

# Einfluss der Randbedingungen auf die Supersymmetrische Yang-Mills Theorie

Influence of the Boundary Conditions  
on Supersymmetric Yang-Mills-Theory

Zur Erlangung des Titels "Master of Science"  
Vorgelegt am Institut für Theoretische Physik  
der Westfälischen-Wilhelms-Universität

**Jonathan Hendrich**

geb. 22.03.1991      Eisenach

Betreut von: **Prof. Dr. Gernot Münster**

Zweitkorrektur: **PD. Dr. Jochen Heitger**

Münster, 11.09.2014



Diese Fassung der Arbeit unterscheidet sich von der am 15.09.2014 beim Prüfungsamt eingereichten Version durch Korrektur von Tippfehlern und kleinen inhaltlichen Fehlern.

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Einführung in die Supersymmetrie</b>	<b>6</b>
2.1	Supersymmetrische Algebra als Erweiterung der Poincaré-Algebra . . .	6
2.2	Superraum und Superfelder . . . . .	10
2.2.1	Allgemeine Superfelder . . . . .	10
2.2.2	Chirale Superfelder . . . . .	12
2.2.3	Das Vektor-Superfeld . . . . .	14
2.3	Die Formulierung von SUSY- und eichinvarianten Lagrangedichten . . .	16
2.4	Die supersymmetrische Yang-Mills-Theorie . . . . .	18
2.4.1	Die Wirkung . . . . .	18
2.4.2	SUSY-Transformation der Lagrangedichte . . . . .	20
2.5	Spontane Brechung der Supersymmetrie . . . . .	23
2.5.1	Der supersymmetrische Grundzustand . . . . .	23
2.5.2	Der Witten-Index und die Boson-Fermion-Regel . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Die Super-Yang-Mills Theorie auf dem Gitter</b>	<b>28</b>
3.1	Allgemeine Gitterdiskretisierung . . . . .	28
3.2	Konstruktion einer Gittereichwirkung . . . . .	29
3.3	Konstruktion einer Fermionenwirkung auf dem Gitter . . . . .	32
3.4	Das Haar-Integrationsmaß . . . . .	36
3.5	Randbedingungen . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Numerische Simulation der supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie</b>	<b>41</b>
4.1	Der Programmaufbau . . . . .	41
4.1.1	Der Grundlegende Mechanismus einer Monte-Carlo-Simulation .	41
4.1.2	Erzeugung der Konfigurationen mit Markov-Ketten . . . . .	42
4.1.3	Wahrscheinlichkeitsgewichtung durch den Metropolis-Algorithmus	43
4.2	Abschätzung der auftretenden Fehler . . . . .	46
4.3	Verringerung der Ungenauigkeit durch Bootstrapping . . . . .	49
4.4	Fehlergewichtete Funktionsanpassung . . . . .	50

4.5	Parameter und Messgrößen . . . . .	51
4.5.1	Parameter . . . . .	51
4.5.2	Der Plaquettenerwartungswert . . . . .	53
4.5.3	Der Polyakov-Loop . . . . .	54
4.5.4	Massenkorrelatoren . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Simulationsergebnisse und Interpretation</b>	<b>60</b>
5.1	Der kritische Hoppingparameter $\kappa_c$ . . . . .	60
5.1.1	$\kappa_c$ bei $\beta = 1,7$ . . . . .	60
5.1.2	$\kappa_c$ bei $\beta = 1,8$ . . . . .	62
5.2	Der Plaquettenerwartungswert . . . . .	63
5.2.1	Exponentieller Funktionsansatz für $\beta = 1,7$ . . . . .	63
5.2.2	Exponentieller Funktionsansatz bei $\beta = 1,8$ . . . . .	69
5.2.3	Alternative Funktionsansätze . . . . .	74
5.3	Der Erwartungswert des Polyakov-Loops . . . . .	76
5.3.1	Der Polyakov-Loop bei $\beta = 1,7$ . . . . .	76
5.3.2	Der Polyakov-Loop bei $\beta = 1,8$ . . . . .	78
5.3.3	Der Polyakov-Loop mit fixiertem räumlichen Volumen . . . . .	80
5.3.4	Der Polyakov-Loop mit fixierter zeitlicher Ausdehnung . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>86</b>
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Die Bianchi-Identität</b>	<b>89</b>
<b>B</b>	<b>Zusammenfassung der Grassmann-Algebra</b>	<b>90</b>
<b>C</b>	<b>Herleitung der Wilson-Wirkung</b>	<b>91</b>

---

# 1 Einleitung

Das Standardmodell der Teilchenphysik stellt eine große Errungenschaft der modernen Wissenschaft dar. Eine wichtige Rolle hierbei spielen Eichtheorien. Die beiden Physiker Chen Ning Yang und Robert L. Mills entwickelten 1954 eine nichtabelsche Eichtheorie zur Beschreibung von Protonen und Neutronen (vgl. [30]). Es wurde angenommen, dass Beide verschiedene Zustände eines Teilchens repräsentieren, die sich ausschließlich in der sogenannten Isospinkomponente  $I_3 = \pm \frac{1}{2}$  unterscheiden. Dem Isospinmodell liegt dabei eine interne  $SU(2)_I$ -Symmetrie zugrunde. Nachdem Unstimmigkeiten zwischen der theoretischen Vorhersage und der Lebensdauer im Kaonzerfall auftraten, wurde die Quantenzahl *Strangeness* postuliert (vgl. [11]). In dem Jahr 1964 wurde der *Eightfold-Way* von Gell-Mann und Ne'eman vorgeschlagen, der einer Erweiterung des  $SU(2)_I$ -Isospinmodells zu einer  $SU(3)_f$ -Flavorsymmetrie entspricht (vgl. [5]). Den beiden gelang es, die bekannten Mesonen anhand ihrer Quantenzahlen in Beziehung zu setzen und neue Mesonen vorauszusagen. Für diese Arbeit erhielt Gell-Mann 1969 den Nobelpreis in Physik. Der Eightfold-Way wird als Vorläufer des Quarkmodells gesehen, aus dem die Quantenchromodynamik hervorging. Dieses Modell unterliegt einer  $SU(3)_c$ -Colorsymmetrie und ist in der Lage die starke Wechselwirkung zu beschreiben (vgl. [19]). Der Ansatz eines Symmetriemodells ist auch auf die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung anwendbar. Die Quantenelektrodynamik ist eine abelsche  $U(1)$ -Theorie. Diese konnte im Jahr 1967 von Sheldon Glashow, Abdus Salam und Steven Weinberg mit der schwachen Wechselwirkung zu einer  $U(1)_Y \times SU(2)_L$ -Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung (GSW-Modell) vereint werden (vgl. [6] und [26]), wofür sie 1979 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurden. Zusammen bilden die Quantenchromodynamik und das GSW-Modell das Standardmodell der Teilchenphysik. Hierbei werden die auftretenden Teilchen in Materie- und Kräfterteilchen unterschieden. Die Materieteilchen werden als Fermionen bezeichnet und tragen halbzahligem Spin, während die Kräfterteilchen ganzzahligen Spin aufweisen und Bosonen genannt werden. Fermionen werden weiterhin aufgeteilt in Leptonen und Quarks. Eine Visualisierung der bekannten Teilchen ist in der Abbildung 1 dargestellt.

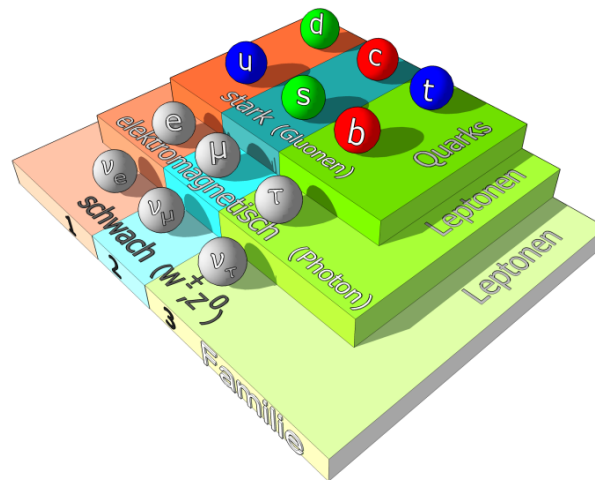


Abb. 1: Zusammenfassung der im Standardmodell enthaltenen Elementarteilchen (ohne skalares Higgs-Teilchen).

Quelle: <http://psi.physik.kit.edu/img/Teilchen.png> (28.07.14)

Das skalare Higgs-Boson trägt den Spin  $s = 0$  und wird benötigt um den Prozess der Massengenerierung zu erklären. Es wurde bereits in den 1960er Jahren von Peter Higgs vorausgesagt und konnte erstmals im Juli 2012 nachgewiesen werden. Die Gravitationskraft konnte bisher noch nicht erfolgreich mit Hilfe einer Quantenfeldtheorie beschrieben werden. Ein wichtiges Ziel der Teilchenphysik ist, die Gravitation in ihre Theorien einzuschließen und einer vereinheitlichten Theorie der vier Wechselwirkungen zu beschreiben. Es wird ein großer Aufwand betrieben, die vier Kräfte zu einer vereinten Kraft zusammenzufassen, die kurz nach dem Urknall existiert haben soll und aus der die bekannten Kräfte hervorgehen.

In der modernen Physik treten jedoch Probleme auf, die nicht von dem Standardmodell erklärt werden können. Zum einen liefert es keine Beschreibung der dunklen Materie. Des weiteren sollte die Masse des Higgs-Bosons viel höher sein als gemessen. Es treten sehr viele freie und damit unerklärte Parameter auf. Diese Probleme weisen darauf hin, dass das Standardmodell noch nicht die endgültige Theorie der Teilchenphysik ist und eine Physik jenseits dessen existiert. Es wurden verschiedene Ansätze zur Erweiterung des Standardmodells vorgeschlagen. Mit einem dieser Ansätze wird sich auch diese Arbeit beschäftigen: die Supersymmetrie. Der supersymmetrische Standpunkt stellt die klare Trennung zwischen Kräfte- und Materieteilchen in Frage und postuliert eine inter-

---

ne Symmetrie zwischen diesen. Die Unterteilung der beiden Teilchenklassen resultiert aus Begriffen, die von Menschen definiert wurden und nicht zwingend die Natur in ihrer vollen Komplexität widerspiegeln. Supersymmetrische Modelle postulieren supersymmetrische Partnerteilchen zu allen Bosonen und Fermionen des Standardmodells. Die supersymmetrischen Teilchen besitzen die gleichen Quantenzahlen wie ihre Partnerteilchen mit der Ausnahme, dass sich ihr Spin um  $\Delta s = \frac{1}{2}$  unterscheidet (vgl. [9]). Mit Hilfe dieser neuen Symmetrie können einige aktuelle Probleme der Physik erklärt und gelöst werden. So liefert z.B. das minimale supersymmetrische Modell Kandidatenteilchen für die Beschreibung der dunklen Materie, eines der größten Rätsel der heutigen Physik. Ein weiteres Problem besteht in der berechneten Higgs-Masse. Der theoretische Wert der Masse fällt um einiges größer aus als der experimentell bestimmte. Auch dieser als Hierarchie-Problem bekannte Widerspruch, kann mit Hilfe der Supersymmetrie gelöst werden. Aufgrund der neu postulierten Teilchen folgen Schleifenkorrekturen in der Higgs-Masse, bei denen sich bosonische und fermionische Beiträge kürzen. Die so berechnete theoretische Masse liegt in einer vergleichbaren Größenordnung wie ihr experimentelles Gegenstück.

Weitere Aspekte die für die Supersymmetrie sprechen, sind die *Grand Unified Theories* (GUT's), die mit dem Ziel formuliert werden, die drei quantentheoretisch zugänglichen Grundkräfte zu einer zusammenzufassen. Aus der Existenz einer solchen Kraft folgt, dass es einen Punkt bei sehr hohen Energien geben muss, an dem sich die laufenden Kopplungen der Grundkräfte treffen. In der Abbildung 2 sind die Kopplungen der drei quantentheoretisch zugänglichen Kräfte gegen die Energie aufgetragen.



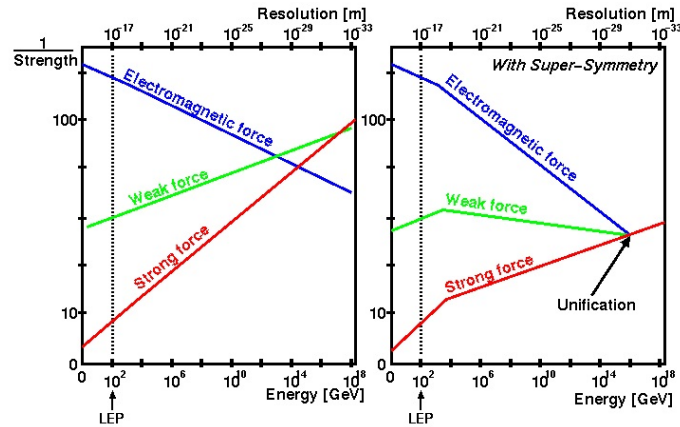


Abb. 2: Laufende Kopplungen der Grundkräfte gegen die Energie aufgetragen. Links: Theorie ohne Supersymmetrie; Rechts: Theorie mit Supersymmetrie.

Quelle: <http://scienceblogs.com/startswithabang/files/2013/05/runningcoupling.gif> (28.07.14)

Für Theorien ohne Supersymmetrie verfehlen sich die Kopplungen, während bei einer supersymmetrischen Theorie ein Schnittpunkt bei ca  $10^{16} \text{ GeV}$  existiert. Mit dieser Eigenschaft könnte die Supersymmetrie einen wichtigen Erfolg für die GUT's darstellen. Dennoch wurden noch keine direkten Beweise für die Supersymmetrie gefunden, die gleiche Massen für Teilchen und Partnerteilchen vorhersagt. Der Fakt, dass bis jetzt keine supersymmetrischen Teilchen mit den bekannten Massen nachgewiesen wurden weist darauf hin, dass die Supersymmetrie gebrochen sein muss sollte sie existieren. Ein Punkt der zur Kritik anregt, ist die Erhöhung der Anzahl freier Parameter in supersymmetrischen Theorien. Zur Zeit stellt sie einen interessanten neuen Blickwinkel der modernen Physik dar und polarisiert zunehmend.

Gitter-Eichtheorien eröffnen einen nicht-perturbativen Zugang zu Quantenfeldtheorien, besonders zu Confinementuntersuchungen einer Theorie (vgl. [27]). Sie wurden erstmals 1974 von Ken Wilson vorgeschlagen und benötigen eine euklidische Metrik und eine diskretisierte Raumzeit. Endliche Gittervolumina erfordern zusätzlich die Definition von Randbedingungen, die sich allgemein für Bosonen und Fermionen unterscheiden. Dies steht im Widerspruch zu der supersymmetrischen Forderung, dass beide Teilchenarten mit den gleichen Randbedingungen auftreten. Wie werden sich typische Messwerte der Yang-Mills Theorie hinsichtlich der Simulation mit Randbedingungen verhalten, die innerhalb des supersymmetrischen Rahmens liegen? Und in welchem Kontrast stehen

---

sie zu Simulationen mit gewöhnlichen Randbedingungen? Das soll die grundlegende Fragestellung dieser Arbeit sein.

Nach einer Einführung in die Theorie der Supersymmetrie in Kapitel 2 werden die fundamentalen Eigenschaften der Gitterphysik in Kapitel 3 erläutert. Kapitel 4 geht auf die Methodik der Datengewinnung und -verarbeitung ein. Hier werden auch die Parameter und Messgrößen der Theorie vorgestellt. Die Simulationsergebnisse werden anschließend in Kapitel 5 gezeigt und diskutiert. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse und ein Ausblick auf zukünftige Fragestellungen finden sich in Kapitel 6.

---

## 2 Einführung in die Supersymmetrie

### 2.1 Supersymmetrische Algebra als Erweiterung der Poincaré-Algebra

In diesem Kapitel, welches sich auf die Aussagen von [9] und [1] stützt, wird die algebraische Grundlage der Supersymmetrie (SUSY) hergeleitet. Diese geht aus einer Erweiterung der Poincaré-Algebra hervor. Im Allgemeinen wird die Poincaré-Algebra aus den 10 Generatoren  $P^\mu$  und  $M^{\mu\nu}$  aufgebaut. Diese Generatoren erzeugen Translationen, Rotationen und Boosts und bilden bezüglich ihrer Kommutatoren eine Lie-Algebra.

Eine supersymmetrische Algebra kann durch die Graduierung einer Lie-Algebra realisiert werden, welche (übertragen auf die Teilchenphysik) bosonische Kommutatoren mit fermionischen Antikommutatoren verbindet. Man bezeichnet einen Vektorraum als  $N$ -fach graduiert, wenn er aus einer direkten Summe von  $N$  Untervektorräumen besteht und bezüglich der Verknüpfung seiner Elemente einen Modulus  $N$  aufweist. Für einen zweifach graduierten Vektorraum gilt somit

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_1 . \quad (1)$$

Bei der Verknüpfung zweier Elemente tritt ein Modulus 2 auf

$$\begin{aligned} u_1 \circ u_2 &\in \mathbb{L}_0 & \forall u_1, u_2 \in \mathbb{L}_0 , \\ u \circ v &\in \mathbb{L}_1 & \forall u \in \mathbb{L}_0, \forall v \in \mathbb{L}_1 , \\ v_1 \circ v_2 &\in \mathbb{L}_0 & \forall v_1, v_2 \in \mathbb{L}_1 . \end{aligned} \quad (2)$$

Eine graduierte Lie-Algebra besitzt zusätzlich die folgenden mathematischen Eigenschaften:

1. Supersymmetrie:

$$x_i \circ x_j = -(-1)^{ij} x_j \circ x_i , \quad (3)$$

---

2. Jakobi-Identität:

$$x_k \circ (x_l \circ x_m)(-1)^{km} + x_l \circ (x_m \circ x_k)(-1)^{lk} + x_m \circ (x_k \circ x_l)(-1)^{ml} = 0. \quad (4)$$

Aus der Gleichung (3) folgt, dass die Verknüpfung der Elemente  $x_i, x_j \in \mathbb{L}_0$  und  $x_i \in \mathbb{L}_0, x_j \in \mathbb{L}_1$  symmetrisch, die der Elemente  $x_i, x_j \in \mathbb{L}_1$  hingegen antisymmetrisch ist. Diese Forderungen werden von Kommutatoren für symmetrische und von Antikommutatoren für antisymmetrische Verknüpfungen erfüllt.

Die Graduierung einer Lie-Algebra ermöglicht das Umgehen des *No-go-Theorems* von Coleman und Mandula, welches 1967 aufgestellt wurde (vgl. [2]) und besagt, dass eine interne Symmetrie der S-Matrix nur trivial mit der Poincaré-Algebra verknüpft werden kann. In anderen Worten ist die Aussage des Theorems, dass die Generatoren beider Symmetrien miteinander kommutieren müssen und somit keinen Einfluss aufeinander nehmen dürfen. Allerdings gilt das Coleman-Mandula-Theorem nur für rein bosonische und damit kommutierende Generatoren. Golfand und Likhtman gelang es 1971 das Coleman-Mandula-Theorem durch das Einführen der supersymmetrischen Generatoren und der graduierten Lie-Algebra auszuschalten und die interne Symmetrien nicht-trivial zu verknüpfen (vgl. [7]).

Um dies zu realisieren, wird die Poincare-Gruppe mit  $P^\mu, M^{\mu\nu} \in \mathbb{L}_0$  um einen Satz supersymmetrischer Generatoren  $Q_A \in \mathbb{L}_1$  mit  $A = 1, \dots, 4\mathcal{N}$  erweitert, die zu Weyl-Spinoren zusammengefasst werden. Diese Arbeit wird sich mit der  $\mathcal{N} = 1$ -Supersymmetrie beschäftigen, bei der vier zusätzliche Generatoren eingeführt werden. Im Folgenden werden Spinorindizes durch große arabische Buchstaben gekennzeichnet, während für Lorentzindizes griechische Buchstaben verwendet werden. Gepunktete Indizes verweisen auf rechtshändige Spinoren.

Die Verknüpfung  $\mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0 \rightarrow \mathbb{L}_0$  stellt die herkömmliche Poincaré-Algebra dar. Von besonderem Interesse sind die Kommutatoren bzw. Antikommutatoren der  $Q_A$  mit den Generatoren der Poincaré-Algebra und sich selbst.

Aufgrund des Modulus der Graduierung ist bekannt, dass der Kommutator  $[P^\mu, Q_A] \in$

---

$\mathbb{L}_0$  auf einen Spinor führen muss. Dieser Ansatz ergibt zusammen mit der Jakobi-Identität die Relation

$$[P^\mu, Q_A] = 0. \quad (5)$$

Der Kommutator  $[Q_A, M^{\mu\nu}]$  folgt aus den Transformationseigenschaften der supersymmetrischen Generatoren. Das Rotationsverhalten eines Spinors ist gegeben durch (vgl. [21])

$$Q'_A = e^{(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})^B_A} Q_B, \quad (6)$$

wobei  $\omega_{\mu\nu}$  ein Rotationsparameter ist und

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (\mathbb{1}, \vec{\sigma}), \\ \tilde{\sigma}^\mu &= (\mathbb{1}, -\vec{\sigma}), \\ (\sigma^{\mu\nu})^B_A &= \frac{i}{4}(\sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \tilde{\sigma}^\mu)^B_A, \\ (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{B}}_{\dot{A}} &= \frac{i}{4}(\tilde{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu \sigma^\mu)^{\dot{B}}_{\dot{A}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Des weiteren ist bekannt, dass sich ein Spinor unter der Lorentztransformation  $U = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}$  wie

$$Q'_A = U^\dagger Q_A U \quad (8)$$

verhält. Die Entwicklung der Exponentialfunktion und der Vergleich der transformierten Spinoren bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\omega_{\mu\nu})$  liefert schließlich den gesuchten Kommutator

$$[Q_A, M^{\mu\nu}] = (\sigma^{\mu\nu})^B_A Q_B. \quad (9)$$

Aufgrund der Graduierung gilt  $\mathbb{L}_1 \circ \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_0$ ; der Antikommutator zweier supersymmetrischer Generatoren muss daher eine Kombination der Generatoren der Poincaré-

---

Algebra ergeben. Ein allgemeiner Ansatz hierfür ist

$$\{Q_A, Q_B\} = h_{AB}^\mu P_\mu + k_{AB}^{\mu\nu} M_{\mu\nu}. \quad (10)$$

Die Matrizen  $h_{AB}^\mu$  und  $k_{AB}^{\mu\nu}$  lassen sich wie folgt aus den Dirac-Matrizen  $\gamma^\mu$  und dem Ladungskonjugator  $C$  konstruieren

$$\begin{aligned} h_{AB}^\mu &= c_1 \gamma^\mu C, \\ k_{AB}^{\mu\nu} &= c_2 \Sigma^{\mu\nu} C, \\ \Sigma_{AB}^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} (\sigma^{\mu\nu})_A^B & 0 \\ 0 & (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{A}}^{\dot{B}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Kombiniert man diesen Ansatz mit der Jakobi-Identität, erhält man die Relation

$$2ic_2(\Sigma_{\mu\rho} P^\rho)_{AB} = 0, \quad (12)$$

was nur für  $c_2 = 0$  erfüllt ist. Eine verbreitete Konvention bezüglich des verbleibenden Parameters ist  $c_1 = 2$ . Multiplikation von rechts mit einem weiteren Ladungskonjugator und Ausnutzen der Eigenschaft  $Q = C\bar{Q}^T$  führt schließlich auf

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 2\sigma_{AB}^\mu P_\mu. \quad (13)$$

Zwei hintereinander ausgeführte SUSY-Transformationen erzeugen nach Gleichung (13) eine Translation in der Raumzeit. Da hierbei die Poincaré-Invarianz beachtet werden muss, kann eine Verbindung zu der allgemeinen Relativitätstheorie hergestellt werden (vgl. [9]). Wählt man eine lokale Supersymmetrie, so führt dies zu der Theorie der Supergravitation.

Um die supersymmetrische Algebra zu vervollständigen müssen noch die Antikommutatoren zwischen den  $Q_A$  bestimmt werden. Hierzu betrachtet man den Kommutator

$$[P^\mu, \{Q_A, Q_B\}]. \quad (14)$$

Da die supersymmetrischen Generatoren mit den Translationsgeneratoren der Poin-

---

caré-Algebra kommutieren, folgt direkt

$$\{Q_A, Q_B\} = \{\bar{Q}_{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 0. \quad (15)$$

## 2.2 Superraum und Superfelder

### 2.2.1 Allgemeine Superfelder

Im obigen Abschnitt 2.1 wurde die Algebra aufgestellt, die den SUSY-Generatoren zugrunde liegt. Nun wird ihre Darstellung und Wirkung auf sogenannte Superfelder untersucht. Diese Felder sind in einem Superraum definiert. Ähnlich zur Erweiterung der Poincaré-Algebra wird nun der Minkowski-Raum mit seinen vier bosonischen Dimensionen  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  um vier grassmannartigen Freiheitsgrade  $(\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4)$  ergänzt, womit eine gleiche Anzahl an bosonischen und fermionischen Freiheitsgraden vorliegt. Die fermionischen werden zu zwei Weyl-Spinoren  $(\theta, \bar{\theta})$  zusammengefasst. Der Superraum wurde erstmals 1974 von Salam und Strathdee eingeführt (vgl. [23]). Eine Zusammenfassung der Grassmann-Algebra ist im Appendix B zu finden.

Führt man eine Translation im Superraum aus, so transformiert sich ein Superfeld gemäß

$$\mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \mathcal{F}(x^\mu + \xi^\mu, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}) = U \mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}), \quad (16)$$

wobei  $\xi^\mu = a^\mu - i\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon}$  und  $U$  eine Transformationsmatrix ist. Hierbei stellt  $a^\mu$  eine Translation im vierdimensionalen Minkowski-Raum dar und  $\epsilon$  und  $\bar{\epsilon}$  sind grassmannartige Weyl-Spinoren, die einer Drehung in den fermionischen Freiheitsgraden entsprechen (vgl. [9]). Eine Taylorentwicklung des Feldes in erster Ordnung ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x^\mu + \xi^\mu, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}) &= \mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) + \xi^\mu \partial_\mu \mathcal{F} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} + \bar{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{\theta}} + \sigma(\xi^2, \theta^2, \bar{\theta}^2) \quad (17) \\ &= \left[ 1 + a^\mu \partial_\mu + \epsilon \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i\sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \right) + \bar{\epsilon} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i\bar{\sigma}^\mu \theta \partial_\mu \right) \right] * \\ &\quad \mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}). \end{aligned}$$

---

Vergleicht man diese Entwicklung mit dem Ansatz

$$U = e^{i(a^\mu \hat{P}_\mu + \epsilon \hat{Q} + \bar{\epsilon} \hat{\bar{Q}})}, \quad (18)$$

findet man die Darstellung der Operatoren

$$\begin{aligned} \hat{P}_\mu &= -i\partial_\mu, \\ i\hat{Q} &= \frac{\partial}{\partial\theta} - i\sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu, \\ i\bar{Q} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\bar{\sigma}^\mu \theta \partial_\mu. \end{aligned} \quad (19)$$

Um den Teilchengehalt eines Superfeldes zu bestimmen, wird das Superfeld in Potenzen der fermionischen Freiheitsgrade entwickelt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)M(x) \\ &\quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) + \theta\sigma^\mu \bar{\theta}A_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) \\ &\quad + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})D(x). \end{aligned} \quad (20)$$

Aus der Forderung, dass sich  $\mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta})$  wie ein Lorentz-Skalar transformiert, folgen die Transformationseigenschaften der Komponentenfelder, die Aufschluss über den Teilchengehalt bieten. Somit enthält ein Superfeld  $\mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta})$ :

- 4 komplexe skalare Felder  $f(x), M(x), N(x), D(x)$
- 2 linkshändige Weyl-Spinoren  $\phi(x), \alpha(x)$
- 2 rechtshändige Weyl-Spinoren  $\bar{\chi}(x), \bar{\lambda}(x)$
- 1 komplexes Vektorfeld  $A_\mu$ .

