

Jens Küster

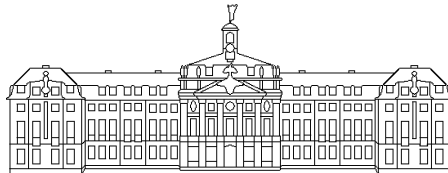
**Kritisches Verhalten
fluktuierender Grenzflächen**

2001

Theoretische Physik

Kritisches Verhalten fluktuierender Grenzflächen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster



vorgelegt von
Jens Küster
aus Köln

- 2001 -

Dekan: Prof. Dr. W. Lange
Erster Gutachter: Prof. Dr. G. Münster
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. M. Stingl
Tag der mündlichen Prüfungen: 02. und 04. April 2001
Tag der Promotion: 04. April 2001

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	3
1.1 Kritisches Verhalten	3
1.1.1 Kritische Exponenten	3
1.1.2 Universelle Amplitudenverhältnisse	5
1.2 Grenzflächen	5
1.2.1 Quantitative Beschreibung	7
1.3 Formalismus	8
2 Die klassische Lösung	11
2.1 Symmetrische Phase	11
2.2 Der Grundzustand	12
2.3 Die Grenzfläche	12
2.4 Oberflächenspannung	15
3 Erzeugende Funktionale	17
3.1 Verbundene Green-Funktionen	19
3.2 Echte Vertex-Funktionen	21
4 Effektives Potential	23
4.1 Die erste Ordnung	23
4.1.1 Das Integral $w_D(x)$	25
4.1.2 Resultat in der symmetrischen Phase	26
4.1.3 Extrema der symmetrischen Phase	27
4.1.4 Resultat in der gebrochenen Phase	28
4.1.5 Extrema der gebrochenen Phase	30
4.2 Die zweite Ordnung	30
4.2.1 Resultat in der symmetrischen Phase	35
4.2.2 Resultat in der gebrochenen Phase	36
4.2.3 Extrema des effektiven Potentials zweiter Ordnung	36

5	Oberflächenspannung	39
5.1	Oberflächenspannung in erster Ordnung	39
5.1.1	Imaginäranteil des Potentials	40
5.1.2	Erstes Teilintegral	41
5.1.3	Zweites Teilintegral	41
5.1.4	Resultat	44
5.2	Oberflächenspannung in zweiter Ordnung	44
5.2.1	Normierung des Potentials	44
5.2.2	Erstes Teilintegral	46
5.2.3	Zweites Teilintegral	48
5.2.4	Die Konstante C_a	52
5.2.5	Resultat	58
6	Renormierung	61
6.1	Renormierungsschema	61
6.2	Renormierte Reihen	64
6.3	Renormierte Oberflächenspannung	64
6.4	Numerische Ergebnisse	66
6.5	Diskussion	68
7	Kinetischer Term	71
7.1	Die erste Ordnung	72
7.2	Die Feldrenormierungskonstante	77
7.3	Oberflächenspannung	79
7.3.1	Ableitung der effektiven Wirkung	79
7.3.2	Kinetische Korrektur zur Oberflächenspannung	80
8	Grenzflächenprofil	85
8.1	Die erste Ordnung	86
8.1.1	Die Differentialgleichung	87
8.1.2	Asymptotisches Verhalten	90
8.1.3	Die Randbedingung	91
8.2	Die zweite Ordnung	92
8.2.1	Die Differentialgleichung für kleine Werte von χ_g	93
8.2.2	Die Differentialgleichung für große Werte von χ_g	102
8.2.3	Asymptotisches Verhalten	113
8.3	Renormierung	115
8.3.1	Resultat	118
8.4	Kinetische Korrekturen	122
8.5	Diskussion	124
	Zusammenfassung	127

A Formelsammlung	131
A.1 Die Gammafunktion	131
A.1.1 Schwinger-Parametrisierung	131
A.2 Volumen der Sphäre	131
A.3 Logarithmus und Umkehrfunktionen	133
A.3.1 Hyperbolische Funktionen	133
A.3.2 Arcustangens	133
A.3.3 Dilogarithmus	134
B Integrale	136
C Mehler-Formel	138
D Padé-Borel-Verfahren	141
Literaturverzeichnis	143

Abbildungsverzeichnis

1.1	Grenzfläche in einer Monte-Carlo Simulation	6
1.2	Das Potential \mathcal{V}_0 in Abhängigkeit von m_{0+}^2	9
2.1	Klassisches Grenzflächenprofil	14
4.1	Das effektive Potential in den beiden niedrigsten Ordnungen	29
5.1	Die Integranden aus (5.56)	53
5.2	Die divergenten Integranden	54
6.1	Die Werte von R_-	68
7.1	Die Feldrenormierungskonstante der symmetrischen Phase	77
7.2	Die Feldrenormierungskonstante der gebrochenen Phase	78
8.1	Die Korrektur erster Ordnung zum Grenzflächenprofil	90
8.2	Verschobene Grenzfläche	92
8.3	Die Korrektur zweiter Ordnung zum Grenzflächenprofil	114
8.4	Renormierte Korrektur in erster Ordnung	119
8.5	Renormierte Korrektur in zweiter Ordnung	120
8.6	Renormiertes Grenzflächenprofil in erster Ordnung	122
8.7	Renormiertes Grenzflächenprofil in zweiter Ordnung	123
8.8	Korrektur erster Ordnung der ε -Entwicklung	125

Einleitung

In allen physikalischen Systemen, die aus mehr als einer Phase bestehen, existieren Grenzflächen. In unserem Alltag ist dies zum Beispiel die Salatsoße, wo sich Essig und Öl übereinanderschichten und eine Grenzschicht ausbilden. Im Wasserkocher trennt die Wasseroberfläche die Flüssigkeit von ihrem Dampf. Innerhalb von Festkörpern gibt es beim Ferromagneten Bereiche unterschiedlich orientierter Magnetisierung, die durch Bloch-Wände voneinander getrennt sind.

Im Labor werden Grenzflächen an binären Fluiden untersucht. Zwei Flüssigkeiten bilden bei einer niedrigen Temperatur getrennte Phasen aus. Die Grenzfläche ist dabei kein sprunghafter Übergang von einem zum anderen Stoff, sondern eine allmähliche Änderung der Konzentration der beiden Komponenten. Bei Annäherung an die kritische Temperatur des Systems wird neben der Korrelationslänge im Volumen auch die Dicke der Grenzschicht größer. Dabei sinkt die Oberflächenspannung. Am kritischen Punkt findet ein Phasenübergang statt, die Grenzflächendicke divergiert und das gesamte System wird homogen. Damit einher gehen Wechselwirkungen auf allen Längenskalen, da auch die Korrelationslänge als Maß für die Reichweite der Wechselwirkungen unendlich wird. Die mikroskopischen Details des Systems sind nun nicht mehr relevant. Oberhalb dieser Übergangstemperatur existiert nur noch eine Phase ohne Grenzfläche und die Oberflächenspannung ist null.

Das Verhalten in der Nähe der kritischen Temperatur läßt sich innerhalb einer bestimmten Klasse von Systemen, die durch die Raumdimension und die Dimension des Ordnungsparameters bestimmt wird, durch universelle Größen beschreiben und ist damit von physikalischem Interesse. In dieser Arbeit wird die Oberflächenspannung und das Grenzflächenprofil, also der Konzentrationsverlauf der Komponenten in der Grenzfläche, bestimmt. Die Rechnung wird dabei mit analytischen Methoden im Rahmen der statistischen Feldtheorie durchgeführt. Der Ordnungsparameter ist eindimensional und wird mit der Konzentration einer Komponente im binären Fluid oder der Dichte bei einem Übergang zwischen flüssiger und Gasphase identifiziert. Er existiert im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt: Im ersten Kapitel werden die Begriffe eingeführt, die beschreibenden Größen definiert und das Landau-Ginzburg Modell als Ausgangspunkt vorgestellt. Das zweite Kapitel wiederholt klassische Resultate, auf denen weitere Rechnungen aufbauen. Im Kapitel 3 werden die erzeugenden Funktionale und ihre Abhängigkeiten in der Schleifenentwicklung hergeleitet. Das

effektive Potential als zentrale Größe der hier durchgeführten Rechnung wird im Kapitel 4 bis zur zweiten Ordnung bestimmt. Daraus läßt sich im fünften Kapitel die Oberflächenspannung berechnen. Im Kapitel 6 wird das Resultat des vorangehenden Kapitels zu einer physikalisch sinnvollen Größe renormiert und mit Literaturwerten verglichen. Kapitel 7 behandelt den zweiten Term der Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung. Im achten Kapitel wird schließlich das Grenzflächenprofil als Lösung einer Differentialgleichung bestimmt.

1 Grundlagen

In diesem Kapitel legen wir das Fundament dieser Arbeit. Die wesentlichen Begriffe werden eingeführt und die ϕ^4 -Theorie vorgestellt. Als Literatur seien einige Lehrbücher und Monographien über Feldtheorie und Kritische Phänomene genannt [AMI78, IZ80, ZJ89, BEL91, WEI95].

1.1 Kritisches Verhalten

Als kritisch wird das Verhalten eines Systems bei Annäherung an einen Phasenübergang zweiter Ordnung bezeichnet. An einem Phasenübergang ändern sich charakteristische Eigenschaften des betrachteten Stoffes. *Festes* Eis wird zu *flüssigem* Wasser, ein Stück Eisen verliert beim Erhitzen über die Curie-Temperatur seine ferromagnetischen Eigenschaften und ein Supraleiter seine außergewöhnliche Leitfähigkeit. Nach Ehrenfest haben wir die zweite Ordnung, wenn am Punkt des Überganges sowohl die thermodynamischen Potentiale als auch ihre ersten partiellen Ableitungen stetig sind, die zweiten Ableitungen (die sogenannten Antwortfunktionen) jedoch Sprungstellen oder Singularitäten aufweisen.

Der Ferromagnet ist das Standardmodell für kritische Phänomene. Unterhalb der Curie-Temperatur T_c ist er in makroskopischen Bereichen, den Weiss'schen Bezirken, spontan magnetisiert. Dabei gibt es im feldfreien Raum nur Vorzugsrichtungen aufgrund der Kristallstruktur. Bei Erreichen der kritischen Temperatur, die in diesem Fall die Curie-Temperatur ist, verschwindet die spontane Magnetisierung M und wir haben nur noch einen Paramagneten, dessen magnetische Momente durch die thermische Anregung stochastisch verteilt sind. Die Magnetisierung M ist der "Ordnungsparameter" des Ferromagneten.

Kritische Phänomene lassen sich quantitativ durch kritische Exponenten und universelle Amplitudenverhältnisse beschreiben.

1.1.1 Kritische Exponenten

In der Nähe des kritischen Punktes verhalten sich verschiedene Zustandsgrößen und Antwortfunktionen unabhängig vom speziellen Phasenübergang. Unterschiedlichste

Systeme zeigen ein einheitliches Potenzgesetz-Verhalten, das nur von der Raumdimension D und der Dimension des Ordnungsparameters abhängt.

Mit der Definition einer reduzierten Temperatur

$$t := \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (1.1)$$

die am kritischen Punkt gerade das Vorzeichen wechselt, lassen sich Physikalische Größen als Potenzreihe in t entwickeln.

$$f(t) = \mathcal{A}_\pm |t|^{\varphi_\pm} (1 + \mathcal{B}_\pm |t|^{\psi_\pm} + \dots) \quad (1.2)$$

Der Index “+” bezeichnet die Hochtemperaturphase ($t > 0$) und “-” die Tieftemperaturphase ($t < 0$). Der führende Exponent φ_\pm ist so gewählt, daß sowohl ψ_\pm als auch die Exponenten der folgenden Terme größer als null sind. Damit wird (1.2) für $|t| \ll 1$, also nahe beim Phasenübergang zu

$$f(t) \approx \mathcal{A}_\pm |t|^{\varphi_\pm}. \quad (1.3)$$

Hieraus können wir den “kritischen Exponenten” sowie die Amplituden bestimmen.

$$\varphi_\pm = \lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{\ln |f(t)|}{\ln |t|} \quad \mathcal{A}_\pm = \lim_{|t| \rightarrow 0} |t|^{-\varphi_\pm} f(t) \quad (1.4)$$

Ohne äußeres Feld läßt sich die Korrelationslänge für betragsmäßig kleine t demnach als

$$\xi \sim \begin{cases} f_+ t^{-\nu_+} & , \quad t > 0 \\ f_- (-t)^{-\nu_-} & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (1.5a)$$

schreiben, wodurch die kritischen Exponenten ν_\pm und die Amplituden f_\pm definiert sind. Die magnetische Suszeptibilität definiert die Exponenten γ_\pm

$$\chi \sim \begin{cases} C_+ t^{-\gamma_+} & , \quad t > 0 \\ C_- (-t)^{-\gamma_-} & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (1.5b)$$

und die spezifische Wärmekapazität α_\pm :

$$C \sim \begin{cases} A_+ t^{-\alpha_+} & , \quad t > 0 \\ A_- (-t)^{-\alpha_-} & , \quad t < 0 \end{cases}. \quad (1.5c)$$

Bei $T < T_c$ gilt für die Magnetisierung

$$M \sim (-t)^\beta. \quad (1.5d)$$

Oberhalb T_c verschwindet M . Das Verhalten der Magnetisierung für $T = T_c$ bei angelegtem äußeren Feld B wird durch δ beschrieben,

$$M \sim B^{1/\delta}. \quad (1.6a)$$

Durch die Impulsabhängigkeit der verbundenen 2-Punkt-Funktion bei $T = T_c$

$$G_c^{(2)}(p) \sim p^{-2+\eta} \quad (1.6b)$$

ist ein weiterer Exponent η definiert.

Die Skalenhypothese [WID65] postuliert, daß sich die Exponenten in der Hoch- und Tieftemperaturphase nicht unterscheiden.

$$\nu = \nu_+ = \nu_- \quad \gamma = \gamma_+ = \gamma_- \quad \alpha = \alpha_+ = \alpha_- \quad (1.7)$$

Aus den Skalengesetzen

$$\alpha = 2 - \nu D \quad (1.8a)$$

$$\beta = \frac{\nu}{2}(D - 2 + \eta) \quad (1.8b)$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (1.8c)$$

$$\delta = \frac{D + 2 - \eta}{D - 2 + \eta} \quad (1.8d)$$

folgt, daß nur zwei der in (1.5a–d) und (1.6a,b) definierten kritischen Exponenten unabhängig sind.

1.1.2 Universelle Amplitudenverhältnisse

Neben den im vorigen Abschnitt aufgeführten Exponenten sind die Amplituden A_{\pm} aus (1.4) charakteristische Meßgrößen eines Phasenüberganges. Sie selbst sind nicht universell, aber bestimmte dimensionslose Verhältnisse von zwei oder mehr Amplituden wie zum Beispiel f_+/f_- oder C_+/C_- [MH94].

1.2 Grenzflächen

In dieser Arbeit wird die Trennschicht zwischen zwei frei beweglichen Medien oder Phasen als Grenzfläche bezeichnet. Dies kann Wasser und Dampf am Siedepunkt sein oder zwei Flüssigkeiten, die sich unter bestimmten Randbedingungen nicht vollständig mischen, sogenannte binäre Fluide. Nicht behandelt werden Oberflächen von festen Medien, die zum Beispiel bedampft oder von einer Flüssigkeit benetzt werden [RJ82, FIS84]. Einführungen in den Themenbereich finden sich in [PRI92, SAF94]. Ein zwei-dimensionales System wird in [RAJ75] behandelt.

Die Grenzfläche wird typischerweise durch eine äußere Kraft fixiert. Im oben genannten Beispiel einer Flüssigkeit im Gleichgewicht mit ihrem Dampf ist dies die Schwerkraft, die beide Bereiche mit unterschiedlicher spezifischer Dichte voneinander trennt. Beim Ferromagneten werden an entgegengesetzten Seiten unterschiedlich orientierte Magnetfelder angelegt. Ein Modell zur Beschreibung von Grenzflächen ist das “Trommelfell Modell” [BLS65], wo sie durch eine Höhenfunktion $h(x, y)$ gegeben sind. Daher lassen sich keine Überhänge oder gar andere Topologien als die Ebene beschreiben.

Bei der numerischen Behandlung von Grenzflächen findet das Ising-Modell Verwendung. Dabei existieren auf einem normalerweise kubischen Gitter¹ Spins, die nur zwei Werte annehmen können. Eigentlich sind dies die Magnetisierungsrichtungen “oben” und “unten”, im Falle binärer Fluide können sie aber auch mit den beiden unterschiedlichen Flüssigkeiten identifiziert werden, die jeweils eine Volumenzelle besetzen. Die Wechselwirkung ist eine Koppelung zwischen nächsten Nachbarn und damit kurzreichweitig. In Abbildung 1.1 wird eine ein-dimensionale Grenzfläche in einer zwei-dimensionalen Monte-Carlo Simulation gezeigt.

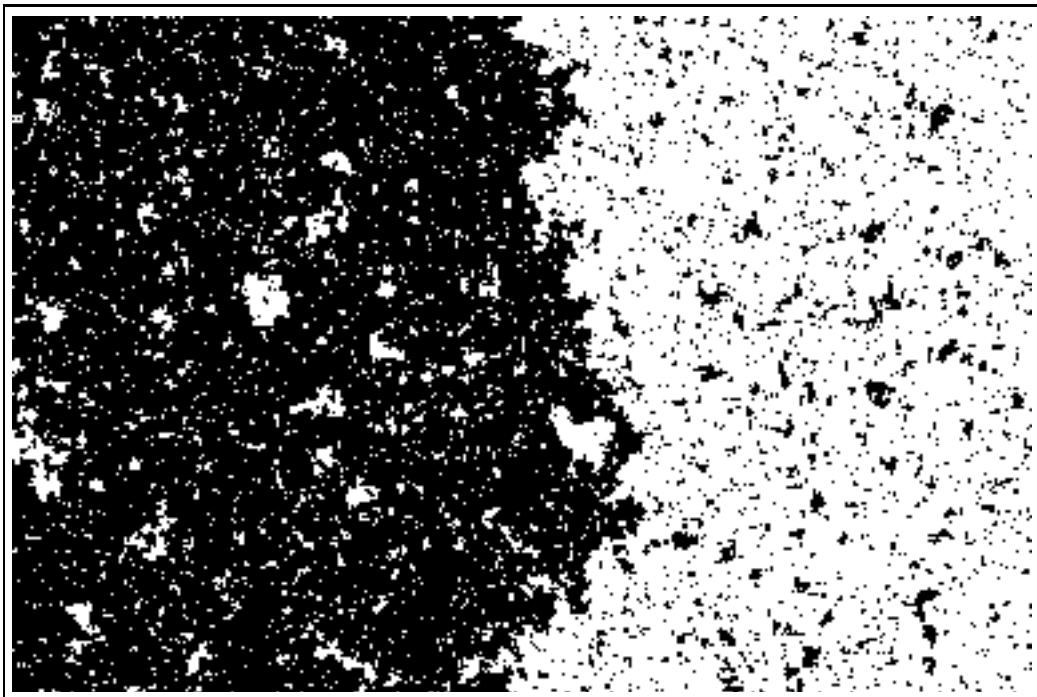


Abbildung 1.1: Grenzfläche in einer Monte-Carlo Simulation²

¹Die Gitterordnung ist bei Rechnungen in der Nähe des kritischen Punktes unerheblich, da mikroskopische Eigenschaften des Systems keinen Einfluß auf das makroskopische Verhalten haben.

²Das Bild wurde mit dem Programm XIsing erstellt [CRE94].

Im thermischen Gleichgewicht oberhalb des absoluten Nullpunktes ist die Grenzfläche zwischen zwei Phasen nie ganz flach. Thermische Fluktuationen, die als Kapillarwellen bezeichnet werden, weiten den Übergangsbereich auf [ROB84]. Wie stark dieser Effekt ist, hängt von der Dimension des Systems und der Temperatur ab. Im drei-dimensionalen Ising-Modell gilt dies allerdings nur oberhalb von T_R , der sogenannten "Roughening"-Temperatur.

1.2.1 Quantitative Beschreibung

Typische Meßgrößen eines Systems mit Grenzfläche sind die Oberflächenspannung τ und die Grenzflächendicke l . Experimentell zugänglich sind diese Größen über Streuexperimente mit Licht.³ In aktuellen Experimenten wurde auf diesem Wege die zeitliche Entwicklung der Oberflächenspannung bei Annäherung an die kritische Temperatur gemessen [CVG00].

Die Oberflächenspannung ist die freie Energie pro Querschnittsflächeneinheit. In der theoretischen Behandlung arbeiten wir mit der reduzierten Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{\tau}{k_B T}. \quad (1.9)$$

Hierin ist k_B die Boltzmann-Konstante. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit ist mit Oberflächenspannung immer die reduzierte Größe gemeint. Analog zur Entwicklung in Abschnitt 1.1.1 wird das Verhalten bei T_c durch

$$\sigma \sim \sigma_0 (-t)^\mu \quad (1.10)$$

beschrieben [JAS86]. Für den kritischen Exponenten μ gilt wegen der Skalengesetze

$$\mu = 2\beta + \gamma - \nu \quad (1.11a)$$

$$= (D - 1)\nu. \quad (1.11b)$$

In dem in dieser Arbeit betrachteten Fall $D = 3$ ist dieser Exponent also immer doppelt so groß wie der kritische Exponent der Korrelationslänge.

Die Grenzflächendicke divergiert wie

$$l \sim l_0 (-t)^{-\nu_l}. \quad (1.12)$$

Da es am kritischen Punkt nur eine Längenskala geben soll, wird erwartet, daß

$$l \propto \xi \quad \Rightarrow \quad \nu_l = \nu \quad (1.13)$$

gilt. Damit haben wir trotz der zusätzlichen Meßgrößen wiederum nur zwei unabhängige kritische Exponenten.

³Die Korrelationslänge innerhalb der Grenzfläche ist bei Annäherung an den kritischen Punkt in der Größenordnung der Lichtwellenlänge.

Mit der Amplitude der Oberflächenspannung lassen sich die universellen Amplitudenverhältnisse

$$R_{\pm} = \sigma_0 f_{\pm}^2 \quad (1.14)$$

definieren [FW69, SFW72], auf deren Berechnung wir in Kapitel 6 zurückkommen.

1.3 Formalismus

In diesem Abschnitt werden die theoretischen Grundlagen der Rechnungen vorgestellt. Dabei beschränken wir uns auf eine kurze Einführung und verweisen auf die zu Beginn dieses Kapitels genannte Literatur und [BIN83, JAS84, ZIA85].

Das Arbeitspferd der statistischen Feldtheorie ist das Landau-Ginzburg Modell, auch ϕ^4 -Modell genannt. Als Kontinuumslimites des Ising-Modells liegt es in derselben Universalitätsklasse. Eine in unserem Fall einkomponentige Feldvariable $\phi(x)$ existiert im D -dimensionalen Raum. Sie ist kontinuierlich und reell. Die Wechselwirkung zwischen nächsten Nachbarn geht in einen Gradienten über. Damit ist der Lagrangian durch

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi + \mathcal{V}(\phi) \quad (1.15)$$

gegeben. Für ein einfaches, quadratisches Potential $\mathcal{V}(\phi) = m^2/2 \cdot \phi^2$ sprechen wir von einer freien Feldtheorie. In unserem Modell kommt noch der namensgebende ϕ^4 -Term hinzu. Damit lautet das Potential in der symmetrischen Phase

$$\mathcal{V}_+(\phi) = \frac{m_{0+}^2}{2} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4. \quad (1.16)$$

Da die Koppelungskonstante g_0 größer als null ist, bleibt die Feldvariable im gesamten Raum endlich.

Mit dem quadratischen Massenterm haben wir einen Parameter, um den Phasenübergang zu steuern. Für $m_{0+}^2 > 0$ hat das Potential (1.16) ein eindeutiges Minimum. Wenn wir m_{0+}^2 kleiner als null wählen, erhalten wir zwei entartete Minima. Wir sind in der Phase gebrochener Symmetrie und definieren

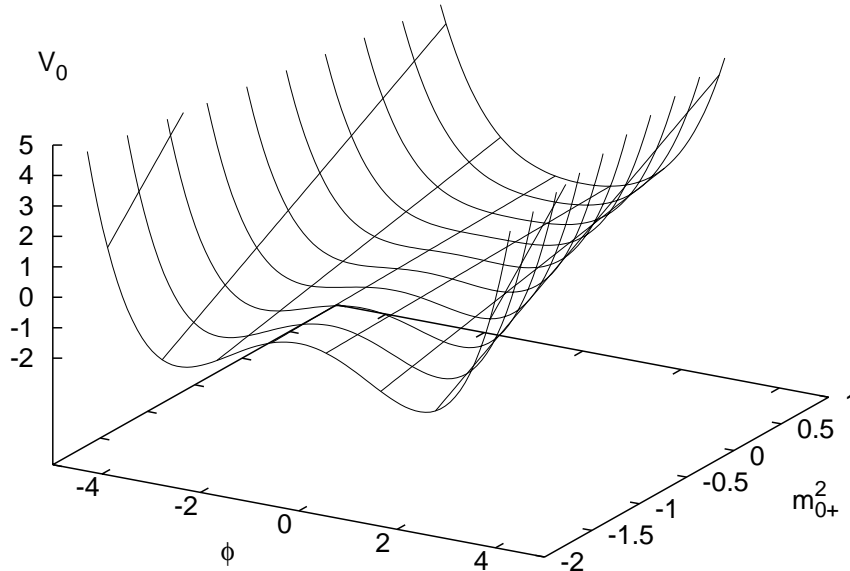
$$m_{0-}^2 = -2m_{0+}^2 > 0. \quad (1.17)$$

Damit liegen die Minima bei $\pm v_0$ mit

$$v_0 = \sqrt{\frac{3m_{0-}^2}{g_0}}. \quad (1.18)$$

Das Potential der Phase gebrochener Symmetrie normieren wir so, daß es bei $\pm v_0$ zu null wird:

$$\mathcal{V}_-(\phi) = -\frac{m_{0-}^2}{4} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 + \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} = \frac{g_0}{4!} (\phi^2 - v_0^2)^2. \quad (1.19)$$

Abbildung 1.2: Das Potential \mathcal{V}_0 in Abhängigkeit von m_{0+}^2

Die Wirkung ist das Integral über den gesamten Ortsraum

$$\begin{aligned}
 S[\phi] &= \int d^Dx \mathcal{L}[\phi] \\
 &= \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m_{0-}^2}{4} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 + \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} \right\} \\
 &= \int d^Dx \left\{ -\frac{1}{2} \phi \partial^2 \phi - \frac{m_{0-}^2}{4} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 + \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} \right\}. \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

2 Die klassische Lösung

In diesem Kapitel werden einige sogenannte klassische Resultate der skalaren Feldtheorie vorgestellt. Sie entsprechen in der Schleifenentwicklung der Baumapproximation, sind also Näherungen “nullter” Ordnung. Frühe Veröffentlichungen mit diesen Resultaten sind [CH58, ZIT67]. Im Abschnitt 2.1 wird zunächst die symmetrische Phase behandelt, die folgenden Abschnitte behandeln die Phase gebrochener Symmetrie.

Im Ferromagneten entspricht die klassische Lösung dem Ergebnis der Molekularfeldnäherung. Dabei wechselwirkt ein Spin nicht direkt mit seinen Nachbarn, sondern sieht das gemittelte Magnetische Feld¹ aller Spins an seinem Ort. Im Falle vieler aneinander gekoppelter Nachbarn, also einer langreichweitigen Wechselwirkung, ist dies eine gute Näherung.

Bei der klassischen Lösung gibt es eine reelle Feldvariable ϕ_m , an welcher die Wirkung ein Minimum hat, also gilt

$$\left. \frac{\delta S}{\delta \phi} \right|_{\phi=\phi_m} = 0. \quad (2.1)$$

Je nach Potential und Randbedingung existieren unterschiedliche Lösungen dieser Gleichung.

2.1 Symmetrische Phase

Die Funktionalableitung der Wirkung ergibt mit dem Potential (1.16) die Bewegungsgleichung

$$-\partial^2 \phi_m + m_{0+}^2 \phi_m + \frac{g_0}{3!} \phi_m^3 = 0. \quad (2.2)$$

Dabei sind sowohl m_{0+}^2 als auch g_0 größer als null. Zunächst suchen wir konstante Lösungen. Offensichtlich ist $\phi_m = 0$ eine Möglichkeit. Da die Feldvariable reell sein soll, gibt es keine weiteren. Die Suche nach nicht konstanten Lösungen, die endlich bleiben, ist nach DERRICKS Theorem [DER64, COL77, Kapitel 2.4] aussichtslos.

In der symmetrischen Phase gibt es demnach nur eine physikalisch sinnvolle Lösung von (2.1), nämlich $\phi_m = 0$.

¹Im Englischen wird das “Molekularfeld” auch als “mean-field” bezeichnet.

2.2 Der Grundzustand

In der Phase gebrochener Symmetrie ergeben sich mehr Möglichkeiten. Indem wir die Wirkung (1.20) funktional nach ϕ ableiten, wird sie zu

$$-\partial^2 \phi_m - \frac{m_{0-}^2}{2} \phi_m + \frac{g_0}{3!} \phi_m^3 = 0. \quad (2.3)$$

Der klassische Grundzustand ist der konstante Zustand minimaler Energie. Daher wird die Ableitung im ersten Term von (2.3) zu null und wir können den Rest nach $\phi_m = \phi_0$ auflösen. Zum einen erhalten wir die unphysikalische Lösung $\phi_0 = 0$ wie in der symmetrischen Phase und als relevantes Ergebnis

$$\phi_0(x) = \pm \sqrt{\frac{3m_{0-}^2}{g_0}} =: \pm v_0. \quad (2.4)$$

Die Wirkung dieses Zustandes ist

$$\begin{aligned} S[\phi_0] &= S[\pm v_0] \\ &= \int d^D x \left\{ -\frac{m_{0-}^2}{4} \phi_0^2 + \frac{g_0}{4!} \phi_0^4 + \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} \right\} \\ &= \int d^D x \left\{ -\frac{3m_{0-}^4}{4g_0} + \frac{3m_{0-}^4}{8g_0} + \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

da das Potential (1.19) geeignet normiert ist.

2.3 Die Grenzfläche

Die klassische Lösung für eine Grenzfläche erhalten wir durch den Ansatz $\phi_m = \phi_c(z)$, also daß die Feldvariable nur von einer ausgezeichneten Raumrichtung, hier z , abhängt [DHN74].

Damit wird aus (2.3) eine gewöhnliche Differentialgleichung, die wir mit $\partial\phi_c$ erweitern und unbestimmt über z integrieren.

$$-\partial^2 \phi_c \partial \phi_c - \frac{m_{0-}^2}{2} \phi_c \partial \phi_c + \frac{g_0}{3!} \phi_c^3 \partial \phi_c = 0 \quad (2.6)$$

$$-\frac{1}{2} (\partial \phi_c)^2 - \frac{m_{0-}^2}{4} \phi_c^2 + \frac{g_0}{4!} \phi_c^4 = \mathcal{C} \quad (2.7)$$

Dabei ist die Integrationskonstante \mathcal{C} durch die Randbedingung, daß $\phi_c(z \rightarrow \pm\infty)$ konstant ist, festgelegt. Nach (2.3) kann diese Konstante einen Wert ϕ_0 aus dem

vorherigen Abschnitt annehmen, also ist $\phi_c(\pm\infty) = 0$ oder $\phi_c^2(\pm\infty) = v_0^2$. Die erste Lösung ist unphysikalisch, somit ist $\mathcal{C} = -\frac{3}{8}\frac{m_{0-}^4}{g_0}$ und aus (2.7) folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\partial\phi_c)^2 &= \frac{3}{8}\frac{m_{0-}^4}{g_0} - \frac{m_{0-}^2}{4}\phi_c^2 + \frac{g_0}{4!}\phi_c^4 \\ &= \frac{g_0}{4!}\left(\phi_c^2 - \left(\frac{3m_{0-}^2}{g_0}\right)\right)^2\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\partial\phi_c &= \pm\left(\phi_c^2 - \left(\frac{3m_{0-}^2}{g_0}\right)\right)\sqrt{\frac{g_0}{2\cdot 3!}} \\ \frac{\partial\phi_c}{(\phi_c^2 - v_0^2)} &= \pm\sqrt{\frac{g_0}{2\cdot 3!}}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Dies integrieren wir mit der Randbedingung, daß $\phi_c(a) = 0$ für einen beliebigen aber festen reellen Wert a sein soll.

$$\begin{aligned}\int_0^\Phi d\phi_c \frac{1}{(\phi_c^2 - v_0^2)} &= \pm\int_a^z d\zeta \sqrt{\frac{g_0}{2\cdot 3!}} \\ \left[-\frac{1}{v_0} \operatorname{artanh} \frac{\phi_c}{v_0}\right]_0^\Phi &= \pm(z-a)\sqrt{\frac{g_0}{2\cdot 3!}}\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\operatorname{artanh} \frac{\phi_c}{v_0} = \mp\frac{m_{0-}}{2}(z-a)\quad (2.11)$$

Durch Invertieren der letzten Gleichung und Festlegen eines Vorzeichens erhalten wir die ‘klassische Kink-Lösung’

$$\phi_c(x) = \sqrt{\frac{3m_{0-}^2}{g_0}} \tanh\left(\frac{m_{0-}}{2}(z-a)\right) = v_0 \tanh\left(\frac{m_{0-}}{2}(z-a)\right).\quad (2.12)$$

Von der Form her ähnliche Lösungen ergeben sich im ‘Sine-Gordon’-System.² Die Soliton-Lösungen sind im wesentlichen der Arcustangens von Exponentialfunktionen [RAJ82].

Die Wirkung der Kink-Lösung verschwindet im Gegensatz zu (2.5) nicht,

$$\begin{aligned}S[\phi_c] &=: S_c \\ &= \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2} \left[v_0 \frac{m_{0-}}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{m_{0-}}{2}(z-a)\right) \right]^2 - \frac{m_{0-}^2}{4} v_0^2 \tanh^2\left(\frac{m_{0-}}{2}(z-a)\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_0}{4!} v_0^4 \tanh^4\left(\frac{m_{0-}}{2}(z-a)\right) + \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} \right\}.\end{aligned}\quad (2.13)$$

²Dieser Name stammt aus der Ersetzung des quadratischen Terms der Klein-Gordon Gleichung durch einen Sinus und wurde von Coleman ‘silly’ genannt [COL77].

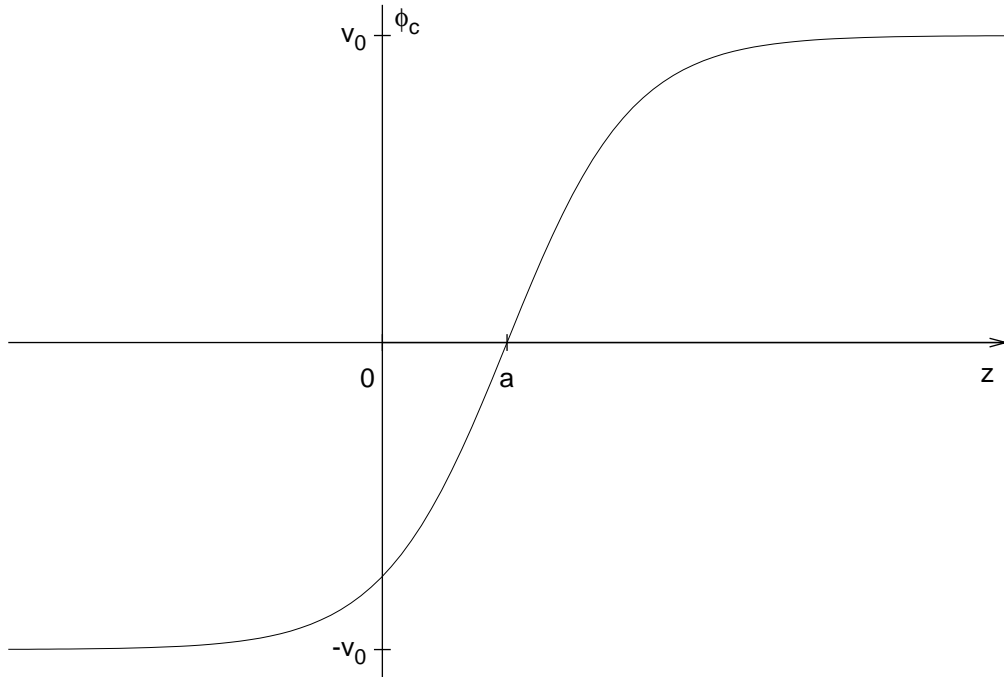


Abbildung 2.1: Klassisches Grenzflächenprofil

Im Integral (2.13) ersetzen wir die Argumente der hyperbolischen Funktionen mit

$$t = \frac{m_{0-}}{2}(z - a) \quad (2.14)$$

und verwenden die Relation

$$\operatorname{sech}^2 t = 1 - \tanh^2 t. \quad (2.15)$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} S[\phi_c] &= \int d^D x \frac{3m_{0-}^4}{8g_0} \{ \operatorname{sech}^4 t - 2 \tanh^2 t + \tanh^4 t + 1 \} \\ &= \frac{3m_{0-}^4}{8g_0} \int d^{D-1} x \int \frac{2}{m_{0-}} dt \{ \operatorname{sech}^4 t + (1 - \tanh^2 t)^2 \} \\ &= \frac{3m_{0-}^3}{2g_0} L^{D-1} \int dt \operatorname{sech}^4 t \\ &= \frac{3m_{0-}^3}{2g_0} L^{D-1} \left[\frac{1}{3} \tanh t \cdot \operatorname{sech}^2 t + \frac{2}{3} \tanh t \right]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

$$= \frac{2m_0^3}{g_0} L^{D-1} =: S_c, \quad (2.16)$$

wobei L die Ausdehnung parallel zur Grenzfläche ist. Die Wirkung ist also proportional zum Querschnitt des Systems. Diese Eigenschaft nutzen wir im nächsten Abschnitt zur Definition der Oberflächenspannung.

2.4 Oberflächenspannung

Wir können die Berechnung der Wirkung eines gegebenen lokalen Ordnungsparameters für beliebige Potentiale durchführen [ROT96, MR00]. Mit einer partiellen Integration wird die Wirkung analog zu (1.20) umgeformt.

$$\begin{aligned} S[\phi] &= \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \mathcal{V}(\phi) \right\} \\ &= \int d^Dx \left\{ -\frac{1}{2}\phi\partial^2\phi + \mathcal{V}(\phi) \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Um die Extrema dieser Funktion zu finden, leiten wir nach ϕ ab.

$$\frac{\delta S}{\delta\phi}[\phi] = -\partial^2\phi + \mathcal{V}'(\phi) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.18)$$

Nach Erweiterung von (2.18) mit $\partial\phi$ und anschließender Integration erhalten wir für den Fall, daß ϕ nur von einer Dimension der Ortsvariable abhängt,

$$-\frac{1}{2}(\phi')^2 + \mathcal{V}(\phi) = E. \quad (2.19)$$

Für die Grenzfläche $\phi = \phi_c$ setzen wir E auf den minimalen Wert des Potentials $\mathcal{V}(\phi)$. Wenn es schon vorher geeignet normiert ist, heißt dieses, daß $E = 0$ festgelegt werden muß. So bekommen wir einen Zusammenhang zwischen dem kinetischen und dem Potentialterm,

$$\phi'_c = \sqrt{2\mathcal{V}(\phi_c)}. \quad (2.20)$$

Die Wurzel ist reell, da das Potential nur an den Minima den Wert null annehmen darf, für andere Werte des Ordnungsparameters also größer als null ist. Die Relation (2.20) setzen wir für das Potential in (2.17) ein. Da im Abschnitt 2.3 die Grenzfläche ϕ_c so gewählt wurde, daß sie nur in einer Raumrichtung variiert, ist das Integral über die anderen Richtungen direkt mit L^{D-1} bestimmt.

$$\begin{aligned} S[\phi_c] &= L^{D-1} \int dz \left\{ \frac{1}{2}(\phi'_c)^2 + \mathcal{V}(\phi_c) \right\} \\ &= L^{D-1} \int dz (\phi'_c)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= L^{D-1} \int_{-v}^v d\phi \phi' \\
 &= L^{D-1} \int_{-v}^v d\phi \sqrt{2\mathcal{V}(\phi)} =: L^{D-1} \cdot \sigma
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Im Unendlichen geht die Grenzfläche in eines der beiden entarteten Minima des Potentials über, die mit $\pm v$ bezeichnet werden. Die letzte Zeile ist die Definition der Oberflächenspannung

$$\sigma := \int_{-v}^v d\phi \sqrt{2\mathcal{V}(\phi)}. \tag{2.22}$$

Die Oberflächenspannung ist hiermit die freie Energie pro Querschnittsfläche.

Indem wir in (2.22) das effektive Potential \mathcal{V}_{eff} einsetzen, erhalten wir Korrekturen zur Lösung (2.13). In niedrigster Ordnung ergibt sich mit $\mathcal{V}(\phi) = \mathcal{V}_-(\phi)$, dem Potential der gebrochenen Phase (1.19) und den Stellen der Minima bei $\pm v_0$

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 &= \int_{-v_0}^{v_0} d\phi \sqrt{2\frac{g_0}{4!} (\phi^2 - v_0^2)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{2g_0}{4!}} \int_{-v_0}^{v_0} d\phi (v_0^2 - \phi^2) \\
 &= \sqrt{\frac{g_0}{12}} \left[\phi v_0^2 - \frac{1}{3} \phi^3 \right]_{-v_0}^{v_0} \\
 &= \frac{2m_0^3}{g_0}.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dies ist dasselbe Ergebnis wie in (2.16).

3 Erzeugende Funktionale

Die Zustandssumme eines diskreten Systems als gewichtete Summe über alle möglichen Einstellungen beinhaltet das gesamte Wissen über dieses System. Beim Übergang von diskreten Spinvariablen an festen Gitterplätzen zu kontinuierlichen Feldvariablen, die im gesamten Raum definiert sind, erweitert sich der Raum aller möglichen Systemzustände enorm. Mit Hilfe der Funktionalanalysis läßt sich aber ein Analogon zur Zustandssumme definieren, daß erzeugende Funktional.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[j] &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ -\mathcal{S}[\phi] + \int d^Dx j(x)\phi(x) \right\} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ - \int d^Dx \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \mathcal{V}(\phi) - j(x)\phi(x) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Das Funktionalintegral $\int \mathcal{D}\phi(x)$ ist dabei als Integral über den gesamten Zustandsraum zu verstehen, das heißt, ϕ nimmt alle möglichen Feldkonfigurationen an. Der Normierungsfaktor \mathcal{Z}_0 ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \int \mathcal{D}\phi(x) e^{-\mathcal{S}[\phi]} \\ &= \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ - \int d^Dx \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \mathcal{V}(\phi) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

gegeben. Erwartungswerte von Produkten der Feldvariablen ϕ werden als Green-Funktionen bezeichnet. Sie lassen sich durch Funktionalableitungen aus $\mathcal{Z}[j]$ erzeugen.

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle \\ &= \frac{\delta^n}{\delta j(x_1)\delta j(x_2)\cdots\delta j(x_n)} \mathcal{Z}[j] \Big|_{j=0} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Umgekehrt läßt sich das erzeugende Funktional als Summe über die Green-Funktionen berechnen.

$$\mathcal{Z}[j] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^Dx_1 \cdots d^Dx_n j(x_1)\cdots j(x_n) G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.4)$$

Neben $\mathcal{Z}[j]$ definieren wir noch zwei weitere erzeugende Funktionale, $\mathcal{W}[j]$ und $\Gamma[\phi]$, auf deren Berechnung wir in den folgenden Abschnitten ausführlicher eingehen.

Zunächst erhalten wir das erzeugende Funktional der zusammenhängenden oder verbundenen Green-Funktionen,

$$\mathcal{W}[j] := \ln \mathcal{Z}[j]. \quad (3.5)$$

Analog zu (3.3) lassen sich durch Funktionaldifferentiationen nach dem Quellterm $j(x_i)$ die verbundenen Green-Funktionen oder Korrelationsfunktionen bestimmen.

$$\begin{aligned} G_c^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle_c \\ &= \frac{\delta^n}{\delta j(x_1)\delta j(x_2)\cdots\delta j(x_n)} \mathcal{W}[j] \Big|_{j=0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Durch eine Legendre-Transformation bekommen wir die effektive Wirkung beziehungsweise das erzeugende Funktional der echten Vertex-Funktionen

$$\Gamma[\phi_c] := \mathcal{W}[j] - \int d^Dx j(x)\phi_c(x). \quad (3.7)$$

Darin ist das ‘klassische Feld’ $\phi_c(x)$ durch

$$\phi_c(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} \quad (3.8)$$

definiert. Durch Inversion dieser Gleichung läßt sich die Quelle $j(x)$ als Funktion des Feldes ϕ_c bestimmen und damit ist die rechte Seite von (3.7) ein Funktional von ϕ_c . Die einfache Funktionalableitung von Γ nach ϕ_c ergibt wiederum den Quellterm

$$j(x) = -\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)}. \quad (3.9)$$

Durch Auswertung mehrfacher Ableitungen nach dem Feld an der Stelle $\phi = 0$ ergeben sich die echten Vertex-Funktionen oder ‘Einteilchen-irreduziblen’ (1-PI) Green-Funktionen

$$\Gamma^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta \phi(x_1)\delta \phi(x_2)\cdots\delta \phi(x_n)} \Gamma[\phi] \Big|_{\phi=0}. \quad (3.10)$$

Das erzeugende Funktional Γ läßt sich um eine konstante Funktion $\phi(x)$ nach der Ordnung der Ableitung entwickeln.

$$-\Gamma[\phi] = \int d^Dx \left\{ \mathcal{V}(\phi(x)) + \frac{1}{2} \mathcal{Z}(\phi(x)) (\partial\phi(x))^2 + \cdots \right\} \quad (3.11)$$

Hierin sind \mathcal{V} und \mathcal{Z} (nicht zu verwechseln mit (1.16), (3.1)) gewöhnliche Funktionen von ϕ . Die Terme höherer Ableitungen, $(\partial\phi(x))^{2n}$ mit $n > 1$, werden an dieser Stelle vernachlässigt. Das effektive Potential $\mathcal{V}(\phi)$ wird im folgenden Kapitel 4 berechnet und der sogenannte kinetische Term $\mathcal{Z}(\phi)$ wird im Kapitel 7 bestimmt. Er ist gleich dem Inversen der Feldrenormierungskonstanten Z_3 , die in Kapitel 6 eingeführt wird.

