

Feldtheoretische Berechnung
universeller Amplitudenverhältnisse
in 2–Loop–Ordnung
beim dreidimensionalen ISING–Modell

Als Diplomarbeit im Oktober 1993 vorgelegt von
Jochen Heitger
aus Hamm/Westf.

Westfälische Wilhelms–Universität Münster
Institut für Theoretische Physik I
Wilhelm–Klemm–Straße 9
48149 Münster

Meinen Eltern gewidmet

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Kritische Phänomene	4
1.1 Phasenübergänge 2. Ordnung	4
1.2 Thermodynamische Definitionen	5
1.3 Kritische Exponenten	7
1.4 ISING–Modell	9
1.5 LANDAU–Theorie und Mean–Field–Approximation	11
2 ϕ^4–Theorie	14
2.1 Erzeugende Funktionale und Korrelationsfunktionen	14
2.2 Störungstheorie	18
2.2.1 Symmetrische Phase	19
2.2.2 Phase gebrochener Symmetrie	22
3 Regularisierung der divergenten Integrale	25
3.1 Dimensionelle Regularisierung	25
3.1.1 Regularisierung der 1–Loop–Integrale	26
3.1.2 Regularisierung des 2–Loop–Integrals I_2	30
3.2 PAULI–VILLARS–Regularisierung	35
4 Renormierung	36
4.1 Renormierung und Kritische Phänomene	36
4.2 Renormierungsschema	38
4.2.1 Symmetrische Phase	39
4.2.2 Phase gebrochener Symmetrie	40
4.3 Renormierungsgruppe	42
5 Renormierte Störungstheorie in $D = 3$	44
5.1 Symmetrische Phase	44
5.1.1 1–Loop–Ordnung	45

5.1.2	2–Loop–Ordnung	46
5.1.3	Berechnung der Renormierten Größen	50
5.2	Phase gebrochener Symmetrie	51
5.2.1	1–Loop–Ordnung	52
5.2.2	2–Loop–Ordnung	54
5.2.3	Berechnung der renormierten Größen	68
6	Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge	70
6.1	Herleitung der Bestimmungsgleichung	70
6.2	Renormierungsgruppenfunktionen	76
6.2.1	Symmetrische Phase	77
6.2.2	Phase gebrochener Symmetrie	80
6.3	Bestimmung von f_+/f_-	83
6.3.1	Entwicklung in der Hochtemperaturkopplung	83
6.3.2	Entwicklung in der Tieftemperaturkopplung	84
6.4	Numerische Ergebnisse	85
6.4.1	Hochtemperaturfixpunkt $u_{R^+}^*$	86
6.4.2	Tieftemperaturfixpunkt $u_{R^-}^*$	87
6.4.3	Diskussion	90
7	Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität	92
7.1	Herleitung der Bestimmungsgleichung	92
7.2	Renormierungsgruppenfunktion γ	94
7.2.1	Symmetrische Phase	94
7.2.2	Phase gebrochener Symmetrie	94
7.3	Bestimmung von C_+/C_-	95
7.3.1	Entwicklung in der Hochtemperaturkopplung	95
7.3.2	Entwicklung in der Tieftemperaturkopplung	96
7.4	Numerische Ergebnisse	97
7.4.1	Hochtemperaturfixpunkt $u_{R^+}^*$	97
7.4.2	Tieftemperaturfixpunkt $u_{R^-}^*$	98
7.4.3	Diskussion	102
8	Konsistenzrechnungen in 1–Loop–Ordnung	104
8.1	Dreidimensionale Rechnungen	104
8.1.1	Renormierte Kopplungen der gebrochenen Phase	104
8.1.2	Physikalische Masse	106
8.1.3	PAULI–VILLARS–Regularisierung	111
8.2	Vergleich mit der ϵ –Entwicklung	112

8.2.1	Renormierte Größen in $D = 4 - \epsilon$	113
8.2.2	Physikalische Masse	120
Zusammenfassung		124
A	Differentiation nach äußeren Impulsen	126
A.1	Kovariante Rechnung	126
A.2	Konsistenzrechnung	127
B	Berechnung einiger Integrale	129
B.1	1-Loop-Integrale	129
B.2	Mehrfache Integrale	133
C	Mathematische Hilfsmittel	136
C.1	Einige Eigenschaften der Gammafunktion	136
C.2	Integralformeln	138
Literaturverzeichnis		139

Einleitung

Die Einführung quantenfeldtheoretischer Methoden in die Theorie der kritischen Phänomene als ein Teilgebiet der Statistischen Physik hat sich in den letzten mehr als 20 Jahren als überaus fruchtbar erwiesen. Stellvertretend für die zahlreichen Veröffentlichungen zu diesem Thema seien [BGZJ76, BAK84, AMI84] genannt.

Dieses Konzept wurde durch den Funktionalintegralformalismus möglich, der sich bei der Formulierung der Quantenfeldtheorie und ihrer Anwendung auf die Elementarteilchenphysik als derart erfolgreich herausgestellt hat, daß er seither den mathematischen Rahmen für diese Theorie bildet. (Siehe z.B. [AL73, JER89, GJ87].) In dieser Darstellung der Feldtheorie spielt das sogenannte erzeugende Funktional, unter anderem wegen seiner Bedeutung für die Berechnung von Erwartungswerten bzw. Korrelationsfunktionen, eine ähnlich zentrale Rolle wie die Zustandssumme in der Statistischen Physik. Es ist aber nicht nur eine formale Analogie, die diese beiden Zweige der Physik verbindet, sondern es gibt auch physikalische Argumente für solche Gemeinsamkeiten:

Die Verwendung feldtheoretischer Methoden kommt, wie bereits angedeutet, vorrangig bei der Behandlung kritischer Phänomene zum Tragen; hierunter wollen wir im folgenden ausschließlich Phasenübergänge 2. Ordnung verstehen, wie sie bei Ferromagneten (u.a. $Tb(OH)_3$, EuO und $CdCr_2Se_4$) beobachtet werden¹. Darunter versteht man kristalline Stoffe mit der Eigenschaft, bei verschwindendem äußeren Magnetfeld unterhalb einer kritischen Temperatur spontan magnetisiert zu sein. Diese Magnetisierung ist eine stetige, aber am Übergangspunkt nicht differenzierbare Funktion der Temperatur. Die Modelle, die zur Erklärung dieser Erscheinung dienen, vernachlässigen die mikroskopische Struktur des Festkörpers in Form der speziellen Gestalt seiner Atome und aller in ihnen enthaltenen Wechselwirkungen. Sie ordnen vielmehr jedem Gitterplatz eine effektive Spinvariable zu, die mit ihren Nachbarn in Wechselwirkung tritt. Dabei nimmt man an, daß die den Phasenübergang kennzeichnenden Eigenschaften der physikalischen Größen bei Annäherung an den kritischen Punkt durch deren kollektives und (gemessen an der Gitterkonstanten des Systems) langreichweitiges Verhalten bewirkt werden. Dies wiederum legt nahe, die zunächst als diskret gewählte Spinvariable durch eine ort- und wertekontinuierliche Feldvariable zu ersetzen, die häufig als Ordnungsparameterfeld bezeichnet wird und im Fall des Ferromagneten der spontanen Magnetisierung entspricht. Der Phasenübergang kann dann als ein Prozeß spontaner Symmetriebrechung aufgefaßt

¹Obwohl ähnliche Phänomene z.B. auch bei binären Fluiden vorliegen, wird hier stets die Terminologie ferromagnetischer Systeme verwendet.

werden, und die Hamiltonfunktion des ferromagnetischen Systems erlangt eine Gestalt, die der Wirkung einer euklidischen skalaren Feldtheorie gleicht, wie man sie in der Quantenfeldtheorie (u. a. zur Beschreibung des HIGGS–Feldes im Standardmodell der Elementarteilchen) verwendet. Die dadurch motivierte störungstheoretische Behandlung des so erhaltenen Modells liefert Resultate, die zum Teil in hervorragender Übereinstimmung mit den Experimenten stehen.

Das anhaltende Interesse am Studium kritischer Phänomene, sowohl vom theoretischen als auch vom experimentellen Standpunkt, beruht in erster Linie auf der Tatsache, daß das Verhalten bestimmter thermodynamischer Funktionen in der Umgebung der kritischen Temperatur für viele Phasenübergänge von universeller Natur zu sein scheint. Hiermit ist gemeint, daß ganze Klassen von Systemen durch universelle Größen wie kritische Exponenten, kritische Amplitudenverhältnisse etc. charakterisiert sind, die, unabhängig davon, welche Form der Wechselwirkung und der Gitterstruktur tatsächlich vorliegt, dieselben Werte annehmen. Diese Universalitätsklassen sind dann allein durch Angabe der Raumdimension, der Anzahl der Spinfreiheitsgrade und der Symmetrie des zugrundeliegenden Modells festgelegt. Ein Großteil der wissenschaftlichen Untersuchungen auf diesem Gebiet ist daher an einer möglichst genauen Bestimmung dieser universellen Größen und damit gleichzeitig an der Bestätigung der obigen Universalitätsaussage orientiert. Dazu haben sich auf theoretischer Seite neben den feldtheoretischen Methoden vor allem Anwendungen der WILSONschen Renormierungsgruppe (siehe [WK74]), Untersuchungen an Hoch- und Tief temperaturreihen (z.B. in [GG74]) sowie Monte–Carlo–Simulationen (siehe [PSWW84]) bewährt.

Innerhalb des oben skizzierten feldtheoretischen Ansatzes zur Behandlung von Phasenübergängen 2. Ordnung sind die renormierte Störungstheorie und die Renormierungsgruppe, insbesondere die Renormierungsgruppengleichungen sowie ihre Lösungen, zu den entscheidenden Hilfsmitteln für die Berechnung kritischer Größen geworden, da sich in ihnen die Eigenschaften der zu den thermodynamischen Funktionen der Statistischen Physik in eindeutiger Beziehung stehenden Korrelationsfunktionen in der kritischen Region manifestieren. Viele der bisher durchgeföhrten Rechnungen beruhen auf der sogenannten ϵ –Entwicklung, die ursprünglich von WILSON und FISHER in [WF72, WIL72] vorgeschlagen und dann von BRÉZIN, LE GUILLOU und ZINN–JUSTIN erstmalig für die n –komponentige, masselose ϕ^4 –Theorie bis zur 4. Störungsordnung durchgeföhrt worden ist. (Für einen Überblick verweisen wir auf [WAL76] sowie die zu Beginn zitierte Literatur.) Die Idee dabei ist, die zur Berechnung universeller Größen beitragenden Impulsintegrale der Störungstheorie in $D = 4 - \epsilon$ Dimensionen auszuwerten, um so zu einer Entwicklung um die Dimension $D = 4$ zu gelangen, von der man aus theoretischen Überlegungen weiß, daß sie die Untergrenze für ein klassisches Verhalten² am kritischen Punkt ist. Während dieses Verfahren (der dimensionellen Regularisierung) in der Quantenfeldtheorie der Isolierung der auftretenden Divergenzen als Vorstufe der eigentlichen Renormierung dient, wird hier die Strategie verfolgt, einen Entwicklungsparameter zu erhalten,

²Unter klassischem Verhalten verstehen wir hier die Vorhersagen der Molekularfeld– bzw. Mean–Field–Theorie, auf die im 1. Kapitel kurz eingegangen wird.

der die Abweichungen der universellen Größen von ihren klassischen Werten im Fall $D < 4$ widerspiegelt. Diese ergeben sich schließlich als Potenzreihen in ϵ und können durch Setzen von $\epsilon = 1$ auf die für kritische Phänomene physikalische Dimension $D = 3$ extrapoliert werden.

In der vorliegenden Arbeit wird ein anderer Weg eingeschlagen. Der zugrundeliegende Ansatz geht im wesentlichen auf PARISI (siehe [PAR80]) zurück und besteht darin, die universellen Größen aus der renormierten Störungsrechnung mit einer massiven ϕ^4 -Theorie zu gewinnen, die direkt in drei Dimensionen durchgeführt wird. Dies bedeutet, daß man die Theorie nicht an ihrem kritischen Punkt (d.h. bei unendlicher Korrelationslänge) betrachtet, sondern in der Umgebung desselben, wo die Korrelationslänge zwar sehr groß aber endlich ist. Nach der Renormierung kann man die universellen Größen jetzt als Potenzreihen mit divergenzfreien Koeffizienten in einer dimensionslosen renormierten Kopplung bestimmen, die wiederum eine numerische Analyse zulassen. Es sei aber bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die so erhaltenen Reihen, ebenso wie diejenigen der ϵ -Entwicklung, nicht konvergieren, sondern bestenfalls asymptotische Eigenschaften haben. Eine Verbesserung dieser Asymptotik durch geschickte Manipulation der Reihen ist erst dann sinnvoll, wenn sie in einigen Ordnungen bekannt sind. Für die dreidimensionale Störungstheorie in der symmetrischen Phase sind deshalb die aufwendigen Rechnungen von NICKEL, MEIRON und BAKER (siehe [BNM77]) erwähnenswert, die die Renormierungskonstanten und Renormierungsgruppenfunktionen des Modells bis zur 7. Ordnung lieferten. Die numerische Auswertung dieser Reihen wird dabei mit Hilfe von BOREL-Transformationen und PADÉ-Approximationen erheblich verbessert. (Hierzu vgl. [BNM78, GZJ80].)

Wie das Thema bereits ankündigt, will ich hier mit der zuletzt genannten Methode die Amplitudenverhältnisse der Korrelationslänge f_+/f_- und der Suszeptibilität C_+/C_- bestimmen, was speziell im Fall der Korrelationslänge eine wichtige Ergänzung der bereits bestehenden Literatur darstellt. Denn in allen ähnlich angelegten Abhandlungen (etwa [BB85, BBMN87]) ist das Renormierungsschema für die gebrochene Phase stets so gewählt, daß nur die Renormierungskonstanten der symmetrischen Phase benötigt werden. Dies schließt allerdings eine Berechnung von f_+/f_- aus, da zu diesem Zweck die Kenntnis der renormierten Massen beider Phasen erforderlich ist. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit ein Verfahren entwickelt, welches eine auf der perturbativen Behandlung von Hoch- und Tief temperaturphase basierende Bestimmung universeller Amplitudenverhältnisse ermöglicht. Die sich in diesem Zusammenhang ergebenden Reihen resultieren aus einer Störungsrechnung bis einschließlich zur 2. Ordnung in der Kopplung, wobei alle dazu beitragenden Impulsintegrationen geschlossen ausgeführt werden. Die numerische Auswertung dieser Reihen, deren Genauigkeit durch die Anzahl ihrer bekannten Glieder zwar eine gewisse Grenze gesetzt ist, gestattet schließlich einen Vergleich mit Literaturwerten, die auf andere Methoden zurückgehen.

Kapitel 1

Kritische Phänomene

In diesem einführenden Kapitel gebe ich einen knappen Überblick über die Theorie der kritischen Phänomene ohne dabei allerdings eine vollständige Darstellung dieses Themenkreises, wie sie sich z.B. in [FIS67, STA71, BDFN92] und der dort zitierten Originalliteratur findet, anzustreben. Er dient vielmehr der Bereitstellung der zentralen Begriffe und Definitionen, die für diese Arbeit von Bedeutung sind. Insbesondere wird sich herausstellen, daß die kontinuierliche ϕ^4 -Theorie als feldtheoretisches Modell der Beschreibung von Phasenübergängen 2. Ordnung angemessen ist.

Es sei zunächst eine beliebige Raumdimension D vorausgesetzt.

1.1 Phasenübergänge 2. Ordnung

Wie in der Einleitung bereits betont worden ist, verstehen wir unter kritischen Phänomenen die thermodynamischen Eigenschaften von Systemen in der Umgebung der kritischen Temperatur T_c (im folgenden auch als kritischer Punkt bezeichnet) eines Phasenübergangs 2. Ordnung. Nach einer allgemeinen Klassifikation sind Phasenübergänge von höherer als 1. Ordnung dadurch gekennzeichnet, daß die ersten partiellen Ableitungen der thermodynamischen Potentiale stetig, die zweiten hingegen am kritischen Punkt unstetig oder divergent sind. Im Falle ferromagnetischer Systeme, die wir ja hier ausschließlich betrachten wollen, zeigen z.B. die spontane Magnetisierung M , die magnetische Suszeptibilität χ und die spezifische Wärmekapazität C dieses charakteristische Verhalten.

Die quantitative Beschreibung eines Phasenübergangs geschieht durch den sogenannten Ordnungsparameter, den hier die spontane Magnetisierung darstellt. Dies ist eine extensive, meßbare Variable, die oberhalb von T_c den Wert null und unterhalb von T_c einen Wert ungleich null besitzt. Die zugehörige intensive Variable ist das äußere Magnetfeld h , dessen Anlegen den Phasenübergang unterdrückt und die Magnetisierung zu einer in T_c differenzierbaren Funktion macht.

Phasenübergänge 2. Ordnung treten in Systemen mit vielen korrelierten Freiheitsgraden auf, und für ihre Erklärung sind kurzreichweite Wechselwirkungen ato-

mistischer Dimensionen und die mikroskopischen Details des Systems irrelevant. Die effektiven Observablen, die man stattdessen verwendet, sind Spinvariablen $\sigma = \sigma(x)$, die auf den Punkten eines Kristallgitters der Gitterkonstanten a leben. Sie können ein- oder mehrkomponentig sein und diskrete oder kontinuierliche Werte annehmen; als Beispiele hierfür nennen wir stellvertretend das ISING–Modell und das HEISENBERG–Modell. Die spontane Magnetisierung ist dann durch den Ensemble–Mittelwert

$$M(x) = \langle \sigma(x) \rangle \Big|_{h(x)=0} \quad (1.1)$$

gegeben, der im Sinne der Statistischen Physik als ein Mittelungsprozeß über alle thermischen Fluktuationen des Systems zu interpretieren ist. Obwohl es sich hierbei strenggenommen zunächst nur um eine Magnetisierungsdichte handelt, aus der sich die Magnetisierung erst durch eine Raumintegration ableitet, werden wir über diese Feinheit i.a. hinwegsehen. In translationsinvarianten Systemen mit konstantem äußeren Feld $h(x) \equiv h$, in denen die gerade angesprochene Unterscheidung überflüssig ist, entfallen alle Ortsabhängigkeiten, und es gilt einfach $M(x; h, T) = M(h, T)$ ¹.

Das Prinzip der spontanen Symmetriebrechung, welches auch in der Quantenfeldtheorie von großer Bedeutung ist, spiegelt sich hier in der unterschiedlichen räumlichen Symmetrie beider Phasen wider. Ein n –komponentiges Spin–Modell weist für $T > T_c$ eine $O(n)$ –Symmetrie auf, was anschaulich der Tatsache entspricht, daß die über das gesamte Systemvolumen gemittelten Stellungen der Spins eine verschwindende Magnetisierung liefern. Für $T < T_c$ ist diese Symmetrie spontan gebrochen, da die Spinvariablen jetzt mit abnehmender Temperatur Werte bevorzugen, die den Konfigurationen des Grundzustandes, in dem alle Spins parallel gerichtet sind, entsprechen. Diese Symmetriebrechung wird im allgemeinen durch einen temperaturabhängigen Parameter des Modells gesteuert.

Eine weitere Größe, die bei der Beschreibung kritischer Phänomene eine wichtige Rolle spielt, ist die Korrelationslänge ξ . Sie ist ein quantitatives Maß für die Entfernung, über die die Spinvariablen des Systems durch ihre Wechselwirkung korreliert sind und sich somit gerade noch beeinflussen. Da diese Wechselwirkung von langreichweiter Natur ist, gibt man die Korrelationslänge häufig gemäß

$$\xi = \hat{\xi}a, \quad \hat{\xi} : \text{dimensionslos}$$

in Einheiten der Gitterkonstanten a an. Sie divergiert ebenfalls bei Annäherung an den kritischen Punkt, denn eine unendliche Korrelationslänge impliziert ein kollektives Verhalten der Spins, welches das Eintreten eines Phasenübergangs zur Folge hat.

1.2 Thermodynamische Definitionen

Wir gehen an dieser Stelle kurz auf die Thermodynamik von Phasenübergängen 2. Ordnung am Beispiel des Ferromagneten ein, damit später die formale Analogie zur

¹Wenn Mißverständnisse auszuschließen sind, werden wir nicht immer alle Abhängigkeiten der thermodynamischen Größen als Argumente mitführen.

Feldtheorie deutlich wird.

Ausgangspunkt einer solchen Beschreibung ist die Zustandssumme

$$Z = Z(h, T) = \text{Tr} (e^{-\beta \mathcal{H}}), \quad \beta = \frac{1}{kT}, \quad (1.2)$$

in der die Spur als klassische Summe über den Phasenraum zu verstehen ist, \mathcal{H} die Hamiltonfunktion des Systems darstellt und k die BOLTZMANN–Konstante bezeichnet. Die (Helmholtzsche) freie Energie erhalten wir aus

$$F = F(h, T) = -\frac{1}{\beta} \ln Z(h, T); \quad (1.3)$$

sie ist mit der (Gibbsschen) freien Energie $G = G(M, T)$ über eine Legendretransformation verbunden. Die oben bereits erwähnten Größen ergeben sich aus den thermodynamischen Potentialen durch die Gleichungen

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_T, \quad h = \left(\frac{\partial G}{\partial M}\right)_T \quad (1.4)$$

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial h}\right)_T = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial h^2}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial M^2}\right)_T^{-1}, \quad C = -T \left(\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}\right)_h. \quad (1.5)$$

Nach den Ausführungen des vorigen Abschnitts folgt aus der Reziprozitätseigenschaft der Legendretransformation bei festem T , d.h.

$$\left. \frac{\partial G(M(h))}{\partial M(h)} \right|_{M(h)=-\frac{\partial F(h)}{\partial h}} = h, \quad (1.6a)$$

als Bedingung für das Einsetzen des Phasenübergangs die Extremaleigenschaft

$$\left. \frac{\partial G}{\partial M} \right|_{M=0} = 0. \quad (1.6b)$$

Diese Beziehung erlaubt die Bestimmung des bereits erwähnten Parameters der Theorie, in dessen Temperaturabhängigkeit sich der Phasenübergang zeigt.

