

Bachelorarbeit im Fach Physik

**Anwendung von Methoden  
der supersymmetrischen Quantenmechanik  
auf quasi-exakt lösbare Potentiale**

**Application of methods of supersymmetric quantum mechanics  
on quasi exactly solvable potentials**

vorgelegt von  
**Alexander Hock**

Ausgegeben und betreut von  
**Prof. Dr. Gernot Münster**  
Institut für Theoretische Physik

Münster, 08. August 2014



Diese Fassung der Arbeit unterscheidet sich nur geringfügig von der am 6. August 2014 dem Prüfungsamt vorgelegten Version.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Quasi-exakt lösbare Potentiale</b>	<b>2</b>
2.1	Quantenmechanik . . . . .	2
2.2	Quasi-Eichtransformation . . . . .	2
2.3	Quasi-exakt lösbarer Hamilton-Operator . . . . .	4
2.3.1	Operatoren in Differentialdarstellung . . . . .	4
2.3.2	Operatoren in Matrixdarstellung . . . . .	5
2.4	Vergleich der unterschiedlichen quasi-exakt lösbaren Potentiale . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Supersymmetrische Quantenmechanik</b>	<b>7</b>
3.1	Formalismus der supersymmetrischen Quantenmechanik . . . . .	7
3.2	Anwendung der supersymmetrischen Quantenmechanik auf angeregte Zustände . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Anwendung der supersymmetrischen Quantenmechanik auf quasi-exakt lösbare Potentiale</b>	<b>9</b>
4.1	Allgemeine Anwendung der supersymmetrischen Quantenmechanik auf quasi-exakt lösbare Potentiale . . . . .	10
4.2	Anharmonischer Oszillator . . . . .	11
4.2.1	Gerade Zustände . . . . .	11
4.2.2	Ungerade Zustände . . . . .	15
4.3	Das Razavy-Potential . . . . .	18
4.3.1	Gemischte Zustände . . . . .	18
4.3.2	Gerade Zustände . . . . .	22
4.3.3	Ungerade Zustände . . . . .	26
4.4	Periodische Potentiale . . . . .	29
4.4.1	Gemischte Zustände . . . . .	29
4.4.2	Gerade Zustände . . . . .	33
4.4.3	Ungerade Zustände . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>38</b>
<b>6</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>39</b>

# 1 Einleitung

In der Quantenmechanik werden mit dem Hamilton-Operator die Energien und die dazugehörigen Zustände von Teilchen in einem bestimmten Potential berechnet. Es gibt nur wenige analytisch exakt lösbare Potentiale, unter anderem gehört der harmonische Oszillator dazu.

Im Rahmen der supersymmetrischen Quantenmechanik kann zusätzlich das Partnerpotential exakt gelöst werden. Bei dem harmonischen Oszillator führt dies ebenfalls auf einen harmonischen Oszillator, verschoben um  $\hbar\omega$ . In anderen Fällen werden neue Potentiale entdeckt, welche zuvor nicht analytisch gelöst werden konnten.

In dieser Bachelorarbeit werden quasi-exakt lösbare Potentiale (QES-Potentiale) mit der supersymmetrischen Quantenmechanik untersucht. Zu den QES-Potentialen gehören z.B. Doppelmuldenpotentiale, welche nur für eine gewisse Anzahl an Zuständen gelöst werden können. Deren Partnerpotentiale zeigen eine vollkommen neue Form von quasi-exakt lösbaren Potentialen auf.

## 2 Quasi-exakt lösbare Potentiale

### 2.1 Quantenmechanik

Da keine konkreten physikalischen Werte bei den Ergebnissen betrachtet werden, sondern allein die Untersuchung der Potentiale von Interesse ist, wird im folgenden

$$\hbar := 1 \quad \text{und} \quad m := 1$$

gesetzt, dabei ist  $m$  die Masse der Teilchen und  $\hbar$  das reduzierte Plancksche Wirkungsquantum.

Also erhalten wir für die eindimensionale Schrödingergleichung

$$H\psi(x) = \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x). \quad (2.1)$$

Die Wellenfunktion  $\psi(x)$  besitzt den Eigenwert  $E$  zum Hamilton-Operator  $H$  und den Eigenzustand  $\psi(x)$ . Der Hamilton-Operator kann ebenfalls als Matrix  $\hat{H}$  dargestellt werden, was später verwendet wird. In diesem Fall kann der Eigenzustand als Vektor  $\vec{\psi}$  geschrieben werden.

Damit die Wellenfunktion einem physikalischen Zustand entspricht, muss sie quadratintegabel sein

$$\int |\psi(x)|^2 dx < \infty.$$

Wird diese Normierung auf 1 gesetzt, so kann  $|\psi(x)|^2$  als Wahrscheinlichkeitsdichte am Ort  $x$  interpretiert werden. Bei der Schrödingergleichung (2.1) wird das Potential  $V(x)$  so gewählt, dass es dem physikalischen Problem entspricht, jedoch kann (2.1) nur für wenige Potentiale analytisch exakt gelöst werden.

Zur Unterscheidung mehrerer Eigenzustände wird der Index  $n = 0, 1, \dots$  eingeführt. Der Eigenzustand  $\psi_n$  besitzt dann den Eigenwert  $E_n$ , wobei  $n$  angibt in welchem angeregtem Zustand sich das Teilchen befindet und wie viele Knoten (Nullstellen) die Wellenfunktion  $\psi_n$  hat.

### 2.2 Quasi-Eichtransformation

Bei einer imaginären Phasentransformation von

$$\psi(x) = \tilde{\psi}(x) \exp(i\alpha(x))$$

ist der Hamilton-Operator nicht invariant [Shi 99], sodass in diesem Fall gilt

$$\left( -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + iA(x) \right)^2 + V(x) \right) \tilde{\psi}(x) = E\tilde{\psi}(x)$$

mit  $A(x) = \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$

In der dreidimensionalen quantenmechanischen Elektrodynamik wird an dieser Stelle die Eichtransformation eingeführt mit  $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \nabla\alpha(\vec{r})$ , wobei  $\vec{A}(\vec{r})$  das Vektorpotential ist und sich die Schrödingergleichung unter dieser Transformation kovariant transformiert.

Da die Wellenfunktion quadratintegrabel sein muss und  $\tilde{\psi}$  in unserem Fall nicht notwendigerweise quadratintegrabel ist, wird für quasi-exakt lösbar Potentiale eine quasi-Eichtransformation (quasigauge) durchgeführt. Dazu wird  $\alpha(x) \equiv ia(x)$  definiert. Für die Transformation folgt

$$\psi(x) = \tilde{\psi}(x) \exp(-a(x))$$

und für die Schrödingergleichung

$$\left( -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - A(x) \right)^2 + V(x) \right) \tilde{\psi}(x) = E\tilde{\psi}(x)$$

mit  $A(x) = \frac{\partial a}{\partial x}.$

Wird nun der transformierte Hamilton-Operator ausmultipliziert, erhält man

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - A(x) \right)^2 + V(x) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A(x) \frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{\frac{1}{2} A'(x) - \frac{1}{2} A^2(x)}_{=:\Delta V(x)} + V(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\Rightarrow V(x) = \Delta V(x) + \frac{1}{2} A^2(x) - \frac{1}{2} A'(x). \quad (2.3)$$

Die Eigenwerte des transformierten Hamilton-Operators haben die selben Eigenwerte wie der Hamilton-Operator aus (2.1). Somit genügt es (2.2) für  $\tilde{\psi}(x)$  zu lösen und es ergibt sich für die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \tilde{\psi}(x) \exp \left( - \int A(x) dx \right). \quad (2.4)$$

## 2.3 Quasi-exakt lösbarer Hamilton-Operator

### 2.3.1 Operatoren in Differentialdarstellung

Das Erstellen von quasi-exakt lösbar Potentialen kann auf mehreren Wegen geschehen. Im Folgenden wird die Methode aus [Shi 99] und [Gon 91] verwendet. Hierbei setzt sich der Hamilton-Operator aus den Differentialoperatoren (Generatoren)  $T^{\pm,0}$  zusammen

$$H = \sum_{a,b=\pm,0} C_{ab} T^a T^b + \sum_{a=\pm,0} C_a T^a + \text{const} \quad (2.5)$$

mit  $C_{ab,a} \in \mathbb{R}$ .

Die Generatoren haben folgende Form

$$\begin{aligned} T^+ &= 2j\xi - \xi^2 \frac{d}{d\xi} \\ T^0 &= -j + \xi \frac{d}{d\xi} \\ T^- &= \frac{d}{d\xi}, \end{aligned}$$

dabei ist  $j$  ein Semiinteger (halb- oder ganzzahlige positive Zahl) und es existieren  $2j+1$  analytisch lösbar Zustände. Die Eigenfunktion des Hamilton-Operators ist  $\tilde{\psi}$ , welche ein Polynom von  $\xi$  ist

$$\tilde{\psi}(\xi) = \sum_{k=0}^{2j} c_k \xi^k.$$

Werden die Generatoren in (2.5) eingesetzt, erhält man

$$H = -\frac{1}{2} P_4(\xi) \frac{d^2}{d\xi^2} + P_3(\xi) \frac{d}{d\xi} + P_2(\xi),$$

wobei  $P_n$  ein Polynom  $n$ -ter Ordnung ist. Um auf die gewünscht Form des Hamilton-Operators wie in (2.2) zu kommen, wird eine Substitution  $\xi \rightarrow x$  gemacht mit

$$x(\xi) = \int \frac{d\xi}{\sqrt{P_4(\xi)}}, \quad (2.6)$$

weil dadurch das Polynom vor der zweiten Ableitung verschwindet, wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &= \frac{1}{\sqrt{P_4}} \frac{d}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{d\xi^2} = \frac{1}{P_4} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2} \frac{P_4'}{\sqrt{P_4^3}} \frac{d}{dx} \\ &\quad \text{mit} \quad P_4' \equiv \frac{dP_4}{d\xi}. \end{aligned}$$

Für den Hamilton-Operator ergibt sich mit dieser Substitution

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{\frac{P_4'/4 + P_3}{\sqrt{P_4}}}_{A(\xi(x))} \frac{d}{dx} + \underbrace{P_2}_{\Delta V(\xi(x))}. \quad (2.7)$$

Also kann somit das Potential nach (2.3) und der Exponentialfaktor für die quasi-Eichtransformation nach (2.4) berechnet werden.

### 2.3.2 Operatoren in Matrixdarstellung

Eine einfachere Möglichkeit um  $\tilde{\psi}$  bestimmen zu können, ist es im Vektorraum zu rechnen. Deshalb schreiben wir die Generatoren in einer  $(2j+1) \times (2j+1)$ -Matrixdarstellung:

$$\hat{T}^0 = \begin{pmatrix} j & 0 & & 0 \\ 0 & j-1 & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & 1-j \\ 0 & & & 0 & -j \end{pmatrix}$$

$$\hat{T}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & 0 \\ 0 & & \dots & 2j-1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 2j \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{T}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 2j & 0 & & 0 \\ 0 & 2j-1 & & 0 \\ 0 & \dots & 2 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

In der Matrixdarstellung ist der Eigenvektor mit den selben Koeffizienten aufgebaut wie im Hilbertraum

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix} c_{2j} \\ c_{2j-1} \\ \vdots \\ c_1 \\ c_0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte  $\lambda$  sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(\hat{H} - \lambda \mathbb{1}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.8)$$

und die dazugehörigen Eigenvektoren erhält man über die Eigenwertgleichung

$$\hat{H} \vec{\psi} = \lambda \vec{\psi}. \quad (2.9)$$



## 2.4 Vergleich der unterschiedlichen quasi-exakt lösbaren Potentiale

Das ausschlaggebende Kriterium für die Form des quasi-exakt lösbaren Potentials und die Eigenzustände, ist das Polynom  $P_4(\xi)$ , da dieses die Substitution von  $\xi$  nach  $x$  bestimmt. In [Gon 91] sind fünf unterschiedliche Formen nicht-periodischer quasi-exakt lösbarer Potentiale angegeben. Das Polynom  $P_4(\xi)$  hat dabei jeweils folgende Form

1.  $\xi^2 + 1$
2.  $\xi^2 - 1$
3.  $\xi^2$
4.  $\xi$
5. 1.

In [Shi 99] hingegen sind nur der 2., 3. und 4. Fall aufgeführt. Hinzu kommt noch ein Fall mit  $P_4(\xi) = (1 - \xi^2)^2$ , welcher in [Gon 91] gar nicht erwähnt wird. Im Verlauf der Bachelorarbeit wird noch eine Verbindung zwischen dem 2. Fall von [Gon 91] und dem nicht aufgelisteten Fall für bestimmte Spezialfälle aufgedeckt, da diese mit dem Razavy-Potential identifiziert werden können [Raz 79]. Der 5. Fall von [Gon 91] ist nicht in [Shi 99] zu finden, da dieses Potential entweder reell mit einer nicht-normierbaren Wellenfunktion oder komplex mit einer normierbaren Wellenfunktion ist [Ben 98].

## 3 Supersymmetrische Quantenmechanik

### 3.1 Formalismus der supersymmetrischen Quantenmechanik

Bei der Supersymmetrie wird eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen hergestellt, wobei die Energie (Masse) erhalten bleibt.

