

Thorsten Hiester

Untersuchungen über das asymptotische
Verhalten von Reaktions-Diffusions-Systemen
mit Renormierungsgruppentransformationen



Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Untersuchungen über das asymptotische Verhalten von Reaktions-Diffusions-Systemen mit Renormierungsgruppentransformationen

als Diplomarbeit im Februar 2001 vorgelegt von

Thorsten Hiester



Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Der Schauende

*Ich sehe den Bäumen die Stürme an,
die aus laugewordenen Tagen
an meine ängstlichen Fenster schlagen,
und höre die Fernen Dinge sagen,
die ich nicht ohne Freund ertragen,
nicht ohne Schwester lieben kann.*

*Da geht der Sturm, ein Umgestalter,
geht durch den Wald und durch die Zeit,
und alles ist wie ohne Alter:
die Landschaft, wie ein Vers im Psalter,
ist Ernst und Wucht und Ewigkeit.*

*Wie ist das klein, womit wir ringen,
was mit uns ringt, wie ist das groß;
ließen wir, ähnlicher den Dingen,
uns so vom großen Sturm bezwingen, -
wir würden weit und namenlos.*

*Was wir besiegen, ist das Kleine,
und der Erfolg selbst macht uns klein.
Das Ewige und Ungemeine
will nicht von uns gebogen sein.
Das ist der Engel, der den Ringern
des Alten Testaments erschien;
wenn seiner Widersacher Sehnen
im Kampfe sich metallen dehnen,
fühlt er sie unter seinen Fingern
wie Saiten tiefer Melodien.*

*Wen dieser Engel überwand,
welcher so oft auf Kampf verzichtet,
der geht gerecht und aufgerichtet
und groß aus jener harten Hand,
die sich, wie formend, an ihn schmiegte.
Die Siege laden ihn nicht ein.
Sein Wachstum ist: Der Tiefbesiegte
von immer Größerem zu sein.*

(Rainer Maria Rilke)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Gestörte Wärmeleitung	7
1.1 Die Renormierungsgruppe als Lösungsmittel	7
1.2 Der GAUß-Fixpunkt	9
1.2.1 Die Fundamentallösung	9
1.2.2 Der irrelevante Fall	14
1.2.3 Der marginale Fall	26
1.3 Nicht-GAUß-Fixpunkte	39
1.4 Zwischenstand	66
2 Reaktion und Diffusion	69
2.1 Das System	69
2.2 Der Skalierungsansatz	72
2.3 Lokale und globale Konvergenz	79
2.4 Bestimmung des Exponenten ω	85
2.5 Anschluß an bisherige Ergebnisse	91
2.6 Numerische Ergebnisse	97
2.6.1 Fehleranalyse	98
2.6.2 Nirel	102
2.6.3 BigNoWit und NoWit2	106
2.6.4 Tycho	110
2.6.5 GalRa	117
2.7 Zusammenfassung	124
3 Numerik	127
3.1 Grundbegriffe numerischer Verfahren	128

3.2	Die CRANK-NICOLSON-Methode	131
4	Programmbeschreibung	141
4.1	Programmverlauf und Hilfen für den Anwender	141
4.1.1	Numerische Umgebung	143
4.1.2	Systemeinstellungen	145
4.1.3	Datenausgabe	147
4.1.4	Beschreibung der Hilfen	150
4.2	Programmverlauf der Simulation	153
5	Anhang	157
5.1	Definition eines BANACH-Raumes	157
5.2	Definition der L_p -Räume	157
5.3	Definition der FOURIER-Transformation	158
5.4	Trivialer Fixpunkt ϕ_o^* bei Fronten	159
5.5	Eine Teilung der 1 auf \mathbb{R}	161
5.6	Berechnung der Gleichung für w	161
5.7	Spektralradius und Matrizenorm	162
5.8	Globaler und lokaler Diskretisationsfehler	162
5.9	Berechnung der Eigenwerte der J-Matrix	164
5.10	Lokal gleichmäßige Konvergenz	164
	Literaturverzeichnis	165
	Danksagung	169

Einleitung

Es gibt viele verschiedene mathematische Methoden, die zur Beschreibung von Naturereignissen nützlich sind. Eine zentrale Rolle haben dabei die partiellen Differentialgleichungen eingenommen. Mit ihnen ist eine Vielzahl von Prozessen in physikalischen, chemischen und biologischen Systemen modellierbar. Dazu zählen unter anderem die verschiedensten Transport- und Strömungsereignisse, Wellenphänomene, Strukturbildung, chemische Reaktionen und Populationsentwicklungen, um nur einige umfassende Bereiche zu nennen. In dieser Arbeit geht es um Gleichungen, deren Lösungen den Transport von Wärme oder Stoffkonzentrationen darstellen, um sogenannte Reaktions-Diffusions-Systeme.

Der Begriff Diffusion stammt aus der Nichtgleichgewichts-Thermodynamik, in der für den Wärmetransport zwischen zwei Reservoiren die Grundgleichung der Diffusion hergeleitet wird. Diese Grundgleichung läßt sich so erweitern, daß sich mit ihr kompliziertere Diffusionsvorgänge beschreiben lassen. Betrachtet man ein System von solchen Diffusionsgleichungen, deren Lösungen voneinander abhängen, so nennt man dieses allgemein ein Reaktions-Diffusion-System. Leider sind diese erweiterten Gleichungen und Systeme davon in vielen Fällen nicht lösbar, wenngleich ihre Konstruktion aus dem darzustellenden Sachverhalt verhältnismäßig einfach ist. Häufig interessiert man sich auch gar nicht für die exakte Lösung, weil diese aufgrund unsicherer Parameter in den Gleichungen (Materialkonstanten, Übertragungsraten von Bakterien o.ä.) ohnehin nicht überprüfbar ist. Vielmehr möchte man das Verhalten des Reaktions-Diffusions-Systems zu großen Zeiten kennen und damit unter Umständen die Entwicklung ins thermische Gleichgewicht. Das ist die zentrale Fragestellung in der vorliegenden Arbeit.

Um Aussagen über Differentialgleichungen machen zu können, betrachtet man drei wesentliche Punkte:

Existenz von Lösungen

Eindeutigkeit der gefundenen Lösungen

Stabilität der Lösungen gegenüber einer kleinen Störung der Anfangsbedingungen

Insbesondere die Stabilität entscheidet darüber, ob die gefundene Lösung auch beobachtbar ist, wenn man es mit realisierbaren Modellen zu tun hat. Ebenso müssen diese Eigenschaften überprüft werden, wenn man das Langzeitverhalten von Diffusionsproblemen herausfinden will.

Zur Berechnung des asymptotischen Verhaltens gestörter Diffusionsgleichungen kann man ausnutzen, daß die Fundamentallösung der Diffusion ein sogenanntes Skalenverhalten zu großen Zeiten aufweist. Das bedeutet, daß sie, je nach Anfangsbedingung, eine bestimmte Form erhält, die bei richtiger Skalierung im Ort, in der Zeit und in der Amplitude sich nicht ändert. Alle Skalierungen hängen dabei nur von der Zeit ab. Dieser Umstand läßt sich als Ausgangspunkt wählen, um die Störungen und die Anfangsbedingungen so zu klassifizieren, daß diese keine Änderung des Skalenverhaltens bewirken. Damit erweist sich der asymptotische Zustand der ungestörten Diffusion als stabil gegenüber Störungen der Dynamik und der Anfangswerte.

Anders verhält es sich mit Gleichungen, zu deren Lösungen ein Skalenverhalten nachgewiesen wurde, das von dem der Diffusion stark abweicht. In solchen Fällen muß sich die Skalierungsvorschrift aus der Gleichung bestimmen lassen. Die Ansätze dafür sind verschieden. Oft wird der Skalenansatz in die partielle Differentialgleichung eingesetzt, um eine gewöhnliche zu erhalten, die anschließend in Abhängigkeit von den Skalierungsparametern auf eindeutige Lösungsexistenz und Stabilität untersucht wird. Danach versucht man nachzuweisen, daß die gesuchte Lösung gegen die skalierte konvergiert. Ein solches Vorgehen ist sehr spezifisch auf das gegebene System ausgerichtet.

Die hier verwendete Methode zur Berechnung eines Skalenverhaltens von gestörten Diffusionsgleichungen basiert auf Renormierungsgruppentransformationen. Die Renormierungsgruppe wurde erst vor wenigen Jahrzehnten im Bereich der Quantenfeldtheorie von K. WILSON entwickelt um sogenannte

kritische Exponenten, die einen Phasenübergang des Quantensystems kennzeichnen, zu berechnen. J. BRICMONT, A. KUPIAINEN und G. LIN haben u.a. in [Bric93/II] gezeigt, daß sich die Idee der Renormierungsgruppe zur Bestimmung eines Skalenverhaltens von Lösungen gestörter Wärmeleitungsgleichungen eignet. Dabei beschränken sie sich auf solche Fälle, in denen das Skalenverhalten der ungestörten Diffusion nachweisbar ist. Anomale Skalierungen werden nicht betrachtet.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird die Veröffentlichung [Bric93/II] ausführlich erläutert. Es werden also nichtlineare Wärmeleitungsgleichungen betrachtet, zu denen sich ein Langzeitverhalten der normalen Diffusion mit Hilfe der Renormierungsgruppe nachweisen läßt.

Im zweiten Kapitel werden Reaktions-Diffusions-Systeme mit anomalem Skalenverhalten untersucht. Dabei steht die Suche nach den Skalierungsparametern im Vordergrund. Als Hilfsmittel dient wieder ein Renormierungsgruppenansatz. Unterstützt werden diese Überlegungen von numerischen Simulationen, die anhand von Modellsystemen die wesentlichen Punkte aufzeigen. Eine Diskussion der Ergebnisse schließt sich an.

In den folgenden Kapiteln werden die numerischen Hintergründe und die Arbeitsweise des Programms näher erläutert.

Der Anhang enthält als letzter Teil die Definitionen und Hilfssätze, die verwendet werden.

Kapitel 1

Gestörte Wärmeleitung

1.1 Die Renormierungsgruppe als Lösungsmittel

In diesem Kapitel wird eine von J.BRICMONT, A.KUPIAINEN und G.LIN entwickelte Idee zur Bestimmung des Langzeitverhaltens von Lösungen der Differentialgleichung vom Typ

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + F(u, \partial_x u, \partial_x^2 u) \quad (1.1)$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $t \in [1, \infty)$ vorgestellt (vgl. [Bric93/II]). Die Gleichung (1.1) ist eine Wärmeleitungsgleichung, die durch eine zunächst nicht näher spezifizierte Funktion $F(a, b, c)$ gestört wird. Man sucht nun nach einer Funktion $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß die Lösung von (1.1) eine Gleichung der Form

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\| u(x, t) - t^{-\frac{\alpha}{2}} r(xt^{-\frac{1}{2}}) \right\| = 0 \quad (1.2)$$

erfüllt, wobei die Konvergenz in einer Norm erfolgt, die je nach Störterm F passend gewählt werden muß.

Um ein solches Verhalten zu finden wird eine Skalentransformation betrachtet, die auf dem BANACH-Raum \mathcal{S} aller Startbedingungen von (1.1) wirkt. Die Fixpunkte der Transformation lassen sich dann als asymptotische Lösungen von (1.1) auffassen, wenn man zeigen kann, daß das gegebene Anfangswertproblem sich unter der Skalentransformation einem solchen Fixpunkt

beliebig nähert, weil damit das transformierte Startwertproblem skaleninvariant wird. Das bedeutet, daß die Dynamik des gegebenen Problems die gegebene Anfangsbedingung in den Fixpunkt der Skalentransformation entwickelt und diesen schließlich auf sich selbst wieder abbildet, so daß das Lösungsverhalten für große Zeiten nur durch eine einfache Skalentransformation beschrieben werden kann.

Dabei geht man prinzipiell folgendermaßen vor:

Sei zunächst $\mathcal{S} := \{u(x, 1) = f(x) | u \text{ erfüllt (1.1)}\}$ der BANACH-Raum aller Anfangsbedingungen zu (1.1). Dann sei $L > 1$ und α zunächst beliebig aber fest gewählt, und die Abbildung

$$u(x, t) \mapsto T_L(u) := u_L(x, t) := L^\alpha u(Lx, L^2 t) \quad (1.3)$$

mit $u(x, 1) \in \mathcal{S}$ definiert. Die transformierte Lösung u_L erfüllt damit die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u_L(x, t) &= L^{2+\alpha} \partial_t u(Lx, L^2 t) \\ &= L^{2+\alpha} \partial_x^2 u(Lx, L^2 t) + L^{2+\alpha} F(u, \partial_x u, \partial_x^2 u) \\ &= \partial_x^2 u_L(x, t) + F_L(u_L, \partial_x u_L, \partial_x^2 u_L) \end{aligned} \quad (1.4)$$

mit

$$F_L(a, b, c) = L^{2+\alpha} F(L^{-\alpha} a, L^{-1-\alpha} b, L^{-2-\alpha} c) \quad (1.5)$$

Die Renormierungsabbildung $R : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ wird durch (1.3) und (1.4) induziert und ist daher von L , α und F abhängig, $R = R_{L,F}^{(\alpha)} = R_{L,F}$:

$$\begin{aligned} (R_{L,F}^{(\alpha)} f)(x) &:= u_L(x, 1) \\ &= L^\alpha u(Lx, L^2) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Für die in (1.3) definierte Abbildung T_L gilt

$$T_{L^2} = T_L \circ T_L \quad (1.7)$$

und somit für $t = 1$ ebenfalls

$$R_{L^2,F} = R_{L,F_L} \circ R_{L,F} \quad (1.8)$$

beziehungsweise allgemeiner

$$R_{L^n, F} = R_{L, F^{n-1}} \circ R_{L, F^{n-2}} \circ \dots \circ R_{L, F} \quad (1.9)$$

Mit der Setzung $t = L^{2n}$ erhält man damit aus (1.6)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= t^{-\frac{\alpha}{2}} (R_{L^n, F} f)(xt^{-\frac{1}{2}}) \\ &= L^{-n\alpha} u_{L^n}(xL^{-n}, 1) \\ &= u(x, L^{2n}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Nun versucht man nachzuweisen, daß ein α existiert, derart daß die Abbildung (1.6) gegen einen Fixpunkt konvergiert, also

$$R_{L^n, F} f \longrightarrow f^* \quad (1.11)$$

$$F_{L^n} \longrightarrow F^* \quad (1.12)$$

gilt, so daß

$$R_{L, F^*} f^* = f^* \quad (1.13)$$

erfüllt wird. f^* ist dann die Anfangswertfunktion der skaleninvarianten Differentialgleichung $\partial_t u = \partial_x^2 u + F^*$. Durch (1.10) erhält man die Asymptotik des ursprünglichen Problems

$$u(x, t) \sim t^{-\frac{\alpha}{2}} f^*(xt^{-\frac{1}{2}}), \quad (1.14)$$

wobei die Gleichheit nur gilt, wenn es ein $n_o \in \mathbb{N}$ gibt, derart daß $R_{L^{n_o}, F} f = f^*$ gilt. Weiterhin muß dieses Verhalten, welches nur den führenden Term des Langzeitverhaltens angibt, nicht global sein, sondern es ist je nach Fall die Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}$ zu nennen, auf der dieses Skalenverhalten vorliegt. Mathematisch wird das durch die Wahl einer passenden Norm beschrieben, bezüglich der $R_{L^n, F} f$ konvergieren soll.

1.2 Der GAUß-Fixpunkt

1.2.1 Die Fundamentallösung

Nun soll (1.1) mit $F = 0$ betrachtet werden, also die ungestörte Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) \quad (1.15)$$

mit der integrablen Anfangswertfunktion $f(x) = u(x, 1)$. Nach einer FOURIER-Transformation bezüglich der Ortsvariablen kann man (1.15) schreiben als

$$\partial_t \hat{u}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t) \quad (1.16)$$

mit der Anfangsbedingung $\hat{f}(k) = \hat{u}(k, 1)$; die allgemeine Lösung hierzu ist dann

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-k^2(t-1)} \quad (1.17)$$

und durch Rücktransformation erhält man daraus die Fundamentallösung

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-1)}} e^{-\frac{x^2}{4(t-1)}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-1)}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4(t-1)}} dy \\ &= e^{(t-1)\partial_x^2} \cdot f(x) \end{aligned} \quad (1.18)$$

wobei $f * g$ das Faltungsprodukt zweier Funktionen bezeichnet (s. Anhang 5.3). Dieses Ergebnis wird durch die Renormierungsgruppe mit (1.3) wie folgt ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \widehat{Ru}(k, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} (Ru(x, t)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} L^\alpha u(Lx, L^2 t) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikL^{-1}(Lx)} L^{\alpha-1} u(Lx, L^2 t) d(Lx) \\ &= L^{\alpha-1} \hat{u}(L^{-1}k, L^2 t) \\ &= \hat{u}_L(k, t) \end{aligned}$$

Für $\alpha = 1$ und $t = 1$ ist damit

$$\begin{aligned} \widehat{Rf}(k) &= \hat{u}_L(k, 1) \\ &= \hat{f}(L^{-1}k) e^{-k^2(1-L^{-2})} \\ &=: \widehat{R_o f}(k) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$(R_o f)(x) = L e^{(L^2-1)\partial_x^2} \cdot f(Lx) \quad (1.20)$$

Daraus erkennt man den GAUß-Fixpunkt

$$\hat{f}_o^*(k) = e^{-k^2} \quad (1.21)$$

und es ist

$$f_o^*(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

die Anfangswertfunktion der skaleninvarianten Lösung mit $\xi = xt^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} u(\xi t^{\frac{1}{2}}, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{\xi^2}{4}} \\ &= t^{-\frac{1}{2}} f_o^*(\xi) \end{aligned}$$

Unter noch zu nennenden Voraussetzungen soll gezeigt werden, daß dieses asymptotische Verhalten auch für $F \neq 0$ in (1.1) möglich ist. Bezüglich welcher Norm die Konvergenz erfolgt und welche Bedingungen an F gestellt werden müssen, soll nun erläutert werden. Bei allen folgenden Abschätzungen werden alle Konstanten mit C bezeichnet; sind diese beispielsweise noch von L abhängig, so wird dies durch einen Index gekennzeichnet, also C_L .

Definition:

Für Funktionen f mit $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ sei die SOBOLEW-Norm

$$\|f\| := \sup_k (1 + k^4)(|\hat{f}(k)| + |\hat{f}'(k)|) \quad (1.22)$$

definiert. □

Bemerkungen:

1. Für $\hat{g}(0) = 0$ erhält man mit (1.19)

$$\|R_o g\| \leq \frac{C}{L} \|g\| \quad (1.23)$$

2. Es gelten die Ungleichungen

$$\|f\|_1 \leq \|f\| \quad (1.24)$$

$$\|f\|_\infty \leq \|f\| \quad (1.25)$$

Das bedeutet, daß die Konvergenz bzgl. (1.22) die Konvergenz in den Räumen L_1 und L_∞ (vgl. Anhang 5.2) impliziert.

Beweis:

Bemerkung 1:

$$\begin{aligned}
\|R_o g\| &= \sup_k (1 + k^4) (|\widehat{R_o g}(k)| + |\widehat{R_o g}'(k)|) \\
&= \sup_k (1 + k^4) (|e^{-k^2(1-L^{-2})} \hat{g}(L^{-1}k)| + \\
&\quad |(1-L^{-2})(-2k) \hat{g}(L^{-1}k) e^{-k^2(1-L^{-2})} + \\
&\quad e^{-k^2(1-L^{-2})} L^{-1} \hat{g}'(L^{-1}k)|) \\
&= \frac{1}{L} \sup_k (1 + k^4) e^{-k^2(1-L^{-2})} (L |\hat{g}(L^{-1}k)| + \\
&\quad |(1-L^{-2})(-2kL) \hat{g}(L^{-1}k) + \hat{g}'(L^{-1}k)|) \\
&\leq \frac{1}{L} \sup_k (1 + k^4) e^{-k^2(1-L^{-2})} (|k \hat{g}'(L^{-1}sk)| + \\
&\quad |2(1-L^{-2})k^2 \hat{g}'(L^{-1}sk)| + |\hat{g}'(L^{-1}k)|) \\
&= \frac{1}{L} \sup_k (1 + (Lk)^4) e^{-(Lk)^2(1-L^{-2})} (|Lk \hat{g}'(sk)| + \\
&\quad |2(1-L^{-2})(kL)^2 \hat{g}'(sk)| + |\hat{g}'(k)|) \\
&\leq \frac{C}{L} (\sup_k (\hat{g}'(sk)) + \sup_k (\hat{g}'(k))) \\
&\leq \frac{C}{L} \|g\|
\end{aligned} \tag{1.26}$$

wobei aufgrund des Mittelwertsatzes

$$|\hat{g}(L^{-1}k)| \leq L^{-1} |k| |\hat{g}'(L^{-1}sk)|$$

für ein $s \in [0, 1]$ benutzt wurde, sowie die Beschränktheit des Ausdrucks

$$(1 + (Lk)^4) \exp[-(Lk)^2(1-L^{-2})] (|Lk| + 2|Lk|^2) \leq C$$

für alle k und alle $L > 1$.

Bemerkung 2: Zunächst schätzt man mit der HÖLDER-Ungleichung (s. 5.2)

$$\|g \cdot h\|_1 \leq \|g\|_2 \cdot \|h\|_2$$

für $g(x) := (1 + |x|)f(x)$ und $h(x) := (1 + |x|)^{-1}$ die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &\leq C \|(1 + |x|)f\|_2 \\ &\leq C \|f\|_2 + C \|xf\|_2\end{aligned}$$

ab, weil $\|h\|_2 \leq C$ ist. Nach PLANCHEREL (s. Anhang 5.3) gilt $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Nun ist aber

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| (1 + k^4)^2 (1 + k^4)^{-2} dk \\ &\leq C \cdot \sup_k (1 + k^4)^2 |\hat{f}(k)|^2 \\ &\leq C \cdot \|f\|^2\end{aligned}$$

und analog auch

$$\begin{aligned}\|xf\|_2^2 &= \|\widehat{xf}(k)\|_2^2 \\ &= \|\partial_k \hat{f}(k)\|_2^2 \\ &\leq C \cdot \|f\|^2\end{aligned}$$

und somit insgesamt (1.24). Für (1.25) weiß man, daß

$$\|f\|_{\infty} \leq \|\hat{f}\|_1 \leq C \cdot \|f\|$$

erfüllt ist (s. 5.3). □

Zur Klassifizierung der Nichtlinearitäten werden folgende Vereinbarungen getroffen:

Definition:

1. Zu der Nichtlinearität $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der Gestalt $F(a, b, c) = a^{n_a} b^{n_b} c^{n_c}$ definiert man nun

$$d_F := n_a + 2n_b + 3n_c - 3 \tag{1.27}$$

so daß für $\alpha = 1$

$$F_L = L^{-d_F} F$$

gilt.

2. Für eine in 0 analytische Funktion $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ sei d_F die kleinste Zahl (1.27) all jener Monome der TAYLOR-Reihe von F in 0 mit nichtverschwindenden Koeffizienten.

3. F heiße

$$\begin{aligned} &\text{irrelevant, falls } d_F > 0 \\ &\text{marginal, falls } d_F = 0 \\ &\text{relevant, falls } d_F < 0 \end{aligned}$$

Damit erkennt man, in welchen Fällen F unter der Abbildung R_o allmählich verschwindet oderverstrkt wird. \square

1.2.2 Der irrelevante Fall

Wir kommen nach den Vorbereitungen nun zum ersten Resultat dieser Methode, dem irrelevanten Fall. Dabei stellt sich heraus, daß sich die gestörte Wärmeleitungsgleichung unter bestimmten Anfangsbedingungen für große Zeiten t wie die Lösung der ungestörten verhält.

Satz:

Sei $F : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ analytisch um 0 , $d_F > 0$, $\delta > 0$ fest; dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß, falls $\|f\| < \varepsilon$ gilt, das Anfangswertproblem

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + F(u, \partial_x u, \partial_x^2 u) \quad (1.28)$$

$$u(x, 1) = f(x) \quad (1.29)$$

eine eindeutig Lösung besitzt, die

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-\delta} \left\| u(\xi t^{\frac{1}{2}}, t) - A t^{-\frac{1}{2}} f_o^*(\xi) \right\| = 0 \quad (1.30)$$

mit $A = A(f, F) \in \mathbb{C}$ erfüllt.

Beweis:

Der Beweis besteht aus zwei wesentlichen Teilen, dem Nachweis der Lösungsexistenz und der Bestimmung der Asymptotik. Begonnen wird mit der

(i) Diskussion der lokalen Lösungsexistenz

Mit der Schreibweise $F(s) = F(u(x, s), \partial_x u(x, s), \partial_x^2 u(x, s))$ und $u_f = e^{(t-1)\partial_x^2} f$ (vgl. (1.18)) formt man (1.28) um zu

$$u(x, t) = e^{(t-1)\partial_x^2} f + \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} F(t-s) \quad (1.31)$$

$$=: u_f + N(u) \quad (1.32)$$

Dazu rechnet man mittels

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx &= f(b(t), t) b'(t) - f(a(t), t) a'(t) \\ &\quad + \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t f(x, t) dx \end{aligned}$$

(1.31) als Lösung von (1.28) aus

$$\partial_t u = \partial_x^2 e^{(t-1)\partial_x^2} f + e^{(t-1)\partial_x^2} F(1) + \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} \partial_t F(t-s),$$

sowie

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u &= \partial_x^2 e^{(t-1)\partial_x^2} f + \int_0^{t-1} ds \partial_x^2 e^{s\partial_x^2} F(t-s) \\ &= \partial_x^2 e^{(t-1)\partial_x^2} f + \int_0^{t-1} ds \left(\frac{d}{ds} e^{s\partial_x^2} \right) F(t-s) \\ &= \partial_x^2 e^{(t-1)\partial_x^2} f + e^{(t-1)\partial_x^2} F(1) - F(t) - \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} \left(\frac{d}{ds} F(t-s) \right) \\ &= \partial_x^2 e^{(t-1)\partial_x^2} f + e^{(t-1)\partial_x^2} F(1) - F(t) + \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} \partial_t F(t-s) \\ &= \partial_t u - F(t) \end{aligned}$$

Insgesamt betrachtet man nun den BANACH-Raum der Funktionen $u(x, t)$ mit $t \in [1, L^2]$ und der Norm

$$\|u\|_L := \sup_t \|u(t)\| \quad (1.33)$$

zusammen mit der Abbildung

$$T(u) := u_f + N(u) \quad (1.34)$$

Von dieser wird gezeigt, daß sie $T : B_f \longrightarrow B_f$ mit $B_f := \{u \mid \|u - u_f\|_L \leq \|f\|\}$ erfüllt und zudem kontrahierend ist. Dadurch existiert nach dem BANACHschen Fixpunktsatz eine eindeutig bestimmte Funktion $u^*(x, t)$, welche

$$T(u^*) = u^* \quad (1.35)$$

erfüllt. Wegen (1.34) löst u^* dann auch (1.31).

Um $\|N(u)\|_L$ in (1.34) abschätzen zu können sei zunächst die TAYLOR-Entwicklung von F um 0 in der Form

$$F(a, b, c) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^3} z_{\mathbf{n}} a^{n_a} b^{n_b} c^{n_c}$$

gegeben mit $\mathbf{n} = (n_a, n_b, n_c) \in \mathbb{N}^3$, $z_{\mathbf{n}} \in \mathbb{C}$ und $a = u$, $b = u'$, $c = u''$. Die FOURIER-Transformierte ist dann

$$\hat{F}(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^3} z_{\mathbf{n}} \hat{a}^{*n_a} * \hat{b}^{*n_b} * \hat{c}^{*n_c}$$

wobei $*$ das Faltungsprodukt bezeichnet (s. 5.3). Außerdem gilt

$$|\widehat{u^{(l)}}(k)| = |k^l| |\hat{u}(k)|, \quad l = 0, 1, 2$$

und für alle $k \in \mathbb{R}$

$$(1 + k^2)|k^l| \leq C \cdot (1 + k^4), \quad l = 0, 1, 2$$

denn für $|k| \geq 1$ ist $1 \leq |k| \leq k^2$ und

$$\begin{aligned} C \cdot (k^4 + 1) - k^2(k^2 + 1) &= (C - 1)k^4 - k^2 + C \\ &= (C - 1)\left(k^2 - \frac{1}{2(C - 1)}\right)^2 - \frac{1}{4(C - 1)} + C \\ &\geq 0 \quad \text{mit } C \geq 3/2 \end{aligned}$$

bei $|k| \leq 1$ ist $1 \geq |k| \geq k^2$ und

$$\begin{aligned} C \cdot (k^4 + 1) - (k^2 + 1) &= C\left(k^2 - \frac{1}{2C}\right)^2 - \frac{1}{4C} + (C - 1) \\ &\geq 0 \quad \text{mit } C \geq 3/2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $l = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned}
 |\widehat{u^{(l)}}(k)| &= |k^l|(1+k^2)(1+k^2)^{-1}|\hat{u}(k)| \\
 &\leq C \cdot (1+k^4)(1+k^2)^{-1}|\hat{u}(k)| \\
 &\leq \frac{C}{(1+k^2)} \|u\|_L .
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Entsprechend gilt genauso

$$|\partial_k \widehat{u^{(l)}}(k)| \leq \frac{C}{(1+k^2)} \|u\|_L , \tag{1.37}$$

denn

$$\begin{aligned}
 |\partial_k \widehat{u^{(l)}}(k)| &= |\partial_k(k^l \hat{u}(k))| \\
 &\leq |lk^{l-1} \hat{u}(k)| + |k^l \hat{u}'(k)| \\
 &\leq C \cdot \frac{1+k^4}{1+k^2} (|\hat{u}(k)| + |\hat{u}'(k)|) \\
 &\leq C \cdot (1+k^2)^{-1} \|u\|_L
 \end{aligned}$$

Neben diesen Ungleichungen braucht man noch die Formel

$$((1+k^2)^{-1})^{*m} = \pi^{m-1} \cdot \frac{m}{m^2+k^2} \tag{1.38}$$

welche sich aus

$$\frac{\widehat{1}}{1+k^2} = \pi e^{-|x|}$$

und aus dem Zusammenhang für Faltungen

$$\hat{f}_1 * \hat{f}_2 = \widehat{f_1 \cdot f_2} \tag{1.39}$$

ergibt, hier also

$$\begin{aligned}
((1+k^2)^{-1})^{*m} &= \widehat{\pi^m e^{-|mx|}} \\
&= (2\pi)^{-1} \int e^{-ikx} \pi^m e^{-|mx|} dx \\
&= \frac{1}{2} \pi^{m-1} \int e^{-ik(x \cdot m)/m} m^{-1} e^{-|x \cdot m|} d(x \cdot m) \\
&= \pi^{m-1} m^{-1} \widehat{\pi e^{-|x|}} \left(\frac{k}{m}\right) \\
&= \pi^{m-1} m^{-1} \left(1 + \left(\frac{k}{m}\right)^2\right)^{-1} \\
&= \pi^{m-1} \frac{m}{m^2 + k^2}
\end{aligned}$$

Diese Formeln werden nun benutzt um

$$\int_0^{t-1} ds e^{-sk^2} |\hat{a}^{*n_a} * \hat{b}^{*n_b} * \hat{c}^{*n_c}|(k) \leq \frac{C_L C^m}{(1+k^4)} \|u\|_L^m \quad (1.40)$$

mit $m = n_a + n_b + n_c \geq 2$ ($d_F = m + n_b + 2n_c - 3 > 0$ ist vorausgesetzt) zu zeigen.

Aus (1.32) ergibt sich für ein $F(a, b, c) = a^{n_a} b^{n_b} c^{n_c}$ mit (1.36) und (1.38)

$$\begin{aligned}
|\widehat{N(u)}| &\leq \int_0^{t-1} ds e^{-sk^2} |\hat{a}^{*n_a} * \hat{b}^{*n_b} * \hat{c}^{*n_c}|(k) \\
&\leq (C \cdot \|u\|_L)^m \cdot \frac{1 - e^{-(t-1)k^2}}{k^2} \cdot \int (1 + (k - p_1)^2)^{-1} \cdots (1 + p_m^2)^{-1} dp_1 \cdots dp_m \\
&= (C \cdot \|u\|_L)^m \cdot \frac{1 - e^{-(t-1)k^2}}{k^2} \cdot ((1+k^2)^{-1})^{*(m-1)} \\
&= (C \cdot \|u\|_L)^m \cdot \frac{1 - e^{-(t-1)k^2}}{k^2} \cdot \pi^{m-2} \cdot \frac{m-1}{(m-1)^2 + k^2} \\
&\leq (C' \cdot \|u\|_L)^m \cdot \frac{1 - e^{-(t-1)k^2}}{k^2} \cdot (1+k^2)^{-1} \\
&\leq C_L \cdot (C' \cdot \|u\|_L)^m,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung für $|k| \geq 1$ wegen

$$\begin{aligned}
\frac{1 - e^{-(t-1)k^2}}{k^2} \cdot (1+k^2)^{-1} &\leq (k^2 + k^4)^{-1} \\
&\leq (1+k^4)^{-1}
\end{aligned}$$

und für $|k| \leq 1$ wegen

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-(t-1)k^2}}{k^2} \cdot (1 + k^2)^{-1} &\leq (L^2 - 1)(1 + k^2)^{-1} \\ &\leq (L^2 - 1)(1 + k^4)^{-1} \end{aligned}$$

gilt $((1 - \exp[-(t-1)k^2])/k^2)$ hat lokales Maximum bei $k = 0$.

Analog berechnet man die gleiche Abschätzung mittels (1.37) und

$$\begin{aligned} \partial_k(\hat{f} * \hat{g})(k) &= \hat{f}' * \hat{g}(k) \\ &= \hat{f} * \hat{g}'(k) \end{aligned}$$

für $|\partial_k \widehat{N(u)}|$

$$\begin{aligned} |\partial_k \widehat{N(u)}| &\leq \int_0^{t-1} ds | -2sk | e^{-sk^2} | \hat{a}^{*n_a} * \hat{b}^{*n_b} * \hat{c}^{*n_c} | \\ &\quad + \int_0^{t-1} ds e^{-sk^2} | \partial_k(\hat{a}^{*n_a} * \hat{b}^{*n_b} * \hat{c}^{*n_c}) | \\ &\leq (C \|u\|_L)^m \cdot (1 + k^2)^{-1} \cdot 2 \frac{1 - (1 + (t-1)k^2)e^{-(t-1)k^2}}{|k|^3} \\ &\quad + C_L (C \|u\|_L)^m (1 + k^4)^{-1} \\ &\leq C'_L (C' \|u\|_L)^m (1 + k^4)^{-1}, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Abschätzung

$$2 \frac{1 - (1 + (t-1)k^2)e^{-(t-1)k^2}}{|k|} \leq C_L$$

eingesetzt wird. Insgesamt ist also für den Fall, daß F ein Monom ist,

$$\|N(u)\|_L \leq C_L \cdot (C \|u\|_L)^m.$$

Für ein beliebiges analytisches F gilt

$$|z_{\mathbf{n}}| \leq (C_F)^m$$

und somit, falls $\|u\|_L$ klein genug ist,

$$\|N(u)\|_L \leq C_{L,F} \cdot \|u\|_L^2. \quad (1.41)$$

Nun war nach Voraussetzung und (1.18)

$$\begin{aligned}\|u_f\|_L &\leq C_L \|f\| \\ &\leq C\varepsilon(L, F)\end{aligned}$$

und somit gilt für $u \in B_f$

$$\|u\|_L \leq (C_L + 1) \|f\|, \quad (1.42)$$

also ist wegen (1.41)

$$\begin{aligned}\|T(u) - u_f\|_L &= \|N(u)\|_L \\ &\leq C_{L,F}\varepsilon(L, F),\end{aligned}$$

woraus nun $T(B_f) \subset B_f$ folgt.

Nun soll noch die Kontraktion der beschriebenen Abbildung gezeigt werden. Dazu beginnt man mit

$$\begin{aligned}\|T(u_1) - T(u_2)\|_L &= \|N(u_1) - N(u_2)\|_L \\ &= \left\| \int_0^1 dq \partial_q N(u_2 + q(u_1 - u_2)) \right\|_L \\ &\leq \int_0^1 dq \|\partial_q N(u_2 + q(u_1 - u_2))\|_L\end{aligned} \quad (1.43)$$

und rechnet weiter

$$\begin{aligned}\partial_q N(u_2 + q(u_1 - u_2)) &= \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} \cdot \partial_q F(t-s) \\ &= \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} \cdot [\partial_a F(t-s)(u_1 - u_2) \\ &\quad + \partial_b F(t-s)\partial_x(u_1 - u_2) + \partial_c F(t-s)\partial_x^2(u_1 - u_2)].\end{aligned}$$

Setzt man die Potenzreihenentwicklung für F ein, so ergibt sich an den Stellen $\partial_d F$ mit $d = a, b, c$ dieselbe Situation wie in (1.31), allerdings durch die

Ableitungen nur noch mit $m \geq 1$. Daher schätzt man (1.43) analog ab:

$$\begin{aligned}
\|N(u_1) - N(u_2)\|_L &\leq \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} \cdot \|\partial_a F(t-s)(u_1 - u_2)\|_L \\
&+ \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} \cdot \|\partial_b F(t-s)\partial_x(u_1 - u_2)\|_L \\
&+ \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} \cdot \|\partial_c F(t-s)\partial_x^2(u_1 - u_2)\|_L \\
&\leq 3C_{L,F} \|u_2 + q(u_1 - u_2)\|_L \|u_1 - u_2\|_L \\
&\leq 3C_{L,F} ((1-q)\|u_2\|_L + q\|u_1\|_L) \|u_1 - u_2\|_L \\
&\leq 3C_{L,F} (\|u_2\|_L + \|u_1\|_L) \|u_1 - u_2\|_L \quad (1.44)
\end{aligned}$$

Das zeigt wegen (1.43) die Kontraktion der Abbildung $T(u)$.

Insgesamt existiert also für $\|f\| \leq \varepsilon(L, F)$ eine eindeutige Lösung $u^* \in B_f$, die (1.35) erfüllt und damit zum Zeitpunkt $t = L^2$ auch (1.28).

Wir können die Lösung von (1.31) mit $u^* = u$ also in der Form

$$\begin{aligned}
u(x, L^2) &= u_f(x, L^2) + N(u) \\
&= e^{(L^2-1)\partial_x^2} f(x) + N(u) \quad (1.45)
\end{aligned}$$

mit

$$\|N(u)\| = \|T(u) - u_f\| \leq C_{F,L} \|f\|^2 \quad (1.46)$$

schreiben, denn

$$\begin{aligned}
\|T(u) - u_f\| &\leq \|T(u) - u_f\|_L \\
&= \|N(u)\|_L \\
&\leq C_{F,L} \|u\|_L^2 \\
&\leq \hat{C}_{F,L} \|f\|^2.
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung benutzen wir nun

$$N(u) =: v \quad (1.47)$$

(ii) Wir kommen zum 2. Teil des Beweises, in welchem die Asymptotik durch Iteration einer Renormierungsabbildung berechnet wird. Dazu wird

die Startwertfunktion als ein gestörter GAUß-Fixpunkt geschrieben:

$$f(x) = A_o f_o^*(x) + g_o(x) \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} A_o &:= \hat{f}(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$\hat{f}_o^*(0) = 1$$

$$\hat{g}_o(0) = 0$$

Die letzte Bedingung erlaubt es die Kontraktionseigenschaft (1.23) von R_o auf den Störterm g_o anzuwenden. Zunächst ergibt sich aus (1.48)

$$\begin{aligned} \|g_o\| &= \|f - \hat{f}(0)f_o^*\| \\ &\leq \|f\| + |\hat{f}(0)| \cdot \|f_o^*\| \\ &\leq C \cdot \|f\|. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Die zu betrachtende Abbildung ist mit (1.20) und (1.47)

$$\begin{aligned} Rf(x) &= Lu(Lx, L^2) \\ &= Lu_f(Lx, L^2) + Lv(Lx) \\ &= Le^{(L^2-1)\partial_x^2} f(Lx) + Lv(Lx) \\ &= (R_o f)(x) + Lv(Lx) \\ &= (R_o(A_o f_o^* + g_o))(x) + Lv(Lx) \\ &= (A_o + \hat{v}(0)) f_o^* - \hat{v}(0) f_o^* + R_o g_o + Lv(Lx) \\ &:= A_1 f_o^* - \hat{v}(0) f_o^* + R_o g_o + Lv(Lx) \\ &:= A_1 f_o^* + g_1 \end{aligned}$$

mit

$$A_1 := A_o + \hat{v}(0) \quad (1.51)$$

$$g_1 := R_o g_o + Lv(Lx) - \hat{v}(0) f_o^* \quad (1.52)$$

Somit ergibt sich wieder

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(0) &= \widehat{R_o g_o}(0) + \hat{v}(0) - \hat{v}(0) \cdot 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Außerdem kann man mit (1.46) die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |A_1 - A_o| &= |\hat{v}(0)| \\ &\leq \|v\| \\ &\leq C_{L,F} \|f\|^2 \end{aligned} \quad (1.53)$$

und

$$\begin{aligned} \|Lv(Lx) - \hat{v}(0)f_o^*(x)\| &\leq L \|v(Lx)\| + |\hat{v}(0)| \|f_o^*\| \\ &\leq L^4 \|v\| + |\hat{v}(0)| \|f_o^*\| \\ &\leq L^4 C_{L,F} \|f\|^2 \end{aligned}$$

herleiten. Insgesamt erhält man damit

$$\begin{aligned} \|g_1\| &\leq CL^{-1} \|g_o\| + L^4 C_{L,F} \|f\|^2 \\ &\leq \hat{C} L^{-1} \|f\| + L^4 C_{L,F} \|f\|^2 \\ &\leq L^{-(1-\delta)} \|f\|, \end{aligned} \quad (1.54)$$

wobei $\|f\| C_{L,F} \leq CL^{-5}$ für große und in Abhängigkeit von $\delta < 1$ gewählte L gelten soll.

Diese Prozedur läßt sich iterieren. Zu diesem Zweck wird

$$\begin{aligned} f_n &:= R_{L^n, F} f \\ &= A_n f_o^* + g_n \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$A_n := A_{n-1} + \hat{v}_{n-1}(0) \quad (1.56)$$

$$g_n := R_o g_{n-1} + Lv_{n-1}(L\cdot) - \hat{v}_{n-1}(0) f_o^* \quad (1.57)$$

gesetzt ($v_o = v$). Zu zeigen ist, daß immer noch

$$|A_n| \leq (C - L^{-n}) \|f\| \quad (1.58)$$

$$\|g_n\| \leq CL^{-(1-\delta)n} \|f\| \quad (1.59)$$

gilt, woraus

$$\|f_n\| \leq C \|f\| \quad (1.60)$$

folgt. Die Gleichungen (1.58) und (1.59) lassen sich durch Induktion zeigen, wobei die Fälle $n = 0, 1$ schon nachgerechnet wurden (vgl. (1.53) und (1.54)).

Durch Wiederholung der Abschätzungen für F_{L^n} aus dem ersten Teil des Beweises entsteht statt C_F der Term $C_F \cdot L^{-nd_F}$, denn jedes Monom von F_{L^n} hat die Form $L^{n(3-i-2j-3k)} a^i b^j c^k$ (vgl. (1.4)) und somit gilt nach (1.27):

$$\underbrace{L^{n(3-i-2j-3k)} |a^i b^j c^k|}_{\text{Monom aus } F_{L^n}} \leq \underbrace{L^{-nd_F} |a^i b^j c^k|}_{\text{Monom aus } L^{-nd_F} \cdot F}.$$

Schließlich also

$$\begin{aligned} \|v_n\| &\leq C_{L,F} L^{-nd_F} \|f_n\|^2 \\ &\leq C_{L,F} L^{-nd_F} \|f\|^2 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} |A_{n+1} - A_n| &= |\hat{v}_n(0)| \\ &\leq \|v_n\| \\ &\leq C_{L,F} L^{-nd_F} \|f\|^2 \end{aligned}$$

wieder mit $\|f\| C_{L,F} \leq CL^{-5}$ (s. Bem. zu (1.54)).
Ebenso ist dann

$$\begin{aligned} \|g_{n+1}\| &\leq CL^{-1} \|g_n\| + \|Lv_n(Lx)\| + |\hat{v}_n(0)| \|f_o^*\| \\ &\leq CL^{-1} \|g_n\| + L^4 \|v_n\| + C \|v_n\| \\ &\leq CL^{-1} \|g_n\| + C_{L,F} L^4 L^{-nd_F} \|f_n\|^2. \end{aligned}$$

Insgesamt bekommt man nun unter der Induktionsvoraussetzung, daß die Formeln für beliebiges festes n gelten ($d_F \geq 1$) mit genügend großem L :

$$\begin{aligned} |A_{n+1}| &\leq |A_n| + |A_{n+1} - A_n| \\ &\leq (C - L^{-n}) \|f\| + C_{L,F} L^4 L^{-nd_F} \|f\|^2 \\ &\leq (C - L^{-n}) \|f\| + L^{-(n+1)} \|f\|^2 \\ &\leq (C - L^{-(n+1)}) \|f\| \end{aligned}$$

und für g_{n+1} :

$$\begin{aligned} \|g_{n+1}\| &\leq \hat{C} L^{-1} C L^{-(1-\delta)n} \|f\| + C_{L,F} L^4 L^{-nd_F} \|f\|^2 \\ &\leq C' L^{-(n+1)} L^{\delta n} \|f\| + L^{-(n+1)} \|f\| \\ &\leq C L^{-(1-\delta)(n+1)} \|f\|. \end{aligned}$$

Das zeigt die Ungleichungen (1.58) und (1.59).

Zusammenfassend gilt damit

$$\begin{aligned} A_n &\longrightarrow A \\ |A_n - A| &\leq CL^{-nd_F} \|f\| , \end{aligned}$$

denn es ist für $n > m \geq 1$

$$\begin{aligned} |A_n - A_m| &\leq \sum_{k=n}^{m+1} |A_k - A_{k-1}| \\ &\leq C_{L,F} \|f\|^2 \sum_{k=n}^{m+1} L^{-kd_F} \\ &= C_{L,F} \|f\|^2 L^{-(m+1)d_F} \sum_{k=0}^{n-(m+1)} L^{-kd_F} \\ &\leq C_{L,F} L^{-md_F} \|f\|^2 \end{aligned}$$

und somit A_n eine CAUCHY-Folge, die wegen

$$|A - A_m| \leq C_{L,F} L^{-md_F} \|f\|^2$$

gegen A konvergiert. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} |A - A_o| &= |A - \hat{f}(0)| \\ &\leq C_{L,F} \|f\|^2 . \end{aligned}$$

Abschließend läßt sich nun auch die behauptete Asymptotik für die Zeitpunkte $t = L^{2n}$ berechnen:

$$\begin{aligned} u(\xi t^{\frac{1}{2}}, t) &= t^{-\frac{\alpha}{2}} (R_{L^n, F} f)(\xi) \\ &= t^{-\frac{\alpha}{2}} (A_n f_o^* + g_n)(\xi) \end{aligned}$$

mit $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} \left\| u(\xi t^{\frac{1}{2}}, t) - A t^{-\frac{1}{2}} f_o^*(\xi) \right\| &= t^{-\frac{1}{2}} \|(A_n f_o^* + g_n - A f_o^*)(\xi)\| \\ &\leq t^{-\frac{1}{2}} [|A_n - A| \|f_o^*\| + \|g_n\|] \\ &\leq L^{-n} (CL^{-nd_F} \|f_o^*\| + \hat{C} L^{-(1-\delta)n}) \|f\| \\ &\leq C' L^{-2n+\delta n} \|f\| \\ &= C' t^{-1+\frac{1}{2}\delta} \|f\| . \end{aligned}$$

Nun ändert sich an den oben genannten Abschätzungen nichts, wenn man die Ersetzung $L^2 \mapsto (\tau L)^2$ für $\tau \in [1, \sqrt{L})$ vornimmt. Damit ist für alle Zeitpunkte $t \geq 1$ die Behauptung gezeigt. \square

1.2.3 Der marginale Fall

Hier wird das Langzeitverhalten zu $d_F = 0$ untersucht. Die Nichtlinearitäten aus (1.1) sollen die Form

$$F = -u^3 + G(u, \partial_x u, \partial_x^2 u) \quad (1.61)$$

oder

$$F = \partial_x(u^2) + H(u, \partial_x u, \partial_x^2 u) \quad (1.62)$$

mit $d_G, d_H \geq 1$ haben, das heißt die TAYLOR-Entwicklungen um 0 von G und H starten mit einem Grad ≥ 4 . Ohne diese Voraussetzung muß erst die Systemzeit betrachtet werden, in welcher G den Term $-u^3$ bzw. H den Term $\partial_x(u^2)$ dominiert. Behandelt wird hier nur der Fall (1.61) und nicht (1.62), welcher auf die als BURGER-Gleichung bekannte Differentialgleichung führt. Näheres dazu findet man aber auch bei [Bric93/II].

