

Tunneleffekt und Energieaufspaltung im dreidimensionalen ϕ^4 –Modell mit Pauli–Villars–Regularisierung

als Diplomarbeit vorgelegt von
Peter Hoppe

Juli 1993

Institut für Theoretische Physik I, Westfälische Wilhelms–Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	3
2 ϕ^4–Theorie	6
3 Pauli–Villars–Regularisierung	11
4 Renormierungsgrößen	14
4.1 Definition der renormierten Größen	14
4.2 Berechnung von $\tilde{G}_\varphi^{(1)}$	15
4.3 Berechnung von \tilde{G}_φ	17
4.4 Bestimmung von m_R und Z_R	21
4.5 Bestimmung von g_R	22
4.6 Umkehrung der Renormierungsbeziehungen	23
4.7 Berechnung von $g^{(4)}$	24
4.8 Berechnung der physikalischen Masse	29
5 Formel für die Energieaufspaltung	32
6 Bestimmung der Determinanten	40
6.1 Zurückführung der Determinanten auf ein Integral	40
6.2 Effiziente Auswertung des Integrals J_0	48
6.2.1 Auswertung der ζ' –Funktion	51
6.3 Alternative J_0 –Berechnung	57
6.3.1 ζ'_1 –Berechnung	58
6.3.2 ζ'_2 –Berechnung	72
6.3.3 ζ'_3 –Berechnung	73
6.3.4 Ergebnis für J_0	74
6.4 Ergebnis für $\ln \frac{\det' M}{\det M_0} _{\text{P.-V.}}$	75
7 Berechnung der Energieaufspaltung E_{0a}	76
8 Vergleich mit dimensionaler Regularisierung	81
9 Überlegungen zur Regularisierung der Determinanten	86
A Klassische Wirkung S_c der Kink–Lösung ϕ_c	96
B Zahl der Anordnungen einer n–Kink–Konfiguration	98
C Einige nützliche Beziehungen zur Γ–Funktion	100

D Fehlerintegral	101
E Berechnung einiger Integrale	102
E.1 J_1 -Berechnung	102
E.2 J_2 -Berechnung	103
E.3 J_3 -Berechnung	103
E.4 I_1 -Berechnung	104
E.5 I_2 -Berechnung	106
E.6 I_0 -Berechnung	107
E.7 L_1 -Berechnung	107
E.8 L_2 -Berechnung	110
E.9 L_0 -Berechnung	110
F Sattelpunktentwicklung zur ζ_3-Berechnung	111

Kapitel 1

Einleitung

In quantenfeldtheoretischen Modellen mit spontan gebrochener Symmetrie gibt es Feldkonfigurationen, bei denen verschiedene Phasen des Feldes nebeneinander existieren. Beispielsweise kann man sich ferromagnetische Substanzen vorstellen, bei denen die Magnetisierung in verschiedenen räumlichen Bereichen ein unterschiedliches Vorzeichen besitzt, oder Mischungen zweier Flüssigkeiten, so daß in einigen Raumbereichen die eine Flüssigkeit überwiegt, in anderen die andere, und diese verschiedenen Phasen durch Oberflächen von einander getrennt sind [1]. Diese Trennflächen besitzen eine temperaturabhängige, charakteristische Breite [2a]; außerdem läßt sich mit Hilfe der freien Energie F eine temperaturabhängige Oberflächenspannung τ definieren (s.u.). Bei Annäherung von unten an die kritische Temperatur T_c findet ein Phasenübergang statt, und diese Oberflächen lösen sich allmählich auf; die Oberflächenspannung verschwindet gemäß ($\sigma = \tau/k T$, k : Boltzmannsche Konstante)

$$\sigma \sim \sigma_0 t^\mu, \quad (1.1)$$

wobei

$$t = \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|,$$

mit der kritischen Amplitude σ_0 und dem kritischen Exponenten μ . Für den (universellen) kritischen Exponenten sollte in d Dimensionen gelten [2a]:

$$\mu = 2\beta + \gamma - \nu \quad (1.2)$$

$$= (d - 1) \nu, \quad (1.3)$$

mit den üblichen kritischen Exponenten β (kritisches Verhalten des Ordnungsparameters), γ (krit. Verh. der Suszeptibilität) und ν (krit. Verh. der Korrelationslänge). Als numerischer Wert ergibt sich mit [2]

$$\nu = 0,6300 \pm 0,0008 \quad (1.4)$$

(der Wert ist dort für das n -Vektor-Modell in $d = 3$ Dimensionen abgeleitet mit $n = 1$; das n -Vektor-Modell für $n = 1$ entspricht der ϕ^4 -Theorie) in $d = 3$ Dimensionen:

$$\mu = 1,2600 \pm 0,0016. \quad (1.5)$$

Ein Beispiel für eine Quantenfeldtheorie mit spontaner Symmetriebrechung ist die ϕ^4 -Theorie in der Phase gebrochener Symmetrie (Lagrange-Dichte $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 + \frac{\hat{m}_0^2}{2} \phi_0^2 +$

$\frac{g_0}{4!} \phi_0^4 + \frac{3}{2} \frac{\hat{m}_0^4}{g_0}$, $\hat{m}_0^2 < 0$, in der euklidischen Formulierung; Einzelheiten werden in Kapitel 2 dargelegt werden). Gemäß obigen Beispielen könnte $\phi_0(x)$ die (ortsabhängige) Magnetisierung eines Ferromagneten oder die Konzentrationsdifferenz zweier Flüssigkeiten beschreiben. Im Falle unendlichen Volumens zeigt nun die ϕ^4 -Theorie eine Entartung des Grundzustands. Die Grundzustände sind durch die Minima des Potentials

$$V(\phi_0) = \frac{\hat{m}_0^2}{2} \phi_0^2 + \frac{g_0}{4!} \phi_0^4 + \frac{3}{2} \frac{\hat{m}_0^4}{g_0} = \frac{g_0}{4!} (\phi_0^2 - v_0^2)^2, \quad v_0 = \sqrt{\frac{-6 \hat{m}_0^2}{g_0}}$$

bestimmt. In der Pfadintegralquantisierung heißt das, daß diejenigen Feldkonfigurationen mit bezüglich Raum und Zeit konstantem Wert $+v_0$ oder $-v_0$ dominieren.

Im Falle endlichen Volumens ist diese Entartung aufgehoben, denn es sind Übergänge zwischen den Feldkonfigurationen $\phi_0 = +v_0$ und $\phi_0 = -v_0$ infolge des Tunneleffekts möglich, so daß diese Feldkonfigurationen nicht länger stationär, insbesondere auch keine Grundzustände mehr sind. Bezeichnet man mit $|0_+\rangle$ bzw. $|0_-\rangle$ die Zustände mit $\phi_0 = +v_0$ bzw. $\phi_0 = -v_0$, die für wachsendes Volumen V ($V \rightarrow \infty$) gegen die entarteten Grundzustände bei unendlichem Volumen konvergieren, so läßt sich der bei endlichem Volumen eindeutig bestimmte, unter der Transformation $\phi_0 \rightarrow -\phi_0$ symmetrische Grundzustand $|0_s\rangle$ als

$$|0_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_+\rangle + |0_-\rangle) \quad (1.6)$$

schreiben. Energetisch etwas höher liegt der unter $\phi_0 \rightarrow -\phi_0$ antisymmetrische Zustand

$$|0_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_+\rangle - |0_-\rangle). \quad (1.7)$$

Die Energiedifferenz (Energie-Splitting) dieser beiden Zustände wird mit E_{0a} bezeichnet; ihre Berechnung ist Gegenstand dieser Arbeit. Genauer soll E_{0a} für die ϕ^4 -Theorie in $d = 3$ Dimensionen berechnet werden, wobei die beiden Raumdimensionen ein endliches Volumen L^2 bilden während die Zeitausdehnung T als unendlich angenommen wird (unendlicher Zylinder längs der Zeitachse mit quadratischer Grundfläche L^2).

Bei geeigneter Präparation der Randwerte des Feldes existieren, wie bereits oben erwähnt, Feldkonfigurationen, bei denen große räumliche Bereiche (Domänen) des Feldes den positiven Wert $+v_0$, andere Bereiche den negativen Wert $-v_0$ besitzen. Die verschiedenen Domänen sind durch Oberflächen charakteristischer Breite getrennt. Betrachtet man zunächst eine Feldkonfiguration mit $\phi_0 = -v_0$ für $T \rightarrow -\infty$ und $\phi_0 = +v_0$ für $T \rightarrow +\infty$, sowie periodischen Randbedingungen längs der Raumdimensionen, und bezeichnet deren freie Energie mit F_{+-} , dann eine Feldkonfiguration mit $\phi_0 = +v_0$ für $T \rightarrow \pm \infty$, wobei wieder periodische Randbedingungen längs der Raumdimensionen gelten sollen, und bezeichnet deren freie Energie mit F_{++} , so läßt sich die bereits oben angeführte Oberflächenspannung τ gemäß

$$\tau = \frac{F_{+-} - F_{++}}{L^2} \quad (1.8)$$

definieren [2b, 3] (die Definition ist dort für das Ising-Modell gegeben, kann jedoch verallgemeinert werden). Führt man man wie oben wieder $\sigma = \tau/kT$ ein, so kann im Rahmen dieser Vorstellungen über die Volumenabhängigkeit der Energieaufspaltung E_{0a} folgende Aussage getroffen werden [4, 5], $d = 3$ Dimensionen:

$$E_{0a} \sim \exp \{ -\sigma L^2 \}. \quad (1.9)$$

Diese Beziehung soll in dieser Arbeit im Rahmen einer semiklassischen Rechnung genauer begründet werden. Insbesondere werden explizite Ausdrücke für die Proportionalitätskonstante und für die Oberflächenspannung σ angegeben.

Dazu erfolgt zunächst in Kapitel 2 eine Darstellung der ϕ^4 -Theorie in der Phase gebrochener Symmetrie mit den im weiteren benötigten Feynman-Regeln. Bei der Auswertung sowohl einiger Feynman-Graphen als auch später bei der Berechnung von E_{0a} werden sich Divergenzen ergeben, so daß eine Regularisierung und Renormierung erforderlich wird. Als Regularisierungsmethode verwende ich die Pauli-Villars-Regularisierung, sie ist in Kapitel 3 erörtert, und als Renormierungsschema benutze ich das in [6] und [7] definierte; die Definitionen im einzelnen sind in Kapitel 4 angegeben, wo sich auch die Berechnungen der verschiedenen Feynman-Graphen bis zur 1-Loop-Ordnung zur Bestimmung der Renormierungsgrößen befinden.

Eine Berechnung von E_{0a} mit dimensionaler Regularisierung wurde von G. Münster bereits sowohl in $d = 4$ [8] als auch in $d = 3$ Dimensionen [9] durchgeführt. Die Motivation, statt einer dimensionalen Regularisierung hier die Pauli-Villars-Regularisierung zu verwenden, liegt zum einen darin, daß die dimensionale Regularisierung nicht zwischen Infrarot- und Ultraviolettdivergenzen unterscheidet, während die Pauli-Villars-Regularisierung nur die Ultraviolettdivergenzen beseitigt (mehr dazu in Kapitel 3). Zum anderen zeigt sich, daß bei einer Rechnung in dimensionaler Regularisierung mit Hilfe einer ε -Entwicklung ($\varepsilon = 3 - d$) für $\varepsilon = 0$ keine Divergenzen auftreten, obwohl die ursprüngliche Theorie Divergenzen in $d = 3$ Dimensionen liefert. Wenn also durch die dimensionale Regularisierung in dieser Art und Weise Divergenzen entfallen, stellt sich die Frage, ob die letztlich erhaltenen (endlichen) Ergebnisse zuverlässig sind. Deshalb erscheint es nützlich, eine Berechnung der Energieaufspaltung E_{0a} auch in einem anderen Regularisierungsschema durchzuführen, konkret in dieser Arbeit in Pauli-Villars-Regularisierung.

In Kapitel 5 wird eine explizite Formel für die Energie E_{0a} hergeleitet. Mit Hilfe einer semiklassischen Rechnung findet man in niedrigster Ordnung für diese Energie:

$$E_{0a} = 2 e^{-S_c} \left(\frac{S_c}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\det' M}{\det M_0} \right|^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.10)$$

mit gewissen Operatoren M, M_0 und der Wirkung S_c einer bestimmten Lösung der Feldgleichung für ϕ_0 ; die genauen Definitionen werden in Kapitel 5 angegeben. Kapitel 6 ist anschließend der Berechnung des Ausdrucks

$$\left| \frac{\det' M}{\det M_0} \right| \quad (1.11)$$

gewidmet, wobei sich zeigen wird, daß auch dieser Ausdruck zunächst regularisiert werden muß. Es werden zwei Wege zur Berechnung des Terms (1.11) dargelegt, deren Ergebnisse übereinstimmen (Einzelheiten in Kapitel 6). Kapitel 7 bringt schließlich die endgültige Berechnung der Energieaufspaltung E_{0a} mit Renormierung. Es ergibt sich letztlich bis zur betrachteten Ordnung

$$E_{0a} = C \exp \{ - \sigma(L) L^2 \}, \quad (1.12)$$

mit expliziten Ausdrücken für C und $\sigma(L)$, was wie bereits erwähnt die Beziehung (1.9) genauer begründet. In Kapitel 8 erfolgt ein Vergleich mit den Resultaten der entsprechenden Rechnung mit dimensionaler Regularisierung. Abschließend sind in Kapitel 9 einige Überlegungen angestellt, ob und möglicherweise wie die in Kapitel 6 vorgenommene Regularisierung des Ausdrucks (1.11) aus einer modifizierten Lagrange-Dichte erhalten werden könnte.

Kapitel 2

ϕ^4 –Theorie

Die Lagrange–Dichte der ϕ^4 –Theorie in der euklidischen Formulierung lautet

$$\mathcal{L}_{\phi_0} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 + V(\phi_0), \quad (2.1)$$

mit

$$V(\phi_0) = \frac{\hat{m}_0^2}{2} \phi_0^2 + \frac{g_0}{4!} \phi_0^4 + \frac{3}{2} \frac{\hat{m}_0^4}{g_0}. \quad (2.2)$$

Die Zweckmäßigkeit, die an sich unwichtige und beliebige Konstante $\frac{3}{2} \frac{\hat{m}_0^4}{g_0}$ einzuführen, wird sich weiter unten erweisen. Weiter ist zu bemerken, daß die ϕ^4 –Theorie im weiteren in $d = 3$ Dimensionen betrachtet wird, und g_0 daher Massendimension 1 hat.

Je nach Vorzeichen des Parameters \hat{m}_0^2 spricht man von der symmetrischen Phase ($\hat{m}_0^2 \geq 0$) oder der Phase gebrochener Symmetrie ($\hat{m}_0^2 < 0$), denn für $\hat{m}_0^2 \geq 0$ ist der Grundzustand der Theorie einfach $\phi_0 \equiv 0$ und damit symmetrisch unter der Transformation $\phi_0 \rightarrow -\phi_0$, genau wie die Lagrange–Dichte selbst. Für $\hat{m}_0^2 < 0$ ist diese Symmetrie der Lagrange–Dichte spontan gebrochen; für den Grundzustand (Zustand minimaler Energie) bei unendlichem Volumen gilt nämlich, da die Energie offensichtlich für $\phi_0 = \phi_{\text{Gr}} = \text{const.}$ minimal wird, wenn ϕ_{Gr} eine Konstante ist, die V minimiert:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\phi_0)}{d\phi_0} &= 0 \\ \iff \hat{m}_0^2 \phi_{\text{Gr}} + \frac{g_0}{3!} \phi_{\text{Gr}}^3 &= 0 \\ \iff \phi_{\text{Gr}} \left(\hat{m}_0^2 + \frac{g_0}{3!} \phi_{\text{Gr}}^2 \right) &= 0 \\ \implies \phi_{\text{Gr};0} = 0, \quad \phi_{\text{Gr};1,2} &= \pm \sqrt{-\frac{6 \hat{m}_0^2}{g_0}} \quad (\hat{m}_0^2 < 0!). \end{aligned}$$

Eine Untersuchung der zweiten Ableitung von V klärt die Verhältnisse:

$$\frac{d^2 V(\phi_0)}{d\phi_0^2} = \hat{m}_0^2 + \frac{g_0}{2} \phi_0^2 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{d^2 V(\phi_0)}{d \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=\phi_{Gr,0}} &= \hat{m}_0^2 < 0 \\
&\Rightarrow \text{Maximum bei } \phi_{Gr,0} = 0 \\
\frac{d^2 V(\phi_0)}{d \phi_0^2} \Big|_{\phi_0=\phi_{Gr,1,2}} &= -2 \hat{m}_0^2 > 0 \\
&\Rightarrow \text{Minima bei } \phi_{Gr,1} \text{ und } \phi_{Gr,2}.
\end{aligned}$$

Die Grundzustände in der Phase gebrochener Symmetrie bei unendlichem Volumen sind also durch $\phi_0 = +v_0$ bzw. $\phi_0 = -v_0$ gegeben, mit $v_0 = \sqrt{-\frac{6 \hat{m}_0^2}{g_0}}$; damit ist die Symmetrie der Lagrange–Dichte in den Grundzuständen nicht mehr vorhanden. Offenbar gilt auch

$$V(\phi_0) = \frac{g_0}{4!} \left(\phi_0^2 - v_0^2 \right)^2, \quad (2.4)$$

das heißt die Konstante $\frac{3}{2} \frac{\hat{m}_0^4}{g_0}$ in der Lagrange–Dichte ist gerade so gewählt, daß das Potential in den Grundzuständen $\phi_0 = \pm v_0$ verschwindet (vgl. Abbildung 2.1).

Abbildung 2.1: Das Potential $V(\phi_0)$

Im folgenden wird nun nur noch die Phase gebrochener Symmetrie betrachtet; hierzu ist es zweckmäßig ein neues Feld φ als „Anregung“ des Grundzustands einzuführen. Ohne Einschränkung sei φ als Anregungsfeld zum Zustand $\phi_{Gr,1} = +v_0$ definiert:

$$\varphi = \phi_0 - v_0. \quad (2.5)$$

Schreibt man nun das Potential V als Funktion dieses neuen Feldes φ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} V(v_0 + \varphi) &= \frac{\hat{m}_0^2}{2} (v_0 + \varphi)^2 + \frac{g_0}{4!} (v_0 + \varphi)^4 + \frac{3}{2} \frac{\hat{m}_0^4}{g_0} \\ &= \frac{\hat{m}_0^2}{2} v_0^2 + \frac{g_0}{4!} v_0^4 + \left(\hat{m}_0^2 v_0 + \frac{g_0}{3!} v_0^3 \right) \varphi \\ &\quad + \left(\frac{\hat{m}_0^2}{2} + \frac{g_0}{4} v_0^2 \right) \varphi^2 + \frac{g_0}{3!} v_0 \varphi^3 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 + \frac{3}{2} \frac{\hat{m}_0^4}{g_0}, \end{aligned}$$

und mit der Definition von v_0 folgt

$$\begin{aligned} \tilde{V}(\varphi) &:= V(v_0 + \varphi) \\ &= -3 \frac{\hat{m}_0^4}{g_0} + \frac{3}{2} \frac{\hat{m}_0^4}{g_0} + \frac{3}{2} \frac{\hat{m}_0^4}{g_0} \\ &\quad + (\hat{m}_0^2 - \hat{m}_0^2) \varphi v_0 + \left(\frac{\hat{m}_0^2}{2} - \frac{3 \hat{m}_0^2}{2} \right) \varphi^2 \\ &\quad + \frac{\sqrt{-6 \hat{m}_0^2 g_0}}{3!} \varphi^3 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \\ &= -\hat{m}_0^2 \varphi^2 + \frac{\sqrt{-6 \hat{m}_0^2 g_0}}{3!} \varphi^3 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Definiert man noch eine neue Masse m_0 durch

$$m_0^2 := -2 \hat{m}_0^2 > 0, \tag{2.7}$$

so ergibt sich als Lagrange–Dichte des Feldes φ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varphi &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \tilde{V}(\varphi) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{m_0^2}{2} \varphi^2 + \frac{\sqrt{3 g_0} m_0}{3!} \varphi^3 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \end{aligned} \tag{2.8}$$

sowie

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{-\frac{6 \hat{m}_0^2}{g_0}} \\ &= \sqrt{\frac{3 m_0^2}{g_0}}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Die Konfigurationen $\phi_{Gr,1,2}$ entsprechen nur bei unendlichem Volumen Grundzuständen der Theorie; bei endlichem Volumen sind Übergänge von $\phi_{Gr,1}$ nach $\phi_{Gr,2}$ und umgekehrt infolge des Tunneleffekts möglich, die Einführung eines Feldes φ gemäß Definition (2.5) ist aber auch bei endlichem Volumen möglich und wird im folgenden beibehalten.

Aus der Lagrange–Dichte (2.8) erhält man auch leicht die Feynman–Regeln für das Feld φ zur störungstheoretischen Bestimmung der Greensfunktionen. Es gelten die üblichen Definitionen ($d = 3$ Dimensionen):

$$G_\varphi^{(n)}(x_1, \dots, x_n) := \langle 0 | T(\varphi(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi(x_n)) | 0 \rangle, \tag{2.10}$$

d.h. $G_\varphi^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ ist der Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Operatorprodukts der Werte des φ -Feldes an den Stellen x_1, \dots, x_n ,

$$\tilde{G}'_\varphi^{(n)}(p_1, \dots, p_n) := \int d^3x_1 \dots d^3x_n G_\varphi^{(n)}(x_1, \dots, x_n) e^{i p_1 x_1} \dots e^{i p_n x_n}, \quad (2.11)$$

(Fourier–Transformation)

$$\tilde{G}'_\varphi^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_1 + \dots + p_n) \tilde{G}_\varphi^{(n)}(p_1, \dots, p_n). \quad (2.12)$$

Die Definition von $\tilde{G}_\varphi^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ durch Abspalten einer δ -Funktion setzt die Translationsinvarianz der Theorie voraus; die ϕ^4 -Theorie bei unendlichem Volumen ist translati ons invariant.

Aus der Lagrange–Dichte (2.8) liest man unmittelbar folgende Feynman–Regeln im Impulsraum für $\tilde{G}_\varphi^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ ab (es werden die Regeln für unendliches Volumen angegeben ($L = \infty$), da diese in Kapitel 4 zur Bestimmung der Renormierungsgrößen benötigt werden; bei endlichem Volumen sind in den Regeln Integrale $\int d^3x'$ über entsprechende Bereiche auszuführen bzw. Impulsintegrale als Summe über diskrete Impulse aufzufassen sowie noch geeignete Normierungskonstanten einzuführen):

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{p} & \hat{=} & \frac{1}{p^2 + m_0^2}, \\ \text{---} & & \\ \text{---} & \hat{=} & -\sqrt{3 g_0} m_0, \\ \text{---} & \hat{=} & -g_0, \end{array}$$

- über unabhängige Schleifenimpulse q ist mit $\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}$ zu integrieren,
- Impulserhaltung an allen inneren Punkten
- jeder Graph ist mit einem Vorfaktor $\frac{1}{S}$ zu versehen, wobei S der Symmetriefaktor des Graphen ist:

$$S = \#(\text{Symmetrie–Gruppe des Graphen})$$

$$= \# \left(\begin{array}{l} \text{Abbildungen des Graphen auf sich, die man durch Per-} \\ \text{mutationen von inneren Punkten und Linien erhält;} \\ \text{die Zuordnung zwischen Punkten und Linien muß er-} \\ \text{halten bleiben, und die äußeren Linien bleiben fest} \end{array} \right). \quad (2.13)$$

Der Vollständigkeit halber seien auch noch die Feynman–Regeln für $G_\varphi^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ im Ortsraum aufgeführt:

$$\begin{array}{ccc} \overline{x \text{---} y} & \hat{=} & \Delta(x - y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i k (x - y)}}{k^2 + m_0^2}, \\ \text{---} & \hat{=} & -\sqrt{3 g_0} m_0 \int d^3x', \\ \text{---} & \hat{=} & -g_0 \int d^3x'', \end{array}$$

- über innere Punkte wird integriert (s.o. Integration über x' bzw. x''),
- der Vorfaktor $\frac{1}{S}$ eines Graphen ist wie bei $\tilde{G}_\varphi^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ zu wählen (vgl. Definition (2.13)),

sowie die Feynman–Regeln für $\tilde{G}_\varphi'^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{p} &\quad \hat{=} \quad \frac{1}{p^2 + m_0^2}, \\
 \begin{array}{c} p_1 \\ \nearrow \\ p_2 \quad p_3 \end{array} &\quad \hat{=} \quad -\sqrt{3 g_0} m_0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^3 p_i\right), \\
 \begin{array}{c} p_1 \quad p_3 \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_2 \quad p_4 \end{array} &\quad \hat{=} \quad -g_0 (2\pi)^3 \delta^{(3)}\left(\sum_{i=1}^4 p_i\right), \\
 \overrightarrow{p_1} \quad \overleftarrow{p_2} &\quad \hat{=} \quad (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_1 + p_2) \frac{1}{p_1^2 + m_0^2} \\
 &\quad \text{(Linie, die keinen inneren Punkt berührt),}
 \end{aligned}$$

- über innere Impulse q ist mit $\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}$ zu integrieren,
- jede Linie ist mit einem Pfeil zu versehen, und für das Vorzeichen des zugehörigen Impulses q in den Argumenten der δ -Funktionen der 3–er und 4–er Vertizes gilt:

$$\text{sign } q = \begin{cases} +1, & \text{falls } q \text{ in den Vertex hineinzeigt} \\ -1, & \text{falls } q \text{ aus dem Vertex herauszeigt,} \end{cases}$$

- äußere Linien zeigen in den Vertex hinein,
- Vorfaktoren $\frac{1}{S}$ der Graphen sind genau wie für $\tilde{G}_\varphi^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ und $\tilde{G}_\varphi^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ zu wählen (Definition (2.13)).

Die verbundenen Greensfunktionen $G_{\varphi,c}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ sind wie gewohnt definiert,

$$G_\varphi^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathcal{P}} G_{\varphi,c}(x_i, \dots, x_j) \cdots G_{\varphi,c}(x_k, \dots, x_l) \quad (2.14)$$

$\mathcal{P} :=$ Menge aller Partitionen der Indizes $\{1, \dots, n\}$ in nichtleere Teilmengen

(durch Umkehren der Beziehung (2.14) ergeben sich die $G_{\varphi,c}$ sukzessive als Funktionen der G_φ), und sind perturbativ durch alle zusammenhängenden Feynman–Graphen gegeben. Ganz entsprechend wie oben (vgl. Gl.(2.11) und Gl.(2.12)) sind auch $\tilde{G}_{\varphi,c}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ und $\tilde{G}_{\varphi,c}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$ definiert.

Kapitel 3

Pauli–Villars–Regularisierung

Die durch die Feynman–Regeln aus Kapitel 2 erhaltenen Schleifenintegrale können divergieren. Als einfaches Beispiel sieht man, daß

$$\frac{1}{2} \text{---} \bigcirc = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3} g_0 m_0}{p^2 + m_0^2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2},$$

als Beitrag zu $\tilde{G}_\varphi^{(1)}(p)$, divergiert (oberflächlicher Divergenzgrad $\delta = 1$).

Um dennoch endliche Greensfunktionen und damit eine endliche Theorie zu erhalten, ist daher zunächst eine Regularisierung notwendig. Statt der weithin gebräuchlichen dimensionalen Regularisierung (Verallgemeinerung des Integralbegriffs auf Dimensionen, die nicht notwendig natürliche Zahlen sind) soll aus den in der Einleitung angeführten Gründen in dieser Arbeit die sogenannte Pauli–Villars–Regularisierung Verwendung finden [10]. Die Idee dieses Regularisierungsschemas besteht darin, den ursprünglichen Propagator der Theorie durch einen neuen wie folgt zu ersetzen:

$$\frac{1}{p^2 + m_0^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 + m_0^2} - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{p^2 + \Lambda_k^2}, \quad (3.1)$$

mit den Parametern a_k, Λ_k ($k = 1, \dots, N$).

Die Parameter a_k und die Zahl N der „Pauli–Villars–Massen“ Λ_k sind dabei so zu wählen, daß durch die Ersetzung (3.1) tatsächlich ein stärkerer Abfall des Propagators als $1/p^2$ für große Impulse p^2 eintritt. Insbesondere ist $\sum_{k=1}^N a_k = 1$ zu wählen, denn für große p^2 gilt, falls $\sum_{k=1}^N a_k \neq 1$,

$$\frac{1}{p^2 + m_0^2} - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{p^2 + \Lambda_k^2} \sim \frac{1 - \sum_{k=1}^N a_k}{p^2},$$

und es ergäbe sich ein Verhalten wie $1/p^2$ für $p^2 \rightarrow \infty$, also effektiv keine Regularisierung der Theorie.

Allgemein gilt bei geeigneter Wahl der a_k

$$\frac{1}{p^2 + m_0^2} - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{p^2 + \Lambda_k^2} = \frac{\prod_{k=1}^N (\Lambda_k^2 - m_0^2)}{(p^2 + m_0^2) \prod_{k=1}^N (p^2 + \Lambda_k^2)}, \quad (3.2)$$

wie man durch Partialbruchentwicklung der rechten Seite einsieht.

Für $\Lambda_k \gg m_0$, $k = 1, \dots, N$ gilt nun aber für die rechte Seite

$$\begin{aligned}
\frac{\prod_{k=1}^N (\Lambda_k^2 - m_0^2)}{(p^2 + m_0^2) \prod_{k=1}^N (p^2 + \Lambda_k^2)} &\approx \frac{\prod_{k=1}^N \Lambda_k^2}{(p^2 + m_0^2) \prod_{k=1}^N (p^2 + \Lambda_k^2)} \\
&\approx \frac{1}{(p^2 + m_0^2) \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{p^2}{\Lambda_k^2}\right)} \\
&\approx \frac{1}{p^2 + m_0^2 + \alpha_2 \frac{p^4}{\Lambda^2} + \dots + \alpha_{N+1} \frac{p^{2N+2}}{\Lambda^{2N}}}, \tag{3.3}
\end{aligned}$$

mit $\Lambda^2 := \max \{ \Lambda_k^2 \mid k \in \{1, \dots, N\} \}$, α_l , $l \in \{2, \dots, N+1\}$, geeignete Parameter.

Aus dieser Form des neuen Propagators sieht man, daß jeder zusätzliche Summand $\frac{a_j}{p^2 + \Lambda_j^2}$ bei der Modifikation des ursprünglichen Propagators ein um den Faktor $1/p^2$ schnelleres Abfallen des neuen Propagators für $p^2 \rightarrow \infty$ bewirkt.

Es sei darauf hingewiesen, daß man die Form (3.1) des neuen Propagators auch aus einer Modifikation der Lagrange–Dichte bekommen kann, indem man neue, bosonische Felder ϕ_k mit Massen Λ_k ($k = 1, \dots, N$) gemäß

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{mod}} &= \frac{1}{2} \phi_0 (-\Delta + m_0^2) \phi_0 - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2a_k} \phi_k (-\Delta + \Lambda_k^2) \phi_k \\
&\quad + V \left(\phi + \sum_{k=1}^N \phi_k \right)
\end{aligned}$$

einführt [11, Abschnitt 7.1]. Da wie erwähnt $\sum_{k=1}^N a_k = 1$ gelten muß und daher wenigstens ein a_k positiv ist, können nicht alle Felder ϕ_k gewöhnliche Teilchenfelder sein.

Hat man nun durch Pauli–Villars–Regularisierung einen Propagator Δ_{PV} bekommen dessen Verhalten für große p^2 durch

$$\Delta_{\text{PV}}(p) \sim \frac{1}{p^{2n}}$$

gegeben ist, so ergibt sich der oberflächliche Divergenzgrad $\delta(\beta)$ eines Graphen β mit I inneren Impulsen, v_α Vertizes des Typs α und L Schleifen in d Dimensionen zu

$$\delta(\beta) = dL - 2nI, \tag{3.4}$$

wobei angenommen ist, daß die Theorie keine Ableitungskopplungen enthält, was bei der betrachteten ϕ^4 –Theorie natürlich der Fall ist. Weiter gilt der Zusammenhang

$$L = I - \sum_\alpha v_\alpha + 1, \tag{3.5}$$

denn jeder Vertex bringt nach den Feynman–Regeln für \tilde{G}' (Kapitel 2) eine δ –Funktion ein, so daß von den ursprünglich auszuführenden I Integrationen $\sum_\alpha v_\alpha - 1$ sofort ausgeführt werden können, indem man die entsprechenden δ –Funktionen eliminiert. Eine δ –Funktion bleibt stehen und liefert bei Translationsinvarianz der Theorie die Impulserhaltung

$$(2\pi)^d \delta^{(d)} \left(\sum_i p_i \right), \quad p_i \text{ äußere Impulse,}$$

so daß effektiv

$$\begin{aligned} L &= I - \left(\sum_{\alpha} v_{\alpha} - 1 \right) \\ &= I - \sum_{\alpha} v_{\alpha} + 1 \end{aligned}$$

Integrationen auszuführen bleiben. Das ergibt gemäß Gl.(3.4) für den Divergenzgrad des Graphen β :

$$\begin{aligned} \delta(\beta) &= dL - 2n(L + \sum_{\alpha} v_{\alpha} - 1) \\ &= (d - 2n)L - 2n \sum_{\alpha} v_{\alpha} + 2n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Damit der Graph β oberflächlich konvergent ist, ist zu fordern:

$$\delta(\beta) < 0, \quad (3.7)$$

was für Graphen mit wenigstens einem Vertex durch Erfüllen der Bedingung

$$2n > d \quad (3.8)$$

stets gewährleistet ist. Graphen ohne Vertizes liefern auch keine Schleifenintegrale und damit keine Divergenzen, so daß $\sum_{\alpha} v_{\alpha} \geq 1$ bei allen zu regularisierenden Graphen gilt.

In der in Kapitel 2 vorgestellten und im weiteren zu untersuchenden ϕ^4 -Theorie in der gebrochenen Phase in $d = 3$ Dimensionen ist also

$$2n > 3 \quad (3.9)$$

zur Regularisierung aller Graphen ausreichend, was durch die Wahl $2n = 4$ am einfachsten erfüllt wird. Es reicht also, daß für den Pauli–Villars–Propagator für $p^2 \rightarrow \infty$ gilt:

$$\Delta_{PV} \sim \frac{1}{p^4},$$

was nach den obigen Überlegungen (vgl. Bemerkung nach der Beziehung (3.3)) durch eine Pauli–Villars–Masse Λ erreichbar ist. Zur Regularisierung ist damit die Ersetzung

$$\frac{1}{p^2 + m_0^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 + m_0^2} - \frac{1}{p^2 + \Lambda^2} \quad (3.10)$$

geeignet.

Der Vorteil der Pauli–Villars–Regularisierung gegenüber z.B. der dimensionalen Regularisierung besteht darin, daß durch dieses Regularisierungsverfahren (Pauli–Villars) die Infrarot– und die Ultraviolett–Divergenzen getrennt werden können. Offenbar wird durch die Ersetzung (3.1) oder speziell (3.10) nämlich wesentlich nur das Verhalten des Propagators für große Werte von p^2 (UV–Bereich) beeinflußt. Für kleine p^2 ($p^2 \lesssim m_0^2$) dominiert nach wie vor wegen $\Lambda_k \gg m_0$ der ursprüngliche Propagator $\frac{1}{p^2 + m_0^2}$. Insbesondere bleiben etwa vorhandene IR–Divergenzen (z.B. falls $m_0 = 0$) auch nach der Regularisierung bestehen. Insgesamt können daher durch die Pauli–Villars–Regularisierung gezielt die UV–Divergenzen beseitigt werden, ohne die infrarote Divergenzstruktur entscheidend zu verändern; eine solche Trennung der Divergenzen in Ultraviolett– und Infrarotanteil liefert die dimensionale Regularisierung nicht.

