Korrigierte Ergebnisse der Diplomarbeit
Anwendung der Dyson-Schwinger-Gleichung in der ϕ^4-Theorie zur Berechnung universeller Amplitudenverhältnisse

Jens Küster

20. August 1996

Anmerkung

Die Korrekturen in den Kapiteln 6, 7 und 8 beruhen auf der Umdefinition von u_{R+} (6.14) und u_{R-}. Dadurch wurden in nahezu allen folgenden Reihen die Koeffizienten verändert und demzufolge auch die numerischen Ergebnisse.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 5

Berechnung der Vertex- und Green-Funktionen

5.1 Spezielle Integrale und Konstanten

Hierin ist Li_2 der Integrallogarithmus und durch

$$\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt \quad , \qquad x < 1 \tag{5.2}$$

definiert.

Das folgende Integral läßt sich nur numerisch auswerten:

$$\begin{aligned} C^{Tet} &= \pi^{-6}\int d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 \Delta(k_1)\Delta(k_2)\Delta(k_3)\Delta(k_1-k_2)\Delta(k_2-k_3)\Delta(k_3-k_1) \\ &= 0.1739006 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Kapitel 6

Renormierung

6.1 Renormierungsschema

Da die Wirkung dimensionslos ist, wird über

$$u_0 := \frac{g_0}{m_0^{4-D}} \text{ , bzw. hier im Fall } D = 3-\epsilon\text{:} \quad u_0 := \frac{g_0}{m_0^{1+\epsilon}} \tag{6.2}$$

eine dimensionslose, nackte Kopplung eingeführt.

Symmetrische Phase

Bei den renormierten Parametern wird ebenso wie bei den nackten Größen eine dimensionslose Kopplung eingeführt.

$$u_{R+} := \frac{g_R^{(4)}}{m_R^{4-D}} \stackrel{D=3-\epsilon}{=} \frac{g_R^{(4)}}{m_R^{1+\epsilon}} \tag{6.14}$$

6.3 Berechnung der renormierten Größen

6.3.1 Symmetrische Phase

Durch Quotientenbildung erhalten wir

$$\begin{aligned} u_{R+} = \frac{g_R^{(4)}}{m_R^{1+\epsilon}} \quad &= \quad u_0 \left[1 - \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \tfrac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \tfrac{m_0^2}{\pi} + 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{329}{216} + \frac{1}{6} B^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad \left. + \left(\frac{13}{9} - \frac{74}{9} \ln \frac{4}{3} - 48a - C^{Tet} - \frac{1}{3} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}\left(u_0^4\right) \right]. \end{aligned} \tag{6.35}$$

$$u_{0+} \quad = \quad u_R \left[1 + \frac{u_R}{8\pi} \left(1 - \tfrac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \tfrac{m_0^2}{\pi} + 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \left(\frac{103}{216} - \frac{1}{6} B_R^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \right.$$

$$+\left(-\frac{661}{216}+\frac{74}{9}\ln\frac{4}{3}+48a+C^{Tet}-\frac{1}{2}B_{1R}^{div}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_0^4\right)\Bigg] \tag{6.37}$$

Indem ich (6.37) in (6.33) und (6.34) einsetze und nach m_0 bzw. g_0 auflöse, bekomme ich:

$$\begin{aligned} m_{0+}^2 &= m_R^2\Bigg[1+\frac{u_R}{8\pi}\left(1-\tfrac{\epsilon}{2}\left(\gamma+\ln\tfrac{m_0^2}{\pi}-2\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right)+\left(\frac{245}{162}+\frac{1}{3}B_R^{div}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad +\left(\frac{529}{324}-\frac{71}{27}\ln\frac{4}{3}-\frac{32}{3}a+B_{1R}^{div}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right)\Bigg] \qquad (6.38) \\ g_0 &= g_R\Bigg[1+\frac{3}{2}\frac{u_R}{8\pi}\left(1-\tfrac{\epsilon}{2}\left(\gamma+\ln\tfrac{m_0^2}{\pi}\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right)+\frac{575}{324}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad +\left(-\frac{311}{216}+\frac{373}{54}\ln\frac{4}{3}+\frac{128}{3}a+C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right)\Bigg]. \qquad (6.39) \end{aligned}$$

Hier ist zu beachten, daß die nackte Kopplung keine divergenten Anteile mehr enthält.

Renormierungskonstanten

Die Renormierungskonstante Z_{1+} bestimmt sich aus (6.13) zu

$$\begin{aligned} Z_{1+}(u_R) &= 1+\frac{3}{2}\frac{u_R}{8\pi}+\frac{7}{4}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad +\left(-\frac{133}{72}+\frac{15}{2}\ln\frac{4}{3}+48a+C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right). \qquad (6.41) \end{aligned}$$

Für Z_{2+} ergibt sich mit (6.7):

$$\begin{aligned} Z_{2+}(u_R) &= 1+\frac{1}{2}\frac{u_R}{8\pi}+\frac{5}{12}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad +\left(-\frac{25}{216}+\frac{7}{6}\ln\frac{4}{3}+4a\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right). \qquad (6.42) \end{aligned}$$

Die dimensionslose Kopplung u_+ der symmetrischen Phase wird nach (6.15) mit (6.41) und (6.40) berechnet.

$$\begin{aligned} u_+ &= \frac{g_0}{m_R^{1+\epsilon}}(u_R)=u_R\frac{Z_1(u_R)}{Z_3^2(u_R)} \\ &= u_R\Bigg[1+\frac{3}{2}\frac{u_R}{8\pi}+\frac{575}{324}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad +\left(-\frac{311}{216}+\frac{373}{54}\ln\frac{4}{3}+\frac{128}{3}a+C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right)\Bigg] \qquad (6.43) \end{aligned}$$

Renormierungsgruppenfunktionen

Die im Kapitel 6.2 definierten Funktionen lassen sich wie die Renormierungskonstanten als Reihen in u_{R+} entwickeln.

