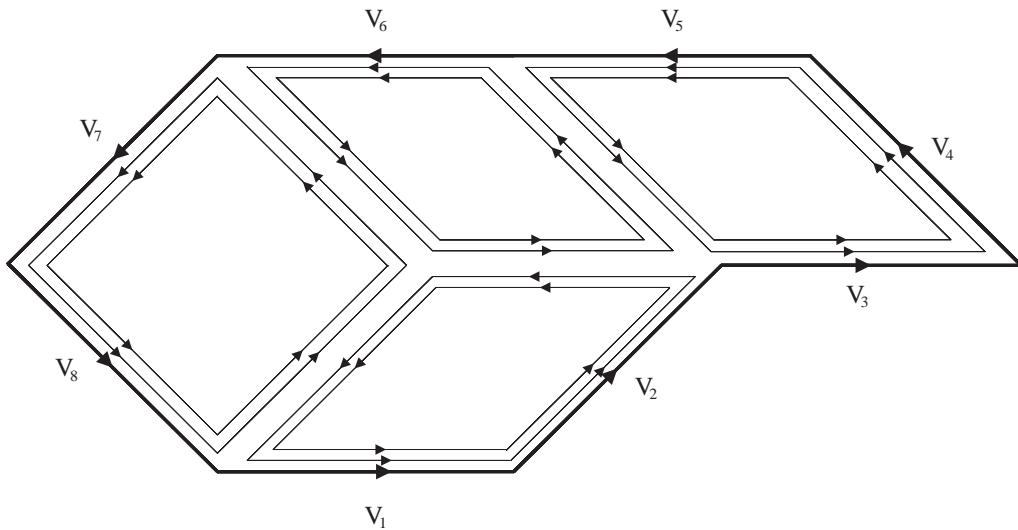


Abbildung 5.20: Graphische Darstellung des Graphens G_8^9 . Die dicken Linien kennzeichnen $V_1 - V_8$ und die dünneren Linien bezeichnen die zugehörigen Eichplaketten.

Die Integration über die Eichplaketten verläuft analog zu dem Graphen G_8^8 . Es gibt insgesamt drei verschiedene innere Integrationen⁴ die je mit einem Faktor $\frac{1}{3}$ beitragen. Die Integration über den Rand trägt dann noch mit einem Faktor eins bei. Demnach erhält man einen Faktor $1/27$ und für den Graphen G_8^9 gilt:

$$N_8^9 = 32 K^8 \left(\frac{1}{8} \beta^2 \right)^4 \frac{1}{27} = \frac{1}{3456} K^8 \beta^8. \quad (5.182)$$

Für diesen Graphen gibt es auf einem vierdimensionalen Gitter nach [9] 768 verschiedene Möglichkeiten.

⁴Zwei von den vier Integrationen lassen sich zu einer zusammenfassen.

Kapitel 6

Massenbestimmung

Eine sehr interessante Größe im Zusammenhang mit der Hoppingparameter-Entwicklung ist der Massensprung (*mass gap*). Diesen extrahiert man am einfachsten aus dem exponentiellen Abfall der Korrelationsfunktion zwischen zwei eichinvarianten Operatoren, die durch eine große Distanz separiert sind. Betrachtet man in der QCD die Korrelation zwischen zwei Plaquetten, studiert man letztlich die Effekte der Glueball-Wechselwirkung zwischen zwei eichinvarianten Operatoren. Interessiert man sich in unserer Theorie für den Gluino-Glueball, so entspricht dies einer Plaquette mit einem Majorana-Fermion an einer Ecke. Studiert man zunächst nur den Fall $\beta = 0$, so findet man leicht, daß die Verbindung zwischen den Operatoren aus drei Kanten bestehen muß: Mit einer Kante würde die U -Integration keinen Beitrag geben und bei zwei Kanten wäre die Fermion-Integration an den beiden Endpunkten null. In führender Ordnung hat man also den in Abbildung (6.1) gezeigten Graphen.

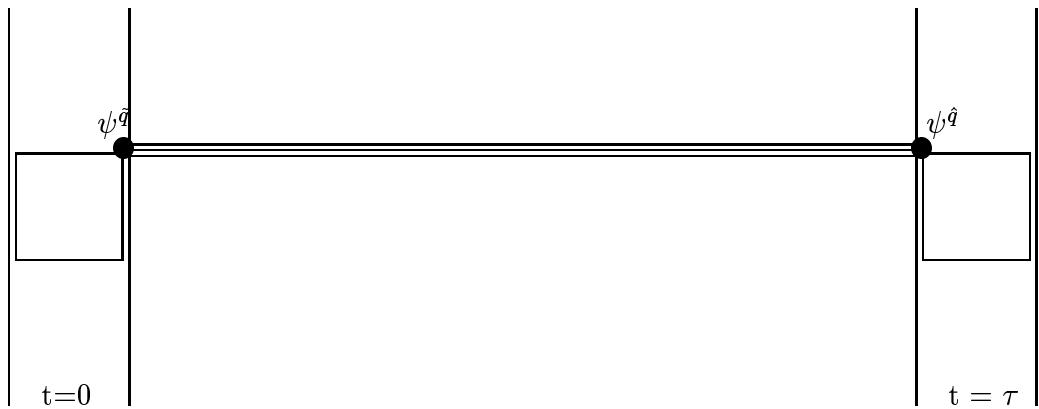


Abbildung 6.1: Korrelationsfunktion zur Bestimmung der Masse des Gluino-Glue-Teilchens.

Der einfachste Graph besteht aus τ Teilstücken. Korrekturen zu diesem Graphen finden

sich im Anhang B.

6.1 Korrelationsfunktionen für kleine T -Distanzen

In diesem Abschnitt sollen einige Graphen für kurze Distanzen analytisch berechnet werden. Dabei zeichne ich wieder zwei bestimmte aber beliebige Richtungen μ bzw. ν aus.

6.1.1 Graph 1

Der kleinste Graph bei $\tau = 1$ besteht aus drei Kanten mit je einem Gluino-Glue-Operator an den Endpunkten der von einer Kante umschlossen wird. Ein einfaches Anhängen des Operators an die drei Kanten würde aufgrund der ψ -Integration verschwinden. Der entsprechende Graph ist in Abbildung (6.2) zu sehen.

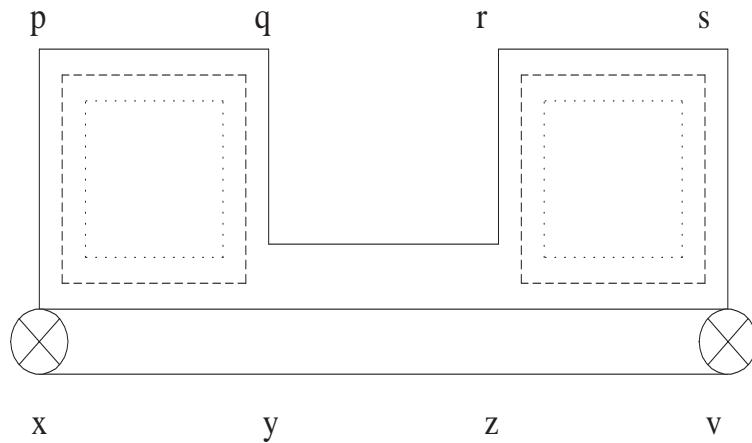


Abbildung 6.2: Zu $\tau = 1$ gehöriger Graph mit drei Kanten. Die gestrichelten Linien kennzeichnen die Eichplaquette aus dem Gluino-Glue-Operator und die gepunktete Linie die Plaquette aus der Eichwirkung. An den Gitterpunkten x und v befindet sich je ein Majorana-Fermion.

Links und rechts an dem Graphen befindet sich der Gluino-Glue-Operator, der in der Kontinuumsphysik definiert ist durch

$$O(x) = \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \psi^a(x). \quad (6.1)$$

Auf dem Gitter wird dieser Operator analog zu [21] gewählt:

$$\begin{aligned} O(x) &= \sum_{\mu,\nu} \text{Tr} (U_{\mu\nu} \psi(x)) \\ &= \sum_{\mu,\nu} \text{Tr} (U_{\mu\nu} T^a) \psi^a(x). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Damit die U -Integration einen Beitrag liefert, befindet sich an der Stelle des Operators noch je eine Plaquette aus der Eichwirkung:

$$\text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) = \text{Tr}(U^{-1}(y, x) U^{-1}(q, y) U(q, p) U(p, x)). \quad (6.3)$$

In den folgenden Rechnungen gilt die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über doppelt vorkommende Indices wird summiert. Es gilt dann:

$$\text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) = U_{\tilde{g}\tilde{h}}^{-1}(y, x) U_{\tilde{h}\tilde{i}}^{-1}(q, y) U_{\tilde{i}\tilde{j}}(q, p) U_{\tilde{j}\tilde{g}}(p, x), \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}}) &= \text{Tr}(U^{-1}(v, z) U^{-1}(s, v) U(s, r) U(r, z)) \\ &= U_{\tilde{r}\tilde{s}}^{-1}(v, z) U_{\tilde{s}\tilde{t}}^{-1}(s, v) U_{\tilde{t}\tilde{w}}(s, r) U_{\tilde{w}\tilde{r}}(r, z). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Mit diesen Definitionen gilt dann für den in Abbildung (6.2) gezeigten Graphen vor der U -Integration:

$$\begin{aligned} \hat{N}_1 &= \int \prod_{\alpha, a} d\psi_\alpha^a(x) d\psi_\alpha^a(y) d\psi_\alpha^a(z) d\psi_\alpha^a(v) d\psi_\alpha^a(p) d\psi_\alpha^a(q) d\psi_\alpha^a(r) d\psi_\alpha^a(s) \\ &\quad \times \frac{K^2}{8} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \psi_\alpha^a(y) D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y, x) \psi_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}}(x) \psi_\beta^b(y) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(y, x) \psi_{\tilde{\beta}}^{\tilde{b}}(x) \\ &\quad \times \frac{K}{2} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \psi_\gamma^c(p) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{a}}(p, x) \psi_{\tilde{\gamma}}^{\tilde{a}}(x) \frac{K}{2} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \psi_\delta^d(q) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(q, p) \psi_{\tilde{\delta}}^{\tilde{d}}(x) \\ &\quad \times \frac{K}{2} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \psi_\epsilon^e(q) D_{\epsilon\tilde{\epsilon}}^{e\tilde{e}}(q, y) \psi_{\tilde{\epsilon}}^{\tilde{e}}(y) \\ &\quad \times \frac{K^3}{48} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \psi_{\hat{\alpha}}^{\hat{a}}(z) D_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}^{\hat{a}\hat{a}}(z, y) \psi_{\hat{\alpha}}^{\hat{a}}(y) \psi_{\hat{\beta}}^{\hat{b}}(z) D_{\hat{\beta}\hat{\beta}}^{\hat{b}\hat{b}}(z, y) \psi_{\hat{\beta}}^{\hat{b}}(y) \psi_{\hat{\gamma}}^{\hat{c}}(z) D_{\hat{\gamma}\hat{\gamma}}^{\hat{c}\hat{c}}(z, y) \psi_{\hat{\gamma}}^{\hat{c}}(y) \\ &\quad \times \frac{K^2}{8} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \psi_{\hat{\delta}}^{\hat{d}}(v) D_{\hat{\delta}\hat{\delta}}^{\hat{d}\hat{d}}(v, z) \psi_{\hat{\delta}}^{\hat{d}}(z) \psi_{\hat{\epsilon}}^{\hat{e}}(v) D_{\hat{\epsilon}\hat{\epsilon}}^{\hat{e}\hat{e}}(v, z) \psi_{\hat{\epsilon}}^{\hat{e}}(z) \\ &\quad \times \frac{K}{2} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \psi_{\hat{\phi}}^{\hat{f}}(r) D_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^{\hat{f}\hat{f}}(r, z) \psi_{\hat{\phi}}^{\hat{f}}(z) \frac{K}{2} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \psi_{\hat{\rho}}^{\hat{r}}(s) D_{\hat{\rho}\hat{\rho}}^{\hat{r}\hat{r}}(s, r) \psi_{\hat{\rho}}^{\hat{r}}(r) \\ &\quad \times \frac{K}{2} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \psi_{\hat{\tau}}^{\hat{t}}(s) D_{\hat{\tau}\hat{\tau}}^{\hat{t}\hat{t}}(s, v) \psi_{\hat{\tau}}^{\hat{t}}(v) \\ &\quad \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}} T^{\tilde{q}}) \psi_{\tilde{\chi}}^{\tilde{q}}(x) \frac{1}{2} \beta \\ &\quad \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}} T^{\tilde{q}}) \psi_{\tilde{\chi}}^{\tilde{q}}(v) \frac{1}{2} \beta. \end{aligned} \quad (6.6)$$

In den letzten beiden Termen wird wie gewohnt über die Farbindices \tilde{q} und \tilde{q} summiert. Die Spinor-Indices $\tilde{\chi}$ und χ können die Werte 1,2,3 und 4 annehmen.

Führt man in dem obigen Ausdruck (6.6) die Integration über die ψ 's aus, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_1 = & \frac{K^{13}}{3 \cdot 2^{16}} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y, x) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(y, x) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{c}}(p, x) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(q, p) D_{\epsilon\tilde{\epsilon}}^{e\tilde{e}}(q, y) D_{\hat{\alpha}\tilde{\alpha}}^{\hat{a}\tilde{a}}(z, y) D_{\hat{\beta}\tilde{\beta}}^{\hat{b}\tilde{b}}(z, y) \\
 & \times D_{\hat{\gamma}\tilde{\gamma}}^{\hat{c}\tilde{c}}(z, y) D_{\hat{\delta}\tilde{\delta}}^{\hat{d}\tilde{d}}(v, z) D_{\hat{\epsilon}\tilde{\epsilon}}^{\hat{e}\tilde{e}}(v, z) D_{\hat{\phi}\tilde{\phi}}^{\hat{f}\tilde{f}}(r, z) D_{\hat{\rho}\tilde{\rho}}^{\hat{r}\tilde{r}}(s, r) D_{\hat{\tau}\tilde{\tau}}^{\hat{t}\tilde{t}}(s, v) \\
 & \times C_{\gamma\tilde{\delta}} \delta_{cd} C_{\delta\epsilon} \delta_{de} C_{\hat{\phi}\tilde{\rho}} \delta_{\hat{f}\tilde{r}} C_{\hat{\rho}\tilde{\tau}} \delta_{\hat{r}\tilde{t}} \epsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\chi}}^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{q}} \epsilon_{\tilde{\delta}\tilde{\epsilon}\tilde{\tau}\tilde{\chi}}^{\tilde{d}\tilde{e}\tilde{t}\tilde{q}} \\
 & \times \left(-C_{\alpha\beta} \delta_{ab} \epsilon_{\tilde{\epsilon}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{q}} + C_{\alpha\tilde{\epsilon}} \delta_{a\tilde{e}} \epsilon_{\beta\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}^{\tilde{b}\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} - C_{\alpha\tilde{\alpha}} \delta_{a\tilde{a}} \epsilon_{\beta\tilde{\epsilon}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}^{\tilde{b}\tilde{e}\tilde{b}\tilde{c}} \right. \\
 & \quad \left. + C_{\alpha\tilde{\beta}} \delta_{ab} \epsilon_{\beta\tilde{\epsilon}\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}^{\tilde{b}\tilde{e}\tilde{a}\tilde{c}} - C_{\alpha\tilde{\gamma}} \delta_{a\tilde{c}} \epsilon_{\beta\tilde{\epsilon}\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}^{\tilde{b}\tilde{e}\tilde{a}\tilde{b}} \right) \\
 & \times \left(-C_{\hat{\alpha}\tilde{\beta}} \delta_{\hat{a}\tilde{b}} \epsilon_{\hat{\gamma}\tilde{\delta}\tilde{\epsilon}\tilde{\phi}}^{\hat{c}\hat{d}\hat{e}\hat{f}} + C_{\hat{\alpha}\tilde{\gamma}} \delta_{\hat{a}\tilde{c}} \epsilon_{\hat{\beta}\tilde{\delta}\tilde{\epsilon}\tilde{\phi}}^{\hat{b}\hat{d}\hat{e}\hat{f}} - C_{\hat{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\hat{a}\tilde{d}} \epsilon_{\hat{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\epsilon}\tilde{\phi}}^{\hat{b}\hat{c}\hat{e}\hat{f}} \right. \\
 & \quad \left. + C_{\hat{\alpha}\tilde{\epsilon}} \delta_{\hat{a}\tilde{e}} \epsilon_{\hat{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}\tilde{\phi}}^{\hat{b}\hat{e}\hat{d}\hat{f}} - C_{\hat{\alpha}\tilde{\phi}} \delta_{\hat{a}\tilde{f}} \epsilon_{\hat{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\delta}\tilde{\epsilon}}^{\hat{b}\hat{e}\hat{d}\hat{e}} \right) \\
 & \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}} T^{\tilde{q}}) \frac{1}{2} \beta \\
 & \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}} T^{\tilde{q}}) \frac{1}{2} \beta. \tag{6.7}
 \end{aligned}$$

Nutzt man nun aus, daß sogenannte Spitzen in dem Graphen keinen Beitrag geben, reduziert sich der Ausdruck von \hat{N}_1 zu:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}_1 = & \frac{K^{13}}{12 \cdot 2^{16}} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y, x) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(y, x) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{c}}(p, x) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(q, p) D_{\epsilon\tilde{\epsilon}}^{e\tilde{e}}(q, y) D_{\hat{\alpha}\tilde{\alpha}}^{\hat{a}\tilde{a}}(z, y) D_{\hat{\beta}\tilde{\beta}}^{\hat{b}\tilde{b}}(z, y) \\
 & \times D_{\hat{\gamma}\tilde{\gamma}}^{\hat{c}\tilde{c}}(z, y) D_{\hat{\delta}\tilde{\delta}}^{\hat{d}\tilde{d}}(v, z) D_{\hat{\epsilon}\tilde{\epsilon}}^{\hat{e}\tilde{e}}(v, z) D_{\hat{\phi}\tilde{\phi}}^{\hat{f}\tilde{f}}(r, z) D_{\hat{\rho}\tilde{\rho}}^{\hat{r}\tilde{r}}(s, r) D_{\hat{\tau}\tilde{\tau}}^{\hat{t}\tilde{t}}(s, v) \\
 & \times C_{\gamma\tilde{\delta}} \delta_{cd} C_{\delta\epsilon} \delta_{de} C_{\hat{\phi}\tilde{\rho}} \delta_{\hat{f}\tilde{r}} C_{\hat{\rho}\tilde{\tau}} \delta_{\hat{r}\tilde{t}} \epsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\chi}}^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{q}} \epsilon_{\tilde{\delta}\tilde{\epsilon}\tilde{\tau}\tilde{\chi}}^{\tilde{d}\tilde{e}\tilde{t}\tilde{q}} \\
 & \times \left(-C_{\alpha\tilde{\alpha}} \delta_{a\tilde{a}} (C_{\beta\tilde{\beta}} \delta_{bb} C_{\tilde{\epsilon}\tilde{\gamma}} \delta_{\tilde{e}\tilde{c}} + C_{\beta\tilde{\gamma}} \delta_{bc} C_{\tilde{b}\tilde{\epsilon}} \delta_{\tilde{b}\tilde{e}}) \right. \\
 & \quad \left. + C_{\alpha\tilde{\beta}} \delta_{ab} (C_{\beta\tilde{\alpha}} \delta_{ba} \delta_{ba} C_{\tilde{\epsilon}\tilde{\gamma}} \delta_{\tilde{e}\tilde{c}} + C_{\beta\tilde{\gamma}} \delta_{bc} C_{\tilde{a}\tilde{\epsilon}} \delta_{\tilde{a}\tilde{e}}) \right. \\
 & \quad \left. - C_{\alpha\tilde{\gamma}} \delta_{ac} (C_{\beta\tilde{\alpha}} \delta_{ba} C_{\tilde{\epsilon}\tilde{\beta}} \delta_{\tilde{e}\tilde{b}} + C_{\beta\tilde{\beta}} \delta_{bb} C_{\tilde{a}\tilde{\epsilon}} \delta_{\tilde{a}\tilde{e}}) \right) \\
 & \times \left(-C_{\hat{\alpha}\tilde{\delta}} \delta_{\hat{a}\tilde{d}} (C_{\hat{\beta}\tilde{\epsilon}} \delta_{\hat{b}\tilde{e}} C_{\hat{\gamma}\tilde{\phi}} \delta_{\hat{e}\tilde{f}} + C_{\hat{\beta}\tilde{\phi}} \delta_{\hat{b}\tilde{f}} C_{\hat{\epsilon}\tilde{\gamma}} \delta_{\hat{e}\tilde{c}}) \right. \\
 & \quad \left. + C_{\hat{\alpha}\tilde{\epsilon}} \delta_{\hat{a}\tilde{e}} (C_{\hat{\beta}\tilde{\delta}} \delta_{\hat{b}\tilde{d}} C_{\hat{\gamma}\tilde{\phi}} \delta_{\hat{e}\tilde{f}} + C_{\hat{\beta}\tilde{\phi}} \delta_{\hat{b}\tilde{f}} C_{\hat{\delta}\tilde{\gamma}} \delta_{\hat{d}\tilde{c}}) \right. \\
 & \quad \left. - C_{\hat{\alpha}\tilde{\phi}} \delta_{\hat{a}\tilde{f}} (C_{\hat{b}\tilde{\delta}} \delta_{\hat{b}\tilde{d}} C_{\hat{\gamma}\tilde{\epsilon}} \delta_{\hat{c}\tilde{e}} + C_{\hat{\beta}\tilde{\epsilon}} \delta_{\hat{b}\tilde{e}} C_{\hat{\delta}\tilde{\gamma}} \delta_{\hat{d}\tilde{c}}) \right) \\
 & \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}} T^{\tilde{q}}) \beta \\
 & \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}} T^{\tilde{q}}) \beta. \tag{6.8}
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Summation über die vorkommenden Dirac- und Colour-Indices lassen sich

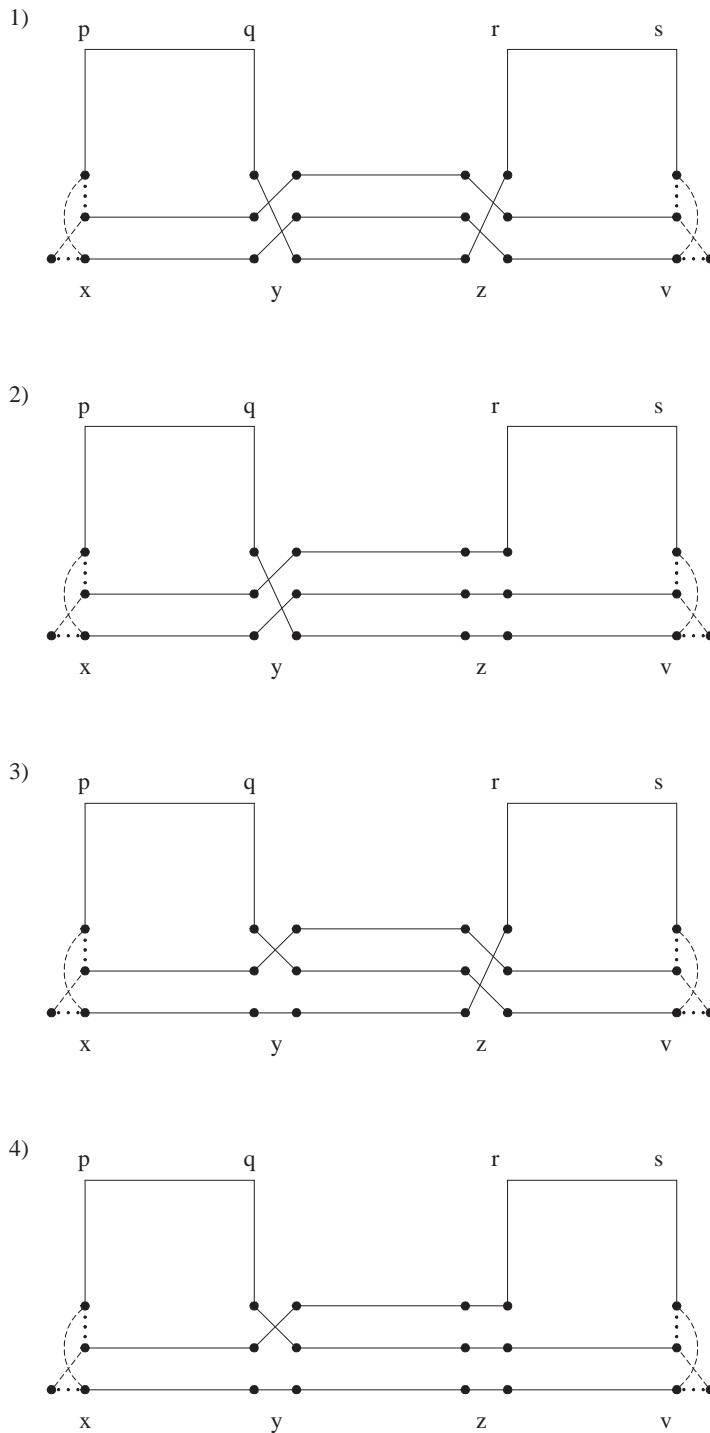


Abbildung 6.3: Vier bezüglich der ψ -Integration verschiedene Graphentypen mit je vier unterschiedlichen Randbedingungen, die durch die gestrichelten und gepunkteten Linien an dem linken und dem rechten Ende des Graphens gekennzeichnet sind. Die schwarzen Punkte stehen stellvertretend für die Spinor-Indices: (von links nach rechts; von oben nach unten) $\tilde{\chi}; \tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}; \tilde{\epsilon}, \alpha, \beta; \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}; \dot{\phi}, \dot{\delta}, \dot{\epsilon}; \dot{\tau}, \hat{\delta}, \hat{\epsilon}; \dot{\chi}$ und ihren zugehörigen Farbindices.

die noch verbleibenden Terme wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
\hat{N}_1 = & \frac{K^{13}}{12 \cdot 2^{16}} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} D_{\alpha\tilde{\alpha}}^{a\tilde{a}}(y, x) D_{\beta\tilde{\beta}}^{b\tilde{b}}(y, x) D_{\gamma\tilde{\gamma}}^{c\tilde{c}}(p, x) D_{\delta\tilde{\delta}}^{d\tilde{d}}(q, p) D_{\epsilon\tilde{\epsilon}}^{e\tilde{e}}(q, y) D_{\hat{\alpha}\dot{\alpha}}^{\hat{a}\dot{a}}(z, y) D_{\hat{\beta}\dot{\beta}}^{\hat{b}\dot{b}}(z, y) \\
& \times D_{\hat{\gamma}\dot{\gamma}}^{\hat{c}\dot{c}}(z, y) D_{\hat{\delta}\dot{\delta}}^{\hat{d}\dot{d}}(v, z) D_{\hat{\epsilon}\dot{\epsilon}}^{\hat{e}\dot{e}}(v, z) D_{\hat{\phi}\dot{\phi}}^{\hat{f}\dot{f}}(r, z) D_{\hat{\rho}\dot{\rho}}^{\hat{r}\dot{r}}(s, r) D_{\hat{\tau}\dot{\tau}}^{\hat{t}\dot{t}}(s, v) \\
& \times C_{\gamma\tilde{\delta}} \delta_{cd} C_{\delta\epsilon} \delta_{de} C_{\hat{\phi}\dot{\rho}} \delta_{\hat{f}\dot{r}} C_{\hat{\rho}\dot{\tau}} \delta_{\hat{r}\dot{t}} \epsilon_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\tilde{\chi}}^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{q}} \epsilon_{\tilde{\delta}\tilde{\epsilon}\tilde{\tau}\tilde{\chi}}^{\tilde{d}\tilde{e}\tilde{i}\tilde{q}} \\
& \times (6 C_{\alpha\dot{\alpha}} \delta_{a\dot{a}} C_{\beta\dot{\beta}} \delta_{b\dot{b}} C_{\tilde{\epsilon}\dot{\gamma}} \delta_{\tilde{e}\dot{c}} + 6 C_{\alpha\dot{\alpha}} \delta_{a\dot{a}} C_{\beta\dot{\gamma}} \delta_{b\dot{c}} C_{\tilde{b}\dot{\epsilon}} \delta_{\tilde{b}\dot{e}}) \\
& \times (2 C_{\hat{\alpha}\dot{\delta}} \delta_{\hat{a}\dot{d}} C_{\hat{\beta}\dot{\epsilon}} \delta_{\hat{b}\dot{e}} C_{\tilde{\gamma}\dot{\phi}} \delta_{\tilde{c}\dot{f}} + C_{\hat{\alpha}\dot{\phi}} \delta_{\hat{a}\dot{f}} C_{\hat{\beta}\dot{\delta}} \delta_{\hat{b}\dot{d}} C_{\tilde{\gamma}\dot{\epsilon}} \delta_{\tilde{c}\dot{e}}) \\
& \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}} T^{\tilde{q}}) \beta \\
& \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}} T^{\tilde{q}}) \beta. \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Hinsichtlich der Majorana-Fermionen gibt es somit vier nicht-verschwindende, verschiedene Graphentypen mit je vier unterschiedlichen „Randbedingungen“. Diese sind in Abbildung (6.3) zu sehen. Die Kontraktion über die Spinor-Indices führt mit (5.12) zu

$$\begin{aligned}
\hat{N}_1 = & \frac{K^{13}}{3 \cdot 2^{16}} \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} \left\{ \text{Tr}(\tilde{M}_{yx}^{a\tilde{a}} \tilde{M}_{zy}^{\hat{a}a} \tilde{M}_{rz}^{\hat{f}\hat{a}} \tilde{M}_{sr}^{\hat{r}\hat{f}} M_{sv}^{\hat{r}\hat{t}} M_{vz}^{i\hat{d}} M_{zy}^{d\tilde{b}} M_{qy}^{d\tilde{b}} M_{qp}^{dc} M_{px}^{c\tilde{a}}) \right. \\
& \times \left(\tilde{M}_{yx}^{b\tilde{q}} \tilde{M}_{zy}^{\hat{c}b} \tilde{M}_{vz}^{\hat{q}\hat{c}} C \right)_{\tilde{\chi}\dot{\chi}} \\
& + \left(\tilde{M}_{yx}^{b\tilde{q}} \tilde{M}_{zy}^{\hat{c}b} \tilde{M}_{vz}^{\hat{e}\hat{c}} \tilde{M}_{sv}^{\hat{t}\hat{e}} M_{sr}^{\hat{r}\hat{f}} M_{rz}^{\hat{r}\hat{f}} M_{zy}^{\hat{f}\hat{a}} M_{yx}^{\hat{a}\tilde{a}} \tilde{M}_{px}^{c\tilde{a}} \tilde{M}_{qp}^{dc} \right. \\
& \times M_{qy}^{d\tilde{e}} \tilde{M}_{zy}^{\hat{b}\tilde{e}} \tilde{M}_{vz}^{\hat{q}\hat{b}} C \Big)_{\tilde{\chi}\dot{\chi}} \\
& + \left(\tilde{M}_{yx}^{a\tilde{q}} \tilde{M}_{zy}^{\hat{a}a} \tilde{M}_{rz}^{\hat{f}\hat{a}} \tilde{M}_{sr}^{\hat{r}\hat{f}} M_{sv}^{\hat{r}\hat{t}} M_{vz}^{i\hat{d}} M_{zy}^{d\tilde{b}} M_{qy}^{e\tilde{b}} M_{qp}^{e\tilde{d}} \tilde{M}_{px}^{d\tilde{c}} \right. \\
& \times \tilde{M}_{yx}^{b\tilde{c}} \tilde{M}_{zy}^{\hat{e}b} \tilde{M}_{vz}^{\hat{q}\hat{c}} C \Big)_{\tilde{\chi}\dot{\chi}} \\
& + \left(\tilde{M}_{yx}^{a\tilde{q}} \tilde{M}_{zy}^{\hat{a}a} \tilde{M}_{rz}^{\hat{f}\hat{a}} \tilde{M}_{sr}^{\hat{r}\hat{f}} M_{sv}^{\hat{t}\hat{e}} M_{vz}^{\hat{e}\hat{c}} M_{zy}^{\hat{c}\tilde{b}} \tilde{M}_{px}^{\tilde{c}\tilde{b}} \tilde{M}_{qp}^{dc} \right. \\
& \times M_{qy}^{d\tilde{e}} \tilde{M}_{zy}^{\hat{b}\tilde{e}} \tilde{M}_{vz}^{\hat{q}\hat{b}} C \Big)_{\tilde{\chi}\dot{\chi}} \\
& + \text{Tr}(\tilde{M}_{yx}^{a\tilde{a}} \tilde{M}_{zy}^{\hat{a}a} \tilde{M}_{vz}^{\hat{f}\hat{a}} \tilde{M}_{sv}^{\hat{r}\hat{f}} M_{rz}^{\hat{r}\hat{t}} (s, r) M_{rz}^{i\hat{d}} \\
& \times M_{zy}^{d\tilde{b}} \tilde{M}_{qy}^{d\tilde{b}} M_{qp}^{dc} M_{px}^{c\tilde{a}}) \\
& \times \left(\tilde{M}_{yx}^{a\tilde{q}} \tilde{M}_{zy}^{ba} \tilde{M}_{vz}^{qb} C \right)_{\tilde{\chi}\dot{\chi}} \\
& + \left(\tilde{M}_{yx}^{a\tilde{q}} \tilde{M}_{zy}^{ba} \tilde{M}_{vz}^{dc} M_{sr}^{de} M_{rz}^{e\hat{a}} M_{zy}^{\hat{a}\tilde{e}} \tilde{M}_{qy}^{\hat{c}\tilde{e}} M_{qp}^{\hat{c}\tilde{a}} M_{px}^{\tilde{a}\tilde{b}} \right. \\
& \times \tilde{M}_{yx}^{\tilde{e}\tilde{b}} \tilde{M}_{zy}^{\hat{b}\tilde{e}} \tilde{M}_{vz}^{\hat{q}\hat{b}} C \Big)_{\tilde{\chi}\dot{\chi}} \\
& \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}} T^{\tilde{q}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}} T^{\tilde{q}}) \beta^2 \Big\}. \tag{6.10}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von (5.9) und (5.73) und unter Ausnutzung der Eigenschaften der γ -Matrizen (A.12), (A.13) und (A.14) ergibt sich nach einiger Rechnung

