

Peter Hoppe

Analytische Berechnung der Oberflächenspannung im  
dreidimensionalen  $\phi^4$ -Modell in 2-Loop-Ordnung

1997







## Theoretische Physik

Analytische Berechnung der Oberflächenspannung im  
dreidimensionalen  $\phi^4$ -Modell in 2-Loop-Ordnung

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich Physik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

vorgelegt von  
Peter Hoppe  
aus Rahden  
-1997-

Dekan: Prof. Dr. F.-K. Holtmeier  
Erster Gutachter: Prof. Dr. G. Münster  
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. M. Stingl  
Tag der mündlichen Prüfungen:  
Tag der Promotion:

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2 Energieaufspaltung in der <math>\phi^4</math>-Theorie</b>	<b>12</b>
2.1 Beitrag von 1-Kink-Konfigurationen . . . . .	14
2.2 Beitrag von Multi-Kink-Konfigurationen . . . . .	21
2.3 Formel für die Energieaufspaltung . . . . .	24
<b>3 Greensche Funktionen</b>	<b>28</b>
3.1 Greensche Funktion ohne Instantonhintergrundfeld . . . . .	28
3.2 Eigenschaften des Fluktuationsoperators . . . . .	29
3.2.1 Spektrum von $-\Delta^{(D-1)}$ . . . . .	30
3.2.2 Spektrum von $\tilde{M}$ . . . . .	30
3.2.3 Gesamtes Spektrum des Fluktuationsoperators . . . . .	35
3.3 Greensche Funktion mit Instantonhintergrundfeld . . . . .	36
3.3.1 Bestimmung der Greenschen Funktion mit Instantonhintergrundfeld	36
3.3.2 Analytischer Ausdruck für die Greensche Funktion . . . . .	39
<b>4 Berechnung des Determinantenverhältnisses</b>	<b>50</b>
4.1 Beitrag von $\zeta_1$ . . . . .	55
4.2 Beitrag von $\zeta_2$ . . . . .	57
4.3 Beitrag von $\zeta_3$ . . . . .	58
4.4 Ergebnis für das Determinantenverhältnis . . . . .	59
<b>5 Graphenberechnungen</b>	<b>60</b>
5.1 Rechenmethoden . . . . .	60
5.2 Graphen ohne Instantonhintergrundfeld . . . . .	63
5.2.1 Berechnung von Graph OIA =  . . . . .	64
5.2.2 Berechnung von Graph OIB =  . . . . .	68
5.2.3 Berechnung von Graph OIC =  . . . . .	73
5.3 Graphen mit Instantonhintergrundfeld . . . . .	82
5.3.1 Berechnung des Graphen IA =  . . . . .	83
5.3.2 Berechnung des Graphen IB =  . . . . .	89
5.3.3 Berechnung des Graphen IC =  . . . . .	110
5.3.4 Berechnung des Graphen ID =  . . . . .	147

<b>6 Renormierung</b>	<b>156</b>
6.1 Klassische Wirkung in renormierten Größen . . . . .	159
6.2 Determinantenverhältnis in renormierten Größen . . . . .	161
6.3 Ergebnisse der Graphenberechnungen in renormierten Größen . . . . .	161
6.4 Beseitigung der UV-Divergenzen und der Renormierungsskala $\mu_0$ . . . . .	162
6.5 Beseitigung der logarithmischen Terme . . . . .	163
6.6 Bestimmung der Oberflächenspannung . . . . .	163
<b>7 Resultate für universelle Amplitudenverhältnisse</b>	<b>166</b>
<b>8 Zusammenfassung</b>	<b>174</b>
<b>A Massendimensionen wichtiger Größen</b>	<b>178</b>
<b>B Integralberechnungen</b>	<b>180</b>
B.1 Fourier–Transformierte hyperbolischer Funktionen . . . . .	180
B.2 Fourier–Transformierte des tangens hyperbolicus . . . . .	183
B.3 Integrale über rationale und trigonometrische Funktionen . . . . .	186
B.4 Einige weitere Integrale . . . . .	187
<b>C Berechnung wichtiger Ausdrücke</b>	<b>190</b>
C.1 Berechnung von $D_2^{(0)}$ . . . . .	190
C.2 Berechnung von $Z_0$ . . . . .	192
C.3 Berechnung von $D_1$ . . . . .	194
C.4 Berechnung von $\mathcal{D}$ . . . . .	197
C.5 Bestimmung von $\mathcal{A}_1$ . . . . .	198
C.6 Bestimmung von $\mathcal{A}_2$ . . . . .	199
<b>D Bestimmung der Konstanten <math>Z_{\tilde{R}}</math></b>	<b>202</b>
<b>E Divergenzfreiheit der Terme IC4 und IC7</b>	<b>206</b>
<b>F Berechnung von numerischen Konstanten</b>	<b>210</b>
F.1 Bestimmung von $R_3$ . . . . .	210
F.2 Bestimmung von $T_0$ . . . . .	212
F.3 Bestimmung von $T_1$ . . . . .	212
F.4 Bestimmung von $T_2$ . . . . .	213
F.5 Bestimmung von $T_3$ . . . . .	214
F.6 Bestimmung von $V_1$ . . . . .	214
F.7 Bestimmung von $V_2$ . . . . .	216
F.8 Bestimmung von $U_1$ . . . . .	217
F.9 Bestimmung von $U_2$ . . . . .	217
F.10 Bestimmung von $Z_7$ . . . . .	218
F.11 Bestimmung von $Z_{82A}$ . . . . .	219
F.12 Bestimmung von $Z_{82B}$ . . . . .	221
F.13 Bestimmung von $Z_{82C}$ . . . . .	221
F.14 Bestimmung von $Z_{81aba}$ . . . . .	222

# Kapitel 1

## Einleitung

In vielen physikalischen Systemen existieren Grenzflächen, die verschiedene Phasen des Systems voneinander trennen. Beispielsweise bildet sich eine Grenzschicht aus bei einer Flüssigkeit, die sich im Gleichgewicht mit ihrem Dampf befindet, in einem System aus zwei Flüssigkeiten, die nicht vollständig mischen, und auch bei einem magnetischen System, in dem es verschiedene mögliche Magnetisierungen gibt, kann es zu Grenzschichtbildung kommen. Eine schematische Darstellung solcher Systeme gibt Abbildung 1.1. Die Phasen A und B sind durch einen mehr oder weniger ausgeprägten Übergangsbereich, in dem beide Phasen vorhanden sind, getrennt: die Grenzschicht. Erhöht man in einem solchen System die

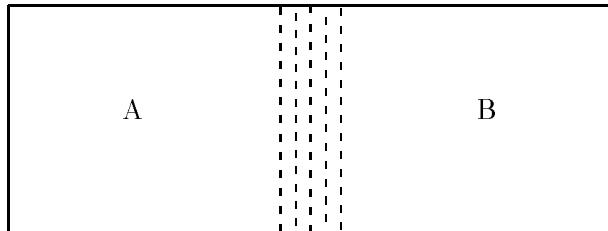


Abbildung 1.1: Die Phasen A und B eines physikalischen Systems sind durch eine Grenzschicht (gestrichelt dargestellt) getrennt.

Temperatur, wobei man sich, damit man weiter von einer Grenzschicht sprechen kann, entlang der Koexistenzkurve beider Phasen zu bewegen hat (z.B. Dampfdruckkurve im Falle des Flüssigkeit–Dampf–Systems), so wird die Dicke der Grenzschicht immer größer und die zugehörige Oberflächenspannung immer geringer werden. Erreicht man die kritische Temperatur  $T_c$ , so findet ein Phasenübergang zweiter Ordnung, ein sogenannter kontinuierlicher Phasenübergang statt [1]. Das bedeutet, daß oberhalb der kritischen Temperatur nur noch eine einheitliche Phase existiert und daß der Ordnungsparameter, im Falle des Flüssigkeit–Dampf–Systems beispielsweise die Differenz der Dichten von Flüssigkeit und Dampf, sich bei diesem Phasenübergang stetig ändert. Wichtig für diesen kritischen Phasenübergang ist insbesondere, daß Wechselwirkungen auf allen Längenskalen existieren, d.h. die Korrelationslänge, die die effektive Reichweite der Wechselwirkung innerhalb des Systems beschreibt, divergiert gegen Unendlich. Die Grenzschichtdicke  $w$  wird dann ebenfalls Unendlich, und die reduzierte Oberflächenspannung  $\sigma_\infty$  (Definition s.u.) wird Null; das ganze System ist quasi zur Grenzschicht geworden. In obigen Beispielen bedeutet das eine homogene Dampfphase, eine vollständige Mischung beider Flüssigkeiten bzw. eine einheitliche Magnetisierung.

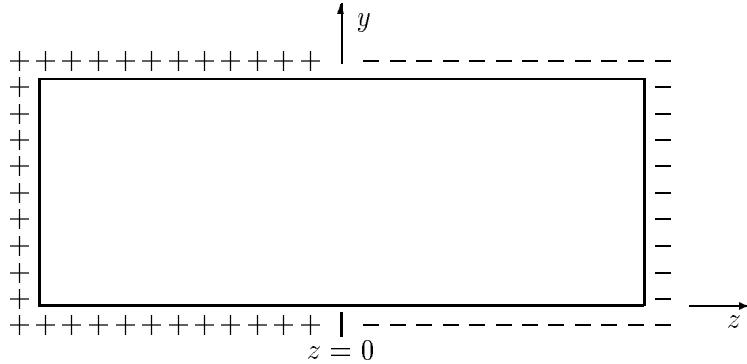


Abbildung 1.2: Randbedingungen, die eine Grenzfläche bei  $z = 0$  begünstigen ( $x$ -Richtung in Zeichenebene hinein).

Für die Grenzschichtdicke  $w$  sind verschiedene Definitionen gebräuchlich; für eine Möglichkeit vergleiche man [2, 3, 4].  $w$  wird in dieser Arbeit nicht weiter benötigt, so daß auf eine genaue Definition verzichtet wird.

$\sigma_\infty$  ist im wesentlichen die Differenz der freien Energien des Systems einmal mit und einmal ohne Grenzschicht. Am Beispiel des dreidimensionalen Ising-Modells läßt sich  $\sigma_\infty$  genauer wie folgt definieren [5]. Man fordert zunächst solche Randbedingungen, die auf dem Rand der linken Hälfte des Systems Spin up (+) und auf dem Rand der rechten Hälfte Spin down (-) festlegen (vgl. Abbildung 1.2), so daß sich in der Mitte bei  $z = 0$  eine Grenzfläche ausbilden wird. Die Zustandssumme und freie Energie eines solchen Systems seien  $Z_{+-}$  bzw.  $F_{+-}$ ; mit der Temperatur  $\mathcal{T}$  und  $k_B$  als der Boltzmann-Konstanten gilt der Zusammenhang

$$F_{+-} = -k_B \mathcal{T} \log Z_{+-}. \quad (1.1)$$

Entsprechend hat man  $Z_{++}$  und  $F_{++}$  für ein System mit durchgehend Spin up auf dem Rand als Bedingung (vgl. Abbildung 1.3), und dann gilt:

$$F_{++} = -k_B \mathcal{T} \log Z_{++}. \quad (1.2)$$

Bezeichnet man mit  $L$  die Ausdehnung des Systems in  $x$ - und  $y$ -Richtung, dann ist die Oberflächenspannung  $\tau$  im thermodynamischen Limes gegeben durch:

$$\begin{aligned} \tau &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{F_{+-} - F_{++}}{L^2} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{k_B \mathcal{T}}{L^2} \log \frac{Z_{+-}}{Z_{++}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Die reduzierte Oberflächenspannung  $\sigma_\infty$  wird jetzt durch

$$\sigma_\infty := \frac{\tau}{k_B \mathcal{T}} \quad (1.4)$$

definiert, so daß man

$$\sigma_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{L^2} \log \frac{Z_{+-}}{Z_{++}} \right\} \quad (1.5)$$

bekommt.

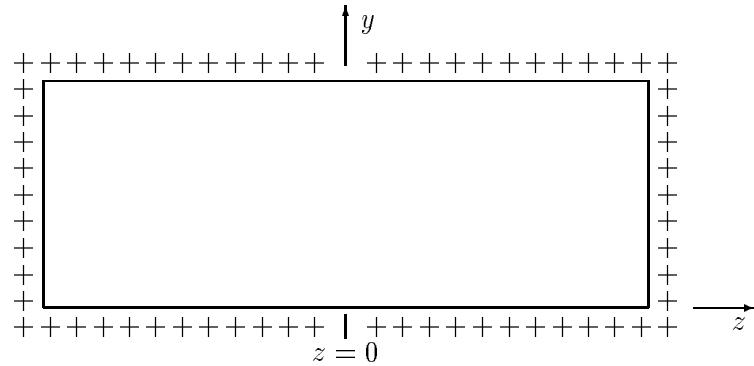


Abbildung 1.3: Randbedingungen, die die Bildung einer Grenzfläche nicht begünstigen ( $x$ -Richtung in Zeichenebene hinein).

Das kritische Verhalten von Systemen ohne Grenzfläche bei kontinuierlichen Phasenübergängen lässt sich durch eine ganze Reihe von sogenannten kritischen Exponenten und kritischen Amplituden wie folgt beschreiben [1]. Ohne Einschränkung sei dazu ein magnetisches System betrachtet;  $\mathcal{H}$  sei ein äußeres Magnetfeld. Führt man die reduzierte Temperatur  $t = \frac{T - T_c}{T_c}$  ein, so ist das führende, nicht analytische Verhalten in der Nähe des kritischen Punktes von spezifischer Wärme  $C_{\mathcal{H}}$ , Magnetisierung  $M$ , Suszeptibilität  $\chi_{\tau}$  und das Verhalten auf der kritischen Isothermen  $t = 0$  gegeben durch:

$$C_{\mathcal{H}} \sim \begin{cases} A_- (-t)^{-\alpha'}, & t < 0, \quad \mathcal{H} = 0 \\ A_+ t^{-\alpha}, & t > 0, \quad \mathcal{H} = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$M \sim M_0 (-t)^{\beta}, \quad t < 0, \quad \mathcal{H} = 0, \quad (1.7)$$

$$\chi_{\tau} \sim \begin{cases} C_- (-t)^{-\gamma'}, & t < 0, \quad \mathcal{H} = 0 \\ C_+ t^{-\gamma}, & t > 0, \quad \mathcal{H} = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\mathcal{H} \sim D_0 |M|^{\delta}, \quad t = 0. \quad (1.9)$$

Die Größen  $A_-$ , ...,  $D_0$  werden hier als kritische Amplituden bezeichnet, und  $\alpha'$ ,  $\alpha$ , ...,  $\delta$  sind kritische Exponenten. Mit Hilfe der Magnetisierungsdichte  $m(\vec{r})$ , der aus ihr gebildeten Korrelationsfunktion

$$\Gamma(\vec{r}) = \langle m(\vec{r}) m(\vec{0}) \rangle - \langle m(\vec{r}) \rangle \langle m(\vec{0}) \rangle \quad (1.10)$$

und deren kritischem Verhalten

$$\Gamma(\vec{r}) \sim r^{-p} e^{-\frac{r}{\xi}}, \quad r = |\vec{r}|, \quad \xi: \text{Korrelationslänge} \quad (1.11)$$

lassen sich weitere kritische Exponenten  $\nu'$ ,  $\nu$  und  $\eta$  definieren:

$$\xi = \begin{cases} \xi_- \sim \xi_0^- (-t)^{-\nu'}, & t < 0, \quad \mathcal{H} = 0 \\ \xi_+ \sim \xi_0^+ t^{-\nu}, & t > 0, \quad \mathcal{H} = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\Gamma(r) \sim r^{-p}, \quad t = 0, \quad p = D - 2 + \eta. \quad (1.13)$$

$D$  ist dabei die Raumdimension des Systems. Für weitere Exponenten vergleiche man [1]. Mit Hilfe der Skalenhypothese [6, 7, 8, 9, 10] ergeben sich folgende Skalenrelationen unter

den kritischen Exponenten [11, 1]:

$$\alpha = \alpha', \quad \gamma = \gamma', \quad \nu = \nu', \quad (1.14)$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta), \quad (1.15)$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2, \quad (1.16)$$

$$\gamma = \beta(\delta - 1) \quad (1.17)$$

und, unter zusätzlichen Annahmen die freie Energie betreffend [11], die Hyperskalenrelation

$$2 - \alpha = \nu D. \quad (1.18)$$

Das kritische Verhalten physikalischer Systeme wird nun in dem Sinne als universell angenommen (Universalitätshypothese [12]), daß die kritischen Exponenten unabhängig von den speziellen mikroskopischen Eigenschaften des Systems sind, sondern nur von folgenden Systemparametern abhängen:

1. Raumdimension  $D$ ,
2. Dimension  $n$  des Ordnungsparameters, z.B. Spindimensionalität in magnetischen Systemen,
3. Symmetrien des Systems.

Entsprechend diesen Kriterien werden physikalische Systeme in Universalitätsklassen eingeteilt, so daß die kritischen Exponenten innerhalb einer Klasse dieselben sein sollten.

Für die kritischen Amplituden  $A_-, A_+, C_-, C_+, \xi_0^+$  und  $\xi_0^-$  gilt eine solche Universalität nicht, aber man kann mit Hilfe der Renormierungsgruppe zeigen [13], daß diese Amplituden nur über zwei systemabhängige Größen  $X$  und  $Y$  von den speziellen Eigenschaften des Systems abhängen, so daß sich aus den obigen sechs Amplituden vier universelle Größen bilden lassen, vgl. auch [14]. Diese sind

$$\frac{A_+}{A_-}, \quad \frac{C_+}{C_-}, \quad \frac{\xi_0^+}{\xi_0^-} \quad \text{und} \quad R_\xi^+ := \xi_0^+ (A_+ \alpha)^{\frac{1}{D}}. \quad (1.19)$$

In [13] sind zwölf kritische Amplituden eingeführt, da über den kritischen Exponenten  $\delta$  hinaus noch das Verhalten weiterer Größen, wie beispielsweise der Suszeptibilität, auf der kritischen Isothermen betrachtet wird, so daß sich dort zehn universelle Größen aus den Amplituden ergeben.

Hat man nun wie oben beschrieben ein System mit Grenzfläche, so läßt sich das geschilderte kritische Verhalten, also divergierende Grenzschichtdicke und verschwindende Oberflächenspannung, durch zusätzliche kritische Exponenten und Amplituden beschreiben:

$$w \sim w_0 (-t)^{\nu_w}, \quad t < 0, \quad \text{auf Phasenkoexistenzkurve,} \quad (1.20)$$

$$\sigma_\infty \sim \sigma_0 (-t)^\mu, \quad t < 0 \quad \text{auf Phasenkoexistenzkurve.} \quad (1.21)$$

Für einen Überblick von kritischem Verhalten bei Systemen mit Oberflächen und Grenzflächen vergleiche man [15, 5].

Auch für die kritischen Exponenten  $\mu$  und  $\nu_w$  gibt es Skalenrelationen, insbesondere ([15, S. 67] oder [16, 5])

$$\begin{aligned} \mu &= 2 - \alpha - \nu \\ &= \gamma + 2\beta - \nu. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Mit der Hyperskalenrelation (1.18) wird das zu

$$\mu = (D - 1) \nu. \quad (1.23)$$

Ebenso gibt es unter Einbeziehung der kritischen Amplituden  $\sigma_0$  und  $w_0$  weitere universelle Amplitudenverhältnisse; speziell erwartet man [17], daß

$$R_- := \sigma_0 (\xi_0^-)^2 \quad (1.24)$$

und

$$R_+ := \sigma_0 (\xi_0^+)^2 \quad (1.25)$$

universell sind.

Die Größen  $R_-$  und  $R_+$  sind in einer Reihe von Arbeiten bestimmt worden, nämlich durch Monte–Carlo–Rechnungen im dreidimensionalen Ising–Modell [18, 4, 19, 20], mittels Monte–Carlo–Daten in Verbindung mit Reihenuntersuchungen in  $D = 3$  Dimensionen [21] sowie mit Hilfe einer feldtheoretischen Berechnung im  $\phi^4$ –Modell in  $D = 3$  und  $D = 4$  Dimensionen bis zur 1–Loop–Ordnung [22, 23].

Auch in dieser Arbeit sollen  $R_-$  und  $R_+$  bestimmt werden, und zwar für das euklidische  $\phi^4$ –Modell in drei Dimensionen in der Phase gebrochener Symmetrie, das zu derselben Universalitätsklasse wie das dreidimensionale Ising–Modell gehört. Es wird dazu die Oberflächenspannung<sup>1</sup>  $\sigma(L)$  bei endlicher Grenzfläche (endliches  $L$ , s.o.), die analog zu  $\sigma_\infty$  durch die Differenz der freien Energien bei verschiedenen Randbedingungen gegeben ist (Gl. (1.5) ohne Limesbildung), bis zur 2–Loop–Ordnung, d.h. bis einschließlich zur zweiten Korrektur des führenden Terms, betrachtet. Dabei wird eine Zylindergeometrie des Systems mit endlichen Raumausdehnungen  $L$  längs zweier Koordinatenachsen ( $x_1$ – und  $x_2$ –Koordinate) und unendlicher Ausdehnung längs der dritten Koordinatenachse ( $x_0$ , auch als Zeitkoordinate bezeichnet) zu Grunde gelegt; die Oberflächenspannung  $\sigma_\infty$  wird sich dann durch Grenzübergang  $\lim_{L \rightarrow \infty} \sigma(L)$  ergeben, und aus  $\sigma_\infty$  läßt sich  $R_-$  gewinnen.  $R_+$  bekommt man dann aus  $R_-$  durch

$$R_+ = \left( \frac{\xi_0^+}{\xi_0^-} \right)^2 R_-. \quad (1.26)$$

Wie schon angedeutet gibt es bereits Rechnungen bis zur 1–Loop–Ordnung von Münster in  $D = 4$  Dimensionen [22] und  $D = 3$  Dimensionen [23]. Die hier durchgeführte analytische Bestimmung dient neben der möglichst genauen Berechnung der universellen Größen  $R_-$  und  $R_+$  auch zum Test von verschiedenen numerischen Verfahren wie unterschiedlichen Monte–Carlo–Rechnungen, indem man deren Resultate mit den Ergebnissen aus der analytischen Rechnung vergleicht.

Die Oberflächenspannung  $\sigma(L)$  hängt mit der Energieaufspaltung in der  $\phi^4$ –Theorie, darunter ist die Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand zu verstehen, wie folgt zusammen:

Das Potential der betrachteten Theorie ist ein Doppelmuldenpotential (vgl. auch Abbildung 2.1 im nächsten Kapitel). Im unendlichen räumlichen Volumen, d.h. bei unendlichem  $L$ , ist der Grundzustand der  $\phi^4$ –Theorie in der Phase gebrochener Symmetrie zweifach entartet. Im endlichen räumlichen Volumen ist diese Entartung aufgrund von Tunnelübergängen von einem Potentialminimum zum anderen aufgehoben. Die Energieniveaus

---

<sup>1</sup>Von jetzt an ist mit Oberflächenspannung stets genauer die reduzierte Oberflächenspannung gemeint.

des dann eindeutigen Grundzustands und des ersten angeregten Zustands sind durch die Energieaufspaltung  $E_{0a}$  getrennt. Den Zusammenhang zwischen  $E_{0a}$  und der Korrelationslänge  $\xi_-$  der Theorie (Phase gebrochener Symmetrie = Tieftemperaturphase), die den Zerfall der Korrelationsfunktion

$$\langle \phi(x_0) \phi(0) \rangle - \langle \phi(x_0) \rangle \langle \phi(0) \rangle \quad (1.27)$$

für große  $x_0$  beschreibt, erhält man, da einerseits in der Operatorformulierung die Beziehung

$$\langle \phi(x_0) \phi(0) \rangle - \langle \phi(x_0) \rangle \langle \phi(0) \rangle \underset{x_0 \rightarrow \infty}{\sim} e^{-E_{0a} x_0} \quad (1.28)$$

besteht, andererseits in der Pfadintegralformulierung nach Definition der Korrelationslänge

$$\langle \phi(x_0) \phi(0) \rangle - \langle \phi(x_0) \rangle \langle \phi(0) \rangle \underset{x_0 \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\frac{x_0}{\xi_-}} \quad (1.29)$$

gilt. Daher ergibt sich

$$\xi_- = \frac{1}{E_{0a}}. \quad (1.30)$$

Für eine Herleitung dieses Zusammenhangs mittels Transfermatrixformalismus vergleiche man [24].

Die Korrelationslänge  $\xi_-$  hängt ihrerseits mit der Oberflächenspannung  $\sigma(L)$  aufgrund der Beziehung

$$\xi_- = A^{-1} e^{\sigma(L) L^2} \quad (1.31)$$

zusammen [25, 26, 27], so daß man mit Gl. (1.30) findet:

$$E_{0a} = A e^{-\sigma(L) L^2}. \quad (1.32)$$

Dies ist der angekündigte Zusammenhang zwischen Energieaufspaltung und Oberflächenspannung. Eine Plausibilitätsbegründung hierfür wird am Ende des folgenden Kapitels gegeben.

Durch Berechnung von  $E_{0a}$  läßt sich also  $\sigma(L)$  und damit durch Grenzübergang  $L \rightarrow \infty$  auch  $\sigma_\infty$  bestimmen; Gl. (1.32) ist die Grundlage der folgenden Rechnungen.

Für  $L \rightarrow \infty$  geht  $E_{0a}$  wie erwartet gegen 0 und die Korrelationslänge ist statt durch Gl. (1.30) durch

$$\xi_- = \frac{1}{m_{\text{phys}}} \quad (1.33)$$

gegeben, wobei die physikalische Masse  $m_{\text{phys}}$  die Energiedifferenz zwischen Grundzustand und erstem angeregtem Zustand bei unendlichem räumlichen Volumen ist. Sie kann auch als der dem Ursprung nächstgelegene Pol im  $m_{\text{phys}}$  der zusammenhängenden, euklidischen 2-Punkt-Funktion (Korrelationsfunktion) im Impulsraum  $\tilde{G}(p)$  charakterisiert werden:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_0) \phi(0) \rangle - \langle \phi(x_0) \rangle \langle \phi(0) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{G}(p) e^{ipx_0} \\ &\underset{x_0 \rightarrow \infty}{\sim} e^{-m_{\text{phys}} x_0} + \text{Beiträge entfernterer Pole} \\ &\quad (\text{Residuensatz}) \\ &\underset{x_0 \rightarrow \infty}{\sim} e^{-m_{\text{phys}} x_0}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Das führt auf Gl. (1.33).

Wie erwähnt wird die Oberflächenspannung aufgrund von Gl. (1.32) aus der Energieaufspaltung ermittelt. Die Rechnung erfolgt dabei mit Hilfe einer Sattelpunktentwicklung der Wirkung um eine sogenannte Kink– oder auch Instanton–Lösung der Bewegungsgleichung. Es wird dabei aus mehreren Gründen so weit wie möglich analytisch gerechnet. Zunächst geht es darum, die Terme proportional zu  $L^2$  im Argument der Exponentialfunktion im Ergebnis für  $E_{0a}$  zu isolieren, um die Oberflächenspannung zu bekommen (Gl. (1.32)). Es soll also ein analytischer Ausdruck für  $\sigma_\infty$  bestimmt werden. Außerdem wird die durchgeführte, feldtheoretische Rechnung zeigen, daß die unregularisierte Theorie zu Divergenzen führt. Bevor also an eine etwaige numerische Bestimmung zu denken ist, muß die Theorie regularisiert werden; die Divergenzen sind zu isolieren und durch die Wahl eines Renormierungsschemas zu beseitigen. Als Regularisierungsmethode findet die dimensionelle Regularisierung Anwendung, das Renormierungsschema ist in Kapitel 6 beschrieben. Schließlich wird man sehen, daß sich das Resultat für den 2–Loop–Beitrag der Oberflächenspannung als Summe mehrerer Summanden schreiben läßt, die sich nahezu gegeneinander fortheben, d.h. die Summe ist sehr viel kleiner als die einzelnen Summanden, so daß eine möglichst weitgehende analytische Rechnung nötig ist, um nicht zu große Fehler zu erhalten.

Zuvor seien noch einige Anmerkungen zum Instantonbegriff gemacht. Ihren Ursprung und eine wesentliche Bedeutung besitzen die Instantonen in der Eichtheorie insbesondere bei der Frage nach dem Grundzustand in der Quantenchromodynamik (QCD). In der reinen Eichtheorie (Yang–Mills–Theorie) gibt es topologisch nicht triviale Lösungen der zugehörigen Euler–Lagrange–Gleichung (Yang–Mills–Gleichung), eben die Instantonen [28]. Instantonen beschreiben Übergänge zwischen klassischen Vakua, d.h. Konfigurationen mit Feldstärketensor  $F_{\mu\nu} = 0$ , wobei sich diese Vakua hinsichtlich ihres Eichfeldes  $A_\mu$  unterscheiden. Speziell sind ihre topologischen Eigenschaften verschieden, was sich durch den sogenannten Pontryagin–Index  $q$  kennzeichnen läßt [29, 30]. Man spricht daher auch von  $q$ –Vakua ( $|q\rangle$ ). Da die Instantonen eine endliche Wirkung haben, gibt es eine nicht verschwindende Übergangsamplitude von einem  $q$ –Vakuum in ein anderes, so daß der Grundzustand, das wahre Vakuum, eine Überlagerung dieser  $q$ –Vakua ist. Dieses sogenannte  $\theta$ –Vakuum ( $|\theta\rangle$ ) wird durch einen Parameter  $\theta$  charakterisiert. Experimentell [31, 32, 33, 34] schließt man, daß  $\theta$  sehr klein ist ( $|\theta| < 2 \cdot 10^{-10}$ ). Erklärungsversuche hierfür führen durch Erweiterung des Standardmodells auf sogenannte Axionen [35, 36, 37, 38]. Für eine Übersicht über das QCD–Vakuum sei auf [39] verwiesen.

Konkrete Berechnungen von Übergangsamplituden mit Hilfe von Instantonen wurden u.a. in der Eichtheorie von t’Hooft in einer 1–Loop–Rechnung [40] und im Rahmen der Quantenmechanik hauptsächlich von Shuryak auch bis zur 2–Loop–Ordnung durchgeführt [41, 42, 43, 44].

Zurück zur Berechnung der Oberflächenspannung im  $\phi^4$ –Modell. Die Arbeit gliedert sich folgendermaßen. Im Kapitel 2 wird eine Formel für die Energieaufspaltung  $E_{0a}$  hergeleitet, deren Bestandteile in den folgenden Kapiteln sukzessive ausgewertet werden. In Kapitel 3 werden die relevanten Greenschen Funktionen bestimmt; im vierten Kapitel erfolgt die Berechnung des Determinantenverhältnisses der Fluktuationssoperatoren mit und ohne Instantonhintergrundfeld bevor in Kapitel 5, als wesentliche Aufgabe, die verschiedenen Feynman–Graphen, vgl. das folgende Kapitel, bestimmt werden. Danach wird in Kapitel 6 die Renormierung durchgeführt und die Oberflächenspannung bis zur 2–Loop–Ordnung ausgerechnet. Weiter erfolgt im siebten Kapitel die Bestimmung der universellen Größen  $R_-$  und  $R_+$  sowie ein Vergleich der erhaltenen Ergebnisse mit Resultaten aus Experimenten, Monte–Carlo–Rechnungen und Reihenanalysen. Im achten Kapitel werden die

Resultate der Arbeit zusammengefaßt. Die verschiedenen Anhänge schließlich stellen mehrere benötigte Integralformeln bereit, und auch die Bestimmung einiger häufig auftretender Größen und von numerischen Konstanten erfolgt in den Anhängen.

## Kapitel 2

# Energieaufspaltung in der $\phi^4$ -Theorie

Wie in der Einleitung angekündigt, wird die  $\phi^4$ -Theorie in der Phase gebrochener Symmetrie betrachtet. In der euklidischen Formulierung hat man folgende Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{m_0^2}{4} \phi_0^2 + \frac{g_0}{4!} \phi_0^4 + \frac{3}{8} \frac{m_0^4}{g_0} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 + V(\phi_0),\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit

$$V(\phi_0) := \frac{g_0}{4!} \left( \phi_0^2 - v_0^2 \right)^2, \quad v_0 := \sqrt{\frac{3m_0^2}{g_0}}\tag{2.2}$$

(vgl. Abbildung 2.1). Bei einem unendlichen räumlichen Volumen (vgl. Einleitung) entsprächen nun die Feldkonfigurationen  $\phi_0 \equiv \pm v_0$ , wobei  $\pm v_0$  die Potentialminima sind, den Grundzuständen der Theorie (spontane Symmetriebrechung). Im endlichen Volumen sind diese Zustände

$$|0_-\rangle \cong \text{Feldkonfiguration } \phi_0 \equiv -v_0,\tag{2.3}$$

$$|0_+\rangle \cong \text{Feldkonfiguration } \phi_0 \equiv +v_0\tag{2.4}$$

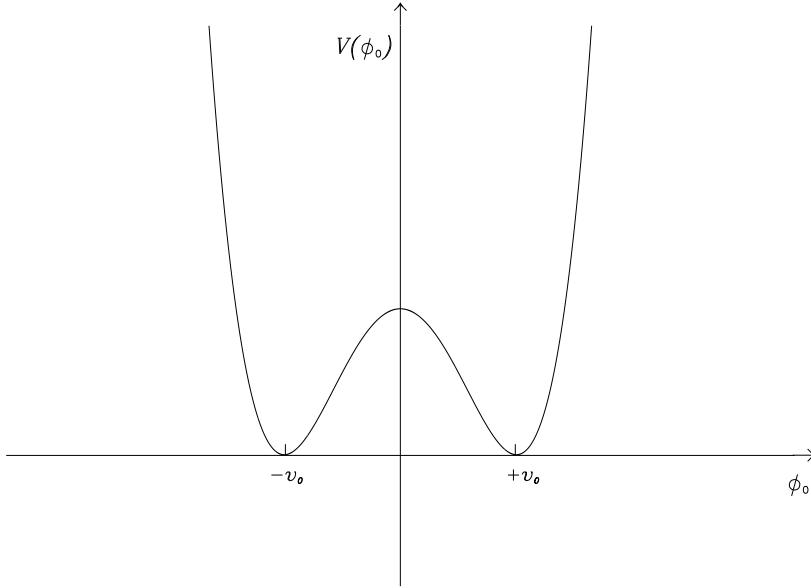
aufgrund des Tunneleffekts, also durch Übergänge von einem Potentialminimum ins andere, keine Grundzustände mehr, sondern der Grundzustand ist die symmetrische Linearkombination  $|0_s\rangle$  aus  $|0_-\rangle$  und  $|0_+\rangle$ ,

$$|0_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_+\rangle + |0_-\rangle), \quad \text{Energie: } E_0,\tag{2.5}$$

und die antisymmetrische Linearkombination

$$|0_{as}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_+\rangle - |0_-\rangle), \quad \text{Energie: } E_0 + E_{0a},\tag{2.6}$$

ist der erste angeregte Zustand. Die Situation ist, wenn auch einfacher, ganz ähnlich zur Frage des Grundzustands in der QCD (vgl. auch Kapitel 1). Die Zustände  $|0_+\rangle$  und  $|0_-\rangle$  entsprechen den dortigen  $q$ -Vakua, und der wirkliche Grundzustand  $|0_s\rangle$  entspricht dem

Abbildung 2.1: Das Potential  $V(\phi_0)$ 

$\theta$ -Vakuum. Übergänge zwischen den  $q$ -Vakuua werden durch Instantonen beschrieben, und auch die Übergangsamplitude von  $|0_-\rangle$  nach  $|0_+\rangle$  wird durch eine Instantonlösung bestimmt, wie sich im folgenden zeigen wird.

Man beachte weiterhin:

$$|0_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_s\rangle + |0_{as}\rangle), \quad (2.7)$$

$$|0_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_s\rangle - |0_{as}\rangle). \quad (2.8)$$

Die Energiedifferenz  $E_{0a}$  zwischen den beiden Zuständen  $|0_s\rangle$  und  $|0_{as}\rangle$  steht nun in folgendem Zusammenhang mit der Übergangsamplitude von einem Potentialminimum in das andere:

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | e^{-TH} | 0_- \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \langle 0_s | e^{-TH} | 0_s \rangle - \langle 0_s | e^{-TH} | 0_{as} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle 0_{as} | e^{-TH} | 0_s \rangle - \langle 0_{as} | e^{-TH} | 0_{as} \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{-E_0 T} - e^{-(E_0 + E_{0a}) T} \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

denn  $|0_s\rangle$  und  $|0_{as}\rangle$  sind als Eigenzustände zu verschiedenen Energieeigenwerten orthogonal. Entsprechend hat man

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | e^{-TH} | 0_+ \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \langle 0_s | e^{-TH} | 0_s \rangle + \langle 0_s | e^{-TH} | 0_{as} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle 0_{as} | e^{-TH} | 0_s \rangle + \langle 0_{as} | e^{-TH} | 0_{as} \rangle \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ e^{-E_0 T} + e^{-(E_0 + E_{0a}) T} \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

und daher

$$\begin{aligned} \frac{\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_- \rangle}{\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_+ \rangle} &= \frac{e^{-E_0 T} - e^{-(E_0 + E_{0a}) T}}{e^{-E_0 T} + e^{-(E_0 + E_{0a}) T}} \\ &= \frac{1 - e^{-E_{0a} T}}{1 + e^{-E_{0a} T}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Andererseits gilt die Pfadintegraldarstellung

$$\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_- \rangle = \int \mathcal{D}\phi_0 e^{-S[\phi_0]}, \quad (2.12)$$

$$S[\phi_0] := \int d^3x \mathcal{L}, \quad (2.13)$$

wobei nur über solche Feldkonfigurationen  $\phi_0$  zu integrieren ist, die zu einem Anfangszeitpunkt dem Zustand  $|0_-\rangle$ , d.h. konstanter Feldkonfiguration  $-v_0$ , und nach der Zeit  $T$  dem Zustand  $|0_+\rangle$ , also konstanter Feldkonfiguration  $+v_0$ , entsprechen. Für sehr große  $T$  kann dies durch folgende Randbedingung für  $\phi_0$  genähert werden ( $x := (x_0, x_1, x_2)$ ):

$$\phi_0(x) \longrightarrow \begin{cases} v_0, & x_0 \rightarrow +\infty \\ -v_0, & x_0 \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (2.14)$$

$x_0$  bezeichnet die Zeitkoordinate,  $x_1$  und  $x_2$  sind die beiden Raumkoordinaten. Analog läßt sich  $\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_+ \rangle$  als Pfadintegral bestimmen, indem über solche Konfigurationen integriert wird, die zum Anfangs- und Endzeitpunkt dem Zustand  $|0_+\rangle$  entsprechen, d.h.  $\phi_0(x) \rightarrow v_0$  für  $x_0 \rightarrow \pm\infty$ .

Aufgrund des Faktors  $e^{-S[\phi_0]}$  tragen zur Übergangsamplitude (2.12) im wesentlichen die Konfigurationen bei, für die die Wirkung klein ist. Minima der Wirkung  $S[\phi_0]$  müssen der Euler–Lagrange–Gleichung

$$\frac{\delta S[\phi_0]}{\delta \phi_0(x)} = 0, \quad (2.15)$$

d.h.

$$-\Delta^{(3)}\phi_0 - \frac{m_0^2}{2} \phi_0 + \frac{g_0}{3!} \phi_0^3 = 0 \quad (2.16)$$

genügen;  $\Delta^{(3)}$  ist der Laplace–Operator in drei Dimensionen. Man rechnet nach, daß diese Gleichung durch

$$\phi_c(x) := v_0 \tanh\left[\frac{m_0}{2}(x_0 - a)\right], \quad a \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

gelöst wird.  $a$  ist dabei ein Parameter, der die Position dieser sogenannten Kink– oder Instanton–Lösung auf der Zeitachse bestimmt (vgl. auch Abbildung 2.2, zum Instantonbegriff s.o. und Kapitel 1). Außerdem erfüllt  $\phi_c$  die Randbedingungen (2.14). Es wird jetzt zunächst der Beitrag von solchen 1–Kink–Konfigurationen zur Übergangsamplitude (2.12) berechnet.

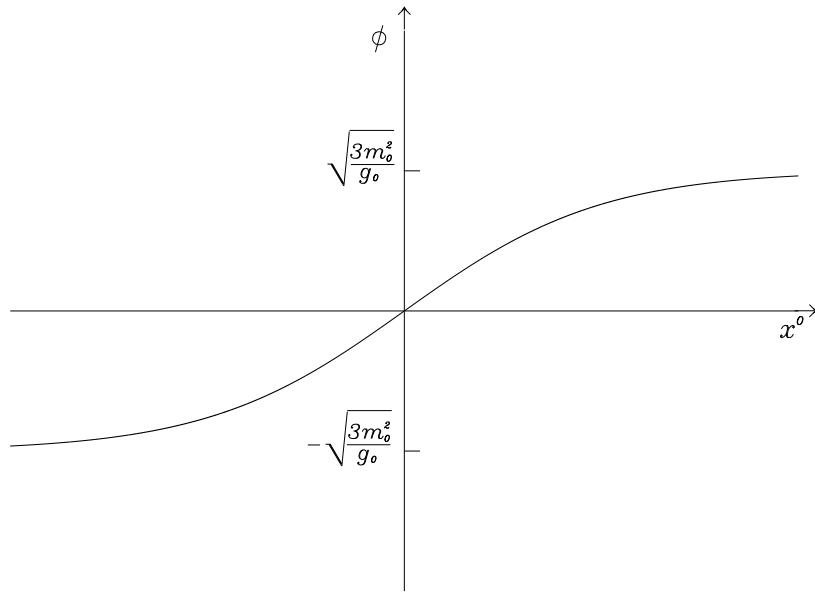
## 2.1 Beitrag von 1–Kink–Konfigurationen zur Übergangsamplitude

Ich betrachte zunächst den Beitrag des Kinks mit Zentrum bei  $x_0 = 0$ , d.h.  $a = 0$ :

$$\phi_{(c,0)}(x_0) := v_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right). \quad (2.18)$$

Dazu entwickelt man als erstes  $S[\phi_0]$  um  $\phi_{(c,0)}$  in eine Taylorreihe. Zuvor sei noch für Funktionen

$$f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (2.19)$$

Abbildung 2.2: Kink–Lösung für  $a = 0$ 

definiert:

$$(f, g) := \int d^3x f(x) g(x). \quad (2.20)$$

Man hat dann

$$S[\phi_{(c,0)} + \eta] = S_c + \frac{1}{2} (\eta, \mathbb{M}_{(1)} \eta) + \frac{g_0}{3!} (\phi_{(c,0)}, \eta^3) + \frac{g_0}{4!} (\eta^2, \eta^2), \quad (2.21)$$

mit

$$\mathbb{M}_{(1)} := -\Delta^{(3)} + m_0^2 - \frac{3}{2} \frac{m_0^2}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)}, \quad (2.22)$$

$$S_c := S[\phi_{(c,0)}]. \quad (2.23)$$

Der Operator  $\mathbb{M}_{(1)}$  wird im nächsten Kapitel eingehend untersucht. Hier ist zunächst von Bedeutung, daß  $\mathbb{M}_{(1)}$ , bis auf einen unwichtigen Phasenfaktor, genau eine normierte Eigenfunktion zum Eigenwert 0 besitzt. Diese Nullmode sei mit  $|\vec{0} 0\rangle$  bezeichnet. In der Ortsraumdarstellung gilt:

$$\langle x | \vec{0} 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{S_c}} \frac{\partial \phi_{(c,0)}}{\partial x_0} = \frac{1}{\sqrt{S_c}} \dot{\phi}_{(c,0)}(x_0). \quad (2.24)$$

Die Eigenvektoren von  $\mathbb{M}_{(1)}$  sind nicht mit den obigen Zustandsvektoren wie z.B.  $|0_+\rangle$  zu verwechseln. Wegen

$$\phi_{(c,0)}(x_0 + a) = \phi_{(c,0)} + a \sqrt{S_c} \langle x | \vec{0} 0 \rangle + O(a^2) \quad (2.25)$$

entspricht  $\langle x | \vec{0} 0 \rangle$ , bei einer Entwicklung der Fluktuationen  $\eta$  in Gl. (2.21) nach Eigenfunktionen von  $\mathbb{M}_{(1)}$ , gerade einer Verschiebung des Kinks längs der  $x_0$ -Achse. Diese Nullmode erfordert eine spezielle Behandlung im Pfadintegral in Gl. (2.12), da man sonst u.a. nicht

konvergente Gauß–Integrale vom Typ  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-0x^2}$  bekommt. Diese spezielle Behandlung erfolgt mit Hilfe der Methode der kollektiven Koordinaten [45] ähnlich zur Faddeev–Popov–Methode in der Eichtheorie; zur Nullmodenbehandlung vergleiche man auch [46, Abschnitt 17.31]. Wegen des Zusammenhangs (2.25) von Nullmode und Translation längs der  $x_0$ –Achse liefert dieses Verfahren dann letztlich den Beitrag aller Kinks und nicht nur den des Kinks  $\phi_{(c,0)}$  mit  $a = 0$ . Aufgrund der Translationsinvarianz der Theorie längs der  $x_0$ –Achse ergibt jede 1–Kink–Konfiguration für sich denselben Beitrag; die Existenz der Nullmode ist letztendlich Konsequenz dieser Translationsinvarianz.

Jetzt zum eigentlichen Verfahren. Man beachte stets, daß  $\phi_{(c,0)}$  nur von der Zeitvariablen  $x_0$  abhängt. Ich definiere als erstes

$$\begin{aligned}\xi(\tau_c) &:= \int d^3x \left[ \phi_0(x) - \phi_{(c,0)}(x_0 - \tau_c) \right] \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(x_0 - \tau_c)}{\sqrt{S_c}} \\ &= \int d^3x \left[ \phi_0(x_0 + \tau_c, x_1, x_2) - \phi_{(c,0)}(x_0) \right] \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(x_0)}{\sqrt{S_c}}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

$\phi_0$  ist dabei eine beliebige Konfiguration, über die in Gl. (2.12) integriert wird. Dann gilt

$$\begin{aligned}1 &= \int d\xi \delta(\xi) \\ &= \int d\tau_c \frac{d\xi}{d\tau_c} \delta(\xi(\tau_c)),\end{aligned}\quad (2.27)$$

mit

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{d\tau_c} &= \frac{d}{d\tau_c} \int d^3x \left[ \phi_0(x_0 + \tau_c, x_1, x_2) - \phi_{(c,0)}(x_0) \right] \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(x_0)}{\sqrt{S_c}} \\ &= \int d^3x \dot{\phi}_0(x_0 + \tau_c, x_1, x_2) \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(x_0)}{\sqrt{S_c}}.\end{aligned}\quad (2.28)$$

Hiermit hat man

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}\phi_0 e^{-S[\phi_0]} &= \int \mathcal{D}\phi_0 \left[ \int d\tau_c \frac{d\xi}{d\tau_c} \delta(\xi(\tau_c)) \right] e^{-S[\phi_0]} \\ &= \int d\tau_c \int \mathcal{D}\phi_0 \int d^3x \left\{ \dot{\phi}_0(x_0 + \tau_c, x_1, x_2) \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(x_0)}{\sqrt{S_c}} \right. \\ &\quad \times \delta \left( \int d^3\tilde{x} \left[ \phi_0(\tilde{x}_0 + \tau_c, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - \phi_{(c,0)}(\tilde{x}_0) \right] \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(\tilde{x}_0)}{\sqrt{S_c}} \right) e^{-S[\phi_0]} \Big\} \\ &= \int d\tau_c \int \mathcal{D}\phi_0 \int d^3x \left\{ \dot{\phi}_0(x) \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(x_0)}{\sqrt{S_c}} \right. \\ &\quad \times \delta \left( \int d^3\tilde{x} \left[ \phi_0(\tilde{x}) - \phi_{(c,0)}(\tilde{x}_0) \right] \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(\tilde{x}_0)}{\sqrt{S_c}} \right) e^{-S[\phi_0]} \Big\}.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Der letzte Schritt folgt, da es dasselbe ist, über alle möglichen Konfigurationen  $\phi_0(x_0, x_1, x_2)$  oder  $\phi_0(x_0 + \tau_c, x_1, x_2)$  zu integrieren. Der Integrand hängt nun nicht mehr von  $\tau_c$  ab, so daß man erhält ( $\tau_c$  nimmt Werte aus  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$  an>):

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}\phi_0 e^{-S[\phi_0]} &= T \int \mathcal{D}\phi_0 \int d^3x \left\{ \dot{\phi}_0(x) \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(x_0)}{\sqrt{S_c}} \right. \\ &\quad \times \delta \left( \int d^3\tilde{x} \left[ \phi_0(\tilde{x}) - \phi_{(c,0)}(\tilde{x}_0) \right] \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(\tilde{x}_0)}{\sqrt{S_c}} \right) e^{-S[\phi_0]} \Big\}.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Substituiert man jetzt

$$\phi_0 = \phi_{(c,0)} + \eta, \quad (2.31)$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi_0 e^{-S[\phi_0]} &= T \int \mathcal{D}\eta \int d^3x \left\{ \left( \dot{\phi}_{(c,0)}(x_0) + \dot{\eta} \right) \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(x_0)}{\sqrt{S_c}} \right. \\ &\quad \left. \times \delta \left( \int d^3\tilde{x} \eta(\tilde{x}) \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(\tilde{x}_0)}{\sqrt{S_c}} \right) e^{-S[\phi_{(c,0)} + \eta]} \right\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Weiter gilt jetzt, da  $\phi_{(c,0)}$  der Bewegungsgleichung (2.16) genügt,

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}_{(c,0)}(x_0) &= V'(\phi_{(c,0)}) \\ \implies 2\dot{\phi}_{(c,0)}(x_0)\ddot{\phi}_{(c,0)}(x_0) - 2\dot{\phi}_{(c,0)}(x_0)V'(\phi_{(c,0)}) &= 0 \quad (\text{Stammfunktion bilden}) \\ \implies \left( \dot{\phi}_{(c,0)}(x_0) \right)^2 - 2V(\phi_{(c,0)}) &= \text{const.} \\ \implies \left( \dot{\phi}_{(c,0)}(x_0) \right)^2 &= 2V(\phi_{(c,0)}), \end{aligned} \quad (2.33)$$

denn

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} \dot{\phi}_{(c,0)}(x_0) = 0 = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} [2V(\phi_{(c,0)})]. \quad (2.34)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int d^3x \left( \dot{\phi}_{(c,0)}(x_0) \right)^2 &= \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \left( \dot{\phi}_{(c,0)}(x_0) \right)^2 + V(\phi_{(c,0)}) \right] \\ &= S_c. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Eine explizite Rechnung zeigt überdies, wenn  $L$  die Ausdehnung längs der Raumkoordinaten  $x_1$  bzw.  $x_2$  und  $B(x, y)$  die Beta-Funktion ist,

$$\begin{aligned} \int d^3x \left( \dot{\phi}_{(c,0)}(x_0) \right)^2 &= v_0^2 \left( \frac{m_0}{2} \right)^2 L^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{1}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} \\ &= \frac{3m_0^3}{2g_0} L^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\cosh^4 x} \\ &= \frac{3m_0^3}{2g_0} L^2 B(\frac{1}{2}, 2) \quad [47, 3.512.2] \\ &= \frac{2m_0^3}{g_0} L^2, \end{aligned} \quad (2.36)$$

also

$$S_c = \frac{2m_0^3}{g_0} L^2. \quad (2.37)$$

Allgemeiner gilt für die Wirkung  $S_{c,D}$  in  $D$  Dimensionen, nämlich  $D - 1$  Raumdimensionen und einer Zeitdimension, da  $\phi_{(c,0)}$  nicht von den Raumkoordinaten abhängt:

$$S_{c,D} = \frac{2m_0^3}{g_0^{(D)}} L^{D-1}, \quad g_0^{(D)} : \text{Kopplungskonstante in } D \text{ Dimensionen.} \quad (2.38)$$

Führt man  $S_c$  mit Hilfe von Gl. (2.37) in Gl. (2.32) ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi_0 e^{-S[\phi_0]} &= T \int \mathcal{D}\eta \left\{ \left[ \sqrt{S_c} + \int d^3x \dot{\eta}(x) \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(x_0)}{\sqrt{S_c}} \right] \right. \\ &\quad \times \delta \left( \int d^3\tilde{x} \eta(\tilde{x}) \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(\tilde{x}_0)}{\sqrt{S_c}} \right) e^{-S[\phi_{(c,0)} + \eta]} \Big\} \\ &= T \sqrt{S_c} \int \mathcal{D}\eta \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{S_c} \int d^3x \eta(x) \ddot{\phi}_{(c,0)}(x_0) \right] \right. \\ &\quad \times \delta \left( \int d^3\tilde{x} \eta(\tilde{x}) \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}(\tilde{x}_0)}{\sqrt{S_c}} \right) e^{-S[\phi_{(c,0)} + \eta]} \Big\} \quad (2.39) \end{aligned}$$

und mit der Entwicklung von  $S[\phi_0]$  (vgl. Gl. (2.21))

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi_0 e^{-S[\phi_0]} &= T \sqrt{S_c} \int \mathcal{D}\eta \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{S_c} (\eta, \ddot{\phi}_{(c,0)}) \right] \delta \left( (\eta, \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}}{\sqrt{S_c}}) \right) \right. \\ &\quad \times e^{-S_c - \frac{1}{2} (\eta, \mathbf{IM}_{(1)} \eta) - \frac{g_0}{3!} (\phi_{(c,0)}, \eta^3) - \frac{g_0}{4!} (\eta^2, \eta^2)} \Big\}. \quad (2.40) \end{aligned}$$

Mit Hilfe eines äußeren Quellfeldes  $J$  lässt sich dies wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi_0 e^{-S[\phi_0]} &= T \sqrt{S_c} e^{-S_c} \left\{ \left\{ \mathbb{1} - \frac{1}{S_c} \int d^3x_1 \ddot{\phi}_{(c,0)}(x_1) \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right\} \right. \\ &\quad \exp \left\{ - \frac{g_0}{3!} \int d^3x_2 \phi_{(c,0)}(x_2) \frac{\delta^3}{\delta J(x_2)^3} \right\} \\ &\quad \exp \left\{ - \frac{g_0}{4!} \int d^3x_3 \frac{\delta^4}{\delta J(x_3)^4} \right\} \Big|_{J=0} \Big\} \\ &\quad \int \mathcal{D}\eta \delta \left( (\eta, \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}}{\sqrt{S_c}}) \right) e^{-\frac{1}{2} (\eta, \mathbf{IM}_{(1)} \eta) + (J, \eta)}. \quad (2.41) \end{aligned}$$

Man bemerkt nun das Folgende. Die  $\delta$ -Funktion bewirkt, daß zum  $\eta$ -Pfadintegral nur diejenigen Konfigurationen  $\eta$  beitragen, für die

$$\left( \eta, \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}}{\sqrt{S_c}} \right) = 0 \quad (2.42)$$

gilt, die also zur Nullmode orthogonal sind. Ich betrachte daher folgende Zerlegung des Raumes  $M$  aller Feldkonfigurationen  $\eta$ :

$$M = N^\perp \oplus N, \quad (2.43)$$

mit

$$N^\perp := \{\text{zur Nullmode orthogonale Konfigurationen}\}, \quad (2.44)$$

$$N := \{\text{zur Nullmode parallele Konfigurationen}\}. \quad (2.45)$$

Entsprechend hat man auch eine Auspaltung des Quellfeldes in zur Nullmode orthogonale und parallele Komponenten:

$$J = J^\perp + J^\parallel. \quad (2.46)$$

Wegen

$$(J, \eta) = (J^\perp, \eta^\perp) + (J^{\parallel}, \eta^{\parallel}) \quad (2.47)$$

und da aufgrund der  $\delta$ -Funktion Ausdrücke wie

$$\int \mathcal{D}\eta \eta^{\parallel} \delta\left(\left(\eta, \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}}{\sqrt{S_c}}\right)\right) e^{-\frac{1}{2}(\eta, \mathbb{M}_{(1)}\eta)} \quad (2.48)$$

verschwinden, erhält man somit

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi_0 e^{-S[\phi_0]} &= T \sqrt{S_c} e^{-S_c} \left\{ \left\{ \mathbb{1} - \frac{1}{S_c} \int d^3x_1 \ddot{\phi}_{(c,0)}(x_1) \frac{\delta}{\delta J^\perp(x_1)} \right\} \right. \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{g_0}{3!} \int d^3x_2 \phi_{(c,0)}(x_2) \frac{\delta^3}{\delta J^\perp(x_2)^3} \right\} \\ &\quad \left. \exp \left\{ -\frac{g_0}{4!} \int d^3x_3 \frac{\delta^4}{\delta J^\perp(x_3)^4} \right\} \right\}_{|J^\perp=0} \\ &\quad \int \mathcal{D}\eta \delta\left(\left(\eta, \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}}{\sqrt{S_c}}\right)\right) e^{-\frac{1}{2}(\eta, \mathbb{M}_{(1)}\eta) + (J^\perp, \eta^\perp)}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Ich definiere nun

$$Z_0[J^\perp] := \int \mathcal{D}\eta \delta\left(\left(\eta, \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}}{\sqrt{S_c}}\right)\right) e^{-\frac{1}{2}(\eta, \mathbb{M}_{(1)}\eta) + (J^\perp, \eta^\perp)}. \quad (2.50)$$

Diese Größe wird jetzt ganz analog zu einem erzeugenden Funktional einer freien Feldtheorie ausgewertet, man vergleiche auch [48, 29]. Zunächst hat  $\mathbb{M}_{(1)}$  eingeschränkt auf  $N^\perp$  keine Nullmode und ist invertierbar<sup>1</sup>. Man wählt ein  $\eta_0 \in N^\perp$ , so daß

$$\mathbb{M}_{(1)}\eta_0 = J^\perp \quad (2.51)$$

gilt. Mit der Substitution

$$\tilde{\eta} = \eta - \eta_0 \quad (2.52)$$

folgt dann

$$\begin{aligned} Z_0[J^\perp] &= \int \mathcal{D}\tilde{\eta} \delta\left(\left(\eta_0 + \tilde{\eta}, \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}}{\sqrt{S_c}}\right)\right) e^{-\frac{1}{2}(\eta_0 + \tilde{\eta}, \mathbb{M}_{(1)}(\eta_0 + \tilde{\eta})) + (J^\perp, \eta_0^\perp + \tilde{\eta}^\perp)} \\ &= \int \mathcal{D}\tilde{\eta} \delta\left(\left(\tilde{\eta}, \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}}{\sqrt{S_c}}\right)\right) e^{-\frac{1}{2}(\eta_0, \mathbb{M}_{(1)}\eta_0) - (\tilde{\eta}, \mathbb{M}_{(1)}\eta_0) - \frac{1}{2}(\tilde{\eta}, \mathbb{M}_{(1)}\tilde{\eta}) + (J^\perp, \eta_0) + (J^\perp, \tilde{\eta}^\perp)} \\ &\quad (\text{denn } \eta_0 \in N^\perp) \\ &= \int \mathcal{D}\tilde{\eta} \delta\left(\left(\tilde{\eta}, \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}}{\sqrt{S_c}}\right)\right) e^{-\frac{1}{2}(\eta_0, J^\perp) - \frac{1}{2}(\tilde{\eta}, \mathbb{M}_{(1)}\tilde{\eta}) + (J^\perp, \eta_0) - (\tilde{\eta}, J^\perp) + (J^\perp, \tilde{\eta}^\perp)} \\ &\quad (\text{denn } \mathbb{M}_{(1)}\eta_0 = J^\perp). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Wegen

$$(\tilde{\eta}, J^\perp) = (\tilde{\eta}^\perp, J^\perp) \quad (2.54)$$

---

<sup>1</sup>Im folgenden ist unter  $\mathbb{M}_{(1)}^{-1}$  genauer stets  $(\mathbb{M}_{(1)}|_{N^\perp})^{-1}$  zu verstehen.

und

$$\eta_0 = \mathbb{M}_{(1)}^{-1} J^\perp \quad (2.55)$$

schließt man weiter:

$$\begin{aligned} Z_0[J^\perp] &= \int \mathcal{D}\tilde{\eta} \delta\left(\left(\tilde{\eta}, \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}}{\sqrt{S_c}}\right)\right) e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\eta}, \mathbb{M}_{(1)}\tilde{\eta})} e^{\frac{1}{2}(J^\perp, \mathbb{M}_{(1)}^{-1}J^\perp)} \\ &= e^{\frac{1}{2}(J^\perp, \mathbb{M}_{(1)}^{-1}J^\perp)} \underbrace{\int \mathcal{D}\tilde{\eta} \delta\left(\left(\tilde{\eta}, \frac{\dot{\phi}_{(c,0)}}{\sqrt{S_c}}\right)\right) e^{-\frac{1}{2}(\tilde{\eta}, \mathbb{M}_{(1)}\tilde{\eta})}}_{= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{N} (\det' \mathbb{M}_{(1)})^{-\frac{1}{2}}} . \end{aligned} \quad (2.56)$$

$\det' \mathbb{M}_{(1)}$  bedeutet, daß bei der Determinantenbildung die Nullmode fortzulassen ist. Die letzte Gleichung folgt dabei, indem man  $\tilde{\eta}$  nach Eigenfunktionen von  $\mathbb{M}_{(1)}$  entwickelt und über die Entwicklungskoeffizienten integriert.  $\mathcal{N}$  ist dabei eine Konstante, die von der genauen Definition des Pfadintegrals abhängt. Sie wird im folgenden keine Rolle spielen, so daß auf eine genauere Festlegung verzichtet wird.

Ausführlicher gilt, wenn  $c_i$  die Entwicklungskoeffizienten sind und  $c_0$  der Entwicklungskoeffizient der Nullmode:

$$\int \mathcal{D}\tilde{\eta} \dots = \mathcal{N} \int \prod_i \frac{dc_i}{\sqrt{2\pi}} \dots ,$$

und die  $c_0$ -Integration, also die Integration über die kollektive Koordinate, führt dann auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc_0}{\sqrt{2\pi}} \delta(c_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} .$$

Daher folgt mit diesem Ergebnis und der Definition

$$\tilde{\phi}_{(c,0)} := \sqrt{g_0} \phi_{(c,0)} = \sqrt{3m_0^2} \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right), \quad (2.57)$$

um eine  $g_0$ -unabhängige Größe zu haben, aus Gl. (2.49):

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\phi_0 e^{-S[\phi_0]} &= T \sqrt{\frac{S_c}{2\pi}} e^{-S_c} \mathcal{N} (\det' \mathbb{M}_{(1)})^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \left\{ \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{g_0} S_c} \int d^3x_1 \tilde{\phi}_{(c,0)}(x_1) \frac{\delta}{\delta J^\perp(x_1)} \right\} \right. \\ &\quad \exp \left\{ -\frac{\sqrt{g_0}}{3!} \int d^3x_2 \tilde{\phi}_{(c,0)}(x_2) \frac{\delta^3}{\delta J^\perp(x_2)^3} \right\} \\ &\quad \left. \exp \left\{ -\frac{g_0}{4!} \int d^3x_3 \frac{\delta^4}{\delta J^\perp(x_3)^4} \right\} \right\}_{|J^\perp=0} e^{\frac{1}{2}(J^\perp, \mathbb{M}_{(1)}^{-1}J^\perp)} . \end{aligned} \quad (2.58)$$

Indem man nach Potenzen von  $g_0$  entwickelt, erhält man eine übliche feldtheoretische Störungstheorie mit dem Propagator

$$G(x, y) = \langle x | (\mathbb{M}_{(1)}|_{N^\perp})^{-1} | y \rangle \quad (2.59)$$

und den Feynman-Regeln

  $\hat{=}$   $G(x, y),$   
  $\hat{=}$   $-\sqrt{g_0} \tilde{\phi}_{(c,0)} = -\sqrt{3 g_0 m_0^2} \tanh(\frac{m_0}{2} x_0),$   
  $\hat{=}$   $-g_0,$   
  $\hat{=}$   $-\frac{1}{\sqrt{g_0} S_c} \ddot{\tilde{\phi}}_{(c,0)},$ 

- über Vertizes integrieren:  $\int d^3x,$
- Faktor  $\frac{1}{S}$  vor einem Graphen, mit  
 $S = \#(\text{Symmetrie-Gruppe des Graphen})$   
 $= \# \left( \begin{array}{l} \text{Abbildungen des Graphen auf sich, die man durch Permu-} \\ \text{tationen von Punkten und Linien erhält; die Zuordnun-} \\ \text{gung zwischen Punkten und Linien muß erhalten bleiben.} \end{array} \right).$

Für die Rechnungen in dieser Arbeit wird die Störungsentwicklung bis zur 2-Loop-Ordnung einschließlich durchgeführt. Das ergibt schließlich für den Beitrag  $\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_- \rangle_{(1)}$  aller 1-Kink-Konfigurationen zur Übergangsamplitude:

Die Symmetriefaktoren sind dabei gesondert vor die Graphen geschrieben worden.

## 2.2 Beitrag von Multi-Kink-Konfigurationen zur Übergangsamplitude

Neben den 1-Kink-Konfigurationen, die strenge Lösungen der Bewegungsgleichung (2.16) sind, gibt es auch noch  $n$ -Kink-Antikink-Konfigurationen, die durch mit großem Abstand aufeinanderfolgende Kinks und Antikinks (Antikink = - Kink) entstehen (vgl. Abb. 2.3, Zahl der Kinks + Zahl der Antikinks =  $n$ ). Um die Randbedingungen (2.14) zu erfüllen, muß  $n$  ungerade sein. Diese Multi-Kink-Konfigurationen sind nur näherungsweise Lösungen der Gl. (2.16). Den Beitrag einer  $n$ -Kink-Antikink-Konfiguration zur Übergangsamplitude kann man etwas heuristisch wie folgt bestimmen.

Zunächst ist die Wirkung einer  $n$ -Kink-Antikink-Konfiguration in guter Näherung durch  $nS_c$  gegeben, wobei  $S_c$  die Wirkung eines einzelnen Kinks ist. Denn für die Abschnitte, in denen  $\phi_0 \approx \pm v_0$  ist, gilt  $V(\phi_0) \approx 0$  und  $\partial_\mu \phi_0 \approx 0$ , also auch  $\mathcal{L} \approx 0$ , so daß

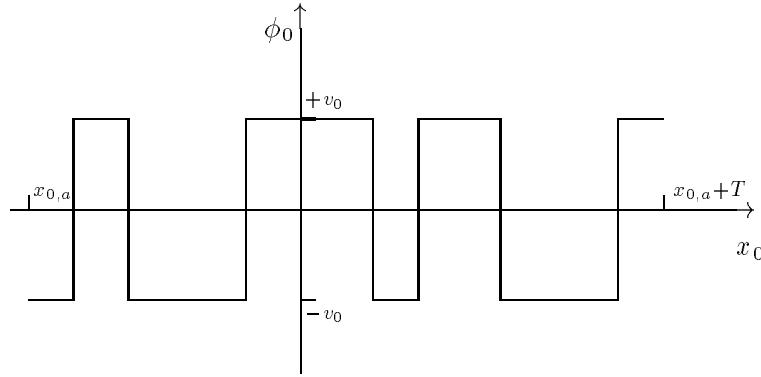


Abbildung 2.3: Beispiel eines Multi-Kinks ( $x_{0,a}$ : (beliebige) Anfangszeit)

die Wirkung aus den Sprüngen von einem Minimum ins andere herröhrt, genau wie bei einem einfachen Kink. Da es insgesamt  $n$  Sprünge gibt, ergibt sich die gesamte Wirkung zu  $nS_c$ . Das unterschiedliche Vorzeichen von Kink und Antikink spielt keine Rolle, weil in der Wirkung nur  $(\phi_0)^2$  vorkommt, so daß Kink und Antikink dieselbe Wirkung haben, wie man an Hand von Gl. (2.35) einsieht.

Weiter gibt es

$$\int_{-\frac{1}{2}T}^{\frac{1}{2}T} dt_1 \int_{-\frac{1}{2}T}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\frac{1}{2}T}^{t_{n-1}} dt_n = \frac{T^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (2.61)$$

Möglichkeiten die  $n$  Kinks und Antikinks innerhalb eines Zeitintervalls der Breite  $T$  anzurorden [49, 50].

Bis auf die Anstiege und Abfälle verharrt das Feld nun bei der Konfiguration aus  $n$  Kinks und Antikinks in einem der beiden Potentialminima:

$$\phi_{\pm} \equiv \pm v_0. \quad (2.62)$$

Man berechnet jetzt den Beitrag  $\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_{\pm} \rangle_{(n)}$  aller  $n$ -Kink-Antikink-Konfigurationen zur Übergangssamplitude  $\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_- \rangle$ , indem man Fluktuationen um  $\phi_+$  berücksichtigt und die Anstiege und Abfälle jeweils durch einen noch zu bestimmenden Faktor  $K$  einbezieht. Ohne Einschränkung kann man  $\phi_+$  wählen, mit  $\phi_-$  ergibt sich dasselbe und  $\phi_{\pm}$  lösen die Gl. (2.16):

$$\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_{\pm} \rangle_{(n)} = \frac{T^n}{n!} K^n e^{-nS_c} \int \mathcal{D}\eta e^{-S[\phi_+ + \eta]}. \quad (2.63)$$

Im einzelnen gilt

$$\int \mathcal{D}\eta e^{-S[\phi_+ + \eta]} = \int \mathcal{D}\eta e^{-\frac{1}{2}(\eta, \mathbf{M}_{(0)}\eta) - \frac{1}{3!}\sqrt{3g_0 m_0^2}(1, \eta^3) - \frac{1}{4!}g_0(\eta^2, \eta^2)}, \quad (2.64)$$

mit

$$\mathbf{M}_{(0)} := -\Delta^{(3)} + m_0^2. \quad (2.65)$$

Formal erhält man diese Entwicklung, indem man die Betrachtungen für  $\phi_{(c,0)}(x_0) = v_0 \tanh(\frac{m_0}{2}x_0)$  hernimmt und  $\tanh(\frac{m_0}{2}x_0)$  durch 1 ersetzt.

Entwickelt man den Integranden von Gl. (2.64) jetzt nach Potenzen von  $g_0$ , so führt das völlig analog zur Rechnung mit Kink zu einer Störungstheorie mit dem Propagator<sup>2</sup>

$$G_0(x, y) = \langle x | \mathbb{M}_{(0)}^{-1} | y \rangle \quad (2.66)$$

und den Feynman-Regeln

$$\text{--- --- ---} \hat{\equiv} G_0(x, y),$$

$$\text{---} \nearrow \searrow \hat{\equiv} -\sqrt{3 g_0 m_0^2},$$

$$\times \times \hat{\equiv} -g_0,$$

- über Vertizes integrieren:  $\int d^3x$ ,
- übliche Symmetriefaktoren.

Bis zur 2-Loop-Ordnung ergibt sich somit für den Beitrag  $\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_{\pm} \rangle_{(n)}$ :

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | e^{-TH} | 0_{\pm} \rangle_{(n)} &= \frac{T^n}{n!} K^n e^{-nS_c} \mathcal{N} (\det \mathbb{M}_{(0)})^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left( \text{---} \nearrow \searrow \right) + \frac{1}{8} \left( \text{---} \times \text{---} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \left( \text{---} \text{---} \right) + O(g_0^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Für  $n = 1$  muß sich hier der zuvor berechnete Beitrag der 1-Kink-Konfigurationen ergeben. Das nutzt man aus, um  $K$  zu bestimmen. Einerseits gilt, man vergleiche Gl. (2.67),

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | e^{-TH} | 0_- \rangle_{(1)} &= T K e^{-S_c} \mathcal{N} (\det \mathbb{M}_{(0)})^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{8} \left( \text{---} \nearrow \searrow \right) + \frac{1}{8} \left( \text{---} \times \text{---} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \left( \text{---} \text{---} \right) + O(g_0^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Andererseits hat man aus Gl. (2.60)

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | e^{-TH} | 0_- \rangle_{(1)} &= T \sqrt{\frac{S_c}{2\pi}} e^{-S_c} \mathcal{N} (\det' \mathbb{M}_{(1)})^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{2} \text{---} \otimes \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{12} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + O(g_0^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

---

<sup>2</sup> $\mathbb{M}_{(0)}$  besitzt keine Nullmode, so daß die Betrachtungen zur kollektiven Koordinate hier unnötig sind.

Damit folgt

$$K = \sqrt{\frac{S_c}{2\pi}} \left( \frac{\det' \mathbb{M}_{(1)}}{\det \mathbb{M}_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{O} + \frac{1}{8} \text{O} \text{O} + \frac{1}{8} \text{O} \text{---} \textcircled{O} + \frac{1}{12} \text{---} \textcircled{O} + O(g_0^2)}{1 + \frac{1}{8} \text{---} \textcircled{O} + \frac{1}{8} \text{O} \text{---} \textcircled{O} + \frac{1}{12} \text{---} \textcircled{O} + O(g_0^2)}. \quad (2.70)$$

Die Graphen, insbesondere die gestrichelten, sind von der Ordnung  $g_0$ , und man kann den Bruch mit den Graphen in eine Reihe nach Potenzen von  $g_0$  entwickeln. Das ergibt schließlich:

$$\begin{aligned} K = & \sqrt{\frac{S_c}{2\pi}} \left( \frac{\det' \mathbb{M}_{(1)}}{\det \mathbb{M}_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{O} + \frac{1}{8} [\text{O} \text{O} - (\text{O} \text{---} \text{O})] \right. \\ & + \frac{1}{8} [\text{O} \text{---} \textcircled{O} - (\text{O} \text{---} \text{O})] + \frac{1}{12} [\text{---} \textcircled{O} - (\text{---} \textcircled{O})] \\ & \left. + O(g_0^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

## 2.3 Formel für die Energieaufspaltung

Indem man alle Beiträge  $\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_- \rangle_{(n)}$  für ungerade  $n$  aufsummiert, erhält man die gesuchte Übergangsamplitude:

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | e^{-TH} | 0_- \rangle &= \sum_{n \text{ ungerade}} \langle 0_+ | e^{-TH} | 0_- \rangle_{(n)} \\ &= \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{(TK e^{-S_c})^n}{n!} \mathcal{N} (\det \mathbb{M}_{(0)})^{-\frac{1}{2}} \text{OI} \\ &= \mathcal{N} (\det \mathbb{M}_{(0)})^{-\frac{1}{2}} \sinh (TK e^{-S_c}) \text{OI} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{N} (\det \mathbb{M}_{(0)})^{-\frac{1}{2}} [e^{TK e^{-S_c}} - e^{-TK e^{-S_c}}] \text{OI}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

mit

$$\text{OI} := 1 + \frac{1}{8} \text{---} \textcircled{O} + \frac{1}{8} \text{O} \text{---} \textcircled{O} + \frac{1}{12} \text{---} \textcircled{O} + O(g_0^2). \quad (2.73)$$

Die Amplitude  $\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_+ \rangle$  bekommt man entsprechend durch Aufsummation aller Beiträge  $\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_+ \rangle_{(n)}$  für gerade  $n$  einschließlich der Null:

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | e^{-TH} | 0_+ \rangle &= \sum_{\substack{n=0 \text{ oder} \\ n \text{ gerade}}} \langle 0_+ | e^{-TH} | 0_+ \rangle_{(n)} \\ &= \sum_{\substack{n=0 \text{ oder} \\ n \text{ gerade}}} \frac{(TK e^{-S_c})^n}{n!} \mathcal{N} (\det \mathbb{M}_{(0)})^{-\frac{1}{2}} \text{OI} \\ &= \mathcal{N} (\det \mathbb{M}_{(0)})^{-\frac{1}{2}} \cosh (TK e^{-S_c}) \text{OI} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{N} (\det \mathbb{M}_{(0)})^{-\frac{1}{2}} [e^{TK e^{-S_c}} + e^{-TK e^{-S_c}}] \text{OI}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Durch Quotientenbildung findet man:

$$\begin{aligned} \frac{\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_- \rangle}{\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_+ \rangle} &= \frac{e^{TKe^{-S_c}} - e^{-TKe^{-S_c}}}{e^{TKe^{-S_c}} + e^{-TKe^{-S_c}}} \\ &= \frac{1 - e^{-2Ke^{-S_c} T}}{1 + e^{-2Ke^{-S_c} T}}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Vergleicht man dies mit Gl. (2.11), ergibt sich daher unmittelbar die Energieaufspaltung  $E_{0a}$ :

$$\begin{aligned} E_{0a} &= 2 K e^{-S_c} \\ &= 2 \sqrt{\frac{S_c}{2\pi}} e^{-S_c} \left( \frac{\det' \mathbb{M}_{(1)}}{\det \mathbb{M}_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{2} + \frac{1}{8} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{8} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} \right] + O(g_0^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Da die Graphen, wie gesagt, von der Ordnung  $g_0$  sind, gilt weiterhin

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{2} + \frac{1}{8} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \right] + \frac{1}{8} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} \right] \\ + \frac{1}{12} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} \right] + O(g_0^2) \\ = \exp \left\{ \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{2} + \frac{1}{8} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} \right] + \frac{1}{12} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} \right] + O(g_0^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Daher ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} E_{0a} &= 2 \sqrt{\frac{S_c}{2\pi}} \left( \frac{\det' \mathbb{M}_{(1)}}{\det \mathbb{M}_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp \left\{ -S_c + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{1} \text{---} \textcircled{2} + \frac{1}{8} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{8} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} \right] + \frac{1}{12} \left[ \textcircled{1}\textcircled{2} \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} - (\textcircled{1}\textcircled{2}) \text{---} \textcircled{1}\textcircled{2} \right] \\ &\quad \left. + O(g_0^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Dies ist nun die auszuwertende Formel für die Energieaufspaltung in  $D = 3$  Dimensionen. Um die Energieaufspaltung allgemeiner für  $D$  Dimensionen zu erhalten ist in dieser

Gleichung einfach  $S_c$  durch  $S_{c,D}$  zu ersetzen, und bei der Graphenberechnung sind der Propagator in  $D$  Dimensionen sowie die Kopplungskonstante  $g_0^{(D)}$  zu verwenden. Außerdem ist bei den Feynman–Regeln statt mit  $\int d^3x \dots$  mit  $\int d^Dx \dots$  zu integrieren und das Determinantenverhältnis in  $D$  Dimensionen zu bilden, das heißt, in den Definitionen von  $\mathbb{M}_{(1)}$  und  $\mathbb{M}_{(0)}$ ,  $\Delta^{(D)}$  statt  $\Delta^{(3)}$  zu verwenden.