Für eine einkomponentige Spinvariable $\sigma(x)$, die wir im Moment als kontinuierlich annehmen, betrachten wir schließlich die Spin–Spin–Korrelationsfunktionen (in der Feldtheorie als 2–Punkt–Greensfunktionen bekannt)

$$\langle \sigma(x) \sigma(y) \rangle, \quad \langle \sigma(x) \sigma(y) \rangle_c := \langle \sigma(x) \sigma(y) \rangle - \langle \sigma(x) \rangle \langle \sigma(y) \rangle, \quad (1.7a)$$

die sich in translationsinvarianten Systemen zu

$$G^{(2)}(x) := \langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle, \quad G_c^{(2)}(x) := \langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle_c \quad (1.7b)$$

mit Fouriertransformierten $G^{(2)}(p)$ und $G_c^{(2)}(p)$ vereinfachen. Die mit dem Index c versehenen verbundenen Korrelationsfunktionen zeichnen sich dadurch aus, daß in

sie allein die durch die Wechselwirkung der Spins hervorgerufenen Fluktuationen des Ordnungsparameters eingehen. Wir definieren nun die Korrelationslänge ξ als ihr 2. Moment

$$\xi^2 := \frac{1}{2D} \frac{\int d^D x x^2 G_c^{(2)}(x)}{\int d^D x G_c^{(2)}(x)} = -\frac{\frac{\partial}{\partial p^2} G_c^{(2)}(p)}{G_c^{(2)}(p)} \Big|_{p^2=0}. \quad (1.8)$$

Daran zeigt sich insbesondere, daß sich ξ mit dem Inversen des führenden Pols von $G_c^{(2)}(p)$ identifizieren läßt.

Alternativ dazu können wir die Korrelationslänge auch über das Abfallverhalten der verbundenen 2–Punkt–Funktion für $T \neq T_c$ bzgl. einer vorgegebenen Achsenrichtung x erklären:

$$G_c^{(2)}(x) = \langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle_c \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^{-x/\xi}, \quad \xi := \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\ln(\langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle_c)}. \quad (1.9)$$

Im Verlauf der feldtheoretischen Behandlung kritischer Phänomene wird sich herausstellen, daß die Korrelationslängen (1.8) und (1.9) zwar nicht von vornherein identisch sind, aber dennoch auf universelle Größen führen, die numerisch fast übereinstimmen.

1.3 Kritische Exponenten

Die soeben eingeführten physikalischen Größen zeigen bei Annäherung an die kritische Temperatur T_c ein charakteristisches Divergenzverhalten, welches durch kritische Exponenten bestimmt ist. Dabei nimmt man an, daß die funktionale Abhängigkeit dieser thermodynamischen Funktionen von der Temperatur in einen endlichen und einen singulären Anteil² zerfällt, wobei allein der letztere für die universellen kritischen Eigenschaften des Systems verantwortlich ist.

Zu einer genauen Definition dieser Exponenten gelangen wir, wenn wir für eine in der reduzierten Temperaturvariablen

$$t := \frac{T - T_c}{T_c} = \frac{T}{T_c} - 1$$

stetige Funktion $f : U \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$, die auf einer punktierten Umgebung U von 0 definiert ist, mit der Schreibweise

$$f \sim A_{\pm} |t|^{\lambda_{\pm}}, \quad (1.10)$$

stets die Existenz der Grenzwerte

$$\lambda_{\pm} = \lim_{|t| \rightarrow 0} \frac{\ln |f(t)|}{\ln |t|}, \quad A_{\pm} = \lim_{|t| \rightarrow 0} |t|^{-\lambda_{\pm}} f(t) \quad (1.11)$$

²Singulär bedeutet in diesem Zusammenhang, daß die Funktionen oder ihre Ableitungen bei $T = T_c$ divergent sind.

meinen.

In dieser Weise gilt für die Korrelationslänge und die Suszeptibilität in der Umgebung von $t = 0$ bei Abwesenheit eines äußeren Feldes:

$$\xi \sim \begin{cases} f_+ t^{-\nu_+}, & t > 0 \\ f_- (-t)^{-\nu_-}, & t < 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\chi \sim \begin{cases} C_+ t^{-\gamma_+}, & t > 0 \\ C_- (-t)^{-\gamma_-}, & t < 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Ebenso findet man dort für die spezifische Wärmekapazität und die spontane Magnetisierung

$$C \sim \begin{cases} A_+ t^{-\alpha_+}, & t > 0 \\ A_- (-t)^{-\alpha_-}, & t < 0 \end{cases}$$

$$M \sim (-t)^\beta, \quad t < 0; \quad M \sim h^{1/\delta}, \quad t = 0,$$

wobei die letzte Gleichung $h \neq 0$ voraussetzt. Durch das Verhalten der verbundenen 2-Punkt-Funktion bei $T = T_c$

$$G_c^{(2)}(x) = \langle \sigma(x) \sigma(0) \rangle_c \stackrel{a}{\lesssim} x^{-(D-2+\eta)} \quad (1.14)$$

ist ein weiterer Exponent definiert.

Diese kritischen Exponenten erfüllen die Skalengesetze

$$\nu = \nu_+ = \nu_-, \quad \gamma = \gamma_+ = \gamma_-, \quad \alpha = \alpha_+ = \alpha_- \quad (1.15a)$$

und

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (1.15b)$$

$$\alpha = 2 - \nu D \quad (1.15c)$$

$$\delta = \frac{D+2-\eta}{D-2+\eta} \quad (1.15d)$$

$$\beta = \frac{\nu}{2}(D-2+\eta), \quad (1.15e)$$

so daß lediglich zwei von ihnen unabhängig voneinander sind. Die Zustandsgleichung $h = h(M, t)$ ist von der Form

$$\frac{h}{M^\delta} = f\left(\frac{t}{M^{1/\beta}}\right),$$

wobei f eine im Nullpunkt reguläre Funktion ist.

Die Herleitung der vorstehenden Relationen beruht auf der Skalenhypothese, die im wesentlichen besagt, daß in unmittelbarer Nachbarschaft des kritischen Punktes die Korrelationslänge die einzige charakteristische Länge des betrachteten Systems

ist, so daß alle anderen Längen in ihren Einheiten zu messen sind. Das bedeutet gleichzeitig, daß das System am kritischen Punkt selbst, wo die Korrelationslänge einen unendlichen Wert besitzt, invariant unter Skalentransformationen ist. Dimensionsbehaftete thermodynamische Größen sind dann homogene Funktionen ihrer Variablen, d.h. sie transformieren sich nach dem Gesetz

$$f(cx) = c^{D_f} f(x), \quad c = \text{const.},$$

wenn f eine ortsabhängige Funktion der Längendimension D_f ist. Im Rahmen der Renormierungsgruppentheorie kann die Gültigkeit solcher Homogenitätsrelationen und der daraus folgenden Skalenhypothese begründet werden. Die dort auftretenden Korrelationsfunktionen skalieren jedoch nicht mit ihrer naiven, auch kanonisch genannten Dimension, sondern sie entwickeln eine anomale Dimension, die sich in der Definition des Exponenten η schon andeutet.

1.4 ISING-MODELL

Das ISING-Modell (z.B. [DOM74] und die bereits genannten Referenzen) besteht aus einem D -dimensionalen kubischen Gitter $(a\mathbf{Z})^D$ mit Gitterpunkten $x_i, i = 1, \dots, N$, auf denen eine einkomponentige Spinvariable $\sigma(x_i)$ erklärt ist, die nur die Werte ± 1 annimmt. Die ferromagnetische Wechselwirkung, die parallele Spins — also solche mit gleichem Vorzeichen — energetisch favorisiert, ist im einfachsten Fall durch die Hamiltonfunktion

$$\mathcal{H}(\sigma) = - \sum_{\langle ij \rangle} \sigma(x_i) \sigma(x_j) - \sum_i h(x_i) \sigma(x_i) \quad (1.16)$$

definiert, wobei die Schreibweise $\langle ij \rangle$ andeutet, daß sich die Summe über alle Paarungen benachbarter Spins erstreckt.

Bezeichnen wir mit $\{\sigma\}$ alle möglichen 2^N Spinkonfigurationen, so ist die Zustandssumme durch

$$Z(h, T) = \sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)} \quad (1.17)$$

und der Mittelwert einer beliebigen Spinfunktionen $A(\sigma)$ für verschwindendes äußeres Feld durch

$$\langle A(\sigma) \rangle := \frac{\sum_{\{\sigma\}} A(\sigma) e^{\beta \sum_{\langle ij \rangle} \sigma(x_i) \sigma(x_j)}}{\sum_{\{\sigma\}} e^{\beta \sum_{\langle ij \rangle} \sigma(x_i) \sigma(x_j)}} = \frac{1}{Z(h)} \sum_{\{\sigma\}} A(\sigma) e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)} \Big|_{h=0} \quad (1.18)$$

gegeben. Nach (1.4) folgt damit für die spontane Magnetisierung

$$\begin{aligned} M(x_i; h) &= -\frac{\partial F(h)}{\partial h(x_i)} \Big|_{h=0} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{Z(h)} \frac{\partial}{\partial h(x_i)} Z(h) \Big|_{h=0} \\ &= \frac{\sum_{\{\sigma\}} \sigma(x_i) e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)}}{\sum_{\{\sigma\}} e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)}} \Big|_{h=0} = \langle \sigma(x_i) \rangle \end{aligned} \quad (1.19)$$

in Übereinstimmung mit (1.1). Die Suszeptibilitäten χ_{ij} berechnen sich daraus gemäß (1.5) zu

$$\frac{\chi_{ij}}{\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial M(x_i; h)}{\partial h(x_j)} \bigg|_{h=0} = \langle \sigma(x_i) \sigma(x_j) \rangle - \langle \sigma(x_i) \rangle \langle \sigma(x_j) \rangle = \langle \sigma(x_i) \sigma(x_j) \rangle_c, \quad (1.20)$$

und im Vergleich mit (1.19) lesen wir die Beziehung

$$\langle \sigma(x_i) \sigma(x_j) \rangle_c = \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{1}{Z(h)} \frac{\partial^2 Z(h)}{\partial h(x_i) \partial h(x_j)} - \frac{1}{Z^2(h)} \frac{\partial Z(h)}{\partial h(x_i)} \frac{\partial Z(h)}{\partial h(x_j)} \right) \bigg|_{h=0} \quad (1.21)$$

ab, die sich in Abschnitt 2.1 im Rahmen der Feldtheorie wiederfindet³. Speziell für ein translationsinvariantes System mit $h(x_i) \equiv h$ und $M(x_i; h) \equiv M(h)$ lautet die Suszeptibilität

$$\frac{\chi}{\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial M(h)}{\partial h} \bigg|_{h=0} = \sum_i \langle \sigma(x_i) \sigma(0) \rangle_c = \sum_i G_c^{(2)}(x_i). \quad (1.22)$$

Die Korrelationslänge ist in Analogie zu (1.8) durch

$$\xi^2 := \frac{1}{2D} \frac{\sum_i x_i^2 G_c^{(2)}(x_i)}{\sum_i G_c^{(2)}(x_i)} \quad (1.23)$$

definiert.

Das ISING–Modell ist der prominenteste Vertreter einer Universalitätsklasse, die außer durch die Raumdimension D durch ihre Z_2 –Symmetrie charakterisiert ist. Während in $D = 1, 2$ seine Eigenschaften exakt untersucht sind, steht eine Lösung — z.B. durch die geschlossene Ausführung der Zustandssumme — in drei Dimensionen bislang aus. Die in dieser Arbeit untersuchte skalare Feldtheorie gehört ebenfalls in diese Universalitätsklasse; das ISING–Modell ergibt sich in diesem Zusammenhang (z.B. nach [MM93]) als Grenzfall unendlicher Kopplung einer entsprechenden Gittertheorie. Umgekehrt ist es auch möglich, die Zustandssumme (1.17) durch die Transformation mit einem gaußschen Integral (siehe [HUB72]) in eine Form zu bringen, die in führender Ordnung das erzeugende Funktional der euklidischen ϕ^4 –Theorie ist, wie sie im 2. Kapitel vorgestellt wird.

Abschließend seien noch die in der Einleitung als klassisch bezeichneten Werte einiger universeller Größen aus 1.3 angegeben, die einer Approximation der Zustandssumme (1.17) entstammen:

$$\gamma_+ = \gamma_- = 1, \quad \frac{C_+}{C_-} = 2; \quad \nu_+ = \nu_- = \frac{1}{2}, \quad \frac{f_+}{f_-} = \sqrt{2}. \quad (1.24)$$

Die hier zugrundeliegende Näherung ist die Mean–Field–Approximation, die wir im folgenden Abschnitt in etwas allgemeinerer Form kennenlernen werden.

³Die an dieser Stelle ungewöhnlich erscheinenden β –Faktoren verschwinden, wenn wir die Ersetzung $h \rightarrow h/\beta$ vornehmen und statt (1.3) die Relation $F = -\ln Z$ verwenden.

1.5 LANDAU–Theorie und Mean–Field–Approximation

Die in ihrer modernen Formulierung als LANDAU–GINZBURG–Modell bekannte LANDAU–Theorie ist ein phänomenologischer Ansatz zur Beschreibung von Phasenübergängen 2. Ordnung, der ihren charakteristischen Eigenschaften gerecht wird und bereits den Weg zu einer feldtheoretischen Behandlung vorschreibt. Sie gilt streng genommen nur in der direkten Umgebung des kritischen Punktes, wo der gewählte Ordnungsparameter hinreichend klein ist. Dieser ist durch die (hier als einkomponentig gewählte) spontane Magnetisierungsdichte $M(x) \in \mathbf{R}$ gegeben, die *kontinuierlich* von Werten $x \in \mathbf{R}^D$ abhängt. Sie besitzt als makroskopische Größe keine Fluktuationen mit Wellenlängen kleiner als die vorgegebene Gitterkonstante a . Somit enthält die Theorie einen natürlichen Impuls–Cutoff $\Lambda \propto 1/a$, der die Fourierkomponenten von $M(x)$ nach oben beschränkt.

Die in 1.4 noch diskrete Zustandssumme wird als Funktionalintegral

$$Z(h) = \int \mathcal{D}M(x) e^{-\beta \mathcal{H}(M)} = \int \mathcal{D}M(x) \exp \left\{ - \int d^D x g(M, t) \right\} \quad (1.25)$$

geschrieben, wobei das Integrationsmaß $\mathcal{D}M(x)$ eine Summation über alle (möglicherweise überabzählbar viele) funktionale Formen des Ordnungsparameterfeldes $M(x)$ symbolisiert. Wir fassen $g = g(M, t)$ als freie Energiedichte auf und setzen für sie eine Entwicklung mit in t analytischen Koeffizienten

$$g(M, t) = \frac{1}{2} (\partial M(x))^2 + \frac{1}{2} r_0 M^2(x) + u_0 M^4(x) + \dots - M(x)h(x) \quad (1.26)$$

an, die die Fluktuationen des Ordnungsparameters (durch den Gradienten $\partial M(x)$) und die Symmetrie des Problems berücksichtigt. Mit $r_0 = a_0 t$, $a_0 > 0$, $u_0 > 0$ und verschwindenden höheren Koeffizienten⁴ folgt nach partieller Integration im Exponenten bei Vernachlässigung des Randterms ($M(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} Z(h) = & \int \mathcal{D}M(x) \exp \left\{ - \int d^D x \left[\frac{1}{2} M(x) (-\partial^2 + r_0) M(x) \right. \right. \\ & \left. \left. + u_0 M^4(x) - M(x)h(x) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

mit $\partial^2 := \sum_{\nu=1}^D \frac{\partial^2}{\partial x_\nu^2}$.

Wir wollen nun in Anlehnung an [HUA87, BEL91] die Mean–Field–Näherung der LANDAU–GINZBURG–Theorie heranziehen, um die klassisch zu erwartenden Werte (1.24) der in dieser Arbeit betrachteten universellen Größen herzuleiten. Dazu nimmt man wie in der ursprünglichen Formulierung durch LANDAU (vgl. [LL87])

⁴Wählt man auch $u_0 = 0$, so erhält man das sogenannte gaußsche Modell, welches einer freien Feldtheorie entspricht, und für das man das Integral (1.27) geschlossen ausführen kann.

ein konstantes äußeres Magnetfeld h und eine konstante spontane Magnetisierung $M = M(h)$ an, so daß bei Unterdrückung der Temperaturabhängigkeit

$$g(M) = \frac{1}{2} r_0 M^2 + u_0 M^4 - Mh \quad (1.28)$$

wird. Wir führen jetzt eine Sattelpunktapproximation durch, in der das Funktionalintegral (1.27) durch das Maximum seines Integranden ersetzt wird. Dieses ist durch die Bedingung

$$\frac{\partial g(M)}{\partial M} = 0, \quad \frac{\partial^2 g(M)}{\partial M^2} \geq 0 \quad (1.29)$$

bei verschwindendem äußeren Feld bestimmt und ergibt sich zu

$$M = \begin{cases} 0 & , \quad t > 0 \\ \pm \sqrt{a_0/4u_0} (-t)^{1/2}, & t < 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

Insbesondere rechtfertigt diese Gleichung, den Koeffizienten r_0 nach (1.6b) temperaturabhängig anzunehmen, da sein Vorzeichenwechsel den Phasenübergang repräsentiert. Die Suszeptibilität an der Stelle (1.30) berechnen wir nach (1.5) als

$$\chi = \left(\frac{\partial^2 g(M)}{\partial M^2} \right)^{-1} \Big|_{h=0} = \begin{cases} (a_0 t)^{-1} & , \quad t > 0 \\ (-2a_0 t)^{-1} & , \quad t < 0 \end{cases}, \quad (1.31)$$

woran wir den ersten Teil von (1.24) direkt ablesen.

Für die Bestimmung der Korrelationslänge haben wir die 2–Punkt–Korrelationsfunktion $G_c^{(2)}(x)$ zu untersuchen und führen deshalb die Ortsabhängigkeiten wieder ein. Die Sattelpunktapproximation liefert für sie die Differentialgleichung

$$(\partial^2 - r_0 - 12u_0 M^2(x)) G_c^{(2)}(x) = -\delta(x), \quad (1.32)$$

deren Lösung bei Vernachlässigung des Impuls–Cutoffs

$$G_c^{(2)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p G_c^{(2)}(p) e^{ip \cdot x}, \quad G_c^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 + r_0 + 12u_0 M^2(x)} \quad (1.33)$$

ist. Bei verschwindendem äußeren Feld gilt in der symmetrischen Phase ($t > 0$) gerade $M(x) = 0$, und wir finden

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 + r_0}. \quad (1.34a)$$

In der gebrochenen Phase ($t < 0$) ist nach (1.30) die spontane Magnetisierung durch $M^2(x) = -r_0/4u_0$ gegeben, und wir haben

$$G_c^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 - 2r_0}. \quad (1.34b)$$

Mit Hilfe ihrer Definition (1.8) berechnet sich daraus die Korrelationslänge in Übereinstimmung mit (1.24) zu

$$\xi = \begin{cases} (a_0 t)^{-1/2}, & t > 0 \\ (-2a_0 t)^{-1/2}, & t < 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

Durch die Unabhängigkeit der kritischen Exponenten und Amplitudenverhältnisse von den Parametern der freien Energie gibt die Mean–Field–Theorie einen ersten Hinweis auf die schon angesprochene Universalität dieser Größen, die jedoch — bedingt durch deren Unabhängigkeit von der Raumdimension D — in dieser Allgemeinheit nicht haltbar ist. Sie rechtfertigt gleichzeitig die Vernachlässigung aller mikroskopischen Freiheitsgrade durch die Wahl eines kontinuierlichen Ordnungsparameters und der Zustandssumme (1.25).

Beim Betrachten von Gleichung (1.27) fällt auf, daß das LANDAU–GINZBURG–Modell das statistisch–mechanische Pendant der quantenfeldtheoretischen ϕ^4 –Theorie ist, von dem wir vor allem durch Einbeziehung seiner störungstheoretischen Korrekturen nichtvernachlässigbare Abweichungen vom Verhalten der Mean–Field–Theorie erwarten. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß dies genau für Dimensionen $D < 4$ der Fall ist. Des weiteren zitiere ich an dieser Stelle ein Resultat aus der Theorie der Renormierungsgruppe, nach dem die Berücksichtigung von Termen bis einschließlich zur 4. Potenz des Ordnungsparameters tatsächlich für eine präzise Beschreibung des dominierenden kritischen Verhaltens ausreichend ist. (Siehe hierzu [AMI84, BGZJ76, ZJ89] und dort gegebene Referenzen.) Bei der Bestimmung universeller Größen liegen alle durch die Mitnahme von höheren Termen verursachten Korrekturen innerhalb der numerischen Fehlerabschätzungen.

Kapitel 2

ϕ^4 –Theorie

Ich stelle nun die ϕ^4 –Theorie als feldtheoretisches Modell zur Beschreibung von Phasenübergängen 2. Ordnung sowie (nach [LW87a, LW87b, MM93]) ihre Störungstheorie in Hoch– und Tieftemperaturphase vor. Diese Theorie wird in vielen Lehrbüchern zur Quantenfeldtheorie (z.B. in [RYD85, AMI84, ID89]) ausführlich entwickelt, so daß ich auch hier nur die wesentlichen Begriffe und Bezeichnungen einführe. Dies betrifft vor allem die Störungstheorie im Impulsraum und die daraus abgeleitete diagrammatische Entwicklung der verschiedenen Korrelationsfunktionen, da dies in späteren Kapiteln explizit durchgeführt wird.

2.1 Erzeugende Funktionale und Korrelationsfunktionen

Wir betrachten eine euklidische skalare Feldtheorie in D Dimensionen, die aus der zugehörigen Theorie im Minkowski–Raum durch Übergang zu einer komplexen Zeitvariablen (WICK–Rotation) gewonnen wird.

