

FLORIAN HEITGER

**Darstellungstheorie der kubischen Gruppe
in Anwendung auf Operatoren der
 $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter**

Institut für Theoretische Physik I
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

März 2000

**Darstellungstheorie der kubischen Gruppe
in Anwendung auf Operatoren der
 $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter**

als Diplomarbeit vorgelegt von
Florian Heitger

März 2000

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
0 Grundlagen der Gruppentheorie I	7
0.1 Elementare Gruppentheorie	7
0.2 Darstellungstheorie endlicher Gruppen	9
0.2.1 Grundbegriffe	9
0.2.2 Nicht-äquivalente und irreduzible Darstellungen	10
0.2.3 Eigenschaften irreduzibler Darstellungen	13
0.3 Kubische Gruppe und ihre irreduziblen Darstellungen	16
0.3.1 Kubische Gruppe O	16
0.3.2 Irreduzible Darstellungen von O	18
0.3.3 Charaktertabelle von O	19
0.3.4 Gruppe O_h	20
0.4 Schlußbemerkung	21
1 Glueballspektrum auf dem Gitter	22
1.1 Grundzüge der Gittereichtheorie	22
1.1.1 Eichtheorie im Kontinuum	23
1.1.2 Eichtheorie auf dem Gitter	24
1.2 Glueball- und Spinzustände auf dem Gitter	26
1.2.1 Ausgangslage	26
1.2.2 Spinzustände und kubische Gruppe	28
1.2.3 Glueballzustände auf dem Gitter	30
2 Darstellungen der kubischen Gruppe über Wilson-Loops	34
2.1 Erinnerungen an Kapitel 0	34
2.2 Allgemeine Vorbereitungen	36
2.2.1 Wilson-Loops und ihre Bezeichnungen	36
2.2.2 Orientierung und C -Parität	39
2.2.3 Konstruktion der Darstellung	40

2.2.4	Weiteres Vorgehen	43
2.3	Wilson-Loops der Länge 4: Erstes Beispiel	44
2.3.1	Transformationsverhalten	44
2.3.2	Darstellungsmatrizen und ihre irreduzible Zerlegung	45
2.3.3	Konstruktion einer Orthonormalbasis	47
2.4	Wilson-Loops der Länge 6: Zweites Beispiel	50
2.4.1	Transformationsverhalten der verdrehten Loops	50
2.4.2	Irreduzible Zerlegung der Darstellungsmatrizen	53
2.4.3	Konstruktion einer Orthonormalbasis	53
2.5	Spiegelung und P -Parität	55
2.6	Wilson-Loops der Länge 8: Drittes Beispiel	57
2.6.1	Transformationsverhalten der Über-Eck-Plaquetten	58
2.6.2	Irreduzible Zerlegung der Darstellung	61
2.6.3	Konstruktion einer Orthonormalbasis (Teil I)	62
2.7	Zusammenfassung	64
3	Einführung in die Supersymmetrie	70
3.1	Graduierung und Poincaré-Superalgebra	70
3.1.1	Poincaré-Gruppe und ihre irreduziblen Darstellungen	70
3.1.2	\mathbb{Z}_2 -Graduierung der Poincaré-Algebra	72
3.2	SUSY-Teilchen und Supermultipletts	74
3.2.1	Irreduzible Darstellungen der SUSY-Algebra	74
3.2.2	Chirales und Vektor-Supermultiplett	75
3.3	Superfeldformalismus	77
3.3.1	Superraum, Superfelder und Poincaré-Supergruppe	77
3.3.2	Skalare Superfelder	78
3.3.3	Vektor-Superfelder	79
3.4	Supersymmetrische Theorien	80
3.4.1	Konstruktion supersymmetrischer Lagrangedichten	80
3.4.2	SUSY-Lagrangedichten aus chiralen Superfeldern	81
3.4.3	Wess-Zumino-Modell	82
3.4.4	Supersymmetrische Eichtheorie	83
3.4.5	$N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie	84
4	Grundlagen der Gruppentheorie II	85
4.1	Produktgruppen und ihre Darstellungen	85
4.1.1	Direkte, endliche Produktgruppen	85
4.1.2	Direkte Produktdarstellung	87

4.1.3	Darstellungstheorie direkter, endlicher Produktgruppen	88
4.2	Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$	89
4.2.1	Elemente der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$	89
4.2.2	Irreduzible Darstellungen und Charaktertabelle	90
4.3	Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ und Spinoren	92
5	Darstellungen der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ über SUSY-Operatoren	95
5.1	Motivation	96
5.2	Majorana-Majorana-Operator	97
5.3	Majorana-Link-Majorana-Operator	98
5.3.1	Verhalten unter P -Parität	99
5.3.2	Verhalten unter C -Parität	100
5.3.3	Transformationsverhalten und Darstellung	100
5.3.4	Betrachtungen im Kontinuum	102
5.4	Majorana-Plaquetten-Operator	104
5.4.1	Betrachtungen im Kontinuum	105
5.4.2	Transformationsverhalten und Darstellung	106
5.4.3	Irreduzible Zerlegung der Darstellung	109
5.4.4	Konstruktion einer Orthonormalbasis	113
	Zusammenfassung und Ausblick	114
	A Reguläre Darstellung	117
	B Beweisskizzen zu Theoremen aus Kapitel 0 und 4	119
B.1	Beweisskizzen zu den Theoremen 20, 22, 24 und 25	119
B.2	Beweisskizzen zu den Theoremen 30 und 31	121
	C Ergänzungen zu Kapitel 2 und 4	124
C.1	Drehmatrizen der T_1 -Darstellung	124
C.2	Erstes Beispiel: Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$	126
C.3	Zweites Beispiel: Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$	127
C.4	Drittes Beispiel: Über-Eck-Plaquetten	130
C.4.1	Irreduzibler Inhalt der $\tilde{\mathcal{R}}$ -Darstellung	130
C.4.2	Konstruktion einer Orthonormalbasis (Teil II)	132
C.5	Majorana-Plaquetten-Operator	133
	D Gruppen $SO(3)$ und $SU(2)$	140
D.1	Drehgruppe $SO(3)$	140
D.2	Überlagerungsgruppe $SU(2)$	141

E Dirac-Matrizen	143
E.1 Dirac-Matrizen in euklidischer und minkowskischer Formulierung	143
E.2 Eigenschaften euklidischer Matrizen	143
F Majorana-Spinoren	145
G Lorentztransformationen	147
Literaturverzeichnis	153
Danksagung	155

Einleitung

Jedem von uns begegnen in der Alltagswelt ständig Symmetrien in den unterschiedlichsten Facetten und Ausprägungen. Darüber hinaus mag jeder einzelne eine etwas andere Vorstellung des Begriffs *Symmetrie* haben. Einige werden sich Symmetrien als Figuren oder Formen veranschaulichen, die bei einer Bewegung invariant sind, d.h. unverändert bleiben. Als Beispiel sei hier die Drehung einer Kugel um ihr Zentrum genannt. Nach Rotation um einen beliebigen Winkel bietet sich stets das gleiche Bild. Weitere, suggestivere Beispiele könnten etwa Schneekristalle, Blüten, das Muster eines Pakettbodens oder die bekannten Graphiken von M. C. ESCHER sein. Andererseits kann die Betrachtung von Objekten im Bereich der Architektur oder der bildenden Künste von der Ästhetik und den gewählten Proportionen Faszination ausüben, und auch in vielen Werken der Musik und Literatur verbinden sich künstlerische Freiheit mit dem Wunsch nach Einhaltung gewisser Ordnungsschemata. Die diesen unterschiedlichen Assoziationen zugrunde liegende Idee ist dabei die Beibehaltung oder insbesondere auch Erhaltung einer vorgegebenen Struktur.

Auch in der Physik spielen Symmetrien eine wesentliche Rolle. Dabei war man seit jeher bemüht, der Natur bzw. dem Naturgeschehen gewisse Symmetrien abzuschauen, aber auch zuzuschreiben, oftmals allerdings in Form eher irrationaler, mythischer Gedankenkonstrukte. Als Beispiel seien hier die Weltharmonievorstellungen von PYTHAGORAS und PLATO genannt. Diese Denkweise wurde allerdings bald abgelöst, und man versucht stattdessen Symmetrien in rationaler Weise zu erfassen und sie in einen mathematischen Formalismus, der *Gruppentheorie* einzubetten. Dabei hat sich gezeigt, daß diese zunächst rein mathematische Theorie auch ein probates Hilfsmittel zur Lösung von physikalischen Problemstellungen sein kann, indem man die in den physikalischen Modellen erwarteten Symmetrien, die sowohl in anschaulicher, aber manchmal auch in ganz indirekter Art vorkommen können, mit den abstrakten Begriffen der Gruppentheorie verbindet. Beispielsweise gelang es gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts bei der Klassifikation von Kristallen erstmals, den Symmetrie-Gedanken gruppentheoretisch zu erfassen. Aber auch schon vor dieser Zeit nutzte man in der Physik geeignete Symmetrieeigenschaften aus, etwa in dem nach J. KEPLER benannten *Kepler-Problem*, bei dem man aus physikalisch sinnvollen Invarianzforderungen des Raumes die Drehimpulserhaltung folgerte und letztendlich die möglichen Bahnkurven der Himmelskörper erhielt. Später sollte sich herausstellen, daß dieses Resultat ein Spezialfall des Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts von E. NOETHER bewiesenen Theorems ist, wonach jede Symmetrie mit einer physikalischen Erhaltungsgröße verknüpft ist. Symmetrieargumente dienen somit u.a. zur Einschränkung der Dynamik eines Systems und sind in allen Bereichen der Physik generell für physikalische Fragestellungen oftmals

von zentraler Bedeutung. Dies gilt in besonderem Maße auch für die moderne *Theorie der Elementarteilchen*, der wir uns nun zuwenden wollen.

Ohne auf die historische Entwicklung bis hin zum heutigen Verständnis der Elementarteilchen als kleinste Bausteine der Materie näher eingehen zu wollen, ist allgemein bekannt, daß bereits seit Jahrhunderten immer wieder Vorschläge zur Beschreibung der elementaren Bestandteile unserer Welt gemacht worden sind. Dabei wurden die unterschiedlichsten Modelle aufgestellt, die in der Folgezeit entweder verbessert oder aber verworfen wurden. Nach unserem derzeitigen Kenntnisstand wird die Materie des uns umgebenden Universum mit Hilfe des *Standardmodells der Elementarteilchen* beschrieben, womit vorerst ein gewisser Abschluß –zumindest innerhalb des derzeit experimentell zugänglichen Gültigkeitsbereiches– bei den Bemühungen um eine Vereinheitlichung der Teilchenwelt erreicht ist. Das Standardmodell basiert auf der Tatsache, daß Elementarteilchen gewissen Wechselwirkungen unterliegen, von denen dieses Modell drei miteinander verknüpft. Insgesamt sind zur Zeit vier fundamentale Wechselwirkungen bekannt, wobei die vierte, die Gravitation, noch nicht in zufriedenstellender Weise in die Theorie eingebunden werden konnte. Die anderen drei fundamentalen Wechselwirkungen sind zum einen die starke Kraft, die für den Zusammenhalt der Bausteine der Atomkerne verantwortlich ist, zum anderen die schwache Wechselwirkung, die u.a. Ursache für den radioaktiven β -Zerfall von Atomkernen ist; als letzte Wechselwirkung ist die elektromagnetische Kraft zu nennen, mit deren Hilfe sich drei klassische Gebiete der Physik –Optik, Magnetismus und Elektrizität–, die immerhin bis in die Anfänge des zwanzigsten Jahrhunderts noch unterschieden wurden, vereinheitlichen ließen. Die dieser Kraft zugrunde liegende, relativistische Quantentheorie wird dabei heute als *Quantenelektrodynamik (QED)* bezeichnet. Man ist nun grundsätzlich daran interessiert, alle vier Wechselwirkungen durch ein gemeinsames Modell zu erfassen. Ein erster Schritt in diese Richtung erfolgte durch die von GLASHOW, WEINBERG und SALAM in den sechziger Jahren formulierte *Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung*, die die beiden zuletzt genannten fundamentalen Kräfte miteinander verbindet. Dieses Modell –und auch schon das der elektrodynamischen Wechselwirkung– basiert dabei auf gewissen Symmetrien. Man spricht in diesem Zusammenhang auch physikalisch exakter von sog. Symmetriegruppen, die, wie oben bereits erwähnt, eigentlich mathematischen Ursprungs sind. Zusammen mit der *Quantenchromodynamik (QCD)* als Theorie der starken Kraft beschreibt die Glashow-Salam-Weinberg-Theorie das heutige Standardmodell der Elementarteilchenphysik. Die zugehörige Symmetriegruppe besteht dabei aus drei unterschiedlichen sog. Eichgruppen und schreibt sich in mathematischer Formulierung als

$$G_{\text{SM}} = SU(3) \times SU(2) \times U(1) = SU(3) \times G_{\text{GSW}} . \quad (1)$$

Das Standardmodell ist somit eine lokale Eichtheorie, die auf Grundlage einer *relativistischen Quantenfeldtheorie* formuliert ist. Um eine Vorstellung von der eminenten Bedeutung dieser Theorie in Bezug auf die Teilchenphysik zu bekommen, sei an dieser Stelle angemerkt, daß bislang kein experimenteller Befund auf Unstimmigkeiten mit den auf der Grundlage des Standardmodells getroffenen Vorhersagen hindeutet. –Dagegen gibt es Phänomene, die zur Zeit nicht konsistent im Rahmen des minimalen Standardmodells erklärbar sind, z.B. die Asymmetrie von Materie und Antimaterie im Universum.– Stattdessen waren oftmals Folgerungen aus dem theoretischen Zugang Auslöser für experimentelle

Durchbrüche im Rahmen der Theorie, wie z.B. zuletzt bei der Entdeckung des Top-Quarks (1994).

Das Teilchenspektrum des Standardmodell zerfällt in *Quarks* und *Leptonen*. Quarks unterliegen der starken Kraft und lassen sich z.B. in geeigneter Weise zu Protonen und Neutronen zusammenfügen, den Bausteinen der Atomkerne. Leptonen wie etwa das Elektron oder das Elektron-Neutrino bleiben dagegen von der starken Kraft unberührt. Sie wechselwirken über die schwache Kraft. Beide Sorten von Teilchen haben allerdings auch eines gemeinsam: Jedem physikalischen Teilchen läßt sich ein zusätzlicher, charakteristischer, innerer Freiheitsgrad (*Spin*) zuordnen, nach der die Elementarteilchen ebenfalls klassifiziert werden können. Quarks und Leptonen haben allesamt einen halbzahligen Spin und werden somit als Fermionen bezeichnet. Ihr Pendant sind die sog. Bosonen mit ganzzahligem Spin. Sie wirken als Vermittler der Kräfte zwischen den Fermionen. Als bekanntestes Beispiel sei hier das Photon als Austauscheteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung genannt. Auch im Rahmen der Elementarteilchenphysik spielt der Symmetriebegriff nun wieder eine wesentliche Rolle, da sich ihre Eigenschaften aus denen einer physikalisch motivierten Symmetriegruppe, der Poincaré-Gruppe, ableiten lassen.

Nachdem WILSON in den siebziger Jahren erstmals eine gitterregularisierte, eichinvariante, euklidische Quantenfeldtheorie formulierte, zeigte sich das Konzept alsbald als außergewöhnlich fruchtbar für die Entwicklung der Teilchenphysik. Der Grund hierfür liegt in dem in dieser Theorie offen gelegten, direkten Zusammenhang zwischen statistischer Physik und der Quantenfeldtheorie, so daß zahlreiche Methoden aus diesem Gebiet für Untersuchungen im Rahmen des Standardmodells übernommen werden konnten. Zudem bietet sie eine theoretische Grundlage und Rechtfertigung für eine –neben den bislang erwähnten, traditionsreichen Methoden zum Auffinden physikalischer Zusammenhänge: Modellbildung und Experiment– weitere Möglichkeit der mittlerweile standardmäßig durchgeführten Untersuchung von physikalischen Sachverhalten. Die Entwicklung moderner, leistungsfähiger Großrechner hat es in den vergangenen zwanzig Jahren ermöglicht, die oftmals teuren und zeitaufwendigen Beschleunigerexperimente durch computergestützte Simulationsrechnungen zu ergänzen. Dabei hat man aufgrund der endlichen, zur Verfügung stehenden Rechnerleistungen die kontinuierliche, physikalische Raum-Zeit durch ein vierdimensionales, kubisches Gitter zu ersetzen, so daß fortan physikalische Zustände –bzw. sog. Feldkonfigurationen– nur noch auf Gitterplätzen oder ihren Verbindungslinien definiert sind. Die oben schon einmal erwähnten Invarianzforderungen des physikalischen Raumes müssen dabei allerdings zum Teil aufgegeben werden. Im Falle des dreidimensionalen, euklidischen, uns umgebenden Raumes bedeutet das beispielsweise, daß die natürliche Rotationsinvarianz aufgrund der nunmehr gitterhaften, räumlichen Struktur durch eine untergeordnete, diskrete Symmetrie zu ersetzen ist. Betrachtet man dazu der Einfachheit halber lediglich einen Ausschnitt eines dreidimensionalen Gitternetzes in Form eines Würfels, so bedeutet das gerade, daß er sich nur mittels Drehungen um geeignete Achsen (Symmetrieachsen) und Winkelmaße in sein Ebenbild überführen läßt. Insbesondere auf diesen Sachverhalt wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit noch genauer einzugehen sein.

Trotz des überaus großen Erfolges des Standardmodells werden weiterhin Versuche un-

ternommen, weitreichendere Theorien und Modelle zu entwickeln, die das Standardmodell möglicherweise als einen Spezialfall enthalten. Fernziel ist es dabei, irgendwann einmal alle vier fundamentalen Wechselwirkungen mit Hilfe einer „Theory of Everything“ beschreiben zu können. Heute glaubt man erkannt zu haben, daß die *Supersymmetrie* wesentlicher Bestandteil einer solchen Theorie sein muß. Daher begann man bereits Anfang der siebziger Jahre mit der Untersuchung supersymmetrischer Theorien, auf die nun als letztes eingegangen werden soll.

Die entscheidend neue Idee der Supersymmetrie (SUSY) ist es, daß sich fermionische und bosonische Teilchen –mittels geeigneter, neu hinzugefügter Transformationen– ineinander überführen lassen. Daraus resultiert allerdings eine Erweiterung des bisher vierdimensional beschriebenen, physikalischen Raumes um vier weitere Dimensionen und in letzter Konsequenz eine Verdoppelung des erwarteten Teilchenspektrums. Damit hat beispielsweise jedes Boson des Standardmodells ab sofort ein Fermion als sein supersymmetrisches Pendant und umgekehrt jedes Fermion einen bosonischen SUSY-Partner. SUSY-Partner sollten sich nur – aufgrund der Definition von Boson und Fermion – in ihrem Spinfreiheitsgrad unterscheiden, ansonsten aber identische physikalische Eigenschaften besitzen. Die Tatsache, daß bis zum heutigen Tage noch keine supersymmetrischen Teilchen in Hochenergieexperimenten nachgewiesen werden konnten, deutet nach derzeitigem Kenntnisstand allerdings darauf hin, daß die SUSY-Teilchen eine i.a. höhere Masse tragen dürften als ihre Partner aus dem Standardmodell. In physikalischer Formulierung spricht man in diesem Zusammenhang von einer sog. gebrochenen supersymmetrischen Theorie. Weiterhin sei hier angemerkt, daß aus diesem Grunde derzeit große Hoffnungen auf die neue, höherenergetische Beschleunigergeneration gesetzt werden, um in zukünftigen Experimenten erste zuverlässige Daten zur Bestätigung der Evidenz von supersymmetrischen Teilchen zu erhalten.

Es stellt sich nun die Frage, welche Gründe für eine supersymmetrische Beschreibung jenseits des Standardmodells sprechen. Stellvertretend seien hier drei häufig zu findende Argumente genannt:

Das wohl überzeugendste unter ihnen ist das sog. Hierarchie-Problem. In der Quantenfeldtheorie –und damit insbesondere auch im Standardmodell– sind die physikalischen Felder der betrachteten Theorie durch sog. Kopplungskonstanten miteinander verbunden. Diese sind in der Theorie des Standardmodell nicht konstant, sondern energieabhängig. Man spricht in diesem Zusammenhang von laufenden Kopplungen. Renormierungsgruppentheoretische Untersuchungen zeigen, daß diese Kopplungen in keinem Energiebereich zusammentreffen, aber sich zumindest –spätestens bei einer Energie von ungefähr 10^{14} GeV– annähern. Auf der Grundlage eines supersymmetrischen Standardmodells würden sich die entsprechenden Kopplungen dagegen in einem Bereich um etwa 10^{16} GeV vereinen, so daß man oberhalb dieser Energieskala eine „Grand Unifying Theory“ (GUT) erwarten könnte, die die starke und elektroschwache Wechselwirkung durch eine gemeinsame Kopplungskonstante beschreiben könnte. Das Problem besteht nun darin, daß man aufgrund von theoretisch sehr überzeugenden, physikalischen Betrachtungen annimmt, daß im Energiebereich von „lediglich“ 100 GeV ein Teilchen (das sog. Higgs-Boson) existiert, welches für den Mechanismus der Massenerzeugung im Standardmodell verantwortlich gemacht wird.

Wegen seiner wichtigen Bedeutung für das Standardmodell erwartet man, daß es auch in GUT-Theorien eine wesentliche Rolle spielen mußte. Seine relativ geringe Energie und die weitaus höher liegende Energieskala einer „Großen Vereinheitlichten Theorie“ würde es nun notwendig machen, recht willkürlich wirkende Restriktionen an die Parameter solcher GUT-Theorien zu stellen. Dieses Problem bezeichnet man als Hierarchie-Problem. Die Supersymmetrie entschärft in gewisser Weise dieses Problem durch in ihr formulierte „non-renormalization“-Theoreme. Es muß allerdings eingeräumt werden, daß bislang ein experimenteller Nachweis des Higgs-Bosons noch aussteht.

Als weiteres Argument für die Anwendbarkeit von supersymmetrischen Theorien sei hier noch angemerkt, daß sich eine supersymmetrische Beschreibung unserer Natur zudem durch gewisse Anhaltspunkte hinsichtlich der Vereinigung von Eich- und Gravitationswechselwirkung motivieren läßt, womit sich erste Ansätze zu einer allumfassenden Theorie aller vier fundamentalen Wechselwirkungen anbieten.

Zuletzt sei auf experimentelle Befunde zur Bestimmung der Protonmasse eingegangen. Experimenten entnommene Daten deuten möglicherweise auf deren Diskrepanz mit den Vorhersagen aus dem Standardmodell hin. Sollten sich diese Ergebnisse in der Zukunft bewahrheiten, so würde ein erster experimenteller Widerspruch zu den Prognosen des Standardmodells vorliegen, wohingegen sich die Resultate mit Hilfe der supersymmetrischen Theorien erklären ließen.

Wie im Zuge der Einführung in diese Arbeit bereits erwähnt wurde, hat man bislang keine direkten experimentellen Hinweise auf supersymmetrische Teilchen finden können, so daß theoretisch angelegte Untersuchungen und numerische Methoden im Sinne von computer-gestützten Simulationen insbesondere auch für supersymmetrische Theorien geeignete und notwendige Ansatzpunkte darstellen. Die vorliegende Arbeit wird sich im folgenden mit beiden Aspekten beschäftigen, wobei ein deutlicher Schwerpunkt auf den theoretischen Betrachtungen liegen wird. Sie besteht dabei aus sechs Kapiteln, deren Inhalt an dieser Stelle kurz skizziert werden soll.

Nachdem in einem vorangestellten Kapitel gruppentheoretische Vorbereitungen getroffen werden, um die im ersten Teil der Arbeit betrachteten Gitter-Operatoren untersuchen zu können, gibt das folgende Kapitel einen Einblick in die Theorie der Existenz von Glueball-Zuständen in stark gekoppelten Gittereichtheorien und ihrer Massenbestimmung mit Hilfe von Gitter-Simulationen.

Im zweiten Kapitel erfolgt eine Ausarbeitung eines Artikels von B. BERG und A. BILLOIRE [19], der die gruppentheoretische Untersuchung von Wilson-Loops unter der untergeordneten Gitter-Symmetriegruppe O der Drehgruppe $SO(3)$ beinhaltet. Dabei wird die zugrunde liegende Konstruktionsmethode zur Bestimmung von Darstellungen der kubischen Gruppe über Wilson-Loops anhand von ausgewählten Beispielen ausführlich erläutert und die im Artikel angegebenen Resultate explizit reproduziert.

Eine formale Einführung in supersymmetrische Theorien, wobei insbesondere auf die in der Supersymmetrie vorkommenden Supermultipletts eingegangen wird, gibt das dritte Kapitel. Schließlich wird die Konstruktion der Wirkung der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie des vierdimensionalen Kontinuums skizziert.

Das nächste Kapitel schließt sich thematisch und formal an das einführende Kapitel an. In ihm wird einerseits die dort bereits behandelte Darstellungstheorie endlicher Gruppen auf das Konzept der Produktgruppen erweitert, und zum anderen die kubische Gruppe auf ihre Überlagerungsgruppe ausgeweitet. In diesem Sinne dient es der Bereitstellung der für das letzte Kapitel benötigten Hilfsmittel.

Nun folgt unter Verwendung und Ausbau der Methoden des zweiten Kapitels eine gruppentheoretische Behandlung unterschiedlicher Gitter-Operatoren der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie. Den durch die Supersymmetrie überdies in Form von Majorana-Spinoren hinzukommenden, fermionischen Freiheitsgraden wird dabei sowohl durch die im vorherigen Kapitel eingeführten Erweiterungen hinsichtlich der Darstellungstheorie endlicher Gruppen, als auch durch die den Untersuchungen zugrunde liegende erweiterte Gitter-Symmetriegruppe Rechnung getragen.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

Kapitel 0

Grundlagen der Gruppentheorie I

Dieses vorangestellte Kapitel gibt in kompakter Form eine Einführung in die Darstellungstheorie endlicher Gruppen, wie sie für die beiden folgenden Kapitel benötigt wird. Desweiteren soll es der Festlegung von Notationen dienen. Dem Konzept der Produktgruppen und ihrer irreduziblen Darstellungen wird später ein eigenes Kapitel gewidmet sein, da ihre Konstruktion im ersten Teil der Arbeit nicht benötigt wird. Dagegen steht zunächst die kubische Gruppe O als eine endliche Untergruppe der Drehgruppe $SO(3)$ im Mittelpunkt meiner Untersuchungen, so daß sie in diesem einführenden Kapitel als Beispiel einer endlichen Gruppe eingehend behandelt werden soll. Später werden wir dann zu einer „größeren“ Gruppe, nämlich ihrer *Überlagerungsgruppe* übergehen. Sie wird noch an geeigneter Stelle vorzustellen sein.

Für detailliertere Ausführungen zu diesem Kapitel sei auf die umfangreiche Literatur zur Gruppentheorie, z.B. [1–6], verwiesen.

0.1 Elementare Gruppentheorie

Zunächst wollen wir einige gruppentheoretische Definitionen angeben und dabei beginnen mit

Definition 1 Eine Menge $G = \{a, b, c, \dots\}$ bildet eine *Gruppe*, wenn auf ihr eine Verknüpfung $\circ : G \times G \rightarrow G$ erklärt ist, die folgende Eigenschaften besitzt:

E_1 : Die Operation \circ ist assoziativ, d.h. falls $a, b, c \in G$ gilt, dann ist $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

E_2 : Es gibt ein neutrales Element $e \in G$ mit $a \circ e = e \circ a = a$ für alle $a \in G$.

E_3 : Es gibt für alle $a \in G$ ein inverses Element $a^{-1} \in G$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Definition 2 Eine Gruppe G heißt *abelsch*, falls die Verknüpfung \circ kommutativ ist, d.h. falls $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ gilt.

Definition 3 Unter der *Ordnung* einer endlichen Gruppe versteht man die Anzahl ihrer Elemente.

Beispiele: Das denkbar einfachste Beispiel ist die einelementige Gruppe $G = \{e\}$ bestehend aus dem neutralen Element e . Sie ist eine abelsche Gruppe der Ordnung eins. Eine bekannte nicht-triviale endliche Gruppe ist die Permutationsgruppe S_n . Sie enthält alle Konfigurationen an n -Tupeln, die sich aus Permutationen des Tupels $(1, \dots, n)$ bilden lassen. Die S_n enthält $n!$ Elemente und ist für $n > 2$ eine nicht-abelsche Gruppe. In Abschnitt 0.3 werden wir eine weitere endliche nicht-abelsche Gruppe kennenlernen, die kubische Gruppe O , deren Ordnung 24 ist. In der Physik spielen insbesondere Gruppen mit unendlich vielen Elementen eine wichtige Rolle. Als Beispiele seien hier die Rotationsgruppe $SO(3)$ und die $SU(N)$ genannt, letztere dient insbesondere zur Beschreibung von Eichsymmetrien im Standardmodell der Elementarteilchen. Die $SO(3)$ und $SU(2)$ beschreiben Drehungen im dreidimensionalen reellen bzw. zweidimensionalen komplexen Raum. Diese Gruppen werden uns später –im Zusammenhang mit der Überlagerungsgruppe von O – noch mehrmals begegnen.

Gehen wir nun noch einmal kurz auf die Permutationsgruppe S_n mit $n \geq 3$ ein. Betrachtet man nur solche Elemente, die sich ausgehend vom Einselement aus einer geraden Anzahl von Transpositionen (das sind Vertauschungen zweier Komponenten in einem Tupel) ergeben, so bilden diese eine echte Teilmenge $A_n \subset S_n$. A_n besitzt wieder Gruppenstruktur, d.h. insbesondere, daß A_n abgeschlossen ist. Man sagt, A_n ist eine Untergruppe der S_n . Die Definition dazu liest sich so:

Definition 4 Eine Teilmenge H einer Gruppe G heißt *Untergruppe von G* , falls sie mit der induzierten Verknüpfung wieder eine Gruppe bildet.

An dieser Stelle sei eine Schreiberleichterung vereinbart: Für die Gruppenverknüpfung \circ schreibt man oftmals einfach ein \cdot , oder man verzichtet gänzlich auf ein Symbol. Letztere Konvention wollen wir von jetzt an einhalten, also $a \circ b$ abkürzend mit ab bezeichnen.

Man ist nun daran interessiert, jedes Element einer Gruppe eindeutig einer sog. Klasse zuzuordnen und diese dann durch jeweils einen Repräsentanten zu beschreiben. Hierzu definiert man eine Äquivalenzrelation und daraus Äquivalenzklassen.

Definition 5 Zwei Elemente $a, b \in G$ heißen zueinander *konjugiert bzgl. G* ($a \sim b$), falls es ein $g \in G$ gibt, mit $b = g^{-1}ag$.

Definition 6 Man nennt die Menge aller zu a konjugierten Elemente auch *Klasse von a* und bezeichnet sie mit (a) .

Daß diese Definition das Verlangte leistet, bestätigt

Bemerkung 7 Jedes Gruppenelement g liegt in genau einer (konjugierten) Klasse von G , d.h. die Klassen sind disjunkt und die Vereinigung ergibt G ; insbesondere bildet das neutrale Element eine Klasse für sich.

Beweis: Für einen Beweis der Aussage sei auf [1] verwiesen.

Zum Schluß dieses Abschnitts wollen wir Abbildungen zwischen zwei Gruppen einführen. Sie bilden die Grundlage für das Konzept der Darstellungstheorie, welches im nächsten Abschnitt behandelt wird.

Definition 8 Eine Abbildung $\Phi : G \rightarrow G'$ von einer Gruppe G in eine andere Gruppe G' heißt *Gruppenhomomorphismus*, falls sie die Gruppenverknüpfung respektiert, d.h. für $\Phi(g_i) = g'_i$ und $g_1 g_2 = g_3$ gilt $g'_1 g'_2 = g'_3$ mit $g_i \in G, g'_i \in G', i \in \{1, 2, 3\}$.

0.2 Darstellungstheorie endlicher Gruppen

In geometrischen und physikalischen Anwendungen ist die Gruppentheorie meist eng mit Symmetrietransformationen verbunden. Zur Erläuterung seien zwei Beispiele angesprochen: Differentialgleichungen sind oftmals invariant gegenüber bestimmten Symmetrietransformationen, die das Auffinden von Lösungen erheblich vereinfachen können (s. Keplerproblem). Der Vektorraum der Lösungen bildet dabei einen Darstellungsraum auf dem die Symmetriegruppe dann wirkt.

In der Quantenmechanik ist der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms invariant unter reinen Drehungen im dreidimensionalen Zustandsraum. Die Menge dieser Koordinatentransformationen bildet dabei eine Gruppe, die sog. Invarianz-Gruppe des Hamiltonoperators. Ordnet man nun jedem einzelnen Gruppenelement g genau ein Element $D_{\mathcal{R}}(g)$ aus der Gruppe der nicht-singulären $d \times d$ Matrizen mit der gewöhnlichen Matrizenmultiplikation als Verknüpfung derart zu, daß

$$D_{\mathcal{R}}(g_1 g_2) = D_{\mathcal{R}}(g_1) D_{\mathcal{R}}(g_2) \quad (1)$$

gilt, ist $\mathcal{R} = \{D_{\mathcal{R}}(g)\}$ eine d -dimensionale Darstellung der Invarianz-Gruppe¹, und es zeigt sich, daß alle Energie-Eigenräume des Hamiltonoperators Darstellungsräume der Invarianz-Gruppe bilden. Für Details konsultiere man [1]. Im folgenden werden nun die Grundzüge der Darstellungstheorie systematisch eingeführt. Wir beginnen mit dem Begriff der Darstellung.

0.2.1 Grundbegriffe

Unter der Darstellung einer Gruppe versteht man i.a. einen Homomorphismus, der in den Raum der Automorphismen eines Vektorraumes V abbildet. Die mathematische Definition lautet wie folgt:

Definition 9 Ein Homomorphismus $\mathcal{R} : G \rightarrow \text{Aut}(V)$, $g \mapsto \mathcal{R}(g)$ von G in eine Gruppe von Operatoren $\mathcal{R}(G)$ eines linearen Vektorraumes V heißt eine *Darstellung* der Gruppe G mit dem *Darstellungsraum* V , wenn die Darstellungsoperatoren die gleichen Verknüpfungsregeln erfüllen, wie die Gruppe G , also wenn $\mathcal{R}(g_1) \mathcal{R}(g_2) = \mathcal{R}(g_1 g_2)$ gilt.

¹Strenggenommen ist das Gleichheitszeichen an dieser Stelle falsch, da wir im folgenden zwischen der Darstellung \mathcal{R} und ihren Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}}$ unterscheiden wollen. Es besteht aber ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Darstellungen und ihren Darstellungsmatrizen, so daß diese ungenaue Formulierung hier erlaubt sei.

Die *Dimension der Darstellung* ist dabei die Dimension des Vektorraumes V .

Eine Darstellung heißt *treu*, falls \mathcal{R} ein Isomorphismus ist, andernfalls nennt man sie *degeneriert*.

Ich werde mich bei den weiteren Betrachtungen auf endliche Gruppen und endlich-dimensionale Vektorräume beschränken, wobei nur am Rande zu bemerken ist, daß die meisten Resultate auch auf unendlich-dimensionale Räume ausgeweitet werden können. Diese Einschränkung gilt für das gesamte Kapitel. Falls an vereinzelt Stellen auf die Endlichkeit nochmals explizit hingewiesen wird, hebt das die allgemeine Einschränkung keinesfalls auf, sondern dient lediglich der exakteren Formulierung.

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, daß die Menge der Automorphismen $\text{Aut}(V)$ eines n -dimensionalen, \mathbb{C} -linearen Vektorraums V isomorph zu der Menge $\mathbb{C}^{n \times n}$ ist, also $\Phi : \text{Aut}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^{n \times n}$. Betrachtet man nun die Darstellung $\mathcal{M}(\mathcal{R}) : G \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$, $g \mapsto \Phi(\mathcal{R}(g))$, so ist das Bild $\mathcal{M}(\mathcal{R})(G)$ eine Untergruppe von $\mathbb{C}^{n \times n}$ und damit isomorph zum Bild $\mathcal{R}(G) \subset \text{Aut}(V)$ von \mathcal{R} . Dies gibt Anlaß zu folgender

Bemerkung und Definition 10 Jede endlich-dimensionale Darstellung \mathcal{R} kann in Form von Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}}(g)$, $g \in G$, beschrieben werden. Die induzierte Verknüpfung ist dann die Matrizenmultiplikation. Man sagt, die oben definierte Darstellung $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ bildet eine *Matrixdarstellung von G* .

Beispiele: Jede Gruppe G besitzt eine triviale Darstellung \mathcal{T} , die durch $D_{\mathcal{T}}(g) = 1$ für alle $g \in G$ definiert ist. Der zugehörige Vektorraum ist \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} .

Sei G eine Gruppe von Matrizen (z.B. $\text{GL}(n)$ oder $SU(N)$), $V = \mathbb{C}$ und $D_{\mathcal{R}}(g) = \det g$. Dies definiert eine nicht-triviale eindimensionale Darstellung \mathcal{R} von G .

Als weitere Beispiele seien die aus der Quantenmechanik bekannten (irreduziblen) Matrixdarstellungen der Drehgruppe $SO(3)$ genannt (Achtung: $\text{ord}(SO(3)) = \infty$), die im Zusammenhang mit den Spinfreiheitsgraden eines quantenmechanischen Teilchens eine wichtige Rolle spielen. Sie werden durch die Quantenzahl j charakterisiert und ihr Darstellungsraum ist $2(j+1)$ -dimensional.

Darüberhinaus findet man zusätzliche Beispiele in [4].

0.2.2 Nicht-äquivalente und irreduzible Darstellungen

Zu einer vorgegebenen Gruppe gibt es i.a. mehrere mögliche Darstellungen. Eine Klassifikation dieser unterschiedlichen Darstellungen kann auf zwei verschiedene Arten geschehen. Zum einen stellt Bemerkung 10 bereits einen direkten Zusammenhang zwischen den Darstellungsoperatoren und gewöhnlichen Matrizen her. Man führt nun den Begriff der Ähnlichkeit von Darstellungen ein, der bereits für Matrizen aus der Linearen Algebra bekannt ist. Er überträgt sich auf die Darstellungstheorie ganz kanonisch:

Sei \mathcal{R} eine Darstellung von G auf V und S ein invertierbarer Operator auf V . Dann ist die durch $\mathcal{R}'(g) = S\mathcal{R}(g)S^{-1}$, $\forall g \in G$ definierte Darstellung \mathcal{R}' eine Darstellung von G

mit gleicher Dimension. Die Darstellungsmatrizen der beiden Darstellungen hängen dabei in gleichem Maße zusammen wie zwei Matrizen, die eine lineare Abbildung bzgl. zweier unterschiedlicher Basen beschreiben. Man sagt \mathcal{R} und \mathcal{R}' sind durch eine *Ähnlichkeits-transformation* ineinander übergegangen.

Definition 11 Zwei Darstellungen heißen *äquivalent*, falls sie durch eine Ähnlichkeits-transformation ineinander überführt werden können.

Äquivalente Darstellungen bilden eine Äquivalenzklasse, und in den meisten Fällen genügt es, einen Repräsentanten aus jeder Klasse zu kennen. Wie entscheidet man aber bei zwei Darstellungen, ob sie äquivalent sind oder nicht? Man benötigt eine Charakterisierung, die sich bei Ähnlichkeitstransformationen nicht ändert. Für Matrizendarstellungen ist die Spur eine entsprechende Invariante. Man definiert daher:

Definition 12 Der *Charakter* $\chi^{\mathcal{R}}(g)$ von $g \in G$ in einer Darstellung \mathcal{R} ist durch

$$\chi^{\mathcal{R}}(g) = \text{Tr } \mathcal{R}(g) \quad (2)$$

erklärt. Falls $D_{\mathcal{R}}(g)$ die zugehörige Darstellungsmatrix zu $\mathcal{R}(g)$ ist, gilt

$$\chi^{\mathcal{R}}(g) = \sum_i (D_{\mathcal{R}}(g))_{ii} . \quad (3)$$

Bemerkung 13 Alle Gruppenelemente einer Klasse (vgl. Definition 6) haben den gleichen Charakter, d.h. der Charakter ist eine Klassenfunktion.

Beweis: Seien $g, p \in G$, dann gilt wegen der Invarianz der Spur gegenüber zyklischer Vertauschung $\text{Tr}(D_{\mathcal{R}}(p) D_{\mathcal{R}}(g) D_{\mathcal{R}}(p^{-1})) = \text{Tr} D_{\mathcal{R}}(g)$ für alle $p \in G$.

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel, die unterschiedlichen Darstellungen einzuteilen, ist diese, sie in eine direkte Summe aus irreduziblen Darstellungen zu zerlegen. Jede denkbare Darstellung einer beliebigen Gruppe enthält gewisse Informationen über sie. Ziel ist es nun, möglichst niedrigdimensionale Darstellungen zu finden, die die gesamte Information, die man durch Darstellungen überhaupt erhalten kann, beinhalten. Um dieses Vorhaben in eine mathematische Form zu fassen, sind zunächst einige Begriffe nötig.

Definition 14 Sei \mathcal{R} eine Darstellung von G auf dem endlichen Vektorraum V und sei V_1 ein Unterraum von V . Dann heißt V_1 *invarianter Unterraum von V bzgl. \mathcal{R}* , falls für alle $\mathbf{x} \in V_1$ und $g \in G$ $\mathcal{R}(g)(\mathbf{x}) \in V_1$ ist.

Ein invarianter Unterraum ist *minimal*, falls er keine nicht-trivialen invarianten Unterräume bzgl. \mathcal{R} mehr enthält.

Falls V_1 invariant unter \mathcal{R} ist, definiert man die *Einschränkung von \mathcal{R} auf V_1* als

$$\mathcal{R}'(g) = \mathcal{R}(g) |_{V_1} \quad \text{mit} \quad \mathcal{R}'(g) v_1 = \mathcal{R}(g) v_1, \quad g \in G, v_1 \in V_1. \quad (4)$$

Beispiele: Triviale invariante Unterräume von V bzgl. \mathcal{R} sind der Vektorraum V selbst und der Nullraum.

Definition 15 Eine Darstellung \mathcal{R} von G heißt *irreduzibel*, wenn es keinen nicht-trivialen invarianten Unterraum von V bzgl. \mathcal{R} gibt, ansonsten ist die Darstellung *reduzibel*.

Falls das orthogonale Komplement eines invarianten Teilraums ebenfalls invariant bzgl. \mathcal{R} ist, nennt man die Darstellung \mathcal{R} vollständig reduzibel.

Es stellt sich nun die Frage, was mit der Unterscheidung von reduziblen und irreduziblen Darstellungen gewonnen ist. Hier zeigt sich, daß jede reduzible Darstellung in irreduzible Darstellungen zerlegt werden kann und umgekehrt aus der Kenntnis aller irreduziblen Darstellungen alle reduziblen Darstellungen konstruiert werden können. Somit kommt den irreduziblen Darstellungen eine herausragende Rolle zu, und deren Auffinden löst das Darstellungsproblem von Gruppen vollkommen. Die oben gemachten Aussagen wollen wir am Ende dieses Unterabschnitts in einem Theorem präzisieren (vgl. Theorem 17), auf den Beweis soll allerdings verzichtet und auf die bereits oben genannte Literatur verwiesen werden. Ich möchte an dieser Stelle allerdings darauf hinweisen, daß als wesentliches Hilfsmittel die Aussage dient, daß man sich bei der Beweisführung auf unitäre Darstellungen beschränken kann. Deshalb zunächst

Theorem 16 Jede Darstellung \mathcal{R} einer endlichen Gruppe auf einem Raum mit einem inneren Produkt ist äquivalent zu einer unitären Darstellung. Dabei heißt \mathcal{R} eine *unitäre Darstellung*, falls auf dem Darstellungsraum der Gruppe G ein inneres Produkt (Skalarprodukt) definiert ist und die Operatoren $\mathcal{R}(g)$ für alle $g \in G$ unitär sind, d.h. falls sie das innere Produkt zweier Elemente invariant lassen.

Man kann nun zeigen, daß jede reduzible unitäre Darstellung $\mathcal{R} : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ auf V mit nicht-trivialem invarianten Unterraum V_1 ihren zu V_1 orthogonalen Raum V_1^\perp ebenfalls als invarianten Unterraum besitzt. Somit sind auch $\mathcal{R}' : G \rightarrow \text{Aut}(V_1)$ mit $\mathcal{R}'(g) = \mathcal{R}(g)|_{V_1}$ und $\mathcal{R}'' : G \rightarrow \text{Aut}(V_1^\perp)$ mit $\mathcal{R}''(g) = \mathcal{R}(g)|_{V_1^\perp}$ eine Darstellung von G . Da $V = V_1 \oplus V_1^\perp$ legen \mathcal{R}' und \mathcal{R}'' die Darstellung \mathcal{R} eindeutig fest. Daher schreibt man $\mathcal{R} = \mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}''$. Man sagt, \mathcal{R} ist die *direkte Summe von \mathcal{R}' und \mathcal{R}''* . Nimmt man nun o.B.d.A. an, daß V_1 der kleinste echte invariante Unterraum von V ist, so ist \mathcal{R}' zwangsläufig irreduzibel und V_1^\perp aufgrund obiger Aussage invariant unter \mathcal{R}'' . Falls \mathcal{R}'' nicht irreduzibel ist, wählt man auch in V_1^\perp den kleinsten echten invarianten Unterraum aus – dieser ist dann invariant unter einer irreduziblen Darstellung \mathcal{R}''' – und spaltet ihn ab; dieser Ablauf kann solange fortgeführt werden, bis man die reduzible Darstellung \mathcal{R} vollständig in irreduzible Anteile zerlegt hat. Da V endlich-dimensional ist, bricht die Prozedur nach endlich vielen Schritten ab. Man erhält schließlich

$$\mathcal{R} = \bigoplus_{\mu=1}^k a_\mu \mathcal{R}^\mu, \quad (5)$$

wobei $a_\mu \in \mathbb{N}_0$ und die \mathcal{R}^μ paarweise nicht-äquivalent zueinander sind².

Es sei angemerkt, daß die Zerlegung (5) nicht eindeutig ist, es wird sich aber im nächsten Abschnitt herausstellen, daß die a_μ jedoch für jede Zerlegung eindeutig bestimmt sind. Man erhält also das bereits angekündigte

²Gleichung (5) meint genauer $\mathcal{R} = \underbrace{\mathcal{R}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^1}_{a_1\text{-mal}} \oplus \underbrace{\mathcal{R}^2 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^2}_{a_2\text{-mal}} \oplus \dots \oplus \underbrace{\mathcal{R}^k \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^k}_{a_k\text{-mal}}$.

Theorem 17 Jede endlich-dimensionale unitäre Darstellung einer endlichen Gruppe kann vollständig in eine direkte Summe von irreduziblen unitären Darstellungen zerlegt werden.

Am Ende dieses Abschnitts sei noch einmal kurz auf die zugehörigen Matrixdarstellungen irreduzibler Darstellungen eingegangen. Zerlegt man V in die direkte Summe $V = V_1 \oplus V_1^\perp$, so kann durch geeignete Wahl der Basisvektoren die zu \mathcal{R} gehörige Darstellungsmatrix in eine obere Dreiecksform gebracht werden. Zerlegt man aber die Darstellung \mathcal{R} gemäß Theorem 17 vollständig in ihre irreduziblen Anteile, so erhält die Darstellungsmatrix Blockdiagonalgestalt.

0.2.3 Eigenschaften irreduzibler Darstellungen

Das zentrale Problem in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen ist zum einen das Auffinden aller nicht-äquivalenten, irreduziblen Darstellungen, sowie praktische Methoden zum Aufspalten reduzibler Darstellungen. Dieser Abschnitt stellt daher die dafür wesentlichen Theoreme vor. Zuvor wollen wir aber die beiden *Lemmata von Schur* (ohne Beweis) zitieren, man findet sie u.a. in jedem der oben genannten Bücher zur Gruppentheorie. Mit Hilfe dieser Lemmata läßt sich das *Orthonormalitätstheorem* folgern, das –in basisunabhängiger Formulierung– für die Praxis von wesentlicher Relevanz ist.

Lemmata von Schur

Lemma 18 Sei \mathcal{R} eine irreduzible Darstellung der (endlichen) Gruppe G auf einem (endlich-dimensionalen) Vektorraum V und A ein beliebiger Operator auf V . Falls A mit allen Operatoren $\{\mathcal{R}(g), g \in G\}$ vertauscht, also $A\mathcal{R}(g) = \mathcal{R}(g)A$ für alle $g \in G$ gilt, dann muß A ein Vielfaches des Identitätsoperators sein, d.h. es ist $A = \lambda \mathbb{1}$ mit einer komplexen Zahl λ .

Lemma 19 Seien \mathcal{R} und \mathcal{R}' zwei irreduzible Darstellungen einer (endlichen) Gruppe G auf den (endlich-dimensionalen) Vektorräumen V bzw. V' und A eine lineare Transformation von V' nach V mit $A\mathcal{R}'(g) = \mathcal{R}(g)A$ für alle $g \in G$. Dann ist entweder (i) $A = 0$ oder (ii) V und V' sind zueinander isomorph und damit \mathcal{R} äquivalent zu \mathcal{R}' .

Orthonormalitätstheorem

Jetzt sind wir in der Lage, die zentralen Resultate der Darstellungstheorie endlicher Gruppen anzugeben. Vorweg aber noch einige Notationvereinbarungen:

n_G :	Gruppenordnung;
μ, ν :	indiziert nicht-äquivalente, irreduzible Darstellungen $\mathcal{R}^\mu, \mathcal{R}^\nu$ von G ;
d_μ :	Dimension der Darstellung \mathcal{R}^μ ;
$D^\mu(g)$:	die zu $g \in G$ gehörige Matrix der Matrixdarstellung $\mathcal{M}(\mathcal{R}^\mu)$ bezüglich einer Orthonormalbasis;
C_i :	konjugierte Klasse, $(i = 1, 2, \dots, n_G)$;
$\chi^\mu(C_i)$:	Charakter der Elemente in der Klasse C_i in der Darstellung \mathcal{R}^μ ;
n_i :	Anzahl der Elemente in der Klasse C_i ;
n_G :	Anzahl der Klassen in der Gruppe G .

