

WESTFÄLISCHE
WILHELMUS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

Nicht-perturbative Untersuchungen des D-Meson-Systems in der effektiven Theorie schwerer Quarks

Jan Hermes

WS 2009/2010

Institut für Theoretische Physik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster



Nicht-perturbative Untersuchungen des D-Meson-Systems in der effektiven Theorie schwerer Quarks

als Diplomarbeit vorgelegt von

Jan Hermes

5. März 2010

Institut für Theoretische Physik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Das Schrödinger-Funktional	5
1.1 Schrödinger-Funktional – Definition	5
1.2 Quantenmechanische Interpretation	7
1.3 Das Hintergrundfeld	8
1.4 Quarks	8
2 Das Schrödinger-Funktional auf dem Gitter	11
2.1 Die Eichwirkung	13
2.1.1 Beispiel einer Observable – der Wilson-Loop	14
2.2 Die Fermionwirkung	15
2.3 $O(a)$ -Verbesserung	18
2.3.1 Quarkfeldunabhängige Randgegenterme	19
2.3.2 Quarkfeldabhängige Randgegenterme	20
2.3.3 Verbesserung des Axialstroms	20
2.4 Die PCAC-Relation	21
2.5 Die Fermionmatrix und Valenzquarknäherung	21
2.6 Renormierung	23
3 Heavy Quark Effective Theory (HQET) – eine effektive Theorie schwerer Quarks	25
3.1 HQET auf dem Gitter	26
3.2 Die Zeitkomponente des Axialstroms	27
3.2.1 Die Verbesserung des Axialstroms in der HQET	28
3.3 Matching der HQET an die QCD	28
3.3.1 Matching in endlichem Volumen	29
3.3.2 Step-Scaling-Funktionen	30
3.4 Leichte und schwere Quarks im SF-Formalismus	32
3.5 $1/m$ -Entwicklung zur Bestimmung einer schweren Quarkmasse	33
3.6 Korrelationsfunktionen	35
3.7 Observablen	36
4 Simulationsergebnisse und Auswertung	39

4.1	Simulationsumsetzung	39
4.1.1	Hopping-Parameter der Simulationen	39
4.1.2	Bestimmung der Unsicherheit von z	41
4.1.3	Simulationsprogramm	42
4.2	Datenanalyse	43
4.2.1	Thermalisierung und Pre-Binning	43
4.2.2	Jackknife-Analyse	44
4.2.3	Normierung	45
4.2.4	$O(a)$ -Verbesserung und Renormierung	46
4.3	Simulationsergebnisse	47
4.3.1	Matching-Schritt	48
4.3.2	Kontinuumsextrapolation	49
4.3.3	Ergebnisse für $L\Gamma^P$ zur Bestimmung der Charm-Masse in der statischen Theorie	50
4.3.4	Ergebnisse für Y_A zur Bestimmung der D-Meson-Zerfallskonstanten .	51
4.3.5	Ergebnisse für Y_V zur Bestimmung der D^* -Meson-Zerfallskonstanten	52
4.3.6	Ergebnisse für R_A zur Bestimmung des Koeffizienten c_A^{HQET}	53
4.3.7	Ergebnisse für R_V zur Bestimmung des Koeffizienten c_V^{HQET}	54
4.3.8	Ergebnisse für R_1 zur Bestimmung des $1/m$ -Terms ω_{kin}	55
4.3.9	Ergebnisse für \mathcal{R} zur Bestimmung des $1/m$ -Terms ω_{spin}	56
4.4	Tree-Level-Verbesserung	57
4.5	Bestimmung der Endresultate	64
4.5.1	Bestimmung der Charm-Quarkmasse	64
4.5.2	Bestimmung der Zerfallskonstanten	68
5	Zusammenfassung	71
A	Notationen	73
A.1	Indexnotation	73
A.2	Dirac-Matrizen	73
A.3	Strukturkonstanten	75
B	Numerische Ausführungen und Resultate	77
B.1	Korrelationsfunktionen im Datenfile	77
B.2	Funktionaler Zusammenhang der Koeffizienten Z , Z_A und b_m	78
B.3	Normierungskonstanten der Korrelationsfunktionen	78
B.4	Renormierungs- und Verbesserungskoeffizienten der Funktionen f_A und k_V .	78
B.5	Tabellen der Simulationsergebnisse	80
Abbildungsverzeichnis		86

Tabellenverzeichnis	87
----------------------------	-----------

Literaturverzeichnis	88
-----------------------------	-----------

Einleitung

Die Geschichte der Elementarteilchen ist lang und wurde in der Neuzeit mit der Postulierung des Elektrons 1874 durch STONEY und HELMHOLTZ initiiert. In den dreißiger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts kannte man neben dem Elektron auch Proton, Neutron und Neutrino. Es wurde angenommen, dass diese Teilchen unteilbare Grundbausteine der uns umgebenden Materie sind, die alle Phänomene der damals bekannten Atom- und Kernphysik beschreiben konnten. Mit dem Aufbau immer größer werdender Teilchenbeschleuniger stellte man jedoch bald fest, dass Proton und Neutron, zusammen als Nukleonen¹ bezeichnet, nicht elementar sind. Vielmehr gehören sie zu einer Teilchenfamilie – den *Hadronen*, die aus Quarks aufgebaut sind. In diesem Kontext unterscheidet man zwischen Mesonen, welche aus zwei Quarks bestehen (genauer gesagt aus einem Quark und einem Antiquark) und Baryonen, die aus drei Quarks zusammengesetzt sind.

Eine zweite Art von fundamentalen Bausteinen sind die *Leptonen*, wie beispielsweise das Elektron und das Neutrino. Bis heute wird angenommen, dass sowohl Quarks als auch Leptonen elementar sind. Beleg dafür ist das Fehlen angeregter Zustände dieser Teilchen. Die Theorie, die diese Elementarteilchen und deren Wechselwirkungen beschreibt, ist das **Standardmodell der Elementarteilchenphysik (SM)**.

Die drei von dieser relativistischen Quantenfeldtheorie beschriebenen Wechselwirkungen sind

- die starke Wechselwirkung,
- die schwache Wechselwirkung
- und die elektromagnetische Wechselwirkung.

Die Voraussagen des SM stehen in guter Übereinstimmung mit teilchenphysikalischen Experimenten. Allerdings ist die vierte Grundkraft, die Gravitation, nicht in das Standardmodell integriert. Der Gravitation unterliegen zwar alle Teilchen, gegenüber den oben erwähnten Wechselwirkungen ist sie aber extrem schwach und kann in der Teilchenphysik vernachlässigt werden.

Die Elementarteilchen können nun grob durch die Wechselwirkungen, an denen sie teilnehmen klassifiziert werden. Quarks und Leptonen wechselwirken schwach und an der starken Wechselwirkung nehmen nur Quarks und Gluonen teil. Teilchen, die von der starken

¹Das verwandte Wort *nucleus* kommt aus dem Lateinischen und bedeutet „Kern“.

Wechselwirkung wiederum nichts spüren sind die Leptonen. An der elektromagnetischen Wechselwirkung sind alle elektrisch geladenen Teilchen beteiligt, d.h. alle Hadronen und Leptonen mit Ausnahme der Neutrinos.

Die Wechselwirkungen zwischen den Teilchen werden durch die Eichbosonen vermittelt, welche auch als eigenständige Teilchen auftreten können. Sie werden in diesem Sinne auch „Boten-“ oder „Austauschteilchen“ genannt. Im Falle der elektrischen Wechselwirkung ist das Photon für den Austausch verantwortlich, die schwache Kraft wird durch die W^\pm - und Z-Bosonen vermittelt und die acht Gluonen sind für die starke Wechselwirkung verantwortlich.

Ein zentraler Bestandteil des SM ist der **Higgs-Mechanismus**, der für die grundlegende Eigenschaft „Masse“ der Elementarteilchen verantwortlich ist. Erst dieser Mechanismus liefert eine Erklärung dafür, dass gewisse Eichbosonen im Zuge des SM ihre Masse erhalten. Die W^\pm - und Z-Bosonen der vereinheitlichten elektroschwachen Wechselwirkung unter der Symmetriegruppe

$$SU(2)_w \times U(1)_Y$$

koppeln im Higgs-Mechanismus an ein Higgs-Feld, welches nichttrivial mit sich selbst wechselwirkt und zu spontaner Symmetriebrechung führt. Die drei schwachen Eichbosonen erhalten dabei eine Masse. Die vier Grundkräfte und ihre Eigenschaften sind in Tabelle 0.1 zusammengefasst.

Kraft	Austauschboson	relative Stärke	Reichweite	betroffene Teilchen
Stark	8 Gluonen	1	10^{-15} m	Quarks & Gluonen
Schwach	W^\pm - und Z-Boson	10^{-5}	10^{-18} m	Quarks & Leptonen
Elektromagnetisch	Photon	$1/137 \approx 10^{-2}$	∞	el. geladene Teilchen
Gravitation	Graviton	10^{-38}	∞	alle Teilchen

Tabelle 0.1: Die vier Wechselwirkungen und ihre Eigenschaften ($\hbar = c = 1$).

Die elektroschwache Wechselwirkung setzt sich aus der elektromagnetischen Wechselwirkung, welche durch die Quantenelektrodynamik (QED) beschrieben wird und der schwachen Wechselwirkung zusammen. Die theoretische Behandlung der starken Wechselwirkung erfolgt durch die **Quantenchromodynamik (QCD)**.

Die QCD ist eine nicht-abelsche Eichtheorie unter der Eichgruppe $SU(3)$ und beschreibt die Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen. An die Stelle der elektrischen Ladung als Erhaltungsgröße tritt im Fall der QCD die Farbladung, die in den Zuständen *rot*, *grün* und *blau* vorkommen kann (daher der Name *Chromodynamik*). Im Gegensatz zu den Photonen der Elektrodynamik tragen die Gluonen selbst auch Farbladung (bestehend aus einer Farbe und einer Antifarbe) und können dementsprechend untereinander wechselwirken. Des

Weiteren trägt jedes Quark eine Farbe, das entsprechende Antiquark eine Antifarbe. Die Eigenschaften der sechs Quarks sind in Tabelle 0.2 zusammengefasst.

Name	Generation	Ladung Q/e	Masse	Quantenzahl
Up u	1	2/3	1.5 – 3.3 MeV	$I_3 = 1/2$
Down d	1	-1/3	3.5 – 6.0 MeV	$I_3 = -1/2$
Charm c	2	2/3	1.16 – 1.34 GeV	$C = 1$
Strange s	2	-1/3	70 – 130 MeV	$S = -1$
Top t	3	2/3	170.1 – 172.5 GeV	$T = 1$
Bottom b	3	-1/3	4.13 – 4.37 GeV	$B = -1$

Tabelle 0.2: Die sechs Quarkflavours und ihre Eigenschaften [35].

Die Selbstwechselwirkung der Gluonen führt dazu, dass die starke Kopplungskonstante für hohe Energien abnimmt. Dies steht im Gegensatz zum Verhalten der elektromagnetischen Kopplungskonstanten, um beim Beispiel der QED zu bleiben. Daraus resultieren die Phänomene der *asymptotischen Freiheit* für hohe und des *Confinement* für niedrige Energien. Bei hohen Energien oder kleinen Abständen verhalten sich die Quarks dementsprechend wie freie Teilchen. Das Confinement der Quarks führt wiederum dazu, dass diese nicht isoliert, sondern nur in Hadronen „eingesperrt“ (engl. *confined*) vorkommen. Da die starke Kopplungskonstante bei kleinen Energien ansteigt, ist eine Anwendung der Störungstheorie nicht möglich. Hier bedarf es nicht-perturbativer Methoden, um Aussagen der Theorie überprüfen zu können.

In dieser Arbeit wird die QCD auf ein Raumzeitgitter übertragen und auf diese Weise diskretisiert. Der Gitterabstand a und die Gitterausdehnung L sind dabei ein Maß für die Gitterauflösung. Die Gitter-QCD erbt die Eigenschaften der QCD, allerdings mit zum Teil entscheidenden Verbesserungen: Das Raumzeitgitter wirkt als sogenannter Regulator, d.h. bei endlichen Gitterabständen a treten keine Singularitäten auf und im Grenzübergang $a \rightarrow 0$ sind die physikalischen Größen nach der Renormierung damit endlich.

Ein weiterer Vorteil der Gitterdiskretisierung ist, dass die QCD im Zuge numerischer Simulationen ausgewertet werden kann. Entscheidend für die Ergebnisse dieser Simulationen ist die Gitterauflösung. Je feiner das Gitter gewählt wird, d.h. je mehr Gitterpunkte simuliert werden, desto genauer wird die Kontinuumstheorie approximiert. Die Gitterauflösung fungiert dabei als Regulator oder Cutoff, der umgekehrt proportional zur Gitterkonstanten a ist. Die Masse eines simulierten Teilchens weist die gleiche Proportionalität auf und kann aus diesem Grund mit dem Cutoff in Verbindung gebracht werden. Es ist daher nicht möglich Massen zu simulieren, die über diesem Cutoff liegen. Das betrifft beispielsweise das b-Quark. Man kann dieses Problem aber lösen, indem zu effektiven Theorien gewechselt

wird, die in ihrem Gültigkeitsbereich die Eigenschaften der QCD richtig beschreiben. In einem System aus einem schweren und einem leichten Quark wird nur das leichte Quark relativistisch behandelt. Das schwere Quark wird als statisch angesehen und besitzt keine Dynamik. Für diese Problemstellung steht die sogenannte **Heavy Quark Effective Theory (HQET)** zur Verfügung.

Man erhält die HQET aus einer Entwicklung der QCD nach inversen Potenzen der schweren Quarkmasse. Da das c-Quark inzwischen durch konventionelle Methoden in der vollen QCD simuliert und ausgewertet werden kann [18, 40], stellt sich die Frage, warum man dieses Quark in der HQET behandelt. Grund hierfür ist das Interesse am Gültigkeitsbereich der effektiven Theorie. Das c-Quark eignet sich dabei besonders, da es eine Masse besitzt, die in beiden Theorien simuliert und somit verglichen werden kann.

In dieser Arbeit sollen die Masse des c-Quarks und die Zerfallskonstante des D_s -Mesons in der HQET bis zur Ordnung $1/m$ in Valenzquarknäherung nicht-perturbativ bestimmt werden. Die Valenzquarknäherung erweist sich in diesem Zusammenhang als ideal, da mit relativ moderatem Aufwand Aussagen der Theorie überprüft werden können. Damit einhergehend kann die bereits erwähnte Gültigkeit und Reichweite der HQET bestimmt werden. Für das schwerere Bottom-Quark liegen in diesem Zusammenhang bereits Ergebnisse vor [7].

In Kapitel 1 wird das *Schrödinger-Funktional (SF)* als ein endliches Volumenschema eingeführt. Es ist zur nicht-perturbativen Bestimmung physikalischer Größen auf dem Gitter nützlich. In Kapitel 2 schließt sich dann die Gitterformulierung des SF an. Das dritte Kapitel widmet sich der HQET und diskutiert das Rüstzeug dieser effektiven Theorie im SF-Formalismus. Die ebenfalls in diesem Kapitel eingeführten Korrelationsfunktionen dienen in Kapitel 4 zur Bestimmung der gesuchten Größen. Nach der Präsentation der Ergebnisse soll mit einer Zusammenfassung geschlossen werden.

Kapitel 1 Das Schrödinger-Funktional

In einer Quantenfeldtheorie wie der QCD werden Teilchen und Felder durch Zustände beschrieben, die sich in einer unendlich ausgedehnten, vierdimensionalen Raumzeit entwickeln. Für viele Anwendungen, beispielsweise für die nicht-störungstheoretische Lösung bestimmter Renormierungsprobleme im Rahmen der später einzuführenden Heavy Quark Effective Theory (HQET), ist es jedoch sinnvoll ein endliches Volumen zu betrachten.

Das sogenannte **Schrödinger-Funktional (SF)** ist ein solches endliches Volumenschema, welches die Propagation einer Feldkonfiguration vom Zeitpunkt $x_0 = 0$ nach $x_0 = T$ beschreibt (siehe Abbildung 1.1). Durch das endliche Volumen der Größe $T \times L \times L \times L$ werden Randeffekte induziert, die als Observablen genutzt werden können. L bezeichnet die Ausdehnung der drei Raumrichtungen.

Als Erstes soll nun das SF im Kontinuum betrachtet werden. In Kapitel 2 folgt dann die Gitterformulierung.

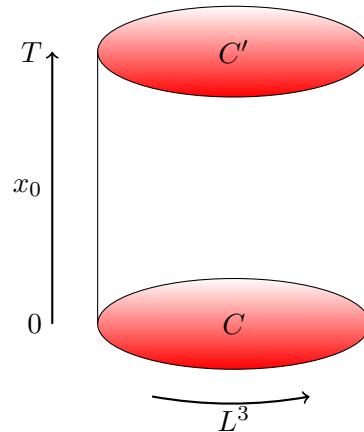


Abb. 1.1: Zweidimensionale Darstellung des Schrödinger-Funktional. C und C' sind die Eichrandfelder bei $x_0 = 0$ und $x_0 = T$.

1.1 Schrödinger-Funktional – Definition

In diesem Kapitel wird das SF für eine kontinuierliche Theorie definiert. Die Beschreibung folgt weitestgehend den Ausführungen in [48]. Im Folgenden soll zunächst auf die reine

Yang-Mills-Theorie¹ eingegangen werden. Zur Indexnotation dieser Arbeit siehe Kapitel A.1.

Die Vektorpotentiale $A_k(x)$ sollen im SF feste Randwerte in Zeitrichtung besitzen, d.h. Dirichlet-Randbedingungen der Form

$$A_k(x) = \begin{cases} C_k^\Lambda(\mathbf{x}) & \text{für } x_0 = 0 \\ C'_k(\mathbf{x}) & \text{für } x_0 = T \end{cases} \quad (1.1)$$

annehmen. In diesem Zusammenhang sind C und C' Eichpotentiale und A^Λ eine eichtransformierte Form von A , die

$$A_k^\Lambda(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) A_k \Lambda(\mathbf{x})^{-1} + \Lambda(\mathbf{x}) \partial_k \Lambda(\mathbf{x})^{-1} \quad (1.2)$$

genügt. In den drei Raumdimensionen mit entsprechenden Einheitsvektoren \hat{k} werden den Eichfeldern periodische Randbedingungen aufgeprägt:

$$A_k(x + L\hat{k}) = A_k(x), \quad \Lambda(\mathbf{x} + L\hat{k}) = \Lambda(\mathbf{x}) . \quad (1.3)$$

Die euklidische Zustandssumme definiert unter diesen Randbedingungen nun das SF der Eichtheorie:

$$\mathcal{Z}[C, C'] \equiv \int \mathcal{D}[\Lambda] \int \mathcal{D}[A] e^{-S_G[A]} , \quad (1.4a)$$

$$S_G[A] = -\frac{1}{2g_0^2} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) , \quad (1.4b)$$

$$\mathcal{D}[A] = \prod_{\mathbf{x}, \mu, a} dA_\mu^a(x), \quad \mathcal{D}[\Lambda] = \prod_{\mathbf{x}} d\Lambda(\mathbf{x}) . \quad (1.4c)$$

Hier taucht zum ersten Mal die nackte Kopplung g_0 und der Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (1.5)$$

auf. Das Haar'sche Maß $d\Lambda(\mathbf{x})$ der Eichgruppe $SU(N)$ ist eine Verallgemeinerung des Lebesgue-Maßes und auch für Lie-Gruppen definierbar.

Des Weiteren ist das SF ein eichinvariantes Funktional der oben eingeführten Randfelder

$$\mathcal{Z}[C'^{\Omega'}, C^\Omega] = \mathcal{Z}[C', C] . \quad (1.6)$$

In Gleichung (1.6) werden auch große Eichtransformationen $\Omega(x)$ zugelassen, die eine Ver-

¹Yang-Mills-Theorien sind nicht-abelsche Eichtheorien, zum Beispiel zur Beschreibung der starken und schwachen Wechselwirkung.

allgemeinerung von Gleichung (1.2) darstellen und auch für nicht homotopische Funktionen gelten.

1.2 Quantenmechanische Interpretation

Angenommen ein System, beschrieben durch den Anfangszustand $|C\rangle$, entwickelt sich nach der Zeit T in den Zustand $|C'\rangle$. Dann beschreibt das SF die quantenmechanische Übergangsamplitude in diesen Zustand. In der Schrödingerdarstellung werden die quantenmechanischen Zustände einer Quantenfeldtheorie (QFT) durch Wellenfunktionale der Form $\Psi[A]$ dargestellt, d.h. sie sind Funktionale der Raumkomponenten der Vektorpotentiale $A_k^a(\mathbf{x})$.

Das Skalarprodukt zwischen diesen Funktionalen ist wie üblich über

$$\langle \Psi | \psi \rangle = \int \mathcal{D}[A] \Psi^*[A] \psi[A], \quad \mathcal{D}[A] = \prod_{\mathbf{x}, k, a} dA_k^a(\mathbf{x}) \quad (1.7)$$

definiert.

Das Analogon zum elektrischen Feld der QED ist in der QCD das farbelektrische Feld $E_k^a(\mathbf{x})$, welches wie üblich über das Eichfeld $A_k^a(\mathbf{x})$ via Funktionalableitung mit

$$E_k^a(\mathbf{x}) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta A_k^a(\mathbf{x})} \quad (1.8)$$

identifiziert werden kann. Des Weiteren ergibt sich der Farb-Feldtensor $F_{kl}^a(\mathbf{x})$ durch Übertragung auf die Colour-SU(3)-Gruppe:

$$F_{kl}^a(\mathbf{x}) = \partial_k A_l^a(\mathbf{x}) - \partial_l A_k^a(\mathbf{x}) + g_0 f^{abc} A_k^b(\mathbf{x}) A_l^c(\mathbf{x}) . \quad (1.9)$$

In Kapitel A.3 sind die nicht-verschwindenden Elemente der Strukturkonstanten f^{abc} aufgeführt.

Die Größen $E_k^a(\mathbf{x})$ und $F_{kl}^a(\mathbf{x})$ können nun allgemein feldtheoretisch interpretiert werden, was zu einem Hamiltonoperator \mathcal{H} der Form

$$\mathcal{H} = \int_0^L d^3x \left\{ \frac{g_0^2}{2} E_k^a(\mathbf{x}) E_k^a(\mathbf{x}) + \frac{1}{4g_0^2} F_{kl}^a(\mathbf{x}) F_{kl}^a(\mathbf{x}) \right\} \quad (1.10)$$

führt. \mathcal{H} vertauscht mit dem Paritätsoperator \mathcal{P} , der das Funktional $\psi[A]$ auf den physikalischen Unterraum des Hilbertraums projiziert:

$$\mathcal{P} \psi[A] = \int \mathcal{D}[\Lambda] \psi[A^\Lambda] . \quad (1.11)$$

Mit den vorangegangenen Definitionen dieses Kapitels lässt sich an dieser Stelle die quantenmechanische Darstellung des SF angeben:

$$\mathcal{Z}[C', C] = \langle C' | e^{-\mathcal{H}T} \mathcal{P} | C \rangle . \quad (1.12)$$

Die Spektraldarstellung des SF ergibt sich nach Einsetzen einer Orthonormalbasis aus Energieeigenzuständen zu

$$\mathcal{Z}[C', C] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-E_n T} \psi_n[C'] \psi_n^*[C] . \quad (1.13)$$

1.3 Das Hintergrundfeld

Ein zweiter quantenmechanischer Zugang des SF besteht darin, die QCD über ein eindeutiges Hintergrundeichfeld zu behandeln. Dazu wird angenommen, dass eine Lösung der Bewegungsgleichungen $B_\mu(x)$ unter den in Gleichung (1.1) angegebenen Randbedingungen bekannt ist. Wenn dieses Hintergrundfeld weiterhin ein absolutes Minimum ist, d.h. wenn für alle Eichfelder $A_\mu(x)$

$$S[A] > S[B] \quad (1.14)$$

gilt, wobei A keine Eichtransformation B^Ω von B sein soll, dann nennt man B das von den Randbedingungen induzierte Hintergrundfeld. Da das Hintergrundfeld per Definition die kleinste Wirkung aufweist, wird das Pfadintegral für kleine Kopplungen g_0 von Feldern in der näheren Umgebung von B dominiert. Die effektive Wirkung

$$\Gamma[B] \equiv -\ln \mathcal{Z}[C', C] \quad (1.15)$$

hat demnach eine reguläre störungstheoretische Entwicklung der Form

$$\begin{aligned} \Gamma[B] &= \frac{1}{g_0^2} \Gamma_0[B] + \Gamma_1[B] + g_0^2 \Gamma_2[B] + \dots , \\ \Gamma_0[B] &\equiv g_0^2 S[B] . \end{aligned} \quad (1.16)$$

Mit den oben gemachten Annahmen können wir an Stelle von C und C' nun das Eichfeld B als Funktionalargument verwenden, da beide Größen bijektiv zueinander sind [48].

1.4 Quarks

Bisher wurde nur die reine Eichtheorie im SF besprochen. Als Nächstes sollen nun Quarks in diesen Formalismus eingeführt werden.

Da der in der Dirac-Gleichung stehende Dirac-Operator ein Operator erster Ordnung ist, können nur die Hälfte der Komponenten der Fermionfelder auf dem Rand festgelegt werden, damit die Lösung der Dirac-Gleichung eindeutig bleibt.

Um die Randbedingungen bei $x_0 = 0$ und $x_0 = T$ zu berücksichtigen, werden in die Standardwirkung

$$S_F^0 = \int d^4x \bar{\psi}(x) [\gamma_\mu D_\mu + m] \psi(x) \quad (1.17)$$

zwei zusätzliche Terme implementiert [46]. Die fermionische Wirkung des SF ergibt sich mit Hilfe der Projektionsoperatoren

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_0) \quad (1.18)$$

zu

$$\begin{aligned} S_F[A, \psi, \bar{\psi}] = & \int d^4x \bar{\psi}(x) [\gamma_\mu D_\mu + m] \psi(x) \\ & - \int d^3\mathbf{x} [\bar{\psi}(x) P_- \psi(x)]_{x_0=0} \\ & - \int d^3\mathbf{x} [\bar{\psi}(x) P_+ \psi(x)]_{x_0=L} . \end{aligned} \quad (1.19)$$

Die Dirichlet-Randbedingungen der Fermionfelder

$$P_+ \psi|_{x_0=0} = \rho , \quad P_- \psi|_{x_0=L} = \rho' , \quad (1.20)$$

$$\bar{\psi} P_-|_{x_0=0} = \bar{\rho} , \quad \bar{\psi} P_+|_{x_0=L} = \bar{\rho}' \quad (1.21)$$

führen zu einer quantenmechanischen Interpretation gemäß Gleichung (1.12) und (1.13). $\rho, \rho', \bar{\rho}$ und $\bar{\rho}'$ sind die fermionischen Randfelder und gehen daher in das SF

$$\mathcal{Z}[C, C', \rho, \rho', \bar{\rho}, \bar{\rho}'] = \int \mathcal{D}[A] \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] e^{-S[A, \psi, \bar{\psi}]} \quad (1.22)$$

ein. Sie sind vergleichbar mit den Eichrandfeldern C und C' aus der Eichtheorie.

Die Wirkung im Exponenten in Gleichung (1.22) setzt sich aus der bereits eingeführten Eichwirkung $S_G[A]$ aus Gleichung (1.4b) und der Fermionwirkung additiv zusammen:

$$S[A, \psi, \bar{\psi}] = S_G[A] + S_F[A, \psi, \bar{\psi}] . \quad (1.23)$$

In Kapitel 1.1 wurde gezeigt, dass die Eichfelder in den drei räumlichen Dimensionen periodisches Verhalten zeigen. Die Quarkfelder $\psi(x)$ sind im Gegensatz dazu periodisch

bis auf eine Phase

$$\psi(x + L\hat{k}) = e^{i\theta} \psi(x) , \quad (1.24a)$$

$$\bar{\psi}(x + L\hat{k}) = \bar{\psi} e^{-i\theta} . \quad (1.24b)$$

Der Phasenwinkel θ stellt einen weiteren Parameter des SF-Formalismus der QCD dar, der es erlaubt unterschiedliche Renormierungsbedingungen nutzen zu können. Er nimmt in Simulationen häufig einen von Null verschiedenen Wert an. Eine zusätzliche Phase stellt sich bei der Invertierung der Fermionmatrix (diese wird in der Gitterformulierung in Kapitel 2.5 eingeführt) als vorteilhaft heraus, da zu kleine Eigenwerte vermieden werden.

Kapitel 2 Das Schrödinger-Funktional auf dem Gitter

Alle bisherigen Überlegungen wurden in einer kontinuierlichen Raumzeit angestellt, in der physikalische Größen jeden ihrer erlaubten Werte annehmen können. Um jedoch Computersimulationen durchführen zu können, muss die Theorie auf ein Gitter übertragen und damit diskretisiert werden.

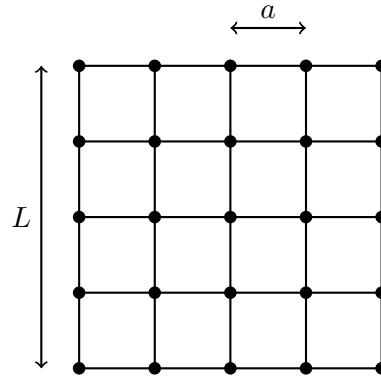


Abb. 2.1: Graphische Darstellung eines 5×5 -Gitters.