Ausgangspunkt ist die Wirkung

$$\mathcal{S}(\phi) = \int d^D x \mathcal{L}(\phi), \quad (2.1)$$

die aus dem Raumintegral über eine lokale Lagrangedichte \mathcal{L} gebildet ist. Letztere ist die Funktion eines einkomponentigen, reellwertigen Feldes $\phi = \phi(x)$, $x \in \mathbf{R}^D$, und setzt sich aus einem freien und einem wechselwirkenden Anteil zusammen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi) &= \mathcal{L}_0(\phi) + \mathcal{L}_{int}(\phi) \\ \mathcal{L}_0(\phi) &= \frac{1}{2} (\partial\phi(x))^2 + \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2(x). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Im Falle der ϕ^4 –Theorie setzt man für \mathcal{L}_{int} eine Selbstwechselwirkung der Form

$$\mathcal{L}_{int}(\phi) = \frac{1}{4!} g_0 \phi^4(x) \quad (2.3)$$

mit einer Kopplungskonstanten $g_0 > 0$ an. Der physikalische Gehalt einer so formulierten Theorie ist in den Erwartungswerten von Feldern und ihrer Produkte enthalten, die sich aus dem erzeugenden Funktional der Theorie berechnen lassen. Dieses ist als Funktionalintegral

$$\mathcal{Z}_0 := \int \mathcal{D}\phi(x) e^{-\mathcal{S}(\phi)} = \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ - \int d^D x \mathcal{L}(\phi) \right\} \quad (2.4)$$

gegeben, welches im Sinne von $\mathcal{D}\phi(x) = \prod_x d\phi(x)$ als Integrationsmaß über alle möglichen Feldkonfigurationen von $\phi(x)$ zu verstehen ist. Bei Anwesenheit einer äußeren Quelle $h(x)$, an die das Feld ϕ linear koppelt, ist in (2.2) ein Term

$$\mathcal{L}_{\text{source}}(\phi) = -h(x)\phi(x) \quad (2.5)$$

hinzuzufügen, und das erzeugende Funktional ist

$$\mathcal{Z}\{h\} := \int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left\{ - \int d^D x \left[\mathcal{L}(\phi) - h(x)\phi(x) \right] \right\}, \quad \mathcal{Z}\{0\} = \mathcal{Z}_0. \quad (2.6)$$

Wir definieren die Erwartungswerte beliebiger Feldfunktionen $A(\phi)$ als

$$\langle A(\phi) \rangle := \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) A(\phi) e^{-\mathcal{S}(\phi)}}{\int \mathcal{D}\phi(x) e^{-\mathcal{S}(\phi)}} = \frac{1}{\mathcal{Z}\{h\}} \int \mathcal{D}\phi(x) A(\phi) e^{-\mathcal{S}(\phi) + \int d^D x h(x)\phi(x)} \Big|_{h=0} \quad (2.7)$$

und berechnen dann die n –Punkt–Greens– bzw. Korrelationsfunktionen (häufig auch SCHWINGER–Funktionen genannt) der Gestalt

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) := \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle \quad (2.8)$$

durch die Funktionaldifferentiation

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}\{h\}} \frac{\delta^n}{\delta h(x_1) \cdots \delta h(x_n)} \mathcal{Z}\{h\} \Big|_{h=0}. \quad (2.9)$$

Umgekehrt haben wir die funktionale Taylorentwicklung

$$\frac{\mathcal{Z}\{h\}}{\mathcal{Z}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^D x_1 \cdots d^D x_n h(x_1) \cdots h(x_n) G^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.10)$$

Als Fouriertransformierte der Korrelationsfunktionen im Ortsraum sind über

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \prod_{j=0}^n \left(\frac{d^D p_j}{(2\pi)^D} e^{ip_j \cdot x_j} \right) (2\pi)^D \delta \left(\sum_{j=0}^n p_j \right) G^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (2.11)$$

die n –Punkt–Greensfunktionen im Impulsraum definiert.

Wenn wir dies mit den Inhalten des 1. Kapitels vergleichen (speziell in Anbe tracht der Gleichungen (1.25) und (2.6)), beobachten wir den schon mehrmals betonten Zusammenhang zwischen Statistischer Physik und Feldtheorie, nach dem sich die Zustandssumme Z und das erzeugendes Funktional \mathcal{Z} sowie die Hamiltonfunktion

\mathcal{H} und die euklidische Wirkung \mathcal{S} formal entsprechen¹. Die spontane Magnetisierung ist deshalb wieder durch (1.1) mit $\phi(x)$ anstelle von $\sigma(x)$ gegeben, und man ist im Hinblick auf die Berechnung thermodynamischer Größen in Analogie zu Abschnitt 1.2 an einem Funktional Γ interessiert, welches der freien Energie G gleichzusetzen ist.

Dazu definieren wir zunächst durch

$$\mathcal{F}\{h\} := \ln \mathcal{Z}\{h\} \quad (2.12)$$

ein Funktional \mathcal{F} , welches sich als das erzeugende Funktional der zusammenhängenden Korrelationsfunktionen

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) := \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_c \quad (2.13)$$

herausstellt. Speziell ist in Analogie zu (1.21)

$$\langle \phi(x) \rangle_c = \langle \phi(x) \rangle, \quad \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle_c = \langle \phi(x_1) \phi(x_2) \rangle - \langle \phi(x_1) \rangle \langle \phi(x_2) \rangle. \quad (2.14)$$

Die Gleichungen (2.9), (2.10) und (2.11) sind durch

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_c = \frac{\delta^n}{\delta h(x_1) \cdots \delta h(x_n)} \mathcal{F}\{h\} \Big|_{h=0} \quad (2.15)$$

$$\ln \frac{\mathcal{Z}\{h\}}{\mathcal{Z}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^D x_1 \cdots d^D x_n h(x_1) \cdots h(x_n) G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.16)$$

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \prod_{j=0}^n \left(\frac{d^D p_j}{(2\pi)^D} e^{ip_j \cdot x_j} \right) (2\pi)^D \delta \left(\sum_{j=0}^n p_j \right) G_c^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \quad (2.17)$$

zu ersetzen, wobei durch die letzte Beziehung die verbundenen n -Punkt-Greensfunktionen im Impulsraum erklärt sind. Durch

$$\Gamma\{M\} := \mathcal{F}\{h\} - \int d^D x h(x) \phi(x), \quad M(x) = \frac{\delta \mathcal{F}\{h\}}{\delta h(x)} \quad (2.18)$$

führen wir jetzt das Funktional Γ als Legendretransformierte von \mathcal{F} ein. Die Magnetisierung M bei beliebigem äußerem Feld h , die für $h \rightarrow 0$ in die spontane Magnetisierung übergeht, wird in der Feldtheorie oft konventionsgemäß mit demselben Symbol ϕ wie die Feldvariable der Lagrangedichte bezeichnet. Wie in (1.6a) und (1.6b) liefert die Reziprozität der Legendretransformation

$$\frac{\delta \Gamma\{M\}}{\delta M(x)} \Big|_{M(x)=\frac{\delta \mathcal{F}\{h\}}{\delta h(x)}} = h(x), \quad \frac{\delta \Gamma\{M\}}{\delta M(x)} \Big|_{M(x)=0} = 0. \quad (2.19)$$

¹Dies ist eigentlich nur bis auf einen Faktor β richtig, dem in den beiden Zugängen eine unterschiedliche Bedeutung zukommt.

Die Beziehungen (2.15) – (2.17) lauten jetzt

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n}{\delta M(x_1) \cdots \delta M(x_n)} \Gamma\{M\} \Big|_{M=0} \quad (2.20)$$

$$\Gamma\{M\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^D x_1 \cdots d^D x_n M(x_1) \cdots M(x_n) \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.21)$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \int \prod_{j=0}^n \left(\frac{d^D p_j}{(2\pi)^D} e^{ip_j \cdot x_j} \right) (2\pi)^D \delta \left(\sum_{j=0}^n p_j \right) \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n). \quad (2.22)$$

Damit ist Γ das erzeugende Funktional der sogenannten n –Punkt–Vertexfunktionen $\Gamma^{(n)}$ im Orts– bzw. Impulsraum. Als Verallgemeinerung der freien Energie G sind ihre Eigenschaften und ihre Berechnung für die feldtheoretische Beschreibung kritischer Phänomene von entscheidender Bedeutung.

Bevor wir auf die Störungstheorie und die diagrammatische Entwicklung der Korrelationsfunktionen im Impulsraum eingehen, nehmen wir eine Erweiterung vor, indem wir die verbundenen Korrelationsfunktionen mit ϕ^2 –Insertionen,

$$G_c^{(n,l)}(\{x; y\}) := \left\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \frac{1}{2} \phi^2(y_1) \cdots \frac{1}{2} \phi^2(y_l) \right\rangle_c, \quad (2.23)$$

mit $\{x; y\} = \{x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_l\}$ und $G_c^{(n,0)} \equiv G_c^{(n)}$, betrachten. Durch Erweiterung des Quellterms (2.5) um eine quadratische Kopplung an ein Feld $t(x)$, d.h.

$$\mathcal{L}_{source}(\phi) = -h(x)\phi(x) - \frac{1}{2}t(x)\phi^2(x), \quad (2.24)$$

erhält man das erzeugende Funktional $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\{h, t\}$ für die unverbundenen Korrelationsfunktionen und daraus wieder $\mathcal{F}\{h, t\} := \ln \mathcal{Z}\{h, t\}$. Folglich berechnen sich deren Erwartungswerte gemäß

$$\begin{aligned} & \left\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \frac{1}{2} \phi^2(y_1) \cdots \frac{1}{2} \phi^2(y_l) \right\rangle_c \\ &= \frac{\delta^{n+l}}{\delta h(x_1) \cdots \delta h(x_n) \delta t(y_1) \cdots \delta t(y_l)} \mathcal{F}\{h, t\} \Big|_{h=0, t=0} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$G_c^{(n,l)}(\{x; y\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int d^D y_{l+1} \cdots d^D y_{l+k} t(y_{l+1}) \cdots t(y_{l+k}) G_c^{(n,l+k)}(\{x; y\}) \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} G_c^{(n,l)}(\{x; y\}) &= \int \prod_{j=0}^n \left(\frac{d^D p_j}{(2\pi)^D} e^{ip_j \cdot x_j} \right) \prod_{k=0}^l \left(\frac{d^D q_k}{(2\pi)^D} e^{iq_k \cdot y_k} \right) \times \\ & \times (2\pi)^D \delta \left(\sum_{j=0}^n p_j + \sum_{k=0}^l q_k \right) G_c^{(n,l)}(\{p; q\}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

mit $\{p; q\} = \{p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_l\}$. Durch Legendretransformation bezüglich des Feldes h erhalten wir wie zuvor das erzeugende Funktional $\Gamma\{M, t\}$ der (n, l) -Punkt-Vertexfunktionen $\Gamma^{(n,l)}$ mit den Eigenschaften

$$\Gamma^{(n,l)}(\{x; y\}) = \frac{\delta^{n+l}}{\delta M(x_1) \cdots \delta M(x_n) \delta t(y_1) \cdots \delta t(y_l)} \Gamma\{M, t\} \Big|_{M=0, t=0} \quad (2.28)$$

$$\Gamma^{(n,l)}(\{x; y\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int d^D y_{l+1} \cdots d^D y_{l+k} t(y_{l+1}) \cdots t(y_{l+k}) \Gamma^{(n,l+k)}(\{x, y\}) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n,l)}(\{x; y\}) &= \int \prod_{j=0}^n \left(\frac{d^D p_j}{(2\pi)^D} e^{ip_j \cdot x_j} \right) \prod_{k=0}^l \left(\frac{d^D q_k}{(2\pi)^D} e^{iq_k \cdot y_k} \right) \times \\ &\quad \times (2\pi)^D \delta \left(\sum_{j=0}^n p_j + \sum_{k=0}^l q_k \right) \Gamma^{(n,l)}(\{p; q\}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.2 Störungstheorie

Die soeben eingeführten Korrelationsfunktionen sind in der Störungstheorie berechenbar. Wir setzen in diesem Abschnitt $l = 0$ vorraus und spalten in (2.6) den wechselwirkenden Anteil der Wirkung ab. Das dabei entstehende Funktionalintegral ist vom gaußschen Typ und ergibt

$$\mathcal{Z}\{h\} \propto \exp \left\{ - \int d^D x \mathcal{L}_{int} \left(\frac{\delta}{\delta h(x)} \right) \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^D x d^D y h(x) \Delta(x, y) h(y) \right\} \quad (2.31)$$

mit der Proportionalitätskonstanten $\sqrt{\det \Delta(x, y)}$. Der FEYNMAN-Propagator im Ortsraum $\Delta(x, y)$ ist durch

$$(-\partial^2 + m_0^2) \Delta(x, y) = \delta^4(x - y) \quad (2.32)$$

als Inverses des euklidischen KLEIN-GORDON-Operators definiert, und seine Fouriertransformierte $\tilde{\Delta}(p)$ berechnet sich wie in (1.33) zu

$$\Delta(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \tilde{\Delta}(p) e^{ip \cdot (x-y)}, \quad \tilde{\Delta}(p) := \frac{1}{p^2 + m_0^2}. \quad (2.33)$$

Durch Ausführung der Funktionalableitungen in (2.31) erhält man die Korrelationsfunktionen im Ortsraum als unendliche Reihen in der Kopplungskonstanten g_0 . Für deren explizite Berechnung erweist sich allerdings die aus einer Fouriertransformation in den Impulsraum hervorgehende Entwicklung als zweckmäßig, die im folgenden am Beispiel der ϕ^4 -Wechselwirkung (2.3) qualitativ beschrieben sei:

Die Impulsraum–Korrelationsfunktionen erscheinen als Potenzreihen in g_0 , deren Koeffizienten aus Integralen über Produkte von FEYNMAN–Propagatoren bestehen. Hierfür existiert eine suggestive graphische Darstellung, die nach noch zu formulierenden Regeln auf diese Impulsintegrale führt. Die beitragenden Diagramme setzen sich aus ein– und auslaufenden Linien zusammen, denen ein Propagator des zugehörigen Impulses zugeordnet ist, und die sich jeweils zu viert in inneren Punkten (Vertizes) treffen. Dabei gibt die Anzahl der Vertizes, die mit derjenigen der so entstehenden Schleifen (Loops) übereinstimmt, die Störungsordnung und die Anzahl n der äußeren Impulslinien die Zugehörigkeit zu einer n –Punkt–Korrelationsfunktion an. Die Beiträge zur n –Punkt–Funktion (2.8) bestehen aus allen zusammenhängenden und unzusammenhängenden Graphen, die äußere Linien enthalten — die Vakuumdiagramme, d.h. diejenigen ohne äußere Beine, kürzen sich in (2.9) gerade fort —, und die verbundenen n –Punkt–Funktionen (2.13) umfassen nur die zusammenhängenden unter ihnen. Bei der Berechnung der n –Punkt–Vertexfunktionen $\Gamma^{(n,0)}$, die im Mittelpunkt meiner Rechnungen stehen werden, sind nur die zusammenhängenden, einteilchenirreduziblen Graphen — d.h. solche, die durch Aufteilung einer inneren Impulslinie nicht in elementarere Diagramme zerlegt werden können — zu berücksichtigen, wobei außerdem die Propagatoren ihrer äußeren Beine zu ignorieren sind.

Für die 2–Punkt–Funktionen liefert die Legendretransformation (2.18) den Zusammenhang

$$-\Gamma^{(2,0)}(p) = \left(G_c^{(2,0)}(p) \right)^{-1}. \quad (2.34)$$

Die Untersuchung aller beitragenden Graphen ergibt unter Verwendung der geometrischen Reihe

$$G_c^{(2,0)}(p) = \left(\tilde{\Delta}^{-1}(p) - \Sigma(p) \right)^{-1}$$

und damit

$$-\Gamma^{(2,0)}(p) = \tilde{\Delta}^{-1}(p) - \Sigma(p), \quad (2.35)$$

wobei die Selbstenergie $\Sigma(p)$ die Summe aller einteilchenirreduziblen 2–Punkt–Graphen mit amputierten äußeren Beinen ist.

2.2.1 Symmetrische Phase

In Anlehnung an das LANDAU–GINZBURG–Modell aus Abschnitt 1.5 verwenden wir für die Störungstheorie in der symmetrischen Phase eine ϕ^4 –Theorie, deren Feldvariable wir jetzt mit ϕ_{0+} bezeichnen und für deren nackte Masse m_0

$$m_0^2 \equiv m_{0+}^2 > 0. \quad (2.36)$$

gelte. Das klassische Potential dieser Feldtheorie (Abb. 2.1)

$$\mathcal{V}(\phi_{0+}) = \frac{1}{2} m_{0+}^2 \phi_{0+}^2(x) + \frac{1}{4!} g_0 \phi_{0+}^4(x) \quad (2.37)$$

besitzt ein absolutes Minimum für $\phi_{0+}(x) \equiv 0$ und weist eine ungestörte Z_2 -Symmetrie (d.h. eine Symmetrie unter $\phi_{0+}(x) \rightarrow -\phi_{0+}(x)$) auf, die den physikalischen Eigenschaften dieser Phase gerecht wird. Die Lagrangedichte ist wie zuvor

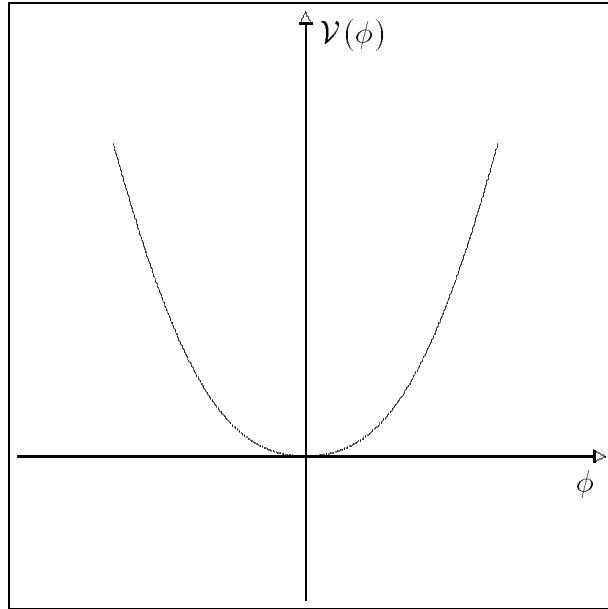


Abb. 2.1: Qualitativer Verlauf des Potentials (2.37) als Funktion von ϕ für festes x .

durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_{0+}) &= \frac{1}{2}(\partial\phi_{0+}(x))^2 + \frac{1}{2}m_{0+}^2\phi_{0+}^2(x) + \mathcal{L}_{int}(\phi_{0+}) \\ \mathcal{L}_{int}(\phi_{0+}) &= \frac{1}{4!}g_0\phi_{0+}^4(x) \end{aligned} \quad (2.38)$$

gegeben, und die FEYNMAN-Regeln im Impulsraum, nach denen man die zu den Korrelationsfunktionen beitragenden Graphen analytisch auswertet, lauten:

1. Jedem Vierer-Vertex



entspricht ein Faktor $-g_0$ sowie eine Impulserhaltung an allen inneren Punkten modulo 2π in jeder Impulskomponente.

2. Jeder inneren Linie mit Impuls k

ist ein Propagator $\tilde{\Delta}(k)$ zugeordnet.

3. Über alle inneren Impulse k ist mit $\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}$ zu integrieren.
4. Jeder Graph trägt einen Faktor $1/S$, wobei der Symmetriefaktor S die Ordnung der Symmetriegruppe des Diagramms angibt. Diese umfaßt alle Permutationen innerer Linien und Vertizes bei festgehaltenen äußeren Impulsen, die die Gestalt des Graphen unverändert lassen.
5. Graphen, die durch Permutationen innerer Linien und Vertizes bei nicht festgehaltenen äußeren Impulsen auseinander hervorgehen, sind topologisch inäquivalent; sie müssen deshalb einzeln berücksichtigt werden, auch wenn sie denselben analytischen Ausdruck repräsentieren.

Die Theorie besitzt in der symmetrischen Phase die Eigenschaft, daß alle n -Punkt-Funktionen mit ungeradem n identisch verschwinden, was insbesondere für die spontane Magnetisierung

$$M(x) = \langle \phi_{0+}(x) \rangle \Big|_{h(x)=0} = 0$$

unserer Erwartung entspricht. Des weiteren treten in der Störungsreihe keine Diagramme auf, die Graphen mit einer äußeren Impulslinie als Teilgraphen (Tadpole-Diagramme) enthalten.

Um jetzt den Übergang in die gebrochene Phase zu vollziehen, ist eine Temperaturabhängigkeit in die Parameter der Lagrangedichte zu implementieren. In Anwendung von (1.6b) bzw. (2.19) auf das Potential $\mathcal{V}(\phi)$ ist offenbar die Wahl

$$m_0^2 \propto t \tag{2.39}$$

angemessen. Die Berücksichtigung der perturbativen Korrekturen, die sich durch die Einbeziehung von Impulsintegralen ergeben werden, bewirkt jedoch den Massen-Shift

$$m_0^2 - m_{0c}^2 \propto t, \tag{2.40}$$

der in der Renormierung Anlaß zur Einführung eines neuen Massenparameters gibt.