Diese Symmetrie kann auf die Quantenmechanik angewendet werden. In der Quantenmechanik besteht die Symmetrie hingegen zwischen einem Potential  $V_1$  und dessen Partnerpotential  $V_2$ . Die Energieeigenwerte beider Potentiale sind identisch

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)} \equiv E_{n+1}.$$

Die dazugehörigen Zustände sind  $\psi_{n+1}^{(1)}(x)$  und  $\psi_n^{(2)}(x)$ . Der Grundzustand des Potentials  $V_1$  jedoch ist nicht entartet und liegt bei  $E_0 = 0$ . Somit gilt für den Grundzustand  $\psi_0^{(1)}(x)$  von  $V_1$

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)\right) \psi_0^{(1)}(x) = 0. \quad (3.1)$$

Der Zusammenhang zwischen den Potentialen ist über das Superpotential  $W(x)$  gegeben. Das Superpotential hat als Dimension  $[\text{Energie}]^{1/2}$  und kann somit nicht als potentielle Energie angesehen werden. Die Potentiale lassen sich mit dem Superpotential berechnen aus

$$V_1 = \frac{1}{2}(W^2 - W') \quad (3.2)$$

$$V_2 = \frac{1}{2}(W^2 + W') = V_1 + W' \quad (3.3)$$

mit  $W' = \frac{dW}{dx}$ .

Setzt man (3.2) in (3.1) ein, ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Grundzustandswellenfunktion und dem Superpotential

$$W(x) = -\frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(1)} = -\frac{\psi_0'^{(1)}}{\psi_0^{(1)}}. \quad (3.4)$$

Die Transformation der Wellenfunktionen wird durch die Leiteroperatoren  $B^\pm$  durchgeführt, welche die nicht-lineare Form aufgrund des Superpotentials besitzen

$$B^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( W(x) \mp \frac{d}{dx} \right).$$

Die Wellenfunktionen des Partnerpotentials ergeben sich dann durch

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} B^- \psi_{n+1}^{(1)}. \quad (3.5)$$

Im weiteren Verlauf wird der Faktor  $1/\sqrt{2E_{n+1}^{(1)}}$ , welcher bei der Transformation hinzukommt, weggelassen, da dieser nur für die Normierung von Bedeutung ist.

Mit Hilfe der supersymmetrischen Quantenmechanik können ganz neue Klassen von Potentialen analytisch gelöst werden. Es genügt den Grundzustand von  $V_1$  zu kennen, um das Partnerpotential über das Superpotential zu bilden. Das Partnerpotential kann somit auf eine unkonventionelle Herangehensweise über die Eigenfunktionen von  $V_1$  gelöst werden.

## 3.2 Anwendung der supersymmetrischen Quantenmechanik auf angeregte Zustände

Bei manchen quasi-exakt lösbaren Potentialen ist es nicht möglich den Grundzustand analytisch zu lösen, stattdessen können z.B. nur ungerade Funktionen ermittelt werden. Funktioniert nun die supersymmetrische Quantenmechanik auch, wenn der Grundzustand nicht bekannt ist? Gilt (3.4) auch für den angeregten Zustand  $\psi_n^{(1)}$ , welcher den Energieeigenwert  $E_n = 0$  besitzen?

Um dies zu untersuchen, betrachten wir einen Zustand  $\psi(x)$  mit  $n \neq 0$  Knoten, wobei gilt

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \right) \psi(x) = 0.$$

Dies kann durch Addition von Konstanten erreicht werden, falls der Eigenwert  $E_n$  noch nicht bei 0 lag. Das Superpotential berechnen wir nach (3.4)

$$W(x) = -\frac{\psi'}{\psi}.$$

Damit erhalten wir die Potentiale nach (3.2) und (3.3)

$$V_1 = \frac{1}{2} \frac{\psi''}{\psi}$$

$$V_2 = \frac{\psi'^2}{\psi^2} - \frac{1}{2} \frac{\psi''}{\psi}.$$

Das Superpotential besitzt jeweils einen Pol bei den Nullstellen der Wellenfunktion. Dies könnte auch Singularitäten bei dem Partnerpotential verursachen.

Als nächstes definieren wir einen weiteren Zustand  $\psi_1(x)$ , welcher ebenfalls  $V_1$  mit der Energie  $E > 0$  löst. Also gilt

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \right) \psi_1(x) = -\frac{1}{2} \psi_1'' + \frac{1}{2} \frac{\psi''}{\psi} \psi_1 = E \psi_1(x). \quad (3.6)$$

Es ist nun zu zeigen, dass der Zustand  $\psi_1^{(2)}$ , welcher sich nach (3.5) zusammensetzt,

$$\psi_1^{(2)}(x) = (W + \frac{d}{dx})\psi_1(x) = (\psi_1' - \frac{\psi'}{\psi}\psi_1) \quad (3.7)$$

eine Lösung des Potentials  $V_2$  mit der Energie  $E$  bildet

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x)\right)\psi_1^{(2)}(x) = E\psi_1^{(2)}(x). \quad (3.8)$$

Um (3.8) zu zeigen, wollen wir beide Seiten der Gleichung einzeln betrachten.

Betrachten wir zunächst die rechte Seite: Durch Einsetzen von (3.7) wird deutlich, dass die Ableitung von (3.6) benötigt wird. Die Ableitung von (3.6) ist

$$E\psi_1' = \frac{1}{2} \left( \frac{\psi'''}{\psi}\psi_1 + \frac{\psi''}{\psi}\psi_1' - \frac{\psi''\psi'}{\psi^2}\psi_1 - \psi_1''' \right)$$

und somit erhält man für die rechte Seite der Gleichung (3.8)

$$E\psi_1^{(2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\psi'''}{\psi}\psi_1 + \frac{\psi''}{\psi}\psi_1' - \frac{\psi''\psi'}{\psi^2}\psi_1 - \psi_1''' - \frac{\psi''\psi'}{\psi^2}\psi_1 + \frac{\psi'}{\psi}\psi_1'' \right). \quad (3.9)$$

Bei der linken Seite setzen wir das Potential  $V_2$  und (3.7) ein

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V_2\right)(\psi_1' - \frac{\psi'}{\psi}\psi_1) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx} \left( \psi_1'' - \frac{\psi''}{\psi}\psi_1 - \frac{\psi'}{\psi}\psi_1' + \frac{\psi'^2}{\psi^2}\psi_1 \right) + \underbrace{\left( \frac{\psi'^2}{\psi^2} - \frac{1}{2}\frac{\psi''}{\psi} \right)}_{V_2} \left( \psi_1' - \frac{\psi'}{\psi}\psi_1 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left( \psi_1''' - \frac{\psi'''}{\psi}\psi_1 - \cancel{\frac{\psi''}{\psi}\psi_1'} + \frac{\psi''\psi'}{\psi^2}\psi_1 - \frac{\psi''}{\psi}\psi_1' - \cancel{\frac{\psi'}{\psi}\psi_1''} + \cancel{\frac{\psi'^2}{\psi^2}\psi_1'} + \frac{2\psi''\psi'}{\psi^2}\psi_1 + \cancel{\frac{\psi'^2}{\psi^2}\psi_1'} - \cancel{\frac{2\psi'^3}{\psi^3}\psi_1} \right) \\ & \quad + \left( \cancel{\frac{\psi'^2}{\psi^2}\psi_1'} - \cancel{\frac{1}{2}\frac{\psi''}{\psi}\psi_1'} - \cancel{\frac{\psi'^3}{\psi^3}\psi_1} + \frac{1}{2}\frac{\psi''\psi'}{\psi^2}\psi_1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\psi'''}{\psi}\psi_1 + \frac{\psi''}{\psi}\psi_1' - \frac{\psi''\psi'}{\psi^2}\psi_1 - \psi_1''' - \frac{\psi''\psi'}{\psi^2}\psi_1 + \frac{\psi'}{\psi}\psi_1'' \right) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Wird die supersymmetrische Quantenmechanik nicht mit dem Grundzustand durchgeführt, so erhält man trotzdem ein Partnerpotential und außerdem die korrekten Lösungen dieses Potentials. Jedoch zeigt schon (3.7), dass diese Lösungen nicht notwendigerweise physikalische Lösungen sind. Damit es sich um eine physikalische Lösung handelt, muss diese Wellenfunktion quadratintegrabel sein.

## 4 Anwendung der supersymmetrischen Quantenmechanik auf quasi-exakt lösbare Potentiale

### 4.1 Allgemeine Anwendung der supersymmetrischen Quantenmechanik auf quasi-exakt lösbare Potentiale

Alle  $(2j + 1)$  Lösungen der quasi-exakt lösbaren Potentiale haben nach (2.4) die Form

$$\psi_n(x) = \tilde{\psi}_n(x) \exp\left(-\int A(x)dx\right).$$

Für den Grundzustand  $\psi_0(x)$  sei die Energie  $E_0 = 0$ , wie es die Supersymmetrie verlangt. Das Superpotential lässt sich dann mit (3.4) berechnen

$$W(x) = A(x) - \frac{\tilde{\psi}'_0}{\tilde{\psi}_0}.$$

Hiermit lässt sich dann weiter das Partnerpotential berechnen

$$V_2 = V_1 + A'(x) - \frac{\tilde{\psi}''_0}{\tilde{\psi}_0} + \frac{\tilde{\psi}_0'^2}{\tilde{\psi}_0^2}$$

und die dazugehörigen Zustände zu der Energie  $E_{n+1}$

$$\begin{aligned}\psi_n^{(2)} &= (W(x) + \frac{d}{dx})\psi_{n+1}^{(1)} \\ &= \frac{\tilde{\psi}'_{n+1}\tilde{\psi}_0 - \tilde{\psi}'_0\tilde{\psi}_{n+1}}{\tilde{\psi}_0} \exp\left(-\int A(x)dx\right).\end{aligned}$$

Diese Rechnungen sind auch möglich, falls der Grundzustand nicht berechnet werden kann und stattdessen ein angeregter Zustand für die Berechnung des Superpotentials verwendet wird (siehe Kap.3.2), aber dessen Energie muss bei 0 liegen.

Für den Spezialfall mit  $j = 0$  sind die Lösungen am einfachsten, da gilt

$$\tilde{\psi}_0 = \text{const} \quad \text{und} \quad W(x) = A(x)$$

und somit alle Ableitungen von  $\tilde{\psi}_0$  verschwinden. Doch kann bei  $j = 0$  keine einzige Lösung für das Partnerpotential analytisch berechnet werden, da  $V_1$  nur eine Lösung besitzt.

In den nachfolgenden Kapiteln werden unterschiedliche Beispiele, sowohl für Fälle mit  $j = \frac{1}{2}$  als auch  $j = 1$  berechnet.

## 4.2 Anharmonischer Oszillator

### 4.2.1 Gerade Zustände

Zu Anfang wollen wir das einfachste Beispiel, den anharmonischen Oszillator, betrachten. Dazu wird der Hamilton-Operator wie folgt aufgestellt

$$\begin{aligned} H &= -2T^0T^- - (2j+1)T^- - \nu T^+ + \mu T^0 \\ &= -2\xi \frac{d^2}{d\xi^2} + (\nu\xi^2 + \mu\xi - 1) \frac{d}{d\xi} - 2\nu j\xi - \mu j. \end{aligned}$$

Hierbei sind  $\nu$  und  $\mu$  positive reelle Parameter. Die Eliminierung des Polynoms vor der zweiten Ableitung wird mit der Substitution (2.6) durchgeführt und es ergeben sich

$$\begin{aligned} \xi &= x^2 \\ \frac{d}{dx} &= 2x \frac{d}{d\xi} \\ \frac{d^2}{dx^2} &= 4\xi \frac{d^2}{d\xi^2} + 2 \frac{d}{d\xi}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in den Hamilton-Operator, erhalten wir folgende Form

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{\frac{1}{2}(\nu x^3 + \mu x)}_{=A(x)} \frac{d}{dx} - 2\nu jx^2 - \mu j.$$

Aus diesem Hamilton-Operator kann nun das Potential nach (2.3) berechnet werden

$$V_1^* = \frac{\nu^2}{8}x^6 + \frac{\mu\nu}{4}x^4 + \left[ \frac{\mu^2}{8} - 2\nu \left( j + \frac{3}{8} \right) \right] x^2 - \frac{\mu}{2} \left( 2j + \frac{1}{2} \right),$$

wobei zu erwähnen ist, dass der Grundzustand noch nicht bei  $E_0 = 0$  liegt. Der Exponentialfaktor ist unabhängig von  $j$  und somit in allen Fällen gleich  $\exp\left(-\frac{\nu}{8}x^4 - \frac{\mu}{4}x^2\right)$ . Dieses Potential besitzt nur gerade analytische Lösungen, weil  $\xi = x^2$  ist und die Exponentialfunktion ebenfalls eine gerade Funktion ist.

$$j = \frac{1}{2}$$

Zur einfacheren Bestimmung der Polynomfunktion  $\tilde{\psi}$  wollen wir den Hamilton-Operator in der Matrixdarstellung betrachten. In dem Fall  $j = \frac{1}{2}$  lautet die  $2 \times 2$ -Matrix

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} & -\nu \\ -1 & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom wird nach (2.8) berechnet

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mu}{2} - \lambda\right) \left(-\frac{\mu}{2} - \lambda\right) - \nu \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_{1,2} = \mp \frac{\sqrt{\mu^2 + 4\nu}}{2}. \end{aligned}$$

Aus der Eigenwertgleichung werden die Eigenvektoren bestimmt, wobei darauf geachtet wurde, dass diese eine passende Form haben mit  $c_0 = 1$

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 + 4\nu}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{2} - \frac{\sqrt{\mu^2 + 4\nu}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit  $\alpha_{1,2} \geq 0$ . Die Grundzustandsenergie wird vom Potential abgezogen, damit dieser auf 0 gesetzt wird, wie es die supersymmetrische Quantenmechanik verlangt und somit erhalten wir das Potential

$$V_1 = \frac{\nu^2}{8}x^6 + \frac{\mu\nu}{4}x^4 + \left(\frac{\mu^2}{8} - \frac{7\nu}{4}\right)x^2 - \frac{3\mu}{4} + \frac{\sqrt{\mu^2 + 4\nu}}{2}.$$

Da nur gerade Zustände berechnet werden können, sind unsere Lösungen der Grundzustand und der zweite angeregte Zustand mit den Energien und den Wellenfunktionen

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)} &= (1 + \alpha_1 x^2) \exp\left(-\frac{\nu}{8}x^4 - \frac{\mu}{4}x^2\right), & E_0 &= 0 \\ \psi_2^{(1)} &= (1 - \alpha_2 x^2) \exp\left(-\frac{\nu}{8}x^4 - \frac{\mu}{4}x^2\right), & E_2 &= \sqrt{\mu^2 + 4\nu}. \end{aligned}$$

Für die supersymmetrische Untersuchung sind die Formeln aus Kap. 4.1 zu verwenden. Somit erhalten wir das Superpotential, das Partnerpotential und die Lösung des Potentials

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{\nu}{2}x^3 + \frac{\mu}{2}x - \frac{2\alpha_1 x}{1 + \alpha_1 x^2} \\ V_2 &= \frac{\nu^2}{8}x^6 + \frac{\mu\nu}{4}x^4 + \left(\frac{\mu^2}{8} - \frac{\nu}{4}\right)x^2 - \frac{2\alpha_1}{1 + \alpha_1 x^2} + \frac{4\alpha_1^2 x^2}{(1 + \alpha_1 x^2)^2} - \frac{\mu}{4} + \frac{\sqrt{\mu^2 + 4\nu}}{2} \\ \psi_1^{(2)} &= -2(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{x}{1 + \alpha_1 x^2} \exp\left(-\frac{\nu}{8}x^4 - \frac{\mu}{4}x^2\right). \end{aligned}$$

Diese Lösung entspricht dem ersten angeregten Zustand. Es ist gelungen das Partnerpotential eines quasi-exakt lösbaren Potential zu bestimmen. Doch durch die Bestimmung des Partnerpotentials geht immer eine Information verloren, wodurch ein Zustand weniger bekannt ist als für  $V_1$ . Die graphische Darstellung dieser Lösungen von Potentialen und Wellenfunktionen ist in Abb. (4.1) dargestellt.