Theorem 20 Für zwei beliebige, nicht-äquivalente, irreduzible, unitäre Darstellungsmatrizen gilt:

$$\frac{d_\mu}{n_G} \sum_g D^{\mu\dagger}(g)_{ki} D^\nu(g)_{jl} = \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (6)$$

mit der Konvention³ $D^{\mu\dagger}(g)_{ki} = D^{\mu*}(g)_{ik}$.

Beweis: Eine Beweisskizze findet sich in Anhang B.1.

Man beachte, daß auf die Irreduzibilitätsforderung keinesfalls verzichtet werden darf. Der Beweis benutzt in beiden Fällen die Lemmata von Schur, die nur für irreduzible Darstellungen Gültigkeit besitzen.

An dieser Stelle eine Bemerkung zur Bezeichnung „Orthonormalitätstheorem“. Sie wird durch folgende geometrische Anschauung motiviert: Faßt man $(d_\mu/n_G)^{\frac{1}{2}} D^\mu(g)^{j_l}$ für ein festes Tripel (μ, j, l) als einen n_G -komponentigen Vektor im n_G -dimensionalen „Gruppenelemente“-Vektorraum auf (die Gruppenelemente g durchlaufen dabei die volle Gruppe G), so besagt das Theorem, daß all diese Vektoren orthonormal zueinander sind. Da (j, l) genau $(d_\mu)^2$ Werte annehmen kann, gibt es insgesamt $\sum_\mu (d_\mu)^2$ verschiedene orthonormale Vektoren in der μ -Darstellung. Weil der zugehörige Vektorraum aber n_G -dimensional ist, kann es maximal n_G verschiedene orthonormale Vektoren geben. Es gilt also:

$$\sum_\mu (d_\mu)^2 \leq n_G. \quad (7)$$

Tatsächlich kann die obige Ungleichung mit Hilfe der *regulären Darstellung* dahingehend verschärft werden, daß in (7) die Gleichheit gilt. Man vergleiche dazu Anhang A. Festhalten wollen wir aber schon einmal das

Vollständigkeitstheorem

Theorem 21 Die Dimensionsparameter $\{d_\mu\}$ der nicht-äquivalenten irreduziblen Darstellungen genügen der Relation

$$\sum_\mu d_\mu^2 = n_G, \quad (8)$$

³Die *hermitesche Konjugation* umfaßt *komplexe Konjugation* mit zusätzlicher Transposition. Man schreibt $A^\dagger_{ij} \equiv (A^\dagger)_{ij} = (A^{*T})_{ij} = (A^*)_{ji} \equiv A^{*ji}$.

und für die zugehörigen Darstellungsmatrizen gilt damit wegen der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren im n_G -dimensionalen Raum die *Vollständigkeitsrelation*

$$\sum_{\mu, l, k} \frac{d_\mu}{n_G} D^\mu(g)_{lk} D^{\mu\dagger}(g')_{kl} = \delta_{gg'} , \quad (9)$$

wobei δ_{ij} mit $\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ das Kronecker-Symbol bezeichnet.

Orthonormalitäts- und Vollständigkeitsrelation für irreduzible Charaktere

Das Orthonormalitäts- und Vollständigkeitstheorem ist aus theoretischer Sicht von überaus großer Bedeutung. Für das Auffinden von irreduziblen Darstellungen in der Praxis ist es allerdings weniger geeignet, da die Gestalt der Darstellungsmatrizen von der konkret gewählten Basis von V abhängt. Eine Basistransformation führt aber nur auf äquivalente Darstellungen. Sie spielt also für die eigentlich betrachtete irreduzible Darstellung \mathcal{R} keine Rolle. Die Darstellungsmatrizen $D(g)$ mit $g \in G$ tragen also im Prinzip „zu viel“ Information. In Definition 12 wurde der Charakter einer Darstellung \mathcal{R} als die Spur über die Operatoren $\mathcal{R}(g)$ eingeführt. Sie sind unabhängig von der Wahl der Basis im Darstellungsraum, d.h. invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen, und bilden eine Klassenfunktion. Orthonormalitäts- und Vollständigkeitstheorem können in der Tat basisunabhängig formuliert werden.

Theorem 22 Die Charaktere der nicht-äquivalenten, irreduziblen Darstellungen genügen folgenden Relationen:

$$\sum_i \frac{n_i}{n_G} \chi^{\mu\dagger}(C_i) \chi^\nu(C_i) = \delta_{\mu\nu} \quad (\text{Orthonormalität}) \quad (10)$$

$$\sum_\mu \frac{n_i}{n_G} \chi^\mu(C_i) \chi^{\mu\dagger}(C_j) = \delta_{ij} \quad (\text{Vollständigkeit}), \quad (11)$$

wobei gemäß Konvention $\chi^{\mu\dagger}(C_i) = (\chi^\mu(C_i))^*$ ist.

Beweis: Eine Skizze des Beweises habe ich in Anhang B.1 bereitgestellt.

Für eine fest vorgegebene irreduzible Darstellung μ bilden die $(n_i/n_G)^{\frac{1}{2}} \chi^\mu(C_i)$ mit $i = 1, \dots, n_C$ einen Vektor im n_C -dimensionalen Vektorraum. Von ihnen gibt es genau so viele, wie es nicht-äquivalente irreduzible Darstellungen gibt. Theorem 22 besagt, daß alle derart gebildeten Vektoren orthogonal zueinander stehen. Hieraus folgt, daß die Anzahl der nicht-äquivalenten irreduziblen Darstellungen von G kleiner oder gleich n_C sein muß. Man kann zeigen, daß auch hier die Gleichheit gilt (vgl. Theorem 21), einen Beweis hierzu findet man in [1]. Als weitere wichtige Folgerung notieren wir

Folgerung 23 Die Anzahl der nicht-äquivalenten, irreduziblen Darstellungen einer endlichen Gruppe ist gleich der Anzahl von konjugierten Klassen von G . Also kann $\chi^\mu(C_i)$ als quadratische $n_C \times n_C$ Matrix aufgefaßt werden, wobei μ die Zeilen und i die Spalten indizieren. Man nennt eine aus diesen Spalten erzeugte Tabelle auch *Charakter-Tabelle*.

Wir wollen nun eine Aussage darüber machen, wie oft eine irreduzible Darstellung in einer Zerlegung einer reduziblen Darstellung einer endlichen Gruppe vorkommt.

Theorem 24 Zerlegt man eine reduzible Darstellung \mathcal{R} in ihre irreduziblen Anteile, so bestimmt man deren Häufigkeit a_ν gemäß der Formel

$$a_\nu = \frac{1}{n_G} \sum_i n_i \chi^{\nu\dagger}(C_i) \chi^{\mathcal{R}}(C_i) . \quad (12)$$

Beweis: Der Beweis ist in Anhang B.1 skizziert.

Zum Schluß dieses Abschnitts möchte ich noch ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für Irreduzibilität angeben.

Theorem 25 Eine Darstellung \mathcal{R} mit den Charakteren $\{\chi(C_i)\}$ ist genau dann irreduzibel, wenn

$$\sum_i n_i |\chi(C_i)|^2 = n_G . \quad (13)$$

Beweis: Die Beweisskizze kann ebenfalls in Anhang B.1 nachgelesen werden.

Für endliche Gruppen gibt uns dieses Kriterium also einen leicht auszuführenden Test auf Irreduzibilität an die Hand.

0.3 Kubische Gruppe und ihre irreduziblen Darstellungen

Nachdem nun die wesentlichen Begriffe und Theoreme der Darstellungstheorie endlicher Gruppen eingeführt wurden, soll im folgenden die kubische Gruppe als Beispiel einer endlichen Gruppe genauer vorgestellt und insbesondere deren irreduziblen Anteile bestimmt werden.

0.3.1 Kubische Gruppe O

Die kubische Gruppe ist eine nicht-abelsche, endliche Gruppe mit 24 Elementen und wird abkürzend mit dem Symbol O bezeichnet. Sie ist isomorph zur Permutationsgruppe S_4 . Ihre Elemente lassen sich mit den Rotationen eines Würfels identifizieren, die seine Lage invariant lassen. Die eindeutig bestimmten Rotationsachsen bezeichnet man als Symmetrieachsen des Würfels.

Ein dreidimensionaler Würfel hat insgesamt 13 Symmetrieachsen (vgl. Abb. 1).

Verwendet man zur Beschreibung dieser Achsen ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem und legt dessen Nullpunkt in die Mitte des Würfels, so lassen sich drei von ihnen durch die drei Koordinatenachsen beschreiben, d.h. die Achsen gehen durch die Mittelpunkte gegenüberliegende Seitenflächen, hier sind Rotationen um Vielfache von $\pm\frac{\pi}{2}$ möglich. Weitere vier Achsen mit Rotationen um Vielfache von $\pm\frac{2\pi}{3}$ werden durch die Raumdiagonalen beschrieben. Sechs weitere Achsen verlaufen parallel zu den Seitenflächendiagonalen durch den Ursprung des Koordinatensystems, erlaubt sind hier Rotationen um Vielfache von π . Um die 10 Rotationsachsen (ohne Koordinatenachsen) nun

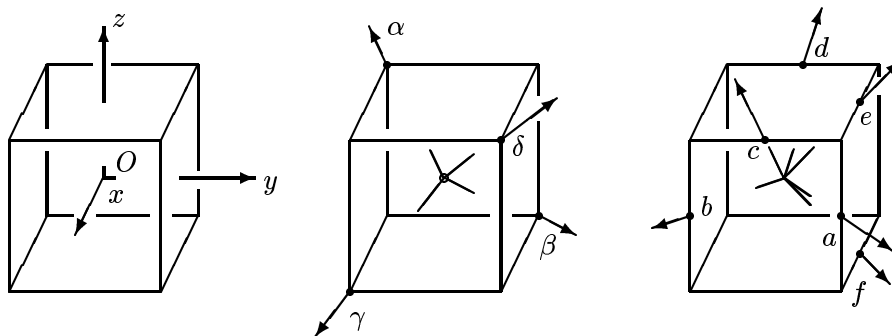


Abbildung 1: Symmetrieachsen eines Würfels

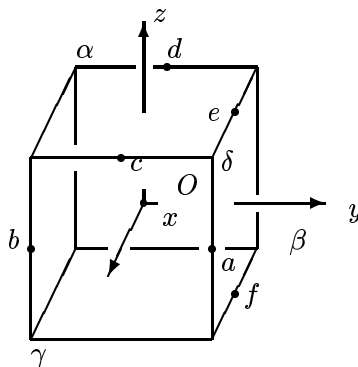
mit einer eindeutig bestimmten Orientierung zu versehen, bestimmt man vier Eckpunkte α, \dots, γ und sechs Kantenmittelpunkte a, \dots, f des Würfels und läßt die Achsen durch den Koordinatenursprung und dann durch die ausgezeichneten Punkte verlaufen. Man bezeichnet sie entsprechend mit $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta, Oa, Ob, Oc, Od, Oe$ und Of (vgl. Abb. 1 und 2).

Wir wollen im folgenden nur *aktive*, d.h. linkshändige Drehungen modulo 2π betrachten, um die Anzahl der möglichen Drehungen minimal zu halten. Man beachte, daß insbesondere eine Drehung um $-\varphi$ identisch mit einer Drehung um $2\pi - \varphi$ ist.

Man unterscheidet nun die Symmetrieachsen des Würfels nach ihrer Ordnung. Die Ordnung einer Achse ist dabei definiert als Anzahl erlaubter Drehungen (einschließlich der Identität), die den Würfel in sich selbst überführen, und wird mit C_j bezeichnet, wobei j die Anzahl der möglichen Drehungen indiziert. Beim Würfel hat man also:

- 3 C_4 -Achsen $C_{4i}, i \in \{x, y, z\}$ Rotationen um n -mal $\frac{\pi}{2}$ ($n = 1, \dots, 4$)
- 4 C_3 -Achsen $C_{3i}, i \in \{\alpha, \dots, \delta\}$ Rotationen um n -mal $\frac{2\pi}{3}$ ($n = 1, 2, 3$)
- 6 C_2 -Achsen $C_{2i}, i \in \{a, \dots, f\}$ Rotationen um n -mal π ($n = 1, 2$)

Die Rotationen können mit $C_{ji}(\varphi)$ bezeichnet werden, die Rotationsmaße $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pi$ sind dabei passend zur Wahl von j zu wählen. Beachtet man, daß die jeweils j -te Rotation

Abbildung 2: Die Achsen $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta, Oa, Ob, Oc, Od, Oe, Of$ sowie x, y, z

um die Achse C_{ji} die Identität ist, hat man insgesamt 24 Symmetrieoperationen. Dies sind genau die 24 Elemente der kubischen Gruppe O . Sie läßt sich demnach in der Form $O = \{C_{4i}(\varphi), C_{3j}(\varphi), C_{2k}(\varphi) \mid i = 1, 2, 3; j = 1, \dots, 4; k = 1, \dots, 6; \varphi = \pm\frac{\pi}{2}, \pi, \pm\frac{2\pi}{3}\}$ schreiben, wobei die φ geeignet zu wählen sind. Gruppenverknüpfung ist dabei die Hintereinanderausführung zweier Rotationen. Diese sind in der Tat nicht kommutativ, d.h. die Gruppe O ist nicht-abelsch!

Unter zur Hilfenahme einer Verknüpfungstabelle kann man jetzt nachrechnen, daß die 24 Elemente von O in fünf konjugierte Klassen (vgl. Definition 6) zerfallen, diese werden mit $E, 6C_2, 8C_3, 6C_4$ und $3C_4^2$ bezeichnet⁴. In ihnen befinden sich jeweils ausschließlich Drehungen um Symmetrieachsen gleicher Ordnung:

- $E = \{id\}$: Identität

- $6C_2 = \{C_{2i}(\varphi)\}$ mit $i \in \{a, \dots, f\}$ und $\varphi = \pi$

Rotationen um die Achsen Oa, Ob, Oc, Od, Oe, Of parallel zu den sechs Seitenflächendiagonalen, insgesamt also sechs Elemente;

- $8C_3 = \{C_{3i}(\varphi)\}$ mit $i \in \{\alpha, \dots, \delta\}$ und $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$

Rotationen um die vier Raumdiagonalen $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta$, insgesamt also acht Elemente;

- $6C_4 = \{C_{4i}(\varphi)\}$ mit $i \in \{x, y, z\}$ und $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

Rotationen um die drei Koordinatenachsen x, y, z , insgesamt also sechs Elemente;

und schließlich

- $3C_4^2 = \{C_{4i}(\varphi)\}$ mit $i \in \{x, y, z\}$ und $\varphi = \pi$

Rotationen um die drei Koordinatenachsen x, y, z , insgesamt also drei Elemente.

0.3.2 Irreduzible Darstellungen von O

Die kubische Gruppe besitzt nach der Folgerung aus Theorem 22 genau so viele nicht-äquivalente, irreduzible Darstellungen wie konjugierte Klassen. Ihre Dimensionsparameter d_μ können mit Hilfe der Formel (8) aus Theorem 21 bestimmt werden, da sich die Bedingung $\sum_{\mu=1}^5 d_\mu^2 = 24$ nur für $(d_1, \dots, d_5) = (1, 1, 2, 3, 3)$ erfüllen läßt. Man bezeichnet die zwei eindimensionalen Darstellungen üblicherweise mit A_1, A_2 , die zweidimensionale Darstellung mit E und die beiden dreidimensionalen Darstellungen mit T_1 und T_2 . Die triviale Darstellung A_1 wurde bereits in 0.2.1 als Beispiel erwähnt. T_1 findet man häufig auch unter dem Begriff Vektordarstellung.

⁴Die Zahl vor dem Klassensymbol gibt die Anzahl ihrer Elemente an. Falls Verwechslungen ausgeschlossen sind, wird diese stellenweise auch weggelassen.

Es ist nun prinzipiell möglich, mit Hilfe des Orthonormalitäts- und Vollständigkeits-theorems den kompletten Satz an Matrizen aller fünf nicht-äquivalenter irreduzibler Darstellungen zu bestimmen. Damit wäre das Problem, alle Darstellungen der kubischen Gruppe aufzufinden, vollständig gelöst, da sich durch geeignete Wahl der Basis alle reduzierbaren Matrixdarstellungen blockweise aus den fünf irreduziblen Matrizen aufbauen lassen. Wie allerdings schon erwähnt, ist eine basisunabhängige Formulierung unter Verwendung irreduzibler Charaktere wesentlich kompakter, –wenn auch ärmer an Information– aber für unsere Zwecke absolut ausreichend. Wir wollen also im folgenden Unterabschnitt alle $\chi^\mu(C_i)$ mit $\mu \in \{1, \dots, 5\}$, $C_i \in \{C_2, C_3, C_4, C_4^2\}$ bestimmen und in einer Charakter-Tabelle (vgl. Folgerung 1) anordnen.

0.3.3 Charaktertabelle von O

Die Konstruktion einer Charaktertabelle ist für alle endlichen Gruppen G der Ordnung n gleich und kann nach Bedarf in der Literatur, z.B. [3], nachgelesen werden. Wir wollen aber der Vollständigkeit halber kurz die wichtigsten Regeln, die für das Erstellen der Tabelle von Bedeutung sind, aufzählen.

1. Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen ist gleich der Anzahl der konjugierten Klassen. Die Gruppe O hat davon fünf. Ihre Charaktertabelle besteht demnach aus 5 Zeilen und 5 Spalten.
2. Die Dimension d_μ der irreduziblen Darstellungen ist gegeben durch $\sum_\mu d_\mu^2 = n_G$. Im Abschnitt 0.3.2 wurde für die kubische Gruppe bereits die eindeutige Lösung mit 1, 1, 2, 3 und 3 angegeben. Da das neutrale Element einer Gruppe in jeder Darstellung durch die Einheitsmatrix dargestellt wird, ist die Spur der Darstellungsmatrix für alle μ gleich d_μ , also in der ersten Spalte steht stets $\chi^\mu(\mathbb{1}) = d_\mu$.
Vereinbart man, daß die (irreduzible) Trivildarstellung, die jedem Gruppenelement die 1 zuordnet, mit $\mu = 1$ indiziert wird, so ist die erste Zeile der Tabelle durch $\chi^1(C_i) = 1$ für alle $C_i, i \in \{1, \dots, n_G\}$, gegeben.
Für die kubische Gruppe erhalten wir demnach als erste Zeile $(1, \dots, 1)$ und als erste Spalte $(1, 1, 2, 3, 3)$.
3. Für die Zeileneinträge der Tabelle gilt nach (10)

$$\sum_i n_i \chi^{\mu\dagger}(C_i) \chi^\nu(C_i) = n_G \delta_{\mu\nu} .$$

Die Zeilen sind also orthogonal zueinander und die mit n_i gewichtete Summe ist auf n_G normiert.

4. Die Spalten der Tabelle sind nach (11) ebenfalls orthogonal zueinander und auf n_G/n_i normiert, also gilt

$$\sum_\mu \chi^\mu(C_i) \chi^{\mu\dagger}(C_j) = \frac{n_G}{n_i} \delta_{ij} . \quad (14)$$

Oftmals reichen die ersten drei Regeln aus, um die Charaktertabelle vollständig zu bestimmen. Regel vier kann dann der Kontrolle dienen. Für die kubische Gruppe sind die ersten beiden Regeln bereits ausgeführt worden. Die dritte Regel führt auf ein lösbares Gleichungssystem, deren explizite Ausführung auf die folgende Tabelle führt:

konj. Klassen		E	C_2	C_3	C_4	C_4^2
konj. Klassen		1	6	8	6	3
Darstellung	A_1	1	1	1	1	1
	A_2	1	-1	1	-1	1
	E	2	0	-1	0	2
	T_1	3	-1	0	1	-1
	T_2	3	1	0	-1	-1

0.3.4 Gruppe O_h

Wir schließen dieses Kapitel mit der Einführung der Gruppe O_h , die eng mit der kubischen Gruppe O verbunden ist. Sie besitzt 48 Elemente und wird häufig auch als *volle kubische Gruppe* bezeichnet. Ihre Elemente lassen sich ähnlich wie im Falle der kubischen Gruppe mit den Symmetrieeigenschaften eines Würfels in Verbindung bringen, indem man neben den in 0.3.1 eingeführten Rotationen um die Symmetrieachsen eines Würfels auch zusätzlich noch eine Punktspiegelung (Inversion I) am Ursprung⁵ zuläßt. Eine Inversion dreht die Vorzeichen aller Koordinaten um, d.h. \mathbf{r} wird zu $-\mathbf{r}$ für alle $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. Man kann also jedes Element aus O_h mit einer Drehung und anschließender optionaler Inversion identifizieren. Man beachte, daß die Reihenfolge dieser beiden Operationen für die Endlage/Endkonfiguration des Würfels dabei eigentlich keine Rolle spielt⁶. Die 24 zusätzlichen (gespiegelten) Elemente der Gruppe O_h macht man durch ein I vor dem Rotationssymbol kenntlich, demnach beschreibt (IC_{2x}) beispielsweise eine Drehung um π um die x -Achse inklusive Punktspiegelung.

Die Aussagen über die Gruppe O hinsichtlich konjugierter Klassen, irreduzibler Darstellungen und Charaktertabelle lassen sich leicht auf die Gruppe O_h übertragen und seien deshalb im folgenden kurz genannt.

Irreduzible Darstellungen

Da Rotation und Inversion kommutieren und sich eine gespiegelte Konfiguration $g_h \in O_h$ des Würfels⁷ nicht durch Hintereinanderschalten geeigneter Rotationen aus O erzeugen läßt, zerfällt die volle kubische Gruppe in zehn konjugierte Klassen. Man bezeichnet sie mit $E, C_2, C_3, C_4, C_4^2, I, IC_2, IC_3, IC_4, IC_4^2$. Die Anzahl nicht-äquivalenter, irreduzibler Dar-

⁵Der Ursprung liegt im Mittelpunkt des Würfels.

⁶Mathematisch ausgedrückt ist die Gruppe O_h das *direkte Produkt* aus der kubischen Gruppe O und der zweielementigen Gruppe $\{e, I\}$, also $O_h = O \times \{e, I\}$, wobei e das neutrale Element der zweielementigen Gruppe bezeichnet. Der Begriff des direkten Produktes wird später in Kapitel 4 eingehender besprochen.

⁷Die Elemente g_h haben alle die Form $g_h = (g, e)$ oder $g_h = (g, I)$ mit $g \in O$.

stellungen ist nach der Folgerung aus Theorem 22 damit ebenfalls zehn. Diese werden mit $A_1^\pm, A_2^\pm, E^\pm, T_1^\pm$ und T_2^\pm bezeichnet⁸.

Charaktertabelle

Die Charaktertabelle von O_h läßt sich mit einigem rechnerischen Aufwand mit Hilfe der in 0.3.3 angegebenen Regeln aufstellen. Man findet [1]:

konj. Klassen		E	C_2	C_3	C_4	C_4^2	I	IC_2	IC_3	IC_4	IC_4^2
konj. Klassen		1	6	8	6	3	1	6	8	6	3
Darstellung	A_1^+	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	A_2^+	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1
Parität = 1	E^+	2	0	-1	0	2	2	0	-1	0	2
	T_1^+	3	-1	0	1	-1	3	-1	0	1	-1
	T_2^+	3	1	0	-1	-1	3	1	0	-1	-1
Parität = -1	A_1^-	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
	A_2^-	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
	E^-	2	0	-1	0	2	-2	0	1	0	-2
	T_1^-	3	-1	0	1	-1	-3	1	0	-1	1
	T_2^-	3	1	0	-1	-1	-3	-1	0	1	1

0.4 Schlußbemerkung

Weitere gruppentheoretische Grundlagen finden sich in Kapitel 4, in dem insbesondere auf die Konstruktion direkter (endlicher) Produktgruppen und deren irreduziblen Darstellungen eingegangen wird. Ferner ist dann eine weitere, diskrete, endliche Gruppe zu diskutieren, die Überlagerungsgruppe 2O der kubischen Gruppe O .

Im folgenden Kapitel werde ich zunächst auf physikalische Fragestellungen eingehen, um anschließend das Transformationsverhalten von damit in Zusammenhang stehenden Gitteroperatoren unter der kubischen Gruppe zu untersuchen.

⁸Das \pm steht für die *Parität* P der Darstellung (vgl. Kapitel 2). Die Parität ist $+1$, falls für die Charakter der irreduziblen Darstellung $\chi(g \times e) = \chi(g \times I)$ gilt, die Parität ist -1 , falls $\chi(g \times e) = -\chi(g \times I)$.

Kapitel 1

Glueballspektrum auf dem Gitter

In diesem Kapitel soll ein kurzer Überblick über die Anwendung nicht-abelscher Gittereichtheorien zur Bestimmung von Glueballmassen gegeben werden. Die zugrunde liegenden Arbeiten sind ein Beispiel dafür, in welchem Maße Berechnungen auf dem Gitter Vorhersagen für die Kontinuumsphysik liefern können.

In knapper Form werde ich zunächst die Grundgedanken der Eichtheorie und ihrer Formulierung auf dem Gitter darstellen und auf die Existenz von massiven Zuständen in stark gekoppelten Gittereichtheorien eingehen. Daran anschließen wird sich der Zusammenhang zwischen Spinzuständen im Kontinuum und ihren Entsprechungen auf dem Gitter. Dabei stellt sich die Frage, welche Auswirkung die auf dem Gitter gebrochene Drehsymmetrie auf ihre irreduziblen Darstellungen hat und wie diese durch Gitteroperatoren zu realisieren sind. Es wird sich dabei herausstellen, daß gerade die irreduziblen Darstellungen der kubischen Gruppe zur Charakterisierung von Spinzuständen auf dem Gitter benutzt werden können.

Auf numerische Ergebnisse im Rahmen der Glueball-Spektroskopie, die in erster Linie aus Monte-Carlo Simulationen aber auch aus Hochtemperaturentwicklungen¹ (strong coupling expansion) [7,8] stammen, soll hier nicht näher eingegangen werden. Hierzu vergleiche man z.B. [9,10] und die darin aufgeführten Referenzen.

1.1 Grundzüge der Gittereichtheorie

Vorab stelle ich die grundlegenden Begriffe und Bezeichnungen der Gittereichfeldtheorie zusammen. Für eine umfassendere Darstellung sei auf [11,12] und die darin angegebenen Referenzen verwiesen.

¹Der Begriff der Hochtemperaturentwicklung ist der statistischen Mechanik entlehnt. Man bezieht sich hierbei auf den engen Zusammenhang zwischen der Formulierung der euklidischen Quantenfeldtheorie und der statistischen Mechanik in Form von Funktionalintegralen. Die Kopplungskonstante g^2 wird dabei mit der Temperatur identifiziert. Eine Hochtemperaturentwicklung meint in unserem Zusammenhang also eine Entwicklung in $1/g^2$ bzw. β .

1.1.1 Eichtheorie im Kontinuum

Fundamentaler Bestandteil der heutigen Quantenfeldtheorie ist das Prinzip der Eichinvarianz, welches aufgrund des Noether-Theorems die Existenz von erhaltenen Strömen und den davon abgeleiteten physikalischen Größen garantiert. Insbesondere das *lokale Eichprinzip* erlaubt es schließlich, mit Hilfe von lokalen Eichfeldern und kovarianten Ableitungen lokal-eichinvariante Wirkungen aufzubauen.

Ausgangspunkt lokal eichinvarianter Theorien ist hierbei die Forderung nach Invarianz der Wirkung bezüglich Transformationen der Form

$$\phi(x) \longrightarrow \Lambda^{-1}(x)\phi(x) \quad \text{für alle} \quad \Lambda(x) \in SU(N). \quad (1.1)$$

Die Invarianzforderung unter diesen lokalen Eichtransformationen macht die Einführung von kovarianten Ableitungen in der Lagrangedichte nötig, die sich wiederum aus dem Konzept des Paralleltransports –um Felder an verschiedenen Orten der Raumzeit vergleichen zu können– ergeben. Hierbei führt man Paralleltransporter $U(\mathcal{C}) \in SU(N)$ entlang eines Weges \mathcal{C} ein, die dann mit dem Eichfeld A_μ über das pfadgeordnete Integral

$$U(\mathcal{C}) = \mathcal{P}e^{-\int_{\mathcal{C}} dx^\mu A_\mu} \quad (1.2)$$

verbunden werden. Das Eichfeld ist ein Element der Lie-Algebra $su(N)$ der Gruppe $SU(N)$ und transformiert sich gemäß

$$A_\mu(x) \longrightarrow \Lambda^{-1}(x) (\partial_\mu + A_\mu(x)) \Lambda(x). \quad (1.3)$$

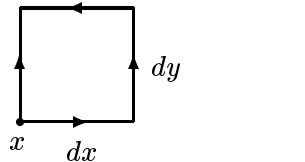
Die kovariante Ableitung erhält die Form

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x). \quad (1.4)$$

Damit definiert man den Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ der Theorie via

$$F_{\mu\nu} := [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)]. \quad (1.5)$$

Betrachtet man nun den Paralleltransport entlang infinitesimal kleiner, geschlossener Kurven $\mathcal{C}_{dx,dy}$, die durch dx und dy aufgespannt werden, etwa durch Polygonzüge der Form



so ist dieser mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ über

$$U(\mathcal{C}_{dx,dy}) = 1 - F_{\mu\nu} dx^\mu dy^\nu \quad (1.6)$$

verbunden. Er transformiert sich nach

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \Lambda^{-1}(x) F_{\mu\nu}(x) \Lambda(x). \quad (1.7)$$

Für die Komponentenfelder von A_μ und $F_{\mu\nu}$ setzt man

$$A_\mu(x) = -igA_\mu^a(x)T_a \quad (1.8)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = -igF_{\mu\nu}^a(x)T_a, \quad (1.9)$$

wobei T_a die spurlosen, hermiteschen Generatoren der $su(N)$ bezeichnet. Sie erfüllen die Relationen

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (1.10)$$

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c \quad (1.11)$$

mit den vollkommen antisymmetrischen, reellen Strukturkonstanten f_{abc} der $su(N)$. Die Komponenten des Feldstärketensors sind mit denen des Eichfeldes über die Beziehung

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + gf_{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x) \quad (1.12)$$

verknüpft, wobei g die Selbstkopplung der Eichfelder bezeichnet.

Durch Einführen eines Terms in die eichinvariante Wirkung nimmt das Eichfeld selbst an der Dynamik teil. Man bezeichnet ihn als *Yang-Mills-Wirkung*:

$$S_{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (1.13)$$

1.1.2 Eichtheorie auf dem Gitter

Man gelangt nun zu einer Diskretisierung der Theorie, indem man sich bei seiner Betrachtung auf Raum-Zeitpunkte beschränkt, die auf einem vierdimensionalen, hyperkubischen Gitter $\Lambda = a\mathbb{Z}^4 = \{x | x_\mu \in a\mathbb{Z}, \mu = 1, 2, 3, 4\}$ angeordnet sind. Die Richtung der Gitterachsen werden dabei mit $\hat{\mu} = \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$ gekennzeichnet. Die Materiefelder befinden sich nunmehr nur noch auf den Gitterpunkten. Der Paralleltransporter als Mittler zwischen diesen Feldern wird mit den Gitterkanten (Links) identifiziert und im Falle der benachbarten Punkte x und $x + a\hat{\mu}$ mit $U_{x;\mu}$ bezeichnet. Der Paralleltransport in umgekehrter Richtung schreibt sich demnach als $U_{x+a\hat{\mu};-\mu} = U_{x;\mu}^{-1}$ und ist im Falle der $SU(N)$ gleich $U_{x;\mu}^\dagger$. Für kleine Gitterabstände a ist er mit dem Eichfeld über die Beziehung

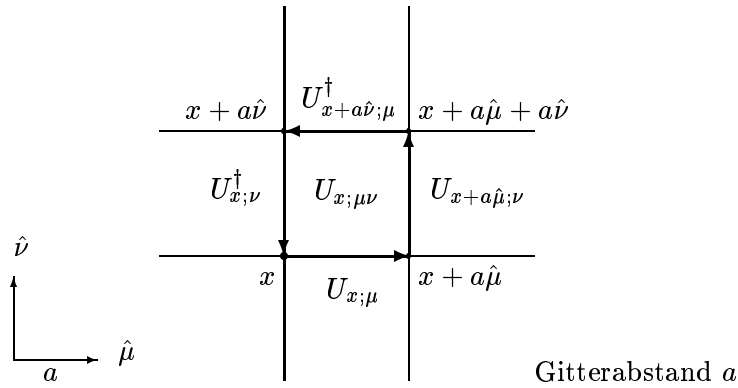
$$U_{x;\mu} = e^{-aA_\mu(x)} = 1 - aA_\mu(x) + \frac{a^2}{2}A_\mu^2(x) + \dots \quad (1.14)$$

verknüpft.

Das Konzept des Paralleltransports führt wie bereits im Kontinuumsfall in natürlicher Weise zu einer Wirkung der Gittertheorie. Dabei betrachtet man wie in (1.6) möglichst kleine geschlossene Kurven. In der diskretisierten Beschreibung der Theorie sind infinitesimal kleine Wegstücke aufgrund des endlichen Gitterabstandes a gar nicht definiert, und als kleinste geschlossene Wege findet man gerade Quadrate mit der Kantenlänge a . Sie bilden die sog. Plaquettenvariablen $U_{x;\mu\nu}$ mit den Eckenpunkten

$$x, \quad x + a\hat{\mu}, \quad x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu} \quad \text{und} \quad x + a\hat{\nu} \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4; \mu \neq \nu. \quad (1.15)$$

Diese lassen sich folgendermaßen graphisch veranschaulichen:



K. WILSON schlug nun vor, aus solchen Plaquetten eine eichinvariante Wirkung für das Eichfeld zu konstruieren [13,14]. Dabei wird der Paralleltransport um eine solche Plaquette durch die Plaquettenvariable

$$U_p = U_{x;\mu\nu} = U_{x;\nu}^\dagger U_{x+a\hat{\nu};\mu}^\dagger U_{x+a\hat{\mu};\nu} U_{x;\mu} \quad (1.16)$$

beschrieben. Die Wilson-Wirkung für das $SU(N)$ -Eichfeld schreibt sich dann als

$$S_{Lat}(x) = \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \beta \left[1 - \frac{1}{2N} \text{Tr} \left\{ U_{x;\mu\nu} + U_{x;\mu\nu}^\dagger \right\} \right], \quad (1.17)$$

wobei wegen

$$U_{x;\mu\nu}^\dagger = U_{x;\mu\nu}^{-1} \quad \text{und} \quad \text{Tr} \left\{ U_{x;\mu\nu} + U_{x;\mu\nu}^\dagger \right\} = 2 \text{Re} \left\{ \text{Tr} U_{x;\mu\nu} \right\} \quad (1.18)$$

auch

$$S_{Lat}(x) = \sum_x \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \beta \left[1 - \frac{1}{N} \text{Re} \left\{ \text{Tr} U_{x;\mu\nu} \right\} \right] \quad (1.19)$$

gilt.

In (1.17) beachte man, daß sich $U_{x;\mu\nu}^\dagger$ auch durch $U_{x;\nu\mu}$ ausdrücken läßt und somit die Plaquette $U_{x;\mu\nu}$ umgekehrt durchläuft.

Setzt man in (1.16) die entsprechenden Paralleltransporter gemäß (1.14) ein und entwickelt das Eichfeld $A_\mu(x)$ nach dem Taylorschen Lehrsatz, ergibt sich unter Verwendung der Baker-Campell-Hausdorff-Formel für die Plaquettenvariable $U_{x;\mu\nu}$ auf dem Gitter

$$U_{x;\mu\nu} = 1 - a^2 F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3) \quad (1.20)$$

mit dem Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \Delta_\mu^f A_\nu(x) - \Delta_\nu^f A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (1.21)$$

der Gittereichtheorie, der analog zu (1.12) ist. Hierbei wurden wegen des endlichen Gitterabstandes die partiellen Ableitungen des Kontinuum-Feldstärketensors aus (1.5) durch Gitterableitungen ersetzt. Die Vorwärtsableitung ist dabei durch

$$\Delta_\mu^f f(x) = \frac{1}{a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x)) \quad (1.22)$$

definiert. Entsprechend läßt sich auch eine Rückwärtsableitung durch

$$\Delta_\mu^b f(x) = \frac{1}{a} (f(x) - f(x - a\hat{\mu})) \quad (1.23)$$

erklären.

Insgesamt erhält man unter Auslassung konstanter Terme für die Gitter-Wirkung (1.17) [12]

$$S_{Lat} = -\frac{\beta}{4N} \sum_x a^4 \text{Tr} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^5). \quad (1.24)$$

Damit wird die Wilson-Wirkung im Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$ mit

$$a^4 \sum_x \longrightarrow \int d^4x \quad (1.25)$$

in die Yang-Mills Wirkung (1.13) überführt, wobei für die Eichkopplung

$$\beta = \frac{2N}{g^2} \quad (1.26)$$

zu setzen ist.

1.2 Glueball- und Spinzustände auf dem Gitter

1.2.1 Ausgangslage

Seit Anfang der siebziger Jahre H. FRITZSCH und M. GELL-MANN [15] im Rahmen der QCD die Existenz von Teilchen vorhersagten, die aus farblosen Kombinationen von Gluonen aufgebaut sein sollten (sog. „glueballs“), dauerte es immerhin noch einige Jahre bis diese Glueball-Hypothese durch theoretische Arbeiten im Rahmen der Gittereichfeldtheorien bestätigt und gesichert werden konnte. Erst gegen Ende des Jahrzehnts konnten K. OSTERWALDER und E. SEILER [16] zeigen, daß in (nicht-abelschen) Gittereichtheorien mit starker Kopplung ein Massensprung auftritt, der mit solchen Glueballzuständen im Spektrum der Theorie identifizierbar ist.

An dieser Stelle scheint es zweckmäßig, in einem kleinen Einschub zunächst zu umreißen, wie überhaupt eine Massenskala in die skaleninvariante Eichtheorie gelangt.

Natürliche Massenskala in der Gittereichtheorie

Da Massenterme in der Lagrangedichte die Eichinvarianz verletzen, besitzt die reine Eichtheorie a priori keine intrinsische Massenskala und ist daher skaleninvariant. Der Prozeß der Gitterregularisierung, der der Einführung eines Impulsraum-Cutoff der Ordnung $1/a$ entspricht, erzeugt eine Massenskala in der quantisierten Theorie. Dieser zugrunde liegende Formalismus ist aus der Theorie der Renormierungsgruppe bekannt (vgl. dazu z.B. [17]); er soll am Beispiel der Gitterregularisierung hier nur kurz skizziert werden:

Da die renormierte Kopplungskonstante g_R als mit physikalischen Größen identifizierbar interpretiert werden kann, fordert man von ihr die Unabhängigkeit vom Regularisierungsparameter a

$$a \frac{d}{da} g_R = \left\{ a \frac{\partial}{\partial a} - \beta_{Lat}(g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} g_R(g, m_R a) = 0, \quad (1.27)$$

wobei β_{Lat} durch

$$\beta_{Lat}(g, m_R a) = -a \left. \frac{\partial g}{\partial a} \right|_{g_R} \quad (1.28)$$

bei festem g_R gegeben ist². Eine störungstheoretische Behandlung der Funktion $\beta_{Lat}(g)$ zeigt die Unabhängigkeit der ersten beiden nicht-verschwindenden Ordnungen in der nackten Kopplung g vom Renormierungsschema. In der reinen $SU(N)$ -Eichtheorie findet man

$$\beta_{Lat}(g) = -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 + \dots \quad (1.29)$$

mit den universellen Größen

$$\beta_0 = \frac{11}{3} \left(\frac{3}{16\pi^2} \right) \quad \text{und} \quad \beta_1 = \frac{34}{3} \left(\frac{3}{16\pi^2} \right)^2.$$

Es läßt sich zeigen, daß $g = 0$ die Rolle eines ultravioletten Fixpunktes spielt [12], und man somit den Kontinuumsliches für fixiertes g_R durch Übergang von g nach Null erhält. Durch Separation der Variablen und Einsetzen der Entwicklung von (1.29) ergibt sich die Lösung der partiellen Differentialgleichung (1.28) zu

$$a = \Lambda_{Lat}^{-1} (\beta_0 g^2)^{\frac{-\beta_1}{2\beta_0^2}} \exp \left(-\frac{1}{2\beta_0 g^2} \right) \{1 + \mathcal{O}(g^2)\} \quad (1.30)$$

mit einer Integrationskonstanten Λ_{Lat} . Da der Term rechts von Λ_{Lat}^{-1} dimensionslos ist und die Gitterkonstante a die Dimension einer Länge trägt, hat Λ_{Lat} die Dimension einer Masse. Man bezeichnet

$$\Lambda_{Lat} \equiv \lim_{g \rightarrow 0} \frac{1}{a} (\beta_0 g^2)^{\frac{-\beta_1}{2\beta_0^2}} \exp \left(-\frac{1}{2\beta_0 g^2} \right) \quad (1.31)$$

als Gitter- Λ -Parameter. Er ist somit nach Grenzübergang unabhängig von der unrenormierten Kopplung g .

Mit Λ_{Lat} tritt nun in der reinen Gitter-Eichtheorie eine massenbehaftete Skala auf, so daß massive physikalische Größen der Proportionalitätsbeziehung

$$m = C_m \Lambda_{Lat} \quad (1.32)$$

genügen müssen. Demnach verhalten sich Massen, die aus Gitterrechnungen bestimmt werden, in der Nähe des Kontinuumsliches gemäß

$$a m(g) = C_m (\beta_0 g^2)^{\frac{-\beta_1}{2\beta_0^2}} \exp \left(-\frac{1}{2\beta_0 g^2} \right) \{1 + \mathcal{O}(g^2)\}, \quad (1.33)$$

²Da eine allgemeine Theorie schon auf der Ebene der Lagrangedichte gewöhnlich eine Massenskala besitzen kann, hängt die renormierte Kopplung i.a. auch von m_R ab. Daher führe ich die Massenabhängigkeit m_R auch hier mit.

oder in anderen Worten, sie erfüllen die Renormierungsgruppengleichung

$$\left\{ a \frac{\partial}{\partial a} - \beta_{Lat}(g) \frac{\partial}{\partial g} \right\} m = \mathcal{O}(a^2 m^2) . \quad (1.34)$$

In der Literatur findet man dieses Verhalten in der Nähe des Kontinuumslimes auch unter der Bezeichnung „asymptotic scaling“.

Führt man den Grenzwertprozeß $\beta \rightarrow \infty$ (bzw. $a \rightarrow 0$) aus, so ergibt sich durch Quotientenbildung von (1.33) ein Massenverhältnis m_1/m_2 zweier physikalischer Zustände (in der $SU(N)$ z.B. gerade Gluebälle) welches dann im Kontinuumslimes wie

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{C_1}{C_2} \{1 + \mathcal{O}(a^2 m^2)\} \quad (1.35)$$

gegen einen konstanten Wert skalieren sollte.

Anfang der achtziger Jahre haben B. BERG und A. BILLOIRE begonnen, mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen auf dem Gitter das massive Spektrum von Glueball-Zuständen zu berechnen [18,19]. Dazu benutzten sie möglichst einfache, eichinvariante Gitteroperatoren (sog. Wilson-Loops), die sich in geeigneter Weise unter den irreduziblen Darstellungen der unterliegenden Symmetriegruppe eines kubischen Gitters transformieren. Im folgenden soll daher auf den Zusammenhang zwischen der Rotationssymmetrie des dreidimensionalen Raumes und der Symmetriegruppe eines räumlichen Gitters näher eingegangen werden.

1.2.2 Spinzustände und kubische Gruppe

Im Kontinuum werden bosonische Zustände durch TensorDarstellungen der Drehgruppe $SO(3)$ charakterisiert, wobei die $SO(3)$ aus der Menge aller Rotationen um beliebige Achsen und Winkelmaße im dreidimensionalen Raum besteht³. Durch die Gitterdiskretisierung wird die Rotationssymmetrie gebrochen, da ein kubisches Gitter nicht rotationsinvariant ist und demnach Gitterzustände unter beliebigen Drehungen nicht invariant und somit als unphysikalisch anzusehen sind. Man kann nun mit Hilfe der kubischen Gruppe O die Rotationsinvarianz des physikalischen Raumes (Gitters) wiederherstellen, indem man die Rotationssymmetrie der kontinuierlichen Theorie durch die untergeordnete kubische Symmetrie eines Gitters ersetzt. Die kubische Gruppe dient dabei als Symmetriegruppe der Theorie, so daß die Eigenzustände des Gitter-Hamiltonoperators nach den irreduziblen Darstellungen von O klassifiziert werden.

Es stellt sich aber auch umgekehrt die Frage, welche Auswirkungen die Gitterregularisierung auf Spinzustände im Kontinuum hat. Betrachten wir dazu eine irreduzible Darstellung \mathcal{R}^j der $SO(3)$, wobei j den Spinzustand für $j = 0, 1, 2, \dots$ bezeichnen soll. Da die kubische Gruppe O eine Untergruppe der $SO(3)$ ist, können ihre Elemente ebenfalls durch

³Im allgemeinen zieht man die unitären irreduziblen Darstellungen der Gruppe $SU(2)$ zur Klassifikation von Spinzuständen heran, wobei zwischen den Darstellungen mit ganzzahligem Spin (TensorDarstellung) und halbzahligem Spin (Spinordarstellung) zu unterscheiden ist. Im bosonischen Sektor stimmen aber die irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$ und $SO(3)$ überein, so daß eine Beschreibung durch die „kleinere“ Gruppe $SO(3)$ ausreicht (vgl. [20] und auch Anhang D).

\mathcal{R}^j dargestellt werden. Insofern läßt sich \mathcal{R}^j als eine Darstellung \mathcal{R}_O^j von O auffassen („reduced representation“), die im allgemeinen aber reduzibel ist. Man kann sie dann in ihre irreduziblen Anteile zerlegen und erhält für $j = 0, 1, \dots, 12$ [21]:

Spin j	Zerlegung in irreduzible Darstellungen von O
0	A_1
1	T_1
2	$E \oplus T_2$
3	$A_2 \oplus T_1 \oplus T_2$
4	$A_1 \oplus E \oplus T_1 \oplus T_2$
5	$E \oplus 2T_1 \oplus T_2$
6	$A_1 \oplus A_2 \oplus E \oplus T_1 \oplus 2T_2$
7	$A_2 \oplus E \oplus 2T_1 \oplus 2T_2$
8	$A_1 \oplus 2E \oplus 2T_1 \oplus 2T_2$
9	$A_1 \oplus A_2 \oplus E \oplus 3T_1 \oplus 2T_2$
10	$A_1 \oplus A_2 \oplus 2E \oplus 2T_1 \oplus 3T_2$
11	$A_2 \oplus 2E \oplus 3T_1 \oplus 3T_2$
12	$2A_1 \oplus A_2 \oplus 2E \oplus 3T_1 \oplus 3T_2$

Wie die Tabelle zeigt, sind lediglich die Darstellungen für Spin-0- und Spin-1-Teilchen irreduzibel, d.h. ihr Darstellungsraum besitzt auch nach der Gitterdiskretisierung keine (nicht-trivialen) invarianten Unterräume. Im Falle eines Spin-2-Teilchens zerfällt dagegen der von den $2j + 1 = 5$ Zuständen aufgespannte Darstellungsraum in einen zwei- und einen dreidimensionalen invarianten Unterraum. Dadurch spaltet das von den fünf Zuständen gleicher Energie im Kontinuum gebildete Multiplett in ein Dublett E und ein Triplet T_2 mit unterschiedlichen Energien auf. Die Zustände des Dubletts transformieren sich dabei unter der irreduziblen Darstellung E der kubischen Gruppe, die des Triplets unter der Darstellung T_2 . Für einen massiven Zustand mit Spin 2 bedeutet dies, daß man in der Gittersimulation zunächst zwei Massen $m(E)$ und $m(T_2)$ mißt, deren Verhältnis $m(E)/m(T_2)$ im Kontinuumsimes ($g \rightarrow 0$) dann gemäß der Restauration der vollen Rotationssymmetrie gegen 1 konvergiert.

Gehen wir nun kurz auf das inverse Problem ein: Sei $|\psi\rangle$ ein physikalischer Zustand im Kontinuum, der sich aus Eigenzuständen $|\psi_n\rangle$ des Hamiltonoperators entwickeln läßt

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle, \quad (1.36)$$

wobei $n = (j, m; \alpha)$ die üblichen Quantenzahlen der Spin- j -Darstellung und einen zusätzlichen Index für z.B. angeregte Zustände mit identischem Spin bezeichnet. Jeder Eigenzustand $|\psi_n\rangle$ gehört damit zu einem Multiplett mit eindeutig bestimmtem Spin j . Betrachtet sei nun ein Gitteroperator, der sich unter der irreduziblen Darstellung \mathcal{R} mit $\mathcal{R} = A_1, A_2, E, T_1, T_2$ der kubischen Gruppe transformiert. Durch Anwendung auf das Vakuum erzeugt man einen physikalischen (Gitter-)Zustand, der sich im Kontinuumsimes

gemäß (1.36) in die Form

$$|\psi_{\mathcal{R}}\rangle = \sum_n c_n^{\mathcal{R}} |\psi_n\rangle \quad (1.37)$$

bringen läßt. $|\psi_{\mathcal{R}}\rangle$ besitzt demnach verschiedene Spinanteile mit der Einschränkung, daß deren Entsprechungen auf dem Gitter alle die Darstellung \mathcal{R} enthalten müssen

$$\mathcal{R}_O^j \subset D_J^O. \quad (1.38)$$

Unter Berücksichtigung dieser Bedingung ergeben sich aus der vorherigen Tabelle die folgenden Auswahlregeln

Darstellung \mathcal{R} der kubischen Gruppe	Spinanteile j im Kontinuumslimit
A_1	0, 4, 6, 8, ...
A_2	3, 6, 7, 9, ...
E	2, 4, 5, 6, ...
T_1	1, 3, 4, 5, ...
T_2	2, 3, 4, 5, ...

Für die Berechnung von Glueballmassen ist der niedrigste Spinanteil von entscheidender Bedeutung, da er i.a. der niedrigsten Glueballmasse zugeordnet werden kann, die dann ihrerseits aus dem Abfallverhalten von geeigneten Korrelationsfunktionen –als grundlegende Observablen einer Feldtheorie– extrahierbar sind.