Es sei noch angemerkt, daß man mit den Ergebnissen dieses Kapitels die Formel für die Energieaufspaltung,

$$\begin{aligned} E_{0a} &= A e^{-\sigma(L)L^2} \\ \implies \sigma(L)L^2 &= -\log E_{0a} + \log A \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\implies \sigma_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{L^2} \log E_{0a} \right\} \quad (2.80)$$

plausibel machen kann;  $\sigma_\infty$  ist die Oberflächenspannung bei unendlicher Grenzfläche. Wie in der Einleitung gemäß Gl. (1.5) beschrieben, erhält man die Oberflächenspannung  $\sigma_\infty$  folgendermaßen aus der freien Energie des Systems mit Grenzfläche ( $F_{+-}$ ) und ohne Grenzfläche ( $F_{++}$ ),  $k_B$  ist die Boltzmann–Konstante,  $T$  die Temperatur,

$$\begin{aligned} \sigma_\infty &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \frac{F_{+-} - F_{++}}{k_B T L^2} \right\} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{L^2} \log \frac{Z_{+-}}{Z_{++}} \right\}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

mit

$$Z_{+-} : \text{Zustandssumme mit Randbedingungen, die eine Grenzfläche erzeugen,} \quad (2.82)$$

$$Z_{++} : \text{Zustandssumme mit Randbedingungen, die eine Grenzfläche nicht begünstigen.} \quad (2.83)$$

Die Kink–Konfiguration entspricht nun gerade dem Vorhandensein einer Grenzfläche ( $\phi_{(c,0)}(-\infty) = -v_0$ ,  $\phi_{(c,0)}(\infty) = v_0 \curvearrowright$  Grenzfläche um  $x_0 = 0$ ) und

$$\int \mathcal{D}\eta e^{-S[\phi_{(c,0)} + \eta]}$$

kann als zugehörige Zustandssumme  $Z_{+-}$  betrachtet werden. Die Temperaturabhängigkeit steckt hier wie in der gewöhnlichen Landau–Theorie in der Temperaturabhängigkeit der Parameter  $m_0$  und  $g_0$  der Theorie, vgl. auch [5, Abschnitt II A]. Analog gilt dann

$$Z_{++} = \int \mathcal{D}\eta e^{-S[\phi_{+} + \eta]}. \quad (2.84)$$

Mit den Resultaten (2.60) und (2.67) für  $n = 0$  folgt dann

$$\begin{aligned} \sigma_\infty &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{L^2} \log \frac{Z_{+-}}{Z_{++}} \right\} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{L^2} \log \left[ T \sqrt{\frac{S_c}{2\pi}} e^{-S_c} \left( \frac{\det' \mathbb{M}_{(1)}}{\det \mathbb{M}_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1 + \frac{1}{2} \text{---} \circlearrowleft + \frac{1}{8} \circlearrowleft \circlearrowleft + \frac{1}{8} \circlearrowleft \text{---} \circlearrowleft + \frac{1}{12} \text{---} \text{---} \circlearrowleft + O(g_0^2)}{1 + \frac{1}{8} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{8} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{12} \text{---} \text{---} \text{---} + O(g_0^2)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Indem man den Bruch mit den Graphen erneut in eine Reihe nach Potenzen von  $g_0$  entwickelt und Terme, die für  $L \rightarrow \infty$  verschwinden, fortläßt, liefert das

$$\begin{aligned} \sigma_\infty &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{L^2} \log \left[ \sqrt{\frac{S_c}{2\pi}} e^{-S_c} \left( \frac{\det' M_{(1)}}{\det M_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right. \right. \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \times \end{array} \right. + \frac{1}{8} \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \\ &\quad + \frac{1}{8} \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \times \\ \times \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] + \frac{1}{12} \left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \times \\ \times \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \\ &\quad \left. \left. + O(g_0^2) \right\} \right] \right\} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{1}{L^2} \log E_{0a} \right\} \end{aligned} \quad (2.86)$$

(vgl. Gl. (2.76)). Der Faktor 2 in Gl. (2.76) ist, wie schon der Faktor  $T$  in Gl. (2.85), wegen der Limesbildung  $L \rightarrow \infty$  unwesentlich.

Die Gl. (2.86) entspricht dem Resultat (2.80). Um  $\sigma(L)$ , also die Oberflächenspannung bei endlicher Grenzfläche zu erhalten, ist im Sinne dieser Überlegungen

$$-\frac{1}{L^2} (\log E_{0a})_{L^2} \quad (2.87)$$

zu bilden, wobei  $(\log E_{0a})_{L^2}$  den Teil von  $\log E_{0a}$  bezeichnet, der einen Faktor  $L^2$  enthält. Dieses Vorgehen entspricht gerade der Beziehung

$$E_{0a} = A e^{-\sigma(L)L^2}.$$

Im folgenden werden zuerst die Propagatoren  $G_0(x, y)$  und  $G(x, y)$  genauer bestimmt. Danach wird das Determinantenverhältnis  $\left( \frac{\det' M_{(1)}}{\det M_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}}$  berechnet, bevor im Anschluß daran die eigentliche 2-Loop-Rechnung durchgeführt wird, indem die verschiedenen Graphen bestimmt werden.

# Kapitel 3

## Greensche Funktionen

Im vorigen Kapitel ist hergeleitet worden, welche Graphen in 2–Loop–Ordnung zur Energieaufspaltung beitragen. Um diese Feynman–Diagramme tatsächlich auszurechnen, ist es nötig, zunächst die Propagatoren  $G_0(x, y)$  ohne und  $G(x, y)$  mit Instantonhintergrundfeld zu bestimmen. Dies soll in diesem Kapitel geschehen. Da bei der Graphenberechnung Divergenzen auftauchen werden, die dimensionell regularisiert werden sollen, werden die Greenschen Funktionen gleich in  $D$  Dimensionen bestimmt, und zwar in  $D - 1$  Raumdimensionen, die sich jeweils endlich von 0 bis  $L$  erstrecken, und einer unendlich ausgedehnten Zeitdimension.

### 3.1 Greensche Funktion ohne Instantonhintergrundfeld

Die Greensche Funktion ohne Instantonhintergrundfeld ist der Operatorkern des inversen Operators zu

$$\mathbb{M}_{(0)} = -\Delta^{(D)} + m_0^2. \quad (3.1)$$

Eigenwerte und Eigenfunktionen von  $\mathbb{M}_{(0)}$  erkennt man für die betrachtete Geometrie unmittelbar:

$$\begin{aligned} \text{Eigenwerte: } & \frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 + p^2 + m_0^2, \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}, p \in \mathbb{R}, & (3.2) \\ \text{zugeh. Eigenfunktionen: } & \frac{1}{L^{\frac{D-1}{2}}} e^{i\frac{2\pi}{L}\vec{n}\cdot\vec{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx_0}, \\ & x = (\vec{x}, x_0), \vec{x} \in [0, L]^{D-1}, x_0 \in \mathbb{R}. & (3.3) \end{aligned}$$

Damit ist die Greensche Funktion  $G_0(x, y) = \langle x | \mathbb{M}_{(0)}^{-1} | y \rangle$  mittels der Spektraldarstellung durch

$$G_0(x, y) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 + p^2 + m_0^2} \frac{1}{L^{D-1}} \frac{1}{2\pi} e^{i\frac{2\pi}{L}\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} e^{ip(x_0-y_0)} \quad (3.4)$$

gegeben, oder aber mit der Schwingerschen Parametrisierung auch durch

$$G_0(x, y) = \int_0^{\infty} dt \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L}\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)t} e^{ip(x_0-y_0)}. \quad (3.5)$$

Man sieht insbesondere, daß  $G_0(x, y)$  nur von der Differenz  $x - y$  der Argumente abhängt. Da der Raumbereich, nämlich  $L^{D-1}$ , beschränkt ist, ergibt dies bei Integration über die Raumdimensionen keine Probleme. Bei Auswertung der Graphen wird aber auch über die ganze Zeitachse, Variable  $x_0$  bzw.  $y_0$ , zu integrieren sein, so daß hier Divergenzen auftreten werden, denn es kommen Integrale wie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 f \quad (3.6)$$

mit von  $x_0$  unabhängigem Integranden  $f$  vor. Dies sind Divergenzen, die für große  $x_0$ -Werte entstehen. Im Impulsraum entspricht dies kleinen Werten der zugehörigen Impulse. Es handelt sich also um Infrarot-Divergenzen. Hier wird zunächst zur Regularisierung ein Cutoff eingeführt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \rightarrow \int_{-\frac{1}{2}\hat{T}}^{\frac{1}{2}\hat{T}} dx_0 = \hat{T}. \quad (3.7)$$

Bei Betrachtung der Greenschen Funktion  $G(x, y)$  mit Instantonhintergrundfeld wird sich zeigen, daß diese für  $x_0, y_0 \rightarrow \pm\infty$  dasselbe asymptotische Verhalten wie  $G_0(x, y)$  aufweist, so daß bei den Graphen mit Instantonhintergrund dieselben Infrarot-Divergenzen, im folgenden gelegentlich auch kurz  $\hat{T}$ -Divergenzen genannt, auftreten. Zur Berechnung der Energieaufspaltung wird jedoch die Differenz der Graphen mit und ohne Instantonhintergrund benötigt (vgl. Kapitel 2), so daß sich die Infrarot-Divergenzen wegheben werden.

Um die Greensche Funktion mit Instantonhintergrundfeld zu bestimmen, ist der Fluktuationsooperator

$$\mathbb{M}_{(1)} = -\Delta^{(D)} + m_0^2 - \frac{3}{2} \frac{m_0^2}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} \quad (3.8)$$

hinsichtlich Eigenfunktionen und Eigenwerten zu untersuchen, was im folgenden Abschnitt geschehen soll.

## 3.2 Eigenschaften des Fluktuationsooperators mit Instantonhintergrundfeld

Der zu untersuchende Fluktuationsooperator

$$\mathbb{M}_{(1)} = -\Delta^{(D)} + m_0^2 - \frac{3}{2} \frac{m_0^2}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} \quad (3.9)$$

tritt bei unterschiedlichen physikalischen Problemen auf und ist recht gut untersucht [51, 52, 53, 54, 55]. Zunächst sieht man, daß sich  $\mathbb{M}_{(1)}$  als Summe eines nur ortsabhängigen Operators  $-\Delta^{(D-1)}$  und eines nur zeitabhängigen Operators  $\tilde{\mathbb{M}}$  schreiben läßt:

$$\mathbb{M}_{(1)} = -\Delta^{(D-1)} + \tilde{\mathbb{M}}, \quad (3.10)$$

mit

$$\tilde{\mathbb{M}} := -\partial_0^2 + m_0^2 - \frac{3}{2} \frac{m_0^2}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}. \quad (3.11)$$

Ich betrachte zuerst den ortsabhängigen Teil. Im weiteren findet folgende Bezeichnungsweise Verwendung (Ortsraumdarstellung):

$$\begin{aligned} \text{Eigenfunktionen von } -\Delta^{(D-1)} &: \langle \vec{x} | \vec{q} \rangle, \\ \text{Eigenfunktionen von } \tilde{\mathbf{M}} &: \langle x_0 | k \rangle, \\ \text{Eigenfunktionen von } \mathbf{M}_{(1)} &: \langle x | \vec{q} k \rangle. \end{aligned}$$

### 3.2.1 Spektrum von $-\Delta^{(D-1)}$

Es ist zu beachten, daß eine Theorie mit endlichem räumlichem Volumen betrachtet wird. Die  $x_i$ -Koordinaten ( $i = 1 \dots D-1$ ) können jeweils nur Werte im Intervall  $[0, L]$  annehmen. Als Spektrum des Operators  $-\Delta^{(D-1)}$  erhält man somit:

$$\text{Eigenwerte: } \vec{q}^2, \quad \vec{q} = \frac{2\pi}{L} \vec{n}, \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}, \quad (3.12)$$

$$\text{zugeh. Eigenfunktionen: } \langle \vec{x} | \vec{q} \rangle = \frac{1}{L^{\frac{D-1}{2}}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}}, \quad \vec{x} \in [0, L]^{D-1}. \quad (3.13)$$

Aus der Theorie der Fourierreihen folgt die Vollständigkeit und Orthonormalität dieser Eigenfunktionen auf dem Raum der auf  $[0, L]^{D-1}$  definierten, stückweise stetig differenzierbaren Funktionen. Jetzt zum nur zeitabhängigen Operator  $\tilde{\mathbf{M}}$ .

### 3.2.2 Spektrum von $\tilde{\mathbf{M}}$

Die Bestimmung des Spektrums von  $\tilde{\mathbf{M}}$  entspricht dem folgenden Eigenwertproblem:

$$\begin{aligned} & \left\{ -\partial_0^2 + m_0^2 - \frac{3}{2} \frac{m_0^2}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right\} \phi(x_0) = \lambda \phi(x_0) \quad (3.14) \\ \iff & \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \partial_0^2 + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( m_0^2 - \frac{3}{2} \frac{m_0^2}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right) \right\} \phi(x_0) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \lambda \phi(x_0) \\ \iff & \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \partial_0^2 + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2} x_0) - \frac{m_0^2}{2} \right) \right\} \phi(x_0) = \frac{\hbar^2}{2m_0} \lambda \phi(x_0) \\ \iff & \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \partial_0^2 + \underbrace{\frac{3\hbar^2 m_0}{4} \tanh^2(\frac{m_0}{2} x_0)}_{=: E} \right\} \phi(x_0) = \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \lambda + \frac{m_0^2}{2} \right)}_{=: E} \phi(x_0). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Man beachte hierbei den Zusammenhang

$$\tanh^2(\frac{m_0}{2} x_0) = 1 - \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)}; \quad (3.16)$$

ein Sachverhalt der wegen  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$  leicht folgt. Gl. (3.15) ist analog zu einem quantenmechanischen Eigenwertproblem mit dem Potential

$$V(x_0) = \frac{3\hbar^2 m_0}{4} \tanh^2(\frac{m_0}{2} x_0). \quad (3.17)$$

Ein solches Problem wird in [56] behandelt. Das Potential dort lautet

$$V(x_0) = V_0 \cosh^2 \mu \left\{ \tanh\left(\frac{x_0 - \mu d}{d}\right) + \tanh \mu \right\}^2, \quad (3.18)$$

so daß sich das Potential (3.17) durch folgende Parameterwahl ergibt:

$$\mu = 0, \quad (3.19)$$

$$V_0 = \frac{3\hbar^2 m_0}{4}, \quad (3.20)$$

$$d = \frac{2}{m_0}. \quad (3.21)$$

Berücksichtigt man dies und die Umskalierung bzw. Verschiebung der Eigenwerte in Gl. (3.15), also den Zusammenhang zwischen  $E$  und  $\lambda$ , so findet man für das ursprünglich zu lösende Problem (3.14) zwei diskrete Eigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen:

$$\lambda_0 = 0, \quad \langle x_0 | 0 \rangle = \frac{N_0}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)}, \quad (3.22)$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{4} m_0^2, \quad \langle x_0 | 1 \rangle = N_1 \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0)}, \quad (3.23)$$

wobei  $N_0$  und  $N_1$  Normierungskonstanten sind. Diese Normierungskonstanten bestimmt man durch gewöhnliche Integration wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle x_0 | 0 \rangle|^2 dx_0 &= |N_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{1}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} \\ &= \frac{2 |N_0|^2}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\cosh^4(u)} \\ &= \frac{2 |N_0|^2}{m_0} B(\frac{1}{2}, 2) \quad [47, 3.512.2] \\ &= \frac{2}{m_0} |N_0|^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{2}{m_0} |N_0|^2 \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Um  $\langle x_0 | 0 \rangle$  zu normieren, ist also  $|N_0| = \sqrt{\frac{3}{8} m_0}$  zu wählen. Da die Phase von  $N_0$  physikalisch keine Rolle spielt, kann man ohne Einschränkung

$$N_0 = \sqrt{\frac{3m_0}{8}} \quad (3.24)$$

wählen. Zur Bestimmung von  $N_1$  rechnet man entsprechend:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle x_0 | 1 \rangle|^2 dx_0 &= |N_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{\tanh^2(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \\ &= \frac{2 |N_1|^2}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\sinh^2(u)}{\cosh^4(u)} \\ &= \frac{2 |N_1|^2}{m_0} B(\frac{3}{2}, 1) \quad [47, 3.512.2] \\ &= \frac{2}{m_0} |N_1|^2 \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(1)}{\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{2}{m_0} |N_0|^2 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Hier ist also, unter Vernachlässigung einer irrelevanten Phase,

$$N_1 = \sqrt{\frac{3m_0}{4}} \quad (3.25)$$

zu wählen, so daß man folgendes diskretes Spektrum von  $\tilde{M}$  mit den zugehörigen normierten Eigenfunktionen erhält:

$$\lambda_0 = 0, \quad \langle x_0 | 0 \rangle = \sqrt{\frac{3m_0}{8}} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}, \quad (3.26)$$

$$\lambda_1 = \frac{3}{4} m_0^2, \quad \langle x_0 | 1 \rangle = \sqrt{\frac{3m_0}{4}} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)}. \quad (3.27)$$

Als kontinuierliches Spektrum bekommt man aus der Behandlung des Problemes in [56] mit der obigen Parameterwahl (Gln. (3.19) – (3.21)) die Eigenwerte

$$\lambda_k = m_0^2 + k^2, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.28)$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen sind hypergeometrische Funktionen. Für die weitere Rechnung erweist sich jedoch folgende Form der Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums als günstiger [5]:

$$\lambda_k = m_0^2 + k^2, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (3.29)$$

$$\langle x_0 | k \rangle = N_k e^{ikx_0} \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) + 3im_0k \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \right]. \quad (3.30)$$

$N_k$  ist eine Normierungskonstante. Natürlich müssen auch in diesem Fall die Parameter in [5] so gewählt werden, daß die in Kapitel 2 definierte Theorie entsteht ( $r = -\frac{m_0^2}{2}$ ,  $u = \frac{g_0}{24}$ ,  $u$  und  $r$  sind Parameter, die in [5] verwendet werden). Um nun im folgenden die Greensche Funktion des Operators  $M_1$  und die für die Energieaufspaltung wichtigen Graphen berechnen zu können, ist es zunächst nötig, den Normierungsfaktor  $N_k$  für die Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums zu bestimmen.

### Bestimmung des Normierungsfaktors $N_k$

Der Normierungsfaktor  $N_k$  soll so bestimmt werden, daß die zugehörigen Eigenfunktionen  $|k\rangle$  auf  $\delta$ -Funktionen normiert sind:

$$\langle k | k' \rangle = \delta(k - k'), \quad (3.31)$$

denn es handelt sich um einen Normierungsfaktor für die (uneigentlichen) Eigenfunktionen des kontinuierlichen Teils des Spektrums von  $\tilde{M}$ . Also soll gelten:

$$\langle k | k' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \langle k | x_0 \rangle \langle x_0 | k' \rangle = \delta(k - k'). \quad (3.32)$$

Man setzt nun die konkrete Gestalt von  $\langle x_0 | k \rangle$ ,

$$\langle x_0 | k \rangle = N_k e^{ikx_0} \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) + 3im_0k \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \right], \quad (3.33)$$

in Gl. (3.32) ein. Das ergibt

$$\begin{aligned} \langle k | k' \rangle &= N_k^* N_{k'} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left\{ \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) - 3im_0k \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left[ 2k'^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) + 3im_0k' \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \right] e^{i(k'-k)x_0} \right\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Durch Ausmultiplizieren und Ordnen nach Potenzen von  $\tanh(\frac{m_0}{2}x_0)$  findet man:

$$\begin{aligned}
 \langle k | k' \rangle &= N_k^* N_{k'} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left( 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} \right) \left( 2k'^2 + \frac{m_0^2}{2} \right) e^{i(k'-k)x_0} \right. \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 i \left( 6m_0 k^2 k' - 6m_0 k k'^2 + \frac{3}{2} m_0^3 k' - \frac{3}{2} m_0^3 k \right) \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) e^{i(k'-k)x_0} \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left( -3m_0^2 k^2 - 3m_0^2 k'^2 - \frac{3}{2} m_0^4 + 9m_0^2 k k' \right) \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) e^{i(k'-k)x_0} \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 i \left( -\frac{9}{2} m_0^3 k' + \frac{9}{2} m_0^3 k \right) \tanh^3(\frac{m_0}{2}x_0) e^{i(k'-k)x_0} \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{9}{4} m_0^4 \tanh^4(\frac{m_0}{2}x_0) e^{i(k'-k)x_0} \right\} \\
 &= N_k^* N_{k'} \left\{ 2\pi \left( 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} \right)^2 \delta(k - k') \right. \\
 &\quad + \frac{3}{2} i m_0 \left( 4k^2 k' - 4k' k^2 + m_0^2 k' - m_0^2 k \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) e^{i(k'-k)x_0} \\
 &\quad + \frac{3}{2} m_0^2 \left( -2k^2 - 2k'^2 - m_0^2 + 6k k' \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) e^{i(k'-k)x_0} \\
 &\quad + \frac{9}{2} i m_0^3 (-k' + k) \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh^3(\frac{m_0}{2}x_0) e^{i(k'-k)x_0} \\
 &\quad \left. + \frac{9}{4} m_0^4 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh^4(\frac{m_0}{2}x_0) e^{i(k'-k)x_0} \right\}. \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

Natürlich existieren die verbleibenden Integrale nicht im gewöhnlichen Lebesgueschen Sinne, sondern sie sind im Distributionssinn zu verstehen. Außerdem wurde die bekannte Formel

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{i(k'-k)x_0} = \delta(k - k') \tag{3.36}$$

benutzt, z.B. [57, Gl. (7.19)], die auch im folgenden angewendet werden wird.

Es ist nun nützlich  $\tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0)$  gemäß Gl. (3.16) durch  $\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)$  zu ersetzen. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
 \langle k | k' \rangle &= N_k^* N_{k'} \left\{ 2\pi \left( 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} \right)^2 \delta(k - k') \right. \\
 &\quad + \frac{3}{2} i m_0 \left( 4k^2 k' - 4k' k^2 + m_0^2 k' - m_0^2 k \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) e^{i(k'-k)x_0} \\
 &\quad + \frac{3}{2} m_0^2 \left( -2k^2 - 2k'^2 - m_0^2 + 6k k' \right) \\
 &\quad \times \left( 2\pi \delta(k - k') - \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{e^{i(k'-k)x_0}}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} \right) \\
 &\quad + \frac{9}{2} i m_0^3 (k - k') \\
 &\quad \times \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) e^{i(k'-k)x_0} - \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{\tanh(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} e^{i(k'-k)x_0} \right) \\
 &\quad \left. + \frac{9}{4} m_0^4 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left( 1 - \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} \right)^2 e^{i(k'-k)x_0} \right\}. \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen gleicher Integraltypen ergibt das

$$\begin{aligned}
 \langle k | k' \rangle &= N_k^* N_{k'} \left\{ \left[ \left( 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} m_0^2 (-2k^2 - 2k'^2 - m_0^2 + 6kk') + \frac{9}{4} m_0^4 \right] \right. \\
 &\quad \times 2\pi \delta(k - k') \\
 &+ \left[ \frac{3}{2} im_0 (4k^2 k' - 4kk'^2 + m_0^2 k' - m_0^2 k) + \frac{9}{2} im_0^3 (k - k') \right] \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) e^{i(k'-k)x_0} \\
 &- \frac{9}{2} im_0^3 (k - k') \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} e^{i(k'-k)x_0} \\
 &+ \left[ -\frac{3}{2} m_0^2 (-2k^2 - 2k'^2 - m_0^2 + 6kk') - \frac{9}{2} m_0^4 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{e^{i(k'-k)x_0}}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \\
 &\left. + \frac{9}{4} m_0^4 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{e^{i(k'-k)x_0}}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} \right\}. \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

Die jetzt noch auftretenden Integrale werden einzeln untersucht. Diejenigen Integrale, die eine positive Potenz von  $\frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)}$  enthalten, existieren im gewöhnlichen Lebesgueschen Sinne. Sie sind von einem Typ, der später noch öfter auftreten wird. Die Berechnung ist deshalb im Anhang B.1 durchgeführt, hier seien nur die Ergebnisse angegeben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} e^{i(k'-k)x_0} = \frac{4\pi i (k' - k)^2}{m_0^3 \sinh(\frac{k'-k}{m_0} \pi)}, \tag{3.39}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{e^{i(k'-k)x_0}}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} = \frac{4\pi (k' - k)}{m_0^2 \sinh(\frac{k'-k}{m_0} \pi)}, \tag{3.40}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{e^{i(k'-k)x_0}}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} = \frac{8(k' - k)}{3m_0^2} \left( 1 + \frac{(k' - k)^2}{m_0^2} \right) \frac{\pi}{\sinh(\frac{k'-k}{m_0} \pi)}. \tag{3.41}$$

Als verbleibendes divergentes und daher im Distributionssinn auszuwertendes Integral ist jetzt noch  $\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) e^{i(k'-k)x_0}$  zu betrachten. Die Berechnung ist etwas umfangreicher und ist deshalb im Anhang B.2 ausgeführt. Hier soll wieder nur das Ergebnis angeführt werden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) e^{i(k'-k)x_0} = \frac{2\pi i}{m_0 \sinh(\frac{k'-k}{m_0} \pi)}. \tag{3.42}$$

Faßt man jetzt alle Teilergebnisse zusammen, so läßt sich  $N_k$  ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \langle k | k' \rangle &= N_k^* N_{k'} \left\{ 2\pi \delta(k - k') \left[ \left( 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} \right)^2 + 3m_0^2 \left( k^2 + \frac{m_0^2}{4} \right) \right] \right. \\
 &+ \frac{3}{2} im_0 \underbrace{(4k^2 k' - 4kk'^2 - 2m_0^2 k' + 2m_0^2 k)}_{=(k'-k)(-4kk' - 2m_0^2)} \frac{2\pi i}{m_0 \sinh(\frac{k'-k}{m_0} \pi)} \\
 &+ \frac{9}{2} im_0^3 (k' - k) \frac{4\pi i (k' - k)^2}{m_0^3 \sinh(\frac{k'-k}{m_0} \pi)} \\
 &+ \frac{3}{2} m_0^2 (2k^2 + 2k'^2 - 2m_0^2 - 6kk') \frac{4\pi (k' - k)}{m_0^2 \sinh(\frac{k'-k}{m_0} \pi)} \\
 &\left. + \frac{9}{4} m_0^4 \frac{8(k' - k)}{3m_0^2} \left( 1 + \frac{(k' - k)^2}{m_0^2} \right) \frac{\pi}{\sinh(\frac{k'-k}{m_0} \pi)} \right\}. \tag{3.43}
 \end{aligned}$$

Das vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}
 \langle k | k' \rangle &= N_k^* N_{k'} \left\{ 2\pi \delta(k - k') \left[ \left(2k^2 + \frac{m_0^2}{2}\right)^2 + 3m_0^2 \left(k^2 + \frac{m_0^2}{4}\right) \right] \right. \\
 &\quad + \frac{\pi(k' - k)}{\sinh(\frac{k'-k}{m_0}\pi)} \underbrace{\left[ 12kk' + 6m_0^2 - 18(k' - k)^2 + 12k^2 + 12k'^2 - 12m_0^2 - 36kk' + 6(m_0^2 + (k' - k)^2) \right]}_{=0} \Bigg\} \\
 &= |N_k|^2 2\pi \left[ 4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4 \right] \delta(k - k'). \tag{3.44}
 \end{aligned}$$

Wegen  $\langle k | k' \rangle = \delta(k - k')$  wählt man also, erneut ist eine bedeutungslose Phase unterdrückt,

$$N_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi(4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)}}. \tag{3.45}$$

### 3.2.3 Gesamtes Spektrum des Fluktuationsooperators

Der Übersichtlichkeit halber sei hier jetzt noch einmal das gesamte Spektrum des Operators  $M_{(1)}$  dargestellt, wobei orts- und zeitabhängiger Teil, d.h. die Beiträge von  $-\Delta^{(D-1)}$  und  $\tilde{M}$ , zusammenzufassen sind:

#### diskretes Spektrum

$$\text{Eigenwert: } \lambda_{\vec{q}0} = \vec{q}^2, \quad \vec{q} = \frac{2\pi}{L} \vec{n}, \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}, \tag{3.46}$$

$$\text{zugeh. Eigenfunktion: } \langle x | \vec{q}0 \rangle = \frac{1}{L^{\frac{D-1}{2}}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \sqrt{\frac{3m_0}{8}} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}, \tag{3.47}$$

$$\text{Eigenwert: } \lambda_{\vec{q}1} = \vec{q}^2 + \frac{3}{4}m_0^2, \tag{3.48}$$

$$\text{zugeh. Eigenfunktion: } \langle x | \vec{q}1 \rangle = \frac{1}{L^{\frac{D-1}{2}}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \sqrt{\frac{3m_0}{4}} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)}, \tag{3.49}$$

#### kontinuierliches Spektrum

$$\text{Eigenwert: } \lambda_{\vec{q}k} = \vec{q}^2 + m_0^2 + k^2, \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
 \text{zugeh. Eigenfunktion: } \langle x | \vec{q}k \rangle &= \frac{1}{L^{\frac{D-1}{2}}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} N_k e^{ikx_0} \\
 &\quad \times \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) + 3im_0 k \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \right], \tag{3.51}
 \end{aligned}$$

$$\text{mit } N_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi(4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)}}. \tag{3.52}$$

### 3.3 Greensche Funktion mit Instantonhintergrundfeld

#### 3.3.1 Bestimmung der Greenschen Funktion mit Instantonhintergrundfeld

Da nun das Spektrum von  $\mathbb{M}_{(1)}$  bekannt ist, kann die Greensche Funktion  $G(x, y)$  mit Instantonhintergrundfeld bestimmt werden. Hierunter ist der Operatorkern des Inversen des Operators  $\mathbb{M}_{(1)}$  zu verstehen:

$$\mathbb{M}_{(1)} = -\Delta^{(D-1)} - \partial_0^2 + m_0^2 - \frac{3}{2} \frac{m_0^2}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}. \quad (3.53)$$

Da  $\mathbb{M}_{(1)}$ , wie im vorigen Abschnitt gezeigt, den (nicht entarteten) Eigenwert 0 besitzt, existiert der zu  $\mathbb{M}_{(1)}$  inverse Operator erst nachdem man  $\mathbb{M}_{(1)}$  auf den zu dem von der Nullmode aufgespannten Raum  $N$  orthogonalen Raum  $N^\perp$  eingeschränkt hat. Genauer ist also unter der Greenschen Funktion  $G(x, y)$  das folgende Objekt zu verstehen:

$$G(x, y) = \langle x | (\mathbb{M}_{(1)}|_{N^\perp})^{-1} | y \rangle. \quad (3.54)$$

Die gesuchte Greensche Funktion lässt sich mit Hilfe der Schwingerschen Parameterdarstellung wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \langle x | (\mathbb{M}_{(1)}|_{N^\perp})^{-1} | y \rangle \\ &= \int_0^\infty dt \langle x | \exp \{-\mathbb{M}' t\} | y \rangle, \end{aligned} \quad (3.55)$$

mit der Definition

$$\mathbb{M}' := (\mathbb{M}_{(1)}|_{N^\perp})^{-1}. \quad (3.56)$$

Nun hat man die folgende Spektraldarstellung von  $\mathbb{M}'$ . Der Übersichtlichkeit halber werde dabei mit  $|\tilde{k}\rangle$  einfach eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren mit Eigenwerten  $\lambda_{\tilde{k}}$  von  $\mathbb{M}_{(1)}$  bezeichnet,  $|\vec{0}0\rangle$  sei die (normierte) Nullmode von  $\mathbb{M}_{(1)}$ . Für das kontinuierliche Spektrum ist jeweils in den folgenden Gleichungen ein Integral statt des Summenzeichens zu denken:

$$\mathbb{M}_{(1)} = \sum_{\tilde{k}} \lambda_{\tilde{k}} |\tilde{k}\rangle \langle \tilde{k}| \quad (3.57)$$

$$\Rightarrow \mathbb{M}' = \sum_{\tilde{k} \neq \vec{0}0} \frac{1}{\lambda_{\tilde{k}}} |\tilde{k}\rangle \langle \tilde{k}| \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(x, y) &= \langle x | \mathbb{M}' | y \rangle \\ &= \sum_{\tilde{k} \neq \vec{0}0} \frac{1}{\lambda_{\tilde{k}}} \langle x | \tilde{k} \rangle \langle \tilde{k} | y \rangle \\ &= \int_0^\infty dt \sum_{\tilde{k} \neq \vec{0}0} e^{-\lambda_{\tilde{k}} t} \langle x | \tilde{k} \rangle \langle \tilde{k} | y \rangle \\ &= \int_0^\infty dt \left( \sum_{\tilde{k}} e^{-\lambda_{\tilde{k}} t} \langle x | \tilde{k} \rangle \langle \tilde{k} | y \rangle - \langle x | \vec{0}0 \rangle \langle \vec{0}0 | y \rangle \right) \\ &= \int_0^\infty dt \left( \langle x | \exp \{ -\mathbb{M}_{(1)} t \} | y \rangle - \langle x | \vec{0}0 \rangle \langle \vec{0}0 | y \rangle \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Mit dem in Abschnitt 3.2.3 gewonnenen Spektrum von  $\mathbb{M}_{(1)}$  läßt sich nun  $G(x, y)$  berechnen. Zunächst betrachtet man den Integranden des  $t$ -Integrals in Gl. (3.59). Dazu ist es auch hier nützlich sowohl den Operator  $\mathbb{M}_{(1)}$  als auch die Hilbertraumvektoren  $|x\rangle, |y\rangle$  in orts- bzw. zeitabhängige Anteile zu zerlegen:

$$|x\rangle = |\vec{x}\rangle |x_0\rangle, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_{D-1}), \quad (3.60)$$

$$\mathbb{M}_{(1)} = -\Delta^{(D-1)} + \tilde{\mathbb{M}}, \quad (3.61)$$

$$\tilde{\mathbb{M}} = -\partial_0^2 + m_0^2 - \frac{3}{2} \frac{m_0^2}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)}. \quad (3.62)$$

Indem man also das Spektrum von  $\mathbb{M}_{(1)}$  einsetzt und beachtet, daß die Nullmode nicht von den Raumkoordinaten abhängt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle x | \exp \{-\mathbb{M}_{(1)} t\} | y \rangle &= \langle \vec{x} | e^{\Delta^{(D-1)} t} | \vec{y} \rangle \langle x_0 | \exp \{-\tilde{\mathbb{M}} t\} | y_0 \rangle - \frac{1}{L^{D-1}} \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle \\ &= \langle \vec{x} | e^{\Delta^{(D-1)} t} | \vec{y} \rangle \left\{ \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle + \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-(m_0^2 + k^2) t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \\ &\quad - \frac{1}{L^{D-1}} \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Im einzelnen gilt im endlichen Volumen, man vergleiche auch Abschnitt 3.2.1,

$$\langle \vec{x} | e^{\Delta^{(D-1)} t} | \vec{y} \rangle = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \quad (3.64)$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{D-1}{2}}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-(\frac{\vec{x}-\vec{y}}{L} - \vec{n})^2 \frac{L^2}{4t}}. \quad (3.65)$$

Die letzte Gleichung sieht man mit Hilfe der Poissonschen Summenformel ein, vgl. z.B. [58]. Weiter hat man gemäß den Gln. (3.26) und (3.27)

$$\langle x_0 | 0 \rangle = \sqrt{\frac{3m_0}{8}} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)}, \quad (3.66)$$

$$\langle x_0 | 1 \rangle = \sqrt{\frac{3m_0}{4}} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0)}. \quad (3.67)$$

Damit ergibt sich für den Integranden von Gl. (3.59)

$$\begin{aligned} \langle x | \exp \{-\mathbb{M}_{(1)} t\} | y \rangle &= \langle \vec{x} | e^{\Delta^{(D-1)} t} | \vec{y} \rangle \left\{ \frac{3m_0}{8} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3m_0}{4} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-(k^2 + m_0^2) t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \\ &\quad - \frac{1}{L^{D-1}} \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle. \end{aligned}$$

Ausmultipliziert gilt also, wenn  $\sum'$  die Summe über alle Indizes außer der 0 bezeichnet,

$$\begin{aligned} & \langle x | \exp \{ -\mathbb{M}_{(1)} t \} | y \rangle - \langle x | \vec{0} 0 \rangle \langle \vec{0} 0 | y \rangle \\ &= \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{3m_0}{8} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \\ &+ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{3m_0}{4} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \\ &+ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle, \end{aligned} \quad (3.68)$$

und für  $G(x, y)$  findet man

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_0^{\infty} dt \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{3m_0}{8} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \right. \\ &+ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{3m_0}{4} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \\ &\left. + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

mit (vgl. Gl. (3.30))

$$\langle x_0 | k \rangle = N_k e^{ikx_0} \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2} x_0) + 3 i m_0 k \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \right]$$

und

$$N_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi (4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)}}, \quad \vec{x}, \vec{y} \in [0, L]^{D-1}, \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R}.$$

Dies Ergebnis für  $G(x, y)$  kann benutzt werden, um das Resultat für die Normierungskonstante  $N_k$  (vgl. Gl. (3.45)) zu überprüfen. Dazu bemerkt man, daß wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{(1)} &= -\Delta^{(D)} + m_0^2 - \frac{3}{2} \frac{m_0^2}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \\ &\xrightarrow{x_0 \rightarrow \pm\infty} -\Delta^{(D)} + m_0^2 = \mathbb{M}_{(0)} \end{aligned} \quad (3.70)$$

für  $|x_0 - y_0| \rightarrow \infty$  gilt (für  $|x_0 - y_0| \rightarrow \infty$  hat man  $x_0 \rightarrow \infty$  oder  $y_0 \rightarrow \infty$ ):

$$\langle x | \mathbb{M}_{(1)} | y \rangle \longrightarrow \langle x | \mathbb{M}_{(0)} | y \rangle, \quad (3.71)$$

und daher folgt auch

$$G(x, y) = \langle x | \mathbb{M}' | y \rangle \longrightarrow \langle x | \mathbb{M}_{(0)}^{-1} | y \rangle = G_0(x, y). \quad (3.72)$$

Die Greenschen Funktionen mit und ohne Instantonhintergrundfeld sind also asymptotisch, für  $x_0 \rightarrow \infty$  oder  $y_0 \rightarrow \infty$ , gleich. Das ist auch nötig, damit bei der Berechnung der

Energieaufspaltung keine Infrarot-Divergenzen aus der  $x_0$ - bzw.  $y_0$ -Integration auftreten, man vergleiche auch die Bemerkung auf Seite 29.

Insbesondere erhält man für  $x_0 \rightarrow \infty$  und  $y_0 \rightarrow \infty$  aus Gl. (3.69) wegen  $\tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \rightarrow 1$  für  $x_0 \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} G(x, y) &\longrightarrow \int_0^\infty dt \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty dk \left\{ |N_k|^2 e^{-(k^2 + m_0^2)t} e^{ik(x_0 - y_0)} \right. \\ &\quad \times \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 + 3im_0 k \right] \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 - 3im_0 k \right] \left. \right\} \\ &= \int_0^\infty dt \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \\ &\quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty dk \left( 4k^4 + 5m_0^2k^2 + m_0^4 \right) |N_k|^2 e^{-(k^2 + m_0^2)t} e^{ik(x_0 - y_0)} \right\}. \quad (3.73) \end{aligned}$$

Wegen (vgl. Gl. (3.5))

$$\begin{aligned} G_0(x, y) &= \int_0^\infty dt \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \\ &\quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)t} e^{ip(x_0 - y_0)} \right\} \quad (3.74) \end{aligned}$$

folgt also

$$|N_k|^2 \left( 4k^4 + 5m_0^2k^2 + m_0^4 \right) = \frac{1}{2\pi}$$

und somit

$$|N_k| = \frac{1}{\sqrt{2\pi(4k^4 + 5m_0^2k^2 + m_0^4)}}, \quad (3.75)$$

was die vorige  $N_k$ -Bestimmung bestätigt. Mit Hilfe dieser Überlegung hätte man  $N_k$  auch direkt bestimmen können.

### 3.3.2 Analytischer Ausdruck für die Greensche Funktion

Obwohl bei der Graphenberechnung für  $G(x, y)$  die Form verwendet werden wird, wie sie in Gl. (3.69) erhalten worden ist, ist es interessant, daß man in Gl. (3.69) die  $t$ - und  $k$ -Integration und zum Teil auch die Reihensummationen noch ausführen kann, um einen analytischen Ausdruck für  $G(x, y)$  zu bekommen. Dies soll hier noch durchgeführt werden. Der Übersichtlichkeit halber wird nur der Fall  $D = 3$  betrachtet. Bis auf die Reihenbehandlung bringt der Fall für allgemeines  $D$  aber keine weiteren Schwierigkeiten.

Zunächst kann man Gl. (3.69) etwas anders schreiben:

$$\begin{aligned}
G(x, y) &= \int_0^\infty dt \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{L^2} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} \left\{ \frac{3m_0}{8} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \right. \right. \\
&\quad + \frac{3m_0}{4} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} + \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \Big\} \\
&\quad + \frac{1}{L^2} \frac{3m_0}{4} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \right. \\
&= \frac{1}{m_0 L^2} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} + \underbrace{\frac{1}{L^2} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{1}{k^2 + m_0^2} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle}_{=: S_1} \\
&\quad + \underbrace{\sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{L^2} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} \int_0^\infty dt \langle x_0 | \exp\{-i\tilde{M}t\} | y_0 \rangle e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t}}_{=: S_2}, \tag{3.76}
\end{aligned}$$

wegen

$$\begin{aligned}
\langle x_0 | \exp\{-i\tilde{M}t\} | y_0 \rangle &= \frac{3m_0}{8} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \\
&\quad + \frac{3m_0}{4} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \\
&\quad + \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle. \tag{3.77}
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke  $S_1$  und  $S_2$  werden nun getrennt untersucht. Zunächst zu  $S_1$ . Mit der expliziten Form der Funktionen

$$\begin{aligned}
\langle x_0 | k \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi (4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)}} e^{ikx_0} \\
&\times \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2} x_0) + 3im_0 k \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \right] \tag{3.78}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\langle k | y_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi (4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)}} e^{-iky_0} \\
&\times \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2} y_0) - 3im_0 k \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) \right] \tag{3.79}
\end{aligned}$$

(Abschnitt 3.2.2, Gl. (3.30)) folgt

$$\begin{aligned}
\langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle &= \frac{1}{2\pi (4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)} e^{ik(x_0 - y_0)} \\
&\times \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2} x_0) + 3im_0 k \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \right] \\
&\times \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2} y_0) - 3im_0 k \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) \right]. \tag{3.80}
\end{aligned}$$

Beachtet man nun die folgende Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(k^2 + m_0^2)(4k^4 + 5m_0^2k^2 + m_0^4)} = -\frac{4}{9m_0^4} \frac{1}{k^2 + m_0^2} + \frac{4}{9m_0^4} \frac{1}{k^2 + \frac{m_0^2}{4}} - \frac{1}{3m_0^2} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2}, \quad (3.81)$$

so erkennt man, daß bei der Berechnung von  $S_1$  Integrale folgenden Typs auftreten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^{2n} \cos(ak)}{(\beta^2 + k^2)^j}, \quad n \in \{0, 1, 2\}, \quad j \in \{1, 2\}, \quad (3.82)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^{2l+1} \sin(ak)}{(\beta^2 + k^2)^j}, \quad l \in \{0, 1\}, \quad j \in \{1, 2\}. \quad (3.83)$$

Dabei ist das Folgende zu beachten: Einige dieser Integrale, beispielsweise  $\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2 \cos(ak)}{\beta^2 + k^2}$ , existieren nicht. Da jedoch das Integral  $S_1$  wegen des  $\frac{1}{k^2}$ -Abfalls für große  $k$  offensichtlich konvergiert, kann man wie an folgendem vereinfachten Beispiel gezeigt wird vorgehen:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2 \cos(ak)}{(k^2 + m_0^2)(4k^4 + 5m_0^2k^2 + m_0^4)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ -\frac{4}{9m_0^4} \frac{k^2 \cos(ak)}{k^2 + m_0^2} + \frac{4}{9m_0^4} \frac{k^2 \cos(ak)}{k^2 + \frac{m_0^2}{4}} - \frac{1}{3m_0^2} \frac{k^2 \cos(ak)}{(k^2 + m_0^2)^2} \right\} \\ &= -\frac{d^2}{da^2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[ \left( -\frac{4}{9m_0^4} \right) \frac{\cos(ak)}{k^2 + m_0^2} + \frac{4}{9m_0^4} \frac{\cos(ak)}{k^2 + \frac{m_0^2}{4}} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{3m_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2 \cos(ak)}{(k^2 + m_0^2)^2} \\ &= -\frac{d^2}{da^2} \left\{ -\frac{4}{9m_0^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\cos(ak)}{k^2 + m_0^2} \right\} - \frac{d^2}{da^2} \left\{ \frac{4}{9m_0^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\cos(ak)}{k^2 + \frac{m_0^2}{4}} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{3m_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2 \cos(ak)}{(k^2 + m_0^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Hier existieren nun alle Integrale. Bei der Berechnung von  $S_1$  geht man jetzt ganz analog vor, indem man effektiv stets folgende Ersetzung macht:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^{2n} \cos(ak)}{(\beta^2 + k^2)^j} = \left( -\frac{d^2}{da^2} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\cos(ak)}{(\beta^2 + k^2)^j}, \quad (3.85)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^{2l+1} \sin(ak)}{(\beta^2 + k^2)^j} = \left( -\frac{d^2}{da^2} \right)^l \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k \sin(ak)}{(\beta^2 + k^2)^j}. \quad (3.86)$$

In diesem Sinne sind in Anhang B.3 Formeln für die Integrale der Typen (3.82) und (3.83) zusammengestellt.

Unter Berücksichtigung der Darstellung (3.80), der Partialbruchzerlegung (3.81) und der Integralformeln des Anhangs B.3 findet man nach etwas längerer Rechnung schließlich:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{1}{36m_0L^2} e^{-m_0|x_0-y_0|} \left[ 4 + \frac{5}{m_0^2} C_{k^2}(x_0, y_0) - \frac{11}{m_0^4} C_{k^0}(x_0, y_0) \right] \\
 &+ \frac{1}{36m_0L^2} e^{-\frac{m_0}{2}|x_0-y_0|} \left[ 4 - \frac{4}{m_0^2} C_{k^2}(x_0, y_0) + \frac{16}{m_0^4} C_{k^0}(x_0, y_0) \right] \\
 &+ \frac{|x_0 - y_0|}{36L^2} e^{-m_0|x_0-y_0|} \left[ -12 + \frac{3}{m_0^2} C_{k^2}(x_0, y_0) - \frac{3}{m_0^4} C_{k^0}(x_0, y_0) \right] \\
 &+ \frac{i \operatorname{sign}(x_0 - y_0)}{L^2} \left\{ \frac{1}{36m_0} e^{-m_0|x_0-y_0|} \left[ \frac{2}{m_0} S_{k^3}(x_0, y_0) - \frac{8}{m_0^3} S_k(x_0, y_0) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{36m_0} e^{-\frac{m_0}{2}|x_0-y_0|} \left[ -\frac{2}{m_0} S_{k^3}(x_0, y_0) + \frac{8}{m_0^3} S_k(x_0, y_0) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{|x_0 - y_0|}{36} e^{-m_0|x_0-y_0|} \left[ \frac{3}{m_0} S_{k^3}(x_0, y_0) - \frac{3}{m_0^3} S_k(x_0, y_0) \right] \right\}, \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

mit

$$C_{k^2}(x_0, y_0) := m_0^2 \left[ 2 - 3 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - 3 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) + 9 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right], \quad (3.88)$$

$$C_{k^0}(x_0, y_0) := \frac{m_0^4}{4} \left[ 1 - 3 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - 3 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) + 9 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right], \quad (3.89)$$

$$S_{k^3}(x_0, y_0) := 6im_0 \left[ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right], \quad (3.90)$$

$$S_k(x_0, y_0) := \frac{3}{2}im_0^3 \left[ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) - 3 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) + 3 \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right]. \quad (3.91)$$

$S_1$  lässt sich noch etwas übersichtlicher schreiben, nämlich

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{e^{-m_0|x_0-y_0|}}{16m_0L^2} \left[ 5 - 3 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - 3 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) + 20 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\
 &\quad \left. - 11 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right] \\
 &- \frac{e^{-\frac{m_0}{2}|x_0-y_0|}}{m_0L^2} \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \left[ 1 + \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right] \\
 &- \frac{3|x_0 - y_0| e^{-m_0|x_0-y_0|}}{16L^2} \left[ 1 + \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) + \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\
 &\quad \left. - 4 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) + \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right] \\
 &+ \frac{\operatorname{sign}(x_0 - y_0)}{L^2} \left\{ \frac{1}{m_0} \left[ e^{-\frac{m_0}{2}|x_0-y_0|} - e^{-m_0|x_0-y_0|} \right] \right. \\
 &\quad \times \left[ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) - \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right] \\
 &\quad \left. - \frac{3|x_0 - y_0| e^{-m_0|x_0-y_0|}}{8} \left[ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) - \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right] \right\}. \quad (3.92)
 \end{aligned}$$

Jetzt ist  $S_2$  auszurechnen:

$$S_2 = \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{L^2} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} \int_0^\infty dt \langle x_0 | \exp\{-i\tilde{M}t\} | y_0 \rangle e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t}. \quad (3.93)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt \langle x_0 | \exp\{-i\tilde{M}t\} | y_0 \rangle e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} &= \int_0^\infty dt \langle x_0 | \exp\{-i\tilde{M}t\} | y_0 \rangle e^{-\alpha^2 t} \\ &\quad \left( \alpha^2 := \frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 > 0 \right) \\ &= \int_0^\infty dt \left\{ \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle + \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^\infty dk \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle e^{-(k^2 + m_0^2)t} \right\} e^{-\alpha^2 t} \\ &= \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle \frac{1}{\alpha^2} + \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle \frac{1}{\frac{3}{4}m_0^2 + \alpha^2} \\ &\quad + I, \end{aligned} \quad (3.94)$$

mit

$$I := \int_{-\infty}^\infty dk \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \frac{1}{m_0^2 + \alpha^2 + k^2}. \quad (3.95)$$

Das Integral  $I$  stellt nun einen ganz ähnlichen Ausdruck dar, wie er schon bei der Berechnung von  $S_1$  auftrat. Das weitere Vorgehen gestaltet sich also ganz analog:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \left\{ \frac{\cos(k(x_0 - y_0))}{(k^2 + \alpha^2 + m_0^2)(4k^4 + 5m_0^2k^2 + m_0^4)} \right. \\ &\quad \times \left[ 4k^4 + C_{k^2}(x_0, y_0)k^2 + C_{k^0}(x_0, y_0) \right] \Big\} \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dk \left\{ \frac{\sin(k(x_0 - y_0))}{(k^2 + \alpha^2 + m_0^2)(4k^4 + 5m_0^2k^2 + m_0^4)} \right. \\ &\quad \times \left[ S_{k^3}(x_0, y_0)k^3 + S_k(x_0, y_0)k \right] \Big\}, \end{aligned} \quad (3.96)$$

mit denselben Ausdrücken  $C_{k^2}(x_0, y_0)$ ,  $C_{k^0}(x_0, y_0)$ ,  $S_{k^3}(x_0, y_0)$ ,  $S_k(x_0, y_0)$  wie in den Gleichungen (3.88) – (3.91) angegeben. Zunächst führt man eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 + \alpha^2 + m_0^2)(4k^4 + 5m_0^2k^2 + m_0^4)} &= \frac{1}{\alpha^2(3m_0^2 + 4\alpha^2)(k^2 + \alpha^2 + m_0^2)} - \frac{1}{3m_0^2\alpha^2(k^2 + m_0^2)} \\ &+ \frac{1}{3m_0^2(\alpha^2 + \frac{3}{4}m_0^2)\left(k^2 + \frac{m_0^2}{4}\right)}. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Setzt man dies in den Integranden von  $I$  ein und benutzt erneut die Formeln des Anhangs B.3, mit denselben Konventionen bezüglich der Existenz der Integrale wie sie bei der Auswertung von  $S_1$  gemacht wurden, so ergibt sich nach etwas längerer Rechnung:

$$\begin{aligned}
 S_2 = & \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{L^2} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} \left\{ \frac{\frac{3}{8} m_0}{\alpha^2} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \right. \\
 & + \frac{\frac{3}{4} m_0}{\alpha^2 + \frac{3}{4} m_0^2} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \\
 & + \frac{1}{\alpha^2 + \frac{3}{4} m_0^2} e^{-\frac{m_0}{2} |x_0 - y_0|} \left[ \frac{m_0}{12} - \frac{1}{12m_0} C_{k^2}(x_0, y_0) + \frac{1}{3m_0^3} C_{k^0}(x_0, y_0) \right] \\
 & + \frac{1}{\alpha^2} e^{-m_0 |x_0 - y_0|} \left[ -\frac{2m_0}{3} + \frac{1}{6m_0} C_{k^2}(x_0, y_0) - \frac{1}{6m_0^3} C_{k^0}(x_0, y_0) \right] \\
 & + \frac{\frac{3}{4} m_0^2}{\alpha^2(\alpha^2 + \frac{3}{4} m_0^2)} e^{-\sqrt{\alpha^2 + m_0^2} |x_0 - y_0|} \left[ \frac{2m_0}{3} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{m_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{6m_0} C_{k^2}(x_0, y_0) \left( 1 + \frac{\alpha^2}{m_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6m_0^3} C_{k^0}(x_0, y_0) \left( 1 + \frac{\alpha^2}{m_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\
 & + \frac{i \operatorname{sign}(x_0 - y_0)}{\alpha^2 + \frac{3}{4} m_0^2} e^{-\frac{m_0}{2} |x_0 - y_0|} \left[ -\frac{1}{24} S_{k^3}(x_0, y_0) + \frac{1}{6m_0^2} S_k(x_0, y_0) \right] \\
 & + \frac{i \operatorname{sign}(x_0 - y_0)}{\alpha^2} e^{-m_0 |x_0 - y_0|} \left[ \frac{1}{6} S_{k^3}(x_0, y_0) - \frac{1}{6m_0^2} S_k(x_0, y_0) \right] \\
 & + i \operatorname{sign}(x_0 - y_0) \frac{\frac{3}{4} m_0^2}{\alpha^2(\alpha^2 + \frac{3}{4} m_0^2)} e^{-\sqrt{\alpha^2 + m_0^2} |x_0 - y_0|} \\
 & \quad \times \left[ -\frac{1}{6} S_{k^3}(x_0, y_0) \left( 1 + \frac{\alpha^2}{m_0^2} \right) + \frac{1}{6m_0^2} S_k(x_0, y_0) \right] \left. \right\}. \tag{3.98}
 \end{aligned}$$

Auch  $S_2$  lässt sich umformen:

$$\begin{aligned}
 S_2 = & \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{L^2} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} \left\{ \frac{\frac{3}{8} m_0}{\alpha^2} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \right. \\
 & + \frac{\frac{3}{4} m_0}{\alpha^2 + \frac{3}{4} m_0^2} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \\
 & - \frac{\frac{3}{4} m_0}{\alpha^2 + \frac{3}{4} m_0^2} e^{-\frac{m_0}{2} |x_0 - y_0|} \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) \\
 & \quad \times \left[ 1 - \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) \right] \\
 & - \frac{\frac{3}{8} m_0}{\alpha^2} e^{-m_0 |x_0 - y_0|} \left[ 1 + \tanh^2(\frac{m_0}{2} x_0) + \tanh^2(\frac{m_0}{2} y_0) \right. \\
 & \quad \left. - 4 \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) + \tanh^2(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh^2(\frac{m_0}{2} y_0) \right] \\
 & + \rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{3}{96}m_0^3}{\alpha^2(\alpha^2 + \frac{3}{4}m_0^2)} e^{-\sqrt{\alpha^2+m_0^2}|x_0-y_0|} \left\{ 16 \left(1 + \frac{\alpha^2}{m_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right. \\
& \quad + \left(1 + \frac{\alpha^2}{m_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ -8 + 12 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) + 12 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\
& \quad \left. \left. - 36 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right] + \right. \\
& \quad + \left(1 + \frac{\alpha^2}{m_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 - 3 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - 3 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\
& \quad \left. \left. + 9 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right] \right\} \\
& + \text{sign}(x_0 - y_0) \left\{ \frac{\frac{3}{4}m_0}{\alpha^2 + \frac{3}{4}m_0^2} e^{-\frac{m_0}{2}|x_0-y_0|} \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\
& \quad \times \left[ \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) - \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right] \\
& \quad + \frac{\frac{3}{4}m_0}{\alpha^2} e^{-m_0|x_0-y_0|} \left[ \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) - \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right. \\
& \quad \left. - \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) + \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right] \\
& \quad + \frac{\frac{9}{16}m_0^3}{\alpha^2(\alpha^2 + \frac{3}{4}m_0^2)} e^{-\sqrt{\alpha^2+m_0^2}|x_0-y_0|} \left[ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\
& \quad \left. + \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) - \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{m_0^2} \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{m_0^2} \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right] \right\}. \tag{3.99}
\end{aligned}$$

Verwendet man nun die Ergebnisse für  $S_1$  und  $S_2$  in Gl. (3.76) und faßt zusammen, so erhält man den folgenden länglichen aber immerhin analytischen Ausdruck für die Greensche Funktion der Theorie bei vorhandenem Instantonhintergrundfeld:

$$\begin{aligned}
G(x, y) = & \frac{1}{m_0 L^2} \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right)}{\cosh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \cosh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right)} \\
& + \frac{e^{-m_0|x_0-y_0|}}{16 m_0 L^2} \left[ 5 - 3 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - 3 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\
& \quad \left. + 20 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) - 11 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right] \\
& - \frac{e^{-\frac{m_0}{2}|x_0-y_0|}}{m_0 L^2} \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \left[ 1 + \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right] \\
& - \frac{3|x_0 - y_0| e^{-m_0|x_0-y_0|}}{16 L^2} \left[ 1 + \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) + \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\
& \quad \left. - 4 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) + \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right] \\
& +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\text{sign}(x_0 - y_0)}{L^2} \left\{ \frac{1}{m_0} \left[ e^{-\frac{m_0}{2}|x_0-y_0|} - e^{-m_0|x_0-y_0|} \right] \right. \\
& \quad \times \left[ \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh^2(\frac{m_0}{2}y_0) - \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) \right] \\
& \quad - \frac{3|x_0 - y_0| e^{-m_0|x_0-y_0|}}{8} \left[ \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) - \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \right. \\
& \quad \left. \left. + \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh^2(\frac{m_0}{2}y_0) - \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) \right] \right\} \\
& + \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \frac{1}{L^2} e^{i\frac{2\pi}{L}\vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} \left\{ \frac{\frac{3}{8}m_0}{\alpha^2} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0) \cosh^2(\frac{m_0}{2}y_0)} \right. \\
& \quad + \frac{\frac{3}{4}m_0}{\alpha^2 + \frac{3}{4}m_0^2} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh(\frac{m_0}{2}y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0) \cosh(\frac{m_0}{2}y_0)} \\
& \quad - \frac{\frac{3}{4}m_0}{\alpha^2 + \frac{3}{4}m_0^2} e^{-\frac{m_0}{2}|x_0-y_0|} \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \\
& \quad \times \left[ 1 - \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \right] \\
& \quad - \frac{\frac{3}{8}m_0}{\alpha^2} e^{-m_0|x_0-y_0|} \left[ 1 + \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) + \tanh^2(\frac{m_0}{2}y_0) \right. \\
& \quad \left. - 4 \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) + \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh^2(\frac{m_0}{2}y_0) \right] \\
& \quad + \frac{\frac{3}{96}m_0^3}{\alpha^2(\alpha^2 + \frac{3}{4}m_0^2)} e^{-\sqrt{\alpha^2+m_0^2}|x_0-y_0|} \left\{ 16 \left( 1 + \frac{\alpha^2}{m_0^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\
& \quad \left. + \left( 1 + \frac{\alpha^2}{m_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ -8 + 12 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) + 12 \tanh^2(\frac{m_0}{2}y_0) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 36 \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \right] \right. \\
& \quad \left. + \left( 1 + \frac{\alpha^2}{m_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 - 3 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) - 3 \tanh^2(\frac{m_0}{2}y_0) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 9 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh^2(\frac{m_0}{2}y_0) \right] \right\} \\
& + \text{sign}(x_0 - y_0) \left\{ \frac{\frac{3}{4}m_0}{\alpha^2 + \frac{3}{4}m_0^2} e^{-\frac{m_0}{2}|x_0-y_0|} \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \right. \\
& \quad \times \left[ \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) - \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \right] \\
& \quad + \frac{\frac{3}{4}m_0}{\alpha^2} e^{-m_0|x_0-y_0|} \left[ \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) - \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \right. \\
& \quad \left. - \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh^2(\frac{m_0}{2}y_0) + \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) \right] \\
& \quad + \frac{\frac{9}{16}m_0^3}{\alpha^2(\alpha^2 + \frac{3}{4}m_0^2)} e^{-\sqrt{\alpha^2+m_0^2}|x_0-y_0|} \left[ \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) - \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \right. \\
& \quad \left. + \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh^2(\frac{m_0}{2}y_0) - \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{m_0^2} \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) - \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{m_0^2} \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \right] \right\}, \tag{3.100}
\end{aligned}$$

mit

$$\alpha^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2. \quad (3.101)$$

Es sei noch auf folgenden Sachverhalt hingewiesen. Letztlich treten in Gl. (3.100) Doppelreihen folgender Typen auf:

$$\sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{\vec{n}^2 + b^2} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})}, \quad b^2 \geq 0 \quad (3.102)$$

und

$$\sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-\sqrt{\vec{n}^2 + c^2} d}}{\vec{n}^2 + b^2} \sqrt{\vec{n}^2 + c^2}^\nu e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})}; \nu \in \{-1, 0, 1, 3\}; c^2, d > 0; b^2 \geq 0. \quad (3.103)$$

Es ist interessant, daß man die Doppelreihen des Typs (3.102) auf eine gewöhnliche Reihe zurückführen kann, nämlich folgendermaßen. Zunächst betrachtet man die Fourierreihe zur Funktion

$$\begin{aligned} \cosh(\tilde{\alpha}x) : [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cosh(\tilde{\alpha}x), \quad \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Für die Fourierreihe dieser Funktion gilt [60, S. 151 Beispiel 7]:

$$\cosh(\tilde{\alpha}x) = \frac{\sinh(\tilde{\alpha}\pi)}{\tilde{\alpha}\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\tilde{\alpha} \sinh(\tilde{\alpha}\pi)}{\pi} \frac{\cos(nx)}{\tilde{\alpha}^2 + n^2}, \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (3.105)$$

Wegen

$$(-1)^n \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(n(\pi - x)) + \cos(n(\pi + x))] \quad (3.106)$$

ergibt das

$$\begin{aligned} \cosh(\tilde{\alpha}x) &= \frac{\sinh(\tilde{\alpha}\pi)}{\tilde{\alpha}\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha} \sinh(\tilde{\alpha}\pi)}{\pi(\tilde{\alpha}^2 + n^2)} [\cos(n(\pi - x)) + \cos(n(\pi + x))], \end{aligned} \quad (3.107)$$

mit  $x \in [-\pi, \pi]$ . Indem man  $x$  durch  $x - \pi$  ersetzt erhält man

$$\begin{aligned} \cosh(\tilde{\alpha}(x - \pi)) &= \frac{\sinh(\tilde{\alpha}\pi)}{\tilde{\alpha}\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha} \sinh(\tilde{\alpha}\pi)}{\pi(\tilde{\alpha}^2 + n^2)} [\cos(n(2\pi - x)) + \cos(nx)] \\ &= \frac{\sinh(\tilde{\alpha}\pi)}{\tilde{\alpha}\pi} + \frac{2\tilde{\alpha} \sinh(\tilde{\alpha}\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\tilde{\alpha}^2 + n^2}, \quad x \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Es gilt also insgesamt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\tilde{\alpha}^2 + n^2} &= \frac{\pi}{2\tilde{\alpha} \sinh(\tilde{\alpha}\pi)} \left( \cosh(\tilde{\alpha}(x - \pi)) - \frac{\sinh(\tilde{\alpha}\pi)}{\tilde{\alpha}\pi} \right), \quad x \in [0, 2\pi] \\ &= \frac{\pi \cosh(\tilde{\alpha}(x - \pi))}{2\tilde{\alpha} \sinh(\tilde{\alpha}\pi)} - \frac{1}{2\tilde{\alpha}^2}, \quad x \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Das ist nun für die zu untersuchende Doppelreihe nützlich, denn es ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{\vec{n}^2 + b^2} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \left[ \sum'_{n_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n_1^2 + b^2 + n_2^2} e^{i \frac{2\pi}{L} n_2 (y_2 - x_2)} \right] e^{i \frac{2\pi}{L} n_1 (y_1 - x_1)} \\ &\quad + \sum'_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n_1^2 + b^2} e^{i \frac{2\pi}{L} n_1 (y_1 - x_1)}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Bei der Reihe in den eckigen Klammern läßt sich nun der Cosinus einführen, so daß man Gl. (3.109) anwenden kann:

$$\begin{aligned} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{\vec{n}^2 + b^2} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \left[ 2 \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{L} n_2 (y_2 - x_2)\right)}{n_1^2 + b^2 + n_2^2} \right] e^{i \frac{2\pi}{L} n_1 (y_1 - x_1)} \\ &\quad + \sum'_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n_1^2 + b^2} e^{i \frac{2\pi}{L} n_1 (y_1 - x_1)} \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\pi \cosh\left(\sqrt{n_1^2 + b^2}\left(\frac{2\pi}{L}|y_2 - x_2| - \pi\right)\right)}{\sqrt{n_1^2 + b^2} \sinh\left(\sqrt{n_1^2 + b^2}\pi\right)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n_1^2 + b^2} \right] e^{i \frac{2\pi}{L} n_1 (y_1 - x_1)} \\ &\quad + \sum'_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n_1^2 + b^2} e^{i \frac{2\pi}{L} n_1 (y_1 - x_1)}. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Wegen  $0 \leq y_i, x_i \leq L$  ( $i = 1, 2$ ) folgt

$$0 \leq |y_i - x_i| \leq L \quad i = 1, 2. \quad (3.112)$$

Also gilt stets

$$0 \leq \frac{2\pi}{L} |y_i - x_i| \leq 2\pi \quad i = 1, 2, \quad (3.113)$$

so daß die Anwendung von Gl. (3.109) jeweils erlaubt ist. Letztlich erhält man also folgende Formel für die auftretende Doppelreihe:

$$\begin{aligned} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{\vec{n}^2 + b^2} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{y} - \vec{x})} &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \frac{\pi \cosh\left(\sqrt{n_1^2 + b^2}\left(\frac{2\pi}{L}|y_2 - x_2| - \pi\right)\right)}{\sqrt{n_1^2 + b^2} \sinh\left(\sqrt{n_1^2 + b^2}\pi\right)} e^{i \frac{2\pi}{L} n_1 (y_1 - x_1)} \\ &\quad + \frac{\pi \cosh\left(b\left(\frac{2\pi}{L}|y_2 - x_2| - \pi\right)\right)}{b \sinh(b\pi)} - \frac{1}{b^2} \\ &= 2\pi \sum_{n_1=1}^{\infty} \left[ \frac{\cosh\left(\sqrt{n_1^2 + b^2}\left(\frac{2\pi}{L}|y_2 - x_2| - \pi\right)\right)}{\sqrt{n_1^2 + b^2} \sinh\left(\sqrt{n_1^2 + b^2}\pi\right)} \right. \\ &\quad \left. \times \cos\left(n_1 \frac{2\pi}{L} (y_1 - x_1)\right) \right] \\ &\quad + \frac{\pi \cosh\left(b\left(\frac{2\pi}{L}|y_2 - x_2| - \pi\right)\right)}{b \sinh(b\pi)} - \frac{1}{b^2}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Das Resultat (3.100) für die Greensche Funktion  $G(x, y)$  mit Instantonhintergrundfeld ist zwar recht kompliziert, zu kompliziert um damit die Graphen zu berechnen, macht aber immerhin eines explizit deutlich.  $G(x, y)$  geht für  $|x_0 - y_0| \rightarrow \infty$ , wie zu erwarten war, exponentiell gegen 0. Das ist für die spätere Graphenberechnung von Bedeutung, denn daraus folgt, daß aus Regionen mit  $|x_0 - y_0| \rightarrow \infty$ , also insbesondere für  $x_0 \rightarrow \infty, y_0 \rightarrow -\infty$  oder umgekehrt, keine Divergenzen aus den Integrationen über  $x_0$  und  $y_0$  auftreten werden.

Die zentralen Resultate dieses Kapitels, nämlich die Ergebnisse für die Greenschen Funktionen  $G_0(x, y)$  aus Gl. (3.5) und für  $G(x, y)$  aus Gl. (3.69), seien hier noch einmal herausgestellt:

$$G_0(x, y) = \int_0^\infty dt \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)t} e^{ip(x_0 - y_0)}.$$

und

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \int_0^\infty dt \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{3m_0}{8} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \right. \\ &\quad + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \frac{3m_0}{4} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \\ &\quad \left. + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\}. \end{aligned}$$

## Kapitel 4

# Berechnung des Determinantenverhältnisses

Zur Bestimmung der Energieaufspaltung  $E_{0a}$  wird das Verhältnis der Fluktuationsdeterminanten mit und ohne Instantonhintergrundfeld benötigt (vgl. Gl. (2.78)):

$$\left( \frac{\det' \mathbb{M}_{(1)}}{\det \mathbb{M}_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

$\det' \mathbb{M}_{(1)}$  bedeutet hier, daß bei der Determinantenbildung die Nullmode von  $\mathbb{M}_{(1)}$  fortzulassen ist. Die Berechnung erfolgt mit der Methode der Wärmeleitungskerne und ist sowohl für  $D = 3$  als auch für  $D = 4$  Dimensionen von Münster durchgeführt worden [22, 23]. Die Rechnung für  $D = 3$  Dimensionen soll hier dargestellt werden.

Die Definitionen der Operatoren  $\mathbb{M}_{(1)}$  und  $\mathbb{M}_{(0)}$  sind nach den Gleichungen (2.22) und (2.65), die sich leicht auf  $D$  Dimensionen verallgemeinern lassen,

$$\mathbb{M}_{(1)} = -\Delta^{(D)} + m_0^2 - \frac{3}{2} \frac{m_0^2}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)}, \quad (4.1)$$

$$\mathbb{M}_{(0)} = -\Delta^{(D)} + m_0^2. \quad (4.2)$$

Man verwendet nun die Beziehung ( $A$  sei ein Operator)

$$\log \det A = \text{Tr} \log A. \quad (4.3)$$

Das führt auf

$$\log \left( \frac{\det' \mathbb{M}_{(1)}}{\det \mathbb{M}_{(0)}} \right) = \text{Tr}' \log \frac{\mathbb{M}_{(1)}}{\mathbb{M}_{(0)}}. \quad (4.4)$$

$\text{Tr}'$  bezeichnet hierbei die Spurbildung unter Fortlassen der Nullmode von  $\mathbb{M}_{(1)}$ . Die Nullmode kann man am bequemsten durch folgende Grenzwertprozedur aus der Spurbildung entfernen:

$$\text{Tr}' \log \frac{\mathbb{M}_{(1)}}{\mathbb{M}_{(0)}} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \left\{ \text{Tr} \log \frac{\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2}{\mathbb{M}_{(0)} + \mu^2} - \log \mu^2 \right\}. \quad (4.5)$$

Es ist daher

$$\text{Tr} \log \frac{\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2}{\mathbb{M}_{(0)} + \mu^2}$$

zu berechnen.

Dazu definiert man für einen Operator  $A$  wie folgt den Wärmeleitungskern  $K_t(A)$ :

$$K_t(A) = \operatorname{Tr} e^{-tA}. \quad (4.6)$$

Dann gilt, falls  $\lambda$  ein positiver Eigenwert von  $A$  ist,

$$\log \lambda = -\frac{d}{dz}_{|z=0} \left\{ \lambda^{-z} \right\}. \quad (4.7)$$

Mit der Gammafunktion  $\Gamma(z)$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}, \quad \operatorname{Re} z > 0 \\ &= \lambda^z \int_0^\infty du u^{z-1} e^{-\lambda u}, \quad t = \lambda u, \end{aligned}$$

gilt also

$$\lambda^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty du u^{z-1} e^{-\lambda u}, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

und es folgt somit

$$\log \lambda = -\frac{d}{dz}_{|z=0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty du u^{z-1} e^{-\lambda u} \right\}. \quad (4.8)$$

Die Bildung der Ableitung an der Stelle  $z = 0$  ist dabei im Sinne einer analytischen Fortsetzung zu verstehen. Durch Summation über alle Eigenwerte  $\lambda$  ergibt sich jetzt insgesamt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \log A &= -\frac{d}{dz}_{|z=0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty du u^{z-1} \sum_\lambda e^{-\lambda u} \right\} \\ &= -\frac{d}{dz}_{|z=0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty du u^{z-1} K_u(A) \right\} \\ &= -\frac{d}{dz}_{|z=0} \zeta(z, A). \end{aligned} \quad (4.9)$$

$\zeta(z, A)$  ist hier die zum Operator  $A$  gehörige Zeta–Funktion, die durch

$$\zeta(z, A) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty du u^{z-1} K_u(A) \quad (4.10)$$

definiert ist. Die Bezeichnung Zeta–Funktion röhrt daher, daß sich für den Hamilton–Operator  $H_{\text{osz}}$  des harmonischen Oszillators ohne Nullpunktenergie die Riemannsche Zeta–Funktion für  $\zeta(z, H_{\text{osz}})$  ergibt. Nutzt man die Gl. (4.9) für die Operatoren  $\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2$  und  $\mathbb{M}_{(0)} + \mu^2$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \log \frac{\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2}{\mathbb{M}_{(0)} + \mu^2} &= \operatorname{Tr} \log (\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2) - \operatorname{Tr} \log (\mathbb{M}_{(0)} + \mu^2) \\ &= -\frac{d}{dz}_{|z=0} \left\{ \underbrace{\zeta(z, \mathbb{M}_{(1)} + \mu^2) - \zeta(z, \mathbb{M}_{(0)} + \mu^2)}_{=: \zeta(z, \mu)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

wobei  $\zeta(z, \mu)$  mit Hilfe der Definition (4.10) ausgeschrieben folgende Form annimmt:

$$\zeta(z, \mu) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[ K_t(\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2) - K_t(\mathbb{M}_{(0)} + \mu^2) \right]. \quad (4.12)$$

Man setzt

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t(\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2) &:= K_t(\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2) - K_t(\mathbb{M}_{(0)} + \mu^2) \\ &= e^{-t\mu^2} \operatorname{Tr} e^{t\Delta^{(D-1)}} \tilde{K}_t(Q), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\tilde{K}_t(Q) := K_t(\mathbb{M}_{(1)}^{(0)}) - K_t(\mathbb{M}_{(0)}^{(0)}), \quad (4.14)$$

$$\mathbb{M}_{(1)}^{(0)} := -\partial_0^2 + m_0^2 - \frac{3}{2} \frac{m_0^2}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}, \quad (4.15)$$

$$\mathbb{M}_{(0)}^{(0)} := -\partial_0^2 + m_0^2 \quad (4.16)$$

und verwendet nun folgendes Resultat [22, 50]:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t(Q) &= \Phi(m_0\sqrt{t}) + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} \Phi(\frac{1}{2}m_0\sqrt{t}) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{3}{\sqrt{\pi}} m_0 \sqrt{t} + O(t^{\frac{3}{2}}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

$\Phi$  ist das Fehlerintegral:

$$\Phi(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{-t^2}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.18)$$

Außerdem gilt, da man ein endliches räumliches Volumen betrachtet,

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} e^{t\Delta^{(D-1)}} &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} \\ &= \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} n^2 t} \right]^{D-1} \\ &= \frac{L^{D-1}}{(4\pi t)^{\frac{D-1}{2}}} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2 L^2}{4t}} \right]^{D-1} \quad (\text{Poissonsche Summenformel}). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Mit  $D = 3 - \varepsilon$  wird das zu

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} e^{t\Delta^{(D-1)}} &= \frac{L^{2-\varepsilon}}{(4\pi t)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2 L^2}{4t}} \right]^{2-\varepsilon} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{L^{2-\varepsilon}}{(4\pi t)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Insgesamt gilt damit für den Integranden der Funktion  $\zeta(z, \mu)$ :

$$t^{z-1} \tilde{K}(\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{3m_0 L^{2-\varepsilon}}{4^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}} t^{z-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} + O\left(t^{z-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\right). \quad (4.21)$$

Die Idee ist jetzt, den Integranden der Funktion  $\zeta(z, \mu)$  in Anteile zu zerlegen, die für  $\varepsilon = 0$  und  $z = 0$  keine Divergenzen liefern, und solche, die Divergenzen verursachen können.