Charakterisiert wird das Gitter durch den Gitterabstand a zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten und die Gitterausdehnung L (siehe Abbildung 2.1). Demnach wird jeder Gitterpunkt durch einen Satz von ganzzahligen Werten $x \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3)$ beschrieben. Ein naiver Übergang vom Kontinuum zur Gitterformulierung erfolgt durch die Ersetzung der Größen

$$\int d^4x \rightarrow a^4 \sum_x , \quad (2.1a)$$

$$\mathcal{D}[\bar{\psi}] \mathcal{D}[\psi] \rightarrow \prod_x d\bar{\psi}(x) \prod_x d\psi(x) . \quad (2.1b)$$

Die Ableitung ∂_μ bzgl. $\psi(x)$ wird derart auf das Gitter übertragen, dass die Differenz der benachbarten Gitterpunkte betrachtet wird:

$$\partial_\mu \psi(x) = \frac{1}{2a} [\psi(x + a\hat{\mu}) + \psi(x - a\hat{\mu})] . \quad (2.2)$$

Die Fermionfelder $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ sind auf den Gitterpunkten definiert und tragen wie üblich Dirac-, Farb- und Flavourindizes. Im Kontinuum wird ihre Wechselwirkung durch die Eichfelder A_μ^a beschrieben. Auf dem Gitter werden diese Eichfelder durch die SU(3)-Matrizen

$$U(x, \mu) \equiv U_{x\mu} \equiv U_{x, x+a\hat{\mu}} \equiv U(x + a\hat{\mu}) , \quad (2.3)$$

die auch Paralleltransporter oder **Linkvariablen** b genannt werden, ersetzt. Die Schreibweise (x, μ) ist dabei so zu verstehen, dass der Gitterpunkt x mit seinem Nachbarpunkt $x + a\hat{\mu}$ in Richtung $\hat{\mu}$ verknüpft wird, wobei $\hat{\mu}$ der Einheitsvektor einer der vier Raumzeitrichtungen ist (siehe Abbildung 2.2).

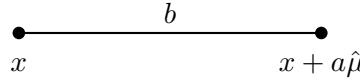


Abb. 2.2: Darstellung eines Links zwischen den Gitterpunkten x und $x + a\hat{\mu}$.

Um die Linkvariablen durch die Eichfelder A_μ^a auszudrücken, führt man die Beziehung

$$U(x, \mu) \equiv e^{igaT^a A_\mu^a(x)} \quad (2.4)$$

ein [41]. Die Generatoren T^a erzeugen die Lie-Algebra der Gruppe $SU(N)$. Im Falle der $SU(3)$ sind dies die acht Gell-Mann-Matrizen λ^a . Das Verhalten der Linkvariablen unter einer lokalen Eichtransformation $\Lambda(x)$ wird durch

$$U(x, \mu) \rightarrow \Lambda(x)U(x, \mu)\Lambda(x + a\hat{\mu})^{-1} \quad (2.5)$$

beschrieben, wobei das Inverse die Gestalt

$$U_{x+a\hat{\mu}, x}^{-1} = U_{x, x+a\hat{\mu}} \quad (2.6)$$

annimmt.

Die zwei beliebigen Gitterpunkten zugeordnete Linkvariable ist durch

$$U(\mathcal{C}) = U(b_n) \dots U(b_1) \equiv \prod_{b \in \mathcal{C}} \quad (2.7)$$

gegeben, wobei der Pfad \mathcal{C} die Gitterpunkte verknüpft und b_n die Links zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten sind.

Die Gesamtheit aller Linkvariablen bildet schließlich das Gitterreichfeld.

2.1 Die Eichwirkung

Es gibt zwei Grundprinzipien auf denen die Wirkung einer Gitterreichtheorie aufgebaut sein sollte. Einerseits muss sie bei naiver Extrapolation ins Kontinuum die erwartete Kontinuumswirkung liefern und zum Anderen sollte sie das Prinzip der Eichinvarianz erfüllen. Auf dem Gitter sind eichinvariante Größen über die Spur eines Produktes von Links

$$\text{Tr} [U(\mathcal{C}_{x,x})] \quad (2.8)$$

gegeben [31]. Angenommen wird, dass die Links eine geschlossene Kurve bilden. Der einfachste geschlossene Pfad wird Plaquette genannt und ist in Abbildung 2.3 gezeigt.

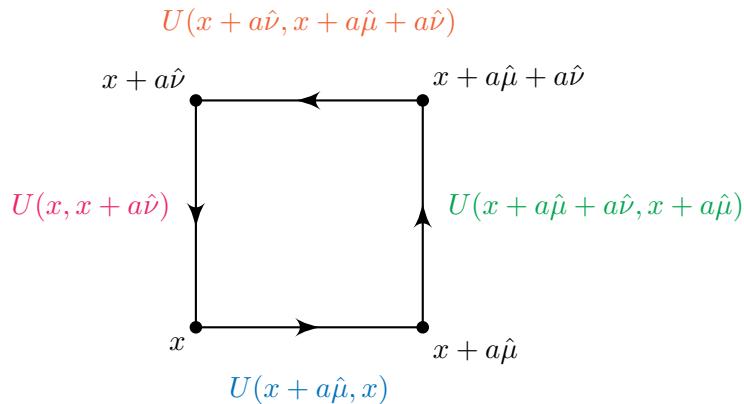


Abb. 2.3: Plaquette p in Richtung der Einheitsvektoren $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$.

Der Paralleltransporter U_p einer Plaquette setzt sich aus vier Links zusammen, die die Gitterpunkte verbinden:

$$U_p = U(x, x + a\u0302\u03b2) U(x + a\u0302\u03b2, x + a\u0302\u03b2 + a\u0302\u03b2) U(x + a\u0302\u03b2 + a\u0302\u03b2, x + a\u0302\u03b2) U(x + a\u0302\u03b2, x) . \quad (2.9)$$

Die Plaquette-Variable U_p kann nun benutzt werden, um die von WILSON vorgeschlagene Gitterreichwirkung [51] aufzustellen:

$$S[U] = \sum_p S_p(U_p) \quad (2.10)$$

mit

$$S_p(U_p) = \beta \left\{ 1 - \frac{1}{2 \text{Tr } \mathbb{1}} (\text{Tr } U_p - \text{Tr } U_p^{-1}) \right\} \quad (2.11a)$$

$$= \beta \left\{ 1 - \frac{1}{N} \Re \text{Tr } U_p \right\} , \quad U_p \in \text{SU}(N) . \quad (2.11b)$$

In der Summe über die Plaquetten wird jede Plaquette nur in einem Umlaufsinn durchlaufen, d.h.

$$\sum_p \equiv \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} . \quad (2.12)$$

Für die QCD (d.h. für den Fall $SU(3)$) ergibt sich die Wilson-Wirkung zu

$$S_G^{\text{QCD}}(U) = \frac{6}{g_0^2} \left\{ 1 - \frac{1}{6} (\text{Tr } U_p - \text{Tr } U_p^{-1}) \right\} \quad (2.13)$$

mit

$$\beta = \frac{2N}{g_0^2} \stackrel{\text{SU}(3)}{=} \frac{6}{g_0^2} . \quad (2.14)$$

Bei der Übertragung der Eichwirkung (2.10) auf den SF-Formalismus müssen lediglich die Plaquette-Variablen auf dem Rand geändert werden. Diesbetreffend werden die Gewichtsfaktoren

$$w(p) = \begin{cases} 1 & \text{für Plaquetten im Inneren des SF} \\ \frac{1}{2} & \text{für räumliche Plaquetten auf dem Rand bei } x_0 = 0, T \end{cases} \quad (2.15)$$

eingeführt und an die Eichwirkung

$$S_G(U) = \frac{1}{g_0^2} \sum_p w(p) \text{Tr}(1 - U(p)) \quad (2.16)$$

multipliziert [26].

2.1.1 Beispiel einer Observable – der Wilson-Loop

In Kapitel 2.1 wurde erwähnt, dass eichinvariante Größen auf dem Gitter über die Spur eines Produktes von Paralleltransportern gegeben sind. Bildet man den Erwartungswert dieser Größen, so erhält man eine eichinvariante Observable

$$\mathcal{O}(\mathcal{C}_{x,x}) \equiv \langle \text{Tr } U(\mathcal{C}_{x,x}) \rangle \quad (2.17)$$

eines geschlossenen Pfades, genannt **Wilson-Loop** [31]. In Abbildung 2.4 ist ein Wilson-Loop mit zeitlicher Ausdehnung T und räumlicher Ausdehnung R dargestellt. Um Aussagen zum Quark Confinement machen zu können, wird das statische Quark-Antiquark-Potential $V(R)$ über

$$V(R) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \mathcal{O}(\mathcal{C}_{R,T}) \quad (2.18)$$

definiert, so dass

$$\mathcal{O}(\mathcal{C}_{R,T}) \underset{T \rightarrow \infty}{\sim} C e^{-T V(R)} . \quad (2.19)$$

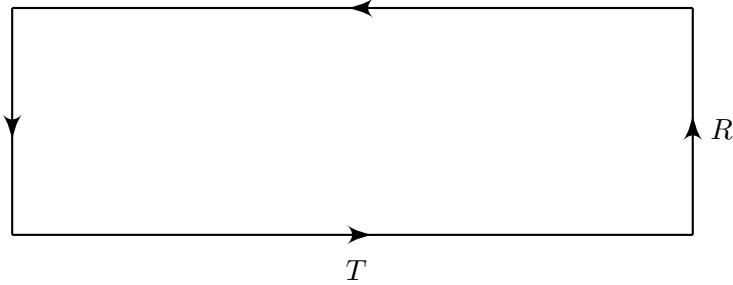


Abb. 2.4: Zweidimensionale Darstellung eines Wilson-Loops der Ausdehnung $T \times R$.

$V(R)$ gibt die Energie des Eichfelds in Anwesenheit zweier Farbladungen an, die sich im Abstand R voneinander befinden.

Außerdem kann nun die sogenannte **String Tension**

$$\sigma \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} V(R) = - \lim_{R, T \rightarrow \infty} \frac{1}{RT} \log \mathcal{O}(\mathcal{C}_{R,T}) \quad (2.20)$$

eingeführt werden. Wenn der Koeffizient σ für große Abstände R nicht verschwindet, steigt das Quark-Antiquark-Potential an:

$$V(R) \underset{R \rightarrow \infty}{\sim} \sigma R . \quad (2.21)$$

In diesem Fall wirkt eine bindende Kraft zwischen den beiden Farbfeldern und diese sind nicht voneinander zu trennen oder einzeln zu beobachten. Man nennt dieses Phänomen auch **Quark Confinement**. Der Exponent im Wilson-Loop

$$\mathcal{O}(\mathcal{C}_{R,T}) \underset{R, T \rightarrow \infty}{\sim} C e^{-\sigma RT} \quad (2.22)$$

verhält sich in diesem Fall flächenhaft¹ (er ist proportional zur umschlossenen Fläche). Ist der Exponent proportional zum Umfang der umschlossenen Fläche (*perimeter law*), erhält man das gegensätzliche Phänomen **Deconfinement**. Der Wilson-Loop kann daher herangezogen werden, um zwischen diesen beiden Fällen zu unterscheiden.

2.2 Die Fermionwirkung

Bei der Übertragung der Eichwirkung auf das Gitter wurden die Eichfelder intuitiv als Links zwischen die Gitterpunkte platziert. Die Quarks selber sind auf den Gitterpunkten

¹Im Englischen nennt man dieses Verhalten *area law*.

definiert. Geht man genauso naiv an die Fermionwirkung, so ergibt sich

$$S_F[U, \bar{\psi}, \psi] = a^4 \sum_x \bar{\psi}(D + m_0)\psi \quad (2.23)$$

mit dem Diracoperator

$$D = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \gamma_{\mu} (\nabla_{\mu}^* + \nabla_{\mu}) \quad (2.24)$$

und m_0 als nackter Quarkmasse.

Die kovarianten Vorwärts- und Rückwärtsableitungen

$$\nabla_{\mu}\psi(x) = \frac{1}{a} [U(x, \mu)\psi(x + a\mu) - \psi(x)] , \quad (2.25a)$$

$$\nabla_{\mu}^*\psi(x) = \frac{1}{a} [\psi(x) - U(x - a\mu, \mu)^{-1}\psi(x - a\mu)] \quad (2.25b)$$

sind als Differenz zweier benachbarter Gitterpunkte definiert.

Unglücklicherweise treten bei dieser naiven Gitterwirkung für Fermionen 16 Singularitäten im Fermionpropagator auf, von denen 15 unphysikalisch sind. Die Anzahl dieser *Fermion-doppler* verdoppelt sich dementsprechend pro Raumzeitdimension. Der Ursprung dieses Dopplerproblems liegt in der Gitterformulierung der Ableitung in Gleichung (2.24) und kann bereits durch ein einfaches Beispiel illustriert werden:

Die einfachste eindimensionale Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx} f(x) = 0 \quad (2.26)$$

besitzt die trivialen Lösungen $f(x) = k = \text{konstant}$. Überträgt man diese Gleichung unter Berücksichtigung der naiven Gitterableitung

$$f(x + 1) - f(x - 1) = 0 \quad (2.27)$$

auf das Gitter, so kann zwischen geraden und ungeraden Lösungen

$$f(2x) = k_1 , \quad (2.28a)$$

$$f(2x + 1) = k_2 \quad (2.28b)$$

unterschieden werden. Veranschaulicht wird dies noch einmal in Abbildung 2.5.

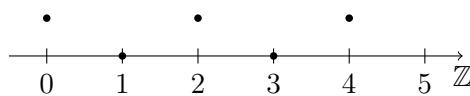


Abb. 2.5: Veranschaulichung des Ursprungs des Dopplerproblems in einer Dimension.

Man kann das Problem der Fermionverdopplung beheben, was aber automatisch zur Brechung der chiralen Symmetrie führt. Es kann also die Frage gestellt werden, warum die Diskretisierung von Fermionen so mühevoll ist. Eine Antwort darauf gibt das *Nielsen-Ninomiya Theorem* [34]. Es besagt, dass es keine fermionische Wirkung auf dem Gitter geben kann, die folgende Eigenschaften gleichzeitig erfüllt: chirale Symmetrie, dopplerfrei, lokal, translationsinvariant und reell bilinear.

Im Folgenden werden **Wilson-Fermionen** verwendet, die die Fermiondoppler auf Kosten der chiralen Symmetrie vermeiden. Die Wilson-Wirkung

$$S_F^{\text{Wilson}} = S_F - \underbrace{\frac{ar}{2} \sum_x \bar{\psi}(x) \square \psi(x)}_{\text{Wilson-Term}} \quad (2.29)$$

beinhaltet einen zusätzlichen Ableitungsterm

$$\square \psi(x) = \frac{1}{a^2} \sum_{\mu} \psi(x + \mu) + \psi(x - \mu) - 2\psi(x) . \quad (2.30)$$

Der Parameter r wird Wilson-Parameter genannt und kann die Werte $0 < r \leq 1$ annehmen. Für $r = 0$ ergibt sich wieder die naive Gitterwirkung.

Berechnet man nun die Propagatoren mit der modifizierten Wirkung, so erhalten die 15 unphysikalischen Fermionen Massen proportional zu $1/a$. Im Kontinuumslimiten werden diese unendlich groß und fallen somit aus dem physikalischen Spektrum heraus. Ausgeschrieben sieht die Wilson-Wirkung folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} S_F^{\text{Wilson}} &= m_0 \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) \\ &+ \frac{1}{2a} \sum_{x,\mu} \bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} [U(x, \mu) \psi(x + a\mu) - U^{-1}(x - a\mu, \mu) \psi(x - a\mu)] \\ &- \frac{r}{2a} \sum_{x,\mu} \bar{\psi}(x) [U(x, \mu) \psi(x + a\mu) - 2\psi(x) + U^{-1}(x - a\mu, \mu) \psi(x - a\mu)] \\ &= \left(m_0 + \frac{4r}{a} \right) \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) \\ &+ \sum_{x,\mu} \bar{\psi} [(\gamma_{\mu} - r) U(x, \mu) \psi(x + a\mu) - (\gamma_{\mu} + r) U^{-1}(x - a\mu, \mu) \psi(x - a\mu)] . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Da der Wilson-Term von der Ordnung a ist, steigen auch die Gitterdiskretisierungsfehler auf $O(a)$ an. Durch die sogenannte $O(a)$ -Verbesserung ist eine Eliminierung dieser Effekte jedoch möglich.

2.3 O(a)-Verbesserung

Die O(a)-Verbesserung geht auf einen Vorschlag von SYMANZIK zurück [49]. Die dominanten O(a)-Effekte lassen sich demnach entfernen, indem der Wirkung und den Operatoren passende Korrekturterme hinzugefügt werden, die im Kontinuumslimes verschwinden.

Der Korrekturterm der Wilson-Wirkung $\delta S[U, \bar{\psi}, \psi]$ wurde erstmals von SHEIKHOLESLAMI und WOHLERT [44] eingeführt und lautet

$$\delta S[U, \bar{\psi}, \psi] = a^5 \sum_x c_{\text{sw}} \bar{\psi}(x) \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu}(x) \psi(x) , \quad (2.32)$$

wobei der Koeffizient c_{sw} nach seinen „Erfindern“ benannt ist. $\hat{F}_{\mu\nu}$ ist der Feldstärketensor des Gitters

$$\hat{F}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{8a^2} [Q_{\mu\nu}(x) - Q_{\nu\mu}(x)] \quad (2.33)$$

mit

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu}(x) = & \textcolor{red}{U}(x, \mu) \textcolor{red}{U}(x + a\mu, \nu) \textcolor{red}{U}(x + a\nu, \mu)^{-1} \textcolor{red}{U}(x, \nu)^{-1} \\ & + \textcolor{red}{U}(x, \nu) \textcolor{red}{U}(x - a\mu + a\nu, \mu)^{-1} \textcolor{red}{U}(x - a\mu, \nu)^{-1} \textcolor{red}{U}(x - a\mu, \mu) \\ & + \textcolor{red}{U}(x - a\mu, \mu)^{-1} \textcolor{red}{U}(x - a\mu - a\nu, \nu)^{-1} \textcolor{red}{U}(x - a\mu - a\nu, \mu) \textcolor{red}{U}(x - a\nu, \nu) \\ & + \textcolor{red}{U}(x - a\nu, \nu)^{-1} \textcolor{red}{U}(x - a\nu, \mu) \textcolor{red}{U}(x + a\mu - a\nu, \nu) \textcolor{red}{U}(x, \mu)^{-1} . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Zur Definition von $\sigma_{\mu\nu}$ siehe Kapitel A.2. Die vier Terme in Gleichung (2.34) stehen jeweils für eine Plaquette und sind der Anschauung halber in Abbildung 2.6 dargestellt. Die rote Färbung dient lediglich der besseren Übersicht und hat sonst keinerlei Bewandtnis.

Der Koeffizient c_{sw} hängt von der nackten Kopplung g_0 ab und muss so gewählt werden, dass die O(a)-Effekte verschwinden. In niedrigster Ordnung Störungstheorie nimmt er den Wert 1 an. Im Falle der in Kapitel 2.5 einzuführenden Valenzquarknäherung konnte der Koeffizient von Lüscher et al. nicht-perturbativ zu

$$c_{\text{sw}} = \frac{1 - 0.656 g_0^2 - 0.152 g_0^4 - 0.054 g_0^6}{1 - 0.922 g_0^2} , \quad 0 \leq g_0 \leq 1 \quad (2.35)$$

bestimmt werden [28].

Im SF sind aufgrund der Randfelder weitere Verbesserungsterme notwendig, die im Folgenden besprochen werden sollen.

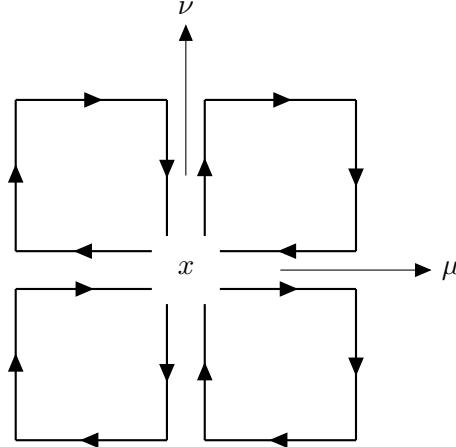


Abb. 2.6: Graphische Darstellung der Linkvariablen die im Feldstärketensor $\hat{F}_{\mu\nu}$ auftauchen. Die vier Terme aus Gleichung (2.34) stehen für die vier Plaquetten.

2.3.1 Quarkfeldunabhängige Randgegenterme

Als Nächstes sollen nun die Verbesserungsterme der Eich- und Fermionwirkung für das SF eingeführt werden. Durch das endliche Volumen des SF werden Randeffekte induziert, so dass auch die Randfelder berücksichtigt werden müssen. Es soll wieder mit der reinen Eichwirkung begonnen werden. Für sie ergibt sich nach [27] ein Randkorrekturterm von

$$\begin{aligned} \delta S_G^{\text{Rand}}[U] = & \frac{1}{2g_0^2}(c_s - 1) \sum_{p_s} \text{Tr} [1 - U(p_s)] \\ & + \frac{1}{g_0^2}(c_t - 1) \sum_{p_t} \text{Tr} [1 - U(p_t)] . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Die Summen über alle Plaquetten werden auch hier nur in einem Umlaufsinn durchlaufen. Die Kürzel s und t stehen dabei für räumliche (*space-like*) und zeitliche (*time-like*) Plaquetten auf dem Rand.

Man erkennt an Gleichung (2.36), dass sich die Gewichtsfaktoren aus Gleichung (2.15) zu

$$w(p) = \begin{cases} c_t(g_0) & \text{für zeitliche Plaquetten auf dem Rand} \\ \frac{1}{2}c_s(g_0) & \text{für räumliche Plaquetten auf dem Rand} \\ 1 & \text{für Plaquetten im Inneren} \end{cases} \quad (2.37)$$

abgeändert haben. Sind die Koeffizienten $c_t(g_0)$ und $c_s(g_0)$ richtig eingestellt, können die $O(a)$ -Effekte kompensiert und auf $O(a^2)$ verringert werden. In [27] liegen diesbezüglich störungstheoretische Ergebnisse vor.

2.3.2 Quarkfeldabhängige Randgegenterme

Durch Anwesenheit der Quarkfelder ergeben sich vier weitere Randterme zur Fermionwirkung, zwei davon bei $x_0 = 0$ und zwei bei $x_0 = T$:

$$\delta S_F^{\text{Rand}}[U, \bar{\psi}, \psi] = a^4 \sum_{\mathbf{x}} \{ (\tilde{c}_s - 1) [\hat{\mathcal{O}}_s(\mathbf{x}) + \hat{\mathcal{O}}'_s(\mathbf{x})] + (\tilde{c}_t - 1) [\hat{\mathcal{O}}_t(\mathbf{x}) + \hat{\mathcal{O}}'_t(\mathbf{x})] \} , \quad (2.38)$$

mit den zusammengesetzten Operatoren

$$\hat{\mathcal{O}}_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \bar{\rho}(\mathbf{x}) \gamma_k (\nabla_l^* + \nabla_k) \rho(\mathbf{x}) , \quad (2.39)$$

$$\hat{\mathcal{O}}'_s(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \bar{\rho}'(\mathbf{x}) \gamma_k (\nabla_l^* + \nabla_k) \rho'(\mathbf{x}) , \quad (2.40)$$

$$\hat{\mathcal{O}}_t(\mathbf{x}) = [\bar{\psi}(y) P_+ \nabla_0^* \psi(y) + \bar{\psi} \overleftarrow{\nabla}_0^* P_- \psi(y)]_{y=(a, \mathbf{x})} , \quad (2.41)$$

$$\hat{\mathcal{O}}'_t(\mathbf{x}) = [\bar{\psi}(y) P_- \nabla_0 \psi(y) + \bar{\psi} \overleftarrow{\nabla}_0 P_+ \psi(y)]_{y=(T-a, \mathbf{x})} , \quad (2.42)$$

die von Lüscher et al. diskutiert wurden [27]. Der Koeffizient \tilde{c}_t konnte in [25] bis zur ersten Ordnung störungstheoretisch berechnet werden.

2.3.3 Verbesserung des Axialstroms

Die Gittereffekte der Ordnung a verschwinden nur dann vollständig, wenn auch die lokalen zusammengesetzten Felder, beispielsweise der Axialstrom, ihre Gegenterme erhalten. Genauso wie die Wirkung durch die entsprechenden Gegenterme verbessert wurde, kann nun mit den lokalen Feldern verfahren werden.

Begonnen wird mit der unverbesserten Version des Axialstroms

$$A_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^a \psi(x) , \quad (2.43)$$

der die Pauli-Matrix τ^a (siehe Kapitel A.2) enthält. Sie wirkt auf den Flavour-Index des Fermionfeldes. Der Verbesserungsterm des Axialstroms nimmt unter Berücksichtigung der symmetrisierten Ableitung

$$\tilde{\partial}_\mu = \frac{1}{2} (\partial_\mu + \partial_\mu^*) \quad (2.44a)$$

$$= \frac{1}{2a} (\delta_{x, x+a\hat{\mu}} - \delta_{x, x-a\hat{\mu}}) \quad (2.44b)$$

folgende Gestalt an [27]:

$$\delta A_\mu^a(x) = a c_A \tilde{\partial}_\mu P^a . \quad (2.45)$$

In Gleichung (2.45) ist die Axialstromdichte gegeben durch

$$P^a = \bar{\psi}(x) \gamma_5 \frac{1}{2} \tau^a \psi(x) ; \quad (2.46)$$

der entsprechende Verbesserungsterm ist gleich Null.

Der Verbesserungskoeffizient c_A kann nicht-perturbativ (und in Valenzquarknäherung) zu

$$c_A = -0.00756 g_0^2 \times \frac{1 - 0.748 g_0^2}{1 - 0.977 g_0^2} , \quad 0 \leq g_0^2 \leq 1 \quad (2.47)$$

bestimmt werden [28].

2.4 Die PCAC-Relation

Unter Vernachlässigung der leichten Quarkmassen $m_u = m_d = 0$ bei Betrachtung eines Quarkdubletts

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} , \quad (2.48)$$

sind sowohl Axialstrom A_μ^a , als auch Vektorstrom

$$V_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{1}{2} \tau^a \psi(x) \quad (2.49)$$

erhalten und die Lagrangedichte der QCD weist eine exakte $SU(2)_V \times SU(2)_A$ -Symmetrie auf. In der Natur ist diese Symmetrie aufgrund der spontanen Symmetriebrechung nur approximativ erfüllt, so dass die Divergenz des Axialstroms $\partial_\mu A_\mu^a$ nicht vollständig verschwindet:

$$\partial_\mu A_\mu^a(x) = 2m P^a(x) . \quad (2.50)$$

Die Erhaltung des Axialstroms bis auf einen lokalen Term wird in diesem Zusammenhang PCAC-Relation (*Partially Conserved Axial Current*) genannt. P^a ist die im vorangegangenen Kapitel eingeführte Axialstromdichte. Da m die Dimension einer Masse aufweist, eignet sich die PCAC-Relation zur Definition einer renormierten Masse.

Unter Berücksichtigung der verbesserten Felder mit korrekt eingestellten Koeffizienten c_A und c_{SW} ist die PCAC-Relation bis zur Ordnung $O(a^2)$ genau.

2.5 Die Fermionmatrix und Valenzquarknäherung

In der Gitter-QCD werden Konfigurationen durch Monte-Carlo-Simulationen erzeugt, aus denen dann Observablen extrahiert werden können. Die Gitterformulierung der QCD wird

also numerisch umgesetzt, was zu der Frage führt, welche Berechnungen der Theorie die meiste Rechenzeit in Anspruch nehmen. Vielleicht ist es durch geschickte Vereinfachungen sogar möglich, Rechenzeit auf Kosten der Genauigkeit zu sparen.

Die Berechnung einer Observable

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left(- \left(S_G(U) + \underbrace{\sum_x \bar{\psi}(x) M(x, y) \psi(y)}_{S_F} \right) \right) \quad (2.51)$$

beinhaltet Integrationen über alle Eich- und Fermionfelder. In der fermionischen Wirkung in Gleichung (2.51) taucht die sogenannte Fermionmatrix

$$M(x, y) = \left(m_0 + \frac{4r}{a} \right) + \sum_{\mu} [(\gamma_{\mu} - r) U(x, \mu) \delta_{x, x+a\mu} - (\gamma_{\mu} + r) U^{-1}(x - a\mu, \mu) \delta_{x, x-a\mu}] \quad (2.52)$$

auf, die ausgeschrieben die bereits bekannte Wilson-Wirkung (2.31) liefert.

Die Fermionfelder $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ genügen als Grassmann-Variablen der Relation

$$\{\psi(x), \psi(y)\} = 0 \quad (2.53)$$

und können als fermionische Freiheitsgrade ausintegriert werden:

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{-S_F[U]} = \det M[U] . \quad (2.54)$$

Die Fermionmatrix hängt dementsprechend nur noch von den Eichfeldern U ab und ist eine nichtlokale Größe. Um Erwartungswerte von Operatoren berechnen zu können, definiert man eine effektive Wirkung der Form

$$S_{\text{eff}}[U] \equiv S_G[U] - \ln \det M[U] . \quad (2.55)$$

In Monte-Carlo-Simulationen beansprucht die Berechnung der Fermiondeterminante im Gegensatz zur reinen Eichwirkung die meiste Rechenzeit. In der sogenannten **Valenzquarknäherung** oder **Quenched Approximation** wird der Einfluss der Matrix durch die Dynamik der Seequarks vernachlässigt. Man setzt

$$\det M[U] = \text{konstant} , \quad (2.56)$$

was zwar zu einer Abweichung der Ergebnisse gegenüber der vollen QCD führt aber weniger Rechenzeit in Anspruch nimmt. Obwohl die Implementierung relativistischer Quarks mittlerweile der Standard ist, stellt die Valenzquarknäherung nach wie vor ein geeignetes Mittel dar, neue Methoden mit moderatem Aufwand testen zu können. Alle Ergebnisse, die im Zuge dieser Arbeit erzielt wurden, beruhen auf der Valenzquarknäherung. Die Unter-

suchungen des D-Meson-Systems innerhalb dieses „theoretischen Laboratoriums“ können daher als Test angesehen werden, inwieweit die effektive Theorie Gültigkeit besitzt.

2.6 Renormierung

Durch die Renormierung wird eine Energieskala festgelegt, im Bereich derer die Theorie formuliert werden kann. Wird nicht renormiert tauchen Divergenzen auf, die es unmöglich machen innerhalb der Gitter-QCD einen Kontinuumsliimes zu erreichen.

In der unverbesserten Theorie werden die nicht renormierten Größen m_q und g_0^2 über

$$\tilde{g}_R^2 = g_0^2 Z_g(g_0^2, a\mu) , \quad (2.57a)$$

$$\tilde{m}_R^2 = m_q Z_m(g_0^2, a\mu) \quad (2.57b)$$

rein multiplikativ renormiert. Die Brechung der chiralen Symmetrie auf dem Gitter macht außerdem eine zusätzliche additive Renormierung notwendig.