1.2.3 Glueballzustände auf dem Gitter

Wie aus der Quantenmechanik hervorgeht, erhält man einen physikalischen Zustand ψ durch Anwendung der Linearkombinationen eines vollständigen Satzes geeigneter Operatoren \mathcal{O}_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, auf den Vakuumzustand Ω . Dabei haben diese die Bedingung $\langle \Omega | \mathcal{O}_i | \Omega \rangle = 0$ zu erfüllen. Auch in der Gittertheorie stellt man an die Operatoren die zusätzliche Forderung nach Eichinvarianz. Als Kandidaten eignen sich also insbesondere Linkprodukte entlang geschlossener, raumartiger Polygonzüge $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_i(\vec{x}, t)$ auf dem Gitter (Wilson-Loops), wobei $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ den Startpunkt des Polygonzuges bezeichnet. Ein physikalischer Zustand ist dann durch

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_i c_i \mathcal{O}_i(\vec{x}, t) | \Omega \rangle \quad \text{mit} \quad c_i \in \mathbb{C} \quad (1.39)$$

mit den Multiplikationsoperatoren

$$\mathcal{O}_i(\vec{x}, t) = \text{Tr} U(\mathcal{C}_i) - \langle \text{Tr} U(\mathcal{C}_i) \rangle \quad (1.40)$$

gegeben, wobei U der Paralleltransporter der Gittertheorie ist. Hierbei hat man nicht nur alle raumartigen Wilson-Loops zu berücksichtigen, sondern im Prinzip auch alle irreduziblen Darstellungen der Eichgruppe $SU(N)$, also alle Operatoren der Form

$$\mathcal{O}_i^\mu(\vec{x}, t) = \chi^\mu(U(\mathcal{C}_i)) - \langle \chi^\mu(U(\mathcal{C}_i)) \rangle. \quad (1.41)$$

Man beschränkt sich allerdings bei Berechnungen auf einem endlichen Gitter zumeist auf die Fundamentaldarstellung ($\mu = 1/2$), da höhere Darstellungen in der Simulation unterdrückt sind (vgl. [19] und die darin angegebenen Referenzen). Wir wollen den Index μ daher im folgenden vernachlässigen.

Um die zugehörigen Eigenzustände eines Operators $\mathcal{O}_i(\vec{x}, t)$ im Impulsraum zu erhalten, projiziert man auf Zustände mit raumartigen Gitter-Impulsen mittels einer Fouriertransformation der Form

$$\mathcal{O}_i(\vec{p}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{x}} e^{i\vec{p}\vec{x}} \mathcal{O}_i(\vec{x}, t) . \quad (1.42)$$

Für das Massenspektrum der Gluebälle hat man Zustände mit verschwindendem Impuls $\vec{p} = 0$ zu betrachten. Der Satz von Operatoren beschränkt sich demnach auf

$$\mathcal{O}_i(t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{x}} \mathcal{O}_i(\vec{x}, t) . \quad (1.43)$$

Für Simulationen schränkt man nun die Anzahl der zu berücksichtigenden Operatoren erheblich ein. Im einfachsten Fall verwendet man in (1.41) ausschließlich Wilson-Loops der Länge 4 in einer $t = 0$ -Zeitschicht, also gerade die Plaquettenvariablen U_p aus (1.16) mit $p = (\vec{x}; \mu\nu)$ und $\mu, \nu \in \{1, 2, 3\}$. Man erhält somit insgesamt die sechs Einfach-Plaquetten

$$U_{(\vec{x};12)} , \quad U_{(\vec{x};31)} , \quad U_{(\vec{x};23)} , \quad U_{(\vec{x};21)} , \quad U_{(\vec{x};13)} , \quad U_{(\vec{x};32)} ,$$

wobei zu beachten ist, daß $U_{(\vec{x};\mu\nu)} = U_{(\vec{x};\nu\mu)}^{-1}$, $\forall \mu, \nu = 1, 2, 3$, gilt. Aus ihnen lassen sich gemäß (1.41), (1.39) und (1.43) sechs physikalische Zustände

$$\psi_{\mu\nu} \equiv \psi_{\mu\nu}(0) \equiv \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{x}} \{ \chi(U_p) - \langle \chi(U_p) \rangle \} | \Omega \} \quad (1.44)$$

erzeugen. Man bildet aus ihnen in geeigneter Weise Linearkombinationen, die sich unter irreduziblen Darstellungen der kubischen Gruppe transformieren, und man findet [12]:

irreduzible Darstellung \mathcal{R}^μ der kubischen Gruppe	Linearkombinationen der $\psi_{\mu\nu}$
A_1^{++}	$\text{Re} \{ \psi_{12} + \psi_{31} + \psi_{23} \}$
E^{++}	$\text{Re} \{ \psi_{31} - \psi_{23} \} ,$ $\text{Re} \{ -2 \psi_{12} + \psi_{31} + \psi_{23} \}$
T_1^{+-}	$\text{Im} \psi_{12} ,$ $\text{Im} \psi_{31} ,$ $\text{Im} \psi_{23}$

Sie beschreiben einen Skalar-, einen Tensor- und einen Axial-Vektor-Glueball. Letzterer existiert nur in Eichgruppen mit echt komplexen Darstellungen, wie z.B. in der $SU(3)$. Die Eichgruppe $SU(2)$ besitzt dagegen nur reelle Darstellungen.

Die Berechnung von Glueballmassen geschieht unter Benutzung der Zeitscheiben-Mittelwerte (festes t) aus (1.43) mit Hilfe von zusammenhängenden Korrelationsfunktionen der Form

$$\langle \mathcal{O}(t_0 + t) \mathcal{O}(t_0) \rangle_c . \quad (1.45)$$

Im Falle der Einfach-Plaquetten bildet man aus den Observablen

$$S_{\mu\nu}(t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\vec{x}} \text{Tr} U_{(\vec{x},t);\mu\nu} \quad (1.46)$$

geeignete Linearkombinationen $S_{\mathcal{R}}(t)$, die sich unter einer irreduziblen Darstellung \mathcal{R} der kubischen Gruppe transformieren. So erhält man für die Korrelationsfunktionen mit der Wahl $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathcal{R}}(t) S_{\mathcal{R}}(0) \rangle_c &= \langle \psi_{\mathcal{R}} | e^{-Ht} | \psi_{\mathcal{R}} \rangle = \sum_n |c_n^{\mathcal{R}}|^2 \langle \psi_n | \underbrace{e^{-Ht} | \psi_n \rangle}_{e^{-tm_n} | \psi_n \rangle} \\ &= C_0 e^{-tm_0} \left\{ 1 + C_1 e^{-t(m_1-m_0)} + \dots \right\} , \quad C_0, C_1 = \text{const} . \end{aligned} \quad (1.47)$$

Für $t \rightarrow \infty$ dominiert offenbar der erste Term, so daß aus der Korrelationsfunktion in der Tat die niedrigste Glueballmasse m_j eines Spin- j -Glueballs extrahiert werden kann. In der Praxis geschieht dies durch entsprechende Exponentialfits der Resultate der numerischen Simulation an das theoretisch erwartete Abfallverhalten.

Abschließend noch zwei Erläuterungen zu obiger Tabelle:

- Eine gruppentheoretische Behandlung von Loop-Operatoren wird im nächsten Kapitel erfolgen. Dabei wird sich zeigen, daß neben den Transformationen unter der kubischen Gruppe zusätzlich zwei weitere diskrete Symmetrietransformationen benötigt werden: Raumspiegelung und Ladungskonjugation. Ihre Eigenwerte ± 1 werden dabei mit P - und C -Parität bezeichnet. Die irreduziblen Darstellungen der Gittersymmetriegruppe erhalten daher später die Bezeichnung \mathcal{R}^{PC} , wie sie der Richtigkeit halber bereits in obiger Tabelle verwendet wird.
- Der *Ladungskonjugationsoperator* C kehrt per Definition die Orientierung von Wilson-Loops um. Betrachtet man Loop-Kombinationen der Form $(U_p + U_p^{-1})$, so gilt

$$\text{Tr} \{ U_p + U_p^{-1} \} = 2 \text{Re} \{ \text{Tr} U_p \} \quad (\text{vgl. (1.18)}) \quad (1.48)$$

und damit

$$\text{Tr} \{ C[U_p + U_p^{-1}] \} \stackrel{!}{=} 2 \text{Re} \{ \text{Tr} U_p \} . \quad (1.49)$$

Für $(U_p - U_p^{-1})$ gilt dagegen

$$\text{Tr} \{ U_p - U_p^{-1} \} = 2i \text{Im} \{ \text{Tr} U_p \} \quad (1.50)$$

und deshalb

$$\text{Tr} \{ C[U_p - U_p^{-1}] \} \stackrel{!}{=} -2i \text{Im} \{ \text{Tr} U_p \} , \quad (1.51)$$

also insgesamt

$$\text{Tr} \{CU_p\} = (\text{Tr} U_p)^* . \quad (1.52)$$

Der C -Operator wirkt also auf die Spur von Wilson-Loops komplex konjugierend.

Da für die in (1.44) verwandten Einfach-Plaquetten der Zusammenhang

$$U_{(\vec{x};21)} = CU_{(\vec{x};12)} , \quad U_{(\vec{x};13)} = CU_{(\vec{x};31)} , \quad U_{(\vec{x};32)} = CU_{(\vec{x};23)}$$

gilt, wird der sich unter A_1^{++} transformierende Zustand ψ beispielsweise gerade im wesentlichen durch die Operatoren

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left\{ \text{Tr} [U_{(\vec{x};12)} + U_{(\vec{x};31)} + U_{(\vec{x};23)}] \right\} \\ &= \text{const} \cdot \text{Tr} \left\{ [U_{(\vec{x};12)} + CU_{(\vec{x};12)}] + [U_{(\vec{x};31)} + CU_{(\vec{x};31)}] + [U_{(\vec{x};23)} + CU_{(\vec{x};23)}] \right\} \\ &= \text{const} \cdot \text{Tr} \left\{ U_{(\vec{x};12)} + U_{(\vec{x};21)} + U_{(\vec{x};31)} + U_{(\vec{x};13)} + U_{(\vec{x};23)} + U_{(\vec{x};32)} \right\} \quad (1.53) \end{aligned}$$

gebildet.

Analoge Betrachtungen lassen sich für die Darstellungen E^{++} und T_1^{+-} in obiger Tabelle durchführen.

Kapitel 2

Irreduzible Darstellungen der kubischen Gruppe über Wilson-Loops der Länge 4, 6 und 8

Das vorherige Kapitel beschäftigte sich mit der Existenz und Bestimmung von Glueballmassen, die auf Grundlage der reinen Eichtheorie in der Gitterregularisierung auftraten. Dabei zog man für die Berechnung der Massen durch Monte-Carlo-Simulationen möglichst einfache eichinvariante Gitteroperatoren (Wilson-Loops) heran, die sich unter gewissen irreduziblen Darstellungen der kubischen Gruppe transformieren.

In diesem Kapitel erfolgt nun die gruppentheoretische Behandlung der Wilson-Loops, die die Bildung geeigneter Kombinationen für die Simulation ermöglicht. Ziel dabei ist es, das Transformationsverhalten von Wilson-Loops unter der vollen kubischen Gruppe O_h zu untersuchen. Dazu wird nach einigen Vorbereitungen zunächst eine Darstellung der kubischen Gruppe über Wilson-Loops konstruiert und diese anschließend für einige Loop-Operatoren in ihre irreduziblen Faktoren zerlegt. Darüber hinaus wird dann für jede dieser Darstellungen explizit eine Orthonormalbasis aus Loop-Operatoren bestimmt. In Idee und Vorgehensweise bin ich vornehmlich zwei Artikeln von B. BERG und A. BILLOIRE [18,19] gefolgt, in denen die wesentlichen Resultate dieses Kapitels bereits angegeben, Zwischenschritte und -rechnungen allerdings meist ausgelassen worden sind. Zunächst aber ein kurzer Rückblick.

2.1 Erinnerungen an Kapitel 0

Wie aus Unterabschnitt 0.3.1 bereits bekannt ist, besitzt die kubische Gruppe 24 Elemente, die als Rotationen um die 13 Symmetrieachsen eines Würfels verstanden werden können. Man unterscheidet die Rotationsachsen nach ihren Ordnungen und bezeichnet sie gemäß Abb. 1 bzw. Abb. 2 mit

- x, y, z (C_4 -Achsen)
- $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta$ (C_3 -Achsen)

und

- Oa, Ob, Oc, Od, Oe, Of (C_2 -Achsen) .

Die 24 möglichen (verschiedenen) Rotationen werden dabei mit $C_{ji}(\varphi)$ gekennzeichnet, wobei $j \in \{4, 3, 2\}$, $i \in \{x, y, z, \alpha, \dots, \gamma, a, \dots, f\}$ und $\varphi \in \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{2\pi}{3}, \pm\pi\}$ passend zu wählen sind.

Da wir für die Konstruktion von Darstellungen der Gruppe O über Wilson-Loops im folgenden des öfteren ihre Gruppenelemente explizit angeben müssen, wollen wir den Schreibaufwand ein wenig einschränken, indem wir für $\varphi > 0$

$$C_{ji}(-\varphi) \equiv C_{ji}^{-1} . \quad (2.1)$$

festlegen. Man beachte, daß wir die Winkelargumente φ zur eindeutigen Festlegung der Rotationen von nun an nicht mehr benötigen, und die bloße Indizierung jedes Elements von O dieses bereits eindeutig bestimmt; mit einer Ausnahme: Tatsächlich ist für C_{ji} , $j = 4$; $i \in \{x, y, z\}$ sowohl eine Rotation um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ als auch eine um π erlaubt, die Bezeichnung wäre demnach nicht eindeutig. Da die Elemente $C_{4i}(\pi)$, $i \in \{x, y, z\}$, eine eigene Klasse C_4^2 bilden, wollen wir sie ab nun mit C_{2i} , $i \in \{x, y, z\}$, bezeichnen¹.

Unter Verwendung der neuen Notation seien hier noch einmal alle 24 Elemente der kubischen Gruppe klassenweise zusammengefaßt.

Um die x -, y - und z -Achse sind je vier Rotationen um jeweils $\pm\frac{\pi}{2}$, π und 2π möglich; letztere führen für alle drei Achsen in die Identität und werden daher mit *einem*, nämlich dem neutralen Element von O

- id

identifiziert. Es bildet eine eigene Klasse E .

Die übrigen Drehungen zerfallen in 2 konjugierte Klassen C_4 und C_4^2 . Ihre Elemente sind

- $C_{4x}, C_{4y}, C_{4z}, C_{4x}^{-1}, C_{4y}^{-1}, C_{4z}^{-1}$ für die $\pm\frac{\pi}{2}$ -Drehungen

und

- C_{2x}, C_{2y}, C_{2z} für die π -Drehungen.

Um die Symmetrieachsen $O\alpha, \dots, O\delta$ sind je 3 Rotationen um jeweils $\pm\frac{2\pi}{3}$ und 2π erlaubt. Letztere stimmen wieder mit id überein (s.o.), die acht restlichen faßt man in der Klasse C_3 zusammen:

- $C_{3\alpha}, C_{3\beta}, C_{3\gamma}, C_{3\delta}, C_{3\alpha}^{-1}, C_{3\beta}^{-1}, C_{3\gamma}^{-1}, C_{3\delta}^{-1}$.

Die Drehungen um die Achsen Oa, \dots, Of haben als Rotationmaße π und 2π . Unter Vernachlässigung der 2π -Drehungen hat die fünfte und letzte Klasse C_2 sechs Elemente.

¹Die Bezeichnung ist deshalb so gewählt, weil für die Elemente der Klasse C_4^2 die Koordinatenachsen x, y, z die Ordnung 2 haben.

- $C_{2a}, C_{2b}, C_{2c}, C_{2d}, C_{2e}, C_{2f}$.

Zum Schluß eine weitere Erinnerung: Alle Rotationen werden aktiv ausgeführt, d.h. das Koordinatensystem bleibt starr und der Würfel wird linkshändig gedreht. Eine Rotation der Form (2.1) ist also gerade gleichbedeutend mit einer rechtshändigen Drehung um $+\varphi$. Man beachte, daß durch die Festlegung einer Orientierung der Symmetrieachsen des Würfels in Kapitel 0 –Unterabschnitt 0.3.1– links- bzw. rechtshändige Drehungen wohldefiniert sind.

2.2 Allgemeine Vorbereitungen

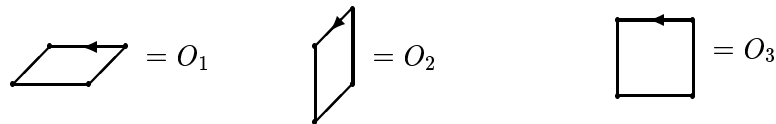
Wir wollen zunächst eine einheitliche und für unsere Zwecke sinnvolle Notation für Wilson-Loops einführen und danach kurz das prinzipielle Vorgehen bei der Konstruktion einer Darstellung der kubischen Gruppe erläutern. In den späteren Abschnitten soll diese Darstellung dann für je einen Wilson-Loop der Länge 4, 6 und 8 in seine irreduziblen Anteile zerlegt werden.

2.2.1 Wilson-Loops und ihre Bezeichnungen

Ein Wilson-Loop der Länge L ist durch Angabe eines L -Tupels

$$(\mu_1, \dots, \mu_L) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^L \hat{\mu}_i = 0 \quad (2.2)$$

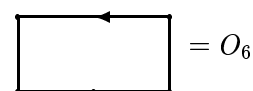
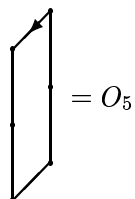
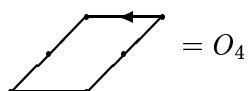
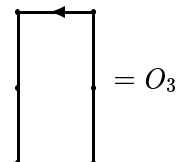
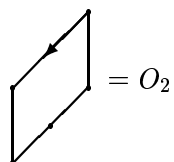
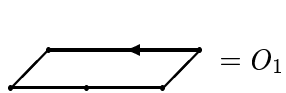
eindeutig festgelegt, wobei $\hat{\mu}_i$ die Einheitsvektoren in Richtung der Gitterachsen $\mu = 1, 2, 3$ eines räumlichen Gitter bezeichnen. Für die drei Wilson-Loops der Länge vier²



²Im vorigen Kapitel wurden diese Operatoren als Plaquettenvariablen $U_p = U_{x;\mu\nu}$ eingeführt, um die eichinvariante (Wilson-)Wirkung auf dem Gitter zu formulieren. Sie wurden darüberhinaus im Zusammenhang mit Gittersimulationen zur Berechnung von Glueballmassen genannt (vgl. Unterabschnitt 1.2.3). Für den Ort x an dem ein Wilson-Loop definiert ist, wollen wir uns im folgenden nicht interessieren. Wir identifizieren daher Operatoren gleicher Gestalt an unterschiedlichem Ort, also $U_{x;\mu\nu} \cong U_{x+x';\mu\nu}$ bzw. allgemein $(\mu_1, \dots, \mu_L)_x \cong (\mu_1, \dots, \mu_L)_{x+x'}$ mit $x, x' \in \Lambda$.

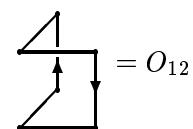
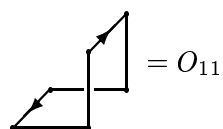
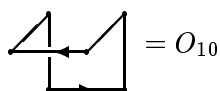
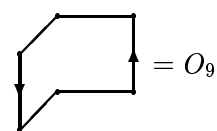
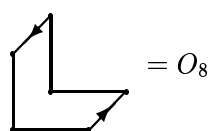
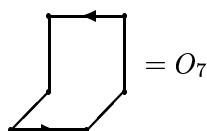
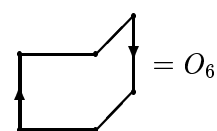
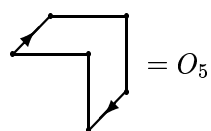
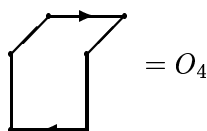
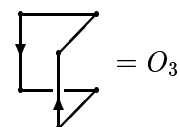
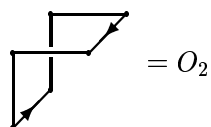
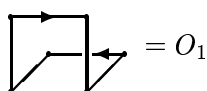
1. Doppel-Plaquetten

Die Doppel-Plaquetten liegen wie die Einfachplaquetten jeweils in der Koordinatenebene, es gibt sie in insgesamt sechs verschiedenen Lagen:



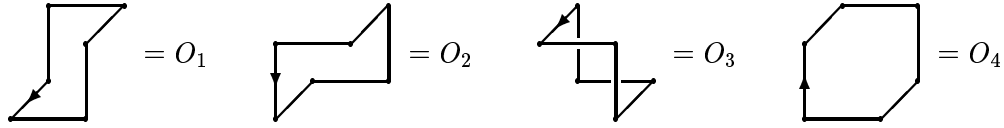
2. Winkel-Plaquetten

Die Winkel-Plaquetten haben die Form einer „Buchstütze“, man kann sie auf zwölf verschiedene Weisen auf ein dreidimensionales Gitter bringen:



3. verdrehte Loops

Ihre Form ist weniger anschaulich, ihre Lagen seien daher hier einfach angegeben:



Wilson-Loops der Länge acht lassen sich auf vielfältige Weise konstruieren. Man unterscheidet dabei 18 Formen, die alle in [19] nachgeschlagen werden können. Wir wollen an dieser Stelle nicht näher auf sie eingehen, werden aber später auf einen speziellen Loop der Länge acht beispielhaft zurückgreifen und die von ihm erzeugte Darstellung genauer untersuchen.

2.2.2 Orientierung und C-Parität

Neben Lage und Form eines Wilson-Loops unterscheidet man zusätzlich nun auch noch deren Orientierung, d.h. die Richtung, in der dieser durchlaufen wird. Mit Hilfe des in Kapitel 1 bereits eingeführten *Ladungskonjugationsoperators* C kann man die Orientierung eines Loops ändern. Wir wollen im folgenden den Operator C als *C-Paritätsoperator* bezeichnen und definieren für beliebige Loops

$$C [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_L] \equiv [-\mu_L, \dots, -\mu_2, -\mu_1] . \tag{2.4}$$

Für die Einfachplaquette O_3 gilt damit beispielsweise

$$CO_3 = C [2, 3, -2, -3] = [3, 2, -3, -2] . \tag{2.5}$$

Definiert man nun zwei Linearkombinationen von Wilson-Loops gemäß

$$[\mu_1, \dots, \mu_L]_{\pm} \equiv [\mu_1, \dots, \mu_L] \pm [-\mu_L, \dots, -\mu_1] , \tag{2.6}$$

so haben beide eindeutig festgelegte C -Paritätseigenwerte ± 1 , denn

$$C [\mu_1, \dots, \mu_L]_{\pm} = C \left([\mu_1, \dots, \mu_L] \pm [-\mu_L, \dots, -\mu_1] \right) = \pm [\mu_1, \dots, \mu_L]_{\pm} ; \tag{2.7}$$

und für unser Beispiel O_3 ist dann

$$C \left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right]_{\pm} = C \left(\left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right] \pm \left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right] \right) = \left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right] \pm \left[\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right]$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \square \rightarrow \\ \square \rightarrow \end{array} + \begin{array}{c} \square \rightarrow \\ \square \rightarrow \end{array} \right) = \begin{array}{c} \square \rightarrow \\ \square \rightarrow \end{array} + \\ - \left(\begin{array}{c} \square \leftarrow \\ \square \leftarrow \end{array} - \begin{array}{c} \square \rightarrow \\ \square \rightarrow \end{array} \right) = - \begin{array}{c} \square \leftarrow \\ \square \leftarrow \end{array} - \end{array} \right.$$

oder kürzer

$$CO_{3\pm} = \pm O_{3\pm}. \quad (2.8)$$

Der Index \pm versteht sich nunmehr von selbst.

An dieser Stelle will ich noch anmerken, daß wir von nun an nur noch Wilson-Loops mit wohldefinierter C -Parität betrachten wollen, also Linearkombinationen der Form (2.6).

2.2.3 Konstruktion der Darstellung

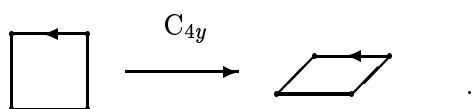
Wir haben nun alle Vorbereitungen getroffen, um eine Darstellung der kubischen Gruppe über Wilson-Loops zu konstruieren. Dabei verwenden wir folgende Vorgehensweise: Zunächst wird das Transformationsverhalten von Wilson-Loops unter der kubischen Gruppe untersucht, um dann anschließend daraus eine Darstellung –sie sei mit $\tilde{\mathcal{R}}$ bezeichnet– von O zu generieren.

Transformationsverhalten

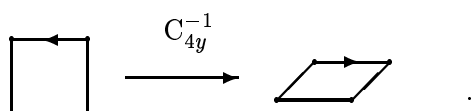
Beginnen wir mit den denkbar einfachsten Wilson-Loops, den Einfach-Plaquetten

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \square \rightarrow \\ \square \rightarrow \end{array} = O_1 & \begin{array}{c} \square \rightarrow \\ \square \rightarrow \end{array} = O_2 & \begin{array}{c} \square \rightarrow \\ \square \rightarrow \end{array} = O_3 \end{array},$$

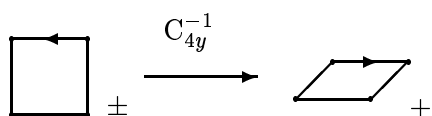
bei denen wir eine Orientierung fest vorgeben wollen. Faßt man sie als Seitenflächen eines dreidimensionalen Würfels auf und dreht diesen gemäß der in Abschnitt 2.1 festgelegten Rotationsmaße um eine seiner 13 Symmetrieachsen, so werden alle seine Seitenflächen O_1, O_2, O_3 in Seitenflächen des nunmehr gedrehten Würfels überführt. Welche Seitenfläche dabei in welche übergehen, hängt einzig und allein von der gewählten Drehung, d.h. von dem zugehörigen Element der kubischen Gruppe O ab. Betrachtet seien einige Beispiele. Wenden wir z.B. auf $O_3 = [2, 3, -2, -3]$ eine linkshändige 90° -Drehung um die y -Achse an, so erhält man den Operator $O_1 = [1, 2, -1, -2]$ bzw. bildlich



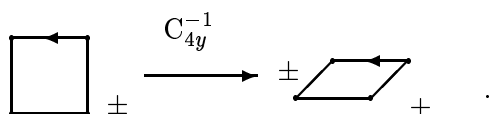
Führen wir die Drehung dagegen rechtshändig (bzw. linkshändig um $-\varphi$) aus, d.h. wenden wir das Element $C_{4y}^{-1} \in O$ auf O_3 an, so bekommt man als Ergebnis CO_1 , also



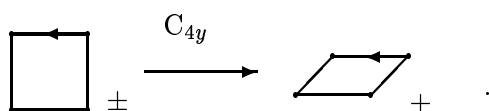
Das letzte Beispiel zeigt, daß sich die Orientierung der Loops unter Transformationen der kubischen Gruppe umkehren kann, also nicht invariant ist. Man verwendet daher sinnvollerweise die in (2.6) eingeführten Linearkombinationen von Wilson-Loops. In unserem letzten Beispiel wird dann $O_{3\pm}$ mittels C_{4y}^{-1} in $CO_{1\pm} = \pm O_{1\pm}$ überführt, anschaulich



bzw. gleich (!)



Für das erste Beispiel ergibt sich dann entsprechend



Analoge Überlegungen lassen sich auch für die beiden verbleibenden Operatoren O_1 und O_2 und die 22 restlichen Rotationen von O anstellen. Man hat also insgesamt $3 \times 24 = 72$ Drehungen auszuführen und dabei noch zwischen beiden C -Pariäten ± 1 zu unterscheiden. Betrachten wir als nächstes Wilson-Loops der Länge 6. Auch sie lassen sich als Oberflächensegmente eines Würfels auffassen und ihr Transformationsverhalten läßt sich völlig analog zu den Einfachplaquetten untersuchen. Wichtig dabei ist, daß eine Rotation lediglich die Lage, nicht aber die Form einer Plaquette verändern kann, man hat also für die drei unterschiedlichen Formen der Loops jeweils einzeln zu transformieren. Entsprechendes gilt selbstverständlich auch für Loops der Länge 8.

Darstellung

Wir wollen nun aus dem Transformationsverhalten von Wilson-Loops unter der kubischen Gruppe eine Darstellung ableiten. Dazu definieren wir eine Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ der kubischen Gruppe über Wilson-Loops durch

$$\tilde{\mathcal{R}}(g) ([\mu_1, \dots, \mu_L]_{\pm}) \equiv [T(g) \hat{\mu}_1, \dots, T(g) \hat{\mu}_L]_{\pm} \quad (2.9)$$

wobei $g \in O$ und $T(g)$ die darstellende Matrix bzgl. der kanonischen Einheitsvektoren der Vektordarstellung T_1 zu g ist.

Auch hier dienen uns die Einfachplaquetten als Beispiel. Betrachten wir noch einmal den Operator $O_3 = [2, 3, -2, -3]_{\pm}$ und das Element $C_{4y} \in O$. Mit der zugehörigen Darstellungsmatrix³ der dreidimensionalen irreduziblen Darstellung T_1 von O

$$T(C_{4y}) = \begin{pmatrix} & -1 \\ & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

(vgl. Anhang C.1) ergibt sich aus (2.9) unter Benutzung der Invarianzeigenschaft der Tupel bezüglich der zyklischen Permutation ihrer Elemente

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}(C_{4y}) ([2, 3, -2, -3]_{\pm}) &= [T(C_{4y}) \hat{2}, \dots, T(C_{4y}) (-\hat{3})]_{\pm} \\ &= [2, -1, -2, 1]_{\pm} \\ &= [1, 2, -1, -2]_{\pm} \\ &= O_{1\pm}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.9) liefert uns also prinzipiell nicht Neues, sondern reproduziert gerade unsere intuitive Anschauung, daß C_{4y} den Loop O_3 gerade um 90° linkshändig um die y -Achse dreht. Entsprechend rechnet man für die beiden anderen Operatoren O_1 und O_2

$$\tilde{\mathcal{R}}(C_{4y})(O_{1\pm}) = \tilde{\mathcal{R}}(C_{4y})([1, 2, -1, -2]_{\pm}) \quad (2.12)$$

$$= CO_{3\pm}, \quad (2.13)$$

bzw.

$$\tilde{\mathcal{R}}(C_{4y})(O_{2\pm}) = O_{2\pm} \quad (2.14)$$

³Die unbesetzten Felder der Darstellungsmatrix sind mit Nullen zu belegen.

nach.

Die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ ist in diesem Fall dreidimensional und kann für jedes $g \in O$ durch ihre Darstellungsmatrix $D_{\tilde{\mathcal{R}}}(g)$ in der geordneten Basis $\{O_{1\pm}, O_{2\pm}, O_{3\pm}\}$ beschrieben werden. Sie ergibt sich für fest vorgewählte C -Parität $+1$ zu⁴

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}^{\bullet+}}(C_{4y}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

bzw. für negative C -Parität zu

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}^{\bullet-}}(C_{4y}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Die Vorgehensweise für beliebige Wilson-Loops fest vorgegebener Länge und Form ist nun analog, ihr Transformationsverhalten ist durch (2.9) bestimmt und die Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}(g)$ lassen sich dann leicht bzgl. einer Basis aus Loop-Operatoren angeben. Für Wilson-Loops der Länge 6 ist ihre Dimension bei fixierter C -Parität für die Doppel-Plaquetten gerade $d = 6$, für die Winkel-Plaquetten ergibt sich $d = 12$ und für die verdrehten Plaquetten $d = 4$. Zum Schluß noch zwei Bemerkungen: Wie oben bereits angemerkt, läßt sich das Transformationsverhalten der Loops unter der kubischen Gruppe auch geometrisch (d.h. anschaulich) durch entsprechendes Rotieren der Loops ermitteln, die Kenntnis der Drehmatrizen $M(g)$ aus (2.9) ist dafür nicht explizit erforderlich, trotzdem ist Formel (2.9) nichts anderes als die Ausführung dieser Drehungen. Desweiteren können alle Darstellungsmatrizen $M(g)$ der dreidimensionalen Vektordarstellung T_1 der kubischen Gruppe unter Anhang C.1 nachgeschlagen werden.

2.2.4 Weiteres Vorgehen

Die soeben konstruierte Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ wird im allgemeinen nicht irreduzibel sein, und ihr zugrundeliegender Vektorraum kann somit invariante Unterräume besitzen, die sich wie gewisse irreduzible Darstellungen der kubischen Gruppe transformieren. Mit Hilfe der Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}(g)$ läßt sich die gewonnene Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ in ihre irreduziblen Anteile zerlegen und anschließend eine zugehörige Orthonormalbasis aus Loop-Operatoren bestimmen. Dies soll nun exemplarisch für je einen Wilson-Loop der Länge 4, 6 und 8 durchgeführt werden. Dabei werden wir im ersten Fall recht ausführlich vorgehen und im weiteren Verlauf der Übersichtlichkeit halber auf einige Zwischenschritte verzichten. Mit dem dritten Beispiel (ein Wilson-Loop der Länge 8) werden wir unseren Blick auch auf das Transformationsverhalten von Loops unter der vollen kubischen Gruppe O_h lenken, was dann die Einführung des Begriffs der P -Parität nötig machen wird. Zunächst aber betrachten wir das denkbar einfachste Beispiel, die Einfach-Plaquetten.

⁴Man hat die Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$ nach der unterschiedlichen Wahl von C zu unterscheiden. Dies wollen wir durch ein \pm oberhalb von $\tilde{\mathcal{R}}$ kenntlich machen. Falls keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir allerdings nach wie vor $\tilde{\mathcal{R}}$. Der \bullet vor dem \pm ist dabei für eine weitere diskrete Symmetrietransformation reserviert (vgl. nächster Abschnitt).

2.3 Wilson-Loops der Länge 4: Erstes Beispiel

2.3.1 Transformationsverhalten

Die Wilson-Loops der Länge 4 dienten uns bereits als Beispiel, insbesondere in Abschnitt 2.2.3, in dem ihr Transformationsverhalten unter Rotationen der kubischen Gruppe anhand von zwei ausgewählten Beispielen erläutert wurde. Man unterschied dabei zwischen Operatoren mit positiver und negativer C -Parität, erhielt somit insgesamt $2 \times 3 = 6$ Operatoren $O_{i\pm}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, und hat $2 \times 3 \times 24 = 144$ Drehungen auszuführen.

Der nachfolgenden Tabelle entnimmt man, in welche Loop-Operatoren die Elemente von O die Operatoren $O_{1\pm}, O_{2\pm}, O_{3\pm}$ überführen. Die Drehungen sind dabei nach ihren konjugierten Klassen geordnet.

- Klasse E

Id:

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{1\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{2\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto O_{3\pm} \end{aligned}$$

- Klasse C_2

C_{2a} :

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{3\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto O_{2\pm} \end{aligned}$$

C_{2b} :

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{3\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto CO_{2\pm} \end{aligned}$$

C_{2c} :

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{3\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{2\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto O_{1\pm} \end{aligned}$$

C_{2d} :

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{3\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{2\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \end{aligned}$$

C_{2e} :

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{2\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{1\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto CO_{3\pm} \end{aligned}$$

C_{2f} :

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{2\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto CO_{3\pm} \end{aligned}$$

- Klasse C_3

$C_{3\alpha}$:

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{2\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{3\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \end{aligned}$$

$C_{3\beta}$:

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{2\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{3\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto O_{1\pm} \end{aligned}$$

$C_{3\gamma}$:

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{2\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{3\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \end{aligned}$$

$C_{3\delta}$:

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{2\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{3\pm} \end{aligned}$$

$C_{3\alpha}^{-1}$:

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{3\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \end{aligned}$$

$C_{3\beta}^{-1}$:

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{3\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \end{aligned}$$

$$O_{3\pm} \mapsto O_{1\pm} \qquad O_{3\pm} \mapsto O_{2\pm} \qquad O_{3\pm} \mapsto CO_{2\pm}$$

 $C_{3\gamma}^{-1}:$

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{3\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{1\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto CO_{2\pm} \end{aligned}$$

 $C_{3\delta}^{-1}:$

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{3\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{1\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto O_{2\pm} \end{aligned}$$

- Klasse C_4

 $C_{4x}:$

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{2\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto O_{3\pm} \end{aligned}$$

 $C_{4y}:$

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{3\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{2\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto O_{1\pm} \end{aligned}$$

 $C_{4z}:$

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{1\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{3\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto CO_{2\pm} \end{aligned}$$

 $C_{4x}^{-1}:$

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{2\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{1\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto O_{3\pm} \end{aligned}$$

 $C_{4y}^{-1}:$

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{3\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{2\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \end{aligned}$$

 $C_{4z}^{-1}:$

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{1\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{3\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto O_{2\pm} \end{aligned}$$

- Klasse C_4^2

 $C_{2x}:$

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{2\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto O_{3\pm} \end{aligned}$$

 $C_{2y}:$

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto CO_{1\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto O_{2\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto CO_{3\pm} \end{aligned}$$

 $C_{2z}:$

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &\mapsto O_{1\pm} \\ O_{2\pm} &\mapsto CO_{2\pm} \\ O_{3\pm} &\mapsto CO_{3\pm} . \end{aligned}$$

Man beachte dabei zusätzlich die Regel $CO_{i\pm} = \pm O_{i\pm}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Die Ergebnisse für C_{4y} und C_{4y}^{-1} sind uns im übrigen bereits aus Abschnitt 2.2.3 bekannt.

2.3.2 Darstellungsmatrizen und ihre irreduzible Zerlegung

Die Konstruktion der Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$ erfolgt jetzt wie in 2.2.3 angegeben. Ihre Einträge bestehen aus jeweils einer 1 bzw. -1 in jeder Spalte und Zeile und Nullen sonst. Für die Transformationen C_{4y} und C_{4y}^{-1} ergibt sich

- C -Parität = $+1$:

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}^{\bullet+}}(C_{4y}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \qquad D_{\tilde{\mathcal{R}}^{\bullet+}}(C_{4y}^{-1}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

- C -Parität = -1 :

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}^{\bullet-}}(C_{4y}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix} \quad D_{\tilde{\mathcal{R}}^{\bullet-}}(C_{4y}^{-1}) = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} .$$

Alle $2 \times 24 = 48$ Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$ können im Anhang C.2 klassenweise nachgeschlagen werden.

Die Zerlegung der Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ in ihre irreduziblen Anteile gelingt mit der Formel (12) aus Kapitel 0. Sie lautet in geeigneter Formulierung

$$a_{\mu} = \frac{1}{n_G} \sum_i n_i \chi^{\mu}(C_i) \chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_i) , \quad (2.17)$$

wobei hier speziell $(\chi^{\mu}(C_i))^* = \chi^{\mu}(C_i) \in \mathbb{R}$ ist, wie ein Blick in die Charaktertabelle von O aus Unterabschnitt 0.3.3 zeigt.

Die Summe erstreckt sich über alle fünf Klassen von O . Da der Charakter einer Darstellung eine Klassenfunktion ist, genügt es, aus jeder Klasse einen (beliebigen) Repräsentanten $D_{\tilde{\mathcal{R}}}(g)$ von $\tilde{\mathcal{R}}$ auszuwählen und seine Spur zu bilden. Diese ergibt sich für fixierte positive C -Parität für die Klassen E , C_2 , C_3 , C_4 und C_4^2 zu 3, 1, 0, 1 und 3 (bzw. zu 3, -1, 0, 1 und -1 für C -Parität = -1). Man findet sie aber auch in Anhang C.2. Die Mächtigkeit der Klassen und ihre irreduziblen Charaktere $\chi^{\mu}(C_i)$ liest man aus der oben bereits erwähnten Charaktertabelle ab, n_G ist gleich 24.

Die Anwendung von (2.17) auf die Darstellung der Einfach-Plaquetten ergibt also:

erster Fall: $C = +1$

$$\begin{aligned} a_{A_1} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 1 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 3) = 1 \\ a_{A_2} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 1 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 3) = 0 \\ a_E &= \frac{1}{24} (1 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 0 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 3) = 1 \\ a_{T_1} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) \cdot 1 + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 3) = 0 \\ a_{T_2} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 3) = 0 . \end{aligned}$$

Für die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ schreibt man also gemäß Gleichung (5) aus Kapitel 0

$$\tilde{\mathcal{R}} = A_1 \oplus E \quad (2.18)$$

oder anders ausgedrückt: Der dreidimensionale Darstellungsraum besitzt zwei invariante Unterräume, die sich nach den irreduziblen Darstellungen A_1 und E der kubischen Gruppe transformieren.

zweiter Fall: $C = -1$

Man erhält:

$$\begin{aligned}
 a_{A_1} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 1 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \cdot (-1) + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-1)) = 0 \\
 a_{A_2} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 1 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) \cdot (-1) + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-1)) = 0 \\
 a_E &= \frac{1}{24} (1 \cdot 2 \cdot 3 + 6 \cdot 0 \cdot (-1) + 8 \cdot (-1) \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot (-1)) = 0 \\
 a_{T_1} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) \cdot (-1) + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1)) = 1 \\
 a_{T_2} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot (-1)) = 0,
 \end{aligned}$$

also

$$\tilde{\mathcal{R}} = T_1, \tag{2.19}$$

d.h. $\tilde{\mathcal{R}}$ ist irreduzibel, und der Darstellungsraum transformiert sich nach der Vektordarstellung T_1 .

Das Ergebnis ist noch einmal in einer Tabelle zusammengefaßt:

irred. Darst. von O	A_1	A_2	E	T_1	T_2	A_1	A_2	E	T_1	T_2
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3	1	1	2	3	3
Dimension von $\tilde{\mathcal{R}}$:	$C = +1$					$C = -1$				
3	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0

2.3.3 Konstruktion einer Orthonormalbasis

Als letzten Schritt wollen wir nun für jeden invarianten Teilraum des dreidimensionalen Darstellungsraums eine Orthonormalbasis aus Loop-Operatoren bestimmen. Die Konstruktion sei in der Terminologie der Darstellungsmatrizen formuliert. Sie beruht auf einer direkten

Folgerung des Lemmas von Schur: Sei C eine diagonalisierbare Matrix, die mit allen Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$ von $\tilde{\mathcal{R}}$ kommutiert, d.h. $CD_{\tilde{\mathcal{R}}}(g) = D_{\tilde{\mathcal{R}}}(g)C$ für alle $g \in O$, und A die Matrix, die C diagonalisiert, also $ACA^{-1} \equiv \Delta_C$. Dann reduziert A die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ (nicht notwendigerweise vollständig) in dem Sinne, daß die Darstellungsmatrizen $AD_{\tilde{\mathcal{R}}}(g)A^{-1}$ in Blockdiagonalgestalt zerfallen, und man im nächsten Schritt mit der „reduzierten“ Darstellung

$$AD_{\tilde{\mathcal{R}}}A^{-1} = \{AD_{\tilde{\mathcal{R}}}(g)A^{-1} \mid g \in G\} \tag{2.20}$$

fortfahren kann. Auf diese Weise kann für jeden irreduziblen Teilraum des Darstellungsraumes von $\tilde{\mathcal{R}}$ iterativ eine ONB explizit angegeben werden.

Die Matrix C ergibt sich, indem man alle Matrizen einer konjugierten Klasse addiert⁵.
Beweis: Ein Beweis der obigen Aussage findet sich in [22] bzw. [23].

Auch hier unterscheiden wir wieder die Fälle positiver und negativer C -Parität:

erster Fall: $C = +1$

Addiert man die Darstellungsmatrizen $D_{\vec{r}}$ der Einfach-Plaquetten klassenweise auf, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} C(E) &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} & C(C_2) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ C(C_3) &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} & C(C_4) &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ C(C_4^2) &= \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man sieht, daß nur $C(C_2)$, $C(C_4)$ bzw. $C(C_3)$ diagonalisiert werden müssen. Für $C(C_2)$ und $C(C_4)$ liest man einen Eigenvektor direkt ab, nämlich $(1,1,1)$. Er spannt einen eindimensionalen invarianten Teilraum auf, der zugehörige Eigenwert ist offensichtlich 6. Das dazu orthogonale Komplement wird von den Vektoren $(-2,1,1)$ und $(0,1,-1)$ erzeugt, und ist, wie man schnell nachrechnet, ebenfalls Eigenraum mit dem Eigenwert 0. Die Zerlegung ist demnach abgeschlossen. Die Matrix A^{-1} ergibt sich also zu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

und damit ist

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

⁵Die Begründung liegt in der Eigenschaft der Konjugationsklasse verborgen. Sei $\{k_1, \dots, k_m\}$ die geordnete Menge aller zueinander konjugierten Elemente einer Gruppe G , d.h. $k_j = gk_i g^{-1} (*)$ für ein $g \in G$ und beliebige k_i, k_j aus der Menge, und bilden diese die Konjugationsklasse ζ . Betrachtet man nun die Menge der Elemente $\{gk_1 g^{-1}, gk_2 g^{-1}, \dots, gk_m g^{-1}\}$ mit $g \in G$, so bildet diese nach $(*)$ und modulo Permutationen ebenfalls die Klasse ζ .

Soll nun $C = D_{\vec{r}}(k_1) + \dots + D_{\vec{r}}(k_m)$ mit $D_{\vec{r}}(g_i)$ vertauschen, dann schreibe C als Summe von $D_{\vec{r}}(g_i)D_{\vec{r}}(k_1)D_{\vec{r}}(g_i^{-1}), \dots, D_{\vec{r}}(g_i)D_{\vec{r}}(k_m)D_{\vec{r}}(g_i^{-1})$ und beachte $D_{\vec{r}}(g_i^{-1}) = D_{\vec{r}}^{-1}(g_i)$. \square

Selbstverständlich zerfällt $C(C_3)$ in die gleichen invarianten Teilräume. Die Eigenwerte sind hier 8 und -4.

C läßt sich somit auf folgende Diagonalgestalt bringen:

$$\Delta_{C(C_2)} = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \Delta_{C(C_3)} = \begin{pmatrix} 8 & & \\ & -4 & \\ & & -4 \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Das Ergebnis stimmt mit unseren bisherigen Überlegungen überein, denn wir wußten bereits, daß die Darstellung von $\tilde{\mathcal{R}}$ in eine eindimensionale und eine zweidimensionale irreduzible Darstellung zerfällt, nämlich in A_1 und E . Wir sind aber jetzt in der Lage, zusätzlich eine ONB aus Loop-Operatoren anzugeben, wobei die Koeffizienten der Basisvektoren die Spalten von A^{-1} sind (vgl. a. Ende Kapitel 1):

Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ von O	Linearkombinationen der Einfach-Plaquetten
A_1	$O_{1+} + O_{2+} + O_{3+}$
E	$-2O_{1+} + O_{2+} + O_{3+}$,
	$O_{2+} - O_{3+}$

Zum Schluß sei angemerkt, daß auf Normierungskonstanten der Übersichtlichkeit halber verzichtet wurde.

zweiter Fall: $C = -1$

Für negative C -Parität ist ein 3-dimensionaler Eigenraum zu erwarten. Er transformiert sich unter T_1 . Nach klassenweiser Summation der Darstellungsmatrizen erhält man:

$$C(E) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad C(C_2) = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

$$C(C_3) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad C(C_4) = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

$$C(C_4^2) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}.$$

Alle C -Matrizen haben bereits Diagonalgestalt. Die Zerlegung von $\tilde{\mathcal{R}}$ in invariante Teilräume ist somit abgeschlossen. Dieses Ergebnis verwundert nicht, da wir $\tilde{\mathcal{R}}$ bereits als irreduzibel bestimmt haben. Als ONB-Basis bietet sich demnach an (vgl. a. Kapitel 1):

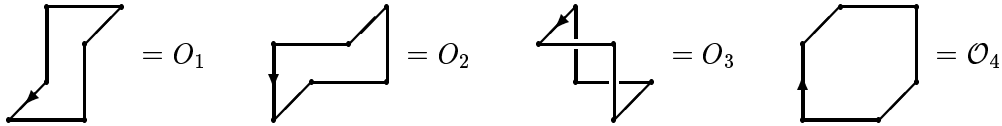
Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ von O	Linearkombinationen der Einfach-Plaquetten
T_1	O_{1+} , O_{2+} , O_{3+}

2.4 Wilson-Loops der Länge 6: Zweites Beispiel

Wir wollen nun Wilson-Loops der Länge 6 betrachten. Wie bereits oben erwähnt, unterscheidet man drei verschiedene Formen von Loop-Operatoren:

- Doppel-Plaquetten,
- Winkel-Plaquetten,
- verdrehte Loops.

Letztere haben die Gestalt:



Ihre Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ ist aufgrund der Anzahl der Operatoren 4-dimensional und soll in diesem Abschnitt exemplarisch für die Wilson-Loops der Länge 6 explizit untersucht werden. Unsere Vorgehensweise wird dabei analog zum vorherigen Abschnitt verlaufen.