Gleichzeitig wird die Divergenz, die im Limes  $\mu \rightarrow 0$  entsteht, isoliert. Dazu zieht man die Terme, die für  $t \rightarrow 0$  Divergenzen verursachen, explizit ab und addiert sie wieder. Im einzelnen bedeutet das das Folgende:

$$\begin{aligned}
\zeta(z, \mu) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \tilde{K}(\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2) \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left\{ \tilde{K}(\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2) - e^{-t\mu^2} \right. \\
&\quad \left. - \theta(1-t) \left[ \frac{3m_0}{\pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}} \left( \frac{L}{2} \right)^{2-\varepsilon} t^{-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} - e^{-t\mu^2} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{3m_0}{\pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}} \left( \frac{L}{2} \right)^{2-\varepsilon} \int_0^1 dt t^{z-\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon}{2}} + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_1^\infty dt t^{z-1} e^{-t\mu^2} \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left\{ \tilde{K}(\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2)|_{D=3} - e^{-t\mu^2} \right. \\
&\quad \left. - \theta(1-t) \left[ \frac{3m_0 L^2}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{t}} - e^{-t\mu^2} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{3m_0}{\pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}} \left( \frac{L}{2} \right)^{2-\varepsilon} \left. \frac{t^{z-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}}{z - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}} \right|_0^1 + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_1^\infty dt t^{z-1} e^{-t\mu^2} \\
&\quad + O(\varepsilon). \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt folgt, da das erste Integral nach Konstruktion in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $z = 0$  für  $\varepsilon = 0$  existiert.  $\theta(x)$  ist die Stufenfunktion:  $\theta(x) = 1$  für  $x \geq 0$ ,  $\theta(x) = 0$  für  $x < 0$ . Daher gilt weiter:

$$\begin{aligned}
\zeta(z, \mu) &= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left\{ \tilde{K}(\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2)|_{D=3} - e^{-t\mu^2} - \theta(1-t) \left[ \frac{3m_0 L^2}{4\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{t}} - e^{-t\mu^2} \right] \right\}}_{=: \tilde{\zeta}(z, \mu)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{3m_0}{\pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}} \left( \frac{L}{2} \right)^{2-\varepsilon} \left. \frac{1}{z - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}} \right|_0^1 + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)} \int_1^\infty dt t^{z-1} e^{-t\mu^2}}_{=: \hat{I}_\mu(z)} + O(\varepsilon). \tag{4.23}
\end{aligned}$$

$\hat{I}_\mu(z)$  existiert für  $z = 0$ . Beachtet man

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = 0, \quad \text{für } z = 0$$

und

$$\frac{d}{dz}|_{z=0} \frac{1}{\Gamma(z)} = 1,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dz}|_{z=0} \zeta(z, \mu) &= -\frac{d}{dz}|_{z=0} \tilde{\zeta}(z, \mu) - \frac{3m_0}{\pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}} \left( \frac{L}{2} \right)^{2-\varepsilon} \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2}} - \int_1^\infty dt \frac{e^{-t\mu^2}}{t} + O(\varepsilon) \\
&= -\frac{d}{dz}|_{z=0} \tilde{\zeta}(z, \mu) + \frac{3m_0 L^2}{2\pi^{\frac{3}{2}}} - \hat{I}_\mu(0) + O(\varepsilon). \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Nun berechnet man

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_\mu(0) &= \int_1^\infty dt \frac{e^{-t\mu^2}}{t} \\
 &= \int_{-\mu^2}^{-\infty} dt \frac{e^t}{t} \\
 &= -\text{Ei}[-\mu^2], \quad [61, 3.1.1] \\
 &= -\gamma - \log(\mu^2) + O(\mu^2) \quad [61, 3.1.5].
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$\gamma = 0.5772156649\dots$  ist die Euler-Konstante. Außerdem berücksichtigt man, daß  $\tilde{\zeta}(z, \mu)$  für  $\mu = 0$  in einer Umgebung von  $z = 0$  existiert. Für  $t \rightarrow 0$  wird das durch den  $\theta$ -Term sichergestellt, für  $t \rightarrow \infty$  wird durch Abzug von  $e^{-t\mu^2} = 1$  für  $\mu = 0$  die kritische Nullmode in  $\tilde{K}_t(\mathbb{M}_{(1)} + \mu^2)|_{D=3}$  kompensiert. Damit erhält man (vgl. Gl. (4.5))

$$\text{Tr}' \log \frac{\mathbb{M}_{(1)}}{\mathbb{M}_{(0)}} = -\frac{d}{dz}|_{z=0} \tilde{\zeta}(z, 0) + \frac{3m_0 L^2}{2\pi^{\frac{3}{2}}} + \gamma + O(\varepsilon). \tag{4.26}$$

Definiert man jetzt den Anteil ohne Stufenfunktion von  $\tilde{\zeta}(z, \mu)$  aus Gl. (4.23) für  $\mu = 0$  durch

$$\tilde{\zeta}'(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left\{ \tilde{K}_t(\mathbb{M}_{(1)})|_{D=3} - 1 \right\}, \text{ Re } z > 0, \text{ analytisch fortgesetzt zu } z = 0, \tag{4.27}$$

so gilt

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}'(z) &= \tilde{\zeta}(z, 0) + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^1 dt t^{z-1} \left[ \frac{3m_0 L^2}{4\pi^{\frac{3}{2}} \sqrt{t}} - 1 \right] \\
 &= \tilde{\zeta}(z, 0) + \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{3m_0 L^2}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{z \Gamma(z)} \\
 &= \tilde{\zeta}(z, 0) - \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{3m_0 L^2}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{1 - 2z} - \frac{1}{\Gamma(z+1)}.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Damit bekommt man

$$-\frac{d}{dz}|_{z=0} \tilde{\zeta}(z, 0) = -\frac{d}{dz}|_{z=0} \tilde{\zeta}'(z) - \frac{3m_0 L^2}{2\pi^{\frac{3}{2}}} + \underbrace{\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(z)}}_{= -\gamma} + O(\varepsilon). \quad [61, 1.3.6]. \tag{4.29}$$

Also ergibt sich letztlich

$$\text{Tr}' \log \frac{\mathbb{M}_{(1)}}{\mathbb{M}_{(0)}} = -\frac{d}{dz}|_{z=0} \tilde{\zeta}'(z) + O(\varepsilon). \tag{4.30}$$

Es bleibt also  $\frac{d}{dz}|_{z=0} \tilde{\zeta}'(z)$  zu berechnen.

Dazu ist folgende Aufspaltung von Vorteil:

$$\tilde{\zeta}'(z) = \zeta_1(z) + \zeta_2(z) + \zeta_3(z), \tag{4.31}$$

mit

$$\zeta_1(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \frac{L^2}{4\pi t} [\tilde{K}_t(Q) - 1], \quad \text{Re } z > 1, \text{ analytisch fortgesetzt zu } z = 0, \quad (4.32)$$

$$\zeta_2(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[ A^2 \left( \frac{4\pi t}{L^2} \right) - 1 \right], \quad \text{Re } z > 1, \text{ analytisch fortgesetzt zu } z = 0, \quad (4.33)$$

$$\zeta_3(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[ A^2 \left( \frac{4\pi t}{L^2} \right) - \frac{L^2}{4\pi t} \right] [\tilde{K}_t(Q) - 1], \quad z \text{ beliebig}, \quad (4.34)$$

$$A(s) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s} \quad (4.35)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}} A\left(\frac{1}{s}\right) \quad (\text{Poissonsche Summenformel bzw. Transformationsformel der Thetafunktion [62, Aufgabe 17.9]}). \quad (4.36)$$

Zum Beweis dieser Zerlegung beachte man

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t(M_{(1)})|_{D=3} &= \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} \tilde{K}_t(Q) \\ &= \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} n^2 t} \right]^2 \tilde{K}_t(Q) \\ &= A^2 \left( \frac{4\pi t}{L^2} \right) \tilde{K}_t(Q). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Idee dieser Aufspaltung ist es, Raumanteil und Zeitanteil soweit wie möglich zu trennen. Dadurch entstehen mit  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  einfachere Funktionen, die ausgerechnet werden können, und bei  $\zeta_3$  wird sich zeigen, daß dieser Beitrag für große  $L$  exponentiell abfällt. Die einzelnen Beiträgen werden jetzt in den folgenden Abschnitten bestimmt.

## 4.1 Beitrag von $\zeta_1$

Aus [22] entnimmt man

$$\tilde{K}_t(Q) - 1 = e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} + \int_{-\infty}^\infty dp g(p) e^{-(m_0^2 + p^2) t}, \quad (4.38)$$

mit der Spektraldichte  $g(p)$ :

$$\begin{aligned} g(p) &= -\frac{m_0}{2\pi} \left( \frac{2}{p^2 + m_0^2} + \frac{1}{p^2 + \frac{m_0^2}{4}} \right) \\ &= -\frac{m_0}{2\pi} \left( \frac{3}{p^2 + m_0^2} + \frac{3}{4} \frac{m_0^2}{(p^2 + m_0^2)^2} + \frac{(\frac{3}{4} m_0^2)^2}{(p^2 + m_0^2)^2 (p^2 + \frac{m_0^2}{4})} \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Um die analytische Fortsetzung zu  $z = 0$  durchzuführen, rechnet man folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \zeta_1(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty dt t^{z-2} [\tilde{K}_t(Q) - 1] \\
 &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma(z)} \left\{ \int_0^\infty dt t^{z-2} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} + \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dp g(p) e^{-(m_0^2 + p^2)t} \right\} \\
 &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{1}{\Gamma(z)} \left\{ \left(\frac{3}{4} m_0^2\right)^{1-z} \Gamma(z-1) + \int_{-\infty}^\infty dp g(p) (m_0^2 + p^2)^{1-z} \Gamma(z-1) \right\} \\
 &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{1}{z-1} \left\{ \left(\frac{3}{4} m_0^2\right)^{1-z} + \int_{-\infty}^\infty dp g(p) (m_0^2 + p^2)^{1-z} \right\}. \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

Für das letzte Integral berechnet man

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^\infty dp g(p) (m_0^2 + p^2)^{1-z} &= -\frac{m_0}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dp \left\{ \frac{3}{(p^2 + m_0^2)^z} + \frac{3}{4} \frac{m_0^2}{(p^2 + m_0^2)^{z+1}} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{3}{4} m_0^2\right)^2 \frac{1}{(p^2 + m_0^2)^{z+1} (p^2 + \frac{m_0^2}{4})} \right\} \\
 &= -\frac{m_0^{-2z+2}}{2\pi} \left\{ 3 B\left(\frac{1}{2}, z - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} B\left(\frac{1}{2}, z + \frac{1}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{9}{16} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{1}{(p^2 + 1)^{z+1} (p^2 + \frac{1}{4})} \right\} \quad [47, 8.380.3] \\
 &= -\frac{m_0^{-2z+2}}{2\pi} \left\{ 3 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} + \frac{3}{4} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z+1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{9}{16} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{1}{(p^2 + 1)^{z+1} (p^2 + \frac{1}{4})} \right\}. \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

Daher erhält man für  $\zeta_1(z)$ :

$$\begin{aligned}
 \zeta_1(z) &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{m_0^{2-2z}}{z-1} \left\{ \left(\frac{3}{4}\right)^{1-z} - \frac{3}{\sqrt{4\pi}} \frac{\Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} - \frac{3}{4\sqrt{4\pi}} \frac{\Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z+1)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{9}{32\pi} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{1}{(p^2 + 1)^{z+1} (p^2 + \frac{1}{4})} \right\}. \tag{4.42}
 \end{aligned}$$

In dieser Form kann man jetzt  $\zeta_1(z)$  zu  $z = 0$  analytisch fortsetzen, und die Ableitung an der Stelle  $z = 0$  berechnet sich nach kurzer Rechnung zu

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz}|_{z=0} \zeta_1(z) &= \frac{L^2}{4\pi} \log(m_0^2) \left\{ \frac{3}{4} - \frac{3}{8} - \frac{9}{32\pi} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + \frac{1}{4})} \right\} \\
 &\quad - \frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left\{ \frac{3}{4} - \frac{3}{8} - \frac{9}{32\pi} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + \frac{1}{4})} \right\} \\
 &\quad - \frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left\{ -\frac{3}{4} \log\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{\sqrt{4\pi}} \Gamma(-\frac{1}{2}) + \frac{3}{8} \Gamma'(1) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{4\sqrt{4\pi}} \Gamma'(\frac{1}{2}) + \frac{9}{32\pi} \int_{-\infty}^\infty dp \frac{\log(1+p^2)}{(p^2 + 1)(p^2 + \frac{1}{4})} \right\}. \tag{4.43}
 \end{aligned}$$

Mit

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}, \quad (4.44)$$

$$\Gamma'(1) = -\gamma, \quad (4.45)$$

$$\Gamma'(\frac{1}{2}) = -\sqrt{\pi}(\gamma + 2\log 2), \quad (4.46)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{(p^2 + 1)(p^2 + \frac{1}{4})} = \frac{4}{3}\pi \quad (4.47)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\log(1+p^2)}{(p^2+1)(p^2+\frac{1}{4})} = \frac{8\pi}{3} \log\left(\frac{9}{8}\right) \quad (\text{Partialbruchzerlegung und [47, 4.295.1]}) \quad (4.48)$$

bekommt man schließlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}_{|z=0} \zeta_1(z) &= -\frac{m_0^2 L^2}{4\pi} \left\{ -\frac{3}{4} \log\left(\frac{3}{4}\right) + 3 - \frac{3}{8}\gamma + \frac{3}{8}(\gamma + 2\log 2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \log\left(\frac{9}{8}\right) \right\} \\ &= -\frac{m_0^2 L^2}{4\pi} \left\{ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right\}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

## 4.2 Beitrag von $\zeta_2$

Mit der Definition (4.33) folgt

$$\begin{aligned} \zeta_2(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[ A^2\left(\frac{4\pi t}{L^2}\right) - 1 \right] \\ &= \left(\frac{L^2}{4\pi}\right)^z \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty ds s^{z-1} \left[ A^2(s) - 1 \right], \quad s = \frac{4\pi t}{L^2} \\ &= \left(\frac{L^2}{4\pi}\right)^z \frac{1}{\Gamma(z)} \left\{ \int_0^1 ds s^{z-1} \left[ A^2(s) - \frac{1}{s} \right] + \int_1^\infty ds s^{z-1} \left[ A^2(s) - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 ds s^{z-2} - \int_0^1 ds s^{z-1} \right\} \\ &= \left(\frac{L^2}{4\pi}\right)^z \frac{1}{\Gamma(z)} \left\{ \int_0^1 ds s^{z-1} \left[ A^2(s) - \frac{1}{s} \right] + \int_1^\infty ds s^{z-1} \left[ A^2(s) - 1 \right] \right\} \\ &\quad + \left(\frac{L^2}{4\pi}\right)^z \frac{1}{\Gamma(z)} \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \right\}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Nach Konstruktion existieren die ersten beiden Integrale für  $z = 0$ , so daß man findet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}_{|z=0} \zeta_2(z) &= \int_0^1 \frac{ds}{s} \left[ A^2(s) - \frac{1}{s} \right] + \int_1^\infty \frac{ds}{s} \left[ A^2(s) - 1 \right] - 1 \\ &\quad - \frac{d}{dz}_{|z=0} \left\{ \left(\frac{L^2}{4\pi}\right)^z \frac{1}{\Gamma(z+1)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Durch Ausrechnen der Ableitung erhält man somit

$$\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta_2(z) = C - \log\left(\frac{L^2}{4\pi}\right), \quad (4.52)$$

mit

$$C := \int_0^1 \frac{ds}{s} \left[ A^2(s) - \frac{1}{s} \right] + \int_1^\infty \frac{ds}{s} \left[ A^2(s) - 1 \right] - 1 - \gamma. \quad (4.53)$$

Der Ausdruck  $C$  kann noch geschlossen bestimmt werden [23, 50], man erhält

$$\begin{aligned} C &= 2 \log \left[ \sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right] \\ &= -1.476336(1). \end{aligned} \quad (4.54)$$

### 4.3 Beitrag von $\zeta_3$

Nach Definition (4.34) hat man

$$\zeta_3(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[ A^2\left(\frac{4\pi t}{L^2}\right) - \frac{L^2}{4\pi t} \right] \left[ \tilde{K}_t(Q) - 1 \right]. \quad (4.55)$$

Dieses Integral existiert auch für  $z = 0$ , und man rechnet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta_3(z) &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[ A^2\left(\frac{4\pi t}{L^2}\right) - \frac{L^2}{4\pi t} \right] \left[ \tilde{K}_t(Q) - 1 \right] \\ &= \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} \left[ A^2\left(\frac{L^2}{4\pi t}\right) - 1 \right] \left[ \tilde{K}_t(Q) - 1 \right] \\ &= \frac{L^2}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{L^2 \vec{n}^2}{4t}} \left\{ e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} + \int_{-\infty}^\infty dp g(p) e^{-(m_0^2 + p^2) t} \right\}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Dies lässt sich folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta_3(z) \right| &\leq \frac{L^2}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{L^2 \vec{n}^2}{4t}} \left\{ e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} + e^{-m_0^2 t} \int_{-\infty}^\infty dp g(p) \right\} \\ &\leq \frac{L^2}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{L^2 \vec{n}^2}{4t}} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \left\{ 1 + \int_{-\infty}^\infty dp g(p) \right\}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist hier beschränkt, da das Integral  $\int_{-\infty}^\infty dp g(p)$  über die Spektraldichte des kontinuierlichen Spektrums endlich ist. Deshalb gilt:

$$\left| \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta_3(z) \right| \leq \text{const.} L^2 \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{L^2 \vec{n}^2}{4t}} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t}. \quad (4.58)$$

Das  $t$ -Integral lässt sich durch eine Besselfunktion  $K_\nu$  [47, 8.407] ausdrücken. Genauer gilt [47, 3.471.9]

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta_3(z) \right| &\leq \text{const. } L^2 \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \left( \frac{L^2 \vec{n}^2}{3m_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} K_{-\nu} \left( 2 \sqrt{\frac{3m_0^2 L^2 \vec{n}^2}{16}} \right) \\
 &= \text{const. } m_0 L \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|\vec{n}|} K_1 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L |\vec{n}| \right) \quad (K_{-\nu} = K_\nu, [63, 9.6.6]) \\
 &\underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \text{const. } \sqrt{m_0 L} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|\vec{n}|^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L |\vec{n}|} \quad [47, 8.451.6] \\
 &= O \left( \sqrt{m_0 L} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L c_0} \right), \quad c_0 > 0. \tag{4.59}
 \end{aligned}$$

$c_0$  ist hier eine geeignete positive Konstante. Wie angekündigt wird also der Beitrag von  $\zeta_3$  für  $L \rightarrow \infty$  exponentiell klein.

## 4.4 Ergebnis für das Determinantenverhältnis

Die Beiträge von  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  und  $\zeta_3$  zusammengefaßt, ergibt sich also schließlich (vgl. Gln. (4.30), (4.31), (4.49), (4.52), (4.59))

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}' \log \frac{\mathbb{M}_{(1)}}{\mathbb{M}_{(0)}} &= \frac{m_0^2 L^2}{4\pi} \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] - C + \log \left( \frac{L^2}{4\pi} \right) \\
 &\quad + O \left( \sqrt{m_0 L} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L c_0} \right) + O(\varepsilon). \tag{4.60}
 \end{aligned}$$

Daher hat man für das gesuchte Determinantenverhältnis:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\det' \mathbb{M}_{(1)}}{\det \mathbb{M}_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr}' \log \frac{\mathbb{M}_{(1)}}{\mathbb{M}_{(0)}} \right\} \\
 &= \exp \left\{ -\frac{m_0^2 L^2}{8\pi} \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] + \frac{C}{2} - \log \left( \frac{L}{\sqrt{4\pi}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + O \left( \sqrt{m_0 L} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L c_0} \right) + O(\varepsilon) \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{8\pi}{L^2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{m_0^2 L^2}{8\pi} \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] + O \left( \sqrt{m_0 L} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L c_0} \right) + O(\varepsilon) \right\}. \tag{4.61}
 \end{aligned}$$

Dies ist der erste wesentliche Faktor, der zur Energieaufspaltung  $E_{0a}$  gemäß Gl. (2.78) beiträgt.

# Kapitel 5

## Graphenberechnungen

Die folgenden Graphenberechnungen sind im Detail recht umfangreich und aufwendig. Darum soll hier zunächst ein Überblick über die verwendeten Rechenmethoden und die verfolgten Strategien bei der Bestimmung der Graphen gegeben werden.

### 5.1 Rechenmethoden

Die Problematik der Berechnung hauptsächlich der Graphen mit Instantonhintergrundfeld besteht darin, daß der Propagator mit Instantonhintergrundfeld (vgl. Gl. (3.69))

$$G(x, y) = \int_0^\infty dt \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle \right. \\ + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle \\ \left. + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \quad (5.1)$$

recht kompliziert ist. Da die Graphen  und  in hauptsächlichen Teilen aus Termen  $G(x, x)$  bestehen, im wesentlichen also aus 1-Loop-Anteilen zusammengesetzt sind, und in diesem Fall der Propagator einfacher ist, ist deren Berechnung noch relativ einfach. Bei dem Graphen  hat man eine solche Vereinfachung nicht; dies ist ein wirklicher 2-Loop-Graph. Alles in allem enthält er, wegen des Faktors  $[G(x, y)]^3$  und den zu bildenden Integralen über Raum und Zeit, insgesamt:

- drei Integrale über Schwinger-Parameter,
- drei Integrale über das kontinuierliche Spektrum,
- drei Reihen  $\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \dots$ , für  $D = 3$  also Doppelreihen,
- die Integrale  $\int d^D x \dots$  und  $\int d^D y \dots$

Hinzu kommt noch, daß in den Graphenberechnungen Divergenzen zu erwarten sind. Die 2-Loop-Berechnung der renormierten Masse und der renormierten Kopplungskonstanten [64, 65] legt dabei die Annahme nahe, daß  und  divergenzfrei sind, 

aber eine Divergenz enthält, denn auch bei den Rechnungen zu den Renormierungsgrößen stammen die divergenten Anteile aus diesem eigentlichen 2–Loop–Graphen. Die Rechnung wird diese Annahme bestätigen.

Um diese Probleme zu bewältigen, lassen sich zunächst folgende Prinzipien formulieren:

1. Die Graphen werden in solche Summanden zerlegt, die relativ einfach zu berechnen sind.
2. Da man die Oberflächenspannung insbesondere im Limes großer  $L$ , d.h. im Grenzwert einer unendlich großen Grenzfläche, bestimmen will, werden Terme, die für  $L \rightarrow \infty$  verschwinden, vernachlässigt.
3. Die Abhängigkeit der Graphen von den Parametern der Theorie, insbesondere von  $L$ , soll deutlich werden, d.h. es sollen Resultate erzielt werden, die von der Form

$$f(g_0, m_0, L) Z \quad (5.2)$$

sind, wobei  $f(g_0, m_0, L)$  ein einfacher Term ohne Integral oder Reihe ist und  $Z$  ein Ausdruck (z.B. ein recht kompliziertes Integral), der nicht mehr von  $g_0, m_0$  oder  $L$  abhängt, also eine reine Zahl ist, die gegebenfalls numerisch bestimmt werden kann.

Neben diesen allgemeinen Prinzipien gibt es im einzelnen eine Fülle von möglichen Vorgehensweisen (Reihenfolge der Integrationen, Durchführung der Summationen etc.). Um eine durchführbare Rechenmethode zu finden, wurden verschiedene Vorgehensweisen versucht.

Eine erste Methode war, für den komplizierten Propagator  $G(x, y)$ , der der wesentliche Grund für die Rechenprobleme ist, einen einfachen Ausdruck zu finden. Dazu wurden das Integral über den Schwinger–Parameter und das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} dk \dots$  über das kontinuierliche Spektrum ausgeführt. Das Resultat für  $G(x, y)$  ist im Kapitel 3 angegeben (Gl. (3.100)). Es ist immer noch so kompliziert, daß damit nicht versucht wurde, den Graphen  zu berechnen. Für die Graphen  und  wird im wesentlichen aber nur  $G(x, x)$  benötigt, und hierfür hat man, nach einer längeren Rechnung, das einfache Ergebnis

$$\begin{aligned} G(x, x) = & \int_0^\infty dt \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} \left[ \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-m_0^2 t} + \Phi(m_0 \sqrt{t}) |\langle x_0 | 0 \rangle|^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \Phi(\frac{m_0}{2} \sqrt{t}) |\langle x_0 | 1 \rangle|^2 \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{L^{D-1}} |\langle x_0 | 0 \rangle|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

$\Phi$  ist das Fehlerintegral (vgl. Gl. (4.18)).

Berechnet man hiermit den Graphen , so ergibt sich ein recht langer Ausdruck<sup>1</sup>, der keine Integrale mehr enthält, dafür aber, in  $D = 3$  Dimensionen, Reihen der folgenden Typen:

$$A(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{4\pi k! (2k-1)}, \quad (5.4)$$

---

<sup>1</sup>Auf eine Wiedergabe wird hier verzichtet.

$$B(x) := \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4\pi^2 \vec{n}^2} (3x^2 + 16\pi^2 \vec{n}^2)}, \quad (5.5)$$

$$C(x) := \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-|\vec{n}|x}}{4\pi |\vec{n}|} \quad (5.6)$$

und

$$D(x) := \frac{1}{\pi^2} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4\pi^2 \vec{n}^2} \vec{n}^2}. \quad (5.7)$$

$x$  ist im wesentlichen gleich  $m_0 L$ . Bis auf

$$A(x) = -\frac{1}{4\pi} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -x^2\right), \quad {}_1F_1: \text{konfluente hypergeometrische Funktion [47, 9.21]} \quad (5.8)$$

ließen sich diese Reihen nicht mehr geschlossen summieren; mit Integraltechniken wie der Eulerschen Summenformel oder der Planaschen Summenformel [66, S. 145] wäre immerhin eine numerische Bestimmung möglich. Die Quintessenz aus diesen Versuchen war, sich auf die Beiträge zu konzentrieren, die für  $L \rightarrow \infty$  nicht gegen 0 gehen. Dies von Beginn an berücksichtigt führte schließlich zu folgender verfolgter Strategie:

1. Man konzentriert sich frühzeitig auf die Terme, die für  $L \rightarrow \infty$  nicht gegen 0 gehen.
2. Bei den konvergenten Graphen  und :
  - Integrale über Raum und Zeit und über die Schwinger–Parameter analytisch ausführen,
  - $\int_{-\infty}^{\infty} dk \dots$  über das kontinuierliche Spektrum, falls nicht anders möglich, numerisch bestimmen.
3. Bei dem divergenten Graphen  kommt zusätzlich die Isolierung der Divergenz hinzu:
  - Wegen der benutzten dimensionellen Regularisierung wird die Divergenz aus einem Integral über Raum und Zeit ( $\int d^D x \dots$ ) erhalten.
  - Durch Vereinfachen und Trennen von konvergenten und divergenten Anteilen sollen alle Integrale außer einem Raum–Zeit–Integral, das die Divergenz enthält, ausgeführt werden.
  - Das divergenzhaltende Integral soll so einfach sein, daß die Divergenz bestimmt werden kann.

Dies sind nur die allgemeinen Prinzipien, im Detail gilt es, jeweils geeignete Substitutionen und Näherungen zu finden, um die Parameterabhängigkeit der Graphen (s.o.) zu klären.

Eine letzte Anmerkung ist noch vor den Graphenberechnungen zu machen. In der betrachteten  $\phi^4$ -Theorie in  $D$  Dimensionen hat die Kopplungskonstante  $g_0^{(D)}$  die Massendimension  $4 - D$  (vgl. Anhang A). Mit  $g_0$  soll weiterhin die Kopplungskonstante in  $D = 3$  Dimensionen bezeichnet werden, die die Massendimension 1 hat, also  $g_0 = g_0^{(3)}$ . Für die Kopplungskonstante  $g_0^{(D)}$  ist daher eine Massenskala  $\mu_0$  einzuführen:

$$\begin{aligned} g_0^{(D)} &= g_0 \mu_0^{3-D} \\ &= g_0 \mu_0^\varepsilon \quad (D = 3 - \varepsilon). \end{aligned} \quad (5.9)$$

## 5.2 Graphen ohne Instantonhintergrundfeld

Es sollen zunächst die Graphen berechnet werden, die zur Amplitude  $\langle 0_+ | e^{-TH} | 0_+ \rangle$  beitragen, also die Graphen ohne Instantonhintergrundfeld; dies sind die gestrichelten Graphen aus Kapitel 2. Die dabei zu verwendende Greensche Funktion und die Feynman–Regeln seien hier noch einmal angegeben (vgl. Kapitel 2, 3, hier in  $D$  Dimensionen):

$$\begin{aligned} \text{--- --- ---} &\cong G_0(x, y) = \int_0^\infty dt \left\{ \frac{1}{L^{D-1}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \\ &\quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2) t} e^{ip(x_0 - y_0)} \right\}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\text{---} \leftarrow \text{---} \cong -\sqrt{3 g_0 m_0^2} \mu_0^\varepsilon,$$

$$\text{---} \times \text{---} \cong -g_0 \mu_0^\varepsilon,$$

- über Vertizes integrieren:  $\int d^D x$ ,
- übliche Symmetriefaktoren.

Bei den Rechnungen werden Divergenzen in den  $x_0$ – bzw.  $y_0$ –Integralen auftreten, die sich aufgrund der gleichen Asymptotik von  $G_0(x, y)$  und  $G(x, y)$  für  $x_0, y_0 \rightarrow \pm\infty$  (vgl. den Schluß von Abschnitt 3.3.1) bei Differenzbildung von Graphen mit und ohne Instantonhintergrundfeld zur Berechnung der Energieaufspaltung wegheben werden. Als vorläufige Regularisierung wird die Integration über die Zeitkoordinate  $x_0$  eingeschränkt (Cutoff):

$$\int dx_0 \rightarrow \int_{-\frac{1}{2}\hat{T}}^{\frac{1}{2}\hat{T}} dx_0 = \hat{T}. \quad (5.11)$$

Die zu berechnenden Graphen werden wie folgt bezeichnet:

$$\text{OIA} := \text{---} \times \text{---},$$

$$\text{OIB} := \text{---} \times \text{---},$$

$$\text{OIC} := \text{---} \times \text{---}.$$

### 5.2.1 Berechnung von Graph OIA =

Mit den Feynman–Regeln erhält man zunächst, wenn der Symmetriefaktor  $\frac{1}{8}$  gesondert aufgeschrieben wird,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{ (OIA)} &= -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon \int d^D x [G_0(x, x)]^2 \\ &= -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon \int d^D x \left[ \int_0^\infty dt \frac{1}{L^{D-1}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2) t} \right]^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Im Grunde ist es nicht nötig, diesen Ausdruck weiter auszurechnen, da der Graph  $\frac{1}{8} \text{ (OIA)}$  genau den Graphen  $\frac{1}{8} \text{ (OIA)}$  enthält, und sich bei der Berechnung der Energieaufspaltung diese Beiträge beider Graphen gerade wegheben, wie es zur Vermeidung der Infrarot–Divergenzen auch sein muß. Dennoch soll der Graph hier noch weiter berechnet werden, denn die Methode der Behandlung der UV–Divergenzen ist bei diesem relativ einfachen Graphen ganz ähnlich wie später bei den komplizierteren. Aus Gl. (5.12) bekommt man zunächst, da der Integrand unabhängig von  $x$  ist,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{ (OIA)} &= -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon L^{D-1} \hat{T} \left[ \int_0^\infty dt \left\{ \frac{1}{L^{D-1}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} \times \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2) t} \right\} \right]^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Mit den Substitutionen  $u = \frac{t}{L^2}$  und im nächsten Schritt  $v = \frac{p}{m_0}$  wird daraus ( $D = 3 - \varepsilon$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{ (OIA)} &= -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon L^{2-\varepsilon} \hat{T} \left[ \int_0^\infty du L^\varepsilon \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2) L^2 u} \right]^2 \\ &= -\frac{1}{8} g_0 m_0^2 L^2 (\mu_0 L)^\varepsilon \hat{T} \\ &\quad \times \left[ \int_0^\infty du \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \int_{-\infty}^\infty \frac{dv}{2\pi} e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \right]^2 \\ &= -\frac{1}{8} g_0 m_0^2 L^2 (\mu_0 L)^\varepsilon \hat{T} \left[ D_1^{(0)}(m_0 L) \right]^2, \end{aligned} \quad (5.14)$$

mit der Definition

$$D_1^{(0)}(m_0 L) := \int_0^\infty du \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \int_{-\infty}^\infty \frac{dv}{2\pi} e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u}. \quad (5.15)$$

Dieser Ausdruck  $D_1^{(0)}(m_0 L)$  soll nun als erstes betrachtet werden. Zunächst führt man die  $v$ –Integration (Gauß–Integral) aus:

$$\begin{aligned} D_1^{(0)}(m_0 L) &= \int_0^\infty du \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \int_{-\infty}^\infty \frac{dv}{2\pi} e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} m_0 L} \int_0^\infty du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{\sqrt{u}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Mit der Poissonschen Summenformel gilt nun (vgl. auch Abschnitt 3.3.1, Gl. (3.65) für  $\vec{x} = \vec{y}$ )

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} &= \left[ \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 u} \right]^{D-1} \\ &= \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \left[ \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\frac{n^2}{4u}} \right]^{D-1} \\ &= \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4u}}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

An der letzten Gleichung liest man das Verhalten der Reihe in  $D_1^{(0)}(m_0 L)$  für  $u \rightarrow 0$  ab:

$$\sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}}. \quad (5.18)$$

Man zieht jetzt im Integranden von  $D_1^{(0)}(m_0 L)$  die Terme ab, die im Limes  $u \rightarrow 0$  Divergenzen verursachen und addiert sie wieder. Auf diese Weise lassen sich die möglichen Diverenzen isolieren:

$$\begin{aligned} D_1^{(0)}(m_0 L) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} m_0 L} \left\{ \int_0^\infty du \left[ \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{\sqrt{u}} \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} - \frac{\theta(1-u)}{\sqrt{u} (4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 du \frac{1}{\sqrt{u} (4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Mit  $D = 3 - \varepsilon$  und wenn man beachtet, daß das erste Integral jetzt für  $D = 3$  (also  $\varepsilon = 0$ ) existiert, erhält man:

$$\begin{aligned} D_1^{(0)}(m_0 L) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} m_0 L} \int_0^\infty du \left[ \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{\sqrt{u}} \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} - \frac{\theta(1-u)}{4\pi u^{\frac{3}{2}}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi} m_0 L} \int_0^1 du \frac{1}{(4\pi)^{\frac{2-\varepsilon}{2}} u^{\frac{3-\varepsilon}{2}}} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Für das letzte Integral rechnet man einfach aus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\pi} m_0 L} \int_0^1 du \frac{1}{(4\pi)^{\frac{2-\varepsilon}{2}} u^{\frac{3-\varepsilon}{2}}} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} m_0 L} \frac{(4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{4\pi} \frac{u^{\frac{\varepsilon-1}{2}}}{\frac{\varepsilon-1}{2}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} m_0 L} (4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{2}{\varepsilon-1} \\ &= -\frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}} m_0 L} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Im ersten  $u$ -Integral in Gl. (5.20) spaltet man den Integrationsbereich in die Intervalle  $[0, 1]$  und  $]1, \infty[$  auf. Im folgenden werden nur die bei großen  $L$  dominierenden Terme bestimmt.

Deshalb kann man abschätzen:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\sqrt{\pi}m_0L} \int_1^\infty du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{\sqrt{u}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}m_0L} \int_1^\infty du \left\{ e^{-m_0^2 L^2 u} \underbrace{\sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u}}{\sqrt{u}}} \right\} \\
&\leq \frac{\text{const.}}{m_0L} \int_1^\infty du e^{-m_0^2 L^2 u} \quad \text{beschränkt auf } ]1, \infty[ \\
&= \frac{\text{const.}}{m_0L} \frac{e^{-m_0^2 L^2}}{m_0^2 L^2} \\
&= O\left(\frac{e^{-m_0^2 L^2}}{m_0^3 L^3}\right). \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\sqrt{\pi}m_0L} \int_0^1 du \left[ \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{\sqrt{u}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} - \frac{1}{4\pi u^{\frac{3}{2}}} \right] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}m_0L} \int_0^1 du \left[ \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{\sqrt{u}} \frac{1}{4\pi u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4u}} - \frac{1}{4\pi u^{\frac{3}{2}}} \right] (\text{vgl. Gl. (5.17)}) \\
&= g_1 + g_2, \tag{5.23}
\end{aligned}$$

mit den Definitionen

$$g_1 := \frac{1}{2\sqrt{\pi}m_0L} \int_0^1 du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u} - 1}{4\pi u^{\frac{3}{2}}} \tag{5.24}$$

und

$$g_2 := \frac{1}{2\sqrt{\pi}m_0L} \int_0^1 du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{4\pi u^{\frac{3}{2}}} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4u}}. \tag{5.25}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4u}} &= 4e^{-\frac{1}{4u}} + \sum'_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 \\ |\vec{n}| \neq 1}} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4u}} \\
&= e^{-\frac{1}{4u}} \left\{ 4 + \sum'_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 \\ |\vec{n}| \neq 1}} e^{-\frac{\vec{n}^2 - 1}{4u}} \right\} \tag{5.26}
\end{aligned}$$

und da der Ausdruck in den geschweiften Klammern auf dem Intervall  $[0, 1]$  beschränkt ist, folgt für  $g_2$ :

$$\begin{aligned}
g_2 &\leq \frac{\text{const.}}{m_0L} \int_0^1 du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{u^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{4u}} \\
&\leq \frac{\text{const.}}{m_0L} \int_0^\infty du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{u^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{4u}}. \tag{5.27}
\end{aligned}$$

Das  $u$ -Integral führt man auf eine Besselfunktion zurück [47, 3.471.9]:

$$\begin{aligned}
 g_2 &\leq \frac{\text{const.}}{m_0 L} 2 \left( \frac{1}{4m_0^2 L^2} \right)^{-\frac{1}{4}} K_{-\frac{1}{2}}(m_0 L) \\
 &= \frac{\text{const.} \sqrt{m_0 L}}{m_0 L} \sqrt{\frac{\pi}{2m_0 L}} e^{-m_0 L} \quad [47, 8.496.3] \\
 &= \frac{\text{const.}}{m_0 L} e^{-m_0 L} \\
 &= O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{m_0 L}\right).
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Schließlich berechnet man für  $g_1$ :

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi} m_0 L} \int_0^1 du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u} - 1}{4\pi u^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} m_0 L} \left[ \int_0^1 du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u} - 1}{u^{\frac{3}{2}-z}} \right]_{z=0} \\
 &= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} m_0 L} \left[ \int_0^1 du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{u^{\frac{3}{2}-z}} - \int_0^1 du \frac{1}{u^{\frac{3}{2}-z}} \right]_{z=0} \quad (\text{Re}(z) > \frac{1}{2}, \text{ analytisch zu } z = 0 \text{ fortgesetzt}).
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist so zu verstehen, daß der Ausdruck in eckigen Klammern für  $\text{Re}(z) > \frac{1}{2}$  berechnet wird, und man das Ergebnis dann analytisch zu  $z = 0$  fortsetzt. In diesem Sinne rechnet man

$$\begin{aligned}
 g_1 &= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} m_0 L} \left[ \int_0^\infty du u^{z-\frac{3}{2}} e^{-m_0^2 L^2 u} - \int_1^\infty du u^{z-\frac{3}{2}} e^{-m_0^2 L^2 u} - \frac{u^{z-\frac{1}{2}}}{z - \frac{1}{2}} \Big|_0^1 \right]_{z=0} \\
 &= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} m_0 L} \left[ (m_0^2 L^2)^{\frac{1}{2}-z} \int_0^\infty du u^{z-\frac{3}{2}} e^{-u} \right. \\
 &\quad \left. - (m_0^2 L^2)^{\frac{1}{2}-z} \int_{m_0^2 L^2}^\infty du u^{z-\frac{3}{2}} e^{-u} - \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \right]_{z=0} \\
 &= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} m_0 L} \left[ (m_0^2 L^2)^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(z - \frac{1}{2}) - (m_0^2 L^2)^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(z - \frac{1}{2}, m_0^2 L^2) - \frac{1}{z - \frac{1}{2}} \right]_{z=0} \\
 &\quad (\text{unvollständige Gammafunktion [47, 8.350.2]}) \\
 &= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} m_0 L} \left[ m_0 L \Gamma(-\frac{1}{2}) - m_0 L \Gamma(-\frac{1}{2}, m_0^2 L^2) + 2 \right].
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Wegen

$$\Gamma(-\frac{1}{2}, m_0^2 L^2) = O\left(\frac{e^{-m_0^2 L^2}}{m_0^3 L^3}\right) \quad \text{für } L \rightarrow \infty \quad [47, 8.357] \tag{5.30}$$

und

$$\begin{aligned}
 \Gamma(-\frac{1}{2}) &= \frac{\pi}{\sin(\frac{3}{2}\pi)} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \quad [63, 6.1.17] \\
 &= -2\sqrt{\pi},
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

denn  $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$  [63, 6.1.15 und 6.1.8], hat man also

$$g_1 = \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}m_0L} [-2m_0L\sqrt{\pi} + 2] + O\left(\frac{e^{-m_0^2L^2}}{m_0^3L^3}\right). \quad (5.32)$$

Alles zusammengefaßt ergibt sich daher

$$\begin{aligned} D_1^{(0)}(m_0L) &= \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}}m_0L} [-2m_0L\sqrt{\pi} + 2] + O\left(\frac{e^{-m_0^2L^2}}{m_0^3L^3}\right) \\ &\quad + O\left(\frac{e^{-m_0L}}{m_0L}\right) - \frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}m_0L} + O(\varepsilon) \\ &= -\frac{1}{4\pi} + O\left(\frac{e^{-m_0L}}{m_0L}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Damit erhält man letztlich für den zu berechnenden Graphen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{Graph} &= -\frac{1}{8} g_0 m_0^2 L^2 (\mu_0 L)^\varepsilon \widehat{T} \frac{1}{16\pi^2} + O(m_0 L e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon) \\ &= -\frac{g_0 m_0^2 L^2}{128\pi^2} \widehat{T} + O(m_0 L e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.34)$$

### 5.2.2 Berechnung von Graph OIB

Aus den Feynman-Regeln bekommt man (der Symmetriefaktor wird erneut gesondert aufgeschrieben):

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{Graph} &= \frac{1}{8} 3 m_0^2 g_0 \mu_0^\varepsilon \int d^D x \int d^D y G_0(x, x) G_0(x, y) G_0(y, y) \\ &= \frac{3 m_0^2 g_0 \mu_0^\varepsilon}{8} \int d^D x \int d^D y \left\{ \int_0^\infty dt_1 \left\{ \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}_1^2 t_1} \right. \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_1}{2\pi} e^{-(p_1^2 + m_0^2)t_1} \left. \right\} \\ &\quad \times \int_0^\infty dt_2 \left\{ \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}_2^2 t_2} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_2}{2\pi} e^{-(p_2^2 + m_0^2)t_2} e^{ip_2(x_0 - y_0)} \left. \right\} \\ &\quad \times \int_0^\infty dt_3 \left\{ \sum_{\vec{n}_3 \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}_3^2 t_3} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_3}{2\pi} e^{-(p_3^2 + m_0^2)t_3} \right\} \Big\} \\ &= \frac{3 m_0^2 g_0 \mu_0^\varepsilon}{8} \left[ \int_0^\infty dt_1 \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}_1^2 t_1} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_1}{2\pi} e^{-(p_1^2 + m_0^2)t_1} \right]^2 \\ &\quad \times \int_0^\infty dt_2 \int dx_0 \int dy_0 \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_2}{2\pi} e^{-(p_2^2 + m_0^2)t_2} e^{ip_2(x_0 - y_0)} \right. \\ &\quad \times \int d^{D-1}x \int d^{D-1}y \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}_2^2 t_2} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Die beiden  $D - 1$ -dimensionalen Raumintegrale ergeben wegen der oszillatorischen Funktion  $e^{i\frac{2\pi}{L}\vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{y})}$  nur für  $\vec{n}_2 = 0$  einen Beitrag, nämlich  $(L^{D-1})^2 \frac{1}{L^{D-1}} = L^{D-1}$ . Mit den zusätzlichen Substitutionen  $u = \frac{t_1}{L^2}$  und  $v = \frac{p_1}{m_0}$  erhält man dann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \langle \text{---} \rangle &= \frac{3}{8} m_0^4 g_0 \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} \left[ \int_0^\infty du \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbf{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_1^2 u} \int_{-\infty}^\infty \frac{dv}{2\pi} e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \right]^2 \\ &\quad \times L^{2-\varepsilon} \int_0^\infty dt_2 \int dx_0 \int dy_0 \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_2}{2\pi} e^{-(p_2^2 + m_0^2)t_2} e^{ip_2(x_0 - y_0)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Erinnert man sich an die Definition von  $D_1^{(0)}(m_0 L)$  (vgl. Gl. (5.15)), so bekommt man, wobei stets  $D = 3 - \varepsilon$  zu beachten ist,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \langle \text{---} \rangle &= \frac{3 m_0^4 g_0}{8} \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} \left[ D_1^{(0)}(m_0 L) \right]^2 \\ &\quad \times L^{2-\varepsilon} \int_0^\infty dt_2 \int_{-\infty}^\infty dp_2 e^{-(p_2^2 + m_0^2)t_2} \int dx_0 \int dy_0 \frac{1}{2\pi} e^{ip_2(x_0 - y_0)}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Mittels der Substitution  $y' = x_0 - y_0$  ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \langle \text{---} \rangle &= \frac{3 m_0^4 g_0}{8} \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} \left[ D_1^{(0)}(m_0 L) \right]^2 \\ &\quad \times L^{2-\varepsilon} \int_0^\infty dt_2 \int_{-\infty}^\infty dp_2 e^{-(p_2^2 + m_0^2)t_2} \underbrace{\int dx_0 \int dy' \frac{1}{2\pi} e^{ip_2 y'}}_{= \hat{T} \delta(p_2)} \\ &= \frac{3 m_0^4 L^2 g_0}{8} (\mu_0 L)^\varepsilon \left[ D_1^{(0)}(m_0 L) \right]^2 \hat{T} \underbrace{\int_0^\infty dt_2 e^{-m_0^2 t_2}}_{= \frac{1}{m_0^2}} \\ &= \frac{3 m_0^2 L^2 g_0}{8} (\mu_0 L)^\varepsilon \left[ D_1^{(0)}(m_0 L) \right]^2 \hat{T}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Mit dem zuvor erhaltenen Ergebnis für  $D_1^{(0)}(m_0 L)$  (vgl. Gl. (5.33)) erhält man also

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \langle \text{---} \rangle &= \frac{3}{8} g_0 m_0^2 L^2 (\mu_0 L)^\varepsilon \frac{1}{16\pi^2} \hat{T} + O(m_0 L e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{3 g_0 m_0^2 L^2}{128\pi^2} \hat{T} + O(m_0 L e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Das so erhaltene Resultat ist zwar recht einfach und übersichtlich, doch erweist sich eine andere Form als günstiger, um das Resultat dieses Graphen später mit demjenigen des zugehörigen Graphen mit Instantonhintergrundfeld () zusammenfassen zu können. Die Cutoff-Regularisierung (5.11) ist bei der folgenden Rechnung unnötig, da die Infrarot-Divergenzen nicht explizit bestimmt werden, weil sie in den Graphen mit und ohne Instantonhintergrundfeld dieselben sind und sich fortsetzen werden.

Man rechnet:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} \langle \dots \rangle_{---} \langle \dots \rangle &= \frac{3 m_0^2 g_0 \mu_0^\varepsilon}{8} \int d^D x \int d^D y G_0(x, x) G_0(x, y) G_0(y, y) \\
&= \frac{3 m_0^2 g_0 \mu_0^\varepsilon}{8} \int d^D x \int d^D y \left\{ G_0(x, x) G_0(y, y) \right. \\
&\quad \times \int_0^\infty dt_2 \left\{ \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}_2^2 t_2} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \\
&\quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_2}{2\pi} e^{-(p_2^2 + m_0^2)t_2} e^{ip_2(x_0 - y_0)} \right\} \right\} \\
&= \frac{3 m_0^2 g_0 \mu_0^\varepsilon L^\varepsilon}{8} \int d^D x \int d^D y \left\{ G_0(x, x) G_0(y, y) \right. \\
&\quad \times \int_0^\infty du \left\{ \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_2^2 u} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \\
&\quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_2}{2\pi} e^{-(p_2^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ip_2(x_0 - y_0)} \right\} \right\} \\
&\quad \left( \text{Substitution: } u = \frac{t_2}{L^2} \right). \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Da wegen

$$G_0(x, x) = \int_0^\infty dt \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)t} \tag{5.41}$$

$G_0(x, x)$  und  $G_0(y, y)$  in Wirklichkeit gar nicht von  $x$  bzw.  $y$  abhängen, was eine Folge der Translationsinviananz der Theorie ohne Instantonhintergrundfeld ist, können die Raumintegrale analog zur vorherigen Rechnung ausgeführt werden. Man vergleiche dazu die Bemerkung nach Gl. (5.35). Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} \langle \dots \rangle_{---} \langle \dots \rangle &= \frac{3 m_0^2 L^4 g_0 \mu_0^\varepsilon L^{-\varepsilon}}{8} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dx_0 \int_{-\infty}^\infty dy_0 \left\{ G_0(x, x) G_0(y, y) \right. \\
&\quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_2}{2\pi} e^{-(p_2^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ip_2(x_0 - y_0)} \right\} \\
&= \frac{3 m_0^3 L^4 g_0 \mu_0^\varepsilon L^{-\varepsilon}}{8} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dx_0 \int_{-\infty}^\infty dy_0 \left\{ G_0(x, x) G_0(y, y) \right. \\
&\quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty \frac{dv}{2\pi} e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} e^{im_0 v(x_0 - y_0)} \right\} \\
&\quad \left( \text{Substitution: } v = \frac{p_2}{m_0} \right). \tag{5.42}
\end{aligned}$$

Man spaltet nun das  $x_0$ - und  $y_0$ -Integral wie folgt auf (der Integrand wird der Übersichtlichkeit halber zunächst fortgelassen):

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty dx_0 \int_{-\infty}^\infty dy_0 \dots &= \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \dots + \int_{-\infty}^0 dx_0 \int_{-\infty}^0 dy_0 \dots \\
&+ \int_0^\infty dx_0 \int_{-\infty}^0 dy_0 \dots + \int_{-\infty}^0 dx_0 \int_0^\infty dy_0 \dots. \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Durch die Substitutionen  $x_0 \rightarrow -x_0$ ,  $y_0 \rightarrow -y_0$  und  $v \rightarrow -v$  im zweiten und vierten Integral ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \dots = 2 \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 \dots + 2 \int_0^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^0 dy_0 \dots \quad (5.44)$$

Verwendet man dies, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left( \text{---} \right) &= \frac{3 m_0^3 L^4 g_0 \mu_0^\varepsilon L^{-\varepsilon}}{4} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \right. \\ &\quad \times \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 e^{im_0 v(x_0 - y_0)} G_0(x, x) G_0(y, y) \Big\} \\ &+ \underbrace{\frac{3 m_0^3 L^4 g_0 \mu_0^\varepsilon L^{-\varepsilon}}{4} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \right.}_{=: P} \\ &\quad \times \int_0^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^0 dy_0 e^{im_0 v(x_0 - y_0)} G_0(x, x) G_0(y, y) \Big\}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Den Term  $P$  rechnet man nun aus. Dazu macht man die Substitution  $y_0 \rightarrow -y_0$  und verwendet

$$\mu_0^\varepsilon L^{-\varepsilon} = 1 + O(\varepsilon). \quad (5.46)$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} P &= \frac{3 g_0 m_0^3 L^4}{4} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \right. \\ &\quad \times \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 e^{im_0 v(x_0 + y_0)} G_0(x, x) G_0(y, y) \Big\} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Mit (vgl. Gln. (5.10), (5.12), (5.15) und Gl. (5.33))

$$\begin{aligned} G_0(x, x) &= m_0 L^\varepsilon D_1^{(0)}(m_0 L) \\ &= -\frac{m_0}{4\pi} + O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{L}\right) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.48)$$

erhält man

$$\begin{aligned} P &= \frac{3 g_0 m_0^3 L^4}{4} \frac{m_0^2}{32\pi^3} \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} e^{im_0 v(x_0 + y_0)} \\ &\quad + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{3}{128\pi^3} g_0 m_0^5 L^4 \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 \int_0^{\infty} du e^{-m_0^2 L^2 u} \sqrt{\frac{\pi}{m_0^2 L^2 u}} e^{-\frac{m_0^2 (x_0 + y_0)^2}{4m_0^2 L^2 u}} \\ &\quad + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon) \\ &\quad (\text{Gauß-Integral über } v \text{ ausgeführt}) \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}}{128\pi^3} g_0 m_0^4 L^3 \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 \int_0^{\infty} du u^{-\frac{1}{2}} e^{-m_0^2 L^2 u} e^{-\frac{(x_0 + y_0)^2}{4L^2 u}} \\ &\quad + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Das  $u$ -Integral führt auf eine Besselfunktion  $K_{\frac{1}{2}}$  [47, 3.471.9]:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{3\sqrt{\pi}}{128\pi^3} g_0 m_0^4 L^3 \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 2 \left( \frac{(x_0 + y_0)^2}{4m_0^2 L^4} \right)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}} \left( 2m_0 L \frac{x_0 + y_0}{2L} \right) \\
 &\quad + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{3\sqrt{\pi}}{128\pi^3} g_0 m_0^4 L^3 \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 2 \sqrt{\frac{x_0 + y_0}{2m_0 L^2}} K_{\frac{1}{2}} \left( m_0 (x_0 + y_0) \right) \\
 &\quad + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{3\sqrt{\pi}}{128\pi^3} g_0 m_0^4 L^3 \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 2 \sqrt{\frac{x_0 + y_0}{2m_0 L^2}} \sqrt{\frac{\pi}{2m_0 (x_0 + y_0)}} e^{-m_0(x_0+y_0)} \\
 &\quad + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon) \quad [47, 8.469.3] \\
 &= \frac{3}{128\pi^2} g_0 m_0^3 L^2 \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 e^{-m_0(x_0+y_0)} \\
 &\quad + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{3}{128\pi^2} g_0 m_0 L^2 + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \tag{5.50}
 \end{aligned}$$

Damit bekommt man für den zu berechnenden Graphen

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} \text{---} \text{---} = & \frac{3 m_0^3 L^4 g_0 \mu_0^\varepsilon L^{-\varepsilon}}{4} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \right. \\
 & \times \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 e^{im_0 v(x_0-y_0)} G_0(x, x) G_0(y, y) \Big\} \\
 & + \frac{3}{128\pi^2} g_0 m_0 L^2 + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \tag{5.51}
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis der ersten Rechnung in Gl. (5.39) hat gezeigt, daß der Graph  keine UV-Divergenzen enthält. Daher kann auch im ersten Ausdruck von Gl. (5.51) gesetzt werden:

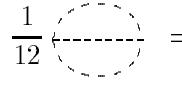
$$\mu_0^\varepsilon L^{-\varepsilon} = 1 + O(\varepsilon).$$

Es ergibt sich damit folgendes Resultat für den Graphen OIB, das für die weitere Rechnung günstig ist:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} \text{---} \text{---} = & \frac{3 g_0 m_0^3 L^4}{4} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \right. \\
 & \times \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 e^{im_0 v(x_0-y_0)} G_0(x, x) G_0(y, y) \Big\} \\
 & + \frac{3}{128\pi^2} g_0 m_0 L^2 + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \tag{5.52}
 \end{aligned}$$

### 5.2.3 Berechnung von Graph OIC =

Die Anwendung der Feynman–Regeln ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12} \text{  } &= \frac{1}{12} 3 g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon \int d^D x \int d^D y \left[ G_0(x, y) \right]^3 \\
&= \frac{g_0 m_0^2}{4} \mu_0^\varepsilon \int d^D x \int d^D y \left[ \int_0^\infty dt \left\{ \frac{1}{L^{D-1}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)t} e^{ip(x_0 - y_0)} \right\} \right]^3 \\
&= \frac{g_0 m_0^2}{4} \mu_0^\varepsilon L^{3\varepsilon} \int d^D x \int d^D y \left[ \int_0^\infty du \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ip(x_0 - y_0)} \right\} \right]^3 \\
&= \frac{g_0 m_0^2}{4} \mu_0^\varepsilon L^{3\varepsilon} \hat{T} \int d^{D-1} x \int d^{D-1} y \int dx_0 \left[ \int_0^\infty du \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \left\{ e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left. e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right\} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ipx_0} \right]. \quad (5.53)
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Substitution  $u = \frac{t}{L^2}$  verwendet und berücksichtigt, daß der Integrand nur von der Differenz  $x_0 - y_0$  abhängt, was auf den Faktor  $\hat{T}$  führt. Die beiden Raumintegrale kann man nun ausführen, indem man schematisch folgendermaßen vorgeht:  $f, g, h$  seien von  $\vec{x}, \vec{y}$  unabhängige Funktionen, und  $\sum^*$  steht für  $\sum$  oder  $\sum'$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int d^{D-1} x \int d^{D-1} y \left\{ \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} f(\vec{n}_1) \right. \\
&\quad \times \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} g(\vec{n}_2) \left. \sum_{\vec{n}_3 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_3 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} h(\vec{n}_3) \right\} \\
&= L^{2D-2} \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* \sum_{\vec{n}_3 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* \delta_{\vec{0}, \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3} f(\vec{n}_1) g(\vec{n}_2) h(\vec{n}_3). \quad (5.54)
\end{aligned}$$

Man drückt jetzt das Kronecker–Delta wieder durch ein Integral aus:

$$\begin{aligned}
&\int d^{D-1} x \int d^{D-1} y \left\{ \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} f(\vec{n}_1) \right. \\
&\quad \times \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} g(\vec{n}_2) \left. \sum_{\vec{n}_3 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_3 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} h(\vec{n}_3) \right\} \\
&= L^{4-2\varepsilon} \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1} \phi}{(2\pi)^{D-1}} \\
&\quad \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* \sum_{\vec{n}_3 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \vec{\phi} \cdot (\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3)} f(\vec{n}_1) g(\vec{n}_2) h(\vec{n}_3). \quad (5.55)
\end{aligned}$$

Etwas geordnet wird daraus

$$\begin{aligned}
 & \int d^{D-1}x \int d^{D-1}y \left\{ \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} f(\vec{n}_1) \right. \\
 & \quad \times \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_2 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} g(\vec{n}_2) \sum_{\vec{n}_3 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n}_3 \cdot (\vec{x} - \vec{y})} h(\vec{n}_3) \Big\} \\
 = & L^{4-2\varepsilon} \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \left\{ \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \vec{\phi} \cdot \vec{n}_1} f(\vec{n}_1) \right. \\
 & \quad \times \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \vec{\phi} \cdot \vec{n}_2} g(\vec{n}_2) \sum_{\vec{n}_3 \in \mathbb{Z}^{D-1}}^* e^{i \vec{\phi} \cdot \vec{n}_3} h(\vec{n}_1) \Big\}. \quad (5.56)
 \end{aligned}$$

Die beiden Raumintegrale können also zugunsten eines  $(D-1)$ -dimensionalen Integrals über die dimensionslose Größe  $\phi$  eliminiert werden. Das führt auf

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{12} \overbrace{\dots}^{\text{Raumintegrale}} &= \frac{g_0 m_0^2}{4} L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \widehat{T} \\
 &\times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int dx_0 \left[ \int_0^\infty du \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i \vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ipx_0} \right\} \right]^3 \\
 &\quad (\text{Gauß-Integral über } p \text{ ausführen}) \quad (5.57)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{g_0 m_0^2}{4} L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \widehat{T} \\
 &\times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int dx_0 \left[ \int_0^\infty du \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i \vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. e^{-m_0^2 L^2 u} \frac{1}{2 \sqrt{\pi} L \sqrt{u}} e^{-\frac{x_0^2}{4uL^2}} \right\} \right]^3. \quad (5.58)
 \end{aligned}$$

Dies lässt sich noch wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{12} \overbrace{\dots}^{\text{Raumintegrale}} &= \frac{g_0 m_0^2 L}{2^5 \pi^{\frac{3}{2}}} (\mu_0 L)^\varepsilon \widehat{T} \\
 &\times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int dx_0 \left[ \int_0^\infty du \left\{ \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-m_0^2 L^2 u} e^{-\frac{x_0^2}{4uL^2}} \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i \vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right\} \right]^3 \\
 &= \frac{g_0 m_0^2 L^2}{2^5 \pi^{\frac{3}{2}}} (\mu_0 L)^\varepsilon \widehat{T} \\
 &\times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int d\hat{x}_0 \underbrace{\left[ \int_0^\infty du \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-m_0^2 L^2 u} e^{-\frac{\hat{x}_0^2}{4u}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i \vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right]^3}_{=: D_2^{(0)}(m_0 L, \hat{x}_0, \vec{\phi}), \quad (\hat{x}_0 = \frac{x_0}{L})} \\
 &= \frac{g_0 m_0^2 L^2}{2^5 \pi^{\frac{3}{2}}} (\mu_0 L)^\varepsilon \widehat{T} \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int d\hat{x}_0 \left[ D_2^{(0)} \left( m_0 L, \hat{x}_0, \vec{\phi} \right) \right]^3. \quad (5.59)
 \end{aligned}$$

Der Term  $D_2^{(0)}(m_0L, \hat{x}_0, \vec{\phi})$  wird im Anhang C.1 berechnet. Man erhält

$$\begin{aligned} D_2^{(0)}(m_0L, \hat{x}_0, \vec{\phi}) &= \frac{2^{\frac{D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left( \frac{\sqrt{\hat{x}_0^2 + (\frac{\vec{\phi}}{2\pi})^2}}{m_0L} \right)^{1-\frac{D}{2}} K_{1-\frac{D}{2}} \left( m_0L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2} \right) \\ &\quad + O\left(\frac{e^{-c_0 m_0 L}}{(m_0 L)^{\frac{3}{2}}}\right), \quad c_0 > 0. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \overbrace{\dots}^{\text{Integration}} &= \frac{g_0 m_0^2 L^2}{2^5 \pi^{\frac{3}{2}}} (\mu_0 L)^\varepsilon \widehat{T} \frac{2^{\frac{3D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{3D-3}{2}}} \\ &\quad \times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int d\hat{x}_0 \left\{ \left( \frac{\sqrt{\hat{x}_0^2 + (\frac{\vec{\phi}}{2\pi})^2}}{m_0 L} \right)^{3-\frac{3}{2}D} \right. \\ &\quad \left. \times \left[ K_{1-\frac{D}{2}} \left( m_0 L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2} \right) \right]^3 \right\} \\ &\quad + O\left((m_0 L)^{\frac{1}{2}} e^{-c_0 m_0 L}\right) \\ &= \frac{g_0 m_0^2 L^2}{2^5 \pi^{\frac{3}{2}}} (\mu_0 L)^\varepsilon \widehat{T} (m_0 L)^{\frac{3D-6}{2}} \frac{2^{\frac{3D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{3D-3}{2}}} \\ &\quad \times \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{D-1}} d^{D-1}\tilde{\phi} \int d\hat{x}_0 \left( \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right)^{3-\frac{3}{2}D} \left[ K_{1-\frac{D}{2}} \left( m_0 L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right) \right]^3 \\ &\quad + O\left((m_0 L)^{\frac{1}{2}} e^{-c_0 m_0 L}\right). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Im letzten Schritt wurde die Substitution  $\tilde{\phi} = \frac{\phi}{2\pi}$  durchgeführt. Man rechnet weiter:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \overbrace{\dots}^{\text{Integration}} &= \frac{g_0 m_0^2 L^2}{2^5 \pi^{\frac{3}{2}}} (\mu_0 L)^\varepsilon \widehat{T} (m_0 L)^{\frac{3}{2}(1-\varepsilon)} \frac{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^{\frac{9-3\varepsilon}{2}}} \\ &\quad \times \underbrace{\int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{D-1}} d^{2-\varepsilon}\tilde{\phi} \int d\hat{x}_0 \left( \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right)^{\frac{3\varepsilon-3}{2}} \left[ K_{\frac{\varepsilon-1}{2}} \left( m_0 L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right) \right]^3}_{=: R} \\ &\quad + O\left((m_0 L)^{\frac{1}{2}} e^{-c_0 m_0 L}\right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Der verbleibende Integrand hängt im wesentlichen nur noch von  $\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}$  ab. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} K_{\frac{\varepsilon-1}{2}}(z) &= K_{\frac{1-\varepsilon}{2}}(z) \\ &\underset{z \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{1}{2} z\right)^{\frac{\varepsilon-1}{2}} \quad [63, 9.6.9]. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Man zieht nun erneut die Terme, die Divergenzen liefern explizit ab und addiert sie wieder, um die Divergenzen zu isolieren. Diese Divergenzen resultieren aus dem Verhalten des Integranden für  $\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \rightarrow 0$ . Für  $\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \rightarrow \infty$  gibt es keine Divergenzen, da  $K_\nu(z)$ ,  $\nu \in \mathbb{R}$  beliebig, für große Argumente exponentiell gegen 0 geht [47, 8.451.6].

$$\begin{aligned}
R &= \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{D-1}} d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \int d\hat{x}_0 \left\{ \left( \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right)^{\frac{3\varepsilon-3}{2}} \left[ K_{\frac{\varepsilon-1}{2}} \left( m_0 L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right) \right]^3 \right. \\
&\quad \left. - \theta \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right) \left[ \frac{\Gamma(\frac{1-\varepsilon}{2})}{2} \right]^3 \left[ \frac{m_0 L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}}{2} \right]^{\frac{3\varepsilon-3}{2}} \left( \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right)^{\frac{3\varepsilon-3}{2}} \right\} \\
&\quad \underbrace{\phantom{\int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{D-1}} d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \int d\hat{x}_0} =: \hat{E}_0} \\
&\quad + \int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} d\hat{x}_0 d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \left[ \frac{\Gamma(\frac{1-\varepsilon}{2})}{2} \right]^3 \left[ \frac{m_0 L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}}{2} \right]^{\frac{3\varepsilon-3}{2}} \left( \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right)^{\frac{3\varepsilon-3}{2}} \quad (5.64)
\end{aligned}$$

Dabei ist  $B_{\frac{1}{2}}(0)$  die Kugel mit Radius  $\frac{1}{2}$  um 0 im  $D$ -dimensionalen Raum  $\mathbb{R}^D$  ( $(\hat{x}_0, \tilde{\phi}) \in \mathbb{R}^D$ ). Nach Konstruktion ist  $\hat{E}_0$  endlich für  $\varepsilon = 0$ , also

$$\begin{aligned}
R &= \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} d^2 \tilde{\phi} \int d\hat{x}_0 \left\{ \left( \hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2 \right)^{-\frac{3}{4}} \left[ K_{\frac{1}{2}} \left( m_0 L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right) \right]^3 \right. \\
&\quad \left. - \theta \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right) \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{8} \left( \frac{2}{m_0 L} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right)^{-3} \right\} \\
&\quad \underbrace{\phantom{\int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2} d^2 \tilde{\phi} \int d\hat{x}_0} =: E_1} \\
&\quad + \underbrace{\left[ \frac{\Gamma(\frac{1-\varepsilon}{2})}{8} \right]^3 \left( \frac{m_0 L}{2} \right)^{\frac{3\varepsilon-3}{2}} \int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} d\hat{x}_0 d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \left( \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right)^{3\varepsilon-3}}_{=: \tilde{D}} + O(\varepsilon). \quad (5.65)
\end{aligned}$$

Im einzelnen gilt in Kugelkoordinaten in  $D = 3 - \varepsilon$  Dimensionen,  $r := \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{D} &= \frac{\left[ \Gamma(\frac{1-\varepsilon}{2}) \right]^3}{8} \left( \frac{m_0 L}{2} \right)^{\frac{3\varepsilon-3}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} dr r^{2-\varepsilon} r^{3\varepsilon-3} \frac{(3-\varepsilon) \pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}}{\Gamma(\frac{5-\varepsilon}{2})} \\
&= \frac{1}{8} \left[ \Gamma\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right) \right]^3 \left( \frac{m_0 L}{2} \right)^{\frac{3\varepsilon-3}{2}} (3-\varepsilon) \frac{\pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}}{\Gamma(\frac{5-\varepsilon}{2})} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} dr r^{2\varepsilon-1}}_{= \frac{r^{2\varepsilon}}{2\varepsilon} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{(\frac{1}{4})^\varepsilon}{2\varepsilon}} \\
&= \frac{1}{8} \left[ \Gamma\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right) \right]^3 \left( \frac{m_0 L}{2} \right)^{\frac{3\varepsilon-3}{2}} (3-\varepsilon) \frac{\pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}}{\Gamma(\frac{5-\varepsilon}{2})} \left( \frac{1}{4} \right)^\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon}. \quad (5.66)
\end{aligned}$$

Dabei beachte man, daß die Oberfläche der Einheitskugel in  $D = 3 - \varepsilon$  Dimensionen

$$\frac{(3-\varepsilon) \pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}}{\Gamma(\frac{5-\varepsilon}{2})} \quad (5.67)$$

ist [62, Beispiel 14.9]. Indem man nach Potenzen von  $\varepsilon$  entwickelt, erhält man nach einiger Rechnung:

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \frac{\sqrt{2}\pi^{\frac{5}{2}}}{2(m_0L)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\sqrt{2}\pi^{\frac{5}{2}}}{4(m_0L)^{\frac{3}{2}}} \left( -3\log 2 - \log \pi + 2 + 3\log(m_0L) + 2\gamma \right) \\ &\quad + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.68)$$

Jetzt zu  $E_1$ . Beachtet man

$$K_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \quad [47, 8.469.3], \quad (5.69)$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{B_{\frac{1}{2}}(0)} d\hat{x}_0 d^2\tilde{\phi} \left\{ \left( \frac{\pi}{2m_0L} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-3m_0L\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}}}{\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}^3} - \left( \frac{\pi}{2m_0L} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}^3} \right\} \\ &\quad + \int_{B_{\frac{1}{2}}^c(0)} d\hat{x}_0 d^2\tilde{\phi} \left( \frac{\pi}{2m_0L} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-3m_0L\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}}}{\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}^3}. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Hierbei gilt

$$B_{\frac{1}{2}}^c(0) := \text{Komplement von } B_{\frac{1}{2}}(0) \text{ in } ]-\infty, \infty[ \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2, \quad (5.71)$$

$$B_{\frac{1}{2}}^c(0) := \text{Komplement von } B_{\frac{1}{2}}(0) \text{ in } \mathbb{R}^3. \quad (5.72)$$

Man schätzt ab:

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{1}{2}}^c(0)} d\hat{x}_0 d^2\tilde{\phi} \left( \frac{\pi}{2m_0L} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-3m_0L\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}}}{\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}^3} &\leq \int_{B_{\frac{1}{2}}^c(0)} d\hat{x}_0 d^2\tilde{\phi} \left\{ \left( \frac{\pi}{2m_0L} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{e^{-3m_0L\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}}}{\sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2}^3} \right\} \\ &= \left( \frac{\pi}{2m_0L} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} dr \frac{e^{-3m_0Lr}}{r} \\ &\leq \text{const } (m_0L)^{-\frac{3}{2}} \Gamma\left(0, \frac{3}{2}m_0L\right) \quad [47, 8.350.2] \end{aligned} \quad (5.73)$$

$$= O\left(\frac{e^{-\frac{3m_0L}{2}}}{(m_0L)^{\frac{5}{2}}}\right) \quad [47, 8.357]. \quad (5.74)$$

Insgesamt gilt also mit  $\tilde{r} := 2r$

$$\begin{aligned} E_1 &= \left( \frac{\pi}{2m_0L} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^{\frac{1}{2}} dr \frac{e^{-3m_0Lr} - 1}{r} + O\left(\frac{e^{-\frac{3m_0L}{2}}}{(m_0L)^{\frac{5}{2}}}\right) \\ &= \left( \frac{\pi}{2m_0L} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi \int_0^1 d\tilde{r} \frac{e^{-\frac{3}{2}m_0L\tilde{r}} - 1}{\tilde{r}} + O\left(\frac{e^{-\frac{3m_0L}{2}}}{(m_0L)^{\frac{5}{2}}}\right). \end{aligned} \quad (5.75)$$

Das erste Integral ist nun ganz analog zum Beitrag  $g_{1,1}$  von  $D_1(m_0L)$  auszurechnen (vgl. Anhang C.3, Gln. (C.28), (C.36)), man bekommt

$$\begin{aligned} E_1 &= \left( \frac{\pi}{2m_0L} \right)^{\frac{3}{2}} (4\pi)^2 \left[ -\frac{\gamma}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} \log \left( \frac{3}{2} m_0L \right) \right] \\ &\quad + O\left( \frac{e^{-\frac{3m_0L}{2}}}{m_0L} \right) + O\left( \frac{e^{-\frac{3m_0L}{2}}}{(m_0L)^{\frac{5}{2}}} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}\pi^{\frac{5}{2}}}{(m_0L)^{\frac{3}{2}}} \left[ \gamma + \log \left( \frac{3}{2} m_0L \right) \right] + O\left( \frac{e^{-\frac{3m_0L}{2}}}{m_0L} \right). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Damit gilt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \text{Diagramm} &= \frac{1}{4} g_0 m_0^2 L^2 \widehat{T} (\mu_0 L)^\varepsilon (2\pi)^{\frac{3\varepsilon-9}{2}} (m_0 L)^{\frac{3-3\varepsilon}{2}} [E_1 + \tilde{D}] \\ &\quad + O\left( (m_0 L)^{\frac{1}{2}} e^{-c_0 m_0 L} \right). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Einsetzen der Resultate für  $E_1$  und  $\tilde{D}$  und Entwickeln nach Potenzen von  $\varepsilon$  ergibt letztlich nach längerer Rechnung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \text{Diagramm} &= \frac{g_0 m_0 L^2 \widehat{T}}{128 \pi^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma - \log \left( \frac{9}{4} \right) + \log \pi + 1 - 2 \log(m_0 L) + \log(\mu_0 L) \right\} \\ &\quad + O(\varepsilon) + O\left( (m_0 L)^{\frac{1}{2}} e^{-c_0 m_0 L} \right). \end{aligned} \quad (5.78)$$

Dieses Resultat macht zwar die Divergenz des Graphen deutlich, nämlich einen Pol erster Ordnung in  $\varepsilon$ , aber dennoch ist eine andere Form günstiger, um später diesen Beitrag des Graphen mit demjenigen des zugehörigen Graphen  mit Instantonhintergrundfeld zusammenfassen zu können. Daher soll der Graph OIC noch einmal etwas anders berechnet werden. Ausgangspunkt ist Gl. (5.57) und statt des Faktors  $\widehat{T}$  führe ich wieder die Integration über  $y_0$  ein. Auch hier kann aus denselben Gründen wie beim Graphen OIB auf eine Regularisierung der Infrarot-Divergenzen verzichtet werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \text{Diagramm} &= \frac{g_0 m_0^2}{4} L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \widehat{T} \\ &\quad \times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int dx_0 \left[ \int_0^\infty du \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ipx_0} \right\} \right]^3 \\ &= \frac{g_0 m_0^2}{4} L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \\ &\quad \times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int dx_0 \int dy_0 \left[ \int_0^\infty du \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ip(x_0 - y_0)} \right\} \right]^3. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Man spaltet nun die  $x_0$ - und  $y_0$ -Integration ganz analog zur Berechnung von OIB wie folgt auf; der Integrand wird der Übersichtlichkeit halber auch hier zunächst fortgelassen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \dots &= \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 \dots + \int_0^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^0 dy_0 \dots \\ &+ \int_{-\infty}^0 dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 \dots + \int_{-\infty}^0 dx_0 \int_{-\infty}^0 dy_0 \dots \end{aligned} \quad (5.80)$$

Mittels der Substitutionen  $x_0 \rightarrow -x_0$ ,  $y_0 \rightarrow -y_0$  und  $p \rightarrow -p$  folgt nun unmittelbar, entsprechend zur früheren Rechnung bei OIB (vgl. Gl. (5.43) ff.),

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \left( \text{---} \right)^3 &= \frac{g_0 m_0^2}{4} L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \\ &\times 2 \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 \left[ \int_0^{\infty} du \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ip(x_0 - y_0)} \right\} \right]^3 \\ &+ \frac{g_0 m_0^2}{4} L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \\ &\times 2 \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 \left[ \int_0^{\infty} du \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ip(x_0 + y_0)} \right\} \right]^3. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Hier kann man den zweiten Integralausdruck noch bestimmen; es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \left( \text{---} \right)^3 &= \frac{g_0 m_0^2}{4} L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \\ &\times 2 \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 \left[ \int_0^{\infty} du \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ip(x_0 - y_0)} \right\} \right]^3 \\ &+ \tilde{R}, \end{aligned} \quad (5.82)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{R} &:= \frac{g_0 m_0^2}{4} L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \\ &\times 2 \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^{\infty} dx_0 \int_0^{\infty} dy_0 \left[ \int_0^{\infty} du \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ip(x_0 + y_0)} \right\} \right]^3, \end{aligned} \quad (5.83)$$

und für den Term  $\tilde{R}$  berechnet man

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= \frac{g_0 m_0^2}{2} L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \\
&\quad \times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left[ \int_0^\infty du \left\{ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right. \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. \times \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{2\sqrt{\pi u} L} e^{-\frac{(x_0 + y_0)^2}{4uL^2}} \right\} \right]^3 \\
&\quad \quad \quad (\text{Gauß-Integral über } p \text{ ausgeführt}) \\
&= \frac{g_0 m_0^2}{16\pi^{\frac{3}{2}}} L^3 (\mu_0 L)^\varepsilon \\
&\quad \times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty d\tilde{x}_0 \int_0^\infty d\tilde{y}_0 \left[ \int_0^\infty du \left\{ \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{(\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)^2}{4u}} \right. \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. \times \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{n}} \right\} \right]^3 \\
&\quad \quad \quad \left( \tilde{x}_0 = \frac{x_0}{L}, \quad \tilde{y}_0 = \frac{y_0}{L} \right). \tag{5.84}
\end{aligned}$$

In der eckigen Klammer erkennt man gemäß Gl. (5.59) die Größe  $D_2^{(0)}(m_0 L, \tilde{x}_0 + \tilde{y}_0, \vec{\phi})$  wieder. Mit dem Resultat aus Gl. (5.60) bekommt man also:

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= \frac{g_0 m_0^2}{16\pi^{\frac{3}{2}}} L^3 (\mu_0 L)^\varepsilon \\
&\quad \times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty d\tilde{x}_0 \int_0^\infty d\tilde{y}_0 \left[ \frac{2^{\frac{D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left( \frac{\sqrt{(\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)^2 + (\frac{\vec{\phi}}{2\pi})^2}}{m_0 L} \right)^{1-\frac{D}{2}} \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \times K_{1-\frac{D}{2}} \left( m_0 L \sqrt{(\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)^2 + \left( \frac{\vec{\phi}}{2\pi} \right)^2} \right) \right]^3 \\
&\quad + O((m_0 L)^{\frac{3}{2}} e^{-c_0 m_0 L}). \tag{5.85}
\end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß der Term  $\tilde{R}$  für  $D = 3$  Dimensionen keine Divergenzen beinhaltet. Für  $D = 3$  gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(D=3) &= \frac{g_0 m_0^2}{16\pi^{\frac{3}{2}}} L^3 \frac{2^{\frac{3}{2}}}{(4\pi)^3} (m_0 L)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad \times \int_{[-\pi, \pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d\tilde{x}_0 \int_0^\infty d\tilde{y}_0 \frac{K_{-\frac{1}{2}}^3 \left( m_0 L \sqrt{(\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)^2 + (\frac{\vec{\phi}}{2\pi})^2} \right)}{\left[ (\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)^2 + \left( \frac{\vec{\phi}}{2\pi} \right)^2 \right]^{\frac{3}{4}}} \\
&\quad + O((m_0 L)^{\frac{3}{2}} e^{-c_0 m_0 L}). \tag{5.86}
\end{aligned}$$

Man berücksichtigt jetzt, daß  $K_{-\frac{1}{2}}(x) = K_{\frac{1}{2}}(x)$  gilt [63, 9.6.6], und verwendet den analytischen Ausdruck für  $K_{\frac{1}{2}}(x)$  aus Gl. (5.69).