$$\begin{aligned} \hat{N}_1 &= \frac{K^{13}}{2^{15}} 2^{21} \beta^2 ((1 - \gamma_\mu)C)_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}} \\ &\times \sum_{\text{Colour}} \left\{ -2 V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{zy}^{ba} V_{vz}^{\tilde{q}b} \text{Tr}(V_{yx}^T V_{zy}^T V_{vz}^T V_{sv}^T V_{sr} V_{rz} V_{zy} V_{qy}^T V_{qp} V_{px}) \right. \\ &\quad - V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{zy}^{ba} V_{vz}^{cb} V_{sv}^{dc} V_{sr}^{de} V_{rz}^{ef} V_{zy}^{fg} V_{qy}^{hf} V_{qp}^{hi} V_{px}^{ij} V_{yx}^{kj} V_{zy}^{lk} V_{vz}^{ql} \\ &\quad + 2 V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{zy}^{ba} V_{vz}^{\tilde{q}b} \text{Tr}(V_{yx}^T V_{zy}^T V_{vz}^T V_{sr}^T V_{sv} V_{rz} V_{zy} V_{qy}^T V_{qp} V_{px}) \\ &\quad + V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{zy}^{ba} V_{vz}^{cb} V_{sv}^{dc} V_{sr}^{de} V_{rz}^{ef} V_{zy}^{fg} V_{qy}^{gh} V_{px}^{ih} V_{qy}^{ji} V_{qy}^{jk} V_{zy}^{lk} V_{vz}^{ql} \\ &\quad - V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{zy}^{ba} V_{vz}^{cb} V_{sr}^{dc} V_{sv}^{de} V_{vz}^{ef} V_{zy}^{fg} V_{qy}^{gh} V_{px}^{ih} V_{qy}^{ji} V_{qy}^{jk} V_{zy}^{lk} V_{vz}^{ql} \\ &\quad \left. + V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{zy}^{ba} V_{vz}^{cb} V_{sr}^{dc} V_{sv}^{de} V_{vz}^{ef} V_{zy}^{fg} V_{qy}^{gh} V_{px}^{hi} V_{qy}^{ij} V_{px}^{kj} V_{zy}^{lk} V_{vz}^{ql} \right\} \\ &\times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}} T^{\tilde{q}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}} T^{\tilde{q}}). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Integriert man zunächst nur die drei Kanten die von dem Punkt x nach y gehen, folgt:

$$\begin{aligned} \int dU_{zy} \hat{N}_1 &= 64 K^{13} \beta^2 ((1 - \gamma_\mu)C)_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}} \\ &\times \sum_{\text{Colour}} \left\{ -\frac{2}{6} \epsilon_{bei} \epsilon_{acj} V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{vz}^{\tilde{q}b} V_{yx}^{cd} V_{vz}^{fe} V_{sv}^{gf} V_{sr}^{gh} V_{rz}^{hi} V_{qy}^{ij} V_{qy}^{kl} V_{px}^{ld} \right. \\ &\quad + \frac{2}{6} \epsilon_{bei} \epsilon_{acj} V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{vz}^{\tilde{q}b} V_{yx}^{cd} V_{rz}^{fe} V_{sr}^{gf} V_{sv}^{gh} V_{rz}^{hi} V_{qy}^{ij} V_{qy}^{kl} V_{px}^{ld} \\ &\quad - \frac{1}{6} \epsilon_{bfl} \epsilon_{agk} V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{vz}^{cb} V_{sv}^{dc} V_{sr}^{de} V_{rz}^{ef} V_{qy}^{gh} V_{qy}^{hi} V_{px}^{ij} V_{yx}^{kj} V_{vz}^{ql} \\ &\quad + \frac{1}{6} \epsilon_{bfl} \epsilon_{agk} V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{vz}^{cb} V_{sv}^{dc} V_{sr}^{de} V_{rz}^{ef} V_{qy}^{gh} V_{px}^{ih} V_{qy}^{ji} V_{qy}^{jk} V_{vz}^{ql} \\ &\quad - \frac{1}{6} \epsilon_{bfl} \epsilon_{agk} V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{vz}^{cb} V_{sr}^{dc} V_{sv}^{de} V_{vz}^{ef} V_{qy}^{gh} V_{px}^{ih} V_{qy}^{ji} V_{qy}^{jk} V_{vz}^{ql} \\ &\quad + \frac{1}{6} \epsilon_{bfl} \epsilon_{agk} V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{vz}^{cb} V_{sr}^{dc} V_{sv}^{de} V_{vz}^{ef} V_{qy}^{gh} V_{qy}^{hi} V_{px}^{ij} V_{yx}^{kj} V_{vz}^{ql} \left. \right\} \\ &\times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}} T^{\tilde{q}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}} T^{\tilde{q}}) \\ &= -\frac{256}{6} K^{13} \beta^2 ((1 - \gamma_\mu)C)_{\tilde{\chi}\tilde{\chi}} \\ &\times \sum_{\text{Colour}} \left\{ \epsilon_{bei} \epsilon_{acj} V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{vz}^{\tilde{q}b} V_{yx}^{cd} V_{vz}^{fe} V_{sv}^{gf} V_{sr}^{gh} V_{rz}^{hi} V_{qy}^{ij} V_{qy}^{kl} V_{px}^{ld} \right. \\ &\quad + \epsilon_{bfl} \epsilon_{agk} V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{vz}^{cb} V_{sv}^{dc} V_{sr}^{de} V_{rz}^{ef} V_{qy}^{hg} V_{qy}^{hi} V_{px}^{ij} V_{yx}^{kj} V_{vz}^{ql} \left. \right\} \\ &\times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}} T^{\tilde{q}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}} T^{\tilde{q}}). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Im folgenden werde ich der Reihe nach die einzelnen U-Integrationen über die unterschiedlichen V - und U -Matrizen durchführen. Dazu werden die folgenden Spuren über die

Operatoren bzw. Plaquetten benutzt:

$$\text{Tr} (U_{\text{Pl}_{\text{left}}} T^{\tilde{q}}) = \left(U_{\tilde{a}\tilde{b}}^{px} \right)^{-1} \left(U_{\tilde{b}\tilde{d}}^{qp} \right)^{-1} U_{\tilde{d}\tilde{e}}^{qy} U_{\tilde{e}\tilde{f}}^{yx} T_{\tilde{f}\tilde{a}}^{\tilde{q}}, \quad (6.13)$$

$$\text{Tr} (U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) = \left(U_{\tilde{g}\tilde{h}}^{yx} \right)^{-1} \left(U_{\tilde{h}\tilde{i}}^{qy} \right)^{-1} U_{\tilde{i}\tilde{j}}^{qp} U_{\tilde{j}\tilde{g}}^{px}, \quad (6.14)$$

$$\text{Tr} (U_{\text{Pl}_{\text{right}}} T^{\dot{q}}) = \left(U_{\tilde{k}\tilde{l}}^{rz} \right)^{-1} \left(U_{\tilde{l}\tilde{m}}^{sr} \right)^{-1} U_{\tilde{m}\tilde{n}}^{sv} U_{\tilde{n}\tilde{o}}^{vz} T_{\tilde{o}\tilde{k}}^{\dot{q}}, \quad (6.15)$$

$$\text{Tr} (U_{\text{Pl}_{\text{right}}}) = \left(U_{\tilde{r}\tilde{s}}^{vz} \right)^{-1} \left(U_{\tilde{s}\tilde{t}}^{sv} \right)^{-1} U_{\tilde{t}\tilde{w}}^{sr} U_{\tilde{w}\tilde{r}}^{rz}. \quad (6.16)$$

Damit folgt für die Integrale des ersten Terms aus (6.12)

$$\begin{aligned} \int dU V^{ld} U_{\tilde{j}\tilde{g}} U_{\tilde{a}\tilde{b}}^{-1} &= 2 T_{\hat{a}\hat{b}}^d T_{\hat{c}\hat{d}}^l \int dU U_{\hat{b}\hat{e}} U_{\hat{d}\hat{a}}^{-1} U_{\tilde{j}\tilde{g}} U_{\tilde{a}\tilde{b}}^{-1} \\ &= \frac{2}{3} T_{\hat{a}\hat{b}}^d T_{\hat{c}\hat{d}}^l \delta_{\hat{b}\hat{b}} \delta_{\hat{a}\tilde{j}} \delta_{\hat{c}\tilde{a}} \delta_{\hat{d}\tilde{g}} \\ &= \frac{2}{3} T_{\tilde{j}\tilde{b}}^d T_{\tilde{a}\tilde{g}}^l. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Aufgrund der Spurfreiheit der $SU(2)$ -Generatoren gibt das obige Integral mit (4.61) nur einen einzigen Term. Die anderen Integrale berechnen sich analog zu

$$\int dU V^{kl} U_{\tilde{i}\tilde{j}} U_{\tilde{b}\tilde{d}}^{-1} = \frac{2}{3} T_{\tilde{i}\tilde{d}}^l T_{\tilde{b}\tilde{j}}^k, \quad (6.18)$$

$$\int dU V^{kj} U_{\tilde{d}\tilde{e}} U_{\tilde{h}\tilde{i}}^{-1} = \frac{2}{3} T_{\tilde{d}\tilde{i}}^j T_{\tilde{h}\tilde{e}}^k, \quad (6.19)$$

$$\int dU V^{hi} U_{\tilde{w}\tilde{r}} U_{\tilde{k}\tilde{l}}^{-1} = \frac{2}{3} T_{\tilde{w}\tilde{l}}^i T_{\tilde{k}\tilde{r}}^h, \quad (6.20)$$

$$\int dU V^{gh} U_{\tilde{z}\tilde{w}} U_{\tilde{l}\tilde{m}}^{-1} = \frac{2}{3} T_{\tilde{t}\tilde{m}}^h T_{\tilde{l}\tilde{w}}^g, \quad (6.21)$$

$$\int dU V^{gf} U_{\tilde{m}\tilde{n}} U_{\tilde{s}\tilde{t}}^{-1} = \frac{2}{3} T_{\tilde{m}\tilde{t}}^f T_{\tilde{s}\tilde{n}}^g. \quad (6.22)$$

Bei den beiden Integralen, die aus zwei V -Matrizen und zwei U -Matrizen bestehen, ergibt

sich wegen (2.35) und (4.64) das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\int dU V^{a\tilde{q}} V^{cd} U_{\tilde{e}\tilde{f}} U_{\tilde{g}\tilde{h}}^{-1} &= 4 T_{\hat{a}\hat{b}}^{\tilde{q}} T_{\hat{c}\hat{d}}^a T_{\hat{e}\hat{f}}^d T_{\hat{g}\hat{h}}^c \int dU U_{\hat{b}\hat{c}} U_{\hat{d}\hat{a}}^{-1} U_{\hat{f}\hat{g}} U_{\hat{h}\hat{e}}^{-1} U_{\tilde{e}\tilde{f}} U_{\tilde{g}\tilde{h}} \\
&= 4 T_{\hat{a}\hat{b}}^{\tilde{q}} T_{\hat{c}\hat{d}}^a T_{\hat{e}\hat{f}}^d T_{\hat{g}\hat{h}}^c \left\{ \frac{1}{6} \left(\delta_{\hat{b}\hat{e}} \delta_{\hat{a}\hat{f}} \delta_{\tilde{e}\tilde{h}} \delta_{\hat{c}\hat{h}} \delta_{\hat{d}\hat{g}} \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} \right. \right. \\
&\quad + \delta_{\hat{b}\hat{h}} \delta_{\hat{a}\hat{f}} \delta_{\tilde{e}\tilde{e}} \delta_{\hat{c}\hat{g}} \delta_{\hat{d}\hat{g}} \delta_{\hat{h}\tilde{f}} \\
&\quad + \delta_{\hat{b}\hat{e}} \delta_{\hat{a}\tilde{e}} \delta_{\tilde{f}\tilde{h}} \delta_{\hat{c}\hat{h}} \delta_{\hat{d}\tilde{f}} \delta_{\hat{g}\tilde{g}} \left. \left. \right) \right. \\
&\quad - \frac{1}{24} \left(\delta_{\hat{b}\hat{e}} \delta_{\hat{a}\hat{f}} \delta_{\tilde{e}\tilde{h}} \delta_{\hat{c}\tilde{g}} \delta_{\hat{d}\hat{g}} \delta_{\hat{h}\tilde{f}} \right. \\
&\quad + \delta_{\hat{b}\hat{e}} \delta_{\hat{a}\hat{f}} \delta_{\tilde{e}\tilde{h}} \delta_{\hat{c}\hat{h}} \delta_{\hat{d}\tilde{f}} \delta_{\hat{g}\tilde{g}} \\
&\quad + \delta_{\hat{b}\hat{h}} \delta_{\hat{a}\hat{f}} \delta_{\tilde{e}\tilde{e}} \delta_{\hat{c}\hat{h}} \delta_{\hat{d}\hat{g}} \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} \\
&\quad \left. \left. + \delta_{\hat{b}\hat{e}} \delta_{\hat{a}\tilde{e}} \delta_{\tilde{f}\tilde{h}} \delta_{\hat{c}\hat{h}} \delta_{\hat{d}\hat{g}} \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} \right) \right\} \\
&= \frac{2}{3} \left(T_{\hat{f}\hat{e}}^{\tilde{q}} T_{\hat{h}\hat{g}}^a T_{\hat{e}\hat{f}}^d T_{\hat{g}\hat{h}}^c \delta_{\tilde{e}\tilde{h}} \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} \right. \\
&\quad + T_{\hat{f}\tilde{h}}^{\tilde{q}} T_{\hat{g}\hat{g}}^a T_{\hat{e}\hat{f}}^d T_{\hat{g}\tilde{f}}^c \\
&\quad \left. + T_{\tilde{e}\hat{e}}^{\tilde{q}} T_{\hat{h}\hat{f}}^a T_{\hat{e}\hat{h}}^d T_{\tilde{g}\hat{h}}^c \right) \\
&\quad - \frac{1}{6} \left(T_{\hat{f}\hat{e}}^{\tilde{q}} T_{\hat{g}\hat{g}}^a T_{\hat{e}\hat{f}}^d T_{\hat{g}\tilde{f}}^c \delta_{\tilde{e}\tilde{h}} \right. \\
&\quad + T_{\hat{f}\hat{e}}^{\tilde{q}} T_{\hat{h}\hat{f}}^a T_{\hat{e}\hat{f}}^d T_{\hat{g}\hat{h}}^c \delta_{\tilde{e}\tilde{h}} \\
&\quad + T_{\hat{f}\tilde{h}}^{\tilde{q}} T_{\hat{h}\hat{g}}^a T_{\hat{e}\hat{f}}^d T_{\hat{g}\hat{h}}^c \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} \\
&\quad \left. + T_{\tilde{e}\hat{e}}^{\tilde{q}} T_{\hat{h}\hat{g}}^a T_{\hat{e}\hat{h}}^d T_{\hat{g}\hat{h}}^c \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} \right) \\
&= \frac{2}{3} \left(\text{Tr}(T^{\tilde{q}} T^d) \text{Tr}(T^a T^c) \delta_{\tilde{e}\tilde{h}} \delta_{\tilde{g}\tilde{f}} \right. \\
&\quad + (T^d T^{\tilde{q}})_{\tilde{e}\tilde{h}} (T^a T^c)_{\tilde{g}\tilde{f}} \\
&\quad \left. + (T^{\tilde{q}} T^d)_{\tilde{e}\tilde{h}} (T^c T^a)_{\tilde{g}\tilde{f}} \right) \\
&\quad - \frac{1}{6} \left(\text{Tr}(T^{\tilde{q}} T^d) (T^a T^c)_{\tilde{g}\tilde{f}} \delta_{\tilde{e}\tilde{h}} \right. \\
&\quad + \text{Tr}(T^d T^{\tilde{q}}) (T^c T^a)_{\tilde{g}\tilde{f}} \delta_{\tilde{e}\tilde{h}} \\
&\quad + (T^d T^{\tilde{q}})_{\tilde{e}\tilde{h}} \text{Tr}(T^a T^c) \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} \\
&\quad \left. + (T^{\tilde{q}} T^d)_{\tilde{e}\tilde{h}} \text{Tr}(T^c T^a) \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} \right). \tag{6.23}
\end{aligned}$$

Die Rechnung für das zweite Integral mit zwei V - und zwei U -Matrizen verläuft analog

zu der obigen und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \int dU V^{\dot{q}b} V^{fe} U_{\tilde{n}\tilde{o}} U_{\tilde{r}\tilde{s}}^{-1} &= \frac{2}{3} \left(\text{Tr}(T^b T^e) \text{Tr}(T^{\dot{q}} T^f) \delta_{\tilde{n}\tilde{s}} \delta_{\tilde{o}\tilde{r}} \right. \\
 &\quad + (T^e T^b)_{\tilde{n}\tilde{s}} (T^{\dot{q}} T^f)_{\tilde{r}\tilde{o}} \\
 &\quad \left. + (T^b T^e)_{\tilde{n}\tilde{s}} (T^f T^{\dot{q}})_{\tilde{r}\tilde{o}} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{6} \left(\text{Tr}(T^b T^e) (T^{\dot{q}} T^f)_{\tilde{r}\tilde{o}} \delta_{\tilde{n}\tilde{s}} \right. \\
 &\quad + \text{Tr}(T^b T^e) (T^f T^{\dot{q}})_{\tilde{r}\tilde{o}} \delta_{\tilde{n}\tilde{s}} \\
 &\quad + (T^e T^b)_{\tilde{n}\tilde{s}} \text{Tr}(T^{\dot{q}} T^f) \delta_{\tilde{o}\tilde{r}} \\
 &\quad \left. + (T^b T^e)_{\tilde{n}\tilde{s}} \text{Tr}(T^{\dot{q}} T^f) \delta_{\tilde{o}\tilde{r}} \right). \tag{6.24}
 \end{aligned}$$

Aus integriert ergibt der erste Term aus (6.12) mit den Gleichungen (6.17 - 6.24)

$$\begin{aligned}
 &\int \prod_i dU_i \left\{ V_{yx}^{a\tilde{q}} V_{yz}^{\tilde{q}b} V_{yx}^{cd} V_{vz}^{fe} V_{sv}^{gf} V_{sr}^{gh} V_{rz}^{hi} V_{qy}^{kj} V_{qp}^{kl} V_{px}^{ld} \right. \\
 &\quad \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}} \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}} T^{\tilde{q}}) \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}} \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}} T^{\dot{q}})) \Big\} \\
 &= \left(\frac{2}{3} \right)^6 \text{Tr}(T^d T^k) \text{Tr}(T^i T^g) \text{Tr}(T^l T^j) \text{Tr}(T^h T^f) T_{\tilde{a}\tilde{g}}^l T_{\tilde{k}\tilde{r}}^h T_{\tilde{h}\tilde{e}}^k T_{\tilde{s}\tilde{n}}^g \\
 &\quad \times \left\{ \frac{2}{12} \delta_{\tilde{q}d} \delta_{ac} \delta_{\tilde{e}\tilde{h}} \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} + \frac{2}{3} (T^a T^c)_{\tilde{g}\tilde{f}} (T^d T^{\tilde{q}})_{\tilde{e}\tilde{h}} + \frac{2}{3} (T^{\tilde{q}} T^d)_{\tilde{e}\tilde{h}} (T^c T^a)_{\tilde{g}\tilde{f}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{12} \delta_{\tilde{q}d} \delta_{\tilde{e}\tilde{h}} \left((T^a T^c)_{\tilde{g}\tilde{f}} + (T^c T^a)_{\tilde{g}\tilde{f}} \right) - \frac{1}{12} \delta_{ac} \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} \left((T^d T^{\tilde{q}})_{\tilde{e}\tilde{h}} + (T^{\tilde{q}} T^d)_{\tilde{e}\tilde{h}} \right) \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{2}{12} \delta_{be} \delta_{\dot{q}f} \delta_{\tilde{n}\tilde{s}} \delta_{\tilde{o}\tilde{r}} + \frac{2}{3} (T^e T^b)_{\tilde{n}\tilde{s}} (T^{\dot{q}} T^f)_{\tilde{r}\tilde{o}} + \frac{2}{3} (T^f T^{\dot{q}})_{\tilde{r}\tilde{o}} (T^b T^e)_{\tilde{n}\tilde{s}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{12} \delta_{\dot{q}f} \delta_{\tilde{o}\tilde{r}} \left((T^e T^b)_{\tilde{n}\tilde{s}} + (T^b T^e)_{\tilde{n}\tilde{s}} - \frac{1}{12} \delta_{be} \delta_{\tilde{n}\tilde{s}} \left((T^{\dot{q}} T^f)_{\tilde{r}\tilde{o}} + (T^f T^{\dot{q}})_{\tilde{r}\tilde{o}} \right) \right) \right\} \\
 &\quad \times T_{\tilde{f}\tilde{a}}^{\tilde{q}} T_{\tilde{o}\tilde{k}}^{\dot{q}} \\
 &= \left(\frac{2}{3} \right)^6 \left(\frac{1}{2} \right)^4 \delta_{dk} \delta_{ig} \delta_{lj} \delta_{hf} (T^{\tilde{q}} T^l)_{\tilde{f}\tilde{g}} (T^{\dot{q}} T^h)_{\tilde{o}\tilde{r}} T_{\tilde{h}\tilde{e}}^k T_{\tilde{s}\tilde{n}}^g \\
 &\quad \times \left\{ \frac{2}{3} (T^a T^c)_{\tilde{g}\tilde{f}} (T^d T^{\tilde{q}})_{\tilde{e}\tilde{h}} + \frac{2}{3} (T^{\tilde{q}} T^d)_{\tilde{e}\tilde{h}} (T^c T^a)_{\tilde{g}\tilde{f}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{12} \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} \delta_{ac} (T^d T^{\tilde{q}})_{\tilde{e}\tilde{h}} - \frac{1}{12} \delta_{\tilde{f}\tilde{g}} \delta_{ac} (T^{\tilde{q}} T^d)_{\tilde{e}\tilde{h}} \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{2}{3} (T^e T^b)_{\tilde{n}\tilde{s}} (T^{\dot{q}} T^f)_{\tilde{r}\tilde{o}} + \frac{2}{3} (T^f T^{\dot{q}})_{\tilde{r}\tilde{o}} (T^b T^e)_{\tilde{n}\tilde{s}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{12} \delta_{\dot{q}f} \delta_{\tilde{o}\tilde{r}} (T^e T^b)_{\tilde{n}\tilde{s}} - \frac{1}{12} \delta_{\dot{q}f} \delta_{\tilde{o}\tilde{r}} (T^b T^e)_{\tilde{n}\tilde{s}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \delta_{dk} \delta_{ig} \delta_{lj} \delta_{hf} \\
&\times \left\{ \frac{2}{3} \text{Tr}(T^{\tilde{q}} T^l T^a T^c) \text{Tr}(T^k T^d T^{\tilde{q}}) + \frac{2}{3} \text{Tr}(T^c T^a T^{\tilde{q}} T^l) \text{Tr}(T^{\tilde{q}} T^d T^k) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{12} \text{Tr}(T^{\tilde{q}} T^l) \delta_{\tilde{g}\tilde{f}} [\text{Tr}(T^e T^b T^g) + \text{Tr}(T^b T^e T^g)] \right\} \\
&\times \left\{ \frac{2}{3} \text{Tr}(T^e T^b T^g) \text{Tr}(T^{\tilde{q}} T^f T^{\tilde{q}} T^h) + \frac{2}{3} \text{Tr}(T^b T^e T^g) \text{Tr}(T^f T^{\tilde{q}} T^{\tilde{q}} T^h) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{12} \text{Tr}(T^{\tilde{q}} T^h) \delta_{\tilde{g}\tilde{f}} [\text{Tr}(T^e T^b T^g) + \text{Tr}(T^b T^e T^g)] \right\}. \tag{6.25}
\end{aligned}$$

Mit den folgenden Spurgleichungen für die Gruppe $SU(2)$

$$\text{Tr}(T^a) = 0, \tag{6.26}$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4} i \epsilon_{abc}, \tag{6.27}$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) = -\frac{1}{8} \epsilon_{abe} \epsilon_{cde} + \frac{1}{12} \delta_{ab} \delta_{cd}, \tag{6.28}$$

gilt für die Gleichung (6.25)

$$\begin{aligned}
(6.25) &= \left(\frac{2}{3}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \delta_{dk} \delta_{ig} \delta_{lj} \delta_{hf} \\
&\times \left\{ \frac{2}{3} \frac{1}{4} i \epsilon_{kd\tilde{q}} \left(-\frac{1}{8} \epsilon_{acz} \epsilon_{\tilde{q}lz} + \frac{1}{12} \delta_{ac} \delta_{\tilde{q}l} \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{4} i \epsilon_{\tilde{q}dk} \left(-\frac{1}{8} \epsilon_{cay} \epsilon_{\tilde{q}ly} + \frac{1}{12} \delta_{ac} \delta_{\tilde{q}l} \right) \right\} \\
&\times \left\{ \frac{2}{3} \frac{1}{4} i \epsilon_{ebg} \left(-\frac{1}{8} \epsilon_{\dot{q}fw} \epsilon_{\dot{q}hw} + \frac{1}{12} \delta_{\dot{q}f} \delta_{\dot{q}h} + \frac{1}{8} \epsilon_{f\dot{q}w} \epsilon_{\dot{q}hw} - \frac{1}{12} \delta_{\dot{q}f} \delta_{\dot{q}h} \right) \right\} \\
&\approx (c_1 \epsilon_{kd\tilde{q}} + c_2 \epsilon_{\tilde{q}dk}) \delta_{dk} \\
&\approx \epsilon_{kk\tilde{q}} \\
&= 0. \tag{6.29}
\end{aligned}$$

Ähnliche Rechnungen zeigen für den zweiten Term aus (6.12), daß auch dieser null ergibt. Der in Abbildung (6.2) skizzierte Graph ergibt somit keinen Beitrag. Demnach scheint die Konstruktion einer Triplett-Kante, die zwei Gluon-Gluino-Operatoren miteinander verbindet, nicht so einfach zu sein. Ob dies überhaupt möglich ist, soll im nächsten Abschnitt untersucht werden.

6.1.2 Graph 2

Eine andere Möglichkeit, einen Graphen mit drei Kanten zu konstruieren, ist in Abbildung (6.4) zu sehen. Dieser Graph verhält sich bezüglich der ψ -Integration genauso wie der zuvor berechnete Graph N_1 . Es gilt daher:

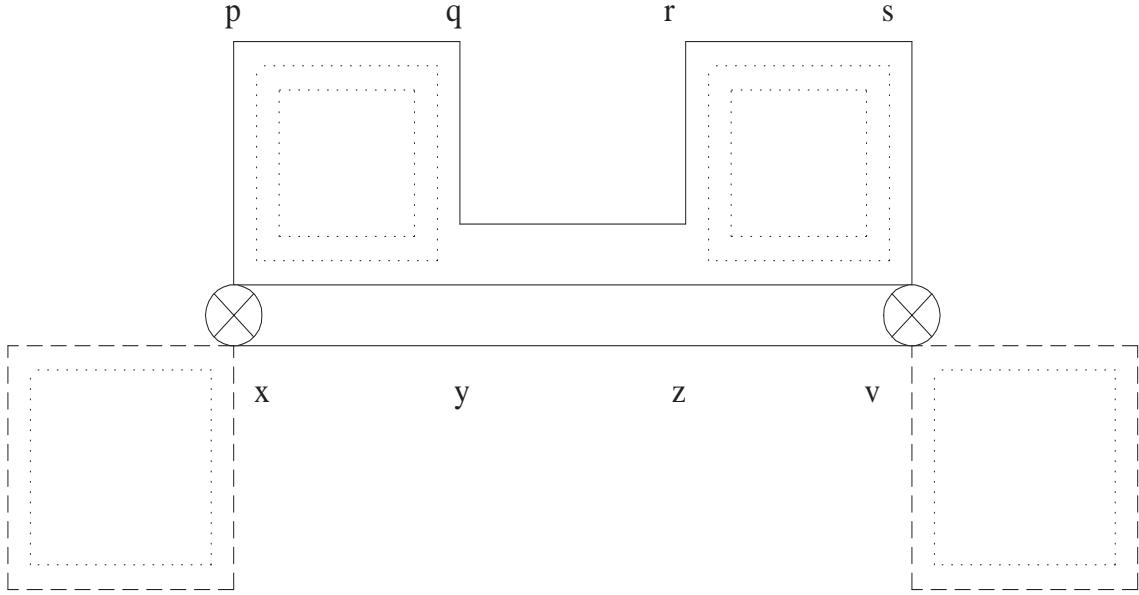


Abbildung 6.4: Zu $T = 1$ gehöriger Graph der Ordnung β^6 . Der Operator wird durch gestrichelte Linien dargestellt, wohingegen die Eichplatten durch gepunktete Linien gekennzeichnet sind.

$$\begin{aligned}
 N_2 &= -\frac{2}{3} K^{13} ((1 - \gamma_\mu) C)_{\bar{\chi}\chi} \\
 &\times \int \prod_i dU_i \left\{ \left(\epsilon_{bei} \epsilon_{acj} V_{yx}^{a\bar{q}} V_{vz}^{qb} V_{yx}^{cd} V_{vz}^{fe} V_{sv}^{gf} V_{sr}^{gh} V_{rz}^{hi} V_{qy}^{kj} V_{qp}^{kl} V_{px}^{ld} \right. \right. \\
 &\quad + \epsilon_{bfl} \epsilon_{agh} V_{yx}^{a\bar{q}} V_{vz}^{cb} V_{sv}^{cd} V_{sr}^{de} V_{rz}^{ef} V_{qy}^{hg} V_{qp}^{hi} V_{px}^{ij} V_{yx}^{kj} V_{vz}^{ql} \\
 &\quad \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}} T^{\bar{q}}) \text{ Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{left}}}) (\text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{le}}}))^2 \beta^3 \\
 &\quad \left. \left. \times \text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}} T^q) \text{ Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{right}}}) (\text{Tr}(U_{\text{Pl}_{\text{ri}}}))^2 \beta^3 \right) \right\}. \quad (6.30)
 \end{aligned}$$

Die Kennzeichnungen der Plaquette-Variablen mit ri, right, le und left beziehen sich auf die räumliche Lage der einzelnen Plaquetten und befinden sich in der Abbildung (6.4) auf der linken bzw. rechten Seite.

Da die U -Integration über den Gluino-Glue-Operator und einer Eichplaquette unabhängig von den anderen U -Integrationen ist, kann sie zuerst ausgeführt werden. Dazu benutzt man die Definition der Plaquette-Variablen (2.14). Damit folgt:

$$\text{Tr}(U_{\text{Pl}} T^{\bar{q}}) = (U_{ij}^4)^{-1} (U_{jk}^3)^{-1} U_{kl}^2 U_{lm}^1 T_{mi}^{\bar{q}}. \quad (6.31)$$

Da die Spur invariant unter symmetrischen Vertauschungen ist, gilt

$$\text{Tr}(U_{\text{Pl}}) = (U_{op}^1)^{-1} (U_{pr}^2)^{-1} U_{rs}^3 U_{so}^4. \quad (6.32)$$

Für die U -Integration hat man dann:

$$\begin{aligned}
 \int \prod_i dU_i \text{Tr} (U_{\text{Pl}} T^{\tilde{q}}) \text{Tr} U_{\text{Pl}} &= \int dU U_{so} U_{ij}^{-1} \int dU U_{rs} U_{jk}^{-1} \\
 &\times \int dU U_{kl} U_{pr}^{-1} \int dU U_{lm} U_{op}^{-1} T_{mi}^{\tilde{q}} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \delta_{sj} \delta_{oi} \delta_{sj} \delta_{rk} \delta_{lp} \delta_{kr} \delta_{mo} \delta_{lm} T_{mi}^{\tilde{q}} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 2^3 \delta_{im} T_{mi}^{\tilde{q}} \\
 &= \frac{1}{2} \text{Tr} (T^{\tilde{q}}). \tag{6.33}
 \end{aligned}$$

Wie die obige Rechnung zeigt, führt diese Integration auf die Spur des Generators der Gruppe $SU(2)$ hinaus. Da dies die spurfreien Pauli-Matrizen sind, ergibt die U -Integration keinen Beitrag, und der Graph N_2 verschwindet ebenso wie N_1 . Ein Hinzufügen weiterer Plaquetten mit höherer Ordnung in β ändert nichts an diesem Verhalten. Dies scheint die Tatsache widerzuspiegeln, daß es nicht möglich ist, eine Vereinigung von drei Majorana-Fermionen, die je einer Kante zugeordnet sind, mit einem festen Majorana-Fermion zu erreichen.

6.2 Analytische Ergänzungen

In diesem Abschnitt sollen ergänzende Rechnungen zu verschiedenen Graphen mit drei Kanten und je einem Operator an den Enden angestellt werden. Dazu überlegt man sich, welche Möglichkeiten es noch gibt, um einen Graphen von der Form (6.1) zu erzeugen. Insbesondere weiß man aus den vorangegangenen Rechnungen, daß der Operator niemals alleine auftreten darf, d.h. ohne eine oder mehrere Kanten. Eine Kante um den Operator wird durch den Graphen aus Abbildung (6.2) beschrieben. Betrachtet man nur die U -Integration an einem Ende des Graphens mit einem Operator, so ergibt sich in Anlehnung an Abbildung (6.5)

$$\begin{aligned}
 &\int dU_1 dU_2 V_1^{ab} V_2^{bc} V_2^{de} \text{Tr} (U_1 U_2) \text{Tr} (U_1 U_2 T^e) \\
 &\stackrel{U := \bar{U}_1 U_2, \quad v := v_1 v_2}{=} \int dU dU_2 V^{ac} V_2^{de} \text{Tr} (U) \text{Tr} (U T^e) \\
 &= \int dU V^{ac} \text{Tr} (U) \text{Tr} (U T^e) \underbrace{\int dU_2 V_2^{de}}_{=0} \\
 &= 0. \tag{6.34}
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist die Kurzform von Gleichung (6.29).

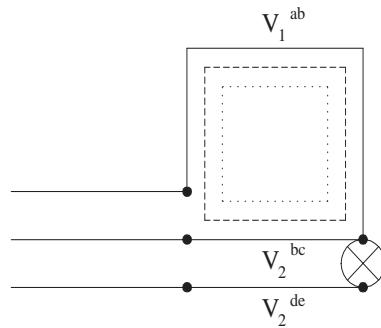


Abbildung 6.5: Graphische Darstellung für den Fall, daß der Operator, der durch gestrichelte Linien gekennzeichnet ist, von einer Kante umschlossen wird. Mit V_1 werden die drei äußeren Kanten abgekürzt und V_2 steht jeweils für eine untere Kante. Analog definieren sich die U -Matrizen. Die Eichplaketten werden wie gewohnt durch gepunktete Linien dargestellt.