2.4.1 Transformationsverhalten der verdrehten Loops

Im ersten Schritt müssen wir die Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}(g)$ für die verdrehten Plaquetten explizit ausrechnen. Dazu untersuchen wir zunächst das Transformationsverhalten der Operatoren $O_{1\pm}, \dots, O_{4\pm}$ unter der kubischen Gruppe. Man definiert

$$\begin{aligned} O_{1\pm} &= [2, 3, -1, -2, -3, 1]_{\pm} , & O_{2\pm} &= [2, 3, 1, -2, -3, -1]_{\pm} \\ O_{3\pm} &= [1, 2, -3, -1, -2, 3]_{\pm} , & O_{4\pm} &= [3, -1, 2, -3, 1, -2]_{\pm} . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nun kann man mit Hilfe von (2.9) und den Drehmatrizen aus [C.1] jeden Loop-Operator unter der kubischen Gruppe transformieren, indem man die Einheitsvektoren mit der jeweiligen Drehmatrix multipliziert oder indem man die Drehung des gesamten Operators „in Gedanken“ direkt ausführt. Wir geben hier das vollständige Ergebnis an. Die $2 \times 4 \times 24 = 192$ Drehungen der verdrehten Loops $O_{i\pm}$, $i \in \{1, \dots, 4\}$, sind nach ihren konjugierten Klassen geordnet:

- Klasse E :

Id

$$O_{1\pm} \mapsto O_{1\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto O_{2\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto O_{3\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto O_{4\pm}$$

- Klasse C_2 :

C_{2a}

$$O_{1\pm} \mapsto CO_{1\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto CO_{4\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto CO_{3\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto CO_{2\pm}$$

C_{2b}

$$O_{1\pm} \mapsto CO_{3\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto CO_{2\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto CO_{1\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto CO_{4\pm}$$

C_{2c}

$$O_{1\pm} \mapsto CO_{4\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto CO_{2\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto CO_{3\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto CO_{1\pm}$$

C_{2d}

$$O_{1\pm} \mapsto CO_{1\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto CO_{3\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto CO_{2\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto CO_{4\pm}$$

C_{2e}

$$O_{1\pm} \mapsto CO_{1\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto CO_{2\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto CO_{4\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto CO_{3\pm}$$

C_{2f}

$$O_{1\pm} \mapsto CO_{2\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto CO_{1\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto CO_{3\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto CO_{4\pm}$$

- Klasse C_3 :

$C_{3\alpha}$

$$O_{1\pm} \mapsto O_{4\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto O_{2\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto O_{1\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto O_{3\pm}$$

$C_{3\beta}$

$$O_{1\pm} \mapsto O_{1\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto O_{3\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto O_{4\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto O_{2\pm}$$

$C_{3\gamma}$

$$O_{1\pm} \mapsto O_{2\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto O_{4\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto O_{3\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto O_{1\pm}$$

$C_{3\delta}$

$$O_{1\pm} \mapsto O_{3\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto O_{1\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto O_{2\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto O_{4\pm}$$

$C_{3\alpha}^{-1}$

$$O_{1\pm} \mapsto O_{3\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto O_{2\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto O_{4\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto O_{1\pm}$$

$C_{3\beta}^{-1}$

$$O_{1\pm} \mapsto O_{1\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto O_{4\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto O_{2\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto O_{3\pm}$$

$C_{3\gamma}^{-1}$

$$O_{1\pm} \mapsto O_{4\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto O_{1\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto O_{3\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto O_{2\pm}$$

$C_{3\delta}^{-1}$

$$O_{1\pm} \mapsto O_{2\pm}$$

$$O_{2\pm} \mapsto O_{3\pm}$$

$$O_{3\pm} \mapsto O_{1\pm}$$

$$O_{4\pm} \mapsto O_{4\pm}$$

- Klasse C_4 :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} C_{4x} \\ O_{1\pm} \mapsto CO_{4\pm} \\ O_{2\pm} \mapsto CO_{3\pm} \\ O_{3\pm} \mapsto CO_{1\pm} \\ O_{4\pm} \mapsto CO_{2\pm} \end{array} &
 \begin{array}{l} C_{4y} \\ O_{1\pm} \mapsto CO_{2\pm} \\ O_{2\pm} \mapsto CO_{4\pm} \\ O_{3\pm} \mapsto CO_{1\pm} \\ O_{4\pm} \mapsto CO_{3\pm} \end{array} &
 \begin{array}{l} C_{4z} \\ O_{1\pm} \mapsto CO_{2\pm} \\ O_{2\pm} \mapsto CO_{3\pm} \\ O_{3\pm} \mapsto CO_{4\pm} \\ O_{4\pm} \mapsto CO_{1\pm} \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l} C_{4x}^{-1} \\ O_{1\pm} \mapsto CO_{3\pm} \\ O_{2\pm} \mapsto CO_{4\pm} \\ O_{3\pm} \mapsto CO_{2\pm} \\ O_{4\pm} \mapsto CO_{1\pm} \end{array} &
 \begin{array}{l} C_{4y}^{-1} \\ O_{1\pm} \mapsto CO_{3\pm} \\ O_{2\pm} \mapsto CO_{1\pm} \\ O_{3\pm} \mapsto CO_{4\pm} \\ O_{4\pm} \mapsto CO_{2\pm} \end{array} &
 \begin{array}{l} C_{4z}^{-1} \\ O_{1\pm} \mapsto CO_{4\pm} \\ O_{2\pm} \mapsto CO_{1\pm} \\ O_{3\pm} \mapsto CO_{2\pm} \\ O_{4\pm} \mapsto CO_{3\pm} \end{array}
 \end{array}$$

- Klasse C_4^2 :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l} C_{2x} \\ O_{1\pm} \mapsto O_{2\pm} \\ O_{2\pm} \mapsto O_{1\pm} \\ O_{3\pm} \mapsto O_{4\pm} \\ O_{4\pm} \mapsto O_{3\pm} \end{array} &
 \begin{array}{l} C_{2y} \\ O_{1\pm} \mapsto O_{4\pm} \\ O_{2\pm} \mapsto O_{3\pm} \\ O_{3\pm} \mapsto O_{2\pm} \\ O_{4\pm} \mapsto O_{1\pm} \end{array} &
 \begin{array}{l} C_{2z} \\ O_{1\pm} \mapsto O_{3\pm} \\ O_{2\pm} \mapsto O_{4\pm} \\ O_{3\pm} \mapsto O_{1\pm} \\ O_{4\pm} \mapsto O_{2\pm} \end{array}
 \end{array}$$

Man beachte wieder $CO_{i\pm} = \pm O_{i\pm}$, $i \in \{1, \dots, 4\}$.

Die resultierenden Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}(g)$ werden bezüglich der geordneten Basis $\{O_{1+}, \dots, O_{4+}\}$ (bzw. $\{O_{1-}, \dots, O_{4-}\}$) angegeben und sind im Anhang C.3 zu finden. Ein Repräsentant pro Klasse sei auch hier angegeben, man ersetze das C in den Matrizen durch ± 1 je nach Wahl der C -Parität.

Klasse: E

$$M(id) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Klasse: C_2

$$M(C_{2a}) = \begin{pmatrix} C & & & \\ & C & & \\ & & C & \\ & & & C \end{pmatrix}$$

Klasse: C_3

$$M(C_{3\alpha}) = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

Klasse: C_4

$$M(C_{4x}) = \begin{pmatrix} & & & C \\ & & & \\ & & C & \\ & C & & C \end{pmatrix}$$

Klasse: C_4^2

$$C(C_4^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

An $C(C_3)$ liest man sofort einen Eigenvektor ab, es ist $(1,1,1,1)$, der zugehörige Eigenwert ist 8. Dazu orthogonal ist der Raum, der von den Vektoren $(1,-1,1,-1)$, $(-1,1,1,-1)$ und $(1,1,-1,-1)$ aufgespannt wird. Da $\tilde{\mathcal{R}} = A_1 \oplus T_2$ und T_2 dreidimensional sind, muß das orthogonale Komplement bereits ein Eigenraum sein. Dies ist in der Tat der Fall. Alle drei Vektoren sind Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert 0, sie spannen also einen nicht weiter zerlegbaren invarianten Teilraum auf. Wie man leicht nachprüft, liefern die Matrizen $C(C_2)$, $C(C_4)$ und $C(C_3^2)$ selbstverständlich das gleiche Resultat. Die Orthonormalbasen der invarianten Teilräume von $\tilde{\mathcal{R}}$ lauten damit für positive C -Parität

Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ von O	Linearkombinationen der verdrehten Loops
A_1	$O_{1+} + O_{2+} + O_{3+} + O_{4+}$
T_2	$O_{1+} - O_{2+} + O_{3+} - O_{4+}$, $-O_{1+} + O_{2+} + O_{3+} - O_{4+}$, $O_{1+} + O_{2+} - O_{3+} - O_{4+}$

zweiter Fall: $C = -1$

$$C(E) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad C(C_2) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C(C_3) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C(C_4) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(C_4^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen sind mit denen aus dem ersten Fall identisch bzw. unterscheiden sich lediglich durch ein Minuszeichen in allen Einträgen. Eigenräume und Eigenvektoren ändern sich damit nicht, und man erhält analog

Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ von O	Linearkombinationen der verdrehten Loops
A_2	$O_{1-} + O_{2-} + O_{3-} + O_{4-}$
T_1	$O_{1-} - O_{2-} + O_{3-} - O_{4-}$, $-O_{1-} + O_{2-} + O_{3-} - O_{4-}$, $O_{1-} + O_{2-} - O_{3-} - O_{4-}$

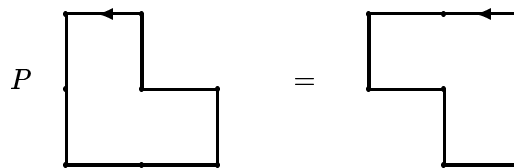
2.5 Spiegelung und P -Parität

An dieser Stelle scheint es mir besonders günstig, auf das Transformationsverhalten von Loops unter der vollen kubischen Gruppe O_h einzugehen und dabei einen weiteren Paritätsbegriff einzuführen. In unseren beiden bisherigen Beispielen haben wir nur Transformationen unter der kubischen Gruppe O betrachtet, insbesondere erfolgten alle Untersuchungen in 2.3 und 2.4 unter Verwendung dieser im Vergleich zur Gruppe O_h etwas kleineren Gruppe. Wir wollen ab hier aber auch Transformationen unter der vollen kubischen Gruppe zulassen und haben dabei u.a. zu klären, ob sich für die Darstellungen $\tilde{\mathcal{R}}$ der bisher behandelten Beispiele etwas Wesentliches ändern wird.

Wie in Unterabschnitt 0.3.4 bereits erwähnt, schließt die Gruppe O_h zusätzlich zu den Rotationen der kubischen Gruppe noch eine optionale Punktspiegelung am Koordinatenursprung mit ein. Eine solche Inversion I wird bei beliebigen Wilson-Loops durch den *Paritätsoperator* P vermittelt. Man definiert ihn durch

$$P[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_L] \equiv [-\mu_1, -\mu_2, \dots, -\mu_L] . \quad (2.25)$$

Er überführt gerade den vollständigen Loop in sein Spiegelbild (Punktspiegelung!)⁶, also z.B.



bzw. gemäß (2.25)

$$P[2, 2, 3, -2, 3, -2, -3, -3] = [-2, -2, -3, 2, -3, 2, 3, 3] . \quad (2.26)$$

Man unterscheidet nun zwischen Loops, die unter der P -Paritätsoperation invariant bleiben und solchen, die es nicht tun. Ist (2.26) für letztere ein Beispiel, so sind die Operatoren

⁶Man beachte, daß wir auch hier Translationen nicht berücksichtigen wollen. Eine Plaquettenvariable U_p würde beispielsweise bei Spiegelung am Gitterpunkt x gemäß $P U_{x;\mu\nu} = U_{x;-\mu,-\nu}$ in eine Plaquette mit gleicher Orientierung überführt, allerdings (drei) neue Gitterpunkte besetzen.

aus Abschnitt 2.3 dagegen spiegelsymmetrisch, z.B. gilt für den Operator O_3 unter Ausnutzung der zyklischen Permutation der L -Tupel

$$PO_3 \pm = P \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \leftarrow \\ \square \\ \rightarrow \\ \square \end{array} \right]_{\pm} = P [2, 3, -2, -3]_{\pm} = [-2, -3, 2, 3]_{\pm} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \leftarrow \\ \square \\ \rightarrow \\ \square \end{array} \right]_{\pm} = O_3 \pm . \end{array}$$

Ebenso verhält es sich bei den Operatoren aus Abschnitt 2.4. Beispielsweise ergibt sich für den Operator O_2

$$PO_2 \pm = P \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \searrow \\ \rightarrow \end{array} \right]_{\pm} = P [2, 3, 1, \dots, -1]_{\pm} = [-2, -3, \dots, 1]_{\pm} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \nearrow \\ \leftarrow \\ \searrow \\ \rightarrow \end{array} \right]_{\pm} . \end{array}$$

P -invariante Operatoren haben stets positive P -Paritätseigenwerte ($P = +1$) und transformieren sich demnach unter der vollen kubischen Gruppe O_h genauso, wie unter der kubischen Gruppe O . Die aus ihnen erzeugten Darstellungen bestehen ausschließlich aus den fünf irreduziblen Darstellungen $A_1^+, A_2^+, E^+, T_1^+, T_2^+$ (vgl. Charaktertabelle von O_h). Irreduzible Anteile mit negativer P -Parität (z.B. T_1^-) können nicht vorkommen.

Die in Abschnitt 2.3 und 2.4 betrachteten Operatoren sind alle spiegelinvariant. Die dort konstruierten Darstellungen lassen sich also leicht auf den Fall der vollen kubischen Gruppe übertragen, man hat lediglich die irreduziblen Anteile mit einem (zusätzlichen) $+$ zu indizieren, also ist z.B. in Abschnitt 2.3 für den Fall positiver C -Parität die erzeugte Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}^P = A_1^+ \oplus E^+$ anstatt $\tilde{\mathcal{R}} = A_1 \oplus E$ für die kubische Gruppe. Berücksichtigt man zudem noch die Indizierung für die gewählte C -Parität, so schreibt man vollständig $\tilde{\mathcal{R}}^{PC} = A_1^{++} \oplus E^{++}$. Das Auslassungszeichen \bullet ist also nun überflüssig geworden.

Für Operatoren, die keine P -Invarianz aufweisen, bildet man analog zum Fall des C -Paritätsoperators die Linearkombinationen

$$[\mu_1, \dots, \mu_L]^{\pm} \equiv [\mu_1, \dots, \mu_L] \pm [-\mu_1, \dots, -\mu_L] . \quad (2.27)$$

Diese haben je nach Wahl des Vorzeichens eindeutig bestimmte P -Paritätseigenwerte ($P = +1$ bzw. $P = -1$).

Zur Verdeutlichung sei der Operator aus (2.26) noch etwas genauer betrachtet. Darüber hinaus werden uns dann im nächsten Abschnitt Wilson-Loops dieser Gestalt als Beispiel für das Transformationsverhalten P -varianter Operatoren unter der vollen kubischen Gruppe O_h und der daraus generierten Darstellung dienen. Zuvor aber noch eine Notationsvereinbarung: Der Loop-Operator (2.26) hat die Form eines „gestutzten“ L und soll im folgenden durch eine Einfach-Plaquette mit einem an einer Ecke befindlichen nicht-ausgefüllten Kreis kenntlich gemacht werden. Der Kreisring markiert dabei die beiden längeren Kanten des Loops. Graphisch liest sich die Abkürzung für (2.26) so:



Die Anwendung des Paritätsoperators P ergibt für (2.26) somit

$$\begin{aligned}
 P \square^{\pm} &= P \left(\square^{\pm} \pm \square^{\pm} \right) = \square^{\pm} \pm \square^{\pm} \\
 &= \begin{cases} \left(\square^{\pm} + \square^{\pm} \right) = \square^{\pm} + \\ - \left(\square^{\pm} - \square^{\pm} \right) = - \square^{\pm} - \end{cases}
 \end{aligned}$$

Das $+$ kennzeichnet demnach Operatoren mit positiver P -Parität, das $-$ entsprechend Operatoren negativer P -Parität.

2.6 Wilson-Loops der Länge 8: Drittes Beispiel

Insgesamt lassen sich nun unter Berücksichtigung der Tatsache, daß sich in allen drei Koordinatenebenen jeweils insgesamt vier einzelne Eckpunkte auszeichnen lassen, $3 \times 4 = 12$ unterschiedliche Loops obiger Form konstruieren. Man faßt sie aufgrund ihrer Inversionseigenschaft gemäß (2.27) zu P -invarianten Operatoren zusammen und erhält:

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \circ \text{---} \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \circ \end{array} = O_{11}^{\pm} & \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \circ \text{---} \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \circ \end{array} = O_{12}^{\pm} \\
\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \circ \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \circ \text{---} \end{array} = O_{21}^{\pm} & \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \circ \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \circ \text{---} \end{array} = O_{22}^{\pm} \\
\begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \circ \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \circ \end{array} = O_{31}^{\pm} & \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \circ \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \circ \end{array} = O_{32}^{\pm}
\end{array}$$

Berücksichtigt man zusätzlich noch die C -Paritätsinvarianz, so erhält man insgesamt die Operatoren $O_{ij}^P C = (O_{ij}^{\pm})$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$), die nun für fixiertes P und C einen sechs-dimensionalen Raum aufspannen.

2.6.1 Transformationsverhalten der Über-Eck-Plaquetten

Die Konstruktion P -invarianter Loop-Operatoren vereinfacht uns die Arbeit erheblich. Wollte man alle zwölf Über-Eck-Plaquetten –man beachte, daß man dabei vorher C schon fest gewählt haben muß– unter der vollen kubischen Gruppe O_h transformieren, hätte man $12 \times 2 \times 24 = 576$ Drehungen zu untersuchen. Kennt man dagegen das Verhalten eines Operators unter Inversion, wie es bei der Verwendung von Linearkombinationen O_{ij}^{\pm} der Fall ist, reduzieren sich diese bereits auf $6 \times 24 = 144$. Das Transformationsverhalten unter O bestimmt also in diesem Fall das Verhalten unter der vollen Gruppe O_h . Grund dafür ist die Tatsache, daß Operatoren mit $P = +1$ ihre Lage unter Punktspiegelung unverändert lassen und im Falle von $P = -1$ nur ein Minuszeichen vor den Operator hinzugefügt werden muß. Es genügt demnach, die Über-Eck-Operatoren O_{ij}^{\pm} unter der kubischen Gruppe zu drehen. Selbstverständlich hat man dabei zusätzlich wiederum zwischen positiver und negativer C -Parität zu unterscheiden, insgesamt sind also vier Fälle $P = \pm 1$ und $C = \pm 1$ zu unterscheiden. Man findet:

- Klasse E :

$$\begin{array}{l}
Id \\
O_{11}^{\pm} \mapsto O_{11}^{\pm} \\
O_{12}^{\pm} \mapsto O_{22}^{\pm} \\
O_{21}^{\pm} \mapsto O_{21}^{\pm} \\
O_{22}^{\pm} \mapsto O_{12}^{\pm}
\end{array}$$

$$\begin{aligned} O_{31}^\pm &\mapsto O_{31}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto O_{32}^\pm \end{aligned}$$

- Klasse C_2 :

$$\begin{aligned} C_{2a} \quad O_{11}^\pm &\mapsto PCO_{11}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto CO_{12}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto PO_{31}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto PO_{32}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto PO_{21}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto PO_{22}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2b} \quad O_{11}^\pm &\mapsto CO_{11}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto PCO_{12}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto PCO_{32}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto PCO_{31}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto PCO_{22}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto PCO_{21}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2c} \quad O_{11}^\pm &\mapsto PO_{31}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto PO_{32}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto PCO_{21}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto CO_{22}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto PO_{11}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto PO_{12}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2d} \quad O_{11}^\pm &\mapsto CO_{32}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto CO_{31}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto CO_{21}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto PCO_{22}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto CO_{12}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto CO_{11}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2e} \quad O_{11}^\pm &\mapsto O_{22}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto PO_{21}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto PO_{12}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto O_{11}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto CO_{31}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto PCO_{32}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2f} \quad O_{11}^\pm &\mapsto PCO_{21}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto CO_{22}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto PCO_{11}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto CO_{12}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto PCO_{31}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto CO_{32}^\pm \end{aligned}$$

- Klasse C_3 :

$$\begin{aligned} C_{3\alpha} \quad O_{11}^\pm &\mapsto CO_{22}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto CO_{21}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto O_{32}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto CO_{31}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto PCO_{11}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto CO_{12}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3\beta} \quad O_{11}^\pm &\mapsto PCO_{22}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto PCO_{21}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto PCO_{31}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto CO_{32}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto O_{12}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto PO_{11}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3\gamma} \quad O_{11}^\pm &\mapsto O_{21}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto O_{22}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto CO_{31}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto PCO_{32}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto CO_{11}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto PCO_{12}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3\delta} \quad O_{11}^\pm &\mapsto PO_{21}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto PO_{22}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto PO_{32}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto O_{31}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto PO_{12}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto O_{11}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3\alpha}^{-1} \quad O_{11}^\pm &\mapsto PCO_{31}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto CO_{32}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto CO_{12}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto CO_{11}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto PO_{22}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto O_{21}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3\beta}^{-1} \quad O_{11}^\pm &\mapsto PO_{32}^\pm \\ O_{12}^\pm &\mapsto O_{31}^\pm \\ O_{21}^\pm &\mapsto PCO_{12}^\pm \\ O_{22}^\pm &\mapsto PCO_{11}^\pm \\ O_{31}^\pm &\mapsto PCO_{21}^\pm \\ O_{32}^\pm &\mapsto CO_{22}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3\gamma}^{-1} \quad O_{11}^\pm &\mapsto CO_{31}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3\delta}^{-1} \quad O_{11}^\pm &\mapsto O_{32}^\pm \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
O_{12}^{\pm} \mapsto PCO_{32}^{\pm} & O_{12}^{\pm} \mapsto PO_{31}^{\pm} \\
O_{21}^{\pm} \mapsto O_{11}^{\pm} & O_{21}^{\pm} \mapsto O_{13}^{\pm} \\
O_{22}^{\pm} \mapsto O_{12}^{\pm} & O_{22}^{\pm} \mapsto PO_{12}^{\pm} \\
O_{31}^{\pm} \mapsto CO_{21}^{\pm} & O_{31}^{\pm} \mapsto O_{22}^{\pm} \\
O_{32}^{\pm} \mapsto PCO_{22}^{\pm} & O_{32}^{\pm} \mapsto PO_{21}^{\pm}
\end{array}$$

- Klasse C_4 :

$$\begin{array}{lll}
C_{4x} & C_{4y} & C_{4z} \\
O_{11}^{\pm} \mapsto PO_{22}^{\pm} & O_{11}^{\pm} \mapsto PCO_{32}^{\pm} & O_{11}^{\pm} \mapsto PO_{12}^{\pm} \\
O_{12}^{\pm} \mapsto O_{21}^{\pm} & O_{12}^{\pm} \mapsto PCO_{31}^{\pm} & O_{12}^{\pm} \mapsto O_{11}^{\pm} \\
O_{21}^{\pm} \mapsto CO_{11}^{\pm} & O_{21}^{\pm} \mapsto PO_{22}^{\pm} & O_{21}^{\pm} \mapsto O_{31}^{\pm} \\
O_{22}^{\pm} \mapsto PCO_{12}^{\pm} & O_{22}^{\pm} \mapsto O_{21}^{\pm} & O_{22}^{\pm} \mapsto O_{32}^{\pm} \\
O_{31}^{\pm} \mapsto PO_{32}^{\pm} & O_{31}^{\pm} \mapsto O_{11}^{\pm} & O_{31}^{\pm} \mapsto CO_{22}^{\pm} \\
O_{32}^{\pm} \mapsto O_{31}^{\pm} & O_{32}^{\pm} \mapsto O_{12}^{\pm} & O_{32}^{\pm} \mapsto CO_{21}^{\pm} \\
\\
C_{4x}^{-1} & C_{4y}^{-1} & C_{4z}^{-1} \\
O_{11}^{\pm} \mapsto CO_{21}^{\pm} & O_{11}^{\pm} \mapsto O_{31}^{\pm} & O_{11}^{\pm} \mapsto O_{12}^{\pm} \\
O_{12}^{\pm} \mapsto PCO_{22}^{\pm} & O_{12}^{\pm} \mapsto O_{32}^{\pm} & O_{12}^{\pm} \mapsto PO_{11}^{\pm} \\
O_{21}^{\pm} \mapsto CO_{12}^{\pm} & O_{21}^{\pm} \mapsto O_{22}^{\pm} & O_{21}^{\pm} \mapsto CO_{32}^{\pm} \\
O_{22}^{\pm} \mapsto PO_{11}^{\pm} & O_{22}^{\pm} \mapsto PO_{21}^{\pm} & O_{22}^{\pm} \mapsto CO_{31}^{\pm} \\
O_{31}^{\pm} \mapsto O_{32}^{\pm} & O_{31}^{\pm} \mapsto PCO_{12}^{\pm} & O_{31}^{\pm} \mapsto O_{21}^{\pm} \\
O_{32}^{\pm} \mapsto PO_{31}^{\pm} & O_{32}^{\pm} \mapsto PCO_{11}^{\pm} & O_{32}^{\pm} \mapsto O_{22}^{\pm}
\end{array}$$

- Klasse C_4^2 :

$$\begin{array}{lll}
C_{2x} & C_{2y} & C_{2z} \\
O_{11}^{\pm} \mapsto CO_{12}^{\pm} & O_{11}^{\pm} \mapsto PCO_{12}^{\pm} & O_{11}^{\pm} \mapsto PO_{11}^{\pm} \\
O_{12}^{\pm} \mapsto CO_{11}^{\pm} & O_{12}^{\pm} \mapsto PCO_{11}^{\pm} & O_{12}^{\pm} \mapsto PO_{12}^{\pm} \\
O_{21}^{\pm} \mapsto PCO_{22}^{\pm} & O_{21}^{\pm} \mapsto PO_{21}^{\pm} & O_{21}^{\pm} \mapsto CO_{22}^{\pm} \\
O_{22}^{\pm} \mapsto PCO_{21}^{\pm} & O_{22}^{\pm} \mapsto PO_{22}^{\pm} & O_{22}^{\pm} \mapsto CO_{21}^{\pm} \\
O_{31}^{\pm} \mapsto PO_{31}^{\pm} & O_{31}^{\pm} \mapsto PCO_{32}^{\pm} & O_{31}^{\pm} \mapsto CO_{32}^{\pm} \\
O_{32}^{\pm} \mapsto PO_{32}^{\pm} & O_{32}^{\pm} \mapsto PCO_{31}^{\pm} & O_{32}^{\pm} \mapsto CO_{31}^{\pm}
\end{array}$$

Man beachte dabei z.B. $PO_{ij}^+ = +O_{ij}^+$ bzw. $CO_{ij}^- = -O_{ij}^-$ und insbesondere auch $PCO_{ij}^- = -(-O_{ij}^-) = +O_{ij}^-$, $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{1, 2\}$.

Die Darstellungsmatrizen $D_{\bar{\kappa}}(g)$ unterscheiden sich nun für jeden der vier Sektoren ($P = C = +1$, $P = +1, C = -1$, etc.) in den Vorzeichen der Einträge und sind bzgl. der zugehörigen geordneten Basis $\{O_{11}^{\pm}, O_{12}^{\pm}, \dots, O_{32}^{\pm}\}$ angegeben. Da wir nur an ihren Klassencharakteren interessiert sind, genügt es, einen Repräsentanten pro Klasse anzugeben. Man ersetze dazu P und C durch ± 1 je nach Wahl der P - bzw. C -Parität.

Klasse: E

Klasse: C_2

$$M(id) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad M(C_{2\alpha}) = \begin{pmatrix} PC & & & \\ & C & & \\ & & & P \\ & & & & P \end{pmatrix}$$

Klasse: C_3

Klasse: C_4

$$M(C_{3\alpha}) = \begin{pmatrix} & & & PC \\ & & & & C \\ & C & & & \\ & & & & \\ C & & & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad M(C_{4\alpha}) = \begin{pmatrix} & & & C \\ & & & & \\ & & & & PC \\ & & & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & & \\ P & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & P \end{pmatrix}$$

Klasse: C_4^2

$$M(C_{2x}) = \begin{pmatrix} & & & C \\ & C & & \\ & & & & \\ & & & & PC \\ & & & & & \\ & & & PC & & \\ & & & & & \\ & & & & & P \\ & & & & & & P \end{pmatrix} .$$

Die Charaktere ergeben sich zu +6 für die Klasse E in allen 4 Sektoren. Für die Klasse C_2 erhält man +2/ - 2 für positive P -Parität und positive/negative C -Parität bzw. 0 im Fall von $P = -1$, die Klassen C_3 und C_4 haben immer verschwindende Spuren. Im Falle der Klasse C_4^2 hat man +2 für positive P -Parität und andernfalls -2.

Die Darstellungsmatrizen für die zusätzlichen Klassen IE, \dots, IC_4^2 der vollen kubischen Gruppe O_h sind im Fall $P = +1$ mit obigen identisch, für $P = -1$ ist in allen Einträgen ein Minuszeichen zu setzen. Die Spuren ändern sich dann ebenfalls entsprechend.

2.6.2 Irreduzible Zerlegung der Darstellung

Die Zerlegung der Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ erfolgt mit Hilfe der Formel (2.17). Man beachte, daß sich die Summe (bei fixierter C -Parität) nun zunächst einmal über alle zehn konjugierten Klassen von O_h erstreckt und sich damit auch die Anzahl irreduzibler Darstellungen von fünf auf zehn erhöht. Wie aber bereits oben erwähnt, vereinfacht sich die Situation aufgrund

der Verwendung von P -invarianten Operatoren wieder, da sich das Transformationsverhalten unter der vollen kubischen Gruppe aus dem unter der Gruppe O ableiten läßt. Konkret hat man also doch nur über die fünf Klassen der kubischen Gruppe zu summieren und indiziert die gewählte P -Parität durch ein $+$ bzw. $-$ an der irreduziblen Darstellung μ . Dabei darf nicht vergessen werden, daß man $\tilde{\mathcal{R}}$ zusätzlich auch noch für beide C -Paritäten getrennt zu zerlegen hat. Die irreduziblen Anteile werden also mit μ^{PC} kenntlich gemacht. Die Rechnungen sind in Anhang C.4.1 zu finden, woraus man abschließend erhält:

erster Fall: $P = +1$

irred. Darst. von O_h	A_1^{++}	A_2^{++}	E^{++}	T_1^{++}	T_2^{++}	A_1^{+-}	A_2^{+-}	E^{+-}	T_1^{+-}	T_2^{+-}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3	1	1	2	3	3
Dimension von $\tilde{\mathcal{R}}$: 6	$P = +1$		$C = +1$			$P = +1$		$C = -1$		
	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0

zweiter Fall: $P = -1$

irred. Darst. von O_h	A_1^{-+}	A_2^{-+}	E^{-+}	T_1^{-+}	T_2^{-+}	A_1^{--}	A_2^{--}	E^{--}	T_1^{--}	T_2^{--}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3	1	1	2	3	3
Dimension von $\tilde{\mathcal{R}}$: 6	$P = -1$		$C = +1$			$P = -1$		$C = -1$		
	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1

2.6.3 Konstruktion einer Orthonormalbasis (Teil I)

Die Konstruktion einer Orthonormalbasis aus Loop-Operatoren haben wir bereits an zwei Beispielen vorgenommen. Es stellte sich dabei heraus, daß es genügt, die Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$ einer (geeigneten) Klasse C_i aufzusummieren und zu diagonalisieren. Wir wählen in diesem Fall beispielsweise die Klasse C_2 . Man erhält nach Summation für den

ersten Fall: $P = C = +1$

$$C(C_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Durch Diagonalisierung findet man

- die Eigenwerte: 6, 0, 0, 2, 2, 2
- und die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.29)$$

Der Darstellungsraum der Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$ zerfällt in drei invariante Unterräume der Dimensionen 1, 2 und 3. Da für die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$

$$\tilde{\mathcal{R}} = A_1^{++} \oplus E^{++} \oplus T_2^{++} \quad (2.30)$$

gilt und die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen mit denen der invarianten Teilräume übereinstimmen, ist die Zerlegung damit abgeschlossen. \mathcal{E}_1 bildet also eine Basis aus Loop-Operatoren für A_1^{++} , E^{++} bzw. T_2^{++} .

zweiter Fall: $P = +1, C = -1$

Dieser Fall verläuft völlig analog zum ersten, und die Details können in Anhang C.4.2 nachgelesen werden.

dritter Fall: $P = -1, C = +1$

$$C(C_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Durch Diagonalisierung findet man

- die Eigenwerte: -2, -2, -2, 2, 2, 2
- und die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.32)$$

Der Darstellungsraum der $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$ zerfällt in zwei invariante Unterräume der Dimension 3. Für die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ gilt

$$\tilde{\mathcal{R}} = T_1^{-+} \oplus T_2^{-+}. \quad (2.33)$$

Da sowohl T_1^{-+} als auch T_2^{-+} dreidimensionale, irreduzible Darstellungen sind, ist die Zerlegung somit ebenfalls abgeschlossen. Fraglich dagegen ist aber noch, wie die beiden invarianten Unterräume den Darstellungen zuzuordnen sind. Hierfür hat man nun die in (2.20) erklärte reduzierte Darstellung $A\tilde{\mathcal{R}}A^{-1}$ zu betrachten. Zunächst fügt man die in der geordneten Menge \mathcal{E}_3 befindlichen Basisvektoren zu einer Matrix E_3 zusammen (Spaltenvektor=Matrixspalte) und identifiziert E_3 mit A^{-1} . Betrachtet man nun für die Darstellungsmatrizen der Klasse C_2 ihre „reduzierten“ Partner $AD_{\tilde{\mathcal{R}}}(g)A^{-1}$, so haben diese nach Konstruktion von (2.20) Blockdiagonalgestalt, bestehen also aus zwei 3×3 -Matrizen. Für $g = C_{2a} \in C_2$ ergibt sich beispielsweise

$$AD_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2a})A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & & & \\ -1 & -1 & 1 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Hierbei haben oberer und unterer Block die Spur -1 bzw. $+1$.

Da wir nun einerseits wissen, daß sich die zu den beiden Blockmatrizen gehörenden Unterräume unter T_1^{-+} bzw. T_2^{-+} transformieren und andererseits an Hand der Charaktertabelle $\chi^{T_1^{-+}}(C_2) = -1$ bzw. $\chi^{T_2^{-+}}(C_2) = +1$ finden, bilden die ersten drei Vektoren aus \mathcal{E}_3 in der Tat eine Basis der Darstellung T_1^{-+} aus Loop-Operatoren und die restlichen drei entsprechend eine Basis für T_2^{-+} .

vierter Fall: $P = -1, C = -1$

Wiederum verläuft dieser Fall völlig analog zum letzten und ist ebenfalls in Anhang C.4.2 nachzulesen.

Schlußbemerkung: Eine vollständige Übersicht aller Orthonormalbasen aus Über-Eck-Plaquetten für die irreduziblen Faktoren der betrachteten Darstellungen $\tilde{\mathcal{R}}$ sei im folgenden Abschnitt zusammengestellt.

2.7 Zusammenfassung

An dieser Stelle möchte ich noch einmal eine Übersicht über die bisher erzielten Resultate geben. Ausgangspunkt war die kubische Gruppe, unter der wir das Transformationsverhalten von Wilson-Loops untersucht haben. Aus diesem konnten wir anschließend Darstellungen über Loop-Operatoren ableiten. Dabei zeigte sich, daß durch geeignete Kombination

der Loops paritätsinvariante Operatoren erzeugt werden konnten, die uns Aussagen über das Transformationsverhalten unter der vollen kubischen Gruppe ermöglichten. Mit Hilfe der Gruppentheorie wurde daraufhin ein Verfahren vorgestellt, die i.a. reduziblen Darstellungen in irreduzible Darstellungen der (vollen) kubischen Gruppe zu zerlegen und eine Orthonormalbasis aus Loop-Operatoren für jeden invarianten Teilraum des Darstellungsraumes anzugeben. Die Dimension der Darstellung ist dabei durch die Anzahl möglicher Ausrichtungen der Loops im dreidimensionalen Raum festgelegt und wächst in jedem Falle mit deren Länge.

Es wurden drei Beispiele behandelt. Die Einfach-Plaquetten und verdrehten Loops waren beide invariant gegenüber Raumspiegelungen, eine Untersuchung unter der kubischen Gruppe reichte hier aus. Die Ergebnisse werden in Tabelle 2.1 (irred. Inhalt) und Tabelle 2.3 bzw. Tabelle 2.6 (ONB) zusammengefaßt. Die Über-Eck-Plaquetten waren nicht spiegelinvariant. Die Folge waren irreduzible Anteile mit negativer P -Parität (vgl. Tabelle 2.2, Tabelle 2.7).

In 2.2.1 wurden darüber hinaus zwei weitere Wilson-Loops der Länge 6 vorgestellt: Doppel-Plaquetten und Winkel-Plaquetten. Für beide lassen sich mit dem gleichen Verfahren ebenfalls Darstellungen finden, deren Ergebnisse aus [19] entnommen und in Tabelle 2.1 (Doppel-Plaquetten) bzw. 2.2 (Winkel-Plaquetten) und Tabelle 2.4 bzw. 2.5 dargestellt werden.

In Tabelle 2.1 und 2.2 ist die Reihenfolge der betrachteten Loop-Operatoren unterhalb der Tabelle angegeben, die irreduziblen Darstellungen der (vollen) kubischen Gruppe sind nach Wahl der Parität geordnet. Die ONB in den Tabellen 2.3 – 2.7 ist zeilenweise in Form von Koordinatenvektoren bzgl. der Basisoperatoren der entsprechenden Wilson-Loops angegeben.

**Irreduzibler Inhalt der Darstellungen der kubischen Gruppe über
Wilson-Loops der Länge 4 und 6 (I)**

irred. Darst. von O_h	A_1^{++}	A_2^{++}	E^{++}	T_1^{++}	T_2^{++}	A_1^{+-}	A_2^{+-}	E^{+-}	T_1^{+-}	T_2^{+-}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3	1	1	2	3	3
Dimension von $\tilde{\mathcal{R}}$:	$P = +1$					$C = +1$				
3	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
Dimension von $\tilde{\mathcal{R}}$:	$P = +1$					$C = -1$				
6	1	1	2	0	0	0	0	0	1	1
Dimension von $\tilde{\mathcal{R}}$:	$P = +1$					$C = -1$				
4	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0

Tabelle 2.1: Operatoren (von oben nach unten): Einfach-Plaquetten; Doppel-Plaquetten, verdrehte Loops

**Irreduzibler Inhalt der Darstellungen der kubischen Gruppe über
Wilson-Loops der Länge 6 (II) und über die Über-Eck-Plaquetten der Länge 8**

irred. Darst. von O_h	A_1^{++}	A_2^{++}	E^{++}	T_1^{++}	T_2^{++}	A_1^{+-}	A_2^{+-}	E^{+-}	T_1^{+-}	T_2^{+-}
Dim. der Darstellung	1	1	2	3	3	1	1	2	3	3
Dimension von $\tilde{\mathcal{R}}$:	$P = +1$					$C = +1$				
12	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
Dimension von $\tilde{\mathcal{R}}$:	$P = +1$					$C = -1$				
6	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0
Fortsetzung der Tabelle	A_1^{-+}	A_2^{-+}	E^{-+}	T_1^{-+}	T_2^{-+}	A_1^{--}	A_2^{--}	E^{--}	T_1^{--}	T_2^{--}
	1	1	2	3	3	1	1	2	3	3
Dimension von $\tilde{\mathcal{R}}$:	$P = -1$					$C = +1$				
0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
Dimension von $\tilde{\mathcal{R}}$:	$P = -1$					$C = -1$				
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1

Tabelle 2.2: Operatoren (von oben nach unten): Winkel-Plaquetten; Über-Eck-Plaquetten

Operatoren der Einfach-Plaquetten

Loop-Op.		$O_{1\pm}^\pm$	$O_{2\pm}^\pm$	$O_{3\pm}^\pm$
$\tilde{\mathcal{R}}^{PC}$	A_1^{++}	1	1	1
	E^{++}	-2	1	1
			1	-1
	T_1^{+-}	1		
			1	
				1

Tabelle 2.3: ONB aus Loop-Operatoren für die irreduziblen Anteile von $\tilde{\mathcal{R}}$
(Die freien Plätze sind mit Nullen zu belegen.)

Operatoren der Doppel-Plaquetten

Loop-Op.		$O_{1\pm}$	$O_{2\pm}$	$O_{3\pm}$	$O_{4\pm}$	$O_{5\pm}$	$O_{6\pm}$
$\tilde{\mathcal{R}}^{PC}$	A_1^{++}	1	1	1	1	1	1
	A_2^{++}	1	1	1	-1	-1	-1
	E^{++}		1	-1		1	-1
	E^{++}	-2	1	1	-2	1	1
	E^{++}	-2	1	1	2	-1	-1
	T_1^{+-}	1			1		
			1			1	
				1			1
	T_2^{+-}	1			-1		
			1			-1	
				1			-1

Tabelle 2.4: ONB aus Loop-Operatoren für die irreduziblen Anteile von $\tilde{\mathcal{R}}$

Operatoren der Winkel-Plaquetten												
Loop-Op.	$O_{1\pm}$	$O_{2\pm}$	$O_{3\pm}$	$O_{4\pm}$	$O_{5\pm}$	$O_{6\pm}$	$O_{7\pm}$	$O_{8\pm}$	$O_{9\pm}$	$O_{10\pm}$	$O_{11\pm}$	$O_{12\pm}$
A_1^{++}, A_1^{--}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
E^{++}, E^{--}	-1	1		-1	1		-1	1		-1	1	
T_1^{-+}, T_1^{+-}	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
T_1^{-+}, T_1^{+-}	-1	1		1	1		-1	-1		1	-1	
		-1	1		1	1		-1	-1		1	-1
T_2^{-+}, T_2^{+-}	1		-1	1		1	-1		-1	-1		1
T_2^{-+}, T_2^{+-}	1	1		-1	1		1	-1		-1	-1	
		1	1		-1	1		1	-1		-1	-1
T_2^{++}, T_2^{--}	1		1	1		-1	-1		1	-1		-1
T_2^{++}, T_2^{--}			1			-1			-1			1
	1			-1			-1			1		
		1			-1			-1			1	

Tabelle 2.5: ONB aus Loop-Operatoren für die irreduziblen Anteile von $\tilde{\mathcal{R}}$

Operatoren der verdrehten Loops					
Loop-Op.		$O_{1\pm}^\pm$	$O_{2\pm}^\pm$	$O_{3\pm}^\pm$	$O_{4\pm}^\pm$
$\tilde{\mathcal{R}}^{PC}$	A_1^{++}, A_2^{+-}	1	1	1	1
	T_2^{++}, T_1^{+-}	1	-1	1	-1
		-1	1	1	-1
		1	1	-1	-1

Tabelle 2.6: ONB aus Loop-Operatoren für die irreduziblen Anteile von $\tilde{\mathcal{R}}$

		Operatoren der Über-Eck-Plaquetten					
Loop-Op.		$O_{11\pm}^{\pm}$	$O_{12\pm}^{\pm}$	$O_{21\pm}^{\pm}$	$O_{22\pm}^{\pm}$	$O_{31\pm}^{\pm}$	$O_{32\pm}^{\pm}$
$\tilde{\mathcal{R}}^{PC}$	A_1^{++}	1	1	1	1	1	1
	A_2^{+-}	1	-1	1	-1	-1	1
	E^{++}	-1	-1			1	1
		-1	-1	1	1		
	E^{+-}	-1	1			-1	1
		1	-1	-1	1		
	T_1^{+-}					1	1
				1	1		
		1	1				
	T_1^{-+}		1	1			1
		1		1		1	
		-1	-1	-1	1		
	T_1^{--}	1		-1			1
			1	1		1	
	T_2^{++}	-1	1	1	1		1
				-1	1		
	T_2^{-+}	-1	1				
		1		-1			1
		1	-1		1		
T_2^{--}	1	1	-1	1			
		-1	1			1	
	-1		-1		1		
	1	-1	1	1			

Tabelle 2.7: ONB aus Loop-Operatoren für die irreduziblen Anteile von $\tilde{\mathcal{R}}$

Kapitel 3

Einführung in die Supersymmetrie

In diesem Kapitel gebe ich eine kurze Darstellung der supersymmetrischen Erweiterung der relativistischen Quantenfeldtheorie. Dabei wird in erster Linie auf die zur Theorie hinzukommenden Supermultipletts und die in ihnen enthaltenen neuen Elementarteilchen eingegangen. Ausgehend von den irreduziblen Darstellungen der Symmetriegruppe der Raum-Zeit, beschrieben durch die Poincaré-Gruppe, wird zunächst das Prinzip der \mathbb{Z}_2 -Graduierung der Poincaré-Algebra angegeben, welches auf direktem Wege zu einer Verallgemeinerung des Lie-Algebra-Konzeptes führen wird. Mit dieser werden dann irreduzible Darstellungen verknüpft sein, die mit den Elementarteilchen der supersymmetrischen Theorie identifiziert werden können. Anschließend wird der Superfeldformalismus eingeführt, mit dessen Hilfe sich supersymmetrisch-invariante Wirkungen konstruieren lassen. Nach diesen Vorbereitungen sollen dann schließlich zwei supersymmetrische Modelle behandelt werden. Als Referenzen zu dem Inhalt dieses Kapitels seien stellvertretend für die umfangreiche Literatur [24–28] genannt.

3.1 Graduierung und Poincaré-Superalgebra

Auf der Suche nach einer endgültigen Theorie der Elementarteilchen sind viele Versuche unternommen worden, das Standardmodell zu erweitern und es als niederenergetischen Grenzfall in eine weitreichendere Theorie einzubetten. Einen vielversprechenden Weg dahin, bietet das Konzept der Supersymmetrie. Bevor wir darauf genauer eingehen, wollen wir uns dem Elementarteilchenspektrum des Standardmodells über sein Transformationsverhalten unter der vollen Lorentzgruppe nähern.

3.1.1 Poincaré-Gruppe und ihre irreduziblen Darstellungen

Elementarteilchen sind in der Sprache des theoretischen Teilchenphysikers irreduzible Darstellungen der Poincaré-Gruppe \mathcal{P} , die als Symmetriegruppe der vierdimensionalen Raum-Zeit grundlegend für jede relativistische Quantenfeldtheorie ist. Sie beinhaltet Lorentztransformationen und Verschiebungen im Minkowski-Raum und beschreibt damit die Struktur unserer Raum-Zeit. Ihre Lie-Algebra wird von den 6 Generatoren der Lorentz-

gruppe $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ und den 4 Generatoren der Translationsgruppe P^μ erzeugt und wird durch die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [P^\mu, P^\nu] &= 0 \\ [P^\rho, M^{\mu\nu}] &= i(g^{\rho\mu}P^\nu - g^{\rho\nu}P^\mu) \\ [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= -i(g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

festgelegt, wobei $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = g^{\mu\nu}$ die Metrik im Minkowski-Raum ist.

In der Quantenfeldtheorie spielen sog. *Casimir-Operatoren* eine wesentliche Rolle, da nach ihren Eigenwerten alle physikalischen Zustände (Felder, Teilchen) klassifiziert werden können. Sie sind dabei über die Eigenschaft definiert, mit allen Generatoren zu vertauschen.

Als Casimir-Operatoren der Poincaré-Gruppe erhält man

$$\begin{aligned} P^2 &= P_\mu P^\mu \\ W^2 &= W_\mu W^\mu, \end{aligned} \quad (3.2)$$

wobei $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}$ als Pauli-Lubanski-Vektor bezeichnet wird. Weiter ist $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der total antisymmetrische Tensor vierter Stufe mit der Normierung $\epsilon_{1234} = 1$. Aus diesen Casimir-Operatoren geben wir nun die irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe an. Man unterscheidet hierbei verschiedene Klassen:

1. Massive Darstellung: $P^2 = m^2 c^2 > 0$

Im Ruhesystem findet man für die Generatoren W_μ im Minkowski-Raum und die Generatoren S^k der inneren Drehung die Proportionalität

$$W^2 = -m^2 c^2 S^2. \quad (3.3)$$

Da W^2 ein Lorentzskalar ist, stimmen seine Eigenwerte im Ruhesystem mit denen in einem gleichförmig bewegten System überein, und man erhält

$$\begin{aligned} P^2 &= m^2 c^2, \\ W^2 &= -m^2 c^2 s(s+1) \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Offensichtlich wird die Darstellung durch die Masse m und den Spin s charakterisiert. Dies macht die Identifikation mit Eigenschaften von Elementarteilchen suggestiv. Man beachte, daß sich Teilchen innerhalb einer Darstellung in ihren kontinuierlichen Impulseigenwerten und der z -Komponente s_3 ihres Spins unterscheiden können. Massive Teilchen mit Impuls \vec{p} haben demnach $2s + 1$ Freiheitsgrade.

2. Massenlose Darstellung: $P^2 = 0$ und $W^2 = 0$

Hier gilt

$$W^\mu = h P^\mu \quad \text{mit} \quad h = \pm s \quad \text{und} \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \quad (3.5)$$

wobei $h = W_0/P_0$ ebenfalls ein Casimir-Operator ist. Die Poincaré-Invariante h wird als *Helizität* bezeichnet. Sie „ersetzt“ bei masselosen Teilchen den Spinbegriff, da

diese eine verschwindende Ruhemasse besitzen und somit eine Spincharakterisierung (verstanden als innerer Drehimpuls im Ruhesystem) für sie keinen Sinn ergibt. Für die Anzahl ihrer Freiheitsgrade bei fixierten Impulseigenwerten erhält man mit $s \neq 0$ genau zwei.

3. Neben den beiden oben genannten irreduziblen Darstellungen existieren noch zwei weitere: zum einen Darstellungen $P_\mu P^\mu = 0$ mit $s \in \mathbb{R}$ und zum anderen Darstellungen der Form $P_\mu P^\mu < 0$, die Teilchen beschreiben, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen (Tachyonen). Beide Teilchenklassen sind allerdings in der Natur noch nicht gemessen worden und sind daher physikalisch irrelevant.

3.1.2 \mathbb{Z}_2 -Graduierung der Poincaré-Algebra

Auf der Suche nach Möglichkeiten, das Standardmodell in eine umfassendere Theorie zu integrieren, bieten sich in erster Linie zwei Ansatzpunkte:

Das Standardmodell ist eine Eichtheorie, die zugehörige Eichgruppe besteht dabei aus einem Produkt von 3 Symmetriegruppen (s. Einleitung). Dies mag etwas konstruiert wirken. Daher liegt zum einen der Gedanke nahe, nach einer einzigen (weitreichenderen) Symmetriegruppe zu suchen (z.B. $SU(5)$), in der die Produktgruppe des Standardmodells dann aufzugehen hätte. Dabei wäre es sinnvoll, an das zu der Gruppe gehörende erweiterte Modell die zusätzliche Forderung zu stellen, den energetischen Gültigkeitsbereich des Standardmodells zu erweitern. Eine andere Überlegung ist die folgende: Offensichtlich sind die Eigenschaften der Elementarteilchen eng mit der Poincaré-Invarianz der Theorie des Standardmodells verbunden. Daher würde eine Veränderung (z.B. Erweiterung) der Poincaré-Gruppe direkte Folgen für das Spektrum der Elementarteilchen haben. Hier stößt man aber schnell an mathematische Grenzen. So konnten S. COLEMAN und J. MANDULA im Jahre 1967 zeigen, daß sich die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe \mathcal{P} nicht mit einer weiteren Lie-Algebra \mathcal{Q} sinnvoll vereinigen läßt [29]. Dabei stellten sie fest, daß eine Erweiterung der Poincaré-Gruppe \mathcal{P} um eine nicht-triviale Lie-Gruppe \mathcal{Q} entweder zu einer trivialen Streumatrix (Einheitsmatrix) führen würde, oder daß alle Kommutatoren zwischen den Generatoren von \mathcal{P} und \mathcal{Q} verschwinden würden. Erst 1971 fanden Y. GOLFAND und E. LIKHTMAN eine Möglichkeit, den engen Rahmen des Lie-Algebra-Konzepts zu sprengen [30], indem sie neben den bekannten Kommutatorrelationen nun auch Antivertauschungsrelationen zwischen den Generatoren zuließen, was auf den Begriff der \mathbb{Z}_2 -graduerten Algebra führte. Hierzu eine kurze Erläuterung.