Bis auf mit  $L$  exponentiell abfallende Terme kann die  $\phi$ -Integration außerdem über ganz  $\mathbb{R}^2$  ausgeführt werden. Das ergibt:

$$\begin{aligned}\tilde{R}(D=3) &= \frac{g_0 m_0^2}{16 \pi^{\frac{3}{2}}} L^3 \frac{2^{\frac{9}{2}}}{(4\pi)^3} (m_0 L)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} d\tilde{x}_0 \int_0^{\infty} d\tilde{y}_0 \frac{e^{-3m_0 L \sqrt{(\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)^2 + (\frac{\tilde{\phi}}{2\pi})^2}}}{(m_0 L)^{\frac{3}{2}} \left[ (\tilde{x}_0 + \tilde{y}_0)^2 + \left(\frac{\tilde{\phi}}{2\pi}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &+ O\left((m_0 L)^{\frac{3}{2}} e^{-c_0 m_0 L}\right).\end{aligned}\quad (5.87)$$

Mit der Definition

$$Z_{\tilde{R}} := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\hat{\phi}}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} d\hat{x}_0 \int_0^{\infty} d\hat{y}_0 \frac{e^{-3 \sqrt{(\hat{x}_0 + \hat{y}_0)^2 + (\frac{\hat{\phi}}{2\pi})^2}}}{\left[ (\hat{x}_0 + \hat{y}_0)^2 + \left(\frac{\hat{\phi}}{2\pi}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}\quad (5.88)$$

und den Substitutionen  $\hat{x}_0 = m_0 L \tilde{x}_0$ ,  $\hat{y}_0 = m_0 L \tilde{y}_0$  und  $\hat{\phi} = m_0 L \phi$  erhält man dann

$$\tilde{R}(D=3) = \frac{1}{2^7 \pi^3} g_0 m_0 L^2 Z_{\tilde{R}} + O\left((m_0 L)^{\frac{3}{2}} e^{-c_0 m_0 L}\right). \quad (5.89)$$

Der Ausdruck  $Z_{\tilde{R}}$  enthält nun aber keine Divergenzen mehr, denn man kann abschätzen:

$$(\hat{x}_0 + \hat{y}_0)^2 + \left(\frac{\hat{\phi}}{2\pi}\right)^2 \geq \hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 + \left(\frac{\hat{\phi}}{2\pi}\right)^2, \quad (5.90)$$

da  $\hat{x}_0, \hat{y}_0 \geq 0$ . Daher gilt für den Integranden von  $Z_{\tilde{R}}$

$$\frac{e^{-3 \sqrt{(\hat{x}_0 + \hat{y}_0)^2 + (\frac{\hat{\phi}}{2\pi})^2}}}{\left[ (\hat{x}_0 + \hat{y}_0)^2 + \left(\frac{\hat{\phi}}{2\pi}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{e^{-3 \sqrt{\hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 + (\frac{\hat{\phi}}{2\pi})^2}}}{\left[ \hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 + \left(\frac{\hat{\phi}}{2\pi}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (5.91)$$

Man beachte, daß  $\hat{\phi}_0$  ein zweidimensionaler Vektor ist. Substituiert man  $\hat{\phi}_0 = \frac{\hat{\phi}}{2\pi}$  und führt Kugelkoordinaten im 4-dimensionalen Raum, gebildet durch  $\hat{x}_0$ ,  $\hat{y}_0$  und  $\hat{\phi}_0$ , ein, so sieht man

$$\begin{aligned}Z_{\tilde{R}} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\hat{\phi}}{(2\pi)^2} \int_0^{\infty} d\hat{x}_0 \int_0^{\infty} d\hat{y}_0 \frac{e^{-3 \sqrt{\hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 + (\frac{\hat{\phi}}{2\pi})^2}}}{\left[ \hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 + \left(\frac{\hat{\phi}}{2\pi}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &\leq \int d^2\hat{\phi}_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x}_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{y}_0 \frac{e^{-3 \sqrt{\hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 + \hat{\phi}_0^2}}}{\left[ \hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 + \hat{\phi}_0^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2\pi^2 \int_0^{\infty} dr e^{-3r} \\ &= \frac{2}{3}\pi^2 \\ &< \infty.\end{aligned}\quad (5.92)$$

Damit konvergiert  $Z_{\tilde{R}}$ .  $Z_{\tilde{R}}$  kann sogar noch geschlossen ausgerechnet werden. Die Berechnung ist im Anhang D durchgeführt, das Ergebnis lautet:

$$Z_{\tilde{R}} = \frac{\pi}{3}. \quad (5.93)$$

Insgesamt bekommt man daher

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \text{Diagramm} &= \frac{g_0 m_0^2}{4} L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} 2 \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \\ &\quad \left[ \int_0^\infty du \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{n}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ip(x_0 - y_0)} \right]^3 \\ &\quad + \frac{1}{2^7 \pi^3} g_0 m_0 L^2 Z_{\tilde{R}} + O\left((m_0 L)^{\frac{3}{2}} e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \\ &= \frac{g_0 m_0^2}{4} L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} 2 \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \\ &\quad \left[ \int_0^\infty du \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{n}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp}{2\pi} e^{-(p^2 + m_0^2)L^2 u} e^{ip(x_0 - y_0)} \right]^3 \\ &\quad + \frac{1}{384 \pi^2} g_0 m_0 L^2 + O\left((m_0 L)^{\frac{3}{2}} e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.94)$$

Die zuvor in Gl. (5.78) gefundenen Divergenzen sind nun im Integralausdruck dieser Gleichung enthalten. In dieser Form wird das Ergebnis von Graph OIC später verwendet werden.

### 5.3 Graphen mit Instantonhintergrundfeld

Jetzt sind die Graphen mit Instantonhintergrundfeld zu berechnen. Die dabei zu verwendenden Feynman-Regeln und der Propagator (in  $D$  Dimensionen) seien hier noch einmal zusammengestellt (vgl. Kapitel 2 und 3):

$$\begin{aligned} \text{Graph} &\hat{=} G(x, y) = \int_0^\infty dt \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \\ &\quad \times \frac{3 m_0}{8} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \\ &\quad + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\ &\quad \times \frac{3 m_0}{4} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \\ &\quad + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\ &\quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\}, \end{aligned}$$

mit

$$\langle x_0 | k \rangle = N_k e^{ikx_0} \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) + 3im_0 k \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \right],$$

$$N_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi (4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)}},$$

	$\hat{=} -\sqrt{3g_0 m_0^2} \mu_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \tanh(\frac{m_0}{2}x_0),$
	$\hat{=} -g_0 \mu_0^{\varepsilon},$
	$\hat{=} -\frac{\tilde{\phi}_{(c,0)}}{S_{c,D} \sqrt{g_0} \mu_0^{\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad S_{c,D} = \frac{2m_0^3}{g_0 \mu_0^{\varepsilon}} L^{2-\varepsilon} = \frac{2m_0^3}{g_0} L^2 (\mu_0 L)^{-\varepsilon}$
	$= -\frac{\tilde{\phi}_{(c,0)}}{2m_0^3 L^2} \sqrt{g_0} L^{\varepsilon} \mu_0^{\frac{\varepsilon}{2}},$

- über Vertizes integrieren:  $\int d^D x,$
- übliche Symmetriefaktoren.

Die zu berechnenden Graphen werden wie folgt bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 \text{IA} &:= \text{○○}, \\
 \text{IB} &:= \text{○} \underset{\star}{\text{---}} \underset{\star}{\text{---}} \text{○}, \\
 \text{IC} &:= \text{○} \underset{\star}{\text{---}} \text{○}, \\
 \text{ID} &:= \text{○} \underset{\star}{\text{---}} \text{○}.
 \end{aligned} \tag{5.95}$$

Sie werden in den folgenden Abschnitten berechnet.

### 5.3.1 Berechnung des Graphen IA = ○○

Mit den Feynman-Regeln gilt zunächst, wenn der Symmetriefaktor  $\frac{1}{8}$  wieder für sich geschrieben wird:

$$\frac{1}{8} \text{○○} = -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^{\varepsilon} \int d^D x [G(x, x)]^2. \tag{5.96}$$

Indem man den Ausdruck für den Propagator einsetzt, wird daraus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{ (two circles)} &= -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon \int d^D x \left\{ \int_0^\infty dt \left[ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} |\langle x_0 | 0 \rangle|^2 \right. \right. \\ &\quad + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} |\langle x_0 | 1 \rangle|^2 \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2) t} |\langle x_0 | k \rangle|^2 \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Zur Definition von  $\langle x_0 | 0 \rangle$  und  $\langle x_0 | 1 \rangle$  vergleiche man die Gln. (3.26), (3.27). Berücksichtigt man  $D = 3 - \varepsilon$  und substituiert  $u = \frac{t}{L^2}$ , so bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{ (two circles)} &= -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} \int d^D x \left\{ \int_0^\infty du \left[ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} |\langle x_0 | 0 \rangle|^2 \right. \right. \\ &\quad + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} |\langle x_0 | 1 \rangle|^2 \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2) u L^2} |\langle x_0 | k \rangle|^2 \right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Eine Möglichkeit hier weiter vorzugehen ist nun, einfach auszumultiplizieren und die entstehenden Terme einzeln auszaintegrieren. Dies führt auf sechs Terme:

$$\frac{1}{8} \quad \text{Diagram} \quad = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6, \quad (5.99)$$

mit

$$A_1 := -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} \int d^D x \left[ \int_0^\infty du \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} |\langle x_0 | 0 \rangle|^2 \right]^2, \quad (5.100)$$

$$A_2 := -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} \int d^D x \left[ \int_0^\infty du \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} |\langle x_0 | 1 \rangle|^2 \right]^2, \quad (5.101)$$

$$A_3 := -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} \int d^D x \left[ \int_0^\infty du \left[ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \right. \right. \\ \times \left. \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2) L^2 u} |\langle x_0 | k \rangle|^2 \right]^2, \quad (5.102)$$

$$A_4 := -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} 2 \int d^D x \left[ \int_0^\infty du_1 \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}}' e^{-4\pi^2 \vec{n}_1^2 u_1} |\langle x_0 | 0 \rangle|^2 \right. \\ \times \left. \int_0^\infty du_2 \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_2^2 u_2} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u_2} |\langle x_0 | 1 \rangle|^2 \right], \quad (5.103)$$

$$A_5 := -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} 2 \int d^D x \left[ \int_0^\infty du_1 \sum'_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_1^2 u_1} |\langle x_0 | 0 \rangle|^2 \times \int_0^\infty du_2 \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_2^2 u_2} \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2) L^2 u_2} |\langle x_0 | k \rangle|^2 \right], \quad (5.104)$$

$$A_6 := -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} 2 \int d^D x \left[ \int_0^\infty du_1 \sum'_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_1^2 u_1} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u_1} |\langle x_0 | 1 \rangle|^2 \times \int_0^\infty du_2 \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_2^2 u_2} \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2) L^2 u_2} |\langle x_0 | k \rangle|^2 \right]. \quad (5.105)$$

Diese sechs Terme  $A_1$  bis  $A_6$  sind im Prinzip berechenbar. Problematisch ist jedoch, daß die Terme einzeln jeweils Ultraviolett-Divergenzen enthalten, nämlich Pole zweiter und erster Ordnung in  $\varepsilon$ :

$$\frac{1}{\varepsilon^2}, \frac{1}{\varepsilon}. \quad (5.106)$$

Eine explizite Rechnung zeigt jedoch, daß sich diese Divergenzen in der Summe gerade wegheben; die Rechnung ist relativ umfangreich, sie ist deshalb fortgelassen. Es erweist sich deshalb als vorteilhafter, den Ausdruck

$$\frac{1}{8} \bigcirc\bigcirc = -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon \int d^D x [G(x, x)]^2 \quad (5.107)$$

zunächst so umzuformen, daß nur noch Terme zu berechnen sind, die keine UV-Divergenzen mehr enthalten. Dazu sollen einige Größen definiert werden, die noch häufiger auftreten werden (auch in den Termen  $A_1, \dots, A_6$  treten diese Größen auf):

$$Z_0 := \int_0^\infty du \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u}, \quad (5.108)$$

$$D_1(m_0 L) := \int_0^\infty du \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u}, \quad (5.109)$$

$$\mathcal{D}(m_0 L, C_0, C_2) := \int_{-\infty}^\infty dv \frac{C_0 + C_2 v^2}{4v^4 + 5v^2 + 1} \int_0^\infty du e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u}. \quad (5.110)$$

Diese Größen enthalten jeweils  $\frac{1}{\varepsilon}$ -Divergenzen, ihre Berechnung ist in den Anhängen C.2, C.3 und C.4 durchgeführt. Weiter gilt

$$G(x, x) = \int_0^\infty dt \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} |\langle x_0 | 0 \rangle|^2 + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} |\langle x_0 | 1 \rangle|^2 + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2) t} |\langle x_0 | k \rangle|^2 \right\}. \quad (5.111)$$

Erneut substituiert man  $u = \frac{t}{L^2}$ . Werden außerdem die konkreten Eigenfunktionen

$$\langle x_0 | 0 \rangle = \sqrt{\frac{3m_0}{8}} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}, \quad (5.112)$$

$$\langle x_0 | 1 \rangle = \sqrt{\frac{3m_0}{4}} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)}, \quad (5.113)$$

$$\begin{aligned} \langle x_0 | k \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi (4k^4 + 5m_0^2k^2 + m_0^4)}} e^{ikx_0} \\ &\times \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) + 3im_0k \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \right] \end{aligned} \quad (5.114)$$

eingesetzt, so ergibt das

$$\begin{aligned} G(x, x) &= L^\varepsilon \int_0^\infty du \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \frac{3m_0}{8} \frac{1}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} \right. \\ &+ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \frac{3m_0}{4} \frac{\tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} \\ &+ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \int_{-\infty}^\infty dk \left\{ e^{-\left(1+\frac{k^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u} \frac{1}{2\pi (4k^4 + 5m_0^2k^2 + m_0^4)} \right. \\ &\times \left[ \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) \right]^2 \right. \\ &\left. \left. + 9m_0^2 k^2 \tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) \right] \right\} \Bigg\}. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Hier kann man den Beitrag des kontinuierlichen Spektrums noch übersichtlicher schreiben indem man die bekannte Beziehung

$$\tanh^2(x) = 1 - \frac{1}{\cosh^2(x)} \quad (5.116)$$

benutzt und die Substitution  $v = \frac{k}{m_0}$  vornimmt. Man erhält

$$\begin{aligned} G(x, x) &= m_0 L^\varepsilon \int_0^\infty du \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \frac{3}{8} \frac{1}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} \right. \\ &+ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} - \frac{1}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} \right] \\ &+ \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \int_{-\infty}^\infty \frac{dv}{2\pi} \left\{ e^{-\left(1+v^2\right)m_0^2 L^2 u} \right. \\ &\times \left[ 1 + \frac{1}{4v^4 + 5v^2 + 1} \left[ \frac{-3v^2 - 3}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} + \frac{9}{4} \frac{1}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} \right] \right] \Bigg\}. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Berücksichtigt man jetzt (vgl. Gl. (3.5))

$$\begin{aligned}
G_0(x, x) &= \int_0^\infty dt \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} e^{-(k^2 + m_0^2)t} \\
&= m_0 L^\varepsilon \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty \frac{dv}{2\pi} e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} \\
&\quad \left( u = \frac{t}{L^2}, v = \frac{k}{m_0} \right) \\
&= m_0 L^\varepsilon D_1^{(0)}(m_0 L) \quad (\text{vgl. Gl. (5.15)}) \\
&= -\frac{m_0}{4\pi} + O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \quad (\text{vgl. Gl. (5.33)}), \quad (5.118)
\end{aligned}$$

sowie die zuvor in den Gleichungen (5.108) – (5.110) definierten Größen  $Z_0$ ,  $D_1(m_0 L)$  und  $\mathcal{D}(m_0 L, C_0, C_2)$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned}
G(x, x) &= m_0 L^\varepsilon \left\{ \frac{3}{8} \frac{1}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} Z_0 + \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} - \frac{1}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} \right] D_1(m_0 L) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \mathcal{D}(m_0 L, -3, -3) + \frac{9}{8\pi} \frac{1}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} \mathcal{D}(m_0 L, 1, 0) \Big\} \\
&\quad + G_0(x, x). \quad (5.119)
\end{aligned}$$

Nach Potenzen von  $\frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)}$  geordnet, bekommt man schließlich

$$\begin{aligned}
G(x, x) &= G_0(x, x) + m_0 L^\varepsilon \left\{ \frac{1}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} \underbrace{\left[ \frac{3}{8} Z_0 - \frac{3}{4} D_1(m_0 L) + \frac{9}{8\pi} \mathcal{D}(m_0 L, 1, 0) \right]}_{=: \mathcal{A}_1(m_0 L)} \right. \\
&\quad + \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \underbrace{\left[ \frac{3}{4} D_1(m_0 L) + \frac{1}{2\pi} \mathcal{D}(m_0 L, -3, -3) \right]}_{=: \mathcal{A}_2(m_0 L)} \Big\}. \quad (5.120)
\end{aligned}$$

Aus den Anhängen C.5 und C.6 entnimmt man, daß die Größen  $\mathcal{A}_1(m_0 L)$  und  $\mathcal{A}_2(m_0 L)$  keine UV-Divergenzen mehr enthalten. Damit ist also auch  $G(x, x)$  divergenzfrei. Für den zu berechnenden Graphen ergibt sich mit diesem Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8} \bigcirc \bigcirc &= -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon \int d^D x \left\{ G_0(x, x) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right] \right\}^2 \\
&= -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon \int d^D x [G_0(x, x)]^2 \\
&\quad -\frac{1}{8} g_0 \mu_0^\varepsilon 2 \int d^D x G_0(x, x) m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right] \\
&\quad -\frac{1}{8} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} \int d^D x \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right]^2. \quad (5.121)
\end{aligned}$$

Der Propagator  $G_0(x, y)$  liefert nun gerade den Graphen , wie man durch Vergleich mit Gl. (5.12) erkennt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{---} \text{---} &= \frac{1}{8} \text{---} \text{---} \\ &- \frac{1}{4} g_0 m_0 (\mu_0 L)^\varepsilon \int d^D x G_0(x, x) \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right] \\ &- \frac{1}{8} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon L^{2\varepsilon} \int d^D x \left[ \frac{\mathcal{A}_1^2(m_0 L)}{\cosh^8(\frac{m_0}{2} x_0)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \mathcal{A}_1(m_0 L) \mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^6(\frac{m_0}{2} x_0)} + \frac{\mathcal{A}_2^2(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} \right]. \end{aligned} \quad (5.122)$$

Für  $G_0(x, x)$  gilt nach Gl. (5.118)

$$G_0(x, x) = -\frac{m_0}{4\pi} + O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{m_0 L}\right) + O(\varepsilon), \quad (5.123)$$

und für die verbleibenden  $\int d^D x$ -Integrale erhält man

$$\begin{aligned} \int d^D x \frac{1}{\cosh^\mu(\frac{m_0}{2} x_0)} &= L^{2-\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{1}{\cosh^\mu(\frac{m_0}{2} x_0)} \\ &= L^{2-\varepsilon} \frac{2}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\cosh^\mu(y)} \\ &= \frac{2}{m_0} L^{2-\varepsilon} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}\right) \quad [47, 3.512.2]. \end{aligned} \quad (5.124)$$

Verwendet man dies, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{---} \text{---} &= \frac{1}{8} \text{---} \text{---} + \frac{1}{8\pi} g_0 m_0 L^2 \left[ \mathcal{A}_1(m_0 L) B(\frac{1}{2}, 2) + \mathcal{A}_2(m_0 L) B(\frac{1}{2}, 1) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4} g_0 m_0 L^2 \left[ \mathcal{A}_1^2(m_0 L) B(\frac{1}{2}, 4) \right. \\ &\quad \left. + 2 \mathcal{A}_1(m_0 L) \mathcal{A}_2(m_0 L) B(\frac{1}{2}, 3) + \mathcal{A}_2^2(m_0 L) B(\frac{1}{2}, 2) \right] \\ &\quad + O(m_0 L e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.125)$$

und durch Auswerten der Beta-Funktionen findet man

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{---} \text{---} &= \frac{1}{8} \text{---} \text{---} + \frac{1}{8\pi} g_0 m_0 L^2 \left[ \frac{4}{3} \mathcal{A}_1(m_0 L) + 2 \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4} g_0 m_0 L^2 \left[ \frac{32}{35} \mathcal{A}_1^2(m_0 L) + \frac{32}{15} \mathcal{A}_1(m_0 L) \mathcal{A}_2(m_0 L) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} \mathcal{A}_2^2(m_0 L) \right] \\ &\quad + O(m_0 L e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.126)$$

Setzt man die Ergebnisse für  $\mathcal{A}_1(m_0L)$  und  $\mathcal{A}_2(m_0L)$  aus den Anhängen C.5 und C.6 ein, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left[ \text{Diagramm } \textcircled{1} \text{ } \textcircled{2} - (\text{Diagramm } \textcircled{1} \text{ } \textcircled{2})^* \right] &= g_0 m_0 L^2 \left[ \log(m_0 L) \right]^2 K_{IA,2} \\ &+ g_0 m_0 L^2 \log(m_0 L) K_{IA,1} \\ &+ g_0 m_0 L^2 K_{IA,0} \\ &+ O\left((m_0 L)^{\frac{3}{2}} e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.127)$$

Dabei definiert man

$$\begin{aligned} K_{IA,2} &= -\frac{3^2}{2^5} \frac{1}{35 \pi^2} \\ &= -0.8141880825 \cdot 10^{-3}, \end{aligned} \quad (5.128)$$

$$\begin{aligned} K_{IA,1} &= \frac{1}{32\pi^2} - \frac{3}{35\pi} O_c - \frac{1}{10\pi} \mathcal{A}_{2,c} \\ &= 0.4062244324(1) \cdot 10^{-2}, \end{aligned} \quad (5.129)$$

$$\begin{aligned} K_{IA,0} &= \frac{1}{6\pi} O_c + \frac{1}{4\pi} \mathcal{A}_{2,c} - \frac{8}{35} O_c^2 - \frac{8}{15} O_c \mathcal{A}_{2,c} - \frac{1}{3} \mathcal{A}_{2,c}^2 \\ &= -0.924655(1) \cdot 10^{-3}. \end{aligned} \quad (5.130)$$

Die Größen  $O_c$  und  $\mathcal{A}_{2,c}$  sind numerische Konstanten, die in den Anhängen C.5 und C.6 genau definiert sind.

### 5.3.2 Berechnung des Graphen IB =

Wendet man die Feynman-Regeln an, so erhält man zunächst für den Graphen IB:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \text{Diagramm } \textcircled{1} \text{ } \textcircled{2} &= \frac{3}{8} m_0^2 g_0 \mu_0^\varepsilon \int d^D x \int d^D y \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) G(x,x) \right. \\ &\quad \times G(x,y) G(y,y) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.131)$$

Bei der Berechnung des Graphen  hatte man

$$G(x,x) = G_0(x,x) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \right] \quad (5.132)$$

gefunden (vgl. Gl. (5.120)). Diese Form des Propagators an gleichen Raum-Zeit-Punkten  $x$  setzt man nun in die Gl. (5.131) ein. Man kann bereits hier wegen der Divergenzfreiheit der Größen  $\mathcal{A}_1(m_0 L)$  und  $\mathcal{A}_2(m_0 L)$  vermuten, daß der Graph IB keine anderen Divergenzen als die des zugehörigen Graphen  ohne Instantonhintergrund enthält. Der mittlere Propagator  $G(x,y)$ , der die beiden Schleifen verbindet, wird keine Divergenzen liefern, da er sich durch die Ortsintegrationen sehr vereinfacht, wie gleich gezeigt werden wird.

Letztlich ist der Graph IB eben nur aus 1-Loop-Anteilen zusammengesetzt, und diese enthalten keine Ultraviolett- sondern nur Infrarot-Divergenzen, nämlich dieselben wie der Graph .

Konkret ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} \text{Diagramm} &= \frac{3}{8} m_0^2 g_0 \mu_0^\varepsilon \int d^D x \int d^D y \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\
 &\quad \times \left\{ G_0(x, x) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \right] \right\} \\
 &\quad \times \int_0^\infty dt \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \\
 &\quad \quad \times \frac{3m_0}{8} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \cosh^2\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} \\
 &\quad + \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \\
 &\quad \quad \times \frac{3m_0}{4} \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)}{\cosh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \cosh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} \\
 &\quad + \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\
 &\quad \quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \\
 &\quad \times \left\{ G_0(y, y) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} \right] \right\}. \quad (5.133)
 \end{aligned}$$

Da die Ortskoordinaten nur im zweiten Propagator auftreten, können die beiden Ortsintegrationen  $\int d^{D-1}x$  und  $\int d^{D-1}y$  sofort ausgeführt werden. Man beachte, daß jeweils über  $[0, L]^{D-1}$  zu integrieren ist. Genau wie beim Graphen OIB trägt nur der Summand mit  $\vec{n} = 0$  bei (vgl. die Bemerkung nach Gl. (5.35)). Dies ergibt die angesprochene Vereinfachung des Propagators  $G(x, y)$ . Für den zu untersuchenden Graphen IB bekommt man daher:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} \text{Diagramm} &= \frac{3}{8} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon L^{2-\varepsilon} \int_{-\infty}^\infty dx_0 \int_{-\infty}^\infty dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\
 &\quad \times \left\{ G_0(x, x) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \right] \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \int_0^\infty dt \frac{3m_0}{4} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)}{\cosh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)}{\cosh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} \right. \\
 &\quad \quad \left. + \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \\
 &\quad \times \left\{ G_0(y, y) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} \right] \right\}. \quad (5.134)
 \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren der mittleren Klammer werden daraus zwei Beiträge:

$$\frac{1}{8} \text{Diagramm} = \text{IB1} + \text{IB2}. \quad (5.135)$$

Dabei sind folgende beiden Definitionen zu beachten:

$$\begin{aligned} \text{IB1} := & \frac{3}{8} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon L^{2-\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \frac{\tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)} \frac{\tanh^2(\frac{m_0}{2}y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2}y_0)} \right. \\ & \times \int_0^{\infty} dt \frac{3m_0}{4} e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} \\ & \times \left\{ G_0(x, x) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} \right] \right\} \\ & \left. \times \left\{ G_0(y, y) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}y_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}y_0)} \right] \right\} \right\} \quad (5.136) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{IB2} := & \frac{3}{8} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon L^{2-\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dk \left\{ e^{-(k^2 + m_0^2)t} \right. \\ & \times \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \\ & \times \left\{ G_0(x, x) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} \right] \right\} \\ & \left. \times \left\{ G_0(y, y) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}y_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}y_0)} \right] \right\} \right\}. \quad (5.137) \end{aligned}$$

Die Terme IB1 und IB2 werden einzeln berechnet. Zunächst zum Term IB1.

### Berechnung von Term IB1

Man führt das  $t$ -Integral aus und drückt gemäß Gl. (3.16)  $\tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0)$  durch  $\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)$  aus. Außerdem sind das  $x_0$ - und  $y_0$ -Integral identisch, so daß man insgesamt erhält:

$$\begin{aligned} \text{IB1} = & \frac{3}{8} g_0 m_0 \mu_0^\varepsilon L^{2-\varepsilon} \\ & \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left\{ \frac{1}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)} - \frac{1}{\cosh^3(\frac{m_0}{2}x_0)} \right\} \right. \\ & \left. \times \left\{ G_0(x, x) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} \right] \right\} \right\}^2. \quad (5.138) \end{aligned}$$

Durch Ordnen nach Potenzen von  $\frac{1}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)}$  wird daraus

$$\begin{aligned} \text{IB1} = & \frac{3}{8} g_0 m_0 \mu_0^\varepsilon L^{2-\varepsilon} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left\{ \frac{1}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)} G_0(x, x) \right. \right. \\ & + \frac{1}{\cosh^3(\frac{m_0}{2}x_0)} \left[ m_0 L^\varepsilon \mathcal{A}_2(m_0 L) - G_0(x, x) \right] \\ & + \frac{m_0 L^\varepsilon}{\cosh^5(\frac{m_0}{2}x_0)} \left[ \mathcal{A}_1(m_0 L) - \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] \\ & \left. \left. - \frac{m_0 L^\varepsilon}{\cosh^7(\frac{m_0}{2}x_0)} \mathcal{A}_1(m_0 L) \right\} \right\}^2. \quad (5.139) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck enthält keine Divergenzen mehr, denn  $G_0(x, x)$ ,  $\mathcal{A}_1(m_0 L)$  und  $\mathcal{A}_2(m_0 L)$  sind endlich für  $\varepsilon = 0$ . Man ersetzt deshalb (vgl. Gl. (5.118))

$$G_0(x, x) = -\frac{m_0}{4\pi} + O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \quad (5.140)$$

und berechnet die verbleibenden  $x_0$ -Integrale wieder mit (vgl. Gl. (5.124))

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{1}{\cosh^{\mu}(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{2}{m_0} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{2}\right). \quad (5.141)$$

Das ergibt

$$\begin{aligned} \text{IB1} &= \frac{3}{8} g_0 m_0 \mu_0^\varepsilon L^{2-\varepsilon} \left\{ -\frac{1}{2\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left[ 2L^\varepsilon \mathcal{A}_2(m_0 L) + \frac{1}{2\pi} \right] B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2L^\varepsilon \left[ \mathcal{A}_1(m_0 L) - \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) - 2L^\varepsilon \mathcal{A}_1(m_0 L) B\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) \right\}^2 \\ &\quad + O\left(m_0 L e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{3}{8} g_0 m_0 L^2 \left\{ -\frac{1}{2} + \pi \mathcal{A}_2(m_0 L) + \frac{1}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \pi \left[ \mathcal{A}_1(m_0 L) - \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] - \frac{5}{8} \pi \mathcal{A}_1(m_0 L) \right\}^2 \\ &\quad + O\left(m_0 L e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{3}{8} g_0 m_0 L^2 \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pi \mathcal{A}_1(m_0 L) + \frac{1}{4} \pi \mathcal{A}_2(m_0 L) \right\}^2 \\ &\quad + O\left(m_0 L e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.142)$$

Hier kann man wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \text{IB1} &= \frac{3}{128} g_0 m_0 L^2 \left\{ 1 - 2\pi \left[ \frac{1}{2} \mathcal{A}_1(m_0 L) + \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] + \frac{\pi^2}{4} \mathcal{A}_1^2(m_0 L) \right. \\ &\quad \left. + \pi^2 \mathcal{A}_1(m_0 L) \mathcal{A}_2(m_0 L) + \pi^2 \mathcal{A}_2^2(m_0 L) \right\} \\ &\quad + O\left(m_0 L e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.143)$$

Im nächsten Abschnitt soll der Term IB2 bestimmt werden.

### Berechnung von Term IB2

Es sei zunächst an das Resultat

$$N_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi (4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)}} \quad (5.144)$$

für die Normierungskonstante der Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums erinnert.

Zur Berechnung von IB2 ist es nützlich zunächst folgenden Ausdruck zu betrachten:

$$\begin{aligned}
 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \langle x_0 | k \rangle &= N_k \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) e^{ikx_0} \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right. \\
 &\quad \left. + 3im_0k \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right] \\
 &= N_k e^{ikx_0} \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) 3im_0k \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^3\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right\}. \tag{5.145}
 \end{aligned}$$

Wieder drücke ich  $\tanh^2$  durch  $\cosh^2$  aus (vgl. Gl. (3.16)). Das liefert:

$$\begin{aligned}
 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \langle x_0 | k \rangle &= N_k e^{ikx_0} \left\{ 3im_0k + \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3im_0k}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)} + \frac{3}{2} m_0^2 \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)} \right\} \\
 &= N_k e^{ikx_0} \left\{ 3im_0k + [2k^2 - m_0^2] \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3im_0k}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)} + \frac{3}{2} m_0^2 \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)} \right\}. \tag{5.146}
 \end{aligned}$$

Es erweist sich nun als sinnvoll, im Term IB2 nach den Termen zu ordnen, die eine Potenz von  $\frac{1}{\cosh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)}$  enthalten, so daß das zugehörige  $x_0$ -Integral sicher konvergiert, und nach solchen, die so eine Potenz nicht enthalten. Das führt mit der zusätzlichen Substitution  $u = \frac{t}{L^2}$  auf

$$\begin{aligned}
 \text{IB2} &= \frac{3}{8} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon L^{4-\varepsilon} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dk \left\{ e^{-\left(1+\frac{k^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u} \right. \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^\infty dx_0 \left\{ N_k e^{ikx_0} \left\{ 3im_0k + [2k^2 - m_0^2] \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{3im_0k}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)} + \frac{3}{2} m_0^2 \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)} \right\} \right. \\
 &\quad \times \left\{ G_0(x, x) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)} \right] \right\} \right\} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^\infty dy_0 \left\{ N_k e^{-iky_0} \left\{ -3im_0k + [2k^2 - m_0^2] \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3im_0k}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right)} + \frac{3}{2} m_0^2 \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right)} \right\} \right. \\
 &\quad \times \left\{ G_0(y, y) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2}y_0\right)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right)} \right] \right\} \right\}. \tag{5.147}
 \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, daß man  $\langle k | y_0 \rangle$  aus  $\langle x_0 | k \rangle$  einfach durch komplexe Konjugation und die Ersetzung  $x_0 \rightarrow y_0$  erhält. Das  $y_0$ -Integral ist gerade das komplex Konjugierte des

$x_0$ -Integrals, so daß man wie folgt weiter vorgehen kann:

$$\begin{aligned}
 \text{IB2} &= \frac{3}{8} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon L^{4-\varepsilon} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dk \left\{ e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2}) m_0^2 L^2 u} \right. \\
 &\quad \times \left| \int_{-\infty}^\infty dx_0 N_k e^{ikx_0} \left\{ 3im_0k + [2k^2 - m_0^2] \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{3im_0k}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} + \frac{3}{2} m_0^2 \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right\} \right. \\
 &\quad \times \left\{ G_0(x, x) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right] \right\} \left. \right|^2 \Bigg\} \\
 &= \frac{3}{8} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon L^{4-\varepsilon} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dk \left\{ e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2}) m_0^2 L^2 u} \right. \\
 &\quad \times \left| \int_{-\infty}^\infty dx_0 N_k e^{ikx_0} \left\{ \left[ 3im_0k + [2k^2 - m_0^2] \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \right] G_0(x, x) \right. \right. \\
 &\quad + \left[ 3im_0k + [2k^2 - m_0^2] \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \right] m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right] \\
 &\quad + \left[ -\frac{3im_0k}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} + \frac{3}{2} m_0^2 \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right] G_0(x, x) \\
 &\quad + \left[ -\frac{3im_0k}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} + \frac{3}{2} m_0^2 \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right] \\
 &\quad \times m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \right] \left. \right\} \left. \right|^2 \Bigg\}. \tag{5.148}
 \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Ordnen der Terme führt auf

$$\begin{aligned}
 \text{IB2} &= \frac{3}{8} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon L^{4-\varepsilon} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dk \left\{ e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2}) m_0^2 L^2 u} \right. \\
 &\quad \times \left| \int_{-\infty}^\infty dx_0 N_k e^{ikx_0} \left[ 3im_0k + [2k^2 - m_0^2] \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \right] G_0(x, x) \right. \\
 &\quad + \int_{-\infty}^\infty dx_0 N_k e^{ikx_0} \left\{ \frac{3im_0k}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \left[ m_0 L^\varepsilon \mathcal{A}_2(m_0 L) - G_0(x, x) \right] \right. \\
 &\quad + \frac{3im_0k}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} \left[ m_0 L^\varepsilon \mathcal{A}_1(m_0 L) - m_0 L^\varepsilon \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] \\
 &\quad - \frac{3im_0k}{\cosh^6(\frac{m_0}{2} x_0)} m_0 L^\varepsilon \mathcal{A}_1(m_0 L) \left. \right\} \\
 &\quad + \int_{-\infty}^\infty dx_0 N_k e^{ikx_0} \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \left\{ \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \left[ [2k^2 - m_0^2] m_0 L^\varepsilon \mathcal{A}_2(m_0 L) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} m_0^2 G_0(x, x) \right] \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} x_0)} \left[ [2k^2 - m_0^2] m_0 L^\varepsilon \mathcal{A}_1(m_0 L) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{3}{2} m_0^3 L^\varepsilon \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\cosh^6(\frac{m_0}{2} x_0)} \frac{3}{2} m_0^3 L^\varepsilon \mathcal{A}_1(m_0 L) \right\} \left. \right|^2 \Bigg\}. \tag{5.149}
 \end{aligned}$$

Bis auf Terme der Ordnung  $O(\varepsilon)$  und  $O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{m_0 L}\right)$  wird in den letzten beiden  $x_0$ -Integralen wieder  $G_0(x, x) = -\frac{m_0}{4\pi}$  gesetzt. Da diese Integrale keine Divergenzen liefern werden, ist dieses Vorgehen gerechtfertigt. Es sind dann Integrale des Typs

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^j\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)}{\cosh^p\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)}, \quad j \in \{0, 1\}, \quad p \in \{2, 4, 6\} \quad (5.150)$$

auszurechnen. Die Integralberechnungen sind in Anhang B.1 durchgeführt. Mit den Resultaten dieses Anhangs, der Substitution  $v = \frac{k}{m_0}$  und der Definition

$$N_v := \frac{1}{\sqrt{2\pi(4v^4 + 5v^2 + 1)}} \quad (5.151)$$

ergibt sich nach längerer Rechnung:

$$\begin{aligned} \text{IB2} &= \frac{3}{8} g_0 m_0^3 \mu_0^\varepsilon L^{4-\varepsilon} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \right. \\ &\quad \times \left| \int_{-\infty}^\infty dx_0 \left\{ N_v e^{im_0 x_0 v} [3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2}x_0)] G_0(x, x) \right\} \right. \\ &\quad + i \frac{N_v \pi}{\sinh(\pi v)} v^2 \left[ 2L^\varepsilon \mathcal{A}_2(m_0 L) + \frac{3}{2\pi} + \frac{4}{3} L^\varepsilon \mathcal{A}_1(m_0 L) \right] \\ &\quad + i \frac{N_v \pi}{\sinh(\pi v)} L^\varepsilon v^4 \left[ \frac{8}{3} \mathcal{A}_1(m_0 L) + 2 \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] \\ &\quad \left. + i \frac{N_v \pi}{\sinh(\pi v)} v^6 \frac{4}{3} L^\varepsilon \mathcal{A}_1(m_0 L) + O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \right|^2 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.152)$$

Man definiert weiterhin

$$H_1(m_0 L) := 2 \mathcal{A}_2(m_0 L) + \frac{3}{2\pi} + \frac{4}{3} \mathcal{A}_1(m_0 L), \quad (5.153)$$

$$H_2(m_0 L) := \frac{8}{3} \mathcal{A}_1(m_0 L) + 2 \mathcal{A}_2(m_0 L), \quad (5.154)$$

$$H_3(m_0 L) := \frac{4}{3} \mathcal{A}_1(m_0 L) \quad (5.155)$$

und bekommt

$$\begin{aligned} \text{IB2} &= \frac{3}{8} g_0 m_0^3 \mu_0^\varepsilon L^{4-\varepsilon} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \right. \\ &\quad \times \left| \int_{-\infty}^\infty dx_0 \left\{ N_v e^{im_0 x_0 v} [3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2}x_0)] G_0(x, x) \right\} \right. \\ &\quad + i \frac{N_v \pi}{\sinh(\pi v)} v^2 [H_1(m_0 L) + H_2(m_0 L) v^2 + H_3(m_0 L) v^4] \\ &\quad \left. + O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \right|^2 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.156)$$

Man führt jetzt das Quadrat des Betrages aus.

Es ergibt sich dann eine Summe dreier Terme:

$$\begin{aligned}
 \text{IB2} &= \frac{3}{8} g_0 m_0^3 \mu_0^\varepsilon L^{4-\varepsilon} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \right. \\
 &\quad \times \left. \left| \int_{-\infty}^\infty dx_0 \left\{ N_v e^{im_0 x_0 v} [3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2} x_0)] G_0(x, x) \right\} \right|^2 \right\} \\
 &+ \frac{3}{8} g_0 m_0^3 \mu_0^\varepsilon L^{4-\varepsilon} 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \frac{|N_v|^2 \pi}{\sinh(\pi v)} \right. \right. \\
 &\quad \times \left[ -iv^2 \right] \left[ H_1(m_0 L) + H_2(m_0 L) v^2 + H_3(m_0 L) v^4 \right] \\
 &\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^\infty dx_0 e^{im_0 x_0 v} [3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2} x_0)] G_0(x, x) \right\} \right\} \\
 &+ \frac{3}{8} g_0 m_0^3 \mu_0^\varepsilon L^{4-\varepsilon} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \frac{|N_v|^2 \pi^2 v^4}{\sinh^2(\pi v)} \right. \\
 &\quad \times \left. \left[ H_1(m_0 L) + H_2(m_0 L) v^2 + H_3(m_0 L) v^4 \right]^2 \right\} \\
 &+ O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \tag{5.157}
 \end{aligned}$$

Die Aussage hinsichtlich der Korrekturen  $O(\varepsilon)$  ist hier allerdings nur dann korrekt, falls in den drei Integralausdrücken keine Divergenzen mehr in  $\varepsilon$  enthalten sind. Die weitere Rechnung wird zeigen, daß dies, wie auch zu Beginn dieses Abschnitts angedeutet, in der Tat der Fall ist. Der Übersichtlichkeit halber wurde darauf verzichtet, an dieser Stelle noch die Möglichkeit solcher Divergenzen zu berücksichtigen. Bis auf Terme der Ordnung  $\varepsilon$  kann man nun auch  $\mu_0^\varepsilon L^{4-\varepsilon}$  und  $G_0(x, x)$  im zweiten Integralausdruck vereinfachen. Im ersten Ausdruck ist es günstiger,  $G_0(x, x)$  stehen zu lassen, um den Zusammenhang mit dem Graphen  besser herzustellen. Man bekommt

$$\text{IB2} = \text{IB2a} + \text{IB2b} + \text{IB2c} + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon), \tag{5.158}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \text{IB2a} &:= \frac{3}{8} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \right. \\
 &\quad \times \left. \left| \int_{-\infty}^\infty dx_0 \left\{ N_v e^{im_0 x_0 v} [3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2} x_0)] G_0(x, x) \right\} \right|^2 \right\}, \tag{5.159}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{IB2b} &:= \frac{3}{4} g_0 m_0^3 L^4 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \frac{|N_v|^2 \pi}{\sinh(\pi v)} \right. \right. \\
 &\quad \times \left[ -iv^2 \right] \left[ H_1(m_0 L) + H_2(m_0 L) v^2 + H_3(m_0 L) v^4 \right] \\
 &\quad \times \left. \left. \int_{-\infty}^\infty dx_0 e^{im_0 x_0 v} [3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2} x_0)] \left( -\frac{m_0}{4\pi} \right) \right\} \right\} \tag{5.160}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \text{IB2c} &:= \frac{3}{8} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \frac{|N_v|^2 \pi^2 v^4}{\sinh^2(\pi v)} \right. \\
 &\quad \times \left. \left[ H_1(m_0 L) + H_2(m_0 L) v^2 + H_3(m_0 L) v^4 \right]^2 \right\}. \tag{5.161}
 \end{aligned}$$

Die Terme IB2a, IB2b und IB2c werden jetzt einzeln berechnet. Ich beginne mit den einfacheren Termen IB2c und IB2b.

### Berechnung von Term IB2c

Indem man das  $u$ -Integral ausrechnet, erhält man

$$\begin{aligned} \text{IB2c} &= \frac{3}{8} g_0 m_0 L^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{|N_v|^2 \pi^2 v^4}{(1+v^2) \sinh^2(\pi v)} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ H_1(m_0 L) + H_2(m_0 L) v^2 + H_3(m_0 L) v^4 \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.162)$$

Mit der Definition von  $N_v$  (vgl. Gl. (5.151)) wird das zu

$$\begin{aligned} \text{IB2c} &= \frac{3\pi}{16} g_0 m_0 L^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{v^4}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ H_1(m_0 L) + H_2(m_0 L) v^2 + H_3(m_0 L) v^4 \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.163)$$

Ausmultiplizieren und Einsetzen der Definitionen der  $H_i(m_0 L)$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ , Gln. (5.153) bis (5.155)) liefert dann nach etwas längerer Rechnung:

$$\begin{aligned} \text{IB2c} &= \frac{3\pi}{16} g_0 m_0 L^2 \left\{ \mathcal{A}_2^2(m_0 L) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{4 v^4 (v^4 + 2v^2 + 1)}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \right. \\ &\quad + \mathcal{A}_1^2(m_0 L) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\frac{16}{9} v^4 (v^8 + 4v^6 + 6v^4 + 4v^2 + 1)}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \\ &\quad + \mathcal{A}_1(m_0 L) \mathcal{A}_2(m_0 L) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4 (\frac{16}{3} v^6 + 16v^4 + 16v^2 + \frac{16}{3})}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \\ &\quad + \mathcal{A}_1(m_0 L) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4 (\frac{4}{\pi} v^4 + \frac{8}{\pi} v^2 + \frac{4}{\pi})}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \\ &\quad + \mathcal{A}_2(m_0 L) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4 (\frac{6}{\pi} v^2 + \frac{6}{\pi})}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\frac{9}{4\pi^2} v^4}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \right\} \\ &\quad + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.164)$$

Mit den Integralausdrücken

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{4 v^4}{(4 v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= 0.031714099(1), \end{aligned} \quad (5.165)$$

$$\begin{aligned} I_2 &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\frac{16}{9} v^4 (1+v^2)^2}{(4 v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= 0.031170199(1), \end{aligned} \quad (5.166)$$

$$\begin{aligned} I_3 &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\frac{16}{3} v^4 (1 + v^2)}{(4 v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= 0.060008312(1), \end{aligned} \quad (5.167)$$

$$\begin{aligned} I_4 &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\frac{4}{\pi} v^4}{(4 v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= \frac{1}{\pi} I_1 \\ &= 0.010094912(1), \end{aligned} \quad (5.168)$$

$$\begin{aligned} I_5 &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\frac{6}{\pi} v^4}{(4 v^2 + 1) (1 + v^2) \sinh^2(\pi v)} \\ &= 0.011381932(1), \end{aligned} \quad (5.169)$$

$$\begin{aligned} I_6 &:= \frac{9}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4}{(1 + v^2)^2 (4v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= 0.001069179(1), \end{aligned} \quad (5.170)$$

bekommt man daher:

$$\begin{aligned} \text{IB2c} &= \frac{3\pi}{16} g_0 m_0 L^2 \left\{ I_1 \mathcal{A}_2^2(m_0 L) + I_2 \mathcal{A}_1^2(m_0 L) + I_3 \mathcal{A}_1(m_0 L) \mathcal{A}_2(m_0 L) \right. \\ &\quad \left. + I_4 \mathcal{A}_1(m_0 L) + I_5 \mathcal{A}_2(m_0 L) + I_6 \right\} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.171)$$

Die numerische Auswertung wurde mit Hilfe des Programms Maple auf einem Rechner vom Typ Sun SPARC 2 durchgeführt. Auch alle weiteren numerischen Bestimmungen wurden auf diesem Rechntyp durchgeführt. Jetzt zum Term IB2b.

### Berechnung von Term IB2b

Hier rechnet man als erstes das  $x_0$ -Integral aus. Dabei ist zu beachten, daß dieses Integral nicht im gewöhnlichen Lebesgueschen Sinne existiert. Im Distributionssinne gilt jedoch

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{im_0 vx_0} &= 2\pi \delta(m_0 v) \\ &= \frac{2\pi}{m_0} \delta(v), \end{aligned} \quad (5.172)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{im_0 vx_0} \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) = \frac{2\pi i}{m_0 \sinh(\pi v)}. \quad (5.173)$$

Die erste Beziehung ist allgemein bekannt (z.B. [57, Gl. (7.19)]), die zweite wird im Anhang B.2 bewiesen (vgl. Gl. (B.29)). Führt man außerdem gleich das  $u$ -Integral analog zur Berechnung von IB2c aus, so erhält man:

$$\begin{aligned} \text{IB2b} &= \frac{3}{4} g_0 m_0 L^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{\pi |N_v|^2}{(1 + v^2) \sinh(\pi v)} \right. \right. \\ &\quad \times \left[ -iv^2 \right] \left[ H_1(m_0 L) + H_2(m_0 L) v^2 + H_3(m_0 L) v^4 \right] \\ &\quad \times \left. \left. \left( -\frac{m_0}{4\pi} \right) \frac{2\pi}{m_0} \left\{ 3iv \delta(v) + (2v^2 - 1) \frac{i}{\sinh(\pi v)} \right\} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (5.174)$$

Da insgesamt noch ein Faktor  $\frac{v^2}{\sinh(\pi v)}$  im Integranden vorhanden ist, der bei  $v = 0$  endlich ist, trägt der Term mit  $v \delta(v)$  nichts bei. Man bekommt damit:

$$\begin{aligned} \text{IB2b} &= -\frac{3}{8} g_0 m_0 L^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{\pi |N_v|^2 v^2 (2v^2 - 1)}{(1 + v^2) \sinh^2(\pi v)} \right. \right. \\ &\quad \times \left[ H_1(m_0 L) + H_2(m_0 L) v^2 + H_3(m_0 L) v^4 \right] \left. \right\} \\ &= -\frac{3}{16} g_0 m_0 L^2 \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{(2v^2 - 1) v^2}{(1 + v^2) (4v^4 + 5v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \right. \\ &\quad \times \left. \left[ H_1(m_0 L) + H_2(m_0 L) v^2 + H_3(m_0 L) v^4 \right] \right\}. \quad (5.175) \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Definitionen der  $H_i(m_0 L)$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) erhält man nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} \text{IB2b} &= -\frac{3}{16} g_0 m_0 L^2 \left\{ \mathcal{A}_2(m_0 L) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{2 v^2 (2v^2 - 1) (1 + v^2)}{(1 + v^2)^2 (4v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \right. \\ &\quad + \mathcal{A}_1(m_0 L) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\frac{4}{3} v^2 (2v^2 - 1) (v^4 + 2v^2 + 1)}{(1 + v^2)^2 (4v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \\ &\quad + \left. \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\frac{3}{2\pi} v^2 (2v^2 - 1)}{(1 + v^2)^2 (4v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \right\} \\ &\quad + O(\varepsilon). \quad (5.176) \end{aligned}$$

Man definiert

$$\begin{aligned} J_1 &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{2 v^2 (2v^2 - 1)}{(1 + v^2) (4v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= -0.113020997(1), \quad (5.177) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\frac{4}{3} v^2 (2v^2 - 1)}{(4v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= -0.078042861(1), \quad (5.178) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_3 &:= \frac{3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^2 (2v^2 - 1)}{(1 + v^2)^2 (4v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= -0.025954886(1). \quad (5.179) \end{aligned}$$

Die numerischen Bestimmungen wurden erneut mit dem Programm Maple vorgenommen.

Damit findet man für den Term IB2b:

$$\text{IB2b} = -\frac{3}{16} g_0 m_0 L^2 \left\{ J_1 \mathcal{A}_2(m_0 L) + J_2 \mathcal{A}_1(m_0 L) + J_3 \right\}. \quad (5.180)$$

Schließlich zum Term IB2a.

### Berechnung von Term IB2a

$$\begin{aligned}
 \text{IB2a} &= \frac{3}{8} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} \right. \\
 &\quad \times \left. \left| \int_{-\infty}^\infty dx_0 \left\{ N_v e^{im_0 x_0 v} [3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2} x_0)] G_0(x, x) \right\} \right|^2 \right\} \\
 &= \frac{3}{8} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} |N_v|^2 \right. \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^\infty dx_0 e^{im_0 x_0 v} [3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2} x_0)] G_0(x, x) \\
 &\quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty dy_0 e^{-im_0 y_0 v} [-3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)] G_0(y, y) \right\}. \tag{5.181}
 \end{aligned}$$

Um die Asymptotik des tangens hyperbolicus auszunutzen, ist es günstig die  $x_0$ - und  $y_0$ -Integration genau wie bei den Rechnungen zu den Graphen OIB und OIC aufzuspalten (vgl. Gl. (5.43) und Gl. (5.80)). Aufgrund der Eigenschaften des Integranden gilt auch hier schematisch, vgl. Gl. (5.44),

$$\int_{-\infty}^\infty dx_0 \int_{-\infty}^\infty dy_0 \dots = 2 \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \dots + 2 \int_0^\infty dx_0 \int_{-\infty}^0 dy_0 \dots.$$

Daher bekommt man

$$\text{IB2a} = \text{IB2aa} + \text{IB2ab}, \tag{5.182}$$

mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
 \text{IB2aa} &:= \frac{3}{4} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} |N_v|^2 \right. \\
 &\quad \times \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ e^{im_0(x_0-y_0)v} G_0(x, x) G_0(y, y) \right. \\
 &\quad \times [3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2} x_0)] \\
 &\quad \times \left. \left. [-3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)] \right\} \right\} \tag{5.183}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \text{IB2ab} &:= \frac{3}{4} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2) m_0^2 L^2 u} |N_v|^2 \right. \\
 &\quad \times \int_0^\infty dx_0 \int_{-\infty}^0 dy_0 \left\{ e^{im_0(x_0-y_0)v} G_0(x, x) G_0(y, y) \right. \\
 &\quad \times [3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2} x_0)] \\
 &\quad \times \left. \left. [-3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0)] \right\} \right\}. \tag{5.184}
 \end{aligned}$$

Ich berechne als erstes den Term IB2ab. Wieder wird dabei zuerst  $G_0(x, x)$  bis auf die erwähnten Korrekturen durch  $-\frac{m_0}{4\pi}$  ersetzt. Indem man noch die Substitution  $y_0 \rightarrow -y_0$  ausführt, ergibt das

$$\begin{aligned} \text{IB2ab} = & \frac{3}{4} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} |N_v|^2 \right. \\ & \times \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ e^{im_0(x_0+y_0)v} \frac{m_0^2}{16\pi^2} \right. \\ & \times (-1) \left[ 3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2}x_0) \right] \\ & \times \left. \left[ 3iv + (2v^2 - 1) \tanh(\frac{m_0}{2}y_0) \right] \right\} \\ & + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.185)$$

Führt man jetzt das  $u$ -Integral aus und substituiert weiter

$$\hat{x}_0 = m_0 x_0 \quad (5.186)$$

$$\hat{y}_0 = m_0 y_0, \quad (5.187)$$

so findet man

$$\begin{aligned} \text{IB2ab} = & -\frac{3}{64\pi^2} g_0 m_0 L^2 \int_{-\infty}^\infty dv \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \frac{|N_v|^2}{1+v^2} e^{i(\hat{x}_0+\hat{y}_0)v} \right. \\ & \times \left[ 3iv + (2v^2 - 1) \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \right] \left[ 3iv + (2v^2 - 1) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \left. \right\} \\ & + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.188)$$

Ausmultiplizieren und Verwendung der Definition von  $N_v$  gemäß Gl. (5.151) liefert

$$\begin{aligned} \text{IB2ab} = & -\frac{3}{128\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ \frac{e^{i(\hat{x}_0+\hat{y}_0)v}}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1)} \right. \\ & \times \left[ 4v^4 \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ & + 6iv^3 \left( \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right) \\ & + v^2 \left( -9 - 4 \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \right) \\ & - 3iv \left( \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right) \\ & \left. + \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \left. \right\} \\ & + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.189)$$

Da das  $\hat{x}_0$ - und  $\hat{y}_0$ -Integral nur jeweils über  $[0, \infty[$  zu erstrecken sind, ist es hier, abweichend vom sonstigen Vorgehen, günstiger, erst das  $v$ -Integral auszuführen, damit auf

eine Berechnung von  $\int_0^\infty dk e^{ik\hat{x}_0} \tanh(\frac{\hat{x}_0}{2})$  verzichtet werden kann. Die Konvergenz des  $v$ -Integrals erkennt man leicht, da der Grad des Nennerpolynoms, nämlich sechs, um zwei größer als der Grad des Polynoms im Zähler (eckige Klammer, Grad=4) ist. Man hat nun folgende Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1)} &= \frac{1}{(1+v^2)^2(4v^2+1)} \\ &= -\frac{4}{9} \frac{1}{1+v^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(1+v^2)^2} + \frac{16}{9} \frac{1}{4v^2+1}. \end{aligned} \quad (5.190)$$

Teilt man nach der Euler-Formel

$$e^{ikv(\hat{x}_0+\hat{y}_0)} = \cos[v(\hat{x}_0+\hat{y}_0)] + i \sin[v(\hat{x}_0+\hat{y}_0)] \quad (5.191)$$

auf und schreibt nur die Terme, die aufgrund der Symmetrie/Antisymmetrie in  $v$  nicht verschwinden, so erhält man

$$\begin{aligned} \text{IB2ab} &= -\frac{3}{128\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ \frac{\cos[v(\hat{x}_0+\hat{y}_0)]}{(1+v^2)^2(4v^2+1)} \right. \\ &\quad \times \left[ 4v^4 \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - v^2 \left( 9 + 4 \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right) + \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{\sin[v(\hat{x}_0+\hat{y}_0)]}{(1+v^2)^2(4v^2+1)} \left[ -6v^3 + 3v \right] \left[ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \Big\} \\ &\quad + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.192)$$

Mit der obigen Partialbruchzerlegung ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{IB2ab} &= \frac{1}{96\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ \left[ \frac{1}{1+v^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{(1+v^2)^2} - \frac{1}{v^2+\frac{1}{4}} \right] \right. \\ &\quad \times \cos[v(\hat{x}_0+\hat{y}_0)] \left[ 4v^4 \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - v^2 \left( 9 + 4 \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right) + \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \\ &\quad + \left[ \frac{1}{1+v^2} + \frac{3}{4} \frac{1}{(1+v^2)^2} - \frac{1}{v^2+\frac{1}{4}} \right] \sin[v(\hat{x}_0+\hat{y}_0)] \\ &\quad \times \left[ -6v^3 + 3v \right] \left[ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \Big\} \\ &\quad + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.193)$$

Multipliziert man aus, so ergeben sich Integrale folgender Typen:

$$\int_{-\infty}^\infty dv \frac{v^l \cos(av)}{(\beta^2+v^2)^m}, \quad l \in \{0, 2, 4\}, \quad m \in \{1, 2\}$$

und

$$\int_{-\infty}^\infty dv \frac{v^n \sin(av)}{(\beta^2+v^2)^p}, \quad n \in \{1, 2\}, \quad p \in \{1, 2\},$$

mit  $a = \hat{x}_0 + \hat{y}_0 > 0$  im ganzen Integrationsbereich außer für  $\hat{x}_0 = \hat{y}_0 = 0$ . Der Ausnahmepunkt  $\hat{x}_0 = \hat{y}_0 = 0$  ist als Nullmenge für die noch auszuführenden Integrationen über  $\hat{x}_0$  und  $\hat{y}_0$  jedoch belanglos.

Solche Integrale traten bereits bei der Berechnung der Greenschen Funktion mit Instantonhintergrundfeld in Kapitel 3 auf. Sie sind im Anhang B.3 berechnet. Das Problem, daß einige dieser Integrale nicht existieren und wie die zugehörigen Formeln anzuwenden sind, ist ebenfalls schon im Rahmen der Berechnung der Greenschen Funktion mit Instantonhintergrundfeld erörtert worden, die Behandlung ist hier dieselbe. Nach längerer Rechnung bekommt man:

$$\begin{aligned} \text{IB2ab} = & \frac{1}{96\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \\ & \left\{ e^{-(\hat{x}_0+\hat{y}_0)} \left\{ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \frac{27}{8}\pi [1 + \hat{x}_0 + \hat{y}_0] \right. \right. \\ & \quad + \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \frac{27}{8}\pi \left[ \frac{4}{3} + \hat{x}_0 + \hat{y}_0 \right] \\ & \quad + \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \frac{27}{8}\pi \left[ \frac{4}{3} + \hat{x}_0 + \hat{y}_0 \right] \\ & \quad \left. \left. + \frac{27}{8}\pi \left[ \frac{5}{3} + \hat{x}_0 + \hat{y}_0 \right] \right\} \right. \\ & \quad + e^{-\frac{1}{2}(\hat{x}_0+\hat{y}_0)} \left\{ -\frac{9}{2}\pi \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. -\frac{9}{2}\pi \left[ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) + \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \right. \\ & \quad \left. \left. -\frac{9}{2}\pi \right\} \right\} \\ & + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.194)$$

Die Integrale über  $\hat{x}_0$  und  $\hat{y}_0$  lassen sich trennen und letztlich auf folgende Integrale zurückführen:

$$\int_0^\infty d\hat{x}_0 e^{-\hat{x}_0} \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) = 2 \log 2 - 1, \quad (5.195)$$

$$\int_0^\infty d\hat{x}_0 e^{-\hat{x}_0} \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \hat{x}_0 = \frac{\pi^2}{6} - 1, \quad (5.196)$$

$$\int_0^\infty d\hat{x}_0 e^{-\hat{x}_0} = 1, \quad (5.197)$$

$$\int_0^\infty d\hat{x}_0 e^{-\hat{x}_0} \hat{x}_0 = 1, \quad (5.198)$$

$$\int_0^\infty d\hat{x}_0 e^{-\frac{1}{2}\hat{x}_0} = 2, \quad (5.199)$$

$$\int_0^\infty d\hat{x}_0 e^{-\frac{1}{2}\hat{x}_0} \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) = \pi - 2. \quad (5.200)$$

Diese Formeln werden in Anhang B.4 hergeleitet. Mit diesen Resultaten bekommt man schließlich für den Term IB2ab:

$$\begin{aligned} \text{IB2ab} = & \frac{3}{128\pi^2} g_0 m_0 L^2 \left[ 6 (\log 2)^2 + 2 \log 2 + \pi^2 \log 2 - 2\pi^2 \right] \\ & + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.201)$$

Jetzt zum Term IB2aa. Aufgrund der Asymptotik von  $\tanh(\frac{m_0}{2}x_0)$  ist folgende Ersetzung von Vorteil:

$$\tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) = 1 + \underbrace{\tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - 1}_{=: \Delta\left(\frac{m_0x_0}{2}\right)} \quad (5.202)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{IB2aa} &= \frac{3}{4} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} |N_v|^2 \right. \\ &\quad \times \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ e^{im_0(x_0-y_0)v} G_0(x, x) G_0(y, y) \right. \\ &\quad \times \left[ \begin{array}{l} [3iv + (2v^2 - 1)] [ -3iv + (2v^2 - 1)] \\ + [3iv + (2v^2 - 1)] (2v^2 - 1) \Delta\left(\frac{m_0y_0}{2}\right) \\ + [-3iv + (2v^2 - 1)] (2v^2 - 1) \Delta\left(\frac{m_0x_0}{2}\right) \\ + (2v^2 - 1)^2 \Delta\left(\frac{m_0x_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{m_0y_0}{2}\right) \end{array} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.203)$$

Mit der Definition von  $N_v$  wird das zu

$$\begin{aligned} \text{IB2aa} &= \frac{3}{4} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \right. \\ &\quad \times \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ \frac{1}{2\pi} e^{im_0(x_0-y_0)v} G_0(x, x) G_0(y, y) \right\} \left. \right\} \\ &+ \frac{3}{4} g_0 m_0^3 L^4 \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \frac{1}{2\pi(4v^4 + 5v^2 + 1)} \right. \right. \\ &\quad \times 2 \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ e^{im_0(x_0-y_0)v} G_0(x, x) G_0(y, y) \right. \\ &\quad \times [3iv + 2v^2 - 1] (2v^2 - 1) \Delta\left(\frac{m_0y_0}{2}\right) \left. \right\} \left. \right\} \\ &+ \frac{3}{4} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \frac{1}{2\pi(4v^4 + 5v^2 + 1)} \right. \\ &\quad \times \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ e^{im_0(x_0-y_0)v} G_0(x, x) G_0(y, y) \right. \\ &\quad \times (2v^2 - 1)^2 \Delta\left(\frac{m_0x_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{m_0y_0}{2}\right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.204)$$

In den letzten beiden Integralausdrücken ersetze ich wieder  $G_0(x, x)$  durch  $-\frac{m_0}{4\pi}$  und substituiere  $\hat{x}_0 = m_0 x_0$  bzw.  $\hat{y}_0 = m_0 y_0$ . Außerdem wird das  $u$ -Integral ausgeführt. Das liefert

$$\text{IB2aa} = \text{IB2aaa} + \text{IB2aab} + \text{IB2aac} + O\left(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon), \quad (5.205)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{IB2aaa} &:= \frac{3}{4} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ \frac{e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u}}{2\pi} \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ e^{im_0(x_0-y_0)v} G_0(x, x) G_0(y, y) \right\} \right\}, \end{aligned} \quad (5.206)$$

$$\begin{aligned} \text{IB2aab} &:= \frac{3}{64\pi^3} g_0 m_0 L^2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^\infty dv \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \frac{e^{i(\hat{x}_0-\hat{y}_0)v}}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1)} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left. (2v^2-1)[2v^2-1+3iv]\Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (5.207)$$

und

$$\begin{aligned} \text{IB2aac} &:= \frac{3}{128\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int_{-\infty}^\infty dv \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \frac{e^{i(\hat{x}_0-\hat{y}_0)v}}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1)} \right. \\ &\quad \times \left. (2v^2-1)^2 \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.208)$$

Zunächst zum Term IB2aab. Analog wie beim Term IB2ab wird zuerst das  $v$ -Integral ausgeführt. Erneut verwendet man die Euler-Formel, und da nur der Realteil des Integranden benötigt wird, bekommt man

$$\begin{aligned} \text{IB2aab} &= \frac{3}{64\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \int_{-\infty}^\infty dv \frac{(2v^2-1)^2 \cos[(\hat{x}_0-\hat{y}_0)v]}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1)} \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^\infty dv \frac{3v(2v^2-1) \sin[(\hat{y}_0-\hat{x}_0)v]}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1)} \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.209)$$

Die beiden  $v$ -Integrale werden ganz analog wie beim Term IB2ab mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung und den Resultaten des Anhangs B.3 ausgerechnet. Man erhält

$$\begin{aligned} \text{IB2aab} &= \frac{3}{64\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \left\{ 2\pi e^{-\frac{1}{2}|\hat{x}_0-\hat{y}_0|} [1 + \operatorname{sign}(\hat{x}_0-\hat{y}_0)] \right. \\ &\quad + \frac{\pi}{2} e^{-|\hat{x}_0-\hat{y}_0|} [-3 - 4 \operatorname{sign}(\hat{x}_0-\hat{y}_0)] \\ &\quad \left. - \frac{3}{2}\pi |\hat{x}_0-\hat{y}_0| e^{-|\hat{x}_0-\hat{y}_0|} [1 + \operatorname{sign}(\hat{x}_0-\hat{y}_0)] \right\} \\ &= \frac{3}{64\pi^3} g_0 m_0 L^2 \underbrace{\int_0^\infty d\hat{y}_0 \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \int_0^{\hat{y}_0} d\hat{x}_0 \frac{\pi}{2} e^{\hat{x}_0-\hat{y}_0}}_{=: (1)} \\ &\quad + \underbrace{\frac{3}{64\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^{\hat{x}_0} d\hat{y}_0 \left\{ \left[ 4\pi e^{-\frac{1}{2}(\hat{x}_0-\hat{y}_0)} - \frac{7}{2}\pi e^{-(\hat{x}_0-\hat{y}_0)} \right. \right.} \\ &\quad \left. \left. - 3\pi (\hat{x}_0-\hat{y}_0) e^{-(\hat{x}_0-\hat{y}_0)} \right] \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right\}}_{=: Q}. \end{aligned} \quad (5.210)$$

Das Integral (1) lässt sich noch analytisch ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 (1) &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty d\hat{y}_0 \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \int_0^{\hat{y}_0} d\hat{x}_0 e^{\hat{x}_0 - \hat{y}_0} \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty d\hat{y}_0 \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \int_{-\hat{y}_0}^0 d\tilde{x}_0 e^{\tilde{x}_0}, \quad \tilde{x}_0 = \hat{x}_0 - \hat{y}_0 \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty d\hat{y}_0 \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) [1 - e^{-\hat{y}_0}] \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty d\hat{y}_0 [\tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) - 1] [1 - e^{-\hat{y}_0}] \quad (\text{Definition von } \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)). \quad (5.211)
 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) - 1 &= \frac{\sinh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) - \cosh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \\
 &= \frac{-e^{-\frac{\hat{y}_0}{2}}}{\cosh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}
 \end{aligned} \quad (5.212)$$

wird daraus

$$\begin{aligned}
 (1) &= -\frac{\pi}{2} \int_0^\infty d\hat{y}_0 \frac{e^{-\frac{\hat{y}_0}{2}}}{\cosh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} [1 - e^{-\hat{y}_0}] \\
 &= -\pi \int_0^\infty d\tilde{y}_0 \frac{e^{-\tilde{y}_0}}{\cosh(\tilde{y}_0)} [1 - e^{-2\tilde{y}_0}], \quad \tilde{y}_0 = \frac{\hat{y}_0}{2} \\
 &= -\pi [\beta(1) - \beta(2)] \quad [47, 3.541.6]. \quad (5.213)
 \end{aligned}$$

Dabei gilt [47, 8.370]

$$\beta(x) = \frac{1}{2} \left[ \psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \right], \quad (5.214)$$

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \quad (5.215)$$

Wegen  $\beta(1) = \log 2$  (vgl. Anhang B.4, Gl. (B.55)) und

$$\begin{aligned}
 \beta(2) &= \frac{1}{2} \left[ \psi\left(\frac{3}{2}\right) - \psi(1) \right] \\
 &= \frac{1}{2} [-\gamma + 2 - 2 \log 2 + \gamma] \quad [47, 8.366.1 \text{ und } 8.366.3] \\
 &= 1 - \log 2 \quad (5.216)
 \end{aligned}$$

führt das zu

$$(1) = \pi - 2\pi \log 2. \quad (5.217)$$

Eine numerische Auswertung des Ausdrucks  $Q$  liefert

$$Q = -6.53276(1). \quad (5.218)$$

Das Doppelintegral zur Bestimmung von  $Q$  lässt sich am einfachsten mit dem Programm Mathematica bestimmen. Insgesamt gilt also für IB2aab:

$$\begin{aligned} \text{IB2aab} &= \frac{3}{64\pi^3} g_0 m_0 L^2 \left[ \pi - 2\pi \log 2 + Q \right] \\ &= \frac{3}{64\pi^2} g_0 m_0 L^2 \left[ 1 - 2 \log 2 + \frac{1}{\pi} Q \right]. \end{aligned} \quad (5.219)$$

Nun zum Term IB2aac:

$$\begin{aligned} \text{IB2aac} &= \frac{3}{128\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty dv \frac{e^{i(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)v}}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1)} (2v^2-1)^2 \Big\} \\ &= \frac{3}{128\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty dv \frac{(2v^2-1)^2}{(1+v^2)(4v^4+5v^2+1)} \cos[(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)v] \Big\}. \end{aligned} \quad (5.220)$$

Ganz analog zum Term IB2aab rechnet man zuerst das  $v$ -Integral aus, das ergibt

$$\begin{aligned} \text{IB2aac} &= \frac{3}{128\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ &\quad \times \left[ -\frac{3}{2}\pi e^{-|\hat{x}_0 - \hat{y}_0|} - \frac{3}{2}\pi e^{-|\hat{x}_0 - \hat{y}_0|} |\hat{x}_0 - \hat{y}_0| + 2\pi e^{-\frac{1}{2}|\hat{x}_0 - \hat{y}_0|} \right] \Big\} \\ &= -\frac{9}{256\pi^2} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \underbrace{\left\{ \left[ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) - 1 \right] \left[ \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) - 1 \right] \right.}_{=: M} \\ &\quad \times \left[ e^{-|\hat{x}_0 - \hat{y}_0|} + |\hat{x}_0 - \hat{y}_0| e^{-|\hat{x}_0 - \hat{y}_0|} - \frac{4}{3} e^{-\frac{1}{2}|\hat{x}_0 - \hat{y}_0|} \right] \Big\} \\ &= -\frac{9}{256\pi^2} g_0 m_0 L^2 M. \end{aligned} \quad (5.221)$$

$M$  wertet man numerisch mit dem Programm Mathematica aus:

$$M = -0.250966(1). \quad (5.222)$$

Schließlich erkennt man für den Term IB2aaa durch Vergleich mit dem Ausdruck für den Graphen (5.52) aus Gl. (5.52)

$$\begin{aligned} \text{IB2aaa} &= \frac{1}{8} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 - \frac{3}{128\pi^2} g_0 m_0 L^2 \\ &\quad + O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.223)$$

Alles zusammengefaßt ergibt sich damit zunächst für den Term IB2a (vgl. Gln. (5.182), (5.205), (5.223), (5.219), (5.221), (5.201))

$$\begin{aligned}
 \text{IB2a} &= \text{IB2aaa} + \text{IB2aab} + \text{IB2aac} + \text{IB2ab} + O\left(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{1}{8} \left( \text{---} \right) - \frac{3}{128 \pi^2} g_0 m_0 L^2 \\
 &\quad + \frac{3}{64 \pi^2} g_0 m_0 L^2 \left[ 1 - 2 \log 2 + \frac{1}{\pi} Q \right] - \frac{9}{256 \pi^2} g_0 m_0 L^2 M \\
 &\quad + \frac{3}{128 \pi^2} g_0 m_0 L^2 \left[ 6(\log 2)^2 + 2 \log 2 + \pi^2 \log 2 - 2 \pi^2 \right] \\
 &\quad + O\left(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{1}{8} \left( \text{---} \right) + \frac{3}{64 \pi^2} g_0 m_0 L^2 \left[ \frac{1}{2} - \log 2 - \frac{3}{4} M + \frac{1}{\pi} Q \right. \\
 &\quad \left. + 3(\log 2)^2 + \frac{\pi^2}{2} \log 2 - \pi^2 \right] \\
 &\quad + O\left(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon),
 \end{aligned} \tag{5.224}$$

und dann für den Term IB2 (vgl. Gln. (5.158), (5.224), (5.180), (5.171))

$$\begin{aligned}
 \text{IB2} &= \text{IB2a} + \text{IB2b} + \text{IB2c} + O\left(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{1}{8} \left( \text{---} \right) + \frac{3}{64 \pi^2} g_0 m_0 L^2 \left[ \frac{1}{2} - \log 2 - \frac{3}{4} M + \frac{1}{\pi} Q \right. \\
 &\quad \left. + 3(\log 2)^2 + \frac{\pi^2}{2} \log 2 - \pi^2 \right] \\
 &\quad - \frac{3}{16} g_0 m_0 L^2 \left[ J_1 \mathcal{A}_2(m_0 L) + J_2 \mathcal{A}_1(m_0 L) + J_3 \right] \\
 &\quad + \frac{3\pi}{16} g_0 m_0 L^2 \left[ I_1 \mathcal{A}_2^2(m_0 L) + I_2 \mathcal{A}_1^2(m_0 L) \right. \\
 &\quad \left. + I_3 \mathcal{A}_1(m_0 L) \mathcal{A}_2(m_0 L) \right. \\
 &\quad \left. + I_4 \mathcal{A}_1(m_0 L) + I_5 \mathcal{A}_2(m_0 L) + I_6 \right] \\
 &\quad + O\left(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{5.225}$$

### Ergebnis für den Graphen IB

Für den Graphen IB gilt zunächst nach Gl. (5.135)

$$\frac{1}{8} \left[ \text{---} - \left( \text{---} \right) \right] = \text{IB1} + \text{IB2} - \frac{1}{8} \left( \text{---} \right). \tag{5.226}$$

Mit den Resultaten für IB1 aus Gl. (5.143) und IB2 aus Gl. (5.225) findet man letztlich:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} \left[ \text{Diagramm 1} - \text{Diagramm 2} \right] &= \frac{3}{128} g_0 m_0 L^2 \left[ 1 - 2\pi \left[ \frac{1}{2} \mathcal{A}_1(m_0 L) + \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\pi^2}{4} \mathcal{A}_1^2(m_0 L) + \pi^2 \mathcal{A}_1(m_0 L) \mathcal{A}_2(m_0 L) \right. \\
 &\quad \left. + \pi^2 \mathcal{A}_2^2(m_0 L) \right] \\
 &+ \frac{3}{64\pi^2} g_0 m_0 L^2 \left[ \frac{1}{2} - \log 2 - \frac{3}{4} M + \frac{1}{\pi} Q \right. \\
 &\quad \left. + 3(\log 2)^2 + \frac{\pi^2}{2} \log 2 - \pi^2 \right] \\
 &- \frac{3}{16} g_0 m_0 L^2 \left[ J_1 \mathcal{A}_2(m_0 L) + J_2 \mathcal{A}_1(m_0 L) + J_3 \right] \\
 &+ \frac{3\pi}{16} g_0 m_0 L^2 \left[ I_1 \mathcal{A}_2^2(m_0 L) + I_2 \mathcal{A}_1^2(m_0 L) \right. \\
 &\quad \left. + I_3 \mathcal{A}_1(m_0 L) \mathcal{A}_2(m_0 L) + I_4 \mathcal{A}_1(m_0 L) \right. \\
 &\quad \left. + I_5 \mathcal{A}_2(m_0 L) + I_6 \right] \\
 &+ O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{3}{512} g_0 m_0 L^2 \left\{ \mathcal{A}_2^2(m_0 L) [4\pi^2 + 32\pi I_1] \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{A}_1^2(m_0 L) [\pi^2 + 32\pi I_2] \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{A}_1(m_0 L) \mathcal{A}_2(m_0 L) [4\pi^2 + 32\pi I_3] \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{A}_1(m_0 L) [-4\pi - 32J_2 + 32\pi I_4] \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{A}_2(m_0 L) [-8\pi - 32J_1 + 32\pi I_5] \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \frac{4}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^2} \log 2 - \frac{6}{\pi^2} M + \frac{8}{\pi^3} Q \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{24}{\pi^2} (\log 2)^2 + 4 \log 2 - 4 - 32J_3 + 32\pi I_6 \right] \right\} \\
 &+ O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \tag{5.227}
 \end{aligned}$$

Setzt man die Ergebnisse für  $\mathcal{A}_1(m_0 L)$  und  $\mathcal{A}_2(m_0 L)$  aus den Anhängen C.5 und C.6 ein, so lässt sich dies wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{8} \left[ \text{Diagramm 1} - \text{Diagramm 2} \right] &= g_0 m_0 L^2 \left[ \log(m_0 L) \right]^2 K_{IB,2} \\
 &+ g_0 m_0 L^2 \log(m_0 L) K_{IB,1} \\
 &+ g_0 m_0 L^2 K_{IB,0} \\
 &+ O(m_0^3 L^3 e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon), \tag{5.228}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 K_{IB,2} &= \frac{3^3}{2^{17}\pi^2} [\pi^2 + 32\pi I_2] \\
 &= 0.271396028(2) \cdot 10^{-3}, \tag{5.229}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{IB,1} &= \frac{3^2}{2^{12}\pi} [\pi^2 + 32\pi I_2] O_c + \frac{3^2}{2^{13}\pi} [4\pi^2 + 32\pi I_3] \mathcal{A}_{2,c} \\
 &\quad + \frac{3^2}{2^{13}\pi} [-4\pi - 32J_2 + 32\pi I_4] \\
 &= -0.31170872(1) \cdot 10^{-2} \tag{5.230}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{und } K_{IB,0} &= \frac{3}{512} \left\{ \left[ 4\pi^2 + 32\pi I_1 \right] A_{2,c}^2 + \left[ \pi^2 + 32\pi I_2 \right] O_c^2 \right. \\
&\quad + \left[ 4\pi^2 + 32\pi I_3 \right] O_c A_{2,c} + \left[ -4\pi - 32J_2 + 32\pi I_4 \right] O_c \\
&\quad + \left[ -8\pi^2 - 32J_1 + 32\pi I_5 \right] A_{2,c} + \frac{4}{\pi^2} - \frac{8}{\pi^2} \log 2 - \frac{6}{\pi^2} M \\
&\quad \left. + \frac{8}{\pi^3} Q + \frac{24}{\pi^2} (\log 2)^2 + 4 \log 2 - 4 - 32J_3 + 32\pi I_6 \right\} \\
&= -0.67018(2) \cdot 10^{-2}. \tag{5.231}
\end{aligned}$$

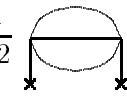
Als nächstes ist im folgenden Abschnitt der Graph IC zu berechnen.