Mit (6.24) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\beta_+(u_R) &= -\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_R}\right|_{m_R} \ln\left(u(u_R)\right)\right)^{-1} = -u(u_R)\left(\left.\frac{\partial u(u_R)}{\partial u_R}\right|_{m_R}\right)^{-1} \\
&= -u_R\left[1-\frac{3}{2}\frac{u_R}{8\pi}+\frac{77}{81}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2\right. \\
&\quad \left.-\left(-\frac{1021}{108}+\frac{373}{18}\ln\frac{4}{3}+128a+3C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right)\right]. \qquad (6.44)
\end{aligned}$$

Die Renormierungsgruppenfunktionen η_{3+} und η_{2+} berechnen sich aus (6.25a, b).

$$\begin{aligned}
\eta_{3+}(u_R) &= -\beta(u_R)\frac{1}{Z_3(u_R)}\left.\frac{\partial}{\partial u_R}\right|_{g_0} Z_3(u_R) \\
&= \frac{2}{81}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2+\left(\frac{14}{27}-\frac{8}{9}\ln\frac{4}{3}-8a\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right) \qquad (6.45a) \\
\eta_{2+}(u_R) &= -\beta(u_R)\frac{1}{Z_2(u_R)}\left.\frac{\partial}{\partial u_R}\right|_{g_0} Z_2(u_R) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{u_R}{8\pi}+\frac{1}{6}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2+\left(\frac{101}{81}-\frac{7}{2}\ln\frac{4}{3}-12a\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right) \\
&\qquad (6.45b)
\end{aligned}$$

Mit (6.26) erhalten wir aus diesen Reihen

$$\begin{aligned}
\nu_+(u_R) &= \left(2-\eta_3(u_R)+\eta_2(u_R)\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{4}\frac{u_R}{8\pi}-\frac{11}{1296}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2\right. \\
&\quad \left.+\left(-\frac{1991}{5184}+\frac{47}{36}\ln\frac{4}{3}+2a\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right)\right]. \qquad (6.46)
\end{aligned}$$

In den Gleichungen (6.40) bis (6.46) sehen wir, daß alle Renormierungskonstanten und -gruppenfunktionen in Abhängigkeit von u_{R+} frei von Divergenzen sind.

6.3.2 Phase gebrochener Symmetrie

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
u_{R-} = \frac{g_R}{m_R^{1+\epsilon}} &= u_0\left[1-\frac{31}{16}\frac{u_0}{8\pi}\left(1-\tfrac{\epsilon}{2}\left(\gamma+\ln\tfrac{m_0^2}{\pi}-\tfrac{44}{31}\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right)\right. \\
&\quad +\left(\frac{40957}{13824}-\frac{1}{3}B^{div}\right)\left(\frac{u_0}{8\pi}\right)^2
\end{aligned}$$

$$+\left(-\frac{284719}{73728}+\frac{21247}{1728}\ln\frac{4}{3}-\frac{819}{32}a-\frac{8051}{2048}C^{Tet}+\frac{31}{24}B_1^{div}\right)\left(\frac{u_0}{8\pi}\right)^3 +\mathcal{O}\left(u_0^4\right)\Big]. \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} u_{0-} &= u_R\Big[1+\frac{31}{16}\frac{u_R}{8\pi}\left(1-\tfrac{\epsilon}{2}\left(\gamma+\ln\tfrac{m_0^2}{\pi}-\tfrac{44}{31}\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &+\left(\frac{62831}{13824}+\frac{1}{3}B_R^{div}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\ &+\left(\frac{189289}{13824}-\frac{21247}{1728}\ln\frac{4}{3}+\frac{819}{32}a+\frac{8051}{2048}C^{Tet}+\frac{31}{16}B_{1R}^{div}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_0^4\right)\Big] \end{aligned} \quad (6.55)$$

Aus (6.51) und (6.52) wird nun:

$$\begin{aligned} m_{0-}^2 &= m_R^2\Big[1-\frac{3}{8}\frac{u_R}{8\pi}\left(1-\tfrac{\epsilon}{2}\left(\gamma+\ln\tfrac{m_0^2}{\pi}-10\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &-\left(\frac{14021}{10368}+\frac{2}{3}B_R^{div}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \qquad (6.56) \\ &+\left(-\frac{96685}{110592}-\frac{21535}{2592}\ln\frac{4}{3}+\frac{1723}{48}a+\frac{3345}{1024}C^{Tet}-\frac{7}{3}B_{1R}^{div}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right)\Big] \\ g_0 &= g_R\Big[1+\frac{7}{4}\frac{u_R}{8\pi}\left(1-\tfrac{\epsilon}{2}\left(\gamma+\ln\tfrac{m_0^2}{\pi}-\tfrac{2}{7}\right)+\mathcal{O}(\epsilon^2)\right)+\frac{8177}{2592}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \qquad (6.57) \\ &+\left(\frac{1322279}{165888}-\frac{21319}{1296}\ln\frac{4}{3}+\frac{1045}{24}a+\frac{2849}{512}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right)\Big]. \end{aligned}$$

Auch hier ist, ebenso wie in der symmetrischen Phase, die letzte Gleichung frei von Divergenzen.

Renormierungskonstanten

Die Renormierungskonstanten $Z_{i-}(i=2,3,4)$ aus Kapitel 6.1 werden nun in Abhängigkeit von u_{R-} bestimmt. Der Grenzübergang $\epsilon\to 0$ ist durchgeführt.

Aus (6.55) und (6.49) erhalten wir

$$\begin{aligned} Z_{3-}(u_R) &= 1-\frac{1}{8}\frac{u_R}{8\pi}-\frac{1693}{10368}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \qquad (6.58) \\ &+\left(-\frac{464285}{331776}+\frac{19375}{2592}\ln\frac{4}{3}-\frac{703}{48}a-\frac{2481}{1024}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right). \end{aligned}$$

Z_{2-} berechnet sich mit (6.7):

$$\begin{aligned} Z_{2-}(u_R) &= 1-\frac{1}{4}\frac{u_R}{8\pi}+\frac{47}{192}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\ &+\left(\frac{40705}{55296}+\frac{5}{12}\ln\frac{4}{3}-\frac{85}{8}a-\frac{27}{64}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right). \end{aligned} \quad (6.59)$$

Aus dem Vakuumerwartungswert bestimmt sich die Renormierungskonstante Z_{4-} nach (6.19).

