

Anwendung der
Dyson-Schwinger-Gleichung
in der ϕ^4 -Theorie
zur Berechnung universeller
Amplitudenverhältnisse

Als Diplomarbeit im August 1995 vorgelegt von
Jens Küster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Kritische Phänomene, Ising-Modell und ϕ^4-Theorie	3
1.1 Kritische Phänomene	3
1.1.1 Thermodynamische Potentiale des Ferromagneten	4
1.1.2 Kritische Exponenten	5
1.2 Ising-Modell	7
1.3 ϕ^4 -Theorie	8
1.4 Störungstheorie	10
1.4.1 Symmetrische Phase	11
1.4.2 Gebrochene Phase	13
2 Generation der Feynman-Graphen	15
2.1 Erstellen der Graphen	15
2.2 Programme	17
2.3 Anzahl der Graphen	17
3 Dyson-Schwinger-Gleichung in der gebrochenen Phase	20
3.1 Allgemeines	20
3.2 Notationen	21
3.3 Die DS-Gleichung für Green-Funktionen	22
3.4 Die DS-Gleichung für verbundene Green-Funktionen	23
3.4.1 Die DS-Gleichung für den vollständigen Propagator	24
3.4.2 Elimination der Tadpole-Graphen von $G_c^{(2)}$	25
3.5 Die DS-Gleichung für echte Vertex-Funktionen	26
3.5.1 Die DS-Gleichung für die 1-PI 2-Punkt-Funktion	27
3.5.2 Elimination der Tadpole-Graphen von $\Gamma^{(2)}$	29
3.5.3 Feynman-Regeln für die Vertices	31
3.5.4 Entwicklung der DS-Gleichung für 1-PI Graphen	31
3.6 Elimination der Tadpole-Graphen von $G_c^{(1)}$	32

4	Dyson-Schwinger-Gleichung in der symmetrischen Phase	35
4.1	Die DS-Gleichung für den vollständigen Propagator	35
4.2	Die DS-Gleichung für echte Vertex-Funktionen	36
4.2.1	Die DS-Gleichung für die 1-PI 2-Punkt-Funktion	36
4.2.2	Entwicklung der DS-Gleichung für 1-PI Graphen	37
4.2.3	Die DS-Gleichung für die 1-PI 4-Punkt-Funktion	37
4.3	Zu berechnende Diagramme	38
5	Berechnung der Vertex- und Green-Funktionen	40
5.1	Spezielle Integrale und Konstanten	40
5.2	Symmetrische Phase	41
5.2.1	$A^+(m_0)$ und die reduzierte Masse \tilde{m}_0	41
5.2.2	2-Punkt-Funktion	42
5.2.3	4-Punkt-Funktion	44
5.3	Gebrochene Phase	48
5.3.1	1-Punkt-Green-Funktion $G_c^{(1)}$	48
5.3.2	2-Punkt-Funktion	54
6	Renormierung	68
6.1	Renormierungsschema	68
6.2	Renormierungsgruppe	72
6.3	Berechnung der renormierten Größen	73
6.3.1	Symmetrische Phase	73
6.3.2	Phase gebrochener Symmetrie	77
7	Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge	82
7.1	Die Bestimmungsgleichung	82
7.2	Berechnung der Reihen	85
7.2.1	Reihen der Hochtemperaturkopplung	86
7.2.2	Reihen der Tieftemperaturkopplung	87
7.3	Numerische Ergebnisse	88
7.3.1	Hochtemperaturfixpunkt	88
7.3.2	Tieftemperaturfixpunkt	90
7.4	Diskussion	93
8	Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität	96
8.1	Die Bestimmungsgleichung	96
8.2	Berechnung der Reihen	97
8.2.1	Reihen der Hochtemperaturkopplung	97

8.2.2	Reihen der Tieftemperaturkopplung	98
8.3	Numerische Ergebnisse	98
8.3.1	Hochtemperaturfixpunkt	98
8.3.2	Tieftemperaturfixpunkt	100
8.4	Diskussion	101
	Zusammenfassung	103
	A Integrale	104
A.1	1-Loop-Integrale	104
A.2	Ableitungen von 1-Loop-Integralen	105
	B Padé-Borel-Verfahren	107
B.1	Borel-Transformation	107
B.2	Padé-Approximanten	107
B.3	Padé-Borel	108
	Literaturverzeichnis	109

Einleitung

In dieser Arbeit wird das Ising-Modell mit Methoden der statistischen Feldtheorie behandelt. Mit dem Ising-Modell läßt sich das Verhalten eines Ferromagneten in der Nähe der Curie-Temperatur beschreiben. An der Curie-Temperatur selbst tritt ein Phasenübergang zweiter Ordnung ein, der auch als kritisches Phänomen bezeichnet wird.

Kritische Phänomene sind besonders bedeutsam, da die beschreibenden Größen universellen Charakter haben. Dieses heißt, ein System, das einen Phasenübergang zweiter Ordnung durchführt, läßt sich unabhängig von der speziellen Form und Wechselwirkung durch universelle Größen beschreiben. Von besonderem Interesse sind dabei in der vorliegenden Arbeit die Amplitudenverhältnisse der Korrelationslänge und Suszeptibilität.

Die Berechnung beruht auf Methoden der Quantenfeldtheorie, die Eingang in die Statistische Physik gefunden haben. Dieser Zugang wird möglich infolge der Analogie zwischen dem erzeugenden Funktional der Feldtheorie und der Zustandssumme in der Statistischen Physik. Da das Verhalten am kritischen Punkt durch langreichweitige¹ Fluktuationen dominiert wird, lassen sich die mikroskopischen Details vernachlässigen und eine kontinuierliche Feldvariable im gesamten Raum an Stelle der Spins an den Gitterplätzen einführen. Der Erwartungswert dieser Feldvariablen entspricht der spontanen Magnetisierung des Ferromagneten. Am kritischen Punkt haben wir eine spontane Symmetriebrechung, wenn die Temperatur gesenkt wird. Oberhalb der kritischen Temperatur ist die Magnetisierung Null, während sie unterhalb einen Wert ungleich Null annimmt.

Mit dem feldtheoretischen Ansatz lassen sich die gesuchten kritischen Größen über die renormierte Störungstheorie und die Renormierungsgruppengleichung berechnen. Diese Rechnungen werden in einer massiven ϕ^4 -Theorie in drei Dimensionen durchgeführt. Zur Bestimmung ist in höheren Ordnungen eine große Anzahl von Feynman-Graphen zu berechnen. Ein Schwerpunkt dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Verfahrens zur Reduzierung der Anzahl der Graphen, die berechnet werden müssen. Dies geschieht durch Elimination bestimmter Klassen von Graphen, nämlich solchen, die Tadpole-Teilgraphen enthalten. Nach der Renormierung lassen sich die kritischen Größen als Potenzreihen in einer dimensionslosen Kopplung bestimmen. Diese Rechnung ist hier bis zur dritten Ordnung durchgeführt. Durch Einsetzen von (vorgegebenen) Fixpunktwerten erhalten wir letztendlich numerische Werte für die

¹Das heißt, die typischen Längen sind wesentlich größer als die Gitterkonstante a .

Amplitudenverhältnisse der Korrelationslänge und Suszeptibilität. Anschließend lassen sich die so gewonnenen Ergebnisse mit Literaturwerten, die auf experimentellen oder anderen theoretischen Verfahren beruhen, vergleichen.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Im **1.Kapitel** führe ich die grundlegende Theorie über kritische Phänomene, Ising-Modell und die Störungsrechnung ein. Das **2.Kapitel** beschäftigt sich mit der Erstellung der Feynman-Graphen. **Kapitel 3** und **4** stellen ein Verfahren vor, wie mit der Dyson-Schwinger-Gleichung eine ganze Klasse von Graphen aus der Berechnung der Vertex-Funktionen eliminiert werden kann. In **Kapitel 5** werden die Reihen berechnet, die im weiteren Verlauf benötigt werden. Das Renormierungsschema wird im **Kapitel 6** eingeführt und die renormierten Größen in Abhängigkeit der dimensionslosen Kopplung bestimmt. In **Kapitel 7** berechnet sich das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge, und in **Kapitel 8** das Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität.

Kapitel 1

Kritische Phänomene, Ising-Modell und ϕ^4 -Theorie

In diesem Kapitel führe ich die theoretischen Grundlagen der Arbeit ein. Als grundlegende Literatur verweise ich auf [GJ87, PAR88, RYD85, YEO92] und die im Text zitierte Literatur.

1.1 Kritische Phänomene

Unter kritischen Phänomenen verstehen wir Erscheinungen an Systemen, die einen Phasenübergang zweiter Ordnung durchführen. Phasenübergänge zweiter Ordnung werden nach Ehrenfest dadurch charakterisiert, daß die thermodynamischen Potentiale und ihre ersten partiellen Ableitungen stetig sind, die zweiten Ableitungen jedoch Sprungstellen oder Singularitäten am kritischen Punkt aufweisen (oder allgemeiner: ein Phasenübergang n -ter Ordnung hat eine Unstetigkeit in der n -ten partiellen Ableitung, wobei die ersten $n - 1$ Ableitungen stetig sind).

Der Begriff des “kritischen Phänomens” stammt vom Verhalten vieler Stoffe, wie z.B. H_2O . Im Phasendiagramm verschwindet am kritischen Punkt der Unterschied zwischen Flüssigkeit und Gasphase. Während die Dichtefluktuationen weitreichender werden, verschwindet die Differenz der Dichte von Gas und Flüssigkeit.

Das Standardbeispiel eines Phasenübergangs zweiter Ordnung ist ein Ferromagnet, der bei Erhitzen über die Curie-Temperatur T_c hinaus nur noch paramagnetisch ist. Hierbei ist T_c die “kritische Temperatur”. Wir werden in dieser Arbeit in Anlehnung an die Literatur die Nomenklatur dieses Phasenübergangs benutzen, obwohl in der Natur auch bei anderen Phasenübergängen kritische Phänomene beobachtet werden.

Ein Ferromagnet hat bei einer Temperatur $T < T_c$ eine nichtverschwindende spontane Magnetisierung M , die sich unabhängig von einem äußeren Feld einstellt¹. Bei Annäherung an die kritische Temperatur wird M immer kleiner, um dann ober-

¹Tatsächlich stellt sich diese Magnetisierung nicht in einem “großen” Ferromagneten ein, sondern nur in Domänen der Längenausdehnung $\sim 10^{-2}mm$.

halb von T_c zu verschwinden. Dabei verhält sich M wie ein typischer Ordnungsparameter eines Phasenübergangs zweiter Ordnung. Wir nehmen nun ein Gitter mit der Gitterkonstanten a an, auf dessen Gitterpunkten die Spinvariable $\sigma = \sigma(x)$ existiert, wie es im Heisenberg- oder Ising-Modell der Fall ist. Dabei vernachlässigen wir die speziellen Eigenschaften in atomaren Dimensionen. Diese Näherung wird sich später als gerechtfertigt herausstellen, da die Korrelationslänge als Längenskala des Systems in der Nähe des kritischen Punktes wesentlich größer als a wird. Damit können wir das Gitter unabhängig von der speziellen Form als isotrop auffassen. Auf diesem Gitter ist die spontane Magnetisierung M als statistisches Mittel über alle möglichen Zustände gegeben:

$$M(x) = \mu \langle \sigma(x) \rangle \Big|_{B(x)=0} \quad (1.1)$$

1.1.1 Thermodynamische Potentiale des Ferromagneten

Hier werden kurz die thermodynamischen Potentiale und die daraus durch Differentiation erhaltenen Zustandsgrößen und Responsefunktionen dargestellt (siehe [NOL91] und andere Lehrbücher der Thermodynamik).

Da wir uns auf einem Gitter bewegen, wird aus der Raumintegration eine Summe über die Gitterpunkte x_i .

Wir gehen von der Zustandssumme Z als gewichteter Summe über alle möglichen Konfigurationen des Systems aus.

$$Z = Z(B, T) = \sum_{[\sigma(x_i)]} \exp\{-\beta(H_0 - \mu \sum_i B(x_i)\sigma(x_i))\} \quad (1.2)$$

Hierin ist $\beta = \frac{1}{k_b T}$ die inverse Temperatur (k_b ist die Boltzmann-Konstante). Die Summe über $[\sigma(x_i)]$ beschreibt die Summe über alle Zustände des Spinkonfigurationsraums. H_0 ist der Hamiltonian der Spin-Spin-Wechselwirkung.

Die Helmholtzsche freie Energie

$$F = F(B, T) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(B, T) \quad (1.3)$$

ist das erste relevante Potential. Durch Legendre-Transformation erhalten wir daraus die Gibbsche freie Energie

$$\Gamma = \Gamma(M, T) = F + M \cdot B. \quad (1.4)$$

Die Magnetisierung bzw. das äußere Magnetfeld als Zustandsgrößen erhalten wir nun durch partielle Ableitungen erster Ordnung.

$$M = - \left(\frac{\partial F}{\partial B} \right)_T \quad B = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial M} \right)_T \quad (1.5)$$

Durch weitere partielle Differentiation erhalten wir Responsefunktionen wie die magnetische Suszeptibilität

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial B} \right)_T = - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial B^2} \right)_T = \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M^2} \right)_T^{-1} \quad (1.6)$$

und die spezifische Wärmekapazität

$$C = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right)_B. \quad (1.7)$$

Da der Phasenübergang nur bei verschwindendem äußeren Feld beobachtet werden kann, folgt aus (1.5) bei steigender Temperatur für den Beginn des Phasenübergangs die Extremaleigenschaft

$$\left(\frac{\partial F}{\partial B} \right)_{T, B=0} = 0. \quad (1.8)$$

Um die zweite in dieser Arbeit behandelte Größe einzuführen, betrachten wir die Spin-Spin-Korrelationsfunktionen

$$\langle \sigma(x) \sigma(y) \rangle, \quad \langle \sigma(x) \sigma(y) \rangle_c := \langle \sigma(x) \sigma(y) \rangle - \langle \sigma(x) \rangle \langle \sigma(y) \rangle. \quad (1.9)$$

Diese werden auch als 2-Punkt-Green-Funktionen bezeichnet. Da wir idealerweise ein translationsinvariantes System betrachten, lassen sie sich auch als Funktionen von nur einer Ortsvariablen schreiben.

$$G^{(2)}(x) := \langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle, \quad G_c^{(2)}(x) := \langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle_c \quad (1.10)$$

Der Index c steht für zusammenhängende (engl. connected) Green-Funktionen.

Die Korrelationslänge wird nun als das zweite Moment der verbundenen Green-Funktion definiert.

$$\xi^2 := \frac{1}{2D} \frac{\int d^D x x^2 G_c^{(2)}(x)}{\int d^D x G_c^{(2)}(x)} = - \left. \frac{\frac{\partial}{\partial p^2} G_c^{(2)}(p)}{G_c^{(2)}(p)} \right|_{p^2=0} \quad (1.11)$$

D bezeichnet hier, wie in der gesamten Arbeit, die Dimension des Orts- bzw. Impulsraumes.

1.1.2 Kritische Exponenten

Nahe des kritischen Punkts wird das Verhalten der verschiedenen Zustandsgrößen und Responsefunktionen unabhängig vom speziellen Phasenübergang. Unterschiedlichste Systeme zeigen ein einheitliches Potenzgesetz-Verhalten.

Wir führen die reduzierte Temperatur

$$t := \frac{T - T_c}{T_c} \quad (1.12)$$

ein, die am kritischen Punkt gerade das Vorzeichen wechselt. Physikalische Größen lassen sich nun als Potenzreihe in t entwickeln.

$$f(t) = A_{\pm} |t|^{\varphi_{\pm}} (1 + B_{\pm} |t|^{\psi_{\pm}} + \dots) \quad \psi_{\pm} > 0 \quad (1.13)$$

Hierbei bezeichnet der Index + jeweils die Hochtemperaturphase ($t > 0$) und – die Tieftemperaturphase ($t < 0$). Für $|t| \ll 1$, also nahe beim Phasenübergang wird dies zu

$$f(t) \approx A_{\pm}|t|^{\varphi_{\pm}}, \quad (1.14)$$

und wir können den “kritischen Exponenten” sowie die Amplituden bestimmen.

$$\varphi_{\pm} = \lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{\ln |f(t)|}{\ln |t|} \quad A_{\pm} = \lim_{|t| \rightarrow 0} |t|^{-\varphi_{\pm}} f(t) \quad (1.15)$$

Ohne äußeres Feld läßt sich die Korrelationslänge für kleine t demnach als

$$\xi \sim \begin{cases} f_+ t^{-\nu_+} & , \quad t > 0 \\ f_- (-t)^{-\nu_-} & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (1.16a)$$

schreiben, wodurch der kritische Exponent ν definiert ist. Die magnetische Suszeptibilität definiert den Exponenten γ

$$\chi \sim \begin{cases} C_+ t^{-\gamma_+} & , \quad t > 0 \\ C_- (-t)^{-\gamma_-} & , \quad t < 0 \end{cases} \quad (1.16b)$$

und die spezifische Wärmekapazität α :

$$C \sim \begin{cases} A_+ t^{-\alpha_+} & , \quad t > 0 \\ A_- (-t)^{-\alpha_-} & , \quad t < 0 \end{cases} . \quad (1.16c)$$

Für $T < T_c$ gilt

$$M \sim (-t)^{\beta}. \quad (1.16d)$$

Oberhalb T_c verschwindet M . Das Verhalten der Magnetisierung für $T = T_c$ bei angelegtem äußeren Feld wird durch δ beschrieben.

$$M \sim B^{1/\delta} \quad (1.17a)$$

Durch die Impulsabhängigkeit der verbundenen 2-Punkt-Funktion bei $T = T_c$

$$G_c^{(2)}(p) \sim p^{-2+\eta} \quad (1.17b)$$

ist ein weiterer Exponent η definiert.

Durch die Skalenhypothese wird postuliert, daß sich die Exponenten in der Hoch- und Tieftemperaturphase nicht unterscheiden.

$$\nu = \nu_+ = \nu_- \quad \gamma = \gamma_+ = \gamma_- \quad \alpha = \alpha_+ = \alpha_- \quad (1.18)$$

Desweiteren gelten die Skalengesetze

$$\alpha = 2 - \nu D \quad (1.19a)$$

$$\beta = \frac{\nu}{2} (D - 2 + \eta) \quad (1.19b)$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (1.19c)$$

$$\delta = \frac{D + 2 - \eta}{D - 2 + \eta} , \quad (1.19d)$$

aus denen folgt, das lediglich zwei der sechs hier definierten kritischen Exponenten unabhängig sind.

1.2 Ising-Modell

Das Ising-Modell ist ein Modell zur Beschreibung eines Ferromagneten [DOM74, BEL91, Kapitel 1.2]. Ausgegangen wird von einem D -dimensionalen kubischen Gitter der Gitterkonstanten a . Da die spezielle Gitterform keinen grundlegenden Einfluß hat, ist diese Wahl der Einfachheit halber gerechtfertigt. An den Gitterpunkten, die von $1-N$ durchnummeriert sind, sind die Spins σ_i angeordnet. Allgemein bezeichnet der Index i eine Größe am Ort x_i . Eine weitere Näherung wird mit der Annahme gemacht, daß nur nächste Nachbarn wechselwirken. Der einfachste Hamiltonian, der dies beschreibt ist

$$H_0 = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j, \quad (1.20)$$

wobei die Summe über $\langle i, j \rangle$ nur die nächsten Nachbarn einbezieht. Dies ist als das Quanten-Heisenberg-Modell bekannt.

Das klassische Heisenberg-Modell erhalten wir nach Ersetzung der Pauli-Spin-Matrizen durch Vektoren. Im Ising-Modell werden diese Vektoren dann durch Skalare ersetzt, die nur noch zwei mögliche Werte $\sigma_i = \pm 1$ annehmen können. Der Hamiltonian des Ising-Modells mit externem Magnetfeld ist also

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu \sum_i B_i \sigma_i. \quad (1.21)$$

Wie in (1.2) erhalten wir durch Summation über alle Spinkonfigurationen des Systems die Zustandssumme

$$Z[B, T] = \sum_{[\sigma_i]} e^{-\beta H(\sigma)} = \sum_{[\sigma_i]} e^{\beta(J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j + \mu \sum_i B_i \sigma_i)}. \quad (1.22)$$

Statistische Mittelwerte von spinabhängigen Funktionen $\mathcal{F}(\sigma)$ ohne äußeres Feld werden durch

$$\langle \mathcal{F}(\sigma) \rangle := \frac{\sum_{[\sigma_i]} \mathcal{F}(\sigma) e^{\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j}}{\sum_{[\sigma_i]} e^{\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j}} = \frac{1}{Z[B=0]} \sum_{[\sigma_i]} \mathcal{F}(\sigma) e^{-\beta H} \Big|_{B=0} \quad (1.23)$$

bestimmt.

Die Magnetisierung am Ort x_i berechnet sich nach (1.5):

$$\begin{aligned} M_i[B=0] &= - \left(\frac{\partial F}{\partial B} \right)_{B=0} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{Z[B=0]} \frac{\partial}{\partial B_i} Z[B] \Big|_{B=0} \\ &= \mu \frac{\sum_{[\sigma_i]} \sigma_i e^{-\beta H(\sigma)}}{\sum_{[\sigma_i]} e^{-\beta H(\sigma)}} \Big|_{B=0} \\ &= \mu \langle \sigma_i \rangle \end{aligned} \quad (1.24)$$

Die Suszeptibilitäten χ_{ij} aus (1.6) lassen sich nach

$$\frac{\chi_{ij}}{\beta \mu^2} = \frac{1}{\beta \mu^2} \frac{\partial M_i[B]}{\partial B_j} \Big|_{B=0} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c \quad (1.25)$$

durch die verbundene 2-Punkt-Korrelationsfunktion ausdrücken. Wenn wir (1.6) explizit ausrechnen erhalten wir

$$\langle \sigma(x_i)\sigma(x_j) \rangle_c = \frac{1}{\beta^2 \mu^2} \left(\frac{1}{Z[B]} \frac{\partial^2 Z[B]}{\partial B_i \partial B_j} - \frac{1}{Z^2[B]} \frac{\partial Z[B]}{\partial B_i} \frac{\partial Z[B]}{\partial B_j} \right) \Big|_{B=0}. \quad (1.26)$$

In translationsinvarianten Systemen mit ortsunabhängigem Magnetfeld wird die Suszeptibilität zu

$$\frac{\chi}{\beta \mu^2} = \frac{1}{\beta \mu^2} \frac{\partial M[B]}{\partial B} \Big|_{B=0} = \sum_i \langle \sigma(x_i)\sigma(0) \rangle_c = \sum_i G_c^{(2)}(x_i). \quad (1.27)$$

Die Korrelationslänge bestimmt sich nach (1.11) aus

$$\xi^2 = \frac{1}{2D} \frac{\sum_i x_i^2 G_c^{(2)}(x_i)}{\sum_i G_c^{(2)}(x_i)}. \quad (1.28)$$

1.3 ϕ^4 -Theorie

In diesem Kapitel wird die ϕ^4 -Theorie als feldtheoretisches Modell zur Beschreibung von kritischen Phänomenen vorgestellt [IZ80, Kapitel 6]. Wir gehen von einem kontinuierlichen, skalaren Feld ϕ aus, das im D -dimensionalen Raum definiert ist ($\phi: \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$). Dieses Feld tritt an die Stelle des Isingspins aus dem vorherigen Abschnitt.

Eine lokale Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0[\phi] = \frac{1}{2}(\partial\phi(x))^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2(x) \quad (1.29)$$

wird eingeführt. Zu (1.29) wird ein selbstwechselwirkender Anteil, dessen Kopplungskonstante $g_0 > 0$ ist, zuaddiert.

$$\mathcal{L}_{int}[\phi] = \frac{1}{4!}g_0\phi^4(x) \quad (1.30)$$

$$\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}_0[\phi] + \mathcal{L}_{int}[\phi] \quad (1.31)$$

(1.31) ist die komplette Lagrangedichte. Die Wirkung ist das Integral über den gesamten D -dimensionalen Ortsraum.

$$\mathcal{S}[\phi] = \int d^Dx \mathcal{L}[\phi] \quad (1.32)$$

Zur Lagrangedichte definieren wir noch einen Quellterm, der eine äußere Quelle $j(x)$ an das Feld $\phi(x)$ koppelt.

$$\mathcal{L}_{src}[\phi] = -j(x)\phi(x) \quad (1.33)$$

Physikalische Größen lassen sich wie in (1.23) als Erwartungswerte der Feldvariablen bestimmen.

$$\langle \mathcal{F}[\phi] \rangle := \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \mathcal{F}[\phi] e^{-\mathcal{S}[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi(x) e^{-\mathcal{S}[\phi]}} \quad (1.34)$$

Hierbei ist das Funktionalintegral $\int \mathcal{D}\phi(x)$ als Integral über den Zustandsraum gegeben, das heißt, ϕ nimmt alle möglichen Feldkonfigurationen an.

Zur Berechnung führen wir in Analogie zur Zustandssumme (1.22) das erzeugende Funktional der Green-Funktionen ein.

$$\mathcal{Z}[j] = \int \mathcal{D}\phi(x) e^{-\mathcal{S}[\phi] + \int d^D x j(x)\phi(x)} \quad (1.35)$$

Als Normierungsfaktor berechnen wir

$$\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}[0] = \int \mathcal{D}\phi(x) e^{-\mathcal{S}[\phi]}. \quad (1.36)$$

Hiermit lassen sich die Erwartungswerte nach (1.34) leicht bestimmen:

$$\langle \mathcal{F}[\phi] \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \int \mathcal{D}\phi(x) \mathcal{F}[\phi] e^{-\mathcal{S}[\phi]} \quad (1.37)$$

Der Erwartungswert der Vakuumfluktuation (bzw. die 1-Punkt-Green-Funktion) berechnet sich mit der Identität

$$\frac{\delta}{\delta j(y)} \exp \left\{ \int d^D x j(x)\phi(x) \right\} = \phi(y) \exp \left\{ \int d^D x j(x)\phi(x) \right\} \quad (1.38)$$

als

$$\langle \phi(x) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \frac{\delta}{\delta j(x)} \mathcal{Z}[j] \Big|_{j=0} = \frac{\delta \ln \mathcal{Z}[j]}{\delta j(x)} \Big|_{j=0}. \quad (1.39)$$

Die höheren Green-Funktionen lassen sich ebenso durch Funktionaldifferentiationen bestimmen.

$$\begin{aligned} G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \frac{\delta^n}{\delta j(x_1)\delta j(x_2)\cdots\delta j(x_n)} \mathcal{Z}[j] \Big|_{j=0} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Umgekehrt ist das erzeugende Funktional als Summe über die Green-Funktionen gegeben.

$$\frac{\mathcal{Z}[j]}{\mathcal{Z}_0} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^D x_1 \cdots d^D x_n j(x_1)\cdots j(x_n) G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (1.41)$$

Als weiteres erzeugendes Funktional wird

$$\mathcal{W}[j] := \ln \frac{\mathcal{Z}[j]}{\mathcal{Z}_0} \quad (1.42)$$

definiert. Die verbundenen Green-Funktionen lassen sich daraus auf vergleichbare Art wie in (1.40) bestimmen.

$$\begin{aligned} G_c^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n) \rangle_c \\ &= \frac{\delta^n}{\delta j(x_1)\delta j(x_2)\cdots\delta j(x_n)} \mathcal{W}[j] \Big|_{j=0} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Es zeigt sich, daß die 1-Punkt-Funktionen aus (1.39) und (1.43) gleich sind, während sich die höheren Korrelationsfunktionen unterscheiden:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \rangle_c &= \langle \phi(x) \rangle \\ \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_c &= \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle - \langle \phi(x_1) \rangle \langle \phi(x_2) \rangle \\ \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \rangle_c &= \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \rangle - \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle \langle \phi(x_3) \rangle \\ &\quad - \langle \phi(x_2)\phi(x_3) \rangle \langle \phi(x_1) \rangle - \langle \phi(x_3)\phi(x_1) \rangle \langle \phi(x_2) \rangle \\ &\quad + 2 \langle \phi(x_1) \rangle \langle \phi(x_2) \rangle \langle \phi(x_3) \rangle \end{aligned} \quad (1.44)$$

Da wir bei der Berechnung der Amplitudenverhältnisse von Suszeptibilität und Korrelationslänge an “Einteilchen-irreduziblen Graphen” interessiert sind, definieren wir uns ein weiteres erzeugendes Funktional als Legendre-Transformierte von (1.42). Einteilchen-Irreduzibilität bedeutet, daß sich die Feynman-Graphen (s.u.) nicht durch Auftrennen *eines* inneren Propagators in zwei Teilgraphen zerlegen lassen.

$$\Gamma[\phi] := \mathcal{W}[j] - \int d^D x j(x)\phi(x) \quad (1.45)$$

Hieraus erhalten wir durch Differentiation nach der Feldvariablen $\phi(x)$ die n -Punkt-Vertex-Funktionen, die Einteilchen-irreduzibel sind.

$$\Gamma^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta \phi(x_1)\delta \phi(x_2)\cdots\delta \phi(x_n)} \Gamma[\phi] \Big|_{\phi=0} \quad (1.46)$$

Durch eine Fourier-Transformation können wir diese Funktion auch im Impulsraum darstellen.

$$\Gamma^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int \prod_{j=0}^n \left(\frac{d^D p_j}{(2\pi)^D} e^{ip_j \cdot x_j} \right) \Gamma^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (1.47)$$

Die Berechnung dieser letzten Größe für $n = 2, 4$ nimmt in dieser Arbeit breiten Raum ein.

1.4 Störungstheorie

Zur praktischen Berechnung der Korrelations- bzw. Vertex-Funktionen müssen wir leider, da sie sich nicht geschlossen bestimmen lassen, auf die Störungstheorie zurückgreifen. Eine umfangreichere Darstellung findet sich zum Beispiel in [BDFN92, Kapitel 8] und der zu Beginn dieses Kapitels aufgeführten Literatur.