Mit einer Ersetzung $u \mapsto \bar{u} := \lambda^{1/2} u$, so daß $\hat{\bar{u}}(k=0, t=1) = 1$ gilt, gelangt man zur Differentialgleichung

$$\partial_t \bar{u} = \partial_x^2 \bar{u} - \lambda \bar{u}^3 + G_\lambda(\bar{u}, \partial_x \bar{u}, \partial_x^2 \bar{u}) \quad (1.63)$$

für \bar{u} , wobei

$$G_\lambda(a, b, c) := \lambda^{-\frac{1}{2}} G(\lambda^{\frac{1}{2}} a, \lambda^{\frac{1}{2}} b, \lambda^{\frac{1}{2}} c) \quad (1.64)$$

gilt und die Startwertfunktion geschrieben wird als

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, 1) &= f(x) \\ &:= f_o^*(x) + g(x) \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\hat{g}(0) = 0. \quad (1.66)$$

Das Hauptresultat im marginalen Fall lautet damit:

Satz:

Für alle $\delta > 0$ existieren $\lambda_o, \varepsilon > 0$, so daß für alle $0 < \lambda \leq \lambda_o$ und $\|g\| \leq \varepsilon$ das Anfangswertproblem (1.63)-(1.66) mit irrelevantem G eine eindeutige Lösung besitzt, für die

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} (\log t)^{1-\delta} \left\| \bar{u}(\xi t^{\frac{1}{2}}, t) - \left(\frac{\lambda t \log t}{2\sqrt{3}\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} f_o^*(\xi) \right\| = 0 \quad (1.67)$$

gilt.

Beweis:

Erst einmal sei festgestellt, daß im Vergleich zum irrelevanten Fall 1.2.2 die hier getroffene Aussage deutlich schwächer ist: einerseits muß die Startbedingung $f(x)$ schon so gewählt werden, daß sie wenig vom GAUß-Fixpunkt f_o^* abweicht und andererseits erfolgt die Konvergenz wegen $(\log t)^{1-\delta}$ schwächer als zuvor. Insofern ist dieses Ergebnis eher als Stabilitätsaussage über den GAUß-Fixpunkt bei solchen marginalen Fällen zu verstehen. Weiterhin besagt der Satz, daß ein marginaler Term zwar auftreten darf, dessen Kopplung λ aber umso kleiner sein soll, je größer das Integral der Startbedingung ist. Aus dem Beweis wird ersichtlich, daß λ klein gewählt werden muß, damit die Abschätzungen gelingen.

Im Folgenden wird wieder u statt \bar{u} geschrieben. Die Beweisführung folgt jener aus dem irrelevanten Fall, ebenso sind die Normnotationen wie in 1.2.2 zu verstehen:

(I) Beweis der lokalen Lösungsexistenz

Zuerst verwandelt man die Differentialgleichung (1.63) wieder in eine Integralgleichung

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{(t-1)\partial_x^2} f + N_\lambda(u) \\ &= u_f - \lambda N_3(u) + N_G(u) \end{aligned} \quad (1.68)$$

mit

$$N_3(u) := \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} [u(t-s)]^3 \quad (1.69)$$

$$N_G(u) := \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} G_\lambda(t-s) \quad (1.70)$$

und versucht erneut die Voraussetzungen des BANACHschen Fixpunktsatzes für die Abbildung

$$u \longmapsto T_\lambda(u) := u_f + N_\lambda(u)$$

auf der Menge

$$B_f := \{u \mid \|u - u_f\|_L \leq \|f\|\}$$

nachzuweisen, also $T_\lambda(B_f) \subset B_f$ und $\|T_\lambda(a) - T_\lambda(b)\| \leq C \|a - b\|$.

Im weiteren Verlauf bezeichnen K_L , $K_{L,G}$, \bar{C}_L , $\bar{C}_{L,G}$ und $C_L^{(i)}$, $C_L^{(ii)}$, $C_L^{(iii)}$ fest gewählte Größen.

In diesem Fall gilt $\|f\| \geq 1$, so daß der Parameter λ in den folgenden Normabschätzungen für beliebig kleine Größen sorgen wird. Wie im irrelevanten Fall hat man hier die FOURIER-Transformierte der Potenzreihenentwicklung von $N_\lambda(u)$ um 0 zu betrachten:

$$\hat{N}_\lambda(a, b, c) = \lambda \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} \left(-\hat{u}^{*3} + \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}} z_{\mathbf{n}} \lambda^{\frac{m_G-3}{2}} \hat{a}^{*n_a} * \hat{b}^{*n_b} * \hat{c}^{*n_c} \right)$$

wobei nach Voraussetzung $m_G = n_a + n_b + n_c \geq 4$ sein soll.

Nun ist $u \in B_f$ und $\|u_f\|_L \leq C_L \|f\|$, also ist $\|u\|_L \leq (C_L + 1) \|f\| := K_L$. Nach Voraussetzung ist $K_L > 1$.

Nun gilt mit $\lambda < K_L^{-2}$

$$\|N_\lambda(u)\|_L \leq \lambda \|N_3(u)\|_L + \|N_G(u)\|_L \quad (1.71)$$

$$\leq \bar{C}_L \lambda \|u\|_L^3 + \bar{C}_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}} \|u\|_L^4 \quad (1.72)$$

$$\leq (\bar{C}_L + \bar{C}_{L,G} \lambda^{\frac{1}{2}} K_L) K_L^3 \lambda \quad (1.73)$$

$$\leq K_{L,G} \lambda. \quad (1.74)$$

Wegen $T_\lambda(u) - u_f = N_\lambda(u)$ ergibt sich für

$$\lambda_o := \lambda(L, G) < K_{L,G}^{-1} := ((\bar{C}_L + \bar{C}_{L,G}) K_L^3)^{-1} \quad (1.75)$$

die Inklusion $T_\lambda(B_f) \subset B_f$. Die analoge Gleichung aus dem irrelevanten Fall ist (1.41), in der $\|u\|_L \leq C_{L,F} \varepsilon$ den gleichen Schluß zuließ.

Auch zum Nachweis der Kontraktionseigenschaft benutzt man die Umformungen aus dem vorangegangenen Abschnitt (vgl. (1.43) und (1.44)) für die Ausdrücke $N_3(u)$ und $N_G(u)$, so daß für $\lambda \leq \lambda_o$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(u_1) - T_\lambda(u_2)\|_L &= \|N_\lambda(u_1) - N_\lambda(u_2)\|_L \\
&\leq \lambda \|N_3(u_1) - N_3(u_2)\|_L + \|N_G(u_1) - N_G(u_2)\|_L \\
&\leq C_L \lambda \|u_1 + u_2\|_L^2 \|u_1 - u_2\|_L \\
&\quad + \tilde{C}_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}} \|u_1 + u_2\|_L^3 \|u_1 - u_2\|_L \\
&\leq C_{L,G} \lambda \|u_1 - u_2\|_L.
\end{aligned} \tag{1.76}$$

Damit sind insgesamt die zur Anwendbarkeit des BANACHschen Fixpunktsatzes nötigen Voraussetzungen geschaffen, woraus wegen $T_\lambda(u^*) = u^*$ wieder die eindeutige Lösungsexistenz u^* zum Zeitpunkt $t = L^2$ folgt.

Analog zu (1.46) und (1.45) schreibt man die gefundene Lösung als

$$\begin{aligned}
u(x, L^2) &= e^{(L^2-1)\partial_x^2} f(x) + v \\
&= u_f(x, L^2) + N_\lambda(u)
\end{aligned} \tag{1.77}$$

mit

$$\|v\| = \|T_\lambda(u) - u_f\| = \|N_\lambda(u)\| \leq K_{L,G} \lambda. \tag{1.78}$$

Dies ist schließlich der Ausgangspunkt für die Renormierungstransformation

$$\begin{aligned}
Rf(x) &= Lu(x, L^2) \\
&= (R_o f)(x) + Lv(Lx).
\end{aligned}$$

(II) Jetzt gelangt man zur Iteration der Renormierungsabbildung um die asymptotische Lösung zu erhalten. Zunächst werden ein paar Hilfsgrößen eingeführt.

1. u_A^* bezeichne die Lösung von (1.63) mit $u_A^*(x, 1) = Af_o^*(x)$ und $G_\lambda = 0$, also

$$u_A^* = Ae^{(t-1)\partial_x^2} f_o^* - \lambda N_3(u_A^*) \tag{1.79}$$

2. u_A bezeichne die Lösung von (1.63) mit $u_A(x, 1) = Af_o^* + g$, also

$$u_A = e^{(t-1)\partial_x^2} [Af_o^* + g] - \lambda N_3(u_A) + N_G(u_A) \tag{1.80}$$

Zwar war durch vorherige Skalierung (vgl. Def. von λ) $A = 1$ gesetzt worden, doch die folgenden Rechnungen gelingen auch für $A \leq 1$.

Man hat nun zu zeigen, daß $u_A \rightarrow u_A^*$ und $u_A^*(\xi t^{\frac{1}{2}}, t) \rightarrow C\lambda(t \log t)^{-\frac{1}{2}} f_o^*(\xi)$ für große t erfüllt wird, denn dies bedeutet:

der Anfangswert von u_A^* darf durch g leicht gestört werden und trotz irrelevanter Störungen der Dynamik durch N_G wird allmählich die Lösung u_A^* angenommen, welche sich in der angegebenen Weise in die skalierte GAUß-Funktion f_o^* entwickelt, wenn λ nur klein genug ist. Tatsächlich finden diese beiden Prozesse natürlich gleichzeitig statt, allerdings verschwinden die irrelevanten Terme schneller als die Konvergenz in den Fixpunkt erfolgt. In dieser Reihenfolge verläuft auch das weitere Vorgehen.

Sei also $\|g\| \leq \varepsilon$ und $\lambda \leq \lambda_o$. Dann gilt:

$$\|N_3(u_A) - N_3(u_A^*)\|_L = \frac{1}{\lambda} \|u_A - N_G(u_A) - u_A^* - R_o g\|_L \quad (1.81)$$

$$\leq C_L(A^2 \|g\| + \|g\|^3) + C_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}} \quad (1.82)$$

Um dieses Hilfsmittel zu zeigen geht man folgendermaßen vor, wobei eine Bestimmungsgleichung für ε entsteht und einige Konstanten gekennzeichnet sind:

(i)

$$\begin{aligned} \|N_3(u_A) - N_3(u_A^*)\|_L &\leq \int_0^1 dq \|\partial_q N_3(u_A + q(u_A^* - u_A))\|_L \\ &\leq \int_0^1 dq C_L^{(i)} \|u_A + q(u_A^* - u_A)\|_L^2 \|u_A^* - u_A\|_L \\ &\leq C_L^{(i)} (\|u_A\|_L + \|u_A^*\|_L)^2 \|u_A - u_A^*\|_L \end{aligned} \quad (1.83)$$

ganz analog zu (1.76) mit

$$\begin{aligned} \|\partial_{\bar{u}} N_3(\bar{u})\|_L &= \left\| \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} [3\bar{u}^2] \right\|_L \\ &\leq C_L \|\bar{u}\|_L^2. \end{aligned}$$

(ii) Außerdem gilt mit (1.74), (1.79) und (1.80)

$$\begin{aligned} \|u_A - u_A^*\|_L &\leq \left\| e^{(t-1)\partial_x^2} g \right\|_L + \|N_G(u_A)\|_L + \lambda \|N_3(u_A) - N_3(u_A^*)\|_L \\ &\leq C_L^{(ii)} \|g\| + C_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}} + \lambda \|N_3(u_A) - N_3(u_A^*)\|_L \end{aligned} \quad (1.84)$$

(iii) Da $u_A \in B_f$ bzw. $u_A^* \in B_f$ die Gleichung (1.80) bzw. (1.79) erfüllen, schätzt man problemlos

$$\begin{aligned} \|u_A^*\|_L &\leq \left\| A e^{(t-1)\partial_x^2} f_o^* \right\|_L + \lambda \|N_3(u_A^*)\|_L \\ &\leq C_L^{(iii)} |A| \end{aligned} \quad (1.85)$$

und ebenso

$$\|u_A\|_L \leq C_L^{(iii)} (|A| + \|g\|) \quad (1.86)$$

ab (vgl. (1.42)).

Insgesamt erhält man daraus nun

$$\begin{aligned} \|N_3(u_A) - N_3(u_A^*)\|_L &\leq C_L^{(i)} (\|u_A\|_L + \|u_A^*\|_L)^2 \|u_A - u_A^*\|_L \\ &\leq C_L^{(i)} [C_L^{(iii)} |A| + C_L^{(iii)} (|A| + \|g\|)]^2 \|u_A - u_A^*\|_L \\ &\leq C_L^{(i)} \left(C_L^{(iii)} \right)^2 [|A| + \|g\|]^2 \cdot \\ &\quad [C_L^{(ii)} \|g\| + C_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}} + \lambda \|N_3(u_A) - N_3(u_A^*)\|_L] \end{aligned}$$

Zum Umstellen braucht man

$$\begin{aligned} C_L^{(i)} \left(C_L^{(iii)} \right)^2 [|A| + \|g\|]^2 &\leq \hat{C}_L (A^2 + \|g\|^2) \\ C_L^{(i)} \left(C_L^{(iii)} \right)^2 [|A| + \|g\|]^2 C_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}} &\leq \hat{C}_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}} \\ C_L^{(i)} \left(C_L^{(iii)} \right)^2 [|A| + \|g\|]^2 \lambda &< 1 \end{aligned}$$

Bei den ersten beiden Ungleichungen wird nur gegen eine neue Konstante abgeschätzt. Für die letzte Abschätzung wird

$$\lambda_o^{-1} > C_L^{(i)} \left(C_L^{(iii)} \right)^2 [|A| + \|g\|]^2$$

gefordert. Das bedeutet für die Wahl von ε :

$$\varepsilon(L, G) < \sqrt{\frac{(\bar{C}_L + \bar{C}_{L,G}) K_L^3}{C_L^{(i)} \left(C_L^{(iii)} \right)^2}} - 1 \quad (1.87)$$

Dabei liegt $C_L^{(i)} \left(C_L^{(iii)} \right)^2$ in der Ordnung $\mathcal{O}(K_L^3)$. Wichtig hieran ist, daß man λ_o und $\varepsilon(L, G)$ nur in Abhängigkeit von L und G klein wählen kann.

Daraus ergibt sich endlich (1.82):

$$\begin{aligned} \|N_3(u_A) - N_3(u_A^*)\|_L &\leq (1 - C_L^{(i)} \left(C_L^{(iii)} \right)^2 [|A| + \|g\|]^2 \lambda)^{-1} \cdot \\ &\quad [\hat{C}_L(A^2 + \|g\|^2) C_L^{(ii)} \|g\| + \hat{C}_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}}] \\ &\leq C_L(A^2 \|g\| + \|g\|^3) + C_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Man kennt damit nun die Abweichung der u^3 -Integralterme, welche sich zum gestörten und ungestörten Anfangswert ergeben, in Abhängigkeit von der Störung g . Die spätere Iteration der Renormierungsabbildung darauf wird dann den $C_{L,G}\lambda$ -Ausdruck in der Abschätzung vernichten, weil G irrelevant ist. Zu betrachten ist dann noch das Verhalten der Lösung u_A^* .

Um den GAUß-Fixpunkt aus der Lösung u_A^* zu extrahieren wird nun der Unterschied der Lösung u_A^* und $u_{A_f}^* := R_o f_o^*$ im u^3 -Anteil der PDGI zur Zeit $t = L^2$ untersucht, also $N_3(u_A^*) - A^3 N_3(u_{A_f}^*)$. Sei dazu

$$\begin{aligned} v^*(x) &:= \int_0^{L^2-1} ds e^{s\partial_x^2} [e^{(L^2-1-s)\partial_x^2} f_o^*(x)]^3 \\ &= \int_0^{L^2-1} ds e^{s\partial_x^2} [u_{A_f}^*(x)]^3 \\ &= N_3(u_{A_f}^*)(x, L^2) \end{aligned} \tag{1.88}$$

definiert, die freie Lösung zum ungestörten Anfangswert im u^3 -Integralterm zur Zeit $t = L^2$. Wegen

$$\|N_3(u_A^*)\|_L \leq C_L \|u_A^*\|_L^3 \leq C_L |A|^3$$

gilt für $|A| \leq 1$ auch

$$\|N_3(u_A^*)(x, L^2) - A^3 v^*(x)\|_L \leq C_L \lambda |A|^5. \tag{1.89}$$

Die Abweichung ist also von der Ordnung $\lambda \leq \lambda_o$. Das erkennt man mittels (1.79) aus

$$\begin{aligned}
\|N_3(u_A^*)(x, L^2) - A^3 v^*(x)\| &= \left\| \int_0^{L^2-1} ds e^{s\partial_x^2} \left\{ \left(A e^{(L^2-1-s)\partial_x^2} f_o^*(x) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \lambda N_3(u_A^*)(x, L^2 - s) \right)^3 \right. \\
&\quad \left. - \left(A e^{(L^2-1-s)\partial_x^2} f_o^*(x) \right)^3 \right\} \right\| \\
&\leq \int_0^{L^2-1} \left\| 3 A e^{(L^2-1-s)\partial_x^2} f_o^*(x) \left(\lambda N_3(u_A^*)(x, L^2 - s) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - 3 \left(A e^{(L^2-1-s)\partial_x^2} f_o^*(x) \right)^2 \lambda N_3(u_A^*)(x, L^2 - s) \right. \\
&\quad \left. - \left(\lambda N_3(u_A^*)(x, L^2 - s) \right)^3 \right\| \\
&\leq C_L \lambda |A|^2 \|N_3(u_A^*)\|_L \\
&\quad + \tilde{C}_L \lambda^2 |A| \|N_3^2(u_A^*)\|_L + \tilde{C}_L \lambda^3 \|N_3^3(u_A^*)\|_L \\
&\leq C_L \lambda |A|^5 (1 + \lambda |A|^2 + \lambda^2 |A|^4) \\
&\leq C_L \lambda |A|^5.
\end{aligned}$$

Diese Vorbereitungen, nämlich (1.82) und (1.89), motivieren jetzt die folgende Schreibweise der Störung in (1.77)

$$v = N_\lambda(u_A) = -\lambda A^3 N_3(u_{A_f}^*) + w = -\lambda A^3 v^* + w \quad (1.90)$$

so daß eben

$$\|w\| \leq C_{L,G} \lambda (\|g\| + \lambda^{\frac{1}{2}}) \quad (1.91)$$

gilt, das heißt, man steckt nun alle Abweichungen in den w -Term. Dadurch wird deutlich, daß der Term $-\lambda A^3 N_3(u_{A_f}^*)$ konserviert werden soll und eine Störung dessen, falls λ und g klein genug sind, verschwindet. Mithin muß aus ihm dann der zeitliche Abfall, mit welchem u_A^* konvergiert, folgen. (1.91) errechnet sich mit Hilfe der vorangegangenen Abschätzungen (1.82), (1.89)

und (1.74) aus

$$\begin{aligned}
\|w\| &= \|N_\lambda(u_A) + \lambda A^3 v^*\| \\
&= \|-\lambda N_3(u_A) + N_G(u_A) + \lambda A^3 v^*\| \\
&\leq \|N_G(u_A)\| + \lambda \|A^3 v^* - N_3(u_A^*)(x, L^2)\| + \lambda \|N_3(u_A^*)(x, L^2) - N_3(u_A)\| \\
&\leq C_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}} + C_L \lambda^2 |A|^5 + \lambda \|N_3(u_A^*) - N_3(u_A)\|_L \\
&\leq C_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}} + C_L \lambda^2 |A|^5 + \tilde{C}_L \lambda (\|g\| + \|g\|^3) + \tilde{C}_{L,G} \lambda^{\frac{5}{2}} \\
&\leq C_{L,G} \lambda (\|g\| + \lambda^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

Nun kann schließlich mit (1.88), (1.89), (1.90) und (1.91) die Iteration der Skalierungsabbildung betrachtet werden um zu zeigen, daß die vorherigen Abschätzungen sich für große L verschärfen.

Erneut wird mit

$$f_1(x) := Rf(x) \quad (1.92)$$

$$= A_1 f_o^*(x) + g_1(x) \quad (1.93)$$

$$A_1 := A_o + \hat{v}(0) \quad (1.94)$$

$$= 1 + \hat{v}(0) \quad (1.95)$$

$$g_1(x) = R_o g(x) + Lv(Lx) - \hat{v}(0) f_o^*(x) \quad (1.96)$$

begonnen ganz analog zu 1.2.2, so daß $\hat{g}_1(0) = 0$ gilt ($A_o = A = 1$). Zur Verkürzung sei $\beta := \hat{v}^*(0)$.

Mit (1.91) gilt

$$\begin{aligned}
|\hat{w}(0)| &= |A_1 - A_o + \lambda\beta| \\
&= |\hat{v}(0) + \lambda\beta| \\
&\leq \|w\| \\
&\leq C_{L,G} \lambda (\|g\| + \lambda^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

und mit der Kontraktionseigenschaft von R_o auf g (s. (1.23))

$$\begin{aligned}
\|g_1\| &\leq \|R_o g\| + \|Lv(L\cdot)\| + \|\hat{v}(0) f_o^*\| \\
&\leq CL^{-1} \|g\| + L^4 \|v\| + C' \\
&\leq CL^{-1} \|g\| + C_{L,G} \lambda
\end{aligned}$$

Die analoge Gleichung im Beweis zuvor ist (1.54).

Die Iterationsvorschrift lautet jetzt genau wie zuvor im irrelevanten Fall

$$f_n(x) := R_{L^n, F} f(x) \quad (1.97)$$

$$= L^n u(L^n x, L^{2n}) \quad (1.98)$$

$$= A_n f_o^*(x) + g_n(x) \quad (1.99)$$

$$A_n := A_{n-1} + \hat{v}_{n-1}(0) \quad (1.100)$$

$$g_n(x) := R_o g_{n-1}(x) + L v_{n-1}(Lx) - \hat{v}_{n-1}(0) f_o^*(x) \quad (1.101)$$

wieder mit $\hat{g}_n(0) = 0$, also $A_n = \hat{f}_n(0)$. Hierbei ist nun

$$v_n = N_\lambda(R_{L^n, F} f) = -\lambda A_n^3 N_3(u_{A_f}^*) + w_n = -\lambda A_n^3 v^* + w_n \quad (1.102)$$

zu betrachten (s. (1.90)), weil $R_{L^n, F} f_o^* = R_o f_o^* = u_{A_f}^*$ und damit v^* invariant ist.

Zu zeigen bleibt nun, daß für $n \rightarrow \infty$

$$g_n \rightarrow 0 \quad (1.103)$$

$$A_n = \frac{\sqrt{2\pi\sqrt{3}}}{\sqrt{\lambda \cdot 2n \log L}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.104)$$

gilt, weil somit die Störungen von $A_n f_o^*$ verschwinden und A_n mit der Setzung $t = L^{2n}$, also $\log t = 2n \log L$ gerade die behauptete Asymptotik beschreibt. Wir werden feststellen, daß der G -Term mit jedem Iterationsschritt mindestens durch einen Faktor L^{-d_G} reduziert wird, was die 2. Abschätzung in (1.74) und die Ungleichung (1.82) verbessert. Dies entspricht der Technik in 1.2.2.

Der Unterschied zum irrelevanten Teil wird durch $A_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ verursacht, was zeigt, daß die Skalierung $t^{\frac{1}{2}} u(\xi t^{\frac{1}{2}}, t)$ noch nicht auf eine stationäre Lösung führt. Es liegt deshalb nahe, die durch den w -Term eingebrachten Korrekturen von A_n in (1.102) während der Iteration zu verfolgen. Diese liegen wegen (1.89) in der Ordnung A^5 .

Zuerst schätzt man mit (1.74), (1.82) und (1.89)

$$\begin{aligned}
\|w_n\| &= \|v_n + \lambda A_n^3 v^*\| \\
&= \|-\lambda N_3(u_{A_n}) + N_{G_{L^n}}(u_{A_n}) + \lambda A_n^3 v^*\| \\
&\leq \|-\lambda N_3(u_{A_n}) + \lambda A_n^3 v^*\| + \|N_{G_{L^n}}(u_{A_n})\| \\
&\leq \lambda \| -N_3(u_{A_n}^*) + A_n^3 v^* \| + \lambda \| N_3(u_{A_n}^*) + N_3(u_{A_n}) \| + C_{L,G} L^{-nd_G} \lambda^{\frac{3}{2}} \\
&\leq C_L \lambda^2 |A_n|^5 + \tilde{C}_L \lambda (A_n^2 \|g_n\| + \|g_n\|^3) + \lambda L^{-nd_G} \tilde{C}_{L,G} \lambda^{\frac{3}{2}} + C_{L,G} L^{-nd_G} \lambda^{\frac{3}{2}} \\
&\leq C_{L,G} \lambda [A_n^2 \|g_n\| + \|g_n\|^3 + \lambda |A_n|^5 + \lambda^{\frac{1}{2}} L^{-nd_G}]
\end{aligned}$$

ab und damit auch

$$\begin{aligned}
\underbrace{|A_{n+1} - A_n|}_{\hat{v}_n(0)} + \lambda \beta A_n^3 &= |\hat{w}_n(0)| \\
&\leq \|w_n\| \\
&\leq C_{L,G} \lambda [A_n^2 \|g_n\| + \|g_n\|^3 + \lambda |A_n|^5 + \lambda^{\frac{1}{2}} L^{-nd_G}]
\end{aligned}$$

Nun ist $\hat{v}^*(0) = \beta > 0$ (s. Beweisschluß), also

$$\begin{aligned}
\|g_{n+1}\| &\leq \|R_o g_n\| + \|Lv_n(L \cdot)\| + \|\hat{v}(0) f_o^*\| \\
&\leq CL^{-1} \|g_n\| + L^4 \|v_n\| + C\beta \\
&\leq CL^{-1} \|g_n\| + L^4 \lambda \|A_n^3 v^*\| + L^4 \|w_n\| + C\beta \\
&\leq C' L^{-1} \|g_n\| + L^4 \lambda C_{L,G} (|A_n|^3 + \|g_n\|^3 + \lambda |A_n|^5 + \lambda^{\frac{1}{2}} L^{-nd_G})
\end{aligned}$$

mit $C_{L,G} \lambda A_n^2 \leq L^{-1}$ für kleines λ .

Die Iteration von A_n und g_n (s. [Bric93/II]) führt auf

$$\begin{aligned}
A_n^2 &= (2\lambda\beta n + b_n)^{-1} \\
\|g_n\| &\leq C_{L,G} n^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

mit

$$|b_{n+1} - b_n| \leq C_{L,G} n^{-\frac{1}{2}}.$$

Der Induktionsanfang dazu wurde oben schon nachgerechnet.
Aus der Differenzengleichung für b_n ergibt sich dann

$$|b_n| \leq C_{L,G} \sqrt{n}$$

Damit ist das behauptete Verhalten der g_n - und A_n - Folge nachgewiesen, denn nun ist

$$A_n = \sqrt{\frac{1}{2\lambda\beta n}} + (2\lambda\beta n)^{-\frac{3}{2}}b_n + \dots$$

Schießlich bleibt noch die Berechnung von $\beta = \hat{v}^*(0)$ um aus A_n die Asymptotik bestimmen zu können:

$$\hat{v}^*(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{L^2-1} ds e^{-sk^2} \underbrace{\left[e^{(L^2-1-s)\partial_x^2} f_o^* \right]^{*3}}_{e^{-(L^2-s)k^2}}.$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{L^2-1} ds \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(L^2-s)(p^2+(p-q)^2+q^2)} dp dq \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{L^2-1} ds \int_{\mathbb{R}} \sqrt{\frac{\pi}{2(L^2-s)}} e^{-\frac{3}{2}(L^2-s)q^2} dq \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{L^2-1} ds \frac{\pi}{\sqrt{3}(L^2-s)} \\ &= \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} [-\log |L^2-s|]_0^{L^2-1} \\ &= \frac{\log L}{2\sqrt{3}\pi}. \end{aligned}$$

Benutzt man wieder $t = L^{2n}$ bzw. $\log t = 2n \log L$, so folgt die Behauptung analog zum irrelevanten Fall (s. Bemerkungen zu (1.97), (1.103) und (1.104)). Ebenso ändert sich nichts, wenn man die Ersetzung $L^2 \mapsto (\tau L)^2$ wieder mit

$\tau \in [1, L^2)$ vornimmt. Für genügend großes n ist also wieder

$$\begin{aligned}
\left\| u(\xi t^{\frac{1}{2}}, t) - \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{3}}{\lambda \log t}} t^{-\frac{1}{2}} f_o^*(\xi) \right\| &= t^{-\frac{1}{2}} \left\| (A_n f_o^* + g_n - \frac{\sqrt{2\pi\sqrt{3}}}{\sqrt{\lambda \log t}} f_o^*)(\xi) \right\| \\
&\leq t^{-\frac{1}{2}} [\|A_n - \frac{\sqrt{2\pi\sqrt{3}}}{\sqrt{\lambda \log t}}\| \|f_o^*\| + \|g_n\|] \\
&\leq L^{-n} (C \frac{1}{n} \|f_o^*\| + \hat{C}_{L,G} n^{-\frac{3}{2}}) \\
&\leq C' L^{-n} \frac{1}{n} \|f\| \\
&\leq C' t^{-\frac{1}{2}} \frac{(\log t)^\delta}{\log t} \|f\| ,
\end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{n} \log t = 2 \log L \leq (2n)^\delta (\log L)^\delta = (\log t)^\delta$ mit $\delta > 0$ und für $n \geq (2 \ln L)^{\frac{1}{\delta}-1}$ in der letzten Abschätzung benutzt wurde. \square

Wie man sieht muß für den marginalen Fall 1.2.3, obwohl die Aussage schwächer ist, ungleich mehr Aufwand getrieben werden, als für den irrelevanten Fall 1.2.2. Aussagen über die Gleichung

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + \lambda u |u|^{p-1}$$

für $3 > p > 1$, $\lambda = -1$ oder $p \geq 3$ und andere findet man in [Bric93/I] und [Bric94].

1.3 Nicht-GAUß-Fixpunkte

In diesem Abschnitt werden asymptotische Lösungen von solchen Anfangswertproblemen der Gleichung (1.1) besprochen, für die $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, 1) \neq 0$ nun zugelassen ist. Zwischen diesen Startwerten bildet sich in den hier betrachteten Fällen dann eine stabile Frontlösung aus. Die Beschränkung auf eine räumliche Dimension ist hier wichtiger als zuvor (s. [Bric93/II]).

Betrachtet wird mit einer analytischen Funktion $a(u, \partial_x u)$ das folgende Differentialgleichungssystem für eine Funktion $u(x, t)$:

$$\partial_t u = \partial_x((1 + a(u, \partial_x u))\partial_x u) \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} &= \partial_x a(u, \partial_x u)\partial_x u + \partial_x^2 u(1 + a(u, \partial_x u)) \\ &= \partial_x^2 u + \partial_u a(u, \partial_x u)(\partial_x u)^2 + \partial_{(\partial_x u)} a(u, \partial_x u)\partial_x^2 u \partial_x u \\ &+ \partial_x^2 u \cdot a(u, \partial_x u) \end{aligned}$$

$$u(x, 1) = \phi(x) \quad (1.106)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) =: u_{\pm} \quad (1.107)$$

In der Schreibweise von (1.1) ist also

$$F(u, \partial_x u, \partial_x^2 u) = \partial_u a \cdot (\partial_x u)^2 + \partial_{(\partial_x u)} a \cdot \partial_x^2 u \partial_x u + \partial_x^2 u \cdot a$$

Gilt für diese $a(0, 0) = 0$, so wird F irrelevant und die Konstanten $u(x, t) = c$ sind Lösungen von (1.105)-(1.107). Einen physikalischen Grund diese Art von Gleichungen zu betrachten gibt es noch nicht. Wie zuvor wird auch von der GAUß-Lösung des ungestörten Problems, das heißt zu $a = 0$, ausgegangen und gezeigt, daß die Lösungen von (1.105)-(1.107) zu $a \neq 0$ unter bestimmten Voraussetzungen an die Anfangswerte, wieder dasselbe Skalenverhalten für große Zeiten t besitzen, wie die Lösung zu $a = 0$.

(I) Zunächst sei also der triviale Fall $a = 0$ betrachtet:

Das Problem (1.105)-(1.107) ist mittels GAUß-Faltung exakt lösbar. Man erhält, wenn statt x gleich die skalierte Form $\xi\sqrt{t}$ geschrieben wird, um den

Grenzprozeß $t \rightarrow \infty$ übersichtlicher durchführen zu können,

$$\begin{aligned}
u(\xi\sqrt{t}, t+1) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4}} \phi(y\sqrt{t}) dy \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int_0^\infty e^{-\frac{(-y-\xi)^2}{4}} \phi(-y\sqrt{t}) dy \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4}} \phi(y\sqrt{t}) dy \right\} \\
&\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ u_- \int_0^\infty e^{-\frac{(-y-\xi)^2}{4}} dy \right. \\
&\quad \left. + u_+ \int_0^\infty e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4}} dy \right\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ -u_- \int_{-\xi}^{-\infty} e^{-\frac{y^2}{4}} dy + u_+ \int_{-\xi}^\infty e^{-\frac{y^2}{4}} dy \right\} \\
&= u_- + (u_+ - u_-)e(\xi) \\
&:= \phi_o^*(\xi)
\end{aligned} \tag{1.108}$$

wobei

$$e(\xi) := \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\xi e^{-\frac{y^2}{4}} dy$$

die bekannte Fehlerfunktion ist. Wie zuvor auch wird ϕ_o^* „GAUß“-Fixpunkt zum u_\pm -Anfangswertproblem genannt, denn er ist ein Fixpunkt der Transformation

$$R_L \phi(x) = u(Lx, L^2) \tag{1.109}$$

$$u(x, L^2) = \phi(x) \tag{1.110}$$

(s. Anhang 5.4); im Vergleich mit (1.6), ist zu beachten, daß hier nun $\alpha = 0$ gesetzt ist.

Bemerkungen:

1. Die Anfangsbedingungen sind im allgemeinen nicht durch ihr Integral normierbar und ebenso kann nicht davon ausgegangen werden, daß $u(x, t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ (lokal) erfüllt wird. Wir werden in den folgenden Kapiteln noch sehen, daß auf den Mengen $N := \{x \in \mathbb{R} \mid u(x, t \rightarrow \infty) \rightarrow 0\}$ für Probleme

der Art (1.105)-(1.107) zu anderem F , die Lösungen $u(x, t)$ ein anderes Skalenverhalten haben können, als hier gezeigt wird. Hingegen kann man auf Bereichen $x \notin N$ die im folgenden diskutierte Skalierung $u(\xi t^{\frac{1}{2}}, t) = f^*(\xi)$ finden.

2. Die Stabilität des trivialen Fixpunktes ϕ_o^* ist einfach zu untersuchen. Dazu stört man ϕ_o^* durch ein f und schreibt die Anfangswertfunktion

$$\phi = \phi_o^* + f \quad (1.111)$$

$$f(\pm\infty) = 0 \quad (1.112)$$

wobei sich herausstellt, daß ein Problem

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \partial_x^2 v \\ v(x, 1) &= f(x) \end{aligned}$$

zu lösen ist. Dies aber ist ein Fall aus dem Abschnitt 1.2.2 und deshalb kann man

$$u(x, t) \sim \phi_o^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{\hat{f}(0)}{\sqrt{t}} f_o^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \mathcal{O}(t^{\delta-1})$$

erwarten. Letztlich soll analog zu diesem Ergebnis ein weiteres Resultat dieser Form für (1.105)-(1.107) mit $a \neq 0$ gezeigt werden, jedoch mit dem Unterschied, daß ϕ_o^* und f_o^* dann nicht die GAUß-Fixpunkte darstellen. \square

(II) Bevor ein solcher Satz zum Fall $a \neq 0$ formuliert wird, soll eine Beweisskizze vorangestellt werden:

Definiert man die Größen

$$\begin{aligned} u_L(x, t) &:= u(Lx, L^2 t) \\ a_L(u, \partial_x u) &:= a(u, L^{-1} \partial_x u), \end{aligned}$$

so erfüllt u_L (1.105) mit $a_L(u, \partial_x u)$ statt $a(u, \partial_x u)$. Zu finden ist ein Fixpunkt der Transformation (1.109) und (1.110), welcher die Gleichung (1.105) mit $L \rightarrow \infty$ erfüllt, also

$$\partial_t u = \partial_x ((1 + a^*(u)) \partial_x u) \quad (1.113)$$

$$u(x, 1) = \phi^*(x) \quad (1.114)$$

mit $\phi^*(\pm\infty) = u_{\pm}$ und $a^*(u) = a(u, 0)$.

Aufgrund der Skalentransformation wird der Ansatz

$$u(x, t) = \phi^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \quad (1.115)$$

gewählt um nach einer skaleninvarianten Lösung von (1.113) zu suchen. In der Schreibweise $\xi = x/\sqrt{t}$ und $\partial := \partial_{\xi}$ gilt

$$\partial_x u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \partial \phi^*(\xi) \quad (1.116)$$

$$\partial_t u(x, t) = -\left(\frac{x}{2t^{3/2}}\right) \partial \phi^*(\xi) \quad (1.117)$$

und daher

$$\partial((1 + a^*(\phi^*))\partial\phi^*) + \frac{1}{2}\xi\partial\phi^* = 0. \quad (1.118)$$

Dies ist dann die zugehörige Fixpunktgleichung, für welche deren Lösungsexistenz und Eindeutigkeit erst noch untersucht werden müssen. Da man nach Lösungen sucht, die vom GAUß-Fixpunkt ϕ_o^* aus (1.108) abweichen, wird ein Lösungsansatz der Form

$$\phi^* = \phi_o^* + \psi \quad (1.119)$$

$$\psi(\pm\infty) = 0 \quad (1.120)$$

gemacht, ganz analog zu (1.111). Es gilt also $(\partial_t - \partial_x^2)\phi_o^* = 0$. Für ψ ergibt sich so die Gleichung

$$A := -\partial - \frac{1}{2}\xi\partial \quad (1.121)$$

$$\begin{aligned} A\phi_o^* &= 0 \\ A\psi &= \partial(a^*(\phi^*)\partial\phi^*) \\ &= \partial a^*(\phi^*)\partial\phi^* + a^*(\phi^*)\partial^2\phi^*. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Zur Vereinfachung soll die Schreibweise

$$\psi_o = \partial(a^*(\phi_o^*)\partial\phi_o^*)$$

gelten. Damit ist das ursprüngliche Problem auf ψ verschoben: Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (1.122) müssen untersucht werden. Es zeigt

sich, daß diese zwar eindeutig existiert, jedoch nicht angegeben werden kann. Weil aber diese Lösung durch eine (noch zu definierende) Norm abgeschätzt werden kann, ist sie trotzdem verwendbar um das behauptete Skalenverhalten zu zeigen.

Definition:

Für eine Funktion $\psi \in C^N$ (Raum der N -fach stetig differenzierbaren Funktionen) sei

$$\|\psi\|_N := \max_{0 \leq m \leq N} \sup_x |\partial^m \psi(x)| e^{\frac{x^2}{8}} \quad (1.123)$$

definiert.

Die Fixpunktgleichung (1.118) bzw. (1.122) wird im Raum der C^N -Funktionen unter Benutzung der Norm $\|\cdot\|_N$ gelöst.

Mit d wird der Grad von a^* bezeichnet, das heißt:
Für kleine u soll

$$a^*(u) = \mathcal{O}(u^d)$$

gelten. Sei nun $d > 0$. □

Damit formuliert man die

Proposition:

Sei $a : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ in (1.105) analytisch um $(0, 0)$ und sei $N \in \mathbb{N}$.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für $|u_{\pm}| \leq \varepsilon$ in (1.107) gilt: (1.122) hat eine eindeutige Lösung ψ , welche

$$\|\psi - \psi_o\|_N \leq C\varepsilon^{2d+1} \quad (1.124)$$

erfüllt.

Beweis:

Zum Beweis dieses Hilfssatzes vergleiche man [Bric93/II] oder [Gühn2001]. □

Dadurch nun ist die Eindeutigkeit und Existenz von ϕ^* , dem Fixpunkt der Gleichung (1.105), gesichert. Man kann daher die Lösung $u(x, t)$ schreiben als

$$u(x, t) = \phi^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + v(x, t) := u^*(x, t) + v(x, t). \quad (1.125)$$

Wegen (1.113) und (1.115) erfüllt $v(x, t)$ dann das Startwertproblem

$$\partial_t v = \partial_x ((1 + a) \partial_x v + (a - a^*(u^*)) \partial_x u^*) \quad (1.126)$$

$$v(x, 1) = f(x) \quad (1.127)$$

$$f(\pm\infty) = 0 \quad (1.128)$$

Die RG-Transformation für v setzt man wie im irrelevanten oder marginalen Fall an, also

$$R_L f(x) = L v(Lx, L^2) = v_L(x, 1), \quad (1.129)$$

allerdings erwartet man einen anderen als den GAUß-Fixpunkt. Damit erhält die Gleichung (1.126) die Form

$$\partial_t v_L = \partial_x ((1 + a_L) \partial_x v_L + L(a_L - a^*(u^*)) \partial_x u^*) \quad (1.130)$$

$$a_L(u_L, \partial_x u_L) := a(u_L, L^{-1} \partial_x u_L) \quad (1.131)$$

$$u_L(x, t) := (u^* + v)(Lx, L^2 t) \quad (1.132)$$

$$= (u^* + L^{-1} v_L)(x, t) \quad (1.133)$$

denn mit $\tilde{\partial} := \partial_{(Lx)}$, also $L\tilde{\partial} = \partial_x$, ist

$$\begin{aligned} \partial_t v_L(x, t) &= L^3 \partial_{(L^2 t)} v(Lx, L^2 t) \\ &= L^3 \tilde{\partial} \left[(1 + a) \tilde{\partial} v + (a - a^*(u^*)) \tilde{\partial} u^* \right] (Lx, L^2 t) \\ &= L^3 [\tilde{\partial} (1 + a) \tilde{\partial} v + (1 + a) \tilde{\partial}^2 v \\ &\quad + \tilde{\partial} (a - a^*(u^*)) \tilde{\partial} u^* + (a - a^*(u^*)) \tilde{\partial}^2 u^*] \end{aligned}$$

Die vorkommenden Terme erfahren folgende Umrechnung:

$$\begin{aligned} L^3 \tilde{\partial} a \tilde{\partial} v &= \partial_x a_L \partial_x v_L \\ L^3 (1 + a) \tilde{\partial}^2 v &= (1 + a_L) \partial_x^2 v_L \\ L^3 \tilde{\partial} (a - a^*) \tilde{\partial} u^* &= L \partial_x (a_L - a^*) \partial_x u^* \\ L^3 (a - a^*) \tilde{\partial}^2 u^* &= L (a_L - a^*) \partial_x^2 u^* \end{aligned}$$

wobei die linke Seite jeweils an der Stelle (Lx, L^2t) und die rechte Seite an der Stelle (x, t) auszuwerten ist.

Für $L \rightarrow \infty$ wird dann aus (1.130) die Fixpunktgleichung für v^* (Begründung s.u.)

$$\partial_t v^* = \partial_x \left[\partial_x \left((1 + a^*(u^*)) v^* \right) + \partial_{(\partial_x u)} a(u^*, 0) (\partial_x u^*)^2 \right]. \quad (1.134)$$

Dieser soll sich aufgrund der Skalentransformation als

$$v^*(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} f^*(xt^{-\frac{1}{2}}) \quad (1.135)$$

schreiben lassen.

Zur Gleichung (1.134) gelangt man durch die beiden Grenzwertübergänge

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (1 + a_L) \partial_x v_L = (1 + a^*) \partial_x v^* \quad (1.136)$$

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} L(a_L - a^*(u^*)) \partial_x u^* &= \partial_x (a^*(u^*)) v^* \\ &+ \partial_{(\partial_x u)} a(u^*, 0) (\partial_x u^*)^2 \end{aligned} \quad (1.137)$$

Der erste davon ist klar, weil $a_L(u_L, \partial_x u_L) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} a^*(u^*)$ gilt, der zweite ergibt sich, wenn man a_L in eine Potenzreihe entwickelt:

$$a(u, \partial_x u) = \sum_{n,m} \alpha_{n,m} \cdot u^n (\partial_x u)^m$$

woraus

$$\begin{aligned} L(a_L - a^*(u^*)) &= L \sum_{n,m} \alpha_{n,m} \cdot (u^* + \frac{v_L}{L})^n \left[L^{-1} \partial_x \left(u^* + \frac{v_L}{L} \right) \right]^m \\ &- L \sum_{n,o} \alpha_{n,o} \cdot (u^*)^n \end{aligned}$$

folgt. Für $L \rightarrow \infty$ verschwinden somit alle Ausdrücke, die L^{-m} mit $m \geq 2$ enthalten und ebenso heben sich für $m = 0$ die Terme $(u^*)^n$ gegenseitig weg und die Produkte $(u^*)^j (L^{-1} v_L)^{n-j}$ verschwinden im Grenzwertprozess, falls

$n - j \geq 2$ ist. Insgesamt bleibt übrig:

$$\begin{aligned}
L(a_L - a^*(u^*)) &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} L \sum_{n,o} \alpha_{n,o} \cdot \binom{n}{1} (u^*)^{n-1} \left(\frac{v^*}{L}\right) \\
&\quad + L \sum_{n,1} \alpha_{n,1} \cdot \left(u^* + \frac{v^*}{L}\right)^n \left[L^{-1} \partial_x \left(u^* + \frac{v_L}{L}\right)\right] \\
&= \sum_{n,o} \alpha_{n,o} \cdot n (u^*)^{n-1} v^* + \sum_{n,1} \alpha_{n,1} \cdot (u^*)^n (\partial_x u^*) \\
&= \partial_{(u^*)} (a^*(u^*)) v^* + \partial_{(\partial_x u)} a(u^*, 0) \partial_x u^*
\end{aligned}$$

und mit $\partial_x (a^*(u^*)) = \partial_{(u^*)} a^* \partial_x u^*$ folgt die Behauptung.

Durch Einsetzen des Skalenansatzes (1.135) in (1.134) gelangt man dann zur gewöhnlichen Differentialgleichung für $f^*(\xi)$ mit $\xi := xt^{-\frac{1}{2}}$ und $\partial := \partial_\xi$

$$\partial \left[\partial ((1 + a^*(\phi^*)) \cdot f^*) + \frac{1}{2} \xi f^* + h \right] = 0 \quad (1.138)$$

$$\partial_{(\partial_x u)} a(\phi^*, 0) (\partial \phi^*)^2 =: h \quad (1.139)$$

Wie üblich (vgl. (1.116) und (1.117)) geschieht dies durch Umrechnen der partiellen Ableitungen. Einmalige Integration ergibt

$$\partial f^* = - \frac{(\partial a^*(\phi^*) + \frac{1}{2} \xi) \cdot f^* + h - C}{1 + a^*(\phi^*)},$$

wobei allerdings die Integrationskonstante $C = 0$ ist, weil

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} f^* = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \partial f^* = 0 \text{ sein soll.}$$

Für Differentialgleichungen der Form

$$y' = -P(x)y + Q(x)$$

gibt es eine standardisierte Lösung

$$y(x) = e^{-\int P(x) dx} \left\{ \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right\}$$

woraus sich für $f^*(\xi)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} f^*(\xi) &= e^{-\int_0^\xi P(z)dz} \left\{ \int_0^\xi h(z)F(z)dz + N \right\} \\ F(\xi) &:= -(1 + a^*(\phi^*))^{-1} \cdot e^{\int_0^\xi P(z)dz} \\ P(\xi) &:= \frac{\partial a^*(\phi^*) + \frac{1}{2}\xi}{1 + a^*(\phi^*)} \end{aligned}$$

mit der Normierungskonstanten N ergibt, so daß $\hat{f}^*(0) = 1$ ist. Zu $P(\xi)$ läßt sich eine Stammfunktion angeben:

$$\begin{aligned} \int_0^\xi P(y)dy &= \left[\frac{1}{4}y^2 + \ln|1 + a^*(\phi^*(y))| \right]_0^\xi \\ &= \frac{1}{4}\xi^2 + \ln|1 + a^*(\phi^*(\xi))| - \ln|b^*| \\ b^* &:= |1 + a^*(\phi^*(0))| \end{aligned}$$

Damit erhält f^* abschließend die Form

$$f^*(\xi) = \frac{f_o^*(\xi)}{(1 + a^*(\phi^*(\xi)))} \left\{ 2\sqrt{\pi}b^*N - \int_0^\xi \frac{h(y)}{f_o^*(y)}dy \right\} \quad (1.140)$$

Für kleine ϕ^* , also für kleine u_\pm , weicht (1.134) von der ungestörten Wärmeleitungsgleichung nur wenig ab, so daß f^* ebenfalls nur wenig vom GAUß-Fixpunkt

$$f_o^*(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$$

aus dem Kapitel 1.2.1 zuvor abweicht. □

Zusammenfassung des bisherigen Vorgehens:

1. Der Fall $a = 0$ wurde zuerst behandelt, exakt gelöst und für $t \rightarrow \infty$ zu ϕ_o^* berechnet (vgl. (1.108)).