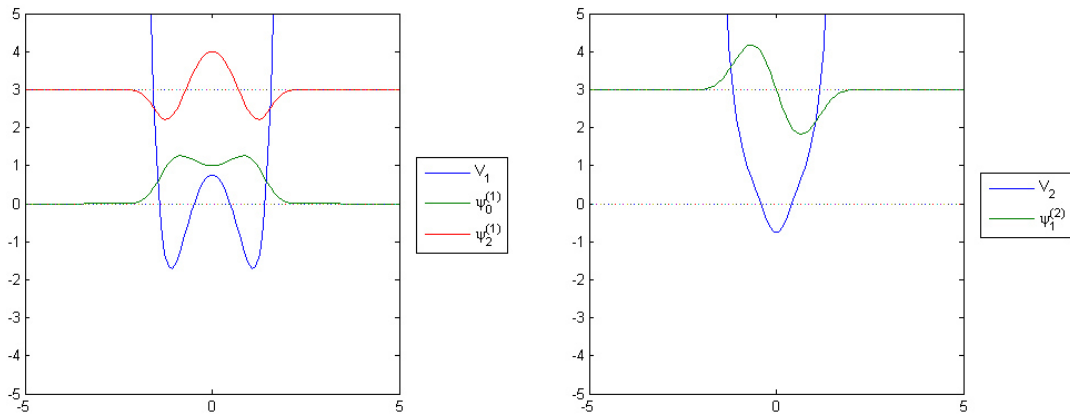


Abbildung 4.1: Lösung des anharmonischen Oszillators für  $j = \frac{1}{2}$ , bei dem das Potential  $V_1$  (links) nur gerade Zustände besitzt und das Partnerpotential  $V_2$  nur ungerade für den Fall mit  $\mu = 1$  und  $\nu = 2$

$j = 1$

Für  $j = 1$  wird zusätzlich  $\mu = 0$  gesetzt, sodass das charakteristische Polynom ohne die Anwendung der Cardanischen Formeln gelöst werden kann. Für die Fälle mit  $\mu \neq 0$  sind keine überraschenden Ergebnisse zu erwarten, sodass dieser Fall ausreichend ist. Der Hamilton-Operator in Matrixdarstellung lautet

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu & 0 \\ -6 & 0 & -2\nu \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit das charakteristische Polynom mit den Lösungen

$$-\lambda^3 + 8\nu\lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,3} = \mp\sqrt{8\nu} \quad , \quad \lambda_2 = 0.$$

Unter Verwendung der Eigenwertgleichung erhalten wir die drei Eigenvektoren

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} \nu \\ \sqrt{8\nu} \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\nu}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\psi}_3 = \begin{pmatrix} \nu \\ -\sqrt{8\nu} \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Aus diesen Berechnungen erhalten wir das Potential  $V_1$  und die Energien mit den Lösungen

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{\nu^2}{8}x^6 - \frac{11}{4}\nu x^2 + \sqrt{8\nu} \\
 \psi_0^{(1)} &= (1 + \sqrt{8\nu}x^2 + \nu x^4) \exp(-\frac{\nu}{8}x^4) \quad , \quad E_0 = 0 \\
 \psi_2^{(1)} &= (1 - \frac{\nu}{3}x^4) \exp(-\frac{\nu}{8}x^4) \quad , \quad E_2 = \sqrt{8\nu} \\
 \psi_4^{(1)} &= (1 - \sqrt{8\nu}x^2 + \nu x^4) \exp(-\frac{\nu}{8}x^4) \quad , \quad E_4 = 2\sqrt{8\nu}.
 \end{aligned}$$

Das Superpotential und das Partnerpotential haben für  $j = 1$  folgende Form

$$\begin{aligned}
 W(x) &= \frac{\nu}{2}x^3 - \frac{2\sqrt{8\nu}x + 4\nu x^3}{1 + \sqrt{8\nu}x^2 + \nu x^4} \\
 V_2 &= \frac{\nu^2}{8}x^6 - \frac{5\nu}{4}x^2 - \frac{2\sqrt{8\nu} + 12\nu x^2}{1 + \sqrt{8\nu}x^2 + \nu x^4} + \frac{(2\sqrt{8\nu}x + 4\nu x^3)^2}{(1 + \sqrt{8\nu}x^2 + \nu x^4)^2} + \sqrt{8\nu}.
 \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Wellenfunktionen wird ausmultipliziert, da sich hierdurch Terme auslöschen und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \psi_1^{(2)} &= -6\sqrt{8\nu}x \frac{3 + \sqrt{8\nu}x^2 + \nu x^4}{1 + \sqrt{8\nu}x^2 + \nu x^4} \exp(-\frac{\nu}{8}x^4) \\
 \psi_3^{(2)} &= -4\sqrt{8\nu}x \frac{1 - \nu x^4}{1 + \sqrt{8\nu}x^2 + \nu x^4} \exp(-\frac{\nu}{8}x^4).
 \end{aligned}$$

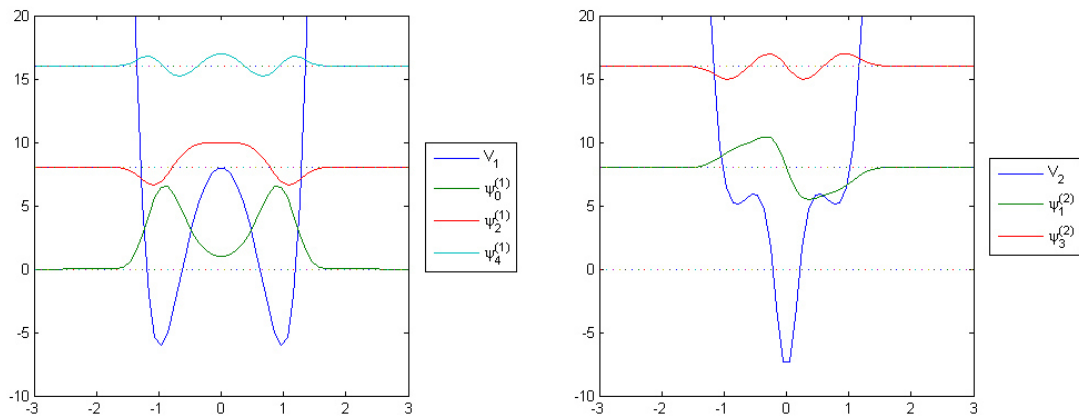


Abbildung 4.2: Potential und Partnerpotential für  $j = 1$  und  $\nu = 8$ , zur besseren Visualisierung wurde  $\psi_2^{(1)}$  mit dem Faktor 2,  $\psi_1^{(2)}$  mit 1/10 und  $\psi_3^{(2)}$  mit 1/5 multipliziert

Abb.(4.2) zeigt die Lösungen für den Fall  $j = 1$ . Es wird deutlich, dass die Form des Partnerpotentials abhängig ist von  $j$  und somit natürlich auch die Lösungen von  $V_2$ . Je größer  $j$  wird, desto komplizierter werden die Berechnungen. Für  $j > 1$  ist das charakteristische Polynom analytisch meist nicht mehr lösbar, deshalb werden jetzt weitere Potential betrachtet.

### 4.2.2 Ungerade Zustände

In diesem Kapitel wird ein anharmonischer Oszillator betrachtet, welcher ungerade analytisch lösbar Zustände besitzt. Dazu wird dem Hamilton-Operator zusätzlich  $-2T^-$  hinzugefügt. Dadurch erhält der Hamilton-Operator die Form

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{\left( \frac{\nu}{2} x^3 + \frac{\mu}{2} x - \frac{1}{x} \right)}_{=A(x)} \frac{d}{dx} - 2\nu j x^2 - \mu j.$$

Der Exponentialfaktor besitzt deshalb ein anderes Aussehen mit  $x \exp(-\frac{\nu}{8} x^4 - \frac{\mu}{4} x^2)$ . Durch die Multiplikation von  $x$  werden die Funktionen ungerade. Das Potential verändert sich ebenfalls mit der Form

$$V_1^* = \frac{\nu^2}{8} x^6 + \frac{\mu\nu}{4} x^4 + \left[ \frac{\mu^2}{8} - 2\nu \left( j + \frac{5}{8} \right) \right] x^2 - \mu j - \frac{3\mu}{4}.$$

$$j = \frac{1}{2}$$

In diesem Fall haben wir diesen Hamilton-Operator als Matrix mit dessen Eigenwerten

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} & -\nu \\ -3 & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \mp \frac{\sqrt{\mu^2 + 12\nu}}{2}.$$

Passende Eigenvektoren sind

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \left( -\frac{\mu}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 + 12\nu}}{2} \right) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \left( \frac{\mu}{2} + \frac{\sqrt{\mu^2 + 12\nu}}{2} \right) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\beta_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit  $\beta_{1,2} > 0$ . Das Potential  $V_1$  und die Wellenfunktionen sind somit

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\nu^2}{8} x^6 + \frac{\mu\nu}{4} x^4 + \left( \frac{\mu^2}{8} - \frac{9\nu}{4} \right) x^2 - \frac{5\mu}{4} + \frac{\sqrt{\mu^2 + 12\nu}}{2} \\ \psi_1^{(1)} &= (1 + \beta_1 x^2) x \exp\left(-\frac{\nu}{8} x^4 - \frac{\mu}{4} x^2\right), \quad E_1 = 0 \\ \psi_3^{(1)} &= (1 - \beta_2 x^2) x \exp\left(-\frac{\nu}{8} x^4 - \frac{\mu}{4} x^2\right), \quad E_3 = \sqrt{\mu^2 + 12\nu}. \end{aligned}$$

Dies ist nun der Fall, bei dem der Grundzustand nicht analytisch berechnet werden kann, jedoch der erste angeregte. Dieser wurde auf  $E_1 = 0$  gesetzt, sodass die supersymmetrische Quantenmechanik nach Kap. 3.2 durchgeführt werden kann. Das Superpotential und das Partnerpotential lauten in diesem Fall

$$W(x) = \frac{\nu}{2}x^3 + \frac{\mu}{2}x - \frac{2\beta_1 x}{1 + \beta_0 x^2} - \frac{1}{x}$$

$$V_2 = \frac{\nu^2}{8}x^6 + \frac{\nu\mu}{4}x^4 + \left(\frac{\mu^2}{8} - \frac{3\nu}{4}\right)x^2 - \frac{2\beta_1}{1 + \beta_1 x^2} + \frac{4\beta_1^2 x^2}{(1 + \beta_1 x^2)^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{3\mu}{4} + \frac{\sqrt{\mu^2 + 12\nu}}{2}.$$

Das Superpotential und das Partnerpotential besitzen einen Pol bei  $x = 0$  (Nullstelle von  $\psi_1^{(1)}$ ). Also müssen alle Wellenfunktionen des Partnerpotentials eine Nullstelle haben bei  $x = 0$  oder in der ersten Ableitung unstetig sein. Die hier gefundene Wellenfunktion hat die Form

$$\psi_2^{(2)} = -2(\beta_1 + \beta_2) \frac{x^2}{1 + \beta_1 x^2} \exp\left(-\frac{\nu}{8}x^4 - \frac{\mu}{4}x^2\right).$$

Dies ist theoretisch der zweite angeregte Zustand, weil die Wellenfunktion eine doppelte Nullstelle bei  $x = 0$  besitzt.