Kapitel 4

Renormierungsgrößen

4.1 Definition der renormierten Größen

Ich benutze in dieser Arbeit dasselbe Renormierungsschema, das auch in [8] Verwendung findet, und welches in [6] und [7] definiert worden ist. Dabei sind die renormierten Größen wie folgt erklärt (zur Definition der renormierten Größen sind die Greensfunktionen bei unendlichem Volumen zu nehmen):

- Renormierte Masse m_R :

$$\begin{aligned} m_R^2 &= \frac{\left[\tilde{G}_c^{(2)}(0,0) \right]^{-1}}{\frac{\partial}{\partial p_0^2} \left[\tilde{G}_c^{(2)}((p_0, \vec{0}), (-p_0, \vec{0})) \right]_{|p_0=0}^{-1}} \\ &= \frac{\tilde{\Gamma}^{(2)}(0,0)}{\frac{\partial}{\partial p_0^2} \tilde{\Gamma}^{(2)}((p_0, \vec{0}), (-p_0, \vec{0}))_{|p_0=0}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

$\tilde{G}_c^{(2)}$ und $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ sind hierbei wie gewohnt definiert (siehe auch Kapitel 2). Insbesondere gilt:

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p, q) = - \left[\tilde{G}_c^{(2)}(p, q) \right]^{-1}. \quad (4.2)$$

$\vec{0}$ steht, wie im folgenden auch, für die (zwei) Raumkomponenten eines dreidimensionalen Vektors.

- Wellenfunktionsrenormierung Z_R :

$$\frac{1}{Z_R} = \frac{\partial}{\partial p_0^2} \left[\tilde{G}_c^{(2)}((p_0, \vec{0}), (-p_0, \vec{0})) \right]_{|p_0=0}^{-1}. \quad (4.3)$$

Indem man

$$\tilde{G}(p) := \tilde{G}_c^{(2)}(p, -p) \quad (4.4)$$

setzt und die Funktion $\left[\tilde{G}(p_0, \vec{0}) \right]^{-1}$ um $p_0 = 0$ entwickelt, findet man also mit den Definitionen (4.1) und (4.2):

$$\left[\tilde{G}(p_0, \vec{0}) \right]^{-1} = \frac{1}{Z_R} \left(m_R^2 + p_0^2 + O(p_0^4) \right). \quad (4.5)$$

Die renormierten Größen m_R und Z_R können also einfach aus der Entwicklung (4.5) erhalten werden.

- Renormierte 1–Punkt–Funktion v_R :

$$v_R = \frac{\langle \phi_0 \rangle}{Z_R^{\frac{1}{2}}}. \quad (4.6)$$

- Renormierte Kopplungskonstante g_R und dimensionslose Kopplungskonstante u_R in der gebrochenen Phase der ϕ^4 –Theorie:

$$g_R = \frac{3 m_R^2}{v_R^2}, \quad u_R = \frac{g_R}{m_R} \quad (4.7)$$

- Renormierte Kopplungskonstante $g^{(4)}$:

$$\begin{aligned} g^{(4)} &= -\tilde{\Gamma}_R^{(4)}(0, 0, 0, 0) \\ &= -Z_R^2 \tilde{\Gamma}^{(4)}(0, 0, 0, 0), \end{aligned} \quad (4.8)$$

mit der 4–Punkt–Vertexfunktion $\tilde{\Gamma}^{(4)}$. Die Kopplungskonstante $g^{(4)}$ wird i.a. in der symmetrischen Phase der Theorie verwendet, da dort g_R nicht existiert ($v_R = 0$).

Schließlich soll auch noch die physikalische Masse m_{ph} berechnet werden, die so definiert ist, daß der renormierte Propagator bzw. $\frac{\tilde{G}(p)}{Z_R}$ (vgl. Gl.(4.4)) im Minkowskischen einen Pol bei $p = (m_{ph}, \vec{0})$ besitzt. Da in dieser Arbeit stets die euklidische Formulierung betrachtet wird, bedeutet das, daß der renormierte Propagator im Euklidischen einen Pol bei $(im_{ph}, \vec{0})$ hat:

$$Z_R \left[\tilde{G}(im_{ph}, \vec{0}) \right]^{-1} = 0. \quad (4.9)$$

Diese Größen sollen nun berechnet werden; die Rechnung wird dabei in der Störungstheorie bis zur 1–Loop–Ordnung durchgeführt. Insbesondere werden die 1–Punkt–Funktion $\tilde{G}^{(1)}(p)$ und die 2–Punkt–Funktion $\tilde{G}_c^{(2)}(p, q)$ bzw. $\tilde{G}(p)$ benötigt. In den Renormierungsbeziehungen (4.1)–(4.5), (4.8) und (4.9) sind als Greensfunktionen diejenigen des „Anregungsfeldes“ φ bei unendlichem Volumen zu nehmen (vgl. Definition (2.5)):

$$\varphi = \phi_0 - v_0. \quad (4.10)$$

Diese werden mit Hilfe der Feynman–Regeln aus Kapitel 2 berechnet.

4.2 Berechnung von $\tilde{G}_\varphi^{(1)}$

Bis zur 1–Loop–Ordnung gilt folgende Entwicklung:

$$\tilde{G}_\varphi^{(1)}(p) = \frac{1}{2} \text{---} \bigcirc + \mathcal{O}\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right). \quad (4.11)$$

Mit den Feynman–Regeln ergibt sich:

$$\tilde{G}_\varphi^{(1)}(p) = -\frac{\sqrt{3} g_0}{2} \frac{m_0}{p^2 + m_0^2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} + \mathcal{O}\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right). \quad (4.12)$$

Das Integral divergiert. Daher ist hier nun die Pauli–Villars–Regularisierung durchzuführen. Nach den Überlegungen des vorigen Kapitels genügt ($d = 3$ Dimensionen) eine Pauli–Villars–Masse (vgl. Beziehung (3.10)):

$$\frac{1}{p^2 + m_0^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 + m_0^2} - \frac{1}{p^2 + \Lambda^2}. \quad (4.13)$$

Außerdem ist $p = 0$ zu setzen, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{G}'_\varphi^{(1)}(p) &= (2\pi)^3 \delta(p) \tilde{G}_\varphi^{(1)}(p) \\ &= (2\pi)^3 \delta(p) \tilde{G}_\varphi^{(1)}(0). \end{aligned} \quad (4.14)$$

(Die 1–Punkt–Funktion $\tilde{G}_\varphi^{(1)}(x)$ ist konstant (folgt aus der Translationsinvarianz der Wirkung $S[\varphi] = \int d^3x \mathcal{L}_\varphi$, \mathcal{L}_φ aus der Definition (2.8)):

$$G_\varphi^{(1)}(x) = C, \quad C \in \mathbb{C}.$$

Daher ist

$$\tilde{G}'_\varphi^{(1)}(p) = (2\pi)^3 C \delta(p)$$

und

$$\tilde{G}_\varphi^{(1)}(p) = C.)$$

Damit erhält man ($\tilde{G}_{\varphi, \text{PV}}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{G}_\varphi^{(1)}$ in Pauli–Villars–Regularisierung):

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\varphi, \text{PV}}^{(1)} &= -\frac{\sqrt{3 g_0}}{2} m_0 \left(\frac{1}{m_0^2} - \frac{1}{\Lambda^2} \right) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{q^2 + m_0^2} - \frac{1}{q^2 + \Lambda^2} \right) + \mathcal{O}\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3 g_0}}{2} m_0 \left(\frac{1}{m_0^2} - \frac{1}{\Lambda^2} \right) \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\Lambda^2 - m_0^2}{(q^2 + m_0^2)(q^2 + \Lambda^2)} + \mathcal{O}\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3 g_0}}{2} m_0 \left(\frac{1}{m_0^2} - \frac{1}{\Lambda^2} \right) \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2 (\Lambda^2 - m_0^2)}{(q^2 + m_0^2)(q^2 + \Lambda^2)} + \mathcal{O}\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3 g_0}}{4\pi^2} m_0 \left(\frac{1}{m_0^2} - \frac{1}{\Lambda^2} \right) \int_0^\infty dq \left(\frac{\Lambda^2}{q^2 + \Lambda^2} - \frac{m_0^2}{q^2 + m_0^2} \right) + \mathcal{O}\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3 g_0}}{4\pi^2} m_0 \left(\frac{1}{m_0^2} - \frac{1}{\Lambda^2} \right) \left[\Lambda \arctan \frac{q}{\Lambda} - m_0 \arctan \frac{q}{m_0} \right] \Big|_0^\infty + \mathcal{O}\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3 g_0}}{4\pi^2} m_0 \left(\frac{1}{m_0^2} - \frac{1}{\Lambda^2} \right) \frac{\pi}{2} (\Lambda - m_0) + \mathcal{O}\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3 g_0}}{8\pi} (\Lambda - m_0) \left(\frac{1}{m_0} - \frac{m_0}{\Lambda^2} \right) + \mathcal{O}\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3 g_0}}{8\pi} \frac{(\Lambda - m_0)}{m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.3 Berechnung von \tilde{G}_φ

Es gilt (vgl. Gl.(4.4)):

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_\varphi(p) = & \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{O} \text{---} + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{O} \text{---} \\
 & + \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{O} \text{---} + \mathcal{O}(g_0^2).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Die Graphen werden einzeln berechnet:

$$\text{---} = \frac{1}{p^2 + m_0^2}, \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{O} \text{---} &= -\frac{g_0}{2} \left(\frac{1}{p^2 + m_0^2} \right)^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \\
 &\rightarrow -\frac{g_0}{2} \left(\frac{1}{p^2 + m_0^2} \right)^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{q^2 + m_0^2} - \frac{1}{q^2 + \Lambda^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \\
 &\quad \text{(Pauli–Villars–Regularisierung)} \\
 &= -\frac{g_0}{2} \left(\frac{1}{p^2 + m_0^2} \right)^2 \frac{\Lambda - m_0}{4\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

(siehe Rechnung zu $\tilde{G}_{\varphi, \text{PV}}^{(1)}$)

Die Terme $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$ stammen aus der Ersetzung $\frac{1}{p^2 + m_0^2} \rightarrow \frac{1}{p^2 + m_0^2} - \frac{1}{p^2 + \Lambda^2}$ in den äußeren Beinen des Graphen; da das sich ergebende Schleifenintegral für $\Lambda \rightarrow \infty$ linear divergiert, ergeben sich Terme der Ordnung $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \text{---} \textcircled{O} \text{---} &= \frac{3}{2} m_0^2 g_0 \left(\frac{1}{p^2 + m_0^2} \right)^2 \frac{1}{m_0^2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \\
 &\rightarrow \frac{3}{2} g_0 \left(\frac{1}{p^2 + m_0^2} \right)^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{q^2 + m_0^2} - \frac{1}{q^2 + \Lambda^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \\
 &\quad \text{(Pauli–Villars–Regularisierung)} \\
 &= \frac{3}{2} g_0 \left(\frac{1}{p^2 + m_0^2} \right)^2 \frac{\Lambda - m_0}{4\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

(siehe Rechnung zu $\tilde{G}_{\varphi, \text{PV}}^{(1)}$)

Die Terme $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$ ergeben sich auf die gleiche Weise wie oben.

$$\frac{1}{2} \text{---} \textcircled{O} \text{---} = \frac{3}{2} g_0 m_0^2 \left(\frac{1}{p^2 + m_0^2} \right)^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 + m_0^2) ((p - q)^2 + m_0^2)} \tag{4.19}$$

Das Schleifenintegral konvergiert bereits auch ohne Pauli–Villars–Regularisierung; regularisiert man dennoch, so kommen nur Terme hinzu, die für $\Lambda \rightarrow \infty$ mindestens wie $\frac{1}{\Lambda}$ gegen 0 gehen; diese werden im folgenden durch $O\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$ ausgedrückt. (Es treten z.B. (bis auf Konstanten) Terme folgender Gestalt auf:

$$\begin{aligned} \int d^3q \frac{1}{q^2 + \Lambda^2} \frac{1}{(p - q)^2 + m_0^2} &= \frac{1}{\Lambda^2} \int d^3q \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{\Lambda}\right)^2} \frac{1}{(p - q)^2 + m_0^2} \\ &= \Lambda \int d^3q' \frac{1}{1 + (q')^2} \frac{1}{(p - \Lambda q')^2 + m_0^2} \quad \left(q' = \frac{q}{\Lambda}\right) \\ &= \int \frac{d^3q'}{\Lambda \left((q')^4 + (q')^2\right) + \left(1 + (q')^2\right) \left(\frac{1}{\Lambda} (p^2 + m_0^2) - 2 p \cdot q'\right)}, \end{aligned}$$

also Terme der Ordnung $O\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$.) Das Schleifenintegral wird standardmäßig mit Hilfe einer Feynman–Parametrisierung ausgewertet, denn es gilt [12, Spezialfall von Gl.(4.4.10)]:

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[A x + B (1-x)]^{\alpha+\beta}}. \quad (4.20)$$

Damit bekommt man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= \frac{3}{2} g_0 m_0^2 \left(\frac{1}{p^2 + m_0^2}\right)^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 + m_0^2) \left((p - q)^2 + m_0^2\right)} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\ &= \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left[(1-x)(q^2 + m_0^2) + x((p-q)^2 + m_0^2)\right]^2} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\ &= \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{[q^2 + m_0^2 - 2 x p \cdot q + x p^2]^2} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\ &= \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\left[(q - x p)^2 + \underbrace{x(1-x)p^2 + m_0^2}_{=: a^2}\right]^2} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\ &= \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^3q'}{(2\pi)^3} \frac{1}{[q'^2 + a^2]^2} \quad (q' = q - x p) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \end{aligned} \implies$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \xrightarrow{p} \text{Diagram} &= \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty dq' \frac{(q')^2}{[(q')^2 + a^2]^2} \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
&= \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^\infty dq' \left(\frac{1}{(q')^2 + a^2} - \frac{a^2}{((q')^2 + a^2)^2} \right) \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \quad (\text{Partialbruchzerlegung}) \\
&= \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{a} \arctan \frac{q'}{a} \Big|_0^\infty - a^2 \int_0^\infty dq' \frac{1}{((q')^2 + a^2)^2} \right] \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right).
\end{aligned}$$

Das letzte q' -Integral löst man standardmäßig [13, 3.1.7.5.]:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dq'}{((q')^2 + a^2)^2} &= \frac{2 q'}{4a^2 ((q')^2 + a^2)} \Big|_0^\infty + \frac{1}{2a^2} \int_0^\infty \frac{dq'}{(q')^2 + a^2} \\
&= \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{q'}{a} \Big|_0^\infty \\
&= \frac{\pi}{4a^3}.
\end{aligned}$$

Daher ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \xrightarrow{p} \text{Diagram} &= \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{4a} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
&= \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{8\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{a} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
&\quad \left(a = \sqrt{x(1-x)p^2 + m_0^2} \right) \\
&= \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{8\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)p^2 + m_0^2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right).
\end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned}
t &= \frac{-p^2 x + \frac{1}{2}p^2}{\sqrt{p^2 m_0^2 + \frac{p^4}{4}}} \\
&= \frac{-p^2 x + \frac{1}{2}p^2}{\sqrt{H}}, \quad H = p^2 m_0^2 + \frac{p^4}{4} > 0
\end{aligned}$$

erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad = \quad & \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{8\pi} \int_{-\frac{p^2}{2\sqrt{H}}}^{-\frac{p^2}{2\sqrt{H}}} dt \frac{-\sqrt{H}}{p^2} \sqrt{\frac{p^2}{H}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
& + \frac{p^2}{2\sqrt{H}} \\
= \quad & \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{8\pi|p|} \int_{-\frac{p^2}{2\sqrt{H}}}^{+\frac{p^2}{2\sqrt{H}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
= \quad & \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{8\pi|p|} \arcsin t \Big|_{-\frac{p^2}{2\sqrt{H}}}^{+\frac{p^2}{2\sqrt{H}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
= \quad & \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{4\pi|p|} \arcsin \frac{p^2}{2\sqrt{p^2 m_0^2 + \frac{p^4}{4}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
= \quad & \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{4\pi|p|} \arcsin \frac{\frac{|p|}{2m_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{|p|}{2m_0}\right)^2}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
= \quad & \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{4\pi|p|} \arctan \frac{|p|}{2m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right), \tag{4.21}
\end{aligned}$$

unter Ausnutzung der leicht zu verifizierenden Beziehung (siehe auch [14, Gl. 1.624 7])

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x. \tag{4.22}$$

Zusammenfassen der Gleichungen (4.17), (4.18), (4.19) und (4.21) ergibt schließlich für $\tilde{G}_{\text{PV}}(p)$ ($\tilde{G}(p)$ in Pauli–Villars–Regularisierung):

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{\text{PV}}(p) = & \frac{1}{p^2 + m_0^2} - \frac{g_0}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{\Lambda - m_0}{4\pi} + \frac{3 g_0}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{\Lambda - m_0}{4\pi} \\
& + \frac{3 g_0 m_0^2}{2 (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{4\pi|p|} \arctan \frac{|p|}{2m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^2) \\
= & \frac{1}{p^2 + m_0^2} + \frac{g_0}{(p^2 + m_0^2)^2} \frac{\Lambda - m_0}{4\pi} \\
& + \frac{3 g_0 m_0^2}{8\pi (p^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{|p|} \arctan \frac{|p|}{2m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^2). \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Hiermit können nun m_{R} und Z_{R} bestimmt werden.

4.4 Bestimmung von m_R und Z_R

Nach Gl.(4.5) ist $\tilde{G}_{PV}(p_0, \vec{0})$ zu untersuchen:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{PV}(p_0, \vec{0}) &= \frac{1}{p_0^2 + m_0^2} + \frac{g_0}{(p_0^2 + m_0^2)^2} \frac{\Lambda - m_0}{4\pi} \\ &+ \frac{3g_0 m_0^2}{8\pi (p_0^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{|p_0|} \arctan \frac{|p_0|}{2m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2).\end{aligned}$$

Zunächst sieht man mit Hilfe der Taylor-Entwicklung des Arcustangens:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|p_0|} \arctan \frac{|p_0|}{2m_0} &= \frac{1}{|p_0|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{|p_0|}{2m_0}\right)^{2n+1}, \quad \frac{|p_0|}{2m_0} \leq 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{p_0^{2n}}{(2m_0)^{2n+1}}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Dadurch gilt wegen Gl.(4.5)

$$\begin{aligned}\frac{m_R^2}{Z_R} &= \left[\tilde{G}_{PV}(0) \right]^{-1} \\ &= \left[\frac{1}{m_0^2} + \frac{g_0}{m_0^4} \frac{\Lambda - m_0}{4\pi} + \frac{3g_0}{8\pi m_0^2 (2m_0)} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2) \right]^{-1} \\ &= \frac{m_0^2}{1 + \frac{\Lambda - m_0}{m_0^2} \frac{g_0}{4\pi} + \frac{3g_0}{16\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2)} \\ &= m_0^2 \left(1 - \left(\frac{\Lambda - m_0}{m_0^2} + \frac{3}{4m_0} \right) \frac{g_0}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2) \right) \\ &= m_0^2 + \left(\frac{m_0}{4} - \Lambda \right) \frac{g_0}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2)\end{aligned}\tag{4.25}$$

und (vgl. Definition (4.3))

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_R} &= \frac{\partial}{\partial p_0^2} \left[\tilde{G}_{PV}(p_0, \vec{0}) \right]_{|p_0=0}^{-1} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_0^2} \left[\frac{p_0^2 + m_0^2}{1 + \frac{g_0}{p_0^2 + m_0^2} \frac{\Lambda - m_0}{4\pi} + \frac{3g_0 m_0^2}{8\pi (p_0^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{|p_0|} \arctan \frac{|p_0|}{2m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2)} \right]_{|p_0=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_0^2} \left[\left(p_0^2 + m_0^2 \right) \left(1 - \frac{g_0}{(p_0^2 + m_0^2)} \frac{\Lambda - m_0}{4\pi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3g_0 m_0^2}{8\pi (p_0^2 + m_0^2)^2} \frac{1}{|p_0|} \arctan \frac{|p_0|}{2m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2) \right) \right]_{|p_0=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial p_0^2} \left[p_0^2 + m_0^2 - (\Lambda - m_0) \frac{g_0}{4\pi} - \frac{3g_0 m_0^2}{8\pi} \frac{1}{|p_0|} \arctan \frac{|p_0|}{2m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2) \right]_{|p_0=0}.\end{aligned}$$

Mit der Entwicklung (4.24) gilt also:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z_R} &= 1 + \frac{3 g_0 m_0^2}{8\pi (2 m_0)^3 \cdot 3} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2) \\
&= 1 + \frac{g_0}{64\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2) \\
\implies Z_R &= 1 - \frac{g_0}{64\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2). \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Wegen Gl.(4.25) bekommt man daher für m_R^2 :

$$\begin{aligned}
m_R^2 &= \frac{m_R^2}{Z_R} Z_R \\
&= \left[m_0^2 + \left(\frac{m_0}{4} - \Lambda \right) \frac{g_0}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2) \right] \\
&\quad \times \left[1 - \frac{g_0}{64\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2) \right] \\
&= m_0^2 - \frac{g_0}{64\pi} m_0 + \left(\frac{m_0}{4} - \Lambda \right) \frac{g_0}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2) \\
&= m_0^2 + \left(\frac{3}{16} m_0 - \Lambda \right) \frac{g_0}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2). \tag{4.27}
\end{aligned}$$

4.5 Bestimmung von g_R

Nach Gl.(4.7) gilt

$$g_R = \frac{3 m_R^2}{v_R^2},$$

mit (vgl. Gln.(4.6), (4.10))

$$\begin{aligned}
v_R &= \frac{\langle \phi_0 \rangle}{Z_R^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{v_0 + \tilde{G}_{\varphi, \text{PV}}^{(1)}}{Z_R^{\frac{1}{2}}}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{3 m_0^2}{g_0}} \quad (\text{vgl. Kapitel 2, Gl.(2.9)}).
\end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (4.15) und (4.26) findet man zunächst für v_R

$$\begin{aligned}
v_R &= \frac{v_0 + \tilde{G}_{\varphi, \text{PV}}^{(1)}}{Z_R^{\frac{1}{2}}} \\
&= \left[\sqrt{\frac{3 m_0^2}{g_0}} - \frac{\sqrt{3 g_0}}{8\pi} \frac{\Lambda - m_0}{m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right) \right] \\
&\quad \times \left[\left(1 - \frac{g_0}{64\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_0^2) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \implies
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_R &= \left[\sqrt{\frac{3m_0^2}{g_0}} - \frac{\sqrt{3g_0}}{8\pi} \frac{\Lambda - m_0}{m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right) \right] \\
&\quad \times \left[1 + \frac{g_0}{128\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^2\right) \right] \\
&= \sqrt{\frac{3m_0^2}{g_0}} + \left(\frac{17}{16} - \frac{\Lambda}{m_0} \right) \frac{\sqrt{3g_0}}{8\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right), \tag{4.28}
\end{aligned}$$

und für g_R mit den Gleichungen (4.27) und (4.28)

$$\begin{aligned}
g_R &= \frac{3m_R^2}{v_R^2} \\
&= 3 \left[m_0^2 + \left(\frac{3}{16} m_0 - \Lambda \right) \frac{g_0}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^2\right) \right] \\
&\quad \times \left[\sqrt{\frac{3m_0^2}{g_0}} + \left(\frac{17}{16} - \frac{\Lambda}{m_0} \right) \frac{\sqrt{3g_0}}{8\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^{\frac{3}{2}}\right) \right]^{-2} \\
&= 3 \left[m_0^2 + \left(\frac{3}{16} m_0 - \Lambda \right) \frac{g_0}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^2\right) \right] \\
&\quad \times \frac{g_0}{3m_0^2} \left[1 + \left(\frac{17}{16} - \frac{\Lambda}{m_0} \right) \frac{g_0}{8\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^2\right) \right]^{-2} \\
&= \frac{g_0}{m_0^2} \left[m_0^2 + \left(\frac{3}{16} m_0 - \Lambda \right) \frac{g_0}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^2\right) \right] \\
&\quad \times \left[1 - \left(\frac{17}{16} - \frac{\Lambda}{m_0} \right) \frac{g_0}{4\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^2\right) \right] \\
&= \frac{g_0}{m_0^2} \left[m_0^2 + \left(\frac{3}{16} m_0 - \Lambda \right) \frac{g_0}{4\pi} - \left(\frac{17}{16} m_0 - \Lambda \right) \frac{g_0}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^2\right) \right] \\
&= g_0 - \frac{7}{8} \frac{g_0^2}{4\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^3\right). \tag{4.29}
\end{aligned}$$

4.6 Umkehrung der Renormierungsbeziehungen

Bis hierher sind folgende Ergebnisse festzuhalten (Gln.(4.27), (4.29)):

$$\begin{aligned}
m_R^2 &= m_0^2 + \left(\frac{3}{16} m_0 - \Lambda \right) \frac{g_0}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^2\right), \\
g_R &= g_0 - \frac{7}{8} \frac{g_0^2}{4\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_0^3\right).
\end{aligned}$$

Drückt man nun umgekehrt die ursprünglichen Größen m_0 , g_0 durch die renormierten Größen m_R und g_R aus, ergibt sich

$$g_0 = g_R + \frac{7}{8} \frac{g_R^2}{4\pi m_R} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_R^3\right), \tag{4.30}$$

$$m_0^2 = m_R^2 - \left(\frac{3}{16} m_R - \Lambda \right) \frac{g_R}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_R^2\right), \tag{4.31}$$

sowie

$$\begin{aligned}
m_0 &= \left[m_R^2 \left(1 - \left(\frac{3}{16} m_R - \Lambda \right) \frac{g_R}{4\pi m_R^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_R^2) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= m_R \left(1 - \left(\frac{3}{16} m_R - \Lambda \right) \frac{g_R}{8\pi m_R^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_R^2) \right) \\
&= m_R - \left(\frac{3}{16} m_R - \Lambda \right) \frac{g_R}{8\pi m_R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_R^2).
\end{aligned} \tag{4.32}$$

4.7 Berechnung von $g^{(4)}$

Nach Definition (4.8) ist $g^{(4)}$ folgendermaßen erklärt:

$$g^{(4)} = -Z_R^2 \tilde{\Gamma}^{(4)}(0, 0, 0, 0).$$

Daher ist zunächst die 4-Punkt-Vertexfunktion $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ bis zur 1-Loop-Ordnung auszurechnen. Es tragen folgende Feynman-Graphen bei:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \text{Diagramm 1} + \frac{1}{2} \text{Diagramm 2} + \frac{1}{2} \text{Diagramm 3} \\
&+ \frac{1}{2} \text{Diagramm 4} + \text{Diagramm 5} + \text{Diagramm 6} \\
&+ \text{Diagramm 7} + \text{Diagramm 8} + \text{Diagramm 9} \\
&+ \text{Diagramm 10} + \text{Diagramm 11} + \text{Diagramm 12} \\
&+ \text{Diagramm 13} + \text{Diagramm 14} + \text{Diagramm 15} \\
&+ \text{Diagramm 16} + \text{Diagramm 17} + \text{Diagramm 18} \\
&+ \text{Diagramm 19} + \text{Diagramm 20} + \mathcal{O}(g_0^3).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Im einzelnen berechnet man:

$$\text{Diagramm 1} = -g_0. \tag{4.34}$$

Für die weiteren Graphen gilt mit Pauli–Villars–Regularisierung:

$$\frac{1}{2} \quad \text{Diagramm mit einem geschlossenen Kreislauf} = \frac{g_0^2}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 + p_2 - q)^2 + m_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right), \quad (4.35)$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{Diagramm mit einem geschlossenen Kreislauf} = \frac{g_0^2}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 + p_3 - q)^2 + m_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right), \quad (4.36)$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{Diagramm mit einem geschlossenen Kreislauf} = \frac{g_0^2}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 + p_4 - q)^2 + m_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \quad (4.37)$$

Die Terme $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$ röhren daher, daß alle auftretenden Integrale bereits ohne Regularisierung konvergieren, und durch die Regularisierung nur Terme hinzukommen, die für $\Lambda \rightarrow \infty$ mindestens wie $\frac{1}{\Lambda}$ verschwinden (vgl. die analoge Überlegung in Abschnitt 4.3, Seite 18); entsprechend gilt dies auch für alle folgenden Integrale dieses Abschnitts.

Zur Berechnung von $g^{(4)}$ wird nur $\tilde{\Gamma}^{(4)}(0, 0, 0, 0)$ benötigt; für $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$ liefern aber alle drei Graphen denselben Beitrag. Außerdem erkennt man, daß obige Schleifenintegrale genau mit dem für \tilde{G} berechneten übereinstimmen ($\text{---} \bigcirc \text{---}$), wenn man statt p jeweils $p_1 + p_2$, $p_1 + p_3$ oder $p_1 + p_4$ einsetzt; z.B. gilt mit Gl.(4.21):

$$\frac{1}{2} \quad \text{Diagramm mit einem geschlossenen Kreislauf} = \frac{g_0^2}{8\pi|p_1 + p_2|} \arctan \frac{|p_1 + p_2|}{2m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \quad (4.38)$$

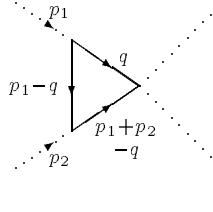
Für $p_1 = p_2 = 0$ ergibt sich mit Hilfe von Gl.(4.24):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \quad \text{Diagramm mit einem geschlossenen Kreislauf} &= \frac{g_0^2}{8\pi} \frac{1}{2m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\ &= \frac{g_0^2}{16\pi m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

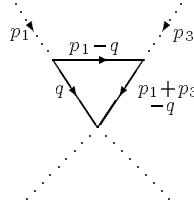
Die drei Graphen zusammengefaßt liefern also folgenden Beitrag zu $\tilde{\Gamma}^{(4)}(0, 0, 0, 0)$:

$$\frac{3g_0^2}{16\pi m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \quad (4.40)$$

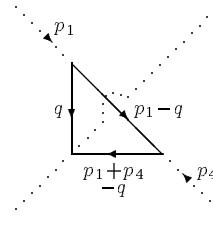
Weiter rechnet man:



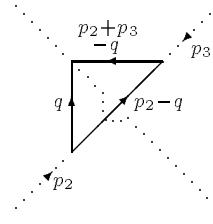
$$= -3 g_0^2 m_0^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 - q)^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 + p_2 - q)^2 + m_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right), \quad (4.41)$$



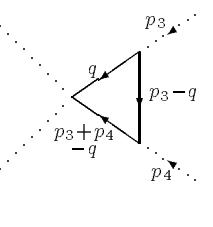
$$= -3 g_0^2 m_0^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 - q)^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 + p_3 - q)^2 + m_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right), \quad (4.42)$$



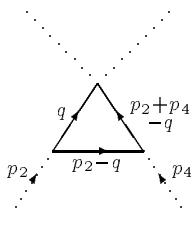
$$= -3 g_0^2 m_0^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 - q)^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 + p_4 - q)^2 + m_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right), \quad (4.43)$$



$$= -3 g_0^2 m_0^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_2 - q)^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_2 + p_3 - q)^2 + m_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right), \quad (4.44)$$

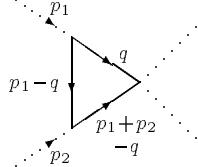


$$= -3 g_0^2 m_0^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_3 - q)^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_3 + p_4 - q)^2 + m_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right), \quad (4.45)$$



$$= -3 g_0^2 m_0^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_2 - q)^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_2 + p_4 - q)^2 + m_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right). \quad (4.46)$$

Die Terme $O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right)$ ergeben sich durch die Regularisierung entsprechend wie oben (analoge Überlegung wie auf Seite 18). Wieder erkennt man, daß für $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$ alle Graphen denselben Beitrag liefern; es genügt also, den ersten auszuwerten:

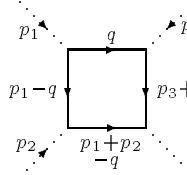


$$\begin{aligned}
&= -3 g_0^2 m_0^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 + m_0^2)^3} + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\
&= -\frac{3 g_0^2 m_0^2}{8\pi^3} 4\pi \int_0^\infty dq \frac{q^2}{(q^2 + m_0^2)^3} + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\
&= -\frac{3 g_0^2 m_0^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \left[\frac{1}{(q^2 + m_0^2)^2} - \frac{m_0^2}{(q^2 + m_0^2)^3} \right] \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\
&= -\frac{3 g_0^2 m_0^2}{2\pi^2} \left[\frac{1}{2m_0^2} \int_0^\infty dq \frac{1}{q^2 + m_0^2} - \frac{3m_0^2}{4m_0^2} \int_0^\infty dq \frac{1}{(q^2 + m_0^2)^2} \right] \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\
&= -\frac{3 g_0^2 m_0^2}{2\pi^2} \left[\frac{1}{2m_0^3} \arctan \frac{q}{m_0} \Big|_0^\infty - \frac{3}{8m_0^3} \arctan \frac{q}{m_0} \Big|_0^\infty \right] \\
&\quad + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\
&= -\frac{3 g_0^2}{2\pi^2 m_0} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{16} \right] + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\
&= -\frac{3 g_0^2}{32\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right). \tag{4.47}
\end{aligned}$$

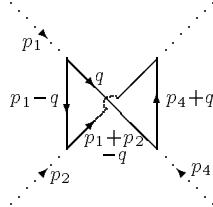
Die rationalen Integrale wurden dabei wie üblich gelöst [13, 3.1.7.5.]. Damit ist der Beitrag der sechs „Dreiecksgraphen“ zu $\tilde{\Gamma}^{(4)}(0, 0, 0, 0)$:

$$-\frac{9 g_0^2}{16\pi m_0} + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right). \tag{4.48}$$

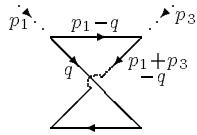
Schließlich erhält man:



$$\begin{aligned}
&= 9 g_0^2 m_0^4 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 - q)^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_3 + q)^2 + m_0^2} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{(p_1 + p_2 - q)^2 + m_0^2} \right] + O\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right), \tag{4.49}
\end{aligned}$$

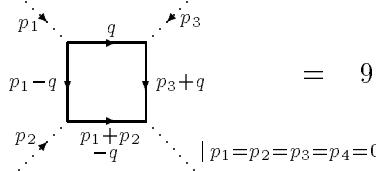


$$\begin{aligned}
&= 9 g_0^2 m_0^4 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 - q)^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_4 + q)^2 + m_0^2} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{1}{(p_1 + p_2 - q)^2 + m_0^2} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right), \quad (4.50)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 9 g_0^2 m_0^4 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{q^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_1 - q)^2 + m_0^2} \frac{1}{(p_4 + q)^2 + m_0^2} \right. \\
&\quad \times \left. \frac{1}{(p_1 + p_3 - q)^2 + m_0^2} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right). \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Erneut liefern alle drei Graphen für $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0$ denselben Beitrag, so daß nur der erste betrachtet wird (die Terme $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right)$ resultieren entsprechend wie oben):



$$\begin{aligned}
&= 9 g_0^2 m_0^4 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 + m_0^2)^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right) \\
&= \frac{9 g_0^2 m_0^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{q^2}{(q^2 + m_0^2)^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right) \\
&= \frac{9 g_0^2 m_0^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \left[\frac{1}{(q^2 + m_0^2)^3} - \frac{m_0^2}{(q^2 + m_0^2)^4} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right) \\
&= \frac{9 g_0^2 m_0^4}{2\pi^2} \left[\frac{3}{4 m_0^2} \int_0^\infty \frac{dq}{(q^2 + m_0^2)^2} - \frac{5}{6} \int_0^\infty \frac{dq}{(q^2 + m_0^2)^3} \right] \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right) \quad [13, 3.1.7.5.] \\
&= \frac{9 g_0^2 m_0^4}{2\pi^2} \left[\frac{3}{8 m_0^5} \arctan \frac{q}{m_0} \Big|_0^\infty - \frac{5}{16 m_0^5} \arctan \frac{q}{m_0} \Big|_0^\infty \right] \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right) \quad [13, 3.1.7.5.] \\
&= \frac{9 g_0^2}{2\pi^2 m_0} \left[\frac{3\pi}{16} - \frac{5\pi}{32} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right) \\
&= \frac{9 g_0^2}{64\pi m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right). \quad (4.52)
\end{aligned}$$