$$\begin{aligned} Z_{4-}(u_R) &= 1+\frac{13}{16}\frac{u_R}{8\pi}+\frac{43805}{41472}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad+\left(\frac{86573}{41472}-\frac{23263}{5184}\ln\frac{4}{3}+\frac{1387}{96}a+\frac{3217}{2048}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right) \end{aligned} \tag{6.60}$$

Die dimensionslose Kopplung u_- der gebrochenen Phase wird nach (6.20) berechnet.

$$\begin{aligned} u_- &= \frac{g_0}{m_R^{1+\epsilon}}(u_R)=u_R\frac{Z_4^2(u_R)}{Z_3(u_R)} \\ &= u_R\left[1+\frac{7}{4}\frac{u_R}{8\pi}+\frac{8177}{2592}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2\right. \\ &\quad\left.+\left(\frac{1322279}{165888}-\frac{21319}{1296}\ln\frac{4}{3}+\frac{1045}{24}a+\frac{2849}{512}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right)\right] \end{aligned} \tag{6.61}$$

Renormierungsgruppenfunktionen

Zum Abschluß dieses Kapitels werden noch die Renormierungsgruppenfunktionen der Phase gebrochener Symmetrie als Reihen in u_{R-} entwickeln.

Diese Rechnungen sind analog zu den Rechnungen auf Seite 6 mit den Renormierungskonstanten der gebrochenen Phase durchzuführen.

$$\begin{aligned} \beta_-(u_R) &= -\left(\left.\frac{\partial}{\partial u_R}\right|_{m_R}\ln\left(u(u_R)\right)\right)^{-1}=-u(u_R)\left(\left.\frac{\partial u(u_R)}{\partial u_R}\right|_{m_R}\right)^{-1} \\ &= -u_R\left[1-\frac{7}{4}\frac{u_R}{8\pi}-\frac{239}{1296}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2\right. \\ &\quad\left.-\left(\frac{1112293}{165888}-\frac{21319}{432}\ln\frac{4}{3}+\frac{1045}{8}a+\frac{8547}{512}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right)\right] \end{aligned} \tag{6.62}$$

$$\begin{aligned} \eta_{3-}(u_R) &= -\beta(u_R)\frac{1}{Z_3(u_R)}\left.\frac{\partial}{\partial u_R}\right|_{g_0}Z_3(u_R) \\ &= \frac{1}{8}\frac{u_R}{8\pi}+\frac{10}{81}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad+\left(\frac{1207483}{331776}-\frac{19375}{864}\ln\frac{4}{3}+\frac{703}{16}a+\frac{7443}{1024}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_R^4\right) \end{aligned} \tag{6.63a}$$

$$\begin{aligned} \eta_{2-}(u_R) &= -\beta(u_R)\frac{1}{Z_2(u_R)}\left.\frac{\partial}{\partial u_R}\right|_{g_0}Z_2(u_R) \\ &= \frac{1}{4}\frac{u_R}{8\pi}-\frac{83}{96}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2+\left(-\frac{277873}{165888}-\frac{5}{4}\ln\frac{4}{3}+\frac{255}{8}a+\frac{81}{64}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3 \\ &\quad+\mathcal{O}\left(u_R^4\right) \end{aligned} \tag{6.63b}$$

$$
\begin{aligned}
\nu_-(u_R) &= \left(2 - \eta_3(u_R) + \eta_2(u_R)\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{16}\frac{u_R}{8\pi} + \frac{10325}{20736}\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1722091}{663552} - \frac{18295}{1728}\ln\frac{4}{3} + \frac{193}{32}a + \frac{6147}{2048}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}\left(u_R^4\right)\right]
\end{aligned}
\tag{6.64}
$$

Alle Renormierungskonstanten und -gruppenfunktionen sind in Abhängigkeit von u_{R-} frei von Divergenzen.

Mit den Reihen in den Abschnitten 6.3.1 und 6.3.2 sind nun alle benötigten Größen in Abhängigkeit der renormierten Kopplungskonstanten $u_{R\pm}$ bestimmt, und wir können in den beiden nächsten Kapiteln die Amplitudenverhältnisse der Korrelationslänge und Suszeptibilität berechnen.

Kapitel 7

Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge

7.2 Berechnung der Reihen

Um das gerade vorgestellte Verfahren anzuwenden, bestimme ich zuerst die in (7.5) definierten Reihen in ihren eigenen Kopplungen.

$$\begin{aligned} F_+(u_{R+}) &= 1 - \frac{1}{2}\frac{u_{R+}}{8\pi} - \frac{1}{6}\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{13}{27} - \frac{71}{54}\ln\frac{4}{3} - \frac{16}{3}a\right)\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}\left(u_{R+}^4\right) \end{aligned} \qquad (7.23)$$

$$\begin{aligned} F_-(u_{R-}) &= 1 + \frac{3}{16}\frac{u_{R-}}{8\pi} - \frac{233}{768}\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{297265}{663552} - \frac{21535}{5184}\ln\frac{4}{3} + \frac{1723}{96}a + \frac{3345}{2048}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}\left(u_{R-}^4\right) \end{aligned} \qquad (7.24)$$

Mit diesen Reihen läßt sich die Entwicklung in den beiden Kopplungen berechnen.

7.2.1 Reihen der Hochtemperaturkopplung

Zur Auswertung des Amplitudenverhältnisses $\frac{f_+}{f_-}$ bzw. Φ_+ am Hochtemperaturfixpunkt muß zuerst nach (7.19) die Abhängigkeit von $u_{R-}(u_{R+})$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} u_{R-}(u_{R+}) &= u_{R+}\Bigg[1 - \frac{1}{4}\frac{u_{R+}}{8\pi} - \frac{1309}{2592}\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{297853}{55296} + \frac{30271}{1296}\ln\frac{4}{3} - \frac{7}{8}a - \frac{2337}{512}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^3 \\ &\quad + \mathcal{O}\left(u_{R+}^4\right)\Bigg] \end{aligned} \qquad (7.25)$$

Mit der Reihe (7.25) wird (7.24) zu:

$$F_-(u_{R+}) = 1 + \frac{3}{16}\frac{u_{R+}}{8\pi} - \frac{269}{768}\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^2$$

$$+\left(-\frac{259441}{663552}-\frac{21535}{5184}\ln\frac{4}{3}+\frac{1723}{96}a+\frac{3345}{2048}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_{R+}^4\right). \tag{7.26}$$