Genauso zeigt man, daß der Graph bei dem zwei Kanten um den Operator gehen (siehe Abbildung (6.6)), keinen Beitrag gibt:

$$\begin{aligned}
 & \int dU_1 dU_2 V_2^{ab} V_1^{bg} V_2^{ce} \text{Tr}(U_2 U_1) \text{Tr}(U_2 U_1 T^e) \\
 & \stackrel{U := \bar{\bar{U}}_2 U_1,}{=} \int dU V^{ag} \text{Tr}(U) \text{Tr}(UT^e) \underbrace{\int dU_2 V_2^{ce}}_{=0} \\
 & = 0. \tag{6.35}
 \end{aligned}$$

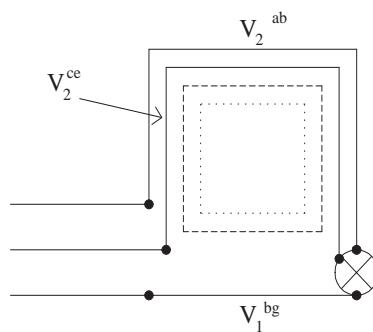


Abbildung 6.6: Diese Graphik beschreibt den Fall, daß der Operator von zwei Kanten eingeschlossen wird. V_2 steht stellvertretend für die drei äußeren Kanten und V_1 bezeichnet die untere Kante. Analog verhält es sich mit den Eichmatrizen.

In höherer Ordnung in β kommt auch der in Abbildung (6.7) skizzierte Fall in Frage.

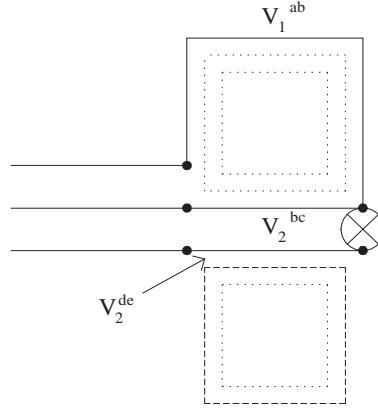


Abbildung 6.7: Diese Abbildung zeigt den Operator, wenn nur eine U -Matrix Kontakt zu einer Kante hat. Die Bezeichnungen wurden analog zur Abbildung (6.5) gewählt.

Dieser berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & \int dU_1 dU_2 dU_3 V_1^{ab} V_2^{bc} V_2^{de} \text{Tr}(U_1 U_2) \text{Tr}(U_1 U_2) \text{Tr}(U_2 U_3) \text{Tr}(U_2 U_3 T^e) \\
 & \stackrel{U := \bar{U}_1 U_2,}{=} \int dU dU_2 dU_3 V^{ac} V_2^{de} \text{Tr}(U) \text{Tr}(U) \text{Tr}(U_2 U_3) \text{Tr}(U_2 U_3 T^e) \\
 & \stackrel{\tilde{U} := \bar{U}_2 U_3,}{=} \int dU V^{ac} \text{Tr}(U) \text{Tr}(U) \int d\tilde{U} \tilde{V}^{df} \text{Tr}(\tilde{U}) \text{Tr}(\tilde{U} T^e) \underbrace{\int dU_3 (V_3^{fe})^{-1}}_{=0} \\
 & = 0. \tag{6.36}
 \end{aligned}$$

Die letzte Umformung gelingt wegen

$$\tilde{V}^{ab} = V_2^{ac} V_3^{cb} \tag{6.37}$$

$$\Rightarrow V_2^{ac} = \tilde{V}^{ab} (V_3^{bc})^{-1}. \tag{6.38}$$

Abschließend gibt es noch die in (6.8) abgebildete Möglichkeit. Dafür gilt:

$$\begin{aligned}
 & \int dU_1 dU_2 dU_3 V_1^{ab} V_2^{bc} V_3^{de} \text{Tr}(U_1 U_2) \text{Tr}(U_1 U_2) \text{Tr}(U_3 U_2) \text{Tr}(U_3 U_2 T^e) \\
 & \stackrel{U := \bar{U}_1 U_2,}{=} \int dU dU_2 dU_3 V^{ac} V_3^{de} \text{Tr}(U) \text{Tr}(U) \text{Tr}(U_3 U_2) \text{Tr}(U_3 U_2 T^e) \\
 & \stackrel{\tilde{U} := \bar{U}_3 U_2,}{=} \int dU V^{ac} \text{Tr}(U) \text{Tr}(U) \int d\tilde{U} \tilde{V}^{df} \text{Tr}(\tilde{U}) \text{Tr}(\tilde{U} T^e) \underbrace{\int dU_2 (V_2^{fe})^{-1}}_{=0} \\
 & = 0. \tag{6.39}
 \end{aligned}$$

Aus diesen Überlegungen kann man schließen, daß im Fall dreier Kanten bei der U -Integration immer eine Kante übrig bleibt, über die alleine integriert werden muß. Da

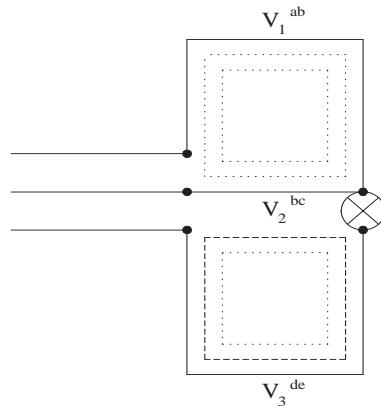


Abbildung 6.8: Graphische Darstellung für den Fall, daß der Operator von einer Kante umschlossen ist und die verbleibenden Kanten mit Plaquetten aus der Eichwirkung aufgefüllt sind. Mit V_1 werden die oberen drei Kanten zusammengefaßt, V_2 bezeichnet die mittlerer Kante und V_3 steht stellvertretend für die unteren drei Kanten.

Integrale dieser Art jedoch null sind, geben solche Graphen keinen Beitrag. Es ist daher prinzipiell nicht möglich, die Masse des Gluino-Glue-Teilchens durch eine Korrelationsfunktion bestehend aus drei Kanten zu bestimmen. Ein numerisches Verfahren soll im nächsten Abschnitt diese Vermutung untermauern.

6.3 Numerischer Weg

Die vorangegangenen Berechnungen der einzelnen Teilgraphen zeigen zum einen die Komplexität der Rechnungen und zum anderen scheinen sie darauf hin zu deuten, daß Graphen mit drei Kanten keinen Beitrag geben. Eine Möglichkeit, den dominanten Anteil des in Abbildung (6.1) gezeigten Graphen zu bekommen, besteht in der Berechnung des größten Eigenwertes der Matrix, die die zeitliche Entwicklung des Systems beschreibt. Der Graph (6.1) besteht aus je einem Operator an den Enden und einer Matrix S^τ dazwischen. τ gibt die zeitliche Distanz zwischen den Operatoren an. Insgesamt gilt somit für den Graphen

$$(6.1) = (O, (\bar{S})^\tau O). \quad (6.40)$$

Das Vorgehen ist analog zum Transfermatrix-Formalismus. Durch den Ausdruck (6.40) wird die zeitliche Entwicklung des Systems beschrieben. Ausgedrückt durch die Eigenwerte lautet er

$$(6.1) = \sum_i |c_i|^2 \lambda_i^\tau, \quad (6.41)$$

wobei λ_i die Eigenwerte von \bar{S} sind. Wird die Anzahl der Zeitscheiben unendlich groß, dominiert der größte Eigenwert λ_0 den Ausdruck (6.40):

$$(6.1) \quad = \quad \lambda_0^\tau \times \left[1 + \mathcal{O} \left(e^{-\tau \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1}} \right) \right]. \quad (6.42)$$

Berechnet man die Erweiterung des Graphens (6.1) um eine Kante, indem man sich eine beliebige Stelle x heraus greift und dort eine neue Kante einsetzt, erhält man einen Ausdruck für die Matrix zwischen den Operatoren.



Mit Hilfe der Grassmann-Integrationsregeln (3.47) aus dem Anhang erhält man für eine solche Erweiterung den folgenden mathematischen Ausdruck:

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram: } \dots \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \dots \\
&= \frac{1}{Z_0[0]} \int \prod_{\rho, r} d\psi_\rho^r(x) e^{\frac{1}{2}\bar{\psi}(x)\psi(x)} \psi_\alpha^a(x) \psi_\beta^b(x) \psi_\gamma^c(x) \psi_\delta^d(x) \psi_\epsilon^e(x) \psi_\phi^f(x) \\
&\quad \times \frac{K^3}{48} D_{\tilde{\alpha}\delta}^{\tilde{a}d}(x+1, x) D_{\tilde{\beta}\epsilon}^{\tilde{b}e}(x+1, x) D_{\tilde{\gamma}\phi}^{\tilde{c}f}(x+1, x) \\
&= -\frac{K^3}{48} D_{\tilde{\alpha}\delta}^{\tilde{a}d} D_{\tilde{\beta}\epsilon}^{\tilde{b}e} D_{\tilde{\gamma}\phi}^{\tilde{c}f} \left(-C_{\alpha\beta}\delta_{ab} \epsilon_{\gamma\delta\epsilon\phi}^{cdef} + C_{\alpha\gamma}\delta_{ac} \epsilon_{\beta\delta\epsilon\phi}^{bdef} - C_{\alpha\delta}\delta_{ad} \epsilon_{\beta\gamma\epsilon\phi}^{bcef} \right. \\
&\quad \left. + C_{\alpha\epsilon}\delta_{ae} \epsilon_{\beta\gamma\delta\phi}^{bcdf} - C_{\alpha\phi}\delta_{af} \epsilon_{\beta\gamma\delta\epsilon}^{bcde} \right) \\
&= -\frac{K^3}{48} \left\{ -\tilde{M}_{\gamma\tilde{\alpha}}^{a\tilde{c}} \left(CM^{\tilde{c}e} \tilde{M}^{\tilde{b}e} \right)_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} C_{\alpha\beta}\delta_{ab} - \tilde{M}_{\gamma\tilde{\beta}}^{\tilde{b}c} \left(CM^{\tilde{a}d} \tilde{M}^{\tilde{c}d} \right)_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}} C_{\alpha\beta}\delta_{ab} \right. \\
&\quad + \tilde{M}_{\gamma\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}c} \left(CM^{\tilde{a}d} \tilde{M}^{\tilde{b}d} \right)_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} C_{\alpha\beta}\delta_{ab} \\
&\quad + \tilde{M}_{\beta\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}b} \left(CM^{\tilde{c}e} \tilde{M}^{\tilde{b}e} \right)_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} C_{\alpha\gamma}\delta_{ac} - \tilde{M}_{\beta\tilde{\beta}}^{\tilde{b}b} \left(CM^{\tilde{c}d} \tilde{M}^{\tilde{a}d} \right)_{\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}} C_{\alpha\gamma}\delta_{ac} \\
&\quad + \tilde{M}_{\beta\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}b} \left(CM^{\tilde{b}e} \tilde{M}^{\tilde{a}e} \right)_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}} C_{\alpha\gamma}\delta_{ac} \\
&\quad - \tilde{M}_{\alpha\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}a} \left(CM^{\tilde{c}e} \tilde{M}^{\tilde{b}e} \right)_{\tilde{\gamma}\tilde{\beta}} C_{\beta\gamma}\delta_{bc} - \tilde{M}_{\alpha\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}a} \tilde{M}_{\beta\tilde{\beta}}^{\tilde{b}b} \tilde{M}_{\gamma\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}c} + \tilde{M}_{\alpha\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}a} \tilde{M}_{\gamma\tilde{\beta}}^{\tilde{b}c} \tilde{M}_{\beta\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}b} \\
&\quad + \tilde{M}_{\alpha\tilde{\beta}}^{\tilde{b}a} \left(CM^{\tilde{c}d} \tilde{M}^{\tilde{a}d} \right)_{\tilde{\gamma}\tilde{\alpha}} C_{\beta\gamma}\delta_{bc} + \tilde{M}_{\beta\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}b} \tilde{M}_{\alpha\tilde{\beta}}^{\tilde{b}a} \tilde{M}_{\gamma\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}c} - \tilde{M}_{\gamma\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}c} \tilde{M}_{\alpha\tilde{\beta}}^{\tilde{b}a} \tilde{M}_{\beta\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}b} \\
&\quad - \tilde{M}_{\alpha\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}a} \left(CM^{\tilde{b}e} \tilde{M}^{\tilde{a}e} \right)_{\tilde{\beta}\tilde{\alpha}} C_{\beta\gamma}\delta_{bc} - \tilde{M}_{\beta\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}b} \tilde{M}_{\gamma\tilde{\beta}}^{\tilde{b}c} \tilde{M}_{\alpha\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}a} + \tilde{M}_{\gamma\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}c} \tilde{M}_{\beta\tilde{\beta}}^{\tilde{b}b} \tilde{M}_{\alpha\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}a} \right\} \\
&:= -\frac{K^3}{48} \hat{S}_{\alpha\beta\gamma}^{abc} \tilde{S}_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}^{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}}. \quad (6.43)
\end{aligned}$$

Der Faktor $1/Z_0[0]$ muß wegen der Normierung des Erwartungswertes eingefügt werden. Eine ausführliche Diskussion findet sich in Abschnitt 6.4.

Da Graphen mit sogenannten Spitzen keinen Beitrag geben reduziert sich die obige Matrix auf:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\alpha\beta\gamma\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}^{abc\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} &= -\tilde{M}_{\alpha\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}a}\tilde{M}_{\beta\tilde{\beta}}^{\tilde{b}b}\tilde{M}_{\gamma\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}c} + \tilde{M}_{\alpha\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}a}\tilde{M}_{\gamma\tilde{\beta}}^{\tilde{b}c}\tilde{M}_{\beta\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}b} + \tilde{M}_{\beta\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}b}\tilde{M}_{\alpha\tilde{\beta}}^{\tilde{b}a}\tilde{M}_{\gamma\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}c} \\ &\quad - \tilde{M}_{\gamma\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}c}\tilde{M}_{\alpha\tilde{\beta}}^{\tilde{b}a}\tilde{M}_{\beta\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}b} - \tilde{M}_{\beta\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}b}\tilde{M}_{\gamma\tilde{\beta}}^{\tilde{b}c}\tilde{M}_{\alpha\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}a} + \tilde{M}_{\gamma\tilde{\alpha}}^{\tilde{a}c}\tilde{M}_{\beta\tilde{\beta}}^{\tilde{b}b}\tilde{M}_{\alpha\tilde{\gamma}}^{\tilde{c}a}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Eine Integration über U ergibt mit (4.69) und (5.73):

$$\begin{aligned} \int dU \hat{S}_{\alpha\beta\gamma\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}}^{abc\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} &= -\frac{4}{3} \epsilon_{abc} \epsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} (1-\gamma_\mu)_{\alpha\tilde{\alpha}} (1-\gamma_\mu)_{\beta\tilde{\beta}} (1-\gamma_\mu)_{\gamma\tilde{\gamma}} \\ &\quad + \frac{4}{3} \epsilon_{acb} \epsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} (1-\gamma_\mu)_{\alpha\tilde{\alpha}} (1-\gamma_\mu)_{\gamma\tilde{\beta}} (1-\gamma_\mu)_{\beta\tilde{\gamma}} \\ &\quad + \frac{4}{3} \epsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} \epsilon_{bac} (1-\gamma_\mu)_{\beta\tilde{\alpha}} (1-\gamma_\mu)_{\alpha\tilde{\beta}} (1-\gamma_\mu)_{\gamma\tilde{\gamma}} \\ &\quad - \frac{4}{3} \epsilon_{cab} \epsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} (1-\gamma_\mu)_{\gamma\tilde{\alpha}} (1-\gamma_\mu)_{\alpha\tilde{\beta}} (1-\gamma_\mu)_{\beta\tilde{\gamma}} \\ &\quad - \frac{4}{3} \epsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} \epsilon_{bea} (1-\gamma_\mu)_{\beta\tilde{\alpha}} (1-\gamma_\mu)_{\gamma\tilde{\beta}} (1-\gamma_\mu)_{\alpha\tilde{\gamma}} \\ &\quad + \frac{4}{3} \epsilon_{\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}} \epsilon_{cba} (1-\gamma_\mu)_{\gamma\tilde{\alpha}} (1-\gamma_\mu)_{\beta\tilde{\beta}} (1-\gamma_\mu)_{\alpha\tilde{\gamma}}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

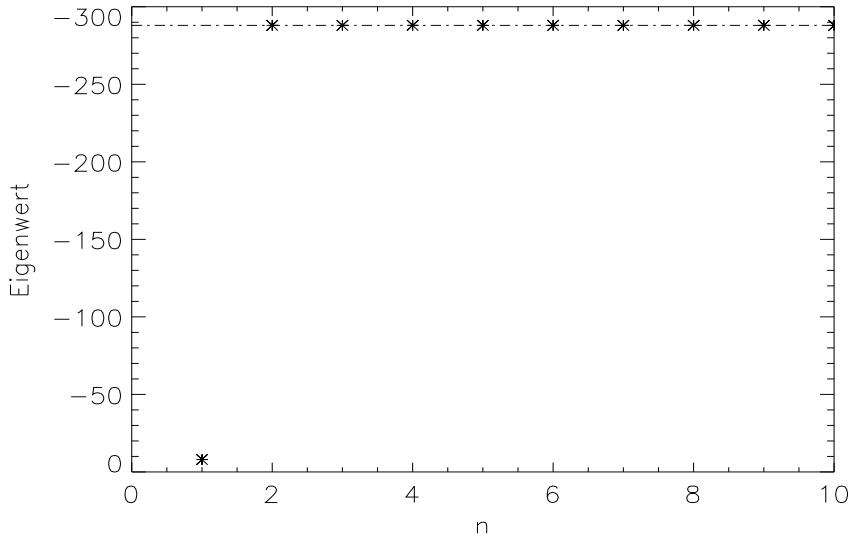


Abbildung 6.9: Berechnung des Eigenwertes mittels Vektoriteration.

Eine Addition aller oben berechneter Terme ergibt die Matrix $S_{\alpha\beta\gamma}^{abc} \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}$. Diese hängt von zwölf Parametern ab. Damit $S = S_{ij}$ numerisch berechnet werden kann, muß eine Abbildung der folgenden Art gefunden werden

$$\{\alpha\beta\gamma abc\} \longrightarrow i, \quad \{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}\tilde{\gamma} \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\} \longrightarrow j. \quad (6.46)$$

Für S ergibt sich dadurch eine $12^3 \times 12^3$ Matrix. Das ist eine Matrix mit fast drei Millionen Einträgen. Numerisch lassen sich diese Einträge mit ein wenig Geduld berechnen.

Die Matrix S ist im allgemeinen weder symmetrisch noch orthogonal. Zur Berechnung des führenden Terms in (6.40) benötigt man den Eigenwert der Matrix \tilde{S} . Da die Eigenwerte von S mit den Eigenwerten von \tilde{S} übereinstimmen, wie im Anhang C zu sehen ist, reicht es aus den größten Eigenwert von S zu berechnen. Bei einer so großen Matrix bietet sich dazu die Potenzmethode (Vektoriteration) an. Hierfür betrachtet man zunächst eine komplexe $n \times n$ Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \dots \lambda_n$,

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|, \quad (6.47)$$

und Eigenvektoren x_1, \dots, x_n .

Ausgehend von einem zufällig gewählten Startvektor $x^{(0)}$ werden nacheinander die Vektoren x^{k+1} gebildet:

$$x^{(k+1)} := Sx^{(k)} = S^k x^{(0)}, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (6.48)$$

Die Eigenvektoren x_i von S bilden eine Basis des \mathcal{C}^n und es gibt einen Vektor

$$c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathcal{C}^n, \quad (6.49)$$

mit

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n c_i x_i. \quad (6.50)$$

Aus (6.48) und (6.50) folgt für $x^{(k)}$

$$x^{(k)} = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k x_i = \lambda_1^k (c_1 x_1 + \tau_k). \quad (6.51)$$

Dabei ist τ_k

$$\tau_k := \sum_{i=2}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k c_i x_i = \mathcal{O} \left(\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \right) \quad (6.52)$$

so gewählt, daß

$$\tau_k \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \longrightarrow \infty. \quad (6.53)$$

Um λ_1 zu berechnen wählt man einen komplexen Vektor $d \in \mathcal{C}^n$ und bildet

$$\alpha^{(k)} := (x^{(k)}, d). \quad (6.54)$$

Aus (6.51) folgt dann

$$\frac{\alpha^{(k+1)}}{\alpha^{(k)}} = \frac{(x^{(k+1)}, d)}{(x^{(k)}, d)} = \lambda_1 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right) \rightarrow \lambda_1 \text{ für } k \rightarrow \infty. \quad (6.55)$$

Die Konvergenzgeschwindigkeit ist um so schneller, je weiter die Eigenwerte voneinander getrennt sind. Für die behandelte Matrix S konvergiert dieses Verfahren schon nach wenigen Iterationsschritten, was auch aus der Abbildung (6.9) hervorgeht.

k	$\alpha^{(k)}/\alpha^{(k-1)}$
2	-8.0000
3	-288.0000
4	-288.0000
5	-288.0000

Die 1728 Einträge der Startvektoren $x^{(0)}$ und d wurden wie folgt gewählt

$$x^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0)^T = d. \quad (6.56)$$

Mittels der Vektoriteration wird der betragsmäßig größte Eigenwert berechnet. Die möglicherweise positiven, zahlenmäßig größeren Eigenwerte werden dabei nicht berücksichtigt. Berechnet man das Eigenwertspektrum mit Hilfe von MATHEMATICA, so ergeben sich die mehrfach entarteten Eigenwerte 0 und -288. Unter Berücksichtigung des Vorfaktors $-\frac{K^3}{48}$ aus Gleichung (6.43) ergeben sich damit die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 6K^3, \quad (6.57)$$

$$\lambda_2 = 0. \quad (6.58)$$

Das numerische Ergebnis bestätigt somit den Eigenwert null. Welche Bedeutung der andere Eigenwert $6K^3$ hat, kann nicht erklärt werden. Möglicherweise entspricht dieser Eigenwert Graphen mit nicht-eichinvarianten Operatoren. Die analytischen Überlegungen deuten darauf hin, daß Graphen der obigen Form mit eichinvarianten Operatoren zum Eigenwert null gehören. Bei diesem Eigenwert gibt der Graph aus Abbildung (6.1) keinen Beitrag. Es scheint daher nicht möglich zu sein, auf diese Weise die Masse des Gluino-Glue-Teilchens zu bestimmen.

6.4 Gluino-Glue-Masse

Ziel der letzten Abschnitte war es einen Graphen zu konstruieren, der keine β -Abhängigkeit aufweist. Dies scheint nach den vorangegangenen Überlegungen nicht möglich zu sein. Nimmt man eine β -Abhängigkeit in Kauf, kann man einen ähnlichen Graphen wie in der QCD konstruieren. Dieser besteht dann aus einem Schlauch von Plaquetten mit einer τ -langen Kante aus V -Matrizen und ist in Abbildung (6.10) zu sehen. An den beiden Enden des Graphens befindet sich je ein Gluino-Glue-Operator.

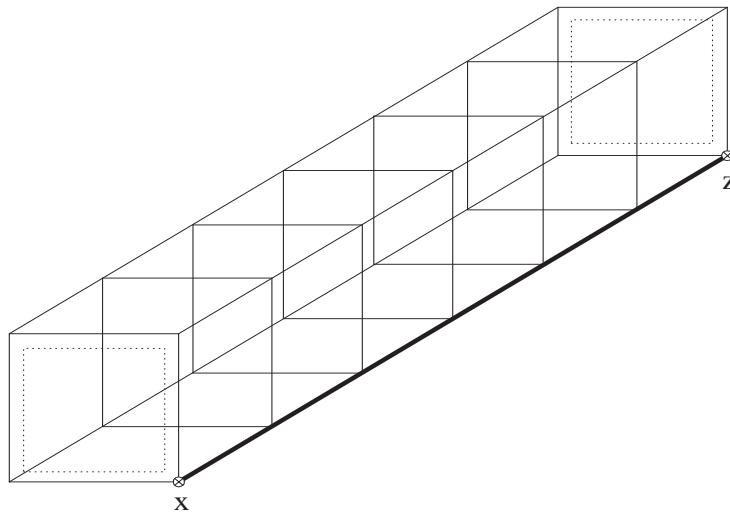


Abbildung 6.10: Graph zur Bestimmung des Massensprungs. An den Enden des Graphens befindet sich je ein gestrichelt gekennzeichneter Operator. Die V -Kante ist wieder fett eingezeichnet. Die Seiten der quadratischen Röhre müssen noch mit Plaquetten aus der Eichwirkung ausgefüllt werden.

Die Berechnung des Graphens kann man in verschiedene Teilrechnungen zerlegen.

1. Zunächst gibt es aus den beiden Operatoren zwei Plaquetten, die am Punkt x und am Punkt z ein Majorana-Fermion haben:

$$O_\epsilon(x) = \text{Tr} (U_1 T^e) \psi_\epsilon^e(x), \quad (6.59)$$

$$O_{\tilde{\epsilon}}(z) = \text{Tr} (U_2 T^{\tilde{e}}) \psi_{\tilde{\epsilon}}^{\tilde{e}}(z). \quad (6.60)$$

2. Des Weiteren gibt es eine Kette von τ Kanten. Diese enthält insgesamt τ Matrizen $D = CM$ und $2\tau + 2$ Majorana-Fermionen, wobei die zwei äußeren Fermionen aus den beiden Operatoren stammen.

$$\begin{aligned}\tilde{G} &\equiv \left(\frac{K}{2}\right)^{\tau} \psi_{\epsilon}^e(x) \left(\sum_{\substack{\alpha, \beta \\ a, b}} \psi_{\alpha}^a(y) D_{\alpha \beta}^{ab}(y, x) \psi_{\beta}^b(x) \right) \left(\sum_{\substack{\gamma, \delta \\ c, d}} \psi_{\gamma}^c(v) D_{\gamma \delta}^{cd}(v, y) \psi_{\delta}^d(y) \right) \dots \\ &\quad \times \left(\sum_{\substack{\rho, \tau \\ r, t}} \psi_{\rho}^r(z) D_{\rho \tau}^{rt}(z, w) \psi_{\tau}^t(w) \right) \psi_{\tilde{\epsilon}}^{\tilde{e}}(z)\end{aligned}\quad (6.61)$$

Jede Kante kann für die ψ -Integration wie folgt umgeformt werden¹

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\alpha, \beta \\ a, b}} \psi_{\alpha}^a(y) D_{\alpha \beta}^{ab}(y, x) \psi_{\beta}^b(x) &= - \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ a, b}} \psi_{\beta}^b(x) D_{\alpha \beta}^{ab}(y, x) \psi_{\alpha}^a(y) \\ &= - \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ a, b}} \psi_{\beta}^b(x) (D^T)_{\beta \alpha}^{ba}(x, y) \psi_{\alpha}^a(y).\end{aligned}\quad (6.62)$$

Die transponierte D -Matrix hat wegen (5.12) und (5.9) die folgende Gestalt

$$\begin{aligned}(D^T)_{\beta \alpha}^{ba} &= 2 [C (1 + \gamma_{\mu})]_{\beta \alpha}^T (V^T)^{ba} \\ &= 2 [(1 + \gamma_{\mu}^T) C^T]_{\beta \alpha} (V^T)^{ba} \\ &= -2 [(C + \gamma_{\mu}^T C)]_{\beta \alpha} (V^T)^{ba} \\ &\stackrel{(A.7)}{=} -2 [C (1 - \gamma_{\mu})]_{\beta \alpha} (V^T)^{ba}.\end{aligned}\quad (6.63)$$

Die obige Umformung führt somit zu

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\alpha, \beta \\ a, b}} \psi_{\alpha}^a(y) D_{\alpha \beta}^{ab}(y, x) \psi_{\beta}^b(x) &= 2 \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ a, b}} \psi_{\beta}^b(x) [C (1 - \gamma_{\mu})]_{\beta \alpha} (V^T)^{ba} \psi_{\alpha}^a(y) \\ &= 2 \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ a, b}} \psi_{\alpha}^a(x) [C (1 - \gamma_{\mu})]_{\alpha \beta} (V^T)^{ab} \psi_{\beta}^b(y) \\ &= \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ a, b}} \psi_{\alpha}^a(x) \hat{D}_{\alpha \beta}^{ab}(x, y) \psi_{\beta}^b(y).\end{aligned}\quad (6.64)$$

Die Matrix \hat{D} wird definiert durch

$$\hat{D} = 2 [C (1 - \gamma_{\mu})] V^T. \quad (6.65)$$

¹Diese Umformungen sind nicht zwingend nötig; sie machen die Rechnung jedoch übersichtlicher.

Für den Graphen \tilde{G} aus Gleichung (6.61) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \left(\frac{K}{2}\right)^\tau \psi_\epsilon^e(x) \left(\sum_{\substack{\alpha, \beta \\ a, b}} \psi_\alpha^a(x) \hat{D}_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) \psi_\beta^b(y) \right) \left(\sum_{\substack{\gamma, \delta \\ c, d}} \psi_\gamma^c(y) \hat{D}_{\gamma\delta}^{cd}(y, v) \psi_\delta^d(v) \right) \dots \\ &\quad \times \left(\sum_{\substack{\rho, \tau \\ r, t}} \psi_\rho^r(w) \hat{D}_{\rho\tau}^{rt}(w, z) \psi_\tau^t(z) \right) \psi_{\bar{\epsilon}}^{\bar{e}}(z). \end{aligned} \quad (6.66)$$

Die Fermion-Integration an jedem Gitterpunkt führt wegen (3.43) zu

$$\begin{aligned} \hat{G} &\equiv \int \prod_{\phi, f} d\psi_\phi^f(x) e^{-\frac{1}{2}\bar{\psi}(x)\psi(x)} \prod_{\kappa, k} d\psi_\kappa^k(y) e^{-\frac{1}{2}\bar{\psi}(y)\psi(y)} \dots \prod_{\iota, i} d\psi_\iota^i(z) e^{-\frac{1}{2}\bar{\psi}(z)\psi(z)} \hat{G} \\ &= \left(\frac{K}{2}\right)^\tau \sum_{\substack{\text{Dirac} \\ \text{Colour}}} C_{\epsilon\alpha} \delta_{ea} \hat{D}_{\alpha\beta}^{ab}(x, y) C_{\beta\gamma} \delta_{bc} \hat{D}_{\gamma\delta}^{cd}(y, v) \dots \hat{D}_{\rho\tau}^{rt}(w, z) C_{\tau\bar{\epsilon}} \delta_{t\bar{\epsilon}}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Jede Matrix \hat{D} setzt sich aus der Ladungskonjugationsmatrix C und der Fermionmatrix \hat{M} zusammen:

$$\hat{D} = C \hat{M}. \quad (6.68)$$

Dabei gilt in Anlehnung an (6.65)

$$\hat{M} = 2(1 - \gamma_\mu) V^T. \quad (6.69)$$

Da das Quadrat der Ladungskonjugationsmatrix $-1\!\!1$ ergibt, berechnet sich \hat{G} zu

$$\hat{G} = (-1)^\tau \left(\frac{K}{2}\right)^\tau \left(\hat{M}_{x,y} \hat{M}_{y,v} \dots \hat{M}_{w,z} C \right)_{\epsilon\bar{\epsilon}}^{e\bar{e}}. \quad (6.70)$$

Mit (6.69) folgt

$$\hat{G} = (-1)^\tau K^\tau 2^{\tau-1} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\epsilon\bar{\epsilon}} \underbrace{(V^T V^T \dots V^T)}_{\equiv (V_3^T)^{e\bar{e}}}. \quad (6.71)$$

3. Schließlich ist der gesamte Schlauch noch mit Plaquetten ausgefüllt, die von der Form

$$\frac{\beta}{2} \text{Tr}(U_P) \quad (6.72)$$

sind.

Klappt man den Graphen aus Abbildung (6.10) auf, so entsteht eine $\tau \times 4$ Fläche.

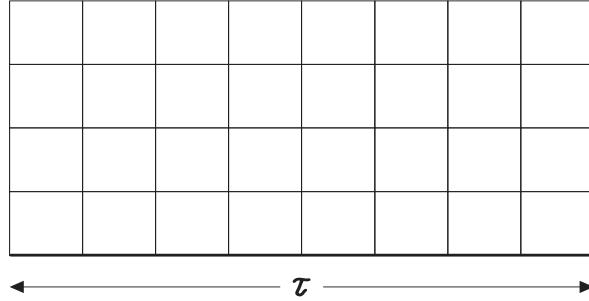


Abbildung 6.11: Graphische Darstellung des aufgeklappten Graphen aus Abbildung (6.10).