2.2.2 Phase gebrochener Symmetrie

Diese Phase zeichnet sich unter anderem dadurch aus, daß die Z_2 -Symmetrie spontan gebrochen ist. Nach (2.39) setzen wir deshalb

$$m_0^2 < 0 \quad (2.41)$$

an. Das zugehörige Potential (Abb. 2.2)

$$\mathcal{V}(\phi) = \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2(x) + \frac{1}{4!} g_0 \phi^4(x) \quad (2.42)$$

hat neben einem lokalen Maximum in $\phi(x) \equiv 0$ zwei absolute Minima in $\phi(x) = \pm v_{min}$. Durch Differentiation von (2.42) berechnet man

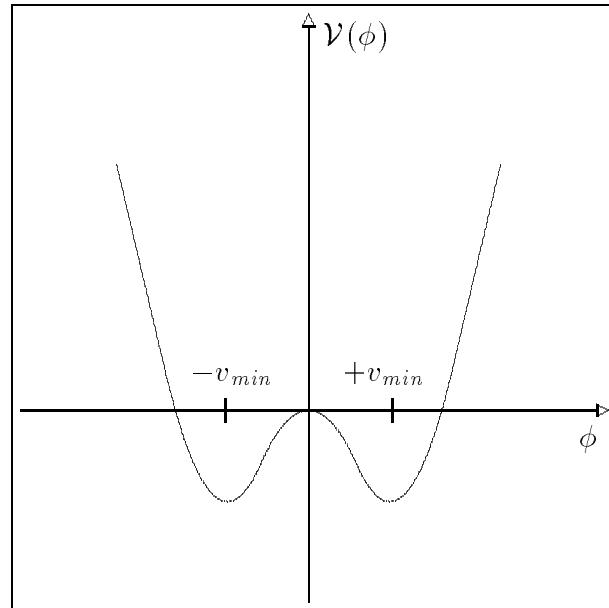


Abb. 2.2: Qualitativer Verlauf des Potentials (2.42) als Funktion von ϕ für festes x .

$$v_{min} = \sqrt{-3! m_0^2 / g_0} = \sqrt{3m_{0-}^2 / g_0} > 0, \quad (2.43)$$

wobei in der Phase gebrochener Symmetrie eine nackte Masse m_{0-} über

$$m_{0-}^2 := -2m_0^2 > 0 \quad (2.44)$$

definiert ist. Da das Funktionalintegral (2.4) durch diese Minima dominiert wird, entwickeln wir das Potential (2.42) um das positive unter ihnen; dies ist gleichbedeutend mit der Einführung eines neuen Feldes ϕ_{0-} durch

$$\phi_{0-}(x) := \phi(x) - v_{min}. \quad (2.45)$$

Nach Einsetzen von (2.45) in (2.42) erhält man nach einer leichten Rechnung

$$\mathcal{V}(\phi_{0-}) = \frac{1}{2} m_{0-}^2 \phi_{0-}^2(x) + \frac{1}{3!} \sqrt{3g_0} m_{0-} \phi_{0-}^3(x) + \frac{1}{4!} g_0 \phi_{0-}^4(x) - \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0}, \quad (2.46)$$

und die Lagrangedichte (2.2) geht in

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi_{0-}) &= \frac{1}{2} (\partial\phi_{0-}(x))^2 + \frac{1}{2} m_{0-}^2 \phi_{0-}^2(x) + \mathcal{L}_{int}(\phi_{0-}) \\ \mathcal{L}_{int}(\phi_{0-}) &= \frac{1}{3!} \sqrt{3g_0} m_{0-} \phi_{0-}^3(x) + \frac{1}{4!} g_0 \phi_{0-}^4(x) - \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} \end{aligned} \quad (2.47)$$

über. Wir sehen also, daß wir die Störungstheorie in der gebrochenen Phase mit einem Feld ϕ_{0-} betreiben können, welches zusätzlich eine Wechselwirkung vom Typ einer ϕ^3 -Theorie aufweist. Da der konstante Term in der Lagrangedichte zur Störungstheorie nicht beiträgt, werden wir ihn von nun an vernachlässigen.

Die vorstehende Betrachtung legt nahe, direkt von einer Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi) &= \frac{1}{2} (\partial\phi(x))^2 + \mathcal{V}(\phi) \\ \mathcal{V}(\phi) &= -\frac{1}{4} m_{0-}^2 \phi^2(x) + \frac{1}{4!} g_0 \phi^4(x) + \frac{3}{8} \frac{m_{0-}^4}{g_0} = \frac{1}{4!} g_0 (\phi^2(x) - v_{min}^2)^2 \end{aligned}$$

mit $m_{0-}^2 > 0$ auszugehen. Dies geht mit der Vorstellung einher, daß die spontane Magnetisierung in der gebrochenen Phase von null verschieden ist und sich aus den stabilen Feldkonfigurationen des klassischen Potentials bestimmt, die gerade durch dessen Minima bei $\pm v_{min}$ gegeben sind. Gleichzeitig wird durch die Ersetzung (2.45) der konstante Term in (2.46) kompensiert.

Die spezielle Wahl der Masse m_{0-} in (2.44) bewirkt, daß die FEYNMAN-Regeln der symmetrischen Phase gültig bleiben, sofern man dort überall m_{0+} durch sie ersetzt. Aufgrund der modifizierten Wechselwirkung (2.47) tritt allerdings die Regel

1' Jedem Dreier-Vertex



entspricht ein Faktor $-\sqrt{3g_0} m_{0-}$ sowie eine Impulserhaltung an allen inneren Punkten modulo 2π in jeder Impulskomponente.

hinzu.

Dies hat zur Folge, daß in dieser Theorie der gebrochenen Phase die n -Punkt-Funktionen mit ungeradem n nicht mehr verschwinden. Dies ist speziell für die spontane Magnetisierung sinnvoll, die nach (2.45) durch

$$M(x) = \langle \phi(x) \rangle \Big|_{h(x)=0} = \pm v_{min} + \langle \phi_{0-}(x) \rangle \Big|_{h(x)=0} \neq 0$$

gegeben ist. Diese Gleichung zeigt, daß sich die spontane Magnetisierung in der Phase gebrochener Symmetrie aus ihren klassischen Werten $\pm v_{min}$ (d.h. denjenigen der Mean-Field-Approximation) und gewissen Quantenfluktuationen zusammensetzt, die in der Störungstheorie als Erwartungswert des Feldes ϕ_{0-} zugänglich sind.

Kapitel 3

Regularisierung der divergenten Integrale

In Kapitel 2 habe ich dargelegt, daß die Korrelationsfunktionen im Impulsraum eine diagrammatische Entwicklung besitzen, die man mit Hilfe der FEYNMAN–Regeln in Impulsintegrale übersetzen kann. Viele dieser Integrale stellen sich allerdings in Abhängigkeit von der Dimension D als divergent heraus und können deshalb nicht direkt berechnet werden. Diesem Problem, das sich durch die gesamte Quantenfeldtheorie und ihre Anwendung auf die Elementarteilchenphysik zieht, wird dadurch begegnet, daß man ihren physikalischen Gehalt in einer *renormierten* Theorie sucht, in der diese Divergenzen in konsistenter Weise beseitigt sind.

Ein wesentlicher Schritt in diese Richtung besteht in der Isolierung der Divergenzen durch geeignete Regularisierungsmethoden, von denen ich hier zwei, darunter in erster Linie die dimensionelle Regularisierung, durch explizite Rechnungen illustriere.

3.1 Dimensionelle Regularisierung

In der dimensionellen Regularisierung überträgt man den klassischen Integralbegriff auf Dimensionen $D \in \mathbf{C}$, indem man die Integrale durch ihre Werte bei den ganzzahligen, positiven D definiert, für die sie a priori existieren, und von dort zu beliebigen Dimensionen analytisch fortsetzt. Dieses Verfahren, das erstmals in den siebziger Jahren vorgeschlagen und mathematisch axiomatisiert wurde, hat sich seither, nicht zuletzt wegen seiner Anwendbarkeit auf Eichfeldtheorien, als fester Bestandteil des Renormierungsprogramms etabliert. (Siehe [TV72, LEI75, COL84].)

Ich führe jetzt die dimensionelle Regularisierung der in $D = 4$ und $D = 3$ divergenten Impulsintegrale aus, die in unsere späteren Rechnungen eingehen werden. Zu diesem Zweck überführt man sie durch die als SCHWINGER–Parametrisierung der Integranden bekannte Identität gemäß

$$\frac{1}{A^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1} e^{-\alpha A}, \quad A \in \mathbf{C}, \quad n \in \mathbf{N} \quad (3.1)$$

in eine Form, in der die D -dimensionale Integration durch Zurückführung auf ein gaußsches Integral (vgl. hierzu Anhang C.2) geschlossen ausgeführt werden kann. Die Divergenzen der ursprünglichen Integrale zeigen sich dann in den einfachen Polen von Gammafunktionen, die durch eine Entwicklung um die physikalische Dimension der Theorie isoliert werden können. Zu diesem Zweck sind in Anhang C.1 einige Eigenschaften der Gammafunktion zusammengestellt.

Wie in den obigen Formeln bereits angedeutet ist, will ich von nun an den Vektorcharakter der euklidischen Impulse durch Fettdruck hervorheben; das Skalarprodukt ist weiterhin mit einem Punkt bezeichnet. (Dabei ist $\mathbf{k}^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2$.)

3.1.1 Regularisierung der 1–Loop–Integrale

Integral J_1

Wir betrachten in beliebiger Dimension D das Integral

$$J_1(D) := \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2}. \quad (3.2)$$

Aufgrund seines Verhaltens

$$J_1(D) \propto \int_0^\infty dk \frac{k^{D-1}}{k^2 + 1}$$

erkennt man, daß es für $k \rightarrow \infty$ im Fall $D = 4$ quadratisch und im Fall $D = 3$ linear divergent ist. Zur Berechnung von J_1 substituiere ich zunächst $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}/m_0$ und erhalte

$$J_1(D) = \frac{(m_0^2)^{D/2-1}}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{1}{k^2 + 1}.$$

Jetzt benutzt man die SCHWINGER–Parametrisierung (3.1) des Integranden und findet nach Ausführung des gaußschen Integrals (C.15):

$$\begin{aligned} J_1(D) &= \frac{(m_0^2)^{D/2-1}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha \int d^D k e^{-\alpha(k^2+1)} = \frac{(m_0^2)^{D/2-1}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha} \int d^D k e^{-\alpha k^2} \\ &= \frac{(m_0^2)^{D/2-1}}{(2\pi)^D} \pi^{D/2} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha} \alpha^{-D/2}. \end{aligned}$$

Die Integraldarstellung der Gammafunktion (C.1) liefert dann

$$J_1(D) = \frac{(m_0^2)^{D/2-1}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right). \quad (3.3)$$

Man kann jetzt die Divergenz des Integrals für $D = 4$ isolieren. Dazu setze ich $D = 4 - \epsilon$, $\epsilon > 0$, und verwende die Reihenentwicklung der allgemeinen Exponentialfunktion

$$x^\epsilon = e^{\epsilon \ln x} = 1 + \epsilon \ln x + \frac{1}{2} \epsilon^2 \ln^2 x + O(\epsilon^3), \quad x \in \mathbf{R}^+ \quad (3.4)$$

sowie die Entwicklung der Gammafunktion um ihre Polstellen (C.5)

$$\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) = \Gamma\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right) = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma + O(\epsilon) \quad (3.5)$$

mit dem Ergebnis:

$$\begin{aligned} J_1(4 - \epsilon) &= \frac{m_0^2}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(m_0^2) + O(\epsilon^2)\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + O(\epsilon^2)\right) \times \\ &\quad \times \left(-\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma + O(\epsilon)\right) \\ &= -\frac{m_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m_0^2}{4\pi}\right) - \gamma + 1 + O(\epsilon)\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die Divergenz des Integrals J_1 für $D \rightarrow 4$ zeigt sich demnach als einfacher Pol für $\epsilon \rightarrow 0$.

Im dreidimensionalen Fall erhält man durch Setzen von $D = 3 - \epsilon$ mit

$$\begin{aligned} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) &= \Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2}\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\epsilon}{2} \frac{d}{dz} \Gamma(z) \Big|_{z=-\frac{1}{2}} + O(\epsilon^2) \\ &= -2\sqrt{\pi} (1 + O(\epsilon)) \end{aligned} \quad (3.7)$$

einen endlichen Wert im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$, obwohl das ursprüngliche Integral auch in $D = 3$ noch divergent ist. Dies ist eine Eigenschaft der dimensionellen Regularisierung in ungeradzahligen Dimensionen, die auf die Berechnung physikalischer Größen allerdings keine Auswirkungen hat. Man ignoriert deshalb die Divergenz des Integrals J_1 und führt nur seinen endlichen Anteil

$$\begin{aligned} J_1(3) \equiv J_1(3 - \epsilon) &= \frac{m_0}{(4\pi)^{3/2}} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(m_0^2) + O(\epsilon^2)\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + O(\epsilon^2)\right) \times \\ &\quad \times (-2\sqrt{\pi} (1 + O(\epsilon))) \\ &= -\frac{m_0}{4\pi} (1 + O(\epsilon)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

mit.

Aus (3.3) und (C.4a) bekommt man für $n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}$ durch wiederholte Differentiation nach m_0^2 die Integrale

$$\begin{aligned} J_n(D) &:= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^n} = -\frac{1}{n-1} \frac{\partial}{\partial m_0^2} J_{n-1}(D) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{(m_0^2)^{D/2-n}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma\left(n - \frac{D}{2}\right). \end{aligned}$$

Speziell für $n = 2, 3, 4$ divergiert in $D = 4$ nur noch das Integral J_2 , d.h.

$$J_2(4) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} = I_1(\mathbf{0}; 4 - \epsilon) \quad (3.9a)$$

$$J_3(4) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^3} = \lim_{D \rightarrow 4} J_3(D) = \frac{1}{32\pi^2 m_0^2} \quad (3.9b)$$

$$J_4(4) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^4} = \lim_{D \rightarrow 4} J_4(D) = \frac{1}{96\pi^2 m_0^4}, \quad (3.9c)$$

während in $D = 3$ bereits alle Integrale endlich sind:

$$J_2(3) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} = \lim_{D \rightarrow 3} J_2(D) = \frac{1}{8\pi m_0} \quad (3.10a)$$

$$J_3(3) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^3} = \lim_{D \rightarrow 3} J_3(D) = \frac{1}{32\pi m_0^3} \quad (3.10b)$$

$$J_4(3) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^4} = \lim_{D \rightarrow 3} J_4(D) = \frac{1}{64\pi m_0^5}. \quad (3.10c)$$

Integral I_1

Gegeben sei jetzt das Integral

$$I_1(\mathbf{p}; D) := \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]}, \quad (3.11)$$

welches wegen

$$I_1(\mathbf{0}; D) \propto \int_0^\infty dk \frac{k^{D-1}}{(k^2 + 1)^2}$$

für $D = 4$ noch logarithmisch divergent ist. Ich substituiere wieder $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}/m_0$ und verwende für beide Nennerfaktoren des Integranden die SCHWINGER–Parametrisierung (3.1). Dann folgt mit $\mathbf{p}/m_0 \rightarrow \mathbf{p}$:

$$\begin{aligned} & I_1(\mathbf{p}; D) \\ &= \frac{(m_0^2)^{D/2-2}}{(2\pi)^D} \int d^Dk \frac{1}{(k^2 + 1)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + 1]} \\ &= \frac{(m_0^2)^{D/2-2}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha d\beta \int d^Dk \exp \left\{ -[(\alpha + \beta)k^2 - 2\beta \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} + \alpha + \beta + \beta \mathbf{p}^2] \right\} \\ &= \frac{(m_0^2)^{D/2-2}}{(2\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha d\beta \left(\frac{\pi}{\alpha + \beta} \right)^{D/2} \exp \left\{ - \left[\alpha + \beta + \beta \mathbf{p}^2 - \frac{\beta^2 \mathbf{p}^2}{\alpha + \beta} \right] \right\} \\ &= \frac{(m_0^2)^{D/2-2}}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{(\alpha + \beta)^{D/2}} \exp \left\{ -(\alpha + \beta) - \frac{\alpha \beta \mathbf{p}^2}{\alpha + \beta} \right\}, \end{aligned}$$

wobei wieder das Integral (C.15) ausgeführt wurde. Durch die Substitutionen

$$s := \alpha + \beta, \quad 0 < s < \infty; \quad t := \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad 0 < t < 1$$

erreicht man die (umkehrbar stetig differenzierbare) Koordinatentransformation

$$f : \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} st \\ s(1-t) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

mit Funktionalmatrix und zugehöriger Funktionaldeterminante

$$(Df)|_{(s,t)} := \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(s, t)} = \begin{pmatrix} t & s \\ (1-t) & -s \end{pmatrix}, \quad \det(Df)|_{(s,t)} = -s.$$

Dies liefert mit der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{p}; D) &= \frac{(m_0^2)^{D/2-2}}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dt \int_0^\infty ds s^{-D/2} \left| \det(Df)|_{(s,t)} \right| \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -s \left(1 + t(1-t)\mathbf{p}^2 \right) \right\} \\ &= \frac{(m_0^2)^{D/2-2}}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dt \int_0^\infty ds s^{1-D/2} \exp \left\{ -s \left(1 + t(1-t)\mathbf{p}^2 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$u := s \left(1 + t(1-t)\mathbf{p}^2 \right), \quad \frac{du}{ds} = 1 + t(1-t)\mathbf{p}^2, \quad u(0) = 0, \quad u(\infty) = \infty$$

folgt schließlich mit der Integraldarstellung der Gammafunktion (C.1):

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{p}; D) &= \frac{(m_0^2)^{D/2-2}}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^\infty du e^{-u} u^{1-D/2} \int_0^1 dt \left(1 + t(1-t)\mathbf{p}^2 \right)^{D/2-2} \\ &= \frac{(m_0^2)^{D/2-2}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) \int_0^1 dt \left(1 + t(1-t)\mathbf{p}^2 \right)^{D/2-2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Durch Differenzieren¹ bekommt man

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; D) = \left(\frac{D}{2} - 2 \right) \frac{(m_0^2)^{D/2-3}}{(4\pi)^{D/2}} \Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) \int_0^1 dt \frac{t(1-t)}{[1 + t(1-t)\mathbf{p}^2]^{3-D/2}} \quad (3.14)$$

als Ableitung des Integrals nach dem äußeren Impulsquadrat. Dieses Integral ist offenbar für $D = 4$ bereits endlich, da die Differentiation die Potenz des Integrationsimpulses im Nenner erhöht.

Wie zuvor entwickelt man in (3.13) alle Faktoren um $D = 4$, was mit

$$\Gamma \left(2 - \frac{D}{2} \right) = \Gamma \left(\frac{\epsilon}{2} \right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \quad (3.15)$$

nach (C.5) auf

$$\begin{aligned} &I_1(\mathbf{0}; 4 - \epsilon) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \ln(m_0^2) + O(\epsilon^2) \right) \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(4\pi) + O(\epsilon^2) \right) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) \times \\ &\quad \times \left(\int_0^1 dt \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \left(1 + t(1-t)\mathbf{p}^2 \right) + O(\epsilon^2) \right] \Big|_{\mathbf{p}^2=0} \right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_0^2}{4\pi} \right) - \gamma + O(\epsilon) \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

¹Man beachte, daß dabei durch die anfängliche Ersetzung $\mathbf{p}/m_0 \rightarrow \mathbf{p}$ jetzt ein zusätzlicher Faktor m_0^2 im Nenner auftritt.

führt. Analog ist

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 4 - \epsilon) \Big|_{p^2=0} \\
&= -\frac{\epsilon}{2} \frac{1}{(4\pi)^2 m_0^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_0^2}{4\pi} \right) - \gamma + O(\epsilon) \right) \times \\
&\quad \times \int_0^1 dt \frac{t(1-t)}{(1+t(1-t)\mathbf{p}^2)} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \left(1 + t(1-t)\mathbf{p}^2 \right) + O(\epsilon^2) \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= -\frac{\epsilon}{2} \frac{1}{(4\pi)^2 m_0^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_0^2}{4\pi} \right) - \gamma + O(\epsilon) \right) \left(\underbrace{\int_0^1 dt t(1-t)}_{= \frac{1}{6}} + O(\epsilon^2) \right),
\end{aligned}$$

und es existiert der Grenzwert

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 4) \Big|_{p^2=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 4 - \epsilon) \Big|_{p^2=0} = -\frac{1}{96\pi^2 m_0^2}. \quad (3.17)$$

Das Integral I_1 und damit erst recht seine Ableitung nach dem äußeren Impulsquadrat sind im Fall $D = 3$ endlich und können deshalb, wie im Anhang B.1 vorgeführt wird, direkt bestimmt werden. In (3.13) und (3.14) kommt dies dadurch zum Ausdruck, daß dort die Grenzwerte $D \rightarrow 3$ existieren:

$$I_1(\mathbf{p}; 3) = \lim_{D \rightarrow 3} I_1(\mathbf{p}; D) = \frac{1}{4\pi p} \arctan \left(\frac{p}{2m_0} \right), \quad I_1(\mathbf{0}; 3) = \frac{1}{8\pi m_0} \quad (3.18)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 3) \Big|_{p^2=0} = \lim_{D \rightarrow 3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; D) \Big|_{p^2=0} = -\frac{1}{96\pi m_0^3}. \quad (3.19)$$

3.1.2 Regularisierung des 2–Loop–Integrals I_2

Von den Graphen, die in 2. Ordnung der Störungstheorie zu berücksichtigen sind, weist nur einer in $D = 3$ einen Divergenztyp auf, der sich von den soeben behandelten Divergenzen unterscheidet. Das zugehörige Integral ist für beliebiges D durch

$$I_2(\mathbf{p}; D) := \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k_1^2 + m_0^2)(k_2^2 + m_0^2)[(\mathbf{p} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 + m_0^2]} \quad (3.20)$$

gegeben. Aus (3.13) ersehen wir

$$I_2(\mathbf{0}; D) \propto \int_0^\infty dk_1 \frac{k_1^{D-1}}{k_1^2 + 1} \underbrace{I_1(-\mathbf{k}_1; D)}_{\propto k_1^{D-4}} \propto \int_0^\infty dk_1 \frac{k_1^{2D-5}}{k_1^2 + 1},$$

so daß I_2 für $D = 3$ logarithmisch divergent ist. Die Ableitung nach dem äußeren Impulsquadrat ist wie im Falle des Integrals I_1 endlich.