Wie sehen die renormierten Größen nun in der interessierenden, verbesserten Theorie aus? Dazu werden die renormierten Größen derart modifiziert, dass unerwünschte Cutoff-Effekte der Ordnung am_q eliminiert werden:

$$g_R^2 = g_0^2 (1 + b_g am_q) Z_g(g_0^2, a\mu) , \quad (2.58a)$$

$$m_R^2 = m_q (1 + b_m am_q) Z_m(g_0^2, a\mu) . \quad (2.58b)$$

Die Koeffizienten b_g und b_m hängen von der Kopplung g_0^2 ab und müssen so eingestellt werden, dass sämtliche Gitterartefakte verschwinden.

Auch die zusammengesetzten, $O(a)$ -verbesserten Felder, wie der Axialstrom, können auf diese Weise renormiert werden:

$$(A_R)_\mu^a = Z_A (1 + b_A am_q) (A_I)_\mu^a . \quad (2.59)$$

Kapitel 3 Heavy Quark Effective Theory (HQET) – eine effektive Theorie schwerer Quarks

Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es, hadronische Systeme mit einem leichten und einem schwereren (Charm-)Quark zu untersuchen. In diesem Kontext tauchen aber Probleme auf, deren Ursprung in den unterschiedlichen Massenskalen der Quarks liegt. Zur Veranschaulichung sei die Masse des leichten Up-Quarks ($1.5 - 3.3$ MeV [35]) und die des schweren Charm-Quarks ($1.16 - 1.34$ GeV [35]) ohne Fehler angegeben, zwischen denen drei Größenordnungen liegen. Das b-Quark ist mit einer Masse von $4.13 - 4.37$ GeV [35] etwas schwerer als das c-Quark. Auf die angesprochenen Probleme soll nun näher eingegangen werden. Die Gitterkonstante a , die bei jeder Gittersimulation den Abstand benachbarter Gitterpunkte angibt, ist zusammen mit der Gitterausdehnung L ein Maß für die Auflösung mit der aktuell simuliert wird. Je kleiner dabei a ist, d.h. je mehr Gitterpunkte simuliert werden, desto höher wird dementsprechend die Auflösung – zu Lasten der Rechenzeit. Man geht deshalb immer einen Kompromiss zwischen Gitterauflösung und Rechenaufwand ein, der für die gegebene Problemstellung am geeignetsten ist. Wird a jedoch zu groß gewählt, steigen die Gitterartefakte derart an, dass die simulierten Ergebnisse nicht mehr aussagekräftig sind.

Im Falle eines schweren Quarks, etwa des b-Quarks, ist es mit heutigen Rechnern nicht möglich, Gitter mit einer Gitterkonstanten a zu simulieren, die kleiner als die inverse schwere Masse $1/m_h$ ist. Dies gilt eingeschränkt auch für das c-Quark, da es auf der Grenze liegt, bei der mit konventionellen Methoden simuliert werden kann. Bei diesen Methoden wird eine relativistische Theorie mit einem propagierenden c-Quark zu Grunde gelegt. In der Valenzquarknäherung liegen für diesen Fall Ergebnisse vor [18, 40].

Eine aussagekräftige Simulation sollte stets

$$am_h \underset{\text{gelten}}{<} 1 \quad (3.1)$$

erfüllen, um einen ordentlichen Kontinuumsliimes zu erreichen. Des Weiteren muss die Gitterausdehnung L groß genug gewählt werden, um “finite-size”-Effekte zu vermeiden.

Die soeben angedeuteten Probleme können umgangen werden, indem zu einer effektiven Theorie der QCD „gewechselt“ wird, z.B. zu der in dieser Arbeit verwendeten **Heavy Quark**

Effective Theory (HQET), die auf EICHEN und HILL zurückgeht [11]. In dieser Theorie wird das leichte Quark weiterhin relativistisch behandelt, das schwere Quark verbleibt ohne Dynamik. Der Übergang wird formal durch eine Entwicklung der Lagrangedichte nach inversen Potenzen der schweren Quarkmasse gewährleistet, d.h. je schwerer das Quark ist, desto genauer sollte die Theorie sein. In Kapitel 3.1 soll die effektive Theorie direkt auf dem Gitter definiert werden.

3.1 HQET auf dem Gitter

Die Ausführungen dieses Kapitels gehen weitestgehend auf [21] zurück. Dort und in weiteren Quellen [7, 48] wurde die Theorie ausführlich für die B-Physik diskutiert. Sie lässt sich aber ohne Probleme auf die Physik mit einem Charm-Quark übertragen, so dass sie an dieser Stelle zusammenfassend dargestellt werden kann.

Die QCD-Lagrangedichte beinhaltet neben einem unspezifizierten schweren Quarkfeld ψ_h auch die Felder des leichten Quarks und die Eichfelder. Der hier interessierende Anteil der Wirkung des schweren Quarks wird mit S_{HQET} bezeichnet und lautet:

$$S_{\text{HQET}} = a^4 \sum_x \left\{ \mathcal{L}_{\text{stat}}(x) + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}^{(i)}(x) \right\} , \quad (3.2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{stat}}(x) = \bar{\psi}_h(x) [\nabla_0 + \delta m] \psi_h(x) , \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L}^{(i)}(x) = \sum_j \omega_j^{(i)} \mathcal{L}_j^{(i)}(x) . \quad (3.4)$$

Die effektive Wirkung setzt sich aus einem statischen Anteil und den Korrekturen höherer Ordnung zusammen, wobei der statische Anteil einen Massenterm δm und die zeitliche Ableitung enthält. Im statischen Fall wird das schwere Quark somit als ruhend angesehen und es verbleibt lediglich eine Dynamik der Zeitkomponente. Die Terme höherer Ordnung mit den Entwicklungskoeffizienten $\omega_j^{(i)}$ sind dementsprechend Korrekturen an dem statischen Anteil.

Erwartungswerte eines Operators \mathcal{O} sind wie gewohnt definiert:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D}[\phi] \mathcal{O}[\phi] e^{-(S_{\text{rel}} + S_{\text{HQET}})} , \quad (3.5)$$

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}[\phi] e^{-(S_{\text{rel}} + S_{\text{HQET}})} . \quad (3.6)$$

S_{rel} bezeichnet die Wirkung des relativistischen leichten Quarks.

Die $1/m$ -Entwicklung der Exponentialfunktion unter dem Pfadintegral in Gleichung (3.5)

und (3.6) kann an dieser Stelle vorgenommen werden [21]:

$$e^{-(S_{\text{rel}} + S_{\text{HQET}})} = e^{-(S_{\text{rel}} + a^4 \sum_x \mathcal{L}_{\text{stat}}(x))} \times \\ \left(1 - a^4 \sum_x \mathcal{L}^{(1)}(x) + \frac{1}{2} \left[a^4 \sum_x \mathcal{L}^{(1)}(x) \right]^2 - a^4 \sum_x \mathcal{L}^{(2)}(x) + \dots \right). \quad (3.7)$$

Man erkennt, dass die $1/m$ -Terme lediglich als Einschübe an den Boltzmann-Faktor fungieren und nicht im Exponenten auftauchen. Das heißt, dass ihre Erwartungswerte bezüglich der statischen Theorie zu bilden sind. Aus diesem Grund wird die Renormierbarkeit der Theorie bis zur Ordnung $1/m$ gewährleistet. Die Terme erster Ordnung in $1/m$ aus Gleichung (3.4) lauten:

$$\mathcal{L}_1^{(1)} = \mathcal{O}_{\text{spin}} = \bar{\psi}_h (-\sigma \cdot \mathbf{B}) \psi_h, \quad \omega_1^{(1)} = 1/(2m), \quad (3.8a)$$

$$\mathcal{L}_2^{(1)} = \mathcal{O}_{\text{kin}} = \bar{\psi}_h (-\mathbf{D}^2) \psi_h, \quad \omega_2^{(1)} = 1/(2m). \quad (3.8b)$$

\mathbf{B} bezeichnet das diskretisierte chromomagnetische Feld und \mathbf{D}^2 ist der dreidimensionale Laplace-Operator auf dem Gitter. Die Erwartungswerte eines Operators \mathcal{O} lassen sich nun unter Berücksichtigung der $1/m$ -Korrekturen schreiben als:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{stat}} + \omega_{\text{kin}} a^4 \sum_x \langle \mathcal{O} \mathcal{O}_{\text{kin}}(x) \rangle_{\text{stat}} + \omega_{\text{spin}} a^4 \sum_x \langle \mathcal{O} \mathcal{O}_{\text{spin}}(x) \rangle_{\text{stat}} \quad (3.9a)$$

$$\equiv \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{stat}} + \omega_{\text{kin}} \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{kin}} + \omega_{\text{spin}} \langle \mathcal{O} \rangle_{\text{spin}}. \quad (3.9b)$$

3.2 Die Zeitkomponente des Axialstroms

In diesem Kapitel soll die Zeitkomponente des Axialstroms A_0 als Beispiel für ein zusammengesetztes Feld eingeführt werden, da später auftauchende Korrelationsfunktionen diese Komponente beinhalten.

Man erhält die zeitliche Komponente des Axialstroms in der HQET über eine Entwicklung analog zu Gleichung (3.2):

$$A_0^{\text{HQET}}(x) = \sum_{i=0}^n \mathcal{A}^{(i)}(x), \quad (3.10)$$

$$\mathcal{A}^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(i)} \mathcal{A}_j^{(i)}(x) \quad \text{mit } i > 0. \quad (3.11)$$

Der Term führender Ordnung lautet:

$$\mathcal{A}^{(0)}(x) = \alpha_0^{(0)} A_0^{\text{stat}}(x) , \quad (3.12)$$

$$A_0^{\text{stat}}(x) = \bar{\psi}_l(x) \gamma_0 \gamma_5 \psi_h(x) . \quad (3.13)$$

$\psi_l(x)$ steht für das Feld des leichten Quarks.

3.2.1 Die Verbesserung des Axialstroms in der HQET

Die zeitliche Komponente des Axialstroms in der statischen Theorie kann jetzt analog zur QCD in der HQET verbessert werden. Dementsprechend werden zur Aufhebung aller $O(a)$ -Effekte Korrekturterme addiert, die in [22] eingehend diskutiert worden sind:

$$(A_R^{\text{stat}})_0(x) = Z_A^{\text{stat}}(1 + b_A^{\text{stat}} a m_q)(A_I^{\text{stat}})_0(x) , \quad (3.14)$$

$$(A_I^{\text{stat}})_0(x) = A_0^{\text{stat}}(x) + a c_A^{\text{stat}} \delta A_0^{\text{stat}}(x) , \quad (3.15)$$

$$\delta A_0^{\text{stat}}(x) = \bar{\psi}_l(x) \frac{1}{2} (\overleftarrow{\nabla}_i + \overleftarrow{\nabla}_i^*) \gamma_i \gamma_5 \psi_h(x) . \quad (3.16)$$

Die Renormierungskonstante Z_A^{stat} , sowie die Verbesserungskoeffizienten b_A^{stat} und c_A^{stat} hängen von der nackten Kopplung g_0 ab. Darüber hinaus sind die beiden Ableitungsoperatoren so zu verstehen, dass sie nach links auf das leichte Quarkfeld wirken.

In Analogie zum statischen Axialstrom lässt sich auch der Vektorstrom auf gleiche Weise verbessern:

$$(V_R^{\text{stat}})_0(x) = Z_V^{\text{stat}}(1 + b_V^{\text{stat}} a m_q)(V_I^{\text{stat}})_0(x) , \quad (3.17)$$

$$(V_I^{\text{stat}})_0(x) = \bar{\psi}_l(x) \gamma_0 \psi_h(x) + a c_V^{\text{stat}} \bar{\psi}_l(x) \gamma_i \frac{1}{2} (\overleftarrow{\nabla}_i + \overleftarrow{\nabla}_i^*) \psi_h . \quad (3.18)$$

Im Rahmen der Gitterformulierung der HQET sind $O(a)$ -Verbesserungsterme formal als $1/m$ -Terme aufzufassen. Daher können sie als weitere, zu bestimmende Parameter angesehen werden. Durch ein sogenanntes *Matching* zwischen HQET und QCD, dessen Beschreibung nun folgen soll, werden diese Parameter festgelegt.

3.3 Matching der HQET an die QCD

Das Matching ist notwendig, um die Koeffizienten ω_{spin} , ω_{kin} , Z_A^{HQET} , c_A^{HQET} , Z_V^{HQET} und c_V^{HQET} , sowie den Massenterm δm nicht-perturbativ zu bestimmen. Für diese sieben Größen werden dementsprechend auch sieben Matching-Bedingungen benötigt. Würde man versuchen die Koeffizienten mittels Störungstheorie zu berechnen, so wäre ein Kontinu-

umslimes nicht gegeben. Grund hierfür ist das Mischen von Operatoren unterschiedlicher Dimensionen und das daraus folgende Divergieren der Koeffizienten bei Betrachtung des Kontinuumslimes.

Der Massenterm δm hat seinen Ursprung in der zusätzlichen additiven Renormierung, die schon in Kapitel 2.6 erwähnt wurde. Die Relation zwischen der nackten, schweren Quarkmasse m_h^{bare} und der renormierten Masse m_h wird also um diesen Term ergänzt:

$$Z_m(m_h^{\text{bare}} + \delta m) = m_h . \quad (3.19)$$

δm ist linear divergent und eine störungstheoretische Entwicklung führt zu Trunkierungsfehlern in Gleichung (3.19), so dass der Kontinuumslimes divergiert. Es bedarf demnach nicht-perturbativer Methoden zur Lösung dieses Problems, die in dieser Arbeit angewandt werden. Die HQET ist eine effektive Theorie der QCD und dementsprechend eine Näherung, die umso genauer ist, je präziser die Koeffizienten der HQET $\mathcal{C}^{\text{HQET}}$ berechnet werden. Im Folgenden soll nun das Matching vorgestellt werden, dass auf Arbeiten von HEITGER und SOMMER [20, 21] zurückgeht.

Beim Matching werden Observablen Φ verglichen, die sowohl in der QCD, als auch in der HQET definiert sind:

$$\Phi^{\text{HQET}}(M_{\text{RGI}}) = \Phi^{\text{QCD}}(M_{\text{RGI}}) . \quad (3.20)$$

Hinzu kommen Terme höherer Ordnung in der Entwicklung nach $1/m$. M_{RGI} bezeichnet die renormierungsgruppeninvariante Quarkmasse, welche unabhängig vom Renormierungsschema ist. Das zugehörige Renormierungsproblem wurde für die Fälle $N_f = 0$ [3] und $N_f = 2$ [7] gelöst. Es wird angenommen, dass die Observablen vor dem Matching renormiert wurden.

Bei den Systemen mit einem leichten und einem schwereren Quark, die in dieser Diplomarbeit untersucht werden, setzt sich die Größe Φ aus Gleichung (3.20) aus sieben Matching-Observablen zusammen

$$\Phi = (L\Gamma^P, Y_A, Y_V, R_A, R_V, R_1, \mathcal{R})^T . \quad (3.21)$$

Damit ist es möglich alle benötigten Koeffizienten, sowie die Charm-Masse und die Zerfallskonstante des D-Mesons zu bestimmen. Die sieben Observablen sollen in Kapitel 3.7 eingeführt und genauer diskutiert werden.

3.3.1 Matching in endlichem Volumen

In diesem Kapitel wird das Matching vorgestellt, welches eine Bestimmung der Parameter in der HQET erlaubt. Praktisch wird dies durch numerische Simulationen erreicht, die auf Großrechnern stattfinden. Die Frage ist, ob es mit den gegebenen Rechenkapazitäten mög-

lich ist Gleichung (3.20) direkt zu lösen. An einem konkreten Beispiel soll gezeigt werden, dass zuerst in ein kleineres Volumen hinabgestiegen werden muss, um die erwünschten Resultate zu erhalten.

Gegeben sei beispielsweise ein Gitter mit

$$\frac{L}{a} \leq 32 , \quad (3.22)$$

eine Gitterauflösung, die mit heutigen Rechnern in der Valenzquarknäherung simuliert werden kann. Die angesprochenen “finite-size”-Effekte, welche in zu kleinen Volumina immer dominanter werden, sollen für $L \geq 2$ fm vernachlässigbar sein. Für das gegebene Verhältnis L/a aus Gleichung (3.22) ergibt sich damit die kleinste Gitterkonstante zu $a \approx 0.06$ fm. Mit diesem Wert ist es nicht möglich Ungleichung (3.1) für das b-Quark zu erfüllen und die Parameter über die Matching-Bedingung zu berechnen. Wie umgeht man nun dieses Dilemma das einleitend erwähnt wurde?

Die Lösung liegt darin, dass in ein kleineres Volumen L gewechselt wird und dort QCD und HQET in Verbindung gebracht werden¹. Dabei wird angenommen, dass die Parameter auch in diesem Volumen Gültigkeit besitzen, ergo volumenunabhängig sind. Die Matching-Bedingung (3.20) ändert sich nun in

$$\Phi_k^{\text{HQET}}(L, M_{\text{RGI}}) = \Phi_k^{\text{QCD}}(L, M_{\text{RGI}}) , \quad k = 1, \dots, N_n . \quad (3.23)$$

Große Volumina, die zur Berechnung des physikalischen Massenspektrums benötigt werden, können anschließend über *Step-Scaling-Funktionen* erreicht werden.

3.3.2 Step-Scaling-Funktionen

Das Step-Scaling ist als kanonische Anwendung in der B-Physik ein wesentlicher Schritt, um zu praktikablen Volumina zu gelangen. In der C-Physik können aufgrund der kleineren Masse des Quarks größere Gitter simuliert werden, so dass das Step-Scaling entfällt.

Die dimensionslosen Step-Scaling-Funktionen σ_k verknüpfen Observablen im Volumen L über

$$\Phi_k^{\text{HQET}}(\textcolor{red}{s}L, M) = \sigma_k \left(\Phi_j^{\text{HQET}}(L, M) \right) , \quad k, j = 1, \dots, N_n \quad (3.24)$$

mit denen aus größerem Volumen L^k , wobei man üblicherweise $s = 2$ setzt.

Eine Observable, die mit den Step-Scaling-Funktionen verknüpft wird, ist zum Beispiel die laufende Kopplung $\bar{g}^2(L)$. Die zugehörige Step-Scaling-Funktion lautet

$$\sigma(u) \equiv \bar{g}^2(\textcolor{red}{s}L) |_{\bar{g}^2(L)=u} . \quad (3.25)$$

¹Üblicherweise wählt man $L \approx 0.2 - 0.4$ fm.

Man erhält $\sigma(u)$ entsprechend über den Kontinuumslices der Gitter-Step-Scaling-Funktionen

$$\sigma(s, u) \equiv \lim_{a \rightarrow 0} \Sigma(s, u, a/L) |_{\bar{g}^2(L)=u} . \quad (3.26)$$

Das Vorgehen kann schematisch folgendermaßen zusammengefasst werden:

- Wahl eines Gitters mit einer bestimmten Auflösung a/L ,
- Fixierung aller Parameter durch $\Phi_j^{\text{HQET}}(L, M)$,
- Vergrößerung der Gitterlänge L um den Faktor s ,
- Vergrößerung des Gitterabstandes a bei fester Kopplung \bar{g}^2 um denselben Faktor,
- Kontinuumsextrapolation der Gitter-Step-Scaling-Funktionen.

In Abbildung 3.1 ist das Verfahren auch graphisch dargestellt.

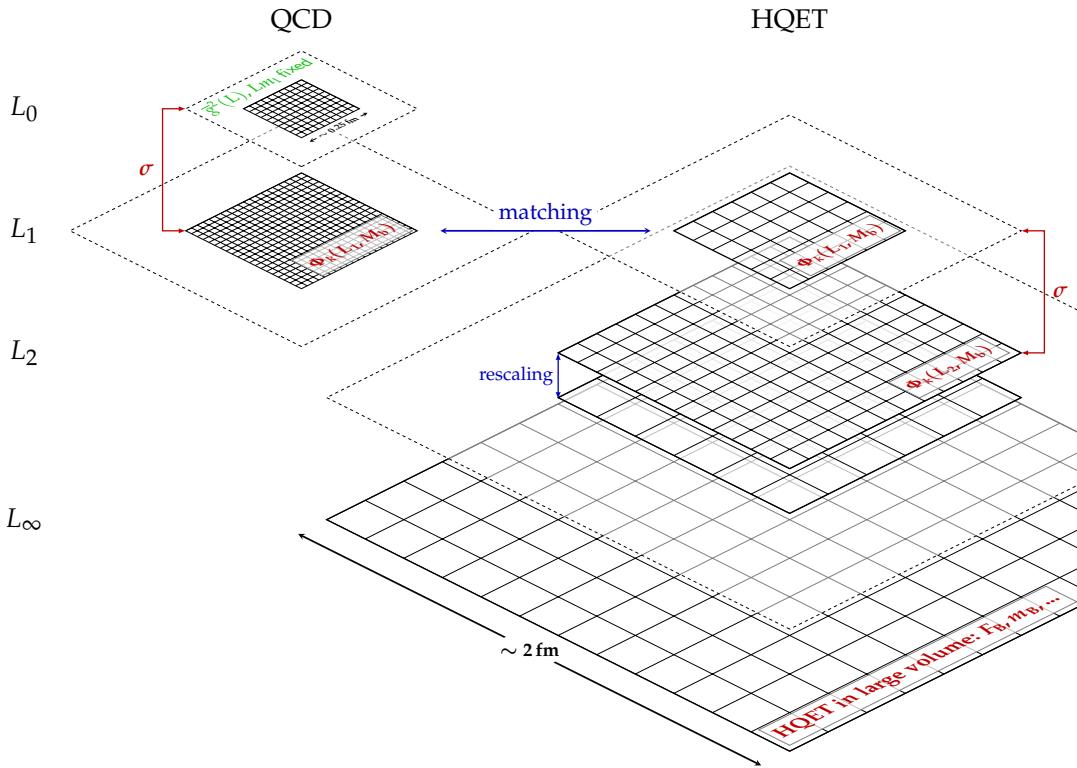


Abb. 3.1: Schematische Darstellung der Vorgehensweise bei Verwendung der HQET [13].

Die Step-Scaling-Funktionen existieren sowohl auf Seite der QCD, als auch auf Seite der HQET. Um das physikalische Massenspektrum erhalten zu können, wird das Gitter so lange ausgedehnt bis die sogenannte “infinite-volume”-Region erreicht ist, welche grob

auf $L_\infty \approx 2 \text{ fm}$ festgelegt werden kann. Im Zuge dieser Diplomarbeit musste kein Step-Scaling durchgeführt werden, so dass dieser Schritt auf Seite der QCD entfällt. Die QCD-Simulationen und das Matching werden direkt im Volumen L_2 realisiert. Aus diesem Grund ist in der HQET lediglich ein Schritt ($L_2 \rightarrow L_\infty$) notwendig, um in die angesprochene “infinite-volume”-Region zu gelangen.

3.4 Leichte und schwere Quarks im SF-Formalismus

In Kapitel 1.4 wurde dargestellt, wie Quarks innerhalb des SF-Formalismus behandelt werden. Nun soll eine Unterscheidung zwischen leichten und schweren Quarks erfolgen, um die Unterschiede in ihrer Wirkung einbeziehen zu können. An dieser Stelle werden leichte Quarkfelder durch ein l und schwere Quarkfelder durch ein h indiziert.

Zunächst soll die Wirkung der Projektionsoperatoren auf das schwere Quarkfeld ψ_h untersucht werden. Als nicht-relativistisches Spin 1/2-Teilchen besitzt das schwere Quark nur zwei Freiheitsgrade, so dass die anderen Komponenten zu Null gewählt werden können [22]. Aufgrund dieser Eigenschaft entfallen die Projektionsoperatoren

$$P_+ \psi_h = \psi_h , \quad (3.27a)$$

$$\bar{\psi}_h P_+ = \bar{\psi}_h , \quad (3.27b)$$

womit die Dirichlet-Randbedingungen für das schwere Quark über

$$\psi_h(x)|_{x_0=0} = \rho_h(\mathbf{x}) , \quad (3.28a)$$

$$\bar{\psi}_h(x)|_{x_0=T} = \bar{\rho}'_h(\mathbf{x}) \quad (3.28b)$$

definiert sind. Da die statischen Quarks keine Dynamik in Raumrichtung aufweisen, erhält die Wirkung des schweren Quarks

$$S_h[A, \psi_h, \bar{\psi}_h] = \int d^4x \bar{\psi}_h(x) D_0 \psi_h(x) - \int d^3\mathbf{x} [\bar{\psi}_h(x) \psi(x)_h]_{x_0=T} \quad (3.29)$$

lediglich einen Randterm [22].

Die Gesamtwirkung in Gleichung (1.23) wird durch diesen zusätzlichen Term modifiziert und lautet dementsprechend

$$S[A, \psi, \bar{\psi}] = S_G[A] + S_F[A, \psi_l, \bar{\psi}_l] + S_h[A, \psi_h, \bar{\psi}_h] . \quad (3.30)$$

Für den späteren Gebrauch werden noch die Funktionalableitungen der Quarkrandfelder eingeführt:

$$\zeta_l(\mathbf{x}) = \frac{\delta}{\delta \bar{\rho}_l(\mathbf{x})}, \quad \bar{\zeta}_l(\mathbf{x}) = -\frac{\delta}{\delta \rho_l(\mathbf{x})}, \quad (3.31a)$$

$$\zeta'_l(\mathbf{x}) = \frac{\delta}{\delta \bar{\rho}'_l(\mathbf{x})}, \quad \bar{\zeta}'_l(\mathbf{x}) = -\frac{\delta}{\delta \rho'_l(\mathbf{x})}, \quad (3.31b)$$

$$\zeta'_h(\mathbf{x}) = \frac{\delta}{\delta \bar{\rho}'_h(\mathbf{x})}, \quad \bar{\zeta}_h(\mathbf{x}) = -\frac{\delta}{\delta \rho_h(\mathbf{x})}. \quad (3.31c)$$

Sie tauchen beispielsweise in den Definitionen der Korrelationsfunktionen auf, aus denen verschiedene Observablen konstruiert werden können.

3.5 $1/m$ -Entwicklung zur Bestimmung einer schweren Quarkmasse

Dieses Kapitel soll dazu dienen einen Einblick zu bekommen, wie die Entwicklung nach der inversen schweren Quarkmasse funktioniert. Mit dem hier beschriebenen Prozess wird auch die Masse des Charm-Quarks innerhalb dieser Diplomarbeit berechnet.

Ausgangspunkt ist eine Korrelationsfunktion, die ein lokales zusammengesetztes Feld, wie den Axialstrom enthält:

$$C_{AA}(x_0) = Z_A^2 a^3 \sum_x \left\langle A_0(x)(A_0)^\dagger(0) \right\rangle. \quad (3.32)$$

Z_A taucht hier quadratisch auf, da sowohl $A_0(x)$ als auch $(A_0)^\dagger(0)$ normiert werden. Die $1/m$ -Entwicklung unter Beachtung von Gleichung (3.9a) und $O(a)$ -Verbesserung lautet [7]:

$$\begin{aligned} C_{AA}(x_0) = & e^{-m_{\text{bare}} x_0} \left(Z_A^{\text{HQET}} \right)^2 a^3 \sum_x \left[\left\langle A_0^{\text{stat}}(x)(A_0^{\text{stat}}(0))^\dagger \right\rangle_{\text{stat}} \right. \\ & + \underbrace{\omega_{\text{kin}} \left\langle A_0^{\text{stat}}(x)(A_0^{\text{stat}}(0))^\dagger \right\rangle_{\text{kin}} + \omega_{\text{spin}} \left\langle A_0^{\text{stat}}(x)(A_0^{\text{stat}}(0))^\dagger \right\rangle_{\text{spin}}}_{(1/m)^1\text{-Terme}} \\ & \left. + \underbrace{c_A^{\text{HQET}} \left\langle A_0^{\text{stat}}(x)(\delta A_0^{\text{stat}}(0))^\dagger \right\rangle_{\text{stat}} + c_A^{\text{HQET}} \left\langle \delta A_0^{\text{stat}}(x)(A_0^{\text{stat}}(0))^\dagger \right\rangle_{\text{stat}}}_{O(a)\text{-Verbesserung}} \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\equiv e^{-m_{\text{bare}}x_0} \left(Z_A^{\text{HQET}} \right)^2 \left[C_{\text{AA}}^{\text{stat}}(x_0) + \omega_{\text{kin}} C_{\text{AA}}^{\text{kin}}(x_0) + \omega_{\text{spin}} C_{\text{AA}}^{\text{spin}}(x_0) + c_A^{\text{HQET}} [C_{\delta\text{AA}}^{\text{stat}}(x_0) + C_{\text{A}\delta\text{A}}^{\text{stat}}(x_0)] \right]. \quad (3.34)$$

Die Ausdrücke $(\delta A_0^{\text{stat}}(0))^\dagger$ und $\delta A_0^{\text{stat}}(x)$ sind lediglich Korrekturterme der entsprechenden Axialströme.