Eine \mathbb{Z}_2 -graduerten Algebra besteht aus einer Algebra \mathcal{G} , die in eine direkte Summe zweier Unterräume $\mathcal{G}_{(0)}$ und $\mathcal{G}_{(1)}$ zerfällt, d.h.

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_{(0)} \oplus \mathcal{G}_{(1)}, \quad (3.6)$$

und einer Verknüpfung \circ mit folgender Eigenschaft

$$x_i \circ y_j \in \mathcal{G}_{(i+j \bmod 2)} \quad \text{mit} \quad i, j \in \{0, 1\} \text{ und } x_i \in \mathcal{G}_{(i)}, y_i \in \mathcal{G}_{(j)}. \quad (3.7)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich auch \mathbb{Z}_n -graduerten Algebren aufbauen. Im Jahr 1975 zeigte sich allerdings durch eine Arbeit von R. HAAG, J.T. LOPUSZANSKI und M. SOHNIUS [31],

daß der \mathbb{Z}_2 -Graduierung eine exponentierte Stellung zukommt, da sie die einzige Graduierung ist, die sich mit der relativistischen Quantenfeldtheorie vereinbaren läßt. Es ist somit sinnvoll und ausreichend, sich auf diese einfache Graduierung zu beschränken.

Im nächsten Schritt konstruiert man nun eine graduierte \mathbb{Z}_2 -Lie-Algebra, indem man zusätzlich zu (3.7) noch zwei weitere Eigenschaften fordert:

$$\text{Supersymmetrie} : x_i \circ y_j = -(-1)^{i \cdot j} y_j \circ x_i \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi-Identität} : x_k \circ (y_l \circ z_m) (-1)^{k \cdot m} \\ + y_l \circ (z_m \circ x_k) (-1)^{k \cdot l} + z_m \circ (x_k \circ y_l) (-1)^{l \cdot m}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Man beachte, daß wegen (3.8) nur der Unterraum $\mathcal{G}_{(0)}$ wirklich eine Lie-Algebra definiert; $\mathcal{G}_{(1)}$ ist nicht einmal eine Algebra, da sie bezüglich \circ nicht abgeschlossen ist. Wir wollen daher ab sofort korrekter von der Lie-Superalgebra (kurz: SUSY-Algebra) sprechen. Damit verbirgt sich hinter dem physikalisch geprägten Begriff der *Supersymmetrie* im Prinzip das mathematische Konzept der Graduierung. Desweiteren beinhaltet die Supersymmetrieforderung (3.8) gerade die bereits oben erwähnte Erweiterung des Lie-Algebra-Konzepts durch Einführung von Antivertauschungsrelationen. Je nach Wahl von x_i und y_j ist das Produkt $x_i \circ y_j$ symmetrisch oder antisymmetrisch, und die Generatoren aus \mathcal{G} lassen sich nach gerade und ungerade Generatoren klassifizieren, die die –in den ersten beiden Fällen sogar definierenden– Eigenschaften besitzen

$$\begin{aligned} [gerade, gerade] &= gerade \\ \{ungerade, ungerade\} &= gerade \\ [gerade, ungerade] &= ungerade. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die neu hinzugekommenen, antikommutierenden Generatoren werden nun mit fermionischen Freiheitsgraden identifiziert und haben demnach Spinorcharakter. Die geraden Generatoren repräsentieren bosonische Freiheitsgrade. Da man an einer Erweiterung der Poincaré-Symmetrie interessiert ist, identifiziert man den $\mathcal{G}_{(0)}$ -Sektor als die von den zehn Generatoren P^μ und $M^{\mu\nu}$ erzeugte Poincaré-Algebra und fügt der Theorie im fermionischen Sektor nach Belieben sog. *SUSY-Generatoren* Q_a , $a = 1, \dots, 4N$, hinzu. Wir beschränken uns im folgenden auf den Fall mit $N = 1$ und interpretieren die vier SUSY-Generatoren Q_a als Majorana-Spinor (vgl. Anhang F). Man hat schließlich für die insgesamt 14 Generatoren

$$P^\mu, M^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad Q_a \quad (3.11)$$

neben den bekannten Kommutatorrelationen (3.1) der Poincaré-Algebra die zusätzlichen Vertauschungsrelationen

$$[P^\mu, Q_a] = 0 \quad (3.12)$$

$$[M^{\mu\nu}, Q_a] = -\left(\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}\right)_{ab} Q_b \quad (3.13)$$

$$\{Q_a, Q_b\} = -2(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu, \quad (3.14)$$

wobei $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ mit den Dirac-Matrizen γ^μ und C der Ladungskonjugationsoperator sind.

Am Ende dieses Abschnitts ist noch kurz auf zwei wichtige Folgerungen einzugehen, die sich direkt aus der Erweiterung der Poincaré-Gruppe ergeben. Zum einen stellt man mit Hilfe von (3.14) fest, daß die Anzahl bosonischer und fermionischer Freiheitsgrade bzw. Komponenten der Felder in supersymmetrischen Theorien stets identisch sein muß [28]. Physikalisch sinnvolle, supersymmetrische Modelle haben demnach der *Boson-Fermion-Regel* zu genügen. Zum anderen ist zu erwarten, daß die Erweiterung der Symmetriegruppe direkte Auswirkung auf das in der Theorie erfaßte Elementarteilchenspektrum haben wird. Auf diesen Zusammenhang soll im nächsten Abschnitt näher eingegangen werden.

3.2 SUSY-Teilchen und Supermultipletts

3.2.1 Irreduzible Darstellungen der SUSY-Algebra

Um das Teilchenspektrum der SUSY-Algebra zu klassifizieren, lassen wir uns von den Überlegungen im Falle der Poincaré-Gruppe in Abschnitt 3.1.1 leiten. Wie wir uns erinnern, war dort die Kenntnis der beiden Casimir-Operatoren wesentlich. Ihre Eigenwerte lieferten uns die irreduziblen Darstellungen der zugehörigen Lie-Algebra. Im Fall der SUSY-Algebra bleibt P^2 ein Casimir-Operator, das Quadrat des Pauli-Lubanski-Vektors W_μ dagegen nicht mehr, da wegen (3.13)

$$[W^2, Q_a] \neq 0 \quad (3.15)$$

gilt. Dies hat weitreichende Konsequenzen, da die irreduziblen Darstellungen der SUSY-Algebra nunmehr Teilchen mit unterschiedlichem Spin enthalten können.

Als zweiten Casimir-Operator findet man den Lorentzskalar

$$C^2 = C_{\mu\nu}C^{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

der über die Beziehungen

$$C_{\mu\nu} = Y_\mu P_\nu - Y_\nu P_\mu \quad (3.17)$$

$$Y_\mu = W_\mu + \frac{1}{4}X_\mu \quad (3.18)$$

$$X_\mu = \frac{1}{2}\bar{Q}\gamma_\mu\gamma_5Q \quad (3.19)$$

gegeben ist. Dabei sind die Q 's in (3.19) als sog. Weyl-Spinoren zu lesen.

Es läßt sich zeigen, daß der Vierervektor Y_μ aus (3.19) die relativistische Drehimpulsalgebra

$$[Y_\mu, Y_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\rho Y^\sigma \quad (3.20)$$

erfüllt, die sich im Ruhesystem auf die Form

$$[Y_i, Y_j] = im\epsilon_{ijk}Y_k \quad (3.21)$$

reduziert, wobei m^2 den Eigenwert des Casimir-Operators P^2 bezeichnet. $\frac{1}{m}\vec{Y}$ stellt somit eine Verallgemeinerung des Drehimpulses dar (*Superspin*), und seine Eigenwerte ergeben sich zu

$$(\vec{Y}/m)^2 = y(y+1) \quad \text{mit} \quad y = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (3.22)$$

Der Casimir-Operator C^2 ist im Ruhesystem mit dem Superspin über $C^2 = -2m^2 Y^2$ verknüpft, und sein Eigenwertspektrum ergibt sich demnach zu

$$C^2 = -2m^4 y(y+1) \quad \text{mit} \quad 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad . \quad (3.23)$$

Im massiven Fall wird somit jede irreduzible Darstellung der SUSY-Algebra durch das Paar (m, y) charakterisiert, wobei man die Zustände innerhalb eines solchen Supermultipletts zum einen nach

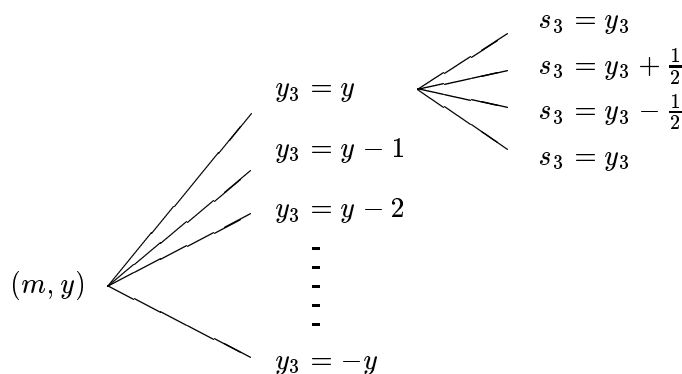
- den Eigenwerten y_3 der z -Komponente des Superspins $\frac{1}{m}\vec{Y}$ mit $-y \leq y_3 \leq y$,

und zum anderen wegen $[W_3, C_{\mu\nu}C^{\mu\nu}] = [W_3, Y_3] = 0$ nach

- den Eigenwerten s_3 der z -Komponente des Spins $\frac{1}{m}\vec{W}$ mit $s_3 \in \{y_3, y_3 + \frac{1}{2}, y_3 - \frac{1}{2}\}$ und nochmals zweifach entartetem $s_3 = y_3$,

klassifiziert.

Graphisch stellt sich das wie folgt dar:



Eine weitere Klassifizierung erfolgt –genau wie bei der Poincaré-Algebra auch– durch

- den kontinuierlichen Dreierimpuls \vec{p} .

Wie bei der Poincaré-Algebra ist die Darstellung also unendlich-dimensional.

Im massenlosen Fall, $P^2 = 0$ und $W^2 = 0$, tritt die Helizität h wieder an die Stelle der z -Komponente des Spins s , und man erhält zwei Zustände, die mit \underline{h} und $\bar{h} = \underline{h} + \frac{1}{2}$ bezeichnet sind. Für CPT -invariante Theorien hat man den obigen Zuständen zwei weitere hinzuzufügen. Für ihre Helizitäten ergibt sich dann $\underline{h}_{CPT} = -\underline{h}$ und $\bar{h}_{CPT} = -\bar{h} = -\underline{h} - \frac{1}{2}$.

3.2.2 Chirales und Vektor-Supermultiplett

In diesem Unterabschnitt sei kurz auf die zwei einfachsten Darstellungen der SUSY-Algebra eingegangen.

Chirales Supermultiplett

Für $y = 0$ erhält man das *chirale Supermultiplett*. Im massiven Sektor besteht es aus drei Teilchen:

- einem Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (Dublett mit $s_3 = \pm\frac{1}{2}$)
- einem skalaren Teilchen (Boson mit Spin 0)
- einem pseudoskalaren Teilchen (Boson mit Spin 0) .

Mit Hilfe des (massiven) chiralen Supermultipletts lassen sich beispielsweise Quarks und Leptonen sowie ihre Superpartner Squarks und Sleptonen beschreiben. Darüber hinaus ordnet man die Higgs-Teilchen und ihre SUSY-Partner dieser Darstellung zu. Das chirale Supermultiplett ist im Wess-Zumino-Modell realisiert, auf das später noch eingegangen wird.

Das massenlose chirale Supermultiplett gleicht seinem massiven Analogon. Es beinhaltet ein skalares Teilchen ($\underline{h} = 0$) und einen Weyl-Spinor ($\bar{h} = 1/2$). Für eine Lorentz-invariante Theorie hat man jetzt noch die beiden durch *CPT*-Transformation zu bestimmenden Partner zu berücksichtigen. Man erhält somit insgesamt

- ein Majorana-Spinor-Teilchen ($\bar{h} = \pm 1/2$)

und

- ein komplexwertiges, skalares Teilchen ($\underline{h} = 0$) .

Vektor-Supermultiplett

Sollen auch Eichbosonen (z.B. die Gluonen der QCD, oder die Vektorbosonen des elektroschwachen Sektors) in die Theorie eingebaut werden, so hat man Darstellungen mit $y = \frac{1}{2}$ zu betrachten. Das sich daraus ableitende *Vektor-Supermultiplett* enthält im massiven Fall:

- 2 Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (jeweils ein Dublett)
- ein Vektorteilchen (Boson Spin 1 / Triplett)
- ein pseudoskalares Teilchen (Boson Spin 0) .

Das massenlose Vektor-Supermultiplett mit $\underline{h} = 1/2$ beinhaltet zuzüglich der *CPT*-Partner

- ein (massenloses) vektorielles Teilchen ($\bar{h} = \pm 1$)

und als fermionischen Partner der Eichbosonen

- ein Majorana-Spinor-Teilchen ($\underline{h} = \pm\frac{1}{2}$) .

3.3 Superfeldformalismus

3.3.1 Superraum, Superfelder und Poincaré-Supergruppe

In der vierdimensionalen Formulierung der Raum-Zeit wirken Poincaré-Transformationen auf Felder des vierdimensionalen Minkowski-Raumes, wobei ein allgemeines Element der Poincaré-Gruppe aus Drehungen und Boosts besteht und die durch die Generatoren $M^{\rho\sigma}$, P^μ parametrisierte Form

$$(\Lambda(w), a) = \exp \left\{ i \left(-\frac{1}{2} w_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma} - a_\mu P^\mu \right) \right\} \quad (3.24)$$

hat. Im Falle der supersymmetrischen Algebra hat man ausgehend von ihren 14 Generatoren $\{P^\mu, M^{\mu\nu}, Q, \bar{Q}\}$ sowohl die Gruppe ihrer Symmetrietransformationen als auch einen Darstellungsraum, auf den diese Elemente anschließend wirken sollen, zu konstruieren. Dabei liefern die SUSY-Generatoren Q und \bar{Q} analog zu den Generatoren P^μ , welche via $\exp\{-ia_\mu P^\mu\}$ Verschiebungen um einen konstanten Vierervektor a^μ im Minkowskiraum erzeugen, eine Verschiebung um die Weyl-spinoriellen, Grassmann-wertigen Parameter ϵ und $\bar{\epsilon}$ gemäß

$$\exp \{ i (\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}) \} \quad (\text{SUSY-Translation}). \quad (3.25)$$

Man erhält letztendlich als supersymmetrische Erweiterung der Poincaré-Gruppe die *Poincaré-Supergruppe*. Ein allgemeines Gruppenelement (ohne Berücksichtigung von Lorentz-Boosts) hat dann die Form¹

$$G(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = \exp \{ i (-a^\mu P_\mu + \epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q}) \}. \quad (3.29)$$

Der zugehörige Darstellungsraum wird *Superraum* genannt und ist um zwei Grassmannwertige, fermionische Koordinaten θ und $\bar{\theta}$ erweitert, wobei θ und $\bar{\theta}$ als Weyl-Spinoren aufzufassen sind. Er beinhaltet nicht nur die im Minkowski-Raum definierten Felder $\Phi(x)$, sondern auch solche, die zusätzlich von den neuen Koordinaten abhängen können. Diese heißen *Superfelder* und sind somit im allgemeinen von der Form $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$. Entwickelt man ein Superfeld in eine Potenzreihe, so bricht die Reihe wegen der Grassmann-Eigenschaft $\{\theta_i, \theta_j\} = 0$ der θ und $\bar{\theta}$ nach endlich vielen Termen ab:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\xi}(x) + (\theta\theta)M(x)$$

¹Da $(\epsilon Q + \bar{\epsilon} \bar{Q})$ hermitesch ist, definiert die SUSY-Translation eine unitäre Transformation. Man erhält eine unitäre Darstellung im Superraum $(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ durch Anwenden eines Gruppenelements $G(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ auf ein Superfeld $\Phi(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$. Unter Ausnutzung der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel kann man dann die gesuchten Operatoren für die SUSY-Algebra

$$P_\mu = -i\partial_\mu \quad (3.26)$$

$$iQ = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \quad (3.27)$$

$$i\bar{Q} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\tilde{\sigma}^\mu \theta \partial_\mu \quad (3.28)$$

durch Koeffizientenvergleich identifizieren, wobei $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ und $\tilde{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$ mit den Paulimatrizen σ^i bezeichnen.

$$\begin{aligned}
& + (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) \\
& + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\tag{3.31}$$

Die Felder $\phi, \bar{\xi}, M, N, \dots$ auf der rechten Seite werden *Komponentenfelder* genannt. Dabei enthalten die Superfelder die im vorherigen Abschnitt angesprochenen Supermultipletts in Form eben dieser Komponentenfelder. Ihr Verhalten unter Lorentztransformationen ergibt sich aus der Forderung, daß das Superfeld Φ ein Lorentzskalar ist. Da Linearkombinationen von Superfeldern wieder Superfelder sind, ist der durch sie gegebene Darstellungsraum linear. Er ist allerdings hochgradig reduzibel. Um zu irreduziblen Darstellungen der Superfeldern zu gelangen, fordert man deren Invarianz gegenüber SUSY-Transformationen. Die beiden wichtigsten Typen von Feldern sind in diesem Zusammenhang

- das skalare Superfeld
- das Vektor-Superfeld.

Mit Hilfe des Erstgenannten werden Materiefelder dargestellt, Vektor-Superfelder dienen dagegen zur Beschreibung von Eichfeldern.

3.3.2 Skalare Superfelder

Mit Hilfe der Einführung von kovarianten Ableitungen der Form

$$D_A \equiv \partial_A + i(\sigma^\mu\bar{\theta})_A \partial_\mu \tag{3.32}$$

$$\bar{D}_{\dot{A}} \equiv -\bar{\partial}_{\dot{A}} + i(\bar{\sigma}^\mu\theta)_{\dot{A}} \partial_\mu \tag{3.33}$$

wird

- ein *chirales* Superfeld $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ durch die Forderung $\bar{D}_{\dot{A}}\Phi = 0$ und
- ein *antichirales* Superfeld $\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})$ durch die Bedingung $D_A\Phi^\dagger = 0$

definiert [28]. Man bezeichnet beide Feldtypen als skalare Superfelder. Durch Einführung der komplexen Raumkoordinate $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ erhält ein allgemeines chirales Superfeld $\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(y, \theta)$ eine besonders einfache Form, da sich die Taylorreihe (3.30) auf

$$\Phi(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y) \tag{3.34}$$

mit dem Skalarprodukt $\theta\theta = \theta^A\theta_A = \theta^1\theta_1 + \theta^2\theta_2$ reduziert [28]. Das chirale Superfeld beinhaltet damit:

- 1 komplexes Skalarfeld ϕ
- 1 (linkshändiges) Weyl-Spinorfeld ψ
- 1 komplexes Skalarfeld F als Hilfsfeld.

Da das Hilfsfeld durch Wahl einer geeigneten Darstellung (*on-shell*-Darstellung) redundant wird, kann das chirale Superfeld dem chiralen Multiplett zugeordnet werden. Faßt man den Weyl-Spinor ψ als 4-komponentigen Majorana-Spinor auf, so ergibt sich insbesondere das weiter unten noch zu erwähnende chirale Supermultiplett des Wess-Zumino-Modells. Analoge Überlegungen lassen sich auch für das antichirale Superfeld anstellen. Man führt ähnlich wie im chiralen Fall die komplexe Raumkoordinate

$$\bar{y}^\mu \equiv x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} = (y^\mu)^* \quad (3.35)$$

ein und erhält für das allgemeinste antichirale Superfeld den Term

$$\Phi^\dagger(\bar{y}, \bar{\theta}) = \phi^*(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(\bar{y}) + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^*(\bar{y}). \quad (3.36)$$

An dieser Stelle sei kurz angemerkt, daß die Formeln (3.34) und (3.36) in analoger Weise auch für einen reell gewählten Superraum $(x, \theta, \bar{\theta})$ angegeben werden können (vgl. [28]). Die Anzahl der Terme erhöht sich dabei um 3 auf 6, die Anzahl der Komponentenfelder (φ, Ψ, F) bleibt aber gleich.

Abschließend sei noch hinzugefügt, daß man aus Produkten von (anti-)chiralen Superfeldern Φ wieder (anti-)chirale Superfelder erhält. Erst das Produkt aus einem chiralen und antichiralen Superfeld liefert eine qualitativ neue Form von Superfeldern, die *Vektor-Superfelder*. Hierauf gehe ich im folgenden Unterabschnitt ein.

3.3.3 Vektor-Superfelder

Die SUSY-kovariante Bedingung für ein Vektor-Superfeld lautet

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}). \quad (3.37)$$

Wie oben bereits angemerkt, lassen sich Vektor-Superfelder aus chiralen und antichiralen Superfelder konstruieren. Als mögliche Beispiele seien hier

$$\Phi^\dagger\Phi, \quad (\Phi + \Phi^\dagger) \quad \text{sowie} \quad i(\Phi - \Phi^\dagger). \quad (3.38)$$

genannt.

Eine mögliche Zerlegung in Komponentenfelder ist dabei [28]

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) &= f + i\theta\phi - i\bar{\theta}\bar{\phi} + \frac{i}{2}(\theta\theta)M - \frac{i}{2}(\bar{\theta}\bar{\theta})M^* \\ &+ (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + i(\theta\theta)\bar{\theta}\left(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi\right) \\ &- i(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\left(\lambda + \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\phi}\right) + \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\left(d - \frac{1}{2}\square f\right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Das Vektor-Superfeld besitzt als fermionische Freiheitsgrade zwei Weyl-Spinorfelder ϕ und λ , sowie als bosonischen Anteil zwei reelle Felder f und d , ein komplexes Feld M und schließlich ein reelles Vektorfeld A_μ .

Supersymmetrische Eichtransformation

Betrachtet sei analog zur nicht-supersymmetrischen Eichtheorie eine abelsche Eichtransformation folgender Art

$$V \longrightarrow V' = V + (\Phi + \Phi^\dagger), \quad (3.40)$$

wobei $\Phi = (\varphi, \psi, F)$ als chirales Superfeld zu lesen ist. Es zeigt sich, daß die Felder λ und d invariant unter obiger Transformation bleiben und sich das reelle Vektorfeld A_μ wie in der lokalen Eichtheorie gemäß

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu - 2\partial_\mu \Lambda \quad \text{mit} \quad \Lambda = \text{Im } \varphi \quad (3.41)$$

verhält. Durch geschickte Wahl des chiralen Superfeldes Φ lassen sich die Komponentenfelder f, ϕ und M in (3.39) wegeichen. Die Eichfixierung hat dabei die Gestalt

$$2 \text{Re } \phi = \phi + \phi^* = -f, \quad (3.42)$$

$$\psi = -\frac{i}{\sqrt{2}}\phi \quad \text{und} \quad (3.43)$$

$$F = -\frac{i}{2}M \quad (3.44)$$

und wird auch als *Wess-Zumino-Eichung* bezeichnet. Das Vektor-Superfeld ergibt sich inklusive der konventionellen Eichung $A_0 = 0$ zu

$$V_{\text{WZ}}(x, \theta, \bar{\theta}) = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) A_\mu + i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}) - i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\lambda) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d. \quad (3.45)$$

Sein Teilcheninhalt ist:

- 1 reelles (bosonisches) Vektorfeld A_μ
- 1 komplexes Weyl-Spinorfeld λ
- 1 reelles Skalarfeld d als Hilfsfeld.

Der Vergleich mit dem in Unterabschnitt 3.2.2 beschriebenen Vektor-Supermultiplett zeigt, daß die Komponentenfelder des Vektor-Superfeldes V_{WZ} gerade einem solchen Supermultiplett zugeordnet werden können. Das komplexe Weyl-Spinorfeld λ ist hierbei der SUSY-Partner des Eichfeldes A_μ .

3.4 Supersymmetrische Theorien

3.4.1 Konstruktion supersymmetrischer Lagrangedichten

Jetzt sind genügend Voraussetzungen geschaffen, um supersymmetrische Lagrangedichten konstruieren zu können. Die Grundidee dazu ist bereits aus der gewöhnlichen Feldtheorie bekannt. Man sucht demnach Lagrangedichten, so daß sich das Wirkungsfunktional

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad (3.46)$$

unter den physikalisch sinnvollen Transformationen (hier SUSY-Transformationen) nicht ändert, d.h. $\delta S = 0$ ist. Dabei lassen wir uns von folgender Überlegung leiten:

Betrachtet man im Falle des skalaren Superfeldes nur die F - bzw. F^* -Komponente bzw. im Falle von Vektor-Superfeldern in der Wess-Zumino-Eichung ausschließlich die d -Feldkomponente, so stellt man fest, daß diese sich wie Viererdivergenzen transformieren. Integriert man nun über die gesamte Raum-Zeit, so liefert das Integral über die Viererdivergenz nach dessen Transformation in Oberflächenterme mittels des Gaußschen Satzes gerade Null. Supersymmetrische Lagrangedichten können daher in der Form

$$\mathcal{L} = (\text{Superfelder})|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\text{-Komponente}} + (\text{chirale Superfelder})|_{\theta\theta\text{-Komponente}} \quad (3.47)$$

angegeben werden. Um zu einer reellen Lagrangedichte zu gelangen, addiert man zu (3.47) stets alle hermitesch konjugierten Terme hinzu. Diese seien im folgenden mit *h.c.* abgekürzt. Darüberhinaus ist darauf zu achten, daß im Falle von chiralen Superfeldern noch von der über Gleichung (3.34) eingeführten komplexen Koordinaten y zur reellen Koordinaten x überzugehen ist.

3.4.2 SUSY-Lagrangedichten aus chiralen Superfeldern

Im allgemeinen setzt sich eine Lagrangedichte \mathcal{L} aus drei Termen zusammen

- einem kinetischen Term \mathcal{L}_{kin}
- einem Masseterm \mathcal{L}_{m}
- einem Wechselwirkungsterm \mathcal{L}_{ww} .

Will man jetzt eine Lagrangedichte aus chiralen Superfeldern $\Phi(\phi, \psi, F)$ zusammenbauen, so bekommt sie die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi(x, \theta, \bar{\theta})|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ & - \frac{m}{2} \Phi^2(y, \theta)|_{\theta\theta} + h.c. \\ & - \frac{g}{3} \Phi^3(y, \theta)|_{\theta\theta} + h.c. , \end{aligned} \quad (3.48)$$

wobei m die Masse, g die Kopplungskonstante und *h.c.* den korrespondierenden hermitesch konjugierten Term meint. Multipliziert man die Produkte der chiralen Superfelder aus, so ergibt sich für die Lagrangedichte ausgedrückt durch die Komponentenfelder

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) \\ & + \frac{m}{2} (\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + g (\varphi\psi\psi + \varphi^* \bar{\psi}\bar{\psi}) \\ & + F^* F - (m\varphi + g\varphi^2) F - (m\varphi^* + g\varphi^{*2}) F^* . \end{aligned} \quad (3.49)$$

Diese wird auch als *off-shell*-Lagrangedichte bezeichnet. Zu einer weiteren Darstellung der Lagrangedichte gelangt man, indem man das Hilfsfeld F aus der Lagrangedichte eliminiert. Dazu bestimmt man mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung für

F zu $F = m\varphi^* + g\varphi^{*2}$. Sie ist demnach rein algebraisch, d.h. sie enthält keine Ableitung, und man kann in der untersten Zeile von (3.49) das Hilfsfeld F vollständig ersetzen. So ergibt sich die *on-shell*-Lagrangedichte zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & (\partial_\mu \varphi^*) (\partial^\mu \varphi) - m^2 |\varphi|^2 \\ & - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) + \frac{m}{2} (\psi \psi + \bar{\psi} \bar{\psi}) \\ & + g (\varphi \psi \psi + \varphi^* \bar{\psi} \bar{\psi}) - mg |\varphi|^2 (\varphi + \varphi^*) - g^2 |\varphi|^4. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Durch φ und ψ werden die Superpartner aus dem chiralen Supermultiplett beschrieben. Die ersten beiden Zeilen von (3.50) beinhalten die freie Bewegung des bosonischen bzw. fermionischen Feldes φ bzw. ψ mit gleicher Masse m . In der unteren Zeile steht der Wechselwirkungsanteil.

3.4.3 Wess-Zumino-Modell

Das erste in sich geschlossene supersymmetrische Modell wurde Mitte der siebziger Jahre von J. WESS und B. ZUMINO entwickelt und ist unter dem Namen Wess-Zumino-Modell in der Literatur bekannt [32]. Seine Lagrangedichte ist von der Gestalt (3.50). Man findet sie allerdings oftmals auch in einer anderen Formulierung. Die Umformung geschieht in drei Schritten: Zunächst spaltet man das komplexe Feld $\varphi(x)$ in zwei reelle Felder $A(x)$ und $B(x)$ gemäß

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - iB) \quad (3.51)$$

auf und geht gleichzeitig zu Majoranaspinoren

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\Psi} = (\psi, \bar{\psi}) \quad (3.52)$$

über und wählt als neue Kopplungskonstante $G = \frac{g}{\sqrt{2}}$. Man erhält so die Lagrangedichte des Wess-Zumino-Modells zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu A) (\partial^\mu A) - m^2 A^2] + \frac{1}{2} [(\partial_\mu B) (\partial^\mu B) - m^2 B^2] \\ & - \frac{1}{2} \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi + G \bar{\Psi} (A + i\gamma_5 B) \Psi \\ & - mGA (A^2 + B^2) - \frac{G^2}{2} (A^2 + B^2)^2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Sie beinhaltet:

- ein reelles skalares Feld $A(x)$ mit $A = A^*$
- ein reelles pseudoskalares Feld $B(x)$ mit $B = B^*$
- ein Majorana-Spinorfeld $\Psi(x)$ mit $\Psi = C\bar{\Psi}^T$.

Die bosonischen Felder A und B beschreiben Teilchen mit Spin 0, das fermionische Majoranaspinorfeld Ψ beschreibt Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Dabei ist zu beachten, daß im Unterschied zur kanonischen Feldtheorie alle Felder die gleiche Masse besitzen. Eine graphische Darstellung des zugehörigen chiralen Supermultipletts ergibt

$$(m, y = 0) \longrightarrow (y_3 = 0) \begin{cases} s_3 = 0 & \text{skalares Teilchen} \\ s_3 = +\frac{1}{2} \\ s_3 = -\frac{1}{2} \\ s_3 = 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} s_3 = 0 \\ s_3 = +\frac{1}{2} \\ s_3 = -\frac{1}{2} \\ s_3 = 0 \end{cases}} \right\} \text{Spin-}\frac{1}{2}\text{-Teilchen} \quad \text{pseudoskalares Teilchen} .$$

3.4.4 Supersymmetrische Eichtheorie

Es soll hier das supersymmetrische Analogon zur konventionellen, nicht-abelschen Eichtheorie konstruiert werden. Ausgangspunkt sind hierbei die nicht-abelschen Eichtransformationen für die Superfelder. Sie sind gewöhnlich durch

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow e^{-i\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (3.54)$$

$$\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) e^{i\Lambda^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})} \quad (3.55)$$

dargestellt. Man führt nun ein Eichfeld in Form eines Vektor-Superfeldes $V = V(x, \theta, \bar{\theta})$ in die Theorie ein. Dazu verallgemeinert man zunächst die abelsche Eichtransformation (3.40) zu

$$e^V \longrightarrow e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda} , \quad (3.56)$$

wobei $V = T^a V_a$ zur adjungierten Darstellung der Eichgruppe gehört, und kann dann eichinvariante Terme der Form

$$\mathcal{L} = \left(\Phi^\dagger e^V \Phi \right) |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \quad (3.57)$$

zur Lagrangedichte hinzufügen. Um dem Eichfeld wie im Yang-Mills Fall eine Dynamik zu verleihen, definiert man die supersymmetrische Feldstärke im nicht-abelschen Fall gemäß

$$W_A = -\frac{1}{4} (\bar{D}\bar{D}) e^{-V} D_A e^V . \quad (3.58)$$

Diese verhält sich unter Eichtransformation wie

$$W_A \longrightarrow e^{-i\Lambda} W_A e^{i\Lambda} . \quad (3.59)$$

Da W_A ein chirales Superfeld ist, läßt sich aus ihm eine eich- und SUSY-invariante, supersymmetrische Lagrangedichte der Gestalt

$$\mathcal{L} = \text{Tr} \{ (W^A W_A) |_{\theta\theta} \} + h.c. \quad (3.60)$$

hinschreiben. Die allgemeinste Form der Lagrangedichte (inkl. der Materiefelder) ergibt sich somit zu [25]

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4g^2} \text{Tr} \left\{ (W^A W_A) |_{\theta\theta} + (\bar{W}_A \bar{W}^A) |_{\theta\theta} \right\} \\ &+ \left(\Phi^\dagger e^V \Phi \right) |_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2} m_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) |_{\theta\theta} + h.c. \right] , \end{aligned} \quad (3.61)$$

da aufgrund von Renormierbarkeitsargumenten keine zusätzlichen Kopplungen der Form $\Phi_i \cdot \dots \cdot \Phi_l$ vorkommen dürfen.

3.4.5 $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie

Die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie ist die einfachste, nicht-abelsche, supersymmetrische Eichtheorie. Wir benötigen für sie keine Materiefelder, so daß sich (3.61) auf

$$\mathcal{L} = \text{Tr} \{ (W^A W_A) |_{\theta\theta} \} + h.c. \quad (3.62)$$

reduziert. Drückt man diese Lagrangedichte durch ihre Komponentenfelder aus, so ergibt sich nach Übergang zu einer euklidischen Formulierung inklusive Wess-Zumino-Eichung mit dem gewöhnlichen nicht-abelschen Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (3.63)$$

und der kovarianten Ableitung in der adjungierten Darstellung

$$\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda} = \partial_\mu \bar{\lambda} + [A_\mu, \bar{\lambda}] \quad (3.64)$$

die obige Lagrangedichte zu [33]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \frac{1}{g^2} \text{Tr} (\bar{\lambda} \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda) - \text{Tr}(dd), \quad (3.65)$$

wobei λ und $\bar{\lambda}$ Spinoren und d ein Hilfsfeld sind. Da dieses keine kinetischen Anteile besitzt, läßt es sich durch Gauß-Integration aus der Lagrangedichte entfernen. Man geht dabei von der off-shell- zur on-shell-Darstellung über. Mit der Zerlegung

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^a T^a \\ A_\mu &= -ig A_\mu^a T^a \\ F_{\mu\nu} &= -ig F_{\mu\nu}^a T^a \end{aligned} \quad (3.66)$$

und der Normierung

$$\text{Tr} T^a T^b = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (3.67)$$

erhält man als Lagrangedichte der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie im euklidischen, vierdimensionalen Kontinuum

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a(x). \quad (3.68)$$

Formal ähnelt diese Lagrangedichte, bis auf einen Faktor $\frac{1}{2}$ vor dem Fermionenteil, derjenigen der QCD. Man beachte aber, daß die Fermionen λ und $\bar{\lambda}$ nicht Dirac-Spinoren, sondern Majorana-Spinoren in der adjungierten Darstellung sind.

Zum Abschluß dieses Unterabschnitts sei noch kurz auf die Anzahl der Freiheitsgrade in der SUSY-Yang-Mills Wirkung eingegangen. In der off-shell-Formulierung besitzt das Spinorfeld vier fermionische Freiheitsgrade und das Eichfeld nur drei bosonische Freiheitsgrade. Das skalare (bosonische) Hilfsfeld d sichert also gerade die Einhaltung der Boson-Fermion-Regel. Im on-shell-Darstellung haben Spinor- und Eichfeld je 2 Freiheitsgrade. Das Hilfsfeld wird daher nicht weiter benötigt.

Kapitel 4

Grundlagen der Gruppentheorie II

Bevor ich unter Einbringen der Ergebnisse aus Kapitel 2 Darstellungen der kubischen Gruppe über Gitter-Operatoren der SUSY-Yang-Mills-Theorie konstruieren und untersuchen werde, sind noch einige gruppentheoretische Vorbereitungen bereitzustellen. Es wird sich nämlich zeigen, daß einige der betrachteten Operatoren einen halbzahligen Spin aufweisen, so daß die zugrunde liegende diskrete Symmetriegruppe nunmehr nicht die kubische Gruppe sein kann, sondern deren sog. doppelte Überlagerung, d.h. die Gruppe ${}^2\text{O}$. Sie wird daher hier eingebracht. Desweiteren soll das Konzept der direkten (endlichen) Produktgruppe vorgestellt und insbesondere deren Darstellungstheorie studiert werden. Inhalt, Form und Numerierung wichtiger Aussagen folgen dabei dem Einführungskapitel. Für eine eingehendere Darstellung der Inhalte dieses Kapitels sei noch einmal auf die im vorher genannten Kapitel angegebene umfangreiche Literatur über Gruppen- und Darstellungstheorie verwiesen.

4.1 Produktgruppen und ihre Darstellungen

4.1.1 Direkte, endliche Produktgruppen

Es ist sinnvoll, mit folgendem Theorem zu beginnen:

Theorem und Definition 26 Seien G_1 und G_2 zwei beliebige, endliche Gruppen und e_1 und e_2 ihre neutralen Elemente. Betrachtet man Paare (g_1, g_2) mit $g_1 \in G_1$ und $g_2 \in G_2$ und definiert die Verknüpfung zweier Paare (g_1, g_2) und (g'_1, g'_2) durch die Vorschrift

$$(g_1, g_2) (g'_1, g'_2) = (g_1 g'_1, g_2 g'_2) \quad (4.1)$$

für alle $g_1, g'_1 \in G_1$ und $g_2, g'_2 \in G_2$, so bildet die Menge aller Paare (g_1, g_2) eine Gruppe bzgl. der obigen Verknüpfung.

Diese Gruppe bezeichnet man mit $G_1 \otimes G_2$ und nennt sie das *direkte Produkt der Gruppen G_1 und G_2* .

Beweis: Es sind lediglich die Gruppenaxiome nachzuprüfen.

Bemerkung 27 Sind G_1 und G_2 (endliche) Gruppen der Ordnung n_{G_1} bzw. n_{G_2} , so ist die Produktgruppe $G_1 \otimes G_2$ eine endliche Gruppe der Ordnung $n_{G_1} \cdot n_{G_2}$.

Für die Produktgruppe $G_1 \otimes G_2$ ergeben sich folgende Eigenschaften:

- (i) Sie besitzt zwei Untergruppen H_1 und H_2 , bestehend aus den Elementen (g_1, e_2) mit $g_1 \in G_1$ bzw. (e_1, g_2) mit $g_2 \in G_2$, die beide isomorph¹ zu den Gruppen G_1 bzw. G_2 sind.
- (ii) Beide Untergruppen haben nur das Element (e_1, e_2) gemeinsam, d.h. $H_1 \cap H_2 = \{(e_1, e_2)\}$, und
- (iii) jedes Element der einen Untergruppe kommutiert mit jedem Element der anderen

$$(g_1, e_2)(e_1, g_2) = (e_1, g_2)(g_1, e_2) \quad (4.2)$$

für alle $g_1, e_1 \in G_1$ und $g_2, e_2 \in G_2$.

Andererseits gilt nach (4.1) und Gruppenaxiom E₂ aus Definition 1

$$(g_1, e_2)(e_1, g_2) = (g_1, g_2) , \quad (4.3)$$

so daß

- (iv) jedes Element von $G_1 \otimes G_2$ als Produkt von je einem Element der beiden Untergruppen H_1 und H_2 geschrieben werden kann.

Diese vier Eigenschaften, auf deren Nachweise hier verzichtet wird, geben Anlaß zu einer Umformulierung der Definition 26.

Definition 28 Eine (endliche) Gruppe G' heißt *direkte (endliche) Produktgruppe*, falls Gruppen G_1 und G_2 existieren, so daß G' isomorph zur Gruppe $G_1 \otimes G_2$ ist.

Nach Definition 28 müssen die Elemente von direkten Produktgruppen nicht mehr zwangsläufig in Form von Paaren auftreten. Das folgende Theorem gibt ein Kriterium an die Hand, mit der direkte Produktgruppen identifiziert werden können. Genauer ist es die Umkehrung der obigen Aussage.

Theorem 29 Sei G' eine (endliche) Gruppe, die zwei Untergruppen H'_1 und H'_2 mit den folgenden Eigenschaften besitze:

- (i) Alle Elemente von H'_1 vertauschen mit allen Elementen von H'_2 ,
- (ii) H'_1 und H'_2 haben nur das neutrale Element gemeinsam, und
- (iii) jedes Element von G' kann als Produkt von je einem Element aus H'_1 und H'_2 geschrieben werden.

¹Man sagt zwei Gruppen G und G' sind isomorph zueinander ($G \cong G'$), wenn ein bijektiver Gruppenhomomorphismus Φ im Sinne von Definition 8 existiert. Die Isomorphismen lauten hier $\Phi((g_1, e_2)) = g_1$ bzw. $\Phi((e_1, g_2)) = g_2$.

Dann ist G' eine direkte Produktgruppe und isomorph zu $H_1 \otimes H_2$.

Beweis: Der Beweis findet sich z.B. in [1].

Beispiel: In Kapitel 0 haben wir die volle kubische Gruppe O_h kennengelernt. Sie besteht aus 48 Elementen, 24 von ihnen können als eindeutig definierte Rotationen eines dreidimensionalen Würfels aufgefaßt werden, diese bilden eine eigene Gruppe, die kubische Gruppe O . Die 24 restlichen Elemente der Gruppe O_h sind Produkte aus Elementen von O mit dem Inversionsoperator I . Da dieser mit allen Drehungen der kubischen Gruppe vertauscht, ist die Gruppe O_h isomorph zur direkten Produktgruppe $O \otimes \{e, I\}$, wie dort bereits in einer Fußnote steht.

Am Ende dieses Abschnitts sei darauf verwiesen, daß wir in Hinblick auf das nachfolgende Kapitel insbesondere an dem Fall $G_1 \equiv G_2 =: G$ (bzw. besser $G_1 \cong G_2 \cong G$) interessiert sind. Dabei beachte man, daß die resultierende direkte Produktgruppe $G \otimes G$ neben den beiden Untergruppen $H_1 = \{(g, e)\}$ und $H_2 = \{(e, g)\}$ eine weitere sog. *diagonale Untergruppe* besitzt, die aus den Paaren (g, g) mit $g \in G$ besteht und ebenfalls (wie H_1 und H_2) isomorph zur Gruppe G ist.

4.1.2 Direkte Produktdarstellung

Es ist zunächst hilfreich, kurz auf das *direkte Produkt* $A \otimes B$ einer $m \times m$ Matrix mit einer $n \times n$ -Matrix einzugehen. Die Produkt-Matrix $A \otimes B$ ist eine $mn \times mn$ Matrix, deren Elemente Doppelindizes für Zeilen und Spalten tragen. Sie sind durch

$$(A \otimes B)_{ik,jl} = A_{ij}B_{kl} \quad (4.4)$$

mit $1 \leq i, j \leq m$; $1 \leq k, l \leq n$ definiert.

Durch Vergleich der einzelnen Matrixelemente zeigt man, daß für zwei $m \times m$ Matrizen A und A' und zwei $n \times n$ Matrizen B und B' gilt

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB') \quad (4.5)$$

Als Folgerung notieren wir, daß $A \otimes B$ unitär ist, falls A und B es sind.

Beweis: Wegen Gleichung (4.4) ist $(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$, so daß zusammen mit (4.5) letztendlich $(A \otimes B)(A \otimes B)^\dagger = (AA^\dagger) \otimes (BB^\dagger) = \mathbf{1}_m \otimes \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_{mn}$ gilt.

Erinnern wir uns noch zusätzlich daran, daß eine endlich-dimensionale Darstellung \mathcal{R} bereits durch die Angabe ihrer Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}}(g)$, $g \in G$, eindeutig bestimmt ist, so haben wir nun alle Vorbereitungen getroffen, um die *direkte Produktdarstellung zweier Darstellungen* anzugeben. Dabei wollen wir uns auf unitäre, irreduzible Darstellungen beschränken, wobei darauf hingewiesen wird, daß auf die Irreduzibilitätsforderung im nächsten Theorem auch verzichtet werden kann.

Theorem und Definition 30 Seien zwei unitäre, irreduzible Darstellungen \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν der Dimension d_μ und d_ν einer Gruppe G durch ihre Darstellungsmatrizen $D^\mu(g)$ und $D^\nu(g)$ gegeben. Dann legen die Matrizen

$$D^{\mu \otimes \nu}(g) := D^\mu(g) \otimes D^\nu(g) \quad (4.6)$$

für alle $g \in G$ in eindeutiger Weise eine unitäre Darstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ der Dimension $d_\mu \cdot d_\nu$ fest. Für den Charakter $\chi^{\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu}(g)$ der Darstellung gilt dabei

$$\chi^{\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu}(g) = \chi^{\mathcal{R}^\mu}(g) \chi^{\mathcal{R}^\nu}(g). \quad (4.7)$$

Man bezeichnet die Darstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ als *direktes Produkt der Darstellungen \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν der Gruppe G* .

Beweis: Ein Beweis findet sich in Anhang B.

Man beachte, daß die Darstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ i.a. nicht irreduzibel sein wird, auch wenn \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν es sind. Als Beispiel nehme man die kubische Gruppe O und die Produktdarstellung $E \otimes T_1$. Einzeln betrachtet sind beide Darstellungen irreduzibel, die Dimension von $E \otimes T_1$ ist $2 \times 3 = 6$. Die kubische Gruppe besitzt aber keine irreduzible Darstellung der Dimension 6. $E \otimes T_1$ ist demnach reduzibel, und der zugehörige Darstellungsraum besitzt invariante Unterräume, die sich unter gewissen irreduziblen Darstellungen von O transformieren.

4.1.3 Darstellungstheorie direkter, endlicher Produktgruppen

Nachdem im ersten Abschnitt das direkte Produkt zweier (endlicher) Gruppen erklärt wurde, wollen wir in diesem Abschnitt kurz auf ihre Darstellungen eingehen. Dabei werden wir auf die im vorigen Abschnitt eingeführten direkten Produktdarstellungen zurückgreifen. Dies zeigt sich schon im folgenden

Theorem 31 Seien die Darstellungen \mathcal{R}_1 der Gruppe G_1 und \mathcal{R}_2 der Gruppe G_2 durch ihre Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}_1}(g_1)$, $g_1 \in G_1$ und $D_{\mathcal{R}_2}(g_2)$, $g_2 \in G_2$ gegeben. Dann bilden die Matrizen $D_{\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2}((g_1, g_2))$ mit

$$D_{\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2}((g_1, g_2)) = D_{\mathcal{R}_1}(g_1) \otimes D_{\mathcal{R}_2}(g_2) \quad (4.8)$$

für alle $g_1 \in G_1$ und $g_2 \in G_2$ eine Darstellung der Produktgruppe $G_1 \otimes G_2$. Die Darstellung von $G_1 \otimes G_2$ ist unitär, falls G_1 und G_2 unitär sind und treu, falls G_1 und G_2 treu sind.

Beweis: Der Beweis findet sich in Anhang B.

Jetzt wird der wichtige Fall untersucht, bei dem $G_1 \equiv G_2 =: G$ ist. Wie im ersten Abschnitt 4.1.1 bereits erwähnt, besitzt die Produktgruppe $G \otimes G$ eine *diagonale Untergruppe* bestehend aus den Paaren (g, g) mit $g \in G$, die isomorph zur Gruppe G ist. Falls \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν zwei beliebige irreduzible Darstellungen von G sind, liest sich Formel (4.8) wie folgt²:

$$D_{\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu}((g_1, g_2)) = D^\mu(g_1) \otimes D^\nu(g_2). \quad (4.9)$$

Man beachte, daß die Darstellungsmatrizen zu irreduziblen Darstellungen \mathcal{R}^μ nach unserer Konvention mit $D^\mu(g)$ bezeichnet werden. In Analogie zu (4.8) könnte man in diesem Fall auch $D_{\mathcal{R}^\mu}(g)$ schreiben.

²Man kann zeigen, daß die Darstellung (4.8) irreduzibel ist, falls \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 es sind, insbesondere ist dann auch die Darstellung (4.9) irreduzibel. Umgekehrt ist jede irreduzible Darstellung von $G_1 \otimes G_2$ äquivalent zu einer Darstellung der Form (4.8).

Für die diagonale Untergruppe ergibt sich dann entsprechend

$$D_{\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu}((g, g)) = D^\mu(g) \otimes D^\nu(g). \quad (4.10)$$

Diese Darstellung ist aber identisch zu der direkten Produktdarstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ der beiden irreduziblen Darstellungen \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν aus dem vorangegangenen Abschnitt. Im allgemeinen ist die Darstellung (4.10) von G also nicht irreduzibel. Eine Plausibilitätsbegründung anhand eines Beispiels wurde bereits im vorherigen Abschnitt angeführt.

4.2 Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$

An dieser Stelle werden zum einen die doppelte Überlagerungsgruppe der kubischen Gruppe eingeführt und anschließend ihre irreduziblen Darstellungen vorgestellt. Somit werden wir mit Hilfe ihrer übergeordneten Symmetriegruppe, der $SU(2)$, ihre Charaktertabelle berechnen können.