Allgemein ergibt das Produkt zweier Superfelder  $\mathcal{F}_1$  und  $\mathcal{F}_2$ , ebenso wie deren Linearkombination  $\mathcal{F} = a\mathcal{F}_1 + b\mathcal{F}_2$  und die Ableitung  $\partial_\mu \mathcal{F}$ , wieder ein Superfeld. Damit dies auch für die Differenzierung nach den Spinorindizes  $\partial_A \mathcal{F}$  gilt, werden die kovarianten



---

Ableitungen eingeführt

$$\begin{aligned} D_A &= \partial_A + i(\sigma^\mu \bar{\theta})_A \partial_\mu \\ \bar{D}_{\dot{A}} &= -\bar{\partial}_{\dot{A}} + i(\bar{\sigma}^\mu \theta)_{\dot{A}} \partial_\mu. \end{aligned} \tag{21}$$

Das obige Superfeld entspricht keiner irreduziblen Darstellung. Diese lassen sich mittels verschiedenen SUSY-kovarianten Bedingungen finden, die die Superfelder in drei Klassen unterteilen:

- $\bar{D}_{\dot{A}} \mathcal{F} = 0 \quad \Rightarrow$  Chirales skalares Superfeld,
- $D_A \mathcal{F} = 0 \quad \Rightarrow$  Antichirales skalares Superfeld,
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\dagger \quad \Rightarrow$  Vektor-Superfeld.

Die chiralen bzw. antichiralen Superfelder werden den Materiefeldern zugeordnet, während das vektorielle Superfeld Eichfelder repräsentiert.

### 2.2.2 Chirale Superfelder

Um das chirale Superfeld genauer zu betrachten, wird zunächst ein Wechsel in den komplexen Superraum durchgeführt. Die neuen Koordinaten lauten

$$(y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta'_A = \theta_A, \bar{\theta}'_{\dot{A}} = \bar{\theta}_{\dot{A}}). \tag{22}$$

Die transformierten partiellen Ableitungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \\ \frac{\partial}{\partial \theta^A} &= \frac{\partial \theta'^B}{\partial \theta^A} \frac{\partial}{\partial \theta'^B} + \frac{\partial y^\mu}{\partial \theta^A} \frac{\partial}{\partial y^\mu} = \frac{\partial}{\partial \theta'^A} + i(\sigma^\mu \bar{\theta}'_A) \frac{\partial}{\partial y^\mu} \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{A}}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'^{\dot{A}}} - i(\theta'^\mu \sigma_\mu)_{\dot{A}} \frac{\partial}{\partial y^\mu}. \end{aligned} \tag{23}$$

Damit nimmt die kovariante Ableitung in den neuen Koordinaten die Form

$$\bar{D}_{\dot{A}}(y^\mu, \theta', \bar{\theta}') = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'^{\dot{A}}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{A}}} \tag{24}$$

an. Die Bedingung für chirale Superfelder lautet in komplexen Koordinaten

$$\bar{D}_{\dot{A}}\phi(y^\mu, \theta, \bar{\theta}) = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{A}}}\phi(y^\mu, \theta, \bar{\theta}) = 0. \quad (25)$$

Das chirale Superfeld hängt somit im komplexen Superraum nicht von  $\bar{\theta}$  ab. Das Interesse besteht nun darin, eine entsprechende Darstellung des chiralen Superfeldes im reellen Superraum zu finden. Dazu werden die Koordinaten rücktransformiert und eine Taylorentwicklung durchgeführt. Man erhält

$$\begin{aligned} \phi(x, \theta, \bar{\theta}) = & \varphi(x) + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2!}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu\partial_\nu\varphi \\ & + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\sqrt{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\theta\psi(x) + (\theta\theta)F(x). \end{aligned} \quad (26)$$

Mit Hilfe der Fierz-Identitäten

$$\begin{aligned} (\theta\sigma^\mu\bar{\phi})\theta\chi &= -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\chi\sigma^\mu\phi) \\ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta}) &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) \end{aligned} \quad (27)$$

kann die Gleichung (27) umgeordnet werden. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \phi(x, \theta, \bar{\theta}) = & \varphi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + (\theta\theta)F(x) + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi(x) \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\partial_\mu(\psi(x)\sigma^\mu\bar{\theta}) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu\partial^\mu\varphi(x). \end{aligned} \quad (28)$$

An der irreduziblen Darstellung kann der eigentliche Teilchengehalt eines chiralen Superfeldes abgelesen werden:

- 1 komplexes skalares Feld  $\varphi(x)$ , welches in der supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells den Sleptonen und Squarks entspricht,
- 1 linkschändiges Weyl-Spinorfeld  $\psi(x)$ , das in der supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells den Leptonen und Quarks zugeordnet wird,
- 1 komplexes skalares Hilfsfeld  $F(x)$ , welches bei dem Übergang auf die on-shell Bedingung entfällt.

---

Das antichirale Superfeld kann durch hermitesche Konjugation des chiralen Feldes berechnet werden.

### 2.2.3 Das Vektor-Superfeld

Ein vektoriell Superfeld wird beschrieben durch (vgl. [9])

$$\begin{aligned}
 V(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)M(x) \\
 & + (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(x) \\
 & + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\alpha}(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x).
 \end{aligned} \tag{29}$$

Vergleicht man dieses Vektor-Superfeld mit seinem hermitesch-konjugierten unter der Bedingung  $V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})$  wird ersichtlich, dass die Komponentenfelder über

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f^*(x), \\
 A_\mu(x) &= A_\mu^*(x), \\
 d(x) &= d^*(x), \\
 M(x) &= N^*(x), \\
 \phi(x) &= \chi(x), \\
 \lambda(x) &= \alpha(x)
 \end{aligned} \tag{30}$$

miteinander im Zusammenhang stehen. Hierbei enthalten die Spinoren  $\phi(x)$  und  $\lambda(x)$  insgesamt acht fermionische und die Komponentenfelder  $f(x), A_\mu(x), d(x)$  und  $M(x)$  acht bosonische Freiheitsgrade, wie von der Supersymmetrie verlangt. Wirkt eine SUSY-Eichtransformation der Form

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow V'(x, \theta, \bar{\theta}) = V(x, \theta, \bar{\theta}) + (\phi(x) + \phi^\dagger(x)) \tag{31}$$

---

auf das Vektor-Superfeld, so kann aus einem Komponentenvergleich das Transformationsverhalten der Komponentenfelder abgelesen werden:

$$\begin{aligned}
\lambda'(x) &= \lambda(x) \\
d'(x) &= d(x) \\
A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - 2\partial_\mu \Lambda \\
f'(x) &= f(x) + \varphi(x) + \varphi^*(x) \\
\phi'(x) &= \phi(x) - i\sqrt{2}\psi \\
M'(x) &= M(x) - 2iF(x),
\end{aligned} \tag{32}$$

wobei  $\Lambda = \text{Im}(\varphi(x))$ . Da im späteren Verlauf dieser Arbeit das Interesse nur an einem Vektorfeld  $A_\mu(x)$  für die Gluonen und einem Weyl-Spinorfeld  $\lambda(x)$  für die Gluinos besteht, müssen die übrigen Felder eliminiert werden. Dies kann durch die Wess-Zumino-Eichung

$$\begin{aligned}
\varphi(x) + \varphi^*(x) &= -f(x) \\
\psi(x) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\phi(x) \\
F(x) &= -\frac{i}{2}M(x).
\end{aligned} \tag{33}$$

realisiert werden. Die ungewünschten Komponentenfelder entfallen und für das Vektorfeld in der Wess-Zumino-Eichung ergibt sich

$$\begin{aligned}
V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) &= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) [A_\mu(x) + i\partial_\mu(\varphi(x) - \varphi^*(x))] \\
&\quad + i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}(x)) - i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\lambda(x)) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x).
\end{aligned} \tag{34}$$

Um die störende Abhängigkeit von  $\varphi(x)$  zu beseitigen, wird  $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + i\partial_\mu(\varphi(x) - \varphi^*(x))$  umdefiniert. Die Zahl der Eichfreiheitsgrade kann mit der Eichfixierung  $A'_0(x) = 0$  um eins dezimiert werden. Dies führt auf das Vektor-

---

Superfeld der Form

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = (\theta \sigma^\mu \bar{\theta}) A_\mu(x) + i(\theta \theta)(\bar{\theta} \bar{\lambda}(x)) - i(\bar{\theta} \bar{\theta})(\theta \lambda(x)) + (\theta \theta)(\bar{\theta} \bar{\theta}) d(x) \quad (35)$$

welches nur noch von den geforderten Feldern  $A_\mu(x)$  und  $\lambda(x)$  und einem Hilfsfeld  $d(x)$  abhängt.

## 2.3 Die Formulierung von SUSY- und eichinvarianten Lagrangedichten

Um eine SUSY-invariante Wirkung

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \quad (36)$$

zu erhalten, sollte die Lagrangedichte nur Terme enthalten, die sich unter SUSY-Transformationen wie totale Divergenzen verhalten. Aufgrund des Gauß'schen Integralsatzes ist es möglich, das Volumenintegral über die Divergenzen als Oberflächenintegral über die auftretenden Felder umzuschreiben. Werden die Integralgrenzen ins Unendliche gelegt, so sinken die Felder dort aufgrund der Normierung auf null ab und die unerwünschten Terme entfallen. Aus dem Transformationsverhalten der Komponentenfelder wird deutlich, dass dies nur auf die  $D$ - und die  $F$ -Komponenten der Superfelder zutrifft

$$\begin{aligned} \delta d(x) &= \frac{i}{2} \partial_\mu (\epsilon \sigma^\mu \lambda(x) - \alpha(x) \sigma^\mu \bar{\epsilon}) \\ \delta f(x) &= i\sqrt{2} \partial_\mu (\bar{\epsilon} \bar{\sigma}^\mu \psi) . \end{aligned} \quad (37)$$

Eine Lagrangedichte, die invariant unter SUSY-Transformationen ist, kann daher nur aus Termen der  $D$ - und  $F$ -Komponenten bestehen. Betrachtet man eine Eichtransformation der Form

$$\begin{aligned} \phi(x, \theta, \bar{\theta}) &\rightarrow e^{-i\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})} \phi(x, \theta, \bar{\theta}) \\ \phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) &\rightarrow \phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) e^{i\Lambda^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})} , \end{aligned} \quad (38)$$

---

ist ersichtlich, dass der kinetische Term der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}'_{kin} = \phi'^{\dagger}(x, \theta, \bar{\theta}) \phi'(x, \theta, \bar{\theta}) \big|_D = \phi^{\dagger}(x, \theta, \bar{\theta}) e^{i(\Lambda^{\dagger}(x, \theta, \bar{\theta}) - \Lambda(x, \theta, \bar{\theta}))} \phi(x, \theta, \bar{\theta}) \big|_D \quad (39)$$

nicht eichinvariant ist. Um dieses Problem zu lösen, wird ein exponentieller Term mit einem vektoriellen Superfeld eingeführt, der sich wie folgt transformiert

$$e^{V(x, \theta, \bar{\theta})} \rightarrow e^{-i\Lambda^{\dagger}(x, \theta, \bar{\theta})} e^{V(x, \theta, \bar{\theta})} e^{i\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})} . \quad (40)$$

Auf diese Weise lässt sich ein eichinvarianter Propagationsterm für das Feld  $\phi(x, \theta, \bar{\theta})$  konstruieren

$$\mathcal{L}_{kin} = \phi^{\dagger}(x, \theta, \bar{\theta}) e^{V(x, \theta, \bar{\theta})} \phi(x, \theta, \bar{\theta}) \big|_D . \quad (41)$$

Die expliziten kinetischen Terme der Komponentenfelder ergeben sich, wenn für das chirale Superfeld die Entwicklung in der Gleichung (27) eingesetzt wird. Neben dem fermionischen Term wird ein Propagationsterm für das vektorielle Eichfeld benötigt. Hierfür wird zunächst der supersymmetrische Feldstärke-Tensor (vgl. [9])

$$W_A(x, \theta, \bar{\theta}) = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})e^{-V(x, \theta, \bar{\theta})}D_A e^{V(x, \theta, \bar{\theta})} \quad (42)$$

definiert, dessen Verhalten unter Eichtransformationen gegeben ist durch

$$W_A(x, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow e^{-i\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})} W_A(x, \theta, \bar{\theta}) e^{i\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})} . \quad (43)$$

Somit ergibt sich der Eichfeldterm der Lagrangedichte zu

$$\mathcal{L}_E = Tr [(W^A W_A)_F] + (h.c.) . \quad (44)$$

In diesem Ausdruck läuft die Spur über die Farbindizes und  $(h.c.)$  steht für den hermitesch konjugierten Anteil, durch den der Term reell bleibt. Durch die zyklische Vertauschbarkeit der Spur bleibt die Eichinvarianz des Lagrangeterms gewährleistet. Um die SUSY- und eichinvariante Lagrangedichte zu verallgemeinern, werden noch Massen-

---

terme für das chirale Feld und Interaktionsterme hinzugefügt. Die Interaktionsterme sind aufgrund der Renormalisierungsbedingungen auf Terme begrenzt, die quadratisch oder kubisch in den chiralen Superfeldern sind. Somit hat die allgemeinste Lagrangedichte die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} \text{Tr} \left[ (W^A W_A)_F + (\bar{W}_{\dot{A}} \bar{W}^{\dot{A}})_F \right] + (\phi^\dagger e^V \phi)_D \\ & + \left( \frac{1}{2} m_{ij} \phi_i \phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \phi_i \phi_j \phi_k \right)_F + (h.c.), \end{aligned} \quad (45)$$

wobei  $g_{ijk}$  eine Kopplungskonstante ist. Explizite Massenterme für die fermionischen Felder und Yukawa-Terme für die Interaktion zwischen Bosonen und Fermionen kommen durch die Multiplikation der entwickelten Superfelder zustande.

## 2.4 Die supersymmetrische Yang-Mills-Theorie

### 2.4.1 Die Wirkung

Für die supersymmetrische Yang-Mills-Theorie (SYM-Theorie) werden nur der Eichanteil der obigen Lagrangedichte betrachtet und Materiefelder vernachlässigt. In diesem Fall erhält man die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{Tr} \left[ (W^A W_A)_F \right] + (h.c.). \quad (46)$$

Für eine supersymmetrisch-invariante Wirkung wird der  $F$ -Anteil des  $(W^A W_A)$ -Terms benötigt. Dieser Term kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} W^A W_A = & \left[ i\lambda^A - 2d\theta^A - (\sigma^{\mu\nu}\theta)^A F_{\mu\nu} - (\theta\theta)(\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda})^A \right] \\ & \left[ i\lambda_A - 2d\theta_A - (\sigma^{\rho\sigma}\theta)_A F_{\rho\sigma} - (\theta\theta)(\sigma^\rho\partial_\rho\bar{\lambda})_A \right], \end{aligned} \quad (47)$$

und lässt sich mit der Relation

$$(\phi\sigma^{\mu\nu}\phi) = \theta^3 = 0 \quad (48)$$

umformen zu

$$\begin{aligned}
W^A W_A = & -(\lambda\lambda) - 2id(\theta\lambda) - i(\lambda\sigma^{\rho\sigma}\theta)F_{\rho\sigma} - i(\theta\theta)(\lambda\sigma^\rho\partial_\rho\bar{\lambda}) \\
& - 2id(\theta\lambda) + 4d^2(\theta\theta) - i(\lambda\sigma^{\mu\nu}\theta)F_{\mu\nu} + (\sigma^{\mu\nu}\theta)^A(\sigma^{\rho\sigma}\theta)_A F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \\
& - i(\theta\theta)(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}) .
\end{aligned} \tag{49}$$

Nutzt man nun die Beziehung

$$(\sigma^{\mu\nu}\theta)^A(\sigma^{\rho\sigma}\theta)_A F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + iF_{\mu\nu}^*F^{\mu\nu}) \tag{50}$$

mit

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} , \tag{51}$$

so erhält man die Lagrangedichte in der Weyl-Darstellung

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{i}{2}(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}) + d^2 - \frac{1}{8}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{8}F_{\mu\nu}^*F^{\mu\nu} \\
& + \frac{i}{2}(\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) + d^2 - \frac{1}{8}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{8}F_{\mu\nu}^*F^{\mu\nu} \\
= & -\frac{i}{2}(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2d^2 .
\end{aligned} \tag{52}$$

In der Majorana-Darstellung nimmt die Lagrangedichte die Form

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{i}{2}\bar{\lambda}^a \gamma^\mu D_\mu \lambda^a \tag{53}$$

an, wobei es sich bei  $\lambda^a$  und  $\bar{\lambda}^a$  um Majorana-Spinoren in der adjungierten Darstellung handelt und  $a$  die Anzahl der Gruppengeneratoren durchläuft. In der Gleichung (53) sind

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \\
D_\mu \lambda &= (\partial_\mu + gf_{abc}A_\mu^b)\lambda.
\end{aligned} \tag{54}$$

Da alle Felder der Lagrangedichte eichinvariant sind, folgt auch die Eichinvarianz von



---

$\mathcal{L}[A^\mu, \lambda^a]$ . Das Hilfsfeld entfällt aufgrund seiner Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d} - \underbrace{\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{L})}}_{=0} \leftrightarrow d = 0. \quad (55)$$

In der dargestellten Lagrangedichte sind nur masselose Majorana-Fermionen enthalten. Nach der Supersymmetrie muss die gleiche Anzahl von fermionischen und bosonischen Freiheitsgraden vorhanden sein, weshalb die supersymmetrischen Partnerfermionen durch Majorana-Spinoren ausgedrückt werden. Diese Spinoren beschreiben elektrisch ungeladene Teilchen und haben daher nur zwei Freiheitsgrade. Des Weiteren wird hier die adjungierte Darstellung genutzt, da in supersymmetrischen Theorien Bosonen und Fermionen in der gleichen Darstellung formuliert werden, während für die Quarks weiterhin die Fundamentaldarstellung gilt. Ein Massenterm der Form

$$\mathcal{L}_m = m_g(\lambda^a \lambda_a + \bar{\lambda}^a \bar{\lambda}_a) \quad (56)$$

würde die Eichinvarianz der Lagrangedichte leicht brechen, d.h. wichtige Eigenschaften der SUSY wären weiterhin erhalten.

#### 2.4.2 SUSY-Transformation der Lagrangedichte

Im folgenden Abschnitt soll gezeigt werden, dass die aufgestellte Lagrangedichte invariant unter SUSY-Transformationen ist. Das Transformationsverhalten der auftretenden Komponentenfelder unter Supersymmetrie ist durch

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= 2i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^a = -2i\bar{\lambda}^a\gamma_\mu\epsilon, \\ \delta\lambda^a &= -i\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a}\epsilon, \\ \delta\bar{\lambda}^a &= i\bar{\epsilon}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu,a} \end{aligned} \quad (57)$$

gegeben (vgl. [9]). Anhand dieser Transformationen ist erkenntlich, dass bosonische Felder in fermionische und analog fermionische Felder in bosonische umgewandelt werden. Um eine SUSY-Transformation auf die Lagrangedichte wirken zu lassen, müssen

die einzelnen Komponentenfelder transformiert werden. Dies führt auf den Ausdruck

$$\delta\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{2}F^{\mu\nu a}\delta F_{\mu\nu}^a}_I + \underbrace{\frac{i}{2}\delta\bar{\lambda}^a\gamma^\mu D_\mu\lambda^a}_{II} + \underbrace{\frac{i}{2}\bar{\lambda}^a\gamma^\mu\delta(D_\mu\lambda^a)}_{III}. \quad (58)$$

Im Folgenden werden die Terme  $I. - III.$  berechnet und gezeigt, dass sich der transformierte Anteil der Lagrangedichte proportional zur Ableitung des Superstromes  $\partial_\mu S$  ist. Aus dem Noether-Theorem folgt, dass jeder kontinuierlichen Symmetrie ein erhaltener Strom zugeordnet werden kann. Somit gilt  $\partial_\mu S = 0$ , woraus die SUSY-Invarianz der Lagrangedichte folgt.

Für den  $I.$ -Term gilt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}F^{\mu\nu a}\delta F_{\mu\nu}^a &= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu a} [\partial_\mu\delta A_\nu^a - \partial_\nu\delta A_\mu^a + gf_{abc}(\delta A_\mu^b A_\nu^c + A_\mu^b\delta A_\nu^c)] \\ &= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu a} [2i\bar{\epsilon}\gamma_\nu\partial_\mu\lambda^a - 2i\bar{\epsilon}\gamma_\mu\partial_\nu\lambda^a + 2gif_{abc}(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^b A_\nu^c + A_\mu^b\bar{\epsilon}\gamma_\nu\lambda^c)] \\ &= -2iF^{\mu\nu a}\bar{\epsilon}\gamma_\nu\partial_\mu\lambda^a - 2igf_{abc}F^{\mu\nu a}\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^b A_\nu^c \\ &= 2iF^{\mu\nu a}\partial_\mu\bar{\lambda}^a\gamma_\nu\epsilon + 2igf_{abc}F^{\mu\nu b}\bar{\lambda}^a\gamma_\nu\bar{\epsilon}A_\mu^c \\ &= 2iF^{\mu\nu a}D_\mu\bar{\lambda}^a\gamma_\nu\epsilon. \end{aligned} \quad (59)$$

Hierbei wurde der antisymmetrische Charakter des Feldstärketensors und der Strukturkonstante genutzt. Für den  $II.$ -Term erhält man mit dem obigen Transformationsverhalten und durch das Ausschreiben der Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\delta\bar{\lambda}^a\gamma^\mu D_\mu\lambda^a &= -\frac{1}{2}\bar{\epsilon}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}\gamma^\tau D_\tau\lambda^a \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\tau\lambda^a\gamma^\tau\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}\epsilon - \frac{1}{2}gf_{abc}\bar{\lambda}^c A_\tau^b\gamma^\tau\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}\epsilon \\ &= -\frac{1}{2}\partial_\tau\bar{\lambda}^a\gamma^\tau\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}\epsilon - \frac{1}{2}gf_{abc}\bar{\lambda}^a A_\tau^c\gamma^\tau\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu b}\epsilon. \end{aligned} \quad (60)$$

Die Berechnung des  $III.$ -Termes ergibt

$$\begin{aligned} \frac{i}{2}\bar{\lambda}^a\gamma^\mu\delta(D_\mu\lambda^a) &= \frac{i}{2}\bar{\lambda}^a\{-i\gamma^\tau\partial_\tau\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}\epsilon + igf_{abc}[2\gamma^\mu\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^b\lambda^c - \gamma^\tau A_\tau^b\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu c}\epsilon]\} \\ &= \frac{1}{2}\bar{\lambda}^a\gamma^\tau\partial_\tau\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}\epsilon + gf_{abc}\left[-\bar{\lambda}^a\gamma^\mu\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^b\lambda^c + \frac{1}{2}\bar{\lambda}^a\gamma^\tau A_\tau^b\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu c}\epsilon\right]. \end{aligned} \quad (61)$$

---

Mit der Relation

$$f_{abc}\bar{\lambda}^a\gamma^\mu\bar{\epsilon}\gamma_\mu\lambda^b\lambda^c = f_{abc}\bar{\lambda}^a\gamma_\mu\lambda^b\bar{\epsilon}\gamma^\mu\lambda^c = 0 \quad (62)$$

(vgl. [12]) folgt somit

$$\frac{i}{2}\bar{\lambda}^a\gamma^\mu\delta(D_\mu\lambda^a) = \frac{1}{2}\bar{\lambda}^a\gamma^\tau\partial_\tau\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}\epsilon - \frac{1}{2}gf_{abc}\bar{\lambda}^a\gamma^\tau A_\tau^c\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu b}\epsilon. \quad (63)$$

Addition der Terme *I.* bis *III.* führt auf

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & 2iF^{\mu\nu a}\partial_\mu\bar{\lambda}^a\gamma_\nu\epsilon + 2igf_{abc}F_{\mu\nu}^b\bar{\lambda}^a\gamma_\nu\epsilon A_\mu^c \\ & - \frac{1}{2}\partial_\tau\bar{\lambda}^a\gamma^\tau\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu a}\epsilon - \frac{1}{2}gf_{abc}\bar{\lambda}^a A_\tau^c\gamma^\tau\sigma_{\mu\nu}F_{\mu\nu}^b\epsilon \\ & + \frac{1}{2}\bar{\lambda}^a\gamma^\tau\partial_\tau\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} - \frac{1}{2}gf_{abc}\bar{\lambda}^a\gamma^\tau A_\tau^c\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu b}\epsilon. \end{aligned} \quad (64)$$

Das Produkt dreier  $\gamma$ -Matrizen ist gegeben durch

$$\gamma_\tau\gamma_\mu\gamma_\nu = g_{\tau\mu}\gamma_\nu + g_{\mu\nu}\gamma_\tau - g_{\tau\nu}\gamma_\mu + i\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma}\gamma_5\gamma^\sigma. \quad (65)$$

Nutzt man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\nu} &= i(\gamma_\mu\gamma_\nu - g_{\mu\nu}) \\ g_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (66)$$

ergibt sich

$$\gamma_\tau\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = [2ig_{\tau\mu}\gamma_\nu - \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma}\gamma_5\gamma^\sigma]F^{\mu\nu}. \quad (67)$$

Einsetzen dieser Relation in die Gleichung (64) und zusammenfassen liefert

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & \partial_\mu\{iF^{\mu\nu a}\bar{\lambda}^a\gamma_\nu\epsilon\} + \partial^\tau\{\frac{1}{2}\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma}\bar{\lambda}^a\gamma_5\gamma^\sigma F^{\mu\nu a}\epsilon\} \\ & - \epsilon_{\tau\mu\nu\sigma}\bar{\lambda}^a\gamma_5\gamma^\sigma(\partial^\tau F^{\mu\nu a} + gf_{abc}A^{\tau b}F^{\mu\nu c})\epsilon. \end{aligned} \quad (68)$$

---

Der letzte Term in Gleichung (68) verhält sich nicht wie eine totale Divergenz und ist daher störend. Er kann mit Hilfe der Bianchi-Identität

$$\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} [D^\tau, F^{\mu\nu}] = 0 \quad (69)$$

eliminiert werden. Die Herleitung der Gleichung (69) ist im Appendix A skizziert. Somit gelangt man zu dem Ergebnis

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \bar{\epsilon}\partial_\mu \left\{ -iF^{\mu\nu a}\gamma_\nu\lambda^a - \frac{1}{2}\epsilon_{\tau\sigma\rho}^\mu\gamma^\rho\gamma_5\lambda^a F^{\tau\sigma a} \right\} \\ &= \bar{\epsilon}\partial_\mu S^\mu(x). \end{aligned} \quad (70)$$

Hierbei ist  $S^\mu(x)$  der Superstrom. Aufgrund des Noether-Theorems verschwindet die Divergenz des Superstromes und die Lagrangedichte ist somit invariant unter supersymmetrischen Transformationen.

## 2.5 Spontane Brechung der Supersymmetrie

### 2.5.1 Der supersymmetrische Grundzustand

Eine exakte Supersymmetrie sagt zu jedem bekannten Teilchen ein supersymmetrisches Partnerteilchen mit gleicher Masse voraus, was im direkten Widerspruch zu dem beobachteten Teilchenspektrum steht, da keine Partnerteilchen bei den bekannten Massen gefunden wurden. Eine Erklärung dieses Problems ist die spontane Brechung der Supersymmetrie, deren Grundzüge in diesem Abschnitt vorgestellt werden und auf den Ausführungen von [29] basieren. Die spontane Symmetriebrechung würde zu erhöhten Massen der Partnerteilchen führen und den Widerspruch beseitigen.