Die Masse des Mesons m_X (B-Meson: $X = B$, D-Meson: $X = D$) ergibt sich aus $C_{\text{AA}}(x_0)$ in großem Volumen bei Betrachtung großer Zeiten

$$m_X = - \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial_0 + \partial_0^*}{2} \log C_{\text{AA}}(x_0). \quad (3.35)$$

Anwendung dieser Beziehung auf Gleichung (3.34) liefert dann schlussendlich die gesuchte Masse

$$m_X = m_X^{\text{stat}} + m_X^{(1)} \quad (3.36)$$

mit

$$m_X^{\text{stat}} = m_{\text{bare}}^{\text{stat}} + E_{\text{stat}}, \quad (3.37)$$

$$m_X^{(1)} = m_{\text{bare}}^{(1)} + \omega_{\text{kin}} E_{\text{kin}} + \omega_{\text{spin}} E_{\text{spin}}, \quad (3.38)$$

$$E_{\text{stat}} = - \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial_0 + \partial_0^*}{2} \log C_{\text{AA}}^{\text{stat}}(x_0), \quad (3.39)$$

$$E_{\text{kin}} = - \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial_0 + \partial_0^*}{2} [C_{\text{AA}}^{\text{kin}}(x_0)/C_{\text{AA}}^{\text{stat}}(x_0)], \quad (3.40)$$

$$E_{\text{spin}} = - \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{\partial_0 + \partial_0^*}{2} [C_{\text{AA}}^{\text{spin}}(x_0)/C_{\text{AA}}^{\text{stat}}(x_0)]. \quad (3.41)$$

Die Terme proportional zu c_A^{HQET} tragen nicht zur Masse bei, da sie proportional zur Ableitung von $C_{\delta\text{AA}}^{\text{stat}}(x_0)/C_{\text{AA}}^{\text{stat}}(x_0)$ sind. Da $C_{\delta\text{AA}}^{\text{stat}}(x_0)$ die gleichen Quantenzahlen aufweist wie $C_{\text{AA}}^{\text{stat}}(x_0)$, ergeben diese Verhältnisse im Limes $x_0 \rightarrow \infty$ eine Konstante, die durch die Ableitung herausfällt.

Die letzte Frage betrifft nun die Renormierung der Größen in Gleichung (3.34). Reichen die bisher eingeführten Parameter aus, um alle Divergenzen zu absorbieren? Die Antwort darauf lautet ja. Schaut man sich beispielsweise

$$(\mathcal{O}_{\text{kin}})_R(x) = Z_{\mathcal{O}_{\text{kin}}} \left(\mathcal{O}_{\text{kin}}(x) + \frac{c_1}{a} \bar{\psi}_h(x) D_0 \psi_h(x) + \frac{c_2}{a} \bar{\psi}_h(x) \psi_h(x) \right) \quad (3.42)$$

an, so fällt der zweite Term auf der rechten Seite aufgrund der Bewegungsgleichung $D_0 \psi_h = 0$ weg. Der dritte Term verhält sich wie eine Massenverschiebung und kann im Parameter δm subsumiert werden.

3.6 Korrelationsfunktionen

In Kapitel 3.5 wurde mit der allgemeinen Korrelationsfunktion $C_{AA}(x_0)$ gerechnet. An dieser Stelle soll tiefer ins Detail gegangen und die Korrelationsfunktionen eingeführt werden, die unter anderem zur Bestimmung der Quarkmasse essentiell sind. Die zur Auswertung benötigten Korrelationsfunktionen lassen sich im Wesentlichen in zwei Gruppen aufteilen:

- Entweder setzen sie sich aus zusammengesetzten Feldern im „Inneren“ des SF, d.h. $0 < x_0 < T$ und den Randfeldern zusammen oder
- sie bestehen aus reinen Rand-Rand-Feldern.

Wichtige Beispiele für ersteren Fall sind die Korrelationsfunktionen f_A und k_V , die den Axial- und Vektorstrom enthalten und deshalb ihren Index tragen:

$$f_A(x_0, \theta) = -\frac{a^6}{2} \sum_{\mathbf{y}, \mathbf{z}} \langle (A_I)_0(x) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_l(\mathbf{z}) \rangle , \quad (3.43)$$

$$k_V(x_0, \theta) = -\frac{a^6}{6} \sum_{\mathbf{y}, \mathbf{z}, k} \langle (V_I)_k(x) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_k \zeta_l(\mathbf{z}) \rangle . \quad (3.44)$$

Die Funktionen $\bar{\zeta}_h$ und ζ_l sind die Funktionalableitungen der Fermionrandfelder und wurden bereits in Gleichung (3.31) eingeführt. Hier wurden außerdem die $O(a)$ -verbesserten Ströme benutzt, die ebenfalls bereits definiert wurden.

Beispiele für Rand-Rand-Korrelationsfunktionen sind $f_1(\theta)$ und $k_1(\theta)$

$$f_1(\theta) = -\frac{a^{12}}{2L^6} \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}} \langle \bar{\zeta}'_l(\mathbf{u}) \gamma_5 \zeta'_h(\mathbf{v}) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_5 \zeta_l(\mathbf{z}) \rangle , \quad (3.45)$$

$$k_1(\theta) = -\frac{a^{12}}{6L^6} \sum_{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, k} \langle \bar{\zeta}'_l(\mathbf{u}) \gamma_k \zeta'_h(\mathbf{v}) \bar{\zeta}_h(\mathbf{y}) \gamma_k \zeta_l(\mathbf{z}) \rangle , \quad (3.46)$$

wobei θ der Phasenfaktor des leichten Quarks ist. Die Renormierung der Korrelationsfunktionen geschieht in völliger Analogie zur QCD. Es tauchen jedoch zusätzlich Renormierungsfaktoren der relativistischen Randfelder auf [45]:

$$[f_A]_R(x_0, \theta) = Z_A (1 + \frac{1}{2} b_A a m_q) Z_\zeta^2 (1 + b_\zeta a m_q) f_A(x_0, \theta) , \quad (3.47)$$

$$[f_1]_R(\theta) = Z_\zeta^4 (1 + b_\zeta a m_q)^2 f_1(\theta) . \quad (3.48)$$

Auch hier lässt sich wieder eine Entwicklung in der schweren Quarkmasse auf die Korrelationsfunktionen anwenden. Bis zur ersten Ordnung in $1/m$ lautet die HQET-Entwicklung

der vier soeben eingeführten Korrelationsfunktionen:

$$[f_A]_R(x_0, \theta) = Z_A^{\text{HQET}} Z_{\zeta_h} e^{-m_h x_0} \left(f_A^{\text{stat}} + c_A^{\text{HQET}} f_{\delta A}^{\text{stat}} + \omega_{\text{kin}} f_A^{\text{kin}} + \omega_{\text{spin}} f_A^{\text{spin}} \right), \quad (3.49)$$

$$[k_V]_R(x_0, \theta) = Z_V^{\text{HQET}} Z_{\zeta_h} e^{-m_h x_0} \left(k_V^{\text{stat}} + c_V^{\text{HQET}} k_{\delta V}^{\text{stat}} + \omega_{\text{kin}} k_V^{\text{kin}} + \omega_{\text{spin}} k_V^{\text{spin}} \right), \quad (3.50)$$

$$[f_1]_R(x_0, \theta) = Z_{\zeta_h}^2 Z_{\zeta}^2 e^{-m_h T} \left(f_1^{\text{stat}} + \omega_{\text{kin}} f_1^{\text{kin}} + \omega_{\text{spin}} f_1^{\text{spin}} \right), \quad (3.51)$$

$$[k_1]_R(x_0, \theta) = Z_{\zeta_h}^2 Z_{\zeta}^2 e^{-m_h T} \left(f_1^{\text{stat}} + \omega_{\text{kin}} f_1^{\text{kin}} - \frac{1}{3} \omega_{\text{spin}} f_1^{\text{spin}} \right). \quad (3.52)$$

Aufgrund der Spinsymmetrie des statischen Anteils der Wirkung lassen sich in den letzten Gleichungen auch die Identitäten $f_A^{\text{kin}} = -k_V^{\text{kin}}$ und $f_A^{\text{spin}} = -3k_V^{\text{spin}}$ anwenden. Drei Korrelationsfunktionen sind der Anschauung halber in Abbildung 3.2 dargestellt.

3.7 Observablen

In der HQET können gewisse Verhältnisse von Korrelationsfunktionen benutzt werden, um physikalische Größen zu untersuchen. Neben der c-Quarkmasse ist beispielsweise auch die Zerfallskonstante des D-Mesons von Interesse.

In der vorliegenden Arbeit wird das D_s -Meson untersucht, welches als schweres Quark das Charm-Quark enthält. Zum Verständnis der Nomenklatur der D-Mesonen ist Tabelle 3.1 nützlich.

	d	u	s	c
\bar{d}				D^+
\bar{u}				D^0
\bar{s}				D_s^+
\bar{c}	D^-	\bar{D}^0	D_s^-	

Tabelle 3.1: Nomenklatur der D-Mesonen.

Die Zerfallszeiten der D-Mesonen werden durch den Zerfall des c-Quarks in leichtere Quarks, beispielsweise in das s-Quark dominiert und haben daher vergleichbare Zerfallszeiten [35]:

- $D^\pm: (1040 \pm 7) \cdot 10^{-15} \text{ s}$,
- $D^0: (410.1 \pm 1.5) \cdot 10^{-15} \text{ s}$,

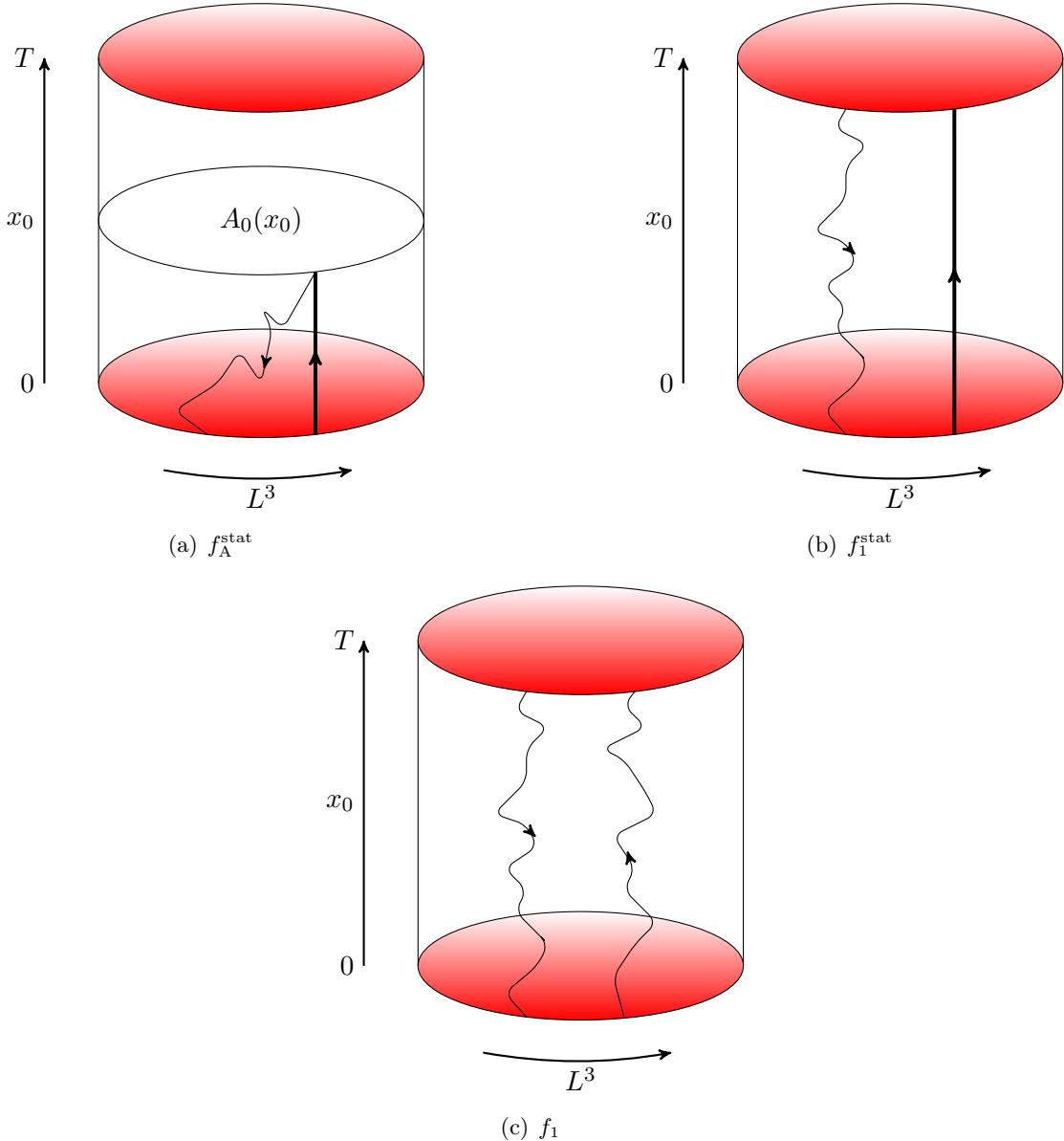


Abb. 3.2: Anschauliche Darstellung der Korrelationsfunktionen f_A^{stat} , f_1^{stat} und f_1 . Die statischen Quarks sind durch dicke gerade Linien, die dynamischen, leichten Quarks durch unregelmäßige Linien dargestellt.

- D_s^\pm : $(500 \pm 7) \cdot 10^{-15}$ s.

Der $c\bar{c}$ -Zustand wird Charmonium genannt. Nachfolgend werden die geeigneten Kombinationen der Korrelationsfunktionen eingeführt, die zur Bestimmung der Quarkmasse und der Zerfallskonstanten, sowie der zusätzlichen Koeffizienten (siehe Kapitel 3.3) nötig sind. Die Observable

$$L\Gamma^P = -\tilde{\partial}_0 \left[\log (f_A(x_0, \theta)) \right]_{x_0=T/2, T=L} \quad (3.53)$$

ist zur Bestimmung der Quarkmasse in der statischen Theorie, d.h. ohne $1/m$ -Korrekturen erforderlich [1]. Diese zusätzlichen Korrekturen werden über

$$R_1 = \frac{1}{4} \left[\log \left(\frac{f_1(\theta_1) k_1(\theta_1)^3}{f_1(\theta_2) k_1(\theta_2)^3} \right) \right]_{T=L/2}, \quad (3.54)$$

$$\mathcal{R} = \frac{3}{4} \left[\log \frac{f_1}{k_1} \right]_{T=L} \quad (3.55)$$

fixiert. Durch Auswertung der Observablen

$$Y_A = \log \left[\frac{-f_A(x_0, \theta)}{\sqrt{f_1}(\theta)} \right]_{T=L}, \quad (3.56)$$

$$Y_V = \log \left[\frac{k_V(x_0, \theta)}{\sqrt{k_1}(\theta)} \right]_{T=L} \quad (3.57)$$

ist es möglich, die Zerfallskonstanten des D- und D^{*}-Mesons zu erhalten. Aufgrund der O(a)-Verbesserung werden außerdem die Koeffizienten c_A^{HQET} und c_V^{HQET} über

$$R_A = -\log \left[\frac{f_A(T/2, \theta_1)}{f_A(T/2, \theta_2)} \right]_{T=L}, \quad (3.58)$$

$$R_V = -\log \left[\frac{k_V(T/2, \theta_1)}{k_V(T/2, \theta_2)} \right]_{T=L}, \quad (3.59)$$

berechnet.

Kapitel 4 Simulationsergebnisse und Auswertung

Aufgabe dieser Diplomarbeit ist es, die Charm-Quarkmasse und die Zerfallskonstante des D_s -Mesons nicht-perturbativ zu bestimmen. Das Vorgehen bei dieser Aufgabenstellung kann grob in drei Punkte aufgeteilt werden, die im Folgenden aufgelistet sind und einen Überblick darüber bieten, wie die Ergebnisse erhalten wurden.

- Numerische Resultate durch Simulationen,
- anschließende Analyse,
- Matching der HQET- und QCD-Daten.

Das in dieser Diplomarbeit beschriebene Vorgehen wurde bereits auf die Masse des b-Quarks angewendet [7]. Da die HQET eine effektive Theorie schwerer Quarks ist, kann die Frage gestellt werden, inwieweit diese Theorie ihre Gültigkeit behält und ob auch die Berechnung der Charm-Masse die bereits bekannten Ergebnisse liefert. Das Top-Quark spielt in diesem Zusammenhang natürlich keine Rolle. Die Lebensdauer dieses Teilchens ist zu kurz, als dass es hadronisieren würde.

4.1 Simulationsumsetzung

4.1.1 Hopping-Parameter der Simulationen

Um numerische Daten in großem Umfang generieren zu können, wurde auf den Großrechnern des DESY¹ in Zeuthen simuliert. Rechenzeit wurde von der *ALPHA-Kollaboration* zur Verfügung gestellt. Die in Zeuthen verwendeten *APEmille*- und *ApeNEXT*-Computer basieren auf der *Single Instruction Multiple Data* (SIMD) Architektur. Das heißt, dass eine Recheninstruktion auf unterschiedliche Daten parallel angewendet werden kann. Die schon vorhandenen Simulationsprogramme der ALPHA-Kollaboration mussten auf die neuen Parameter eingestellt und neu kompiliert werden. Ausgangspunkt ist die experimentell bestimmte Charm-Masse (1.27 GeV [35]), die als physikalischer Input benutzt wird, um

¹Deutsches Elektronen-Synchrotron.

die vermutete Größenordnung der Quarkmasse abdecken zu können. Definiert man

$$z = LM , \quad (4.1)$$

so können die experimentelle Masse und das Matching-Volumen $L = L_2 \approx 0.8 \text{ fm}$ eingesetzt werden, um den Charm-Bereich festzulegen. Im Folgenden wurden drei Werte für z fixiert, die den experimentellen Bereich abdecken und in die Simulationen eingehen: $z_1 = 5.0$, $z_2 = 6.0$ und $z_3 = 7.0$. Aus diesen Werten werden in einem nächsten Schritt die benötigten Hopping-Parameter κ_i über

$$M = h Z_m m_{q,h} (1 + b_m a m_{q,h}) \quad (4.2)$$

berechnet. Die einzelnen Normierungskonstanten in

$$Z_m = \frac{Z Z_A}{Z_P} , \quad (4.3)$$

sowie der Koeffizient b_m wurden [3, 15, 29] entnommen. Im Fall von Z , Z_A und b_m konnten die entsprechenden Werte über die funktionalen Zusammenhänge aus Kapitel B.2 gewonnen werden, die in den angegebenen Quellen nicht-perturbativ bestimmt wurden. Des Weiteren wird $h = \frac{M}{\bar{m}(\mu_0)}$ dazu benutzt, die von der Energieskala μ_0 abhängige laufende Masse $\bar{m}(\mu_0)$ im SF mit der renormierungsgruppeninvarianten Masse M in Verbindung zu bringen. Nutzt man die Beziehung zwischen nackter Quarkmasse $m_{q,h}$ und Hopping-Parameter

$$a m_{q,h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_h} - \frac{1}{\kappa_c} \right) , \quad (4.4)$$

kann κ_h zu

$$\frac{1}{\kappa_h} = \frac{1}{\kappa_c} - \frac{1}{b_m} \pm 2 \sqrt{\frac{1}{4b_m^2} + \frac{z}{h Z_m b_m} \frac{a}{L}} \quad (4.5)$$

bestimmt werden. κ_h sind die drei Hopping-Parameter des schweren Quarks für unterschiedliche z . κ_c kann dementsprechend mit dem kritischen Hopping-Parameter identifiziert werden und wird über die Masse des leichten Quarks definiert. Für die simulierten Gitter ergeben sich die in Tabelle 4.1 aufgezeigten Werte:

L/a	β	κ_c	κ_1	κ_2	κ_3
12	6.2204	0.135470	0.128277	0.126579	0.124718
16	6.4527	0.135543	0.130465	0.129349	0.128185
20	6.6350	0.135340	0.131402	0.130561	0.129697
24	6.7750	0.135121	0.131901	0.131224	0.130533
32	7.0203	0.134707	0.132339	0.131849	0.131353

Tabelle 4.1: Hopping-Parameter der unterschiedlichen Gitter.

Diese Parameter konnten anschließend in das neu kompilierte Simulationsprogramm eingegeben werden.

4.1.2 Bestimmung der Unsicherheit von z

In Kapitel 4.1.1 wurde der Hopping-Parameter κ eingeführt, der sich aus der Festlegung von z ergibt. Umgekehrt kann nun die Abhängigkeit von z bzgl. dieser Größen

$$z = z[h(L), Z(g_0, L), Z_A(g_0, L), Z_P(g_0, L), b_m(g_0)] \quad (4.6)$$

untersucht werden. Im Zuge dessen erhält z eine Unsicherheit, die aus den einzelnen Unsicherheiten der Größen über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung berechnet werden kann:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial h} \Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial Z} \Delta Z\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial Z_A} \Delta Z_A\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial Z_P} \Delta Z_P\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b_m} \Delta b_m\right)^2}. \quad (4.7)$$

Eine kurze Rechnung liefert:

$$\frac{\Delta z}{z} = \sqrt{\left(\frac{b_m a m_{q,h}}{1 + b_m a m_{q,h}}\right)^2 \left(\frac{\Delta b_m}{b_m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z}{Z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z_A}{Z_A}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z_P}{Z_P}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}. \quad (4.8)$$

Der relative Fehler von h liegt bei $\Delta h/h = 0.87\%$ und schlägt sich am stärksten in der Unsicherheit von z nieder. Die übrigen Größen nehmen Fehler von $\Delta Z/Z = 0.04\%$ [15], $\Delta Z_A/Z_A = 0.6\%$ [29] und $\Delta Z_P/Z_P = 0.4 - 0.62\%$ [3] an.

Um den Fehler für einen festen Wert von z zu bestimmen, müssten nun alle Kopplungen β der fünf Gitter eingesetzt werden. Da sich die Werte jedoch nicht stark voneinander unterscheiden, wird mit der größten Unsicherheit, gezeigt in Tabelle 4.2, gerechnet:

z	Δz	$\Delta z/z$
5	0.062	1.24%
6	0.075	1.25%
7	0.088	1.26%

Tabelle 4.2: Der finale Fehler von z durch Gauß'sche Fehlerfortpflanzung.

Der soeben bestimmte Fehler geht nun über

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| \Delta z \quad (4.9)$$

in alle Größen $y(z)$ ein, die von z abhängen.

4.1.3 Simulationsprogramm

Simulationen wurden sowohl für die „ganzen“ ($T = L$), als auch für die „halben“ Gitter ($T = L/2$) durchgeführt, um später alle benötigten Korrelationsfunktionen bilden zu können. Die Observable

$$R_1 = \frac{1}{4} \log[f_1(\theta_1)k_1(\theta_1)^3] - \log[f_1(\theta_2)k_1(\theta_2)^3] \quad (4.10)$$

setzt sich aus den Korrelationsfunktionen f_1 und k_1 zusammen, die bei $T = L/2$ berechnet wurden. Für alle anderen Observablen gilt $T = L$.

Am Ende jeder dieser Simulationen wurden die Korrelationsfunktionen gemäß der schematischen Darstellung in Kapitel B.1 in ein Datenfile geschrieben und ein neuer Run gestartet. Tabelle 4.3 fasst die Simulationsdaten zusammen.

L/a	T/a	β	n_{or}	n_{up}	Runs	Replika
12	12	6.2204	3	10	106	16
	6				352	2
16	16	6.4527	5	10	500	1
	8				168	1
20	20	6.6350	8	10	200	4
	10				200	4
24	24	6.7750	10	10	338	1
	12				225	1
32	32	7.0203	12	10	198	1
	16				200	1

Tabelle 4.3: Parameter des Simulationsprogrammes.

Die Parameter n_{or} und n_{up} stehen für die Anzahl der *Overrelaxation*- und *Update*-Schritte. In einer Simulation wird die aktuelle Messung einer Korrelationsfunktion üblicherweise nach jedem Update gespeichert. Jedes dieser Updates besteht aus einem Heatbath- und mehreren Overrelaxation-Schritten. Der Parameter n_{or} gibt die Anzahl letzterer pro Update an.

Der Overrelaxation-Algorithmus wurde eingeführt, um Korrelationen zwischen den gemessenen Observablen zu minimieren. Ohne diesen Algorithmus wird der Phasenraum der Links sehr langsam durchschritten, da immer nur ein Link der Konfiguration verändert wird. Sind alle Links durchlaufen wird ein Update durchgeführt.

Der Heatbath-Algorithmus dient zur Überführung der Links ins Gleichgewicht, wobei die

Linksnachbarn als Wärmebad dienen.

Die Implementierung beider Algorithmen, kurz HOR-Algorithmus genannt, ist seit [28] Standard. In den Simulationen wurde der Parameter n_{up} bei allen Gittern auf zehn gesetzt, so dass nach nunmehr erst jedem zehnten Update gespeichert wurde. Dies führt unter anderem zu einer geringeren Korrelation der Daten.

4.2 Datenanalyse

4.2.1 Thermalisierung und Pre-Binning

Im Anschluss an die Simulationen werden die Rohdaten durch ein selbstgeschriebenes C-Programm analysiert. In diesem Analyseprogramm finden essentielle Faktoren, wie die Renormierung und $O(a)$ -Verbesserung Berücksichtigung. Andere Aspekte zur Verbesserung der Genauigkeit, zum Beispiel das Pre-Binning, werden an geeigneter Stelle erklärt.

Um der Thermalisierung des Systems in den ersten Runs Rechnung tragen zu können, wurde bei jedem Gitter eine gewisse Anzahl an Messdaten entfernt. So kann sichergestellt werden, dass sich das System im Gleichgewichtszustand befindet, nachdem genug Monte-Carlo-Schritte durchlaufen worden sind. Eine Besonderheit stellen die Gitter mit $L/a = 12$ und $L/a = 20$ sowohl für $T = L$, als auch für $T = L/2$ dar. Diese Gitter produzieren für jeden durchgeführten Run eine Anzahl an Replika, die natürlich die Statistik verbessern. In Tabelle 4.3 wurde die Anzahl der Replika bereits aufgeführt. Deren Ursprung liegt in der Rechnerarchitektur auf denen die Simulationsprogramme durchgeführt wurden. Bei diesen Gittern musste dementsprechend von jedem Replikum eine Anzahl an Messdaten entfernt werden.

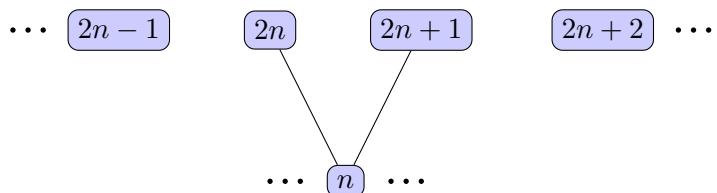


Abb. 4.1: Schematische Darstellung des Pre-Binning (Binlänge = 2).

Zur Eliminierung der vorhandenen Autokorrelationen innerhalb eines Datensatzes und Steigerung der Vertrauenswürdigkeit der Fehlerrechnung werden die Daten vorgebinnt (siehe Abbildung 4.1). Dieses sogenannte *Pre-Binning* fasst eine gewisse Anzahl² an Messpunkten zusammen und mittelt diese. Die weitere Analyse wird dann mit dem gebinnten Daten-

²Auch Binlänge genannt.

satz durchgeführt. Ergänzend führt Tabelle 4.4 die thermalisierten und gebinnten Daten noch einmal auf.

L/α	T/α	Runs	Replika	nach Thermalisierung	nach Pre-Binning
12	12	106	16	90	45
	6	352	2	330	165
16	16	500	1	480	240
	8	168	1	150	75
20	20	200	4	180	90
	10	200	4	180	90
24	24	338	1	320	160
	12	225	1	210	105
32	32	198	1	180	90
	16	200	1	180	90

Tabelle 4.4: Anzahl der Simulationen inklusive Thermalisierung und Pre-Binning.

4.2.2 Jackknife-Analyse

Die statistischen Unsicherheiten der simulierten Daten wurden durch eine Jackknife-Analyse bestimmt, die Korrelationen unter den einzelnen Daten berücksichtigt und somit zuverlässiger ist als die Standardabweichung. Verdeutlicht wird dies wie folgt: Angenommen eine Funktion $f(\langle a \rangle)$ hängt von dem Mittelwert einer Größe a ab. Wie ist dann die Unsicherheit von f gegeben?

Es ist nicht möglich $f_i = f(a_i)$ zu definieren und die f_i als Messwerte zu nutzen, da

$$f(\langle a \rangle) \neq \langle f(a) \rangle = \frac{1}{N} \sum_i f_i . \quad (4.11)$$

Seien beispielsweise a_i Zufallszahlen zwischen $0 \leq a_i \leq 1$ und $f(x) = 1/x$. Dann ist $f(\langle a \rangle) = 2$ aber $\langle f(a) \rangle = \int_0^1 da / a = \infty$.

Wenn f von mehr als einer Variable abhängt, z.B.

$$f = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle) , \quad (4.12)$$

können Korrelationen unter den Variablen auftreten, wodurch eine Fehleranalyse sehr mühselig wird. Eine Jackknife-Analyse berücksichtigt die Korrelationen der Monte-Carlo-Daten automatisch. In diesem Zusammenhang werden zuerst *Jackknife-Samples* aus dem gesamten Datensatz gebildet. Ein Jackknife-Sample $x_{J,i}$ entsteht dabei durch das Entfernen³ des i -ten Datenpunktes und anschließender Mittelwertbildung:

$$x_{J,i} = \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{N-1} x_j . \quad (4.13)$$

Auf Grundlage dieser Jackknife-Samples werden alle weiteren Observablen berechnet. Der Fehler der Observablen ist dann gegeben durch

$$\Delta \mathcal{O} = \sqrt{\frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{\mathcal{O}} - \mathcal{O}_i)^2} \quad (4.14)$$

mit

$$\bar{\mathcal{O}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}_i . \quad (4.15)$$

4.2.3 Normierung

Neben der θ - und κ -Abhängigkeit sind die Korrelationsfunktionen (ausgenommen f_1 und k_1) auch Funktionen der diskretisierten Zeit x_0 . Simulationspunkte gibt es an den Stellen $x_0 = 1, \dots, T-1$. Als Beispiel sollen die grundlegenden Funktionen $f_A(x_0)$ und $k_V(x_0)$ dargestellt werden, die mit steigendem x_0 exponentiell abfallen (Abbildung 4.2).

Wie in Kapitel B.1 angedeutet, werden die paarweise zusammengehörigen Korrelationsfunktionen bei $x_0 = t$ (Funktionen aus dem vorderen Anteil) und $x_0 = T-t$ (hinterer Anteil) gemittelt:

- $f_A \longleftrightarrow g_A$,
- $f_P \longleftrightarrow g_P$,
- $k_V \longleftrightarrow l_V$,
- $k_T \longleftrightarrow l_T$.

Durch diese Symmetrie der entsprechenden Korrelationsfunktionen ist eine weitere statistische Genauigkeit möglich.