Um die Entwicklung in der Kopplungskonstanten g_0 darzustellen, schreiben wir zunächst das erzeugende Funktional (1.35) um.

$$\mathcal{Z}[j] = \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ - \int d^D x \mathcal{L}_{int}[\phi] \right\} \cdot \exp \left\{ - \int d^D x (\mathcal{L}_0[\phi] + \mathcal{L}_{src}[\phi]) \right\} \quad (1.48)$$

Mit der Identität (1.38) wird dies zu

$$\mathcal{Z}[j] = \exp \left\{ - \frac{1}{4!} g_0 \int d^D x \left(\frac{\delta}{\delta j(x)} \right)^4 \right\} \cdot \mathcal{Z}_G[j], \quad (1.49)$$

wobei $\mathcal{Z}_G[j]$ ein Gaußsches Funktionalintegral ist.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_G[j] &= \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ - \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\partial\phi(x))^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2(x) - j(x)\phi(x) \right) \right\} \\ &= \mathcal{Z}_G[0] \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta(x-y) j(y) \right\} \end{aligned} \quad (1.50)$$

$\Delta(x-y)$ ist der Feynman-Propagator; in einem Gauß-Modell ist dies der vollständige Propagator. Im Impulsraum gilt $\Delta(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2}$, also ist

$$\Delta(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{1}{p^2 + m_0^2} e^{ip(x-y)}. \quad (1.51)$$

Den Wechselwirkungsterm können wir nun in eine Potenzreihe in der Kopplung g_0 entwickeln.

$$\mathcal{Z}[j] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(- \frac{g_0}{4!} \int d^D x \left(\frac{\delta}{\delta j(x)} \right)^4 \right)^n \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^D x d^D y j(x) \Delta(x-y) j(y) \right\} \cdot \mathcal{Z}_G[0] \quad (1.52)$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die beiden anderen erzeugenden Funktionale $\mathcal{W}[j]$ und $\Gamma[\phi]$ sowie deren Ableitungen, die Korrelations- und Vertex-Funktionen als unendliche Reihen in g_0 schreiben.

In den folgenden Abschnitten werden nun die Feynman-Regeln der ϕ^4 -Theorie in beiden Phasen vorgestellt, während sich Kapitel 2 mit der Erstellung der Graphen beschäftigt.

1.4.1 Symmetrische Phase

In der symmetrischen Phase verwenden wir eine ϕ^4 -Theorie mit der Feldvariablen $\phi_+(x) := \phi(x)$ und einer nackten Masse

$$m_{0+}^2 := m_0^2 > 0. \quad (1.53)$$

Das Potential (vgl. Abb. 1.1)

$$\mathcal{V}(\phi_+) = \frac{1}{2} m_{0+}^2 \phi_+^2 + \frac{1}{4!} g_0 \phi_+^4 \quad (1.54)$$

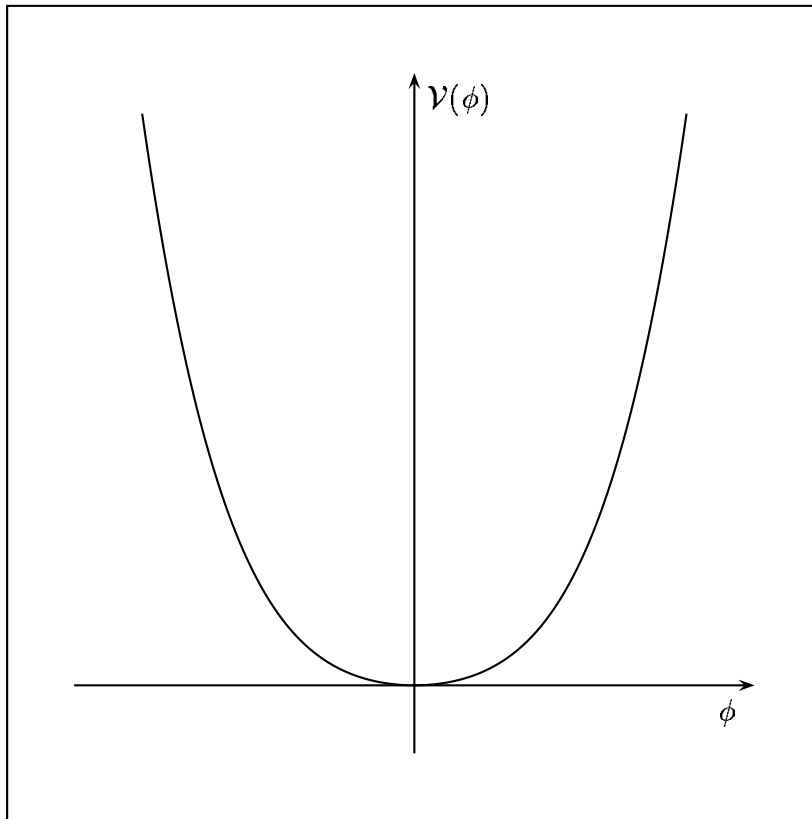
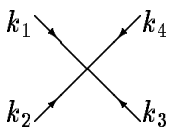



Abbildung 1.1: Potential der symmetrischen Phase

hat damit ein absolutes Minimum bei $\phi_+(x) \equiv 0$. Daraus folgt eine ungebrochene Z_2 -Symmetrie, das heißt $\mathcal{V}(\phi_+) = \mathcal{V}(-\phi_+)$. Die Lagrangedichte ist wie in (1.31) durch

$$\mathcal{L}[\phi_+] = \frac{1}{2}(\partial\phi_+(x))^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi_+^2(x) + \frac{1}{4!}g_0\phi_+^4(x) \quad (1.55)$$

gegeben. Zum Abschluß dieses Abschnitts stellen wir noch die Feynman-Regeln für die Vertex-Funktionen im Impulsraum auf, nach denen die Graphen berechnet werden.

1. Jedem Vierpunkt-Vertex  wird ein Faktor $-g_0$ zugeordnet.
2. An jedem Vertex gilt Impulserhaltung, das heißt für jeden Vertex muß ein Faktor $\delta(\sum_i k_i)$ berücksichtigt werden.
3. Jeder inneren Linie  mit Impuls k_i wird ein Propagator $\Delta(k_i) = \frac{1}{k_i^2 + m_0^2}$ zugeordnet.
4. Über alle inneren Impulse wird integriert $(2\pi)^{-D} \int d^D k_i$.
5. Ordne jedem Diagramm einen Symmetriefaktor zu:

- Für jede innere Linie, die einen Vertex mit sich selbst verbindet, einen Faktor 2^{-1} .
- Für l Linien, die zwei Vertices miteinander verbinden, einen Faktor $(l!)^{-1}$.
- Wenn sich die inneren Punkte auf r verschiedene Arten anordnen lassen, ohne daß das Diagramm seine Gestalt ändert, einen Faktor r^{-1} .

1.4.2 Gebrochene Phase

Um in die Phase gebrochener Symmetrie zu kommen, setzen wir $m_0^2 \propto t$ an². Also gilt für $T < T_c$:

$$m_0^2 < 0. \quad (1.56)$$

Das Potential

$$\mathcal{V}(\phi) = \frac{1}{2}m_0^2\phi^2 + \frac{1}{4!}g_0\phi^4 \quad (1.57)$$

hat nun drei Extremwerte, ein lokales Maximum bei $\phi(x) \equiv 0$ und zwei absolute Minima bei $\phi(x) \equiv \pm v_{min}$.

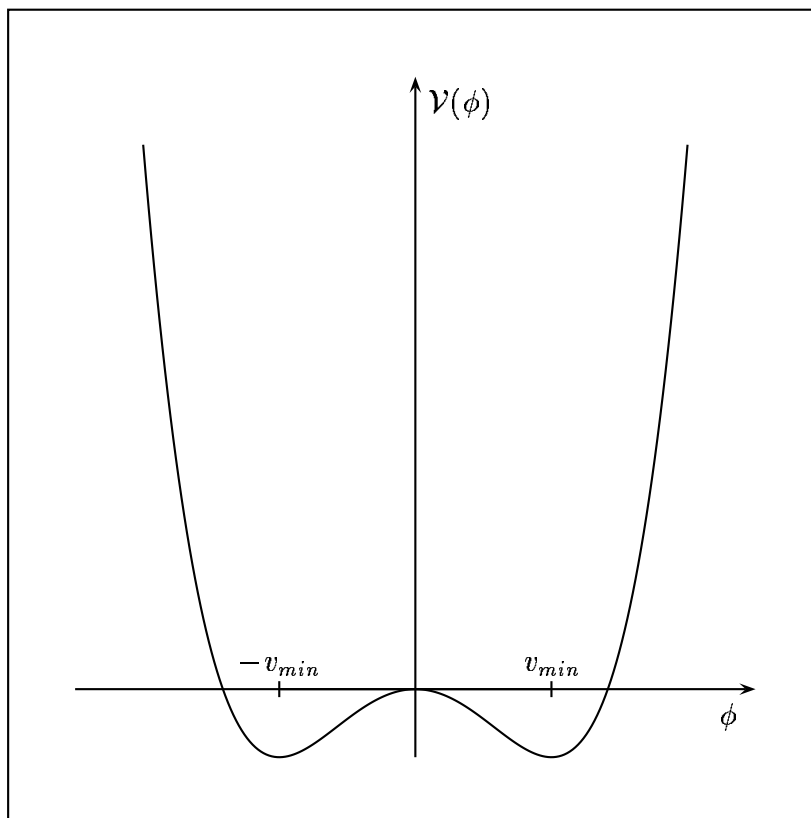


Abbildung 1.2: Potential der gebrochenen Phase

²Es stellt sich heraus, daß wir eigentlich eine Massenverschiebung $m_0^2 - m_{0c}^2 \propto t$ ansetzen müssen (vgl. Kapitel 6.1).

Aus (1.57) ergibt sich v_{min} zu:

$$v_{min} = \sqrt{\frac{-3!m_0^2}{g_0}} = \sqrt{\frac{3m_{0-}^2}{g_0}} > 0 \quad (1.58)$$

Hier haben wir eine Masse

$$m_{0-}^2 := -2m_0^2 > 0 \quad (1.59)$$

definiert. Da das Funktionalintegral (1.36) durch die Minima im Potential dominiert wird, entwickeln wir (1.57) um $+v_{min}$ und führen eine neue Feldvariable

$$\phi_-(x) := \phi(x) - v_{min} \quad (1.60)$$

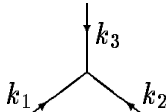
ein. Durch Einsetzen dieser Feldvariablen in das Potential (1.57) bekommen wir

$$\mathcal{V}(\phi_-) = \frac{1}{2}m_{0-}^2\phi_-^2 + \frac{1}{3!}\sqrt{3g_0}m_{0-}\phi_-^3 + \frac{1}{4!}g_0\phi_-^4 - \frac{3}{8}\frac{m_{0-}^4}{g_0}. \quad (1.61)$$

Da der konstante Term im Potential keinen Einfluß auf die Störungstheorie hat, setzen wir ihn gleich Null. Die Lagrangedichte wird zu

$$\mathcal{L}_-[\phi_-] = \frac{1}{2}(\partial\phi_-(x))^2 + \frac{1}{2}m_{0-}^2\phi_-^2(x) + \frac{1}{3!}\sqrt{3g_0}m_{0-}\phi_-^3(x) + \frac{1}{4!}g_0\phi_-^4(x). \quad (1.62)$$

Die Störungsrechnung in der gebrochenen Phase können wir in der Feldvariablen ϕ_- durchführen. Im Vergleich zur symmetrischen Phase kommt nur ein Wechselwirkungsterm ϕ_-^3 hinzu. Durch die spezielle Wahl von m_{0-} können wir die Feynman-Regeln der symmetrischen Phase direkt übernehmen und müssen nur für die Dreiervertices zusätzliche Regeln schaffen.

1'. Jedem Dreipunkt-Vertex  wird ein Faktor $-\sqrt{3g_0}m_{0-}$ zugeordnet.

Die Impulserhaltung gilt natürlich ebenfalls an den Dreiervertices.

Kapitel 2

Generation der Feynman-Graphen

Nachdem im letzten Kapitel die Feynman-Regeln zur Bestimmung der Integrale aufgestellt wurden, geht es nun um das Erstellen der zu berechnenden Feynman-Graphen und die Kontrolle der Vollständigkeit.

2.1 Erstellen der Graphen

Um eine bestimmte n -Punkt-Korrelations- bzw. Vertex-Funktion in einer gegebenen Schleifen-(Loop-)Ordnung zu bestimmen, müssen wir *alle* Feynman-Diagramme, die zu dieser Ordnung gehören, berechnen.

In der symmetrischen Phase, wo wir nur eine ϕ^4 -Kopplung haben, läßt sich die Anzahl der Vertices V_4 direkt berechnen [ID89].

$$V_4 = L + \frac{1}{2}n - 1 \quad (2.1)$$

Hier bezeichnet L die Loop-Ordnung und n die Anzahl der externen Beine. Da jedem Vertex ein Faktor $-g_0$ zugeordnet wird, ist V_4 auch die Störungsordnung. Für die 2-Punkt-Funktion ($n = 2$) wird $V_4 = L$, und damit ist die Störungsordnung gleich der Loop-Ordnung.

In der Phase gebrochener Symmetrie haben wir neben der ϕ^4 -Kopplung noch die ϕ^3 -Kopplung vorliegen, das heißt es gibt zusätzlich noch Dreiervertices V_3 . Damit wird (2.1) zu

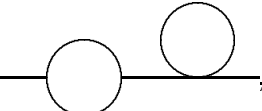
$$2V_4 + V_3 = 2L + n - 2 \quad (2.2)$$

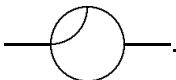
und zu gegebenen n und L muß über alle möglichen Kombinationen von V_3 und V_4 mit $V_{3,4} \geq 0$ summiert werden.

Als Beispiel betrachten wir einen 2-Loop-Graphen, der zu $\Gamma^{(2)}$, der echten 2-Punkt-Vertex-Funktion, in der gebrochenen Phase beiträgt. Nach (2.2) gilt $2V_4 + V_3 = 4$. Wir wählen $V_4 = 1$, woraus $V_3 = 2$ folgt. Der Graph setzt sich also aus einem Vierervertex und zwei Dreiervertices zusammen. Mit

$$I = 2V_4 + \frac{3}{2}V_3 - \frac{1}{2}n \quad (2.3)$$

bestimmen wir die Anzahl der internen Propagatoren I mit 4. Nun haben wir den kompletten Bausatz, um den Graph zu erzeugen. Um alle Graphen zu bekommen, müssen prinzipiell die beiden externen Beine auf alle möglichen Arten mit den Vertices und internen Linien verbunden werden. Eine große Anzahl von Kombinationen braucht nicht berücksichtigt zu werden, da alle Teile miteinander verbunden sein müssen. Außerdem fallen alle Graphen weg, die Einteilchen-reduzibel sind, wie zum

Beispiel , da wir die Vertex-Funktion betrachten. Dieser Graph trägt zu $G_c^{(2)}$ (1.43), den verbundenen Green-Funktionen bei, aber nicht zu $\Gamma^{(2)}$ nach (1.46).

Ein möglicher Graph neben neun anderen Kombinationen ist .

Exemplarisch stelle ich hier ein ausführliches Verfahren zur Bestimmung des Symmetriefaktors des letzten Graphen vor, wie es sich aus Wicks Theorem ergibt.

- Für jeden Vierervertex kommt ein Faktor $4!$ in den Nenner, für jeden Dreiervertex ein Faktor $3!$.
- Für mehrere Dreier- oder Vierervertices kommt ein zusätzlicher Permutationsfaktor $V_{3,4}!$ in den Nenner.

Diese Regeln gelten für alle Graphen mit einem gegebenen Satz von Vertices und inneren Linien. Insgesamt ergibt sich damit zunächst

$$\frac{1}{(4!)^{V_4} \cdot (3!)^{V_3} \cdot V_4! \cdot V_3!}, \quad \text{im speziellen Fall} \quad \frac{1}{4! \cdot (3!)^2 \cdot 1 \cdot 2!} = \frac{1}{1728}. \quad (2.4)$$

Nun kommen einige weitere Faktoren hinzu, die vom speziellen Graph abhängen.

- Verbindung eines äußeren Beines mit dem Vierervertex: 4.
- Verbindung des anderen äußeren Beines mit einem von zwei Dreiervertices: $2 \cdot 3$.
- Verbindung des restlichen Dreiervertex mit einem der zwei freien Beine des anderen Dreiervertex: $3 \cdot 2$.
- Verbindung der beiden Vertices, die mit den externen Beinen verbunden sind: 3.
- Zwei Verbindungen des Vierervertex mit dem zweiten Dreiervertex: 2.

Die genannten Faktoren kommen alle in den Zähler und es ergibt sich

$$\frac{4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2}{1728} = \frac{1}{2}. \quad (2.5)$$

Mit den Regeln aus Kapitel 1.4 ergibt sich notwendigerweise derselbe Wert: Es gibt bei diesem Graphen nur zwei Linien, die dieselben Vertices verbinden, welches einen Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt. Die inneren Vertices (hier nur einer) lassen sich nicht untereinander permutieren und es gibt auch keine Linie, die einen Vertex mit sich selbst verbindet.

2.2 Programme

Die Programme, mit denen die Feynman-Graphen generiert wurden, werden im folgenden kurz vorgestellt. Diese Programme haben jeweils unterschiedliche Stärken.

FeynArts

Als erstes Programm wurde FeynArts [EK91, KBD90] verwendet. Die Vorteile dieses Macropakets für Mathematica [WOL91] liegen in der graphischen Darstellung und der Möglichkeit, die Berechnung direkt durch FeynCalc, ein Programm derselben Autoren, ausführen zu lassen. Da das Paket für die Generation von 3-Loop-Graphen aber noch erweitert werden muß, und die Rechenzeit wegen des rekursiven Algorithmus stark steigt, stellte es sich jedoch als unpraktisch heraus.

Qgraf

Letztendlich wurde Qgraf [NOG93, NOG] verwendet. Dieses Fortran77 Programm ließ sich problemlos auf unseren Workstations installieren.

Durch eine Steuerdatei läßt sich das Modell einstellen. Neben der Anzahl der externen Teilchen und der Loopordnung lassen sich alle Wechselwirkungen vorgeben. Bei unserem Modell einer skalaren Feldtheorie haben wir nur einen Vierervertex und in der gebrochenen Phase zusätzlich den Dreiervertex vorliegen.

Die Ausgabe des Programms ist eine Liste der Vertices, die durch nummerierte Propagatoren verbunden werden.

Da bei der Berechnung der 2- und 4-Punkt-Funktion nur Einteilchen-irreduzible Graphen berechnet werden, ist in der Steuerdatei die Option "onshell" zu setzen. Desweiteren haben wir die Option "topol" gesetzt, da damit die externen Beine identisch gemacht werden, und Graphen, die durch Permutation der äußeren Beine auseinander hervorgehen, nur einfach aufgeführt werden. Die Permutationsfaktoren sind dann durch Listenvergleiche von einem Programm bestimmt worden [GUT95]. Für die Bestimmung der 1-Punkt-Funktion, die ja eine Green-Funktion ist, darf keine Option gesetzt werden.

2.3 Anzahl der Graphen

Abschließend wird in diesem Kapitel noch ein Verfahren vorgestellt, um die Vollständigkeit der Graphen zu kontrollieren [ZJ89, IZ80, CLP78].

Die Summe aller Symmetriefaktoren einer gegebenen Ordnung läßt sich durch die "Null-dimensionale" Feldtheorie berechnen. Das Argument der Feldvariablen und die Ortsintegration werden unterdrückt. Dadurch verschwindet auch der Ableitungsterm und die Wirkung wird zu

$$S(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{g}{4!}\varphi^4. \quad (2.6)$$

Das negative Vorzeichen der φ^4 -Kopplungskonstanten g hat an dieser Stelle den Effekt, daß die Koeffizienten der zu entwickelnden Reihe durchweg positive Vorzeichen haben. Über die daraus folgende Divergenz des erzeugenden Funktionals können wir hinwegsehen, da nur die Vorfaktoren der jeweiligen Störungsordnung von Interesse sind.

Um die Reihe für die verbundenen Green-Funktionen zu erhalten, bilden wir den Logarithmus von

$$\mathcal{Z}(j) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-\mathcal{S}(\varphi)+j\varphi} \quad (2.7)$$

und leiten n mal nach j ab.

$$G_c(\varphi^n) = \left. \frac{\partial^n \ln \frac{\mathcal{Z}(j)}{\mathcal{Z}(0)}}{\partial j^n} \right|_{j=0} \quad (2.8)$$

Für die verbundene Green-Funktion in der symmetrischen Phase folgt:

$$G_c(\varphi^2) = 1 + \frac{1}{2}g + \frac{2}{3}g^2 + \frac{11}{8}g^3 + \mathcal{O}(g^4) \quad (2.9)$$

Durch Invertieren erhalten wir die Reihe für die Vertex-Funktionen:

$$\Gamma_{0D}^{(2)} = -1 + \frac{1}{2}g + \frac{5}{12}g^2 + \frac{5}{6}g^3 + \mathcal{O}(g^4) \quad (2.10)$$

Darin steht der Index "0D" für die "Null-dimensionale" Theorie. Durch weiteres Ableiten bekommen wir für die 4-Punkt Funktion

$$\Gamma_{0D}^{(4)} = g + \frac{3}{2}g^2 + \frac{21}{4}g^3 + \frac{45}{2}g^4 + \mathcal{O}(g^5). \quad (2.11)$$

Durch Summation der Symmetriefaktoren aller Graphen erhalten wir die Werte aus (2.10) und (2.11). Eine vollständige Liste aller Graphen befindet sich in [GUT95].

In der Phase gebrochener Symmetrie ist die Wirkung um einen φ^3 -Term erweitert.

$$\mathcal{S}(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{\sqrt{g}}{3!}\varphi^3 - \frac{g}{4!}\varphi^4 \quad (2.12)$$

Die Dreipunkt-Kopplung hat hier eine Kopplungskonstante \sqrt{g} , da nur die Symmetriefaktoren interessieren. Daraus lassen sich die Reihen für die 1- und 2-Punkt-Green-Funktionen bestimmen.

$$G_c(\varphi) = \frac{1}{2}g^{\frac{1}{2}} + \frac{31}{24}g^{\frac{3}{2}} + \frac{341}{48}g^{\frac{5}{2}} + \mathcal{O}(g^{\frac{7}{2}}) \quad (2.13)$$

$$G_c(\varphi^2) = 1 + \frac{3}{2}g + \frac{25}{3}g^2 + \frac{1741}{24}g^3 + \mathcal{O}(g^4) \quad (2.14)$$

Durch Invertieren der letzten Gleichung bekommen wir die Reihe für die Vertex-Funktionen

$$\Gamma_{0D}^{(2)} = -1 + \frac{3}{2}g + \frac{73}{12}g^2 + \frac{611}{12}g^3 + \mathcal{O}(g^4). \quad (2.15)$$

An dieser Stelle seien noch die Reihen für die Anzahl der Graphen aus [NOG93] zitiert:

$$N(\varphi) = g^{\frac{1}{2}} + 6g^{\frac{3}{2}} + 46g^{\frac{5}{2}} + \mathcal{O}\left(g^{\frac{7}{2}}\right) \quad (2.16)$$

$$N(\varphi^2) = 1 + 3g + 29g^2 + 351g^3 + \mathcal{O}\left(g^4\right). \quad (2.17)$$

Die letzte Gleichung wird wiederum invertiert, und für die Anzahl der Einteilchen-irreduziblen Graphen der 2-Punkt-Funktion erhalten wir:

$$N_{\Gamma} = -1 + 3g + 20g^2 + 204g^3 + \mathcal{O}\left(g^4\right). \quad (2.18)$$

Alle in diesem Kapitel aufgeführten Summen von Symmetriefaktoren und Anzahlen von Graphen sind in Übereinstimmung mit den berechneten Listen. Damit ist die Menge der Graphen als vollständig bis zur 3-Loop-Ordnung anzusehen.

Kapitel 3

Dyson-Schwinger-Gleichung in der gebrochenen Phase

In diesem Kapitel wird ein Verfahren vorgestellt, die Anzahl der zu berechnenden Feynman-Graphen über die Dyson-Schwinger-Gleichung zu reduzieren. Diese Gleichungen gehen zurück auf [Dys49]. Als Literatur seien hier [Cvi83, ZJ89, Riv87, Tay76] angegeben.

3.1 Allgemeines

Zur Vereinfachung sei in diesem und dem folgenden Kapitel die Integration über eine Ortsvariable immer D -dimensional gemeint.

$$\int dx \equiv \int d^D x \quad (3.1)$$

Die wichtigsten Formeln dieses Kapitels sind hier zu Beginn nochmals kurz erwähnt (vgl. (1.35), (1.42) und (1.45)).

$$\mathcal{Z}[j] = \mathcal{Z}_0 \cdot e^{\mathcal{W}[j]} \quad (3.2)$$

$$\mathcal{W}[j] = \Gamma[\phi] + \int dx \phi(x) j(x) \quad (3.3)$$

In (3.3) gilt für die Feldvariable $\phi = \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j}$.

Da wir in diesem Kapitel in der gebrochenen Phase rechnen, ist die Lagrange-dichte im Gegensatz zu (1.31) wie folgt gegeben:

$$\mathcal{L}[\phi] = \frac{1}{2}(\partial\phi(x))^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2(x) + \frac{1}{3!}f_0\phi^3(x) + \frac{1}{4!}g_0\phi^4(x) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\phi] &= \int d^D x \mathcal{L}[\phi] \\ &= \int d^D x \left(\frac{1}{2}(\partial\phi(x))^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi^2(x) + \frac{1}{3!}f_0\phi^3(x) + \frac{1}{4!}g_0\phi^4(x) \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\delta \mathcal{S}[\phi]}{\delta \phi(x)} = (-\partial^2 + m_0^2)\phi(x) + \frac{1}{2}f_0\phi^2(x) + \frac{1}{3!}g_0\phi^3(x). \quad (3.6)$$

Hierin habe ich eine Dreipunkt-Kopplungskonstante f_0 eingeführt, für die nach den Regeln aus Abschnitt 1.4.2 $f_0 = \sqrt{3g_0 m_0}$ gilt.

3.2 Notationen

Zur Darstellung der Dyson-Schwinger-Gleichung führe ich eine graphische Schreibweise ein. Dabei ist der freie Propagator

$$\Delta(x, y) = \bullet \text{---} \bullet \quad (3.7)$$

und der inverse Propagator

$$\Delta^{-1}(x, y) = (-\partial^2 + m_0^2)\delta(x - y) = \text{---} \diagup \text{---} \text{---} \diagdown \quad (3.8)$$

Für die Vertices und Quellen gilt:

$$\begin{aligned} -g_0 \int dx &= \begin{array}{c} \diagup \bullet \diagdown \\ \diagdown \bullet \diagup \end{array} \\ -f_0 \int dx &= \begin{array}{c} \diagup \bullet \diagdown \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = -\sqrt{3g_0 m_0} \int dx \\ \int j(x) dx &= \times \end{aligned}$$

Die erzeugenden Funktionale aus 3.1 stellen sich graphisch wie folgt dar:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[j] &\hat{=} \bigcirc \\ \mathcal{W}[j] &\hat{=} \text{---} \bigcirc \text{---} \\ \Gamma[\phi] &\hat{=} \text{---} \bigcirc \text{---} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Green- bzw. Vertex-Funktionen im Ortsraum stellen sich wie die jeweiligen erzeugenden Funktionale mit externen Beinen dar.

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, \dots, x_n) &\hat{=} \begin{array}{c} x_1 \bullet \quad \bullet x_n \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_2 \bullet \quad \bullet \end{array} \\ G_c(x_1, x_2, \dots, x_n) &\hat{=} \begin{array}{c} x_1 \bullet \quad \bullet x_n \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \bullet \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_2 \bullet \quad \bullet \end{array} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\Gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) \hat{=} \begin{array}{c} x_1 \quad x_n \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ x_2 \quad \bullet \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

Hier ist zu bemerken, daß die Darstellung (3.10) nur für $j \equiv 0$ gilt. Für beliebiges j stellt die obige graphische Schreibweise nur Ableitungen der erzeugenden Funktionale dar.

3.3 Die Dyson-Schwinger-Gleichung für Green-Funktionen

Die Aussage, daß das Integral über eine totale Ableitung verschwindet, nutzen wir für das erzeugende Funktional $\mathcal{Z}[j]$ (3.2) aus.

$$\int \mathcal{D}\phi(x) \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \exp(-\mathcal{S}[\phi] + j \cdot \phi) = 0 \quad (3.11)$$

Hier haben wir die symbolische Kurzschreibweise

$$j \cdot \phi := \int dx j(x)\phi(x) \quad (3.12)$$

eingeführt. Damit folgt aus (3.11) bei Ausführung der Differentiation

$$\int \mathcal{D}\phi(x) \left(j(x) - \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi(x)}[\phi] \right) \exp(-\mathcal{S}[\phi] + j \cdot \phi) = 0. \quad (3.13)$$

Unter Ausnutzung der Identität (1.38)

$$\frac{\delta}{\delta j(x)} \exp(j \cdot \phi) = \phi(x) \exp(j \cdot \phi) \quad (3.14)$$

können wir die Funktionalintegration nach hinten ziehen und erhalten:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi(x)} \left[\frac{\delta}{\delta j(x)} \right] - j(x) \right) \mathcal{Z}[j] \\ &= \left((-\partial^2 + m_0^2) \frac{\delta}{\delta j(x)} + \frac{1}{2} f_0 \frac{\delta^2}{\delta j(x)^2} + \frac{1}{3!} g_0 \frac{\delta^3}{\delta j(x)^3} - j(x) \right) \mathcal{Z}[j]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Damit haben wir die Dyson-Schwinger-Gleichung der Bewegung, oder in Kurzform DS-Gleichung, gewonnen.

Nach Faltung mit $\Delta(x, y)$ wird aus (3.15) in graphischer Notation

$$\bullet \text{---} \bigcirc = \bullet \text{---} \times \bigcirc + \frac{1}{2} \bullet \text{---} \bigcirc \bigcirc + \frac{1}{3!} \bullet \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc. \quad (3.16)$$

3.4 Die Dyson-Schwinger-Gleichung für verbundene Green-Funktionen

Die zusammenhängenden Green-Funktionen haben $\mathcal{W}[j] = \ln \frac{\mathcal{Z}[j]}{\mathcal{Z}_0}$ als erzeugendes Funktional.

Durch Funktionaldifferentiation von (3.2) nach $j(x)$ erhalten wir

$$\frac{\delta}{\delta j(x)} \mathcal{Z}[j] = \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} \mathcal{Z}[j] \quad (3.17)$$



$$\bullet \text{---} \bigcirc = \bullet \text{---} \bigcirc_{\text{hatched}} \cdot \bigcirc \quad (3.18)$$

Die Green-Funktion zerfällt also in einen Anteil, der mit dem äußeren Bein verbunden ist, und in einen Teil, der unverbunden ist.