Über alle innenliegenden Plaquetten muß zunächst integriert werden. Für jede innere Integration gilt

$$\int dU \operatorname{Tr}(UU_6) \operatorname{Tr}(U^{-1}U_7) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(U_6 U_7). \quad (6.73)$$

Integriert man zuerst jede Zeile aus Abbildung (6.11), ohne den Rand zu berücksichtigen, erhält man einen Faktor $(\frac{1}{2})^{4(\tau-1)}$. Dann bleiben noch drei Integrationen zwischen den vier Zeilen übrig, die mit einem Faktor $(\frac{1}{2})^3$ beitragen. Somit folgt für die U -Integration des Graphens (6.10), ohne den Rand aus Abbildung (6.11),

$$\int \prod_{\text{innen}} dU_{\text{innen}} \hat{G}_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4(\tau-1)} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \operatorname{Tr}(U_3 U_2 U_3^{-1} U_1). \quad (6.74)$$

Mit den obigen drei Punkten ergibt sich für den Graphen aus Abbildung (6.10) vor der Integration über den Rand

$$\begin{aligned} G &= \int dU_1 dU_2 dU_3 (-1)^\tau K^\tau 2^{\tau-1} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\epsilon\tilde{\epsilon}} V_3^{\tilde{e}e} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{4\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{4\tau-1} \\ &\quad \times \operatorname{Tr}(U_1^{-1} U_3 U_2^{-1} U_3^{-1}) \operatorname{Tr}(U_1 T^{\tilde{e}}) \operatorname{Tr}(U_2 T^e) \\ &= \int dU_1 dU_2 dU_3 (-1)^\tau K^\tau 2^{\tau-1} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\epsilon\tilde{\epsilon}} V_3^{\tilde{e}e} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{4\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{4\tau-1} \\ &\quad \times \sum_{i,j,k,l} U_{1ij}^{-1} U_{3jk} U_{2kl}^{-1} U_{3li}^{-1} \sum_{m,o} U_{1mo} T_{om}^{\tilde{e}} \sum_{q,r} U_{2qr} T_{rq}^e. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Die einzelnen Integrationen berechnen sich mit den Gleichungen (4.63), (2.35) und (4.61)

wie folgt

$$\int dU_1 U_{1_{ij}}^{-1} U_{1_{mo}} = \frac{1}{2} \delta_{oi} \delta_{mj}, \quad (6.76)$$

$$\int dU_2 U_{2_{kl}}^{-1} U_{2_{qr}} = \frac{1}{2} \delta_{rk} \delta_{ql}, \quad (6.77)$$

$$\begin{aligned} \int dU_3 V_3^{\tilde{e}e} U_{3_{li}}^{-1} U_{3_{jk}} &= 2 T_{bc}^{\tilde{e}} T_{da}^e \int dU_3 U_{3_{ab}}^{-1} U_{3_{cd}} U_{3_{li}}^{-1} U_{3_{jk}} \\ &= 2 T_{bc}^{\tilde{e}} T_{da}^e \left\{ \frac{1}{3} \delta_{ji} \delta_{cb} \delta_{kl} \delta_{da} + \frac{1}{3} \delta_{ka} \delta_{ld} \delta_{jb} \delta_{ic} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} \delta_{kl} \delta_{da} \delta_{jb} \delta_{ic} - \frac{1}{6} \delta_{ji} \delta_{cb} \delta_{ka} \delta_{ld} \right\} \\ &= \frac{2}{3} T_{bc}^{\tilde{e}} T_{da}^e \delta_{ka} \delta_{ld} \delta_{jb} \delta_{ic}. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Damit geht die Gleichung (6.75) über in

$$\begin{aligned} G &= (-1)^\tau K^\tau 2^{\tau-1} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\epsilon\tilde{\epsilon}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{4\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{4\tau-1} \frac{1}{6} T_{mo}^{\tilde{e}} T_{qr}^e T_{om}^{\tilde{e}} T_{rq}^e \\ &= (-1)^\tau K^\tau 2^{\tau-1} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\epsilon\tilde{\epsilon}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{4\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{4\tau-1} \frac{1}{6} \text{Tr}(T^{\tilde{e}} T^{\tilde{e}}) \text{Tr}(T^e T^e). \end{aligned} \quad (6.79)$$

Mit Gleichung (1.67) und Summenbildung über die Farbindices ergibt sich

$$\begin{aligned} G &= (-1)^\tau K^\tau 2^{\tau-1} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\epsilon\tilde{\epsilon}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{4\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{4\tau-1} \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4} \\ &= (-1)^\tau K^\tau 2^{\tau-1} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\epsilon\tilde{\epsilon}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{4\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{4\tau-1} \frac{3}{8}. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Abschließend ist noch die Normierung der Erwartungswerte zu berücksichtigen². Allgemein gilt für den Erwartungswert von einer beliebigen geraden Anzahl von Fermionen

$$\langle \psi_\alpha^a(x) \cdots \psi_\delta^d(x) \rangle = \frac{1}{Z_0[0]} \int \prod_{\beta,b} d\psi_\beta^b(x) e^{-\frac{1}{2} \bar{\psi}(x)\psi(x)} \psi_\alpha^a \cdots \psi_\delta^d(x). \quad (6.81)$$

Das bedeutet, jede Fermion-Integration an einem Gitterpunkt trägt noch mit einem Faktor $1/Z_0[0]$ bei. Für diesen Normierungsfaktor gilt nach Gleichung (3.33)

$$Z_0[0] = -1. \quad (6.82)$$

²Handelt es sich, wie bei den in Kapitel 5 berechneten Graphen, um Graphen mit einer geraden Anzahl von Gitterpunkten, trägt die obige Normierung mit einem Faktor eins bei.

Diese Normierung ist notwendig, da für den Erwartungswert gelten muß

$$\langle 1 \rangle_x \equiv 1. \quad (6.83)$$

Der Graph G lautet dann in der endgültigen Version

$$\begin{aligned} G &= \frac{(-1)^\tau}{(-1)^{\tau+1}} K^\tau 2^{\tau-1} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\epsilon\tilde{\epsilon}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{4\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{4\tau-1} \frac{3}{8} \\ &= -K^\tau 2^{\tau-1} [(1 - \gamma_\mu) C]_{\epsilon\tilde{\epsilon}} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{4\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{4\tau-1} \frac{3}{8}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Verzichtet man in dem Anfangsausdruck auf die Umformung (6.62), so ergibt sich für den Graphen G der folgende Ausdruck

$$G = K^\tau 2^{\tau-1} [(1 + \gamma_\mu) C]_{\tilde{\epsilon}\epsilon} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{4\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{4\tau-1} \frac{3}{8}. \quad (6.85)$$

Wie man sich leicht überzeugen kann gilt

$$[(1 + \gamma_\mu) C]_{\tilde{\epsilon}\epsilon} = -[(1 - \gamma_\mu) C]_{\epsilon\tilde{\epsilon}}. \quad (6.86)$$

Das Ergebnis aus Gleichung (6.84) stimmt damit mit Gleichung (6.85) überein.

Für eine große Anzahl von Zeitscheiben τ fällt die Gluino-Glue-Gluino-Glue-Korrelationsfunktion exponentiell mit der Masse ab:

$$\langle \text{Tr}(U_{P_1}\psi(x)) \text{Tr}(U_{P_2}\psi(z)) \rangle = A e^{-m\tau}. \quad (6.87)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} A e^{-m\tau} &= G \\ &= K^\tau 2^\tau \left(\frac{\beta}{2}\right)^{4\tau} \left(\frac{1}{2}\right)^{4\tau} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \frac{3}{8} 2^{-1} [(1 + \gamma_\mu) C]_{\tilde{\epsilon}\epsilon}}_{\equiv A} \\ &= A K^\tau \beta^{4\tau} 2^{-7\tau}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Die Masse des Gluino-Glue-Teilchens berechnet sich damit zu

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{\tau} \left\{ \ln(K^\tau) + \ln(\beta^{4\tau}) + \ln(2^{-7\tau}) \right\} \\ m &= -\ln K - 4 \ln \beta + 7 \ln 2. \end{aligned} \quad (6.89)$$

In diesem Kapitel wurde die Methode entwickelt mit der Massen mittels der Hoppingparameter-Entwicklung berechnet werden können. Die aufgeführten analytischen Rechnungen stellen eine Ergänzung zu den oft sehr aufwendigen Monte-Carlo-Verfahren dar. Da die Teilchenmassen sehr wichtig sind, ist man auch an einem analytischen Zugang interessiert.

Aufbauend auf den in diesem Kapitel erstellten Grundlagen, sind weitere Korrekturen zur Gluino-Glue-Masse und die Berechnung weiterer Teilchenmassen geplant.

Das in Gleichung (6.89) erhaltene Ergebnis für die Gluino-Glue-Masse stellt eine erste grobe Abschätzung dar und gilt nur für kleine K -Werte. Je näher man zum kritischen Hoppingparameterwert kommt, um so mehr Korrekturen müssen berücksichtigt werden. Betrachtet man den $\mathbf{0}^{++}$ -Glueball in der reinen Eichtheorie, ist der führende Term nach [44]

$$m(\text{Glueball}) = -4 \ln \frac{\beta}{4} = -4 \ln \beta + 8 \ln 2. \quad (6.90)$$

Der Gluino-Glueball unterscheidet sich somit von dem Glueball durch

$$\begin{aligned} m(\text{Gluino-Glueball}) &= m(\text{Glueball}) - \ln K - \ln 2 \\ &= m(\text{Glueball}) + \ln \frac{1}{2K}. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Da diese Abschätzung nur für kleine K -Werte gilt, muß der Kehrwert $1/K$ sehr groß werden. Nimmt man für $1/K$ den Wert 5.55 an, gilt

$$m(\text{Gluino-Glueball}) = m(\text{Glueball}) + 1. \quad (6.92)$$

Das Ergebnis paßt sehr gut zu den numerischen Massen, die in Abbildung (10.1) zu sehen sind. Danach ist der $\mathbf{0}^{-+}$ -Gluino-Glueball bei einem Hoppingparameterwert von $1/K = 5.55$ um einen Faktor eins größer als der $\mathbf{0}^{++}$ -Glueball und stimmt somit mit der Gleichung (6.92) überein.

Kapitel 7

Monte-Carlo-Methoden in der Physik

Bei der Beschreibung der Gitter-Supersymmetrie bin ich in den vorangegangenen Kapiteln der Idee von G. CURCI und G. VENEZIANO gefolgt [18]. Mit der Einführung des Gitters gibt es das folgende Problem: Es gibt keine Gittertheorie, die die Supersymmetrie exakt erhält. Die Gründe liegen zum einen an dem Gitter selbst, das die Lorentzinvarianz und damit die Supersymmetrie bricht. Benutzt man zudem noch WILSON-Fermionen zur Beschreibung der Gluinos, bricht der WILSON-Term die chirale Symmetrie und damit auch die Supersymmetrie.

Eine Lösung bietet sich in der Benutzung von perfekten Wirkungen an. Diese enthalten allerdings nicht-lokale Wechselwirkungen, die numerisch sehr schwer zu implementieren sind. Insbesondere scheiden sie auf Parallelrechnern, wie der T3E, aus. Eine verbesserte Wirkung zum masselosen Gluino-Limes stellt die NEUBERGER-Wirkung dar, die masselose Quarks auf dem Gitter exakt beschreibt [46]. Aber, genauso wie die perfekten Wirkungen, hat auch diese nicht-lokale Wechselwirkungsterme.

Die Idee von G. CURCI und G. VENEZIANO ist, mit einer einfachen nicht-supersymmetrischen Gitter-Wirkung zu starten und die Supersymmetrie erst im Kontinuumsliches wieder herzustellen. Dieses Problem ist der chiralen Symmetriebrechung in der QCD durch WILSON-Fermionen sehr ähnlich und kann daher auf die gleiche Weise behandelt werden. Man muß also nur die nackten Parameter korrekt einstellen, um den supersymmetrischen Punkt zu finden. Im Fall der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie gibt es zwei Parameter, die angepaßt werden können. Das ist zum einen die Eichkopplung β und zum anderen die Gluino-Masse $m_{\tilde{g}}$.

Die chirale Symmetrie wird wieder hergestellt wenn der Hoppingparameter K auf $K_{\text{chiral}}^{\text{cr}}$ eingestellt wird. Dies ist äquivalent zu einer verschwindenden Gluino-Masse. Im Kontinuum geschieht die Wiederherstellung der Supersymmetrie ebenfalls durch diese Einstellung.

Das bedeutet:

$$K_{\text{chiral}}^{\text{cr}} = K_{\text{SUSY}}^{\text{cr}}. \quad (7.1)$$

In nicht-abelschen Feldtheorien wird der Kontinuumslimes erreicht durch $\beta \rightarrow \infty$. Der kritische Hoppingparameter ist eine Funktion der Eichkopplung wobei gilt

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} K^{\text{cr}} = \frac{1}{8}. \quad (7.2)$$

Betrachtet man die Eichgruppe $SU(2)$, reicht es aus β -Werte zwischen 2.0 und 3.0 zur Extraktion der Kontinuumsphysik zu betrachten. Da hohe β -Werte die numerische Simulation sehr teuer machen, haben wir in unserer Kollaboration immer den Wert $\beta = 2.3$ gewählt. In der Gitter-Wirkung (2.16) und (2.33) wird die nackte Eichkopplung konventionell durch $\beta = \frac{2N_c}{g^2}$ repräsentiert und die nackte Gluino-Masse wird durch den Hoppingparameter K ausgedrückt (2.34). In der (β, K) -Ebene gibt es eine kritische Linie, die mit verschwindender Gluino-Masse korrespondiert. Die erwartete Phasenstruktur ist in Abbildung (7.1) zu sehen.

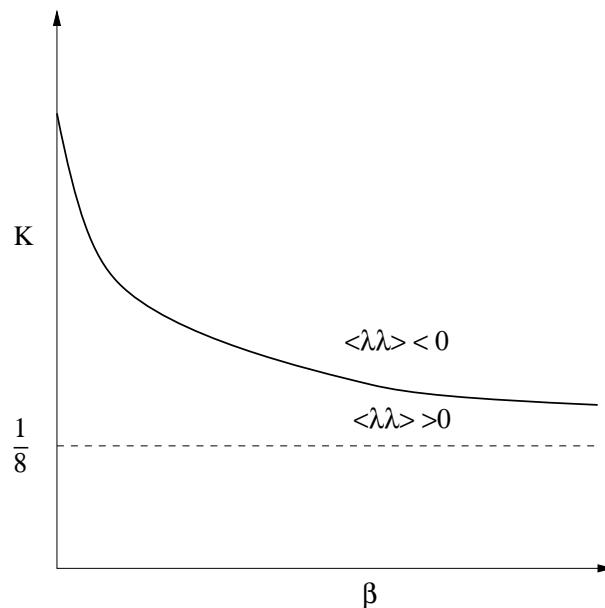


Abbildung 7.1: Graphische Darstellung des Phasendiagramms für eine $SU(2)$ Eichtheorie mit Gluinos in der adjungierten Darstellung. Zwischen den beiden Phasen kann es einen Phasenübergang oder einen „cross-over“ Bereich geben.

Die Wirkung von G. CURCI und G. VENEZIANO galt es nun zu implementieren. Dazu benutzt man die sogenannten Monte-Carlo-Algorithmen. Danach werden Feldkonfigurationen erzeugt, mit denen dann physikalisch interessante Objekte gemessen werden können. Letztendlich stellt die Computersimulation ein numerisches Verfahren zur Berechnung des

Pfadintegrals zur Verfügung.

Die Berücksichtigung von Fermionenfeldern bei der Simulation wird erschwert durch die Tatsache, daß Grassmann-wertige Felder im Rechner nur durch Matrizen dargestellt werden. Somit sind sie für numerische Zwecke nicht brauchbar. Die Lösung liegt in der Ausintegration der Fermionfelder, was in physikalisch relevanten Theorien immer möglich ist. Dies führt zur sogenannten Fermiondeterminante, die ein Funktional in den übrigen Feldern ist. Dabei unterscheidet man „quenched“ und „unquenched“ Simulationen. Bei der ersten Methode wird die Fermiondeterminante auf eins fixiert. Somit wird sie beim Updating der Felder nicht mehr berücksichtigt [32]. Durch diese Methode wird jedoch die Supersymmetrie hart gebrochen.

7.1 Multi-bosonischer Algorithmus mit Korrekturen

Zur Monte-Carlo-Simulation [55] von Fermionen auf einem Gitter entwickelte M. LÜSCHER 1993 den multi-bosonischen Algorithmus [37]. In der Originalversion für N_f Dirac-Fermion-Flavours betrachtet man die Approximation der Fermiondeterminante

$$|\det(Q)|^{N_f} = (\det(Q^\dagger Q))^{N_f/2} \simeq \frac{1}{\det P_n(Q^\dagger Q)}, \quad (7.3)$$

wobei die Folge von Polynomen P_n die folgende Eigenschaft hat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = x^{-N_f/2}. \quad (7.4)$$

Das Intervall $[\epsilon, \lambda]$ deckt das komplette Spektrum von $Q^\dagger Q$ ab. Das Problem des Vorzeichens der Determinante wird für ein Majorana-Fermion ($N_f = \frac{1}{2}$) in Kapitel (2.4) behandelt. Weitere detaillierte Ausführungen finden sich in [13].

Für die multi-bosonische Darstellung der Fermiondeterminante benutzt man die Wurzeln des Polynoms r_j , ($j = 1, 2, \dots, n$)

$$P_n(Q^\dagger Q) = P_n(\tilde{Q}^2) = r_0 \prod_{j=1}^n (\tilde{Q}^2 - r_j). \quad (7.5)$$

Geht man davon aus, daß die Wurzeln als komplex konjugierte Paare auftreten, kann man auch die folgende Form wählen

$$P_n(\tilde{Q}^2) = r_0 \prod_{j=1}^n [(\tilde{Q} \pm \mu_j)^2 + \nu_j^2] = r_0 \prod_{j=1}^n (\tilde{Q} - \rho_j^*)(Q - \rho_j), \quad (7.6)$$

mit $r_j \equiv (\mu_j + i\nu_j)^2$ und $\rho_j \equiv \mu_j + i\nu_j$. Mit Hilfe von komplexen skalaren Feldern Φ_{jx} kann man folgende Approximation vornehmen

$$\prod_{j=1}^n \det [(\tilde{Q} - \rho_j^*)(Q - \rho_j)]^{-1} \propto \int [d\Phi] \exp \left\{ - \sum_{j=1}^n \sum_{x,y} \Phi_{jy}^+ [(\tilde{Q} - \rho_j^*)(Q - \rho_j)]_{yx} \Phi_{jx} \right\}. \quad (7.7)$$

Da die obige Approximation für endliche Polynome vom Grad n nicht exakt ist, müßte man eigentlich die Resultate zu $n \rightarrow \infty$ extrapolieren. Einfacher ist es die n -Abhängigkeit zu untersuchen, um dann zu zeigen, daß der systematische Fehler, der durch die Endlichkeit des Polynoms verursacht wird, gegenüber dem statistischen Fehler vernachlässigbar ist.

Die Schwierigkeit für kleine Fermion-Massen in großen physikalischen Volumen ist das Ansteigen der *Konditionszahl* $\lambda/\epsilon \sim (10^4 - 10^6)$. Dadurch werden immer höhere Ordnungen $n = \mathcal{O}(10^3)$ für eine gute Approximation nötig, was viel Speicherplatz beansprucht. Zudem wird die Autokorrelation schlechter, da diese proportional zu n ist. Verbesserungen dieser Probleme bieten sich in der Einführung einer Zwei-Schritt-Polynom-Approximation an [40, 41]. In diesem Zwei-Schritt-multi-bosonischen Verfahren wird die Gleichung (7.7) ersetzt durch

$$\lim_{n_2 \rightarrow \infty} P_{n_1}^{(1)}(x) P_{n_2}^{(2)}(x) = x^{-N_f/2} \quad \text{mit } x \in [\epsilon, \lambda]. \quad (7.8)$$

Die multi-bosonische Darstellung wird nur für das erste Polynom $P_{n_1}^{(1)}$ benutzt. Dadurch erhält man eine grobe Abschätzung und kann daher die Ordnung n_1 relativ niedrig halten. Der Korrekturfaktor $P_{n_2}^{(2)}$ wird in einem stochastischen *Noisy-Korrektur-Schritt* mit einer globalen accept-reject Bedingung während des Update-Prozesses durchgeführt. Um einen exakten Algorithmus zu erhalten, muß in diesem Fall der Grenzwert $n_2 \rightarrow \infty$ betrachtet werden. Dabei stellt sich heraus, daß es für sehr kleine Fermionmassen, wie bei den Gluinos, praktischer ist, ein großes n_2 zu fixieren und eine weitere kleine Korrektur in der Berechnung der Erwartungswerte durch eine Neugewichtung mit einem noch feineren Polynom durchzuführen.

7.2 Update der Felder

Die Idee für das Updating der Felder besteht in einem stochastischen Korrektur-Schritt anstelle von Approximationen mit großen Polynomen der Ordnung n . Dieses Verfahren wird sehr ausführlich in [40] vorgestellt. Hier sollen nur die wichtigsten Schritte dokumentiert werden.

In dem Zwei-Schritt-Verfahren für N_f Fermion-Flavour ist der Betrag der Determinante gegeben durch

$$|\det(Q)|^{N_f} \simeq \frac{1}{\det P_{n_1}^{(1)}(\tilde{Q})^2 \det P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q})^2}. \quad (7.9)$$

Bei einem multi-bosonischen Verfahren mit n_1 skalaren Pseudo-Fermionfeldern wird das Update der skalaren Felder mit einem Heatbath- oder Overrelaxation-Algorithmus und das Update der Eichfelder mittels eines Metropolis-Algorithmus durchgeführt. Nach einem Metropolis-Schritt für das Eichfeld wird ein globaler accept-reject-Schritt eingeführt, um die Verteilung der Eichfelder U gemäß der rechten Seite von Gleichung (7.9) zu erhalten.

Der Noisy-Korrektur-Schritt generiert einen Zufallsvektor η gemäß der normierten Gauß-Verteilung

$$\frac{e^{-\eta^\dagger P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}[U]^2)\eta}}{\int[d\eta]e^{-\eta^\dagger P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}[U]^2)\eta}}, \quad (7.10)$$

und akzeptiert den Übergang $[U'] \leftarrow [U]$ mit einer Wahrscheinlichkeit

$$\min \{1, A(\eta; [U'] \leftarrow [U])\}, \quad (7.11)$$

mit

$$A(\eta; [U'] \leftarrow [U]) = \exp \left\{ -\eta^\dagger P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}[U']^2)\eta - \eta^\dagger P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}[U]^2)\eta \right\}. \quad (7.12)$$

Den Vektor η kann man aus η' gewinnen, da η' Gauß-verteilt ist

$$\frac{e^{-\eta'^\dagger \eta'}}{\int[d\eta']e^{-\eta'^\dagger \eta'}} \quad (7.13)$$

und folgende Zuordnung gilt

$$\eta = P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}[U']^2)^{\frac{1}{2}}\eta'. \quad (7.14)$$

Zur Berechnung der inversen Wurzel aus $(\tilde{Q}[U']^2)$ bieten sich zwei verschiedene Möglichkeiten an. Zum einen gilt mit $x \equiv \tilde{Q}^2$

$$P_{n_2}^{(2)}(x)^{-\frac{1}{2}} \simeq R_{n_3}(x) \simeq x^{N_f/4} S_{n_s}[P_{n_1}^{(1)}(x)]. \quad (7.15)$$

Dabei beschreibt

$$S_{n_s}(P) \simeq P^{\frac{1}{2}} \quad (7.16)$$

eine Approximation der Funktion $P^{\frac{1}{2}}$ auf dem Intervall $P \in [\lambda^{-N_f/2}, \epsilon^{-N_f/2}]$. Die Polynom-Approximationen R_{n_3} und S_{n_s} können auf die gleiche Weise festgelegt werden wie $P_{n_1}^{(1)}$ und $P_{n_2}^{(2)}$. Diese Approximationen sind leichter durchzuführen als zum Beispiel $P_{n_1}^{(1)}$, da bei einer gegebenen Ordnung eine höhere Präzision erzielt wird.

Eine andere Möglichkeit, eine passende Approximation für die Gleichung (7.14) zu finden, ist die Wahl der zweiten Zerlegung aus Gleichung (7.6) mit der Definition

$$P_{n_2}^{(1/2)}(\tilde{Q}) \equiv \sqrt{r_0} \prod_{j=1}^{n_2} (\tilde{Q} - \rho_j), \quad P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}^2) = P_{n_2}^{(1/2)}(\tilde{Q})^\dagger P_{n_2}^{(1/2)}(\tilde{Q}). \quad (7.17)$$

Der Noise-Vektor η kann dann aus dem Gauß-Vektor η' erzeugt werden nach

$$\eta = P_{n_2}^{(1/2)}(\tilde{Q})^{-1}\eta'. \quad (7.18)$$

Dabei ist $P_{n_2}^{(1/2)}(\tilde{Q})^{-1}$ gegeben durch

$$P_{n_2}^{(1/2)}(\tilde{Q})^{-1} = \frac{P_{n_2}^{(1/2)}(\tilde{Q})^\dagger}{P_{n_2}^{(2)}(\tilde{Q}^2)} \simeq P_{n_3}(\tilde{Q}^2) P_{n_2}^{(1/2)}(\tilde{Q})^\dagger. \quad (7.19)$$

Das in dieser Gleichung auftretende Polynom P_{n_3} bezeichnet eine Approximation für das Inverse des Polynoms $P_{n_2}^{(2)}$ in dem Intervall $[\epsilon, \lambda]$.

7.3 Meßkorrekturen

Der multi-bosonische Algorithmus wird nur im Grenzwert sehr hoher Polynomordnungen $n_2 \rightarrow \infty$ (7.8) exakt. Anstatt die Abhängigkeit der Polynomordnung durch mehrere Simulationen zu untersuchen, ist es besser, eine hohe Ordnung für die Simulation festzuhalten und eine weitere Korrektur in der Messung der Erwartungswerte durch feinere Polynome durchzuführen. Dies geschieht durch eine Neugewichtung der Konfigurationen in der Messung von unterschiedlichen Größen.

Für allgemeine N_f wird dieses Verfahren in [30] vorgestellt. Es fußt auf einer Polynom-Approximation $P_{n_4}^{(4)}$, für die folgendes gilt

$$\lim_{n_4 \rightarrow \infty} P_{n_1}^{(1)}(x)P_{n_2}^{(2)}(x)P_{n_4}^{(4)}(x) = x^{-N_f/2} \quad \text{mit } x \in [\epsilon', \lambda]. \quad (7.20)$$

Das Intervall $[\epsilon', \lambda]$ kann zum Beispiel wie folgt gewählt werden

$$\epsilon' = 0 \quad \text{und} \quad \lambda = \lambda_{\max}. \quad (7.21)$$

Dabei stellt λ_{\max} eine obere Grenze für die Eigenwerte von $Q^\dagger Q = \tilde{Q}^2$ dar. In diesem Sinne ist der Grenzwert $n_4 \rightarrow \infty$ auf einer beliebigen Eichkonfiguration exakt. Für die Herleitung von $P_{n_4}^{(4)}$ kann man n_4 -abhängige Rekursionsformeln verwenden, die durch die Beobachtung des Konvergenzverhaltens abgebrochen werden. Nach einer Neugewichtung nimmt der Erwartungswert einer Meßgröße A die nachstehende Form an

$$\langle A \rangle = \frac{\langle A \exp\{\eta^\dagger[1 - P_{n_4}^{(4)}(Q^\dagger Q)]\eta\} \rangle_{U,\eta}}{\langle \exp\{\eta^\dagger[1 - P_{n_4}^{(4)}(Q^\dagger Q)]\eta\} \rangle_{U,\eta}}. \quad (7.22)$$

Wenn das zweite Polynom eine gute Approximation liefert ändert der Korrekturfaktor den Erwartungswert nicht. In diesen Fällen dient die Meßkorrektur lediglich der Bestätigung der Ergebnisse.

7.4 Präkonditionierung

Die Schwierigkeit einer numerischen Simulation nimmt mit steigender Konditionszahl λ/ϵ zu. Die Konditionszahl legt das Eigenwertspektrum der fermionischen Matrizen auf typischen Eichfeld-Konfigurationen fest. Eine Möglichkeit die Konditionszahl zu erniedrigen, bietet das Verfahren der Präkonditionierung an. Die even-odd-Zerlegung für multi-bosonische Algorithmen wurde 1997 von B. JEGERLEHNER aufgestellt [28]. Danach wird die hermitische Fermionmatrix \tilde{Q} in Unterräume aufgeteilt, die nur gerade beziehungsweise nur ungerade Gitterpunkte enthalten:

$$\tilde{Q} = \gamma_5 Q = \begin{pmatrix} \gamma_5 & -K\gamma_5 M_{oe} \\ -K\gamma_5 M_{eo} & \gamma_5 \end{pmatrix}. \quad (7.23)$$

Für die Fermiondeterminante gilt

$$\det \tilde{Q} = \det \hat{Q} \quad \text{mit } \hat{Q} = \gamma_5 - K^2 \gamma_5 M_{oe} M_{eo}. \quad (7.24)$$

Der Vorteil der Matrix \hat{Q}^2 ist ihre kleinere Konditionszahl verglichen mit \tilde{Q}^2 .

Weitere detailliertere Erläuterungen der in unserer Kollaboration benutzten numerischen Verfahren finden sich zum Beispiel in [13], [51] oder [56].

Kapitel 8

String-Spannung

Die String-Spannung ist ein wichtiger Parameter, da ihr Wert die beiden Phasen Confinement und Screening kennzeichnet. In vielen numerischen und analytischen Berechnungen von Gitter-Eichtheorien wählt man die String-Spannung als einen Ordnungsparameter.

8.1 Statisches Potential

In einer Eichtheorie ist das Potential zwischen statischen Farbladungen eine physikalisch sehr interessante Größe, da es charakteristisch für die Dynamik des Eichfeldes ist. Wenn sich die Quellen in der fundamentalen Darstellung der Eichgruppe befinden bezeichnet man sie auch als *statische Quarks*. Das statische Potential eines Quark-Antiquark-Paares ($Q\bar{Q}$) kann aus den *Wilson-Loops* berechnet werden, wobei jedoch unterschiedliche Ansätze hierzu existieren. Ein Wilson-Loop ist ein geordnetes Produkt von Link-Variablen entlang eines geschlossenen rechteckigen Weges mit dem räumlichen Abstand R und der zeitlichen Ausdehnung T . Man kann ihn als „Weltbogen“ eines $Q\bar{Q}$ -Paares interpretieren: Zur euklidischen Zeit $\tau = 0$ wird ein Erzeugungsoperator

$$\Gamma_R^\dagger = Q(0) U(0 \rightarrow R) Q^\dagger(R) \quad (8.1)$$

mit einem eichkovarianten Paralleltransporter $U(0 \rightarrow R)$ auf den Vakuumszustand $|0\rangle$ angewendet. In der Anwesenheit eines Hintergrundfeldes propagiert das $Q\bar{Q}$ -Paar durch statische Wilson-Linien zu $\tau = T$, und wird schließlich durch die Anwendung von Γ_R anhiliert. Eine Spektralzerlegung der Wilson-Loops weist folgendes Verhalten auf:

$$\langle W(R, T) \rangle = \frac{\text{Tr} \left(\Gamma_R \mathcal{T}^T \Gamma_R^\dagger \mathcal{T}^{L_T - T} \right)}{\text{Tr} (\mathcal{T}^{L_T})} \quad (8.2)$$

$$= \frac{1}{\sum_m e^{-E_m L_T}} \sum_{m,n} |\langle m | \Gamma_R | n, R \rangle|^2 e^{-V_n(R)T} e^{-E_m(L_T - T)} \quad (8.3)$$

$$= \sum_n |d_n(R)|^2 e^{-V_n(R)T} \times (1 + \mathcal{O}(e^{-E_1(L_T - T)})) , \quad (8.4)$$

wobei \mathcal{T} die Transfermatrix bezeichnet und $\mathcal{T}|n\rangle = e^{-E_n} |n\rangle$ und $d_n(R) = \langle 0|\Gamma_R|n,R\rangle$ gilt. $|n,R\rangle$ ist der n -te Eigenzustand in dem geladenen Sektor des Hilbertraumes mit nicht verschwindendem Überlapp auf den Erzeugungsoperator Γ_R^\dagger , während $|n\rangle$ der n -te Eigenzustand des ungeladenen Sektors ist. $V_n(R)$ bezeichnet die n -te Anregung des $Q\bar{Q}$ -Zustandes; die Vakumsenergie E_0 wurde auf null gesetzt. E_1 ist die Massenlücke (mass gap) und entspricht somit der Masse des A_1^+ Glueballs.

8.1.1 Verbesserung des Grundzustandes

Das physikalisch interessante Grundzustandspotential $V(R) = V_0(R)$, kann man im Grenzwert für große T erhalten:

$$\langle W(R, T) \rangle = \sum_n C_n(R) e^{-V_n(R)T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} C_0(R) e^{-V(R)T}. \quad (8.5)$$

Die Überlappungen $C_n(R) = |d_n(R)|^2 \geq 0$ genügen der folgenden Normierungsbedingung:

$$\sum_n C_n(R) = 1. \quad (8.6)$$

Der Weg des Paralleltransporters $U(0 \rightarrow R)$, der für die Konstruktion des $Q\bar{Q}$ -Erzeugungs-Operators gebraucht wird, beeinträchtigt nicht die Eigenwerte der Transfermatrix und ist auf keinen Fall eindeutig. Diese Freiheit kann man ausnutzen, um die Überlappung des Grundzustandes durch geeignete Superpositionen solcher Wege zu verbessern, mit dem Ziel $C_0(R) \approx 1$ zu erhalten. Für jeden Wert von R dient dann die Abweichung des Wertes $C_0(R)$ von eins als Überwachung für die Unterdrückung von Beiträgen angeeregter Zustände, die auf diesem Weg erreicht werden. Eine ausführlichere Beschreibung findet sich in dem Abschnitt 8.7 über Smearing.

Das Grundzustandspotential erhält man nun je nach Definition des statischen Potentials aus (8.4):

$$\langle W(R, T) \rangle = |d_0|^2 e^{-V_0(R)T} + |d_1|^2 e^{-V_1(R)T} + \dots \quad (8.7)$$

$$= |d_0|^2 e^{-V_0(R)T} \left(1 + \frac{|d_1|^2}{|d_0|^2} e^{-[V_1(R)-V_0(R)]T} + \dots \right). \quad (8.8)$$

Anwenden der Logarithmus-Reihe ergibt:

$$\begin{aligned} \log \langle W(R, T) \rangle &= \log |d_0|^2 - V_0(R) T \\ &\quad + \frac{|d_1|^2}{|d_0|^2} e^{-[V_1(R)-V_0(R)]T} + \dots \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$\log \left(\frac{\langle W(R, T) \rangle}{\langle W(R, T+1) \rangle} \right) = \log \langle W(R, T) \rangle - \log \langle W(R, T+1) \rangle \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} &= V_0(R) + \frac{|d_1|^2}{|d_0|^2} e^{-[V_1(R)-V_0(R)]T} \\ &\quad \times (1 - e^{-V_1(R)-V_0(R)} + \dots). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Mit der Definition für das statische Potential

$$V(R, T) = \log \left(\frac{\langle W(R, T) \rangle}{\langle W(R, T+1) \rangle} \right), \quad (8.12)$$

erhält man somit für $V_0(R)$ den folgenden Fit-Ansatz:

$$V(R, T) = V_0(R) + \frac{|d_1|^2}{|d_0|^2} e^{-[V_1(R)-V_0(R)]T} \quad (8.13)$$

$$= V_0(R) + c_1(R) e^{-c_2(R)T}. \quad (8.14)$$

Dabei beschreibt $V_0(R)$ die Energie des Eichfeldes zwischen zwei statischen Farbladungen (Quark-Antiquark-Paar) die sich im Abstand R voneinander entfernt befinden.

Führt man folgende Abkürzungen ein

$$h(R, T) = e^{-\Delta V(R)T} (1 - e^{-\Delta V(R)}) \quad \text{und} \quad \Delta V(R) = V_1(R) - V_0(R), \quad (8.15)$$

ist die Form des Potentials konsistent mit der Schreibweise von G. S. BALI, K. SCHILLING und CH. SCHLICHTER [8].

Eine weitere mögliche Definition für $V(R, T)$ ist die folgende:

$$\tilde{V}(R, T) := -\frac{1}{T} \log W(R, T). \quad (8.16)$$

Daraus ergibt sich für $V_0(R)$ ¹, unter Benutzung von (8.9), der nachstehende Fit-Ansatz:

$$\tilde{V}(R, T) = V_0(R) - \frac{\log(|d_0|^2)}{T} \quad (8.17)$$

$$= V_0(R) - \frac{c_3(R)}{T}. \quad (8.18)$$

Entscheidend bei den obigen Definitionen des Potentials (8.12) und (8.16) ist, daß sich die zugehörigen Wilson-Loops $W(R, T)$ in der fundamentalen Darstellung befinden. Sie sind definiert als Erwartungswerte geschlossener rechteckiger $R \times T$ Schleifen.