Die Normierungskonstanten der zehn Funktionen sind in Kapitel B.3 aufgelistet und wurden vor der Mittelung mit den entsprechenden Funktionen verknüpft. Abbildung 4.3 illus-

³Ins Deutsche übersetzt heißt Jackknife auch Klappmesser.

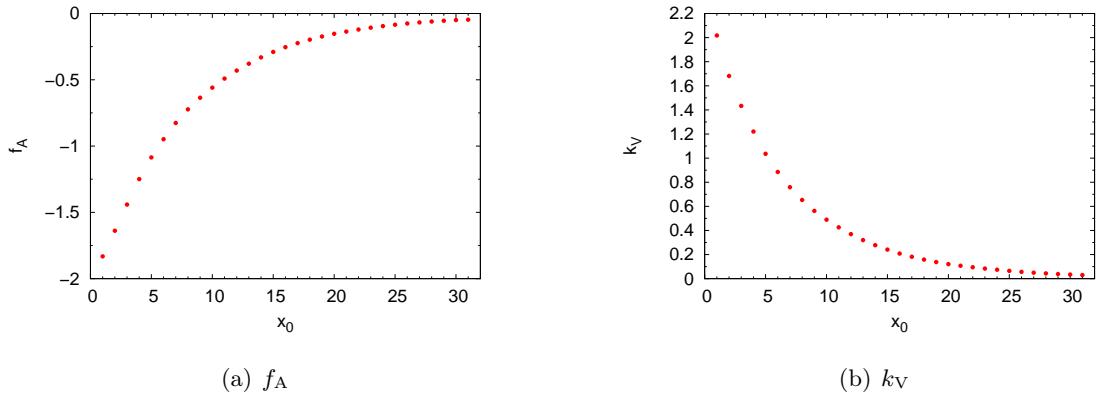


Abb. 4.2: Darstellung der Korrelationsfunktionen $f_A(x_0)$ und $k_V(x_0)$ aus den Rohdaten von $L/a = 32$, $\theta = 1/2$ und $z = 5$ des 101. Runs.

triert das Gesagte dieses Unterkapitels.

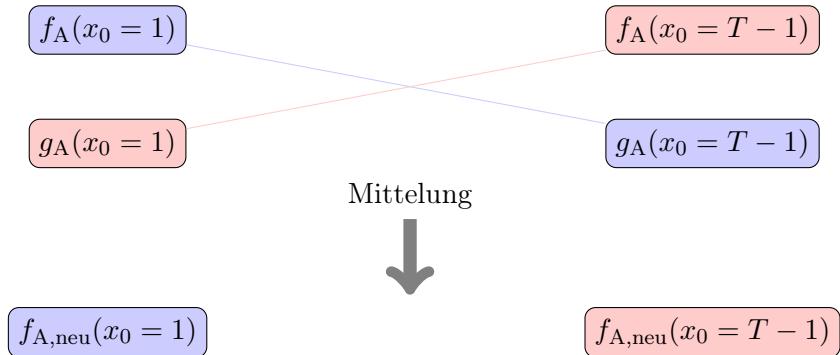


Abb. 4.3: Schematische Darstellung zur Mittelung der Korrelationsfunktionen am Beispiel von f_A und g_A . Die Punkte zwischen $x_0 = 1$ und $x_0 = T-1$ wurden der Übersichtlichkeit halber weggelassen. Die übrigen drei Funktionspaare werden in völliger Analogie behandelt.

4.2.4 $O(a)$ -Verbesserung und Renormierung

In Kapitel 2.6 und 3.6 wurde veranschaulicht, wie eine renormierte Größe definiert ist. Die $O(a)$ -Verbesserung der Korrelationsfunktionen f_A und k_V wird im Programm über die Funktionen f_P und k_T erreicht, die zu diesem Zweck simuliert und gemessen wurden. Die

verbesserten und renormierten Größen

$$[f_A]_R(x_0, \theta) = Z_A(1 + b_A am_{q,h}) \left(f_A + \frac{1}{2} c_A \tilde{\partial}_0 f_P \right) , \quad (4.16)$$

$$[k_V]_R(x_0, \theta) = Z_V(1 + b_V am_{q,h}) \left(k_V + \frac{1}{2} c_V \tilde{\partial}_0 k_T \right) \quad (4.17)$$

sollen als Ausgangspunkt zur weiteren Analyse dienen.

Die Koeffizienten Z_A, b_A und c_A , sowie Z_V, b_V und c_V wurden der Literatur [14, 28, 29, 45] entnommen und sind in Kapitel B.4 aufgeführt.

Zu beachten ist, dass in Gleichung (4.16) und (4.17) der Term $am_{q,h}$ nach Gleichung (4.4) durch $\frac{1}{2}(\frac{1}{\kappa_h} - \frac{1}{\kappa_c})$ ersetzt wird und die korrekten Werte der sieben möglichen Kombinationen der κ -Paare eingesetzt werden. Die Kombinationen ergeben sich im Falle eines leichten ($\kappa_c = \kappa_0$) und eines schweren ($\kappa_h = \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$)⁴ Quarks zu:

$$am_{q_1} + am_{q_2} = am_0 + am_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0} \right) = 0 \quad (4.18a)$$

$$= am_1 + am_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_0} \right) = \left(\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_0} \right) \quad (4.18b)$$

$$= am_2 + am_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_0} \right) = \left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_0} \right) \quad (4.18c)$$

$$= am_3 + am_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_3} - \frac{1}{\kappa_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_3} - \frac{1}{\kappa_0} \right) = \left(\frac{1}{\kappa_3} - \frac{1}{\kappa_0} \right) \quad (4.18d)$$

$$= am_1 + am_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_1} - \frac{1}{\kappa_0} \right) \quad (4.18e)$$

$$= am_2 + am_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_2} - \frac{1}{\kappa_0} \right) \quad (4.18f)$$

$$= am_3 + am_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_3} - \frac{1}{\kappa_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_0} - \frac{1}{\kappa_0} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_3} - \frac{1}{\kappa_0} \right) . \quad (4.18g)$$

Die ersten vier Beziehungen aus Gleichung (4.18) sind mit dem diagonalen, die letzten drei dementsprechend mit dem offdiagonalen Anteil des κ -Loops verknüpft (siehe auch Kapitel B.1).

4.3 Simulationsergebnisse

Nachdem sowohl die $O(a)$ -Verbesserung, als auch die Renormierung durch das Analyseprogramm durchgeführt worden ist, können die sieben Observablen aus Gleichung (3.53) -

⁴ κ_h nimmt drei Werte an, da κ_h anfangs aus drei z -Werten gewonnen wurde.

(3.59) berechnet werden. Zu unterscheiden sind dabei Funktionen, die lediglich von einem θ abhängen und Funktionen, die von einem θ -Paar abhängen. Dies betrifft R_A , R_V und R_1 . In diesem Fall werden üblicherweise die drei Paare

- $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1/2,$
- $\theta_1 = 1/2, \theta_2 = 1,$
- $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1$

als Parameter verwendet. Wie in Kapitel 4.2.4 dargestellt, dienen sieben Kombinationen der Hopping-Paramter als Simulationspunkte, von denen die drei *heavy-light*-Paare (Gleichung (4.18e) – (4.18g)) in der Auswertung berücksichtigt werden. Durch diese Kombinationen können Charm-Quarkmasse und Zerfallskonstante des D-Mesons bestimmt werden.

4.3.1 Matching-Schritt

In Kapitel 3.3 wurde diskutiert, wie das Matching zwischen HQET und QCD durch

$$\Phi_k^{\text{HQET}}(L, M) \equiv \Phi_k^{\text{QCD}}(L, M) \quad (4.19)$$

erfüllt wird. Auf Seite der HQET muss in ein großes Volumen L_∞ (siehe dazu auch Abbildung 3.1) aufgestiegen werden, um Kontakt zum physikalischen Massenspektrum herzustellen. Durch Einfügen einer „Null“ können die HQET- und QCD-Daten dementsprechend arrangiert werden, dass sich

$$\underbrace{\Phi_k(L_\infty)}_{\text{exp. Input}} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\Phi_k^{\text{HQET}}(L_\infty, a) - \Phi_k^{\text{HQET}}(L_2, a) \right] + \underbrace{\Phi_k^{\text{QCD}}(L_2, M)}_{\text{Simulationsdaten}} \quad (4.20)$$

ergibt. Die Differenz in den eckigen Klammern sorgt dafür, dass sich die Divergenzen der einzelnen Terme gegenseitig aufheben [21], vorausgesetzt die Gitterkonstante a ist für beide Terme gleich. Der Term auf der linken Seite entspricht der experimentell bestimmten Größe, beispielsweise der Mesonmasse und wird als physikalischer Input benutzt. Innerhalb der eckigen Klammern werden die Simulationen des großen Volumens L_∞ mit denen des Matching-Volumens L_2 verknüpft, um die Verbindung zu $\Phi_k^{\text{QCD}}(L_2, M)$ herzustellen.

Da die Gitterkonstante a des Matching-Volumens L_2 auch in L_∞ Gültigkeit besitzt, ist ein weiterer Step-Scaling-Schritt nicht notwendig und bereits vorhandene HQET-Daten [1, 7] können herangezogen werden. Insgesamt wird ein Set von sieben Observablen Φ_i benötigt, um die HQET-Parameter ω_{spin} , ω_{kin} , Z_A^{stat} , c_A^{stat} , Z_V^{stat} , c_V^{stat} und δm zu fixieren. Die Φ_i werden aus geeigneten, d.h. renormierten Kombinationen der Korrelationsfunktionen des

SF gebildet und sind die in Kapitel 3.7 eingeführten Observablen:

$$\Phi = (L\Gamma^P, Y_A, Y_V, R_A, R_V, R_1, \mathcal{R})^T. \quad (4.21)$$

Der Limes in Gleichung 4.20 steht für die Kontinuumsextrapolation der Daten, die noch vor dem Schritt in die “infinite-volume”-Region stattfindet.

4.3.2 Kontinuumsextrapolation

Um zum Kontinuum extrapoliieren zu können, muss ein Fit der Simulationsdaten durchgeführt werden. Es sei angemerkt, dass dies unter Ausschluss des gröbsten Gitters $L/a = 12$ realisiert wird. Grund hierfür ist, dass die in Kapitel 3 angesprochenen Cutoff-Effekte für dieses Gitter den stärksten Effekt aufweisen.

Die Fitroutine wurde den Numerical Recipes [37] entnommen und an die aktuelle Problemstellung angepasst. Es handelt sich um eine allgemeine Linear Least Square Fitroutine, die mit einem Parametersatz $\{a_k\}$ arbeitet, der vom Benutzer vorgegeben werden kann. Die linearen Ausgleichsrechnungen dieser Arbeit kommen dementsprechend mit zwei Parametern (Steigung, Ordinatenabschnitt) aus. Der optimale Parametersatz wird über die Minimierung der Merit-Funktion

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{y_i - \sum_{k=1}^M a_k X_k(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (4.22)$$

bestimmt. Der Wert des i -ten Datenpunkts y_i wird mit der Fitfunktion

$$\sum_{k=1}^M a_k X_k(x_i) \quad (4.23)$$

verglichen, deren Summe hier nur bis zwei läuft. Die σ_i werden auf eins gesetzt, so dass die Minimierung von Gleichung (4.22) auf eine Matrixgleichung der Form

$$\sum_{j=1}^M \alpha_{kj} a_j = \beta_k \quad (4.24)$$

mit

$$\alpha_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{X_j(x_i) X_k(x_i)}{\sigma_i^2}, \quad (4.25)$$

$$\beta_j = \sum_{i=1}^N \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \quad (4.26)$$

führt. Ein Gauß-Jordan-Algorithmus löst schlussendlich diese Matrixgleichung und gibt die Parameter aus, von denen der Ordinatenabschnitt dem gesuchten Kontinuumsliimes entspricht.

Die mittels dieser Analyse bestimmten Kontinuumsliimes sind in den Tabellen B.3 – B.9 in Kapitel B.5 aufgeführt.

4.3.3 Ergebnisse für $L\Gamma^P$ zur Bestimmung der Charm-Masse in der statischen Theorie

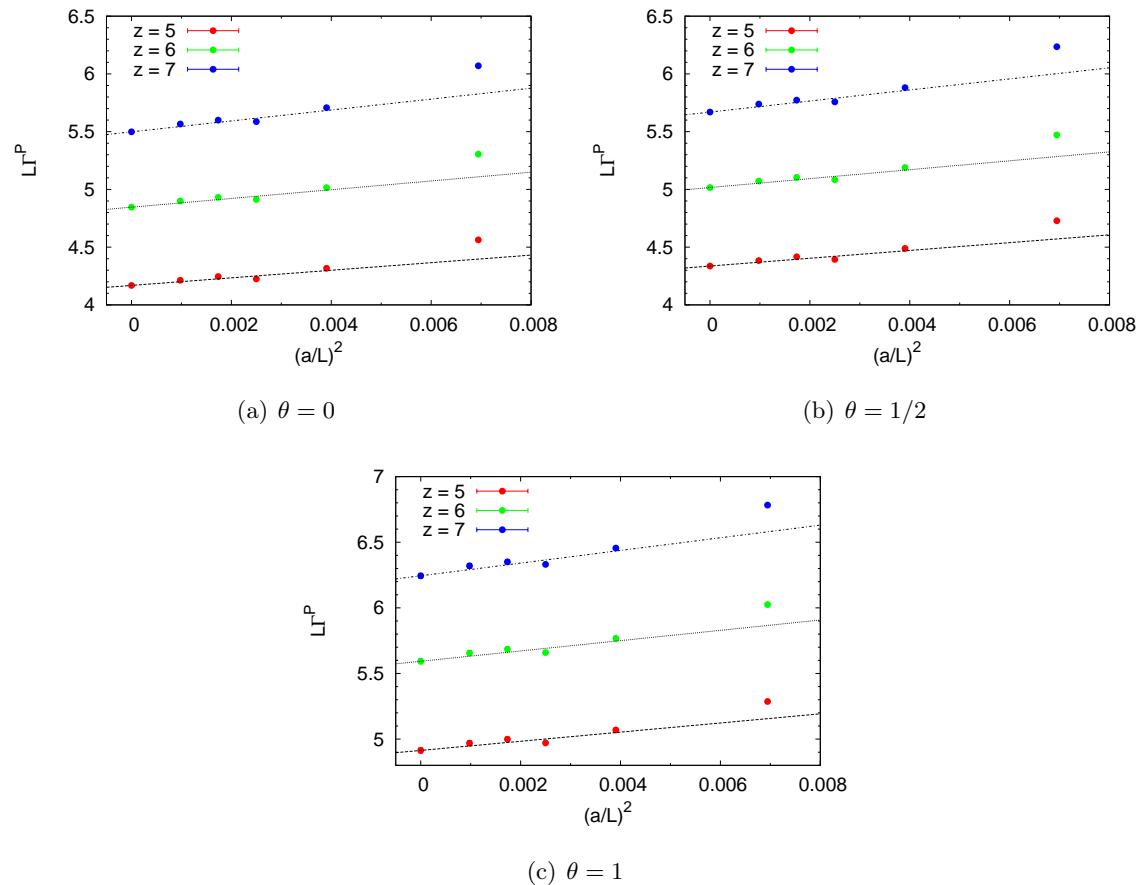


Abb. 4.4: $L\Gamma^P$ aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumsliimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

Die Größe $L\Gamma^P$ wurde in Gleichung (3.53) definiert und im Programm über

$$L\Gamma^P = -\frac{1}{2}L \left[\log \left(f_A^{R,I} \left(\frac{L}{2} + 1 \right) \right) - \log \left(f_A^{R,I} \left(\frac{L}{2} - 1 \right) \right) \right]_{T=L} \quad (4.27)$$

implementiert. Die Funktionen $f_A^{R,I}$ sind renormiert und $O(a)$ -verbessert; gleichermaßen alle weiteren Korrelationsfunktionen. Die entsprechenden Kürzel werden daher von nun an weggelassen.

$L\Gamma^P$ ist bei der Bestimmung einer schweren Quarkmasse in der statischen Theorie von zentraler Bedeutung [1]. In großem Volumen kann $L\Gamma^P$ mit der Masse des c-Quarks verknüpft werden [21]. Die zusätzlichen Koeffizienten der $1/m$ -Korrekturen, die bei der Bestimmung einer Observablen auftauchen (siehe Gleichung (3.9b)), werden über die Auswertung der Funktionen R_1 und \mathcal{R} bereitgestellt.

Extrapoliert man die aus Tabelle B.3 in Kapitel B.5 gewonnenen Daten ins Kontinuum (unter Ausschluss von $L/a = 12$) ergeben sich die in Abbildung 4.4 gezeigten Grafiken. Die Fehler der Datenpunkte sind von der Größenordnung der Symbole. Schön zu erkennen ist die lineare Abhängigkeit der Gittereffekte in $(a/L)^2$, was nach Implementierung der $O(a)$ -Verbesserung zu erwarten war.

4.3.4 Ergebnisse für Y_A zur Bestimmung der D-Meson-Zerfallskonstanten

Die Observable Y_A ist als Quotient aus zwei Korrelationsfunktionen aufgebaut und über

$$Y_A = \log \left[\frac{-f_A(T/2)}{\sqrt{f_1}} \right]_{T=L} \quad (4.28)$$

im Programm definiert. Sie kann zur Berechnung der Zerfallskonstanten des D-Mesons herangezogen werden [1].

Das zusätzliche Vorzeichen ist notwendig, um den Logarithmus auswerten zu können. Er entfällt bei der Funktion k_V im Vektorkanal (siehe nächstes Unterkapitel). Im Gegensatz zu $L\Gamma^P$ fällt der Renormierungsterm

$$Z_A (1 + \frac{1}{2} b_A a m_{q,h}) \quad (4.29)$$

nicht heraus, da f_1 keinen vergleichbaren Term aufweist und somit nicht gekürzt werden kann. Für Z_A wurde der funktionale Zusammenhang aus Gleichung (B.5) benutzt. Für den Verbesserungskoeffizienten b_A liegt eine entsprechende störungstheoretische Formel vor (Gleichung (B.7)). Die Ergebnisse aus Tabelle B.4 sind in Abbildung 4.5 veranschaulicht. In der Darstellung ist deutlich zu erkennen, dass die Steigung der Fitgeraden für größere z (schwerere Quarkmassen) ansteigt. Die Abhängigkeit der Gittereffekte verstärkt sich demnach mit zunehmender Masse des simulierten Teilchens.

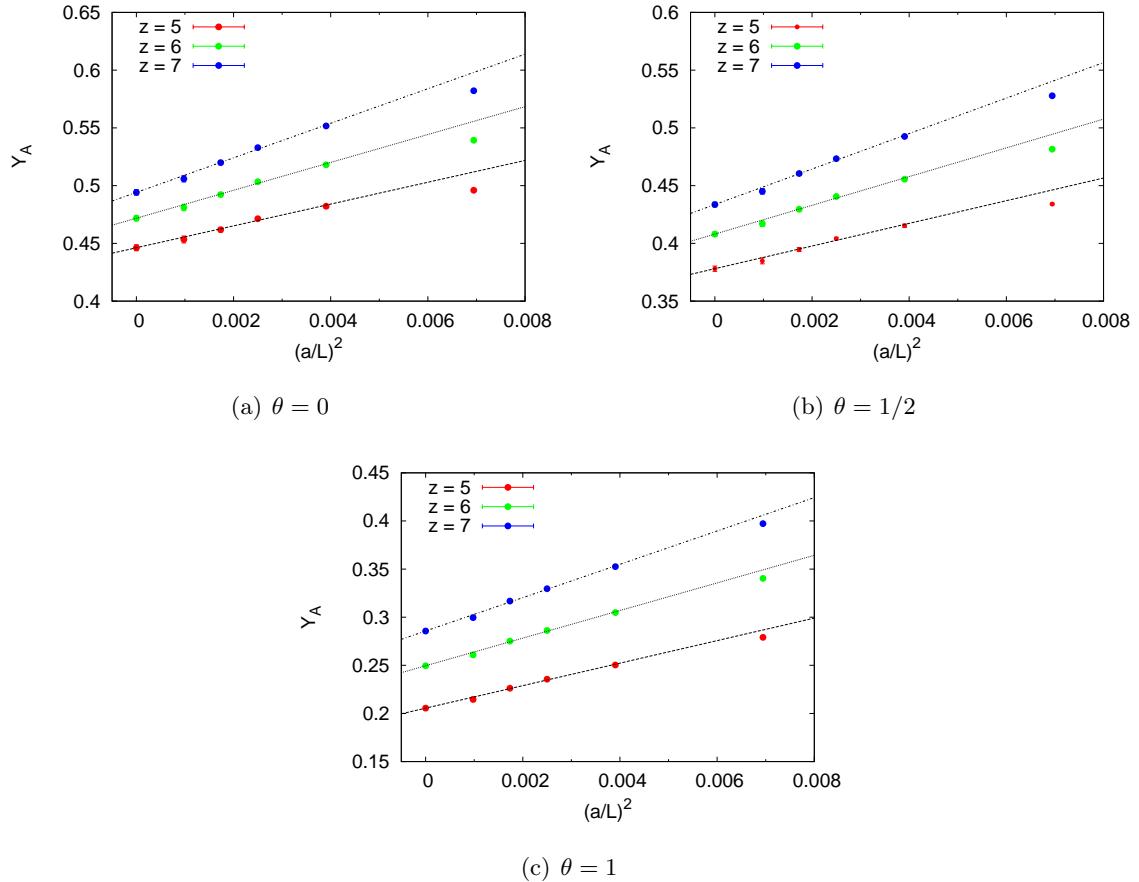


Abb. 4.5: Y_A aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumsliimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

4.3.5 Ergebnisse für Y_V zur Bestimmung der D^* -Meson-Zerfallskonstanten

Y_V ist analog zu Y_A aus dem vorangegangenen Unterkapitel definiert:

$$Y_V = \log \left[\frac{k_V(T/2)}{\sqrt{k_1}} \right]_{T=L} . \quad (4.30)$$

Anstelle der Funktion f_A tritt hier das Gegenstück aus dem Vektorkanal k_V . f_1 wird durch k_1 ersetzt. Diese zusammengesetzte Korrelationsfunktion würde im Zusammenhang mit der Zerfallskonstanten des D^* -Mesons an Bedeutung erlangen. Sie spielt in dieser Diplomarbeit jedoch keine Rolle.

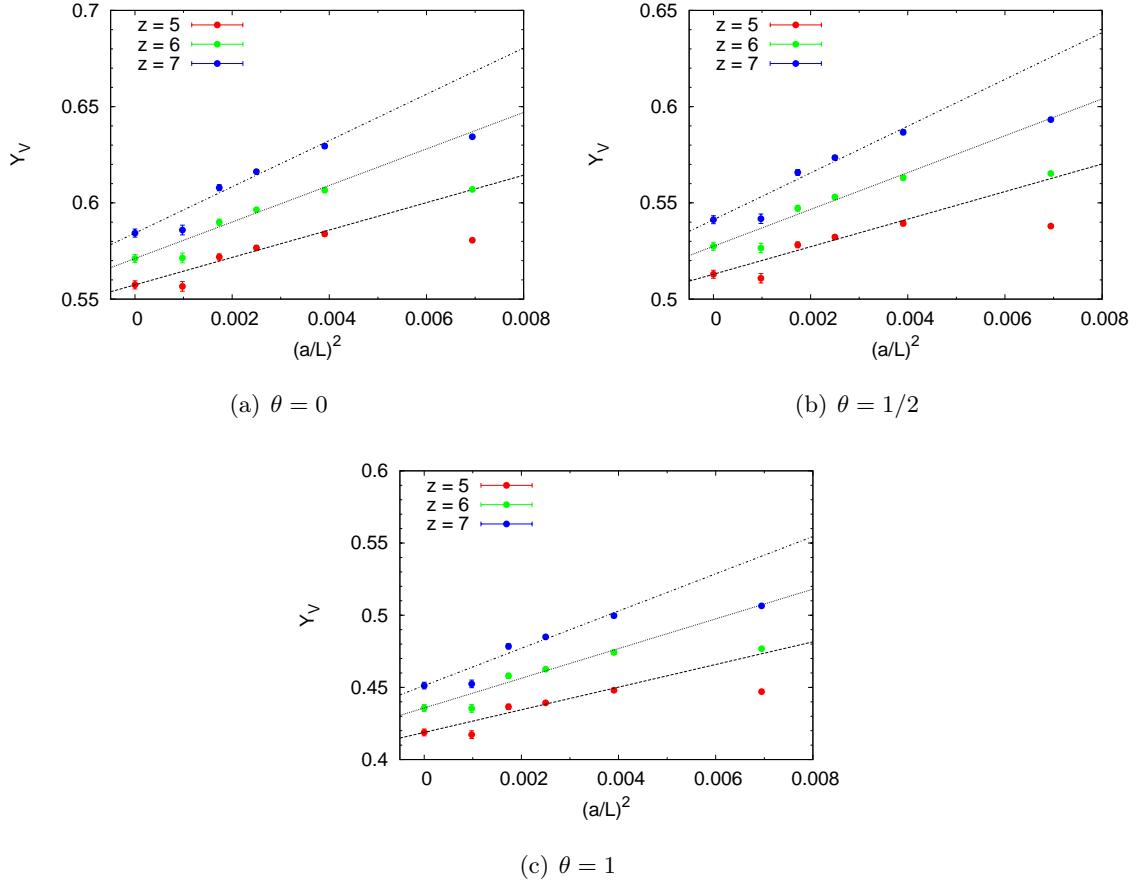


Abb. 4.6: Y_V aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumslimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

4.3.6 Ergebnisse für R_A zur Bestimmung des Koeffizienten c_A^{HQET}

Als Nächstes sollen die Ergebnisse der Korrelationsfunktion

$$R_A = -\log \left[\frac{f_A(T/2, \theta_1)}{f_A(T/2, \theta_2)} \right]_{T=L} \quad (4.31)$$

diskutiert werden. Als Quotient der Funktion f_A zu verschiedenen Phasenwinkeln θ fällt auch hier der Normierungsterm weg. Die drei θ -Paare aus Kapitel 4.3 sind in Abbildung 4.7 graphisch dargestellt.

Man kann die lineare Abhängigkeit der Datenpunkte ($L/a = 16 - 32$) gut erkennen. Auch hier fällt das größte Gitter $L/a = 12$ durch eine Abweichung von dieser Abhängigkeit aus dem Rahmen. R_A spielt bei der Fixierung des Korrekturterms c_A in der HQET die entscheidende Rolle und die $O(a)$ -Verbesserung wird durch Berechnung dieser Funktion

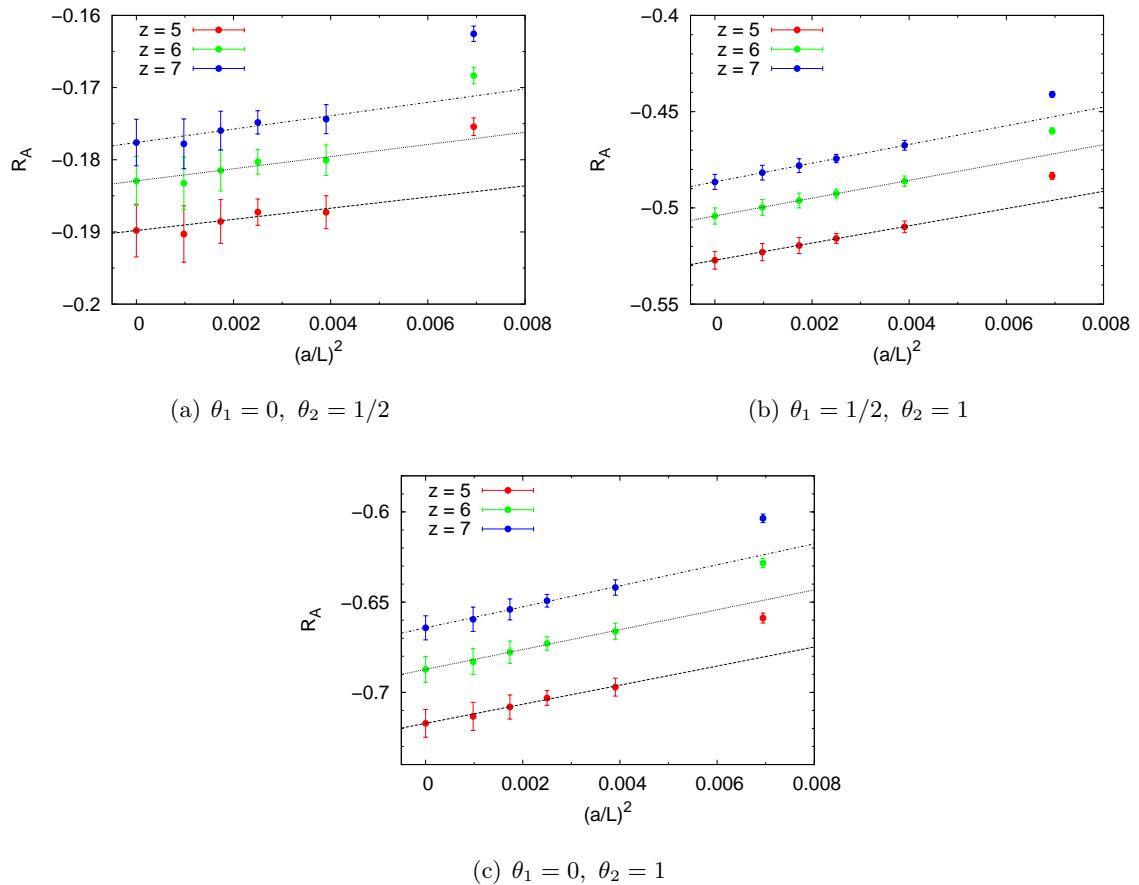


Abb. 4.7: R_A aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumslimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

erst ermöglicht [1].

4.3.7 Ergebnisse für R_V zur Bestimmung des Koeffizienten c_V^{HQET}

Die Auswertung der Funktion

$$R_V = -\log \left[\frac{k_V(T/2, \theta_1)}{k_V(T/2, \theta_2)} \right]_{T=L} \quad (4.32)$$

geschieht völlig analog zu R_A . Da R_V im Vektorkanal definiert ist, ermöglicht sie im Gegensatz zu R_A eine Berechnung des Koeffizienten c_V in der effektiven Theorie. Die Resultate sind in Abbildung 4.8 dargestellt.