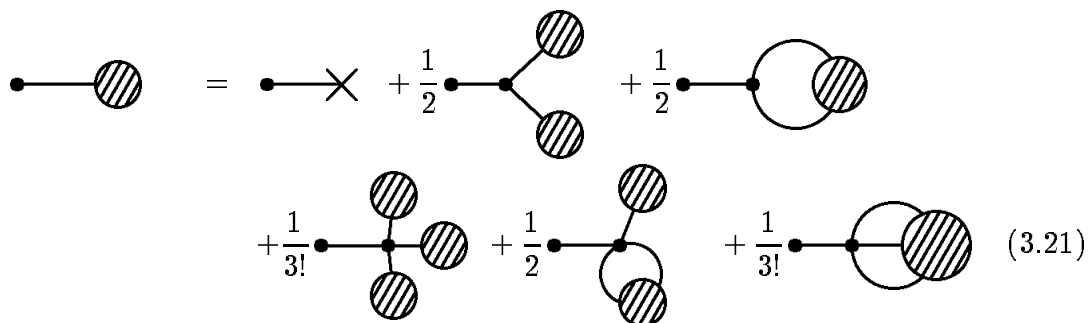
Wir nutzen die Identität

$$\frac{1}{\mathcal{Z}[j]} \frac{\delta}{\delta j(x)} \mathcal{Z}[j] = \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} + \frac{\delta}{\delta j(x)}, \quad (3.19)$$

um (3.15) umzuschreiben. So erhalten wir die DS-Gleichung für die zusammenhängenden Green-Funktionen:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \phi(x)} \left[\frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j(x)} + \frac{\delta}{\delta j(x)} \right] - j(x) \\ &= (-\partial^2 + m_0^2) \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} + \frac{1}{2} f_0 \left[\left(\frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} \right)^2 + \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)^2} \right] \\ &\quad + \frac{1}{3!} g_0 \left[\left(\frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} \right)^3 + 3 \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)^2} + \frac{\delta^3 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)^3} \right] - j(x). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ebenso wie bei (3.16) multiplizieren wir Gleichung (3.20) von links mit einem Propagator und erhalten graphisch:



$$\bullet \text{---} \bigcirc_{\text{hatched}} = \bullet \text{---} \times + \frac{1}{2} \bullet \text{---} \bigcirc_{\text{hatched}} \bigcirc_{\text{hatched}} + \frac{1}{2} \bullet \text{---} \bigcirc \bigcirc_{\text{hatched}} + \frac{1}{3!} \bullet \text{---} \bigcirc_{\text{hatched}} \bigcirc_{\text{hatched}} \bigcirc_{\text{hatched}} + \frac{1}{2} \bullet \text{---} \bigcirc \bigcirc_{\text{hatched}} \bigcirc_{\text{hatched}} + \frac{1}{3!} \bullet \text{---} \bigcirc \bigcirc_{\text{hatched}} \bigcirc_{\text{hatched}} \quad (3.21)$$

Gleichung (3.20) gilt für ein beliebiges Quellfeld j , wird aber erst für $j \equiv 0$ als Dyson-Schwinger-Gleichung von $G_c^{(1)}$ zur konkreten Berechnung interessant (vgl. Kapitel 3.6).

3.4.1 Die DS-Gleichung für den vollständigen Propagator

Zur Berechnung der Dyson-Schwinger-Gleichung für den vollständigen Propagator definieren wir uns die Größen \hat{A}_i ; $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_1(m_0) &:= \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ | \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = -f_0 \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} \\
 \hat{A}_2(m_0) &:= \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ / \quad \backslash \\ \text{---} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = -\frac{1}{2} g_0 \left(\frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} \right)^2 \\
 \hat{A}_3(m_0) &:= \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \backslash \quad / \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = -\frac{1}{2} g_0 \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Graphen dieser Art werden als Tadpole-Graphen bezeichnet. Definiert sind sie dadurch, daß der Integralausdruck unabhängig von den externen Impulsen ist.

Mit den Definitionen (3.22) wird durch nochmaliges Ableiten nach der Quelle j aus (3.20):

$$\begin{aligned}
 &(-\partial^2 + m_0^2) \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} \\
 &= \delta(x - y) + \hat{A}_1(m_0) \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} + \hat{A}_2(m_0) \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} \\
 &+ \hat{A}_3(m_0) \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} - \frac{1}{2} f_0 \frac{\delta^3 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(x) \delta j(y)} \\
 &- \frac{1}{2} g_0 \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} \frac{\delta^3 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(x) \delta j(y)} - \frac{1}{3!} g_0 \frac{\delta^4 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(x) \delta j(x) \delta j(y)}.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Durch Faltung mit $\Delta(x, y)$ wird daraus:

$$\begin{aligned}
 \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ | \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} &= \text{---} \bullet \text{---} \bullet + \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ | \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \bullet + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ / \quad \backslash \\ \text{---} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \bullet \\
 + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ \backslash \quad / \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \bullet + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ | \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \bullet \\
 + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ / \quad \backslash \\ \text{---} \bullet \text{---} \quad \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \bullet + \frac{1}{3!} \text{---} \bullet \text{---} \begin{array}{c} \text{---} \bullet \text{---} \\ | \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} \bullet.
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Mit $j \equiv 0$ stellt (3.24) eine Entwicklung der verbundenen 2-Punkt-Green-Funktion dar, die auch als “vollständiger Propagator” bezeichnet wird. Im folgenden soll diese Gleichung vereinfacht werden.

3.4.2 Elimination der Tadpole-Graphen von $G_c^{(2)}$

Im Impulsraum lassen sich einige Terme aus (3.23) eliminieren und damit kann die Rechnung vereinfacht werden.

In diesem Abschnitt sei $j \equiv 0$. Dadurch werden aus den n -ten Ableitungen von \mathcal{W} die verbundenen Green-Funktionen $G_c^{(n)}$.

$$A(m_0) := \hat{A}_1(m_0) + \hat{A}_2(m_0) + \hat{A}_3(m_0) \quad (3.25)$$

$$\Delta(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2} = \bullet \text{---} \bullet \quad (3.26)$$

Mit der Summe (3.25) über die \hat{A}_i und dem massiven Propagator im Impulsraum erhalten wir aus (3.24):

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(p) &= \Delta(p) + \frac{A(m_0)}{p^2 + m_0^2} G_c^{(2)}(p) \\ &\quad - \Delta(p) \frac{1}{2} f_0 G_c^{(3)}(p_1, p_2) - \Delta(p) \frac{1}{2} g_0 G_c^{(3)}(p_1, p_2) G_c^{(1)}(0) \\ &\quad - \Delta(p) \frac{1}{3!} g_0 G_c^{(4)}(p_1, p_2, p_3) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \text{---} \textcircled{\text{---}} \text{---} &= \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \frac{A(m_0)}{p^2 + m_0^2} \text{---} \textcircled{\text{---}} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{\text{---}} \text{---} \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{\text{---}} \text{---} + \frac{1}{3!} \text{---} \textcircled{\text{---}} \text{---}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dabei gilt jeweils für die einzelnen Green-Funktionen $G_c^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ mit n größer oder gleich zwei: $\sum_{i=1}^n p_i = p$.

Um die folgende Rechnung übersichtlich zu halten, wird die Summe $B(p, m_0)$ eingeführt, die die Terme der zweiten und dritten Zeile von (3.27) jeweils ohne den Propagator zusammenfaßt.

$$\begin{aligned} B(p, m_0) &= -\frac{1}{2} f_0 G_c^{(3)}(p_1, p_2) - \frac{1}{2} g_0 G_c^{(3)}(p_1, p_2) G_c^{(1)}(0) \\ &\quad - \frac{1}{3!} g_0 G_c^{(4)}(p_1, p_2, p_3) \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\left(1 - \frac{A(m_0)}{p^2 + m_0^2}\right) G_c^{(2)}(p) = \Delta(p) + \Delta(p) B(p, m_0) \quad (3.30)$$

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2 - A(m_0)} + \frac{1}{p^2 + m_0^2 - A(m_0)} B(p, m_0) \quad (3.31)$$

Durch die Definition einer reduzierten Masse und eines neuen Propagators erhalten wir schließlich eine Entwicklung von $G_c^{(2)}$ mit nur noch vier Termen auf der rechten Seite, im Gegensatz zu sieben in (3.24).

$$\tilde{m}_0^2 := m_0^2 - A(m_0) \quad (3.32)$$

$$\tilde{\Delta}(p) := \frac{1}{p^2 + m_0^2 - A(m_0)} = \frac{1}{p^2 + \tilde{m}_0^2} = \text{---} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \text{---} \text{---} \text{---} &= \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ &+ \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{3!} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Auf dieselbe Art, wie hier für $G_c^{(2)}$ vorgeführt, lassen sich alle verbundenen n -Punkt-Funktionen $G_c^{(n)}$ mit n größer als zwei vereinfachen. Durch Verwendung der reduzierten Masse \tilde{m}_0 werden die \hat{A}_i am einlaufenden Propagator eliminiert.

3.5 Die Dyson-Schwinger-Gleichung für echte Vertex-Funktionen

Die echten Vertex-Funktionen (proper Vertices) werden vom Legendre-transformierten Funktional

$$\Gamma[\phi] = \mathcal{W}[j] - \int dx \phi(x) j(x) \quad (3.35)$$

erzeugt. Für die Ableitungen nach den Quellen bzw. Feldern folgt daraus

$$\phi(x) = \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)}, \quad j(x) = -\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)}. \quad (3.36)$$

Da das erzeugende Funktional nun nicht mehr von der Quelle j , sondern nur vom Feld ϕ abhängt, wird die Differentiation nach der äußeren Quelle zu

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta j(x)} &= \int dy \frac{\delta \phi(y)}{\delta j(x)} \frac{\delta}{\delta \phi(y)} \\ &= \int dy \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} \frac{\delta}{\delta \phi(y)}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Hiermit wird aus (3.20):

$$\begin{aligned}
 -\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} &= \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi(x)} \left[\phi(x) + \int dz \frac{\delta^2\mathcal{W}[j]}{\delta j(z)\delta j(x)} \frac{\delta}{\delta\phi(z)} \right] \\
 -\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)} &= (-\partial^2 + m_0^2)\phi(x) + \frac{1}{2}f_0 \left[\phi^2(x) + \frac{\delta^2\mathcal{W}[j]}{\delta j(x)\delta j(x)} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{3!}g_0 \left[\phi^3(x) + 3\phi(x) \frac{\delta^2\mathcal{W}[j]}{\delta j(x)\delta j(x)} \right. \\
 &\quad \left. + \int dz_1 dz_2 dz_3 \frac{\delta^2\mathcal{W}[j]}{\delta j(x)\delta j(z_1)} \frac{\delta^2\mathcal{W}[j]}{\delta j(x)\delta j(z_2)} \frac{\delta^2\mathcal{W}[j]}{\delta j(x)\delta j(z_3)} \right. \\
 &\quad \left. \frac{\delta^3\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z_1)\delta\phi(z_2)\delta\phi(z_3)} \right]. \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

Auch für (3.38) existiert eine graphische Schreibweise, wobei zu beachten ist, daß die externen Linien an $\Gamma[\phi]$ keine Propagatoren sind, sondern nur Ansatzpunkte für Propagatoren. Entsprechendes gilt für die gestrichelten Linien auf der rechten Seite.

$$\text{---} \bullet \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{3!} \text{---} \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{3!} \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \tag{3.39}$$

Für $j \equiv 0$ verschwindet der Term auf der linken Seite und wir erhalten (bis auf einen Propagator) die Gleichung (3.20).

3.5.1 Die DS-Gleichung für die Einteilchen-irreduzible 2-Punkt-Funktion

Zwischen der zusammenhängenden Green-Funktion $G_c^{(2)}$ und der echten Vertex-Funktion $\Gamma^{(2)}$ gilt die Beziehung

$$\int dz \frac{\delta^2\mathcal{W}[j]}{\delta j(x)\delta j(z)} \frac{\delta^2\Gamma[\phi]}{\delta\phi(z)\delta\phi(y)} = -\delta(x-y) \tag{3.40}$$

$$\text{---} \bullet \text{---} = - \left(\text{---} \bullet \text{---} \right)^{-1}. \tag{3.41}$$

Diese Gleichung wird auch wie folgt geschrieben

$$\Gamma(x, y) = -G_c^{-1}(x, y) = -\Delta^{-1}(x, y) + \Sigma(x, y). \tag{3.42}$$

Hierin ist Σ die Selbstenergie des Propagators.

$$\text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} = - \text{---} \text{---} + \text{---} \textcircled{\Sigma} \text{---} \quad (3.43)$$

Durch Invertieren von (3.42) läßt sich auch der vollständige Propagator als Reihe in Σ schreiben.

$$\text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} = \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \textcircled{\Sigma} \text{---} + \text{---} \bullet \textcircled{\Sigma} \textcircled{\Sigma} \text{---} + \dots \quad (3.44)$$

Die echten Vertex-Funktionen $\Gamma^{(n)}$ werden auch als Einteilchen-irreduzibel bzw. in Kurzform 1-PI (one-particle irreducible) bezeichnet. Dieser Name ist verständlich, da sich der Graph nicht durch Auftrennen *einer* inneren Impulslinie in zwei Teile trennen läßt, die externe Beine haben (siehe Kapitel 2.1). Dabei ist gerade die letzte Bedingung wichtig, insbesondere kann ein 1-PI Graph durchaus Tadpole-Teilgraphen haben. Echte Vertex-Funktionen sind immer amputierte Graphen, da sie keine äußeren Beine besitzen.

Um die 1-PI 2-Punkt-Funktion zu erhalten, brauchen wir die Ableitungen

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(y_1) \delta j(y_2)} = \int dz_1 dz_2 \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(z_1) \delta j(y_1)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(z_2) \delta j(y_2)} \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(z_1) \delta\phi(z_2) \delta\phi(x)}$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} = \text{---} \textcircled{\bullet} \textcircled{\bullet} \text{---} \quad (3.45)$$

und

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \phi(y) = \delta(x-y)$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} \text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} = \text{---} x \text{---} \quad (3.46)$$

Durch Ableiten von (3.38) nach ϕ erhalten wir die DS-Gleichung für $\Gamma^{(2)}$. Dabei habe ich der Übersichtlichkeit halber die Raumintegration über die z_i weggelassen.

$$\begin{aligned} -\frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(y) \delta\phi(x)} = & \\ & (-\partial^2 + m_0^2) \delta(x-y) \\ & + \frac{1}{2} f_0 \left(2\phi(x) \delta(x-y) + \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_1)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_2)} \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(z_1) \delta\phi(z_2) \delta\phi(y)} \right) \\ & + \frac{1}{3!} g_0 \left(3\phi(x) \phi(x) \delta(x-y) + 3 \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(x)} \delta(x-y) \right. \\ & \left. + 3\phi(x) \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_1)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_2)} \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(z_1) \delta\phi(z_2) \delta\phi(y)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 3 \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_1)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_2)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_4)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(z_3) \delta j(z_5)} \\
 & \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(z_1) \delta \phi(z_2) \delta \phi(z_3)} \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(z_4) \delta \phi(z_5) \delta \phi(y)} \\
 & + \left. \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_1)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_2)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_3)} \frac{\delta^4 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(z_1) \delta \phi(z_2) \delta \phi(z_3) \delta \phi(y)} \right) \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

Spätestens hier werden die Vorteile der graphischen Notation deutlich sichtbar; die unübersichtliche Gleichung (3.47) wird zu:

$$\begin{aligned}
 & \text{---} \bigcirc \text{---} = \text{---} / \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \bullet \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\
 & + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \\
 & + \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \frac{1}{3!} \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

Da wir zur Bestimmung des Amplitudenverhältnisses der Korrelationslänge (3.48) benötigen, werden wir auch hier Terme zusammenfassen und damit die Berechnung vereinfachen.

3.5.2 Elimination der Tadpole-Graphen von $\Gamma^{(2)}$

Mit den \hat{A}_i aus (3.22) wird aus (3.47):

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(y) \delta \phi(x)} = \\
 & (-\partial^2 + m_0^2) \delta(x - y) - A(m_0) \delta(x - y) \\
 & + \frac{1}{2} f_0 \left(\frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_1)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_2)} \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(z_1) \delta \phi(z_2) \delta \phi(y)} \right) \\
 & + \frac{1}{3!} g_0 \left(3 \phi(x) \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_1)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_2)} \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(z_1) \delta \phi(z_2) \delta \phi(y)} \right) \\
 & + 3 \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_1)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_2)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_4)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(z_3) \delta j(z_5)} \\
 & \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(z_1) \delta \phi(z_2) \delta \phi(z_3)} \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(z_4) \delta \phi(z_5) \delta \phi(y)} \\
 & + \left. \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_1)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_2)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(z_3)} \frac{\delta^4 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(z_1) \delta \phi(z_2) \delta \phi(z_3) \delta \phi(y)} \right). \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Für $j \equiv 0$ wird dies zur Entwicklung von $\Gamma^{(2)}$.

Die Terme mit Kopplung f_0 bzw. g_0 fassen wir zu einer modifizierten Selbstenergie $\tilde{\Sigma}(p) := \Sigma(p) - A(m_0)$ zusammen. Damit gilt im Impulsraum nach (3.42)

$$\begin{aligned} -\Gamma(p) &= G_c^{-1}(p) = \Delta^{-1}(p) - \Sigma(p) \\ &= (p^2 + m_0^2) - A(m_0) - \tilde{\Sigma}(p) \\ &= (p^2 + \tilde{m}_0^2) - \tilde{\Sigma}(p) \\ &= \tilde{\Delta}^{-1}(p) - \tilde{\Sigma}(p). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die vier Terme der ersten Zeile von (3.48) sind im inversen Propagator der reduzierten Masse zusammengefaßt.

Die Relation (3.42) läßt sich auch über die Funktionen ohne Tadpole zeigen. Nach (3.34) gilt:

$$\begin{aligned} G_c(p) &= \tilde{\Delta}(p) + \tilde{\Delta}(p)\tilde{\Sigma}(p)G_c(p) \\ (1 - \tilde{\Delta}(p)\tilde{\Sigma}(p))G_c(p) &= \tilde{\Delta}(p) \\ G_c(p) &= (1 - \tilde{\Delta}(p)\tilde{\Sigma}(p))^{-1}\tilde{\Delta}(p). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Durch Invertieren folgt hieraus:

$$\begin{aligned} G_c^{-1}(p) &= \tilde{\Delta}^{-1}(p) (1 - \tilde{\Delta}(p)\tilde{\Sigma}(p)) \\ &= \tilde{\Delta}^{-1}(p) - \tilde{\Sigma}(p) \\ &= -\Gamma(p). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Im folgenden ist noch zu zeigen, daß $\Gamma^{(n)}$, $n \geq 2$ keine Tadpole-Teilgraphen an Propagatoren besitzt. Dies wird in mehreren Schritten gezeigt.

- Für die $\Gamma^{(m)}$ gilt

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\Gamma^{(m)} = \Gamma^{(m+1)} \quad (3.53)$$

und graphisch

$$\frac{\delta}{\delta\phi(x)} m \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right\} = m \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{array} \right\} \bullet x. \quad (3.54)$$

Durch Ableitungen an $\Gamma^{(m)}$ entstehen also keine Tadpole-Teilgraphen an Propagatoren.

- $G_c^{(2)}$ hat keine Tadpole an Propagatoren, wie (3.34) zeigt.
- In (3.45) ist gezeigt, daß bei Differentiation von $G_c^{(2)}$ keine Tadpole an Propagatoren entstehen.

- $\Gamma^{(2)}$ hat keine Tadpole an Propagatoren, wie die Entwicklung in (3.49) in Verbindung mit den ersten Punkten zeigt.
- $\Gamma^{(n)}$ haben keine Tadpole an Propagatoren, da sie durch weiteres Ableiten von $\Gamma^{(2)}$ nach ϕ entstehen.

Im nächsten Abschnitt kommen wir zu Tadpole-Teilen an Vertices.

3.5.3 Feynman-Regeln für die Vertices

Den Dreier- bzw. Vierervertices werden im Impulsraum folgende Faktoren zugeordnet:

$$\begin{array}{c} \diagup \bullet \diagdown \\ \diagdown \bullet \diagup \end{array} = -g_0 \quad , \quad \begin{array}{c} \diagup \bullet \diagdown \\ \diagdown \bullet \diagup \end{array} = -f_0 = -\sqrt{3g_0 m_0} \quad . \quad (3.55)$$

Zur Elimination der Tadpole an Vierervertices wird eine neue Kopplung \tilde{f}_0 eingeführt.

$$\begin{aligned} -\tilde{f}_0 = \begin{array}{c} \diagup \circ \diagdown \\ \diagdown \circ \diagup \end{array} &:= \begin{array}{c} \diagup \bullet \diagdown \\ \diagdown \bullet \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \textcircled{\diagup \bullet \diagdown} \\ \textcircled{\diagdown \bullet \diagup} \end{array} = -f_0 - g_0 G_c^{(1,0)} \\ &= -f_0 + \frac{f_0}{3m_0^2} \hat{A}_1(m_0) \\ &= -f_0 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Durch Verwendung dieser neuen Kopplung \tilde{f}_0 für Dreiervertices fassen wir die beiden Terme der zweiten Zeile von (3.48) zu einem zusammen. Damit kann $\Gamma^{(2)}$ ohne Tadpole-Graphen an Propagatoren oder Vertices dargestellt werden. Dies überträgt sich auch auf die n -Punkt-Vertex-Funktionen mit $n > 2$, wie oben gezeigt wurde.

3.5.4 Entwicklung der DS-Gleichung für 1-PI Graphen

Durch Iteration von (3.48) unter Verwendung von \tilde{f}_0 aus (3.56) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} &= -(\text{---} \bullet \text{---})^{-1} + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} \\ &+ 2 \cdot \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} + \frac{1}{4} \text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} \quad (3.57) \\ &+ \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} + \frac{1}{3!} \text{---} \textcircled{\bullet} \text{---} + \mathcal{O}(g_0^3). \end{aligned}$$

Diese Entwicklung verwenden wir in Kapitel 5.3 zur Bestimmung von $\Gamma^{(2)}$.

3.6 Elimination der Tadpole-Graphen von $G_c^{(1)}$

Das in den vorherigen Abschnitten vorgestellte Verfahren läßt sich mit etwas zusätzlichem Aufwand auch auf die sogenannten Vakuumfluktuationen $G_c^{(1)}$ anwenden. Zur Vereinfachung der DS-Gleichung (3.20) definieren wir die Größen:

$$\begin{aligned}
A_1(m_0) &= \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)} = \text{---} \textcircled{\text{///}} \\
A_3(m_0) &= -\frac{f_0}{2m_0^2} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)^2} = \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{\text{---}} \textcircled{\text{///}} \\
A_4(m_0) &= -\frac{g_0}{3!m_0^2} \frac{\delta^3 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)^3} = \frac{1}{3!} \text{---} \textcircled{\text{---}} \textcircled{\text{///}}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Diese sind mit dem einlaufenden Propagator bei Impuls $p = 0$, im Gegensatz zu den \hat{A}_i aus (3.22) aber ohne Vertex am Fußpunkt definiert.

Mit den Definitionen (3.58) und $j \equiv 0$ wird (3.20) zu

$$A_1 = -\frac{1}{2} \frac{f_0}{m_0^2} A_1^2 + A_3 - \frac{1}{6} \frac{g_0}{m_0^2} A_1^3 + \frac{g_0}{f_0} A_1 A_3 + A_4. \tag{3.59}$$

Gleichung (3.59) wird in eine Form $x = z + ax^2 + bx^3$ gebracht. Dabei gilt für die Faktoren

$$\begin{aligned}
x &= A_1 \\
z &= \frac{A_3 + A_4}{1 - \frac{g_0}{f_0} A_3} \\
a &= -\frac{1}{1 - \frac{g_0}{f_0} A_3} \frac{f_0}{2m_0^2} \\
b &= -\frac{1}{1 - \frac{g_0}{f_0} A_3} \frac{g_0}{6m_0^2}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Durch iteratives Einsetzen von x erhalten wir

$$x = z + az^2 + (2a^2 + b)z^3 + 5a(a^2 + b)z^4 + \mathcal{O}(z^5). \tag{3.61}$$

Unter Verwendung von (3.60) folgt weiter:

$$A_1 = A_3 + A_4 - \frac{\sqrt{3g_0}}{6m_0} A_3^2 - \frac{2\sqrt{3g_0}}{3m_0} A_3 A_4 + \frac{g_0}{6m_0^2} A_3^3 + \mathcal{O}(A_4^2, A_3^2 A_4, A_3^4). \tag{3.62}$$

Nun ist $G_c^{(1)}$ als Reihe in A_3 und A_4 entwickelt. Die beiden letzteren Größen lassen sich nun wieder mit der reduzierten Masse \tilde{m}_0 aus (3.32) und der modifizierten Kopplung \tilde{f}_0 aus (3.56) berechnen. Jene Berechnung ist möglich, da sich $G_c^{(2)}$ und $G_c^{(3)}$ mit \tilde{m}_0 darstellen lassen (3.34). Wesentlich ist an dieser Stelle zu bemerken, daß der einlaufende Propagator nach wie vor mit der Masse m_0 berechnet wird und nur die inneren Propagatoren, bei denen über einen Impuls integriert wird, die Masse \tilde{m}_0 tragen. Ebenso darf der Vertex von A_3 , der am einlaufenden Propagator sitzt, nur den Faktor f_0 beitragen.

Die \hat{A}_i aus (3.22) lassen sich auf einfache Art durch die A_i aus (3.58) ausdrücken.

$$\begin{aligned}\hat{A}_1(m_0) &= -f_0 A_1(m_0) \\ \hat{A}_2(m_0) &= -\frac{1}{2} g_0 A_1^2(m_0) \\ \hat{A}_3(m_0) &= \frac{f_0}{3} A_3(m_0)\end{aligned}\tag{3.63}$$

Hierauf werden wir in Kapitel 5 zurückkommen.

Zum Schluß dieses Kapitels stelle ich noch eine alternative Berechnungsmöglichkeit für $G_c^{(1)}$ vor, um dann im folgenden Kapitel das hier in der gebrochenen Phase eingeführte Verfahren in der symmetrischen Phase darzustellen.

Ansatz über Störungsreihe

Die A_i lassen sich als Potenzreihen in der Kopplung g_0 bzw. $\frac{g_0}{8\pi m_0}$ entwickeln.

$$\begin{aligned}A_1(m_0) &= \frac{f_0}{8\pi m_0} \sum_{i=0}^{\infty} a_{1i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^i \\ A_3(m_0) &= \frac{f_0}{8\pi m_0} \sum_{i=0}^{\infty} a_{3i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^i \\ A_4(m_0) &= \frac{f_0}{8\pi m_0} \sum_{i=0}^{\infty} a_{4i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^i\end{aligned}\tag{3.64}$$

Hierbei ist der Koeffizient $a_{40} = 0$.

Mit $f_0 = \sqrt{3g_0} m_0$ ergibt sich aus (3.59):

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{3g_0}}{8\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{1i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^i = \\ &\quad -\frac{\sqrt{3g_0}}{2m_0} \left[\frac{\sqrt{3g_0}}{8\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{1i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^i \right]^2 + \frac{\sqrt{3g_0}}{8\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{3i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^i \\ &\quad -\frac{g_0}{6m_0^2} \left[\frac{\sqrt{3g_0}}{8\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{1i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^i \right]^3 \\ &\quad + \sqrt{\frac{g_0}{3}} \frac{1}{m_0} \left[\frac{\sqrt{3g_0}}{8\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{1i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^i \right] \left[\frac{\sqrt{3g_0}}{8\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{3i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^i \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{3g_0}}{8\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{4i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^i\end{aligned}\tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} a_{1i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^i &= -\frac{3}{2} \frac{g_0}{8\pi m_0} \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_{1i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^i \right]^2 \\
&+ \sum_{i=0}^{\infty} a_{3i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^i - \frac{1}{2} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^2 \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_{1i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^i \right]^3 \\
&+ \frac{g_0}{8\pi m_0} \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_{1i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^i \right] \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_{3i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^i \right] + \sum_{i=0}^{\infty} a_{4i} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^i.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Für $n \geq 0$ gilt

$$a_{1n} = -\frac{3}{2} \sum_{i+j=n-1} a_{1i} a_{1j} + a_{3n} - \frac{1}{2} \sum_{i+j+k=n-2} a_{1i} a_{1j} a_{1k} + \sum_{i+j=n-1} a_{1i} a_{3j} + a_{4n} \tag{3.67}$$

mit $a_{ij} = 0$ für $j < 0$, $i = 1, 3, 4$.

Aus dieser Gleichung ergibt sich mit $a_{40} = 0$, daß $a_{10} = a_{30} = 1$ ist. Für die weiteren Koeffizienten gilt:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= a_{31} + a_{41} - \frac{1}{2} a_{30}^2 \\
a_{12} &= a_{32} + a_{42} - (a_{31} + 2a_{41}) a_{30} + \frac{1}{2} a_{30}^3 \\
a_{13} &= a_{33} + a_{43} - (a_{32} + 2a_{42}) a_{30} - \frac{1}{2} a_{31}^2 - 2a_{31} a_{41} \\
&\quad - \frac{3}{2} a_{41}^2 + \left(\frac{3}{2} a_{31} + 4a_{41} \right) a_{30}^2 - \frac{5}{8} a_{30}^4 \\
&\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Dieses Ergebnis folgt auch mit einem Reihenansatz aus (3.62).

A_1 läßt sich also als Funktion von A_3 und A_4 darstellen.

$$A_1 = \mathcal{F}(A_3, A_4) \tag{3.69}$$

Kapitel 4

Dyson-Schwinger-Gleichung in der symmetrischen Phase

In diesem Kapitel greife ich das in Kapitel 3 vorgestellte Verfahren auf und stelle die entsprechenden Gleichungen für die symmetrische Phase vor. In Kapitel 4.3 sind dann die Anzahlen der Graphen aufgeführt, die insgesamt zu berechnen sind.

Wir verwenden wieder die graphischen Notationen aus Kapitel 3.2. Desweiteren wird in diesem Kapitel die Quelle $j \equiv 0$ festgelegt. Damit haben wir in den graphischen Gleichungen immer Green- bzw. Vertex-Funktionen.

4.1 Die DS-Gleichung für den vollständigen Propagator

Die Gleichungen aus Abschnitt 3.4.1 vereinfachen sich in der symmetrischen Phase, da alle n -Punkt-Funktionen mit n ungerade identisch Null werden. So wird aus (3.23) bzw. (3.24):

$$(-\partial^2 + m_0^2) \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} = \delta(x - y) - \frac{1}{2} g_0 \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)^2} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(y)} - \frac{1}{3!} g_0 \frac{\delta^4 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x) \delta j(x) \delta j(x) \delta j(y)} \quad (4.1)$$

$$\text{shaded circle} = \text{bare propagator} + \frac{1}{2} \text{self-energy loop} + \frac{1}{3!} \text{sunset diagram} \quad (4.2)$$

Wir definieren uns analog zu (3.22) eine Größe

$$A^+(m_0) := \frac{1}{2} \text{self-energy diagram} = -\frac{1}{2} g_0 \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)^2} \quad (4.3)$$

Diese läßt sich in nur einem Term schreiben, da insbesondere die Vakuumfluktuation $G_c^{(1)} \equiv 0$ ist.