3.1 Verbundene Green-Funktionen

Bei der Berechnung des erzeugenden Funktionales der verbundenen Green-Funktionen betrachten wir zunächst die symmetrische Phase. Einem Vorschlag aus [JAC74, IIM75] folgend, erweitern wir (3.5) um einen formalen Entwicklungsparameter \hbar . Dieser stellt eine reine Hilfsgröße dar und muß nicht klein sein. Zum Ende der Rechnung wird er auf eins gesetzt. Diese Reihe in \hbar ist die Entwicklung nach der Schleifenordnung, der führende Term die Baumnäherung und die folgenden Terme sind entsprechend Korrekturen in höherer Schleifenordnung [NAM68]. Mit diesem formalen Parameter wird (3.1) zu

$$\exp \frac{\mathcal{W}[j]}{\hbar} = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int d^Dx \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{m_0^2}{2}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 - j \cdot \phi \right] \right\}}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int d^Dx \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{m_0^2}{2}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 \right] \right\}}. \quad (3.12)$$

Ein üblicher Weg zur Berechnung eines solchen Ausdrucks ist die Sattelpunktentwicklung. Dabei wird der Exponent des Zählers um den stationären Wert entwickelt [CW73]. Der Nenner als Normierungsfaktor wird nicht entwickelt. Als Bestimmungsgleichung erhalten wir

$$(-\partial^2 + m_0^2)\phi_j + \frac{g_0}{3!}\phi_j^3 = j, \quad (3.13)$$

deren Lösung $\phi_j(x)$ vom Quellterm $j(x)$ abhängt. Die Wirkung ist in diesem Abschnitt inklusive des Quellterms definiert:

$$\mathcal{S}[\phi] = \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{m_0^2}{2}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 - j(x)\phi(x) \right\}. \quad (3.14)$$

Indem wir die Feldvariable um den stationären Wert ϕ_j entwickeln

$$\phi = \phi_j + \tilde{\phi}, \quad (3.15)$$

kommt durch Einsetzen in (3.14)

$$\mathcal{S}[\phi] = \mathcal{S}[\phi_j] + \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial\tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2}(m_0^2 + \frac{g_0}{2}\phi_j^2)\tilde{\phi}^2 + \frac{g_0}{3!}\phi_j\tilde{\phi}^3 + \frac{g_0}{4!}\tilde{\phi}^4 \right\} \quad (3.16)$$

heraus. Das erzeugende Funktional (3.5) entwickeln wir in eine Reihe nach \hbar und erhalten

$$\mathcal{W}[j] = \mathcal{W}_0[j] + \hbar\mathcal{W}_1[\phi_j] + \hbar^2\mathcal{W}_2[\phi_j] + \dots \quad (3.17)$$

Dabei ist der führende Term durch

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0[j] &= - \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi_j)^2 + \frac{m_0^2}{2}\phi_j^2 + \frac{g_0}{4!}\phi_j^4 - j \cdot \phi_j \right\} \\ &= - \mathcal{S}[\phi_j] \end{aligned} \quad (3.18)$$

gegeben. Um die weiteren Terme der Entwicklung (3.17) zu bestimmen, setzen wir (3.16) in die Ausgangsgleichung (3.12) ein und nutzen die Translationsinvarianz des Integrationsmaßes $\mathcal{D}\phi$ aus. Der Nenner ist der in (3.2) definierte Normierungsfaktor.

$$\begin{aligned} \exp \frac{\mathcal{W}[j]}{\hbar} &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int \mathcal{D}\phi(x) e^{-\frac{\mathcal{S}[\phi]}{\hbar}} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} e^{-\frac{\mathcal{S}[\phi_j]}{\hbar}} \int \mathcal{D}\phi(x) e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^Dx \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(m_0^2 + \frac{g_0}{2}\phi_j^2)\phi^2 + (\frac{g_0}{3!}\phi_j)\phi^3 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 \right]} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Die Exponentialfunktion vor dem Integral wird mit (3.18) auf die linke Seite der Gleichung gezogen.

$$\begin{aligned} \exp \frac{\mathcal{W}[j] - \mathcal{W}_0[j]}{\hbar} &= \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int d^Dx \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(m_0^2 + \frac{g_0}{2}\phi_j^2)\phi^2 + \frac{g_0}{3!}\phi_j\phi^3 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 \right] \right\}}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int d^Dx \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{m_0^2}{2}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 \right] \right\}} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ -\int d^Dx \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(m_0^2 + \frac{g_0}{2}\phi_j^2)\phi^2 + \hbar^{\frac{1}{2}}\frac{g_0}{3!}\phi_j\phi^3 + \hbar\frac{g_0}{4!}\phi^4 \right] \right\}}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ -\int d^Dx \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{m_0^2}{2}\phi^2 + \hbar\frac{g_0}{4!}\phi^4 \right] \right\}} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Dabei ist zur letzten Umformung das Integrationsfeld reskaliert worden ($\phi \rightarrow \hbar^{\frac{1}{2}}\phi$). Dieser Ausdruck hat als führenden Term die erste Ordnung der Reihenentwicklung (3.17) und ist nicht mehr direkt von der Quelle j abhängig, sondern nur noch durch ϕ_j (3.13). Indem wir \hbar auf null setzen, erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für \mathcal{W}_1 , die durch Logarithmierung zu

$$\mathcal{W}_1[\phi_j] = -\frac{1}{2} \ln \text{Det} \frac{K_{xy}(\phi_j)}{K_{xy}(0)} = -\frac{1}{2} \text{Sp} \ln \frac{K_{xy}(\phi_j)}{K_{xy}(0)} \quad (3.21)$$

wird. In dieser Gleichung ist der Kern durch

$$K_{xy}(\phi_j) = \left(\partial_x \partial_y + m_0^2 + \frac{g_0}{2}\phi_j^2 \right) \delta^D(x-y) \quad (3.22)$$

gegeben. Die höheren Terme von (3.17) lassen sich durch die Entwicklung von (3.20) nach \hbar bestimmen. Der Exponent im Zähler von (3.20) ist eine effektive Wirkung, die keinen Quellterm enthält. Der ‘‘Masseterm’’ ($m_0^2 + \frac{g_0}{2}\phi_j^2$) ist durch die Abhängigkeit von der stationären Lösung im Raum nicht konstant und neben der Vier-Punkt Koppelung gibt es noch den Dreier-Vertex ($\hbar^{\frac{1}{2}}\frac{g_0}{3!}\phi_j$). Hieraus folgt, dass es in einer gegebenen Schleifenordnung nur eine endliche Anzahl von Graphen gibt, die berechnet werden müssen.

3.2 Echte Vertex-Funktionen

Aus der im vorigen Abschnitt berechneten Reihe für $\mathcal{W}[j]$ läßt sich $\Gamma[\phi_c]$ prinzipiell direkt durch die Legendre-Transformation (3.7) berechnen. Praktisch ist dies jedoch nicht möglich und wir entwickeln $\Gamma[\phi_c]$ ebenso wie das erzeugende Funktional $\mathcal{W}[j]$ in (3.17) als Reihe in \hbar .

$$\Gamma[\phi_c] = \Gamma_0[\phi_c] + \hbar\Gamma_1[\phi_c] + \hbar^2\Gamma_2[\phi_c] + \dots \quad (3.23)$$

Zuerst muß ϕ_j als Funktion von ϕ_c bestimmt werden. Letzteres ist nach (3.8) gegeben. Durch Verwendung von (3.17) und (3.18) erhalten wir

$$\phi_c(x) \equiv \frac{\delta\mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} = \frac{\delta\mathcal{W}_0[j]}{\delta j(x)} + \mathcal{O}(\hbar) = \phi_j(x) + \mathcal{O}(\hbar), \quad (3.24)$$

in niedrigster Ordnung sind also beide Feldvariablen identisch. Aus der Transformation (3.7) wird in Baumnäherung

$$\begin{aligned} \Gamma_0[\phi_c] &= \mathcal{W}_0[j] - \int d^Dx j(x)\phi_c(x) \\ &= -\mathcal{S}[\phi_c] - \int d^Dx j(x)\phi_c(x) \\ &= -\int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi_c)^2 + \frac{m_0^2}{2}\phi_c^2 + \frac{g_0}{4!}\phi_c^4 \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Zur Berechnung der weiteren Terme subtrahieren wir diesen Term von (3.7), setzen die Reihe (3.17) ein und nutzen die zweite Zeile von (3.25).

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[j] - \int d^Dx j(x)\phi_c(x) - \Gamma_0[\phi_c] \\ &= -\mathcal{S}[\phi_j] - \Gamma_0[\phi_c] + \hbar\mathcal{W}_1[\phi_j] + \hbar^2\mathcal{W}_2[\phi_j] + \dots - \int d^Dx j(x)\phi_c(x) \\ &= -\mathcal{S}[\phi_j] + \mathcal{S}[\phi_c] + \hbar\mathcal{W}_1[\phi_j] + \hbar^2\mathcal{W}_2[\phi_j] + \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

An dieser Stelle müssen die weiteren Terme von (3.24) mitgenommen werden, wir setzen $\phi_c = \phi_j + \hbar\tilde{\phi}_c$ und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[j] - \int d^Dx j(x)\phi_c(x) - \Gamma_0[\phi_c] \\ &= \hbar^2 \int d^Dx \left[\frac{1}{2}(\partial\tilde{\phi}_c)^2 + \frac{1}{2}(m_0^2 + \frac{g_0}{2}\phi_j^2)\tilde{\phi}_c^2 \right] \\ &\quad + \hbar\mathcal{W}_1[\phi_c - \hbar\tilde{\phi}_c] + \hbar^2\mathcal{W}_2[\phi_j] + \mathcal{O}(\hbar^3). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Hier lassen sich die Terme erster und zweiter Ordnung in \hbar direkt ablesen. In erster Ordnung sind beide erzeugenden Funktionale gleich

$$\Gamma_1[\phi_c] = \mathcal{W}_1[\phi_c] = -\frac{1}{2} \text{Sp} \ln \frac{K_{xy}(\phi_c)}{K_{xy}(0)} \quad (3.28)$$

und in zweiter Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma_2[\phi_c] &= \mathcal{W}_2[\phi_c] + \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial \tilde{\phi}_c)^2 + \frac{1}{2} \left(m_0^2 + \frac{g_0}{2} \phi_j^2 \right) \tilde{\phi}_c^2 \right] - \tilde{\phi}_c \frac{\delta \mathcal{W}_1[\phi_c]}{\delta \phi_c} \\ &= \mathcal{W}_2[\phi_c] + \frac{1}{2} \tilde{\phi}_c K(\phi_c) \tilde{\phi}_c - \tilde{\phi}_c \frac{\delta \mathcal{W}_1[\phi_c]}{\delta \phi_c}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dabei stammt der letzte Summand aus der Entwicklung von $\mathcal{W}_1[\phi_c - \hbar \tilde{\phi}_c]$ nach dem Parameter \hbar . Die große eckige Klammer ist gerade der Kern aus (3.22). Um die Felddifferenz $\tilde{\phi}_c$ zu bestimmen, setzen wir (3.8) und (3.17) in die Definition ein.

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_c &= \frac{1}{\hbar} (\phi_c - \phi_j) = \frac{1}{\hbar} \left(\frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j} - \phi_j \right) \\ &= \frac{\delta \mathcal{W}_1[\phi_j]}{\delta \phi_j} \frac{\delta \phi_j}{\delta j} + \mathcal{O}(\hbar) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Die zweite Funktionalableitung ist dabei nach (3.13) der inverse Kern. Da ϕ_c und ϕ_j in niedrigster Ordnung gleich sind, gilt schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_c &= \frac{\delta \mathcal{W}_1[\phi_j]}{\delta \phi_j} K^{-1}(\phi_j) + \mathcal{O}(\hbar) \\ &= \frac{\delta \mathcal{W}_1[\phi_c]}{\delta \phi_c} K^{-1}(\phi_c) + \mathcal{O}(\hbar). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dies in (3.29) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} \Gamma_2[\phi_c] &= \mathcal{W}_2[\phi_c] - \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{W}_1[\phi_c]}{\delta \phi_c} K^{-1}(\phi_c) \frac{\delta \mathcal{W}_1[\phi_c]}{\delta \phi_c} \\ &= \mathcal{W}_2[\phi_c] - \frac{1}{2} \iint d^D x d^D y \frac{\delta \mathcal{W}_1[\phi_c]}{\delta \phi_c} \Delta_{xy}(\phi_c) \frac{\delta \mathcal{W}_1[\phi_c]}{\delta \phi_c}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nachdem wir in diesem Abschnitt die Gleichungen (3.28) für Γ_1 und (3.32) für Γ_2 hergeleitet haben, werden im nächsten Kapitel die Potentialanteile berechnet.

4 Effektives Potential

In diesem Kapitel wird der erste Term der Entwicklung (3.11) berechnet. Eingeführt wurde das effektive Potential bei Rechnungen in der Phase gebrochener Symmetrie in den Sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts [GSW62, JL64]. Wesentliche Artikel sind [CW73] und [JAC74]. Allerdings wird in der Regel in einer vierdimensionalen Theorie gearbeitet. Im letztgenannten Artikel wird das effektive Potential einer masselosen Theorie in vier Dimensionen zur zweiten Ordnung bestimmt. Das σ -Modell im Grenzfall großer N wird in [CJP74] für die ganzzahligen Dimensionen von eins bis vier behandelt. In jüngerer Zeit wurde das effektive Potential in vier Dimensionen bis zur dritten Ordnung im MS-Schema sowohl in einer skalaren Theorie als auch im $O(N)$ -Modell berechnet [CC97, CC98]. Auch in Arbeiten über Phasenübergänge erster Ordnung in skalarer Elektrodynamik findet ein effektives Potential Verwendung [BHW93, FH94, KLS95].

Wenn wir die Feldvariable ϕ konstant setzen, wird aus (3.11)

$$\begin{aligned} -\Gamma[\phi] &= \int d^Dx \{ \mathcal{V}(\phi) + 0 \cdot \mathcal{Z}(\phi) + 0 \} \\ &= V \cdot \mathcal{V}(\phi). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dabei ist V das Volumen, über welches integriert wird. Das Potential \mathcal{V} lässt sich analog zum erzeugenden Funktional (3.23) entwickeln

$$\mathcal{V}(\phi) = \mathcal{V}_0(\phi) + \hbar \mathcal{V}_1(\phi) + \hbar^2 \mathcal{V}_2(\phi) + \dots \tag{4.2}$$

Der führende Term in der symmetrischen Phase ist durch das gewöhnliche Potential (1.16) gegeben, wie aus (3.25) ersichtlich

$$\mathcal{V}_0(\phi) \equiv \mathcal{V}_+(\phi) = \frac{m_{0+}^2}{2} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4. \tag{4.3}$$

4.1 Die erste Ordnung

Zur Berechnung der weiteren Terme wird zunächst (3.28) aus dem Ortsraum in den Impulsraum Fourier-transformiert. Für den Kern (3.22) gilt

$$K_{xy}(\phi_c) = \left(\partial_x \partial_y + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2 \right) \delta^D(x - y)$$

$$= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left(k^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2 \right) e^{ik(x-y)} \quad (4.4)$$

und damit für die effektive Wirkung in erster Ordnung

$$\begin{aligned} \Gamma_1[\phi_c] &= -\frac{1}{2} \text{Sp} \ln \frac{K_{xy}(\phi_c)}{K_{xy}(0)} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^D x \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \frac{k^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2}{k^2 + m_{0+}^2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Hieraus bestimmen wir \mathcal{V}_1 , indem wir ϕ_c konstant setzen, also alle Ableitungen zu null werden und die Volumenintegration herausgezogen wird.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{1+}(\phi_c) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \left(1 + \frac{\frac{g_0}{2} \phi_c^2}{k^2 + m_{0+}^2} \right) \\ &= m_{0+}^D w_D \left(\frac{g_0}{2m_{0+}^2} \phi_c^2 \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Dabei gilt

$$w_D(x) = \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \left(1 + \frac{x}{k^2 + 1} \right). \quad (4.7)$$

Bevor dieses Integral im folgenden Abschnitt für die hier interessierende Dimension $D = 3$ beziehungsweise $D = 3 - \epsilon$ gelöst wird, führen wir noch die Feynman-Graph Entwicklung des effektiven Potentials erster Ordnung ein [IZ80, ZJ89].

Mit der Definition

$$\Delta(p) := \frac{1}{p^2 + m_{0+}^2} \quad (4.8)$$

für den Propagator und der Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

des Logarithmus, wird aus (4.6) bei Entwicklung nach der Koppelungskonstanten g_0

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{1+}(\phi_c) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \left(1 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2 \Delta(k) \right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{g_0}{2} \phi_c^2 \Delta(k) - \frac{1}{2} \left(\frac{g_0}{2} \phi_c^2 \Delta(k) \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{g_0}{2} \phi_c^2 \Delta(k) \right)^3 - \dots \right\} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} g_0 \phi_c^2 \Delta(k) - \frac{1}{16} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (g_0 \phi_c^2 \Delta(k))^2 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{48} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} (g_0 \phi_c^2 \Delta(k))^3 - \dots \quad (4.10)$$

Die Regeln für die graphische Schreibweise sind folgende:

$$-g_0 = \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \quad (4.11a)$$

$$\phi_c = \text{---} \quad (4.11b)$$

$$\Delta(k) = \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \quad (4.11c)$$

Zusätzlich muß noch über alle inneren Schleifen integriert werden. An den Vertices gilt Impulserhaltung. Damit läßt sich der Ein-Schleifen Beitrag (4.10) zum effektiven Potential graphisch darstellen.

$$\mathcal{V}_1(\phi_c) = -\frac{1}{4} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad - \frac{1}{16} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad - \frac{1}{48} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad - \dots \quad (4.12)$$

An dieser Entwicklung ist ersichtlich, daß \mathcal{V}_1 die negative Summe aller Ein-Schleifen-Graphen mit einer beliebigen Anzahl von Vertices ist, von denen jeweils zwei Beine an das äußere Feld ankoppeln. Die Vorfaktoren sind die entsprechenden Symmetriefaktoren (siehe z.B. [ID89]). Im Gegensatz zur Entwicklung nach der Kopplungskonstante haben wir bei der Berechnung des effektiven Potentials schon in Ein-Schleifen-Ordnung Beiträge zu beliebigen Ordnungen der Kopplungskonstante und mit einer beliebigen geraden Anzahl von äußeren Beinen.

4.1.1 Das Integral $w_D(x)$

Da im Integranden von (4.7) k nur quadratisch auftritt, kann die D -dimensionale Integration ohne Probleme von kartesischen auf Kugelkoordinaten umgeschrieben werden.

$$w_D(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^D} \int d\Omega \int dk k^{D-1} \ln \left(1 + \frac{x}{k^2 + 1} \right) \quad (4.13)$$

Dies berechnen wir im folgenden für $D = 3 - \epsilon$. Das Integral über $d\Omega$ ist das Volumen der Sphäre $\mathcal{S}_{3-\epsilon}$, das im Anhang A.2 angegeben ist. Den Integranden ergänzen wir um zwei Terme mit umgekehrten Vorzeichen, um zu zwei konvergenten Teilintegralen zu gelangen.

$$w_{3-\epsilon}(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{3-\epsilon}} \mathcal{S}_{3-\epsilon} \int dk k^{2-\epsilon} \left[\left\{ \ln \left(1 + \frac{x}{k^2 + 1} \right) - \frac{x}{k^2 + 1} \right\} + \frac{x}{k^2 + 1} \right]$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3-\epsilon}{2}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3-\epsilon}{2}\right)} \left[\int dk k^{2-\epsilon} \left\{ \ln\left(1 + \frac{x}{k^2+1}\right) - \frac{x}{k^2+1} \right\} + \int dk k^{2-\epsilon} \frac{x}{k^2+1} \right] \quad (4.14)$$

Die beiden Teilintegrale können nun geschlossen ausgewertet werden.

$$\int_0^\infty dk k^{2-\epsilon} \left\{ \ln\left(1 + \frac{x}{k^2+1}\right) - \frac{x}{k^2+1} \right\} = \frac{1}{6}\pi \left(2 + 3x - 2(1+x)^{\frac{3}{2}}\right) (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \quad (4.15)$$

Beim zweiten Integral formen wir den Nenner des Integranden mittels Schwinger-Parametrisierung um (A.3).

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk k^{2-\epsilon} \frac{x}{k^2+1} &= x \int_0^\infty dk k^{2-\epsilon} \int_0^\infty dt e^{-t(k^2+1)} \\ &= x \int_0^\infty dt e^{-t} \int_0^\infty dk k^{2-\epsilon} e^{-tk^2} \\ &= x \int_0^\infty dt e^{-t} \int_0^\infty \frac{1}{2} d\kappa \kappa^{\frac{1-\epsilon}{2}} e^{-t\kappa} \\ &= \frac{x}{2} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{-\left(\frac{3-\epsilon}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{3-\epsilon}{2}\right) \\ &= \frac{x}{2} \Gamma\left(\frac{3-\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon-1}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

In der dritten und vierten Zeile wurde die Darstellung der Gammafunktion nach (A.1) verwendet.

Mit (4.15), (4.16) und $\Gamma\left(\frac{\epsilon-1}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon-1} \cdot \Gamma\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} + \mathcal{O}(\epsilon)$ wird (4.14) zu

$$\begin{aligned} w_{3-\epsilon}(x) &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3-\epsilon}{2}}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3-\epsilon}{2}\right)} \left[\frac{1}{6}\pi \left(2 + 3x - 2(1+x)^{\frac{3}{2}}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{2} \Gamma\left(\frac{3-\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\epsilon-1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{24\pi} \left(2 + 3x - 2(1+x)^{\frac{3}{2}}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) - x \frac{1}{8\pi} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{1}{12\pi} \left(1 - (1+x)^{\frac{3}{2}}\right) + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Damit ist das effektive Potential in erster Ordnung bestimmt.

4.1.2 Resultat in der symmetrischen Phase

Indem wir (4.17) für $\epsilon \rightarrow 0$ in (4.6) einsetzen, ergibt sich

$$\mathcal{V}_{1+}(\phi) = m_{0+}^3 w_3 \left(\frac{g_0}{2m_{0+}^2} \phi^2 \right)$$

$$= \frac{m_{0+}^3}{12\pi} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{g_0}{2m_{0+}^2} \phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}. \quad (4.18)$$

Damit haben wir in der symmetrischen Phase

$$\mathcal{V}_{0+}(\phi) = \frac{m_{0+}^2}{2} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 \quad (4.19)$$

$$\mathcal{V}_{1+}(\phi) = \frac{1}{12\pi} \left\{ m_{0+}^3 - \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}. \quad (4.20)$$

Durch Verschiebung des Energienullpunktes läßt sich der konstante erste Term $m_{0+}^3/12\pi$ in \mathcal{V}_{1+} wegdefinieren und wir erhalten für das gesamte effektive Potential in erster Ordnung

$$\mathcal{V}(\phi) = \frac{m_{0+}^2}{2} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 - \frac{1}{12\pi} \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \dots \quad (4.21)$$

4.1.3 Extrema der symmetrischen Phase

In nullter Ordnung hat das Potential der symmetrischen Phase \mathcal{V}_+ (1.16) nur das absolute Minimum bei $\phi = 0$. Durch den Term erster Ordnung wird diese Eigenschaft etwas verändert.

$$\frac{d}{d\phi} \mathcal{V}(\phi) = m_{0+}^2 \phi + \frac{g_0}{3!} \phi^3 - \frac{1}{12\pi} \frac{3}{2} \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{\frac{1}{2}} g_0 \phi \quad (4.22)$$

Aus $\mathcal{V}'(\phi_m) \stackrel{!}{=} 0$ folgt $\phi_m = 0$ oder

$$m_{0+}^2 + \frac{g_0}{3!} \phi_m^2 - \frac{g_0}{8\pi} \sqrt{m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_m^2} = 0 \quad (4.23)$$

$$\Rightarrow \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{3!} \phi_m^2 \right)^2 = \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_m^2 \right). \quad (4.24)$$

Die letzte quadratische Gleichung in ϕ_m^2 hat vier Lösungen, wovon allerdings zwei erst durch die Umformung von (4.23) entstehen. Für die Minima von (4.21) ergibt sich

$$\phi_m = \pm \sqrt{-\frac{6m_{0+}^2}{g_0} + \frac{9g_0}{(8\pi)^2} + \sqrt{-\frac{72m_{0+}^2}{(8\pi)^2} + \frac{81g_0^2}{(8\pi)^4}}. \quad (4.25)$$

Dieser Ausdruck ist nur dann reell und sinnvoll, wenn die Argumente unter den Wurzeln größer oder gleich Null sind. Für die innere Wurzel muß gelten

$$-\frac{72m_{0+}^2}{(8\pi)^2} + \frac{81g_0^2}{(8\pi)^4} \geq 0$$

$$\frac{9}{8} \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \geq m_{0+}^2. \quad (4.26)$$

Mit dieser Wahl von m_{0+}^2 sind auch die ersten beiden Summanden unter der Gesamtwurzel von (4.25) positiv.

$$-\frac{6m_{0+}^2}{g_0} + \frac{9g_0}{(8\pi)^2} \stackrel{\frac{9}{8} \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \geq m_{0+}^2}{\geq} \frac{9}{4} \frac{g_0}{(8\pi)^2} \geq 0 \quad (4.27)$$

Für kleine positive Massenquadrate erhalten wir aus dem effektiven Potential in erster Ordnung eine Phasentrennung, die in der Baumapproximation erst bei negativen Massenquadraten auftreten würde.

4.1.4 Resultat in der gebrochenen Phase

Im Abschnitt 4.1.2 wurde das effektive Potential bis zur ersten Ordnung in der symmetrischen Phase bestimmt. Dabei mußte zum Berechnen der Minima in 4.1.3 m_{0+}^2 kleiner einer oberen Schranke (4.26) gesetzt werden.

Nun wollen wir zeigen, daß der direkte Ansatz über das Potential der gebrochenen Phase dasselbe Ergebnis bringt.

Wir definieren $\tilde{\phi} = \phi - v_0 \equiv \phi - \sqrt{\frac{3m_{0-}^2}{g_0}}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}(\tilde{\phi}) &:= \mathcal{V}_-(\tilde{\phi} + v_0) = -\frac{m_{0-}^2}{4}(\tilde{\phi} + v_0)^2 + \frac{g_0}{4!}(\tilde{\phi} + v_0)^4 + \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} \\ &= \frac{m_{0-}^2}{2} \tilde{\phi}^2 + \frac{\sqrt{3g_0 m_{0-}^2}}{3!} \tilde{\phi}^3 + \frac{g_0}{4!} \tilde{\phi}^4. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir als Koppelungskonstante der Drei-Punkt Wechselwirkung

$$f_0 := \sqrt{3g_0 m_{0-}^2}. \quad (4.29)$$

Damit ist der Kern in der Entwicklung um das positive Minimum in der gebrochenen Phase im Gegensatz zu (4.4) durch

$$K_{xy-}(\phi_c) = \left(\partial_x \partial_y + m_{0-}^2 + f_0 \phi_c + \frac{g_0}{2} \phi_c^2 \right) \delta^D(x - y) \quad (4.30)$$

gegeben und der Term erster Ordnung des effektiven Potentials ist

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{1-}(\tilde{\phi}) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln \left(1 + \frac{f_0 \tilde{\phi} + \frac{g_0}{2} \tilde{\phi}^2}{k^2 + m_{0-}^2} \right) \\ &= m_{0-}^D w_D \left(\frac{f_0 \tilde{\phi} + \frac{g_0}{2} \tilde{\phi}^2}{m_{0-}^2} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Um dieses Ergebnis mit (4.20) zu vergleichen, schreiben wir das Argument um:

$$\frac{f_0 \tilde{\phi} + \frac{g_0}{2} \tilde{\phi}^2}{m_{0-}^2} = -\frac{3}{2} + \frac{g_0}{2m_{0-}^2} \phi^2. \quad (4.32)$$

Eingesetzt in (4.17) erhalten wir in der gebrochenen Phase für $D = 3$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{1-}(\phi) &= \frac{m_{0-}^3}{12\pi} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{g_0}{2m_{0-}^2} \phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{12\pi} \left\{ m_{0-}^3 - \left(-\frac{1}{2}m_{0-}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Bis auf eine additive Konstante stimmt der Ausdruck (4.33) mit dem Ergebnis in der symmetrischen Phase (4.20) überein.

Mit dieser Aussage können wir die Ergebnisse aus der symmetrischen Phase auf die Phase gebrochener Symmetrie übertragen. Insbesondere die Extrema aus Abschnitt 4.1.3 gelten auch für $m_{0+}^2 < 0$.

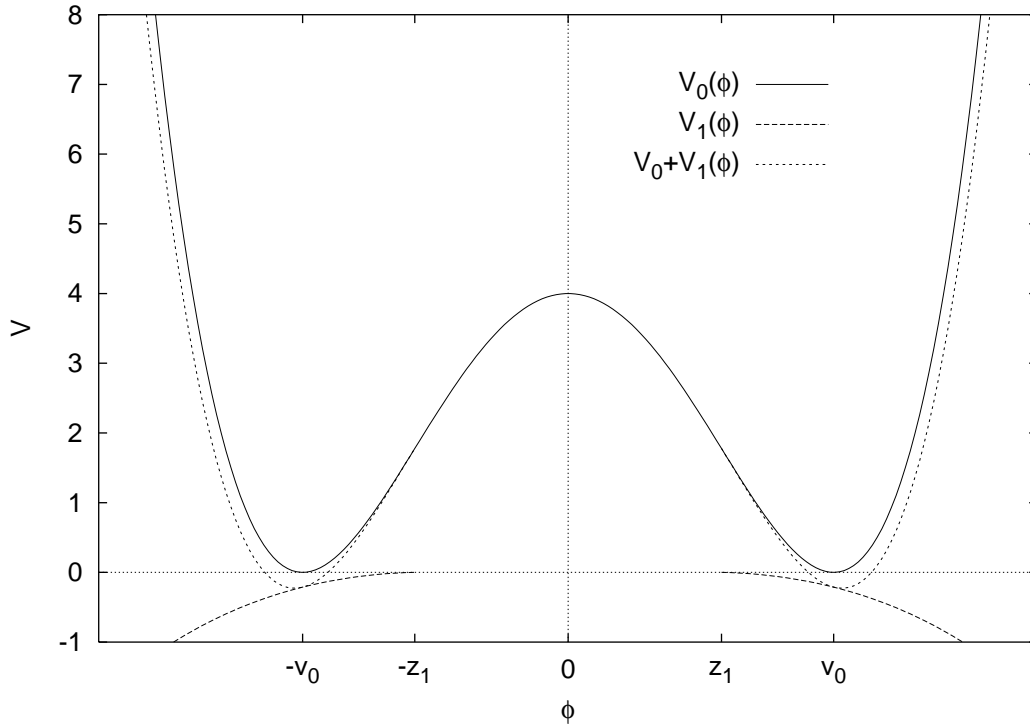


Abbildung 4.1: Das effektive Potential in den beiden niedrigsten Ordnungen

4.1.5 Extrema der gebrochenen Phase

Für die Minima von (4.21) bei $m_{0+}^2 < 0$, was insbesondere auch (4.26) erfüllt, ergibt sich mit $m_{0-}^2 = -2m_{0+}^2$

$$\begin{aligned}\phi_m &= \pm \sqrt{\frac{3m_{0-}^2}{g_0} + \frac{9g_0}{(8\pi)^2} + \sqrt{\frac{36m_{0-}^2}{(8\pi)^2} + \frac{81g_0^2}{(8\pi)^4}}} \\ &=: \pm v_1.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Als Funktion des Minimums in nullter Ordnung gilt

$$\begin{aligned}v_1 &= \sqrt{v_0^2 + \frac{9g_0}{(8\pi)^2} + \sqrt{12v_0^2 \frac{g_0}{(8\pi)^2} + \frac{81g_0^2}{(8\pi)^4}}} \\ &= v_0 \sqrt{1 + 3 \left(\frac{g_0}{8\pi m_{0-}}\right)^2 + 2 \frac{g_0}{8\pi m_{0-}} \sqrt{1 + \frac{9}{4} \left(\frac{g_0}{8\pi m_{0-}}\right)^2}} \\ &= v_0 \left\{ 1 + \frac{g_0}{8\pi m_{0-}} + \left(\frac{g_0}{8\pi m_{0-}}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{g_0}{8\pi m_{0-}}\right)^3 + \mathcal{O}(g_0^4) \right\}.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Bei der Berechnung der Oberflächenspannung im Abschnitt 5.1 werden wir auf diesen Wert zurückkommen.

4.2 Die zweite Ordnung

Nun wollen wir den Term der Ordnung \hbar^2 in (4.2) berechnen. Dazu bestimmen wir zuerst \mathcal{W}_2 aus (3.20), indem wir die Integranden der Funktionalintegrale nach \hbar entwickeln. Zunächst wird der Integrand des Zählers in zwei Faktoren aufgeteilt:

$$\begin{aligned}\exp \left\{ - \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} \left(m_0^2 + \frac{g_0}{2} \phi_j^2 \right) \phi^2 + \hbar^{\frac{1}{2}} \frac{g_0}{3!} \phi_j \phi^3 + \hbar \frac{g_0}{4!} \phi^4 \right] \right\} \\ = \exp \left\{ - \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} \left(m_0^2 + \frac{g_0}{2} \phi_j^2 \right) \phi^2 \right] \right\} \\ \times \exp \left\{ - \int d^D x \left[\hbar^{\frac{1}{2}} \frac{g_0}{3!} \phi_j \phi^3 + \hbar \frac{g_0}{4!} \phi^4 \right] \right\}.\end{aligned}\tag{4.36}$$

Der erste Term enthält den Gaußschen Anteil des Exponenten und keine \hbar -Faktoren. Die zweite Exponentialfunktion mit den Wechselwirkungstermen ergibt

$$\exp \left\{ - \int d^D x \left[\hbar^{\frac{1}{2}} \frac{g_0}{3!} \phi_j \phi^3 + \hbar \frac{g_0}{4!} \phi^4 \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \int d^D x \left[\hbar^{\frac{1}{2}} \frac{g_0}{3!} \phi_j \phi^3(x) + \hbar \frac{g_0}{4!} \phi^4(x) \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \int d^D x d^D y \left[\hbar \frac{g_0^2}{3!^2} \phi_j^2 \phi^3(x) \phi^3(y) + 2\hbar^{\frac{3}{2}} \frac{g_0^2}{3!4!} \phi_j \phi^3(x) \phi^4(y) + \mathcal{O}(\hbar^2) \right] \\
 &- \frac{1}{6} \int d^D x d^D y d^D z \left[\hbar^{\frac{3}{2}} \frac{g_0^3}{3!^3} \phi_j^3 \phi^3(x) \phi^3(y) \phi^3(z) + \mathcal{O}(\hbar^2) \right] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 &= 1 - \hbar^{\frac{1}{2}} \int d^D x \frac{g_0}{3!} \phi_j \phi^3(x) \\
 &+ \hbar \left\{ - \int d^D x \frac{g_0}{4!} \phi^4(x) + \frac{1}{2} \int d^D x d^D y \frac{g_0^2}{3!^2} \phi_j^2 \phi^3(x) \phi^3(y) \right\} + \mathcal{O}(\hbar^{\frac{3}{2}}). \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

Die Terme mit halbzahligem Exponenten von \hbar können vernachlässigt werden, da sie immer mit einem ungeraden Exponenten von $\phi(x)$ einhergehen, also das Funktionalintegral über eine ungerade Funktion gebildet wird. Nachdem der Nenner in (3.20) analog zum Zähler entwickelt wurde, liegt die rechte Seite als Reihe in \hbar vor. Von dieser Reihenentwicklung wird der Logarithmus genommen. Damit entspricht $\mathcal{W}_2[\phi]$ schließlich dem Term der Ordnung \hbar , da im Exponenten bereits einmal durch \hbar geteilt wurde.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_2[\phi_c] &= \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ - \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} \left(m_0^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2 \right) \phi^2 \right] \right\} \\
 &\times \left\{ - \int d^D x \frac{g_0}{4!} \phi^4(x) + \frac{1}{2} \int d^D x d^D y \frac{g_0^2}{3!^2} \phi_c^2 \phi^3(x) \phi^3(y) \right\} \\
 &\times \left\{ \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ - \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} \left(m_0^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2 \right) \phi^2 \right] \right\} \right\}^{-1} \\
 &- \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ - \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{m_0^2}{2} \phi^2 \right] \right\} \times \left\{ - \int d^D x \frac{g_0}{4!} \phi^4(x) \right\} \\
 &\times \left\{ \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ - \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{m_0^2}{2} \phi^2 \right] \right\} \right\}^{-1} \quad (4.38)
 \end{aligned}$$

Der Summand in den ersten drei Zeilen stammt aus der Entwicklung des Zählers. Mit Wicks Theorem können wir diesen Ausdruck in drei Terme aufspalten. Die letzten beiden Zeilen in (4.38) als Entwicklung des Nenners ergeben eine Konstante, da sie nicht von ϕ_c abhängen. Dieser Term wird zum letzten Summanden der folgenden graphischen Entwicklung:

$$\mathcal{W}_2[\phi_c] = \frac{1}{8} \text{diagram 1} + \frac{1}{12} \text{diagram 2} + \frac{1}{8} \text{diagram 3} - \frac{1}{8} \text{diagram 4}. \quad (4.39)$$

An den Dreier-Vertices in den beiden mittleren Graphen wurden der Übersichtlichkeit halber die gestrichelten Linien der Koppelung an das äußere Feld weggelassen. Die dick gezeichneten Propagatoren haben einen zusätzlichen Summanden im Nenner

$$\Delta \left(p; \frac{g_0}{2} \phi_c^2 \right) := \frac{1}{p^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2} = \text{---} \quad , \quad (4.40)$$

der sich wie eine Massenänderung auswirkt. Der oben eingeführte Propagator (4.8) ist also

$$\Delta(p) = \Delta(p; 0) = \frac{1}{p^2 + m_0^2} . \quad (4.41)$$

Der Propagator (4.40) läßt sich als Reihe in $\Delta(p)$ beziehungsweise in der Kopplungskonstanten g_0 entwickeln.

$$\begin{aligned} \Delta \left(p; \frac{g_0}{2} \phi_c^2 \right) &= \frac{1}{p^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2} \\ &= \frac{1}{p^2 + m_0^2} \left(1 + \frac{1}{p^2 + m_0^2} \frac{g_0}{2} \phi_c^2 \right)^{-1} \\ &= \Delta(p) \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{g_0}{2} \phi_c^2 \Delta(p) \right)^n \end{aligned} \quad (4.42)$$

Also entsprechen die dick gezeichneten Propagatoren einer Kette einfacher Propagatoren, deren Verbindungsvertices jeweils mit zwei Beinen an das äußere Feld koppeln.

$$\text{---} = \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \cdot \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} \cdot \text{---} + \dots \quad (4.43)$$

Auf die Berechnung des vorletzten Terms in (4.39) kann für die effektive Wirkung verzichtet werden, da er dem Integral in (3.32) mit umgekehrten Vorzeichen entspricht. Der letzte Term in (4.39) ist eine additive Konstante und wird nicht bestimmt.

Somit müssen zur Berechnung des effektiven Potentials noch zwei Integrale gelöst werden.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{2+}(\phi_c) &= \frac{g_0}{8} \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k_1^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2) (k_2^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2)} \\ &\quad - \frac{g_0^2 \phi_c^2}{12} \int \frac{d^D k_1 d^D k_2 d^D k_3}{(2\pi)^{3D}} \times \\ &\quad \times \frac{(2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3)}{(k_1^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2) (k_2^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2) (k_3^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2)} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Dies entspricht in der Schreibweise mit Propagatoren

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{2+}(\phi_c) &= \frac{g_0}{8} \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \Delta\left(k_1; \frac{g_0}{2} \phi_c^2\right) \Delta\left(k_2; \frac{g_0}{2} \phi_c^2\right) \\ &\quad - \frac{g_0^2 \phi_c^2}{12} \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \Delta\left(k_1; \frac{g_0}{2} \phi_c^2\right) \Delta\left(k_2; \frac{g_0}{2} \phi_c^2\right) \Delta\left(k_1 + k_2; \frac{g_0}{2} \phi_c^2\right). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Das Doppelintegral in der ersten Zeile läßt sich als Quadrat umformen.

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{V}_2}^{(1)} &= \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{k_1^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2} \times \frac{1}{k_2^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2} \\ &= \left\{ \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2} \right\}^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Das einfache, D -dimensionale Integral berechnen wir mit (B.7).

$$\begin{aligned} \int \frac{d^{3-\epsilon} k}{(2\pi)^{3-\epsilon}} \frac{1}{k^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2} &= \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2\right)^{\frac{1-\epsilon}{2}} \int \frac{d^{3-\epsilon} k}{(2\pi)^{3-\epsilon}} \frac{1}{k^2 + 1} \\ &= \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2\right)^{\frac{1-\epsilon}{2}} J_1(3-\epsilon) \\ &= \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2\right)^{\frac{1-\epsilon}{2}} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{3-\epsilon}{2}}} \Gamma\left(\frac{\epsilon-1}{2}\right) \\ &= -\frac{\left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2\right)^{\frac{1}{2}}}{4\pi} + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Als ersten Term des effektiven Potentials in Zwei-Schleifen Ordnung haben wir

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{V}_2}^{(1)} &= \left(-\frac{\left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2\right)^{\frac{1}{2}}}{4\pi} + \mathcal{O}(\epsilon) \right)^2 \\ &= \frac{m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Das zweite Integral von (4.44) ist

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{V}_2}^{(2)} &= \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{k_1^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2} \times \frac{1}{k_2^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2} \times \\ &\quad \times \frac{1}{(k_1 + k_2)^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2} \\ &= \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2\right)^{\frac{2D-6}{2}} \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{k_1^2 + 1} \times \frac{1}{k_2^2 + 1} \times \frac{1}{(k_1 + k_2)^2 + 1}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Dieses divergente Integral ist in [HEI93, S. 31ff,(3.26)] für $D = 3 - \epsilon$ gelöst worden. Die Divergenz läßt sich dabei in der Konstanten

$$B_+^{div} = \frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_{0+}^2}{4\pi} \right) + (1 - \ln 9) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (4.50)$$

isolieren. γ ist die Eulersche Konstante. Im Kapitel 6 wird im Rahmen der Renormierung B^{div} eliminiert.

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{V}2}^{(2)} &= \left(1 + \frac{g_0}{2m_{0+}^2} \phi_c^2 \right)^{-\epsilon} \frac{1}{32\pi^2} B_+^{div} \\ &= \left(1 - \epsilon \ln \left(1 + \frac{g_0 \phi_c^2}{2m_{0+}^2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \frac{1}{32\pi^2} B_+^{div} \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \left(B_+^{div} - \ln \left(1 + \frac{g_0 \phi_c^2}{2m_{0+}^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Mit diesem Ergebnis haben wir den Zwei-Schleifen Term von \mathcal{V} bestimmt.

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{2+}(\phi_c) &= \frac{g_0}{8} I_{\mathcal{V}2}^{(1)} - \frac{g_0^2 \phi_c^2}{12} I_{\mathcal{V}2}^{(2)} \\ &= \frac{g_0}{8} \left(\frac{m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_c^2}{(4\pi)^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) - \frac{g_0^2 \phi_c^2}{12} \left(\left(1 + \frac{g_0}{2m_{0+}^2} \phi_c^2 \right)^{-\epsilon} \frac{1}{32\pi^2} B_+^{div} \right) \\ &= \frac{m_{0+}^2}{16\pi} \frac{g_0}{8\pi} + \frac{\phi_c^2}{4} \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &\quad - \frac{\phi_c^2}{6} \left(B_+^{div} - \ln \left(1 + \frac{g_0 \phi_c^2}{2m_{0+}^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{m_{0+}^2}{16\pi} \frac{g_0}{8\pi} + \frac{\phi_c^2}{6} \left(\frac{3}{2} - B_+^{div} + \ln \left(1 + \frac{g_0 \phi_c^2}{2m_{0+}^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned} \quad (4.52)$$

In graphischer Notation entspricht (4.52)

$$\mathcal{V}_2(\phi_c) = -\frac{1}{8} \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} - \frac{1}{12} \text{---} \bigcirc \text{---} \text{---}, \quad (4.53)$$

wobei die inneren Propagatoren vom Typ (4.40) sind. \mathcal{V}_2 stellt die negative Summe aller Einteilchen-irreduziblen Zwei-Schleifen Graphen dar. Die Graphen lassen sich also nicht durch trennen *eines* inneren Propagators in zwei Teile zerlegen [CLP78]. Der vorletzte Graph in (4.39) ist Einteilchen-reduzibel, muß also nur für \mathcal{W}_2 berechnet werden, nicht für Γ_2 . Die effektive Wirkung hängt in allen Ordnungen der Schleifenentwicklung nur von Einteilchen-irreduziblen Graphen ab, wie auch (4.12) zeigt [JAC74].

Zum Abschluß dieses Kapitels verifizieren wir das so bestimmte effektive Potential mit bereits bekannten Resultaten und übertragen es auf die Phase gebrochener Symmetrie.

4.2.1 Resultat in der symmetrischen Phase

Das effektive Potential in zweiter Ordnung können wir aus (1.16), (4.20) und (4.52) berechnen.

$$\mathcal{V}_{0+}(\phi) = \frac{m_{0+}^2}{2}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 \quad (4.54)$$

$$\mathcal{V}_{1+}(\phi) = \frac{1}{12\pi} \left\{ m_{0+}^3 - \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2}\phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (4.55)$$

$$\mathcal{V}_{2+}(\phi) = \frac{m_{0+}^2 g_0}{16\pi \cdot 8\pi} + \frac{\phi^2}{6} \left(\frac{3}{2} - B_+^{div} + \ln \left(1 + \frac{g_0 \phi^2}{2m_{0+}^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \quad (4.56)$$

Damit ergibt sich

$$\tilde{\mathcal{V}}_+(\phi) = \mathcal{V}_{0+}(\phi) + \mathcal{V}_{1+}(\phi) + \mathcal{V}_{2+}(\phi). \quad (4.57)$$

Die Ableitungen von $\tilde{\mathcal{V}}_+$ am Minimum $\phi_m = 0$ sind gleich den echten Vertex-Funktionen bei verschwindendem äußerem Impuls

$$\left. \frac{\partial^n}{\partial \phi^n} \tilde{\mathcal{V}}(\phi) \right|_{\phi=\phi_m} = -\Gamma_0^{(n,0)}(k_i = 0) \quad \text{für } n \geq 2. \quad (4.58)$$

Dies folgt direkt aus der Zerlegung (3.11). Die Größen auf der rechten Seite sind in [Küs95] für n gleich zwei und vier in der symmetrischen Phase berechnet.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}_+''(\phi) &= m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2}\phi^2 \\ &\quad - \sqrt{m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2}\phi^2} \frac{g_0}{8\pi} - \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2}\phi^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{g_0^2 \phi^2}{16\pi} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} B_+^{div} + \frac{1}{3} \ln \left(1 + \frac{g_0 \phi^2}{2m_{0+}^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad + \left(1 + \frac{g_0 \phi^2}{2m_{0+}^2} \right)^{-1} \frac{5g_0^3 \phi^2}{384\pi^2 m_{0+}^2} - \left(1 + \frac{g_0 \phi^2}{2m_{0+}^2} \right)^{-2} \frac{g_0^4 \phi^4}{384\pi^2 m_{0+}^4} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Die vierfache Ableitung von $\tilde{\mathcal{V}}_+$ läßt sich hieraus ebenso berechnen und am Minimum ergibt sich

$$\tilde{\mathcal{V}}_+''(0) = m_{0+}^2 - m_{0+} \frac{g_0}{8\pi} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} B_+^{div} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \quad (4.60)$$

$$\tilde{\mathcal{V}}_+^{(4)}(0) = g_0 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{g_0}{8\pi m_{0+}} + 2 \left(\frac{g_0}{8\pi m_{0+}} \right)^2 \right\}. \quad (4.61)$$

Dies entspricht den Ergebnissen für die Zwei- bzw. Vier-Punkt-Funktion.