Aus der SUSY-Algebra in Kapitel 2.1 können zwei wichtige Eigenschaften supersymmetrischer Theorien abgeleitet werden. Die erste dieser Eigenschaften ist die verschwindende Grundzustandsenergie. Dazu betrachtet man den Antikommutator zweier SUSY-

---

Generatoren

$$\begin{aligned}\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} \tilde{\sigma}^{\nu, A\dot{B}} &= 2(\sigma^{\mu, \dot{B}A} \sigma_{A\dot{B}}^\nu) P_\mu \\ &= 2 \underbrace{\text{Tr} [\sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu]}_{=2g^{\mu\nu}} P_\mu = 4P^\nu.\end{aligned}\tag{71}$$

Für den Impulsoperator gilt mit  $\nu = 0$

$$P^0 = \hat{H} = \frac{1}{4} \{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} \tilde{\sigma}^{0, \dot{B}A} = \frac{1}{4} \{Q_1, \bar{Q}_{\dot{1}}\} + \frac{1}{4} \{Q_2, \bar{Q}_{\dot{2}}\}.\tag{72}$$

Im letzten Schritt der Gleichung (72) wurde hierbei berücksichtigt, dass  $\sigma^0 = \mathbb{1}$  und die Kreuzeinträge daher entfallen.  $\hat{H}$  stellt den Hamilton-Operator dar. Schreibt man die Antikommutatoren aus und nutzt die Nilpotenz der SUSY-Generatoren, folgt für den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{4} (Q_1 + \bar{Q}_{\dot{1}})^2 + \frac{1}{4} (Q_2 + \bar{Q}_{\dot{2}})^2.\tag{73}$$

Weyl-Spinoren haben die Eigenschaft  $\bar{Q}_{\dot{A}} = Q_A^\dagger$  aus der folgt, dass Terme der Form  $(Q_A + \bar{Q}_{\dot{A}})$  hermitesch sind. Somit ist auch der Hamilton-Operator hermitesch und besitzt reelle Eigenwerte und damit ein positives Energiespektrum

$$E \geq 0.\tag{74}$$

Da der Grundzustand symmetrisch gegenüber Rotationen im Superraum sein muss, gilt

$$e^{i\alpha Q_A} |0\rangle \approx (1 + i\alpha Q_A) |0\rangle = |0\rangle.\tag{75}$$

Daher ergeben die SUSY-Generatoren auf den Vakuumzustand angewandt

$$Q_A |0\rangle = 0.\tag{76}$$

---

Für die Grundzustandsenergie folgt

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = E_0 = 0 . \quad (77)$$

Exakte supersymmetrische Grundzustände haben immer eine verschwindende Vakuumsenergie. Die Supersymmetrie wird spontan gebrochen, wenn das Vakuum eine von null abweichende Energie besitzt und damit

$$Q | 0 \rangle \neq 0 . \quad (78)$$

Liegt eine spontane Brechung der Supersymmetrie vor, so ist der Vakuumerwartungswert eines Feldes ungleich null. Aufgrund der geforderten Lorentz-Invarianz ist dies nur für die skalaren Hilfsfelder  $f(x)$  und  $d(x)$  möglich. Man unterscheidet zwischen der F-Term- und der D-Term-Brechung. Aus der spontanen Supersymmetriebrechung resultiert analog zur spontanen Brechung von Eichtheorien die Existenz eines masselosen Goldstone-Fermions, des sogenannten *Goldstino*. Für eine lokale Supersymmetrie werden die Goldstinos von den Eichbosonen „absorbiert“ und verleihen den Vektorbosonen einen longitudinalen Freiheitsgrad. In der Supergravitation erhalten die *Gravitinos* durch diesem Mechanismus ihre Masse.

### 2.5.2 Der Witten-Index und die Boson-Fermion-Regel

Zur Überprüfung, ob eine Supersymmetrie spontan gebrochen ist, wurde der Witten-Index  $\Delta$  eingeführt (vgl. [29]). Zustände können allgemein als bosonisch  $|b\rangle$  und fermionisch  $|f\rangle$  klassifiziert werden. Eine Rotation im Drehimpulsraum um den Winkel  $2\pi$  die auf einen bosonischen Zustand wirkt, lässt diesen unverändert

$$e^{2\pi i J_z} |b\rangle = |b\rangle . \quad (79)$$

Für Fermionen gilt dies aufgrund der Eigenschaften der  $SU(2)$ -Symmetrie in der die Transformationsmatrix  $U(2\pi\vec{e}) = -1$  ergibt, nicht mehr. Dabei ist  $\vec{e}$  der Einheitsvektor der Rotationsrichtung. Bei fermionischen Zuständen findet somit ein Vorzeichenwechsel

---

statt

$$e^{i2\pi J_z} |f\rangle = -|f\rangle . \quad (80)$$

Aus dieser Eigenschaft lässt sich die Relation

$$e^{2\pi i J_z} = (-1)^{N_F} \quad (81)$$

ableiten, wobei  $N_F$  der Fermionenzahl-Operator ist. Die Größe  $(-1)^{N_F}$  liefert einen Beitrag von  $+1$  wenn sie auf einen bosonischen (gerade Fermionenzahl) und  $-1$ , wenn sie auf einen fermionischen (ungerade Fermionenzahl) Zustand wirkt. Der Witten-Index ist definiert als

$$\begin{aligned} \Delta = \text{Tr} [(-1)^{N_F}] &= \sum_{\text{Bosonen}} \langle b | (-1)^{N_F} | b \rangle + \sum_{\text{Fermionen}} \langle f | (-1)^{N_F} | f \rangle \\ &= \sum_{\text{Bosonen}} \langle b | b \rangle - \sum_{\text{Fermionen}} \langle f | f \rangle = n_b - n_f . \end{aligned} \quad (82)$$

Hierbei sind  $n_b$  und  $n_f$  die Anzahlen an bosonischen- bzw. fermionischen Zustände. Für den Witten-Index gilt die Beziehung

$$(-1)^{N_F} Q_A = -Q_A (-1)^{N_F} . \quad (83)$$

Untersucht man dessen Wirkung auf den Antikommutator zweier SUSY-Generatoren, findet man

$$\begin{aligned} \Delta\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\} &= \text{Tr} [(-1)^{N_F} Q_A \bar{Q}_{\dot{B}}] + \text{Tr} [(-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{B}} Q_A] \\ &= \text{Tr} [(-1)^{N_F} Q_A \bar{Q}_{\dot{B}}] + \text{Tr} [Q_A (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot{B}}] \\ &= 2\sigma_{A\dot{B}}^\mu \text{Tr} [(-1)^{N_F} P_\mu] = 0 . \end{aligned} \quad (84)$$

Schließt man den Grundzustand mit  $P_\mu \neq 0$  aus, so muss  $\Delta = 0$  für Zustände mit  $E \neq 0$  sein. Dies hat zur Folge, dass Teilchen in allen Zuständen außerhalb des Vakuums nur mit ihren supersymmetrischen Partnern auftreten. Der Witten-Index vereinfacht sich

---

damit zu

$$\Delta = n_b^{E=0} - n_f^{E=0} . \quad (85)$$

In der Gleichung (85) werden nur Zustände mit  $E = 0$  betrachtet, da sich die Beiträge anderer Zustände aufgrund der Boson-Fermion-Regel gegenseitig aufheben. Wie oben erwähnt, ist die Vakuumsenergie für eine gebrochene Supersymmetrie  $E_0 > 0$ , weshalb der Witten-Index in diesem Fall verschwindet  $\Delta = 0$ .



---

## 3 Die Super-Yang-Mills Theorie auf dem Gitter

### 3.1 Allgemeine Gitterdiskretisierung

Die Formulierung der Super-Yang-Mills Theorie auf dem Gitter wird im Folgenden anhand von vier Schritten dargestellt. Die Ausführungen lehnen an die Quellen [4], [8], [22] und [24] an. Zunächst wird die Diskretisierung der vierdimensionalen Raumzeit eingeführt. Anschließend werden die Eich- und Fermionfelder auf das Gitter übertragen. Wurden die Felder definiert, kann die Gitterwirkung aus einem fermionischen und einem bosonischen Anteil konstruiert werden. Im Anschluß wird das Integrationsmaß der Wirkung an eine Gitterformulierung angepasst.

Zunächst wird für eine Gitterformulierung physikalischer Gesetze ein Übergang in eine euklidische Metrik benötigt. Diese kann durch eine Wick-Rotation aus der Minkowski-Metrik gewonnen werden, indem die reelle Zeit in die imaginäre Ebene rotiert wird

$$t \rightarrow i\tau. \quad (86)$$

Dadurch transformiert sich die zugrunde liegende Metrik mit einem Vorzeichenwechsel in der Zeitkomponente

$$-(dt)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \rightarrow (d\tau)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2. \quad (87)$$

Für eine  $\phi^4$ -Theory erhält man somit die euklidische Wirkung

$$S_E[\phi] = \int d^3x d\tau \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{m_0}{2} \phi^2 + \frac{g_0}{4!} \phi^4 \right\}, \quad (88)$$

wobei  $m_0$  die nicht-renormierte Masse und  $g_0$  die Kopplung darstellen. Unter dem Begriff Gitterdiskretisierung versteht man die Unterteilung der Raumzeit in ein vierdimensionales euklidisches Gitter (vgl. [4], [13], [15])

$$\Lambda = \{x = x_\mu\} \quad (89)$$

---

mit  $\mu = 1, 2, 3, 4$  und  $x_{1,2,3} = 0, 1, \dots, N_{S-1}$ ,  $x_4 = 0, 1, \dots, N_{T-1}$ . Die Entfernung der Gitterpunkte zueinander wird als Gitterkonstante bezeichnet und wird in dieser Arbeit in zeitlicher sowie in räumlicher Richtung identisch gewählt  $a_S = a_T = a$ . Des weiteren muss die Ableitung auf dem Gitter neu definiert werden. Da der Abstand zweier benachbarter Punkte nun diskretisiert ist, wird die Ableitung als Differenz einer Funktion auf diesen Punkten formuliert. Es kann nun unterschieden werden zwischen einer vorwärts und einer rückwärts gerichteten Ableitung.

$$\begin{aligned}\Delta_\mu^f f(x) &= \frac{1}{a}(f(x + a\hat{\mu}) - f(x)), \\ \Delta_\mu^b f(x) &= \frac{1}{a}(f(x) - f(x - a\hat{\mu})),\end{aligned}\tag{90}$$

wobei  $\hat{\mu}$  der Einheitsvektor in  $\mu$ -Richtung ist. Um den statistischen Fehler zu minimieren wird eine symmetrische Ableitung eingeführt

$$\partial_\mu f(x) = \frac{1}{2a}(f(x + \hat{\mu}) - f(x - \hat{\mu})).\tag{91}$$

An dieser Stelle wird ein Problem bei der Diskretisierung von supersymmetrischen Theorien deutlich. Wie in Kapitel 2.1 beschrieben, erzeugt der Antikommutator zweier SUSY-Generatoren eine infinitesimale Translation, welche in einer diskreten Raumzeit nicht umgesetzt werden kann. Die Supersymmetrie und die Poincaré-Invarianz werden daher durch die Gitterformulierung gebrochen. So ist ein hyperkubisches Gitter nur invariant gegenüber Rotationen um  $90^\circ$ . Gebrochene Symmetrien auf dem Gitter können jedoch im Kontinuums-Limes  $a \rightarrow 0$  wieder hergestellt werden. Der Kontinuums-Limes spielt eine wichtige Rolle in Gittertheorien, da somit die reale Physik angenähert wird. Um übertragbare Ergebnisse zu erhalten, müssen Volumeneffekte und weitere Gitterphänomene im Limes  $a \rightarrow 0$  verschwinden und die Gleichungen der Kontinuumsphysik ergeben.

## 3.2 Konstruktion einer Gittereichwirkung

Bewegt sich im Kontinuum ein Fermion in der Anwesenheit eines Eichfeldes  $A_\mu(x)$  von einem Punkt  $x$  zu einem Punkt  $y$ , so tritt eine Änderung des fermionischen Phasen-

---

faktors ein

$$\psi(y) = \mathcal{P}e^{\int_x^y igA_\mu(x)dx^\mu} \psi(x). \quad (92)$$

Es liegt nahe, ein analoges Prinzip auf dem Gitter einzuführen. Die Fermionen werden nur auf den Gitterpunkten definiert. Eichfelder stellen die Paralleltransporter zwischen den Gitterpunkten dar und verbinden diese

$$U(x, x + \hat{\mu}) \equiv U_\mu(x) = e^{iagA_\mu(x)}. \quad (93)$$

Aus diesem Grund werden sie als *Links* bezeichnet. Für Links in inverser Richtung gilt

$$U(x, x - \hat{\mu}) \equiv U_{-\mu}(x) = e^{iagA_\mu(x-\hat{\mu})} = U^\dagger(x - \hat{\mu}, x). \quad (94)$$

Die Links  $U_\mu(x)$  und  $U_\mu^\dagger(x)$  sind Matrizen der  $SU(3)$ -Gruppe. Auf dem Gitter können Pfade zwischen Gitterpunkten durch das Produkt der verbindenden Links beschrieben werden. Führt man eine lokale Eichtransformation

$$U_\mu(x) \rightarrow V(x)U_\mu(x)V^\dagger(x + \hat{\mu}) \quad (95)$$

mit  $V(x) \in SU(N)$  ein, wird die Formulierung einer eichinvarianten Gitterwirkung nötig. Auf dem Gitter können eichinvariante Objekte durch *Wilson-Loops*, also geschlossene Objekte konstruiert werden. Eine veranschaulichende Darstellung eines Gitterpfades und eines Wilson-Loopes ist in der Abbildung 3 gegeben.

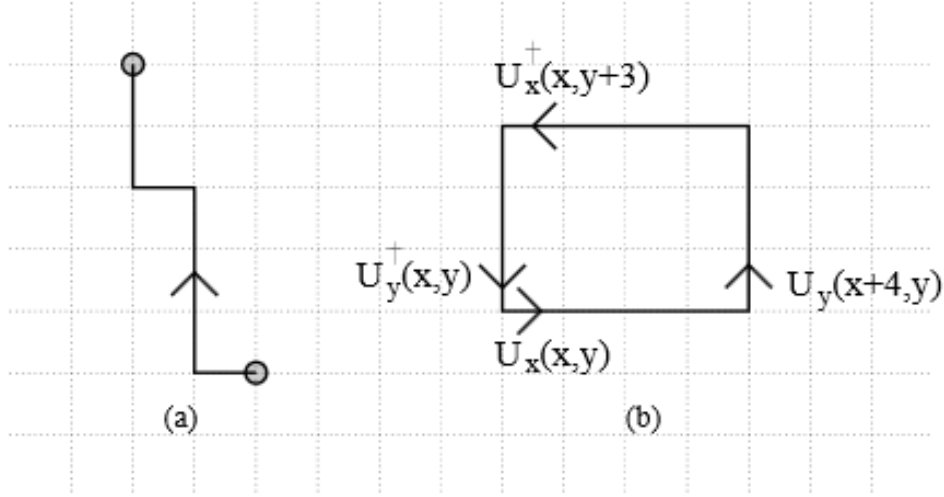


Abb. 3: a) Ein Pfad zwischen zwei Gitterpunkten kann aus einer Abfolge von Links konstruiert werden. b) Ein einfaches Beispiel für einen Wilson-Loop [4].

Der einfachste Wilson-Loop ist ein  $1 \times 1$ -Loop und wird als Plaquette bezeichnet

$$U_{\mu\nu} = U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \hat{\mu} + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x). \quad (96)$$

Da die fundamentale Darstellung eines Wilson-Loopes aus der  $SU(N \geq 3)$  komplex ist, entspricht die Realteilbildung einer Mittelung des eigentlichen Loopes und des komplex konjugierten Anteiles. Die Spur sichert mit der zyklischen Vertauschbarkeit die Eichinvarianz der Plaquette. Aufgrund dieser Eichinvarianz wird die Plaquette genutzt, um eine Gitter-Eichwirkung zu konstruieren. Die Wirkung wurde 1974 von Ken Wilson hergeleitet und lautet für Eichfelder einer  $SU(N)$ -Gruppe (vgl. [27])

$$S_W[U] = \frac{a^4 \beta}{4N} \sum_{x \in \Lambda} \sum_{\mu, \nu} \text{Tr} [F_{\mu\nu}(x)^2 + \mathcal{O}(a^2)] . \quad (97)$$

Eine detaillierte Herleitung dieser Wirkung ist im Anhang C zu finden. Der Parameter  $\beta$  wird als *Gitterkopplung* oder *inverse Kopplung* bezeichnet und ist definiert als

$$\beta = \frac{2N}{g_0^2}, \quad (98)$$

wobei  $g_0$  die unrenormierte Kontinuumskopplung ist. Bei Gitterrechnungen ist es oft von Vorteil möglichst kleine Loops zu verwenden, da so der benötigte Zeitaufwand

---

verringert wird. In der Wirkung ist die Summe  $a^4 \sum_{x \in \Lambda}$  mit der Raumzeitintegration im Kontinuumslimit zu identifizieren.

### 3.3 Konstruktion einer Fermionenwirkung auf dem Gitter

In diesem Abschnitt soll die Wirkung freier Fermionen auf dem Gitter hergeleitet werden. Als Fermionen treten in der vorliegenden Arbeit nur Gluinos auf, die die supersymmetrischen Partnerteilchen der Gluonen darstellen. Zunächst wird die naive Fermionendiskretisierung durchgeführt und das Ergebnis untersucht. Um auftretende Gittereffekte wie Fermionendoppler zu verhindern werden Modifikationen, wie z.B. der Wilson-Term eingeführt.

Aufgrund des Pauli-Prinzips ist die Vertauschung zweier identischer Fermionen antisymmetrisch. Diese Bedingung kann mathematisch durch Grassmann-Zahlen verwirklicht werden. Grassmannartige Fermionen besitzen die Eigenschaft

$$\{\psi^{(f)}(x)_\alpha, \psi^{(f')}(y)_\beta\} = 0. \quad (99)$$

Hierbei sind  $\alpha, \beta$  die Dirac-Indizes,  $a, b$  die Farb-Indizes und  $x, y$  die Raumzeitargumente. Eine kurze Zusammenfassung der Grassmann-Algebra befindet sich im Anhang B.

Im Folgenden wird aus Gründen der Übersichtlichkeit nur ein Flavour betrachtet. Die Kontinuumswirkung eines freien Fermions, das heißt ohne Interaktion mit externen Feldern, ist gegeben durch

$$S_F^0[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x). \quad (100)$$

Mit der Diskretisierung der partiellen Ableitung

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \frac{1}{2a}(\psi(x + \hat{\mu}) - \psi(x - \hat{\mu})) \quad (101)$$

---

erhält man die naive Gitterwirkung für Fermionen

$$S_F^0[\psi, \bar{\psi}] = a^4 \sum_{x \in \Lambda} \bar{\psi}(x) \left( \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{\psi(x + \hat{\mu}) - \psi(x - \hat{\mu})}{2a} + m\psi(x) \right). \quad (102)$$

Mit Hilfe des Dirac-Operators mit trivialen Links  $U_\mu(x) = \mathbb{1}$

$$D(x \mid y)_{\alpha\beta}^{ab} = \sum_{\mu=1}^4 (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \frac{\delta_{ab} \delta_{x+\hat{\mu},y} - \delta_{ab} \delta_{x-\hat{\mu},y}}{2a} + m\delta_{\alpha,\beta} \delta_{a,b} \delta_{x,y} \quad (103)$$

lässt sich die naive Fermionenwirkung mit einem Eichfeld formulieren als

$$S_F^0[\psi, \bar{\psi}, U] = a^4 \sum_{x,y \in \Lambda} \sum_{\alpha,\beta,a,b} \bar{\psi}(x)_\alpha D(x \mid y)_{\alpha\beta}^{ab} \psi(y)_\beta. \quad (104)$$

Die naive Fermionenwirkung wird nun mittels einer Fouriertransformation des Dirac-Operators untersucht. Auf dem Gitter ist eine Fouriertransformation definiert durch (vgl. [4])

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{|\Lambda|}} \sum_{n \in \Lambda} f(n) e^{-ipna}. \quad (105)$$

Hierbei ist  $|\Lambda|$  die Anzahl aller Gitterpunkte. Es wird jeweils eine Fouriertransformation für die Raumzeitpunkte  $x$  und  $y$  durchgeführt. Damit folgt für den Dirac-Operator im Impulsraum

$$\begin{aligned} \tilde{D}(p \mid q) &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x,y \in \Lambda} e^{-ipxa} D(x \mid y) e^{iqya} \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x,y \in \Lambda} e^{-ipxa} \left( \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{\delta_{x+\hat{\mu},y} - \delta_{x-\hat{\mu},y}}{2a} + m\mathbb{1} \delta_{x,y} \right) e^{iqya} \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x,y \in \Lambda} e^{-i(p-q)xa} \left( \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{e^{iq_\mu a} - e^{-iq_\mu a}}{2a} + m\mathbb{1} \right). \end{aligned} \quad (106)$$

Mit der Relation

$$\frac{1}{|\Lambda|} \sum_{p \in \tilde{\Lambda}} e^{ip(x-y)} = \delta(x-y) \quad (107)$$

---

und der Definition

$$\tilde{D}(p) = m\mathbb{1} + \frac{i}{a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_{\mu} \sin(p_{\mu}a), \quad (108)$$

erhält man aus der Gleichung (106)

$$\tilde{D}(p \mid q) = \delta(p - q) \tilde{D}(p). \quad (109)$$

Aus Wick's Theorem folgt, dass der inverse Dirac-Operator im Ortsraum  $D^{-1}(x \mid y)$  dem Quarkpropagator entspricht (vgl. [19]). Um diesen zu berechnen muss zunächst  $D^{-1}(p \mid q)$  bestimmt und eine inverse Fouriertransformation durchgeführt werden. Für die Rechnung wird die Gleichung

$$\left( a\mathbb{1} + i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} b_{\mu} \right)^{-1} = \frac{a\mathbb{1} - i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} b_{\mu}}{a^2 + \sum_{\mu} b_{\mu}^2} \quad (110)$$

verwendet. Somit folgt aus der Gleichung (108)

$$\tilde{D}(p)^{-1} = \frac{m\mathbb{1} - \frac{i}{a} \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin(p_{\mu}a)}{m^2 + \frac{1}{a^2} \sum_{\mu} \sin^2(p_{\mu}a)} \quad (111)$$

und der Quarkpropagator ergibt sich durch eine inverse Fouriertransformation zu

$$D^{-1}(x \mid y) = \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{p \in \tilde{\Lambda}} \tilde{D}(p)^{-1} e^{ip(x-y)a}. \quad (112)$$

Für masselose Fermionen ist der Propagator im Impulsraum von der Form

$$\tilde{D}(p)^{-1} \big|_{m=0} = \frac{-ia \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \sin(p_{\mu}a)}{\sum_{\mu} \sin^2(p_{\mu}a)}, \quad (113)$$

und geht im Kontinuumsimes in den Ausdruck

$$\tilde{D}(p)^{-1} \big|_{m=0} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{-i \sum_{\mu} \gamma_{\mu} p_{\mu}}{p^2} \quad (114)$$

---

über. Die Gleichung (114) weist im Kontinuum eine Polstelle bei  $p = (0, 0, 0, 0)$  auf, welche einem masselosen Fermion entspricht. Auf dem Gitter hingegen existieren aufgrund der Sinusfunktion im Nenner der Gleichung (113) Polstellen bei  $p_\mu = \pm \frac{\pi}{2}$ . Insgesamt entstehen auf diese Weise 15 Fermionendoppler, die unphysikalischen Teilchen entsprechen und die es zu umgehen gilt. Zur Lösung des Problemess wurde 1975 ein zusätzlicher Term von Wilson in den Dirac-Operator eingefügt, der im Kontinuumsimes verschwindet (vgl. [28]). Der Wilson-Term lässt die physikalische Polstelle bestehen und beseitigt die unphysikalischen. Somit nimmt der Dirac-Operator die Gestalt

$$\tilde{D}(p) = m\mathbb{1} + \frac{i}{a} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \sin(p_\mu a) + \mathbb{1} \frac{1}{a} \sum_{\mu=1}^4 (1 - \cos(p_\mu a)) \quad (115)$$

an. Für  $p_\mu = \pm \frac{\pi}{a}$  liefert der Wilson-Term einen weiteren Beitrag zur Masse

$$m_W = m + \frac{2l}{a}, \quad (116)$$

wobei  $l$  die Anzahl der Impulskomponenten gleich  $\frac{\pi}{2}$  ist. Für den Fall  $a \rightarrow 0$  divergieren die Dopplermassen und entkoppeln somit von der Kontinuumstheorie. Allerdings ist anzumerken, dass der Wilson-Term selbst die chirale Symmetrie auf dem Gitter explizit bricht, auch bei verschwindender Fermionenmasse. Weitergehend stellten Nielson und Ninomiya 1981 ein No-Go-Theorem auf das besagt (vgl. [18]), dass sich bei einer reellen, freien und lokalen Fermionenwirkung auf dem Gitter, die invariant unter chiralen Transformationen sowie unter Translationen ist, Fermionendoppler nicht vermeiden lassen.

Eine andere Möglichkeit zur Reduzierung der Doppler stellen die *staggered Fermionen* dar. Bei dieser Methode wird eine Transformation durchgeführt, die die effektive Brillouin-Zone im Impulsraum halbiert, wodurch die Randpunkte mit ihren entsprechenden Nullstellen entfallen. Somit wird die Anzahl der Doppler zwar reduziert, gänzlich eliminiert werden sie jedoch nicht. Allerdings bleibt die chirale Symmetrie der Wirkung bei masselosen Fermionen erhalten.

Die vorgestellte Fermionenwirkung basiert auf den naiv diskretisierten Ableitungstermen, die Diskretisierungsfehler der Größenordnung  $\mathcal{O}(a)$  aufweisen. Eine Möglichkeit,



diese Ungenauigkeiten zu verringern ist, die diskretisierten Ableitungsterme entsprechend zu korrigieren. Dazu wird die symmetrische Ableitung einer Funktion  $f$  entwickelt

$$\frac{f(x+a) - f(x-a)}{2a} = f'(x) + a^2 C^{(2)}(x) + a^4 C^{(4)}(x) + \mathcal{O}(a^6), \quad (117)$$

wobei  $C^{(2)}$  und  $C^{(4)}$  Korrekturterme sind. Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Taylor-Entwicklung einer Funktion

$$f(x \pm a) = f(x) \pm af'(x) + \frac{a^2}{2}f''(x) \pm \frac{a^3}{6}f'''(x) + \mathcal{O}(a^4), \quad (118)$$

so kann  $C^{(2)}(x) = \frac{1}{6}f'''(x)$  identifiziert werden. Um die Diskretisierungsungenauigkeit der Ableitung zu verringern, wird ein Term auf der linken Seite von Gleichung (117) eingeführt, der ungewollte Korrekturbeiträge heraus kürzt. Die symmetrische Ableitung lässt sich somit schreiben als

$$\frac{f(x+a) - f(x-a)}{2a} + ca^2 D^{(3)}[f](x) = f'(x) + \mathcal{O}(a^4), \quad (119)$$

wobei

$$D^{(3)}[f](x) = \frac{f(x+2a) - 2f(x+a) + 2f(x-a) - f(x-2a)}{2a^3} \quad (120)$$

und  $c = \frac{1}{6}$  eine Konstante ist. Aus der korrigierten Ableitung resultieren Diskretisierungsfehler der Ordnung  $\mathcal{O}(a^2)$ , was einer Verbesserung gegenüber den vorigen Ungenauigkeiten entspricht. Eine Wirkung die diese Ableitung verwendet, wird *Symanzik-Wirkung* genannt und wird auch in dieser Arbeit verwendet.

### 3.4 Das Haar-Integrationsmaß

Nach der Diskretisierung der Felder und der Konstruktion der Gitterwirkung ist die Messung physikalischer Größen von entscheidender Wichtigkeit. Mit Hilfe von Gittersimulationen können Erwartungswerte von Operatoren berechnet und ausgewertet werden und stellen somit bedeutende Größen in der Gitterphysik dar. Ausgehend von

---

der Kontinuumsdefinition des Erwartungswertes eines Operators  $\hat{O}$

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[A_\mu] \hat{O} e^{-S[A_\mu]}, \quad (121)$$

muss das Integrationsmaß entsprechend angepasst werden. In der Gleichung (121) stellt  $Z$  die Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}[A_\mu] e^{-S[A_\mu]} \quad (122)$$

dar. Der Ausdruck  $\int \mathcal{D}[A_\mu]$  steht für ein Funktionalintegral, bei dem über sämtliche Konfigurationen des Eichfeldes  $A_\mu(x)$  integriert wird. Da die Eichfelder auf dem Gitter über die Links repräsentiert werden, muss ein analoges Integrationsmaß gefunden werden, das von den Linkvariablen abhängt. Hierfür wird das *Haar-Maß*  $dU$  verwendet. Gleichung (95) beschreibt eine Eichtransformation der Links. Die Eichwirkung muss unter solchen Transformationen invariant bleiben  $S_W[U'] = S_W[U]$ . Damit gilt für das Integrationsmaß die Bedingung

$$\mathcal{D}[U'] = \mathcal{D}[U], \quad (123)$$

womit die Eichinvarianz der Zustandssumme gewährleistet ist (vgl. [4]). Die Integration über alle Eichkonfigurationen kann geschrieben werden als

$$\int \mathcal{D}U = \prod_{x \in \Lambda} \prod_{\mu=1}^4 \int dU_\mu(x). \quad (124)$$

Das Haar-Integrationsmaß der Eichgruppe  $G$  ist über zwei Eigenschaften definiert (vgl. [14]):

- Invarianz:

$$\int_G f(U) dU_\mu(x) = \int_G f(UV) dU_\mu(x) = \int_G f(VU) dU_\mu(x) \quad \forall V \in G, \quad (125)$$

- 
- Normierung

$$\int_G dU_\mu(x) = 1. \quad (126)$$

Mit Hilfe des Haar-Maßes wird die Formulierung der Erwartungswerte auf dem Gitter ermöglicht

$$\langle \hat{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\hat{O} e^{-S[U]}, \quad (127)$$

mit der Gitter-Zustandssumme

$$Z = \int \mathcal{D}U e^{-S[U]}. \quad (128)$$

### 3.5 Randbedingungen

Diese Arbeit behandelt den Einfluss der Randbedingungen auf eine Gitter-Yang-Mills Theorie. So kann die Wahl der Randbedingungen z.B. Auswirkungen auf Volumeneffekte haben. Solche Effekte können durch periodische Randbedingungen minimiert werden, wie sie für die Simulation von Bosonen in allen Dimensionen eingesetzt werden. Bei periodischen Randbedingungen werden die gegenüberliegenden Endpunkte des Gitters miteinander identifiziert. Im Gegensatz dazu wird die Randbedingung in zeitlicher Dimension für Fermionen antiperiodisch gewählt, also mit einem Vorzeichenwechsel zwischen den entsprechenden Gitterenden. Die Randbedingungen in den drei räumlichen Dimensionen bleiben dabei weiterhin periodisch. Im Folgenden soll der Ursprung der temporalen antiperiodischen Randbedingungen genauer beleuchtet werden und ist an [17] angelehnt.