Mit der Definition (4.3) erhalten wir im Impulsraum aus (4.2):

$$\Delta(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2} = \bullet \text{---} \bullet \quad (4.4)$$

$$G_c^{(2)}(p) = \Delta(p) + \frac{A^+(m_0)}{p^2 + m_0^2} G_c^{(2)}(p) - \Delta(p) \frac{1}{3!} g_0 G_c^{(4)}(p_1, p_2, p_3) \quad (4.5)$$

$$\bullet \text{---} \textcircled{\text{---}} \bullet = \bullet \text{---} \bullet + \frac{A^+(m_0)}{p^2 + m_0^2} \bullet \text{---} \textcircled{\text{---}} \bullet + \frac{1}{3!} \bullet \text{---} \textcircled{\text{---}} \bullet \quad (4.6)$$

Hier definieren wir wie in (3.32) eine reduzierte Masse und den zugehörigen Propagator.

$$\left(1 - \frac{A^+(m_0)}{p^2 + m_0^2}\right) G_c^{(2)}(p) = \Delta(p) - \Delta(p) \frac{1}{3!} g_0 G_c^{(4)}(p_1, p_2, p_3) \quad (4.7)$$

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2 - A^+(m_0)} \quad (4.8)$$

$$- \frac{1}{p^2 + m_0^2 - A^+(m_0)} \frac{1}{3!} g_0 G_c^{(4)}(p_1, p_2, p_3)$$

$$\tilde{m}_{0+}^2 := m_0^2 - A^+(m_0) \quad (4.9)$$

$$\tilde{\Delta}(p) := \frac{1}{p^2 + m_0^2 - A^+(m_0)} = \frac{1}{p^2 + \tilde{m}_{0+}^2} = \bullet \text{---} \bullet \quad (4.10)$$

$$\bullet \text{---} \textcircled{\text{---}} \bullet = \bullet \text{---} \bullet + \frac{1}{3!} \bullet \text{---} \textcircled{\text{---}} \bullet \quad (4.11)$$

Im Vergleich zu (3.34) zeigt Gleichung (4.11), daß der Ansatz zur Elimination von Tadpole-Teilgraphen in der symmetrischen Phase keine große Vereinfachung der Rechnung ermöglicht.

4.2 Die DS-Gleichung für echte Vertex-Funktionen

In der symmetrischen Phase sind die 1-PI Graphen für unsere Rechnung besonders interessant, da neben $\Gamma^{(2)}$ auch $\Gamma^{(4)}$ berechnet werden muß.

4.2.1 Die DS-Gleichung für die Einteilchen-irreduzible 2-Punkt-Funktion

Aus (3.47) erhalten wir durch Wegfall der Terme mit ϕ^3 -Kopplung und n -Punkt-Vertex-Funktionen mit ungeradem n die DS-Gleichung in der symmetrischen Phase.

Auch hier habe ich die Raumintegration über die z_i weggelassen.

$$-\frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(y)\delta\phi(x)} = (-\partial^2 + m_0^2)\delta(x - y) + \frac{1}{3!}g_0 \left(3 \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)\delta j(x)}\delta(x - y) + \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)\delta j(z_1)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)\delta j(z_2)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)\delta j(z_3)} \frac{\delta^4 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(z_1)\delta\phi(z_2)\delta\phi(z_3)\delta\phi(y)} \right) \quad (4.12)$$

$$\text{shaded circle} = - \text{crossed line} + \frac{1}{2} \text{tadpole} + \frac{1}{3!} \text{four-point vertex} \quad (4.13)$$

Durch Einführen der reduzierten Masse lassen sich hier der inverse Propagator und der Tadpole-Graph auf der rechten Seite zusammenfassen.

4.2.2 Entwicklung der DS-Gleichung für 1-PI Graphen

Durch Iteration von (4.13) erhalten wir die Entwicklung bis zur 2-Loop-Ordnung

$$\text{shaded circle} = -(\text{wavy line})^{-1} + \frac{1}{3!} \text{loop} + \mathcal{O}(g_0^3). \quad (4.14)$$

Diese Entwicklung wird in Abschnitt 5.2.2, Gleichung (5.18) berechnet.

4.2.3 Die DS-Gleichung für die Einteilchen-irreduzible 4-Punkt-Funktion

Durch zwei weitere Ableitungen nach ϕ erhalten wir die DS-Gleichung für $\Gamma^{(4)}$. Bei Verwendung der Entwicklung (4.11) für $G_c^{(2)}$ erhalten wir hier auch Feynman-Graphen ohne Tadpole-Teilgraphen.

$$\text{shaded four-point vertex} = \text{dashed four-point vertex} + 3 \cdot \frac{1}{2} \text{four-point with loop} + 3 \cdot \frac{1}{2} \text{four-point with two loops} + \frac{1}{3!} \text{four-point with three loops} \quad (4.15)$$

4.3 Zu berechnende Diagramme

Am Ende dieses Kapitels führe ich die Anzahl der Graphen auf, die nach Anwendung des in diesem und in dem vorangegangenen Kapitel vorgeschlagenen Verfahrens berechnet werden müssen.

In Tabelle 4.1 sind die Zahlen für die symmetrische Phase aufgeführt. In der Spalte "ohne Permutationen" ist die Anzahl der unterschiedlichen Integrale aufgelistet, was bedeutet, daß die Graphen, die durch Vertauschen der äußeren Beine ineinander übergehen, nur einmal gezählt sind. In der letzten Zeile ist die Anzahl der nach obigen Verfahren zu berechnenden Graphen eingetragen. Tabelle 4.2 führt die entsprechenden Werte für die gebrochene Phase an. Bei der 1-Punkt-Funktion sind keine Permutationen der äußeren Beine möglich. Hier ist die Anzahl der Graphen aufgeführt, die zu A_3 und A_4 aus Kapitel 3.6 beitragen.

Funktion	Loop-Ordnung	Anzahl der Graphen		
		Gesamt	ohne Permutationen	ohne Tadpole-Teilgraphen
$\Gamma(2)$	1	1	1	0
	2	2	2	1
	3	5	5	1
	4	18	17	4
$\Gamma(4)$	0	1	1	1
	1	3	1	1
	2	12	3	2
	3	73	14	8
	4	477	64	26

Tabelle 4.1: Anzahl der Graphen in der symmetrischen Phase

Beim Vergleichen wird offensichtlich, daß in der symmetrischen Phase, wie oben schon bemerkt, der Rechenaufwand längst nicht so stark verringert wird, wie in der gebrochenen Phase. Dies liegt daran, daß durch den Dreiervertex viel mehr Graphen mit Tadpole-Teilen möglich sind. Einen Wert konnte ich nur nach oben abschätzen, doch es fällt deutlich auf, daß die Anzahl der Graphen gerade in höheren Ordnungen merklich reduziert wird.

Funktion	Loop-Ordnung	Anzahl der Graphen		
		Gesamt	ohne Permutationen	ohne Tadpole-Teilgraphen
$\Gamma^{(2)}$	1	3	3	1
	2	20	18	8
	3	204	162	34
	4	2831	1979	≤ 358
		Gesamt	bei Verwendung von (3.62)	
$G_c^{(1)}$	1	1	1	
	2	6	2	
	3	46	9	
	4	471	63	

Tabelle 4.2: Anzahl der Graphen in der gebrochenen Phase

Kapitel 5

Berechnung der Vertex- und Green-Funktionen

In diesem Kapitel werden die benötigten Reihen in g_0 berechnet. Im ersten Abschnitt stelle ich einige wesentliche Integrale und Konstanten vor; die beiden nächsten Abschnitte sind dann der symmetrischen bzw. gebrochenen Phase gewidmet. Die Nummerierung der Graphen $\mathcal{G}_{l,m}^{(n)}$ wurde von Qgraf übernommen. n ist die Anzahl der äußeren Beine. l gibt die Zahl der Loops an, und m ist schließlich die laufende Nummer der Programmausgabe mit den Optionen “onshell” und “topol” (s. Kapitel 2.2).

Viele der hier verwendeten Integrale finden sich in [AS84, GR81].

5.1 Spezielle Integrale und Konstanten

In einigen 3-Loop-Integralen taucht die Konstante

$$a = \frac{\pi^2}{48} - \frac{1}{8} \ln^2 \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{4} \text{Li}_2 \frac{1}{4} = 0.0324645 \quad (5.1)$$

auf [BS92]. Hierin ist Li_2 der Integrallogarithmus und durch

$$\text{Li}_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \quad , \quad x < 1 \quad (5.2)$$

definiert.

Das folgende Integral läßt sich nur numerisch auswerten:

$$\begin{aligned} C^{Tet} &= \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 \Delta(k_1) \Delta(k_2) \Delta(k_3) \Delta(k_1 - k_2) \Delta(k_2 - k_3) \Delta(k_3 - k_1) \\ &= 0.1739006 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Der numerische Wert stammt von [BNM77, Graph 12U4] und konnte durch eigene Rechnungen bestätigt werden.

Die Divergenzen in der 2-Loop-Ordnung lassen sich als $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$ von

$$B^{div} = \frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_0^2}{4\pi} \right) + \frac{C}{4\pi} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (5.4)$$

ausdrücken [HEI93, Seiten 33/47]. In (5.4) ist C eine nicht näher bestimmte Konstante, die nicht in das Endergebnis einfließt und γ die Eulerkonstante. Da B^{div} in Ordnung g_0^2 auftritt, müssen in $\mathcal{O}(g_0)$ alle Terme, die mit ϵ gehen, berücksichtigt werden.

In 3-Loop-Ordnung haben wir zusätzlich noch die divergente Größe

$$B_1^{div} = \frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m_0^2}{4\pi}\right) + \frac{C}{4\pi} - \frac{3}{2}\gamma - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{m_0^2}{\pi}\right) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (5.5)$$

Mit (5.4) gilt die Relation

$$B^{div} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) = B_1^{div}. \quad (5.6)$$

Die 1-Loop-Integrale $J_n(3-\epsilon)$ sind im Anhang A.1 bis zur benötigten $\mathcal{O}(\epsilon)$ hergeleitet. In [HEI93] wurde die Rechnung bis zur 2-Loop-Ordnung mit allen notwendigen Integrationen durchgeführt. Integrale mit der Bezeichnung j_n sind Zitate aus [BS92], woraus auch ein großer Teil der notwendigen 3-Loop-Rechnungen stammt.

5.2 Symmetrische Phase

5.2.1 $A^+(m_0)$ und die reduzierte Masse \tilde{m}_0

Als erste Größe bestimmen wir nun $A^+(m_0)$ aus (4.3). Wie aus (4.11) folgt, brauchen wir bei Verwendung der Masse \tilde{m}_0 nur zwei Graphen bis zur 3-Loop-Ordnung zu berechnen.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1,1}^{(2)}(p) &= \begin{array}{c} k \\ \circlearrowleft \\ \hline p \quad p \end{array} \\ &= -g_0 J_1(3-\epsilon) \\ &= 2\tilde{m}_0 \frac{g_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Im $\mathcal{O}(\epsilon)$ -Term ist die Masse m_0 nicht durch \tilde{m}_0 ersetzt, da dieser Faktor erst in dritter Ordnung beiträgt und die beiden Massen in nullter Ordnung identisch sind.

$$\mathcal{G}_{3,1}^{(2)}(p) = \begin{array}{c} k_1 + k_3 \\ \circlearrowleft \\ k_2 \\ \circlearrowleft \\ k_1 \quad k_2 + k_3 \quad k_1 \\ \hline p \quad p \end{array}$$

$$= -2\tilde{m}_0^2(B_1^{div} - 2 \ln \frac{4}{3}) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \quad (5.8)$$

Dieser Graph, beziehungsweise das dazugehörige Integral, ist in [GUT95] ausführlich behandelt. Die Integrationen über k_2 und k_3 bilden eine Subdivergenz wie $\mathcal{G}_{2,2}^{(2)}$ (5.13). Berechnen läßt sich die Differenz von $\mathcal{G}_{3,1}^{(2)}$ und dem Produkt aus $\mathcal{G}_{2,2}^{(2)}$ mit dem 1-Loop-Integral J_2 . Dies liefert den endlichen Anteil im Ergebnis, während der Term B_1^{div} aus dem abgezogenen Produkt stammt.

Aus diesen beiden Graphen berechnen wir $A^+(m_0)$.

$$\begin{aligned} A^+(m_0) &= \frac{1}{2}\mathcal{G}_{1,1}^{(2)} + \frac{1}{12}\mathcal{G}_{3,1}^{(2)} \\ &= \tilde{m}_0^2 \left[\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6}(B_1^{div} - 2 \ln \frac{4}{3}) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (5.9)$$

Als nächstes wird $\tilde{m}_0(m_0)$ bestimmt. Durch Entwicklung von (4.9) in der Kopplung erhalten wir

$$\tilde{m}_0 = m_0 \left(1 - \frac{A^+(m_0)}{2m_0^2} - \frac{A^{+2}(m_0)}{8m_0^4} - \frac{A^{+3}(m_0)}{16m_0^6} + \mathcal{O}(A^{+4}(m_0)) \right). \quad (5.10)$$

Durch iteratives Einsetzen dieser Gleichung in (5.9) lassen sich sowohl A^+ als auch \tilde{m}_0 bis zur gewünschten Ordnung in g_0 als Funktionen von m_0 bestimmen. Wir erhalten schließlich in der 3-Loop-Ordnung (entspricht $\mathcal{O}(g_0^3)$):

$$\begin{aligned} A^+(m_0) &= m_0^2 \left[\frac{g_0}{8\pi m_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^2 (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{8}(1 + \mathcal{O}(\epsilon)) - \frac{1}{6}B_1^{div} + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^3 + \mathcal{O}(g_0^4) \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_0(m_0) &= m_0 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{g_0}{8\pi m_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^2 (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \left(\frac{1}{12}B_1^{div} - \frac{1}{6} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^3 + \mathcal{O}(g_0^4) \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.2.2 2-Punkt-Funktion

Zur Bestimmung von $\Gamma^{(2)}$ brauchen nun nur noch die Graphen berechnet werden, die keine Integration enthalten, die vom äußeren Impuls unabhängig ist.

1- und 2-Loop-Ordnung

In 1-Loop-Ordnung existiert in der symmetrischen Phase nur der schon für A^+ berechnete Graph $\mathcal{G}_{1,1}^{(2)}$.

$\mathcal{G}_{2,2}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/6)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{2,2}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram: A circle with two external lines labeled } p \text{ and two internal lines labeled } k_1 \text{ and } k_2. \\
 &= \frac{\tilde{B}^{div}}{32\pi^2} g_0^2 \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

Der divergente Anteil ist massenabhängig und muß daher auch in g_0 entwickelt werden.

$$\tilde{B}^{div} := B^{div} - \ln\left(\frac{\tilde{m}_0^2}{m_0^2}\right) = B^{div} + \frac{g_0}{8\pi m_0}(1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (5.14)$$

Terme höherer Ordnung in g_0 können vernachlässigt werden, da nur bis zur 3-Loop-Ordnung, entsprechend $\mathcal{O}(g_0^3)$ gerechnet wird.

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{2,2}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = -\frac{2}{27} \left(\frac{g_0}{8\pi \tilde{m}_0} \right)^2 \quad (5.15)$$

3-Loop-Ordnung

Im folgenden werde ich meistens die 3-Loop-Graphen nicht mehr mit vollständiger Beschriftung der Impulse darstellen.

$\mathcal{G}_{3,4}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{3,4}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram: A circle with two external lines and a loop structure inside.} \\
 &= -32\tilde{m}_0^2 \left(a + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi \tilde{m}_0} \right)^3 \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,4}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(\frac{32}{3} a - \frac{16}{27} + \frac{32}{27} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi \tilde{m}_0} \right)^3 \quad (5.17)$$

Ergebnisse für $\Gamma^{(2)}$

Aus den oben angeführten Graphen berechnet sich nun nach (3.50)

$$\begin{aligned}
 -\Gamma^{(2)}(p=0) &= \tilde{m}_0^2 - \frac{1}{6} \mathcal{G}_{2,2}^{(2)} - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{3,4}^{(2)} \\
 &= \tilde{m}_0^2 - \frac{\tilde{B}^{div}}{3} \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 + 8 \left(a + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3} \right) \frac{1}{m_0} \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(g_0^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= m_0^2 \left\{ 1 - \frac{g_0}{8\pi m_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right. \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2}(1 + \mathcal{O}(\epsilon)) - \frac{B^{div}}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^2 \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{11}{24}(1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \frac{7}{3} \ln \frac{4}{3} + 8a + \frac{1}{6} B_1^{div} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^3 + \mathcal{O} \left(g_0^4 \right) \right\}, \\
 & \hspace{15em} (5.18)
 \end{aligned}$$

wobei für \tilde{m}_0 die Reihe (5.12) eingesetzt wurde. Die divergenten Terme in (5.18) machen eine Renormierung notwendig, die im Kapitel 6 durchgeführt wird. Die Ableitung nach dem Impulsquadrat berechnet sich analog:

$$\begin{aligned}
 - \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma^{(2)}(p) \Big|_{p^2=0} &= 1 - \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{2,2}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=0} - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,4}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=0} \\
 &= 1 + \frac{1}{81} \left(\frac{g_0}{8\pi \tilde{m}_0} \right)^2 - \left(\frac{8}{3} a - \frac{4}{27} + \frac{8}{27} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi \tilde{m}_0} \right)^3 \\
 &= 1 + \frac{1}{81} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{4}{27} + \frac{1}{81}(1 + \mathcal{O}(\epsilon)) - \frac{8}{27} \ln \frac{4}{3} - \frac{8}{3} a \right) \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^3 + \mathcal{O} \left(g_0^4 \right). \\
 & \hspace{15em} (5.19)
 \end{aligned}$$

5.2.3 4-Punkt-Funktion

Bei $\Gamma^{(4)}$ haben einige Graphen neben dem Symmetriefaktor mehrere Permutationen der einlaufenden Beine. Da die Integrale für alle Permutationen gleich bleiben, muß der Wert eines Integrals nur mit ihrer Anzahl multipliziert werden.

0- und 1-Loop-Ordnung

$\mathcal{G}_{0,1}^{(4)}$ (Symmetriefaktor 1)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{0,1}^{(4)}(k_i = 0) &= \begin{array}{c} k_1 \quad \quad k_3 \\ \quad \searrow \quad \nearrow \\ \quad \quad \times \\ \quad \nearrow \quad \searrow \\ k_2 \quad \quad k_4 \end{array} \\
 &= -g_0 \\
 & \hspace{15em} (5.20)
 \end{aligned}$$

$\mathcal{G}_{1,1}^{(4)}$ (Symmetriefaktor 1/2, 3 Permutationen)

$$\mathcal{G}_{1,1}^{(4)}(k_i = 0) = \begin{array}{c} k_1 \quad \quad k_3 \\ \quad \searrow \quad \nearrow \\ \quad \quad \text{---} q \text{---} \\ \quad \nearrow \quad \searrow \\ k_2 \quad \quad k_4 \\ \quad \quad \text{---} q + k_1 + k_2 \text{---} \end{array}$$

$\mathcal{G}_{3,2}^{(4)}$ (Symmetriefaktor $1/8$, 3 Permutationen)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{3,2}^{(4)}(k_i = 0) &= \text{Diagram: three overlapping loops on a line} \\
 &= g_0^4 J_2^3(3) \\
 &= g_0 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

$\mathcal{G}_{3,3}^{(4)}$ (Symmetriefaktor $1/6$, 3 Permutationen)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{3,3}^{(4)}(k_i = 0) &= \text{Diagram: a loop on a line with a bubble} \\
 &= g_0 \frac{1}{4} \left(3 + 2B_1^{div} - 4 \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

$\mathcal{G}_{3,8}^{(4)}$ (Symmetriefaktor $1/4$, 6 Permutationen)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{3,8}^{(4)}(k_i = 0) &= \text{Diagram: a loop on a line with a bubble} \\
 &= -g_0 J_2(3) \mathcal{G}_{2,3}^{(4)}(k_i = 0) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \\
 &= g_0 \frac{2}{3} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

$\mathcal{G}_{3,9}^{(4)}$ (Symmetriefaktor $1/2$, 12 Permutationen)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{3,9}^{(4)}(k_i = 0) &= \text{Diagram: a loop on a line with a bubble} \\
 &= g_0 \frac{4}{3} \ln \frac{4}{3} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

$\mathcal{G}_{3,10}^{(4)}$ (Symmetriefaktor $1/4$, 6 Permutationen)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{3,10}^{(4)}(k_i = 0) &= \text{Diagram: a loop on a line with a bubble} \\
 &= g_0 16a \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

$\mathcal{G}_{3,13}^{(4)}$ (Symmetriefaktor 1)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,13}^{(4)}(k_i = 0) &= \text{Diagramm: ein Kreis mit zwei sich kreuzenden Geraden} \\ &= g_0 C^{Tet} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \end{aligned} \quad (5.30)$$

$\mathcal{G}_{3,14}^{(4)}$ (Symmetriefaktor 1/4, 6 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,14}^{(4)}(k_i = 0) &= \text{Diagramm: zwei überlappende Kreise} \\ &= g_0 16a \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \end{aligned} \quad (5.31)$$

Ergebnisse für $\Gamma^{(4)}$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(k_i = 0) &= \mathcal{G}_{0,1}^{(4)}(k_i = 0) + 3\frac{1}{2}\mathcal{G}_{1,1}^{(4)}(k_i = 0) + 3\frac{1}{4}\mathcal{G}_{2,1}^{(4)}(k_i = 0) \\ &\quad + 6\frac{1}{2}\mathcal{G}_{2,3}^{(4)}(k_i = 0) + 3\frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,1}^{(4)}(k_i = 0) + 3\frac{1}{8}\mathcal{G}_{3,2}^{(4)}(k_i = 0) \\ &\quad + 3\frac{1}{6}\mathcal{G}_{3,3}^{(4)}(k_i = 0) + 6\frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,8}^{(4)}(k_i = 0) + 12\frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,9}^{(4)}(k_i = 0) \\ &\quad + 6\frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,10}^{(4)}(k_i = 0) + \mathcal{G}_{3,13}^{(4)}(k_i = 0) + 6\frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,14}^{(4)}(k_i = 0) + \mathcal{O}(g_0^5) \\ &= -g_0 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{11}{4} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{17}{8} + \frac{15}{2} \ln \frac{4}{3} + 48a + C^{Tet} + \frac{1}{4} B_1^{div} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 + \mathcal{O}(g_0^4) \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Durch Einsetzen von (5.12) erhalten wir als Ergebnis

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(k_i = 0) &= -g_0 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{g_0}{8\pi m_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + 2 \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{7}{16} + \frac{15}{2} \ln \frac{4}{3} + 48a + C^{Tet} + \frac{1}{4} B_1^{div} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^3 + \mathcal{O}(g_0^4) \right]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Damit haben wir alle drei benötigten Reihen der symmetrischen Phase, nämlich (5.18), (5.19) und (5.33).

2-Loop-Ordnung $\mathcal{G}_{2,1}^{(1)}$ (Symmetriefaktor 1/6)

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{2,1}^{(1)} &= \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{32\pi^2 \tilde{m}_0} \tilde{B}^{div} \frac{\tilde{m}_0}{m_0} g_0^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right) \quad (5.35)
\end{aligned}$$

Wegen der Massenabhängigkeit des divergenten Anteils muß \tilde{B}^{div} in g_0 entwickelt werden (Vergleiche (5.14)).

$$\tilde{B}^{div} = B^{div} - 2 \frac{g_0}{8\pi m_0} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \mathcal{O}(g_0^2) \quad (5.36)$$

 $\mathcal{G}_{2,4}^{(1)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{2,4}^{(1)} &= \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{32\pi^2 \tilde{m}_0} \frac{m_0}{\tilde{m}_0} g_0^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.37)
\end{aligned}$$

3-Loop-Ordnung $\mathcal{G}_{3,1}^{(1)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{3,1}^{(1)} &= \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\
&= -\frac{32\sqrt{3}}{(8\pi)^3 \tilde{m}_0^2} \left(a + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3} \right) \frac{\tilde{m}_0}{m_0} g_0^{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right) \quad (5.38)
\end{aligned}$$

$\mathcal{G}_{3,8}^{(1)}$ (Symmetriefaktor 1/12)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{3,8}^{(1)} &= \text{---} \text{---} \text{---} \\
 &= -\frac{2\sqrt{3}}{(8\pi)^3 \tilde{m}_0^2} \left(B_1^{div} - 2 \ln \frac{4}{3} \right) \frac{\tilde{m}_0}{m_0} g_0^{\frac{5}{2}} \quad (5.39)
 \end{aligned}$$

$\mathcal{G}_{3,11}^{(1)}$ (Symmetriefaktor 1/6)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{3,11}^{(1)} &= \text{---} \text{---} \text{---} \\
 &= \frac{3\sqrt{3}}{(8\pi)^3 \tilde{m}_0^2} C^{Tet} \frac{m_0}{\tilde{m}_0} g_0^{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^3 \quad (5.40)
 \end{aligned}$$

$\mathcal{G}_{3,12}^{(1)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{3,12}^{(1)} &= \text{---} \text{---} \text{---} \\
 &= \frac{48\sqrt{3}}{(8\pi)^3 \tilde{m}_0^2} a \frac{m_0}{\tilde{m}_0} g_0^{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^3 \quad (5.41)
 \end{aligned}$$

$\mathcal{G}_{3,36}^{(1)}$ (Symmetriefaktor 1/8)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{3,36}^{(1)} &= \text{---} \text{---} \text{---} \\
 &= -\frac{9\sqrt{3}}{(8\pi)^3 \tilde{m}_0^2} \left(12a - \frac{4}{9} + \frac{8}{9} \ln \frac{4}{3}\right) \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0}\right)^3 g_0^{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2}\right)^4 \quad (5.45)
 \end{aligned}$$

 $\mathcal{G}_{3,37}^{(1)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{3,37}^{(1)} &= \text{---} \text{---} \text{---} \\
 &= -\frac{2\sqrt{3}}{(8\pi)^3 \tilde{m}_0^2} \left(1 - 2 \ln \frac{4}{3}\right) \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0}\right)^3 g_0^{\frac{5}{2}} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2}\right)^4 \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

Ergebnisse für $G^{(1)}$, $A(m_0)$ und \tilde{m}_0

Die oben aufgelisteten Graphen stellen alle relevanten Beiträge zu $A_3(m_0)$ und $A_4(m_0)$ dar, da alle Graphen mit Tadpole-Teilgraphen, wie im Kapitel 3.6 gezeigt, nicht explizit berechnet werden brauchen.

$$\begin{aligned}
 A_3(m_0) &= \frac{1}{2}\mathcal{G}_{1,1}^{(1)} + \frac{1}{4}\mathcal{G}_{2,4}^{(1)} + \frac{1}{12}\mathcal{G}_{3,8}^{(1)} + \frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,21}^{(1)} \\
 &\quad + \frac{1}{8}\mathcal{G}_{3,22}^{(1)} + \frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,35}^{(1)} + \frac{1}{8}\mathcal{G}_{3,36}^{(1)} + \frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,37}^{(1)} \quad (5.47) \\
 &= \frac{\tilde{m}_0}{m_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \frac{\sqrt{3}}{8\pi} g_0^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{m_0}{\tilde{m}_0} \frac{\sqrt{3}}{(8\pi)^2 \tilde{m}_0} g_0^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2}\right)^2 \\
 &\quad + \left[-\left(\frac{1}{6} B_1^{div} - \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3}\right) \frac{\tilde{m}_0}{m_0} + 2 \ln \frac{4}{3} \frac{m_0}{\tilde{m}_0} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2}\right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + 6a \frac{m_0}{\tilde{m}_0} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2}\right)^2 - \frac{9}{16} C^{Tet} \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0}\right)^3 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2}\right)^4 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{27}{2}a - \frac{1}{2} + \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^3 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \\
& - \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^3 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \left] \frac{\sqrt{3}}{(8\pi)^3 \tilde{m}_0^2} g_0^{\frac{5}{2}} \quad (5.48)
\end{aligned}$$

$$A_4(m_0) = \frac{1}{6} \mathcal{G}_{2,1}^{(1)} + \frac{1}{4} \mathcal{G}_{3,1}^{(1)} + \frac{1}{6} \mathcal{G}_{3,11}^{(1)} + \frac{1}{4} \mathcal{G}_{3,12}^{(1)} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{3} \left(B^{div} - 2 \frac{g_0}{8\pi m_0} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \mathcal{O}(g_0^2) \right) \frac{\tilde{m}_0}{m_0} \frac{\sqrt{3}}{(8\pi)^2 \tilde{m}_0} g_0^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right) \\
& + \left[-8 \left(a + \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3} \right) \frac{\tilde{m}_0}{m_0} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right) + \frac{1}{2} C^{Tet} \frac{m_0}{\tilde{m}_0} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^3 \right. \\
& \left. + 12a \frac{m_0}{\tilde{m}_0} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^3 \right] \frac{\sqrt{3}}{(8\pi)^3 \tilde{m}_0^2} g_0^{\frac{5}{2}} \quad (5.50)
\end{aligned}$$

Aus den beiden Reihen (5.48) und (5.50) läßt sich nun nach (3.62) A_1 bestimmen. Da A_1 und A als führenden Term $\mathcal{O}(g_0)$ haben, brauchen in dritter Ordnung alle Faktoren $\left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)$ nicht berücksichtigt werden und kann \tilde{m}_0 gleich m_0 gesetzt werden.

$$\begin{aligned}
A_1(m_0) & = \frac{\tilde{m}_0}{m_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \frac{\sqrt{3}}{8\pi} g_0^{\frac{1}{2}} \\
& + \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 + \frac{B^{div}}{3} \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{m}_0}{m_0} \right)^2 (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \right] \frac{\sqrt{3}}{(8\pi)^2 m_0} g_0^{\frac{3}{2}} \quad (5.51) \\
& + \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3} - \frac{7}{2}a - \frac{1}{16} C^{Tet} - \frac{5}{6} B_1^{div} \right] \frac{\sqrt{3}}{(8\pi)^3 m_0^2} g_0^{\frac{5}{2}} + \mathcal{O}\left(g_0^{\frac{7}{2}}\right)
\end{aligned}$$

$\hat{A}_1(m_0)$ wird bis $\mathcal{O}(g_0)$ benötigt. Aus (3.63) folgt

$$\begin{aligned}
\hat{A}_1(m_0) & = -\sqrt{3g_0 m_0} A_1(m_0) \\
& = -3m_0^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \frac{g_0}{8\pi m_0} + \mathcal{O}(g_0^2). \quad (5.52)
\end{aligned}$$

Um A bzw. \tilde{m}_0 zu bestimmen, setzen wir (3.63) in (3.25) ein und entwickeln A_1 gemäß (3.62). Für \hat{A}_1 setzen wir obiges Ergebnis ein.

$$\begin{aligned}
A(m_0) & = -\frac{2}{3} \sqrt{3g_0 m_0} A_3 - \sqrt{3g_0 m_0} A_4 + g_0 A_3 A_4 + \mathcal{O}(A_4^2, A_3^2 A_4, A_3^4) \\
& = -2\tilde{m}_0 \frac{g_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \left[\left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 - B^{div} \right] \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^2 \\
& + \left[4 + \frac{10}{3} \ln \frac{4}{3} + 3a - \frac{3}{8} C^{Tet} + \frac{1}{3} B_1^{div} \right] \frac{1}{m_0} \left(\frac{g_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (5.53)
\end{aligned}$$

In der gebrochenen Phase liefert die Rechnung schon in der 1-Loop-Ordnung einen Beitrag zur Impulsableitung. Zur Berechnung verweise ich auf den Anhang (A.12).