4.2.2 Resultat in der gebrochenen Phase

Den Zwei-Schleifen-Beitrag zum effektiven Potential der Phase gebrochener Symmetrie erhalten wir, indem in (4.52) m_{0+}^2 durch $-m_{0-}^2/2$ ersetzt wird. Dabei müssen wir beachten, das auch B_+^{div} von der nackten Masse abhängt.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{2-}(\phi) &= -\frac{m_{0-}^2 g_0}{32\pi \cdot 8\pi} + \frac{\phi^2}{6} \left(\frac{3}{2} - B_+^{div} + \ln \left(1 - \frac{g_0 \phi^2}{m_{0-}^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \\ &= -\frac{m_{0-}^2 g_0}{32\pi \cdot 8\pi} + \frac{\phi^2}{6} \left(\frac{3}{2} - B_+^{div} + \ln(-2) + \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{g_0 \phi^2}{2m_{0-}^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2\end{aligned}\quad (4.62)$$

Den Logarithmus von (-2) fassen wir mit B_+^{div} zusammen und definieren

$$\begin{aligned}B_-^{div} &:= B_+^{div} - \ln(-2) \\ &= \frac{1}{\epsilon} - \ln \left(-\frac{m_{0-}^2}{8\pi} \right) - \ln(-2) + (1 - \ln 9) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_{0-}^2}{4\pi} \right) + (1 - \ln 9) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon).\end{aligned}\quad (4.63)$$

Aus dem Logarithmustrm in (4.62) hat \mathcal{V}_{2-} für kleine Werte der Feldvariablen einen Imaginäranteil.

Mit (1.19), (4.33) und (4.62) gilt

$$\mathcal{V}_{0-}(\phi) = -\frac{m_{0-}^2}{4}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 + \frac{3}{8}\frac{m_{0-}^4}{g_0}\quad (4.64)$$

$$\mathcal{V}_{1-}(\phi) = \frac{1}{12\pi} \left\{ m_{0-}^3 - \left(-\frac{1}{2}m_{0-}^2 + \frac{g_0}{2}\phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}\quad (4.65)$$

$$\mathcal{V}_{2-}(\phi) = -\frac{m_{0-}^2 g_0}{32\pi \cdot 8\pi} + \frac{\phi^2}{6} \left(\frac{3}{2} - B_-^{div} + \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{g_0 \phi^2}{2m_{0-}^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2, \quad (4.66)$$

und damit

$$\tilde{\mathcal{V}}_-(\phi) = \mathcal{V}_{0-}(\phi) + \mathcal{V}_{1-}(\phi) + \mathcal{V}_{2-}(\phi).\quad (4.67)$$

Auch dieses Ergebnis wollen wir mittels (4.58) verifizieren, müssen dazu allerdings zuerst das Minimum von $\tilde{\mathcal{V}}_-$ bestimmen.

4.2.3 Extrema des effektiven Potentials zweiter Ordnung

Um die Extremstellen des effektiven Potentials zu erhalten, differenzieren wir $\tilde{\mathcal{V}}_-$ nach der Feldvariablen ϕ .

$$\frac{d}{d\phi}\tilde{\mathcal{V}}_-(\phi) = -\frac{m_{0-}^2}{2}\phi + \frac{g_0}{3!}\phi^3 - \frac{g_0}{8\pi}\phi\sqrt{-\frac{1}{2}m_{0-}^2 + \frac{g_0}{2}\phi^2}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\phi}{3} \left(\frac{3}{2} - B^{div} + \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{g_0 \phi^2}{2m_{0-}^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \\
 & + \frac{g_0}{6m_{0-}^2} \phi^3 \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{g_0 \phi^2}{2m_{0-}^2}} \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

Offensichtlich liegt ein Extremum an der Stelle $\phi_m = 0$, welches hier aber nicht weiter interessiert, oder es gilt

$$\begin{aligned}
 0 & = -\frac{m_{0-}^2}{2} + \frac{g_0}{3!} \phi_m^2 - \frac{g_0}{8\pi} \sqrt{-\frac{1}{2} m_{0-}^2 + \frac{g_0}{2} \phi_m^2} \\
 & + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - B^{div} + \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{g_0 \phi_m^2}{2m_{0-}^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \frac{g_0}{6m_{0-}^2} \phi_m^2 \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{g_0 \phi_m^2}{2m_{0-}^2}} \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Diese Gleichung läßt sich im Gegensatz zu (4.23) nicht analytisch auflösen. Da in der weiteren Rechnung sowieso nach der Koppelungskonstanten g_0 entwickelt wird, können wir auch das Minimum als Reihe danach entwickeln. Dann muß statt $\tilde{\mathcal{V}}'_-(\phi_m) \stackrel{!}{=} 0$ nur noch $\tilde{\mathcal{V}}'_-(\phi_m) \stackrel{!}{=} 0 + \mathcal{O}(g_0^3)$ gelten.

Da das Minimum in nullter Ordnung bei v_0 liegt, können wir den Ansatz $\phi_m = v_0(1 + g_0\delta)$ verwenden. Dann läßt sich δ als Potenzreihe in g_0 entwickeln.

$$0 = -\frac{m_{0-}^2}{2} + \frac{m_{0-}^2}{2} (1 + g_0\delta)^2 - \frac{g_0}{8\pi} \sqrt{-\frac{1}{2} m_{0-}^2 + \frac{3m_{0-}^2}{2} (1 + g_0\delta)^2} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - B^{div} + \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3(1 + g_0\delta)^2}{2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \frac{(1 + g_0\delta)^2}{3(1 + g_0\delta)^2 - 1} \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \\
 & = (8\pi m_{0-}^2 \delta - m_{0-}) \frac{g_0}{8\pi} \\
 & + \left(1 - \frac{1}{3} B^{div} - 12\pi m_{0-} \delta + 32\pi^2 m_{0-}^2 \delta^2 \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(g_0^3)
 \end{aligned} \tag{4.71}$$

Als Lösung erhalten wir

$$\delta = \frac{1}{8\pi m_{0-}} + \frac{1}{3} B^{div} \frac{g_0}{(8\pi m_{0-})^2} + \mathcal{O}(g_0^2). \tag{4.72}$$

Wir nennen das Minimum des effektiven Potentials zweiter Ordnung $\phi_m = \pm v_2$ und erhalten

$$\begin{aligned}
 v_2 & := v_0(1 + g_0\delta) \\
 & = v_0 \left(1 + \frac{g_0}{8\pi m_{0-}} + \frac{1}{3} B^{div} \left(\frac{g_0}{8\pi m_{0-}} \right)^2 + \mathcal{O}(g_0^3) \right) \\
 & = \sqrt{\frac{3m_{0-}^2}{g_0} + \frac{3m_{0-}}{4\pi} + (3 + 2B^{div}) \frac{g_0}{(8\pi)^2} + \mathcal{O}(g_0^2)}.
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

Nachdem das Minimum von $\tilde{\mathcal{V}}_-$ bestimmt ist, kann (4.58) in der gebrochenen Phase für $n = 2$ angewendet werden.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{V}}_-''(\phi) = & -\frac{m_{0-}^2}{2} + \frac{g_0}{2}\phi^2 \\
 & -\sqrt{-\frac{m_{0-}^2}{2} + \frac{g_0}{2}\phi^2} \frac{g_0}{8\pi} - \left(-\frac{m_{0-}^2}{2} + \frac{g_0}{2}\phi^2\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{g_0^2\phi^2}{16\pi} \\
 & + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}B_-^{div} + \frac{1}{3}\ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{g_0\phi^2}{2m_{0-}^2}\right)\right) \left(\frac{g_0}{8\pi}\right)^2 \\
 & + \left(-\frac{1}{2} + \frac{g_0\phi^2}{2m_{0-}^2}\right)^{-1} \frac{5g_0^3\phi^2}{384\pi^2 m_{0-}^2} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{g_0\phi^2}{2m_{0-}^2}\right)^{-2} \frac{g_0^4\phi^4}{384\pi^2 m_{0-}^4}
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Diesen Ausdruck werten wir am Minimum v_2 aus und entwickeln nach g_0 .

$$\tilde{\mathcal{V}}_-''(v_2) = m_{0-}^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{g_0}{8\pi m_{0-}} + \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}B_-^{div}\right) \left(\frac{g_0}{8\pi m_{0-}}\right)^2 + \mathcal{O}(g_0^3) \right\} \tag{4.75}$$

Auch hier gibt es Übereinstimmung mit früheren Resultaten [Küs95]. Für höhere $2n$ -Punkt Funktionen liegen keine Vergleichswerte vor, um das Ergebnis zu kontrollieren.

5 Oberflächenspannung

Mit den Ergebnissen des vorigen Kapitels läßt sich nun die Oberflächenspannung nach Abschnitt 2.4 bestimmen. Dabei wird die Rechnung im ersten Abschnitt zunächst nur in Ein-Schleifen-Ordnung durchgeführt. In diesem einfacheren Fall wird bereits der vollständige Weg aufgezeigt, wie er in Zwei-Schleifen-Ordnung genutzt wird. Da die folgende Rechnung nur in der Zwei-Phasen-Region Sinn macht, wird der Index “-” für die Phase gebrochener Symmetrie in der Regel fortgelassen.

5.1 Oberflächenspannung in erster Ordnung

Nach (2.22) ist die Oberflächenspannung σ das Integral über die Wurzel des Potentials von einem Minimum zum anderen. Dabei muß das Potential so normiert sein, daß es am Minimum verschwindet. Damit ist der Radikand immer positiv.

Das Minimum des effektiven Potentials in erster Ordnung ist v_1 (4.34). Also muß für die Normierungskonstante \mathcal{V}_N des Potentials

$$\mathcal{V}(v_1) = \mathcal{V}_0(v_1) + \mathcal{V}_1(v_1) + \mathcal{V}_N \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.1)$$

gelten. Mit (1.19) und (4.33) haben wir

$$\mathcal{V}_0(\phi) = -\frac{m_0^2}{4}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 + \frac{3}{8}\frac{m_0^4}{g_0} \quad (5.2)$$

$$\mathcal{V}_1(\phi) = \frac{1}{12\pi} \left\{ m_0^3 - \left(-\frac{1}{2}m_0^2 + \frac{g_0}{2}\phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (5.3)$$

und bestimmen damit

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_N &= -\{\mathcal{V}_0(v_1) + \mathcal{V}_1(v_1)\} \\ &= -\left\{ \frac{-m_{0-}^2}{4}v_1^2 + \frac{g_0}{4!}v_1^4 + \frac{3}{8}\frac{m_{0-}^4}{g_0} + \frac{1}{12\pi} \left[m_{0-}^3 - \left(-\frac{m_{0-}^2}{2} + \frac{g_0}{2}v_1^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} \\ &= -\left\{ \frac{3g_0 m_{0-}^2}{128\pi^2} \left[1 + \frac{9}{2} \left(\frac{g_0}{8\pi m_{0-}} \right)^2 + 3\frac{g_0}{8\pi m_{0-}} \sqrt{1 + \frac{9}{4} \left(\frac{g_0}{8\pi m_{0-}} \right)^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{m_{0-}^3}{12\pi} \left[1 - \left(1 + \frac{9}{2} \left(\frac{g_0}{8\pi m_{0-}} \right)^2 + 3 \frac{g_0}{8\pi m_{0-}} \sqrt{1 + \frac{9}{4} \left(\frac{g_0}{8\pi m_{0-}} \right)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \Bigg\} \\
 & = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{3}{2} m_{0-}^2 \frac{g_0}{8\pi} + \frac{9}{4} m_{0-} \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(g_0^3) \right). \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Da das Potential symmetrisch in ϕ ist, brauchen wir in (2.22) nur das Integral über positive Werte von ϕ bilden. Der Index von σ bezieht sich dabei auf die Ordnung, in der die Oberflächenspannung bestimmt wird.

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \int_{-v_1}^{v_1} d\phi \sqrt{2\mathcal{V}(\phi)} \\
 &= 2 \int_0^{v_1} d\phi \sqrt{2(\mathcal{V}_0(\phi) + \mathcal{V}_1(\phi) + \mathcal{V}_N)} \tag{5.5}
 \end{aligned}$$

5.1.1 Imaginäranteil des Potentials

Das Potential der gebrochenen Phase in nullter Ordnung (5.2) ist für beliebige reelle Werte der Feldvariablen reell und positiv. Im Potential erster Ordnung (5.3) haben wir jedoch einen gebrochenen Exponenten. Das heißt, für kleine Werte der Feldvariablen $|\phi| < z_1$ mit

$$z_1 := \sqrt{\frac{m_{0-}^2}{g_0}} \tag{5.6}$$

hat dieser Term einen Imaginäranteil. Auch Terme des effektiven Potentials in höherer Ordnung haben teilweise imaginäre Beiträge.

Der Imaginäranteil des Potentials ist nach WEINBERG und WU [WW87] mit der Zerfallsrate des gemischten Zustandes zu identifizieren. Da hier in der statischen Rechnung nur die Höhe der Energiebarriere von Bedeutung ist, kann der Imaginäranteil weggelassen werden. Alternativ ist es möglich, ein überall konvexes effektives Potential zu konstruieren [RIV84, OWY86].

Um nur den Realteil des effektiven Potentials mitzunehmen, unterteilen wir das Integrationsintervall bei z_1 in zwei Abschnitte.

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= 2 \int_0^{z_1} d\phi \sqrt{2 \left(\mathcal{V}_0(\phi) + \frac{m_{0-}^3}{12\pi} + \mathcal{V}_N \right)} \tag{5.7} \\
 &+ 2 \int_{z_1}^{v_1} d\phi \sqrt{2 \left(\mathcal{V}_0(\phi) + \frac{1}{12\pi} \left\{ m_{0-}^3 - \left(-\frac{1}{2} m_{0-}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} + \mathcal{V}_N \right)}
 \end{aligned}$$

Durch die Realteilbildung wird der Term erster Ordnung im ersten Teilintegral zu einer Konstanten. In den folgenden Abschnitten berechnen wir die beiden Integrale.

5.1.2 Erstes Teilintegral

In diesem Abschnitt berechnen wir das Integral im ersten Summanden von (5.7), welches nicht geschlossen berechnet werden kann. Mit der Entwicklung nach der Koppelungskonstanten g_0 läßt es sich auf eine integrierbare Form bringen.

$$\begin{aligned}
 I_\sigma^{(1)} &= \int_0^{z_1} d\phi \sqrt{2 \left(-\frac{m_{0-}^2}{4} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 + \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} + \frac{m_{0-}^3}{12\pi} + \mathcal{V}_N \right)} \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{z_1} d\phi \sqrt{\mathcal{V}_0(\phi)} \sqrt{1 + \frac{\mathcal{V}_1(\phi)}{\mathcal{V}_0(\phi)} + \frac{\mathcal{V}_N}{\mathcal{V}_0(\phi)}} \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{z_1} d\phi \sqrt{\frac{g_0}{4!} (\phi^2 - v_0^2)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{V}_1(\phi)}{\mathcal{V}_0(\phi)} + \frac{\mathcal{V}_N}{\mathcal{V}_0(\phi)} \right) + \mathcal{O}(g_0^2) \right\} \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Die Feldvariable ϕ ersetzen wir durch eine dimensionslose Größe χ :

$$\phi = v_0 \chi. \quad (5.9)$$

Mit dieser Ersetzung wird die Ordnung der einzelnen Terme offensichtlicher. Die obere Integrationsgrenze skaliert zu $z_1/v_0 = 1/\sqrt{3}$, also ist χ^2 immer kleiner als eins. Nach diesen Umformungen läßt sich eine Stammfunktion finden.

$$\begin{aligned}
 I_\sigma^{(1)} &= \frac{3m_{0-}^3}{2g_0} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\chi (1 - \chi^2) \left\{ 1 + \frac{8}{9} \frac{1}{(1 - \chi^2)^2} \frac{g_0}{8\pi m_{0-}} + \mathcal{O}(g_0^2) \right\} \\
 &= \frac{3m_{0-}^3}{2g_0} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\chi \left\{ (1 - \chi^2) + \frac{8}{9} \frac{1}{(1 - \chi^2)^2} \frac{g_0}{8\pi m_{0-}} + \mathcal{O}(g_0^2) \right\} \\
 &= \frac{3m_{0-}^3}{2g_0} \left[\chi - \frac{1}{3} \chi^3 + \frac{8}{9} \operatorname{artanh} \chi \frac{g_0}{8\pi m_{0-}} + \mathcal{O}(g_0^3) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= \frac{3m_{0-}^3}{2g_0} \left\{ \frac{8}{9\sqrt{3}} + \frac{8}{9} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{g_0}{8\pi m_{0-}} + \mathcal{O}(g_0^3) \right\} \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

5.1.3 Zweites Teilintegral

Im zweiten Term von (5.7) führen wir ebenso wie bei $I_\sigma^{(1)}$ die dimensionslose Feldvariable χ aus (5.9) ein.

$$\begin{aligned}
 I_\sigma^{(2)} &= \int_{z_1}^{v_1} d\phi \left\{ 2 \left(-\frac{m_{0-}^2}{4} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 + \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{12\pi} \left\{ m_{0-}^3 - \left(-\frac{1}{2} m_{0-}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} + \mathcal{V}_N \right) \right\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{3m_{0-}^3}{2g_0} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{v_1}{v_0}} d\chi \sqrt{(1 - \chi^2)^2 + \frac{16}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{g_0}{8\pi m_{0-}} + \mathcal{O}(g_0^2)} \quad (5.11)$$

Diesen Ausdruck können wir nicht wie das erste Teilintegral berechnen, da die obere Integrationsgrenze jenseits der Singularität der Terme höherer Ordnung ist, also über einen Pol hinwegintegriert werden müßte. Diese Singularität ist jedoch artifizuell, da der Integrand nach Konstruktion an der oberen Integrationsgrenze verschwindet. Das Problem wird im folgenden gelöst.

Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir folgende dimensionslose Kopplungskonstante

$$u_0 := \frac{g_0}{m_{0-}^{4-D}} \stackrel{D=3}{=} \frac{g_0}{m_{0-}}. \quad (5.12)$$

Damit wird der Integrand von (5.11) zu

$$f(\chi, u_0) := \sqrt{(1 - \chi^2)^2 + \frac{16}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{u_0}{8\pi} + \mathcal{O}(u_0^2)}. \quad (5.13)$$

Die obere Integrationssschranke in dimensionslosen Größen ist nach (4.35)

$$\begin{aligned} \chi_0(u_0) &:= \frac{v_1}{v_0} \\ &= 1 + \frac{u_0}{8\pi} + \mathcal{O}(u_0^2). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Da sowohl der Integrand als auch die obere Grenze des Integrals von u_0 abhängen, kann das gesamte Integral nach u_0 entwickelt werden.

$$\begin{aligned} I(u_0) &:= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\chi_0(u_0)} d\chi f(\chi, u_0) \\ &= I(0) + u_0 \cdot I'(0) + \frac{1}{2} u_0^2 \cdot I''(0) + \mathcal{O}(u_0^3) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Dabei sind die Ableitungen des Integrals durch

$$I'(u_0) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\chi_0(u_0)} d\chi \frac{\partial f(\chi, u_0)}{\partial u_0} + \frac{\partial \chi_0(u_0)}{\partial u_0} \cdot \underbrace{f(\chi_0, u_0)}_0 \quad (5.16)$$

$$I''(u_0) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\chi_0(u_0)} d\chi \frac{\partial^2 f(\chi, u_0)}{\partial u_0^2} + \frac{\partial \chi_0(u_0)}{\partial u_0} \cdot \frac{\partial f(\chi_0, u_0)}{\partial u_0} \quad (5.17)$$

gegeben. Der zweite Faktor in (5.16) wird zu null, da χ_0 gerade das Minimum des Potentials ist, welches auf null normiert wurde. Der zweite Term ist hier nur der Einführung halber angegeben. Er wird erst im Abschnitt 5.2 berechnet.

Der erste Summand der Entwicklung (5.15) ergibt

$$\begin{aligned}
 I(0) &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\chi_0(0)} d\chi f(\chi, 0) \\
 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \sqrt{(1 - \chi^2)^2} \\
 &= \left[\chi - \frac{1}{3}\chi^3 \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{8}{9\sqrt{3}}.
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Die Ableitung des Integranden (5.13) ist

$$\frac{\partial f(\chi, u_0)}{\partial u_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{f(\chi, u_0)} \left[\frac{16}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{1}{8\pi} + \mathcal{O}(u_0) \right]. \tag{5.19}$$

Damit läßt sich der Term erster Ordnung berechnen.

$$\begin{aligned}
 I'(0) &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\chi_0(0)} d\chi \left. \frac{\partial f(\chi, u_0)}{\partial u_0} \right|_{u_0=0} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \frac{8}{9} \frac{1}{1 - \chi^2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \left[\frac{2}{3}\chi \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2} + \frac{4}{9} \ln \left(-1 - 3\chi + 2\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4}{9} \ln \left(-1 + 3\chi + 2\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left(3\chi + \sqrt{6} \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2} \right) \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \\
 &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \ln 2 - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln 3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{9} \ln(-1 + \sqrt{3}) - \frac{4}{9} \ln(1 + \sqrt{3}) + \sqrt{\frac{2}{3}} \ln(3 + \sqrt{6}) \right) \\
 &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \ln 2 - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln 3 - \frac{8}{9} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \ln(3 + \sqrt{6}) \right) \\
 &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \ln 2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \frac{8}{9} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right)
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Durch Einsetzen von (5.18) und (5.20) in (5.15) erhalten wir $I_\sigma^{(2)}$.

$$\begin{aligned}
 I_\sigma^{(2)} &= \frac{3m_0^3}{2g_0} I(u_0) \\
 &= \frac{3m_0^3}{2g_0} \left\{ \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{9\sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \ln 2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left(\frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3}} \right) - \frac{8}{9} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{u_0}{8\pi} \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{O}(u_0^2) \right\} \tag{5.21}
 \end{aligned}$$

5.1.4 Resultat

Nun können wir die Oberflächenspannung nach (5.5) aus (5.10) und (5.21) berechnen.

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= 2 (I_\sigma^{(1)} + I_\sigma^{(2)}) \\
 &= \frac{3m_0^3}{g_0} \left\{ \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \ln 2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \ln \left(\frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3}} \right) \right) \frac{u_0}{8\pi} + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \\
 &= \frac{2m_0^3}{g_0} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{2}{3} \ln 2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(\frac{3 + \sqrt{6}}{\sqrt{3}} \right) \right) \frac{u_0}{8\pi} + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \tag{5.22}
 \end{aligned}$$

Nachdem wir hier den Rechenweg aufgezeigt haben, wenden wir uns nun der Berechnung in zweiter Ordnung zu.

5.2 Oberflächenspannung in zweiter Ordnung

Wie im Abschnitt 5.1 muß nun zuerst das effektive Potential normiert werden. Damit können wir mit den Techniken, wie sie in der Rechnung zur Ein-Schleifen-Ordnung eingeführt wurden, die Oberflächenspannung bestimmen.

5.2.1 Normierung des Potentials

Nachdem im Abschnitt 4.2.3 das Minimum von $\tilde{\mathcal{V}}$ (4.67) bestimmt wurde, können wir das effektive Potential mit der Bedingung $\mathcal{V}(v_2) \stackrel{!}{=} 0$ normieren.

$$\mathcal{V}(v_2) := \tilde{\mathcal{V}}(v_2) + \mathcal{V}_N \stackrel{!}{=} 0 \tag{5.23}$$

Also gilt

$$\mathcal{V}_N = -\tilde{\mathcal{V}}(v_2)$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left\{ -\frac{m_0^2}{4} v_2^2 + \frac{g_0}{4!} v_2^4 + \frac{3}{8} \frac{m_0^4}{g_0} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{12\pi} \left\{ m_0^3 - \left(-\frac{1}{2} m_0^2 + \frac{g_0}{2} v_2^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{m_0^2}{32\pi} \frac{g_0}{8\pi} + \frac{v_2^2}{6} \left(\frac{3}{2} - B^{div} + \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{g_0 v_2^2}{2m_0^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \right\} \\
 &= - \left\{ \frac{3m_0^2}{16\pi} \frac{g_0}{8\pi} + \frac{m_0}{8\pi} \left(\frac{3}{2} + B^{div} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(g_0^3) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3m_0^2}{8\pi} \frac{g_0}{8\pi} - \frac{m_0}{8\pi} \left(\frac{15}{4} + B^{div} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(g_0^3) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m_0^2}{16\pi} (1 - B^{div}) \frac{g_0}{8\pi} + \frac{m_0}{8\pi} (3 - B^{div}) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(g_0^3) \right\} \\
 &= \frac{m_0^2}{8\pi} \left(1 + \frac{1}{2} B^{div} \right) \frac{g_0}{8\pi} + \frac{m_0}{8\pi} \left(-\frac{3}{4} + B^{div} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(g_0^3). \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

Tatsächlich brauchen wir die Potentialnormierung nur bis zur Ordnung g_0 , da auch der führende Term im effektiven Potential in zwei Schleifen von dieser Ordnung ist.

Nun können wir wie im Kapitel 5.1 die Oberflächenspannung bestimmen. Nach (2.22) gilt

$$\begin{aligned}
 \sigma_2 &= \int_{-v_2}^{v_2} d\phi \sqrt{2\mathcal{V}(\phi)} \\
 &= 2 \int_0^{v_2} d\phi \sqrt{2(\mathcal{V}_0(\phi) + \mathcal{V}_1(\phi) + \mathcal{V}_2(\phi) + \mathcal{V}_N)}. \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

Dabei darf nur der Realteil des effektiven Potentials berücksichtigt werden. Sowohl in erster als auch in zweiter Ordnung treten Imaginäranteile nur für $|\phi| < z_1$ auf. Daher zerlegen wir das Integral wiederum in zwei Teilintegrale und bestimmen für jeden Teil das passende Potential mit $\mathcal{V}_{\leq}(\phi) = \text{Re}(\mathcal{V}(\phi))$ für $|\phi| \leq z_1$, welches im betreffenden Intervall rein reell ist.

$$\sigma_2 = 2 \int_0^{z_1} d\phi \sqrt{2\mathcal{V}_{<}(\phi)} + 2 \int_{z_1}^{v_2} d\phi \sqrt{2\mathcal{V}_{>}(\phi)} \quad (5.26)$$

Da $\text{Re}(\sqrt{x}) = 0$ für $x \leq 0$ und $\text{Re}(\ln(-x)) = \text{Re}(\ln x)$ ist, gilt bei $|\phi| \leq z_1$ für das Potential

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_{<}(\phi) &= \mathcal{V}_0(\phi) + \text{Re}(\mathcal{V}_1(\phi)) + \text{Re}(\mathcal{V}_2(\phi)) + \mathcal{V}_N \\
 &= -\frac{m_0^2}{4} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 + \frac{3}{8} \frac{m_0^4}{g_0} + \frac{m_0^3}{12\pi} \\
 &\quad - \frac{m_0^2}{32\pi} \frac{g_0}{8\pi} + \frac{\phi^2}{6} \left(\frac{3}{2} - B^{div} + \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{g_0 \phi^2}{2m_0^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{m_0^2}{8\pi} \left(1 + \frac{1}{2} B_-^{div} \right) \frac{g_0}{8\pi} \quad (5.27)$$

und bei $|\phi| \geq z_1$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_>(\phi) = & -\frac{m_0^2}{4} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 + \frac{3}{8} \frac{m_0^4}{g_0} + \frac{1}{12\pi} \left\{ m_0^3 - \left(-\frac{1}{2} m_0^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ & - \frac{m_0^2}{32\pi} \frac{g_0}{8\pi} + \frac{\phi^2}{6} \left(\frac{3}{2} - B_-^{div} + \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{g_0 \phi^2}{2m_0^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \\ & + \frac{m_0^2}{8\pi} \left(1 + \frac{1}{2} B_-^{div} \right) \frac{g_0}{8\pi}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Die beiden Summanden aus (5.26) werden in den nächsten Abschnitten bestimmt.

5.2.2 Erstes Teilintegral

Beim ersten Teilintegral klammern wir \mathcal{V}_0 unter der Wurzel aus und entwickeln den restlichen Term.

$$\begin{aligned} I_\sigma^{(1)} &= \int_0^{z_1} d\phi \sqrt{2 [\mathcal{V}_0(\phi) + \text{Re}(\mathcal{V}_1(\phi)) + \text{Re}(\mathcal{V}_2(\phi)) + \mathcal{V}_N]} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{z_1} d\phi \sqrt{\mathcal{V}_0(\phi)} \sqrt{1 + \frac{\text{Re}(\mathcal{V}_1(\phi))}{\mathcal{V}_0(\phi)} + \frac{\text{Re}(\mathcal{V}_2(\phi))}{\mathcal{V}_0(\phi)} + \frac{\mathcal{V}_N}{\mathcal{V}_0(\phi)}} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{z_1} d\phi \sqrt{\frac{g_0}{4!} (\phi^2 - v_0^2)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\text{Re}(\mathcal{V}_1(\phi))}{\mathcal{V}_0(\phi)} + \frac{\text{Re}(\mathcal{V}_2(\phi))}{\mathcal{V}_0(\phi)} + \frac{\mathcal{V}_N}{\mathcal{V}_0(\phi)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \left(\frac{\text{Re}(\mathcal{V}_1(\phi))}{\mathcal{V}_0(\phi)} + \frac{\text{Re}(\mathcal{V}_2(\phi))}{\mathcal{V}_0(\phi)} + \frac{\mathcal{V}_N}{\mathcal{V}_0(\phi)} \right)^2 + \mathcal{O}(g_0^3) \right\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Die Feldvariable wird durch eine dimensionslose Größe substituiert

$$\phi = v_0 \chi \quad (5.30)$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} I_\sigma^{(1)} &= \frac{3m_0^3}{2g_0} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\chi (1 - \chi^2) \left\{ 1 + \frac{8}{9} \frac{1}{(1 - \chi^2)^2} \frac{u_0}{8\pi} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{-1 + \frac{2}{3} B^{div}}{1 - \chi^2} + \frac{2 + \frac{2}{3} \chi^2 \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \chi^2 \right)}{(1 - \chi^2)^2} - \frac{32}{81 (1 - \chi^2)^4} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3m_0^3}{2g_0} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\chi \left\{ (1 - \chi^2) + \frac{8}{9} \frac{1}{(1 - \chi^2)} \frac{u_0}{8\pi} \right. \\
 &\quad \left. + \left(-1 + \frac{2}{3} B^{div} + \frac{2 + \frac{2}{3} \chi^2 \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \chi^2 \right)}{(1 - \chi^2)} - \frac{32}{81 (1 - \chi^2)^3} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{O}(u_0^3) \right\}. \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

Das Integral über die beiden niedrigsten Ordnungen wurde schon in Kapitel 5.1.2 berechnet und es gilt nach (5.10)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\chi \left\{ (1 - \chi^2) + \frac{8}{9} \frac{1}{(1 - \chi^2)} \frac{u_0}{8\pi} \right\} = \frac{8}{9\sqrt{3}} + \left(\frac{8}{9} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{u_0}{8\pi}. \tag{5.32}$$

Die zweite Ordnung in (5.31) ist teilweise leicht zu integrieren. Die ersten beiden Terme sind konstant.

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\chi \left(-1 + \frac{2}{3} B^{div} \right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} B^{div} \tag{5.33}$$

Vom dritten Summanden integrieren wir vorerst nur den konstanten Term im Zähler.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\chi \frac{2}{(1 - \chi^2)} &= [2 \operatorname{artanh} \chi]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= 2 \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{5.34}
 \end{aligned}$$

Auch für den letzten Summanden in zweiter Ordnung läßt sich eine Stammfunktion finden.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\chi \left(-\frac{32}{81} \frac{1}{(1 - \chi^2)^3} \right) &= \left[-\frac{32}{81} \left(\frac{\chi(5 - 3\chi^2)}{8(1 - \chi^2)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{artanh} \chi \right) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\
 &= -\frac{4}{9\sqrt{3}} - \frac{4}{27} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{5.35}
 \end{aligned}$$

Den verbleibenden Term

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\chi \frac{2}{3} \frac{\chi^2 \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \chi^2 \right)}{(1 - \chi^2)} =: \frac{2}{3} C_a^{(1)} \tag{5.36}$$

bestimmen wir im Abschnitt 5.2.4. Damit ergibt sich in der zweiten Ordnung mit (5.33), (5.34), (5.35) und der Definition (5.36)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\chi \left(-1 + \frac{2}{3} B^{div} + \frac{2 + \frac{2}{3} \chi^2 \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \chi^2 \right)}{(1 - \chi^2)} - \frac{32}{81 (1 - \chi^2)^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}B^{div} + 2 \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{9\sqrt{3}} - \frac{4}{27} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}C_a^{(1)} \\
 &= -\frac{13}{9\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}B^{div} + \frac{50}{27} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}C_a^{(1)}. \tag{5.37}
 \end{aligned}$$

Mit (5.32) und (5.37) erhalten wir als Ergebnis für $I_\sigma^{(1)}$ nach (5.29)

$$\begin{aligned}
 I_\sigma^{(1)} &= \frac{3m_0^3}{2g_0} \left\{ \frac{8}{9\sqrt{3}} + \left(\frac{8}{9} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{u_0}{8\pi} \right. \\
 &\quad + \left(-\frac{13}{9\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}}B^{div} + \frac{50}{27} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}C_a^{(1)} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\
 &\quad \left. + \mathcal{O}(u_0^3) \right\}. \tag{5.38}
 \end{aligned}$$

5.2.3 Zweites Teilintegral

Auch beim zweiten Teilintegral entwickeln wir in eine Potenzreihe nach g_0 und substituieren ϕ nach (5.30).

$$\begin{aligned}
 I_\sigma^{(2)} &= \int_{z_1}^{v_2} d\phi \sqrt{2(\mathcal{V}_0(\phi) + \mathcal{V}_1(\phi) + \mathcal{V}_2(\phi) + \mathcal{V}_N)} \\
 &= \frac{3m_0^3}{2g_0} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{v_2}{v_0}} d\chi \left((1 - \chi^2)^2 + \frac{16}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{u_0}{8\pi} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ 2 + \frac{4}{3}B^{div} + \chi^2 \left(2 - \frac{4}{3}B^{div} + \frac{4}{3} \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right) \right) \right\} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{O}(u_0^3) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.39}
 \end{aligned}$$

Den Integranden drücken wir wie in (5.13) als Funktion der dimensionslosen Kopplungskonstanten u_0 aus.

$$\begin{aligned}
 f(\chi, u_0) &:= \left((1 - \chi^2)^2 + \frac{16}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{u_0}{8\pi} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ 2 + \frac{4}{3}B^{div} + \chi^2 \left(2 - \frac{4}{3}B^{div} + \frac{4}{3} \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right) \right) \right\} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{O}(u_0^3) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

Auch die obere Integrationsgrenze entwickeln wir nach u_0 .

$$\chi_0(u_0) := \frac{v_2}{v_0}$$

$$= 1 + \frac{u_0}{8\pi} + \frac{1}{3} B^{div} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \quad (5.41)$$

Damit erhalten wir für den ersten Term der Reihe (5.15)

$$\begin{aligned} I(0) &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\chi_0(0)} d\chi f(\chi, 0) \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \sqrt{(1 - \chi^2)^2} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{8}{9\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Die für die Berechnung des nächsten Summanden benötigte Ableitung ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\chi, u_0)}{\partial u_0} &= \frac{1}{2} \frac{1}{f(\chi, u_0)} \left[\frac{16}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{1}{8\pi} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 2 + \frac{4}{3} B^{div} + \chi^2 \left(2 - \frac{4}{3} B^{div} + \frac{4}{3} \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi^2 \right) \right) \right\} \frac{2u_0}{(8\pi)^2} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(u_0^2) \right], \end{aligned} \quad (5.43)$$

womit sich für den Beitrag erster Ordnung

$$\begin{aligned} I'(0) &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\chi_0(0)} d\chi \left. \frac{\partial f(\chi, u_0)}{\partial u_0} \right|_{u_0=0} \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \frac{8}{9} \frac{1}{1 - \chi^2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \ln 2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \frac{8}{9} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned} \quad (5.44)$$

nach (5.20) ergibt.

Für den Term zweiter Ordnung in (5.15) benötigen wir die zweite Ableitung von $f(\chi, u_0)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\chi, u_0)}{\partial u_0^2} &= -\frac{1}{4} \frac{1}{(f(\chi, u_0))^3} \cdot \left[\frac{16}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{1}{8\pi} + \mathcal{O}(u_0) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{f(\chi, u_0)} \\ &\quad \times \left[\left\{ 2 + \frac{4}{3} B^{div} + \chi^2 \left(2 - \frac{4}{3} B^{div} + \frac{4}{3} \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi^2 \right) \right) \right\} \frac{2}{(8\pi)^2} \right. \end{aligned}$$

$$+ \mathcal{O}(u_0) \Big] \quad (5.45)$$

Der gesamte Ausdruck besteht aus zwei Beiträgen.

$$I''(0) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\chi_0(0)} d\chi \left. \frac{\partial^2 f(\chi, u_0)}{\partial u_0^2} \right|_{u_0=0} + \left. \frac{\partial \chi_0(u_0)}{\partial u_0} \right|_{u_0=0} \cdot \left. \frac{\partial f(\chi, u_0)}{\partial u_0} \right|_{\chi=\chi_0(u_0), u_0=0} \quad (5.46)$$

Das Integral im ersten Summanden ist

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \left\{ -\frac{1}{4} \frac{1}{(1-\chi^2)^3} \cdot \left[\frac{16}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{1}{8\pi} \right]^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{1-\chi^2} \cdot \left[2 + \frac{4}{3}B^{div} + \chi^2 \left(2 - \frac{4}{3}B^{div} + \frac{4}{3} \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right) \right) \right] \frac{1}{(8\pi)^2} \right\} \\ & = \frac{1}{(8\pi)^2} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \left\{ -\frac{64}{81} \frac{\left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}^2}{(1-\chi^2)^3} \right. \\ & \quad \left. + \frac{4}{1-\chi^2} - 2 + \frac{4}{3}B^{div} + \frac{4\chi^2 \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)}{3(1-\chi^2)} \right\}. \quad (5.47) \end{aligned}$$

Wir integrieren die ersten beiden Summanden des Integranden gemeinsam, da sich die Divergenzen für χ gegen eins aufheben.

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \left\{ -\frac{64}{81} \frac{\left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}^2}{(1-\chi^2)^3} + \frac{4}{1-\chi^2} \right\} \\ & = \left[\frac{8}{3}\chi \left(1 + \frac{4}{9} \frac{1}{1-\chi^2} - \frac{4}{27} \frac{1}{(1-\chi^2)^2} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2} \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{1-\chi^2} + \frac{4}{27} \frac{1}{(1-\chi^2)^2} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{27} \left(\ln \left(-1 + 3\chi + 2\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2} \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \ln \left(-1 - 3\chi + 2\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2} \right) \right) \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \\ & = \frac{29}{9} - \frac{32}{27}\sqrt{3} + \frac{2}{27} \ln 2 + \frac{2}{27} \left(\ln(1 + \sqrt{3}) - \ln(-1 + \sqrt{3}) \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{29}{9} - \frac{32}{27}\sqrt{3} + \frac{2}{27}\ln 2 + \frac{4}{27}\operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (5.48)$$

Die nächsten beiden Terme des Integranden von (5.47) sind konstant und wir erhalten

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \left(-2 + \frac{4}{3}B^{div} \right) = \left(-2 + \frac{4}{3}B^{div} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad (5.49)$$

Den letzten Term von (5.47) berechnen wir analog zu (5.36) im folgenden Abschnitt.

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \frac{4}{3} \frac{\chi^2 \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)}{1 - \chi^2} =: \frac{4}{3}C_a^{(2)} \quad (5.50)$$

Die erste Ableitung im zweiten Summanden von (5.46) folgt direkt aus (5.41)

$$\left. \frac{\partial \chi_0(u_0)}{\partial u_0} \right|_{u_0=0} = \left[\frac{1}{8\pi} + \frac{2}{3}B^{div} \frac{u_0}{(8\pi)^2} + \mathcal{O}(u_0^2) \right]_{u_0=0} = \frac{1}{8\pi}. \quad (5.51)$$

Für den zweiten Faktor setzen wir in (5.43) $\chi = \chi_0$ und lassen u_0 gegen Null gehen

$$\lim_{u_0 \rightarrow 0} \left. \frac{\partial f(\chi, u_0)}{\partial u_0} \right|_{\chi=\chi_0(u_0)} = \frac{2}{8\pi}. \quad (5.52)$$

Mit den Ergebnissen (5.48), (5.49), der Definition in (5.50) und den Werten (5.51), (5.52) können wir nun $I''(0)$ nach (5.46) bestimmen.

$$\begin{aligned} I''(0) &= \frac{1}{(8\pi)^2} \left(\frac{29}{9} - \frac{32}{27}\sqrt{3} + \frac{2}{27}\ln 2 + \frac{4}{27}\operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right. \\ &\quad \left. -2 + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}}B^{div} (\sqrt{3} - 1) + \frac{4}{3}C_a^{(2)} + 1 \cdot 2 \right) \\ &= \frac{1}{(8\pi)^2} \left(\frac{29}{9} - \frac{14}{9\sqrt{3}} + \frac{2}{27}\ln 2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3\sqrt{3}} (\sqrt{3} - 1) B^{div} + \frac{4}{27}\operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3}C_a^{(2)} \right) \quad (5.53) \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (5.42), (5.44) und (5.53) in (5.15) erhalten wir $I_\sigma^{(2)}$.

$$\begin{aligned} I_\sigma^{(2)} &= \frac{3m_0^3}{2g_0} \left\{ I(0) + u_0 \cdot I'(0) + \frac{1}{2}u_0^2 \cdot I''(0) + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \\ &= \frac{3m_0^3}{2g_0} \left\{ \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{9\sqrt{3}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9}\ln 2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \ln (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \frac{8}{9}\operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{u_0}{8\pi} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{29}{9} - \frac{14}{9\sqrt{3}} + \frac{2}{27} \ln 2 + \frac{4}{3\sqrt{3}} (\sqrt{3} - 1) B^{div} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{4}{27} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3} C_a^{(2)} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\
 & \left. + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \tag{5.54}
 \end{aligned}$$

5.2.4 Die Konstante C_a

Nun berechnen wir die verbleibenden Terme der vorangegangenen Abschnitte. Dies sind die Integrale $C_a^{(1)}$ (5.36) und $C_a^{(2)}$ (5.50). Die Integranden sind bis auf das Vorzeichen des Logarithmusargumentes gleich und die Integrationsintervalle gehen von null bis $1/\sqrt{3}$ beziehungsweise von $1/\sqrt{3}$ bis eins. Da die Integranden innerhalb ihrer Integrationsintervalle rein reell sind und $\operatorname{Re}(\ln x) = \operatorname{Re}(\ln(-x))$ ist, können wir die Summe als Realteil des Integrals über das gesamte Einheitsintervall schreiben.

$$\begin{aligned}
 C_a & := C_a^{(1)} + C_a^{(2)} \\
 & = \operatorname{Re} \int_0^1 d\chi \frac{\chi^2 \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)}{(1 - \chi^2)} \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

Wir ergänzen den Zähler und spalten einen Logarithmustrm ab.

$$C_a = -\operatorname{Re} \int_0^1 d\chi \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right) + \operatorname{Re} \int_0^1 d\chi \frac{\ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)}{(1 - \chi^2)} \tag{5.56}$$

Die Pole bei $\chi = 1/\sqrt{3} \approx 0.58$ in Abbildung 5.1 machen bei der Integration keine Probleme, da es sich nur um logarithmische Divergenzen handelt. Für das erste Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}
 - \int_0^1 d\chi \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right) & = \left[-\chi \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right) \right]_0^1 + \int_0^1 d\chi \frac{3\chi^2}{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2} \tag{5.57} \\
 & = \left[-\chi \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right) + 2\chi \right]_0^1 + \int_0^1 d\chi \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2}.
 \end{aligned}$$

In der ersten Zeile müssen wir die Stammfunktion eigentlich über die beiden Teilintervalle auswerten. Dies hat jedoch nur Einfluß auf den Imaginäranteil, der hier nicht von Bedeutung ist. Das verbleibende Integral hat in beiden Integralabschnitten unterschiedliche Stammfunktionen und wird zu

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 d\chi \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2} & = -\frac{2}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\chi \frac{1}{\frac{1}{3} - \chi^2} - \frac{2}{3} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \frac{1}{\frac{1}{3} - \chi^2} \\
 & = -\frac{2}{3} \left[\sqrt{3} \operatorname{artanh}(\sqrt{3}\chi) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - \frac{2}{3} \left[\sqrt{3} \operatorname{arcoth}(\sqrt{3}\chi) \right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1
 \end{aligned}$$

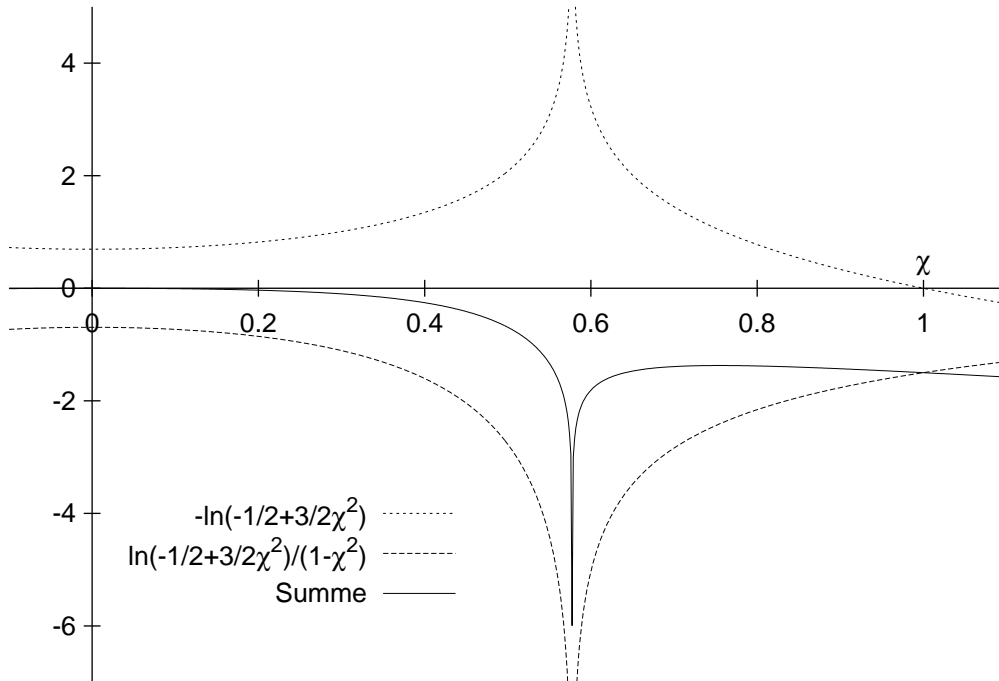


Abbildung 5.1: Die Integranden aus (5.56)

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{3} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (5.58)$$

Wir ergänzen noch den Imaginäranteil und erhalten für (5.57)

$$-\int_0^1 d\chi \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} - i\frac{\pi}{\sqrt{3}}. \quad (5.59)$$

Das zweite Integral in (5.56) erfordert eine kompliziertere Zerlegung. Es ist reell und endlich, da im Limes χ gegen eins sowohl der Zähler als auch der Nenner verschwinden. Dieses Integral zerlegen wir zunächst in zwei Summanden, die jeweils divergent sind (vergleiche Abbildung 5.2). Am Ende der Rechnung heben sich diese Divergenzen allerdings wieder auf.

$$\int_0^1 d\chi \frac{\ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)}{1 - \chi^2} = \int_0^1 d\chi \frac{\ln \frac{3}{2}}{1 - \chi^2} + \int_0^1 d\chi \frac{\ln \left(-\frac{1}{3} + \chi^2 \right)}{1 - \chi^2} \quad (5.60)$$

Die Stammfunktion des ersten Terms auf der rechten Seite ist bekannt und wir erhalten

$$\int_0^1 d\chi \frac{\ln \frac{3}{2}}{1 - \chi^2} = \left[\ln \frac{3}{2} \cdot \operatorname{artanh} \chi \right]_0^1. \quad (5.61)$$

Die Auswertung dieses Integrals wird auf Seite 57 behandelt, da es an der oberen Schranke divergiert.