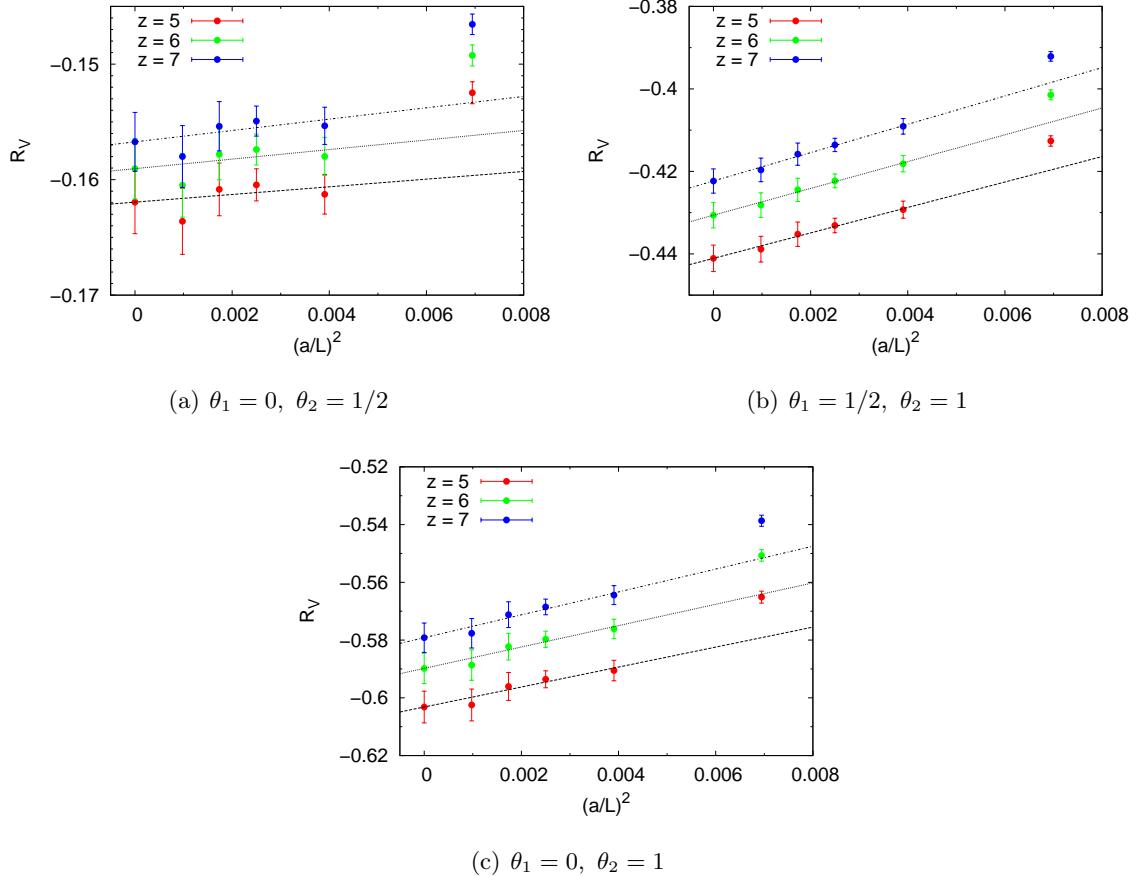


Abb. 4.8: R_V aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumslimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

4.3.8 Ergebnisse für R_1 zur Bestimmung des $1/m$ -Terms ω_{kin}

Die Resultate der bereits diskutierten Funktion $L\Gamma^P$ ermöglichen für große L die Berechnung der schweren Quarkmasse in der statischen Theorie. Innerhalb dieser Arbeit sollen die Ergebnisse jedoch bis zur Ordnung $1/m$ genau sein. Nach Gleichung (3.9b) müssen demnach noch die Koeffizienten ω_{kin} und ω_{spin} bestimmt werden.

Aus diesem Grund wurde die Funktion

$$R_1 = \frac{1}{4} \left[\log \left(\frac{f_1(\theta_1) k_1(\theta_1)^3}{f_1(\theta_2) k_1(\theta_2)^3} \right) \right]_{T=L/2} \quad (4.33)$$

in die Simulationen einbezogen; sie ist für die Fixierung von ω_{kin} verantwortlich. Als einzige Funktion ist sie auf dem „halben“ Gitter ($T = L/2$) definiert.

Die Simulationsergebnisse sind in Abbildung 4.9 gezeigt. Die Datenpunkte des Gitters

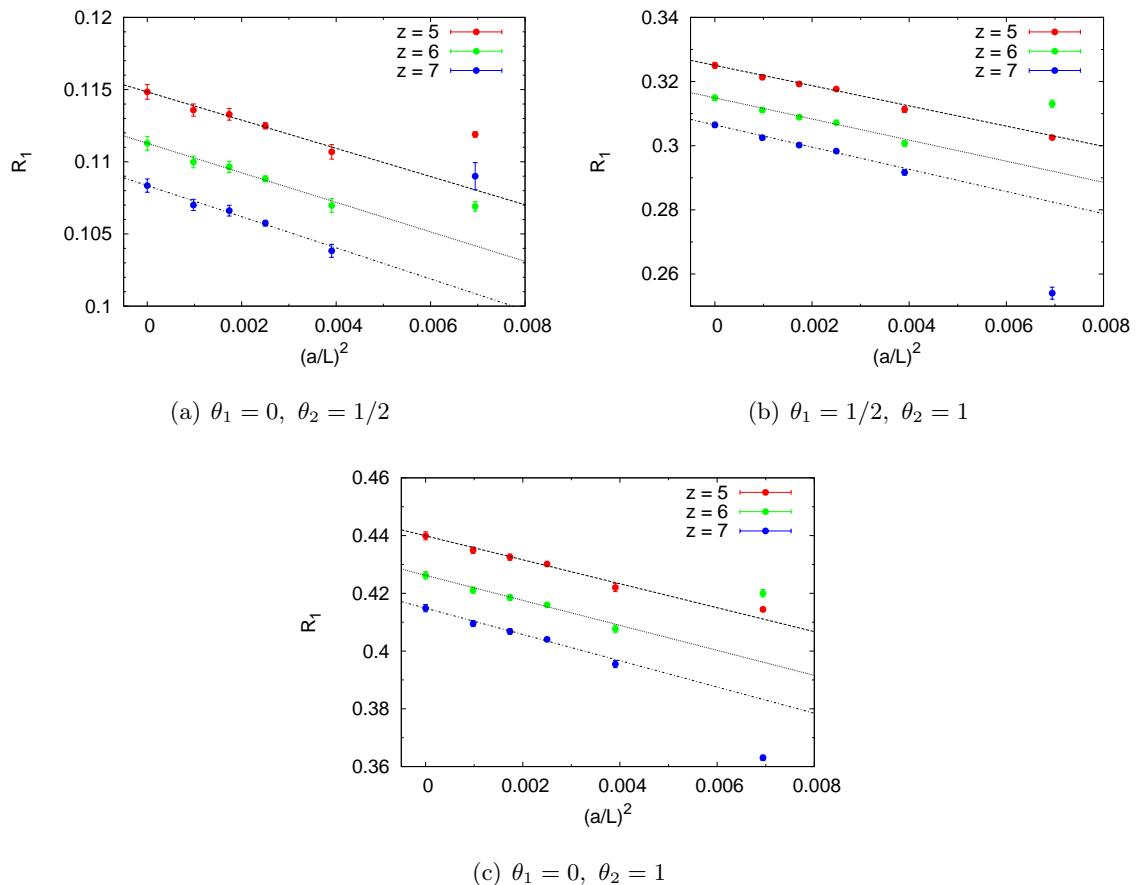


Abb. 4.9: R_1 aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumslimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

$L/a = 12$ weichen von der ansonsten recht guten linearen Abhängigkeit in $(a/L)^2$ ab. Aufgrund von defizitären Runs zu diesem Gitter sind die assoziierten Unsicherheiten viel zu groß ausgefallen. Diese Runs wurden in der Abbildung und der Analyse nicht berücksichtigt.

4.3.9 Ergebnisse für \mathcal{R} zur Bestimmung des $1/m$ -Terms ω_{spin}

Zur Bestimmung des Koeffizienten ω_{spin} wird

$$\mathcal{R} = \frac{3}{4} \left[\log \frac{f_1}{k_1} \right]_{T-I} \quad (4.34)$$

herangezogen. Sie ist wie die Funktion R_1 aus f_1 und k_1 aufgebaut und wird für die üblichen θ -Kombinationen ausgewertet. Abbildung 4.10 zeigt die Ergebnisse, die aus Tabelle B.9

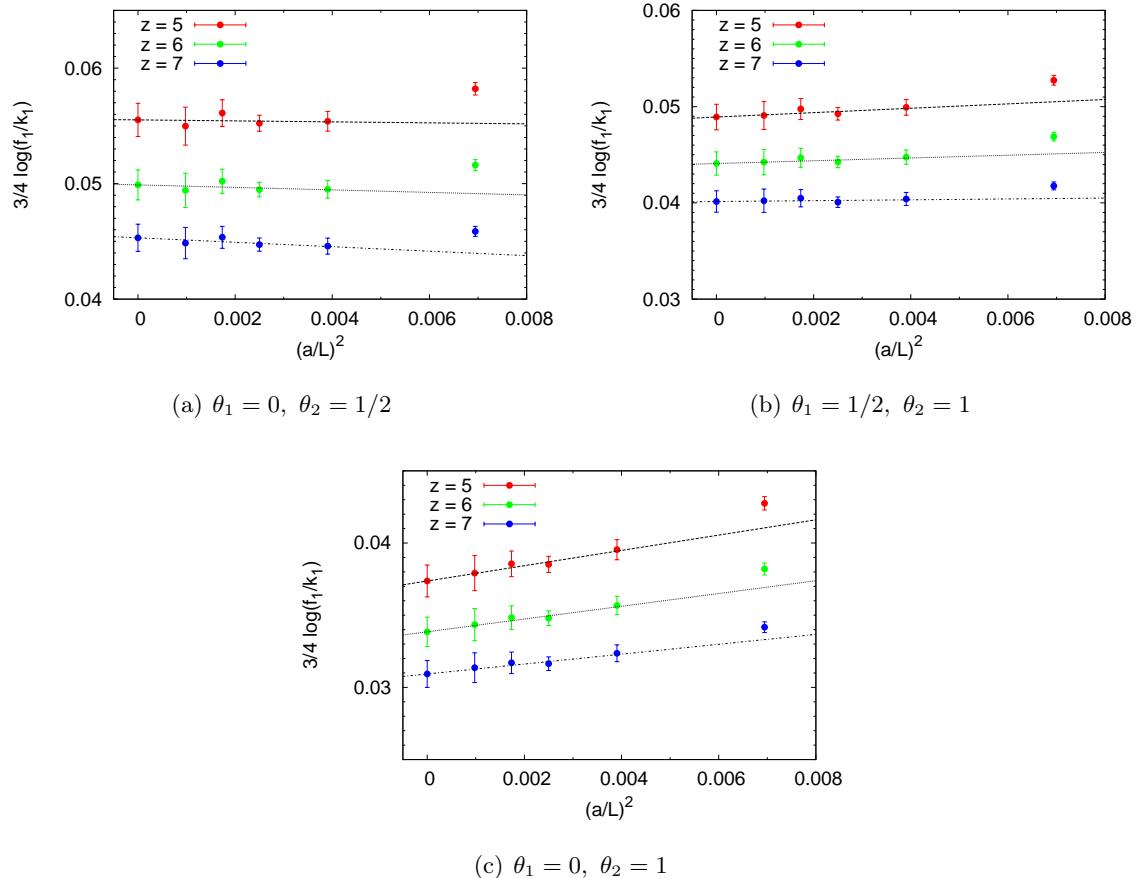


Abb. 4.10: \mathcal{R} aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumslimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

stammen.

4.4 Tree-Level-Verbesserung

Jede Gittersimulation induziert Cutoff-Effekte, die mit kleiner werdenden Gitterausdehnungen L/a anwachsen. Aus diesem Grund wurde das gr鰏tste Gitter $L/a = 12$ in der Fitroutine nicht ber點ksichtigt. Es gibt jedoch eine st鰉ungstheoretische M鰎glichkeit dieser Effekte Herr zu werden und die Cutoff-Effekte zu reduzieren. Nahe des Kontinuumslices sollte die relative Abweichung einer Observable $\mathcal{O}(\frac{a}{L})$

$$\delta \left(\frac{a}{L} \right) = \frac{\mathcal{O}^{\text{tree}}\left(\frac{a}{L}\right) - \mathcal{O}^{\text{tree}}(0)}{\mathcal{O}^{\text{tree}}(0)} \quad (4.35)$$

mit einer Rate proportional zu a/L gegen Null gehen. Die Terme niedrigster Ordnung dieser störungstheoretischen Entwicklung (“Tree-Level”) können jedoch exakt eliminiert werden [6, 10].

Grundgedanke ist, dass für jede zu verbessernde Observable \mathcal{O} der Korrekturfaktor $\delta(\frac{a}{L})$ aus Gleichung (4.35) berechnet wird, wobei $\mathcal{O}^{\text{tree}}(0)$ eine Kontinuumsextrapolation der Tree-Level-Daten ist. Die an dieser Stelle zugrunde liegende funktionale Form lautet:

$$\mathcal{O}\left(\frac{a}{L}\right) = b_0 + b_1 \left(\frac{a}{L}\right)^2 + b_2 \left(\frac{a}{L}\right)^3 + b_3 \left(\frac{a}{L}\right)^4. \quad (4.36)$$

Fit-Parameter dieser Gleichung sind die b_n . Der Koeffizient b_0 entspricht dem Term $\mathcal{O}^{\text{tree}}(0)$ aus Gleichung (4.35). Ein Koeffizient der Ordnung $\frac{a}{L}$ taucht infolge der $\mathcal{O}(a)$ -Verbesserung nicht auf.

In dieser Arbeit konnten die Observablen $L\Gamma^P$, Y_A , Y_V , R_A und R_V auf diese Weise optimiert werden [43]. Sie sind zusammen mit den unverbesserten Größen in den Abbildungen 4.11 - 4.15 aufgeführt.

Schön zu erkennen ist, dass die Cutoff-Effekte für sämtliche Größen reduziert werden konnten. Die Kontinuumslimiten stimmen in ihren Fehlergrenzen überein, auch ohne Anwendung eines Constraint-Fits. Besonders R_A und R_V sind unter diesen Gesichtspunkten hervorzuheben.

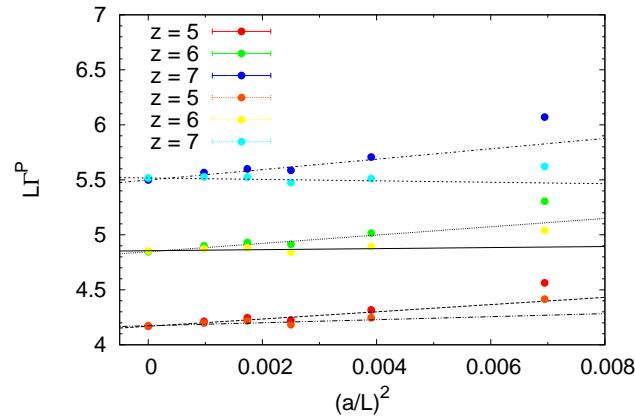
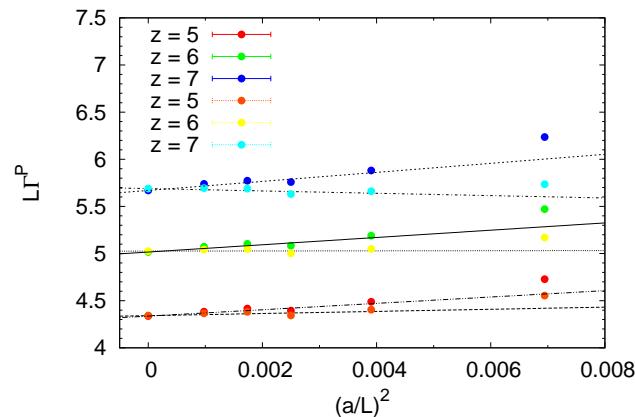
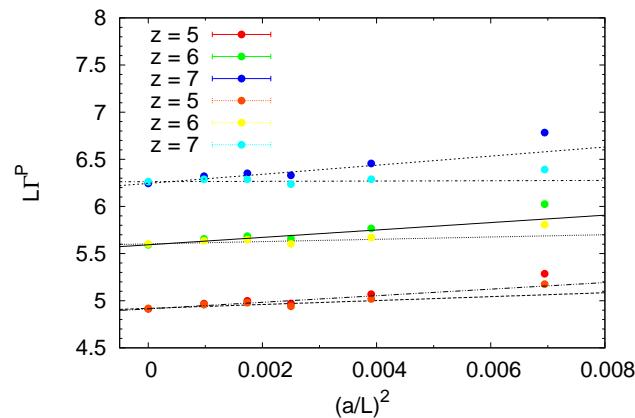
(a) $\theta = 0$ (b) $\theta = 1/2$ (c) $\theta = 1$

Abb. 4.11: $L\Gamma^P$ aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumslimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

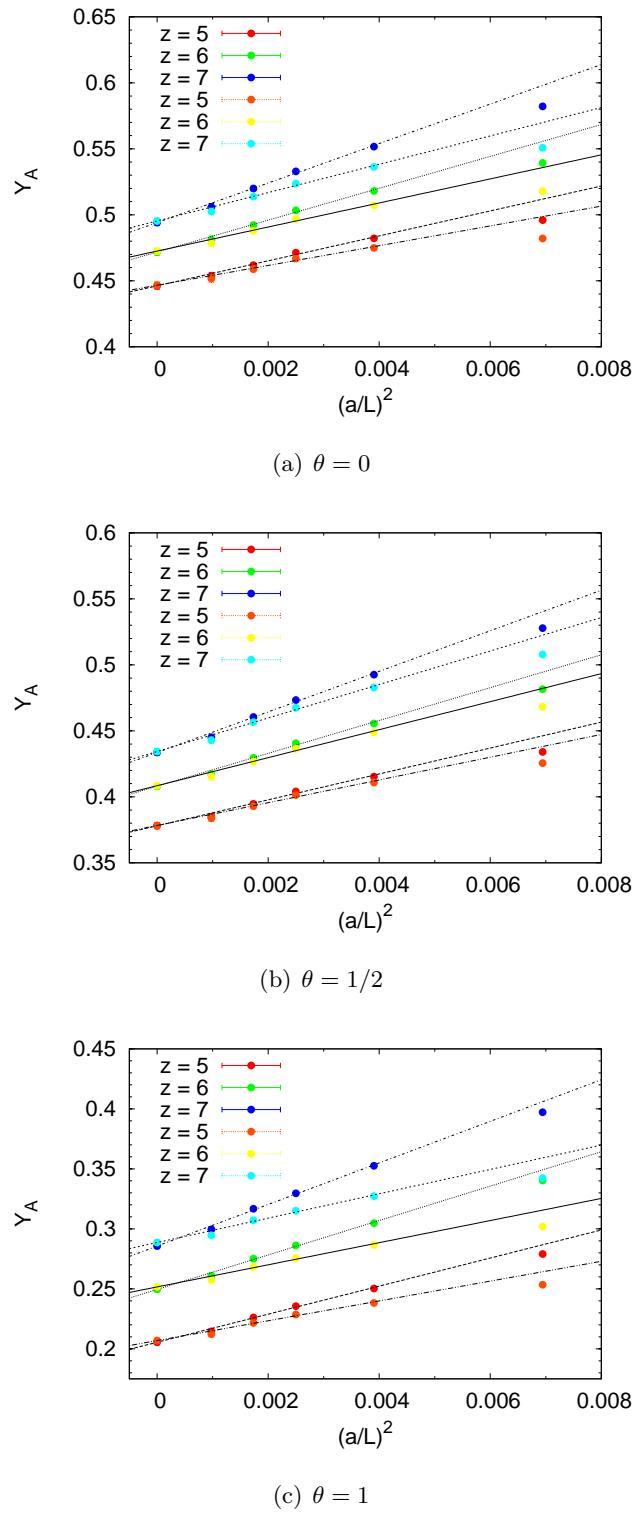


Abb. 4.12: Y_A aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumslimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

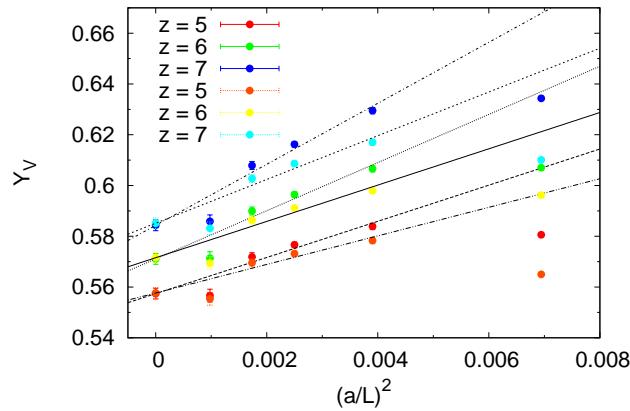
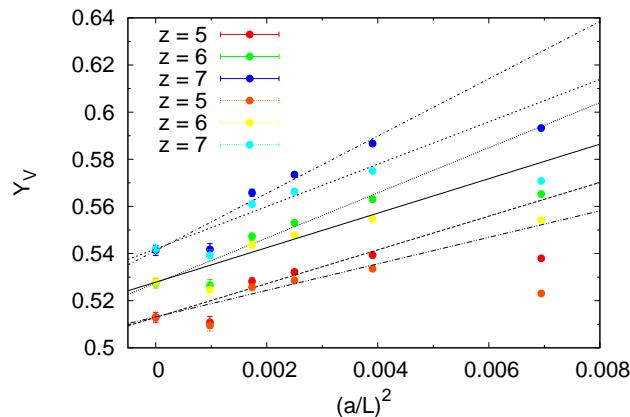
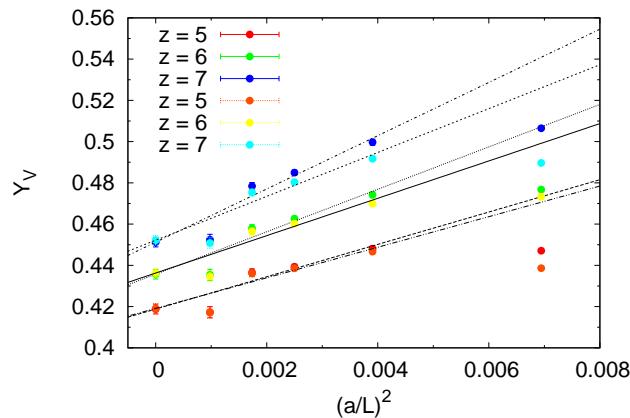
(a) $\theta = 0$ (b) $\theta = 1/2$ (c) $\theta = 1$

Abb. 4.13: Y_V aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumslimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

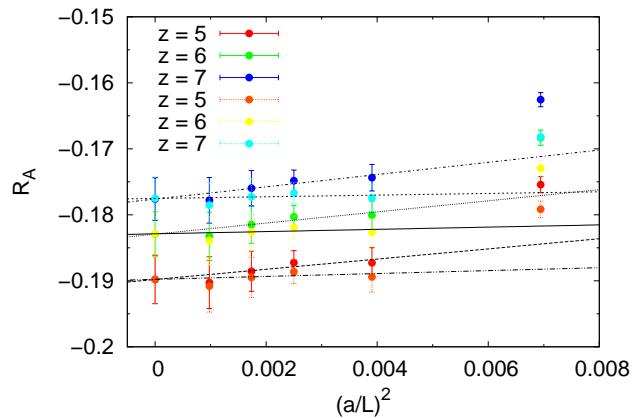
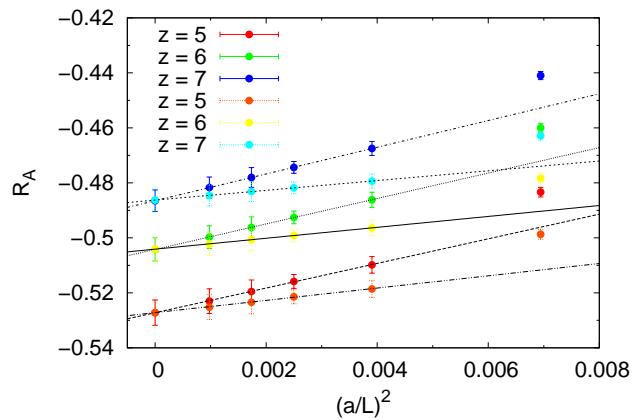
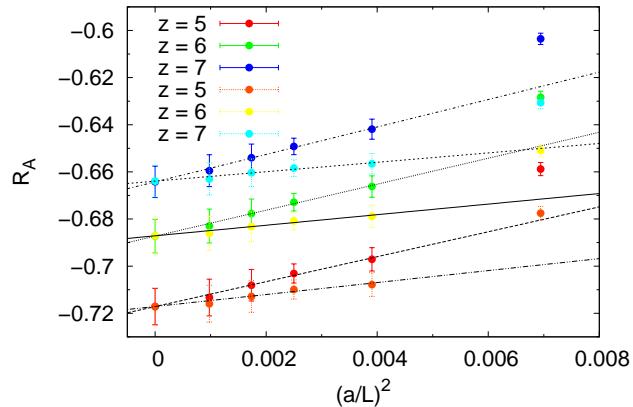
(a) $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1/2$ (b) $\theta_1 = 1/2, \theta_2 = 1$ (c) $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1$

Abb. 4.14: R_A aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumslimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

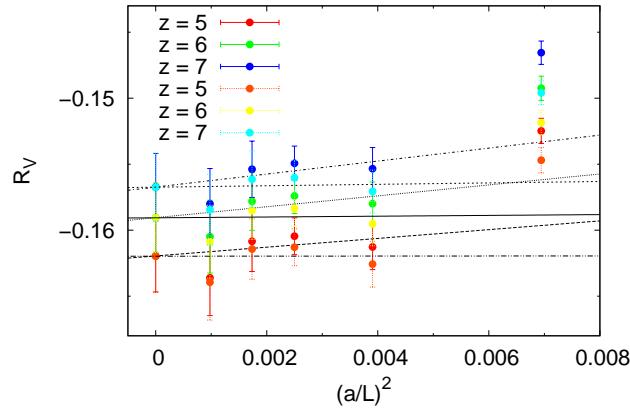
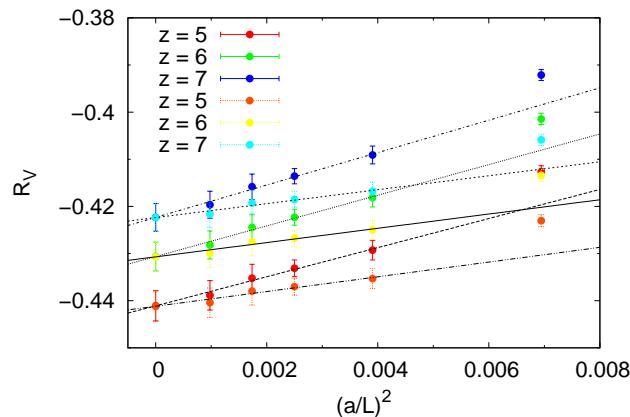
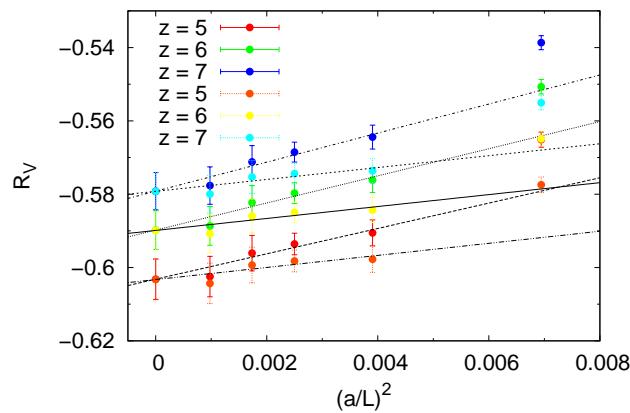
(a) $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1/2$ (b) $\theta_1 = 1/2, \theta_2 = 1$ (c) $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1$

Abb. 4.15: R_V aufgetragen gegen $(a/L)^2$. Die Symbole entsprechen den Daten für $L/a = 12, 16, 20, 24, 32$ und dem Kontinuumslimes. Unterschiedliche Symbolfarben stehen für die entsprechenden Simulationspunkte in z . Die Geraden entsprechen dem linearen Fit in $(a/L)^2$, unter Ausschluss von $L/a = 12$.

4.5 Bestimmung der Endresultate

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 4.3 ist man nun in der Lage die Charm-Masse und die pseudoskalare Zerfallskonstante des D_s -Mesons zu bestimmen. Die gewonnenen QCD-Daten werden nach Gleichung (4.20) über ein Matching im Volumen L_2 mit den HQET-Daten in unendlichem Volumen kombiniert. Auf der HQET-Seite ist lediglich ein Step-Scaling-Schritt ($L_2 \rightarrow L_\infty$) notwendig, um Kontakt zu experimentell abgeleiteten Größen herzustellen, die als Input dienen und die physikalische Skala festlegen.

Die hier verwendeten Resultate aus der HQET können im Zusammenhang mit bereits existierenden Arbeiten [7] verwendet werden.

4.5.1 Bestimmung der Charm-Quarkmasse

Zur Bestimmung der c -Quarkmasse sind die Ergebnisse der HQET-Daten in Abbildung 4.16 aufgeführt. Die Bezeichnung Φ_A ist gleich zu setzen mit $\Phi_1 = L\Gamma^P$ dieser Arbeit. Es handelt sich lediglich um eine alternative Schreibweise in bereits existierenden Arbeiten. Abbildung 4.16 (a) zeigt die Kontinuumslimiten des verbesserten statischen Anteils der drei eingangs festgelegten Simulationspunkte (siehe Kapitel 4.1.1). Der entsprechende $1/m$ -Beitrag ist in Abbildung 4.16 (b) aufgeführt. Addiert man die $1/m$ -Korrekturen zu dem statischen (nicht-verbesserten) Anteil und trägt sie Summe gegen a/L auf, ergibt sich Abbildung 4.16 (c). Festzuhalten bleibt die gute Übereinstimmung mit dem linearen Fit in a/L . Da die Verbesserungskoeffizienten formal als $1/m$ -Terme angesehen werden können, ist die Abhängigkeit der verbesserten statischen Theorie von der Ordnung $(a/L)^2$. Die Korrekturterme, die nicht $O(a)$ -verbessert sind, müssen dementsprechend mit den unverbesserten Größen verknüpft werden.