¹Aus Gründen der Übersicht wird im folgenden $V_0(R)$ durch $V(R)$ ersetzt.

8.2 Bestimmung der String-Spannung

Eine Methode, die *String-Spannung* zu bestimmen, ist das Auseinanderziehen eines Quark-Antiquark-Paares. Bei genügend großem Abstand R ergibt sich die String-Spannung aus dem Potential zu

$$\sigma \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} V(R). \quad (8.19)$$

Wenn die String-Spannung ungleich null ist, wächst das Potential linear in R an:

$$V(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \sigma R. \quad (8.20)$$

Herrscht eine konstante Kraft σ zwischen weit getrennten Farbquellen, so spricht man von *statischem Confinement*. Große Wilson-Loops gehorchen dann der sogenannten *Flächenregel* [62]

$$W(R, T) \xrightarrow{R, T \rightarrow \infty} C e^{-\sigma RT}. \quad (8.21)$$

Quark-Confinement ist eine Konsequenz der nicht-abelschen Natur der Eichwechselwirkung in der QCD. Man erwartet, daß die Quarks in einem Hadron Quellen von chromoelektrischen Flüssen sind. Diese konzentrieren sich in engen Schläuchen, die die Konstituenten miteinander verbinden. Da sich die Energie nicht ausbreiten kann, wird bei dem Versuch das Quark-Antiquark-Paar zu separieren, ihr Potential so lange ansteigen, bis Vakuum-Polarisations-Effekte ihre Farbladung abschirmen. Bei einer genügend großen Separation der Quarks wird allerdings die in den Schläuchen gespeicherte Energie reelle Quark-Paare produzieren und die Energie des Systems wird durch den Übergang in einen neuen hadronischen Zustand, der aus farblosen neutralen Hadronen besteht, verringert.

Ein Verschwinden der String-Spannung würde eine Abschirmung von fundamentalen Farbladungen durch eine Wolke dynamischer Gluinos bedeuten. Dieses *Screening* wird in zwei Dimensionen für unsere $N = 1$ SYM-Theorie im Fall von masselosen Gluinos theoretisch vorausgesagt [24]. Eine Verallgemeinerung auf vier Dimensionen bleibt jedoch noch fraglich. Nach [54] erwartet man hier Confinement für statische Quarks. Eine „softe“ Brechung der Supersymmetrie durch eine Gluino-Masse führt zu einem Verschwinden des Screenings und das gewöhnliche Confinement tritt wieder auf. Der Mechanismus des Screenings in [24] bezieht sich auf die chirale Anomalie und scheint spezifisch für zwei Dimensionen zu sein.

8.3 Creutz-Ratios

Bei einer Gittersimulation ist die Bestimmung der String-Spannung wegen der Endlichkeit des Gitters nur durch eine Extrapolation zu $R, T \rightarrow \infty$ möglich. Ein Verfahren bietet sich mit den *Creutz-Ratios* an. Diese sind wie folgt definiert:

$$\chi(R, T) = -\log \left(\frac{W(R, T)W(R-1, T-1)}{W(R, T-1)W(R-1, T)} \right). \quad (8.22)$$

Durch eine Extrapolation zu großen R, T lässt sich aus den Creutz-Ratios die String-Spannung erschließen. Allerdings ist diese Methode nicht zu favorisieren, da der Fit, der letztlich an die Punkte gelegt wird, keine physikalische Motivation enthält. Für das $8^3 \times 16$ Gitter ($K = 0.19$) stimmen die Werte aus diesem Fit jedoch erstaunlich gut mit den anderen Methoden überein.

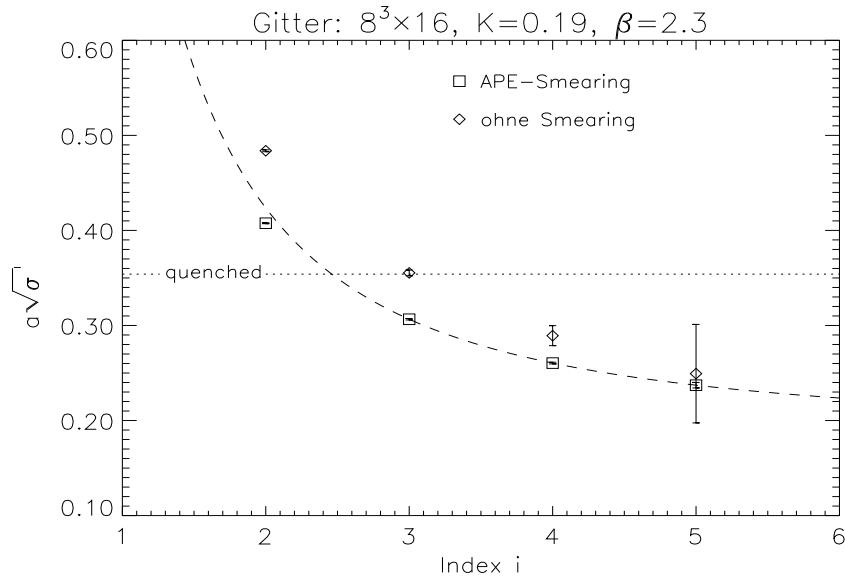


Abbildung 8.1: Diese Abbildung ist in Zusammenarbeit mit K. Spanderen angefertigt worden. Sie zeigt die Wurzel der String-Spannung σ in Abhängigkeit des Indexes des zugrundeliegenden Creutz-Ratios $\chi(i, i)$. Der Wert der String-Spannung für die reine SU(2) Eichtheorie ist dem Artikel [3] entnommen.

8.4 Potential-Fit

Eine andere Möglichkeit die String-Spannung zu bestimmen, liegt in einem einfachen Potential-Fit, wie er in Abbildung 8.2 zu sehen ist. Dazu trägt man für jeweils konstantes T das entsprechende Potential

$$\tilde{V}(R, T) = -\frac{1}{T} \log W(R, T) \quad (8.23)$$

auf. Durch diese Werte legt man dann einen Fit, der durch die Stark-Kopplungstheorie motiviert ist

$$V(R) = -\frac{a}{R} + \sigma R + V_0. \quad (8.24)$$

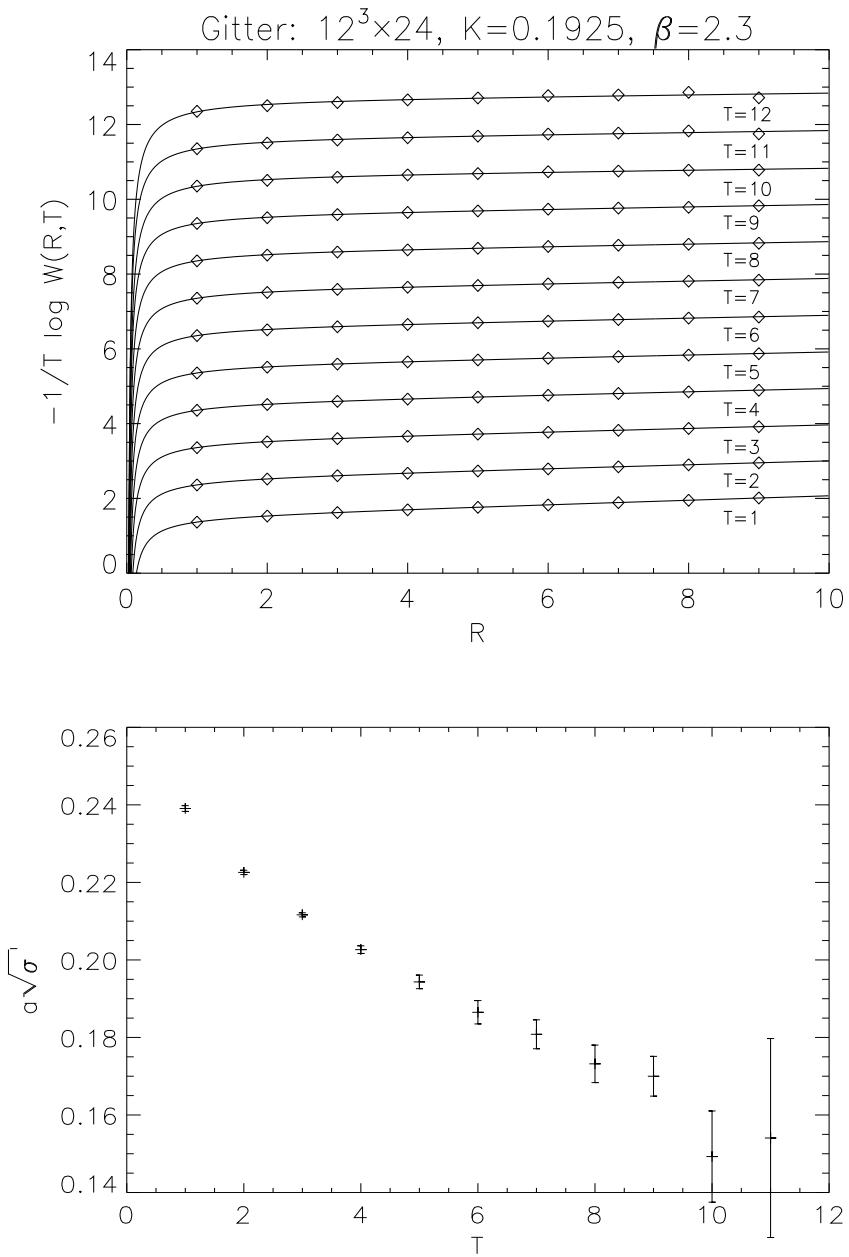


Abbildung 8.2: Statisches Potential $V(R, T) \equiv -\frac{1}{T} \log W(R, T)$ für verschiedene Werte von T . Um eine Überlappung der einzelnen Potentiale $V(R, T)$ zu vermeiden, wurde auf die einzelnen Meßwerte eine T -abhängige Konstante addiert. Im unteren Bild sieht man die aus den obigen Fits erhaltene String-Spannung in Abhängigkeit von T . Die letzten Punkte bei höheren T -Werten zeigen deutliche *Finite-Size-Effekte*.

Dieser rotationsinvariante Ansatz wird auch als *Cornell*-Ansatz bezeichnet [19].

Man erwartet aus der QCD, daß das statische Quark-Antiquark-Potential bei kurzen Distanzen R durch einen Coulomb-artigen Term dominiert wird

$$V(R) \simeq V_0 - \frac{\alpha}{R}. \quad (8.25)$$

Für große Distanzen sollte es einen linear anwachsenden Term geben:

$$V(R) \simeq V_0 + \sigma R. \quad (8.26)$$

Mit (8.24) erhält man für jedes T einen zugehörigen Wert für die String-Spannung. Eine Extrapolation zu $T \rightarrow \infty$ liefert schließlich das korrekte Ergebnis. Wie man jedoch schon an der Abbildung (8.2) sieht, ist dieses Verfahren sehr ungenau und stark fehlerbelastet. Es gibt somit nur einen groben Schätzwert für die String-Spannung an.

8.5 Zwei-Fit-Verfahren

Das Zwei-Fit-Verfahren geschieht in Anlehnung an eine Arbeit von G.S. BALI, K. SCHILING und CH. SCHLICHTER [8]. Zunächst bestimmt man aus dem Potential $V(R, T)$, das nach (8.12) definiert ist, das Potential $V(R)$ durch einen Fit der T -Abhängigkeit gemäß

$$V(R, T) = V(R) + c_1 e^{-c_2 T}, \quad (8.27)$$

$$\text{bzw. } V(R, T) = V(R) + \frac{c}{T}. \quad (8.28)$$

Das aus den obigen Fits erhaltene Potential $V(R)$ ist in der Abbildung (8.3) in Abhängigkeit von T für die R -Werte 1-6 auf einem $8^3 \times 16$ Gitter zu sehen. Auf dem $12^3 \times 24$ Gitter ist das Potential für R -Werte von 1-9 berechnet worden und in Abbildung (8.4) dargestellt.

Nach der Entwicklung (8.9) erscheint zunächst nur der erste Fit-Ansatz sinnvoll. Es zeigt sich aber durch die Abbildungen (8.3) und (8.4), daß die Unterschiede, die aus den verschiedenen Fit-Ansätzen erhaltenen Werte für $V(R)$, bei großen R -Werten immer geringer werden. Insbesondere wird deutlich, daß die Werte für die String-Spannung, die in Abhängigkeit von den obigen Werten ermittelt wurden, kaum voneinander abweichen. Bei den weiterführenden Diskussionen und Abbildungen wird jedoch ausschließlich der erste Fit (8.27) behandelt. Da wie in den Abbildungen (8.3) und (8.4) zu sehen ist, die Fehler für $T > 6$ signifikant anwachsen, wird $1 \leq T \leq 6$ als das beste Fit-Intervall auf dem Gitter gewählt. Auf dem kleineren $8^3 \times 16$ Gitter gibt es für T -Werte die zwischen eins und vier oder eins und fünf liegen konsistente Ergebnisse.

Auf diesem Weg wurde das Potential $V(R)$ für $1 \leq R \leq 6$ auf dem $8^3 \times 16$ Gitter und für $1 \leq R \leq 9$ auf dem $12^3 \times 24$ Gitter berechnet. Die Fehler werden mit wachsendem R immer größer und liefern daher keine glaubwürdigen Ergebnisse mehr. Dies liegt an den Finite-Size-Effekten, die bei R -Werten $R > L/2$ erwartet werden und mit wachsendem R ansteigen. Das Potential wird in den Abbildungen (8.8), (8.9) und (8.10) auf einem $8^3 \times 16$ Gitter bei $K = 0.19$ und $K = 0.1925$ und auf einem $12^3 \times 24$ Gitter bei $K = 0.1925$ gezeigt.

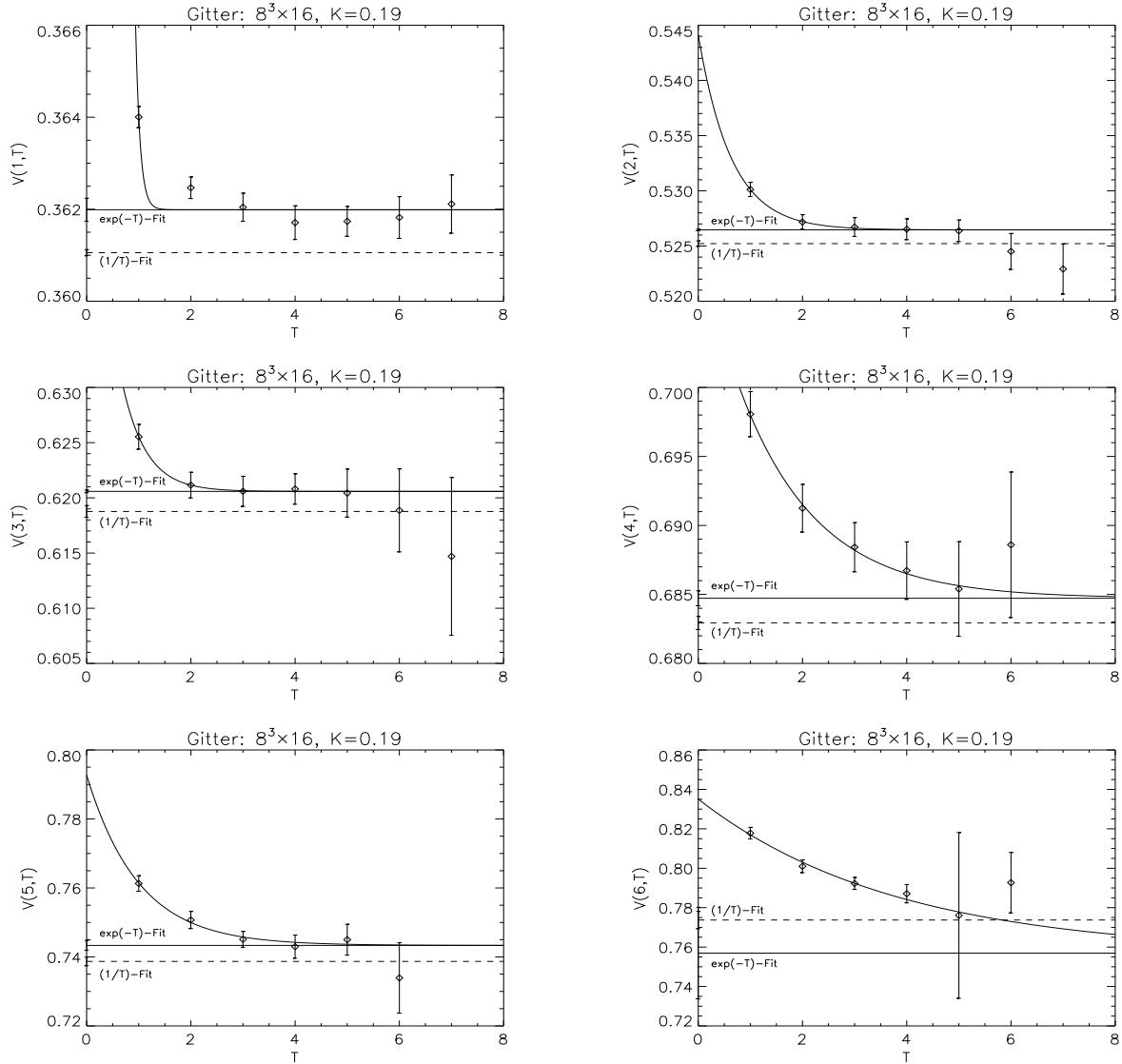


Abbildung 8.3: Diese Abbildung zeigt die Abhängigkeit des Potentials von T bei verschiedenen Werten für R auf einem $8^3 \times 16$ Gitter. Zum Vergleich wurde sowohl ein $1/T$ -Fit, sowie ein Exponentialfit durch die Punkte gelegt. Das Fit-Intervall erstreckt sich über die Punkte eins bis fünf.

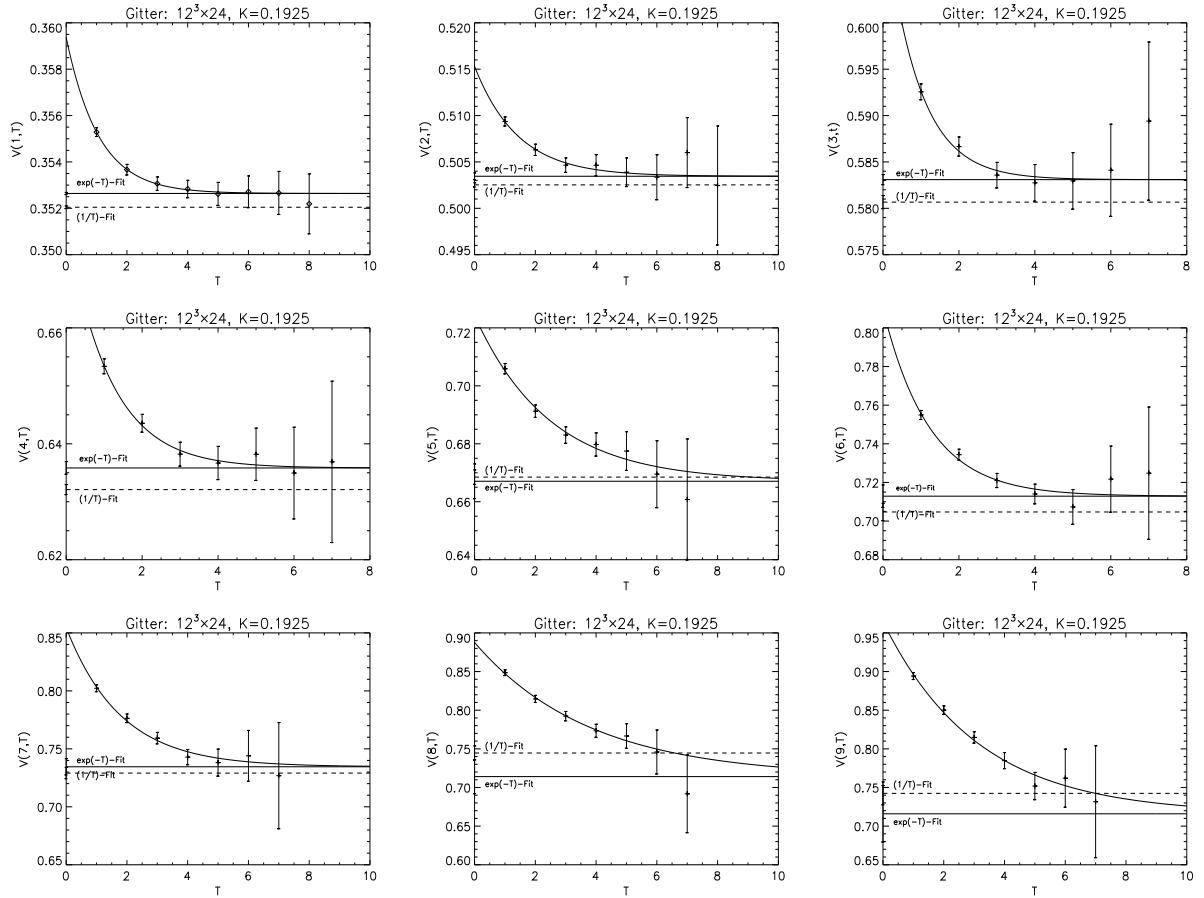


Abbildung 8.4: Diese Abbildung zeigt die Abhängigkeit des Potentials von T bei verschiedenen Werten für R auf einem $12^3 \times 24$ Gitter. Zum Vergleich wurde sowohl ein $1/T$ -Fit, sowie ein Exponentialfit durch die Punkte gelegt. Das Fit-Intervall erstreckt sich über die Punkte eins bis sechs.

Die String-Spannung σ ergibt sich daraus, indem man $V(R)$ gegen R aufträgt und durch diese Punkte den schon bekannten Potential-Fit (8.24) legt. Die Ergebnisse dieses Verfahrens sind in den Abbildungen (8.8), (8.9) und (8.10) zu sehen. Man erkennt das für Confinement typische Bild. Der Wert der String-Spannung hängt von dem R -Bereich ab, der für den Fit genommen wird. Für gewöhnlich nimmt die String-Spannung ab, wenn der größte R -Wert hinzugenommen wird. Dies sollte jedoch nicht mißverstanden und als Screening gedeutet werden. Man erwartet, daß sich das Potential aufgrund von Finite-Size-Effekten für größere R Werte wieder nach unten neigt. Auf diese Effekte wird im nächsten Abschnitt detaillierter eingegangen. Zusammenfassend sind die Ergebnisse der String-Spannung für unterschiedliche R -Fit-Intervalle in der Tabelle (8.1) dargestellt.

Gitter	K	R -Fit-Intervall	$a\sqrt{\sigma}$	α
$8^3 \times 16$	0.19	1-4	0.22(1)	0.23(2)
$8^3 \times 16$	0.19	1-5	0.21(1)	0.25(1)
$8^3 \times 16$	0.1925	1-4	0.21(1)	0.23(2)
$8^3 \times 16$	0.1925	1-5	0.19(1)	0.25(2)
$12^3 \times 24$	0.1925	1-6	0.17(1)	0.25(2)
$12^3 \times 24$	0.1925	1-7	0.16(1)	0.26(2)
$12^3 \times 24$	0.1925	1-8	0.13(2)	0.31(4)

Tabelle 8.1: Übersicht über die String-Spannung σ in Gittereinheiten und der Coulombstärke α , die aus dem Fit $V(R) = V_0 - \frac{\alpha}{R} + \sigma R$ bei unterschiedlichen R -Fit-Intervallen bestimmt wurden.

8.6 Gitterprobleme

In diesem Abschnitt sollen einige Probleme erläutert werden, die mit der Einführung des Gitters verbunden sind.

8.6.1 Finite-Size-Effekte

In numerischen Simulationen auf dem Gitter ist die Anzahl der Gitterpunkte durch die zur Verfügung stehende CPU-Leistung beschränkt. Um eine realistische Kontinuumstheorie zu realisieren, versucht man nun einerseits den Gitterabstand in Bezug auf die Korrelationslänge so klein zu wählen, daß ein Skalierungsverhalten approximativ erreicht wird. Andererseits sollte die Korrelationslänge nicht zu groß sein, da sonst das endliche Gitter einen großen Einfluß auf viele meßbare Größen hat.

Ist das simulierte Volumen sehr klein (kleiner oder vergleichbar mit der Größe eines hadronischen Grundzustandes), wird die Wellenfunktion des Grundzustandes zusammengedrückt und ihre Energie wird angehoben. Für genügend kleines L zeigt die Energie ein Skalenverhalten von $\frac{1}{L}$.

Hat man ein größeres aber kein unendliches Volumen, wird es eine kleine Verschiebung der Energien in Folge von Vakuum-Polarisations-Effekten geben. Die Vakuum-Polarisationen ergeben einen additiven Beitrag zu den Teilchen-Propagatoren, der nach LÜSCHER [35] speziell für die reine Gitter QCD gegeben ist durch:

$$\frac{m(L) - m(\infty)}{m(\infty)} \simeq -\frac{\lambda^2}{m(\infty)L} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}m(\infty)L}. \quad (8.29)$$

Dabei ist λ eine effektive niederenergetische Kopplung, die sich auf einen Streuphasen-Shift bezieht.

8.6.2 Gittereffekte

Neben den Finite-Size-Effekten gibt es noch weitere Effekte, die auf die endliche Gitterkonstante a zurückzuführen sind. Einige dieser Gittereigenschaften sollen in diesem Abschnitt erklärt werden. Wenn der Gitterabstand von null verschieden ist, passieren zwei Dinge. Zum einen wird die Rotationsinvarianz verletzt und zum anderen unterscheiden sich die Formulierungen der Gitter- und der Kontinuumstheorie durch Terme der Ordnung a, a^2, \dots . Die Verletzung der Rotationsinvarianz bedeutet, daß Zustände, die im Kontinuums-limes Mitglieder von verschiedenen Darstellungen der kubischen Gruppe sind und somit zu unterschiedlichen m_J gehören, nicht entartet sein werden. Die Terme der Ordnung a in der Wirkung liefern eine ganze Reihe von Effekten. Unter anderem ist die asymptotische Skalierung gebrochen. Außerdem geht die Universalität verloren, so daß das Spektrum von der Art der Fermionen (staggered, Wilson, ...) und von der spezifischen Form der Eichwirkung abhängig wird.

8.7 Smearing

Bei der Bestimmung der Glueball-Korrelationsfunktionen ist das Signal-zu-Rausch-Verhältnis immer ein Problem. Dies liegt an dem schlechten Überlapp der einzelnen Operatoren mit der Grundzustandswellenfunktion. Eine Lösung bietet sich mit einer eichinvarianten *Verschmierung* der einzelnen Links vor der Messung an. In den Berechnungen des Potentials wurden sämtliche Wilson-Loops mit Hilfe von Smearing-Routinen berechnet. Andernfalls ist die Projektion auf den Grundzustand so ungenügend, daß man kaum ein Signal erhält.

Die verschiedenen Smearing-Verfahren unterscheiden im Wesentlichen zwischen dem *APE-Smearing* und dem *Teper-Blocking*.

8.7.1 Teper-Blocking

Das Verfahren des Teper-Blockings ist iterativ nach der Vorschrift in Abbildung (8.5) definiert. Für die N-te Rekursion werden die Links $U_{x,\mu}^N$ aus den Links $U_{x,\mu}^{N-1}$ des (N-1)-ten Rekursionsschrittes berechnet und dann wieder in die Gruppe der $SU(N_c)$ -Matrizen

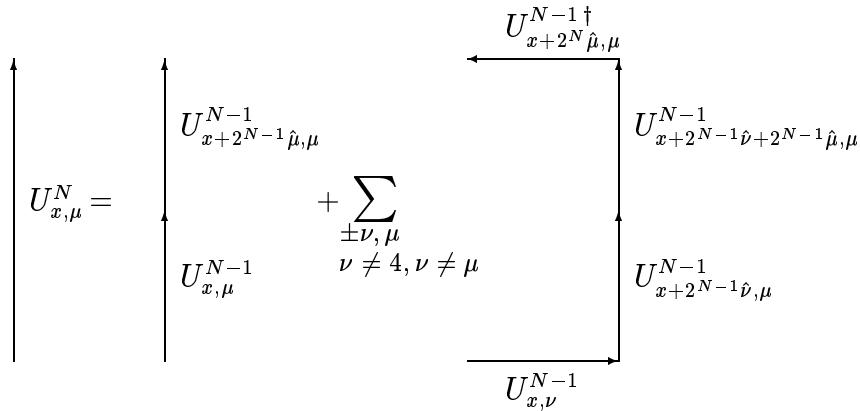


Abbildung 8.5: Graphische Darstellung des Blocking-Schemas nach TEPER.
Die geschmierten Links sind iterativ definiert und werden in jedem Iterations-
schritt um einen Faktor zwei länger.

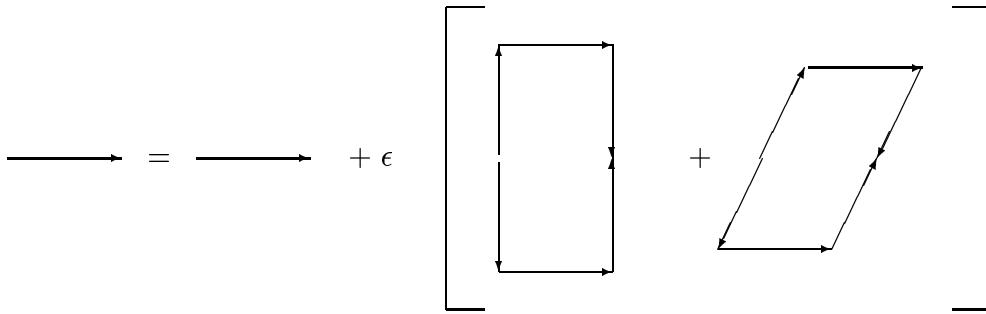


Abbildung 8.6: Graphische Darstellung des iterativen APE-Smearings.

zurückprojiziert:

$$U_{x,\mu}^N \leftarrow U_{x+2^{N-1}\hat{\mu},\mu}^{N-1} U_{x,\mu}^{N-1} + \sum_{\substack{\pm \nu, \mu, \nu \neq 4, \\ \nu \neq \mu}} U_{x+2^N\hat{\mu},\mu}^{N-1\dagger} U_{x+2^{N-1}\hat{\nu}+2^{N-1}\hat{\mu},\mu}^{N-1} U_{x+2^{N-1}\hat{\nu},\mu}^{N-1} U_{x,\nu}^{N-1}. \quad (8.30)$$

Die effektive Länge der geschmierten Linkvariablen nimmt in jedem Schritt um einen Faktor zwei zu. Damit haben auch die Plaquetten eine größere Ausdehnung und können so den Grundzustand besser herausprojizieren. Den Durchmesser des Grundzustandes erhält man als grobe Abschätzung aus der Länge $2^{N_{opt}}$, die sich aus der Anzahl der Blockingschritte ergibt. Der optimale Blocking-Level wiederum ist im wesentlichen abhängig von der Eichkopplung und der Gittergröße und kann mit einem Variationsverfahren bestimmt werden [51].

8.7.2 APE-Smearing

Das APE-Smearing stellt eine Alternative zum Teper-Blocking dar, das gerade für die Programmierung auf einem Parallelrechner sehr attraktiv ist [1, 56]. Bei diesem iterativen Verfahren wird jeder räumliche Link durch die Summe aus sich selbst und vier „Klammern“ in beiden Raumrichtungen quer zur Link-Richtung ersetzt. Dabei gewichtet man die Klammern mit einem Faktor ϵ und projiziert den Link zum Schluß wieder in die Gruppe der $SU(N_c)$ -Matrizen:

$$U_{x,\mu} \leftarrow U_{x,\mu} + \epsilon \sum_{\substack{\nu=1,2,3 \\ \nu \neq \mu}} \left(U_{x+\hat{\mu},\nu}^\dagger U_{x+\hat{\nu},\mu} U_{x,\nu} + U_{x+\hat{\mu}-\hat{\nu},\nu} U_{x-\hat{\nu},\mu} U_{x-\hat{\nu},\nu}^\dagger \right). \quad (8.31)$$

Man wiederholt diesen Vorgang N -mal für das gesamte Gitter. Bei moderaten Werten von ϵ stimmt dieses Verfahren mit dem numerischen Lösen einer Diffusionsgleichung überein. Dementsprechend ist der Diffusions- bzw. Smearing-Radius gegeben durch

$$R_S = N \epsilon. \quad (8.32)$$

Im Gegensatz zum Teper-Blocking ist der Smearing-Radius somit klar festgelegt und kann differenzierter justiert werden. Es gibt noch zahlreiche Modifikationen dieses Verfahrens [25], von denen jedoch keines deutliche Vorteile bietet.

8.8 Auswertung

Zunächst ist bei beiden Gittergrößen das Finden des optimalen Smearing-Radius wichtig, um einen guten Überlapp mit dem Grundzustand zu bekommen. Eine Studie der unterschiedlichen Smearinggradien ergab einen Vorteil des Smearingradius, der in der Region um drei liegt, gegenüber anderen Werten. Auf einem $8^3 \times 16$ Gitter wurden Messungen bei Smearinggradien von 3.3, 4.42 und 5.25 durchgeführt. Bei dem $12^3 \times 24$ Gitter wurden die Smearinggradien 2, 3, 4 und 5 getestet. Das Potential für unterschiedliche Smearinggradien ist in Abbildung (8.7) zu sehen. Ein Vergleich mit der Abbildung (8.10) zeigt, daß der Smearingradius drei das beste Ergebnis liefert.

Die Abbildungen (8.3) und (8.4) machen den Qualitätsunterschied zwischen dem $1/T$ -Fit und dem e^{-T} -Fit deutlich. Zwar ergibt sich, abhängig vom T -Fit, kaum ein Unterschied in dem letztlich erhaltenen Wert für die String-Spannung σ , der Fit des statischen Potentials $V_R(T)$ gelingt jedoch mit dem e^{-T} -Fit sehr viel besser.