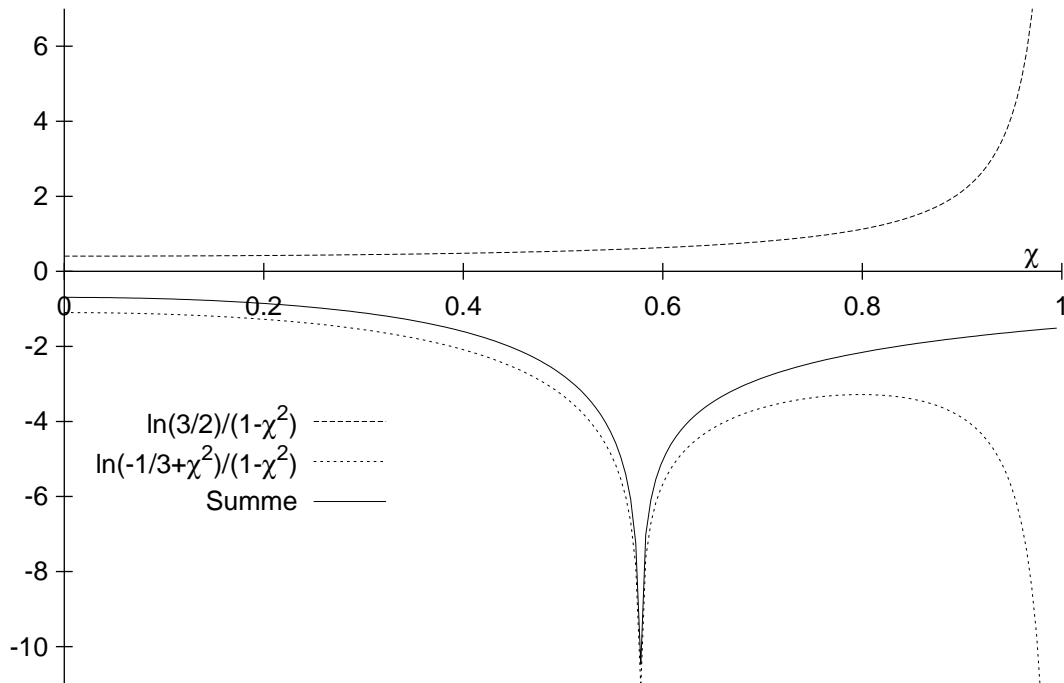


Abbildung 5.2: Die divergenten Integranden

Den Integranden des zweiten Terms von (5.60) zerlegen wir in Partialbrüche

$$\frac{\ln\left(-\frac{1}{3} + \chi^2\right)}{1 - \chi^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln\left(-\frac{1}{3} + \chi^2\right)}{1 + \chi} + \frac{\ln\left(-\frac{1}{3} + \chi^2\right)}{1 - \chi} \right). \quad (5.62)$$

Dabei ist der erste Term im Intervall von null bis eins bis auf den logarithmischen Pol regulär, wohingegen der zweite Summand im Limes $\chi \rightarrow 1$ divergiert. Den Logarithmus können wir noch in die Summe zweier Logarithmen zerlegen

$$\frac{\ln\left(-\frac{1}{3} + \chi^2\right)}{1 + \chi} = \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi\right)}{1 + \chi} + \frac{\ln\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi\right)}{1 + \chi}. \quad (5.63)$$

Integrale über solche Ausdrücke lassen sich nicht mehr durch elementare Funktionen ausdrücken [GR81, 2.727 2.], [PBM86, 1.6.1.]. Mit Hilfe des Dilogarithmus (siehe Anhang A.3.3) können wir aber

$$\int dz \frac{\ln(a + z)}{b + z} = \ln(a + z) \ln\left(1 - \frac{a + z}{a - b}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{a + z}{a - b}\right) \quad (5.64)$$

schreiben. Die Terme der rechten Seite von (5.63) werden demnach zu

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\chi \frac{\ln\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi\right)}{1 + \chi} \\ = \left[\ln\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi\right) \ln\left(1 - \frac{\pm\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{\pm\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{\pm\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{\pm\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}\right) \right]_0^1 \end{aligned} \quad (5.65)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^1 d\chi \frac{\ln\left(-\frac{1}{3} + \chi^2\right)}{1 + \chi} \\ = \left[\ln\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi\right) \ln\left(1 - \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi\right) \ln\left(1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}\right) \right. \\ \left. + \text{Li}_2\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}\right) \right]_0^1 \\ = \left\{ \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(\frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(\frac{2}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) \right. \\ \left. + \text{Li}_2\left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) \right\} \\ - \left\{ \ln\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) \right. \\ \left. + \text{Li}_2\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1}\right) \right\} \\ = \left\{ \ln 2 \ln \frac{2}{3} - 2 \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right) \right\} \\ - \left\{ -i\pi \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} \ln 3 \ln \frac{2}{3} + \text{Li}_2\left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{1}{1 - \sqrt{3}}\right) \right\} \\ = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} \ln \frac{4}{3} - 2 \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 2 \text{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \\ - \text{Li}_2\left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{1}{1 - \sqrt{3}}\right) + i\pi \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned} \quad (5.66)$$

Dabei wurde von der Relation (A.31) Gebrauch gemacht.

Nun berechnen wir das Integral über den zweiten Summanden in (5.62). Wie in (5.63) läßt sich der Zähler als Summe zweier konjugiert komplexer Terme schreiben

und nach (5.64) integrieren. Hier müssen zusätzlich die Divergenzen an der oberen Schranke bedacht werden.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 d\chi \frac{\ln\left(-\frac{1}{3} + \chi^2\right)}{1 - \chi} \\
 &= \int_0^1 d\chi \left(\frac{\ln\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi\right)}{1 - \chi} + \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi\right)}{1 - \chi} \right) \\
 &= \left[-\ln\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi\right) \ln\left(1 - \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi\right) \ln\left(1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \text{Li}_2\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) \right]_0^1 \\
 &= \left[-\ln\left(\chi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left\{ \ln(1 - \chi) - \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \ln\left(\chi + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left\{ \ln(1 - \chi) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \text{Li}_2\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) \right]_0^1 \\
 &= \left[-\ln(1 - \chi) \left\{ \ln\left(\chi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\chi + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\} \right]_0^1 \\
 &\quad + \left[\ln\left(\chi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\chi + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \text{Li}_2\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) \right]_0^1 \tag{5.67}
 \end{aligned}$$

Die erste Zeile des letzten Ausdrucks ist der divergente Anteil, der später zusammen mit (5.61) ausgewertet wird. Der verbleibende Teil ist wiederum regulär und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \left[\ln\left(\chi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\chi + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\
 &\quad \left. - \text{Li}_2\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \chi}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) \right]_0^1 \\
 &= \left\{ \ln^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ln^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{-\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) - \text{Li}_2\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}\right) \right\} \\
 &\quad - \left\{ \ln\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{Li}_2\left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}+1}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}\right) \Big\} \\
 = & \left\{ \ln^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ln^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi^2}{3} \right\} \\
 & - \left\{ \left(i\pi - \frac{1}{2}\ln 3\right) \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\ln 3 \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right. \\
 & \quad \left. - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right) \right\} \\
 = & -\frac{\pi^2}{3} + \ln^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ln^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\ln 3 \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
 & + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}}\right) - i\pi \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \tag{5.68}
 \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, daß $\operatorname{Li}_2(1) = \pi^2/6$ ist.

Nun müssen wir noch die divergenten Anteile aus (5.61) und (5.67) betrachten. Der Faktor 1/2 wird der Zerlegung (5.62) entnommen.

$$\begin{aligned}
 & \left[\ln \frac{3}{2} \cdot \operatorname{artanh} \chi \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[-\ln(1-\chi) \left\{ \ln\left(\chi - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\chi + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\} \right]_0^1 \\
 = & \left[\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \{ \ln(1+\chi) - \ln(1-\chi) \} - \frac{1}{2} \ln(1-\chi) \ln\left(\chi^2 - \frac{1}{3}\right) \right]_0^1 \\
 = & \left[\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \ln(1+\chi) \right]_0^1 - \left[\frac{1}{2} \ln(1-\chi) \left(\ln \frac{3}{2} + \ln\left(\chi^2 - \frac{1}{3}\right) \right) \right]_0^1 \tag{5.69}
 \end{aligned}$$

Den ersten Summanden können wir direkt an den Grenzen auswerten.

$$\left[\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \ln(1+\chi) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 \ln \frac{3}{2} \tag{5.70}$$

Der zweite Summand ist an der unteren Schranke $\chi = 0$ gleich null. Um den Wert an der oberen Schranke zu bestimmen, ersetzen wir $1 - \chi =: \varepsilon$ und lassen ε von oben gegen null gehen.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \ln(1-\chi) \left(\ln \frac{3}{2} + \ln\left(\chi^2 - \frac{1}{3}\right) \right) &= \frac{1}{2} \ln \varepsilon \left(\ln \frac{3}{2} + \ln\left(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - \frac{1}{3}\right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \ln \varepsilon (-3\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)) \\
 &\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} 0 \tag{5.71}
 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile gilt, da $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^n \ln \varepsilon = 0$ wenn $\operatorname{Re} n > 0$.

Zum Ende diesen Abschnittes sammeln wir alle reellen Anteile der Ergebnisse aus (5.59), (5.66), (5.68) und (5.70) zusammen und erhalten die Lösung von (5.55). Dabei müssen teilweise Faktoren von 1/2 eingebaut werden.

$$\begin{aligned}
C_a &= 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} \ln \frac{4}{3} - 2 \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 2 \operatorname{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \right. \\
&\quad \quad \left. - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{1 - \sqrt{3}} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\pi^2}{3} + \ln^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \ln^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \ln 3 \ln \frac{2}{3} \right. \\
&\quad \quad \left. + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{1 - \sqrt{3}} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \ln 2 \ln \frac{3}{2} \\
&= 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{2}{3} \left(\ln \frac{4}{3} + \ln 3 - \ln 4 \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right)^2 - \operatorname{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= 2 - \frac{\pi^2}{4} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{5.72}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis läßt sich auch durch numerische Integration der ursprünglichen Funktionen reproduzieren.

5.2.5 Resultat

Nun können wir die Oberflächenspannung nach (5.25) aus (5.38) und (5.54) berechnen.

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= 2 (I_\sigma^{(1)} + I_\sigma^{(2)}) \tag{5.73} \\
&= \frac{3m_0^3}{g_0} \left\{ \frac{8}{9\sqrt{3}} + \frac{8}{9} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{u_0}{8\pi} \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{13}{9\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} B^{div} + \frac{50}{27} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} C_a^{(1)} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad \quad \left. + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \\
&\quad + \frac{3m_0^3}{g_0} \left\{ \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{9\sqrt{3}} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \ln 2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \frac{8}{9} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{u_0}{8\pi} \\
 & + \left(\frac{29}{18} - \frac{7}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{27} \ln 2 + \frac{2}{3\sqrt{3}} (\sqrt{3} - 1) B^{div} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2}{27} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} C_a^{(2)} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \Big\} \\
 = & \frac{3m_0^3}{g_0} \left\{ \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{9} \ln 2 + \sqrt{\frac{2}{3}} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \right) \frac{u_0}{8\pi} \right. \\
 & + \left(\frac{29}{18} - \frac{20}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{27} \ln 2 + \frac{2}{3} B^{div} + \frac{52}{27} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} C_a \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\
 & \quad \left. + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \\
 = & \frac{2m_0^3}{g_0} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{2}{3} \ln 2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \ln(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \right) \frac{u_0}{8\pi} \right. \\
 & + \left(\frac{29}{12} - \frac{10}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{18} \ln 2 + B^{div} + \frac{26}{9} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + C_a \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\
 & \quad \left. + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \tag{5.74}
 \end{aligned}$$

Die Konstante C_a ist in (5.72) gegeben. Dieses Ergebnis für die Oberflächenspannung in zweiter Ordnung muß nun von der Divergenz B^{div} befreit werden.

6 Renormierung

Im Kapitel 5 haben wir die Oberflächenspannung in den nackten Größen g_0 und m_0 berechnet. Um diesem Ergebnis nun eine physikalische Bedeutung zu geben, müssen die nackten Parameter durch ihre renormierten Pendanten ausgedrückt werden.

Bevor wir damit beginnen, sei hier das Verfahren der Renormierung kurz vorgestellt. Seine Ursprünge im Rahmen der statistischen Physik hat es bei [WIL71]. Unter anderem für ihre Arbeit auf diesem Gebiet bekamen T'HOOFT und VELTMAN den Nobelpreis 1999 [TV72]. Einführungen finden sich in [CAL76, COL84] sowie allgemeinen Lehrbüchern der Feldtheorie und Elementarteilchenphysik, zum Beispiel [CL84].

Ob eine gegebene Theorie renormierbar ist, läßt sich an der Massendimension $[g_0]$ der Koppelungskonstante ablesen. Für den Fall $[g_0] < 0$ haben wir eine nicht renormierbare Theorie, es treten beliebig viele divergente Graphen auf. Wenn die Massendimension von g_0 null ist, ist die Theorie renormierbar und für $[g_0] > 0$ superrenormierbar. Das heißt, es existiert nur eine endliche Anzahl divergenter Graphen. In der ϕ^4 -Theorie ist die Massendimension der Koppelungskonstante gerade $[g_0] = 4 - D$, also ergibt sich hier mit $D = 3$ eine superrenormierbare Theorie. Die Integrale können in unserer massiven Theorie nur Ultraviolettdivergenzen haben, das heißt, sie divergieren für große Impulse k . In masselosen Theorien treten zusätzlich noch Infrarotdivergenzen für $k \rightarrow 0$ auf. Hier gibt es nur zwei divergierende Graphen, die allerdings in anderen Graphen als Subgraphen auftauchen. Bei einem (im wesentlichen das Integral $J_1(D)$ aus Anhang B) verschwindet die Divergenz schon durch die dimensionelle Regularisierung. Das andere Integral ist $I_{\nu^2}^{(2)}$, der zweite Graph in (4.53). Dort ist der divergente Anteil die Konstante B^{div} , die nach der Renormierung aus den Meßgrößen eliminiert sein wird.

6.1 Renormierungsschema

Wir verwenden eine multiplikative Renormierung mit Renormierungsbedingungen wie in [BGZJ76]. Das heißt, alle renormierten Größen, wie zum Beispiel m_R^2 , bilden sich aus einem Produkt der nackten Pendanten und gewissen Renormierungskonstanten, die im folgenden definiert werden. Ein alternatives Renormierungsschema ist das sogenannte Minimale-Subtraktion-Schema (MS-Schema), bei dem in jeder Ordnung

der Störungsentwicklung Gegenterme zur Beseitigung der Pole abgezogen werden.

Die Renormierungsbedingungen werden bei verschwindenden äußeren Impulsen formuliert, da diese (willkürliche) Wahl die Gleichungen übersichtlicher hält. Die renormierte Masse m_R und die statische Feldrenormierungskonstante Z_3 (in Kapitel 7 berechnen wir diese Größe feldabhängig) werden durch die Entwicklung der Zwei-Punkt-Vertex-Funktion um $p^2 = 0$ definiert.

$$-\Gamma_0^{(2,0)}(p; m_0, g_0) = \frac{1}{Z_3} (m_R^2 + p^2 + \mathcal{O}(p^4)) \quad (6.1)$$

Für $p^2 = 0$ folgt daraus

$$m_R^2 := -Z_3(u_0) \Gamma_0^{(2,0)}(0; m_0, g_0) = \frac{\Gamma_0^{(2,0)}(0; m_0, g_0)}{\left. \frac{\partial \Gamma_0^{(2,0)}(p; m_0, g_0)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0}} \quad (6.2)$$

und

$$Z_3^{-1}(u_0) := - \left. \frac{\partial \Gamma_0^{(2,0)}(p; m_0, g_0)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0}. \quad (6.3)$$

Die Renormierungskonstante Z_2 wird durch eine Vertex-Funktionen mit ϕ^2 -Insertion definiert.

$$Z_2^{-1}(u_0) := -\Gamma_0^{(2,1)}(0, 0; 0; m_0, g_0) \quad (6.4)$$

Diese Vertex-Funktionen lassen sich durch Ableiten aus den gewöhnlichen Vertex-Funktionen bestimmen.

$$\Gamma_0^{(n,l+1)}(\{p; 0, q\}; g_0, m_0) = \frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma_0^{(n,l)}(\{p; q\}; g_0, m_0) \quad (6.5)$$

Die Argumente $\{p; q\}$ stehen hierbei für den gesamten Variablensatz der äußeren Impulse $\{p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_l\}$. Bei $(n, l) = (2, 0)$ gilt

$$Z_2^{-1}(u_0) = -\frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma_0^{(2,0)}(0; m_0, g_0). \quad (6.6)$$

Mit $Z_{2,3}$ sind die renormierten Vertex-Funktionen und Felder durch

$$\Gamma_R^{(n,l)}(\{p; q\}; g_0, m_0) = Z_3^{\frac{n}{2}}(u_0) \left(\frac{Z_2(u_0)}{Z_3(u_0)} \right)^l \Gamma_0^{(n,l)}(\{p; q\}; g_0, m_0) \quad (6.7)$$

$$\phi_R(x) = \frac{1}{\sqrt{Z_3(u_0)}} \phi_0(x) \quad (6.8)$$

gegeben.

Die renormierte Koppelungskonstante g_R ist in der symmetrischen Phase und der Phase gebrochener Symmetrie unterschiedlich definiert. Da wir hier die Oberflächenspannung renormieren möchten, wird nur der letztere Fall aufgeführt.

In der Phase gebrochener Symmetrie kann die renormierte Koppelung anstatt über den Wert der Vier-Punkt-Vertex-Funktion auch auf andere Weise bestimmt werden. Nach [LW87, MM93] verwenden wir eine alternative Definition der renormierten Koppelungskonstante. Die spontane Magnetisierung v des Feldes ϕ ist die Summe des Minimums v_0 (1.18) und des Erwartungswertes von $\phi_- = \phi - v_0$, der mit $G_c^{(1,0)}$ bezeichnet wird.

$$v = v_0 + G_c^{(1,0)} \quad (6.9)$$

Damit ist der renormierte Vakuumerwartungswert $v_R := Z_3^{-\frac{1}{2}}v$ und die renormierte Koppelungskonstante durch

$$g_R := \frac{3m_R^2}{v_R^2} = \frac{3Z_3(u_0)m_R^2}{\left(v_0 + G_c^{(1,0)}\right)^2} = g_0 \frac{Z_3(u_0)}{Z_4^2(u_0)} \quad (6.10)$$

gegeben. Die Renormierungskonstante Z_4 ist dabei

$$Z_4(u_0) := \frac{m_0}{m_R} \left(1 + G_c^{(1,0)} \sqrt{\frac{g_0}{3m_0^2}} \right). \quad (6.11)$$

Analog zu (5.12) definieren wir eine dimensionslose renormierte Koppelungskonstante

$$u_R := \frac{g_R}{m_R^{4-D}} \stackrel{D=3}{=} \frac{g_R}{m_R}. \quad (6.12)$$

Die Renormierungskonstanten Z_i mit $i = 2, 3, 4$ lassen sich durch Invertieren von (6.2) und (6.10) als Funktionen von u_R bestimmen.

Zum Ende dieses Abschnittes seien hier nochmals die Renormierungsbedingungen der Phase gebrochener Symmetrie zusammengefaßt.

$$\Gamma_R^{(2,0)}(0; m_R, u_R) = -m_R^2 \quad (6.13a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2,0)}(p; m_R, u_R) \right|_{p^2=0} = -1 \quad (6.13b)$$

$$\frac{3}{v_R^2} \Gamma_R^{(2,0)}(0; m_R, u_R) = -g_R \quad (6.13c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(0; 0; m_R, u_R) = -1 \quad (6.13d)$$

6.2 Renormierte Reihen

Nach dem im letzten Abschnitt eingeführten Renormierungsschema sind die nackten Parameter in [GKM96] als Funktionen der renormierten Größen bis zur dritten Ordnung bestimmt. Hier brauchen wir sie nur bis zur zweiten Ordnung und können damit auch die Terme der Ordnung ϵ vernachlässigen.

$$u_0 = u_R \left[1 + \frac{31}{16} \frac{u_R}{8\pi} + \left(\frac{62831}{13824} + \frac{1}{3} B^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right] \quad (6.14)$$

$$m_{0-}^2 = m_R^2 \left[1 - \frac{3}{8} \frac{u_R}{8\pi} - \left(\frac{14021}{10368} + \frac{2}{3} B^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right] \quad (6.15)$$

$$g_0 = g_R \left[1 + \frac{7}{4} \frac{u_R}{8\pi} + \frac{8177}{2592} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right] \quad (6.16)$$

Für Details der Berechnung dieser Reihen siehe [GUT95, KÜS95]. Desweiteren sei hier die Feldrenormierungskonstante Z_{3-} angegeben, die im Kapitel 8 benötigt wird.

$$Z_{3-} = 1 - \frac{1}{8} \frac{u_0}{8\pi} + \frac{409}{5184} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \quad (6.17)$$

$$= 1 - \frac{1}{8} \frac{u_R}{8\pi} - \frac{1693}{10368} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \quad (6.18)$$

6.3 Renormierte Oberflächenspannung

Indem wir in (5.74) für die nackten Parameter die Reihen (6.14ff) einsetzen und nach u_R entwickeln, erhalten wir die renormierte Oberflächenspannung

$$\begin{aligned} \sigma_R = \frac{2m_R^2}{u_R} & \left\{ 1 + \left(-\frac{21}{16} - \frac{2}{3} \ln 2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{arsinh} \sqrt{2} \right) \frac{u_R}{8\pi} \right. \\ & + \left(\frac{108853}{41472} - \frac{10}{3\sqrt{3}} + \frac{11}{36} \ln 2 - \frac{3}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{arsinh} \sqrt{2} - \frac{\pi^2}{4} \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{26}{9} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Um dieses Ergebnis in den folgenden Abschnitten numerisch auszuwerten und mit Literaturangaben zu vergleichen, wird das universelle Amplitudenverhältnis R_- bestimmt (1.14). Die reduzierte Temperatur in der Phase gebrochener Symmetrie wird mit

$$t_- := -t = \frac{T_c - T}{T_c} \quad (6.20)$$

definiert. Aus (1.11b) folgt für $D = 3$, daß $\mu - 2\nu = 0$ ist. Durch Erweiterung mit $t_-^{\mu-2\nu} = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} R_- &= \sigma_0 f_-^2 \\ &= \sigma_0 t_-^\mu (f_- t_-^{-\nu})^2 \\ &= \sigma \xi_-^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Die als zweites Moment der verbundenen Green-Funktion definierte Korrelationslänge

$$\xi^2 := \frac{1}{2D} \frac{\int d^D x x^2 G_c^{(2)}(x)}{\int d^D x G_c^{(2)}(x)} = - \left. \frac{\frac{\partial}{\partial p^2} G_c^{(2)}(p)}{G_c^{(2)}(p)} \right|_{p^2=0} \quad (6.22)$$

wird mit der inversen renormierten Masse identifiziert. Für die Oberflächenspannung setzen wir unser Ergebnis aus (6.19) ein und erhalten

$$\begin{aligned} R_- &= \sigma_R \frac{1}{m_R^2} \\ &= \frac{2}{u_R} \left\{ 1 + a_\sigma^{(1)} \frac{u_R}{8\pi} + a_\sigma^{(2)} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Die Koeffizienten der Reihe sind

$$a_\sigma^{(1)} = -\frac{21}{16} - \frac{2}{3} \ln 2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{arsinh} \sqrt{2} \quad (6.24)$$

und

$$\begin{aligned} a_\sigma^{(2)} &= \frac{108853}{41472} - \frac{10}{3\sqrt{3}} + \frac{11}{36} \ln 2 - \frac{3}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{arsinh} \sqrt{2} - \frac{\pi^2}{4} \\ &\quad + \left(\frac{26}{9} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Das universelle Amplitudenverhältnis R_- ist nach (6.23) nur von der dimensionslosen Koppelungskonstante u_R abhängig.

Um R_+ (1.14) zu bestimmen, wird R_- mit dem universellen Amplitudenverhältnis f_+/f_- multipliziert,

$$\begin{aligned} R_+ &= \sigma_0 f_+^2 \\ &= R_- \left(\frac{f_+}{f_-} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.26)$$

6.4 Numerische Ergebnisse

Um numerische Werte für (6.19) beziehungsweise (6.23) zu bestimmen, müssen die Gleichungen am Tieftemperaturfixpunkt u_R^* ausgewertet werden. Dabei verwenden wir die Literaturwerte

$$\begin{aligned}
 u_R^* &= 14.3(1) && \text{[CH97] Monte-Carlo Simulation,} \\
 u_R^* &= 14.73(14) && \text{[SIE93] Tieftemperaturentwicklung und} \\
 u_R^* &= 15.1(1.3) && \text{[TF75, AH76, BG80] zitiert nach [MÜN90].}
 \end{aligned}
 \tag{6.27}$$

Der erste und aktuellste Wert hat die geringste Unsicherheit und scheint deshalb am verlässlichsten zu sein.

Neben der Reihe in u_R von R_- finden auch gebrochen rationale Approximanten, die Padé-Approximanten aus Anhang D, ihre Anwendung. Dabei wird die geschweifte Klammer in (6.23) durch den Quotienten zweier Polynome vom Grad k beziehungsweise l genähert (D.6), der $[k, l]$ -Padé.

In Tabelle 6.1 sind die numerischen Werte von R_- an den drei Fixpunktswerten (6.27) der Koppelungskonstante aufgeführt. Die zweite Spalte, der $[2,0]$ -Padé, entspricht der Reihe (6.23). Auffallend ist, dass der $[1,1]$ -Padé gänzlich unzuverlässige Werte liefert. Die Resultate des $[0,2]$ -Padé sind durchgängig größer als die Ergebnisse beim $[2,0]$ -Padé.

Fixpunkt u_R^*	$R_-(u_R^*)$		
	$[2,0]$ -Padé	$[1,1]$ -Padé	$[0,2]$ -Padé
14.3	0.08743	0.00759	0.09854
14.73	0.08266	-0.01196	0.09439
15.1	0.07874	-0.03182	0.09102

Tabelle 6.1: R_- in Abhängigkeit vom Fixpunktswert u_R^*

Um zu verlässlicheren Resultaten zu kommen, wird das Padé-Borel-Verfahren auf die geschweifte Klammer in (6.23) angewendet. Durch die Borel-Transformation (D.2) wird der Koeffizient in zweiter Ordnung von u_R zu $a_\sigma^{(2)}/2$. Von dieser Reihe werden die drei Padé-Approximanten bestimmt. Die anschließende Integration der inversen Borel-Transformation (D.3) wird numerisch durchgeführt. Bei den $[1,1]$ -Padé-Approximanten hat das Nennerpolynom eine positive Nullstelle, so daß das Hauptwertintegral (D.7) gebildet werden muß. Tabelle 6.2 enthält die Resultate dieser Bestimmung. Die $[1,1]$ - und $[0,2]$ -Padé-Approximanten liegen dicht beieinander und sind größer als alle Werte der Tabelle 6.1.

Fixpunkt u_R^*	Borel-transformierte von $R_-(u_R^*)$		
	[2,0]-Padé	[1,1]-Padé	[0,2]-Padé
14.3	0.08743	0.10489	0.10771
14.73	0.08266	0.10248	0.10378
15.1	0.07874	0.10059	0.10059

Tabelle 6.2: Padé-Borel-Approximante von R_- am Fixpunktwert u_R^*

In der folgenden Tabelle 6.3 sind die Mittelwerte über die Padé beziehungsweise Padé-Borel-Werte mit den Maximalfehlern aufgeführt. Dabei wurden bei der Berechnung der Padé-Mittelwerte die [1,1]-Padé-Approximanten ausgelassen, da sie weit außerhalb der erwarteten Werte liegen. Die Maximalfehler bei der Mittelung über die Padé-Borel-Werte liegen deutlich höher als jene bei den Padé-Werten.

R_-	Padé	Padé-Borel
14.3	0.093(6)	0.100(13)
14.73	0.088(6)	0.096(14)
15.1	0.085(6)	0.093(15)

Tabelle 6.3: Mittelwerte von R_-

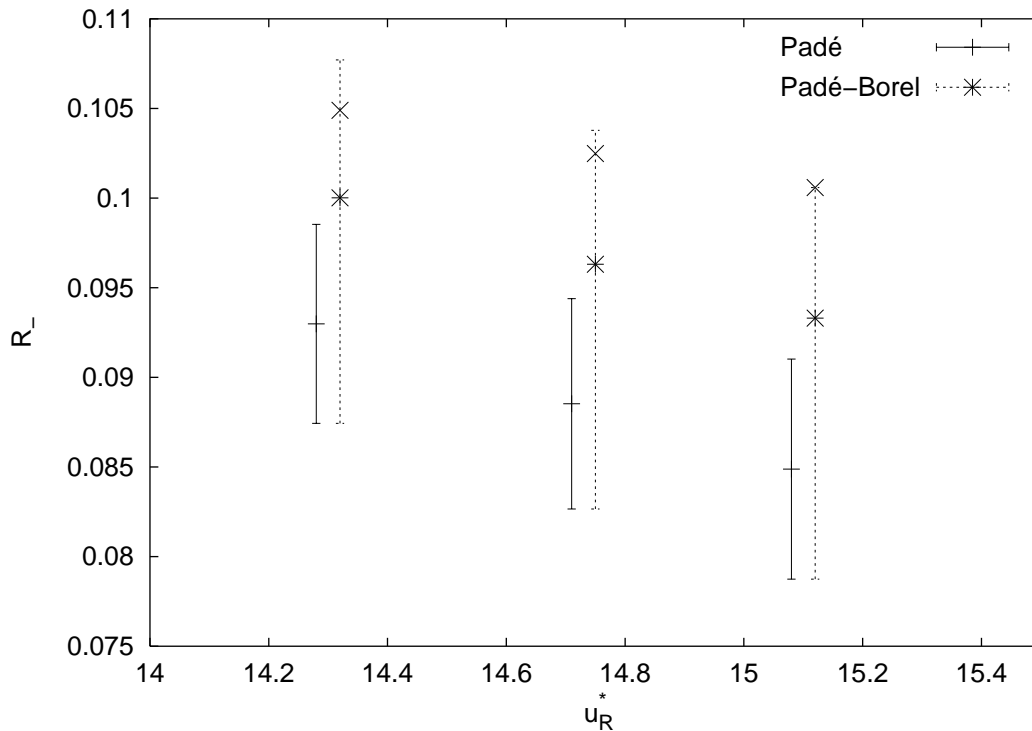
In Abbildung 6.1 sind die Werte aus den Tabellen 6.1–3 aufgetragen. Der niedrigste Wert der Fehlerbalken ist die [2,0]-Approximante, der höchste Wert jeweils die [0,2]-Approximante. Die [1,1]-Approximante ist bei den Padé-Daten ausgelassen und im Fehlerbalken der Padé-Borel-Daten durch ein zusätzliches Kreuz gekennzeichnet.

Tabelle 6.4 führt die Ergebnisse für R_+ auf. Dabei werden die Daten aus Tabelle 6.3 nach (6.26) mit dem Faktor $f_+/f_- = 1.95(2)$ aus [CH97] erweitert. Wegen des

R_+	Padé	Padé-Borel
14.3	0.354(29)	0.380(55)
14.73	0.337(30)	0.366(58)
15.1	0.323(30)	0.355(62)

Tabelle 6.4: Mittelwerte von R_+

geringen Fehlers dieses Faktors, der nach dem quadrieren bei ungefähr 2% liegt, ist

Abbildung 6.1: Die Werte von R_-

der relative Fehler von R_+ nicht viel größer als bei R_- .

6.5 Diskussion

Die Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte werden nun mit Resultaten aus der Literatur verglichen. Darin gibt es sowohl experimentelle, theoretische als auch Monte-Carlo Ergebnisse. Letztere liefern zur Zeit die genauesten Werte.

Für die Oberflächenspannung existieren experimentelle Werte [HEL67, WW73]. Da (6.19) jedoch neben der Koppelungskonstante u_R noch von der renormierten Masse m_R abhängt, wird zum Vergleich mit experimentellen Resultaten R_+ herangezogen. Ein analytischer Ausdruck in Ein-Schleifen-Ordnung für die Oberflächenspannung ist in [JSZ99] aufgeführt. Da dieser jedoch nicht renormiert wurde, ist kein sinnvoller Vergleich möglich.

Das Amplitudenverhältnis R_- als analytischer Ausdruck läßt sich gut mit anderen theoretischen Ergebnissen vergleichen. Um das Gewicht der einzelnen Ordnungen abzuschätzen, werden die Koeffizienten der Reihenentwicklung (6.23) numerisch

ausgedrückt:

$$\begin{aligned} R_- &= \frac{2}{u_R} \left\{ 1 - 0.371 \frac{u_R}{8\pi} - 0.506 \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\} \\ &= \frac{2}{u_R} \left\{ 1 - 0.217(6) - 0.174(10) + \mathcal{O}(u_R^3) \right\}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Die Fehler resultieren dabei aus der Unsicherheit im Wert von u_R . Die Reihe hat eine schlechte Konvergenz, da sich die erste und zweite Ordnung in der Größenordnung entsprechen.

In [HM98] wurde R_- in Zwei-Schleifen-Ordnung über die Fluktuationsdeterminante bestimmt. Dort sind die Beiträge der einzelnen Ordnungen¹

$$R_- = \frac{2}{u_R} \left\{ 1 - 0.401 \frac{u_R}{8\pi} - 0.364 \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\}. \quad (6.29)$$

Die erste Ordnung ist unserem Ergebnis vergleichbar, der Koeffizient zweiter Ordnung ist zirka ein Drittel niedriger als unser Resultat. Am Fixpunkt $u_R^* = 14.3$ ergibt sich $R_- = 0.095(13)$, dies stimmt innerhalb des Fehlers mit den Werten der Tabelle 6.3 überein. Ein früheres Ergebnis [MÜN92] in erster Ordnung entspricht dieser Reihe. Allerdings wurde R_- mit der physikalischen Masse berechnet. Eine Monte-Carlo Rechnung [HP97] ergibt

$$R_- = 0.1040(8). \quad (6.30)$$

Dieser Wert ist in Übereinstimmung mit den Padé-Borel-Ergebnissen aus Tabelle 6.3 und Abbildung 6.1. Unsere Ergebnisse der Padé-Approximanten sind jedoch niedriger als dieser Wert. In einer etwas älteren Arbeit [ZF96] wird als Ergebnis

$$R_- = 0.096(2) \quad (6.31)$$

in guter Übereinstimmung mit den hier berechneten Werten genannt.

Die Resultate für R_+ aus Tabelle 6.4 können mit experimentellen Werten verglichen werden. In [MW96] sind Messungen am binären Fluid mit den Komponenten Zyklohexan (C_6H_{12}) und Anilin ($C_6H_5NH_2$) aufgeführt. Es resultiert

$$R_+ = 0.41(4). \quad (6.32)$$

Unsere Ergebnisse sind zwar niedriger, die Padé-Borel-Werte passen am oberen Ende des Fehlers jedoch zu diesem Resultat. Frühere experimentelle Ergebnisse sind in [MW96] mit $R_+ = 0.37(3)$ zusammengefaßt. Dies ist in guter Übereinstimmung mit unseren Resultaten für den niedrigsten Wert der Koppelungskonstante $u_R^* = 14.3$.

¹Zum Koeffizient σ_{2l} muß $-1/12$ zuaddiert werden, da mit überholten Reihen renormiert wurde.

7 Kinetischer Term

Nachdem im Kapitel 4 das effektive Potential bestimmt wurde, behandeln wir nun die weiteren Terme der Entwicklung (3.11). Dies sind die Ableitungsterme der effektiven Wirkung. Dabei beschränken wir uns in der Berechnung auf den kinetischen Term, der proportional zur zweiten Ableitung der Feldvariable ist. Die Terme höherer Ordnung sind numerisch klein, wie in [KLS97] durch den Vergleich der hier verwendeten Ableitungsentwicklung, der BARVINSKY-VILKOVISKY Entwicklung [BV87, BV90] und der “Heat Kernel”-Entwicklung für die elektroschwache Theorie argumentiert wird.

Analog zum effektiven Potential (4.2) entwickeln wir auch den zweiten Term der Entwicklung (3.11) nach Potenzen von \hbar .

$$\mathcal{Z}(\phi) = \mathcal{Z}_0(\phi) + \hbar \mathcal{Z}_1(\phi) + \hbar^2 \mathcal{Z}_2(\phi) + \dots \quad (7.1)$$

Dieser feldabhängige Faktor ist gleich der inversen Feldrenormierungskonstante Z_3 .¹

$$\begin{aligned} Z_3(\phi) &= \frac{1}{\mathcal{Z}(\phi)} \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0(\phi)} \left(1 - \hbar \frac{\mathcal{Z}_1(\phi)}{\mathcal{Z}_0(\phi)} + \mathcal{O}(\hbar^2) \right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

Um den führenden Term dieser Reihe zu bestimmen, betrachten wir die effektive Wirkung in niedrigster Ordnung (3.25)

$$\Gamma_0[\phi] = -\mathcal{S}[\phi] - \int d^Dx j(x)\phi(x), \quad (7.3)$$

worin $\mathcal{S}[\phi] = \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \mathcal{V}_0(\phi) - j(x)\phi(x) \right\}$ nach (3.14) ist. Daher gilt

$$-\Gamma_0[\phi] = \int d^Dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \mathcal{V}_0(\phi) - j(x)\phi(x) \right\} + \int d^Dx j(x)\phi(x)$$

¹Es ist darauf zu achten, wie Z_3 definiert ist. In [IIM75] wird mit Z_3 das Inverse der hier definierten Größe bezeichnet und entspricht Z bei [CAL76]. Ein zusätzliches Vorzeichen gibt es bei [BGZJ76]. [CL84] benutzen die hier verwendete Definition, bezeichnen sie aber mit Z_ϕ , ebenso wie [WEI95] unter dem Namen Z .

$$= \int d^D x \left\{ \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \mathcal{V}_0(\phi) \right\}. \quad (7.4)$$

Hieraus läßt sich durch den Vergleich mit (3.11) in $\mathcal{O}(\hbar^0)$ der führende Term der Entwicklung (7.1) ablesen:

$$\mathcal{Z}_0(\phi) = 1. \quad (7.5)$$

In der Baumapproximation gibt es keine Beiträge in höherer Ableitungsordnung. Mit (7.5) ist auch der Term nullter Ordnung von Z_3 gleich eins und (7.2) vereinfacht sich zu

$$Z_3(\phi) = 1 - \hbar \mathcal{Z}_1(\phi) + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (7.6)$$

7.1 Die erste Ordnung

Zur Berechnung des kinetischen Terms erster Ordnung gehen wir wiederum von (3.11) aus und betrachten nur die Terme der Ordnung \hbar . Die effektive Wirkung (3.28) wird hier als Funktion des Ortsoperators \mathcal{Q} und des Impulsoperators \mathcal{P} geschrieben. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int d^D x \mathcal{Z}_1(\phi(x)) (\partial\phi(x))^2 + \dots \\ &= -2\Gamma_1[\phi] - 2 \int d^D x \mathcal{V}_1(\phi(x)) \quad (7.7) \\ &= \text{Sp} \left\{ \ln \left(\mathcal{P}^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(\mathcal{Q}) \right) - \ln \left(\mathcal{P}^2 + m_{0+}^2 \right) \right\} \\ & \quad - 2 \int d^D x \left\langle x \left| \frac{1}{2} \left[\ln \left(\mathcal{P}^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) - \ln \left(\mathcal{P}^2 + m_{0+}^2 \right) \right] \right| x \right\rangle \\ &= \int d^D x \left\langle x \left| \ln \left(\mathcal{P}^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(\mathcal{Q}) \right) - \ln \left(\mathcal{P}^2 + m_{0+}^2 \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \ln \left(\mathcal{P}^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) + \ln \left(\mathcal{P}^2 + m_{0+}^2 \right) \right| x \right\rangle \\ &= \int d^D x \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left\langle x \left| \exp \left\{ -s \left(\mathcal{P}^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \exp \left\{ -s \left(\mathcal{P}^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(\mathcal{Q}) \right) \right\} \right| x \right\rangle. \quad (7.8) \end{aligned}$$

Die Punkte in der ersten Zeile stehen für die Terme höherer Ordnung in $(\partial\phi)^2$, die wie oben beschrieben nicht berechnet werden. In der letzten Umformung wurde die Differenz zweier Logarithmen nach (A.4) durch ein Integral über Exponentialfunktionen ausgedrückt. Zu beachten ist, das die Feldvariable ϕ^2 in der letzten Zeile eine Funktion des Ortsoperators \mathcal{Q} ist, und nicht, wie in der vorletzten Zeile, nur vom

Ort x abhängt. Für die weitere Rechnung nehmen wir an, daß $\phi(x)$ nur in einer Richtung variiert. Diese bezeichnen wir mit dem Index "0" und entwickeln ϕ^2 um den Ort x :

$$\begin{aligned}\phi^2(\mathcal{Q}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\partial^n}{\partial \mathcal{Q}_0^n} \phi^2(\mathcal{Q}) \right]_x \tilde{\mathcal{Q}}_0^n \\ &= \phi^2(x) + 2\phi(x) (\partial_0 \phi(x)) \tilde{\mathcal{Q}}_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} (2 (\partial_0 \phi(x))^2 + 2\phi(x) (\partial_0^2 \phi(x))) \tilde{\mathcal{Q}}_0^2 + \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{Q}}_0^3).\end{aligned}\quad (7.9)$$

Darin ist $\tilde{\mathcal{Q}}$ der verschobene Ortsoperator

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q} - x, \quad (7.10)$$

beziehungsweise $\tilde{\mathcal{Q}}_0$ die nullte Komponente hiervon. Die Faktoren der Entwicklung (7.9) schreiben wir als

$$a(x) = 2\phi(x) (\partial_0 \phi(x)) \quad (7.11)$$

$$b(x) = 2 (\partial_0 \phi(x))^2 + 2\phi(x) (\partial_0^2 \phi(x)). \quad (7.12)$$

Da $\phi(x)$ nur in x_0 -Richtung variiert, können wir (7.8) in den anderen $(D-1)$ transversalen Raumrichtungen Fourier-transformieren (Index T).

$$\begin{aligned}(7.8) &= \int d^D x \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int \frac{d^{D-1} k_T}{(2\pi)^{D-1}} \exp \left\{ -s \left(k_T^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \\ &\quad \times \left[\langle x_0 | e^{-s \mathcal{P}_0^2} | x_0 \rangle - \langle x_0 | e^{-s (\mathcal{P}_0^2 + \frac{g_0}{2} a(x) \tilde{\mathcal{Q}}_0 + \frac{g_0}{4} b(x) \tilde{\mathcal{Q}}_0^2 + \dots)} | x_0 \rangle \right]\end{aligned}\quad (7.13)$$

Im zweiten Exponenten in der eckigen Klammer bezeichnen die Punkte Terme höherer Ordnung der Entwicklung (7.9), die nicht zum kinetischen Term beitragen, da sie mehr als zwei Ableitungen nach dem Ort enthalten.