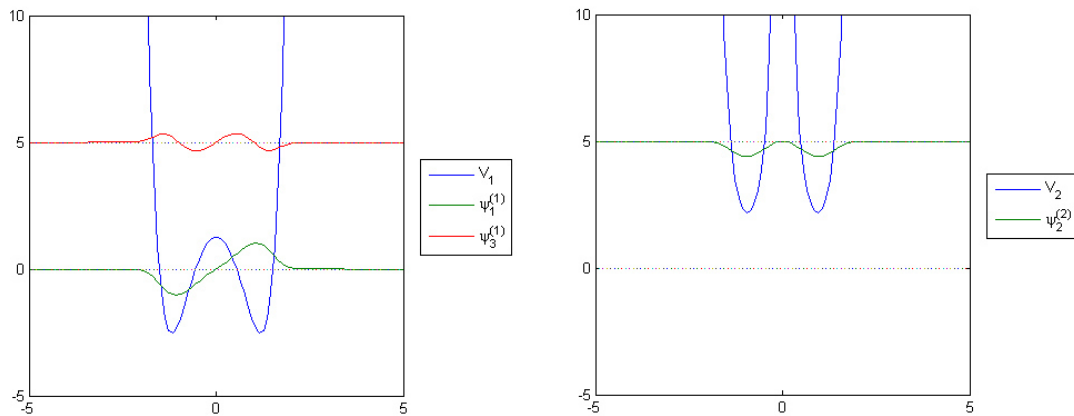


Abbildung 4.3: Potential und Partnerpotential für  $j = \frac{1}{2}$ ,  $\nu = 2$  und  $\mu = 1$  für ungerade Zustände bei  $V_1$

$j = 1$

Der Hamilton-Operator für  $\mu = 0$  ist

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -\nu & 0 \\ -10 & 0 & -2\nu \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgen die Eigenwerte

$$-\lambda^3 + 16\nu\lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,3} = \mp 4\sqrt{\nu} \quad , \quad \lambda_2 = 0.$$

Passende Eigenvektoren sind

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} \nu \\ 4\sqrt{\nu} \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} -\nu \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\psi}_3 = \begin{pmatrix} \nu \\ -4\sqrt{\nu} \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich das Potential und die Wellenfunktionen

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{\nu^2}{8}x^6 - \frac{13}{4}\nu x^2 + 4\sqrt{\nu} \\ \psi_1^{(1)} &= (3 + 4\sqrt{\nu}x^2 + \nu x^4)x \exp\left(-\frac{\nu}{8}x^4\right) \quad , \quad E_1 = 0 \\ \psi_3^{(1)} &= (5 - \nu x^4)x \exp\left(-\frac{\nu}{8}x^4\right) \quad , \quad E_3 = 4\sqrt{\nu} \\ \psi_5^{(1)} &= (3 - 4\sqrt{\nu}x^2 + \nu x^4)x \exp\left(-\frac{\nu}{8}x^4\right) \quad , \quad E_5 = 8\sqrt{\nu}. \end{aligned}$$

Aus dem Zustand mit der Nullenergie folgt das Superpotential und hieraus das Partnerpotential

$$\begin{aligned} W(x) &= \frac{\nu}{2}x^3 - \frac{1}{x} - \frac{8\sqrt{\nu}x + 4\nu x^3}{3 + 4\sqrt{\nu}x^2 + \nu x^4} \\ V_2 &= \frac{\nu^2}{8}x^6 - \frac{7}{4}\nu x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{8\sqrt{\nu} + 12\nu x^2}{3 + 4\sqrt{\nu}x^2 + \nu x^4} + \frac{(8\sqrt{\nu}x + 4\nu x^3)^2}{(3 + 4\sqrt{\nu}x^2 + \nu x^4)^2} + 4\sqrt{\nu}. \end{aligned}$$

Die Wellenfunktionen ergeben sich nach einer kurzen Rechnung zu

$$\begin{aligned} \psi_2^{(2)} &= -8\sqrt{\nu}x^2 \frac{5 + 4\sqrt{\nu}x^2 + \nu x^4}{3 + 4\sqrt{\nu}x^2 + \nu x^4} \exp\left(-\frac{\nu}{8}x^4\right) \\ \psi_4^{(2)} &= -16\sqrt{\nu}x^2 \frac{3 - \nu x^4}{3 + 4\sqrt{\nu}x^2 + \nu x^4} \exp\left(-\frac{\nu}{8}x^4\right). \end{aligned}$$

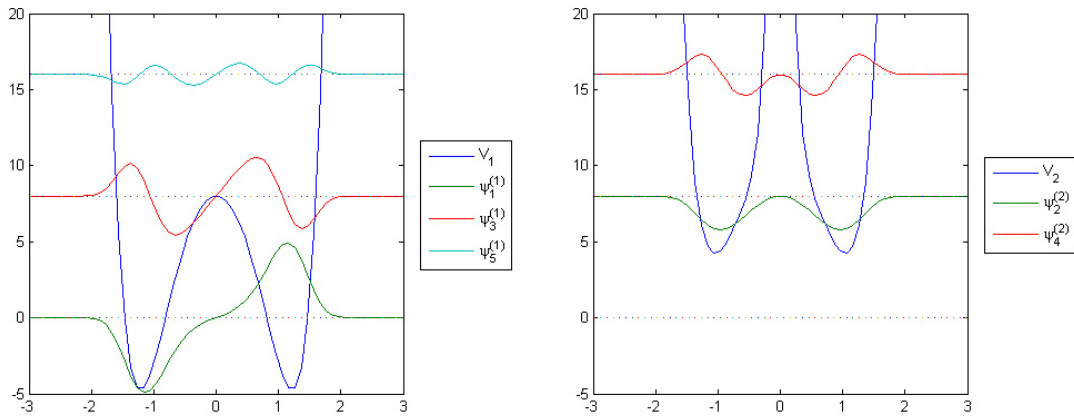


Abbildung 4.4: Potential und Partnerpotential für  $j = 1$  und  $\nu = 4$  für ungerade Zustände bei  $V_1$ , dabei ist  $\psi_1^{(1)}$  mit  $1/2$ ,  $\psi_2^{(2)}$  mit  $1/5$  und  $\psi_4^{(2)}$  mit  $1/3$  multipliziert worden

### 4.3 Das Razavy-Potential

Das Razavy-Potential ist ein quasi-exakt lösbares Potential, welches aus cosh-Funktionen aufgebaut ist. Nach [Raz 79] hat das Potential die Form

$$V = \frac{\hbar^2 \beta^2}{2m} \left[ \frac{1}{8} a^2 \cosh(4\beta x) - (n+1)a \cosh(2\beta x) - \frac{1}{8} a^2 \right],$$

wobei  $n \in \mathbb{N}$  ist und es  $n+1$  analytisch lösbare Zustände gibt. Des weiteren sind  $\beta$  und  $a$  Parameter. Mit unseren Annahmen  $\hbar = m = 1$  und zusätzlich noch mit  $\beta = 1$  ergibt sich

$$V = \frac{a^2}{16} \cosh(4x) - (n+1) \frac{a}{2} \cosh(2x) - \frac{a^2}{16}.$$

#### 4.3.1 Gemischte Zustände

Als erstes wird ein Hamilton-Operator betrachtet, welcher wie folgt aus den Generatoren  $T^a$  aufgebaut ist

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} T^+ T^+ + T^0 T^0 - \frac{1}{2} T^- T^- + a T^0 \\ &= -\frac{1}{2} (1 - \xi^2)^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + [a\xi + \xi(1 - \xi^2) - 2j\xi(1 - \xi^2)] \frac{d}{d\xi} + \xi^2 j(1 - 2j) + j(j - a). \end{aligned}$$

Nach (2.6) wird wieder die Substitution von  $\xi \rightarrow x$  durchgeführt

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{1}{1-\xi^2} d\xi = \operatorname{artanh}(\xi) \Leftrightarrow \xi = \tanh(x) \\ \frac{d}{dx} &= \frac{1}{\cosh^2(x)} \frac{d}{d\xi} = (1-\xi) \frac{d}{d\xi} \\ \frac{d^2}{dx^2} &= (1-\xi)^2 \frac{d^2}{d\xi^2} - 2\xi(1-\xi) \frac{d}{d\xi}. \end{aligned}$$

Somit folgt für den Hamilton-Operator in Abhängigkeit von  $x$

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{(a \sinh(x) \cosh(x) - 2j \tanh(x))}_{=A(x)} \frac{d}{dx} + j(1-2j) \tanh^2(x) + j(j-a).$$

Der Exponentialfaktor hat diesmal eine Abhängigkeit von  $j$  mit der Form

$$\cosh^{2j}(x) \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right).$$

Theoretisch gäbe es noch die Möglichkeit  $\xi = -\tanh(x)$ , jedoch würde diese ein positives Vorzeichen in der Exponentialfunktion erzeugen, wodurch die Wellenfunktion nicht normierbar wäre.

Das Polynom  $\tilde{\psi}$  wird aus Potenzen von  $\tanh(x)$  aufgebaut, sodass in diesem Fall sowohl gerade als auch ungerade Zustände berechnet werden können. Das Potential für alle  $j$  hat die Form

$$V^* = \frac{a^2}{2} \cosh^4(x) - \frac{a}{2} (a + 4j + 2) \cosh^2(x) + \frac{a}{2} (1 + 2j) + j(j+1).$$

Zur Berechnung wurde  $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$  verwendet. Mit weiteren Additionstheoremen  $\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$  und  $\cosh^4(x) = \frac{\cosh(4x)}{8} + \frac{\cosh(2x)}{2} + \frac{3}{8}$  kann das Potential umgeschrieben werden zu

$$V^* = \frac{a^2}{16} \cosh(4x) - (2j+1) \frac{a}{2} \cosh(2x) - \frac{a^2}{16} + j(j+1),$$

welches mit dem Razavy-Potential übereinstimmt, wobei  $n = 2j$  ist.

$j = 0$

Für den Fall  $j = 0$  sind das Potential, das Partnerpotential und der Grundzustand von  $V_1$  einfach zu bestimmen, da  $\tilde{\psi}=1$  ist.

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{a^2}{16} \cosh(4x) - \frac{a}{2} \cosh(2x) - \frac{a^2}{16} \\ \psi_0^{(1)} &= \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right) = C \exp\left(-\frac{a}{4} \cosh(2x)\right), \quad E_0 = 0 \\ V_2 &= \frac{a^2}{16} \cosh(4x) + \frac{a}{2} \cosh(2x) - \frac{a^2}{16} \end{aligned}$$

Es gibt keine Lösungen für das Partnerpotential.

$$j = \frac{1}{2}$$

Die  $2 \times 2$ -Matrix hat eine Form, bei der die Eigenvektoren und Eigenwerte direkt abgelesen werden können.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} - \frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{4} \mp \frac{a}{2} \quad ,$$

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit ergeben sich das Potential mit dem Grundzustand bei  $E_0 = 0$  und die beiden Wellenfunktionen

$$V_1 = \frac{a^2}{16} \cosh(4x) - a \cosh(2x) - \frac{a^2}{16} + \frac{1}{2} + \frac{a}{2}$$

$$\psi_0^{(1)} = \cosh(x) \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right) \quad , \quad E_0 = 0$$

$$\psi_1^{(1)} = \sinh(x) \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right) \quad , \quad E_1 = a.$$

Das Superpotential und das Partnerpotential mit seiner Lösung

$$W(x) = a \sinh(x) \cosh(x) - \tanh(x)$$

$$V_2 = \frac{a^2}{16} \cosh(4x) - \frac{1}{\cosh^2(x)} - \frac{a^2}{16} + \frac{1}{2} + \frac{a}{2}$$

$$\psi_0^{(2)} = \frac{1}{\cosh(x)} \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right).$$

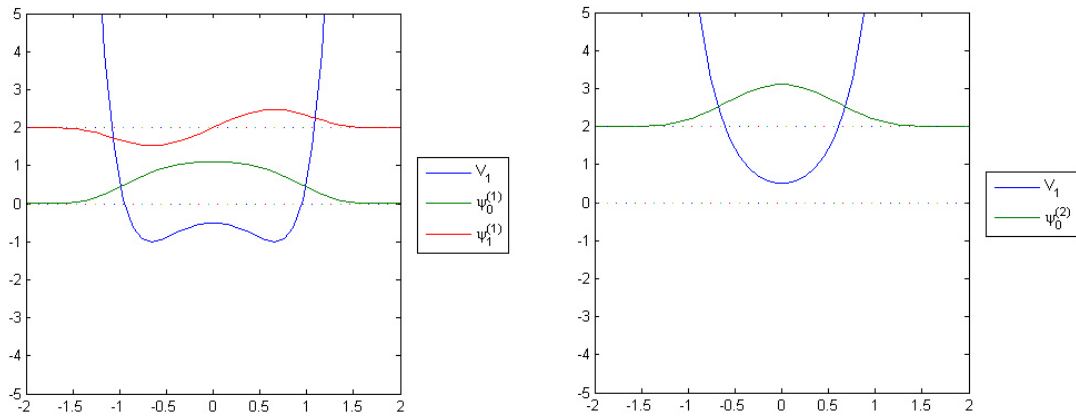


Abbildung 4.5: Razavy-Potential und sein Partnerpotential für  $j = \frac{1}{2}$  und  $a = 2$ , alle Funktionen mit 3 multipliziert

$j = 1$

Hier wollen wir ebenfalls den Fall  $j = 1$  betrachten. Der Hamilton-Operator in Matrixdarstellung ist

$$H = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom der Matrix

$$(1+a-\lambda)(1-a-\lambda)(-\lambda) + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,3} = 1 \mp \sqrt{1+a^2}, \quad \lambda_2 = 0.$$

Mögliche Eigenvektoren zu den Eigenwerten lauten

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1+a^2}-a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+a^2}-a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\gamma_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei  $\gamma_{1,2} > 0$  ist. Mit Hilfe dieser Lösungen werden wieder das Potential und die Wellenfunktionen mit ihren Energien bestimmt