### 5.3.3 Berechnung des Graphen IC =

Mit Hilfe der Feynman-Regeln erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12} \text{  } &= \frac{3 m_0^2 g_0 \mu_0^\varepsilon}{12} \int d^D x \int d^D y \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \left[ G(x_0, y_0) \right]^3 \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \\
&= \frac{1}{4} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon \int d^D x \int d^D y \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\
&\quad \times \left[ \int_0^\infty dt \left\{ \frac{1}{L^{D-1}} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{L^{D-1}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{L^{D-1}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\
&\quad \left. \left. \times \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \right]^3 \left. \right\}. \tag{5.232}
\end{aligned}$$

Ganz analog zur Rechnung beim Graphen  (vgl. Gl. (5.56)) kann man nun die Raum-integrale durch ein  $(D-1)$ -dimensionales Integral über die dimensionslose Größe  $\phi$  ersetzen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12} \text{  } &= \frac{1}{4} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon \left( L^{D-1} \right)^2 \\
&\quad \times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1} \phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^\infty dx_0 \int_{-\infty}^\infty dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\
&\quad \times \left[ \int_0^\infty dt \left\{ \frac{1}{L^{D-1}} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \vec{n} \cdot \vec{\phi}} \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle \right. \right. \\
&\quad + \frac{1}{L^{D-1}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \vec{n} \cdot \vec{\phi}} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{L^{D-1}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i \vec{n} \cdot \vec{\phi}} \\
&\quad \left. \left. \times \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2)t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \right]^3 \left. \right\}. \tag{5.233}
\end{aligned}$$

Ich substituiere  $u = \frac{t}{L^2}$  und (teilweise)  $D = 3 - \varepsilon$ . Das liefert

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} \text{Diagramm} = \frac{1}{4} g_0 m_0^2 \mu_0^\varepsilon L^{4-2\varepsilon} \\
& \quad \times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\
& \quad \times \left[ L^\varepsilon \int_0^{\infty} du \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle \right. \right. \\
& \quad + \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle \\
& \quad + \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \\
& \quad \left. \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2}) m_0^2 L^2 u} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \right]^3 \Big\} \\
& = \frac{1}{4} g_0 m_0^2 L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \\
& \quad \times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\
& \quad \times \left[ \int_0^{\infty} du \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle \right. \right. \\
& \quad + \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle \\
& \quad + \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \\
& \quad \left. \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2}) m_0^2 L^2 u} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \right]^3 \Big\}. \quad (5.234)
\end{aligned}$$

Im zweiten Summanden der eckigen Klammer rechnet man nun

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\infty} du e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} = \int_0^{\infty} du \left\{ e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \right. \\
& \quad \times \left. \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{(\vec{\phi} - 2\pi\vec{n})^2}{16\pi^2 u}} \right\} \\
& \quad (\text{Poissonsche Summenformel, vgl. auch Gl. (3.65)}) \\
& = \int_0^{\infty} du e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} e^{-\frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2 u}} + T_R,
\end{aligned} \quad (5.235)$$

mit

$$T_R := \int_0^{\infty} du e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{(\vec{\phi} - 2\pi\vec{n})^2}{16\pi^2 u}}. \quad (5.236)$$

Für  $T_R$  gilt jetzt

$$\begin{aligned} T_R &= \int_0^\infty du e^{-\frac{3}{4}m_0^2L^2u} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{(\vec{\phi}-2\pi\vec{n})^2}{16\pi^2u}} \\ &= \int_0^\infty du \left\{ e^{-\frac{3}{4}m_0^2L^2u} (4\pi u)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{c_0^2}{4u}} \right. \\ &\quad \times \left. \underbrace{\frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D}{2}}} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}-\vec{n})^2-c_0^2}{4u}}}_{\text{beschränkt für } u \in [0, \infty[} \right\}, \quad c_0 > 0. \end{aligned} \quad (5.237)$$

Zum letzten Schritt vergleiche man Gl. (C.3) und die anschließende Bemerkung aus Anhang C.1. Damit folgt

$$\begin{aligned} |T_R| &\leq \text{const.} \int_0^\infty du e^{-\frac{3}{4}m_0^2L^2u} u^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{c_0^2}{4u}} \\ &= \text{const.} \left( \frac{c_0^2}{3m_0^2L^2} \right)^{\frac{3}{4}} K_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_0m_0L\right) \quad [47, 3.471.9] \\ &= O\left(\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}c_0m_0L}}{m_0^2L^2}\right) \quad [47, 8.451.6]. \end{aligned} \quad (5.238)$$

Insgesamt gilt also

$$\int_0^\infty du e^{-\frac{3}{4}m_0^2L^2u} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2\vec{n}^2u} e^{i\vec{n}\cdot\vec{\phi}} = D(\vec{\phi}, m_0L) + O\left(\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}c_0m_0L}}{m_0^2L^2}\right), \quad (5.239)$$

wobei

$$D(\vec{\phi}, m_0L) := \int_0^\infty du e^{-\frac{3}{4}m_0^2L^2u} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} e^{-\frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2u}} \quad (5.240)$$

definiert wurde, und für diese Größe berechnet man

$$\begin{aligned} D(\vec{\phi}, m_0L) &= \int_0^\infty du e^{-\frac{3}{4}m_0^2L^2u} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} e^{-\frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2u}} \\ &= \frac{2}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left( \frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2 \frac{3}{4}m_0^2L^2} \right)^{\frac{3-D}{4}} K_{\frac{3-D}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}m_0L|\vec{\phi}|\right) \quad [47, 3.471.9] \\ &= \frac{2}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left( \frac{\vec{\phi}^2}{12\pi^2 m_0^2 L^2} \right)^{\frac{3-D}{4}} K_{\frac{3-D}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}m_0L|\vec{\phi}|\right). \end{aligned} \quad (5.241)$$

Ich definiere jetzt die folgenden zwei Größen:

$$Z(\vec{\phi}) := \int_0^\infty du \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2\vec{n}^2u} e^{i\vec{n}\cdot\vec{\phi}}, \quad (5.242)$$

$$\begin{aligned} D_{kont}(\vec{\phi}, m_0L, x_0, y_0) &:= \int_0^\infty du \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2\vec{n}^2u} e^{i\vec{n}\cdot\vec{\phi}} \right. \\ &\quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2})m_0^2L^2u} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (5.243)$$

Damit lässt sich der Graph IC folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{12} \text{  } &= \frac{1}{4} g_0 m_0^2 L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \\
 &\times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\
 &\quad \times \left[ Z(\vec{\phi}) \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle + D(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle \right. \\
 &\quad \left. \left. + D_{kont}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \right]^3 \right\} \\
 &+ O\left(m_0^2 L^2 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} c_0 m_0 L}\right) \\
 &= \frac{1}{4} g_0 m_0^2 L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \\
 &\times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\
 &\quad \times \underbrace{\left[ Z^3(\vec{\phi}) \langle x_0 | 0 \rangle^3 \langle 0 | y_0 \rangle^3 \right]}_{=: \text{IntIC0}} \\
 &\quad + 3 Z^2(\vec{\phi}) D(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 0 \rangle^2 \langle x_0 | 1 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle^2 \langle 1 | y_0 \rangle \\
 &\quad + 3 Z^2(\vec{\phi}) \langle x_0 | 0 \rangle^2 \langle 0 | y_0 \rangle^2 D_{kont}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \\
 &\quad + \underbrace{3 Z(\vec{\phi}) D^2(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 0 \rangle \langle x_0 | 1 \rangle^2 \langle 0 | y_0 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle^2}_{=: \text{IntIC9}} \\
 &\quad + 3 Z(\vec{\phi}) \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle D_{kont}^2(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \\
 &\quad + 6 Z(\vec{\phi}) D(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 0 \rangle \langle x_0 | 1 \rangle \\
 &\quad \times \langle 0 | y_0 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle D_{kont}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \\
 &\quad + 3 D^2(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 1 \rangle^2 \langle 1 | y_0 \rangle^2 D_{kont}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \\
 &\quad + D^3(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 1 \rangle^3 \langle 1 | y_0 \rangle^3 \\
 &\quad + 3 D(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle D_{kont}^2(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \\
 &\quad \left. + D_{kont}^3(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \right] \Big\} \\
 &+ O\left(m_0^2 L^2 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} c_0 m_0 L}\right). \tag{5.244}
 \end{aligned}$$

Die Beiträge von IntIC0 und IntIC9 verschwinden aus Symmetriegründen. Das folgt, da (vgl. Gln. (3.26), (3.27))

$$\langle x_0 | 0 \rangle^3 = \text{const.} \frac{1}{\cosh^6\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \tag{5.245}$$

und

$$\langle x_0 | 1 \rangle^2 = \text{const.} \frac{\tanh^2(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0)} \quad (5.246)$$

symmetrisch in  $x_0$  sind und  $\tanh(\frac{m_0}{2} x_0)$  antisymmetrisch in  $x_0$  ist. Damit bleiben acht Beiträge für den Graphen IC:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \text{Diagramm} &= \frac{1}{4} g_0 m_0^2 L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \\ &\times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) \right. \\ &\times \underbrace{\left[ 3 Z^2(\vec{\phi}) D(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 0 \rangle^2 \langle x_0 | 1 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle^2 \langle 1 | y_0 \rangle \right]}_{=: \text{IntIC1}} \\ &+ \underbrace{D^3(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 1 \rangle^3 \langle 1 | y_0 \rangle^3}_{=: \text{IntIC2}} \\ &+ \underbrace{3 Z^2(\vec{\phi}) \langle x_0 | 0 \rangle^2 \langle 0 | y_0 \rangle^2 D_{kont}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0)}_{=: \text{IntIC3}} \\ &+ \underbrace{3 Z(\vec{\phi}) \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle D_{kont}^2(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0)}_{=: \text{IntIC4}} \\ &+ 6 Z(\vec{\phi}) D(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 0 \rangle \langle x_0 | 1 \rangle \\ &\quad \times \underbrace{\langle 0 | y_0 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle D_{kont}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0)}_{=: \text{IntIC5}} \\ &+ \underbrace{3 D^2(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 1 \rangle^2 \langle 1 | y_0 \rangle^2 D_{kont}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0)}_{=: \text{IntIC6}} \\ &+ \underbrace{3 D(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle D_{kont}^2(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0)}_{=: \text{IntIC7}} \\ &+ \left. \underbrace{D_{kont}^3(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0)}_{=: \text{IntIC8}} \right\} \\ &+ O(m_0^2 L^2 e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} c_0 m_0 L}). \end{aligned} \quad (5.247)$$

Mit IC1, ..., IC8 werden im folgenden die Ausdrücke ( $j \in \{1, \dots, 8\}$ )

$$\begin{aligned} \text{IC}j &= \frac{1}{4} g_0 m_0^2 L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon \\ &\times \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) \text{IntIC}j \end{aligned} \quad (5.248)$$

bezeichnet. Es zeigt sich, daß die Terme IC1 bis IC7 für  $D = 3$  keine Divergenzen enthalten. Für die Terme IC1, IC2, IC3, IC5 und IC6 sieht man das am leichtesten dadurch, daß die Rechnung in drei Dimensionen auf offensichtlich konvergente Integrale führt (vgl. die folgende Rechnung). Auch bei IC4 und IC7 entstehen konvergente Integrale. Deren Konvergenz ist aber nicht ganz so offensichtlich, so daß im Anhang E skizziert ist, wie man sich die Endlichkeit der Beiträge IC4 und IC7 vorab durch geeignete Abschätzungen überlegen kann.

Für  $D = 3$  gilt nun außerdem

$$\begin{aligned} D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L) &:= D(\vec{\phi}, m_0 L, D = 3) \\ &= \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \quad (\text{vgl. Gl. (5.241)}), \end{aligned} \quad (5.249)$$

$$\begin{aligned} Z_{(3)}(\vec{\phi}) &:= Z(\vec{\phi}, D = 3) \\ &= \int_0^\infty du \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}}, \end{aligned} \quad (5.250)$$

$$\begin{aligned} D_{kont,(3)}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) &:= D_{kont}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0, D = 3) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{k^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \\ &\quad + O\left(\frac{e^{-c_0 m_0 L}}{m_0^2 L^2}\right). \end{aligned} \quad (5.251)$$

Zum letzten Schritt vergleiche man Gl. (5.243) und Gln. (5.239), (5.241). Die Beiträge der Terme IC1 bis IC8 werden nun einzeln berechnet.

### Berechnung des Beitrages von IC1

Wie erwähnt, ist der Beitrag des Termes IC1 für  $D = 3$  endlich, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \text{IC1} &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2 \phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dx_0 \int_{-\infty}^\infty dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\ &\quad \times Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 0 \rangle^2 \langle x_0 | 1 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle^2 \langle 1 | y_0 \rangle \Big\} \\ &\quad + O(\varepsilon) \\ &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \left| \int_{-\infty}^\infty dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 0 \rangle^2 \langle x_0 | 1 \rangle \right|^2 \\ &\quad \times \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2 \phi}{(2\pi)^2} Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.252)$$

Mit den konkreten Eigenfunktionen (vgl. Gln. (3.26), (3.27)) wird das zu

$$\begin{aligned} \text{IC1} &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \left| \int_{-\infty}^\infty dx_0 \frac{3m_0}{8} \sqrt{\frac{3m_0}{4}} \frac{\tanh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)}{\cosh^5\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \right|^2 \\ &\quad \times \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2 \phi}{(2\pi)^2} Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{81}{2^{10}} g_0 m_0^5 L^4 \left(\frac{2}{m_0}\right)^2 \left| \int dx \frac{\tanh^2 x}{\cosh^5 x} \right|^2 \\ &\quad \times \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2 \phi}{(2\pi)^2} Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.253)$$

Das Integral über  $x$  läßt sich durch die Beta-Funktion ausdrücken [47, 3.512.2]. Außerdem setzt man das Resultat (5.249) für  $D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L)$  ein.

Man bekommt

$$\begin{aligned}
 \text{IC1} &= \frac{81}{2^8} g_0 m_0^3 L^4 \left[ \underbrace{B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)}_{=\frac{\pi}{16}} \right]^2 \\
 &\quad \times \int_{[-\pi, \pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{81\pi^2}{2^{16}} g_0 m_0^3 L^4 \int_{[-\pi, \pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) \frac{1}{2\pi} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{81}{2^{19}\pi} g_0 m_0^3 L^4 \int_{[-\pi, \pi]^2} d^2\phi Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) + O(\varepsilon). \tag{5.254}
 \end{aligned}$$

Das Ziel ist es jetzt, die  $m_0 L$ -Abhängigkeit des letzten Integrals zu bestimmen; im wesentlichen heißt das,  $m_0 L$  aus dem Integral zu entfernen. Dazu gehe ich nun weiter wie folgt vor.  $Z_{(3)}(\vec{\phi})$ , und damit mittelbar auch  $Z_{(3)}^2(\vec{\phi})$ , wird nach Potenzen von  $\vec{\phi}$  entwickelt. Dann zeigt man, daß die Ordnungen  $|\vec{\phi}|^4$  und höher für  $L \rightarrow \infty$  verschwinden. Die Terme bis einschließlich  $O(\vec{\phi}^2)$  werden danach mittels der Substitution  $\tilde{\phi} = m_0 L \vec{\phi}$  ausgewertet. Zunächst also zur Entwicklung von  $Z_{(3)}(\vec{\phi})$ :

$$\begin{aligned}
 Z_{(3)}(\vec{\phi}) &= \int_0^\infty du \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \\
 &= \int_0^1 du \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} + \int_1^\infty du \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \\
 &= \int_0^1 du \left\{ \frac{1}{4\pi u} \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} e^{-\frac{(\tilde{\phi}-2\pi\vec{n})^2}{16\pi^2 u}} - 1 \right\} + \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{4\pi^2 \vec{n}^2} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \\
 &\quad (\text{Poissonsche Summenformel}). \tag{5.255}
 \end{aligned}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 du \frac{1}{4\pi u} e^{-\frac{(\tilde{\phi}-2\pi\vec{n})^2}{16\pi^2 u}} &= \int_0^1 du \frac{1}{4\pi u} e^{-\frac{(\frac{\tilde{\phi}}{2\pi}-\vec{n})^2}{4u}} \\
 &= \int_{\frac{1}{4}}^\infty dx \frac{1}{4x^2} \frac{x}{\pi} e^{-\left(\frac{\tilde{\phi}}{2\pi}-\vec{n}\right)^2 x}, \quad x = \frac{1}{4u} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{\frac{1}{4}}^\infty dx \frac{e^{-\left(\frac{\tilde{\phi}}{2\pi}-\vec{n}\right)^2 x}}{x} \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{-\frac{1}{4}} \frac{\left(\frac{\tilde{\phi}}{2\pi}-\vec{n}\right)^2}{t} dt \frac{e^t}{t}, \quad t = -\left(\frac{\tilde{\phi}}{2\pi}-\vec{n}\right)^2 x. \tag{5.256}
 \end{aligned}$$

Das verbleibende  $t$ -Integral läßt sich durch das Exponentialintegral  $Ei(x)$  ausdrücken [61, 3.1.1]:

$$\int_0^1 du \frac{1}{4\pi u} e^{-\frac{(\tilde{\phi}-2\pi\vec{n})^2}{16\pi^2 u}} = -\frac{1}{4\pi} Ei\left[-\left(\frac{\tilde{\phi}}{4\pi}-\frac{\vec{n}}{2}\right)^2\right]. \tag{5.257}$$

Damit erhält man also

$$Z_{(3)}(\vec{\phi}) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} Ei\left[-\left(\frac{\tilde{\phi}}{4\pi}-\frac{\vec{n}}{2}\right)^2\right] + \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{4\pi^2 \vec{n}^2} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} - 1. \tag{5.258}$$

Die erste Doppelreihe spaltet man hier nun auf:

$$\begin{aligned} Z_{(3)}(\vec{\phi}) &= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Ei}\left[-\frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2}\right] - \frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \operatorname{Ei}\left[-\left(\frac{\vec{\phi}}{4\pi} - \frac{\vec{n}}{2}\right)^2\right] \\ &\quad + \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{4\pi^2 \vec{n}^2} e^{i \vec{n} \cdot \vec{\phi}} - 1. \end{aligned} \quad (5.259)$$

Dies ist deshalb sinnvoll, da wegen  $\vec{\phi} \in [-\pi, \pi]^2$  stets gilt:

$$\frac{\vec{\phi}}{4\pi} - \frac{\vec{n}}{2} \neq 0, \quad \text{für } \vec{n} \neq 0. \quad (5.260)$$

Damit ist

$$H(\vec{\phi}) := -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \operatorname{Ei}\left[-\left(\frac{\vec{\phi}}{4\pi} - \frac{\vec{n}}{2}\right)^2\right] \quad (5.261)$$

eine analytische Funktion von  $\vec{\phi}$ , da das Exponentialintegral für negative Argumente analytisch ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} H(-\vec{\phi}) &= -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \operatorname{Ei}\left[-\left(\frac{-\vec{\phi}}{4\pi} - \frac{\vec{n}}{2}\right)^2\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \operatorname{Ei}\left[-\left(\frac{-\vec{\phi}}{4\pi} - \frac{-\vec{n}}{2}\right)^2\right], \quad (\text{wg. Summation über } \mathbf{Z}^2) \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \operatorname{Ei}\left[-\left(\frac{\vec{\phi}}{4\pi} - \frac{\vec{n}}{2}\right)^2\right] \\ &= H(\vec{\phi}). \end{aligned} \quad (5.262)$$

Daher verschwinden bei der Entwicklung von  $H(\vec{\phi})$  nach Potenzen von  $\vec{\phi}$  alle ungeraden Ordnungen. Eine längere Rechnung zeigt letztlich:

$$H(\vec{\phi}) = -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \operatorname{Ei}\left[-\frac{\vec{n}^2}{4}\right] + \tilde{C}_2(\vec{\phi}) + O(|\vec{\phi}|^4), \quad (5.263)$$

$$\tilde{C}_2(\vec{\phi}) := -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} \frac{e^{-\frac{\vec{n}^2}{4}}}{8\pi^2 \vec{n}^2} \left[ -\frac{\vec{n}^2 + 4}{\vec{n}^2} (\vec{\phi} \cdot \vec{n})^2 + 2 \vec{\phi}^2 \right]. \quad (5.264)$$

Die Rechnung wird etwas leichter, wenn man  $H(x\vec{\phi})$  nach Potenzen von  $x$  bis einschließlich  $x^2$  entwickelt und dann  $x = 1$  setzt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \operatorname{Ei}\left[-\frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2}\right] &= -\frac{\gamma}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2}\right) + \frac{\vec{\phi}^2}{64\pi^3} + O(|\vec{\phi}|^4) \quad [61, 3.1.5] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log|\vec{\phi}| - \frac{\gamma}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \log(4\pi) \\ &\quad + \frac{\vec{\phi}^2}{64\pi^3} + O(|\vec{\phi}|^4) \end{aligned} \quad (5.265)$$

und

$$\sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{4\pi^2 \vec{n}^2} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} = \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{4\pi^2 \vec{n}^2} - \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{8\pi^2 \vec{n}^2} (\vec{n} \cdot \vec{\phi})^2 + O(|\vec{\phi}|^4). \quad (5.266)$$

Alles zusammengefaßt ergibt das

$$\begin{aligned} Z_{(3)}(\vec{\phi}) &= -\frac{1}{2\pi} \log |\vec{\phi}| - \frac{\gamma}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \log (4\pi) + \frac{\vec{\phi}^2}{64\pi^3} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \text{Ei}\left[-\frac{\vec{n}^2}{4}\right] + \tilde{C}_2(\vec{\phi}) \\ &\quad + \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{4\pi^2 \vec{n}^2} - \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{8\pi^2 \vec{n}^2} (\vec{n} \cdot \vec{\phi})^2 - 1 \\ &\quad + O(|\vec{\phi}|^4) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \log |\vec{\phi}| + C_{\text{KL}} + C_2(\vec{\phi}) + O(|\vec{\phi}|^4), \end{aligned} \quad (5.267)$$

mit

$$C_2(\vec{\phi}) := \frac{\vec{\phi}^2}{64\pi^3} + \tilde{C}_2(\vec{\phi}) - \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{8\pi^2 \vec{n}^2} (\vec{n} \cdot \vec{\phi})^2, \quad (5.268)$$

$$\begin{aligned} C_{\text{KL}} &:= -\frac{\gamma}{4\pi} + \frac{1}{2\pi} \log (4\pi) - \frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \text{Ei}\left[-\frac{\vec{n}^2}{4}\right] \\ &\quad + \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{4\pi^2 \vec{n}^2} - 1. \end{aligned} \quad (5.269)$$

Eine numerische Auswertung liefert

$$C_{\text{KL}} = 0.0839294266(1). \quad (5.270)$$

Für  $Z_{(3)}^2(\vec{\phi})$  erhält man somit

$$\begin{aligned} Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) &= \frac{1}{4\pi^2} \left[ \log |\vec{\phi}| \right]^2 - \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \log |\vec{\phi}| + C_{\text{KL}}^2 \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \log |\vec{\phi}| C_2(\vec{\phi}) + 2C_{\text{KL}} C_2(\vec{\phi}) + O(|\vec{\phi}|^4). \end{aligned} \quad (5.271)$$

Es sei noch erwähnt, daß es eine alternative Darstellung für  $Z_{(3)}(\vec{\phi})$  gibt, indem man nämlich wie folgt vorgeht:

$$\begin{aligned} Z_{(3)}(\vec{\phi}) &= \int_0^\infty du \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \\ &= \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}}}{4\pi^2 \vec{n}^2}, \end{aligned} \quad (5.272)$$

und aus Symmetriegründen gilt dann weiter

$$\begin{aligned}
 Z_{(3)}(\vec{\phi}) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{\cos(\vec{n} \cdot \vec{\phi})}{\vec{n}^2} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{\cos(n_1\phi_1)\cos(n_2\phi_2) - \sin(n_1\phi_1)\sin(n_2\phi_2)}{n_1^2 + n_2^2} \quad (\vec{n} = (n_1, n_2)) \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{\cos(n_1\phi_1)\cos(n_2\phi_2)}{n_1^2 + n_2^2}.
 \end{aligned} \tag{5.273}$$

Die letzte Gleichung folgt aufgrund der Antisymmetrie des Sinus. Diese letzte Doppelreihe ist von einem Typ, wie er in der Festkörperphysik bei diversen Problemen (Bose-Einstein-Kondensation in endlichen Systemen, Elektronenkonfiguration von Kristallen etc.) als Summation über das ganze Gitter des Kristalls auftritt. Solche Gittersummen sind in einer Reihe von Arbeiten von Chaba und Pathria mit Hilfe der Poissonschen Summenformel untersucht worden [67, 68, 69]. Auch die Doppelreihe in Gl. (5.273) wird in diesen Arbeiten behandelt [69, Formel (3) ff.] und auf eine einfache Reihe zurückgeführt. Das Ergebnis lautet

$$\sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{\cos(n_1\phi_1)\cos(n_2\phi_2)}{n_1^2 + n_2^2} = \left( \frac{\pi^2}{3} - \pi\phi_1 + \frac{1}{2}\phi_1^2 \right) + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\phi_2)\cosh[(\pi - \phi_1)n]}{n \sinh(\pi n)}, \quad \text{für } \phi_1, \phi_2 \in [0, \pi], \tag{5.274}$$

mit folgendem Verhalten für  $\phi_1, \phi_2 \rightarrow 0$

$$\sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{\cos(n_1\phi_1)\cos(n_2\phi_2)}{n_1^2 + n_2^2} \sim -2\pi \log\left(\frac{|\vec{\phi}|}{2}\right) - \pi\eta, \tag{5.275}$$

mit

$$|\vec{\phi}| = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2}, \tag{5.276}$$

$$\begin{aligned}
 \eta &= \log\left\{\frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^4}{4\pi^3}\right\} \\
 &= 0.33160608\dots
 \end{aligned} \tag{5.277}$$

Man überzeugt sich, daß dies mit dem vorigen Ergebnis (Gl. (5.267)) übereinstimmt. Aus Gl. (5.273) und Gl. (5.275) folgt nämlich für  $\vec{\phi} \rightarrow 0$ :

$$Z_{(3)}(\vec{\phi}) \sim -\frac{1}{2\pi} \log|\vec{\phi}| + \frac{1}{2\pi} \log 2 - \frac{1}{4\pi} \eta. \tag{5.278}$$

Das ist dasselbe Verhalten wie in Gl. (5.267), denn ein numerischer Vergleich zeigt auch

$$\begin{aligned}
 C_{\text{KL}} &= \frac{1}{2\pi} \log 2 - \frac{1}{4\pi} \eta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \log 2 - \frac{1}{4\pi} \log\left\{\frac{[\Gamma(\frac{1}{4})]^4}{4\pi^3}\right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \log\left\{\frac{4\pi^{\frac{3}{2}}}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2}\right\}.
 \end{aligned} \tag{5.279}$$

Damit ist auch ein geschlossener Ausdruck für  $C_{\text{KL}}$  gewonnen. Für die weitere Rechnung erweist sich wegen der symmetrischen Behandlung der Komponenten  $\phi_1$  und  $\phi_2$  von  $\vec{\phi}$  nun aber  $Z_{(3)}(\vec{\phi})$  in der Form der Gl. (5.267) als günstiger als in der Form von Gl. (5.273) bzw. Gl. (5.274), obwohl eine Doppelreihe statt einer einfachen Reihe auftritt.

Als nächstes untersuche ich jetzt Integrale des folgenden Typs:

$$J_{n_1, n_2} := \int_{[-\pi, \pi]^2} d^2\phi \phi_1^{n_1} \phi_2^{n_2} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}|\right), \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \quad n_1 + n_2 \geq 4. \quad (5.280)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} |J_{n_1, n_2}| &\leq \int d^2\phi |\phi_1|^{n_1} |\phi_2|^{n_2} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}|\right) \\ &\quad (\text{denn } K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}|\right) \geq 0, \text{ vgl. z.B. [47, 8.432.1]}) \\ &= \frac{1}{(m_0 L)^{n_1+n_2+2}} \int d^2\tilde{\phi} |\tilde{\phi}_1|^{n_1} |\tilde{\phi}_2|^{n_2} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}|\right), \quad \tilde{\phi} = m_0 L \phi \\ &= O\left(\frac{1}{(m_0 L)^6}\right). \end{aligned} \quad (5.281)$$

Zurück zum Term IC1. Da vor dem Integral im Term IC1 insgesamt ein Faktor  $L^4$  steht, gilt nun also, indem man die Entwicklung (5.271) einsetzt und für die Terme der Ordnung  $|\vec{\phi}|^4$  und höher die Abschätzung (5.281) verwendet:

$$\begin{aligned} \text{IC1} &= \frac{81}{2^{19} \pi} g_0 m_0^3 L^4 \int_{[-\pi, \pi]^2} d^2\phi \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left[ \log |\vec{\phi}| \right]^2 - \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \log |\vec{\phi}| + C_{\text{KL}}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \log |\vec{\phi}| C_2(\vec{\phi}) + 2 C_{\text{KL}} C_2(\vec{\phi}) \right\} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}|\right) \\ &\quad + O(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{L^2}\right). \end{aligned} \quad (5.282)$$

Wegen

$$K_0(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad [47, 8.451.6] \quad (5.283)$$

kann man das  $\phi$ -Integral bis auf exponentiell mit  $L$  abfallende Terme über ganz  $\mathbb{R}^2$  erstrecken.<sup>2</sup> Mit der Substitution  $\tilde{\phi} = m_0 L \phi$  ergibt das

$$\begin{aligned} \text{IC1} &= \frac{81}{2^{19} \pi} g_0 m_0 L^2 \int d^2\tilde{\phi} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left[ \log \frac{|\tilde{\phi}|}{m_0 L} \right]^2 - \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \log \frac{|\tilde{\phi}|}{m_0 L} + C_{\text{KL}}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \log \frac{|\tilde{\phi}|}{m_0 L} C_2\left(\frac{\tilde{\phi}}{m_0 L}\right) + 2 C_{\text{KL}} C_2\left(\frac{\tilde{\phi}}{m_0 L}\right) \right\} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}|\right) \\ &\quad + O(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{L^2}\right). \end{aligned} \quad (5.284)$$

Aus der Definition (5.268) ersieht man, daß  $C_2(\vec{\phi})$  homogen vom Grad zwei ist.

---

<sup>2</sup>Dies wird auch bei den folgenden Termen IC2 – IC8 des öfteren geschehen, ohne stets ausdrücklich erwähnt zu werden.

Beachtet man dies, so erhält man schließlich nach einigen kurzen Umformungen für den Beitrag IC1:

$$\begin{aligned} \text{IC1} &= \frac{81}{2^{19}\pi} g_0 m_0 L^2 \left\{ R_0 \left[ \log(m_0 L) \right]^2 + R_1 \log(m_0 L) + R_2 \right\} \\ &\quad + \frac{81}{2^{19}\pi} \frac{g_0}{m_0} \left\{ R_3 \log(m_0 L) + R_4 \right\} + O(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{L^2}\right), \end{aligned} \quad (5.285)$$

mit

$$\begin{aligned} R_0 &:= \frac{1}{4\pi^2} \int d^2 \tilde{\phi} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}| \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\phi \phi K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \phi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\right)^2 \underbrace{\int_0^\infty dx x K_0(x)}_{=1} \quad [47, 6.561.16] \\ &= \frac{8\pi}{3}, \end{aligned} \quad (5.286)$$

$$\begin{aligned} R_1 &:= -\frac{1}{2\pi^2} \int d^2 \tilde{\phi} \left\{ \log |\tilde{\phi}| - 2\pi C_{\text{KL}} \right\} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}| \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\phi \phi \left\{ \log \phi - 2\pi C_{\text{KL}} \right\} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \phi \right) \\ &= -26.31072079(1), \end{aligned} \quad (5.287)$$

$$\begin{aligned} R_2 &:= \int d^2 \tilde{\phi} \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left[ \log |\tilde{\phi}| \right]^2 - \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \log |\tilde{\phi}| + C_{\text{KL}}^2 \right\} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}| \right) \\ &= 2\pi \int_0^\infty d\phi \phi \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left[ \log \phi \right]^2 - \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \log \phi + C_{\text{KL}}^2 \right\} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \phi \right) \\ &= 27.548218(2), \end{aligned} \quad (5.288)$$

$$R_3 := \frac{1}{\pi} \int d^2 \tilde{\phi} C_2(\tilde{\phi}) K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}| \right) \quad (5.289)$$

$$= 2092.157690(3) \quad (5.290)$$

und

$$R_4 := \int d^2 \tilde{\phi} C_2(\tilde{\phi}) \left\{ -\frac{1}{\pi} \log |\tilde{\phi}| + 2 C_{\text{KL}} \right\} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}| \right). \quad (5.291)$$

Die numerischen Werte von  $R_1$  und  $R_2$  wurden mit dem Programm Maple berechnet. Die Ausdrücke, die  $R_3$  und  $R_4$  enthalten, sind nicht proportional zu  $L^2$ . Sie tragen daher zur Oberflächenspannung nicht bei (vgl. Gln. (1.32), (2.78)). Die Konstante  $R_3$  ist allerdings, wie sich zeigen wird, für die Frage nach der  $L$ -Abhängigkeit des Vorfaktors  $A$  der Energieaufspaltung in Gl. (1.32) von Bedeutung.  $R_3$  ist daher noch numerisch bestimmt worden (Anhang F.1); auf eine Bestimmung von  $R_4$  wird verzichtet.

### Berechnung des Beitrages von IC2

Nach der Definition von IC2 gilt

$$\begin{aligned}
\text{IC2} &= \frac{1}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2 \phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\
&\quad \times D_{(3)}^3(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 1 \rangle^3 \langle 1 | y_0 \rangle^3 \Big\} + O(\varepsilon) \\
&= \frac{1}{4} g_0 m_0^2 L^4 \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 1 \rangle^3 \right|^2 \\
&\quad \times \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2 \phi}{(2\pi)^2} \frac{1}{(2\pi)^3} K_0^3\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) + O(\varepsilon) \\
&= \frac{1}{4} g_0 m_0^2 L^4 \frac{1}{(2\pi)^5} \left(\frac{3m_0}{4}\right)^3 \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{\tanh^4\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)}{\cosh^3\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \right|^2 \\
&\quad \times \int_{[-\pi,\pi]^2} d^2 \phi K_0^3\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) + O(\varepsilon). \tag{5.292}
\end{aligned}$$

Bis auf exponentielle Korrekturen kann das  $\phi$ -Integral wieder über ganz  $\mathbb{R}^2$  ausgeführt werden. Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\text{IC2} &= \frac{27}{2^{13} \pi^5} g_0 m_0^5 L^4 \left(\frac{2}{m_0}\right)^2 \left| \int dx \frac{\tanh^4(x)}{\cosh^3(x)} \right|^2 \\
&\quad \times \int d^2 \phi K_0^3\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \\
&\quad + O(\varepsilon) + O(e^{-c m_0 L}), \quad c > 0. \\
&= \frac{27}{2^{11} \pi^5} g_0 m_0^3 L^4 \left(B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)^2 2\pi \int_0^{\infty} d\phi \phi K_0^3\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L \phi\right) \\
&\quad + O(\varepsilon) + O(e^{-c m_0 L}), \quad [47, 3.512.2] \\
&= \frac{27}{2^{18} \pi^2} g_0 m_0^3 L^4 \int_0^{\infty} d\phi \phi K_0^3\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L \phi\right) + O(\varepsilon) + O(e^{-c m_0 L}) \\
&= \frac{9}{2^{14}} g_0 m_0 L^2 \int_0^{\infty} dx x K_0^3(x) + O(\varepsilon) + O(e^{-c m_0 L}), \quad x = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L \phi. \tag{5.293}
\end{aligned}$$

Es sei noch bemerkt, daß man Integrale des Typs

$$\int_0^{\infty} dt t K_{\mu}(at) K_{\nu}(bt) K_{\rho}(ct) \tag{5.294}$$

im Prinzip analytisch ausführen kann [70, 71]. Man führt dabei das Integral (5.294) mittels der Beziehungen

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_{\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, \quad \nu \neq 0, \pm 1, \dots \tag{5.295}$$

$$I_{\nu}(z) = e^{-i\nu\frac{\pi}{2}} J_{\nu}(iz), \quad -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2} \tag{5.296}$$

auf den in den erwähnten Arbeiten gezeigten Zusammenhang

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt t^{\lambda-1} J_\mu(at) J_\nu(bt) K_\rho(ct) &= \frac{2^{\lambda-2} a^\mu b^\nu \Gamma[\frac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu-\rho)] \Gamma[\frac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu+\rho)]}{c^{\lambda+\mu+\nu} \Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu+1)} \\ &\quad \times F_4\left[\frac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu-\rho), \frac{1}{2}(\lambda+\mu+\nu+\rho); \right. \\ &\quad \left. \mu+1, \nu+1; -\frac{a^2}{c^2}, -\frac{b^2}{c^2}\right] \\ &\quad (a, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}), \end{aligned} \quad (5.297)$$

mit

$$F_4[\alpha, \beta; \gamma, \delta; x, y] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m (\delta)_n m! n!} x^m y^n, \quad (5.298)$$

$$(z)_m = z(z+1) \cdots (z+m-1) \quad (5.299)$$

zurück. Wegen

$$K_0(z) = \lim_{\nu \rightarrow 0} K_\nu(z) \quad (5.300)$$

wäre im vorliegenden Fall also

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \int_0^\infty dx x K_\nu^2(x) K_0(x) \quad (5.301)$$

auszuführen. Die Limesbildung wird aber sehr kompliziert, so daß es naheliegend ist, gleich eine numerische Berechnung vorzunehmen. Als eindimensionales Integral wurde die folgende Größe  $Z_2$  am einfachsten mit dem Programm Maple bestimmt:

$$\begin{aligned} Z_2 &:= \int_0^\infty dx x K_0^3(x) \\ &= 0.585976809(1). \end{aligned} \quad (5.302)$$

Insgesamt erhält man also:

$$\text{IC2} = \frac{9}{2^{14}} Z_2 g_0 m_0 L^2 + O(\varepsilon) + O(e^{-c_0 m_0 L}). \quad (5.303)$$

### Berechnung des Beitrages von IC3

Man hat

$$\begin{aligned} \text{IC3} &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi, \pi]^2} \frac{d^2 \phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dx_0 \int_{-\infty}^\infty dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\ &\quad \times Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) \langle x_0 | 0 \rangle^2 \langle 0 | y_0 \rangle^2 D_{kont,(3)}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \Big\} \\ &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.304)$$

wobei die Korrekturen  $O(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L})$  aus der Ersetzung  $D_{kont,(3)}$  für  $D_{kont}$ , vgl. Gl. (5.251), stammen.

Mit dem Resultat (5.251) für  $D_{kont,(3)}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0)$  wird daraus

$$\begin{aligned}
 \text{IC3} &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi, \pi]^2} \frac{d^2 \phi}{(2\pi)^2} \left\{ Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left[ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \right. \\
 &\quad \times \langle x_0 | 0 \rangle^2 \langle 0 | y_0 \rangle^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{k^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \left. \right] \Bigg\} \\
 &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi, \pi]^2} \frac{d^2 \phi}{(2\pi)^2} \left\{ Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[ K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{k^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \right. \\
 &\quad \times \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 0 \rangle^2 \langle x_0 | k \rangle \right|^2 \Bigg] \Bigg\} \\
 &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \tag{5.305}
 \end{aligned}$$

Nun gilt zunächst

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 0 \rangle^2 \langle x_0 | k \rangle \right|^2 \\
 &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left\{ \frac{3m_0}{8} \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi(4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)}} e^{ikx_0} \right. \right. \\
 &\quad \times \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) + 3im_0 k \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \right] \Bigg\} \right|^2, \tag{5.306}
 \end{aligned}$$

woraus man durch Ausmultiplizieren und Ausführen der  $x_0$ -Integrale den folgenden Ausdruck bekommt (die benötigten Integrale vom Typ  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \frac{\tanh^j(x)}{\cosh^p(x)}$  sind im Anhang B.1 berechnet):

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 0 \rangle^2 \langle x_0 | k \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{9m_0^2}{128\pi(4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} e^{ikx_0} \left( 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} \right) \right. \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 3im_0 k \frac{\tanh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} e^{ikx_0} \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{3}{2} m_0^2 \frac{\tanh^3\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} e^{ikx_0} \Bigg|^2 \\
 &= \frac{9m_0^2}{128\pi(4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)} \frac{16}{9} \frac{k^4 \pi^2}{m_0^{10}} \frac{(k^2 + m_0^2)^4}{\sinh^2(\pi \frac{k}{m_0})} \\
 &= \frac{\pi}{8} \frac{\left(\frac{k}{m_0}\right)^4 \left(1 + \frac{k^2}{m_0^2}\right)^4}{\left(4\frac{k^4}{m_0^4} + 5\frac{k^2}{m_0^2} + 1\right) \sinh^2(\pi \frac{k}{m_0})}. \tag{5.307}
 \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $v = \frac{k}{m_0}$  ergibt das für den Term IC3:

$$\begin{aligned} \text{IC3} &= \frac{3}{2^8 \pi^2} g_0 m_0^3 L^4 \int_{[-\pi, \pi]^2} d^2 \phi \left\{ Z_{(3)}^2(\vec{\phi}) \int_{-\infty}^{\infty} dv \left[ \frac{v^4(1+v^2)^4}{(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \right. \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v^2} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \left. \right] \Bigg\} \\ &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.308)$$

Entsprechend zum Vorgehen beim Term IC1 entwickelt man auch hier  $Z_{(3)}^2(\vec{\phi})$  nach Potenzen von  $\vec{\phi}$ ; man findet (vgl. Gl. (5.271))

$$\begin{aligned} \text{IC3} &= \frac{3}{2^8 \pi^2} g_0 m_0^3 L^4 \int d^2 \phi \left\{ \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left[ \log |\vec{\phi}| \right]^2 - \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \log |\vec{\phi}| + C_{\text{KL}}^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\pi} \log |\vec{\phi}| C_2(\vec{\phi}) + 2 C_{\text{KL}} C_2(\vec{\phi}) \right\} \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^4}{(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v^2} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \Bigg\} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.309)$$

Durch die Substitution  $\tilde{\phi} = \sqrt{1+v^2} m_0 L \vec{\phi}$  wird das zu

$$\begin{aligned} \text{IC3} &= \frac{3}{2^8 \pi^2} g_0 m_0 L^2 \int d^2 \tilde{\phi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^4}{(4v^4+5v^2+1)(1+v^2) \sinh^2(\pi v)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} |\tilde{\phi}| \right) \right. \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left[ \log \left( \frac{|\tilde{\phi}|}{m_0 L \sqrt{1+v^2}} \right) \right]^2 - \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \log \left( \frac{|\tilde{\phi}|}{m_0 L \sqrt{1+v^2}} \right) + C_{\text{KL}}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \log \left( \frac{|\tilde{\phi}|}{m_0 L \sqrt{1+v^2}} \right) C_2\left(\frac{\tilde{\phi}}{m_0 L \sqrt{1+v^2}}\right) + 2 C_{\text{KL}} C_2\left(\frac{\tilde{\phi}}{m_0 L \sqrt{1+v^2}}\right) \right\} \Bigg\} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.310)$$

Als Resultat für den Beitrag IC3 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \text{IC3} &= \frac{3}{2^8 \pi^2} g_0 m_0 L^2 \left\{ T_0 \left[ \log(m_0 L) \right]^2 + T_1 \log(m_0 L) + T_2 \right\} \\ &\quad + \frac{3}{2^8 \pi^2} \frac{g_0}{m_0} \left\{ T_3 \log(m_0 L) + T_4 \right\} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.311)$$

mit den Definitionen

$$T_0 := \frac{1}{4\pi^2} \int d^2 \tilde{\phi} K_0\left(\frac{1}{2\pi} |\tilde{\phi}| \right) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^3}{(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \quad (5.312)$$

$$= 0.110164577(1), \quad (5.313)$$

$$\begin{aligned} T_1 &:= \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \left\{ -\frac{1}{2\pi^2} \log |\tilde{\phi}| + \frac{1}{2\pi^2} \log \sqrt{1+v^2} + \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{v^4(1+v^2)^3}{(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} K_0\left(\frac{1}{2\pi}|\tilde{\phi}|\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.314)$$

$$= -0.258821581(1), \quad (5.315)$$

$$\begin{aligned} T_2 &:= \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left[ \log \left( \frac{|\tilde{\phi}|}{\sqrt{1+v^2}} \right) \right]^2 - \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \log \left( \frac{|\tilde{\phi}|}{\sqrt{1+v^2}} \right) + C_{\text{KL}}^2 \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{v^4(1+v^2)^3}{(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} K_0\left(\frac{1}{2\pi}|\tilde{\phi}|\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.316)$$

$$= 0.24636505(1), \quad (5.317)$$

$$T_3 := \frac{1}{\pi} \int d^2\tilde{\phi} C_2(\tilde{\phi}) K_0\left(\frac{1}{2\pi}|\tilde{\phi}|\right) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \quad (5.318)$$

$$= 13.24127(1), \quad (5.319)$$

$$\begin{aligned} T_4 &:= \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ C_2(\tilde{\phi}) \left[ -\frac{1}{\pi} \log \left( \frac{|\tilde{\phi}|}{\sqrt{1+v^2}} \right) + 2C_{\text{KL}} \right] \right. \\ &\quad \times \left. K_0\left(\frac{1}{2\pi}|\tilde{\phi}|\right) \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.320)$$

Die numerischen Bestimmungen werden in den Anhängen F.2 – F.5 erläutert.  $T_3$  und  $T_4$  tragen nichts zur Oberflächenspannung bei (vgl. die Rolle von  $R_3$  und  $R_4$  beim Beitrag IC1). Die Konstante  $T_3$  ist wie  $R_3$  noch für die  $L$ -Abhängigkeit des Vorfaktors der Energieaufspaltung wichtig;  $T_4$  ist für diese Frage unerheblich und wird deswegen nicht numerisch ausgewertet.

### Berechnung des Beitrages von IC4

Hier gilt:

$$\begin{aligned} \text{IC4} &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\ &\quad \times \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle Z_{(3)}(\vec{\phi}) D_{k_{\text{ont}},(3)}^2(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \Big\} \\ &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\ &\quad \times \langle x_0 | 0 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle Z_{(3)}(\vec{\phi}) \left[ \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+\frac{k^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right]^2 \Big\} \\ &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.321)$$

Indem man das Quadrat auschreibt wird daraus

$$\begin{aligned}
 \text{IC4} &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi, \pi]^2} \frac{d^2 \phi}{(2\pi)^2} \left\{ Z_{(3)}(\vec{\phi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \left[ K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{k_1^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \right. \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \left[ K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{k_2^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 0 \rangle \langle x_0 | k_1 \rangle \langle x_0 | k_2 \rangle \right|^2 \right] \right\} \\
 &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \tag{5.322}
 \end{aligned}$$

Betrachtet man hier zunächst nur das Quadrat des Betrages des  $x_0$ -Integrals und setzt die konkrete Form der Eigenfunktionen  $\langle x_0 | 0 \rangle$ ,  $\langle x_0 | k_1 \rangle$  und  $\langle x_0 | k_2 \rangle$  ein, so kann man folgendermaßen rechnen:

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 0 \rangle \langle x_0 | k_1 \rangle \langle x_0 | k_2 \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{3m_0}{8} \frac{1}{2\pi(4k_1^4 + 5m_0^2 k_1^2 + m_0^4)} \frac{1}{2\pi(4k_2^4 + 5m_0^2 k_2^2 + m_0^4)} \\
 &\quad \times \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \left\{ \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} e^{i(k_1+k_2)x_0} \right. \right. \\
 &\quad \times \left[ 2k_1^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) + 3 i m_0 k_1 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \right] \\
 &\quad \times \left. \left. \left[ 2k_2^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) + 3 i m_0 k_2 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \right] \right|^2, \tag{5.323}
 \end{aligned}$$

was sich, erneut unter Verwendung der Formeln des Anhangs B.1, nach längerer Rechnung zu folgendem Ausdruck umformen lässt:

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 0 \rangle \langle x_0 | k_1 \rangle \langle x_0 | k_2 \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{3}{8m_0} \frac{\left[ \left(\frac{k_1}{m_0}\right)^6 + \left(\frac{k_2}{m_0}\right)^6 + \left(\frac{k_1}{m_0}\right)^4 + \left(\frac{k_2}{m_0}\right)^4 - \left(\frac{k_1}{m_0}\right)^4 \left(\frac{k_2}{m_0}\right)^2 - \left(\frac{k_1}{m_0}\right)^2 \left(\frac{k_2}{m_0}\right)^4 - 2 \left(\frac{k_1}{m_0}\right)^2 \left(\frac{k_2}{m_0}\right)^2 \right]^2}{\left(4 \left(\frac{k_1}{m_0}\right)^4 + 5 \left(\frac{k_1}{m_0}\right)^2 + 1\right) \left(4 \left(\frac{k_2}{m_0}\right)^4 + 5 \left(\frac{k_2}{m_0}\right)^2 + 1\right) \sinh^2\left(\pi \frac{k_1+k_2}{m_0}\right)}. \tag{5.324}
 \end{aligned}$$

Dies setzt man in Gl. (5.322) ein und substituiert  $v_i = \frac{k_i}{m_0}$  ( $i = 1, 2$ ). Das ergibt

$$\begin{aligned}
 \text{IC4} &= \frac{9}{2^9 \pi^4} g_0 m_0^3 L^4 \int_{[-\pi, \pi]^2} d^2 \phi Z_{(3)}(\vec{\phi}) \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \left\{ K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_1^2} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \\
 &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_2^2} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \frac{\left[ v_1^6 + v_2^6 + v_1^4 + v_2^4 - v_1^4 v_1^2 - v_1^2 v_2^4 - 2 v_1^2 v_2^2 \right]^2}{[4v_1^4 + 5v_1^2 + 1][4v_2^4 + 5v_2^2 + 1] \sinh^2(\pi(v_1 + v_2))} \Big\} \\
 &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \tag{5.325}
 \end{aligned}$$

Weiter gilt jetzt

$$v_1^6 + v_2^6 + v_1^4 + v_2^4 - v_1^4 v_2^2 - v_1^2 v_2^4 - 2 v_1^2 v_2^2 = (1 + v_1^2 + v_2^2) (v_1 + v_2)^2 (v_1 - v_2)^2, \quad (5.326)$$

so daß mit der Entwicklung von  $Z_{(3)}(\vec{\phi})$  nach Potenzen von  $\vec{\phi}$  (vgl. Gl. (5.267)) und einer analogen Argumentation wie beim Term IC1 folgt ( $\tilde{\phi} = m_0 L \vec{\phi}$ ):

$$\begin{aligned} \text{IC4} &= \frac{9}{2^9 \pi^4} g_0 m_0^3 L^4 \int_{[-\pi, \pi]^2} d^2 \phi \left\{ \left[ -\frac{1}{2\pi} \log |\vec{\phi}| + C_{\text{KL}} + C_2(\vec{\phi}) \right] \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \left\{ \frac{(1 + v_1^2 + v_2^2)^2 (v_1 + v_2)^4 (v_1 - v_2)^4}{(4v_1^4 + 5v_1^2 + 1)(4v_2^4 + 5v_2^2 + 1) \sinh^2(\pi(v_1 + v_2))} \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_1^2} m_0 L |\vec{\phi}| \right) K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_2^2} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \left. \right\} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{9}{2^9 \pi^4} g_0 m_0 L^2 \int d^2 \tilde{\phi} \left\{ \left[ -\frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{|\tilde{\phi}|}{m_0 L} \right) + C_{\text{KL}} + C_2\left(\frac{\tilde{\phi}}{m_0 L}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \left\{ \frac{(1 + v_1^2 + v_2^2)^2 (v_1 + v_2)^4 (v_1 - v_2)^4}{(4v_1^4 + 5v_1^2 + 1)(4v_2^4 + 5v_2^2 + 1) \sinh^2(\pi(v_1 + v_2))} \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_1^2} |\tilde{\phi}| \right) K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_2^2} |\tilde{\phi}| \right) \left. \right\} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.327)$$

Als Resultat für den Beitrag IC4 findet man damit:

$$\begin{aligned} \text{IC4} &= \frac{9}{2^8 \pi^3} g_0 m_0 L^2 \left\{ V_1 \log(m_0 L) + V_2 \right\} \\ &\quad + \frac{9}{2^9 \pi^4} \frac{g_0}{m_0} V_4 + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.328)$$

mit den Definitionen

$$\begin{aligned} V_1 &:= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \tilde{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \left\{ \frac{(1 + v_1^2 + v_2^2)^2 (v_1 + v_2)^4 (v_1 - v_2)^4}{(4v_1^4 + 5v_1^2 + 1)(4v_2^4 + 5v_2^2 + 1) \sinh^2(\pi(v_1 + v_2))} \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_1^2} |\tilde{\phi}| \right) K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_2^2} |\tilde{\phi}| \right) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (5.329)$$

$$\begin{aligned} V_2 &:= \frac{1}{2\pi} \int d^2 \tilde{\phi} \left\{ \left[ -\frac{1}{2\pi} \log |\tilde{\phi}| + C_{\text{KL}} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \left\{ K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_1^2} |\tilde{\phi}| \right) \right. \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_2^2} |\tilde{\phi}| \right) \left. \frac{(1 + v_1^2 + v_2^2)^2 (v_1 + v_2)^4 (v_1 - v_2)^4}{(4v_1^4 + 5v_1^2 + 1)(4v_2^4 + 5v_2^2 + 1) \sinh^2(\pi(v_1 + v_2))} \right\} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (5.330)$$

$$\begin{aligned} V_4 &:= \int d^2 \tilde{\phi} C_2(\tilde{\phi}) \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \left\{ \frac{(1 + v_1^2 + v_2^2)^2 (v_1 + v_2)^4 (v_1 - v_2)^4}{(4v_1^4 + 5v_1^2 + 1)(4v_2^4 + 5v_2^2 + 1) \sinh^2(\pi(v_1 + v_2))} \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_1^2} |\tilde{\phi}| \right) K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_2^2} |\tilde{\phi}| \right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.331)$$

Beim Ergebnis für IC4 tritt kein Term proportional zu  $\frac{g_0}{m_0} \log(m_0 L)$  auf, so daß, anders als bei den Termen IC1 und IC3, wo Konstanten  $R_3$  und  $T_3$  vorkommen, keine Konstante  $V_3$  benötigt wird. Eine numerische Auswertung ergibt (vgl. Anhang F.6 und F.7):

$$V_1 = 0.4156(1), \quad (5.332)$$

$$V_2 = 0.3422(20). \quad (5.333)$$

$V_4$  trägt zur Oberflächenspannung nichts bei (s.o.).

### Berechnung des Beitrages von IC5

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \text{IC5} &= \frac{3}{2} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) Z_{(3)}(\vec{\phi}) \right. \\ &\quad \times D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 0 \rangle \langle x_0 | 1 \rangle \langle 0 | y_0 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle D_{kont,(3)}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \Big\} \\ &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{3}{2} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \left\{ Z_{(3)}(\vec{\phi}) D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L) \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \left\{ K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{k^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \\ &\quad \times \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 0 \rangle \langle x_0 | 1 \rangle \langle x_0 | k \rangle \right|^2 \Big\} \Big\} \\ &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.334)$$

Auch hier wird, wie in den vorherigen Abschnitten, die Strategie verfolgt, als erstes das Integral über  $x_0$  auszuführen. Die benötigten Integrale findet man erneut in Anhang B.1. Nach einiger Rechnung erhält man:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 0 \rangle \langle x_0 | 1 \rangle \langle x_0 | k \rangle \right|^2 \\ &= \frac{\pi \left[ 64 \left(\frac{k}{m_0}\right)^6 + 80 \left(\frac{k}{m_0}\right)^4 + 28 \left(\frac{k}{m_0}\right)^2 + 3 \right]^2}{2^{14} \left[ 4 \left(\frac{k}{m_0}\right)^4 + 5 \left(\frac{k}{m_0}\right)^2 + 1 \right] \cosh^2\left(\pi \frac{k}{m_0}\right)}. \end{aligned} \quad (5.335)$$

Berücksichtigt man dies und ersetzt  $D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L)$  gemäß Gl. (5.249), so bekommt man mit der Substitution  $v = \frac{k}{m_0}$ :

$$\begin{aligned} \text{IC5} &= \frac{3}{2^{19} \pi^3} g_0 m_0^3 L^4 \int_{[-\pi,\pi]^2} d^2\phi \left\{ Z_{(3)}(\vec{\phi}) K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dv K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v^2} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \cosh^2(\pi v)} \Big\} \\ &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.336)$$

Wie beim Term IC1 entwickelt man  $Z_{(3)}(\vec{\phi})$  nach Potenzen von  $\vec{\phi}$  und findet:

$$\begin{aligned} \text{IC5} &= \frac{3}{2^{19}\pi^3} g_0 m_0^3 L^4 \int d^2\phi \left\{ \left[ -\frac{1}{2\pi} \log |\vec{\phi}| + C_{\text{KL}} + C_2(\vec{\phi}) \right] K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}|\right) \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dv K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v^2} m_0 L |\vec{\phi}|\right) \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \cosh^2(\pi v)} \Big\} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.337)$$

Mittels der Substitution  $\tilde{\phi} = m_0 L \vec{\phi}$  wird daraus

$$\begin{aligned} \text{IC5} &= \frac{3}{2^{19}\pi^3} g_0 m_0 L^2 \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \left[ -\frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{|\tilde{\phi}|}{m_0 L}\right) + C_{\text{KL}} + C_2\left(\frac{\tilde{\phi}}{m_0 L}\right) \right] \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}|\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v^2} |\tilde{\phi}|\right) \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \cosh^2(\pi v)} \Big\} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.338)$$

Das Ergebnis für den Beitrag IC5 lautet somit:

$$\begin{aligned} \text{IC5} &= \frac{3}{2^{19}\pi^3} g_0 m_0 L^2 \left\{ U_1 \log(m_0 L) + U_2 \right\} \\ &\quad + \frac{3}{2^{19}\pi^3} \frac{g_0}{m_0} U_4 + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.339)$$

mit

$$\begin{aligned} U_1 &:= \frac{1}{2\pi} \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}|\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v^2} |\tilde{\phi}|\right) \right. \\ &\quad \times \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \cosh^2(\pi v)} \Big\}, \end{aligned} \quad (5.340)$$

$$\begin{aligned} U_2 &:= \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \left[ -\frac{1}{2\pi} \log |\tilde{\phi}| + C_{\text{KL}} \right] K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}|\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v^2} |\tilde{\phi}|\right) \right. \\ &\quad \times \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \cosh^2(\pi v)} \Big\}, \end{aligned} \quad (5.341)$$

$$\begin{aligned} U_4 &:= \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ C_2(\tilde{\phi}) K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}|\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v^2} |\tilde{\phi}|\right) \right. \\ &\quad \times \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \cosh^2(\pi v)} \Big\}. \end{aligned} \quad (5.342)$$

Erneut trägt  $U_4$  zur Oberflächenspannung nichts bei, für  $U_1$  und  $U_2$  findet man (vgl. die Anhänge F.8 und F.9)

$$U_1 = 1001.491115(1), \quad (5.343)$$

$$U_2 = -321.53(1). \quad (5.344)$$

### Berechnung des Beitrages von IC6

Man hat

$$\begin{aligned}
 \text{IC6} &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\
 &\quad \times D_{(3)}^2(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 1 \rangle^2 \langle 1 | y_0 \rangle^2 D_{kont,(3)}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \Big\} \\
 &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \left\{ D_{(3)}^2(\vec{\phi}, m_0 L) \right. \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{k^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 1 \rangle^2 \langle x_0 | k \rangle \right|^2 \Big\} \\
 &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \tag{5.345}
 \end{aligned}$$

Wieder rechne ich als erstes das  $x_0$ -Integral aus. Nach umfangreicherer, im Prinzip aber analoger Rechnung wie bei den Termen IC3 – IC5 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \langle x_0 | 1 \rangle^2 \langle x_0 | k \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{\pi}{8} \frac{\left(\frac{k}{m_0}\right)^4 \left(2\left(\frac{k}{m_0}\right)^4 + \left(\frac{k}{m_0}\right)^2 - 1\right)^2}{\left(4\left(\frac{k}{m_0}\right)^4 + 5\left(\frac{k}{m_0}\right)^2 + 1\right) \sinh^2\left(\pi \frac{k}{m_0}\right)}. \tag{5.346}
 \end{aligned}$$

Hiermit und mit dem Ergebnis für  $D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L)$  (Gl. (5.249)) bekommt man ( $v = \frac{k}{m_0}$ ):

$$\begin{aligned}
 \text{IC6} &= \frac{3}{2^{10} \pi^4} g_0 m_0^3 L^4 \int d^2\phi \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{v^4 (2v^4 + v^2 - 1)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} K_0^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}|\right) \right. \right. \\
 &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v^2} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \Big\} \Big\} \\
 &\quad + O\left(m_0^4 L^4 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \tag{5.347}
 \end{aligned}$$

Führt man Polarkoordinaten für die  $\phi$ -Integration ein und substituiert  $\tilde{\phi} = m_0 L \phi$ , so kann man definieren:

$$\begin{aligned}
 Z_6 &:= \int_0^{\infty} d\tilde{\phi} \left\{ \tilde{\phi} K_0^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \tilde{\phi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{v^4 (2v^4 + v^2 - 1)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \right. \right. \\
 &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v^2} \tilde{\phi}\right) \Big\} \Big\} \\
 &= 0.152036(1) \tag{5.348}
 \end{aligned}$$

(numerische Bestimmung mit Mathematica). Für den Beitrag IC6 hat man also schließlich:

$$\text{IC6} = \frac{3}{2^9 \pi^3} g_0 m_0 L^2 Z_6 + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \tag{5.349}$$

### Berechnung des Beitrages von IC7

Nach der Definition (5.247) gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{IC7} &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\
 &\quad \times D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle D_{kont,(3)}^2(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \Big\} \\
 &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\
 &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \left\{ D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_1}{2\pi} \left[ K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{k_1^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \right. \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_2}{2\pi} \left[ K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{k_2^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \langle x_0 | 1 \rangle \langle x_0 | k_1 \rangle \langle x_0 | k_2 \rangle \right|^2 \right] \right] \Big\} \\
 &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \tag{5.350}
 \end{aligned}$$

Auch hier bestimme ich zuerst das  $x_0$ -Integral. Eine analoge Rechnung wie in den vorigen Abschnitten liefert schließlich:

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \langle x_0 | 1 \rangle \langle x_0 | k_1 \rangle \langle x_0 | k_2 \rangle \right|^2 \\
 &= \frac{3m_0}{16\pi^2(4k_1^4 + 5m_0^2k_1^2 + m_0^4)(4k_2^4 + 5m_0^2k_2^2 + m_0^4)} \\
 &\quad \times \left| -\frac{\pi}{32 \cosh\left(\pi \frac{k_1+k_2}{m_0}\right) m_0^3} \left[ -17m_0^6 - 160m_0^2k_1^2k_2^2 + 16m_0^2k_1^4 \right. \right. \\
 &\quad \left. - 64k_1^2k_2^4 + 16m_0^2k_2^4 - 64k_1^4k_2^2 \right. \\
 &\quad \left. + 64k_1^6 + 64k_2^6 - 68m_0^4k_1^2 - 68m_0^4k_2^2 \right] \right|^2. \tag{5.351}
 \end{aligned}$$

Mit den Substitutionen  $v_i = \frac{k_i}{m_0}$  ( $i = 1, 2$ ) sowie Ersetzen von  $D_{(3)}(\vec{\phi}, m_0 L)$  nach Gl. (5.249) ergibt das

$$\begin{aligned}
 \text{IC7} &= \frac{9}{2^{21}\pi^5} g_0 m_0^3 L^4 \int d^2\phi \left\{ K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_1^2} m_0 L |\vec{\phi}| \right) K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + v_2^2} m_0 L |\vec{\phi}| \right) H(v_1, v_2) \Big\} \\
 &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon), \tag{5.352}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 H(v_1, v_2) &:= \\
 &\frac{\left[ 64v_1^6 + 64v_2^6 - 64v_1^2v_2^4 - 64v_1^4v_2^2 + 16v_1^4 + 16v_2^4 - 68v_1^2 - 68v_2^2 - 160v_1^2v_2^2 - 17 \right]^2}{(4v_1^4 + 5v_1^2 + 1)(4v_2^4 + 5v_2^2 + 1) \cosh^2(\pi(v_1 + v_2))}. \tag{5.353}
 \end{aligned}$$

Durch Einführen von Polarkoordinaten für die  $\phi$ -Integration und durch die Substitution  $\tilde{\phi} = m_0 L \phi$  findet man also

$$\text{IC7} = \frac{9}{2^{20} \pi^4} g_0 m_0 L^2 Z_7 + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon), \quad (5.354)$$

wobei

$$Z_7 := \int_0^\infty d\tilde{\phi} \left\{ \tilde{\phi} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \tilde{\phi}\right) \int_{-\infty}^\infty dv_1 \int_{-\infty}^\infty dv_2 \left[ K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_1^2} \tilde{\phi}\right) \times K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_2^2} \tilde{\phi}\right) H(v_1, v_2) \right] \right\} \quad (5.355)$$

$$= 0.507(1) \cdot 10^5 \quad (5.356)$$

(vgl. Anhang F.10).

### Berechnung des Beitrages von IC8

Der Term IC8 ist nun nicht mehr endlich für  $D = 3$ , sondern er enthält einen divergenten Anteil. Aufgabe und Strategie bei der Rechnung hier ist es also, jeweils endliche Terme und solche, die eine Divergenz enthalten, zu trennen. Das soll jetzt durchgeführt werden. Zunächst hat man

$$\text{IC8} = \underbrace{\frac{1}{4} g_0 m_0^2 L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon}_{=: B(\varepsilon)} \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^\infty dx_0 \int_{-\infty}^\infty dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \times \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) D_{kont}^3(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \right\}. \quad (5.357)$$

Man beachtet nun folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle &= \frac{e^{ik(x_0 - y_0)}}{2\pi} + \frac{e^{ik(x_0 - y_0)}}{2\pi(4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)} \left\{ \tilde{B}_0(x_0, y_0) k^3 \right. \\ &\quad \left. + \tilde{C}(x_0, y_0) k^2 + D(x_0, y_0) k + E(x_0, y_0) \right\} \\ &= \frac{e^{ik(x_0 - y_0)}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \tilde{A}(x_0, y_0, m_0, k), \end{aligned} \quad (5.358)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{A}(x_0, y_0, m_0, k) &:= \frac{e^{ik(x_0 - y_0)}}{4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4} \left\{ \tilde{B}(x_0, y_0) k^3 + \tilde{C}(x_0, y_0) k^2 \right. \\ &\quad \left. + D(x_0, y_0) k + E(x_0, y_0) \right\}, \end{aligned} \quad (5.359)$$

$$\tilde{B}_0(x_0, y_0) := 6 i m_0 \left[ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) - \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right], \quad (5.360)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}(x_0, y_0) &:= 9 m_0^2 \left[ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) - 1 \right] \\ &\quad + 3 m_0^2 \left[ \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} + \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} \right], \end{aligned} \quad (5.361)$$

$$\begin{aligned} D(x_0, y_0) &:= 3 \operatorname{im}_0^3 \left[ \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) - \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \right] \\ &\quad + \frac{9}{2} \operatorname{im}_0^3 \left[ \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} - \frac{\tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \right], \end{aligned} \quad (5.362)$$

$$\begin{aligned} E(x_0, y_0) &:= -\frac{3}{2} m_0^4 \left[ \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} + \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \cosh^2\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} \right]. \end{aligned} \quad (5.363)$$

Diese Aufspaltung ist deshalb sinnvoll, da sich der Term  $\tilde{A}$  für große  $k$ , also im Ultraviolettbereich, wie  $\frac{e^{ik(x_0-y_0)}}{k}$  verhält und das  $k$ -Integral hierüber konvergiert. Aus dem  $\tilde{A}$ -Term sind also keine UV-Divergenzen zu erwarten. Hiermit ergibt sich nun für den Term IC8:

$$\begin{aligned} \text{IC8} &= \frac{B(\varepsilon)}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[ e^{ik(x_0-y_0)} + \tilde{A} \right] \int_0^{\infty} du \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} e^{-\left(1+\frac{k^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u} \right]^3 \left. \right\} \\ &= \text{IC81} + \text{IC82}, \end{aligned} \quad (5.364)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{IC81} &:= \frac{B(\varepsilon)}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x_0-y_0)} \int_0^{\infty} du \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} e^{-\left(1+\frac{k^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u} \right]^3 \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.365)$$

und

$$\begin{aligned} \text{IC82} &:= \frac{B(\varepsilon)}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) \right. \\ &\quad \times 3 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{ik_1(x_0-y_0)} \int_0^{\infty} du_1 \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_1^2 u_1} e^{i\vec{n}_1 \cdot \vec{\phi}} e^{-\left(1+\frac{k_1^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u_1} \right]^2 \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \tilde{A} \int_0^{\infty} du_2 \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_2^2 u_2} e^{i\vec{n}_2 \cdot \vec{\phi}} e^{-\left(1+\frac{k_2^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u_2} \right] \\ &\quad + 3 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{ik_1(x_0-y_0)} \int_0^{\infty} du_1 \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_1^2 u_1} e^{i\vec{n}_1 \cdot \vec{\phi}} e^{-\left(1+\frac{k_1^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u_1} \right] \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \tilde{A} \int_0^{\infty} du_2 \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_2^2 u_2} e^{i\vec{n}_2 \cdot \vec{\phi}} e^{-\left(1+\frac{k_2^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u_2} \right]^2 \\ &\quad \left. + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \tilde{A} \int_0^{\infty} du_2 \sum_{\vec{n}_2 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_2^2 u_2} e^{i\vec{n}_2 \cdot \vec{\phi}} e^{-\left(1+\frac{k_2^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u_2} \right]^3 \right\}. \end{aligned} \quad (5.366)$$

Ich untersuche als erstes den Term IC82.

### Berechnung von IC82

Man überlegt sich, daß IC82 für  $D = 3$  keine Divergenzen liefert. Das liegt zum einen am Verhalten von  $\tilde{A}$  für  $k \rightarrow \infty$  (s. o.), so daß die  $k$ -Integrale, die einen Term  $\tilde{A}$  enthalten, konvergieren. Durch Vergleich mit der Rechnung bei sieht man, daß auch Integrale wie

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \frac{e^{ik_1(x_0-y_0)}}{2\pi} \int_0^{\infty} du_1 \sum_{\vec{n}_1 \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}_1^2 u_1} e^{i\vec{n}_1 \cdot \vec{\phi}} e^{-(1+\frac{k_1^2}{m_0^2}) m_0^2 L^2 u_1} \right]^2 \quad (5.367)$$

nicht zu Divergenzen führen. Eine analoge Rechnung wie von Gl. (5.57) bis Gl. (5.62) (nur eben mit der Potenz zwei der eckigen Klammer statt wie dort mit der dritten Potenz) führt nämlich zum Term ( $\tilde{\phi} = \frac{\vec{\phi}}{2\pi}$ )

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right)^{-1+\varepsilon} \left[ K_{\frac{\varepsilon-1}{2}} \left( m_0 L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right) \right]^2 \quad \underset{(\hat{x}_0, \tilde{\phi})}{\sim} \underset{\rightarrow 0}{\sim} \text{const.} (m_0 L)^{\varepsilon-1} \left( \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right)^{2\varepsilon-2} \\ & \quad (\text{vgl. Gl. (5.63)}) \\ & \quad \underset{(\hat{x}_0, \tilde{\phi})}{\sim} \underset{\rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{m_0 L r^2}, \quad \text{für } \varepsilon = 0 \\ & \quad \left( r = \sqrt{\hat{x}_0^2 + \tilde{\phi}^2} \right), \end{aligned} \quad (5.368)$$

und da über  $\int d^2\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x}_0 \dots$  integriert wird, ergibt das, im Gegensatz zur Rechnung beim Graphen OIC, keine Divergenzen.

Auch  $\widehat{T}$ -Divergenzen sind in IC82 nicht enthalten, denn für  $x_0, y_0 \rightarrow +\infty$  bzw.  $x_0, y_0 \rightarrow -\infty$  geht  $\tilde{A}$  exponentiell gegen 0, so daß die  $x_0, y_0$ -Integrale konvergieren. Für  $x_0 \rightarrow +\infty, y_0 \rightarrow -\infty$  bzw. umgekehrt  $x_0 \rightarrow -\infty, y_0 \rightarrow +\infty$  gibt es wegen des Faktors  $e^{ik(x_0-y_0)}$  ebenfalls keine Divergenzen; dies sieht man ganz analog zum Beweis der Konvergenz von  $\tilde{R}$ , vgl. Gl. (5.83) – Gl. (5.92). Auch sind wegen des exponentiellen Abfalls der Greenschen Funktion  $G(x, y)$  für  $|x_0 - y_0| \rightarrow \infty$  aus diesem Sektor der  $x_0 - y_0$ -Ebene keine Divergenzen zu befürchten (vgl. Kapitel 3, insbesondere die Bemerkung auf Seite 49).