2. Im Fall $a \neq 0$ wird die Lösung von (1.105) in der Form $u = \phi^* + v$ geschrieben. Man weiß über

(a) den Summanden ϕ^* :

Die Skalentransformation (1.109) und (1.110) ergibt aus (1.105) für $L \rightarrow \infty$ die Gleichung (1.113). Als Lösungsansatz dafür wird $u(x, t) = \phi^*(xt^{-\frac{1}{2}}) = [\phi_o^* + \psi](xt^{-\frac{1}{2}})$ genommen und als Störung der Lösung ϕ_o^* zu $a = 0$ aufgefaßt, was eine partielle Differentialgleichung für ψ ergibt (s. (1.122)). Für diese kann man die eindeutige Lösungs existenz ψ mithin jene von ϕ^* nachweisen.

(b) den Summanden v :

Die Skalentransformation (1.129) ergibt eine partielle Differentialgleichung für v_L bzw. für $L \rightarrow \infty$ eine für v^* , namentlich (1.134). Der dazu entsprechende Lösungsansatz $v(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} f^*(x, t^{-\frac{1}{2}})$ ergibt eine gewöhnliche Differentialgleichung für f^* , (1.138), die gelöst werden kann. \square

Schließlich muß noch die Norm festgelegt werden, bezüglich der die Konvergenz $u(x, t) \rightarrow \phi^*(\xi)$ gezeigt werden soll.

Definition:

(i) Sei $\chi \in C^\infty$ mit $\chi : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion mit kompaktem Träger $T \subset [-1, 1]$, so daß die Translationen von χ

$$\chi_n(x) := \chi(x - n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

die Gleichung

$$1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n$$

erfüllen, also eine Zerlegung der 1 auf \mathbb{R} darstellen.

(ii) Für eine Funktion $f \in C^2$ sei dann die Norm

$$\|f\| := \sup_{n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{R}, i \leq 2} (1 + n^4)(1 + k^2) |\widehat{\chi_n \partial_x^i f}(k)| \quad (1.141)$$

definiert. \square

Bemerkungen:

1. Ist $\|f\| < \infty$, so bedeutet das anschaulich, daß f und $\partial_x^i f$ mit $i = 1, 2$ für große $|x|$ mindestens wie x^{-4} abfallen und $\widehat{\partial_x^2 f} = k^2 \hat{f}$ für große $|k|$ mindestens wie k^{-2} abfällt, mithin \hat{f} wie k^{-4} . Dieses Verhalten wird durch die Faktoren $(1 + n^4)$ bzw. $(1 + k^2)$ erzwungen.

Ist $f \in C^m$ mit $m \geq 4$, so gibt es eine Konstante $M \in \mathbb{R}^+$ mit

$$\sup_{k, i \leq 2} (1 + k^2) |\widehat{\chi_n \partial_x^i f}(k)| \leq M < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Diese Hilfe ergibt sich aus $\chi_n \partial_x^i f \in C^2$ mit kompaktem Träger. Denn dann existiert immer eine Konstante $M' \in \mathbb{R}^+$, so daß für alle $k \in \mathbb{R}$

$$|\widehat{\chi_n \partial_x^i f}(k)| \leq \frac{M'}{1 + k^2}$$

gilt, weil $|k^2 \widehat{\chi_n \partial_x^2 f}(k)| \leq C \|\partial_x^2 (\chi_n \partial_x^i f)\|_1 < \infty$ offensichtlich erfüllt ist.

2. Ein Beispiel für eine Zerlegung der 1 auf \mathbb{R} bildet die folgende Konstruktion:

$$\begin{aligned} g(x) &:= \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-x^2}), & |x| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ G(x) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(x - n) \\ \chi(x) &:= \frac{g}{G}(x) \\ \chi_n(x) &= \frac{g(x - n)}{\sum_{i=n-1}^{n+1} g(x - i)} \end{aligned}$$

denn dann gilt $\chi \in C^\infty$, weil $G \neq 0, g \in C^\infty$ und $1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_n(x)$. Ein weiteres, aber für diese Zwecke nicht benutzbares Beispiel befindet sich im Anhang 5.5.

3. Für zwei verschiedene Zerlegungen $\chi^{(1)}$ und $\chi^{(2)}$ der 1 auf \mathbb{R} gilt

$$\|f\|_{(1)} \leq C \|f\|_{(2)}$$

denn für festes $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} |1 \cdot \widehat{\chi_n^{(1)} \partial_x^i f(k)}| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\chi_k^{(2)} \chi_n^{(1)} \partial_x^i f(k)} \right| \\ &= \left| \sum_{k=n-1}^{n+1} \widehat{\chi_k^{(2)} \chi_n^{(1)} \partial_x^i f(k)} \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=n-1}^{n+1} \widehat{\chi_k^{(2)} \partial_x^i f(k)} \right| \\ &\leq \sum_{k=n-1}^{n+1} |\widehat{\chi_k^{(2)} \partial_x^i f(k)}| \\ &\leq C |\widehat{\chi_k^{(2)} \partial_x^i f(k)}| \end{aligned}$$

und damit die genannte Relation.

4. Es gilt $\|\partial\phi^*\| \leq \|\partial\phi_o^*\| + \|\partial\psi\| < \infty$, denn $\partial\phi_o^*$ und deren 1. und 2. Ableitung fällt als GAUß-Glocke im Orts- und Impulsraum schneller ab, als jede Potenz. Ein solcher exponentieller Abfall wird durch $\|\psi\|_N < \infty$ wegen (1.124) für $\partial\psi$ ebenfalls impliziert.

Ebenfalls kann man zeigen, daß $\|f^*\| < \infty$ ist. Dazu betrachtet man die Formeln (1.140) und (1.139) für $|\xi| \rightarrow \infty$:

Der Term h enthält $\partial\phi^*$. Für großes ξ verhält sich $\partial\phi^* \sim 2\xi e^{-\frac{\xi^2}{4}}$, weil $|\partial\psi| \leq e^{-\frac{\xi^2}{8}}$ aufgrund von $\|\psi\|_N < \infty$ ist (ψ aus (1.124)).

Für $|\xi| \rightarrow \infty$ ist $|\phi_o^*| \leq C$, beschränkt durch Vielfaches der Werte u_\pm . Mithin werden auch Ausdrücke der Form $1 + a^*(\phi^*)$ konstant.

Deshalb ist für große $|\xi|$ sicherlich $|h| \leq |C\xi^p e^{-\frac{\xi^2}{2}}|$ mit endlichem $p \geq 2$, also $|h(f_o^*)^{-1}| \leq C\xi^p e^{-\frac{\xi^2}{4}}$.

Dann existiert auch $\int^\xi |h(f_o^*)^{-1}(y)| dy \leq C'\xi^{p+1}$ und damit erkennt man, daß für genügend große $|\xi|$ auch $|f^*| \sim C\xi^{p+1} f_o^*$ ist, woraus sich die Behauptung ergibt.

5. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L_1, L_\infty} = 0$$

Der Beweis hierzu ergibt sich aus den Gleichungen (1.164) für L_1 und (1.163) für L_∞ jeweils für $i = 0$. \square

Nun sind alle Hilfsmittel vorhanden um ein den vorangegangenen Kapiteln ähnliches Ergebnis zu formulieren.

Satz:

Sei $a : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch um 0 mit positivem Grad $d > 0$ und $\delta > 0$ fest. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, derart daß für $|u_\pm|, \|f\| < \epsilon$ das Anfangswertproblem

$$\partial_t u = \partial_x (1 + a(u, \partial_x u) \partial_x u) \quad (1.142)$$

$$u(x, 1) = \phi^*(x) + f(x) \quad (1.143)$$

eine eindeutige Lösung hat, die

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-\delta} \left\| u(\xi t^{\frac{1}{2}}, t) - \phi^*(x) - t^{-\frac{1}{2}} \hat{f}(0) f^*(\xi) \right\| = 0 \quad (1.144)$$

erfüllt, wobei f^* durch (1.140) und ϕ^* durch (1.118) bzw. (1.119) gegeben ist.

Beweis:

Man beginnt, wie oben schon angedeutet wurde, mit (1.126) und (1.129), welche sich aus dem Ansatz

$$u(x, t) = u^*(x, t) + v(x, t) \quad (1.145)$$

$$u^*(x, t) := \phi^*(xt^{-\frac{1}{2}}) \quad (1.146)$$

ergaben. $v(x, t)$ erfülle also

$$\partial_t v = \partial_x((1+a)\partial_x v + (a-a^*(u^*))\partial_x u^*) \quad (1.147)$$

$$v(x, 1) = f(x) \quad (1.148)$$

$$R_L f(x) := Lv(Lx, L^2) \quad (1.149)$$

$$= v_L(x, 1) \quad (1.150)$$

Wie bei den Beweisen zuvor schreibt man den Anfangswert als

$$f(x) = \left(\hat{f}(0)f^* + g \right)(x) \quad (1.151)$$

(f^* normiert, also $\hat{g}(0) = 0$) und entsprechend dazu

$$v(x, t) = (v^* + w)(x, t) \quad (1.152)$$

$$v^*(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} \hat{f}(0)f^*(xt^{-\frac{1}{2}}) \quad (1.153)$$

was bedeutet, daß $g(x)$ der Startwert der eingeführten Funktion $w(x, t)$ ist. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} |\hat{f}(0)| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_n f(0) \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\chi_n \hat{f}(0)| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|f\|}{1+n^4} \\ &\leq C \|f\| \end{aligned}$$

und wegen $\|f^*\| \leq C$ auch

$$\|g\| \leq C \|f\| \leq C\varepsilon. \quad (1.154)$$

Die Differentialgleichung für w hat insgesamt die folgende Gestalt

$$\partial_t w = \partial_x^2 w + K \quad (1.155)$$

$$w(x, 1) = g(x) \quad (1.156)$$

wobei

$$K = \partial_x [(a - a^*(u^*))\partial_x v^* + a\partial_x w - v^*\partial_x a^*(u^*)] \quad (1.157)$$

$$+ (a - a^*(u^*) - \partial_{(\partial_x u)} a^*(u^*, 0) \cdot \partial_x u^*)\partial_x u^* \quad (1.158)$$

mit $a(u, \partial_x u) = a$ und $u = u^* + v^* + w$ ist. Man erhält diese Gleichung aus $w = v - v^*$, (1.126) und (1.134) (vgl. Anhang 5.6).

Die exakte Form der Nichtlinearität K ist unwichtig für das weitere Vorgehen. Relevant sind die folgenden Eigenschaften, die K erfüllt:

1. K läßt sich als eine Potenzreihe in u^* , v^* , w^* und ihren Ableitungen schreiben, denn nach Voraussetzung war a analytisch in u und $\partial_x u$.
2. K hat keinen linearen Term, denn a hat nach Voraussetzung den Grad $d > 0$.
3. K enthält keinen Term $\sim (u^*)^k$, also keine alleinige u^* -Potenz.

Aufgrund der Wahl des Skalierungsansatzes für v hat man

$$R_{L^n, K} g(x) = L^n w(L^n x, L^{2n})$$

für große n zu kontrollieren. Dabei geht K_{n+1} aus K_n durch (1.5) zu $\alpha = 1$ und den Ersetzungen

$$\begin{aligned} \partial_x^i v^* &\mapsto L^{-1-i} \partial_x^i v^* \\ \partial_x^i w &\mapsto L^{-1-i} \partial_x^i w \\ \partial_x^i u^* &\mapsto L^{-i} \partial_x^i u^* \end{aligned}$$

mit $i \in \mathbb{N}$ hervor (L^{-1} fehlt in der letzten Zeile wegen $u_L(x, t) = u(Lx, L^2 t)$ im Gegensatz zu den anderen Größen).

Zu einem Monom aus K wird nun

$$d_K := n_\partial + n_{v^*} + n_w - 3 \tag{1.159}$$

definiert, wobei n_{v^*} und n_w die Faktoren $\partial_x^i v^*$ und $\partial_x^i w$ mit $i = 0, 1, 2$ in einem Summanden von K zählen und n_∂ die Anzahl aller Ableitungen in einem solchen Term sein soll. Ein solcher Ausdruck wird, analog zur früheren Bezeichnung, als

$$\begin{aligned} &\text{irrelevant, falls } d_K > 0 \\ &\text{marginal, falls } d_K = 0 \\ &\text{relevant, falls } d_K < 0 \end{aligned}$$

gilt, eingestuft. Man beachte nun, daß jeder in K vorkommende Ausdruck entweder aus mindestens drei Ableitungen besteht, oder zwei Ableitungen und einen v^* - oder w - Faktor enthält, womit also $d_K \geq 0$ ist. Dabei sind die marginalen nur von der Form $(u^*)^k \partial_x^2 w$ und $(u^*)^k \partial_x u^* \partial_x w$; alle anderen marginalen Ausdrücke, wie z.B. $(u^*)^k \partial_x^2 v^*$, heben sich durch die vorkommenden Subtraktionen, in diesem Beispiel durch den Faktor $(a - a^*)$ vor dem Term $\partial_x v^*$, gegenseitig weg.

Wie oben schon angedeutet ist eine Abschätzung für $\|R_{L^n, K} g\|$ zu finden. In drei Schritten soll nun die Lösungsexistenz, eine Abschätzung für R_L und die Iteration von R_L für die Gleichung (1.155) mit (1.156) bewiesen und dargestellt werden.

1. Lösungsexistenz

Zunächst formt man aus (1.155) die Integralgleichung

$$w(x, t) = e^{(t-1)\partial_x^2} g(x) + \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} K(t-s)$$

analog zur Technik und Notation im irrelevanten Fall, um erneut das Prinzip der kontrahierenden Abbildung in der Norm

$$\|w\|_L = \sup_{t \in [1, L^2]} \|w(x, t)\|$$

verwenden zu können, so daß auf einen Fixpunkt geschlossen werden kann. Dazu wird K in eine Potenzreihe entwickelt. Die Abschätzung wird angegeben für einen Term der Form

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} [u^*(x, (t-s))]^l F(x, (t-s)) \\ &= \int_0^{t-1} ds \int dy A(x-y, s) [u^*(y, (t-s))]^l F(y, t-s) \\ A(z, \tau) &:= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{4\tau} \right\} \end{aligned}$$

wobei $l \geq 0$ und F ein nichtleeres Produkt aus v^* und w und deren Ableitungen ist; $A(z, \tau)$ ist der bekannte Integralkern des Operators $e^{\tau\partial_x^2}$. Man

schreibt nun weiter (Variable $t - s$ weggelassen):

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m(x) \\ &:= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{t-1} ds \int dy A(x-y, s) \chi_m(y) [u^*(y)]^l F(y)\end{aligned}$$

und versucht

$$\beta_{mn} := \sup_k |(1+k^2) \widehat{\chi_n \partial_x^i \alpha_m}(k)|$$

für $i = 0, 1, 2$ allgemein zu beschränken.

Zwei Fälle werden dafür betrachtet:

1. Fall: $|m - n| \geq 2$

Betrachtet wird also

$$\begin{aligned}\beta_{nm} &= \sup_k \left| \int dx e^{-ikx} \int_0^{t-1} ds \int dy (1 - \partial_x^2) \cdot \right. \\ &\quad \left. [\chi_n(x) (\partial_x^i A(x-y, s))] \chi_m(y) [u^*(y)]^l F(y) \right|\end{aligned}$$

wobei nach Voraussetzung gilt, daß χ_n und χ_m disjunkte Träger haben.

Also ist

$$|\partial_x^k A(x-y, s)| \leq C_k e^{-|m-n|} \leq C e^{-|m-n|} \quad (1.160)$$

wobei die letzte Abschätzung wegen $k \leq 4$ gilt.

Desweiteren benötigt man die Ungleichungen

$$\begin{aligned}\|\partial_x^i u^*\|, \|\partial_x^i v^*\| &\leq C\varepsilon \\ |\partial_x^i w(x)| &\leq C \|w\|\end{aligned}$$

um $F(y)$ zu beschränken. Diese weist man folgendermaßen nach:

(i) Es gilt für alle C^N -Funktionen und $i \leq N$

$$\begin{aligned}\|\partial_x^i f\|_{L_\infty} &\leq \sup_x |\partial_x^i f| \\ &\leq \sup_x |\partial_x^i f| e^{\frac{x}{8}} \\ &\leq \|f\|_N\end{aligned}$$

(ii) Mit (i) und aus (1.124) errechnet sich

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^i u^*\|_{L_\infty} &\leq \|\partial_x^i \phi_o^*\|_{L_\infty} + \|\partial_x^i \psi\|_{L_\infty} \\
&\leq |u_+ - u_-| \|\partial_x^i e(x)\|_{L_\infty} + \|\partial_x^i (\psi - \psi_o)\|_{L_\infty} \\
&\quad + \|\partial_x^i \psi_o\|_{L_\infty} \\
&\leq C\varepsilon + \|\partial_x^i (\psi - \psi_o)\|_N + \|\partial_x^{i+1} (a^*(\phi_o^*) \partial_x \phi_o^*)\|_{L_\infty} \\
&\leq C\varepsilon + C\varepsilon^{2d+1} + C\varepsilon \\
&\leq C\varepsilon
\end{aligned} \tag{1.161}$$

(iii) Man beachte, daß $\|f\| \leq \varepsilon$ nach Voraussetzung gilt und $|\hat{f}(0)| \leq C\|f\|$ nachgerechnet wurde.

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^i v^*\| &= t^{-\frac{1}{2}} |\hat{f}(0)| \|\partial_x^i f^*\|_{L_\infty} \\
&\leq \|f\| \|\partial_x^i f^*\|_{L_\infty} \\
&\leq C\varepsilon C'
\end{aligned} \tag{1.162}$$

(iv) Stückweise ergibt sich

$$\begin{aligned}
|\partial_x^i w(x)| &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\chi_n \partial_x^i w| \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int dk |\widehat{\chi_n \partial_x^i w}(k)| \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(1+n^4)}{(1+n^4)} \int dk \frac{(1+k^2)}{(1+k^2)} |\widehat{\chi_n \partial_x^i w}(k)| \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1+n^4)} \int dk \frac{\|w\|}{(1+k^2)} \\
&\leq C \|w\|
\end{aligned} \tag{1.163}$$

Man muß aber noch zeigen, daß $|\beta_{nm}| \sim (1+m^4)^{-1}$ gilt, um $\|\alpha_m\|$ zu beschränken. Dafür weist man

$$\int |\chi_m(y) \partial_y^i w(y)| dy \leq \frac{C \|w\|}{1+m^4} \tag{1.164}$$

$$\int |\chi_m(y) \partial_y^i v^*(y)| dy \leq \frac{C\varepsilon}{1+m^4}, \quad 0 \leq i \leq 2 \tag{1.165}$$

$$\int |\chi_m(y) \partial_y^i u^*(y)| dy \leq \frac{C\varepsilon}{1+m^4}, \quad 0 < i \leq 2 \tag{1.166}$$

wie folgt nach:

Sei $\phi_m \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ mit $\phi_m \chi_m = \chi_m$:

$$\begin{aligned}
 \int |\chi_m(y) \partial_y^i w(y)| dy &= \int |\chi_m(y) \phi_m \partial_y^i w(y)| dy \\
 &\leq \left(\int \phi_m^2(y) dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\chi_m(y) \partial_y^i w(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq C \left(\int |\widehat{\chi_m \partial_x^i w}(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{C \|w\|}{1 + m^4}
 \end{aligned}$$

wobei erst die HÖLDER-Ungleichung und anschließend der Satz von PLANCHEREL benutzt wurde (s. 5.2 und 5.3). Für die Funktionen $\partial_x^i v^*$ und $\partial_x^i u^*$ kann man diese Abschätzung analog wiederholen und weiterführen zu (1.165) und (1.166), weil

$$\|v^*\|, \|u^*\| \leq C\varepsilon \quad (1.167)$$

erfüllt ist (vgl. (1.161)).

Nun können wir β_{nm} beschränken: das Integral über x kann wegen der Funktionen $\chi_n(x)$ gegenüber einer Konstanten abgeschätzt werden, das Integral über s ist beschränkt durch CL^2 . Für den $(u^*)^l$ -Faktor wird (1.161) und für jene in F vorkommenden Faktoren (1.161), (1.162) und (1.163) benutzt mit Ausnahme eines Faktors, für den (1.164), (1.165) oder (1.166) verwandt wird. Man erhält abschließend:

$$\beta_{nm} \leq L^2 C^{l+M+N} e^{-|m-n|} \varepsilon^{l+M} \frac{\|w\|_L^N}{1 + m^4}, \quad (1.168)$$

wobei M die Anzahl aller $\partial_x^i v^*$ -Faktoren mit $i = 0, 1, 2$ und aller $\partial_x^i u^*$ -Faktoren in F darstellt und N die Anzahl der $\partial_x^i w$ -Faktoren in F . Da K nach obigen Bemerkungen keine linearen Terme enthält, gilt $l + M + N \geq 2$.

2. Fall: $|m - n| < 2$

Die Ungleichung (1.160) ist nun nicht mehr verwendbar. Statt dessen kann

man ausnutzen, daß nicht über alle $m \in \mathbb{Z}$ summiert werden muß. Zur Abkürzung sei $\phi_m(u^*)^l =: f_m$ mit $\phi_m \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, $\phi_m \chi_m = \chi_m$ gewählt. Es ist damit

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_n \partial_x^i \alpha_m}(k) &= \hat{\chi}_n * \left[\partial_x^i \int \widehat{ds e^{s \partial_x^2} f_m \chi_m F} \right](k) \\ &= \int ds \int dp \hat{\chi}_n(k-p) (ip)^i e^{-sp^2} \left(\hat{f}_m * \widehat{\chi_m F} \right)(p) \\ &= \int ds \int dp dq \hat{\chi}_n(k-p) (ip)^i e^{-sp^2} \hat{f}_m(p-q) \widehat{\chi_m F}(q) \end{aligned}$$

Nun sollen wieder die Faktoren unter dem Integral der rechten Seite abgeschätzt werden:

Beginnen wir mit der C^∞ -Funktion χ , welche einen kompakten Träger besitzt. Für diese gilt (s. z.B. [Fors84]):

$$|\hat{\chi}_n(k-p)| = |e^{-i(k-p)n} \hat{\chi}(k-p)| \leq \frac{C_l}{1+|k-p|^l}, \quad l = 0, 1, \dots \quad (1.169)$$

Wegen (1.161) gilt analog für $k = 0, 1, \dots$

$$|\partial_x^k(u^*)^l| \leq C_k(C\varepsilon)^l$$

und damit für alle r

$$\begin{aligned} \int |(1 + (-\partial_x^2)^r) f_m| dx &\leq \int |f_m| dx + \int |-\partial_x^{2r} f_m| dx \\ &\leq (C\varepsilon)^l + C_r(C\varepsilon)^l \\ &\leq C_r(C\varepsilon)^l \end{aligned}$$

Weiter ist mit diesen Hilfsmitteln

$$|\hat{f}_m(p-q)| \leq \frac{1}{1+(p-q)^{2r}} \int |e^{i(p-q)x} (1 + (-\partial_x^2)^r) f_m| dx \quad (1.170)$$

$$\leq \frac{C_r(C\varepsilon)^l}{1+(p-q)^{2r}}. \quad (1.171)$$

Beachtet man wieder, daß

$$\int_0^{t-1} ds |p|^j e^{-sp^2} \leq CL^2, \quad j \leq 2 \quad (1.172)$$

gilt, so bleibt nur noch der Term $\widehat{\chi_m F}$ abzuschätzen.
Zu zeigen ist:

$$|\widehat{\chi_m F}(q)| \leq C^{N+M} \varepsilon^M \frac{\|w\|^N}{(1+m^4)(1+q^2)} \quad (1.173)$$

Damit könnte man endlich β_{nm} abschätzen zu

$$\beta_{nm} \leq L^2 C^{l+M+N} \varepsilon^{l+M} \frac{\|w\|^N}{(1+m^4)}. \quad (1.174)$$

Der Beweis von (1.173) beginnt mit

$$\begin{aligned} |\widehat{\chi_m \partial_x^i w}(q)| &\leq \frac{(1+q^2)(1+m^4)}{(1+q^2)(1+m^4)} |\widehat{\chi_m \partial_x^i w}(q)| \\ &\leq \frac{\|w\|}{(1+q^2)(1+m^4)}. \end{aligned}$$

Genauso ergibt sich

$$\begin{aligned} |\widehat{\partial_x^i w}(q)| &\leq \sum_m |\widehat{\chi_m \partial_x^i w}(q)| \\ &\leq C \frac{\|w\|}{(1+q^2)} \\ |\widehat{\partial_x^{j+1} u^*}(q)|, |\widehat{\partial_x^j v^*}(q)| &\leq \frac{C\varepsilon}{(1+q^2)}, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Mit den Schreibweisen $V = \partial_x^{j+1} u^*$, $\partial_x^j v^*$ und $W = \partial_x^j w$, $j = 0, 1, \dots$ läßt sich daraus unter Berücksichtigung der Formel (1.38)

$$\begin{aligned} |\widehat{\chi_m F}(q)| &= |\widehat{V^{*M}} * \widehat{W^{*(N-1)}} * \widehat{\chi_m \partial_x^i w}| \\ &\leq \frac{C^{M+N} \varepsilon^M \|w\|^N}{(1+q^2)(1+m^4)} \end{aligned}$$

bestimmen. Die Bezeichnungen M und N sind dieselben wie in (1.168).
Insgesamt kann nun (1.174) hergeleitet werden. Indem die einzelnen Abschätzungen eingesetzt werden, erhält man erneut unter Verwendung von

(1.38)

$$\begin{aligned}
|\widehat{\chi_n \partial_x^i \alpha_m}(k)| &\leq \int ds \int dp dq |p|^i e^{-sp^2} \frac{C_l}{1 + |k - p|^l} \frac{C_r (C\varepsilon)^l}{1 + (p - q)^{2r}} \\
&\quad \frac{C^{M+N} \varepsilon^M \|w\|^N}{(1 + q^2)(1 + m^4)} \\
&\leq CL^2 \frac{C^{M+N+l} \varepsilon^{M+l} \|w\|^N}{(1 + k^2)(1 + m^4)}
\end{aligned}$$

Setzt man dies in β_{nm} ein, so ist endlich

$$\begin{aligned}
\beta_{nm} &= \sup_k |(1 + k^2) \widehat{\chi_m \partial_x^i \alpha}(k)| \\
&\leq CL^2 \frac{C^{M+N+l} \varepsilon^{M+l} \|w\|^N}{(1 + m^4)}.
\end{aligned}$$

Insgesamt existiert also für β_{nm} eine Abschätzung der Form (1.174) oder (1.168). Schließlich kann man damit nun α beschränken.

Es ist

$$\|\alpha\| \leq \sup_n (1 + n^4) \sum_m |\beta_{nm}| \quad (1.175)$$

$$\leq CL^2 C^{M+N+l} \varepsilon^{M+l} \|w\| \sup_n \sum_m \frac{1 + n^4}{1 + m^4} e^{-|n-m|} \quad (1.176)$$

$$\leq C' L^2 C^{M+N+l} \varepsilon^{M+l} \|w\|. \quad (1.177)$$

Ziel dieser ganzen Rechnungen ist es gewesen, die lokale Lösungsexistenz für $w(x, t)$ zu beweisen. Dies kann nun erneut mit dem BANACHschen Fixpunktsatz zu Ende gebracht werden. Betrachtet wird dazu die freie Lösung $w_f(x, t) := e^{(t-1)\partial_x^2} g(x)$ und wieder der BANACH-Raum $B_w := \{w \mid \|w - w_f\|_L \leq \|g\|\}$. Nach Voraussetzung ist $\|g\| \leq C \|f\| \leq C\varepsilon$ (s. (1.154)). Für die Abbildung

$$T(w) := w_f + N(w) \quad (1.178)$$

$$:= w_f + \int_0^{t-1} ds e^{s\partial_x^2} K(t-s) \quad (1.179)$$

sind dann die Eigenschaften $T(B_w) \subset B_w$ und $\|T(w_1) - T(w_2)\| \leq C \|w_1 - w_2\|_L$ nachzuweisen.

Die Kontraktionseigenschaft ergibt sich genau wie die Abschätzungen (1.44) und (1.43) in 1.2.2, womit man wegen (1.177) in diesem Fall direkt

$$\|T(w_1) - T(w_2)\| = \|N(w_1) - N(w_2)\| \quad (1.180)$$

$$\leq CL^2(\|w_1\|_L + \|w_2\|_L) \|w_1 - w_2\|_L \quad (1.181)$$

$$\leq CL^2\varepsilon \|w_1 - w_2\|_L \quad (1.182)$$

notieren kann ($w \in B_w \Rightarrow \|w\|_L \leq (C+1)\varepsilon$, weil $\|w_f\|_L \leq C\|g\| \leq C'\varepsilon$).

Wegen (1.177) läßt sich aber auch direkt $\|N(w)\|_L$ abschätzen. Die TAYLOR-Reihe des Terms K beginnt mit $N + M + l \geq 2$. Deshalb gilt für genügend kleines ε wieder

$$\|N(w)\|_L \leq L^2 C_a \varepsilon, \quad (1.183)$$

wobei die Konstante noch von $a(u, \partial_x u)$ abhängen kann. Die analoge Gleichung in 1.2.2 ist (1.41). Insgesamt existiert also aufgrund des Fixpunktsatzes eine eindeutige Lösung $w \in B_w$ zum Zeitpunkt $t = L^2$ der Gleichung (1.155). Diese wird wieder geschrieben als

$$w(x, L^2) = e^{(L^2-1)\partial_x^2} g(x) + v(x, L^2)$$

mit

$$\|v\| \leq \|v\|_L = \|N(w)\|_L \quad (1.184)$$

$$\leq C_{L,a}\varepsilon(\varepsilon + \|g\|) \quad (1.185)$$

wobei der erste Term $\sim \varepsilon^2$ aus den Summanden der Potenzreihe von K mit $N = 0$, $M + l \geq 2$ und der zweite von solchen mit $N \geq 1$, $M + l \geq 1$ stammt, denn $N \geq 1$ bedeutet die Anwesenheit von w in einem Monom.

2. RG-Transformation: Kontraktion

Wir wollen nun die Renormierungstransformation studieren. Als Ansatz ist mit Blick auf (1.149) und (1.152)

$$(R_{L,K}g)(x) = Lw(Lx, L^2)$$

schon gewählt worden. Es gilt $\hat{g}(0) = 0$ und man überzeugt sich erst einmal davon, daß die Transformation diese Eigenschaft erhält, um damit wieder

eine Kontraktionseigenschaft von $R_{L,K}$ auf solchen Funktionen ausnutzen zu können (vgl. dazu (1.23)). Mit $K = \partial_x \bar{K}$ kann man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t w(x, t) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x^2 w(x, t) + \partial_x \bar{K}) dx \\ &= [\bar{K}]_{-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

berechnen. Nun enthält \bar{K} nur $\partial_x^{j+1} u^*$, $\partial_x^j v^*$ mit $j = 0, 1, \dots$ und $\partial_x w$. Diese nehmen an der Stelle $|x| = \infty$ alle den Wert 0 an (die Ableitungen von u^* und v^* fallen exponentiell im Unendlichen ab), weshalb $\bar{K}(\pm\infty) = 0$ ist. Damit gilt für alle Zeiten $t \geq 1$

$$\hat{w}(0, t) = 0,$$

also insbesondere $\hat{g}(0) = 0$.

Wie schon angedeutet soll jetzt

$$\|Rg\| \leq \frac{C}{L} \|g\| + C_{L,a} \varepsilon (\varepsilon + \|g\|) \quad (1.186)$$

gezeigt werden. Allerdings genügt wegen (1.185) der Nachweis von

$$\|R_o g\| = \left\| L \left(e^{(L^2-1)\partial_x^2} g \right) (x) \right\| \leq \frac{C}{L} \|g\|. \quad (1.187)$$

Wir bleiben in der Ortsdarstellung und schreiben

$$(R_o g)(x) = \int G(x, y) g(y) dy \quad (1.188)$$

$$\tau(L) := 1 - L^{-2} \quad (1.189)$$

$$G(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau(L)}} \exp \left(-\frac{\left(x - \frac{y}{L}\right)^2}{4\tau(L)} \right) \quad (1.190)$$

Zu der Darstellung von $G(x, y)$ gelangt man durch Vergleich mit (1.18). Abzuschätzen ist nun

$$\begin{aligned} \|R_o g\| &= \sup_{k,n,i \leq 2} (1 + n^4) \left| \int dx e^{ikx} \int dy (1 - \partial_x^2) (\chi_n(x) \partial_x^i G(x, y)) g(y) \right| \\ &=: \sup_{k,n,i \leq 2} (1 + n^4) |M(k, n, i)| \end{aligned} \quad (1.191)$$

Zu zeigen ist, daß

$$|M(k, n, i)| \leq \frac{C}{L} \frac{\|g\|}{(1 + n^4)} \quad (1.192)$$

erfüllt ist.

Teil 1: $|n| \geq C \log L$

Dann gilt für genügend großes L

$$\begin{aligned} |M(k, n, i)| &\leq \sum_m \int dxdy |(1 - \partial_x^2) (\chi_n(x) \partial_x^i G(x, y)) \chi_m(y) g(y)| \\ &\leq C \sum_m e^{-|n - L^{-1}m|} \frac{\|g\|}{(1 + m^4)} \\ &\leq \frac{C}{L^3} \frac{\|g\|}{(1 + n^4)}. \end{aligned}$$

Zu der ersten Abschätzung gelangt man mit den analogen Umformungen, die zu den Ungleichungen (1.163) und (1.160) geführt haben. Um die Summe zu kontrollieren benutzt man für $|n - L^{-1}m| \geq \frac{|n|}{2}$ die Voraussetzung $|n| \geq C \log L$, denn damit ist für großes L

$$\begin{aligned} e^{-|n - L^{-1}m|} &\leq e^{-\frac{|n|}{2}} \\ &= \frac{1}{L^3} e^{\log L^3 - \frac{|n|}{2}} \\ &\leq \frac{1}{L^3} e^{(\frac{3}{C} - \frac{1}{2})|n|} \\ &\leq \frac{C}{L^3} \frac{1}{(1 + n^4)} \end{aligned}$$

Für $|n - L^{-1}m| \leq \frac{|n|}{2}$ folgt $|m| \geq L \frac{|n|}{2}$, also $1 + m^4 \geq 1 + (\frac{L}{2})^4 |n|^4 \geq \frac{L^4}{C} (1 + |n|^4)$. Damit ist für große L

$$\sum_m^{<\infty} e^{-|n - L^{-1}m|} \frac{1}{(1 + m^4)} \leq \frac{C}{L^4} \frac{1}{(1 + n^4)} \sum_m^{<\infty} e^{-|n - L^{-1}m|} \leq \frac{C'}{L^3} \frac{1}{1 + n^4}$$

Teil 2: $|n| \leq C \log L$

Dazu schreibt man

$$|M(k, n, i)| \leq \sum_m \int dxdy |(1 - \partial_x^2) (\chi_n(x) \partial_x^i [G(x, y) - G(x, 0)]) \chi_m(y) g(y)|,$$

was wegen $\hat{g}(0) = 0$ ohne weiteres möglich ist. Für die Ausdrücke mit $|m| \leq L$ wird für $i = 0, 1, 2$

$$|\partial_x^i [G(x, y) - G(x, 0)]| \leq \frac{C}{L} e^{-|n|} (1 + |m|) \quad (1.193)$$

benutzt, denn wegen $|y| \leq |m + 1|$ gilt

$$\begin{aligned} |G(x, y) - G(x, 0)| &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau(L)}} e^{-\frac{x^2}{4\tau(L)}} \left(e^{\frac{2Lxy-y^2}{L^2 4\tau(L)}} - 1 \right) \\ &\leq C e^{-\frac{x^2}{4}} \left(e^{\frac{Lx|m+1|}{2(L^2-1)}} - 1 \right) \\ &\leq C e^{-\frac{x^2}{4}} \left(e^{\frac{x|m+1|}{2L}} \right) \\ &\leq C e^{-|x|} \\ &\leq \frac{C}{L} e^{-|x|} (1 + |m|) \end{aligned}$$

und zusätzlich für $i = 2$ (für $i = 1$ analog)

$$\left| \left(x - \frac{y}{L} \right)^2 - x^2 \right| \leq C |x + 1| \frac{|m + 1|}{L}.$$

Insgesamt also (1.193). Damit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{|m| \leq L} |\dots| &\leq \frac{C}{L} \sum_{|m| \leq L} e^{-|n|} (1 + |m|) \frac{\|g\|}{1 + m^4} \\ &\leq \frac{C}{L} \frac{\|g\|}{1 + n^4}. \end{aligned}$$

Für $|m| > L$ kann man direkt durch (1.164) dieselbe Ungleichung gewinnen:

$$\begin{aligned} \sum_{|m| > L} |\dots| &\leq C \sum_{|m| > L} \frac{\|g\|}{1 + m^4} \\ &\leq \frac{C'}{L^3} \|g\| \\ &\leq \frac{C}{L} \frac{\|g\|}{1 + n^4} \end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung wegen $|n| \leq C \log L$ gilt, denn dann gilt auch $e^{-\log L^2} \leq e^{-\frac{|n|}{C}} \leq (1 + n^4)^{-1}$.

Zusammenfassend ist damit also (1.192) erfüllt und somit schließlich (1.187).

3. Iteration

Abschließend wird nun auf jenen Teil des Beweises eingegangen, der die Iteration der Renormierungsgruppentransformation zuläßt, denn jetzt sind alle Hilfsmittel dazu bereitgestellt. Abzuschätzen ist der Term $\|R_{L,K_n} g_n\|$ mit K aus (1.158). Nach den Vorbereitungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \|R_{L,K_n} g_n\| &= \|(R_o g_n)(x) + L v_n(Lx)\| \\ &\leq \frac{C}{L} \|g_n\| + C_L \|v_n\| \\ &\leq \frac{C}{L} \|g_n\| + C_{L,a} \varepsilon (L^{-n} \varepsilon + \|g_n\|). \end{aligned} \quad (1.194)$$

Dabei ergibt sich die Abschätzung für g_n aufgrund der Kontraktionseigenschaft von R_o auf Funktionen mit $\hat{g}_n(0) = 0$ (s. (1.187)). Die Ungleichungen für den v_n -Term ergeben sich wie (1.185). Dabei verbessern sich die Abschätzungen der irrelevanten Terme aus K um den Faktor L^{-n} ; die marginalen, welche zu $N = 1$, $l \geq 1$ und $M = 0, 1$ gehören, bleiben bestehen und werden nur durch $C_{L,a} \varepsilon \|g_n\|$ beschränkt.

Abschließend erhält man für ein $\delta > 0$

$$\|R_{L^n, K} g\| \leq C_{L,a} L^{-(1-\delta)n} (\|f\| + \varepsilon)$$

leicht durch Induktion. Der Induktionsanfang ist mit (1.194) und der Startbedingung $\|g\| \leq C \|f\|$ (s. (1.154)) schon gemacht. Weiter ergibt sich durch gleichzeitiges Einsetzen von (1.194) und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \|R_{L^{n+1}, K} g\| &= \|R_{L, K_n}(R_{L^n, K} g)\| \\ &\leq \frac{C}{L} C_{L,a} L^{-(1-\delta)n} (\|f\| + \varepsilon) \\ &\quad + C_{L,a} \varepsilon (L^{-n} \varepsilon + C_{L,a} L^{-(1-\delta)n} (\|f\| + \varepsilon)) \\ &= C_{L,a} L^{-(1-\delta)n} (\|f\| + \varepsilon) \left(\frac{C}{L} + C_{L,a} L^{-n} \varepsilon^2 + C_{L,a} \varepsilon \right) \\ &\leq C_{L,a} L^{-(1-\delta)(n+1)} (\|f\| + \varepsilon) \end{aligned}$$

für $\varepsilon \leq (C_{L,a} L)^{-1}$ und $C \leq L^\delta$.

Damit erkennt man, daß für große Zeiten $t^{1-\delta} \|\sqrt{t}w(\xi\sqrt{t}, t)\| \rightarrow 0$ erfüllt ist, woraus sich die behauptete Konvergenz von $u(x, t)$ ergibt. \square

1.4 Zwischenstand

In den vorangegangenen Abschnitten ist das Langzeitverhalten von Lösungen gestörter Diffusionsgleichungen zu bestimmten Voraussetzungen an die Anfangsbedingungen berechnet worden. Charakteristisch dafür ist das Skalenverhalten der Lösungen: man kann die Amplitude und die Ortsvariable der Lösung so mit der Zeit skalieren, daß sich eine Funktion ergibt, die nur noch von einem Argument abhängt. Der Ausgangspunkt nach einem solchen Verhalten zu suchen ist jeweils die exakte Lösung des Anfangswertproblems mit ungestörter Wärmeleitungsgleichung gewesen, welche, je nach Startbedingung, ein spezielles Skalierungsverhalten für große Zeiten besitzt. Die Startbedingungen und die Störungen können so klassifiziert werden, daß sich keine Änderung dieses natürlichen Verhaltens nachweisen läßt. Da diese Bedingungen zum Teil sehr streng sind, kann man die vorstehenden Resultate auch als Stabilitätsanalyse der normalen Diffusion werten und diese deshalb als unempfindlich gegenüber Störungen der Startbedingungen und der Dynamik betrachten.

Die Technik, mit der die obigen Ergebnisse erzielt werden, besteht in der Konstruktion einer kontrahierenden Skalentransformation, die auf dem Raum aller Startbedingungen zu der betrachteten Gleichung operiert und in diesen wieder abbildet. Aufgrund der Kontraktionseigenschaft existiert ein Fixpunkt dieser Transformation, der zum Langzeitverhalten der Lösung korrespondiert. Dies bedeutet, daß sich das asymptotische Verhalten durch eine Skalenabbildung beschreiben läßt. Dazu müssen allerdings die Parameter jener Transformation richtig gewählt sein, welche sich in obigen Fällen an der ungestörten Wärmeleitungsgleichung und deren Lösungen orientieren.

Durch die Ergebnisse anderer Arbeitsgruppen hat sich herausgestellt, daß die Lösungen anderer Diffusionsgleichungen mit Störungen ein anderes als das natürliche Skalenverhalten für große Zeiten aufweisen. Im folgenden wird untersucht, inwiefern sich die Parameter zur oben erläuterten Technik der kontrahierenden Abbildung aus der Differentialgleichung bestimmen lassen. Dadurch soll ein besserer Ausgangspunkt für einen Konvergenzbeweis in solchen Fällen erreicht werden. Der Unterschied zur vorangehenden

Beweisführung ist, daß kein natürliches Verhalten gegeben ist, von welchem die Überlegungen zum gestellten Problem aus entwickelbar sind. Unterstützt werden die theoretisch gefundenen Zusammenhänge durch numerische Simulationen.

Kapitel 2

Reaktion und Diffusion

In diesem Kapitel sollen Reaktions-Diffusions-Systeme betrachtet werden, die sich von den vorangegangenen durch ihr Skalenverhalten sehr unterscheiden. Sie besitzen nicht mehr die GAUß-Skalierung, welche sich aus der ungestörten Gleichung (1.1) ergibt. Eine allgemeine Klassifizierung der Störungen zu einem bestimmten Skalenverhalten, wie sie für (1.30), (1.67) und (1.144) zuvor diskutiert wurde, existiert aber noch nicht. Statt dessen ist nur das asymptotische Verhalten einiger Modellsysteme eingehender untersucht worden (s. [Baz2000/I], [Baz2000/II], [Droz91], [Droz92], [Galf84], [Witt99], [Kise2000]).

Zu Beginn wird ein charakteristisches Reaktions-Diffusions-System vorgestellt, welches einige der untersuchten Modelle als Spezialfälle enthält, um als Ausgangspunkt für allgemeine Überlegungen zu den gesuchten Skalierungsexponenten nutzbar zu sein. Das zentrale Instrument wird wieder eine Skalentransformation mit einer Norm sein. Die Resultate der gefundenen allgemeinen Zusammenhänge werden mit den Ergebnissen anderer Arbeitsgruppen demonstriert. Abschließend werden durch numerische Untersuchungen anhand eines bislang nicht betrachteten Modells die in diesem Teil der Arbeit entwickelten Ergebnisse untermauert.

2.1 Das System

Einführend wird das Reaktions-Diffusions-System

$$\partial_t a = D_a \partial_x^2 a - k_a p \cdot a^p b^q \quad (2.1)$$

$$\partial_t b = D_b \partial_x^2 b - k_b q \cdot a^p b^q \quad (2.2)$$

mit den Konstanten $D_a > 0$, $p, q \geq 1$, $k_a, k_b > 0$ und

$$\begin{aligned} a(x, 1) &= a_o & \text{falls } x < 0 \\ b(x, 1) &= b_o & \text{falls } x > 0 \\ a(x, 1) &= 0 & \text{falls } x > 0 \\ b(x, 1) &= 0 & \text{falls } x < 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

betrachtet. Dabei bezeichnen a und b die Konzentrationen zweier Reaktanden, die Konstanten k_a und k_b die zu dieser Reaktion gehörenden Reaktionsraten und $D_{a,b}$ die jeweiligen Diffusionskonstanten. Durch Umskalierung der Variablen x und t mittels

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, t) &:= Aa(Mx, Nt) \\ \tilde{b}(x, t) &:= Bb(Mx, Nt) \end{aligned}$$

erhält man mit den Definitionen

$$\begin{aligned} M^2 &:= ND \\ D &:= \frac{D_b}{D_a} \end{aligned}$$

und den Abhängigkeiten

$$\begin{aligned} A &= \frac{qk_b}{pk_a} B \\ A^p B^q &= pk_a AN = qk_b BN \end{aligned}$$

das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{a} &= \partial_x^2 \tilde{a} - \tilde{a}^p \tilde{b}^q \\ \partial_t \tilde{b} &= D \partial_x^2 \tilde{b} - \tilde{a}^p \tilde{b}^q \end{aligned} \quad (2.4)$$

Wählt man für $a_o > 0$ speziell

$$A = \frac{1}{a_o}$$

so sind die weiteren Parameter festgelegt, insbesondere ist

$$N = \frac{(pk_a)^{q-1}}{a_o^{p+q-1} \cdot (qk_b)^q} > 0.$$

So ergeben sich die Startbedingungen zu

$$\begin{aligned}\tilde{a}(x, 1) &= 1, \quad x < 0 \\ \tilde{b}(x, 1) &= k = \frac{b_o \cdot p k_a}{a_o \cdot q k_b}, \quad x > 0 \\ \tilde{b}(x, 1) &= 0 = \tilde{a}(-x, 1), \quad x < 0\end{aligned}$$

Nun beschränkt man sich auf $D = 1$, also gleiche Diffusionskonstanten für jeden Stoff, weil sich dadurch das obige skalierte System entkoppeln läßt: durch die Setzung

$$u(x, t) := \tilde{a}(x, t) - \tilde{b}(x, t) \quad (2.5)$$

$$v(x, t) := \tilde{a}(x, t) + \tilde{b}(x, t) \quad (2.6)$$

erhält man das Differentialgleichungssystem

$$\partial_t u = \partial_x^2 u \quad (2.7)$$

$$\partial_t v = \partial_x^2 v - 2\tilde{a}^p \tilde{b}^q \quad (2.8)$$

$$= \partial_x^2 v - 2^{1-p-q} (u + v)^p (v - u)^q \quad (2.9)$$

mit

$$\begin{aligned}u(x, 1) &= v(x, 1) = 1, \quad x < 0 \\ -u(x, 1) &= v(x, 1) = k, \quad x > 0\end{aligned} \quad (2.10)$$

Die Lösung für u ist mittels GAUß-Faltung bekannt:

$$\begin{aligned}u(x, t - 1) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u(y, 1) dy \\ &= \frac{-2\sqrt{t}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\int_{\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz - k \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{-\infty} e^{-z^2} dz \right) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \left(-\sqrt{\pi} + 2 \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz + \sqrt{\pi} k + 2k \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz \right) \\ &= \frac{1-k}{2} - \frac{1+k}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\end{aligned} \quad (2.11)$$

Bemerkungen:

1. Ist $k \neq 1$, so wandert das Zentrum der Reaktionszone x_R . Für den Ort dieses Zentrums gilt $a(x_R, t) = b(x_R, t)$, also $u(x_R, t) = 0$, so daß aus (2.11)

$$x_R = 2d_R\sqrt{t} \quad (2.12)$$

$$\operatorname{erf}(d_R) := \frac{1-k}{1+k} \quad (2.13)$$

folgt. Nach (2.12) ist es also sinnvoll die Transformation $x \mapsto x - x_R := \tilde{x}$ durchzuführen, denn so betrachtet man die Umgebung der Reaktionszone, mithin jenen Bereich, der für das Skalenverhalten interessant ist, immer an der Stelle $\tilde{x} = 0$. Durch die zeitliche Ableitung entsteht allerdings ein zusätzlicher Term $-2d_R t^{-\frac{1}{2}} v'$. Dieser jedoch spielt in den betrachteten Fällen keine Rolle für das Skalenverhalten. Bei der Erklärung der Beispiele in 2.5 wird darauf noch eingegangen.