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{1,3}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = -\frac{1}{4} \frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.59)$$

2-Loop-Ordnung

Ich lasse hier die $\mathcal{O}(\epsilon)$ -Terme weg, da sie keinen Beitrag liefern.

$\mathcal{G}_{2,6}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2, 2 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2,6}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram: A circle with an incoming arrow from the left labeled } p \text{ and an outgoing arrow to the right labeled } p. \text{ The circle is divided into two regions by a curved line. The upper region has a clockwise arrow labeled } k_1 \text{ and the lower region has a clockwise arrow labeled } k_2. \text{ The total momentum flow is } k_1 + k_2. \\ &= -2m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{2,6}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \frac{20}{81} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^2 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.61)$$

$\mathcal{G}_{2,11}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2,11}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram: Two circles connected side-by-side. The left circle has an incoming arrow from the left labeled } p \text{ and an outgoing arrow to the right labeled } p+k_1. \text{ The right circle has an incoming arrow from the left labeled } p+k_1 \text{ and an outgoing arrow to the right labeled } p. \text{ The top of the left circle has a clockwise arrow labeled } k_1 \text{ and the top of the right circle has a clockwise arrow labeled } k_2. \\ &= -3m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{2,11}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^2 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.63)$$

$\mathcal{G}_{2,16}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2)

$$\mathcal{G}_{2,16}^{(2)}(p=0) = \text{Diagram: A circle with an incoming arrow from the left labeled } p \text{ and an outgoing arrow to the right labeled } p. \text{ The circle is divided into two regions by a vertical line. The left region has a clockwise arrow labeled } k_1 \text{ and the right region has a clockwise arrow labeled } k_2. \text{ The total momentum flow is } k_1 + k_2. \text{ The bottom of the circle has an arrow labeled } p+k_1 \text{ on the left and } p+k_2 \text{ on the right.}$$

$$= m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^2 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.64)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{2,16}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = -\frac{8}{27} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^2 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.65)$$

$\mathcal{G}_{2,17}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{2,17}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram: A circle with two external lines labeled } p \text{ on the left and right. The top arc is labeled } k_1 + k_2 \text{ with an arrow pointing right. The bottom arc is labeled } k_2 \text{ with an arrow pointing left. The left arc is labeled } k_1 \text{ with an arrow pointing right. The right arc is labeled } k_1 \text{ with an arrow pointing left.} \\ &= 2m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^2 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.66) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{2,17}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = -\frac{59}{108} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^2 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.67)$$

3-Loop-Ordnung

$\mathcal{G}_{3,21}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,21}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram: A circle with two external lines on the left and right. The interior of the circle is divided into two regions by two curved lines that meet at the center and extend to the top and bottom edges.} \\ &= 48am_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.68) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,21}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(-\frac{7}{27} - 4a + \frac{40}{81} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.69)$$

$\mathcal{G}_{3,22}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,22}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram: A circle with two external lines on the left and right. A vertical line segment connects the top and bottom of the circle, passing through the center.} \\ &= 3C^{Tet} m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.70) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,22}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(-\frac{2}{9} - \frac{9}{8} C^{Tet} + \frac{4}{3} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.71)$$

$\mathcal{G}_{3,23}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,23}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram: A circle with two vertical lines passing through it, each line tangent to the circle at its top and bottom.} \\ &= 48am_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.72) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,23}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(\frac{28}{27} - 28a - \frac{104}{81} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.73)$$

$\mathcal{G}_{3,24}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,24}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram: A circle with a horizontal line passing through its center. A smaller arc is drawn above the center, tangent to the circle at its ends.} \\ &= 48am_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.74) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,24}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(-\frac{11}{27} + \frac{32}{27} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.75)$$

$\mathcal{G}_{3,28}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4, 2 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,28}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram: Two circles of different sizes touching at a point. A horizontal line passes through the center of the larger circle. A smaller arc is drawn above the center of the larger circle, tangent to it at its ends.} \\ &= 2m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.76) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,28}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = -\frac{67}{162} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.77)$$

$\mathcal{G}_{3,29}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2, 2 Permutationen)

$$\mathcal{G}_{3,29}^{(2)}(p=0) = \text{Diagram: A circle with a horizontal line passing through its center. A smaller arc is drawn above the center, tangent to the circle at its ends.}$$

$\mathcal{G}_{3,52}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/8)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,52}^{(2)}(p=0) &= \text{---} \bigcirc \bigcirc \bigcirc \text{---} \\ &= 3m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.86)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,52}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = -\frac{3}{4} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.87)$$

 $\mathcal{G}_{3,53}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/6)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,53}^{(2)}(p=0) &= \text{---} \bigcirc \text{---} \\ &= \frac{3}{4} \left(3 + 2B_1^{div} - 4 \ln \frac{4}{3} \right) m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.88)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,53}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(-\frac{107}{128} - \frac{3}{8} B_1^{div} + \frac{3}{4} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^2 \quad (5.89)$$

 $\mathcal{G}_{3,71}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2, 2 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,71}^{(2)}(p=0) &= \text{---} \bigcirc \text{---} \\ &= -2 \left(1 - 2 \ln \frac{4}{3} \right) m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \end{aligned} \quad (5.90)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,71}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(\frac{715}{648} - \frac{89}{27} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.91)$$

 $\mathcal{G}_{3,72}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2, 2 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,72}^{(2)}(p=0) &= \text{---} \bigcirc \text{---} \\ &= -\frac{9}{4} C^{Tet} m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,72}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(-\frac{17}{36} + \frac{27}{16} C^{Tet} + \frac{8}{9} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.93)$$

$\mathcal{G}_{3,73}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4, 2 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,73}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram} \\ &= - \left(108a - 4 + 8 \ln \frac{4}{3} \right) m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,73}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(-\frac{260}{81} + 75a + \frac{14}{3} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.95)$$

$\mathcal{G}_{3,74}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2, 2 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,74}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram} \\ &= -\frac{9}{4} C^{Tet} m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \end{aligned} \quad (5.96)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,74}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(\frac{47}{36} + \frac{147}{64} C^{Tet} - \frac{101}{18} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.97)$$

$\mathcal{G}_{3,75}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4, 2 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,75}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram} \\ &= - \left(108a - 4 + 8 \ln \frac{4}{3} \right) m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \end{aligned} \quad (5.98)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,75}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(-\frac{31}{81} + 15a + 2 \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.99)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,111}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=0} = \left(-\frac{799}{576} + \frac{154}{27} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.107)$$

$\mathcal{G}_{3,112}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4, 2 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,112}^{(2)}(p=0) &= \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} \\ &= -m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \end{aligned} \quad (5.108)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,112}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=0} = \frac{41}{108} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.109)$$

$\mathcal{G}_{3,113}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2, 2 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,113}^{(2)}(p=0) &= \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} \\ &= -2 \left(1 - 2 \ln \frac{4}{3} \right) m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \end{aligned} \quad (5.110)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,113}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=0} = \left(\frac{491}{648} - \frac{5}{3} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.111)$$

$\mathcal{G}_{3,115}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2, 2 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,115}^{(2)}(p=0) &= \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} \\ &= \left(\frac{3}{4} - 7 \ln \frac{4}{3} \right) m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \end{aligned} \quad (5.112)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,115}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=0} = \left(-\frac{731}{1152} + \frac{373}{108} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^4 \quad (5.113)$$

$\mathcal{G}_{3,116}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\mathcal{G}_{3,116}^{(2)}(p=0) = \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---}$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,146}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = -\frac{1295}{5184} \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^6 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \quad (5.121)$$

$\mathcal{G}_{3,147}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,147}^{(2)}(p=0) &= \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ &= \left(-\frac{9}{2} - \frac{27}{16} C^{Tet} + 18 \ln \frac{4}{3} \right) m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \end{aligned} \quad (5.122)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,147}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(\frac{923}{192} - \frac{225}{512} C^{Tet} - \frac{815}{48} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^6 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \quad (5.123)$$

$\mathcal{G}_{3,148}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2, 2 Permutationen)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,148}^{(2)}(p=0) &= \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ &= 4 \ln \frac{4}{3} m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \end{aligned} \quad (5.124)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,148}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(\frac{229}{648} - \frac{85}{27} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^6 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \quad (5.125)$$

$\mathcal{G}_{3,149}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,149}^{(2)}(p=0) &= \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ &= \left(\frac{11}{2} - 16 \ln \frac{4}{3} \right) m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \end{aligned} \quad (5.126)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,149}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} = \left(-\frac{9941}{1728} + \frac{508}{27} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^6 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \quad (5.127)$$

$\mathcal{G}_{3,150}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,150}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram} \\ &= \left(\frac{3}{2} + \frac{297}{32} C^{Tet} - 9 \ln \frac{4}{3} \right) m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \end{aligned} \quad (5.128)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,150}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} &= \left(-\frac{913}{1728} - \frac{3159}{512} C^{Tet} + \frac{239}{48} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \\ &\quad \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^6 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \end{aligned} \quad (5.129)$$

$\mathcal{G}_{3,151}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/4)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,151}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram} \\ &= \left(-10 + 270a + \frac{44}{3} \ln \frac{4}{3} \right) m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \end{aligned} \quad (5.130)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,151}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} &= \left(\frac{7103}{810} - \frac{819}{4} a - \frac{3187}{270} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^6 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \end{aligned} \quad (5.131)$$

$\mathcal{G}_{3,152}^{(2)}$ (Symmetriefaktor 1/2)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{3,152}^{(2)}(p=0) &= \text{Diagram} \\ &= \left(\frac{17}{4} - 11 \ln \frac{4}{3} \right) m_0^2 \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \end{aligned} \quad (5.132)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{3,152}^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} &= \left(-\frac{10393}{3456} + \frac{1001}{108} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \right)^3 \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0} \right)^6 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2} \right)^6 \end{aligned} \quad (5.133)$$

Ergebnisse für $\Gamma^{(2)}$

Mit den Graphen der letzten Seiten (Gleichung (5.58) bis (5.132)) berechne ich nun $\Gamma^{(2)}$. In der 3-Loop-Ordnung vernachlässige ich Terme mit $\hat{A}_1(m_0)$ und setze \tilde{m}_0 direkt auf m_0 , da die Korrekturen in höherer Ordnung sind.

$$\begin{aligned}
& -\Gamma^{(2)}(p=0) \\
&= \tilde{m}_0^2 - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{1,3}^{(2)} - \frac{1}{6}\mathcal{G}_{2,2}^{(2)} - 2\frac{1}{2}\mathcal{G}_{2,6}^{(2)} - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{2,11}^{(2)} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{2,16}^{(2)} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{2,17}^{(2)} \\
&\quad - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,4}^{(2)} - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,21}^{(2)} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,22}^{(2)} - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,23}^{(2)} - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,24}^{(2)} - 2\frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,28}^{(2)} - 2\frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,29}^{(2)} \\
&\quad - 2\frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,31}^{(2)} - 2\frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,32}^{(2)} - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,51}^{(2)} - \frac{1}{8}\mathcal{G}_{3,52}^{(2)} - \frac{1}{6}\mathcal{G}_{3,53}^{(2)} - 2\frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,71}^{(2)} - 2\frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,72}^{(2)} \\
&\quad - 2\frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,73}^{(2)} - 2\frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,74}^{(2)} - 2\frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,75}^{(2)} - 2\frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,76}^{(2)} - 2\frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,109}^{(2)} - \mathcal{G}_{3,110}^{(2)} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,111}^{(2)} \\
&\quad - 2\frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,112}^{(2)} - 2\frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,113}^{(2)} - 2\frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,115}^{(2)} - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,116}^{(2)} - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,144}^{(2)} - \frac{1}{8}\mathcal{G}_{3,145}^{(2)} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,146}^{(2)} \\
&\quad - \mathcal{G}_{3,147}^{(2)} - 2\frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,148}^{(2)} - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,149}^{(2)} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,150}^{(2)} - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{3,151}^{(2)} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{3,152}^{(2)} \\
&= \tilde{m}_0^2 - m_0^2 \frac{3}{2} \frac{g_0}{8\pi\tilde{m}_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2}\right)^2 \\
&\quad - \left[\frac{\tilde{B}^{div}}{3} - \frac{11}{4} \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0}\right)^2 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2}\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{m_0}{\tilde{m}_0}\right)^4 \left(1 - \frac{\hat{A}_1(m_0)}{3m_0^2}\right)^4 \right] \left(\frac{g_0}{8\pi}\right)^2 \\
&\quad - \left[\frac{5}{8} + \frac{73}{4}a - \frac{25}{6} \ln \frac{4}{3} + \frac{39}{32} C^{Tet} + \frac{1}{4} B_1^{div} \right] \frac{1}{\tilde{m}_0} \left(\frac{g_0}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}(g_0^4) \quad (5.134)
\end{aligned}$$

Hier wird (5.52) bis zur zweiten Ordnung benötigt.

$$\begin{aligned}
& \hat{A}_1(m_0) = \quad (5.135) \\
& \quad -3m_0^2 \left(\left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \frac{g_0}{8\pi m_0} + \frac{B^{(div)}}{3} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^2 + \mathcal{O}(g_0^3) \right)
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen von (5.135) und (5.56) in (5.134) erhalten wir

$$\begin{aligned}
-\Gamma^{(2)}(p=0) &= m_0^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{g_0}{8\pi m_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 8\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \right. \\
&\quad + \left[\frac{3}{4} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \frac{2}{3} B^{div} \right] \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^2 \\
&\quad + \left[-\frac{29}{24} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \frac{5}{6} \ln \frac{4}{3} - \frac{85}{4} a - \frac{27}{32} C^{Tet} + \frac{1}{6} B_1^{div} \right] \\
&\quad \left. \left(\frac{g_0}{8\pi m_0}\right)^3 + \mathcal{O}(g_0^4) \right\}. \quad (5.136)
\end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber führe ich bei der Impulsableitung die Summe über die oben aufgezählten Graphen direkt aus. Nach Einsetzen von (5.56) und (5.135)

erhalten wir als Ergebnis

$$\begin{aligned}
-\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma^{(2)}(p) \right|_{p^2=0} &= 1 + \frac{1}{8} \frac{g_0}{8\pi m_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \\
&\quad - \frac{41}{648} \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^2 (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \\
&\quad + \left[\frac{931}{864} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) - \frac{19375}{2592} \ln \frac{4}{3} + \frac{703}{48} a \right. \\
&\quad \left. + \frac{2481}{1024} C^{Tet} - \frac{1}{24} B_1^{div} \right] \left(\frac{g_0}{8\pi m_0} \right)^3 + \mathcal{O}(g_0^4)
\end{aligned} \tag{5.137}$$

Mit den Reihen (5.57), (5.136) und (5.137) haben wir alle benötigten Größen gefunden, um in den folgenden Kapiteln die Renormierungskonstanten und -gruppenfunktionen sowie die universellen Amplitudenverhältnisse zu berechnen. Die Renormierung ist notwendig, da alle Reihen zumindest in 3-Loop-Ordnung Divergenzen aufweisen.

Kapitel 6

Renormierung

Eine Renormierung muß durchgeführt werden, da die zu Beginn der Rechnungen eingeführten nackten Parameter m_0 und g_0 keine physikalische Bedeutung haben und die Störungsentwicklung der ϕ^4 -Theorie, wie im vorigen Kapitel erwähnt, Divergenzen aufweist [WIL71]. Dabei werden neue, renormierte Größen m_R und g_R eingeführt, die eine physikalische Bedeutung haben. Neben der Masse und der Kopplungskonstanten wird das Feld ϕ redefiniert.

Für eine ausführliche Darstellung des Verfahrens verweise ich insbesondere auf [HEI93], wo diese Rechnungen schon bis zur 2-Loop-Ordnung durchgeführt wurden und auf [COL84, CAL76, TV72, CL84].

An der Massendimension der Kopplung läßt sich ablesen, ob eine bestimmte Theorie renormierbar ist oder nicht. Für $[g_0] < 0$ haben wir eine nicht renormierbare Theorie, da der Grad der Divergenz mit der Störungsordnung wächst und somit beliebig viele divergente Graphen auftreten. Für $[g_0] = 0$ ist die Theorie renormierbar und bei $[g_0] > 0$, wie in unserem Fall $[g_0] = 1$, sogar superrenormierbar. Das heißt, daß wir nur eine endliche Anzahl von divergenten Graphen haben. Weil wir eine massive Theorie betrachten, sind dies alles Ultraviolettdivergenzen, die durch Integrationen über große Impulse auftreten ($k \gg a^{-1}$). In masselosen Theorien gibt es noch Infrarotdivergenzen, die für Integrationsimpulse $k \rightarrow 0$ auftreten.

Aufgrund der Gitterstruktur des Festkörpers besitzt die Theorie prinzipiell einen intrinsischen Impuls-Cutoff, der durch das Inverse der Gitterkonstanten gegeben ist. Da das kritische Verhalten jedoch durch langreichweitige Fluktuationen dominiert wird, muß die Theorie unabhängig von mikroskopischen Parametern sein. So muß die Theorie insbesondere vom Impuls-Cutoff unabhängig sein, der gegen Unendlich geht, bzw. in der hier benutzten dimensionellen Regularisierung unabhängig von ϵ für $\epsilon \rightarrow 0$.

6.1 Renormierungsschema

Zu Beginn dieses Kapitels führe ich einige Größen ein, die zur Bestimmung der Renormierungskonstanten notwendig sind. Zuerst sei hier die kritische Masse m_{0c}

definiert, über deren Erreichen der Phasenübergang gesteuert wird.

$$t = m_0^2 - m_{0c}^2 \quad (6.1)$$

Perturbativ ist die Masse m_{0c} nicht berechenbar [BB85], was aber im folgenden nicht notwendig ist.

Die Vertex-Funktionen mit $\phi^2(x)$ -Insertionen $\Gamma_0^{(n,l)}(p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_l; g_0, m_0)$ werden durch Legendre-Transformationen bezüglich des Quellfeldes j und Fourier-Transformation aus $\left\langle \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) \frac{1}{2} \phi_0^2(y_1) \cdots \frac{1}{2} \phi_0^2(y_l) \right\rangle_c$ bestimmt. Für $l = 0$ sind dies die schon berechneten Vertex-Funktionen. Der Index 0 bezeichnet bei den Vertex-Funktionen wie bei der Kopplung oder der Masse die nackte, unrenormierte Größe. Da die Wirkung dimensionslos ist, wird über

$$u_0 := \frac{g_0}{m_0^{4-D}}, \text{ bzw. hier im Fall } D = 3: \quad u_0 := \frac{g_0}{m_0} \quad (6.2)$$

eine dimensionslose, nackte Kopplung eingeführt.

Die Renormierungsbedingungen können bei verschwindenden äußeren Impulsen formuliert werden, weil wir eine massive Theorie haben. Es handelt sich um eine weitgehend willkürliche Festlegung, die jedoch die Rechnung einfach hält, ohne die Ergebnisse zu beeinflussen.

Durch Entwicklung der 2-Punkt-Vertex-Funktion um $p^2 = 0$ definieren wir die renormierte Masse m_R und die Feldrenormierungskonstante Z_3 .

$$-\Gamma_0^{(2,0)}(p; m_0, g_0) = \frac{1}{Z_3} \left(m_R^2 + p^2 + \mathcal{O}(p^4) \right) \quad (6.3)$$

daraus folgt für $p^2 = 0$:

$$m_R^2 := -Z_3(u_0) \Gamma_0^{(2,0)}(0; m_0, g_0) = \frac{\Gamma_0^{(2,0)}(0; m_0, g_0)}{\left. \frac{\partial \Gamma_0^{(2,0)}(p; m_0, g_0)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0}} \quad (6.4)$$

$$Z_3^{-1}(u_0) := - \left. \frac{\partial \Gamma_0^{(2,0)}(p; m_0, g_0)}{\partial p^2} \right|_{p^2=0}. \quad (6.5)$$

Die Korrelationslänge ist mit (1.11) als das Inverse der renormierten Masse gegeben:

$$\xi = \frac{1}{m_R}. \quad (6.6)$$

Die Renormierungskonstante Z_2 wird durch

$$Z_2^{-1}(u_0) := -\Gamma_0^{(2,1)}(0, 0; 0; m_0, g_0) \quad (6.7)$$

definiert. Die Vertex-Funktionen mit ϕ^2 -Insertionen lassen sich durch Ableiten aus den gewöhnlichen Vertex-Funktionen bestimmen.

$$\Gamma_0^{(n,l+1)}(\{p; 0, q\}; g_0, m_0) = \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_0^{(n,l)}(\{p; q\}; g_0, m_0) \quad (6.8)$$

Hierbei steht $\{p; q\}$ für den gesamten Variablensatz $\{p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_l\}$.

Mit $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{g_0} = \left. \frac{\partial}{\partial m_0^2} \right|_{g_0}$ erhalten wir für $(n, l) = (2, 0)$

$$Z_2^{-1}(u_0) = -\frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma_0^{(2,0)}(0; m_0, g_0). \quad (6.9)$$

Nun können die renormierten Vertex-Funktionen und Felder bestimmt werden.

$$\Gamma_R^{(n,l)}(\{p; q\}; g_0, m_0) = Z_3^{\frac{n}{2}}(u_0) \left(\frac{Z_2(u_0)}{Z_3(u_0)} \right)^l \Gamma_0^{(n,l)}(\{p; q\}; g_0, m_0) \quad (6.10)$$

$$\sqrt{Z_3(u_0)} \phi_R(x) = \phi_0(x) \quad (6.11)$$

Die renormierte Kopplung g_R ist in beiden Phasen unterschiedlich definiert.

Symmetrische Phase

In der symmetrischen Phase wird die renormierte Kopplung über den Wert der 4-Punkt-Vertex-Funktion ohne äußere Impulse definiert.

$$g_{R+}^{(4)} := -\Gamma_R^{(4,0)}(\{0\}; m_R, g_R) = -Z_3^2(u_0) \Gamma_0^{(4,0)}(\{0\}; m_0, g_0) = g_0 \frac{Z_3^2(u_0)}{Z_1(u_0)} \quad (6.12)$$

Die Renormierungskonstante Z_{1+} ist über

$$Z_{1+}^{-1}(u_0) := -\frac{1}{g_0} \Gamma_0^{(4,0)}(\{0\}; m_0, g_0) \quad (6.13)$$

definiert. Bei den renormierten Parametern wird ebenso wie bei den nackten Größen eine dimensionslose Kopplung eingeführt.

$$u_{R+} := \frac{g_R^{(4)}}{m_R^{4-D}} \stackrel{D=3}{=} \frac{g_R^{(4)}}{m_R} \quad (6.14)$$

Durch Invertieren der Gleichungen (6.4, 6.12) und (6.14) können die nackten Größen durch die renormierten Parameter ausgedrückt werden. Somit lassen sich die Renormierungskonstanten Z_{i+} ($i = 1, 2, 3$) als Funktionen von u_{R+} ausdrücken.

Nun sei noch die dimensionslose Kopplung u_+ definiert, die sich aus (6.12, 6.14) bestimmen läßt.

$$u_+ := \frac{g_0}{m_R^{4-D}} = u_R \frac{Z_1(u_R)}{Z_3^2(u_R)} \quad (6.15)$$

Diese wird im folgenden Kapitel benötigt.

Zum Schluß fasse ich die Renormierungsbedingungen der symmetrischen Phase nochmal zusammen.

$$\Gamma_R^{(2,0)}(0; m_R, u_R) = -m_R^2 \quad (6.16a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2,0)}(p; m_R, u_R) \right|_{p^2=0} = -1 \quad (6.16b)$$

$$\Gamma_R^{(4,0)}(\{0\}; m_R, u_R) = -g_R^{(4)} \quad (6.16c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(0; 0; m_R, u_R) = -1 \quad (6.16d)$$

Phase gebrochener Symmetrie

In der gebrochenen Phase bestimmen wir die renormierte Kopplung nicht über den Wert der 4-Punkt-Vertex-Funktion, da durch die zusätzliche ϕ^3 -Kopplung unpraktisch viele Diagramme beitragen würden. Stattdessen verwenden wir nach [LW87, MM93] eine alternative Definition der Kopplung.

Die spontane Magnetisierung v des Feldes ϕ ist die Summe des Minimums v_{min} und des Erwartungswertes von ϕ_- , der mit $v_0 := G_c^{(1,0)}$ bezeichnet wird.

$$v = v_{min} + v_0 \quad v_{min} = \sqrt{\frac{3m_0^2}{g_0}} \quad (6.17)$$

Mit dem renormierten Vakuumerwartungswert $v_R := Z_{3-}^{-\frac{1}{2}} v$ definiert sich die renormierte Kopplung in der gebrochenen Phase

$$g_{R-} := \frac{3m_R^2}{v_R^2} = \frac{3Z_3(u_0)m_R^2}{(v_{min} + v_0)^2} = g_0 \frac{Z_3(u_0)}{Z_4^2(u_0)}. \quad (6.18)$$

Hierin ist die Renormierungskonstante Z_{4-} wie folgt definiert:

$$Z_{4-}(u_0) := \frac{m_0}{m_R} \left(1 + v_0 \sqrt{\frac{g_0}{3m_0^2}} \right). \quad (6.19)$$

Eine dimensionslose renormierte Kopplung ist wie in (6.14) definiert. Im weiteren Verlauf ist mit $g_{R+}^{(4)}$ bzw. u_{R+} immer die durch (6.12) definierte Kopplung gemeint, während g_{R-} und u_{R-} sich auf (6.18) beziehen. Soweit es eindeutig ist, werde ich auf die Indizierung mit + bzw. - verzichten.

In Analogie zur symmetrischen Phase lassen sich die Renormierungskonstanten Z_{i-} ($i = 2, 3, 4$) durch Invertieren von (6.4, 6.18) als Funktion von u_{R-} bestimmen. Die Kopplung u_- ist nach (6.18) durch

$$u_- := \frac{g_0}{m_R^{4-D}} = u_R \frac{Z_4^2(u_R)}{Z_3(u_R)} \quad (6.20)$$

gegeben.

Auch hier seien nochmals die Renormierungsbedingungen der gebrochenen Phase zusammengefaßt.

$$\Gamma_R^{(2,0)}(0; m_R, u_R) = -m_R^2 \quad (6.21a)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2,0)}(p; m_R, u_R) \right|_{p^2=0} = -1 \quad (6.21b)$$

$$\frac{3}{v_R^2} \Gamma_R^{(2,0)}(0; m_R, u_R) = -g_R \quad (6.21c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(0; 0; m_R, u_R) = -1 \quad (6.21d)$$

6.2 Renormierungsgruppe

In diesem Kapitel führe ich die Renormierungsgruppenfunktionen ein, die später zur Bestimmung des Amplitudenverhältnisses benötigt werden. Für eine ausführlichere Darstellung verweise ich auf [AMI84, BGZJ76, IIM75].

Für die massiven, renormierten Vertex-Funktionen gilt

$$\left\{ m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \Big|_{g_0} + \beta(u_R) \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} + \left(l - \frac{n}{2} \right) \eta_3(u_R) - l \eta_2(u_R) \right\} \Gamma_R^{(n,l)}(\{p; q\}; m_R, u_R) \\ = (2 - \eta_3(u_R)) m_R^2 \Gamma_R^{(n,l+1)}(\{p; 0, q\}; m_R, u_R), \quad (6.22)$$

wobei die Renormierungsgruppenfunktionen durch

$$\beta(u_R) := m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \Big|_{g_0} u_R \quad (6.23a)$$

$$\eta_3(u_R) := \beta(u_R) \frac{1}{Z_3(u_R)} \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} Z_3(u_R) \quad (6.23b)$$

$$\eta_2(u_R) := \beta(u_R) \frac{1}{Z_2(u_R)} \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} Z_2(u_R) \quad (6.23c)$$

gegeben sind. Durch Umformung der partiellen Ableitung in (6.23a) erhalten wir

$$\beta(u_R) = -(4 - D) \left(\frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{m_R} \ln(u) \right)^{-1} \stackrel{D=3}{=} - \left(\frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{m_R} \ln(u) \right)^{-1} \quad (6.24)$$

und

$$\eta_3(u_R) = \beta(u_R) \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} \ln(Z_3(u_R)) = m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \Big|_{g_0} \ln(Z_3(u_R)) \quad (6.25a)$$

$$\eta_2(u_R) = \beta(u_R) \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} \ln(Z_2(u_R)) = m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \Big|_{g_0} \ln(Z_2(u_R)). \quad (6.25b)$$

Über (6.25a) und (6.25b) ist eine weitere Renormierungsgruppenfunktion definiert.

$$\nu^{-1}(u_R) = 2 - \eta_3(u_R) + \eta_2(u_R) \quad (6.26)$$

Bei Lösung der Renormierungsgruppengleichung (6.22) mit der Charakteristikmethode (siehe z.B. [BDFN92, Kapitel 11]) lassen sich die Fixpunkte der Kopplung bestimmen, die durch die Nullstellen der β -Funktion gegeben sind. Da im Bereich eines Phasenüberganges langreichweitiges Verhalten, entsprechend kleinen Impulsen, dominiert, ist die nichttriviale Nullstelle u_R^* der β -Funktion relevant. Für diese gilt:

$$\beta(u_R^*) = 0 \quad , \quad \beta'(u_R^*) > 0. \quad (6.27)$$

Durch den Fixpunkt u_R^* sind auch die kritischen Exponenten η und ν (1.16a, 1.17b) festgelegt.

$$\eta = \eta_3(u_R^*) \quad , \quad \nu = \nu(u_R^*) \quad (6.28)$$

6.3 Berechnung der renormierten Größen

Nun werden mit den Ergebnissen des Kapitels 5 die oben hergeleiteten renormierten Größen, Renormierungskonstanten und Renormierungsgruppenfunktionen als Reihen in der renormierten, dimensionslosen Kopplung $u_{R\pm}$ entwickelt.

6.3.1 Symmetrische Phase

Alle hier betrachteten Größen gelten nur für die symmetrische Phase, daher ist der Index $+$ auf den rechten Seiten der Gleichungen ausgelassen.