Insgesamt ist IC82 daher endlich für  $D = 3$  ( $\varepsilon = 0$ ) und außerdem gilt entsprechend zu Gl. (5.251) (vgl. auch Gln. (5.239) und (5.241))

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} du \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2}) m_0^2 L^2 u} &= \frac{1}{2\pi} K_0 \left( \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \frac{k^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \\ &+ O \left( \frac{e^{-c_0 m_0 L}}{m_0^2 L^2} \right), \end{aligned} \quad (5.369)$$

so daß also folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{IC82} = & \frac{B(0)}{(2\pi)^6} \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\
 & \times 3 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{ik_1(x_0-y_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\frac{k_1^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right]^2 \\
 & \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \tilde{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\frac{k_2^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right] \\
 & + 3 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 e^{ik_1(x_0-y_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\frac{k_1^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right] \\
 & \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \tilde{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\frac{k_2^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right]^2 \\
 & \left. + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \tilde{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\frac{k_2^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right]^3 \right\} \\
 & + O(\varepsilon) + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right). \tag{5.370}
 \end{aligned}$$

Mit der Definition von  $B(\varepsilon)$  aus Gl. (5.357) sowie den Substitutionen  $v_i = \frac{k_i}{m_0}$  ( $i = 1, 2$ ),  $\tilde{\phi} = m_0 L \phi$ ,  $\hat{x}_0 = m_0 x_0$  und  $\hat{y}_0 = m_0 y_0$  ergibt sich dann (bis auf exponentielle Korrekturen kann das  $\phi$ -Integral wieder über ganz  $\mathbb{R}^2$  ausgeführt werden)

$$\begin{aligned}
 \text{IC82} = & \frac{1}{4} \frac{g_0 m_0 L^2}{(2\pi)^8} \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x}_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{y}_0 \left\{ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\
 & \times 3 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 e^{iv_1(\hat{x}_0-\hat{y}_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_1^2} |\tilde{\phi}| \right) \right]^2 \\
 & \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \hat{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_2^2} |\tilde{\phi}| \right) \right] \\
 & + 3 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 e^{iv_1(\hat{x}_0-\hat{y}_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_1^2} |\tilde{\phi}| \right) \right] \\
 & \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \hat{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_2^2} |\tilde{\phi}| \right) \right]^2 \\
 & \left. + \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \hat{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_2^2} |\tilde{\phi}| \right) \right]^3 \right\} \\
 & + O(\varepsilon) + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right), \tag{5.371}
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 \hat{A} := & \frac{e^{iv_2(\hat{x}_0-\hat{y}_0)}}{4v_2^4 + 5v_2^2 + 1} \left\{ \hat{B}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) v_2^3 + \hat{C}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) v_2^2 \right. \\
 & \left. + \hat{D}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) v_2 + \hat{E}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) \right\}, \tag{5.372}
 \end{aligned}$$

$$\hat{B}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) := 6i \left[ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) - \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right], \tag{5.373}$$

$$\hat{C}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) := 9 \left[ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) - 1 \right] + 3 \left[ \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} + \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \right], \tag{5.374}$$

$$\hat{D}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) := 3i \left[ \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) - \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \right] + \frac{9}{2}i \left[ \frac{\tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} - \frac{\tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} \right], \quad (5.375)$$

$$\hat{E}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) := -\frac{3}{2} \left[ \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} + \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} - \frac{3}{2} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \right]. \quad (5.376)$$

Leicht umgeformt, bekommt man mittels Polarkoordinaten für die  $\tilde{\phi}$ -Integration für IC82 den Ausdruck

$$\begin{aligned} \text{IC82} &= \frac{1}{2^9 \pi^7} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty d\hat{\phi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^\infty d\hat{x}_0 \int_{-\infty}^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ &\quad \times 3 \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_1 e^{iv_1(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_1^2} \hat{\phi}\right) \right]^2 \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_2 \hat{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_2^2} \hat{\phi}\right) \right] \\ &\quad + 3 \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_1 e^{iv_1(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_1^2} \hat{\phi}\right) \right] \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_2 \hat{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_2^2} \hat{\phi}\right) \right]^2 \\ &\quad \left. + \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_2 \hat{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_2^2} \hat{\phi}\right) \right]^3 \right\} \\ &\quad + O(\varepsilon) + O(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}) \\ &= \frac{1}{2^9 \pi^7} g_0 m_0 L^2 \left\{ Z_{82A} + Z_{82B} + Z_{82C} \right\} \\ &\quad + O(\varepsilon) + O(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}), \end{aligned} \quad (5.377)$$

mit den Definitionen

$$\begin{aligned} Z_{82A} &:= 3 \int_0^\infty d\hat{\phi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^\infty d\hat{x}_0 \int_{-\infty}^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_1 e^{iv_1(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_1^2} \hat{\phi}\right) \right]^2 \\ &\quad \left. \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_2 \hat{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_2^2} \hat{\phi}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.378)$$

$$\begin{aligned} Z_{82B} &:= 3 \int_0^\infty d\hat{\phi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^\infty d\hat{x}_0 \int_{-\infty}^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_1 e^{iv_1(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_1^2} \hat{\phi}\right) \right] \\ &\quad \times \left. \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_2 \hat{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_2^2} \hat{\phi}\right) \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (5.379)$$

$$\begin{aligned} Z_{82C} &:= \int_0^\infty d\hat{\phi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^\infty d\hat{x}_0 \int_{-\infty}^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ &\quad \times \left. \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_2 \hat{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_2^2} \hat{\phi}\right) \right]^3 \right\}. \end{aligned} \quad (5.380)$$

Eine numerische Auswertung ergibt (vgl. Anhang F.11 – F.13):

$$Z_{82A} = -0.8531(4) \cdot 10^4, \quad (5.381)$$

$$Z_{82B} = 0.1425(1) \cdot 10^4, \quad (5.382)$$

$$Z_{82C} = -0.25(1) \cdot 10^3. \quad (5.383)$$

### Bestimmung von IC81

Hier teilt man, um die Asymptotik des tangens hyperbolicus ausnutzen zu können, den Integrationsbereich der  $x_0$ - und  $y_0$ -Integration analog zur Berechnung des Graphen OIC auf (vgl. Gln. (5.80) ff.). Das ergibt

$$IC81 = IC81a + IC81b, \quad (5.384)$$

mit den Definitionen

$$\begin{aligned} IC81a &:= \frac{2B(\varepsilon)}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi,\pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(x_0-y_0)} \int_0^\infty du e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2})m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \right]^3 \left. \right\} \end{aligned} \quad (5.385)$$

und

$$\begin{aligned} IC81b &:= \frac{2B(\varepsilon)}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi,\pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dx_0 \int_{-\infty}^0 dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(x_0-y_0)} \int_0^\infty du e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2})m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \right]^3 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.386)$$

Der Term IC81b enthält nun wieder keine Divergenzen, wie man entsprechend zur Berechnung von  $\tilde{R}$  (Gln. (5.83) – (5.92)) sieht. Genauer rechnet man folgendermaßen.

### Bestimmung von IC81b

Mit Gl. (5.369) gilt jetzt, mit der zusätzlichen Substitution  $y_0 \rightarrow -y_0$ ,

$$\begin{aligned} IC81b &= -\frac{2B(0)}{(2\pi)^6} \int_{[-\pi,\pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(x_0+y_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+\frac{k^2}{m_0^2}} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right]^3 \left. \right\} \\ &\quad + O(\varepsilon) + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) \\ &= -\frac{2}{(2\pi)^7} \frac{g_0 m_0^2 L^4}{4} \int_0^\infty d\phi \phi \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(x_0+y_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+\frac{k^2}{m_0^2}} m_0 L \phi \right) \right]^3 \left. \right\} \\ &\quad + O(\varepsilon) + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right). \end{aligned} \quad (5.387)$$

Man substituiert  $\tilde{\phi} = m_0 L \phi$ ,  $\hat{x}_0 = m_0 x_0$ ,  $\hat{y}_0 = m_0 y_0$ ,  $v = \frac{k}{m_0}$  und erhält

$$\text{IC81b} = -\frac{1}{2^8 \pi^7} g_0 m_0 L^2 Z_{\bar{R}} + O(\varepsilon) + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right), \quad (5.388)$$

mit

$$\begin{aligned} Z_{\bar{R}} := & \int_0^\infty d\tilde{\phi} \tilde{\phi} \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ & \times \left. \left[ \int_{-\infty}^\infty dv e^{iv(\hat{x}_0 + \hat{y}_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v^2} \tilde{\phi}\right) \right]^3 \right\}. \end{aligned} \quad (5.389)$$

Numerisch bekommt man:

$$\begin{aligned} Z_{\bar{R}} = & \int_0^\infty d\tilde{\phi} \tilde{\phi} \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ & \times \left. \left[ \int_{-\infty}^\infty dv e^{iv(\hat{x}_0 + \hat{y}_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v^2} \tilde{\phi}\right) \right]^3 \right\} \\ = & \int_0^\infty d\tilde{\phi} \tilde{\phi} \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ & \times \left. \left[ \frac{\pi}{\sqrt{(\hat{x}_0 + \hat{y}_0)^2 + (\frac{\tilde{\phi}}{2\pi})^2}} e^{-\sqrt{(\hat{x}_0 + \hat{y}_0)^2 + (\frac{\tilde{\phi}}{2\pi})^2}} \right]^3 \right\} \\ [72b, (43), S. 56] = & 4\pi^5 \int_0^\infty d\phi \phi \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \frac{e^{-3\sqrt{(\hat{x}_0 + \hat{y}_0)^2 + \phi^2}}}{\sqrt{(\hat{x}_0 + \hat{y}_0)^2 + \phi^2}^3} \\ \left(\phi = \frac{\tilde{\phi}}{2\pi}\right) = & 0.907018(1) \text{ (numerische Bestimmung mit Mathematica)}. \end{aligned} \quad (5.390)$$

Jetzt zu IC81a.

### Bestimmung von IC81a

Wie bei der Berechnung des Graphen  führe ich die Funktion  $\Delta$  ein (vgl. Gl. (5.202)):

$$\tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) = 1 + \underbrace{\tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) - 1}_{=: \Delta\left(\frac{m_0 x_0}{2}\right)}. \quad (5.391)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \text{IC81a} = & \frac{2B(\varepsilon)}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ \left[ 1 + \Delta\left(\frac{m_0 x_0}{2}\right) + \Delta\left(\frac{m_0 y_0}{2}\right) \right. \right. \\ & + \Delta\left(\frac{m_0 x_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{m_0 y_0}{2}\right) \left. \right] \\ \times & \left. \left[ \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(x_0 - y_0)} \int_0^\infty du e^{-\left(1 + \frac{k^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \right]^3 \right\}. \end{aligned} \quad (5.392)$$

Dieser Ausdruck lässt sich in zwei Summanden aufteilen, nämlich:

$$\text{IC81a} = \text{IC81aa} + \text{IC81ab}, \quad (5.393)$$

mit

$$\begin{aligned} \text{IC81aa} := & 2 B(\varepsilon) \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left[ \int_{-\infty}^\infty dk \left\{ \frac{e^{ik(x_0-y_0)}}{2\pi} \right. \right. \\ & \times \int_0^\infty du e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2})m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \left. \right]^3 \end{aligned} \quad (5.394)$$

und

$$\begin{aligned} \text{IC81ab} := & \frac{2 B(\varepsilon)}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ \left[ \Delta\left(\frac{m_0 x_0}{2}\right) + \Delta\left(\frac{m_0 y_0}{2}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \Delta\left(\frac{m_0 x_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{m_0 y_0}{2}\right) \right] \right. \\ & \times \left. \left[ \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(x_0-y_0)} \int_0^\infty du e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2})m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \right]^3 \right\}. \end{aligned} \quad (5.395)$$

Den Term IC81aa führt man sofort mit Hilfe von Gl. (5.94) auf den Graphen  zurück und erhält:

$$\begin{aligned} \text{IC81aa} = & \frac{1}{12} \underbrace{\text{Graphen IC81aa}}_{\text{durch Gl. (5.94)}} - \frac{1}{384\pi^2} g_0 m_0 L^2 \\ & + O\left((m_0 L)^{\frac{3}{2}} e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.396)$$

Nun zum Term IC81ab.

### Bestimmung von IC81ab

Zunächst gilt mit der Poissonschen Summenformel (vgl. Gl. (5.235) – Gl. (5.238)):

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty du e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2})m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{n} \cdot \vec{\phi}} \\ &= \int_0^\infty du e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2})m_0^2 L^2 u} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} e^{-\frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2 u}} + O\left(\frac{e^{-c_0 m_0 L}}{m_0^2 L^2}\right), \quad c_0 > 0. \quad (5.397) \end{aligned}$$

Damit folgt also

$$\begin{aligned} \text{IC81ab} &= \frac{2B(\varepsilon)}{(2\pi)^3} \int_{[-\pi,\pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_0^\infty dx_0 \int_0^\infty dy_0 \left\{ \left[ \Delta\left(\frac{m_0 x_0}{2}\right) + \Delta\left(\frac{m_0 y_0}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta\left(\frac{m_0 x_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{m_0 y_0}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dk e^{ik(x_0 - y_0)} \int_0^\infty du e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2})m_0^2 L^2 u} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} e^{-\frac{\tilde{\phi}^2}{16\pi^2 u}} \right]^3 \left. \right\} \\ &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.398)$$

Bis auf exponentiell mit  $L$  abfallende Terme kann die  $\phi$ -Integration erneut über ganz  $\mathbb{R}^{D-1}$  ausgeführt werden, denn die weitere Rechnung wird zeigen, daß Divergenzen nur aus der Region um  $\phi = 0$  herrühren. Die Parameterabhängigkeit des Terms IC81ab wird deutlich, indem man folgende Substitutionen durchführt:

$$\hat{x}_0 = m_0 x_0, \hat{y}_0 = m_0 y_0, v = \frac{k}{m_0}, \tilde{u} = m_0^2 L^2 u, \tilde{\phi} = \frac{m_0 L \phi}{2\pi}.$$

Das liefert, indem man noch die Definition von  $B(\varepsilon)$  einsetzt (vgl. Gl. (5.357)):

$$\begin{aligned} \text{IC81ab} &= \frac{1}{2(2\pi)^3} g_0 m_0^3 L^4 (\mu_0 L)^\varepsilon (m_0 L)^{1-D} \left[ (m_0 L)^{D-3} \right]^3 \\ &\quad \times \int d^{D-1}\tilde{\phi} \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \left[ \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) + \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) + \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \left[ \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \int_{-\infty}^\infty dv e^{iv(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)} \int_0^\infty d\tilde{u} e^{-(1+v^2)\tilde{u}} \frac{e^{-\frac{\tilde{\phi}^2}{4\tilde{u}}}}{\tilde{u}^{\frac{D-1}{2}}} \right]^3 \left. \right\} \\ &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2^{10} \pi^6} g_0 m_0 L^2 \left(\frac{\mu_0 L}{m_0^2 L^2}\right)^\varepsilon (4\pi)^{\frac{3\varepsilon}{2}}}_{=: C(\varepsilon)} \\ &\quad \times \int d^{2-\varepsilon}\tilde{\phi} \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \left[ \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) + \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) + \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dv e^{iv(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)} \int_0^\infty d\tilde{u} e^{-(1+v^2)\tilde{u}} \frac{e^{-\frac{\tilde{\phi}^2}{4\tilde{u}}}}{\tilde{u}^{\frac{2-\varepsilon}{2}}} \right]^3 \left. \right\} \\ &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right). \end{aligned} \quad (5.399)$$

Weiter rechnet man jetzt das  $v$ -Integral (Gauß-Integral) aus

$$\begin{aligned} \text{IC81ab} &= C(\varepsilon) \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \left[ \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) + \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) + \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \left. \int d^{2-\varepsilon}\tilde{\phi} \left[ \int_0^\infty d\tilde{u} \tilde{u}^{\frac{\varepsilon}{2}-1} e^{-\tilde{u}} e^{-\frac{\tilde{\phi}^2}{4\tilde{u}}} \sqrt{\frac{\pi}{\tilde{u}}} e^{-\frac{(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)^2}{4\tilde{u}}} \right]^3 \right\} \\ &\quad + O\left(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}\right) \end{aligned} \quad (5.400)$$

und führt das Integral über  $u$  auf eine Besselfunktion  $K$  zurück [47, 3.471.9]:

$$\begin{aligned} \text{IB1ab} &= C(\varepsilon) \pi^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty d\hat{x}_0 \int_0^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \left[ \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) + \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) + \Delta\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \Delta\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \int d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} 8 \left[ \frac{(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)^2 + \tilde{\phi}^2}{4} \right]^{\frac{3\varepsilon-3}{4}} K_{\frac{\varepsilon-1}{2}}^3 \left( \sqrt{(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)^2 + \tilde{\phi}^2} \right) \Big\} \\ &\quad + O(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}). \end{aligned} \quad (5.401)$$

Mit der Substitution

$$\Phi : [0, \infty[ \times [0, \infty[ \longrightarrow U$$

$$(\hat{x}_0, \hat{y}_0) \mapsto (t, s) = (\hat{x}_0 + \hat{y}_0, \hat{x}_0 - \hat{y}_0), \quad (5.402)$$

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} \right| = \frac{1}{2} \quad (5.403)$$

(vgl. Gl. (D.4) aus Anhang D, dort ist auch die Menge  $U$  definiert) bekommt man ( $K_\nu = K_{-\nu}$ , [63, 9.6.6])

$$\begin{aligned} \text{IC81ab} &= 4 \pi^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{3-3\varepsilon}{2}} C(\varepsilon) \int_0^\infty dt \int_{-t}^t ds \left\{ \left[ \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \int d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \left[ \tilde{\phi}^2 + s^2 \right]^{\frac{3\varepsilon-3}{4}} K_{\frac{1-\varepsilon}{2}}^3 \left( \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2} \right) \Big\} \\ &\quad + O(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}). \end{aligned} \quad (5.404)$$

Entsprechend zur Rechnung beim Graphen OIC (vgl. Gln. (5.62) – (5.64)) zieht man nun mit Hilfe der Stufenfunktion  $\theta$  die divergenzerzeugenden Anteile des Integranden explizit ab und addiert sie wieder, um die Divergenzen zu isolieren:

$$\begin{aligned} \text{IC81ab} &= 2^{\frac{7-3\varepsilon}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} C(\varepsilon) \int_0^\infty dt \int_{-t}^t ds \int d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \left\{ \left[ \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) \right] \left[ \tilde{\phi}^2 + s^2 \right]^{\frac{3\varepsilon-3}{4}} K_{\frac{1-\varepsilon}{2}}^3 \left( \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \theta\left(1 - \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}\right) \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}{2^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \right]^3 \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}^{3\varepsilon-3} \right\} \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=: \text{IC81aba}} \\ &\quad + 2^{\frac{7-3\varepsilon}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} C(\varepsilon) \int_0^\infty dt \int_{-t}^t ds \int d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \left\{ \theta\left(1 - \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}\right) \right. \\ &\quad \times \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}{2^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \right]^3 \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}^{3\varepsilon-3} \Big\} \\ &\quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{=: \text{IC81abb}} \\ &\quad + O(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}). \end{aligned} \quad (5.405)$$

Nach Konstruktion ist der Term IC81aba für  $\varepsilon = 0$  endlich, so daß

$$\begin{aligned} \text{IC81aba} &= \frac{1}{2^{\frac{13}{2}} \pi^{\frac{9}{2}}} g_0 m_0 L^2 \int_0^\infty dt \int_{-t}^t ds \int d^2 \tilde{\phi} \left\{ \left[ \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. + \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) \right] \left[ \tilde{\phi}^2 + s^2 \right]^{-\frac{3}{4}} K_{\frac{3}{2}}^3\left(\sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}\right) \\ &\quad - \theta\left(1 - \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}\right) \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}^{-3} \left. \right\} \\ &\quad + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.406)$$

gilt. Mit der Definition

$$\begin{aligned} Z_{81\text{aba}} &:= \int_0^\infty dt \int_{-t}^t ds \int d^2 \tilde{\phi} \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}^{-3} \left\{ e^{-3\sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}} \right. \\ &\quad \times \left[ \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) \right] \\ &\quad \left. - \theta\left(1 - \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}\right) \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.407)$$

findet man somit [47, 8.469.3]

$$\text{IC81aba} = \frac{1}{2^8 \pi^3} g_0 m_0 L^2 Z_{81\text{aba}} + O(\varepsilon). \quad (5.408)$$

Eine numerische Auswertung liefert (vgl. Anhang F.14)

$$Z_{81\text{aba}} = 79.9242(1). \quad (5.409)$$

Schließlich zum Term IC81abb: Mit

$$D(\varepsilon) := 2^{\frac{7-3\varepsilon}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} C(\varepsilon) \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)}{2^{\frac{1+\varepsilon}{2}}} \right]^3 \quad (5.410)$$

hat man

$$\begin{aligned} \text{IC81abb} &= D(\varepsilon) \left\{ \int_1^\infty dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \int_{-t}^t ds \int d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \frac{\theta\left(1 - \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}\right)}{\sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}^{3-3\varepsilon}} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \int_{-t}^t ds \int d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \frac{\theta\left(1 - \sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}\right)}{\sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}^{3-3\varepsilon}} \right\} \\ &= D(\varepsilon) \left\{ \int_1^\infty dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \int_{B_1^{(3-\varepsilon)}(0)} ds d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}^{3-3\varepsilon}} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \int_{B_1^{(3-\varepsilon)}(0)} ds d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}^{3-3\varepsilon}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^1 dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \int_{P_t} ds d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}^{3-3\varepsilon}} \right\}. \quad (5.411) \end{aligned}$$

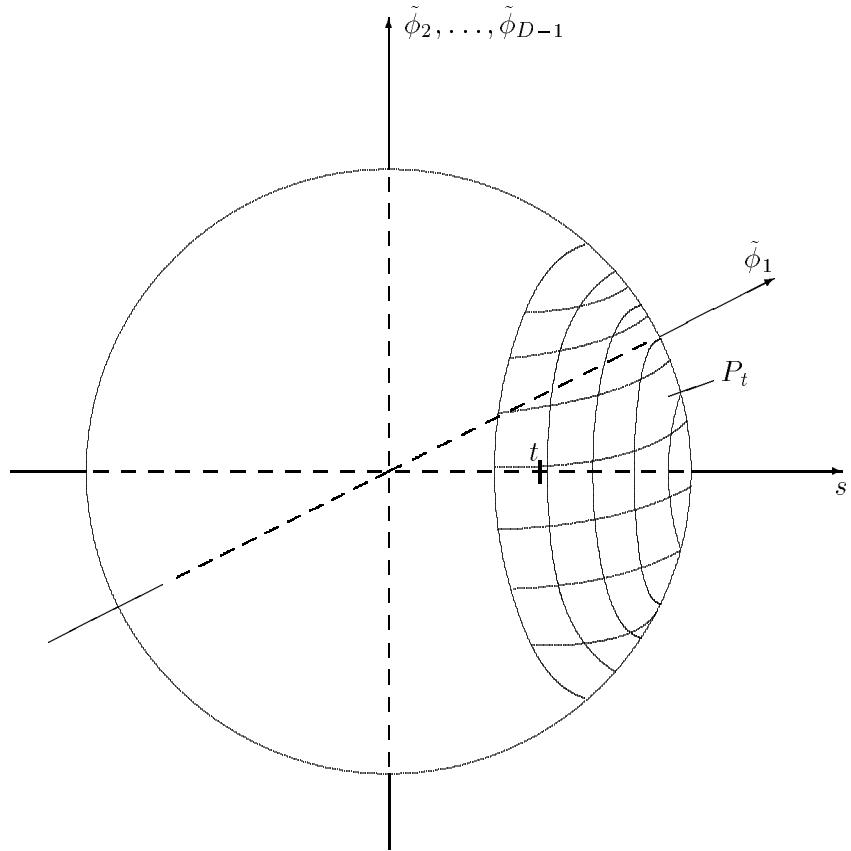


Abbildung 5.1: Schraffiert dargestellt ist die zum Wert  $t$  gehörige Polkappe  $P_t$  der Einheitskugel, Dicke der Polkappe:  $1 - t$ .

Definiert man jetzt

$$Z_{81\text{abb}} := -2 \int_0^1 dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \int_{P_t} ds d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}^{3-3\varepsilon}}, \quad (5.412)$$

so findet man also

$$\begin{aligned} \text{IC81abb} &= D(\varepsilon) \left\{ \int_0^\infty dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \int_{B_1^{(3-\varepsilon)}(0)} ds d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}^{3-3\varepsilon}} \right. \\ &\quad \left. + Z_{81\text{abb}} \right\}. \end{aligned} \quad (5.413)$$

Dabei bezeichnet

- $B_1^{(3-\varepsilon)}(0)$  : Einheitskugel im  $(3 - \varepsilon)$ -dimensionalen  $(s, \tilde{\phi})$ -Raum
- $P_t$  : zu  $t$  gehörige Polkappe dieser Kugel (vgl. Abbildung 5.1).

Die Größe  $Z_{81\text{abb}}$  ist für  $\varepsilon = 0$  endlich, denn man berechnet mit Hilfe von Kugelkoordinaten

im  $(s, \tilde{\phi})$ -Raum:

$$\begin{aligned}
Z_{81\text{abb}} &= -2 \int_0^1 dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] 2\pi \int_0^{\arccos t} d\vartheta \sin \vartheta \int_{\frac{t}{\cos \vartheta}}^1 dr \frac{1}{r} + O(\varepsilon) \\
&= -4\pi \int_0^1 dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \int_0^{\arccos t} d\vartheta \sin \vartheta \left[ \log \cos \vartheta - \log t \right] + O(\varepsilon) \\
&= -4\pi \int_0^1 dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \int_t^1 dx \left[ \log x - \log t \right] + O(\varepsilon) \\
&\quad (\text{Substitution: } x = \cos \vartheta) \\
&= -4\pi \int_0^1 dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \left[ x \log x - x - x \log t \right]_t^1 + O(\varepsilon) \\
&= -4\pi \int_0^1 dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \left[ -1 - \log t - t \log t + t + t \log t \right] + O(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Definiert man weiter

$$\begin{aligned}
F &:= \int_0^1 dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \left[ -1 + t - \log t \right] + O(\varepsilon), \\
&= -0.498281018(1),
\end{aligned} \tag{5.414}$$

so hat man also

$$Z_{81\text{abb}} = -4\pi F + O(\varepsilon). \tag{5.415}$$

Der numerische Wert von  $F$  wurde mit dem Programm Maple berechnet.

Damit folgt dann, wenn man auch im verbleibenden Integralausdruck in Gl. (5.413) Kugelkoordinaten im  $(3 - \varepsilon)$ -dimensionalen  $(s, \tilde{\phi})$ -Raum einführt:

$$\begin{aligned}
\text{IC81abb} &= D(\varepsilon) \int_0^\infty dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \int_{B_1^{(3-\varepsilon)}(0)} ds d^{2-\varepsilon} \tilde{\phi} \frac{1}{\sqrt{\tilde{\phi}^2 + s^2}} \\
&\quad - 4\pi D(0) F + O(\varepsilon) \\
&= D(\varepsilon) \underbrace{\int_0^\infty dt \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right]}_{=-4} \frac{2\pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3-\varepsilon}{2}\right)} \int_0^1 dr r^{-1+2\varepsilon} \\
&\quad - 4\pi D(0) F + O(\varepsilon) \\
&= -4 D(\varepsilon) \frac{\pi^{\frac{3-\varepsilon}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3-\varepsilon}{2}\right)} \frac{1}{\varepsilon} - 4\pi D(0) F + O(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{5.416}$$

Mit der Definition (5.410) von  $D(\varepsilon)$  ergibt sich somit schließlich durch Entwicklung nach Potenzen von  $\varepsilon$  nach etwas längerer Rechnung:

$$\begin{aligned}
\text{IC81abb} &= -\frac{1}{32\pi^2} g_0 m_0 L^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \log\left(\frac{4\pi\mu_0 L}{m_0^2 L^2}\right) + \gamma + 1 + \frac{1}{2} F \right\} \\
&\quad + O(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{5.417}$$

### Ergebnis für den Term IC8

Alles zusammengefaßt erhält man daher folgendes Resultat für den Term IC8 (vgl. Gln. (5.364), (5.384), (5.393), (5.405), (5.396), (5.408), (5.417), (5.388), (5.377)):

$$\begin{aligned}
 \text{IC8} &= \text{IC81} + \text{IC82} \\
 &= \text{IC81a} + \text{IC81b} + \text{IC82} \\
 &= \text{IC81aa} + \text{IC81ab} + \text{IC81b} + \text{IC82} \\
 &= \text{IC81aa} + \text{IC81aba} + \text{IC81abb} + \text{IC81b} + \text{IC82} \\
 &= \frac{1}{12} \left( \text{Diagramm} \right) - \frac{1}{384\pi^2} g_0 m_0 L^2 + \frac{1}{2^8 \pi^3} Z_{81\text{aba}} g_0 m_0 L^2 \\
 &\quad - \frac{1}{32\pi^2} g_0 m_0 L^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \log \left( \frac{4\pi\mu_0 L}{m_0^2 L^2} \right) + \gamma + 1 + \frac{1}{2} F \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2^8 \pi^7} Z_{\bar{R}} g_0 m_0 L^2 + \frac{1}{2^9 \pi^7} \left\{ Z_{82\text{A}} + Z_{82\text{B}} + Z_{82\text{C}} \right\} g_0 m_0 L^2 \\
 &\quad + O(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}) + O(\varepsilon). \tag{5.418}
 \end{aligned}$$

Etwas geordnet bedeutet das:

$$\begin{aligned}
 \text{IC8} &= \frac{1}{12} \left( \text{Diagramm} \right) - \frac{1}{32\pi^2} g_0 m_0 L^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \log \left( \frac{4\pi\mu_0 L}{m_0^2 L^2} \right) \right\} \\
 &\quad + g_0 m_0 L^2 \left\{ -\frac{1}{384\pi^2} + \frac{1}{2^8 \pi^3} Z_{81\text{aba}} - \frac{1}{32\pi^2} \left[ \gamma + 1 + \frac{1}{2} F \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2^8 \pi^7} Z_{\bar{R}} + \frac{1}{2^9 \pi^7} [Z_{82\text{A}} + Z_{82\text{B}} + Z_{82\text{C}}] \right\} \\
 &\quad + O(m_0^2 L^2 e^{-c_0 m_0 L}) + O(\varepsilon). \tag{5.419}
 \end{aligned}$$

### Ergebnis für den Graphen IC

Indem man schließlich alle Teilergebnisse der Beiträge IC1 – IC8 für den Graphen IC zusammenfaßt, erhält man (vgl. Gln. (5.285), (5.303), (5.311), (5.328), (5.339), (5.349), (5.354), (5.419))

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{12} \left[ \text{Diagramm} - \left( \text{Diagramm} \right) \right] &= -\frac{1}{32\pi^2} g_0 m_0 L^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \log \left( \frac{4\pi\mu_0 L}{m_0^2 L^2} \right) \right\} \\
 &\quad + g_0 m_0 L^2 \left[ \log(m_0 L) \right]^2 K_{\text{IC},2} \\
 &\quad + g_0 m_0 L^2 \log(m_0 L) K_{\text{IC},1} \\
 &\quad + g_0 m_0 L^2 K_{\text{IC},0} \\
 &\quad + \frac{g_0}{m_0} \log(m_0 L) K_{\text{IC},3} \\
 &\quad + \frac{g_0}{m_0} K_{\text{IC},4}, \\
 &\quad + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(\varepsilon), \tag{5.420}
 \end{aligned}$$

mit den Definitionen

$$\begin{aligned} K_{IC,2} &= \frac{81}{2^{19}\pi} R_0 + \frac{3}{2^8\pi^2} T_0 \\ &= 0.542792055(1) \cdot 10^{-3}, \end{aligned} \quad (5.421)$$

$$\begin{aligned} K_{IC,1} &= \frac{81}{2^{19}\pi} R_1 + \frac{3}{2^8\pi^2} T_1 + \frac{9}{2^8\pi^3} V_1 + \frac{3}{2^{19}\pi^3} U_1 \\ &= -0.9452(1) \cdot 10^{-3}, \end{aligned} \quad (5.422)$$

$$\begin{aligned} K_{IC,0} &= \frac{81}{2^{19}\pi} R_2 + \frac{9}{2^{14}} Z_2 + \frac{3}{2^8\pi^2} T_2 + \frac{9}{2^8\pi^3} V_2 \\ &\quad + \frac{3}{2^{19}\pi^3} U_2 + \frac{3}{2^9\pi^3} Z_6 + \frac{9}{2^{20}\pi^4} Z_7 - \frac{1}{384\pi^2} \\ &\quad + \frac{1}{2^8\pi^3} Z_{81aba} - \frac{1}{2^5\pi^2} \left[ \gamma + 1 + \frac{1}{2} F \right] \\ &\quad - \frac{1}{2^8\pi^7} Z_{\bar{R}} + \frac{1}{2^9\pi^7} [Z_{82A} + Z_{82B} + Z_{82C}] \\ &= 0.764(1) \cdot 10^{-2}, \end{aligned} \quad (5.423)$$

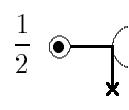
$$\begin{aligned} K_{IC,3} &= \frac{81}{2^{19}\pi} R_3 + \frac{3}{2^8\pi^2} T_3 \\ &= 0.11860892(1), \end{aligned} \quad (5.424)$$

$$K_{IC,4} = \frac{81}{2^{19}\pi} R_4 + \frac{3}{2^8\pi^2} T_4 + \frac{9}{2^9\pi^4} V_4 + \frac{3}{2^{19}\pi^3} U_4. \quad (5.425)$$

Wie erwähnt tragen die Terme mit  $K_{IC,3}$  und  $K_{IC,4}$  nicht zur Oberflächenspannung bei.  $K_{IC,3}$  ist jedoch für die  $L$ -Abhängigkeit des Vorfaktors der Energieaufspaltung von Bedeutung; auf eine numerische Bestimmung von  $K_{IC,4}$  wird verzichtet.

### 5.3.4 Berechnung des Graphen ID =

Mit Hilfe der Feynman-Regeln folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{  } &= \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{g_0}}{2m_0^3 L^2} \mu_0^{\frac{\varepsilon}{2}} L^\varepsilon \right) \left( -\sqrt{3g_0 m_0^2} \mu_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \right) \\ &\quad \times \int d^D x \int d^D y \tilde{\phi}_{(c,0)}(x) G(x,y) G(y,y) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) \\ &= \frac{\sqrt{3} g_0}{4m_0^2 L^2} (\mu_0 L)^\varepsilon \int d^D x \int d^D y \tilde{\phi}_{(c,0)}(x) G(x,y) G(y,y) \tanh(\frac{m_0}{2} y_0). \end{aligned} \quad (5.426)$$

Dieser Graph stammt aus der Nullmodenbehandlung, vgl. Kapitel 2, und der Term

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{(c,0)}(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \left( \sqrt{3m_0^2} \tanh(\frac{m_0}{2} x_0) \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} m_0^3 \frac{\sinh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^3(\frac{m_0}{2} x_0)} \end{aligned} \quad (5.427)$$

sorgt dafür, daß keine Infrarot-Divergenzen auftreten. Es wären auch keine Terme vorhanden die diese Divergenzen kompensieren könnten, da es zu dem Graphen ID keinen

korrespondierenden Graphen ohne Instantonhintergrund gibt, eben weil die Theorie ohne Instantonfeld keine Nullmode und keinen entsprechenden Vertex kennt. Verwendet man das Resultat (5.427) sowie (vgl. Gl. (5.120))

$$G(y, y) = G_0(y, y) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} y_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \right] \quad (5.428)$$

in Gl. (5.426) und ersetzt den Propagator  $G(x, y)$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \textcircled{*} = -\frac{3}{8} \frac{g_0 m_0}{L^2} (\mu_0 L)^\varepsilon \int d^D x \int d^D y \left\{ \frac{\sinh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^3(\frac{m_0}{2} x_0)} \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) \right. \\
& \quad \times \left\{ G_0(y, y) + m_0 L^\varepsilon \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} y_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \right] \right\} \\
& \quad \times \int_0^\infty dt \left\{ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \right. \\
& \quad \quad \times \frac{3m_0}{8} \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} x_0) \cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \\
& \quad + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \\
& \quad \quad \times \frac{3m_0}{4} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0)} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \\
& \quad + \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} \frac{1}{L^{D-1}} e^{-\frac{4\pi^2}{L^2} \vec{n}^2 t} e^{i\frac{2\pi}{L} \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \\
& \quad \quad \times \left. \int_{-\infty}^\infty dk e^{-(k^2 + m_0^2) t} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \Bigg\}. \tag{5.429}
\end{aligned}$$

Analog zur Berechnung von  sind die Ortsintegrale sofort ausführbar (vgl. die Bemerkung nach Gl. (5.35)). Das ergibt:

Es wird sich zeigen, daß der Graph ID auch keine  $\varepsilon$ -Divergenzen, d.h. keine Ultraviolet-Divergenzen, enthält. Da der Graph ID im wesentlichen ein 1-Loop-Graph ist, steht

dies ganz im Einklang mit der Divergenzstruktur der übrigen Graphen. Um die Rechnung übersichtlicher zu gestalten, ersetze ich darum bereits jetzt (vgl. Gl. (5.118))

$$G_0(y, y) = -\frac{m_0}{4\pi} + O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \quad (5.431)$$

Außerdem wird die Substitution  $u = \frac{t}{L^2}$  durchgeführt:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \bigcirc = -\frac{3}{8} g_0 m_0 L^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \frac{\sinh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^3(\frac{m_0}{2} x_0)} \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) \right. \\
& \quad \times \left\{ -\frac{m_0}{4\pi} + m_0 \left[ \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} y_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \right] \right\} \\
& \quad \times \left\{ \frac{3m_0}{4} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0)} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \int_0^{\infty} du e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2}) m_0^2 L^2 u} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \\
& \quad + O(m_0 L e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon) \\
& = -\frac{3}{8} g_0 m_0^3 L^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \frac{\sinh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^3(\frac{m_0}{2} x_0)} \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) \right. \\
& \quad \times \left\{ -\frac{1}{4\pi} + \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} y_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \right\} \\
& \quad \times \left\{ \frac{1}{m_0^2 L^2} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} x_0)} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2} y_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2} y_0)} \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{m_0} e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2}) m_0^2 L^2 u} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\} \\
& \quad + O(m_0 L e^{-m_0 L}) + O(\varepsilon). \tag{5.432}
\end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren der letzten inneren geschweiften Klammer zerfällt dieser Ausdruck in zwei Summanden:

$$\text{ID} = \text{ID1} + \text{ID2} + O\left(m_0 L e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon), \quad (5.433)$$

mit

$$\text{ID1} := -\frac{3}{8} g_0 m_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \frac{\sinh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^5(\frac{m_0}{2}x_0)} \frac{\sinh^2(\frac{m_0}{2}y_0)}{\cosh^3(\frac{m_0}{2}y_0)} \right. \\ \left. \times \left\{ -\frac{1}{4\pi} + \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}y_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}y_0)} \right\} \right\} \quad (5.434)$$

und

$$\text{ID2} := -\frac{3}{8} g_0 m_0^3 L^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \frac{\sinh(\frac{m_0}{2} x_0)}{\cosh^3(\frac{m_0}{2} x_0)} \tanh(\frac{m_0}{2} y_0) \right. \\ \times \left\{ -\frac{1}{4\pi} + \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2} y_0)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2} y_0)} \right\} \\ \times \left. \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{m_0} e^{-(1+\frac{k^2}{m_0^2}) m_0^2 L^2 u} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \right\}. \quad (5.435)$$

Den Term ID1 berechnet man leicht mit Hilfe von [47, 3.512.2]. Man erhält

$$\begin{aligned}
 \text{ID1} &= -\frac{3}{8} g_0 m_0 \left( \frac{2}{m_0} \right)^2 B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \left\{ -\frac{1}{4\pi} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + \mathcal{A}_1(m_0 L) B\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{A}_2(m_0 L) B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \right\} \\
 &= -\frac{3}{2} \frac{g_0}{m_0} \frac{\pi}{8} \left\{ -\frac{1}{8} + \mathcal{A}_1(m_0 L) \frac{\pi}{16} + \mathcal{A}_2(m_0 L) \frac{\pi}{8} \right\} \\
 &= \frac{3}{128} \frac{g_0}{m_0} \pi \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} \mathcal{A}_1(m_0 L) - \pi \mathcal{A}_2(m_0 L) \right\}. \tag{5.436}
 \end{aligned}$$

In den Term ID2 setzt man zunächst die Definitionen von  $\langle x_0 | k \rangle$  und  $\langle k | y_0 \rangle$  ein:

$$\begin{aligned}
 \text{ID2} &= -\frac{3}{8} g_0 m_0^3 L^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \frac{\sinh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)}{\cosh^3\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)} \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right. \\
 &\quad \times \left\{ -\frac{1}{4\pi} + \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2}y_0\right)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right)} \right\} \\
 &\quad \times \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{m_0} \left\{ e^{-\left(1+\frac{k^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u} |N_k|^2 \right. \\
 &\quad \times e^{ikx_0} \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) + 3ikm_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right] \\
 &\quad \times e^{-iky_0} \left[ 2k^2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) - 3ikm_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right] \left. \right\}. \tag{5.437}
 \end{aligned}$$

Ich substituiere  $v = \frac{k}{m_0}$  und führe das  $u$ -Integral aus; zur Definition von  $N_v$  vergleiche man Gl. (5.151):

$$\begin{aligned}
 \text{ID2} &= -\frac{3}{8} g_0 m_0 \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{|N_v|^2}{1+v^2} \right. \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{im_0 x_0 v} \frac{\sinh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)}{\cosh^3\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)} \left[ 2v^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) + 3iv \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \right] \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 e^{-im_0 y_0 v} \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \left[ 2v^2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \tanh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) - 3iv \tanh\left(\frac{m_0}{2}y_0\right) \right] \\
 &\quad \times \left. \left\{ -\frac{1}{4\pi} + \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4\left(\frac{m_0}{2}y_0\right)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}y_0\right)} \right\} \right\}. \tag{5.438}
 \end{aligned}$$

Substituiert man noch  $\hat{x}_0 = m_0 x_0$  und  $\hat{y}_0 = m_0 y_0$  und ersetzt erneut  $\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x}$ , so gilt

$$\text{ID2} = -\frac{3}{8} \frac{g_0}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{|N_v|^2}{1+v^2} \text{Int}_{\hat{x}_0} \text{Int}_{\hat{y}_0} \right\}, \tag{5.439}$$

wobei zu definieren ist:

$$\text{Int}_{\hat{x}_0} := \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x}_0 e^{i\hat{x}_0 v} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} \left[ 2v^2 - 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} + 3iv \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \right] \tag{5.440}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Int}_{\hat{y}_0} &:= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{y}_0 \left\{ e^{-i\hat{y}_0 v} \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \left[ 2v^2 - 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} - 3iv \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ -\frac{1}{4\pi} + \frac{\mathcal{A}_1(m_0 L)}{\cosh^4\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} + \frac{\mathcal{A}_2(m_0 L)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (5.441)$$

Ich rechne als nächstes das  $\hat{x}_0$ -Integral aus:

$$\begin{aligned} \text{Int}_{\hat{x}_0} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x}_0 \left\{ (2v^2 - 1) e^{i\hat{x}_0 v} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} + \frac{3}{2} e^{i\hat{x}_0 v} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)}{\cosh^4\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} \right. \\ &\quad + 3iv e^{i\hat{x}_0 v} \frac{\tanh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} \Big\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{x}_0 \left\{ (2v^2 - 1) e^{i\hat{x}_0 v} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} + \frac{3}{2} e^{i\hat{x}_0 v} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)}{\cosh^4\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} \right. \\ &\quad + 3iv e^{i\hat{x}_0 v} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} - 3iv e^{i\hat{x}_0 v} \frac{1}{\cosh^4\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} \Big\}. \end{aligned} \quad (5.442)$$

Die entstehenden Integrale sind von einem Typ, wie er bereits bei der Berechnung der Graphen IB und IC auftrat. Die benötigten Integrale sind im Anhang B.1 ausgerechnet. Man bekommt letztlich:

$$\text{Int}_{\hat{x}_0} = 2i(1+v^2) \frac{\pi v^2}{\sinh(\pi v)}. \quad (5.443)$$

Jetzt zum Integral  $\text{Int}_{\hat{y}_0}$ :

$$\begin{aligned} \text{Int}_{\hat{y}_0} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{y}_0 \left\{ -\frac{1}{4\pi} (2v^2 - 1) e^{-i\hat{y}_0 v} \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ &\quad + e^{-i\hat{y}_0 v} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \left[ (2v^2 - 1) \mathcal{A}_2(m_0 L) - \frac{3}{8\pi} \right] \\ &\quad + e^{-i\hat{y}_0 v} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}{\cosh^4\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \left[ (2v^2 - 1) \mathcal{A}_1(m_0 L) + \frac{3}{2} \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] \\ &\quad + e^{-i\hat{y}_0 v} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}{\cosh^6\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \frac{3}{2} \mathcal{A}_1(m_0 L) \\ &\quad + \frac{3iv}{4\pi} e^{-i\hat{y}_0 v} \tanh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \\ &\quad + e^{-i\hat{y}_0 v} \frac{\tanh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} [-3iv \mathcal{A}_2(m_0 L)] \\ &\quad \left. + e^{-i\hat{y}_0 v} \frac{\tanh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}{\cosh^4\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} [-3iv \mathcal{A}_1(m_0 L)] \right\}. \end{aligned} \quad (5.444)$$

Ersetzt man wieder  $\tanh^2 x = 1 - \frac{1}{\cosh^2 x}$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Int}_{\hat{y}_0} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{y}_0 \left\{ -\frac{2v^2 - 1}{4\pi} e^{-i\hat{y}_0 v} \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) + \frac{3iv}{4\pi} e^{-i\hat{y}_0 v} \right. \\ &\quad + e^{-i\hat{y}_0 v} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \left[ (2v^2 - 1) \mathcal{A}_2(m_0 L) - \frac{3}{8\pi} \right] \\ &\quad + e^{-i\hat{y}_0 v} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}{\cosh^4\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \left[ (2v^2 - 1) \mathcal{A}_1(m_0 L) + \frac{3}{2} \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] \\ &\quad + e^{-i\hat{y}_0 v} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}{\cosh^6\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \frac{3}{2} \mathcal{A}_1(m_0 L) \\ &\quad + e^{-i\hat{y}_0 v} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \left[ \frac{-3iv}{4\pi} - 3iv \mathcal{A}_2(m_0 L) \right] \\ &\quad + e^{-i\hat{y}_0 v} \frac{1}{\cosh^4\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \left[ 3iv \mathcal{A}_2(m_0 L) - 3iv \mathcal{A}_1(m_0 L) \right] \\ &\quad \left. + e^{-i\hat{y}_0 v} \frac{1}{\cosh^6\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} 3iv \mathcal{A}_1(m_0 L) \right\}. \end{aligned} \quad (5.445)$$

Diese  $\hat{y}_0$ -Integrale sind in den Anhängen B.1 und B.2 ausgeführt, wobei zu beachten ist, daß die ersten beiden im Distributionssinne zu verstehen sind. Setzt man die Resultate aus diesen Anhängen ein, so findet man

$$\begin{aligned} \text{Int}_{\hat{y}_0} &= -\frac{i}{6} \left\{ 3v^2 + 3 + 12\pi v^4 \mathcal{A}_2(m_0 L) + 12\pi v^2 \mathcal{A}_2(m_0 L) + 16\pi v^4 \mathcal{A}_1(m_0 L) \right. \\ &\quad \left. + 8\pi v^6 \mathcal{A}_1(m_0 L) + 8\pi v^2 \mathcal{A}_1(m_0 L) \right\} \frac{1}{\sinh(\pi v)} \\ &\quad + \frac{3}{2} iv \delta(v). \end{aligned} \quad (5.446)$$

Etwas geordnet ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{Int}_{\hat{y}_0} &= -i \mathcal{A}_1(m_0 L) \left[ \frac{4}{3} \pi v^6 + \frac{8}{3} \pi v^4 + \frac{4}{3} \pi v^2 \right] \frac{1}{\sinh(\pi v)} \\ &\quad - i \mathcal{A}_2(m_0 L) \left[ 2\pi v^4 + 2\pi v^2 \right] \frac{1}{\sinh(\pi v)} \\ &\quad - i \left[ \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \right] \frac{1}{\sinh(\pi v)} + \frac{3}{2} iv \delta(v) \\ &= \left( -\frac{4}{3} \pi i \right) \mathcal{A}_1(m_0 L) [v^2 + 1]^2 \frac{v^2}{\sinh(\pi v)} \\ &\quad - 2\pi i \mathcal{A}_2(m_0 L) [v^2 + 1] \frac{v^2}{\sinh(\pi v)} \\ &\quad - \frac{i}{2} [v^2 + 1] \frac{1}{\sinh(\pi v)} + \frac{3}{2} iv \delta(v). \end{aligned} \quad (5.447)$$

Wenn man jetzt berücksichtigt, daß  $\text{Int}_{\hat{x}_0}$  an der Stelle  $v = 0$  endlich ist, sogar 0, so erkennt man, daß der Term mit  $v \delta(v)$  nichts zu ID2 beiträgt. Im Integranden von ID2 tritt nämlich gemäß Gl. (5.439) das Produkt von  $\text{Int}_{\hat{x}_0}$  und  $\text{Int}_{\hat{y}_0}$  auf.

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \text{ID2} &= -\frac{3}{8} \frac{g_0}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \frac{|N_v|^2}{1+v^2} \frac{2(1+v^2)\pi v^2}{\sinh(\pi v)} \right. \\ &\quad \times \left. \left\{ \frac{4}{3} \pi \mathcal{A}_1(m_0 L) [v^2 + 1]^2 \frac{v^2}{\sinh(\pi v)} + 2\pi \mathcal{A}_2(m_0 L) [v^2 + 1] \frac{v^2}{\sinh(\pi v)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} [v^2 + 1] \frac{1}{\sinh(\pi v)} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (5.448)$$

Schließlich findet man also mit der Definition von  $N_v$  (Gl. (5.151))

$$\text{ID2} = -\frac{3}{8} \frac{g_0}{m_0} \left\{ P_1 \mathcal{A}_1(m_0 L) + P_2 \mathcal{A}_2(m_0 L) + P_3 \right\}, \quad (5.449)$$

mit

$$P_1 := \frac{4}{3} \pi \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(v^2+1)}{(4v^2+1) \sinh^2(\pi v)} = 0.047130418(1), \quad (5.450)$$

$$\begin{aligned} P_2 &:= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4}{(4v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= 0.049816392(1), \end{aligned} \quad (5.451)$$

$$\begin{aligned} P_3 &:= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^2}{(4v^2 + 1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= 0.037194598(1). \end{aligned} \quad (5.452)$$

Die numerische Bestimmung wurde mit dem Programm Maple durchgeführt. Letztendlich ergibt sich damit für den Graphen ID (vgl. Gln. (5.433), (5.436), (5.449))

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} \circ = \text{ID1} + \text{ID2} + O\left(m_0 L e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\
&= \frac{3}{128} \frac{g_0}{m_0} \pi \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} \mathcal{A}_1(m_0 L) - \pi \mathcal{A}_2(m_0 L) \right\} \\
&\quad - \frac{3}{8} \frac{g_0}{m_0} \left\{ P_1 \mathcal{A}_1(m_0 L) + P_2 \mathcal{A}_2(m_0 L) + P_3 \right\} \\
&\quad + O\left(m_0 L e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon) \\
&= -\frac{g_0}{m_0} \left\{ \left[ \frac{3\pi^2}{256} + \frac{3}{8} P_1 \right] \mathcal{A}_1(m_0 L) + \left[ \frac{3\pi^2}{128} + \frac{3}{8} P_2 \right] \mathcal{A}_2(m_0 L) \right. \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{3\pi}{128} + \frac{3}{8} P_3 \right] \right\} + O\left(m_0 L e^{-m_0 L}\right) + O(\varepsilon). \quad (5.453)
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch die Ergebnisse für  $\mathcal{A}_1(m_0L)$  und  $\mathcal{A}_2(m_0L)$  aus Anhang C.5 bzw. C.6, so erhält man als Ergebnis für den aus der Nullmodenbehandlung entstandenen Graphen ID:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \textcircled{1} - \textcircled{2} &= -\frac{g_0}{m_0} \log(m_0L) K_{ID,3} \\ &\quad - \frac{g_0}{m_0} K_{ID,4} \\ &\quad + O(m_0L e^{-m_0L}) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (5.454)$$

mit

$$\begin{aligned} K_{ID,3} &= \frac{3}{16\pi} \left[ \frac{3\pi^2}{256} + \frac{3}{8} P_1 \right] \\ &= 0.795774716(2) \cdot 10^{-2}, \end{aligned} \quad (5.455)$$

$$\begin{aligned} K_{ID,4} &= \left[ \frac{3\pi^2}{256} + \frac{3}{8} P_1 \right] O_c + \left[ \frac{3\pi^2}{128} + \frac{3}{8} P_2 \right] \mathcal{A}_{2,c} \\ &\quad - \frac{3\pi}{128} + \frac{3}{8} P_3 \\ &= 0.578689881(6) \cdot 10^{-1}. \end{aligned} \quad (5.456)$$

Der Graph ID liefert somit keine Terme proportional zu  $L^2$  und spielt daher für die Oberflächenspannung keine Rolle, aber die Konstante  $K_{ID,3}$  trägt zur  $L$ -Abhängigkeit des Vorfaktors der Energieaufspaltung bei.



# Kapitel 6

## Renormierung

Nachdem im vorigen Kapitel die Graphen in dimensioneller Regularisierung berechnet worden sind, ist nun die Renormierung durchzuführen, um ein in  $D = 3$  Dimensionen ( $\varepsilon = 0$ ) endliches Ergebnis zu erhalten. Ich verwende ein Renormierungsschema wie es in [73, 74] definiert ist (vgl. auch [22, 50, 64]). Zu beachten ist hierbei, daß die  $\phi^4$ -Theorie in der Phase gebrochener Symmetrie betrachtet wird (vgl. Gln. (2.1), (2.2)):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{m_0^2}{4} \phi_0^2 + \frac{g_0}{4!} \phi_0^4 + \frac{3}{8} \frac{m_0^4}{g_0} \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 + V(\phi_0),\end{aligned}\quad (6.1)$$

mit

$$V(\phi_0) = \frac{g_0}{4!} \left( \phi_0^2 - v_0^2 \right)^2, \quad v_0 = \sqrt{\frac{3m_0^2}{g_0}} \quad (6.2)$$

(vgl. auch Abbildung 2.1). Durch Einführen des Feldes

$$\phi_0^- = \phi_0 - v_0, \quad (6.3)$$

entsprechend einer Anregung aus dem Potentialminimum  $\phi_+ \equiv v_0$ , erhält man

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0^- \partial^\mu \phi_0^- + \frac{m_0^2}{2} (\phi_0^-)^2 + \frac{\sqrt{3g_0 m_0^2}}{3!} (\phi_0^-)^3 + \frac{g_0}{4!} (\phi_0^-)^4. \quad (6.4)$$

Mit den üblichen Definitionen

$$G_{\phi_0^-}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) := \langle 0 | T(\phi_0^-(x_1) \cdots \phi_0^-(x_n)) | 0 \rangle, \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned}G'_{\phi_0^-}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) &:= \int d^3 x_1 \dots \int d^3 x_n G_{\phi_0^-}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) e^{ip_1 x_1} \dots e^{ip_n x_n} \\ &\quad (\text{Fourier-Transformation}),\end{aligned}\quad (6.6)$$

$$\tilde{G}'_{\phi_0^-}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_1, \dots, p_n) G_{\phi_0^-}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (6.7)$$

für die  $n$ -Punkt-Funktion und ihre Fourier-Transformierte bzw. Fourier-Transformierte mit abgespaltener Delta-Distribution folgen aus der Lagrange-Dichte (6.4) folgende Feynman-Regeln für  $\tilde{G}_{\phi_0^-}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ :

$$\overline{\overrightarrow{p}} \quad \hat{=} \quad \frac{1}{p^2 + m_0^2},$$

	$\hat{=}$	$-\sqrt{3 g_0 m_0^2},$	
	$\hat{=}$	$-g_0,$	
			$\bullet$ über unabhängige Schleifenimpulse $q$ mit $\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}$ integrieren,
			$\bullet$ Impulserhaltung an allen inneren Punkten,
			$\bullet$ übliche Symmetriefaktoren $\frac{1}{S}.$

(6.8)

Die renormierten Größen werden nun mit Hilfe der Greenschen Funktionen des Feldes  $\phi_0^-$  definiert.  $\tilde{G}_{\phi_0^-, c}^{(n)}$  bezeichnet die zusammenhängenden Greenschen Funktionen, zu denen nur Feynman–Graphen beitragen, die lediglich aus einer einzigen Zusammenhangskomponente bestehen. Das Renormierungsschema ist dann durch folgende Definitionen gegeben:

$$m_R^2 := \frac{\left[ \tilde{G}_{\phi_0^-, c}^{(2)}(0, 0) \right]^{-1}}{\frac{\partial}{\partial p^2}|_{p^2=0} \left[ \tilde{G}_{\phi_0^-, c}^{(2)}(p, -p) \right]^{-1}}, \quad (6.9)$$

$$Z_R^{-1} := \frac{\partial}{\partial p^2}|_{p^2=0} \left[ \tilde{G}_{\phi_0^-, c}^{(2)}(p, -p) \right]^{-1}, \quad (6.10)$$

$$v_R := \frac{\langle \phi_0^- \rangle}{Z_R^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{Z_R^{\frac{1}{2}}} G_{\phi_0^-}^{(1)}(x_1), \quad (6.11)$$

$$g_R^{(D)} := \frac{3m_R^2}{v_R^2}, \quad (6.12)$$

$$u_R := \frac{g_R}{m_R} \quad (u_R \text{ ist dimensionslos}). \quad (6.13)$$

$g_R$  ist die renormierte Kopplung in drei Dimensionen. Mit Hilfe der Feynman–Regeln (6.8) sind nun diese Renormierungsgrößen in dimensioneller Regularisierung bis einschließlich zur 2–Loop–Ordnung auszurechnen. Das Ergebnis für die im weiteren benötigten Größen  $g_R$ ,  $m_R^2$  und  $u_R$  lautet [64, 65]

$$g_R = g_0 \left\{ 1 - \frac{7}{32\pi} u_0 + \frac{17099}{331776\pi^2} u_0^2 + O(u_0^3) \right\}, \quad (6.14)$$

$$m_R^2 = m_0^2 \left\{ 1 + \frac{3}{64\pi} u_0 + \frac{1}{64\pi^2} u_0^2 \left[ \frac{3973}{5184} + \frac{2}{3} B^{(div)} \right] + O(u_0^3) \right\}, \quad (6.15)$$

$$u_R = u_0 \left\{ 1 - \frac{31}{128\pi} u_0 + \frac{1}{64\pi^2} u_0^2 \left[ \frac{45565}{13824} - \frac{1}{3} B^{(div)} \right] + O(u_0^3) \right\}, \quad (6.16)$$

mit

$$u_0 := \frac{g_0}{m_0}, \quad (6.17)$$

$$B^{(div)} := \frac{1}{\varepsilon} - \log \left( \frac{m_0^2}{4\pi\mu_0^2} \right) - \gamma + \frac{\tilde{C}}{4\pi} + O(\varepsilon), \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{C} &:= \int_0^1 dt \int_0^1 du \frac{t \log(t - t^2 + t^2 u(1-u))}{\sqrt{[t - t^2 + t^2 u(1-u)]^3}} \\ &= -15.0448(1). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Die invertierten Beziehungen sind dann

$$g_0 = g_{\text{R}} \left\{ 1 + \frac{7}{32\pi} u_{\text{R}} + \frac{8177}{165888\pi^2} u_{\text{R}}^2 + O(u_{\text{R}}^3) \right\}, \quad (6.20)$$

$$m_0^2 = m_{\text{R}}^2 \left\{ 1 - \frac{3}{64\pi} u_{\text{R}} - \frac{1}{64\pi^2} u_{\text{R}}^2 \left[ \frac{14021}{10368} + \frac{2}{3} B_{\text{R}}^{(\text{div})} \right] + O(u_{\text{R}}^3) \right\}, \quad (6.21)$$

$$u_0 = u_{\text{R}} \left\{ 1 + \frac{31}{128\pi} u_{\text{R}} + \frac{1}{64\pi^2} u_{\text{R}}^2 \left[ \frac{58223}{13824} + \frac{1}{3} B_{\text{R}}^{(div)} \right] + O(u_{\text{R}}^3) \right\}, \quad (6.22)$$

mit

$$B_{\text{R}}^{(div)} := \frac{1}{\varepsilon} - \log\left(\frac{m_{\text{R}}^2}{4\pi\mu_0^2}\right) - \gamma + \frac{\tilde{C}}{4\pi} + O(\varepsilon). \quad (6.23)$$

Dazu ist noch folgendes anzumerken. In [64, 65] ist durchweg ohne Renormierungsskala gerechnet, was statt des obigen Termes  $B^{(div)}$  bzw.  $B_R^{(div)}$  den Term

$$\hat{B}^{(div)} = \frac{1}{\varepsilon} - \log\left(\frac{m_0^2}{4\pi}\right) - \gamma + \frac{\tilde{C}}{4\pi} + O(\varepsilon) \quad (6.24)$$

liefert, wobei man hier  $m_0$  in einer gewissen Masseneinheit angeben muß, damit im Argument des Logarithmus eine dimensionslose Größe steht. Führt man statt dessen, wie in dieser Arbeit, eine Renormierungsskala gemäß

$$g_0^{(D)} = g_0 \mu_0^\varepsilon \quad (g_0: \text{Kopplungskonstante in 3 Dimensionen}) \quad (6.25)$$

ein, so zeigt sich, daß die einzige Änderung in den Ergebnissen für die renormierten Größen in der Ersetzung

$$-\log\left(\frac{m_0^2}{4\pi}\right) \longrightarrow -\log\left(\frac{m_0^2}{4\pi\mu_0^2}\right) \quad (6.26)$$

besteht. Denn eine Änderung kann nur aus der Divergenz  $\frac{1}{\varepsilon}$  herrühren, da  $g_0^{(D)} = g_0 + O(\varepsilon)$  gilt; weil  $B^{(div)}$  aus einem 2-Loop-Graphen entsteht, erhält man den Ausdruck

$$g_0^2 \mu_0^{2\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} = g_0^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \log(\mu_0^2) + O(\varepsilon) \right\}, \quad (6.27)$$

also den zusätzlichen Term  $\log(\mu_0^2)$ , was gerade der Ersetzung (6.26) entspricht. Letztlich wird also die in Gl. (6.24) implizit zu verwendende Massenskala nur explizit ausgeschrieben.

Mit diesen Renormierungsbeziehungen wird jetzt die Energieaufspaltung in  $D$  Dimensionen (vgl. Gl. (2.78) und die anschließende Bemerkung),

$$E_{0a} = 2 \sqrt{\frac{S_{c,D}}{2\pi}} \left( \frac{\det' \mathbb{M}_{(1)}}{\det \mathbb{M}_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ -S_{c,D} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \bullet \\ \text{---} \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \times \end{array} + \frac{1}{8} \left[ \begin{array}{c} \circ \circ \\ \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \circ \circ \\ \text{---} \end{array} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \left[ \begin{array}{c} \circ \circ \\ \text{---} \\ \times \quad \times \end{array} - \begin{array}{c} \circ \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right] + \frac{1}{12} \left[ \begin{array}{c} \circ \circ \circ \\ \text{---} \\ \times \quad \quad \times \end{array} - \begin{array}{c} \circ \circ \circ \\ \text{---} \\ \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \right] \right. \\ \left. + O(g_0^2) \right\}, \quad (6.28)$$

durch die renormierten Größen ausgedrückt.  $S_{c,D}$  ist dabei die Wirkung der Kink-Lösung  $\phi_{(c,0)}$  mit Zentrum bei  $x_0 = 0$  in  $D$  Dimensionen. Diese soll als erstes durch die renormierten Größen dargestellt werden.

## 6.1 Klassische Wirkung in renormierten Größen

In Kapitel 2 hat man

$$\begin{aligned} S_{c,D} &= \frac{2 m_0^3}{g_0^{(D)}} L^{D-1} \\ &= \frac{2 m_0^3}{g_0} \mu_0^{-\varepsilon} L^{2-\varepsilon} \quad (g_0^{(D)} = g_0 \mu_0^\varepsilon, D = 3 - \varepsilon) \\ &= \frac{2 m_0^3}{g_0} L^2 (\mu_0 L)^{-\varepsilon}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

gefunden (vgl. Gl. (2.38)). Ich berechne jetzt als erstes  $m_0^3$  in renormierten Größen:

$$\begin{aligned} m_0^3 &= (m_0^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= m_R^3 \left[ 1 - \frac{3}{64\pi} u_R - \frac{1}{64\pi^2} u_R^2 \left[ \frac{14021}{10368} + \frac{2}{3} B_R^{(div)} \right] + O(u_R^3) \right]^{\frac{3}{2}} \\ &= m_R^3 \left\{ 1 - \frac{9}{128\pi} u_R - \frac{3}{128\pi^2} u_R^2 \left[ \frac{14021}{10368} + \frac{2}{3} B_R^{(div)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \left( \frac{3}{64\pi} \right)^2 u_R^2 + O(u_R^3) \right\} \quad (\text{binomische Reihe}) \\ &= m_R^3 \left\{ 1 - \frac{9}{128\pi} u_R - \frac{3}{128\pi^2} u_R^2 \left[ \frac{27313}{20736} + \frac{2}{3} B_R^{(div)} \right] + O(u_R^3) \right\}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Für  $\frac{1}{g_0}$  bekommt man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g_0} &= \frac{1}{g_R} \left[ 1 + \frac{7}{32\pi} u_R + \frac{8177}{165888\pi^2} u_R^2 + O(u_R^3) \right]^{-1} \\ &= \frac{1}{g_R} \left\{ 1 - \frac{7}{32\pi} u_R - \frac{8177}{165888\pi^2} u_R^2 + \left( \frac{7}{32\pi} \right)^2 u_R^2 + O(u_R^3) \right\} \\ &\quad (\text{binomische oder auch geometrische Reihe}) \\ &= \frac{1}{g_R} \left\{ 1 - \frac{7}{32\pi} u_R - \frac{239}{165888\pi^2} u_R^2 + O(u_R^3) \right\}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Die letzten beiden Teilergebnisse zusammengefaßt erhält man für  $\frac{m_0^3}{g_0}$ :

$$\begin{aligned} \frac{m_0^3}{g_0} &= \frac{m_R^3}{g_R} \left\{ 1 - \frac{9}{128\pi} u_R - \frac{3}{128\pi^2} u_R^2 \left[ \frac{27313}{20736} + \frac{2}{3} B_R^{(div)} \right] + O(u_R^3) \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{7}{32\pi} u_R - \frac{239}{165888\pi^2} u_R^2 + O(u_R^3) \right\} \\ &= \frac{m_R^3}{g_R} \left\{ 1 - \frac{37}{128\pi} u_R - \frac{44939}{2654208\pi^2} u_R^2 - \frac{1}{64\pi^2} u_R^2 B_R^{(div)} + O(u_R^3) \right\} \\ &= \frac{m_R^2}{u_R} \left\{ 1 - \frac{37}{128\pi} u_R - \frac{44939}{2654208\pi^2} u_R^2 - \frac{1}{64\pi^2} u_R^2 B_R^{(div)} + O(u_R^3) \right\}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Damit lässt sich nun  $S_{c,D}$  berechnen:

$$\begin{aligned} S_{c,D} &= 2 \frac{m_0^3}{g_0} L^2 (\mu_0 L)^{-\varepsilon} \\ &= 2 \frac{m_R^2}{u_R} L^2 (\mu_0 L)^{-\varepsilon} \left\{ 1 - \frac{37}{128 \pi} u_R - \frac{44939}{2654208 \pi^2} u_R^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{64 \pi^2} u_R^2 B_R^{(div)} + O(u_R^3) \right\}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Mit (Gl. (6.23))

$$B_R^{(div)} = \frac{1}{\varepsilon} - \log \left( \frac{m_R^2}{4\pi \mu_0^2} \right) - \gamma + \frac{\tilde{C}}{4\pi} + O(\varepsilon) \quad (6.34)$$

wird das zu

$$\begin{aligned} S_{c,D} &= 2 \frac{m_R^2}{u_R} L^2 \left\{ 1 - \varepsilon \log (\mu_0 L) + O(\varepsilon^2) \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{37}{128 \pi} u_R - \frac{44939}{2654208 \pi^2} u_R^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_R^2}{64 \pi^2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \log \left( \frac{m_R^2}{4\pi \mu_0^2} \right) - \gamma + \frac{\tilde{C}}{4\pi} + O(\varepsilon) \right] + O(u_R^3) \right\} \\ &= 2 \frac{m_R^2}{u_R} L^2 \left\{ 1 - \frac{37}{128 \pi} u_R + u_R^2 \left[ -\frac{44939}{2654208 \pi^2} + \frac{\gamma}{64 \pi^2} - \frac{\tilde{C}}{256 \pi^3} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_R^2}{64 \pi^2} \left[ \frac{1}{\varepsilon} - \log (\mu_0 L) - \log \left( \frac{m_R^2}{4\pi \mu_0^2} \right) \right] + O(u_R^3) + O(\varepsilon) \right\} \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \frac{m_R^2}{u_R} L^2 \left\{ 1 - \frac{37}{128 \pi} u_R + u_R^2 \left[ -\frac{44939}{2654208 \pi^2} + \frac{\gamma}{64 \pi^2} - \frac{\tilde{C}}{256 \pi^3} \right] + O(u_R^3) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{32 \pi^2} u_R m_R^2 L^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \log \left( \frac{m_R^2 L^2}{4\pi \mu_0 L} \right) \right\} + O(\varepsilon) \\ &= 2 \frac{m_R^2}{u_R} L^2 \left\{ 1 - \frac{37}{128 \pi} u_R + u_R^2 \left[ -\frac{44939}{2654208 \pi^2} + \frac{\gamma}{64 \pi^2} - \frac{\tilde{C}}{256 \pi^3} \right] + O(u_R^3) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{32 \pi^2} u_R m_R^2 L^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \log \left( \frac{4\pi \mu_0 L}{m_R^2 L^2} \right) \right\} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (6.36)$$

Als nächstes wird  $\sqrt{S_{c,D}}$  berechnet:

$$\begin{aligned} \sqrt{S_{c,D}} &= e^{\frac{1}{2} \log S_{c,D}} \\ &= e^{\frac{1}{2} \log (2 \frac{m_R^3}{g_R} L^2)} \exp \left\{ \frac{1}{2} \log \left( 1 - \frac{37}{128 \pi} u_R + O(u_R^2) \right) \right\} \quad (\text{vgl. Gl. (6.35)}) \\ &= \sqrt{\frac{2 m_R^2}{u_R} L^2} e^{-\frac{37}{256 \pi} u_R + O(u_R^2)} \quad (\text{Logarithmusreihe}). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Jetzt zum Determinantenverhältnis  $\left( \frac{\det' M_{(1)}}{\det M_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}}$  in renormierten Größen.

## 6.2 Determinantenverhältnis in renormierten Größen

Im Kapitel 4 hat man

$$\begin{aligned} \left( \frac{\det' M_{(1)}}{\det M_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{8\pi}{L^2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{m_0^2 L^2}{8\pi} \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] + O\left(\sqrt{m_0 L} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L c_0}\right) + O(\varepsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

erhalten (vgl. Gl. (4.61)). Es wird hier einfach  $m_0^2$  durch  $m_R^2$  gemäß Gl. (6.21) ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\det' M_{(1)}}{\det M_{(0)}} \right)^{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{8\pi}{L^2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{m_R^2 L^2}{8\pi} \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] \right. \\ &+ \frac{3 m_R^2 L^2}{512 \pi^2} u_R \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] + (\sqrt{m_0 L} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L c_0}) \\ &\left. + O(\varepsilon) + O(u_R^2) \right\}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Schließlich zu den verschiedenen Graphen.

## 6.3 Ergebnisse der Graphenberechnungen in renormierten Größen

Um die Ergebnisse der einzelnen Graphen in renormierten Größen auszudrücken, ist folgendes zu beachten. Alle Ergebnisse für die Graphen sind von der Ordnung  $g_0$ , so daß man bis auf Terme der Ordnung  $g_R^2$  einfach  $g_0$  durch  $g_R$  und  $m_0$  durch  $m_R$  ersetzen darf:

$$g_0 = g_R + O(g_R^2), \quad (6.40)$$

$$m_0 = m_R + O(g_R). \quad (6.41)$$

Man erhält (vgl. Gln. (5.127), (5.228), (5.420), und (5.454)):

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left[ \text{Diagramm } 1 - \text{Diagramm } 2 \right] &= u_R m_R^2 L^2 \left[ \log(m_R L) \right]^2 K_{IA,2} \\ &+ u_R m_R^2 L^2 \log(m_R L) K_{IA,1} \\ &+ u_R m_R^2 L^2 K_{IA,0} \\ &+ O(m_R L e^{-m_R L}) + O(\varepsilon) + O(u_R^2), \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left[ \text{Diagramm } 3 - \text{Diagramm } 4 \right] &= u_R m_R^2 L^2 \left[ \log(m_R L) \right]^2 K_{IB,2} \\ &+ u_R m_R^2 L^2 \log(m_R L) K_{IB,1} \\ &+ u_R m_R^2 L^2 K_{IB,0} \\ &+ O(m_R^3 L^3 e^{-m_R L}) + O(\varepsilon) + O(u_R^2), \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12} \left[ \text{Diagramm mit geschlossener Kurve} - \text{Diagramm mit gestrichelter Kurve} \right] &= -\frac{1}{32\pi^2} u_R m_R^2 L^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \log \left( \frac{4\pi\mu_0 L}{m_R^2 L^2} \right) \right\} \\
&\quad + u_R m_R^2 L^2 \left[ \log(m_R L) \right]^2 K_{IC,2} \\
&\quad + u_R m_R^2 L^2 \log(m_R L) K_{IC,1} \\
&\quad + u_R m_R^2 L^2 K_{IC,0} \\
&\quad + u_R \log(m_R L) K_{IC,3} + u_R K_{IC,4} \\
&\quad + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(\varepsilon) + O(u_R^2), \tag{6.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Diagramm mit geschlossenem Kreis} &= -u_R \log(m_R L) K_{ID,3} - u_R K_{ID,4} \\
&\quad + O\left(m_R L e^{-m_R L}\right) + O(\varepsilon) + O(u_R^2). \tag{6.45}
\end{aligned}$$

Ich gehe nun folgendermaßen vor. Zunächst wird gezeigt, daß sich die  $\frac{1}{\varepsilon}$ -Divergenzen (UV-Divergenzen) und die Terme mit der Renormierungsskala  $\mu_0$  im Ergebnis für  $E_{0a}$  forttheben. Dann rechnet man nach, daß sich auch alle Terme proportional zu  $L^2 \left[ \log(m_R L) \right]^2$  bzw.  $L^2 \log(m_R L)$  gegeneinander wegheben. Danach kann man also durch Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  zum gewünschten Fall  $D = 3$  übergehen und aus dem Term proportional zu  $L^2$  im Argument der Exponentialfunktion die gesuchte Oberflächenspannung bis einschließlich zur 2-Loop-Ordnung bestimmen.

## 6.4 Beseitigung der UV-Divergenzen und der Renormierungsskala $\mu_0$

Die Teilergebnisse der Abschnitte 6.1 bis 6.3 zeigen, daß  $\frac{1}{\varepsilon}$ -Divergenzen und Renormierungsskala  $\mu_0$  nur in dem Term  $e^{-S_{c,D}}$  und im Beitrag

$$\frac{1}{12} \left[ \text{Diagramm mit geschlossener Kurve} - \text{Diagramm mit gestrichelter Kurve} \right]$$

enthalten sind. In  $-S_{c,D}$  sind die relevanten Terme

$$-\frac{1}{32\pi^2} u_R m_R^2 L^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \log \left( \frac{4\pi\mu_0 L}{m_R^2 L^2} \right) \right\}, \tag{6.46}$$

und aus den Graphen IC und OIC hat man

$$-\frac{1}{32\pi^2} u_R m_R^2 L^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} + \log \left( \frac{4\pi\mu_0 L}{m_R^2 L^2} \right) \right\}. \tag{6.47}$$

Da zur Energieaufspaltung  $E_{0a}$  die Beiträge in der Form

$$\exp \left\{ -S_{c,D} + \frac{1}{12} \left[ \text{Diagramm mit geschlossener Kurve} - \text{Diagramm mit gestrichelter Kurve} \right] + \dots \right\} \tag{6.48}$$

eingehen, sieht man, daß sich beide Anteile genau gegeneinander forttheben. Sowohl die UV-Divergenzen als auch die Renormierungsskala  $\mu_0$  treten daher nach der Renormierung im Ergebnis für  $E_{0a}$  nicht mehr auf.

## 6.5 Beseitigung der logarithmischen Terme

Terme mit einem Faktor  $L^2 \log(m_R L)$  stammen nur aus Beiträgen der Graphen IA, IB und IC. Insgesamt bekommt man einerseits

$$u_R m_R^2 L^2 \left[ \log(m_R L) \right]^2 \left\{ K_{IA,2} + K_{IB,2} + K_{IC,2} \right\}, \quad (6.49)$$

andererseits erhält man

$$u_R m_R^2 L^2 \log(m_R L) \left\{ K_{IA,1} + K_{IB,1} + K_{IC,1} \right\}. \quad (6.50)$$

Mit den Resultaten (5.128), (5.229) und (5.421) rechnet man

$$K_{IA,2} + K_{IB,2} + K_{IC,2} = (-0.2 \pm 2) \cdot 10^{-12} \quad (6.51)$$

aus, und mit den Ergebnissen (5.129), (5.230) und (5.422) gilt

$$K_{IA,1} + K_{IB,1} + K_{IC,1} = (-0.3 \pm 10) \cdot 10^{-7}. \quad (6.52)$$

Im Rahmen der Rechengenaugkeit sind also sowohl die Konstantensumme (6.51) als auch (6.52) Null. Wie erwünscht treten also keine  $L^2 \log(m_R L)$ -Terme im Argument der Exponentialfunktion der Energieaufspaltung mehr auf. Daher geht  $E_{0a}$  für große  $L$  wie erwartet wie

$$e^{-\sigma(L) L^2} \quad (6.53)$$

gegen 0, so daß man eine wohldefinierte Oberflächenspannung hat (vgl. Kapitel 1). Diese soll jetzt bestimmt werden.

## 6.6 Bestimmung der Oberflächenspannung

Nachdem nun sowohl die UV-Divergenzen als auch die Terme mit einem Faktor  $L^2 \log(m_R L)$  beseitigt sind, nimmt die Energieaufspaltung  $E_{0a}$  in  $D = 3$  Dimensionen ( $\varepsilon = 0$ ) folgende Form an:

$$\begin{aligned} E_{0a} &= A \exp \left\{ -S_c^{reg} - \frac{m_R^2 L^2}{8\pi} \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] + \frac{3}{512\pi^2} u_R m_R^2 L^2 \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] \right. \\ &\quad \left. + u_R m_R^2 L^2 \left[ K_{IA,0} + K_{IB,0} + K_{IC,0} \right] + O\left(\frac{1}{L^2}\right) + O(u_R^2) \right\}, \end{aligned} \quad (6.54)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2m_R^2 L^2}{u_R}} e^{-\frac{37}{256\pi} u_R} \sqrt{\frac{8\pi}{L^2}} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \\ &\quad \times (m_R L)^{u_R K_{IC,3}} e^{u_R K_{IC,4}} (m_R L)^{-u_R K_{ID,3}} e^{-u_R K_{ID,4}} \\ &= 4 \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \sqrt{\frac{2}{u_R}} m_R (m_R L)^{(K_{IC,3} - K_{ID,3})u_R} e^{-\left(\frac{37}{256\pi} - K_{IC,4} + K_{ID,4}\right)u_R}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

$S_c^{reg}$  ist dabei der Teil von  $S_{c,D}$  ohne die UV-Divergenz und ohne den Logarithmusterm, der die Skala  $\mu_0$  enthält, also die erste Zeile in Gl. (6.36). Setzt man dies ein, so erhält man

$$E_{0a} = A e^{-\sigma_\infty L^2 + O(\frac{1}{L^2})}, \quad (6.56)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \sigma_\infty &= \frac{2m_R^2}{u_R} \left\{ 1 - \frac{37}{128\pi} u_R + u_R^2 \left[ -\frac{44939}{2654208\pi^2} + \frac{\gamma}{64\pi^2} - \frac{\tilde{C}}{256\pi^3} \right] \right. \\
 &\quad + \frac{u_R}{16\pi} \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] - \frac{3u_R^2}{1024\pi^2} \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] \\
 &\quad \left. - \frac{u_R^2}{2} [K_{IA,0} + K_{IB,0} + K_{IC,0}] + O(u_R^3) \right\} \\
 &= \frac{2m_R^2}{u_R} \left\{ 1 + \sigma_{1l} \frac{u_R}{4\pi} + \sigma_{2l} \left( \frac{u_R}{4\pi} \right)^2 + O(u_R^3) \right\}, \tag{6.57}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1l} &= \frac{1}{4} \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] - \frac{37}{32} \\
 &= -0.2002602(1) \tag{6.58}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \sigma_{2l} &= -\frac{44939}{165888} + \frac{\gamma}{4} - \frac{\tilde{C}}{16\pi} - \frac{3}{64} \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] \\
 &\quad - 8\pi^2 [K_{IA,0} + K_{IB,0} + K_{IC,0}] \\
 &= -0.76(8) \cdot 10^{-2} \tag{6.59}
 \end{aligned}$$

gilt.