2. Für $p, q \geq 1$ zu den oben genannten Anfangsbedingungen wurde die Asymptotik bestimmt (s. [Droz91], [Droz92], [Magn2000] und speziell für $p = q = 1$ [Galf84] und [Witt91]).

3. Zu $p = q \geq 4$ und $k_a = k_b = \frac{4p}{2p}$ mit verallgemeinerten Startbedingungen wurde das Langzeitverhalten dieses Systems ebenfalls bestimmt (s. [Witt99]).

4. Für den Fall $D = 0$ sind die Skalierungseigenschaften auch zu allgemeineren Anfangsbedingungen aufgeklärt (s. [Baz2000/II]).

2.2 Der Skalierungsansatz

Das oben angegebene Modell, insbesondere (2.9), soll nun die folgende allgemeine Formulierung des Problems motivieren:

Betrachtet wird mit $\phi : \mathbb{R} \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch um $(0, t)$ für alle $t \geq 1$ und $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch um $(0, 0)$ das Anfangswertproblem

$$\partial_t v = \partial_x^2 v + F(v, \phi) \quad (2.14)$$

$$v(x, 1) = f(x) \quad (2.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = v_{\pm} > 0 \quad (2.16)$$

Ohne Beschränkung kann man $|v_{\pm}| \leq 1$ annehmen, wenn $\sup_x |f(x)| < \infty$ vorausgesetzt wird.

Die Form, welche für F zulassen ist, wird später in (2.58) definiert. Eine Einschränkung, die ϕ betrifft, wird durch (2.70) angegeben.

Um nun das Skalenverhalten der Lösung $v(x, t)$ für große Zeiten t zu finden, sei als Ansatz analog zu (1.3) ganz allgemein für $v(x, t)$

$$v_L(x, t) := (v_L(x, t))^{(\omega)} := L^\omega v(Lx, L^\vartheta t) \quad (2.17)$$

gewählt ($\vartheta > 0$), was nach n Iterationen, $n \in \mathbb{N}$, auf die Lösung

$$\begin{aligned} v(x, t) &= L^{-\omega n} v_{L^n}(L^{-n}x, 1) \\ &= t^{-\frac{\omega}{\vartheta}} v_{L^n}(t^{-\frac{1}{\vartheta}}x, 1) \end{aligned} \quad (2.18)$$

führt. Es wird sich herausstellen, daß ϑ von ω abhängt. Deshalb ist in (2.17) nur ω als Index aufgeführt.

In der Literatur werden oft die Bezeichnungen $\alpha = \vartheta^{-1}$ und $\gamma = \omega\vartheta^{-1}$ benutzt. Der Übersicht halber bleiben wir aber zunächst bei der Notation mit ω und ϑ .

Um die Skalierung für ϕ eindeutig wählen zu können, sei die TAYLOR-Reihe von ϕ um $(0, t)$ mit $d_\phi \in \mathbb{N}_0$ und dem Konvergenzradius $R(\phi)$ betrachtet:

$$\phi(x, t) = \sum_{k=0} z_k(t) x^k \quad (2.19)$$

$$z_k(t) = 0, \quad k < d_\phi \quad (2.20)$$

$$z_k(t) \neq 0, \quad k = d_\phi \quad (2.21)$$

Damit wird der Skalenansatz für ϕ definiert als

$$\phi_L(x, t) := (\phi_L(x, t))^{(\omega)} := L^{d_\phi \omega} \phi(Lx, L^\vartheta t) \quad (2.22)$$

Diese Wahl bezieht sich also auf das lokale Verhalten von ϕ , genauer auf $|x| < R(\phi)$. Wir werden später sehen, daß zum Nachweis eines Skalenverhaltens die Umgebung um $x = 0$ eine zentrale Rolle spielt. In einer allgemeineren Formulierung muß die Stelle x_o , um die ϕ entwickelt wird, mit angegeben

werden.

Die partielle Differentialgleichung für v_{L^n} hat durch diesen Ansatz dann für $n = 0, 1, 2, \dots$ die Form

$$\partial_t v_{L^n}(x, t) = L^{(\vartheta-2)n} \partial_x^2 v_{L^n}(x, t) + F_{L^n}(v_{L^n}, \phi_{L^n}) \quad (2.23)$$

$$F_{L^n}(a, b) := L^{(\omega+\vartheta)n} F(L^{-\omega n} a, L^{-d_\phi \omega n} b) \quad (2.24)$$

Betrachtet wird nun

$$2\delta := \vartheta - 2 > 0, \quad (2.25)$$

auf dessen physikalische Bedeutung noch eingegangen wird. Bei den bisherigen Arbeiten mit einem solchen Ansatz wird nur die Möglichkeit $\delta = 0$ untersucht (vgl. z.B. [Bric93/II]). Sie bieten daher einen Ausgangspunkt zur Charakterisierung des Falls $\delta > 0$. Nun muß noch die Norm festgelegt werden, zu welcher die Konvergenz von (2.17) untersucht werden soll. Dazu dient die folgende

Definition:

Zu Funktionen $f : \mathbb{R} \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $\tau, a \in \mathbb{R}^+$, $\tau \geq 1$ und $\mu \in \mathbb{R}$ sei die Halbnorm

$$\|f(\zeta, t)\|_{a, \tau, \mu} := \sup_{t \in [1, \tau]} \sup_{|\zeta| < \frac{a}{t^\mu}} |f(\zeta, t)| = \sup_{t \in [1, \tau]} \sup_{|x| < a} |f(xt^{-\mu}, t)| \quad (2.26)$$

definiert. □

Die Menge

$$\Omega_{a, \tau, \mu} := \{(\zeta, t) \in \mathbb{R} \times [1, \tau] \mid |\zeta| < at^{-\mu}, a \in \mathbb{R}^+, \mu \in \mathbb{R}\}, \quad (2.27)$$

auf welchem das Supremum durch diese Halbnorm bestimmt wird, verdeutlicht für ein $\mu > 0$ und $\tau = L^\vartheta$ der schraffierte Bereich in der Abb. 2.1:

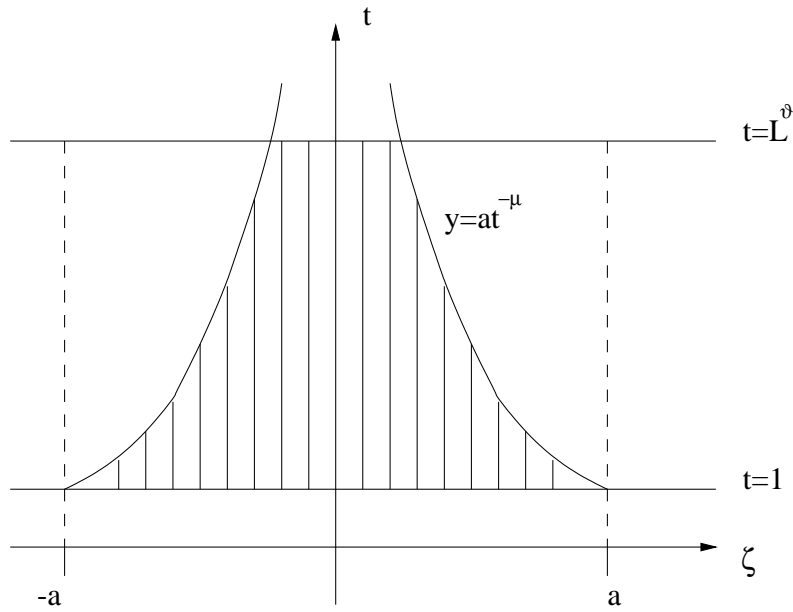


Abb.: 2.1

Bemerkungen:

1. Für $0 < a \leq b$, $0 \leq \eta \leq \mu$ und festes τ gilt offenbar

$$\|f\|_{a,\tau,\mu} \leq \|f\|_{b,\tau,\eta} \quad (2.28)$$

Daraus ergibt sich mit $\Omega := \Omega_{a,\tau,\mu}$ aus (2.27) auch sofort die Abschätzung

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{a,\tau,\mu}$$

2. Mit der Abkürzung "lokal glm." für "lokal gleichmäßig konvergent" gilt für festes μ und $f : \mathbb{R} \times [1, \tau] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\|f\|_{\infty,\tau,\mu} < \infty$

$$\bigwedge_{a>0} \|f_n - f\|_{a,\tau,\mu} \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{lokal glm.}} f \text{ auf } \mathbb{R} \times [1, \tau] \quad (2.29)$$

(vgl. Anhang 5.10 zur Def. der lokal glm. Konvergenz).

3. Die Räume

$$\mathcal{V}_{a,\tau,\mu} := \{f : \mathbb{R} \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_{a,\tau,\mu} < \infty\}$$

bilden für alle $\mu \in \mathbb{R}$ einen \mathbb{C} -Vektorraum und es gelten die Normaxiome auf $\Omega_{a,\tau,\mu} \subset \mathbb{R} \times [1, \infty)$.

(i) Es gilt für eine Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \times [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\text{Es ex. ein } f \in \mathcal{V}_{a,\tau,\mu} \text{ mit : } \|f_n - f\|_{a,\tau,\mu} \rightarrow 0 \quad (2.30)$$

$$\Leftrightarrow f_n \text{ ist gegen } f \text{ glm. konvergent auf } \Omega_{a,\tau,\mu} \quad (2.31)$$

(ii) Desweiteren ist die folgende Äquivalenz für $f \in \mathcal{V}_{a,\tau,\mu}$ erfüllt:

$$\|f_n - f\|_{a,\tau,\mu} \rightarrow 0 \quad (2.32)$$

$$\Leftrightarrow f_n \text{ ist Cauchy - Folge in } \Omega_{a,\tau,\mu} \quad (2.33)$$

Beweis (ii):

Die Richtung “ \Rightarrow ” ist trivial. Zu zeigen ist also nur “ \Leftarrow ”:

Wegen

$$\bigwedge_{z \in \Omega_{a,\tau,\mu}} : |f_m(z) - f_n(z)| \leq \|f_m - f_n\|_{a,\tau,\mu}$$

ist jede Wertefolge $f_n(z)$, $z \in \Omega_{a,\tau,\mu}$ eine CAUCHY-Folge. Folglich konvergiert f_n in $\Omega_{a,\tau,\mu}$ punktweise. Sei $\lim_n f_n =: f$; damit ist

$$\bigwedge_{z \in \Omega_{a,\tau,\mu}} : |f_n(z) - f(z)| \leq |f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f(z)|$$

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert nun ein $n_o \in \mathbb{N}$, so daß für alle $m, n > n_o$ und alle $z \in \Omega_{a,\tau,\mu}$ die Relation $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ erfüllt ist. Wählt man zu einem $z \in \Omega_{a,\tau,\mu}$ ein $m = m(z) > n_o$ so, daß $|f_m(z) - f(z)| < \varepsilon$, so folgt eben für alle $n > n_o$ und $z \in \Omega_{a,\tau,\mu}$: $|f_n(z) - f(z)| < 2\varepsilon$.

4. Mit der C^1 -Funktion $\chi_{a,\mu} : \mathbb{R} \times [1, \infty) \rightarrow (0, 1]$ zu $a \in \mathbb{R}_o^+$ und $\mu \in \mathbb{R}$

$$\chi_{a,\mu}(\zeta, t) := \begin{cases} 1, & |\zeta t^\mu| < a \\ e^{-(\zeta t^\mu - a)^2}, & |\zeta t^\mu| \geq a \end{cases} \quad (2.34)$$

gilt

$$\begin{aligned}
\|f(\zeta, t)\|_{a, \tau, \mu} &= \|(f \cdot \chi_{a, \mu})(\zeta, t)\|_{a, \tau, \mu} \\
&= \sup_{t \in [1, \tau]} \sup_{|x| < a} \left| \int \widehat{f \cdot \chi_{a, \mu}}(k, t) e^{-ikx t^{-\mu}} dk \right| \\
&\leq \sup_{t \in [1, \tau]} \sup_{|x| < a} \sup_k (1 + k^2) |\widehat{f \cdot \chi_{a, \mu}}(k, t)| \left| \int \frac{e^{-ikx t^{-\mu}}}{1 + k^2} dk \right| \\
&\leq \sup_{t \in [1, \tau]} \sup_k (1 + k^2) |\widehat{f \cdot \chi_{a, \mu}}(k, t)| \cdot \sup_{t \in [1, \tau]} \sup_{|x| < a} e^{-|xt^{-\mu}|} \\
&\leq \sup_{t \in [1, \tau]} \sup_k (1 + k^2) |\widehat{f \cdot \chi_{a, \mu}}(k, t)| \tag{2.35}
\end{aligned}$$

Zu beachten ist, daß \hat{f} nicht unbedingt existiert und deshalb $a \rightarrow \infty$ nicht notwendig zu einer Verschärfung der Ungleichung beiträgt. Wächst $f(\zeta, t)$ nicht exponentiell, so existiert $\widehat{f \cdot \chi_{a, \mu}}(k, t)$ für alle a und fällt sogar exponentiell ab. Die Abschätzung stellt einen möglichen Anschluß an die Normen in den Kapiteln zuvor dar. \square

Im folgenden wird nur $\tau = L^\vartheta$ benutzt, weshalb der zugehörige Index im weiteren Verlauf nicht mehr hingeschrieben wird.

Es soll nun die Folge $v_{L^n}(x, t)$ für alle $a > 0$ zu einer CAUCHY-Folge auf $\Omega_{a, \mu}$ gemacht werden, woraus mit obigen Bemerkungen die lokal gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R} \times [1, L^\vartheta]$ folgt. Diese Idee ähnelt der Beweisidee, die KUPIAINEN et al. verwenden (s. [Bric93/II]), weil diese den BANACHschen Fixpunktsatz benutzen, dessen Beweis auf die Konstruktion einer CAUCHY-Folge mittels einer kontrahierenden Abbildung zurückgeht. Allerdings wird hier später die Existenz einer Grenzfunktion vorausgesetzt und nicht bewiesen. Trotzdem kann man allein aus diesem Ansatz schon notwendige Aussagen über ω , ϑ und der möglichen Grenzfunktion finden.

Begonnen wird mit dem Umstand, daß zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $a > 0$ ein $N(a, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $a \leq \varepsilon L^{\delta N}$ existiert ($\delta > 0$).

Es gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N(a, \varepsilon)$ und $\mu - 1/2 > 0$:

$$L^{-(\mu-\frac{1}{2})\vartheta n} < L^{-(\mu-\frac{1}{2})\vartheta N} < L^{-(\mu-\frac{1}{2})\frac{\vartheta}{\delta} \ln_L \frac{a}{\varepsilon}} = \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1+r} \quad (2.36)$$

$$1 + r := \left(\mu - \frac{1}{2}\right) \frac{\vartheta}{\delta} \quad (2.37)$$

Ist nun $r \geq 0$ bzw.

$$\mu \geq 1 - 1/\vartheta > 1/2 \quad (2.38)$$

und $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > N(a, \varepsilon)$, so rechnet man nach:

$$\begin{aligned} \|v_{L^n} - v_{L^m}\|_{a,\mu} &= \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < a} |v_{L^n}(xt^{-\mu}, t) - v_{L^m}(xt^{-\mu}, t)| \\ &= \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < a} |L^{\omega n} v(L^{(1-\mu\vartheta)n} xt^{-\mu}, L^{\vartheta n} t) \\ &\quad - L^{\omega m} v(L^{(1-\mu\vartheta)m} xt^{-\mu}, L^{\vartheta m} t)| \\ &\leq \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < \varepsilon L^{\delta N}} |L^{\omega n} v(L^{(1-\mu\vartheta)n} xt^{-\mu}, L^{\vartheta n} t) \\ &\quad - L^{\omega m} v(L^{(1-\mu\vartheta)m} xt^{-\mu}, L^{\vartheta m} t)| \\ &= \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < \varepsilon} |L^{\omega n} v(L^{-\delta(n-N)} L^{(\frac{1}{2}-\mu)\vartheta n} xt^{-\mu}, L^{\vartheta n} t) \\ &\quad - L^{\omega m} v(L^{-\delta(m-N)} L^{(\frac{1}{2}-\mu)\vartheta m} xt^{-\mu}, L^{\vartheta m} t)| \\ &\leq L^{\omega n} \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < \varepsilon} |v(L^{-\delta(n-N)} L^{(\frac{1}{2}-\mu)\vartheta n} xt^{-\mu}, L^{\vartheta n} t) \\ &\quad - v(L^{-\delta(m-N)} L^{(\frac{1}{2}-\mu)\vartheta m} xt^{-\mu}, L^{\vartheta m} t)| \\ &+ \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < \varepsilon} |L^{\omega n} v(L^{-\delta(m-N)} L^{(\frac{1}{2}-\mu)\vartheta m} xt^{-\mu}, L^{\vartheta n} t) \\ &\quad - L^{\omega m} v(L^{-\delta(m-N)} L^{(\frac{1}{2}-\mu)\vartheta m} xt^{-\mu}, L^{\vartheta m} t)| \\ &\leq L^{\omega n} \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < \varepsilon} |v(L^{-\delta(n-N)} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1+r} xt^{-\mu}, L^{\vartheta n} t) \\ &\quad - v(L^{-\delta(m-N)} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1+r} xt^{-\mu}, L^{\vartheta m} t)| \\ &+ \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < \varepsilon} |L^{\omega n} v(L^{-\delta(m-N)} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1+r} xt^{-\mu}, L^{\vartheta n} t) \\ &\quad - L^{\omega m} v(L^{-\delta(m-N)} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1+r} xt^{-\mu}, L^{\vartheta m} t)| \end{aligned} \quad (2.39)$$

Eine TAYLOR-Entwicklung des 1. Summanden der letzten Abschätzung von (2.39) um $(0, L^{\vartheta n} t)$ ergibt für $m \geq n$ unter der Bedingung

$$\omega \leq \delta = \frac{\vartheta}{2} - 1 \quad (2.40)$$

mit $1 < C := \varepsilon L^{\delta N} / a$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & L^{\omega n} \sup_{t \in [1, L^{\vartheta}]} \sup_{|x| < \varepsilon} |v(L^{-\delta(n-N)} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1+r} xt^{-\mu}, L^{\vartheta n} t) \\ & - v(L^{-\delta(m-N)} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1+r} xt^{-\mu}, L^{\vartheta n} t)| \\ & \leq L^{\omega n} |L^{-\delta(n-N)} - L^{-\delta(m-N)}| \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1+r} |v'(0, L^{\vartheta n} t)| \cdot \sup_{t \in [1, L^{\vartheta}]} \sup_{|x| < \varepsilon} |xt^{-\mu}| + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ & \leq C \cdot |L^{(\omega-\delta)n} - L^{\omega n - \delta m}| \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^r |v'(0, L^{\vartheta n} t)| \cdot \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ & \leq C' \cdot \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^r |v'(0, L^{\vartheta n} t)| \cdot \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Damit ist auf Kosten einer stärkeren Konvergenzforderung als die CAUCHY-Bedingung die allgemeine Abschätzung (2.40) zwischen den Skalierungsexponenten ω und ϑ entstanden. Aus der Problemstellung muß sich nun noch die Konvergenz des zweiten Summanden von (2.39) ergeben. Um diese nachzuweisen kann man sich darauf beschränken das Konvergenzverhalten an der Stelle $x = 0$ zu untersuchen, weil in einer analogen TAYLOR-Entwicklung sich nur die konstanten Ausdrücke gegenseitig wegheben müssen damit der Summand wieder $\sim \mathcal{O}(\varepsilon)$ ist. Am Schluß des Abschnitts 2.3 wird diese Argumentation ausführlicher dargestellt.

2.3 Lokale und globale Konvergenz

Die Ungleichung (2.40) wurde unabhängig vom Anfangswertproblem eingeführt um das Verschwinden einiger Terme zu erzwingen. Es stellt sich die Frage, inwiefern der Wahl von $\delta > 0$, $\mu \geq 1 - \frac{1}{\vartheta}$ und (2.40) eine physikalische Bedeutung zukommt.

Der Parameter τ hingegen ist nur durch die Technik der diskreten Transformation bestimmt.

Im folgenden sollen für $v = v(A, B)$ die Notationen $\dot{v} := \partial_B v$ und $v^{(i)} := \partial_A^i v$ als Abkürzungen dienen.

1. $\delta > 0$ (2.25):

Hier wird ein Prozeß \mathcal{P}_δ betrachtet, der sich mit $t^{\frac{1}{\vartheta}} < t^{\frac{1}{2}}$ im Ortsraum ausbreitet, also langsamer als die übliche Diffusion, für welche $\delta = 0$ gilt. Letzteres erkennt man an der Gleichung (2.23), welche im Falle $\delta = 0$ wieder eine gestörte Wärmeleitungsgleichung ist. Umgekehrt würde der Fall $\delta < 0$ ein Ereignis beschreiben, welches für große Zeiten t über die Diffusion dominieren würde, was sich in der iterierten Skalentransformation durch allmähliches Verschwinden des Terms $\partial_x^2 v$ ausdrückt.

2. $\mu \geq 1 - \frac{1}{\vartheta}$ (2.38):

Die Wahl von $\mu > 0$ verursacht eine zeitabhängige Kontraktion des Ortsraums (vgl. Abb. 2.1), auf welchem eine Funktion f betrachtet wird. Wird durch $f(\zeta, t)$ nun ein diffusiver Prozeß \mathcal{P}_δ beschrieben, der auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ zur Zeit t_o startet, so wird dieser an Raum gewinnen, so daß für den Träger $T(t)$ von \mathcal{P}_δ zur Zeit $t > t_o$ gilt: $I \subset T(t)$.

Der Parameter μ eliminiert nun ein mögliches Skalenverhalten der Funktion $f(\zeta, t) = f(\xi t^\lambda, t)$, so daß man mit der Norm $\|f\|_{a,\lambda}$ nur $f(\xi t^\lambda, t)$ für $\xi \in I$ betrachten muß.

Zur Veranschaulichung dazu sei die übliche Diffusion angeführt, für welche bspw. nach (1.30)

$$\sup_{|\xi| < a} |t^{\frac{1}{2}} v(\xi t^{\frac{1}{2}-\mu}, t) - v^*(\xi t^{-\mu}, t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad (2.42)$$

gilt (vgl. (2.26)).

Für $\mu = \frac{1}{2}$ wird das richtige Skalenverhalten dargestellt und es ist dann $v^*(\xi t^{-\frac{1}{2}}, t) = 0$ für alle t und alle $|\xi| < a$.

Insofern trägt μ eine ähnliche anschauliche Bedeutung wie δ ($\mu = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta = 0$), weil durch die Wahl von $\mu \geq 1 - \frac{1}{\vartheta} > \frac{1}{2}$ ein Skalenverhalten der üblichen Diffusion ($\delta = 0$) ausgeschlossen wird.

3. $\frac{\omega}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ (2.40) :

Diese allgemeine Abschätzung, die sich u.a. aus den beiden Fällen zuvor ergibt, wird deutlicher, wenn man mit (2.18) und $\xi = x t^{-\frac{1}{\vartheta}}$

$$|\partial_x v(x, t)| = t^{-\frac{1}{\vartheta}(\omega+1)} |\partial_\xi g(\xi)| \geq C \cdot t^{-\frac{1}{2}}$$

betrachtet, was bedeutet, daß die gesuchte Funktion $v(x, t)$ sich räumlich mindestens $\sim t^{-\frac{1}{2}}$ ändert. Der einhüllende Diffusionsprozeß läßt aber wegen $\delta > 0$ höchstens eine Änderung $\sim t^{-1/2}$ zu. In manchen Veröffentlichungen wird deshalb $\omega = \delta$ als Bedingung an die Skalierungsexponenten formuliert. Weiter unten wird dies mathematisch präzisiert. Es stellt sich dabei heraus, daß die Gleichheit von (2.40) für die führenden, zum $\delta > 0$ -Anteil gehörenden Exponenten in der asymptotischen Entwicklung der Lösung $v(x, t)$ gilt. \square

Bevor die eigentliche Suche nach den Zahlen ω und ϑ beginnt, soll erst ein notwendiger Zusammenhang zwischen beiden geklärt werden. Dazu wird die Existenz einer Funktion $v^* : \Omega_{a,\mu} \rightarrow \mathbb{C}$ und

$$\|v_{L^n}(\zeta, t) - v^*(\zeta, t)\|_{a,\mu} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

mit $\mu \geq 1 - \frac{1}{\vartheta}$ vorausgesetzt. Aufgrund von (2.17) kann man dann auch

$$\sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < a} |L^{\omega n} v(L^{(1-\vartheta\mu)n} x t^{-\mu}, L^{\vartheta n} t) - v^*(x t^{-\mu}, t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

schreiben. Zu jedem fest gewählten $\tau \in [1, L^\vartheta]$ wird also mit $T = L^{\vartheta n}$

$$\sup_{|x| < a} |T^{\frac{\omega}{\vartheta}} v(x T^{\frac{1}{\vartheta}} (T\tau)^{-\mu}, T\tau) - v^*(x \tau^{-\mu}, \tau)| \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0 \quad (2.43)$$

erfüllt, ganz analog zu (1.14).

An (2.43) erkennt man, daß $T^{\frac{\omega}{\vartheta}} v(x T^{\frac{1}{\vartheta}} (T\tau)^{-\mu}, T\tau)$ für $T \rightarrow \infty$ unabhängig vom endlichen τ wird. Daher soll

$$v^*(x t^{-\frac{1}{\vartheta}}, t) = 0, \quad |x| < a \quad (2.44)$$

als Fixpunktkriterium benutzt werden (vgl. Bemerkung zu (2.42)).

Eine solche Konvergenz kann man allerdings nur auf den Mengen $N \subset \mathbb{R}$ voraussetzen, die durch

$$N = \{x \in \mathbb{R} \mid v(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\}$$

definiert sind (vgl. Bem.1 zu (1.109)).

Außerdem soll noch die gleichmäßige Konvergenz der zeitlichen Ableitung

$$\partial_t (t^{\frac{\omega}{\vartheta}} v(x, t))$$

für $|x| < a$ vorausgesetzt werden. Damit folgt wegen (2.43)

$$\partial_t (t^{\frac{\omega}{\vartheta}} v(x, t)) \rightarrow \dot{v}^*(xt^{-\frac{1}{\vartheta}}, t) = 0$$

also mit (2.44) auch $t^{\frac{\omega}{\vartheta}} \dot{v}(0, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ bzw. $L^{-2\delta n} \partial_t v_{L^n}(0, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Es wird also

$$L^{-2\delta n} \partial_t v_{L^n}(x, t) = \partial_x^2 v_{L^n}(x, t) + L^{-2\delta n} F_{L^n}(v_{L^n}, \phi_{L^n}) \quad (2.45)$$

betrachtet und versucht, eine Bedingung für

$$L^{(2-\vartheta)n} \|\partial_t v_{L^n}(x, t)\|_{a, \mu} = L^{-2\delta n} \|\partial_t v_{L^n}(x, t)\|_{a, \mu} \rightarrow 0$$

zu bestimmen, das heißt eine Relation zwischen den Skalierungsexponenten ω und ϑ .

Der hinzugefügte Faktor L^{2n} ändert am Resultat nichts. Man vergleiche dazu die Fußnote zu (2.55). Die Schreibweise suggeriert aber schon, daß $\partial_x^2 v_{L^n}$ ein skaleninvarianter Teil wird, der in die Fixpunktgleichung eingeht.

Für $a \leq \varepsilon L^{\delta N(a, \varepsilon)}$, $n > N(a, \varepsilon)$ und (2.40) ist zunächst analog zu (2.41)

$$\begin{aligned} L^{-2\delta n} \|\partial_t v_{L^n}\|_{a, \mu} &= L^{-2\delta n} \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < a} L^{(\omega + \vartheta)n} |\dot{v}(L^{(1-\mu\vartheta)n} x t^{-\mu}, L^{\vartheta n} t)| \\ &\leq L^{-2\delta n} \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < \varepsilon} L^{(\omega + \vartheta)n} |\dot{v}(L^{-\delta(n-N)} L^{-(\mu - \frac{1}{2})\vartheta n} x t^{-\mu}, L^{\vartheta n} t)| \\ &\leq L^{-2\delta n} \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < \varepsilon} L^{(\omega + \vartheta)n} |\dot{v}(C \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^r L^{-\delta n} x t^{-\mu}, L^{\vartheta n} t)| \\ &\leq L^{-2\delta n} \left(\|\partial_t v_{L^n}(0, t)\|_{\varepsilon, \mu} + C \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^r \|\dot{v}'(0, L^{\vartheta n} t)\|_{\varepsilon, \mu} L^{(\omega + \vartheta - \delta)n} \varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \frac{C^2}{2!} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{2r} \|\dot{v}''(0, L^{\vartheta n} t)\|_{\varepsilon, \mu} L^{(\omega + \vartheta - 2\delta)n} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) + \dots \right) \\ &\leq K_o \|\dot{v}(0, L^{\vartheta n} t)\|_{\varepsilon, \mu} + CK_1 \|\dot{v}'(0, L^{\vartheta n} t)\|_{\varepsilon, \mu} \varepsilon \\ &\quad + \frac{C^2}{2!} K_2 \|\dot{v}''(0, L^{\vartheta n} t)\|_{\varepsilon, \mu} \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) + \dots \end{aligned} \quad (2.46)$$

mit $K_i := \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{ir} L^{(2-(i-1)\delta)n}$, $i = 0, 1, \dots$ für genügend großes n .

Folgender Zusammenhang wird nun für $\mu \geq 1 - \frac{1}{\vartheta}$ sichtbar:

Falls

$$K_o \left\| \dot{v}(0, L^{\vartheta n} t) \right\|_{\varepsilon, \mu} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.47)$$

$$K_i \left\| \dot{v}^{(i)}(0, L^{\vartheta n} t) \right\|_{\varepsilon, \mu} < \infty, \quad i \geq 1 \quad (2.48)$$

erfüllt wird, dann folgt

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0, R(\phi) > a} \bigvee_{N(a, \varepsilon) \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n > N(a, \varepsilon)} \left\| \partial_x^2 v_{L^n}(x, t) + L^{-2\delta n} F_{L^n}(v_{L^n}, \phi_{L^n}) \right\|_{a, \mu} < \varepsilon \quad (2.49)$$

Dabei bedeutet (2.48)

$$|\partial_x^i \partial_t v(0, t)| \leq t^{-\frac{2}{\vartheta}} \cdot C \quad (2.50)$$

und (2.47)

$$|\partial_t v(0, t)| \leq t^{-(\frac{1}{2} + \frac{1}{\vartheta} + \sigma)} \cdot C \quad (2.51)$$

für ein maximales $\sigma > 0$ für große Zeiten t .

Mit der Maximalität von σ selektiert man gerade die führende t -Potenz, mit welcher $\partial_t v$ stärker als $t^{-(\frac{1}{2} + \frac{1}{\vartheta})}$ abfällt. Man wählt also σ so groß als möglich, derart daß (2.51) gerade noch erfüllt ist. Alle Ausdrücke $\sim t^{-s}$ mit $s > \frac{1}{2} + \frac{1}{\vartheta} + \sigma$ in der Entwicklung von $\partial_t v$ verschwinden ohnehin und können für Konvergenzbetrachtungen unberücksichtigt bleiben.

Aus dem Skalenansatz ergibt sich mit $\xi = xt^{-1/\vartheta}$ und der Voraussetzung (2.44):

$$\begin{aligned} v(x, t) &= t^{-\frac{\omega}{\vartheta}} v^*(xt^{-\frac{1}{\vartheta}}) \\ \partial_t v(x, t) &= -\frac{1}{\vartheta} t^{-\frac{\omega}{\vartheta}-1} (\omega v^*(\xi) + \xi \partial_\xi v^*(\xi)) \\ |\partial_t v(0, t)| &\geq \frac{\omega}{\vartheta} t^{-(\frac{3}{2}-\frac{1}{\vartheta})} |v^*(0)| \quad \text{wegen } \omega \leq \delta \end{aligned} \quad (2.52)$$

Insgesamt ist also aufgrund von (2.51)

$$t^{-(\frac{3}{2}-\frac{1}{\vartheta})} \leq t^{-\frac{\omega}{\vartheta}-1} \leq t^{-(\frac{1}{2} + \frac{1}{\vartheta} + \sigma)} \quad (2.53)$$

für große Zeiten t zu lösen, was auf

$$1 \leq t^{-\frac{\omega+1}{\vartheta}+\frac{1}{2}} \leq t^{1-\frac{2}{\vartheta}-\sigma} \quad (2.54)$$

führt und wegen der Maximalität von σ zu¹

$$\sigma = 1 - \frac{2}{\vartheta} \in (0, 1) \quad (2.55)$$

$$\frac{\omega}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{2} \quad (2.56)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \delta \quad (2.57)$$

für die in der asymptotischen Entwicklung von $v(x, t)$ führenden Exponenten im $\delta > 0$ -Anteil.

Desweiteren ist dann für $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \partial_x^k \partial_t v(x, t) &= \partial_t \partial_x^k \left[t^{-\frac{\omega}{\vartheta}} v^*(xt^{-\frac{1}{\vartheta}}) \right] \\ &= \partial_t \left[t^{-\frac{(\omega+k)}{\vartheta}} \partial_\xi^k v^*(\xi) \right] \\ &= -\frac{1}{\vartheta} t^{-\frac{(\omega+k)}{\vartheta}-1} \left((\omega+k) \partial_\xi^k v^*(\xi) + \xi \partial_\xi^{k+1} v^*(\xi) \right) \\ |\partial_x^k \partial_t v(0, t)| &= \frac{(\omega+k)}{\vartheta} t^{-(\frac{3}{2}+\frac{k-1}{\vartheta})} |\partial_\xi^k v^*(0)| \end{aligned}$$

welche wegen $\vartheta > 2$ schließlich (2.50) erfüllen. Das bedeutet:

Falls die Lösung $v(x, t)$ von (2.14) für große Zeiten t ein Skalierungsverhalten (2.18) mit $\vartheta > 2$ ($\delta > 0$) erfüllt, dann gilt unter der Bedingung, daß die Grenzfunktion v^* der Folge $t^{\frac{\omega}{\vartheta}} v(x, t) \rightarrow v^*(xt^{-\frac{1}{\vartheta}}, t)$ zeitlich konstant ist auf $|x| < a$ („Fixpunktbedingung“) und die Folge der zeitlichen Ableitungen $\partial_t (t^{\frac{\omega}{\vartheta}} v(x, t))$ für $|x| < a$ gleichmäßig konvergiert, die Gleichung (2.52) mit (2.56). \square

¹Diese Argumentation erlaubt es, den Faktor L^{2n} auf der linken Seite von (2.45) stehenzulassen, weil er nur in die obere Schranke von (2.53) eingeht. Entfällt L^{2n} auf der linken Seite von (2.45), so haben die Entwicklungskoeffizienten die Form $\bar{K}_i = L^{-2n} K_i$. Damit lautet die obere Schranke von (2.54) $t^{1-\bar{\sigma}}$. Die Maximalität von $\bar{\sigma}$ führt dann mit $\bar{\sigma} = 1 = \sup \sigma$ (unabh. von ϑ) zum gleichen Ergebnis.

Mit der obigen Konvergenzvoraussetzung steht der Entwicklung des 2. Summanden aus (2.39) nichts mehr im Wege, was die Behauptung am Ende des Abschnitts 2.2 zum Nachweis der CAUCHY-Konvergenz auf $\Omega_{a,\mu}$ durch den Beweis der lokalen Konvergenz demonstriert:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [1, L^\vartheta]} \sup_{|x| < \varepsilon} |L^{\omega n} v(L^{-\delta(m-N)} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1+r} x t^{-\mu}, L^{\vartheta n} t)| \\ - L^{\omega m} v(L^{-\delta(m-N)} \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^{1+r} x t^{-\mu}, L^{\vartheta m} t)| \leq \|L^{\omega m} V_{n,m}(0, t)\|_{\varepsilon, \mu} \\ + C \|\partial_x V_{n,m}(0, t)\|_{\varepsilon, \mu} \varepsilon \\ + L^{-\vartheta m} \frac{C^2}{2!} \|\partial_x^2 V_{n,m}(0, t)\|_{\varepsilon, \mu} \varepsilon^2 \\ + L^{-2\vartheta m} \mathcal{O}(\varepsilon^3) + \dots \end{aligned}$$

wobei wie zuvor auch schon $m \geq n > N(a, \varepsilon)$ sein soll und

$$V_{n,m}(x, t) := L^{-\delta(m-n)} v(x, L^{\vartheta n} t) - v(x, L^{\vartheta m} t)$$

definiert wird. Dabei verschwindet der Term

$$\|L^{\omega m} V_{n,m}(0, t)\|_{\varepsilon, \mu} \stackrel{\omega \equiv \delta}{=} \|L^{\omega n} v(0, L^{\vartheta n} t) - L^{\omega m} v(0, L^{\vartheta m} t)\|_{\varepsilon, \mu} \xrightarrow{m, n \geq N(a, \varepsilon)} 0$$

aufgrund von (2.52). \square

Auch wenn noch hinreichende Bedingungen für $\delta > 0$ aus dem Anfangswertproblem festgelegt werden müssen, so erleichtert (2.56) die Suche nach dem Skalierungsverhalten deutlich. Außerdem genügt es, den Ort $x = 0$ zu betrachten, da nach obiger Argumentation dort zuerst ein mögliches Konvergenzverhalten in diesem Sinn erkennbar ist.

Die Überlegungen jedoch kann man auf alle Stellen x_o beziehen, an welchen $v(x_o, t) \rightarrow 0$ gilt und $|\partial_t v(x_o, t)|$ in einer Umgebung von x_o maximal ist. Dabei ist es durchaus möglich, daß ϑ und ω von den betrachteten Stellen x_o abhängen, weil das Skalierungsverhalten für ϕ ja nur lokal gewählt worden ist.

2.4 Bestimmung des Exponenten ω

Trotz aller schon bestehenden Zusammenhänge wäre die numerische Suche nach einem der Parameter, ω oder ϑ , ein zeitaufwendiges Unternehmen, wenn

man nicht weiß, wo man zu suchen hat. In diesem Abschnitt wird eine Möglichkeit angegeben den Exponenten ω aus der betrachteten Differentialgleichung zu bestimmen. Dabei sucht man wieder nach skaleninvarianten Anteilen im Störterm $F(v, \phi)$, welche in die Differentialgleichung für den möglichen Fixpunkt eingehen. Die Eigenschaften der dann entstandenen Fixpunktgleichung, insbesondere die Lösungssexistenz, lassen schließlich entsprechende Rückschlüsse auf den Skalenansatz zu. Solche Lösungsversuche werden selbst-konsistent genannt. Stehen die möglichen Skalierungsexponenten erst einmal fest, so erreicht man einen besseren Ausgangspunkt für einen rigorosen Konvergenzbeweis. Vorausgesetzt wird die Konvergenz des Skalenansatzes, (2.52) mit (2.56), um mit (2.49) Aussagen für eine Fixpunktgleichung zu bekommen.

Betrachtet man nun die Entwicklung von $F(v, \phi)$ aus (2.14) um $(0, 0)$ mit der Forderung, daß keine konstanten Terme und keine Ausdrücke der Form $\sim v$ vorkommen dürfen, so läßt sich mit $d_{ij} := i + d_\phi j$ (s. (2.22) und (2.24)) schreiben:

$$F(v, \phi) = \sum_{i \geq 2} z_{io} v^i + \sum_{i, j \geq 1} z_{ij} (v^i \cdot \phi^j) + \sum_{j \geq 1} z_{oj} \phi^j \quad (2.58)$$

$$:= V(v) + W(v, \phi) + Y(\phi) \quad (2.59)$$

$$V_L(v_L) = L^{\omega+\vartheta} \sum_{i \geq 2} L^{-i\omega} z_{io} v_L^i \quad (2.60)$$

$$W_L(v_L, \phi_L) = L^{\omega+\vartheta} \sum_{i, j \geq 1} z_{ij} L^{-d_{ij}\omega} (v_L^i \cdot \phi_L^j) \quad (2.61)$$

$$Y_L(\phi_L) = L^{\omega+\vartheta} \sum_{j \geq 2} z_{oj} L^{-d_\phi \omega j} \phi_L^j \quad (2.62)$$

$$F_L(v_L, \phi_L) = V_L(v_L) + W_L(v_L, \phi_L) + Y_L(\phi_L) \quad (2.63)$$

Sei nun zum ersten Koeffizienten $z_{i_*, j_*} \neq 0$ mit $i_* > 0$ die Zahl

$$d_* := i_* + d_\phi j_* \geq 2 \quad (2.64)$$

definiert. Dann führt die Wahl

$$\omega_* := \frac{2}{d_* - 1}, \quad \vartheta_* := 2 \cdot \frac{d_* + 1}{d_* - 1} \quad (2.65)$$

mit

$$\begin{aligned} -(d_{ij} - 1)\omega_* + 2 &= -2 \frac{d_{ij} - d_*}{d_* - 1} \\ -(d_* - 1)\omega_* + \vartheta_* &= 2\omega_* = \vartheta_* - 2 \end{aligned}$$

auf

$$\begin{aligned} F_L(v_L, \phi_L) &= L^{\vartheta_* - 2} \sum_{d_{ij}=d_*} z_{ij} (v_L^i \cdot \phi_L^j) + L^{\vartheta_* + \omega_*} \sum_{d_{ij} \neq d_*} z_{ij} L^{-d_{ij}\omega_*} (v_L^i \cdot \phi_L^j) \\ &= L^{2\delta_*} \sum_{d_{ij}=d_*} z_{ij} (v_L^i \cdot \phi_L^j) + L^{2\delta_* + \omega_* + 2} \sum_{d_{ij} \neq d_*} z_{ij} L^{-d_{ij}\omega_*} (v_L^i \cdot \phi_L^j) \\ &= L^{2\delta_*} \left[\sum_{d_{ij}=d_*} z_{ij} (v_L^i \cdot \phi_L^j) + \sum_{d_{ij} \neq d_*} z_{ij} L^{-2 \frac{d_{ij} - d_*}{d_* - 1}} (v_L^i \cdot \phi_L^j) \right] \quad (2.66) \end{aligned}$$

Diese Form ist durch (2.49) motiviert und läßt die folgenden Bezeichnungen sinnvoll erscheinen:

$$F_{d_*}^*(v_{L^n}, \phi_{L^n}) := \sum_{d_{ij}=d_*} z_{ij} v_{L^n}^i \phi_{L^n}^j \quad (2.67)$$

$$F_{d_*}^>(v_{L^n}, \phi_{L^n}) := \sum_{d_{ij}>d_*} z_{ij} L^{-n\omega_*(d_{ij}-d_*)} (v_{L^n}^i \phi_{L^n}^j) \quad (2.68)$$

$$Y_{d_*}^<(\phi_{L^n}) := \sum_{d_{\phi j} < d_*} z_{oj} L^{-n\omega_*(d_* - d_{\phi j})} \phi_{L^n}^j \quad (2.69)$$

Der Wert d_ϕ ist durch die TAYLOR-Reihe von ϕ um $(0, t)$ definiert worden, welche den Konvergenzradius $R(\phi)$ besitzt. Dieser geht in die Überlegungen mit ein, weil der Skalenansatz für ϕ nur dort gilt, wo die TAYLOR-Reihe die Funktion ϕ auch darstellt. Sei nun $r(\phi) \leq R(\phi)$.

Dann folgt unter der Voraussetzung

$$\bigwedge_{a < r(\phi)} \bigvee_{M(a) \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n > M(a)} \|\phi_{L^n}(x, t)\|_{a, \mu} \leq \|v_{L^n}(x, t)\|_{a, \mu} \quad (2.70)$$

für $n > \max(N(a, \varepsilon), M(a)) \geq 1$ ($N(a, \varepsilon)$ aus $a \leq \varepsilon L^{\delta n}$ für $n \geq N(a, \varepsilon)$)

$$\begin{aligned}
\|F_{d_*}^>(v_{L^n}, \phi_{L^n})\|_{a, \mu} &\leq \sum_{d_{ij} > d_*} |z_{ij}| L^{-2 \frac{d_{ij} - d_*}{d_* - 1} n} \|v_{L^n}^i \cdot \phi_{L^n}^j\|_{a, \mu} \\
&\leq \sum_{d_{ij} > d_*} |z_{ij}| L^{-2 \frac{d_{ij} - d_*}{d_* - 1} n} \|v_{L^n}\|_{a, \mu}^i \|\phi_{L^n}\|_{a, \mu}^j \\
&\leq \sum_{d_{ij} > d_*} |z_{ij}| L^{-2 \frac{d_{ij} - d_*}{d_* - 1} n} \|v_{L^n}\|_{a, \mu}^{d_{ij}} \\
&\stackrel{(*)}{\leq} C \sum_{d_{ij} > d_*} L^{-2 \frac{d_{ij} - d_*}{d_* - 1} n} \\
&\leq C' \left(\frac{1}{1 - L^{-\omega_* n}} - 1 \right) \\
&= C' \frac{L^{-\omega_* n}}{1 - L^{-\omega_* n}} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Die Stelle, an der die Beschränktheit von v_{L^n} vorausgesetzt wird, ist dabei mit $(*)$ gekennzeichnet und folgt aus der Konvergenz der Folge. Damit ist

$$C := \sup\{|z_{ij}| \|v_{L^n}(x, t)\|_{a, \mu}^{d_{ij}} \mid i, j \geq 0, d_{ij} > d_*\} < \infty$$

gesetzt worden.

Der Term $Y_{d_*}^<$ läßt sich nicht ohne Benutzung zusätzlicher Eigenschaften von ϕ , wie z.B. ein eigenes Skalenverhalten, abschätzen. Ein solches Beispiel wird in den Ergebnissen noch dargestellt. An dieser Stelle aber kann man schon erkennen, daß in einigen Fällen der gesuchte Skalierungsexponent nicht verschieden von ω_* gewählt werden kann.

1. Sei $Y_{d_*}^< = 0$.

Zu ω_* und ϑ_* läßt sich die Fixpunktgleichung für $v^*(\xi)$, $\xi = xt^{-\frac{1}{\vartheta_*}} < r(\phi) \leq R(\phi)$ berechnen, welche die Form

$$\partial^2 v^* + F_{d_*}^*(v^*, \phi) + \underbrace{t^{-2 \frac{\omega_*}{\vartheta_*}} \frac{1}{\vartheta_*} (\omega_* v^* + \xi \partial v^*)}_{\xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0} + F_{d_*}^>(v^*, \phi) = 0 \tag{2.72}$$

hat. Daran sieht man:

(I) Je kleiner der Konvergenzradius $R(\phi)$ bzw. $r(\phi)$ ist, desto schwächer breitet sich das Konvergenzgebiet für den Fixpunkt aus.

(II) Je schneller die TAYLOR-Reihe von ϕ gegen ϕ konvergiert, also das Restglied des TAYLOR-Polynoms verschwindet, desto schneller erfüllt v^* die Fixpunktgleichung.

Angenommen, es gäbe nun ein $\bar{\omega} > \omega_*$, derart daß $(v_{L^n})^{(\bar{\omega})} \rightarrow v^*$ gilt. Dann würde sich die triviale Fixpunktgleichung $\partial^2 v^* = 0$ ergeben.

Denn aus $\frac{2}{\bar{d}-1} := \bar{\omega} > \omega^*$ folgt $\bar{d} < d_*$ und somit gilt $F_{\bar{d}}^* = 0$, also $F_{\bar{d}}^> = F$, weil $Y_{d_*}^< = 0$ ist.

Die entstehende Gleichung für v^* aber besitzt keine sinnvollen Lösungen mehr für das gestellte Problem. Also gilt $\bar{\omega} \leq \omega_*$.

Angenommen, es gäbe nun ein $0 < \frac{2}{\bar{d}-1} := \bar{\omega} < \omega_*$, derart daß $(v_{L^n})^{(\bar{\omega})} \rightarrow v^*$ gilt, also $\bar{d} > d_*$ ist. Wegen $2\bar{\omega} = 2\bar{\delta} = \bar{\vartheta} - 2 > 0$ existiert dann auch die Abschätzung $2 < \bar{\vartheta} < \vartheta_*$. Diese Relationen können aber nicht für alle d_* Bestand haben, weil mit $d_* \rightarrow \infty$, also auch $\bar{d} \rightarrow \infty$, sich $0 \leq \bar{\omega} \leq 0$ und $2 \leq \bar{\vartheta} \leq 2$ ergibt.