Die unterschiedlich gefärbten Datensätze haben ihren Ursprung in den verschiedenen Wirkungen HYP1 (rot) und HYP2 (blau) der statischen Theorie, aus denen sie gewonnen wurden. Eine hyperkubisch geblockte Wirkung (HYP) ist eine Modifizierung der Eichten-Hill-Wirkung (3.2), die die Links in der kovarianten Ableitung „ausschmiert“ (im Englischen: *smeared* Links) und sich unter anderem durch eine Reduktion der statistischen Unsicherheiten auszeichnet. Die Form dieser HYP-Links hängt von einem zu optimierenden Parametersatz ab. Der Parametersatz der ursprünglichen Wirkung (HYP1) wurde zuerst von HASENFRATZ und KNECHTLI gefunden [17]. Eine weitere Optimierung definiert die verbesserte hyperkubisch geblockte Wirkung (HYP2) mit neuem Parametersatz [5]. Die Universalität des Kontinuumslimes der Wirkungen HYP1 und HYP2 ist in den Abbildungen dieses Kapitels gut zu beobachten. In Abbildung 4.16 (b) sieht man außerdem, dass die Wirkung HYP1 eine größere Streuung der Datenpunkte aufweist.

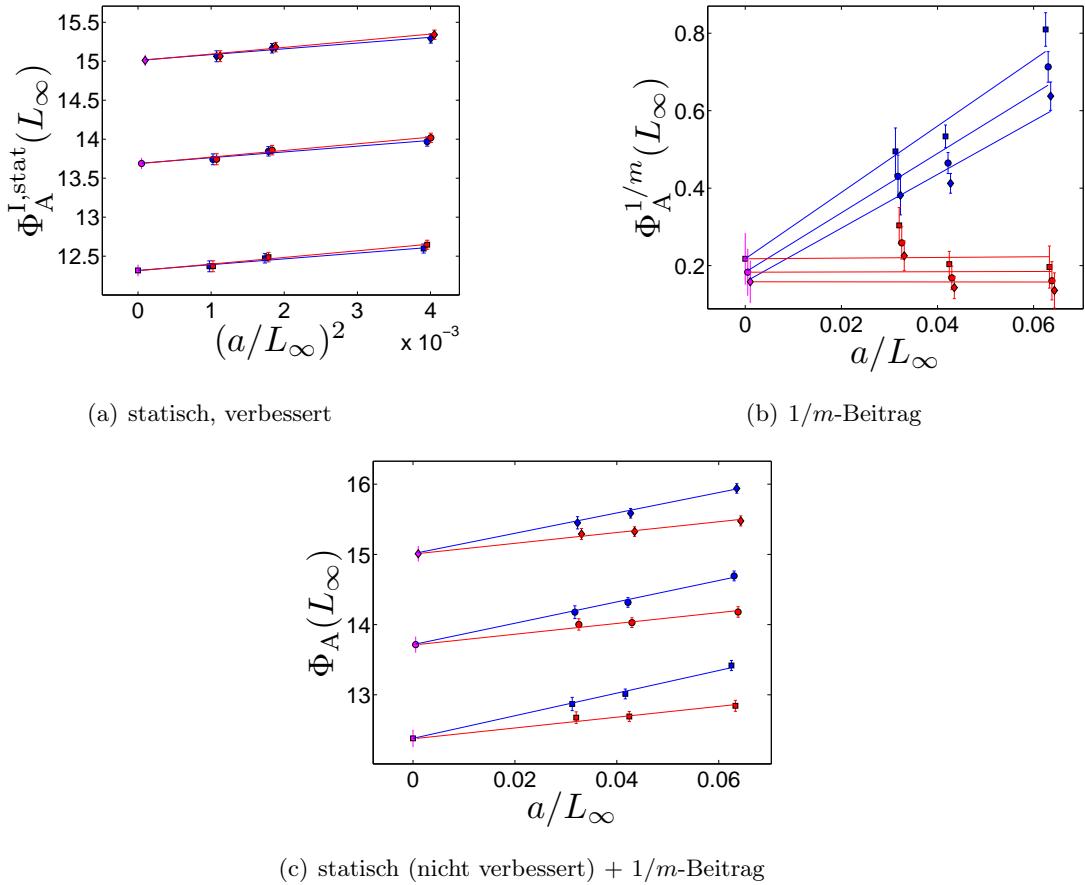


Abb. 4.16: Kontinuumsextrapolation der HQET-Daten des statischen, $O(a)$ -verbesserten Anteils (a), der $1/m$ -Korrekturen (b) und der Summe aus statischem Anteil und der $1/m$ -Korrekturen (c). Rote Datenpunkte gehören zur Wirkung HYP1, blaue zu HYP2.

Zur Bestimmung der c-Quarkmasse geht nach Gleichung (4.20) die experimentell gemessene Masse des D_s -Mesons von (1968.49 ± 0.34) MeV ein [35]. Wird Gleichung (4.20) für unterschiedliche Renormierungsbedingungen, d.h. für unterschiedliche θ gelöst, so ergibt sich die RGI-Masse zu:

RGI-Quarkmasse in Einheiten von L_1 ($z = L_1 M$)				
	statisch	statisch mit $1/m$ -Korrekturen		
$\theta = 0$	3.23 ± 0.03	3.24 ± 0.04	3.25 ± 0.04	3.25 ± 0.04
$\theta = 1/2$	3.24 ± 0.03	3.23 ± 0.05	3.24 ± 0.04	3.24 ± 0.04
$\theta = 1$	3.22 ± 0.03	3.23 ± 0.06	3.24 ± 0.05	3.24 ± 0.05

Tabelle 4.5: Resultate der RGI-Quarkmasse nach dem Matching zwischen HQET und QCD.

In den drei Spalten von Tabelle 4.5, die die $1/m$ -Korrekturen enthalten, sind die θ -Kombinationen $(0 \ 1/2)$, $(0 \ 1)$ und $(1/2 \ 1)$ aufgeführt. Durch die zusätzlichen $1/m$ -Terme hängt die Masse für festes θ_0 zusätzlich von θ_1 und θ_2 ab, da die Observablen $R_1(\theta_1, \theta_2)$ und $\mathcal{R}(\theta_1, \theta_2)$ zur Berechnung dieser Korrekturterme herangezogen werden. Gut zu erkennen ist, dass die $1/m$ -Terme bei der Bestimmung der Charm-Masse nahezu keinen Einfluss auf den statischen Anteil haben. Außerdem bleibt festzuhalten, dass die unterschiedlichen Renormierungsbedingungen zu vergleichbaren Ergebnissen führen.

Um die hier ermittelte RGI-Masse mit bereits existierenden Werten vergleichen zu können, muss der Faktor $L_1 = 1.436 \text{ fm}$ über

$$1 \text{ fm} = \frac{1}{197.327 \text{ MeV}} \quad (4.37)$$

in MeV umgerechnet werden. In Gleichung (4.37) wurden natürliche Einheiten $\hbar = c = 1$ verwendet. Die Quarkmasse für unterschiedliche θ unter Berücksichtigung der $1/m$ -Korrekturen aus Tabelle 4.5 kann schließlich zu

$$M_c = (1775 \pm 40) \text{ MeV} , \quad (4.38)$$

$$M_c = (1781 \pm 35) \text{ MeV} , \quad (4.39)$$

$$M_c = (1786 \pm 31) \text{ MeV} \quad (4.40)$$

bestimmt werden. Sie liegt um etwa 7-8% höher als die in [40] bestimmte RGI-Masse des Charm-Quarks von $M_c = 1.654(45) \text{ GeV}$. Daraus konnte in der angesprochenen Quelle die skalenabhängige Charm-Masse zu $\bar{m}_c^{\overline{\text{MS}}}(\bar{m}_c) = 1.301(34) \text{ GeV}$ bestimmt werden. Eine naive Umrechnung mit dem daraus berechenbaren Faktor liefert die skalenabhängigen Charm-Massen:

$$M_c = (1775 \pm 40) \text{ MeV} , \quad m_c = (1396 \pm 31) \text{ MeV} , \quad (4.41)$$

$$M_c = (1781 \pm 35) \text{ MeV} , \quad m_c = (1401 \pm 28) \text{ MeV} , \quad (4.42)$$

$$M_c = (1786 \pm 31) \text{ MeV} , \quad m_c = (1405 \pm 24) \text{ MeV} . \quad (4.43)$$

In den Fehler der Charm-Masse ist nach Kapitel 4.1.2 auch die Unsicherheit von z eingegangen.

Für die Kombination $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = 1$ ist die Vorgehensweise bei der Massenbestimmung in Abbildung 4.17 auch graphisch dargestellt. Die gesuchte Masse ergibt sich aus dem Schnittpunkt der HQET- und der QCD-Daten. Auch hier ist der geringe Effekt der $1/m$ -Korrekturen deutlich zu erkennen.

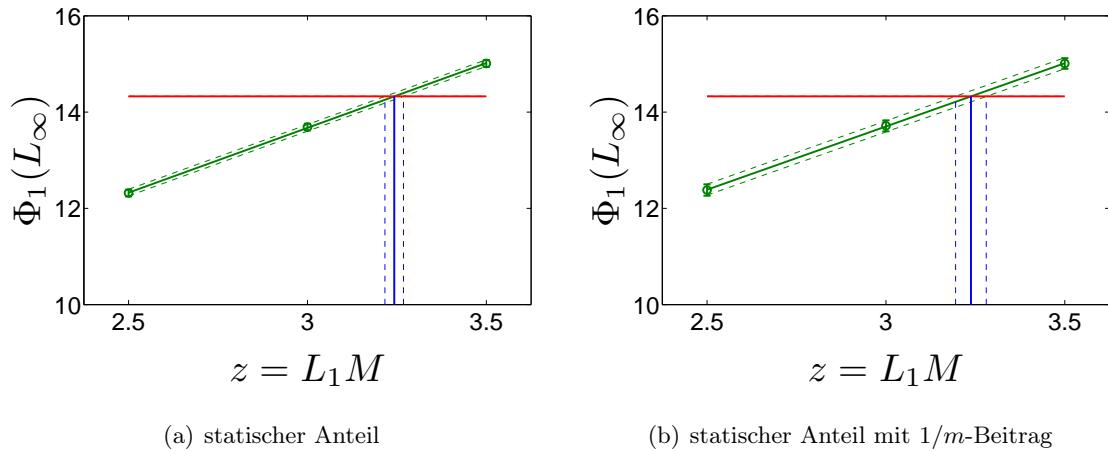


Abb. 4.17: Graphische Auswertung der Gleichung (4.20) für die θ -Kombination $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = 1$ für die statische Theorie ohne (a) und mit Korrekturtermen (b).

4.5.2 Bestimmung der Zerfallskonstanten

Das Vorgehen bei der Bestimmung der Zerfallskonstanten des D_s -Mesons geschieht in volliger Analogie zur Evaluierung der Charm-Masse. Abbildung 4.18 zeigt die Kontinuumsextrapolationen der Korrelationsfunktion Y_A der HQET-Seite für den verbesserten statischen Datensatz (a), die Korrekturen durch die $1/m$ -Terme (b) und die Summe aus dem nichtverbesserten statischen Anteil und den Korrekturtermen.

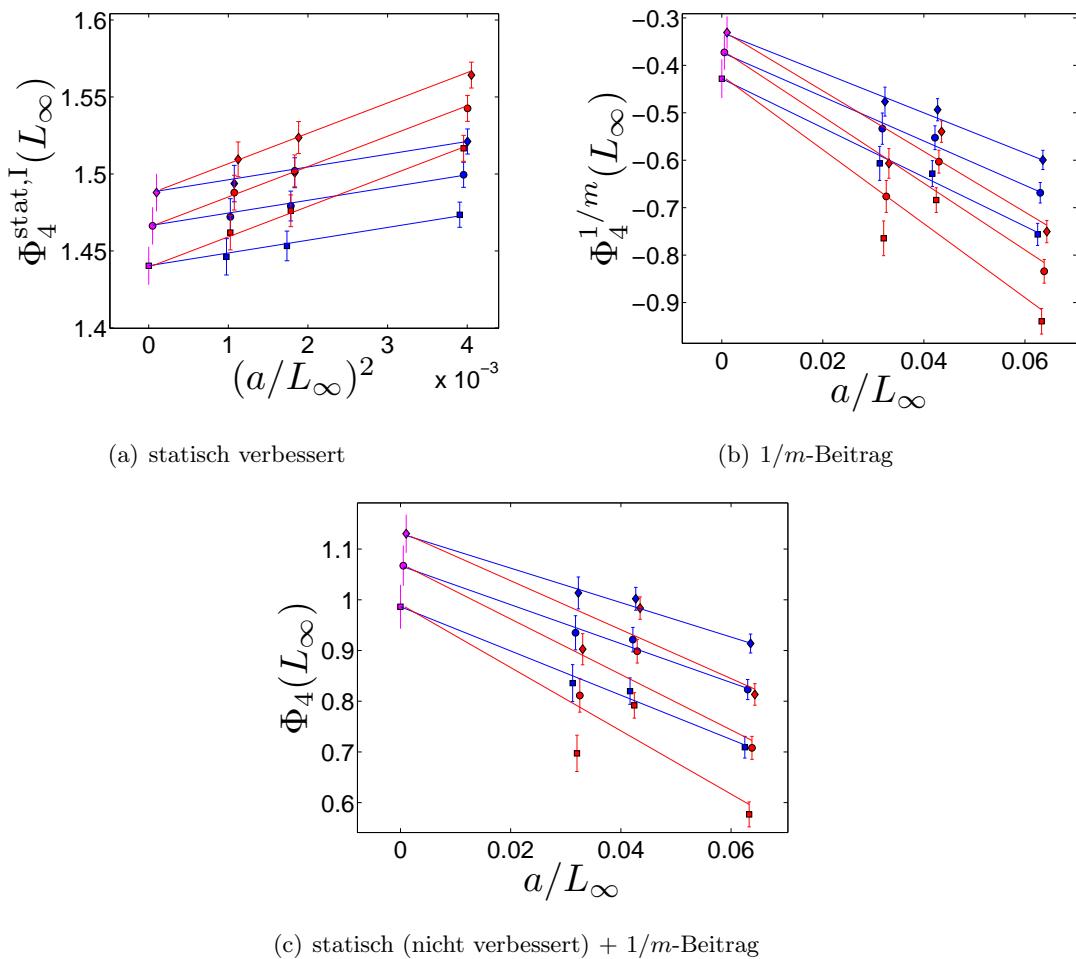


Abb. 4.18: Kontinuumsextrapolation der HQET-Daten des verbesserten statischen Anteils (a), der $1/m$ -Korrekturen (b) und der Summe aus unverbessertem statischen Anteil und $1/m$ -Korrekturen (c). Rote Datenpunkte gehören zur Wirkung HYP1, blaue zu HYP2.

An dieser Stelle ist wieder deutlich zu erkennen, dass die Wirkung HYP1 im Gegensatz zu HYP2 bei identischen Kontinuumslimiten stark gestreute Werte für endliche Gitterkonstanten a liefert. Die Zerfallskonstanten des D_s -Mesons können nun über eine entsprechende

Analyse bestimmt werden. Zur Umrechnung in MeV wurde die Formel

$$F_{D,\text{stat}}(\text{MeV}) = \frac{2 \exp(\Phi_{4,\text{stat}})}{\sqrt{m_D L^3}} \quad (4.44)$$

herangezogen [18], in der $(\sqrt{m_D L^3})^{-1}$ einen Normierungsterm darstellt. Setzt man für $\Phi_{4,\text{stat}}$ die entsprechenden Ergebnisse aus Abbildung 4.18 ein, ergibt sich die Zerfallskonstante in physikalischen Einheiten. In Tabelle 4.6 sind die Ergebnisse zusammenfassend dargestellt. Die erste Spalte beinhaltet lediglich den verbesserten statischen Fall. Die zusätzlichen $1/m$ -Korrekturen finden in den nächsten drei Spalten Berücksichtigung.

Zerfallskonstante des D_s -Mesons in MeV				
	statisch	statisch mit $1/m$ -Korrekturen		
$\theta = 0$	316.76 ± 10.80	190.66 ± 15.29	198.07 ± 10.33	196.04 ± 11.09
$\theta = 1/2$	306.82 ± 10.41	192.54 ± 14.67	199.96 ± 10.24	197.98 ± 10.95
$\theta = 1$	278.11 ± 9.40	198.51 ± 12.14	205.93 ± 9.83	204.36 ± 10.19
$\theta = 0$	323.59 ± 11.02	207.18 ± 15.71	215.07 ± 10.69	212.84 ± 11.46
$\theta = 1/2$	314.88 ± 10.68	209.03 ± 15.05	216.88 ± 10.59	214.72 ± 11.30
$\theta = 1$	289.56 ± 9.78	214.87 ± 12.45	222.62 ± 10.17	220.87 ± 10.52
$\theta = 0$	329.53 ± 11.22	221.25 ± 16.04	229.36 ± 10.97	227.02 ± 11.74
$\theta = 1/2$	321.76 ± 10.91	223.06 ± 15.36	231.10 ± 10.86	228.82 ± 11.56
$\theta = 1$	299.08 ± 10.10	228.73 ± 12.70	236.61 ± 10.43	234.74 ± 10.78
Interpolation zur Charm-Skala				
$\theta = 0$	326.12 ± 11.11	213.38 ± 15.79	221.19 ± 10.71	219.08 ± 11.44
$\theta = 1/2$	318.46 ± 10.81	214.58 ± 14.61	222.47 ± 10.44	220.45 ± 11.05
$\theta = 1$	296.12 ± 10.05	218.39 ± 11.57	226.07 ± 9.97	224.83 ± 10.18

Tabelle 4.6: Resultate der Zerfallskonstanten nach dem Matching zwischen HQET und QCD für die drei zuvor bestimmten Quarkmassen (in den ersten drei Zeilenblöcken) und einem zur Charm-Skala interpolierten Wert (letzter Zeilenblock).

Für die Zerfallskonstanten sind die Interpolationen der Ergebnisse für die θ -Kombination $\theta_0 = 1, \theta_1 = 1/2, \theta_2 = 1$ in Abbildung 4.19 angefügt. Man kann darin sehr gut erkennen, dass die Korrekturterme erheblichen Einfluss auf das Endresultat haben. Im Gegensatz dazu bleiben die Massen nahezu unverändert (man vergleiche Abbildung 4.17 (a) und (b)). Für endliche Gitterabstände sind die $1/m$ -Effekte sichtbar, sie verschwinden jedoch im Kontinuum mit den Gittereffekten.

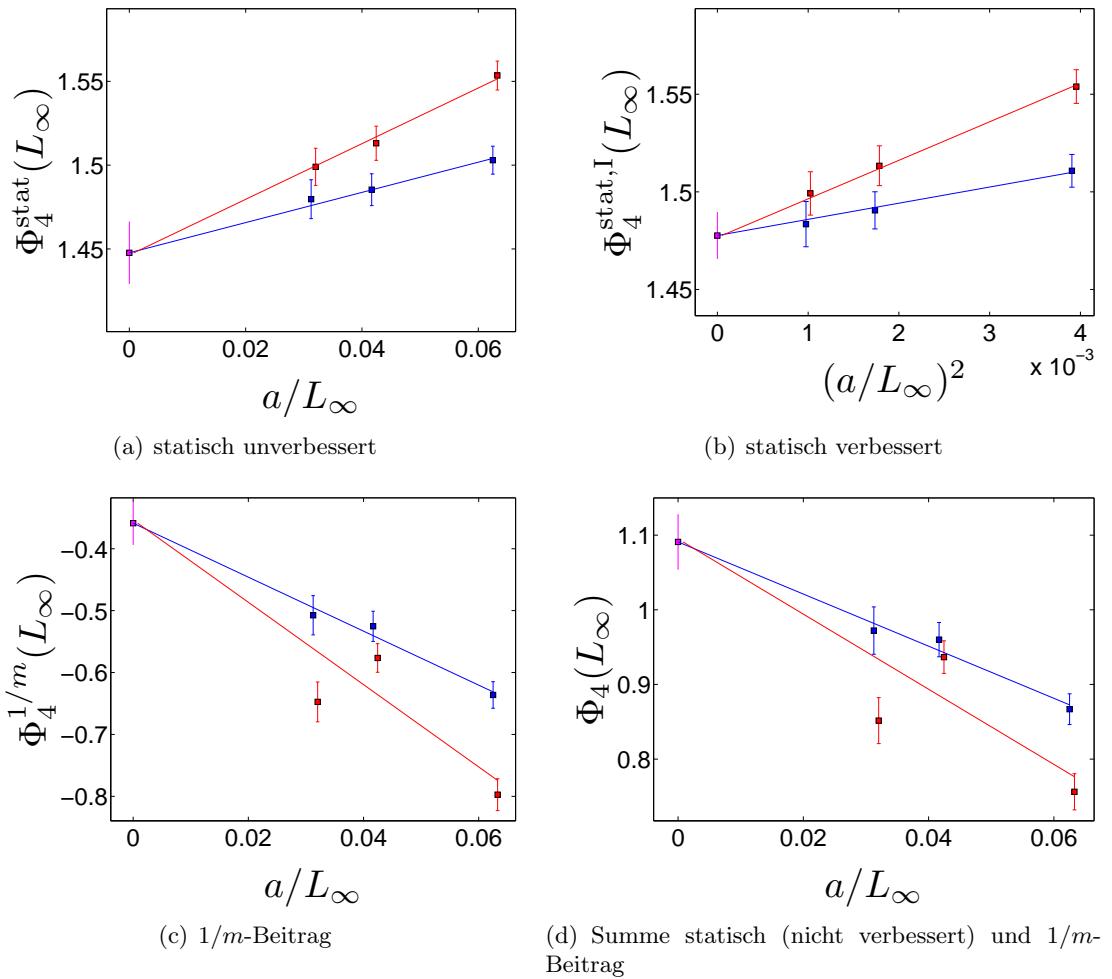


Abb. 4.19: Kontinuumsextrapolation der HQET-Daten des unverbesserten statischen Anteils (a), des verbesserten statischen (b), der $1/m$ -Korrekturen (c) und der Summe aus unverbessertem statischen Anteil und $1/m$ -Korrekturen (d). Rote Datenpunkte gehören zur Wirkung HYP1, blaue zu HYP2.

Kapitel 5 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde sowohl die Charm-Masse, als auch die Zerfallskonstante des D_s -Mesons nicht-perturbativ in der HQET bestimmt. Anhand der Ergebnisse kann die Gültigkeit dieser effektiven Theorie schwerer Quarks überprüft werden, da das c-Quark bereits mit konventionellen Methoden in der vollen QCD untersucht worden ist [18, 40].

Die entsprechenden QCD-Simulationen wurden im Rahmen eines endlichen Renormierungsschemas, dem Schrödinger-Funktional, in der Valenzquarknäherung durchgeführt. Die damit verbundene Vernachlässigung virtueller Quark-Antiquark-Paare führt zu weniger Rechenaufwand, so dass die Vorhersagen der Theorie bereits mit moderatem Aufwand überprüft werden konnten. Als endliches Volumenschema induziert das Schrödinger-Funktional Randfelder, die in entsprechende Korrelationsfunktionen eingehen und im Zuge dieser Arbeit berechnet und ausgewertet wurden.

Spezielle Kombinationen der Korrelationsfunktionen können dann benutzt werden um physikalische Größen zu untersuchen. In dieser Arbeit wurde ein Satz von sieben Observablen betrachtet, mit denen die c-Quarkmasse und Zerfallskonstante des D_s -Mesons bis zur Ordnung $1/m$ abgeleitet werden kann.

Durch das Matching der QCD- und HQET-Daten konnte die RGI-Masse des c-Quarks, dessen Größenordnung eingangs durch drei Simulationspunkte abgedeckt worden ist, zu

- $M_c = (1775 \pm 40) \text{ MeV}$,

- $M_c = (1781 \pm 35) \text{ MeV}$,

- $M_c = (1786 \pm 31) \text{ MeV}$

bestimmt werden. Die in [40] bestimmte Masse liegt mit $(1654 \pm 45) \text{ MeV}$ etwa 7 - 8% unter den in dieser Arbeit ermittelten Werten. Die zusätzlichen $1/m$ -Korrekturen, die über die nächsthöheren Terme der Entwicklung der HQET-Wirkung definiert sind, haben nahezu keinen Einfluss auf die Ergebnisse.

Anders stellte sich die Situation im Fall der Zerfallskonstanten dar, die aus den Massen ermittelt werden konnten und allesamt zwischen $(213.38 \pm 15.79) \text{ MeV}$ und $(226.07 \pm 9.97) \text{ MeV}$ liegen. In diesem Fall wirkt sich der Einfluss der Korrekturterme entscheidend auf die Resultate aus, die in guter Übereinstimmung mit dem Ergebnis $(220 \pm 4) \text{ MeV}$ aus [18] stehen. Werden die Ergebnisse darüber hinaus mit Werten aus der Charm-Region

verglichen, beispielsweise mit den Ergebnissen aus [2], die in der Abbildung 5.1 dargestellt sind, so zeigt sich eine exzellente Übereinstimmung mit der linearen Fitkurve.

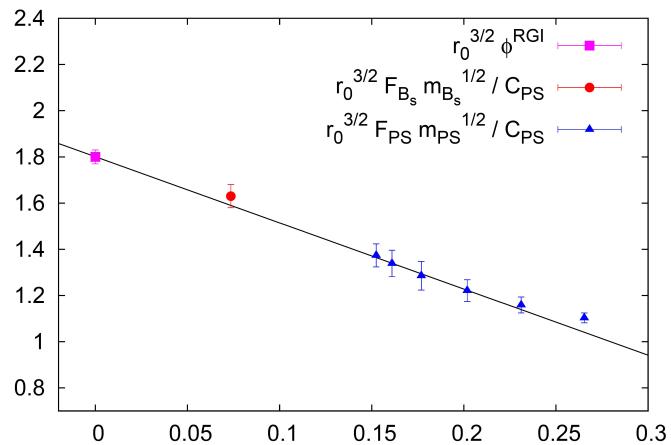


Abb. 5.1: Vergleich verschiedener Kontinuumslimiten der pseudoskalaren Meson-Zerfallskonstanten in der Charm-Region [2].

Anhang A Notationen

A.1 Indexnotation

In der vorliegenden Arbeit werden griechische Indizes $\mu, \nu, \dots = 0, \dots, 3$ für Raumzeitkomponenten verwendet. Raumindizes $k, l, \dots = 1, \dots, 3$ tragen lateinische Buchstaben. Die entsprechenden Einheitsvektoren sind durch $\hat{\mu}$ bzw. \hat{k} gegeben. Fett gedruckte Größen \mathbf{x} besitzen nur die drei Raumkomponenten.

Des Weiteren werden lateinische Buchstaben $a, b, \dots = 1, \dots, N^2 - 1$ vom Anfang des Alphabets als Index der Symmetriegruppen verwendet.

A.2 Dirac-Matrizen

Die vierdimensionalen euklidischen Dirac'schen γ -Matrizen sind über

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} \equiv \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

definiert, wobei $\delta_{\mu\nu}$ die euklidische Metrik ist und die Signatur $(+, +, +, +)$ besitzt. Die Dirac-Matrizen erfüllen die Gleichungen

$$\gamma_0^2 = \mathbb{1} , \quad \gamma_0^\dagger = \gamma_0 , \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma_k^2 = -\mathbb{1} , \quad \gamma_k^\dagger = -\gamma_k . \quad (\text{A.3})$$

γ_0 ist demnach hermitesch, γ_k antihermitesch.

Die Matrix γ_5 ist über

$$\gamma_5 \equiv \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \quad (\text{A.4})$$

definiert und erfüllt

$$\gamma_5^2 = \mathbb{1} , \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5 , \quad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 . \quad (\text{A.5})$$

In der chiralen Darstellung sind die Dirac-Matrizen über

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{A.6}$$

gegeben. Mit Hilfe der Pauli-Matrizen σ_k

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{A.7}$$

können die γ -Matrizen aus Gleichung (A.6) knapp als

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}\tag{A.8}$$

formuliert werden.

Außerdem ist es nun möglich, die Matrizen

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]\tag{A.9}$$

einzuführen, die

$$\sigma_{0k} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = -\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}\tag{A.10}$$

genügen.

A.3 Strukturkonstanten

Die Strukturkonstanten sind unter Vertauschung der Indizes komplett-antisymmetrisch. Alle nicht-verschwindenden Elemente sind im Folgenden aufgeführt:

$$f^{123} = 1 , \quad (A.11)$$

$$f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = \frac{1}{2} , \quad (A.12)$$

$$f^{156} = f^{367} = -\frac{1}{2} , \quad (A.13)$$

$$f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} . \quad (A.14)$$

Anhang B Numerische Ausführungen und Resultate

B.1 Korrelationsfunktionen im Datenfile

Die nachfolgende schematische Darstellung soll eine Übersicht darüber geben, in welcher Reihenfolge die Korrelationsfunktionen erzeugt werden.

- Drei Eichvariablen θ
- θ -Schleife
 - **vorderer Anteil**
 - * diagonale κ -Schleife
 - $f_A(1, \dots, T-1)$
 - $f_P(1, \dots, T-1)$
 - f_1
 - $k_V(1, \dots, T-1)$
 - $k_T(1, \dots, T-1)$
 - k_1
 - * off-diagonale κ -Schleife (analog zum diagonalen Durchlauf)
 - **hinterer Anteil**
 - * diagonale κ -Schleife
 - $g_A(1, \dots, T-1)$
 - $g_P(1, \dots, T-1)$
 - $l_V(1, \dots, T-1)$
 - $l_T(1, \dots, T-1)$
 - * off-diagonale κ -Schleife

Die Eichvariablen θ nehmen wie gewöhnlich die Werte $\theta_1 = 1/2$, $\theta_2 = 0$ und $\theta_3 = 1$ an; über jeden dieser drei Werte wird dann iteriert. Im Analyseprogramm werden die Korrelationsfunktionen aus dem vorderen Anteil mit denen aus dem hinteren Anteil gemittelt, darum hier die Unterscheidung. Die κ -Schleifen laufen entweder über die diagonalen ($\kappa_i \kappa_i$) oder über die off-diagonalen Einträge ($\kappa_i \kappa_j$) der möglichen κ -Kombinationen.