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{a^2}{16} \cosh(4x) - \frac{3a}{2} \cosh(2x) - \frac{a^2}{16} + 1 + \sqrt{1+a^2} \\ \psi_0^{(1)} &= (1 + \gamma_1 \tanh^2(x)) \cosh^2(x) \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right), \quad E_0 = 0 \\ \psi_1^{(1)} &= \sinh(x) \cosh(x) \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right), \quad E_1 = \sqrt{1+a^2} - 1 \\ \psi_2^{(1)} &= (1 - \gamma_2 \tanh^2(x)) \cosh^2(x) \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right), \quad E_2 = 2\sqrt{1+a^2}. \end{aligned}$$

Das Superpotential und das Partnerpotential erhalten aufgrund der Ableitungen von  $\tanh(x)$  mit  $\frac{d}{dx} \tanh(x) = 1/\cosh^2(x)$  und  $\frac{d}{dx} \tanh^2(x) = 2 \tanh(x)/\cosh^2(x)$  die Form

$$\begin{aligned} W(x) &= a \sinh(x) \cosh(x) - 2 \tanh(x) - \frac{\gamma_1 2 \tanh(x)}{\cosh^2(x)(1 + \gamma_1 \tanh^2(x))} \\ V_2 &= \frac{a^2}{16} \cosh(4x) - \frac{a}{2} \cosh(2x) - \frac{2}{\cosh^2(x)} - \frac{2\gamma_1}{\cosh^4(x)(1 + \gamma_1 \tanh^2(x))} \\ &\quad + \frac{4\gamma_1 \tanh^2(x)(1 + \gamma_1)}{\cosh^2(x)(1 + \gamma_1 \tanh^2(x))^2} - \frac{a^2}{16} + 1 + \sqrt{1+a^2} \\ &= \frac{a^2}{16} \cosh(4x) - \frac{a}{2} \cosh(2x) - \frac{2(\gamma_1 + 1)}{\cosh^2(x)} \frac{1 - \tanh^2(x)}{(1 + \tanh^2(x))^2} - \frac{a^2}{16} + 1 + \sqrt{1+a^2}. \end{aligned}$$



Die beiden Lösungen des Partnerpotentials lauten

$$\psi_0^{(2)} = \frac{1 - \gamma_1 \tanh^2(x)}{1 + \gamma_1 \tanh^2(x)} \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right)$$

$$\psi_1^{(2)} = -2(\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\tanh(x)}{1 + \gamma_1 \tanh^2(x)} \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right).$$

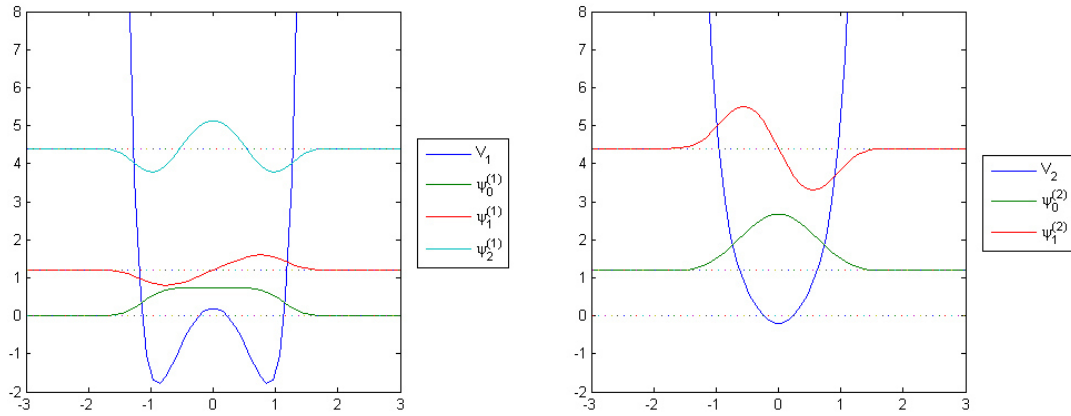


Abbildung 4.6: Razavy-Potential mit Partnerpotential für  $j = 1$  und  $a = 2$ , die Wellenfunktionen  $\psi_0^{(1)}$ ,  $\psi_1^{(1)}$  und  $\psi_2^{(1)}$  wurden mit 2 erweitert und  $\psi_0^{(2)}$  mit 4

Aus Abb.(4.6) erkennt man, dass die Abstände der Energien im Razavy-Potential nicht konstant sind, wie es jedoch beim anharmonischen Oszillator schon der Fall war.

### 4.3.2 Gerade Zustände

In diesem Kapitel betrachten wir ein Potential, welches nur gerade Funktionen als analytische Lösung hervorbringt und auch aus cosh-Funktionen aufgebaut ist. Dazu wird der Hamilton-Operator wie folgt aufgestellt

$$H = -\frac{1}{2}(T^0 T^0 - T^- T^-) - j T^0 - b(T^+ + T^-)$$

$$= -\frac{1}{2}(\xi^2 - 1) \frac{d^2}{d\xi^2} + (b\xi^2 - b - \frac{1}{2}\xi) \frac{d}{d\xi} - 2bj\xi + \frac{1}{2}j^2$$

und wir erhalten die Substitution

$$\begin{aligned}\xi &= \cosh(x) \\ \frac{d}{dx} &= \sinh(x) \frac{d}{d\xi} \\ \frac{d^2}{dx^2} &= (\xi^2 - 1) \frac{d^2}{d\xi^2} + \xi \frac{d}{d\xi}.\end{aligned}$$

Der neue Hamilton-Operator hat nun die Form

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{b \sinh(x)}_{=A(x)} \frac{d}{dx} - 2bj \cosh(x) + \frac{1}{2} j^2,$$

woraus der Exponentialfaktor der Wellenfunktion mit  $\exp(-b \cosh(x))$  und das Potential nach bekannter Formel bestimmt werden

$$\begin{aligned}V^* &= \frac{b^2}{2} \sinh^2(x) - \left(\frac{1}{2} + 2j\right) b \cosh(x) + \frac{j^2}{2} \\ &= \frac{b^2}{4} \cosh(2x) - \left(\frac{1}{2} + 2j\right) b \cosh(x) - \frac{b^2}{4} + \frac{j^2}{2}.\end{aligned}$$

Bei geschicktem Hinsehen erkennt man

$$\begin{aligned}4V^* &= b^2 \cosh(2x) - (1 + 4j) 2b \cosh(x) - b^2 + 2j^2 \\ &= \frac{(4b)^2}{16} \cosh(2x) - (1 + 4j) \frac{4b}{2} \cosh(x) - \frac{(4b)^2}{16} + 2j^2.\end{aligned}$$

Dies ist mit  $4b = a$ ,  $x \rightarrow 2x$  und  $4j = n$  wieder das Razavy-Potential [Raz 79]. Es ist verständlich, dass  $4j = n$  sein muss, da wir in diesem Fall nur gerade Zustände lösen können und somit den  $4j + 1$ sten angeregten Zustand bestimmen können. Jedoch ist es uns nicht möglich mit diesem Ansatz die ungeraden Zustände zu bestimmen, wie es im vorherigen Kapitel der Fall war.

$$j = \frac{1}{2}$$

Für dieses Potential wird nur der Fall  $j = \frac{1}{2}$  betrachtet. Für größere  $j$  sind keine weiteren Erkenntnisse zu erwarten.

Der Hamilton-Operator in Matrixdarstellung und seine Eigenwerte lauten

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & -b \\ -b & \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{8} \mp \frac{\sqrt{1+16b^2}}{4}$$

und die dazugehörigen Eigenvektoren sind

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4b} + \frac{\sqrt{1+16b^2}}{4b} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \delta_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4b} - \frac{\sqrt{1+16b^2}}{4b} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\delta_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit  $\delta_{1,2} > 0$ . Somit erhält man das Potential und die beiden Lösungen des Potentials mit den Energieeigenwerten

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{b^2}{4} \cosh(2x) - \frac{3b}{2} \cosh(x) - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1+16b^2}}{4} \\ \psi_0^{(1)} &= (1 + \delta_1 \cosh(x)) \exp(-b \cosh(x)) \quad , \quad E_0 = 0 \\ \psi_2^{(1)} &= (1 - \delta_2 \cosh(x)) \exp(-b \cosh(x)) \quad , \quad E_2 = \frac{\sqrt{1+16b^2}}{2}. \end{aligned}$$

Nach den bekannten Formeln werden wieder das Superpotential, das Partnerpotential und die Lösung des Partnerpotentials bestimmt.

$$\begin{aligned} W(x) &= b \sinh(x) - \frac{\delta_1 \sinh(x)}{1 + \delta_1 \cosh(x)} \\ V_2 &= \frac{b^2}{4} \cosh(2x) - \frac{b}{2} \cosh(x) - \frac{\delta_1 \cosh(x)}{1 + \delta_1 \cosh(x)} + \frac{\delta_1^2 \sinh^2(x)}{(1 + \delta_1 \cosh(x))^2} - \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1+16b^2}}{4} \\ \psi_1^{(2)} &= -(\delta_1 + \delta_2) \frac{\sinh(x)}{1 + \delta_1 \cosh(x)} \exp(-b \cosh(x)) \end{aligned}$$

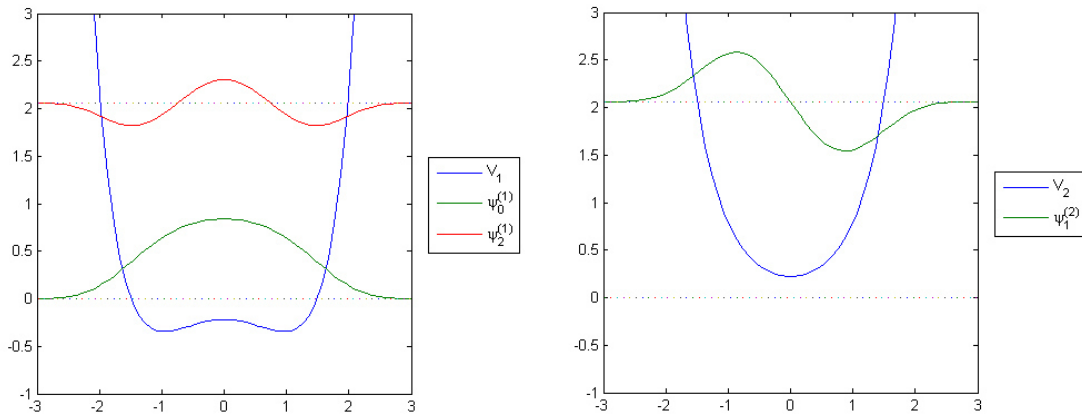


Abbildung 4.7: Potential und Partnerpotential für  $j = \frac{1}{2}$  mit  $b = 1$ , es wurden die Funktionen  $\psi_2^{(1)}$  und  $\psi_1^{(2)}$  mit 3 multipliziert

### Zusammenhang zum Razavy-Potential

Wie entdeckt wurde, kann ein Zusammenhang zum Razavy-Potential hergestellt werden. Diesen Zusammenhang wollen wir jetzt auch bei den Zuständen überprüfen. Es muss ein Zusammenhang zum  $j = 1$  des Razavy-Potentials sein, da die selben angeregten Zustände verglichen werden sollen.

Mit den oberen Bedingungen  $4b = a$  und  $x \rightarrow 2x$  wird aus den Definitionen von  $\delta_1$  und  $\gamma_1$  deutlich

$$\delta_1 = \frac{\gamma_1 + 1 + a}{a}$$

und später ebenfalls noch wichtig

$$\gamma_1(\gamma_1 + 1 + 2a) = 1 + a^2 + a^2 - 2a\sqrt{1 + a^2} + \sqrt{1 + a^2} - a + 2a\sqrt{1 + a^2} - 2a^2 = 1 + \gamma_1.$$

Als erstes widmen wir uns dem Grundzustand von  $V_1$

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)}(2x) &= (1 + \delta_1 \cosh(2x)) \exp(-b \cosh(2x)) \\ &= \left(1 + \frac{\gamma_1 + 1 + a}{a} (\sinh^2(x) + \cosh^2(x))\right) \exp\left(-\frac{a}{4} (2 \cosh^2(x) - 1)\right) \\ &= \left(\frac{\gamma_1 + 1}{a} \sinh^2(x) + \frac{\gamma_1 + 1 + 2a}{a} \cosh^2(x)\right) \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right) C \\ &= \frac{\gamma_1 + 1 + 2a}{a} \left(\cosh^2(x) + \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 + 1 + 2a} \sinh^2(x)\right) \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right) C \\ &= \frac{\gamma_1 + 1 + 2a}{a} (\cosh^2(x) + \gamma_1 \sinh^2(x)) \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right) C \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

mit  $C = \exp(a/4)$ . Für  $\psi_2^{(1)}$  ist die Rechnung analog mit den verwendeten Zusammenhängen  $\delta_2 = \frac{\gamma_2 - 1 - a}{a}$  und  $\gamma_2(\gamma_2 - 1 - 2a) = -(\gamma_2 - 1)$ . Die Energie von  $\psi_2^{(1)}$  ist 4 mal größer als bei den Razavy-Potential, das liegt daran, dass  $x \rightarrow 2x$  und das Potential mit 4 multipliziert wurde.