Nun kann Φ_+ entwickelt werden:

$$\begin{aligned}\Phi_+(u_{R+}) &= \frac{F_-(u_{R+})}{F_+(u_{R+})}\\ &= 1+\frac{11}{16}\frac{u_{R+}}{8\pi}+\frac{41}{256}\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^2\\ &\quad+\left(-\frac{449761}{663552}-\frac{14719}{5184}\ln\frac{4}{3}+\frac{745}{32}a+\frac{3345}{2048}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_{R+}^4\right).\end{aligned} \tag{7.27}$$

Diese Reihe wird im folgenden Kapitel mit Padé-Borel-Approximanten numerisch ausgewertet. Das Amplitudenverhältnis ist nun direkt durch Vorgabe des kritischen Exponenten ν gegeben.

$$\begin{aligned}\frac{f_+}{f_-}(u_{R+},\nu) &= \left(2\Phi_+(u_{R+})\right)^\nu\\ &= 2^\nu\left[1+\frac{11\nu}{16}\frac{u_{R+}}{8\pi}+\frac{-39\nu+121\nu^2}{512}\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^2\right.\\ &\quad+\left(\frac{-450949\nu-34749\nu^2+35937\nu^3}{663552}-\frac{14719\nu}{5184}\ln\frac{4}{3}\right.\\ &\quad\left.\left.+\frac{745\nu}{32}a+\frac{3345\nu}{2048}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_{R+}^4\right)\right]\end{aligned} \tag{7.28}$$

7.2.2 Reihen der Tieftemperaturkopplung

Um $\frac{f_+}{f_-}$ bzw. Φ_- am Tieftemperaturfixpunkt auszuwerten, bestimmen wir zuerst $u_{R+}(u_{R-})$ nach (7.21).

$$\begin{aligned}u_{R+}(u_{R-}) &= u_{R-}\left[1+\frac{1}{4}\frac{u_{R-}}{8\pi}+\frac{1633}{2592}\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^2\right.\\ &\quad\left.+\left(\frac{1011239}{165888}-\frac{30271}{1296}\ln\frac{4}{3}+\frac{7}{8}a+\frac{2337}{512}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_{R-}^4\right)\right]\end{aligned} \tag{7.29}$$

Durch Einsetzen in (7.23) bekommen wir:

$$\begin{aligned}F_+(u_{R-}) &= 1-\frac{1}{2}\frac{u_{R-}}{8\pi}-\frac{7}{24}\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^2\\ &\quad+\left(\frac{431}{5184}-\frac{71}{54}\ln\frac{4}{3}-\frac{16}{3}a\right)\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_{R-}^4\right).\end{aligned} \tag{7.30}$$

Mit dieser Reihe kann Φ_- entwickelt werden.

$$\begin{aligned}\Phi_-(u_{R-}) &= \frac{F_-(u_{R-})}{F_+(u_{R-})} \\ &= 1+\frac{11}{16}\frac{u_{R-}}{8\pi}+\frac{85}{256}\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad +\left(-\frac{109217}{663552}-\frac{14719}{5184}\ln\frac{4}{3}+\frac{745}{32}a+\frac{3345}{2048}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_{R-}^4\right)\end{aligned} \tag{7.31}$$

Ebenso wie (7.27) wird diese Reihe im folgenden Kapitel mit Padé-Borel-Approximanten numerisch ausgewertet. Für das Amplitudenverhältnis ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{f_+}{f_-}(u_{R-},\nu) &= (2\Phi_-(u_{R-}))^\nu \\ &= 2^\nu\left[1+\frac{11\nu}{16}\frac{u_{R-}}{8\pi}+\frac{49\nu+121\nu^2}{512}\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^2\right. \\ &\quad +\left(\frac{-188813\nu+43659\nu^2+35937\nu^3}{663552}-\frac{14719}{5184}\ln\frac{4}{3}\right. \\ &\quad \left.\left.+\frac{745\nu}{32}a+\frac{3345\nu}{2048}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^3+\mathcal{O}\left(u_{R-}^4\right)\right].\end{aligned} \tag{7.32}$$

7.3 Numerische Ergebnisse

7.3.1 Hochtemperaturfixpunkt

In der Hochtemperaturphase haben wir die Fixpunktwerte

$$\begin{array}{lll} u_{R+}^* = 23.73(8) & \text{[GZJ80, ZJ82] Renormierungsgruppe in 3-D} \\ u_{R+}^* = 24.56(10) & \text{[Sie93] Hochtemperatur-Entwicklung} \end{array}, \tag{7.33}$$

an denen (7.27) berechnet wird.

Zuerst wird die Reihe direkt durch Padé-Approximanten ausgewertet (Tabelle 7.1). Wie insbesondere an den Werten der [1,2]-Padé zu erkennen ist, haben wir hier ein sehr schlechtes Konvergenzverhalten.

Durch Anwendung des Padé-Borel-Verfahrens lassen sich bessere Werte erzielen. Die inverse Borel-Transformation wird als numerische Integration durchgeführt. Die Werte der [0,3]-Padé aus Tabelle 7.2 sind durch Partialbruchzerlegung und Berechnen des Hauptwertintegrals über die Polstelle bestimmt.

Nun wird noch aus den oben bestimmten Werten das Amplitudenverhältnis nach (7.14) berechnet. Dabei beziehen sich die Tabellen 7.3 und 7.4 auf die Φ_+-Werte aus

Fixpunkt u_{R+}^*	$\Phi_+(u_{R+}^*)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
23.73	1.4091	1.6879	-0.2230	1.0821
24.56	1.4004	1.7123	-0.3539	1.0491

Tabelle 7.1: Φ_+ in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u_{R+}^*.