Dimensionelle Regularisierung von I_2

Ich verfahre in Analogie zu den vorigen Rechnungen und vereinfache das Integral für zunächst beliebiges D soweit, bis nach Setzung von $D = 3 - \epsilon$ die Divergenz als Pol im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ in Erscheinung tritt. Ausgehend von den Substitutionen $\mathbf{k}_i \rightarrow \mathbf{k}_i/m_0$ für $i = 1, 2$ betrachten wir

$$I_2(\mathbf{p}; D) = \frac{(m_0^2)^{D-3}}{(2\pi)^{2D}} \int d^D k_1 d^D k_2 \frac{1}{(k_1^2 + 1)(k_2^2 + 1)[(\mathbf{p} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 + 1]}$$

mit $\mathbf{p}/m_0 \rightarrow \mathbf{p}$, und man gelangt mit der SCHWINGER-Parametrisierung (3.1) des Integranden sowie zweimaliger Anwendung des gaußschen Integrals (C.15), mit dessen Hilfe man die \mathbf{k}_2 - und \mathbf{k}_1 -Integrationen nacheinander ausführt, zu

$$\begin{aligned} & I_2(\mathbf{p}; D) \\ &= \frac{(m_0^2)^{D-3}}{(2\pi)^{2D}} \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \int d^D k_1 d^D k_2 \exp \left\{ -[(\alpha + \gamma)k_1^2 + (\beta + \gamma)k_2^2 \right. \\ & \quad \left. + 2\gamma \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 + 2\gamma \mathbf{p} \cdot (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + \gamma \mathbf{p}^2 + (\alpha + \beta + \gamma)] \right\} \\ &= \frac{(m_0^2)^{D-3}}{(2\pi)^{2D}} \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \int d^D k_1 d^D k_2 \exp \left\{ -[(\beta + \gamma)k_2^2 + 2(\gamma \mathbf{k}_1 + \gamma \mathbf{p}) \cdot \mathbf{k}_2 \right. \\ & \quad \left. + (\alpha + \gamma)k_1^2 + 2\gamma \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1 + \gamma \mathbf{p}^2 + (\alpha + \beta + \gamma)] \right\} \\ &= \frac{(m_0^2)^{D-3}}{(2\pi)^{2D}} \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \left(\frac{\pi}{\beta + \gamma} \right)^{D/2} \int d^D k_1 \exp \left\{ - \left[\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\beta + \gamma} k_1^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2\frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{k}_1 + \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma} \mathbf{p}^2 + (\alpha + \beta + \gamma) \right] \right\} \\ &= \frac{(m_0^2)^{D-3}}{(4\pi)^D} \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^{D/2}} \exp \left\{ -(\alpha + \beta + \gamma) - \frac{\alpha\beta\gamma\mathbf{p}^2}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha} \right\}, \end{aligned} \tag{3.21a}$$

bzw.

$$I_2(\mathbf{0}; D) = \frac{(m_0^2)^{D-3}}{(4\pi)^D} \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^{D/2}} e^{-(\alpha + \beta + \gamma)}. \tag{3.21b}$$

Durch die Substitutionen

$$s := \alpha + \beta + \gamma, \quad 0 < s < \infty; \quad t := \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad u := \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad 0 < t, u < 1$$

erreicht man die (umkehrbar stetig differenzierbare) Koordinatentransformation

$$f: \begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} stu \\ st(1-u) \\ s(1-t) \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

mit Funktionalmatrix und Funktionaldeterminante

$$(Df)|_{(s,t,u)} := \frac{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}{\partial(s, t, u)} = \begin{pmatrix} tu & su & ts \\ t(1-u) & s(1-u) & -st \\ 1-t & -s & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(Df)|_{(s,t,u)} = -s^2 t.$$

Nach der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale folgt:

$$\begin{aligned} & I_2(\mathbf{0}; D) \\ &= \frac{(m_0^2)^{D-3}}{(4\pi)^D} \int_0^\infty ds \int_0^1 dt du \frac{\det(Df)|_{(s,t,u)}| e^{-s}}{s^D [t^2 u(1-u) + t(1-u)(1-t) + tu(1-t)]^{D/2}} \\ &= \frac{(m_0^2)^{D-3}}{(4\pi)^D} \int_0^\infty ds e^{-s} s^{2-D} \int_0^1 dt du \frac{t^{1-\frac{D}{2}}}{[1-t+tu(1-u)]^{D/2}} \\ &= \frac{(m_0^2)^{D-3}}{(4\pi)^D} \Gamma(3-D) \int_0^1 dt du \frac{t^{1-\frac{D}{2}}}{[1-t+tu(1-u)]^{D/2}}; \end{aligned} \quad (3.23)$$

im letzten Schritt habe ich wieder die Integraldarstellung der Gammafunktion (C.1) verwendet. Jetzt setzt man $D = 3 - \epsilon$ und entwickelt die vorstehende Gleichung um $\epsilon = 0$, wobei speziell nach (C.5)

$$\Gamma(3 - D) = \Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \quad (3.24)$$

ist. Die Divergenz des Integrals I_2 offenbart sich also wieder als einfacher Pol der Gammafunktion. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} & I_2(\mathbf{0}; 3 - \epsilon) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^3} (1 - \epsilon \ln(m_0^2) + O(\epsilon^2)) (1 + \epsilon \ln(4\pi) + O(\epsilon^2)) \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon) \right) \times \\ & \quad \times \int_0^1 dt du \frac{1}{\sqrt{t} \sqrt{[1-t+t(1-u)u]^3}} \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln(t - t^2 + t^2 u(1-u)) + O(\epsilon^2) \right] \\ &= \frac{1}{(4\pi)^3} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m_0^2}{4\pi}\right) - \gamma + O(\epsilon) \right) \left(\int_0^1 dt du \frac{1}{\sqrt{t} \sqrt{[1-t+t(1-u)u]^3}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\epsilon}{2} \int_0^1 dt du \frac{t \ln(t - t^2 + t^2 u(1-u))}{\sqrt{[t - t^2 + t^2 u(1-u)]^3}} + O(\epsilon^2) \right), \end{aligned}$$

und es verbleibt nur noch die Bestimmung der Parameterintegrale.

Mit $Q := t - (1-u+u^2)t^2$ ergibt im ersten Integral die Nacheinanderausführung der t - und u -Integrationen auf die Integraldarstellung der Betafunktion (C.6):

$$\begin{aligned} \int_0^1 du dt \frac{1}{\sqrt{t} \sqrt{[1-t+t(1-u)u]^3}} &= \int_0^1 du \int_0^1 dt \frac{t}{\sqrt{Q^3}} = \int_0^1 du \left[\frac{2t}{\sqrt{Q}} \right]_0^1 \\ &= 2 \int_0^1 du u^{-1/2} (1-u)^{-1/2} = 2 B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\pi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Der Wert des zweiten Integrals wird in die späteren Rechnungen nicht eingehen, so daß ich auf seine geschlossenen Berechnung verzichte:

$$C := \int_0^1 dt du \frac{t \ln(t - t^2 + t^2 u(1 - u))}{\sqrt{[t - t^2 + t^2 u(1 - u)]^3}} \approx -15.0448.$$

Man findet also das Endresultat

$$I_2(\mathbf{0}; 3 - \epsilon) = \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln\left(\frac{m_0^2}{4\pi}\right) + \frac{C}{4\pi} - \gamma + O(\epsilon) \right). \quad (3.26)$$

Bestimmung von I'_2

Zur Bestimmung von

$$I'_2 := \frac{\partial}{\partial p^2} I_2(\mathbf{p}; D) \Big|_{p^2=0, D=3} \quad (3.27)$$

differenziere ich (3.21a) und erhalte (man beachte wieder den Faktor $1/m_0^2$ durch die Rücksubstitution des äußeren Impulses):

$$\frac{\partial}{\partial p^2} I_2(\mathbf{p}; D) \Big|_{p^2=0} = -\frac{(m_0^2)^{D-4}}{(4\pi)^D} \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \frac{\alpha\beta\gamma e^{-(\alpha+\beta+\gamma)}}{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^{1+D/2}}. \quad (3.28)$$

Führt man wieder die Variablensubstitution (3.22) durch, so folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p^2} I_2(\mathbf{p}; D) \Big|_{p^2=0} \\ &= -\frac{(m_0^2)^{D-4}}{(4\pi)^D} \int_0^\infty ds \int_0^1 dt du \frac{\left| \det(Df) \right|_{(s,t,u)} s^3 t^2 u(1-u)(1-t)}{s^{2+D} [t^2 u(1-u) + t(1-t)]^{1+D/2}} e^{-s} \\ &= -\frac{(m_0^2)^{D-4}}{(4\pi)^D} \int_0^\infty ds e^{-s} s^{3-D} \int_0^1 dt du \frac{u(1-u)(1-t)t^{2-\frac{D}{2}}}{[1-t+tu(1-u)]^{1+D/2}} \\ &= -\frac{(m_0^2)^{D-4}}{(4\pi)^D} \Gamma(4-D) \int_0^1 dt du \frac{u(1-u)(1-t)t^{2-\frac{D}{2}}}{[1-t+tu(1-u)]^{1+D/2}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

und der Grenzwert $D \rightarrow 3$ existiert:

$$I'_2 = \lim_{D \rightarrow 3} \frac{\partial}{\partial p^2} I_2(\mathbf{p}; D) \Big|_{p^2=0} = -\frac{1}{64\pi^3 m_0^2} \int_0^1 dt du \frac{\sqrt{t} u(1-u)(1-t)}{\sqrt{[1-t+tu(1-u)]^5}}.$$

Mit $R := 1 - t + tu - tu^2$ und

$$\int_0^1 du \frac{u}{\sqrt{R^5}} = \frac{16}{3(3t-4)^2(1-t)^{1/2}} - \frac{2}{3(3t-4)(1-t)^{3/2}}$$

berechnet man

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 dt du \frac{\sqrt{t}u(1-u)(1-t)}{\sqrt{[1-t+tu(1-u)]^5}} \\
&= \int_0^1 dt \sqrt{t}(1-t) \left[\int_0^1 du \frac{u}{\sqrt{R^5}} - \int_0^1 du \frac{u^2}{\sqrt{R^5}} \right] \\
&= \int_0^1 dt \sqrt{t}(1-t) \left[\int_0^1 du \frac{u}{\sqrt{R^5}} - \frac{1}{2t(1-t)^{3/2}} - \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{t} \right) \int_0^1 du \frac{u}{\sqrt{R^5}} \right] \\
&= \int_0^1 dt \sqrt{t} \left[(1-t) \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{4} \right) \int_0^1 du \frac{u}{\sqrt{R^5}} - \frac{1}{2t(1-t)^{1/2}} \right] \\
&= \frac{8}{3} \int_0^1 dt \sqrt{t} \frac{(1-t)^{1/2}}{(3t-4)^2} = \frac{1}{6} \int_0^1 dt t^{1/2} (1-t)^{1/2} \left(1 - \frac{3}{4}t \right)^{-2} \\
&= \frac{1}{6} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) F\left(2, \frac{3}{2}; 3; \frac{3}{4}\right) = \frac{2\pi}{27}.
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile bezeichnen B die Betafunktion und F die hypergeometrische Funktion, für deren Definition wir auf Anhang C.1 verweisen. Dies liefert schließlich

$$I'_2 = \lim_{D \rightarrow 3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_2(\mathbf{p}; D) \Big|_{p^2=0} = -\frac{1}{864\pi^2 m_0^2}. \quad (3.30)$$

Bestimmung von \tilde{I}_2

Abschließend ist noch der bald benötigte Wert des Integrals

$$\tilde{I}_2 := \frac{\partial}{\partial m_0^2} I_2(\mathbf{p}; D) \Big|_{p^2=0, D=3} \quad (3.31)$$

zu berechnen. Die Differentiation sichert die Konvergenz des Integrals, da sich die Potenz des Integrationsimpulses im Nenner des Integranden erhöht. Ich setze deshalb sofort $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ und erhalte aus (3.23) mit $D = 3 - \epsilon$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m_0^2} I_2(\mathbf{0}; 3 - \epsilon) &= \frac{\partial}{\partial m_0^2} \frac{(m_0^2)^{D-3}}{(4\pi)^D} \Gamma(3 - D) \int_0^1 du dt \frac{t^{1-\frac{D}{2}}}{[1-t+tu(1-u)]^{D/2}} \Big|_{D=3-\epsilon} \\
&= \frac{\partial}{\partial m_0^2} \frac{(m_0^2)^{-\epsilon}}{(4\pi)^{3-\epsilon}} \Gamma(\epsilon) \int_0^1 du dt \frac{t^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{[1-t+tu(1-u)]^{\frac{3-\epsilon}{2}}} \\
&= \underbrace{-\epsilon \Gamma(\epsilon)}_{=1+O(\epsilon)} \frac{(m_0^2)^{-\epsilon-1}}{(4\pi)^{3-\epsilon}} \int_0^1 du dt \frac{t^{\frac{\epsilon-1}{2}}}{[1-t+tu(1-u)]^{\frac{3-\epsilon}{2}}}.
\end{aligned}$$

Aus (3.24) ersieht man, daß der Limes $\epsilon \rightarrow 0$ existiert, und mit (3.25) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_0^2} I_2(\mathbf{0}; 3 - \epsilon) = -\frac{1}{(4\pi)^3 m_0^2} \underbrace{\int_0^1 du dt \frac{1}{\sqrt{t} \sqrt{[1-t+t(1-u)u]^3}}}_{=2\pi} \\
&= -\frac{1}{32\pi^2 m_0^2}.
\end{aligned} \quad (3.32)$$

3.2 PAULI–VILLARS–Regularisierung

In Abschnitt 3.1.1 haben wir gesehen, daß sich die lineare Divergenz des Integrals J_1 in $D = 3$ durch die dimensionelle Regularisierung nicht isolieren läßt. Ich gebe deshalb mit der PAULI–VILLARS–Regularisierung (vgl. [PV49, ZJ89]) eine alternative Regularisierungsmethode an, die diese Divergenz zunächst bewahrt, und mit deren Hilfe ich im Kapitel 8 demonstrieren werde, daß dieser Umstand — zumindest die 1-Loop–Rechnung betreffend — auf die Endresultate keinen Einfluß hat.

Das Prinzip dieser (nicht eichinvarianten) Regularisierung ist es, die auftretenden Propagatoren in der Form

$$\frac{1}{k^2 + m_0^2} \longrightarrow \frac{1}{k^2 + m_0^2} - \frac{1}{k^2 + \Lambda^2}, \quad \Lambda > 0 \quad (3.33)$$

zu transformieren, so daß man im Grenzwert $\Lambda \rightarrow \infty$ den ursprünglichen Ausdruck zurück erhält. In diesem Sinne wird

$$J_1(3) \longrightarrow J_1(3; \Lambda) := \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\Lambda^2 - m_0^2}{(k^2 + m_0^2)(k^2 + \Lambda^2)} \quad (3.34)$$

zu einem konvergenten Integral, welches man jetzt für endliches Λ ausführen kann. Nach Übergang zu sphärischen Polarkoordinaten und Partialbruchzerlegung des Integranden erhalte ich

$$\begin{aligned} J_1(3; \Lambda) &= \frac{\Lambda^2 - m_0^2}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + m_0^2)(k^2 + \Lambda^2)} \\ &= \frac{\Lambda^2 - m_0^2}{2\pi^2} \left\{ \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 - m_0^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{k^2 + \Lambda^2} + \frac{m_0^2}{m_0^2 - \Lambda^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{k^2 + m_0^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \Lambda \int_0^\infty dk \frac{1}{k^2 + 1} - m_0 \int_0^\infty dk \frac{1}{k^2 + 1} \right\}, \end{aligned}$$

woraus mit (C.10)

$$J_1(3; \Lambda) = \frac{1}{4\pi} (\Lambda - m_0) \quad (3.35)$$

folgt. Die Divergenz des Integrals $J_1(3)$ zeigt sich jetzt für $\Lambda \rightarrow \infty$ im linearen Verhalten von $J_1(3; \Lambda)$. Wir beobachten insbesondere, daß der endliche Anteil des Integrals, der in die weiteren Rechnungen eingeht, mit dem in dimensioneller Regularisierung bestimmten Wert (3.8) übereinstimmt.

Kapitel 4

Renormierung

Die Divergenzstruktur der ϕ^4 -Theorie und die mangelnde physikalische Bedeutung der in die Lagrangedichte ad hoc eingeführten Parameter m_0 und g_0 (sowie indirekt auch des Impuls-Cutoffs Λ) machen eine im Rahmen der Quantenfeldtheorie als Renormierung bekannte Umparametrisierung notwendig, die für die in dieser Arbeit angestrebte *perturbative* Berechnung universeller Größen unverzichtbar ist.

Deswegen bietet dieses Kapitel neben der Einführung der Renormierungsschemata die Gelegenheit, den Zusammenhang der Renormierung mit der Theorie der kritischen Phänomene zu umreißen.

4.1 Renormierung und Kritische Phänomene

Das Konzept der Renormierung lässt sich vom feldtheoretischen Standpunkt wie folgt charakterisieren (siehe z.B. [CAL76, COL84]):

Die ϕ^4 -Theorie weist auf Ebene der (nackten) Größen m_0 und g_0 der Lagrangedichte (2.2) Divergenzen auf, die sich am deutlichsten in der störungstheoretischen Entwicklung der Impulsraum-Korrelationsfunktionen zeigen. (Man unterscheidet dabei grundsätzlich zwischen Ultraviolettdivergenzen, die sich für Integrationsimpulse $k \rightarrow \infty$ und $k \rightarrow 0$ offenbaren. Da wir aber ausschließlich eine massive ϕ^4 -Theorie betrachten, spielen die letzteren hier keine Rolle.) Im Zuge der Renormierung führt man deshalb eine renormierte Masse m_R und eine renormierte Kopplung g_R ein, die gerade so gewählt sind, daß die Korrelationsfunktionen in Abhängigkeit dieser Parameter für alle Impulse endliche Werte besitzen und somit eine physikalische Interpretation erlauben. Die zuvor durch eine Regularisierung (vgl. Kapitel 3) isolierten Unendlichkeiten der Theorie werden demnach durch geeignete Renormierungsbedingungen in die analytischen Beziehungen zwischen den nackten und den renormierten Parametern übertragen. Diese Relationen erlauben wiederum auf der Ebene der Lagrangedichte die Konstruktion von *lokalen* Gegentermen, die in jeder Ordnung der Störungstheorie eine Kompensation der Divergenzen erzwingt. Ist dies durch eine endliche Anzahl von Gegentermen möglich, von denen jeder eine unendliche (oder endliche) Potenzreihe in der renormierten Kopplung

darstellt, so ist die Theorie renormierbar (oder superrenormierbar); andernfalls ist sie nicht renormierbar. Diese Renormierbarkeitseigenschaft hängt entscheidend von der Dimension D ab. Eine einfache Betrachtung zeigt, daß die ϕ^4 -Theorie (bzw. die ϕ^3 -Theorie) für $D = 4$ (bzw. $D = 6$) renormierbar und für $D < 4$ (bzw. $D < 6$) sogar superrenormierbar ist.

Für kritische Phänomene scheint diese Argumentation auf den ersten Blick nicht gerechtfertigt zu sein. Denn trotz der Wahl eines kontinuierlichen Skalarfeldes als Ordnungsparameter besitzt die Theorie durch die Gitterstruktur des Festkörpers weiterhin einen intrinsischen Impuls-Cutoff Λ , der als Inverses der Gitterkonstanten a die Impulse der Fourierkomponenten des Feldes nach oben begrenzt. Demzufolge weisen alle zu den Korrelationsfunktionen beitragenden Impulsintegrale eine natürliche Cutoff-Regularisierung auf, und wir haben eine endliche Theorie vor uns. An früherer Stelle ist aber schon betont worden, daß das kritische Verhalten (und die daraus resultierenden makroskopischen Eigenschaften) von Phasenübergängen 2. Ordnung durch die langreichweiten Fluktuationen des Ordnungsparameters bestimmt sind. Diese Tatsache erfordert die Unabhängigkeit der Theorie von allen mikroskopischen Parametern, und damit insbesondere vom Cutoff Λ . Die Existenz des Grenzwertes $\Lambda \rightarrow \infty$ (bzw. $\epsilon \rightarrow 0$ im Falle der dimensionellen Regularisierung), die erst in einer renormierten Feldtheorie gesichert ist, erscheint damit als Voraussetzung für die Universalität von kritischen Exponenten und deren Amplitudenverhältnissen.

Die in Kürze durchzuführende Massenrenormierung ist außerdem in der Beobachtung begründet, daß die nackte Masse m_0 , deren Quadrat nach (2.39) noch linear in der reduzierten Temperatur t war, in der Störungstheorie den Phasenübergang nicht mehr durch ihr Verschwinden für $t \rightarrow 0$ steuert. Sie strebt vielmehr in diesem Grenzprozeß, gemäß (2.40) in der Form

$$t = m_0^2 - m_{0c}^2, \quad (4.1)$$

gegen eine kritische nackte Masse m_{0c} , die im allgemeinen von null verschieden und, wie z.B. in [BB85, BBMN87] begründet, perturbativ nicht berechenbar ist. Aus diesem Grund führt man mit der renormierten Masse m_R (die gleichzeitig in einem einfachen Zusammenhang mit der Korrelationslänge steht) einen Parameter in die Theorie ein, in dessen (bezüglich seines Quadrates nichtlinearem) Verschwinden für $t \rightarrow 0$ sich das Erreichen des kritischen Punktes manifestiert:

$$m_R|_{m_0=m_{0c}} = 0. \quad (4.2)$$

Die renormierte Störungstheorie umfaßt neben der Massenrenormierung, die in $D = 3$ zur Beseitigung aller Divergenzen bereits ausreichend ist, eine Wellenfunktionsrenormierung und eine Renormierung der Kopplungskonstanten. Diese zusätzlichen Bedingungen garantieren auch in $D = 4$ divergenzfreie Korrelationsfunktionen und beseitigen die in einer masselosen Theorie entstehenden Infrarotdivergenzen¹.

¹Dies ist insbesondere in der ϵ -Entwicklung erforderlich, da man dort von $D = 4$ zu $D = 3$ extrapolieren will.

Erst in der Renormierungsgruppentheorie zeigt sich, daß die dimensionslose renormierte Kopplungskonstante für die Physik in der Umgebung des kritischen Punktes von grundsätzlicher Bedeutung ist.

4.2 Renormierungsschema

Man betrachte die einkomponentige, euklidische ϕ^4 -Theorie, deren Gestalt in symmetrischer und gebrochener Phase in Abschnitt 2.2 eingeführt worden ist. Ich lasse wieder beliebige Dimensionen D zu und hebe an geeigneter Stelle den Fall $D = 3$ hervor. Soweit Verwechslungen auszuschließen sind, wird von einer Indizierung mit $+$ bzw. $-$ für die jeweilige Phase abgesehen.