Im Hamilton-Formalismus der Quantenmechanik ist die Zustandssumme gegeben als Spur über den Zustandsraum

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}). \quad (129)$$

---

Die Ortszustände erfüllen die Vollständigkeitsrelation

$$\int dx |x\rangle \langle x| = 1 \quad (130)$$

und sind Eigenzustände des Ortsoperators. Die Zustandssumme kann ebenfalls im Pfadintegralformalismus ausgedrückt werden, welcher zur Vereinfachung einiger Rechnungen verwendet wird. Ziel ist es nun, in der Quantenfeld-Theorie die Zustandssumme fermionischer Felder  $\psi_i$  als Pfadintegral zu formulieren. Die Zustände sind Elemente eines Fockraumes, die mittels Auf- und Absteigeoperatoren erzeugt werden können. Um ein korrektes Pfadintegral zu erhalten, werden grassmannartige Eigenzustände der Absteigeoperatoren  $a_i$  benötigt. Diese bezeichnet man als kohärente Zustände der Form

$$|\eta\rangle = e^{\sum_{i=1}^N a_i^\dagger \eta_i} |0\rangle . \quad (131)$$

Sie bilden eine Überlagerung aus verschiedenen Mehrteilchenzuständen. Zur Vereinfachung werden hier zwei mögliche Zustände  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$  angenommen. Somit kann ein kohärenter Zustand

$$|\eta\rangle = |0\rangle - \eta |1\rangle \quad (132)$$

erzeugt werden. Mit der Nilpotenz der Grassmann-Zahlen kann gezeigt werden, dass die so definierten Zustände wirklich Eigenzustände des Absteigeoperators darstellen

$$a |\eta\rangle = \eta a |1\rangle = \eta |0\rangle = \eta |\eta\rangle . \quad (133)$$

Pfadintegrale berechnen Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Zuständen innerhalb einer Zeit  $t$

$$\langle \eta(t) | e^{-iHt} | \eta(0) \rangle = \int d\eta^*(t) d\eta(t) e^{-iS[\eta^*, \eta]} . \quad (134)$$

Bei der Berechnung von Erwartungswerten wird im Pfadintegralformalismus die Zustandssumme und somit die Spur eines Operators im Fockraum benötigt. Die Spur ist

---

definiert als

$$Tr\hat{O} = \langle 0 | \hat{O} | 0 \rangle + \langle 1 | \hat{O} | 1 \rangle . \quad (135)$$

Schreibt man den Erwartungswert eines Operators in ein Integral über die auftretenden Grassman-Zahlen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int d\eta^* d\eta \langle \eta | \hat{O} | \eta \rangle e^{-\eta^* \eta} \\ &= \int d\eta^* d\eta (\langle 0 | - \eta^* \langle 1 |) \hat{O} (| 0 \rangle - \eta | 1 \rangle) e^{-\eta^* \eta} \\ &= \int d\eta^* d\eta (\eta \eta^* \langle 0 | \hat{O} | 0 \rangle - \eta \eta^* \langle 1 | \hat{O} | 1 \rangle) \\ &= \langle 0 | \hat{O} | 0 \rangle - \langle 1 | \hat{O} | 1 \rangle . \end{aligned} \quad (136)$$

Hierbei ist das negative Vorzeichen des zweiten Termes störend, da der berechnete Ausdruck nicht mehr der Definition einer Spur entspricht. Diese Abweichung kann durch Ersetzen des Zustandes  $\langle \eta |$  mit  $\langle -\eta | = \langle 0 | + \eta^* \langle 1 |$  korrigiert werden. Somit kürzt sich das zusätzliche Vorzeichen heraus und man erhält

$$\int d\eta^* d\eta \langle -\eta | \hat{O} | \eta \rangle e^{-\eta^* \eta} = \langle 0 | \hat{O} | 0 \rangle + \langle 1 | \hat{O} | 1 \rangle , \quad (137)$$

was die Berechnung der Erwartungswerte durch Pfadintegrale für fermionische Felder ermöglicht. Wie oben zu sehen, muss dafür  $\eta(0)$  mit  $-\eta(T)$  identifiziert werden, was sich bei der Simulation durch antiperiodische Randbedingungen in der zeitlichen Gitterausdehnung äußert.

Supersymmetrische Modelle beschreiben eine Symmetriebeziehung zwischen Bosonen und Fermionen, nach der beide Teilchenarten gleiche Randbedingungen aufweisen sollten. Wie schon beschrieben, unterscheiden sich die Kräfte- und Materieteilchen in diesem Punkt. Das Ziel dieser Arbeit ist es, durch Simulationen der verschiedenen Randbedingungen mehr über ihre Einflüsse auf die entsprechende Theorie zu erfahren und inwiefern die Simulation von Fermionen mit periodischen Randbedingungen möglich ist.

---

## 4 Numerische Simulation der supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie

Dieses Kapitel soll dazu dienen, den Programmaufbau und dessen Funktionsweise vorzustellen. Des weiteren wird die Fehlerabschätzung der Simulationen diskutiert und wichtige Parameter und Observablen der Gittertheorie werden erläutert.

### 4.1 Der Programmaufbau

#### 4.1.1 Der Grundlegende Mechanismus einer Monte-Carlo-Simulation

Die Simulationsergebnisse der vorliegenden Arbeit wurden mit der Monte-Carlo-Methode erzeugt. Im Folgenden sollen die grundlegenden Eigenschaften und Algorithmen des verwendeten Programms diskutiert werden. Die vorgestellten Grundlagen basieren auf den Darlegungen in [4]

Mit Hilfe von Simulationen werden Erwartungswerte von Operatoren berechnet. Diese sind im Pfadintegralformalismus gegeben durch

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[U] e^{-S[U]} O[U] . \quad (138)$$

Dieses hochdimensionale Integral kann aufgrund des Umfanges der Datenmenge für große Gitterausdehnungen nicht berechnet werden. Um dennoch Simulationsergebnisse zu erzielen, wird das Integral durch eine Summe angenähert

$$\langle O \rangle = \frac{1}{N} \sum_{U_n} O[U_n] . \quad (139)$$

Somit wird der Erwartungswert eines Operators als dessen Mittelwert über verschiedene Feldkonfigurationen berechnet. Wie im Kapitel 4.2 beschrieben wird, ist der statistische Fehler proportional zu  $\frac{1}{N}$ , was eine Kompromisslösung zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand nötig macht.

In der Statistik kann der Erwartungswert einer Funktion durch eine entsprechende

$$\langle f \rangle = \frac{\int_a^b dx \rho(x) f(x)}{\int_a^b dx \rho(x)} \quad (140)$$

ausgedrückt werden (vgl. [4]), die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Funktionswert  $f(x)$  zum gewünschten Erwartungswert beiträgt. Vergleicht man nun die beiden Ausdrücke in Gleichung (138) und Gleichung (140), so kann die Wahrscheinlichkeitsdichte der Feldkonfigurationen als  $\rho[U] = e^{-S[U]}$  identifiziert werden. Nicht alle Konfigurationen tragen mit der selben Gewichtung zum Erwartungswert bei. Um die benötigte Rechenzeit und somit die entstehenden Kosten zu verringern ist es sinnvoll, den Konfigurationsraum soweit zu beschränken, dass nur solche mit einer hohen Wahrscheinlichkeitsgewichtung erzeugt werden. Dieser Prozess wird als *importance sampling* bezeichnet. Auf die Umsetzung dieser Methode wird nun näher eingegangen.

#### 4.1.2 Erzeugung der Konfigurationen mit Markov-Ketten

Die einzelnen Feldkonfigurationen werden in einer Monte-Carlo-Simulation mittels einer sogenannten Markov-Kette generiert. Hierbei werden die Konfigurationen jedoch nicht unabhängig voneinander erzeugt, sondern jede aus der vorigen heraus, beginnend mit einer wählbaren Startkonfiguration. Auf diese Weise entsteht eine Konfigurationskette  $U_0 \rightarrow U_1 \rightarrow \dots \rightarrow U_n$ . Die jeweiligen Übergänge werden stochastisch von der Übergangswahrscheinlichkeit  $T(U' | U)$  bestimmt, die die typischen Eigenschaften

$$0 \leq T(U' | U) \leq 1; \quad \sum_{U'} T(U' | U) = 1 \quad (141)$$

aufweist. In dieser Arbeit werden die Simulationen mit einem *Hotstart* begonnen, d.h. die Ausgangskonfigurationen werden zufällig gewählt. Ein wichtiges Merkmal einer Markov-Kette ist, dass die Übergangsamplitude nur von den beiden entsprechenden Konfigurationen abhängt und weiter zurückliegende Konfigurationen keinen Einfluss ausüben. Eine Bedingung, die für die Anwendung einer Markov-Kette erfüllt sein muss, ist die Zugänglichkeit des gesamten Konfigurationsraumes. Eine Markov-Kette muss immer imstande sein, innerhalb endlich vieler Zeitschritte jede Konfiguration,

---

von einem Startpunkt ausgehend zu erreichen. Ist dies nicht gewährleistet, so können Verfälschungen der Ergebnisse aufgrund fehlender Konfigurationen eintreten. Des weiteren muss die detaillierte Balance-Bedingung

$$T(U' | U)P(U) = T(U | U')P(U') \quad (142)$$

erfüllt sein, die die Unitarität der Übergangsmatrix sichert.  $P(U)$  stellt die Wahrscheinlichkeit für das System dar, sich in der Konfiguration  $U$  zu befinden. Die Balance-Bedingung drückt aus, dass ein Übergang in eine Konfiguration mit der selben Wahrscheinlichkeit eintritt, wie dessen inverser Prozess.

#### 4.1.3 Wahrscheinlichkeitsgewichtung durch den Metropolis-Algorithmus

Wie oben erwähnt, sollen die Feldkonfigurationen mit einem Wahrscheinlichkeitsfaktor von  $P(U) \propto e^{-S[U]}$  erzeugt werden. Dies kann mit Hilfe des Metropolis-Algorithmus umgesetzt werden. Der Metropolis-Algorithmus bildet die Grundlage dafür, ob die generierten Konfigurationen einer Markov-Kette akzeptiert oder abgelehnt werden.

Zunächst muss zwischen zwei verschiedenen Übergangswahrscheinlichkeiten unterschieden werden. Zum einen die grundlegende Wahrscheinlichkeit  $T_0(U' | U)$ , dass das System zwischen den beiden Konfigurationen  $U$  und  $U'$  wechseln kann. Im Folgenden wird die Balance-Bedingung auch hierauf angewandt, so dass die Grundwahrscheinlichkeit symmetrisch ist

$$T_0(U' | U) = T_0(U | U') . \quad (143)$$

Zum anderen wird eine Akzeptanzwahrscheinlichkeit

$$T_A(U' | U) = \min(1, e^{-\Delta S}) \quad (144)$$

eingeführt mit  $\Delta S = S[U'] - S[U]$ . Da für diese Größe später eine Akzeptanzbedingung aufgestellt wird, hängt die Annahme einer neuen Konfiguration nur von der Wirkungsdivergenz ab.

Zunächst wird aus Gründen der Einfachheit ein Übergang in eine Konfiguration be-



---

trachtet, bei der nur eine Link-Variable variiert wird. Für den Konfigurationskandidaten wird der Ansatz

$$U'_\mu(x) = MU_\mu(x) \quad (145)$$

aufgestellt. Hierbei stellt  $M$  eine  $SU(N)$ -Matrix nahe dem Einheitsselement dar. Diese Matrizen werden aus Zufallszahlen zusammengesetzt. Für eine  $SU(2)$ -Matrix werden vier zufällig generierte Zahlen  $a_i$  mit  $i = 1, 2, 3, 4$  nahe der Eins erzeugt und mit Hilfe der Paulivektoren zu einer Matrix zusammengefasst. Für eine  $SU(3)$ -Matrix werden drei solcher  $SU(2)$ -Matrizen in  $3 \times 3$ -Matrizen eingebettet

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ b_{21} & 0 & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \quad (146)$$

Die resultierende  $SU(3)$ -Matrix berechnet sich dann über

$$M = ABC. \quad (147)$$

Mit einem Kandidaten für die neue Konfiguration kann die Differenz der Wirkungen  $\Delta S$  berechnet werden. Nun wird die Akzeptanzwahrscheinlichkeit mit einer Zufallszahl  $r \in [0, 1)$  verglichen. Verringert sich die Wirkung während des Überganges, so ist der Faktor  $e^{-\Delta S}$  größer als eins und  $T_A(U' | U) \geq 1 \geq r$ . Ist dies der Fall, wird die neue Konfiguration akzeptiert. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass alle Übergänge angenommen werden, bei denen sich die Wirkung verkleinert. Allerdings würde dies allein zu einer Konfiguration minimaler Wirkung und somit zu einer Lösung der klassischen Feldgleichungen führen, was in den meisten Fällen nicht gewollt ist. Quantenfluktuationen werden durch den Vergleich mit einer Zufallszahl eingeschlossen, da so auch Konfigurationen angenommen werden können, bei denen sich die Wirkung leicht erhöht. Bei einem Vergleich mit dem Ergebnis  $T_A(U' | U) \leq r$  wird der Kandidat abgelehnt und eine andere Konfiguration erzeugt, bis das nächste Glied der Markov-Kette gefunden

---

ist. Die absolute Übergangswahrscheinlichkeit zwischen zwei Konfigurationen ist dann als das Produkt der grundlegenden- und der Akzeptanzwahrscheinlichkeit definiert

$$T(U' | U) = T_0(U' | U)T_A(U' | U). \quad (148)$$

Es muss erwähnt werden, dass die Matrix  $M$  eine wichtige Rolle für die Abtastung des Konfigurationsraumes spielt. Ist  $M$  zu nahe an der Einheitsmatrix, so werden nur minimale Änderungen zwischen den Konfigurationen vorgenommen, was zur Akzeptanz aller Kandidaten führen würde. Es fließt nur ein kleiner Teil des Konfigurationsraumes in das Ergebnis ein. Weicht die Matrix  $M$  jedoch zu sehr von dem Einheitsmatrixelement ab, tritt das Gegenteil ein und der Konfigurationsraum wird nur mangelhaft abgetastet.

Die Änderung eines Links wird als *Update* bezeichnet. Das Updaten aller Links in der Konfiguration nennt man *Sweep*. Eine Markov-Kette kann eine Gleichgewichtskonfiguration aufweisen, bei dem sich die Feldvariablen bei einem Sweep nicht mehr ändern. Dieses Gleichgewicht entspricht einem Fixpunkt im Konfigurationsraum. Sollen Observable berechnet werden, so ist eine Auswertung der Konfigurationen nahe des Gleichgewichtes nötig. Aus diesem Grund wird eine bestimmte Anzahl der ersten Konfigurationen bei der Auswertung übersprungen. Wieviele Konfigurationen dabei vernachlässigt werden hängt von der Gitterkopplung  $\beta$ , dem Update-Algorithmus und der Gittergröße ab.

Der typische Update-Mechanismus erfolgt meistens nur lokal für eine Linkvariable bzw. deren benachbarten Links. Die Änderung aller Feldvariablen in einem Update-Schritt ist zwar möglich, allerdings würde dies eine starke Änderung der Wirkung zur Folge haben, was zu einer Ablehnung der neuen Konfiguration während des Metropolis-Algorithmus führt. Eine Möglichkeit, alle Links in einem Schritt zu aktualisieren, stellt die *Hybrid-Monte-Carlo Methode* dar. Hierbei wird ein konjugierter Impuls  $\Pi_x$  und die Hamilton-Funktion  $H[\Pi, \Phi] = \frac{1}{2} \sum_x \Pi_x^2 + S[\Phi]$  eingeführt und die klassischen Gleichungen der Systemdynamik diskretisiert. Die Konfiguration wird während des Updates entlang der diskretisierten Trajektorie im Konfigurationsraum verändert, bei der die Änderung der Hamiltonfunktion ausreichend gering bleibt und die neuen Konfigurationen akzeptiert werden.

---

## 4.2 Abschätzung der auftretenden Fehler

Ein wichtiger Punkt bei Gittersimulationen ist die Genauigkeit der Ergebnisse. Werden numerische Methoden zur Berechnung bestimmter Werte verwendet, so sind diese immer mit einem statistischen Fehler behaftet. Im folgenden Kapitel soll ein Überblick über auftretende Fehler und deren Größenordnung vermittelt werden.

Bei einem unkorrelierten Datensatz  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  ist der Mittelwert definiert durch

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (149)$$

Der Erwartungswert der Daten ist mit einer gewissen Abweichung um den Mittelwert des Datensatzes verteilt

$$\langle x_i \rangle = \langle x \rangle = \bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}. \quad (150)$$

Die Abweichung  $\sigma_{\bar{x}}$  gibt somit die statistische Ungenauigkeit der berechneten Werte an. Sie wird als Varianz bezeichnet und lässt sich für unkorrelierte Daten formulieren als (vgl. [4])

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \langle (\bar{x} - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_{i \neq j=1}^N (x_i - \langle x \rangle)(x_j - \langle x \rangle) \right\rangle. \quad (151)$$

Wird diese Gleichung ausmultipliziert und berücksichtigt, dass für unkorrelierte Daten  $\langle x_i x_j \rangle = \langle x \rangle^2$  gilt, erhält man schließlich die Varianz

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N} \sigma_x^2, \quad (152)$$

wobei  $\sigma_x^2 = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)^2 \rangle$ . Die Standardabweichung gibt somit die Verteilung der unkorrelierten Daten um den Mittelwert an. Damit folgt für den Erwartungswert

$$\langle x \rangle = \bar{x} \pm \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \quad (153)$$

Für einen unkorrelierten Datensatz ist der statistische Fehler der Daten proportional zu  $1/\sqrt{N}$ . Bei sehr vielen Einzelmessungen  $N$  fällt die Standardabweichung ab und die

---

Statistik wird verbessert. Allerdings können bei einer Simulation nicht beliebig viele Berechnungen durchgeführt werden, da im allgemeinen nur eine begrenzte Computerzeit zur Verfügung steht.

Für die obige Rechnung wurde angenommen, dass die einzelnen Daten des Satzes unkorreliert, d.h. unabhängig voneinander sind. Diese Annahme trifft nicht auf den Metropolis-Algorithmus zu, da bei diesem die Konfigurationen aus den Vorangegangenen erzeugt werden. Diese Abhängigkeit wird als Autokorrelation bezeichnet. Die Autokorrelationsfunktion ist gegeben durch

$$C_x(x_i, x_{i+\tau}) = \langle x_i x_{i+\tau} \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_{i+\tau} \rangle. \quad (154)$$

Diese Funktion hängt im Gleichgewicht nur von der Computerzeit  $\tau$  und somit von der Anzahl der durchlaufenen Sweeps ab. Für das Verhältnis zweier Autokorrelationen ist unter Berücksichtigung des führenden Termes ein exponentielles Verhalten typisch

$$\frac{c_x(t)}{c_x(0)} \sim e^{-\frac{t}{\tau_{exp,x}}}. \quad (155)$$

Die Größe  $\tau_{exp} = \sup_x(\tau_{exp,x})$  wird als *exponentielle Autokorrelationszeit* bezeichnet. Durch Kenntnis dieser Größe kann bestimmt werden, nach wievielen Computerzeitschritten die Autokorrelation zwischen erzeugten Konfigurationen stark genug abgefallen ist, um ihre Effekte auf die Fehler zu vernachlässigen. Eine Autokorrelation zwischen Konfigurationen kann das Auftreten systematischer Fehler der Größenordnung  $\mathcal{O}(e^{-\frac{t}{\tau_{exp}}})$  zur Folge haben. Des weiteren gilt bei korrelierten Daten, dass die Vereinfachung für  $i \neq j$ , die auf die Gleichung (152) führt hinfällig wird. Nun kann die Varianz umformuliert werden, um ihre Abhängigkeit von der Autokorrelationsfunktion darzustellen

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N^2} c_x(|i - j|). \quad (156)$$

Nach einer kurzen Rechnung erhält man den Ausdruck

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{N} 2\tau_{x,int}. \quad (157)$$

---

In dieser Gleichung steht

$$\tau_{x,int} = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^N \frac{c_x(|t|)}{c_x(0)} \quad (158)$$

für die integrierte Autokorrelationszeit. Sie bildet einen Korrekturfaktor für die Varianz, der die Korrelation des vorliegenden Datensatzes berücksichtigt. Zu erwähnen ist, dass somit die Varianz vergrößert wird, was die Grundlage für höhere Fehlergrenzen bei korrelierten Datensätzen bildet, sie dennoch proportional zu einem Faktor von  $\frac{1}{\sqrt{N}}$  ist. Es ist ersichtlich, dass bei Simulationen aufgrund der genaueren Ergebnisse unkorrelierte Datensätze erwünscht sind. Um diese aus den korrelierten Daten zu gewinnen, wird eine Anzahl von Updateschritten zwischen zwei Konfigurationen vernachlässigt. Die Anzahl der Sweeps die dafür benötigt wird, kann aus der integrierten Autokorrelationszeit berechnet werden

$$N_{unkorr.} = \frac{N}{2\tau_{x,int}}. \quad (159)$$

Es existieren weitere Methoden um auftretende Autokorrelationen zu umgehen und die Varianz von Observablen zu verringern. Als Beispiel hierfür ist das *Bootstrapping* zu nennen, das in Kapitel 4.3 erläutert wird.

Im vorangehenden Teil dieses Abschnittes wurde auf statistische Fehler eingegangen. Allerdings können auch systematische Fehler auftreten. Diese bezeichnen Ungenauigkeiten, welche nicht durch wiederholte Messung der Observablen minimiert werden können. Als Beispiele dienen typische Messungenauigkeiten, Offsets und Interpretationsspielraum beim Anpassen der erhaltenen Datenverläufe.

Die bisher genannten Fehler können bei allen Messungen und Simulationen auftreten. Auch die Gitterdiskretisierung wird durch eine Reihe von Effekten geprägt, die Auswirkungen auf die Daten haben können. Das Gitter wurde nur als vereinfachtes Modell des Kontinuums limit bei  $a \rightarrow 0$  eingeführt, um störungsfreie Simulationen zu ermöglichen. Es treten Diskretisierungsfehler auf, die von der endlichen Gitterkonstante abhängen und berücksichtigt werden müssen. Die Größenordnung der Fehlergrenzen hängt von der verwendeten Wirkung ab. So sind die Diskretisierungsfehler der Wilsonwirkung von

---

der Ordnung  $\mathcal{O}(a)$ . Als weitere Einschränkung bei Simulationen und damit als Fehlerquelle soll das endliche Volumen angeführt werden. Effekte von Randbedingung sollen im Hinblick auf ihre Auswirkungen auf die Observablen als Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit dienen. Die Ungenauigkeiten die aufgrund eines endlichen Volumens  $V$  auftreten, zeigen ein exponentielles Verhalten  $\mathcal{O}(e^{-V})$ . Simulationen auf großen Gittern werden daher kleinere Volumeneffekte aufweisen. Der Einfluss der gewählten Randbedingung dagegen wächst bei kleinen Volumen.

### 4.3 Verringerung der Ungenauigkeit durch Bootstrapping

In dem Abschnitt 4.2 wurde eine Abschätzung der Fehlergrenzen durchgeführt mit dem Ergebnis, dass die Varianz eines Datensatzes mit dessen Autokorrelation zunimmt. Um die Genauigkeit und somit die Effizienz einer Simulation zu verbessern, wird eine kostengünstige Methode zur Verringerung der Autokorrelation benötigt. Diese Anforderungen können mit der *Bootstrapping-Methode* umgesetzt werden. Es werden keine neuen Daten benötigt, weshalb kaum Kosten entstehen und was sie als eine nützliche Möglichkeit zur Datenaufbereitung auszeichnet.

Beim Bootstrapping wird eine Anzahl zufälliger Daten des ursprünglichen Datensatzes gewählt. Mit ihnen werden wiederum neue Datenblöcke aufgebaut, deren Autokorrelation aufgrund der zufälligen Auswahl der enthaltenen Daten geringer ist als die der Ausgangsdaten. Dies hat eine Verkürzung der integrierten Korrelationszeit zu Folge, was seinerseits zu einer verbesserten Genauigkeit der Observablenbestimmung führt. Bei einer Anzahl von  $K$  zufällig erzeugten Datensätzen berechnen sich der Mittelwert und die Varianz über

$$\tilde{O} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K O_k, \quad \sigma_{\tilde{O}}^2 = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (O_k - \tilde{O})^2. \quad (160)$$

Alle Daten die in dieser Arbeit vorgestellt werden, wurden mit der Bootstrapping-Methode aufbereitet.

---

## 4.4 Fehlergewichtete Funktionsanpassung

Im Rahmen der Datenauswertung werden gewonnene Daten  $y_i$  mit theoretischen Funktionen  $f(x_i, p_j, \dots, p_k)$  verglichen, wobei  $p_j, \dots, p_k$  die Parameter der Erwartungsfunktion darstellen. Um die zutreffenden Parameter der theoretischen Funktion zu erfahren, wird diese an die experimentellen Daten angepasst. Dabei müssen die Fehlergrenzen der Messpunkte berücksichtigt werden. Daten mit großen Unsicherheiten sollten weniger Einfluss auf die angepasste Funktion nehmen als solche mit höherer Genauigkeit. Diese Forderung wird durch die Methode der kleinsten Quadrate erfüllt. Dabei wird die quadratische Abweichung zwischen Daten und Anpassungsfunktion für jeden Datenpunkt mit dessen Ungenauigkeit normiert

$$\chi^2(p_j, \dots, p_k) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - f(x_i, p_j, \dots, p_k)}{\sigma_i} \right)^2. \quad (161)$$

Diese Funktion weist  $n_f(N - k)$  Freiheitsgrade auf (vgl. [20]). Um nun eine geeignete Funktionsanpassung zu erhalten, wird die  $\chi^2$ -Funktion und somit der fehlergewichtete Abstand minimiert, indem die Ableitungen nach den einzelnen Parametern gebildet und anschließend null gesetzt werden. Auf diese Weise erhält man ein Gleichungssystem, aus welchem die Parameter der angepassten Funktion berechnet werden können. Sind die Funktionsparameter einmal bekannt, müssen noch ihre Unsicherheiten bestimmt werden. Hierfür wird angenommen, dass die Datenpunkte innerhalb ihrer Fehlergrenzen mit einer gaußförmigen Wahrscheinlichkeitsdichte verteilt sind. Anschließend wird mit einem Computer eine gewisse Anzahl an Sätzen neuer Datenpunkte erzeugt, die sich gemäß ihrer Wahrscheinlichkeitsverteilung innerhalb ihrer Ungenauigkeiten unterscheidet. Diese erzeugten Datensätze werden erneut angepasst und aus den berechneten Parametern der Mittelwert gebildet. Die entsprechende Standardabweichung des Mittelwertes kann nun als abgeschätzte Ungenauigkeit für die Parameter verwendet werden. Alle Funktionsanpassungen die in dieser Arbeit auftreten, wurden mit der oben erläuterten Methode durchgeführt.

---

## 4.5 Parameter und Messgrößen

### 4.5.1 Parameter

Ein wichtiger Parameter wurde schon in Kapitel 3.2 eingeführt. Es handelt sich hierbei um die inverse Kopplung  $\beta = \frac{2N}{g_0^2}$ . Sie erscheint als Vorfaktor der Wilson-Wirkung für Eichbosonen und gibt für eine nicht-abelsche Theorie an, wie stark die Eichfelder untereinander wechselwirken. Somit bestimmt die Gitterkopplung auch den Einfluss der Veränderung einer Linkvariablen während eines Update-Schrittes.