Interessant ist jetzt, ob die Zusammenhänge ebenfalls für das Partnerpotentiale und dessen Zustände gelten. Der gelöste Zustand des Partnerpotentials ohne Vorfaktoren mit den genannten Bedingungen lautet

$$\begin{aligned} \psi_1^{(2)}(2x) &= \frac{\sinh(2x)}{1 + \delta_1 \cosh(2x)} \exp(-b \cosh(2x)) \\ &= \frac{2 \sinh(x) \cosh(x)}{1 + \frac{\gamma_1 + 1 + a}{a} (\sinh^2(x) + \cosh^2(x))} \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right) C \\ &= \frac{2 \sinh(x) \cosh(x)}{\frac{\gamma_1 + 1}{a} \sinh^2(x) + \frac{\gamma_1 + 1 + 2a}{a} \cosh^2(x)} \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right) C \\ &= \frac{2a}{\gamma_1 + 1 + 2a} \frac{\tanh(x)}{\left(1 + \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 + 1 + 2a} \tanh^2(x)\right)} \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right) C \\ &= \frac{2a}{\gamma_1 + 1 + 2a} \frac{\tanh(x)}{(1 + \gamma_1 \tanh^2(x))} \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right) C \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Jetzt wollen wir prüfen, ob sich die Partnerpotentiale ebenfalls mit diesen Bedingungen überführen lassen. Dazu benötigen wir die Relation

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_1 + a + 1}{\gamma_1 + 2a + 1} &= \frac{\sqrt{1 + a^2} + 1}{\sqrt{1 + a^2} + a + 1} = \frac{\sqrt{1 + a^2} + 1}{\sqrt{1 + a^2} + a + 1} \cdot \frac{\sqrt{1 + a^2} - a - 1}{\sqrt{1 + a^2} - a - 1} \\ &= \frac{a^2 - a\sqrt{1 + a^2} - a}{-2a} = \frac{1}{2}(\gamma_1 + 1). \end{aligned}$$

Setzen wir alles ein ergibt sich

$$4V_2(2x) = \frac{a^2}{16} \cosh(4x) - \frac{a}{2} \cosh(2x) - \frac{\delta_1 \cosh(2x)}{1 + \delta_1 \cosh(2x)} + \frac{\delta_1^2 \sinh^2(2x)}{(1 + \delta_1 \cosh(2x))^2} - \frac{a^2}{16} + 1 + \sqrt{1 + 16b^2}.$$

Die zwei Terme in der Mitte werden jetzt separat, mit  $\delta_1$  eingesetzt, betrachtet

$$\begin{aligned} & - \frac{\frac{\gamma_1 + 1 + a}{a} (\cosh^2(x) + \sinh^2(x))}{1 + \frac{\gamma_1 + 1 + a}{a} (\cosh^2(x) + \sinh^2(x))} + \frac{(\frac{\gamma_1 + 1 + a}{a})^2 4 \sinh^2(x) \cosh^2(x)}{(1 + \frac{\gamma_1 + 1 + a}{a} (\cosh^2(x) + \sinh^2(x)))^2} \\ &= -4 \left( \frac{\gamma_1 + a + 1}{\gamma_1 + 2a + 1} \right) \frac{\cosh^2(x) + \sinh^2(x)}{\cosh^2(x) + \gamma_1 \sinh^2(x)} + 16 \left( \frac{\gamma_1 + a + 1}{\gamma_1 + 2a + 1} \right)^2 \frac{\cosh^2(x) \sinh^2(x)}{(\cosh^2(x) + \gamma_1 \sinh^2(x))^2} \\ &= \frac{-2(\gamma_1 + 1)}{\cosh^2(x)(1 + \gamma_1 \tanh^2(x))^2} ((\cosh^2(x) + \sinh^2(x))(1 + \gamma_1 \tanh^2(x)) - 2(1 + \gamma_1) \sinh^2(x)) \\ &= \frac{-2(\gamma_1 + 1)}{\cosh^2(x)(1 + \gamma_1 \tanh^2(x))^2} (\cosh^2(x) - \sinh^2(x) - \gamma_1 \sinh^2(x) + \gamma_1 \sinh^2(x) \tanh^2(x)) \\ &= \frac{-2(\gamma_1 + 1)}{\cosh^2(x)(1 + \gamma_1 \tanh^2(x))^2} (1 - \gamma_1 \tanh^2(x)) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

### 4.3.3 Ungerade Zustände

Um ungerade Wellenfunktionen für das Potential  $V_1$  zu erhalten, wird analog zum anharmonischen Oszillator bei dem Hamilton-Operator zusätzlich  $-T^0$  hinzugefügt. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}(T^0 T^0 - T^- T^-) - jT^0 - b(T^+ + T^-) - T^0 \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{(b \sinh(x) - \coth(x))}_{=A(x)} \frac{d}{dx} - 2bj \cosh(x) + \frac{j}{2}(j - 2). \end{aligned}$$

Der Exponentialfaktor ist  $\sinh(x) \exp(-b \cosh(x))$  und das Potential für alle  $j$

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{b^2}{2} \sinh^2(x) - \left( \frac{3}{2} + 2j \right) b \cosh(x) + \frac{j^2}{2} + j + \frac{1}{2} \\ &= \frac{b^2}{4} \cosh(2x) - \left( \frac{3}{2} + 2j \right) b \cosh(x) - \frac{b^2}{4} + \frac{j^2}{2} + j + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wieder können wir hier durch geschickte Wahl der Parameter das Razavy-Potential identifizieren

$$\begin{aligned} 4V^* &= b^2 \cosh(2x) - (1 + 2 + 4j) \frac{4b}{2} \cosh(x) - b^2 + 2j^2 + 4j + 2 \\ &= \frac{(4b)^2}{16} \cosh(2x) - (1 + (2 + 4j)) \frac{4b}{2} \cosh(x) - \frac{(4b)^2}{16} + 2j^2 + 4j + 2 \end{aligned}$$

mit  $4b = a$ ,  $x \rightarrow 2x$  und  $2 + 4j = n$ . Für  $j = 0$  ist  $n = 2$  und für  $j = \frac{1}{2}$  ist  $n = 4$ , dieses Razavy-Potential mit  $n = 4$  wurde in dieser Arbeit nicht gelöst, da dies den Rahmen der Arbeit sprengen würde.

$$j = \frac{1}{2}$$

Es wird wieder der konkrete Fall mit  $j = \frac{1}{2}$  betrachtet. Somit erhalten wir für den Hamilton-Operator, die Eigenwerte und die Eigenvektoren

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} & -b \\ -b & \frac{5}{8} \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{8} \mp \frac{\sqrt{9 + 16b^2}}{4} \\ \vec{\psi}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4b} + \frac{\sqrt{9+16b^2}}{4b} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4b} - \frac{\sqrt{9+16b^2}}{4b} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\sigma_2 \\ 1 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

wobei  $\sigma_{1,2} > 0$  ist. Weiter ergeben sich das Potential und die Zustände

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{b^2}{4} \cosh(2x) - \frac{5b}{2} \cosh(x) - \frac{b^2}{4} + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{9 + 16b^2}}{4} \\ \psi_1^{(1)} &= (1 + \sigma_1 \cosh(x)) \sinh(x) \exp(-b \cosh(x)) \quad , \quad E_0 = 0 \\ \psi_3^{(1)} &= (1 - \sigma_2 \cosh(x)) \sinh(x) \exp(-b \cosh(x)) \quad , \quad E_2 = \frac{\sqrt{9 + 16b^2}}{2} . \end{aligned}$$

Als nächstes werden wieder das Superpotential, Partnerpotential und dessen Zustand bestimmt

$$\begin{aligned} W(x) &= b \sinh(x) - \coth(x) - \frac{\sigma_1 \sinh(x)}{1 + \sigma_1 \cosh(x)} \\ V_2 &= \frac{b^2}{4} \cosh(2x) - \frac{3b}{2} \cosh(x) + \frac{1}{\sinh^2(x)} - \frac{\sigma_1 \cosh(x)}{1 + \sigma_1 \cosh(x)} + \frac{\sigma_1^2 \sinh^2(x)}{(1 + \sigma_1 \cosh(x))^2} \\ &\quad - \frac{b^2}{4} + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{9 + 16b^2}}{4} \\ \psi_2^{(2)} &= -(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{\sinh^2(x)}{1 + \sigma_1 \cosh(x)} \exp(-b \cosh(x)) . \end{aligned}$$

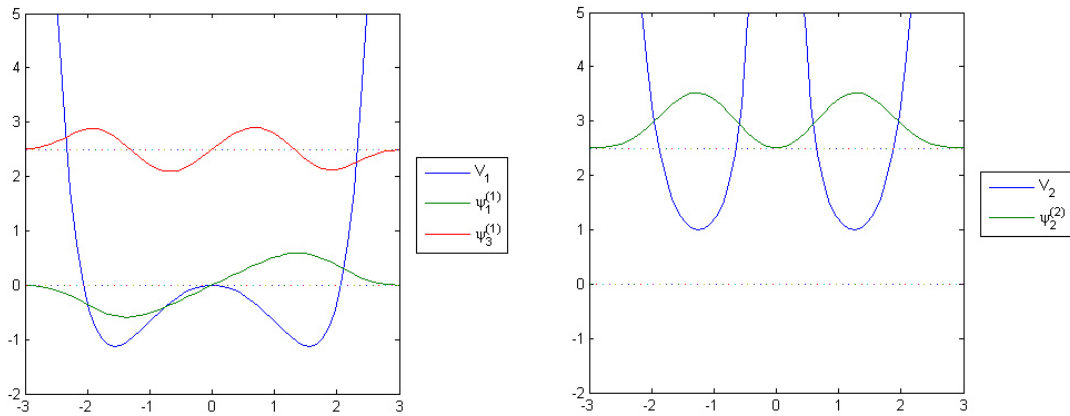


Abbildung 4.8: Potential und Partnerpotential für ungerade Zustände  $j = \frac{1}{2}$  und  $b = 1$ , dabei ist  $\psi_1^{(1)}$  mit  $\frac{1}{2}$ ,  $\psi_3^{(1)}$  mit 5 und  $\psi_2^{(2)}$  mit  $-5$  multipliziert worden

### Zusammenhang zum Razavy-Potential

Da hier gilt  $4j + 2 = n$ , muss der Fall  $j = 0$  betrachtet werden. Dort ist die Lösung einfach der Exponentialfaktor und der Zusammenhang ist einfach berechnet

$$\begin{aligned}\psi_1^{(1)}(2x) &= \sinh(2x) \exp(-b \cosh(2x)) \\ &= 2 \sinh(x) \cosh(x) \exp\left(-\frac{a}{2} \cosh^2(x)\right) C.\end{aligned}$$

Es wurden zusätzlich die Zustände von  $j = \frac{1}{2}$  berechnet. Mit diesen Ergebnissen können die ungeraden Zustände des Razavy-Potential für  $n = 4$  berechnet werden. Der Rechenaufwand über diesen Weg das Razavy-Potential für  $n = 4$  zu lösen ist erheblich geringer und bringt sogar analytische Lösungen.

Ein Vergleich zwischen den Partnerpotentialen und dessen Zustände kann an dieser Stelle nicht gemacht werden, da für die Berechnung des Partnerpotentials hier der erste angeregte Zustand verwendet wurde.

## 4.4 Periodische Potentiale

Zum Schluss sollen noch periodische Potentiale betrachtet werden. Bei den periodischen Potentialen ist das Bloch-Theorem elementar. Jedoch erhält man in diesen Fällen periodische Wellen ohne Bloch-Phase, was bedeutet, dass sie an den Rändern der Bloch-Zone sind [Shi 99] (in der Festkörperphysik auch Brillouin-Zone genannt).

Periodische Wellenfunktionen sind nicht normierbar, jedoch trotzdem eine physikalische Lösung. Es werden hier Potentiale betrachtet, welche mit den oben betrachteten Razavy-Potentiale korrespondieren.

### 4.4.1 Gemischte Zustände

Zunächst wird auch hier ein Potential gewählt, welches sowohl gerade als auch ungerade Zustände löst. Dazu werden wir den Hamilton-Operator aus Kap. 4.3.1 modifizieren. Für die Substitution von  $\xi \rightarrow x$  wurde dort der  $\tanh(x)$  verwendet. Jetzt soll stattdessen  $\tan(x)$  verwendet werden und dazu wird statt  $+T^0T^0$  jetzt  $-T^0T^0$  benutzt, also lautet der Hamilton-Operator

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2}T^+T^+ - T^0T^0 - \frac{1}{2}T^-T^- + aT^0 \\ &= -\frac{1}{2}(1+\xi^2)^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + [a\xi - \xi(1+\xi^2) + 2j\xi(1+\xi^2)] \frac{d}{d\xi} + \xi^2j(1-2j) - j(j+a). \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir also für die Substitution

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{1}{1+\xi^2} d\xi = \arctan(\xi) \Leftrightarrow \xi = \tan(x) \\ \frac{d}{dx} &= \frac{1}{\cos^2(x)} \frac{d}{d\xi} = (1+\xi) \frac{d}{d\xi} \\ \frac{d^2}{dx^2} &= (1+\xi)^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + 2\xi(1+\xi) \frac{d}{d\xi} \end{aligned}$$

und somit den neuen Hamilton-Operator

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{(a \sin(x) \cos(x) + 2j \tan(x))}_{=A(x)} \frac{d}{dx} + j(1-2j) \tan^2(x) - j(j+a)$$

mit dem Exponentialfaktor  $\cos^{2j}(x) \exp(\frac{a}{2} \cos^2(x))$ . Das Potential für alle  $j$  hat die Form

$$\begin{aligned} V^* &= -\frac{a^2}{2} \cos^4(x) - \frac{a}{2}(2+4j-a) \cos^2(x) + \frac{a}{2}(1+2j) - j(j+1) \\ &= -\frac{a^2}{16} \cos(4x) - (2j+1) \frac{a}{2} \cos(2x) + \frac{a^2}{16} - j(j+1). \end{aligned}$$

Bei dem zweiten Schritt wurden die Additionstheoreme  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ ,  $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x)+1}{2}$  und  $\cos^4(x) = \frac{\cos(4x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{8}$  verwendet. Dieses Potential ist das trigonometrische Pendant zum Razavy-Potential.