Auf dem $8^3 \times 16$ Gitter liefert das Zwei-Fit-Verfahren für $K = 0.19$ eine String-Spannung von $\sqrt{\sigma} = 0.22(1)$. Je nachdem wie man das T-Fit-Intervall legt, bekommt man leicht voneinander abweichende Werte, die aber innerhalb der Fehler konsistent sind. Dies belegen die Abbildungen (8.8) und (8.9). Bezeichnet man das Intervall $1 \leq R \leq \frac{L}{2}$ als

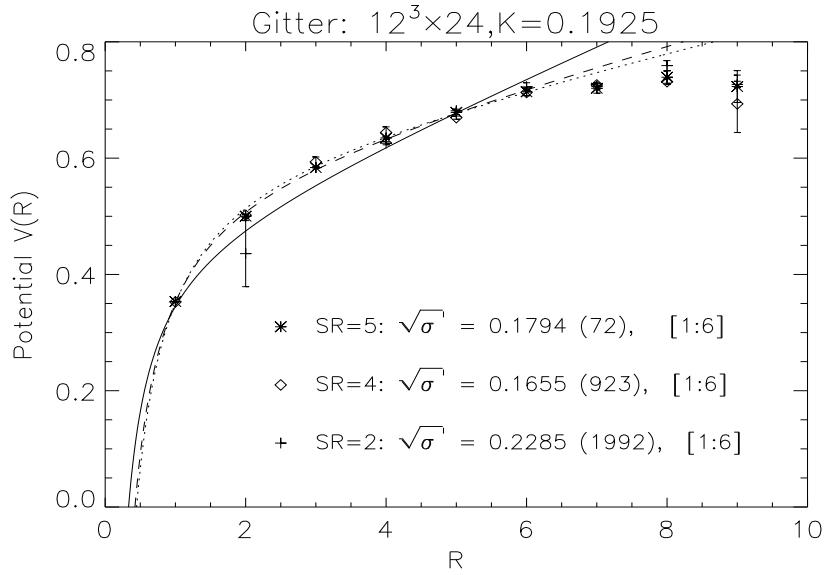


Abbildung 8.7: Drei-Parameter-Fit für das statische Potential: $V(R) = V_0 + \sigma R - \frac{\alpha}{R}$ auf dem Gitter $12^3 \times 24$ bei $K = 0.1925$ für unterschiedliche Smearinggradien (SR). Für einen sinnvollen Vergleich der Smearinggradien untereinander wurde ein einheitliches T-Fit-Intervalle von eins bis sechs gewählt.

glaubwürdig, so erhält man die folgenden Ergebnisse für die String-Spannung:

$$a\sqrt{\sigma} = 0.22(1) \text{ für } K = 0.1900, 8^3 \times 16, \quad (8.33)$$

$$a\sqrt{\sigma} = 0.21(1) \text{ für } K = 0.1925, 8^3 \times 16, \quad (8.34)$$

$$a\sqrt{\sigma} = 0.17(1) \text{ für } K = 0.1925, 12^3 \times 24. \quad (8.35)$$

Damit fällt die in Gittereinheiten gemessene String-Spannung, wenn man sich der kritischen Linie annähert, was mit den Vorhersagen übereinstimmt. Erwartet wird ein Phasenübergang bei einem Hoppingparameter, der in der Gegend um $K_c = 0.1955$ liegt. Das Abnehmen der String-Spannung wird hauptsächlich durch die Renormierung der Eichkopplung infolge virtueller Gluino-Loop-Effekte, die bei abnehmender Gitterkonstante a offenkundig werden, verursacht. Ein Vergleich der Resultate auf dem $8^3 \times 16$ - und $12^3 \times 24$ -Gitter zeigt, daß Finite-Size-Effekte scheinbar immer noch eine große Auswirkung haben. Dieses war allerdings auch zu erwarten, da für die räumliche Gitterausdehnung $L = 12a$ folgendes Ergebnis vorliegt $L\sqrt{\sigma} \simeq 2.1$. In der QCD mit $\sqrt{\sigma} \simeq 0.54 \text{ GeV}$ würde dieses mit $L \simeq 1 \text{ fm}$ übereinstimmen. Das $8^3 \times 16$ Gitter gibt daher bei $K = 0.1925$ für große R -Werte keine brauchbaren Ergebnisse mehr, wie die Abbildung (8.9) deutlich zeigt. Ausgelöst durch die Finite-Size-Effekte ergibt sich eine zu geringe String-Spannung, die nicht auf Screening-Effekte hindeutet.

Der Koeffizient α des Coulomb-Terms ist sehr nah an dem universellen Lüscher-Wert

von $\pi/12 = 0.26$ [36]. Diese „Kopplungskonstante“ ist universell, das heißt sie hängt von keinem anderen Parameter ab.

Mit den numerischen Resultaten für die $\mathbf{0}^{++}$ -Glueballmasse aus [13] erhält man für das Verhältnis der skalaren Glueballmasse $\mathbf{0}^{++}$ und der Wurzel aus der String-Spannung folgende Werte:

$$m(\mathbf{0}^{++})/\sqrt{\sigma} = 3.4(7) \text{ für } K = 0.1900, L = 8, \quad (8.36)$$

$$m(\mathbf{0}^{++})/\sqrt{\sigma} = 3.0(4) \text{ für } K = 0.1925, L = 8, \quad (8.37)$$

$$m(\mathbf{0}^{++})/\sqrt{\sigma} = 3.1(7) \text{ für } K = 0.1925, L = 12. \quad (8.38)$$

Die Fehler für die obigen Werte sind zwar nicht sehr klein, sie sind aber in diesem Intervall konsistent mit einer Konstanten, die unabhängig von K ist. Die Verhältnisse sind von der gleichen Größenordnung, nur etwas kleiner als in der reinen $SU(2)$ Eichtheorie. Dort erhält man für $\beta = 2.5$ je nach Gittergröße $m(\mathbf{0}^{++})/\sqrt{\sigma} = 3.6 - 3.8$.

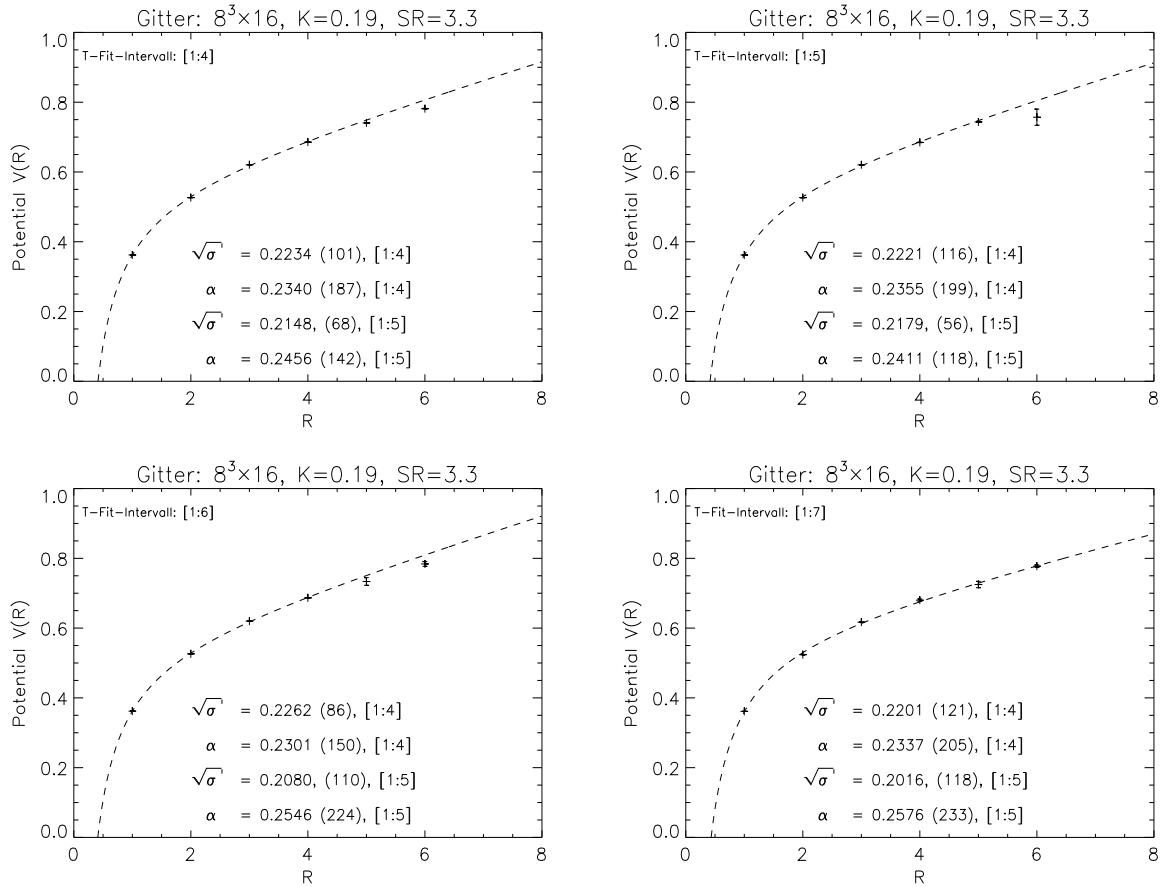


Abbildung 8.8: Drei-Parameter-Fit für das statische Potential: $V(R) = V_0 + \sigma R - \frac{\alpha}{R}$ auf dem Gitter $8^3 \times 16$ bei ($K = 0.19$) für unterschiedliche T-Fit-Intervalle. Das gewählte Intervall für den drei-Parameter-Fit befindet sich jeweils hinter den numerischen Ergebnissen für die String-Spannung. Innerhalb der numerischen Unsicherheiten stimmen die Ergebnisse für die String-Spannung überein.

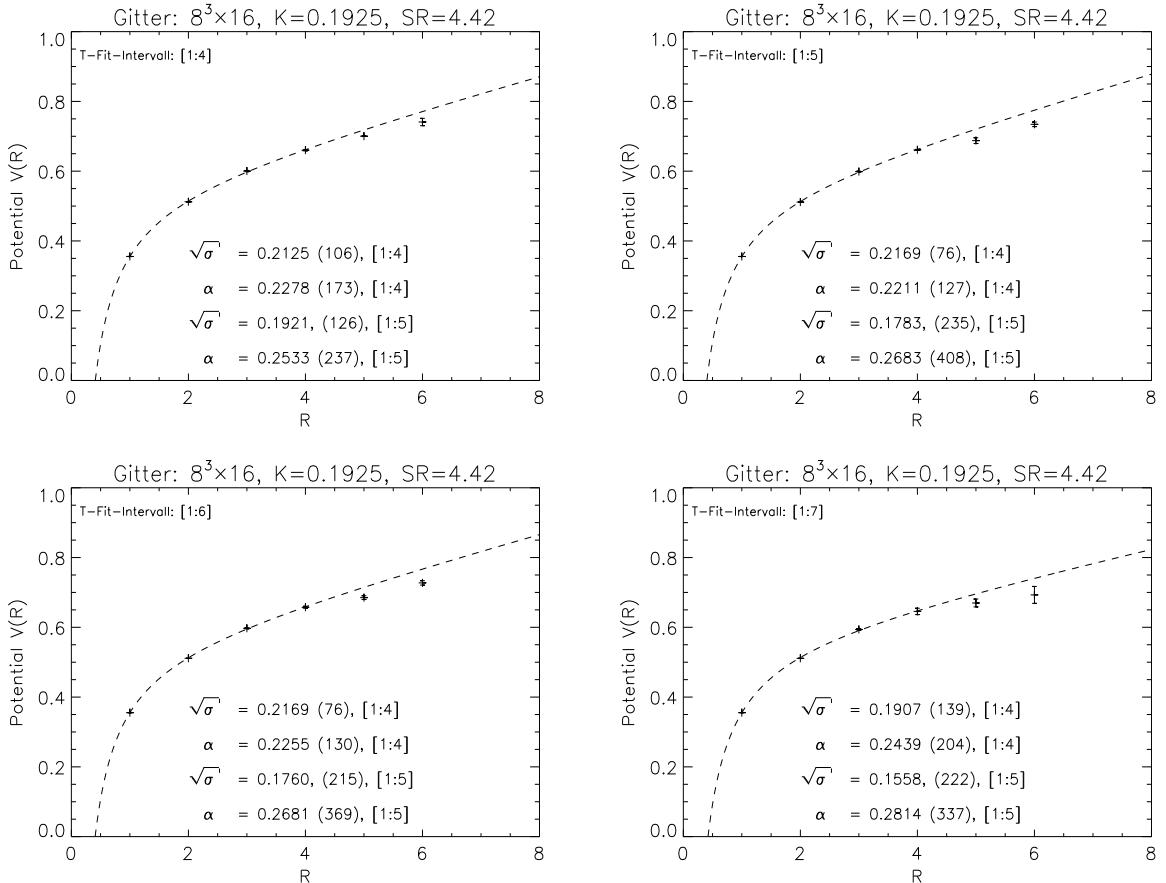


Abbildung 8.9: Drei-Parameter-Fit für das statische Potential: $V(R) = V_0 + \sigma R - \frac{\alpha}{R}$ auf dem Gitter $8^3 \times 16$ bei $K = 0.1925$ für unterschiedliche T-Fit-Intervalle. Da deutliche Finite-Size-Effekte zu erkennen sind, deutet der kleine Wert für die String-Spannung kein Screening an.

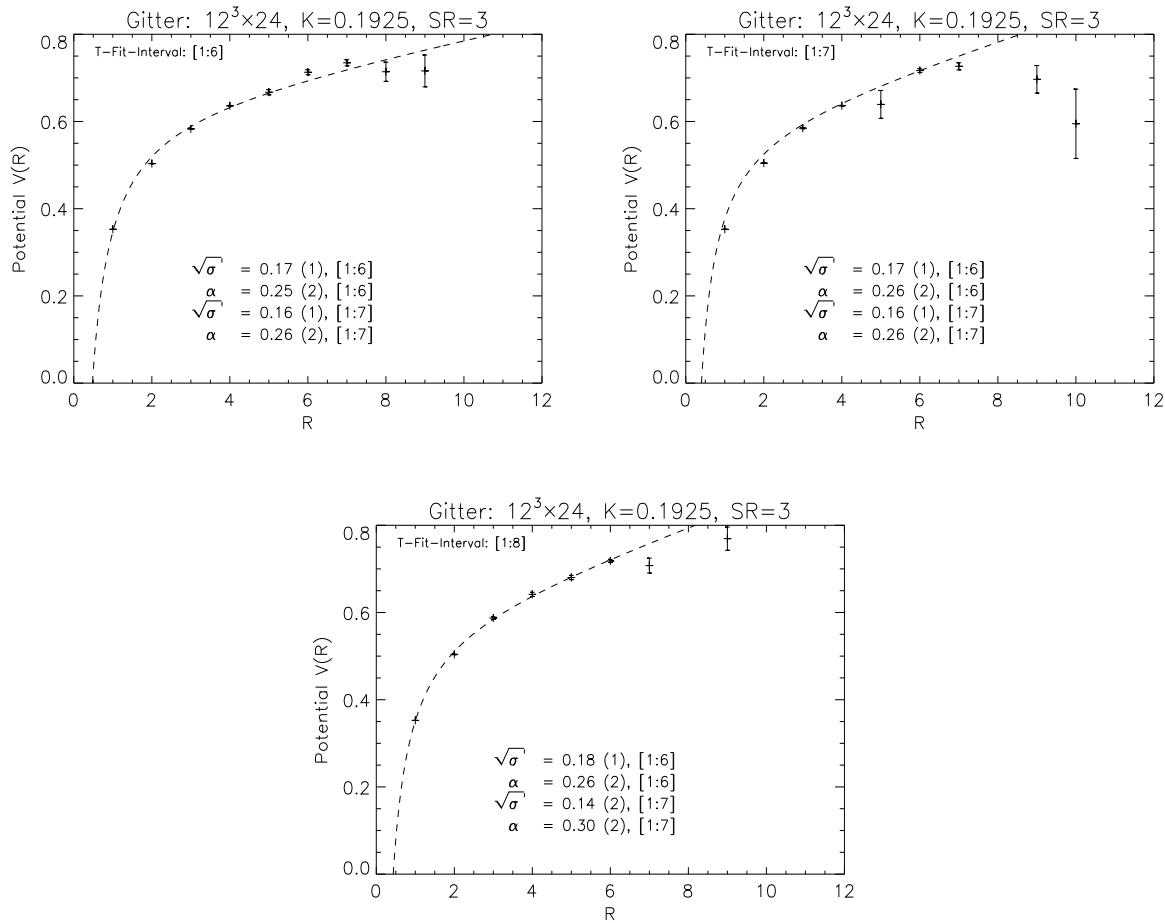


Abbildung 8.10: Drei-Parameter-Fit für das statische Potential: $V(R) = V_0 + \sigma R - \frac{\alpha}{R}$ auf dem Gitter $12^3 \times 24$ bei ($K = 0.1925$) für unterschiedliche T-Fit-Intervalle. Bei größeren R -Werten treten signifikante Fehler auf.

Kapitel 9

Massenbestimmung des 0^{-+} -Glueballs

9.1 Leichte Grundzustandsmassen

Die nicht verschwindene String-Spannung, die im vorherigen Kapitel beobachtet wurde, stimmt mit den allgemeinen Erwartungen [3] und [50] überein, wonach die Yang-Mills-Theorie mit Gluinos Confinement zeigt. Die asymptotischen Zustände sind daher Farbsingletts, ähnlich den Hadronen in der QCD. Die Struktur des leichten Hadronenspektrums ist eng mit dem theoretischen Fall der QCD eines einzigen Quark-Flavours verwandt, in der die chirale Symmetrie durch die Anomalie gebrochen wird.

Da sich sowohl die Gluonen wie auch die Gluinos bezüglich der adjungierten (hier Triplet-) Darstellung transformieren, ist es möglich, interpolierende Farbsinglett-Felder von jeder beliebigen Anzahl von Gluonen und Gluinos zu erzeugen. Die Anzahl der Gluonen und Gluinos muß nur größer als zwei sein. Aus den Erfahrungen, die man in der QCD gewonnen hat, erwartet man, daß sich die leichtesten Zustände sehr gut durch interpolierende Felder darstellen lassen, die aus einer geringen Anzahl von Konstituenten bestehen. Sehr einfache Beispiele hierfür sind die *Gluebälle*, die aus der reinen Yang-Mills-Theorie bekannt sind und die *Gluinobälle*, die pseudoskalaren Mesonen entsprechen. In dem hier verwendeten Modell der $SU(2)$ Super-Yang-Mills-Theorie wird der einfachste pseudoskalare Gluinoball, der aus zwei Gluinos besteht, $a - \eta'$ genannt. Dabei erinnert die Bezeichnung a daran, daß sich sämtliche Konstituenten in der adjungierten Darstellung befinden. η' steht für das korrespondierende η' -Meson in der QCD. Gemischte Gluino-Glueball-Zustände können aus unterschiedlichsten Anzahlen von Gluonen und Gluinos erzeugt werden. Im einfachsten Fall bestehen sie nur aus einem Gluon und einem Gluino.

9.2 Glueball-Zustände

Genauso wie die Glueballzustände sind die Methoden zur Berechnung ihrer Massen in numerischen Monte-Carlo-Simulationen aus der reinen Eichtheorie sehr gut bekannt.

Der leichteste Zustand ist der $J^P = 0^+$ Glueball, der aus symmetrischen Kombinationen von raumartigen Plaquetten, die einen Gitterpunkt berühren, erzeugt werden kann. Für eine Optimierung des Signals benutzt man *geblockte* oder *verschmierte* Links anstelle der ursprünglichen Links. Um einen ersten Überblick über die Massen zu bekommen reicht eine Berechnung von *effektiven Massen* $m(t_1, t_2, T)$ aus¹. Die effektiven Massen werden bei einer gegebenen Gitter-Zeitausdehnung T und festen Zeitscheiben-Paaren t_1 und t_2 definiert. Man kann dann nach Zeitintervallen suchen, in denen die effektiven Massen annähernd konstant sind und einen Ein-Massen-Fit in diesem Intervall durchführen. In den Fällen, in denen die Statistik hoch genug ist und die zugehörigen Fehler klein sind, können auch Zwei-Massen-Fits stabil sein und Informationen über den nächst höheren angeregten Zustand geben.

Im Kontinuum werden Glueball-Zustände klassifiziert durch ihre Lorentz-Kovarianz-Eigenschaften: Impuls p , Masse m , Spin J , Parität P und ihre Ladungskonjugation C . Der Spin eines Zustandes wird allgemein durch die unitäre irreduzible Darstellung der Gruppe $SU(2)$ festgelegt und speziell für bosonische Zustände durch die Rotationsgruppe $SO(3)$ beschrieben. Auf einem euklidischen hyperkubischen Gitter wird die Rotationssymmetrie zur Symmetriegruppe des Würfels, der *kubischen Gruppe* \mathbf{O} , herunter gebrochen. Diese ist eine exakte Symmetriegruppe für die Gittertheorie und die Eigenzustände des Hamiltonoperators müssen bezüglich der unitären irreduziblen Darstellungen von \mathbf{O} klassifiziert werden.

Die kubische Gruppe \mathbf{O} hat 24 Elemente, die eindeutig zu den Permutationen der vier Raumdiagonalen eines Würfels korrespondieren. Es gibt fünf irreduzible Darstellungen von \mathbf{O} . Benutzt man die Standardnotation für Punktgruppen [2], so sind A_1 und A_2 die eindimensionalen Darstellungen, E die zweidimensionale Darstellung und T_1 und T_2 sind die dreidimensionalen Darstellungen. A_1 ist die triviale Darstellung und T_1 ist die Vektor-darstellung. Wenn D_J die Spin J Darstellung von $SO(3)$ für ganzzahlige Spins ist, werden ihre Elemente ebenfalls durch D_J repräsentiert weil die kubische Gruppe eine Untergruppe von $SO(3)$ ist. Als Darstellung von \mathbf{O} betrachtet, führt dies zur *eingeschränkten Darstellung* $D_J^\mathbf{O}$. Diese wird im allgemeinen nicht mehr irreduzibel sein und kann in die irreduziblen Darstellungen von \mathbf{O} zerlegt werden. Bis zu $J = 12$ findet man die eingeschränkten Darstellungen in den Tabellen von [2]. Für die ersten eingeschränkten Darstellungen bis $J = 4$ erhält man

$$D_0^\mathbf{O} = A_1, \quad (9.1)$$

$$D_1^\mathbf{O} = T_1, \quad (9.2)$$

$$D_2^\mathbf{O} = E \oplus T_2, \quad (9.3)$$

$$D_3^\mathbf{O} = A_2 \oplus T_1 \oplus T_2, \quad (9.4)$$

$$D_4^\mathbf{O} = A_1 \oplus E \oplus T_1 \oplus T_2. \quad (9.5)$$

¹Ausführliche Erläuterungen hierzu sind im nächsten Teilabschnitt zu finden.

Die physikalische Bedeutung erkennt man zum Beispiel bei der Betrachtung eines Spin-2-Teilchens. Im Kontinuum wird dieses durch ein Quintuplett von entarteten Zuständen beschrieben. Die Gitter-Regularisierung wird dieses Multiplett nach (9.3) in ein Dublett E und ein Triplet T_2 aufteilen. Man kann also im Prinzip, wenn das Spektrum für alle \mathbf{O} Darstellungen exakt bekannt ist, diese in $SU(2)$ Multiplets anordnen. Innerhalb der Darstellungen E und T_2 werden die Massen immer noch entartet sein. Es wird aber zwischen diesen Darstellungen eine Aufspaltung stattfinden. Man findet daher verschiedene Massen $m(E)$ und $m(T_2)$. Da der Kontinuumsliches durch Abstimmen der nackten Kopplung $g \rightarrow 0$ erreicht wird, muß das Massenverhältnis $m(E)/m(T_2)$ gegen eins konvergieren. Andernfalls wäre die euklidische Symmetrie nicht vollständig erhalten. Obwohl die volle euklidische Kontinuumsinvarianz nicht explizit in der Gitter-Rechnung enthalten ist, erwartet man, daß die Konsequenzen (wie zum Beispiel die Beziehung zwischen Energie und Impuls $E^2 = m^2 + p^2$) besser reproduziert werden, wenn der Gitterabstand a verkleinert wird.

Ergänzend gibt es folgenden Aspekt. Wendet man einen Gitteroperator, der sich bezüglich einer irreduziblen Darstellung R der kubischen Gruppe transformiert, auf das Vakuum an, so wird er einen Zustand erzeugen, der eine Superposition von verschiedenen Eigenzuständen des Hamilton-Operators ist:

$$\psi_R = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^R \psi_{\alpha}. \quad (9.6)$$

Im Kontinuumsliches gehört jeder Zustand ψ_{α} zu einem Spin J Multiplett. In diesem Sinne enthält ψ_R unterschiedliche Spins J . Der Spin J taucht nur dann in der Superposition auf, wenn R in D_J^0 enthalten ist. So enthält zum Beispiel A_1 Spin 0, Spin 4 und höhere Spins. Am wichtigsten ist jedoch der niedrigste Spin, der in R enthalten ist, da er normalerweise zur niedrigsten Masse gehört und daher in der Korrelationsfunktion dominiert.

Zusätzlich zu den Transformationen der kubischen Gruppe gibt es noch zwei weitere Symmetrien. Die erste ist die totale *Raum-Spiegelung* mit den Paritäts-Eigenwerten $P = \pm 1$. Die kubische Gruppe bildet zusammen mit der Raum-Spiegelung die 48-elementige Gruppe $\mathbf{O}_h = \mathbf{O} \times \mathcal{Z}_2$. Diese Darstellungen werden mit R^P bezeichnet.

Schließlich gibt es noch die *Ladungskonjugation* mit den C -Paritäts-Eigenwerten $C = \pm 1$. Diese ist äquivalent zur komplexen Konjugation von Wilson-Loops. Die Zustände gehören zu einer irreduziblen Darstellung der Gitter-Symmetrie-Gruppe und werden deshalb mit R^{PC} bezeichnet.

9.3 Massenbestimmung auf dem Gitter

Auf einem endlichen Gitter werden Teilchenmassen gewöhnlich mit Hilfe von *Zeitscheiben-Korrelationsfunktionen* bestimmt. Die sogenannten Zeitscheiben-Felder sind Felder, die nur von Feldvariablen mit der Zeitkoordinate $x_4 = t$ abhängen. In Gittereinheiten erhält man die Massen aus dem Verhalten für große Zeitdistanzen von Zeitscheiben-Korrelati-

onsfunktionen mit verschwindendem Impuls:

$$(S_{t+t_0} S_{t_0}) \simeq C_0 + C_1 (e^{-mt} + e^{-m(T-t)}). \quad (9.7)$$

Der Operator S_t steht stellvertretend für $S_{R^{PC}}(t)$, der zu einer linearen Kombination gehört, die sich auf eine Darstellung R^{PC} bezieht.

Da die obige Gleichung (9.7) nur das asymptotische Verhalten für $t, T \rightarrow \infty$ beschreibt, ist es schwierig, den exakten Wert der Masse m zu bestimmen. Einfacher ist es die *effektiven Massen* zu betrachten, die bei einer gegebenen Zeitausdehnung T und festen Zeitscheiben-Paaren t_1, t_2 definiert ist. Betrachtet man zunächst den Fall $C_0 = 0$ und definiert C_1 und $m(t_1, t_2, T)$ durch die Lösung des nachfolgenden Gleichungssystems,

$$(S_{t_1+t_0} S_{t_0}) = C_1 (e^{-m(t_1, t_2, T)t_1} + e^{-m(t_1, t_2, T)(T-t_1)}), \quad (9.8)$$

$$(S_{t_2+t_0} S_{t_0}) = C_1 (e^{-m(t_1, t_2, T)t_2} + e^{-m(t_1, t_2, T)(T-t_2)}), \quad (9.9)$$

so ergibt sich der Wert für die Masse zu:

$$m = \lim_{t_1, t_2, T \rightarrow \infty} m(t_1, t_2, T). \quad (9.10)$$

Die effektive Masse $m(t_1, t_2, T)$ ergibt sich numerisch aus dem nachstehenden Verhältnis [42]

$$r_{12} \equiv \frac{(S_{t_2+t_0} S_{t_0})}{(S_{t_2+t_0} S_{t_0})} = \frac{e^{-m(t_1, t_2, T)t_2} + e^{-m(t_1, t_2, T)(T-t_2)}}{e^{-m(t_1, t_2, T)t_2} + e^{-m(t_1, t_2, T)(T-t_2)}}. \quad (9.11)$$

Mit den Bezeichnungen

$$\tau_i \equiv \left(\frac{1}{2}T - t_i \right), \quad x \equiv e^{-m(t_1, t_2, T)}, \quad (9.12)$$

folgt daraus:

$$r_{12} (x^{\tau_2} + x^{-\tau_2}) = (x^{\tau_1} + x^{-\tau_1}). \quad (9.13)$$

Dieses kann für x numerisch sehr einfach gelöst werden und es ergibt sich

$$m(t_1, t_2, T) = -\log x. \quad (9.14)$$

Speziell für $\tau_2 = 0$, $r_{12} \rightarrow r_1$ erhält man

$$m(t_1, \frac{T}{2}, T) = \tau_1^{-1} \log \left[r_1 + (r_1^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (9.15)$$

Gibt es in der Gleichung (9.7) eine nicht-verschwindende Konstante C_0 , so kann diese durch eine Subtraktion des Wertes der Korrelationsfunktion zu einer dritten Zeit t_3 beseitigt werden. Nimmt man für die dritte Zeit zum Beispiel $t_3 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$, so erhält man für die numerisch zu lösenden Gleichung folgenden Ausdruck:

$$(r_{13} - 1)(x^{\tau_2} + x^{-\tau_2} - x^{\tau_3} - x^{-\tau_3}) = (r_{23} - 1)(x^{\tau_1} + x^{-\tau_1} - x^{\tau_3} - x^{-\tau_3}). \quad (9.16)$$

Somit unterscheidet man auf dem Gitter bei der Bestimmung der Massen zwischen einem Zwei-Punkt- oder einem Drei-Punkt-Fit.

9.4 Operator für den 0^{-+} -Glueball

Nach den Vorhersagen von G. R. FARRAR, G. GABADADZE und M. SCHWETZ gibt es neben dem skalaren Meson 0^{++} noch einen weiteren Glueball, den sogenannten 0^{-+} -Glueball. Da der 0^{++} -Glueball schon durch unsere Kollaboration numerisch bestimmt wurde, wie zum Beispiel in [13] zu sehen ist, beschäftigt sich dieses Kapitel mit der Implementierung und Bestimmung des 0^{-+} -Glueballs.

Um einen pseudoskalaren Glueball aus dem Vakuum mit einem Operator, der aus geschlossenen Loops besteht, auf dem Gitter zu erzeugen, benötigt man Loops, die nicht in ihre Spiegelbilder gedreht werden können. Für die Eichgruppe $SU(2)$ ist die Spur über Loop-Variablen reell und unterscheidet die beiden Orientierungen der Loops nicht. Der kleinste Loop der die gewünschten Eigenschaften besitzt, besteht aus acht Links und entspricht dem Operator für die A_1^{-+} Darstellung [11]. Eine andere Möglichkeit besteht darin

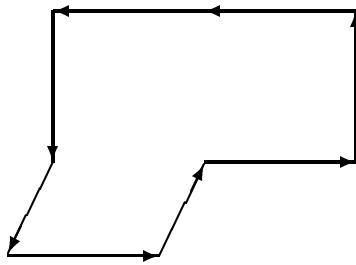


Abbildung 9.1: Geschlossener Weg, der als 0^{-+} -Glueball-Operator verwendet wird.

die einfachste Gitterversion von $\text{Tr}(\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma})$ zu nehmen. Diese enthält jedoch zwei orthogonale Plaquetten und kann daher nicht auf einer einzigen Zeitscheibe berechnet werden. Daher nimmt man den in Abbildung (9.1) gezeigten Loop.

Der Zeitscheiben-Operator für den pseudoskalaren Glueball ist dann gegeben durch:

$$S(t) = \sum_R (\text{Tr}U(\mathcal{C}) - \text{Tr}U(P\mathcal{C})). \quad (9.17)$$

Dabei geht die Summe über alle Rotationen R in der kubischen Gittergruppe und $P\mathcal{C}$ ist das Spiegelbild von \mathcal{C} .

9.5 Fehlerbestimmung von sekundären Größen

In numerischen Simulationen erzeugt der Updating-Prozeß ein Konfigurationen-Sample $[\phi_n]$, ($n = 1, 2, \dots, N$). Auf diesem Sample sollen Erwartungswerte von unterschiedlichen Größen gemessen werden. Die einfachste Art von Größen werden durch eine Funktion der Feldvariablen $A[\phi]$ definiert. Ein Schätzwert für ihren Erwartungswert ist durch den

Mittelwert \bar{A} des Samples gegeben

$$\bar{A} \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N A[\phi_n]. \quad (9.18)$$

Eine Mittelung über eine unendlich große Anzahl von Sample oder über ein unendlich großes Sample ($N \rightarrow \infty$), ergibt den Mittelwert des Ensembles, der mit dem Erwartungswert übereinstimmt: $\bar{\bar{A}} = \langle A \rangle$. Die oben beschriebenen Größen, die man direkt als Erwartungswerte erhält, nennt man *primäre Größen* im Gegensatz zu *sekundären Größen*, die als Funktionen von Erwartungswerten definiert sind. Die im vorangegangenen Abschnitt besprochene effektive Masse $m(t_1, t_2, T)$ ist zum Beispiel so eine sekundäre Größe.

Im Idealfall sind alle Konfigurationen in einem Sample statistisch unabhängig und der Erwartungswert \bar{A} ist normal verteilt um den Mittelwert \bar{A} mit folgender Varianz

$$\sigma_A^2 = \frac{\bar{A}^2 - \bar{A}^2}{N-1} = \frac{\overline{(A - \bar{A})^2}}{N-1}. \quad (9.19)$$

Dieses ist eine Konsequenz des zentralen Grenzwert-Theorems [58]. Es gilt unter einigen recht milden Annahmen über die Verteilung der numerisch gemessenen Werte der primären Größen ($A_n \equiv 1, 2, \dots, N$). In diesem Fall ist der Fehler des Sample Mittelwertes $\bar{\bar{A}} = \bar{A} \pm \sigma_{\bar{A}}$.