4.2.1 Elemente der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$

In Kapitel 1 haben wir gesehen, daß die kubische Gruppe O eine endliche Untergruppe der 2π -periodischen, kontinuierlichen Drehgruppe $SO(3)$ ist, die man erhält, wenn man sich auf die unterliegende Symmetriegruppe eines kubischen Gitters beschränkt. Deren doppelte Überlagerungsgruppe ist die $SU(2)$, die im Gegensatz zur $SO(3)$ eine 4π -Periodizität aufweist (vgl. Anhang D). Durch Überlagerung der kubischen Gruppe erhält man demnach eine 4π -periodische endliche Untergruppe der $SU(2)$ und bezeichnet sie mit ${}^2\text{O}$. Ihre Elemente lassen sich analog zur kubischen Gruppe den Symmetrieoperationen eines Würfels zuordnen mit dem Unterschied, daß die 2π -Drehungen in eine negative Identität führen und erst Rotationen um 4π die Würfelkonfiguration invariant lassen. Die Rotationsachsen des Würfels verdoppeln also ihre Ordnung, und die Gruppe ${}^2\text{O}$ besitzt damit 48 Elemente. Anhand einer Verknüpfungstabelle zeigt man, daß die Klassenkonfigurationen der kubischen Gruppe in ihrer Struktur erhalten bleiben. Die Identität bildet weiterhin eine eigene Klasse, in den Klassen $6C_2$ und $3C_4^2$ verdoppelt sich die Anzahl der Elemente, da man aufgrund der 4π -Periodizität von ${}^2\text{O}$ nun zwischen Rotationen um $+\pi$ und $-\pi$ unterscheiden muß. Die Klassen werden daher mit $12C_4$ und $6C_8^2$ bezeichnet. Die beiden restlichen Klassen $8C_3$ und $6C_4$ bleiben unter dem Namen $8C_6$ und $6C_8$ erhalten, werden allerdings durch zwei gleichmächtige Klassen $8C_6^2$ und $6C_8'$ ergänzt, die die nun möglich gewordenen Rotationen um $\pm\frac{4\pi}{3}$ bzw. $\pm\frac{3\pi}{2}$ als Elemente beinhalten. Eine weitere Klasse entsteht durch Berücksichtigung der negativen Identität. Insgesamt findet man somit acht konjugierte Klassen, wobei die Zahl vor der Klassenbezeichnung ihrer Mächtigkeit entspricht, und die Indizierung der Klassenelemente die Drehrichtung, die Rotationsachse und deren Ordnung hinsichtlich der Klasse angibt:

- $E = \{id\}$
- $J = \{-id\}$

- $12C_4 = \{C_{4a}, C_{4b}, C_{4c}, C_{4d}, C_{4e}, C_{4f}, C_{4a}^{-1}, C_{4b}^{-1}, C_{4c}^{-1}, C_{4d}^{-1}, C_{4e}^{-1}, C_{4f}^{-1}\}$
 $\pm\pi$ -Rotationen um die Achsen Oa, Ob, Oc, Od, Oe, Of , insgesamt
 zwölf Elemente;
- $8C_6^2 = \{C_{3\alpha}, C_{3\beta}, C_{3\gamma}, C_{3\delta}, C_{3\alpha}^{-1}, C_{3\beta}^{-1}, C_{3\gamma}^{-1}, C_{3\delta}^{-1}\}$
 $\pm\frac{4\pi}{3}$ -Rotationen um die vier Raumdiagonalen $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta$, insgesamt acht
 Elemente;
- $8C_6 = \{C_{6\alpha}, C_{6\beta}, C_{6\gamma}, C_{6\delta}, C_{6\alpha}^{-1}, C_{6\beta}^{-1}, C_{6\gamma}^{-1}, C_{6\delta}^{-1}\}$
 $\pm\frac{2\pi}{3}$ -Rotationen um die vier Raumdiagonalen $O\alpha, O\beta, O\gamma, O\delta$, insgesamt acht
 Elemente;
- $6C_8 = \{C_{8/3x}, C_{8/3y}, C_{8/3z}, C_{8/3x}^{-1}, C_{8/3y}^{-1}, C_{8/3z}^{-1}\}$
 $\pm\frac{3\pi}{2}$ -Rotationen um die drei Koordinatenachsen x, y, z , insgesamt
 sechs Elemente;
- $6C_8' = \{C_{8x}, C_{8y}, C_{8z}, C_{8x}^{-1}, C_{8y}^{-1}, C_{8z}^{-1}\}$
 $\pm\frac{\pi}{2}$ -Rotationen um die drei Koordinatenachsen x, y, z , insgesamt
 sechs Elemente;
- $6C_8^2 = \{C_{4x}, C_{4y}, C_{4z}, C_{4x}^{-1}, C_{4y}^{-1}, C_{4z}^{-1}\}$
 $\pm\pi$ -Rotationen um die drei Koordinatenachsen x, y, z , insgesamt
 sechs Elemente.

4.2.2 Irreduzible Darstellungen und Charaktertabelle

Als endliche Gruppe besitzt 2O entsprechend der Anzahl ihrer konjugierten Klassen genau acht irreduzible Darstellungen. Fünf von ihnen stimmen aufgrund der Überlagerungseigenschaft von 2O mit denen der kubischen Gruppe überein. Die drei restlichen bezeichnet man mit G_1, G_2 und H (vgl. [34]). Ihre Dimensionen lassen sich aus Formel (8), Kapitel 0 eindeutig zu $(d_{G_1}, d_{G_2}, d_H) = (2, 2, 4)$ bestimmen, da die Dimensionen der Darstellungen A_1, A_2, \dots, T_2 bereits aus Unterabschnitt 0.3.2 bekannt sind.

Hierfür greift jedoch noch zusätzlich das folgende Argument: Die irreduziblen Darstellungen \mathcal{R}^j der Lie-Gruppe $SU(2)$ zerfallen in eindeutiger Weise in Tensordarstellungen ($j = 0, 1, 2, \dots$) und Spinordarstellungen ($j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$)³. Da die Gruppe 2O eine Untergruppe der $SU(2)$ ist, können deren Elemente ebenfalls durch Darstellungen \mathcal{R}^j repräsentiert werden (vgl. dazu Kapitel 1, Unterabschnitt 1.2.2). Faßt man nun \mathcal{R}^j als Darstellung \mathcal{R}_{2O}^j von 2O auf, so ist diese i.a. reduzibel und kann in irreduzible Darstellungen

³Die Unterscheidung von Tensor- und Spinordarstellungen erfolgt nach dem Verhalten bezüglich ihrer Anwendung auf das Element der negativen Identität. Falls $D_{\mathcal{R}^j}(-id) = \mathbb{1}$ gilt, gehört \mathcal{R}^j zur Tensordarstellung der $SU(2)$, falls dagegen $D_{\mathcal{R}^j}(-id) = -\mathbb{1}$ ist, zählt sie zur Spinordarstellung.

der ${}^2\text{O}$ zerlegt werden. Da die TensorDarstellungen der $SU(2)$ mit denen der $SO(3)$ übereinstimmen, zerfällt die Darstellung $\mathcal{R}_{2^j\text{O}}$ für $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ in irreduzible Darstellungen der kubischen Gruppe O (vgl. Tabelle in 1.2.2) und für $j \in \{1/2, 3/2, 5/2, \dots\}$ in spinorielle irreduzible Darstellungen der ${}^2\text{O}$. Letztere sind in nachfolgender Tabelle angegeben [34]:

Spin j	Zerlegung in irreduzible Darstellungen von ${}^2\text{O}$
1/2	G_1
3/2	H
5/2	$G_2 \oplus H$
7/2	$G_1 \oplus G_2 \oplus H$
9/2	$G_1 \oplus 2H$
11/2	$G_1 \oplus G_2 \oplus 2H$

Wir brauchen demnach nur noch die Charaktere für die Darstellungen G_1 , G_2 und H anzugeben. Für die Spuren der irreduziblen $SU(2)$ -Darstellungsmatrizen mit Spin j und Rotationsmaß θ gilt die Formel [12]

$$\chi_\theta^j = \frac{\sin\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}, \quad (4.11)$$

wobei unbestimmte Ausdrücke als Grenzwerte unter Anwendung der Regel von de l'Hôpital gegeben sind. Mit Hilfe der Tabelle lassen sich die Charaktere für G_1 ($j = 1/2$) und H ($j = 3/2$) direkt aus (4.11) bestimmen⁴. Die Charaktere der Darstellung G_2 ergeben sich ebenfalls aus obiger Tabelle, wenn man von den Ergebnissen, die man aus (4.11) für $j = 5/2$ erhält, die entsprechenden Klassencharaktere von H subtrahiert⁵. Insgesamt findet man die folgende Tabelle [34]:

konj. Klassen		E	J	C_4	C_6^2	C_6	C_8	C_8'	C_8^2
konj. Klassen		1	1	12	8	8	6	6	6
Darstellung	G_1	2	-2	0	-1	1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
	G_2	2	-2	0	-1	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0
	H	4	-4	0	1	-1	0	0	0
Rotationsmaße θ der acht Klassen von ${}^2\text{O}$		θ	4π	2π	π	$4\pi/3$	$2\pi/3$	$3\pi/2$	$\pi/2$

⁴Die Charaktere für die Darstellung G_1 erhält man auch unter Benutzung der Pauli-Matrizen, da für Drehungen von Spinoren mit dem Winkelmaß θ um einen beliebigen Einheitsvektor \mathbf{n} gilt: $U(\mathbf{n}, \theta) = \mathbb{1} \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right)$ (vgl. Anhang D).

⁵Zerfällt eine reduzible Darstellung \mathcal{R} in zwei irreduzible Anteile \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν , so besitzt der Darstellungsraum V von \mathcal{R} genau zwei invariante Räume V_1 und $V_1^\perp =: V_2$, und die Darstellungsmatrizen haben (evtl. nach Ähnlichkeitstransformation) Blockdiagonalgestalt. Für ihre Charaktere gilt dann offensichtlich $\chi^\mathcal{R} = \chi^\mu + \chi^\nu$.

4.3 Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ und Spinoren

Dieser Abschnitt ist dem Transformationsverhalten von Majorana-Spinoren unter der endlichen Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ von O gewidmet. Da Majorana-Spinoren spezielle Dirac-Spinoren sind (vgl. Anhang F), nutzen wir die Kenntnisse aus der Dirac-Theorie und erinnern an die folgenden Zusammenhänge: Betrachtet man endliche Lorentz-Drehungen eines Dirac-Spinors mit dem Winkelmaß θ um einen beliebigen Einheitsvektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, so erhält man für die Rotationsmatrix des Spinors [35]

$$S_{\text{Rot.}}(\mathbf{n}, \theta) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}\right) \quad (4.12)$$

$$= \mathbb{1}_4 \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) + i \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \quad (4.13)$$

$$= \mathbb{1}_4 \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) + i \boldsymbol{\Sigma}^k \cdot n^k \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right), \quad (4.14)$$

wobei $\boldsymbol{\Sigma}^k$ mit den Pauli-Matrizen über die Relation

$$\sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \equiv \epsilon^{ijk} \boldsymbol{\Sigma}^k \quad (4.15)$$

mit $i, j, k = 1, 2, 3$ und $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ definiert ist. Dabei ergibt sich (4.13) durch Reihenentwicklung der Exponentialfunktion und anschließender Einzelbetrachtung der geraden und ungeraden Potenzen in σ^i unter Ausnutzung der Beziehungen $\mathbf{n}^2 = 1$ und $(\sigma^i)^2 = \mathbb{1}$ bzw. $\{\sigma^i, \sigma_j\} = 0$ für $i \neq j$.

Um das Transformationsverhalten des Spinors unter der Gruppe ${}^2\text{O}$ zu untersuchen, haben wir uns auf die in Unterabschnitt 4.2.1 beschriebenen Drehungen zu beschränken. Die zugehörigen Rotationsmatrizen $S_{\text{Rot.}}(\mathbf{n}, \theta)$ lassen sich dann als Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$ einer Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ auffassen. Da wir an den irreduziblen Anteilen der Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ interessiert sind, benötigen wir dabei lediglich die Spuren (d.h. Charaktere) der Matrizen $S_{\text{Rot.}}(\mathbf{n}, \theta)$ und nicht ihre explizite Form. Aufgrund der Spurfreiheit der Pauli-Matrizen ergibt sich für den zweiten Summanden der rechten Seite von (4.14)

$$\text{Tr} \left\{ i \boldsymbol{\Sigma}^k \cdot n^k \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right\} = 0, \quad (4.16)$$

so daß insgesamt

$$\text{Tr}\{S_{\text{Rot.}}(\mathbf{n}, \theta)\} = \text{Tr} \left\{ \mathbb{1}_4 \cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) \right\} \quad (4.17)$$

$$\stackrel{!}{=} \chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(S_{\text{Rot.}}(\theta)) \quad (4.18)$$

gilt. Im Einzelnen erhält man unter Benutzung der in Unterabschnitt 4.2.2 angegebenen Winkelmaße für die konjugierten Klassen von ${}^2\text{O}$:

Klassen von ${}^2\text{O}$	Rotationswinkel θ	Spur der Rotations- matrix $S_{\text{Rot.}}(\theta)$
E	4π	4
J	2π	-4
C_4	π	0
C_6^2	$4\pi/3$	-2
C_6	$2\pi/3$	2
C_8	$3\pi/2$	$-2\sqrt{2}$
C_8'	$\pi/2$	$2\sqrt{2}$
C_8^2	π	0

Die Zerlegung der Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ in ihre irreduziblen Anteile erfolgt unter Verwendung der Formel (12) aus Kapitel 0, die in passender Formulierung die folgende Gestalt hat:

$$a_\mu = \frac{1}{48} \sum_i n_i \chi^\mu(C_i) \chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_i) . \quad (4.19)$$

Dabei hat man über alle konjugierten Klassen C_i der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ zu summieren, wobei die Charaktere $\chi^\mu(C_i)$ der irreduziblen Darstellungen von ${}^2\text{O}$ ihrer Charaktertabelle aus Unterabschnitt 4.2.2 zu entnehmen sind. Man erhält die folgenden Resultate:

$$\begin{aligned} a_{G_1} &= \frac{1}{48} (1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) \cdot (-4) + 12 \cdot 0 \cdot 0 + 8 \cdot (-1) \cdot (-2) \\ &\quad + 8 \cdot 1 \cdot 2 + 6 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot (-2\sqrt{2}) + 6 \cdot \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + 6 \cdot 0 \cdot 0) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{G_2} &= \frac{1}{48} (1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) \cdot (-4) + 12 \cdot 0 \cdot 0 + 8 \cdot (-1) \cdot (-2) \\ &\quad + 8 \cdot 1 \cdot 2 + 6 \cdot \sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}) + 6 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot 2\sqrt{2} + 6 \cdot 0 \cdot 0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_H &= \frac{1}{48} (1 \cdot 4 \cdot 4 + 1 \cdot (-4) \cdot (-4) + 12 \cdot 0 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \cdot (-2) \\ &\quad + 8 \cdot (-1) \cdot 2 + 6 \cdot 0 \cdot (-2\sqrt{2}) + 6 \cdot 0 \cdot 2\sqrt{2} + 6 \cdot 0 \cdot 0) = 0 . \end{aligned}$$

Der Darstellungsraum von $\tilde{\mathcal{R}}$ zerfällt in zwei invariante, zweidimensionale Unterräume, die sich beide nach der Darstellung G_1 transformieren. Gemäß der Bezeichnungsweise (5) aus Kapitel 0 schreibt sich $\tilde{\mathcal{R}}$ somit als

$$\tilde{\mathcal{R}} = 2 G_1 = G_1 \oplus G_1 . \quad (4.20)$$

Die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ ist demnach reduzibel.

Bemerkung: Ein Dirac-Spinor ist aus einem links- und einem rechtshändigen, zweikomponentigen Weyl-Spinor zusammengesetzt, die sich jeweils unter der Überlagerungsgruppe $SL(2, \mathbb{C})$ der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe \mathcal{L}_+^\uparrow transformieren. Da sich mit Hilfe der $SL(2, \mathbb{C})$ –gleiches gilt damit auch für die $SU(2)$, da $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$ gilt– keine

Raumspiegelungen beschreiben lassen, kann sie keine links- und rechtshändigen Systeme ineinander überführen. In der relativistischen Feldtheorie ist man an Zuständen mit eindeutig definierten P -Paritätseigenzuständen interessiert, so daß man diesen Umstand durch Bildung von vierkomponentigen Dirac-Spinoren umgeht. Diese transformieren sich aber dann unter $SL(2, \mathbb{C})$ nach einer reduziblen Darstellung. Erst nach Übergang zur orthochronen Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}^\uparrow \equiv \mathcal{L}_+^\uparrow \cup P\mathcal{L}_+^\uparrow$, genauer zu deren Überlagerung, die die Raumspiegelungen I einschließt, ist die Darstellung irreduzibel. Einzelheiten findet man in [20]. Dieser Sachverhalt überträgt sich auf die entsprechenden untergeordneten Gittersymmetriegruppen, so daß sich ein Dirac-Spinor, wie in (4.20) angegeben, unter der 2O als Gittersymmetriegruppe der $SU(2)$ nach einer reduziblen Darstellung transformiert. Unter der vollen Überlagerungsgruppe 2O_h , die analog zur vollen kubischen Gruppe O_h Raumspiegelungen berücksichtigt und durch ${}^2O_h = {}^2O \otimes \{e, I\}$ definiert ist, stellt (4.20) aber eine irreduzible Darstellung dar.

Es sei der Deutlichkeit halber hier noch einmal darauf hingewiesen, daß die volle Überlagerungsgruppe 2O_h die Überlagerungsgruppe der vollen kubischen Gruppe O_h ist.

C-Parität und Majorana-Spinoren

Unsere bisherigen Überlegungen haben wir für Dirac-Spinoren durchgeführt und die spezielle Eigenschaft von Majorana-Spinoren vernachlässigt. Unter Einbeziehung der diskreten Symmetrietransformation der C -Paritätsoperation schreibt sich die Darstellung (4.20) exakter in der Form

$$\tilde{\mathcal{R}}^{\bullet+} = 2 G_1^{\bullet+} = G_1^{\bullet+} \oplus G_1^{\bullet+} , \quad (4.21)$$

wobei \bullet ein Platzhalter für die im nächsten Kapitel zu behandelnde P -Parität ist. Da aufgrund der Majorana-Bedingung $\lambda^C = \lambda$ (vgl. Anhang F) ein Majorana-Spinor bei Ladungskonjugation in sich selbst übergeht, gilt für die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ mit vorgewählter negativen C -Parität analog zum Fall $C = +1$

$$\tilde{\mathcal{R}}^{\bullet-} = 2 G_1^{\bullet-} = G_1^{\bullet-} \oplus G_1^{\bullet-} . \quad (4.22)$$

Kapitel 5

Darstellungen der Überlagerungsgruppe 2O über Operatoren der $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie

Die in Kapitel 2 gruppentheoretisch untersuchten Gitter-Operatoren können im Rahmen von numerischen Berechnungen von (massiven) Glueballzuständen der QCD mittels Monte-Carlo-Simulationen verwendet werden. Dabei beschränkte man sich aufgrund der Eichinvarianz-Forderung auf geeignete Kombinationen von Wilson-Loops, die sich nach irreduziblen Darstellungen der unterliegenden Gitter-Symmetriegruppe zu transformieren haben. In diesem abschließenden Kapitel werde ich nun supersymmetrische Gitter-Operatoren betrachten. In jüngsten Gitter-Simulations-Rechnungen dienen derartige Operatoren zur Bestimmung des Massenspektrums der in einer $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie auftretenden Zustände [36].

Ziel meiner Untersuchungen soll es sein, das im zweiten Kapitel beschriebene Verfahren zum Auffinden von Darstellungen über Gitter-Operatoren auf den supersymmetrischen Fall auszuweiten und für einige der zu konstruierenden Darstellungen eine Orthonormalbasis bestehend aus den betrachteten supersymmetrischen Gitter-Operatoren anzugeben. Bei der Wahl eichinvarianter Operatoren für die Simulation hat man in supersymmetrischen Theorien sowohl bosonische als auch fermionische Freiheitsgrade zu berücksichtigen, so daß neben Wilson-Loops nun auch Majorana-Fermionen für die Zusammensetzung eines geeigneten Operators zur Verfügung stehen. Unter Verwendung der Ergebnisse aus dem vorherigen Kapitel (charakteristisches Transformationsverhalten von Spinoren) ist einzusehen, daß dieser Sachverhalt direkte Auswirkungen auf die zugrunde liegende Symmetriegruppe haben wird, die je nach Auswahl der Operatorkomponenten anstatt der im Falle von Wilson-Loops betrachteten kubischen Gruppe nunmehr auch deren Überlagerungsgruppe sein kann. Des weiteren wird sich zeigen, daß für die Diskussion des Transformationsverhaltens der Operatoren vereinzelt auf das ebenfalls im vorangehenden Kapitel bereitgestellte Konzept der direkten Produktdarstellung der diagonalen Unter-

gruppe einer direkten Produktgruppe zurückgegriffen werden muß. Insgesamt gehe ich auf drei unterschiedliche supersymmetrische Gitter-Operatoren ein. Zuvor aber ein knapper Überblick über die in der $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie erwarteten massiven, chiralen Supermultipletts.

5.1 Motivation

Die $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie ist die einfachste, supersymmetrische Eichtheorie und enthält im Falle der Eichgruppe $SU(N_c)$ insgesamt $(N_c^2 - 1)$ Eichfelder (Gluonen) und eine gleiche Anzahl an Majorana-Fermionen (Gauginos) in der adjungierten Darstellung. Ihre Dynamik weist in Bereichen starker Kopplung (d.h. niedriger Energien) Analogien zur QCD auf; beispielsweise erwartet man auch in supersymmetrischen Eichtheorien die aus der QCD bekannten Phänomene der spontanen Symmetriebrechung und des *confinement*. Zudem sollte ihr Massenspektrum auch einen stabilen Teilchenzustand oberhalb des Vakuums aufweisen. Diese Folgerungen der nicht-perturbativen Dynamik können mit Hilfe einer effektiven Wirkung beschrieben werden, wie sie Anfang der achtziger Jahre von G. VENEZIANO und YANKIELOWICZ im Rahmen einer $N = 1$ Yang-Mills-Theorie aufgestellt wurde [33]. Sie führt auf ein Wess-Zumino-Supermultiplett, welches die folgenden massiven Zustände enthält:

- einen 0^- Gluinoball (pseudoskalares Boson), als Analogon zum η' -Meson in der QCD
- einen 0^+ Gluinoball (skalares Boson), welches nahezu dem f_0 -Meson der QCD entspricht
- einen Spin- $\frac{1}{2}$ -Gluino-Glueball als fermionischen Freiheitsgrad (Majorana-Fermion). Hier gibt es aufgrund der fundamentalen Darstellung kein Analogon in der QCD.

Ende der neunziger Jahre wiesen G. R. FARRAR, G. GABADAZE und M. SCHWETZ allerdings darauf hin, daß es a priori keine Gründe dafür gibt, daß in diesem Energiebereich keine Glueballzustände auftreten sollten und diese daher in Form eines zusätzlichen Supermultipletts in die Formulierung der Theorie einbezogen werden sollten. Sie schlugen daher vor, die effektive Veneziano-Yankielowicz-Wirkung um einen Zusatzterm zu ergänzen, so daß mit Hilfe der erweiterten Wirkung nun auch Glueballzustände beschrieben werden können [37,38]. Das hinzugefügte, leichtere, chirale Supermultiplett enthält dabei

- einen 0^+ Glueball als skalares Meson
- einen pseudoskalaren 0^- Glueballzustand
- einen weiteren fermionischen Gluino-Glueball in Analogie zum Veneziano-Yankielowicz-Supermultiplett.

Das Massenspektrum der leichtesten Zustände kann in analoger Weise zur QCD mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen untersucht werden, wobei aufgrund der Struktur der effektiven Wirkung Mischungen zwischen den einzelnen Zuständen zu erwarten sind. Solche

numerischen Analysen werden derzeit in der Tat durchgeführt (vgl. beispielsweise [36]) und benötigen für die Simulation je nach Auswahl des zu untersuchenden Teilbereiches des Massenspektrums u. a. supersymmetrische Gitter-Operatoren. Dies geschieht unter Einbeziehung fermionischer Freiheitsgrade, die gerade so aufgebaut sind, daß deren Matrixelemente einen guten Überlapp mit den in Frage stehenden Zuständen haben.

5.2 Majorana-Majorana-Operator

Zunächst wollen wir einen Operator betrachten, der aus zwei auf einem Gitterpunkt fixierten Majorana-Feldern besteht und ein möglichst einfaches Transformationsverhalten unter der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ aufweisen soll. Wir schreiben ihn in der Form

$$\bar{\lambda}\lambda = \bar{\lambda}(x)\lambda(x) \quad \text{mit} \quad x \in \Lambda. \quad (5.1)$$

Aus der Theorie der Dirac-Gleichung im Kontinuum ist bekannt, daß sich der aus zwei Dirac-Spinoren gebildete Ausdruck $\bar{\psi}\psi$ im Minkowski-Raum unter Lorentztransformationen aufgrund der Relationen

$$\psi'(x') = S\psi(x) \quad \text{und} \quad \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}, \quad (5.2)$$

wegen

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}S\psi(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \quad (5.3)$$

wie ein Lorentzskalar transformiert.

Beim Übergang zu euklidischen Majorana-Spinoren –die in unserem Fall zudem nur auf Gitterplätzen erklärt sind– hat man zu beachten, daß die Definition für die konjugierten Spinoren $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma_0$ durch den Ausdruck

$$\bar{\lambda} = \lambda^t C \quad (5.4)$$

zu ersetzen ist. Es zeigt sich allerdings, daß trotzdem weiterhin

$$\bar{\lambda}'(x') = \bar{\lambda}(x)S^{-1} \quad (5.5)$$

gilt (vgl. dazu Anhang G). Der Majorana-Majorana-Operator transformiert sich daher analog zur minkowskischen Formulierung unter Lorentztransformationen wie ein Lorentzskalar

$$\bar{\lambda}'\lambda' = \bar{\lambda}S^{-1}S\lambda = \bar{\lambda}\lambda. \quad (5.6)$$

Da die Elemente der Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ als Lorentzdrehungen um gewisse Achsen und Winkelmaße spezielle Lorentztransformationen sind, überträgt sich das Transformationsverhalten des betrachteten Operators unter der Lorentzgruppe auf ihre diskrete Untergruppe ${}^2\text{O}$. Ein Lorentzskalar ist jedoch invariant unter Raumspiegelungen. Somit besitzt er den P -Paritätseigenwert $+1$ und verhält sich unter der vollen Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}_h$ identisch wie unter ${}^2\text{O}$.

Analoge Untersuchungen ließen sich nun auch für den Operator

$$\bar{\lambda}\gamma_5\lambda \quad (5.7)$$

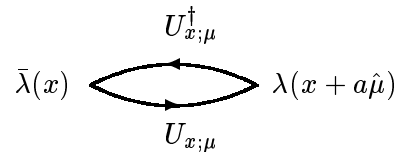
durchführen. Man erhält dabei als Ergebnis, daß sich obiger Operator analog zum Falle der Dirac-Spinoren in der relativistischen Quantenfeldtheorie wie ein Pseudoskalar transformiert, d.h. er wechselt unter Raumspiegelungen sein Vorzeichen.

5.3 Majorana-Link-Majorana-Operator

Als weiterer supersymmetrischer, eichinvarianter Gitter-Operator wird jetzt der *Majorana-Link-Majorana-Operator* betrachtet, der aus zwei auf benachbarten Gitterpunkten befindlichen Majorana-Spinoren $\bar{\lambda}$ und λ besteht, die über die beiden Gitter-Links $U_{x;\mu}$ und $U_{x;\mu}^{-1} = U_{x;\mu}^\dagger$ miteinander verbunden sind. In analytischer Form schreibt er sich als

$$\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)U_{x;\mu}^\dagger\lambda(x+a\hat{\mu})U_{x;\mu}\}, \quad (5.8)$$

wobei $x, x+a\hat{\mu}$ in $\hat{\mu}$ -Richtung benachbarte Gitterpunkte mit Gitterabstand a sind. Graphisch läßt er sich durch



veranschaulichen, wobei die Gitter-Links lediglich zur Visualisierung gekrümmt gezeichnet sind. Man kann ihn aufgrund der drei unabhängigen Raumrichtungen eines dreidimensionalen Gitternetzes in drei unterschiedlichen Ausrichtungen auf ein Gitter bringen. Die Operatoren seien dabei mit

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \lambda \\ \nearrow \\ \bar{\lambda} \end{array} = O_1 & \begin{array}{c} \lambda \\ \downarrow \\ \bar{\lambda} \end{array} = O_2 & \begin{array}{c} \bar{\lambda} \longrightarrow \lambda \end{array} = O_3 \end{array}$$

bezeichnet.

Ich möchte zunächst auf sein Verhalten unter der P - bzw. C -Paritätsoperation eingehen, um gegebenenfalls wie im Falle von Wilson-Loops Parität-invariante Operatoren zu konstruieren. Dabei hat man u.a. auf das unterschiedliche Wirken des P -Paritätsoperators auf Majorana-Spinoren und Link-Variablen zu achten.

5.3.1 Verhalten unter P -Parität

Im Minkowskiraum ist die P -Paritätsoperation bei Anwendung auf einen Bispinor durch

$$P\psi = \gamma_0 \psi \equiv \psi^P \quad (5.9)$$

definiert [28]. Für den konjugierten Spinor ergibt sich damit

$$\bar{\psi}^P \equiv P(\bar{\psi}) = P(\psi^\dagger \gamma_0) = (\gamma_0 \psi)^\dagger \gamma_0 = \psi^\dagger \underbrace{\gamma_0^\dagger}_{\gamma_0} \gamma_0 = \bar{\psi} \gamma_0 . \quad (5.10)$$

Im Falle von euklidischen Majorana-Spinoren hat man die Definition (5.9) zu modifizieren¹, indem man

$$P\lambda = i \gamma_0 \lambda \quad (5.11)$$

setzt [39]. Damit gilt unter Verwendung der veränderten Definition des konjugierten Spinors (vgl. Gleichung (5.4)) im Unterschied zu Gleichung (5.10)

$$P(\bar{\lambda}) = P(\lambda^t C) = (i \gamma_0 \lambda)^t C \gamma_0 = i \lambda^t \underbrace{\gamma_0^t C}_{-C \gamma_0} \gamma_0 = -i \lambda^t C \gamma_0 \gamma_0 = -i \bar{\lambda} \gamma_0 . \quad (5.12)$$

Spiegelt man den Majorana-Link-Majorana-Operator beispielsweise am Gitterpunkt x , so erhält man zunächst

$$\begin{aligned} P_x \{ \bar{\lambda}(x) U_{x;\mu}^\dagger \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} \} &= -i \bar{\lambda}(x) \gamma_0 U_{x;-\mu}^\dagger i \gamma_0 \lambda(x - a\hat{\mu}) U_{x;-\mu} \\ &= \bar{\lambda}(x) \gamma_0^2 U_{x;-\mu}^\dagger \lambda(x - a\hat{\mu}) U_{x;-\mu} \\ &= \bar{\lambda}(x) U_{x;-\mu}^\dagger \lambda(x - a\hat{\mu}) U_{x;-\mu} , \end{aligned} \quad (5.13)$$

also bildlich

$$\bar{\lambda}(x) \begin{array}{c} \xleftarrow{U_{x;\mu}^\dagger} \\ \xrightarrow{U_{x;\mu}} \end{array} \lambda(x + a\hat{\mu}) \quad \xrightarrow{P_x} \quad \lambda(x - a\hat{\mu}) \begin{array}{c} \xleftarrow{U_{x;-\mu}^\dagger} \\ \xrightarrow{U_{x;-\mu}} \end{array} \bar{\lambda}(x) .$$

Führt man jetzt eine Translation in $+\hat{\mu}$ -Richtung um einen Gitterplatz durch, so geht die über Gleichung (5.13) gebildete Spur in den Ausdruck

$$\text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} \lambda(x) U_{x;\mu}^\dagger \} \quad (5.14)$$

¹Da der Paritätsoperator P Raumsspiegelungen beschreibt, hat er die Gleichungen $P^{-1} \gamma_j P = -\gamma_j$ und $P^{-1} \gamma_0 P = \gamma_0$ zu erfüllen, und man findet $P = e^{i\varphi} \gamma_0$ mit einem Phasenfaktor $e^{i\varphi}$. Im Euklidischen gilt mit $\gamma_0^{mink.} = \gamma_4^{eukl.}$ dann $\overline{P\lambda} = (e^{i\varphi} \gamma_4 \lambda)^t C = e^{i\varphi} \bar{\lambda} C^{-1} \gamma_4^t C = -e^{i\varphi} \bar{\lambda} \gamma_4$. Für den Lorentzskalar $\bar{\lambda} \lambda$ fordert man $\overline{P\lambda} P \lambda = -e^{i\varphi} \bar{\lambda} \gamma_4 \gamma_4 \lambda = -e^{2i\varphi} \bar{\lambda} \lambda \stackrel{!}{=} \bar{\lambda} \lambda$ und wählt für den Phasenfaktor $e^{i\varphi} = i$. Im Minkowskischen ist die Wahl des Phasenfaktors beliebig, da er durch die komplexe Konjugation in (5.4) herausfällt. Man setzt daher $e^{i\varphi} = 1$.

über, an deren Stelle wir wegen der Zwischenrechnung (*) auch den Term

$$\mathrm{Tr}\{U_{x;\mu}\bar{\lambda}(x)U_{x;\mu}^\dagger\lambda(x+a\hat{\mu})\} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Tr}\{\bar{\lambda}(x)U_{x;\mu}^\dagger\lambda(x+a\hat{\mu})U_{x;\mu}\} \quad (5.15)$$

verwenden können (für (*) s. unten).

Damit haben wir gezeigt, daß unter Vernachlässigung von Translationen der Majorana-Link-Majorana-Operator unter der P -Paritätsoperation in sich selbst überführt wird.

Daher können wir uns ähnlich wie im Falle der Einfach-Plaquetten aus Kapitel 2 bei der Untersuchung des Transformationsverhaltens der Operatoren auf Transformationen unter der Überlagerungsgruppe ${}^2\mathbf{O}$ beschränken, anstatt die volle Überlagerungsgruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ heranzuziehen. Der Grund hierfür liegt darin, daß die Operatoren wegen ihrer P -Paritäts-Invarianzeigenschaft die hinzukommenden Raumspiegelungen der vollen Überlagerungsgruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ ignorieren, d.h. darunter invariant sind.

(*) **Zwischenrechnung:**

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left\{\bar{\lambda}(x+a\hat{\mu})U_{x;\mu}\lambda(x)U_{x;\mu}^\dagger\right\} &= \mathrm{Tr}\left\{\bar{\lambda}^a(x+a\hat{\mu})T^aU_{x;\mu}\lambda(x)^bT^bU_{x;\mu}^\dagger\right\} \\ &= \bar{\lambda}^a(x+a\hat{\mu})\lambda(x)^b\mathrm{Tr}\left\{T^aU_{x;\mu}T^bU_{x;\mu}^\dagger\right\} \\ &= \bar{\lambda}(x)^b\lambda^a(x+a\hat{\mu})\mathrm{Tr}\left\{T^bU_{x;\mu}^\dagger T^aU_{x;\mu}\right\} \\ &= \mathrm{Tr}\left\{\bar{\lambda}(x)^bT^bU_{x;\mu}^\dagger\lambda^a(x+a\hat{\mu})T^aU_{x;\mu}\right\} \\ &= \mathrm{Tr}\left\{\bar{\lambda}(x)U_{x;\mu}^\dagger\lambda(x+a\hat{\mu})U_{x;\mu}\right\} \quad (5.16) \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Zerlegung $\lambda = \lambda^a T^a$, $T^a \in su(2)$ und die Rechenregel $\bar{\psi}\phi = \bar{\phi}\psi$ für Majorana-Spinoren benutzt (vgl. Kapitel 3 Gleichung (3.66) bzw. Anhang F).

5.3.2 Verhalten unter C -Parität

Die Majorana-Spinoren verhalten sich gegenüber C -Paritätsoperationen per Definition invariant

$$\lambda \xrightarrow{C} \lambda^C = \lambda \quad \text{bzw.} \quad \bar{\lambda} \xrightarrow{C} \bar{\lambda}^C = \bar{\lambda}. \quad (5.17)$$

Die Gitter-Links ändern jeweils ihre Orientierung

$$U_{x;\mu} \xrightarrow{C} U_{x;\mu}^\dagger \quad \text{bzw.} \quad U_{x;\mu}^\dagger \xrightarrow{C} U_{x;\mu}, \quad (5.18)$$

so daß der Majorana-Link-Majorana-Operator insgesamt den C -Paritätseigenwert $+1$ besitzt.

5.3.3 Transformationsverhalten und Darstellung

Bei der Untersuchung des Transformationsverhaltens der Majorana-Link-Majorana-Operatoren unter der Überlagerungsgruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ hat man zu beachten, daß sowohl die Links als auch der Majorana-Spinor unabhängig voneinander zu transformieren sind.

Im Majorana-Sektor können wir dabei auf die Ergebnisse aus Abschnitt (5.2) zurückgreifen. Es gilt

$$\lambda(x + a\hat{\mu}) \longrightarrow \lambda'((x + a\hat{\mu})') = S\lambda(x + a\hat{\mu}) \quad (5.19)$$

$$\bar{\lambda}(x) \longrightarrow \bar{\lambda}'(x') = \bar{\lambda}(x)S^{-1} \quad (5.20)$$

und wegen der Ortsunabhängigkeit der Lorentztransformationsmatrix S damit analog zu (5.6)

$$\bar{\lambda}(x)\lambda(x + a\hat{\mu}) \longrightarrow \bar{\lambda}'(x')\lambda'((x + a\hat{\mu})') = \bar{\lambda}(x)S^{-1}S\lambda(x + a\hat{\mu}) = \bar{\lambda}\lambda(x + a\hat{\mu}) . \quad (5.21)$$

Die Majoranas transformieren sich demnach wie Lorentzskalare, wobei sie sich im Gegensatz zum Majorana-Majorana-Operator nicht auf dem gleichen Gitterplatz befinden.

Die Links der drei Operatoren O_1, O_2, O_3 können unter Verwendung der Überlegungen aus Kapitel 2 mit den in den drei unterschiedlichen Koordinatenebenen liegenden Würfelkanten eines dreidimensionalen Würfels identifiziert werden. Wie bereits an früherer Stelle ausführlich diskutiert, bestimmt dabei ihr Transformationsverhalten unter der kubischen Gruppe O in eindeutiger Weise ihr Transformationsverhalten unter der Überlagerungsgruppe 2O von O . Die Konstruktion einer Darstellung der kubischen Gruppe über ebensolche Links bzw. Würfelkanten kann nun gemäß der Ausführungen in Kapitel 2 erfolgen. Dabei sollte man beachten, daß das Transformationsverhalten und die daraus generierte Darstellung im Falle von Würfelkanten im Prinzip bereits bekannt sind, da die betrachteten Wilson-Loops gerade „kantenweise“ mittels Gleichung (2.9) aus Unterabschnitt 2.2.3 durch die Drehmatrizen der T_1 -Vektordarstellung der kubischen Gruppe transformiert wurden. Die gesuchten Darstellungsmatrizen der Majorana-Link-Majorana-Operatoren im Link-Sektor sind demnach oben genannte Drehmatrizen, die gemäß ihrer Bezeichnung die irreduzible Vektordarstellung T_1 von O repräsentieren (vgl. Anhang C.1).

Aufgrund der Lorentzskalar-Eigenschaft des Majorana-Link-Majorana-Operators im Majorana-Sektor transformieren sich die drei Operatoren O_1, O_2, O_3 unter der Überlagerungsgruppe 2O nach deren irreduziblen Vektordarstellung T_1 . Berücksichtigt man zusätzlich noch Raumspiegelungen, oder in anderen Worten, geht man zur vollen Überlagerungsgruppe 2O_h über, so erhält man wegen des positiven P -(bzw. C -) Paritätseigenwertes der Operatoren als irreduzible Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}^{PC}$ der vollen Überlagerungsgruppe 2O_h über Majorana-Link-Majorana-Operatoren

$$\tilde{\mathcal{R}}^{PC} = T_1^{+++} . \quad (5.22)$$

Als eine

Orthonormalbasis

lassen sich analog zu den Ergebnissen aus Kapitel 2, die drei Operatoren O_1, O_2 und O_3 wählen. Als Tabelle erhält man:

Operatoren der Majorana-Link-Majorana-Operatoren

Loop-Op.		O_1	O_2	O_3
$\tilde{\mathcal{R}}^{PC}$	T_1^{++}	1		
			1	
				1

Die Einführung einer solchen Tabelle erfolgte ebenfalls bereits in Kapitel 2.

5.3.4 Betrachtungen im Kontinuum

Zum Ende dieses Abschnitts sei kurz ein Zusammenhang zwischen dem Ausdruck (5.8) und der Vorwärts-Gitter-Version der kovarianten Ableitung in der adjungierten Darstellung hergestellt, der uns zu einer nützlichen Betrachtung eines zum Majorana-Link-Majorana-Operators analogen Objektes im Kontinuum führen wird.

Wir beginnen mit dem Term (5.8), von dem wir den Beitrag $\bar{\lambda}(x)\lambda(x)$ subtrahieren. Zusätzlich multiplizieren wir mit dem Faktor $\frac{1}{a}$ und erhalten

$$\frac{1}{a} \left(\bar{\lambda}(x) U_{x;\mu}^\dagger \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} - \bar{\lambda}(x)\lambda(x) \right) \quad (5.23)$$

bzw. graphisch

$$\bar{\lambda}(x) \begin{array}{c} \xrightarrow{U_{x;\mu}^\dagger} \\ \xleftarrow{U_{x;\mu}} \end{array} \lambda(x + a\hat{\mu}) - \bar{\lambda}(x)\lambda(x) .$$

Da $\bar{\lambda}(x)\lambda(x)$ ein Lorentzskalar ist, transformiert sich dieser Operator in gleicher Weise unter Lorentztransformationen, wie der Majorana-Link-Majorana-Operator.

Wegen $U_{x;\mu} = e^{-aA_\mu(x)}$ und $U_{x;\mu}^\dagger = e^{aA_\mu(x)}$ ergibt sich für Gleichung (5.23)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \left(\bar{\lambda}(x) U_{x;\mu}^\dagger \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} - \bar{\lambda}(x)\lambda(x) \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(\bar{\lambda}(x) (1 + aA_\mu(x)) (\lambda(x) + a\partial_\mu \lambda(x)) (1 - aA_\mu(x)) - \bar{\lambda}(x)\lambda(x) + \mathcal{O}(a^2) \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(a\bar{\lambda}(x)\partial_\mu \lambda(x) + a\bar{\lambda}(x)A_\mu(x)\lambda(x) - a\bar{\lambda}(x)\lambda(x)A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2) \right) \\ &= \bar{\lambda}(x) (\partial_\mu \lambda(x) + [A_\mu(x), \lambda(x)]) + \mathcal{O}(a) . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit Hilfe der durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^{lat,f} f(x) &\equiv \frac{1}{a} \left(U_{x;\mu}^\dagger f(x + a\hat{\mu}) U_{x;\mu} - f(x) \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(f(x) + a\partial_\mu f(x) + aA_\mu(x)f(x) - af(x)A_\mu(x) - f(x) + \mathcal{O}(a^2) \right) \\ &= \partial_\mu f(x) + [A_\mu(x), f(x)] + \mathcal{O}(a), \end{aligned} \quad (5.25)$$

definierten *Vorwärts-Gitter-Version der kovarianten Ableitung in der adjungierten Darstellung* in die Form

$$\bar{\lambda}(x)\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\lambda(x) + \mathcal{O}(a) \quad (5.26)$$

bringen, so daß im naiven Kontinuumsimes für $a \rightarrow 0$

$$\bar{\lambda}(x)\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\lambda(x) + \mathcal{O}(a) \longrightarrow \bar{\lambda}(x)\mathcal{D}_\mu\lambda(x) \quad (5.27)$$

gilt, wobei

$$\mathcal{D}_\mu\lambda = \partial_\mu\lambda + [A_\mu, \lambda] \quad (5.28)$$

die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung bezeichnet. Untersucht man nun das Transformationsverhalten des Operators $\bar{\lambda}(x)\mathcal{D}_\mu\lambda(x)$ unter Lorentztransformationen, so erhält man in minkowskischer Formulierung wegen

$$\bar{\lambda}\mathcal{D}_\mu\lambda = \bar{\lambda}\{\partial_\mu\lambda + [A_\mu, \lambda]\} \quad (5.29)$$

$$= \underbrace{\bar{\lambda}\partial_\mu\lambda}_{(i)} + \underbrace{\bar{\lambda}A_\mu\lambda}_{(ii)} - \underbrace{\bar{\lambda}\lambda A_\mu}_{(iii)} \quad (5.30)$$

für die drei Summanden die Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned} (i) \quad \bar{\lambda}\partial_\mu\lambda &\longrightarrow \bar{\lambda}'(x')\partial'_\mu\lambda(x') = \bar{\lambda}(x)S^{-1}a_\mu{}^\nu\partial_\nu S\lambda(x) \\ &= a_\mu{}^\nu\bar{\lambda}(x)S^{-1}S\partial_\nu\lambda(x) \\ &= a_\mu{}^\nu\bar{\lambda}(x)\partial_\nu\lambda(x) \end{aligned} \quad (5.31)$$

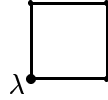
$$\begin{aligned} (ii) \quad \bar{\lambda}A_\mu\lambda &\longrightarrow \bar{\lambda}'(x')A'_\mu\lambda(x') = \bar{\lambda}(x)S^{-1}a_\mu{}^\nu A_\nu S\lambda(x) \\ &= a_\mu{}^\nu\bar{\lambda}(x)S^{-1}SA_\nu\lambda(x) \\ &= a_\mu{}^\nu\bar{\lambda}(x)A_\nu\lambda(x) \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad \bar{\lambda}\lambda A_\mu &\longrightarrow \bar{\lambda}'(x')\lambda(x')A'_\mu = \bar{\lambda}(x)S^{-1}S\lambda(x)a_\mu{}^\nu A_\nu \\ &= a_\mu{}^\nu\bar{\lambda}(x)\lambda(x)A_\nu, \end{aligned} \quad (5.33)$$

wobei $a_\mu{}^\nu$ die in Anhang G erklärten Komponenten der Lorentztransformationsmatrix sind. Das Ergebnis zeigt, daß sich alle drei Summanden – und somit auch der gesamten Kontinuum-Operator $\bar{\lambda}\mathcal{D}_\mu\lambda$ – als Vektoren transformieren, oder anders ausgedrückt, sich wie ein Spin-1-Teilchen verhalten. Dieses Resultat stimmt mit den Überlegungen aus Kapitel 1 bzw. 4 überein, wonach ein Zustand, der sich unter der untergeordneten Gitter-Symmetriegruppe O bzw. 2O nach der Vektordarstellung T_1 transformiert, im Kontinuumsimes einem Spin-1-Zustand zugeordnet werden kann.

5.4 Majorana-Plaquetten-Operator

An dieser Stelle wollen wir Majorana-Plaquetten-Operatoren der Form



mit dem algebraischen Ausdruck

$$\text{Tr} \{U_{x;\mu\nu}\lambda\} = U_{x;\mu\nu}^{rs} \lambda^a (T^a)^{sr} \quad (5.34)$$

untersuchen, die aus einer Plaquettenvariablen U_p und einem an einer beliebigen Ecke befindlichem Majorana-Spinor gebildet werden. Die Spur wird dabei über die Eichgruppe (z.B. $SU(2)$) gebildet, wobei T^a ihre Generatoren bezeichnet.

Da dem Majorana-Teilchen in allen drei Koordinatenebenen jeweils vier Eckpunkte zur Verfügung stehen, lassen sich unter Vernachlässigung des Umlaufsinnns der Einfach-Plaquette insgesamt $3 \times 4 = 12$ Operatoren diesen Typs bilden. Somit weisen sie eine geometrische Übereinstimmung mit den Über-Eck-Plaquetten aus Kapitel 2, Abschnitt 2.6 auf. Bildet man in analoger Weise P -Parität-invariante Operatoren $O_{ij}^P = (O_{ij}^\pm)$ mit $i = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2$, so erhält man

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \lambda \bullet \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \lambda^P \bullet \text{---} \end{array} = O_{11}^\pm & \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \lambda \bullet \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \lambda^P \bullet \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \end{array} = O_{12}^\pm \\ \\ \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \lambda \bullet \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \lambda^P \bullet \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \end{array} = O_{21}^\pm & \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \lambda \bullet \text{---} \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \lambda^P \bullet \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \end{array} = O_{22}^\pm \\ \\ \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \lambda \bullet \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \lambda^P \bullet \text{---} \end{array} = O_{31}^\pm & \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \\ \lambda \bullet \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \end{array} \pm \begin{array}{c} \text{---} \leftarrow \\ \lambda^P \bullet \text{---} \\ \text{---} \leftarrow \\ \text{---} \leftarrow \end{array} = O_{32}^\pm, \end{array}$$

wobei λ^P durch $\lambda^P \equiv P\lambda = \gamma_0\lambda$ definiert ist (s. nächster Unterabschnitt).

Aus ihnen lassen sich nun wie im Falle der Wilson-Loops durch geeignete Kombinationen der Form

$$O_{ij\pm}^P \equiv O_{ij}^P \pm CO_{ij}^P \quad (5.35)$$

Operatoren $O_{ij}^P C$ mit eindeutig bestimmter C - (und P -) Parität konstruieren. Der C -Paritätsoperator ändert dabei den Umlaufsinn der Plaquette und läßt die Bispinoren λ aufgrund ihrer Majorana-Eigenschaft ($\lambda = \lambda^C$) invariant, also z.B.

$$C \begin{array}{c} \square \\ \lambda \end{array} = \lambda^C \begin{array}{c} \square \\ \lambda \end{array} = \lambda \begin{array}{c} \square \\ \lambda \end{array} .$$

Für fixiertes P und C ist der Darstellungsraum der Majorana-Plaquetten-Operatoren somit wegen der vier reellen Freiheitsgrade des Majorana-Teilchens $6 \times 4 = 24$ -dimensional. Hierbei ist zu beachten, daß die Überlagerungsgruppe 2O als Untergruppe der $SU(2)$ keine Raumspiegelungen enthält. Somit haben wir aufgrund der P -Invarianz der Majorana-Plaquetten-Operatoren wie im Falle der Über-Eck-Plaquetten zur *vollen* Überlagerungsgruppe ${}^2O_h = {}^2O \otimes \{e, I\}$ überzugehen, um aus dem Transformationsverhalten der Operatoren $O_{ij}^P C$ unter 2O_h anschließend eine Darstellung über die $O_{ij}^P C$ konstruieren zu können. Zuvor wollen wir aber, wie bereits am Ende des vorherigen Abschnitt am Beispiel des Majorana-Link-Majorana-Operators geschehen, einen äquivalenten Ausdruck im Kontinuum betrachten und seinen Spingehalt bestimmen. Ziel dabei ist es, aus seinem Transformationsverhalten unter Lorentztransformationen erste Rückschlüsse auf die möglichen invarianten Unterräume des Darstellungsraumes bzw. auf die irreduziblen Anteile der zugehörigen Darstellung über die Gitter-Operatoren zu erhalten. Dabei werden wir die Kontinuumsbetrachtungen wieder im Minkowski-Raum ausführen.