Daher findet man als Gesamtbeitrag der drei „Boxgraphen“:

$$\frac{27 g_0^2}{64\pi m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^5}\right). \quad (4.53)$$

Insgesamt hat man also für $\tilde{\Gamma}^{(4)}(0, 0, 0, 0)$ mit den Gleichungen (4.34), (4.40), (4.48) und (4.53):

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^{(4)}(0, 0, 0, 0) &= -g_0 + \frac{3}{16} \frac{g_0^2}{\pi m_0} - \frac{9}{16} \frac{g_0^2}{\pi m_0} + \frac{27}{64} \frac{g_0^2}{\pi m_0} \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^3) \\ &= -g_0 + \frac{3}{64} \frac{g_0^2}{\pi m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^3). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Damit und mit Gl.(4.26) für Z_R erhält man

$$\begin{aligned} g^{(4)} &= -Z_R^2 \tilde{\Gamma}^{(4)}(0, 0, 0, 0) \\ &= -\left(1 - \frac{g_0}{64\pi m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^2)\right)^2 \left(-g_0 + \frac{3}{64} \frac{g_0^2}{\pi m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^3)\right) \\ &= -\left(1 - \frac{g_0}{32\pi m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^2)\right) \left(-g_0 + \frac{3}{64} \frac{g_0^2}{\pi m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^3)\right) \\ &= g_0 - \frac{5}{64} \frac{g_0^2}{\pi m_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^3), \end{aligned} \quad (4.55)$$

oder mit Hilfe von Gl.(4.30) ausgedrückt durch g_R

$$\begin{aligned} g^{(4)} &= g_R + \frac{7}{32} \frac{g_R^2}{\pi m_R} - \frac{5}{64} \frac{g_R^2}{\pi m_R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_R^3) \\ &= g_R + \frac{9}{64} \frac{g_R^2}{\pi m_R} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_R^3). \end{aligned} \quad (4.56)$$

4.8 Berechnung der physikalischen Masse

Wie zu Beginn des Kapitels dargelegt, gilt für die physikalische Masse m_{ph} (vgl. Gl.(4.9)):

$$\begin{aligned} Z_R \left[\tilde{G}(i m_{ph}, \vec{0}) \right]^{-1} &= 0 \\ \iff \left[\tilde{G}(i m_{ph}, \vec{0}) \right]^{-1} &= 0. \end{aligned}$$

Nun hat man mit Gl.(4.23):

$$\begin{aligned} \left[\tilde{G}_{PV}(p) \right]^{-1} &= p^2 + m_0^2 - \frac{g_0}{4\pi} (\Lambda - m_0) - \frac{3 g_0 m_0^2}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{p^2}} \arctan \frac{\sqrt{p^2}}{2 m_0} \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^2). \end{aligned}$$

Daher muß gelten:

$$\begin{aligned}
0 &= -m_{\text{ph}}^2 + m_0^2 - \frac{g_0}{4\pi} (\Lambda - m_0) - \frac{3g_0 m_0^2}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-m_{\text{ph}}^2}} \arctan \frac{\sqrt{-m_{\text{ph}}^2}}{2m_0} \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^2).
\end{aligned}$$

Wegen Gl.(4.24) hat man

$$\frac{1}{\sqrt{p^2}} \arctan \frac{\sqrt{p^2}}{2m_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{(p^2)^n}{(2m_0)^{2n+1}}, \quad \frac{|p|}{2m_0} \leq 1,$$

und daher für $p = (i m_{\text{ph}}, 0, 0)$, da m_0 und m_{ph} bis auf Terme der Ordnung g_0 übereinstimmen,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-m_{\text{ph}}^2}} \arctan \frac{\sqrt{-m_{\text{ph}}^2}}{2m_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{(i m_{\text{ph}})^{2n}}{(2m_0)^{2n+1}} \\
&= \frac{1}{m_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{i^{2n}}{2^{2n+1}} + \mathcal{O}(g_0) \\
&= -\frac{i}{m_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{i}{2}\right)^{2n+1} + \mathcal{O}(g_0) \\
&= -\frac{i}{m_0} \arctan \frac{i}{2} + \mathcal{O}(g_0). \tag{4.57}
\end{aligned}$$

Mit der analytischen Fortsetzung des Arcustangens [15, Kapitel V §3], erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{-m_{\text{ph}}^2}} \arctan \frac{\sqrt{-m_{\text{ph}}^2}}{2m_0} &= -\frac{i}{m_0} \frac{1}{2i} \text{Log} \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} + \mathcal{O}(g_0) \\
&\quad (\text{Log: Hauptzweig des Logarithmus}) \\
&= -\frac{1}{2m_0} \ln \frac{1}{3} + \mathcal{O}(g_0) \\
&= \frac{1}{2m_0} \ln 3 + \mathcal{O}(g_0). \tag{4.58}
\end{aligned}$$

Damit bekommt man letztlich

$$\begin{aligned}
m_{\text{ph}}^2 &= m_0^2 - \frac{g_0}{4\pi} (\Lambda - m_0) - \frac{3g_0 m_0^2}{8\pi} \frac{1}{2m_0} \ln 3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^2) \\
&= m_0^2 - \frac{g_0}{4\pi} (\Lambda - m_0) - \frac{3}{16\pi} g_0 m_0 \ln 3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_0^2), \tag{4.59}
\end{aligned}$$

und indem man aufgrund der Beziehungen (4.30), (4.31) m_{R} und g_{R} einführt

$$\begin{aligned}
m_{\text{ph}}^2 &= m_{\text{R}}^2 - \left(\frac{3}{16} m_{\text{R}} - \Lambda \right) \frac{g_{\text{R}}}{4\pi} - (\Lambda - m_{\text{R}}) \frac{g_{\text{R}}}{4\pi} - \frac{3}{16\pi} g_{\text{R}} m_{\text{R}} \ln 3 \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_{\text{R}}^2) \\
&= m_{\text{R}}^2 + \left(\frac{13}{16} - \frac{3}{4} \ln 3 \right) \frac{g_{\text{R}} m_{\text{R}}}{4\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_{\text{R}}^2) \\
&= m_{\text{R}}^2 \left\{ 1 + \left(\frac{13}{16} - \frac{3}{4} \ln 3 \right) \frac{u_{\text{R}}}{4\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(u_{\text{R}}^2) \right\}, \quad (4.60)
\end{aligned}$$

mit Einführung der dimensionslosen Kopplungskonstante u_{R} gemäß

$$u_{\text{R}} := \frac{g_{\text{R}}}{m_{\text{R}}}. \quad (4.61)$$

Kapitel 5

Formel für die Energieaufspaltung

Wie in der Einleitung beschrieben zeigt die ϕ^4 -Theorie in der gebrochenen Phase im endlichen Volumen keine Entartung des Grundzustands. Vielmehr existieren ein (bzgl. der Transformation $\phi_0 \rightarrow -\phi_0$) symmetrischer Grundzustand $|0_s\rangle$ und ein antisymmetrischer Zustand $|0_a\rangle$, dessen Energie gerade um die Energie E_{0a} höher liegt. Für diese Energieaufspaltung E_{0a} soll nun eine Formel hergeleitet werden. Ich folge in diesem Kapitel im wesentlichen den Überlegungen wie sie im Rahmen einer analogen quantenmechanischen Rechnung in [16] gemacht werden.

Ausgangspunkt ist die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand $|0_-\rangle$ in den Zustand $|0_+\rangle$ („Tunnel-Amplitude“) in der euklidischen Formulierung (zur Definition von $|0_-\rangle$ und $|0_+\rangle$ vgl. Kapitel 1); mit der Einführung der Zustände $|0_s\rangle$ und $|0_a\rangle$, die normierte Energienzustände sind ($|0_s\rangle$ mit der Energie E_0 , $|0_a\rangle$ mit der Energie $E_0 + E_{0a}$), ergibt sich (vgl. Gln.(1.6), (1.7))

$$\begin{aligned} \langle 0_+ | e^{-\frac{HT}{\hbar}} | 0_- \rangle &= \frac{1}{2} \left(\langle 0_s | e^{-\frac{HT}{\hbar}} | 0_s \rangle - \langle 0_a | e^{-\frac{HT}{\hbar}} | 0_a \rangle - \langle 0_s | e^{-\frac{HT}{\hbar}} | 0_a \rangle + \langle 0_a | e^{-\frac{HT}{\hbar}} | 0_s \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{E_0 T}{\hbar}} - e^{-\frac{(E_0 + E_{0a}) T}{\hbar}} \right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{E_0 T}{\hbar}} \left(1 - e^{-\frac{E_{0a} T}{\hbar}} \right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

denn $|0_s\rangle$ und $|0_a\rangle$ sind als Energienzustände mit verschiedenen Energiewerten orthogonal zueinander.

E_{0a} kann daher bestimmt werden indem die Tunnel-Amplitude (linke Seite von Gl.(5.1)) berechnet wird. Dies geschieht in bekannter Weise mit Hilfe eines Pfadintegrals:

$$\langle 0_+ | e^{-\frac{HT}{\hbar}} | 0_- \rangle = \int \mathcal{D}\phi_0 \exp \left\{ -\frac{S[\phi_0]}{\hbar} \right\} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} S[\phi_0] &= \int d^3x \mathcal{L}_{\phi_0} \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 + V(\phi_0) \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$V(\phi_0) = \frac{g_0}{4!} \left(\phi_0^2 - v_0^2 \right)^2, \quad v_0 = \sqrt{\frac{3 m_0^2}{g_0}}, \quad (5.4)$$

wobei nur über solche Feldkonfigurationen zu integrieren ist, die zu Beginn dem Zustand $|0_-\rangle$ (konstante Feldkonfiguration $-v_0$) und nach der Zeit T dem Zustand $|0_+\rangle$ (kon-

Abbildung 5.1: Eine spezielle Kink–Lösung ($a = 0$)

stante Feldkonfiguration $+v_0$) entsprechen. Für sehr große T kann dies durch folgende Randbedingung für ϕ_0 genähert werden:

$$\phi_0(x) \rightarrow \begin{cases} v_0, & x^0 \rightarrow +\infty \\ -v_0, & x^0 \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.5)$$

x^0 bezeichnet die Zeitkoordinate, x^1 und x^2 sind die beiden Raumkoordinaten. Die weitere Näherung besteht nun darin, \hbar als klein anzunehmen (semiklassische Näherung), so daß zum Pfadintegral (5.2) nur solche Feldkonfigurationen $\phi_0(x)$ (die natürlich den Randbedingungen (5.5) genügen müssen) wesentlich beitragen, für die $S[\phi_0]$ ein Minimum besitzt. Solche Feldkonfigurationen müssen also die Bewegungsgleichung

$$\frac{\delta S}{\delta \phi_0(x)} = 0 \quad (5.6)$$

erfüllen; das ergibt:

$$\square_E \phi_0 - \frac{m_0^2}{2} \phi_0 + \frac{g_0}{3!} \phi_0^3 = 0, \quad \square_E := -(\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2). \quad (5.7)$$

Man rechnet leicht nach, daß diese Gleichung durch

$$\phi_c(x) = v_0 \tanh \left[\frac{1}{2} m_0 (x^0 - a) \right] \quad (5.8)$$

gelöst wird, wobei a ein Parameter ist, der die Position dieser sogenannten Kink–Lösung auf der Zeitachse bestimmt (vgl. auch Abbildung 5.1); überdies erfüllt ϕ_c offenbar die Randbedingungen (5.5). Ebenso rechnet man leicht die Wirkung S_c dieser Feldkonfiguration ϕ_c aus, man findet (vgl. Anhang A, $d = 3$ Dimensionen):

$$S_c = 2 \frac{m_0^3}{g_0} L^2. \quad (5.9)$$

Weiter bemerkt man, daß auch die konstanten Feldkonfigurationen $\phi_{\pm}(x) = \pm v_0$ die Feldgleichung (5.7) lösen; sie erfüllen zwar nicht die geforderten Randbedingungen, dennoch werden sie weiter unten eine Rolle spielen. Entwickelt man $S[\phi_0]$ um ϕ_c , bekommt man

$$\begin{aligned}
S[\phi_c + \eta] &= S_c + \frac{1}{2} \int d^3y \int d^3x \eta(y) \frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta \phi_c(y) \delta \phi_c(x)} \eta(x) + \mathcal{O}(\eta^3) \\
&= S_c + \frac{1}{2} \int d^3x \eta(x) \left(\square_E + m_0^2 - \frac{3}{2} m_0^2 \cosh^{-2} \left[\frac{1}{2} m_0 (x^0 - a) \right] \right) \eta(x) \\
&\quad + \mathcal{O}(\eta^3) \\
&= S_c + \frac{1}{2} \int d^3x \eta(x) M \eta(x) + \mathcal{O}(\eta^3), \tag{5.10}
\end{aligned}$$

mit

$$M = \square_E + m_0^2 - \frac{3}{2} m_0^2 \cosh^{-2} \left[\frac{1}{2} m_0 (x^0 - a) \right]. \tag{5.11}$$

Indem man also $\eta(x)$ nach orthonormierten Eigenfunktionen von M entwickelt und über die Entwicklungskoeffizienten integriert erhält man den Beitrag F_1 der Kink–Lösung zum Pfadintegral (5.2):

$$F_1 = N \int \prod_n \frac{dc_n}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{S_c}{\hbar}} e^{-\frac{1}{2\hbar} \lambda_n c_n^2} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \tag{5.12}$$

Dabei sind c_n die Entwicklungskoeffizienten, λ_n die zugehörigen Eigenwerte von M und N eine Normierungskonstante, die die genaue Form des Maßes $\mathcal{D}\phi_0$ bestimmt (streng genommen ist das Pfadintegral hier gerade durch (5.12) (Integration über die Entwicklungskoeffizienten von $\eta(x)$ bezüglich einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von M) definiert); $\mathcal{O}(\hbar)$ drückt die semiklassische Näherung aus. Die Auswertung der Gauß–Integrale ergibt:

$$\begin{aligned}
F_1 &= N \prod_n \left(\frac{2\pi\hbar}{2\pi\hbar \lambda_n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{S_c}{\hbar}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \\
&= N (\det M)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{S_c}{\hbar}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Dabei ist allerdings angenommen, daß alle Eigenwerte von M positiv sind; das trifft nicht ganz zu. Wie später in diesem Kapitel gezeigt (vgl. Gl.(5.24)) hat M neben positiven Eigenwerten auch den Eigenwert 0. Dieser muß gesondert behandelt werden. Bis dies im einzelnen geschieht sei in Gl.(5.13) statt $\det M$ nur die Determinante unter Auslassung des Eigenwertes 0 ($\det' M$) geschrieben, und diese Nullmode durch einen noch zu bestimmenden Faktor P berücksichtigt:

$$F_1 = N P e^{-\frac{S_c}{\hbar}} (\det' M)^{-\frac{1}{2}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \tag{5.14}$$

Nun trägt zum Pfadintegral (5.2) nicht nur die 1–Kink–Lösung ϕ_c bei, sondern es sind auch Multikink–Konfigurationen näherungsweise Lösungen von Gl.(5.7), die dadurch entstehen, daß auf einen Kink ϕ_c ein Antikink $-\phi_c$ folgt und umgekehrt (vgl. Abbildung 5.2). Der Anstieg bzw. Abfall eines Kinks bzw. Antikinks ist in der Abbildung so steil gezeichnet, da das Zeitintervall, in dem dieser Anstieg erfolgt im Verhältnis zum (sehr

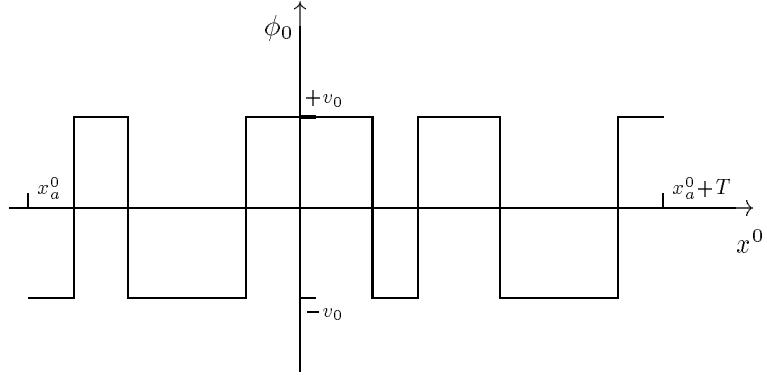


Abbildung 5.2: Beispiel eines Multi–Kinks (x_a^0 : (beliebige) Anfangszeit)

großen) T sehr klein ist; weiter ist vorausgesetzt, daß die Kinks und Antikinks zeitlich nicht zu dicht aufeinander folgen (dilute gas approximation), nur dann ist eine Folge von Kinks und Antikinks näherungsweise eine Lösung von Gl.(5.7).

Was ist nun der Beitrag einer solchen n –Kink–Konfiguration (n = Zahl der Kinks + Zahl der Antikinks) zum Pfadintegral? Die Wirkung $S_{c,n}$ einer solchen n –Kink–Konfiguration ist $n S_c$, denn auch die Wirkung einer Antikink–Lösung $-\phi_c$ ist wegen der Symmetrie der Lagrange–Dichte unter der Transformation $\phi_0 \rightarrow -\phi_0$ gerade S_c , und falls Kinks und Antikinks weit genug auseinander liegen, kann der gegenseitige Überlapp vernachlässigt werden. Der Beitrag zur Wirkung für die Zeitabschnitte, in denen $\phi_0 \approx v_0$ oder $\phi_0 \approx -v_0$ gilt, ist wegen $V(\pm v_0) = 0$ und $\partial_0 v_0 = 0$ zu vernachlässigen; damit ist die Wirkung $S_{c,n}$ im wesentlichen durch die Anstiege und Abfälle der Kinks und Antikinks gegeben, genau wie im Fall der 1–Kink–Lösung, so daß in dieser Näherung in der Tat $S_{c,n} = n S_c$ folgt. Die Energiedichte $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 + V(\phi_0)$ ist also im wesentlichen im Anstieg des Kinks bzw. Abfall des Antikinks konzentriert; man spricht beim Kink und Antikink deshalb auch von Pseudopartikeln oder Instantonen.

Um den Beitrag des Multikinks zur Determinante zu erhalten, bemerkt man, daß bis auf die kurzen Anstiege bzw. Abfälle das Feld im Multikink den Wert $+v_0$ oder $-v_0$ besitzt. Die Entwicklung der Wirkung $S[\phi_0]$ um $\phi_\pm = \pm v_0$ ergibt (wie oben erwähnt sind auch ϕ_\pm Lösungen der Feldgleichung (5.7))

$$\begin{aligned} S[\phi_\pm + \eta] &= S[\phi_\pm] + \frac{1}{2} \int d^3y \int d^3x \eta(y) \frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta \phi_{\pm/-}(y) \delta \phi_{\pm/-}(x)} \eta(x) + \mathcal{O}(\eta^3) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \eta(x) M_0 \eta(x) + \mathcal{O}(\eta^3), \end{aligned} \quad (5.15)$$

da offenbar $S[\phi_\pm] = 0$ gilt, mit

$$M_0 = \square_E + m_0^2. \quad (5.16)$$

Damit ergäbe sich folgender Pfadintegralbeitrag F_{const} der Feldkonfiguration ϕ_+ (oder auch ϕ_-):

$$\begin{aligned}
F_{\text{const}} &= \int \mathcal{D}\eta \, e^{-\frac{S[\phi_{+/-}]}{\hbar}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^3y \int d^3x \, \eta(y) \frac{\delta^2 S[\phi_0]}{\delta \phi_{+/-}(y) \delta \phi_{+/-}(x)} \eta(x) + \mathcal{O}(\eta^3) \right\} \\
&= \int \mathcal{D}\eta \, \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^3x \, \eta(x) M_0 \eta(x) + \mathcal{O}(\eta^3) \right\}. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Die Auswertung des η –Pfadintegrals liefert entsprechend wie oben bei der Herleitung von Gl.(5.13):

$$F_{\text{const}} = N (\det M_0)^{-\frac{1}{2}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \tag{5.18}$$

Das Spektrum von M_0 ist im übrigen (offensichtlich) rein positiv, so daß hier kein Korrekturfaktor nötig ist. Die Feldkonfigurationen ϕ_+ und ϕ_- erfüllen die Randbedingungen (5.5) nicht, darum ist F_{const} noch kein Beitrag zum Pfadintegral (5.2). Dieser Beitrag der Multikink–Konfiguration wird vielmehr erhalten, indem die Anstiege und Abfälle in der Multikink–Konfiguration jeweils durch einen Faktor K berücksichtigt werden, der später bestimmt wird; dies ist gerechtfertigt solange, wie bereits oben vorausgesetzt, die Kinks und Antikinks im Multikink weit auseinander liegen, d.h. zeitlich nicht zu dicht aufeinander folgen (eine genauere Begründung des Faktors K findet sich in [16]). Eine n –Kink–Konfiguration trägt daher den Wert F_n zum Pfadintegral (5.2) bei, mit

$$F_n = N e^{-\frac{n S_c}{\hbar}} K^n (\det M_0)^{-\frac{1}{2}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \tag{5.19}$$

Um den endgültigen Wert der Tunnel–Amplitude (in dieser semiklassischen Näherung) zu erhalten, ist über alle möglichen Multikink–Konfigurationen, die die Randbedingungen (5.5) erfüllen, zu summieren.

Zunächst können bei gegebener Zahl n der Kinks und Antikinks deren Positionen variiert werden. Als Zahl der möglichen Anordnungen von n Kinks und Antikinks im Intervall T , wobei jeweils Kink auf Antikink folgen muß und umgekehrt, ergibt sich:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\frac{T}{2}}^{t_{n-1}} dt_n = \frac{T^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N} \neq 0. \tag{5.20}$$

Ein Beweis hierfür findet sich im Anhang B. Um schließlich den Randbedingungen (5.5) zu genügen, ist nur eine ungerade Anzahl von Kinks und Antikinks erlaubt. Insgesamt findet man daher für die Tunnel–Amplitude:

$$\begin{aligned}
\langle 0_+ | e^{-\frac{H_T}{\hbar}} | 0_- \rangle &= N (\det M_0)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{\left(T e^{-\frac{S_c}{\hbar}} K \right)^n}{n!} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \\
&= N (\det M_0)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left[\exp\left(K e^{-\frac{S_c}{\hbar}} T\right) - \exp\left(-K e^{-\frac{S_c}{\hbar}} T\right) \right] \\
&\quad \times [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Vergleicht man das mit der ursprünglichen Form der Tunnel–Amplitude (5.1), so erhält man wegen der jeweiligen exponentiellen T –Abhängigkeit für die Energieaufspaltung:

$$E_{0a} = 2 \hbar K e^{-\frac{S_c}{\hbar}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]. \tag{5.23}$$

Die Vorfaktoren wie N etc. finden hierbei keine Berücksichtigung, da lediglich die Energieaufspaltung berechnet werden soll und keine Aussage über Amplituden wie $|\langle 0_+ | 0_- \rangle|^2$ getroffen wird.

Insgesamt verbleibt noch K zu berechnen; dies geschieht nun so, daß sich für einen Kink ($n = 1$) der richtige Beitrag in Gl.(5.21) ergibt, denn der 1–Kink–Beitrag war bereits in Gl.(5.14) berechnet worden. Dazu ist zunächst P zu bestimmen. Wie erwähnt, berücksichtigt P die Nullmode von M . Nun gilt

$$M [\partial_0 \phi_c(x)] = 0 \quad (5.24)$$

und

$$\int d^3x (\partial_0 \phi_c(x))^2 = S_c, \quad (5.25)$$

wie man einfach nachrechnet. Daher ist

$$S_c^{-\frac{1}{2}} \partial_0 \phi_c(x) \quad (5.26)$$

normierte Eigenfunktion zum Eigenwert 0 von M . Daß dies die einzige Nullmode von M ist, die für $x^0 \rightarrow \pm \infty$ verschwindet, folgt aus einer allgemeinen Untersuchung des Spektrums von M [17, Abschnitt 12.3], denn die Gleichung

$$M \phi_0 = \left\{ \square_E + m_0^2 - \frac{3}{2} m_0^2 \cosh^{-2} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] \right\} \phi_0 = 0$$

entspricht einer zeitunabhängigen Schrödinger–Gleichung mit Potential

$$V \sim -\cosh^{-2} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right]$$

in einem gebundenen Zustand; ein solches Problem ist in [17, S. 1651 ff.] untersucht. Würde man diese Nullmode bei der Berechnung von $\int \mathcal{D}\phi_0 e^{-\frac{S[\phi_0]}{\hbar}}$ berücksichtigen, indem man über einen entsprechenden Entwicklungskoeffizienten c_1 integriert, ergäbe sich eine Divergenz. Es bedeutet nun aber

$$\phi_c + c_1 S_c^{-\frac{1}{2}} \partial_0 \phi_c(x)$$

lediglich eine Verschiebung von ϕ_c längs der x^0 –Achse. Eine Änderung dc_1 bewirkt eine Änderung

$$d\phi_0 = S_c^{-\frac{1}{2}} \partial_0 \phi_c dc_1. \quad (5.27)$$

Andererseits gilt bei einer Verschiebung des Kinks ϕ_c längs der x^0 –Achse um dt_1 :

$$d\phi_0 = \partial_0 \phi_c dt_1. \quad (5.28)$$

Daher erhält man, daß Änderungen dc_1 und dt_1 dieselbe Änderung $d\phi_0$ bewirken, falls gilt:

$$(2\pi \hbar)^{-\frac{1}{2}} dc_1 = \left(\frac{S_c}{2\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} dt_1. \quad (5.29)$$

Da somit Integration über den Entwicklungskoeffizienten c_1 zum Eigenwert 0 von M eine Verschiebung des Kinks längs der x^0 –Achse auf alle möglichen Positionen bedeutet, dies aber in Gl.(5.21) bereits durch Gl.(5.20) Berücksichtigung fand, ist statt einer Integration

über c_1 nur noch ein Faktor $\left(\frac{S_c}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$ zur Einbeziehung der Nullmode nötig. Für den Faktor P aus Gl.(5.14) bedeutet dies (P berücksichtigt insgesamt die Nullmode, steht also quasi für $\int (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} dc_1$, darum tritt noch der Faktor T auf):

$$P = \left(\frac{S_c}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} T. \quad (5.30)$$

Dadurch erhält man schließlich für den 1-Kink-Beitrag F_1 wegen Gl.(5.14):

$$\begin{aligned} F_1 &= N P e^{-\frac{S_c}{\hbar}} (\det' M)^{-\frac{1}{2}} [1 + O(\hbar)] \\ &= N T \left(\frac{S_c}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{S_c}{\hbar}} (\det' M)^{-\frac{1}{2}} [1 + O(\hbar)]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Durch Vergleich mit dem 1-Kink-Beitrag aus Gl.(5.21) ergibt sich letztlich K :

$$\begin{aligned} N T \left(\frac{S_c}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{S_c}{\hbar}} (\det' M)^{-\frac{1}{2}} [1 + O(\hbar)] &= N (\det M_0)^{-\frac{1}{2}} T e^{-\frac{S_c}{\hbar}} K [1 + O(\hbar)] \\ \Rightarrow K &= \left(\frac{S_c}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\det' M}{\det M_0}\right)^{-\frac{1}{2}} [1 + O(\hbar)]. \end{aligned}$$

Als Ergebnis für E_{0a} findet man wegen Gl.(5.23) endlich:

$$E_{0a} = 2\hbar \left(\frac{S_c}{2\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{S_c}{\hbar}} \left(\frac{\det' M}{\det M_0}\right)^{-\frac{1}{2}} [1 + O(\hbar)]. \quad (5.32)$$

Da die Eigenwerte von M_0 und M (unter Vernachlässigung der Nullmode) stets positiv sind, schreibt man auch

$$\left| \frac{\det' M}{\det M_0} \right| \quad \text{statt} \quad \left(\frac{\det' M}{\det M_0} \right). \quad (5.33)$$

Indem im folgenden die Terme $O(\hbar)$ unterdrückt werden, sowie wie üblich ab jetzt $\hbar = 1$ gesetzt wird, erhält man:

$$E_{0a} = 2 e^{-S_c} \left(\frac{S_c}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\det' M}{\det M_0} \right|^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.34)$$

Die Hauptaufgabe wird also im weiteren sein, den Ausdruck

$$\left| \frac{\det' M}{\det M_0} \right|,$$

gegebenenfalls mit geeigneter Regularisierung, auszuwerten.

Vorher sei noch angemerkt, daß die Behandlung von Multikink-Konfigurationen unter der Annahme weit auseinanderliegender Kinks und Antikinks im Multikink erfolgte, in Gl.(5.20) aber alle möglichen Positionen von Kinks und Antikinks berücksichtigt wurden.

Damit das Verfahren konsistent ist, sollten die Konfigurationen mit niedriger Dichte $\rho_{k,a k}$ der Kinks und Antikinks den Hauptbeitrag zum Pfadintegral liefern, wobei:

$$\rho_{k,a k} := \frac{(\text{Zahl der Kinks}) + (\text{Zahl der Antikinks})}{T}. \quad (5.35)$$

Das ist in der Tat so, denn in der Reihe $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ nehmen die Summanden mit n solange zu bis n die Größenordnung von x erreicht hat ($n \approx x$), danach nimmt die Größe der Summanden rasch ab. Diese Beobachtung, angewandt auf die Reihe in Gl.(5.21), ergibt, daß der Hauptbeitrag zur Tunnel-Amplitude von n –Kink–Konfigurationen mit

$$n \lesssim T e^{-\frac{S_c}{\hbar}} K$$

geleistet wird. Das heißt

$$\rho_{k,a k} = \frac{n}{T} \lesssim e^{-\frac{S_c}{\hbar}} K,$$

und da die rechte Seite dieser Ungleichung in der semiklassischen Näherung (\hbar klein gegen S_c) exponentiell klein wird, tragen nur solche Multikink–Konfigurationen zum Pfadintegral wesentlich bei, deren Dichte $\rho_{k,a k}$ sehr klein ist. Die Behandlung des Problems ist also konsistent.

Kapitel 6

Bestimmung der Determinanten

6.1 Zurückführung der Determinanten auf ein Integral

In Kapitel 5 war die Formel für die Energieaufspaltung E_{0a} abgeleitet worden (Gl.(5.34)):

$$E_{0a} = 2e^{-S_c} \left(\frac{S_c}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\det' M}{\det M_0} \right|^{-\frac{1}{2}}.$$

Die hier auftretenden Determinanten gilt es nun zu berechnen. Hierzu mögen folgende Definitionen gelten:

$$M = -\partial^2 + Q, \quad M_0 = -\partial^2 + Q_0, \quad (6.1)$$

mit

$$\partial^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad (6.2)$$

$$Q = -\partial_0^2 + m_0^2 - \frac{3}{2}m_0^2 \cosh^{-2} \left[\frac{1}{2}m_0(x^0 - a) \right], \quad (6.3)$$

$$Q_0 = -\partial_0^2 + m_0^2. \quad (6.4)$$

Um die Determinanten zu berechnen wird die sogenannte Methode der Wärmeleitungskerne verwendet. Dazu wird für einen Operator A definiert:

$$K_t(A) := \text{Tr } e^{-tA}. \quad (6.5)$$

Je nachdem wie das Spektrum von A beschaffen ist, gilt obige Definition nur für geeignete $t \in \mathbb{R}$, damit die Spur auf der rechten Seite der Definitionsgleichung wohldefiniert ist.

Zunächst gilt, falls A ein rein diskretes Spektrum mit nur endlich vielen Eigenwerten λ_n , $n = 1 \dots N$, der Vielfachheit entsprechend oft gezählt, besitzt:

$$\begin{aligned} \ln \det A &= \ln \prod_{n=1}^N \lambda_n \\ &= \sum_{n=1}^N \ln \lambda_n \\ &= \text{Tr } \ln A. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Hierbei wird, wie im folgenden auch, angenommen, daß gilt:

$$\lambda_n > 0 \quad n = 1 \dots N.$$

Dies kann, falls A nach unten beschränkt ist, stets durch eine Verschiebung des Spektrums erreicht werden:

$$A \rightarrow A + \mu^2, \quad \mu^2 \text{ hinreichend groß.}$$

Offensichtlich gilt auch

$$\sum_{n=1}^N \ln \lambda_n = - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-s}. \quad (6.7)$$

Indem man die Gammafunktion einführt,

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty d\tau e^{-\tau} \tau^{s-1}, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

ergibt sich mit der Substitution $\tau = t\lambda_n$, $n \in \{1 \dots N\}$:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \lambda_n^s \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t\lambda_n} \\ \implies \lambda_n^{-s} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-t\lambda_n} \\ \implies \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-s} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} \sum_{n=1}^N e^{-t\lambda_n} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} K_t(A), \quad \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Falls nun $\int_0^\infty dt t^{s-1} K_t(A)$ in einer Umgebung von $s = 0$ existiert und als Funktion von s holomorph ist, gilt mit analytischer Fortsetzung

$$\sum_{n=1}^N \lambda_n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} K_t(A)$$

auch noch in einer Umgebung von $s = 0$. Daher folgt mit den Gleichungen (6.6), (6.7) und (6.8) ($\frac{1}{\Gamma(s)}|_{s=0} = 0$, $\frac{d}{ds}|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} = 1$, vgl. auch Anhang C):

$$\begin{aligned} \ln \det A &= \operatorname{Tr} \ln A \\ &= \sum_{n=1}^N \ln \lambda_n \\ &= - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \sum_{n=1}^N \lambda_n^{-s} \\ &= - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} K_t(A) \right\} \\ &= - \int_0^\infty \frac{dt}{t} K_t(A). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ist das Spektrum von A nicht rein diskret und/oder nicht endlich, so wird Gl.(6.9) entsprechend verallgemeinert, wobei zur Spurbildung über alle Eigenwerte summiert wird (bzw., falls λ_n im Spektrum von A liegt, zur Bildung von $\text{Tr} \ln A$ natürlich über alle Werte $\ln \lambda_n$, wobei nach wie vor für das Spektrum von A vorausgesetzt ist: λ_n im Spektrum von $A \Rightarrow \lambda_n > 0$) und für den kontinuierlichen Teil des Spektrums die Spektraldichte von A zu berücksichtigen ist. Damit ist die Berechnung von $\det A$ im wesentlichen auf die Berechnung von $\int_0^\infty \frac{dt}{t} K_t(A)$ zurückgeführt, falls dieses Integral überhaupt existiert.