Die Abschätzung des Fehlers in (9.19) ist normalerweise zu optimistisch, da die aufeinander folgenden Konfigurationen innerhalb eines Updates sehr viele Ähnlichkeiten haben und somit nicht unabhängig sind. Man bezeichnet diese Korrelation, die durch das Erzeugen der Konfigurationen hervorgerufen wird, als *Autokorrelation*. Für eine primäre Größe ist die Autokorrelation definiert als

$$\begin{aligned} (A_n A_{n+\tau}) &\equiv \langle A_n, A_{n+\tau} \rangle - \langle A_n \rangle \langle A_{n+\tau} \rangle \\ &= \langle A_n A_{n+\tau} \rangle - \langle A \rangle^2 \\ &= \langle (A_n - \bar{A})(A_{n+\tau} - \bar{A}) \rangle. \end{aligned} \quad (9.20)$$

In den obigen Umformungen gilt $\langle A_n \rangle = \langle \bar{A} \rangle = \langle A \rangle$.²

Mit Hilfe der Autokorrelation ergibt sich somit die tatsächliche Varianz von A zu

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \left\langle \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (A_n - \langle A \rangle) \right]^2 \right\rangle \\ &= \sum_{\tau=-N}^N \frac{N - |\tau|}{N^2} (A_n A_{n+\tau}) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} (AA) \frac{2\tau_{int,A}}{N} \simeq (\bar{A}^2 - \bar{A}^2) \frac{2\tau_{int,A}}{N}. \end{aligned} \quad (9.21)$$

²Die Zeit τ beschreibt hier nicht die euklidisch Zeit $t = x_4$, sondern steht für die benötigte CPU-Zeit.

Dabei ist die *integrierte* (oder *effektive*) Autokorrelationszeit $\tau_{int,A}$ definiert als

$$\tau_{int,A} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \frac{(A_n A_{n+\tau})}{(AA)}. \quad (9.22)$$

Ein Vergleich von (9.19) mit (9.21) zeigt, daß die effektive Anzahl von unabhängigen Messungen aufgrund der Autokorrelation $N/(2\tau_{int,A})$ beträgt. Somit sollte man bei einer sehr zeitintensiven numerischen Messung einer Variablen $2\tau_{int,A}$ Konfigurationen zwischen den Messungen weglassen.

9.5.1 Jackknife-Analyse

Eine Methode zur Bestimmung von Fehlern sekundärer Größen ist die sogenannte *Jackknife-Analyse*. Dazu betrachtet man ein nicht zu großes Sample von unabhängigen Messungen einer primären Größe A . Mit den gemessenen Werten A_1, A_2, \dots, A_{N_S} ergibt sich der Mittelwert des Sample zu:

$$\bar{A} \equiv \frac{1}{N_S} \sum_{S=1}^{N_S} A_S. \quad (9.23)$$

Der beste Schätzwert für eine sekundäre Größe ist $\bar{y} = y(\bar{A})$. Einen sicheren Schätzwert für \bar{y} erhält man aus den Jackknife-Mittelwerten, die durch Weglassen einer einzelnen Messung aus dem Sample erzeugt werden:

$$A_{(J)S} \equiv \frac{1}{N_S - 1} \sum_{r \neq S} A_r. \quad (9.24)$$

Die zugehörigen Werte für die sekundäre Größe sind die *Jackknife-Schätzwerte* $y_{(J)S} \equiv y(A_{(J)S})$. Diese haben folgenden Mittelwert:

$$\bar{y}_{(J)} \equiv \frac{1}{N_S} \sum_{S=1}^{N_S} y_{(J)S}. \quad (9.25)$$

Die Varianz des Jackknife-Schätzwertes berechnet sich zu

$$\sigma_{(J)\bar{y}}^2 \equiv \frac{N_S - 1}{N_S} \sum_{S=1}^{N_S} (y_{(J)S} - \bar{y}_{(J)})^2. \quad (9.26)$$

Dieses Ergebnis stimmt für primäre Größen mit der einfachen Varianz in (9.19) überein: $\sigma_{(J)\bar{A}} = \sigma_{\bar{A}}$. Bei sekundären Größen ist jedoch der Schätzwert der Jackknife-Varianz zuverlässiger: $\bar{\bar{y}} = \bar{y} \pm \sigma_{(J)\bar{y}}$.

9.6 Auswertung

Die pseudoskalare Glueball-Masse wurde von der Zeitscheiben-Korrelationsfunktion als eine effektive Masse mit Distanzen 1 und 2 bei optimalem Smearingradius gemessen. Auf dem $6^3 \times 12$ -Gitter erhält man einen guten Smearingradius bei dem die Werte sehr stabil sind für $R_S = 4$ oder 5. Dieses ist sehr schön in den Abbildungen (9.2) und (9.3) zu sehen. Daß man mit $K = 0.185$ noch zu weit von dem kritischen Hoppingparameter entfernt ist, zeigt die Abbildung (9.4). Die unterschiedlichen ϵ -Werte in diesen Abbildungen wurden nach der Gleichung (8.32) durch den Smearingradius und die Anzahl der APE-Iterationsschritte festgelegt.

Auf dem $8^3 \times 16$ -Gitter ist in den einzelnen Smearingschritten kein eindeutiges Plateau zu erkennen. Dies liegt an der geringen Statistik, die auf diesem Gitter zur Verfügung steht. Im Vergleich zum $6^3 \times 12$ -Gitter ist die vorhandene Statistik auf dem $8^3 \times 16$ -Gitter nur etwa halb so groß. Trotzdem erscheinen die Resultate für einen Smearingradius zwischen 5 und 8 recht stabil. Dieses Verhalten wird in Abbildung (9.5) deutlich.

In Gittereinheiten erhält man für die 0^{-+} -Masse:

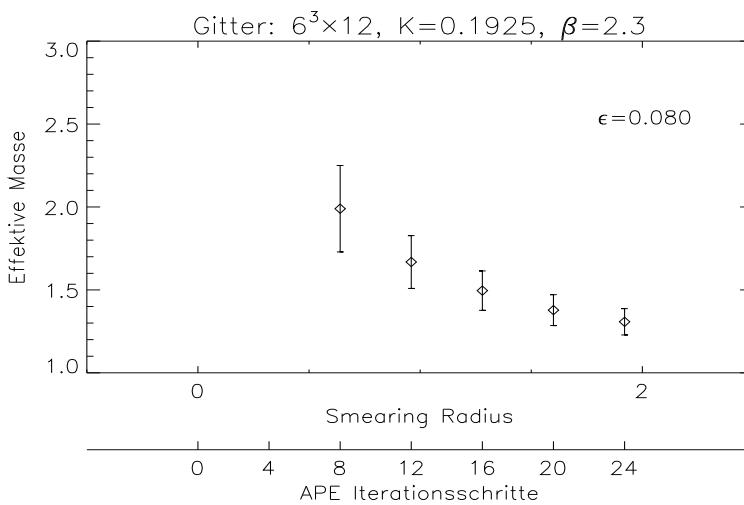
$$am(\mathbf{0}^{-+}) = 1.5 (3) \quad \text{für } K = 0.1850, 6^3 \times 12, \quad (9.27)$$

$$am(\mathbf{0}^{-+}) = 1.45 (10) \quad \text{für } K = 0.1900, 6^3 \times 12, \quad (9.28)$$

$$am(\mathbf{0}^{-+}) = 1.3 (1) \quad \text{für } K = 0.1925, 6^3 \times 12, \quad (9.29)$$

$$am(\mathbf{0}^{-+}) = 1.1 (1) \quad \text{für } K = 0.1925, 8^3 \times 16. \quad (9.30)$$

Der pseudoskalare Glueball scheint nach den obigen Daten doppelt so schwer zu sein wie der skalare Glueball. Dieses Ergebnis ist der reinen $SU(2)$ Eichtheorie sehr ähnlich, bei der $m(\mathbf{0}^{-+})/m(\mathbf{0}^{++}) = 1.8(2)$ [57] gilt.



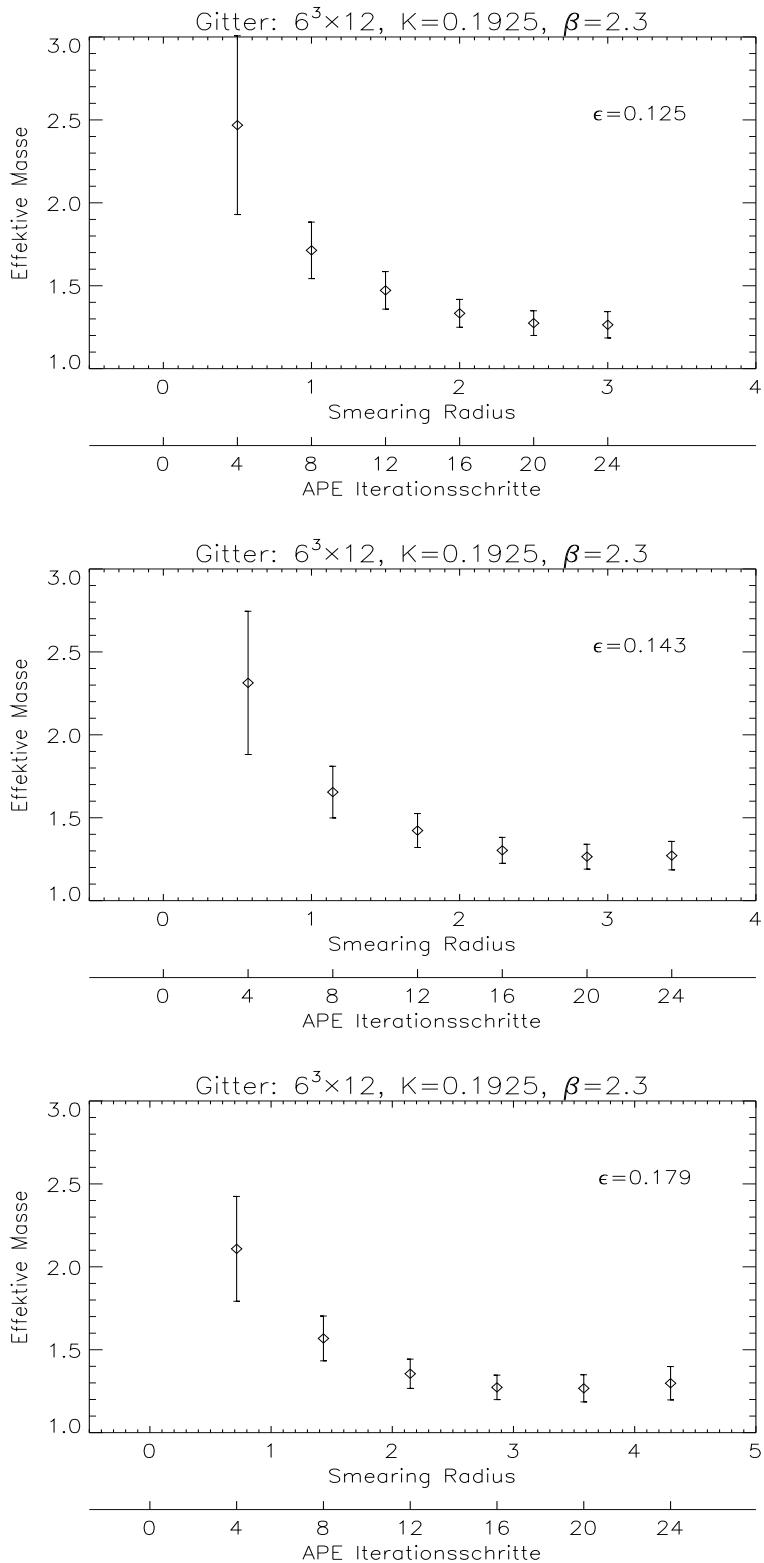
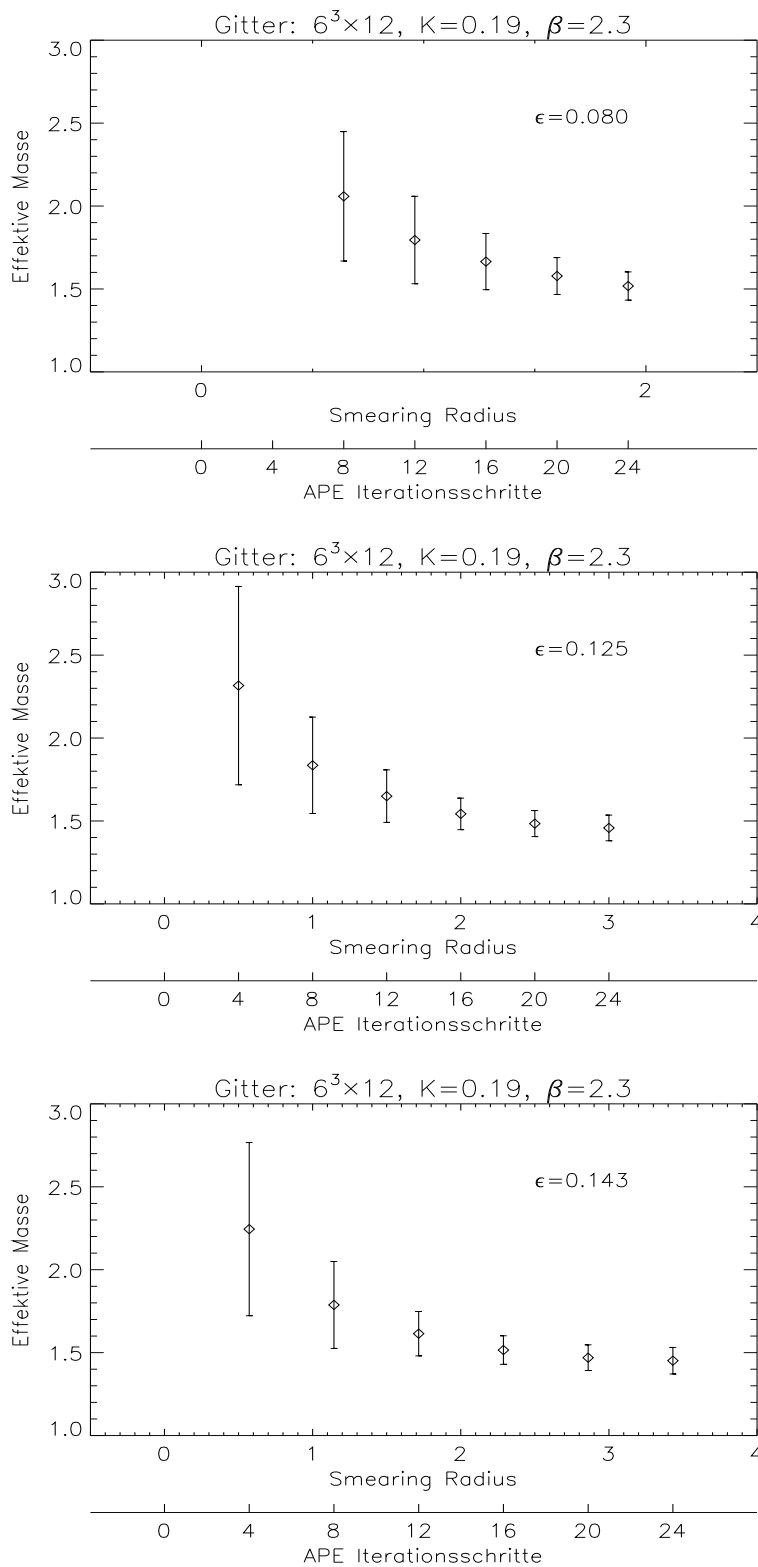


Abbildung 9.2: Effektive Masse des pseudoskalaren 0^{+-} -Glueballs aus dem Zwei-Punkt-Fit in Abhängigkeit vom APE-Smearingradius auf einem $6^3 \times 12$ -Gitter bei $K = 0.1925$.



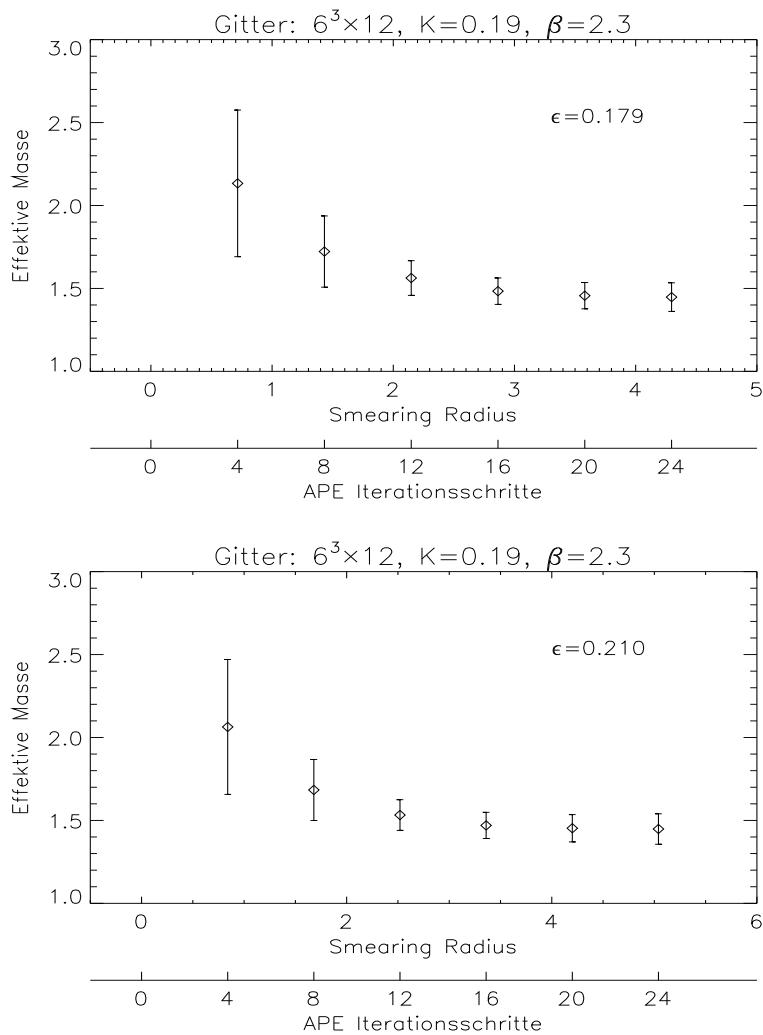
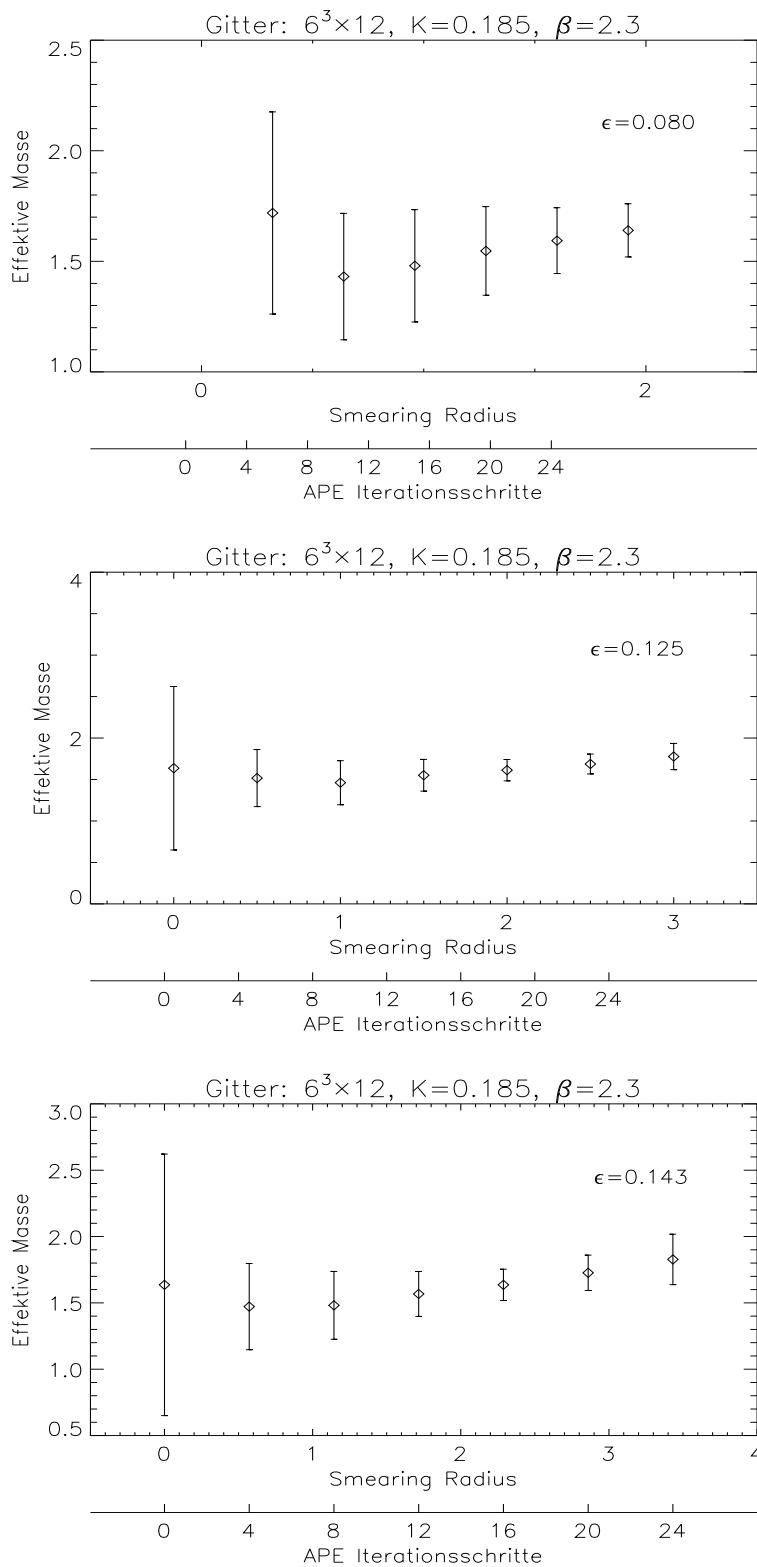


Abbildung 9.3: In dieser Abbildung ist die effektive Masse des pseudoskalaren 0^{-+} -Glueballs aus dem Zwei-Punkt-Fit in Abhängigkeit vom APE-Smearingradius auf einem $6^3 \times 12$ -Gitter bei $K = 0.19$ aufgetragen.



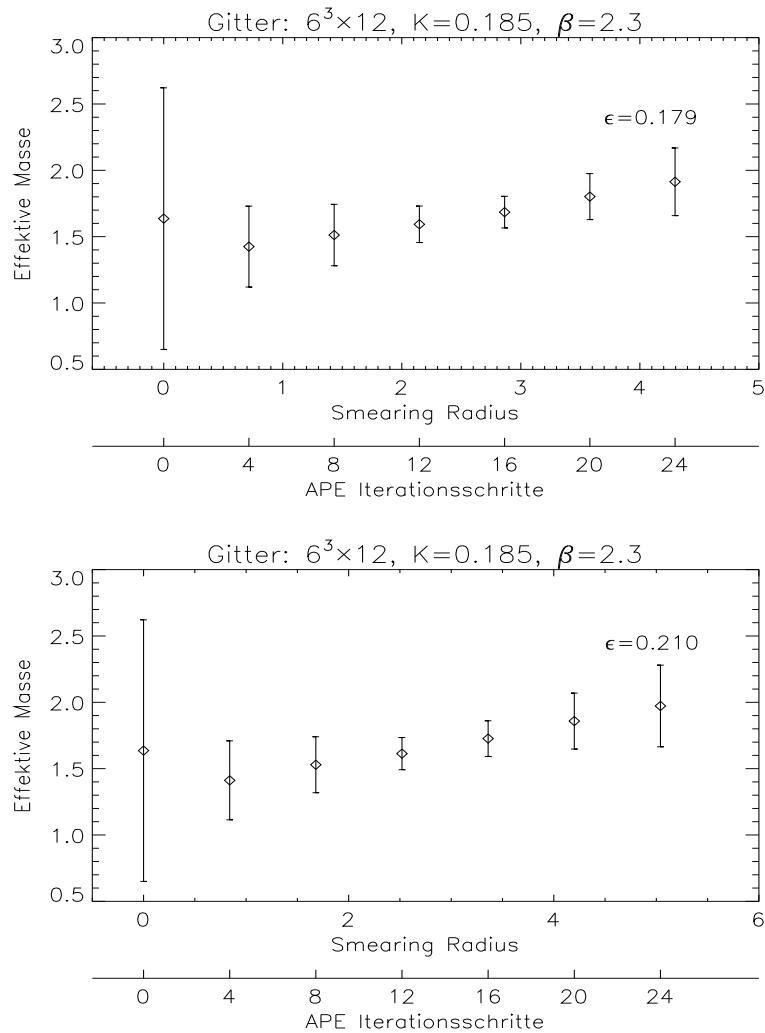
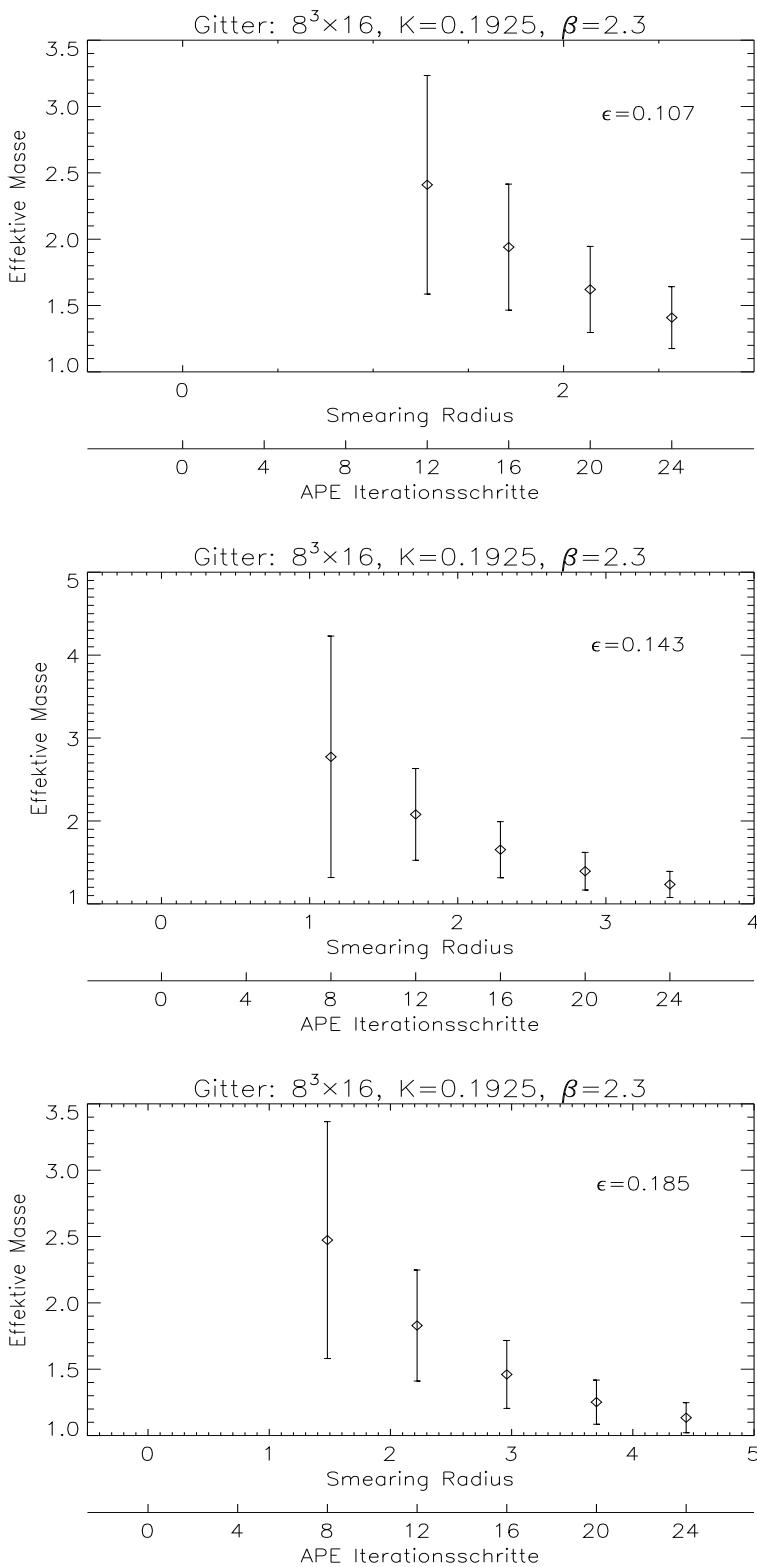


Abbildung 9.4: Die obige Abbildung beschreibt die effektive Masse des pseudoskalaren 0^{-+} -Glueballs aus dem Zwei-Punkt-Fit in Abhängigkeit vom APE-Smearingradius auf einem $6^3 \times 12$ -Gitter bei $K = 0.185$.



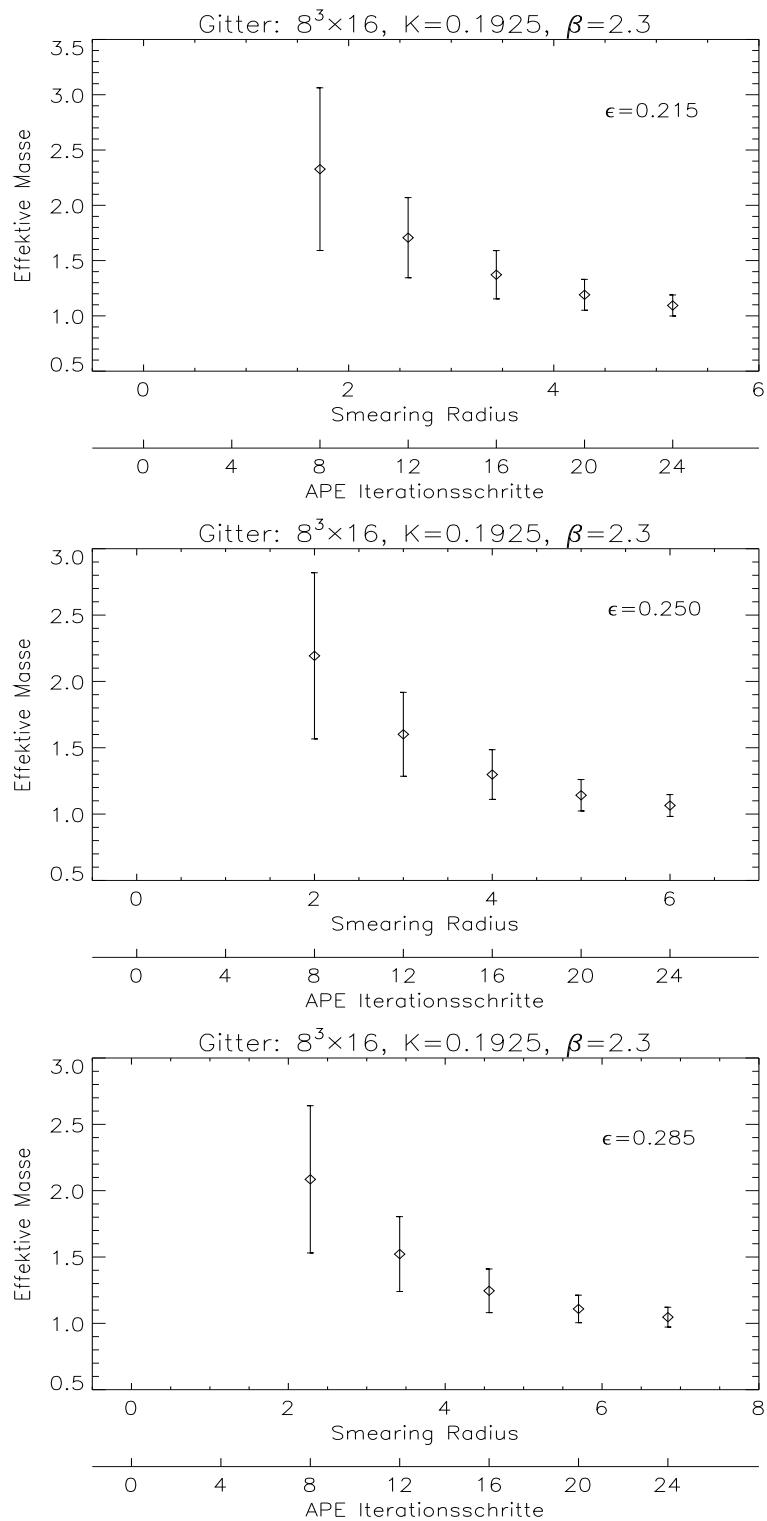


Abbildung 9.5: Effektive Masse des pseudoskalaren 0^{-+} -Glueballs in Abhängigkeit vom Smearingradius auf einem $8^3 \times 16$ -Gitter bei $K = 0.1925$.

Kapitel 10

Zusammenfassung und Ausblick

Bei den numerischen Monte-Carlo-Simulationen, die unter anderem in dieser Arbeit vorgestellt wurden¹, handelt es sich um die ersten Berechnungen dieser Art in einer Yang-Mills-Theorie mit leichten Gluinos. Ein großer Teil der Arbeit wurde daher in algorithmische Studien und Tuning von Parametern investiert.

Die numerischen Ergebnisse aus Kapitel 8 und 9 vervollständigen die Arbeiten unserer Kollaboration und geben interessante Hinweise auf eine neue Art der Physik, die durch das Hinzunehmen supersymmetrischer Theorien entsteht. Dabei zeigte sich, daß auch die Supersymmetrie von dem für die QCD typischen Verhalten des Confinements dominiert wird. Die zusätzlichen Gluino-Teilchen führen in diesem Fall nicht zu einer anderen Physik, wie zuvor vermutet wurde. Dies liegt an den supersymmetrischen Partnern der Gluonen, denen es nicht gelingt die Farbladungen der Quarks durch die Bildung einer Gluino-Wolke abzuschirmen.

Die in Kapitel 9 berechnete Masse eines Glueballs bestätigt die Vermutungen von G. F. FARRAR, G. GABADADZE und M. SCHWETZ, daß eine supersymmetrische Theorie auch dynamische Freiheitsgrade enthält, die rein gluonischen Größen entsprechen. In unseren numerischen Simulationen bestehen die leichtesten Zustände aus einem 0^- -Glueball ($a - \eta'$), einem 0^+ -Glueball und einem Spin 1/2-Gluino-Glueball. In Gittereinheiten liegen die Massen dieser Teilchen bei einem Hoppingparameter-Wert von $K = 0.1925$ in der Region um $am = 0.5$. Die schwerere Gruppe, die aus dem 0^+ -Glueball ($a - f_0$), dem 0^- -Glueball und dem schweren Spin 1/2-Gluino-Glueball besteht, liegt mit $K = 0.1925$ bei einem Massenwert von ungefähr $am = 1.0$. Beide Multipletts zeigen nicht die von [22] oder [59] vorgeschlagene Struktur, wie in Abbildung (10.1) zu sehen ist. Dies wird weitere Rechnungen auf größeren Gittern mit einer höheren Zeitausdehnung notwendig machen. Zudem müssen bessere Smearing-Algorithmen für das ($a - f_0$)-Teilchen entwickelt werden.