Wie in der bereits zitierten Lehrbuchliteratur üblich beginne ich mit den Vertexfunktionen (von nun an mit einem Index 0 versehen)

$$\Gamma_0^{(n,l)}(\{p; q\}; m_0, g_0),$$

$\{p; q\} = \{p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_l\}$, die nach Abschnitt 2.1 durch Legendre- und Fouriertransformationen aus den Erwartungswerten

$$\left\langle \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) \frac{1}{2} \phi_0^2(y_1) \cdots \frac{1}{2} \phi_0^2(y_l) \right\rangle_c$$

entstehen. Die Wirkung ist in konventionellen Einheiten dimensionslos, so daß die nackte Kopplung die Massendimension $4 - D$ trägt und mit

$$u_0 := \frac{g_0}{m_0^{4-D}}; \quad u_0 := \frac{g_0}{m_0}, \quad D = 3 \quad (4.3)$$

eine dimensionslose nackte Kopplung u_0 eingeführt wird. Da ich eine massive Theorie verwende, kann ich die renormierten Parameter der Theorie durch Renormierungsbedingungen an die Vertexfunktionen definieren, die verschwindende äußere Impulse als Renormierungspunkte besitzen. Das Renormierungsschema ist dann durch das Verhalten des Propagators für kleine Impulse (d.h. durch seine Taylorentwicklung um $p^2 = 0$) bestimmt:

$$-\Gamma_0^{(2,0)}(p; m_0, g_0) = \left(G_c^{(2,0)}(p; m_0, g_0) \right)^{-1} = \frac{1}{Z_3} \left(m_R^2 + p^2 + O(p^4) \right), \quad (4.4)$$

wobei die renormierte Masse m_R durch

$$m_R^2 := \frac{\Gamma_0^{(2,0)}(0; m_0, g_0)}{\frac{\partial \Gamma_0^{(2,0)}(p; m_0, g_0)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=0}} = -Z_3(u_0) \Gamma_0^{(2,0)}(0; m_0, g_0) \quad (4.5)$$

und die Wellenfunktionsrenormierung $Z_3 = Z_3(u_0)$ durch

$$\frac{1}{Z_3(u_0)} := -\frac{\partial \Gamma_0^{(2,0)}(p; m_0, g_0)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=0} \quad (4.6)$$

definiert sind. Mit (1.8) identifizieren wir die Korrelationslänge als

$$m_R = \frac{1}{\xi}. \quad (4.7)$$

Des weiteren ist eine Renormierungskonstante $Z_2 = Z_2(u_0)$ durch die Vorschrift

$$\frac{1}{Z_2(u_0)} := -\Gamma_0^{(2,1)}(\{0;0\}; m_0, g_0) \quad (4.8)$$

gegeben. Aus Abschnitt 2.1 folgt, daß man aufgrund der Identität

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{g_0} = \frac{\partial}{\partial m_0^2} \Big|_{g_0} \quad (4.9)$$

die Vertexfunktionen mit ϕ^2 -Insertionen (bis auf $(n, l) = (0, 0)$) durch

$$\Gamma_0^{(n,l+1)}(\{p;0,q\}; m_0, g_0) = \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_0^{(n,l)}(\{p;q\}; m_0, g_0) = \frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma_0^{(n,l)}(\{p;q\}; m_0, g_0) \quad (4.10)$$

aus den gewöhnlichen Vertexfunktionen erhält. Für $(n, l) = (2, 0)$ geht (4.8) damit in

$$\frac{1}{Z_2(u_0)} = -\frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma_0^{(2,0)}(0; m_0, g_0) \quad (4.11)$$

über. Auf diese Weise hängen die renormierten Felder ϕ_R und $(\phi_R^2)_R$ über die Beziehungen

$$\phi_0(x) = \sqrt{Z_3(u_0)} \phi_R(x) \quad (4.12a)$$

$$\phi_0^2(x) = \frac{Z_3(u_0)}{Z_2(u_0)} [\phi_R(x)]_R^2 \quad (4.12b)$$

mit den Feldern der Lagrangedichte zusammen.

Bis hierher behalten alle Gleichungen sowohl in der symmetrischen als auch in der gebrochenen Phase ihre Gültigkeit.

4.2.1 Symmetrische Phase

Die Definition der renormierten Kopplung $g_R^{(4)}$ in der symmetrischen Phase erfolgt über den Wert der 4-Punkt-Funktion bei verschwindenden äußeren Impulsen. Wir setzen

$$g_R^{(4)} := -Z_3^2(u_0) \Gamma_0^{(4,0)}(\{0\}; m_0, g_0) = g_0 \frac{Z_3^2(u_0)}{Z_1(u_0)}, \quad (4.13)$$

wobei für die Renormierungskonstante $Z_1 = Z_1(u_0)$

$$\frac{1}{Z_1(u_0)} := -\frac{1}{g_0} \Gamma_0^{(4,0)}(\{0\}; m_0, g_0) \quad (4.14)$$

gilt. Durch

$$u_R := \frac{g_R^{(4)}}{m_R^{4-D}}; \quad u_R := \frac{g_R^{(4)}}{m_R}, \quad D = 3 \quad (4.15)$$

ist dann die dimensionslose renormierte Kopplung u_R erklärt.

Die Gleichungen (4.5) und (4.13) bzw. (4.15) gestatten es nun, m_0 als Funktion von m_R , g_0 als Funktion von g_R und schließlich u_0 als Funktion von u_R zu schreiben. Mit Hilfe dieser Relationen, die jeweils Potenzreihen in der renormierten Kopplung sind, können wir in den Renormierungsfunktionen Z_i , $i = 1, 2, 3$, die nackten Kopplung u_0 eliminieren, so daß wir diese von nun an als Funktionen $Z_i = Z_i(u_R)$ auffassen. Mit der dimensionslosen Kopplung u , definiert durch

$$u := \frac{g_0}{m_R^{4-D}}; \quad u := \frac{g_0}{m_R}, \quad D = 3 \quad (4.16)$$

als Funktion von u_R , erhalten wir aus (4.13) und (4.15) die Beziehungen

$$g_0 = m_R^{4-D} u_R \frac{Z_1(u_R)}{Z_3^2(u_R)}, \quad u = u_R \frac{Z_1(u_R)}{Z_3^2(u_R)}. \quad (4.17)$$

Nach Definition (2.25) ist der Zusammenhang zwischen den nackten und den renormierten (n, l) -Vertexfunktionen (mit Ausnahme von $(n, l) = (0, 2)$, für die eine multiplikative Renormierung nicht möglich ist) durch die Gleichung

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(n,l)}(\{p; q\}; m_0, g_0) &= [Z_3(u_R)]^{l-\frac{n}{2}} [Z_2(u_R)]^{-l} \Gamma_R^{(n,l)}(\{p; q\}; m_R, u_R) \\ &= [Z_3(u_R)]^{-\frac{n}{2}} \left[\frac{Z_2(u_R)}{Z_3(u_R)} \right]^{-l} \Gamma_R^{(n,l)}(\{p; q\}; m_R, u_R) \end{aligned} \quad (4.18)$$

gegeben.

Das Renormierungsschema in der symmetrischen Phase fassen wir durch den Satz von Renormierungsbedingungen

$$\Gamma_R^{(2,0)}(0; m_R, u_R) = -m_R^2 \quad (4.19a)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2,0)}(p; m_R, u_R) \Big|_{p^2=0} = -1 \quad (4.19b)$$

$$\Gamma_R^{(4,0)}(\{0\}; m_R, u_R) = -m_R^{4-D} u_R = -g_R^{(4)} \quad (4.19c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(\{0; 0\}; m_R, u_R) = -1 \quad (4.19d)$$

zusammen.

4.2.2 Phase gebrochener Symmetrie

Die gemäß (4.13) eingeführte renormierte Kopplung der gebrochenen Phase unterscheidet sich von derjenigen in der symmetrischen Phase; denn die zusätzliche

ϕ^3 –Kopplung erlaubt eine beträchtliche Zahl weiterer Diagramme, die zur 4–Punkt–Funktion beitragen. Wir folgen deshalb [LW87b, MM93], indem wir hier eine andere Definition der renormierten Kopplung verwenden.

Bezeichnet man mit v die spontane Magnetisierung als Erwartungswert des Feldes ϕ und mit $G_c^{(1,0)}$ die nichtverschwindende 1–Punkt–Funktion des Feldes ϕ_0 im Impulsraum, so besteht nach Abschnitt 2.2.2 die Relation ($m_0^2 \hat{=} m_{0-}^2$)

$$v = v_{min} + v_0, \quad v_0 := G_c^{(1,0)}, \quad v_{min} := \sqrt{3m_0^2/g_0}. \quad (4.20)$$

Die zugehörigen FEYNMAN–Regeln zeigen, daß v_0 , im Impulsraum als Potenzreihe in der nackten Kopplung berechenbar, mit einem Term der Ordnung $g_0^{1/2}$ beginnt. Wird also als der renormierte Vakuumerwartungswert v_R des Feldes ϕ

$$v_R := \frac{1}{\sqrt{Z_3(u_0)}} v \quad (4.21)$$

gesetzt, so erhält man mit

$$g_R := \frac{3m_R^2}{v_R^2} = \frac{3Z_3(u_0) m_R^2}{\left(v_0 + \sqrt{3m_0^2/g_0}\right)^2} = g_0 \frac{Z_3(u_0)}{Z_4^2(u_0)} \quad (4.22)$$

eine Größe g_R , deren Störungsreihe von der Gestalt $g_0 + O(g_0^2)$ ist, und die man als eine renormierte Kopplung deuten kann. Die zugehörige Renormierungskonstante $Z_4 = Z_4(u_0)$ ist nach (4.22) durch

$$Z_4(u_0) := \frac{m_0}{m_R} \left(1 + \sqrt{\frac{g_0}{3m_0^2}} v_0 \right) \quad (4.23)$$

gegeben. In Analogie zu (4.15) ist die dimensionslose renormierte Kopplung u_R jetzt

$$u_R := \frac{g_R}{m_R^{4-D}}; \quad u_R := \frac{g_R}{m_R}, \quad D = 3. \quad (4.24)$$

Wir denken uns auch hier wieder die nackten Größen durch die renormierten ausgedrückt und erhalten damit $Z_i = Z_i(u_R)$ für $i = 2, 3, 4$. Die Kopplung u ist ebenfalls durch (4.16) definiert, und (4.17) ist durch

$$g_0 = m_R^{4-D} u_R \frac{Z_4^2(u_R)}{Z_3(u_R)}, \quad u = u_R \frac{Z_4^2(u_R)}{Z_3(u_R)} \quad (4.25)$$

zu ersetzen, wobei die rechten Seiten als Funktionen von u_R aufzufassen sind.

Gleichung (4.18) bleibt in den Parametern der gebrochenen Phase unverändert, und das Renormierungsschema ist durch die Renormierungsbedingungen

$$\Gamma_R^{(2,0)}(0; m_R, u_R) = -m_R^2 \quad (4.26a)$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_R^{(2,0)}(p; m_R, u_R) \Big|_{p^2=0} = -1 \quad (4.26b)$$

$$\frac{3}{v_R^2} \Gamma_R^{(2,0)}(0; m_R, u_R) = -m_R^{4-D} u_R = -g_R \quad (4.26c)$$

$$\Gamma_R^{(2,1)}(\{0; 0\}; m_R, u_R) = -1 \quad (4.26d)$$

charakterisiert.

Mit Ausnahme von Kapitel 8 benenne ich später mit u_{R+} stets die aus $g_R^{(4)}$ gebildete, dimensionslose renormierte Kopplung (4.15) in der Hochtemperaturphase, während ich gleichzeitig mit u_{R-} immer die dimensionslose renormierte Kopplung der Tieftemperaturphase meine, die nach (4.24) aus g_R gebildet wird.

4.3 Renormierungsgruppe

In diesem Abschnitt stelle ich (auf [BGZJ76, AMI84, ID89] verweisend) einige Begriffe aus der Theorie der Renormierungsgruppe zusammen, da ich für die Berechnung der Amplitudenverhältnisse die Renormierungsgruppenfunktionen benötige, die ihrerseits in Beziehung zu den kritischen Exponenten stehen.

Die Renormierbarkeit der skalaren Feldtheorie hat die Gültigkeit von partiellen Differentialgleichungen für die Vertexfunktionen zur Folge, die als Renormierungsgruppen- bzw. CALLAN–SYMANZIK–Gleichungen (siehe [IIM75] und dort gegebene Referenzen) bekannt sind. Speziell für die massive, renormierte Theorie gilt:

$$\begin{aligned} & \left\{ m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \Big|_{g_0} + \beta(u_R) \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} + \left(l - \frac{n}{2} \right) \eta_3(u_R) - l \eta_2(u_R) \right\} \Gamma_R^{(n,l)}(\{p; q\}; m_R, u_R) \\ &= (2 - \eta_3(u_R)) m_R^2 \Gamma_R^{(n,l+1)}(\{p; 0, q\}; m_R, u_R) \end{aligned} \quad (4.27)$$

mit den Renormierungsgruppenfunktionen²

$$\beta(u_R) := m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \Big|_{g_0} u_R \quad (4.28a)$$

$$\eta_3(u_R) := \beta(u_R) \frac{1}{Z_3(u_R)} \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} Z_3(u_R) \quad (4.28b)$$

$$\eta_2(u_R) := \beta(u_R) \frac{1}{Z_2(u_R)} \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{g_0} Z_2(u_R). \quad (4.28c)$$

Die Eigenschaften partieller Ableitungen erlauben mit (4.16) die Umformung

$$\begin{aligned} \beta(u_R) &= m_R \frac{\partial u}{\partial m_R} \Big|_{g_0} \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{m_R} u_R = -(4 - D) \frac{g_0}{m_R^{4-D}} \frac{\partial}{\partial u} \Big|_{m_R} u_R \\ &= -(4 - D) u \left(\frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{m_R} u \right)^{-1} = -(4 - D) \left(\frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{m_R} u \right)^{-1} \\ &= -(4 - D) \left(\frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{m_R} \ln(u) \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

und für $D = 3$ ist

$$\beta(u_R) = - \left(\frac{\partial}{\partial u_R} \Big|_{m_R} \ln(u) \right)^{-1}. \quad (4.30)$$

²Ich weiche an dieser Stelle etwas von den Bezeichnungen der oben zitierten Literatur ab, in der zum Teil die Renormierungskonstante $Z_{\phi^2} := Z_2/Z_3$ Verwendung findet.

Entsprechend haben wir

$$\eta_3(u_R) = \beta(u_R) \frac{\partial}{\partial u_R} \bigg|_{g_0} \ln(Z_3(u_R)) = m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \bigg|_{g_0} \ln(Z_3(u_R)) \quad (4.31a)$$

$$\eta_2(u_R) = \beta(u_R) \frac{\partial}{\partial u_R} \bigg|_{g_0} \ln(Z_2(u_R)) = m_R \frac{\partial}{\partial m_R} \bigg|_{g_0} \ln(Z_2(u_R)), \quad (4.31b)$$

und daraus eine weitere Renormierungsgruppenfunktion

$$\frac{1}{\nu(u_R)} = 2 - \eta_3(u_R) + \eta_2(u_R). \quad (4.32)$$

Im Verlauf der Lösung der Renormierungsgruppengleichung (4.27) mit der Charakteristikenmethode (vgl. [CH68]) tritt eine laufende renormierte Kopplung $\hat{u}_R = \hat{u}_R(\lambda; u_R)$, $\lambda \in \mathbf{R}$, auf, deren Grenzwertverhalten durch die Nullstellen der β -Funktion bestimmt ist:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{u}_R(\lambda; u_R) = u_R^*; \quad \beta(u_R^*) = 0, \quad \beta'(u_R^*) < 0 \quad (4.33a)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \hat{u}_R(\lambda; u_R) = u_R^*; \quad \beta(u_R^*) = 0, \quad \beta'(u_R^*) > 0. \quad (4.33b)$$

Der Wert u_R^* der laufenden Kopplung \hat{u}_R wird im ersten Fall als ultraviolettabi-ler Fixpunkt (das Verhalten der Vertexfunktionen für große äußere Impulse kontrollierend) verstanden, während man im zweiten Fall von einem infrarotstabili-chen Fixpunkt (das Verhalten der Vertexfunktionen für kleine äußere Impulse kontrollie-rend) spricht. Dieser ist für die Untersuchung kritischer Phänomene von besonderer Bedeutung, da sich die kritische Region neben $T \approx T_c$ und $M \ll 1$ durch Impulse $q, p \ll 1$ bzw. Entfernungen $x \gg a$ auszeichnet. Die kritische Theorie ist dem-nach durch die Existenz des Grenzwertes u_R^* aus (4.33b) charakterisiert, der für $D < 4$ als *nichttriviale* Nullstelle der β -Funktion gegeben ist. Die triviale Nullstelle $u_R^* = 0$ ist hingegen ultraviolettabil und wird als gaußscher Fixpunkt bezeichnet. In $D = 4$ fallen beide dann im infrarotstabili-chen Fixpunkt bei $u_R^* = 0$ zusammen³, und für $D > 4$ vertauschen sie ihre Stabilität. (Die nichttriviale Nullstelle ist dabei als unphysikalisch zu verwerfen.)

Abschließend sei referiert, daß mit den gleichzeitig geltenden Homogenitätsre-lationen der renormierten Vertexfunktionen unter Skalentransformationen ihrer Ar-gumente sowohl die Gültigkeit der Skalenrelationen zwischen den kritischen Exponen-ten (siehe [BGZJ76, AMI84]) als auch die Universalität bestimmter Amplitu-denverhältnisse (siehe [SFW72, HAHS76, AMI84]) bewiesen werden kann. Speziell sind in diesem Zusammenhang die kritischen Exponenten η und ν durch

$$\eta = \eta_3(u_R^*) \quad (4.34)$$

und

$$\nu = \nu(u_R^*) \quad (4.35)$$

gegeben.

³Diese Eigenschaft ist nicht mit einer asymptotischen Freiheit der ϕ^4 -Theorie in $D = 4$ zu verwechseln, wie sie durch die Existenz eines ultraviolettabi-chen trivialen Fixpunktes impliziert würde.

Kapitel 5

Renormierte Störungstheorie in $D = 3$

Ich führe jetzt die renormierte Störungsrechnung für eine einkomponentige, massive ϕ^4 -Theorie in symmetrischer und gebrochener Phase bis einschließlich zur 2. Ordnung in der Kopplung durch. Im Sinne der Kapitel 2 und 4 werden deshalb die renormierten Größen aus der diagrammatischen Entwicklung der Vertexfunktionen bestimmt, um später in allen Gleichungen die nackten durch die renormierten Parameter ersetzen zu können.

Dazu gebe ich alle beitragenden FEYNMAN-Graphen an, deren Berechnung im Impulsraum explizit durchgeführt wird. Einige der dabei auftretenden Integrale sind in Kapitel 3 und Anhang B zusammengestellt¹. Es sei bemerkt, daß die äußeren Beine der skizzierten Diagramme mitzuziehen sind, um ihre Impulsparametrisierungen deutlich hervortreten zu lassen. Bei der Berechnung der Vertexfunktionen bleiben die zugehörigen Propagatoren natürlich unberücksichtigt.

5.1 Symmetrische Phase

Wir betrachten die ϕ^4 -Theorie in der symmetrischen Phase mit den Parametern der Lagrangedichte (2.38) aus Abschnitt 2.2.1. Dem gewählten Renormierungsschema entsprechend werden zunächst die renormierte Masse m_R und die renormierte Kopplung $g_R^{(4)}$ als Potenzreihe 2. Ordnung in den nackten Größen m_0 und g_0 berechnet. Daraus erhält man schließlich eine invertierbare Beziehung zwischen den dimensionslosen Kopplungen u_R und u_0 , die ebenfalls von 2. Ordnung ist. Im einzelnen verlaufen die Rechnungen wie folgt:

¹Sofern sich mehrere Berechnungsmöglichkeiten bieten, wird dies an geeigneter Stelle angedeutet.

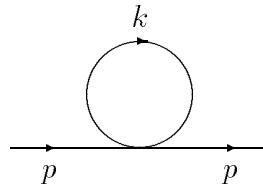
5.1.1 1–Loop–Ordnung

2–Punkt–Vertexfunktion

Zur Bestimmung der 2–Punkt–Vertexfunktion $\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p})$ und deren Ableitung nach äußeren Impulsen benötigen wir alle einteilchenirreduziblen, amputierten Graphen, die zur Selbstenergie $\Sigma(\mathbf{p})$ gehören.

In 1. Ordnung ist dies nur ein impulsunabhängiger Graph:

- Graph $\mathcal{G}_1^{(2)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



$$\begin{aligned} &= -g_0 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = -g_0 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\ &= -g_0 J_1(D) \stackrel{D \rightarrow 3}{=} \frac{m_0}{4\pi} g_0 (1 + O(\epsilon)). \end{aligned}$$

Aus Abschnitt 3.1.1 wissen wir, daß das Integral $J_1(3) \equiv J_1(3 - \epsilon)$ noch eine Divergenz enthält, die in der dimensionellen Regularisierung nicht hervortritt. Ich will diesen Umstand durch Mitführen des Faktors $(1 + O(\epsilon))$ andeuten.

Daraus folgt

$$\Sigma^{(1l)}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \mathcal{G}_1^{(2)} = \frac{m_0}{8\pi} g_0 (1 + O(\epsilon)), \quad \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Sigma^{(1l)}(\mathbf{p}) \right|_{p^2=0} = 0,$$

d.h. man erhält:

$$\begin{aligned} -\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) &= \tilde{\Delta}^{-1}(\mathbf{0}) - \Sigma^{(1l)}(\mathbf{0}) + O(g_0^2) = m_0^2 - \frac{m_0}{8\pi} g_0 (1 + O(\epsilon)) + O(g_0^2) \\ &= m_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{8\pi} \frac{g_0}{m_0} (1 + O(\epsilon)) + O(g_0^2) \right\} \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} &= 1 + O(g_0^2). \end{aligned}$$

4–Punkt–Vertexfunktion

Es sind alle einteilchenirreduziblen, amputierten Graphen der 4–Punkt–Funktion zu berücksichtigen. Diese sind von äußeren Impulsen \mathbf{k}_i , $i = 1, \dots, 4$, mit $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4$ abhängig und für $\mathbf{k}_1 = \dots = \mathbf{k}_4 = 0$ zu berechnen.