Das Impulsintegral in den transversalen Richtungen ist ein Gaußsches Integral.

$$\begin{aligned}\int \frac{d^{D-1} k_T}{(2\pi)^{D-1}} e^{-s k_T^2} &= \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \sqrt{\frac{2\pi}{2s}}^{D-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi s}^{D-1}}\end{aligned}\quad (7.14)$$

Der erste Summand in der eckigen Klammer wird durch eine Fourier-Transformation ebenfalls zu einem Gaußschen Integral.

$$\langle x_0 | e^{-s \mathcal{P}_0^2} | x_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} \quad (7.15)$$

Nun muß noch der zweite Summand von (7.13) passend zur Mehler-Formel (C.18) umgeformt werden. Dazu ergänzen wir den Exponenten quadratisch und verschieben den Ortsoperator in umgekehrter Richtung zu (7.10), $\mathcal{Q}_0 = \tilde{\mathcal{Q}}_0 + x_0$.

$$\begin{aligned}
 & \langle x_0 | e^{-s(\mathcal{P}_0^2 + \frac{g_0}{2} a(x) \tilde{\mathcal{Q}}_0 + \frac{g_0}{4} b(x) \tilde{\mathcal{Q}}_0^2)} | x_0 \rangle \\
 &= \langle x_0 | e^{-s(\mathcal{P}_0^2 + \frac{g_0}{4} b(x) (\frac{a(x)}{b(x)} + \tilde{\mathcal{Q}}_0)^2)} e^{s \frac{g_0}{4} \frac{a^2(x)}{b(x)}} | x_0 \rangle \\
 &= e^{s \frac{g_0}{4} \frac{a^2(x)}{b(x)}} \left\langle x_0 + \frac{a(x)}{b(x)} \left| e^{-s(\mathcal{P}_0^2 + \frac{g_0}{4} b(x) \tilde{\mathcal{Q}}_0^2)} \right| x_0 + \frac{a(x)}{b(x)} \right\rangle \\
 &= e^{s \frac{g_0}{4} \frac{a^2(x)}{b(x)}} \left\langle \frac{a(x)}{b(x)} \left| e^{-s(\mathcal{P}_0^2 + \frac{g_0}{4} b(x) \tilde{\mathcal{Q}}_0^2)} \right| \frac{a(x)}{b(x)} \right\rangle \\
 &= e^{s \frac{g_0}{4} \frac{a^2(x)}{b(x)}} \left(\frac{\omega}{2\pi \sinh(2\omega s)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times \exp \left\{ -\frac{\omega}{2 \sinh(2\omega s)} \left(2 \left(\frac{a(x)}{b(x)} \right)^2 (\cosh(2\omega s) - 1) \right) \right\} \quad (7.16)
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist nur noch über die Koeffizienten a und b sowie ω mit

$$\omega^2(x) = \frac{g_0}{4} b(x) \quad (7.17)$$

von der Ortsvariablen x abhängig.

Indem wir (7.14), (7.15) und (7.16) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 (7.13) &= \int d^D x \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{1}{\sqrt{4\pi s}^{D-1}} \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \\
 & \quad \times \left[\frac{1}{\sqrt{4\pi s}} - \left(\frac{\omega}{2\pi \sinh(2\omega s)} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. \exp \left\{ s \frac{g_0}{4} \frac{a^2(x)}{b(x)} - \frac{\omega}{\sinh(2\omega s)} \left(\frac{a(x)}{b(x)} \right)^2 (\cosh(2\omega s) - 1) \right\} \right] \\
 &= \int d^D x \int_0^\infty \frac{ds}{s} \frac{1}{\sqrt{4\pi s}^D} \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \\
 & \quad \times \left[1 - \left(\frac{2\omega s}{\sinh(2\omega s)} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
 & \quad \left. \exp \left\{ s \frac{g_0}{4} \frac{a^2(x)}{b(x)} - \frac{\omega}{\sinh(2\omega s)} \frac{a^2(x)}{b^2(x)} (\cosh(2\omega s) - 1) \right\} \right]. \quad (7.18)
 \end{aligned}$$

Die eckige Klammer im letzten Ausdruck wird nun nach Potenzen von $a(x)$ und $b(x)$ entwickelt. Da a von der Ordnung $(\partial\phi(x))$ und b quadratisch in der Ortsableitung

ist, brauchen wir nur Terme bis zur Ordnung a^2 beziehungsweise b für \mathcal{Z}_1 betrachten.

$$\begin{aligned}
 & \left[1 - \left(\frac{2\omega s}{\sinh(2\omega s)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ s \frac{g_0 a^2(x)}{4 b(x)} - \frac{\omega}{\sinh(2\omega s)} \frac{a^2(x)}{b^2(x)} (\cosh(2\omega s) - 1) \right\} \right] \\
 &= \left[1 - \left(1 - \frac{s^2}{3} \frac{g_0}{4} b + \mathcal{O}(b^2) \right) \exp \left\{ s \frac{g_0 a^2}{4 b} - s \frac{g_0 a^2}{4 b} + \frac{1}{3} s^3 \frac{g_0^2}{4^2} a^2 + \mathcal{O}(a^2 b) \right\} \right] \\
 &= \left[1 - \left(1 - \frac{s^2}{3} \frac{g_0}{4} b + \mathcal{O}(b^2) \right) \left(1 + \frac{s^3}{3} \frac{g_0^2}{16} a^2 + \mathcal{O}(a^2 b) \right) \right] \\
 &= \frac{s^2}{12} g_0 b(x) - \frac{s^3}{48} g_0^2 a^2(x) + \mathcal{O}(b^2, a^2 b) \tag{7.19}
 \end{aligned}$$

Bei der Entwicklung tritt ω immer quadratisch auf, da es nur Argument gerader Funktionen ist. Es bleiben keine konstanten Terme übrig (ohne Ableitungen nach dem Ort), da diese schon zu Beginn der Rechnung in (7.7) abgezogen wurden.

In (7.18) eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned}
 (7.18) &= \int d^D x \int_0^\infty ds \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{1}{s^{1+D/2}} \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \\
 &\quad \times \left[s^2 \frac{g_0}{12} b(x) - s^3 \frac{g_0^2}{48} a^2(x) + \mathcal{O}(b^2, a^2 b) \right] \\
 &= \int d^D x \int_0^\infty ds \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \\
 &\quad \times \left[s^{1-\frac{D}{2}} \frac{g_0}{6} \{ (\partial\phi(x))^2 + \phi(x) (\partial^2\phi(x)) \} \right. \\
 &\quad \left. - s^{2-\frac{D}{2}} \frac{g_0^2}{12} \phi^2(x) (\partial\phi(x))^2 + \mathcal{O}(b^2, a^2 b) \right]. \tag{7.20}
 \end{aligned}$$

Da \mathcal{Z} der Vorfaktor von $(\partial\phi)^2$ ist, müssen wir den $\phi \partial^2\phi$ -Term partiell integrieren. Wenn ϕ nur in x_0 -Richtung variiert, gilt

$$\begin{aligned}
 & \int d^D x \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \phi(x) \partial^2\phi(x) \tag{7.21} \\
 &= \int d^{D-1} x_T \left\{ \left[\exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \phi(x) \partial_0\phi(x) \right]_{x_0=-\infty}^{x_0=+\infty} \right. \\
 &\quad \left. - \int dx_0 \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \left((\partial_0\phi(x))^2 - s \frac{g_0}{2} 2 (\phi(x) \partial_0\phi(x))^2 \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Dabei wird der Ausdruck in der eckigen Klammer zu null, da $\partial\phi(|x| \rightarrow \infty) = 0$ gilt. Analog läßt sich diese Rechnung auf den allgemeinen Fall ausweiten und es gilt

$$\int d^D x \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \phi(x) \partial^2\phi(x) \tag{7.22}$$

$$= - \int d^D x \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \left((\partial\phi(x))^2 - s \frac{g_0}{2} 2 (\phi(x) \partial\phi(x))^2 \right) .$$

Dies setzen wir in (7.20) ein, wobei die Terme der Ordnung b^2 und $a^2 b$ weggelassen werden.

$$\begin{aligned} (7.20) &= \int d^D x \int_0^\infty ds \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \\ &\quad \times \left[s^{1-\frac{D}{2}} \frac{g_0}{6} \left\{ s \frac{g_0}{2} 2 (\phi(x) \partial\phi(x))^2 \right\} - s^{2-\frac{D}{2}} \frac{g_0^2}{12} \phi^2(x) (\partial\phi(x))^2 \right] \\ &= \int d^D x \int_0^\infty ds \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2(x) \right) \right\} \\ &\quad \times \left[s^{2-\frac{D}{2}} \frac{g_0^2}{12} \phi^2(x) (\partial\phi(x))^2 \right] \end{aligned} \quad (7.23)$$

Nun können wir die Ortsraumintegration und den Term $(\partial\phi(x))^2$ herausziehen und erhalten den kinetischen Term und damit die Feldrenormierungskonstante in erster Ordnung.

$$\mathcal{Z}_1(\phi) = \int_0^\infty ds \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right) \right\} s^{2-\frac{D}{2}} \frac{g_0^2}{12} \phi^2 \quad (7.24)$$

Dieses Integral läßt sich mit der Integraldarstellung der Gammafunktion (A.1) berechnen.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1(\phi) &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{g_0^2}{12} \phi^2 \int_0^\infty ds s^{3-\frac{D}{2}-1} \exp \left\{ -s \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right) \right\} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{g_0^2}{12} \phi^2 \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{-3+\frac{D}{2}} \Gamma \left(3 - \frac{D}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.25)$$

Für $D = 3 - \epsilon$ wird dies zu

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1(\phi) &= \frac{1}{(4\pi)^{(3-\epsilon)/2}} \frac{g_0^2}{12} \phi^2 \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{-\frac{3+\epsilon}{2}} \Gamma \left(\frac{3+\epsilon}{2} \right) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{3/2}} \frac{g_0^2}{12} \phi^2 \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &= \frac{g_0^2}{192\pi} \phi^2 \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{-\frac{3}{2}} + \mathcal{O}(\epsilon) . \end{aligned} \quad (7.26)$$

Zum Schluß dieses Abschnittes sei angemerkt, daß alle Näherungen der Berechnung von \mathcal{Z}_1 in (7.7), (7.13) und (7.19) nur Terme proportional zu $(\partial\phi)^{2n}$ mit $n > 1$ vernachlässigen.

7.2 Die Feldrenormierungskonstante

Mit den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnittes haben wir nach (7.6) als feldabhängige Feldrenormierungskonstante bis zur Ein-Schleifen-Ordnung

$$Z_{3+}(\phi) = 1 - \frac{g_0^2}{192\pi} \phi^2 \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{-\frac{3}{2}}. \quad (7.27)$$

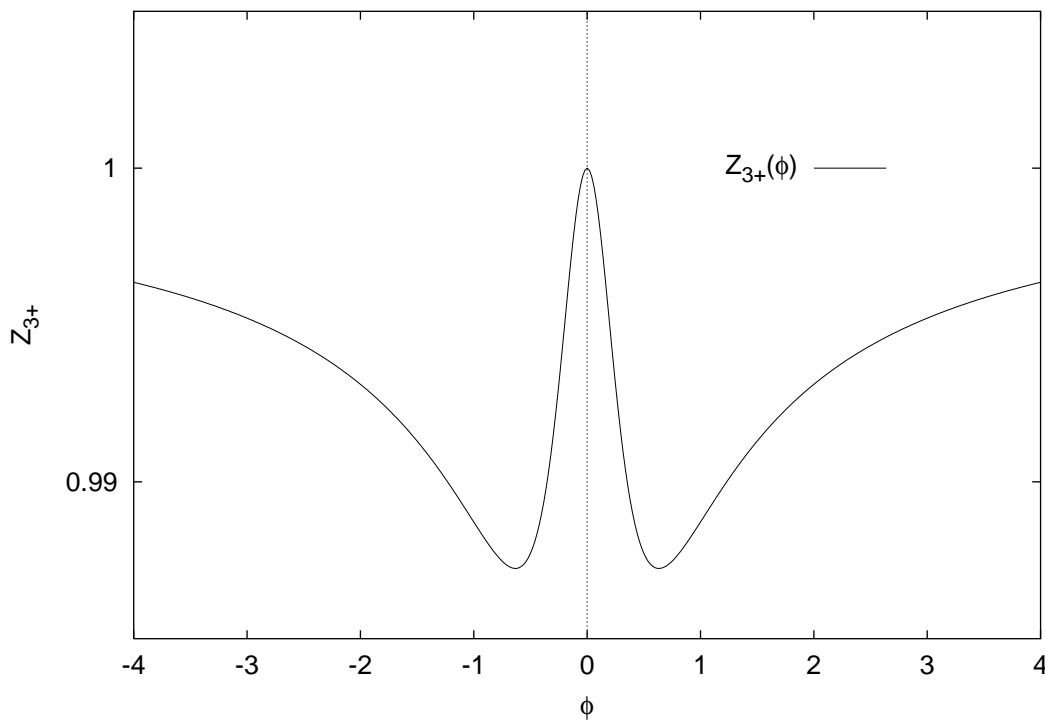


Abbildung 7.1: Die Feldrenormierungskonstante der symmetrischen Phase

Indem wir den Wert von ϕ am Minimum des effektiven Potentials einsetzen, können wir dieses Resultat mit Rechnungen aus [HEI93] vergleichen, wo die stationäre Feldrenormierungskonstante bestimmt wurde. In der symmetrischen Phase ist das Minimum des Potentials bei $\phi = 0$ und es ergibt sich

$$Z_{3+}(\phi = 0) = 1. \quad (7.28)$$

Dies stimmt bis zur ersten Ordnung mit der stationären Feldrenormierungskonstante überein, da sie auch keinen Beitrag in dieser Ordnung hat.

Um die Feldnormierungskonstante in der Phase gebrochener Symmetrie zu erhalten, müssen wir nach (1.17) m_{0+}^2 durch $-\frac{1}{2}m_{0-}^2$ ersetzen.

$$Z_{3-}(\phi) = 1 - \frac{g_0^2}{192\pi} \phi^2 \left(-\frac{1}{2}m_{0-}^2 + \frac{g_0}{2}\phi^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \quad (7.29)$$

Dieses Ergebnis erhalten wir auch, wenn die Rechnung von Beginn an in der gebrochenen Phase durchgeführt wird. Das Minimum des Potentials ist hier ungleich

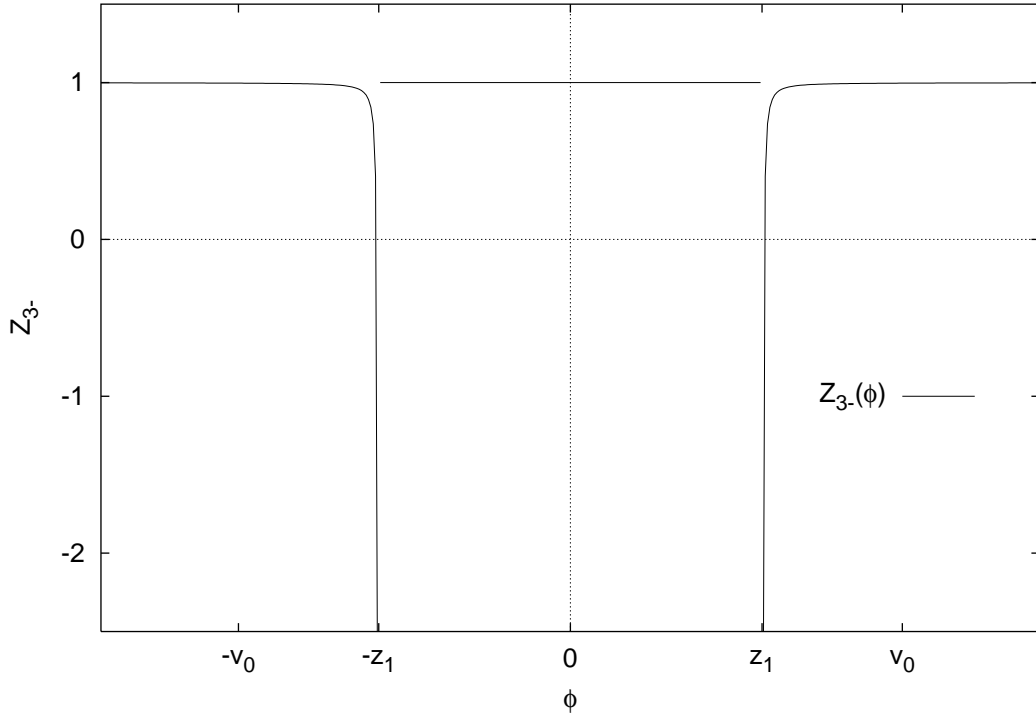


Abbildung 7.2: Die Feldnormierungskonstante der gebrochenen Phase

null. Da das Feld ϕ nur beim Ein-Schleifen Term auftritt, reicht es, das Minimum in niedrigster Ordnung einzusetzen. Korrekturen hätten nur Auswirkungen in höheren Ordnungen. Nach (1.18) ist $\phi_m = v_0 = \sqrt{3m_{0-}^2/g_0}$ das Minimum in Baumnäherung. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} Z_{3-}(\phi = v_0) &= 1 - \frac{g_0^2}{192\pi} v_0^2 \left(-\frac{1}{2}m_{0-}^2 + \frac{g_0}{2}v_0^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{8} \frac{g_0}{8\pi m_{0-}}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Auch in der Phase gebrochener Symmetrie stimmt die Feldrenormierungskonstante als Funktion von ϕ an der Stelle des Potentialminimums ausgewertet mit der stationären Lösung (6.17) bis zur ersten Ordnung überein.

Für Werte der Feldvariable $|\phi| < z_1 = \sqrt{m_{0-}^2/g_0}$ (5.6) wird der Ein-Schleifen Term in (7.29) imaginär. Nach [WW87] wird der Imaginäranteil vernachlässigt und Z_{3-} in diesem Argumentbereich konstant eins. Bei Annäherung von großen Argumentbeträgen an z_1 divergiert Z_{3-} .

$$\lim_{\substack{\phi \rightarrow \pm z_1 \\ |\phi| > z_1}} Z_{3-}(\phi) = -\infty \quad (7.31)$$

Im Grenzfall großer Argumente nähern sich sowohl Z_{3+} als auch Z_{3-} asymptotisch der eins.

7.3 Oberflächenspannung

Um den Einfluß des kinetischen Terms auf die Oberflächenspannung zu untersuchen, bestimmen wir σ wie im Abschnitt 2.4. Allerdings ist σ hier eine Funktion der effektiven Wirkung $\Gamma[\phi]$ und nicht der gewöhnlichen Wirkung $S[\phi]$. Letztere entspricht der Baumnäherung der effektiven Wirkung.

Zunächst wird die Ableitung der Wirkung bestimmt, um dann im letzten Abschnitt diesen Kapitels die Oberflächenspannung mit kinetischer Korrektur zu berechnen.

7.3.1 Ableitung der effektiven Wirkung

Die Funktionalableitung von $\Gamma[\phi]$ wird mittels Variationsrechnung bestimmt. Dabei wird die Variation $\eta(x)$ als hinreichend glatt und nicht divergierend angenommen.

$$-\Gamma[\phi + \varepsilon\eta] + \Gamma[\phi] = \varepsilon \int d^Dx \eta(x) \left[-\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (7.32)$$

Auf der linken Seite drücken wir die effektive Wirkung nach (3.11) durch das effektive Potential und den kinetischen Term aus. Terme höherer Ordnung in der Ableitung werden vernachlässigt.

$$-\Gamma[\phi + \varepsilon\eta] + \Gamma[\phi] = \int d^Dx \left[\left\{ \mathcal{V}(\phi + \varepsilon\eta) + \frac{1}{2} \mathcal{Z}(\phi + \varepsilon\eta) (\partial(\phi + \varepsilon\eta))^2 \right\} - \left\{ \mathcal{V}(\phi) + \frac{1}{2} \mathcal{Z}(\phi) (\partial\phi)^2 \right\} \right] \quad (7.33)$$

Nach ε entwickelt ergeben die Faktoren der ersten geschweiften Klammer

$$\mathcal{V}(\phi + \varepsilon\eta) = \mathcal{V}(\phi) + \mathcal{V}'(\phi)\varepsilon\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (7.34a)$$

$$\mathcal{Z}(\phi + \varepsilon\eta) = \mathcal{Z}(\phi) + \mathcal{Z}'(\phi)\varepsilon\eta + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (7.34b)$$

und

$$(\partial(\phi + \varepsilon\eta))^2 = (\partial\phi)^2 + 2(\partial\phi)\varepsilon(\partial\eta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (7.34c)$$

Die Ergebnisse setzen wir ein und erhalten

$$(7.33) = \int d^Dx \left[\mathcal{V}'(\phi)\varepsilon\eta + \frac{1}{2}\mathcal{Z}'(\phi)(\partial\phi)^2\varepsilon\eta + \frac{1}{2}\mathcal{Z}(\phi)2(\partial\phi)\varepsilon(\partial\eta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right]. \quad (7.35)$$

Die partielle Integration des dritten Summanden ergibt

$$\int d^Dx \mathcal{Z}(\phi)(\partial\phi)(\partial\eta) = \underbrace{[\mathcal{Z}(\phi)(\partial\phi)\eta]}_{=0} - \int d^Dx \mathcal{Z}(\phi)(\partial^2\phi)\eta - \int d^Dx \mathcal{Z}'(\phi)(\partial\phi)^2\eta. \quad (7.36)$$

Die Stammfunktion verschwindet, da die Feldvariable ϕ im Unendlichen gegen einen konstanten Wert läuft, also $\partial\phi$ zu null wird.

Letztendlich folgt daraus

$$-\Gamma[\phi + \varepsilon\eta] + \Gamma[\phi] = \varepsilon \int d^Dx \eta(x) \left[\mathcal{V}'(\phi) - \frac{1}{2}\mathcal{Z}'(\phi)(\partial\phi)^2 - \mathcal{Z}(\phi)(\partial^2\phi) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (7.37)$$

und die Funktionalableitung ist

$$-\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} = \mathcal{V}'(\phi) - \frac{1}{2}\mathcal{Z}'(\phi)(\partial\phi)^2 - \mathcal{Z}(\phi)(\partial^2\phi). \quad (7.38)$$

Hieraus leiten wir nun eine Bestimmungsgleichung für die Oberflächenspannung ab.

7.3.2 Kinetische Korrektur zur Oberflächenspannung

Für die Grenzfläche ϕ_c wird die Wirkung extremal. Also gilt analog zu (2.18)

$$-\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi} \Big|_{\phi_c} \stackrel{!}{=} 0. \quad (7.39)$$

Indem (7.38) eingesetzt und mit $\partial\phi$ erweitert wird, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{V}'(\phi)\partial\phi - \frac{1}{2}\mathcal{Z}'(\phi)(\partial\phi)^2\partial\phi - \mathcal{Z}(\phi)(\partial^2\phi)\partial\phi \\ &= \frac{d}{dx} \left[\mathcal{V}(\phi) - \frac{1}{2}\mathcal{Z}(\phi)(\partial\phi)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Nach Integration über x und Festlegung der Integrationskonstante auf null für $\phi = \phi_c$ folgt aus (7.40)

$$\mathcal{V}(\phi_c(x)) = \frac{1}{2} \mathcal{Z}(\phi_c(x)) (\partial \phi_c)^2 \quad (7.41)$$

beziehungsweise

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \phi_c(x) \right)^2 = \frac{2\mathcal{V}(\phi_c(x))}{\mathcal{Z}(\phi_c(x))}. \quad (7.42)$$

Die effektive Wirkung der Grenzfläche ϕ_c , die nur in einer Raumrichtung variiert, ist damit

$$\begin{aligned} -\Gamma[\phi_c] &= \int d^D x \left\{ \mathcal{V}(\phi_c) + \frac{1}{2} \mathcal{Z}(\phi_c) (\partial \phi_c)^2 \right\} \\ &= L^2 \int dz \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} \mathcal{Z}(\phi_c) (\partial \phi_c)^2 \right\} \\ &= L^2 \int_{-v_i}^{v_i} d\phi \mathcal{Z}(\phi) (\partial \phi) \\ &= L^2 \int_{-v_i}^{v_i} d\phi \mathcal{Z}(\phi) \sqrt{\frac{2\mathcal{V}(\phi)}{\mathcal{Z}(\phi)}} \\ &= L^2 \int_{-v_i}^{v_i} d\phi \sqrt{2\mathcal{V}(\phi) \mathcal{Z}(\phi)}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

Dabei sei der Index i die Ordnung, in der gerechnet wird. Die Integrationsgrenzen sind die entsprechenden Minima des effektiven Potentials \mathcal{V} .

Für die Oberflächenspannung ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \int_{-v_i}^{v_i} d\phi \sqrt{2\mathcal{V}(\phi) \mathcal{Z}(\phi)} \\ &= \int_{-v_i}^{v_i} d\phi \sqrt{\frac{2\mathcal{V}(\phi)}{\mathcal{Z}_3(\phi)}}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Dieses Relation wurde auch in [KLS97] bestimmt.

Der Radikand in (7.44) ist eine gerade Funktion in ϕ . Daher können wir analog zum Vorgehen in Kapitel 5 das Integral in zwei Teile zerlegen, deren Integranden jeweils rein reell sind.

$$\sigma_k = 2 \int_0^{z_1} d\phi \sqrt{\frac{2\mathcal{V}(\phi)}{\mathcal{Z}_3(\phi)}} + 2 \int_{z_1}^{v_1} d\phi \sqrt{\frac{2\mathcal{V}(\phi)}{\mathcal{Z}_3(\phi)}} \quad (7.45)$$

Im ersten Teilintegral ist $Z_3(\phi) = 1$, da der Beitrag aus der ersten Ordnung imaginär ist. Für eine Rechnung in höherer Ordnung müßte dieser Term mitbetrachtet werden, da auch das Potential \mathcal{V} in erster Ordnung imaginäre Beiträge hat, das Produkt in zweiter Ordnung also reell ist. Damit ist das erste Teilintegral gleich $I_\sigma^{(1)}$ und bereits in (5.10) gelöst.

Die obere Integralgrenze des zweiten Integrals wird auf v_1 festgelegt, da der kinetische Term nur bis zu dieser Ordnung bestimmt wurde.

$$\begin{aligned}
 I_\sigma^{(2k)} &= \int_{z_1}^{v_1} d\phi \left\{ 2 \left(-\frac{m_{0-}^2}{4} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 + \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{12\pi} \left\{ m_{0-}^3 - \left(-\frac{1}{2} m_{0-}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(1 - \frac{g_0^2}{192\pi} \phi^2 \left\{ -\frac{1}{2} m_{0-}^2 + \frac{g_0}{2} \phi^2 \right\}^{-\frac{3}{2}} \right)^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{3m_{0-}^3}{2g_0} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{v_1}{v_0}} d\chi \left\{ \left((1 - \chi^2)^2 + \frac{16}{9} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \frac{u_0}{8\pi} \right) \right. \\
 &\quad \left. \times \left(1 - \frac{1}{8} \chi^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \frac{u_0}{8\pi} \right)^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{3m_{0-}^3}{2g_0} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{v_1}{v_0}} d\chi \left\{ (1 - \chi^2)^2 + \left[\frac{16}{9} - \frac{16}{9} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1 - \chi^2)^2 \frac{1}{8} \chi^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \frac{u_0}{8\pi} + \mathcal{O}(u_0^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &\tag{7.46}
 \end{aligned}$$

Die Wurzel der geschweiften Klammer aus (7.46) wird wie im Abschnitt 5.1.3 mit $f(\chi, u_0)$ bezeichnet. Für das Integral ergibt sich demnach

$$\begin{aligned}
 I(u_0) &:= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\chi_0(u_0)} d\chi f(\chi, u_0) \\
 &= I(0) + u_0 \cdot I'(0) + \mathcal{O}(u_0^2), \\
 &\tag{7.47}
 \end{aligned}$$

wobei χ_0 in (5.14) gegeben ist. Der Koeffizient in niedrigster Ordnung läßt sich folgendermaßen bestimmen.

$$I(0) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\chi_0(0)} d\chi f(\chi, 0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \sqrt{(1-\chi^2)^2} \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{8}{9\sqrt{3}}
 \end{aligned} \tag{7.48}$$

In erster Ordnung muß nach (5.16) das Integral über die Ableitung von f berechnet werden.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(\chi, u_0)}{\partial u_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{f(\chi, u_0)} \left\{ \left[\frac{16}{9} - \frac{16}{9} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right. \right. \\
 \left. \left. + (1-\chi^2)^2 \frac{1}{8}\chi^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right] \frac{1}{8\pi} + \mathcal{O}(u_0) \right\}
 \end{aligned} \tag{7.49}$$

So ergibt sich

$$\begin{aligned}
 I'(0) &= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\chi_0(0)} d\chi \left. \frac{\partial f(\chi, u_0)}{\partial u_0} \right|_{u_0=0} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \frac{1}{1-\chi^2} \left\{ \frac{8}{9} - \frac{8}{9} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{16} (1-\chi^2)^2 \chi^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \right\} \\
 &= \frac{1}{8\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \frac{1}{1-\chi^2} \left\{ \frac{8}{9} - \frac{8}{9} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{8\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 d\chi \frac{1}{16} (1-\chi^2) \chi^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

Das Integral in der ersten Zeile entspricht $I_\sigma^{(2)}$, dessen Lösung in (5.21) angegeben ist. Die zweite Zeile ist dagegen nicht integrierbar, da das Integral an der unteren Schranke divergiert.

Damit kommen wir leider zu dem Ergebnis, daß sich in Ein-Schleifen Ordnung in dem hier gewählten Berechnungsschema keine kinetische Korrektur bestimmen läßt.

8 Grenzflächenprofil

In diesem Kapitel werden Korrekturen zum klassischen Grenzflächenprofil bestimmt. Ausgangspunkt ist dabei die Gleichung (2.18)

$$\frac{\delta S}{\delta \phi}[\phi] = -\partial^2 \phi + \mathcal{V}'(\phi) \stackrel{!}{=} 0.$$

Indem wir für \mathcal{V} das effektive Potential zweiter Ordnung einsetzen und die Ableitung um den stationären kinetischen Term (die inverse Feldnormierungskonstante aus Kapitel 6) ergänzen, erhalten wir

$$-\frac{1}{Z_3} \partial^2 \phi + \mathcal{V}'(\phi) = 0. \quad (8.1)$$

Nun suchen wir eine Lösung $\phi_g = \phi_g(z)$ dieser Gleichung, die nur in einer Raumrichtung variiert. Wie im Abschnitt 2.3 wird mit $\partial\phi_g$ erweitert und über z integriert.

$$-\frac{1}{2Z_3} (\partial\phi_g)^2 + \mathcal{V}(\phi_g) = \mathcal{C} \quad (8.2)$$

Die Integrationskonstante \mathcal{C} ist durch die Randbedingung gegeben. Denn für $z \rightarrow \pm\infty$ soll ϕ_g gegen das konstante Minimum von \mathcal{V} gehen. Wenn für \mathcal{V} das geeignet normierte effektive Potential aus Kapitel 4 genommen wird, muß \mathcal{C} entsprechend gleich null gewählt werden (siehe z.B. (5.23)).

Als Differentialgleichung für das Grenzflächenprofil erhalten wir somit

$$\begin{aligned} (\partial\phi_g)^2 &= 2Z_3 \mathcal{V}(\phi_g) \\ \partial\phi_g &= \sqrt{2Z_3 \mathcal{V}(\phi_g)}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Bei der Wurzel in der zweiten Gleichung haben wir uns für das positive Vorzeichen entschieden. Dadurch erhalten wir eine monoton wachsende Lösungsfunktion $\phi_g(z)$, da das effektive Potential \mathcal{V} nur am Minimum den Wert null annimmt und sonst immer größer als null und auch reell ist. Die Lösung zum negativen Vorzeichen erhalten wir am Schluß der Rechnung durch Ersetzen von z durch $-z$.

Die Differentialgleichung (8.3) ist im Abschnitt 2.3 in niedrigster Ordnung gelöst, die sogenannte klassische Lösung. In den folgenden Abschnitten soll sie nun in den nächsten beiden Ordnungen bestimmt werden.

8.1 Die erste Ordnung

Um (8.3) in erster Ordnung zu lösen, brauchen wir entsprechend das effektive Potential in erster Ordnung aus Abschnitt 4.1.4. Sowohl \mathcal{V}_0 als auch \mathcal{V}_1 sind bereits passend normiert, daher erübrigt sich ein zusätzlicher Normierungsterm im Potential.

$$\mathcal{V}(\phi) = -\frac{m_0^2}{4}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 + \frac{3}{8}\frac{m_0^4}{g_0} + \frac{1}{12\pi} \left\{ m_0^3 - \left(-\frac{1}{2}m_0^2 + \frac{g_0}{2}\phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (8.4)$$

Die Feldnormierungskonstante Z_3 ist in (6.17) angegeben. Zur Vereinfachung der Differentialgleichung wird wie bei der Berechnung der Oberflächenspannung in (5.9) eine dimensionslose Feldvariable eingeführt

$$\phi_g(z) = v_0 \chi_g(z). \quad (8.5)$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} (\partial\phi_g)^2 &= 2 \left(1 - \frac{1}{8} \frac{u_0}{8\pi} \right) \left\{ \frac{g_0}{4!} (\phi_g^2 - v_0^2)^2 + \frac{1}{12\pi} \left(m_0^3 - \left(-\frac{1}{2}m_0^2 + \frac{g_0}{2}\phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right\} \\ (\partial\chi_g)^2 &= \left(1 - \frac{1}{8} \frac{u_0}{8\pi} \right) \left\{ \frac{m_0^2}{4} (\chi_g^2 - 1)^2 + \frac{m_0 g_0}{18\pi} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi_g^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right\} \\ \partial\chi_g &= \frac{m_0}{2} \sqrt{ \left(1 - \frac{1}{8} \frac{u_0}{8\pi} \right) \left\{ (\chi_g^2 - 1)^2 + \frac{2u_0}{9\pi} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi_g^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right\} }. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Diese Differentialgleichung kann nicht geschlossen integriert werden. Daher suchen wir eine Lösung mit Hilfe der Störungsrechnung. Für die dimensionslose Feldvariable χ_g ist die Entwicklung

$$\chi_g(z) = \chi_g^{(0)}(z) + \chi_g^{(1)}(z) \frac{u_0}{8\pi} + \mathcal{O}(u_0^2). \quad (8.7)$$

Die rechte Seite von (8.6) entwickeln wir ebenso nach u_0 . Dabei muß allerdings immer beachtet werden, daß nur der Realteil des Potentials in die Berechnung einfließt.

$$\begin{aligned} &\frac{m_0}{2} \sqrt{ \left(1 - \frac{1}{8} \frac{u_0}{8\pi} \right) \left\{ (\chi_g^2 - 1)^2 + \frac{2u_0}{9\pi} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\chi_g^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right\} } \\ &= \frac{m_0}{2} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$+ \frac{g_0}{16\pi} \left\{ -\frac{1}{16} (1 - \chi_g^{(0)2}) + \frac{8}{9} \frac{1}{(1 - \chi_g^{(0)2})} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - 2\chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \right\}$$

Bei der Betragsbildung der ersten Klammer wurde bereits das Wissen über die Lösung von $\chi_g^{(0)}$ verwendet. Denn die Differentialgleichung in nullter Ordnung,

$$\partial \chi_g^{(0)}(z) = \frac{m_0}{2} (1 - \chi_g^{(0)2}) \quad (8.9)$$

ist in (2.12) gelöst und es gilt

$$\chi_g^{(0)}(z) = \tanh \left(\frac{m_0}{2} (z - a) \right). \quad (8.10)$$

Damit liegt $\chi_g^{(0)2}$ immer im Intervall von null bis eins.

8.1.1 Die Differentialgleichung

Indem wir aus (8.8) nur die Terme der ersten Ordnung betrachten, ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial \chi_g^{(1)}(z) = \frac{m_0}{2} \left\{ -\frac{1}{16} (1 - \chi_g^{(0)2}) \right. \\ \left. + \frac{8}{9} \frac{1}{(1 - \chi_g^{(0)2})} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - 2\chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \right\}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung in $\chi_g^{(1)}$. Durch Einsetzen von $\chi_g^{(0)}$ erhalten wir

$$\partial \chi_g^{(1)}(z) = f_1(z) \chi_g^{(1)}(z) + g_1(z) \quad (8.12)$$

mit

$$f_1(z) = -m_0 \tanh \left(\frac{m_0}{2} (z - a) \right) \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} g_1(z) = \frac{m_0}{2} \left\{ -\frac{1}{16} \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{m_0}{2} (z - a) \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{8}{9} \frac{1}{(1 - \tanh^2 \left(\frac{m_0}{2} (z - a) \right))} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 \left(\frac{m_0}{2} (z - a) \right) \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass bei $g_1(z)$ nur der Realteil der hinteren runden Klammer von Bedeutung ist.

Zur Lösung von (8.12) bestimmen wir zuerst die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\partial \chi_g^{(1h)}(z) = f_1(z) \chi_g^{(1h)}(z). \quad (8.14)$$

Offensichtlich sind

$$\chi_g^{(1h)}(z) = \exp \left(\int_a^z d\zeta f_1(\zeta) \right) \quad (8.15)$$

und Vielfache hiervon die Lösungen:

$$\begin{aligned} \chi_g^{(1h)}(z) &= \exp \left(-m_0 \int_a^z d\zeta \tanh \left(\frac{m_0}{2}(\zeta - a) \right) \right) \\ &= \exp \left(-2 \ln \cosh \left(\frac{m_0}{2}(z - a) \right) \right) \\ &= \operatorname{sech}^2 \left(\frac{m_0}{2}(z - a) \right). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Die Lösung der vollständigen Differentialgleichung (8.12) bestimmen wir nun über die Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$\chi_g^{(1)}(z) = k_1(z) \chi_g^{(1h)}(z). \quad (8.17)$$

Damit gilt für k_1

$$\partial k_1(z) = g_1(z) \frac{1}{\chi_g^{(1h)}(z)}. \quad (8.18)$$

Nun brauchen wir die Randbedingung für $\chi_g^{(1)}(a) = b_1$, die im Abschnitt 8.1.3 diskutiert wird. Daraus folgt $k_1(a) = b_1$ und damit

$$k_1(z) = b_1 + \int_a^z d\zeta g_1(\zeta) \frac{1}{\chi_g^{(1h)}(\zeta)}. \quad (8.19)$$

Von $g_1(z)$ ist nur der Realteil relevant. Da $\chi_g^{(1h)}(z) = \operatorname{sech}^2 \left(\frac{m_0}{2}(z - a) \right)$ rein reell ist, und die Integration eine lineare Operation ist, können wir die Realteilbildung aus dem Integral herausziehen und zum Schluß den Realteil des gesamten Integrals betrachten.

$$\begin{aligned} k_1(z) &= b_1 + \frac{m_0}{2} \int_a^z d\zeta \left\{ -\frac{1}{16} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{m_0}{2}(\zeta - a) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{8}{9} \frac{1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 \left(\frac{m_0}{2}(\zeta - a) \right) \right)^{\frac{3}{2}}}{1 - \tanh^2 \left(\frac{m_0}{2}(\zeta - a) \right)} \right\} \cosh^2 \left(\frac{m_0}{2}(\zeta - a) \right) \\ &= b_1 + \int_0^{\frac{m_0}{2}(z-a)} d\tau \left\{ -\frac{1}{16} + \frac{8}{9} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2(\tau) \right)^{\frac{3}{2}} \right) \cosh^4(\tau) \right\} \\ &= b_1 + \frac{13m_0}{96}(z - a) + \frac{1}{12} \operatorname{artanh} \left(\frac{-\sinh \left(\frac{m_0}{2}(z - a) \right)}{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \left(\frac{m_0}{2}(z - a) \right)}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} \cosh\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) \sinh\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) \\
 & \quad \left(1 + \frac{2}{3} \cosh^2\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right)\right) \\
 & - \sinh\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right)} \\
 & \quad \left(\frac{2}{9} \cosh^2\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) - \frac{1}{2}\right)
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

Von dem Ergebnis haben nur zwei Terme potentielle Imaginäranteile. Dies ist der dritte (artanh) und der letzte Term. Für $\sinh^2\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) < \frac{1}{2}$ verschwinden beide Terme, denn die Wurzel im letzten Term wird dann rein imaginär und ebenso das Argument des artanh -Term. Der artanh eines rein imaginären Argumentes ist ebenfalls rein imaginär.¹

Damit erhalten wir $\chi_g^{(1)}(z)$ für $|z-a| \leq \frac{2}{m_0} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}
 \chi_{g<}^{(1)}(z) &= k_1(z) \chi_g^{(1h)}(z) \\
 &= \operatorname{sech}^2\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) \left(b_1 + \frac{13m_0}{96}(z-a)\right) \\
 & \quad + \frac{1}{3} \sinh\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) \left(\operatorname{sech}\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) + \frac{2}{3} \cosh\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right)\right).
 \end{aligned} \tag{8.21}$$

Für $|z-a| \geq \frac{2}{m_0} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\sqrt{2}}$, das heißt wenn der \sinh^2 Term größer als $1/2$ ist, können wir den Realteil mit (A.17) bestimmen und es gilt

$$\begin{aligned}
 \chi_{g>}^{(1)}(z) &= \operatorname{sech}^2\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) \left(b_1 + \frac{13m_0}{96}(z-a)\right) \\
 & - \frac{1}{12} \operatorname{sech}^2\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) \operatorname{artanh}\left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right)}}{\sinh\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right)}\right) \\
 & + \frac{1}{3} \sinh\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) \left(\operatorname{sech}\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) + \frac{2}{3} \cosh\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right)\right) \\
 & - \sinh\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right)} \\
 & \quad \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right)\right).
 \end{aligned} \tag{8.22}$$

Diese zweite Variante werden wir im nächsten Abschnitt auf das asymptotische Verhalten untersuchen.

¹ $\operatorname{artanh}(iz) = i \operatorname{arctan}(z)$, vergleiche (A.13), (A.18).

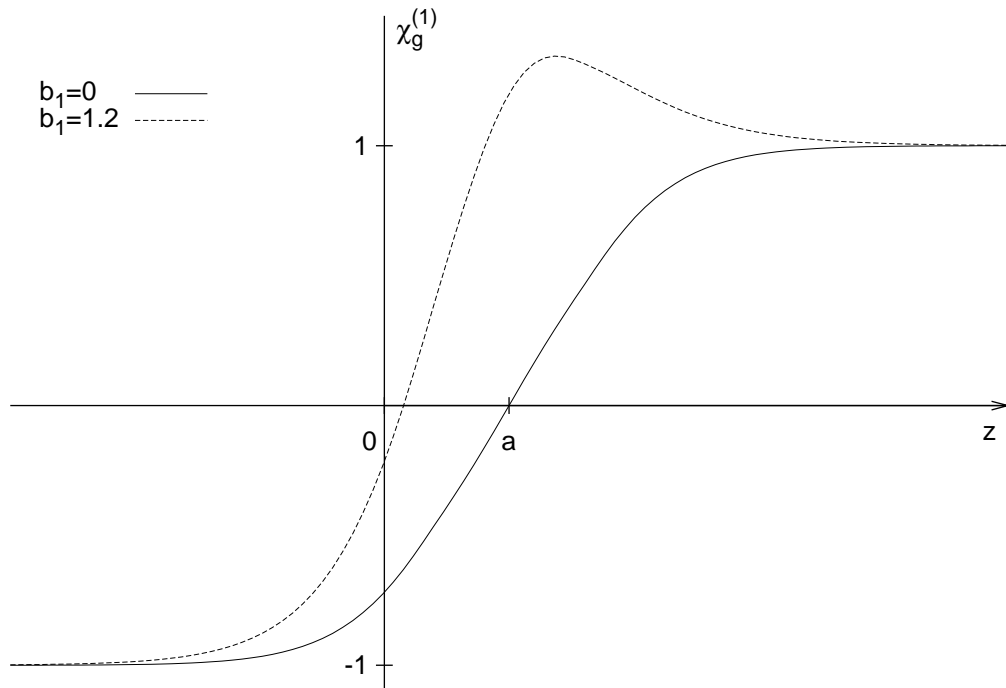


Abbildung 8.1: Die Korrektur erster Ordnung zum Grenzflächenprofil

8.1.2 Asymptotisches Verhalten

Um das Verhalten von $\chi_g^{(1)}$ im Grenzfalle $z \rightarrow \pm\infty$ zu untersuchen, ersetzen wir zuerst in (8.22) das Argument der hyperbolischen Funktionen durch $t = \frac{m_0}{2}(z - a)$.

$$\begin{aligned} \chi_{g>}^{(1)}(t) = & \left(b_1 + \frac{13}{48}t\right) \operatorname{sech}^2 t - \frac{1}{12} \operatorname{sech}^2 t \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right) \\ & + \frac{1}{3} \sinh t \left(\operatorname{sech} t + \frac{2}{3} \cosh t \right) - \sinh t \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 t \right) \end{aligned} \quad (8.23)$$

Damit entspricht der Limes $z \rightarrow \pm\infty$ dem gleichen Grenzwert für t . Die Trigonometrischen Funktionen drücken wir nun durch Exponentialfunktionen aus und suchen die Terme in höchster Ordnung von e^t für den Grenzfalle $t \rightarrow \infty$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \chi_{g>}^{(1)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \left(-\frac{13}{4} + 4b_1 - \frac{\ln 2}{6} + \frac{3}{4}t \right) e^{-2t} \right. \\ \left. + \left(6 - 8b_1 + \frac{\ln 2}{3} - \frac{3}{2}t \right) e^{-4t} + \mathcal{O}(e^{-6t}) \right\} \end{aligned}$$

$$=1. \tag{8.24}$$

Um $\chi_g^{(1)}$ für negativ unendliche Argumente zu bestimmen, suchen wir analog zu (8.24) die führenden Terme der Entwicklung nach e^{-t} .

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \chi_g^{(1)}(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left\{ -1 + \left(\frac{13}{4} + 4b_1 + \frac{\ln 2}{6} + \frac{3}{4}t \right) e^{2t} \right. \\ &\quad \left. + \left(-6 - 8b_1 - \frac{\ln 2}{3} - \frac{3}{2}t \right) e^{4t} + \mathcal{O}(e^{6t}) \right\} \\ &= -1 \end{aligned} \tag{8.25}$$

Dieser Grenzwert läßt sich auch aus Symmetrieüberlegungen bestimmen, denn für $b_1 = 0$ ist $\chi_g^{(1)}$ eine ungerade Funktion von t beziehungsweise $(z - a)$.