Eine Untersuchung im Intervall bis $K \leq 0.20$ liefert erste Anzeichen für einen Phasenübergang erster Ordnung, der bei verschwindender Gluinomasse erwartet wird [31]. Unsere derzeitige Vermutung für die Lokalisierung des Phasenüberganges bei $\beta = 2.3$

¹Andere Resultate unserer Kollaboration sind in den Veröffentlichungen [13] und [31] zu finden.

liegt bei $K_0 = 0.1955(5)$. In Gittereinheiten erhält man dann für die nackte Gluinomasse

$$am_0 \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{1}{K} - \frac{1}{K_0} \right] \quad (10.1)$$

bei $K = 0.1925$ den Wert $am_0 \simeq 0.04$. Mit dem numerischen Ergebnis der String-Spannung aus Kapitel 8 erhält man $m_0/\sqrt{\sigma} \simeq 0.2$. Verwendet man QCD Einheiten und vernachlässigt den Massen-Renormierungsfaktor Z_m der Ordnung 1, entspricht dies einer leichten Gluinomasse von ungefähr 100 MeV . Selbstverständlich gibt dieser Wert nur die Größenordnung an, da es sich bei der Super-Yang-Mills-Theorie und der QCD um zwei unterschiedliche Theorien handelt. Um eine Verbindung zwischen m_0 und der hadronischen Skala herzustellen muß man eine Berechnung nach [14] mit masselosen Gluinos durchführen.

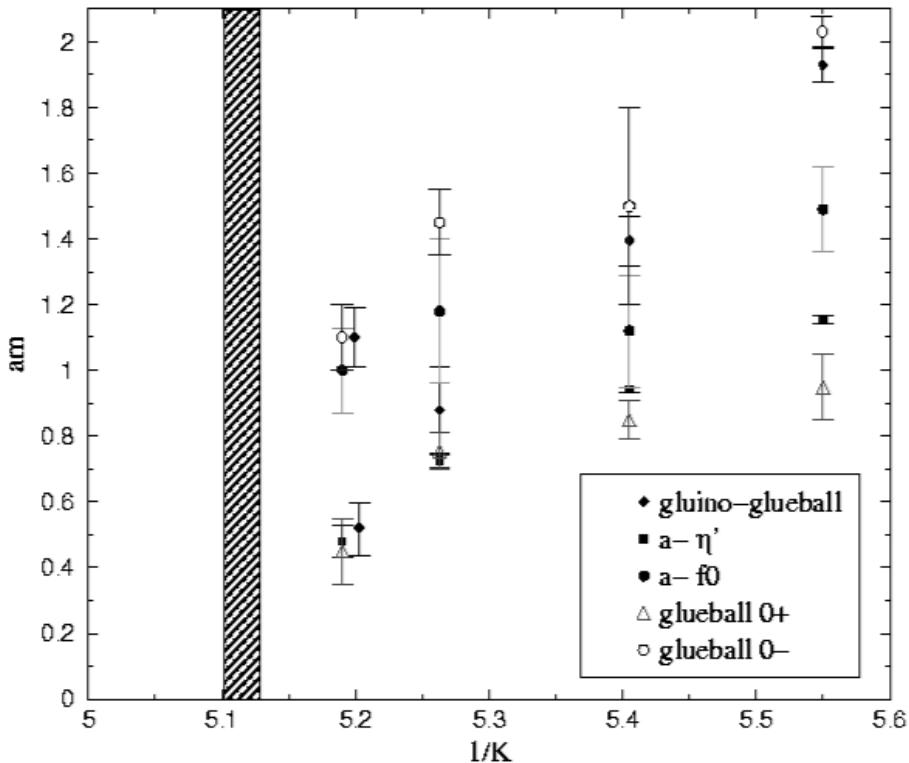


Abbildung 10.1: Diese Abbildung zeigt die leichtesten Grundzustandsmassen in Gittereinheiten als eine Funktion des Hoppingparameters $1/K$. Die gestrichelte Region stimmt mit dem Bereich verschwindender Gluino-Masse überein, in der die Supersymmetrie erwartet wird [31].

Die analytischen Rechnungen, die in dieser Arbeit durchgeführt wurden, bilden eine Grundlage für weiterführende Untersuchungen, die auf einer Hoppingparameter-Entwicklung des $N = 1$ Super-Yang-Mills-Modells aufbauen. Interessant wäre in diesem Zusammenhang sicherlich eine konsequente Doppelentwicklung der Zustandsfunktion nach dem

Hoppingparameter K und der Eichkopplung β . Die dazu notwendigen Integrationen über die Eichgruppe lassen sich mit Kapitel 4 leicht bestimmen. Analog verhält es sich mit der Fermionintegration, deren Fundament in Kapitel 3 gelegt wurde. Die sich daraus ergebenden Integrationsregeln lassen sich ausführlich in Kapitel 5 nachschlagen. Mit Hilfe des in Kapitel 6 gelegten Fundaments zur analytischen Massenbestimmung mittels der Hoppingparameter-Entwicklung sollen in naher Zukunft, neben dem Gluino-Glueball, weitere Teilchenmassen berechnet werden.

Abschließend bleibt zu bemerken, daß ein zweifelsfreier Beweis der Existenz der Supersymmetrie wohl erst im Jahre 2005 am LHC in Genf erbracht werden kann. Wenn sich aber die Forscher in ihrem dreijährigen Experiment am Brookhaven National Laboratory nicht geirrt haben, bleibt das folgende Zitat von L. ROBERTS bestehen:

„Viele Leute meinen, daß die Entdeckung der Supersymmetrie schon hinter der nächsten Ecke wartet. Vielleicht haben wir das erste kleine Fenster zu dieser Welt geöffnet.“

Anhang A

Majorana-Fermionen

A.1 Ableitungen von Majorana-Spinoren

Für die einzelnen Komponenten eines Majorana-Spinors gilt:

$$\bar{\lambda}_\alpha = (\lambda^T C)_\alpha = \lambda_\beta^T C_{\beta\alpha} = \lambda_\beta C_{\beta\alpha}, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\delta}{\delta \lambda_\beta} = C_{\beta\alpha} \frac{\delta}{\delta \bar{\lambda}_\alpha}, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\lambda}_\alpha} = C_{\alpha\beta}^{-1} \frac{\delta}{\delta \lambda_\beta}, \quad (\text{A.3})$$

$$= C_{\beta\alpha} \frac{\delta}{\delta \lambda_\beta} = -C_{\beta\alpha}^{-1} \frac{\delta}{\delta \bar{\lambda}_\alpha}. \quad (\text{A.4})$$

Dabei ist C die Ladungskonjugationsmatrix, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$C^T = -C = C^{-1}, \quad (\text{A.5})$$

$$C^2 = -\mathbf{1}, \quad (\text{A.6})$$

$$C \gamma_\mu^T C = +\gamma_\mu, \quad (\text{A.7})$$

$$\det C = +1. \quad (\text{A.8})$$

Die in dieser Arbeit verwendete Darstellung der C -Matrix ist gegeben durch

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Die Pfaffsche Form von C lässt sich mit Gleichung (2.47) zu

$$\begin{aligned} \text{pf}(C) &= \frac{1}{2!2^2} \epsilon_{\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2} C_{\alpha_1 \beta_1} C_{\alpha_2 \beta_2} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \epsilon_{1234} C_{12} C_{34} + \epsilon_{1243} C_{12} C_{43} + \epsilon_{2134} C_{21} C_{34} + \epsilon_{2143} C_{21} C_{43} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon_{3412} C_{34} C_{12} + \epsilon_{3421} C_{34} C_{21} + \epsilon_{4312} C_{43} C_{12} + \epsilon_{4321} C_{43} C_{21} \right\} \\ &= -1 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

bestimmen.

A.2 γ -Matrizen

Für die in der Arbeit benutzten Gamma-Matrizen wurde die folgende Darstellung gewählt:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Diese erfüllen die nachstehenden Gleichungen

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 \delta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.12})$$

$$(\gamma_\mu)^2 = \mathbb{1}, \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu) = 0, \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 0 \quad \text{für } \mu \neq \nu. \quad (\text{A.15})$$

A.3 Fermionmatrix

In der fermionischen Wirkung ist die antisymmetrische Matrix gegeben durch $\overline{Q} = CQ$. Damit gilt:

$$(CQ)^T = -CQ \quad (\text{A.16})$$

$$\Leftrightarrow Q^T C^T = -CQ$$

$$\Leftrightarrow Q^T C = CQ$$

$$\Leftrightarrow Q^T = CQC^{-1}$$

$$\Leftrightarrow Q = (C^T)^{-1} Q^T C^T = C^{-1} Q^T C. \quad (\text{A.17})$$

Aus der Gleichung (A.17) ergibt sich ein analoger Zusammenhang für die inverse Matrix Q^{-1} :

$$Q^{-1} = C^{-1} (Q^T)^{-1} C = C (Q^T)^{-1} C^{-1}. \quad (\text{A.18})$$

A.4 Entwicklung der Exponentialreihe

Im folgenden wird die Exponentialreihe von $e^{-\frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 \bar{\psi}^a \psi^a} := e^{-\frac{1}{2} A}$ gebildet.

$$\begin{aligned} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{a=1}^3 \bar{\psi}^a \psi^a \right) &= 1 - \sum_{a=1}^3 (\psi_1^a \psi_2^a - \psi_3^a \psi_4^a) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^3 (\psi_1^a \psi_2^a \psi_1^b \psi_2^b - \psi_1^a \psi_2^a \psi_3^b \psi_4^b - \psi_3^a \psi_4^a \psi_1^b \psi_2^b + \psi_3^a \psi_4^a \psi_3^b \psi_4^b) \\ &\quad - \frac{1}{48} A^3 + \frac{1}{384} A^4 - \frac{1}{3840} A^5 + \frac{1}{46080} A^6. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Mit dieser Entwicklung ist es nun möglich, die Majorana-Integration über die Exponentialreihe durchzuführen.

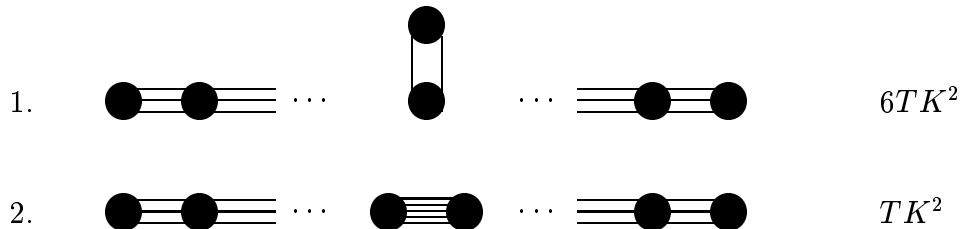
$$\begin{aligned} \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) e^{-\frac{1}{2} \sum_{b=1}^3 \bar{\psi}^b \psi^b} &= \int \prod_{\alpha,a} d\psi_\alpha^a(x) - \left\{ \psi_1^1(x) \psi_2^1(x) \psi_3^1(x) \psi_4^1(x) \right. \\ &\quad \times \psi_1^2(x) \psi_2^2(x) \psi_3^2(x) \psi_4^2(x) \\ &\quad \left. \times \psi_1^3(x) \psi_2^3(x) \psi_3^3(x) \psi_4^3(x) \right\} \\ &= -1 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Anhang B

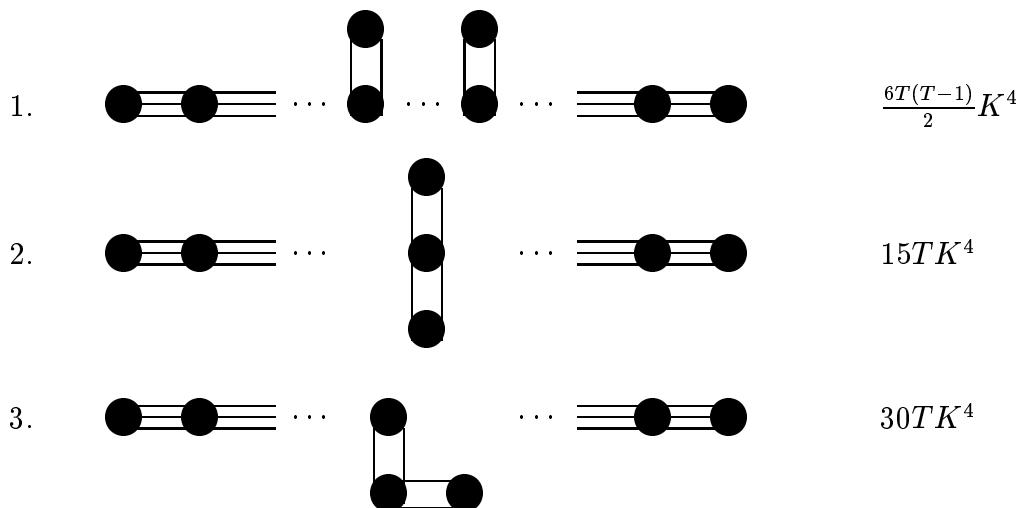
Korrekturen zur Massenbestimmung

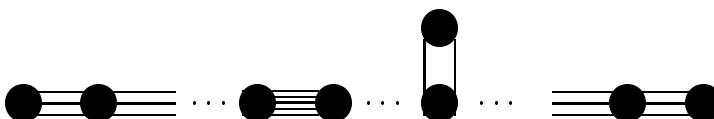
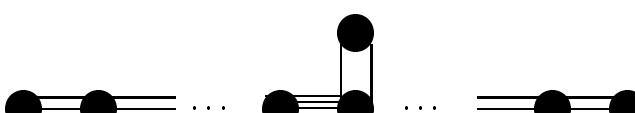
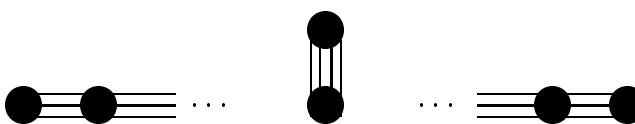
In diesem Abschnitt werden Korrekturen zu dem einfachsten Graphen (6.1) aufgezeigt. Die jeweiligen Gewichtungsfaktoren für ein zweidimensionales Gitter befinden sich rechts neben den einzelnen Graphen.

Korrekturen der Ordnung K^2 :



Korrekturen der Ordnung K^4 :



4.  $6T(T - 2)K^4$
5.  $12TK^4$
6.  TK^4
7.  TK^4
8.  $6TK^4$
9.  $\frac{1}{2}T(T - 2)K^4$

Anhang C

Lineare Algebra

Definition:

Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n; K)$ heißen ähnlich, wenn es ein $S \in GL(n; K)$ ¹ gibt mit

$$B = SAS^{-1}. \quad (\text{C.1})$$

Lemma:

Sind $A, B \in M(n \times n; K)$ ähnliche Matrizen, so ist $P_A = P_B$. Dabei ist P_A definiert durch $P_A := \det(A - \lambda \mathbf{1}) \in K[\lambda]$.

Beweis:

Durch eine formale Rechnung ergibt sich

$$S\lambda \mathbf{1} S^{-1} = \lambda \mathbf{1}. \quad (\text{C.2})$$

Somit ist

$$B - \lambda \mathbf{1} = SAS^{-1} - S\lambda \mathbf{1} S^{-1} = S(A - \lambda \mathbf{1})S^{-1}. \quad (\text{C.3})$$

Anwenden der Determinante ergibt

$$\det(B - \lambda \mathbf{1}) = \det S \det(A - \lambda \mathbf{1})(\det S)^{-1} = \det(A - \lambda \mathbf{1}). \quad (\text{C.4})$$

¹ $GL(n; K) := \{A \in M(n \times n; K) : A \text{ ist invertierbar}\}$

Anhang D

Numerische Ergebnisse für die String-Spannung

Gitter: $8^3 \times 16$, $K = 0.19$, SR=3.3			
<i>T-Fit-Intervall</i>	<i>R-Fit-Intervall</i>	$a\sqrt{\sigma}$	α
1-4	1-4	0.22 (1)	0.23 (2)
1-4	1-5	0.21 (1)	0.25 (1)
1-5	1-4	0.22 (1)	0.24 (1)
1-5	1-5	0.22 (1)	0.24 (1)
1-6	1-4	0.23 (1)	0.23 (1)
1-6	1-5	0.21 (1)	0.25 (1)
1-7	1-4	0.22 (1)	0.23 (1)
1-7	1-5	0.20 (1)	0.26 (1)

Tabelle D.1: Ergebnisse für die Wurzel der String-Spannung und dem Koeffizienten α aus dem Coulomb-Term in Abhängigkeit der *R*- und *T*-Fit-Intervalle auf einem $8^3 \times 16$ -Gitter bei $K = 0.19$ und einem Smearingradius von 3.3.

Gitter: $8^3 \times 16$, $K = 0.1925$, SR=4.42			
<i>T-Fit-Intervall</i>	<i>R-Fit-Intervall</i>	$a\sqrt{\sigma}$	α
1-4	1-4	0.21 (1)	0.23 (2)
1-4	1-5	0.19 (1)	0.25 (2)
1-5	1-4	0.22 (1)	0.22 (1)
1-5	1-5	0.18 (2)	0.27 (4)
1-6	1-4	0.22 (1)	0.23 (1)
1-6	1-5	0.18 (1)	0.27 (1)
1-7	1-4	0.24 (1)	0.24 (1)
1-7	1-5	0.16 (1)	0.28 (1)

Tabelle D.2: Ergebnisse für die Wurzel der String-Spannung und dem Koeffizienten α aus dem Coulomb-Term in Abhängigkeit der *R*- und *T*-Fit-Intervalle auf einem $8^3 \times 16$ -Gitter bei $K = 0.1925$ und einem Smearingradius von 4.42.

Gitter: $12^3 \times 24$, $K = 0.1925$, SR=3			
<i>T-Fit-Intervall</i>	<i>R-Fit-Intervall</i>	$a\sqrt{\sigma}$	α
1-6	1-6	0.17 (1)	0.25 (2)
1-6	1-7	0.16 (1)	0.26 (2)
1-6	1-8	0.13 (2)	0.31 (4)
1-7	1-6	0.17 (3)	0.26 (6)
1-7	1-7	0.16 (2)	0.26 (4)
1-8	1-6	0.18 (1)	0.26 (2)
1-8	1-7	0.14 (2)	0.30 (4)

Tabelle D.3: Ergebnisse für die Wurzel der String-Spannung und dem Koeffizienten α aus dem Coulomb-Term in Abhängigkeit der *R*- und *T*-Fit-Intervalle auf einem $12^3 \times 24$ -Gitter bei $K = 0.1925$ und einem Smearingradius von 3.

Anhang E

Resultate für den pseudoskalaren 0^{-+} -Glueball

Massen für den 0^{-+} -Glueball			
Gitter	Hoppingparameter	Smearingradius	0^{-+} -Glueball
$6^3 \times 12$	0.185	2.24	1.5 (4)
$6^3 \times 12$	0.185	3.50	1.5 (3)
$6^3 \times 12$	0.185	4.00	1.5 (3)
$6^3 \times 12$	0.185	5.01	1.5 (3)
$6^3 \times 12$	0.185	5.88	1.5 (3)

Tabelle E.1: Effektive Masse des pseudoskalaren 0^{-+} -Glueballs für verschiedene APE-Smearinggradien aus dem Zwei-Punkt-Fit der Zeitscheibenkorrelationsfunktion auf einem $6^3 \times 12$ -Gitter bei $K = 0.185$.

Massen für den 0^{-+} -Glueball			
Gitter	Hoppingparameter	Smearingradius	0^{-+} -Glueball
$6^3 \times 12$	0.19	2.24	1.5 (1)
$6^3 \times 12$	0.19	3.50	1.5 (1)
$6^3 \times 12$	0.19	4.00	1.45 (10)
$6^3 \times 12$	0.19	5.01	1.45 (10)
$6^3 \times 12$	0.19	5.88	1.45 (10)

Tabelle E.2: Effektive Masse des pseudoskalaren 0^{-+} -Glueballs für verschiedene APE-Smearinggradien aus dem Zwei-Punkt-Fit der Zeitscheibenkorrelationsfunktion auf einem $6^3 \times 12$ -Gitter bei $K = 0.19$.

Massen für den 0^{-+} -Glueball			
Gitter	Hoppingparameter	Smearingradius	0^{-+} -Glueball
$6^3 \times 12$	0.1925	2.24	1.3 (1)
$6^3 \times 12$	0.1925	3.50	1.3 (1)
$6^3 \times 12$	0.1925	4.00	1.3 (1)
$6^3 \times 12$	0.1925	5.01	1.3 (1)
$6^3 \times 12$	0.1925	5.88	1.3 (1)

Tabelle E.3: Effektive Masse des pseudoskalaren 0^{-+} -Glueballs für verschiedene APE-Smearinggradien aus dem Zwei-Punkt-Fit der Zeitscheibenkorrelationsfunktion auf einem $6^3 \times 12$ -Gitter bei $K = 0.1925$.

Massen für den 0^{-+} -Glueball			
Gitter	Hoppingparameter	Smearingradius	0^{-+} -Glueball
$8^3 \times 16$	0.1925	3.00	1.4 (2)
$8^3 \times 16$	0.1925	4.00	1.2 (2)
$8^3 \times 16$	0.1925	5.18	1.15 (10)
$8^3 \times 16$	0.1925	6.02	1.1 (1)
$8^3 \times 16$	0.1925	7.00	1.1 (1)
$8^3 \times 16$	0.1925	7.98	1.1 (1)

Tabelle E.4: Effektive Masse des pseudoskalaren 0^{-+} -Glueballs für verschiedene APE-Smearinggradien aus dem Zwei-Punkt-Fit der Zeitscheibenkorrelationsfunktion auf einem $8^3 \times 16$ -Gitter bei $K = 0.1925$.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Albanese et al. (1987). *Glueball Masses and String Tension in Lattice QCD*. Phys. Lett. **B192**, 163.
- [2] S. L. Altmann and A. P. Cracknell (1965). Rev. Mod. Phys. **37**, 19.
- [3] D. Amati, K. Konishi, Y. Meurice, G. C. Rossi and G. Veneziano (1988). *Non-perturbative Aspects in Supersymmetric Gauge Theories*. Phys. Rep. **162**, 169.
- [4] A. Armoni, Y. Frishman and J. Sonnenschein (1998). *Screening in Supersymmetric Gauge Theories in Two Dimensions*. Phys. Rev. Lett. **80**, 430.
- [5] ATLAS Collaboration (1999). *Technical Design Report*; CMS Collaboration (1999) . *Technical Design Report and Reports 1999*.
- [6] J. Bagger and J. Wess (1992). *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press.
- [7] D. Bailin and A. Love (1994). *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Tension*. Institute of Physics Publishing.
- [8] G. S. Bali, K. Schilling and Ch. Schlichter (1995). *Observing Long Colour Flux Tubes in SU(2) Lattice Gauge Theory*. Phys. Rev. **D51**, 5165.
- [9] R. Balian, J. M. Drouffe and Itzykson (1975). *Gauge Fields on a Lattice. 3. Strong-Coupling Expansions and Transition Points*. Phys. Rev. **D11**, 2104.
- [10] I. Bars (1981). *Exact Evaluation of $U(N)$ Group Integrals in Lattice QCD*. Physica Scripta, **23**, 983.
- [11] B. Berg and A. Billoire (1983). *Glueball Spectroscopy in 4d $SU(3)$ Lattice Gauge Theory (I)*. Nucl. Phys. **B221**, 109.
- [12] R. Brower and M. Nauenberg (1980). *Group Integration for Lattice Gauge Theory at Large N and at Small Coupling*. Nucl. Phys. **B180**, 221.
- [13] I. Campos, A. Feo, R. Kirchner, S. Luckmann, I. Montvay, G. Münster, K. Spanderen and J. Westphalen (1999). *Monte Carlo Simulation of $SU(2)$ Yang-Mills Theory with Light Gluinos*. Eur. Phys. J. **C.11**, 507.

- [14] S. Capitani, M. Lüscher, R. Sommer and H. Wittig (1998). *Non-Perturbative Quark Mass Renormalization in Quenched Lattice QCD*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. **63**, 153.
- [15] S. Coleman and J. Mandula (1967). *All possible Symmetries of the S Matrix*. Phys. rev. **159**, 1251.
- [16] M. Creutz (1978). *Feynman Rules for Lattice Gauge Theory*. Rev. Mod. Phys. **50**, 561.
- [17] M. Creutz (1978). *On invariant Integration over $SU(N)$* . J. Math. Phys. **19** (10), 2043.
- [18] G. Curci and G. Veneziano (1987). *Supersymmetry and the Lattice: a Reconciliation?* Nucl. Phys. **B292**, 555.
- [19] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane and T. M. Yan (1980). *Charmonium: Comparison with experiment*. Phys. Rev. **D21**, 202.
- [20] J. Ellis, T. Falk, G. Ganis, K. A. Olive and M. Schmitt (1998). *Charginos and Neutralinos in the Light of Radiative Corrections: Sealing the Fate of Higgsino Dark Matter* Phys. Rev. **D58**, 095002.
- [21] F. Farchioni, A. Feo, T. Galla, C. Gebert, R. Kirchner, I. Montvay and G. Münster (2000). *On the 1-Loop Lattice Perturbation Theory of the Supersymmetric Ward Identities*. hep-lat/**0011030**.
- [22] G. R. Farrar, G. Gabadadze and M. Schwetz (1998). *The Spectrum of Softly Broken $N = 1$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, hep-lat/**9806204**.
- [23] Y. Golfand and E. Likhtman (1971). *Extension of the Algebra of Poincaré Group Generators and Violation of P Invariance*. JETP Lett. **13**, 323.
- [24] D. J. Gross, I. R. Klebanov, A. V. Matytsin and A. V. Smilga (1996). *Screening versus confinement in 1 + 1 dimensions*. Nucl. Phys. **B461**, 109.
- [25] R. Gupta, A. Patel, C. F. Baile, G. W. Kilcup and S. R. Sharpe (1991). *Exploring Glueball Wave Functions on the Lattice*. Phys. Rev. **D43**, 2301.
- [26] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius (1975). *All possible Generators of Supersymmetries of the S Matrix*. Nucl. Phys. **B88**, 257.
- [27] I. Iashvili (2000). *MSSM SUSY Searches at LEP2*. hep-ex/**0007001**.
- [28] B. Jegerlehner (1997). *Improvements of the Local Bosonic Algorithm*. Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B53**, 959.
- [29] H. Kalka and G. Soff (1997). *Supersymmetrie*. B. G. Teubner, Stuttgart

- [30] R. Kirchner, S. Luckmann, I. Montvay, K. Spanderen and J. Westphalen (1998). *Numerical simulation of dynamical gluinos: experience with a multi-bosonic algorithm and first results.* Nucl. Phys. **B73**, 828.
- [31] R. Kirchner, S. Luckmann, I. Montvay, K. Spanderen and J. Westphalen (1999). *Evidence for Discrete Chiral Symmetry Breaking in $N=1$ Supersymmetric Yang-Mills Theory.* Phys. Letters **B446**, 209.
- [32] G. Koutsoumba and I. Montvay (1997). *Gluinos on the Lattice: Quenched Calculations.* Phys. Lett. **B398**, 130.
- [33] A. Kovner and M. Shifman (1997). *Chirally Symmetric Phase of Supersymmetric Gluodynamics.* Phys. Rev. Lett. **D56**, 2396.
- [34] P. Langacker (1995). *Implication of Precision Experiments. Precision Tests of the Standard Elektroweak Model.* World Scientific, Singapore.
- [35] M. Lüscher (1983). *Progress in Gauge Field Theory.* Cargèse lectures.
- [36] M. Lüscher, K. Symanzik and P. Weisz (1980). *Anomalies of the Free Loop Wave Equation in the WKB Approximation.* Nucl. Phys. **B173**, 365.
- [37] M. Lüscher (1994). *A New Approach to the Problem of Dynamical Quarks in Numerical Simulations of Lattice QCD.* Nucl. Phys. **B418**, 637.
- [38] S. Luckmann (1997). *Ward-Identitäten in der $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie.* Diplomarbeit, Universität Münster.
- [39] C. Michael and M. Teper (1987). *Universality and Scaling in $SU(2)$ Lattice Gauge Theory.* Phys. Lett. **B199**, 95.
- [40] I. Montvay (1996). *An Algorithm for Gluinos on the Lattice.* Nucl. Phys. **B466**, 259.
- [41] I. Montvay (1998). *Quadratically optimized Polynomials for Fermion Simulations.* Comput. Phys. Commun. **109**, 144.
- [42] I. Montvay and P. Weisz (1987). *Numerical study of finite volume effects in the four-dimensional Ising model.* Nucl. Phys. **B290 [FS20]**, 327.
- [43] I. Montvay (1995). *Embedding the $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills Theory in the adjoint Higgs-Yukawa model on the Lattice.* Phys. Lett. **B344**, 176. *Tuning to $N = 2$ Supersymmetry in the $SU(2)$ adjoint Higgs-Yukawa model.* Nucl. Phys. **B445**, 399.
- [44] I. Montvay and G. Münster (1994). *Quantum Fields on a Lattice.* Cambridge University Press, Cambridge UK.
- [45] M. Nakahara (1991). *Geometry, Topology and Physics.* Bristol.

- [46] H. Neuberger (1998). *More about Exactly Massless Quarks on the Lattice*. Phys. Lett. **B427**, 353.
- [47] H. B. Nielsen and M. Ninomiya (1981). *Absence of Neutrinos on a Lattice 1*. Nucl. Phys. **B185**, 20.
- [48] H. B. Nielsen and M. Ninomiya (1981). *Absence of Neutrinos on a Lattice 2*. Nucl. Phys. **B193**, 173.
- [49] L. H. Ryder (1996). *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.
- [50] N. Seiberg and E. Witten (1994). Nucl. Phys. **B426**, 19; (1994) ERRATUM ibid. **B430**, 485; (1994) Nucl. Phys. **B431**, 484.
- [51] D. Talkenberger (1997). *Monte-Carlo-Simulationen von Modellen der Elementarteilchenphysik mit dynamischen Fermionen*. PhD thesis, Universität Münster.
- [52] M. Schwetz and M. Zabzine (1997). *Gaugino Condensate and Veneziano-Yankielowiczs Effektive Lagrangian*. hep-th/**9710125**.
- [53] R. U. Sexl and H. K. Urbantke (2001). *Relativity, Groups, Particles. Special Relativity and Relativistic Symmetry in Field and Particle Physics*. Springer-Verlag Wien New York.
- [54] M. Shifman (1997). *Non-Perturbative Dynamics in Supersymmetric Gauge Theories*. Prog. Part. Nucl. Phys. **39**, 1.
- [55] A. D. Sokal (1989). *Monte Carlo Methods in Statistical Mechanics: Foundations and New Algorithms*. Cours de Troisième Cycle de la Physique en Suisse Romande, Lausanne.
- [56] K. Spanderen (1998). *Monte-Carlo-Simulationen einer SU(2) Yang-Mills-Theorie mit dynamischen Gluinos*. PhD thesis, Universität Münster.
- [57] M. J. Teper (1998). *Glueball Masses and other Physical Properties of SU(N) Gauge Theories in $D=3+1$: A Review of Lattice Results for Theorists*. hep-th/**9812187**.
- [58] H. D. Young (1962). *Statistical Treatment of Experimental data*. (McGraw Hill New York);
 A. G. Frodesen, O. Skjaggerstad and H. Tøfte (1979). *Probability and Statistics in Particle Physics* (Universitetsvorlaget Bergen);
 S. Brandt (1983). *Statistical and Computational Methods in Data Analysis* (North Holland, Amsterdam);
 B. L. van der Waerden (1969). *Mathematical Statistics* (Springer, New York).
- [59] G. Veneziano and S. Yankielowicz (1982). *An Effective Lagrangian for the Pure $N = 1$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*. Phys. Lett. **B113**, 231.

- [60] S. Weinberg (2000). *The Quantum Theory of Fields* Volume 3, Supersymmetry. Cambridge University Press.
- [61] J. Wess and B. Zumino (1974). *Supergauge Transformations in Four Dimensions*. Nucl. Phys. **B70**, 39.
- [62] K. G. Wilson (1974). *Confinement of Quarks*. Phys. Rev. **D10**, 2445.
- [63] E. Witten (1982). *Constraints on Supersymmetry Breaking*. Nucl. Phys. **202**, 253.

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Zustandekommen dieser Arbeit beigetragen haben:

- Bei Herrn Prof. Dr. Gernot Münster, der es mir ermöglichte mich auf dem interessanten Gebiet der Supersymmetrie auszutoben und immer für Fragen und Diskussionen zur Verfügung stand.
- Bei Herrn Dr. István Montvay und der gesamten DESY-Münster-Kollaboration, für die anregenden Gespräche und die sich daraus ergebenden interessanten Aufgaben.
- Bei Dr. Klaus Spanderen für die großzügige Unterstützung bei den numerischen Arbeiten.
- Bei meinen Bürokollegen Christian Demmer und Dr. Johannes Göttker-Schnetmann für das freundliche Klima und die angenehme „Arbeitsatmosphäre“.
- Bei der gesamten Arbeitsgruppe des Instituts für Theoretische Physik für die schöne Zeit.

Ein besonderer Dank geht an meinen Mann Andreas Luckmann, der mich immer unterstützt hat und sich auch nicht davor gescheut hat das abschließende Korrekturlesen meiner Dissertation zu übernehmen.

Persönliche Daten

Name	Luckmann, Silke
Geburtstag	16.09.1972
Geburtsort	Hiltrup
Familienstand	verheiratet, keine Kinder
Adresse	Am Mühlenbach 13, 48308 Senden
Eltern	Christa Luckmann, geb. Sturm Karl Luckmann

Schulbildung

1979 – 1983	Grundschule, Senden
1983 – 1992	Wilhelm-Hittorf-Gymnasium, Münster; Abschluß Abitur am 27.05.1992

Studium

01.10.1992 – 15.12.1997	Physik Diplom, Westfälische Wilhelms-Universität Münster; Vordiplom 05.10.1994 Diplom 15.12.1992, Diplomarbeit in theoretischer Physik
-------------------------	--

Tätigkeiten

01.10.1996 – 31.12.1997	Institut für Theoretische Physik, Westfälische Wilhelms-Universität Münster; studentische Hilfskraft
01.01.1998 – 30.06.1999	Institut für Theoretische Physik, Westfälische Wilhelms-Universität Münster; wissenschaftliche Hilfskraft
01.07.1999 – 30.06.2001	Institut für Theoretische Physik, Westfälische Wilhelms-Universität Münster; wissenschaftliche Mitarbeiterin

Dissertation

01.01.1998 –	Dissertation bei Prof. Dr. G. Münster am Institut für Theoretische Physik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster
--------------	--