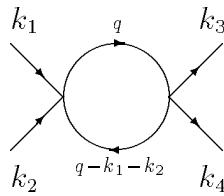
In 1. Ordnung tragen bei:

- Graph $\mathcal{G}_0^{(4)}$ (Symmetriefaktor 1):



$$= -g_0.$$

- Graph $\mathcal{G}_1^{(4)}(\mathbf{k}_i)$ (3 Permutationen mit Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



$$\begin{aligned} &= g_0^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{\Delta}(\mathbf{q}) \tilde{\Delta}(\mathbf{q} - \mathbf{l}), \quad \mathbf{l} := \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \\ &= g_0^2 \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q^2 + m_0^2)[(\mathbf{q} - \mathbf{l})^2 + m_0^2]} \\ &= g_0^2 I_1(\mathbf{l}; 3); \end{aligned}$$

nach (3.18) ist dann:

$$\mathcal{G}_1^{(4)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) = g_0^2 I_1(\mathbf{0}; 3) = \frac{1}{8\pi m_0} g_0^2.$$

Daraus folgt:

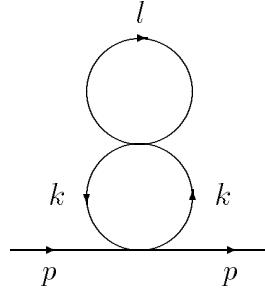
$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(4,0)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) &= \mathcal{G}_0^{(4)} + \frac{3}{2} \mathcal{G}_1^{(4)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) + O(g_0^3) = -g_0 + \frac{3}{16\pi m_0} g_0^2 + O(g_0^3) \\ &= -g_0 \left\{ 1 - \frac{3}{16\pi} \frac{g_0}{m_0} + O(g_0^2) \right\}. \end{aligned}$$

5.1.2 2-Loop-Ordnung

2-Punkt-Vertexfunktion

In 2. Ordnung hat man zusätzlich folgende beide Graphen, von denen der zweite impulsabhängig ist:

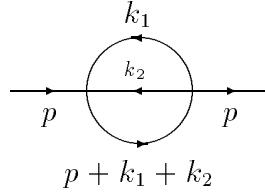
- Graph $\mathcal{G}_2^{(2)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):



$$\begin{aligned}
 &= g_0^2 \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) = \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)} \\
 &\stackrel{D \rightarrow 3}{=} g_0^2 J_2(3) J_1(3) = -\frac{1}{32\pi^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon)),
 \end{aligned}$$

nach (3.8) und (3.10a).

- Graph $\mathcal{G}_3^{(2)}(\mathbf{p})$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{6}$):



$$\begin{aligned}
 &= g_0^2 \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}_1) \tilde{\Delta}(\mathbf{k}_2) \tilde{\Delta}(\mathbf{p} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \\
 &= g_0^2 \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k_1^2 + m_0^2)(k_2^2 + m_0^2)[(\mathbf{p} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 + m_0^2]} \\
 &= g_0^2 I_2(\mathbf{p}; D) \stackrel{D \rightarrow 3}{=} g_0^2 I_2(\mathbf{p}; 3 - \epsilon).
 \end{aligned}$$

Aus Abschnitt 3.1.2 entnehme ich:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_3^{(2)}(\mathbf{0}) &= g_0^2 I_2(\mathbf{0}; 3 - \epsilon) = \frac{1}{32\pi^2} g_0^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_0^2}{4\pi} \right) + \frac{C}{4\pi} - \gamma + O(\epsilon) \right)}_{=: B^{(div)}} \\
 &= \frac{B^{(div)}}{32\pi^2} g_0^2
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_3^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} = g_0^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_2(\mathbf{p}; D) \Big|_{p^2=0} \stackrel{D \rightarrow 3}{=} -\frac{1}{864\pi^2 m_0^2} g_0^2.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}\Sigma^{(2l)}(\mathbf{0}) &= \frac{1}{4}\mathcal{G}_2^{(2)} + \frac{1}{6}\mathcal{G}_3^{(2)}(\mathbf{0}) = -\frac{1}{128\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) + \frac{B^{(div)}}{192\pi^2}g_0^2 \\ &= -\frac{1}{64\pi^2}g_0^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}B^{(div)}\right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2}\Sigma^{(2l)}(\mathbf{p})\bigg|_{p^2=0} = \frac{1}{6}\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2}\mathcal{G}_3^{(2)}(\mathbf{p})\bigg|_{p^2=0} = -\frac{1}{5184\pi^2}\frac{g_0^2}{m_0^2},$$

und es ergibt sich insgesamt:

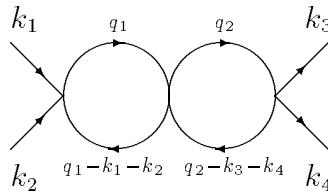
$$\begin{aligned}-\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) &= \tilde{\Delta}^{-1}(\mathbf{0}) - \Sigma^{(1l)}(\mathbf{0}) - \Sigma^{(2l)}(\mathbf{0}) + O(g_0^3) \\ &= m_0^2 - \frac{m_0}{8\pi}g_0(1+O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2}g_0^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}B^{(div)}\right] + O(g_0^3) \\ &= m_0^2\left\{1 - \frac{1}{8\pi}\frac{g_0}{m_0}(1+O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2}\frac{g_0^2}{m_0^2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}B^{(div)}\right] + O(g_0^3)\right\}\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2}\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p})\bigg|_{p^2=0} &= 1 - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2}\Sigma^{(1l)}(\mathbf{p})\bigg|_{p^2=0} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2}\Sigma^{(2l)}(\mathbf{p})\bigg|_{p^2=0} + O(g_0^3) \\ &= 1 + \frac{1}{5184\pi^2}\frac{g_0^2}{m_0^2} + O(g_0^3).\end{aligned}\tag{5.2}$$

4-Punkt-Vertexfunktion

In 2. Ordnung treten folgende Graphen hinzu:

- Graph $\mathcal{G}_2^{(4)}(\mathbf{k}_i)$ (3 Permutationen mit Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):

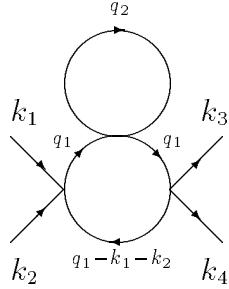


$$\begin{aligned}&= -g_0^3 \int \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{(2\pi)^6} \tilde{\Delta}(\mathbf{q}_1) \tilde{\Delta}(\mathbf{q}_2) \tilde{\Delta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{l}), \quad \mathbf{l} := \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \\ &= -g_0^3 \int \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{(q_1^2 + m_0^2)[(\mathbf{q}_1 - \mathbf{l})^2 + m_0^2](q_2^2 + m_0^2)[(\mathbf{q}_2 - \mathbf{l})^2 + m_0^2]} \\ &= -g_0^3 I_1^2(\mathbf{l}; 3),\end{aligned}$$

da die beiden Integrationsimpulse unabhängig voneinander sind. Also ist:

$$\mathcal{G}_2^{(4)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) = -g_0^3 I_1^2(\mathbf{0}; 3) = -\frac{1}{64\pi^2 m_0^2} g_0^3.$$

- Graph $\mathcal{G}_3^{(4)}(\mathbf{k}_i)$ (3 Permutationen mit Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):

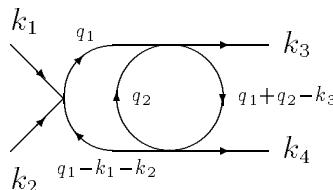


$$\begin{aligned}
 &= -g_0^3 \int \frac{d^D q_1 d^D q_2}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{q}_1) \tilde{\Delta}(\mathbf{q}_2) \tilde{\Delta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{l}), \quad \mathbf{l} := \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \\
 &= -g_0^3 \int \frac{d^D q_1 d^D q_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(q_1^2 + m_0^2)^2 [(\mathbf{q}_1 - \mathbf{l})^2 + m_0^2] (q_2^2 + m_0^2)} \\
 &\stackrel{D \rightarrow 3}{=} -g_0^3 I_3(\mathbf{0}, \mathbf{l}; 3) J_1(3).
 \end{aligned}$$

Mit (B.5b) erhält man:

$$\mathcal{G}_3^{(4)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) = -g_0^3 I_3(\mathbf{0}, \mathbf{0}; 3) J_1(3) = \frac{1}{128\pi^2 m_0^2} g_0^3 (1 + O(\epsilon)).$$

- Graph $\mathcal{G}_4^{(4)}(\mathbf{k}_i)$ (6 Permutationen mit Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



$$\begin{aligned}
 &= -g_0^3 \int \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{(2\pi)^6} \tilde{\Delta}(\mathbf{q}_1) \tilde{\Delta}(\mathbf{q}_2) \tilde{\Delta}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}_3), \quad \mathbf{l} := \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \\
 &= -g_0^3 \int \frac{d^3 q_1 d^3 q_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{(q_1^2 + m_0^2)[(\mathbf{q}_1 - \mathbf{l})^2 + m_0^2] (q_2^2 + m_0^2)[(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}_3)^2 + m_0^2]} \\
 &= -g_0^3 \int \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q_2^2 + m_0^2)} I_3(-\mathbf{l}, \mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_2; 3) \\
 &= -g_0^3 \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q_1^2 + m_0^2)[(\mathbf{q}_1 - \mathbf{l})^2 + m_0^2]} I_1(\mathbf{k}_3 - \mathbf{q}_1; 3),
 \end{aligned}$$

nach (B.4a) bzw. (3.11). Mit (B.5a) folgt unter Verwendung sphärischer Polarkoordinaten und Partialbruchzerlegung

$$\mathcal{G}_4^{(4)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) = -g_0^3 \int \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q_2^2 + m_0^2)} I_3(\mathbf{0}, -\mathbf{q}_2; 3)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{8\pi m_0} g_0^3 \int \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{(q_2^2 + m_0^2)(q_2^2 + 4m_0^2)} \\
&= -\frac{1}{16\pi^3 m_0^2} g_0^3 \underbrace{\int_0^\infty dq_2 \frac{q_2^2}{(q_2^2 + 1)(q_2^2 + 4)}}_{=\pi/6} = -\frac{1}{96\pi^2 m_0^2} g_0^3,
\end{aligned}$$

was im übrigen durch (B.8a) bestätigt wird.

Daraus ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^{(4,0)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) &= \mathcal{G}_0^{(4)} + \frac{3}{2} \mathcal{G}_1^{(4)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) + \frac{3}{4} \mathcal{G}_2^{(4)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) + \frac{3}{2} \mathcal{G}_3^{(4)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) \\
&\quad + 3 \mathcal{G}_4^{(4)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) + O(g_0^4) \\
&= -g_0 + \frac{3}{16\pi m_0} g_0^2 - \frac{3}{256\pi^2 m_0^2} g_0^3 + \frac{3}{256\pi^2 m_0^2} g_0^3 (1 + O(\epsilon)) \\
&\quad - \frac{3}{96\pi^2 m_0^2} g_0^3 + O(g_0^4) \\
&= -g_0 \left\{ 1 - \frac{3}{16\pi} \frac{g_0}{m_0} + \frac{1}{32\pi^2} \frac{g_0^2}{m_0^2} (1 + O(\epsilon)) + O(g_0^3) \right\}. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

5.1.3 Berechnung der Renormierten Größen

Aus den Beziehungen (5.1) – (5.3) und $u_0 = g_0/m_0$ ergeben sich zunächst die Größen

$$-\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) = m_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{8\pi} u_0 (1 + O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2} u_0^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} B^{(div)} \right] + O(u_0^3) \right\}$$

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} = 1 + \frac{1}{5184\pi^2} u_0^2 + O(u_0^3)$$

$$Z_3 = \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} \right)^{-1} = 1 - \frac{1}{5184\pi^2} u_0^2 + O(u_0^3)$$

$$\Gamma_0^{(4,0)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) = -g_0 \left\{ 1 - \frac{3}{16\pi} u_0 + \frac{1}{32\pi^2} u_0^2 (1 + O(\epsilon)) + O(u_0^3) \right\},$$

woraus sich die renormierte Masse und die renormierte Kopplung zu

$$\begin{aligned}
m_R^2 &= \frac{\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0})}{\frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0}} = -Z_3 \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) \\
&= m_0^2 \left\{ 1 - \frac{1}{8\pi} u_0 (1 + O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2} u_0^2 \left[\frac{79}{162} - \frac{1}{3} B^{(div)} \right] + O(u_0^3) \right\} \quad (5.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_R^{(4)} &= -\Gamma_R^{(4,0)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) = -Z_3^2 \Gamma_0^{(4,0)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) \\ &= g_0 \left\{ 1 - \frac{3}{16\pi} u_0 + \frac{5}{162\pi^2} u_0^2 (1 + O(\epsilon)) + O(u_0^3) \right\}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

bzw.

$$u_R = \frac{g_R^{(4)}}{m_R} = u_0 \left\{ 1 - \frac{1}{8\pi} u_0 (1 + O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2} u_0^2 \left[\frac{293}{216} + \frac{1}{6} B^{(div)} \right] + O(u_0^3) \right\} \quad (5.6)$$

ergeben.

Ich invertiere diese Gleichungen, um später die nackten Größen durch die renormierten zu ersetzen. Dazu ist es zweckmäßig, zunächst die Beziehung (5.6) durch Potenzreihenansatz und Koeffizientenvergleich nach u_0 aufzulösen, um (5.7) zu erhalten. Anschließend stellt man die Gleichungen (5.4) und (5.5) nach m_0^2 bzw. g_0 um und ersetzt dort mit (5.7) die nackte dimensionslose Kopplung u_0 durch die renormierte dimensionslose Kopplung u_R . Unter Berücksichtigung der Entwicklung der \ln -Funktion

$$\ln \left(\frac{m_0^2}{4\pi} \right) = \ln \left(\frac{m_R^2}{4\pi} (1 + O(u_R)) \right) = \ln \left(\frac{m_R^2}{4\pi} \right) + \underbrace{\ln \left((1 + O(u_R)) \right)}_{=O(u_R)}$$

finde ich auf diese Weise mit

$$B_R^{(div)} := \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_R^2}{4\pi} \right) + \frac{C}{4\pi} - \gamma + O(\epsilon) \right)$$

die folgenden Relationen:

$$u_0 = u_R \left\{ 1 + \frac{1}{8\pi} u_R (1 + O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2} u_R^2 \left[\frac{139}{216} - \frac{1}{6} B_R^{(div)} \right] + O(u_R^3) \right\}, \quad (5.7)$$

bzw.

$$m_0^2 = m_R^2 \left\{ 1 + \frac{1}{8\pi} u_R (1 + O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2} u_R^2 \left[\frac{245}{162} + \frac{1}{3} B_R^{(div)} \right] + O(u_R^3) \right\} \quad (5.8)$$

$$g_0 = g_R^{(4)} \left\{ 1 + \frac{3}{16\pi} u_R + \frac{575}{20736\pi^2} u_R^2 (1 + O(\epsilon)) + O(u_R^3) \right\}. \quad (5.9)$$

Man beachte, daß die letzte Gleichung keine Divergenzen mehr beinhaltet.

5.2 Phase gebrochener Symmetrie

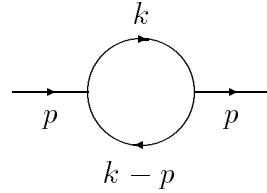
Wir verwenden die ϕ^4 -Theorie in der gebrochenen Phase, deren Lagrangedichte (2.47) in Abschnitt 2.2.2 hergeleitet ist. Dabei wird wie in Abschnitt 5.1 verfahren, wobei allerdings jetzt die zusätzliche ϕ^3 -Kopplung und die Definition der renormierten Kopplung g_R über den Felderwartungswert zu berücksichtigen sind. Aufgrund der Kombinationsmöglichkeiten von 3er- und 4er-Vertizes sowie der nichtverschwindenden Tadpole-Diagramme treten hier wesentlich mehr Graphen auf, so daß ich diejenigen der symmetrischen Phase nicht nochmals aufführe.

5.2.1 1-Loop-Ordnung

2-Punkt-Vertexfunktion

In 1. Ordnung hat man folgende zusätzliche Graphen:

- Graph $\mathcal{G}_4^{(2)}(\mathbf{p})$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



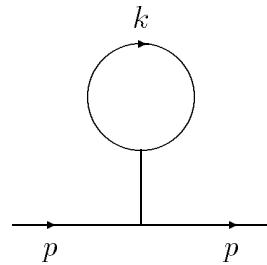
$$\begin{aligned}
 &= \left(-\sqrt{3g_0}m_0 \right)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
 &= 3m_0^2 g_0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]} \\
 &= 3m_0^2 g_0 I_1(\mathbf{p}; 3).
 \end{aligned}$$

Aus Abschnitt 3.1.1 ersehe ich:

$$\mathcal{G}_4^{(2)}(\mathbf{0}) = 3m_0^2 g_0 I_1(\mathbf{0}; 3) = \frac{3m_0}{8\pi} g_0$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_4^{(2)}(\mathbf{p}) \right|_{p^2=0} = 3m_0^2 g_0 \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 3) \right|_{p^2=0} = -\frac{1}{32\pi} \frac{g_0}{m_0}.$$

- Graph $\mathcal{G}_5^{(2)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



$$\begin{aligned}
 &= \left(-\sqrt{3g_0}m_0 \right)^2 \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = 3g_0 \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\
 &= 3g_0 J_1(D) \stackrel{D \rightarrow 3}{=} -\frac{3m_0}{4\pi} g_0 (1 + O(\epsilon)).
 \end{aligned}$$

Dieses Diagramm gehört zu den Tadpole-Graphen, deren innere Impulslinien, die keiner Schleife angehören, den Impuls $\mathbf{0}$ tragen. Der zugehörige Propagator ist also $\tilde{\Delta}(\mathbf{0}) = 1/m_0^2$.

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\Sigma^{(1l)}(\mathbf{0}) &= \frac{1}{2}\mathcal{G}_1^{(2)} + \frac{1}{2}\mathcal{G}_4^{(2)}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\mathcal{G}_5^{(2)} \\ &= \frac{m_0}{8\pi}g_0(1+O(\epsilon)) + \frac{3m_0}{16\pi}g_0 - \frac{3m_0}{8\pi}g_0(1+O(\epsilon)) = -\frac{m_0}{16\pi}g_0(1+O(\epsilon))\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Sigma^{(1l)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_4^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} = -\frac{1}{64\pi} \frac{g_0}{m_0},$$

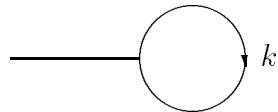
und man erhält:

$$\begin{aligned}-\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) &= \tilde{\Delta}^{-1}(\mathbf{0}) - \Sigma^{(1l)}(\mathbf{0}) + O(g_0^2) = m_0^2 + \frac{m_0}{16\pi}g_0(1+O(\epsilon)) + O(g_0^2) \\ &= m_0^2 \left\{ 1 + \frac{1}{16\pi} \frac{g_0}{m_0} (1+O(\epsilon)) + O(g_0^2) \right\} \\ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} &= 1 - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Sigma^{(1l)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} + O(g_0^2) = 1 + \frac{1}{64\pi} \frac{g_0}{m_0} + O(g_0^2).\end{aligned}$$

Vakuumerwartungswert des Feldes

Zum Vakuumerwartungswert v_0 des Feldes ϕ_0 im Impulsraum tragen alle 1–Punkt–Graphen der Theorie bei. In diesem Fall ist die äußere Impulslinie mit einem Faktor $\tilde{\Delta}(\mathbf{0}) = 1/m_0^2$ einzubeziehen. In 1–Loop–Ordnung hat man nur ein Diagramm:

- Graph $\mathcal{G}_1^{(1)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



$$\begin{aligned}&= \left(-\sqrt{3g_0}m_0 \right) \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{m_0} \sqrt{3g_0} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 + m_0^2} \\ &= -\frac{1}{m_0} \sqrt{3g_0} J_1(D) \stackrel{D \rightarrow 3}{=} \frac{\sqrt{3}}{4\pi} g_0^{1/2} (1+O(\epsilon)).\end{aligned}$$

Man beachte, daß die Kopplungspotenz aufgrund der ϕ^3 –Kopplung gebrochen ist.