Der zweite Parameter der in den folgenden Simulationen eine wichtige Rolle spielt, ist der Hopping-Parameter. Er wird in der Hopping-Entwicklung eingeführt, bei welcher der Dirac-Operator für große Fermionenmassen expandiert wird. Mit einer entsprechenden Normierung der Fermionfelder (vgl. [4]) führt dies auf

$$D = \mathbb{1} - \kappa H, \quad (162)$$

wobei

$$\kappa = \frac{1}{2(am + 4)}. \quad (163)$$

In Gleichung (162) ist

$$H(x | y)_{\alpha\beta ab} = \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\mathbb{1} - \gamma_\mu)_{\alpha\beta} U_\mu(x)_{ab} \delta_{x+\hat{\mu}, y} \quad (164)$$

die Hopping-Matrix. Der Hopping-Parameter  $\kappa$  ist antiproportional zur Masse und eignet sich somit als Simulationsparameter.

Im Parameterraum der vorgestellten Theorie existieren Phasenübergänge abhängig von der Überschreitung kritischer Parameterwerte. Einer dieser Phasenübergänge kann mit der spontanen Brechung der chiralen Symmetrie in Verbindung gebracht werden. Unter chiralen Rotationen von masselosen Fermionen (betrachtet wird nur ein Flavour)

$$\begin{aligned} \psi' &= e^{i\alpha\gamma_5} \psi, \\ \bar{\psi}' &= \bar{\psi} e^{i\alpha\gamma_5} \end{aligned} \quad (165)$$



---

bleibt die Lagrangedichte invariant

$$\mathcal{L}(\psi', \bar{\psi}', A_\mu) = \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A_\mu). \quad (166)$$

Ein Massenterm für Fermionen

$$m\bar{\psi}'\psi' = m\bar{\psi}e^{i2\alpha\gamma_5}\psi \quad (167)$$

bricht die chirale Symmetrie. In der betrachteten Theorie handelt es sich bei den adjungierten Fermionen um Gluinos. Das Gluinokondensat  $\langle \bar{\lambda}\lambda \rangle$  transformiert sich unter chiralen Rotationen wie ein Massenterm und bricht somit die chirale Symmetrie für  $\langle \bar{\lambda}\lambda \rangle \neq 0$ . Eine ausgiebige Erläuterung der Chiralität und ihrer Brechung befindet sich in [19]. Das chirale Kondensat kann positiv  $\langle \bar{\lambda}\lambda \rangle > 0$ , wie auch negativ  $\langle \bar{\lambda}\lambda \rangle < 0$  sein. Nun ist es von Bedeutung, kritische Parameterwerte zu erkennen um mögliche unphysikalische Ergebnisse auszuschließen. Wie erwähnt, wird die Chiralität durch einen fermionischen Massenterm gebrochen, in diesem Fall spezifisch durch die Gluinomasse. Der Phasenübergang des chiralen Kondensates findet bei einem kritischen Hoppingparameter  $\kappa_c$  statt, bei dem die Gluinomasse verschwindet und somit SUSY, wie auch Chiralität wieder hergestellt sind. Eine Möglichkeit zur Bestimmung von  $\kappa_c$  ist das OZI-Argument, welches nahe des kritischen  $\kappa$ -Bereiches ein Verhalten der quadratischen Pionenmasse proportional zur renormierten Gluinomasse vorhersagt (vgl. [16])

$$m_{a-\pi}^2 \propto m_g. \quad (168)$$

Die Pionenmasse kann vergleichsweise leicht und präzise aus Simulationen gewonnen werden und eignet sich daher gut zur Berechnung von  $\kappa_c$ . Aus den in [3] gezeigten Plots kann auf ein Verhalten der Form

$$(am_{a-\pi})^2 \propto \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa_c} \right) \quad (169)$$

geschlossen werden. Um den kritischen  $\kappa$ -Wert zu berechnen, wird die nackte Gluinomasse gegen den inversen Hoppingparameter  $\frac{1}{\kappa}$  aufgetragen. Es zeigt sich eine lineare

---

Abhängigkeit. Anschließend werden die Daten bis zu einer verschwindenden Gluino-masse extrapoliert, wodurch  $\kappa_c$  bestimmt werden kann. Eine genauere Erläuterung der Methode findet sich in [3]. Anzumerken ist hierbei, dass die Massen mit der Gitterkonstanten  $a$  multipliziert werden, um dimensionslose Größen gegeneinander auftragen zu können. Der kritische Wert des Hopping-Parameters wird in Kapitel 5.1 für  $\beta = 1,7$  und  $\beta = 1,8$  berechnet.

#### 4.5.2 Der Plaquettenerwartungswert

Der Plaquettenerwartungswert ist eine Gitterobservable, die mit vergleichsweise geringem Aufwand berechnet werden kann. Wie im Appendix C erläutert wird, kann die Plaquette formuliert werden als

$$U_{\mu\nu} = e^{ia^2 F_{\mu\nu}}. \quad (170)$$

Die Entwicklung dieses Ausdrucks um kleine Gittergrößen liefert

$$U_{\mu\nu} \approx 1 + ia^2 F_{\mu\nu} - \frac{a^4}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (171)$$

Es ist anzumerken, dass nicht über  $\mu$  und  $\nu$  summiert wird, da es sich hierbei um festgelegte Gitterrichtungen handelt. Bildet man den Realteil und vernachlässigt die Konstante, so erhält man für die Plaquette

$$U_{\mu\nu} \propto -\frac{a^4}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (172)$$

Die Kontinuums-Lagrangedichte für Eichbosonen enthält einen Term  $\propto F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  (ebenso wie die oben erwähnte Wilson-Wirkung), welcher Informationen über deren Propagation und Selbstwechselwirkung enthält. Bildet man nun den Erwartungswert der Plaquette, folgt aus der Gleichung (172)

$$\langle U_{\mu\nu} \rangle \propto \langle F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \rangle \quad (173)$$

---

die Proportionalität von  $\langle U_{\mu\nu} \rangle$  zu dem Erwartungswert des Propagationstermes der Lagrangedichte.

### 4.5.3 Der Polyakov-Loop

Unter einem Polyakov-Loop versteht man ein Objekt, welches das Gitter in zeitlicher Richtung durchläuft und aufgrund der periodischen Randbedingungen für Eichfelder geschlossen ist. Ausgeschrieben wird ein Polyakov-Loop als Spur des Produktes von Links angegeben (vgl. [4])

$$L(x) = Tr \left[ \prod_{i=0}^{N_T-1} U_4(x, i) \right] . \quad (174)$$

Da der Polyakov-Loop das Gitter zeitlich durchläuft, ist seine räumliche Position nicht von Bedeutung und kann durch eine räumliche Mittelung beschrieben werden

$$L = \frac{1}{N_S^3} \sum_x L(x) . \quad (175)$$

Seine physikalische Bedeutung erhält der Polyakov-Loop durch seinen Erwartungswert, der proportional zu der freien Energie eines Quarks ist

$$\langle L \rangle = e^{-\frac{F_q}{T}} . \quad (176)$$

Der Korrelator zweier Polyakov-Loops in entgegengesetzter Richtung ist daher proportional zu der Energie eines statischen Quark-Antiquark-Paares

$$\langle L(x)L(y) \rangle = e^{-\frac{F_{q\bar{q}}}{T}} . \quad (177)$$

Werden nun das Quark und das Antiquark weiter voneinander distanziert, lässt sich der Korrelator schreiben als

$$\lim_{|y-x| \rightarrow \infty} \langle L(x)L(y) \rangle = |\langle L \rangle|^2 . \quad (178)$$

---

Befindet man sich in der Confinementphase der Theorie, so muss die Energie bei wachsendem Abstand zwischen Quark und Antiquark ansteigen. Dies liegt an dem linearen Term des statischen Quark-Antiquark-Potentials

$$V(r)_{q\bar{q}} = A + \frac{B}{r} + \sigma r, \quad (179)$$

wobei  $r = |y - x|$  der Abstand und  $\sigma$  die sogenannte *Stringspannung* ist. Um das Quark-Antiquark-Paar weiter voneinander zu separieren wird mehr Energie benötigt, so dass im Limes  $|y - x| \rightarrow \infty$  die erforderliche Energie ins Unendliche ansteigt und der Erwartungswert des Polyakov-Loops auf  $\langle L \rangle = 0$  abfällt. Somit dient der Polyakov-Loop als Confinementkriterium:

- $\langle L \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Confinement},$
- $\langle L \rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kein Confinement}.$

Der Übergang in die Deconfinementphase ist mit einer weiteren spontanen Symmetriebrechung verknüpft. Neben der Eichinvarianz weist die Eichwirkung im Fall einer Eichgruppe  $SU(3)$  ebenfalls eine Invarianz gegenüber der  $Z(3)$ -Symmetrie auf. Die Elemente der  $Z(3)$ -Symmetrie sind gegeben durch  $z_{1;2;3} = (\mathbb{1} ; \mathbb{1}e^{\frac{2\pi i}{3}} ; \mathbb{1}e^{-\frac{2\pi i}{3}})$ . Die Symmetrietransformation der  $Z(3)$ -Symmetrie besteht aus der Multiplikation aller Links in einer Zeitscheibe mit dem selben Element der Symmetriegruppe

$$U_4(x, t_0) \rightarrow z U_4(x, t_0). \quad (180)$$

Da die Eichwirkung aus geschlossenen Objekten konstruiert ist und genauso viele Links einer Zeitscheibe hat wie deren adjungierte Elemente und die Relation  $zz^\dagger = \mathbb{1}$  gilt, ist die Wirkung für eine  $SU(3)$ -Symmetrie invariant unter  $Z(3)$ -Transformationen. Die Invarianz der Wirkung unter der Zentrumssymmetrie hat zur Folge, dass die transformierten Konfigurationen alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten, wenn die Symmetrie nicht spontan gebrochen ist. Für den Polyakov-Loop bedeutet dies, dass über alle drei möglichen Zentrumsэлеmente gemittelt, der Erwartungswert unverändert

bleiben muss (vgl. [4])

$$\langle L \rangle = \frac{1}{3} \left( 1 + e^{\frac{i2\pi}{3}} + e^{-\frac{i2\pi}{3}} \right) \langle L \rangle. \quad (181)$$

Betrachtet man den Ausdruck in den runden Klammern und drückt die Exponentialfunktionen durch Sinus- und Cosinusterme aus, so erhält man

$$\langle L \rangle = \frac{1}{3} \left( 1 + \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) \right) = 0. \quad (182)$$

Im letzten Schritt der Gleichung (182) wurden die Eigenschaften  $\cos(-x) = \cos(x)$ ;  $\sin(-x) = -\sin(x)$  und  $\cos(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2}$  ausgenutzt.

Wird die Zentrumssymmetrie spontan gebrochen, tritt eine Deconfinementphase ein, was anhand des Polyakov-Loops gemessen werden kann. Der Zusammenhang wird klarer, betrachtet man das effektive Schleifenpotential des Polyakov-Loops einer  $SU(3)$ -Yang-Mills Theorie mit Fermionen in der adjungierten Darstellung. Nach [25] ist das Schleifenpotential für masselose Fermionen auf einem Gitter mit drei unendlich ausgehenden und einer kompaktifizierten Gitterdimension von der Form

$$V_{eff}(L_P) = \frac{2}{\pi^2 L^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (-1 + n_f) |Tr[L_P]|^2, \quad (183)$$

wobei  $n$  die Wicklungszahl des Polyakov-Loops ist und im Folgenden auf  $n = 1$  gesetzt wird. Für  $n_f = 0$  ist das Schleifenpotential negativ, was zur Folge hat, dass die Eigenwerte des Polyakov-Loops gleichmäßig und sich gegenüber liegend auf dem Einheitskreis verteilt sind. Für diagonalisierbare Matrizen ist die Spur gleich der Summe ihrer Eigenwerte. Für einen Wilson-Loop  $L_P \in SU(3)$  gilt daher, dass der Erwartungswert des Polyakov-Loops in diesem Fall  $\langle L_P \rangle = 0$  ist und auf das Confinement einer Theorie geschlossen werden kann.

Das Potential mit  $n_f = 1$  verschwindet  $V_{eff}(n_f = 1) = 0$ . Allerdings bewirkt ein durch Instantonen hervorgerufenen nicht-perturbatives Potential einen repulsiven Effekt auf die Eigenwerte, wie bei dem Fall  $n_f = 0$ . Ist  $n_f > 1$ , so ist das Schleifenpotential positiv und wirkt attraktiv auf die Eigenwerte des Polyakov-Loops (vgl. [25]). Die Eigenwerte sind nicht mehr gleichmäßig auf dem Einheitskreis verteilt und kürzen sich

bei der Summierung nicht mehr heraus. Der Erwartungswert des Polyakov-Loops ist ungleich Null und verweist auf eine Deconfinementphase.

Werden adjungierte Fermionen mit Masse und periodischen Randbedingungen in der Theorie verwendet, erhält der  $n_f$ -Term im Potential einen Exponentialfaktor proportional zur Gitterausdehnung

$$V_{eff}(L_P) = \frac{2}{\pi^2 L^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (-1 + n_f e^{-mL}) |Tr[L_P]|^2. \quad (184)$$

Aufgrund dieses Faktors bleibt das Potential bis zu einer kritischen Flavourzahl negativ. Die repulsive Wirkung des Potentials sorgt für eine gleichmäßige Verteilung der Eigenwerte des Polyakov-Loops, wodurch dessen Erwartungswert gleich null ist. Die Zentrumssymmetrie bleibt erhalten und massereiche adjungierte Fermionen sollten daher bei  $n_f < n_c$  keine Deconfinementphase aufweisen. Die Potentialverläufe ohne den Faktor  $|Tr[L_P]|^2$  und für  $m = 1$  sind in der Abbildung 4 gezeigt. Der Wechsel  $V_{eff} > 0$  zu  $V_{eff} < 0$  für massereiche Fermionen ist deutlich zu erkennen.

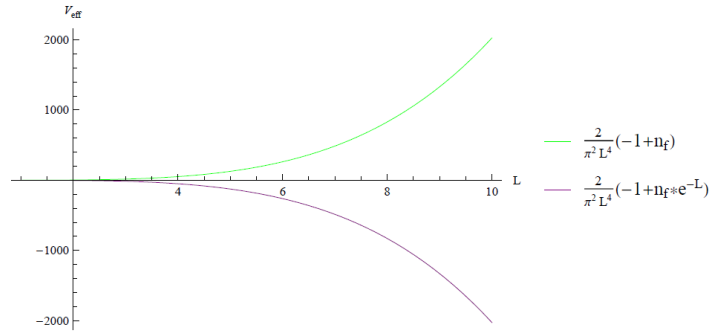


Abb. 4: Beispielhafte Schleifenpotentialverläufe eines Wilson-Loops nach [25]. In grün für masselose Fermionen und attraktiver Wirkung auf die Eigenwerte und in rot für massereiche Fermionen mit repulsiver Wirkung.

Der repulsive Effekt des Potentials kann allerdings bei geringen Gitterausdehnungen  $L$  vernachlässigbar klein werden, da die Steigung des Potentials in diesem Bereich sehr gering ist.

Zusammenfassend wird festgehalten, dass für massereiche Fermionen in adjungierter Darstellung und mit periodischen Randbedingungen die Zentrumssymmetrie erhalten bleibt und ein Übergang in die Deconfinementphase für große Gitterausdehnungen

---

verhindert wird. Diese Aussage wird im späteren Verlauf anhand der gewonnenen Daten überprüft.

#### 4.5.4 Massenkorrelatoren

Ein wichtiger Aspekt der Teilchenphysik ist die Berechnung von Massenspektren. Die Massen stellen einen Zugang zur experimentellen Bestätigung der Theorie dar und sind somit unerlässlich. Des weiteren können neue Teilchen durch vorausgesagte Massen gefunden werden. In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, die die Massenberechnung eines Teilchens aus den Simulationsergebnissen der Gitterphysik ermöglicht. Die Korrelationsfunktion

$$C(x, y) = \langle \hat{\mathcal{O}}^\dagger(x) \hat{\mathcal{O}}(y) \rangle \quad (185)$$

beschreibt ein Teilchen, das an dem Raumzeitpunkt  $y$  erzeugt und bei dem Punkt  $x$  wieder vernichtet wird. Für die Massenberechnung wird speziell die Korrelation zwischen zwei Zeitscheiben, als Beispiel bei  $t' = 0$  und  $t' = t$  benötigt

$$C(t) = \langle \hat{\mathcal{O}}^\dagger(t) \hat{\mathcal{O}}(0) \rangle. \quad (186)$$

Um den analogen Ausdruck für den euklidischen Raum zu erhalten, wird eine Wick-Rotation durchgeführt. Diese lässt die Zeit  $t$  in eine imaginäre Zeit  $t = i\tau$  übergehen was zur Folge hat, dass die auftretenden Exponenten reell werden. Da es sich in diesem Fall um zeitabhängige Operatoren handelt, wird das Heisenbergbild verwendet und die Operatoren lassen sich wie folgt schreiben

$$\hat{\mathcal{O}}(t) = e^{\hat{H}t} \hat{\mathcal{O}}(0) e^{-\hat{H}t}. \quad (187)$$

Eingesetzt in die Korrelationsfunktion und unter Berücksichtigung der entgegengesetzten Propagationsrichtung für periodische Gitter führt dieser Ausdruck auf

$$C(t) = \langle 0 | e^{\hat{H}t} \hat{\mathcal{O}}(0) e^{-\hat{H}t} \hat{\mathcal{O}}(0) \pm e^{\hat{H}(T-t)} \hat{\mathcal{O}}(0) e^{-\hat{H}(T-t)} \hat{\mathcal{O}}(0) | 0 \rangle. \quad (188)$$

---

Mit einem vollständigen Satz von Eigenzuständen  $\sum_n |n\rangle\langle n|$ , erhält man

$$C(t) = \sum_n \langle 0 | e^{\hat{H}t} \hat{\mathcal{O}}(0) e^{-\hat{H}t} | n \rangle \langle n | \hat{\mathcal{O}}(0) | 0 \rangle \quad (189)$$

$$\pm \sum_n \langle 0 | \hat{\mathcal{O}}(0) e^{-\hat{H}(T-t)} | n \rangle \langle n | \hat{\mathcal{O}}(0) e^{\hat{H}(T-t)} | 0 \rangle. \quad (190)$$

Lässt man den Hamilton-Operator auf die entsprechenden Zustände wirken und nutzt  $\hat{H} | 0 \rangle = E_0 | 0 \rangle = 0$ , so vereinfacht sich der obige Ausdruck zu

$$C(t) = \sum_n | \langle 0 | \hat{\mathcal{O}}(0) | n \rangle |^2 e^{-E_n t} \pm \quad (191)$$

$$\sum_n | \langle 0 | \hat{\mathcal{O}}(0) | n \rangle |^2 e^{-E_n(T-t)} = \sum_n c_n (e^{-E_n t} \pm e^{-E_n(T-t)}) . \quad (192)$$

Bei wachsender zeitlicher Separation  $t \gg 1$  liefert nur der erste gebundene Zustand für  $n = 0$  wichtige Beiträge und die Korrelationsfunktion kann angenähert werden durch

$$C(t) \simeq c_0 (e^{-E_{n=0}t} \pm e^{-E_{n=0}(T-t)}) . \quad (193)$$

Es muss beachtet werden, dass  $E_{n=0} \neq 0$  nicht der Vakuumsenergie  $E_0 = 0$  entspricht, sondern der Grundzustandsenergie des Teilchens. Für Mesonenoperatoren kann diese Energie mit der Masse des ersten unangeregten gebundenen Zustandes identifiziert werden. Die Gleichung (192) kann in die Daten gefittet und die Masse berechnet werden. Benötigt wird noch ein sinnvolles Zeitintervall, in dem die Exponentialfunktion angepasst werden kann. Hierfür wird die *effektive Masse*

$$m_{eff} = \ln \left( \frac{C(t)}{C(t+1)} \right) \quad (194)$$

als Verhältnis zweier zeitlicher Korrelationen eingeführt. Wird die effektive Masse gegen die Zeit aufgetragen, so ist das Verhältnis der Korrelationen in einem sinnvollen Zeitintervall konstant und der Graph zeigt ein Plateau. Werden die Daten der Monte-Carlo-Simulation mit der Gleichung (169) in diesem Intervall angefitet, so kann daraus die Teilchenmasse bestimmt werden.



---

## 5 Simulationsergebnisse und Interpretation

In dem folgenden Kapitel werden die Simulationsergebnisse für eine  $SU(2)$ -Symmetrie vorgestellt und auftretende Phänomene interpretiert. Zunächst wird die Messung der Pionenmasse ausgewertet. Wie in Kapitel 4.5.1 erwähnt, kann damit der kritische Parameterwert  $\kappa_c$  bestimmt werden. Ist dieser bekannt, werden die Erwartungswerte der Plaquette und des Polyakov-Loops untersucht. Bei den unten gezeigten Messungen wurden die entsprechenden Größen für unterschiedliche Gitterausdehnungen berechnet, um mehr über ihre Volumenabhängigkeit in Erfahrung zu bringen. Dieser Vorgang wurde für diverse Parameterwerte für  $\beta$  und  $\kappa$  wiederholt. Alle Simulationen wurden sowohl mit antiperiodischen als auch mit periodischen Randbedingungen in der euklidischen Zeit für Fermionen durchgeführt. In dieser Arbeit gilt die Konvention, dass antiperiodische Randbedingungen rot und periodische blau illustriert werden. Wenn nicht anders erwähnt, werden die auftretenden Fehlergrenzen nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

### 5.1 Der kritische Hoppingparameter $\kappa_c$

#### 5.1.1 $\kappa_c$ bei $\beta = 1,7$

Um den kritischen Wert des Hoppingparameters  $\kappa_c$  bei einer Gitterkopplung von  $\beta = 1,7$  zu ermitteln, wird die Pionenmasse bestehend aus zwei Gluinos, gegen den Kehrwert des Hoppingparameters aufgetragen. Die Masse des Pions in adjungierter Darstellung  $m_{a-\pi}$  wird dabei wie in Kapitel 4.5.4 erläutert, berechnet. Der kritische Parameterpunkt ist erreicht, wenn die Pionenmasse einen Wert von  $m_{a-\pi} = 0$  annimmt. Um  $\kappa_c$  zu bestimmen werden die berechneten Pionenmassen mit dem linearen Ansatz in Gleichung (169) extrapoliert. Die entsprechenden Ergebnisse sind in der Abbildung 5 enthalten.

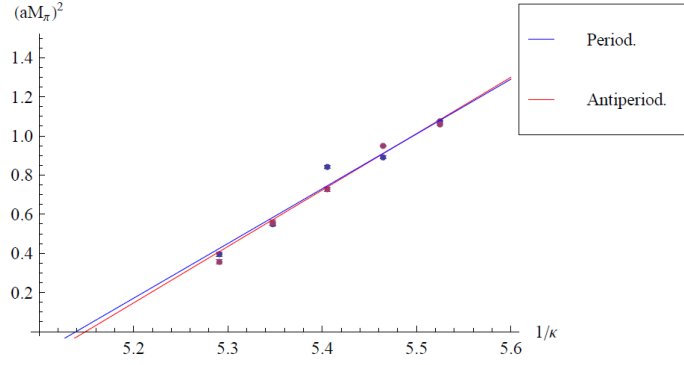


Abb. 5: Pionenmassen aufgetragen gegen  $\frac{1}{\kappa}$  bei  $\beta = 1, 7$ . Die Gitterausdehnung beträgt  $L = 8$  und  $T = 16$ . Die Anpassung mit der linearen Funktion schließt alle Datenpunkte ein.

Beide Anpassungen treffen den Verlauf der Datenpunkte gut und weichen nur sehr gering voneinander ab. Auffällig ist die Pionenmasse mit periodischen Randbedingungen für einen Wert von  $\frac{1}{\kappa} = 5,4$ , die als einzige deutlich ausserhalb der Linearen liegt. Bei diesem Datenpunkt traten Probleme bei der Simulation auf, so dass weniger Konfigurationen erzeugt wurden. Dadurch wird die Statistik entsprechend verschlechtert, was zu einer ungenaueren Messung führt. Aus den linearen Funktionsanpassungen folgen die kritischen Parameterwerte:

- Antiperiodisch  $\kappa_c = 0,1946 \pm 0,0043$ ,
- Periodisch  $\kappa_c = 0,1946 \pm 0,0040$ .

Für die Berechnung der Koeffizientenfehler werden die Messpunkte innerhalb ihrer Ungenauigkeiten mit einer gaußförmigen Wahrscheinlichkeitsdichte verteilt angenommen. Anschließend werden insgesamt  $N_{config} = 1000$  neue Konfigurationen gebildet, die aufgrund der Wahrscheinlichkeitsverteilung innerhalb ihrer Fehler voneinander abweichen. Aus den ermittelten Koeffizienten dieser Konfigurationen werden die Mittelwerte gebildet und ihre entsprechenden Standardabweichungen als Fehler angenommen.

Der Wert von  $\kappa_c$  ist für beide Randbedingungen innerhalb der Fehlergrenzen gleich.

Ab dem kritischen Parameterwert wird die Pionenmasse negativ und es können verfälschte Messwerte auftreten. Des weiteren wurde die Messung der Pionenmasse mit einem festgelegten Volumen von  $L^3 \times T = 8^3 \times 16$  durchgeführt. Bei anderen Gitterausdehnungen

können leichte Änderungen von  $\kappa_c$  auftreten. Allerdings sollten die Korrekturen klein und innerhalb der Fehlergrenzen des Parameters vernachlässigbar sein.

### 5.1.2 $\kappa_c$ bei $\beta = 1,8$

Im Laufe dieser Arbeit werden ebenso Daten für  $\beta = 1,8$  gewonnen. Um auch bei dieser Gitterkopplung physikalisch sinnvolle Ergebnisse unterscheiden zu können, wird im Folgenden der entsprechende kritische Parameterwert berechnet. Dies geschieht analog zur oben durchgeführten Methode. Die Pionenmassen in Abhängigkeit von  $\kappa$  sind in der Abbildung 6 gezeigt.

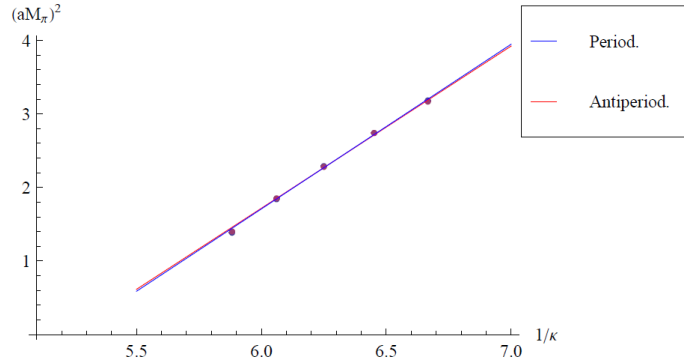


Abb. 6: Pionenmassen aufgetragen gegen  $\frac{1}{\kappa}$  bei  $\beta = 1,8$ . Die Gitterausdehnung beträgt  $L = 8$  und  $T = 16$ . Die Anpassung mit der linearen Funktion schließt alle Datenpunkte ein.

Aus der linearen Anpassung ergeben sich die kritischen Parameterwerte

- Antiperiodisch  $\kappa_c = 0,1915 \pm 0,0009$ ,
- Periodisch  $\kappa_c = 0,1909 \pm 0,0009$ .

Im Vergleich zu den Werten bei  $\beta = 1,7$  fällt auf, dass die kritischen Parameter geringfügig abgesunken sind und kleinere Ungenauigkeiten aufweisen. Die Funktionsanpassung konnte genauer durchgeführt werden, da keine Datenpunkte außerhalb des theoretischen Verlaufes liegen, was in kleineren Fehlern und einer genaueren Bestimmung resultiert. Die kritischen Punkte unterscheiden sich für die beiden untersuchten Randbedingungen nur leicht voneinander, sind aber innerhalb ihrer Fehlergrenzen gleich. Auch wenn die Abweichung von den Werten bei  $\beta = 1,7$  nur in einer

Größenordnung von  $\Delta\kappa_c \approx 0,003$  liegt, könnte diese Verlagerung einen Einfluss auf die Daten nehmen. In Kapitel 5.2.2 werden diese Auswirkungen aufgegriffen und anhand der Daten diskutiert.