Bleibt $d_* < \infty$, so kann deshalb nur $\bar{\omega} = 0$ und $\bar{\vartheta} = 2$ sein. Denn rechnet man $F_{d_*}^*$ zu \bar{d} um, so ergeben sich i.a. Terme der Form $L^{-n\bar{\omega}(d_{ij}-\bar{d})}(v_{L^n}^i \phi_{L^n}^j)$ mit $d_{ij} < \bar{d}$, die sich für $n \rightarrow \infty$ durch die vorausgesetzte Konvergenz von v_{L^n} nicht beschränken lassen. Mithin kann dann keine Fixpunktgleichung entstehen.

Aufgrund dieser beiden Überlegungen muß $\bar{\omega} = \omega_*$ ($\delta > 0$) oder $\bar{\omega} = 0$ und $\bar{\vartheta} = 2$ ($\delta = 0$) sein.

2. Sei $Y_{d_*}^< \neq 0$.

Die Anteile aus $Y_{d_*}^<$ werden durch die Iteration der Skalierungsabbildung nicht unterdrückt. Deshalb müßte die Wahl des Skalierungsexponenten $\frac{2}{\bar{d}-1} := \bar{\omega}$ in dieser Situation so angepaßt werden, daß sich $Y_{\bar{d}}^< = 0$ ergibt. Dann könnte sich obige Argumentation anschließen.

Um das zu erreichen wird \bar{d} zum ersten Summanden von $\sum_{j=\bar{j}}^m z_{oj} \phi^j$ mit

$1 < d_{\phi\bar{j}} < \dots < d_{\phi m} < d_*$ definiert, analog zu d_* , also $\bar{d} = d_{\phi\bar{j}} > 1$ ($z_{ok} = 0$ für $k < \bar{j}$ und $z_{o\bar{j}} \neq 0$).

Dann aber hätte die Fixpunktgleichung für den Fixpunkt \bar{v} mit $\Phi(x, t) := \phi^{\bar{j}}(x, t)$ die Gestalt

$$\partial^2 \bar{v} + \Phi = 0$$

weil es sonst keine skaleninvarianten Anteile gibt.

Das bedeutet, daß sich für große Zeiten t der Störungsterm F schreiben läßt als $F(v, \phi) = \Phi + G(v, \phi) = -\bar{v}'' + G(v, \phi) = \bar{F}(v, v'', \phi)$ mit $G \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Nichtlinearitäten der Form $F(v, v', v'')$ fallen in die Klasse der von BRICMONT und KUPIAINEN untersuchten partiellen Differentialgleichungen (s. [Bric93/II] und 1.2.2). Für solche ist allerdings ein anderes Skalenverhalten schon nachgewiesen.

Um also mögliche Konflikte mit bereits bestehenden Ergebnissen zu vermeiden, sollen die Fälle $Y_{d_*}^< \neq 0$ hier ausgeschlossen werden. Dieses Argument ist eher heuristischer Natur und soll keinesfalls bedeuten, daß es Systeme mit solchem Skalenverhalten zum konstruierten $\bar{\omega}$ nicht gibt.

Die Betrachtungen beschränken sich also auf den Fall $Y_{d_*}^< = 0$. □

Insgesamt wurde in diesem Abschnitt, wie zuvor auch, die Konvergenz der Folge v_{L^n} im Sinne von (2.43) und (2.44) bzw. (2.52) vorausgesetzt, und ein Vorschlag zur Wahl des Skalierungsexponenten ω_* im Falle $\delta > 0$ gemacht, welcher sich aus der Widerspruchsfreiheit und Eindeutigkeit der Fixpunktgleichung (wegen (2.22) und (2.70)) begründet. Der zweite Parameter ϑ_* wurde mittels $2\delta_* = 2\omega_* = \vartheta_* - 2$ aufgrund der Überlegungen aus 2.3 berechnet.

Allgemein hängt demnach die Wahl von ω_* zu $\delta > 0$ vom lokalen Verhalten der Funktion ϕ an der betrachteten Stelle x_o , die in den Herleitungen auf $x_o = 0$ reduziert wurde, ab. Ebenso beeinflusst der Störungsterm F , dessen TAYLOR-Entwicklung eine spezielle Form haben soll (s. (2.58)), die Wahl von ω_* . Beschränkt man sich auf Fälle, in denen $Y_{d_*}^< = 0$ gilt, so konnte man die Differentialgleichung für v^* berechnen (s. (2.72)). Das Konvergenzgebiet für den Fixpunkt v^* wird durch $r(\phi) \leq R(\phi)$ aus (2.70) bestimmt, welches ebenfalls i.a. von x_o abhängt.

Abschließend sei noch bemerkt, daß mit $d_* \rightarrow \infty$ auch $\vartheta_* \rightarrow 2$ und $\omega_* \rightarrow 0$ gilt. Es entsteht dadurch ein Skalierungsverhalten, wie es in 1.3 schon diskutiert wurde (vgl. (1.144)). Anschaulich bedeutet dieser Übergang, daß die Terme, welche den Diffusionsprozeß stören, irrelevant werden und das Langzeitverhalten sich dem der Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}})$ nähert. Diese Terminologie ist bewußt an jene aus den Kapiteln zuvor angelehnt, in denen die Nichtlinearitäten $F(v, v', v'')$, welche sich nicht auf das Langzeitverhalten der ungestörten Diffusion auswirken, so genannt werden.

2.5 Anschluß an bisherige Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird die Übereinstimmung zwischen ω_* und ϑ_* aus 2.4 und den Ergebnissen anderer Veröffentlichungen dargestellt. Die Autoren leiten in allen Fällen das Skalenverhalten anders als bislang gezeigt her, insbesondere nutzen sie dafür spezielle Eigenschaften des behandelten Problems. Der Vorteil obiger Formulierung ist deshalb der allgemeine Charakter. Die Voraussetzung $\delta > 0$ läßt sich noch nicht nachweisen, weil hinreichende Bedingungen dafür nicht bekannt sind. Eine Idee dazu ist aber das folgende

Vergleichsprinzip:

Besitzt das Anfangswertproblem (2.14) an der Stelle $\phi = 0$ für $t \rightarrow \infty$ eine Lösung mit dem Skalenverhalten

$$v_o(x, t) = t^{-\lambda_o} v_o^*(x t^{-\frac{1}{2}}) \quad (2.73)$$

und gilt für alle Zeiten $t \geq 1$

$$F(v, \phi) \geq F(v, 0) \quad (2.74)$$

sowie die Ungleichung (2.70), $d_* \geq 2$ und $Y_{d_*}^< = 0$, so kann man in der Entwicklung der Lösung v von (2.14) für große Zeiten t einen $\delta_* > 0$ -Anteil erwarten, das heißt sie hat mit $\Delta_o, \Delta_* \in \mathbb{N}_o$ um $x = 0$ die Gestalt

$$v(x, t) = \sum_{i=0}^{\Delta_o} t^{-\lambda_i} f_i(x t^{-\frac{1}{2}}) + \sum_{j=0}^{\Delta_*} t^{-\mu_j \frac{\omega_*}{\vartheta_*}} g_j(x t^{-\frac{1}{\vartheta_*}}) \quad (2.75)$$

$$\mu_o = 1 \quad (2.76)$$

$$\frac{\omega_* + 1}{\vartheta_*} = \frac{1}{2} \quad (2.77)$$

„Beweis“:

Zu zeigen ist nur noch, daß der Fall $\delta > 0$ eintritt. Die restliche Argumentation verläuft wie in den vorangegangenen Abschnitten und drückt eine sogenannte selbst-konsistente Lösung aus, weil gezeigt wurde, daß der gemachte Skalenansatz unter den oben genannten Voraussetzungen nicht auf Widersprüche führt.

Nun bedeutet die Gleichung (2.74), daß zu allen Zeiten $t \geq 1$

$$\partial_x^2 v + F(v, \phi) \geq \partial_x^2 v + F(v, 0)$$

gilt. Unter der Voraussetzung (2.73) folgt dann

$$\partial_t v \geq \partial_t v_o$$

und weil $v(x, 1) \geq v_o(x, 1)$ somit auch für große Zeiten

$$v(x, t) \geq t^{-\lambda_o} v_o^*(xt^{-\frac{1}{2}})$$

Man vergleicht also die partielle Differentialgleichung (2.14) an der Stelle $\phi = 0$ mit Systemen, für deren Lösung v_o ein Skalenverhalten $v_o \sim t^{-\lambda_o} v_o^*(xt^{-\frac{1}{2}})$ nachgewiesen wurde. Solche Gleichungen beschreiben, wie in 2.3 schon erläutert wurde, einen Prozeß \mathcal{P}_o , der sich wie die übliche Diffusion im Ortsraum ausbreitet. Gilt dann $F(v, \phi) > F(v, 0)$, so muß die gesuchte Lösung v sich räumlich langsamer als $t^{-\frac{1}{2}}$ ändern, was gerade der anschaulichen Bedeutung von $\delta > 0$ entspricht.

Die folgenden Beispielsysteme führen mit dem Vergleichsprinzip immer auf eine partielle Differentialgleichung der Gestalt

$$\partial_t v_o = \partial_x^2 v_o - v_o |v_o|^{p-1}, \quad p > 1$$

für deren Lösung mit $t \rightarrow \infty$ ein Skalenverhalten

$$v_o(x, t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{p-1}} v_o^*(xt^{-\frac{1}{2}}), & p < 3 \\ t^{-\frac{1}{2}} v_o^*(xt^{-\frac{1}{2}}), & p \geq 3 \end{cases}$$

durch [Bric94] bekannt ist. Insbesondere für $p > 3$ wurde dies im ersten Kapitel dieser Arbeit gezeigt. Demnach sind entsprechende Entwicklungen wie (2.75) zu erwarten. \square

Nun werden Beispiele betrachtet, die zum Teil aus den Veröffentlichungen anderer Arbeitsgruppen stammen. Die folgenden Aussagen über das Skalenverhalten beziehen sich nur auf den führenden Term im Δ_* -Anteil von (2.75), die Konvergenz der Folge v_{L^n} wird wie in 2.3 und 2.4 vorausgesetzt. Insbesondere wird nicht auf die Voraussetzung (2.70) eingegangen. Es geht nur um die Demonstration von (2.65).

1. Gegeben sei (2.9) mit $p, q > 0$, $p + q \geq 2$:

Die Fehlerfunktion $u(x, t)$ ist um $(0, t)$ linear, also ist $d_u = 1$. Nach (2.22) ergibt sich $u_L^q(x, t) = L^{q\omega} u^q(Lx, L^\vartheta t)$.

Nach der Definition von d_* in (2.64) hat man hier also $d_* = p + q$ zu setzen. Die skalierte Gleichung lautet also mit $s := p + q - 1 = d_* - 1$ an der verschobenen Stelle $\tilde{x} := x - x_R$ (vgl. (2.12) in 2.1):

$$\begin{aligned} L^{-2\delta n} \partial_t v_{L^n} &= \partial_{\tilde{x}}^2 v_{L^n} + 2d_R L^{-\delta n} t^{-\frac{1}{2}} \partial_{\tilde{x}} v_{L^n} \\ &\quad - 2^{-s} L^{(2-\omega s)n} (v_{L^n} + u_{L^n})^p (v_{L^n} - u_{L^n})^q \end{aligned}$$

Wählt man nun

$$\omega_* = \frac{2}{s}, \quad \vartheta_* = 2 \cdot \frac{2+s}{s}$$

so ergibt sich $Y_{d_*}^< = 0 = F_{d_*}^>$, $L^{-\delta n} t^{-\frac{1}{2}} \partial_x v_{L^n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und

$$F_{d_*}^*(v^*, u) = -2^{-s} (v^* + u)^p (v^* - u)^q$$

Man kann also ein Skalenverhalten

$$\begin{aligned} v(x, t) &= t^{-\frac{1}{2+s}} v^*(xt^{-\frac{s}{2(2+s)}}) \\ \partial^2 v^* &= 2^{-s} (v^* + u)^p (v^* - u)^q \end{aligned}$$

erwarten.

Diese Ergebnisse sind nachzulesen bei [Droz91] [Droz92] und [Magn2000]; für die spezielle Wahl $p = q = 1$ findet man die Arbeiten von [Galf84] und [Witt91].

Mit einer anderen Klasse von Startwerten wurde das System für $p = q \geq 4$ durch [Witt99] behandelt. Es zeigt sich eine Entwicklung der Form (2.75),

ebenfalls mit den Exponenten ω_* und ϑ_* im Δ_* -Anteil und $\lambda_o = 0$.

2. Sei nun mit $q \geq p > 1$ die Gleichung

$$\partial_t v(x, t) = \partial_x^2 v(x, t) - v^p(x, t) + |u(x, t)|^q \quad (2.78)$$

betrachtet, wobei $u(x, t)$ aus (2.11) ist und die Startbedingungen (2.10) mit $k = 1$ gelten sollen.

Der Fall $k \neq 1$ lässt sich analog zum ersten Beispiel behandeln: durch die eingeführte Schwerpunktkoordinate $\tilde{x} = x - x_R$ entsteht wieder ein irrelevanter Zusatzterm. Das Skalenverhalten wurde für $p = q = 2$ durch [Galf84] und [Witt91] bestimmt.

Hier gilt analog zum ersten Beispiel $d_* = p$. Die skalierte Gleichung nimmt mit

$$\omega_* = \frac{2}{p-1}, \quad \vartheta_* = 2 \cdot \frac{p+1}{p-1}$$

die Form

$$\begin{aligned} L^{-2\delta n} \partial_t v_{L^n}(x, t) &= \partial_x^2 v_{L^n}(x, t) - L^{(2-\omega(p-1))n} v_{L^n}^p(x, t) + L^{(2-\omega(q-1))n} |u_{L^n}(x, t)|^q \\ &= \partial_x^2 v_{L^n}(x, t) - v_{L^n}^p(x, t) + L^{-2n \frac{q-p}{p-1}} |u_{L^n}(x, t)|^q \\ F_{d_*}^*(v_{L^n}, u_{L^n}) &= -v_{L^n}^p \\ F_{d_*}^>(v_{L^n}, u_{L^n}) &= L^{-2n \frac{q-p}{p-1}} |u_{L^n}|^q \\ Y_{d_*}^<(u_{L^n}) &= 0 \end{aligned}$$

an. Das Vergleichsprinzip ist hier offensichtlich erfüllt: $-v^p + |u|^q \geq -v^p$. Die Fixpunktgleichung hat für $|xt^{-\frac{1}{\vartheta}}| < r(\phi)$ die fast einfache Form

$$\partial^2 v^* - (v^*)^p = \begin{cases} -|u|^p, & q = p \\ 0, & q > p \end{cases}$$

Überdies stellt sich auch in einigen Fällen mit $q < p$ eine sehr schwache Konvergenz der skalierten Lösungen $t^{\frac{1}{p+1}} v(xt^{\frac{p-1}{2(p+1)}}, t)$ gegen eine feste Funktion $v^*(x)$ um die Stelle $x = 0$ heraus. Diese ist jedoch nicht allein auf die Argumentation aus 2.4 mit $Y_{d_*}^< = 0$ zurückführbar, weil bei einer solchen

Parameterwahl $Y_{d_*}^< \neq 0$ ist, was in den Herleitungen zuvor ausgeschlossen worden war.

Eine solche Konvergenz beruht unter o.g. Skalenansatz auf dem von $u(x, t) = u(\frac{1}{2}xt^{-\frac{1}{2}})$ mitgebrachten Skalenverhalten. Dies erkennt man, wenn man die Fixpunktgleichung

$$\partial^2 v^* - (v^*)^p + |t^{\frac{p-q}{p+1}} u(\xi, t)|^q = 0$$

für kleine ξ betrachtet. Es ergibt sich der Term

$$\begin{aligned} |t^{\frac{p-q}{p+1}} u(\xi, t)|^q &= t^{\frac{p-q}{p+1}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \xi t^{-\frac{1}{2}} \right)^q + \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\xi t^{-\frac{1}{2}})^3 \right)^q + \dots \right] \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \xi \right)^q t^{\frac{2p-q(p+3)}{2(p+1)}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \xi^3 \right)^q t^{\frac{2p-q(3p+5)}{2(p+1)}} + \dots \end{aligned}$$

Um nun überhaupt so etwas wie Konvergenz am Ursprung zu dem gemachten Skalenansatz beobachten zu können muß also

$$2p \leq q(p+3) \tag{2.79}$$

gelten, weil damit die Summanden der Entwicklung für große t allmählich verschwinden bzw. sich auf den ersten reduzieren. Mithin breitet sich die Konvergenz langsam aus, weil $r(\phi)$ aus (2.70) für $q < p$ sehr viel kleiner ist als für $p \leq q$. Ist (2.79) nicht erfüllt, so kann man erwarten, daß ein $r(\phi)$ aus (2.70) gar nicht existiert.

Die verschiedenen Situationen werden anhand von numerischen Simulationen in 2.6 veranschaulicht.

3. Diese folgenden Gleichungen werden bei [Baz2000/II] ausführlich diskutiert. Sie entspringen den Gleichungen (2.1) und (2.2) mit $D_b = 0$ und sollen hier als Anwendungsbeispiel obiger Methode zitiert werden, weil diese die gleichen Resultate (selbst-konsistent) liefert, welche die Autoren von [Baz2000/II] festgestellt haben, allerdings ohne deren ausführliche Fallunterscheidung. Die Besonderheit gegenüber den anderen Modellen liegt darin, daß der Störterm ϕ wieder von der gesuchten Funktion abhängt.

(I) Betrachtet man das Anfangswertproblem

$$\partial_t a(x, t) = \partial_x^2 a(x, t) - H(x) [a(x, t)]^m e^{-q\phi(x, t)} \quad (2.80)$$

$$a(x, 1) = H(x) \quad (2.81)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a(x, t) = 0 \quad (2.82)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x, t) = 1 \quad (2.83)$$

$$\phi(x, t) := \int_1^t a^m(x, \tau) d\tau \quad (2.84)$$

mit $q > 0$ und $m \geq 2$ konstant, so erhalten die Gleichungen (2.80) und (2.84) nach der Transformation die Form

$$\begin{aligned} \partial_t a_{L^n} &= L^{-2\delta n} \partial_x^2 a_{L^n} - L^{(\vartheta - \omega(m-1))n} H_{L^n} [a_{L^n}]^m \exp(-q\phi_{L^n}) \\ \phi_L(x, t) &= \int_1^t a_L^m(x, \tau) d\tau = \int_1^t L^{\omega m} a^m(Lx, L^\vartheta \tau) d(L^\vartheta \tau) \\ &= L^{\omega m} \phi(Lx, L^\vartheta t) \end{aligned}$$

Mit $a_{L^n} \rightarrow a^*$ (lokal glm.) gilt dann

$$\phi_{L^n}(x, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_1^t [a^*(x, \tau)]^m d\tau =: \phi^*(x, t)$$

Das Skalenverhalten von ϕ ist aufgrund von (2.22) durch den in ϕ vorkommenden Term a^m zu definieren, also $\phi_L(x, t) = L^{\omega m} \phi(Lx, L^\vartheta t)$.

Die Exponenten lauten nach 2.4

$$\omega_* = \frac{2}{m-1}, \quad \vartheta_* = 2 \cdot \frac{m+1}{m-1}$$

denn a^m ist die in (2.80) führende Nichtlinearität, welche in die Bestimmung von $d_* = m$ eingeht.

(II) Nun sei zu $k > 1$ die Gleichung

$$\partial_t a = \partial_x^2 a(x, t) - \frac{H(x) [a(x, t)]^m}{[1 + q(k-1)\phi(x, t)]^{k/(k-1)}}$$

gegeben mit ϕ aus (2.84) und denselben Start- und Randbedingungen wie oben. In diesem Fall gilt dann

$$[1 + q(k-1)\phi_{L^n}(x, t)]^{k/(k-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} [1 + q(k-1)\phi^*(x, t)]^{k/(k-1)}$$

Da die TAYLOR-Entwicklung von $(1+x)^{-\frac{k}{k-1}} = 1 + \dots$ um $x = 0$ mit 1 beginnt, müssen ω_* und ϑ_* wie zuvor gewählt werden, weil a^m erneut der führende Term ist. Daraus ergibt sich also das gleiche Skalenverhalten wie im ersten Fall

$$a(x, t) = t^{-\frac{1}{m+1}} a^*(xt^{-\frac{m-1}{2(m+1)}})$$

unabhängig von k , wie es auch von den Autoren bestätigt wird. \square

2.6 Numerische Ergebnisse

Hier werden einige Simulationen vorgestellt, die die Zusammenhänge der vorstehenden Abschnitte verdeutlichen. Die Resultate der numerischen Analyse haben, damit die zugehörigen Daten nicht versehentlich gemischt werden, jeweils einen charakteristischen Namen, welcher im Titel der Abbildungen durch [SYSTEMNAME] ersichtlich ist. Weitere Erläuterungen zur benutzten Differentialgleichung und den Startbedingungen befinden sich im beigefügten Text. Alle weiteren Bezeichnungen entnimmt man, sofern sie sich auf numerische Aspekte beziehen, den sich anschließenden Kapiteln 3.1 und 3.2.

Alle Simulationen wurden mit einer Zeitgitterkonstante $k = 0.05$ (s. (3.24)) und einer Ortsgitterkonstante $h = 0.1$ (s. (3.23)) durchgeführt, weil sich die Wahl dieser Werte als guter Kompromiß zwischen Rechenaufwand und Ergebnisqualität erwiesen hat. Der erwartete Fehler einer berechneten Lösung liegt in der Ordnung $\mathcal{O}(h^2 + k^2) \approx 0.0125$ (s. (3.39)) und ist natürlich von den betrachteten Nichtlinearitäten abhängig.

Alle Skalierungen wurden zum Wert $L = 1.18$ vorgenommen, das heißt also, daß zu den Zeiten

$$t_n = L^{\vartheta_* n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

die Lösung v der Umrechnung

$$v(x, t_n) \mapsto t_n^{\frac{\omega_*}{\vartheta_*}} v(x t_n^{\frac{1}{\vartheta_*}}, t_n) = v_{L^n}(x, 1)$$

unterzogen wurde. Bei einer Konvergenz ist $v_{L^n} \rightarrow v^*$ mit $\dot{v}(x, t) = 0$ für genügend kleine $|x|$ zu beobachten. Diese Zeiten t_n stehen zum jeweils benutzten ϑ_* in der Legende der Abbildungen, wobei die ersten Folgeglieder zugunsten einer besseren Übersicht oft wegefallen.

2.6.1 Fehleranalyse

Bevor auf die interessierenden Simulationen eingegangen wird, soll ein kurzer Vergleich zwischen exakter und numerische Lösung vorangestellt werden. Dazu wurde

$$u(x, t) = D\partial_x^2 u(x, t) \quad (2.85)$$

$$u(x, 1) = -\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{(1+(x-4)^2)} + \frac{1}{(1+(x+4)^2)} \quad (2.86)$$

mittels GAUß-Faltung und Simulation für die Zeit $t = 20000$ zu verschiedenen D berechnet. In den Bildern bezeichnet $g(x, t)$ die GAUß-Lösung.

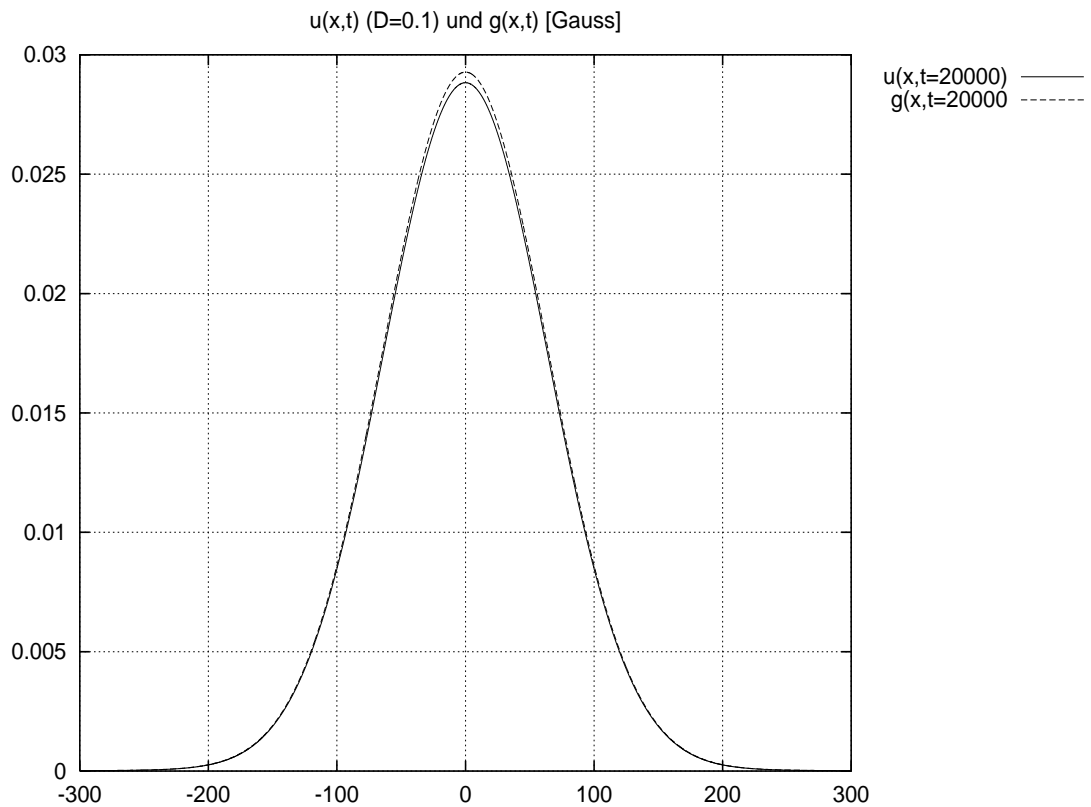


Abb.: 2.2

In Abb. 2.2 erkennt man $u(x, t)$ als numerische und $g(x, t)$ GAUß-Lösung von (2.85) zu $D = 0.1$ und (2.86) mit $t = 20000$. Die Abweichung an der Stelle $x = 0$ liegt unterhalb der eingangs erwähnten Fehlergrenze von 0.0125. Mit diesem Fehler stimmen die Kurven also überein.

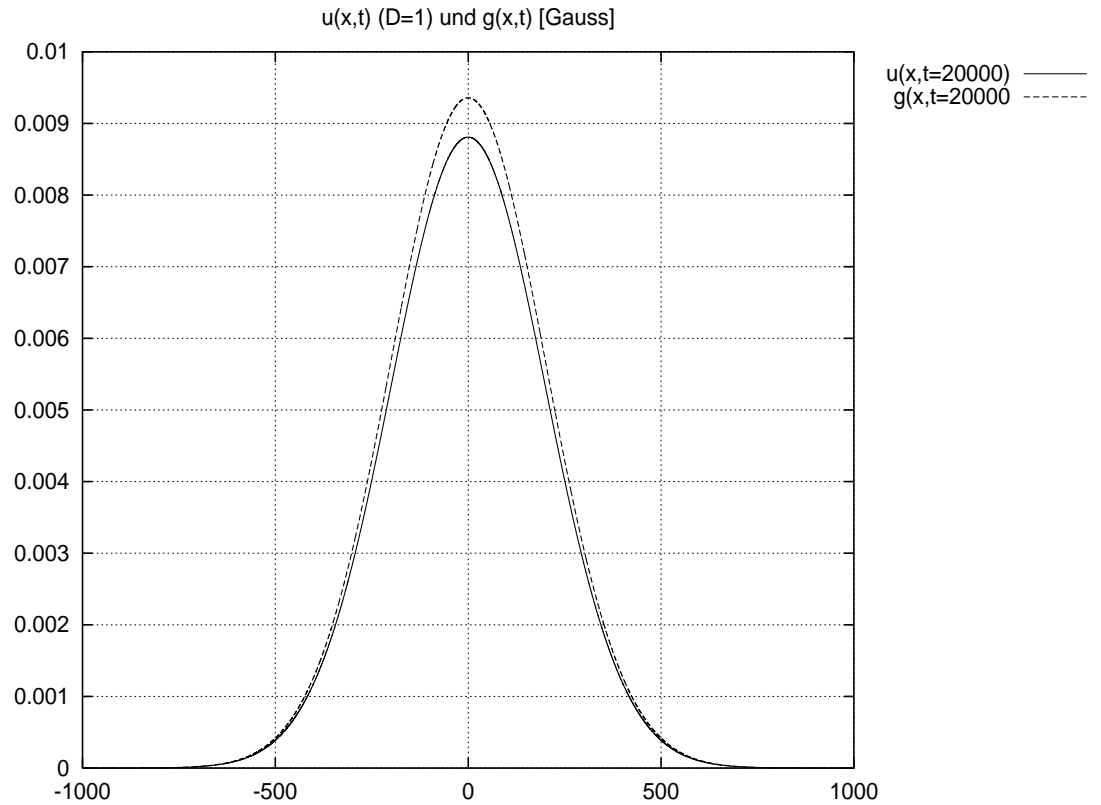


Abb.: 2.3

Analog zu Abb. 2.2 wird hier der Vergleich zwischen exakter $g(x, t)$ und numerischer Lösung $u(x, t)$ von (2.85) zu $D = 1$ dargestellt. Wieder erkennt man, daß die Abweichung an der Stelle $x = 0$ maximal wird, jedoch liegt die Differenz der beiden Kurven immer noch unterhalb der Fehlergrenze von 0.0125.

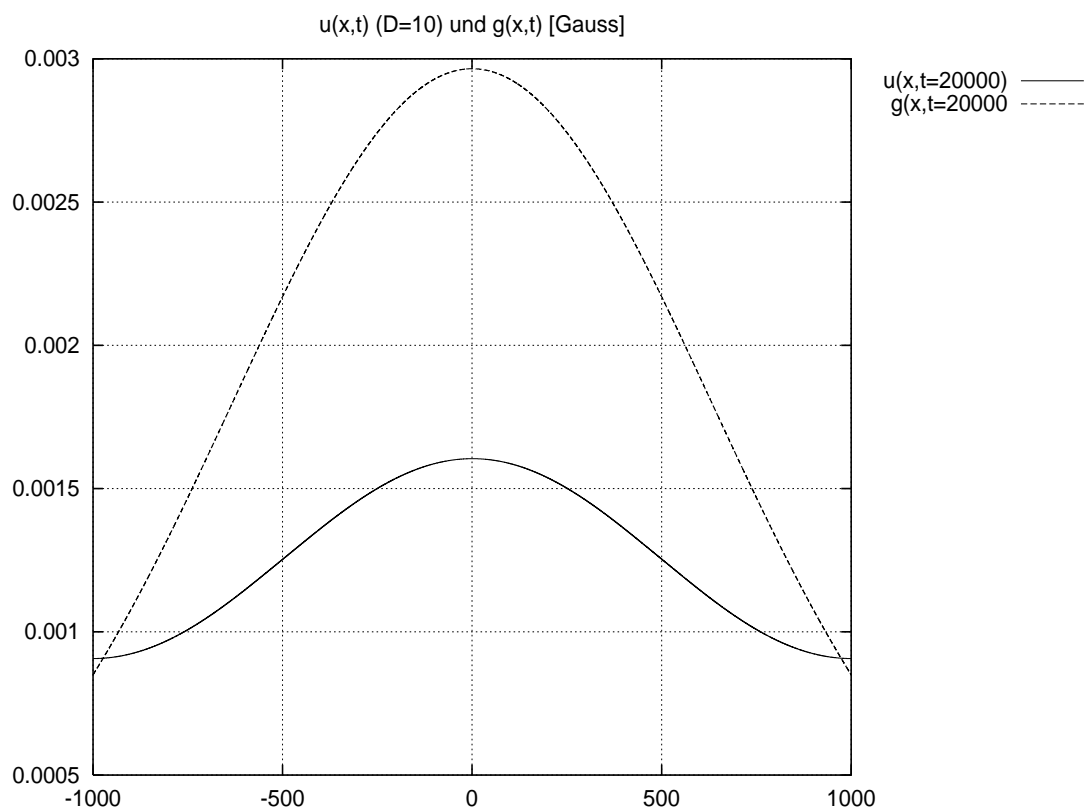


Abb.: 2.4

In diesem Beispiel wurde (2.85) zu $D = 10$ numerisch $u(x, t)$ und exakt $g(x, t)$ bestimmt. Man erkennt, daß die periodischen Randbedingungen die numerische Lösung u so stark verändern, daß von einer Übereinstimmung mit der exakten Lösung nicht mehr gesprochen werden kann. Die periodischen Ränder sind aber durchaus sinnvoll, wenn man wissen muß, zu welcher Zeit t eine numerische Lösung die Begrenzung durch das Ortsgitter erreicht.

2.6.2 Nirel

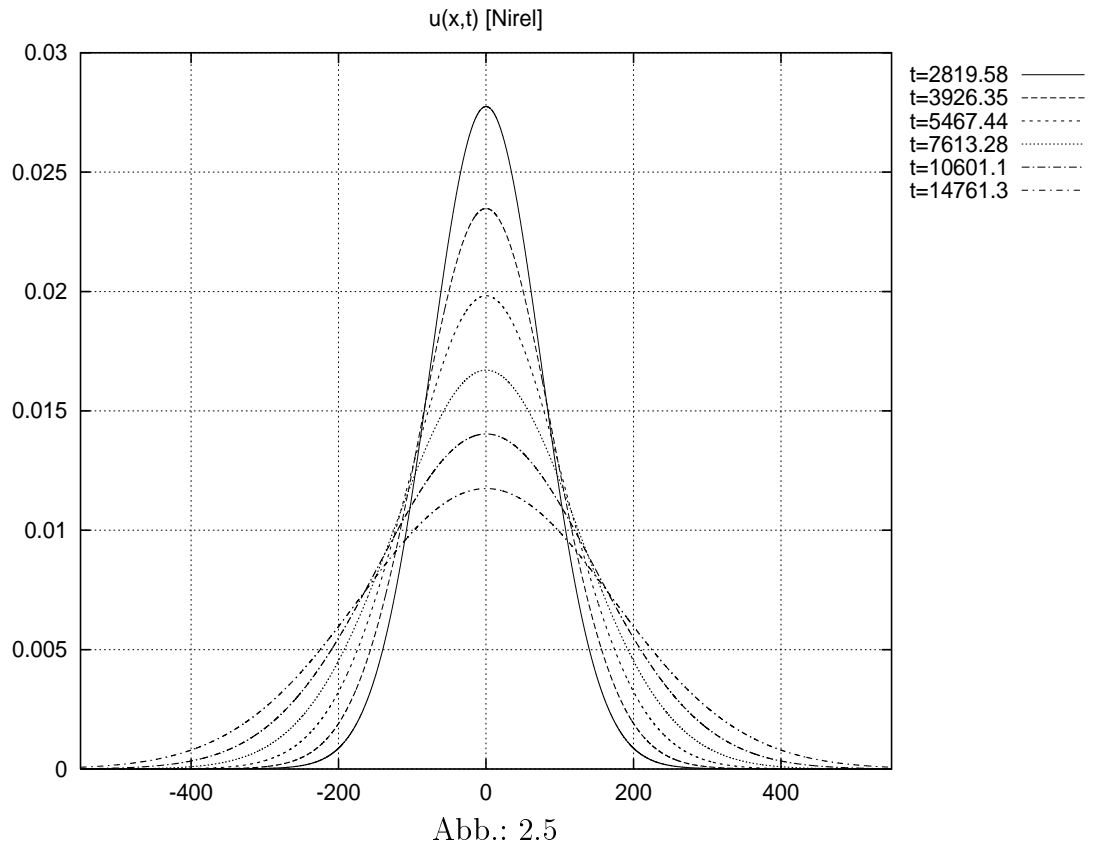


Abb.: 2.5

Die Abb. 2.5 zeigt die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\dot{u} = u'' + u^6 \quad (2.87)$$

$$u(x, 1) = -\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{(1+(x-4)^2)} + \frac{1}{(1+(x+4)^2)} \quad (2.88)$$

zu den in der Legende gekennzeichneten Zeiten t .

Nach dem Kapitel 1.2.2 soll diese Lösung für große t ein Skalierungsverhalten der Form $t^{\frac{1}{2}}u(xt^{\frac{1}{2}}, t)$ aufweisen, weil der Störungsterm u^6 nach der Definition zu (1.27) irrelevant ist.

Die Skalierungen der Kurven in Abb. 2.5 werden in Abb. 2.6 dargestellt.

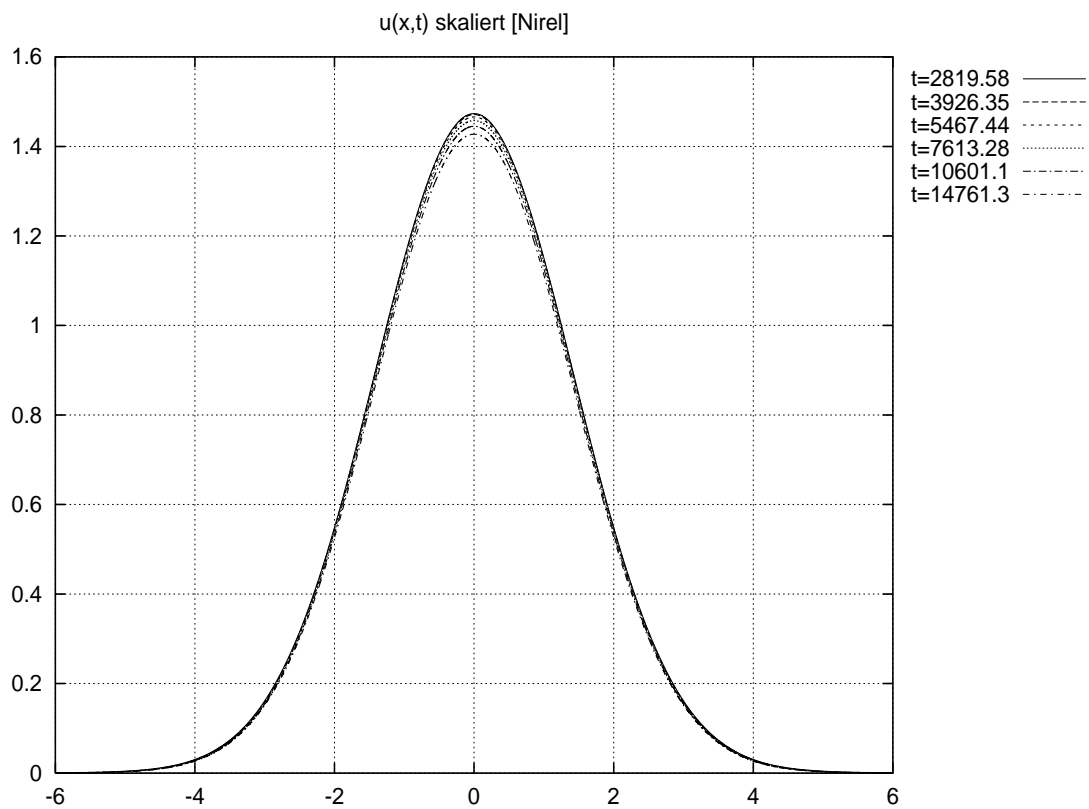


Abb.: 2.6

Dies ist die skalierte Lösung $u(x, t)$ des Anfangswertproblems (2.87) gemäß

$$t^{\frac{1}{2}} u(x t^{\frac{1}{2}}, t) = A f_o^*(x) = \frac{A}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \quad (2.89)$$

Man erkennt ohne Schwierigkeit den GAUß-Fixpunkt aus (2.89). Die Abweichung der Kurven voneinander an der Stelle $x = 0$ liegt unterhalb des erlaubten Fehlers.

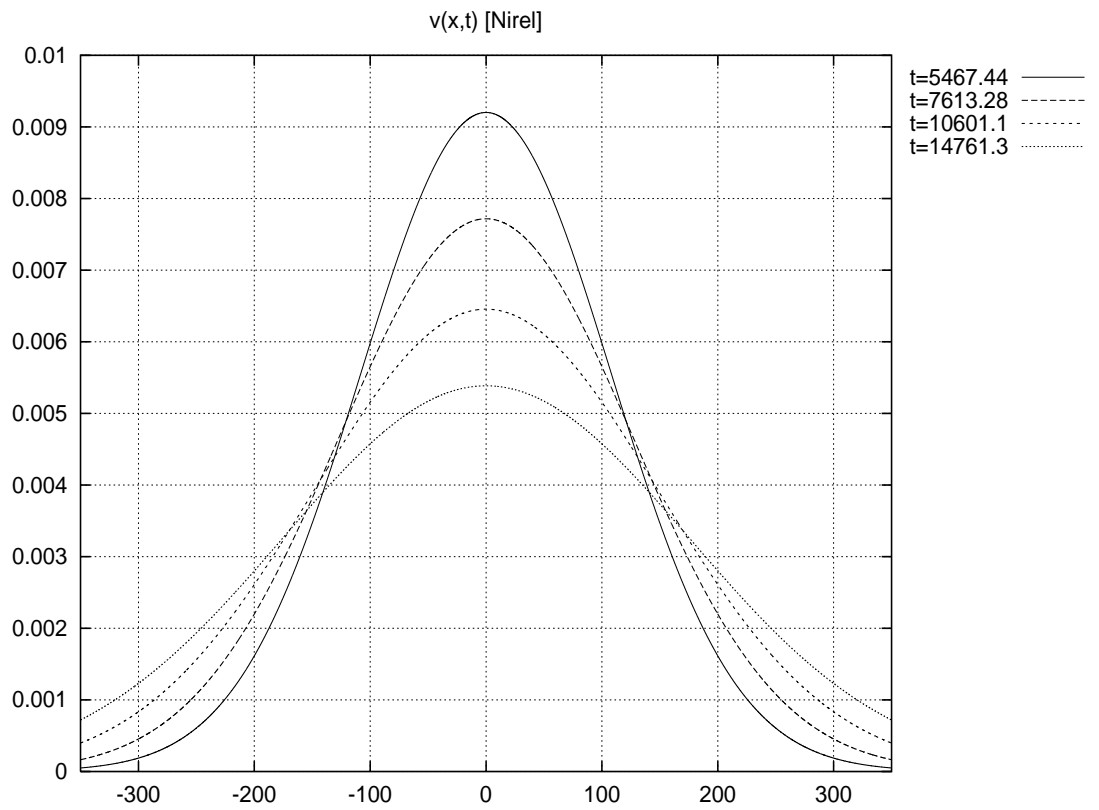


Abb.: 2.7

Ein weiteres Beispiel zum irrelevanten Fall 1.2.2 sei mit

$$\dot{v} = v'' - v^{\frac{7}{2}}$$

zum Startwert (2.86) angeführt, deren Lösung zu den Zeiten $t = (1.18)^{2n}$, $n = 23, \dots, 29$ in der Abbildung 2.7 aufgezeichnet sind. Auch für diese wird ein Skalenverhalten $t^{\frac{1}{2}}v(xt^{\frac{1}{2}}, t)$ vermutet. Man beachte aber, daß $F(v) = -v^{\frac{7}{2}}$ nicht mehr analytisch an der Stelle 0 ist, so wie es in der Voraussetzung zu (1.30) gefordert wird.

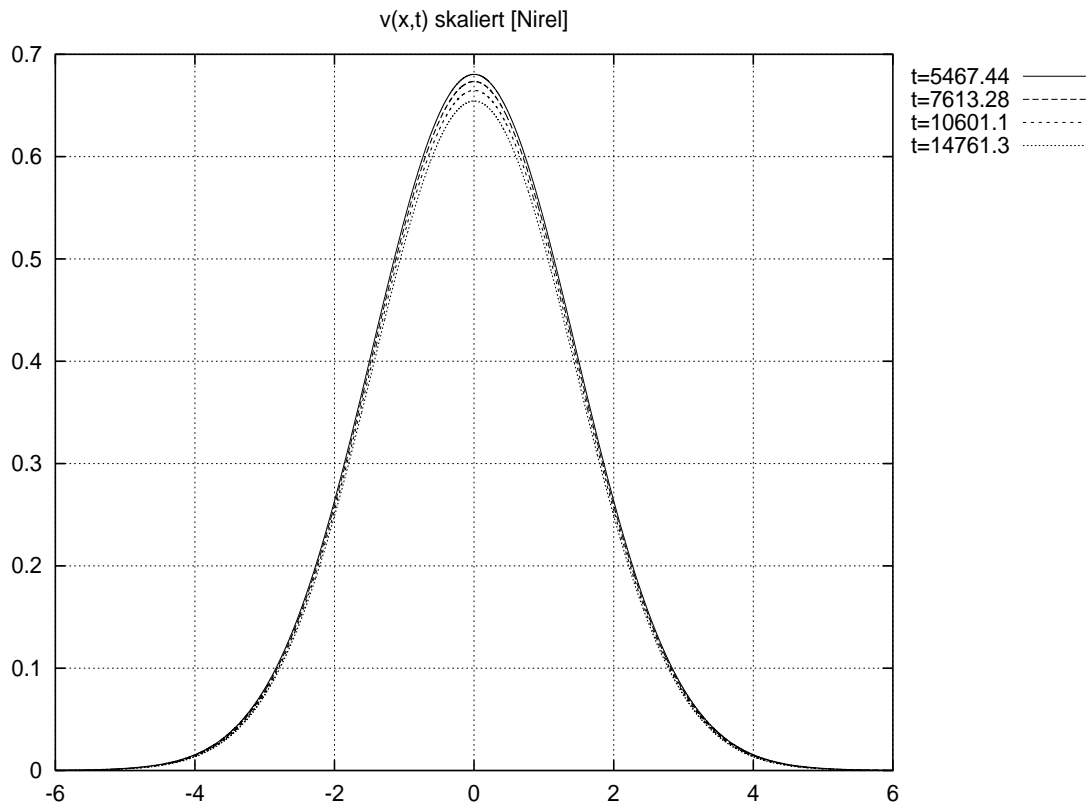


Abb.: 2.8

In Abbildung 2.8 erkennt man die entsprechend (2.89) skalierten Graphen aus Abb. 2.7. Auch in dieser Simulation ist der GAUß-Fixpunkt offensichtlich, die Abweichungen liegen wieder innerhalb der Fehlertoleranz.

2.6.3 BigNoWit und NoWit2

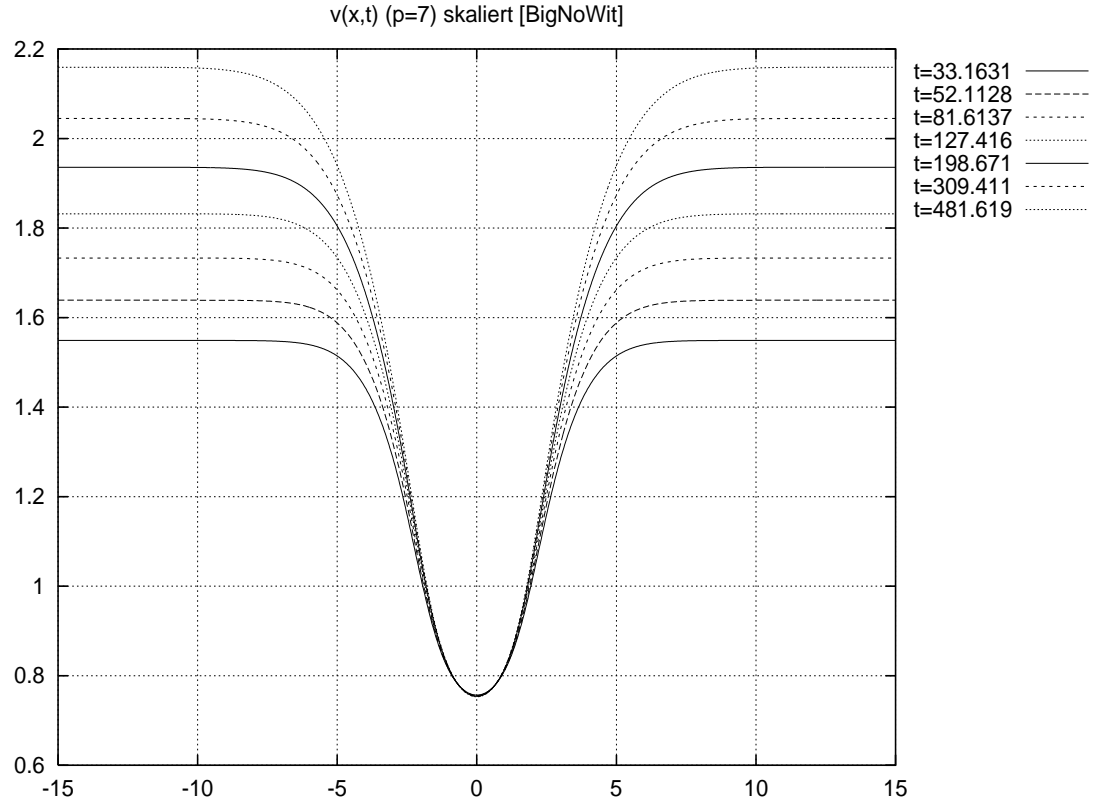


Abb.: 2.9

Die Simulationen BIGNOWIT und NOWIT2 behandeln das Reaktions-Diffusions-System

$$u(x, t) = -\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \quad (2.90)$$

$$\partial_t v(x, t) = \partial_x^2 v(x, t) - v(x, t)^p + |u(x, t)|^q \quad (2.91)$$

$$v(x, 1) = 1 \quad (2.92)$$

mit $p = q > 1$.