$j = 0$

Für diesen Fall erhalten wir wieder die einfachsten Lösungen

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{a^2}{16} \cos(4x) - \frac{a}{2} \cos(2x) + \frac{a^2}{16} \\ \psi_0^{(1)} &= \exp\left(\frac{a}{2} \cos^2(x)\right) = C \exp\left(\frac{a}{4} \cos(2x)\right) \quad , \quad E_0 = 0 \\ V_2 &= -\frac{a^2}{16} \cos(4x) + \frac{a}{2} \cos(2x) + \frac{a^2}{16} \end{aligned}$$

$j = \frac{1}{2}$

Für  $j = \frac{1}{2}$  werden die Berechnungen etwas interessanter. In der Matrixdarstellung können wir die Energieeigenwerte und die Eigenfunktionen nach der gewohnten Art bestimmen

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} - \frac{a}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \mp \frac{a}{2} \quad , \\ \vec{\psi}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die Eigenvektoren sind die selben wie im Kap. 4.3.1. Das Potential  $V_1$  und die Lösungen lauten somit

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{a^2}{16} \cos(4x) - a \cos(2x) + \frac{a^2}{16} - \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \\ \psi_0^{(1)} &= \cos(x) \exp\left(\frac{a}{2} \cos^2(x)\right) \quad , \quad E_0 = 0 \\ \psi_1^{(1)} &= \sin(x) \exp\left(\frac{a}{2} \cos^2(x)\right) \quad , \quad E_1 = a. \end{aligned}$$

Das Superpotential, Partnerpotential und dessen Lösung lautet

$$\begin{aligned} W(x) &= a \sin(x) \cos(x) + \tan(x) \\ V_2 &= -\frac{a^2}{16} \cos(4x) + \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{a^2}{16} - \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \\ \psi_0^{(2)} &= \frac{1}{\cos(x)} \exp\left(\frac{a}{2} \cos^2(x)\right). \end{aligned}$$

Die Verbindung zum Razavy-Potential mit  $j = \frac{1}{2}$  geht sogar auf das Partnerpotential über. Allerdings unterscheiden sich manche Vorzeichen. Dies liegt daran, dass sich manche Additionstheoreme unterscheiden.

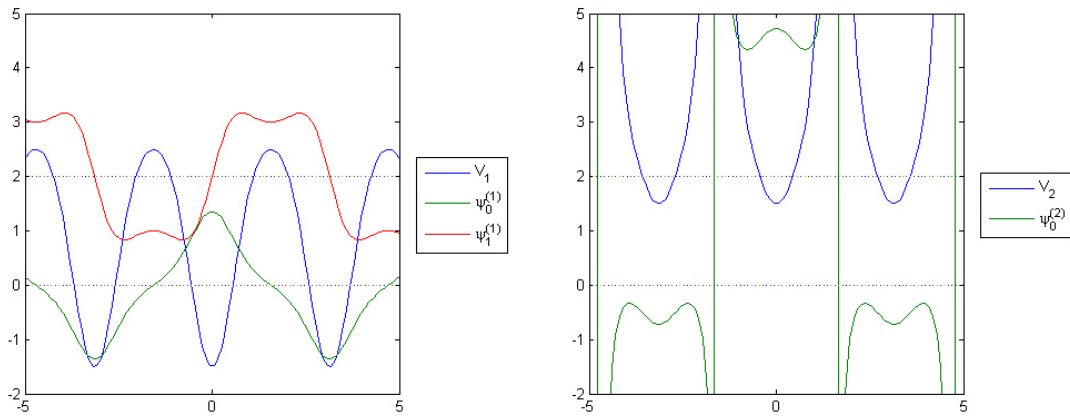


Abbildung 4.9: Potential und Partnerpotential für  $j = \frac{1}{2}$  für das gemischte periodische Potential mit  $a = 2$ , wobei  $\psi_0^{(1)}$  zusätzlich mit  $1/2$  multipliziert wurde

In Abb. (4.9) erkennt man, dass sowohl das Partnerpotential, als auch dessen Lösung bei  $x = \frac{2k+1}{2}\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  Polstellen besitzt. Die Lösungen des Partnerpotentials sind zwar mathematisch korrekt, jedoch in diesem Fall unphysikalisch. Die Wellenfunktion ist innerhalb einer Periode nicht quadratintegrabel. Die Wahrscheinlichkeitsdichte geht an den gleichen Stellen wie das Potential gegen unendlich, obwohl eigentlich dort die Wahrscheinlichkeitsdichte normalerweise am geringsten sein sollte.

$j = 1$

Hier erhalten wir für die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} -1 + a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 - a \end{pmatrix}$$

und aus dem charakteristischen Polynom die Eigenwerte und damit die Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} & (-1 + a - \lambda)(-1 - a - \lambda)(-\lambda) + \lambda \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow & \lambda_{1,3} = -1 \mp \sqrt{1 + a^2}, \quad \lambda_2 = 0 \\ \vec{\psi}_1 = & \begin{pmatrix} \sqrt{1 + a^2} - a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{1 + a^2} - a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma_2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es wird deutlich, dass zwar wieder die Eigenwerte etwas von dem Razavy-Potential abweichen, jedoch die Eigenvektoren die selben sind. Hiermit erhalten wir das Potential und dessen Lösungen

$$\begin{aligned}
 V_1 &= -\frac{a^2}{16} \cos(4x) - \frac{3a}{2} \cos(2x) + \frac{a^2}{16} - 1 + \sqrt{1+a^2} \\
 \psi_0^{(1)} &= (1 + \gamma_1 \tan^2(x)) \cos^2(x) \exp\left(\frac{a}{2} \cos^2(x)\right) \quad , \quad E_0 = 0 \\
 \psi_1^{(1)} &= \sin(x) \cos(x) \exp\left(\frac{a}{2} \cos^2(x)\right) \quad , \quad E_1 = \sqrt{1+a^2} + 1 \\
 \psi_2^{(1)} &= (1 - \gamma_2 \tan^2(x)) \cos^2(x) \exp\left(\frac{a}{2} \cos^2(x)\right) \quad , \quad E_2 = 2\sqrt{1+a^2}.
 \end{aligned}$$

Eine Kleinigkeit hat sich jedoch verändert. Dadurch, dass die Eigenwerte  $\lambda$  unterschiedlich sind, hat sich die Energie des ersten angeregten Zustandes verschoben, wie in Abb. (4.10) deutlich wird.

Weiter werden wieder das Superpotential, das Partnerpotential und dessen Lösungen berechnet

$$\begin{aligned}
 W(x) &= a \sin(x) \cos(x) + 2 \tan(x) - \frac{\gamma_1 2 \tan(x)}{\cos^2(x)(1 + \gamma_1 \tan^2(x))} \\
 V_2 &= -\frac{a^2}{16} \cos(4x) - \frac{a}{2} \cos(2x) + \frac{2}{\cos^2(x)} - \frac{2\gamma_1}{\cos^4(x)(1 + \gamma_1 \tan^2(x))} \\
 &\quad + \frac{4\gamma_1 \tan^2(x)(\gamma_1 - 1)}{\cos^2(x)(1 + \gamma_1 \tan^2(x))^2} + \frac{a^2}{16} - 1 + \sqrt{1+a^2} \\
 \psi_0^{(2)} &= \frac{1 - \gamma_1 \tan^2(x)}{1 + \gamma_1 \tan^2(x)} \exp\left(\frac{a}{2} \cos^2(x)\right) \\
 \psi_1^{(2)} &= -2(\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\tan(x)}{1 + \gamma_1 \tan^2(x)} \exp\left(\frac{a}{2} \cos^2(x)\right).
 \end{aligned}$$

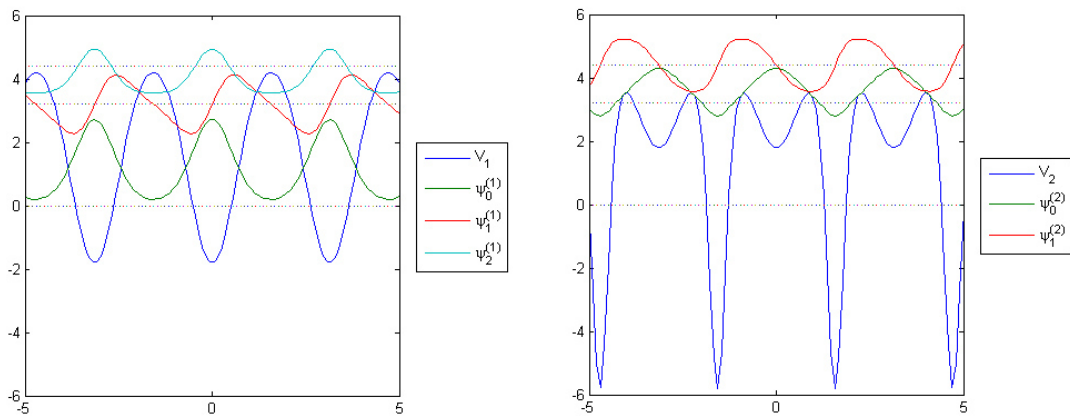


Abbildung 4.10: Potential und Partnerpotential für  $j = 1$  und  $a = 2$ , die Funktionen wurden angepasst  $\psi_3^{(1)}$  mit  $1/5$ ,  $\psi_0^{(2)}$  mit  $1/10$  und  $\psi_1^{(2)}$  mit  $1/15$

Erstaunlicherweise geht das Partnerpotential nicht gegen unendlich für  $x = \frac{2k+1}{2}\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ , obwohl ebenfalls Terme mit  $1/\cos^2(x)$  vorhanden sind. Diese löschen sich mit den anderen Termen aus.

Dazu wollen wir uns kurz diese Punkte betrachten. Für  $x \rightarrow \frac{2k+1}{2}\pi$  folgt  $1 \ll \tan^2(x)$  und  $\sin^2(x) \approx 1$ . Für die kritischen Terme ergibt sich mit dieser Näherung

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\cos^2(x)} - \frac{2\gamma_1}{\cos^4(x)(1 + \gamma_1 \tan^2(x))} + \frac{4\gamma_1 \tan^2(x)(\gamma_1 - 1)}{\cos^2(x)(1 + \gamma_1 \tan^2(x))^2} \\
 &= \frac{2\cos^2(x) + 2\gamma_1 \sin^2(x) - 2\gamma_1}{\cos^4(x)(1 + \gamma_1 \tan^2(x))} + \frac{4\gamma_1 \tan^2(x)(\gamma_1 - 1)}{\cos^2(x)(1 + \gamma_1 \tan^2(x))^2} \\
 &= \frac{2(1 - \gamma_1)}{\cos^2(x)(1 + \gamma_1 \tan^2(x))} + \frac{4\gamma_1 \tan^2(x)(\gamma_1 - 1)}{\cos^2(x)(1 + \gamma_1 \tan^2(x))^2} \\
 &= \frac{2(1 - \gamma_1) + 2\gamma_1 \tan^2(x)(\gamma_1 - 1)}{\cos^2(x)(1 + \gamma_1 \tan^2(x))^2} \\
 &= 2(1 - \gamma_1) \frac{1 - \gamma_1 \tan^2(x)}{\cos^2(x)(1 + \gamma_1 \tan^2(x))^2} \\
 &\approx 2(\gamma_1 - 1) \frac{\gamma_1 \tan^2(x)}{\cos^2(x)(\gamma_1 \tan^2(x))^2} \\
 &\approx \frac{2(\gamma_1 - 1)}{\gamma_1}.
 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass das Partnerpotential für  $j = 1$  in keinem Fall gegen  $\infty$  geht, wobei es jedoch bei  $j = \frac{1}{2}$  schon der Fall war.

#### 4.4.2 Gerade Zustände

Nun wollen wir analog zum Kap. 4.3.2 gerade Funktionen periodischer Potentiale betrachten. Dazu werden wir den selben Hamilton-Operator benutzen, aber mit  $-1$  multipliziert. Also besitzt dieser folgende Form

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2}(T^0 T^0 - T^- T^-) + jT^0 + b(T^+ + T^-) \\
 &= -\frac{1}{2}(1 - \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + (b - b\xi^2 + \frac{1}{2}\xi) \frac{d}{d\xi} + 2bj\xi - \frac{1}{2}j^2.
 \end{aligned}$$

Die Substitution erfolgt folgendermaßen

$$\begin{aligned}
 \xi &= \sin(x) \\
 \frac{d}{dx} &= \cos(x) \frac{d}{d\xi} \\
 \frac{d^2}{dx^2} &= (1 - \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} - \xi \frac{d}{d\xi}
 \end{aligned}$$

und damit ist der neue Hamilton-Operator

$$H = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + b \cos(x) \frac{d}{dx} + 2bj \sin(x) - \frac{1}{2}j^2.$$

Das Potential hat in diesem Fall leider eine unsymmetrische Form, da es sowohl aus  $\cos$ - als auch aus  $\sin$ -Funktionen aufgebaut ist

$$V^{**} = \frac{b^2}{2} \cos^2(x) + (1 + 4j) \frac{b}{2} \sin(x) - \frac{j^2}{2}.$$

Da üblicherweise symmetrische Potentiale betrachtet werden, bietet es sich an das Potential zu verschieben von  $x \rightarrow x - \pi/2$ , wodurch das Potential symmetrisch wird. Mit  $\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$  und  $\sin(x - \pi/2) = -\cos(x)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{b^2}{2} \sin^2(x) - (1 + 4j) \frac{b}{2} \cos(x) - \frac{j^2}{2} \\ &= -\frac{b^2}{4} \cos(2x) - (1 + 4j) \frac{b}{2} \cos(x) + \frac{b^2}{4} - \frac{j^2}{2}. \end{aligned}$$

Wie man erkennt, liegt hier der selbe Zusammenhang zum gemischten periodischen Potential vor, wie beim Razavy-Potential. Die Bedingungen sind wieder  $4V^*$ ,  $4b = a$ ,  $x \rightarrow 2x$  und  $2j \rightarrow j$ . Der Exponentialfaktor lautet mit der Verschiebung  $\exp(b \cos(x))$ .