Zunächst sind hier die Ergebnisse des Kapitels 5.2 nochmals zitiert, allerdings als Reihe in $u_{0+} := \frac{g_{0+}}{m_{0+}}$ (6.2). Für die 2-Punkt-Funktion werden (5.18) und (5.19) zu

$$\begin{aligned} -\Gamma_0^{(2,0)}(0) &= m_0^2 \left[1 - \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}(1 + \mathcal{O}(\epsilon)) - \frac{B^{div}}{3} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad \left. + \left(-\frac{11}{24}(1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \frac{7}{3} \ln \frac{4}{3} + 8a + \frac{1}{6} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4) \right] \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_0^{(2,0)}(p) \Big|_{p^2=0} &= 1 + \frac{1}{81} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{13}{81} - \frac{8}{27} \ln \frac{4}{3} - \frac{8}{3} a \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4). \end{aligned} \quad (6.30)$$

Aus dem Kehrwert der letzten Gleichung erhalten wir direkt die Feldrenormierungskonstante Z_{3+} aus (6.5):

$$\begin{aligned} Z_{3+}(u_0) &= 1 - \frac{1}{81} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{13}{81} + \frac{8}{3} a + \frac{8}{27} \ln \frac{4}{3} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Die 4-Punkt-Funktion aus (5.33) ist

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(4,0)}(k_i = 0) &= -g_0 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + 2 \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{7}{16} + \frac{15}{2} \ln \frac{4}{3} + 48a + C^{Tet} + \frac{1}{4} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4) \right]. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Mit diesen Reihen lassen sich die renormierte Masse und Kopplung als Reihen bis zur dritten Ordnung in u_0 bestimmen.

$$m_{R+}^2 = -Z_3(u_0) \Gamma_0^{(2,0)}(0)$$

$$\begin{aligned}
&= m_0^2 \left[1 - \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \left(\frac{79}{162} - \frac{1}{3} B^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{131}{216} + \frac{71}{27} \ln \frac{4}{3} + \frac{32}{3} a + \frac{1}{6} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4) \right] \quad (6.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{R+}^{(4)} &= -Z_3^2(u_0) \Gamma_0^{(4,0)}(k_i = 0) \\
&= g_0 \left[1 - \frac{3}{2} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \left(-\frac{2}{81} + 2(1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{199}{1296} - \frac{373}{54} \ln \frac{4}{3} - \frac{128}{3} a - C^{Tet} - \frac{1}{4} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4) \right] \quad (6.34)
\end{aligned}$$

Durch Quotientenbildung erhalten wir

$$\begin{aligned}
u_{R+} = \frac{g_R^{(4)}}{m_R} &= u_0 \left[1 - \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} + 1 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{293}{216} + \frac{1}{6} B^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{13}{9} - \frac{74}{9} \ln \frac{4}{3} - 48a - C^{Tet} - \frac{1}{3} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4) \right]. \quad (6.35)
\end{aligned}$$

Da die nackten Größen als Reihen in u_{R+} gesucht sind, invertiere ich die Gleichung (6.35) und erhalte die nackte (dimensionslose) Kopplung in Abhängigkeit der renormierten. Hierbei ist zu beachten, daß der divergente Anteil B^{div} im Logarithmus massenabhängig ist und durch

$$B_{R+}^{div} := \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_R^2}{4\pi} \right) + \frac{C}{4\pi} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right) + \frac{u_R}{8\pi} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \mathcal{O}(u_R^2) \quad (6.36)$$

zu ersetzen ist.

$$\begin{aligned}
u_{0+} &= u_R \left[1 + \frac{u_R}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} + 1 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \left(-\frac{185}{216} - \frac{1}{6} B_R^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{571}{216} + \frac{74}{9} \ln \frac{4}{3} + 48a + C^{Tet} - \frac{1}{2} B_{1R}^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4) \right] \quad (6.37)
\end{aligned}$$

B_{1R}^{div} ist wie B_1^{div} definiert, nur die nackte Masse ist gegen die renormierte Masse ersetzt. Da dieser Term erst in 3-Loop-Ordnung auftritt, brauchen keine Korrekturen hinzuaddiert werden. Diese tragen erst zur 4-Loop-Ordnung bei.

Indem ich (6.37) in (6.33) und (6.34) einsetze und nach m_0 bzw. g_0 auflöse, bekomme ich:

$$\begin{aligned}
m_{0+}^2 &= m_R^2 \left[1 + \frac{u_R}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \left(\frac{245}{162} + \frac{1}{3} B_R^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{691}{324} - \frac{71}{27} \ln \frac{4}{3} - \frac{32}{3} a + B_{1R}^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_R^4) \right] \quad (6.38)
\end{aligned}$$

$$g_0 = g_R \left[1 + \frac{3}{2} \frac{u_R}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{421}{648} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(-\frac{257}{216} + \frac{373}{54} \ln \frac{4}{3} + \frac{128}{3} a + C^{Tet} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right) \right]. \quad (6.39)$$

Hier ist zu beachten, daß die nackte Kopplung keine divergenten Anteile mehr enthält.

Renormierungskonstanten

Nun bestimme ich die im Kapitel 6.1 definierten Renormierungskonstanten für die symmetrische Phase in Abhängigkeit von u_{R+} . Der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ ist durchgeführt, womit alle Anteile $\mathcal{O}(\epsilon)$ wegfallen.

Durch Einsetzen von (6.37) in (6.31) erhalten wir

$$Z_{3+}(u_R) = 1 - \frac{1}{81} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \\ + \left(-\frac{5}{27} + \frac{8}{27} \ln \frac{4}{3} + \frac{8}{3} a \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right). \quad (6.40)$$

Die Renormierungskonstante Z_{1+} bestimmt sich aus (6.13) zu

$$\frac{1}{Z_{1+}(u_R)} = 1 - \frac{3}{2} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + 2 \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\ - \left(-\frac{7}{16} + \frac{15}{2} \ln \frac{4}{3} + 48a + C^{Tet} + \frac{1}{4} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_0^4 \right) \\ = 1 - \frac{3}{2} \frac{u_R}{8\pi} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \\ + \left(\frac{125}{36} - \frac{15}{2} \ln \frac{4}{3} - 48a - C^{Tet} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right) \\ Z_{1+}(u_R) = 1 + \frac{3}{2} \frac{u_R}{8\pi} + \frac{7}{4} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \\ + \left(-\frac{115}{72} + \frac{15}{2} \ln \frac{4}{3} + 48a + C^{Tet} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right). \quad (6.41)$$

Für Z_{2+} ergibt sich mit (6.7):

$$\frac{1}{Z_{2+}(u_R)} = 1 - \frac{1}{2} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\ + \left(-\frac{1}{48} - \frac{7}{6} \ln \frac{4}{3} - 4a - \frac{1}{12} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_0^4 \right) \\ = 1 - \frac{1}{2} \frac{u_R}{8\pi} - \frac{1}{6} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \\ + \left(\frac{35}{108} - \frac{7}{6} \ln \frac{4}{3} - 4a \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right) \\ Z_{2+}(u_R) = 1 + \frac{1}{2} \frac{u_R}{8\pi} + \frac{5}{12} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2$$

$$+ \left(-\frac{7}{216} + \frac{7}{6} \ln \frac{4}{3} + 4a \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right). \quad (6.42)$$

Die dimensionslose Kopplung u_+ der symmetrischen Phase wird nach (6.15) mit (6.41) und (6.40) berechnet.

$$\begin{aligned} u_+ &= \frac{g_0}{m_R}(u_R) = u_R \frac{Z_1(u_R)}{Z_3^2(u_R)} \\ &= u_R \left[1 + \frac{3 u_R}{2 \cdot 8\pi} + \frac{575}{324} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{257}{216} + \frac{373}{54} \ln \frac{4}{3} + \frac{128}{3} a + C^{Tet} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right) \right] \end{aligned} \quad (6.43)$$

Renormierungsgruppenfunktionen

Die im Kapitel 6.2 definierten Funktionen lassen sich wie die Renormierungskonstanten als Reihen in u_{R+} entwickeln.

Mit (6.24) ergibt sich

$$\begin{aligned} \beta_+(u_R) &= - \left(\frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{m_R} \ln(u(u_R)) \right)^{-1} = -u(u_R) \left(\frac{\partial u(u_R)}{\partial u_R} \Big|_{m_R} \right)^{-1} \\ &= -u_R \left[1 - \frac{3 u_R}{2 \cdot 8\pi} + \frac{77}{81} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{235}{27} + \frac{373}{18} \ln \frac{4}{3} + 128a + 3C^{Tet} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Die Renormierungsgruppenfunktionen η_{3+} und η_{2+} berechnen sich aus (6.25a, 6.25b).

$$\begin{aligned} \eta_{3+}(u_R) &= -\beta(u_R) \frac{1}{Z_3(u_R)} \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} Z_3(u_R) \\ &= \frac{2}{81} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \left(\frac{14}{27} - \frac{8}{9} \ln \frac{4}{3} - 8a \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right) \end{aligned} \quad (6.45a)$$

$$\begin{aligned} \eta_{2+}(u_R) &= -\beta(u_R) \frac{1}{Z_2(u_R)} \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} Z_2(u_R) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{u_R}{8\pi} + \frac{1}{6} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 + \left(\frac{323}{324} - \frac{7}{2} \ln \frac{4}{3} - 12a \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right) \end{aligned} \quad (6.45b)$$

Mit (6.26) erhalten wir aus diesen Reihen

$$\begin{aligned} \nu_+(u_R) &= (2 - \eta_3(u_R) + \eta_2(u_R))^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 u_R}{4 \cdot 8\pi} - \frac{11}{1296} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1343}{5184} + \frac{47}{36} \ln \frac{4}{3} + 2a \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (6.46)$$

In den Gleichungen (6.40) bis (6.46) sehen wir, daß alle Renormierungskonstanten und -gruppenfunktionen in Abhängigkeit von u_{R+} frei von Divergenzen sind.

6.3.2 Phase gebrochener Symmetrie

Hier werden die Rechnungen des obigen Abschnittes für die Phase gebrochener Symmetrie durchgeführt. Dementsprechend ist überall auf den rechten Seiten der Gleichungen der Index – weggelassen.

Als erstes sind hier die Ergebnisse des Kapitels 5.3 als Reihe in $u_{0-} := \frac{g_{0-}}{m_{0-}}$ (6.2) aufgeführt. Für die 2-Punkt-Funktion werden (5.136) und (5.137) zu

$$\begin{aligned} -\Gamma_0^{(2,0)}(0) &= m_0^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 8 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right. \\ &\quad + \left(\frac{3}{4} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \frac{2}{3} B^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad \left. + \left(-\frac{29}{24} + \frac{5}{6} \ln \frac{4}{3} - \frac{85}{4} a - \frac{27}{32} C^{Tet} + \frac{1}{6} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4) \right] \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_0^{(2,0)}(p) \Big|_{p^2=0} &= 1 + \frac{1}{8} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) - \frac{41}{648} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{931}{864} - \frac{19375}{2592} \ln \frac{4}{3} + \frac{703}{48} a + \frac{2481}{1024} C^{Tet} - \frac{1}{24} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 \\ &\quad + \mathcal{O}(u_0^4). \end{aligned} \quad (6.48)$$

Der Kehrwert der letzten Gleichung ist die Feldrenormierungskonstante (6.5):

$$\begin{aligned} Z_{3-}(u_0) &= 1 - \frac{1}{8} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{409}{5184} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{45425}{41472} + \frac{19375}{2592} \ln \frac{4}{3} - \frac{703}{48} a - \frac{2481}{1024} C^{Tet} + \frac{1}{24} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 \\ &\quad + \mathcal{O}(u_0^4). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Der Erwartungswert der 1-Punkt-Funktion (5.57) ist

$$\begin{aligned} G_c^{(1,0)} &= \frac{\sqrt{3g_0}}{8\pi} \left[\left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{1}{3} B^{div} \frac{u_0}{8\pi} \right. \\ &\quad \left. + \left(-1 - \frac{1}{3} \ln \frac{4}{3} - \frac{7}{2} a - \frac{1}{16} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 + \mathcal{O}(u_0^3) \right]. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Mit diesen Reihen lassen sich die renormierte Masse und Kopplung als Reihen bis zur dritten Ordnung in u_{0-} bestimmen.

$$m_{R-}^2 = -Z_3(u_0) \Gamma_0^{(2,0)}(0)$$

$$\begin{aligned}
&= m_0^2 \left[1 + \frac{3}{8} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 10 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right. \\
&\quad + \left(\frac{3973}{5184} + \frac{2}{3} B^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{101245}{41472} + \frac{21535}{2592} \ln \frac{4}{3} - \frac{1723}{48} a - \frac{3345}{1024} C^{Tet} + \frac{1}{8} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(u_0^4) \right] \tag{6.51}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{R-} &= \frac{3m_R^2}{v_R^2} = \frac{3Z_3(u_0)m_R^2}{\left(v_0 + \sqrt{\frac{3m_0^2}{g_0}} \right)^2} \\
&= g_0 \left[1 - \frac{7}{4} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - \frac{25}{56} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{17099}{5184} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad + \left(-\frac{4051}{576} + \frac{21319}{1296} \ln \frac{4}{3} - \frac{1045}{24} a - \frac{2849}{512} C^{Tet} + \frac{7}{12} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(u_0^4) \right] \tag{6.52}
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
u_{R-} = \frac{g_R}{m_R} &= u_0 \left[1 - \frac{31}{16} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - \frac{38}{31} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right. \\
&\quad + \left(\frac{45565}{13824} - \frac{1}{3} B^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{341551}{73728} + \frac{21247}{1728} \ln \frac{4}{3} - \frac{819}{32} a - \frac{8051}{2048} C^{Tet} + \frac{31}{24} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(u_0^4) \right]. \tag{6.53}
\end{aligned}$$

Um die nackten Größen als Reihen in u_{R-} zu bekommen, invertiere ich die Gleichung (6.53). Der divergente Anteil B^{div} im Logarithmus ist in der gebrochenen Phase durch

$$B_{R-}^{div} := \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_R^2}{4\pi} \right) + \frac{C}{4\pi} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right) - \frac{3}{8} \frac{u_R}{8\pi} (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) + \mathcal{O}(u_R^2) \tag{6.54}$$

zu ersetzen.

$$\begin{aligned}
u_{0-} &= u_R \left[1 + \frac{31}{16} \frac{u_R}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - \frac{38}{31} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right. \\
&\quad + \left(\frac{58223}{13824} + \frac{1}{3} B^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \\
&\quad \left. + \left(\frac{150985}{13824} - \frac{21247}{1728} \ln \frac{4}{3} + \frac{819}{32} a + \frac{8051}{2048} C^{Tet} + \frac{31}{16} B_{1R}^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4) \right] \tag{6.55}
\end{aligned}$$

Aus (6.51) und (6.52) wird nun:

$$m_{0-}^2 = m_R^2 \left[1 - \frac{3}{8} \frac{u_R}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 10 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{14021}{10368} + \frac{2}{3} B_R^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \\
& + \left(-\frac{55213}{110592} - \frac{21535}{2592} \ln \frac{4}{3} + \frac{1723}{48} a - \frac{7}{3} B_{1R}^{div} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_R^4) \Big] \quad (6.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_0 = g_R & \left[1 + \frac{7}{4} \frac{u_R}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - \frac{2}{7} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{8177}{2592} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \right. \\
& \left. + \left(\frac{1225511}{165888} - \frac{21319}{1296} \ln \frac{4}{3} + \frac{1045}{24} a + \frac{2849}{512} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_R^4) \right]. \quad (6.57)
\end{aligned}$$

Auch hier ist, ebenso wie in der symmetrischen Phase, die letzte Gleichung frei von Divergenzen.

Renormierungskonstanten

Die Renormierungskonstanten Z_{i-} ($i = 2, 3, 4$) aus Kapitel 6.1 werden nun in Abhängigkeit von u_{R-} bestimmt. Der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ ist durchgeführt.

Aus (6.55) und (6.49) erhalten wir

$$\begin{aligned}
Z_{3-}(u_R) & = 1 - \frac{1}{8} \frac{u_R}{8\pi} - \frac{1693}{10368} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \\
& + \left(-\frac{450461}{331776} + \frac{19375}{2592} \ln \frac{4}{3} - \frac{703}{48} a - \frac{2481}{1024} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_R^4). \quad (6.58)
\end{aligned}$$

Z_{2-} berechnet sich mit (6.7):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z_{2-}(u_R)} & = 1 + \frac{1}{4} \frac{u_0}{8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 6 \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\
& + \left(\frac{17}{48} - \frac{5}{12} \ln \frac{4}{3} + \frac{85}{8} a + \frac{27}{64} C^{Tet} - \frac{1}{12} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_0^4) \\
& = 1 + \frac{1}{4} \frac{u_R}{8\pi} - \frac{35}{192} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \\
& + \left(-\frac{51217}{55296} - \frac{5}{12} \ln \frac{4}{3} + \frac{85}{8} a + \frac{27}{64} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_R^4) \\
Z_{2-}(u_R) & = 1 - \frac{1}{4} \frac{u_R}{8\pi} + \frac{47}{192} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \\
& + \left(\frac{45313}{55296} + \frac{5}{12} \ln \frac{4}{3} - \frac{85}{8} a - \frac{27}{64} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_R^4). \quad (6.59)
\end{aligned}$$

Aus dem Vakuum Erwartungswert bestimmt sich die Renormierungskonstante Z_{4-} nach (6.19).

$$\begin{aligned}
Z_{4-}(u_R) & = 1 + \frac{13}{16} \frac{u_0}{8\pi} - \frac{21481}{41472} \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^2 \\
& + \left(\frac{252757}{663552} - \frac{21535}{5184} \ln \frac{4}{3} + \frac{1387}{96} a + \frac{3217}{2048} C^{Tet} - \frac{13}{48} B_1^{div} \right) \left(\frac{u_0}{8\pi} \right)^3 \\
& + \mathcal{O}(u_0^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{13 u_R}{16 \cdot 8\pi} + \frac{43805}{41472} \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{75341}{41472} - \frac{23263}{5184} \ln \frac{4}{3} + \frac{1387}{96} a + \frac{3217}{2048} C^{Tet}\right) \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}(u_R^4)
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Die dimensionslose Kopplung u_- der gebrochenen Phase wird nach (6.20) berechnet.

$$\begin{aligned}
u_- &= \frac{g_0}{m_R}(u_R) = u_R \frac{Z_4^2(u_R)}{Z_3(u_R)} \\
&= u_R \left[1 + \frac{7 u_R}{4 \cdot 8\pi} + \frac{8177}{2592} \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1225511}{165888} - \frac{21319}{1296} \ln \frac{4}{3} + \frac{1045}{24} a + \frac{2849}{512} C^{Tet}\right) \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}(u_R^4) \right]
\end{aligned} \tag{6.61}$$

Renormierungsgruppenfunktionen

Zum Abschluß dieses Kapitels werden noch die Renormierungsgruppenfunktionen der Phase gebrochener Symmetrie als Reihen in u_{R-} entwickeln.

Diese Rechnungen sind analog zu den Rechnungen auf Seite 76 mit den Renormierungskonstanten der gebrochenen Phase durchzuführen.

$$\begin{aligned}
\beta_-(u_R) &= - \left(\frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{m_R} \ln(u(u_R)) \right)^{-1} = -u(u_R) \left(\frac{\partial u(u_R)}{\partial u_R} \Big|_{m_R} \right)^{-1} \\
&= -u_R \left[1 - \frac{7 u_R}{4 \cdot 8\pi} - \frac{239}{1296} \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{821989}{165888} - \frac{21319}{432} \ln \frac{4}{3} + \frac{1045}{8} a + \frac{8547}{512} C^{Tet}\right) \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}(u_R^4) \right]
\end{aligned} \tag{6.62}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{3-}(u_R) &= -\beta(u_R) \frac{1}{Z_3(u_R)} \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} Z_3(u_R) \\
&= \frac{1 u_R}{8 \cdot 8\pi} + \frac{10}{81} \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{1166011}{331776} - \frac{19375}{864} \ln \frac{4}{3} + \frac{703}{16} a + \frac{7443}{1024} C^{Tet}\right) \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3 + \mathcal{O}(u_R^4)
\end{aligned} \tag{6.63a}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{2-}(u_R) &= -\beta(u_R) \frac{1}{Z_2(u_R)} \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} Z_2(u_R) \\
&= \frac{1 u_R}{4 \cdot 8\pi} - \frac{83}{96} \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^2 + \left(-\frac{319345}{165888} - \frac{5}{4} \ln \frac{4}{3} + \frac{255}{8} a + \frac{81}{64} C^{Tet}\right) \left(\frac{u_R}{8\pi}\right)^3 \\
&\quad + \mathcal{O}(u_R^4)
\end{aligned} \tag{6.63b}$$

$$\nu_-(u_R) = (2 - \eta_3(u_R) + \eta_2(u_R))^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{16} \frac{u_R}{8\pi} + \frac{10325}{20736} \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1763563}{663552} - \frac{18295}{1728} \ln \frac{4}{3} + \frac{193}{32} a + \frac{6147}{2048} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_R}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_R^4 \right) \right] \quad (6.64)
\end{aligned}$$

Alle Renormierungskonstanten und -gruppenfunktionen sind in Abhängigkeit von u_{R-} frei von Divergenzen.

Mit den Reihen in den Abschnitten 6.3.1 und 6.3.2 sind nun alle benötigten Größen in Abhängigkeit der renormierten Kopplungskonstanten $u_{R\pm}$ bestimmt, und wir können in den beiden nächsten Kapiteln die Amplitudenverhältnisse der Korrelationslänge und Suszeptibilität berechnen.

Kapitel 7

Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge

Die Korrelationslänge (1.11) ist ein Maß für die Größe der Bereiche, in denen eine einheitliche Spinrichtung auftritt. In diesem Kapitel berechne ich das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge am kritischen Punkt.

Zunächst wird eine Bestimmungsgleichung hergeleitet, die von den in den beiden letzten Kapiteln bestimmten Größen abhängt. Danach wird eine einheitliche Kopplungskonstante für beide Phasen etabliert. Diese läßt sich dann am Hochtemperatur- oder Tieftemperaturfixpunkt auswerten.

Hier wird die Unterscheidung der beiden Phasen ganz wesentlich, daher werden alle Größen und Funktionen im folgenden mit einem Index versehen. “+” bezieht sich auf die Reihen aus Abschnitt 6.3.1, während sich “-” auf die aus Abschnitt 6.3.2 bezieht.

7.1 Die Bestimmungsgleichung

Die Korrelationslänge hat nach (1.16a) bei Annäherung an die kritische Temperatur T_c das Divergenzverhalten

$$\xi_{\pm} \sim f_{\pm} |t|^{-\nu}, \quad (7.1)$$

wobei die reduzierte Temperatur t wie in (1.12) definiert ist. Gesucht ist das universelle Amplitudenverhältnis $\frac{f_{\pm}}{f_{\pm}^-}$ in Abhängigkeit der Kopplungskonstanten. Die Korrelationslänge läßt sich nach (1.11) mit der inversen renormierten Masse identifizieren. Neben der reduzierten Temperatur t aus (6.1) führe ich noch die Temperaturen $t_{\pm} := |t|$ der Hoch- bzw. Tieftemperaturphase ein. Damit gilt für die Hochtemperaturphase

$$\frac{1}{m_{R+}} = \xi_{+} \sim f_{+} t_{+}^{-\nu}, \quad t_{+} = (m_0^2 - m_{0c}^2)_{T > T_c} > 0 \quad (7.2)$$

und die Tieftemperaturphase

$$\frac{1}{m_{R-}} = \xi_- \sim f_- t_-^{-\nu}, \quad t_- = -(m_0^2 - m_{0c}^2)_{T < T_c} > 0. \quad (7.3)$$

Da, wie im Kapitel 6.1 schon erwähnt, die kritische nackte Masse m_{0c} nicht perturbativ berechenbar ist, werden Funktionen verwendet, die durch Ableitungen nach der nackten Masse m_0 gebildet werden. Wegen (6.1) gilt die Identität

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{g_0} = \left. \frac{\partial}{\partial m_0^2} \right|_{g_0}. \quad (7.4)$$

Wir definieren die Funktionen

$$F_{\pm}(u_{R\pm}) := \left. \frac{\partial m_{R\pm}^2}{\partial m_{0\pm}^2} \right|_{g_0}. \quad (7.5)$$

In der Hochtemperaturphase haben wir wegen $t_+ = t$ und (1.53):

$$\frac{\partial m_{R+}^2}{\partial t_+} = \left. \frac{\partial m_{R+}^2}{\partial m_0^2} \right|_{g_0} = \frac{\partial m_{0+}^2}{\partial m_0^2} \left. \frac{\partial m_{R+}^2}{\partial m_{0+}^2} \right|_{g_0} = \left. \frac{\partial m_{R+}^2}{\partial m_{0+}^2} \right|_{g_0} = F_+(u_{R+}). \quad (7.6)$$

Analog gilt in der Tieftemperaturphase mit $t_- = -t$ und (1.59):

$$\frac{\partial m_{R-}^2}{\partial t_-} = - \left. \frac{\partial m_{R-}^2}{\partial m_0^2} \right|_{g_0} = - \frac{\partial m_{0-}^2}{\partial m_0^2} \left. \frac{\partial m_{R-}^2}{\partial m_{0-}^2} \right|_{g_0} = 2 \left. \frac{\partial m_{R-}^2}{\partial m_{0-}^2} \right|_{g_0} = 2F_-(u_{R-}). \quad (7.7)$$

Durch Division von (7.7) durch (7.6) und Differenzieren von (7.2) und (7.3) erhalten wir

$$2 \frac{F_-(u_{R-})}{F_+(u_{R+})} = \left. \frac{\frac{\partial m_{R-}^2}{\partial t_-}}{\frac{\partial m_{R+}^2}{\partial t_+}} \right|_{g_0} = \left(\frac{f_+}{f_-} \right)^2 \left(\frac{t_-}{t_+} \right)^{2\nu-1}. \quad (7.8)$$

Durch direkte Quotientenbildung von (7.2) und (7.3) bekommen wir:

$$\left(\frac{f_+}{f_-} \right)^2 \left(\frac{t_+}{t_-} \right)^{-2\nu} = \left(\frac{m_{R-}}{m_{R+}} \right)^2. \quad (7.9)$$

Also folgt aus (7.8) und (7.9), daß

$$2 \frac{F_-(u_{R-})}{F_+(u_{R+})} = \left(\frac{m_{R-}}{m_{R+}} \right)^2 \frac{t_+}{t_-} \quad (7.10)$$

ist. Die gesuchte linke Seite ist abhängig von der renormierten Masse und der Temperatur in beiden Phasen, wobei in jeder Phase ein Parameter frei wählbar ist. Wir setzen

$$m_{R+} = m_{R-}, \quad (7.11)$$

wodurch die renormierten Kopplungen u_{R+} und u_{R-} in eindeutige Beziehung zueinander gesetzt werden, ebenso wie t_+ und t_- . Mit (7.2) und (7.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} f_+ t_+^{-\nu} &= f_- t_-^{-\nu} \\ \frac{f_+}{f_-} &= \left(\frac{t_+}{t_-} \right)^\nu. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Gleichung (7.10) vereinfacht sich zu

$$\frac{t_+}{t_-} = 2 \frac{F_-(u_{R-})}{F_+(u_{R+})} =: 2\Phi(u_{R+}, u_{R-}). \quad (7.13)$$

Durch Einsetzen der letzten Gleichung in (7.12) erhalten wir das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge

$$\frac{f_+}{f_-} = \left[2 \frac{F_-(u_{R-})}{F_+(u_{R+})} \right]^\nu. \quad (7.14)$$

Die Funktionen F_+ und F_- bzw. Φ lassen sich als Reihen in $u_{R\pm}$ berechnen. Da die beiden renormierten Kopplungen unterschiedlich sind, wird im folgenden eine zusätzliche, einheitliche Kopplung eingeführt. Die renormierten Kopplungen $u_{R\pm}$ lassen sich dann als Reihen in dieser neuen Kopplung bestimmen.

Wie schon im Kapitel 6.2 geschrieben, nimmt die dimensionslose renormierte Kopplung am kritischen Punkt ihren infrarotstabilen Fixpunktwert an. Dieser ist durch die nichttriviale Nullstelle der β -Funktion gegeben. Eine einheitliche Kopplungskonstante \bar{u}_R sollte in beiden Phasen denselben Fixpunktwert haben.

Mit der Bedingung, daß die β -Funktion in beiden Phasen dieselbe Gestalt hat, läßt sich dies erfüllen. Wir definieren eine neue β -Funktion in Abhängigkeit von \bar{u}_R .

$$\bar{\beta}_\pm(\bar{u}_R) := m_{R\pm} \left. \frac{\partial}{\partial m_{R\pm}} \right|_{g_0} \bar{u}_R(m_{R\pm}) \stackrel{(6.24)}{=} -(4-D) \left(\left. \frac{\partial}{\partial \bar{u}_R} \right|_{m_{R\pm}} \ln(u_\pm(\bar{u}_R)) \right)^{-1} \quad (7.15)$$

Aus der Definition (7.15) folgt mit (7.11) direkt, daß

$$\bar{\beta}_+(\bar{u}_R) = \bar{\beta}_-(\bar{u}_R) \quad (7.16)$$

ist. Die dimensionslosen Kopplungen $u_\pm = \frac{g_0}{m_{R\pm}}$ sind als Reihen in $u_{R\pm}$ gegeben (6.43, 6.61). Benötigt wird noch die Reihe

$$\bar{u}_R(u_{R\pm}) = u_{R\pm} \left(1 + a_\pm^{(1)} u_{R\pm} + a_\pm^{(2)} u_{R\pm}^2 + a_\pm^{(3)} u_{R\pm}^3 + \mathcal{O}(u_{R\pm}^4) \right) \quad (7.17)$$

bis zur gewünschten Ordnung. An dieser Stelle ist zu bemerken, daß *alle* dimensionslosen Kopplungen in erster Ordnung übereinstimmen. Also gilt zum Beispiel $u_{R+} = \bar{u}_R + \mathcal{O}(\bar{u}_R^2)$.

Durch Invertieren von (7.17) erhalten wir $u_{R\pm}(\bar{u}_R)$. Da

$$u_+(\bar{u}_R) = u_-(\bar{u}_R) \quad (7.18)$$

wegen der rechten Seite von (7.15) gelten muß, haben wir nun zwei Möglichkeiten $u_{R\pm}$ als Reihen in \bar{u}_R zu bestimmen, die Anpassung an die Hochtemperatur- oder die Tieftemperaturkopplung.

Hochtemperaturkopplung

Die Kopplung \bar{u}_R wird mit u_{R+} identifiziert, und wir bestimmen aus (7.18) die Abhängigkeit von $u_{R-}(\bar{u}_R)$. Durch Invertieren von (6.61) und Einsetzen von (6.43) erhalte ich

$$u_{R-}(\bar{u}_R) = \left[u_- \frac{Z_{3-}(u_-)}{Z_{4-}^2(u_-)} \right]_{u_- = u_+(u_{R+} = \bar{u}_R)}. \quad (7.19)$$

Damit läßt sich Φ (7.13) und $\frac{f_{\pm}}{f_{\mp}}$ (7.14) als Funktion von \bar{u}_R ausdrücken und am Hochtemperaturfixpunkt u_{R+}^* berechnen.

$$\Phi_+(\bar{u}_R) := \Phi(u_{R+} = \bar{u}_R, u_{R-} = u_{R-}(\bar{u}_R)) \quad (7.20)$$

Hier steht der Index “+” an der Größe Φ_+ für die Hochtemperaturkopplung.