Fixpunkt u_{R+}^*	Borel-Transformierte von $\Phi_+(u_{R+}^*)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
23.73	1.4091	1.6949	1.4328	1.3776
24.56	1.4004	1.7198	1.4372	1.3673

Tabelle 7.2: Padé-Borel-Approximante von Φ_+ am Fixpunktwert u_{R+}^*

Tabelle 7.1. Für den kritischen Exponenten setze ich folgende Werte ein.

$$\begin{array}{ll} \nu = 0.624(2) & \text{[BGHP92] Monte-Carlo Renormierungsgruppe} \\ \nu = 0.627(9) & \text{[Dec85] Tieftemperaturentwicklung} \\ \nu = 0.6300(15) & \text{[GZJ80, ZJ82] Renormierungsgruppe in 3-D} \end{array} \tag{7.34}$$

ν	Amplitudenverhältnis $\frac{f_+}{f_-}(u_{R+}^* = 23.73, \nu)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
0.624	1.9089	2.1365	/	1.6189
0.627	1.9148	2.1443	/	1.6227
0.630	1.9208	2.1522	/	1.6265

Tabelle 7.3: Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge unter Vorgabe von ν am Fixpunktwert $u_{R+}^* = 23.73$

Die [1,2]-Padé lassen sich für den Fixpunkt $u_{R+}^* = 24.56$ nicht berechnen, da $\Phi_+(24.56) < 0$ ist.

Aus den Daten der Padé-Borel-Transformierten Φ_+-Funktion (Tabelle 7.2) bekomme ich die Werte der Tabelle 7.5. Die [3,0]-Padé stimmen mit den ersten Spalten der Tabellen 7.3 und 7.4 überein, da die Padé-Approximante mit dem ursprünglichem Polynom übereinstimmt, und somit die Borel-Transformation keinen Einfluß hat.

ν	Amplitudenverhältnis $\frac{f_+}{f_-}(u^*_{R+} = 24.56, \nu)$ [3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
0.624	1.9015	2.1558	/	1.5879
0.627	1.9074	2.1638	/	1.5914
0.630	1.9133	2.1718	/	1.5950

Tabelle 7.4: Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge unter Vorgabe von ν am Fixpunktwert $u^*_{R+} = 24.56$

ν	Amplitudenverhältnis Padé-Borel-Verfahren $\frac{f_+}{f_-}(u^*_{R+}, \nu)$ [3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u^*_{R+} = 23.73$			
0.624	1.9089	2.1420	1.9289	1.8822
0.627	1.9148	2.1499	1.9350	1.8879
0.630	1.9208	2.1578	1.9411	1.8937
	$u^*_{R+} = 24.56$			
0.624	1.9015	2.1616	1.9326	1.8734
0.627	1.9074	2.1696	1.9387	1.9387
0.630	1.9133	2.1777	1.9448	1.8847

Tabelle 7.5: Amplitudenverhältnis berechnet nach dem Padé-Borel-Verfahren

Das Amplitudenverhältnis läßt sich ohne Vorgabe von ν durch Einsetzen von (6.46) in (7.14) bestimmen. Diese Werte sind in Tabelle 7.6 aufgeführt.

Fixpunkt u^*_{R+}	Amplitudenverhältnis direkte Bestimmung $\frac{f_+}{f_-}(u^*_{R+})$ [3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
23.73	1.9379	2.0645	2.4322	1.7092
24.56	1.9459	2.0884	2.4944	1.6896

Tabelle 7.6: Amplitudenverhältnis nur in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u^*_{R+}.

7.3.2 Tieftemperaturfixpunkt

In der Phase gebrochener Symmetrie wird (7.31) an den Fixpunkten

$$\begin{array}{lll} u^*_{R-} = 14.73(14) & \text{[Sie93] Tieftemperaturentwicklung} \\ u^*_{R-} = 15.1(1.3) & \text{[Hei93]} \end{array} \tag{7.35}$$

ausgewertet.

In Tabelle 7.7 sind die Ergebnisse der Padé-Approximanten aufgelistet. Tabelle 7.8 führt die mit dem Padé-Borel-Verfahren bestimmten Werte auf. Aus den Werten der Tabelle 7.7 berechnet sich das Amplitudenverhältnis wie in 7.9 aufgelistet. Die Werte in Tabelle 7.10 sind mit Padé-Borel-Verfahren bestimmt. Tabelle 7.11 listet die Werte der direkten Bestimmung des Amplitudenverhältnisses auf.

Fixpunkt	$\Phi_-(u^*_{R-})$			
u^*_{R-}	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
14.73	1.5288	1.5301	1.5002	1.5149
15.1	1.5456	1.5471	1.5133	1.5301

Tabelle 7.7: Φ_- in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u^*_{R-}.

Fixpunkt	Borel-Transformierte von $\Phi_-(u^*_{R-})$			
u^*_{R-}	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
14.73	1.5288	1.5307	1.4868	1.4688
15.1	1.5456	1.5478	1.4994	1.4729

Tabelle 7.8: Padé-Borel-Approximante von Φ_- am Fixpunktwert u^*_{R-}

7.4 Diskussion

Um die Ergebnisse der Rechnungen auszuwerten, wurde jeweils über die vier Padé-Approximanten gemittelt und der Maximalfehler bestimmt. Dabei kommen die Werte der folgenden Tabelle 7.12 heraus. Bei der Mittelung über die Padé-Approximanten der Hochtemperaturkopplung wurde der Wert der [1,2]-Padé weggelassen, da er weit außerhalb der möglichen Lösung liegt.

Am Tieftemperaturfixpunkt ist der Spielraum der Werte ungefähr um einen Faktor zehn geringer als am Hochtemperaturfixpunkt. Beim Hochtemperaturfixpunkt bringt die Verwendung von Borel-Transformierten eine deutliche Verringerung des relativen Fehlers auf ca. 16%.

ν	Amplitudenverhältnis $\frac{f_+}{f_-}(u^*_{R-}, \nu)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u^*_{R-} = 14.73$			
0.624	2.0085	2.0096	1.9850	1.9971
0.627	2.0152	2.0163	1.9916	2.0038
0.630	2.0220	2.0231	1.9981	2.0105
	$u^*_{R-} = 15.1$			
0.624	2.0222	2.0235	1.9958	2.0096
0.627	2.0291	2.0303	2.0025	2.0163
0.630	2.0360	2.0372	2.0091	2.0231

Tabelle 7.9: Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge unter Vorgabe von ν am Fixpunktwert u^*_{R-}

ν	Amplitudenverhältnis Padé-Borel-Verfahren $\frac{f_+}{f_-}(u^*_{R-}, \nu)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u^*_{R-} = 14.73$			
0.624	2.0085	2.0101	1.9739	1.9590
0.627	2.0152	2.0169	1.9804	1.9653
0.630	2.0220	2.0236	1.9869	1.9717
	$u^*_{R-} = 15.1$			
0.624	2.0223	2.0240	1.9844	1.9624
0.627	2.0291	2.0309	1.9909	1.9687
0.630	2.0360	2.0378	1.9975	1.9751

Tabelle 7.10: Amplitudenverhältnis berechnet nach Padé-Borel-Verfahren

Fixpunkt u^*_{R-}	Amplitudenverhältnis direkte Bestimmung $\frac{f_+}{f_-}(u^*_{R-})$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
14.73	1.8883	2.0877	2.1704	1.9475
15.1	1.9078	2.1417	2.2479	1.9746

Tabelle 7.11: Amplitudenverhältnis nur in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u^*_{R-}.