B.2 Funktionaler Zusammenhang der Koeffizienten Z , Z_A und b_m

Die folgenden Fitfunktionen aus [15] (Z , b_m) und [29] (Z_A) werden benötigt, um die Koeffizienten für die entsprechenden Kopplungen bestimmten zu können.

$$Z(g_0) = (1 + 0.090514 g_0^2) \times \frac{1 - 0.9678 g_0^2 + 0.04284 g_0^4 - 0.04373 g_0^6}{1 - 0.9678 g_0^2} \quad (\text{B.1})$$

$$Z_A(g_0) = \frac{1 - 0.8496 g_0^2 + 0.0610 g_0^4}{1 - 0.7332 g_0^2} \quad (\text{B.2})$$

$$b_m(g_0) = (-0.5 + 0.09623 g_0^2) \times \frac{1 - 0.6905 g_0^2 + 0.0584 g_0^4}{1 - 0.6905 g_0^2} \quad (\text{B.3})$$

B.3 Normierungskonstanten der Korrelationsfunktionen

f_A	g_A	f_P	g_P	k_V	l_V	k_T	l_T	f_1	k_1
1	-1	1	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{24}$

Tabelle B.1: Normierungskonstanten der Korrelationsfunktionen.

B.4 Renormierungs- und Verbesserungskoeffizienten der Funktionen f_A und k_V

Die nachstehenden Koeffizienten wurden [28] (c_A), [29] (Z_A , Z_V und b_V) und [45] (b_A) entnommen und konnten für die relevanten Kopplungen bestimmt werden. Einzig die Kon-

stante c_V [14] muss mit Hilfe der unten stehenden Werte interpoliert werden.

$$c_A(g_0) = \frac{-0.00756 g_0^2 \times (1 - 0.748 g_0^2)}{1 - 0.977 g_0^2} \quad (B.4)$$

$$Z_A(g_0) = \frac{1 - 0.8496 g_0^2 + 0.0610 g_0^4}{1 - 0.7332 g_0^2} \quad (B.5)$$

$$Z_V(g_0) = \frac{1 - 0.7663 g_0^2 + 0.0488 g_0^4}{1 - 0.6369 g_0^2} \quad (B.6)$$

$$b_A(g_0) = 1 + 0.1522 g_0^2 \quad (B.7)$$

$$b_V(g_0) = \frac{1 - 0.6518 g_0^2 - 0.1226 g_0^4}{1 - 0.8467 g_0^2} \quad (B.8)$$

β	c_V
6.0	-0.320
6.2	-0.214
6.4	-0.132
6.8	-0.021
7.4	-0.017
8.0	-0.040
9.6	-0.059
12.0	-0.007

Tabelle B.2: Der Verbesserungskoeffizient c_V für verschiedene Kopplungen β . Für die benötigten Kopplungen musste interpoliert werden.

B.5 Tabellen der Simulationsergebnisse

L/a	z	$L\Gamma^P$		
		$\theta = 0$	$\theta = 1/2$	$\theta = 1$
12	5	4.5631(68)	4.7284(68)	5.2865(79)
	6	5.3054(68)	5.4711(68)	6.0244(76)
	7	6.0700(69)	6.2355(68)	6.7831(75)
16	5	4.3166(110)	4.4887(111)	5.0694(132)
	6	5.0156(113)	5.1892(113)	5.7675(130)
	7	5.7071(115)	5.8812(114)	6.4556(128)
20	5	4.2248(80)	4.3938(83)	4.9705(108)
	6	4.9131(82)	5.0837(84)	5.6594(106)
	7	5.5867(84)	5.7581(85)	6.3309(105)
24	5	4.2456(108)	4.4163(118)	4.9988(167)
	6	4.9313(111)	5.1035(119)	5.6847(163)
	7	5.5997(114)	5.7724(121)	6.3507(160)
32	5	4.2130(139)	4.3838(138)	4.9689(189)
	6	4.8996(146)	5.0720(142)	5.6559(186)
	7	5.5660(151)	5.7389(145)	6.3199(183)
CL	5	4.1685(143)	4.3365(146)	4.9137(194)
	6	4.8460(148)	5.0160(149)	5.5931(191)
	7	5.4984(152)	5.6695(151)	6.2444(187)

Tabelle B.3: Nicht-perturbative Resultate der Observablen $L\Gamma^P$ aus QCD-Simulationen. Der Fehler stammt aus der Jackknife-Analyse.

L/a	z	$\log(-\frac{f_A}{\sqrt{f_1}})$		
		$\theta = 0$	$\theta = 1/2$	$\theta = 1$
12	5	0.4960(10)	0.4340(8)	0.2791(8)
	6	0.5393(10)	0.4816(8)	0.3403(8)
	7	0.5821(8)	0.5278(8)	0.3972(8)
16	5	0.4822(16)	0.4153(14)	0.2503(14)
	6	0.5180(15)	0.4556(13)	0.3048(13)
	7	0.5516(14)	0.4926(13)	0.3525(13)
20	5	0.4713(13)	0.4041(12)	0.2356(11)
	6	0.5034(12)	0.4406(11)	0.2862(10)
	7	0.5329(12)	0.4733(10)	0.3296(10)
24	5	0.4618(19)	0.3947(17)	0.2262(16)
	6	0.4923(18)	0.4295(16)	0.2752(15)
	7	0.5199(17)	0.4605(15)	0.3167(14)
32	5	0.4534(30)	0.3848(26)	0.2146(22)
	6	0.4811(28)	0.4170(24)	0.2609(21)
	7	0.5059(27)	0.4451(23)	0.2996(20)
CL	5	0.4462(26)	0.3781(23)	0.2055(21)
	6	0.4718(24)	0.4080(21)	0.2496(19)
	7	0.4941(23)	0.4336(20)	0.2856(19)

Tabelle B.4: Nicht-perturbative Resultate der Observablen Y_A aus QCD-Simulationen. Der Fehler stammt aus der Jackknife-Analyse.

L/a	z	$\log(\frac{k_V}{\sqrt{k_1}})$		
		$\theta = 0$	$\theta = 1/2$	$\theta = 1$
12	5	0.5806(8)	0.5379(8)	0.4471(9)
	6	0.6070(8)	0.5653(8)	0.4768(9)
	7	0.6344(8)	0.5933(8)	0.5065(9)
16	5	0.5839(12)	0.5394(13)	0.4480(15)
	6	0.6066(12)	0.5631(13)	0.4742(15)
	7	0.6295(13)	0.5867(13)	0.4997(15)
20	5	0.5766(11)	0.5322(11)	0.4393(12)
	6	0.5965(11)	0.5530(11)	0.4626(12)
	7	0.6162(11)	0.5735(11)	0.4850(12)
24	5	0.5719(16)	0.5282(15)	0.4366(18)
	6	0.5900(16)	0.5472(15)	0.4580(17)
	7	0.6079(16)	0.5658(15)	0.4784(17)
32	5	0.5566(25)	0.5108(25)	0.4173(27)
	6	0.5714(25)	0.5266(25)	0.4355(27)
	7	0.5859(25)	0.5418(25)	0.4524(26)
CL	5	0.5574(21)	0.5129(21)	0.4188(24)
	6	0.5711(21)	0.5274(21)	0.4357(23)
	7	0.5843(21)	0.5413(21)	0.4513(23)

Tabelle B.5: Nicht-perturbative Resultate der Observablen Y_V aus QCD-Simulationen. Der Fehler stammt aus der Jackknife-Analyse.

L/a	z	R_A		
		$\theta_1 = 0$	$\theta_1 = 1/2$	$\theta_1 = 0$
		$\theta_2 = 1/2$	$\theta_2 = 1$	$\theta_2 = 1$
12	5	-0.1754(12)	-0.4834(17)	-0.6588(28)
	6	-0.1683(11)	-0.4600(16)	-0.6284(26)
	7	-0.1626(11)	-0.4410(15)	-0.6035(24)
16	5	-0.1873(23)	-0.5098(30)	-0.6971(50)
	6	-0.1801(21)	-0.4862(28)	-0.6662(46)
	7	-0.1744(20)	-0.4675(25)	-0.6419(43)
20	5	-0.1873(18)	-0.5159(25)	-0.7031(41)
	6	-0.1803(17)	-0.4926(23)	-0.6729(37)
	7	-0.1748(16)	-0.4744(21)	-0.6492(35)
24	5	-0.1886(30)	-0.5195(42)	-0.7081(67)
	6	-0.1815(28)	-0.4962(39)	-0.6777(62)
	7	-0.1760(27)	-0.4781(36)	-0.6540(58)
32	5	-0.1903(39)	-0.5230(45)	-0.7133(78)
	6	-0.1833(37)	-0.4997(41)	-0.6830(72)
	7	-0.1778(35)	-0.4817(38)	-0.6595(68)
CL	5	-0.1898(37)	-0.5272(46)	-0.7172(77)
	6	-0.1829(34)	-0.5042(42)	-0.6873(71)
	7	-0.1776(32)	-0.4865(39)	-0.6642(67)

Tabelle B.6: Nicht-perturbative Resultate der Observablen R_A aus QCD-Simulationen. Der Fehler stammt aus der Jackknife-Analyse.

L/a	z	R_V		
		$\theta_1 = 0$	$\theta_1 = 1/2$	$\theta_1 = 0$
		$\theta_2 = 1/2$	$\theta_2 = 1$	$\theta_2 = 1$
12	5	-0.1525(10)	-0.4126(13)	-0.5651(21)
	6	-0.1492(9)	-0.4014(12)	-0.5507(20)
	7	-0.1466(9)	-0.3921(12)	-0.5387(19)
16	5	-0.1613(17)	-0.4293(21)	-0.5905(35)
	6	-0.1580(17)	-0.4181(20)	-0.5761(34)
	7	-0.1553(16)	-0.4091(19)	-0.5644(33)
20	5	-0.1605(14)	-0.4331(18)	-0.5936(29)
	6	-0.1574(13)	-0.4223(17)	-0.5797(28)
	7	-0.1549(13)	-0.4136(16)	-0.5685(27)
24	5	-0.1608(23)	-0.4352(30)	-0.5961(48)
	6	-0.1578(22)	-0.4245(28)	-0.5823(46)
	7	-0.1554(21)	-0.4158(27)	-0.5712(45)
32	5	-0.1636(29)	-0.4389(31)	-0.6025(55)
	6	-0.1605(28)	-0.4282(30)	-0.5887(53)
	7	-0.1580(27)	-0.4196(29)	-0.5776(51)
CL	5	-0.1620(27)	-0.4411(32)	-0.6032(55)
	6	-0.1591(26)	-0.4306(31)	-0.5898(53)
	7	-0.1567(26)	-0.4223(29)	-0.5792(51)

Tabelle B.7: Nicht-perturbative Resultate der Observablen R_V aus QCD-Simulationen. Der Fehler stammt aus der Jackknife-Analyse.

L/a	z	R_1		
		$\theta_1 = 0$	$\theta_1 = 1/2$	$\theta_1 = 0$
		$\theta_1 = 1/2$	$\theta_1 = 1$	$\theta_1 = 1$
12	5	0.1119(2)	0.3025(3)	0.4144(7)
	6	0.1069(3)	0.3131(11)	0.4200(13)
	7	0.1090(9)	0.2540(19)	0.3630(9)
16	5	0.1107(5)	0.3113(10)	0.4220(14)
	6	0.1070(5)	0.3007(9)	0.4077(13)
	7	0.1038(5)	0.2917(9)	0.3955(13)
20	5	0.1125(2)	0.3177(4)	0.4302(6)
	6	0.1088(2)	0.3072(4)	0.4160(6)
	7	0.1057(2)	0.2983(4)	0.4041(5)
24	5	0.1133(4)	0.3193(7)	0.4325(11)
	6	0.1096(4)	0.3089(7)	0.4186(10)
	7	0.1066(4)	0.3002(7)	0.4068(10)
32	5	0.1136(4)	0.3214(7)	0.4349(11)
	6	0.1100(4)	0.3111(7)	0.4211(11)
	7	0.1070(4)	0.3025(7)	0.4095(10)
CL	5	0.1148(5)	0.3251(9)	0.4399(14)
	6	0.1113(5)	0.3149(9)	0.4262(13)
	7	0.1084(5)	0.3065(8)	0.4149(13)

Tabelle B.8: Nicht-perturbative Resultate der Observablen R_1 aus QCD-Simulationen. Der Fehler stammt aus der Jackknife-Analyse.

L/a	z	$\frac{3}{4} \log(f_1/k_1)$		
		$\theta_1 = 0$	$\theta_1 = 1/2$	$\theta_1 = 1$
12	5	0.0582(5)	0.0527(5)	0.0428(5)
	6	0.0516(5)	0.0469(5)	0.0382(4)
	7	0.0459(4)	0.0418(4)	0.0342(4)
16	5	0.0554(9)	0.0499(8)	0.0395(7)
	6	0.0495(8)	0.0448(7)	0.0357(6)
	7	0.0446(7)	0.0404(7)	0.0324(6)
20	5	0.0552(7)	0.0493(7)	0.0385(6)
	6	0.0495(6)	0.0443(6)	0.0348(5)
	7	0.0447(6)	0.0401(5)	0.0316(5)
24	5	0.0561(12)	0.0498(11)	0.0386(9)
	6	0.0502(10)	0.0447(10)	0.0348(8)
	7	0.0454(10)	0.0405(9)	0.0317(7)
32	5	0.0550(16)	0.0491(15)	0.0379(12)
	6	0.0494(15)	0.0442(13)	0.0343(11)
	7	0.0449(14)	0.0402(12)	0.0314(10)
CL	5	0.0555(14)	0.0489(13)	0.0374(11)
	6	0.0499(13)	0.0441(12)	0.0339(10)
	7	0.0453(12)	0.0401(11)	0.0309(9)

Tabelle B.9: Nicht-perturbative Resultate der Observablen \mathcal{R} aus QCD-Simulationen. Der Fehler stammt aus der Jackknife-Analyse.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Zweidimensionale Darstellung des Schrödinger-Funktional.	5
2.1	Graphische Darstellung eines 5×5 -Gitters.	11
2.2	Darstellung eines Links zwischen den Gitterpunkten x und $x + a\hat{\mu}$	12
2.3	Plaquette p in Richtung der Einheitsvektoren $\hat{\mu}$ und $\hat{\nu}$	13
2.4	Zweidimensionale Darstellung eines Wilson-Loops der Ausdehnung $T \times R$. .	15
2.5	Veranschaulichung des Ursprungs des Dopplerproblems in einer Dimension.	16
2.6	Graphische Darstellung der Linkvariablen, die im Feldstärketensor $\hat{F}_{\mu\nu}$ auftauchen.	19
3.1	Schematische Darstellung der Vorgehensweise bei Verwendung der HQET [13].	31
3.2	Anschauliche Darstellung der Korrelationsfunktionen f_A^{stat} , f_1^{stat} und f_1 . . .	37
4.1	Schematische Darstellung des Pre-Binning.	43
4.2	Darstellung der Korrelationsfunktionen $f_A(x_0)$ und $k_V(x_0)$	46
4.3	Schematische Darstellung zur Mittelung der Korrelationsfunktionen am Beispiel von f_A und g_A	46
4.4	$L\Gamma^P$ aufgetragen gegen $(a/L)^2$	50
4.5	Y_A aufgetragen gegen $(a/L)^2$	52
4.6	Y_V aufgetragen gegen $(a/L)^2$	53
4.7	R_A aufgetragen gegen $(a/L)^2$	54
4.8	R_V aufgetragen gegen $(a/L)^2$	55
4.9	R_1 aufgetragen gegen $(a/L)^2$	56
4.10	\mathcal{R} aufgetragen gegen $(a/L)^2$	57
4.11	$L\Gamma^P$ aufgetragen gegen $(a/L)^2$ (inklusive Tree-Level-Verbesserung).	59
4.12	Y_A aufgetragen gegen $(a/L)^2$ (inklusive Tree-Level-Verbesserung).	60
4.13	Y_V aufgetragen gegen $(a/L)^2$ (inklusive Tree-Level-Verbesserung).	61
4.14	R_A aufgetragen gegen $(a/L)^2$ (inklusive Tree-Level-Verbesserung).	62
4.15	R_V aufgetragen gegen $(a/L)^2$ (inklusive Tree-Level-Verbesserung).	63
4.16	Kontinuumsextrapolation der HQET-Daten zur Mesonmasse.	65
4.17	Graphische Darstellung zur Berechnung der Mesonmasse.	67
4.18	Kontinuumsextrapolation der HQET-Daten zur Zerfallskonstante.	68

4.19	Darstellung der interpolierten Ergebnisse der HQET-Daten zur Zerfallskonstanten.	70
5.1	Vergleich verschiedener Kontinuumslimiten der pseudoskalaren Meson-Zerfallskonstanten in der Charm-Region.	72

Tabellenverzeichnis

0.1	Die vier Wechselwirkungen und ihre Eigenschaften.	2
0.2	Die sechs Quarkflavours und ihre Eigenschaften.	3
3.1	Nomenklatur der D-Mesonen.	36
4.1	Hopping-Parameter der unterschiedlichen Gitter.	40
4.2	Der finale Fehler von z durch Gauß'sche Fehlerfortpflanzung.	41
4.3	Parameter des Simulationsprogrammes.	42
4.4	Anzahl der Simulationen inklusive Thermalisierung und Pre-Binning.	44
4.5	Resultate der RGI-Quarkmasse.	65
4.6	Resultate der Zerfallskonstanten.	69
B.1	Normierungskonstanten der Korrelationsfunktionen.	78
B.2	Der Verbesserungskoeffizient c_V für verschiedene Kopplungen β	79
B.3	Resultate der Observablen $L\Gamma^P$	80
B.4	Resultate der Observablen Y_A	81
B.5	Resultate der Observablen Y_V	81
B.6	Resultate der Observablen R_A	82
B.7	Resultate der Observablen R_V	82
B.8	Resultate der Observablen R_1	83
B.9	Resultate der Observablen \mathcal{R}	83

Literaturverzeichnis

- [1] BLOSSIER, B. UND DELLA MORTE, M. UND GARRON, N. UND SOMMER, R.:
HQET at order 1/m: I. Non-perturbative parameters in the quenched approximation.
2010.
[arXiv:1001.4783](https://arxiv.org/abs/1001.4783).
- [2] BLOSSIER, B. UND DELLA MORTE, M. UND GARRON, N. UND VON HIPPEL, G. UND MENDES, T. UND SIMMA, H. UND SOMMER, R.:
Spectroscopy and Decay Constants from Nonperturbative HQET at Order 1/m, 2009.
[arXiv:0911.1568](https://arxiv.org/abs/0911.1568).
- [3] CAPITANI, S. UND LÜSCHER, M. UND SOMMER, R. UND WITTIG, H.:
Non-perturbative quark mass renormalization in quenched lattice QCD.
Nucl. Phys. B, 544:669–698, 1999.
[hep-lat/9810063](https://arxiv.org/abs/hep-lat/9810063).
- [4] DEGRAND, T.:
Nonperturbative Quantum Field Theory on the Lattice.
Vorlesungen an der TASI Summer School, TASI96, 1996.
[hep-th/9610132](https://arxiv.org/abs/hep-th/9610132).
- [5] DELLA MORTE, M. UND SHINDLER, A. UND SOMMER R.:
On lattice actions for static quarks. JHEP0508, 051, 2005.
[hep-lat/0506008](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0506008).
- [6] DELLA MORTE, M.
Interne Bemerkungen, 2009.
- [7] DELLA MORTE, M. UND GARRON, N. UND PAPINUTTO, M. UND SOMMER, R.:
Heavy Quark Effective Theory computation of the mass of the bottom quark.
JHEP, 0701:007, 2007.
[hep-ph/0609294](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0609294).
- [8] DELLA MORTE, M. UND FRITZSCH, P. UND HEITGER, J. UND MEYER, H.B. UND SIMMA, H. UND SOMMER, R.:
Towards a non-perturbative matching of HQET and QCD with dynamical light quarks.

- PoSLAT:246, 2007.
 arXiv:0710.1188v2.
- [9] DELLA MORTE, M. UND FRITZSCH, P. UND HEITGER, J. UND SOMMER, R.:
Non-perturbative quark mass dependence in the heavy-light sector of two-flavour QCD.
 POS, LATTICE2008:226, 2008.
 arXiv:0810.3166.
- [10] DELLA MORTE, M. UND FREZZOTTI, R. UND HEITGER, J. UND ROLF, J. UND SOMMER, R. UND WOLFF, U.:
Computation of the strong coupling in QCD with two dynamical flavours.
 Nucl. Phys. B, 713:378, 2005.
 hep-lat/0411025.
- [11] EICHEN, E. UND HILL, B.:
An effective field theory for the calculation of matrix elements involving heavy quarks.
 Phys. Lett. B, 234:511–516, 1990.
- [12] FRITZSCH, P.:
Nicht-perturbative Renormierung des statischen Axialstromes mit zwei dynamischen Quarkflavours.
 Institut für Theoretische Physik, WWU Münster, Diplomarbeit, 2005.
- [13] FRITZSCH, P.:
B-meson properties from non-perturbative matching of HQET to finite-volume two-flavour QCD.
 Institut für Theoretische Physik, WWU Münster, Dissertation, 2009.
- [14] GUAGNELLI, M. UND SOMMER, R.:
Non-perturbative $O(a)$ improvement of the vector current.
 Nucl. Phys. B - Proceedings Supplements, 63:886, 1998.
 hep-lat/9709088.
- [15] GUAGNELLI, M. UND PETRONZIO, R. UND ROLF, J. UND SINT, S. UND SOMMER, R. UND WOLFF, U.:
Non-perturbative results for the coefficients b_m and $b_a - b_p$ in $O(a)$ improved lattice QCD.
 Nucl. Phys. B, 595:44–62, 2001.
 hep-lat/0009021.
- [16] GUPTA, R.:
Introduction to Lattice QCD, 1998.
 hep-lat/9807028.

- [17] HASENFRATZ, A. UND KNECHTLI, F.:
Flavor Symmetry and the Static Potential with Hypercubic Blocking, 2001.
hep-lat/0103029.
- [18] HEITGER, J. UND JÜTTNER, A.:
Lattice cutoff effects for F_{D_s} with improved Wilson fermions - a final lesson from the quenched case.
JHEP, 0905:101, 2009.
arXiv:0812.2200.
- [19] HEITGER, J.:
Persönliche Mitteilungen, 2009, 2010.
- [20] HEITGER, J. UND SOMMER, R.:
A strategy to compute the b-quark mass with non-perturbative accuracy.
Nucl. Phys. B - Proceedings Supplements, 106:358, 2002.
hep-lat/0110016.
- [21] HEITGER, J. UND SOMMER, R.:
Non-perturbative Heavy Quark Effective Theory.
JHEP, 0402:022, 2004.
hep-lat/0310035.
- [22] KURTH, M. UND SOMMER, R.:
Renormalization and $O(a)$ -improvement of the static axial current.
Nucl. Phys. B, 297:488–518, 2001.
- [23] KURTH, M. UND SOMMER, R.:
Heavy Quark Effective Theory at one-loop order: An explicit example.
Nucl. Phys. B, 623:271–286, 2002.
hep-lat/0108018.
- [24] LÜSCHER, M.:
Advanced Lattice QCD, 1998.
hep-lat/9802029.
- [25] LÜSCHER, M. UND WEISZ, P.:
 $O(a)$ improvement of the axial current in lattice QCD to one-loop order of perturbation theory.
Nucl. Phys. B, 479:429, 1996.
hep-lat/9606016.
- [26] LÜSCHER, M. UND NARAYANAN, R. UND WEISZ, P. UND WOLFF, U.:
The Schrödinger Functional – a Renormalizable Probe for Non-Abelian Gauge Theo-

- ries.
Nucl. Phys. B, 384:168, 1992.
[hep-lat/9207009](#).
- [27] LÜSCHER, M. UND SINT, S. UND SOMMER, R. UND WEISZ, P.:
Chiral symmetry and $O(a)$ Improvement in lattice QCD.
Nucl. Phys. B, 478:365–400, 1996.
[hep-lat/9605038](#).
- [28] LÜSCHER, M. UND SINT, S. UND SOMMER, R. UND WEISZ, P. UND WOLFF, U.:
Non-perturbative $O(a)$ Improvement of lattice QCD.
Nucl. Phys. B491 323-343, 1996.
[hep-lat/9609035](#).
- [29] LÜSCHER, M. UND SINT, S. UND SOMMER, R. UND WITTIG, H.:
Non-perturbative determination of the axial current normalization constant in $O(a)$ improved lattice QCD.
Nucl. Phys. B, 491:344–364, 1997.
[hep-lat/9611015](#).
- [30] MAGGIORE, M.:
A Modern Introduction to Quantum Field Theory.
Oxford University Press, 2004.
- [31] MONTVAY, I. UND MÜNSTER, G.:
Quantum Fields on a Lattice.
Cambridge University Press, 1994.
- [32] MÜNSTER, G. UND WALZL, M.:
Lattice Gauge Theory - A short Primer, 2000.
[hep-lat/0012005](#).
- [33] NACHTMANN, O.:
Nlementarteilchenphysik - Phänomene und Konzepte.
Vieweg, 1. Auflage, 1986.
- [34] NIELSEN, H. B. UND NINOMIYA M.:
No Go Theorem for Regularizing Chiral Fermions.
Phys. Lett., B105:219, 1981.
- [35] PARTICLE DATA GROUP.
<http://pdg.lbl.gov/>. Zugriff am 25.08.2009.
- [36] POVH, B. UND RITH, K. UND SCHOLZ, C. UND ZETSCH, F.:
Teilchen und Kerne. Springer, 7. Auflage, 2006.

- [37] PRESS, W. H. UND FLANNERY, B. P. UND TEUKOLSKY, S. A. UND VETTERLING, W. T.:
Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing.
Cambridge University Press, 1. Auflage, 1987.
- [38] RAMOND, P.:
Field Theory: A Modern Primer.
Addison Wesley, 2. Auflage, 1989.
- [39] RICHARDS, D. G.:
Lattice Gauge Theory - QCD from Quarks to Hadrons, 2000.
nucl-th/0006020.
- [40] ROLF, J. UND SINT, S.:
A precise determination of the charm quark's mass in quenched QCD, 2002.
- [41] ROTHE, H. J.:
Lattice Gauge Theories: An Introduction.
World Scientific, 3. Auflage, 2005.
- [42] SCHMÜSER, P.:
Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker.
Springer, 1988.
- [43] SERITIELLO, M.
Institut für Theoretische Physik, WWU Münster, Diplomarbeit, 2010.
- [44] SHEIKHOLESLAMI, B. UND WOHLERT, R.:
Improved continuum limit lattice action for QCD with wilson fermions.
Nucl. Phys. B, 259:572–596, 1985.
- [45] SINT, S UND WEISZ, P.:
Further results on $O(a)$ improved lattice QCD to one-loop order of perturbation theory.
Nucl. Phys. B, 502:251, 1997.
hep-lat/9704001.
- [46] SINT, S.:
On the Schrödinger functional in QCD.
Nucl. Phys. B, 421:135, 1994.
hep-lat/9312079.
- [47] SMIT, J.:
Introduction to Quantum Fields on a Lattice.
Cambridge Lecture Notes in Physics, 2002.

- [48] SOMMER, R.:
Non-perturbative QCD: renormalization, $O(a)$ -improvement and matching to Heavy Quark Effective Theory, 2006.
[hep-lat/0611020](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0611020).
- [49] SYMANZIK, K.:
Schrödinger representation and Casimir effect in renormalizable quantum field theory.
Nucl. Phys. B, 190:1–44, 1981.
- [50] WENNEKERS, J.:
Nicht-perturbative Untersuchungen an einem System von leichten und schweren Quarks in kleinem Volumen.
Institut für Theoretische Physik, WWU Münster, Diplomarbeit, 2003.
- [51] WILSON, K.G.:
Confinement of quarks.
Phys. Rev. D, 10:2445–2459, 1974.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen und den Menschen danken, die zum Gelingen dieser Diplomarbeit auf unterschiedlichste Art und Weise beigetragen haben.
Vielen Dank

- gilt zunächst meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, die mir dieses Studium erst ermöglicht haben und mir in allen Lebenslagen mit Rat und Tat zur Seite standen.
- Jochen Heitger für die interessante Aufgabenstellung und enorme Geduld bei der Beantwortung meiner zahlreichen Fragen. Ich kann mir keine bessere Betreuung vorstellen.
- gebührt Nicolas Garron, der auf der Zielgeraden die Endresultate berechnet und mit viel Mühe unsere Fragen beantwortet hat.
- an Patrick Fritzsch und die ALPHA-Kollaboration, deren Simulationsprogramme ich verwenden durfte und die mir genügend Rechenzeit zur Verfügung gestellt haben.
- gebührt Matteo Serritiello, dessen Fitroutine ich benutzten durfte. Des Weiteren hat er im Zuge seiner Diplomarbeit die in dieser Arbeit verwendeten Tree-Level-Daten berechnet.
- Lorenz, Cyro und Sebi für den Spaß, den wir in den vielen absurd Momenten in der Mensa, im Kino oder sonstwo in Münster hatten.
- meinen Bürokollegen Teo, Felix und Sammy und besonders in der Anfangsphase Alexander Ferling für die physikalischen und nichtphysikalischen Diskussionen am Arbeitsplatz.
- Cathy und Christoph. Die Abende mit euch waren immer unfassbar witzig.
- gilt zu guter Letzt meiner Freundin Simone. Ohne dich und deinen Optimismus hätte ich wohl viel zu oft verzweifelt.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, den 5. März 2010