$$j = \frac{1}{2}$$

Hier erhalten wir folgende Matrix, Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & b \\ b & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{8} \mp \frac{\sqrt{1 + 16b^2}}{4} \\ \vec{\psi}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4b} - \frac{\sqrt{1+16b^2}}{4b} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4b} + \frac{\sqrt{1+16b^2}}{4b} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In diesem Fall sind die Eigenvektoren im Vergleich zum Kap. 4.3.2 umgekehrt. Da wir aber die Verschiebung von  $x \rightarrow x - \pi/2$  durchführen, kommt ein negatives Vorzeichen vor  $\delta_{1,2}$  hinzu. Also erhalten wir für das Potential und die Lösungen mit dieser Verschiebung

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{b^2}{4} \cos(2x) - \frac{3b}{2} \cos(x) + \frac{b^2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1 + 16b^2}}{4} \\ \psi_0^{(1)} &= (1 + \delta_2 \cos(x)) \exp(b \cos(x)) \quad , \quad E_0 = 0 \\ \psi_2^{(1)} &= (1 - \delta_1 \cos(x)) \exp(b \cos(x)) \quad , \quad E_2 = \frac{\sqrt{1 + 16b^2}}{2}. \end{aligned}$$

Das Superpotential und das Partnerpotential haben diesmal eine Abhängigkeit von  $\delta_2$ , statt  $\delta_1$

$$\begin{aligned} W(x) &= b \sin(x) + \frac{\delta_2 \sin(x)}{1 + \delta_2 \cos(x)} \\ V_2 &= -\frac{b^2}{4} \cos(2x) - \frac{b}{2} \cos(x) + \frac{\delta_2 \cos(x)}{1 + \delta_2 \cos(x)} + \frac{\delta_2^2 \sin^2(x)}{(1 + \delta_2 \cos(x))^2} + \frac{b^2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{1 + 16b^2}}{4} \\ \psi_1^{(2)} &= -(\delta_1 + \delta_2) \frac{\sin(x)}{1 + \delta_2 \cos(x)} \exp(b \cos(x)). \end{aligned}$$

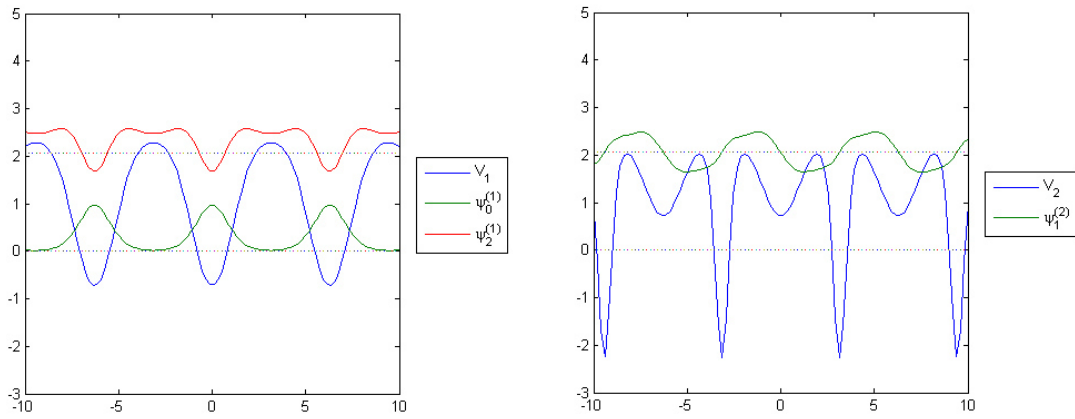


Abbildung 4.11: Potential und Partnerpotential des periodischen Potentials für  $b = 1$  und  $j = \frac{1}{2}$ , die Wellenfunktionen wurden angepasst  $\psi_0^{(1)}$  mit  $1/5$ ,  $\psi_2^{(1)}$  mit  $1/2$  und  $\psi_1^{(2)}$  mit  $1/5$

### Zusammenhang zum periodischen Potential mit gemischten Zuständen

In diesem Fall ist der Zusammenhang analog wie beim Razavy-Potential. Dabei wird verwendet  $4b = a$ ,  $x \rightarrow 2x$ ,

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \frac{\gamma_1 - 1 + a}{a} \\ \gamma_1(\gamma_1 - 1 + 2a) &= -(\gamma_1 - 1) \\ \delta_1 &= \frac{\gamma_2 - a + 1}{a} \\ \gamma_2(\gamma_2 + 1 - 2a) &= (\gamma_2 + 1) \\ \frac{\gamma_1 - 1 + a}{\gamma_1 - 1 + 2a} &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_1).\end{aligned}$$

Alle Rechnungen sind mit diesen Relationen vom Aufbau her gleich.

### 4.4.3 Ungerade Zustände

Zum Schluss wollen wir ein periodisches Potential mit ungeraden Lösungen betrachten. Dazu wird analog der Operator  $+T^0$  dem vorherigen Hamilton-Operator hinzugefügt. Somit erhalten wir mit der selben Substitution wie oben

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(T^0 T^0 - T^- T^-) + jT^0 + b(T^+ + T^-) + T^0 \\ &= -\frac{1}{2}(1 - \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + (\xi + b(1 - \xi^2) + \frac{1}{2}\xi) \frac{d}{d\xi} + 2bj\xi - \frac{1}{2}j^2 - j \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \underbrace{(\tan(x) + b \cos(x))}_{=A(x)} \frac{d}{dx} + 2bj \sin(x) - \frac{1}{2}j^2 - j. \end{aligned}$$

Das Potential ist in diesem Fall wieder nicht symmetrisch

$$V^{**} = \frac{1}{2}b^2 \cos^2(x) + (3 + 4j) \frac{b}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} - \frac{j^2}{2} - j,$$

weshalb es verschoben wird von  $x \rightarrow x - \pi/2$

$$\begin{aligned} V^* &= \frac{1}{2}b^2 \sin^2(x) - (3 + 4j) \frac{b}{2} \cos(x) - \frac{1}{2} - \frac{j^2}{2} - j \\ &= -\frac{1}{4}b^2 \cos(2x) - (3 + 4j) \frac{b}{2} \cos(x) + \frac{b^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{j^2}{2} - j. \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zum gemischten periodischen Potential ist hier der gleiche, wie beim ungeraden Razavy-Potential. Der Exponentialfaktor ist nach der Verschiebung entlang der x-Achse  $\sin(x) \exp(b \cos(x))$ .

$$j = \frac{1}{2}$$

Die Matrix mit den Eigenwerten und den Eigenvektoren lautet

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & b \\ b & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{8} \mp \frac{\sqrt{9 + 16b^2}}{4} \\ \vec{\psi}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4b} - \frac{\sqrt{9+16b^2}}{4b} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -\sigma_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4b} + \frac{\sqrt{9+16b^2}}{4b} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch die Verschiebung von  $x \rightarrow x - \pi/2$  ändern sich die Vorzeichen und es ergibt sich das Potential mit den Lösungen

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{b^2}{4} \cos(2x) - \frac{5b}{2} \cos(x) - \frac{b^2}{4} - \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{9 + 16b^2}}{4} \\ \psi_1^{(1)} &= (1 + \sigma_2 \cos(x)) \sin(x) \exp(b \cos(x)) \quad , \quad E_0 = 0 \\ \psi_3^{(1)} &= (1 - \sigma_1 \cos(x)) \sin(x) \exp(b \cos(x)) \quad , \quad E_2 = \frac{\sqrt{9 + 16b^2}}{2}. \end{aligned}$$

Das Superpotential, Partnerpotential und dessen Lösung ist

$$W(x) = b \sin(x) - \cot(x) + \frac{\sigma_2 \sin(x)}{1 + \sigma_2 \cos(x)}$$

$$V_2 = -\frac{b^2}{4} \cosh(2x) - \frac{3b}{2} \cos(x) + \frac{1}{\sin^2(x)} + \frac{\sigma_2 \cos(x)}{1 + \sigma_2 \cos(x)} + \frac{\sigma_2^2 \sin^2(x)}{(1 + \sigma_2 \cos(x))^2}$$

$$-\frac{b^2}{4} + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{9 + 16b^2}}{4}$$

$$\psi_2^{(2)} = -(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{\sin^2(x)}{1 + \sigma_2 \cos(x)} \exp(b \cos(x)).$$

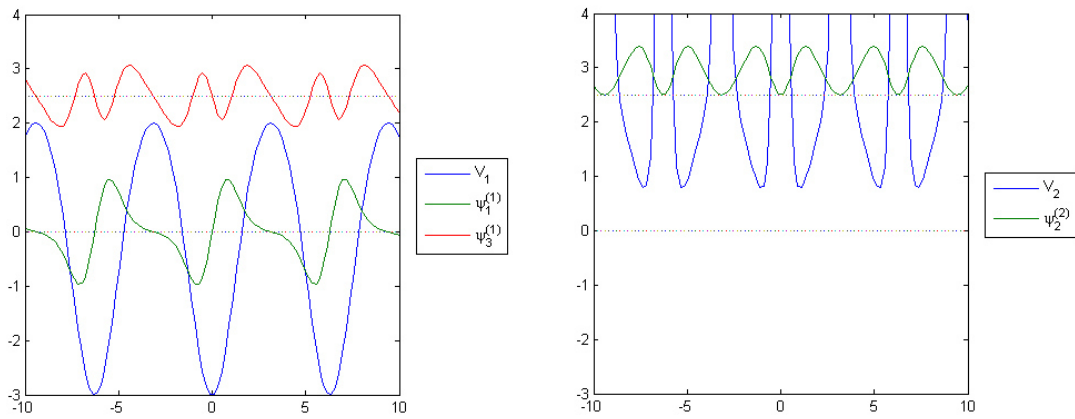


Abbildung 4.12: Potential und Partnerpotential ungerade Zustände für  $j = \frac{1}{2}$  und  $b = 1$ , die Wellenfunktionen wurden angepasst  $\psi_1^{(1)}$  mit  $1/2$ ,  $\psi_3^{(1)}$  mit  $1/2$  und  $\psi_2^{(2)}$  mit  $-1/3$

Der Zusammenhang hier ist ebenfalls analog zum Razavy-Potential.



## 5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden quasi-exakt lösbare Potentiale supersymmetrisch behandelt. Da es bei quasi-exakt lösbaren Potentialen vorkommt, dass zum Beispiel nur die ungeraden Zustände bestimmt werden können, wurde herausgefunden, dass die supersymmetrische Quantenmechanik ebenfalls auf angeregte Zustände verwendet werden kann. Dies ist in unseren Beispielen mit auftretenden Singularitäten beim Partnerpotential verbunden. Zum Einstieg dieser Rechnungen wurde der anharmonische Oszillator verwendet. Interessant waren die Formen der unterschiedlichen Partnerpotentiale und deren Lösungen. In allen Beispielen wurde deutlich, dass das Partnerpotential und dessen Lösungen stark von dem halbzahligen Parameter  $j$  abhängen, welcher die Anzahl der Lösungen bestimmt.

Ein bekanntes quasi-exakt lösbares Potential ist das Razavy-Potential. Dieses wurde hier mit verschiedenen Ansätzen behandelt. Mit Hilfe von bestimmten Substitutionen konnten diese Potentiale in einander überführt werden. Dieselbe Substitution konnte ebenfalls die supersymmetrischen Partnerpotentiale und alle Zustände in einander überführen. Jedoch ist die Überführung nur für gerade  $n$  möglich. Eines dieser QES-Ansätze ist im [Gon 91] nicht vertreten. Dies liegt wahrscheinlich daran, dass gerade diese Substitutionen verwendet werden können, wohingegen im [Shi 99] zwischen diesen Ansätzen noch unterschieden wird.

Es existiert auch ein trigonometrisches Razavy-Potential, indem man von den hyperbolischen Funktionen in trigonometrische übergeht. Die Lösungen dieser Potentiale sind gleich mit dem Razavy-Potential, bis auf ein paar Vorzeichen. Dies liegt daran, dass manche Additionstheoreme unterschiedlich sind. Bei den trigonometrischen QES-Potentialen wurden im Prinzip die gleichen Ansätze wie bei den Razavy-Potentialen verwendet, weshalb die Zusammenhänge zwischen diesen Potentialen und dessen Lösungen die gleichen sind wie bei den Razavy-Potentialen. Im [Gon 91] wird bei den periodischen Potentialen jedoch zwischen diesen Ansätzen unterschieden, bei den nicht-periodischen aber nicht.

## 6 Literaturverzeichnis

- [Shi 99] M.A.Shifman: New findings in Quantum Mechanics, in: Particle Physics and Field Theory, Volume II, World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol. 62 (1999)
- [Gon 91] A.Gonzalez-Lopez, N. Kamran, P.J.Olver: Quasi-exact Solvability, Contemp. Math. 160 (1994) 113-140
- [Ben 98] C.M.Bender, S.Boettcher: Quasi-exactly solvable quartic potential, J. Phys. A: Math. Gen. 31 (1998) L273-L277
- [Kal 97] H.Kalka, G.Soff: Supersymmetrie, Teubner Taschenbücher Physik, Stuttgart (1997)
- [Raz 79] M.Razavy: An exactly soluble Schrödinger Equation with a bistable Potential, Am. J. Phys. 48 (1980) 285-288

Folgendes Programm wurde für die Erstellung der Abbildungen verwendet:

- MathWorks: MATLAB and Simulink, Vers. R2013b

## **Plagiatserklärung der / des Studierenden**

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_ selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen  
Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen  
der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn  
nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung  
kenntlich gemacht worden sind.

\_\_\_\_\_  
(Datum, Unterschrift)

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung  
von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden  
Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

\_\_\_\_\_  
(Datum, Unterschrift)