5.4.1 Betrachtungen im Kontinuum

Im Kontinuum ist der Majorana-Plaquetten-Operator durch den Ausdruck

$$O_{\mathbb{1}}^{\text{Kont.}} = F_{\mu\nu}(x) \mathbb{1} \lambda(x) \quad (5.36)$$

gegeben, wobei $F_{\mu\nu}$ der Feldstärketensor ist. Wir wollen stattdessen den Operator

$$O_{\sigma}^{\text{Kont.}} = F_{\mu\nu}(x) \sigma^{\mu\nu} \lambda(x) \equiv \chi(x) \quad (5.37)$$

betrachten, der sich aus obigem ergibt, indem man die Einheitsmatrix durch den Spintensor $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ersetzt. Sowohl $F_{\mu\nu}$ als auch $\sigma^{\mu\nu}$ sind antisymmetrische Tensoren 2. Stufe. Unter Lorentztransformationen findet man für den Feldstärketensor [40]

$$F_{\mu\nu}(x) \longrightarrow F'_{\mu\nu}(x') = a_{\mu}^{\tau} a_{\nu}^{\rho} F_{\tau\rho}(x) , \quad (5.38)$$

und für den Spintensor unter Verwendung der in Anhang G angegebenen Relationen und einer Eins-Ergänzung

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(x) \sigma^{\mu\nu} \lambda(x) \longrightarrow \bar{\lambda}'(x') \sigma^{\mu\nu} \lambda'(x') &= \bar{\lambda}(x) S^{-1} \left\{ \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \right\} S \lambda(x) \\ &= \frac{i}{2} \left\{ \bar{\lambda}(x) S^{-1} \gamma^\mu \gamma^\nu S \lambda(x) - \bar{\lambda}(x) S^{-1} \gamma^\nu \gamma^\mu S \lambda(x) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{i}{2} \left\{ \bar{\lambda}(x) \underbrace{S^{-1}\gamma^\mu S}_{a^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha} \underbrace{S^{-1}\gamma^\nu S}_{a^\nu{}_\beta\gamma^\beta} \lambda(x) \right. \\
&\quad \left. - \bar{\lambda}(x) \underbrace{S^{-1}\gamma^\nu S}_{a^\nu{}_\beta\gamma^\beta} \underbrace{S^{-1}\gamma^\mu S}_{a^\mu{}_\alpha\gamma^\alpha} \lambda(x) \right\} \\
&= a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta \bar{\lambda}(x) \sigma^{\alpha\beta} \lambda(x). \tag{5.39}
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun den Ausdruck

$$\bar{\lambda}(x)\chi(x) = \bar{\lambda}(x)F_{\mu\nu}(x)\sigma^{\mu\nu}\lambda(x), \tag{5.40}$$

so ergibt sich aufgrund seines Transformationsverhaltens unter Lorentztransformationen

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\lambda &\longrightarrow \bar{\lambda}'(x')F'_{\mu\nu}(x')\sigma^{\mu\nu}\lambda'(x') &= F'_{\mu\nu}(x') \underbrace{\bar{\lambda}'(x')\sigma^{\mu\nu}\lambda'(x')}_{a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta \bar{\lambda}(x)\sigma^{\alpha\beta}\lambda(x)} \\
&\stackrel{(5.38)}{=} \underbrace{a_\mu{}^\tau a_\alpha{}^\mu}_{\delta_\alpha^\tau} \underbrace{a_\nu{}^\rho a_\beta{}^\nu}_{\delta_\beta^\rho} \bar{\lambda}(x) F_{\tau\rho}(x) \sigma^{\alpha\beta} \lambda(x) \\
&= \bar{\lambda}(x) F_{\alpha\beta}(x) \sigma^{\alpha\beta} \lambda(x), \tag{5.41}
\end{aligned}$$

daß dieser sich wie ein Lorentzskalar transformiert. Damit läßt sich $\chi(x)$ als ein fermionischer Operator interpretieren, der sich wie ein Majorana-Spinor (Spin 1/2-Teilchen) transformiert. Eine entsprechende Analyse für den Operator $O_{\mathbb{H}}^{\text{Kont.}}$ ist aufwendiger, und wir wollen daher nur das Ergebnis angeben. Er transformiert sich nach einer Spin- $\frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2}$ -Darstellung. Man sollte daher für den Majorana-Plaquetten-Operator erwarten, daß der im nächsten Unterabschnitt zu konstruierende Darstellungsraum der vollen Überlagerungsgruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ in invariante Unterräume zerfällt, die sich ausschließlich nach deren spinoriellen, irreduziblen Darstellungen G_1, G_2, H transformiert. Für den Operator $\chi(x)$ würde man gemäß der Resultate aus Kapitel 4 die Zerlegung $G_1 \oplus G_1$ erwarten.

5.4.2 Transformationsverhalten und Darstellung

Ähnlich wie im Falle des Majorana-Link-Majorana-Operators läßt sich das Transformationsverhalten der Majorana-Plaquetten-Operatoren unter der Überlagerungsgruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ im Majorana- und Plaquetten-Sektor unabhängig voneinander untersuchen. Da im hier betrachteten Fall aufgrund des einzelnen Majorana-Faktors kein – im Sinne von seinem Transformationsverhalten – trivialer Lorentzskalar im Majorana-Sektor auftritt, transformiert sich der Majorana-Spinor wie bereits in Kapitel 4, Abschnitt 4.3 beschrieben. Aufgrund der Unabhängigkeit von Majorana- und Plaquetten-Sektor konstruiert man eine Darstellung des Majorana-Link-Majorana-Operators durch Bildung des direkten Produkts der in den beiden Sektoren zu bestimmenden Darstellungen, wobei die zugrunde liegende Symmetriegruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ als die in Unterabschnitt 4.1.3 definierte diagonale Untergruppe der Produktgruppe ${}^2\mathbf{O}_h \times {}^2\mathbf{O}_h$ aufzufassen ist.

Konstruktion einer Darstellung im Plaquetten-Sektor

Der Plaquetten-Sektor transformiert sich in der gleichen Weise wie die in Abschnitt 2.6 behandelten Über-Eck-Plaquetten, da sowohl die Über-Eck-Plaquetten als auch der Plaquetten-Sektor der Majorana-Plaquetten-Operatoren geometrisch als Einfach-Plaquetten mit einem ausgezeichneten Eckpunkt aufgefaßt werden können, so daß ihr Transformationsverhalten unter der vollen kubischen Gruppe als auch unter der Überlagerungsgruppe 2O_h identisch ist. Aufgrund der Überlagerungseigenschaft der Gruppe 2O_h bezüglich der vollen kubischen Gruppe O_h , stellt die in Abschnitt 2.6 konstruierte Darstellung von O_h mittels Über-Eck-Plaquetten auch eine Darstellung ihrer Überlagerungsgruppe 2O_h dar. Wegen der zusätzlichen, oben erwähnten, geometrischen Übereinstimmung der Plaquettenkonfiguration der Über-Eck- und Majorana-Plaquetten-Operatoren können die dort berechneten Ergebnisse für den Plaquetten-Sektor gänzlich übernommen werden. Man erhält somit unter Berücksichtigung vorher eindeutig festgelegter P - und C -Parität für die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}$ von 2O über die Majorana-Plaquetten-Operatoren im Plaquetten-Sektor im Einzelnen gemäß Kapitel 2

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^{++} = A_1^{++} \oplus E^{++} \oplus T_2^{++}, \quad (5.42)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^{+-} = A_2^{+-} \oplus E^{+-} \oplus T_1^{+-}, \quad (5.43)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^{-+} = T_1^{-+} \oplus T_2^{-+}, \quad (5.44)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^{--} = T_1^{--} \oplus T_2^{--}. \quad (5.45)$$

Konstruktion einer Darstellung im Majorana-Sektor

Das Transformationsverhalten eines Majorana-Spinors λ unter der Überlagerungsgruppe 2O und die Konstruktion einer Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ wurde im vorherigen Kapitel in Abschnitt 4.3 behandelt. Daher haben wir im wesentlichen die dortigen Resultate auf raumgespiegelte Majorana-Teilchen und die Gruppe 2O_h zu erweitern. Die P -Paritätsoperation, angewandt auf einen euklidischen Majorana-Spinor, ist nach den Ausführungen des vorherigen Abschnitts 5.3 durch

$$P\lambda = i\gamma_0\lambda = i\gamma_4\lambda \equiv \lambda^P \quad (5.46)$$

definiert, so daß man in der Weyl-Darstellung

$$P\lambda = i\gamma_0 \begin{pmatrix} \lambda_L \\ \lambda_R \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_L \\ \lambda_R \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \lambda_R \\ \lambda_L \end{pmatrix} = \lambda^P \quad (5.47)$$

findet. Eine Raumspiegelung vertauscht also im wesentlichen gerade die beiden zweikomponentigen Weyl-Spinoren des Majorana-Spinors. Da wir nur an den Rotationen der Lorentzgruppe interessiert sind und deren Darstellungsmatrizen gemäß (4.14) Blockdiagonalgestalt haben, vertauschen die Lorentzrotationen mit der P -Paritätsoperation (vgl. dazu auch [20]), d.h.

$$S_{\text{Rot}}\lambda^P = S_{\text{Rot}}(P\lambda) = P(S_{\text{Rot}}\lambda) = P(\lambda_{\text{Rot}}) = (\lambda_{\text{Rot}})^P \quad (5.48)$$

mit $S_{\text{Rot}}\lambda \equiv \lambda_{\text{Rot}}$. Daher sind die Operatoren $\lambda \pm \lambda^P$ wegen

$$\begin{aligned} P \{S_{\text{Rot}}(\lambda \pm \lambda^P)\} &= P \{\lambda_{\text{Rot}} \pm (\lambda_{\text{Rot}})^P\} \\ &= \lambda_{\text{Rot}}^P \pm (\lambda_{\text{Rot}}) \\ &= \pm(\lambda_{\text{Rot}} \pm (\lambda_{\text{Rot}})^P) \\ &= \pm \{S_{\text{Rot}}(\lambda \pm \lambda^P)\} \end{aligned} \quad (5.49)$$

in der Tat P -invariant unter Lorentzrotationen. Mit Hilfe der Ergebnisse aus Abschnitt 4.3 des vorherigen Kapitels erhält man für die irreduzible Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{MS}}$ der Überlagerungsgruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ über Majorana-Plaquetten-Operatoren im Majorana-Sektor

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\text{MS}}^\pm = G_1^\pm \oplus G_1^\pm . \quad (5.50)$$

Bemerkung: Im Falle der Über-Eck-Plaquetten war es das Ziel, ihr Transformationsverhalten unter der vollen kubische Gruppe \mathbf{O}_h zu untersuchen, wobei man sich durch die Konstruktion P -invarianter Operatoren auf Transformationen unter der kubischen Gruppe \mathbf{O} beschränken konnte, da diese das Verhalten unter der vollen kubischen Gruppe schon eindeutig bestimmten (vgl. Abschnitt 2.6). In gleicher Weise legen die Transformationen der P -invarianten Majorana-Operatoren unter der Überlagerungsgruppe ${}^2\mathbf{O}$ die Transformationen unter der vollen Überlagerungsgruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ eindeutig fest: Für Operatoren mit positiver P -Parität ändert sich durch die optional ausgeführte Raumspiegelung per Definition nichts. Im Falle negativer P -Parität unterscheiden sich aufgrund von (5.49) die Rotationsmatrizen –oder besser Darstellungsmatrizen– S_{Rot} der Klassen E, \dots, C_8^2 von ihren raumgespiegelten Partnerklassen IE, \dots, IC_8^2 durch ein Minuszeichen, so daß sich für ihre Charaktere $\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_i) = -\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(IC_i)$ ergibt. Eine analoge Beziehung gilt aber auch für die Charaktere $\chi^\mu(C_i)$ der irreduziblen Darstellungen der vollen Überlagerungsgruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ (für $P = -1$), so daß Formel (12) aus Kapitel 0 bei Summation über alle konjugierten Klassen von ${}^2\mathbf{O}_h$ das gleiche Resultat liefert, wie Formel (4.19) aus 4.3. Die Charaktertabelle der Gruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ erhält man dabei aus ${}^2\mathbf{O}$ in gleicher Weise, wie sich die Charaktertabelle von \mathbf{O}_h aus \mathbf{O} ergibt (vgl. Kapitel 0).

Darstellung über Majorana-Plaquetten-Operatoren

Die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ der Überlagerungsgruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ über Majorana-Plaquetten-Operatoren erhalten wir, wie oben bereits erwähnt, mit Hilfe des in Kapitel 4 bereitgestellten Konzeptes der Darstellungstheorie direkter endlicher Produktgruppen. Dabei bildet man bei fest vorgewählter P - und C -Parität aus den irreduziblen Anteilen $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu$ der Darstellungen $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}$ und aus der irreduziblen Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{MS}}$ von ${}^2\mathbf{O}_h$ gemäß (4.10) Produktdarstellungen

$$\tilde{\mathcal{R}} = \tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu \otimes \tilde{\mathcal{R}}_{\text{MS}} , \quad (5.51)$$

der diagonalen Untergruppe ${}^2\mathbf{O}_h$ von ${}^2\mathbf{O}_h \times {}^2\mathbf{O}_h$. Die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ wird i.a. reduzibel sein.

Für die gesuchten Darstellungen $\tilde{\mathcal{R}}(\equiv \tilde{\mathcal{R}}_k^{PC}$ mit $k \in \{1, 2, 3\})$ erhält man also

$$\tilde{\mathcal{R}}_1^{++} = A_1^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} , \quad (5.52)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{++} = E^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\}, \quad (5.53)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_3^{++} = T_2^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\}, \quad (5.54)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_1^{+-} = A_2^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\}, \quad (5.55)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{+-} = E^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\}, \quad (5.56)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_3^{+-} = T_1^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\}, \quad (5.57)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_1^{-+} = T_1^{-+} \otimes \{G_1^{-+} \oplus G_1^{-+}\}, \quad (5.58)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{-+} = T_2^{-+} \otimes \{G_1^{-+} \oplus G_1^{-+}\}, \quad (5.59)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_1^{--} = T_1^{--} \otimes \{G_1^{--} \oplus G_1^{--}\}, \quad (5.60)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{--} = T_2^{--} \otimes \{G_1^{--} \oplus G_1^{--}\}. \quad (5.61)$$

5.4.3 Irreduzible Zerlegung der Darstellung

Für die Zerlegung der Darstellungen $\tilde{\mathcal{R}}_k^{PC}$ in ihre irreduziblen Anteile bedient man sich ein weiteres Mal Formel (12) aus Kapitel 0, wobei zusätzlich die beiden Relationen

$$\chi^{\mathcal{R}' \otimes \mathcal{R}''}(g) = \chi^{\mathcal{R}'}(g) \chi^{\mathcal{R}''}(g) \quad (\text{vgl. Theorem 30}) \quad (5.62)$$

und

$$\chi^{\mathcal{R}' \oplus \mathcal{R}''}(g) = \chi^{\mathcal{R}'}(g) + \chi^{\mathcal{R}''}(g) \quad (\text{vgl. Fußnote 5, Kap.4}) \quad (5.63)$$

Verwendung finden. Unter Vernachlässigung der Paritätsindizes P, C und des Nummerierungsindex k gilt

$$\begin{aligned} a_\nu &= \frac{1}{48} \sum_i n_i \chi^\nu(C_i) \chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_i) \\ &\stackrel{(5.62)}{=} \frac{1}{48} \sum_i n_i \chi^\nu(C_i) \left[\chi^{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu}(C_i) \chi^{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{MS}}}(C_i) \right] \\ &\stackrel{(5.63)}{=} \frac{1}{48} \sum_i n_i \chi^\nu(C_i) \left[\chi^{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu}(C_i) \cdot (\chi^{G_1}(C_i) + \chi^{G_1}(C_i)) \right]. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Die Summe erstreckt sich über alle acht Klassen C_i der 48-elementigen Gruppe ${}^2\text{O}$ (und nicht ${}^2\text{O}_h$, vgl. Bemerkung unter Gleichung (5.50)). Die Klassenstärken n_i ihrer Klassen E, J, C_4, \dots, C_8^2 und die zugehörigen Charaktere $\chi^\nu(C_i)$ ihrer irreduziblen Darstellungen entnimmt man den Charaktertabellen aus Unterabschnitt 4.2.2 bzw. 0.3.3. Für letztere hat man aufgrund der Ausführungen in Abschnitt 4.2 die folgenden Entsprechungen zu beachten²:

²Beim Übergang von der kubischen Gruppe O zu deren Überlagerungsgruppe ${}^2\text{O}$ bleibt die Klassenstruktur der kubischen Gruppe im Prinzip erhalten. Einige Klassen verdoppeln lediglich die Anzahl ihrer Elemente, zwei Klassen spalten durch Hinzunahme der neuen Elemente in jeweils zwei Klassen auf. Hinsichtlich der gemeinsamen irreduziblen Darstellungen A_1, \dots, T_2 der Gruppen O und ${}^2\text{O}$ kann die Charaktertabelle der kubischen Gruppe übernommen werden, wobei sich in geeigneter Weise die Klassen von O mit denen von ${}^2\text{O}$ identifizieren lassen (vgl. Tabelle).

konj. Klassen in ${}^2\mathbf{O}$	konj. Klassen in \mathbf{O}
E	E
J	
$12C_4$	$6C_2$
$8C_6^2$	
$8C_6$	$8C_3$
$6C_8$	
$6C'_8$	$6C_4$
$6C_8^2$	$3C_4^2$

Beispielsweise gilt somit $\chi^\nu(8C_6^2) = \chi^\nu(8C_6) = \chi^\nu(8C_3)$ mit $\nu = A_1, \dots, T_2$.

Die Charaktere $\chi^{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu}(C_i)$ sind je nach Wahl von $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu$ mit geeignetem $\mu \in \{A_1, \dots, T_2\}$ ebenfalls aus der Charaktertabelle von \mathbf{O} zu bestimmen. $\chi^{G_1}(C_i)$ findet sich in 4.2.2.

Man erhält aus (5.64) für den

ersten Fall: $P = C = +1$

mit den Vorgaben

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = A_1^{++}, \nu = A_1^{++}, \dots, T_2^{++}$$

$$\begin{aligned}
 a \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ E \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{48} \left[1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot [1 \cdot (2+2)] + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot [1 \cdot (-2-2)] + \right. \\
 &+ 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot [1 \cdot (0+0)] + 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot [1 \cdot (-1-1)] + \\
 &+ 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot [1 \cdot (1+1)] + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot [1 \cdot (-\sqrt{2} - \sqrt{2})] + \left. \right]
 \end{aligned}$$

$$+6 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})] + 6 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (0 + 0)] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

bzw. mit

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = A_1^{++}, \nu = G_1^{++}, G_2^{++}, H^{++}}$$

$$\begin{aligned} a \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ H \end{Bmatrix} &= \frac{1}{48} \left[1 \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (2 + 2)] + 1 \cdot \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (-2 - 2)] + \right. \\ &+ 12 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (0 + 0)] + 8 \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (-1 - 1)] + \\ &+ 8 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (1 + 1)] + 6 \cdot \begin{Bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (-\sqrt{2} - \sqrt{2})] + \\ &\left. + 6 \cdot \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})] + 6 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (0 + 0)] \right] = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

insgesamt

$$\tilde{\mathcal{R}}_1^{++} = A_1^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} = G_1^{++} \oplus G_1^{++} = 2G_1^{++}. \quad (5.65)$$

Der Darstellungsraum der Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}_1^{++}$ zerfällt in zwei invariante Unterräume der Dimension zwei, die sich beide nach der spinoriellen, irreduziblen Darstellung G_1^{++} der Gruppe ${}^2\text{O}_h$ transformieren. Das Ergebnis stimmt mit unseren Kontinuumsbetrachtungen aus Unterabschnitt 5.4.1 überein, wonach sich die Majorana-Plaquetten-Operatoren unter der Gruppe ${}^2\text{O}_h$ wie Spinoren transformieren sollten.

Für die Darstellungen $\tilde{\mathcal{R}}_2^{++}$ und $\tilde{\mathcal{R}}_3^{++}$ erhält man in analoger Weise

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{++} = E^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} = 2H^{++} \quad \text{und} \quad (5.66)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_3^{++} = T_2^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} = 2G_2^{++} \oplus 2H^{++}. \quad (5.67)$$

Die invarianten Unterräume ihrer Darstellungsräume transformieren sich damit ebenfalls nach irreduziblen Darstellungen mit Spinorcharakter. Die explizite Ausführung der Rechnungen finden sich in Anhang C.5.

zweiter Fall: $P = +1, C = -1$

Für diesen Fall ergibt sich

$$\tilde{\mathcal{R}}_1^{+-} = A_2^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\} = 2G_2^{+-} \quad (5.68)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{+-} = E^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\} = 2H^{+-} \quad (5.69)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_3^{+-} = T_1^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\} = 2G_1^{+-} \oplus 2H^{+-}, \quad (5.70)$$

und für den

dritten und vierten Fall: $P = -1, C = \pm 1$

findet man

$$\tilde{\mathcal{R}}_1^{-\pm} = T_1^{-\pm} \otimes \{G_1^{-\pm} \oplus G_1^{-\pm}\} = 2G_1^{-\pm} \oplus 2H^{-\pm} \quad (5.71)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{-\pm} = T_2^{-\pm} \otimes \{G_1^{-\pm} \oplus G_1^{-\pm}\} = 2G_2^{-\pm} \oplus 2H^{-\pm}. \quad (5.72)$$

Die Zerlegung der reduziblen Darstellungen $\tilde{\mathcal{R}}_k^{PC}$ hängt somit nur von der Vorgabe von $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu$ ab und ist unabhängig von der Wahl der P - bzw. C -Parität. Man beachte aber, daß sich die jeweils als Basis der Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}_k^{PC}$ fungierenden Majorana-Plaquetten-Operatoren in ihren P - und C -Paritätseigenwerten unterscheiden. Wir beschließen diesen Unterabschnitt mit einer

Zusammenfassung der Ergebnisse:

Für die Zerlegung der Darstellungen $\tilde{\mathcal{R}}^{PC}$ über die sechs Majorana-Plaquetten-Operatoren $O_{ij}^P = (O_{ij}^\pm)$ – mit dem Index $i = 1, 2, 3$ für die drei unterschiedlichen Koordinatenebenen und dem Index $j = 1, 2$ für die Position des Majorana-Faktors – in ihre irreduziblen Anteile erhält man im Einzelnen die folgenden Resultate:

$$A_1^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} = 2G_1^{++} \quad (5.73)$$

$$A_2^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\} = 2G_2^{+-} \quad (5.74)$$

$$E^{+\pm} \otimes \{G_1^{+\pm} \oplus G_1^{+\pm}\} = 2H^{+\pm} \quad (5.75)$$

$$T_1^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\} = 2G_1^{+-} \oplus 2H^{+-} \quad (5.76)$$

$$T_1^{-\pm} \otimes \{G_1^{-\pm} \oplus G_1^{-\pm}\} = 2G_1^{-\pm} \oplus 2H^{-\pm} \quad (5.77)$$

$$T_2^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} = 2G_2^{++} \oplus 2H^{++} \quad (5.78)$$

$$T_2^{-\pm} \otimes \{G_1^{-\pm} \oplus G_1^{-\pm}\} = 2G_2^{-\pm} \oplus 2H^{-\pm}. \quad (5.79)$$

Die hier nicht ausgeführten Rechnungen finden sich in Anhang C.5.

5.4.4 Konstruktion einer Orthonormalbasis

Bei der Konstruktion von Orthonormalbasen werden wir uns auf Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}^{PC}$ beschränken, die im Kontinuumsimes zu Spin-1/2-Zuständen führen, d.h. deren invarianten Unterräume sich nach der Darstellung G_1 unter 2O_h transformieren. Diese Eigenschaft besitzt die vierdimensionale Darstellung

$$\tilde{\mathcal{R}}_1^{++} = A_1^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} = 2G_1^{++} . \quad (5.80)$$

Eine Orthonormalbasis läßt sich in diesem Fall in Analogie zu den Ergebnissen aus Kapitel 2 leicht angeben. Man erhält sie, indem man alle sechs Operatoren O_{ij+}^+ mit $i = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2$ aufsummiert:

Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ von 2O_h	Linearkombinationen der Majorana-Plaquetten-Majorana-Operatoren
$2G_1^{++}$	$O_{11+}^+ + O_{12+}^+ + O_{21+}^+ + O_{22+}^+ + O_{31+}^+ + O_{32+}^+$

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung der Ergebnisse

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der gruppentheoretischen Untersuchung von supersymmetrischen Gitter-Operatoren, die zur Massenbestimmung von Zuständen der $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie im Rahmen von Monte-Carlo-Simulationen herangezogen werden können, was insbesondere in nicht-perturbativen Energiebereichen von Interesse ist. Meine Untersuchung basiert dabei auf einem anfangs der achtziger Jahre erschienenen Artikel von B. BERG und A. BILLOIRE, in dem die Autoren Wilson-Loops als eichinvariante Operatoren der Gittereichtheorie nach ihrem Transformationsverhalten unter der ihnen zugrunde liegenden Gitter-Symmetrie-Gruppe, d.h. der kubischen Gruppe O , klassifizieren und geeignete Sätze an Operatoren für eine Monte-Carlo-Simulation zur Bestimmung von Glueballmassen in der QCD vorschlagen [19].

Zu diesem Zweck habe ich nach Bereitstellung gruppentheoretischer Hilfsmittel und einem kurzen Abriß über die physikalischen Hintergründe zur Bestimmung von massiven Zuständen in stark-gekoppelten Gitter-Eichtheorien zunächst die in [19] vorgeschlagene Konstruktion von Darstellungen der kubischen Gruppe über Loop-Operatoren ausführlich diskutiert. Weiterhin habe ich die dort angegebenen Resultate anhand ausgewählter Beispiele in eigenen Rechnungen reproduzieren können. Dabei legte ich großen Wert auf eine detaillierte und in sich konsistente Ausarbeitung der in [19] an einigen Stellen nur skizzierten Vorgehensweise bei der Bestimmung der Darstellungen und insbesondere bei dem Auffinden geeigneter Orthonormalbasen bestehend aus Linearkombinationen der Loop-Operatoren.

Wesentliches Ziel der Arbeit ist, die in [19] dargestellte gruppentheoretische Behandlung von Operatoren der Gittereichtheorie auf vorgegebene, supersymmetrische Gitter-Operatoren auszuweiten und unter Berücksichtigung analoger Überlegungen, Darstellungen der zugehörigen Gitter-Symmetriegruppe über diese Operatoren aufzufinden, und eine Orthonormalbasis aus ihnen anzugeben. Hierbei ist zu beachten, daß aufgrund des Konzeptes der Supersymmetrie die möglichen Operatoren nun auch fermionische Freiheitsgrade in Form von Majorana-Spinoren aufweisen dürfen. Dieser Sachverhalt machte den Übergang von der kubischen Gruppe zu ihrer doppelten Überlagerungsgruppe als der nunmehr zugrunde liegenden Symmetriegruppe der Gitter-Operatoren nötig. Dies wurde im vierten Kapitel vollzogen. Anschließend habe ich das Transformationsverhalten von Majorana-Spinoren unter der neu eingeführten Überlagerungsgruppe diskutiert und unter Verwendung der

Kenntnisse aus der relativistischen Dirac-Theorie eine Darstellung dieser Gruppe über o.g. Spinoren bestimmt.

Das letzte Kapitel enthält eine gruppentheoretische Untersuchung von drei supersymmetrischen Operatoren der $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie. Zunächst wurde der aus zwei Majorana-Spinoren gebildete Lorentzskalar $\bar{\lambda}\lambda$ betrachtet, der bereits in Monte-Carlo Simulationen einer $SU(2)$ Yang-Mills-Theorie mit leichten Gluinos zur Bestimmung der im chiralen Veneziano-Yankielowicz-Supermultiplett vorkommenden Gluinoball-Massen verwendet wurde [36]. Danach modifizierte ich den Lorentzskalar $\bar{\lambda}\lambda$, indem ich die Majorana-Spinoren auf benachbarte Gitterplätze setzte und sie durch zwei Eichlinks miteinander verband. Es stellte sich heraus, daß sich der betrachtete Operator $\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)U_{x;\mu}^\dagger\lambda(x+a\hat{\mu})U_{x;\mu}\}$ unter der Überlagerungsgruppe der kubischen Gruppe nach ihrer irreduziblen Vektordarstellung T_1 transformiert, so daß eine ONB leicht bestimmt werden konnte. Zusätzlich führte ich Konsistenzüberlegung im Kontinuum durch und bestätigte dort das Ergebnis der Gitter-Rechnung. Zuletzt diskutierte ich einen aus einer Plaquette und einem Majorana-Spinor bestehenden Operator $\text{Tr}\{U_{x;\mu\nu}\lambda(x)\}$, wobei sich das Majorana-Teilchen an einer beliebigen Plaquetten-Ecke befinden darf. Eine entsprechende Betrachtung im Kontinuum forderte ausschließlich spinorielle, irreduzible Darstellungen der Überlagerungsgruppe für den Gitter-Operator, die sich nach den anschließenden Gitter-Rechnungen explizit angeben ließen. Abschließend wurde für die Darstellung, die im Kontinuumslimit auf einen Spin- $\frac{1}{2}$ -Zustand führen sollte, eine Linearkombination aus geeigneten Gitter-Operatoren bestimmt, die der Darstellung als ONB dienen kann.

Insgesamt läßt sich festhalten, daß die in [19] vollzogenen, gruppentheoretischen Klassifikationmethoden für eichinvariante Loop-Operatoren auf die im Rahmen der vorliegenden Arbeit untersuchten, supersymmetrischen Gitter-Operatoren der $N = 1$ SUSY-Yang-Mills-Theorie ausgeweitet werden können. Somit stellt insbesondere die gruppentheoretische Analyse des zuletzt untersuchten Gitter-Operators $\text{Tr}\{U_{x;\mu\nu}\lambda(x)\}$, der bereits im Rahmen von Monte-Carlo-Rechnungen auf dem Gitter zur Bestimmung von Gluino-Gluonball-Massen, also Spin- $\frac{1}{2}$ -Zuständen, im Veneziano-Yankielowicz- bzw. Farrar-Gabadadze-Schwetz-Supermultiplett benutzt wird, seine Verwendung (in numerischen Simulationen auf dem Gitter) auf eine solide Grundlage.

Ausblick

An dieser Stelle soll nun die Frage diskutiert werden, in wie weit die Ergebnisse dieser Arbeit Ansatzpunkte für weiterführenden Untersuchungen im Rahmen der $N = 1$ supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie bieten:

Als Schwerpunkt liegt sicherlich nahe, die bisherigen gruppentheoretischen Untersuchungen auf weitere supersymmetrische Gitter-Operatoren auszuweiten, wobei man insbesondere an Operatoren mit fermionischen Komponenten interessiert sein wird, da mit deren Hilfe Spin- $\frac{1}{2}$ -Zustände gemessen werden können. Als mögliche Operatoren sei hier zunächst der Gitter-Operator $\text{Tr}\{U_{x;\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\lambda(x)\}$ genannt, dessen Pendant im Kontinuum in der Form $F_{\mu\nu}(x)\sigma^{\mu\nu}\lambda(x)$ bereits im Zuge dieser Arbeit unter Lorentztransformationen betrachtet wurde. Dabei zeigte sich das Verhalten eines Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchens, so daß eine entsprechende

gruppentheoretische Analyse unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse ein Transformationsverhalten unter der zugrundeliegenden Gitter-Symmetriegruppe 2O bzw. 2O_h nach ihrer spinoriellen, irreduziblen Darstellung G_1 vermuten läßt. Weiterhin sind Operatoren mit drei fermionischen Freiheitsgraden von Interesse, etwa eine Konstellation bestehend aus zwei auf einem Gitterpunkt befindlichen Majorana-Spinoren, die über Eichlinks mit einem weiteren Majorana-Faktor verbunden sind. Dieser hier angegebene Operator weist Spin- $\frac{3}{2}$ - und Spin- $\frac{1}{2}$ -Anteile auf. Man sollte aufgrund des Transformationsverhaltens im Kontinuum erwarten, daß nach Diskretisierung Darstellungen über derartige Operatoren ebenfalls eine spinorielle Charakteristik in Form von invarianten Unterräumen des zugehörigen Darstellungsraumes aufweisen, die sich nach den Darstellungen G_1 und H transformieren. Nach einer detaillierteren, gruppentheoretischen Untersuchung unter Verwendung der in dieser Arbeit bereitgestellten Hilfsmittel, könnten geeignete Kombinationen solcher Operatoren später zur numerischen Simulation für die Berechnung von fermionischem Gluino-Glueball-Zuständen im Veneziano-Yankielowicz bzw. Farrar-Gabadadze-Schwetz-Supermultiplett dienen.

Anhang A

Reguläre Darstellung

Aus der Kenntnis der Verknüpfungstabelle läßt sich für jede beliebige, endliche Gruppe G der Ordnung n_G eine reduzible Darstellung konstruieren, die sogenannte *reguläre Darstellung*. Zuvor aber eine Anmerkung zur Verknüpfungstabelle:

Multipliziert man die erste Zeile einer Verknüpfungstabelle nacheinander mit allen Elementen g_i der Gruppe G , so erhält man Zeilen, die aus allen möglichen Permutationen der ursprünglichen Zeile bestehen. Gleiches gilt für die Spalten.

Nun sei o.B.d.A. $g_1 = e$. Man ordnet die Zeilen der Verknüpfungstabelle derart um, daß auf der Hauptdiagonalen der Tabelle stets das neutrale Element steht. Dabei ergibt sich automatisch, daß die Zeilen mit den zu den Spalten gehörigen Inversen durchnummeriert werden.

	e	g_2	g_3	\dots	g_{n_G-1}	g_{n_G}
e^{-1}	e			\dots		
g_2^{-1}	\dots	e			\dots	
g_3^{-1}	\dots		e			\dots
\vdots		\dots		\ddots		\dots
$g_{n_G-1}^{-1}$			\dots		e	\dots
$g_{n_G}^{-1}$				\dots		e

Man definiert nun für jedes g_i , $i \in \{1, \dots, n_g\}$ die regulären Darstellungsmatrizen durch [6]

$$D_{kl}^{reg}(g_i) = \delta(g_k g_i g_l^{-1}) \quad \text{mit} \quad 1 \leq k, l \leq n_G, \quad (\text{A.1})$$

wobei

$$\delta(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g_i = e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

ist. Anders ausgedrückt, faßt man für jedes einzelne Gruppenelement g_i die umgeordnete Verknüpfungstabelle als ein $n_G \times n_G$ -Matrixgerüst auf und trägt in ihr die Zahl 1 an den Plätzen ein, an denen g_i auftritt. Alle anderen Gruppenelemente werden durch eine 0 ersetzt. Die Anzahl der n_G -dimensionale Darstellungsmatrizen beträgt somit genau n_G . Insbesondere gilt dann, daß $\chi^{reg}(e) = n_G$ und $\chi^{reg}(g_i) = 0$ für $g_i \neq e$ ist. Für den Beweis,

daß diese Matrizen überhaupt eine Darstellung definieren, sei auf [3] verwiesen. Ohne an dieser Stelle auf Einzelheiten einzugehen, kann mit Hilfe von Cayleys Theorem¹ gezeigt werden, daß die so entstandene Darstellung treu ist [4].

Theorem Die reguläre Darstellung enthält jede nicht-äquivalente, irreduzible Darstellung der Gruppe G genau sooft, wie ihre Dimension ist.

Beweis: Nach Formel (12) aus Theorem 24 gilt

$$a_\nu = \frac{1}{n_G} \sum_g \chi^{\nu^\dagger}(g) \chi^{reg}(g) = \frac{1}{n_G} \chi^{\nu^\dagger}(e) \underbrace{\chi^{reg}(e)}_{n_G} = d_\nu \quad (\text{A.3})$$

und damit das Theorem. □

Da die Dimension der regulären Darstellung einerseits nach Konstruktion n_G ist, andererseits aber auch gleich der Summe der Dimensionen der in der regulären Darstellung enthaltenen irreduziblen Darstellungen sein muß, gilt zusammen mit obigem Theorem in der Tat

$$\sum_\mu (d_\mu \cdot a_\mu) = \sum_\mu (d_\mu \cdot d_\mu) = \sum_\mu d_\mu^2 = n_G, \quad (\text{A.4})$$

und (8) aus Theorem 21 ist bewiesen.

¹**Theorem** (Cayley): Jede Gruppe der Ordnung n ist isomorph zu einer Untergruppe der S_n .

Anhang B

Beweisskizzen zu ausgewählten Theoremen aus Kapitel 0 und 4

B.1 Beweisskizzen zu den Theoremen 20, 22, 24 und 25 aus Abschnitt 0.2

In Beweisidee und Beweisführung bin ich in erster Linie [4] gefolgt. Alle Beweise sind soweit ausgeführt, daß ausgelassene Zwischenschritte leicht selbst zu vervollständigen sind.

Theorem 20 Für zwei beliebige, nicht-äquivalente, irreduzible, unitäre Darstellungsmatrizen gilt:

$$\frac{d_\mu}{n_G} \sum_g D^{\mu^\dagger}(g)_{ki} D^\nu(g)_{jl} = \delta_{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{B.1})$$

mit der Konvention $D^{\mu^\dagger}(g)_{ki} = D^{\mu^*}(g)_{ik}$.

Beweisskizze

1. Fall $\mu = \nu$: Sei X eine beliebige Matrix und man definiere

$$M \stackrel{(1)}{=} \sum_g D(g^{-1}) X D(g) = \sum_g D^{-1}(g) X D(g) \stackrel{(2)}{=} \sum_g D^\dagger(g) X D(g). \quad (\text{B.2})$$

[(1): Die Indizes für die $\mu = \nu$ -Darstellung sind hier weggelassen; (2): $D(g)$ unitär]

Man zeigt leicht, daß M mit allen $D(g)$ kommutiert, und Schurs erstes Lemma erzwingt also $M = \lambda \mathbb{1}$. Wählt man die $d_\mu \times d_\mu$ -Matrix $X = X_{kl}$ ($k, l = 1, \dots, d_\mu$) gemäß $(X_{kl})_{ij} = \delta_{kj} \delta_{li}$, gilt mit $\lambda = \lambda_{kl} = \text{const.}$

$$\sum_g D^\dagger(g)_{mi} (X_{kl})_{ij} D(g)_{jn} \stackrel{(3)}{=} \sum_g D^\dagger(g)_{mi} D(g)_{kn} \stackrel{(4)}{=} \lambda_{kl} \delta_{mn}. \quad (\text{B.3})$$

[(3): Wahl von X_{kl} ; (4) 1. Lemma von Schur.]

Summiert man nun für $n = m$ beide Seiten über n (Spurbildung), so ergibt der mittlere

Term unter Ausnutzung von $D^\dagger(g)D(g) = D(g^{-1}g)$ letztlich $n_G\delta_{kl}$ und der rechte fügt sich zu $d_\mu\lambda_{kl}$. Also ist insgesamt $\lambda_{kl} = (d_\mu/n_G\delta_{kl})$.

2. Fall $\mu \neq \nu$: Man startet wie im ersten Fall und zeigt, daß $D^\mu(g)M = MD^\nu(g)$ für alle $g \in G$ ist. Schurs zweites Lemma fordert nun $M \equiv 0$. Nach einem analogen Vorgehen wie oben erhält man das allgemeine Resultat. \square

Theorem 22 Die Charaktere der nicht-äquivalenten, irreduziblen Darstellungen genügen folgenden Relationen:

$$(i) \quad \sum_i \frac{n_i}{n_G} \chi^{\mu^\dagger}(C_i) \chi^\nu(C_i) = \delta_{\mu\nu} \quad (\text{Orthonormalität}) \quad (B.4)$$

$$(ii) \quad \sum_\mu \frac{n_i}{n_G} \chi^\mu(C_i) \chi^{\mu^\dagger}(C_j) = \delta_{ij} \quad (\text{Vollständigkeit}), \quad (B.5)$$

wobei gemäß Konvention $\chi^{\mu^\dagger}(C_i) = (\chi^\mu(C_i))^*$ ist.

Beweisskizze

(i) Ausgehend von Theorem 20 setzt man $i = k, j = l$ und summiert beide Seiten über beide Indizes. Auf der linken Seite erhält man

$$\frac{d_\mu}{n_G} \sum_g \chi^{\mu^\dagger}(g) \chi^\nu(g) = \frac{d_\mu}{n_G} \sum_i n_i \chi^{\mu^\dagger}(C_i) \chi^\nu(C_i) \quad (B.6)$$

und auf der rechten Seite entsprechend $d_\mu\delta_{\mu\nu}$.

(ii) Zur Verifikation benötigen wir (ohne Beweis) folgenden

Hilfssatz Sei \mathcal{R}^μ eine irreduzible Darstellung von G . Summiert man \mathcal{R}^μ über alle n_i Gruppenelemente einer festen aber beliebigen Klasse C_i , so ergibt sich das Resultat

$$\sum_{h \in C_i} \mathcal{R}^\mu(h) = \frac{n_i}{d_\mu} \chi^\mu(C_i) \mathbb{1}, \quad (B.7)$$

wobei $\mathbb{1}$ den Identitätsoperator bezeichnen soll.

Zurück zum Beweis von (ii). Summiert man (9) aus Theorem 21 über Gruppenelemente g aus der Klasse C_i und über Gruppenelemente g' aus C_j so erhält man unter Ausnutzung des obigen Hilfssatzes auf der linken Seite

$$\sum_\mu \frac{d_\mu}{n_G} \frac{n_i}{d_\mu} \chi^\mu(C_i) n_j \chi^{\mu^\dagger}(C_j) Tr \mathbb{1} / d_\mu = \frac{n_i n_j}{n_G} \sum_\mu \chi^\mu(C_i) \chi^{\mu^\dagger}(C_j), \quad (B.8)$$

während sich die rechte Seite zu $n_i\delta_{ij}$ ergibt. \square

Theorem 24 Zerlegt man eine reduzible Darstellung \mathcal{R} in ihre irreduziblen Anteile, so bestimmt man deren Häufigkeit a_ν gemäß der Formel

$$a_\nu = \frac{1}{n_G} \sum_i n_i \chi^{\nu^\dagger}(C_i) \chi(C_i). \quad (\text{B.9})$$

Beweisskizze

Bildet man die Spur von (5) aus Kapitel 0, Abschnitt 0.2.2, so erhält man

$$\chi(C_i) = \sum_\mu a_\mu \chi^\mu(C_i) \quad (\star). \quad (\text{B.10})$$

Nach (i) von Theorem 22 bilden die $\chi^\nu(C_i)$ ein orthogonales Vektorsystem, daher lassen sich die Entwicklungskoeffizienten a_ν durch das Skalarprodukt mit $\chi^{\nu^\dagger}(C_i)$ zu

$$\sum_i n_i \chi^{\nu^\dagger}(C_i) \chi(C_i) \stackrel{(\star)}{=} \sum_i n_i \chi^{\nu^\dagger}(C_i) \sum_\mu a_\mu \chi^\mu(C_i) \stackrel{(\text{Th.22,i})}{=} n_G a_\nu \quad (\text{B.11})$$

bestimmen. □

Theorem 25 Eine Darstellung \mathcal{R} mit den Charakteren $\{\chi(C_i)\}$ ist genau dann irreduzibel, wenn

$$\sum_i n_i |\chi(C_i)|^2 = n_G. \quad (\text{B.12})$$

Beweisskizze

Bezeichne a_μ die Anzahl der irreduziblen Darstellungen \mathcal{R}^μ , die in der Zerlegung von \mathcal{R} enthalten sind. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_i n_i |\chi(C_i)|^2 &= \sum_i n_i \left(a_\mu \chi^\mu(C_i) \right)^\dagger \left(a_\nu \chi^\nu(C_i) \right) \quad (\text{Summenkonvention!}) \\ &= \sum_\mu \sum_\nu a_\mu^* a_\nu \underbrace{\sum_i n_i \chi^{\mu^\dagger}(C_i) \chi^\nu(C_i)}_{n_G \delta_{\mu\nu}} \\ &= n_G \sum_\mu |a_\mu|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Falls nun \mathcal{R} äquivalent zu einer irreduziblen Darstellung \mathcal{R}_ξ ist, gilt $a_\mu = 0$ für alle $\mu \neq \xi$, und das Kriterium ist selbstverständlich erfüllt. Ist andererseits das Irreduzibilitätskriterium erfüllt, muß $\sum_\mu |a_\mu|^2 = 1$ sein. Da $a_\mu \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ist, muß es ein ξ geben mit $a_\xi = 1$ und $a_\mu = 0$ für alle $\mu \neq \xi$. □

B.2 Beweisskizzen zu den Theoremen 30 und 31 aus den Abschnitten 4.1.2 und 4.1.3

Die Beweise finden sich in [1] und sind hier lediglich der Vollständigkeit halber aufgenommen.

Theorem und Definition 30 Seien zwei unitäre, irreduzible Darstellungen \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν der Dimension d_μ und d_ν einer Gruppe G durch ihre Darstellungsmatrizen $D^\mu(g)$ und $D^\nu(g)$ gegeben. Dann legen die Matrizen

$$D^{\mu \otimes \nu}(g) = D^\mu(g) \otimes D^\nu(g) \quad (\text{B.14})$$

für alle $g \in G$ in eindeutiger Weise eine unitäre Darstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ der Dimension $d_\mu d_\nu$ fest. Für den Charakter $\chi^{\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu}(g)$ der Darstellung gilt dabei

$$\chi^{\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu}(g) = \chi^{\mathcal{R}^\mu}(g) \chi^{\mathcal{R}^\nu}(g). \quad (\text{B.15})$$

Man bezeichnet die Darstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ als *direktes Produkt der Darstellungen \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν der Gruppe G* .

Beweisskizze

(i) Sei $g_1, g_2 \in G$, dann gilt

$$D^{\mu \otimes \nu}(g_1) D^{\mu \otimes \nu}(g_2) \stackrel{(4.6)}{=} (D^\mu(g_1) \otimes D^\nu(g_2)) (D^\mu(g_2) \otimes D^\nu(g_2)) \quad (\text{B.16})$$

$$\stackrel{(4.5)}{=} (D^\mu(g_1) D^\mu(g_2)) \otimes (D^\nu(g_1) D^\nu(g_2)) \quad (\text{B.17})$$

$$= D^\mu(g_1 g_2) \otimes D^\nu(g_1 g_2) \quad (\text{B.18})$$

$$= D^{\mu \otimes \nu}(g_1 g_2). \quad (\text{B.19})$$

Die Matrizen $D^{\mu \otimes \nu}(g)$, $g \in G$ definieren also eine Darstellung der Gruppe G der Dimension $d_\mu d_\nu$.

(ii) Die Unitarität der Darstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ folgt aus der Tatsache, daß die Darstellungsmatrizen beider Darstellungen \mathcal{R}^μ und \mathcal{R}^ν unitär sind und damit auch deren direktes Produkt.

(iii) Die Charakter der Darstellung $\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu$ berechnet man ebenfalls mit Hilfe der Darstellungsmatrizen $D^{\mu \otimes \nu}(g)$. Es gilt mit der ein-eindeutigen Zuordnung $m \leftrightarrow (ij)$, wobei $1 \leq m \leq d_\mu d_\nu$, $1 \leq i \leq d_\mu$, $1 \leq j \leq d_\nu$:

$$\chi^{\mathcal{R}^\mu \otimes \mathcal{R}^\nu}(g) = \sum_{m=1}^{d_\mu d_\nu} (D^{\mu \otimes \nu}(g))_{mm} \quad (\text{B.20})$$

$$\stackrel{(4.6)}{=} \sum_{i=1}^{d_\mu} \sum_{j=1}^{d_\nu} (D^\mu(g) \otimes D^\nu(g))_{ij,ij} \quad (\text{B.21})$$

$$\stackrel{(4.4)}{=} \sum_{i=1}^{d_\mu} \sum_{j=1}^{d_\nu} (D^\mu(g))_{ii} (D^\nu(g))_{jj} \quad (\text{B.22})$$

$$= \chi^{\mathcal{R}^\mu}(g) \chi^{\mathcal{R}^\nu}(g). \quad (\text{B.23})$$

□

Theorem 31 Seien \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 Darstellungen der beiden Gruppen G_1 und G_2 und durch ihre Darstellungsmatrizen $D_{\mathcal{R}_1}(g)$ und $D_{\mathcal{R}_2}(g)$ gegeben. Dann bilden die Matrizen $D_{\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2}((g_1, g_2))$ mit

$$D_{\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2}((g_1, g_2)) = D_{\mathcal{R}_1}(g_1) \otimes D_{\mathcal{R}_2}(g_2) \quad (\text{B.24})$$

für alle $g_1 \in G_1$ und $g_2 \in G_2$ eine Darstellung der Produktgruppe $G_1 \otimes G_2$. Die Darstellung von $G_1 \otimes G_2$ ist unitär, falls G_1 und G_2 unitär sind, und treu, falls G_1 und G_2 treu sind.

Beweisskizze

Im wesentlichen haben wir zu zeigen, daß (B.24) in der Tat eine Darstellung definiert. Seien dazu beliebige $g_1, g'_1 \in G_1$ und $g_2, g'_2 \in G_2$, dann folgt mit (B.24):

$$D_{\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2}((g_1, g_2)) D_{\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2}((g'_1, g'_2)) \quad (\text{B.25})$$

$$= (D_{\mathcal{R}_1}(g_1) \otimes D_{\mathcal{R}_2}(g_2)) (D_{\mathcal{R}_1}(g'_1) \otimes D_{\mathcal{R}_2}(g'_2)) \quad (\text{B.26})$$

$$\stackrel{(4.5)}{=} (D_{\mathcal{R}_1}(g_1) D_{\mathcal{R}_1}(g'_1)) \otimes (D_{\mathcal{R}_2}(g_2) D_{\mathcal{R}_2}(g'_2)) \quad (\text{B.27})$$

$$= D_{\mathcal{R}_1}(g_1 g'_1) \otimes D_{\mathcal{R}_2}(g_2 g'_2) \quad (\text{B.28})$$

$$\stackrel{(B.24)}{=} D_{\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2}((g_1 g'_1, g_2 g'_2)) \quad (\text{B.29})$$

$$\stackrel{(4.1)}{=} D_{\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2}((g_1, g_2)(g'_1, g'_2)) . \quad (\text{B.30})$$

Die zweite Behauptung folgt aus der Tatsache, daß das direkte Produkt zweier unitärer Matrizen wieder unitär ist.