In erster Ordnung gilt damit für das asymptotische Verhalten des Grenzflächenprofils

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \chi_g(z) &= \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \left\{ \chi_g^{(0)}(z) + \chi_g^{(1)}(z) \frac{u_0}{8\pi} + \mathcal{O}(u_0^2) \right\} \\ &= \pm \left\{ 1 + \frac{u_0}{8\pi} + \mathcal{O}(u_0^2) \right\}. \end{aligned} \tag{8.26}$$

Also wird mit dieser Lösung im Unendlichen auch tatsächlich das Minimum des Potentials, das in (5.41) mit χ_0 bezeichnet wird, angenommen. Für die Feldvariable heißt das

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \phi_g(z) = \pm v_1 + \mathcal{O}\left(u_0^{\frac{3}{2}}\right). \tag{8.27}$$

8.1.3 Die Randbedingung

Bei der Lösung der Differentialgleichung (8.11) haben wir im Ansatz für k_1 (8.19) festgelegt, das $\chi_g^{(1)}(a) = b_1$ gilt. Diese Konstante b_1 ist frei wählbar, da sie weder durch die Differentialgleichung, noch durch die Randbedingungen im Unendlichen fixiert wird.

Bei der Betrachtung einer verschobenen Grenzfläche wird die Bedeutung von b_1 jedoch sofort klar. Wenn wir in der klassischen Lösung für die Grenzfläche (8.10) den Nulldurchgang a durch einen Ansatz $a = a_0 + a_1 u_0 + \mathcal{O}(u_0^2)$ ausdrücken und nach u_0 entwickeln, erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_g^{(0)}(z) &= \tanh\left(\frac{m_0}{2}(z - a_0 - a_1 u_0 + \mathcal{O}(u_0^2))\right) \\ &= \tanh\left(\frac{m_0}{2}(z - a_0)\right) - \frac{m_0}{2} a_1 \operatorname{sech}^2\left(\frac{m_0}{2}(z - a_0)\right) u_0 + \mathcal{O}(u_0^2). \end{aligned} \tag{8.28}$$

Durch den Vergleich mit (8.21) beziehungsweise (8.22) erkennen wir, daß b_1 mit der Verschiebung des Grenzflächennulldurchganges verbunden ist. Mit der obigen Nomenklatur gilt

$$b_1 = -8\pi \frac{m_0}{2} a_1. \tag{8.29}$$

In Abbildung 8.2 ist die durchgezogene Linie die Summe der beiden bei a_0 zentrierten Terme, während das strichpunktierte Profil die nach $a = a_0 + a_1 u_0$ verschobene Grenzfläche darstellt. Die Abweichungen dieser beiden Kurven sind von höherer Ordnung in u_0 .

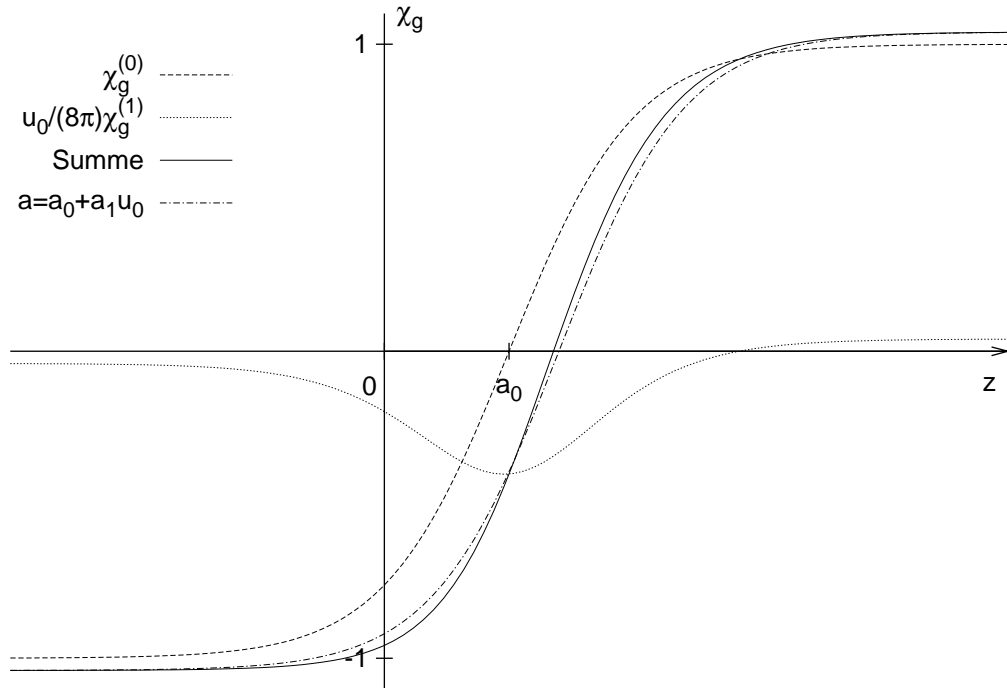


Abbildung 8.2: Verschobene Grenzfläche, Erläuterung im Text

Indem wir die Grenzfläche an der Stelle a fixieren, können wir $a_1 = 0$ und damit auch $b_1 = 0$ setzen.

8.2 Die zweite Ordnung

Nun wollen wir (8.3) in zweiter Ordnung lösen. Dabei entspricht der Rechenweg dem des vorhergehenden Abschnittes. Allerdings muß diesmal der Realteil des Potentials tatsächlich vor der Integration gebildet werden, da einzelne Terme in zweiter Ordnung quadratisch eingehen.

Im Kapitel 4 wurde das Potential berechnet, die passende Normierung wurde im Abschnitt 5.2.1 bestimmt. Damit ergibt sich als Potential (4.64ff), (5.24)

$$\mathcal{V}(\phi) = -\frac{m_0^2}{4}\phi^2 + \frac{g_0}{4!}\phi^4 + \frac{3}{8}\frac{m_0^4}{g_0} + \frac{1}{12\pi} \left\{ m_0^3 - \left(-\frac{1}{2}m_0^2 + \frac{g_0}{2}\phi^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

$$+ \frac{\phi^2}{6} \left(\frac{3}{2} - B^{div} + \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{g_0 \phi^2}{2m_0^2} \right) \right) \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + \frac{m_0^2}{8\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} B^{div} \right) \frac{g_0}{8\pi}. \quad (8.30)$$

Wiederum verwenden wir die dimensionslose Feldvariable (8.5), müssen sie nun allerdings bis zur zweiten Ordnung entwickeln:

$$\chi_g(z) = \chi_g^{(0)}(z) + \chi_g^{(1)}(z) \frac{u_0}{8\pi} + \chi_g^{(2)}(z) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3). \quad (8.31)$$

Die vollständige Differentialgleichung in zweiter Ordnung lautet

$$\begin{aligned} (\partial\chi_g)^2 &= \left(1 - \frac{1}{8} \frac{u_0}{8\pi} + \frac{409}{5184} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right) \\ &\quad \times \left\{ \frac{m_0^2}{4} (\chi_g^2 - 1)^2 + \frac{m_0 g_0}{18\pi} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{g_0^2}{64\pi^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} B^{div} + \chi_g^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} B^{div} + \frac{1}{3} \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^2 \right) \right) \right) \right\} \\ \partial\chi_g &= \frac{m_0}{2} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{u_0}{8\pi} + \frac{409}{5184} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left\{ (\chi_g^2 - 1)^2 + \frac{16}{9} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \left[2 + \frac{4}{3} B^{div} + \chi_g^2 \left(2 - \frac{4}{3} B^{div} + \frac{4}{3} \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^2 \right) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (8.32) \end{aligned}$$

Dabei ist allerdings immer nur der Realteil des Potentials relevant. Da bei der Entwicklung der Wurzel nach Potenzen von g_0 in zweiter Ordnung auch quadratische Terme auftreten, also Imaginäranteile zum Realteil beitragen können, berechnen wir die Differentialgleichung getrennt für kleine beziehungsweise große Werte von χ_g .

8.2.1 Die Differentialgleichung für kleine Werte von χ_g

Falls der Betrag der Feldvariable χ_g klein ist, heißt das, daß der Wurzelterm (der Term erster Ordnung zur $(3/2)$ -Potenz) in (8.32) rein imaginär wird und das Argument des Logarithmus negativ ist, er also auch einen Imaginäranteil hat. Dies gilt für $|\chi_g| < 1/\sqrt{3}$; mit der Entwicklung (8.31) überträgt sich diese Bedingung auf den führenden Term. Damit ist die folgende Rechnung gültig für

$$|\chi_g^{(0)}| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (8.33)$$

An der Grenze verschwinden die Argumente der kritischen Funktionen, und sowohl diese Rechnung als auch jene im nächsten Abschnitt ist korrekt. Für größere Werte von $\chi_g^{(0)}$ müssen dann alle Terme mitgenommen werden.

Die rechte Seite von (8.32) vereinfacht sich durch die Bildung des Realteils. Diesen Ausdruck entwickeln wir nun nach u_0 , wobei vorher χ_g durch die Entwicklung (8.31) ersetzt wird.

$$\begin{aligned}
& \frac{m_0}{2} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{u_0}{8\pi} + \frac{409}{5184} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ (\chi_g^2 - 1)^2 + \frac{16}{9} \frac{u_0}{8\pi} \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \left[2 + \frac{4}{3} B^{div} + \chi_g^2 \left(2 - \frac{4}{3} B^{div} + \frac{4}{3} \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \chi_g^2 \right) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8.34) \\
& = \frac{m_0}{2} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) \\
& \quad + \frac{m_0 u_0}{16\pi} \left\{ -\frac{1}{16} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) + \frac{8}{9} \frac{1}{\left(1 - \chi_g^{(0)2} \right)} - 2\chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \right\} \\
& \quad + \frac{m_0 u_0^2}{128\pi^2} \left\{ \frac{1555}{41472} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) - \frac{1}{18} \frac{1}{\left(1 - \chi_g^{(0)2} \right)} + \frac{1}{8} \chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \right. \\
& \quad \quad - \frac{2 \left(4 - 9\chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) \right)^2}{81 \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right)^3} + \frac{2 \left(1 + \chi_g^{(1)2} \right)}{1 - \chi_g^{(0)2}} - 3\chi_g^{(1)2} \\
& \quad \quad \left. - 2\chi_g^{(0)} \chi_g^{(2)} + \frac{2}{3} B^{div} - 1 + \frac{2}{3} \frac{\chi_g^{(0)2}}{1 - \chi_g^{(0)2}} \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2} \right) \right\} \\
& \quad + \mathcal{O}(u_0^3) \quad (8.35)
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen in nullter und erster Ordnung wurden bereits gelöst. In zweiter Ordnung gilt mit (8.31) und dem letzten Term in (8.35)

$$\begin{aligned}
\partial \chi_g^{(2)}(z) = & \frac{m_0}{2} \left\{ \frac{1555}{41472} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) - \frac{1}{18} \frac{1}{1 - \chi_g^{(0)2}} + \frac{1}{8} \chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \right. \\
& \quad - \frac{2 \left(4 - 9\chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) \right)^2}{81 \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right)^3} + \frac{2 \left(1 + \chi_g^{(1)2} \right)}{1 - \chi_g^{(0)2}} - 3\chi_g^{(1)2} \\
& \quad \left. + \frac{2}{3} B^{div} - 1 + \frac{2}{3} \frac{\chi_g^{(0)2}}{1 - \chi_g^{(0)2}} \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2} \right) - 2\chi_g^{(0)} \chi_g^{(2)} \right\}. \quad (8.36)
\end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich ebenso wie in (8.11) um eine lineare Differentialgleichung in $\chi_g^{(2)}$. Indem wir die bekannten Lösungen für $\chi_g^{(0)}$ (8.10) und $\chi_g^{(1)}$ (8.21) einsetzen, erhalten wir als Differentialgleichung in zweiter Ordnung

$$\partial\chi_g^{(2)}(z) = f_2(z)\chi_g^{(2)}(z) + g_{2<}(z) \quad (8.37)$$

mit

$$f_2(z) = -m_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right) \quad (8.38)$$

und

$$\begin{aligned} g_{2<}(z) = \frac{m_0}{2} \left\{ -1 + \frac{2}{3}B^{div} + \frac{1555}{41472}(1 - \tanh^2 t) \right. \\ + \frac{1}{8} \tanh t \left(\frac{13}{48}t \operatorname{sech}^2 t + \frac{1}{3} \sinh t \left(\operatorname{sech} t + \frac{2}{3} \cosh t \right) \right) \\ - 3 \left(\frac{13}{48}t \operatorname{sech}^2 t + \frac{1}{3} \sinh t \left(\operatorname{sech} t + \frac{2}{3} \cosh t \right) \right)^2 \\ + \frac{\frac{35}{18} + 2 \left(\frac{13}{48}t \operatorname{sech}^2 t + \frac{1}{3} \sinh t \left(\operatorname{sech} t + \frac{2}{3} \cosh t \right) \right)^2}{1 - \tanh^2 t} \\ - \frac{2}{81(1 - \tanh^2 t)^3} \left(4 - 9 \tanh t (1 - \tanh^2 t) \right. \\ \left. \left. \left(\frac{13}{48}t \operatorname{sech}^2 t + \frac{1}{3} \sinh t \left(\operatorname{sech} t + \frac{2}{3} \cosh t \right) \right) \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \frac{\tanh^2 t}{1 - \tanh^2 t} \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2 t \right) \right\}. \quad (8.39) \end{aligned}$$

Im Ausdruck für die Inhomogenität $g_{2<}(z)$ wurden die Argumente der hyperbolischen Funktionen durch $t = \frac{m_0}{2}(z-a)$ ersetzt.

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\partial\chi_g^{(2h)}(z) = f_2(z)\chi_g^{(2h)}(z) \quad (8.40)$$

ist schon bekannt, da die Funktion $f_2(z)$ dieselbe wie f_1 in (8.13) ist. Damit ergibt sich

$$\chi_g^{(2h)}(z) = \operatorname{sech}^2\left(\frac{m_0}{2}(z-a)\right). \quad (8.41)$$

Um die vollständige Differentialgleichung (8.37) zu lösen, verwenden wir den Ansatz

$$\chi_g^{(2)}(z) = k_2(z)\chi_g^{(2h)}(z), \quad (8.42)$$

der zu der Bestimmungsgleichung

$$\partial k_{2<}(z) = g_{2<}(z) \frac{1}{\chi_g^{(2h)}(z)} \quad (8.43)$$

für $k_{2<}$ führt. Als Randbedingung wählen wir nach der Diskussion in Abschnitt 8.1.3 $\chi_{g<}^{(2)}(a) = 0$, woraus entsprechend $k_{2<}(a) = 0$ folgt. Damit wird die Differentialgleichung durch

$$k_{2<}(z) = \int_a^z d\zeta g_{2<}(\zeta) \frac{1}{\chi_g^{(2h)}(\zeta)} \quad (8.44)$$

gelöst. Die Integrationsvariable substituieren wir wie oben durch $\tau = \frac{m_0}{2}(\zeta - a)$ und müssen damit

$$\begin{aligned} k_{2<}(z) &= \int_0^{\frac{m_0}{2}(z-a)} d\tau \frac{2}{m_0} \frac{g_{2<}(\tau)}{\chi_g^{(2h)}(\tau)} \\ &= \int_0^{\frac{m_0}{2}(z-a)} d\tau \cosh^2 \tau \left\{ -1 + \frac{2}{3} B^{div} + \frac{1555}{41472} \operatorname{sech}^2 \tau \right. \\ &\quad + \frac{1}{24} \tanh \tau \left(\frac{13}{16} t \operatorname{sech}^2 t + \sinh t \left(\operatorname{sech} t + \frac{2}{3} \cosh t \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(\frac{13}{16} \tau \operatorname{sech}^2 \tau + \sinh \tau \left(\operatorname{sech} \tau + \frac{2}{3} \cosh \tau \right) \right)^2 + \frac{35}{18} \cosh^2 \tau \\ &\quad + \frac{2}{9} \cosh^2 \tau \left(\frac{13}{16} \tau \operatorname{sech}^2 \tau + \sinh \tau \left(\operatorname{sech} \tau + \frac{2}{3} \cosh \tau \right) \right)^2 \\ &\quad - \frac{2}{81} \cosh^6 \tau \left(4 - 3 \tanh \tau \operatorname{sech}^2 \tau \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{13}{16} \tau \operatorname{sech}^2 \tau + \sinh \tau \left(\operatorname{sech} \tau + \frac{2}{3} \cosh \tau \right) \right) \right)^2 \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} \sinh^2 \tau \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2 \tau \right) \right\} \quad (8.45) \end{aligned}$$

berechnen. Zu dieser Gestalt kommen wir durch die Umformung $1 - \tanh^2 \tau = \operatorname{sech}^2 \tau = \cosh^{-2} \tau$. Der Integrand wird ausmultipliziert. Es ergibt sich eine Summe über 18 Terme, die einzeln integriert werden.

$$\begin{aligned} k_{2<}(z) &= \int_0^{\frac{m_0}{2}(z-a)} d\tau \left\{ \left(\frac{1555}{41472} + \frac{169}{1152} \tau^2 \right) \right. \\ &\quad + \left(-1 + \frac{2}{3} B^{div} \right) \cosh^2 \tau + \frac{35}{18} \cosh^4 \tau - \frac{32}{81} \cosh^8 \tau \\ &\quad \left. - \frac{7}{24} \sinh^2 \tau - \frac{2}{9} \sinh^4 \tau + \frac{13}{18} \tau \cosh^3 \tau \sinh \tau - \frac{13}{54} \tau \cosh \tau \sinh^3 \tau \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{7}{36} \cosh^2 \tau \sinh^2 \tau + \frac{20}{27} \cosh^4 \tau \sinh^2 \tau - \frac{8}{27} \cosh^2 \tau \sinh^4 \tau \\
 & + \frac{40}{81} \cosh^6 \tau \sinh^2 \tau - \frac{8}{81} \cosh^4 \tau \sinh^4 \tau - \frac{169}{768} \tau^2 \operatorname{sech}^2 \tau \\
 & - \frac{169}{1152} \tau^2 \tanh^2 \tau - \frac{65}{128} \tau \tanh \tau - \frac{13}{36} \tau \sinh^2 \tau \tanh \tau \\
 & + \frac{2}{3} \cosh^2 \tau \sinh^2 \tau \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2 \tau \right) \left. \vphantom{\frac{7}{36}} \right\} \quad (8.46)
 \end{aligned}$$

Die Integrale über beliebige Potenzen von cosh und sinh Funktionen sind leicht berechnet, da es sich nach dem Ausmultiplizieren um Exponentialfunktionen handelt. Für die obere Integralgrenze setzen wir im folgenden wieder $t = \frac{m_0}{2}(z - a)$ ein.

$$I_1 = \int_0^t d\tau \left(\frac{1555}{41472} + \frac{169}{1152} \tau^2 \right) = \left(\frac{1555}{41472} t + \frac{169}{3456} t^3 \right) \quad (8.47)$$

$$I_2 = \int_0^t d\tau \left(-1 + \frac{2}{3} B^{div} \right) \cosh^2 \tau = \left(-1 + \frac{2}{3} B^{div} \right) \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sinh(2t) \right) \quad (8.48)$$

$$I_3 = \int_0^t d\tau \frac{35}{18} \cosh^4 \tau = \frac{35}{48} t + \frac{35}{72} \sinh(2t) + \frac{35}{576} \sinh(4t) \quad (8.49)$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= - \int_0^t d\tau \frac{32}{81} \cosh^8 \tau \\
 &= - \frac{35}{324} t - \frac{7}{81} \sinh(2t) - \frac{7}{324} \sinh(4t) - \frac{1}{243} \sinh(6t) - \frac{1}{2592} \sinh(8t) \quad (8.50)
 \end{aligned}$$

$$I_5 = - \int_0^t d\tau \frac{7}{24} \sinh^2 \tau = \frac{7}{48} t - \frac{7}{96} \sinh(2t) \quad (8.51)$$

$$I_6 = - \int_0^t d\tau \frac{2}{9} \sinh^4 \tau = -\frac{1}{12} t + \frac{1}{18} \sinh(2t) - \frac{1}{144} \sinh(4t) \quad (8.52)$$

$$\begin{aligned}
 I_7 &= \int_0^t d\tau \frac{13}{18} \tau \cosh^3 \tau \sinh \tau \\
 &= \frac{13}{144} t \cosh(2t) + \frac{13}{576} t \cosh(4t) - \frac{13}{288} \sinh(2t) - \frac{13}{2304} \sinh(4t) \quad (8.53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_8 &= - \int_0^t d\tau \frac{13}{54} \tau \cosh \tau \sinh^3 \tau \\
 &= \frac{13}{432} t \cosh(2t) - \frac{13}{1728} t \cosh(4t) - \frac{13}{864} \sinh(2t) + \frac{13}{6912} \sinh(4t) \quad (8.54)
 \end{aligned}$$

$$I_9 = - \int_0^t d\tau \frac{7}{36} \cosh^2 \tau \sinh^2 \tau = \frac{7}{288}t - \frac{7}{1152} \sinh(4t) \quad (8.55)$$

$$\begin{aligned} I_{10} &= \int_0^t d\tau \frac{20}{27} \cosh^4 \tau \sinh^2 \tau \\ &= -\frac{5}{108}t - \frac{5}{432} \sinh(2t) + \frac{5}{432} \sinh(4t) + \frac{5}{1296} \sinh(6t) \end{aligned} \quad (8.56)$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= - \int_0^t d\tau \frac{8}{27} \cosh^2 \tau \sinh^4 \tau \\ &= -\frac{1}{54}t + \frac{1}{216} \sinh(2t) + \frac{1}{216} \sinh(4t) - \frac{1}{648} \sinh(6t) \end{aligned} \quad (8.57)$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_0^t d\tau \frac{40}{81} \cosh^6 \tau \sinh^2 \tau \\ &= -\frac{25}{1296}t - \frac{5}{648} \sinh(2t) + \frac{5}{1296} \sinh(4t) + \frac{5}{1944} \sinh(6t) + \frac{5}{10368} \sinh(8t) \end{aligned} \quad (8.58)$$

$$\begin{aligned} I_{13} &= - \int_0^t d\tau \frac{8}{81} \cosh^4 \tau \sinh^4 \tau \\ &= -\frac{1}{432}t + \frac{1}{1296} \sinh(4t) - \frac{1}{10368} \sinh(8t) \end{aligned} \quad (8.59)$$

Nach diesen 13 Termen über einfache hyperbolische Funktionen bleiben vier weitere über Quotienten dieser Funktionen.

$$\begin{aligned} I_{14} &= - \int_0^t d\tau \frac{169}{768} \tau^2 \operatorname{sech}^2 \tau \\ &= \frac{169}{768} \left(-\frac{\pi^2}{12} + t^2 - t^2 \tanh t + 2t \ln(e^{-2t} + 1) - \operatorname{Li}_2(-e^{-2t}) \right) \end{aligned} \quad (8.60)$$

$$\begin{aligned} I_{15} &= - \int_0^t d\tau \frac{169}{1152} \tau^2 \tanh^2 \tau \\ &= \frac{169}{1152} \left(\frac{\pi^2}{12} - t^2 - \frac{1}{3}t^3 + t^2 \tanh t - 2t \ln(e^{-2t} + 1) + \operatorname{Li}_2(-e^{-2t}) \right) \end{aligned} \quad (8.61)$$

$$\begin{aligned} I_{16} &= - \int_0^t d\tau \frac{65}{128} \tau \tanh \tau \\ &= \frac{65}{128} \left(\frac{\pi^2}{24} - \frac{1}{2}t^2 - t \ln(e^{-2t} + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{Li}_2(-e^{-2t}) \right) \end{aligned} \quad (8.62)$$

$$\begin{aligned}
 I_{17} &= - \int_0^t d\tau \frac{13}{36} \tau \sinh^2 \tau \tanh \tau \\
 &= \frac{13}{36} \left(-\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{4} t \cosh(2t) + \frac{1}{8} \sinh(2t) + t \ln(e^{-2t} + 1) - \frac{1}{2} \text{Li}_2(-e^{-2t}) \right)
 \end{aligned} \tag{8.63}$$

Der letzte verbleibende Integrand wird vor der Berechnung umgeformt.

$$\begin{aligned}
 &\frac{2}{3} \cosh^2 \tau \sinh^2 \tau \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2 \tau \right) \\
 &= \frac{1}{12} \left\{ \ln 2 (1 - \cosh(4\tau)) - \ln(1 - \sqrt{3} \tanh \tau) - \ln(1 + \sqrt{3} \tanh \tau) \right. \\
 &\quad \left. + \cosh(4\tau) \ln(1 - \sqrt{3} \tanh \tau) + \cosh(4\tau) \ln(1 + \sqrt{3} \tanh \tau) \right\}
 \end{aligned} \tag{8.64}$$

Das Integral über den ersten Term ist problemlos zu bestimmen.

$$I_{18a} = \int_0^t d\tau \ln 2 (1 - \cosh(4\tau)) = \ln 2 \left(t - \frac{1}{4} \sinh(4t) \right) \tag{8.65}$$

Die weiteren Terme haben komplizierte Stammfunktionen. Für die beiden Integrale über die Logarithmen ergibt sich

$$\begin{aligned}
 &- \int_0^t d\tau \ln(1 - \sqrt{3} \tanh \tau) \\
 &= \left[\frac{1}{2} \ln(1 - \sqrt{3} \tanh \tau) \ln \left(1 - \frac{1 - \sqrt{3} \tanh \tau}{1 - \sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh \tau}{1 - \sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \ln(1 - \sqrt{3} \tanh \tau) \ln \left(1 - \frac{1 - \sqrt{3} \tanh \tau}{1 + \sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \text{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh \tau}{1 + \sqrt{3}} \right) \right]_0^t \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \ln(1 - \sqrt{3} \tanh t) \ln \left(1 - \frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) \right. \\
 &\quad - \ln(1 - \sqrt{3} \tanh t) \ln \left(1 - \frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) - \text{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \\
 &\quad \left. - \text{Li}_2 \left(\frac{1}{1 - \sqrt{3}} \right) + \text{Li}_2 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{8.66}$$

und

$$- \int_0^t d\tau \ln(1 + \sqrt{3} \tanh \tau)$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{1}{2} \ln \left(1 + \sqrt{3} \tanh \tau \right) \ln \left(1 - \frac{1 + \sqrt{3} \tanh \tau}{1 - \sqrt{3}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh \tau}{1 - \sqrt{3}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \sqrt{3} \tanh \tau \right) \ln \left(1 - \frac{1 + \sqrt{3} \tanh \tau}{1 + \sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh \tau}{1 + \sqrt{3}} \right) \right]_0^t \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -\ln \left(1 + \sqrt{3} \tanh t \right) \ln \left(1 - \frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \ln \left(1 + \sqrt{3} \tanh t \right) \ln \left(1 - \frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{1 - \sqrt{3}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}} \right) \right\}. \tag{8.67}
\end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen erhalten wir als Summe dieser beiden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
I_{18b} &= - \int_0^t d\tau \ln \left(1 - \sqrt{3} \tanh \tau \right) - \int_0^t d\tau \ln \left(1 + \sqrt{3} \tanh \tau \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ -4 \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{artanh} \left(\sqrt{3} \tanh t \right) - 2t \ln \left(1 - 3 \tanh^2 t \right) \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \right. \\
&\quad \left. - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \right\}. \tag{8.68}
\end{aligned}$$

Nun stehen noch die Integrale über die Terme der letzten Zeile von (8.64) aus.

$$\begin{aligned}
&\int_0^t d\tau \cosh(4\tau) \ln \left(1 - \sqrt{3} \tanh \tau \right) \\
&= \left[-\frac{3}{2} \tau - \frac{\sqrt{3}}{4} \cosh(2\tau) - \frac{3}{4} \sinh(2\tau) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{3} \ln \left(-\cosh \tau + \sqrt{3} \sinh \tau \right) + \frac{1}{4} \sinh(4\tau) \ln \left(1 - \sqrt{3} \tanh \tau \right) \right]_0^t \\
&= \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2} t - \frac{\sqrt{3}}{4} \cosh(2t) - \frac{3}{4} \sinh(2t) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{3} \ln \left(\cosh t - \sqrt{3} \sinh t \right) + \frac{1}{4} \sinh(4t) \ln \left(1 - \sqrt{3} \tanh t \right) \right\} \tag{8.69}
\end{aligned}$$

$$\int_0^t d\tau \cosh(4\tau) \ln \left(1 + \sqrt{3} \tanh \tau \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[-\frac{3}{2}\tau + \frac{\sqrt{3}}{4} \cosh(2\tau) - \frac{3}{4} \sinh(2\tau) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{3} \ln \left(\cosh \tau + \sqrt{3} \sinh \tau \right) + \frac{1}{4} \sinh(4\tau) \ln \left(1 + \sqrt{3} \tanh \tau \right) \right]_0^t \\
 &= \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{4} \cosh(2t) - \frac{3}{4} \sinh(2t) \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{3} \ln \left(\cosh t + \sqrt{3} \sinh t \right) + \frac{1}{4} \sinh(4t) \ln \left(1 + \sqrt{3} \tanh t \right) \right\} \quad (8.70)
 \end{aligned}$$

Die Summe der beiden Terme ist

$$\begin{aligned}
 I_{18c} &= \int_0^t d\tau \cosh(4\tau) \ln \left(1 - \sqrt{3} \tanh \tau \right) + \int_0^t d\tau \cosh(4\tau) \ln \left(1 + \sqrt{3} \tanh \tau \right) \\
 &= -3t + 2\sqrt{3} \operatorname{artanh} \left(\sqrt{3} \tanh t \right) - \frac{3}{2} \sinh(2t) + \frac{1}{4} \sinh(4t) \ln \left(1 - 3 \tanh^2 t \right). \quad (8.71)
 \end{aligned}$$

Als Ergebnis für das Integral über den letzten Term aus (8.46) ergibt sich mit (8.65), (8.68) und (8.71) folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 I_{18} &= \frac{1}{12} \{ I_{18a} + I_{18b} + I_{18c} \} \\
 &= \frac{1}{24} \left\{ -6t - 3 \sinh(2t) + 4 \left(\sqrt{3} - \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{artanh} \left(\sqrt{3} \tanh t \right) \right. \\
 &\quad - 2t \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2 t \right) + \frac{1}{2} \sinh(4t) \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2 t \right) \\
 &\quad + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \\
 &\quad \left. - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \right\}. \quad (8.72)
 \end{aligned}$$

Damit ist $k_{2<}(z)$ bestimmt und es gilt mit (8.47–8.63) und (8.72)

$$\begin{aligned}
 k_{2<}(z) &= \sum_{n=0}^{18} I_n \\
 &= -\frac{4397}{41472}t + \frac{1}{3}B^{div} (t + \cosh t \sinh t) - \frac{23}{108} \cosh t \sinh t - \frac{13}{216}t \cosh^2 t \\
 &\quad + \frac{13}{108}t \cosh^4 t + \frac{26}{81} \cosh^3 t \sinh t \\
 &\quad + \frac{2}{81} \cosh^5 t \sinh t - \frac{169}{2304}t^2 \tanh t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6} \left(\sqrt{3} - \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{artanh} \left(\sqrt{3} \tanh t \right) \\
& + \frac{1}{48} (\sinh(4t) - 4t) \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2 t \right) \\
& + \frac{1}{24} \left\{ \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \right\}. \quad (8.73)
\end{aligned}$$

Dabei gilt für die Argumente auf der rechten Seite $t = \frac{m_0}{2}(z - a)$. Als Lösung der Differentialgleichung (8.36) ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
\chi_{g<}^{(2)}(z) &= k_{2<}(z) \chi_g^{(2h)}(z) \\
&= k_{2<}(z) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{m_0}{2}(z - a) \right). \quad (8.74)
\end{aligned}$$

Zum Ende diesen Abschnittes bestimmen wir den Wert von $k_{2<}(z)$, wenn der Betrag von $\chi_g^{(0)}$ die Grenze $1/\sqrt{3}$ aus (8.33) erreicht. Dies ist gerade dann der Fall, wenn $t = \pm \operatorname{artanh}(1/\sqrt{3}) = \pm \operatorname{arsinh}(1/\sqrt{2})$ wird.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}} k_{2<}(t) &= \frac{35}{72\sqrt{3}} + \frac{1}{3} B^{div} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\
&+ \frac{\ln 2}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{3091}{41472} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&- \frac{169}{2304\sqrt{3}} \operatorname{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{24} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2}{1 - \sqrt{3}} \right) + \frac{1}{24} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2}{1 + \sqrt{3}} \right) \quad (8.75)
\end{aligned}$$

Da $k_{2<}(t)$ eine ungerade Funktion in t ist, gilt für den Grenzwert bei Erreichen der negativen Schranke

$$\lim_{t \rightarrow -\operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}} k_{2<}(t) = - \lim_{t \rightarrow \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}} k_{2<}(t). \quad (8.76)$$

Diesen Wert muß $k_{2>}$, das im nächsten Abschnitt bestimmt wird, auch an den Randstellen annehmen.

8.2.2 Die Differentialgleichung für große Werte von χ_g

Für betragsmäßig große Werte der Feldvariablen χ_g ist der gesamte Ausdruck in der geschweiften Klammer von (8.32) reell. Das ist der Fall, wenn $|\chi_g| \geq 1/\sqrt{3}$ ist, wobei

diese Bedingung wiederum auf den führenden Term übertragen wird. Die folgende Rechnung gilt damit für

$$|\chi_g^{(0)}| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (8.77)$$

Die rechte Seite von (8.32) müssen wir nun vollständig mitnehmen und nach u_0 entwickeln.

$$\begin{aligned} & \frac{m_0}{2} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{u_0}{8\pi} + \frac{409}{5184} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left\{ (\chi_g^2 - 1)^2 + \frac{16}{9} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \left[2 + \frac{4}{3} B^{div} + \chi_g^2 \left(2 - \frac{4}{3} B^{div} + \frac{4}{3} \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^2 \right) \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8.78) \\ & = \frac{m_0}{2} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) \\ & + \frac{m_0 u_0}{16\pi} \left\{ -\frac{1}{16} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) + \frac{8}{9} \frac{1}{1 - \chi_g^{(0)2}} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - 2\chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \right\} \\ & + \frac{m_0 u_0^2}{128\pi^2} \left\{ \frac{1555}{41472} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) - \frac{1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2} \right)^{\frac{3}{2}}}{18 \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right)} + \frac{1}{8} \chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \right. \\ & \quad \frac{2 \left(4 \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - 9\chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) \right)^2}{81 \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right)^3} \\ & \quad + \frac{2 \left(1 + \chi_g^{(1)2} \right) - 4\chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2}}}{1 - \chi_g^{(0)2}} - 3\chi_g^{(1)2} \\ & \quad \left. - 2\chi_g^{(0)} \chi_g^{(2)} + \frac{2}{3} B^{div} - 1 + \frac{2}{3} \frac{\chi_g^{(0)2}}{1 - \chi_g^{(0)2}} \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2} \right) \right\} \quad (8.79) \end{aligned}$$

Indem wir nur die zweite Ordnung betrachten, erhalten wir mit (8.31)

$$\partial \chi_g^{(2)}(z) = \frac{m_0}{2} \left\{ \frac{1555}{41472} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) - \frac{1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2} \right)^{\frac{3}{2}}}{18 \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right)} + \frac{1}{8} \chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \left(4 \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) - 9 \chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right) \right)^2}{81 \left(1 - \chi_g^{(0)2} \right)^3} \\
 & + \frac{2 \left(1 + \chi_g^{(1)2} \right) - 4 \chi_g^{(0)} \chi_g^{(1)} \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2}}}{1 - \chi_g^{(0)2}} - 3 \chi_g^{(1)2} \\
 & + \frac{2}{3} B^{div} - 1 + \frac{2}{3} \frac{\chi_g^{(0)2}}{1 - \chi_g^{(0)2}} \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \chi_g^{(0)2} \right) - 2 \chi_g^{(0)} \chi_g^{(2)} \left. \right\}. \tag{8.80}
 \end{aligned}$$

Im Vergleich zu (8.36) erhalten wir kompliziertere Terme in der ersten und zweiten Zeile, einen zusätzlichen Wurzelterm und im Argument des Logarithmus ein umgekehrtes Vorzeichen.

In (8.80) setzen wir die bekannten Lösungen für $\chi_g^{(0)}$, (8.10) und $\chi_g^{(1)}$, (8.22) ein, und erhalten als Differentialgleichung

$$\partial \chi_g^{(2)}(z) = f_2(z) \chi_g^{(2)}(z) + g_{2>}(z) \tag{8.81}$$

mit

$$\begin{aligned}
 f_2(z) &= -m_0 \tanh \left(\frac{m_0}{2} (z - a) \right), \tag{8.82} \\
 g_{2>}(z) &= \frac{m_0}{2} \left\{ -1 + \frac{2}{3} B^{div} + \frac{1555}{41472} (1 - \tanh^2 t) \right. \\
 & \quad + \frac{1}{8} \tanh t \left[\frac{13}{48} t \operatorname{sech}^2 t + \frac{1}{3} \sinh t \left(\operatorname{sech} t + \frac{2}{3} \cosh t \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{12} \operatorname{sech}^2 t \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right) \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sinh t \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 t \right) \right] \right. \\
 & \quad - 3 \left[\frac{13}{48} t \operatorname{sech}^2 t + \frac{1}{3} \sinh t \left(\operatorname{sech} t + \frac{2}{3} \cosh t \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{12} \operatorname{sech}^2 t \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right) \right. \\
 & \quad \left. \left. - \sinh t \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 t \right) \right] \right\}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{1 - \tanh^2 t} \left(\frac{35}{18} + \frac{1}{18} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 t \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\
 & \quad + 2 \left[\frac{13}{48} t \operatorname{sech}^2 t + \frac{1}{3} \sinh t \left(\operatorname{sech} t + \frac{2}{3} \cosh t \right) \right. \\
 & \quad \quad - \frac{1}{12} \operatorname{sech}^2 t \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right) \\
 & \quad \quad \left. \left. - \sinh t \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 t \right) \right]^2 \right. \\
 & \quad - 4 \tanh t \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 t} \\
 & \quad \left[\frac{13}{48} t \operatorname{sech}^2 t + \frac{1}{3} \sinh t \left(\operatorname{sech} t + \frac{2}{3} \cosh t \right) \right. \\
 & \quad \quad - \frac{1}{12} \operatorname{sech}^2 t \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right) \\
 & \quad \quad \left. \left. - \sinh t \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 t \right) \right] \right] \\
 & - \frac{2}{81 (1 - \tanh^2 t)^3} \left[4 \left(1 - \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 t \right)^{\frac{3}{2}} \right) \right. \\
 & \quad - 9 \tanh t (1 - \tanh^2 t) \left(\frac{13}{48} t \operatorname{sech}^2 t + \frac{1}{3} \sinh t \left(\operatorname{sech} t + \frac{2}{3} \cosh t \right) \right. \\
 & \quad \quad - \frac{1}{12} \operatorname{sech}^2 t \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right) \\
 & \quad \quad \left. \left. - \sinh t \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 t \right) \right) \right]^2 \\
 & \left. + \frac{2}{3} \frac{\tanh^2 t}{1 - \tanh^2 t} \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 t \right) \right\}. \tag{8.83}
 \end{aligned}$$

Bei der Inhomogenität $g_{2>}(z)$ wurde das Argument durch $t = \frac{m_0}{2}(z - a)$ ersetzt.

Der Faktor der homogenen Differentialgleichung $f_2(z)$ ist derselbe wie (8.38), also gilt die Lösung der homogenen Differentialgleichung (8.41) auch für $|\chi_g^{(0)}| \geq 1/\sqrt{3}$.

Wir verwenden wieder den Ansatz (8.42), der hier zur Bestimmungsgleichung

$$\partial k_{2>}(z) = g_{2>}(z) \frac{1}{\chi_g^{(2h)}(z)} \quad (8.84)$$

für $k_{2>}$ führt. Da diese Differentialgleichung nur für $|\chi_g^{(0)}| \geq 1/\sqrt{3}$ gilt, also $|t| \geq \text{artanh}(1/\sqrt{3})$, lösen wir sie zunächst für $t \geq \text{artanh}(1/\sqrt{3})$. Für negative t erhalten wir die Lösung dann durch Umkehrung des Vorzeichens, da sowohl $g_{2>}$ als auch $\chi_g^{(2h)}$ gerade Funktionen in t sind, das Integral darüber also ungerade ist.

Als Randbedingung wählen wir hier zunächst $k_{2>}(t = \text{artanh}(1/\sqrt{3})) = b_2$. Dabei ist b_2 durch den Wert von $k_{2<}$ an derselben Stelle (8.75) festgelegt. Damit wird die Differentialgleichung durch

$$k_{2>}(z) = b_2 + \int_{\text{artanh}(1/\sqrt{3})}^{\frac{m_0}{2}(z-a)} d\tau g_{2>}(\tau) \frac{1}{\chi_g^{(2h)}(\tau)} \quad (8.85)$$

gelöst. Die Integrationsvariable ist durch $\tau = \frac{m_0}{2}(\zeta - a)$ substituiert. Nach dem Ausmultiplizieren des Integranden ergibt sich der folgende Ausdruck.

$$\begin{aligned} k_{2>}(z) = & b_2 + \int_{\text{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}}^t d\tau \left\{ -\frac{1}{144} \text{sech}^2 \tau \text{artanh}^2 \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}}{\sinh \tau} \right) \right. \\ & + \frac{1}{108} \text{sech}^2 \tau \text{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}}{\sinh \tau} \right) \\ & \left(\frac{39}{8} \tau + \frac{39}{8} \cosh \tau \sinh \tau + 4 \cosh^3 \tau \sinh \tau - 16 \cosh^5 \tau \sinh \tau \right. \\ & \left. + (9 + 8 \cosh^2 \tau + 16 \cosh^4 \tau) \sinh \tau \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau} \right) \\ & + \frac{1}{1296} \text{sech}^2 \tau \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau} \\ & \left(351 \cosh \tau + 249 \cosh^3 \tau - 764 \cosh^5 \tau \right. \\ & \left. - 384 \cosh^7 \tau - 39 \tau \sinh \tau (9 + 8 \cosh^2 \tau + 16 \cosh^4 \tau) \right) \\ & + \frac{2707}{41472} + \left(\frac{61}{216} + \frac{2}{3} B^{div} \right) \cosh^2 \tau + \frac{119}{324} \cosh^4 \tau + \frac{8}{27} \cosh^6 \tau \\ & + \frac{13}{108} \tau \cosh \tau \sinh \tau (4 \cosh^2 \tau - 1) - \left(\frac{3}{8} + \frac{169}{2304} \tau^2 \right) \text{sech}^2 \tau \\ & \left. - \frac{169}{1152} \tau \tanh \tau + \frac{2}{3} \cosh^2 \tau \sinh^2 \tau \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 \tau \right) \right\} \quad (8.86) \end{aligned}$$

Für die einzelnen Terme des Integranden suchen wir im folgenden Stammfunktionen, die für $t \geq \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}$ reell sind. Diese werten wir dann zum Schluß für $t = \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}$ aus und bestimmen b_2 .

Die erste Zeile von (8.86) kann partiell integriert werden.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{144} \int^t d\tau \operatorname{sech}^2 \tau \operatorname{artanh}^2 \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}}{\sinh \tau} \right) \\
 & = -\frac{1}{144} \tanh t \operatorname{artanh}^2 \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right) \\
 & + \frac{1}{144} \int^t d\tau \frac{2 \sinh \tau}{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}}{\sinh \tau} \right) \quad (8.87)
 \end{aligned}$$

Damit lautet der erste Teil der Stammfunktion

$$I_1 = -\frac{1}{144} \tanh t \operatorname{artanh}^2 \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right). \quad (8.88)$$

Den zweiten Term auf der rechten Seite von (8.87) integrieren wir zusammen mit dem zweiten Summanden des Integranden aus (8.86).