Der Theorie in 2.5 (vgl. Bemerkungen zu (2.78)) zufolge wird ein Skalenver-

halten

$$t^{\frac{1}{p+1}} v(x t^{\frac{p-1}{2(p+1)}}, t) = v^*(x) \quad (2.93)$$

für $p \leq q$ erwartet.

In Abbildung 2.9 sind die skalierten Lösungen von (2.91) zu $p = q = 7$ dargestellt. Die lokale Konvergenz um die Stelle $x = 0$ ist gut erkennbar. Dies gilt auch für die in Abb. 2.10 gezeichneten Skalierungen, welche aus Lösungen von (2.91) zu $p = q = 4$ erstellt wurden. Das qualitative Verhalten der Lösung $v(x, t)$ ist in Abb. 2.13 abgedruckt.

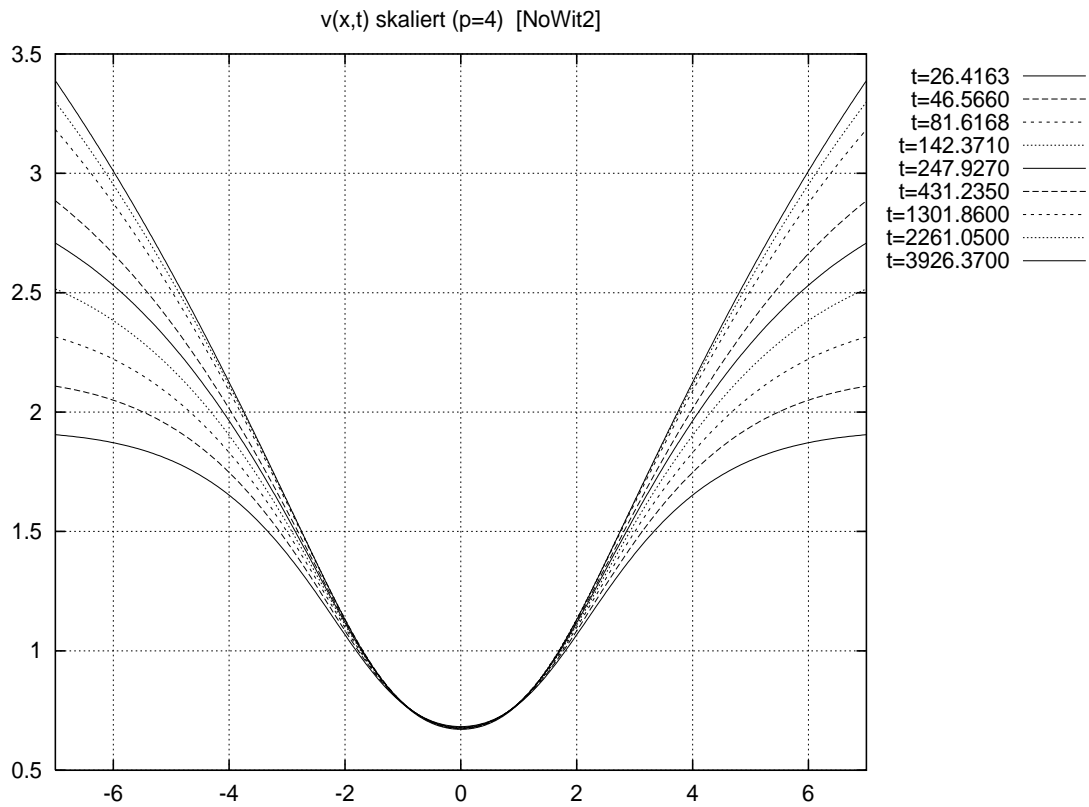


Abb.: 2.10

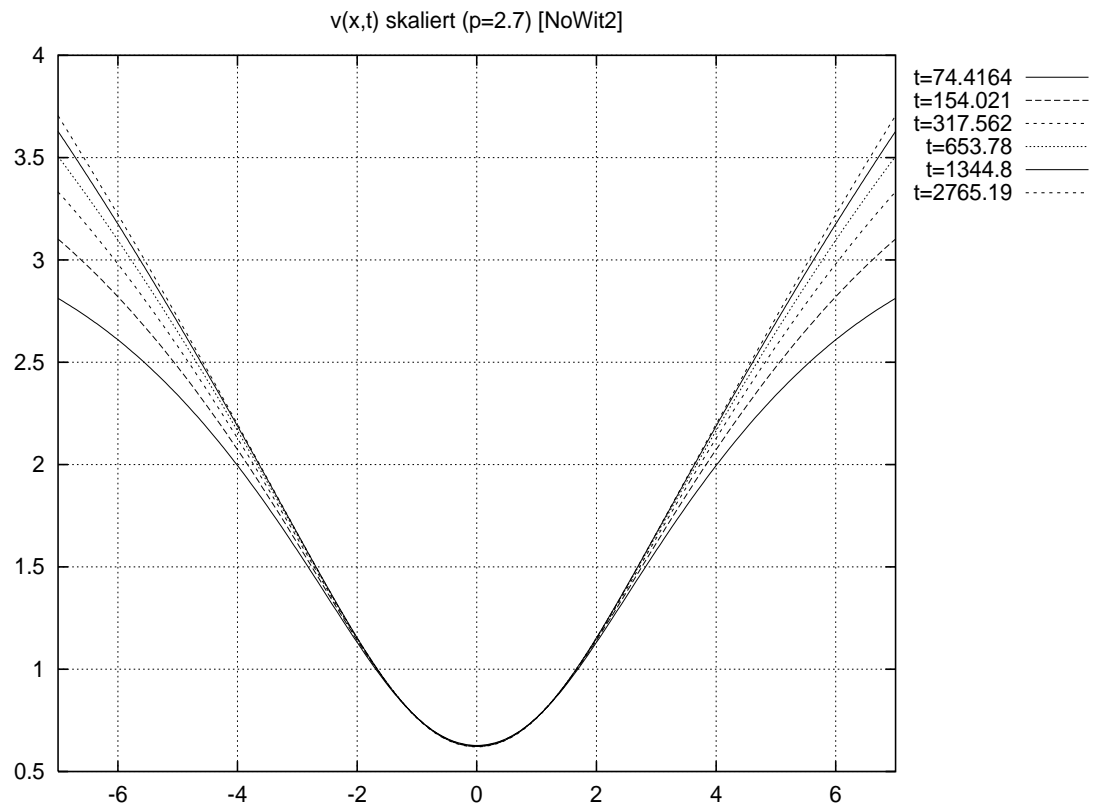


Abb.: 2.11

In den Überlegungen des Abschnitts 2.4 sollte die Störung $F(v, u) = -v^p + |u|^q$ in einer Gleichung (2.91) analytisch um $(0,0)$ sein. In der Abbildung 2.11 sind die gemäß (2.93) skalierten Lösungen von (2.91) zu sehen, aber mit $p = q = 2,7$, so daß $F(v, u)$ also nicht mehr analytisch ist. Am Fixpunktverhalten der Lösung $v(x, t)$ ändert sich aber gegenüber den in Abb. 2.10 und Abb. 2.9 gezeichneten Fällen qualitativ nichts.

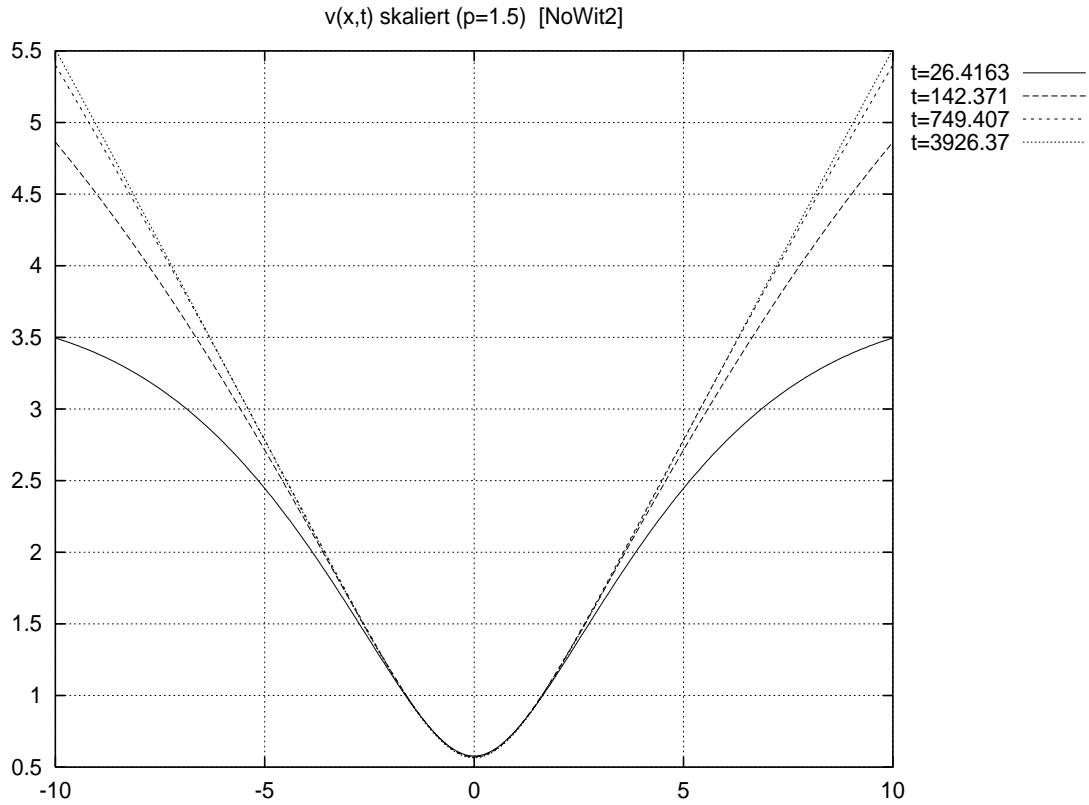


Abb.: 2.12

Eine weitere Voraussetzung zur Bestimmung der Skalierungsexponenten ω_* und ϑ_* in 2.4 war $d_* \geq 2$, wobei d_* aufgrund der TAYLOR-Reihe von $F(v, u) = -v^p + |u|^q$ bestimmt wurde. In Abb. 2.12 sind die durch (2.93) skalierten Lösungen von (2.91) zu $p = q = 1,5$ abgedruckt. $F(v, u)$ ist also nicht analytisch und nicht von der Ordnung ≥ 2 . Trotzdem ist um $x = 0$ deutlich ein skaleninvarianter Bereich festzustellen, qualitativ dem der Abb. 2.11, 2.10 und 2.9 gleich.

2.6.4 Tycho

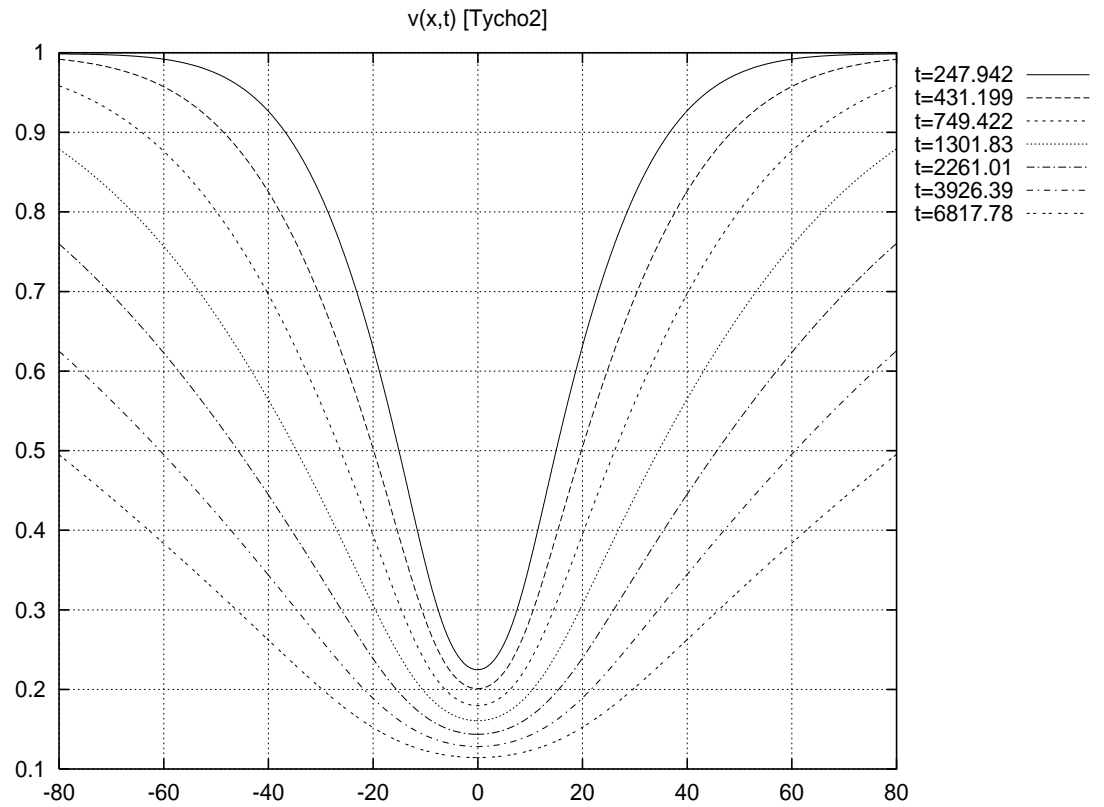


Abb.: 2.13

Die Simulationen mit dem Namen TYCHO beziehen sich (mit Ausnahme von TYCHO1) alle auf (2.91) mit $q > p$.

Nach den Ausführungen in 2.5 und 2.4 sollte sich dasselbe lokale Skalenverhalten (2.93) ergeben. In der Abb. 2.13 sind die Lösungen $v(x,t)$ zu $p = 4$, $q = 6$ aufgetragen.

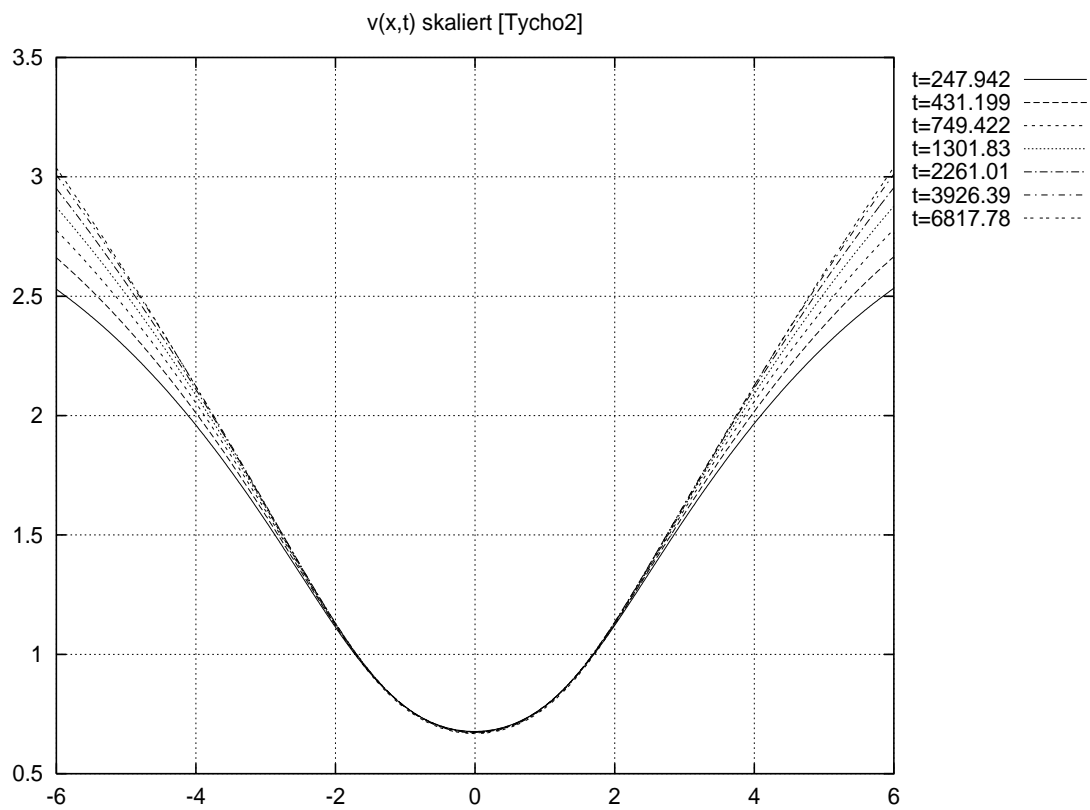


Abb.: 2.14

In Abb. 2.14 ist der Verlauf der skalierten Lösungen (2.93) von (2.91) zu $p = 4$, $q = 6$ aufgetragen. Klar zu erkennen ist wieder die sich um $x = 0$ ausbreitende Skaleninvarianz.

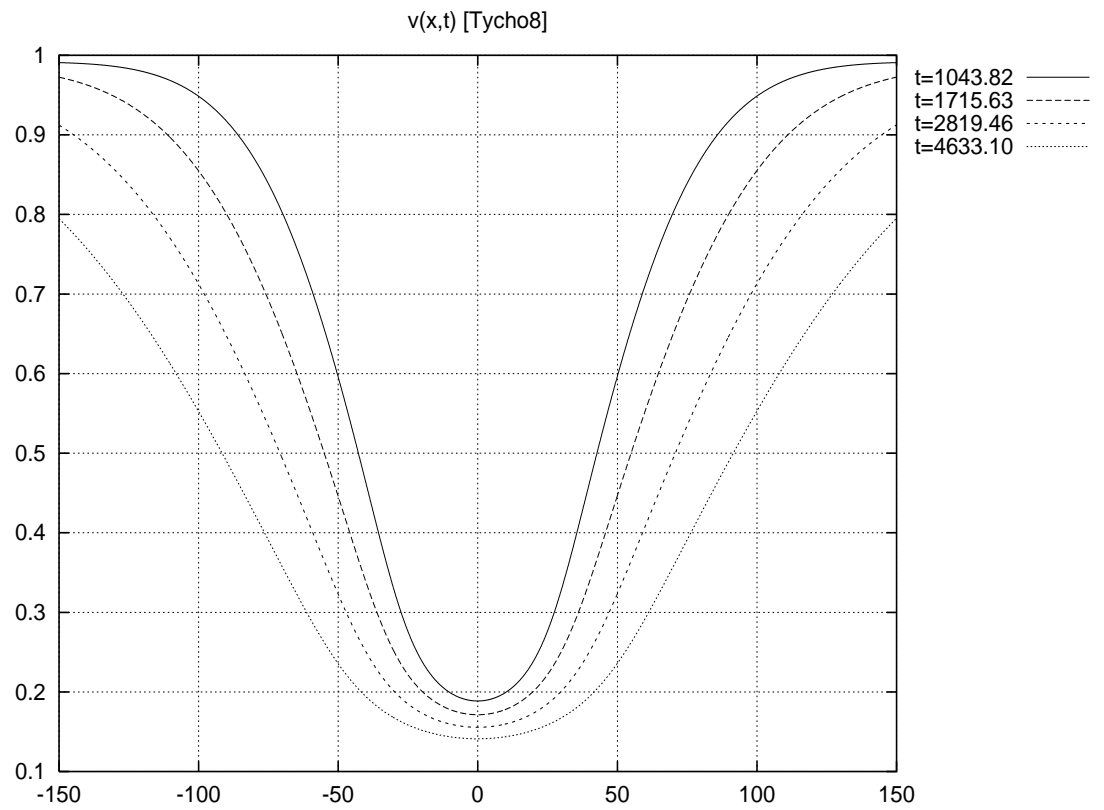


Abb.: 2.15

Ein weiteres Beispiel zu (2.91) mit $p = 5$, $q = 8$ ist in Abb. 2.15 dargestellt. An diesem lässt sich der Unterschied zwischen lokaler Konvergenz der Skalierungen (2.93), die um $x = 0$ erwartet wird, und globaler Konvergenz, die für die sich ausbreitenden Fronten prägend sind, sehr gut feststellen. In den Abb. 2.16 und 2.17 wird dies veranschaulicht.

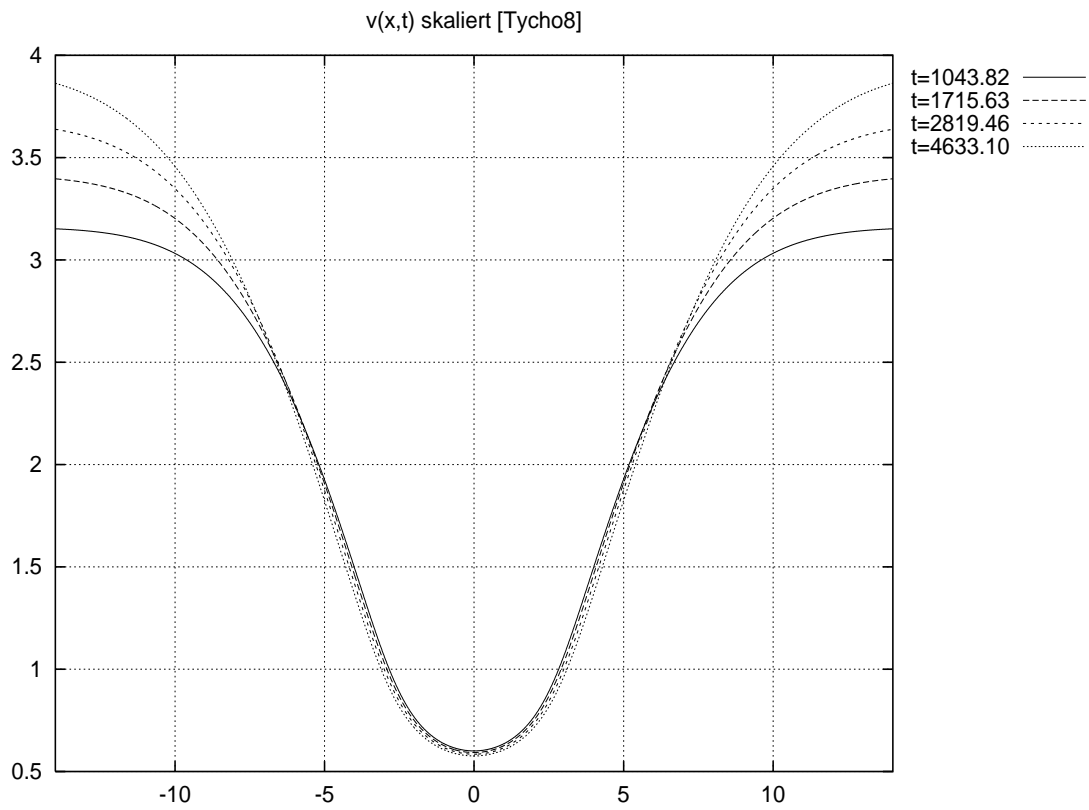


Abb.: 2.16

Hier sind die Funktionen aus (2.93) zu $p = 5$, $q = 8$ abgebildet. Erwartungsgemäß stimmen diese, im Rahmen der Fehlergenauigkeit, in einer Umgebung des Nullpunkts überein. Die Fronten aber genügen einem anderen Skalenverhalten, wie in Abbildung 2.17 verdeutlicht wird.

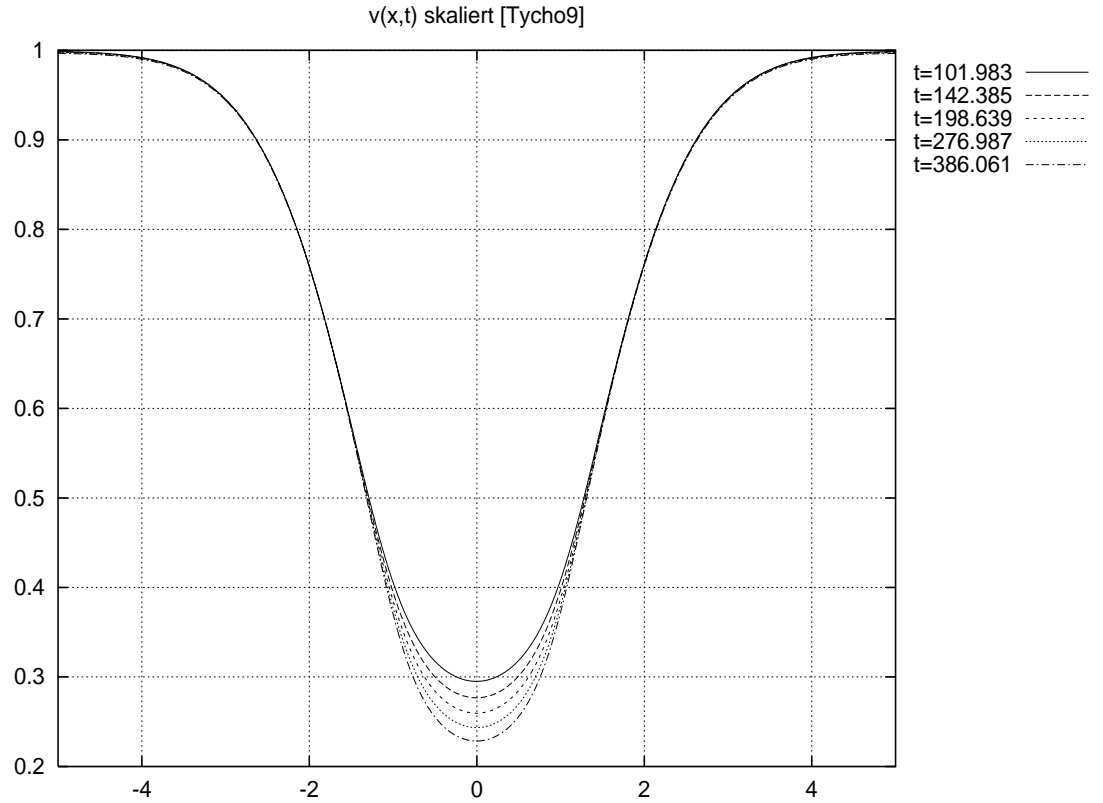


Abb.: 2.17

In Abb. 2.17 sieht man die skalierten Lösungen von (2.91) zu $p = 5$, $q = 8$ allerdings nicht mittels (2.93) berechnet, sondern durch

$$v(xt^{\frac{1}{2}}, t) = \tilde{v}^*(x), \quad |x| > 1$$

Dies entspricht der Skalierungseigenschaft der Funktion $u(x, t)$. Eine Konvergenz am Nullpunkt liegt offenbar nicht vor. Dies deckt sich mit dem Ergebnis, welches in Abb. 2.16 dargestellt ist: um $x = 0$ dominiert das Skalenverhalten (2.93).

Es läßt sich beobachten, daß es zu jeder Zeit t ein $|x_t|$ gibt, derart daß für alle $|x| \geq |x_t|$ die Ungleichung $|u(x, t)| \geq |v(x, t)|$ gilt. Dies verletzt die eingeführte Bedingung (2.70) und ist der Grund des gemischten Skalenverhaltens. Weitere Beispiele zu solchem gemischten Skalenverhalten werden noch folgen.

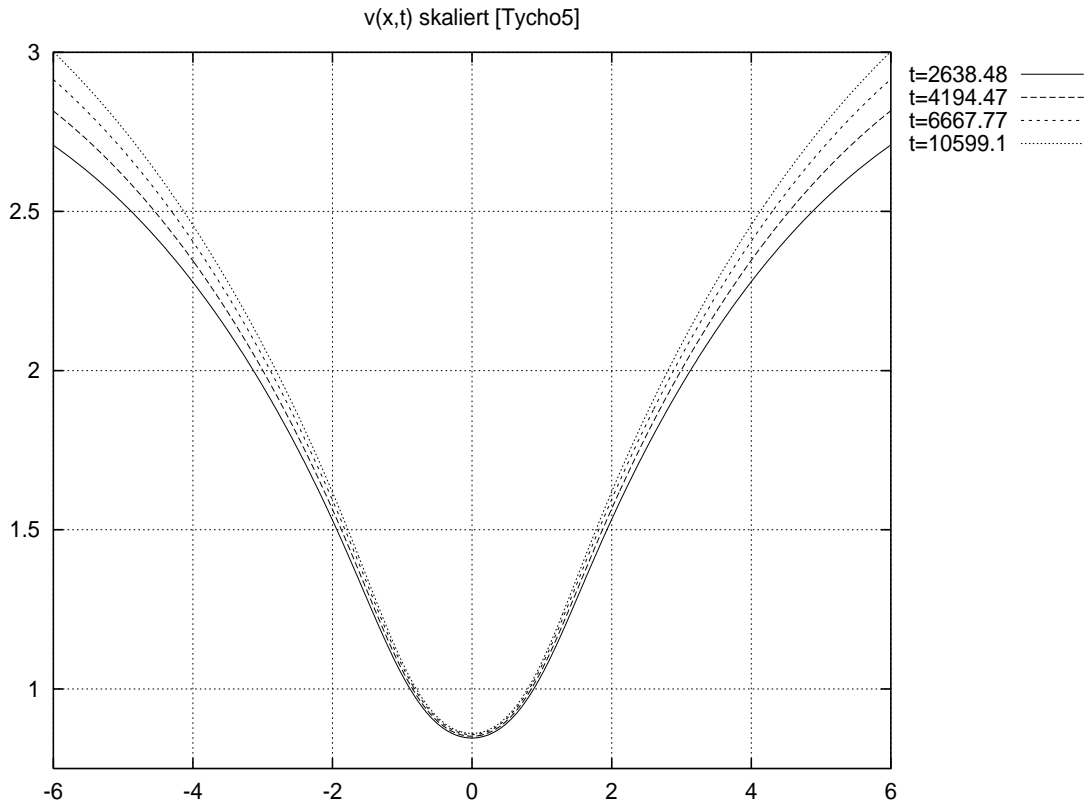


Abb.: 2.18

Hier wird noch einmal das Anfangswertproblem (2.91) mit $q = 4$, $p = 6$ betrachtet. Diesmal aber steht die Auswirkung des von $u(x, t) = u(\frac{x}{2\sqrt{t}})$ mitgebrachten Skalenverhaltens auf die lokale Konvergenz von $v(x, t)$ im Mittelpunkt, weil $q < p$ und damit $Y_{d_*}^<(u) = |u|^4 \neq 0$ ist, was in der Herleitung von d_* in 2.4 ausgeschlossen wurde. Nach der Diskussion in 2.5 zum Beispiel 2 muß also eine Bedingung

$$2p \leq q(p + 3)$$

erfüllt werden, wenn eine Konvergenz von (2.93) in dieser Situation beobachtbar sein soll. Diese Bedingung ist hier erfüllt.

In Abbildung 2.18 sind die skalierten Lösungen

$$t^{\frac{1}{p+1}} v(x t^{\frac{p-1}{2(p+1)}}, t) = v^*(x) \quad (2.94)$$

aufgetragen.

In Übereinstimmung mit den Vorhersagen ist eine lokale Konvergenz im Rahmen der Fehlerordnung erkennbar. An den Zeiten t in der Legende sieht man, daß im Gegensatz zu den Konvergenzen, die in den Abbildungen 2.10 - 2.12 zu sehen sind, sich dieses Ergebnis zu größeren t allmählich einstellt. Auch dieser Umstand wurde bei der vorangehenden Diskussion schon erwähnt.

Ein weiteres Beispiel soll sich an dieser Stelle direkt anschließen: diesmal sind $p = 3$, $q = 2$ so gewählt, daß $2p = 6 < 12 = q(p + 3)$ gilt. Selbst zu sehr viel größeren Zeiten t kann man nun aus Abb. 2.19, in der wieder die Skalierungen gemäß (2.94) zu sehen sind, noch nicht auf eine Konvergenz der Folge $v_{L^n}(0, 1)$ gegen einen Fixpunkt schließen. Immerhin ist nachweisbar, daß die Differenz zweier Folgenglieder $|v_{L^n} + 1(0, 1) - v_{L^n}(0, 1)|$ allmählich abnimmt. Andererseits würde eine falsche Einstellung der Skalierungsexponenten sich aufgrund der großen Simulationszeiten deutlicher zeigen, als in Abb. 2.19.

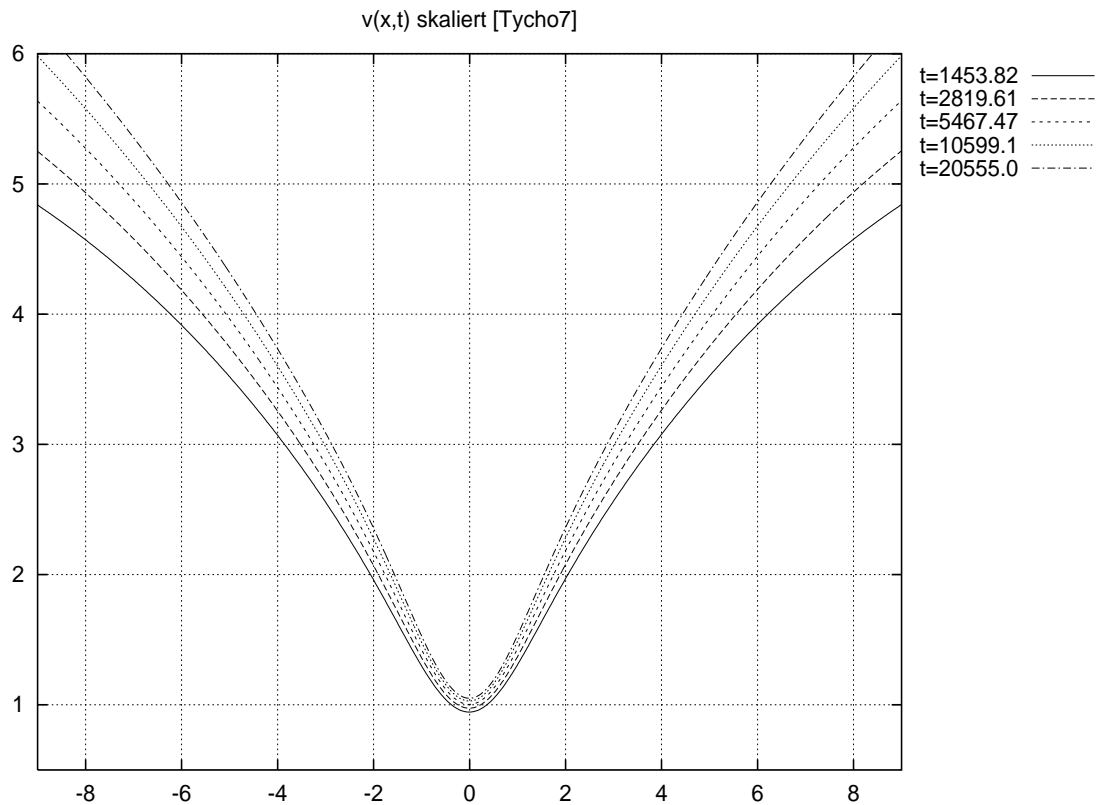


Abb.: 2.19

2.6.5 GalRa

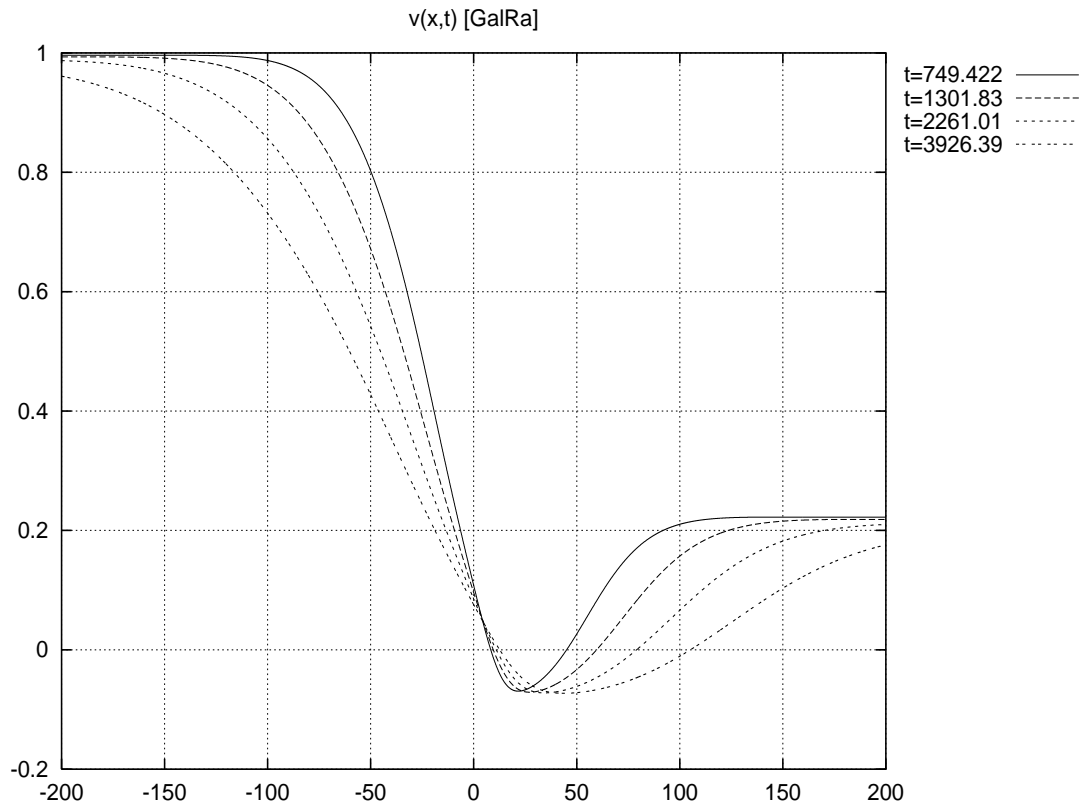


Abb. 2.20

Die Simulationen mit dem Namen GALRA sind unter zwei Aspekten zu sehen. Einerseits demonstrieren sie, daß die Formulierung in 2.4 tatsächlich auch für Störungen $F(v, \phi)$ zutrifft, die in eine Potenzreihe entwickelbar sind. In den Beispielen zuvor wurden größtenteils polynomiale Ausdrücke für F betrachtet. Andererseits wird an ihnen noch einmal die Mischung zweier Skalenverhalten auf verschiedenen Bereichen veranschaulicht, das heißt für große Zeiten t hat die Lösung $v(x, t)$ die Form

$$v(x, t) = v_o^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + t^{-\frac{\omega_*}{\vartheta_*}} v^*\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{\vartheta_*}}}\right) \quad (2.95)$$

In der Abbildung 2.20 sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{v} = v'' - (v - u)^2(v + u)^3 + \frac{1}{1 + (v - u)^4} - 1 \quad (2.96)$$

aufgezeichnet, wobei wieder $u(x, t) = -\operatorname{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}})$ ist.

Entwickelt man die Störung $F(v, u) = -(v - u)^2(v + u)^3 + \frac{1}{1 + (v - u)^4} - 1$ in eine TAYLOR-Reihe um $(0, 0)$, so erkennt man, daß die Terme v^4 , v^2u^2 und u^4 führend sind. Nach (2.64) ist also hier $d_* = 2 + 2d_u = 4$, weil $d_u = 1$ ist. Insbesondere ist damit auch $Y_{d_*}^< = 0$. Demnach setzt man $\omega_* = 2/(d_* - 1) = 2/3$ und $\vartheta_* = 2(\omega_* + 1) = 10/3$.

Das Ergebnis der Skalierung mit diesen Parametern stellt die Abb. 2.21 dar, also den v^* -Anteil aus (2.95) für genügend kleine x . Die Skaleninvarianz um den Nullpunkt ist gut erkennbar.

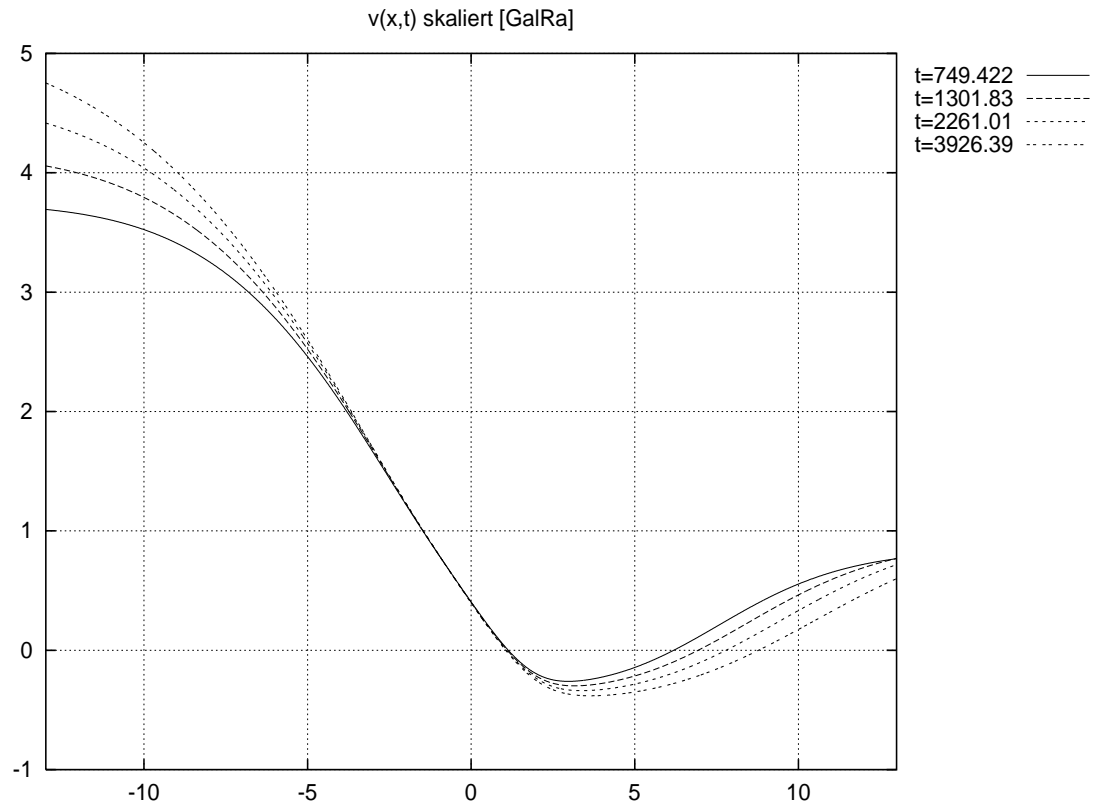


Abb.: 2.21

Das Verhalten aus Abb. 2.21 läßt sich aber für größere $|x|$ nicht mehr zeigen. Statt dessen wird das Lösungsverhalten an solchen Stellen durch die Funktion $u(x, t)$ dominiert, so daß deren Skalierung zum $v_o^*(\frac{x}{\sqrt{t}})$ -Anteil in (2.95) führt.

In Abbildung 2.22 ist diese Skalierung der Kurven aus Abb. 2.20 dargestellt. Gut erkennbar ist die vorhergesagte Skaleninvarianz auf Bereichen, die genügend von der Stelle $x = 0$ entfernt liegen.

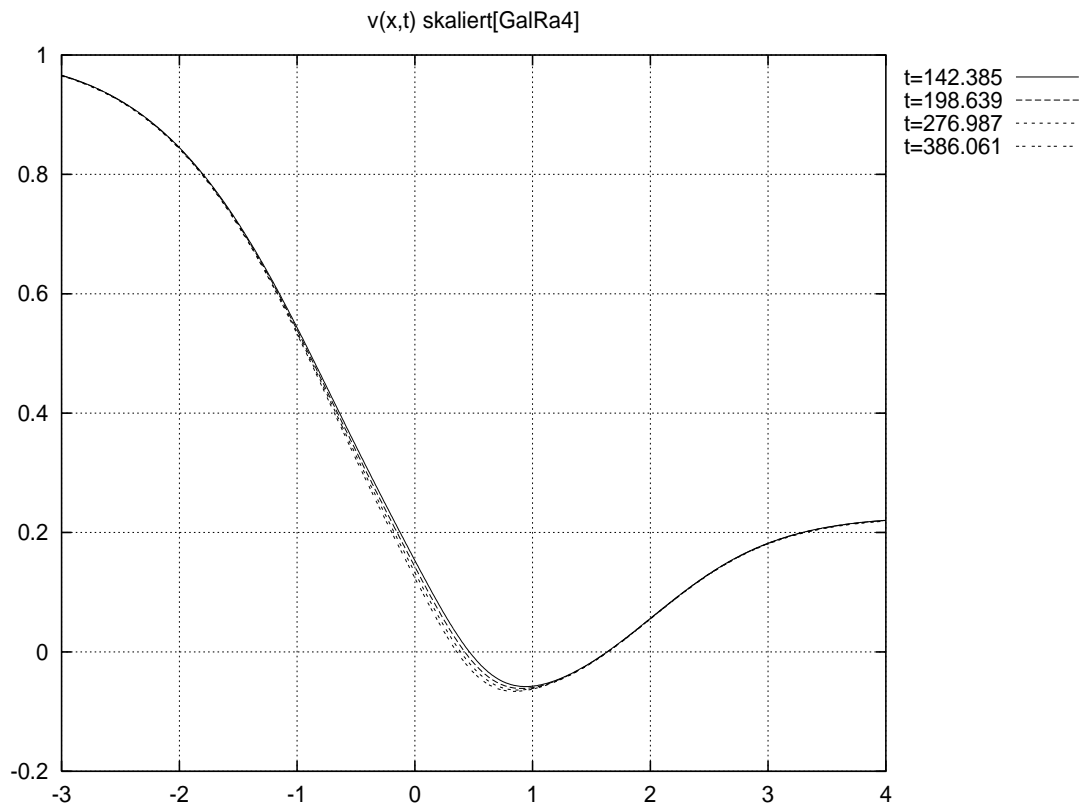


Abb.: 2.22

Abschließend soll noch die Differentialgleichung

$$\dot{v} = v'' - (v - u)^2(v + u)^3 + \sin^2((v + u)^2) \quad (2.97)$$

mit $u(x, t) = -\operatorname{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}})$ betrachtet werden, deren Lösungsentwicklung man in Abbildung 2.23 abliest.

Für $x < -60$ ist eine übliche Diffusionsfront gut sichtbar, für $x > 60$ breitet sich eine formstabile Front aus.

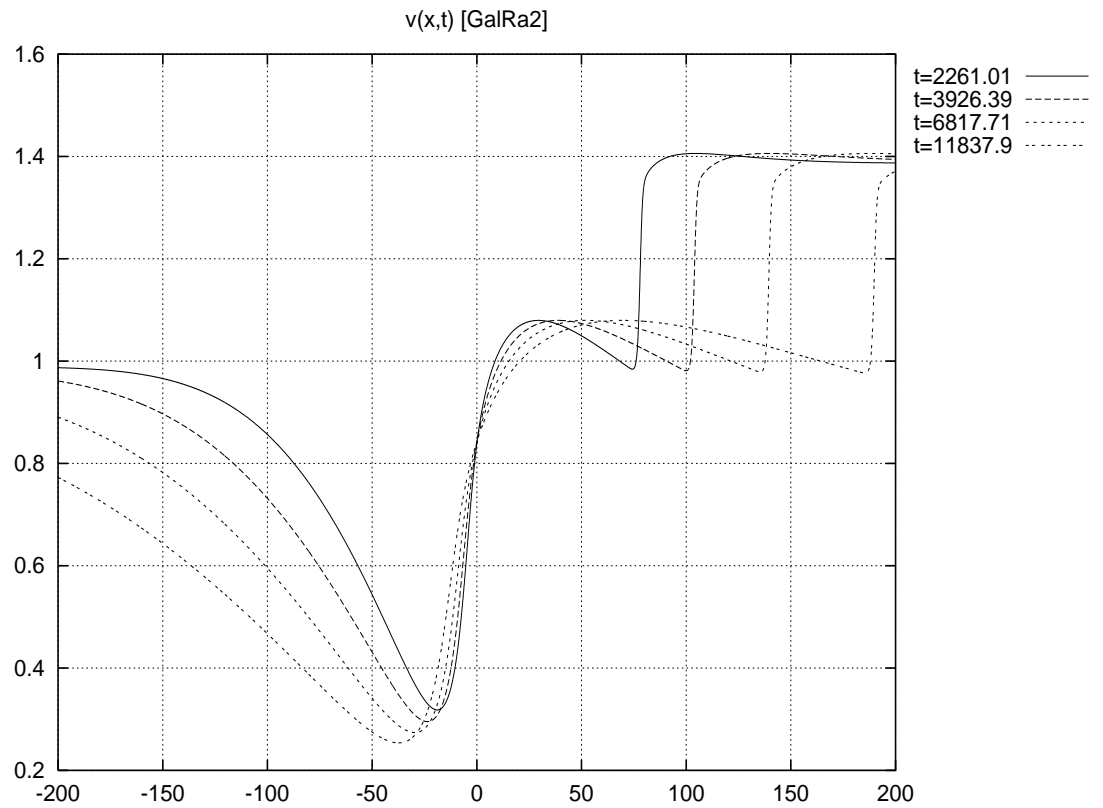


Abb.: 2.23

Das Skalierungsverhalten der Lösungen zu (2.97) kann wieder als ein zusammengesetztes im Sinne von (2.95) betrachtet werden.