$\Phi_\pm$	Hochtemperaturfixpunkt	Tieftemperaturfixpunkt
Padé-Approximanten	1.39(34)	1.526(26)
Padé-Borel Verfahren	1.48(24)	1.510(41)

Tabelle 7.12: Gemittelte Werte von $\Phi_\pm$

Dagegen bringt das Padé-Borel-Verfahren in der Tieftemperaturphase keine bessere Konvergenz. Insgesamt ist der Fehler zwar deutlich kleiner als in der Hochtemperaturphase, aber ohne Borel-Transfomation ist die Varianz noch geringer.

Um diese Ergebnisse mit Literaturwerten zu vergleichen, betrachte ich direkt das Amplitudenverhältnis. Dieses wird durch Potenzierung mit dem kritischen Exponenten ν aus $\Phi_\pm$ gewonnen. Dabei ist ν einmal durch die Literaturwerte aus (7.34) gegeben. Die zweite Möglichkeit ist die Bestimmung über (6.46, 6.64), wie sie in [GUT95] ausführlich dargestellt wird.

$\frac{f_+}{f_-}$	Hochtemperaturfixpunkt	Tieftemperaturfixpunkt
Padé-Approximanten	1.89(30)	2.013(28)
Padé-Borel-Verfahren	1.98(20)	2.000(41)
Direkte Bestimmung	2.05(45)	2.05(20)

Tabelle 7.13: Gemittelte Werte des Amplitudenverhältnisses der Korrelationslänge

Die Werte der direkten Bestimmung des Amplitudenverhältnisses haben an beiden Fixpunkten die größten Fehler. Dies läßt sich auf die ungenauen Werte des kritischen Exponeneten ν zurückführen (siehe [GUT95]). Abgesehen von diesem Wert hat, wie schon bei der Funktion $\Phi_\pm$, das Ergebnis am Tieftemperaturfixpunkt einen ungefähr zehnmal geringeren Fehler. Bei beiden Bestimmungsverfahren (ohne bzw. mit Borel-Transformation) ist der relative Fehler sehr klein, nämlich bei einem bzw. knapp über zwei Prozent.

Zum Vergleich mit den hier erzielten Ergebnissen seien hier die folgenden Literaturwerte angegeben.

$$\frac{f_+}{f_-} = \begin{cases} 1.91 & \text{[BGZJ74] } \epsilon\text{-Entwicklung} \\ 1.96(3), 1.96(1), 1.94(3) & \text{[LF89, SIE93] Hoch-/Tieftemperatur-Entwicklung} \\ 2.06(1) & \text{[RZW94] Monte-Carlo} \\ 2.05(22), 2.22(5), 1.9(2) & \text{[KKG83] Experimentell: Binäre Fluide} \\ 2.03(4), 2.18(12) & \text{[HEI93, MH94] 2-Loop-Berechnung} \end{cases} \tag{7.36}$$

Die gemittelten Werte aus Tabelle 7.13 liegen in beiden Phasen mit ihren Fehlern im Spektrum der Literaturwerte.

Im Vergleich mit den Ergebnissen aus [MH94] fällt auf, daß sich die numerischen Werte in der Tieftemperaturkopplung kaum unterscheiden, während am Hochtemperaturfixpunkt zwei sehr unterschiedliche Werte bestimmt werden.

Zur Abschätzung der Korrekturen, die die einzelnen Ordnungen beitragen, sind in der folgenden Gleichung die numerischen Werte der Koeffizienten aufgeführt.

$$\begin{aligned} \Phi_+ &= 1 + 2.74 \cdot 10^{-2} u_{R+} + 2.54 \cdot 10^{-4} u_{R+}^2 - 2.86 \cdot 10^{-5} u_{R+}^3 + \mathcal{O}\left(u_{R+}^4\right) \\ \Phi_- &= 1 + 2.74 \cdot 10^{-2} u_{R-} + 5.26 \cdot 10^{-4} u_{R-}^2 + 3.68 \cdot 10^{-6} u_{R-}^3 + \mathcal{O}\left(u_{R-}^4\right) \end{aligned} \tag{7.37}$$

Wenn typische Fixpunktwerte eingesetzt werden ($u_{R+}^* \approx 24, u_{R-}^* \approx 15$), tragen die einzelnen Koeffizienten wie folgt bei:

$$\begin{array}{llll} \Phi_+ = 1 & +0.657 & +0.146 & -0.396 \\ \Phi_- = 1 & +0.410 & +0.118 & +0.012 \end{array} \tag{7.38}$$

Das heißt, daß die dritte Ordnung in der Hochtemperaturkopplung eine Korrektur von 21% der niedrigeren Terme liefert, während der Beitrag in der Tieftemperaturkopplung nur knapp über einem Prozent liegt. Mit der kleinen Korrektur in der Tieftemperaturkopplung scheint diese Reihe eine deutlich bessere Konvergenz aufzuweisen, als die Reihe der Hochtemperaturkopplung, wo der Betrag des Termes dritter Ordnung mehr als doppelt so groß ist wie der Term zweiter Ordnung.