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{108} \int^t d\tau \operatorname{sech}^2 \tau \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}}{\sinh \tau} \right) \\
 & \left(\frac{39}{8} \tau + \frac{39}{8} \cosh \tau \sinh \tau + 4 \cosh^3 \tau \sinh \tau - 16 \cosh^5 \tau \sinh \tau \right. \\
 & \quad \left. + (9 + 8 \cosh^2 \tau + 16 \cosh^4 \tau) \sinh \tau \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau} \right) \\
 & + \frac{1}{72} \int^t d\tau \frac{\sinh \tau}{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}}{\sinh \tau} \right) \\
 & = \int^t d\tau \operatorname{sech}^2 \tau \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}}{\sinh \tau} \right) \\
 & \quad \times \left\{ \frac{1}{27} \left(\frac{39}{32} \tau + \cosh \tau \sinh \tau \left(\frac{39}{32} + \cosh^2 \tau - 4 \cosh^4 \tau \right) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$+ \left. \left(-27 - 3 \cosh^2 \tau - 32 \cosh^4 \tau + 32 \cosh^6 \tau \right) \frac{\sinh \tau}{216 \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}} \right\} \quad (8.89)$$

Durch eine weitere partielle Integration wird der Arcustangenshyperbolicusterm eliminiert.

$$(8.89) = \frac{1}{108} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right) \\ \times \left\{ \frac{1}{2} + 2 \cosh^2 t - 4 \cosh^4 t + \frac{39}{8} t \tanh t \right. \\ \left. + (\cosh t + 4 \cosh^3 t - 9 \operatorname{sech} t) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \right\} \\ + \frac{1}{108} \int^t d\tau \left\{ 9 - \cosh^2 \tau - 4 \cosh^4 \tau \right. \\ \left. + \frac{-\frac{1}{2} \cosh \tau - 2 \cosh^3 \tau + 4 \cosh^5 \tau - \frac{39}{8} \tau \sinh \tau}{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}} \right\} \quad (8.90)$$

Als zweiter Teil der Stammfunktion ergibt sich somit

$$I_2 = \frac{1}{108} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right) \left\{ \frac{1}{2} + 2 \cosh^2 t - 4 \cosh^4 t + \frac{39}{8} t \tanh t \right. \\ \left. + (\cosh t + 4 \cosh^3 t - 9 \operatorname{sech} t) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \right\}. \quad (8.91)$$

Nun muß noch das Integral über die letzten sechs Zeilen von (8.86) und den zweiten Term in (8.90) gebildet werden. Zuerst wenden wir uns den Termen mit Wurzelausdrücken zu.

$$\frac{1}{1296} \operatorname{sech}^2 \tau \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau} (351 \cosh \tau + 249 \cosh^3 \tau - 764 \cosh^5 \tau - 384 \cosh^7 \tau \\ - 39 \tau \sinh \tau (9 + 8 \cosh^2 \tau + 16 \cosh^4 \tau)) \\ + \frac{1}{108} \frac{-\frac{1}{2} \cosh \tau - 2 \cosh^3 \tau + 4 \cosh^5 \tau - \frac{39}{8} \tau \sinh \tau}{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}} \\ = \left(\frac{11}{48} \cosh \tau - \frac{179}{324} \cosh^3 \tau - \frac{8}{27} \cosh^5 \tau - \frac{13}{54} \tau \sinh \tau (1 + 2 \cosh^2 \tau) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{13}{48} \operatorname{sech} \tau - \frac{13}{48} \tau \operatorname{sech} \tau \tanh \tau \Big) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau} \\
 & + \left(\frac{11}{216} \cosh \tau - \frac{13}{288} \tau \sinh \tau \right) \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}}
 \end{aligned} \tag{8.92}$$

Der Term in der letzten Zeile wird partiell integriert.

$$\begin{aligned}
 & \int^t d\tau \left(\frac{11}{216} \cosh \tau - \frac{13}{288} \tau \sinh \tau \right) \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}} \\
 & = \left(\frac{11}{216} \operatorname{csch} t - \frac{13}{288} t \operatorname{sech} t \right) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \\
 & + \int^t d\tau \left(\frac{11}{216} \coth \tau \operatorname{csch} \tau + \frac{13}{288} \operatorname{sech} \tau (1 - \tau \tanh \tau) \right) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau}
 \end{aligned} \tag{8.93}$$

Mit dem Term nach dem Gleichheitszeichen in (8.93),

$$I_3 = \left(\frac{11}{216} \operatorname{csch} t - \frac{13}{288} t \operatorname{sech} t \right) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \tag{8.94}$$

haben wir einen weiteren Teil der Stammfunktion. Für die verbleibenden Wurzelterme aus (8.92) und (8.93) finden wir folgende Stammfunktion.

$$\begin{aligned}
 I_4 & = \int^t d\tau \left(\frac{11}{48} \cosh \tau - \frac{179}{324} \cosh^3 \tau - \frac{8}{27} \cosh^5 \tau - \frac{13}{54} \tau \sinh \tau (1 + 2 \cosh^2 \tau) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{13}{48} \operatorname{sech} \tau - \frac{13}{48} \tau \operatorname{sech} \tau \tanh \tau \right) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau} \\
 & + \int^t d\tau \left(\frac{11}{216} \coth \tau \operatorname{csch} \tau + \frac{13}{288} \operatorname{sech} \tau (1 - \tau \tanh \tau) \right) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau} \\
 & = \int^t d\tau \left(\frac{11}{48} \cosh \tau - \frac{179}{324} \cosh^3 \tau - \frac{8}{27} \cosh^5 \tau - \frac{13}{54} \tau \sinh \tau (1 + 2 \cosh^2 \tau) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{91}{288} \operatorname{sech} \tau + \frac{11}{216} \coth \tau \operatorname{csch} \tau - \frac{91}{288} \tau \operatorname{sech} \tau \tanh \tau \right) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 \tau} \\
 & = \frac{175}{864} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{13}{432}t \cosh t - \frac{13}{108}t \cosh^3 t + \frac{241}{1296} \cosh t \coth t - \frac{11}{108} \cosh^3 t \coth t \right. \\
& \quad \left. - \frac{4}{81} \cosh^5 t \coth t - \frac{37}{432} \operatorname{csch} t + \frac{91}{288}t \operatorname{sech} t \right) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \quad (8.95)
\end{aligned}$$

Die hyperbolischen Funktionen in der dritt- und vorletzten Zeile in (8.86) und der vorletzten Zeile von (8.90) sind ebenfalls integrierbar.

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int^t d\tau \left\{ \frac{2707}{41472} + \left(\frac{61}{216} + \frac{2}{3}B^{div} \right) \cosh^2 \tau + \frac{119}{324} \cosh^4 \tau + \frac{8}{27} \cosh^6 \tau \right. \\
& \quad + \frac{13}{108} \tau \cosh \tau \sinh \tau (4 \cosh^2 \tau - 1) - \left(\frac{3}{8} + \frac{169}{2304} \tau^2 \right) \operatorname{sech}^2 \tau \\
& \quad \left. - \frac{169}{1152} \tau \tanh \tau + \frac{1}{108} (9 - \cosh^2 \tau - 4 \cosh^4 \tau) \right\} \\
&= \int^t d\tau \left\{ \frac{6163}{41472} + \left(\frac{59}{216} + \frac{2}{3}B^{div} \right) \cosh^2 \tau + \frac{107}{324} \cosh^4 \tau + \frac{8}{27} \cosh^6 \tau \right. \\
& \quad + \frac{13}{108} \tau \cosh \tau \sinh \tau (4 \cosh^2 \tau - 1) - \left(\frac{3}{8} + \frac{169}{2304} \tau^2 \right) \operatorname{sech}^2 \tau \\
& \quad \left. - \frac{169}{1152} \tau \tanh \tau \right\} \\
&= \left(\frac{20179}{41472} + \frac{1}{3}B^{div} \right) t - \frac{13}{216} t \cosh^2 t + \frac{13}{108} t \cosh^4 t \\
& \quad + \left(\frac{73}{216} + \frac{1}{3}B^{div} + \frac{37}{324} \cosh^2 t + \frac{4}{81} \cosh^4 t \right) \cosh t \sinh t \\
& \quad - \frac{3}{8} \tanh t - \frac{169}{2304} t^2 \tanh t \quad (8.96)
\end{aligned}$$

Zum Schluß bleibt nur noch das Integral über die letzte Zeile von (8.86).

$$I_6 = \int^t d\tau \frac{2}{3} \cosh^2 \tau \sinh^2 \tau \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 \tau \right) \quad (8.97)$$

In (8.64ff) wurde ein ähnliches Integral gelöst. Dort hatte nur das Argument des Logarithmus ein umgekehrtes Vorzeichen. Da $\operatorname{Re} \ln(-x) = \operatorname{Re} \ln(x)$ ist, und die anderen Faktoren für beliebige reelle Argumente τ reell sind, kann der Realteil der Lösung (8.72) als Wert für I_6 verwendet werden.

$$I_6 = \frac{1}{24} \operatorname{Re} \left\{ -6t - 3 \sinh(2t) + 4 \left(\sqrt{3} - \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{artanh} \left(\sqrt{3} \tanh t \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -2t \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2 t \right) + \frac{1}{2} \sinh(4t) \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2 t \right) \\
 & + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \\
 & - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \Big\} \\
 = & \frac{1}{24} \left\{ -6t - 3 \sinh(2t) + 4 \left(\sqrt{3} - \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{\sqrt{3} \tanh t} \right) \right. \\
 & -2t \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 t \right) + \frac{1}{2} \sinh(4t) \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 t \right) \\
 & + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \\
 & \left. - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \right\} \quad (8.98)
 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist dabei für $t \geq \operatorname{artanh}(1/\sqrt{3})$ reell. Neben der oben angeführten Beziehung für den Logarithmus wurde noch (A.17) verwendet.

Mit (8.88), (8.91), (8.94–8.96) und (8.98) ist $k_{2>}(z)$ weitgehend bestimmt und es gilt

$$\begin{aligned}
 k_{2>}(t) &= \tilde{b}_2 + \sum_{n=1}^6 I_n \\
 &= \tilde{b}_2 - \frac{1}{144} \tanh t \operatorname{artanh}^2 \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right) \\
 &+ \frac{1}{108} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t}}{\sinh t} \right) \left\{ \frac{179}{8} + 2 \cosh^2 t - 4 \cosh^4 t + \frac{39}{8} t \tanh t \right. \\
 &\quad \left. + (\cosh t + 4 \cosh^3 t - 9 \operatorname{sech} t) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \right\} \\
 &+ \left(-\frac{13}{432} t \cosh t - \frac{13}{108} t \cosh^3 t + \frac{241}{1296} \cosh t \coth t - \frac{11}{108} \cosh^3 t \coth t \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4}{81} \cosh^5 t \coth t - \frac{5}{144} \operatorname{csch} t + \frac{13}{48} t \operatorname{sech} t \right) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t} \\
 &+ \left(\frac{9811}{41472} + \frac{1}{3} B^{div} \right) t - \frac{13}{216} t \cosh^2 t + \frac{13}{108} t \cosh^4 t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{19}{216} + \frac{1}{3} B^{div} + \frac{37}{324} \cosh^2 t + \frac{4}{81} \cosh^4 t \right) \cosh t \sinh t \\
& - \frac{3}{8} \tanh t - \frac{169}{2304} t^2 \tanh t \\
& + \frac{1}{6} \left(\sqrt{3} - \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{\sqrt{3} \tanh t} \right) \\
& + \frac{1}{48} (\sinh(4t) - 4t) \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 t \right) \\
& + \frac{1}{24} \left\{ \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 - \sqrt{3}} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t}{1 + \sqrt{3}} \right) \right\} \tag{8.99}
\end{aligned}$$

mit $t = \frac{m_0}{2}(z - a)$ auf der rechten Seite. Die Konstante \tilde{b}_2 bestimmt sich aus

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}} k_{2>}(t) & \stackrel{!}{=} \lim_{t \rightarrow \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}} k_{2<}(t) \\
& = \frac{35}{72\sqrt{3}} + \frac{1}{3} B^{div} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\
& \quad + \frac{\ln 2}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{3091}{41472} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \\
& \quad - \frac{169}{2304\sqrt{3}} \operatorname{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{24} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2}{1 - \sqrt{3}} \right) + \frac{1}{24} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2}{1 + \sqrt{3}} \right). \tag{8.100}
\end{aligned}$$

Der Grenzwert auf der linken Seite ist

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}} k_{2>}(t) & = \tilde{b}_{2+} + \frac{13}{72\sqrt{3}} + \frac{1}{3} B^{div} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\
& \quad + \frac{\ln 2}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{17299}{41472} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \\
& \quad - \frac{169}{2304\sqrt{3}} \operatorname{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{24} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2}{1 - \sqrt{3}} \right) + \frac{1}{24} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{2}{1 + \sqrt{3}} \right). \tag{8.101}
\end{aligned}$$

So erhalten wir

$$\tilde{b}_{2+} = \frac{11\sqrt{3}}{108} - \frac{37}{108} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{8.102}$$

Der Index “+” steht dafür, daß t positiv sein muß, also $t \geq \operatorname{artanh}(1/\sqrt{3})$. Die Lösung von (8.84) für $t \leq -\operatorname{artanh}(1/\sqrt{3})$ erhalten wir aus der ungeraden Symmetrie

$$k_{2>}(t) = -k_{2>}(-t). \quad (8.103)$$

Da die rechte Seite von (8.99) bis auf den konstanten Term \tilde{b}_2 eine ungerade Funktion in t ist, ist sie auch eine Lösung für $t \leq -\operatorname{artanh}(1/\sqrt{3})$ mit

$$\tilde{b}_{2-} = -\tilde{b}_{2+} = -\frac{11\sqrt{3}}{108} + \frac{37}{108} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (8.104)$$

Mit der Lösung der homogenen Differentialgleichung (8.41), dem Ergebnis für die variierte Konstante (8.99) und der Konstanten (8.102) beziehungsweise (8.104) haben wir (8.81) gelöst:

$$\begin{aligned} \chi_{g>}^{(2)}(z) &= k_{2>}(z) \chi_g^{(2h)}(z) \\ &= k_{2>}(z) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{m_0}{2}(z-a) \right). \end{aligned} \quad (8.105)$$

Das Verhalten dieser Lösung für betragsmäßig große Werte von z beziehungsweise t untersuchen wir im nächsten Abschnitt.

8.2.3 Asymptotisches Verhalten

Das asymptotische Verhalten von $\chi_{g>}^{(2)}$ bestimmen wir, indem in (8.105) die hyperbolischen Funktionen durch Exponentialfunktionen ausgedrückt werden. Für den Grenzfall $t \rightarrow \infty$ entwickeln wir die Gleichung nach e^{-t} .

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \chi_{g>}^{(2)}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{3} B^{div} + \left(4\tilde{b}_{2+} - \frac{473}{288} - \frac{2}{3} B^{div} + \frac{\pi^2}{18} + \frac{23 \ln 2}{108} - \frac{\ln^2 2}{144} \right. \right. \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3} \operatorname{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\quad - \frac{1}{6} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{6} \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \right) \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{27799}{10368} + \frac{4}{3} B^{div} + \frac{\ln 2}{16} \right) t - \frac{9}{64} t^2 \right) e^{-2t} + \mathcal{O}(e^{-4t}) \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{3} B^{div} + \left(4\tilde{b}_{2+} - \frac{473}{288} - \frac{2}{3} B^{div} + \frac{\pi^2}{12} + \frac{23 \ln 2}{108} - \frac{\ln^2 2}{144} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \operatorname{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \end{aligned}$$

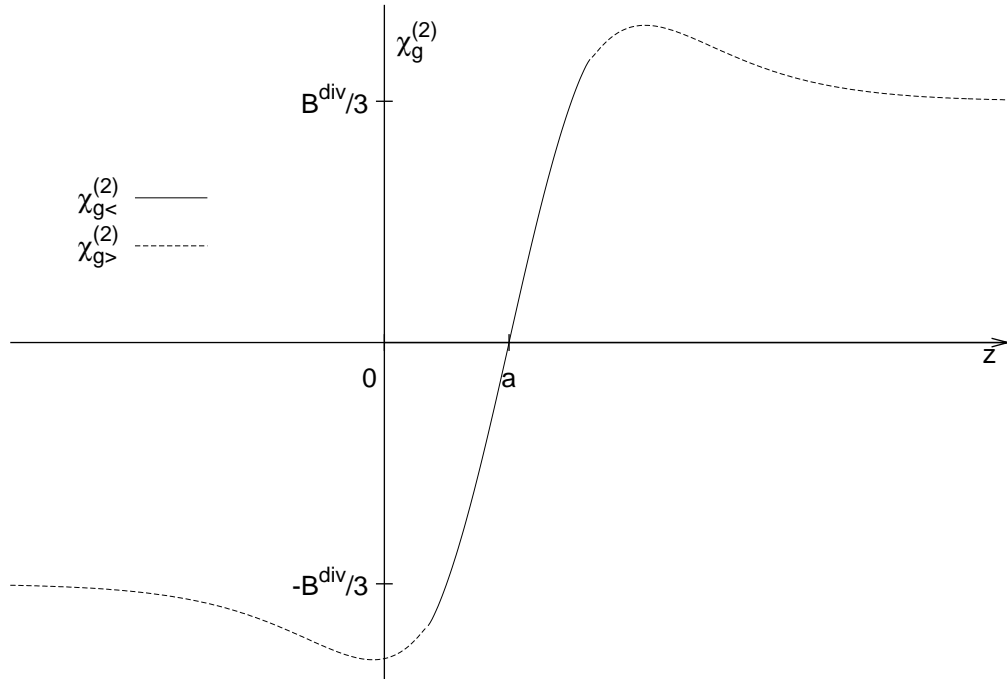


Abbildung 8.3: Die Korrektur zweiter Ordnung zum Grenzflächenprofil

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{27799}{10368} + \frac{4}{3} B^{div} + \frac{\ln 2}{16} \right) t - \frac{9}{64} t^2 \Big) e^{-2t} + \mathcal{O}(e^{-4t}) \Big\} \\
 & = \frac{1}{3} B^{div} \tag{8.106}
 \end{aligned}$$

Im Limes $t \rightarrow -\infty$ muß nach e^t entwickelt werden.

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow -\infty} \chi_{g>}^{(2)}(t) & = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left\{ -\frac{1}{3} B^{div} + \left(4\tilde{b}_{2-} + \frac{473}{288} + \frac{2}{3} B^{div} - \frac{\pi^2}{12} - \frac{23 \ln 2}{108} + \frac{\ln^2 2}{144} \right. \right. \\
 & \quad - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \operatorname{artanh}^2 \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 & \quad \left. \left. + \left(\frac{27799}{10368} + \frac{4}{3} B^{div} + \frac{\ln 2}{16} \right) t + \frac{9}{64} t^2 \right) e^{2t} + \mathcal{O}(e^{4t}) \right\} \\
 & = -\frac{1}{3} B^{div} \tag{8.107}
 \end{aligned}$$

Mit diesen Grenzwerten von $\chi_g^{(2)}$ geht das Grenzflächenprofil

$$\phi_g(z) = v_0 \left\{ \chi_g^{(0)}(z) + \chi_g^{(1)}(z) \frac{u_0}{8\pi} + \chi_g^{(2)}(z) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \quad (8.108)$$

im Limes $z \rightarrow \pm\infty$ in das Minimum v_2 (4.73) des Potentials $\mathcal{V}(\phi)$.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \phi_g(z) &= \pm v_0 \left\{ 1 + \frac{u_0}{8\pi} + \frac{1}{3} B^{div} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \\ &= \pm v_2 \end{aligned} \quad (8.109)$$

Im folgenden Abschnitt wird nun das Grenzflächenprofil $\phi_g(z)$ renormiert und als Funktion der renormierten Koppelungskonstante u_R ausgedrückt.

8.3 Renormierung

In den ersten beiden Abschnitten diesen Kapitels wurde das Grenzflächenprofil in den nackten Parametern m_0 und u_0 berechnet. Dies ist in zweiter Ordnung an dem Auftreten der divergenten Konstante B^{div} zu erkennen. Um dem Profil eine physikalische Bedeutung zu geben, müssen wir es ebenso wie die Oberflächenspannung im Kapitel 6 renormieren. Das Grenzflächenprofil wird als Feldvariable nach

$$\phi_R = \frac{1}{\sqrt{Z_3}} \phi_0 \quad (8.110)$$

durch Multiplikation renormiert. Z_3 ist in (6.18) als Reihe in der renormierten dimensionslosen Koppelungskonstante u_R gegeben. Das Grenzflächenprofil

$$\phi_g(z) = v_0 \left\{ \chi_g^{(0)}(z) + \chi_g^{(1)}(z) \frac{u_0}{8\pi} + \chi_g^{(2)}(z) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right\} \quad (8.111)$$

muß nun noch in Abhängigkeit von den renormierten Parametern geschrieben werden. Dabei ist zu beachten, daß neben der Koppelungskonstanten u_0 und dem Minimum des Potentials in niedrigster Ordnung v_0 auch die Reihenkoeffizienten $\chi_g^{(i)}$ von der nackten Masse m_0 abhängen.

Zuerst wenden wir uns der geschweiften Klammer in (8.111) zu. Die Koeffizientenfunktionen $\chi_g^{(i)}$ lassen sich als Funktionen von $t = \frac{m_0}{2}(z - a)$ schreiben. Die nackte Masse als Reihe in der renormierten Koppelung bekommen wir aus (6.15)

$$m_0 = m_R \left\{ 1 - \frac{3}{16} \frac{u_R}{8\pi} - \left(\frac{28771}{41472} + \frac{1}{3} B^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\}. \quad (8.112)$$

Die Koeffizienten dieser Entwicklung benennen wir $a_m^{(i)}$ mit

$$a_m^{(0)} = 1, \quad a_m^{(1)} = -\frac{3}{16} \quad \text{und} \quad a_m^{(2)} = -\left(\frac{28771}{41472} + \frac{1}{3} B^{div} \right). \quad (8.113)$$

Wir definieren ein renormiertes Argument $t_R = \frac{m_R}{2}(z - a)$ und können damit Funktionen von t entwickeln

$$\begin{aligned} f(t) &= f\left(\frac{m_0}{2}(z - a)\right) \\ &= f(t_R) + a_m^{(1)} t_R f'(t_R) \frac{u_R}{8\pi} + \left(a_m^{(2)} t_R f'(t_R) + \frac{1}{2} a_m^{(1)^2} t_R^2 f''(t_R)\right) \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3). \end{aligned} \quad (8.114)$$

Für (8.10) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \chi_g^{(0)}(t) &= \tanh t \\ &= \underbrace{\tanh t_R}_{\chi_g^{(0,0)}} - \underbrace{\frac{3}{16} t_R \operatorname{sech}^2 t_R}_{\chi_g^{(0,1)}} \frac{u_R}{8\pi} \\ &\quad - \underbrace{\left[\left(\frac{28771}{41472} + \frac{1}{3} B^{div}\right) t_R \operatorname{sech}^2 t_R + \frac{9}{256} t_R^2 \operatorname{sech}^2 t_R \tanh t_R\right]}_{\chi_g^{(0,2)}} \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\ &\quad + \mathcal{O}(u_R^3). \end{aligned} \quad (8.115)$$

In erster Ordnung entwickeln wir zuerst die Lösung für kleine Beträge von t . Die Koeffizienten der Entwicklung von (8.21) sind

$$\chi_{g<}^{(1,0)}(t_R) = \frac{13}{48} t_R \operatorname{sech}^2 t_R + \frac{1}{3} \sinh t_R \left(\operatorname{sech} t_R + \frac{2}{3} \cosh t_R \right) \quad (8.116)$$

und

$$\chi_{g<}^{(1,1)}(t_R) = -\frac{1}{24} t_R \left(\cosh^2 t_R + \sinh^2 t_R + \frac{87}{32} \operatorname{sech}^2 t_R \right) + \frac{13}{128} t_R^2 \operatorname{sech}^2 t_R \tanh t_R. \quad (8.117)$$

Hier ist es nur erforderlich, bis zur ersten Ordnung zu entwickeln, da $\chi_g^{(1)}$ bereits erster Ordnung in der Koppelungskonstante ist. Für $|t| \geq \operatorname{artanh}(1/\sqrt{3})$ erhalten wir aus (8.22)

$$\begin{aligned} \chi_{g>}^{(1,0)}(t_R) &= \frac{13}{48} t_R \operatorname{sech}^2 t_R - \frac{1}{12} \operatorname{sech}^2 t_R \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t_R}}{\sinh t_R} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \sinh t_R \left(\operatorname{sech} t_R + \frac{2}{3} \cosh t_R \right) \\ &\quad - \sinh t_R \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t_R} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 t_R \right) \end{aligned} \quad (8.118)$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \chi_{g>}^{(1,1)}(t_R) = & -\frac{1}{24}t_R \left(\cosh^2 t_R + \sinh^2 t_R + \frac{87}{32} \operatorname{sech}^2 t_R \right) + \frac{13}{128}t_R^2 \operatorname{sech}^2 t_R \tanh t_R \\
 & - \frac{1}{32}t_R \operatorname{sech}^2 t_R \tanh t_R \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t_R}}{\sinh t_R} \right) \\
 & - t_R \frac{10 \cosh t_R - 8 \cosh^3 t_R + 21 \operatorname{sech} t_R - 27 \operatorname{sech}^3 t_R}{96 \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t_R}}. \tag{8.119}
 \end{aligned}$$

Die Funktionen $\chi_{g<}^{(2,0)}(t_R)$ und $\chi_{g>}^{(2,0)}(t_R)$ für kleine beziehungsweise große Beträge von t_R erhalten wir direkt aus (8.74) und (8.105), indem wir das Argument t durch t_R ersetzen.

Damit haben wir die einzelnen Koeffizienten der Reihe (8.111) bis zur notwendigen Ordnung entwickelt. Die Koppelungskonstante u_0 muß auch durch u_R ausgedrückt werden. Nach (6.14) ergibt sich für die Koeffizienten

$$a_u^{(0)} = 1, \quad a_u^{(1)} = \frac{31}{16} \quad \text{und} \quad a_u^{(2)} = \left(\frac{62831}{13824} + \frac{1}{3} B^{div} \right). \tag{8.120}$$

Wird diese Entwicklung eingesetzt, haben wir die geschweifte Klammer in (8.111) durch renormierte Größen ausgedrückt.

$$\begin{aligned}
 \phi_g(z) = v_0 \left\{ \chi_g^{(0,0)}(t_R) + (\chi_g^{(0,1)}(t_R) + \chi_g^{(1,0)}(t_R)) \frac{u_R}{8\pi} \right. \\
 \left. + (\chi_g^{(0,2)}(t_R) + \chi_g^{(1,1)}(t_R) + \chi_g^{(2,0)}(t_R) + a_u^{(1)} \chi_g^{(1,0)}(t_R)) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\} \tag{8.121}
 \end{aligned}$$

Um das renormierte Grenzflächenprofil zu erhalten, müssen wir den gesamten Ausdruck nach (8.110) noch mit $Z_3^{-1/2}$ multiplizieren. Demnach ist der Vorfaktor

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{Z_3}} v_0 = & \left\{ 1 + \frac{1}{16} \frac{u_R}{8\pi} + \frac{3629}{41472} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\} \\
 & \times \sqrt{\frac{3m_R}{u_R}} \left\{ 1 - \frac{17}{16} \frac{u_R}{8\pi} - \left(\frac{46667}{41472} + \frac{1}{3} B^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\} \\
 = & \sqrt{\frac{3m_R}{u_R}} \left\{ 1 - \frac{u_R}{8\pi} - \left(\frac{53}{48} + \frac{1}{3} B^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\}. \tag{8.122}
 \end{aligned}$$

Damit sind alle Zutaten beisammen, um das Ergebnis zu bestimmen.

8.3.1 Resultat

Mit den Koeffizienten aus (8.121) und (8.122) können wir das Grenzflächenprofil

$$\phi_{gR}(z) = \sqrt{\frac{3m_R}{u_R}} \left\{ \chi_{gR}^{(0)}(t_R) + \chi_{gR \leq}^{(1)}(t_R) \frac{u_R}{8\pi} + \chi_{gR \leq}^{(2)}(t_R) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\} \quad (8.123)$$

mit den renormierten Koeffizienten $\chi_{gR}^{(i)}$ berechnen.

Der Term niedrigster Ordnung entspricht der klassischen Lösung

$$\begin{aligned} \chi_{gR}^{(0)}(t_R) &= \chi_g^{(0,0)}(t_R) \\ &= \tanh t_R. \end{aligned} \quad (8.124)$$

In erster Ordnung haben wir neben dem Koeffizienten aus (8.121) einen weiteren Term aus dem Produkt mit (8.122). Hier wird wieder eine Unterscheidung nach der Größe des Betrages von t_R eingeführt. Für $|t_R| \leq \operatorname{artanh}(1/\sqrt{3})$ gilt

$$\begin{aligned} \chi_{gR <}^{(1)}(t_R) &= \left(\chi_g^{(0,1)}(t_R) + \chi_{g <}^{(1,0)}(t_R) \right) - \chi_g^{(0,0)}(t_R) \\ &= -\frac{3}{16} t_R \operatorname{sech}^2 t_R + \frac{13}{48} t_R \operatorname{sech}^2 t_R + \frac{1}{3} \sinh t_R \left(\operatorname{sech} t_R + \frac{2}{3} \cosh t_R \right) \\ &\quad - \tanh t_R \\ &= \frac{1}{12} t_R \operatorname{sech}^2 t_R + \frac{2}{9} \sinh t_R \cosh t_R - \frac{2}{3} \tanh t_R \end{aligned} \quad (8.125)$$

und für $|t_R| \geq \operatorname{artanh}(1/\sqrt{3})$

$$\begin{aligned} \chi_{gR >}^{(1)}(t_R) &= \left(\chi_g^{(0,1)}(t_R) + \chi_{g >}^{(1,0)}(t_R) \right) - \chi_g^{(0,0)}(t_R) \\ &= \frac{1}{12} t_R \operatorname{sech}^2 t_R - \frac{1}{12} \operatorname{sech}^2 t_R \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t_R}}{\sinh t_R} \right) \\ &\quad + \frac{2}{9} \sinh t_R \cosh t_R - \frac{2}{3} \tanh t_R \\ &\quad - \sinh t_R \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t_R} \left(\frac{2}{9} - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 t_R \right). \end{aligned} \quad (8.126)$$

In Abbildung 8.4 ist die Funktion $\chi_{gR}^{(1)}$ gezeichnet. Im Gegensatz zur unrenormierten Funktion $\chi_g^{(1)}$ (8.21), (8.22) in Abbildung 8.1 ist sie nur in der Umgebung der Übergangsstelle a ungleich null und verschwindet asymptotisch für betragsmäßig große Argumente.

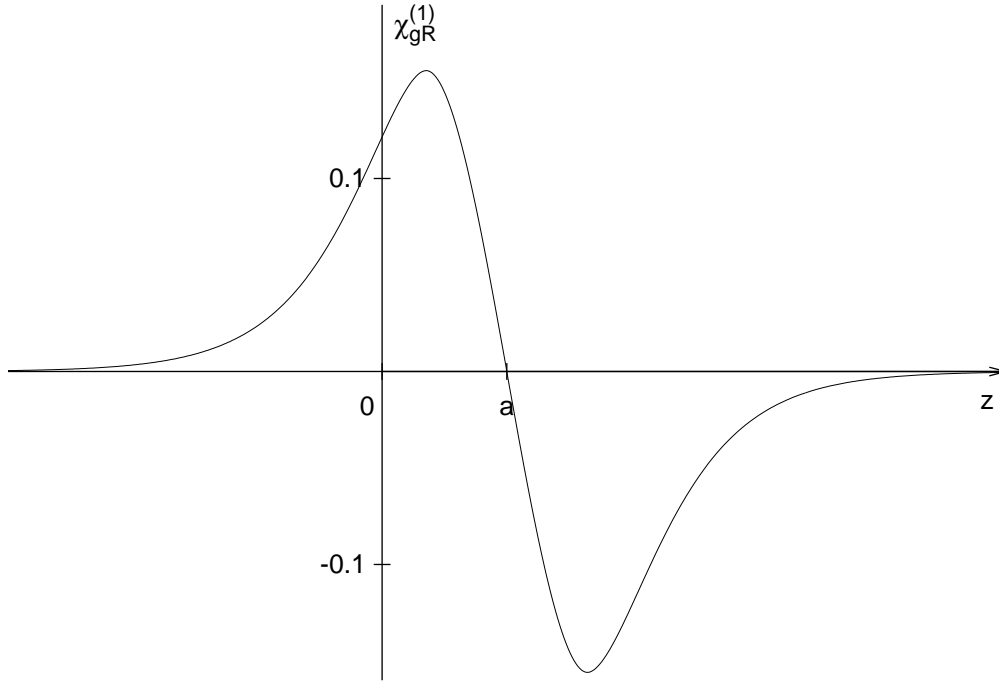


Abbildung 8.4: Renormierte Korrektur in erster Ordnung

Die zweite Ordnung setzt sich aus drei Summanden des Produktes von (8.121) und (8.122) zusammen. Den Faktor $a_u^{(1)} = 31/16$ aus der Entwicklung von u_0 haben wir bereits eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\chi_{gR<}^{(2)}(t_R) &= \left(\chi_g^{(0,2)}(t_R) + \chi_{g<}^{(1,1)}(t_R) + \chi_{g<}^{(2,0)}(t_R) + \frac{31}{16} \chi_{g<}^{(1,0)}(t_R) \right) \\
&\quad - \left(\chi_g^{(0,1)}(t_R) + \chi_{g<}^{(1,0)}(t_R) \right) - \left(\frac{53}{48} + \frac{1}{3} B^{div} \right) \chi_g^{(0,0)}(t_R) \\
&= -\frac{1}{144} t_R^2 \operatorname{sech}^2 t_R \tanh t_R \\
&\quad + t_R \left(-\frac{13}{216} + \frac{17}{216} \cosh^2 t_R - \frac{1}{24} \sinh^2 t_R - \frac{815}{1728} \operatorname{sech}^2 t_R \right) \\
&\quad + \frac{343}{648} \cosh t_R \sinh t_R + \frac{2}{81} \cosh^3 t_R \sinh t_R - \frac{217}{216} \tanh t_R \\
&\quad + \frac{1}{6} \operatorname{sech}^2 t_R \left(\sqrt{3} - \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{artanh} \left(\sqrt{3} \tanh t_R \right) \\
&\quad + \frac{1}{48} \operatorname{sech}^2 t_R \left(\sinh(4t_R) - 4t_R \right) \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2 t_R \right)
\end{aligned}$$

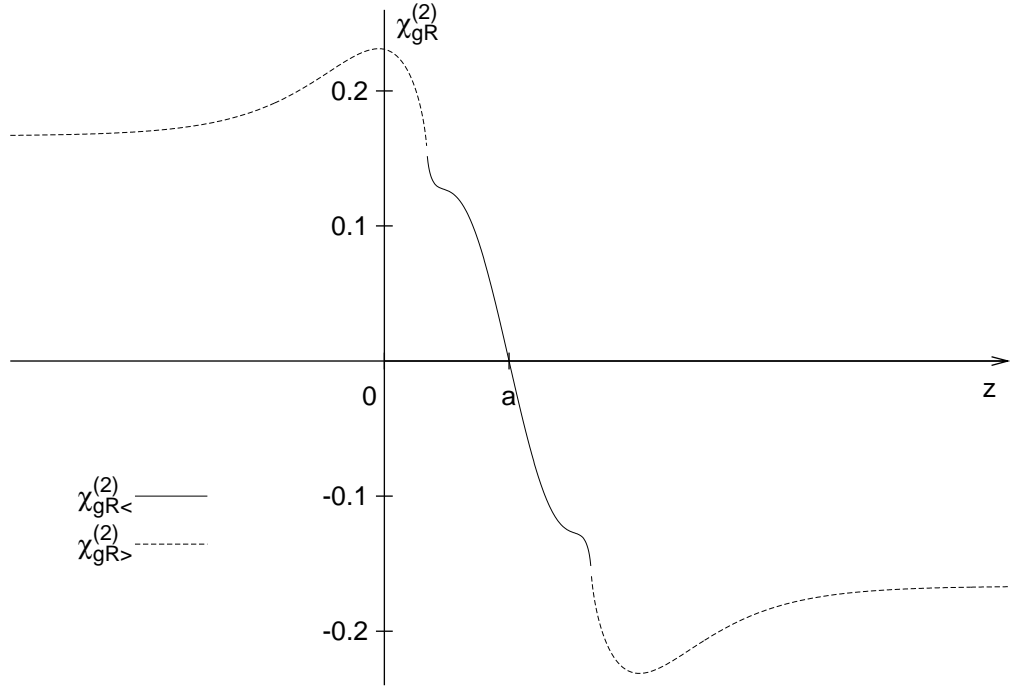


Abbildung 8.5: Renormierte Korrektur in zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{24} \operatorname{sech}^2 t_R \left\{ \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t_R}{1 - \sqrt{3}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t_R}{1 + \sqrt{3}} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t_R}{1 - \sqrt{3}} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t_R}{1 + \sqrt{3}} \right) \right\} \\
 & \hspace{15em} (8.127)
 \end{aligned}$$

Im Bereich $|t_R| \geq \operatorname{artanh}(1/\sqrt{3})$ gilt dann

$$\begin{aligned}
 \chi_{gR>}^{(2)}(t_R) &= \left(\chi_g^{(0,2)}(t_R) + \chi_{g>}^{(1,1)}(t_R) + \chi_{g>}^{(2,0)}(t_R) + \frac{31}{16} \chi_{g>}^{(1,0)}(t_R) \right) \\
 & - \left(\chi_g^{(0,1)}(t_R) + \chi_{g>}^{(1,0)}(t_R) \right) - \left(\frac{53}{48} + \frac{1}{3} B^{div} \right) \chi_g^{(0,0)}(t_R) \\
 &= \left(\frac{11\sqrt{3}}{108} - \frac{37}{108} \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{sech}^2 t_R \operatorname{sgn} t_R \\
 & - \frac{1}{144} \operatorname{sech}^2 t_R \tanh t_R \operatorname{artanh}^2 \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t_R}}{\sinh t_R} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{108} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t_R}}{\sinh t_R} \right) \left\{ 2 - 4 \cosh^2 t_R + \frac{223}{16} \operatorname{sech}^2 t_R \right. \\
 & \quad + \frac{3}{2} t_R \operatorname{sech}^2 t_R \tanh t_R \\
 & \quad \left. + (4 \cosh t_R + \operatorname{sech} t_R - 9 \operatorname{sech}^3 t_R) \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t_R} \right\} \\
 & + \sqrt{-\frac{1}{2} + \sinh^2 t_R} \left\{ \frac{1}{108} t_R (-4 \cosh t_R - \operatorname{sech} t_R + 9 \operatorname{sech}^3 t_R) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{233}{648} \sinh t_R - \frac{4}{81} \cosh^2 t_R \sinh t_R + \frac{145}{288} \operatorname{sech} t_R \tanh t_R \right\} \\
 & - \frac{1}{144} t_R^2 \operatorname{sech}^2 t_R \tanh t_R \\
 & + t_R \left(-\frac{13}{216} + \frac{17}{216} \cosh^2 t_R - \frac{1}{24} \sinh^2 t_R - \frac{223}{1728} \operatorname{sech}^2 t_R \right) \\
 & + \frac{209}{648} \cosh t_R \sinh t_R + \frac{4}{81} \cosh^3 t_R \sinh t_R \\
 & \quad - \frac{19}{27} \tanh t_R - \frac{3}{8} \operatorname{sech}^2 t_R \tanh t_R \\
 & + \frac{1}{6} \operatorname{sech}^2 t_R \left(\sqrt{3} - \operatorname{artanh} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \operatorname{artanh} \left(\frac{1}{\sqrt{3} \tanh t_R} \right) \\
 & + \frac{1}{48} \operatorname{sech}^2 t_R (\sinh(4t_R) - 4t_R) \ln \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 t_R \right) \\
 & + \frac{1}{24} \operatorname{sech}^2 t_R \left\{ \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t_R}{1 - \sqrt{3}} \right) - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 - \sqrt{3} \tanh t_R}{1 + \sqrt{3}} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t_R}{1 - \sqrt{3}} \right) + \operatorname{Li}_2 \left(\frac{1 + \sqrt{3} \tanh t_R}{1 + \sqrt{3}} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{8.128}$$

Die Signum-Funktion in der ersten Zeile stammt aus den unterschiedlichen Vorzeichen von $\tilde{b}_{2\pm}$ (8.102), (8.104). Für den gesamten Argumentbereich ist die Funktion $\chi_{gR}^{(2)}$ in Abbildung 8.5 aufgetragen.

In Abbildung 8.6 ist die Summe der beiden niedrigsten Ordnungen des renormierten Grenzflächenprofils für einen typischen Fixpunktwert der Koppelungskonstanten gezeichnet ($u_R \approx 15$). Zu erkennen ist, daß es zu einer Aufweitung der Grenzfläche kommt, der Übergang der einen Phase in die andere also nicht so schnell erfolgt, wie es die klassische Rechnung vorhersagen würde.

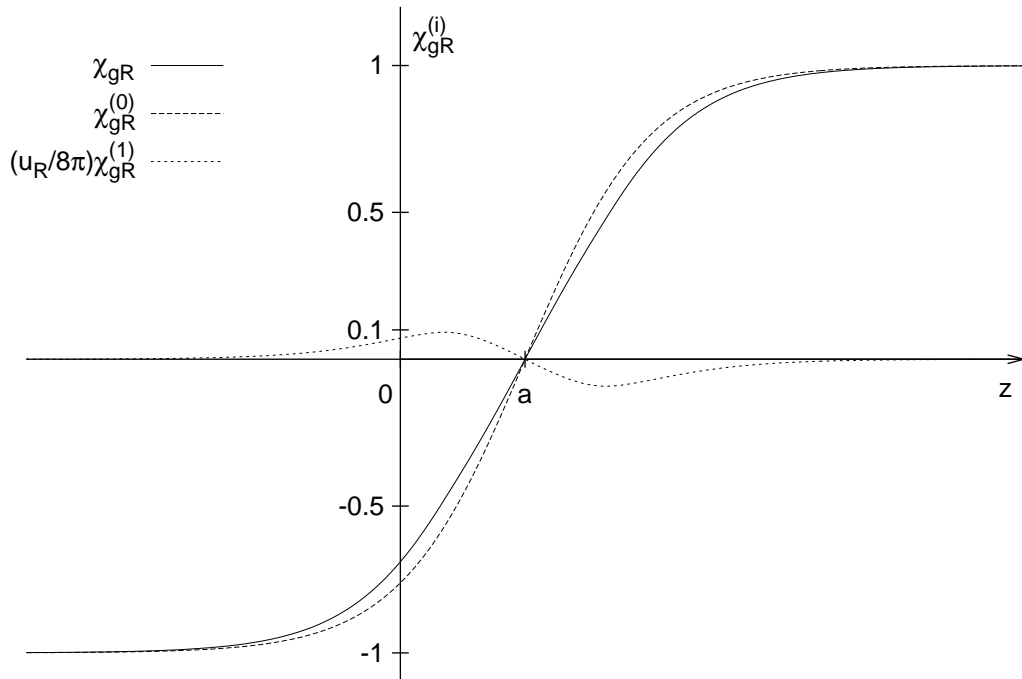


Abbildung 8.6: Renormiertes Grenzflächenprofil in erster Ordnung

Die gesamte Grenzfläche ϕ_{gR} ist nach (8.123) durch

$$\phi_{gR}(z) = \sqrt{\frac{3m_R}{u_R}} \left\{ \chi_{gR}^{(0)}(t_R) + \chi_{gR}^{(1)}(t_R) \frac{u_R}{8\pi} + \chi_{gR}^{(2)}(t_R) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_R^3) \right\} \quad (8.129)$$

gegeben. In Abbildung 8.7 sind die einzelnen Summanden der Entwicklung sowie ihre Summe aufgetragen. Im inneren Bereich der Grenzfläche sind die Korrekturen erster und zweiter Ordnung im Betrag vergleichbar. Außerhalb dieses Bereiches dominiert sogar der Term zweiter Ordnung die Korrektur zur klassischen Lösung, da $\chi_{gR}^{(1)}$ verschwindet.

8.4 Kinetische Korrekturen

In den ersten Abschnitten dieses Kapitels 8 wurde das Grenzflächenprofil als Lösung der Differentialgleichung (8.3) mit konstantem Z_3 bestimmt. Wenn wir nun die feldabhängige Feldrenormierungskonstante $Z_3(\phi)$ aus (7.29) einsetzen, erhalten wir eine Lösung mit kinetischen Korrekturen.

Ausgangspunkt zur Bestimmung der Differentialgleichung ist die Ableitung der effektiven Wirkung und es gilt (7.39). Wie auch im Abschnitt 7.3.2 folgt hier die

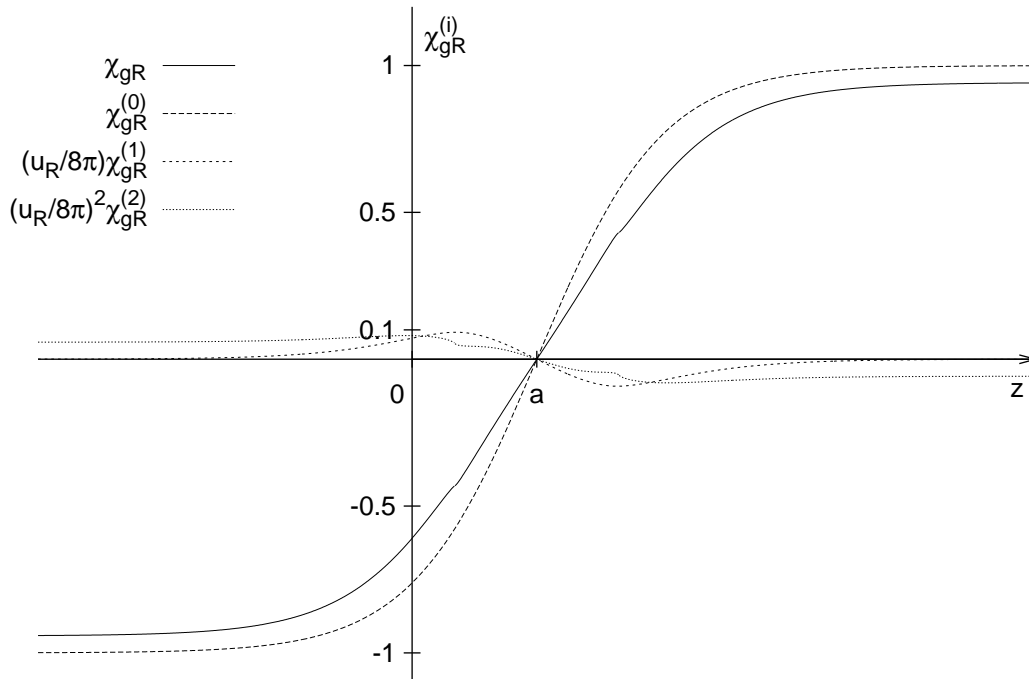


Abbildung 8.7: Renormiertes Grenzflächenprofil in zweiter Ordnung

Gleichung (7.42), die nach dem Wurzelziehen zu

$$\partial\phi_g = \sqrt{2 Z_3(\phi_g) \mathcal{V}(\phi_g)} \quad (8.130)$$

wird.² Dabei wurde wie in (8.3) die positive Wurzel genommen. In der Baumnäherung wird diese Gleichung durch das klassische Profil (2.12) gelöst. Doch in erster Ordnung treten dieselben Probleme mit dem Pol der Feldrenormierungskonstante bei $|\phi| = z_1$ (7.31) auf, wie bei der Berechnung der Oberflächenspannung. Eine Lösung für $|\phi| < z_1$ läßt sich finden, da in diesem Fall durch die Realteilbildung $Z_3(\phi) = 1 + \mathcal{O}(u_0^2)$, die erste Ordnung demnach null ist. Für $|\phi| > z_1$ muß über den Pol hinweg integriert werden, dadurch kommt es zu demselben divergenten Verhalten wie in (7.50). Es läßt sich hier kein Grenzflächenprofil mit kinetischen Korrekturen bestimmen.

²Die Feldrenormierungskonstante Z_3 ist \mathcal{Z}^{-1} nach (7.2), vergleiche die Fußnote auf Seite 71.

8.5 Diskussion

Zum Abschluß des Kapitels wird nun das Ergebnis (8.129) mit Resultaten aus der Literatur verglichen.

Zum einen existieren Lösungen für das Grenzflächenprofil in der ε -Entwicklung [OK77, RJ78]. Die Rechnung wird in $D = 4 - \varepsilon$ Dimensionen durchgeführt und zum Schluß $\varepsilon = 1$ gesetzt. Alle Größen sind dadurch als Reihe in ε gegeben. Der Ordnungsparameter wird in [OK77] mit $M(r)$ bezeichnet, wobei die Ortsvariable r mit dem hier verwendeten $(z - a)$ übereinstimmt. Es gilt nach Gleichung (4.17) aus dem Artikel

$$M(r) = A|\tau|^\beta \frac{\tanh(\frac{r}{2L})}{\sqrt{1 + \frac{2a \operatorname{sech}^2(\frac{r}{2L})}{3+a}}}. \quad (8.131)$$

Der Vorfaktor $M_0 = A|\tau|^\beta$ ist die Magnetisierung (1.5d) im homogenen System. Der Parameter τ entspricht der reduzierten Temperatur. Die weiteren Größen in (8.131) sind als Reihen in ε gegeben.