## 5.2 Der Plaquettenerwartungswert

Der theoretische Hintergrund des Erwartungswertes einer Plaquette wurde bereits im Kapitel 4.5.2 erläutert. Die erste Messung wurde für einen Wert von  $\beta = 1,7$  durchgeführt. Der Hoppingparameter wurde in einem Bereich von  $\kappa = 0,02$  bis  $\kappa = 0,191$  variiert, wobei für jeden Wert die Abhängigkeit von der Gitterausdehnung beobachtet wurde. Die zweite Messung lief bei einer Gitterkopplung von  $\beta = 1,8$ . Die Simulationen wurden auf einem hyperkubischen Gitter mit  $L = T$  durchgeführt. Es fällt auf, dass sich die Ergebnisse unterhalb des kritischen Parameterbereiches in drei Bereiche unterteilen lassen, für die Beispiele in den Abbildungen 7-10 dargestellt sind.

### 5.2.1 Exponentieller Funktionsansatz für $\beta = 1,7$

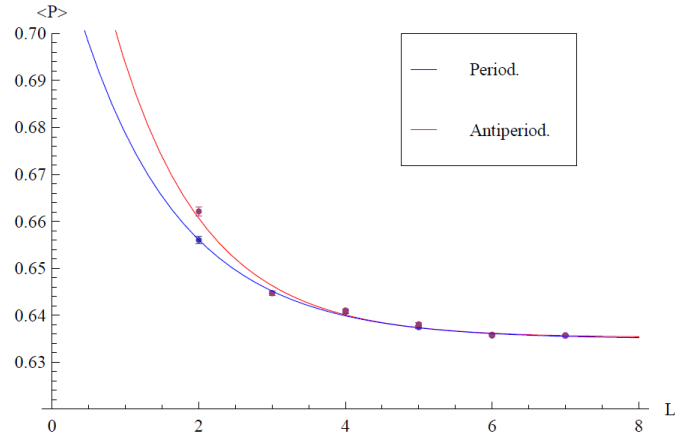


Abb. 7: Volumenabhängigkeit des Plaquettenerwartungswertes bei  $\beta = 1,7$ ;  $\kappa = 0,10$  und  $L = T$ . Die Anpassung mit dem exponentiellen Ansatz schließt alle Datenpunkte ein.

In der Abbildung 7 ist der erste Bereich gezeigt, der von  $\kappa \approx 0,02$  bis  $\kappa \approx 0,1$  reicht. Ein exponentieller Abfall des Einflusses von Volumeneffekten mit wachsender Kantenlänge ist deutlich zu beobachten. Bei Gitterlängen von  $L = 2$  weichen die verschiedenen Randbedingungen leicht voneinander ab, laufen jedoch bei größeren Kantenlängen auf

den gleichen Wert zu. Periodische und antiperiodische Randbedingungen zeigen ein ähnliches Verhalten für große zeitliche Gitterausdehnungen, da die Gittergrenzen weniger oft durchlaufen werden und damit der Einfluss der Randbedingungen schwindet. Eine Vergrößerung der Ungenauigkeiten bei  $L = 2$  ist bemerkbar. Die  $\kappa$ -Werte der verschiedenen Bereiche werden approximativ angegeben. Dies wird durch die Schrittweite der Simulationen begründet. Diese ist endlich und es können daher nur eingetretene Effekte in den Daten gesehen werden, jedoch nicht exakt der Beginn der Bereiche.

Beide Randbedingungen wurden mit dem Funktionsansatz

$$\langle P \rangle = k + c * e^{-\gamma L} \quad (195)$$

angepasst. Die Fitfunktion passt gut in den Verlauf der Daten und ihrer Fehlergrenzen und wird auch für die folgenden Graphen verwendet.

Der zweite Bereich erstreckt sich von  $\kappa \approx 0,1$  bis  $\kappa \approx 0,15$  und wird in der Abbildung 8 gezeigt.

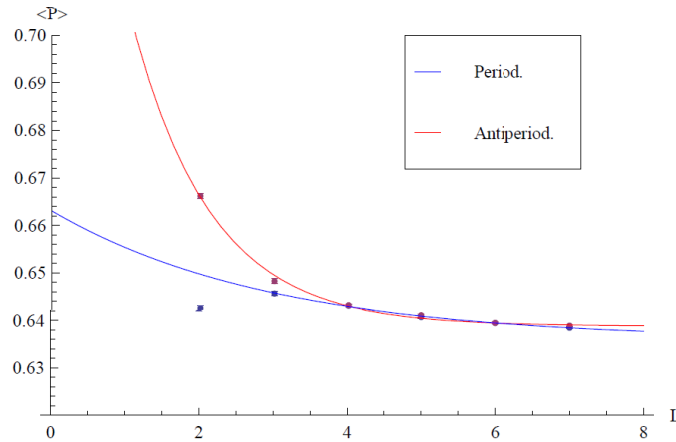


Abb. 8: Volumenabhängigkeit des Plaquetten Erwartungswertes bei  $\beta = 1,7$ ;  $\kappa = 0,14$  und  $L = T$ . Die Anpassung mit dem exponentiellen Ansatz schließt alle Datenpunkte ein.

Es findet ein zunehmender Verlust der Volumenabhängigkeit des Erwartungswertes mit periodischen Randbedingungen statt. Auch in dieser Abbildung fällt der Datenpunkt bei  $L = 2$  auf. Für die periodischen Randbedingungen liegt dieser zu niedrig um in den erwarteten Exponentialverlauf zu passen. Das exponentielle Verhalten nimmt mit steigendem  $\kappa$  ab, bis der dritte Bereich erreicht wird. Diese tritt ab einem Wert von

$\kappa \approx 0,16$  ein. Der exponentielle Verlauf für periodische Randbedingungen nimmt die Form einer linearen Funktion an, was in der Abbildung 9 zu sehen ist.

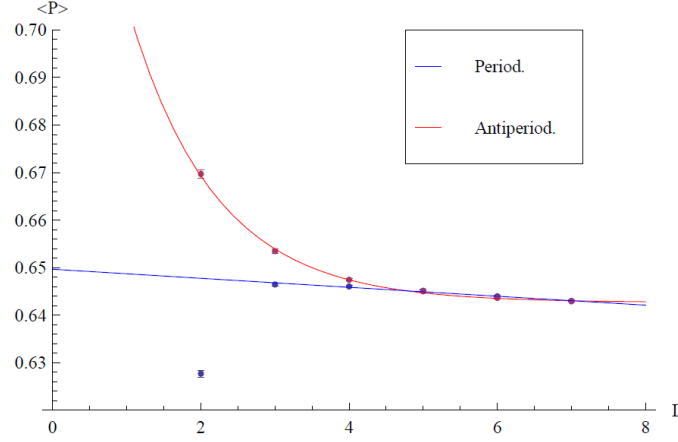


Abb. 9: Volumenabhängigkeit des Plaquettenwartungswertes bei  $\beta = 1,7$ ;  $\kappa = 0,18$  und  $L = T$ . Die Anpassung mit dem exponentiellen Ansatz schließt für antiperiodische Randbedingungen alle Datenpunkte ein. Für periodische Randbedingungen beginnt die Anpassung ab  $L = 3$ .

Der Erwartungswert der Plaquette verliert seine Volumenabhängigkeit. In den dargestellten Abbildungen 8 und 9 scheinen sich die Datenverläufe zwischen den Randbedingungen aufzuspalten und für periodische Randbedingungen in eine ansteigende Exponentialfunktion überzugehen. Bei den gezeigten Funktionsanpassungen wurden die Parameter als positiv  $\gamma > 0$ ;  $c > 0$  und  $k > 0$  angenommen, was dazu führt, dass die Anpassung der Daten mit einer Linearen eine höhere Genauigkeit aufweist als eine mögliche steigende Exponentialfunktion. Auf alternative Anpassungsfunktionen und die Möglichkeit negativer Parameter wird im Kapitel 5.2.3 genauer eingegangen. Aus dort dargelegten Gründen werden im Verlauf dieser Arbeit weiterhin die Anpassungen dieses Unterkapitels verwendet. Es bleibt zu vermerken, dass die periodischen Daten für  $L = 2$  wieder nicht zu dem theoretischen Funktionsverlauf passen und sehr stark von diesem abweichen.

Bei höheren Werten des Hoppingparameters stellt sich die Volumenabhängigkeit für die periodischen Randbedingungen wieder her, wie es in der Abbildung 10 zu sehen ist. Wie schon für  $\kappa = 0,10$  steigen die Unsicherheiten für  $L = 2$  an.

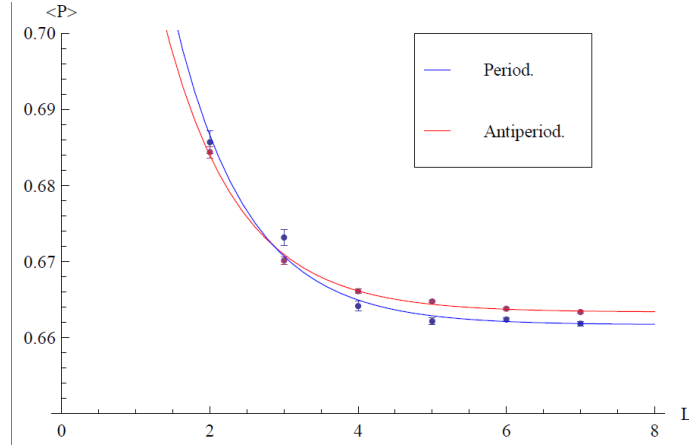


Abb. 10: Volumenabhängigkeit des Plaquetten Erwartungswertes bei  $\beta = 1,7$ ;  $\kappa = 0,191$  und  $L = T$ . Die Anpassung mit dem exponentiellen Ansatz schließt alle Datenpunkte ein.

Der Übergang in die erneute Volumenabhängigkeit erfolgt sehr plötzlich. Bei einem Wert von  $\kappa = 0,191$  wird der kritische Parameterbereich angenähert und innerhalb seiner Fehlergrenzen sogar erreicht. Es besteht somit die Möglichkeit, dass der beobachtete Übergang in die Volumenabhängigkeit aus Einflüssen des kritischen Parameterbereiches resultiert und die Daten daher mit Rückhalt zu betrachten sind.

Wie oben erwähnt, wurde die Funktionsanpassung für  $\kappa = 0,18$  mit periodischen Randbedingungen durchgeführt, ohne den Datenpunkt bei  $L = 2$  zu berücksichtigen. Auch in später gezeigten Simulationsergebnissen weichen die Daten bei einer räumlichen Gitterausdehnung von  $L = 2$  mit periodischen Randbedingungen in dem dritten Bereich oft von dem erwarteten Verlauf ab und weisen eine höhere Ungenauigkeit auf. Bei so geringen Gittergrößen nehmen mögliche Volumeneffekte zu und können einen beobachtbaren Einfluss auf die Daten nehmen. Da sich die Plaquette bei  $L = 2$  über das gesamte Gitter erstreckt, stehen die jeweils gegenüber liegenden Kanten der Plaquette in Kontakt. Dies könnte Selbstwechselwirkungen der Plaquette verursachen und eine mögliche Abweichung von dem linearen Datenverlauf erklären. Dieser Effekt tritt allerdings ausschließlich für periodische Randbedingungen ein.

Zusammenfassend bleibt anzumerken, dass der Plaquetten Erwartungswert bei periodischen Randbedingungen abhängig von  $\kappa$  und somit sinkender Gluinomasse einen

schwindenden Einfluss der Volumeneffekte zeigt. Das  $\kappa$ -abhängige Verhalten weist darauf hin, dass der Anpassungsparameter  $\gamma$  einem absinkenden Verlauf folgt. Die verschiedenen Bereiche sind besonders deutlich zu erkennen, wenn die Funktionskoeffizienten der Gleichung (194) gegen den Hoppingparameter  $\kappa$  aufgetragen werden. In der Abbildung 11 wurde dies für den Exponentialkoeffizienten  $\gamma$  durchgeführt.

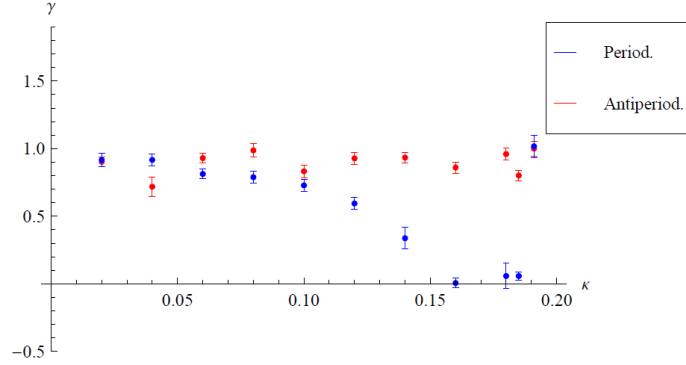


Abb. 11: Der Exponentialkoeffizient  $\gamma$  aufgetragen gegen  $\kappa$  bei  $\beta = 1,7$  und  $L = T$ .

In dem Verlauf des Koeffizienten  $\gamma_p(\kappa)$  mit periodischen Randbedingungen sind beide Phasen gut zu erkennen. Der Parameter beginnt auf einem konstanten Plateau und sinkt während des Phasenüberganges auf null ab. Die Fehlergrenzen bei  $\kappa = 0,18$  sind im Vergleich zu den anderen Punkten auffallend hoch. Eine mögliche Ursache dafür sind schon beschriebene Probleme bei der Funktionsanpassung. Wird bei dieser nicht das globale Minimum der  $\chi$ -Funktion gefunden, sondern nur ein nahe liegendes lokales Minimum, so werden die Fits ungenauer und die Fehlergrenzen vergrößern sich. Bei  $\kappa = 0,04$  nehmen die antiperiodischen Daten einen relativ geringen Wert an und entfallen damit dem konstanten Verlauf. Der angesprochene Datenpunkt ist allerdings fragwürdig, da die Datenausgabe des Programmes für  $L = 2$  fehlerhaft war. Ein fehlender Datenpunkt verschlechtert die Genauigkeit der Anpassung und führt zu veränderten Parameterwerten. Es ist also davon auszugehen, dass  $\gamma$  für antiperiodische Randbedingungen konstant bleibt. Auch in der Abbildung 12 fällt dieser Datenpunkt aus den erklärten Gründen auf. Dies ist ebenfalls bei den verbleibenden Funktionskoeffizienten der Fall. Der Übergang in die Volumenunabhängigkeit äußert sich durch eine deutliche Vergrößerung der Fehlergrenzen.



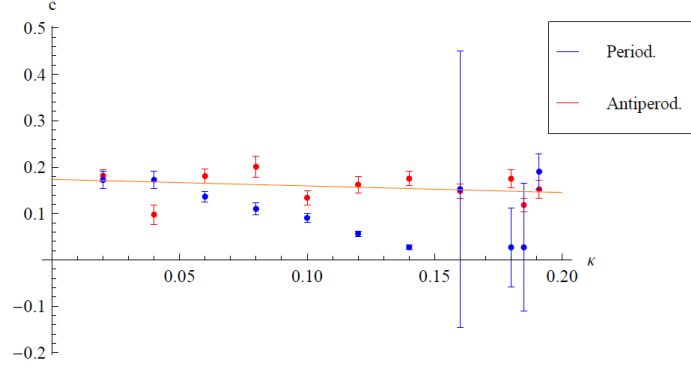


Abb. 12: Der Funktionskoeffizient  $c$  aufgetragen gegen  $\kappa$  bei  $\beta = 1,7$  und  $L = T$ .

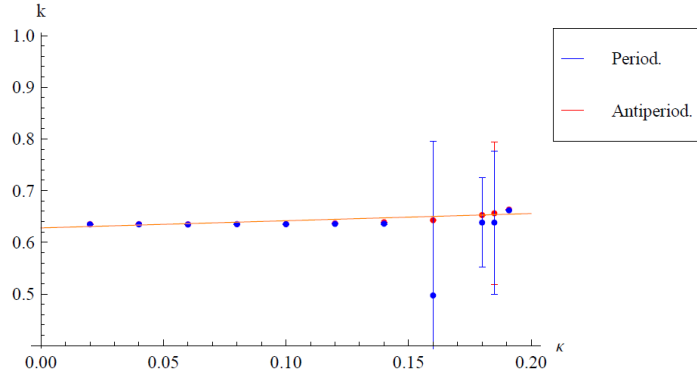


Abb. 13: Der Funktionskoeffizient  $k$  aufgetragen gegen  $\kappa$  bei  $\beta = 1,7$  und  $L = T$ .

Die Erhöhung der Ungenauigkeit dieser Koeffizienten resultiert aus der numerischen Anpassung der konstanten Plaquettenwartungswerte. Das Abfallen des Koeffizienten  $\gamma(\kappa)$  verursacht einen abnehmenden Einfluss der Exponentialfunktion. In dem dritten Bereich muss daher nur die Summe  $c + k = \text{const.}$  sein, was eine genaue numerische Berechnung der einzelnen Koeffizienten erschwert und in erhöhten Fehlergrenzen resultiert. Während des zweiten Bereiches ist ein abfallender Verlauf von  $c$  auffällig. Dieser ist ebenfalls auf numerische Gründe zurückzuführen. Der abnehmende Einfluss der Exponentialfunktion hat zur Folge, dass in der Funktionsanpassung  $c$  gesenkt wird. Jedoch ist anzunehmen, dass  $c$  konstant bleibt und der Phasenübergang nur für den Parameter  $\gamma$  eintritt. Bei antiperiodischen Randbedingungen tritt keine merkliche Veränderung der Koeffizienten auf. Aus diesem Grund eignen sich die antiperiodischen Randbedingungen zur Bestimmung der Koeffizientenwerte. Hierzu wurden die entsprechenden Daten mit einem linearen Funktionsansatz  $c(\kappa) = m\kappa + \text{const.}$  angeglichen. Bei diesem Ansatz

---

sollte die Steigung  $m \approx 0$  und somit vernachlässigbar sein. Dies war auch in den ausgewerteten Daten der Fall. Der Wert der Konstante beträgt  $c = 0,1871 \pm 0,0840$ . Im Allgemeinen weisen die Werte für den Parameter  $k$  eine höhere Genauigkeit auf als  $c$ . Im dritten Bereich sinkt aber auch diese aus oben genannten Gründen. Beide Randbedingungen zeigen bis  $\kappa \approx 0,15$  keine Abweichungen voneinander. An der Abbildung 13 wird deutlich, weshalb ein Abnehmen von  $c$  für periodische Randbedingungen eintritt. Dieser Umstand kann durch die numerische Anpassung erklärt werden. Der Verlust des exponentiellen Verlaufes kann numerisch ebenso durch einen verschwindenden Koeffizienten  $c$  erklärt werden. Die Unsicherheit bei der Anpassung äußert sich wieder durch ein Ansteigen der Fehler. Für antiperiodische Randbedingungen ist dieser Parameter ungleich null um die Krümmung der Exponentialfunktion anzugleichen. Die Konstante  $k$  wurde mit antiperiodischen Randbedingungen zu  $k = 0,6278 \pm 0,0002$  bestimmt. Besonders auffällig sind die antiperiodischen Randbedingungen bei  $\kappa = 0,185$ , da sie ungewöhnlich hohe Fehlergrenzen aufweisen, was sonst nur für periodische Randbedingungen der Fall ist. Auch bei der Messung für die Pionenmasse fielen die Daten bei  $\kappa = 0,185$  durch ihr abweichendes Verhalten auf. Dies könnte darauf hinweisen, dass der kritische Parameterbereich angenähert wird.

Wie bereits erwähnt, bildet die Summe aus  $c$  und  $k$  eine Konstante. Um einen Vergleich mit den Ergebnissen bei  $\beta = 1,8$  ziehen zu können, wird die entsprechende Summe aus den oben angegebenen Werten berechnet. Für  $\beta = 1,7$  ergibt sich diese zu  $c + k = 0,815 \pm 0,084$ .

### 5.2.2 Exponentieller Funktionsansatz bei $\beta = 1,8$

Dieser Abschnitt zeigt die Ergebnisse der Simulationen mit  $\beta = 1,8$  und ermöglicht damit einen Vergleich zwischen Messungen mit zwei unterschiedlichen Kopplungsstärken. Wie schon für  $\beta = 1,7$  können drei Bereiche identifiziert werden. Um Rechenzeit einzusparen, wurde die Messung mit  $\beta = 1,8$  erst ab  $\kappa = 0,12$  gestartet. Abbildung 14 zeigt den ersten Bereich, in der die Volumenabhängigkeit des Plaquettenerwartungswertes erhalten ist. Auch in diesem Fall sind die Fehlergrenzen der  $L = 2$ -Werte höher als die der anderen Gittergrößen. Beide Randbedingungen zeigen einen exponentiellen Abfall, wobei der Verlauf für antiperiodische Randbedingungen eine steilere Steigung aufweist.

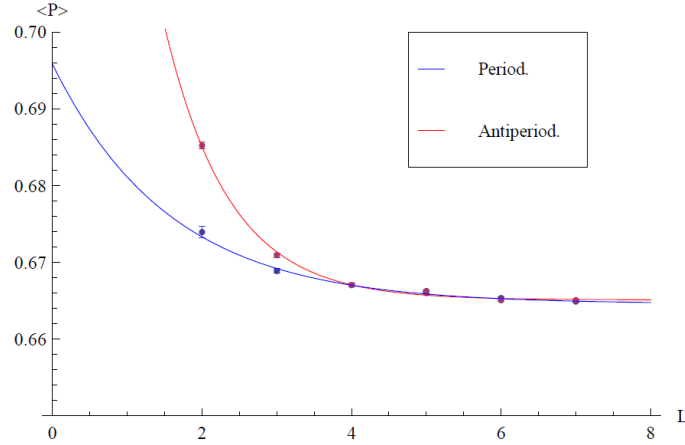


Abb. 14: Volumenabhängigkeit des Plaquetten Erwartungswertes bei  $\beta = 1,8$ ;  $\kappa = 0,12$  und  $L = T$ . Die Anpassung mit dem exponentiellen Ansatz schließt alle Datenpunkte ein.

Der dritte Bereich ist in der Abbildung 15 dargestellt. Wie bei  $\beta = 1,7$  verliert auch hier der Plaquetten Erwartungswert mit periodischen Randbedingungen die Volumenabhängigkeit. In der Abbildung 15 wurde  $\kappa = 0,15$  gesetzt und die Volumenabhängigkeit ist vollkommen verschwunden. Bis auf den Punkt bei  $L = 2$  für periodische Randbedingungen werden die Daten von den Anpassungsfunktionen gut getroffen. Wie oben erwähnt, wird im Kapitel 5.2.3 näher auf andere Anpassungsfunktionen eingegangen.

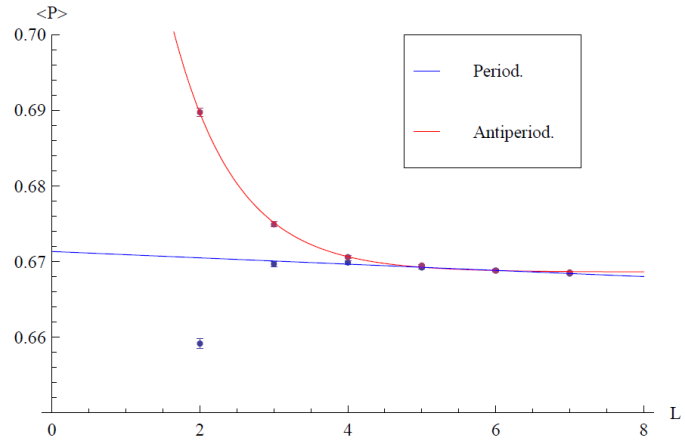


Abb. 15: Volumenabhängigkeit des Plaquetten Erwartungswertes bei  $\beta = 1,8$ ;  $\kappa = 0,15$  und  $L = T$ . Die Anpassung mit dem exponentiellen Ansatz beginnt für die periodischen Randbedingungen ab  $L = 3$ .

Ab einem Wert von  $\kappa = 0,18$  ist die Volumenabhängigkeit wieder hergestellt, allerdings sinkt der Erwartungswert für periodische Randbedingungen unerwartet steil.

Dies steht im Gegensatz zu den restlichen Daten, in denen die höhere Steigung den antiperiodischen zugeordnet werden konnte. Wie für  $\beta = 1,7$  findet der Übergang in die Volumenabhängigkeit sehr schnell statt mit dem Unterschied, dass diese für  $\beta = 1,8$  schon bei geringeren  $\kappa$  eintritt. Während diese Grenze für  $\beta = 1,7$  bei ca.  $\kappa \approx 0,19$  liegt, ist sie für  $\beta = 1,8$  zu  $\kappa \approx 0,18$  verschoben.

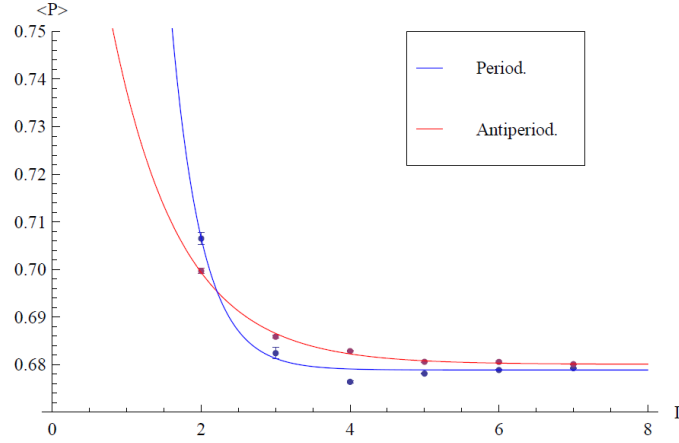


Abb. 16: Volumenabhängigkeit des Plaquettenerwartungswertes bei  $\beta = 1,8$ ;  $\kappa = 0,18$  und  $L = T$ . Die Anpassung mit dem exponentiellen Ansatz für periodische Randbedingungen berücksichtigt nicht den Datenpunkt bei  $L = 4$ .

In der Abbildung 17 wurde der Hoppingparameter weiter erhöht und liegt nahe am kritischen Parameterbereich. Das exponentielle Absinken des Erwartungswertes ist deutlich zu erkennen, mit einem steileren Abfall für antiperiodische Randbedingungen.

In den Abbildungen 18-20 sind die Anpassungsparameter gegen den Hoppingparameter aufgetragen.

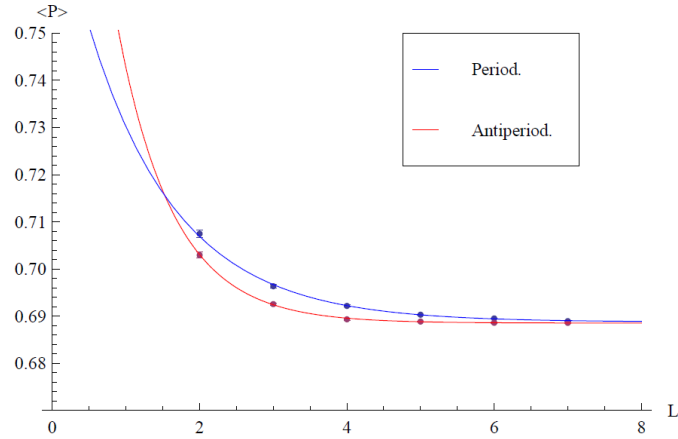


Abb. 17: Volumenabhängigkeit des Plaquetten Erwartungswertes bei  $\beta = 1,8$ ;  $\kappa = 0,19$  und  $L = T$ . Die Anpassung mit dem exponentiellen Ansatz schließt alle Datenpunkte ein.

Wie in der Abbildung 18 zu sehen ist, liegt der Koeffizient mit periodischen Randbedingungen für  $\kappa = 0,12$  schon unterhalb des Plateaus der Antiperiodischen. Dieser Datenpunkt befindet im zweiten Bereich, der schon bei  $\kappa \approx 0,15$  endet. Der Parameter für periodische Randbedingungen  $\gamma_p$  sinkt auf null ab, der für antiperiodische zeigt keine Veränderungen in seinem Verhalten. Bei  $\kappa = 0,185$  und  $\kappa = 0,19$  ist  $\gamma_p$  wieder auf das ursprüngliche Plateau angehoben.