## Kapitel 7

# Resultate für universelle Amplitudenverhältnisse

Mit dem Resultat für die Oberflächenspannung aus dem vorigen Kapitel (Gln. (6.57) bis (6.59)) sollen nun die universellen Größen  $R_-$  und  $R_+$  bestimmt werden (vgl. Kapitel 1).

Nach Definition sind  $R_-$  und  $R_+$  Produkte der kritischen Amplituden von Oberflächenspannung ( $\sigma_0$ ) und Korrelationslänge unterhalb ( $\xi_0^-$ ) und oberhalb ( $\xi_0^+$ ) der kritischen Temperatur  $\mathcal{T}_c$ :

$$R_- = \sigma_0 (\xi_0^-)^2, \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} R_+ &= \sigma_0 (\xi_0^+)^2 \\ &= \left( \frac{\xi_0^+}{\xi_0^-} \right)^2 R_-. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Da für  $\mathcal{T} > \mathcal{T}_c$  keine Oberflächenspannung existiert, denn das Doppelmuldenpotential (2.2) (vgl. Abbildung 2.1) geht oberhalb  $\mathcal{T}_c$  in ein Potential mit nur einem Minimum über (symmetrische Phase), gibt es kein  $\sigma_0^+$  und man setzt einfach  $\sigma_0 = \sigma_0^-$ .

Aufgrund der Skalenhypothese hat man folgende Skalenrelation für die kritischen Exponenten von Oberflächenspannung ( $\mu$ ) und Korrelationslänge ( $\nu$ ) (vgl. Gl. (1.23)):

$$\mu = (D - 1) \nu. \quad (7.3)$$

In drei Dimensionen ( $D = 3$ ) gilt also

$$\mu = 2 \nu. \quad (7.4)$$

Für  $\mathcal{T} \lesssim \mathcal{T}_c$  hat man dann ( $t = \frac{\mathcal{T}-\mathcal{T}_c}{\mathcal{T}_c}$ , vgl. auch Gln. (1.12) und (1.21))

$$\begin{aligned} R_- &= \sigma_0 (\xi_0^-)^2 \\ &= \sigma_0 (-t)^\mu (\xi_0^-)^2 (-t)^{-2\nu} \\ &= \sigma \xi_-^2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

und entsprechend für  $T \gtrsim T_c$

$$R_+ = \sigma \xi_+^2, \quad (7.6)$$

d.h.  $R_-$  und  $R_+$  lassen sich direkt aus (temperaturabhängiger) Oberflächenspannung und Korrelationslänge bestimmen.

Unterhalb  $\mathcal{T}_c$ , d.h. in der Phase gebrochener Symmetrie, gilt weiter für  $L \rightarrow \infty$ :

$$\xi_- = \frac{1}{m_{\text{phys}}} \quad (\text{vgl. Gl. (1.33)}). \quad (7.7)$$

Mit dem Fixpunkt  $u_R^*$  der renormierten Kopplung in der Phase gebrochener Symmetrie, welcher dem kritischen Punkt entspricht, findet man also (vgl. Gl. (6.57))

$$\begin{aligned} R_- &= \frac{\sigma_\infty}{m_{\text{phys}}^2} \\ &= \frac{m_R^2}{m_{\text{phys}}^2} \frac{2}{u_R^*} \left\{ 1 + \sigma_{1l} \frac{u_R^*}{4\pi} + \sigma_{2l} \left( \frac{u_R^*}{4\pi} \right)^2 + O(u_R^{*3}) \right\}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Die Oberflächenspannung, die in die universellen Amplitudenverhältnisse eingeht, ist diejenige bei unendlicher Grenzfläche (vgl. Gl. (1.5)), so daß hier  $\sigma_\infty$  zu nehmen ist.

Bis zur 1-Loop-Ordnung hat man folgenden Zusammenhang zwischen renormierter und physikalischer Masse [64, 75]

$$m_{\text{phys}}^2 = m_R^2 \left[ 1 + \left( \frac{13}{16} - \frac{3}{4} \log 3 \right) \frac{u_R}{4\pi} + O(u_R^2) \right]. \quad (7.9)$$

Für  $u_R = 15.0$ , was etwa dem kritischen Punkt entspricht (s.u.), gilt

$$\frac{m_{\text{phys}}^2}{m_R^2} = 1 - \underbrace{0.014}_{\text{1-Loop-Korrekturen}} + \text{Korrekturen höherer Ordnung}. \quad (7.10)$$

Die 1-Loop-Korrekturen machen also etwa 1% der führenden Ordnung aus, so daß man annehmen darf, daß die 2-Loop-Korrekturen höchstens im Bereich von 0.1% liegen<sup>1</sup>:

$$\frac{m_{\text{phys}}^2}{m_R^2} \approx 1 + \left( \frac{13}{16} - \frac{3}{4} \log 3 \right) \frac{u_R}{4\pi} \pm 0.0001. \quad (7.11)$$

Zur numerischen Bestimmung der kritischen Größen benötigt man, wie bereits angedeutet, den Fixpunkt  $u_R^*$  der renormierten Kopplung in der Phase gebrochener Symmetrie. Aus einer Tieftemperaturentwicklung erhält man [76]

$$u_R^* = 14.73(14). \quad (7.12)$$

Mit Hilfe der kritischen Amplituden der Magnetisierung und der Suszeptibilität in der Tieftemperaturphase ergibt sich andererseits [77, 14, 78]

$$u_R^* = 15.1 \pm 1.3. \quad (7.13)$$

Ein neueres Resultat mittels Monte-Carlo-Rechnungen ist [80]

$$u_R^* = 14.3(1). \quad (7.14)$$

---

<sup>1</sup>Diese Annahme ist plausibel, jedoch nicht zwingend. Eine Größe, die ohne diese Annahme bestimmt werden kann, ist  $R_{-,R}$ , bei der statt der physikalischen die renormierte Masse Verwendung findet, wie weiter unten gezeigt wird.

Mit diesen Werten wird jetzt  $R_-$  bestimmt. Zur besseren Fehlerabschätzung wird zusätzlich eine Padé–Approximation wie folgt durchgeführt. Man hat (Gl. (6.57))

$$R_- = \frac{m_R^2}{m_{\text{phys}}^2} \frac{\sigma_\infty}{m_R^2} = \frac{m_R^2}{m_{\text{phys}}^2} \frac{2}{u_R} f(u_R), \quad (7.15)$$

mit

$$\begin{aligned} f(u_R) &= \sum_{n=0}^{\infty} d_n u_R^n \\ &= 1 + \sigma_{1l} \frac{u_R}{4\pi} + \sigma_{2l} \left( \frac{u_R}{4\pi} \right)^2 + O(u_R^3). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Für die Reihe  $f(u_R)$  wird nun die Padé–Approximation vorgenommen, d.h.  $f(u_R)$  wird durch verschiedene rationale Funktionen angenähert. Da die Koeffizienten der Reihe bis einschließlich zur Ordnung  $u_R^2$  bekannt sind, lassen sich die [1,1]– und [0,2]–Padé–Approximanten bestimmen; die [2,0]–Padé–Approximante ist die Reihe selbst ohne die Terme der Ordnung  $O(u_R^3)$ :

$$f_{[1,1]}(u_R) = \frac{1 + a_1 u_R}{1 + b_1 u_R}, \quad (7.17)$$

$$a_1 = -0.0190(3), \quad b_1 = -0.0030(3) \quad (7.18)$$

und

$$f_{[0,2]}(u_R) = \frac{1}{1 + c_1 u_R + c_2 u_R^2}, \quad (7.19)$$

$$c_1 = 0.01593620(1), \quad c_2 = 0.000302(5). \quad (7.20)$$

Weiterhin lässt sich eine Padé–Borel–Approximation durchführen, indem man die Borel–Transformierte  $B_f(u_R)$  von  $f(u_R)$  bildet,

$$B_f(u_R) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} u_R^n, \quad (7.21)$$

das Ergebnis durch eine Padé–Approximation annähert (Resultat  $B_{f,[p,q]}(u_R)$ ) und wieder zurücktransformiert:

$$f_{[p,q],\text{PB}}(u_R) := \int_0^\infty dt B_{f,[p,q]}(t u_R) e^{-t}. \quad (7.22)$$

Durch Bildung der Borel–Transformierten werden die Konvergenzeigenschaften der wahrscheinlich divergenten Reihe (7.16) verbessert und man bekommt weitere Vergleichswerte für  $R_-$ . Die Resultate bei Verwendung von  $f(u_R)$  bzw. den Padé–Approximanten sind in Tabelle 7.1 zusammengefaßt. Die Fehler in dieser Tabelle stammen aus den Fehlern der Koeffizienten der Reihe  $f(u_R)$ . Bildet man Mittelwert und Standardabweichung aus den jeweils fünf Werten, unter Vernachlässigung dieser Fehler, ergeben sich schließlich folgende Werte:

$$u_R^* = 15.1 : R_- = 0.101(2), \quad (7.23)$$

$$u_R^* = 14.73 : R_- = 0.105(2), \quad (7.24)$$

$$u_R^* = 14.3 : R_- = 0.109(2). \quad (7.25)$$

Auffällig an den Werten in Tabelle 7.1 ist, daß die Resultate aus den [0,2]–Padé– bzw. [0,2]–Padé–Borel–Rechnungen systematisch größer als die übrigen Ergebnisse sind. Dies deutet darauf hin, daß die Größe  $R_-$  möglicherweise nicht gut aus diesen Approximanten zu bestimmen ist. Ich gebe daher auch noch die Mittelwerte und Standardabweichungen an, die man für  $R_-$  erhält, wenn man diese Approximanten fortläßt:

$$u_R^* = 15.1 : R_- = 0.1004(1), \quad (7.26)$$

$$u_R^* = 14.73 : R_- = 0.10387(5), \quad (7.27)$$

$$u_R^* = 14.3 : R_- = 0.1079(1). \quad (7.28)$$

Monte–Carlo–Simulationen im dreidimensionalen Ising–Modell ergeben

$$R_- = 0.09(3) \quad [18] \quad (7.29)$$

bzw.

$$R_- = 0.1056(19) \quad [4, 19, 20]. \quad (7.30)$$

Insbesondere der erheblich präzisere Wert (7.30) zeigt eine gute Übereinstimmung mit dem Wert (7.24) für  $u_R^* = 14.73$ . Der korrespondierende Wert (7.27) ohne die [0,2]–Approximanten stimmt weniger gut mit dem Monte–Carlo–Wert überein, so daß die Rolle der [0,2]–Approximanten nicht eindeutig beurteilt werden kann.

Aus Monte–Carlo–Daten in Verbindung mit Reihenuntersuchungen finden Zinn und Fisher [21]

$$R_- = 0.0956(14) \quad \text{bzw.} \quad R_- = 0.0969(14). \quad (7.31)$$

Die verschiedenen Werte resultieren aus verschiedenen Daten für die kritische Temperatur  $T_c$  und die kritischen Exponenten. Dabei ist zu beachten, daß in [21] mit einer Korrelationslänge  $\xi_1^-$  gerechnet wird, die als das zweite Moment der Korrelationsfunktion definiert ist. Das bedeutet letztlich, daß die renormierte statt der physikalischen Masse zu verwenden ist:

$$\xi_1^- = \frac{1}{m_R}. \quad (7.32)$$

Die Werte (7.31) sind also mit den Ergebnissen für (vgl. Gl. (6.57))

$$\begin{aligned} R_{-,R} &:= \frac{\sigma_\infty}{m_R^2} \\ &= \frac{2}{u_R^*} \left\{ 1 + \sigma_{1l} \frac{u_R^*}{4\pi} + \sigma_{2l} \left( \frac{u_R^*}{4\pi} \right)^2 + O(u_R^{*3}) \right\} \end{aligned} \quad (7.33)$$

	$R_-$				
$u_R^*$	$f(u_R)$	$f_{[1,1]}(u_R)$	$f_{[0,2]}(u_R)$	$f_{[1,1],PB}$	$f_{[0,2],PB}$
15.1	0.1005(2)	0.1003(2)	0.1025(1)	0.1004(3)	0.1060(5)
14.73	0.1039(2)	0.1038(2)	0.1058(1)	0.1039(3)	0.1092(5)
14.3	0.1080(2)	0.1078(2)	0.1098(1)	0.1080(3)	0.1131(5)

Tabelle 7.1: Resultate für  $R_-$  für verschiedene Fixpunktweite  $u_R^*$  und Verwendung der Reihe  $f(u_R)$  bzw. verschiedener Padé–Approximanten

$u_R^*$	$R_{-,R}$				
	$f(u_R)$	$f_{[1,1]}(u_R)$	$f_{[0,2]}(u_R)$	$f_{[1,1],PB}$	$f_{[0,2],PB}$
15.1	0.0991(2)	0.0989(2)	0.1011(1)	0.0991(3)	0.10454(5)
14.73	0.1025(2)	0.1024(2)	0.1044(1)	0.1025(3)	0.10774(5)
14.3	0.1066(2)	0.1064(2)	0.1084(1)	0.1066(3)	0.11166(5)

Tabelle 7.2: Resultate für  $R_{-,R}$  für verschiedene Fixpunktweite  $u_R^*$  und Verwendung der Reihe  $f(u_R)$  bzw. verschiedener Padé–Approximanten

zu vergleichen. Die Resultate für  $R_{-,R}$  bei den Fixpunkten  $u_R^* = 15.1$ ,  $u_R^* = 14.73$  und  $u_R^* = 14.3$  sind, wieder mit den zugehörigen Resultaten aus der Padé–Approximation, in Tabelle 7.2 zusammengestellt. Mittelwertbildung ergibt hier

$$u_R^* = 15.1 \quad : \quad R_{-,R} = 0.101(2), \quad (7.34)$$

$$u_R^* = 14.73 \quad : \quad R_{-,R} = 0.104(2), \quad (7.35)$$

$$u_R^* = 14.3 \quad : \quad R_{-,R} = 0.108(2). \quad (7.36)$$

Auch hier weichen die Werte der [0,2]–Padé–Approximanten systematisch nach oben von den restlichen Ergebnissen ab, so daß hier ebenfalls die Resultate, die man bekommt, wenn man diese Approximanten fortläßt, angegeben werden sollen:

$$u_R^* = 15.1 \quad : \quad R_{-,R} = 0.0990(1), \quad (7.37)$$

$$u_R^* = 14.73 \quad : \quad R_{-,R} = 0.10247(5), \quad (7.38)$$

$$u_R^* = 14.3 \quad : \quad R_{-,R} = 0.1065(1). \quad (7.39)$$

Die Werte mit Berücksichtigung der [0,2]–Approximanten stimmen weniger gut mit den Werten von Zinn und Fisher überein. Dazu ist zu bemerken, daß die Resultate in [21] innerhalb der auftretenden Abweichung von den verwendeten Daten für die kritischen Exponenten abhängen können.<sup>2</sup> Insbesondere werden in [21] für  $\nu$  die Werte 0.632 bzw. 0.6296 verwendet. Mit dem in der Literatur zu findenden neueren Monte–Carlo–Resultat  $\nu = 0.625(1)$  [79] würden sich vielleicht konsistenter Werte ergeben.

Die Resultate ohne die [0,2]–Approximanten liegen in der Tendenz näher an den Ergebnissen von Zinn und Fisher, erreichen diese jedoch auch nicht ganz.

Um deutlich zu machen wie  $R_{-,R}$  von  $u_R$  abhängt, ist in Abbildung 7.1  $R_{-,R}$  als Funktion von  $u_R$  aufgetragen;  $R_{-,R}$  wurde dabei als Mittelwert der Resultate unter Verwendung von  $f(u_R)$ ,  $f_{[1,1]}(u_R)$  und  $f_{[0,2]}(u_R)$  gewonnen, d.h.

$$R_{-,R} = \frac{2}{3u_R} \left\{ f(u_R) + f_{[1,1]}(u_R) + f_{[0,2]}(u_R) \right\}. \quad (7.40)$$

Wegen der nicht eindeutigen Rolle der [0,2]–Approximanten wurde dabei die [0,2]–Padé–Approximante, d.h.  $f_{[0,2]}(u_R)$ , in die Mittelwertbildung aufgenommen. Die Fehler werden dadurch größer, man bekommt jedoch eine bessere Vorstellung, welche Resultate für  $R_{-,R}$  erhalten werden können. Auf eine Einbeziehung der Padé–Borel–Resultate wurde bei dieser

<sup>2</sup>Zinn und Fisher weisen darauf hin, daß ihre Ergebnisse für die universellen Amplitudenverhältnisse sehr viel stärker von den kritischen Exponenten als von der kritischen Temperatur abhängen. Die Abhängigkeit meiner Werte von der kritischen Temperatur wird in (7.23) – (7.25) bzw. (7.34) – (7.36) via der Abhängigkeit von  $u_R^*$  deutlich; man vergleiche auch die Abbildung 7.1.

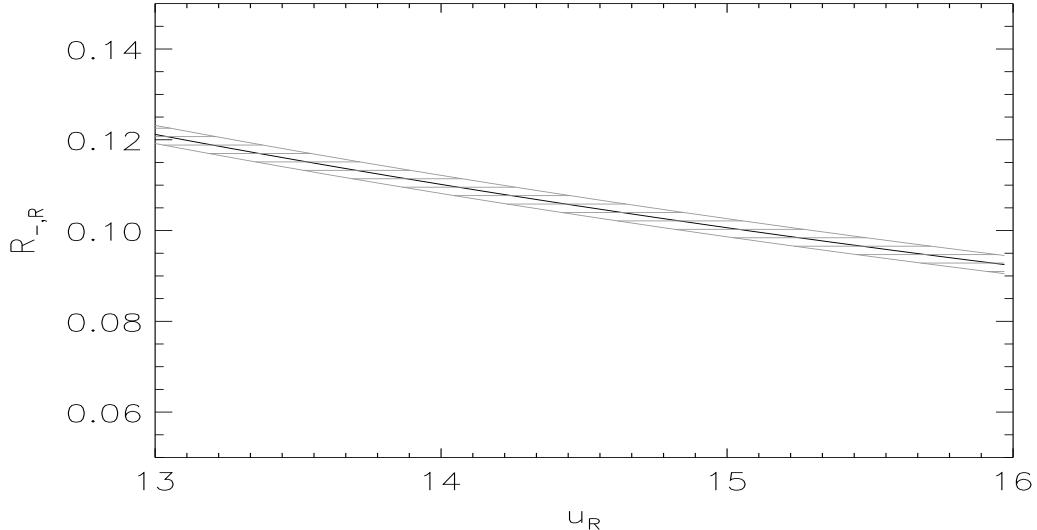


Abbildung 7.1:  $R_{-,R}$  als Funktion von  $u_R$  in der Nähe des Fixpunktes; die dicke durchgezogene Linie gibt hier  $R_{-,R}$  wieder, das als Mittelwert der Resultate unter Verwendung von  $f(u_R)$ ,  $f_{[1,1]}(u_R)$  und  $f_{[0,2]}(u_R)$  gewonnen wurde. Der schraffierte Bereich, mit der Breite 0.002, gibt die Fehlerabschätzung an.

Abbildung verzichtet, die Ergebnisse der Tabelle 7.2 zeigen jedoch, daß die [1,1]–Padé–Borel–Approximante die Resultate kaum verändern würde. Eine Einbeziehung der [0,2]–Padé–Borel–Approximante würde die Kurve etwas nach oben verschieben.

Schließlich soll noch das Resultat für  $R_+$  ermittelt werden. Es gilt (Gln. (7.5) und (7.6))

$$R_+ = \left( \frac{\xi_+}{\xi_-} \right)^2 R_- . \quad (7.41)$$

Für das universelle Amplitudenverhältnis der Amplituden  $\xi_+$  und  $\xi_-$ , mit  $m_R$  statt  $m_{\text{phys}}$  (s.o.), findet man mittels Reihenanalysen den Wert [81]

$$\frac{\xi_+}{\xi_-} = 1.96(1) . \quad (7.42)$$

Der Wert für das mit der physikalischen Masse definierte Verhältnis  $\frac{\xi_+}{\xi_-}$  sollte sich nur unwesentlich davon unterscheiden. Aus [77] entnimmt man

$$\frac{\xi_+}{\xi_-} = \frac{\xi_+}{\xi_+^+} \frac{\xi_1^-}{\xi_1^-} \frac{\xi_1^+}{\xi_1^-} , \quad (7.43)$$

$$\frac{\xi_+}{\xi_1^+} = 1.0003 , \quad (7.44)$$

$$\frac{\xi_1^-}{\xi_1^-} = 1.0069 , \quad (7.45)$$

was auf

$$\frac{\xi_+}{\xi_-} = 1.95(1) \quad (7.46)$$

führt. Für weitere Ergebnisse für  $\frac{\xi_+}{\xi_-}$  vgl. man [82] bzw. [64, 65, 83] für eine feldtheoretische Bestimmung und [84] für ein Resultat aus der  $\varepsilon$ -Entwicklung; eine neuere Monte-Carlo-Rechnung [80] ergibt:

$$\frac{\xi_+^+}{\xi_-^-} = 1.95(2). \quad (7.47)$$

Mit dem Resultat (7.46) bekommt man folgende Werte für  $R_+$ :

$$u_R^* = 15.1 : R_+ = 0.38(1), \quad (7.48)$$

$$u_R^* = 14.73 : R_+ = 0.40(1), \quad (7.49)$$

$$u_R^* = 14.3 : R_+ = 0.41(1), \quad (7.50)$$

jeweils in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Ergebnis [85, 86, 87]

$$R_+ = 0.38(2). \quad (7.51)$$

Es sei hier noch betont, daß die genauesten Resultate dieser Arbeit diejenigen für die Größe  $R_{-,R}$  sind, also in Tabelle 7.2 und Abbildung 7.1 zu finden sind. In die Bestimmungen von  $R_-$  und  $R_+$  gehen weitere Unsicherheiten ein, da die physikalische Masse nicht in 2-Loop-Ordnung bekannt ist und auch das Amplitudenverhältnis  $\frac{\xi_+^+}{\xi_-^-}$  für die Korrelationslänge fehlerbehaftet ist.



# Kapitel 8

## Zusammenfassung

Hier sollen die wesentlichen Ergebnisse und Methoden dieser Arbeit zusammengefaßt werden. Mit Hilfe einer Sattelpunktentwicklung um eine sogenannte Kink–Lösung wurde die Übergangsamplitude für das Tunneln von einem Potentialminimum in das andere im dreidimensionalen  $\phi^4$ –Modell in der Phase gebrochener Symmetrie bestimmt. Mit der Feynmanischen Diagrammtechnik und unter Einbeziehung von Multi–Kink–Beiträgen wurde daraus ein störungstheoretischer Ausdruck für die Energiedifferenz zwischen Grundzustand und erstem angeregten Zustand dieser Theorie im endlichen räumlichen Volumen in 2–Loop–Ordnung gewonnen. Diese Energiedifferenz zerfällt exponentiell mit wachsendem Volumen; die Stärke dieses exponentiellen Zerfalls wird durch die Oberflächenspannung  $\sigma(L)$  gegeben:

$$E_{0a} = A e^{-\sigma(L) L^2}. \quad (8.1)$$

Aufgrund dieses Zusammenhangs wurde aus der Energieaufspaltung die Oberflächenspannung ermittelt.

Die hierzu durchzuführende Bestimmung der Fluktuationsdeterminanten erfolgte mit der Methode der Wärmeleitungskerne unter Verwendung von Zeta–Funktionen.

Für den Fall einer unendlichen Grenzfläche, d.h. für unendliches  $L$ , wurden die Feynman–Diagramme ausgerechnet. Dieser thermodynamische Limes ist der wesentliche Fall, um universelle Größen zu bestimmen. Bei der Graphenberechnung wurden die Integrale über die Schwinger–Parameter und über Raum und Zeit analytisch ausgeführt. Die Integrale über das kontinuierliche Spektrum des Fluktuationoperators waren zum Teil numerisch zu bestimmen. Die vorhandenen UV–Divergenzen der Theorie wurden dimensionell regularisiert und ließen sich isolieren, indem die Divergenzverursachenden Terme mit Hilfe der Stufenfunktion stets explizit abgezogen wurden.

Durch die Renormierung wurden alle Divergenzen beseitigt und die Form (8.1) der Energieaufspaltung wurde explizit bestätigt.

Zwischenzeitlich auftretende logarithmische Terme wie beispielsweise Terme proportional zu  $L^2 \log(m_R L)$ , die zu einer Verletzung der Gl. (8.1) führen würden, hoben sich in der Summe aller Graphenbeiträge fort. Dies stellt eine sehr gute Kontrollmöglichkeit für die durchgeführte Rechnung dar.

Das Resultat für die Oberflächenspannung lautet im thermodynamischen Limes:

$$\sigma_\infty = \frac{2 m_R^2}{u_R} \left\{ 1 + \sigma_{1l} \frac{u_R}{4\pi} + \sigma_{2l} \left( \frac{u_R}{4\pi} \right)^2 + O(u_R^3) \right\}, \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1l} &= \frac{1}{4} \left[ 3 + \frac{3}{4} \log 3 \right] - \frac{37}{32} \\ &= -0.2002602(1), \end{aligned} \quad (6.58)$$

$$\sigma_{2l} = -0.76(8) \cdot 10^{-2}. \quad (6.59)$$

Man erkennt folgende Größenverhältnisse am kritischen Punkt  $u_R^* \approx 15$ , wobei nur die geschweifte Klammer in Gl. (6.57) betrachtet wird:

$$\begin{array}{lll} \text{führende Ordnung} & : & 1 \triangleq 100\%, \\ \text{1-Loop-Ordnung} & : & \text{ca. } -0.24 \triangleq 24\%, \\ \text{2-Loop-Ordnung} & : & \text{ca. } -0.01 \triangleq 1\%. \end{array}$$

Von der 3-Loop-Korrektur ist daher kein wesentlicher Beitrag mehr zu erwarten, wohl weniger als 1%.

Weiter wurden die universellen Größen  $R_-$  und  $R_+$  bestimmt:

$$u_R^* = 15.1 : \quad R_- = 0.101(2), \quad (7.23)$$

$$R_+ = 0.38(1), \quad (7.48)$$

$$u_R^* = 14.73 : \quad R_- = 0.105(2), \quad (7.24)$$

$$R_+ = 0.40(1), \quad (7.49)$$

$$u_R^* = 14.3 : \quad R_- = 0.109(2), \quad (7.25)$$

$$R_+ = 0.41(1) \quad (7.50)$$

und Übereinstimmung mit Werten aus Experiment bzw. Monte-Carlo-Rechnungen gefunden. Für die zuverlässiger bestimmbar universelle Größe  $R_{-,R}$ , die zur Berechnung die renormierte statt der physikalischen Masse benötigt, wurden folgende Resultate erzielt:

$$u_R^* = 15.1 : \quad R_{-,R} = 0.101(2), \quad (7.34)$$

$$u_R^* = 14.73 : \quad R_{-,R} = 0.104(2), \quad (7.35)$$

$$u_R^* = 14.3 : \quad R_{-,R} = 0.108(2). \quad (7.36)$$

Offen bleibt noch die Frage nach der Amplitude  $A$  der Energieaufspaltung (Gln. (6.56) und (6.55))

$$\begin{aligned} E_{0a} &= A e^{-\sigma_\infty L^2 + O(\frac{1}{L^2})}, \\ A &= 4 \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \sqrt{\frac{2}{u_R}} m_R (m_R L)^{(K_{IC,3} - K_{ID,3}) u_R} e^{-(\frac{37}{256\pi} - K_{IC,4} + K_{ID,4}) u_R}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

insbesondere nach der  $L$ -Abhängigkeit von  $A$ . Eine solche ist höchstens durch den Faktor

$$(m_R L)^{(K_{IC,3} - K_{ID,3})u_R} \quad (8.3)$$

gegeben. Das 1-Loop-Resultat, [23] oder auch obiges  $A$  mit Vernachlässigung der Terme mit  $u_R$  im Exponenten, sowie gewisse semiklassische Argumente [27] legen eine  $L$ -Unabhängigkeit von  $A$  nahe, d.h.

$$K_{IC,3} = K_{ID,3}. \quad (8.4)$$

Die Werte von  $K_{IC,3}$  und  $K_{ID,3}$  sind jedoch nicht gleich (Gln. (5.424), (5.455)):

$$K_{IC,3} - K_{ID,3} = 0.11065117(1), \quad (8.5)$$

so daß eine  $L$ -Abhängigkeit der Amplitude  $A$  resultiert, also eine Abhängigkeit von der räumlichen Ausdehnung des Systems. Am kritischen Punkt, d.h. für  $u_R \approx 15$ , gilt für den  $L$ -abhängigen Faktor in  $A$  etwa:

$$(m_R L)^{1.65}. \quad (8.6)$$

Dieser finite-size-Effekt sollte sich in Monte-Carlo-Rechnungen beobachten lassen.



## Anhang A

# Massendimensionen wichtiger Größen in der $\phi^4$ -Theorie

In diesem Anhang sollen die Massendimensionen verschiedener Größen der  $\phi^4$ -Theorie in  $D = 3 - \varepsilon$  Dimensionen zusammengestellt werden. Für die Massendimension  $\dim A$  einer Größe  $A$  mit der Einheit  $[A]$  gilt

$$[A] = [\text{Masse}]^{\dim A}. \quad (\text{A.1})$$

Wie üblich wird ein Einheitensystem verwendet, in dem

$$c = \hbar = 1$$

gilt, also, wegen der Beziehungen  $E = mc^2$  und  $E = \hbar\omega$ ,

$$\dim(\text{Energie}) = 1, \quad (\text{A.2})$$

$$\dim(\text{Zeit}) = -1, \quad (\text{A.3})$$

$$\dim(\text{Länge}) = -1, \quad (\text{A.4})$$

$$\dim(\text{Wirkung}) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Betrachtet man die Wirkung der  $\phi^4$ -Theorie in  $D$  Dimensionen in der Phase gebrochener Symmetrie

$$\begin{aligned} S[\phi_0] &= \int d^D x \mathcal{L}, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 + \frac{\hat{m}_0^2}{2} \phi_0^2 + \frac{g_0}{4!} \phi_0^4 + \frac{3}{2} \frac{\hat{m}_0^4}{g_0}, \quad m_0^2 = -2 \hat{m}_0^2 > 0, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

so ergibt sich wegen

$$\dim S[\phi_0] = 0 \quad (\text{A.7})$$

sukzessive

$$\begin{aligned} \dim \phi_0 &= \frac{D-2}{2} \\ &= \frac{1-\varepsilon}{2}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\dim \hat{m}_0 = 1, \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \dim g_0 &= 4-D \\ &= 1+\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

und

$$\dim \Gamma^{(2)} = 2. \quad (\text{A.11})$$

Dabei gilt

$$\Gamma^{(2)} = -[\tilde{G}^{(2)}]^{-1} \quad (\text{A.12})$$

und  $\tilde{G}^{(2)}$  ist die Fourier–Transformierte der 2–Punkt–Funktion mit abgespaltener  $\delta$ –Funktion:

$$\tilde{G}'^{(2)}(p_1, p_2) = \int d^D x_1 d^D x_2 G^{(2)}(x_1, x_2) e^{ip_1 x_1} e^{ip_2 x_2}, \quad (\text{A.13})$$

$$\tilde{G}'^{(2)}(p_1, p_2) = (2\pi)^D \delta^{(D)}(p_1 + p_2) \tilde{G}^{(2)}(p_1, p_2). \quad (\text{A.14})$$

Für die renormierten Größen erhält man mittels der Definition der Renormierungsgrößen (vgl. Kapitel 6, Gln. (6.9) – (6.12)) die folgenden Massendimensionen:

$$\dim Z_R = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\dim v_R = \frac{1-\varepsilon}{2}, \quad (\text{A.16})$$

$$\dim m_R^2 = 2, \quad (\text{A.17})$$

$$\dim g_R^{(D)} = 1 + \varepsilon. \quad (\text{A.18})$$

## Anhang B

# Integralberechnungen

Sowohl bei der Berechnung der Greenschen Funktion in Kapitel 3 als auch bei den Graphenberechnungen in Kapitel 5 treten verschiedene Integrale auf, deren Berechnung in diesem Anhang durchgeführt werden soll.

### B.1 Fourier–Transformierte hyperbolischer Funktionen

Zu berechnen sind Integrale vom Typ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^j(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^p(\frac{m_0}{2}x_0)}, \quad j, p \in \mathbb{N}, p \neq 0. \quad (\text{B.1})$$

Zunächst zum Fall  $j = 0$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{e^{ikx_0}}{\cosh^p(\frac{m_0}{2}x_0)} &= 2 \int_0^{\infty} dx_0 \frac{\cos(kx_0)}{\cosh^p(\frac{m_0}{2}x_0)} \\ &= \frac{2^{p-1}}{\frac{m_0}{2}\Gamma(p)} \Gamma\left(\frac{p}{2} + i\frac{k}{m_0}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} - i\frac{k}{m_0}\right) \quad [47, 3.985.1] \\ &= \frac{2^p}{m_0\Gamma(p)} \Gamma\left(\frac{p}{2} + i\frac{k}{m_0}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} - i\frac{k}{m_0}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Beachtet man noch die folgenden Beziehungen

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad [63, 6.1.15], \quad (\text{B.3})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + iz\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - iz\right) = \frac{\pi}{\cosh(\pi z)} \quad [63, 6.1.30], \quad (\text{B.4})$$

$$\Gamma(1+iz)\Gamma(1-iz) = \frac{\pi z}{\sinh(\pi z)} \quad [63, 6.1.31], \quad (\text{B.5})$$

so erhält man für die konkret benötigten Fälle  $p = 2, 4, 6$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{e^{ikx_0}}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{4}{m_0} \frac{\pi \frac{k}{m_0}}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})}, \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{e^{ikx_0}}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} &= \frac{16}{m_0 3!} \Gamma\left(2 + i\frac{k}{m_0}\right) \Gamma\left(2 - i\frac{k}{m_0}\right) \\ &= \frac{8}{3m_0} \left(1 + \frac{k^2}{m_0^2}\right) \frac{\pi \frac{k}{m_0}}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

und

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{e^{ikx_0}}{\cosh^6(\frac{m_0}{2}x_0)} &= \frac{64}{m_0 5!} \Gamma\left(3 + i \frac{k}{m_0}\right) \Gamma\left(3 - i \frac{k}{m_0}\right) \\
 &= \frac{64}{m_0 5!} \left(2 + i \frac{k}{m_0}\right) \left(1 + i \frac{k}{m_0}\right) \left(2 - i \frac{k}{m_0}\right) \left(1 - i \frac{k}{m_0}\right) \\
 &\quad \times \Gamma\left(1 + i \frac{k}{m_0}\right) \Gamma\left(1 - i \frac{k}{m_0}\right) \\
 &= \frac{8}{15m_0} \left(4 + \frac{k^2}{m_0^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{m_0^2}\right) \frac{\pi \frac{k}{m_0}}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})}. \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

Jetzt zum Fall  $j = 1$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^p(\frac{m_0}{2}x_0)} &= i \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{\sinh(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^{p+1}(\frac{m_0}{2}x_0)} \sin(kx_0) \\
 &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} i \underbrace{\left\{ -\frac{2}{m_0 p} \frac{\sin(kx_0)}{\cosh^p(\frac{m_0}{2}x_0)} \right|_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \text{ (wg. } p \geq 1\text{)}} \\
 &\quad + \frac{2}{p} \frac{k}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{\cos(kx_0)}{\cosh^p(\frac{m_0}{2}x_0)} \Big\} \\
 &= \frac{2i}{p} \frac{k}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{\cos(kx_0)}{\cosh^p(\frac{m_0}{2}x_0)} \\
 &= \frac{2i}{p} \frac{k}{m_0} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{e^{ikx_0}}{\cosh^p(\frac{m_0}{2}x_0)} \\
 &= i \frac{2^{p+1}}{m_0 p \Gamma(p)} \frac{k}{m_0} \Gamma\left(\frac{p}{2} + i \frac{k}{m_0}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} - i \frac{k}{m_0}\right) \\
 &\quad (\text{vgl. Gl. (B.2)}) \\
 &= i \frac{2^{p+1}}{m_0 p!} \frac{k}{m_0} \Gamma\left(\frac{p}{2} + i \frac{k}{m_0}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2} - i \frac{k}{m_0}\right). \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

Mit den Gln. (B.3) – (B.5) erhält man somit für die in den Graphenberechnungen benötigten Fälle:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{4i}{m_0} \frac{\pi(\frac{k}{m_0})^2}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})}, \tag{B.10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{4i}{3m_0} \left(1 + \frac{k^2}{m_0^2}\right) \frac{\pi(\frac{k}{m_0})^2}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})}, \tag{B.11}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^6(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{8i}{45m_0} \left(4 + \frac{k^2}{m_0^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{m_0^2}\right) \frac{\pi(\frac{k}{m_0})^2}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})}. \tag{B.12}$$

Die weiteren Fälle mit  $j \geq 2$  lassen sich mittels der Beziehung

$$\tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0) = 1 - \frac{1}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} \tag{B.13}$$

stets auf die Fälle  $j = 0$  bzw.  $j = 1$  zurückführen. Ich gebe daher nur noch die Formeln an, die ich bei den Graphenberechnungen wirklich benötige:

$j = 2$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{1}{m_0} \left(1 - 4 \frac{k^2}{m_0^2}\right) \frac{\pi}{\cosh(\pi \frac{k}{m_0})}, \quad (\text{B.14})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{4k}{3m_0^2} \left(1 - 2 \frac{k^2}{m_0^2}\right) \frac{\pi}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})}, \quad (\text{B.15})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^3(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{1}{12m_0} \left(3 + 8 \frac{k^2}{m_0^2} - 16 \frac{k^4}{m_0^4}\right) \frac{\pi}{\cosh(\pi \frac{k}{m_0})}, \quad (\text{B.16})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^2(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{8k}{15m_0^2} \left(1 - \frac{k^4}{m_0^4}\right) \frac{\pi}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})}. \quad (\text{B.17})$$

$j = 3$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^3(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{2ik}{3m_0^2} \left(5 - 4 \frac{k^2}{m_0^2}\right) \frac{\pi}{\cosh(\pi \frac{k}{m_0})}, \quad (\text{B.18})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^3(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{4ik^2}{3m_0^3} \left(2 - \frac{k^2}{m_0^2}\right) \frac{\pi}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})}, \quad (\text{B.19})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^3(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^3(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{ik}{30m_0^2} \left(11 + 40 \frac{k^2}{m_0^2} - 16 \frac{k^4}{m_0^4}\right) \frac{\pi}{\cosh(\pi \frac{k}{m_0})}, \quad (\text{B.20})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^3(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^4(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{4ik^2}{45m_0^3} \left(7 - 2 \frac{k^2}{m_0^2}\right) \left(1 + \frac{k^2}{m_0^2}\right) \frac{\pi}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})}. \quad (\text{B.21})$$

$j = 4$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^4(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{1}{12m_0} \left(9 - 56 \frac{k^2}{m_0^2} + 16 \frac{k^4}{m_0^4}\right) \frac{\pi}{\cosh(\pi \frac{k}{m_0})}, \quad (\text{B.22})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^4(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{4k}{15m_0^2} \left(3 - 10 \frac{k^2}{m_0^2} + 2 \frac{k^4}{m_0^4}\right) \frac{\pi}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})}, \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^4(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^3(\frac{m_0}{2}x_0)} &= \frac{1}{360m_0} \left(45 + 76 \frac{k^2}{m_0^2} - 400 \frac{k^4}{m_0^4} + 64 \frac{k^6}{m_0^6}\right) \\ &\times \frac{\pi}{\cosh(\pi \frac{k}{m_0})}. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$j = 5$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^5(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{ik}{30m_0^2} \left(89 - 120 \frac{k^2}{m_0^2} + 16 \frac{k^4}{m_0^4}\right) \frac{\pi}{\cosh(\pi \frac{k}{m_0})}, \quad (\text{B.25})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^5(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh^2(\frac{m_0}{2}x_0)} = \frac{4ik^2}{45m_0^3} \left(23 - 20 \frac{k^2}{m_0^2} + 2 \frac{k^4}{m_0^4}\right) \frac{\pi}{\sinh(\pi \frac{k}{m_0})}. \quad (\text{B.26})$$

$j = 6$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 e^{ikx_0} \frac{\tanh^6(\frac{m_0}{2}x_0)}{\cosh(\frac{m_0}{2}x_0)} &= \frac{1}{360m_0} \left(225 - 1756 \frac{k^2}{m_0^2} + 880 \frac{k^4}{m_0^4} - 64 \frac{k^6}{m_0^6}\right) \\ &\times \frac{\pi}{\cosh(\pi \frac{k}{m_0})}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

## B.2 Fourier–Transformierte des tangens hyperbolicus

Die im Abschnitt B.1 betrachteten Integrale existieren alle im gewöhnlichen Lebesgueschen Sinne. Das folgende Integral existiert nur im Distributionssinn und die Berechnung ist etwas aufwendiger. Man betrachtet also

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) e^{ikx_0} &= 2i \int_0^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) \sin(kx_0) \\
 &= 2i \int_0^{\infty} dx_0 (\tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - 1) \sin(kx_0) \\
 &\quad + 2i \int_0^{\infty} dx_0 \sin(kx_0) \\
 &= 2i \left\{ \left[ -\frac{\cos(kx_0)}{k} (\tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) - 1) \right]_0^{\infty} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{m_0}{2k} \int_0^{\infty} dx_0 \frac{\cos(kx_0)}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2}x_0\right)} \right\} + 2i \int_0^{\infty} dx_0 \sin(kx_0) \\
 &\quad \text{(partielle Integration)} \\
 &= 2i \left[ -\frac{1}{k} + \frac{\pi}{m_0 \sinh(\pi \frac{k}{m_0})} \right] + 2i \int_0^{\infty} dx_0 \sin(kx_0) \\
 &\quad \text{(vgl. zum letzten Schritt Gl. (B.6)).}
 \end{aligned}$$

Für das letzte Integral gilt, wie weiter unten gezeigt wird,

$$\int_0^{\infty} dx_0 \sin(kx_0) = \frac{1}{k}, \quad (\text{B.28})$$

so daß sich für das untersuchte Integral letztlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \tanh\left(\frac{m_0}{2}x_0\right) e^{ikx_0} = \frac{2\pi i}{m_0 \sinh(\pi \frac{k}{m_0})} \quad (\text{B.29})$$

ergibt. Es bleibt also Gl. (B.28) nachzuweisen. Wegen

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} dx_0 \sin(kx_0) &= - \int_{-\infty}^0 dx_0 \sin(kx_0) \\
 &= -\text{Im} \int_{-\infty}^0 dx_0 e^{ikx_0}
 \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

folgt dies aus der Beziehung

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 dx_0 e^{ikx_0} &= \frac{1}{i} \frac{P}{k} + \pi \delta(k) \\
 &\quad (\text{P bezeichnet den Hauptwert}),
 \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

die nun bewiesen werden soll. Es sei also  $f$  eine Testfunktion aus einem geeignetem Funktionenraum (z.B.  $f$  beliebig oft stetig differenzierbar mit kompaktem Träger). Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^0 dx_0 e^{ikx_0} f(k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-n}^0 dx_0 e^{ikx_0} f(k) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1 - e^{-ink}}{ik} f(k) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dk \frac{1 - e^{-ink}}{ik} f(k) + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{1 - e^{-ink}}{ik} f(k) \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\varepsilon}^{\infty} dk \frac{1 - e^{-ink}}{ik} f(k) \right\} \quad (\text{mit } \varepsilon > 0) \\
 &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dk \frac{f(k)}{ik} + \int_{\varepsilon}^{\infty} dk \frac{f(k)}{ik} \\
 &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{1 - e^{-ink}}{ik} f(k)
 \end{aligned}$$

(Satz von Riemann–Lebesgue, vgl. z.B. [60, Satz 134.3])

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{i} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dk \frac{f(k)}{k} + \int_{\varepsilon}^{\infty} dk \frac{f(k)}{k} \right\} \\
 &\quad + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{1 - e^{-ink}}{ik} f(k) \\
 &= \frac{1}{i} P \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{f(k)}{k} + f(0) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{1 - e^{-ink}}{ik}
 \end{aligned}$$

(Stetigkeit von  $f$  und Mittelwertsatz der Integralrechnung, z.B. [59, Satz 85.6]).

Weiter gilt jetzt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{1 - e^{-ink}}{ik} = \pi,$$

denn

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{1 - e^{-ink}}{ik} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{e^{ink} - e^{-ink}}{ik} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{1 - e^{ink}}{ik} \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{\sin(nk)}{k} - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{1 - e^{-ink}}{ik},
 \end{aligned}$$

wie man durch die Substitution  $k \rightarrow -k$  im zweiten Integral auf der rechten Seite bestätigt. Damit bekommt man

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{1 - e^{-ink}}{ik} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dk \frac{\sin(nk)}{k} \\
 &= \pi.
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

Die letzte Gleichung folgt aus (vgl. z.B. [57, Gl. (7.20)])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nk)}{k} = \delta(k). \tag{B.33}$$

Damit hat man nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^0 dx_0 e^{ikx_0} f(k) = \frac{1}{i} P \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{f(k)}{k} + \pi f(0)$$

gefunden. Hiermit schließt man

$$\int_{-\infty}^0 dx_0 e^{ikx_0} = \frac{1}{i} \frac{P}{k} + \pi \delta(k)$$

und erhält so die Behauptung. Es ist interessant, daß man das Resultat (B.31) auch etwas schneller wenn auch nicht ganz so rigoros bekommen kann. Dieser etwas grobere Beweis sei hier noch angegeben. Im einzelnen werden folgende Behauptungen bewiesen:

$$\int_0^{\infty} dx \cos(kx) = \pi \delta(k), \quad (\text{B.34})$$

$$\int_0^{\infty} dx \sin(kx) = \frac{P}{k}, \quad (\text{B.35})$$

$$\int_{-\infty}^0 dx e^{ikx} = \frac{1}{i} \frac{P}{k} + \pi \delta(k). \quad (\text{B.31})$$

Zur Behauptung (B.34): Es gilt

$$\begin{aligned} 2\pi \delta(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \\ &= \int_0^{\infty} dx e^{ikx} + \int_{-\infty}^0 dx e^{ikx}. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Mit der Substitution  $x \rightarrow -x$  im letzten Integral wird daraus

$$\begin{aligned} 2\pi \delta(k) &= \int_0^{\infty} dx e^{ikx} + \int_0^{\infty} dx e^{-ikx} \\ &= 2 \int_0^{\infty} dx \cos(kx). \end{aligned}$$

Damit folgt dann die Behauptung

$$\int_0^{\infty} dx \cos(kx) = \pi \delta(k).$$

Zur Behauptung (B.35): Mit Gl. (B.34) hat man

$$\begin{aligned} \pi \delta(k) &= \int_0^{\infty} dx \cos(kx) \\ &= \frac{1}{|k|} \int_0^{\infty} dx \cos(x) \\ &= \frac{1}{|k|} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} dx \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{1}{|k|} \left[ \int_0^{\infty} dx \sin(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sin(x) \right] \\ &= \frac{1}{|k|} \left[ \int_0^{\infty} dx \sin(x) + [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \right] \\ &= \frac{1}{|k|} \int_0^{\infty} dx \sin(x) - \frac{1}{|k|}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|k|} \int_0^\infty dx \sin(x) &= \frac{1}{|k|} + \pi \delta(k) \\ \Rightarrow \int_0^\infty dx \sin(x) &= 1 + \underbrace{|k| \pi \delta(k)}_{=0} \\ \Rightarrow \int_0^\infty dx \sin(x) &= 1. \end{aligned}$$

Beachtet man jetzt die Antisymmetrie des Sinus und führt (cum grano salis) den Hauptwert ein, was im Distributionssinne zulässig ist<sup>1</sup>, so ergibt sich die Behauptung (B.35):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \sin(kx) &= \frac{1}{k} \int_0^\infty dy \sin(y) \\ &= \frac{P}{k}. \end{aligned}$$

Mit den Resultaten (B.34) und (B.35) folgt nun unmittelbar (B.31):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 dx e^{ikx} &= \int_{-\infty}^0 dx \cos(kx) + i \int_{-\infty}^0 dx \sin(kx) \\ &= \int_0^\infty dx \cos(kx) + \frac{1}{i} \int_0^\infty dx \sin(kx) \\ &\quad (\text{mit der Substitution } x \rightarrow -x) \\ &= \pi \delta(k) + \frac{1}{i} \frac{P}{k}. \end{aligned}$$

### B.3 Integrale über rationale und trigonometrische Funktionen

Bei der Berechnung der Greenschen Funktion in Kapitel 3 treten Integrale der Typen

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{k^l \cos(ak)}{(\beta^2 + k^2)^m}, \quad l \in \{0, 2, 4\}, m \in \{1, 2\} \quad (B.37)$$

und

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{k^n \sin(ak)}{(\beta^2 + k^2)^m}, \quad n \in \{1, 3\}, m \in \{1, 2\}, \quad (B.38)$$

auf. Dabei ist zu beachten, daß einige der im folgenden untersuchten Integrale eigentlich divergieren. Dies Problem und wie die jetzt angegebenen Formeln in diesem Fall zu verstehen sind wird in Kapitel 3 erörtert (Seite 41). Im folgenden gelte stets  $a > 0$  und  $\operatorname{Re} \beta > 0$ :

$$\int_{-\infty}^\infty dk \frac{\cos(ak)}{\beta^2 + k^2} = \frac{\pi}{\beta} e^{-a\beta}, \quad [47, 3.723.2] \text{ oder Residuensatz,} \quad (B.39)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k^2 \cos(ak)}{\beta^2 + k^2} &= -\frac{d^2}{da^2} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{\cos(ak)}{\beta^2 + k^2} \\ &= -\beta \pi e^{-a\beta}, \end{aligned} \quad (B.40)$$

---

<sup>1</sup>Man erweitert damit höchstens den Definitionsbereich der betreffenden Distribution.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^4 \cos(ak)}{\beta^2 + k^2} &= \frac{d^4}{da^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\cos(ak)}{\beta^2 + k^2} \\ &= \beta^3 \pi e^{-a\beta}, \end{aligned} \quad (B.41)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\cos(ak)}{(\beta^2 + k^2)^2} &= -\frac{d}{d(\beta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\cos(ak)}{\beta^2 + k^2} \\ &= \frac{\pi}{2\beta^3} e^{-a\beta} (1 + \beta a), \end{aligned} \quad (B.42)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2 \cos(ak)}{(\beta^2 + k^2)^2} &= -\frac{d}{d(\beta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^2 \cos(ak)}{\beta^2 + k^2} \\ &= \frac{\pi}{2\beta} e^{-a\beta} (1 - \beta a), \end{aligned} \quad (B.43)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^4 \cos(ak)}{(\beta^2 + k^2)^2} &= -\frac{d}{d(\beta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^4 \cos(ak)}{\beta^2 + k^2} \\ &= -\frac{\pi\beta}{2} e^{-a\beta} (3 - \beta a), \end{aligned} \quad (B.44)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k \sin(ak)}{\beta^2 + k^2} = \pi e^{-a\beta}, \quad [47, 3.723.3] \text{ oder Residuensatz,} \quad (B.45)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^3 \sin(ak)}{\beta^2 + k^2} &= -\frac{d^2}{da^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k \sin(ak)}{\beta^2 + k^2} \\ &= -\beta^2 \pi e^{-a\beta}, \end{aligned} \quad (B.46)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k \sin(ak)}{(\beta^2 + k^2)^2} &= -\frac{d}{d(\beta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k \sin(ak)}{\beta^2 + k^2} \\ &= \frac{a\pi}{2\beta} e^{-a\beta}, \end{aligned} \quad (B.47)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^3 \sin(ak)}{(\beta^2 + k^2)^2} &= -\frac{d}{d(\beta^2)} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k^3 \sin(ak)}{\beta^2 + k^2} \\ &= -\frac{\pi}{2} e^{-a\beta} (-2 + a\beta). \end{aligned} \quad (B.48)$$

## B.4 Einige weitere Integrale

Hier sollen noch einige weitere Integrale berechnet werden, die bei der Graphenberechnung benötigt werden. Als erstes bestimme ich

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx e^{-x} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) &= 2 \int_0^{\infty} dx e^{-2x} \tanh(x) \\ &= 2\beta(1) - 1 \quad [47, 3.541.7]. \end{aligned} \quad (B.49)$$

Dabei gilt

$$\beta(x) := \frac{1}{2} \left[ \psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \right] \quad [47, 8.370], \quad (B.50)$$

$$\psi(x) := \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad (B.51)$$

also

$$\beta(1) = \frac{1}{2} \left[ \psi(1) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \quad (\text{B.52})$$

Mit

$$\psi(1) = -\gamma \quad (\text{Euler-Konstante [47, 8.368.1]}), \quad (\text{B.53})$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \log 2 \quad [47, 8.366.2] \quad (\text{B.54})$$

erhält man

$$\beta(1) = \log 2, \quad (\text{B.55})$$

und somit

$$\int_0^\infty dx e^{-x} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \log 2 - 1. \quad (\text{B.56})$$

Als nächstes berechne ich

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx e^{-x} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) x &= 4 \int_0^\infty dx e^{-2x} \tanh(x) x \\ &= -4 \frac{d}{d\mu} \Big|_{\mu=2} \left\{ \int_0^\infty dx e^{-\mu x} \tanh(x) \right\} \\ &= -4 \frac{d}{d\mu} \Big|_{\mu=2} \left\{ \beta\left(\frac{\mu}{2}\right) - \frac{1}{\mu} \right\} \quad [47, 3.541.7] \\ &= -4 \left\{ \frac{1}{2} \beta'\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \right\} \\ &= -2 \beta'(1) - 1. \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

Mit der Definition der  $\beta$ -Funktion folgt (Gl. (B.50))

$$\begin{aligned} \beta'(1) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \psi'(1) - \frac{1}{2} \psi'\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} \right] \quad [47, 8.366.8 \text{ und } 8.366.9] \\ &= -\frac{\pi^2}{12}, \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

und somit

$$\int_0^\infty dx e^{-x} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) x = \frac{\pi^2}{6} - 1. \quad (\text{B.59})$$

Die nächsten drei Integrale sind leicht auszurechnen:

$$\int_0^\infty dx e^{-x} = 1, \quad (\text{B.60})$$

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x = \Gamma(2) = 1 \quad [47, 8.310], \quad (\text{B.61})$$

$$\int_0^\infty dx e^{-\frac{1}{2}x} = 2. \quad (\text{B.62})$$

Für das letzte noch zu berechnende Integral gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx e^{-\frac{1}{2}x} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) &= 2 \int_0^\infty dx e^{-x} \tanh(x) \\ &= 2 \left[ \beta\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \right] \quad [47, 3.541.7]. \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

Erneut verwendet man die Definition der  $\beta$ -Funktion,

$$\begin{aligned} \beta\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left[ \psi\left(\frac{3}{4}\right) - \psi\left(\frac{1}{4}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3 \log 2 + \gamma + \frac{\pi}{2} + 3 \log 2 \right] \quad [47, 8.366.4 \text{ und } 8.366.5] \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

und bekommt damit

$$\int_0^\infty dx e^{-\frac{1}{2}x} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \pi - 2. \quad (\text{B.65})$$

## Anhang C

# Berechnung wichtiger Ausdrücke

Hier werden jetzt die bei der Graphenberechnung auftauchenden Ausdrücke  $D_2^{(0)}(m_0 L, \hat{x}_0, \vec{\phi})$ ,  $Z_0$ ,  $D_1(m_0 L)$  und  $\mathcal{D}(m_0 L, C_0, C_2)$  berechnet.

### C.1 Berechnung von $D_2^{(0)}(m_0 L, \hat{x}_0, \vec{\phi})$

Die Definition von  $D_2^{(0)}(m_0 L, \hat{x}_0, \vec{\phi})$  ist (vgl. Gl. (5.59))

$$\begin{aligned}
D_2^{(0)}(m_0 L, \hat{x}_0, \vec{\phi}) &= \int_0^\infty du \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-m_0^2 L^2 u} e^{-\frac{\hat{x}_0^2}{4u}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} e^{i\vec{\phi} \cdot \vec{n}} \\
&= \int_0^\infty du \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-m_0^2 L^2 u} e^{-\frac{\hat{x}_0^2}{4u}} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{(\vec{\phi} - 2\pi \vec{n})^2}{16\pi^2 u}} \\
&\quad (\text{Poissonsche Summenformel, vgl. auch Gl. (3.65)}) \\
&= \int_0^\infty du \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-m_0^2 L^2 u} e^{-\frac{\hat{x}_0^2}{4u}} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{(\frac{\vec{\phi}}{2\pi} - \vec{n})^2}{4u}} \\
&= \underbrace{\int_0^\infty du \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-m_0^2 L^2 u} e^{-\frac{\hat{x}_0^2}{4u}} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} e^{-\frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2 u}}}_{=: D_{2,A}^{(0)}} \\
&+ \underbrace{\int_0^\infty du \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-m_0^2 L^2 u} e^{-\frac{\hat{x}_0^2}{4u}} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{(\frac{\vec{\phi}}{2\pi} - \vec{n})^2}{4u}}}_{=: D_{2,B}^{(0)}}. \quad (\text{C.1})
\end{aligned}$$

Da

$$\vec{\phi} \in [-\pi, \pi]^{D-1} \implies \frac{\vec{\phi}}{2\pi} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{D-1} \quad (\text{C.2})$$

gilt, folgt für  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1} \setminus \{\vec{0}\}$  stets  $\frac{\vec{\phi}}{2\pi} - \vec{n} \neq \vec{0}$ , so daß bei  $D_{2,B}^{(0)}$  keine Divergenzen für  $u \rightarrow 0$

aufreten. In der Tat gilt sogar

$$\begin{aligned}
 D_{2,B}^{(0)} &= \int_0^\infty du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} u^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{\hat{x}_0^2}{4u}} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi} - \vec{n}\right)^2}{4u}} \\
 &\leq \int_0^\infty du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} u^{\frac{D}{2}}} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi} - \vec{n}\right)^2}{4u}} \\
 &= \int_0^\infty du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} u^{\frac{D}{2}}} e^{-\frac{c_0^2}{4u}} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi} - \vec{n}\right)^2 - c_0^2}{4u}} \\
 &= \int_0^\infty du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} e^{-\frac{c_0^2}{4u}} \underbrace{\frac{1}{u^{\frac{D}{2}}} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi} - \vec{n}\right)^2 - c_0^2}{4u}}}_{=: f(\vec{\phi}, u)}, \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

mit

$$\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi} - \vec{n}\right)^2 > c_0^2 > 0 \quad \forall \vec{\phi} \in [-\pi, \pi]^{D-1}, \vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1} \setminus \{\vec{0}\}.$$

$f(\vec{\phi}, u)$  ist als Funktion von  $\vec{\phi}$  und  $u$  stetig und beschränkt für  $(\vec{\phi}, u) \in [-\pi, \pi]^{D-1} \times [0, \infty[$ . Daher gilt:

$$\begin{aligned}
 |D_{2,B}^{(0)}| &\leq \text{const. } \int_0^\infty du e^{-m_0^2 L^2 u} e^{-\frac{c_0^2}{4u}} \\
 &= \text{const. } 2 \left( \frac{c_0^2}{4m_0^2 L^2} \right)^{\frac{1}{2}} K_1(c_0 m_0 L) \quad [47, 3.471.9] \\
 &= \text{const. } \frac{1}{m_0 L} K_1(c_0 m_0 L) \\
 &= O\left(\frac{e^{-c_0 m_0 L}}{(m_0 L)^{\frac{3}{2}}}\right) \quad [47, 8.451.6]. \tag{C.4}
 \end{aligned}$$

Für  $D_{2,A}^{(0)}$  findet man

$$\begin{aligned}
 D_{2,A}^{(0)} &= \int_0^\infty du \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}} u^{\frac{D}{2}}} e^{-\left(\hat{x}_0^2 + \frac{\vec{\phi}^2}{4\pi^2}\right) \frac{1}{4u}} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} 2 \left( \frac{\hat{x}_0^2 + \frac{\vec{\phi}^2}{4\pi^2}}{4m_0^2 L^2} \right)^{\left(-\frac{D}{2}+1\right) \frac{1}{2}} K_{1-\frac{D}{2}}\left(m_0 L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \frac{\vec{\phi}^2}{4\pi^2}}\right) \quad [47, 3.471.9] \\
 &= \frac{1}{2^{\frac{D}{2}-1} \pi^{\frac{D-1}{2}}} \left( \frac{\sqrt{\hat{x}_0^2 + \left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2}}{m_0 L} \right)^{1-\frac{D}{2}} K_{1-\frac{D}{2}}\left(m_0 L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2}\right). \tag{C.5}
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} D_2^{(0)}(m_0 L, \hat{x}_0, \vec{\phi}) &= \frac{2^{\frac{D}{2}}}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \frac{1}{(m_0 L)^{1-\frac{D}{2}}} \sqrt{\hat{x}_0^2 + \left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2}^{1-\frac{D}{2}} \\ &\quad \times K_{1-\frac{D}{2}} \left( m_0 L \sqrt{\hat{x}_0^2 + \left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2} \right) + O\left(\frac{e^{-c_0 m_0 L}}{(m_0 L)^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

## C.2 Berechnung von $Z_0$

$Z_0$  wurde in Gl. (5.108) definiert:

$$Z_0 = \int_0^\infty du \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u}. \quad (\text{C.7})$$

Um die Divergenzen in diesem Ausdruck zu isolieren, stellt man zuerst das Verhalten des Integranden für  $u \rightarrow 0$  mit Hilfe der Poissonschen Summenformel fest:

$$\begin{aligned} \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} &= \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} - 1 \\ &= \left[ \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 u} \right]^{D-1} - 1 \\ &= \left[ \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{1}{2}}} \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{-\frac{n^2}{4u}} \right]^{D-1} - 1 \\ &= \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \sum_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4u}} - 1 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

$$u \xrightarrow{0} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}}. \quad (\text{C.9})$$

Daher spaltet man folgendermaßen die Divergenz ab:

$$Z_0 = \int_0^\infty du \left[ \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} - \theta(1-u) \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \right] + \int_0^1 du \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}}. \quad (\text{C.10})$$

Mit  $D = 3 - \varepsilon$  ergibt das, da das erste Integral nach Konstruktion für  $\varepsilon = 0$  endlich ist:

$$Z_0 = \underbrace{\int_0^\infty du \left[ \sum'_{\vec{n} \in \mathbf{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} - \frac{\theta(1-u)}{4\pi u} \right]}_{=: Z_{0,0}} + \int_0^1 du \frac{1}{(4\pi u)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} + O(\varepsilon). \quad (\text{C.11})$$

Für das zweite Integral berechnet man

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 du \frac{1}{(4\pi u)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} &= \frac{(4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{4\pi} \int_0^1 du u^{\frac{\varepsilon}{2}-1} \\
 &= \left. \frac{(4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{4\pi} \frac{u^{\frac{\varepsilon}{2}}}{\frac{\varepsilon}{2}} \right|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} (4\pi)^{\frac{\varepsilon}{2}} \\
 &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{2} \log(4\pi) + O(\varepsilon^2) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \frac{\log(4\pi)}{4\pi} + O(\varepsilon). \tag{C.12}
 \end{aligned}$$

Für  $Z_{0,0}$  gilt:

$$Z_{0,0} = \int_0^1 du \left[ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} - \frac{1}{4\pi u} \right] + \int_1^\infty du \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u}. \tag{C.13}$$

Hier gilt jetzt für das zweite Integral

$$\int_1^\infty du \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} = \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{4\pi^2 \vec{n}^2}. \tag{C.14}$$

Für das erste Integral in Gl. (C.13) hat man mit Gl. (C.8)

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 du \left[ \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} - \frac{1}{4\pi u} \right] &= \int_0^1 du \left[ \frac{1}{4\pi u} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4u}} - 1 \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_1^\infty \frac{dx}{x} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4} x} - 1, \quad x = \frac{1}{u} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \int_{\frac{\vec{n}^2}{4}}^\infty \frac{dy}{y} e^{-y} - 1, \quad y = \frac{\vec{n}^2}{4} x \\
 &= \frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \Gamma\left(0, \frac{\vec{n}^2}{4}\right) - 1 \quad [47, 8.350.2] \\
 &= -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \text{Ei}\left(-\frac{\vec{n}^2}{4}\right) - 1 \quad [47, 8.359.1]. \tag{C.15}
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$Z_{0,0} = -\frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \text{Ei}\left(-\frac{\vec{n}^2}{4}\right) - 1 + \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{4\pi^2 \vec{n}^2}. \tag{C.16}$$

Mit Gl. (5.269) gilt jetzt

$$Z_{0,0} = C_{\text{KL}} + \frac{\gamma}{4\pi} - \frac{1}{2\pi} \log(4\pi), \tag{C.17}$$

und mit dem Resultat aus Gl. (5.279) folgt

$$\begin{aligned} Z_{0,0} &= \frac{1}{2\pi} \log \left\{ \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{[\Gamma(\frac{1}{4})]^2} \right\} + \frac{\gamma}{4\pi} \\ &= -0.272962230(1). \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

$\gamma$  ist die Euler-Konstante. Zusammenfassend bekommt man für  $Z_0$ :

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi\varepsilon} + Z_{0,0} + \frac{\log(4\pi)}{4\pi} + O(\varepsilon). \quad (\text{C.19})$$

### C.3 Berechnung von $D_1(m_0 L)$

Nach Gl. (5.109) gilt:

$$D_1(m_0 L) = \int_0^\infty du e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u}. \quad (\text{C.20})$$

Wie bei  $Z_0$  stellt man zunächst das Verhalten des Integranden für  $u \rightarrow 0$  mit Hilfe der Poissonschen Summenformel fest:

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} &= \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4u}} \\ &\underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Daher geht man im weiteren wie folgt vor:

$$\begin{aligned} D_1(m_0 L) &= \int_0^\infty du \left[ e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} - \theta(1-u) \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} \right] \\ &+ \int_0^1 du \frac{1}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}}. \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Nach Konstruktion existiert das erste Integral für  $D = 3$  ( $\varepsilon = 0$ ); das letzte Integral trat bereits bei der Bestimmung von  $Z_0$  auf (vgl. Gl. (C.12)), also hat man

$$\begin{aligned} D_1(m_0 L) &= \underbrace{\int_0^\infty du \left[ e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} - \frac{\theta(1-u)}{4\pi u} \right]}_{=: D_{1,0}(m_0 L)} + \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \frac{\log(4\pi)}{4\pi} + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Nun zur Berechnung von  $D_{1,0}(m_0 L)$ :

$$\begin{aligned} D_{1,0}(m_0 L) &= \int_0^\infty du \left[ e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} - \frac{\theta(1-u)}{4\pi u} \right] \\ &= g_1 + g_2, \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

mit

$$g_1 := \int_0^1 du \left[ e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 u} \right]^2 - \frac{1}{4\pi u} \right] \quad (\text{C.25})$$

und

$$g_2 := \int_1^\infty du e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 u} \right]^2. \quad (\text{C.26})$$

$g_1$  und  $g_2$  werden einzeln untersucht:

$$\begin{aligned} g_2 &= \int_1^\infty du e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \underbrace{\left[ \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 u} \right]^2}_{\text{auf } [1, \infty[ \text{ beschränkt}} \\ &\leq \text{const.} \int_1^\infty du e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \\ &= \text{const.} \frac{e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2}}{\frac{3}{4} m_0^2 L^2} \\ &= O\left(\frac{e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2}}{m_0^2 L^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Für  $g_1$  gilt, wenn man Gl. (C.8) verwendet,

$$\begin{aligned} g_1 &= \int_0^1 du \left[ e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} \frac{1}{4\pi u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4u}} - \frac{1}{4\pi u} \right] \\ &= \underbrace{\int_0^1 du \frac{e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u} - 1}{4\pi u}}_{=: g_{1,1}} + \underbrace{\int_0^1 du \frac{e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u}}{4\pi u} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4u}}}_{=: g_{1,2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Unter Beachtung von Gl. (5.26) bei der Berechnung von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  kann man  $g_{1,2}$  wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} g_{1,2} &= \int_0^1 du \frac{e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u}}{4\pi u} e^{-\frac{1}{4u}} \underbrace{\left\{ 4 + \sum_{\substack{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2 \\ |\vec{n}| \neq 1,0}} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4u}} \right\}}_{\text{beschränkt auf } [0,1]} \\ &\leq \text{const.} \int_0^1 du \frac{e^{-\frac{3}{4} m_0^2 L^2 u}}{u} e^{-\frac{1}{4u}} \\ &= \text{const.} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L\right) \quad [47, 3.471.9] \\ &= O\left(\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L}}{\sqrt{m_0 L}}\right) \quad [47, 8.451.6]. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Es bleibt  $g_{1,1}$  zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 g_{1,1} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 du \frac{e^{-\frac{3}{4}m_0^2L^2u} - 1}{u} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{3}{4}m_0^2L^2} dt \frac{e^{-t} - 1}{t}, \quad t = \frac{3}{4}m_0^2L^2u \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dt \frac{e^{-t} - 1}{t} + \frac{1}{4\pi} \int_1^{\frac{3}{4}m_0^2L^2} dt \frac{e^{-t} - 1}{t} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dt \frac{e^{-t} - 1}{t} + \frac{1}{4\pi} \int_1^{\frac{3}{4}m_0^2L^2} dt \frac{e^{-t}}{t} - \frac{\log(\frac{3}{4}m_0^2L^2)}{4\pi}. \quad (\text{C.30})
 \end{aligned}$$

Dies lässt sich nun durch die Gammafunktion bzw. die unvollständige Gammafunktion ausdrücken [47, 8.350.2]:

$$g_{1,1} = \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dt \frac{e^{-t} - 1}{t} + \frac{1}{4\pi} \left[ \Gamma(0, 1) - \Gamma\left(0, \frac{3}{4}m_0^2L^2\right) \right] - \frac{\log(\frac{3}{4}m_0^2L^2)}{4\pi}. \quad (\text{C.31})$$

Das erste Integral kann man mit einer analytischen Fortsetzung wie folgt auswerten:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4\pi} \int_0^1 dt \frac{e^{-t} - 1}{t} &= \frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^1 dt \frac{e^{-t} - 1}{t^{1-z}} \right]_{|z=0} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^1 dt t^{z-1} e^{-t} - \int_0^1 dt t^{z-1} \right]_{|z=0} \\
 &\quad (\text{analytische Fortsetzung für } \operatorname{Re}(z) > 0) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \Gamma(z) - \Gamma(z, 1) - \frac{1}{z} \right]_{|z=0} \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left[ \Gamma(z) - \frac{1}{z} \right]_{|z=0} - \frac{1}{4\pi} \Gamma(0, 1). \quad (\text{C.32})
 \end{aligned}$$

Dabei beachte man, daß die unvollständige Gammafunktion  $\Gamma(\alpha, x)$  stetig bezüglich des ersten Arguments ist [47, 8.350.2]. Mit

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} - \gamma + O(z) \quad (\text{C.33})$$

gilt also

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^1 dt \frac{e^{-t} - 1}{t} = -\frac{\gamma}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} \Gamma(0, 1). \quad (\text{C.34})$$

Wegen

$$\Gamma\left(0, \frac{3}{4}m_0^2L^2\right) = O\left(\frac{e^{-\frac{3}{4}m_0^2L^2}}{m_0^2L^2}\right) \quad [47, 8.357] \quad (\text{C.35})$$

findet man

$$g_{1,1} = -\frac{1}{4\pi} \left[ \gamma + \log\left(\frac{3}{4}m_0^2L^2\right) \right] + O\left(\frac{e^{-\frac{3}{4}m_0^2L^2}}{m_0^2L^2}\right). \quad (\text{C.36})$$

Damit bekommt man für  $D_{1,0}(m_0L)$

$$D_{1,0}(m_0L) = -\frac{1}{4\pi} \left[ \gamma + \log \left( \frac{3}{4} m_0^2 L^2 \right) \right] + O \left( \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L}}{\sqrt{m_0 L}} \right) \quad (\text{C.37})$$

und für  $D_1(m_0L)$ :

$$\begin{aligned} D_1(m_0L) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} + \frac{1}{4\pi} \left[ \log(4\pi) - \gamma - \log \left( \frac{3}{4} m_0^2 L^2 \right) \right] + O \left( \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L}}{\sqrt{m_0 L}} \right) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} - \frac{1}{4\pi} \left[ \gamma + \log \left( \frac{3m_0^2 L^2}{16\pi} \right) \right] + O \left( \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L}}{\sqrt{m_0 L}} \right) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} - \frac{1}{4\pi} \left[ \gamma + \log \left( \frac{3}{16\pi} \right) + 2 \log(m_0L) \right] + O \left( \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L}}{\sqrt{m_0 L}} \right) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \log(m_0L) - \frac{1}{4\pi} \left[ \gamma + \log \left( \frac{3}{16\pi} \right) \right] \\ &\quad + O \left( \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L}}{\sqrt{m_0 L}} \right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

## C.4 Berechnung von $\mathcal{D}(m_0L, C_0, C_2)$

Man hat nach Gl. (5.110):

$$\mathcal{D}(m_0L, C_0, C_2) = \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{C_0 + C_2 v^2}{4v^4 + 5v^2 + 1} \int_0^{\infty} du e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u}. \quad (\text{C.39})$$

Für das  $u$ -Integral gilt offenbar, man vergleiche die Form von  $D_1(m_0L)$  in Gl. (C.20),

$$\int_0^{\infty} du e^{-(1+v^2)m_0^2 L^2 u} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^{D-1}} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2 u} = D_1 \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+v^2} m_0 L \right). \quad (\text{C.40})$$

Daher ergibt sich mit dem Resultat von  $D_1(m_0L)$  (vgl. Gl. (C.38))

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(m_0L, C_0, C_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{C_0 + C_2 v^2}{4v^4 + 5v^2 + 1} D_1 \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+v^2} m_0 L \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{C_0 + C_2 v^2}{4v^4 + 5v^2 + 1} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2\pi\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \log \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+v^2} m_0 L \right) - \frac{1}{4\pi} \left[ \gamma + \log \left( \frac{3}{16\pi} \right) \right] \right\} \\ &\quad + \text{Korr} + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

wobei für die Korrektur Korr gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{Korr} &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{C_0 + C_2 v^2}{4v^4 + 5v^2 + 1} O\left(\frac{e^{-\sqrt{1+v^2} m_0 L}}{(\sqrt{1+v^2} m_0 L)^{\frac{1}{2}}}\right) \\
 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{C_0 + C_2 v^2}{4v^4 + 5v^2 + 1} O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{\sqrt{m_0 L}}\right) \\
 &= O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{\sqrt{m_0 L}}\right). \tag{C.42}
 \end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(m_0 L, C_0, C_2) &= \frac{\mathcal{C}_0}{2\pi\varepsilon} - \frac{\mathcal{C}_0}{2\pi} \log(m_0 L) - \frac{\mathcal{C}_0}{4\pi} \underbrace{\left[ \gamma + \log\left(\frac{3}{16\pi}\right) + 2 \log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \right]}_{= \log\left(\frac{1}{4\pi}\right)} \\
 &\quad - \frac{\mathcal{C}_1}{4\pi} + O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{\sqrt{m_0 L}}\right) + O(\varepsilon), \tag{C.43}
 \end{aligned}$$

wobei

$$\mathcal{C}_0 := \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{C_0 + C_2 v^2}{4v^4 + 5v^2 + 1}, \tag{C.44}$$

$$\mathcal{C}_1 := \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{C_0 + C_2 v^2}{4v^4 + 5v^2 + 1} \log(1 + v^2). \tag{C.45}$$

Zusammengefaßt hat man damit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(m_0 L, C_0, C_2) &= \frac{\mathcal{C}_0}{2\pi\varepsilon} - \frac{\mathcal{C}_0}{2\pi} \log(m_0 L) - \frac{\mathcal{C}_0}{4\pi} [\gamma - \log(4\pi)] \\
 &\quad - \frac{\mathcal{C}_1}{4\pi} + O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{\sqrt{m_0 L}}\right) + O(\varepsilon). \tag{C.46}
 \end{aligned}$$

## C.5 Bestimmung von $\mathcal{A}_1(m_0 L)$

Mit der Definition von  $\mathcal{A}_1(m_0 L)$  in Gl. (5.120) bekommt man:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1(m_0 L) &= \frac{3}{8} Z_0 - \frac{3}{4} D_1(m_0 L) + \frac{9}{8\pi} \mathcal{D}(m_0 L, 1, 0) \\
 &= \left[ \frac{3}{8} - \frac{3}{4} + \frac{9}{8\pi} \mathcal{C}_0^{(1)} \right] \frac{1}{2\pi\varepsilon} \\
 &\quad + \frac{3}{8} \left[ Z_{0,0} + \frac{\log(4\pi)}{4\pi} \right] \\
 &\quad - \frac{3}{4} \left[ -\frac{1}{2\pi} \log(m_0 L) - \frac{1}{4\pi} [\gamma + \log\left(\frac{3}{16\pi}\right)] \right] \\
 &\quad + \frac{9}{8\pi} \left[ -\frac{\mathcal{C}_0^{(1)}}{2\pi} \log(m_0 L) - \frac{\mathcal{C}_0^{(1)}}{4\pi} [\gamma - \log(4\pi)] - \frac{\mathcal{C}_1^{(1)}}{4\pi} \right] \\
 &\quad + O\left(\frac{e^{-m_0 L}}{\sqrt{m_0 L}}\right) + O(\varepsilon). \tag{C.47}
 \end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0^{(1)} &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{1}{4v^4 + 5v^2 + 1} \\ &= \frac{\pi}{3},\end{aligned}\tag{C.48}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1^{(1)} &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{\log(1+v^2)}{4v^4 + 5v^2 + 1} \\ &= 0.246684213(1).\end{aligned}\tag{C.49}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1(m_0L) &= \frac{3}{32\pi^2} \left[ 2\pi \log(m_0L) + 4\pi^2 Z_{0,0} - 4\pi \log(2) + \pi\gamma + 2\pi \log 3 - 3\mathcal{C}_1^{(1)} \right] \\ &\quad + O\left(\frac{e^{-m_0L}}{\sqrt{m_0L}}\right) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{3}{32\pi} \left[ 2 \log(m_0L) + 4\pi Z_{0,0} + \gamma + \log\left(\frac{9}{16}\right) - \frac{3\mathcal{C}_1^{(1)}}{\pi} \right] \\ &\quad + O\left(\frac{e^{-m_0L}}{\sqrt{m_0L}}\right) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{3}{16\pi} \log(m_0L) + O_c + O\left(\frac{e^{-m_0L}}{\sqrt{m_0L}}\right) + O(\varepsilon),\end{aligned}\tag{C.50}$$

mit

$$\begin{aligned}O_c &= \frac{3}{8} Z_{0,0} + \frac{3\gamma}{32\pi} + \frac{3}{32\pi} \log\left(\frac{9}{16}\right) - \frac{9}{32\pi^2} \mathcal{C}_1^{(1)} \\ &= -0.109335241(1).\end{aligned}\tag{C.51}$$

## C.6 Bestimmung von $\mathcal{A}_2(m_0L)$

Mit der Form von  $\mathcal{D}(m_0L, C_0, C_2)$  aus Gl. (C.43) hat man, wobei  $\mathcal{A}_2(m_0L)$  in Gl. (5.120) definiert worden ist,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2(m_0L) &= \frac{3}{4} D_1(m_0L) + \frac{1}{2\pi} \mathcal{D}(m_0L, -3, -3) \\ &= \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \mathcal{C}_0^{(2)} \right] \frac{1}{2\pi\varepsilon} \\ &\quad + \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \mathcal{C}_0^{(2)} \right] \left[ -\frac{1}{2\pi} \log(m_0L) \right] \\ &\quad + \left[ \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \mathcal{C}_0^{(2)} \right] \left( -\frac{1}{4\pi} \right) \left[ \gamma + \log\left(\frac{3}{16\pi}\right) \right] \\ &\quad - \frac{\mathcal{C}_0^{(2)}}{4\pi^2} \log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\mathcal{C}_1^{(2)}}{8\pi^2} + O\left(\frac{e^{-m_0L}}{\sqrt{m_0L}}\right) + O(\varepsilon).\end{aligned}\tag{C.52}$$

Dabei gelten folgende Definitionen:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0^{(2)} &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{-3 - 3v^2}{4v^4 + 5v^2 + 1} \\ &= -\frac{3}{2}\pi\end{aligned}\tag{C.53}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1^{(2)} &:= \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{-3 - 3v^2}{4v^4 + 5v^2 + 1} \log(1 + v^2) \\ &= -3.821418615(1),\end{aligned}\quad (\text{C.54})$$

so daß man

$$\mathcal{A}_2(m_0L) = \underbrace{\frac{3}{8\pi} \log\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\mathcal{C}_1^{(2)}}{8\pi^2}}_{=: \mathcal{A}_{2,c}} + O\left(\frac{e^{-m_0L}}{\sqrt{m_0L}}\right) + O(\varepsilon) \quad (\text{C.55})$$

bekommt. Numerisch gilt

$$\mathcal{A}_{2,c} = 0.065568591(1). \quad (\text{C.56})$$

Die numerischen Bestimmungen in diesem Anhang wurden mit dem Programm Maple durchgeführt.