Wegen des geringen Fehlers und der nur kleinen Korrektur in dritter Ordnung gebe ich als sicherstes Ergebnis für das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge die Mittelung über die Padé-Approximanten am Tieftemperaturfixpunkt an:

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{f_+}}{\boldsymbol{f_-}} = \mathbf{2.013(28)}} \tag{7.39}$$

Kapitel 8

Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität

8.2 Berechnung der Reihen

Mit den entsprechenden Reihen aus Kapitel 6.3 lautet diese Gleichung:

$$\begin{aligned}
\gamma_+(u_{R+}) &= 1 + \frac{1}{4}\frac{u_{R+}}{8\pi} - \frac{1}{48}\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{1117}{1728} + \frac{7}{4}\ln\frac{4}{3} + 6a\right)\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}\left(u_{R+}^4\right) \qquad (8.7) \\
\gamma_-(u_{R-}) &= 1 - \frac{1}{8}\frac{u_{R-}}{8\pi} + \frac{169}{384}\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{82753}{110592} + \frac{5}{8}\ln\frac{4}{3} - \frac{255}{16}a - \frac{81}{128}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}\left(u_{R-}^4\right) \qquad (8.8)
\end{aligned}$$

8.2.1 Reihen der Hochtemperaturkopplung

In (8.5) brauchen wir neben Φ, das wir schon in (7.27) bzw. (7.31) als Reihe in einer Kopplung bestimmt haben, noch Z_{3-} als Funktion von u_{R+}. Dies erhalten wir durch Einsetzen von (7.25) in (6.58).

$$\begin{aligned}
Z_{3-}(u_{R+}) &= 1 - \frac{1}{8}\frac{u_{R+}}{8\pi} - \frac{1369}{10368}\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{138751}{110592} + \frac{19375}{2592}\ln\frac{4}{3} - \frac{703}{48}a - \frac{2481}{1024}C^{Tet}\right)\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}\left(u_{R+}^4\right) \qquad (8.9)
\end{aligned}$$

Damit kann nun die Bestimmungsgleichung in der Hochtemperaturkopplung berechnet werden.

$$\frac{C_+}{C_-}(u_{R+},\gamma) = \frac{Z_{3+}(u_{R+})}{Z_{3-}(u_{R+})}\left(2\Phi_+(u_{R+})\right)^\gamma$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^\gamma \left[1 + \frac{2+11\gamma}{16}\frac{u_{R+}}{8\pi} + \frac{5612+405\gamma+9801\gamma^2}{41472}\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^2 \right. \\
&\quad + \left(\frac{243934-131845\gamma-5049\gamma^2+11979\gamma^3}{221184} - \frac{37214+14719\gamma}{5184}\ln\frac{4}{3} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{554+745\gamma}{32}a + \frac{4962+3345\gamma}{2048}C^{Tet} \right)\left(\frac{u_{R+}}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}\left(u_{R+}^4\right) \right]
\end{aligned} \tag{8.10}
$$

8.2.2 Reihen der Tieftemperaturkopplung

In der Tieftemperaturphase muß noch Z_{3+} in Abhängigkeit von u_{R-} berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
Z_{3+}(u_{R-}) &= 1 - \frac{1}{81}\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{31}{162} + \frac{8}{27}\ln\frac{4}{3} + \frac{8}{3}a\right)\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}\left(u_{R-}^4\right)
\end{aligned} \tag{8.11}
$$

Die Bestimmungsgleichung wird damit zu

$$
\begin{aligned}
\frac{C_+}{C_-}(u_{R-},\gamma) &= \frac{Z_{3+}(u_{R-})}{Z_{3-}(u_{R-})}\left(2\Phi_-(u_{R-})\right)^\gamma \\
&= 2^\gamma \left[1 + \frac{2+11\gamma}{16}\frac{u_{R-}}{8\pi} + \frac{6908+7533\gamma+9801\gamma^2}{41472}\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^2 \right. \\
&\quad + \left(\frac{828954-104887\gamma+63261\gamma^2+35937\gamma^3}{663552} - \frac{37214+14719\gamma}{5184}\ln\frac{4}{3} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{554+745\gamma}{32}a + \frac{4962+3345\gamma}{2048}C^{Tet} \right)\left(\frac{u_{R-}}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}\left(u_{R-}^4\right) \right].
\end{aligned} \tag{8.12}
$$

8.3 Numerische Ergebnisse

Die numerische Auswertung erfolgt wie in Kapitel 7.3 an Fixpunktwerten der Kopplung. Der kritische Exponent ist hier wiederum durch Literaturwerte gegeben.

8.3.1 Hochtemperaturfixpunkt

Die Reihe (8.10) wird an den Fixpunkten aus (7.33) und den folgenden Werten des kritischen Exponenten bestimmt.

$$
\begin{array}{ll}
\gamma = 1.237(2) & \text{[BGHP92] Monte-Carlo Renormierungsgruppe} \\
\gamma = 1.241(2) & \text{[GZJ80, ZJ82] Renormierungsgruppe in 3-D} \\
\gamma = 1.250(1) & \text{[GG74] Hochtemperaturentwicklung}
\end{array} \tag{8.13}
$$

In der Tabelle 8.1 sind die numerischen Resultate aufgelistet. Die [1,2]-Padé haben mit ihren Werten um Null keine Aussagekraft. Diese Werte sind auf die entsprechenden Resultate in Tabelle 7.1 zurückzuführen und in der Mittelwertbildung weggelassen.

γ	Amplitudenverhältnis $\frac{C_+}{C_-}(u^*_{R+}, \gamma)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u^*_{R+} = 23.73$			
1.237	4.8579	5.1603	0.3883	2.7996
1.241	4.8811	5.1844	0.4196	2.8063
1.250	4.9337	5.2391	0.4882	2.8214
	$u^*_{R+} = 24.56$			
1.237	4.9296	5.2717	0.1844	2.6852
1.241	4.9534	5.2965	0.2158	2.6912
1.250	5.0074	5.3530	0.2847	2.7049

Tabelle 8.1: Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität unter Vorgabe von γ am Fixpunktwert u^*_{R+}

γ	Amplitudenverhältnis Padé-Borel-Verfahren $\frac{C_+}{C_-}(u^*_{R+}, \gamma)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u^*_{R+} = 23.73$			
1.237	4.8579	5.1921	4.0628	2.8421
1.241	4.8811	5.2164	4.0797	2.8429
1.250	4.9337	5.2715	4.1177	2.8448
	$u^*_{R+} = 24.56$			
1.237	4.9296	5.3066	4.0848	2.7909
1.241	4.9534	5.3317	4.1018	2.7914
1.250	5.0074	5.3886	4.1402	2.7927

Tabelle 8.2: Amplitudenverhältnis berechnet nach Padé-Borel-Verfahren

Tabelle 8.2 führt die Ergebnisse der Berechnung mittels Padé-Borel-Verfahren auf. Für die [1,2]-Padé kommen deutlich verbesserte Werte heraus, während die

[0,3]-Padé immer noch sehr niedrig liegen. Als Vergleichswerte sind in Tabelle 8.3 noch die Resultate der Berechnung ohne Vorgabe von γ durch Einsetzen von (8.7) in (8.5) aufgeführt.