Im vorliegenden Fall sind die zu berechnenden Determinanten:

$$\begin{aligned} \det' M & \quad (\text{Determinante ohne Nullmode}), \\ \det M_0. \end{aligned}$$

Daher sind zunächst die Operatoren M und M_0 zu untersuchen:

- Zu $M = -\partial^2 + Q$:

Um die Nullmode von M (vgl. Kapitel 5) zu beseitigen, wird zunächst $M + \mu^2$ betrachtet:

$$\begin{aligned} K_t(M + \mu^2) &= \text{Tr} e^{-t(-\partial^2 + Q + \mu^2)} \\ &= e^{-t\mu^2} \text{Tr} e^{-t(-\partial^2 + Q)} \\ &= e^{-t\mu^2} K_t^{L^2}(-\partial^2) K_t^T(Q), \end{aligned}$$

denn $-\partial^2$ wirkt nur auf die Raumkoordinaten, Q nur auf die Zeitkoordinate. Hierbei bedeutet $K_t^{L^2}$, daß zur Spurbildung nur der Raum der nur raumabhängigen Funktionen zu nehmen ist, K_t^T entsprechend, daß zur Spurbildung nur der Raum der nur zeitabhängigen Funktionen zu nehmen ist. Nun gilt

$$K_t^{L^2}(-\partial^2) = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[-\left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 t \right] \right)^2 \quad (6.10)$$

$$= \left(\frac{L}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp \left[-\frac{n^2 L^2}{4t} \right] \right)^2. \quad (6.11)$$

Der letzte Ausdruck röhrt von der Poissonschen Summenformel her [17, 18]. Das Spektrum von Q ist bekannt [17, 19], wobei die Zeitausdehnung T zunächst als endlich angenommen wird:

$$\text{diskr. Spektrum} : \varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = \frac{3}{4} m_0^2 \quad (6.12)$$

$$\text{kontin. Spektrum} : \varepsilon_p = p^2 + m_0^2, \quad p \in \mathbb{R} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Spektraldichte} : g_0(p) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ T - 3m_0 \frac{p^2 + \frac{1}{2}m_0^2}{(p^2 + \frac{1}{4}m_0^2)(p^2 + m_0^2)} \right\} \\ &+ O(T^{-1}). \end{aligned} \quad (6.14)$$

- Zu $M_0 = -\partial^2 + Q_0$:

Auch hier wird zunächst $M_0 + \mu^2$ betrachtet, obwohl M_0 keine Nullmode besitzt:

$$\begin{aligned} K_t(M_0 + \mu^2) &= \text{Tr } e^{-t(-\partial^2 + Q_0 + \mu^2)} \\ &= e^{-t\mu^2} K_t^{L^2}(-\partial^2) K_t^T(Q_0), \end{aligned}$$

ganz entsprechend wie oben.

Für das Spektrum von Q_0 , ebenfalls bei endlicher Zeitausdehnung T , erhält man offenbar:

$$\text{diskr. Spektrum : } \varepsilon_p = p^2 + m_0^2, \quad p = \frac{2\pi}{T} n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.15)$$

was bei hinreichend großem T in ein quasikontinuierliches Spektrum übergeht mit:

$$\text{quasikontin. Spektrum : } \varepsilon_p = p^2 + m_0^2, \quad p \in \mathbb{R} \quad (6.16)$$

$$\text{Spektraldichte : } \tilde{g}_0(p) = \frac{T}{2\pi}. \quad (6.17)$$

Die Spektren von $M + \mu^2$ und $M_0 + \mu^2$ sind damit stets positiv, so daß mit Gl.(6.9) gilt (wobei immer noch eine endliche Zeitausdehnung T angenommen ist):

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \left(\frac{M + \mu^2}{M_0 + \mu^2} \right) &= \text{Tr} \ln(M + \mu^2) - \text{Tr} \ln(M_0 + \mu^2) \\ &= - \int_0^\infty \frac{dt}{t} K_t(M + \mu^2) + \int_0^\infty \frac{dt}{t} K_t(M_0 + \mu^2) \\ &= - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \tilde{K}_t(M + \mu^2), \end{aligned} \quad (6.18)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t(M + \mu^2) &= K_t(M + \mu^2) - K_t(M_0 + \mu^2) \\ &= e^{-t\mu^2} K_t^{L^2}(-\partial^2) \tilde{K}_t^T(Q), \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\tilde{K}_t^T(Q) = K_t^T(Q) - K_t^T(Q_0). \quad (6.20)$$

Mit den Beziehungen (6.12)–(6.14), (6.16) und (6.17) findet man für $\tilde{K}_t^T(Q)$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t^T(Q) &= K_t^T(Q) - K_t^T(Q_0) \\ &= 1 + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} + \int_{-\infty}^{+\infty} dp g_0(p) e^{-t(p^2 + m_0^2)} - \int_{-\infty}^{+\infty} dp \tilde{g}_0(p) e^{-t(p^2 + m_0^2)} \\ &= 1 + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} - \frac{m_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(3 \frac{p^2 + \frac{1}{2}m_0^2}{(p^2 + \frac{1}{4}m_0^2)(p^2 + m_0^2)} + O(T^{-1}) \right) e^{-t(p^2 + m_0^2)}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

so daß nun der Grenzwert $T \rightarrow \infty$ ausgeführt werden kann.

Indem im folgenden wieder $K_t(Q)$ an Stelle von $K_t^T(Q)$ und $K_t(-\partial^2)$ statt $K_t^{L^2}(-\partial^2)$ geschrieben wird, ohne daß Mißverständnisse zu befürchten sind, ergibt sich schließlich ($T \rightarrow \infty$):

$$\text{Tr} \ln \left(\frac{M + \mu^2}{M_0 + \mu^2} \right) = - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \tilde{K}_t(M + \mu^2), \quad (6.22)$$

$$\tilde{K}_t(M + \mu^2) = e^{-t\mu^2} K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q), \quad (6.23)$$

$$\tilde{K}_t(Q) = 1 + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} + \int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) e^{-t(p^2 + m_0^2)} \quad (6.24)$$

$$= \Phi(m_0 \sqrt{t}) + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} \Phi\left(\frac{1}{2}m_0 \sqrt{t}\right), \quad (6.25)$$

mit

Φ : Fehlerintegral

$$g(p) = -\frac{m_0}{2\pi} \left(\frac{2}{p^2 + m_0^2} + \frac{1}{p^2 + \frac{m_0^2}{4}} \right). \quad (6.26)$$

Die Einführung des Fehlerintegrals ist im Anhang D genauer begründet.

Die Verschiebung des Spektrums von M bzw. M_0 mit μ^2 war durchgeführt worden, damit das Spektrum jeweils stets positiv ist. Um nun die gesuchte Determinante zu erhalten, ist wie folgt zu verfahren ($\det' M$: Determinante von M ohne Nullmode, vgl. Kapitel 5):

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det' M}{\det M_0} &= \text{Tr}' \ln \frac{M}{M_0} \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(\text{Tr} \ln \left(\frac{M + \mu^2}{M_0 + \mu^2} \right) - \ln \mu^2 \right), \end{aligned} \quad (6.27)$$

wobei Tr' Spurbildung unter Auslassung der Nullmode von M bedeutet. Als weiter auszuwertender Ausdruck ergibt sich hiermit unter Benutzung von Gl.(6.22)

$$\ln \frac{\det' M}{\det M_0} = \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(- \int_0^\infty \frac{dt}{t} \tilde{K}_t(M + \mu^2) - \ln \mu^2 \right). \quad (6.28)$$

Untersucht man nun den Ausdruck $\int_0^\infty \frac{dt}{t} \tilde{K}_t(M + \mu^2)$ genauer, so erkennt man, daß dieses Integral an der unteren Integrationsgrenze divergiert (konstante Faktoren werden in den folgenden asymptotischen Betrachtungen unterdrückt):

$$\left. \begin{array}{l} K_t(-\partial^2) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t} \\ \tilde{K}_t(Q) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{t} \\ e^{-t\mu^2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 1 \end{array} \right\} \frac{\tilde{K}_t(M + \mu^2)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^{-\frac{3}{2}}, \quad (6.29)$$

(vgl. Gln.(6.11), (6.25), für das Fehlerintegral $\Phi(z)$ gilt $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}z + \mathcal{O}(z^3)$ [20]). Um der Gleichung (6.28) dennoch einen Sinn zu geben, ist daher eine Regularisierung durchzuführen. Im Sinne einer Pauli–Villars–Regularisierung ist auch hier eine Pauli–Villars–Masse Λ wie folgt einzuführen:

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\det' M}{\det M_0} \Big|_{\text{P.-V.}} &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\text{Tr} \ln \left(\frac{M + \mu^2}{M_0 + \mu^2} \right) - \text{Tr} \ln \left(\frac{M + \Lambda^2}{M_0 + \Lambda^2} \right) - \ln \mu^2 \right] \\
&= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\tilde{K}_t(M + \Lambda^2) - \tilde{K}_t(M + \mu^2) \right) - \ln \mu^2 \right]. \quad (6.30)
\end{aligned}$$

Diese Art der Determinantenregularisierung erscheint sehr plausibel und sinnvoll, wenn auch etwas willkürlich. In Kapitel 9 sind einige Überlegungen angestellt, ob diese Regularisierung aus einer im Sinne einer Pauli–Villars–Regularisierung modifizierten Lagrange–Dichte gewonnen werden könnte.

Zunächst sieht man, daß das entstehende Integral durch die Regularisierung für $\mu > 0$ tatsächlich existiert:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\tilde{K}_t(M + \Lambda^2) - \tilde{K}_t(M + \mu^2) \right) = \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2} \right) K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q); \quad (6.31)$$

- Verhalten des Integranden an der unteren Grenze:

$$\left. \begin{array}{lcl} \frac{1}{t} & \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} & \frac{1}{t} \\ e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2} & \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} & -t(\Lambda^2 - \mu^2) \\ K_t(-\partial^2) & \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} & \frac{1}{t} \\ \tilde{K}_t(Q) & \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} & \sqrt{t} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Integrand } \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} t^{-\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow \text{Integral existiert an der unteren Grenze,} \end{array}$$

- Verhalten des Integranden an der oberen Grenze (vgl. Gln.(6.10), (6.25), wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = 1$ [20]):

$$\left. \begin{array}{lcl} \frac{1}{t} & \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} & \frac{1}{t} \\ K_t(-\partial^2) & \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} & 1 \\ \tilde{K}_t(Q) & \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} & 1 \\ e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2} & \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} & e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Integrand } \stackrel{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2}}{t} \\ \Rightarrow \text{Integral existiert an der oberen Grenze.} \end{array}$$

Damit existiert also das Integral für $\mu > 0$. Im folgenden wird nun zuerst der Grenzwert $\mu \rightarrow 0$ ausgeführt.

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\det' M}{\det M_0} \Big|_{\text{P.-V.}} &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(\tilde{K}_t(M + \Lambda^2) - \tilde{K}_t(M + \mu^2) \right) - \ln \mu^2 \right] \\
&= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2} \right) K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - \ln \mu^2 \right] \\
&= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\underbrace{\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2} \right) \left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right)}_I + \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2} \right) - \ln \mu^2 \right] \quad (6.32)
\end{aligned}$$

Da das Integral I auch noch für $\mu = 0$ existiert (untere Grenze: Integrand $\sim t^{-\frac{1}{2}}$, obere Grenze: Integrand $\sim \frac{e^{-t}}{t}$), kann hier der Limes $\mu \rightarrow 0$ ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\det' M}{\det M_0} \Big|_{\text{P.-V.}} &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) \\
&\quad + \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2} \right) - \ln \mu^2 \right] \\
&= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) \\
&\quad + \lim_{\mu \rightarrow 0} \underbrace{\left[\int_0^1 \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2} \right) + \int_1^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2} \right) - \ln \mu^2 \right]}_J. \\
&\tag{6.33}
\end{aligned}$$

Auch das Integral J existiert offenbar für $\mu = 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\det' M}{\det M_0} \Big|_{\text{P.-V.}} &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) + \int_0^1 \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \\
&\quad + \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\int_1^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - e^{-t\mu^2} \right) - \ln \mu^2 \right] \\
&= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) + \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} \\
&\quad + \int_1^\infty \frac{dt}{t} e^{-t\Lambda^2} + \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[- \int_1^\infty dt \frac{e^{-t\mu^2}}{t} - \ln \mu^2 \right]. \\
&\tag{6.34}
\end{aligned}$$

Für das verbleibende μ -abhängige Integral findet man

$$\begin{aligned}
-\int_1^\infty dt \frac{e^{-t\mu^2}}{t} &= -\int_{\mu^2}^\infty dx \frac{e^{-x}}{x} \\
&= -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\mu^2}^\infty dx x^{\varepsilon-1} e^{-x} \\
&= -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \Gamma(\varepsilon) - \int_0^{\mu^2} x^{\varepsilon-1} e^{-x} dx \right\} \\
&= -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \Gamma(\varepsilon) - \int_0^{\mu^2} x^{\varepsilon-1} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^{\mu^2} x^{\varepsilon-1+k} dx \right\} \\
&\implies
\end{aligned}$$

$$-\int_1^\infty dt \frac{e^{-t\mu^2}}{t} = -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \Gamma(\varepsilon) - \frac{(\mu^2)^\varepsilon}{\varepsilon} - \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(\mu^2)^{\varepsilon+k}}{\varepsilon+k} \right\}.$$

Mit der bekannten Laurent-Entwicklung von $\Gamma(\varepsilon)$ um $\varepsilon = 0$ ergibt sich ($\gamma = 0.5772 \dots$, Euler-Konstante)

$$\begin{aligned} -\int_1^\infty dt \frac{e^{-t\mu^2}}{t} &= -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} - \gamma + O(\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} (1 + \varepsilon \ln \mu^2 + O(\varepsilon^2)) - \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(\mu^2)^{\varepsilon+k}}{\varepsilon+k} \right\} \\ &= -\lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ -\gamma - \ln \mu^2 + O(\varepsilon) - \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(\mu^2)^{\varepsilon+k}}{\varepsilon+k} \right\} \\ &= \gamma + \ln \mu^2 + O(\mu^2). \end{aligned} \quad (6.35)$$

Damit bekommt man

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det' M}{\det M_0} \Big|_{\text{P.-V.}} &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} (e^{-t\Lambda^2} - 1) (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1) + \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} \\ &\quad + \int_1^\infty \frac{dt}{t} e^{-t\Lambda^2} + \lim_{\mu \rightarrow 0} [\gamma + \ln \mu^2 + O(\mu^2) - \ln \mu^2] \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \frac{dt}{t} (e^{-t\Lambda^2} - 1) (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1)}_{J_0} + \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} \\ &\quad + \int_1^\infty \frac{dt}{t} e^{-t\Lambda^2} + \gamma. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Somit ist der Limes $\mu \rightarrow 0$ ausgeführt, und es bleibt im wesentlichen noch das Integral J_0 auszuwerten.

Um dies zu tun, gibt es zwei Wege, die sich hauptsächlich darin unterscheiden wie das Integral J_0 aufgespalten wird, damit die sich ergebenden Integrale einerseits wirklich ausgerechnet werden können, andererseits die für $\Lambda \rightarrow \infty$ endlichen und divergenten Terme sauber getrennt werden. Der von mir zunächst eingeschlagene Weg orientierte sich primär daran, das erste Ziel (auswertbare Integrale) zu erreichen. Der Nachteil dieses Weges besteht darin, daß zwar alle auftretenden Integrale relativ elementar ausgewertet werden können, die Rechnung aber dadurch recht lang wird, daß zum Teil auch Terme berechnet werden, die letztlich bei der Renormierung und Entfernung des Regularisierungsparameters Λ sowieso verschwinden. Dieser Weg soll im übernächsten Abschnitt dargestellt werden.

Der andere, elegantere Weg, dessen Kenntnis ich den Hinweisen von G. Münster verdanke, verfolgt dagegen primär das zweite Ziel, nämlich von Beginn an eine solche Aufspaltung von J_0 zu wählen, daß stets solche Terme abgespalten werden, die für $\Lambda \rightarrow \infty$ einen endlichen Beitrag liefern, und so die eigenlichen Divergenzen für $\Lambda \rightarrow \infty$ zu isolieren. Es wird sich außerdem zeigen, daß auch die hier auftretenden Integrale relativ einfach ausgewertet werden können. Dieser effizientere Weg soll im nächsten Abschnitt verfolgt werden.

6.2 Effiziente Auswertung des Integrals J_0

Wie im letzten Abschnitt erwähnt, ist das Integral J_0 auszurechnen. Dazu wird folgende Aufspaltung gewählt:

$$\begin{aligned}
J_0 &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} (e^{-t\Lambda^2} - 1) (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1) \\
&= \int_1^\infty \frac{dt}{t} (e^{-t\Lambda^2} - 1) (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1) + \int_0^1 \frac{dt}{t} (e^{-t\Lambda^2} - 1) (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1) \\
&= - \int_1^\infty \frac{dt}{t} (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1) + \int_1^\infty \frac{dt}{t} e^{-t\Lambda^2} (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1) \\
&\quad + \int_0^1 \frac{dt}{t} (e^{-t\Lambda^2} - 1) (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1). \tag{6.37}
\end{aligned}$$

Das zweite Integral geht für $\Lambda \rightarrow \infty$ mindestens wie $e^{-\Lambda^2}$ gegen 0 (das Integral lässt sich wegen der Beziehung (6.40) (s.u.) durch das Exponentialintegral $Ei(z)$ abschätzen, dessen asymptotisches Verhalten bekannt ist [20], vgl. auch die Beziehungen (6.124) und (6.125) später in Abschnitt 6.3); dafür sei im folgenden $O(e^{-\Lambda^2})$ geschrieben:

$$\begin{aligned}
J_0 &= - \int_1^\infty \frac{dt}{t} (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1) + O(e^{-\Lambda^2}) \\
&\quad + \int_0^1 \frac{dt}{t} (e^{-t\Lambda^2} - 1) (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1). \tag{6.38}
\end{aligned}$$

Nun wird der Ausdruck $K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1$ näher untersucht. Es gilt wegen der Gleichungen (6.11) und (6.25) (für die Entwicklung des Fehlerintegrals siehe [20] bzw. die Bemerkung nach (6.29) auf Seite 44)):

$$\begin{aligned}
K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 &= \frac{L^2}{4\pi t} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2 L^2}{4t}} \right]^2 \left[\Phi(m_0 \sqrt{t}) + e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} \Phi\left(\frac{1}{2} m_0 \sqrt{t}\right) \right] - 1 \\
&= \frac{L^2}{4\pi t} \left[1 + O\left(e^{-\frac{L^2}{4t}}\right) \right] \\
&\quad \times \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} m_0 \sqrt{t} + O\left(t^{\frac{3}{2}}\right) + \left(1 + O(t)\right) \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{m_0}{2} \sqrt{t} + O\left(t^{\frac{3}{2}}\right)\right) \right] - 1 \\
&= \frac{L^2}{4\pi t} \left[1 + O\left(e^{-\frac{L^2}{4t}}\right) \right] \left[\frac{3}{\sqrt{\pi}} m_0 \sqrt{t} + O\left(t^{\frac{3}{2}}\right) \right] - 1 \\
&= \frac{3L^2 m_0}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 + O\left(t^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(e^{-\frac{L^2}{4t}}\right) \\
&= \frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1 + O\left(t^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(e^{-\frac{L^2}{4t}}\right), \quad \hat{a}_1 := \frac{3L^2 m_0}{4\pi^{\frac{3}{2}}}. \tag{6.39}
\end{aligned}$$

Diese Entwicklung wird für kleine t benutzt werden; für große t erkennt man wegen der Beziehungen (6.10) und (6.24):

$$K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-\frac{3}{4} m_0^2 t} + O(e^{-at}), \quad a \in \mathbb{R}, \tag{6.40}$$

also exponentiellen Abfall. Diese Überlegungen machen folgende Umformung sinnvoll:

$$\begin{aligned} J_0 &= - \int_1^\infty \frac{dt}{t} \left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) + \int_0^1 \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(\frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1 \right) \\ &\quad + \int_0^1 \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left[\left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) - \left(\frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1 \right) \right] + O(e^{-\Lambda^2}), \quad (6.41) \end{aligned}$$

denn nun sieht man, daß der (nach Ausmultiplizieren) Λ -abhängige Teil des dritten Integrals für $\Lambda \rightarrow \infty$ mindestens wie $\frac{1}{\Lambda}$ verschwindet (folgt mit Gl.(6.39), indem man die Substitution $u = t \Lambda^2$ ausführt). Der hier entstehende Term $O(\frac{1}{\Lambda})$ absorbiert den schon bestehenden Term $O(e^{-\Lambda^2})$. Durch Abzug von $(\frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1)$ werden nämlich gerade die Terme im Integral $\int_0^1 \frac{dt}{t} (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1)$ beseitigt, die für $\Lambda \rightarrow \infty$ Divergenzen verursachen. Daher gilt

$$\begin{aligned} J_0 &= - \int_1^\infty \frac{dt}{t} \left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) - \int_0^1 \frac{dt}{t} \left[\left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) - \left(\frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1 \right) \right] \\ &\quad + \int_0^1 \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(\frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1 \right) + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\ &= - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) - \Theta(1-t) \left(\frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1 \right) \right] \\ &\quad + \int_0^1 \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(\frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1 \right) + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right), \quad (6.42) \end{aligned}$$

mit

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases} \quad (6.43)$$

Weiter rechnet man $(\frac{1}{\Gamma(z)}|_{z=0} = 0, \frac{d}{dz}|_{z=0} \frac{1}{\Gamma(z)} = 1$, vgl. Anhang C):

$$\begin{aligned} J_0 &= - \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) - \Theta(1-t) \left(\frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1 \right) \right] \\ &\quad + \hat{a}_1 \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t^{\frac{3}{2}}} - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\ &= - \frac{d}{dz}|_{z=0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[\left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) - \Theta(1-t) \left(\frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1 \right) \right] \right\} \\ &\quad + \hat{a}_1 \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t^{\frac{3}{2}}} - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \quad (6.44) \end{aligned}$$

Das ursprüngliche Integral als Ableitung einer Funktion an der Stelle $z = 0$ auszudrücken, wird sich im folgenden als nützlich erweisen.

Insgesamt ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
J_0 &= -\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1) - \Theta(1-t) \left(\frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1 \right) \right] \right\} \\
&\quad + \hat{a}_1 \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t^{\frac{3}{2}}} - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
&= -\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1) \right\} \\
&\quad + \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^1 dt t^{z-1} \left(\frac{\hat{a}_1}{\sqrt{t}} - 1 \right) \right\} + \hat{a}_1 \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \tag{6.45}
\end{aligned}$$

Hierbei ist die letzte Umformung, da die einzelnen Integrale nicht alle in einer Umgebung von $z = 0$ existieren, im Sinne einer analytischen Fortsetzung zu verstehen. Es wird definiert:

$$\tilde{\zeta}'(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} (K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1), \quad \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}. \tag{6.46}$$

Für andere z (insbesondere in einer Umgebung von $z = 0$) wird $\tilde{\zeta}'(z)$ durch analytische Fortsetzung definiert. Somit gilt

$$\begin{aligned}
J_0 &= -\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \tilde{\zeta}'(z) + \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \left[\frac{1}{\Gamma(z)} \left(\frac{\hat{a}_1}{z - \frac{1}{2}} - \frac{1}{z} \right) \right] + \hat{a}_1 \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
&= -\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \tilde{\zeta}'(z) - 2\hat{a}_1 + \underbrace{\Gamma'(1)}_{-\gamma} + \hat{a}_1 \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{vgl. auch Anhang C}) \\
&\quad - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right). \tag{6.47}
\end{aligned}$$

Für das erste verbleibende Integral bekommt man nun

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t^{\frac{3}{2}}} &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} -2 \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) t^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^1 - \int_0^1 dt \frac{2\Lambda^2 e^{-t\Lambda^2}}{\sqrt{t}} \\
&\stackrel{\text{Subst.}}{=} \frac{-2 \left(e^{-\Lambda^2} - 1 \right) - 2\Lambda^2}{u^2 = t\Lambda^2} \int_0^\Lambda du \frac{2u}{\Lambda^2} e^{-u^2} \frac{\Lambda}{u} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t^{\frac{3}{2}}} &= 2 - 4\Lambda \int_0^\Lambda du e^{-u^2} + O(e^{-\Lambda^2}) \\
&= 2 - 2\Lambda \sqrt{\pi} \Phi(\Lambda) + O(e^{-\Lambda^2}).
\end{aligned} \tag{6.48}$$

Das Verhalten des Fehlerintegrals Φ für große Argumente ist bekannt [20]:

$$1 - \Phi(\Lambda) \underset{\Lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-\Lambda^2}}{\sqrt{\pi} \Lambda} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2\Lambda^2)^n} \right]. \tag{6.49}$$

Daher erhält man

$$\begin{aligned}
J_0 &= -\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \tilde{\zeta}'(z) - 2\hat{a}_1 + 2\hat{a}_1 - 2\hat{a}_1 \Lambda \sqrt{\pi} \left(1 + O(e^{-\Lambda^2}) \right) \\
&\quad - \gamma - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
&= -\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \tilde{\zeta}'(z) - 2\hat{a}_1 \Lambda \sqrt{\pi} - \gamma - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
&= -\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \tilde{\zeta}'(z) - \frac{3m_0 L^2 \Lambda}{2\pi} - \gamma - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right).
\end{aligned} \tag{6.50}$$

Es bleibt also noch $\tilde{\zeta}'(z)$ bzw. $\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \tilde{\zeta}'(z)$ auszurechnen.

6.2.1 Auswertung der $\tilde{\zeta}'$ -Funktion

Es gilt nach Gl.(6.46) mit Hilfe der Beziehung (6.10) für $K_t(-\partial^2)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}'(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right), \quad \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}, \\
&\quad \text{analytisch fortgesetzt sonst} \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \frac{L^2}{4\pi t} \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right) + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[A^2 \left(\frac{4\pi t}{L^2} \right) - 1 \right] \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[A^2 \left(\frac{4\pi t}{L^2} \right) - \frac{L^2}{4\pi t} \right] \left[\tilde{K}_t(Q) - 1 \right],
\end{aligned} \tag{6.51}$$

mit

$$A(s) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s}, \quad A(s) = s^{-\frac{1}{2}} A(1/s) \quad (\operatorname{Re} s > 0). \tag{6.52}$$

Die letzte Gleichung für $A(s)$ sieht man mit Hilfe der Poissonschen Summenformel ein. Mit den Definitionen

$$\zeta_1(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \frac{L^2}{4\pi t} \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right), \quad \operatorname{Re} z > 1, \quad \text{analytisch fortgesetzt sonst,} \tag{6.53}$$

$$\zeta_2(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[A^2 \left(\frac{4\pi t}{L^2} \right) - 1 \right], \quad \begin{aligned} \text{Re } z &> 1, \\ \text{analytisch fortgesetzt sonst,} \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$\zeta_3(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[A^2 \left(\frac{4\pi t}{L^2} \right) - \frac{L^2}{4\pi t} \right] \left[\tilde{K}_t(Q) - 1 \right], \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (6.55)$$

folgt

$$\tilde{\zeta}'(z) = \zeta_1(z) + \zeta_2(z) + \zeta_3(z). \quad (6.56)$$

Im einzelnen berechnet man:

ζ_1 -Berechnung

Mit der Beziehung (6.24) folgt

$$\begin{aligned} \zeta_1(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \frac{L^2}{4\pi t} \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right) \\ &= \frac{L^2}{4\pi \Gamma(z)} \left\{ \int_0^\infty dt t^{z-2} e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} + \int_0^\infty dt t^{z-2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) e^{-t(m_0^2 + p^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Mit den Substitutionen $u = \frac{3}{4}m_0^2 t$ im ersten Integral,
 $u' = (m_0^2 + p^2) t$ im zweiten Integral

ergibt sich

$$\begin{aligned} \zeta_1(z) &= \frac{L^2}{4\pi \Gamma(z)} \left\{ \int_0^\infty du \left(\frac{4}{3m_0^2} u \right)^{z-2} \frac{4}{3m_0^2} e^{-u} + \int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) \int_0^\infty du' \frac{(u')^{z-2} e^{-u'}}{(m_0^2 + p^2)^{z-1}} \right\} \\ &= \frac{L^2}{4\pi \Gamma(z)} \left\{ \left(\frac{3}{4}m_0^2 \right)^{1-z} \Gamma(z-1) + \int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) \left(m_0^2 + p^2 \right)^{1-z} \Gamma(z-1) \right\} \\ &= \frac{L^2 \Gamma(z-1)}{4\pi \Gamma(z)} \left\{ \left(\frac{3}{4}m_0^2 \right)^{1-z} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) \left(m_0^2 + p^2 \right)^{1-z}}_{J_1} \right\}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Das Integral J_1 ergibt nun (vgl. Anhang E.1):

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{(m_0^2)^{1-z}}{2\pi} \left\{ 3 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} + \frac{3}{4} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2 + 1)^{z+1}} \frac{1}{(p^2 + \frac{1}{4})} \right\}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Damit findet man

$$\begin{aligned} \zeta_1(z) &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{1}{z-1} \left\{ \left(\frac{3}{4}m_0^2 \right)^{1-z} - \frac{(m_0^2)^{1-z}}{2\pi} \left\{ 3 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} + \frac{3}{4} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z+1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{9}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2 + 1)^{z+1}} \frac{1}{(p^2 + \frac{1}{4})} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung existiert nun auch in einer Umgebung von $z = 0$, so daß analytisch fortgesetzt werden kann:

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta_1(z)}{dz} \Big|_{z=0} &= -\frac{L^2}{4\pi} \left\{ \frac{3}{4}m_0^2 - \frac{m_0^2}{2\pi} \left[\frac{3}{4}\pi + \frac{9}{16} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2+1)(p^2+\frac{1}{4})}}_{J_2} \right] \right\} \\
&\quad - \frac{L^2}{4\pi} \left\{ -\frac{3}{4}m_0^2 \ln \left(\frac{3}{4}m_0^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_0^2}{2\pi} \ln m_0^2 \left[\frac{3}{4}\pi + \frac{9}{16} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2+1)(p^2+\frac{1}{4})}}_{J_2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{m_0^2}{2\pi} \left[3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}\pi\Gamma'(1) + \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{9}{16} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\ln(p^2+1)}{(p^2+1)(p^2+\frac{1}{4})}}_{J_3} \right] \right\}. \tag{6.60}
\end{aligned}$$

Die verbleibenden Integrale J_2 , J_3 sind ebenfalls im Anhang berechnet (vgl. Anhang E.2 und Anhang E.3):

$$J_2 = \frac{4}{3}\pi \tag{6.61}$$

$$J_3 = \frac{8}{3}\pi \ln \frac{9}{8}. \tag{6.62}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta_1(z)}{dz} \Big|_{z=0} &= -\frac{L^2}{4\pi} \left\{ \frac{3}{4}m_0^2 - \frac{m_0^2}{2\pi} \left[\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi \right] \right\} \\
&\quad - \frac{L^2}{4\pi} \left\{ -\frac{3}{4}m_0^2 \ln \left(\frac{3}{4}m_0^2 \right) + \frac{m_0^2}{2\pi} \left[\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi \right] \ln m_0^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{m_0^2}{2\pi} \left[3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}\pi\Gamma'(1) + \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(\frac{3}{4} \right)^2 \frac{8}{3}\pi \ln \frac{9}{8} \right] \right\} \\
&= -\frac{L^2}{4\pi} \left\{ \frac{3}{4}m_0^2 - \frac{3}{4}m_0^2 - \frac{3}{4}m_0^2 \ln \left(\frac{3}{4}m_0^2 \right) + \frac{3}{4}m_0^2 \ln m_0^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{m_0^2}{2\pi} \left[3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}\pi\Gamma'(1) + \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{3}{2}\pi \ln \frac{9}{8} \right] \right\}. \tag{6.63}
\end{aligned}$$

Mit (vgl. Anhang C)

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\pi^{\frac{1}{2}} \quad (6.64)$$

$$\Gamma'(1) = -\gamma \quad (6.65)$$

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -(\gamma + 2\ln 2)\pi^{\frac{1}{2}} \quad (6.66)$$

ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_1(z)}{dz} \Big|_{z=0} &= -\frac{L^2}{4\pi} \left\{ -\frac{3}{4}m_0^2 \ln \frac{3}{4} - \frac{m_0^2}{2\pi} \left[-6\pi + \frac{3}{4}\pi\gamma + \frac{3}{4}\pi(-\gamma - 2\ln 2) - \frac{3}{2}\pi \ln \frac{9}{8} \right] \right\} \\ &= -\frac{L^2}{4\pi} \left\{ -\frac{3}{4}m_0^2 \ln \frac{3}{4} + 3m_0^2 - \frac{3}{8}m_0^2\gamma + \frac{3}{8}m_0^2\gamma + \frac{3}{4}m_0^2 \ln 2 + \frac{3}{4}m_0^2 \ln \frac{9}{8} \right\} \\ &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{3}{4} m_0^2 \left(\ln \frac{3}{4} - 4 - \ln 2 - \ln \frac{9}{8} \right) \\ &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{3}{4} m_0^2 \left(\ln \frac{1}{3} - 4 \right) \\ &= -\frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right). \end{aligned} \quad (6.67)$$

ζ_2 -Berechnung

Nach der Definition (6.54) gilt

$$\zeta_2(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[A^2\left(\frac{4\pi t}{L^2}\right) - 1 \right], \quad \begin{aligned} \text{Re } z &> 1, \\ \text{analytisch fortgesetzt sonst.} \end{aligned} \quad (6.68)$$

Mit der Beziehung (6.52) für A wird daraus

$$\begin{aligned} \zeta_2(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\frac{L^2}{4\pi} \right)^z \int_0^\infty ds s^{z-1} \left(A^2(s) - 1 \right), \quad s = \frac{4\pi t}{L^2} \\ &= \left(\frac{L^2}{4\pi} \right)^z \frac{1}{\Gamma(z)} \left\{ \int_0^1 ds s^{z-1} \left(A^2(s) - s^{-1} \right) + \int_1^\infty ds s^{z-1} \left(A^2(s) - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 ds s^{z-2} - \int_0^1 ds s^{z-1} \right\} \\ &= \left(\frac{L^2}{4\pi} \right)^z \frac{1}{\Gamma(z)} \left\{ \int_0^1 ds s^{z-1} \left(A^2(s) - s^{-1} \right) + \int_1^\infty ds s^{z-1} \left(A^2(s) - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \right\} \\ &= \left(\frac{L^2}{4\pi} \right)^z \frac{1}{\Gamma(z)} \left\{ \int_0^1 ds s^{z-1} \left(A^2(s) - s^{-1} \right) + \int_1^\infty ds s^{z-1} \left(A^2(s) - 1 \right) + \frac{1}{z-1} \right\} \\ &\quad - \left(\frac{L^2}{4\pi} \right)^z \frac{1}{\Gamma(z+1)}. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Die rechte Seite existiert auch in einer Umgebung von $z = 0$; daher kann analytisch fortgesetzt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta_2(z)}{dz} \Big|_{z=0} &= \int_0^1 ds \frac{1}{s} \left(A^2(s) - s^{-1} \right) + \int_1^\infty \frac{ds}{s} \left(A^2(s) - 1 \right) \\
&\quad - 1 - \ln \frac{L^2}{4\pi} + \Gamma'(1) \\
&= \int_1^\infty \frac{ds'}{s'} \left(A^2\left(\frac{1}{s'}\right) - s' \right) + \int_1^\infty \frac{ds}{s} \left(A^2(s) - 1 \right) \\
&\quad - 1 - \gamma - \ln \frac{L^2}{4\pi}, \quad s' = \frac{1}{s}.
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Wegen $A(s) = s^{-\frac{1}{2}}A(1/s)$ (vgl. Gl.(6.52)) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta_2(z)}{dz} \Big|_{z=0} &= \int_1^\infty \frac{ds}{s} \left(s A^2(s) - s \right) + \int_1^\infty \frac{ds}{s} \left(A^2(s) - 1 \right) - 1 - \gamma - \ln \frac{L^2}{4\pi} \\
&= \int_1^\infty \frac{ds}{s} (1+s) \left(A^2(s) - 1 \right) - 1 - \gamma - \ln \frac{L^2}{4\pi}.
\end{aligned} \tag{6.71}$$

Mit

$$B_{PV} := \int_1^\infty \frac{ds}{s} (1+s) \left(A^2(s) - 1 \right) - 1 - \gamma \tag{6.72}$$

ergibt sich

$$\frac{d\zeta_2(z)}{dz} \Big|_{z=0} = B_{PV} - \ln \frac{L^2}{4\pi}. \tag{6.73}$$

Das Integral in der Definition von B_{PV} kann numerisch ausgewertet werden, man findet:

$$B_{PV} = -1,476336 \dots \tag{6.74}$$

B_{PV} kann auch analytisch genauer bestimmt werden (vgl. Kapitel 8).