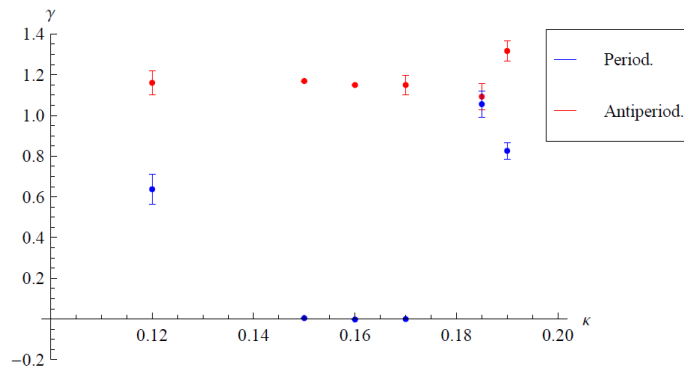


Abb. 18: Der Exponentialkoeffizient  $\gamma$  aufgetragen gegen  $\kappa$  bei  $\beta = 1,8$  und  $L = T$ .

Die beiden verbleibenden Parameter sind zueinander versetzt, bilden in ihrer Summe jedoch wieder eine Konstante. Die Ungenauigkeiten, vor allem für den Parameter  $c$ , wachsen aus oben erklärten Gründen an. Insgesamt zeigen die Anpassungsparameter ein analoges Verhalten zu  $\beta = 1,7$  mit dem Unterschied, dass  $c$  während des dritten

Bereiches nicht auf null absinkt. Aus dargelegten Gründen ist dieser Unterschied jedoch auf numerische Probleme bei der Funktionsanpassung zurückzuführen.

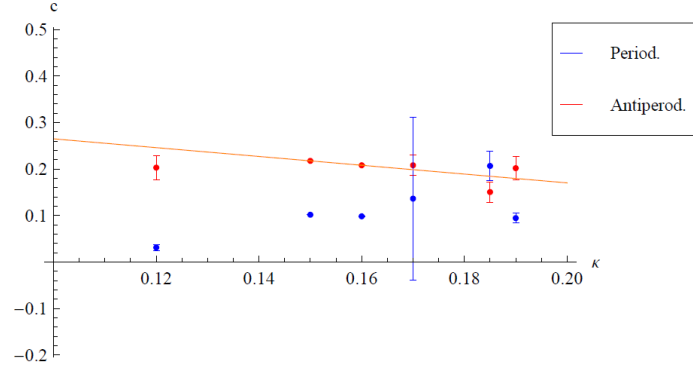


Abb. 19: Der Funktionskoeffizient  $c$  aufgetragen gegen  $\kappa$  bei  $\beta = 1,8$  und  $L = T$ .

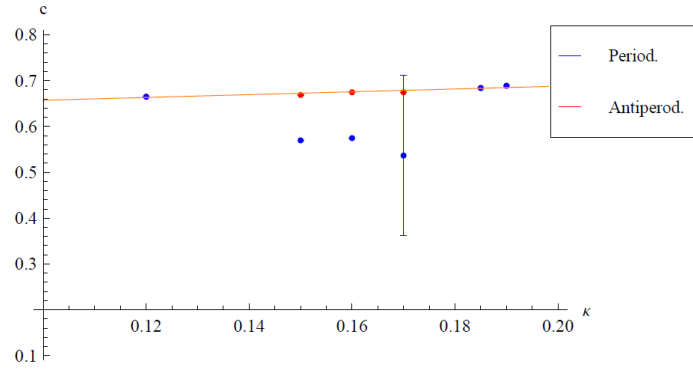


Abb. 20: Der Funktionskoeffizient  $k$  aufgetragen gegen  $\kappa$  bei  $\beta = 1,8$  und  $L = T$ .

Um einen Wertevergleich der Anpassungsparameter zu ermöglichen, wurden  $c$  und  $k$  auch für  $\beta = 1,8$  bestimmt. Wie in der Abbildung 19 zu sehen ist, ist die Steigung der linearen Funktionsanpassung nicht vernachlässigbar. Die Steigung nimmt aufgrund der hohen Fehlergrenzen und dem damit verbundenen Anpassungsspielraum einen Wert ungleich Null an. Die großen Ungenauigkeiten von  $c$  wurden bereits mit numerischen Ursachen begründet. Wird dieser Effekt vernachlässigt, kann  $c$  als konstant betrachtet werden und liegt bei einem Wert von  $c \approx 0,22 \pm 0,05$ . Die verbleibende Konstante beträgt  $k = 0,6263 \pm 0,0019$ , womit sich die Summe zu  $c+k = 0,846 \pm 0,040$  ergibt. Somit stimmen die Parametersummen für beide Gitterkopplungen innerhalb ihrer Fehlergrenzen überein. Abschließend werden die beobachteten Phänomene des Plaquettenerwar-

tungswertes zusammengefasst. Abhängig vom Hoppingparameter, und somit antiproportional zur Gluinomasse, durchläuft der Erwartungswert eine Veränderung in seinem Verhalten, in der er seine exponentielle Volumenabhängigkeit bei periodischen Randbedingungen verliert. Für antiperiodische Randbedingungen ist keine Veränderung wahrnehmbar. Bei höheren Hoppingparametern stellt sich die Volumenabhängigkeit mit einem rapiden Übergang wieder her. Der Vergleich zweier Gitterkopplungen hat ergeben, dass für  $\beta = 1,7$  und  $\beta = 1,8$  ein ähnliches Verhalten beobachtbar ist, mit einer früheren Wiederherstellung der Volumenabhängigkeit. Der Verlust der Volumenabhängigkeit ab dem zweiten Bereich geht mit einem schwindenden Einfluss der Volumeneffekte einher

Ein möglicher Erklärungsansatz für den Verlust der Volumenabhängigkeit ist, dass mit zunehmendem  $\kappa$  die Gluinomasse abnimmt und der supersymmetrische Limes angenähert wird. Mögliche bosonische und fermionische Beiträge in  $\gamma$  könnten sich gegenseitig kürzen und das Absinken von  $\gamma$  erklären.

### 5.2.3 Alternative Funktionsansätze

Dieses Unterkapitel befasst sich mit alternativen Bedingungen für die Funktionsanpassungen der Plaquettenerwartungswerte mit periodischen Randbedingungen. Zunächst werden negative Koeffizienten der Fitfunktion in der Gleichung (194) zugelassen. Die resultierenden Ergebnisse sind in der Abbildung 21 enthalten.

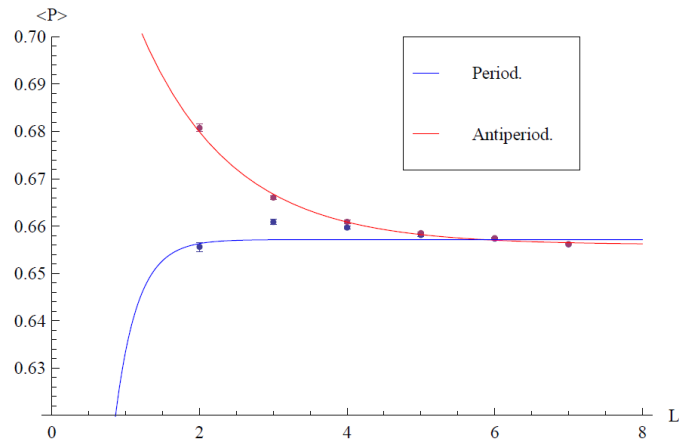


Abb. 21: Volumenabhängigkeit des Plaquettenerwartungswertes bei  $\beta = 1,7$ ;  $\kappa = 0,185$  und  $L = T$ . Die Anpassung mit dem exponentiellen Ansatz und negativen Koeffizienten schließt alle Datenpunkte ein.

Die Koeffizientenwerte steigen sehr stark an und weisen Fehlergrenzen in der Größenordnung  $\mathcal{O}(\Delta c) \approx 2000$  auf. Die Ungenauigkeit der Fitfunktion wird anhand der Daten bei  $L = 3$  und  $L = 4$  klarer. Diese zeigen einen leichten Anstieg mit sinkender Gittergröße. Der Anstieg und der darauf folgende schnelle Abfall bei  $L = 2$  können nicht durch einen Exponentialfit mit negativem  $c$  angepasst werden, was zu den oben genannten Fehlergrenzen führt. Ein Anstieg der Werte bei  $L = 3$  und  $L = 4$  weist auf eine Beschränkung positiver Parameter hin.

Ein Lösungsansatz zur besseren Bestimmung der anzupassenden Funktionskoeffizienten liegt darin, den Datenfit mit dem Ansatz in Gleichung (194) durchzuführen

$$\langle P \rangle = k (e^{-\gamma L} - 1) . \quad (196)$$

Die Motivation für diesen Ansatz liegt darin, dass die Anzahl der Funktionsparameter reduziert ist. Mit diesem Ansatz ist es allerdings nicht möglich, die Krümmung des Datenverlaufes anzugleichen, wie es in Abbildung 22 dargestellt ist. Um einen Vergleich zu ermöglichen wurden nur die antiperiodischen Daten mit dem alternativen Ansatz angepasst.

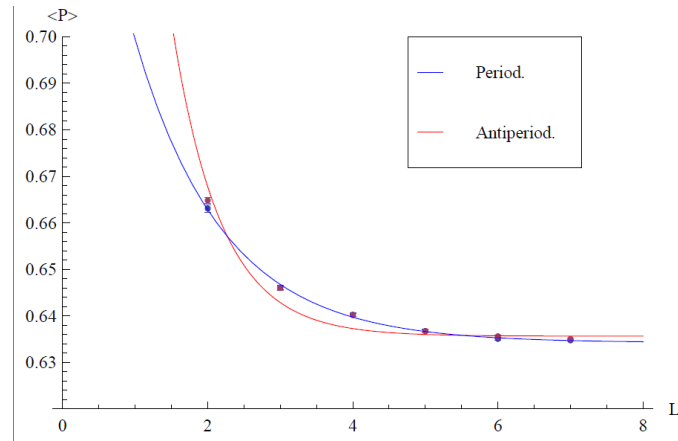


Abb. 22: Volumenabhängigkeit des Plaquettenerwartungswertes bei  $\beta = 1,7$ ;  $\kappa = 0,02$  und  $L = T$ . Die Anpassung mit dem alternativen Ansatz für antiperiodische Randbedingungen schließt alle Datenpunkte ein.

Die gesammelten Daten werden von dem exponentiellen Ansatz mit positiven Koeffizienten am besten angeglichen. Aus diesem Grund werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Daten der Kapitel 5.2.1 und 5.2.2 verwendet.



## 5.3 Der Erwartungswert des Polyakov-Loops

### 5.3.1 Der Polyakov-Loop bei $\beta = 1, 7$

Eine Gitterobservable, die Aufschluss über das Confinement einer Theorie gibt, ist der Polyakov-Loop. Die Autoren von [25] begründeten mit dessen perturbativen Schleifenpotential, dass adjungierte Fermionen mit periodischen Randbedingungen überhalb einer kritischen Gitterlänge keine Deconfinementphase aufweisen, wenn das Gitter aus drei unendlich ausgedehnten und einer kompaktifizierten Gitterkante besteht. Diese Aussage wird im Unterkapitel 5.3.4 überprüft. Davor werden die Polyakov-Loop-Erwartungswerte der obigen Plaquettenmessungen und einige grundlegende Eigenschaften gezeigt.

In den folgenden Abbildungen ist Erwartungswert des Polyakov-Loops für verschiedene Gittervolumen bei unterschiedlichen Werten von  $\kappa$  gezeigt. Die Simulationen wurden auf einem hyperkubischen Gitter mit  $L = T$  durchgeführt.

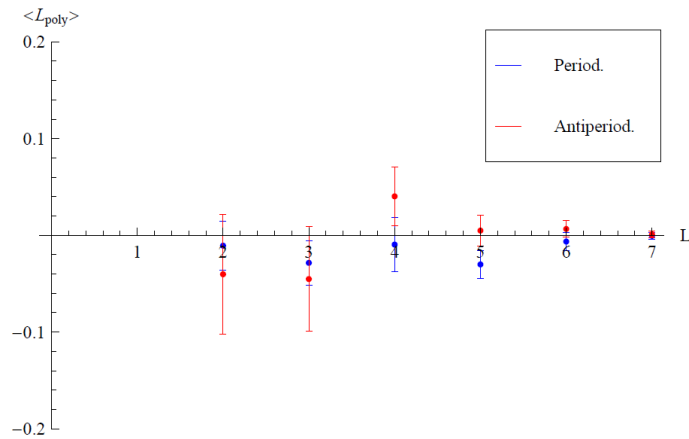


Abb. 23: Erwartungswerte des Polyakov-Loops aufgetragen gegen die Kantenlänge eines hyperkubischen Gitters bei  $\beta = 1, 7$  und  $\kappa = 0, 14$ .

Die Datenpunkte weisen für geringe Gittergrößen hohe Fehlergrenzen auf, sind innerhalb dieser allerdings um null zentriert. Die Ungenauigkeiten nehmen mit größerer Gitterausdehnung ab und die Daten liegen bei  $L = 7$  auf dem Nullwert. Somit zeigt die Theorie in diesem Parameterbereich Confinement. Dies ist ab einem Wert von  $\kappa = 0,185$  nicht mehr vorhanden, was der Abbildung 24 zu entnehmen ist.

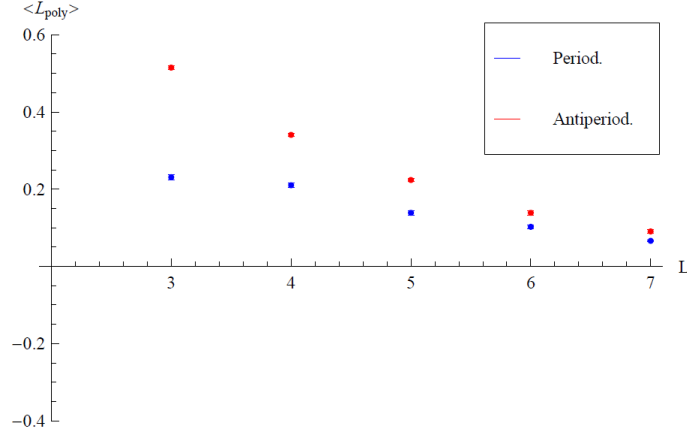


Abb. 24: Erwartungswerte des Polyakov-Loops aufgetragen gegen die Kantenlänge eines hyperkubischen Gitters bei  $\beta = 1,7$  und  $\kappa = 0,185$ .

Bei  $\kappa = 0,185$  weicht der Erwartungswert des Polyakov-Loops bis zu einer Gitterausdehnung von  $L = 7$  von Null ab und die Fehlergrenzen sinken. Die Abweichung ist für antiperiodische Randbedingungen größer. Wird der Hoppingparameter weiterhin erhöht, nehmen die Polyakov-Erwartungswerte größere Werte an und ein Deconfinement ist deutlich zu erkennen.

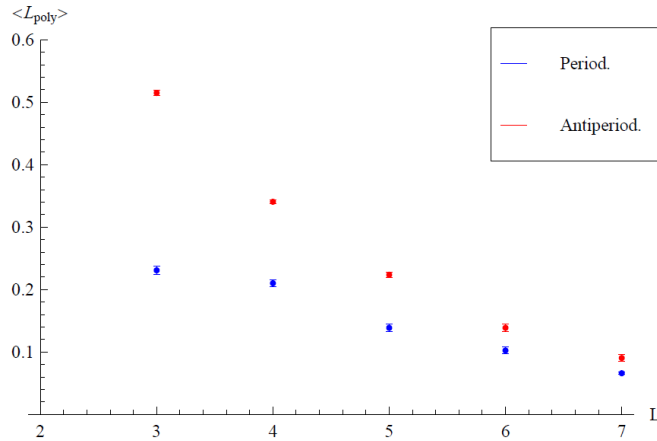


Abb. 25: Erwartungswerte des Polyakov-Loops aufgetragen gegen die Kantenlänge eines hyperkubischen Gitters bei  $\beta = 1,7$  und  $\kappa = 0.189$ .

Wie in Kapitel 4.5.3 erklärt, hängt dieses Deconfinement mit einem Phasenübergang zusammen, bei dem die  $Z(2)$ -Symmetrie spontan gebrochen wird. Es bleibt anzumerken, dass der Erwartungswert des Polyakov-Loops mit zunehmender Gittergröße kleinere Werte annimmt. Nähert man sich dem kritischen Parameterbereich weiter an, stellt

sich das Confinement wieder her, wie in der Abbildung 26 gezeigt.

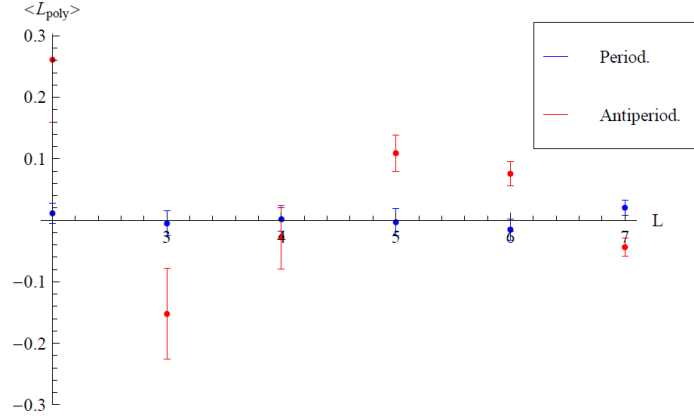


Abb. 26: Erwartungswerte des Polyakov-Loops aufgetragen gegen die Kantenlänge eines hyperkubischen Gitters bei  $\beta = 1,7$  und  $\kappa = 0,191$ .

Die Deconfinementphase beginnt bei  $\kappa \approx 0,185$ . Dabei fällt auf, dass die Abweichung des Erwartungswertes von Null für die Simulationen mit antiperiodischen Randbedingungen für jeden Wert von  $\kappa$  höhere Werte annimmt und größere Fehlergrenzen aufweist. Periodische Randbedingungen führen zu minimierten Volumeneffekten, da bei dem Überschreiten der Gittergrenze keine Änderungen auftreten. Bei den Antiperiodischen tritt jedoch ein Vorzeichenwechsel an der Gittergrenze auf und führt zu einem größeren Einfluss von Volumeneffekten, was sich wiederum in erhöhten Fehlergrenzen der Daten äußert. Die Aussage von [25] kann nicht auf diese Messung bezogen werden, da in diesem Fall alle vier Gitterrichtungen bei endlichen Werten fixiert wurden, während bei [25] nur eine kompaktifizierte und damit fixierte Richtung verwendet wurde.

### 5.3.2 Der Polyakov-Loop bei $\beta = 1,8$

Der Erwartungswert des Polyakov-Loops wurde auch für  $\beta = 1,8$  unter ansonsten gleichen Bedingungen berechnet. In den Abbildungen 27 und 28 sind die Ergebnisse für  $\kappa = 0,15$  und  $\kappa = 0,185$  dargestellt.

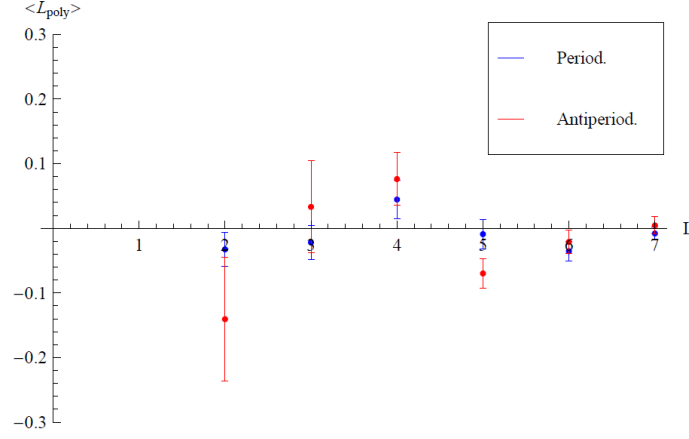


Abb. 27: Erwartungswerte des Polyakov-Loops aufgetragen gegen die Kantenlänge eines hyperkubischen Gitters bei  $\beta = 1,8$  und  $\kappa = 0,15$ .

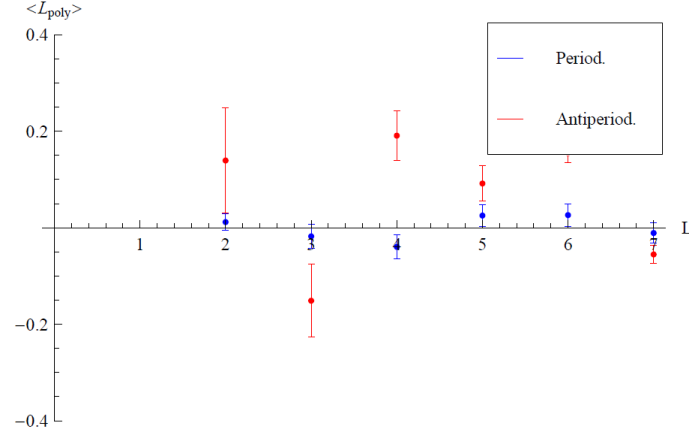


Abb. 28: Erwartungswerte des Polyakov-Loops aufgetragen gegen die Kantenlänge eines hyperkubischen Gitters bei  $\beta = 1,8$  und  $\kappa = 0,185$ .

Auch für eine Gitterkopplung von  $\beta = 1,8$  weisen die Daten für antiperiodische Randbedingungen sowohl höhere Werte als auch höhere Ungenauigkeiten auf. Im Gegensatz zu den Simulationen mit  $\beta = 1,7$  ist in diesem Fall kein Übergang in eine Deconfinementphase vorhanden. Alle Werte von  $\kappa$  zeigen das gleiche Verhalten wie in den Abbildungen 27 und 28. Es ist auffällig, dass sich bei dem Übergang  $\beta = 1,7 \rightarrow \beta = 1,8$  das Verhalten der Theorie verändert. Es ist keine Deconfinementphase vorhanden, die für  $\beta = 1,7$  bei  $\kappa = 0,185$  beginnt. Eine mögliche Erklärung für diese Beobachtung ist das Annähern an den kritischen Parameterbereich. Schon bei den Plaquettenenerwartungswerten wurde beobachtet, dass die Confinementphase nahe am kritischen Punkt

---

wider hergestellt ist. Im Kapitel 5.1.2 wurde eine Verschiebung des kritischen Parameters um  $\Delta\kappa_c \approx 0,003$  beobachtet. Die Effekte, die für ein Erreichen des kritischen Parameterbereiches sprechen, sind für beide Gitterkopplungen um  $\Delta\kappa = 0,005$  verschoben. Die Differenzen  $\Delta\kappa_c$  und  $\Delta\kappa$  liegen in der selben Größenordnung. Messungen mit geringerer Schrittweite  $\Delta\kappa$  könnten einen klareren Einblick in diese Situation ermöglichen. Weiterhin ist zu beachten, dass das physikalische Volumen aufgrund der antiproportionalen Relation von  $\beta$  und  $a$  bei gleichbleibender Anzahl an Gitterpunkten verkleinert wird. Die Messungen für  $\beta = 1,7$  und  $\beta = 1,8$  können daher bezüglich ihrer Gitterausdehnungen nicht direkt miteinander verglichen werden. Das Verhalten der Theorie bezüglich der Fermionenmasse und auftretender Phasenübergänge sollte dennoch einen ähnlichen Charakter aufweisen. Wie bereits erwähnt, kann die Aussage von [25] über das Ausfallen der Deconfinementphase für periodische Randbedingungen aufgrund der Rahmenbedingungen nicht auf die gezeigten Daten angewandt werden. Dennoch ist es auffällig, dass der Erwartungswert des Polyakov-Loops mit periodischen Randbedingungen in den Messungen generell näher am Nullpunkt liegt und geringere Abweichungen davon aufweist, als die Simulationen mit antiperiodischen Randbedingungen. Eine Zusammenfassung der  $\kappa$ -Werte, ab denen die Volumenunabhängigkeit einsetzt, ist in der Tabelle 1 enthalten.

Tabelle 1: Beobachtete Volumenunabhängigkeit für die Gitterkopplungen  $\beta = 1,7$  und  $\beta = 1,8$ . Die angegebenen Werte für  $\kappa$  stammen aus den oben erläuterten Daten.

	Volumenunabhängigkeit	$\langle L_P \rangle \neq 0$
Antiperiodisch $\beta = 1,7$	-	$\kappa \approx 0,185 - 0,189$
Antiperiodisch $\beta = 1,8$	-	-
Periodisch $\beta = 1,7$	$\kappa \approx 0,16 - 0,19$	$\kappa \approx 0,185 - 0,189$
Periodisch $\beta = 1,8$	$\kappa \approx 0,15 - 0,185$	-

### 5.3.3 Der Polyakov-Loop mit fixiertem räumlichen Volumen

Ein interessanter Aspekt der Gitterphysik kann an den folgenden Abbildungen gesehen werden. Für die dazugehörigen Simulationen mit  $\beta = 1,7$  wurde das räumliche Volumen auf  $L = 8$  fixiert. Die zeitliche Ausdehnung wurde in einem Bereich von  $T = 2$  bis  $T = 16$  mit einer Schrittweite von  $\Delta T = 2$  variiert. Das Interesse besteht darin, das

Confinementverhalten hinsichtlich der Effekte der Randbedingungen zu untersuchen, da nur in der zeitlichen Gitterrichtung Unterschiede zwischen diesen auftreten. Es wurden Simulationen für  $\kappa = 0,14; 0,16; 0,18; 0,185$  und  $\kappa = 0,19$  durchgeführt, wobei alle Werte das gleiche Verhalten aufweisen. Beispiele dafür sind in den Abbildungen 29 und 30 zu finden.

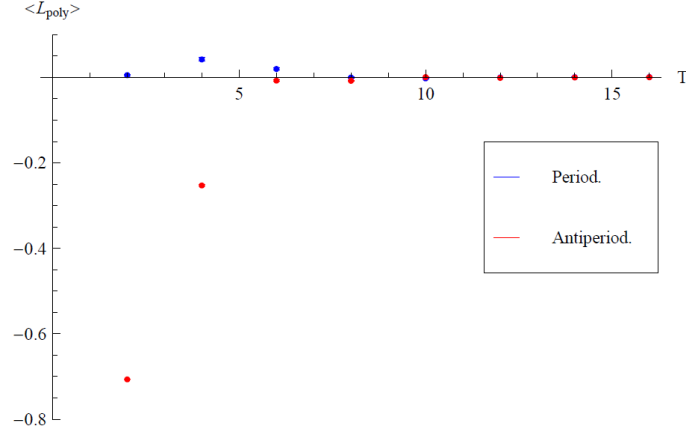


Abb. 29: Erwartungswerte des Polyakov-Loops bei  $\beta = 1,7$  und  $\kappa = 0,16$ . Die räumliche Gitterausdehnung beträgt  $L = 8$ , die zeitliche Ausdehnung wird variiert.

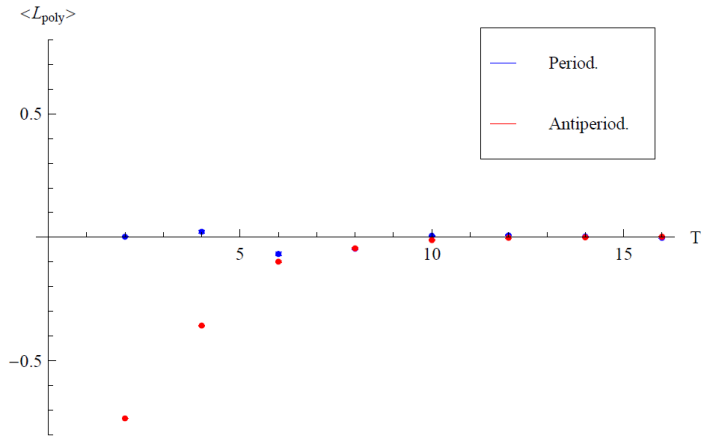


Abb. 30: Erwartungswerte des Polyakov-Loops bei  $\beta = 1,7$  und  $\kappa = 0,185$ . Die räumliche Gitterausdehnung beträgt  $L = 8$ , die zeitliche Ausdehnung wird variiert.

Bei geringen zeitlichen Ausdehnungen ist ein Deconfinement für antiperiodische Randbedingungen zu erkennen. Der Erwartungswert des Polyakov-Loops nimmt Werte von bis zu  $\langle L_P \rangle \approx 0,7$  an. Auch die periodischen Randbedingungen zeigen geringe Abweichungen von dem Nullwert, besonders ausgeprägt bei einer Gitterausdehnung von

---

$T = 4$ . Mit größerer zeitlicher Gitterausdehnung streben die Erwartungswerte beider Randbedingungen zum Nullwert und gleichen sich einander an. Für  $\kappa = 0,16$  liegen beide Randbedingungen ab  $T = 6$  auf der Nullachse, für  $\kappa = 0,185$  erst ab einer Kantenlänge von  $T = 10$ . In den Daten ist eine entsprechende Tendenz zu erkennen, dass mit sinkender Gluino­masse größere zeitliche Ausdehnungen benötigt werden, um von einem Confinement ausgehen zu können. Bei kleinem  $T$  fällt besonders für  $\kappa = 0,185$  auf, dass die Abweichungen der Beträge des Erwartungswertes für antiperiodische Randbedingungen in einem ähnlichen Verlauf abfallen wie in der Deconfinementphase auf dem hyperkubischen Gitter für  $\beta = 1,7$ . Allgemein wurden im Vergleich zu den Simulationen auf dem hyperkubischen Gitter in diesem Fall größere Gitterausdehnungen betrachtet.