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{6} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ a &= \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\varepsilon \\ A &= \sqrt{\frac{6}{g}} \sqrt{1 + \frac{1}{3}\varepsilon(1 - \ln 2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)} \\ L &= \sqrt{\frac{|\tau|^{-1-\varepsilon/6}}{2 + \frac{\varepsilon}{3}(\sqrt{3}\pi - 4 + \ln 2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}} \end{aligned} \quad (8.132)$$

Dabei ist L die Korrelationslänge des Systems. Diese identifizieren wir mit der inversen Masse und verwenden $t_R = \frac{r}{2L}$ als Argument der hyperbolischen Funktionen. Indem der Wert (8.132) in (8.131) eingesetzt wird, erhalten wir für $M(r)$ eine Funktion, die von ε und dem Ortsparameter t_R abhängt. Die Entwicklung ergibt

$$\begin{aligned} M(t_R) = M_0 \left\{ \tanh t_R - \varepsilon \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \operatorname{sech}^2 t_R \tanh t_R \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \frac{\pi^2}{216} \operatorname{sech}^2 t_R \tanh t_R (2 + 3 \operatorname{sech}^2 t_R) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right\}. \end{aligned} \quad (8.133)$$

Wenn $\varepsilon = 0$ gesetzt wird, vereinfacht sich (8.131) zum klassischen Grenzflächenprofil. Die Korrektur erster Ordnung in ε , mit $a_M^{(1)}$ bezeichnet, ist in Abbildung 8.8 aufgetragen. Als Vergleich ist die Korrektur erster Ordnung der Störungsentwicklung $\chi_{gR}^{(1)}$ mit dem Vorfaktor bei $u_R^* = 14.3$ ebenfalls eingezeichnet. Diese Korrekturen entsprechen sich in der Form, der Term erster Ordnung in der ε -Entwicklung ist nur zirka ein Drittel größer. Da es sich um unterschiedliche Zugänge handelt, ist keine

exakte quantitative Übereinstimmung zu erwarten und das Ergebnis dieser Arbeit (8.129) steht nicht im Widerspruch zu dem Resultat aus [OK77]. Das Ergebnis aus [RJ78] ist mit dem oben diskutierten vergleichbar.

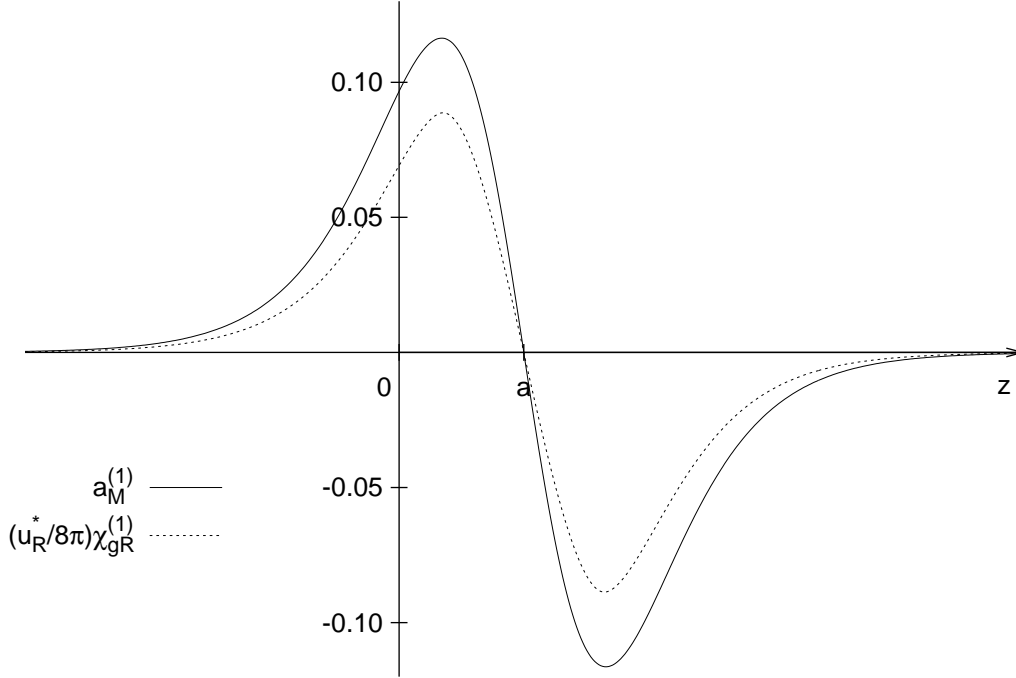


Abbildung 8.8: Korrektur erster Ordnung der ε -Entwicklung

In [JR78] ist ein Ein-Schleifen-Resultat für das Grenzflächenprofil bestimmt. Dabei ist die Rechnung in Anwesenheit eines stabilisierenden äußeren Feldes durchgeführt. Im Fall von binären Fluiden ist dies das Gravitationsfeld. Das dimensionslose Ordnungsparameterprofil wird mit

$$m(z) = \tanh\left(\frac{z}{\xi}\right) + c_1 \left(\frac{z}{\xi}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{\xi}\right) + (c_2 + c_3 \ln \delta\lambda) \tanh\left(\frac{z}{\xi}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{\xi}\right) \quad (8.134)$$

angegeben. Die Koeffizienten c_i sind proportional zum Fixpunktwert der Kopplungskonstanten und als numerische Werte angegeben. Der Parameter $\delta\lambda$ ist im wesentlichen proportional zum äußeren Feld. Da wir den Fall ohne äußeres Feld betrachtet haben, muß zum Vergleich $\delta\lambda$ gegen null gehen. Damit wird der letzte Term in (8.134) dominierend und es ergibt sich, da c_3 positiv ist, ebenso wie in dieser Arbeit eine Aufweitung der Grenzfläche.

Neben diesen analytischen Grenzflächenprofilen gibt es ein Grenzflächenprofil aus einer Monte-Carlo Simulation [STA97]. Die Abbildung 1(b) in dieser Arbeit

zeigt, daß die berechneten Werte des Ordnungsparameters ziemlich gut durch eine angepaßte klassische Lösung beschrieben werden. Es wird

$$m(x) = 0.372 \tanh((138.5 - x) 0.1) \quad (8.135)$$

für eine Temperatur, die einen Prozent unterhalb der kritischen Temperatur liegt, angegeben. Um unser Resultat hiermit vergleichen zu können, wird die geschweifte Klammer von (8.129) durch einen Tangenshyperbolicus mit einem Faktor im Argument angepaßt. Bei der Minimierung der quadratischen Abweichung ergibt dies

$$\chi_{fit}(t_R) = \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2\right) \tanh(0.800 t_R). \quad (8.136)$$

Der Vorfaktor ist durch das asymptotische Verhalten der $\chi_{gR}^{(i)}$ gegeben und hat bei $u_R^* = 14.3$ den Wert 0.946. Diese Funktion weicht im gesamten Wertebereich um weniger als 2.5% vom entsprechenden Term in (8.129) ab. Das Argument ist $t_R = \frac{m_R}{2} z$, eine Verschiebung entlang der z -Achse kann weggelassen werden. Indem die renormierte Masse als inverse Korrelationslänge eingesetzt und diese durch ihr kritisches Verhalten (1.5a) auf dem Gitter ausgedrückt wird, ergibt sich

$$0.800 \frac{m_R}{2} z = 0.800 \frac{1}{2\xi} z = 0.800 \frac{(-t)^\nu}{2f_- a} x a. \quad (8.137)$$

Die Gitterkonstante ist dabei mit a bezeichnet, für die Ortskoordinate gilt also $z = x a$. Durch einsetzen der Werte $f_- = 0.2502(8)$ [LF89] und $\nu = 0.6304(13)$ [GZJ98] beziehungsweise $\nu = 0.6298(5)$ [HPV99] ergibt sich bei $t = -0.01$ (ein Prozent unterhalb T_c)

$$0.800 \frac{m_R}{2} z = x 0.0877(8). \quad (8.138)$$

Die Abweichung zum Koeffizienten in (8.135) liegt bei ungefähr 12%. Diese Abweichung ist so gering, daß kein Widerspruch zwischen dem Resultat der Monte-Carlo Simulation und unserem Ergebnis besteht.

Zusammenfassung

Das Verhalten von Grenzflächen am kritischen Punkt wurde in dieser Arbeit untersucht. Dabei wurde zunächst im Rahmen der ϕ^4 -Theorie eine Entwicklung der effektiven Wirkung nach der Ableitungsordnung hergeleitet. Der führende Term dieser Entwicklung, das effektive Potential, wurde bis zur Zwei-Schleifen-Ordnung bestimmt. Das Ergebnis in der symmetrischen Phase ist (4.54ff) und in der Phase gebrochener Symmetrie ergibt sich (4.64ff). Diese Reihen konnten an ihren Minima durch einen Vergleich mit echten Vertex-Funktionen verifiziert werden.

Die reduzierte Oberflächenspannung wurde aus dem Potential der gebrochenen Phase berechnet. Nach der Renormierung ergibt sich für das universelle Amplitudenverhältnis

$$R_- = \frac{\sigma_R}{m_R^2} = 0.100(13).$$

Dieser Wert stellt das Ergebnis der Mittelung über drei Padé-Borel-Approximanten am Fixpunktwert der Koppelungskonstanten von $u_R^* = 14.3$ dar.

Der kinetische Term als zweiter Term der Ableitungsentwicklung der effektiven Wirkung wurde bis zur Ein-Schleifen-Ordnung berechnet. Die Ergebnisse sind (7.27) in der symmetrischen Phase und (7.29) in der Phase gebrochener Symmetrie. An den Minima der zugehörigen effektiven Potentiale ausgewertet ergibt sich die statische Feldrenormierungskonstante, die mit Literaturwerten verifiziert werden konnte. Eine kinetische Korrektur zur Oberflächenspannung ließ sich nicht berechnen, da in einem Integral eine wesentliche Singularität auftritt.

Schließlich wurde mit dem effektiven Potential in der Phase gebrochener Symmetrie das Grenzflächenprofil aus der Differentialgleichung (8.3)

$$\partial\phi_g = \sqrt{2Z_3\mathcal{V}(\phi_g)}$$

bestimmt. Das Ergebnis ist (8.123) mit dem Koeffizienten (8.124) in Baumnäherung, (8.125) und (8.126) in erster Ordnung sowie (8.127) und (8.128) in zweiter Ordnung. In Abbildung 8.7 sind die einzelnen Terme gezeichnet. Auch zum Grenzflächenprofil konnten keine kinetischen Korrekturen bestimmt werden, da es zu denselben Problemen wie bei der Berechnung der kinetischen Korrekturen zur Oberflächenspannung kommt.

Anhang

A Formelsammlung

A.1 Die Gammafunktion

Bei der Berechnung von einigen Impulsintegralen wird die Eulersche Integraldarstellung der Gammafunktion genutzt [AS65, 6.1]

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \\ &= k^z \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-kt}.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Diese Darstellung gilt für $\operatorname{Re}(z) > 0$ und $\operatorname{Re}(k) > 0$. Die Funktionalgleichung ist

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).\tag{A.2}$$

A.1.1 Schwinger-Parametrisierung

Durch Umformung von (A.1) bekommen wir die sogenannte Schwinger-Parametrisierung

$$\frac{1}{k^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-kt}.\tag{A.3}$$

Ein weiterer Integrationskniff von Schwinger ist

$$\log A - \log B = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \{e^{-Bt} - e^{-At}\}.\tag{A.4}$$

Diese Relation läßt sich mit Hilfe des Exponential-Integrales beweisen.

A.2 Volumen der Sphäre

Das Volumen einer D -dimensionalen Sphäre läßt sich durch die Berechnung eines Gaußschen Integrales auf zwei unterschiedlichen Wegen bestimmen [BEL91]. Dies

ist zum einen die Integration über kartesische Koordinaten und zum anderen über Polarkoordinaten.

$$J = \int d^D x e^{-(x_1^2 + \dots + x_D^2)} = \pi^{\frac{D}{2}} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} J &= \mathcal{S}_D \int_0^\infty dr r^{D-1} e^{-r^2} \\ &= \mathcal{S}_D \int_0^\infty d\rho \frac{1}{2} \rho^{\frac{D}{2}-1} e^{-\rho} = \frac{\mathcal{S}_D}{2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Die beiden Ergebnisse für J sind gleich und es folgt

$$\mathcal{S}_D = \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}. \quad (\text{A.7})$$

Für ganzzahlige Dimensionen ergeben sich die folgende Werte

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &= 2\pi \\ \mathcal{S}_3 &= 4\pi \\ \mathcal{S}_4 &= 2\pi^2. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Gleichung (A.7) gilt auch für beliebige rationale Werte der Raumdimension und für $D = 3 - \epsilon$ ergibt sich

$$\mathcal{S}_{3-\epsilon} = \frac{2\pi^{\frac{3-\epsilon}{2}}}{\frac{1-\epsilon}{2} \Gamma\left(\frac{1-\epsilon}{2}\right)} = 4\pi^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1-\epsilon} \pi^{-\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-\epsilon}{2}\right)}. \quad (\text{A.9})$$

Den letzten Term in (A.9) entwickeln wir wie folgt

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1-\epsilon}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\epsilon}{2} \partial_z \Gamma(z) \Big|_{\frac{1}{2}} + \frac{\epsilon^2}{8} \partial_z^2 \Gamma(z) \Big|_{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ &= \sqrt{\pi} + \frac{\epsilon}{2} \sqrt{\pi} (\gamma + 2 \ln 2) + \frac{\epsilon^2}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2} + (\gamma + 2 \ln 2)^2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Bei den Ableitungen der Γ -Funktion tritt die Eulersche Konstante γ auf. Mit (A.10) wird (A.9) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{3-\epsilon} &= 4\pi^{\frac{3}{2}} [1 + \epsilon + \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)] \left[1 - \frac{\ln \pi}{2} \epsilon + \frac{\ln^2 \pi}{8} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right] \\ &\quad \pi^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{\gamma + 2 \ln 2}{2} \epsilon + \left(\frac{(\gamma + 2 \ln 2)^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} \right) \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right] \\ &= 4\pi \left\{ 1 + \left(1 - \frac{\gamma + \ln 4\pi}{2} \right) \epsilon \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(1 - \frac{\pi^2}{16} - \frac{\gamma + \ln 4\pi}{2} + \frac{(\gamma + \ln 4\pi)^2}{8} \right) \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \}. \quad (\text{A.11})$$

Die Koeffizienten von (A.11) ergeben numerisch

$$\mathcal{S}_{3-\epsilon} = 4\pi \{ 1 - 0.55412 \epsilon + 0.036674 \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \}. \quad (\text{A.12})$$

A.3 Logarithmus und Umkehrfunktionen

Bei der Berechnung verschiedener Integrale werden Relationen zwischen inversen hyperbolischen, trigonometrischen und Logarithmusfunktionen genutzt.

A.3.1 Hyperbolische Funktionen

Die inversen hyperbolischen Funktionen (Areafunktionen) lassen sich durch Logarithmen ausdrücken [BS81, 3.4.4.2].

$$\begin{aligned} \operatorname{artanh} z &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+z) - \frac{1}{2} \ln(1-z) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arcoth} z &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(z+1) - \frac{1}{2} \ln(z-1) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\operatorname{arsinh} z = \ln \left(z + \sqrt{z^2 + 1} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$\operatorname{arcosh} z = \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right) \quad (\text{A.16})$$

Der artanh für Argumentbeträge größer als eins läßt sich wie folgt berechnen

$$\operatorname{artanh} \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\ln(-1) + \ln \left(\frac{1+z}{1-z} \right) \right) = i \frac{\pi}{2} + \operatorname{artanh} z. \quad (\text{A.17})$$

A.3.2 Arcustangens

Für den Arcustangens gilt analog zu (A.13)

$$\operatorname{arctan} z = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right). \quad (\text{A.18})$$

Daraus folgt

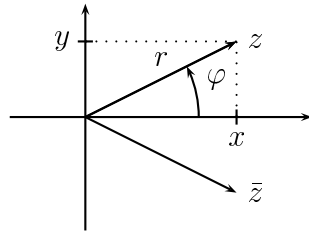
$$\operatorname{arctan} \frac{1}{z} = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1+iz^{-1}}{1-iz^{-1}} \right) = \frac{1}{2i} \left(\ln(-1) - \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right) \right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan} z \quad (\text{A.19})$$

und

$$2 \arctan z = \frac{1}{2i} 2 \ln \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right) = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{1-z^2+2iz}{1-z^2-2iz} \right) = \arctan \frac{2z}{1-z^2}. \quad (\text{A.20})$$

Bei $z = x + iy$ bzw. $z' = x' + iy'$ gilt für die Summe der konjugiert komplexen Terme

$$\ln z \ln z' + \ln \bar{z} \ln \bar{z}' = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \ln(x'^2 + y'^2) - 2 \arctan \frac{y}{x} \arctan \frac{y'}{x'}. \quad (\text{A.21})$$



$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \\ z &= r e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Wie aus der Abbildung ersichtlich, ist

$$\begin{aligned} \ln z \ln z' + \ln \bar{z} \ln \bar{z}' &= (\ln r + i\varphi)(\ln r' + i\varphi') + (\ln r - i\varphi)(\ln r' - i\varphi') \\ &= 2 \ln r \ln r' - 2\varphi\varphi' \\ &= \frac{1}{2} \ln r^2 \ln r'^2 - 2 \arctan \frac{y}{x} \arctan \frac{y'}{x'}. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Damit kann (A.21) als bewiesen gelten.

A.3.3 Dilogarithmus

Der Dilogarithmus ist durch

$$\text{Li}_2 z = - \int_0^z dt \frac{\ln(1-t)}{t} \quad (\text{A.23})$$

gegeben. $\text{Li}_2(1-z)$ wird auch Spence-Integral genannt. Die Reihenentwicklung für $|z| \leq 1$ ist

$$\text{Li}_2 z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}. \quad (\text{A.24})$$

Daraus läßt sich der Funktionswert $\text{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6}$ bestimmen.

Es gilt nach [AS65, 27.7.3-5]

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(1-z) = -\ln(z) \ln(1-z) + \frac{\pi^2}{6}, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (\text{A.25})$$

$$\text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(-z) = \frac{1}{2} \text{Li}_2(z^2), \quad 0 \leq z < 1 \quad (\text{A.26})$$

$$\operatorname{Li}_2(1-z) + \operatorname{Li}_2\left(1 - \frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2} \ln^2 z, \quad 0 \leq z \leq 1. \quad (\text{A.27})$$

In diesen Relationen sind die Gültigkeitsbereiche nicht maximal, sie lassen sich auf größere Bereiche der komplexen Zahlenebene ausdehnen. So ist (A.25) für die gesamten komplexen Zahlen \mathbb{C} gültig. Aus (A.27) ist durch Austausch der Argumente sofort ersichtlich, daß sie auch für $z \geq 1$ gilt. Tatsächlich ist sie in der geschlitzten Zahlenebene $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-^0$ korrekt, also insbesondere auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ ohne $z = -1$.

Nun können wir zeigen, daß

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-ix}{-1-ix}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1+ix}{-1+ix}\right) = -\frac{\pi^2}{6} + 2 \arctan^2 x \quad (\text{A.28})$$

für $x \in \mathbb{R}$ gilt. Bei $z = \frac{1+ix}{-1+ix}$ gilt $\bar{z} = z^{-1}$, da $|z| = 1$ ist. Aus den oben angegebenen Relationen (A.25) und (A.27) ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Li}_2(z) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right) &= -\operatorname{Li}_2(1-z) - \ln(z) \ln(1-z) + \frac{\pi^2}{6} \\ &\quad - \operatorname{Li}_2(1-\frac{1}{z}) - \ln\left(\frac{1}{z}\right) \ln(1-\frac{1}{z}) + \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{1}{2} \ln^2 z + \ln z (-\ln(1-z) + \ln(z-1) - \ln z) + \frac{\pi^2}{3} \\ &= -\frac{1}{2} \ln^2 z + \ln z \ln(-1) + \frac{\pi^2}{3} \\ &= -\frac{1}{2} (\ln^2 z - 2 \ln z \ln(-1) + \ln^2(-1)) + \frac{1}{2} \ln^2(-1) + \frac{\pi^2}{3} \\ &= -\frac{1}{2} (\ln z - \ln(-1))^2 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{3} \\ &= -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2(-z). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Den Logarithmus formen wir nach (A.18) um

$$\ln(-z) = \ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) = 2i \arctan x. \quad (\text{A.30})$$

Damit ist (A.28) bewiesen. Wenn in (A.29) $z = \frac{a-x}{a+x}$ gesetzt wird, ist gezeigt, daß

$$\operatorname{Li}_2\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{a-x}{a+x}\right) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2\left(1 - \frac{2a}{a+x}\right) \quad (\text{A.31})$$

gilt.

B Integrale

Im Verlauf der Berechnung des effektiven Potentials treten Integrale vom Typ

$$J_n(D) := \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + 1)^n} \quad (\text{B.1})$$

auf. Mit der Definition

$$J_n^m(D) := \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m^2)^n} \quad (\text{B.2})$$

gilt für $n > 1$ die Rekursionsrelation

$$\begin{aligned} J_n^m(D) &= -\frac{1}{n-1} \frac{\partial}{\partial m^2} J_{n-1}^m(D) \\ &= (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial (m^2)^{n-1}} J_1^m(D) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

und

$$J_n(D) = J_n^m(D)|_{m=1}. \quad (\text{B.4})$$

Wegen (B.3) muß nur der Fall $n = 1$ integriert werden.

$$\begin{aligned} J_1^m(D) &:= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D} \mathcal{S}_D \int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{1}{k^2 + m^2} \\ &= \frac{m^{D-2}}{(2\pi)^D} \mathcal{S}_D \int_0^\infty dk k^{D-1} \frac{1}{k^2 + 1} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Im letzten Ausdruck wurde k/m mit k substituiert. Den verbleibenden Propagator parametrisieren wir nach (A.3) und integrieren mit (A.1).

$$J_1^m(D) = \frac{2m^{D-2}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty dk k^{D-1} \int_0^\infty dt e^{-t(k^2+1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2m^{D-2}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty dt e^{-t} \int_0^\infty dk k^{D-1} e^{-tk^2} \\
&= \frac{2m^{D-2}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty dt e^{-t} \int_0^\infty \frac{1}{2} d\kappa \kappa^{\frac{D-2}{2}} e^{-t\kappa} \\
&= \frac{m^{D-2}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{-\left(\frac{D}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \\
&= \frac{m^{D-2}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(\frac{D}{2})} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right) \\
&= \frac{(m^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Für $m = 1$ ergibt sich hieraus

$$J_1(D) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma\left(\frac{2-D}{2}\right). \tag{B.7}$$

Im Falle $n > 1$ verwenden wir (B.3).

$$\begin{aligned}
J_n(D) &= (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial(m^2)^{n-1}} J_1^m(D) \Big|_{m=1} \\
&= (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\Gamma\left(1-\frac{D}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\partial^{n-1}}{\partial(m^2)^{n-1}} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} \Big|_{m=1}
\end{aligned}$$

Die Ableitung ergibt

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial(m^2)^{n-1}} (m^2)^{\frac{D}{2}-1} = \left(\frac{D}{2}-1\right) \left(\frac{D}{2}-2\right) \cdots \left(\frac{D}{2}-(n-1)\right) (m^2)^{\frac{D}{2}-1}. \tag{B.8}$$

Diese $n-1$ Terme werden mit den “-”-Zeichen nach (A.2) an die Γ -Funktion multipliziert und es resultiert

$$J_n(D) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma\left(n-\frac{D}{2}\right)}{\Gamma(n)}. \tag{B.9}$$

C Mehler-Formel

Für eindimensionale Orts- bzw. Impulsoperatoren Q und P , für deren Kommutator $[Q, P] = i$ gilt, berechnen wir (siehe z.B. [FH65, ROE91, SCH81, Kap. 6])

$$\begin{aligned} \langle x | \exp \{ -s(P^2 + \omega^2 Q^2) \} | y \rangle &= \int \mathcal{D}q e^{-S[q]} \\ &= \int \mathcal{D}q \exp \left\{ - \int_0^{2s} dt \left(\frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{\omega^2}{2} q^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Dabei müssen im Funktionalintegral die Randbedingungen

$$q(0) = y, \quad q(2s) = x \quad (\text{C.2})$$

erfüllt sein.

Die Wirkung entwickeln wir um ein Extremum,

$$\frac{\delta S}{\delta q(t)} = -\ddot{q}_c(t) + \omega^2 q_c \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{C.3})$$

und zerlegen den Pfad in einen klassischen Term q_c und einen Fluktuationsanteil \tilde{q}

$$q(t) = q_c(t) + \tilde{q}(t). \quad (\text{C.4})$$

Nun erfüllt q_c die Randbedingung (C.2) und zusätzlich muß $\tilde{q}(0) = \tilde{q}(2s) = 0$ gelten.

Die Entwicklung der Wirkung ist damit

$$S[q] = S[q_c] + \underbrace{\int_0^{2s} dt \frac{\delta S}{\delta q(t)} \tilde{q}(t)}_{=0} + \frac{1}{2} \iint_0^{2s} dt dt' \frac{\delta^2 S}{\delta q(t) \delta q(t')} \tilde{q}(t) \tilde{q}(t'). \quad (\text{C.5})$$

Der zweite Summand verschwindet wegen der Extremalbedingung (C.3) und die zweifache Ableitung der Wirkung ergibt

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 S}{\delta q(t) \delta q(t')} &= -\frac{d^2}{dt^2} \delta(t-t') + \omega^2 \delta(t-t') \\ &= \left(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Also gilt

$$\begin{aligned} S[q] &= S[q_c] + \frac{1}{2} \int_0^{2s} dt (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2) \\ &= S[q_c] + S[\tilde{q}]. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Um die klassische Lösung zu bestimmen, verwenden wir den hyperbolischen Ansatz

$$q_c(t) = A \sinh \omega t + B \cosh \omega t \quad (\text{C.8})$$

wegen der Differentialgleichung (C.3) und bestimmen die Koeffizienten A und B aus der Randbedingung (C.2). Dann gilt

$$q_c(t) = \frac{1}{\sinh(2\omega s)} [(x - y \cosh(2\omega s)) \sinh \omega t + (y \sinh(2\omega s)) \cosh \omega t] \quad (\text{C.9})$$

und wir erhalten die Wirkung der klassischen Lösung

$$\begin{aligned} S[q_c] &= \frac{1}{2} \int_0^{2s} dt (\dot{q}_c^2 + \omega^2 q_c^2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\omega}{\sinh(2\omega s)} ((x^2 + y^2) \cosh(2\omega s) - 2xy). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Nun muß noch das Funktionalintegral über den zweiten Teil der Wirkung bestimmt werden. Dafür bringen wir (C.7) auf die Form

$$S[\tilde{q}] = \frac{1}{2} \int_0^{2s} dt \tilde{q}(t) \left(-\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) \tilde{q}(t) \quad (\text{C.11})$$

und bestimmen die Eigenfunktionen des Operators $(-d^2/dt^2 + \omega^2)$ mit den oben genannten Randbedingungen. Sie sind

$$\tilde{q}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \sin \frac{n\pi t}{2s}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{C.12})$$

Diese Eigenfunktionen bilden ein Orthonormal-System

$$\int_0^{2s} dt \tilde{q}_n(t) \tilde{q}_m(t) = \delta_{n,m} \quad (\text{C.13})$$

mit den Eigenwerten

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2s} \right)^2 + \omega^2. \quad (\text{C.14})$$

Jedes \tilde{q} läßt sich nach den Eigenfunktionen zerlegen gemäß

$$\tilde{q}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tilde{q}_n(t), \quad (\text{C.15})$$

so daß die Wirkung zu einer Summe über die Eigenwerte wird

$$S[\tilde{q}] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2. \quad (\text{C.16})$$

Das Funktionalintegral läßt sich nun als gewöhnliches, unendlich dimensionales Integral umschreiben.

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\tilde{q} e^{-S[\tilde{q}]} &= \mathcal{C} \int \prod_{n=1}^{\infty} da_n e^{-\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2} \\ &= \mathcal{C} \prod_{n=1}^{\infty} \int da_n e^{-\frac{1}{2} \lambda_n a_n^2} \\ &= \mathcal{C} \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi \lambda_n}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathcal{C}' \left(\frac{\sinh(2\omega s)}{2\omega s} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Die Konstante \mathcal{C}' ist unabhängig von ω und wird durch die Betrachtung des Falles $\omega = 0$ zu $\mathcal{C}' = 1/\sqrt{2\pi 2s}$ bestimmt.

Mit (C.10) und (C.17) haben wir (C.1) berechnet

$$\begin{aligned} \langle x | \exp \{ -s(P^2 + \omega^2 Q^2) \} | y \rangle \\ &= e^{-S[q_e]} \int \mathcal{D}\tilde{q} e^{-S[\tilde{q}]} \\ &= \left(\frac{\omega}{2\pi \sinh(2\omega s)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\omega}{2 \sinh(2\omega s)} ((x^2 + y^2) \cosh(2\omega s) - 2xy) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Im Impulsraum gilt für eindimensionale Impulse p und q eine leicht veränderte Form der Mehler-Formel

$$\begin{aligned} \langle p | \exp \{ -s(P^2 + \omega^2 Q^2) \} | q \rangle \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\omega \sinh(2\omega s)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\omega \sinh(2\omega s)} ((p^2 + q^2) \cosh(2\omega s) - 2pq) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

D Padé-Borel-Verfahren

Das Padé-Borel-Verfahren ist eine Methode, um die Konvergenz von Reihen zu verbessern. Dazu werden Padé-Approximanten der Borel-transformierten Reihe gebildet und zurücktransformiert.

Die Borel-transformierte einer Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (\text{D.1})$$

ist durch

$$B_f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \quad (\text{D.2})$$

definiert. Mit der Integralform der Γ -Funktion (A.1) ist die Rücktransformation durch

$$f(z) = \int_0^{\infty} dt B_f(tz) e^{-t} \quad (\text{D.3})$$

gegeben.

Gebrochen rationale Approximanten einer Potenzreihe werden als Padé-Approximanten bezeichnet. Gegeben sei eine Reihe bis zur Ordnung n

$$g_n(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i + \mathcal{O}(z^{n+1}), \quad (\text{D.4})$$

p_k und q_l seien Polynome k -ten bzw. l -ten Grades in z , die

$$g_n(z)q_l(z) = p_k(z) + \mathcal{O}(z^{k+l+1}), \quad k+l \leq n \quad (\text{D.5})$$

erfüllen. q_l hat nach Definition den führenden Term 1. Dann gilt

$$g_n(z) = \frac{p_k(z)}{q_l(z)} + \mathcal{O}(z^{k+l+1}), \quad (\text{D.6})$$

und der Quotient ist die $[k, l]$ -Padé-Approximante.

In dieser Arbeit haben wir Reihen der Gestalt $\mathcal{F}(u_R)$ bis zu $\mathcal{O}(u_R^2)$. Diese werden zu $B_{\mathcal{F}}(u_R)$ Borel-transformiert, wovon die Padé-Approximanten bestimmt werden. Da $k+l \leq 2$ gelten muß, lassen sich drei Approximanten bilden, wobei der $[2,0]$ -Padé die Reihe selbst ist.

Diese Approximanten werden mit (D.3) zurücktransformiert. Die Integration wird direkt numerisch ausgewertet. Falls das Nennerpolynom q_l eine positive reelle Nullstelle hat, muß das Hauptwertintegral gebildet werden,

$$\int_0^\infty dt \frac{a}{b-t} e^{-t} = -a e^{-b} \underbrace{\int_{-b}^\infty dt \frac{1}{t} e^{-t}}_{=: -\text{Ei}(b)} = a e^{-b} \text{Ei}(b) \quad (\text{D.7})$$

mit $b > 0$. Darin ist $\text{Ei}(x)$ das Exponentialintegral, das durch

$$\text{Ei}(x) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-x}^{-\varepsilon} dt \frac{e^{-t}}{t} + \int_{\varepsilon}^{\infty} dt \frac{e^{-t}}{t} \right] \quad (\text{D.8})$$

für $x > 0$ gegeben ist [GR81, 8.21].

Literaturverzeichnis

- [AH76] A. AHARONY and P. C. HOHENBERG. Universal relations among thermodynamical critical amplitudes. *Phys. Rev.* **B 13** (1976) 3081.
- [AMI78] D. J. AMIT. *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*. McGraw-Hill, New York, 1978.
- [AS65] M. ABRAMOWITZ and I. A. STEGUN, editors. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [BEL91] M. LE BELLAC. *Quantum and Statistical Field Theory*. Oxford University Press, Oxford, 1st english edition, 1991.
- [BG80] C. BERVILLIER and C. GODRÉCHE. Universal combinations of critical amplitudes from field theory. *Phys. Rev.* **B 21** (1980) 5427.
- [BGZJ76] E. BRÉZIN, J. C. LE GUILLOU, and J. ZINN-JUSTIN. Field theoretic approach to critical phenomena. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. DOMB and M. S. GREEN, volume 6, pages 125–247. Academic Press, London, 1976.
- [BHW93] W. BUCHMÜLLER, T. HELBIG, and D. WALLISER. First-order phase transitions in scalar electrodynamics. *Nucl. Phys.* **B 407** (1993) 387.
- [BIN83] K. BINDER. Critical behaviour at surfaces. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. DOMB and J. L. LEBOWITZ, volume 8, pages 1–144. Academic Press, 1983.
- [BLS65] F. P. BUFF, R. A. LOVETT, and F. H. STILLINGER, JR. Interfacial density profile for fluids in the critical region. *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 621.
- [BS81] I. N. BRONSTEIN and K. A. SEMENDJAJEW. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 19. edition, 1981.
- [BV87] A. O. BARVINSKY and G. A. VILKOVISKY. Beyond the Schwinger-Dewitt technique: converting loops into trees and in-in currents. *Nucl. Phys.* **B 282** (1987) 163.

- [BV90] A. O. BARVINSKY and G. A. VILKOVISKY. Covariant perturbation theory. 2: Second order in the curvature. general algorithms. 3: Spectral representations of the third order form-factors. *Nucl. Phys. B* **333** (1990) 471.
- [CAL76] C. G. CALLAN, JR. Introduction to renormalization theory. In *Les Houches, Session XXVIII, 1975 — Methods in Field Theory*, edited by R. BALIAN and J. ZINN-JUSTIN, pages 41–77, Amsterdam, 1976. North-Holland.
- [CC97] J. M. CHUNG and B. K. CHUNG. Three loop renormalization of the effective potential. *Phys. Rev. D* **56** (1997) 6508.
- [CC98] J. M. CHUNG and B. K. CHUNG. Three-loop effective potential of $O(N)\phi^4$ theory. *J. Korean Phys. Soc.* **33** (1998) 643.
- [CH58] J. W. CAHN and J. E. HILLIARD. Free energy of a nonuniform system. I. interfacial free energy. *J. Chem. Phys.* **28** (1958) 258.
- [CH97] M. CASELLE and M. HASENBUSCH. Universal amplitude ratios in the 3d Ising model. *J. Phys. A* **30** (1997) 4963.
- [CJP74] S. COLEMAN, R. JACKIW, and H. D. POLITZER. Spontaneous symmetry breaking in the $O(N)$ model for large N . *Phys. Rev. D* **10** (1974) 2491.
- [CL84] T.-P. CHENG and L.-F. LI. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1984.
- [CLP78] P. CVITANOVIĆ, B. LAUTRUP, and R. B. PEARSON. Number and weights of Feynman diagrams. *Phys. Rev. D* **18** (1978) 1939.
- [COL77] S. COLEMAN. Classical lumps and their quantum descendants. In *Erice Lectures 1975 — New Phenomena in Sub-Nuclear Physics*, edited by A. ZICHICHI, New York, 1977. Plenum Press.
- [COL84] J. C. COLLINS. *Renormalization*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [CRE94] M. CREUTZ. XIsing. XWindow Programm, Quellcode erhältlich unter <http://penguin.phy.bnl.gov/www/xtoys.html>, March 1994.
- [CVG00] P. CICUTA, A. VAILATI, and M. GIGLIO. Equilibrium and nonequilibrium fluctuations at the interface between two fluid phases. *Phys. Rev. E* **62** (2000) 4920.

- [CW73] S. COLEMAN and E. WEINBERG. Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking. *Phys. Rev. D* **7** (1973) 1888.
- [DER64] G. H. DERRICK. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. *J. Math. Phys.* **5** (1964) 1252.
- [DHN74] R. F. DASHEN, B. HASSLACHER, and A. NEVEU. Nonperturbative methods and extended-hadron models in field theory. Part II. *Phys. Rev. D* **10** (1974) 4130.
- [FH65] R. P. FEYNMAN and A. R. HIBBS. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [FH94] Z. FODOR and A. HEBECKER. Finite temperature effective potential to order g^4 , λ^2 and the electroweak phase transition. *Nucl. Phys. B* **432** (1994) 127.
- [Fis84] M. E. FISHER. Walks, walls, wetting, and melting. *J. Stat. Phys.* **34**(5/6) (1984) 667.
- [FW69] S. FISK and B. WIDOM. Structure and free energy of the interface between fluid phases in equilibrium near the critical point. *J. Chem. Phys.* **50** (1969) 3219.
- [GKM96] C. GUTSFELD, J. KÜSTER, and G. MÜNSTER. Calculation of universal amplitude ratios in three-loop order. *Nucl. Phys. B* **479** (1996) 654.
- [GR81] I. S. GRADSTEIN and I. M. RYSHIK. *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*, volume 1 und 2. Verlag Harri Deutsch, Thun, 5th edition, 1981.
- [GSW62] J. GOLDSTONE, A. SALAM, and S. WEINBERG. Broken symmetries. *Phys. Rev.* **127** (1962) 965.
- [GUT95] C. GUTSFELD. *Das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge in 3-Loop-Ordnung im dreidimensionalen ϕ^4 -Modell*. Diplomarbeit, Universität Münster, August 1995.
- [GZJ98] R. GUIDA and J. ZINN-JUSTIN. Critical exponents of the N -vector model. *J. Phys. A* **31** (1998) 8103.
- [HEI93] J. HEITGER. *Feldtheoretische Berechnung universeller Amplitudenverhältnisse in 2-Loop-Ordnung*. Diplomarbeit, Universität Münster, October 1993.

- [HEL67] P. HELLER. Experimental investigations of critical phenomena. *Rep. Prog. Phys.* **30** (1967) 731.
- [HM98] P. HOPPE and G. MÜNSTER. The interface tension of the three-dimensional Ising model in two-loop order. *Phys. Lett. A* **238** (1998) 265.
- [HP97] M. HASENBUSCH and K. PINN. The interface tension of the 3-dimensional Ising model in the scaling region. *Physica A* **245** (1997) 366.
- [HPV99] M. HASENBUSCH, K. PINN, and S. VINTI. Critical exponents of the 3D Ising universality class from finite size scaling with standard and improved actions. *Phys. Rev. B* **59** (1999) 11471.
- [ID89] C. ITZYKSON and J. M. DROUFFE. *Statistical Field Theory*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1989.
- [IIM75] J. ILIOPOULOS, C. ITZYKSON, and A. MARTIN. Functional methods and perturbation theory. *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 165.
- [IZ80] C. ITZYKSON and J.-B. ZUBER. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, New York, 1st edition, 1980.
- [JAC74] R. JACKIW. Functional evaluation of the effective potential. *Phys. Rev. D* **9** (1974) 1686.
- [JAS84] D. JASNOW. Critical phenomena at interfaces. *Rep. Prog. Phys.* **47** (1984) 1059.
- [JAS86] D. JASNOW. Renormalization group theory of interfaces. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. DOMB and J. L. LEBOWITZ, volume 10, pages 269–363. Academic Press, 1986.
- [JL64] G. JONA-LASINIO. Relativistic field theories with symmetry breaking solutions. *Nuovo Cim.* **34** (1964) 1790.
- [JR78] D. JASNOW and J. RUDNICK. Interfacial profile in three dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **41** (1978) 698.
- [JSZ99] S. JAIMUNGAL, G. W. SEMENOFF, and K. ZAREMBO. Universality in effective strings. *JETP Lett.* **69** (1999) 509.
- [KLS95] J. KRIPFGANZ, A. LASER, and M. G. SCHMIDT. The high temperature two loop effective potential of the electroweak theory in a general 't Hooft background gauge. *Phys. Lett. B* **351** (1995) 266.

-
- [KLS97] J. KRIPFGANZ, A. LASER, and M. G. SCHMIDT. Perturbative contributions to the electroweak interface tension. *Z. Phys. C* **73** (1997) 353.
- [Küs95] J. KÜSTER. *Anwendung der Dyson-Schwinger-Gleichung in der ϕ^4 -Theorie zur Berechnung universeller Amplitudenverhältnisse*. Diplomarbeit, Universität Münster, August 1995.
- [LF89] A. J. LIU and M. E. FISHER. The three-dimensional Ising model revisited numerically. *Physica A* **156** (1989) 35.
- [LW87] M. LÜSCHER and P. WEISZ. Scaling laws and triviality bounds in the lattice ϕ^4 -theory; one-component model in the phase with spontaneous broken symmetry. *Nucl. Phys. B* **295** (1987) 65.
- [MH94] G. MÜNSTER and J. HEITGER. Field-theoretic calculation of the universal amplitude ratio of correlation lengths in 3D Ising systems. *Nucl. Phys. B* **424** (1994) 582.
- [MM93] I. MONTVAY and G. MÜNSTER. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1993.
- [MÜN90] G. MÜNSTER. Interface tension in three-dimensional systems from field theory. *Nucl. Phys. B* **340** (1990) 559.
- [MÜN92] G. MÜNSTER. Interface tensions of binary systems. *Int. J. Mod. Phys. C* **3**(5) (1992) 879.
- [MR00] G. MÜNSTER and S. ROTSCHE. Analytical calculation of the nucleation rate for first order phase transitions beyond the thin wall approximation. *Eur. Phys. J. C* **12** (2000) 161.
- [MW96] T. MAINZER and D. WOERMANN. Temperature dependence of liquid-liquid interfacial tension and universal critical amplitude ratio: an experimental study. *Physica A* **225** (1996) 312.
- [NAM68] Y. NAMBU. S matrix in semiclassical approximation. *Phys. Lett. B* **26** (1968) 626.
- [NOR93] R. E. NORMAL. Strange spatio-temporal patterns, self-organized universal crises and politico-dynamics via symmetric chaos, neural networks and the fractal wavelet transform, or the magic of names. *Nonlin. Sci. Tod.* **3**(1) (1993) 8.
- [OK77] T. OHTA and K. KAWASAKI. Renormalization group approach to the interfacial order parameter profile near the critical point. *Prog. Theor. Phys.* **58** (1977) 467.

- [OWY86] L. O'RAIFEARTAIGH, A. WIPF, and H. YONEYAMA. The constraint effective potential. *Nucl. Phys. B* **271** (1986) 653.
- [PBM86] A. P. PRUDNIKOV, YU. A. BRYCHKOV, and O. I. MARICHEV. *Integrals and Series*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986.
- [PRI92] V. PRIVMAN. Fluctuating interfaces, surface tension, and capillary waves: an introduction. *Int. J. Mod. Phys. C* **3** (1992) 857.
- [RAJ75] R. RAJARAMAN. Some non-perturbative semi-classical methods in quantum field theory (a pedagogical review). *Phys. Rep.* **21** (1975) 227.
- [RAJ82] R. RAJARAMAN. *Solitons and instantons*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.
- [RIV84] R. J. RIVERS. Effective potential convexity and finite-temperature phase transitions. *Z. Phys. C* **22** (1984) 137.
- [RJ78] J. RUDNICK and D. JASNOW. ϵ expansion for the interfacial profile. *Phys. Rev. B* **17** (1978) 1351.
- [RJ82] J. RUDNICK and D. JASNOW. Order-parameter profile in semi-infinite systems at criticality. *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1059.
- [ROB84] M. ROBERT. Critical behavior of fluid interfaces in two dimensions. *Phys. Rev. A* **30** (1984) 2785.
- [ROE91] G. ROEPSTORFF. *Pfadintegrale in der Quantenphysik*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1991.
- [ROT96] S. ROTSCH. *Analytische Berechnung der Nukleationsrate bei Phasenübergängen erster Ordnung*. PhD thesis, Westfälische Wilhelms-Universität, 1996.
- [SAF94] S. A. SAFRAN. *Statistical Thermodynamics of Surfaces, Interfaces, and Membranes*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1994.
- [SCH81] L. S. SCHULMAN. *Techniques and Applications of Path Integration*. Wiley-Interscience, 1981.
- [SFW72] D. STAUFFER, M. FERER, and M. WORTIS. Universality of second-order phase transitions: The scale factor for the correlation length. *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972) 345.
- [SIE93] E. SIEPMANN. *Reihenanalysen für das 3-dimensionale Ising-Modell*. Diplomarbeit, Universität Münster, 1993.

- [STA97] D. STAUFFER. Oil-water interfaces in the Ising-model. *Progr. Colloid Polym. Sci.* **103** (1997) 60.
- [TF75] H. B. TARKO and M. E. FISHER. Theory of critical point scattering and correlations; the Ising model below T_c and in a field. *Phys. Rev.* **B 11** (1975) 1217.
- [TV72] G. T'HOOFT and M. VELTMAN. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nucl. Phys.* **B 44** (1972) 189.
- [WEI95] S. WEINBERG. *The quantum theory of Fields*, volume I+II. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [WID65] B. WIDOM. Equation of state in the neighborhood of the critical point. *J. Chem. Phys.* **43** (1965) 3898.
- [WIL71] K. G. WILSON. Renormalization group and critical phenomena, I. renormalization group and the Kadanoff scaling picture. *Phys. Rev.* **B 4** (1971) 3174.
- [WOL92] S. WOLFRAM. *Mathematica*. Addison-Wesley Publishing Co., 2nd edition, 1992.
- [WW73] E. S. WU and W. W. WEBB. Critical liquid-vapor interface in SF_6 . I. thickness of the diffuse transition layer. *Phys. Rev.* **A 8** (1973) 2065.
- [WW87] E. J. WEINBERG and A. WU. Understanding complex perturbative effective potentials. *Phys. Rev.* **D 36** (1987) 2474.
- [ZF96] S. ZINN and M. E. FISHER. Universal surface-tension and critical-isotherm amplitude ratios in three dimensions. *Physica* **A 226** (1996) 168.
- [ZIA85] R. K. P. ZIA. Normal coordinates and curvature terms in an interface hamiltonian. *Nucl. Phys.* **B 251** (1985) 676.
- [ZIT67] J. ZITTARTZ. Microscopic approach to interfacial structure in Ising-like ferromagnets. *Phys. Rev.* **154** (1967) 529.
- [ZJ89] J. ZINN-JUSTIN. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1989.