Tieftemperaturkopplung

Hier wird die Kopplung \bar{u}_R mit u_{R-} identifiziert, und wir bestimmen $u_{R+}(\bar{u}_R)$ aus (6.43) und (6.61).

$$u_{R+}(\bar{u}_R) = \left[u_+ \frac{Z_{3+}^2(u_+)}{Z_{1+}(u_+)} \right]_{u_+ = u_-(u_{R-} = \bar{u}_R)} \quad (7.21)$$

Ebenso wie bei der Hochtemperaturkopplung lassen sich Φ und $\frac{f_{\pm}}{f_{\mp}}$ als Funktion von \bar{u}_R bestimmen und am Tieftemperaturfixpunkt u_{R-}^* berechnen.

$$\Phi_-(\bar{u}_R) := \Phi(u_{R+} = u_{R+}(\bar{u}_R), u_{R-} = \bar{u}_R) \quad (7.22)$$

7.2 Berechnung der Reihen

Um das gerade vorgestellte Verfahren anzuwenden, bestimme ich zuerst die in (7.5) definierten Reihen in ihren eigenen Kopplungen.

$$\begin{aligned} F_+(u_{R+}) &= 1 - \frac{1}{2} \frac{u_{R+}}{8\pi} - \frac{1}{6} \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{43}{108} - \frac{71}{54} \ln \frac{4}{3} - \frac{16}{3} a \right) \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_{R+}^4) \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} F_-(u_{R-}) &= 1 + \frac{3}{16} \frac{u_{R-}}{8\pi} - \frac{233}{768} \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{338737}{663552} - \frac{21535}{5184} \ln \frac{4}{3} + \frac{1723}{96} a + \frac{3345}{2048} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_{R-}^4) \end{aligned} \quad (7.24)$$

Mit diesen Reihen läßt sich die Entwicklung in den beiden Kopplungen berechnen.

7.2.1 Reihen der Hochtemperaturkopplung

Zur Auswertung des Amplitudenverhältnisses $\frac{f_+}{f_-}$ bzw. Φ_+ am Hochtemperaturfixpunkt muß zuerst nach (7.19) die Abhängigkeit von $u_{R-}(u_{R+})$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
u_{R-}(u_{R+}) &= u_- \left[1 - \frac{7 u_-}{4 8\pi} + \frac{7699}{2592} \left(\frac{u_-}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad + \left(-\frac{1091671}{165888} + \frac{21319}{1296} \ln \frac{4}{3} - \frac{1045}{24} a - \frac{2849}{512} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_-}{8\pi} \right)^3 \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(u_-^4) \right]_{u_- = u_+(u_{R+})} \\
&= u_{R+} \left[1 - \frac{1 u_{R+}}{4 8\pi} - \frac{1309}{2592} \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad + \left(-\frac{251773}{55296} + \frac{30271}{1296} \ln \frac{4}{3} - \frac{7}{8} a - \frac{2337}{512} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^3 \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(u_{R+}^4) \right] \tag{7.25}
\end{aligned}$$

Mit der Reihe (7.25) wird (7.24) zu:

$$\begin{aligned}
F_-(u_{R+}) &= 1 + \frac{3 u_{R+}}{16 8\pi} - \frac{269}{768} \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{300913}{663552} - \frac{21535}{5184} \ln \frac{4}{3} + \frac{1723}{96} a + \frac{3345}{2048} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_{R+}^4). \tag{7.26}
\end{aligned}$$

Nun kann Φ_+ entwickelt werden:

$$\begin{aligned}
\Phi_+(u_{R+}) &= \frac{F_-(u_{R+})}{F_+(u_{R+})} \\
&= 1 + \frac{11 u_{R+}}{16 8\pi} + \frac{41}{256} \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{435937}{663552} - \frac{14719}{5184} \ln \frac{4}{3} + \frac{745}{32} a + \frac{3345}{2048} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_{R+}^4). \tag{7.27}
\end{aligned}$$

Diese Reihe wird im folgenden Kapitel mit Padé-Borel-Approximanten numerisch ausgewertet. Das Amplitudenverhältnis ist nun direkt durch Vorgabe des kritischen Exponenten ν gegeben.

$$\begin{aligned}
\frac{f_+}{f_-}(u_{R+}, \nu) &= (2\Phi_+(u_{R+}))^\nu \\
&= 2^\nu \left[1 + \frac{11\nu u_{R+}}{16 8\pi} + \frac{-39\nu + 121\nu^2}{512} \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad + \left(\frac{-437125\nu - 34749\nu^2 + 35937\nu^3}{663552} - \frac{14719\nu}{5184} \ln \frac{4}{3} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{745\nu}{32} a + \frac{3345\nu}{2048} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_{R+}^4) \right] \tag{7.28}
\end{aligned}$$

7.2.2 Reihen der Tieftemperaturkopplung

Um $\frac{f_+}{f_-}$ bzw. Φ_- am Tieftemperaturfixpunkt auszuwerten, bestimmen wir zuerst $u_{R+}(u_{R-})$ nach (7.21).

$$\begin{aligned}
u_{R+}(u_{R-}) &= u_+ \left[1 - \frac{3u_+}{28\pi} + \frac{883}{324} \left(\frac{u_+}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{19}{8} - \frac{373}{54} \ln \frac{4}{3} - \frac{128}{3} a - C^{Tet} \right) \left(\frac{u_+}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_+^4 \right) \right]_{u_+=u_-(u_{R-})} \\
&= u_{R-} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{u_{R-}}{8\pi} + \frac{1633}{2592} \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{872999}{165888} - \frac{30271}{1296} \ln \frac{4}{3} + \frac{7}{8} a + \frac{2337}{512} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_{R-}^4 \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Durch Einsetzen in (7.23) bekommen wir:

$$\begin{aligned}
F_+(u_{R-}) &= 1 - \frac{1}{2} \frac{u_{R-}}{8\pi} - \frac{1}{6} \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{43}{108} - \frac{71}{54} \ln \frac{4}{3} - \frac{16}{3} a \right) \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_{R-}^4 \right).
\end{aligned} \tag{7.30}$$

Mit dieser Reihe kann Φ_- entwickelt werden.

$$\begin{aligned}
\Phi_-(u_{R-}) &= \frac{F_-(u_{R-})}{F_+(u_{R-})} \\
&= 1 + \frac{11}{16} \frac{u_{R-}}{8\pi} + \frac{85}{256} \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^2 \\
&\quad + \left(-\frac{95393}{663552} - \frac{14719}{5184} \ln \frac{4}{3} + \frac{745}{32} a + \frac{3345}{2048} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_{R-}^4 \right)
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Ebenso wie (7.27) wird diese Reihe im folgenden Kapitel mit Padé-Borel-Approximanten numerisch ausgewertet. Für das Amplitudenverhältnis ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{f_+}{f_-}(u_{R-}, \nu) &= (2\Phi_-(u_{R-}))^\nu \\
&= 2^\nu \left[1 + \frac{11\nu}{16} \frac{u_{R-}}{8\pi} + \frac{49\nu + 121\nu^2}{512} \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^2 \right. \\
&\quad + \left(\frac{-174989\nu + 43659\nu^2 + 35937\nu^3}{663552} - \frac{14719}{5184} \ln \frac{4}{3} \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{745\nu}{32} a + \frac{3345\nu}{2048} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_{R-}^4 \right) \right].
\end{aligned} \tag{7.32}$$

7.3 Numerische Ergebnisse

Die numerische Auswertung der Reihen führe ich im folgenden für die Hoch- und Tieftemperaturkopplung durch. Dabei wird jeweils die Bestimmung der Größe Φ_{\pm} im Vordergrund stehen. Um die Reihen auszuwerten, verwende ich Padé-Approximanten sowie das Padé-Borel-Verfahren, das in Anhang B beschrieben ist. Ein $[k, l]$ -Padé bezeichnet dabei eine Approximation durch eine gebrochenrationale Funktion, deren Zählerpolynom den Grad k und der Nenner den Grad l hat.

Für den kritischen Exponenten ν , der in (6.46) und (6.64) als Reihe gegeben ist, werden neben diesen Werten auch Literaturwerte eingesetzt. Die Fixpunktwerte der Hoch- und Tieftemperaturkopplung sind der Literatur entnommen. Die Nullstellen der β_{\pm} -Funktion (6.44, 6.62) haben eine große Varianz und erscheinen dadurch zur Bestimmung des Amplitudenverhältnisses untauglich (siehe [GUT95]).

7.3.1 Hochtemperaturfixpunkt

In der Hochtemperaturphase haben wir die Fixpunktwerte

$$\begin{aligned} u_{R+}^* &= 23.73(8) && \text{[GZJ80, ZJ82] Renormierungsgruppe in 3-D} \\ u_{R+}^* &= 24.56(10) && \text{[SIE93] Hochtemperatur-Entwicklung} \end{aligned}, \quad (7.33)$$

an denen (7.27) berechnet wird.

Zuerst wird die Reihe direkt durch Padé-Approximanten ausgewertet (Tabelle 7.1). Wie insbesondere an den Werten der $[1,2]$ -Padé zu erkennen ist, haben wir hier ein sehr schlechtes Konvergenzverhalten.

Fixpunkt u_{R+}^*	$\Phi_+(u_{R+}^*)$			
	$[3,0]$ -Padé	$[2,1]$ -Padé	$[1,2]$ -Padé	$[0,3]$ -Padé
23.73	1.4266	1.6892	0.0190	1.1031
24.56	1.4198	1.7138	-0.1021	1.0709

Tabelle 7.1: Φ_+ in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u_{R+}^* .

Fixpunkt u_{R+}^*	Borel-Transformierte von $\Phi_+(u_{R+}^*)$			
	$[3,0]$ -Padé	$[2,1]$ -Padé	$[1,2]$ -Padé	$[0,3]$ -Padé
23.73	1.4266	1.6962	1.4424	1.3688
24.56	1.4198	1.7212	1.4472	1.3579

Tabelle 7.2: Padé-Borel-Approximante von Φ_+ am Fixpunktwert u_{R+}^* .

Durch Anwendung des Padé-Borel-Verfahrens lassen sich bessere Werte erzielen. Die inverse Borel-Transformation wird als numerische Integration durchgeführt. Die Werte der $[0,3]$ -Padé aus Tabelle 7.2 sind durch Partialbruchzerlegung und Berechnen des Hauptwertintegrals über die Polstelle bestimmt.

Nun wird noch aus den oben bestimmten Werten das Amplitudenverhältnis nach (7.14) berechnet. Dabei beziehen sich die Tabellen 7.3 und 7.4 auf die Φ_+ -Werte aus Tabelle 7.1. Für den kritischen Exponenten setze ich folgende Werte ein.

$$\begin{aligned}
 \nu = 0.624(2) & \quad [\text{BGHP92}] \text{ Monte-Carlo Renormierungsgruppe} \\
 \nu = 0.627(9) & \quad [\text{DEC85}] \text{ Tieftemperaturentwicklung} \\
 \nu = 0.6300(15) & \quad [\text{GZJ80, ZJ82}] \text{ Renormierungsgruppe in 3-D}
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

ν	Amplitudenverhältnis $\frac{f_+}{f_-}(u_{R+}^* = 23.73, \nu)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
0.624	1.9237	2.1376	0.1298	1.6384
0.627	1.9297	2.1454	0.1285	1.6423
0.630	1.9358	2.1533	0.1272	1.6462

Tabelle 7.3: Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge unter Vorgabe von ν am Fixpunktwert $u_{R+}^* = 23.73$

ν	Amplitudenverhältnis $\frac{f_+}{f_-}(u_{R+}^* = 24.56, \nu)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
0.624	1.9179	2.1569	/	1.6084
0.627	1.9240	2.1649	/	1.6121
0.630	1.9300	2.1729	/	1.6158

Tabelle 7.4: Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge unter Vorgabe von ν am Fixpunktwert $u_{R+}^* = 24.56$

Die $[1,2]$ -Padé lassen sich für den Fixpunkt $u_{R+}^* = 24.56$ nicht berechnen, da $\Phi_+(24.56) < 0$ ist.

Aus den Daten der Padé-Borel-Transformierten $\overline{\Phi}_+$ -Funktion (Tabelle 7.2) bekomme ich die Werte der Tabelle 7.5. Die $[3,0]$ -Padé stimmen mit den ersten Spalten der Tabellen 7.3 und 7.4 überein, da die Padé-Approximante mit dem ursprünglichem Polynom übereinstimmt, und somit die Borel-Transformation keinen Einfluß hat.

ν	Amplitudenverhältnis $\frac{f_+}{f_-}(u_{R+}^*, \nu)$ Padé-Borel-Verfahren			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u_{R+}^* = 23.73$			
0.624	1.9237	2.1431	1.9369	1.8746
0.627	1.9297	2.1509	1.9430	1.8803
0.630	1.9358	2.1588	1.9492	1.8860
	$u_{R+}^* = 24.56$			
0.624	1.9179	2.1627	1.9410	1.8653
0.627	1.9240	2.1708	1.9472	1.8709
0.630	1.9300	2.1788	1.9534	1.8765

Tabelle 7.5: Amplitudenverhältnis berechnet nach dem Padé-Borel-Verfahren

Das Amplitudenverhältnis läßt sich ohne Vorgabe von ν durch Einsetzen von (6.46) in (7.14) bestimmen. Diese Werte sind in Tabelle 7.6 aufgeführt.

Fixpunkt u_{R+}^*	Amplitudenverhältnis $\frac{f_+}{f_-}(u_{R+}^*)$ direkte Bestimmung			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
23.73	2.0018	2.0790	2.4546	1.8081
24.56	2.0168	2.1039	2.5183	1.7973

Tabelle 7.6: Amplitudenverhältnis nur in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u_{R+}^* .

7.3.2 Tieftemperaturfixpunkt

In der Phase gebrochener Symmetrie wird (7.31) an den Fixpunkten

$$\begin{aligned}
 u_{R-}^* &= 14.73(14) && [\text{SIE93}] \text{ Tieftemperaturentwicklung} \\
 u_{R-}^* &= 15.1(1.3) && [\text{HEI93}]
 \end{aligned}
 \tag{7.35}$$

ausgewertet.

In Tabelle 7.7 sind die Ergebnisse der Padé-Approximanten aufgelistet. Tabelle 7.8 führt die mit dem Padé-Borel-Verfahren bestimmten Werte auf. Aus den Werten der Tabelle 7.7 berechnet sich das Amplitudenverhältnis wie in 7.9 aufgelistet. Die Werte in Tabelle 7.10 sind mit Padé-Borel-Verfahren bestimmt. Tabelle 7.11 listet die Werte der direkten Bestimmung des Amplitudenverhältnisses auf.

Fixpunkt u_{R-}^*	$\Phi_-(u_{R-}^*)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
14.73	1.5330	1.5355	1.5178	1.5246
15.1	1.5501	1.5530	1.5330	1.5407

Tabelle 7.7: Φ_- in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u_{R-}^* .

Fixpunkt u_{R-}^*	Borel-Transformierte von $\Phi_-(u_{R-}^*)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
14.73	1.5330	1.5369	1.4973	1.4645
15.1	1.5501	1.5545	1.5107	1.4680

Tabelle 7.8: Padé-Borel-Approximante von Φ_- am Fixpunktwert u_{R-}^* .

In Abbildung 7.1 ist Φ_- als Funktion der renormierten Kopplung aufgetragen. Dabei sind als Linien von oben nach unten der [2,1]-Padé, [3,0]-Padé, [0,3]-Padé und [1,2]-Padé aufgetragen. Die beiden Fehlerbalken stehen an den Stellen der eingesetzten Fixpunktwerte. Abbildung 7.2 zeigt dieselbe Funktion, allerdings nach Anwendung des Padé-Borel-Verfahrens. Von oben nach unten sind es der [2,1], [3,0], [1,2] und [0,3]-Padé. Die Kurven haben eine deutlich höhere Streuung. Daraus folgt, daß dieses Verfahren hier nicht angemessen ist, da es keine besseren Ergebnisse liefert.

ν	Amplitudenverhältnis $\frac{f_+}{f_-}(u_{R-}^*, \nu)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u_{R-}^* = 14.73$			
0.624	2.0119	2.0140	1.9995	2.0051
0.627	2.0187	2.0208	2.0062	2.0118
0.630	2.0255	2.0277	2.0129	2.0186
	$u_{R-}^* = 15.1$			
0.624	2.0259	2.0283	2.0120	2.0183
0.627	2.0328	2.0352	2.0187	2.0251
0.630	2.0397	2.0421	2.0255	2.0319

Tabelle 7.9: Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge unter Vorgabe von ν am Fixpunktwert u_{R-}^* .

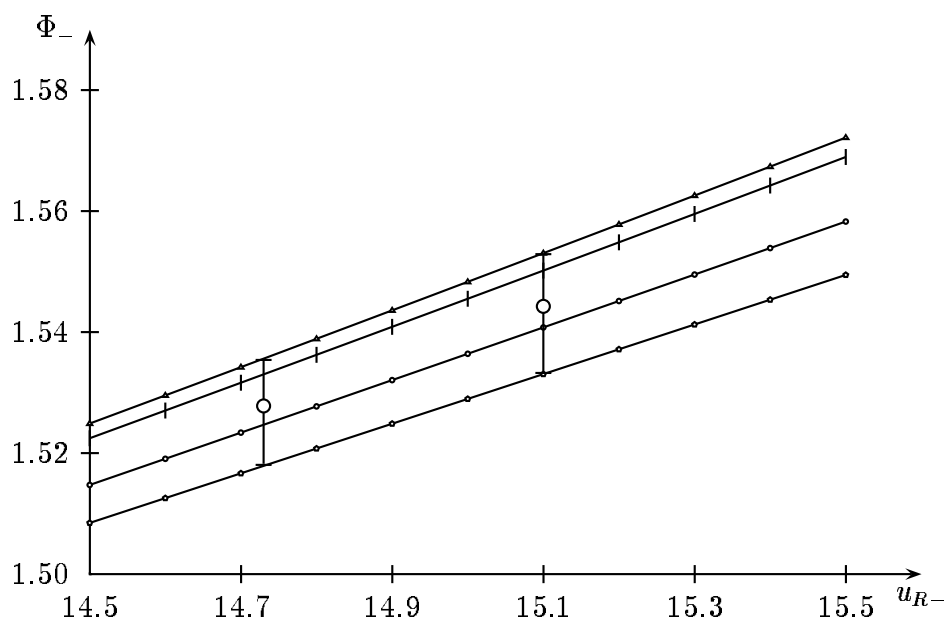


Abbildung 7.1: Φ_- gegen u_{R-} aufgetragen

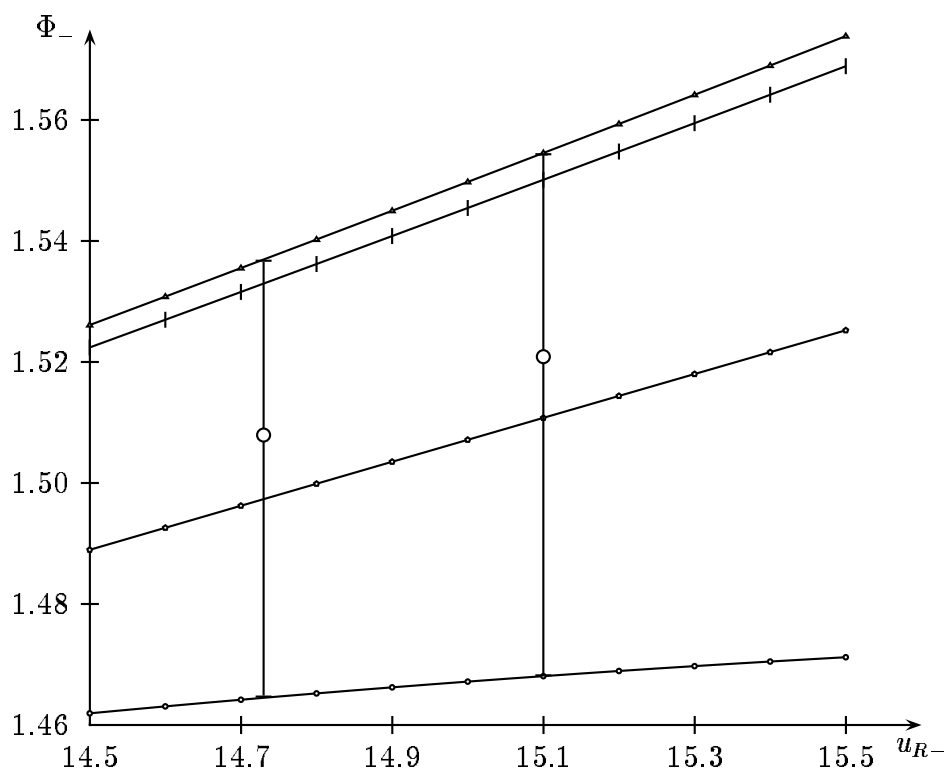


Abbildung 7.2: $\Phi_-(u_{R-})$ nach Padé-Borel-Verfahren

ν	Amplitudenverhältnis $\frac{f_+}{f_-}(u_{R-}^*, \nu)$ Padé-Borel-Verfahren			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u_{R-}^* = 14.73$			
0.624	2.0119	2.0152	1.9826	1.9554
0.627	2.0187	2.0220	1.9891	1.9617
0.630	2.0255	2.0288	1.9957	1.9680
	$u_{R-}^* = 15.1$			
0.624	2.0259	2.0295	1.9937	1.9583
0.627	2.0328	2.0365	2.0003	1.9647
0.630	2.0397	2.0434	2.0070	1.9710

Tabelle 7.10: Amplitudenverhältnis berechnet nach Padé-Borel-Verfahren

Fixpunkt u_{R-}^*	Amplitudenverhältnis $\frac{f_+}{f_-}(u_{R-}^*)$ direkte Bestimmung			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
14.73	1.8975	2.2232	2.6024	1.9649
15.1	1.9177	2.3115	2.8804	1.9940

Tabelle 7.11: Amplitudenverhältnis nur in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u_{R-}^* .

7.4 Diskussion

Um die Ergebnisse der Rechnungen auszuwerten, wurde jeweils über die vier Padé-Approximanten gemittelt und der Maximalfehler bestimmt. Dabei kommen die Werte der folgenden Tabelle 7.12 heraus. Bei der Mittelung über die Padé-Approximan-

Φ_{\pm}	Hochtemperaturfixpunkt	Tiefemperaturfixpunkt
Padé-Approximanten	1.40(33)	1.536(18)
Padé-Borel Verfahren	1.49(24)	1.514(50)

Tabelle 7.12: Gemittelte Werte von Φ_{\pm}

ten der Hochtemperaturkopplung wurde der Wert der [1,2]-Padé weggelassen, da er weit außerhalb der möglichen Lösung liegt.

Am Tieftemperaturfixpunkt ist der Spielraum der Werte ungefähr um einen Fak-

tor zehn geringer als am Hochtemperaturfixpunkt. Beim Hochtemperaturfixpunkt bringt die Verwendung von Borel-Transformierten eine deutliche Verringerung des relativen Fehlers auf ca. 16%.

Dagegen bringt das Padé-Borel-Verfahren in der Tieftemperaturphase keine bessere Konvergenz. Insgesamt ist der Fehler zwar deutlich kleiner als in der Hochtemperaturphase, aber ohne Borel-Transformation ist die Varianz noch geringer.

Um diese Ergebnisse mit Literaturwerten zu vergleichen, betrachte ich direkt das Amplitudenverhältnis. Dieses wird durch Potenzierung mit dem kritischen Exponenten ν aus Φ_{\pm} gewonnen. Dabei ist ν einmal durch die Literaturwerte aus (7.34) gegeben. Die zweite Möglichkeit ist die Bestimmung über (6.46, 6.64), wie sie in [GUT95] ausführlich dargestellt wird.

$\frac{f_+}{f_-}$	Hochtemperaturfixpunkt	Tieftemperaturfixpunkt
Padé-Approximanten	1.90(29)	2.021(22)
Padé-Borel-Verfahren	1.98(20)	2.003(48)
Direkte Bestimmung	2.10(42)	2.22(66)

Tabelle 7.13: Gemittelte Werte des Amplitudenverhältnisses der Korrelationslänge

Die Werte der direkten Bestimmung des Amplitudenverhältnisses haben an beiden Fixpunkten die größten Fehler. Dies läßt sich auf die ungenauen Werte des kritischen Exponenten ν zurückführen (siehe [GUT95]). Abgesehen von diesem Wert hat, wie schon bei der Funktion Φ_{\pm} , das Ergebnis am Tieftemperaturfixpunkt einen ungefähr zehnmal geringeren Fehler. Bei beiden Bestimmungsverfahren (ohne bzw. mit Borel-Transformation) ist der relative Fehler sehr klein, nämlich bei einem bzw. knapp über zwei Prozent.

Zum Vergleich mit den hier erzielten Ergebnissen seien hier die folgenden Literaturwerte angegeben.

$$\frac{f_+}{f_-} = \left\{ \begin{array}{ll} 1.91 & \text{[BGZJ74] } \epsilon\text{-Entwicklung} \\ 1.96(3), 1.96(1), 1.94(3) & \text{[LF89, SIE93]} \\ & \text{Hoch-/Tieftemperatur-Entwicklung} \\ 2.06(1) & \text{[RZW94] Monte-Carlo} \\ 2.05(22), 2.22(5), 1.9(2) & \text{[KKG83] Experimentell: Binäre Fluide} \\ 2.03(4), 2.18(12) & \text{[HEI93, MH94] 2-Loop-Berechnung} \end{array} \right. \quad (7.36)$$

Die gemittelten Werte aus Tabelle 7.13 liegen in beiden Phasen mit ihren Fehlern im Spektrum der Literaturwerte.

Im Vergleich mit den Ergebnissen aus [MH94] fällt auf, daß sich die numerischen Werte in der Tieftemperaturkopplung kaum unterscheiden, während am Hochtemperaturfixpunkt zwei sehr unterschiedliche Werte bestimmt werden.

Zur Abschätzung der Korrekturen, die die einzelnen Ordnungen beitragen, sind in der folgenden Gleichung die numerischen Werte der Koeffizienten aufgeführt.

$$\begin{aligned}\Phi_+ &= 1 + 2.74 \cdot 10^{-2} u_{R+} + 2.54 \cdot 10^{-4} u_{R+}^2 - 2.73 \cdot 10^{-5} u_{R+}^3 + \mathcal{O}(u_{R+}^4) \\ \Phi_- &= 1 + 2.74 \cdot 10^{-2} u_{R-} + 5.26 \cdot 10^{-4} u_{R-}^2 + 4.99 \cdot 10^{-6} u_{R-}^3 + \mathcal{O}(u_{R-}^4)\end{aligned}\tag{7.37}$$

Wenn typische Fixpunktwerte eingesetzt werden ($u_{R+}^* \approx 24$, $u_{R-}^* \approx 15$), tragen die einzelnen Koeffizienten wie folgt bei:

$$\begin{aligned}\Phi_+ &= 1 \quad +0.657 \quad +0.146 \quad -0.378 \\ \Phi_- &= 1 \quad +0.410 \quad +0.118 \quad +0.017\end{aligned}\tag{7.38}$$

Das heißt, daß die dritte Ordnung in der Hochtemperaturkopplung eine Korrektur von 21% der niedrigeren Terme liefert, während der Beitrag in der Tieftemperaturkopplung nur knapp über einem Prozent liegt. Mit der kleinen Korrektur in der Tieftemperaturkopplung scheint diese Reihe eine deutlich bessere Konvergenz aufzuweisen, als die Reihe der Hochtemperaturkopplung, wo der Betrag des Termes dritter Ordnung mehr als doppelt so groß ist wie der Term zweiter Ordnung.

Wegen des geringen Fehlers und der nur kleinen Korrektur in dritter Ordnung gebe ich als sicherstes Ergebnis für das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge die Mittelung über die Padé-Approximanten am Tieftemperaturfixpunkt an:

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-} = 2.021(22)}\tag{7.39}$$

Kapitel 8

Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität

Das im Kapitel 7 verwendete Verfahren zur Bestimmung des Amplitudenverhältnisses der Korrelationslänge läßt sich auch auf andere universelle Amplitudenverhältnisse übertragen, wie das der Suszeptibilität. Im Aufbau dieses Kapitels folge ich dem vorangegangenen, wobei ich nur die zusätzlichen Gleichungen aufführe.

8.1 Die Bestimmungsgleichung

Das Divergenzverhalten der Suszeptibilität bei Annäherung an die kritische Temperatur T_c ist nach (1.16b) durch

$$\chi_{\pm} \sim C_{\pm} |t|^{-\gamma} \quad (8.1)$$

gegeben. Auch hier verwenden wir die reduzierte Temperatur t sowie $t_{\pm} = |t|$. Aus (1.6) folgt die Beziehung von χ zur 2-Punkt-Funktion.

$$\frac{1}{\chi_{\pm}} = -\Gamma_0^{(2,0)}(0; m_0, g_0) \stackrel{(6.10)}{=} -\frac{1}{Z_{3\pm}(u_{R\pm})} \Gamma_R^{(2,0)}(0; m_R, g_R) = \frac{m_{R\pm}^2}{Z_{3\pm}(u_{R\pm})} \quad (8.2)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (8.2) haben wir die Renormierungsbedingungen verwertet. Mit Gleichung (8.1) ergibt sich

$$C_{\pm} t_{\pm}^{-\gamma} = \frac{Z_{3\pm}(u_{R\pm})}{m_{R\pm}^2}, \quad (8.3)$$

und durch Bildung des Quotienten folgt

$$\frac{C_+}{C_-} = \frac{m_{R-}^2 Z_{3+}(u_{R+})}{m_{R+}^2 Z_{3-}(u_{R-})} \left(\frac{t_+}{t_-} \right)^{\gamma}. \quad (8.4)$$

Nun setzen wir wiederum $m_{R+} = m_{R-}$ und verwenden (7.13).

$$\frac{C_+}{C_-} = \frac{Z_{3+}(u_{R+})}{Z_{3-}(u_{R-})} [2\Phi(u_{R+}, u_{R-})]^{\gamma} \quad (8.5)$$

Diese Bestimmungsgleichung wird im folgenden an den beiden Fixpunkten ausgewertet.