Fixpunkt u^*_{R+}	Amplitudenverhältnis direkte Bestimmung $\frac{C_+}{C_-}(u^*_{R+})$ [3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
23.73	4.9591	4.9735	-6.8973	2.7276
24.56	5.0970	5.1135	-6.2958	2.6193

Tabelle 8.3: Amplitudenverhältnis nur in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u^*_{R+}.

8.3.2 Tieftemperaturfixpunkt

Am Tieftemperaturfixpunkt (Werte wie in (7.35)) berechnen wir zuerst die Padé-Approximanten von (8.12), deren Ergebnisse in Tabelle 8.4 aufgelistet sind.

	Amplitudenverhältnis $\frac{C_+}{C_-}(u^*_{R-},\gamma)$			
γ	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u^*_{R-} = 14.73$			
1.237	4.5497	4.6979	4.6507	4.6631
1.241	4.5696	4.7190	4.6712	4.6835
1.250	4.6149	4.7669	4.7175	4.7298
	$u^*_{R-} = 15.1$			
1.237	4.6327	4.7990	4.7448	4.7591
1.241	4.6532	4.8208	4.7658	4.7801
1.250	4.6997	4.8703	4.8135	4.8277

Tabelle 8.4: Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität unter Vorgabe von γ am Fixpunktwert u^*_{R-}

In Tabelle 8.5 sind die Padé-Borel-Resultate eingetragen. Hier hat, ebenso wie bei Φ_- (s. Abschnitt 7.3.2), die Borel-Transformation keinen ergebnisverbessernden Einfluß, im Gegenteil wird die Varianz stark erhöht. Tabelle 8.6 listet die Resultate des Amplitudenverhältnisses der Suszeptibilität nur in Abhängigkeit der Fixpunkte u^*_{R-} auf.

γ	Amplitudenverhältnis Padé-Borel-Verfahren $\frac{C_+}{C_-}(u^*_{R-}, \gamma)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u^*_{R-} = 14.73$			
1.237	4.5497	4.9931	4.2761	3.4985
1.241	4.5696	5.0547	4.2933	3.5047
1.250	4.6149	5.2463	4.3322	3.5186
	$u^*_{R-} = 15.1$			
1.237	4.6327	4.9992	4.3293	3.4850
1.241	4.6532	5.0762	4.3467	3.4909
1.250	4.6997	5.3523	4.3862	3.5041

Tabelle 8.5: Amplitudenverhältnis berechnet nach Padé-Borel-Verfahren

Fixpunkt	Amplitudenverhältnis direkte Bestimmung $\frac{C_+}{C_-}(u^*_{R-})$			
u^*_{R-}	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
14.73	3.7567	5.2513	21.3990	4.5347
15.1	3.8347	5.6564	-78.1839	4.7399

Tabelle 8.6: Amplitudenverhältnis nur in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u^*_{R-}.

8.4 Diskussion

Aus den oben gewonnenen Resultaten bilde ich Mittelwerte über die Daten der einzelnen Bestimmungsmethoden. Dabei habe ich bei der direkten Bestimmung nur durch Vorgabe des Fixpunktwertes jeweils die Daten der [1,2]-Padé vernachlässigt, da sie teilweise negativ beziehungsweise weit außerhalb des physikalisch Sinnvollen liegen. Ebenso habe ich bei der Mittelung über die Daten der Tabelle 8.1 verfahren. Wie in Tabelle 7.13 sind die Werte der direkten Bestimmung sehr ungenau. Bei Bestimmung des Amplitudenverhältnisses über das Padé-Borel-Verfahren ist der Wert am Tieftemperaturfixpunkt mit einem etwas geringerem Maximalfehler behaftet, jedoch ist der Unterschied längst nicht so groß wie beim Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge (vgl. Tab. 7.13). Am Hochtemperaturfixpunkt haben alle Mittelwerte einen Fehler, der größer als ein Drittel ist. Damit erscheint der Mittelwert über die Padé-Approximanten am Tieftemperaturfixpunkt als der einzige zuverlässige Wert. Er hat einen relativen Maximalfehler von ungefähr 3.5%.

Im Vergleich mit den Literaturwerten aus (8.14) fällt auf, daß die Mittelwerte

$\frac{C_+}{C_-}$	Hochtemperaturfixpunkt	Tieftemperaturfixpunkt
Padé-Approximanten	4.3(1.6)	4.72(17)
Padé-Borel-Verfahren	4.3(1.5)	4.39(96)
Direkte Bestimmung	4.2(1.6)	4.63(1.03)

Tabelle 8.7: Gemittelte Werte des Amplitudenverhältnisses der Suszeptibilität

fast durchgehend niedriger liegen. Nur der experimentelle Wert ist fast genauso groß oder etwas unterhalb der hier bestimmten Mittelwerte.

$$\frac{C_+}{C_-} = \begin{cases} 4.81 & \text{[BGZJ74] } \epsilon\text{-Entwicklung} \\ 4.77(30) & \text{[ZJ89] Renormierungsgruppe in 3-D} \\ 5.03(5), 4.95(15), 4.82(5) & \text{[LF89, Sie93] Hoch-/Tieftemperatur-Entwicklung} \\ 4.3(3) & \text{Experimentell: Binäre Fluide} \\ 4.66(36), 6.03(1.05) & \text{[Hei93] 2-Loop-Berechnung} \end{cases} \tag{8.14}$$

Mit diesen Werten, die außer dem letzten auf anderen Bestimmungsmethoden beruhen, wird das oben Festgestellte untermauert und als Ergebnis gebe ich

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{C_+}}{\boldsymbol{C_-}} = \mathbf{4.72(17)}} \tag{8.15}$$

an, den Mittelwert der Padé-Approximanten am Tieftemperaturfixpunkt.