Die dritte Aussage sieht man so: Falls \mathcal{R}_1 und \mathcal{R}_2 treu sind, existieren zu allen Darstellungsmatrizen die Inversen, und es gilt

$$(D_{\mathcal{R}_1}(g_1) \otimes D_{\mathcal{R}_2}(g_2)) (D_{\mathcal{R}_1}^{-1}(g_1) \otimes D_{\mathcal{R}_2}^{-1}(g_2)) \quad (\text{B.31})$$

$$\stackrel{(4.5)}{=} (D_{\mathcal{R}_1}(g_1) D_{\mathcal{R}_1}^{-1}(g_1)) \otimes (D_{\mathcal{R}_2}(g_2) D_{\mathcal{R}_2}^{-1}(g_2)) \quad (\text{B.32})$$

$$= \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (\text{B.33})$$

$$= \mathbf{1} \quad (\text{B.34})$$

und damit

$$(D_{\mathcal{R}_1}^{-1}(g_1) \otimes D_{\mathcal{R}_2}^{-1}(g_2)) = (D_{\mathcal{R}_1}(g_1) \otimes D_{\mathcal{R}_2}(g_2))^{-1} . \quad (\text{B.35})$$

Bemerkung: In (B.33) und (B.34) sind die Dimensionen der Einheitsmatrizen in geeigneter Form zu ergänzen. \square

Anhang C

Ergänzungen zu Kapitel 2 und 4

C.1 Drehmatrizen der T_1 -Darstellung

Die irreduziblen, dreidimensionalen Darstellungsmatrizen der kubischen Gruppe O in der Vektordarstellung T_1 bestehen aus den Einträgen 0 und ± 1 , wobei in jeder Zeile und Spalte jeweils nur eine ± 1 steht. Unbesetzte Felder sind daher als Null-Einträge zu lesen. Sie sind klassenweise geordnet. Sie können in Gruppentheoriebüchern nachgeschlagen werden und sind [1] entnommen.

- Klasse E

$$T(id) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

- Klasse C_2

$$T(C_{2a}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(C_{2b}) = \begin{pmatrix} & & -1 \\ -1 & & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(C_{2c}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & -1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$T(C_{2d}) = \begin{pmatrix} & & -1 \\ & -1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$$

$$T(C_{2e}) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

$$T(C_{2f}) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

- Klasse C_3

$$t(C_{3\alpha}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(C_{3\beta}) = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(C_{3\gamma}) = \begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$t(C_{3\delta}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(C_{3\alpha}^{-1}) = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(C_{3\beta}^{-1}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(C_{3\gamma}^{-1}) = \begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$T(C_{3\delta}^{-1}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

- Klasse C_4

$$T(C_{4x}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

$$T(C_{4y}) = \begin{pmatrix} & -1 & \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

$$T(C_{4z}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

$$T(C_{4x}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

$$T(C_{4y}^{-1}) = \begin{pmatrix} & -1 & \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}$$

$$T(C_{4z}^{-1}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

- Klasse C_4^2

$$T(C_{2x}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(C_{2y}) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$T(C_{2z}) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

C.2 Erstes Beispiel: Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$

Im Falle positiver C-Parität sind die Darstellungsmatrizen bzgl. der geordneten Basis O_{i+} , $i \in \{1, 2, 3\}$ angegeben, für negative C-Parität bzgl. der Basis O_{i-} , $i \in \{1, 2, 3\}$ (vgl. dazu Abschnitt 2.3). Aus Platzgründen werden beide Fälle in einer 3×3 -Matrix zusammengefaßt, die C-Einträge mit $C \in \{+1, -1\}$ sind dabei entsprechend der fixierten C-Parität zu wählen.

- Klasse E

$$\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(E) = 3$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

- Klasse C_2

$$\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_2) = C = \pm 1$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2a}) = \begin{pmatrix} C & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2b}) = \begin{pmatrix} C & & \\ & C & \\ & & C \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2c}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & C & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2d}) = \begin{pmatrix} & & C \\ & C & \\ C & & \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2e}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & C \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2f}) = \begin{pmatrix} & C & \\ C & & \\ & & C \end{pmatrix}$$

- Klasse C_3

$$\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_3) = 0$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\alpha}) = \begin{pmatrix} & C \\ C & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\beta}) = \begin{pmatrix} & 1 \\ C & \\ & C \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\gamma}) = \begin{pmatrix} & C \\ 1 & \\ & C \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\delta}) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\alpha}^{-1}) = \begin{pmatrix} C & & \\ & C & \\ C & & c \end{pmatrix} \quad D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\beta}^{-1}) = \begin{pmatrix} C & & \\ & C & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\gamma}^{-1}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & C \\ C & & \end{pmatrix} \quad D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\delta}^{-1}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

- Klasse C_4

$$\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_4) = +1$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4x}) = \begin{pmatrix} & C & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4y}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ C & & \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4z}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & C \\ & 1 & \end{pmatrix} \quad D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4x}^{-1}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ C & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4y}^{-1}) = \begin{pmatrix} & & C \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4z}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & C & \end{pmatrix}$$

- Klasse C_4^2

$$\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_4^2) = 3 \text{ (} C = +1 \text{) bzw. } -1 \text{ (} C = -1 \text{)}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2x}) = \begin{pmatrix} C & & \\ & C & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2y}) = \begin{pmatrix} C & & \\ & 1 & \\ & & C \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2z}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & C & \\ & & C \end{pmatrix}.$$

C.3 Zweites Beispiel: Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$

Die Tabelle ist analog zu C.2 zu lesen. Für positive C -Parität ist den Darstellungsmatrizen die geordnete Basis O_{i+} , $i \in \{1, \dots, 4\}$ zugrunde gelegt, im Falle negativer C -Parität

ist O_{i-} , $i \in \{1, \dots, 4\}$ eine Basis (vgl. Abschnitt 2.4). Es werden beide Fälle in einer 4×4 -Matrix zusammengefaßt, indem die C -Einträge mit $C \in \{+1, -1\}$ entsprechend der fixierten C -Parität zu wählen sind.

- Klasse E

$$\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(E) = 4$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

- Klasse C_2

Wie man anhand des Transformationsverhaltens der verdrehten Loops unter der kubischen Gruppe erkennt, ändern alle vier Operatoren bei Drehungen aus der Klasse C_2 ihre vorgegebene Orientierung. Die Einträge sind daher je nach Wahl von C alle positiv (+1) bzw. alle negativ (-1).

$$\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_2) = 2C = \pm 2$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2a}) = \begin{pmatrix} C & & & \\ & C & & \\ & & C & \\ & & & C \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2b}) = \begin{pmatrix} & C & & \\ C & & & \\ & & C & \\ & & & C \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2c}) = \begin{pmatrix} & & & C \\ & C & & \\ & & C & \\ C & & & \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2d}) = \begin{pmatrix} C & & & \\ & C & & \\ & & C & \\ & & & C \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2e}) = \begin{pmatrix} C & & & \\ & C & & \\ & & & C \\ & & C & \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2f}) = \begin{pmatrix} & C & & \\ C & & & \\ & & C & \\ & & & C \end{pmatrix}.$$

- Klasse C_3

Bei Rotationen aus der Klasse C_3 ändert sich keine der Orientierungen der Loops.

Die Einträge sind in beiden Fällen ($C = \pm 1$) gleich.

$$\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_3) = 1$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\alpha}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\gamma}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\delta}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\alpha}^{-1}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\beta}^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\gamma}^{-1}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{3\delta}^{-1}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

- Klasse C_4

Alle Loops wechseln ihre Orientierung. Für C -Parität gleich $+1$ ist also für jeden Eintrag eine $+1$ zu setzen, für $C = -1$ entsprechend eine -1 .

$$\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_4) = 0$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4x}) = \begin{pmatrix} & & C \\ & C & \\ C & & \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4y}) = \begin{pmatrix} C & & \\ & C & \\ & & C \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4z}) = \begin{pmatrix} C & & \\ & C & \\ & & C \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4x}^{-1}) = \begin{pmatrix} & & C \\ & C & \\ C & & \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4y}^{-1}) = \begin{pmatrix} & C & \\ C & & C \\ & & C \end{pmatrix} \quad D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{4z}^{-1}) = \begin{pmatrix} & C & \\ & & C \\ C & & C \end{pmatrix}.$$

- Klasse C_4^2

Die Orientierung der 4 verdrehten Loops bleibt erhalten, d.h. die Einträge für positive und negative C -Parität sind identisch.

$$\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_4^2) = 0$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2x}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2y}) = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

$$D_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2z}) = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

C.4 Drittes Beispiel: Über-Eck-Plaquetten

C.4.1 Irreduzibler Inhalt der $\tilde{\mathcal{R}}$ -Darstellung

Die Zerlegung der Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ der Über-Eck-Plaquetten in irreduzible Anteile erfolgt mit Hilfe der Formel (2.17) aus Unterabschnitt 2.3.2:

$$a_\mu = \frac{1}{n_G} \sum_i n_i \chi^\mu(C_i) \chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_i). \quad (\text{C.1})$$

Summiert wird über alle fünf Klassen der 24-elementigen Gruppe O . Ihre Mächtigkeit und die Charaktere der irreduziblen Darstellungen entnimmt man der Tabelle in Unterabschnitt 0.3.4. Die Spuren über die Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$ findet man in Unterabschnitt 2.6.1. Man unterscheidet vier Sektoren:

- $P = C = +1$:

$$a_{A_1} = \frac{1}{24} (1 \cdot 1 \cdot 6 + 6 \cdot 1 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 2) = 1$$

$$\begin{aligned}
a_{A_2} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 1 \cdot 6 + 6 \cdot (-1) \cdot 2 + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 2) = 0 \\
a_E &= \frac{1}{24} (1 \cdot 2 \cdot 6 + 6 \cdot 0 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 2) = 1 \\
a_{T_1} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 3 \cdot 6 + 6 \cdot (-1) \cdot 2 + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 2) = 0 \\
a_{T_2} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 3 \cdot 6 + 6 \cdot 1 \cdot 2 + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 2) = 1.
\end{aligned}$$

- $P = +1, C = -1$:

$$\begin{aligned}
a_{A_1} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 1 \cdot 6 + 6 \cdot 1 \cdot (-2) + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 2) = 0 \\
a_{A_2} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 1 \cdot 6 + 6 \cdot (-1) \cdot (-2) + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 2) = 1 \\
a_E &= \frac{1}{24} (1 \cdot 2 \cdot 6 + 6 \cdot 0 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 2) = 1 \\
a_{T_1} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 3 \cdot 6 + 6 \cdot (-1) \cdot (-2) + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 2) = 1 \\
a_{T_2} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 3 \cdot 6 + 6 \cdot 1 \cdot (-2) + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot 2) = 0.
\end{aligned}$$

- $P = -1, C = +1$:

$$\begin{aligned}
a_{A_1} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 1 \cdot 6 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot (-2)) = 0 \\
a_{A_2} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 1 \cdot 6 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 + 8 \cdot 1 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot (-2)) = 0 \\
a_E &= \frac{1}{24} (1 \cdot 2 \cdot 6 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 8 \cdot (-1) \cdot 0 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-2)) = 0 \\
a_{T_1} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 3 \cdot 6 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2)) = 1 \\
a_{T_2} &= \frac{1}{24} (1 \cdot 3 \cdot 6 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \cdot (-2)) = 1.
\end{aligned}$$

- $P = C = -1$:

Die Summanden ($\neq 0$) sind identisch zum dritten Fall $P = -1, C = +1$.

Man erhält also für die vier Fälle

$$\tilde{\mathcal{R}} = A_1^{++} \oplus E^{++} \oplus T_2^{++} \quad (\text{C.2})$$

$$\tilde{\mathcal{R}} = A_2^{+-} \oplus E^{+-} \oplus T_1^{+-} \quad (\text{C.3})$$

$$\tilde{\mathcal{R}} = T_1^{-+} \oplus T_2^{-+} \quad (\text{C.4})$$

$$\tilde{\mathcal{R}} = T_1^{--} \oplus T_2^{--}. \quad (\text{C.5})$$

Bemerkung: Wer den Ausführungen in 2.6.1 kein rechtes Vertrauen schenkt und in (C.1) doch lieber über alle zehn Klassen $E, C_2, C_3, \dots, IC_4, IC_4^2$ der vollen kubischen Gruppe

summieren möchte, hat in allen Summen der obigen Rechnung den fünf Summanden weitere fünf hinzuzufügen und die Gruppenordnung auf 48 zu verdoppeln. Im Falle positiver P -Parität ist sowohl $\chi^\mu(C_i) = \chi^\mu(IC_i)$ (vgl. Charaktertabelle von O_h in 0.3.4) als auch $\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_i) = \chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(IC_i)$ (Begründung s. 2.6.1). Die fünf weiteren Terme sind also mit den ersten fünf identisch, da die Summe jetzt mit $2 \times 24 = 48$ normiert wird, ändert sich am Ergebnis nichts. Für den Fall $P = -1$ gilt $\chi^\mu(C_i) = -\chi^\mu(IC_i)$ (vgl. noch einmal mit der Charaktertabelle von O_h) und $\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(C_i) = -\chi^{\tilde{\mathcal{R}}}(IC_i)$. In den fünf letzten Summanden treten also zwei Minuszeichen auf, die sich gerade wegheben. Das Endresultat bleibt also unverändert.

C.4.2 Konstruktion einer Orthonormalbasis (Teil II)

zweiter Fall: $P = +1, C = -1$

$$C(C_2) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

Durch Diagonalisierung findet man

- die Eigenwerte: -6, 0, 0, -2, -2, -2
- und die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (\text{C.7})$$

Der Darstellungsraum der Darstellungsmatrizen $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$ zerfällt in drei invariante Unterräume der Dimensionen 1, 2 und 3. Für die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ gilt

$$\tilde{\mathcal{R}} = A_2^{+-} \oplus E^{+-} \oplus T_1^{+-}. \quad (\text{C.8})$$

Die Zerlegung ist somit abgeschlossen. \mathcal{E}_2 bildet also eine Basis aus Loop-Operatoren für A_2^{+-} , E^{+-} bzw. T_1^{+-} .

vierter Fall: $P = C = -1$

$$C(C_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

Durch Diagonalisierung findet man

- die Eigenwerte: -2, -2, -2, 2, 2, 2
- und die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathcal{E}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (\text{C.10})$$

Der Darstellungsraum der $D_{\tilde{\mathcal{R}}}$ zerfällt in zwei invariante Unterräume der Dimension 3. Für die Darstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ gilt

$$\tilde{\mathcal{R}} = T_1^{--} \oplus T_2^{--}. \quad (\text{C.11})$$

Die Zerlegung ist damit abgeschlossen. Mit Hilfe der reduzierten Darstellungsmatrizen $AD_{\tilde{\mathcal{R}}}(g)A^{-1}$ der Klasse C_2 findet man z.B. für das Element $C_{2a} \in C_2$:

$$AD_{\tilde{\mathcal{R}}}(C_{2a})A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & & & \\ 1 & -1 & -1 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 1 & -1 \\ & & & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

Oberer und unterer Block haben dabei Spur -1 bzw. $+1$.

Die Charaktertabelle aus Unterabschnitt 0.3.4 ergibt $\chi^{T_1^{--}}(C_2) = -1$ bzw. $\chi^{T_2^{--}}(C_2) = +1$. Also bilden die ersten drei Vektoren aus \mathcal{E}_4 eine Basis aus Loop-Operatoren für die Darstellung T_1^{--} und die restlichen drei entsprechend eine Basis für T_2^{--} (vgl. dazu auch die Ausführungen zum dritten Fall in Unterabschnitt 2.6.3).

C.5 Irreduzible Zerlegung der Darstellungen $\tilde{\mathcal{R}} = \tilde{\mathcal{R}}_k^{PC}$ über Majorana-Plaquetten-Operatoren

Die Vorgehensweise bei der Zerlegung der Darstellungen $\tilde{\mathcal{R}}_k^{PC}$ in ihre irreduziblen Anteile habe ich in Unterabschnitt 5.4.3 beschrieben. An dieser Stelle seien daher lediglich die

fehlenden Rechnungen nachgetragen. Da in (5.64) die Charaktere $\chi^{G_1}(C_i)$ für $C_i = 12C_4$ und $C_i = 6C_8^2$ Null ergeben, sind die zugehörigen Summanden (zweiter und letzter) in den Rechnungen nicht explizit aufgeführt.

erster Fall: $P = C = +1$

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = E^{++}, \nu = A_1^{++}, \dots, T_2^{++}}$$

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ T_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{48} \left[1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot [2 \cdot (2+2)] + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot [2 \cdot (-2-2)] + \right. \\ &\quad + 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot [(-1) \cdot (-1-1)] + 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot [(-1) \cdot (1+1)] + \\ &\quad \left. + 6 \cdot \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \cdot [0 \cdot (-\sqrt{2} - \sqrt{2})] + 6 \cdot \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \cdot [0 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})] \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = E^{++}, \nu = G_1^{++}, G_2^{++}, H^{++}}$$

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ H \end{pmatrix} &= \frac{1}{48} \left[1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot [2 \cdot (2+2)] + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot [2 \cdot (-2-2)] + \right. \\ &\quad + 8 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot [(-1) \cdot (-1-1)] + 8 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot [(-1) \cdot (1+1)] + \\ &\quad \left. + 6 \cdot \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \cdot [0 \cdot (-\sqrt{2} - \sqrt{2})] + 6 \cdot \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \cdot [0 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})] \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{++} = E^{++} \otimes \{G_1^{++} \oplus G_1^{++}\} = H^{++} \oplus H^{++} = 2H^{++}. \quad (\text{C.13})$$

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = T_2^{++}, \nu = A_1^{++}, \dots, T_2^{++}}$$

$$\begin{aligned} a \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ T_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{48} \left[1 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \cdot [3 \cdot (2+2)] + 1 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \cdot [3 \cdot (-2-2)] + \right. \\ &\quad \left. + 8 \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \end{Bmatrix} \cdot [0 \cdot (-1-1)] + 8 \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \end{Bmatrix} \cdot [0 \cdot (1+1)] + \right. \\ &\quad \left. + 6 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot [(-1) \cdot (-\sqrt{2} - \sqrt{2})] + \right. \\ &\quad \left. + 6 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot [(-1) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})] \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = T_2^{++}, \nu = G_1^{++}, G_2^{++}, H^{++}}$$

$$\begin{aligned} a \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ H \end{Bmatrix} &= \frac{1}{48} \left[1 \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \cdot [3 \cdot (2+2)] + 1 \cdot \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{Bmatrix} \cdot [3 \cdot (-2-2)] + \right. \\ &\quad \left. + 8 \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \end{Bmatrix} \cdot [0 \cdot (-1-1)] + 8 \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \end{Bmatrix} \cdot [0 \cdot (1+1)] \right. \\ &\quad \left. + 6 \cdot \begin{Bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot [(-1) \cdot (-\sqrt{2} - \sqrt{2})] + \right. \\ &\quad \left. + 6 \cdot \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot [(-1) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})] + \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Man erhält

$$\tilde{\mathcal{R}}_3^{+++} = T_2^{+++} \otimes \{G_1^{+++} \oplus G_1^{+++}\} = G_2^{+++} \oplus G_2^{+++} \oplus H^{+++} \oplus H^{+++} \quad (\text{C.14})$$

$$= 2G_2^{+++} \oplus 2H^{+++} . \quad (\text{C.15})$$

zweiter Fall: $P = +1, C = -1$

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = A_2^{+-}, \nu = A_1^{+-}, \dots, T_2^{+-}}$$

$$\begin{aligned} a \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ E \\ T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{48} \left[1 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (2+2)] + 1 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (-2-2)] + \right. \\ &\quad + 8 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (-1-1)] + 8 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (1+1)] + \\ &\quad + 6 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot [(-1) \cdot (-\sqrt{2} - \sqrt{2})] \\ &\quad \left. + 6 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot [(-1) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})] \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = A_2^{+-}, \nu = G_1^{+-}, G_2^{+-}, H^{+-}}$$

$$a \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ H \end{Bmatrix} = \frac{1}{48} \left[1 \cdot \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (2+2)] + 1 \cdot \begin{Bmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (-2-2)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +8 \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (-1 - 1)] + 8 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (1 + 1)] \\
& +6 \cdot \begin{Bmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot [(-1) \cdot (-\sqrt{2} - \sqrt{2})] + \\
& +6 \cdot \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot [(-1) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\tilde{\mathcal{R}}_1^{+-} = A_2^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\} = G_2^{+-} \oplus G_2^{+-} = 2G_2^{+-} \oplus 2H^{+-}. \quad (\text{C.16})$$

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = E^{+-}, \nu = A_1^{+-}, \dots, T_2^{+-}} \quad \text{und} \quad \underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = E^{+-}, \nu = G_1^{+-}, G_2^{+-}, H^{+-}}$$

Die Anwendung der Formel (5.64) liefert die gleichen Terme wie im ersten Fall für $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = E^{++}$. Das Endresultat kann demnach in analoger Weise mit

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{+-} = E^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\} = H^{+-} \oplus H^{+-} = 2H^{+-} \quad (\text{C.17})$$

übernommen werden.

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = T_1^{+-}, \nu = A_1^{+-}, \dots, T_2^{+-}}$$

$$\begin{aligned}
a \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ T_2 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{48} \left[1 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \cdot [3 \cdot (2 + 2)] + 1 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix} \cdot [3 \cdot (-2 - 2)] + \right. \\
& + 8 \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \end{Bmatrix} \cdot [0 \cdot (-1 - 1)] + 8 \cdot \begin{Bmatrix} \vdots \end{Bmatrix} \cdot [0 \cdot (1 + 1)] + \\
& \left. + 6 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \cdot [1 \cdot (-\sqrt{2} - \sqrt{2})] + \right.
\end{aligned}$$

$$+6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot [1 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = T_1^{+-}, \nu = G_1^{+-}, G_2^{+-}, H^{+-}}$$

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ H \end{pmatrix} &= \frac{1}{48} \left[1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot [3 \cdot (2+2)] + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot [3 \cdot (-2-2)] + \right. \\ &\quad \left. + 8 \cdot \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \cdot [0 \cdot (-1-1)] + 8 \cdot \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} \cdot [0 \cdot (1+1)] \right. \\ &\quad \left. + 6 \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot [1 \cdot (-\sqrt{2} - \sqrt{2})] + \right. \\ &\quad \left. + 6 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot [1 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2})] + \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man findet demnach

$$\tilde{\mathcal{R}}_3^{+-} = T_1^{+-} \otimes \{G_1^{+-} \oplus G_1^{+-}\} = G_1^{+-} \oplus G_1^{+-} \oplus H^{+-} \oplus H^{+-} \quad (\text{C.18})$$

$$= 2G_1^{+-} \oplus 2H^{+-}. \quad (\text{C.19})$$

dritter und vierter Fall: $P = -1, C = \pm 1$

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = T_1^{-\pm}, \nu = A_1^{-\pm}, \dots, T_2^{-\pm}} \quad \text{und} \quad \underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = T_1^{-\pm}, \nu = G_1^{-\pm}, G_2^{-\pm}, H^{-\pm}}$$

bzw.

$$\underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = T_2^{-\pm}, \nu = A_1^{-\pm}, \dots, T_2^{-\pm}} \quad \text{und} \quad \underline{\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = T_2^{-\pm}, \nu = G_1^{-\pm}, G_2^{-\pm}, H^{-\pm}}$$

Die resultierenden Summen sind mit denen der ersten beiden Fälle (für $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = T_2^{++}$ bzw. $\tilde{\mathcal{R}}_{\text{PS}}^\mu = T_1^{+-}$) identisch. Man erhält

$$\tilde{\mathcal{R}}_1^{-\pm} = T_1^{-\pm} \otimes \{G_1^{-\pm} \oplus G_1^{-\pm}\} = G_1^{-\pm} \oplus G_1^{-\pm} \oplus H^{-\pm} \oplus H^{-\pm} \quad (\text{C.20})$$

$$= 2G_1^{-\pm} \oplus 2H^{-\pm}. \quad (\text{C.21})$$

bzw.

$$\tilde{\mathcal{R}}_2^{-\pm} = T_2^{-\pm} \otimes \{G_1^{-\pm} \oplus G_1^{-\pm}\} = G_2^{-\pm} \oplus G_2^{-\pm} \oplus H^{-\pm} \oplus H^{-\pm} \quad (\text{C.22})$$

$$= 2G_2^{-\pm} \oplus 2H^{-\pm} . \quad (\text{C.23})$$

Anhang D

Gruppen $SO(3)$ und $SU(2)$

D.1 Drehgruppe $SO(3)$

Die Gruppe $SO(3)$ besteht aus der Menge aller reellen 3×3 -Matrizen R mit den Eigenschaften

$$R^t R = \mathbb{1} \quad (\text{D.1})$$

$$\det R = 1. \quad (\text{D.2})$$

Aufgrund obiger Forderungen vermittelt die Matrix R Rotationen um beliebig wählbare Achsen und Winkel im dreidimensionalen Raum, weshalb sie auch als *Drehgruppe* bezeichnet wird. Die $SO(3)$ besitzt demnach unendlich viele Elemente und ist zudem nicht-abelsch, da die Hintereinanderausführung von Rotationen i.a. nicht kommutativ ist. Aus der Orthogonalitätsforderung (D.1) folgt, daß von den neun Matrixeinträgen nur drei frei wählbar sind, als Parameter nehme man $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Die $SO(3)$ bildet also eine Lie-Gruppe, und die Matrizen R lassen sich in der Form

$$R = e^{-\tau^a \theta^a} \quad (\text{D.3})$$

schreiben, wobei man für die Generatoren τ^a , $a = 1, 2, 3$ beispielsweise

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

findet. Unter Verwendung des total antisymmetrischen Tensors dritter Stufe ϵ_{abc} mit der Normierung $\epsilon_{123} = 1$ ergibt sich in kompakter Form

$$(\tau_a)_{bc} = -\epsilon_{abc}. \quad (\text{D.5})$$

Mit Hilfe der Rechenregeln des total antisymmetrischen Tensors dritter Stufe erhält man schließlich die Vertauschungsrelationen der Generatoren der Drehgruppe

$$[\tau_a, \tau_b] = \epsilon_{abc} \tau_c. \quad (\text{D.6})$$

Setzt man $J^a := i\tau^a$, $a = 1, 2, 3$, so ergeben sich die hermiteschen (Drehimpuls-) Generatoren der $SO(3)$, für die

$$(J_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc} \quad (\text{D.7})$$

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c \quad (\text{D.8})$$

gilt, so daß die Matrizen

$$R = e^{iJ^a\theta^a} \quad (\text{D.9})$$

eine unitäre Darstellung der $SO(3)$ bilden. Zusammen mit der Jacobi-Identität

$$[J_a, [J_b, J_c]] = [[J_a, J_b], J_c] + [J_b, [J_a, J_c]] \quad (\text{D.10})$$

definiert (D.8) die Lie-Algebra der Gruppe $SO(3)$ ¹. Ihre irreduziblen Darstellungen können auf rein algebraischem Wege mit Hilfe der Eigenwerte $j(j+1)$, $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, 5/2, \dots$ des Casimir-Operators J^2 klassifiziert werden, ihre Dimensionen ergeben sich dabei zu $2(j+1)$. Details findet man z.B. in [41]. Für ganzzahlige j erhält man die TensorDarstellungen der Lie-Algebra. Die halbzahligen j führen auf die Spinordarstellungen.

D.2 Überlagerungsgruppe $SU(2)$

Die Gruppe $SU(2)$ wird aus komplexen 2×2 -Matrizen gebildet, die den Einschränkungen

$$UU^\dagger = \mathbb{1} \quad (\text{D.11})$$

$$\det U = 1 \quad (\text{D.12})$$

unterliegen. Von den sechs reellen Parametern lassen sich lediglich drei frei wählen, so daß ein Element der $SU(2)$ in der Form

$$U = e^{i\frac{1}{2}\sigma^a\theta^a} \quad (\text{D.13})$$

geschrieben werden kann. Die Generatoren σ^a sind dabei die drei Pauli-Spin-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.14})$$

Da für die Pauli-Matrizen

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma^c \quad (\text{D.15})$$

gilt, erfüllen sie mit der Entsprechung $J_a = \sigma^a/2$ die gleichen Vertauschungsrelationen wie die Generatoren J^a der $SO(3)$. Beide Gruppen stimmen also in ihrer Lie-Algebra überein, und die irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebren sind somit identisch.

Zu den irreduziblen Darstellungsmatrizen der Elemente ℓ der Lie-Gruppe $SU(2)$ gelangt man nun durch Exponentierung der Erzeugenden ihrer einparametrischen Untergruppe. Die Erzeugenden entsprechen dabei gerade den Generatoren, die die zugehörige Lie-Algebra

¹Die Lie-Algebra der $SO(3)$ wird oftmals als $so(3)$ bezeichnet.

(hier also $su(2)$) erfüllen. Für Details verweise ich auf [20,28]. Die irreduziblen Darstellungen \mathcal{R}^j der Drehgruppe $SO(3)$ erhält man dann durch die zusätzliche Forderung $\mathcal{R}^j(-id) = \mathbb{1}$ mit $-id \in SU(2)$ aus ihrer universellen Überlagerungsgruppe² $SU(2)$.

Unter Berücksichtigung von

$$\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta_{ab}\mathbb{1} \quad (\text{D.16})$$

ergibt eine Reihenentwicklung der Exponentialfunktion (D.13)

$$e^{i\frac{1}{2}\sigma^a\theta^a} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\left(\sigma^b n^b\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (\text{D.17})$$

wobei $\theta^a = n^a\theta$ mit $\sum_a (n^a)^2 = 1$ zu setzen ist. Die $SU(2)$ besitzt demnach eine 4π -Periodizität, da aufgrund des Faktors $1/2$ in den trigonometrischen Funktionen für $\theta = 2\pi$ und n^a beliebig

$$U(2\pi) = -\mathbb{1} \quad (\text{D.18})$$

und für $\theta = 4\pi$

$$U(4\pi) = \mathbb{1} \quad (\text{D.19})$$

gilt. Dagegen zeigt man mit Hilfe einer entsprechende Entwicklung von (D.9), daß die $SO(3)$ eine 2π -Periodizität aufweist. Damit ergibt sich wegen

$$U(\theta + 2\pi) \longrightarrow -U(\theta) \quad \text{und} \quad R(\theta + 2\pi) \longrightarrow R(\theta) \quad \forall\theta, \quad (\text{D.20})$$

sowie

$$U(\theta + 4\pi) \longrightarrow U(\theta) \quad \text{und} \quad R(\theta + 4\pi) \longrightarrow R(\theta) \quad \forall\theta, \quad (\text{D.21})$$

eine 2:1-Abbildung

$$\{U, -U\} \longleftrightarrow R, \quad (\text{D.22})$$

bzw. in mathematischer Formulierung, ein Homomorphismus $SU(2) \rightarrow SO(3)$ mit einem Kern bestehend aus zwei Elementen. Dabei liefert der Homomorphiesatz die Beziehung $SO(3) \cong SU(2)/\mathbb{Z}_2$.

²Auf den Begriff der universellen Überlagerungsgruppe soll hier nicht näher eingegangen werden. Für eine genaue Definition wären gewisse Hilfsmittel aus der Topologie erforderlich, auf deren Bereitstellung wir an dieser Stelle verzichten wollen. Eine mathematische Einführung in die Theorie der Lie-Algebren und ihren Darstellungen bietet z.B. [42].

Anhang E

Dirac-Matrizen

E.1 Dirac-Matrizen in euklidischer und minkowskischer Formulierung

Zwischen den euklidischen Dirac-Matrizen und denen im Minkowski-Raum besteht der folgende Zusammenhang [12]:

$$\gamma_j^{eukl.} = -i\gamma_j^{mink.} \quad \text{für } j = 1, 2, 3 \quad (\text{E.1})$$

$$\gamma_4^{eukl.} = -i\gamma_4^{mink.} = \gamma_0^{mink.} . \quad (\text{E.2})$$

E.2 Eigenschaften euklidischer Matrizen

Für die euklidischen Dirac-Matrizen gelten die folgenden Eigenschaften [43]:

$$\gamma_\mu^2 = \mathbf{1} \quad (\text{E.3})$$

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu \quad (\text{E.4})$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}\mathbf{1} . \quad (\text{E.5})$$

Mit den zusätzlichen Definitionen

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \quad (\text{E.6})$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (\text{E.7})$$

ergibt sich

$$\gamma_5 = \gamma_5^\dagger \quad (\text{E.8})$$

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1} \quad (\text{E.9})$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = \mathbf{0} , \quad (\text{E.10})$$

sowie

$$\sigma_{\mu\nu} \stackrel{(\text{E.5})}{=} \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - (2\delta_{\mu\nu}\mathbf{1} - \gamma_\mu\gamma_\nu)) \quad (\text{E.11})$$

$$= i\gamma_\mu\gamma_\nu - i\delta_{\mu\nu}\mathbf{1} . \quad (\text{E.12})$$

Für weitere Relationen in diesem Kontext konsultiere man [43].

Eine mögliche Darstellung der Dirac-Matrizen ist nach [12]

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (\text{E.13})$$

wobei mit σ_j die Pauli-Matrizen gemeint sind (vgl. Anhang D).

Für γ_4 und $\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \gamma_5^\dagger$ wählt man in der Dirac-Darstellung

$$\gamma_0 = \gamma_4 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{E.14})$$

in der Weyl-Darstellung dagegen

$$\gamma_0 = \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.15})$$

Für den Ladungskonjugationsoperator gelten die folgenden Zusammenhänge [43]:

$$C^t = -C \quad (\text{E.16})$$

$$C^\dagger = C^{-1} \quad (\text{E.17})$$

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^t \quad (\text{E.18})$$

$$C^{-1}\gamma_\mu^t C = -\gamma_\mu \quad (\text{E.19})$$

$$C\gamma_5 C^{-1} = -\gamma_5^t \quad (\text{E.20})$$

$$C\sigma_{\mu\nu} C^{-1} = -\sigma_{\mu\nu}^t \quad (\text{E.21})$$

$$C^{-1}\sigma_{\mu\nu}^t C = -\sigma_{\mu\nu}. \quad (\text{E.22})$$

In der Dirac-Darstellung kann die Ladungskonjugationsmatrix als

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.23})$$

gewählt werden. In der Weyl-Darstellung findet

$$C = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (\text{E.24})$$

Verwendung.

In darstellungsfreier Form findet man [28]

$$C = i\gamma_2^{mink.}\gamma_0 = -\gamma_2^{eukl.}\gamma_0. \quad (\text{E.25})$$

Anhang F

Majorana-Spinoren

Dirac-Spinoren sind aus zwei Weyl-Spinoren zusammengesetzte Spinoren, die in der Weyl-Darstellung die Form

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{F.1})$$

besitzen, wobei ψ_L und ψ_R je zweikomponentige Weyl-Spinoren darstellen, die sich nach der linken bzw. rechten Fundamentaldarstellung der Lorentzgruppe transformieren.

Im Minkowski-Raum erhält man einen Majorana-Spinor, indem man an einen allgemeinen Dirac-Spinor die Bedingung

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0 = \psi^t C \quad (\text{F.2})$$

stellt. Dabei ist in minkowskischer Formulierung

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.3})$$

und C die Ladungskonjugationsmatrix.

Ein Majorana-Spinor ψ_M geht also wegen (F.2) bei Ladungskonjugation in sich selbst über, also

$$\psi_M^C = \psi_M \quad (\text{F.4})$$

und besitzt daher anstatt der vier komplexen Freiheitsgrade eines Dirac-Spinors lediglich zwei komplexe bzw. vier reelle Parameter. Die Ladungskonjugation ist dabei durch [28]

$$\psi^C = C \bar{\psi}^t \quad (\text{F.5})$$

mit

$$C = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} \quad (\text{F.6})$$

definiert.

Gibt man die Hermitizitätseigenschaft der minkowskischen Formulierung auf, so läßt sich ein euklidischer Majorana-Spinor durch die Relation

$$\bar{\lambda} = \lambda^t C \quad (\text{F.7})$$

definieren. In der Weyl-Darstellung schreibt sich damit der Majorana-Spinor gemäß

$$\lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{J}^A \\ \bar{\mathcal{J}}^A \end{pmatrix}, \quad (\text{F.8})$$

wobei \mathcal{J}_A ein linkshändiger Weyl-Spinor ist. Für weitere Anmerkungen zu Majorana-Spinoren in euklidischer Formulierung konsultiere man [43] und die darin angegebenen Referenzen.

An dieser Stelle seien lediglich zwei Rechenregeln für Grassmann-wertige Majorana-Spinoren ψ und ϕ angegeben, wobei die erste in in Kapitel 5 Verwendung findet:

$$\bar{\psi}\phi = \bar{\phi}\psi \quad (\text{F.9})$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\phi = -\bar{\phi}\gamma_\mu\psi \quad (\text{F.10})$$

Beide Relationen weist man mit Hilfe der definierenden Eigenschaft des Ladungskonjugationsoperators C nach:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\phi &= (\bar{\psi}\phi)^t \\ &= (\psi^t C\phi)^t \\ &= -\phi^t C^t\psi \\ &= \phi^t C\psi \\ &= \bar{\phi}\psi, \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma_\mu\phi &= (\bar{\psi}\gamma_\mu\phi)^t \\ &= (\psi^t C\gamma_\mu\phi)^t \\ &= -\phi^t \gamma_\mu^t C^t\psi \\ &= \phi^t \gamma_\mu^t C\psi \\ &= -\phi^t C\gamma_\mu\psi \\ &= -\bar{\phi}\gamma_\mu\psi. \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Anhang G

Lorentztransformationen

Eine Lorentztransformation in minkowskischer Formulierung ist eine lineare Transformation des Vierervektors $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu \quad \text{mit} \quad a^\mu{}_\nu \in \mathbb{R}, \quad (\text{G.1})$$

die der Bedingung

$$x'^2 = x^2 \equiv g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu \quad (\text{G.2})$$

genügt. Dabei ist $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ die Metrik im Minkowski-Raum. Der kovariante Vierervektor $x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$ transformiert sich in analoger Weise gemäß

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = a_\mu{}^\nu x_\nu. \quad (\text{G.3})$$

Für $a^\mu{}_\nu$ gelten die folgenden Relationen [35,40,44]:

$$(a^{-1})^\mu{}_\nu = a_\nu{}^\mu \quad (\text{G.4})$$

$$a^\mu{}_\tau a^\rho{}_\mu = \delta^\rho{}_\tau \quad (\text{G.5})$$

$$a_\mu{}^\tau a^\mu{}_\rho = \delta^\tau{}_\rho \quad (\text{G.6})$$

$$g_{\mu\nu} a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\tau = g_{\rho\tau}. \quad (\text{G.7})$$

Aufgrund des Relativitätsprinzips und der daraus resultierenden Lorentz-Kovarianz-Forderung der Dirac-Gleichung ergibt sich für das Transformationsverhalten der vier Komponenten eines Dirac-Spinors unter Lorentztransformationen der lineare Zusammenhang

$$\psi'_i(x') = S_{ij} \psi_j(x) \quad (\text{G.8})$$

mit $i, j = 1, \dots, 4$. Die 4×4 -Matrix $S = S(a)$ hat dabei die Bedingung

$$S^{-1}(a) \gamma^\mu S(a) = a^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (\text{G.9})$$

zu erfüllen.

Wählt man gemäß der Standarddarstellung

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{G.10})$$

so gilt für die Matrix S insbesondere die Beziehung [35]

$$S^\dagger = \gamma_0 S^{-1} \gamma_0 . \quad (\text{G.11})$$

Für den hermitesch-konjugierten Spinor ψ^\dagger und den konjugierten Spinor¹ $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ erhält man unter Lorentztransformation [35]

$$\psi'(x')^\dagger = \psi^\dagger(x) S^\dagger \quad (\text{G.12})$$

bzw.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') &= \psi'(x')^\dagger \gamma^0 \\ &\stackrel{(\text{G.12})}{=} \psi^\dagger(x) S^\dagger \gamma^0 \\ &\stackrel{(\text{G.11})}{=} \psi^\dagger(x) \gamma^0 S^{-1} \\ &= \bar{\psi}(x) S^{-1} . \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

In euklidischer Formulierung ist dagegen die Definition $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$ nicht mehr gültig, so daß die Herleitung für die Transformation (G.13) des konjugierten Spinors für euklidische Spinoren nicht übernommen werden kann [45]. Stattdessen setzt man wie im Falle der euklidischen Majorana-Spinoren (vgl. Anhang F) für den konjugierten Spinor

$$\bar{\psi} = \psi^t C . \quad (\text{G.14})$$

Damit gilt unter Lorentztransformation

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') &= \psi'(x')^t C \\ &= (S\psi(x))^t C \\ &= \psi^t(x) S^t C \\ &= \bar{\psi}(x) C^{-1} S^t C . \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Für die Ladungskonjugationsmatrix C und die Lorentz-Transformationsmatrix S findet man als Analogon zu Gleichung (G.11) in euklidischer Formulierung

$$S^t = C S^{-1} C^{-1} \quad (*) , \quad (\text{G.16})$$

so daß wie im Minkowski-Fall letztendlich wieder

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi} S^{-1} \quad (\text{G.17})$$

gilt.

¹In der Literatur findet man auch die Bezeichnung adjungierter Spinor.

(*) **Begründung:**

Im Falle infinitesimalen Transformationsparameters $\epsilon_{\mu\nu}$ mit $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ wird die Lorentztransformation von Spinoren durch die folgende Matrix beschrieben (vgl. [46]):

$$S \approx \mathbb{1} - \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}, \quad \epsilon_{\mu\nu} \in \mathbb{R}. \quad (\text{G.18})$$

Damit ergibt sich für kleine Abweichungen von der Identität

$$S^{-1} \approx \mathbb{1} + \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \quad (\text{G.19})$$

$$S^t \approx \mathbb{1} - \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^t. \quad (\text{G.20})$$

Wegen

$$\begin{aligned} C^{-1} S^t C &= C^{-1} \left\{ \mathbb{1} - \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}^t \right\} C \\ &= \mathbb{1} - \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu} \underbrace{C^{-1} \sigma_{\mu\nu}^t C}_{-\sigma_{\mu\nu}} \\ &= \mathbb{1} + \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \\ &= S^{-1} \end{aligned} \quad (\text{G.21})$$

erhält man somit

$$S^t = C S^{-1} C^{-1}. \quad (\text{G.22})$$

Literaturverzeichnis

- [1] J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Volume I, Academic Press, London, 1984
- [2] W. Miller, *Symmetry Groups and Their Applications*, Academic Press, New York, 1972
- [3] M. Tinkham, *Group Theory and Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, 1964
- [4] W.-K. Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific, 1985
- [5] F. Gürsey, *Introduction to Group Theory*, in Relativity, Groups and Topology, Les Houches Conference 1963, ed. De Witt and De Witt, New York 1964
- [6] M. Wagner, *Gruppentheoretische Methoden in der Physik*, Vieweg, 1998
- [7] J. Kogut, D. K. Sinclair, L. Susskind, *A Quantitative Approach to Low-Energy Quantum Chromodynamics*, Nucl. Phys. B114 (1976) 199
- [8] G. Münster, *Strong coupling expansions for the mass gap in lattice gauge theories*, Nucl. Phys. B190 (1981) 439; Erratum: Nucl. Phys. B205 (1982) 648
- [9] M. J. Teper, *Glueball masses and other physical properties of $SU(N)$ gauge theories in $D=3+1$: a review of lattice results for theorists*, preprint hep-th/9812187
- [10] D. Toussaint, *Glueballs and Hybrids (Gluons as Constituents)*, preprint hep-lat/9909088
- [11] M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press, 1983
- [12] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 1994
- [13] K. G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. D10 (1974) 2445
- [14] K. G. Wilson, *Quarks and Strings on a Lattice*, in New Phenomena in Subnuclear Physics, ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, 1977, Part A, p. 69
- [15] H. Fritzsche, M. Gell-Mann, *Current algebra: quarks and what else?*, Proceedings of the XVIth International Conference on High Energy Physics, Vol.2, Chicago, 1972

-
- [16] K. Osterwalder, E. Seiler, *Gauge Field Theories on a Lattice*, Ann. Phys. 110 (1978) 440
- [17] S. Pokorski, *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press, 1987
- [18] B. Berg, A. Billoire, *Excited Glueball States in Four-Dimensional $SU(3)$ Lattice Gauge Theory*, Phys. Lett. B114 (1982) 324
- [19] B. Berg, A. Billoire, *Glueball Spectroscopy in 4d $SU(3)$ Lattice Gauge Theory(I)*, Nucl. Phys. B221 (1983) 109
- [20] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer, 1976
- [21] S. L. Altmann, A. P. Cracknell, *Lattice Harmonics I. Cubic Groups*, Rev. Mod. Phys. 37 (1965) 19
- [22] S. L. Altmann, *Group Theory*, in: Quantum Theory II, ed. D. R. Bates, Academic Press, 1962
- [23] E. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren*, Vieweg, Braunschweig, 1931, reprinted by Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1951
- [24] D. Bailin, A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1994
- [25] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetrie and Supergravity*, Princeton University Press, 1992
- [26] P. G. O. Freund, *Introduction to Supersymmetry*, Cambridge University Press, 1986
- [27] P. Srivastava, *Supersymmetry, Superfields and Supergravity: An Introduction*, Adam Hilger imprint by IOP, 1986
- [28] H. Kalka, G. Soff, *Supersymmetrie*, Teubner, 1997
- [29] S. Coleman, J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S-Matrix*, Phys. Rev. 159 (1967) 1251
- [30] Y. Golfand, E. Likhtman, *Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of P Invariance*, JETP Lett. 13 (1971) 323
- [31] R. Haag, J. T. Lopuszanski, M. Sohnius, *All Possible Generators of Supersymmetries of the S-Matrix*, Nucl. Phys. B88 (1975) 257
- [32] J. Wess, B. Zumino, *Supergauge Transformations in Four Dimensions*, Nucl. Phys. B70 (1974) 39
- [33] G. Veneziano, S. Yancielowicz, *An Effective Lagrangian for the Pure $N = 1$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Phys. Lett. 113B (1982) 231

- [34] R. C. Johnson, *Angular Momentum on a Lattice*, Phys. Lett. B114 (1982) 147
- [35] Q. Ho-Kim, P. Xuan Yem, *Elementary Particles and Their Interactions*, Springer, 1998
- [36] I. Campos, A. Feo, R. Kirchner, S. Luckmann, I. Montvay, G. Münster, K. Spanderen, J. Westphalen, *Monte Carlo simulation of $SU(2)$ Yang-Mills theory with light gluinos*, Eur. Phys. J. C11 (1999) 507
- [37] G. R. Farrar, G. Gabadaze, M. Schwetz, *On the Effective Action of $N=1$ Supersymmetric Yang-Mills Theorie*, Phys.Rev. D58 (1998) 015009
- [38] G. R. Farrar, G. Gabadaze, M. Schwetz, *The Spectrum of Softly Broken $N=1$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Phys.Rev. D60 (1999) 035002
- [39] private Kommunikation mit Prof. Dr. G. Münster
- [40] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1996
- [41] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Rev. Ed., Addison-Wesley, 1994
- [42] J. Fuchs, Chr. Schweigert, *Symmetries, Lie Algebras and Representations*, Cambridge University Press, 1997
- [43] T. Galla, *Supersymmetrische und Chirale Ward-Identitäten in einer diskretisierten $N = 1$ - $SUSY$ -Yang-Mills-Theorie*, Diplomarbeit, Universität Münster, 1999
- [44] T. Kugo, *Eichtheorien*, Springer, 1997
- [45] H. Nicolai, *A Possible Constructive Approach to $(Super-\Phi^3)_4(I)$. Euclidean Formulation of the Model*, Nucl. Phys. B140 (1978) 294
- [46] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistische Quantenmechanik*, B.I. Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1966

Danksagung

Der Abschluß einer Diplomarbeit bietet im allgemeinen eine gute Gelegenheit, sich bei all denjenigen zu bedanken, die einem während des Studiums und der Anfertigung der vorliegenden Arbeit unterstützend und ermutigend zur Seite gestanden haben. Daher möchte auch ich an dieser Stelle aufrichtigen Dank sagen in der Überzeugung, daß nie allein entsteht, was ein Einzelner vollbracht hat.

Namentlich zu erwähnen sind hier insbesondere

- an erster Stelle meine Eltern Erika und Wolfgang Heitger, deren Unterstützung ich mir während des gesamten Studiums jederzeit sicher sein konnte, und die mir eine sorgenfreie Studienzeit ermöglichten. Auf Euch konnte ich mich in allen Dingen stets verlassen! Bei meinem Vater bedanke ich mich darüber hinaus für das engagierte Korrekturlesen.
- mein Bruder Jochen, der die Durchsicht meines Manuskripts übernahm und seine Zeit für einige für mich sehr anregende Gespräche über Themen der QCD und Renormierungsgruppe opferte.
- Herr Prof. Dr. Gernot Münster, der bereits gleich zu Beginn meines Studiums mit seinen Kursvorlesungen den Grundstein für mein Interesse an der theoretischen Physik legte und sich später mit einem interessanten und lehrreichen Themenvorschlag als Betreuer dieser Arbeit zur Verfügung stellte. Ein weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Manfred Stingl für die Bereitschaft, die Zweitkorrektur meiner Arbeit zu übernehmen.
- meine Zimmerkollegin Christel Kamp und meine Zimmerkollegen Claus Gebert und Tobias Galla, die allesamt für ein angenehmes Arbeitsklima Sorge getragen haben. Insbesondere Letztgenannter hatte stets ein offenes Ohr für die vielen physikalischen und mathematischen Fragen und Probleme, die sich mir während unserer gemeinsamen Studienzeit in Münster oftmals stellten. Claus danke ich zudem für seine Geduld bei der Beantwortung so mancher meiner Computerfragen und für überaus detaillierte Korrekturlisten zu den einzelnen Kapiteln der vorliegenden Arbeit.
- all diejenigen, die sich auszugsweise am lästigen Korrekturlesen beteiligt haben. Hier sind ganz besonders Ralph Brinks, Otfried Gühne und Andreas Schmitz zu nennen. Ohne Euch wäre mancher Druckfehler und manche sprachliche Schwachsstelle unentdeckt geblieben.
- zu guter Letzt Stephanie Uhlarik, die Dame meines Herzens, die während der Fertigstellung dieser Arbeit manches Mal Geduld beweisen mußte, und die mir 48 Stunden vor Abgabefrist durch das „Endspurt-Diplomarbeit-Überlebenspaket“ die Gewißheit gab: Alles wird gut!

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt
und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im März 2000