ζ_3 -Berechnung

Mit der Definition (6.55) bekommt man

$$\zeta_3(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[A^2\left(\frac{4\pi t}{L^2}\right) - \frac{L^2}{4\pi t} \right] \left[\tilde{K}_t(Q) - 1 \right], \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6.75}$$

Hier kann direkt nach z differenziert werden:

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta_3(z)}{dz} \Big|_{z=0} &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[A^2\left(\frac{4\pi t}{L^2}\right) - \frac{L^2}{4\pi t} \right] \left[\tilde{K}_t(Q) - 1 \right] \\
&= \int_0^\infty dt \frac{L^2}{4\pi t^2} \left[A^2\left(\frac{L^2}{4\pi t}\right) - 1 \right] \left[\tilde{K}_t(Q) - 1 \right].
\end{aligned} \tag{6.76}$$

Für den letzten Schritt ist erneut die Beziehung (6.52) benutzt worden. Einsetzen der Definition von A ergibt

$$\frac{d\zeta_3(z)}{dz} \Big|_{z=0} = \int_0^\infty dt \frac{L^2}{4\pi t^2} \left[\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{n^2 L^2}{4t}} \right)^2 - 1 \right] \left[\tilde{K}_t(Q) - 1 \right]. \quad (6.77)$$

Mit der Definition von $\tilde{K}_t(Q)$ (vgl. Gl.(6.24)) folgt schließlich

$$\frac{d\zeta_3(z)}{dz} \Big|_{z=0} = \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z} \\ (k,l) \neq (0,0)}} \frac{L^2}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{(k^2+l^2)L^2}{4t}} \left(e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} + \int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) e^{-t(m_0^2+p^2)} \right). \quad (6.78)$$

Es treten t -Integrale folgenden Typs auf:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{\vec{n}^2 L^2}{4t} - \lambda t}, \quad \vec{n} := (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (0, 0), \quad \lambda > 0. \quad (6.79)$$

Im Anhang wird mittels einer Sattelpunktentwicklung gezeigt, daß

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{\vec{n}^2 L^2}{4t} - \lambda t} = \frac{\lambda^{\frac{1}{4}} \sqrt{8\pi}}{(\vec{n}^2 L^2)^{\frac{3}{4}}} e^{-\sqrt{\vec{n}^2 \lambda} L} + \begin{array}{l} \text{mit } L \text{ schneller} \\ \text{abfallende Terme} \end{array} \quad (6.80)$$

gilt (vgl. Anhang F). Für große L tragen daher in Gl.(6.78) in niedrigster Ordnung nur Terme mit $\vec{n}^2 = 1$ und $\lambda = \frac{3}{4}m_0^2$ bei, also insgesamt 4 Terme:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta_3(z)}{dz} \Big|_{z=0} &= 4 \frac{L^2}{4\pi} \frac{\left(\frac{3}{4}m_0^2\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{8\pi}}{L^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}m_0 L} + \begin{array}{l} \text{mit } L \text{ schneller} \\ \text{abfallende Terme} \end{array} \\ &= 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}Lm_0}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}m_0 L} + \begin{array}{l} \text{mit } L \text{ schneller} \\ \text{abfallende Terme} \end{array} \end{aligned} \quad (6.81)$$

Ergebnis für $\frac{d}{dz}\tilde{\zeta}'(z)|_{z=0}$ und J_0

Mit den Gleichungen (6.56), (6.67), (6.73) und (6.81) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\tilde{\zeta}'(z)|_{z=0} &= -\frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right) + B_{PV} - \ln \frac{L^2}{4\pi} \\ &\quad + 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}Lm_0}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}m_0 L} + \begin{array}{l} \text{mit } L \text{ schneller} \\ \text{abfallende Terme} \end{array} \end{aligned} \quad (6.82)$$

und damit folgt wegen Gl.(6.50) für J_0 :

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right) - B_{PV} + \ln \frac{L^2}{4\pi} - 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}Lm_0}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}m_0 L} - \frac{3m_0 L^2 \Lambda}{2\pi} \\ &\quad - \gamma - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \begin{array}{l} \text{mit } L \text{ schneller} \\ \text{abfallende Terme} \end{array} \end{aligned} \quad (6.83)$$

6.3 Alternative J_0 -Berechnung

Wie in Abschnitt 6.1 angekündigt, soll nun der Weg zur Berechnung von J_0 dargestellt werden, der von mir ursprünglich eingeschlagen wurde. Wie dort bereits erwähnt, wird sich dieser als aufwendiger erweisen, obwohl das Ergebnis natürlich dasselbe ist. Der Hauptunterschied besteht in einer anderen Aufspaltung des Integrals J_0 . Offenbar gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
J_0 &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) \\
&= \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \left\{ \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(K_t(-\partial^2) \tilde{K}_t(Q) - 1 \right) \right\} \\
&= \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \left\{ \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \frac{L^2}{4\pi t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right)}_{\zeta'_1(z)} \right. \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(K_t(-\partial^2) - 1 \right)}_{\zeta'_2(z)} \\
&\quad \left. + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(K_t(-\partial^2) - \frac{L^2}{4\pi t} \right) \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right)}_{\zeta'_3(z)} \right\}. \quad (6.84)
\end{aligned}$$

Die letzte Umformung ist wieder im Sinne einer analytischen Fortsetzung zu verstehen, da die Integrale ζ'_1 und ζ'_2 für $z = 0$ nicht existieren. Im einzelnen gilt wegen der Beziehungen (6.10), (6.11) und (6.24), (6.25), die das Verhalten von $K_t(-\partial^2)$ und $\tilde{K}_t(Q)$ für $t \rightarrow 0$ bzw. $t \rightarrow \infty$ liefern:

$$\zeta'_1(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \frac{L^2}{4\pi t} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right), \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} z > 0, \\ \text{analytisch fortgesetzt sonst,} \end{aligned} \quad (6.85)$$

$$\zeta'_2(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(K_t(-\partial^2) - 1 \right), \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} z > 0, \\ \text{analytisch fortgesetzt sonst,} \end{aligned} \quad (6.86)$$

$$\zeta'_3(z) := \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(K_t(-\partial^2) - \frac{L^2}{4\pi t} \right) \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (6.87)$$

Diese Funktionen ζ'_1 , ζ'_2 , ζ'_3 , bzw. ihre Ableitungen an der Stelle $z = 0$, gilt es nun auszurechnen.

6.3.1 ζ'_1 -Berechnung

Es gilt mit der Definition (6.85) und der Beziehung (6.24) für $\tilde{K}_t(Q)$:

$$\begin{aligned}
\zeta'_1(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \frac{L^2}{4\pi t} \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right) \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-2} \frac{L^2}{4\pi} \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right) e^{-t\Lambda^2} - \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-2} \frac{L^2}{4\pi} \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right) \\
&= \frac{L^2}{4\pi\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-2} \left\{ e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} + \int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) e^{-t(m_0^2 + p^2)} \right\} e^{-t\Lambda^2} \\
&\quad - \frac{L^2}{4\pi\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-2} \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right) \\
&= \frac{L^2}{4\pi\Gamma(z)} \left\{ \int_0^\infty dt t^{z-2} e^{-\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)t} + \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) e^{-t(m_0^2 + \Lambda^2 + p^2)} t^{z-2} \right\} \\
&\quad - \frac{L^2}{4\pi\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-2} \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right).
\end{aligned}$$

Die ersten beiden t -Integrale werden durch offensichtliche Substitutionen auf die Γ -Funktion zurückgeführt, und man erhält

$$\begin{aligned}
\zeta'_1(z) &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{\Gamma(z-1)}{\Gamma(z)} \left\{ \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{1-z} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) \left(m_0^2 + \Lambda^2 + p^2 \right)^{1-z}}_{J_1^\Lambda(z)} \right\} \\
&\quad - \frac{L^2}{4\pi\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-2} \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right).
\end{aligned}$$

Das letzte Integral (einschließlich Vorfaktor) ist aber genau die Funktion ζ_1 aus Abschnitt 6.2 (vgl. Gl.(6.53)). Daher hat man

$$\zeta'_1(z) = \frac{L^2}{4\pi} \frac{1}{z-1} \left\{ \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{1-z} + J_1^\Lambda(z) \right\} - \zeta_1(z). \quad (6.88)$$

Entsprechend ergibt sich für die Ableitung an der Stelle $z=0$ mit dem Ergebnis für ζ_1 (vgl. Gl.(6.67)):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_1(z) &= -\frac{L^2}{4\pi} \left\{ \frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 + J_1^\Lambda(z=0) \right\} \\
&\quad - \frac{L^2}{4\pi} \left\{ -\left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \ln \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) + \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_1^\Lambda(z) \right\} \\
&\quad + \frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right),
\end{aligned} \quad (6.89)$$

wobei

$$\begin{aligned} J_1^\Lambda(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) \left(m_0^2 + \Lambda^2 + p^2 \right)^{1-z} \\ g(p) &= -\frac{m_0}{2\pi} \left\{ \frac{2}{p^2 + m_0^2} + \frac{1}{p^2 + \frac{m_0^2}{4}} \right\}. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Daher ist nun $J_1^\Lambda(z)$ zu berechnen, genauer $J_1^\Lambda(0)$ und $\frac{d}{dz} \big|_{z=0} J_1^\Lambda(z)$; zunächst gilt

$$\begin{aligned} J_1^\Lambda(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) \frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2 + p^2)^{z-1}} \\ &= -\frac{m_0}{2\pi} \left\{ 2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2 + m_0^2)(p^2 + m_0^2 + \Lambda^2)^{z-1}}}_{J_{1,1}^\Lambda} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2 + \frac{m_0^2}{4})(m_0^2 + \Lambda^2 + p^2)^{z-1}}}_{J_{1,2}^\Lambda} \right\}. \end{aligned}$$

$J_{1,1}^\Lambda$ und $J_{1,2}^\Lambda$ werden getrennt ausgerechnet; dazu führt man eine Feynman-Parametrisierung durch. Bekanntlich besteht folgender Zusammenhang (vgl. Gl.(4.20)):

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{(Ax + B(1-x))^{\alpha+\beta}}. \quad (6.91)$$

Damit erhält man also

$$\begin{aligned} J_{1,1}^\Lambda(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2 + m_0^2)(p^2 + m_0^2 + \Lambda^2)^{z-1}} \\ &= \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-1)} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{x^{z-2}}{[(p^2 + m_0^2 + \Lambda^2)x + (1-x)(p^2 + m_0^2)]^z} \\ &= (z-1) \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{x^{z-2}}{(p^2 + m_0^2 + \Lambda^2 x)^z}. \end{aligned} \quad (6.92)$$

Das p -Integral kann nun standardmäßig ausgewertet werden [12, Gl.(4.3.1) für $d = 1$, $M^2 = m_0^2 + \Lambda^2 x$, $\alpha = 0$, $\beta = z$]:

$$\begin{aligned} J_{1,1}^\Lambda(z) &= (z-1) \int_0^1 dx x^{z-2} \pi^{\frac{1}{2}} \left(m_0^2 + \Lambda^2 x \right)^{\frac{1-2z}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z)} \\ &= (z-1) \frac{\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z)} \pi^{\frac{1}{2}} \int_0^1 dx x^{z-2} \left(m_0^2 + \Lambda^2 x \right)^{\frac{1}{2}-z} \end{aligned} \quad (6.93)$$

Da es nun, wie oben dargelegt, nur darauf ankommt, $J_1^\Lambda(0)$ und $\frac{d}{dz}|_{z=0} J_1^\Lambda(z)$ zu bestimmen, müssen $J_{1,1}^\Lambda(0)$ und $\frac{d}{dz}|_{z=0} J_{1,1}^\Lambda(z)$ berechnet werden. Offensichtlich existiert das Integral in Gl.(6.93) nicht für $z = 0$; eine analytische Fortsetzung ist also notwendig. Damit sich diese Fortsetzung quasi auf natürliche Weise ergibt, ist es nötig die Beziehung (6.93) so umzuformen, daß u.a. ein Integral entsteht, das für $z = 0$ noch konvergiert. Hierzu bietet sich eine partielle Integration an, da dadurch der bei $x = 0$ kritische Term x^{z-2} modifiziert wird, und zwar erhöht sich der Exponent pro partieller Integration um 1. Daher werden zwei partielle Integrationen ausreichen, damit ein bei $z = 0$ existierendes Integral entsteht. Weil jedoch auch $\frac{d}{dz}|_{z=0} J_{1,1}^\Lambda(z)$ benötigt wird, müssen insgesamt drei partielle Integrationen ausgeführt werden, um ein Integral zu erhalten, das nicht nur für $z = 0$ konvergiert, sondern dessen Ableitung auch noch bei $z = 0$ existiert. Im einzelnen ergibt die Rechnung (zunächst wird $\text{Re } z > 1$ angenommen):

$$\begin{aligned}
J_{1,1}^\Lambda(z) &= (z-1) \frac{\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z)} \pi^{\frac{1}{2}} \int_0^1 dx \frac{x^{z-2}}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{z-\frac{1}{2}}} \\
&= (z-1) \frac{\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{x^{z-1}}{z-1} \left(m_0^2 + \Lambda^2 x \right)^{\frac{1}{2}-z} \Big|_0^1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\frac{1}{2}-z) \Lambda^2}{z-1} \int_0^1 dx \frac{x^{z-1}}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{z+\frac{1}{2}}} \right\} \\
&= (z-1) \frac{\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}-z}}{z-1} - \frac{(\frac{1}{2}-z) \Lambda^2}{z-1} \int_0^1 dx \frac{x^{z-1}}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{z+\frac{1}{2}}} \right\} \\
&\quad (1. \text{ partielle Integration}) \\
&= (z-1) \frac{\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}-z}}{z-1} - \frac{(\frac{1}{2}-z) \Lambda^2}{z-1} \frac{x^z}{z} \left(m_0^2 + \Lambda^2 x \right)^{-(z+\frac{1}{2})} \Big|_0^1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\frac{1}{2}-z) (\frac{1}{2}+z) \Lambda^4}{z(z-1)} \int_0^1 dx \frac{x^z}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{z+\frac{3}{2}}} \right\} \\
&= (z-1) \frac{\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}-z}}{z-1} - \frac{(\frac{1}{2}-z) \Lambda^2}{z(z-1)} \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{-(z+\frac{1}{2})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\frac{1}{4}-z^2) \Lambda^4}{z(z-1)} \int_0^1 dx \frac{x^z}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{z+\frac{3}{2}}} \right\} \\
&\quad (2. \text{ partielle Integration}) \\
&= (z-1) \frac{\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}-z}}{z-1} - \frac{(\frac{1}{2}-z) \Lambda^2}{z(z-1)} \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{-(z+\frac{1}{2})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\frac{1}{4}-z^2) \Lambda^4}{z(z-1)} \frac{x^{z+1}}{z+1} \left(m_0^2 + \Lambda^2 x \right)^{-(z+\frac{3}{2})} \Big|_0^1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\frac{1}{4}-z^2) (z+\frac{3}{2})}{(z+1) z(z-1)} \Lambda^6 \int_0^1 dx \frac{x^{z+1}}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{z+\frac{5}{2}}} \right\} \implies
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{1,1}^\Lambda(z) &= (z-1) \frac{\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}-z}}{z-1} - \frac{(\frac{1}{2}-z)\Lambda^2}{z(z-1)} (m_0^2 + \Lambda^2)^{-(z+\frac{1}{2})} \right. \\
&\quad - \frac{(\frac{1}{4}-z^2)\Lambda^4}{(z+1)z(z-1)} (m_0^2 + \Lambda^2)^{-(z+\frac{3}{2})} \\
&\quad \left. - \frac{(\frac{1}{4}-z^2)(z+\frac{3}{2})\Lambda^6}{(z+1)z(z-1)} \int_0^1 dx \frac{x^{z+1}}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{z+\frac{5}{2}}} \right\} \\
&\quad (3. \text{ partielle Integration}) \\
&= \frac{\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z)} (m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}-z} \pi^{\frac{1}{2}} - \frac{(\frac{1}{2}-z)\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z+1)} (m_0^2 + \Lambda^2)^{-(z+\frac{1}{2})} \pi^{\frac{1}{2}} \Lambda^2 \\
&\quad - \frac{(\frac{1}{4}-z^2)\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z+2)} (m_0^2 + \Lambda^2)^{-(z+\frac{3}{2})} \pi^{\frac{1}{2}} \Lambda^4 \\
&\quad - \frac{(\frac{1}{4}-z^2)(z+\frac{3}{2})\Gamma(z-\frac{1}{2})}{\Gamma(z+2)} \pi^{\frac{1}{2}} \Lambda^6 \int_0^1 dx \frac{x^{z+1}}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{z+\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite stellt eine bei $z=0$ holomorphe Funktion dar, so daß analytisch fortgesetzt werden kann:

$$\begin{aligned}
J_{1,1}^\Lambda(0) &= - \frac{\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \pi^{\frac{1}{2}} \Lambda^2 - \frac{\frac{1}{4}\Gamma(-\frac{1}{2})}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \pi^{\frac{1}{2}} \Lambda^4 \\
&\quad - \frac{3}{8} \Gamma(-\frac{1}{2}) \pi^{\frac{1}{2}} \Lambda^6 \underbrace{\int_0^1 dx \frac{x}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{\frac{5}{2}}}}_{I_0}.
\end{aligned}$$

Nun gilt einerseits (vgl. Anhang C)

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\pi^{\frac{1}{2}},$$

andererseits wird im Anhang E.6 gezeigt:

$$I_0 = \frac{2}{\Lambda^4} \left\{ \frac{2}{3m_0} - \frac{2m_0^2 + 3\Lambda^2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}. \quad (6.94)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
J_{1,1}^\Lambda(0) &= \frac{\pi \Lambda^2}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{2}\Lambda^4 \pi}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{4} \pi \Lambda^6 \frac{2}{\Lambda^4} \left\{ \frac{2}{3m_0} - \frac{2m_0^2 + 3\Lambda^2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&= \pi \Lambda^2 \left\{ \frac{1}{m_0} + \frac{m_0^2 + \Lambda^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2 - m_0^2 - \frac{3}{2}\Lambda^2}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&= \frac{\pi \Lambda^2}{m_0}
\end{aligned} \quad (6.95)$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_{1,1}^\Lambda(z) = & \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \left(m_0^2 + \Lambda^2\right)^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \\
& + \pi^{\frac{1}{2}} \Lambda^2 \left\{ \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{2}\Gamma'(-\frac{1}{2})}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma'(1)}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
& \left. + \frac{\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) \right\} \\
& + \pi^{\frac{1}{2}} \Lambda^4 \left\{ \frac{-\frac{1}{4}\Gamma'(-\frac{1}{2})}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{4}\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma'(2)}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
& \left. + \frac{\frac{1}{4}\Gamma(-\frac{1}{2})}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) \right\} \\
& + \pi^{\frac{1}{2}} \Lambda^6 \left\{ -\frac{1}{4}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{\int_0^1 dx \frac{x}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{\frac{5}{2}}}}_{I_0} \right. \\
& \left. - \frac{3}{8}\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right) I_0 + \frac{3}{8}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma'(2) I_0 \right. \\
& \left. - \frac{3}{8}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{\int_0^1 dx \frac{x \ln x}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{\frac{5}{2}}}}_{I_1} \right. \\
& \left. + \frac{3}{8}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \underbrace{\int_0^1 dx \frac{x \ln(m_0^2 + \Lambda^2 x)}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{\frac{5}{2}}}}_{I_2} \right\}. \tag{6.96}
\end{aligned}$$

Nun verwendet man die verschiedenen Beziehungen zur Γ -Funktion aus dem Anhang (vgl. Anhang C), sowie die Werte für I_1 und I_2 , ebenfalls aus dem Anhang (vgl. Anhang E.4 und E.5):

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{2}{\Lambda^4} \left\{ -\frac{2}{3m_0} \ln \Lambda^2 + \frac{2}{3m_0} - \frac{2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{3} \frac{\ln(2m_0)}{m_0} \right. \\
& \left. - \frac{2}{3m_0} \ln \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0} \right\} \tag{6.97}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = & \frac{4}{\Lambda^4} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\ln m_0}{m_0} - \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{2(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2 \ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{6(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
& \left. + \frac{8}{9m_0} - \frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2}{9(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}. \tag{6.98}
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_{1,1}^{\Lambda}(z) &= -2\pi \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{\pi \Lambda^2}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -2 - (\gamma + 2 \ln 2 - 2) + \gamma - \ln(m_0^2 + \Lambda^2) \right\} \\
&+ \frac{\pi \Lambda^4}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ -\frac{1}{2}(\gamma + 2 \ln 2 - 2) - \frac{1}{2}(1 - \gamma) - \frac{1}{2} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) \right\} \\
&+ 2\pi \Lambda^2 \left\{ \frac{2}{3m_0} - \frac{2m_0^2 + 3\Lambda^2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&\times \left\{ \frac{1}{2} - \frac{3}{4}(\gamma + 2 \ln 2 - 2) - \frac{3}{4}(1 - \gamma) \right\} \\
&+ \frac{3}{2}\pi \Lambda^2 \left\{ -\frac{2}{3m_0} \ln \Lambda^2 + \frac{2}{3m_0} - \frac{2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{3} \frac{\ln(2m_0)}{m_0} - \frac{2}{3m_0} \ln \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0} \right\} \\
&- 3\pi \Lambda^2 \left\{ \frac{2}{3} \frac{\ln m_0}{m_0} - \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{2(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2 \ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{6(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{8}{9m_0} - \frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2}{9(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&= -2\pi \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{\pi \Lambda^2}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -2 \ln 2 - \ln(m_0^2 + \Lambda^2) \right\} \\
&+ \frac{\pi \Lambda^4}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) \right\} \\
&+ 2\pi \Lambda^2 \left\{ \frac{2}{3m_0} - \frac{2m_0^2 + 3\Lambda^2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \left\{ \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln 2 \right\} \\
&+ \pi \Lambda^2 \left\{ -\frac{\ln \Lambda^2}{m_0} + \frac{1}{m_0} - \frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2 \ln(2m_0)}{m_0} - \frac{1}{m_0} \ln \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0} \right\} \\
&- \pi \Lambda^2 \left\{ \frac{2 \ln m_0}{m_0} - \frac{3 \ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{2(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2 \ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{2(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{8}{3m_0} - \frac{3}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_{1,1}^\Lambda(z) &= \frac{\pi}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -2m_0^2 + \Lambda^2 \left(\frac{1}{2} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) - 2 \ln 2 \right) \right\} \\
&+ \frac{\pi \Lambda^2}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \Lambda^2 \left(2 \ln 2 - 2 - \frac{1}{2} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) \right) \right. \\
&\quad \left. + m_0^2 \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) - 2 \right) \right\} \\
&+ \frac{\pi}{m_0} \Lambda^2 \left\{ -\ln \Lambda^2 - \ln \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0} \right\}. \tag{6.99}
\end{aligned}$$

Entsprechend ist jetzt bei der Berechnung von $J_{1,2}^\Lambda(z)$ bzw. $J_{1,2}^\Lambda(0)$ und $\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_{1,2}^\Lambda(z)$ zu verfahren. Es gilt

$$J_{1,2}^\Lambda(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2 + \frac{m_0^2}{4}) (m_0^2 + \Lambda^2 + p^2)^{z-1}}. \tag{6.100}$$

Mit Feynman–Parametrisierung (vgl. Gl.(6.91)) erhält man

$$\begin{aligned}
J_{1,2}^\Lambda(z) &= \frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-1)} \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{x^{z-2}}{\left[(p^2 + m_0^2 + \Lambda^2) x + (p^2 + \frac{m_0^2}{4})(1-x) \right]^z} \\
&= (z-1) \int_0^1 dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{x^{z-2}}{\left[p^2 + \frac{m_0^2}{4} + (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2) x \right]^z}. \tag{6.101}
\end{aligned}$$

Ausführen der p –Integration [12, Gl.(4.3.1) für $d = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = z$, $M^2 = \frac{m_0^2}{4} + (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2) x$] liefert

$$J_{1,2}^\Lambda(z) = (z-1) \frac{\Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} \pi^{\frac{1}{2}} \int_0^1 dx x^{z-2} \left(\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right)^{\frac{1}{2}-z}. \tag{6.102}$$

Aufgrund der gleichen Überlegungen wie bei der Berechnung von $J_{1,1}^\Lambda(z)$, ist auch hier nun dreimal partiell zu integrieren (zunächst wieder $\text{Re } z > 1$):

$$\begin{aligned}
J_{1,2}^\Lambda(z) &= \frac{\Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z-1)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{x^{z-1}}{z-1} \left(\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right)^{\frac{1}{2}-z} \Big|_0^1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2)(\frac{1}{2}-z)}{z-1} \int_0^1 dx \frac{x^{z-1}}{\left[\frac{m_0^2}{4} + (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2) x \right]^{z+\frac{1}{2}}} \right\} \\
&\quad \implies
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{1,2}^{\Lambda}(z) &= \frac{\Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z - 1)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}-z}}{z-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)}{z-1} \int_0^1 dx \frac{x^{z-1}}{\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)x\right]^{z+\frac{1}{2}}} \right\} \\
&\quad (1. \text{ partielle Integration}) \\
&= \frac{\Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z - 1)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}-z}}{z-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(\frac{1}{2}-z\right)\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)}{z-1} \frac{x^z}{z\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)x\right]^{z+\frac{1}{2}}} \right|_0^1 \\
&\quad - \frac{\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)^2\left(\frac{1}{4}-z^2\right)}{z(z-1)} \int_0^1 dx \frac{x^z}{\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)x\right]^{z+\frac{3}{2}}} \right\} \\
&= \frac{\Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z - 1)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{(z-1)(m_0^2 + \Lambda^2)^{z-\frac{1}{2}}} - \frac{\left(\frac{1}{2}-z\right)\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)}{z(z-1)(m_0^2 + \Lambda^2)^{z+\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)^2\left(\frac{1}{4}-z^2\right)}{z(z-1)} \int_0^1 dx \frac{x^z}{\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)x\right]^{z+\frac{3}{2}}} \right\} \\
&\quad (2. \text{ partielle Integration}) \\
&= \frac{\Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z - 1)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{(z-1)(m_0^2 + \Lambda^2)^{z-\frac{1}{2}}} - \frac{\left(\frac{1}{2}-z\right)\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)}{z(z-1)(m_0^2 + \Lambda^2)^{z+\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)^2\left(\frac{1}{4}-z^2\right)}{(z+1)z(z-1)} \frac{x^{z+1}}{\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)x\right]^{z+\frac{3}{2}}} \right|_0^1 \\
&\quad - \frac{\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)^3\left(\frac{1}{4}-z^2\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)}{(z+1)z(z-1)} \int_0^1 dx \frac{x^{z+1}}{\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)x\right]^{z+\frac{5}{2}}} \right\} \\
&= \frac{\Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z - 1)} \pi^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{(z-1)(m_0^2 + \Lambda^2)^{z-\frac{1}{2}}} - \frac{\left(\frac{1}{2}-z\right)\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)}{z(z-1)(m_0^2 + \Lambda^2)^{z+\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(\frac{1}{4}-z^2\right)\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)^2}{(z+1)z(z-1)(m_0^2 + \Lambda^2)^{z+\frac{3}{2}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(\frac{1}{4}-z^2\right)\left(z+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)^3}{(z+1)z(z-1)} \int_0^1 dx \frac{x^{z+1}}{\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)x\right]^{z+\frac{5}{2}}} \right\} \\
&\quad (3. \text{ partielle Integration}) \qquad \qquad \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{1,2}^\Lambda(z) &= \frac{\Gamma(z - \frac{1}{2}) \pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(z) (m_0^2 + \Lambda^2)^{z - \frac{1}{2}}} - \frac{(\frac{1}{2} - z) \Gamma(z - \frac{1}{2}) (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2) \pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(z + 1) (m_0^2 + \Lambda^2)^{z + \frac{1}{2}}} \\
&\quad - \frac{(\frac{1}{4} - z^2) \Gamma(z - \frac{1}{2}) (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2)^2 \pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(z + 2) (m_0^2 + \Lambda^2)^{z + \frac{3}{2}}} \\
&\quad - \frac{(\frac{1}{4} - z^2) (z + \frac{3}{2}) \Gamma(z - \frac{1}{2}) (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2)^3 \pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(z + 2)} \int_0^1 dx \frac{x^{z+1}}{\left[\frac{m_0^2}{4} + (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2) x \right]^{z+\frac{5}{2}}}.
\end{aligned} \tag{6.103}$$

Die rechte Seite ist nun wieder bei $z = 0$ holomorph, so daß mit analytischer Fortsetzung folgt:

$$\begin{aligned}
J_{1,2}^\Lambda(0) &= -\frac{\frac{1}{2} \Gamma(-\frac{1}{2}) (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2) \pi^{\frac{1}{2}}}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{4} \Gamma(-\frac{1}{2}) (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2)^2 \pi^{\frac{1}{2}}}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad - \frac{3}{8} \Gamma(-\frac{1}{2}) \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^3 \pi^{\frac{1}{2}} \underbrace{\int_0^1 dx \frac{x}{\left[\frac{m_0^2}{4} + (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2) x \right]^{\frac{5}{2}}}}_{L_0}.
\end{aligned} \tag{6.104}$$

Mit den entsprechenden Beziehungen für die Γ -Funktion (Anhang C), sowie dem Wert für L_0 (Anhang E.9),

$$L_0 = \frac{2}{(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2)^2} \left\{ \frac{4}{3m_0} - \frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2}{12(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}, \tag{6.105}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
J_{1,2}^\Lambda(0) &= \frac{\pi (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2)}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{2} (\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2)^2 \pi}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{3}{2} \pi \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left\{ \frac{4}{3m_0} - \frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2}{12(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&= \pi \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left\{ \frac{2}{m_0} + \frac{m_0^2 + \Lambda^2 + \frac{3}{8} m_0^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 - \frac{11}{8} m_0^2 - \frac{3}{2} \Lambda^2}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&= \frac{2\pi}{m_0} \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right).
\end{aligned} \tag{6.106}$$

Für $\frac{d}{dz} \big|_{z=0} J_{1,2}^\Lambda(z)$ findet man mit Gl.(6.103) (die Rechnung verläuft entsprechend wie bei $J_{1,1}^\Lambda(z)$; einige Zwischenschritte sind ausgelassen):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \big|_{z=0} J_{1,2}^\Lambda(z) &= -2\pi \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{\pi \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -2 \ln 2 - \ln \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) \right\} \\
&+ \frac{\pi \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) \right\} \\
&+ \pi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^3 L_0 \left\{ -\frac{1}{4} \Gamma \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{3}{8} \Gamma' \left(-\frac{1}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} \Gamma \left(-\frac{1}{2} \right) \Gamma' \left(2 \right) \right\} \\
&+ \pi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^3 \left\{ -\frac{3}{8} \Gamma \left(-\frac{1}{2} \right) \underbrace{\int_0^1 dx \frac{x \ln x}{\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right]^{\frac{5}{2}}}}_{L_1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{8} \Gamma \left(-\frac{1}{2} \right) \underbrace{\int_0^1 dx \frac{x \ln \left(\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right)}{\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right]^{\frac{5}{2}}}}_{L_2} \right\}. \quad (6.107)
\end{aligned}$$

Mit den Werten für L_1 und L_2 (Anhang E.7 und E.8),

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{2}{\left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2} \left\{ -\frac{4}{3m_0} \ln \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) + \frac{4}{3m_0} + \frac{8}{3m_0} \ln m_0 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{3m_0} \ln \frac{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{2}}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}} \right\} \quad (6.108)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{4}{\left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2} \left\{ \frac{4}{3} \frac{\ln \frac{m_0}{2}}{m_0} + \frac{m_0^2}{36 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{16}{9m_0} - \frac{1}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left(\frac{1}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_0^2}{12 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \right\}, \quad (6.109)
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_{1,2}^\Lambda(z) &= -2\pi \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{\pi \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -2 \ln 2 - \ln \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) \right\} \\
&\quad + \frac{\pi \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) \right\} \\
&\quad + 2\pi \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left\{ \frac{4}{3m_0} - \frac{1}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2}{12 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{5}{4} - \frac{3}{2} \ln 2 \right\} \\
&\quad + \frac{3}{2} \pi \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left\{ -\frac{4}{3m_0} \ln \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) + \frac{4}{3m_0} + \frac{8}{3m_0} \ln m_0 \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{3m_0} \ln \frac{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{2}}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}} \right\} \\
&\quad - 3\pi \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left\{ \frac{4}{3} \frac{\ln \frac{m_0}{2}}{m_0} + \frac{m_0^2}{36 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{16}{9m_0} - \frac{1}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_0^2}{12 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \ln \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) \right\} \\
&= \frac{\pi}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -2 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left(\frac{1}{2} \ln \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) - \frac{1}{2} + \ln 2 \right) \right\} \\
&\quad + \frac{\pi}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left\{ -m_0^2 \ln 2 + \frac{m_0^2}{2} - \frac{m_0^2}{2} \ln \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \Lambda^2 \left(\frac{1}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) \right) \right\} \\
&\quad + \frac{2\pi}{m_0} \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left\{ -\ln \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) - \ln \frac{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{2}}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}} \right\}. \tag{6.110}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich für $J_1^\Lambda(z)$ (vgl. Gln.(6.90), (6.95), (6.106))

$$\begin{aligned}
J_1^\Lambda(0) &= -\frac{m_0}{2\pi} \left\{ 2 J_{1,1}^\Lambda(0) + J_{1,2}^\Lambda(0) \right\} \\
&= -\frac{m_0}{2\pi} \left\{ \frac{2\pi\Lambda^2}{m_0} + \frac{2\pi}{m_0} \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \right\} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$J_1^\Lambda(0) = - \left(2\Lambda^2 + \frac{3}{4} m_0^2 \right) \quad (6.111)$$

und (vgl. Gln.(6.99), (6.110))

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_1^\Lambda(z) &= - \frac{m_0}{2\pi} \left\{ 2 \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_{1,1}^\Lambda(z) + \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_{1,2}^\Lambda(z) \right\} \\
&= - \frac{m_0}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -2m_0^2 + \Lambda^2 \left(\frac{1}{2} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) - 2 \ln 2 \right) \right\} \\
&\quad - \frac{m_0 \Lambda^2}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \Lambda^2 \left(2 \ln 2 - 2 - \frac{1}{2} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) \right) \right. \\
&\quad \left. + m_0^2 \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) - 2 \right) \right\} \\
&\quad - \Lambda^2 \left\{ -\ln \Lambda^2 - \ln \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0} \right\} \\
&\quad - \frac{m_0}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -m_0^2 - \Lambda^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left(\frac{1}{4} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \right) \right\} \\
&\quad - \frac{m_0(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2)}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ -\frac{m_0^2}{2} \ln 2 + \frac{m_0^2}{4} - \frac{m_0^2}{4} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) \right. \\
&\quad \left. + \Lambda^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln(m_0^2 + \Lambda^2) \right) \right\} \\
&\quad - \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left\{ -\ln \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) - \ln \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{2}}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}} \right\}. \quad (6.112)
\end{aligned}$$