Für den v^* -Anteil stellt man fest, daß in einer Potenzreihenentwicklung von $F(v, u) = -(v - u)^2(v + u)^3 + \sin^2((v + u)^2)$ wieder die Terme v^4 , v^2u^2 und u^4 führend sind. Entsprechend zu (2.96) werden die Skalierungsexponenten gewählt. Das Ergebnis dieser Skalierungen ist in Abbildung 2.24 abgedruckt.

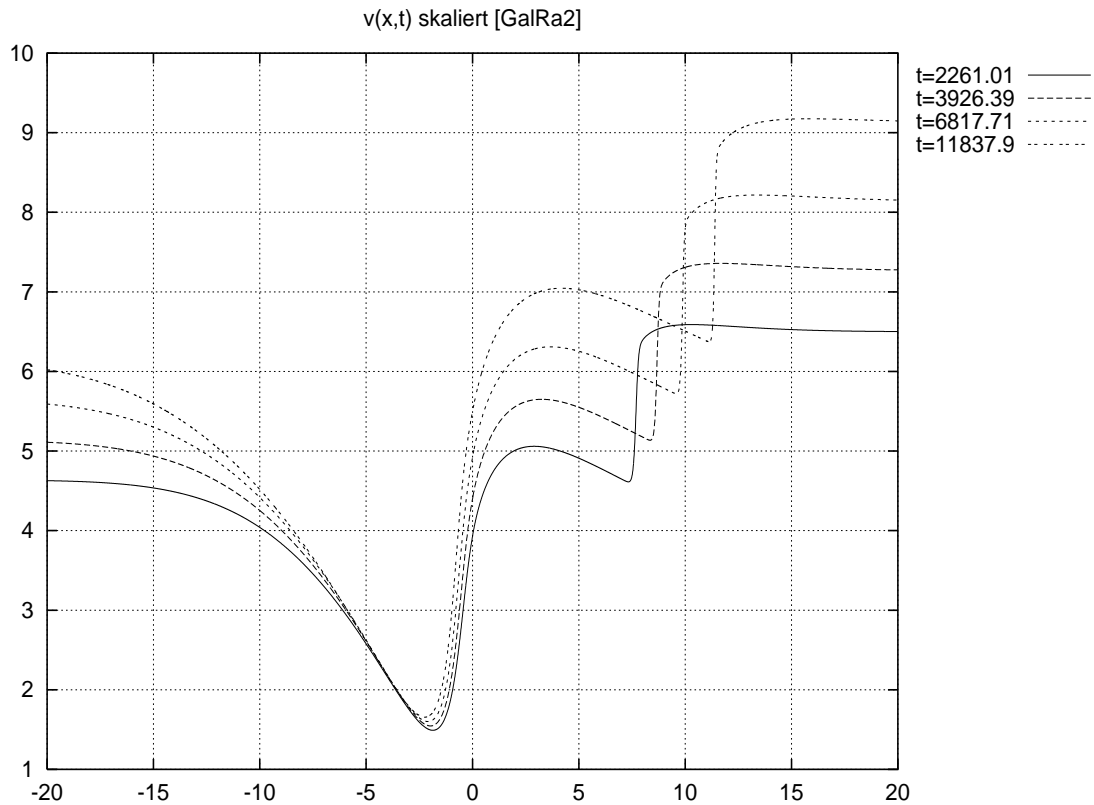


Abb.: 2.24

Diesmal wird eine Skaleninvarianz von $t^{\frac{\omega_*}{\vartheta_*}} v(x t^{\frac{1}{\vartheta_*}}, t) = v^*(x)$ um die Stelle $x = -4$ sichtbar. Wie weit sich diese noch ausbreiten wird, das heißt das Konvergenzgebiet, läßt sich noch nicht abschätzen. An den übrigen Orten hat man aber das Skalenverhalten der normalen Diffusion $v(x t^{\frac{1}{2}}, t) = v_o^*(x)$ zu erwarten.

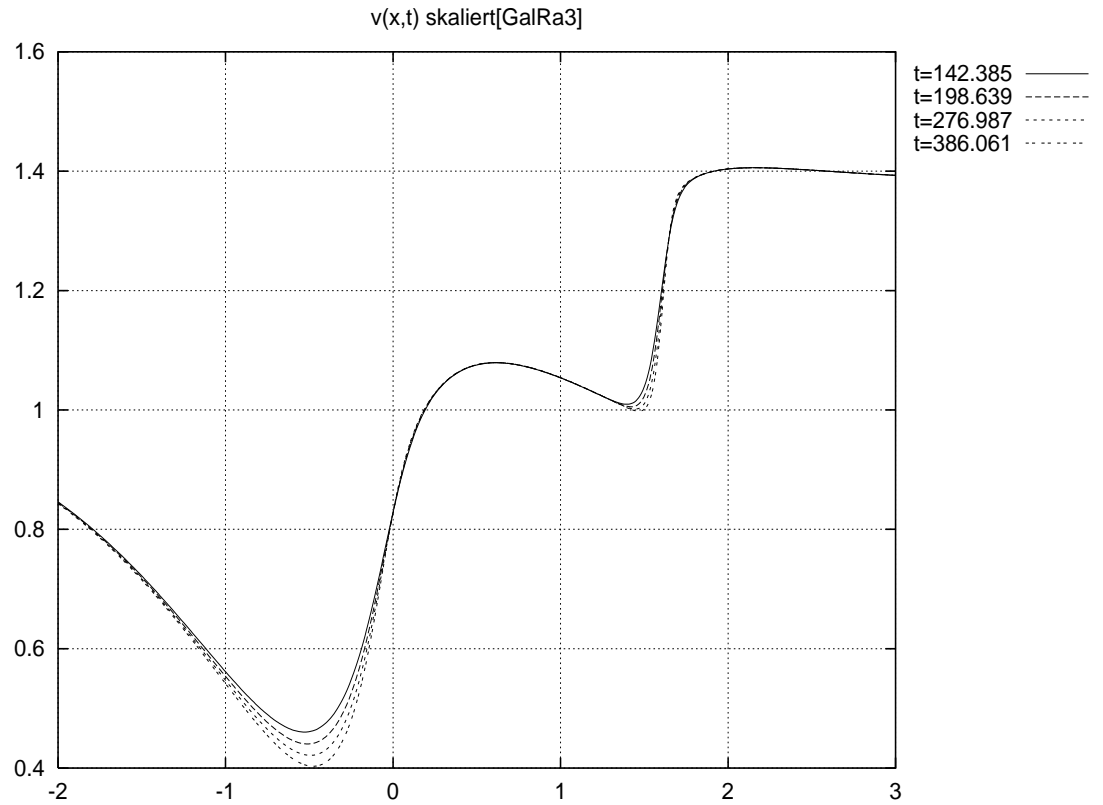


Abb.: 2.25

Wie zu Abb. 2.24 schon angedeutet wurde ist für weite Teile der Lösung von (2.97) eine Skalierungsvorschrift $v_o^*(\frac{x}{\sqrt{t}})$ zu erwarten, wenn man nach skaleninvarianten Anteilen in $v(v, t)$ sucht. Dies wird durch Abbildung 2.25 eindrucksvoll bestätigt.

Allerdings stellt sich in der Umgebung von $x = -\frac{1}{2}$ offenbar keine Konvergenz ein. Dieser Bereich wird zumindest für $x < -\frac{1}{2}$ besser durch die in Abb. 2.24 dargestellte Skalierung zeitunabhängig.

Als Kritikpunkt läßt sich noch bemerken, daß in allen Simulationen, die sich auf den Abschnitt 2.4 beziehen, die Fehlerfunktion $u(x, t) = -\operatorname{erf}(\frac{x}{2\sqrt{t}}) = \phi(x, t)$ benutzt wird, obwohl die theoretische Formulierung allgemeiner ist. Dieser Umstand ist durch das Programm bedingt, mit dem die Simulationen durchgeführt wurden: $u(x, t)$ ist selbst Lösung einer Diffusionsgleichung und läßt sich daher leicht in die betrachteten Differentialgleichungen einbringen, weil das Programm Reaktions-Diffusions-Systeme simulieren kann. Funktionen $\phi(x, t)$, die nicht einer Diffusionsgleichung genügen, können nicht ohne weiteres eingebunden werden.

Die Fehlerfunktion hat aber den Vorteil, daß sich mit ihr die Bedingung (2.70) leichter erfüllen läßt, weil die Lösungen v der betrachteten Differentialgleichungen gerade Prozesse beschreiben sollen, die sich langsamer als diffusive ausbreiten.

2.7 Zusammenfassung

In den vorangegangenen Abschnitten ist das Skalenverhalten gestörter Diffusionsgleichungen für große Zeiten untersucht worden. Begonnen wurde mit Gleichungen der Form

$$\dot{v} = v'' + F(v, v', v'').$$

Das Anfangswertproblem läßt sich im Fall $F = 0$ exakt mittels GAUß-Faltung lösen. Diese GAUß-Lösungen besitzen ein Skalenverhalten, das heißt, sie haben je nach Anfangswertproblem für große Zeiten t die Gestalt

$$v_G(x, t) = \frac{C}{t^\beta} f_\beta\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

wobei $\beta = \frac{1}{2}$ oder $\beta = 0$ ist. f_β ist je nach Fall die GAUß-Verteilung oder die Fehlerfunktion.

Dieser Umstand wird benutzt, um Anfangswertprobleme und Störungen F so zu klassifizieren, daß die zugehörigen Lösungen v sich für große Zeiten t der Funktion v_G für alle x beliebig nähern.

Der Beweis dazu läßt sich mit Renormierungsgruppentransformationen führen. Dabei wird eine kontrahierende Skalentransformation R auf dem Raum aller zuvor zugelassenen Anfangswerte konstruiert und gezeigt, daß eine häufige Wiederanwendung auf $v_G(x, 1)$ führt. Dieser Anfangswert, so läßt sich dann zeigen, ist aber die Lösung $v(x, t)$ zu großen Zeiten t , die sich annähernd nach der ungestörten Diffusionsgleichung entwickelt und damit der Form v_G immer ähnlicher wird.

Es gibt nun Systeme von partiellen Differentialgleichungen, die auf Gleichungen der Struktur

$$\dot{v} = v'' + F(v, \phi)$$

mit einer bekannten Funktion $\phi(x, t)$ führen. Für die Lösungen v derartiger Gleichungen ist in einigen Fällen auch ein Skalenverhalten bekannt geworden:

$$v_S(x, t) = t^{-\alpha} v^*(xt^{-\gamma})$$

wobei $\frac{1}{2} > \gamma$ ist. Im Kapitel 2 ist versucht worden, die Methode der Renormierungstransformation auf solche Probleme anzuwenden. Im Gegensatz

zu den GAUß-Fällen zuvor existiert hier kein natürlich vorgegebenes Verhalten. Vielmehr müssen die Exponenten α und γ aus der Differentialgleichung bestimmt werden. Dabei hat sich herausgestellt, daß bei vorausgesetztem Skalenverhalten $v \rightarrow v_S$ für $t \rightarrow \infty$ zu $\gamma > 2$ die Gleichung

$$\alpha + \gamma = \frac{1}{2}$$

gilt, unabhängig vom Anfangswertproblem.

Desweiteren ist die Konvergenz $v \rightarrow v_S$ gegenüber den GAUß-Fällen eine lokale, das heißt, sie gilt nicht unbedingt für alle x . Dabei ist das Konvergenzgebiet eingeschränkt durch den Konvergenzradius der TAYLOR-Reihe von ϕ um die Stelle x_o , an der ein Skalenverhalten v_S erwartet wird. Dies liegt an der Definition der Skalentransformation für ϕ .

Zudem ist noch ein Verfahren zur Bestimmung der Exponenten α bzw. γ angegeben worden, wenn an $F(v, \phi)$ gewisse Bedingungen gestellt werden.

Die gefundenen Zusammenhänge stimmen mit den Ergebnissen anderer Veröffentlichungen überein.

Diese Details sind schließlich mit numerischen Methoden an einigen Modellgleichungen veranschaulicht worden. Dabei hat sich in manchen Fällen ein gemischtes, auf verschiedenen Bereichen ausgeprägtes Skalenverhalten der Lösung v gezeigt:

$$v(x, t) = v_G(x, t) + v_S(x, t) = \frac{C}{t^\beta} f_\beta\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + t^{-\alpha} v^*(xt^{-\gamma})$$

Insgesamt erhält man damit einen besseren Ausgangspunkt für einen Beweis der Aussage $v \rightarrow v_G + v_S$ für $t \rightarrow \infty$.

Die Weiterentwicklung dieser Ergebnisse kann in verschiedene Richtungen verlaufen:

die Bedingungen für $\frac{1}{2} > \gamma$ sind in dieser Arbeit fast unberücksichtigt geblieben. Diese hängen aber sicherlich von den Anfangsbedingungen ab: fallen diese für $|x| \rightarrow \infty$ auf 0 ab, so kann man, wenn $F(v, \phi)$ beschränkt bleibt, mit einem GAUß-Verhalten der Lösung v rechnen. Desweiteren muß der Term ϕ in $F(v, \phi)$ „bremsend“ auf die Ausbreitung von v wirken, denn $\frac{1}{2} > \gamma$ bedeutet, daß sich v langsamer als die übliche Diffusion ausbreitet.

Weiterhin sind die hinreichenden Bedingungen für einen Konvergenzbeweis unbekannt und nur an speziellen Systemen untersucht worden. Insbesondere

wird dadurch unter Umständen das Konvergenzgebiet genauer bestimmt. Schließlich läßt sich das Programmpaket dahingehend weiterentwickeln, daß sich ein Skalenverhalten $v = v_G + v_S$ besser untersuchen läßt. \square

Im folgenden Kapitel wird der numerische Hintergrund beleuchtet. Da es hier um Langzeitsimulationen geht, besteht die wesentliche Berechnungsmethode aus dem CRANK-NICOLSON-Verfahren, welches eigens für partielle Differentialgleichungen vom Typ der linearen Wärmeleitungsgleichung entwickelt wurde. Für die nichtlinearen Anteile, die i.a. nicht bekannt sind, wurde eine Näherung verwendet. Das Zeitgitter wurde daraufhin „dynamisch“ programmiert, weil die Stabilität des Algorithmus nicht gewährleistet werden kann. Das bedeutet, daß die Zeitauflösung verfeinert wird, wenn die Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung sich zeitlich rasch ändert und automatisch gröber gewählt wird, wenn die Lösung sich zeitlich kaum noch ändert. Einzelheiten zur Arbeitsweise des Programms befinden sich im vierten Kapitel.

Kapitel 3

Numerik

Die meisten partiellen Differentialgleichungen lassen sich nicht exakt, das heißt in geschlossener Form, lösen. Zwar ist es möglich durch eine Störungsrechnung das Lösungsverhalten für kurze Systemzeiten zu charakterisieren, allerdings kann man daraus im allgemeinen nicht auf die Asymptotik schließen. Numerische Simulationen bieten einen Eindruck von möglichen Langzeitverhalten anhand charakteristischer Modellsysteme.

In diesem Kapitel wird ein effizientes Verfahren, das CRANK-NICOLSON-Verfahren, zur Lösung solcher Reaktions-Diffusions-Systeme (RDS) vorgestellt, welche sich durch partielle Differentialgleichungen vom Typ der gestörten Wärmeleitungsgleichung mit jeweils einer Koordinate in der Zeit und im Ort beschreiben lassen. Die numerischen Betrachtungen in dieser Arbeit dienen aber nicht nur der Lösung solcher RDS, sondern auch der Suche nach einem Skalierungsverhalten dieser Lösungen für große Zeiten. Man versucht also die Zahlen $\gamma, \alpha \neq 0$ so zu einer numerisch bestimmten Lösung $u(x, t)$ zu finden, daß ein Verhalten der Form

$$t^\gamma u(\xi t^\alpha, t) = g(\xi)$$

für genügend große t und $\xi \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ nachweisbar wird.

Zunächst seien einige Bemerkungen zu allgemeinen Begriffen der Numerik vorangestellt (vgl. [Mitc80] und [Schw97]). Diese dienen dann der sich anschließenden Erläuterung und Diskussion des hier benutzten Verfahrens.

3.1 Grundbegriffe numerischer Verfahren

Zur numerischen Behandlung von Differentialgleichungen müssen die vorkommenden Funktionen und partiellen Ableitungen diskretisiert werden. Ein erster Ansatz hierfür ist das Ersetzen der Ableitungen durch ihren Differenzenquotienten. Betrachtet man die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}y(x) = f(x, y(x))$$

mit der Anfangsbedingung

$$y(x_o) = y_o$$

so geht diese mit den Stützstellen $x_k := x_o + hi$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $h = \text{konst.}$ über in

$$\frac{1}{h}(y_{i+1} - y_i) = f(x_i, y_i) \quad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (3.2)$$

Dies ist die Integrationsmethode von EULER. Geometrisch bedeutet (3.2) eine Approximation der exakten Lösungswerte $y(x_i)$ durch die y_i , die durch eine sukzessive Linearisierung an den Stützstellen x_k entstehen. Die Abbildung 3.1 verdeutlicht diesen Zusammenhang.

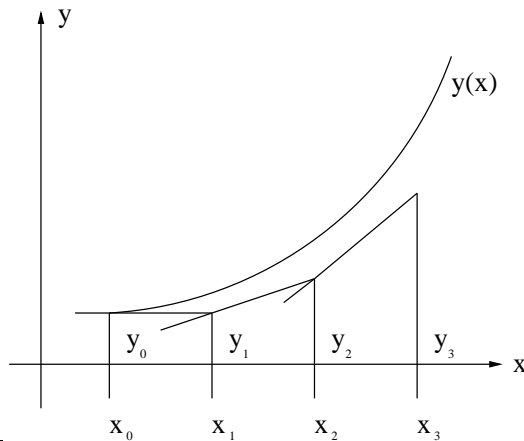


Abb.: 3.1

Da y_{i+1} ohne weitere Zwischenschritte ausgerechnet wird, heißt ein solches Verfahren Einschrittverfahren, sonst Mehrschrittverfahren.

Wenn man statt (3.2) durch eine Diskretisierung eine Rechenvorschrift der Form

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i, y_{i+1}, h) \quad (3.3)$$

erhält, so spricht man von einem impliziten Verfahren. Zu solchen werden nun die Begriffe *lokaler* und *globaler Diskretisationsfehler* eingeführt.

Definition :

(a) Der *lokale Diskretisationsfehler* d_{i+1} an der Stützstelle x_i sei definiert als

$$d_{i+1} := y(x_{i+1}) - y(x_i) - hF(x_i, y(x_i), y(x_{i+1}), h) \quad (3.4)$$

(b) Der *globale Diskretisationsfehler* g_i an der Stützstelle x_i sei definiert als

$$g_i := y(x_i) - y_i \quad (3.5)$$

Für implizite Verfahren, wie das in dieser Arbeit verwendete CRANK-NICOLSON-Verfahren, gilt unter der Voraussetzung der LIPSCHITZ-Stetigkeit von $F(x, y, z, h)$ in den Variablen y und z und mit $d_{max} \geq \max(|d_i| \mid i = 0, 1, 2, \dots, n)$ die Beziehung

$$|g_i| \leq \frac{d_{max}}{hL} \cdot e^{hiK}, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.6)$$

wobei $0 < L < \infty$ die LIPSCHITZ-Konstante und $hK = (1 + hL)/(1 - hL) - 1$ mit $0 < K$ bezeichnet (vgl. Anhang 5.8). \square

Die *Stabilität* einer numerischen Methode bedeutet die dauerhafte Beschränkung der Abweichung von der exakten Lösung. Ist also $y(x_i)$ die exakte und y_i die berechnete Lösung, so soll eine Konstante G existieren, derart daß für alle $i = 1, 2, \dots, n$ gilt:

$$|g_i| < G \quad (3.7)$$

Man beachte, daß dies bei (3.6) wegen der Abhängigkeit von h und i noch nicht der Fall ist. Bevor wir zu Kriterien für die Stabilität bestimmter Verfahren kommen, dehnen wir die Bezeichnungen auf Funktionen $y(x, t)$ aus,

welche nun von zwei Variablen abhängen. Zugrunde liegt ein 2-dim. Gitter aus Stützstellen $x_i = x_o + hi$, $i = 0, 1, \dots, n$ und $t_j = t_o + kj$, $j = 0, 1, \dots, m$ mit den Gitterkonstanten h und k . Wie zuvor auch, bedeutet $y(x_i, t_j)$ die exakte Lösung einer gesuchten Funktion y an diesen Stützstellen und $y_{i,j}$ die Approximation des Wertes $y(x_i, t_j)$ durch ein numerisches Verfahren.

Zur Vereinfachung der Notation fassen wir alle Werte zum selben t_j in einem Vektor zusammen. Es stelle also $\mathbf{y}(t_j) = (y(x_1, t_j), \dots, y(x_n, t_j)) \in \mathbb{R}^n$ den Vektor der exakten Lösung an der Stützstelle t_j dar und analog $\mathbf{y}_j = (y_{1,j}, \dots, y_{n,j}) \in \mathbb{R}^n$ die zugehörige numerische Lösung.

Jetzt gehen wir davon aus, daß eine Iterationsvorschrift der Form

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{B}\mathbf{y}_j \quad (3.8)$$

gilt, wobei \mathbf{A} und \mathbf{B} $n \times n$ - Matrizen sind und \mathbf{A} invertierbar ist. Wenn sich daraus für den Fehlervektor $\mathbf{g}_{j+1} = \mathbf{y}(t_{j+1}) - \mathbf{y}_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, m$ ebenfalls

$$\mathbf{g}_{j+1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{g}_j \quad (3.9)$$

$$=: \mathbf{C}\mathbf{g}_j \quad (3.10)$$

also

$$\mathbf{g}_{j+1} = \mathbf{C}^j \mathbf{g}_1 \quad (3.11)$$

ergibt, so läßt sich die *Stabilität* der Methode (3.8) wie folgt festlegen:

Definition:

Eine Methode mit der Iterationsvorschrift (3.8) zur Approximation einer Funktion $y(x, t)$ wird als *stabil* bezeichnet, falls für den Fehlervektor \mathbf{g}_{j+1} die Gleichung (3.11) erfüllt ist¹ und es ein $G \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $j \in \mathbb{N}$ und bezüglich einer Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt:

$$\|\mathbf{g}_{j+1}\| \leq \|\mathbf{C}^j\| \|\mathbf{g}_1\| \leq G \quad (3.12)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\|\mathbf{C}^j\| \leq G \quad (3.13)$$

¹Dies ist bei Gleichungen der Form $\sigma(x, t)\partial_t v = \partial_x(a(x, t)\partial_x v) + b(x, t)\partial_x v - c(x, t)v$ der Fall, weil die gesuchte Funktion $v(x, t)$ nur linear auftritt.

□

Als Spektralradius einer quadratischen $n \times n$ -Matrix \mathbf{M} definiert man

$$\rho(\mathbf{M}) := \max_l \{|\lambda_l| \mid \lambda_l \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{M}; l = 1, \dots, n\} \quad (3.14)$$

Dann gilt für beliebige Matrizennormen die Abschätzung $\rho(\mathbf{M}) \leq \|\mathbf{M}\|$ und damit (vgl. Anhang 5.7)

$$\rho(\mathbf{M}^j) \leq \rho^j(\mathbf{M}) \leq \|\mathbf{M}^j\| \leq \|\mathbf{M}\|^j \quad (3.15)$$

Mit (3.13) und (3.15) wird klar:

$$\text{Stabilität des Verfahrens} \Rightarrow \rho(\mathbf{C}) \leq 1 \quad (3.16)$$

$$\rho(\mathbf{C}) < 1 \text{ und Stabilität} \Rightarrow \mathbf{g}_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad (3.17)$$

$$\|\mathbf{C}\| \leq 1 \Rightarrow \text{Stabilität} \quad (3.18)$$

$$\rho(\mathbf{C}) = \|\mathbf{C}\| \Rightarrow \{\text{Stabilität} \Leftrightarrow \rho(\mathbf{C}) \leq 1\} \quad (3.19)$$

Wie im Anhang beschrieben ist, läßt sich gerade bei symmetrischen Matrizen $\|\mathbf{C}\| \leq 1$ erfüllen. Dies ist nützlich zu wissen, denn solche Matrizen treten bei der CRANK-NICOLSON-Methode auf. Diese Erläuterungen bilden den begrifflichen Rahmen, in welchem das benutzte Verfahren nun erklärt wird.

3.2 Die CRANK-NICOLSON-Methode

Das Verfahren von CRANK und NICOLSON wurde für Funktionen $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$ entwickelt, deren Bestimmungsgleichung Varianten der Wärmeleitungsgleichung sind, bspw. mit den Funktionen $a(x)$, $p(x)$ und $q(x)$

$$\partial_t u(x, t) = \partial_x (a(x) \partial_x u(x, t)) + p(x) u(x, t) + q(x) \quad (3.20)$$

Solche Formen einer gestörten Wärmeleitungsgleichung werden in dieser Arbeit aber nicht untersucht, weil u in der Störung nur linear auftritt, hingegen das Langzeitverhalten gerade von den Nichtlinearitäten in u abhängt. Im Folgenden wird das CRANK-NICOLSON-Verfahren entsprechend modifiziert vorgestellt und hinsichtlich des Diskretisationsfehlers diskutiert. Die Stabilität der Methode kann nicht generell behandelt werden. Mit den Begriffen dazu aus 3.1 sind aber lineare Gleichungen vom Typ (3.20) noch analysierbar.

Bei der Ersetzung der partiellen Ableitungen von $u(x, t)$ in (3.20) durch diskrete Ausdrücke ist es wünschenswert, daß dieselbe Gitterstelle zu approximieren. Dies wäre bei der Wahl

$$\partial_t u \approx \frac{1}{k} \{u_{i,j+1} - u_{i,j}\} \quad (3.21)$$

$$\partial_x^2 u \approx \frac{1}{h^2} \{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\} \quad (3.22)$$

$$x_i = x_1 + hi, \quad h = \text{konst}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.23)$$

$$t_j = t_o + kj, \quad k = \text{konst}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (3.24)$$

sicherlich nicht der Fall, wie aus der Abbildung 3.2 deutlich wird, denn $\partial_t u$ wird am Punkt C ermittelt, $\partial_x^2 u$ hingegen an der Stelle A = (x_i, t_j) . Deshalb mittelt man die Differenzenapproximation der Ortsableitung über zwei Zeitschritte und diskretisiert also mit

$$u_{xx} \approx \frac{1}{2h^2} \{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\} \quad (3.25)$$

wodurch der Punkt C (vgl. Abb. 3.2) von beiden Ausdrücken jeweils am besten approximiert wird. Natürlich kann man sich auch andere Veränderungen unter diesem Aspekt überlegen. Diese stellen jedoch hinsichtlich des Rechenaufwands und der Fehlerminimierung nicht unbedingt eine Verbesserung zur hier benutzten Form dar.

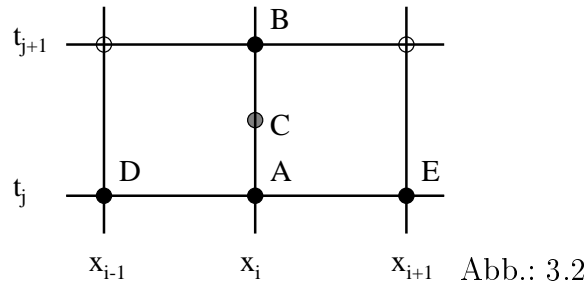


Abb.: 3.2

Auf diese Art werden auch alle weiteren Terme in Gleichungen der Form

$$\partial_t u = D \partial_x^2 u + \alpha u + N[u] + f(x)$$

angenähert, wobei $D, \alpha \in \mathbb{R}$ Konstanten, $f(x)$ eine nicht notwendig stetige, aber zeitunabhängige Funktion und $N[u]$ Nichtlinearitäten in Abhängigkeit

von $u(x, t)$ bezeichnen. Das bedeutet also die Ersetzungen

$$u(x_i, t_{i+\frac{1}{2}}) \mapsto \frac{1}{2} \{u_{i,j} + u_{i,j+1}\} \quad (3.26)$$

$$f(x_i) \mapsto f_i \quad (3.27)$$

Wir werden weiter unten feststellen, daß in den zu betrachtenden gekoppelten Gleichungssystemen (3.26) nicht immer durchführbar ist. Zunächst seien aber die Reaktions-Diffusions-Systeme (RDS), welche von nun an betrachtet werden, angeführt:

$$\begin{aligned} \partial_t u^{(1)} &= D^{(1)} \partial_x^2 u^{(1)} + \alpha^{(1)} u^{(1)} + N^{(1)}[u^{(1)}, \dots, u^{(q)}] + f^{(1)}(x) \\ \partial_t u^{(2)} &= D^{(2)} \partial_x^2 u^{(2)} + \alpha^{(2)} u^{(2)} + N^{(2)}[u^{(1)}, \dots, u^{(q)}] + f^{(2)}(x) \\ &\dots = \dots \\ \partial_t u^{(q)} &= D^{(q)} \partial_x^2 u^{(q)} + \alpha^{(q)} u^{(q)} + N^{(q)}[u^{(1)}, \dots, u^{(q)}] + f^{(q)}(x) \end{aligned} \quad (3.28)$$

mit $q \in \mathbb{N}$, $\alpha^{(l)} = konst^{(l)}$ und $D^{(l)}$, $l = 1, \dots, q$ als Diffusionskonstanten. Die Funktionen $N^{(l)}[u^{(1)}, \dots, u^{(q)}]$, $l = 1 \dots q$ enthalten Kopplungsterme und Nichtlinearitäten, hängen aber nicht explizit vom Ort x oder der Zeit t ab. In ihnen ist die Ersetzung (3.26) i.a. auch nicht sinnvoll, weil zum einen Größen mit verschiedenen Zeitindizes nicht so separiert werden können, daß sich eine Gleichung der Form $\mathbf{u}_{j+1}^{(l)} = F[\mathbf{u}_j^{(1)}, \dots, \mathbf{u}_{j+1}^{(q)}]$ ergibt, wobei F nicht mehr explizit von $\mathbf{u}_{j+1}^{(l)}$ abhängen soll, und desweiteren die in der l -ten Gleichung vorkommenden $\mathbf{u}_{j+1}^{(\hat{l})}$ mit $\hat{l} > l$ erst später berechnet werden. Der dadurch entstehende Fehler bei der Bestimmung von $\mathbf{u}_{j+1}^{(l)}$ wird durch mehrere Nachiterationen mit wählbarer Genauigkeit wieder kompensiert. Das bedeutet, daß die gefundenen Lösungen solange ineinander eingesetzt werden, bis eine voreingestellte Toleranz von der zuvor berechneten Lösung unterschritten wird. Erst nach dieser Prozedur der Nachiteration berechnet der eigentliche CRANK-NICOLSON-Algorithmus aus \mathbf{u}_j die Lösung \mathbf{u}_{j+1} .

Um nun eine handliche Rechenvorschrift zu gewinnen, schreibt man zunächst mit

$$N_{i,j}^{(l)} := N^{(l)} \left[u_{i,j}^{(1)}, \dots, u_{i,j}^{(q)} \right]$$

die diskretisierte Gleichung für einen Reaktanden mit dem Index $l = 1, \dots, q$ im Inneren des numerischen Gitters, d.h. für $i = 2, \dots, n-1$ und $j \geq 0$, hin:

$$\frac{1}{k} \left\{ u_{i,j+1}^{(l)} - u_{i,j}^{(l)} \right\} = D^{(l)} \frac{1}{2h^2} \left\{ u_{i+1,j+1}^{(l)} - 2u_{i,j+1}^{(l)} + u_{i-1,j+1}^{(l)} + u_{i+1,j}^{(l)} - 2u_{i,j}^{(l)} + u_{i-1,j}^{(l)} \right\} \quad (3.29)$$

$$+ \alpha^{(l)} \frac{1}{2} \left\{ u_{i,j+1}^{(l)} + u_{i,j}^{(l)} \right\} + N_{i,j}^{(l)} + f_i^{(l)} \quad (3.30)$$

Anschließend sortiert man zu gleichem Zeitindex j mit der Schreibweise $r := k/h^2$:

$$\begin{aligned} & -\frac{rD^{(l)}}{2} u_{i+1,j+1}^{(l)} + \left(1 + rD^{(l)} - \frac{k\alpha^{(l)}}{2} \right) u_{i,j+1}^{(l)} - \frac{rD^{(l)}}{2} u_{i-1,j+1}^{(l)} \\ = & \frac{rD^{(l)}}{2} u_{i+1,j}^{(l)} + \left(1 - rD^{(l)} + \frac{k\alpha^{(l)}}{2} \right) u_{i,j}^{(l)} + \frac{rD^{(l)}}{2} u_{i-1,j}^{(l)} \\ & + kN_{i,j}^{(l)} + kf_i^{(l)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Für die Indizes $i = 1, n$ fließen Randeffekte in die sich ergebenden Gleichungen ein. Diese sind hier so gewählt, daß das zugrunde liegende Ortsgitter mit den Stützstellen x_i periodisch wird, d.h. für alle $j \geq 1$ soll

$$\begin{aligned} u_{0,j}^{(l)} &:= u_{n,j}^{(l)} \\ u_{n+1,j}^{(l)} &:= u_{1,j}^{(l)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

gelten. Das stellt sicher, daß man den Zeitpunkt t_j des Erreichens der Ortsbeschränkungen einer Lösung $\mathbf{u}^{(l)}$ erkennen und dadurch die folgenden Iterationen unter Umständen als nicht auswertbar identifizieren kann. Ohne periodische Ränder hingegen können die Stoffkomponenten $\mathbf{u}^{(l)}$ aus dem System fließen und damit möglicherweise völlig verschwinden, so daß eine Langzeitsimulation verfälscht wird.

Mit (3.32) und der Vektorschreibweise aus 3.1 läßt sich nun für festes $j \geq 1$ und l die Gleichung (3.31) durch

$$\begin{aligned} ((2 - k\alpha^{(l)})\mathbf{E} + rD^{(l)}\mathbf{J}) \mathbf{u}_{j+1}^{(l)} &= ((2 + k\alpha^{(l)})\mathbf{E} - rD^{(l)}\mathbf{J}) \mathbf{u}_j^{(l)} \\ &+ 2k(\mathbf{N}_j^{(l)} + \mathbf{f}^{(l)}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

zusammenfassen, wobei \mathbf{E} die $n \times n$ -Einheitsmatrix,

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_j^{(l)} &= (N_{1,j}^{(l)}, \dots, N_{n,j}^{(l)}) \\ \mathbf{f}^{(l)} &= (f_1^{(l)}, \dots, f_n^{(l)})\end{aligned}$$

und \mathbf{J} eine $n \times n$ -Matrix der Gestalt

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots & \\ & & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist. Man erhält also eine Iterationsvorschrift ähnlich zu (3.8).

Um nun den Vektor $\mathbf{u}_{j+1}^{(l)}$ mit möglichst geringem Aufwand zu berechnen, wird zunächst festgestellt, daß folgende Zerlegung der auf der linken Seite von (3.33) stehenden Matrix mit

$$\begin{aligned}a^{(l)} &:= 2 - k\alpha^{(l)} + 2rD^{(l)} \\ c^{(l)} &:= -rD^{(l)}\end{aligned}\tag{3.34}$$

gilt:

$$(2 - k\alpha^{(l)})\mathbf{E} + rD^{(l)}\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a^{(l)} & c^{(l)} & 0 & \dots & 0 & c^{(l)} \\ c^{(l)} & a^{(l)} & c^{(l)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c^{(l)} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & c^{(l)} & 0 \\ 0 & \vdots & & c^{(l)} & a^{(l)} & c^{(l)} \\ c^{(l)} & 0 & \dots & 0 & c^{(l)} & a^{(l)} \end{pmatrix} = \mathbf{L}^{(l)}\mathbf{R}^{(l)}\tag{3.35}$$

$$:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{c^{(l)}}{m_1^{(l)}} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c^{(l)}}{m_{n-2}^{(l)}} & 1 \\ \xi_1^{(l)} & \xi_2^{(l)} & \dots & \xi_{n-2}^{(l)} & \xi_{n-1}^{(l)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^{(l)} & c^{(l)} & 0 & \dots & 0 & \zeta_1^{(l)} \\ 0 & m_2^{(l)} & c^{(l)} & 0 & \dots & 0 & \zeta_2^{(l)} \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & \vdots & \ddots & & c^{(l)} & & \zeta_{n-2}^{(l)} \\ \vdots & & & \ddots & m_{n-1}^{(l)} & & \zeta_{n-1}^{(l)} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & & m_n^{(l)} \end{pmatrix}$$

Dabei werden die rekursiven Folgen $\left(m_i^{(l)}\right)_{i=1,2,\dots,n}$, $\left(\xi_i^{(l)}\right)_{i=1,2,\dots,n-1}$ und $\left(\zeta_i^{(l)}\right)_{i=1,2,\dots,n-1}$ definiert durch

$$\begin{aligned} m_1^{(l)} &:= a^{(l)} \\ \xi_1^{(l)} &:= \frac{c^{(l)}}{m_1^{(l)}} = \frac{-rD^{(l)}}{a^{(l)}} \\ m_i^{(l)} &:= a^{(l)} - \frac{(c^{(l)})^2}{m_{i-1}^{(l)}}, \quad i = 2 \dots n-1 \\ \xi_i^{(l)} &:= \frac{rD^{(l)}}{m_i^{(l)}} \xi_{i-1}^{(l)} = \frac{-(rD^{(l)})^i}{\prod_{j=1}^i m_j}, \quad i = 2 \dots n-2 \\ m_n^{(l)} &:= a^{(l)} - \sum_{j=1}^{n-1} (\xi_j^{(l)})^2 m_j \\ \xi_{n-1}^{(l)} &:= \frac{rD^{(l)}}{m_{n-1}^{(l)}} (\xi_{n-2}^{(l)} - 1) \\ \zeta_i^{(l)} &:= \xi_i^{(l)} m_i^{(l)}, \quad i = 1 \dots n-1 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Der Grund für eine solche Zerlegung ist folgender:

Betrachtet man ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{Ax} = (\mathbf{LR})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit der Unbekannten \mathbf{x} und dem vorgegebenen Lösungsvektor \mathbf{b} , so läßt

sich dieses auch durch die Operationen

$$1. \quad \mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (3.37)$$

$$2. \quad \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (3.38)$$

mit einer Hilfsvariablen \mathbf{y} lösen. Die spezielle Gestalt von \mathbf{L} und \mathbf{R} gemäß (3.35) ermöglicht aber ein besonders einfaches sog. Vorwärts- bzw. Rückwärtseinsetzen zur Bestimmung der Vektoren \mathbf{y} bzw. \mathbf{x} .

Der gesamte Rechenaufwand beträgt, sofern sich die Zerlegung der Matrix \mathbf{A} nicht ändert, $(n-2) + (n-1) + 1 + 2 + (n-2) \cdot 3 = 6(n-1) \propto n$ (wobei nur Multiplikationen bzw. Divisionen als wesentliche Operationen gezählt werden). Eine Invertierung einer Matrix mittels GAUß-Algorithmus muß mit einem Aufwand $\propto n^3$ betrieben werden und selbst wenn \mathbf{L}^{-1} berechnet und verwendet wird, so vermindert sich die Anzahl der wesentlichen Operationen nur so, daß sie proportional zu n^2 ist.

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß derartige tridimensionale Gleichungssysteme zur Lösung von Diffusionsproblemen im zweidimensionalen von der CRANK-NICOLSON-Methode nicht optimal gelöst werden. Statt dessen verwendet man besser die Methode der alternierenden Richtungen von PEACEMAN und RACHFORD zur Minimierung des Rechen- und Speicherbedarfs. \square

Kommen wir nun zur Berechnung des *lokalen* und *globalen Diskretisationsfehlers* $d_{i,j+1}$ und $g_{i,j+1}$:

Nach (3.4) hat man mit $\mu := Dr/2$ und $\nu := k\alpha/2$

$$\begin{aligned} d_{i,j+1} = & -\mu u(x_{i+1}, t_{j+1}) + (1 + 2\mu - \nu)u(x_i, t_{j+1}) - \mu u(x_{i-1}, t_{j+1}) \\ & -\mu u(x_{i+1}, t_j) - (1 - 2\mu + \nu)u(x_i, t_j) - \mu u(x_{i-1}, t_j) \\ & -kN(x_i, t_j) - kf(x_i) \end{aligned}$$

zu betrachten. Setzt man nun die jeweiligen TAYLOR-Entwicklungen bis zur 4. Ordnung um den Punkt (x_i, t_j) ein, so ergibt sich mit der Notation

$\partial_z u(x_i, t_j) = \partial_z u$, $z = x, t$ in zusammengefaßter Form der Ausdruck

$$\begin{aligned}
 d_{i,j+1} &= k[\partial_t u - D\partial_x^2 u - \alpha u - N - f] + \frac{1}{2}k^2 \partial_t \underbrace{[-\alpha u - D\partial_x^2 u + \partial_t u]}_{=N+f} \\
 &\quad + \frac{1}{2}k^3 \partial_t^2 [-\alpha u - \frac{D}{2}\partial_x^2 u + \frac{1}{3}\partial_t u] - \frac{D}{12}kh^2 \partial_x^4 u \\
 &\quad - \frac{1}{12}k^4 \partial_t^3 [-\alpha u - \frac{1}{2}\partial_t u] + \frac{\alpha}{2 \cdot 4!}k^5 \partial_t^4 u + \dots \\
 &= \mathcal{O}(k^3) + \mathcal{O}(h^2 k) + \dots
 \end{aligned}$$

Die erste Klammer stellt die betrachtete Differentialgleichung dar und verschwindet daher, die 2. Klammer ergibt nach der vorgegebenen Gleichung gerade die Störungen N und f , welche ja nicht explizit von der Zeit abhängen sollen, woraus das Verschwinden des 2. Summanden folgt. Aus dem Zusammenhang (3.6) zwischen globalem und lokalem Diskretisierungsfehler schließt man auf

$$g_{i,j+1} = \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(h^2) . \quad (3.39)$$

□

Zur *Stabilität* der Methode läßt sich, falls $N^{(l)}[u^{(1)}, \dots, u^{(q)}] = 0$ für alle l gilt, folgendes sagen:

Nach (3.8) und (3.33) muß die Matrix

$$\mathbf{C}^{(l)} := ((2 - k\alpha^{(l)})\mathbf{E} + rD^{(l)}\mathbf{J})^{-1} ((2 + k\alpha^{(l)})\mathbf{E} - rD^{(l)}\mathbf{J})$$

betrachtet werden. Die Eigenwerte der symmetrischen Matrizen

$$\mathbf{B}_{\pm}^{(l)} := ((2 \pm k\alpha^{(l)})\mathbf{E} \mp rD^{(l)}\mathbf{J})$$

haben, wenn λ_J die Eigenwerte der Matrix \mathbf{J} bezeichnen, die Gestalt

$$\lambda(\mathbf{B}_{\pm}^{(l)}) = 2 \pm k\alpha^{(l)} \mp rD^{(l)}\lambda_J .$$

Für die Eigenwerte λ_J der Matrix \mathbf{J} gilt $0 \leq \lambda_J \leq 4$ (s. Anhang 5.9).

Legen wir die Matrixnorm

$$\|\mathbf{M}\|_2 := \max \{ |\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{M} \}$$

fest, so gilt bei symmetrischen Matrizen $\rho(\mathbf{M}) = \|\mathbf{M}\|_2$ (s. Anhang 5.7). Nach (3.19) hat man also für die Eigenwerte $\lambda(\mathbf{C}^{(l)})$ der Matrix $\mathbf{C}^{(l)}$

$$|\lambda(\mathbf{C}^{(l)})| = \left| \frac{\lambda(\mathbf{B}_+^{(l)})}{\lambda(\mathbf{B}_-^{(l)})} \right| \leq 1$$

zu fordern, um Stabilitätsaussagen über das Verfahren machen zu können. Dies führt auf die Beschränkung

$$0 \leq \alpha^{(l)} h^2 \leq D^{(l)} \lambda_J.$$

Wenn man sicher gehen will, daß der Fehlervektor \mathbf{g}_{j+1} (vgl. 3.10) für häufige Iterationen verschwinden soll, dann ist

$$0 \leq \alpha^{(l)} h^2 < D^{(l)} \lambda_J \quad (3.40)$$

zu erfüllen.

Der Fehlervektor \mathbf{g}_{j+1} verschwindet nicht, falls der Eigenvektor $\mathbf{e}_0^T = (1, \dots, 1)$ zum Eigenwert $\lambda_J = 0$ sich als Lösung der Iteration ergibt. Das Auftreten von \mathbf{e}_0^T bedeutet aber, das an jeder Stützstelle x_i , $i = 1, \dots, n$ der gleiche Wert angenommen wird. Aufgrund der periodischen Randbedingungen kann dann nicht mehr sinnvoll von einer Diffusion gesprochen werden. Durch eine nicht zu aufwendige Vergrößerung des Gitters kann diesem Problem jedoch aus dem Wege gegangen werden.

Zwar liegen keine Bedingungen hinsichtlich der Stabilität für h und k vor, falls $\alpha^{(l)} = 0$ ist. Trotzdem dürfen h und k nicht beliebig groß gewählt werden, weil sonst der globale Fehler $g_{i,j}$ zu groß wird und man bestenfalls noch eine qualitative Beschreibung der Lösung erhält.

Im Gegensatz zur herkömmlichen CRANK-NICOLSON-Methode ist zu beachten, daß diese Stabilitätsanalyse nicht ohne zusätzliche Annahmen für den Fall $N[u] \neq 0$ zu gebrauchen ist. Für allgemeine Nichtlinearitäten kann man keine Aussagen über die Stabilität der Berechnungsmethode treffen. Ebenso gilt die Fehlerabschätzung (3.39) nur, wenn die in den Entwicklungskoeffizienten stehenden Terme $N_{i,j}^{(l)}$ zu allen Zeiten beschränkt sind, was einer Stabilitätsaussage gleichkommt.

In der praktischen Umsetzung ist der Algorithmus deshalb mit einer Funktion versehen, die eine zu starke zeitliche Änderung der berechneten Lösung

wahrnimmt. Tritt ein solcher Fall ein, so verringert sich die Zeitgitterkonstante k sowie die davon abhängigen Größen und es wird eine Neuberechnung durchgeführt. Verläuft die Bestimmung der Lösung auf dem kontrahierten Zeitgitter in diesem Sinn stabil, so wird k nach einigen Iterationen automatisch wieder vergrößert. Die Zeitauflösung paßt sich also der zeitlichen Veränderung der Lösung so an, daß schnelle Änderungen feiner und langsame gröber aufgelöst werden. \square

Kapitel 4

Programmbeschreibung

4.1 Programmverlauf und Hilfen für den Anwender

Das Programmpaket

Notwendig für das Programm sind folgende Dateien:

1. cure.pl
Perl-Skript zur Eingabeverwaltung
2. Baba.pm
Modul für cure.pl zur Verarbeitung von Funktionen
3. WIZZY.cpp
C++- Simulationsmaske
4. Yaga.h
Vektorklasse für WIZZY.cpp mit speziellen Eigenschaften

Konzipiert wurde das Programmpaket zu den folgenden Hilfsprogrammen:

- (i) Perl-Interpreter der Version 5.005_03 für UNIX-Systeme
- (ii) g++- Compiler der Version 2.95.2 für UNIX-Systeme
- (iii) GNUPLOT der Version 3.7 für LINUX

Weiter umfaßt das Programmpaket noch diverse Hilfsprogramme zur Datenverarbeitung, deren Beschreibung sich in den folgenden Abschnitten befindet.

Programmverlaufsübersicht

Eine Verlaufsübersicht sei vorangestellt, wobei SYSNA den Namen der Simulation bezeichnet:

cure.pl erstellt mit Hilfe des Moduls Baba.pm in einem Dialog mit dem Anwender die für die Simulation nötigen Eingabedateien, welche ausschließlich aus dem Teil **Systemeinstellungen** 4.1.2 aufgebaut sind (vgl. Abb. 4.1). Sie enthalten keine für die Berechnungsmethode nötigen Daten und tragen alle die Endung *SYSNA, was sie von den Simulationsdaten unterscheidbar macht (vgl. **Datenausgabe** 4.1.3).