8.2 Berechnung der Reihen

Zunächst entwickle ich den kritischen Exponenten in beiden Phasen nach dem Skalengesetz (1.19c):

$$\gamma_{\pm}(u_{R\pm}) = \nu_{\pm}(u_{R\pm})(2 - \eta_{3\pm}(u_{R\pm})) \quad (8.6)$$

Mit den entsprechenden Reihen aus Kapitel 6.3 lautet diese Gleichung:

$$\begin{aligned} \gamma_+(u_{R+}) &= 1 + \frac{1}{4} \frac{u_{R+}}{8\pi} - \frac{1}{48} \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{901}{1728} + \frac{7}{4} \ln \frac{4}{3} + 6a \right) \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_{R+}^4) \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} \gamma_-(u_{R-}) &= 1 - \frac{1}{8} \frac{u_{R-}}{8\pi} + \frac{169}{384} \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{96577}{110592} + \frac{5}{8} \ln \frac{4}{3} - \frac{255}{16} a - \frac{81}{128} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_{R-}^4) \end{aligned} \quad (8.8)$$

8.2.1 Reihen der Hochtemperaturkopplung

In (8.5) brauchen wir neben Φ , das wir schon in (7.27) bzw. (7.31) als Reihe in einer Kopplung bestimmt haben, noch Z_{3-} als Funktion von u_{R+} . Dies erhalten wir durch Einsetzen von (7.25) in (6.58).

$$\begin{aligned} Z_{3-}(u_{R+}) &= 1 - \frac{1}{8} \frac{u_{R+}}{8\pi} - \frac{1369}{10368} \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^2 \\ &\quad + \left(-\frac{134143}{110592} + \frac{19375}{2592} \ln \frac{4}{3} - \frac{703}{48} a - \frac{2481}{1024} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_{R+}^4) \end{aligned} \quad (8.9)$$

Damit kann nun die Bestimmungsgleichung in der Hochtemperaturkopplung berechnet werden.

$$\begin{aligned} \frac{C_+}{C_-}(u_{R+}, \gamma) &= \frac{Z_{3+}(u_{R+})}{Z_{3-}(u_{R+})} (2\Phi_+(u_{R+}))^\gamma \\ &= 2^\gamma \left[1 + \frac{2 + 11\gamma}{16} \frac{u_{R+}}{8\pi} + \frac{5612 + 405\gamma + 9801\gamma^2}{41472} \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^2 \right. \\ &\quad + \left(\frac{234718 - 127237\gamma - 5049\gamma^2 + 11979\gamma^3}{221184} - \frac{37214 + 14719\gamma}{5184} \ln \frac{4}{3} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{554 + 745\gamma}{32} a + \frac{4962 + 3345\gamma}{2048} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R+}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O}(u_{R+}^4) \right] \end{aligned} \quad (8.10)$$

8.2.2 Reihen der Tieftemperaturkopplung

In der Tieftemperaturphase muß noch Z_{3+} in Abhängigkeit von u_{R-} berechnet werden.

$$Z_{3+}(u_{R-}) = 1 - \frac{1}{81} \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^2 + \left(-\frac{5}{27} + \frac{8}{27} \ln \frac{4}{3} + \frac{8}{3} a \right) \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_{R-}^4 \right) \quad (8.11)$$

Die Bestimmungsgleichung wird damit zu

$$\begin{aligned} \frac{C_+}{C_-}(u_{R-}, \gamma) &= \frac{Z_{3+}(u_{R-})}{Z_{3-}(u_{R-})} (2\Phi_-(u_{R-}))^\gamma \\ &= 2^\gamma \left[1 + \frac{2 + 11\gamma}{16} \frac{u_{R-}}{8\pi} + \frac{6908 + 7533\gamma + 9801\gamma^2}{41472} \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^2 \right. \\ &\quad + \left(\frac{801306 - 91063\gamma + 63261\gamma^2 + 35937\gamma^3}{663552} - \frac{37214 + 14719\gamma}{5184} \ln \frac{4}{3} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{554 + 745\gamma}{32} a + \frac{4962 + 3345\gamma}{2048} C^{Tet} \right) \left(\frac{u_{R-}}{8\pi} \right)^3 + \mathcal{O} \left(u_{R-}^4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

8.3 Numerische Ergebnisse

Die numerische Auswertung erfolgt wie in Kapitel 7.3 an Fixpunktwerten der Kopplung. Der kritische Exponent ist hier wiederum durch Literaturwerte gegeben.

8.3.1 Hochtemperaturfixpunkt

Die Reihe (8.10) wird an den Fixpunkten aus (7.33) und den folgenden Werten des kritischen Exponenten bestimmt.

$$\begin{aligned} \gamma &= 1.237(2) && \text{[BGHP92] Monte-Carlo Renormierungsgruppe} \\ \gamma &= 1.241(2) && \text{[GZJ80, ZJ82] Renormierungsgruppe in 3-D} \\ \gamma &= 1.250(1) && \text{[GG74] Hochtemperaturentwicklung} \end{aligned} \quad (8.13)$$

In der Tabelle 8.1 sind die numerischen Resultate aufgelistet. Die [1,2]-Padé haben mit ihren Werten um Null keine Aussagekraft. Diese Werte sind auf die entsprechenden Resultate in Tabelle 7.1 zurückzuführen und in der Mittelwertbildung weggelassen.

Tabelle 8.2 führt die Ergebnisse der Berechnung mittels Padé-Borel-Verfahren auf. Für die [1,2]-Padé kommen deutlich verbesserte Werte heraus, während die [0,3]-Padé immer noch sehr niedrig liegen. Als Vergleichswerte sind in Tabelle 8.3 noch die Resultate der Berechnung ohne Vorgabe von γ durch Einsetzen von (8.7) in (8.5) aufgeführt.

γ	Amplitudenverhältnis $\frac{C_+}{C_-}(u_{R+}^*, \gamma)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u_{R+}^* = 23.73$			
1.237	4.8263	5.1494	0.1895	2.7558
1.241	4.8496	5.1736	0.2242	2.7627
1.250	4.9024	5.2283	0.3002	2.7781
	$u_{R+}^* = 24.56$			
1.237	4.8946	5.2600	-0.0108	2.6405
1.241	4.9185	5.2849	0.02386	2.6467
1.250	4.9728	5.3413	0.09983	2.6608

Tabelle 8.1: Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität unter Vorgabe von γ am Fixpunktwert u_{R+}^*

γ	Amplitudenverhältnis $\frac{C_+}{C_-}(u_{R+}^*, \gamma)$ Padé-Borel-Verfahren			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u_{R+}^* = 23.73$			
1.237	4.8263	5.1823	4.0431	2.8523
1.241	4.8496	5.2066	4.0600	2.8530
1.250	4.9024	5.2617	4.0983	2.8546
	$u_{R+}^* = 24.56$			
1.237	4.8946	5.2961	4.0642	2.8013
1.241	4.9185	5.3212	4.0812	2.8017
1.250	4.9728	5.3780	4.1198	2.8027

Tabelle 8.2: Amplitudenverhältnis berechnet nach Padé-Borel-Verfahren

Fixpunkt u_{R+}^*	Amplitudenverhältnis $\frac{C_+}{C_-}(u_{R+}^*)$ direkte Bestimmung			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
23.73	5.0699	5.0706	-4.3129	2.9505
24.56	5.2199	5.2207	-4.1891	2.8484

Tabelle 8.3: Amplitudenverhältnis nur in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u_{R+}^* .

8.3.2 Tieftemperaturfixpunkt

Am Tieftemperaturfixpunkt (Werte wie in (7.35)) berechnen wir zuerst die Padé-Approximanten von (8.12), deren Ergebnisse in Tabelle 8.4 aufgelistet sind.

γ	Amplitudenverhältnis $\frac{C_+}{C_-}(u_{R-}^*, \gamma)$			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u_{R-}^* = 14.73$			
1.237	4.5421	4.6782	4.6099	4.6338
1.241	4.5621	4.6994	4.6305	4.6542
1.250	4.6074	4.7474	4.6772	4.7004
	$u_{R-}^* = 15.1$			
1.237	4.6246	4.7772	4.6987	4.7262
1.241	4.6451	4.7991	4.7199	4.7472
1.250	4.6916	4.8486	4.7679	4.7947

Tabelle 8.4: Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität unter Vorgabe von γ am Fixpunktwert u_{R-}^*

γ	Amplitudenverhältnis $\frac{C_+}{C_-}(u_{R-}^*, \gamma)$ Padé-Borel-Verfahren			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
	$u_{R-}^* = 14.73$			
1.237	4.5421	4.8711	4.2476	3.5078
1.241	4.5621	4.9438	4.2649	3.5138
1.250	4.6074	5.2323	4.3040	3.5275
	$u_{R-}^* = 15.1$			
1.237	4.6246	4.9190	4.2988	3.4947
1.241	4.6451	4.1182	4.3164	3.5005
1.250	4.6916	4.7441	4.3561	3.5135

Tabelle 8.5: Amplitudenverhältnis berechnet nach Padé-Borel-Verfahren

In Tabelle 8.5 sind die Padé-Borel-Resultate eingetragen. Hier hat, ebenso wie bei Φ_- (s. Abschnitt 7.3.2), die Borel-Transformation keinen ergebnisverbessernden

Einfluß, im Gegenteil wird die Varianz stark erhöht. Tabelle 8.6 listet die Resultate des Amplitudenverhältnisses der Suszeptibilität nur in Abhängigkeit der Fixpunkte u_{R-}^* auf.

Fixpunkt u_{R-}^*	Amplitudenverhältnis $\frac{C_+}{C_-}(u_{R-}^*)$ direkte Bestimmung			
	[3,0]-Padé	[2,1]-Padé	[1,2]-Padé	[0,3]-Padé
14.73	3.7832	6.0433	0.7329	4.6751
15.1	3.8632	6.7429	1.0872	4.9059

Tabelle 8.6: Amplitudenverhältnis nur in Abhängigkeit vom Fixpunktwert u_{R-}^* .

8.4 Diskussion

Aus den oben gewonnenen Resultaten bilde ich Mittelwerte über die Daten der einzelnen Bestimmungsmethoden. Dabei habe ich bei der direkten Bestimmung nur durch Vorgabe des Fixpunktwertes jeweils die Daten der [1,2]-Padé vernachlässigt, da sie teilweise negativ beziehungsweise weit außerhalb des physikalisch Sinnvollen liegen. Ebenso habe ich bei der Mittelung über die Daten der Tabelle 8.1 verfahren. Wie in Tabelle 7.13 sind die Werte der direkten Bestimmung sehr ungenau. Bei Be-

$\frac{C_+}{C_-}$	Hochtemperaturfixpunkt	Tiefemperaturfixpunkt
Padé-Approximanten	4.3(1.6)	4.69(16)
Padé-Borel-Verfahren	4.3(1.5)	4.31(93)
Direkte Bestimmung	4.4(1.5)	5.0(1.7)

Tabelle 8.7: Gemittelte Werte des Amplitudenverhältnisses der Suszeptibilität

stimmung des Amplitudenverhältnisses über das Padé-Borel-Verfahren ist der Wert am Tiefemperaturfixpunkt mit einem etwas geringeren Maximalfehler behaftet, jedoch ist der Unterschied längst nicht so groß wie beim Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge (vgl. Tab. 7.13). Am Hochtemperaturfixpunkt haben alle Mittelwerte einen Fehler, der größer als ein Drittel ist. Damit erscheint der Mittelwert über die Padé-Approximanten am Tiefemperaturfixpunkt als der einzige zuverlässige Wert. Er hat einen relativen Maximalfehler von ungefähr 3.4%.

Im Vergleich mit den Literaturwerten aus (8.14) fällt auf, daß die Mittelwerte fast durchgehend niedriger liegen. Nur der experimentelle Wert ist fast genauso groß

oder etwas unterhalb der hier bestimmten Mittelwerte.

$$\frac{C_+}{C_-} = \left\{ \begin{array}{ll} 4.81 & \text{[BGZJ74] } \epsilon\text{-Entwicklung} \\ 4.77(30) & \text{[ZJ89] Renormierungsgruppe in 3-D} \\ 5.03(5), 4.95(15), 4.82(5) & \text{[LF89, SIE93]} \\ & \text{Hoch-/Tiefemperatur-Entwicklung} \\ 4.3(3) & \text{Experimentell: Binäre Fluide} \\ 4.66(36), 6.03(1.05) & \text{[HEI93] 2-Loop-Berechnung} \end{array} \right. \quad (8.14)$$

Mit diesen Werten, die außer dem letzten auf anderen Bestimmungsmethoden beruhen, wird das oben Festgestellte untermauert und als Ergebnis gebe ich

$$\boxed{\frac{C_+}{C_-} = 4.69(16)} \quad (8.15)$$

an, den Mittelwert der Padé-Approximanten am Tieftemperaturfixpunkt.

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war neben der Berechnung der Amplitudenverhältnisse von Korrelationslänge und Suszeptibilität die Entwicklung eines Verfahrens zur Vereinfachung der Berechnung von Feynman-Graph-Entwicklungen in einer massiven skalaren Theorie. Dies geschah durch die Ersetzung *aller* Tadpole-Graphen, die an Propagatoren oder Vertices ansetzen, zum einen durch eine reduzierte Masse \tilde{m}_0 , wie sie in (3.32) bzw. (4.9) definiert ist, und zum anderen durch eine Dreipunkt-Kopplungskonstante \tilde{f}_0 (3.56). Letzteres galt natürlich nur für die Phase gebrochener Symmetrie, wo dieses Verfahren auch die größeren Rechenerleichterungen brachte. Die resultierenden Graphenanzahlen sind auf Seite 38 aufgeführt.

Mit diesem Verfahren ließen sich die notwendigen Vertex- und Green-Funktionen berechnen. Die Richtigkeit der Entwicklung konnte dabei durch den direkten Vergleich der Reihen für $\Gamma_0^{(2,0)}$, $\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_0^{(2,0)} \right|_{p^2=0}$ und $\Gamma_0^{(4,0)}$ in der symmetrischen Phase bzw. $\Gamma_0^{(2,0)}$, $\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_0^{(2,0)} \right|_{p^2=0}$ und $G_c^{(1,0)}$ in der Phase gebrochener Symmetrie mit den Ergebnissen von [GUT95] bestätigt werden, wo die vollständige Feynman-Graph-Entwicklung bis zur 3-Loop-Ordnung aufsummiert wurde.

Aus den Reihen ließen sich universelle Amplitudenverhältnisse bestimmen. Insbesondere am Tieftemperaturfixpunkt sind die resultierenden Werte sehr konsistent und weisen eine geringe Streuung auf. Für das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge ergab sich so (7.39)

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-} = 2.021(22)}$$

und für das Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität (8.15)

$$\boxed{\frac{C_+}{C_-} = 4.69(16)}$$

jeweils als Mittelwert der vier Padé-Approximanten am Tieftemperaturfixpunkt. Diese Werte haben fast den gleichen Betrag wie die entsprechenden Zwei-Loop-Rechnung. Der Fehler liegt sogar nur bei circa der Hälfte des Fehlers in der Zwei-Loop-Rechnung.

Anhang A

Integrale

A.1 1-Loop-Integrale

Die Integrale $J_n(D)$ berechnen sich nach folgendem Verfahren. Für eine ausführlichere Berechnung verweise ich auf [GUT95].

$$J_n(D) = \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m_0^2)^n} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}}{m_0=} \frac{m_0^{D-2n}}{(2\pi)^D} \int d^D \mathbf{k} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + 1)^n} \\ &= \frac{m_0^{D-2n}}{(2\pi)^D} \frac{2\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \int_0^\infty dk \frac{k^{D-1}}{(k^2 + 1)^n} \\ &= \frac{m_0^{D-2n}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} \frac{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \\ &\stackrel{D=3-\epsilon}{=} \frac{m_0^{3-2n}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{m_0^2}{4\pi} \right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \frac{\Gamma(n - \frac{3}{2} + \frac{\epsilon}{2})}{\Gamma(n)} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Die Γ -Funktion wird um $n - \frac{3}{2}$ entwickelt.

$$\Gamma\left(n - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\Psi\left(n - \frac{3}{2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \quad (\text{A.3})$$

Die Ψ -Funktion ist durch die Definition und Funktionalgleichung

$$\Psi(x) := \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) \quad \text{und} \quad \Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x} \quad (\text{A.4})$$

gegeben [GR81, 8.36].

$$\begin{aligned} J_n(3 - \epsilon) &= \frac{m_0^{3-2n}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n)} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{m_0^2}{4\pi} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\Psi\left(n - \frac{3}{2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &= \frac{m_0^{3-2n}}{(4\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(n)} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \left(\Psi\left(n - \frac{3}{2}\right) - \ln \frac{m_0^2}{4\pi}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Mit den Werten

$$\Psi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2 + 2 \quad \text{und} \quad \Psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2 \quad (\text{A.6})$$

erhalten wir J_n für $n = 1, 2$:

$$J_1(3 - \epsilon) = -\frac{m_0}{4\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \quad (\text{A.7})$$

$$J_2(3 - \epsilon) = \frac{1}{8\pi m_0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \quad (\text{A.8})$$

A.2 Ableitungen von 1-Loop-Integralen

Die Integrale I_n sind wie folgt definiert.

$$I_n(\mathbf{p}; D) = \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m_0^2)^n} \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2} \quad (\text{A.9})$$

Die Ableitung des Propagators berechnet sich nach

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Delta(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \right|_{\mathbf{p}^2=0} &= \left. \frac{1}{2D} \sum_{\mu=1}^D \frac{\partial^2}{\partial p_\mu^2} \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2} \right|_{\mathbf{p}^2=0} \\ &= \left. -\frac{1}{2D} \sum_{\mu=1}^D \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{2(\mathbf{k} + \mathbf{p})_\mu}{((\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2)^2} \right|_{\mathbf{p}^2=0} \\ &= \left. -\frac{1}{D} \sum_{\mu=1}^D \frac{((\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2) - 4(\mathbf{k} + \mathbf{p})_\mu^2}{((\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2)^3} \right|_{\mathbf{p}^2=0} \\ &= -\Delta^2(\mathbf{k}) + \frac{4}{D} \frac{\mathbf{k}^2}{(\mathbf{k}^2 + m_0^2)^3} \\ &= -\Delta^2(\mathbf{k}) + \frac{4}{D} \left(\Delta^2(\mathbf{k}) - m_0^2 \Delta^3(\mathbf{k})\right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Damit kann die Ableitung nach dem Impulsquadrat berechnet werden.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_n(\mathbf{p}; D) \right|_{\mathbf{p}^2=0} &= \int \frac{d^D \mathbf{k}}{(2\pi)^D} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m_0^2)^n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2} \Big|_{\mathbf{p}^2=0} \\ &\stackrel{(\text{A.10})}{=} -J_{n+2}(D) + \frac{4}{D} \left(J_{n+2}(D) - m_0^2 J_{n+3}(D)\right) \\ &\stackrel{D=3-\epsilon}{=} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \left(\Psi\left(n + \frac{1}{2}\right) - \ln \frac{m_0^2}{4\pi} + \frac{8}{3}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &\quad \frac{m_0^{-1-2n} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma(n+2)} \\ &\quad -\frac{4}{3} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \left(\Psi\left(n + \frac{3}{2}\right) - \ln \frac{m_0^2}{4\pi} + \frac{2}{3}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m_0^{-1-2n} \Gamma(n + \frac{3}{2})}{(4\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma(n + 3)} \\
= & -\frac{n}{n+2} \frac{1}{8\pi m_0^{1+2n} \sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 2)} \\
& \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \left(\Psi(n + \frac{1}{2}) - \ln \frac{m_0^2}{4\pi}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

Für I_1 ergibt sich damit:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; D) \right|_{\mathbf{p}^2=0} = -\frac{1}{12} \frac{1}{m_0^3 8\pi} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \left(\gamma + \ln \frac{m_0^2}{\pi} - 2\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right). \quad (\text{A.12})$$

Anhang B

Padé-Borel-Verfahren

Das Padé-Borel-Verfahren ist eine Methode, um die Konvergenz von Reihen zu verbessern. Dazu werden Padé-Approximanten der Borel-transformierten Reihe gebildet und zurücktransformiert.

B.1 Borel-Transformation

Die Borel-Transformierte einer Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (\text{B.1})$$

ist durch

$$B_f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n \quad (\text{B.2})$$

definiert. Mit der Integralform der Γ -Funktion

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} \quad (\text{B.3})$$

ist die Rücktransformation durch

$$f(z) = \int_0^{\infty} dt B_f(tz) e^{-t} \quad (\text{B.4})$$

gegeben.

B.2 Padé-Approximanten

Gebrochen rationale Approximanten einer Potenzreihe werden als Padé-Approximanten bezeichnet. Gegeben sei eine Reihe bis zur Ordnung n :

$$g_n(z) = \sum_{i=0}^n b_i z^i + \mathcal{O}(z^{n+1}) \quad (\text{B.5})$$

p_k und q_l seien Polynome k -ten bzw. l -ten Grades in z , die

$$g_n(z)q_l(z) = p_k(z) + \mathcal{O}(z^{k+l+1}) \quad , \quad k+l \leq n \quad (\text{B.6})$$

erfüllen. q_l hat nach Definition den führenden Term 1. Dann gilt

$$g_n(z) = \frac{p_k(z)}{q_l(z)} + \mathcal{O}(z^{k+l+1}) \quad , \quad (\text{B.7})$$

und der Quotient ist die $[k, l]$ -Padé-Approximante.

B.3 Padé-Borel

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir Reihen der Gestalt $\mathcal{F}(u_{R\pm})$ bis zu $\mathcal{O}(u_{R\pm}^3)$. Diese werden Borel-transformiert zu $B_{\mathcal{F}}(u_{R\pm})$, wovon die Padé-Approximanten bestimmt werden. Da $k+l \leq 3$ gelten muß, lassen sich vier Approximanten bilden, wobei der $[3,0]$ -Padé die Reihe selbst ist.

Diese Approximanten werden mit (B.4) rücktransformiert. Die Integration wird direkt numerisch ausgewertet. Falls das Nennerpolynom q_l eine positive reelle Nullstelle hat, muß das Hauptwertintegral gebildet werden.

$$\int_0^{\infty} dt \frac{a}{b-t} e^{-t} = -ae^{-b} \underbrace{\int_{-b}^{\infty} dt \frac{1}{t} e^{-t}}_{=: -\text{Ei}(b)} = ae^{-b} \text{Ei}(b) \quad , \quad b > 0 \quad (\text{B.8})$$

Dabei ist $\text{Ei}(x)$ das Exponentialintegral, das durch

$$\text{Ei}(x) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-x}^{-\epsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right] \quad , \quad x > 0 \quad (\text{B.9})$$

gegeben ist [GR81, 8.21].

Literaturverzeichnis

- [AM184] D.J. AMIT. *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*. World Scientific, Singapore, 2nd edition, 1984.
- [AS84] M. ABRAMOWITZ and A. STEGUN, editors. *Pocketbook of Mathematical Functions*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1st edition, 1984.
- [BB85] C. BAGNULS and C. BERVILLIER. Nonasymptotic critical behavior from field theory at $d = 3$; disordered-phase case. *Phys. Rev.* **B 32** (1985) 7209.
- [BDFN92] J.J. BINNEY, N.J. DOWRICK, A.J. FISHER, and M.E.J. NEWMAN. *The Theory of Critical Phenomena*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1992.
- [BEL91] M. LE BELLAC. *Quantum and Statistical Field Theory*. Oxford University Press, Oxford, 1st english edition, 1991.
- [BGHP92] C.F. BAILLIE, R. GUPTA, K.A. HAWICK, and G.S. PAWLEY. Monte carlo renormalization-group study of the three-dimensional Ising model. *Phys. Rev.* **B 45** (1992) 45.
- [BGZJ74] E. BRÉZIN, J.C. LE GUILLOU, and J. ZINN-JUSTIN. Universal ratios of critical amplitudes near four dimensions. *Phys. Lett.* **47 A** (1974) 285.
- [BGZJ76] E. BRÉZIN, J.C. LE GUILLOU, and J. ZINN-JUSTIN. Field theoretic approach to critical phenomena. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. DOMB and M.S. GREEN, volume 6. Academic Press, London, 1976.
- [BNM77] G.A. BAKER, JR., B.G. NICKEL, and D.I. MEIRON. Compilation of 2-pt. and 4-pt. graphs for continuous spin models. University of Guelph Report, 1977.
- [BS92] C. BERVILLIER and M. SHPOT. Universal amplitude combinations of the three-dimensional random Ising system. *Physical Review* **B 46**(2) (1992) 955.

- [CAL76] C.G. CALLAN. Renormalization. In *Les Houches, Session XXVIII, 1975 - Methods in Field Theory*, edited by R. BALIAN and J. ZINN-JUSTIN, Amsterdam, 1976. North-Holland.
- [CL84] TA-PEI CHENG and LING-FONG LI. *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1984.
- [CLP78] P. CVITANOVIĆ, B. LAUTRUP, and R. B. PEARSON. Number and weights of Feynman diagrams. *Physical Review D* **18** (1978) 1939.
- [COL84] J.C. COLLINS. *Renormalization*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1984.
- [CUI83] P. CVITANOVIĆ. *Field Theory*. Nordita, København, 1983.
- [DEC85] K. DECKER. Critical behaviour of the 3d-Ising-model from an extended low-temperature-expansion of the inverse correlation length. *Nucl. Phys. B* **257** (1985) 419.
- [DOM74] C. DOMB. Ising model. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. DOMB and M.S. GREEN, volume 3. Academic Press, London, 1974.
- [DYS49] F. J. DYSON. The radiation theories of Tomonga, Schwinger, and Feynman. *Phys. Rev.* **75** (1949) 486.
- [EK91] H. ECK and J. KÜBLBECK. *Generating Feynman Graphs and Amplitudes with FeynArts*. Physikalisches Institut, Würzburg, 1991.
- [GG74] D.S. GAUNT and A.J. GUTTMANN. Asymptotic analysis of coefficients. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. DOMB and M.S. GREEN, volume 3. Academic Press, London, 1974.
- [GJ87] J. GLIMM and A. JAFFE. *Quantum Physics*. Springer Verlag, New York, 2nd edition, 1987.
- [GR81] I. GRADSTEIN and I. RYSHIK. *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*, volume 1 and 2. Verlag Harri Deutsch, Thun, 5th edition, 1981.
- [GUT95] C. GUTSFELD. Das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge in 3-Loop-Ordnung im dreidimensionalen ϕ^4 -Modell. Diplomarbeit, Universität Münster, 1995.
- [GZJ80] J.C. LE GUILLOU and J. ZINN-JUSTIN. Critical exponents from field theory. *Phys. Rev. B* **21** (1980) 3976.
- [HEI93] J. HEITGER. Feldtheoretische Berechnung universeller Amplitudenverhältnisse in 2-Loop-Ordnung. Diplomarbeit, Universität Münster, 1993.

- [ID89] C. ITZYKSON and J.M. DROUFFE. *Statistical Field Theory*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1989.
- [IIM75] J. ILIOPOULOS, C. ITZYKSON, and A. MARTIN. Functional methods and perturbation theory. *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 165.
- [IZ80] C. ITZYKSON and J. B. ZUBER. *Quantum Field Theory*. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1st edition, 1980.
- [KBD90] J. KÜBLBECK, M. BÖHM, and A. DENNER. FeynArts — computer-algebraic generation of Feynman graphs and amplitudes. *Comp. Phys. Comm.* **60** (1990) 165.
- [KKG83] A. KUMAR, H.R. KRISHNAMURTHY, and E.S.R. GOPAL. Equilibrium critical phenomena in binary liquid mixtures. *Phys. Rep.* **98 C** (1983) 57.
- [LF89] A.J. LIU and M.E. FISHER. The three-dimensional Ising model revisited numerically. *Physica A* **156** (1989) 35.
- [LW87] M. LÜSCHER and P. WEISZ. Scaling laws and triviality bounds in the lattice ϕ^4 -theory; one-component model in the phase with spontaneous broken symmetry. *Nucl. Phys. B* **295** (1987) 65.
- [MH94] G. MÜNSTER and J. HEITGER. Field-theoretic calculation of the universal amplitude ratio of correlation lengths in 3d Ising systems. *Nuclear Physics B* **424** (1994) 582.
- [MM93] I. MONTVAY and G. MÜNSTER. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1993.
- [NOG] P. NOGUEIRA. *QGRAF Manual*.
- [NOG93] P. NOGUEIRA. Automatic Feynman graph generation. *Journal of Computational Physics* **105**(2) (1993) 279.
- [NOL91] W. NOLTING. *Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*. Verlag Zimmermann-Neufang, Ulmen, 1991.
- [OHL94] T. OHL. *feynMF: Drawing Feynman Diagrams with L^AT_EX and META-FONT*. Technische Hochschule Darmstadt, 1994.
- [PAR88] G. PARISI. *Statistical Field Theory*. Addison-Wesley, Redwood City, 1st edition, 1988.
- [RIV87] R. J. RIVERS. *Path integral methods in quantum field theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [RYD85] L.H. RYDER. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1985.

- [RZW94] C. RUGE, P. ZHU, and F. WAGNER. Correlation function in Ising Models. *hep-lat/9403009* (1994).
- [SIE93] E. SIEPMANN. Reihenanalysen für das 3-dimensionale Ising-Modell. Diplomarbeit, Universität Münster, 1993.
- [TAY76] J. C. TAYLOR. *Gauge Theories of Weak Interactions*. Cambridge University Press, 1976.
- [TV72] G. T'HOOFT and M. VELTMAN. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nucl. Phys. B* **44** (1972) 189.
- [WIL71] K. G. WILSON. Renormalization group and critical phenomena, II. phase-space cell analysis of critical behavior. *Physical Review B* **4** (1971) 3184.
- [WOL91] S. WOLFRAM. *Mathematica*. Addison-Wesley Publishing Co., Redwood City, California, 2nd edition, 1991.
- [YEO92] J.M. YEOMANS. *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1992.
- [ZAN93] T. VAN ZANDT. *PS Tricks: PostScript macros for Generic TeX. User's Guide*. Princeton University, Department of Economics, 1993.
- [ZJ82] J. ZINN-JUSTIN. Calculation of critical exponents from field theory. In *Phase Transitions, Cargèse 1980*, edited by M. LÉVY et al., New York, 1982. Plenum Press.
- [ZJ89] J. ZINN-JUSTIN. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1989.

Danksagungen

Zum Schluß möchte ich allen danken, die beim Zustandekommen der vorliegenden Arbeit mitgewirkt haben:

- Prof. Dr. G. Münster für die Aufgabenstellung und Betreuung der Arbeit.
- Meinem Zimmerkollegen und Kommilitonen C. Gutsfeld, der in alltäglicher Fleißarbeit viele Rechnungen durchführte und immer mit Fragen gelöchert werden konnte.
- V. Gräschus und C. Hamker für das Korrekturlesen.
- J. Heitger, der für Fragen, insbesondere zu seiner Arbeit, stets ein offenes Ohr hatte.
- Den Computerfreaks aus Raum 402, insbesondere B. Nottelmann, die auch meist einen Kaffee hatten.

Nicht zuletzt sei hier auch die gesamte Arbeitsgruppe, sowie die anderen Mitglieder des Instituts erwähnt, mit denen ich die letzten 22 Monate gut zusammengearbeitet habe.

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, im August 1995