Um diesen unübersichtlichen Ausdruck übersichtlicher zu gestalten, wird folgende Überleitung angestellt. Nach der Renormierungsbeziehung (4.32) gilt:

$$m_0 = m_R + O(g_R) + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right).$$

Da m_R endlich ist und später der Grenzwert $\Lambda \rightarrow \infty$ betrachtet werden wird, setzt man nun diese Renormierungsbeziehung in Gl.(6.112) ein und lässt nur solche Terme explizit stehen, die für $\Lambda \rightarrow \infty$ einen von 0 verschiedenen Beitrag liefern:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_1^\Lambda(z) &= - \frac{m_R}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -2m_R^2 + \Lambda^2 \left(\frac{1}{2} \ln(m_R^2 + \Lambda^2) - 2 \ln 2 \right) \right\} \\
&\quad - \frac{m_R \Lambda^2}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \Lambda^2 \left(2 \ln 2 - 2 - \frac{1}{2} \ln(m_R^2 + \Lambda^2) \right) \right. \\
&\quad \left. + m_R^2 \left(2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(m_R^2 + \Lambda^2) - 2 \right) \right\} \\
&\quad - \Lambda^2 \left\{ -\ln \Lambda^2 - \ln \frac{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_R}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_R} \right\} \\
&\quad - \frac{m_R}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -m_R^2 - \Lambda^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) \left(\frac{1}{4} \ln(m_R^2 + \Lambda^2) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 \right) \right\} \\
&\quad - \frac{m_R \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right)}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ -\frac{m_R^2}{2} \ln 2 + \frac{m_R^2}{4} - \frac{m_R^2}{4} \ln(m_R^2 + \Lambda^2) \right. \\
&\quad \left. + \Lambda^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln(m_R^2 + \Lambda^2) \right) \right\} \\
&\quad - \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) \left\{ -\ln \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) - \ln \frac{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_R}{2}}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_R}{2}} \right\} \\
&\quad + O(g_R) + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \\
&= - \frac{m_R \Lambda^4}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{2} \ln(m_R^2 + \Lambda^2) - 2 \ln 2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln(m_R^2 + \Lambda^2) + 2 \ln 2 - 2 \right\} \\
&\quad + \Lambda^2 \ln \Lambda^2 + 2 \Lambda^2 \frac{m_R}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad - \frac{m_R \Lambda^4}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ -1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} \ln(m_R^2 + \Lambda^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln(m_R^2 + \Lambda^2) \right\} \\
&\quad + \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) \ln \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) + \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) \frac{m_R}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + O\left(\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}\right) + O(g_R). \tag{6.113}
\end{aligned}$$

Dabei steht $O\left(\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}\right)$ für alle Terme, die für $\Lambda \rightarrow \infty$ mindestens wie $\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}$ gegen 0 gehen, und außerdem wurde die Beziehung

$$\ln \frac{a+b}{a-b} = \ln \frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}} = 2 \frac{b}{a} + O\left(\frac{b^3}{a^3}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}^+, b < a \tag{6.114}$$

benutzt, die sich einfach durch Taylor–Entwicklung ergibt. Damit findet man

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_1^\Lambda(z) &= \frac{2m_R \Lambda^4}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \Lambda^2 \ln \Lambda^2 + \frac{2m_R \Lambda^4}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{m_R \Lambda^4}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) \ln \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) \\
&\quad + \frac{m_R \Lambda^4}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}\right) + O(g_R) \\
&= \frac{6m_R \Lambda^4}{(m_R^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \Lambda^2 \ln \Lambda^2 \\
&\quad + \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) \ln \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) + O\left(\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}\right) + O(g_R) \\
&= 6m_R \Lambda + \Lambda^2 \ln \Lambda^2 + \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) \ln \left(\frac{3}{4} m_R^2 + \Lambda^2 \right) \\
&\quad + O\left(\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}\right) + O(g_R). \tag{6.115}
\end{aligned}$$

Hier kann wieder die Masse m_0 an Stelle von m_R eingeführt werden:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} J_1^\Lambda(z) &= 6m_0 \Lambda + \Lambda^2 \ln \Lambda^2 + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \ln \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \\
&\quad + O\left(\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}\right) + O(g_R). \tag{6.116}
\end{aligned}$$

Dieser Schritt ist etwas künstlich und eigentlich unnötig; er geschieht nur deshalb, um später einen besseren Vergleich mit dem Ergebnis aus Abschnitt 6.2 zu ermöglichen. Wie bereits weiter oben erwähnt, ist die Trennung zwischen Regularisierung und Renormierung bei diesem zweiten Weg nicht so scharf. Natürlich könnte man auch hier Gl.(6.112) zunächst unverändert stehenlassen, und wirklich erst bei der Renormierung obige Rechnung (Gl.(6.112) bis Gl.(6.115)) ausführen. Die vorzeitige Benutzung der Renormierungsbeziehung geschieht nur deshalb, um die doch sehr lange und unübersichtliche Formel (6.112) bereits hier auf ihre wesentlichen Teile zu reduzieren, denn auch später werden nur Terme bis ausschließlich zur Ordnung g_R Verwendung finden. Mit den Gleichungen (6.89), (6.111) und (6.116) ergibt sich damit endlich für das gesuchte $\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_1(z)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_1(z) &= -\frac{L^2}{4\pi} \left\{ \frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 - 2\Lambda^2 - \frac{3}{4} m_0^2 \right\} \\
&\quad - \frac{L^2}{4\pi} \left\{ - \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \ln \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) + 6m_0 \Lambda + \Lambda^2 \ln \Lambda^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \ln \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) + O\left(\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}\right) + O(g_R) \right\} \\
&\quad + \frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right) \qquad \qquad \qquad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_1(z) &= \frac{L^2}{4\pi} \Lambda^2 - \frac{L^2}{4\pi} \left\{ 6 m_0 \Lambda + \Lambda^2 \ln \Lambda^2 + O\left(\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}\right) + O(g_R) \right\} \\ &\quad + \frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right).\end{aligned}\quad (6.117)$$

6.3.2 ζ'_2 -Berechnung

Nach der Definition (6.86) gilt:

$$\begin{aligned}\zeta'_2(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} (e^{-t\Lambda^2} - 1) (K_t(-\partial^2) - 1), \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \\ &\quad \text{analytisch fortgesetzt sonst} \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t\Lambda^2} (K_t(-\partial^2) - 1) - \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} (K_t(-\partial^2) - 1)}_{\zeta_2(z)} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t\Lambda^2} K_t(-\partial^2)}_{P_0} - \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t\Lambda^2}}_{\Lambda^{-2z}} - \zeta_2(z),\end{aligned}\quad (6.118)$$

mit der Funktion ζ_2 aus Abschnitt 6.2 (vgl. die Definition (6.54)). Für das Integral P_0 nutzt man nun folgende Aufspaltung von $K_t(-\partial^2)$ (vgl. Gl.(6.11)):

$$K_t(-\partial^2) = \frac{L^2}{4\pi t} + \frac{L^2}{4\pi t} \sum_{\substack{k,l \in \mathbb{Z} \\ (k,l) \neq (0,0)}}^{\infty} e^{-\frac{(k^2+l^2)L^2}{4t}}, \quad (6.119)$$

denn jetzt sieht man, daß der Beitrag zum Integral P_0 , der von der unendlichen Doppelreihe herröhrt, mit $\Lambda \rightarrow \infty$ mindestens wie $\frac{1}{\Lambda^2}$ gegen 0 geht, was wiederum durch $O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)$ ausgedrückt sei (folgt, da der Integrand ohne $e^{-t\Lambda^2}$ beschränkt ist, indem man die Substitution $u = t\Lambda^2$ ausführt). Der Beitrag des ersten Terms läßt sich einfach ausrechnen, man erhält

$$\begin{aligned}\zeta'_2(z) &= \frac{L^2}{4\pi \Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-2} e^{-t\Lambda^2} - \Lambda^{-2z} - \zeta_2(z) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \\ &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{\Gamma(z-1)}{\Gamma(z)} (\Lambda^2)^{1-z} - \Lambda^{-2z} - \zeta_2(z) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \\ &= \frac{L^2}{4\pi} \frac{(\Lambda^2)^{1-z}}{z-1} - \Lambda^{-2z} - \zeta_2(z) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right).\end{aligned}\quad (6.120)$$

Damit und mit Gl.(6.73) für die Ableitung von ζ_2 an der Stelle $z = 0$ folgt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_2(z) &= -\frac{L^2}{4\pi} (1 - \ln \Lambda^2) \Lambda^2 + 2 \ln \Lambda - B_{PV} + \ln \frac{L^2}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \\ &= -\frac{L^2}{4\pi} (1 - \ln \Lambda^2) \Lambda^2 + \ln \Lambda^2 - B_{PV} + \ln \frac{L^2}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right).\end{aligned}\quad (6.121)$$

Folgende Umformung wird sich noch als nützlich erweisen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_2(z) &= -\frac{L^2}{4\pi} (1 - \ln \Lambda^2) \Lambda^2 - B_{PV} + \ln \frac{L^2}{4\pi} + \ln \Lambda^2 + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \\ &+ \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t}. \end{aligned} \quad (6.122)$$

Mit [20]

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} &= \int_0^{-\Lambda^2} du \frac{e^u - 1}{u} \\ &= \text{Ei}(-\Lambda^2) - \gamma - \ln \Lambda^2, \end{aligned} \quad (6.123)$$

wobei $\text{Ei}(z)$ das Exponentialintegral ist, dessen asymptotisches Verhalten für $|z| \rightarrow \infty$ bekannt ist [20], nämlich

$$\text{Ei}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt, \quad |\arg(-z)| < \pi \quad (6.124)$$

$$\begin{aligned} \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^z}{z} \left[\sum_{k=0}^n \frac{k!}{z^k} + O(|z|^{-(n+1)}) \right], \quad |\arg(-z)| \leq \pi - \delta \\ \delta > 0, \end{aligned} \quad (6.125)$$

und daher

$$\text{Ei}(-\Lambda^2) \underset{\Lambda \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-\Lambda^2}}{-\Lambda^2} = O(e^{-\Lambda^2}),$$

erhält man schließlich (die Terme $O(e^{-\Lambda^2})$ werden mit den Termen $O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right)$ zusammengefaßt)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_2(z) &= -\frac{L^2}{4\pi} (1 - \ln \Lambda^2) \Lambda^2 - B_{PV} + \ln \frac{L^2}{4\pi} + \ln \Lambda^2 \\ &- \gamma - \ln \Lambda^2 - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \\ &= -\frac{L^2}{4\pi} (1 - \ln \Lambda^2) \Lambda^2 - B_{PV} + \ln \frac{L^2}{4\pi} - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} \\ &- \gamma + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right). \end{aligned} \quad (6.126)$$

6.3.3 ζ'_3 -Berechnung

Es gilt wegen der Definition (6.87):

$$\zeta'_3(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left(e^{-t\Lambda^2} - 1 \right) \left(K_t(-\partial^2) - \frac{L^2}{4\pi t} \right) \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right) \implies$$

$$\begin{aligned}
\zeta'_3(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t\Lambda^2} \left(K_t(-\partial^2) - \frac{L^2}{4\pi t} \right) \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right) \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left(K_t(-\partial^2) - \frac{L^2}{4\pi t} \right) \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right)}_{\zeta_3(z)}, \tag{6.127}
\end{aligned}$$

mit $\zeta_3(z)$ aus Abschnitt 6.2 (vgl. die Definition (6.55)). Weiter findet man

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_3(z) &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-t\Lambda^2} \left(K_t(-\partial^2) - \frac{L^2}{4\pi t} \right) \left(\tilde{K}_t(Q) - 1 \right) - \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta_3(z) \\
&= -\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta_3(z) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right),
\end{aligned}$$

da das erste Integral mindestens wie $\frac{1}{\Lambda^2}$ gegen 0 geht für $\Lambda \rightarrow \infty$ (sieht man wie in der Bemerkung nach Gl.(6.119) auf Seite 72). Mit dem Ergebnis für $\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta_3(z)$ aus Abschnitt 6.2 (vgl. Gl.(6.81)) gilt daher:

$$\frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_3(z) = -2 \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_0}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L} + \text{mit } L \text{ schneller abfallende Terme} + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right). \tag{6.128}$$

6.3.4 Ergebnis für J_0

Zusammengefaßt ergibt sich somit letztlich für J_0 mit den Gleichungen (6.117), (6.126) und (6.128):

$$\begin{aligned}
J_0 &= \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_1(z) + \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_2(z) + \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \zeta'_3(z) \\
&= \frac{L^2}{4\pi} \Lambda^2 - \frac{3m_0 \Lambda L^2}{2\pi} - \frac{L^2}{4\pi} \Lambda^2 \ln \Lambda^2 + O\left(\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}\right) + O(g_R) \\
&\quad + \frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right) - \frac{L^2}{4\pi} \Lambda^2 + \frac{L^2}{4\pi} \Lambda^2 \ln \Lambda^2 - B_{PV} + \ln \frac{L^2}{4\pi} \\
&\quad - \gamma - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) \\
&\quad - 2 \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_0}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L} + \text{mit } L \text{ schneller abfallende Terme} \\
&= -\frac{3m_0 \Lambda L^2}{2\pi} + \frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right) - B_{PV} + \ln \frac{L^2}{4\pi} \\
&\quad - \gamma - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} - 2 \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_0}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L} \\
&\quad + \text{mit } L \text{ schneller abfallende Terme} + O\left(\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}\right) + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) + O(g_R), \tag{6.129}
\end{aligned}$$

was bis zur betrachteten Ordnung und bis auf Terme, die für $\Lambda \rightarrow \infty$ gegen 0 gehen, mit dem Ergebnis aus Abschnitt 6.2 (vgl. Gl.(6.83)) übereinstimmt.

6.4 Ergebnis für $\ln \frac{\det' M}{\det M_0} |_{\text{P.-V.}}$

Nach Gl.(6.36) gilt:

$$\ln \frac{\det' M}{\det M_0} |_{\text{P.-V.}} = J_0 + \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + \int_1^\infty \frac{dt}{t} e^{-t\Lambda^2} + \gamma. \quad (6.130)$$

Nachdem nun J_0 (vgl. Gl.(6.83) bzw. Gl.(6.129)) berechnet ist, erhält man also letztendlich für $\ln \frac{\det' M}{\det M_0} |_{\text{P.-V.}}$ (für die Terme, die für $\Lambda \rightarrow \infty$ verschwinden wird das Ergebnis der Gl.(6.83) verwendet):

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det' M}{\det M_0} |_{\text{P.-V.}} &= -\frac{3m_0 L^2 \Lambda}{2\pi} + \frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right) - B_{\text{PV}} + \ln \frac{L^2}{4\pi} \\ &\quad - 2 \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_0}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L} + \text{mit } L \text{ schneller abfallende Terme} \\ &\quad - \gamma - \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \int_0^1 dt \frac{e^{-t\Lambda^2} - 1}{t} + \gamma \\ &\quad + \int_1^\infty \frac{dt}{t} e^{-t\Lambda^2} \\ &= -\frac{3m_0 L^2 \Lambda}{2\pi} + \frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right) - B_{\text{PV}} + \ln \frac{L^2}{4\pi} \\ &\quad - 2 \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_0}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L} + \text{mit } L \text{ schneller abfallende Terme} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right), \end{aligned} \quad (6.131)$$

wobei das letzte Integral $\left(\int_1^\infty \frac{dt}{t} e^{-t\Lambda^2} \right)$ verschwindet für $\Lambda \rightarrow \infty$ mindestens wie $e^{-\Lambda^2}$ in $O\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$ absorbiert wurde.

Kapitel 7

Berechnung der Energieaufspaltung E_{0a}

Nachdem in Kapitel 6 die noch zu bestimmenden Determinanten berechnet worden sind, kann nun auch E_{0a} explizit angegeben werden. Mit Hilfe der Ergebnisse für die Renormierungsgrößen aus Kapitel 4 soll diese Energie E_{0a} dann renormiert werden, so daß letztlich keine Divergenzen mehr auftreten und auch der Regularisierungsparameter Λ entfernt ist. Zunächst seien aus den vorherigen Kapiteln noch einmal alle hier benötigten Zwischenergebnisse dargestellt:

$$E_{0a} = 2 e^{-S_c} \left(\frac{S_c}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\det' M}{\det M_0} \right|^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.34)$$

$$S_c = 2 \frac{m_0^3}{g_0} L^2, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \ln \frac{\det' M}{\det M_0} \Big|_{\text{P.-V.}} &= \frac{L^2}{4\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right) - B_{\text{PV}} + \ln \frac{L^2}{4\pi} \\ &\quad - 2 \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_0}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L} - \frac{3 m_0 L^2 \Lambda}{2\pi} \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \text{mit } L \text{ schneller abfallende Terme,} \end{aligned} \quad (6.131)$$

$$B_{\text{PV}} = -1,476336 \dots, \quad (6.74)$$

$$g_0 = g_{\text{R}} + \frac{7}{8} \frac{g_{\text{R}}^2}{4\pi m_{\text{R}}} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_{\text{R}}^3), \quad (4.30)$$

$$m_0^2 = m_{\text{R}}^2 - \left(\frac{3}{16} m_{\text{R}} - \Lambda \right) \frac{g_{\text{R}}}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_{\text{R}}^2), \quad (4.31)$$

$$m_0 = m_{\text{R}} - \left(\frac{3}{16} m_{\text{R}} - \Lambda \right) \frac{g_{\text{R}}}{8\pi m_{\text{R}}} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_{\text{R}}^2). \quad (4.32)$$

Einige Größen, die in der folgenden Rechnung benötigt werden, seien im vorhinein bestimmt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g_0} &= \frac{1}{g_R + \frac{7}{8} \frac{g_R^2}{4\pi m_R} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R^3)} \\
&= \frac{1}{g_R} \frac{1}{1 + \frac{7g_R}{32\pi m_R} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R^2)} \\
&= \frac{1}{g_R} \left(1 - \frac{7g_R}{32\pi m_R} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R^2)\right) \\
&= \frac{1}{g_R} - \frac{7}{32\pi m_R} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R),
\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m_0}{g_0} &= \left(m_R - \left(\frac{3}{16} m_R - \Lambda\right) \frac{g_R}{8\pi m_R} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R^2)\right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{g_R} - \frac{7}{32\pi m_R} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R)\right) \\
&= \frac{m_R}{g_R} - \frac{31}{128\pi} + \frac{\Lambda}{8\pi m_R} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R),
\end{aligned} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{m_0}{g_0}} &= \sqrt{\frac{m_R}{g_R} - \frac{31}{128\pi} + \frac{\Lambda}{8\pi m_R} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R)} \\
&= \sqrt{\frac{m_R}{g_R}} \sqrt{1 + \left(\frac{\Lambda}{8\pi m_R} - \frac{31}{128\pi}\right) \frac{g_R}{m_R} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R^2)} \\
&= \sqrt{\frac{m_R}{g_R}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R)\right) \\
&= \sqrt{\frac{m_R}{g_R}} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_R^{1/2}\right),
\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}
2 \frac{m_0^3}{g_0} &= 2 m_0^2 \frac{m_0}{g_0} \\
&= 2 \left(m_R^2 - \left(\frac{3}{16} m_R - \Lambda\right) \frac{g_R}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R^2)\right) \\
&\quad \times \left(\frac{m_R}{g_R} - \frac{31}{128\pi} + \frac{\Lambda}{8\pi m_R} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R)\right) \\
&= 2 \left(\frac{m_R^3}{g_R} - \frac{31}{128\pi} m_R^2 + \frac{\Lambda m_R}{8\pi}\right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{3}{16} m_R - \Lambda\right) \frac{m_R}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R)\right) \\
&= 2 \left(\frac{m_R^3}{g_R} - \frac{31}{128\pi} m_R^2 + \frac{\Lambda m_R}{8\pi}\right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{64\pi} m_R^2 + \frac{\Lambda m_R}{4\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R)\right) \\
&= 2 \frac{m_R^3}{g_R} + \frac{3 m_R \Lambda}{4\pi} - \frac{37}{64\pi} m_R^2 + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_R),
\end{aligned} \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{m_0^3}{g_0}} &= m_0 \sqrt{\frac{m_0}{g_0}} \\
&= \left(m_{\text{R}} - \left(\frac{3}{16} m_{\text{R}} - \Lambda \right) \frac{g_{\text{R}}}{8\pi m_{\text{R}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_{\text{R}}^2) \right) \\
&\quad \times \left(\sqrt{\frac{m_{\text{R}}}{g_{\text{R}}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_{\text{R}}^{\frac{1}{2}}) \right) \\
&= \sqrt{\frac{m_{\text{R}}^3}{g_{\text{R}}}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \mathcal{O}(g_{\text{R}}^{\frac{1}{2}}). \tag{7.5}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich zunächst für die regularisierte Energie $E_{0a}^A = 2 e^{-S_c} \left(\frac{S_c}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\det' M}{\det M_0} \right|_{P_a, V}^{-\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned}
E_{0a}^{\Lambda} &= 2 e^{-S_c} \left(\frac{S_c}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\det' M}{\det M_0} \right|_{\text{P.-V.}}^{-\frac{1}{2}} \\
&= 2 \sqrt{\frac{m_0^3}{g_0 \pi}} L e^{-2 \frac{m_0^3}{g_0} L^2 - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\det' M}{\det M_0} \right|_{\text{P.-V.}}} \\
&= 2 \sqrt{\frac{m_0^3}{g_0 \pi}} L \exp \left\{ -2 \frac{m_0^3}{g_0} L^2 - \frac{L^2}{8\pi} m_0^2 \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right) + \frac{B_{\text{PV}}}{2} - \ln \frac{L}{\sqrt{4\pi}} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_0}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_0 L} + \frac{3}{4} \frac{m_0 L^2 \Lambda}{\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + \text{mit } L \text{ schneller abfallende Terme} \right\} \\
&= 2 \left(\sqrt{\frac{m_{\text{R}}^3}{g_{\text{R}} \pi}} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_{\text{R}}^{\frac{1}{2}}\right) \right) L \frac{\sqrt{4\pi}}{L} e^{\frac{B_{\text{PV}}}{2}} \\
&\times \exp \left\{ -L^2 \left[2 \frac{m_{\text{R}}^3}{g_{\text{R}}} + \frac{3m_{\text{R}} \Lambda}{4\pi} - \frac{37}{64\pi} m_{\text{R}}^2 + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_{\text{R}}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{m_{\text{R}}^2}{8\pi} \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right) \right] \right\} \\
&\times \exp \left\{ \left(\sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_{\text{R}}}{\pi}} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_{\text{R}}) \right) e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_{\text{R}} L + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_{\text{R}})} \right. \\
&\quad \left. + \text{mit } L \text{ schneller abfallende Terme} \right\} \\
&\times \exp \left\{ L^2 \left(\frac{3}{4} \frac{m_{\text{R}} \Lambda}{\pi} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O(g_{\text{R}}) \right) \right\} \\
&= 4 \sqrt{\frac{m_{\text{R}}}{g_{\text{R}}}} m_{\text{R}} e^{\frac{B_{\text{PV}}}{2}} \exp \left\{ -L^2 \left[2 \frac{m_{\text{R}}^3}{g_{\text{R}}} + \frac{3 m_{\text{R}} \Lambda}{4\pi} - \frac{37}{64\pi} m_{\text{R}}^2 + \frac{m_{\text{R}}^2}{8\pi} \left(3 + \frac{3}{4} \ln 3 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{3}{4} \frac{m_{\text{R}} \Lambda}{\pi} - \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_{\text{R}}}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_{\text{R}} L} + O(g_{\text{R}}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \text{mit } L \text{ schneller abfallende Terme} \right] \right\} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_{\text{R}}^{\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{0a}^\Lambda &= 4 \sqrt{\frac{m_R}{g_R}} m_R e^{\frac{B_{PV}}{2}} \exp \left\{ -L^2 \left[2 \frac{m_R^3}{g_R} - \frac{m_R^2}{2\pi} \left(\frac{37}{32} - \frac{3}{4} - \frac{3}{16} \ln 3 \right) + O(g_R) \right] \right\} \\
&\times \exp \left\{ \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_R}{\pi}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_R L} + \begin{array}{l} \text{mit } L \text{ schneller} \\ \text{abfallende Terme} \end{array} \right\} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) + O\left(g_R^{\frac{1}{2}}\right). \quad (7.6)
\end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also, indem die dimensionslose Größe $u_R := \frac{g_R}{m_R}$ eingeführt wird (die Kopplungskonstante g_R hat in $d = 3$ Dimensionen Massendimension 1):

$$E_{0a}^\Lambda = C_{PV} e^{-\sigma(L) L^2} + O\left(u_R^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right), \quad (7.7)$$

mit

$$C_{PV} := 4 e^{\frac{B_{PV}}{2}} \frac{m_R}{\sqrt{u_R}}, \quad (7.8)$$

$$\sigma(L) := \sigma_\infty \left(1 - \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_R}{\pi}} \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_R L}}{L^2} \frac{u_R}{2 m_R^2} + \begin{array}{l} \text{mit } L \text{ schneller} \\ \text{abfallende Terme} \end{array} + O(u_R) \right), \quad (7.9)$$

$$\sigma_\infty := \frac{2 m_R^2}{u_R} \left(1 - \frac{u_R}{4\pi} \left(\frac{13}{32} - \frac{3}{16} \ln 3 \right) + O(u_R^2) \right) \quad (7.10)$$

$$= \frac{2 m_R^2}{u_R} \left(1 - \frac{u_R}{4\pi} 0,20026 \dots + O(u_R^2) \right). \quad (7.11)$$

Durch die Renormierung sind die Divergenzen für $\Lambda \rightarrow \infty$ verschwunden, so daß nun der Regularisierungsparameter Λ durch die Limesbildung $\Lambda \rightarrow \infty$ entfernt werden kann:

$$E_{0a} = C_{PV} e^{-\sigma(L) L^2} + O\left(u_R^{\frac{1}{2}}\right), \quad (7.12)$$

$$C_{PV} := 4 e^{\frac{B_{PV}}{2}} \frac{m_R}{\sqrt{u_R}}, \quad (7.13)$$

$$\sigma(L) := \sigma_\infty \left(1 - \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_R}{\pi}} \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_R L}}{L^2} \frac{u_R}{2 m_R^2} + \begin{array}{l} \text{mit } L \text{ schneller} \\ \text{abfallende Terme} \end{array} + O(u_R) \right), \quad (7.14)$$

$$\sigma_\infty := \frac{2 m_R^2}{u_R} \left(1 - \frac{u_R}{4\pi} \left(\frac{13}{32} - \frac{3}{16} \ln 3 \right) + O(u_R^2) \right). \quad (7.15)$$

Schließlich kann man mit Hilfe von Gl.(4.60) noch die physikalische Masse m_{ph} an Stelle der renormierten Masse m_R einführen, wobei wegen $\Lambda \rightarrow \infty$ die Terme $O\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$ verschwinden:

$$m_R^2 = m_{ph}^2 \left\{ 1 - \frac{u_R}{4\pi} \left(\frac{13}{16} - \frac{3}{4} \ln 3 \right) + O(u_R^2) \right\}. \quad (7.16)$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\sigma_\infty &= \frac{2 m_R^2}{u_R} \left(1 - \frac{u_R}{4\pi} \left(\frac{13}{32} - \frac{3}{16} \ln 3 \right) + O(u_R^2) \right) \\
&= 2 m_{ph}^2 \left[\frac{1}{u_R} - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{13}{16} - \frac{3}{4} \ln 3 \right) + O(u_R) \right] \left[1 - \frac{u_R}{4\pi} \left(\frac{13}{32} - \frac{3}{16} \ln 3 \right) + O(u_R^2) \right] \\
&= \left[2 \frac{m_{ph}^2}{u_R} - \frac{m_{ph}^2}{2\pi} \left(\frac{13}{16} - \frac{3}{4} \ln 3 \right) + O(u_R) \right] \left[1 - \frac{u_R}{4\pi} \left(\frac{13}{32} - \frac{3}{16} \ln 3 \right) + O(u_R^2) \right] \\
&= 2 \frac{m_{ph}^2}{u_R} - \frac{m_{ph}^2}{2\pi} \left(\frac{13}{32} - \frac{3}{16} \ln 3 \right) - \frac{m_{ph}^2}{2\pi} \left(\frac{13}{16} - \frac{3}{4} \ln 3 \right) + O(u_R) \\
&= 2 \frac{m_{ph}^2}{u_R} - \frac{m_{ph}^2}{2\pi} \left(\frac{39}{32} - \frac{15}{16} \ln 3 \right) + O(u_R) \\
&= 2 \frac{m_{ph}^2}{u_R} \left(1 - \frac{u_R}{4\pi} \left(\frac{39}{32} - \frac{15}{16} \ln 3 \right) + O(u_R^2) \right). \tag{7.17}
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also für E_{0a} :

$$E_{0a} = C_{PV} e^{-\sigma(L) L^2} + O\left(u_R^{\frac{1}{2}}\right), \tag{7.18}$$

$$C_{PV} = 4 e^{\frac{B_{PV}}{2}} \frac{m_{ph}}{\sqrt{u_R}}, \tag{7.19}$$

$$\sigma(L) = \sigma_\infty \left(1 - \sqrt{\frac{\sqrt{3} L m_{ph}}{\pi}} \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2} m_{ph} L}}{L^2} \frac{u_R}{2 m_{ph}^2} + \begin{array}{l} \text{mit } L \text{ schneller} \\ \text{abfallende Terme} \end{array} + O(u_R^2) \right), \tag{7.20}$$

$$\sigma_\infty = 2 \frac{m_{ph}^2}{u_R} \left(1 - \frac{u_R}{4\pi} \left(\frac{39}{32} - \frac{15}{16} \ln 3 \right) + O(u_R^2) \right). \tag{7.21}$$

Kapitel 8

Vergleich mit dimensionaler Regularisierung

In der Einleitung war darauf hingewiesen worden, daß die Berechnung von E_{0a} in Pauli–Villars–Regularisierung durchgeführt wurde, um die Ergebnisse mit dimensionaler Regularisierung zu überprüfen, da durch die dimensionale Regularisierung Divergenzen in dem Sinne fortfallen können, daß sie sich auch nicht beim kritischen Wert des Regularisierungsparameters ergeben (z.B. $\varepsilon = 0$ bei der ε –Entwicklung, $\varepsilon = 3 - d$), und daher eine Überprüfung auch der (endlichen) Ergebnisse sinnvoll erscheint. Nachdem das Ergebnis für E_{0a} nun vorliegt, kann der Vergleich der Resultate beider Regularisierungsschemata jetzt vorgenommen werden. Die Ergebnisse der Rechnung mit dimensionaler Regularisierung stammen aus einer Arbeit von G. Münster [9]. Dort findet sich:

$$E_{0a} = C \exp \left\{ -\sigma(L) L^2 \right\}, \quad (8.1)$$

mit

$$C = 4 \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \sqrt{\frac{2}{u_R}} m_{ph} \quad (8.2)$$

und

$$\sigma_\infty = \lim_{L \rightarrow \infty} \sigma(L) = 2 \frac{m_{ph}^2}{u_R} \left(1 - \frac{u_R}{4\pi} \left(\frac{39}{32} - \frac{15}{16} \ln 3 \right) + O(u_R^2) \right). \quad (8.3)$$

Der Vergleich mit den Gln.(7.18)–(7.21) zeigt, daß σ_∞ in beiden Regularisierungsschemata (bis zur betrachteten Ordnung in u_R) übereinstimmt. Auch der Wert von C ist gleich C_{PV} (vgl. Gl.(7.19)), wie man einfach nachrechnet:

$$C = 4 \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \sqrt{\frac{2 m_{ph}^2}{u_R}} = 1,351956 \dots \sqrt{\frac{2 m_{ph}^2}{u_R}} \quad (\text{dimensional})$$

$$C_{PV} = 4 \frac{e^{\frac{B_{PV}}{2}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2 m_{ph}^2}{u_R}} = 1,351956 \dots \sqrt{\frac{2 m_{ph}^2}{u_R}} \quad (\text{Pauli–Villars}).$$

Diese Übereinstimmung von C und C_{PV} kann auch ganz allgemein bewiesen werden [21]. Es gilt nämlich mit Gl.(6.54) und Gl.(6.52):

$$A(s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 s}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned}
\zeta_2(z) &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt t^{z-1} \left[A^2 \left(\frac{4\pi t}{L^2} \right) - 1 \right], \quad \operatorname{Re} z > 1, \\
&\quad \text{analytisch fortgesetzt sonst} \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ (n_1, n_2) \neq (0,0)}} \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-\pi(n_1^2 + n_2^2) \frac{4\pi}{L^2} t} \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ (n_1, n_2) \neq (0,0)}} \left(\frac{L^2}{4\pi} \right)^z \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-\pi(n_1^2 + n_2^2) t} \\
&= \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\frac{L^2}{4\pi} \right)^z \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ (n_1, n_2) \neq (0,0)}} [\pi(n_1^2 + n_2^2)]^{-z} \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} \\
&= \left(\frac{L^2}{4\pi} \right)^z \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ (n_1, n_2) \neq (0,0)}} [\pi(n_1^2 + n_2^2)]^{-z} \\
&= \left(\frac{L^2}{4\pi} \right)^z \pi^{-z} Z_2(z), \tag{8.5}
\end{aligned}$$

mit

$$Z_2(z) := \sum_{\substack{n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \\ (n_1, n_2) \neq (0,0)}} [\pi(n_1^2 + n_2^2)]^{-z}, \quad \operatorname{Re} z > 1, \quad \text{analytisch fortgesetzt sonst.} \tag{8.6}$$

Insbesondere sieht man, da $\zeta_2(0) = -1$ gilt (erkennt man aus Gl.(6.69)), daß auch

$$Z_2(0) = -1 \tag{8.7}$$

gilt. Damit folgt

$$\frac{d\zeta_2(z)}{dz} \Big|_{z=0} = -\ln \frac{L^2}{4\pi} + \ln \pi + Z'_2(0) \tag{8.8}$$

und durch Vergleich mit Gl.(6.73) also

$$B_{PV} = \ln \pi + Z'_2(0). \tag{8.9}$$

Um $Z'_2(0)$ zu bestimmen, benutzt man nun folgenden Sachverhalt [22]:

$$Z_2(s) = 4\zeta(s)L(s), \tag{8.10}$$

mit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1, \quad \text{(Riemannsche } \zeta\text{-Funktion)} \\
\text{analytisch fortgesetzt sonst,} \tag{8.11}$$

$$L(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \\
\text{analytisch fortgesetzt sonst.} \tag{8.12}$$

Für $L(s)$ gilt folgende Funktionalgleichung [23, Seite 35]:

$$L(s) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1} \Gamma(1-s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) L(1-s). \quad (8.13)$$

Durch Vergleich mit der Reihe des Arcustangens sieht man weiter

$$L(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad (8.14)$$

und wegen Gl.(8.13) daher auch

$$L(0) = \frac{2}{\pi} L(1) = \frac{1}{2}. \quad (8.15)$$

Außerdem gilt für die (analytisch fortgesetzte) ζ -Funktion [23, Seite 34]:

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta'(0) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi). \quad (8.16)$$

Daher ergibt sich aus Gl.(8.10)

$$Z'_2(0) = -\ln(2\pi) - 2L'(0) \quad (8.17)$$

und wegen Gl.(8.13)

$$L'(0) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \Gamma'(1) - \frac{2}{\pi} L'(1). \quad (8.18)$$

Weiter erhält man

$$\begin{aligned} L(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)t} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \frac{1}{e^t + e^{-t}} \\ &= \frac{1}{2\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{\cosh t}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Damit findet man

$$L'(1) = -\frac{1}{2} \Gamma'(1) \underbrace{\int_0^{\infty} dt \frac{1}{\cosh t}}_{F_1} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} dt \frac{\ln t}{\cosh t}}_{F_2}. \quad (8.20)$$

Im einzelnen gilt:

$$\begin{aligned}
F_1 &= 2 \int_0^\infty \frac{dt}{e^t + e^{-t}} \\
&= 2 \int_0^\infty dt \frac{e^t}{e^{2t} + 1} \\
&= 2 \int_1^\infty dx \frac{1}{1+x^2}, \quad x = e^t \\
&= 2 \arctan x \Big|_1^\infty \\
&= 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned} \tag{8.21}$$

Für F_2 folgt [14, Gl. 4.371 1]:

$$F_2 = \frac{\pi}{2} \ln(2\pi) + \pi \ln \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right]. \tag{8.22}$$

Daher bekommt man für $L'(1)$

$$L'(1) = -\frac{\pi}{4} \Gamma'(1) + \frac{\pi}{4} \left(\ln(2\pi) + 2 \ln \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right] \right) \tag{8.23}$$

und mit Gl.(8.18)

$$\begin{aligned}
L'(0) &= \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \Gamma'(1) + \frac{1}{2} \Gamma'(1) - \frac{1}{2} \left(\ln(2\pi) + 2 \ln \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right] \right) \\
&= -\ln \left[2 \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right].
\end{aligned} \tag{8.24}$$

Hiermit findet man wegen Gl.(8.17) und Gl.(8.9) schließlich

$$Z'_2(0) = -\ln(2\pi) + 2 \ln \left[2 \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right] \tag{8.25}$$

und

$$\begin{aligned}
B_{PV} &= -\ln 2 + 2 \ln \left[2 \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right] \\
&= \ln 2 + 2 \ln \left[\frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right] \\
&= 2 \ln \left[\sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \right].
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Wegen Gl.(7.19) ergibt sich daher für C_{PV} :

$$\begin{aligned} C_{\text{PV}} &= 4 e^{\frac{B_{\text{PV}}}{2}} \frac{m_{\text{ph}}}{\sqrt{u_{\text{R}}}} \\ &= 4 \frac{\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4})} \sqrt{\frac{2 m_{\text{ph}}^2}{u_{\text{R}}}}, \end{aligned} \quad (8.27)$$

was mit C übereinstimmt (vgl. Gl.(8.2)).