Im Teil **Numerische Umgebung** 4.1.1 hingegen werden hauptsächlich die für den CRANK-NICOLSON-Algorithmus nötigen Parameter eingestellt. Diese werden durch cure.pl mit WIZZY.cpp verbunden und somit der eigentliche C++-Quellcode SYSNA.cpp der Simulation erstellt. Dieser wird automatisch kompiliert und zur Ausführung gebracht.

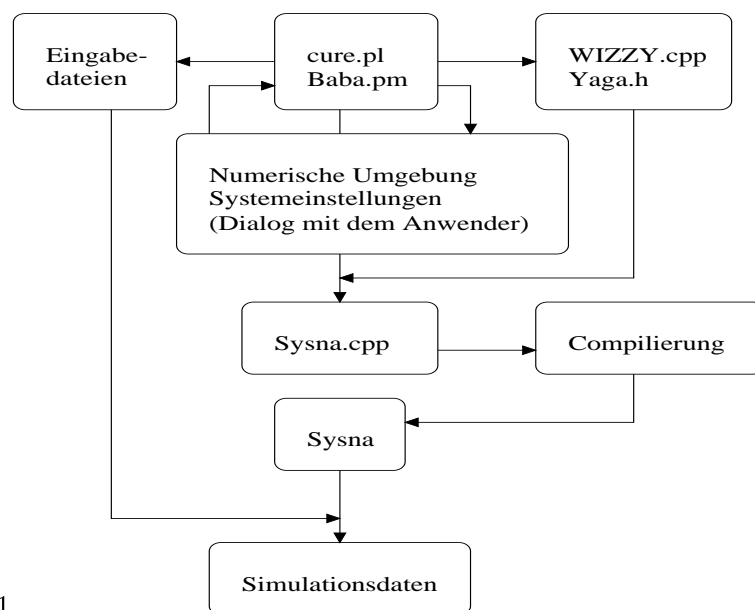


Abb.: 4.1

Insofern stellen die folgenden Abschnitte **Numerische Umgebung** und **Systemeinstellungen** eine Beschreibung des Verlaufs des Perl-Skriptes cure.pl dar. Eine detaillierte Erläuterung des Programms SYSNA befindet sich im Kapitel 4.2.

4.1.1 Numerische Umgebung

Die Bezeichnungen stimmen mit denen des Quellcodes der Simulationsmaske WIZZY.cpp bzw. mit denen aus 3.2 überein. Um das unterscheiden zu können, ist denjenigen Größen, die aus 3.2 stammen die entsprechende Gleichungsbezeichnung angefügt.

Zunächst wird der Dialog mit dem Anwender beschrieben und die Bedeutung der abgefragten Werte erklärt. Jeder Frageblock kann auf Wunsch des Benutzers wiederholt werden.

1. Systemname: SYSNA
2. Kommentar zur Simulation
Dieser befindet sich im Kopf der Dateien mit der Bezeichnung
*_STINX_SYSNA (vgl.4.1.3)
3. z : Anzahl der Ortsgitterpunkte (3.23)
4. h : Feinheit des Ortsgitters (3.23)
Abstand zweier benachbarter Ortsgitterpunkte
5. k : Feinheit des Zeitgitters (3.24)
Abstand zweier aufeinanderfolgender Zeitgitterpunkte
6. *Zeit* : Simulierter Zeitpunkt, der das Ende der Berechnung markiert
Unabhängig von den folgenden Eingaben wird beim Abschluß der Simulation eine letzte Ausgabe zu diesem Endzeitpunkt erzeugt. Darin eingeschlossen sind auch die Kombinationen und deren Skalierungen (vgl. unter 4.1.2 den Abschnitt **Skalierungen**).
7. *Datenschritt* : Iterationsanzahl zwischen zwei Momentaufnahmen
Nach *Datenschritt* Iterationen wird ein Abdruck des Systems gemacht.
8. L : Zeitbasis ((1.3) oder (2.17))
Falls Lösungen zu den Zeitpunkten

$$t_{shot} = L^{n \cdot \vartheta}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.1)$$

skaliert werden sollen, kann ein festes $L \in [1, 100)$ hier eingestellt werden. Die Eingabe von unter Umständen verschiedenen ϑ -Werten erfolgt später (s. unter 4.1.2 im Abschnitt **Skalierungen**).

9. *Feinheit* : Maximale Änderung aufeinanderfolgender Lösungen
 Es kann vorkommen, daß sich der simulierte Systemzustand während aufeinanderfolgender Iterationen sehr schnell ändert. Mit dem Wert *Feinheit* kann eine obere Schranke dieser Änderung eingegeben werden, die bei Überschreiten eine Verfeinerung des Zeitgitters veranlaßt. Der zugehörige Parameter dafür ist k_Redfak .

10. *Intern* : Innere Iterationswiederholung
 Da i.a. gekoppelte Systeme berechnet werden sollen, muß die zu einem Zeitpunkt t gefundene Lösung für die beteiligten Komponenten „getestet“ werden. Dazu werden die Lösungen in die jeweils anderen Gleichungen, in denen sie verwendet werden, eingesetzt. Bei zu starker Abweichung von der zuvor gefundenen Lösung muß die Berechnung für diesen Zeitpunkt t erneut erfolgen („Nachiteration“ vgl. 3.2). Wie häufig dieses automatisch durchgeführt wird, kann hier eingestellt werden.
11. k_Redfak : k -Reduktionsfaktor
 Da Lösungen schnell wachsen und die *Feinheit* leicht überschreiten können, ist es sinnvoll die Zeitauflösung k automatisch anzupassen. Es ist dann:

$$k_{neu}^{(R)} = k_{alt} / k_{Redfak} . \quad (4.2)$$

Die von k abhängigen Größen des Algorithmus werden ebenfalls neu berechnet.

12. *Max_Breaks* : Maximale Häufigkeit der k -Anpassung mit k_Redfak
 Mit *Max_Breaks* kann eine obere Schranke für die Häufigkeit des Überschreiten des Wertes *Feinheit* eingestellt werden. Sollte dann während der Simulation noch einmal *Feinheit* überschritten werden, so erfolgt keine Zeitgitteranpassung mehr, das heißt die berechneten Ergebnisse sind dann günstigenfalls noch qualitativ verwendbar.
13. *Min_stabil* : Minimale Iterationsanzahl zur k -Expansion
 Mit *Min_stabil* läßt sich eine minimale Anzahl von Iterationen einstellen, die durchlaufen werden müssen um das Zeitgitter wieder expandieren zu lassen, falls es zuvor verfeinert wurde (s. *Feinheit* und *Max_Breaks*). Der zugehörige Parameter dafür ist *Dosis*. *Min_stabil* funktioniert nur, falls *Max_Breaks* noch nicht überschritten wurde.

14. *Dosis* : Prozentanteil der aktuellen Zeitauflösung k

Der Wert *Dosis* regelt die automatische Expansion des Zeitgitters, das zuvor durch k_Redfak verkleinert wurde. Dabei ist dann

$$Dosis \in [0, 1] \quad (4.3)$$

$$k_{neu}^{(D)} = (1 + Dosis)k_{alt} \quad (4.4)$$

Es kann $k_{neu}^{(D)}$ nicht den ursprünglichen Wert k_u , welcher vor Beginn der Simulation eingegeben wurde, übersteigen. Gilt also $k_u < k_{neu}^{(D)}$, dann findet keine Anpassung mehr statt, das heißt die von k abhängigen Größen des Algorithmus werden nicht verändert.

4.1.2 Systemeinstellungen

1. Konstanten

- *Anzahl* : Stoffanzahl q aus (3.28)
Dies ist die Zahl der Komponenten (< 100), aus welchen das simulierte System bestehen soll.
- GAUß-Lösung (s. 1.2.1)
Hier ist es möglich die Berechnungen der GAUß-Lösungen zu umgehen, welche vor der Simulation mittels GAUß-Faltung berechnet werden. Diese werden in Dateien mit der Bezeichnung GausstoffSTINX (vgl. 4.1.3) gespeichert und können von GNUPLOT gelesen werden. Dies ist sinnvoll für Vergleiche mit der Lösung zum ungestörten Wärmeleitungssystem, aber u.U. sehr zeitaufwendig. Das Hilfsprogramm real.pl (s. 4.1.4) nimmt diese Option jedoch nicht wahr und erstellt immer Dateien, die auf GAUß-Lösungen Bezug nehmen. Diese Verweise müssen dann nachträglich entfernt werden, weil es sonst zu Fehlermeldungen kommen kann.
- *Diffko* und *alpha* : Konstanten D und α_{lin} aus (3.28)
Pro Stoff werden die Diffusionskonstanten D und die α_{lin} -Werte abgefragt und in den Dateien mit der Bezeichnung Diff.SYSNA bzw. Alph.SYSNA hinterlegt (vgl. 4.1.3).
- Startbedingungen
Pro Stoff werden die Startbedingungen erfragt und in Dateien mit der

Bezeichnung Stoff.STINX.SYSNA und Stoff_STINX_SYSNA gespeichert (vgl. 4.1.3). Es besteht die Möglichkeit mehrere Intervalle mit verschiedenen Funktionen, die in Abhängigkeit von x geschrieben werden müssen, zu initialisieren. Eine Überlagerung wird additiv verarbeitet und für Divisionen muß hier ':' statt '/' benutzt werden.

2. Nichtlinearitäten $N[u^{(1)}, \dots, u^{(q)}]$ aus (3.28)

- Pro Komponente wird nun nach den Nichtlinearitäten in Abhängigkeit aller vorkommenden Stoffe gefragt. Diese müssen mit u[Stoffindex-1] bezeichnet sein. So muss z.B.

$$-2(2.\text{Stoff})(1.\text{Stoff}) + (3.\text{Stoff}) \quad \text{als} \quad 0 - 2 * u[1] * u[0] + u[2]$$

eingegeben werden.

3. Zeitfreie Funktionen $f(x)$ aus (3.28)

- Pro Stoff können hier zeitunabhängige Funktionen eingegeben werden, analog zu den Startbedingungen. Zu finden sind sie in den Dateien Zf.STINX.SYSNA und Zf_STINX_SYSNA (vgl. 4.1.3)

4. Skalierungen

- $RGKom(u[0], \dots, u[q])$: Zu skalierende Kombination
In Abhängigkeit der verschiedenen Komponenten können Kombinationen eingegeben werden (s. 4.1.2 im Abschnitt **Nichtlinearitäten**), die gemäß

$$RGKom(x, t) \longrightarrow t^{\frac{\gamma_{Skal}}{2}} RGMom(x t^{\frac{\alpha_{Skal}}{2}}, t) \quad (4.5)$$

skaliert werden sollen. Der Zeitpunkt t wird aufgrund von *Datenschritt* oder L (s. 4.1.1) gewählt und die Lösung in SKomSTINX.ABC gespeichert. Je nach Wunsch können auch die zu skalierenden Kombinationen ausgedruckt werden. Die zugehörigen Dateien tragen die Namen KombiSTINX.ABC (vgl. 4.1.3).

Die Möglichkeit Kombinationen zu skalieren ist sinnvoll, weil bei entkoppelten Systemen *Intern* (s. 4.1.1) kleiner gewählt werden kann, trotzdem aber durch diese Option die ursprünglich gekoppelten Komponenten berechnet und skaliert werden können.

Man erkennt hier folgenden Zusammenhang zwischen den Bezeichnungen der Skalierungsexponenten der Theorie (2.18) und des Programms:

$$\alpha_{Skal}(\vartheta) = \frac{2}{\vartheta} \quad (4.6)$$

$$\gamma_{Skal}(\omega, \vartheta) = \frac{2\omega}{\vartheta} \quad (4.7)$$

- *Gamma* und *Alpha_RG* : Skalierungsexponenten (4.7) und (4.6)
Dies sind die zu den zuvor eingegebenen Kombinationen gehörigen Skalierungsexponenten (s. *RGKom*($u[0], \dots, u[q]$)). Sie werden als Dezimalbruch eingegeben. Für (2.56) und (2.65) gilt:

$$\alpha_{Skal}(\vartheta_*) + \gamma_{Skal}(\omega_*, \vartheta_*) = \frac{d_* - 1}{d_* + 1} + \frac{2}{d_* + 1} = 1$$

Nach der letzten Eingabe werden die Daten verarbeitet und die Simulation gestartet.

4.1.3 Datenausgabe

Das Programm erstellt folgende Dateien (SYSNA = Systemname; STINX = Stoffindex; ABC = Dateiindex):

1. SYSNA.cpp
Enthält den C++-Code für die Simulation und wird i.a. automatisch kompiliert mit `g++ -o SYSNA SYSNA.cpp -lm`
2. SYSNA
Ausführbare Simulation
3. Alph.SYSNA
Enthält die α_{lin} -Werte (*alpha* bzw. (3.28)) der Komponenten und wird von SYSNA.cpp benötigt
4. Diff.SYSNA
Enthält die Diffusionskonstanten D (*Diffko* bzw. (3.28)) der Komponenten und wird von SYSNA.cpp benötigt

5. Stoff.STINX.SYSNA
Enthält die Startfunktionen der Komponenten (s. 4.1.2 Abschnitt **Konstanten**) und wird von SYSNA.cpp benötigt
6. Stoff_STINX_SYSNA
Wie 5., jedoch von GNUPLOT lesbar (linke Spalte = x -Koordinate, rechte Spalte = y -Koordinate) und erweitert durch den zu Beginn der Einstellungen eingegebenen Kommentar und durch die Angabe der Startfunktionen
7. Zf.STINX.SYSNA und Zf_STINX_SYSNA
Analog zu 5. und 6. werden hier die zeitfreien Funktionen der Komponenten gespeichert
8. GausstoffSTINX
Enthält die GAUSS-Lösung des Anfangswertproblems (s. 1.2.1)
9. StoffSTINX.ABC
Enthält die gefundene Lösung und folgenden Kopf („#“ am Beginn einer Zeile kennzeichnet für das Programm GNUPLOT eine Kommentarzeile und wird daher überlesen. Bei anderen Graphikprogrammen muß dies u.U. geändert werden.):

```
#System: SYSNA
#
#Datum: 24.02.2001
#
#Shot   : 0/1
#
#Shot-Nr : Shot_Nr
#Diffko  =  $D$ 
#Alpha   =  $\alpha_{lin}$ 
#Nichtlin = Nichtlinearitäten
#Feinheit des Ortsgitters h=  $h$ 
#Feinheit des Zeitgitters k=  $k$ 
#Zeit     =  $Zeit$ 
#Zeitpunkt: Timestep
#Feinheit = Feinheit
#Anzahl der k-Halbierungen : Breaks
#Innere Iterationen Intern = Intern
```

#Abdruck nach Iterationen : *Datenschritt*

#Gammaexponent der RG-Trafo: γ_{skal}

#Alphaexponent der RG-Trafo: α_{skal}

Erläuterungen zu noch unbekannten Variablen:

(I) Der Zeile „Shot“ entnimmt man, daß die betrachtete Datei zu einem Zeitpunkt $t_{shot} = L^{n \cdot \vartheta}$, $n \in \mathbb{N}$, gedruckt wurde (s. 4.1.1) oder infolge der regelmäßigen Abdrucknahme mittels *Datenschritt* (s. 4.1.1) entstand. Im ersten Fall steht nach „Shot:“ die Ziffer 1, im zweiten die Ziffer 0.

(II) An der Zeile „Shot-Nr“ liest man ab, wie oft „Shot: 1“ bisher auftrat.

(III) „Nichtlin“ enthält die zu dieser Komponente eingegebene Kombination von *Nichtlinearitäten* (s. 4.1.2).

(IV) „Zeitpunkt“ druckt die Systemzeit, zu welcher die Datei erstellt wurde. Mit „Shot: 1“ und den bekannten Werten $\alpha_{skal} = 2/\vartheta$ und L läßt sich somit zu einer skalierten Kombination das zugehörige n (s. (I)) bestimmen.

(V) „Anzahl der k-Halbierungen“ gibt an, wie oft das Zeitgitter verringert wurde. In der Zeile „Feinheit des Zeitgitters k“ steht aber immer der aktuelle k -Wert.

10. KombiSTINX.ABC

Enthält die zu skalierenden Kombinationen; STINX bedeutet hier den Index der eingegebenen Kombination. Der Dateikopf ist identisch mit dem von StoffSTINX.ABC.

11. SKomSTINX.ABC

Enthält die skalierten Komponenten-Kombinationen; STINX bedeutet hier den Index der eingegebenen Kombination.

Der Kopf der Datei unterscheidet sich von StoffSTINX.ABC in zwei Punkten:

(a) Es gibt eine Zeile, die den L -Wert enthält.

(b) Statt der Zeile, welche die *Nichtlinearitäten* in StoffSTINX.ABC darstellt, wird in SKomSTINX.ABC jene Kombination *RGKom*[...] gedruckt, welche zur Erstellung von SKomSTINX.ABC skaliert wurde.

4.1.4 Beschreibung der Hilfen

(i) Benutzung von real.pl

Das Hilfsprogramm real.pl (Aufruf u.U. durch `./real.pl`) erstellt eine Datei, welche die Dateinamen *STINX.ABC aus einer Simulation enthält, deren Daten sich der Benutzer anschauen will. Die Benutzung verläuft folgendermaßen:

1. Eingabe des Systemnamens : SYSNA
2. Eingabe des Namens der zu erstellenden Datei : NAME
3. Eingabe der einzulesenden Daten : DATEITYP
Hier muß also entweder „Stoff“, „Kombi“ oder „SKom“ eingetragen werden.
4. Eingabe eines Kommentars : KOMMENTAR
5. Eingabe von STINX
Hier werden nacheinander jene STINX eingegeben, die man sich von DATEITYP anschauen möchte. Um die Eingabe zu beenden gibt man schließlich 'q' ein.
6. Eingabe von ABC
Zu jedem STINX, den man zuvor eingegeben hat, kann man nun eine Auswahl von Indizes ABC bzw. die eigentliche Dateiauswahl treffen. Jede Eingabe ist mit 'q' abzuschließen. Nach der letzten Abfrage hat man die Möglichkeit alle Abfragen zu wiederholen.

Es entsteht eine Datei NAME.SYSNA, welche typischerweise so aussieht

```
#####
##   Kommentar: Ein kleines Beispiel eines Kommentars
##
##
#####
plot "Stoff01.002" w l, \
"Stoff01.004" w l, \
"Kombi02.008" w l, \
"SKom02.001" w l, \
"SKom02.003" w l, \
"SKom02.006" w l, \
"Gausstoff01" w l, \
"Gausstoff02" w l
pause -1
```

Dabei wird immer Bezug auf die Dateien GausstoffSTINX genommen, auch wenn diese nicht berechnet wurden. Diese Verweise müssen dann gegebenenfalls entfernt werden.

Der plot-Befehl wird vom Hilfsprogramm GNUPLOT verarbeitet. Er kann durch die entsprechende Optionen verändert werden. Die Möglichkeiten dazu entnimmt man der GNUPLOT-Hilfe.

(ii) Benutzung von changy.pl

Dieses Hilfsprogramm erzeugt aus den Dateien, die eine Simulation erstellt hat, Eingabedateien für eine erneute Simulation. Dabei werden alle Kommentarzeilen und die Spalte der x -Werte gelöscht und der Rest in einer neuen Datei gespeichert. Das ist sinnvoll, wenn eine Simulation abgebrochen werden muß: die zuletzt erstellten Daten StoffSTINX.ABC können durch changy.pl für eine neue Simulation mit u.U. anderen Rahmenbedingungen verwendet werden.

(iii) Benutzung von rename.pl

Mit rename.pl lassen sich Dateinamen speziellen Formats ändern. Dieses Format hat die Form *STINX.ABC und kann in *neuerNameSTINX.ABC geändert werden. Dies hilft beim Gebrauch von real.pl.

(iv) Benutzung von autozip.pl

autozip.pl komprimiert alle Daten in einem Verzeichnis und prüft anschließend in regelmäßigen Zeitabständen dessen Größe. Sobald Daten hinzugefügt wurden wird dies erkannt und die Daten automatisch mittels `gzip` komprimiert. Die Zeit zwischen zwei Kontrollen kann voreingestellt werden. `autozip.pl` ist in jedem Fall dann zu verwenden, wenn durch eine Simulation große Datenmengen zu erwarten sind.

(v) Benutzung von expo.pl

Dieses kleine Programm berechnet zu einem L -Wert die Werte $t_{shot} = L^{n \cdot \vartheta}$ mit $n \in \mathbb{N}$ zu verschiedenen $\alpha_{skal} = 2/\vartheta$ und bis zu einem maximalen n_{max} . Diese Werte werden auf dem Bildschirm ausgegeben. Dies ist hilfreich bei der Zuordnung von Dateien: wenn zu verschiedenen α_{skal} -Werten Skalierungen durchgeführt wurden, braucht man nur den Zeitstempel *Timestep* (vgl. 4.1.3) der zu prüfenden Datei mit den Ergebnissen von `expo.pl` zu vergleichen.

4.2 Programmverlauf der Simulation

In diesem Teil der Beschreibung wird auf die Arbeitsweise der eigentlichen Simulation, genannt SYSNA, eingegangen. Diese Bemerkungen sollen helfen neue Module in den schon bestehenden Teil zu integrieren oder einige Funktionen zu verbessern. Die erläuterten Routinen entsprechen denen der Maske WIZZY.cpp und der Klasse Yaga.h. In einigen Punkten muß auf 3.2 verwiesen werden, wo die Funktionsweise des Algorithmus ausführlich dargestellt wird. Zunächst soll wieder eine Übersicht vorangestellt werden, in der nur die wesentlichen Schritte eingezeichnet sind:

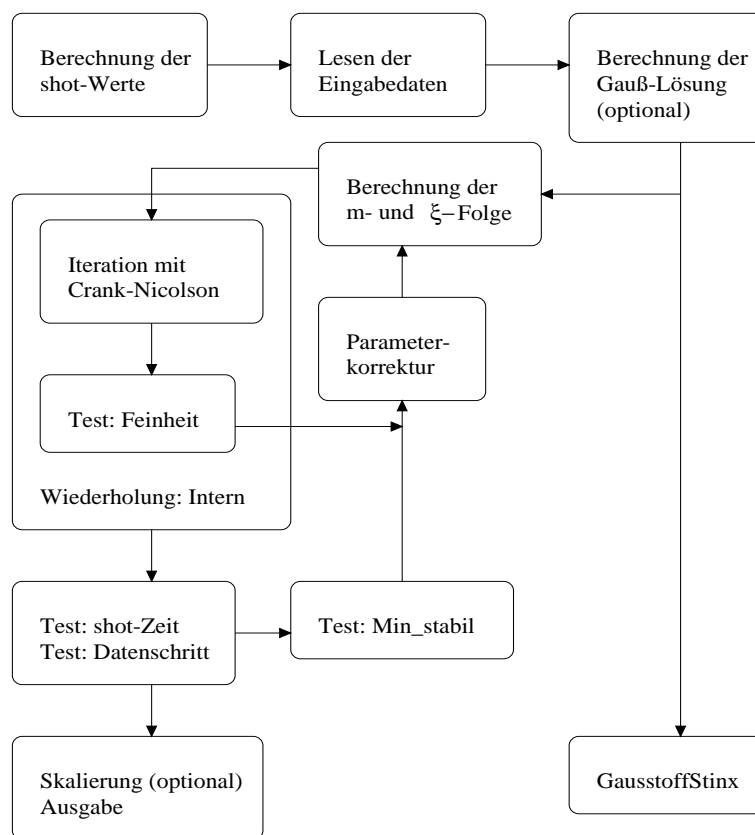


Abb.: 4.2

Erläuterungen zur Abbildung 4.2:

Im sich anschließenden Text werden die folgenden Abkürzungen gebraucht:

(a) Speicherung: Array

bezeichnet Daten, die zur Laufzeit von SYSNA entstehen und in Array abge-

legt werden.

(b) X-Methode: Methode

bezeichnet die wesentliche Funktion Methode, die gerade benutzt wird. Dabei ist $X = W$ oder Y für Funktionen aus WIZZY.cpp oder Yaga.h.

Die Ausgaben werden immer von Writeall (W-Methode) gesteuert mit Ausnahme der Dateien SKomSTINX.ABC, welche von Give_out (Y-Methode) bedruckt werden.

1. Berechnung der shot-Werte

In diesem zu Beginn des Programms stehenden Teils werden die für den Test „shot-Zeit“ nötigen Werte (4.1) zu u.U. verschiedenen α_{Skal} berechnet. Dabei wird n_{max} so gewählt, daß zu maximalem $\alpha_{Skal}^{(max)}$ noch

$$t_{shot}^{(max)} \leq Zeit$$

gilt.

Speicherung: Expo

2. Lesen der Eingabedaten

In der Reihenfolge α_{lin} (alpha), D (Diffko), Startbedingungen und Zeitfreie Funktionen werden die entsprechenden Dateien eingelesen (s. 4.1.2).

Speicherung: alpha, Diffko, Stoff, Zf_Fkt

3. Berechnung der GAUß-Lösung (optional)

Hier werden auf Wunsch des Benutzers die Lösungen zum Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, t) &= u''(x, t) \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

mittels GAUß-Faltung für den Zeitpunkt $Zeit$ berechnet und als GausstoffSTINX ausgegeben (s. 1.2.1 und 4.1.3) .

Y-Methode: GaussFalt

4. Berechnung der m -und ξ -Folge

In diesem Teil wird aus den Werten k , α_{lin} und D für jeden Stoff die m -und

ξ -Folge rekursiv gebildet (vgl. (3.36) und (3.28)).

W-Methode: `m_xi_F`

5. (I) Mit der m - und ξ -Folge stehen nun die Matrizen für die modifizierte CRANK-NICOLSON-Methode fest. Damit läßt sich nun die **LR**-Zerlegung ausnutzen (s. (3.37) und (3.38)):

(i) Berechnung des Vektors

$$\mathbf{b}_j = ((2 + k\alpha_{lin})\mathbf{E} - rD\mathbf{J})\mathbf{u}_j + 2k\mathbf{N}_j + 2k\mathbf{f}$$

für jede Komponente (vgl. (3.33)) zu $0 \leq j$

W-Methode: `RightSide`

(ii) Vorwärtseinsetzen: Berechnung von \mathbf{c}_j in $\mathbf{L}\mathbf{c}_j = \mathbf{b}_j$

Y-Methode: `Push`

(iii) Rückwärtseinsetzen: Berechnung von \mathbf{u}_{j+1} in $\mathbf{R}\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{c}_j$

Y-Methode: `Pull`

(II) Test: Feinheit

Gilt nun für die in (I) gefundene Lösung

$$\bigvee_{i \in \{1, \dots, n\}} : |u_{i,j+1} - u_{i,j}| > \textit{Feinheit}, \quad (4.8)$$

so wird die Lösung \mathbf{u}_{j+1} verworfen. Es erfolgt eine Anpassung der Zeitgitterauflösung $k \mapsto k_{neu}^{(R)}$ wie in (4.2) beschrieben und eine Neuberechnung der m - und ξ -Folge bezüglich $k_{neu}^{(R)}$ für alle Komponenten. Ist (4.8) nicht erfüllt, so wird \mathbf{u}_{j+1} wieder für den Teil (I) verwandt.

W-Methode: `Test_it`

Insgesamt wiederholt sich die Abfolge (I)/(II) *Intern*-mal. Erst wenn es also *Intern* oft nicht zur Erfüllung von (4.8) gekommen ist wird der Programmverlauf fortgesetzt. Durch diese Nachiteration wird man der Kopplung der Gleichungen untereinander gerecht. Eine Zeitgitteranpassung wie sie in (II) beschrieben ist wird nur *Max_Breaks*-mal zugelassen (vgl. 4.1.1).

6. Test: shot-Zeit/Datenschritt

Die simulierte Systemzeit t_{system} wird mit den berechneten „shot-Zeiten“ t_{shot} aus 1. verglichen. Gilt dann

$$t_{system} - t_{shot} < k$$

so wird u.U. skaliert und ein Abdruck des Systemzustandes gemacht. Gleiches geschieht, falls *Datenschritt* Iterationen durchlaufen wurden, oder die Simulation beendet wird, das heißt

$$Zeit - t_{system} < k$$

erfüllt ist (zu *Zeit* vgl. 4.1.1).

7. Test: Min_stabil

Sind seit der zuletzt durchgeführten Zeitgitteranpassung mittels $k \mapsto k_{neu}^{(R)}$ aus (4.2) *Min_stabil* Iterationen durchgeführt worden, dann erfolgt eine automatische Vergrößerung des k -Wertes auf $k \mapsto k_{neu}^{(D)} < k_u$ wie in (4.4) beschrieben und die Neuberechnung der m - und ξ -Folge zu $k_{neu}^{(D)}$. Als Schranke für $k_{neu}^{(D)}$ dient der ursprünglich eingegebene Wert k_u . \square

Auf der beigefügten CD befinden sich die beschriebenen Programme im Verzeichnis **Paket**.

Die übrigen Verzeichnisse enthalten alle in dieser Arbeit beschriebenen Simulationsdaten, aber auch solche Ergebnisse, die hier nicht näher erläutert wurden.

Kapitel 5

Anhang

5.1 Definition eines BANACH-Raumes

Ein reeller Vektorraum \mathcal{B} mit einer Abbildung $\|\cdot\| : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ heiße BANACH-Raum, falls gilt:

- (i) Für alle $b \in \mathcal{B}$, $b \neq 0$: $\|b\| > 0$
- (ii) Für alle $r \in \mathbb{R}$, $b \in \mathcal{B}$: $\|rb\| = |r| \cdot \|b\|$
- (iii) Für alle $c, b \in \mathcal{B}$ (Dreiecksungleichung): $\|c + b\| \leq \|c\| + \|b\|$
- (iv) \mathcal{B} ist vollständig bezüglich $\|\cdot\|$ (Jede CAUCHY-Folge konvergiert in \mathcal{B}).

5.2 Definition der L_p –Räume

Für $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$L_p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ messbar, } \|u\|_p := \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

und

$$L_{\infty}(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|u\|_{\infty} := \inf \{ q \in \mathbb{R} \mid \int_{\{x \in \Omega \mid |u(x)| > q\}} dx = 0 \} \right\}$$

definiert. Dabei werden Funktionen miteinander identifiziert, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden.

Die Räume $L_p(\Omega)$ sind BANACH-Räume bezüglich $\|\cdot\|_p$.

Es gilt die HÖLDER-Ungleichung: Seien $1 < p, q \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$$

Dann gilt für je zwei Funktionen $f \in L_p(\Omega)$, $g \in L_q(\Omega)$

$$\|fg\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

5.3 Definition der FOURIER-Transformation

Für jede Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ heiße die Funktion

$$\hat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

welche definiert ist durch

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x \cdot \xi)} d^n x$$

die FOURIER-Transformierte von f . Dabei ist $(x \cdot \xi) := \sum_{k=1}^n x_k \xi_k$.
Als Umkehrung erhält man

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i(x \cdot \xi)} d^n \xi$$

1. Es gilt die sog. Faltungsformel

$$\hat{f} * \hat{g} = \widehat{f \cdot g}$$

mit

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy$$

2. Aus dem Satz von PLANCHEREL folgt:

Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$, so ist $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$$

3. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &= \left\| \int e^{ikx} \hat{f}(k) dk \right\|_\infty \\
&\leq \int \|e^{ikx}\|_\infty |\hat{f}(k)| dk \\
&= \|\hat{f}\|_1 \\
&\leq \sup_k (1 + k^4) |\hat{f}(k)| \int \frac{1}{1 + k^4} dk \\
&\leq \sup_k (1 + k^4) (|\hat{f}(k)| + |\hat{f}'(k)|)
\end{aligned}$$

5.4 Trivialer Fixpunkt ϕ_o^* bei Fronten

Es gilt

$$R_L \phi_o^*(x) = \phi_o^*(x) = u_- + (u_+ - u_-)e(x)$$

denn mittels GAUß-Faltung erhält man

$$\begin{aligned}
u(Lx, L^2) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi} \sqrt{4\pi(L^2 - 1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y - Lx)}{4(L^2 - 1)}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) dz}_{=e(y)} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi} \sqrt{4\pi(L^2 - 1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y - Lx)}{4(L^2 - 1)}\right) \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{(z + y)^2}{4}\right) dz dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi} \sqrt{4\pi(L^2 - 1)}} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y - Lx)}{4(L^2 - 1)}\right) \exp\left(-\frac{(z + y)^2}{4}\right) dy dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi} L} \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{(Lx - (L^2 - 1)z)}{4L^2(L^2 - 1)}\right) \exp\left(-\frac{L^2 x^2 + (L^2 - 1)z^2}{4(L^2 - 1)}\right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi} L} \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{(z - Lx)^2}{4L^2}\right) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) dz \\
&= e(x)
\end{aligned}$$

Die Konstanten erfüllen die o.g. Gleichung ohnehin. Ein wenig heuristischer verläuft die folgende Herleitung: es gilt ja

$$\begin{aligned}\widehat{R_L f}(k) &= L^{-1} \hat{u}(L^{-1}k, L^2) \\ &= L^{-1} e^{-k^2(1-L^{-2})} \cdot \hat{f}(L^{-1}k)\end{aligned}$$

weil

$$\begin{aligned}R_L f(x) &= u(Lx, L^2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi(L^2-1)}} e^{-\frac{(Lx)^2}{4(L^2-1)}} * f(x)\end{aligned}$$

Nun ist $f(x) = e(x)$, also $\partial_x f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\{-\frac{x^2}{4}\}$. Daher ist

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_x f}(L^{-1}k) &= i \frac{k}{L} \hat{f}(L^{-1}k) \\ &= e^{-(L^{-1}k)^2}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}ik \widehat{R_L f}(k) &= L^{-1} L e^{-k^2(1-L^{-2})} e^{-(L^{-1}k)^2} \\ &= e^{-k^2}\end{aligned}$$

woraus durch Rücktransformation

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(R_L f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}} \\ R_L f(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{4}} dz \\ &= e(x)\end{aligned}$$

folgt. Die FOURIER-Transformierte von $e(x)$ existiert jedoch für $k = 0$ nicht, weshalb der Ansatz in Frage gestellt werden muß.

5.5 Eine Teilung der 1 auf \mathbb{R}

Eine weitaus einfachere als in der Arbeit angegebene Teilung der Eins ist die folgende Konstruktion für eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\psi(x) := \begin{cases} 1 - |x|, & \text{falls } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{falls } |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi(x - n) = 1$$

Diese erfüllt aber nicht die Voraussetzungen in der Normdefinition, denn ψ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar, mithin $\psi \notin C^\infty$.

5.6 Berechnung der Gleichung für w

Wie im text schon angedeutet ist, soll $a = a(u, \partial_x u)$ und $u = u^* + v^* + w$ bezeichnen. Nach Definition ist $w = v - v^*$. Die PDGl für v und v^* sind bekannt, so daß also

$$\begin{aligned} \partial_t w &= -\partial_t v^* + \partial_t v \\ &= -\partial_x [\partial_x ((1 + a^*(u^*))v^*) + \partial_{(\partial_x u)} a(u^*, 0) (\partial_x u^*)^2] \\ &\quad + \partial_x ((1 + a)\partial_x v + (a - a^*(u^*))\partial_x u^*) \\ &= \partial_x [(a - a^*(u^*))\partial_x v^* - a\partial_x v^* - \partial_x v^* - v^*\partial_x a^*(u^*) \\ &\quad - \partial_{(\partial_x u)} a(u^*, 0) (\partial_x u^*)^2 + a\partial_x v + \partial_x v + (a - a^*(u^*))\partial_x u^*] \\ &= \partial_x [(a - a^*(u^*))\partial_x v^* + a\partial_x w + \partial_x w - v^*\partial_x a^*(u^*) \\ &\quad - \partial_{(\partial_x u)} a(u^*, 0) (\partial_x u^*)^2 + (a - a^*(u^*))\partial_x u^*] \\ &= \partial_x^2 w + \partial_x [(a - a^*(u^*))\partial_x v^* + a\partial_x w - v^*\partial_x a^*(u^*) \\ &\quad + ((a - a^*(u^*)) - \partial_{(\partial_x u)} a(u^*, 0)\partial_x u^*)\partial_x u^*] \\ &= \partial_x^2 w + K \end{aligned}$$

gilt.

5.7 Spektralradius und Matrizenorm

Sei \mathbf{M} eine beliebige quadratische Matrix und $\|\mathbf{M}\|$ eine bel. Matrizenorm sowie $\rho(\mathbf{M})$ der zu \mathbf{M} gehörige Spektralradius. Dann ist

$$\rho(\mathbf{M}) \leq \|\mathbf{M}\|$$

denn offenbar gilt für jeden Eigenvektor \mathbf{x} von \mathbf{M}

$$|\lambda| \|\mathbf{x}\| \leq \|\lambda \mathbf{x}\| = \|\mathbf{M}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{M}\| \|\mathbf{x}\|$$

und wegen

$$\|\mathbf{M}^j\| \leq \|\mathbf{M}\| \|\mathbf{M}^{j-1}\| \leq \dots \leq \|\mathbf{M}\|^j$$

für $j = 0, 1, \dots$ folgt eben

$$\rho(\mathbf{M}^j) \leq \|\mathbf{M}\|^j$$

Betrachtet man nun die sog. Spektralnorm

$$\|\mathbf{M}\|_2 := \max \{|\lambda| \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } \mathbf{M}\}$$

so stellt man sofort fest:

Ist \mathbf{M} eine symmetrische und quadratische Matrix, so gilt $\rho(\mathbf{M}) = \|\mathbf{M}\|_2$; denn:

$$\|\mathbf{M}\|_2^2 = \rho(\mathbf{M}^T \mathbf{M}) = \rho(\mathbf{M}^2) = \rho^2(\mathbf{M})$$

5.8 Globaler und lokaler Diskretisationsfehler

Sei

$$\begin{aligned} |F(x, a, b, h) - F(x, \alpha, b, h)| &\leq L |a - \alpha| \\ |F(x, a, b, h) - F(x, a, \beta, h)| &\leq L |b - \beta| \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit $0 < L < \infty$ und $\max(|d_i| \mid i = 0, 1, 2, \dots) \leq d_{\max} < \infty$, sowie $0 < K$ so, daß

$$1 + hK = \frac{1 + hL}{1 - hL} \quad (5.2)$$

gilt. Betrachtet man nun

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hF(x_i, y(x_i), y(x_{i+1}), h) + d_{i+1} \quad (5.3)$$

und zieht davon

$$y_{i+1} = y_i + hF(x_i, y_i, y_{i+1}, h) \quad (5.4)$$

ab, so ergibt sich für $i = 0, 1, \dots$ mit (5.1)

$$\begin{aligned} |g_{i+1}| &= |g_i + h \cdot [F(x_i, y(x_i), y(x_{i+1}), h) - F(x_i, y_i, y(x_{i+1}), h) \\ &\quad + F(x_i, y_i, y(x_{i+1}), h) - F(x_i, y_i, y_{i+1}, h)] + d_{i+1}| \\ &\leq |g_i| + hL \cdot [|y(x_i) - y_i| + |y(x_{i+1}) - y_{i+1}|] + |d_{i+1}| \\ &= (1 + hL) |g_i| + hL |g_{i+1}| + |d_{i+1}| \\ &\leq \frac{(1 + hL)}{(1 - hL)} |g_i| + \frac{|d_{i+1}|}{(1 - hL)} \quad \text{falls } hL < 1 \text{ ist.} \\ &\leq (1 + hK) |g_i| + \frac{D}{(1 - hL)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Insgesamt kann man damit abschätzen

$$\begin{aligned} |g_{i+1}| &\leq (1 + hK) |g_i| + \frac{d_{max}}{(1 - hL)} \\ &\leq (1 + hK)^2 |g_{i-1}| + ((1 + hK) + 1) \frac{d_{max}}{(1 - hL)} \\ &\leq \dots \\ &\leq (1 + hK)^{i+1} |g_o| + ((1 + hK)^i + \dots + (1 + hK) + 1) \cdot \frac{d_{max}}{(1 - hL)} \\ &= (1 + hK)^{i+1} |g_o| + \frac{(1 + hK)^{i+1} - 1}{hK} \cdot \frac{d_{max}}{(1 - hL)} \\ &\leq e^{(i+1)hK} |g_o| + \frac{e^{(i+1)hK} - 1}{hK} \cdot \frac{d_{max}}{(1 - hL)} \\ &\leq \frac{d_{max}}{hK(1 - hL)} e^{(i+1)hK} \quad \text{weil } g_o = y(x_o) - y_o = 0 \text{ ist.} \\ &= \frac{d_{max}}{(1 + hL)} e^{(i+1)hK} \end{aligned} \quad (5.6)$$

wobei $(1 + x)^i \leq e^{ix}$ für alle $i = 1, 2, \dots$ und für alle $0 \leq x$ benutzt wurde.

5.9 Berechnung der Eigenwerte der J-Matrix

Zur Stabilitätsanalyse des CRANK-NICOLSON-Verfahrens benötigt man die Eigenwerte der vorkommenden Matrizen und damit die der vorkommenden Matrix \mathbf{J} . Dazu bedient man sich der diskreten FOURIER-Analyse: man betrachtet die Basisvektoren eines n -dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraums

$$\mathbf{e}_k := \begin{pmatrix} \exp(2\pi i k/n) \\ \exp(2 \cdot 2\pi i k/n) \\ \vdots \\ \exp(n \cdot 2\pi i k/n) \end{pmatrix}, \quad k = 1 \dots n$$

und stellt fest, daß jeder dieser Vektoren schon Eigenvektor der Matrix \mathbf{J} ist, denn es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\mathbf{e}_k &= (2 - \exp(2\pi i k/n) - \exp(-2\pi i k/n))\mathbf{e}_k \\ &= 2(1 - \cos(2\pi i k/n))\mathbf{e}_k \\ &=: \lambda_k \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

Da aber \mathbf{J} höchstens n verschiedene Eigenwerte λ_k haben kann, sind dies auch schon alle. Insbesondere erkennt man die Abschätzung $0 \leq \lambda_k \leq 4$ für alle $k = 1 \dots n$.

5.10 Lokal gleichmäßige Konvergenz

Definition

Eine Funktionenfolge $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt lokal gleichmäßig konvergent in X , falls jeder Punkt $x_o \in X$ eine Umgebung (offene, x_o enthaltene Menge) $U \subset X$ besitzt, so daß f_n in U gleichmäßig konvergiert.

Literaturverzeichnis

- [Baz2000/I] Bazant, M. Z.; Bonnefont Antoine; Argoul, Françoise: Asymptotic Analysis of Diffuse-Layer Effects on Time-Dependent Interfacial Kinetics. cond-mat/0006104 7 Jun 2000
- [Baz2000/II] Bazant, M. Z.; Stone, H. A.: Asymptotics of Reaction-Diffusion Fronts with One Static and One Diffusing Reactant. physics/9904008 10 Nov 2000
- [Bron95] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H.: Taschenbuch der Mathematik 2. Aufl. Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main 1995
- [Brey99] Breymann, U.: C++ Eine Einführung. 5. Aufl. Carl Hanser Verlag München 1999
- [Bric93/I] Bricmont, J.; Kupiainen, A.: Universality in Blow-Up for Nonlinear Heat Equations. chaos-dyn/9306007 21 Jun 1993
- [Bric93/II] Bricmont, J.; Kupiainen, A.; Lin, G.: Renormalisation Group and Asymptotics of Solutions of Nonlinear Parabolic Equations. chaos-dyn/9306008 21 Jun 1993
- [Bric94] Bricmont, J.; Kupiainen, A.: Renormalizing Partial Differential Equations. chaos-dyn/9411015 14 Nov 1994
- [Bric96] Bricmont, J.; Kupiainen, A.: Stable Nongaussian Diffusive Profiles. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Vol. 26, No. 3, pp. 583-593, 1996
- [Buse91] Busenberg, S.; Martelli, M. (Eds.): Differential Equations Models in Biology, Epidemiology and Ecology. Springer Berlin 1991

- [Cons2000] Constantin, P.; Kiselev, A.; Ryzhik, L.: Quenching of Flames by Fluid Advection. nlin.CD/0006024 15 Jun 2000
- [Droz91] Droz, M.; Cornell, S.; Chopard B.: Role of fluctuations for inhomogeneous reaction-diffusion phenomena. Physical Review A, Vol. 44, No. 8, pp 4826-4832, 15 October 1991
- [Droz92] Droz, M.; Cornell, S.; Chopard B.: Some properties of the diffusion-limited reaction $nA + mB \rightarrow C$ with homogeneous and inhomogeneous initial conditions. Physica A, Vol. 188, pp 322-336, 1992
- [Droz99] Droz, M.; Antal, T.; Magnin, J.; Rácz, Z.: Formation of Liesegang Patterns: A Spinodal Decomposition Scenario. Physical Review Letters, Vol. 83, No. 15, pp 2880-2883, 11 October 1999
- [Epst62] Epstein, B.: Partial Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1962
- [Fors83] Forster, O.: Analysis 1. 4. Aufl. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH Braunschweig 1983
- [Fors84] Forster, O.: Analysis 3. 3. Aufl. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH Braunschweig 1984
- [Galf84] Gálfi, L.; Rácz, Z.: Properties of the reaction front in an $A + B \rightarrow C$ type reaction-diffusion process. Physical Review A, Vol. 38, No. 6, pp 3151-3154, 15 September 1988
- [Gold94] Goldenfield, Nigel; Chen, Lin-Yuan; Oono, Y.: Renormalisation Group Theory for Global Asymptotic Analysis. cond-mat/9407024 5 Jul 1994
- [Gröb77] Gröbner, W.: Differentialgleichungen Teil 1&2. Bibliographisches Institut AG Zürich 1977
- [Gühn2001] Gühne, O.: Diplomarbeit an der Westfälischen-Wilhelms-Universität Münster, Institut für Theoretische Physik. Januar 2001
- [Jets89] Jetschke, G.: Mathematik der Selbstorganisation. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1989
- [Jost98] Jost, J.: Partielle Differentialgleichungen. Springer Berlin 1998

- [Kise2000] Kiselev, A.; Ryzhik, L.: Enhancement of the Traveling Front Speeds in Reaction-Diffusion Equations with Advection. math.AP/0002175 22 Feb 2000
- [Levi94] Levin, S. A. (Ed.): Frontiers in Mathematical Biology. Springer Berlin 1994
- [Magn2000] Magnin, J.: Properties of the asymptotic $nA + mB \rightarrow C$ reaction-diffusion fronts. cond-mat/0004219 19 Apr 2000
- [Mitc80] Mitchell, A. R.; Griffiths, D. F.: The Finite Difference Method in Partial Differential Equations. John Wiley & Sons Ltd. 1980
- [Murr93] Murray, J.D.: Mathematical Biology. 2nd Ed. Springer Berlin 1993
- [Prig79] Prigogine, I.: Vom Sein Zum Werden. 2. Aufl. R. Piper & Co. Verlag, München 1979
- [Remm95] Remmert, R.: Funktionentheorie 1. 4. Aufl. Springer Berlin 1995
- [Schw97] Schwarz, H.R.: Numerische Mathematik. 4. Aufl. B.G. Teubner Stuttgart 1997
- [Stra95] Strauss, W. A.: Partielle Differentialgleichungen. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH Braunschweig 1995
- [Witt91] Wittwer, P.; Schenkel, A.; Stubbe, J.: Asymptotics of Solutions in a $A + B \rightarrow C$ Reaction-Diffusion System. Physica D 69, pp135-147, pp 135-147
- [Witt99] Wittwer, P.; Schenkel, A.; van Baalen, G.: Asymptotics of solutions in $nA + nB \rightarrow C$ reaction-diffusion systems. 15 April 1999
- [Wlok82] Wloka, J.: Partielle Differentialgleichungen. B.G. Teubner Stuttgart 1982

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich abschließend noch bei all denen bedanken, die diese Arbeit in der vorliegenden Form ermöglicht haben. Dies sind in unsortierter Reihenfolge

CHRISTIAN WIECZERKOWSKI, der mit der Themenwahl mein Interesse wecken konnte und zu meinem Verständnis des mathematischen Hintergrunds beitrug,

Prof. Dr. GERNOT MÜNSTER, der sich der Betreuung annahm und mich durch Gespräche und Hinweise auf einige Ideen brachte,

MATHIAS BODE, der mir einen anderen Zugang zu diesem Thema aufzeigte und Anregungen zur Programmgestaltung gab,

ANDREAS BERG, AXEL FELDMANN und ANGELIKA KIPPERT, die sich zur Korrektur einiger Kapitel bereit erklärten,

TOBIAS KAROW, der seinen Rechner wochenends zur Verfügung stellte und mir damit viel Zeit ersparte,

OTFRIED GÜHNE, der sich mit mir den ersten Teil im gemeinsamen Büro erarbeitet hat und mit dem es immer wieder Spaß gemacht hat über mathematische oder physikalische Probleme zu diskutieren und

GISELA und JÜRGEN HIESTER, meine Eltern, die mein Interesse für Physik jahrelang durch ein Studium förderten.

Ganz besonders bedanke ich mich bei Dir, Angelika, für dein Verständnis und deine Unterstützung während der letzten Monate.

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, 24.02.2001