## Anhang D

# Bestimmung der Konstanten $Z_{\tilde{R}}$

Es soll hier die Größe

$$Z_{\tilde{R}} = \int \frac{d^2 \hat{\phi}}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{e^{-3\sqrt{(x+y)^2 + (\frac{\hat{\phi}}{2\pi})^2}}}{[(x+y)^2 + (\frac{\hat{\phi}}{2\pi})^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{D.1})$$

(vgl. Gl. (5.88)) berechnet werden. Zunächst substituiere ich

$$\vec{\phi} = \frac{\hat{\phi}}{2\pi}. \quad (\text{D.2})$$

Das ergibt

$$Z_{\tilde{R}} = \int d^2\phi \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \frac{e^{-3\sqrt{(x+y)^2 + |\vec{\phi}|^2}}}{[(x+y)^2 + |\vec{\phi}|^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{D.3})$$

Folgende Substitution erweist sich nun als vorteilhaft ( $\Phi$  ist hier nicht das Fehlerintegral):

$$\begin{aligned} \Phi : [0, \infty[ \times [0, \infty[ &\longrightarrow U \\ (x, y) &\mapsto (t, s) = (x + y, x - y), \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

mit

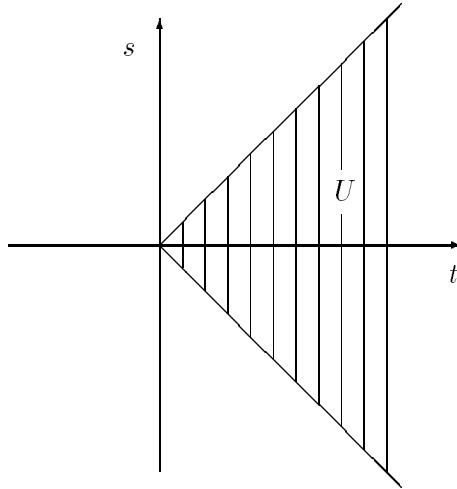
$$U = \left\{ (t, s) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq 0, |s| \leq t \right\} \quad (\text{D.5})$$

(vgl. auch Abbildung D.1).  $\Phi$  ist eine umkehrbar stetig differenzierbare Abbildung mit der zugehörigen Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : U &\longrightarrow [0, \infty[ \times [0, \infty[ \\ (t, s) &\mapsto (x, y) = \frac{1}{2}(t + s, t - s). \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Die Funktionalmatrix berechnet sich zu

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.7})$$

Abbildung D.1: Die Bildmenge  $U$  der Abbildung  $\Phi$ 

so daß man als Betrag der Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} \right| = \frac{1}{2} \quad (\text{D.8})$$

bekommt. Mit dieser Substitution ergibt sich für  $Z_{\tilde{R}}$ :

$$\begin{aligned} Z_{\tilde{R}} &= \int d^2\phi \int_U dt ds \frac{1}{2} \frac{e^{-3\sqrt{t^2+|\vec{\phi}|^2}}}{[t^2 + |\vec{\phi}|^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2\phi \int_0^\infty dt \int_{-t}^t ds \frac{e^{-3\sqrt{t^2+|\vec{\phi}|^2}}}{[t^2 + |\vec{\phi}|^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2\phi \int_0^\infty dt 2t \frac{e^{-3\sqrt{t^2+|\vec{\phi}|^2}}}{[t^2 + |\vec{\phi}|^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2\phi \int_0^\infty du \frac{e^{-3\sqrt{u+|\vec{\phi}|^2}}}{[u + |\vec{\phi}|^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad u = t^2. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Es gilt nun folgender Zusammenhang:

$$\int_0^\infty du \frac{e^{-a\sqrt{u+|\vec{\phi}|^2}}}{[u + |\vec{\phi}|^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{|\vec{\phi}|} \left[ e^{-a|\vec{\phi}|} + a|\vec{\phi}| \operatorname{Ei}(-a|\vec{\phi}|) \right], \quad a \geq 0, |\vec{\phi}| > 0. \quad (\text{D.10})$$

Diese Gleichung wird später bewiesen, zuerst berechne ich damit  $Z_{\tilde{R}}$ :

$$\begin{aligned} Z_{\tilde{R}} &= \frac{1}{2} \int d^2\phi \int_0^\infty du \frac{e^{-3\sqrt{u+|\vec{\phi}|^2}}}{[u + |\vec{\phi}|^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2\phi \frac{2}{|\vec{\phi}|} \left[ e^{-3|\vec{\phi}|} + 3|\vec{\phi}| \operatorname{Ei}(-3|\vec{\phi}|) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Führt man Polarkoordinaten für die  $\phi$ -Integration ein, erhält man

$$\begin{aligned}
 Z_{\tilde{R}} &= 2\pi \int_0^\infty d\phi \left[ e^{-3\phi} + 3\phi \operatorname{Ei}(-3\phi) \right] \\
 &= 2\pi \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \int_0^\infty d\tilde{\phi} \tilde{\phi} \operatorname{Ei}(-\tilde{\phi}) \right\}, \quad \tilde{\phi} = 3\phi \\
 &= \frac{2\pi}{3} \left\{ 1 - \frac{\Gamma(2)}{2} \right\} \quad [47, 6.223] \\
 &= \frac{2\pi}{3} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \right\} \\
 &= \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned} \tag{D.12}$$

Jetzt zum Beweis der Formel (D.10). Ich definiere

$$f(a, \phi) := \int_0^\infty du \frac{e^{-a\sqrt{u+\phi^2}}}{[u+\phi^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad a \geq 0, \phi > 0. \tag{D.13}$$

Durch Differentiation unter dem Integral erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a, \phi) &= \int_0^\infty du \frac{e^{-a\sqrt{u+\phi^2}}}{\sqrt{u+\phi^2}} \\
 &= -\frac{2}{a} e^{-a\sqrt{u+\phi^2}} \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{2}{a} e^{-a\phi}.
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

Durch Integrieren sieht man also

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial a}(a, \phi) &= \int_\infty^a d\tilde{a} \frac{2}{\tilde{a}} e^{-\tilde{a}\phi} + F(\phi), \quad F(\phi) \text{ beliebige Funktion} \\
 &= 2 \int_{-\infty}^{-a\phi} dt \frac{e^t}{t} + F(\phi) \\
 &= 2 \operatorname{Ei}(-a\phi) + F(\phi).
 \end{aligned} \tag{D.15}$$

Zur Bestimmung von  $F(\phi)$  rechnet man wie folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, \phi) = - \int_0^\infty du \frac{e^{-a\sqrt{u+\phi^2}}}{u+\phi^2}, \tag{D.16}$$

also

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial a}(1, \phi) &= - \int_0^\infty du \frac{e^{-\sqrt{u+\phi^2}}}{u+\phi^2} \\
 &= -2 \int_{-\phi}^{-\infty} dt t \frac{e^t}{t^2}, \quad t = -\sqrt{u+\phi^2} \\
 &= 2 \operatorname{Ei}(-\phi).
 \end{aligned} \tag{D.17}$$

Damit schließt man also

$$F \equiv 0 \quad (\text{D.18})$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, \phi) = 2 \operatorname{Ei}(-a\phi). \quad (\text{D.19})$$

Eine erneute Integration ergibt

$$\begin{aligned} f(a, \phi) &= 2 \int_0^a d\tilde{a} \operatorname{Ei}(-\tilde{a}\phi) + H(\phi), \quad H(\phi) \text{ beliebige Funktion} \\ &= 2a \operatorname{Ei}(-a\phi) + 2 \frac{1 - e^{-a\phi}}{-\phi} + H(\phi) \quad [47, 6.221] \\ &= 2a \operatorname{Ei}(-a\phi) - 2 \frac{1 - e^{-a\phi}}{\phi} + H(\phi). \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Zur Bestimmung von  $H(\phi)$  berechnet man einerseits

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} f(a, \phi) &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{ 2a \operatorname{Ei}(-a\phi) - 2 \frac{1 - e^{-a\phi}}{\phi} + H(\phi) \right\} \\ &= H(\phi), \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

denn

$$\operatorname{Ei}(-a\phi) \underset{a \rightarrow 0}{\sim} \log(a) + O(a^0) \quad [61, 3.1.5]. \quad (\text{D.22})$$

Andererseits gilt aber nach Definition von  $f(a, \phi)$ :

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} f(a, \phi) &= \int_0^\infty du \frac{1}{[u + \phi^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{2}{[u + \phi^2]^{\frac{1}{2}}} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{2}{\phi}. \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Insgesamt folgt daher

$$H(\phi) = \frac{2}{\phi} \quad (\text{D.24})$$

und somit

$$\begin{aligned} f(a, \phi) &= 2a \operatorname{Ei}(-a\phi) + 2 \frac{e^{-a\phi}}{\phi} \\ &= \frac{2}{\phi} \left[ e^{-a\phi} + a\phi \operatorname{Ei}(-a\phi) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

Mit  $|\vec{\phi}|$  an Stelle von  $\phi$  ist das gerade die Behauptung (D.10).

## Anhang E

# Divergenzfreiheit der Terme IC4 und IC7

Am Beispiel des Terms IC7 soll hier die Divergenzfreiheit der Beiträge IC4 und IC7 zum Graphen IC für  $D = 3$  Dimensionen skizziert werden. Die Überlegungen verlaufen für IC4 ganz analog. Für IC7 gilt nun (vgl. Gl. (5.247))

$$\begin{aligned} \text{IC7} &= \frac{3}{4} g_0 m_0^2 L^4 (\mu_0 L)^\epsilon \int_{[-\pi, \pi]^{D-1}} \frac{d^{D-1}\phi}{(2\pi)^{D-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \tanh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \right. \\ &\quad \times \left. \tanh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right) D(\vec{\phi}, m_0 L) \langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle D_{kont}^2(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Es folgt jetzt (vgl. Gl. (5.241), (5.243) mit Ausführen der Reihe analog zu Gl. (5.239) sowie die Gln. (5.358) – (5.363))

$$D(\vec{\phi}, m_0 L) = \frac{2}{(4\pi)^{\frac{D-1}{2}}} \left( \frac{\vec{\phi}^2}{12\pi^2 m_0^2 L^2} \right)^{\frac{3-D}{4}} K_{\frac{3-D}{2}} \left( \frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right), \quad (\text{E.2})$$

$$\begin{aligned} D_{kont}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) &= \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dk \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle \frac{e^{-\frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2 u}}}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} e^{-\left(1+\frac{k^2}{m_0^2}\right)m_0^2 L^2 u} \\ &\quad + O\left(\frac{e^{-c_0 m_0 L}}{m_0^2 L^2}\right), \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle &= \frac{e^{ik(x_0 - y_0)}}{2\pi} + \frac{e^{ik(x_0 - y_0)}}{2\pi (4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4)} \left\{ \tilde{B}(x_0, y_0) k^3 \right. \\ &\quad \left. + C(x_0, y_0) k^2 + D(x_0, y_0) k + E(x_0, y_0) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Damit geht man schematisch folgendermaßen weiter vor. Das  $k$ -Integral in  $D_{kont}$  wird mittels Partialbruchzerlegung der Terme

$$\frac{k^l}{4k^4 + 5m_0^2 k^2 + m_0^4}, \quad l \in \{0, 1, 2, 3\}$$

und [72b, (15) S. 15, (26) S.74] gelöst. Nach längerer Rechnung erhält man:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle e^{-\frac{k^2}{m_0^2} m_0^2 L^2 u} = \frac{m_0}{2\pi} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{u m_0^2 L^2}} e^{-\frac{(x_0 - y_0)^2}{4L^2 u}} + \mathcal{R} \right\}, \quad (\text{E.5})$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} := & -\frac{\pi}{2} \left\{ \frac{1}{3m_0^4} E(x_0, y_0) - \frac{1}{3m_0^2} C(x_0, y_0) \right. \\
& - \text{sign}(x_0 - y_0) \left[ \frac{1}{3im_0^3} D(x_0, y_0) - \frac{1}{3im_0} \tilde{B}(x_0, y_0) \right] \Big\} \\
\times & \left\{ e^{m_0^2 L^2 u} \left[ e^{-m_0 |x_0 - y_0|} \text{Erfc}\left(m_0 L \sqrt{u} - \frac{|x_0 - y_0|}{2L\sqrt{u}}\right) \right. \right. \\
& - e^{m_0 |x_0 - y_0|} \text{Erfc}\left(m_0 L \sqrt{u} + \frac{|x_0 - y_0|}{2L\sqrt{u}}\right) \Big] \\
& - e^{\frac{m_0^2 L^2}{4} u} \left[ e^{-\frac{m_0}{2} |x_0 - y_0|} \text{Erfc}\left(\frac{m_0 L \sqrt{u}}{2} - \frac{|x_0 - y_0|}{2L\sqrt{u}}\right) \right. \\
& \left. \left. - e^{\frac{m_0}{2} |x_0 - y_0|} \text{Erfc}\left(\frac{m_0 L \sqrt{u}}{2} + \frac{|x_0 - y_0|}{2L\sqrt{u}}\right)\right] \right\} \\
+ & \frac{3}{8} \pi \left\{ \frac{1}{3m_0^2} C(x_0, y_0) - \text{sign}(x_0 - y_0) \frac{1}{3im_0} \tilde{B}(x_0, y_0) \right\} \\
\times & e^{\frac{m_0^2 L^2}{4} u} \left[ e^{-\frac{m_0}{2} |x_0 - y_0|} \text{Erfc}\left(\frac{m_0 L \sqrt{u}}{2} - \frac{|x_0 - y_0|}{2L\sqrt{u}}\right) \right. \\
& \left. + e^{\frac{m_0}{2} |x_0 - y_0|} \text{Erfc}\left(\frac{m_0 L \sqrt{u}}{2} + \frac{|x_0 - y_0|}{2L\sqrt{u}}\right)\right] \tag{E.6}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\text{Erfc}(z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ 1 - \Phi(z) \right] \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \right] \tag{E.7}
\end{aligned}$$

$$z \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{e^{-z^2}}{z}. \tag{E.8}$$

$\Phi$  ist hier das Fehlerintegral. Vom Ausdruck  $\mathcal{R}$  überlegt man sich, daß er für  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u \in \mathbb{R}^{>0}$  beschränkt ist, so daß man letztlich

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} dk \langle x_0 | k \rangle \langle k | y_0 \rangle e^{-\frac{k^2}{m_0^2} m_0^2 L^2 u} \right| \leq \frac{m_0}{2\pi} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{u m_0^2 L^2}} e^{-\frac{(x_0 - y_0)^2}{4L^2 u}} + \text{const.} \right\} \tag{E.9}$$

bekommt. Hiermit läßt sich  $D_{kont}$  insgesamt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\left| D_{kont}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \right| &\leq \frac{m_0}{2\pi} \int_0^{\infty} du \left\{ \frac{e^{-m_0^2 L^2 u}}{(4\pi u)^{\frac{D-1}{2}}} e^{-\frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2 u}} \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{u m_0^2 L^2}} e^{-\frac{(x_0 - y_0)^2}{4L^2 u}} + \text{const.} \right\} \right\} \\
&= \text{const.} \left( \frac{1}{m_0 L} \left( \frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2} + \frac{(x_0 - y_0)^2}{4L^2} \right) \right)^{\frac{2-D}{4}} \\
&\quad \times K_{\frac{2-D}{2}} \left( 2 \sqrt{\frac{\vec{\phi}^2}{16\pi^2} + \frac{(x_0 - y_0)^2}{4L^2}} m_0 L \right) \\
&+ \text{const.} \left( \frac{\vec{\phi}^2}{m_0^2 L^2} \right)^{\frac{3-D}{4}} K_{\frac{3-D}{2}} \left( \frac{1}{2\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \quad [47, 3.471.9]. \tag{E.10}
\end{aligned}$$

Für  $D = 3$  gilt also

$$\left| D_{kont}(\vec{\phi}, m_0 L, x_0, y_0) \right| \leq \text{const. } K_0\left(\frac{m_0 L}{2\pi} |\vec{\phi}| \right) + \text{const. } \frac{e^{-m_0 L} \sqrt{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{L}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{L}\right)^2}}, \quad (\text{E.11})$$

denn

$$K_{-\frac{1}{2}}(z) = K_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \quad [47, 8.469.3]. \quad (\text{E.12})$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich IC7 jetzt abschätzen:

$$\begin{aligned} |IC7| &\leq \text{const. } \int_{[-\pi, \pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ |\langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle| K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \\ &\quad \times \left[ \text{const. } K_0\left(\frac{m_0 L}{2\pi} |\vec{\phi}| \right) + \frac{e^{-m_0 L} \sqrt{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{L}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{L}\right)^2}} \right]^2 \Big\} \\ &\quad + O\left(\frac{e^{-c_0 m_0 L}}{m_0^2 L^2}\right) \\ &\leq \boxed{A} + \boxed{B} + \boxed{C} + O\left(\frac{e^{-c_0 m_0 L}}{m_0^2 L^2}\right), \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

mit

$$\begin{aligned} \boxed{A} &= \text{const. } \int_{[-\pi, \pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ |\langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle| \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) K_0^2\left(\frac{m_0 L}{2\pi} |\vec{\phi}| \right) \Big\} \\ &\leq \text{const. } \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \right]^2 \int \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) K_0^2\left(\frac{m_0 L}{2\pi} |\vec{\phi}| \right) \\ &\leq \text{const. } \int_0^{\infty} d\phi \phi K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L \phi\right) K_0^2\left(\frac{m_0 L}{2\pi} \phi\right) \\ &< \infty, \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

da  $K_0(z)$  für  $z \rightarrow \infty$  exponentiell gegen 0 geht.

Weiter rechnet man

$$\begin{aligned} \boxed{B} &= \text{const. } \int_{[-\pi, \pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ |\langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle| K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{m_0 L}{2\pi} |\vec{\phi}| \right) \frac{e^{-m_0 L} \sqrt{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{L}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{L}\right)^2}} \Big\} \\ &\leq \text{const. } \left[ \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \right]^2 \\ &\quad \times \int_0^{\infty} d\hat{\phi} \hat{\phi} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L \hat{\phi}\right) K_0\left(m_0 L \hat{\phi}\right) \frac{e^{-m_0 L \hat{\phi}}}{\hat{\phi}} \\ &< \infty \quad (\hat{\phi} = \frac{\vec{\phi}}{2\pi}). \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Schließlich gilt noch

$$\begin{aligned}
[\mathbb{C}] &= \text{const.} \int_{[-\pi, \pi]^2} \frac{d^2\phi}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ |\langle x_0 | 1 \rangle \langle 1 | y_0 \rangle| K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} m_0 L |\vec{\phi}| \right) \right. \\
&\quad \times \left. \frac{e^{-2m_0 L \sqrt{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{L}\right)^2}}}{\left(\frac{\vec{\phi}}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{L}\right)^2} \right\} \\
&\leq \text{const.} \int_0^{\infty} d\hat{\phi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \left\{ \frac{1}{\cosh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right) \cosh\left(\frac{m_0}{2} y_0\right)} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L \hat{\phi}\right) \right. \\
&\quad \times \left. \frac{e^{-2m_0 L \sqrt{\hat{\phi}^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{L}\right)^2}}}{\hat{\phi}^2 + \left(\frac{x_0 - y_0}{L}\right)^2} \right\}, \quad (\hat{\phi} = \frac{\vec{\phi}}{2\pi}) \\
&= \text{const.} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{1}{\cosh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \int_0^{\infty} d\hat{\phi} \left\{ \hat{\phi} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L \hat{\phi}\right) \right. \\
&\quad \times \left. \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\cosh\left(\frac{m_0}{2} (x_0 - Ly)\right)} \frac{e^{-2m_0 L \sqrt{\hat{\phi}^2 + y^2}}}{\hat{\phi}^2 + y^2} \right\} \\
&\quad (\text{mit } y = \frac{x_0 - y_0}{L}) \\
&\leq \text{const.} \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \frac{1}{\cosh\left(\frac{m_0}{2} x_0\right)} \int_0^{\infty} d\hat{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \hat{\phi} K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L \hat{\phi}\right) \frac{e^{-2m_0 L \sqrt{\hat{\phi}^2 + y^2}}}{\hat{\phi}^2 + y^2} \\
&= \text{const.} \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} dr r^2 \sin \vartheta K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L r \sin \vartheta\right) \frac{e^{-2m_0 L r}}{r^2} \\
&\quad (\text{mit } y = r \cos \vartheta, \phi = r \sin \vartheta) \\
&= \text{const.} \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{\infty} dr \sin \vartheta K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L r \sin \vartheta\right) e^{-2m_0 L r} \\
&< \infty,
\end{aligned} \tag{E.16}$$

denn es gilt  $|K_0(z) \sqrt{z}| < \text{const.}$  aufgrund des Verhaltens von  $K_0$  für kleine  $z$  (wie  $\log z$ ) und für große  $z$  (exponentieller Abfall). Insgesamt folgt die Endlichkeit von IC7 in drei Dimensionen.

## Anhang F

# Berechnung von numerischen Konstanten

In diesem Anhang sollen einige numerische Konstanten, die bei der Auswertung des Graphen  auftreten, bestimmt werden.

### F.1 Bestimmung von $R_3$

Die Definition von  $R_3$  ist (Gl. (5.289))

$$R_3 = \frac{1}{\pi} \int d^2 \tilde{\phi} C_2(\tilde{\phi}) K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi} |\tilde{\phi}|\right), \quad (\text{F.1})$$

mit (Gln. (5.268), (5.264))

$$\begin{aligned} C_2(\tilde{\phi}) &= \frac{\tilde{\phi}^2}{64\pi^3} - \frac{1}{4\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-\frac{\vec{n}^2}{4}}}{8\pi^2 \vec{n}^2} \left[ -\frac{\vec{n}^2 + 4}{\vec{n}^2} (\tilde{\phi} \cdot \vec{n})^2 + 2\tilde{\phi}^2 \right] \\ &\quad - \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-4\pi^2 \vec{n}^2}}{8\pi^2 \vec{n}^2} (\vec{n} \cdot \tilde{\phi})^2. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Da  $C_2$  homogen vom Grad zwei ist, folgt mit der Substitution<sup>1</sup>  $\vec{\phi} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \tilde{\phi}$ :

$$R_3 = \frac{2^8 \pi^3}{9} Z_\phi, \quad (\text{F.3})$$

wobei

$$Z_\phi := \int d^2 \phi C_2(\vec{\phi}) K_0(|\vec{\phi}|). \quad (\text{F.4})$$

definiert wird. Man erkennt, daß zu  $Z_\phi$  nur zwei verschiedene Integraltypen beitragen. Zum einen hat man nämlich

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &:= \int d^2 \phi \vec{\phi}^2 K_0(|\vec{\phi}|) \\ &= 2\pi \int_0^\infty d\phi \phi^3 K_0(\phi) \\ &= 25.13274124(1). \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

---

<sup>1</sup>  $\tilde{\phi}$  ist ein zweidimensionaler Vektor.

Zum anderen tritt

$$\mathcal{J} := \int d^2\phi (\vec{\phi} \cdot \vec{n})^2 K_0(|\vec{\phi}|). \quad (\text{F.6})$$

auf. Wählt man das  $\phi$ -Koordinatensystem so, daß  $\vec{n}$  längs der  $\phi_1$ -Achse liegt, so kann man wie folgt Polarkoordinaten  $\phi = |\vec{\phi}|$  und  $\varphi$  einführen:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \phi \cos \varphi, \\ \phi_2 &= \phi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty d\phi |\vec{n}|^2 \phi^3 K_0(\phi) \cos^2 \varphi \\ &= |\vec{n}|^2 \pi \mathcal{I}. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Daher ergibt sich für  $Z_\phi$ :

$$\begin{aligned} Z_\phi &= \mathcal{I} \left\{ \frac{1}{64\pi^3} - \frac{1}{32\pi^3} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-\frac{\vec{n}^2}{4}}}{\vec{n}^2} \left[ -(\vec{n}^2 + 4)\pi + 2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8\pi} \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Es treten also folgende Reihentypen auf:

$$\begin{aligned} R_A &:= \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-\frac{\vec{n}^2}{4}} \\ &= 11.56637061(1), \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

$$\begin{aligned} R_B &:= \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} \frac{e^{-\frac{\vec{n}^2}{4}}}{\vec{n}^2} \\ &= 5.37677745(1), \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

$$\begin{aligned} R_C &:= \sum'_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} e^{-4\pi^2 \vec{n}^2} \\ &= 0.286286629(1) \cdot 10^{-16}. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Hiermit bekommt man:

$$\begin{aligned} Z_\phi &= \mathcal{I} \left\{ \frac{1}{64\pi^3} + \frac{1}{32\pi^2} R_A - \frac{1}{32\pi^3} (2 - 4\pi) R_B - \frac{1}{8\pi} R_C \right\} \\ &= 2.37217838(4). \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Das liefert für  $R_3$ :

$$\begin{aligned} R_3 &= \frac{2^8 \pi^3}{9} Z_\phi \\ &= 2092.157690(3). \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

## F.2 Bestimmung von $T_0$

Es gilt nach Gl. (5.312):

$$\begin{aligned}
 T_0 &= \frac{1}{4\pi^2} \int d^2\tilde{\phi} K_0\left(\frac{1}{2\pi}|\tilde{\phi}|\right) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^3}{(4v^4+5v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_0^\infty d\phi \phi K_0\left(\frac{1}{2\pi}\phi\right)}_{=4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^3}{(4v^4+5v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &= 0.110164577(1).
 \end{aligned} \tag{F.15}$$

## F.3 Bestimmung von $T_1$

$T_1$  ist in Gl. (5.314) definiert. Man rechnet:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \left\{ -\frac{1}{2\pi^2} \log |\tilde{\phi}| + \frac{1}{2\pi^2} \log \sqrt{1+v^2} + \frac{C_{KL}}{\pi} \right\} \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{v^4(1+v^2)^3}{(4v^4+5v^2+1)\sinh^2(\pi v)} K_0\left(\frac{1}{2\pi}|\tilde{\phi}|\right) \right\} \\
 &= \int d^2\tilde{\phi} \left\{ -\frac{1}{2\pi^2} \log |\tilde{\phi}| + \frac{C_{KL}}{\pi} \right\} K_0\left(\frac{1}{2\pi}|\tilde{\phi}|\right) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &\quad + \int d^2\tilde{\phi} K_0\left(\frac{1}{2\pi}|\tilde{\phi}|\right) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{1}{4\pi^2} \log(1+v^2) \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1)\sinh^2(\pi v)}. \tag{F.16}
 \end{aligned}$$

Für die  $\phi$ -Integration führt man Polarkoordinaten ein:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \int_0^\infty d\phi \phi \left\{ -\frac{1}{\pi} \log \phi + 2C_{KL} \right\} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\phi\right) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\phi \phi K_0\left(\frac{1}{2\pi}\phi\right) \int_{-\infty}^{\infty} dv \log(1+v^2) \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &= 4\pi^2 \int_0^\infty dx x \left\{ -\frac{1}{\pi} \log(2\pi x) + 2C_{KL} \right\} K_0(x) \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &\quad + 2\pi \underbrace{\int_0^\infty dx x K_0(x)}_{=1} \int_{-\infty}^{\infty} dv \log(1+v^2) \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &\quad (x = \frac{\phi}{2\pi}). \tag{F.17}
 \end{aligned}$$

Mit unbestimmter partieller Integration und

$$\int dx x K_0(x) = -x K_1(x) \quad [61, 5.7.9] \tag{F.18}$$

(auf einen Vorzeichenfehler in [47, 5.56.2] diesen Zusammenhang betreffend sei an dieser Stelle hingewiesen)

ergibt sich

$$\begin{aligned} \int dx x \log(x) K_0(x) &= -x \log(x) K_1(x) + \int dx x K_1(x) \frac{1}{x} \\ &= -x \log(x) K_1(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx K_1(x) \\ &= -x \log(x) K_1(x) - K_0(x) \quad [47, 5.56.1]. \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx x \log(x) K_0(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ x \log(x) K_1(x) + K_0(x) \right\} \\ &= \log 2 - \gamma, \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

und man erhält

$$\begin{aligned} T_1 &= 4\pi^2 \left\{ -\frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^{\infty} dx x \log(x) K_0(x)}_{=\log 2 - \gamma} + \left[ 2C_{\text{KL}} - \frac{1}{\pi} \log(2\pi) \right] \underbrace{\int_0^{\infty} dx x K_0(x)}_1 \right\} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \\ &\quad + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dv \log(1+v^2) \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= \left[ -4\pi \log(4\pi) + 4\pi\gamma + 8\pi^2 C_{\text{KL}} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dv \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \\ &\quad + 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dv \log(1+v^2) \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \\ &= -0.258821581(1). \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

## F.4 Bestimmung von $T_2$

Mit Gl. (5.316) hat man:

$$\begin{aligned} T_2 &= \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left[ \log \left( \frac{|\tilde{\phi}|}{\sqrt{1+v^2}} \right) \right]^2 - \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \log \left( \frac{|\tilde{\phi}|}{\sqrt{1+v^2}} \right) + C_{\text{KL}}^2 \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{v^4(1+v^2)^3}{(4v^4+5v^2+1) \sinh^2(\pi v)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} |\tilde{\phi}| \right) \right\} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} d\phi \phi \int_{-\infty}^{\infty} dv \left\{ \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left[ \log \phi \right]^2 - \frac{1}{4\pi^2} \log \phi \log(1+v^2) \right. \right. \\ &\quad + \frac{1}{16\pi^2} \left[ \log(1+v^2) \right]^2 - \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \log \phi + \frac{C_{\text{KL}}}{2\pi} \log(1+v^2) + C_{\text{KL}}^2 \left. \right\} \\ &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi} \phi \right) \left. \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1) \sinh^2(\pi v)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

Dies lässt sich in  $\phi$ - und  $v$ -Integrale faktorisieren, und man erhält drei Summanden:

$$\begin{aligned}
 T_2 &= 2\pi \int_0^\infty d\phi \phi \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \left[ \log \phi \right]^2 - \frac{C_{\text{KL}}}{\pi} \log \phi + C_{\text{KL}}^2 \right\} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\phi\right) \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^\infty dv \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &+ 2\pi \int_0^\infty d\phi \phi \left\{ -\frac{1}{4\pi^2} \log \phi + \frac{C_{\text{KL}}}{2\pi} \right\} K_0\left(\frac{1}{2\pi}\phi\right) \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^\infty dv \log(1+v^2) \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &+ \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty d\phi \phi K_0\left(\frac{1}{2\pi}\phi\right) \int_{-\infty}^\infty dv \left[ \log(1+v^2) \right]^2 \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &= 0.24636505(1). \tag{F.23}
 \end{aligned}$$

## F.5 Bestimmung von $T_3$

Die Definition von  $T_3$  ist (Gl. (5.318))

$$T_3 = \frac{1}{\pi} \int d^2\tilde{\phi} C_2(\tilde{\phi}) K_0\left(\frac{1}{2\pi}|\tilde{\phi}|\right) \int_{-\infty}^\infty dv \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^4+5v^2+1)\sinh^2(\pi v)}. \tag{F.24}$$

Substituiert man  $\vec{\phi} = \frac{1}{2\pi} \tilde{\phi}$  und beachtet die Definition (F.4) von  $Z_\phi$  sowie das Resultat (F.13), dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
 T_3 &= 2^4 \pi^3 Z_\phi \int_{-\infty}^\infty dv \frac{v^4(1+v^2)^2}{(4v^4+5v^2+1)\sinh^2(\pi v)} \\
 &= 13.24127(1). \tag{F.25}
 \end{aligned}$$

## F.6 Bestimmung von $V_1$

Durch Einführen von Polarkoordinaten bei der  $\phi$ -Integration ergibt sich aus der Definition (5.329) von  $V_1$

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^\infty dv_1 \int_{-\infty}^\infty dv_2 \left\{ \frac{(1+v_1^2+v_2^2)^2(v_1+v_2)^4(v_1-v_2)^4}{(4v_1^4+5v_1^2+1)(4v_2^4+5v_2^2+1)\sinh^2(\pi(v_1+v_2))} \right. \\
 &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_1^2}|\tilde{\phi}|\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_2^2}|\tilde{\phi}|\right) \Big\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dv_1 \int_{-\infty}^\infty dv_2 \left\{ \frac{(1+v_1^2+v_2^2)^2(v_1+v_2)^4(v_1-v_2)^4}{(4v_1^4+5v_1^2+1)(4v_2^4+5v_2^2+1)\sinh^2(\pi(v_1+v_2))} \right. \\
 &\quad \times \left. \int_0^\infty d\phi \phi K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_1^2}\phi\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_2^2}\phi\right) \right\}. \tag{F.26}
 \end{aligned}$$

Da der Integrand symmetrisch bzgl. der Vertauschung von  $v_1$  und  $v_2$  und bzgl. der Transformation

$$v_1 \rightarrow -v_1$$

$$v_2 \rightarrow -v_2$$

ist, kann man schematisch wie folgt vorgehen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^{\infty} dv_2 \dots &= 2 \int_0^{\infty} dv_1 \int_0^{\infty} dv_2 \dots + 2 \int_0^{\infty} dv_1 \int_{-\infty}^0 dv_2 \dots \\ &= 4 \int_0^{\infty} dv_1 \int_0^{v_1} dv_2 \dots + 4 \int_0^{\infty} dv_1 \int_{-v_1}^0 dv_2 \dots \\ &= 4 \int_0^{\infty} dv_1 \int_{-v_1}^{v_1} dv_2 \dots. \end{aligned} \quad (\text{F.27})$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dv_1 \int_{-v_1}^{v_1} dv_2 \left\{ \frac{(1+v_1^2+v_2^2)^2(v_1+v_2)^4(v_1-v_2)^4}{(4v_1^4+5v_1^2+1)(4v_2^4+5v_2^2+1)\sinh^2(\pi(v_1+v_2))} \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^{\infty} d\phi \phi K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_1^2}\phi\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_2^2}\phi\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.28})$$

Es gilt jetzt stets

$$\sqrt{1+v_2^2} \leq \sqrt{1+v_1^2}, \quad (\text{F.29})$$

so daß sich mit Hilfe von [47, 6.576.4] (oder auch [72c, (49) S. 145] bzw. [72a, (36) S. 93]) das  $\phi$ -Integral ausrechnen läßt:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dv_1 \int_{-v_1}^{v_1} dv_2 \left\{ \frac{(1+v_1^2+v_2^2)^2(v_1+v_2)^4(v_1-v_2)^4}{(4v_1^4+5v_1^2+1)(4v_2^4+5v_2^2+1)\sinh^2(\pi(v_1+v_2))} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{2\pi^2}{1+v_1^2} F\left(1, 1; 2; 1 - \frac{1+v_2^2}{1+v_1^2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.30})$$

Dabei ist  $F(1, 1; 2; z)$  eine hypergeometrische Funktion [47, 9.100]. Bei dieser speziellen Parameterkonstellation gilt

$$\begin{aligned} F(1, 1; 2; z) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(k+1)!} \frac{z^k}{k!} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k+1} \\ &= 1 + \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k+1} \\ &= 1 + \frac{1}{z} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k} \\ &= 1 + \frac{1}{z} \left[ -\log(1-z) - z \right] \quad (\text{z.B. [59, Gl. (62.10)]}) \\ &= -\frac{1}{z} \log(1-z). \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

Das liefert somit für  $V_1$ :

$$\begin{aligned} V_1 &= -4\pi \int_0^{\infty} dv_1 \int_{-v_1}^{v_1} dv_2 \left\{ \frac{(1+v_1^2+v_2^2)^2(v_1+v_2)^4(v_1-v_2)^4}{(4v_1^4+5v_1^2+1)(4v_2^4+5v_2^2+1)\sinh^2(\pi(v_1+v_2))} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{v_1^2 - v_2^2} \log\left(\frac{1+v_2^2}{1+v_1^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

was sich zu

$$\begin{aligned} V_1 &= -4\pi \int_0^\infty dv_1 \int_{-v_1}^{v_1} dv_2 \left\{ \log \left( \frac{1+v_2^2}{1+v_1^2} \right) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{(1+v_1^2+v_2^2)^2(v_1+v_2)^3(v_1-v_2)^3}{(4v_1^2+1)(v_1^2+1)(4v_2^2+1)(v_2^2+1)\sinh^2(\pi(v_1+v_2))} \right\} \end{aligned} \quad (\text{F.33})$$

vereinfachen lässt. Mit der Substitution

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}^{-1} : U &\longrightarrow [0, \infty[ \times [0, \infty[ \\ (v_1, v_2) &\mapsto (t, s) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2), \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

(zur Definition von  $U$  vgl. man die ganz ähnliche Substitution  $\Phi$  aus Anhang D), für die

$$\frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(t, s)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.35})$$

gilt, wird daraus

$$\begin{aligned} V_1 &= -2\pi \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}s^2\right)^2 t^3 s^3}{((t+s)^2+1)(\frac{1}{4}(t+s)^2+1)((t-s)^2+1)(\frac{1}{4}(t-s)^2+1)} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{1}{\sinh^2(\pi t)} \log \left( \frac{1 + \frac{1}{4}(t-s)^2}{1 + \frac{1}{4}(t+s)^2} \right) \right\} \\ &= 0.4156(1), \end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

wie eine numerische Auswertung zeigt.

## F.7 Bestimmung von $V_2$

$V_2$  ist in Gl. (5.330) definiert worden. Man berechnet:

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{2\pi} \int d^2\tilde{\phi} \left\{ \left[ -\frac{1}{2\pi} \log |\tilde{\phi}| + C_{\text{KL}} \right] \int_{-\infty}^\infty dv_1 \int_{-\infty}^\infty dv_2 \left\{ K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_1^2}|\tilde{\phi}|\right) \right. \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_2^2}|\tilde{\phi}|\right) \left. \frac{(1+v_1^2+v_2^2)^2(v_1+v_2)^4(v_1-v_2)^4}{(4v_1^4+5v_1^2+1)(4v_2^4+5v_2^2+1)\sinh^2(\pi(v_1+v_2))} \right\} \\ &= \int_0^\infty d\phi \left\{ \phi \left[ -\frac{1}{2\pi} \log \phi + C_{\text{KL}} \right] \int_{-\infty}^\infty dv_1 \int_{-\infty}^\infty dv_2 \left\{ K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_1^2}\phi\right) \right. \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_2^2}\phi\right) \left. \frac{(1+v_1^2+v_2^2)^2(v_1+v_2)^4(v_1-v_2)^4}{(4v_1^4+5v_1^2+1)(4v_2^4+5v_2^2+1)\sinh^2(\pi(v_1+v_2))} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.37})$$

Erinnert man sich an die Definition von  $V_1$  (Gl. (F.26)), so wird daraus

$$\begin{aligned} V_2 &= 2\pi C_{\text{KL}} V_1 \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\phi \phi \log \phi \int_{-\infty}^\infty dv_1 \int_{-\infty}^\infty dv_2 \left\{ K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_1^2}\phi\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_2^2}\phi\right) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{(1+v_1^2+v_2^2)^2(v_1+v_2)^4(v_1-v_2)^4}{(4v_1^2+1)(v_1^2+1)(4v_2^2+1)(v_2^2+1)\sinh^2(\pi(v_1+v_2))} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.38})$$

Mittels derselben Überlegungen wie bei der Berechnung von  $V_1$ , nämlich mit Gl. (F.27) und der Substitution (F.34), erhält man eine für eine numerische Auswertung günstigere Form:

$$\begin{aligned}
 V_2 &= 2\pi C_{\text{KL}} V_1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\phi \phi \log \phi \int_0^\infty dt \int_0^\infty ds \left\{ K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\frac{1}{4}(t+s)^2}\phi\right) \right. \\
 &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\frac{1}{4}(t-s)^2}\phi\right) \\
 &\quad \times \left. \frac{(1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}s^2)^2 t^4 s^4}{((t+s)^2+1)(\frac{1}{4}(t+s)^2+1)((t-s)^2+1)(\frac{1}{4}(t-s)^2+1)\sinh^2(\pi t)} \right\} \\
 &= 0.2192(1) + 0.123(2) \\
 &= 0.3422(20). \tag{F.39}
 \end{aligned}$$

## F.8 Bestimmung von $U_1$

Nach Gl. (5.340) gilt

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{2\pi} \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}|\tilde{\phi}|\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v^2}|\tilde{\phi}|\right) \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \cosh^2(\pi v)} \right\} \\
 &= \int_0^\infty d\phi \phi \int_{-\infty}^\infty dv K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\phi\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v^2}\phi\right) \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \cosh^2(\pi v)}. \tag{F.40}
 \end{aligned}$$

Hier wertet man nun das  $\phi$ -Integral ganz analog zur Berechnung von  $V_1$  aus. Man erhält

$$\begin{aligned}
 U_1 &= -2\pi^2 \int_{-\infty}^\infty dv \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \cosh^2(\pi v)} \frac{4(1+v^2)}{1+4v^2} \frac{1}{1+v^2} \log \left[ \frac{3}{4(1+v^2)} \right] \\
 &= -8\pi^2 \int_{-\infty}^\infty dv \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^2 + 1)^2 (1+v^2) \cosh^2(\pi v)} \log \left[ \frac{3}{4(1+v^2)} \right] \\
 &= 1001.491115(1). \tag{F.40}
 \end{aligned}$$

## F.9 Bestimmung von $U_2$

Mit Gl. (5.341) hat man

$$\begin{aligned}
 U_2 &= \int d^2\tilde{\phi} \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ \left[ -\frac{1}{2\pi} \log |\tilde{\phi}| + C_{\text{KL}} \right] K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}|\tilde{\phi}|\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v^2}|\tilde{\phi}|\right) \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \cosh^2(\pi v)} \right\} \\
 &= 2\pi \int_0^\infty d\phi \left\{ \phi \int_{-\infty}^\infty dv \left\{ \left[ -\frac{1}{2\pi} \log \phi + C_{\text{KL}} \right] K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\phi\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v^2}\phi\right) \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \frac{(64v^6 + 80v^4 + 28v^2 + 3)^2}{(4v^4 + 5v^2 + 1) \cosh^2(\pi v)} \right\} \right\} \\
 &= -321.53(1). \tag{F.41}
 \end{aligned}$$

## F.10 Bestimmung von $Z_7$

Vor einer numerischen Berechnung ist es günstig,  $Z_7$  etwas umzuformen. Man erkennt dann besser, welche Integrale schneller und welche langsamer konvergieren (wenn der Integrationsbereich vergrößert wird).

Mit Gl. (5.355) und mittels der Substitution

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (v_1, v_2) &\mapsto (t, s) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2), \end{aligned} \quad (\text{F.42})$$

$$\left| \frac{\partial(v_1, v_2)}{\partial(t, s)} \right| = \frac{1}{2} \quad (\text{F.43})$$

hat man

$$\begin{aligned} Z_7 &= \int_0^\infty d\phi \left\{ \phi K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\phi\right) \right. \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty dv_1 \int_{-\infty}^\infty dv_2 K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_1^2}\phi\right) K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+v_2^2}\phi\right) H(v_1, v_2) \Big\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\phi \phi K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\phi\right) \int dt \int ds \left\{ K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\frac{1}{4}(t+s)^2}\phi\right) \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\frac{1}{4}(t-s)^2}\phi\right) H\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right) \Big\}, \quad (\text{F.44}) \end{aligned}$$

mit (vgl. Gl. (5.353))

$$H(v_1, v_2) = \frac{\left[ 64v_1^6 + 64v_2^6 - 64v_1^2v_2^4 - 64v_1^4v_2^2 + 16v_1^4 + 16v_2^4 - 68v_1^2 - 68v_2^2 - 160v_1^2v_2^2 - 17 \right]^2}{(4v_1^4 + 5v_1^2 + 1)(4v_2^4 + 5v_2^2 + 1) \cosh^2(\pi(v_1 + v_2))}.$$

Wegen  $v_1 + v_2 = t$  und da  $K_0(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  exponentiell gegen 0 geht, sieht man, daß höchstens die  $s$ -Integration langsam konvergiert. Außerdem ist der Integrand von  $Z_7$  jetzt symmetrisch in  $t$  und symmetrisch in  $s$ , so daß man schließlich

$$\begin{aligned} Z_7 &= 2 \int_0^\infty d\phi \phi K_0\left(\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\phi\right) \int_{-\infty}^\infty dt \int_{-\infty}^\infty ds \left\{ K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\frac{1}{4}(t+s)^2}\phi\right) \right. \\ &\quad \times K_0\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{1+\frac{1}{4}(t-s)^2}\phi\right) H\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right) \Big\} \quad (\text{F.45}) \end{aligned}$$

bekommt. Die numerische Auswertung mit Hilfe von NAG-Bibliotheksfunktionen (Subroutine D01GBF) liefert

$$Z_7 = 0.507(1) \cdot 10^5. \quad (\text{F.46})$$

## F.11 Bestimmung von $Z_{82A}$

Beachtet man die Definitionen (5.372) – (5.376) und (5.378), so gilt:

$$\begin{aligned} Z_{82A} = & \ 3 \int_0^\infty d\hat{\phi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^\infty d\hat{x}_0 \int_{-\infty}^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right. \\ & \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_1 e^{iv_1(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_1^2} \hat{\phi}\right) \right]^2 \\ & \left. \times \left[ \int_{-\infty}^\infty dv_2 \hat{A} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_2^2} \hat{\phi}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.47})$$

Das  $v_1$ -Integral läßt sich noch analytisch ausführen [72b, (43) S.56]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dv_1 e^{iv_1(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)} K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_1^2} \hat{\phi}\right) &= 2 \int_0^\infty dv_1 \cos[v_1(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)] K_0\left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{1+v_1^2} \hat{\phi}\right) \\ &= \pi \frac{e^{-\sqrt{(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)^2 + (\frac{\hat{\phi}}{2\pi})^2}}}{\sqrt{(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)^2 + (\frac{\hat{\phi}}{2\pi})^2}}. \end{aligned} \quad (\text{F.48})$$

Damit und mit der Substitution  $\phi = \frac{\hat{\phi}}{2\pi}$  bekommt man

$$\begin{aligned} Z_{82A} = & 12\pi^4 \int_0^\infty d\hat{\phi} \hat{\phi} \int_{-\infty}^\infty d\hat{x}_0 \int_{-\infty}^\infty d\hat{y}_0 \left\{ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \frac{e^{-2\sqrt{(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)^2 + \phi^2}}}{(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)^2 + \phi^2} \right. \\ & \left. \times \int_{-\infty}^\infty dv_2 \hat{A} K_0\left(\sqrt{1+v_2^2} \hat{\phi}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.49})$$

Für eine numerische Auswertung ist es günstiger, das  $v_2$ -Integral noch umzuformen, so daß ein rein reeller Ausdruck entsteht. Aus Symmetriegründen gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dv_2 \hat{A} K_0\left(\sqrt{1+v_2^2} \phi\right) = & 2 \int_0^\infty dv_2 \left\{ K_0\left(\sqrt{1+v_2^2} \phi\right) \right. \\ & \times \left[ \frac{\cos[v_2(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)]}{4v_2^4 + 5v_2^2 + 1} [\hat{C}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) v_2^2 + \hat{E}(\hat{x}_0, \hat{y}_0)] \right. \\ & \left. - \frac{\sin[v_2(\hat{x}_0 - \hat{y}_0)]}{4v_2^4 + 5v_2^2 + 1} [\dot{B}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) v_2^3 + \dot{D}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) v_2] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.50})$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{B}(x, y) &= \frac{1}{i} \hat{B}(x, y) \\ &= 6 \left[ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) - \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{F.51})$$

$$\hat{C}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) = 9 \left[ \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) - 1 \right] + 3 \left[ \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} + \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \right], \quad (\text{F.52})$$

$$\begin{aligned}\hat{D}(x, y) &= \frac{1}{i} \hat{D}(x, y) \\ &= 3 \left[ \tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right) - \tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \right] + \frac{9}{2} \left[ \frac{\tanh\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} - \frac{\tanh\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} \right], \quad (\text{F.53})\end{aligned}$$

$$\hat{E}(\hat{x}_0, \hat{y}_0) = -\frac{3}{2} \left[ \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right)} + \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} - \frac{3}{2} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\hat{x}_0}{2}\right) \cosh^2\left(\frac{\hat{y}_0}{2}\right)} \right]. \quad (\text{F.54})$$

Um den Integranden übersichtlicher zu gestalten und um besser entscheiden zu können, welche Integrationen schnell und welche eher langsam konvergieren, wenn man die Integrationsgrenzen gegen Unendlich gehen läßt, ist es des weiteren vorteilhaft, die Substitution  $\psi$  (vgl. (F.42), natürlich mit  $\hat{x}_0, \hat{y}_0$  an Stelle von  $v_1, v_2$ ) vorzunehmen:

$$Z_{82A} = 12\pi^4 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^{\infty} d\phi \phi \tanh\left(\frac{t+s}{4}\right) \tanh\left(\frac{t-s}{4}\right) \frac{e^{-2\sqrt{s^2+\phi^2}}}{s^2+\phi^2} L(\phi, t, s), \quad (\text{F.55})$$

wobei

$$\begin{aligned}L(\phi, t, s) &= \int_0^{\infty} dv \left\{ K_0\left(\sqrt{1+v^2} \phi\right) \right. \\ &\quad \times \left[ \frac{\cos(vs)}{4v^4+5v^2+1} \left[ \hat{C}\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right) v^2 + \hat{E}\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sin(vs)}{4v^4+5v^2+1} \left[ \hat{B}\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right) v^3 + \hat{D}\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t-s}{2}\right) v \right] \right] \right\} \quad (\text{F.56})\end{aligned}$$

gilt. Offensichtlich ist der Integrand nun symmetrisch in  $t$  und symmetrisch in  $s$ , so daß man

$$Z_{82A} = 48\pi^4 \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} ds \int_0^{\infty} d\phi \phi \tanh\left(\frac{t+s}{4}\right) \tanh\left(\frac{t-s}{4}\right) \frac{e^{-2\sqrt{s^2+\phi^2}}}{s^2+\phi^2} L(\phi, t, s) \quad (\text{F.57})$$

bekommt. Als letzte Vereinfachung bietet sich noch die Einführung von Polarkoordinaten in der  $(s, \phi)$ -Ebene an:

$$\begin{aligned}s &= r \cos \varphi, \\ \phi &= r \sin \varphi.\end{aligned} \quad (\text{F.58})$$

Damit hat man

$$\begin{aligned}Z_{82A} &= 48\pi^4 \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left\{ r^2 \sin \varphi \tanh\left(\frac{t+r \cos \varphi}{4}\right) \tanh\left(\frac{t-r \cos \varphi}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{e^{-2r}}{r^2} L(r \sin \varphi, t, r \cos \varphi) \right\}. \quad (\text{F.59})\end{aligned}$$

Mit  $u = \cos \varphi$  wird das zu

$$Z_{82A} = 48\pi^4 \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr \int_0^1 du \tanh\left(\frac{t+ru}{4}\right) \tanh\left(\frac{t-ru}{4}\right) e^{-2r} L(r\sqrt{1-u^2}, t, ru). \quad (\text{F.60})$$

Dieser Ausdruck lässt sich wohl nicht weiter vereinfachen (vgl. auch die Bemerkung später nach der  $Z_{82C}$ -Bestimmung), eine numerische Auswertung unter Zuhilfenahme von NAG-Bibliotheksfunktionen (Subroutine D01AKF zur  $L(\phi, t, s)$ -Berechnung, Subroutine D01GBF für die  $t$ ,  $r$  und  $u$ -Integrale) liefert:

$$Z_{82A} = -0.8531(4) \cdot 10^4. \quad (\text{F.61})$$

## F.12 Bestimmung von $Z_{82B}$

Ein völlig analoges Vorgehen wie bei der Berechnung von  $Z_{82A}$  führt hier, ausgehend von der Definition (5.379), auf den Ausdruck

$$Z_{82B} = 96\pi^3 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dr \int_0^1 du \tanh\left(\frac{t+ru}{4}\right) \tanh\left(\frac{t-ru}{4}\right) r e^{-r} \left[L(r\sqrt{1-u^2}, t, ru)\right]^2. \quad (\text{F.62})$$

Die numerische Berechnung ergibt hier, wieder mittels NAG-Bibliotheksfunktionen mit denselben Routinen wie bei der Bestimmung von  $Z_{82A}$ ,

$$Z_{82B} = 0.1425(1) \cdot 10^4. \quad (\text{F.63})$$

## F.13 Bestimmung von $Z_{82C}$

Entsprechend zum Vorgehen bei  $Z_{82A}$  und  $Z_{82B}$  erhält man hier aus der Definition (5.380):

$$Z_{82C} = 64\pi^2 \int_0^\infty dt \int_0^\infty dr \int_0^1 du r^2 \tanh\left(\frac{t+ru}{4}\right) \tanh\left(\frac{t-ru}{4}\right) \left[L(r\sqrt{1-u^2}, t, ru)\right]^3. \quad (\text{F.64})$$

Als numerischen Wert findet man (mit denselben Routinen wie bei  $Z_{82A}$  und  $Z_{82B}$ ):

$$Z_{82C} = -0.25(1) \cdot 10^3. \quad (\text{F.65})$$

Mit Blick auf die Bestimmung von  $Z_{82A}$ ,  $Z_{82B}$  und  $Z_{82C}$  wäre es, um genauere Werte zu bekommen, wünschenswert, das Integral  $L(\phi, t, s)$  noch analytisch ausführen zu können. Letztlich bedeutet das, Integrale der Form

$$\int_0^\infty dv K_0\left(\sqrt{1+v^2} \phi\right) \frac{\cos(vs)}{4v^4 + 5v^2 + 1} v^l, \quad l \in \{0, 2\} \quad (\text{F.66})$$

und

$$\int_0^\infty dv K_0\left(\sqrt{1+v^2} \phi\right) \frac{\sin(vs)}{4v^4 + 5v^2 + 1} v^k, \quad k \in \{1, 3\} \quad (\text{F.67})$$

zu berechnen. Wegen

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dv K_0\left(\sqrt{1+v^2} \phi\right) \frac{\cos(vs)}{4v^4 + 5v^2 + 1} v^2 \\ &= -\frac{d^2}{ds^2} \int_0^\infty dv K_0\left(\sqrt{1+v^2} \phi\right) \frac{\cos(vs)}{4v^4 + 5v^2 + 1} \end{aligned} \quad (\text{F.68})$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dv K_0\left(\sqrt{1+v^2} \phi\right) \frac{\sin(vs)}{4v^4+5v^2+1} v^3 \\ = -\frac{d^2}{ds^2} \int_0^\infty dv K_0\left(\sqrt{1+v^2} \phi\right) \frac{\sin(vs)}{4v^4+5v^2+1} v \end{aligned} \quad (\text{F.69})$$

sowie

$$\frac{1}{4v^4+5v^2+1} = \frac{4}{3} \frac{1}{4v^2+1} - \frac{1}{3} \frac{1}{v^2+1} \quad (\text{F.70})$$

würde es dazu genügen die folgenden vier Integrale auszuführen:

$$\int_0^\infty dv K_0\left(\sqrt{1+v^2} \phi\right) \frac{\cos(vs)}{v^2+1}, \quad (\text{F.71})$$

$$\int_0^\infty dv K_0\left(\sqrt{1+v^2} \phi\right) \frac{\cos(vs)}{4v^2+1}, \quad (\text{F.72})$$

$$\int_0^\infty dv K_0\left(\sqrt{1+v^2} \phi\right) \frac{\sin(vs)}{v^2+1} v, \quad (\text{F.73})$$

$$\int_0^\infty dv K_0\left(\sqrt{1+v^2} \phi\right) \frac{\sin(vs)}{4v^2+1} v. \quad (\text{F.74})$$

Die analytische Bestimmung dieser Integrale ist jedoch wohl nicht durchführbar. Insbesondere die Verwendung folgender Integraldarstellungen von  $K_0(z)$  lieferte (nach Ausführung eines der dann zwei Integrale) ein auch nicht mehr analytisch durchzuführendes Integral:

$$K_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-t-\frac{z^2}{4t}} \quad [47, 8.432.6], \quad (\text{F.75})$$

$$K_0(z) = \int_0^\infty dt \frac{e^{-\sqrt{t^2+z^2}}}{\sqrt{t^2+z^2}} \quad [47, 8.432.8]. \quad (\text{F.76})$$

## F.14 Bestimmung von $Z_{81\text{aba}}$

Als erstes lässt sich die  $\tilde{\phi}$ -Integration mit Hilfe ebener Polarkoordinaten vereinfachen (vgl. Gl. (5.407)):

$$\begin{aligned} Z_{81\text{aba}} &= \int_0^\infty dt \int_{-t}^t ds \int d^2 \tilde{\phi} \sqrt{\tilde{\phi}^2+s^2}^{-3} \left\{ e^{-3\sqrt{\tilde{\phi}^2+s^2}} \left[ \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. + \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) \right] \\ &\quad \left. - \theta\left(1-\sqrt{\tilde{\phi}^2+s^2}\right) \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\} \\ &= 2\pi \int_0^\infty dt \int_{-t}^t ds \int_0^\infty d\phi \phi \sqrt{\phi^2+s^2}^{-3} \left\{ e^{-3\sqrt{\phi^2+s^2}} \left[ \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. + \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t+s}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-s}{4}\right) \right] \\ &\quad \left. - \theta\left(1-\sqrt{\phi^2+s^2}\right) \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.77})$$

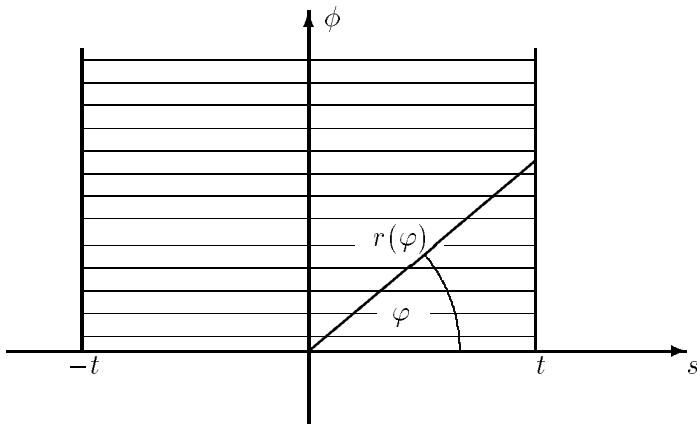


Abbildung F.1: Kugelkoordinaten für die Integration über  $s$  und  $\phi$ ; über den schraffierten Bereich ist zu integrieren ( $t$  fest).

Um diesen Ausdruck einer numerischen Auswertung besser zugänglich zu machen, soll die Stufenfunktion  $\theta$  aufgelöst werden. Dazu gehe ich wie folgt vor. Zunächst führe ich ebene Polarkoordinaten im zweidimensionalen  $(s, \phi)$ -Raum ein:

$$r = \sqrt{\phi^2 + s^2}, \quad (\text{F.78})$$

$$\phi = r \sin \varphi, \quad (\text{F.79})$$

$$s = r \cos \varphi. \quad (\text{F.80})$$

Anhand der Abbildung F.1 liest man ab, daß bei festem  $t$  und  $\varphi$  die  $r$ -Integration über  $[0, \frac{t}{|\cos \varphi|}]$  zu erstrecken ist. Die  $\varphi$ -Integration ist über  $[0, \pi]$  auszuführen. Das liefert:

$$\begin{aligned}
Z_{81aba} &= 2\pi \int_0^\infty dt \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\frac{t}{|\cos \varphi|}} dr \frac{r^2 \sin \varphi}{r^3} \left\{ e^{-3r} \left[ \Delta\left(\frac{t+r \cos \varphi}{4}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Delta\left(\frac{t-r \cos \varphi}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t+r \cos \varphi}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-r \cos \varphi}{4}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \theta(1-r) \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\} \\
&= 2\pi \int_0^\infty dt \int_0^\pi d\varphi \int_0^{\frac{t}{|\cos \varphi|}} dr \frac{\sin \varphi}{r} \left\{ e^{-3r} \left[ \Delta\left(\frac{t+r \cos \varphi}{4}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Delta\left(\frac{t-r \cos \varphi}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t+r \cos \varphi}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-r \cos \varphi}{4}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \theta(1-r) \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\} \\
&= 2\pi \int_0^\infty dt \int_{-1}^1 du \int_0^{\frac{t}{|u|}} \frac{dr}{r} \left\{ e^{-3r} \left[ \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \theta(1-r) \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\} \\
&\quad (u = \cos \varphi). \tag{F.81}
\end{aligned}$$

Da der Integrand der  $u$ -Integration symmetrisch in  $u$  ist, lässt sich dies noch vereinfachen:

$$Z_{81\text{aba}} = 4\pi \int_0^\infty dt \int_0^1 du \int_0^{\frac{t}{u}} \frac{dr}{r} \left\{ e^{-3r} \left[ \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right] - \theta(1-r) \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\}. \quad (\text{F.82})$$

Zur Auflösung der  $\theta$ -Funktion spaltet man nun das  $t$ -Integral schematisch folgendermaßen auf:

$$Z_{81\text{aba}} = \underbrace{4\pi \int_1^\infty dt \dots}_{=: A} + \underbrace{4\pi \int_0^1 dt \dots}_{=: B} \quad (\text{F.83})$$

Dann hat man für den Anteil  $A$  (man beachte, daß  $\frac{t}{u} \geq 1$  im Anteil  $A$  gilt)

$$A = A1 + A2, \quad (\text{F.84})$$

mit

$$A1 := 4\pi \int_1^\infty dt \int_0^1 du \int_0^1 \frac{dr}{r} \left\{ e^{-3r} \left[ \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right] - \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\} \quad (\text{F.85})$$

und

$$A2 := 4\pi \int_1^\infty dt \int_0^1 du \int_1^{\frac{t}{u}} \frac{dr}{r} \left\{ e^{-3r} \left[ \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right] \right\}. \quad (\text{F.86})$$

Für den Anteil  $B$  gilt zunächst

$$B = 4\pi \int_0^1 dt \int_0^t du \int_0^{\frac{t}{u}} \frac{dr}{r} \left\{ e^{-3r} \left[ \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right] - \theta(1-r) \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\} \\ + 4\pi \int_0^1 dt \int_t^1 du \int_0^{\frac{t}{u}} \frac{dr}{r} \left\{ e^{-3r} \left[ \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right] - \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\}. \quad (\text{F.87})$$

Um die Funktion  $\theta(1 - r)$  zu eliminieren, teilt man die  $u$ -Integration auf, so daß sich drei Summanden ergeben:

$$B = B1 + B2 + B3, \quad (\text{F.88})$$

mit

$$\begin{aligned} B1 &:= 4\pi \int_0^1 dt \int_0^t du \int_0^1 \frac{dr}{r} \left\{ e^{-3r} \left[ \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right] - \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.89})$$

$$\begin{aligned} B2 &:= 4\pi \int_0^1 dt \int_0^t du \int_1^{\frac{t}{u}} \frac{dr}{r} \left\{ e^{-3r} \left[ \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.90})$$

$$\begin{aligned} B3 &:= 4\pi \int_0^1 dt \int_t^1 du \int_0^{\frac{t}{u}} \frac{dr}{r} \left\{ e^{-3r} \left[ \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) + \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta\left(\frac{t+ru}{4}\right) \Delta\left(\frac{t-ru}{4}\right) \right] - \left[ 2\Delta\left(\frac{t}{4}\right) + \Delta^2\left(\frac{t}{4}\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{F.91})$$

Insgesamt gilt also

$$Z_{81aba} = A1 + A2 + B1 + B2 + B3, \quad (\text{F.92})$$

und die Größen  $A1, \dots, B3$  lassen sich numerisch bestimmen. Letztendlich ergibt sich

$$Z_{81aba} = 79.9242(1). \quad (\text{F.93})$$

Die numerischen Bestimmungen dieses Anhangs wurden auf einem Rechner vom Typ Sun SPARC 2 ausgeführt. Einfache Integrale ( $R_3, T_0, T_1, T_2, T_3, U_1$ ) und Reihen wurden mit Maple berechnet; Doppelintegrale ( $V_1, V_2, U_2$ ) und  $Z_{81aba}$  ließen sich effizienter mit Mathematica bestimmen. Höherdimensionale Integrale ( $Z_7, Z_{82A}, Z_{82B}, Z_{82C}$ ) schließlich wurden aus Effizienzgründen mit Hilfe der NAGLIB ausgewertet (s.o.).

# Literaturverzeichnis

- [1] H.E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971)
- [2] R.H. Swendsen, Phys. Rev. **B15** (1977) 542
- [3] K.K. Mon, D.P. Landau und D. Stauffer, Phys. Rev. **B42** (1990) 545
- [4] M. Hasenbusch und K. Pinn, Physica **A192** (1993) 342
- [5] D. Jasnow, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 10, ed. C. Domb und J.L. Lebowitz (Academic Press, London, 1986)
- [6] B. Widom, J. Chem. Phys. **43** (1965) 3892
- [7] B. Widom, J. Chem. Phys. **43** (1965) 3898
- [8] C. Domb und D.L. Hunter, Proc. Phys. Soc. Lond. **86** (1965) 1147
- [9] A.Z. Patashinskii und V.L. Pokrovskii, Zh. éksp. teor. Fiz. **50** (1966) 439 [in Englisch in Sov. Phys. JETP **23** (1966) 292]
- [10] M. Vincentini-Missoni, in *Phase transitions and Critical Phenomena*, Vol. 2, ed. C. Domb und M.S. Green (Academic Press, London, 1972)
- [11] K. Huang, *Statistical Mechanics* (John Wiley & Sons, Inc., 1987)
- [12] R.B. Griffiths, Phys. Rev. Lett. **24** (1970) 1479
- [13] C. Bervillier, Phys. Rev. **B14** (1976) 4964
- [14] A. Aharony und P.C. Hohenberg, Phys. Rev. **B13** (1976) 3081
- [15] K. Binder, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 8, ed. C. Domb und J.L. Lebowitz (Academic Press, London, 1983)
- [16] B. Widom, in *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol. 2, ed. C. Domb und M.S. Green (Academic Press, London, 1972)
- [17] D. Stauffer, M. Ferer und M. Wortis, Phys. Rev. Lett. **29** (1972) 345
- [18] S. Klessinger und G. Münster, Nucl. Phys. **B386** (1992) 701
- [19] M. Caselle, R. Fiore, F. Gliozzi, M. Hasenbusch, K. Pinn und S. Vinti, Nucl. Phys. **B432** (1994) 590
- [20] V. Agostini, G. Carlino, M. Caselle und M. Hasenbusch, hep-lat 9607029

- [21] S.-Y. Zinn und M.E. Fisher, *Physica* **A226** (1996) 168
- [22] G. Münster, *Nucl. Phys.* **B324** (1989) 630
- [23] G. Münster, *Nucl. Phys.* **B340** (1990) 559
- [24] I. Montvay und G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice* (Cambridge University Press, 1994)
- [25] V. Privman und M.E. Fisher, *J. Stat. Phys.* **33** (1983) 385
- [26] M.E. Fisher, *J. Phys. Soc. Japan Suppl.* **26** (1969) 87
- [27] E. Brézin und J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys.* **B257** [FS14] (1985) 867
- [28] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz und Yu.S. Tyupkin, *Phys. Lett.* **59B** (1975) 85
- [29] D. Bailin und A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory* (Institute of Physics Publishing, 1993)
- [30] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (Adam Hilger, 1990)
- [31] K.F. Smith, N. Crampin, J.M. Pendlebury, D.J. Richardson, D. Shiers, K. Green, A.I. Kilvington, J. Moir, H.B. Prosper, D. Thompson, N.F. Ramsey, B.R. Heckel, S.K. Lamoreaux, P. Ageron, W. Mampe und A. Steyerl, *Phys. Lett.* **234B** (1990) 191
- [32] V. Baluvi, *Phys. Rev.* **D19** (1979) 2227
- [33] P. Di Vecchia, *Acta Physica Austriaca Suppl.* **22** (1980) 341
- [34] R.J. Crewther, P. Di Vecchia, G. Veneziano und E. Witten, *Phys. Lett.* **88B** (1979) 123
- [35] R.D. Peccei und H.R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440
- [36] R.D. Peccei und H.R. Quinn, *Phys. Rev. D16* (1977) 1791
- [37] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 223
- [38] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 279
- [39] E.V. Shuryak, *Phys. Rep.* **C115** (1984) 151
- [40] G. t'Hooft, *Phys. Rev. D14* (1976) 3432
- [41] A.A. Aleinikov und E.V. Shuryak, *Sov. J. Nucl. Phys.* **46** (1987) 76
- [42] E.V. Shuryak, *Nucl. Phys.* **B302** (1988) 621, vgl. auch die dortigen Literaturangaben
- [43] Š. Olejník, *Phys. Lett.* **B221** (1989) 372
- [44] C.F. Wöhler und E.V. Shuryak, *Phys. Lett.* **B333** (1994) 467
- [45] J.L. Gervais und B. Sakita, *Phys. Rev. D11* (1975) 2943
- [46] H. Kleinert, *Pfadintegrale* (BI Wissenschaftsverlag, 1993)

- [47] I.S. Gradstein und I.M. Ryshik, Summen- Produkt- und Integraltafeln (Verlag Harri Deutsch, 1981)
- [48] L.H. Ryder, Quantum Field Theory (Cambridge University Press, 1985)
- [49] S. Coleman, *The uses of instantons in Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, 1985)
- [50] P. Hoppe, Diplomarbeit, WWU Münster, 1993
- [51] J. Zittartz, Phys. Rev. **154** (1967) 529
- [52] R. Rajaraman, Phys. Rep. **C21** (1975) 227
- [53] J.A. Krumhansel und J.R. Schrieffer, Phys.Rev. **B11** (1975) 3535
- [54] R. Jackiw, Rev. Mod. Phys. **49** (1977) 681
- [55] L.D. Landau und E.M. Lifschitz, Quantum Mechanics (Non rel. Theory) (Pergamon, New York, 1977)
- [56] P.M. Morse und H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics Part I+II, S. 1651 ff. (McGraw-Hill, 1953)
- [57] S. Grossmann, Funktionalanalysis (Aula-Verlag, Wiesbaden, 1988)
- [58] S. Lang, Analysis II (Addison-Wesley Publishing Company, 1969)
- [59] H. Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 1 (B.G. Teubner, Stuttgart 1986)
- [60] H. Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 2 (B.G. Teubner, Stuttgart 1986)
- [61] N.N. Lebedew, Spezielle Funktionen und ihre Anwendung (BI Wissenschaftsverlag, 1973)
- [62] O. Forster, Analysis 3 (Vieweg, 1987)
- [63] M. Abramowitz und I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover Publications, Inc., 1972)
- [64] J. Heitger, Diplomarbeit, WWU Münster, 1993
- [65] G. Münster und J. Heitger, Nucl. Phys. **B424** [FS] (1994) 582
- [66] E.T. Whittaker und G.N. Watson, A Course of Modern Analysis (Cambridge University Press, 4. Auflage, 1927)
- [67] A.N. Chaba und R.K. Pathria, J. Math. Phys. **16** (1975) 1457
- [68] A.N. Chaba und R.K. Pathria, J. Phys. A: Math. Gen. **9** (1976) 1411
- [69] A.N. Chaba und R.K. Pathria, J. Phys. A: Math. Gen. **9** (1976) 1801
- [70] W.N. Bailey, Journ. Lond. Math. Soc. **11** (1936) 16
- [71] W.N. Bailey, Proc. Lond. Math. Soc. **40** (1936) 36

- [72] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger und F.G. Tricomi, California Institute of Technology, Bateman Manuscript Project, Higher Transcendental Functions (3 Bände), Tables of Integral Transforms (2 Bände), McGraw–Hill Book Company, Inc.
- [72a] Higher Transcendental Functions Vol. II (1953)
- [72b] Tables of Integral Transforms Vol. I (1954)
- [72c] Tables of Integral Transforms Vol. II (1954)
- [73] K. Jansen, I. Montvay, G. Münster, T. Trappenberg und U. Wolff, Nucl. Phys. **B322** (1989) 698
- [74] M. Lüscher und P. Weisz, Nucl. Phys. **B295** [FS21] (1988) 65
- [75] G. Münster, unveröffentlicht
- [76] E. Siepmann, Diplomarbeit, WWU Münster, 1993
- [77] H.B. Tarko und M.E. Fisher, Phys. Rev. **B11** (1975) 1217
- [78] C. Bervillier und C. Godrèche, Phys. Rev. **B21** (1980) 5427
- [79] R. Gupta und P. Tamayo, Int. J. Mod. Phys. **C7** (1996) 305
- [80] M. Caselle und M. Hasenbusch, hep-lat 9701007
- [81] A.J. Liu und M.E. Fisher, Physica **A156** (1989) 35
- [82] H.B. Tarko und M.E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 926
- [83] C. Gutsfeld, J. Küster und G. Münster, Nucl. Phys. **B479** (1996) 654
- [84] E. Brézin, J.–C. Le Guillou und J. Zinn–Justin, Phys. Lett. **A47** (1974) 285
- [85] H.L. Gielen, J. Thoen und O.B. Verbeke, J. Chem. Phys. **81** (1984) 6154
- [86] M.R. Moldover, Phys. Rev. **A31** (1985) 1022
- [87] H. Chaar, M.R. Moldover und J. Schmidt, J. Chem. Phys. **85** (1986) 418

# Lebenslauf

## Angaben zur Person

Name: Hoppe  
Vorname: Peter  
Geburtsdatum: 09.09.1966  
Geburtsort: Rahden  
Familienstand: ledig  
Name des Vaters: Paul Hoppe  
Name der Mutter: Hildegard Hoppe, geb. Wigger

## Schulischer Bildungsgang

1973–1977: Besuch der Grundschule in Rahden  
1977–1986: Besuch des Söderblom–Gymnasiums in Espelkamp  
13.06.1986: Abitur am Söderblom–Gymnasium in Espelkamp

## Wehrdienst

01.07.1987–30.09.1987: Grundwehrdienst in Minden  
01.10.1987–30.09.1988: Wehrdienst in Münster–Handorf

## Studium

1987–1993: Physikstudium an der WWU Münster  
26.07.1993: Diplom in Physik an der WWU Münster  
1987–1995: Mathematikstudium (Diplom) an der WWU Münster  
1995–1996: Mathematikstudium (Lehramt Sek. I/II) an der WWU Münster  
14.10.1996: Erstes Staatsexamen für das Lehramt (Sek. I/II)  
in Mathematik und Physik

## Tätigkeiten

01.09.1992–31.07.1993: Studentische Hilfskraft am Institut für  
Theoretische Physik I der WWU Münster  
01.08.1993–31.07.1995: Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für  
Theoretische Physik I der WWU Münster  
01.08.1995–31.07.1996: Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für  
Theoretische Physik I der WWU Münster  
seit dem 01.08.1996: Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für  
Theoretische Physik I der WWU Münster

## Dissertation

August 1993: Beginn der Dissertation bei Prof. Dr. G. Münster  
am Institut für Theoretische Physik I der WWU Münster

## **Dank**

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Für die Anregung zum Thema dieser Arbeit und die jederzeit hilfreiche Betreuung und Unterstützung danke ich Herrn Prof. Dr. G. Münster.

Meinen Zimmerkollegen Frau Dipl.-Phys. Sabine Rotsch und Herrn Dipl.-Phys. Dirk Talkenberger bin ich für die schöne gemeinsame Zeit dankbar. Herrn Dipl.-Phys. Dirk Talkenberger möchte ich besonders für seine Hilfe in allen programmiertechnischen Fragen danken und Frau Dipl.-Phys. Sabine Rotsch für die vielen Gespräche in physikalischen Fragen und darüber hinaus.

Der gesamten Arbeitsgruppe gilt mein Dank für die angenehme und kooperative Arbeitsatmosphäre.

Frau Dipl.-Phys. Sabine Rotsch und Herrn Dipl.-Phys. Dirk Talkenberger bin ich für ihr sorgfältiges Korrekturlesen dankbar.

Schließlich wäre diese Arbeit ohne die geduldige Unterstützung meiner Eltern so nicht möglich gewesen. Dafür sei ihnen hier ganz besonders gedankt.