Die Ergebnisse der Rechnung stimmen also in beiden Regularisierungsschemata bis zur betrachteten Ordnung in u_{R} überein. Dies sollte auch so sein, denn letztlich sollte die Energieaufspaltung E_{0a} der ϕ^4 -Theorie in der gebrochenen Phase bei endlichem Volumen unabhängig vom verwendeten Regularisierungsschema sein, da die Regularisierung nur eine gewisse Rechentechnik darstellt und der oder die Regularisierungsparameter am Ende der Rechnung, nach vollzogener Renormierung, wieder entfernt werden müssen. Ein unterschiedliches Resultat könnte dann entstehen, wenn im Verlauf der Rechnung sowohl Ultraviolett- als auch Infrarot-Divergenzen auftreten. Wie am Ende von Kapitel 3 angeführt, werden durch die Pauli–Villars–Regularisierung nur die UV–Divergenzen beseitigt, während die dimensionale Regularisierung hinsichtlich IR– und UV–Divergenzen nicht unterscheidet. Die Übereinstimmung der Resultate beider Rechnungen zeigt nun, daß dieser Unterschied beider Regularisierungsschemata nicht in Erscheinung tritt; Infrarot–Divergenzen treten in der Rechnung nicht auf. Der andere Grund für ein unterschiedliches Ergebnis wäre, wie oben erwähnt, daß die dimensionale Regularisierung möglicherweise nicht nur Divergenzen in dem Sinne aus der Theorie entfernt, daß diese auch nicht beim kritischen Wert des Regularisierungsparameters auftreten (z.B. keine Divergenz für $\varepsilon = 3 - d = 0$ in der ε –Entwicklung), sondern auch veränderte (endliche) Ergebnisse liefert; wie der Vergleich mit der Pauli–Villars–Regularisierung zeigt ist auch dies nicht der Fall.

Kapitel 9

Überlegungen zur Regularisierung der Determinanten

In Kapitel 6.1 war als Regularisierungsvorschrift bei der Determinantenberechnung die Ersetzung (vgl. Gl.(6.30)):

$$\mathrm{Tr} \ln \frac{M}{M_0} \longrightarrow \mathrm{Tr} \ln \frac{M}{M_0} - \mathrm{Tr} \ln \frac{M + \Lambda^2}{M_0 + \Lambda^2} \quad (9.1)$$

(die Nullmode von M sowie das zu deren Behandlung verwendete μ^2 werden hier der Übersichtlichkeit halber unterdrückt) als sinnvoll eingeführt worden. Das Ergebnis für die Energieaufspaltung E_{0a} (Kapitel 7) sowie der Vergleich mit der dimensionalen Regularisierung (Kapitel 8) rechtfertigen im nachhinein diese Vorgehensweise. Dennoch wäre es wünschenswert, die Ersetzung (9.1) auch direkt aus einer im Sinne einer Pauli–Villars–Regularisierung modifizierten Lagrange–Dichte zu gewinnen. Ausgehend von der ursprünglichen Lagrange–Dichte \mathcal{L}_φ für das φ –Feld (vgl. Gl.(2.8)),

$$\mathcal{L}_\varphi = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{m_0^2}{2} \varphi^2 + \frac{\sqrt{3 g_0} m_0}{3!} \varphi^3 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \quad (9.2)$$

bzw. äquivalent dazu

$$\mathcal{L}'_\varphi = \frac{1}{2} \varphi (\square_E + m_0^2) \varphi + \frac{\sqrt{3 g_0} m_0}{3!} \varphi^3 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4, \quad \square_E = -(\partial_0^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2) \quad (9.3)$$

(\mathcal{L}_φ und \mathcal{L}'_φ unterscheiden sich nur um eine totale Divergenz), ist es naheliegend unter Beachtung der Pauli–Villars–Regularisierung (vgl. die Beziehung (3.10))

$$\frac{1}{p^2 + m_0^2} \longrightarrow \frac{1}{p^2 + m_0^2} - \frac{1}{p^2 + \Lambda^2}, \quad (9.4)$$

was im Ortsraum die Ersetzung

$$(\square_E + m_0^2)^{-1} \longrightarrow (\square_E + m_0^2)^{-1} - (\square_E + \Lambda^2)^{-1} = \frac{\Lambda^2 - m_0^2}{(\square_E + m_0^2)(\square_E + \Lambda^2)} \quad (9.5)$$

$$\implies M_0 = (\square_E + m_0^2) \longrightarrow M_{0,\mathrm{PV}} := \frac{(\square_E + m_0^2)(\square_E + \Lambda^2)}{\Lambda^2 - m_0^2} \quad (9.6)$$

(zur Definition von M_0 vgl. auch die Beziehungen (6.1) und (6.4)) bedeutet, folgende modifizierte Lagrange–Dichte \mathcal{L}_{PV} zu betrachten:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{PV}} &= \frac{1}{2} \varphi \frac{(\square_E + m_0^2)(\square_E + \Lambda^2)}{\Lambda^2 - m_0^2} \varphi + \frac{\sqrt{3 g_0} m_0}{3!} \varphi^3 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4, \\ &= \frac{1}{2} \varphi M_{0,\text{PV}} \varphi + \frac{\sqrt{3 g_0} m_0}{3!} \varphi^3 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4.\end{aligned}\quad (9.7)$$

Die Operatoren M und M_0 in der Vorschrift (9.1) (vgl. auch die Definitionen (6.1)–(6.4)) sind, wie in Kapitel 5 gezeigt, die Fluktuationssoperatoren (zur zweiten funktionalen Ableitung von $S[\phi_0]$ gehörige Operatoren) der Wirkung $S[\phi_0]$ zu bestimmten Lösungen der Bewegungsgleichung für ϕ_0 (Gl.(5.7)), und zwar M_0 zur Lösung $\phi_0 = v_0$ oder $\phi_0 = -v_0$, $v_0 = \sqrt{3 m_0^2 / g_0}$ (bzw. $\varphi = \phi_0 - v_0 = 0$ oder $\varphi = -2 v_0$, man beachte Gl.(2.5)), also zu den Potentialminima, und M zur Kink–Lösung $\phi_0 = v_0 \tanh[\frac{m_0}{2}(x^0 - a)]$ (bzw. $\varphi = (\tanh[\frac{m_0}{2}(x^0 - a)] - 1)v_0$).

Um die modifizierten Fluktuationssoperatoren, die der Lagrange–Dichte \mathcal{L}_{PV} entsprechen, zu bekommen, ist daher die Wirkung $S_{\text{PV}} = \int d^3x \mathcal{L}_{\text{PV}}$ um entsprechende Lösungen der neuen, aus \mathcal{L}_{PV} resultierenden Bewegungsgleichung zu entwickeln. Dazu seien zunächst die niedrigsten Funktionalableitungen (vorerst allgemein an der Stelle φ) ausgerechnet:

$$\begin{aligned}S_{\text{PV}}[\varphi] &= \int d^3x \mathcal{L}_{\text{PV}} \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \varphi M_{0,\text{PV}} \varphi + \frac{\sqrt{3 g_0} m_0}{3!} \varphi^3 + \frac{g_0}{4!} \varphi^4 \right\}, \\ \int d^3x \frac{\delta S_{\text{PV}}[\varphi]}{\delta \varphi(x)} \eta(x) &= \int d^3x \left\{ M_{0,\text{PV}} \varphi + \frac{\sqrt{3 g_0} m_0}{2} \varphi^2 + \frac{g_0}{3!} \varphi^3 \right\} \eta(x), \quad (9.8) \\ \int d^3x \eta(x) \frac{\delta^2 S_{\text{PV}}[\varphi]}{\delta \varphi(x)^2} \eta(x) &= \int d^3x \eta(x) \left\{ M_{0,\text{PV}} + \sqrt{3 g_0} m_0 \varphi + \frac{g_0}{2} \varphi^2 \right\} \eta(x).\end{aligned}\quad (9.9)$$

Daher ergibt sich als neue Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_{\text{PV}}[\varphi]}{\delta \varphi(x)} &= 0 \\ \Rightarrow M_{0,\text{PV}} \varphi + \frac{\sqrt{3 g_0} m_0}{2} \varphi^2 + \frac{g_0}{3!} \varphi^3 &= 0\end{aligned}\quad (9.10)$$

und als Fluktuationssoperator M_{PV} an der Stelle φ

$$M_{\text{PV}}(\varphi) = M_{0,\text{PV}} + \sqrt{3 g_0} m_0 \varphi + \frac{g_0}{2} \varphi^2, \quad (9.11)$$

so daß man als Entwicklung von S_{PV} um eine Lösung φ_c der Bewegungsgleichung (9.10) bekommt:

$$S_{\text{PV}}[\varphi_c + \eta] = S_{\text{PV}}[\varphi_c] + \frac{1}{2} \int d^3x \eta(x) M_{\text{PV}}(\varphi_c) \eta(x) + \mathcal{O}(\eta^3). \quad (9.12)$$

Die den Operatoren M und M_0 entsprechenden modifizierten Operatoren werden einzeln berechnet:

- Modifikation von M_0 :

Um einen dem Operator M_0 in Pauli–Villars–Regularisierung entsprechenden Operator M_{PV}^{c1} zu bekommen, ist zunächst eine der Lösung $\varphi_{0c}^{(1)} = 0$ der ursprünglichen Bewegungsgleichung entsprechende Lösung von Gl.(9.10) zu suchen. Man macht störungstheoretisch den Ansatz

$$\varphi_c^{(1)} = \varphi_{0c}^{(1)} + \frac{1}{\Lambda} \varphi_{01}^{(1)} + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_{02}^{(1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right). \quad (9.13)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung (9.10) liefert

$$\frac{1}{\Lambda} M_{0,\text{PV}} \varphi_{01}^{(1)} + \frac{1}{\Lambda^2} \left(M_{0,\text{PV}} \varphi_{02}^{(1)} + \sqrt{3 g_0} m_0 (\varphi_{01}^{(1)})^2 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) = 0. \quad (9.14)$$

Weiter gilt, indem man $M_{0,\text{PV}}$ nach Potenzen von $\frac{1}{\Lambda}$ entwickelt,

$$\begin{aligned} M_{0,\text{PV}} &= \frac{(\square_E + m_0^2)(\square_E + \Lambda^2)}{\Lambda^2 - m_0^2} \\ &= \frac{(\square_E + m_0^2) \left(1 + \frac{\square_E}{\Lambda^2}\right)}{1 - \frac{m_0^2}{\Lambda^2}} \\ &= (\square_E + m_0^2) \left(1 + \frac{\square_E + m_0^2}{\Lambda^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right) \\ &= (\square_E + m_0^2) + \frac{(\square_E + m_0^2)^2}{\Lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right) \\ &= M_0 + \frac{M_0^2}{\Lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right), \end{aligned} \quad (9.15)$$

und dies in Gl.(9.14) benutzt

$$\frac{1}{\Lambda} M_0 \varphi_{01}^{(1)} + \frac{1}{\Lambda^2} \left(M_0 \varphi_{02}^{(1)} + \sqrt{3 g_0} m_0 (\varphi_{01}^{(1)})^2 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) = 0 \quad (9.16)$$

$$\implies M_0 \varphi_{01}^{(1)} = 0$$

$$\implies (-\partial_0^2 + m_0^2) \varphi_{01}^{(1)} = 0$$

($\varphi_{01}^{(1)}$ und $\varphi_{02}^{(1)}$ sollen der Einfachheit halber nur von x^0 und nicht von x^1 und x^2 abhängen; der allgemeine Fall lässt sich mit Hilfe einer Fourier–Zerlegung behandeln und liefert keine wesentlich anderen Ergebnisse)

$$\begin{aligned} \implies \varphi_{01}^{(1)} &= C_1 e^{m_0 x^0} + C_2 e^{-m_0 x^0}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C} \\ \implies \varphi_{01}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (9.17)$$

da $\varphi_{01}^{(1)}$ für $x^0 \rightarrow \pm \infty$ beschränkt bleiben soll. Aus Gl.(9.16) folgt dann auch für $\varphi_{02}^{(1)}$

$$\begin{aligned} M_0 \varphi_{02}^{(1)} &= 0 \\ \implies \varphi_{02}^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (9.18)$$

genau wie für $\varphi_{01}^{(1)}$, so daß man

$$\varphi_c^{(1)} = O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \quad (9.19)$$

erhält. Mit Gl.(9.11) ergibt das schließlich für M_{PV}^{c1}

$$\begin{aligned} M_{PV}^{c1} &= M_{PV}(\varphi_c^{(1)}) \\ &= M_{0,PV} + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\ &= M_0 + \frac{M_0^2}{\Lambda^2} + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right). \end{aligned} \quad (9.20)$$

Nimmt man als ursprüngliche Lösung der unregularisierten Theorie das andere Potentialminimum, nämlich $\varphi_{0c}^{(2)} = -2v_0$, und macht man erneut den Ansatz

$$\varphi_c^{(2)} = \varphi_{0c}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda} \varphi_{01}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_{02}^{(2)} + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right), \quad (9.21)$$

ergibt die Bewegungsgleichung (9.10) mit Hilfe von Gl.(9.15)

$$\begin{aligned} M_{0,PV} \left(\varphi_{0c}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda} \varphi_{01}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_{02}^{(2)} \right) + \frac{\sqrt{3g_0} m_0}{2} \left(\varphi_{0c}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda} \varphi_{01}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_{02}^{(2)} \right)^2 \\ + \frac{g_0}{3!} \left(\varphi_{0c}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda} \varphi_{01}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_{02}^{(2)} \right)^3 + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) = 0 \\ \implies \left(M_0 + \frac{M_0^2}{\Lambda^2} \right) \left(\varphi_{0c}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda} \varphi_{01}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_{02}^{(2)} \right) + \frac{\sqrt{3g_0} m_0}{2} \left(\varphi_{0c}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda} \varphi_{01}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_{02}^{(2)} \right)^2 \\ + \frac{g_0}{3!} \left(\varphi_{0c}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda} \varphi_{01}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_{02}^{(2)} \right)^3 + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) = 0 \\ \implies \frac{1}{\Lambda} \left(M_0 \varphi_{01}^{(2)} + \sqrt{3g_0} m_0 \varphi_{0c}^{(2)} \varphi_{01}^{(2)} + \frac{g_0}{2} (\varphi_{0c}^{(2)})^2 \varphi_{01}^{(2)} \right) \\ + \frac{1}{\Lambda^2} \left(M_0^2 \varphi_{0c}^{(2)} + M_0 \varphi_{02}^{(2)} + \frac{\sqrt{3g_0} m_0}{2} (\varphi_{01}^{(2)})^2 + \sqrt{3g_0} m_0 \varphi_{0c}^{(2)} \varphi_{02}^{(2)} \right. \\ \left. + \frac{g_0}{2} \varphi_{0c}^{(2)} (\varphi_{01}^{(2)})^2 + \frac{g_0}{2} (\varphi_{0c}^{(2)})^2 \varphi_{02}^{(2)} \right) + O\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) = 0. \end{aligned}$$

Setzt man hier $\varphi_{0c}^{(2)} = -2v_0$ ein und betrachtet die verschiedenen Ordnungen von $\frac{1}{\Lambda}$ getrennt, so findet man ($\varphi_{01}^{(2)}$ und $\varphi_{02}^{(2)}$ werden wieder als nur von x^0 abhängig angenommen)

$$\begin{aligned} M_0 \varphi_{01}^{(2)} &= 0 \\ \implies \varphi_{01}^{(2)} &= 0 \quad (\text{s.o.}) \quad (9.22) \\ \implies M_0^2 \varphi_{0c}^{(2)} + M_0 \varphi_{02}^{(2)} &= 0 \\ \implies -\partial_0^2 \varphi_{02}^{(2)} + m_0^2 \varphi_{02}^{(2)} - 2 m_0^4 v_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \varphi_{02}^{(2)} &= C_1 e^{m_0 x^0} + C_2 e^{-m_0 x^0} + 2 m_0^2 v_0 \\ \implies \varphi_{02}^{(2)} &= 2 m_0^2 v_0, \end{aligned} \quad (9.23)$$

da $\varphi_{02}^{(2)}$ für $x^0 \rightarrow \pm \infty$ beschränkt bleiben sollte. Das ergibt als Fluktuationsoperator M_{PV}^{c2} mit Gl.(9.11) und Gl.(9.15)

$$\begin{aligned} M_{\text{PV}}^{c2} &= M_{\text{PV}}(\varphi_c^{(2)}) \\ &= M_{0,\text{PV}} + \sqrt{3 g_0} m_0 \left(\varphi_{0c}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_{02}^{(2)} \right) + \frac{g_0}{2} \left(\varphi_{0c}^{(2)} + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_{02}^{(2)} \right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\ &= M_0 + \frac{M_0^2}{\Lambda^2} + \frac{1}{\Lambda^2} \left(2 m_0^3 \sqrt{3 g_0} v_0 + g_0 \varphi_{0c}^{(2)} \varphi_{02}^{(2)} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\ &= M_0 + \frac{M_0^2}{\Lambda^2} + \frac{1}{\Lambda^2} \left(6 m_0^4 - 12 m_0^4 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\ &= M_0 + \frac{M_0^2 - 6 m_0^4}{\Lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right). \end{aligned} \quad (9.24)$$

- Modifikation von $M = \square_E + m_0^2 - \frac{3}{2} \cosh^{-2} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right]$ (vgl. auch die Definitionen (6.1) und (6.3)):

Hier ist zunächst eine der (verschobenen) Kink-Lösung

$$\varphi_{0c} = v_0 \left(\tanh \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] - 1 \right) \quad (9.25)$$

entsprechende Lösung der Bewegungsgleichung (9.10) zu suchen. Wiederum macht man perturbativ den Ansatz

$$\varphi_c = \varphi_{0c} + \frac{1}{\Lambda} \varphi_1 + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right), \quad (9.26)$$

wobei φ_1 und φ_2 erneut nur von x^0 und nicht von x^1 und x^2 abhängen sollen, und bekommt, indem man dies in Gl.(9.10) einsetzt, da φ_{0c} , wie man einfach nachrechnet, erwartungsgemäß die Gleichung

$$\square_E \varphi_{0c} + m_0^2 \varphi_{0c} + \frac{\sqrt{3 g_0} m_0}{2} \varphi_{0c}^2 + \frac{g_0}{3!} \varphi_{0c}^3 = 0 \quad (9.27)$$

erfüllt,

$$\begin{aligned} &\square_E \varphi_{0c} + m_0^2 \varphi_{0c} + \frac{\sqrt{3 g_0} m_0}{2} \varphi_{0c}^2 + \frac{g_0}{3!} \varphi_{0c}^3 \\ &+ \frac{1}{\Lambda} \left(\square_E \varphi_1 + m_0^2 \varphi_1 + \sqrt{3 g_0} m_0 \varphi_{0c} \varphi_1 + \frac{g_0}{2} \varphi_{0c}^2 \varphi_1 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) = 0 \\ \implies &\left\{ -\partial_0^2 - \frac{m_0^2}{2} + \frac{3}{2} m_0^2 \tanh^2 \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] \right\} \varphi_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies Q\varphi_1 &= 0, \quad Q = -\partial_0^2 + m_0^2 - \frac{3}{2} \cosh^{-2} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] \\ &\quad (\text{vgl. Definition (6.3)}) \\ \implies \varphi_1 &= C \partial_0 \varphi_{oc}, \quad C \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (9.28)$$

denn der Operator Q besitzt, wie in Kapitel 5 angeführt (vgl. die Bemerkung nach (5.26), Q stimmt auf dem Raum der nur x^0 -abhängigen Funktionen mit dem dort diskutierten M überein) nur eine Nullmode, die für $x^0 \rightarrow \pm \infty$ beschränkt bleibt, nämlich $\partial_0 \varphi_{oc}$. Das bedeutet, daß die niedrigste Korrektur zur Lösung φ_{oc} gerade $\frac{C}{\Lambda} \partial_0 \varphi_{oc}$ ist, was lediglich eine Verschiebung der Funktion φ_{oc} längs der x^0 -Achse bedeutet. Da dies bereits durch den Parameter a in φ_{oc} reguliert wird, ist damit der Ansatz

$$\varphi = \varphi_{oc} + \frac{1}{\Lambda^2} \varphi_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \quad (9.29)$$

für eine Lösung von Gl.(9.10) gerechtfertigt. Setzt man den Ansatz (9.29) in Gl.(9.10) ein, ergibt sich nach kurzer Rechnung als Gleichung für φ_2 :

$$\left\{ \square_E + m_0^2 + \sqrt{3 g_0} m_0 \varphi_{oc} + \frac{g_0}{2} \varphi_{oc}^2 \right\} \varphi_2 + (\square_E + m_0^2)^2 \varphi_{oc} = 0, \quad (9.30)$$

oder, indem man φ_{oc} einsetzt und die Definitionen von M und M_0 beachtet,

$$M \varphi_2 + M_0^2 \varphi_{oc} = 0. \quad (9.31)$$

Mit Gl.(9.11) bekommt man also für den dem Operator M entsprechenden Operator M_{PV}^K , wenn man den Ansatz (9.29) einsetzt und Gl.(9.15) beachtet:

$$\begin{aligned} M_{PV}^K &= M_{PV}(\varphi_c) \\ &= M_{0,PV} + \sqrt{3 g_0} m_0 \varphi_c + \frac{g_0}{2} \varphi_c^2 \\ &= M_0 + \frac{M_0^2}{\Lambda^2} + \frac{g_0}{\Lambda^2} \phi_c \varphi_2 - \frac{3}{2} m_0^2 \cosh^{-2} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\ &= M + \frac{1}{\Lambda^2} (g_0 \phi_c \varphi_2 + M_0^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\ &\quad \left(\phi_c = v_0 \tanh \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right], \quad v_0 = \sqrt{3 m_0^2 / g_0} \right). \end{aligned} \quad (9.32)$$

Um die Regularisierung (9.1) aus der Lagrange-Dichte \mathcal{L}_{PV} (vgl. Gl.(9.7)) zu begründen, wäre daher

$$\text{Tr} \ln \frac{M_{PV}^K}{M_{PV}^{ci}} = \text{Tr} \ln \frac{M}{M_0} - \text{Tr} \ln \frac{M + \Lambda^2}{M_0 + \Lambda^2}, \quad i = 1 \text{ oder } 2 \quad (9.33)$$

zu fordern. Zunächst wird der Fall $i = 1$ untersucht:

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \frac{M_{PV}^K}{M_{PV}^{ci}} &= \text{Tr} \ln \left[\frac{M}{M_0} \left(\frac{1 + \frac{M_0}{\Lambda^2}}{1 + \frac{M}{\Lambda^2}} \right) \right] \\ &= \text{Tr} \ln \frac{M}{M_0} + \text{Tr} \ln \left(1 + \frac{M_0}{\Lambda^2} - \frac{M}{\Lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right) \right) \\ &= \text{Tr} \ln \frac{M}{M_0} - \frac{1}{\Lambda^2} \text{Tr} (M - M_0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right). \end{aligned} \quad (9.34)$$

Indem man das Ergebnis (9.20) für M_{PV}^{c1} einsetzt erhält man einerseits

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \ln M_{\text{PV}}^K &= \text{Tr} \ln M - \text{Tr} \ln M_0 - \frac{1}{\Lambda^2} \text{Tr} (M - M_0) + \text{Tr} \ln M_{\text{PV}}^{c1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^4}\right) \\
&= \text{Tr} \ln M - \text{Tr} \ln M_0 - \frac{1}{\Lambda^2} \text{Tr} (M - M_0) + \text{Tr} \ln \left[M_0 \left(1 + \frac{M_0}{\Lambda^2} \right) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \\
&= \text{Tr} \ln M - \frac{1}{\Lambda^2} \text{Tr} (M - 2M_0) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right), \tag{9.35}
\end{aligned}$$

andererseits folgt mit dem Resultat (9.32) für M_{PV}^K

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \ln M_{\text{PV}}^K &= \text{Tr} \ln \left[M \left(1 + \frac{M^{-1}}{\Lambda^2} (g_0 \phi_c \varphi_2 + M_0^2) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \right] \\
&= \text{Tr} \ln M + \frac{1}{\Lambda^2} \text{Tr} \left[M^{-1} (g_0 \phi_c \varphi_2 + M_0^2) \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right), \tag{9.36}
\end{aligned}$$

das heißt es sollte gelten (Gln.(9.35) und (9.36)):

$$\text{Tr} \left[M^{-1} (g_0 \phi_c \varphi_2 + M_0^2) \right] = -\text{Tr} (M - 2M_0) \tag{9.37}$$

Hinreichend für Gl.(9.37) wäre demnach

$$\begin{aligned}
M^{-1} (g_0 \phi_c \varphi_2 + M_0^2) &= -(M - 2M_0) \tag{9.38} \\
\iff g_0 \phi_c \varphi_2 &= -\left(M^2 - 2M M_0 + M_0^2\right) \\
&= -(M - M_0)^2 \\
&= -\frac{9}{4} m_0^4 \cosh^{-4} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right], \tag{9.39}
\end{aligned}$$

also falls

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &:= -\frac{9}{4} m_0^4 \frac{\cosh^{-4} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right]}{g_0 \phi_c} \\
&= -\frac{9}{4} \frac{m_0^4}{g_0} \frac{\cosh^{-4} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right]}{v_0 \tanh \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right]} \tag{9.40}
\end{aligned}$$

eine Lösung der Gleichung (9.31) wäre:

$$M \varphi_2 + M_0^2 \varphi_{oc} = 0, \quad \varphi_{oc} = v_0 \left(\tanh \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] - 1 \right). \tag{9.41}$$

Eine asymptotische Betrachtung zeigt nun jedoch, daß das in Gl.(9.40) definierte φ_2 die Gl.(9.41) nicht erfüllen kann. Das φ_2 aus Gl.(9.40) verschwindet nämlich für $x^0 \rightarrow \pm \infty$ offenbar wie $\cosh^{-4} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right]$. Um die asymptotische Form von Gl.(9.41) zu erhalten, wird erst $M_0^2 \varphi_{oc}$ berechnet ($u := \frac{m_0}{2} (x^0 - a)$):

$$\begin{aligned}
M_0^2 \varphi_{oc} &= (-\partial_0^2 + m_0^2)^2 \left(v_0 \tanh \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] - v_0 \right) \\
&= v_0 m_0^4 \frac{2 \sinh u \cosh^2 u - \frac{3}{2} \sinh^3 u + \sinh u \cosh^4 u - \cosh^5 u}{\cosh^5 u} \\
&\rightarrow \begin{cases} 0, & \text{für } x^0 \rightarrow +\infty \\ -2 v_0 m_0^4, & \text{für } x^0 \rightarrow -\infty. \end{cases} \tag{9.42}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} M &= \square_E + m_0^2 - \frac{3}{2} m_0^2 \cosh^{-2} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] \\ &\rightarrow \square_E + m_0^2 \end{aligned}$$

für $x^0 \rightarrow \pm \infty$, resultieren daher folgende asymptotische Formen der Gleichung (9.41):

$$(-\partial_0^2 + m_0^2) \varphi_2 = 0 \quad \text{für } x^0 \rightarrow +\infty, \quad (9.43)$$

$$(-\partial_0^2 + m_0^2) \varphi_2 - 2 v_0 m_0^4 = 0 \quad \text{für } x^0 \rightarrow -\infty. \quad (9.44)$$

Die allgemeine Lösung von Gl.(9.43) ist

$$\varphi_2 = C_1 e^{m_0 x^0} + C_2 e^{-m_0 x^0}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \quad (9.45)$$

die von Gl.(9.44)

$$\varphi_2 = C_1 e^{m_0 x^0} + C_2 e^{-m_0 x^0} + 2 v_0 m_0^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}. \quad (9.46)$$

Die Lösungen von Gl.(9.41) gehen also für $x^0 \rightarrow +\infty$ höchstens wie $e^{-m_0 x^0}$ gegen 0, wohingegen $\cosh^{-4} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right]$ wie $e^{-2 m_0 x^0}$ verschwindet. Für $x^0 \rightarrow -\infty$ geht eine Lösung von Gl.(9.41) gemäß der Beziehung (9.46) höchstens gegen $2 v_0 m_0^2$, dagegen verschwindet $\cosh^{-4} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right]$ in diesem Grenzfall. Das zeigt, daß

$$\varphi_2 = - \frac{(M - M_0)^2}{g_0 \phi_c}$$

die Gleichung (9.41) nicht erfüllt; die Beziehung (9.38) besteht also nicht.

Für den Fall $i = 2$ (Verwendung von M_{PV}^{c2}) ergibt sich (vgl. Gln.(9.33), (9.34)):

$$\text{Tr} \ln \frac{M_{\text{PV}}^K}{M_{\text{PV}}^{c2}} = \text{Tr} \ln \frac{M}{M_0} - \frac{1}{\Lambda^2} \text{Tr} (M - M_0) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Lambda^4} \right). \quad (9.47)$$

Einsetzen der Beziehung (9.24) für M_{PV}^{c2} ergibt

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln M_{\text{PV}}^K &= \text{Tr} \ln M - \text{Tr} \ln M_0 - \frac{1}{\Lambda^2} \text{Tr} (M - M_0) + \text{Tr} \ln M_{\text{PV}}^{c2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Lambda^4} \right) \\ &= \text{Tr} \ln M - \frac{1}{\Lambda^2} \text{Tr} (M - 2 M_0) - \text{Tr} \frac{6 m_0^4 M_0^{-1}}{\Lambda^2} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Lambda^3} \right). \end{aligned} \quad (9.48)$$

Daher sollte gelten (vgl. Gl.(9.36)):

$$\text{Tr} \left[M^{-1} (g_0 \phi_c \varphi_2 + M_0^2) \right] = -\text{Tr} (M - 2 M_0) - \text{Tr} \left[6 m_0^4 M_0^{-1} \right]. \quad (9.49)$$

Hinreichend hierfür ist

$$M^{-1} (g_0 \phi_c \varphi_2 + M_0^2) = - (M - 2 M_0) - 6 m_0^4 M_0^{-1} \quad (9.50)$$

$$\iff g_0 \phi_c \varphi_2 = - (M - M_0)^2 - 6 m_0^4 M M_0^{-1},$$

oder, indem man die Definitionen von M und M_0 einsetzt,

$$g_0 \phi_c \varphi_2 = -\frac{9}{4} m_0^4 \cosh^{-4} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] - 6 m_0^4 \left(1 - \frac{\frac{3}{2} m_0^2 \cosh^{-2} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right]}{M_0} \right).$$

Diese Operatorgleichung ist von der Struktur

$$M_0^{-1} = F(x^0), \quad (9.51)$$

mit einer gewissen Funktion F . Das heißt es sollte gelten:

$$M_0^{-1} h(x^0) = F(x^0) h(x^0), \quad (9.52)$$

mit einer beliebigen Funktion h (die höchstens im Unendlichen hinreichend stark abfallen sollte). Dies ist aber nicht möglich, denn Anwendung des Operators $M_0 = \square_E + m_0^2$ auf beiden Seiten von Gl.(9.52) liefert eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für h , die sicher nicht für beliebige h erfüllt ist, sondern nur für einen zweidimensionalen affinen Unterraum des Raumes aller (genügend oft differenzierbaren, hinreichend stark im Unendlichen abfallenden) Funktionen. Also gilt auch die Beziehung (9.50) nicht.

Nun sind die Beziehungen (9.38) und (9.50) nur hinreichend, aber nicht notwendig, damit Gl.(9.37) bzw. Gl.(9.49) gilt. Um diese Spurgleichungen zu verifizieren, sollte jedoch zunächst φ_2 bekannt sein, also eine geeignete Lösung von

$$M \varphi_2 + M_0^2 \varphi_{0c} = 0. \quad (9.53)$$

Nach einiger Anstrengung gelingt es tatsächlich, die allgemeine Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung anzugeben (dabei wird φ_2 wieder als nur von x^0 , und nicht von x^1 und x^2 abhängig angenommen):

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & -m_0^2 v_0 \left\{ \sinh \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] \cosh \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] + \tanh \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] \right. \\ & \left. + \frac{3 m_0}{4} (x^0 - a) + \cosh^4 \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] \right\} \cosh^{-2} \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] \\ & + m_0^2 v_0 \left\{ \frac{A_1}{\cosh^2 \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right]} + A_2 \left(\frac{3}{16} \frac{m_0 (x^0 - a)}{\cosh^2 \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right]} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{8} \tanh \left[\frac{m_0}{2} (x^0 - a) \right] + \frac{1}{8} \sinh \left[m_0 (x^0 - a) \right] \right) \right\}, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (9.54)$$

A_1 und A_2 sollten nun so gewählt werden, daß φ_2 für $x^0 \rightarrow \pm \infty$ endlich bleibt. Unglücklicherweise ist dies nicht möglich, wie eine kurze Überlegung zeigt; das heißt A_2 kann höchstens so gewählt werden, daß φ_2 für $x^0 \rightarrow +\infty$ oder für $x^0 \rightarrow -\infty$ endlich bleibt, aber nicht für $x^0 \rightarrow \pm \infty$ (die Wahl von A_1 spielt für das asymptotische Verhalten von φ_2 offensichtlich keine Rolle). Die Gleichung (9.53) besitzt daher keine normierbare Lösung.