Das Angleichen der Daten beider Randbedingungen ist durch deren schwindenden Einfluss bei großen Gitterausdehnungen zu erklären. Mit zunehmender Gittergröße sinken sowohl die Volumeneffekte, als auch die Auswirkungen der Randbedingungen auf die Theorie. Nimmt man unendlich große Gitter mit  $L, T \rightarrow \infty$  an, sollte kein Unterschied mehr zwischen Simulationen mit verschiedenen Randbedingungen vorliegen, wie es auch im Kontinuums­limit der Fall ist. Dieser Effekt liegt dem Angleichen der Daten mit steigendem  $T$  zugrunde. Wie schon für das hyperkubische Gitter in den Abschnitten 5.3.1 und 5.3.2 festgehalten wurde, sind die Beträge des antiperiodischen Erwartungswertes in der Regel größer als die periodischer. Trägt man für  $\kappa = 0,18; 0,185$  und  $\kappa = 0,19$  die absoluten Beträge des Erwartungswertes mit antiperiodischen Randbedingungen gegen die zeitliche Ausdehnung auf, wie es in der Abbildung 31 beispielhaft getan wurde, kann die Form des Absinkens besser betrachtet werden.

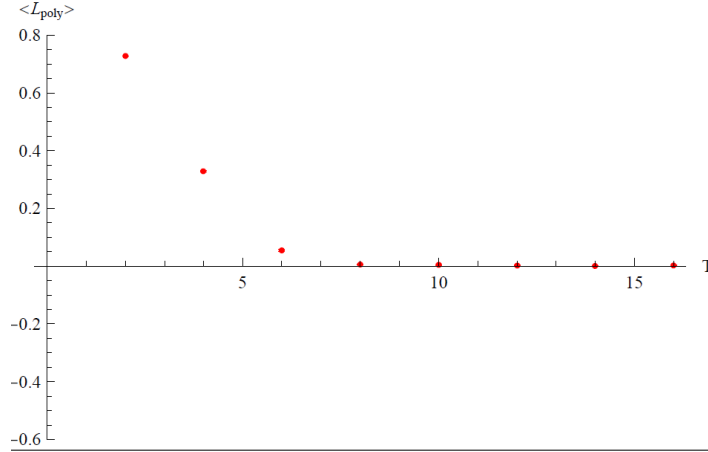


Abb. 31: Absolute Beträge des Erwartungswertes des Polyakov-Loops mit antiperiodischen Randbedingungen bei  $\beta = 1,7$  und  $\kappa = 0,18$ . Die räumliche Gitterausdehnung beträgt  $L = 8$ , die zeitliche Ausdehnung wird variiert.

Bis  $\langle L_P \rangle = 0$  erreicht wird, erinnert der Verlauf der abfallenden Daten an eine lineare Form, wie in der Deconfinementphase in Kapitel 5.3.1. Das Verhalten der Daten legt den Schluss nahe, dass Volumeneffekte und Randbedingungen zu einem Deconfinement bei geringen zeitlichen Gitterausdehnungen führen, was auch aus den Daten in dem genannten Abschnitt hervor geht.

#### 5.3.4 Der Polyakov-Loop mit fixierter zeitlicher Ausdehnung

Um die Aussage der Autoren von [25] zu überprüfen und den auftretenden Effekt zu visualisieren, wurde für die folgenden Simulation die zeitliche Gitterausdehnung bei  $T = 4$  fixiert, wobei das räumliche Volumen in einem Bereich von  $L^3 = 4^3$  bis  $L^3 = 14^3$  mit einer Schrittweite von  $\Delta L = 2$  abgetastet wurde. Die zeitliche Gitterlänge wurde bewusst sehr klein gewählt, um den Effekt der Randbedingungen zu betonen. Nach [10] sollte bei einer kompaktifizierten Dimension und drei unendlich ausgedehnten kein Deconfinement für Fermionen in adjungierter Darstellung und mit periodischen Randbedingungen eintreten.

Die erste Simulation wurde mit  $\kappa = 0,12$  durchgeführt, die Ergebnisse sind in der Abbildung 32 gezeigt. Sowohl periodische, als auch antiperiodische Randbedingungen sind für alle Volumina mit leichten Abweichungen um Null verteilt und es ist von einer Confinementphase der Theorie auszugehen. Die maximalen Abweichungen liegen in



einer Größenordnung von  $\mathcal{O}(0,1)$ .

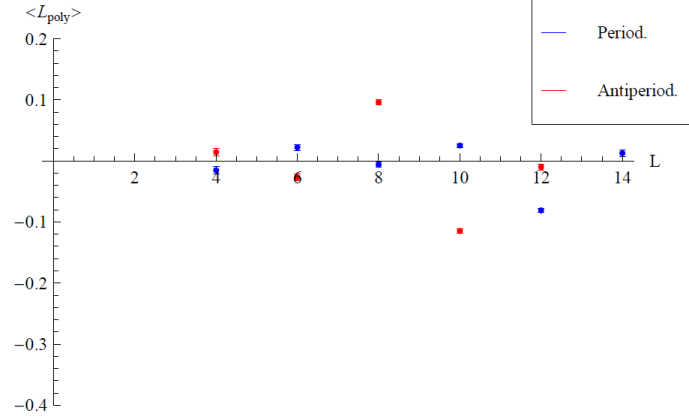


Abb. 32: Erwartungswerte des Polyakov-Loops bei  $\beta = 1,7$  und  $\kappa = 0,12$ . Die zeitliche Gitterausdehnung beträgt  $T = 4$ , die räumliche Ausdehnung wird variiert.

Um die Resultate der Autoren von [25] zu testen, wird eine Simulation in der Deconfinementphase benötigt, welche in den Abbildungen 33 und 34 für  $\kappa = 0,16$  und  $\kappa = 0,185$  enthalten sind.

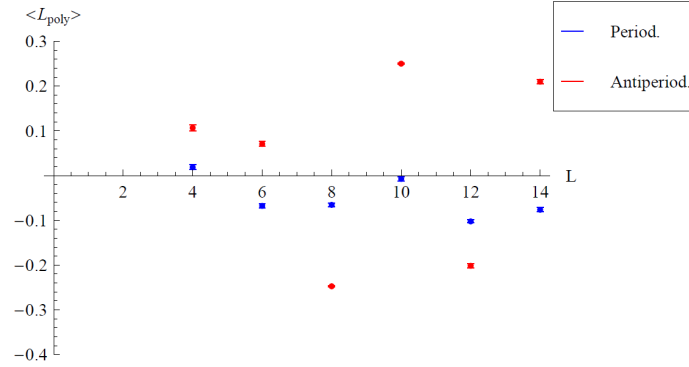


Abb. 33: Erwartungswerte des Polyakov-Loops bei  $\beta = 1,7$  und  $\kappa = 0,16$ . Die zeitliche Gitterausdehnung beträgt  $T = 4$ , die räumliche Ausdehnung wird variiert.

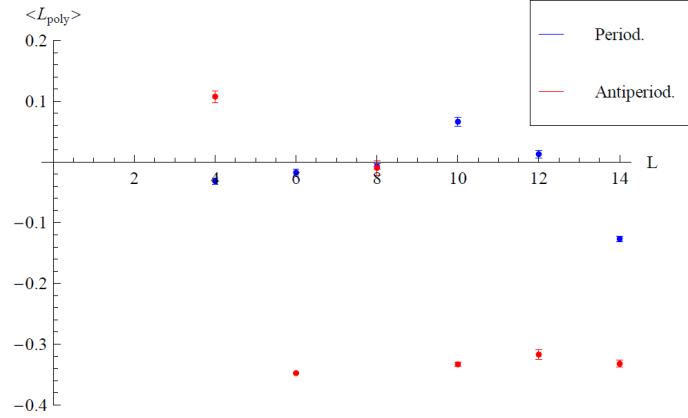


Abb. 34: Erwartungswerte des Polyakov-Loops bei  $\beta = 1,7$  und  $\kappa = 0,185$ . Die zeitliche Gitterausdehnung beträgt  $T = 4$ , die räumliche Ausdehnung wird variiert.

Wie in [25] beschrieben, zeigen die antiperiodischen Randbedingungen ein Deconfinement. Der Erwartungswert des Polyakov-Loops weicht deutlich von Null ab. Für  $\kappa = 0,16$  ist dies für alle räumlichen Gitterausdehnungen der Fall, während bei  $\kappa = 0,18$  nur der Wert für  $L = 8$  nahe an Null liegt. Die Abweichungen liegen in einer Größenordnung von  $\sigma \approx 0,35$  und sind damit mehr als dreifach so hoch wie in der Confinementphase. Die Erwartungswerte für periodische Randbedingungen haben für alle  $L$  geringere Beträge und sind für die meisten Volumina um den Nullpunkt zentriert. Dennoch sind für einige Gitterausdehnungen und besonders für  $\kappa = 0,185$  und  $L = 14$  Datenpunkte größer als Null auszumachen. Diese liegen jedoch in Größenordnung, die schon in der Confinementphase festgestellt wurden und sind daher nicht problematisch. Aus den dargestellten Abbildungen geht ein Verhalten hervor, dass die Autoren von [25] und [10] bestätigt. Periodische Randbedingungen und somit supersymmetrische Rahmenbedingungen verhindern die Deconfinementphase. Der theoretische Hintergrund dazu wurde in dem Kapitel 4.5.3 vorgestellt. Für Gluinos mit antiperiodischen Randbedingungen tritt das Deconfinement wie erwartet ein.

---

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In dem letzten Kapitel dieser Arbeit werden die dargelegten Ergebnisse zusammengefasst und ein Ausblick über verbleibende interessante Aspekte der Randbedingungen gegeben.

Im Kapitel 5.1 wurde der kritische Hoppingparameter für die Gitterkopplungen  $\beta = 1,7$  und  $\beta = 1,8$  bestimmt. Bei einem Vergleich konnte eine Verschiebung des kritischen Parameters um  $\Delta\kappa_c \approx 0,003$  bemerkt werden. Diese Verschiebung bei der Variation der Gitterkopplung scheint Auswirkungen auf die Deconfinementphase der Theorie zu haben. Während für  $\beta = 1,7$  ein Deconfinement eintritt, bleibt dieses für  $\beta = 1,8$  aus, was aus den Kapiteln 5.3.1 und 5.3.2 hervorgeht. Messungen mit einer geringeren Schrittweite  $\Delta\kappa$  könnten in der Lage sein, einen genaueren Zusammenhang zwischen dem Erreichen des kritischen Parameterbereiches und dem Fehlen der Deconfinementphase zu bestätigen oder auszuschließen. Eine zusätzliche Option für zukünftige Messungen stellt die Variation der Gitterkopplung dar. Mehr Informationen über das Verhalten der Theorie bei unterschiedlichen Werten von  $\beta$  könnten Aufschluss über das Auftreten und Fehlen der Deconfinementphase bieten.

Abhängig von der Gluinomasse war in den Kapiteln 5.2.1 und 5.2.2 ein Verlust der Volumenabhängigkeit des Plaquettenerwartungswertes für periodische Randbedingungen zu erkennen. Diese Beobachtung konnte anhand des Verhaltens des Anpassungskoeffizienten  $\gamma(\kappa)$  verdeutlicht werden. An diesem Punkt liegt ein Erklärungsansatz mittels der Supersymmetrie nahe, da die Volumenunabhängigkeit mit sinkender Gluinomasse und dem damit verbundenen supersymmetrischen Limes eintritt. Die Supersymmetrie sagt masselose Gluinos voraus, weshalb der supersymmetrische Limes bei der Reduzierung der Gluinomasse angenähert wird. Es wäre denkbar, dass sich bosonische und fermionische Terme in der  $\kappa$ -Abhängigkeit von  $\gamma$  gegenseitig aufheben. Aus den vorgestellten Daten geht hervor, dass eine Verringerung der Gluinomasse bei periodischen zeitlichen Randbedingungen für Fermionen einen verschwindenden Einfluss von Volumeneffekten bewirkt. Die genauere Bestimmung von  $\gamma$  und der Gründe aus denen die Volumenunabhängigkeit auftritt, bietet Raum für weitere Messungen und die Entwicklung einer theoretischen Grundlage des Phänomens. Um eine bessere Berechnung

---

der verbleibenden Koeffizienten  $c$  und  $k$  zu ermöglichen, könnte der Anpassungsansatz weiterentwickelt und verbessert werden. Damit könnte eine Verringerung der Fehlergrenzen in der zweiten Phase erreicht werden. Eine Identifikation der einzelnen Terme mit deren physikalischer Bedeutung kann den Aspekt des beobachteten Verhaltens besser beleuchten und ein tieferes Verständnis der Theorie liefern.

Bei den Messungen mit fixiertem räumlichen Volumen und variiertem zeitlicher Ausdehnung in Kapitel 5.3.3 konnte besonders bei geringen Gitterausdehnungen ein Unterschied zwischen den getesteten Randbedingungen erkannt werden. Die Erwartungswerte des antiperiodischen Polyakov-Loop nehmen für kleine  $T$  vergleichsweise hohe Beträge an, die mit periodischen Randbedingungen bleiben mit leichten Abweichungen um Null zentriert. Wird die zeitliche Ausdehnung vergrößert, sinken die Erwartungswerte für antiperiodische Randbedingungen ab und gleichen sich an die periodischen an. Dieses Verhalten lässt darauf schließen, dass die hohen Beträge für antiperiodische Randbedingungen aus deren Einfluss und zusätzlichen Volumeneffekten resultieren. Ein weiterer wichtiger Effekt für Gittertheorien ist in dem genannten Kapitel zu beobachten: Die Randbedingungen mit denen sich diese Arbeit beschäftigt, werden aufgrund des endlichen Volumens eingeführt. Im Limes  $L \rightarrow \infty$  werden sie unnötig und sollten keinen Einfluss mehr auf die Theorie und ihre Observablen nehmen. Folglich sollten bei großen Volumina keine Unterschiede mehr zwischen den Randbedingungen eintreten. Diese Erwartungshaltung wird auch in den gezeigten Daten bestätigt. Die Differenzen zwischen beiden Randbedingungen fallen zunehmend mit größerer zeitlicher Ausdehnung ab, bis beide einen identischen Verlauf annehmen. Bei geringen Gittergrößen werden die Effekte der Randbedingungen stärker und erklären somit die dort auftretenden starken Differenzen zwischen periodischen und antiperiodischen Randbedingungen.

Wird die zeitliche Ausdehnung fixiert und das räumliche Volumen variiert, so sollte für eine Simulation mit periodischen Randbedingungen nach den Autoren von [25] kein Deconfinement auftreten. Diese Aussage konnte anhand der Daten in dem Kapitel 5.3.4 überprüft und bestätigt werden. Durch einen zusätzlichen Term im Schleifenpotential wird die spontane Brechung der  $Z(3)$ -Symmetrie verhindert und das Confinement bleibt in einem supersymmetrischen Rahmen erhalten.

Die vorgestellten Daten weisen auf einige interessante Einflüsse der Randbedingun-

---

gen hin, die es weiterhin zu erkunden gilt. Auch die Beschreibung eines theoretischen Hintergrundes verbleibt als eine spannende Herausforderung. Das Wesen der Supersymmetrie ist noch nicht ausgeforscht und bietet Raum für neue Entdeckungen. Ob sie wirklich existiert oder nur eine mathematisch elegante Beschreibung darstellt, bleibt zu diesem Zeitpunkt eine offene Frage deren Antwort einen großen Einfluss auf die moderne Physik nehmen wird.

---

## 7 Anhang

### A Die Bianchi-Identität

Die Feldgrößen einer nicht-abelschen Theorie können in der adjungierten Darstellung durch die Generatoren  $T^a$  der Gruppe ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} A_\mu &= -igA_\mu^a T^a \\ F_{\mu\nu} &= -igF_{\mu\nu}^a T^a. \end{aligned} \tag{197}$$

Die Generatoren erfüllen dabei die Kommutatorrelation

$$[T^a, T^b] = if_{abc} T^c, \tag{198}$$

wobei  $f_{abc}$  die Strukturkonstante der Gruppe ist. Mit  $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a T^a$  ergibt sich für den Kommutator der kovarianten Ableitung und dem Feldstärke-Tensor

$$\begin{aligned} [D^\tau, F^{\mu\nu}] &= [\partial^\tau - igA^{\tau b} T^b, -igF^{\mu\nu a} T^a] \\ &= [\partial^\tau, -igF^{\mu\nu a} T^a] - [igA^{\tau b} T^b, -igF^{\mu\nu a} T^a] \\ &= -ig\partial^\tau F^{\mu\nu a} T^a - g^2 A^{\tau b} F^{\mu\nu a} [T^b, T^a] \\ &= -ig(\partial^\tau F^{\mu\nu a} T^a + gf_{abc} A^{\tau a} F^{\mu\nu b} T^c) \\ &= -ig(\partial^\tau F^{\mu\nu a} + gf_{abc} A^{\tau b} F^{\mu\nu c} T^a). \end{aligned} \tag{199}$$

Setzt man dieses Ergebnis in die Bianchi-Identität

$$[D^\tau, F^{\mu\nu}] + [D^\mu, F^{\nu\tau}] + [D^\nu, F^{\tau\mu}] = 0 \tag{200}$$

ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= -ig(\partial^\tau F^{\mu\nu a} + gf_{abc} A^{\tau b} F^{\mu\nu c}) T^a \\ &= -ig(\partial^\mu F^{\nu\tau a} + gf_{abc} A^{\mu b} F^{\nu\tau c}) T^a \\ &= -ig(\partial^\nu F^{\tau\mu a} + gf_{abc} A^{\nu b} F^{\tau\mu c}) T^a. \end{aligned} \tag{201}$$

---

Diese Relation führt auf

$$\epsilon_{\tau\mu\nu\sigma} [D^\tau, F^{\mu\nu}] = 0. \quad (202)$$

## B Zusammenfassung der Grassmann-Algebra

Grassmann-Zahlen sind antikommutierende Variablen

$$\{\eta_i, \eta_j\} = 0 \quad (203)$$

und eignen sich daher zur Beschreibung von Fermionen. Für  $i = j$  folgt aus Gleichung (207) insbesondere die Nilpotenz der Grassmann-Zahlen

$$\eta_i^2 = 0. \quad (204)$$

Aufgrund dieser Eigenschaft kann jede Funktion, die von einer Grassmann-Variablen abhängt, in eine Taylorreihe erster Ordnung entwickelt werden

$$f(\eta) = f_0 + f_1 \eta. \quad (205)$$

Für die Ableitungen nach einer Grassmann-Variable gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} 1 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta_i} \eta_i &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial \eta_i} \eta_j &= -\eta_j \frac{\partial}{\partial \eta_i}. \end{aligned} \quad (206)$$

Die Integration über Grassmann-Zahlen ist analog zur deren Ableitung definiert

$$\begin{aligned} \int d\eta &= 0 \\ \int d\eta \eta &= 1 \\ d\eta_i d\eta_j &= -\eta_j \eta_i. \end{aligned} \quad (207)$$

---

Die Multiplikation zweier grassmannartiger Spinoren ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\eta^A \eta^B &= -\frac{1}{2} \epsilon^{AB} \eta \eta, & \bar{\eta}^{\dot{A}} \bar{\eta}^{\dot{B}} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} \bar{\eta} \bar{\eta} \\ \eta \eta &= \eta^A \eta_A, & \bar{\eta} \bar{\eta} &= \bar{\eta}_{\dot{A}} \bar{\eta}^{\dot{A}}.\end{aligned}\tag{208}$$

Die Ableitungen nach den Spinorkomponenten verhält sich wie ein Kronecker-Delta

$$\frac{\partial \eta^A}{\partial \eta^B} = \delta_B^A, \quad \frac{\partial \bar{\eta}^{\dot{A}}}{\partial \bar{\eta}^{\dot{B}}} = \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}}.\tag{209}$$

Die Integration über die grassmannwertige Spinorkomponenten ist definiert durch

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int d\eta^1 d\eta^2 &= \int d^2 \eta \\ \int d^2 \eta (\eta \eta) &= 1.\end{aligned}\tag{210}$$

## C Herleitung der Wilson-Wirkung

Eine eichinvariante Gitterwirkung benötigt ein geschlossenes Objekt. Die einfachste Form ist die Plaquette

$$U_{\mu\nu} = U_\mu(x) U_\nu(x + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(x).\tag{211}$$

Durch Einsetzen der Definition für die Linkvariablen lässt sich die Plaquette umschreiben zu

$$U_{\mu\nu} = e^{iaA_\mu(x)} e^{iaA_\nu(x+\hat{\mu})} e^{-iaA_\mu(x+\hat{\nu})} e^{-iaA_\nu(x)}.\tag{212}$$

Mit der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]}\tag{213}$$



und Vernachlässigen von Termen der Ordnung  $\mathcal{O}(a^4)$  erhält man

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu} &= e^{iaA_\mu(x)+iaA_\nu(x+\hat{\mu})-\frac{a^2}{2}[A_\mu(x),A_\nu(x+\hat{\mu})]} \\
&\quad * e^{-iaA_\mu(x+\hat{\nu})-iaA_\nu(x)-\frac{a^2}{2}[A_\mu(x+\hat{\nu}),A_\nu(x)]} \\
&= e^{iaA_\mu(x)+iaA_\nu(x+\hat{\mu})-\frac{a^2}{2}[A_\mu(x),A_\nu(x+\hat{\mu})]} \\
&\quad * e^{-iaA_\mu(x+\hat{\nu})-iaA_\nu(x)-\frac{a^2}{2}[A_\mu(x+\hat{\nu}),A_\nu(x)]} \\
&\quad * e^{\frac{a^2}{2}[A_\mu(x),A_\mu(x+\hat{\nu})]+\frac{a^2}{2}[A_\mu(x),A_\nu(x)]} \\
&\quad * e^{\frac{a^2}{2}[A_\nu(x+\hat{\mu}),A_\mu(x+\hat{\nu})]+\frac{a^2}{2}[A_\nu(x+\hat{\mu}),A_\nu(x)]}.
\end{aligned} \tag{214}$$

Die Entwicklung  $A_\mu(x+\hat{\nu}) \approx A_\mu(x) + a\partial_\nu A_\mu(x)$  führt auf den Ausdruck

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu} &= e^{iaA_\mu(x)+iaA_\nu(x)-iaA_\mu(x)-iaA_\nu(x)} \\
&\quad * e^{ia^2\partial_\mu A_\nu(x)-ia^2\partial_\nu A_\mu(x)-\frac{a^2}{2}[A_\mu(x),A_\nu(x)]} \\
&\quad * e^{\frac{a^2}{2}[A_\mu(x),A_\nu(x)]+\frac{a^2}{2}[A_\nu(x),A_\mu(x)]-\frac{a^2}{2}[A_\mu(x),A_\nu(x)]} \\
&= e^{ia^2(\partial_\mu A_\nu(x)-\partial_\nu A_\mu(x)+i[A_\mu(x),A_\nu(x)])} \\
&= e^{ia^2 F_{\mu\nu}}.
\end{aligned} \tag{215}$$

Mit diesem Ausdruck der Plaquette folgt für die Wilson-Wirkung

$$\begin{aligned}
S_W[U] &= \frac{\beta}{4N} \sum_{x \in \Lambda} \sum_{\mu, \nu} \text{ReTr} [\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(x)] \\
&= \frac{a^4 \beta}{4N} \sum_{x \in \Lambda} \sum_{\mu, \nu} \text{Tr} [F_{\mu\nu}(x)^2].
\end{aligned} \tag{216}$$

Bei der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion bleibt der  $\mathcal{O}(a^2)$ -Term imaginär und entfällt bei der Realteilbildung. Daher liefert nur die vierte Entwicklungsordnung einen Beitrag.

---

## Literatur

- [1] Bailin D., Love A., „Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory“, Taylor and Francis Group (1994).
- [2] Coleman S., Mandula J., „All Possible Symmetries of the  $S$  Matrix“, Phys. Rev., vol. 159, pp. 1251-1256 (1967).
- [3] Demmouche K., „ $N = 1$   $SU(2)$  Supersymmetric Yang-Mills Theory on the Lattice with Light Dynamical Wilson Gluinos“, Doktorarbeit, Westfälische-Wilhelms-Universität (2009).
- [4] Gattringer C., Lang C.B., „Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation“, Lect. Notes Phys. 788, Springer, Berlin Heidelberg (2010).
- [5] Gell-Mann M., Ne’eman Y., „The Eightfold Way“, New York: W.A. Benjamin (1964).
- [6] Glashow S. L., „Partial Symmetries of Weak Interactions“, Nucl. Phys. 22(1961) 579-588.
- [7] Golfand Yu. A., Likhtman E. P., JETP LETTERS-USSR 13,323 (1971).
- [8] Gupta R., „Introduction to Lattice QCD“, Elsevier Science B.B. (2008).
- [9] Kalka H., Soff G., „Supersymmetrie“, Teubner Studienbücher: Physik, Stuttgart (1997).
- [10] Kovtun P, Ünsal M., Yaffe L.G., „Volume Independence in Large QCD-Like Gauge Theories“, JHEP 0706:019 (2007), [hep-th/0702021v1].
- [11] Leprince-Ringuet L., L’héritier, „Existence Probable d’une Particule de Masse  $990 m_e$  dans le Rayonnement Cosmique“, Sciences de Paris (1944).
- [12] Luckmann S, „Ward-Identitäten in der  $N=1$  Super-Yang-Mills-Theorie“, Diplomarbeit, Westfälische-Wilhelms-Universität (1997).
- [13] Montvay I., „Supersymmetric Gauge Theories on the Lattice“, Nucl.Phys.Proc.Suppl. 53 (1997) 853-855 [hep-lat/9607035v1].

- 
- [14] Montvay I., Münster G., „Quantum Fields on a Lattice“, Cambridge University Press, Cambridge UK (1994).
  - [15] Münster G., „Lattice Gauge Theory A Short Primer“, Lectures given at the PSI Zuou Summer School (2000), [hep-lat/0012005].
  - [16] Münster G., Stüwe H., „The Mass of the Adjoint Pion in N=1 Supersymmetric Yang-Mills Theory“, (2014) [arXiv:1402.6616].
  - [17] Murayama H., „221B Lecture Notes, Quantum Field Theory II, Appendix A“, Berkeley University (2005).
  - [18] Nielsen H. B., Ninomiya M., Nucl. Phys. B185 20 (1981).
  - [19] Peskin M., Schroeder D.V., „An Introduction to Quantum Field Theory“, Perseus Books Publishing (1995).
  - [20] Quast G., „Funktionsanpassung mit der  $\chi^2$ -Methode“, Universität Karlsruhe (2014), <http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~quast/Skripte/Chi2Method.pdf>.
  - [21] Queevedo F., „Cambridge Lectures on Supersymmetry and Extra Dimensions“, University of Cambridge (2010) [arXiv:1011.1491].
  - [22] Rothe H.J., „Lattice Gauge Theories, An Introduction“, World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 74 (2005).
  - [23] Salam A., Strathdee J., „Super-Symmetry and Non-Abelian Gauges“, Phys. Lett. B 51 , 353 (1974).
  - [24] Dos Santos R.R., „Introduction to Quantum Monte Carlo Simulations for Fermionic Systems“, Brazilian Journal of Physics, Vol. 33, Nr. 1 (2003).
  - [25] Ünsal M., Yaffe L.G., „Large- $N$  Volume Independence in Conformal and Confining Gauge Theories“, hep-th/1006.2101v2 (2010) [ arXiv:1006.2101].
  - [26] Weinberg S., „A Model of Leptons“, Physical Review Letters 19(21) 1264 (1967).

- 
- [27] Wilson K. G., „Confinement of Quarks“, Phys. Rev. D 10, 2445 (1974).
- [28] Wilson K. G., „New Phenomena in Subnuclear Physics“, ed. A. Zichichi Plenum Press (1977).
- [29] Witten E., „Constraints on Supersymmetry Breaking“, Nuclear Physics B202 (1982), s. 253-316.
- [30] Yang C.N., Mills R.L., „Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance“, Physical Review, Vol. 96, Nr.1 (1954), s. 191.