Diese Schwierigkeiten zeigen, daß der plausible Versuch, die Lagrange-Dichte wie in Gl.(9.7) zu modifizieren, wohl nicht geeignet ist, die Regularisierungsvorschrift (9.1) zu gewinnen. Um diese dennoch zu bekommen, wird man möglicherweise Zusatzfelder in die

Lagrange–Dichte aufnehmen müssen, allerdings nicht wie in Kapitel 3 (vgl. S.12 mit dem Hinweis auf [11]) bosonische (diese liefern nur die Propagatorersetzung wie in der Beziehung (3.1) aus Kapitel 3), sondern fermionische, deren Behandlung bei der Pauli–Villars–Regularisierung eine andere ist, indem nicht die einzelnen Fermion–Propagatoren ersetzt werden, sondern ganze Fermion–Schleifen zu modifizieren sind [24, Seite 411 ff.]. Ob dies so möglich ist, bleibt noch ein offenes Problem.

Anhang A

Klassische Wirkung S_c der Kink–Lösung ϕ_c

Es soll die klassische Wirkung S_c der Kink–Lösung ϕ_c in $d=3$ Dimensionen bei endlichem (räumlichem) Volumen L^2 und unendlicher Zeitausdehnung berechnet werden. Es gilt:

$$\phi_c = \sqrt{\frac{3 m_0^2}{g_0}} \tanh\left[\frac{1}{2} m_0 (x^0 - a)\right] \quad (\text{A.1})$$

$$S_c = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_c \partial^\mu \phi_c + V(\phi_c) \right\} \quad (\text{A.2})$$

Wegen des Verschwindens von $\phi_c \partial_0 \phi_c \sim \frac{\tanh x^0}{\cosh^2 x^0}$ für $x^0 \rightarrow \pm \infty$ kann partiell integriert werden:

$$\begin{aligned} S_c &= L^2 \int dx^0 \left\{ -\frac{1}{2} \phi_c \partial_0^2 \phi_c + V(\phi_c) \right\} \\ &= L^2 \int dx^0 \left\{ -\frac{1}{2} \phi_c V'(\phi_c) + V(\phi_c) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

denn ϕ_c erfüllt die Bewegungsgleichung (5.7)

$$-\partial_0^2 \phi_c + V'(\phi_c) = 0$$

$$\implies \partial_0^2 \phi_c = V'(\phi_c).$$

Setzt man das Potential $V(\phi_0)$ ein (vgl. Gl.(2.2)), und beachtet $-2\hat{m}_0^2 = m_0^2$ (vgl. Definition (2.7)),

$$V(\phi_c) = -\frac{m_0^2}{4} \phi_c^2 + \frac{g_0}{4!} \phi_c^4 + \frac{3}{8} \frac{m_0^4}{g_0},$$

ergibt sich

$$S_c = L^2 \int dx^0 \left\{ \frac{m_0^2}{4} \phi_c^2 - \frac{g_0}{12} \phi_c^4 - \frac{m_0^2}{4} \phi_c^2 + \frac{g_0}{24} \phi_c^4 + \frac{3}{8} \frac{m_0^4}{g_0} \right\} \implies$$

$$\begin{aligned}
S_c &= L^2 \int dx^0 \left\{ -\frac{g_0}{4!} \phi_c^4 + \frac{3}{8} \frac{m_0^4}{g_0} \right\} \\
&= \frac{3}{8} \frac{m_0^4}{g_0} L^2 \int dx^0 \left\{ 1 - \tanh^4 \left[\frac{1}{2} m_0 (x^0 - a) \right] \right\} \\
&= \frac{3}{4} \frac{m_0^3}{g_0} L^2 \int dx \left\{ 1 - \tanh^4 x \right\} \\
&= \frac{3}{4} \frac{m_0^3}{g_0} L^2 \left[\tanh x + \frac{1}{3} \tanh^3 x \right] \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \frac{3}{4} \frac{m_0^3}{g_0} L^2 \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} \right) \\
&= 2 \frac{m_0^3}{g_0} L^2. \tag{A.4}
\end{aligned}$$

Anhang B

Zahl der Anordnungen einer n –Kink–Konfiguration

In Kapitel 5 war bei der Berücksichtigung von Multikink–Konfigurationen folgende Formel verwendet worden:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt_1 \int_{-\frac{T}{2}}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{-\frac{T}{2}}^{t_{n-1}} dt_n = \frac{T^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}^{\neq 0}. \quad (\text{B.1})$$

Diese Beziehung soll nun bewiesen werden. Dazu kann zunächst die linke Seite von Gl.(B.1) durch die Substitution

$$(t'_1, t'_2, \dots, t'_n) = (t_1 + \frac{T}{2}, t_2 + \frac{T}{2}, \dots, t_n + \frac{T}{2}) \quad (\text{B.2})$$

in

$$\int_0^T dt'_1 \int_0^{t'_1 - \frac{T}{2} + \frac{T}{2}} dt'_2 \cdots \int_0^{t'_{n-1} - \frac{T}{2} + \frac{T}{2}} dt'_n = \int_0^T dt'_1 \int_0^{t'_1} dt'_2 \cdots \int_0^{t'_{n-1}} dt'_n$$

überführt werden, so daß Gl.(B.1) äquivalent zu (statt t'_1, \dots, t'_n wird wieder t_1, \dots, t_n geschrieben)

$$\int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n = \frac{T^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}^{\neq 0}, \quad (\text{B.3})$$

ist. In dieser Form soll die Behauptung mittels einer Induktion nach n bewiesen werden.

Induktionsanfang: $n = 1$

$$\int_0^T dt_1 = T = \frac{T^1}{1!}.$$

Induktionsvoraussetzung: Für $n - 1$ möge die Formel gelten ($n \geq 2$):

$$\int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} = \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (\text{B.4})$$

Induktionsschluß: $n - 1 \rightarrow n$ ($n \geq 2$)

Es mögen folgende Definitionen gelten:

$$F_n(T) := \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n, \quad (\text{B.5})$$

$$H_n(T) := \frac{T^n}{n!}. \quad (\text{B.6})$$

Offenbar gilt:

$$\begin{aligned} F_n(0) &= 0, \\ H_n(0) &= 0, \\ \implies H_n(0) &= F_n(0). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Weiter ergibt die Differentiation nach T

$$H'_n(T) = \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\text{B.8})$$

und

$$\begin{aligned} F'_n(T) &= \int_0^T dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \\ &= \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} \\ &= \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

nach Induktionsvoraussetzung (B.4). Daher erhält man

$$\begin{aligned} H'_n(T) &= F'_n(T) \\ \implies F_n(T) &= H_n(T) + C, \quad C \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

und wegen Gl. (B.7)

$$F_n(T) = H_n(T).$$

Das ist die Behauptung.

Anhang C

Einige nützliche Beziehungen zur Γ –Funktion

Im Verlauf der Rechnungen in Kapitel 6 werden einige Beziehungen zur Γ –Funktion benötigt, die hier der Übersichtlichkeit halber zusammengestellt werden sollen. Die Beweise für diese Formeln folgen aus den bekannten Eigenschaften der Γ –Funktion [20]:

$$\frac{1}{\Gamma(z)}|_{z=0} = 0, \quad (C.1)$$

$$\frac{d}{dz}|_{z=0} \frac{1}{\Gamma(z)} = 1, \quad (C.2)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}, \quad (C.3)$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\pi^{\frac{1}{2}}, \quad (C.4)$$

$$\Gamma'(1) = -\gamma, \quad \gamma : \text{Euler–Konstante}, \quad (C.5)$$

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = -\pi^{\frac{1}{2}}(\gamma + 2\ln 2), \quad (C.6)$$

$$\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi^{\frac{1}{2}}(\gamma + 2\ln 2 - 2), \quad (C.7)$$

$$\begin{aligned} \Gamma'(2) &= \frac{d}{dz}|_{z=0} \Gamma(z+2) \\ &= \frac{d}{dz}|_{z=0} \left\{ (z+1)\Gamma(z+1) \right\} \\ &= 1 + \Gamma'(1) \\ &= 1 - \gamma. \end{aligned} \quad (C.8)$$

Anhang D

Fehlerintegral

In Gl.(6.25) war das Fehlerintegral Φ eingeführt worden; diese Gleichung soll nun genauer begründet werden. Bekanntlich gilt:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (\text{D.1})$$

Weiterhin besteht die Beziehung [20, Kapitel II]:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-zt^2}}{1+t^2} dt = e^z [1 - \Phi(\sqrt{z})], \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (\text{D.2})$$

Damit gilt nun (Definition von $g(p)$ in Gl.(6.26)):

$$\begin{aligned} \tilde{K}_t(Q) &= 1 + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} + \int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) e^{-t(m_0^2 + p^2)} \\ &= 1 + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} - \frac{m_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left(\frac{2}{p^2 + m_0^2} + \frac{1}{p^2 + \frac{m_0^2}{4}} \right) e^{-t(m_0^2 + p^2)} \\ &= 1 + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} - \frac{m_0}{2\pi} e^{-t m_0^2} \left[\frac{2}{m_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \frac{e^{-t m_0^2 (p')^2}}{1 + (p')^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{m_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dp'' \frac{e^{-t \frac{m_0^2}{4} (p'')^2}}{1 + (p'')^2} \right] \\ &\quad \left(p' = \frac{p}{m_0}, \quad p'' = 2 \frac{p}{m_0} \right) \\ &= 1 + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} - \frac{e^{-t m_0^2}}{\pi} \left[\pi e^{t m_0^2} \left(1 - \Phi(m_0 \sqrt{t}) \right) + \pi e^{t \frac{m_0^2}{4}} \left(1 - \Phi\left(\frac{m_0}{2} \sqrt{t}\right) \right) \right] \\ &= 1 + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} - 1 + \Phi(m_0 \sqrt{t}) - e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} \Phi\left(\frac{m_0}{2} \sqrt{t}\right) \\ &= \Phi(m_0 \sqrt{t}) + e^{-\frac{3}{4}m_0^2 t} \Phi\left(\frac{m_0}{2} \sqrt{t}\right), \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

womit Gl.(6.25) begründet ist.

Anhang E

Berechnung einiger Integrale

In Kapitel 6 werden die Werte einiger Integrale verwendet. Die dort benutzten Ergebnisse sollen nun abgeleitet werden.

E.1 J_1 —Berechnung

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp g(p) (m_0^2 + p^2)^{1-z}, \quad g(p) = -\frac{m_0}{2\pi} \left(\frac{2}{p^2 + m_0^2} + \frac{1}{p^2 + \frac{m_0^2}{4}} \right) \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{m_0}{2\pi} \left\{ \frac{3}{p^2 + m_0^2} + \frac{\frac{3}{4}m_0^2}{(p^2 + m_0^2)^2} + \left(\frac{3}{4}m_0^2 \right)^2 \frac{1}{(p^2 + m_0^2)^2 (p^2 + \frac{m_0^2}{4})} \right\} \\
&\quad \times (m_0^2 + p^2)^{1-z} \\
&= -\frac{m_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \left\{ \frac{3}{(p^2 + m_0^2)^z} + \frac{\frac{3}{4}m_0^2}{(p^2 + m_0^2)^{z+1}} + \left(\frac{3}{4}m_0^2 \right)^2 \frac{1}{(p^2 + m_0^2)^{z+1} (p^2 + \frac{m_0^2}{4})} \right\}
\end{aligned}$$

Mit [12, Gl.(4.3.1) für $d = 1, \alpha = 0, \beta = s$]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp (p^2 + m_0^2)^{-s} = m_0^{1-2s} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \quad (\text{E.1})$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\frac{m_0}{2\pi} \left\{ 3 m_0^{1-2z} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} + \frac{3}{4} m_0^2 m_0^{-(1+2z)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z+1)} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{3}{4} m_0^2 \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2 + m_0^2)^{z+1} (p^2 + \frac{m_0^2}{4})} \right\} \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\frac{m_0}{2\pi} \left\{ m_0^{1-2z} \left\{ 3 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} + \frac{3}{4} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z+1)} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{16} \frac{m_0^4}{m_0^{2z+4}} m_0 \int_{-\infty}^{+\infty} dp' \frac{1}{(1 + (p')^2)^{z+1} ((p')^2 + \frac{1}{4})} \right\}, \quad p' = \frac{p}{m_0} \\
&= -\frac{m_0}{2\pi} m_0^{1-2z} \left\{ 3 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} + \frac{3}{4} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z+1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2 + 1)^{z+1} (p^2 + \frac{1}{4})} \right\} \\
&= -\frac{(m_0^2)^{1-z}}{2\pi} \left\{ 3 \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z - \frac{1}{2})}{\Gamma(z)} + \frac{3}{4} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z+1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2 + 1)^{z+1} (p^2 + \frac{1}{4})} \right\}. \quad (E.2)
\end{aligned}$$

E.2 J_2 -Berechnung

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{(p^2 + 1) (p^2 + \frac{1}{4})} \quad (E.3)$$

$$\text{Partialbruchzerlegung: } \frac{1}{(p^2 + 1) (p^2 + \frac{1}{4})} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{p^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{p^2 + 1} \right) \quad (E.4)$$

$$\begin{aligned}
\implies J_2 &= \frac{4}{3} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{p^2 + \frac{1}{4}} - \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{1}{p^2 + 1} \right] \\
&= \frac{4}{3} \left[2 \arctan(2p) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \arctan p \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right] \\
&= \frac{4}{3} [2\pi - \pi] = \frac{4}{3} \pi \quad (E.5)
\end{aligned}$$

E.3 J_3 -Berechnung

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp \frac{\ln(p^2 + 1)}{(p^2 + 1) (p^2 + \frac{1}{4})} \\
&= 2 \int_0^{\infty} dp \frac{\ln(p^2 + 1)}{(p^2 + 1) (p^2 + \frac{1}{4})}
\end{aligned}$$

Mit der Partialbruchzerlegung aus der J_2 -Berechnung (vgl. Gl.(E.4)) erhält man

$$J_3 = \frac{8}{3} \left\{ \int_0^\infty dp \frac{\ln(p^2 + 1)}{p^2 + \frac{1}{4}} - \int_0^\infty dp \frac{\ln(p^2 + 1)}{p^2 + 1} \right\}. \quad (\text{E.6})$$

Mit [14, Gl.4.295 7]

$$\int_0^\infty \ln(a^2 + b^2 x^2) \frac{dx}{c^2 + g^2 x^2} = \frac{\pi}{cg} \ln\left(\frac{ag + bc}{g}\right); \quad a > 0, b > 0, c > 0, g > 0 \quad (\text{E.7})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{8}{3} \left(2\pi \ln \frac{3}{2} - \pi \ln 2 \right) \\ &= \frac{8}{3} \pi \left(2 \ln 3 - 3 \ln 2 \right) \\ &= \frac{8}{3} \pi \ln \frac{9}{8}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

E.4 I_1 -Berechnung

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dx \frac{x \ln x}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{2}{\Lambda^2} \int_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \frac{t}{t^5} \frac{t^2 - m_0^2}{\Lambda^2} \ln\left(\frac{t^2 - m_0^2}{\Lambda^2}\right), \quad t = (m_0^2 + \Lambda^2 x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\Lambda^4} \int_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \left\{ \frac{(t^2 - m_0^2) [\ln(t + m_0) + \ln(t - m_0)]}{t^4} - \left[\frac{1}{t^2} - \frac{m_0^2}{t^4} \right] \ln \Lambda^2 \right\} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{2}{\Lambda^4} \left\{ - \left(\frac{2}{3m_0} + \frac{m_0^2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \ln \Lambda^2 \right. \\
&+ \underbrace{\int_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \left(\frac{\ln(t + m_0)}{t^2} - \frac{m_0^2 \ln(t + m_0)}{t^4} \right)}_{\text{part. Int.}} \left. + \underbrace{\int_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \frac{(t^2 - m_0^2) \ln(t - m_0)}{t^4} \right\} \\
&\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \left(-\frac{1}{t} + \frac{m_0^2}{3t^3} \right) \ln(t + m_0) \Big|_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} \\
&+ \int_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \left(\frac{1}{t(t + m_0)} - \frac{m_0^2}{3t^3(t + m_0)} \right) \\
&= \frac{2 \ln(2m_0)}{3m_0} - \frac{\ln((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0)}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \frac{m_0^2 \ln((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0)}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&+ \frac{\ln 2}{m_0} + \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{2m_0} \\
&- \frac{\ln((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0)}{m_0} \\
&- \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{6m_0} \\
&+ \frac{\ln((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0)}{3m_0} \\
&- \frac{\ln 2}{3m_0} - \frac{1}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \frac{m_0}{6(m_0^2 + \Lambda^2)} + \frac{1}{6m_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \int_{m_0 + \varepsilon}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \left(\frac{\ln(t - m_0)}{t^2} - \frac{m_0^2 \ln(t - m_0)}{t^4} \right) \right\} \\
&\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \left(-\frac{1}{t} + \frac{m_0^2}{3t^3} \right) \ln(t - m_0) \Big|_{m_0 + \varepsilon}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} \right. \\
&+ \int_{m_0 + \varepsilon}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \left(\frac{1}{t(t - m_0)} - \frac{m_0^2}{3t^3(t - m_0)} \right) \Big\} \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \frac{\ln \varepsilon}{m_0 + \varepsilon} - \frac{m_0^2 \ln \varepsilon}{3(m_0 + \varepsilon)^3} \right. \\
&- \frac{\ln((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0)}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \frac{m_0^2 \ln((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0)}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&+ \frac{\ln((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0)}{m_0} - \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{2m_0} \\
&- \frac{\ln \varepsilon}{m_0} + \frac{\ln(m_0 + \varepsilon)}{m_0} + \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{6m_0} \\
&- \frac{1}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_0}{6(m_0^2 + \Lambda^2)} \\
&- \frac{\ln((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0)}{3m_0} - \frac{\ln(m_0 + \varepsilon)}{3m_0} \\
&+ \frac{1}{3(m_0 + \varepsilon)} + \frac{m_0}{6(m_0 + \varepsilon)^2} + \frac{\ln \varepsilon}{3m_0} \Big\} \\
&= - \frac{\ln((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0)}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \frac{m_0^2 \ln((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0)}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2 \ln((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0)}{3m_0} \\
&- \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{3m_0} + \frac{2 \ln m_0}{3m_0} - \frac{1}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&- \frac{m_0}{6(m_0^2 + \Lambda^2)} + \frac{1}{2m_0}
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{2}{\Lambda^4} \left\{ - \left(\frac{2}{3m_0} + \frac{m_0^2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \ln \Lambda^2 \right. \\
&\quad + \left(\frac{m_0^2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&\quad \times \left[\ln \left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0 \right) + \ln \left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0 \right) \right] \\
&\quad + \frac{2}{3m_0} - \frac{2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{3} \frac{\ln(2m_0)}{m_0} \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{3m_0} - \frac{1}{m_0} \right) \left[\ln \left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0 \right) - \ln \left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0 \right) \right] \right\} \\
&= \frac{2}{\Lambda^4} \left\{ - \frac{2}{3m_0} \ln \Lambda^2 + \frac{2}{3m_0} - \frac{2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{3} \frac{\ln(2m_0)}{m_0} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3m_0} \ln \frac{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + m_0}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - m_0} \right\}. \tag{E.9}
\end{aligned}$$

E.5 I_2 -Berechnung

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 dx \frac{x \ln(m_0^2 + \Lambda^2 x)}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{\frac{5}{2}}}, \quad \text{Subst.: } t = \sqrt{m_0^2 + \Lambda^2 x} \\
&\quad dt = \frac{\Lambda^2 dx}{2t} \\
&= \frac{4}{\Lambda^4} \int_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \frac{(t^2 - m_0^2) \ln t}{t^4} \\
&= \frac{4}{\Lambda^4} \left\{ \left(-\frac{1}{t} + \frac{m_0^2}{3t^3} \right) \ln t \Big|_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} + \int_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \left(\frac{1}{t^2} - \frac{m_0^2}{3t^4} \right) \right\} \text{ (partielle Integration)} \\
&= \frac{4}{\Lambda^4} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\ln m_0}{m_0} - \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{2(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2 \ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{6(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{8}{9m_0} - \frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2}{9(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \tag{E.10}
\end{aligned}$$

E.6 I_0 -Berechnung

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 dx \frac{x}{(m_0^2 + \Lambda^2 x)^{\frac{5}{2}}}, & \text{Subst.: } t &= \sqrt{m_0^2 + \Lambda^2 x} \\
&= \frac{2}{\Lambda^2} \int_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \frac{t}{t^5} \frac{t^2 - m_0^2}{\Lambda^2} \\
&= \frac{2}{\Lambda^4} \int_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \frac{t^2 - m_0^2}{t^4} \\
&= \frac{2}{\Lambda^4} \left\{ -\frac{1}{t} + \frac{m_0^2}{3t^3} \right\} \Big|_{m_0}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} \\
&= \frac{2}{\Lambda^4} \left\{ \frac{m_0^2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{m_0} - \frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3m_0} \right\} \\
&= \frac{2}{\Lambda^4} \left\{ \frac{2}{3m_0} - \frac{2m_0^2 + 3\Lambda^2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \tag{E.11}
\end{aligned}$$

E.7 L_1 -Berechnung

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int_0^1 dx \frac{x \ln x}{\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right]^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{2}{\left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2} \int_{\frac{m_0}{2}}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \frac{t^2 - \frac{m_0^2}{4}}{t^4} \left(\ln \left(t^2 - \frac{m_0^2}{4} \right) - \ln \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \right), \\
&\quad t = \left(\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2} \left\{ \left(\frac{1}{t} - \frac{m_0^2}{12 t^3} \right) \ln \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) \Big|_{\frac{m_0}{2}}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{m_0}{2}}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \frac{t^2 - \frac{m_0^2}{4}}{t^4} \left(\ln \left(t - \frac{m_0}{2} \right) + \ln \left(t + \frac{m_0}{2} \right) \right) \right\} \implies
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{2}{\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)^2} \left\{ -\frac{4}{3m_0} \ln\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right) + \left(\frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_0^2}{12(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \ln\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right) \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{\int_{\frac{m_0}{2}}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \frac{(t^2 - \frac{m_0^2}{4}) \ln(t + \frac{m_0}{2})}{t^4}}_{+} \underbrace{\int_{\frac{m_0}{2}}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \frac{(t^2 - \frac{m_0^2}{4}) \ln(t - \frac{m_0}{2})}{t^4}}_{\left. \right\}} \right\} \\
&\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \left(-\frac{1}{t} + \frac{m_0^2}{12t^3} \right) \ln\left(t + \frac{m_0}{2}\right) \Big|_{\frac{m_0}{2}}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} \\
&\quad + \int_{\frac{m_0}{2}}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \left(\frac{1}{t(t + \frac{m_0}{2})} - \frac{m_0^2}{12t^3(t + \frac{m_0}{2})} \right) \\
&= \frac{4 \ln m_0}{3m_0} - \frac{\ln\left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{2}\right)}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad + \frac{m_0^2 \ln\left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{2}\right)}{12(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{2 \ln 2}{m_0} + \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{m_0} \\
&\quad - \frac{2 \ln\left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{2}\right)}{m_0} - \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{3m_0} \\
&\quad - \frac{1}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0}{12(m_0^2 + \Lambda^2)} \\
&\quad + \frac{2 \ln\left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{2}\right)}{3m_0} - \frac{2 \ln 2}{3m_0} \\
&\quad + \frac{1}{3m_0} \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \int_{\frac{m_0 + \varepsilon}{2}}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \left(\frac{1}{t^2} - \frac{m_0^2}{4t^4} \right) \ln\left(t - \frac{m_0}{2}\right) \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \left(-\frac{1}{t} + \frac{m_0^2}{12t^3} \right) \ln\left(t - \frac{m_0}{2}\right) \Big|_{\frac{m_0 + \varepsilon}{2}}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{m_0 + \varepsilon}{2}}^{\sqrt{m_0^2 + \Lambda^2}} dt \left(\frac{1}{t(t - \frac{m_0}{2})} - \frac{m_0^2}{12t^3(t - \frac{m_0}{2})} \right) \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left\{ \frac{2 \ln(\frac{\varepsilon}{2})}{m_0 + \varepsilon} - \frac{2m_0^2 \ln(\frac{\varepsilon}{2})}{3(m_0 + \varepsilon)^3} - \frac{\ln\left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}\right)}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad + \frac{m_0^2 \ln\left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}\right)}{12(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2 \ln\left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}\right)}{m_0} \\
&\quad - \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{m_0} - \frac{2 \ln(\frac{\varepsilon}{2})}{m_0} + \frac{2 \ln(\frac{m_0 + \varepsilon}{2})}{m_0} \\
&\quad + \frac{\ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{3m_0} - \frac{1}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_0}{12(m_0^2 + \Lambda^2)} \\
&\quad - \frac{2 \ln\left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}\right)}{3m_0} - \frac{2 \ln(\frac{m_0 + \varepsilon}{2})}{3m_0} \\
&\quad + \frac{1}{3(\frac{m_0 + \varepsilon}{2})} + \frac{m_0}{12(\frac{m_0 + \varepsilon}{2})^2} + \frac{2 \ln(\frac{\varepsilon}{2})}{3m_0} \right\} \\
&= -\frac{\ln\left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}\right)}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2 \ln\left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}\right)}{12(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{4 \ln\left((m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}\right)}{3m_0} - \frac{2 \ln(m_0^2 + \Lambda^2)}{3m_0} \\
&\quad + \frac{4 \ln(\frac{m_0}{2})}{3m_0} - \frac{1}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_0}{12(m_0^2 + \Lambda^2)} \\
&\quad + \frac{1}{m_0}
\end{aligned}$$

Zusammengefaßt ergibt das:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{2}{\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)^2} \left\{ \left(\frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_0^2}{12(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4}{3m_0} \right) \ln \left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2 \right) \right. \\
&\quad + \frac{4}{3m_0} + \frac{8 \ln m_0}{3m_0} - \frac{2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&\quad - \left(\frac{1}{(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_0^2}{12(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&\quad \times \left[\ln \left(\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{2} \right) + \ln \left(\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2} \right) \right] \\
&\quad \left. - \frac{4}{3m_0} \left[\ln \left(\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{2} \right) - \ln \left(\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2} \right) \right] \right\} \\
&= \frac{2}{\left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2\right)^2} \left\{ -\frac{4}{3m_0} \ln \left(\frac{3}{4}m_0^2 + \Lambda^2 \right) + \frac{4}{3m_0} + \frac{8 \ln m_0}{3m_0} - \frac{2}{3(m_0^2 + \Lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4}{3m_0} \ln \frac{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{m_0}{2}}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{m_0}{2}} \right\}. \tag{E.12}
\end{aligned}$$

E.8 L_2 -Berechnung

$$\begin{aligned}
L_2 &= \int_0^1 dx \frac{x \ln \left(\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right)}{\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right]^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{4}{\left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2} \int_{\frac{m_0}{2}}^{\sqrt{\frac{m_0^2}{4} + \Lambda^2}} dt \frac{\left(t^2 - \frac{m_0^2}{4} \right) \ln t}{t^4}, \quad t = \left(\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{4}{\left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2} \left\{ \left(-\frac{1}{t} + \frac{m_0^2}{12 t^3} \right) \ln t \Big|_{\frac{m_0}{2}}^{\sqrt{\frac{m_0^2}{4} + \Lambda^2}} + \int_{\frac{m_0}{2}}^{\sqrt{\frac{m_0^2}{4} + \Lambda^2}} dt \left(\frac{1}{t^2} - \frac{m_0^2}{12 t^4} \right) \right\} \\
&\quad (\text{partielle Integration}) \\
&= \frac{4}{\left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2} \left\{ \frac{4 \ln \frac{m_0}{2}}{3 m_0} - \frac{1}{2} \ln \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left(\frac{1}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_0^2}{12 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{16}{9 m_0} - \frac{1}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2}{36 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\
&= \frac{4}{\left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2} \left\{ \frac{4 \ln \frac{m_0}{2}}{3 m_0} + \frac{m_0^2}{36 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{16}{9 m_0} - \frac{1}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right) \left(\frac{1}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{m_0^2}{12 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right) \right\} \quad (\text{E.13})
\end{aligned}$$

E.9 L_0 -Berechnung

$$\begin{aligned}
L_0 &= \int_0^1 dx \frac{x}{\left[\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right]^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{2}{\left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2} \int_{\frac{m_0}{2}}^{\sqrt{\frac{m_0^2}{4} + \Lambda^2}} dt \frac{t^2 - \frac{m_0^2}{4}}{t^4}, \quad t = \left(\frac{m_0^2}{4} + \left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right) x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\left(\frac{3}{4} m_0^2 + \Lambda^2 \right)^2} \left\{ \frac{4}{3 m_0} - \frac{1}{\left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{m_0^2}{12 \left(m_0^2 + \Lambda^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (\text{E.14})
\end{aligned}$$

Anhang F

Sattelpunktentwicklung zur ζ_3 -Berechnung

Zu untersuchen ist:

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t^2} e^{-\frac{\bar{n}^2 L^2}{4t} - \lambda t} = \int_0^\infty dt t^{-2} e^{-\left(\frac{a}{t} + \lambda t\right)},$$

$$a := \frac{\bar{n}^2 L^2}{4} > 0, \quad \lambda > 0. \quad (\text{F.1})$$

Die Funktion $f(t) := \frac{a}{t} + \lambda t$ besitzt ein Minimum bei $t = \sqrt{\frac{a}{\lambda}}$:

$$\begin{aligned} f'\left(\sqrt{\frac{a}{\lambda}}\right) &= -\frac{a}{\sqrt{\frac{a}{\lambda}}^2} + \lambda = 0, \\ f''\left(\sqrt{\frac{a}{\lambda}}\right) &= \frac{2a}{\left(\sqrt{\frac{a}{\lambda}}\right)^3} = 2\sqrt{\frac{\lambda^3}{a}} > 0 \\ \implies & \text{Minimum bei } t = \sqrt{\frac{a}{\lambda}}. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Um dieses Minimum wird nun der Exponent entwickelt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt t^{-2} e^{-\left(\frac{a}{t} + \lambda t\right)} &= \int_0^\infty dt \left(\frac{\lambda}{a} + O\left(t - \sqrt{\frac{a}{\lambda}}\right)\right) e^{-\left(2\sqrt{a\lambda} + \sqrt{\frac{\lambda^3}{a}}(t - \sqrt{\frac{a}{\lambda}})^2 + O(t - \sqrt{\frac{a}{\lambda}})^3\right)} \\ &= \int_0^\infty dt \frac{\lambda}{a} e^{-2\sqrt{a\lambda}} e^{-\sqrt{\frac{\lambda^3}{a}}(t - \sqrt{\frac{a}{\lambda}})^2} + \text{schnell abfallende Terme.} \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Das Gauß-Integral kann ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt t^{-2} e^{-\left(\frac{a}{t} + \lambda t\right)} &= \frac{\lambda}{a} e^{-2\sqrt{a\lambda}} \sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{\frac{\lambda^3}{a}}}} e^{\frac{\lambda^2}{\lambda^3} \sqrt{a}} e^{-\sqrt{\frac{\lambda^3}{a}} \frac{a}{\lambda}} + \text{schnell abfallende Terme} \\ &= \frac{\lambda}{a} \sqrt{\pi} \left(\frac{a}{\lambda^3}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-2\sqrt{a\lambda}} e^{\sqrt{a\lambda}} e^{-\sqrt{a\lambda}} + \text{schnell abfallende Terme.} \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Mit der Definition von a (vgl. Gl.(F.1)) gilt schließlich:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty dt t^{-2} e^{-\frac{\vec{n}^2 L^2}{4t} - \lambda t} &= \frac{4\lambda}{\vec{n}^2 L^2} \sqrt{\pi} \left(\frac{\vec{n}^2 L^2}{4\lambda^3} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\sqrt{\vec{n}^2 L^2 \lambda}} + \text{schnell abfallende Terme} \\
 &= \frac{\lambda^{\frac{1}{4}} 4^{\frac{3}{4}}}{(\vec{n}^2 L^2)^{\frac{3}{4}}} \sqrt{\pi} e^{-\sqrt{\vec{n}^2 \lambda} L} + \text{schnell abfallende Terme} \\
 &= \frac{\lambda^{\frac{1}{4}} \sqrt{8\pi}}{(\vec{n}^2 L^2)^{\frac{3}{4}}} e^{-\sqrt{\vec{n}^2 \lambda} L} + \text{schnell abfallende Terme.} \tag{F.5}
 \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] H.E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1971)
- [2a] D. Jasnow in „Phase Transitions and Critical Phenomena“, Vol. 10, C. Domb und J.L. Lebowitz (Academic Press, London, 1986)
- [2b] D.B. Abraham in „Phase Transitions and Critical Phenomena“, Vol. 10, C. Domb und J.L. Lebowitz (Academic Press, London, 1986)
- [2] J.C. Le Guillou und J. Zinn-Justin, *Phys. Rev. Lett.* **39** (1977) 95
- [3] H. Meyer-Ortmanns, T. Trappenberg, *J. Stat. Phys.* **58** (1990) 185
- [4] V. Privman und M. E. Fisher, *J. Stat. Phys.* **33** (1983) 385
- [5] E. Brézin und J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys.* **B257** [FS14] (1985) 867
- [6] K. Jansen, I. Montvay, G. Münster, T. Trappenberg und U. Wolff, *Nucl. Phys.* **B322** (1989) 698
- [7] M. Lüscher und P. Weisz, *Nucl. Phys.* **B295** [FS21] (1988) 65
- [8] G. Münster, *Nucl. Phys.* **B324** (1989) 630
- [9] G. Münster, *Nucl. Phys.* **B340** (1990) 559
- [10] W. Pauli und F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 434
- [11] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1990)
- [12] J. Collins, *Renormalization* (Cambridge University Press, 1984)
- [13] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik* (Teubner Verlagsgesellschaft, 1991)
- [14] I. Gradstein und I. Ryshik, *Summen-, Produkt- und Integraltafeln* (Verlag Harri Deutsch, 1981)
- [15] W. Fischer und I. Lieb, *Funktionentheorie* (Vieweg, 1988)
- [16] S. Coleman, „The uses of instantons“ in „Aspects of Symmetry“ (Cambridge University Press, 1985)
- [17] P.M. Morse und H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics, Part I + II* (McGraw-Hill, 1953)

- [18] S. Lang, Analysis II (Addison–Wesley Publishing Company, 1969)
- [19] R. Rajaraman, Phys. Rep. **21** (1975) 227
- [20] N.N. Lebedew, Spezielle Funktionen und ihre Anwendung (BI Wissenschaftsverlag, 1973)
- [21] G. Münster, unveröffentlicht
- [22] I.J. Zucker, J. Phys. **A7** (1974) 1568
- [23] Bateman Manuscript Project, Higher Transcendental Functions Vol. 1 (McGraw–Hill, 1953)
- [24] C. Itzykson und J.–B. Zuber, Quantum Field Theory (McGraw–Hill, 1980)

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben.

Herrn Prof. Dr. G. Münster danke ich für die interessante Themenstellung sowie die jederzeit hilfreiche Betreuung.

Bei allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe möchte ich mich für das angenehme Arbeitsklima bedanken.

Frau Dipl.-Phys. S. Klessinger bin ich für ihr sorgfältiges Korrekurlesen dankbar.

Schließlich danke ich auch meinen Eltern, die mir durch ihre Unterstützung in jeder Hinsicht das Studium erst ermöglicht haben.

Hiermit versichere ich, die Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im Juli 1993