Daraus folgt:

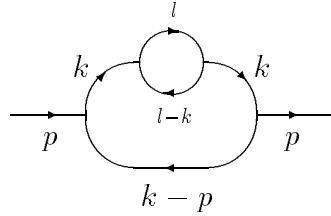
$$v_0 = G_c^{(1,0)} = \frac{1}{2} \mathcal{G}_1^{(1)} = \frac{\sqrt{3}m_0}{8\pi} g_0^{1/2} (1+O(\epsilon)) + O(g_0^{3/2}).$$

5.2.2 2-Loop-Ordnung

2-Punkt-Vertexfunktion

Hier sind nun eine ganze Reihe weiterer Graphen zu berücksichtigen. Zunächst hat man die folgenden impulsabhängigen Beiträge:

- Graph $\mathcal{G}_6^{(2)}(\mathbf{p})$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



$$\begin{aligned}
 &= \left(-\sqrt{3g_0}m_0\right)^4 \int \frac{d^3kd^3l}{(2\pi)^6} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}-\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \\
 &= 9m_0^4g_0^2 \int \frac{d^3kd^3l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2+m_0^2)^2(l^2+m_0^2)[(l-k)^2+m_0^2][(k-p)^2+m_0^2]} \\
 &= 9m_0^4g_0^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2+m_0^2)^2[(k-p)^2+m_0^2]} I_1(\mathbf{k}; 3).
 \end{aligned}$$

Durch die Substitutionen der Integrationsimpulse $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}/m_0$ und $\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{l}/m_0$ ziehe ich die Masse vor das Integral, verwende sphärische Polarkoordinaten und wähle den Azimutalwinkel θ der d^3k -Integration zwischen \mathbf{k} und \mathbf{l} gelegen. Man führt dann alle Integrationen nacheinander aus, wobei im letzten Schritt eine Partialbruchzerlegung durchzuführen ist:

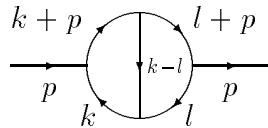
$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_6^{(2)}(\mathbf{0}) &= 9m_0^4g_0^2 \frac{1}{m_0^4} \int \frac{d^3kd^3l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2+1)^3(l^2+1)[(k-l)^2+1]} \\
 &= \frac{9}{8\pi^4} g_0^2 \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2+1} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2+1)^3} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta}{1+k^2+l^2-2kl\cos\theta} \\
 &= \frac{9}{8\pi^4} g_0^2 \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2+1} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2+1)^3} \left[\frac{1}{2kl} \ln \left(\frac{1+(k+l)^2}{1+(k-l)^2} \right) \right] \\
 &= \frac{9}{8\pi^4} g_0^2 \underbrace{\int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2+1} \left[\frac{(l^2+8)\pi}{8(l^2+4)^2} \right]}_{=\pi^2/36} = \frac{1}{32\pi^2} g_0^2,
 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit einer auf (B.8b) zurückgehenden Rechnung. Für die Ableitung nach dem äußeren Impulsquadrat verweise ich auf Anhang A.1, in dem die Differentiation der \mathbf{p} -abhängigen Integranden durchgeführt ist. Speziell mit (A.3) finden wir:

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_6^{(2)}(\mathbf{p}) \right|_{\mathbf{p}^2=0} \\
= & 9m_0^4 g_0^2 \frac{1}{m_0^6} \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \left[\frac{1}{(k^2 + 1)^2 (l^2 + 1) [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \times \right. \\
& \times \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + 1} \right) \right|_{\mathbf{p}^2=0} \\
= & \frac{3}{2\pi^4 m_0^2} g_0^2 \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{(k^2 + 1)^5} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{1 + k^2 + l^2 - 2kl \cos \theta} \\
& - \frac{9}{8\pi^4 m_0^2} g_0^2 \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + 1)^4} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{1 + k^2 + l^2 - 2kl \cos \theta} \\
= & \frac{3}{2\pi^4 m_0^2} g_0^2 \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{(k^2 + 1)^5} \left[\frac{1}{2kl} \ln \left(\frac{1 + (k + l)^2}{1 + (k - l)^2} \right) \right] \\
& - \frac{9}{8\pi^4 m_0^2} g_0^2 \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + 1)^4} \left[\frac{1}{2kl} \ln \left(\frac{1 + (k + l)^2}{1 + (k - l)^2} \right) \right] \\
= & \frac{3}{2\pi^4 m_0^2} g_0^2 \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1} \underbrace{\left[\frac{(9l^6 + 140l^4 + 800l^2 + 1152)\pi}{384(l^2 + 4)^4} \right]}_{=55\pi^2/10368} \\
& - \frac{9}{8\pi^4 m_0^2} g_0^2 \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1} \underbrace{\left[\frac{l^2(3l^4 + 34l^2 + 120)\pi}{48(l^2 + 4)^3(l^2 + 1)} \right]}_{=19\pi^2/1296} \\
= & -\frac{59}{6912\pi^2 m_0^2} g_0^2.
\end{aligned}$$

Bei umgekehrter Integrationsreihenfolge liefern (C.12c) und (C.13b) dasselbe Resultat.

- Graph $\mathcal{G}_7^{(2)}(\mathbf{p})$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



$$\begin{aligned}
& = \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^4 \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l} + \mathbf{p}) \\
= & 9m_0^4 g_0^2 \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \left[\frac{1}{(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2]} \times \right. \\
& \times \left. \frac{1}{[(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2][(\mathbf{l} + \mathbf{p})^2 + m_0^2]} \right] \\
= & 9m_0^4 g_0^2 \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{(l^2 + m_0^2)[(\mathbf{l} + \mathbf{p})^2 + m_0^2]} I_3(\mathbf{p}, \mathbf{l}; 3).
\end{aligned}$$

Mit (B.5a) und einer Partialbruchzerlegung ergibt sich

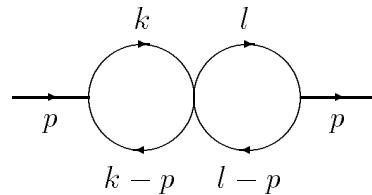
$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_7^{(2)}(\mathbf{0}) &= 9m_0^4 g_0^2 \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{(l^2 + m_0^2)^2} I_3(\mathbf{0}, \mathbf{l}; 3) \\
 &= \frac{9m_0^3}{8\pi} g_0^2 \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{(l^2 + m_0^2)^2 (l^2 + 4m_0^2)} \\
 &= \frac{9}{16\pi^3} g_0^2 \underbrace{\int_0^\infty dl \frac{l^2}{(l^2 + 1)^2 (l^2 + 4)}}_{=\pi/36} = \frac{1}{64\pi^2} g_0^2,
 \end{aligned}$$

und nach Gleichung (A.5) ist

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_7^{(2)}(\mathbf{p}) \right|_{p^2=0} &= 9m_0^4 g_0^2 \frac{1}{m_0^6} \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \left[\frac{1}{(k^2 + 1)(l^2 + 1)[(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{[(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + 1][(\mathbf{l} + \mathbf{p})^2 + 1]} \right) \right|_{p^2=0} \\
 &= \frac{9}{m_0^2} g_0^2 \left(\frac{4}{3} \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{k^2}{(k^2 + 1)^4 (l^2 + 1)^2 [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \right. \\
 &\quad + \frac{4}{3} \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{l^2}{(k^2 + 1)^2 (l^2 + 1)^4 [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \\
 &\quad - \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + 1)^3 (l^2 + 1)^2 [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \\
 &\quad - \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + 1)^2 (l^2 + 1)^3 [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \\
 &\quad \left. + \frac{4}{3} \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}}{(k^2 + 1)^3 (l^2 + 1)^3 [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \right) \\
 &= \frac{9}{m_0^2} g_0^2 \left(2 \frac{4}{3} A_2 - 2 A_1 + \frac{4}{3} A_3 \right) \\
 &= \frac{9}{\pi^2 m_0^2} g_0^2 \left(\frac{104}{124416} - \frac{10}{6912} + \frac{4}{41472} \right) \\
 &= -\frac{1}{216\pi^2 m_0^2} g_0^2,
 \end{aligned}$$

wobei ich die Symmetrie der vorstehenden Impulsintegrale unter Vertauschung von \mathbf{k} und \mathbf{l} ausgenutzt habe. Die Integrale A_i , $i = 1, 2, 3$, sind in Anhang B.2 ausgeführt.

- Graph $\mathcal{G}_8^{(2)}(\mathbf{p})$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):



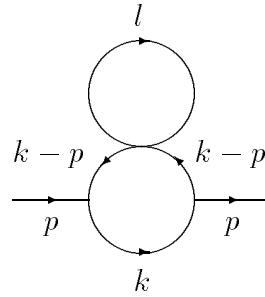
$$\begin{aligned}
&= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^2 \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l} - \mathbf{p}) \\
&= -3m_0^2 g_0^2 \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2](l^2 + m_0^2)[(\mathbf{l} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]} \\
&= -3m_0^2 g_0^2 I_1^2(\mathbf{p}; 3)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_8^{(2)}(\mathbf{0}) = -3m_0^2 g_0^2 I_1^2(\mathbf{0}; 3) = -\frac{3}{64\pi^2} g_0^2,$$

da das Integral faktorisiert. Die Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_8^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} = -6m_0^2 g_0^2 I_1(\mathbf{0}; 3) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 3) \Big|_{p^2=0} = \frac{1}{128\pi^2 m_0^2} g_0^2.$$

- Graph $\mathcal{G}_9^{(2)}(\mathbf{p})$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



$$\begin{aligned}
&= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^2 \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
&= -3m_0^2 g_0^2 \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]^2(l^2 + m_0^2)} \\
&\stackrel{D \rightarrow 3}{=} -3m_0^2 g_0^2 I_4(\mathbf{p}; 3) J_1(3),
\end{aligned}$$

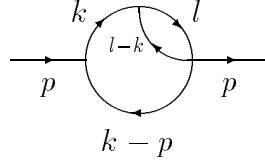
nach (B.6). Also ist

$$\mathcal{G}_9^{(2)}(\mathbf{0}) = -3m_0^2 g_0^2 I_4(\mathbf{0}; 3) J_1(3) = \frac{3}{128\pi^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon));$$

mit (A.4) und (C.11b) folgt:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_9^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} = -3m_0^2 g_0^2 J_1(3) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_4(\mathbf{p}; 3) \Big|_{p^2=0} \\
&= -\frac{3}{m_0^3} g_0^2 J_1(3) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + 1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + 1]^2} \right) \Big|_{p^2=0} \\
&= -\frac{3}{2\pi^2 m_0^3} g_0^2 J_1(3) \left(4 \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{k^4}{(k^2 + 1)^5}}_{=3\pi/256} - 2 \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + 1)^4}}_{\pi/32} \right) \\
&= \frac{3}{128\pi m_0^3} g_0^2 J_1(3) = -\frac{3}{512\pi^2 m_0^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon)).
\end{aligned}$$

- Graph $\mathcal{G}_{10}^{(2)}(\mathbf{p})$ (2 Permutationen mit Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



$$\begin{aligned}
&= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^2 \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l} - \mathbf{k}) \\
&= -3m_0^2 g_0^2 \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2](l^2 + m_0^2)[(\mathbf{l} - \mathbf{k})^2 + m_0^2]} \\
&= -3m_0^2 g_0^2 \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{l^2 + m_0^2} I_3(-\mathbf{p}, \mathbf{l}; 3) \\
&= -3m_0^2 g_0^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]} I_1(\mathbf{k}; 3).
\end{aligned}$$

Demnach folgt:

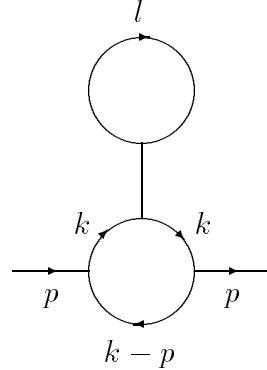
$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{10}^{(2)}(\mathbf{0}) &= -3m_0^2 g_0^2 \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{l^2 + m_0^2} I_3(\mathbf{0}, \mathbf{l}; 3) \\
&= -\frac{3m_0}{8\pi} g_0^2 \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{(l^2 + m_0^2)(l^2 + 4m_0^2)} \\
&= -\frac{3}{16\pi^3} g_0^2 \underbrace{\int_0^\infty dl \frac{l^2}{(l^2 + 1)(l^2 + 4)}}_{=\pi/6} = -\frac{1}{32\pi^2} g_0^2,
\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit (B.8a). Mit (A.3) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_{10}^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} &= -3m_0^2 g_0^2 \frac{1}{m_0^4} \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \left[\frac{1}{(k^2 + 1)(l^2 + 1)[(\mathbf{l} - \mathbf{k})^2 + 1]} \times \right. \\
&\quad \times \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + 1} \right) \Big|_{p^2=0} \right] \\
&= -\frac{3}{m_0^2} g_0^2 \left(\frac{4}{3} \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{k^2}{(k^2 + 1)^4 (l^2 + 1)[(\mathbf{l} - \mathbf{k})^2 + 1]} \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + 1)^3 (l^2 + 1)[(\mathbf{l} - \mathbf{k})^2 + 1]} \right) \\
&= -\frac{3}{m_0^2} g_0^2 \left(\frac{4}{3} A_5 - A_4 \right) = -\frac{3}{\pi^2 m_0^2} g_0^2 \left(\frac{68}{31104} - \frac{1}{288} \right) \\
&= \frac{5}{1296\pi^2 m_0^2} g_0^2.
\end{aligned}$$

Die Integrale A_4 und A_5 sind in Anhang B.2 angegeben; man beachte, daß sie nicht vom Vorzeichen der Integrationsimpulse abhängen.

- Graph $\mathcal{G}_{11}^{(2)}(\mathbf{p})$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



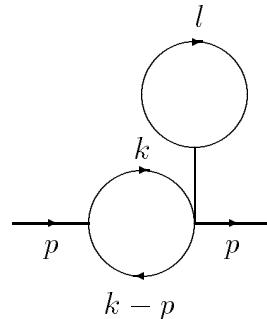
$$\begin{aligned}
 &= \left(-\sqrt{3g_0 m_0} \right)^4 \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
 &= 9m_0^2 g_0^2 \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 [(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2] (l^2 + m_0^2)} \\
 &\stackrel{D \rightarrow 3}{=} 9m_0^2 g_0^2 I_3(\mathbf{0}, \mathbf{p}; 3) J_1(3)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{G}_{11}^{(2)}(\mathbf{0}) = 9m_0^2 g_0^2 I_3(\mathbf{0}, \mathbf{0}; 3) J_1(3) = 9m_0^2 g_0^2 J_3(3) J_1(3) = -\frac{9}{128\pi^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon)),$$

und mit (B.5a):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_{11}^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} &= 9m_0^2 g_0^2 J_1(3) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_3(\mathbf{0}, \mathbf{p}; 3) \Big|_{p^2=0} \\
 &= \frac{9m_0}{8\pi} g_0^2 J_1(3) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{p^2 + 4m_0^2} \right) \Big|_{p^2=0} \\
 &= \frac{9}{512\pi^2 m_0^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon)).
 \end{aligned}$$

- Graph $\mathcal{G}_{12}^{(2)}(\mathbf{p})$ (2 Permutationen mit Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):



$$\begin{aligned}
&= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^2 \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
&= -3g_0^2 \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2](l^2 + m_0^2)} \\
&\stackrel{D \rightarrow 3}{=} -3g_0^2 I_1(\mathbf{p}; 3) J_1(3),
\end{aligned}$$

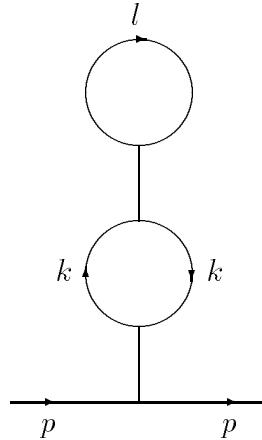
d.h. auch dieses Integral faktorisiert. Also ist

$$\mathcal{G}_{12}^{(2)}(\mathbf{0}) = -3g_0^2 I_1(\mathbf{0}; 3) J_1(3) = \frac{3}{32\pi^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon))$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial p^2} \mathcal{G}_{12}^{(2)}(\mathbf{p}) \right|_{p^2=0} = -3g_0^2 J_1(3) \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 3) \right|_{p^2=0} = -\frac{1}{128\pi^2 m_0^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon)).$$

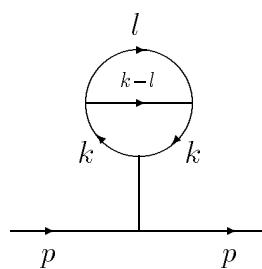
Es folgen nun die impulsunabhängigen Graphen (größtenteils Tadpole-Graphen). Da sie sich auf die vorstehenden Integrale zurückführen lassen, nenne ich nur die Endresultate:

- Graph $\mathcal{G}_{13}^{(2)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):



$$\begin{aligned}
&= \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^4 \tilde{\Delta}^2(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \\
&= 9g_0^2 \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)} \\
&\stackrel{D \rightarrow 3}{=} 9g_0^2 J_2(3) J_1(3) = -\frac{9}{32\pi^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon)).
\end{aligned}$$

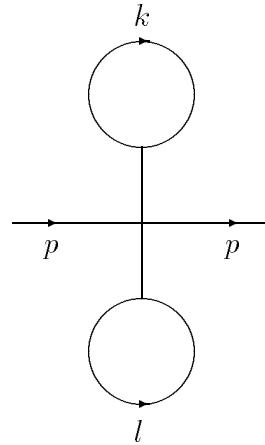
- Graph $\mathcal{G}_{14}^{(2)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



$$\begin{aligned}
&= \left(-\sqrt{3g_0}m_0 \right)^4 \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \\
&= 9g_0^2 m_0^2 \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2) [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2]} \\
&= 9m_0^2 g_0^2 \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{(l^2 + m_0^2)} I_3(\mathbf{0}, \mathbf{l}; 3) \\
&= 9m_0^2 g_0^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} I_1(\mathbf{k}; 3) \\
&= \frac{3}{32\pi^2} g_0^2,
\end{aligned}$$

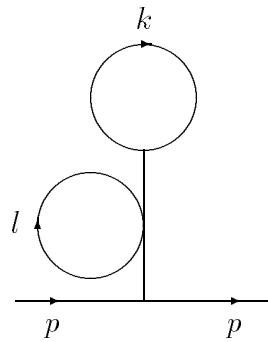
wie in der Berechnung von $\mathcal{G}_{10}^{(2)}(\mathbf{0})$.

- Graph $\mathcal{G}_{15}^{(2)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{8}$):



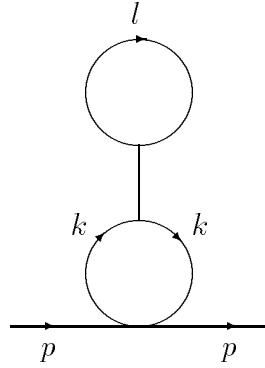
$$\begin{aligned}
&= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0}m_0 \right)^2 \tilde{\Delta}^2(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \\
&= -\frac{3}{m_0^2} g_0^2 \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)} \\
&\stackrel{D \rightarrow 3}{=} -\frac{3}{m_0^2} g_0^2 J_1^2(3) = -\frac{3}{16\pi^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon)).
\end{aligned}$$

- Graph $\mathcal{G}_{16}^{(2)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):



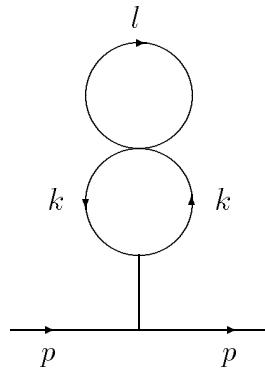
$$\begin{aligned}
&= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^2 \tilde{\Delta}^2(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \\
&= -\frac{3}{m_0^2} g_0^2 \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)} \\
&\stackrel{D \rightarrow 3}{=} -\frac{3}{m_0^2} g_0^2 J_1^2(3) = -\frac{3}{16\pi^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon)).
\end{aligned}$$

- Graph $\mathcal{G}_{17}^{(2)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):



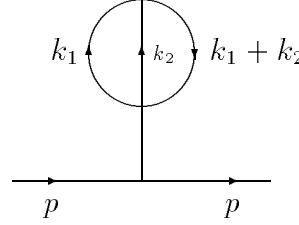
$$\begin{aligned}
&= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^2 \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \\
&= -3g_0^2 \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)} \\
&\stackrel{D \rightarrow 3}{=} -3g_0^2 J_2(3) J_1(3) = \frac{3}{32\pi^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon)).
\end{aligned}$$

- Graph $\mathcal{G}_{18}^{(2)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):



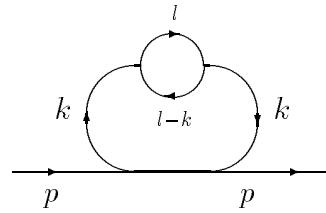
$$\begin{aligned}
&= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^2 \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \\
&= -3g_0^2 \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)} \\
&\stackrel{D \rightarrow 3}{=} -3g_0^2 J_2(3) J_1(3) = \frac{3}{32\pi^2} g_0^2 (1 + O(\epsilon)).
\end{aligned}$$

- Graph $\mathcal{G}_{19}^{(2)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{6}$):



$$\begin{aligned}
 &= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^2 \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}_1) \tilde{\Delta}(\mathbf{k}_2) \tilde{\Delta}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \\
 &= -3g_0^2 \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k_1^2 + m_0^2)(k_2^2 + m_0^2)[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 + m_0^2]} \\
 &\stackrel{D \rightarrow 3}{=} -3g_0^2 I_2(\mathbf{0}; 3 - \epsilon) = -\frac{3}{32\pi^2} g_0^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_0^2}{4\pi} \right) + \frac{C}{4\pi} - \gamma + O(\epsilon) \right)}_{=: B^{(div)}} \\
 &= -\frac{3B^{(div)}}{32\pi^2} g_0^2.
 \end{aligned}$$

- Graph $\mathcal{G}_{20}^{(2)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):



$$\begin{aligned}
 &= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^2 \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l} - \mathbf{k}) \\
 &= -3g_0^2 m_0^2 \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2) [(l - k)^2 + m_0^2]} \\
 &= -3m_0^2 g_0^2 \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{(l^2 + m_0^2)} I_3(\mathbf{0}, \mathbf{l}; 3) \\
 &= -3m_0^2 g_0^2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} I_1(\mathbf{k}; 3) \\
 &= -\frac{1}{32\pi^2} g_0^2,
 \end{aligned}$$

wie in der Berechnung von $\mathcal{G}_{14}^{(2)}$.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(2l)}(\mathbf{0}) &= \frac{1}{4}\mathcal{G}_2^{(2)} + \frac{1}{6}\mathcal{G}_3^{(2)}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\mathcal{G}_6^{(2)}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\mathcal{G}_7^{(2)}(\mathbf{0}) + \frac{1}{4}\mathcal{G}_8^{(2)}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\mathcal{G}_9^{(2)}(\mathbf{0}) \\
&\quad + \mathcal{G}_{10}^{(2)}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\mathcal{G}_{11}^{(2)}(\mathbf{0}) + \frac{1}{2}\mathcal{G}_{12}^{(2)}(\mathbf{0}) + \frac{1}{4}\mathcal{G}_{13}^{(2)} + \frac{1}{2}\mathcal{G}_{14}^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{8}\mathcal{G}_{15}^{(2)} + \frac{1}{4}\mathcal{G}_{16}^{(2)} + \frac{1}{4}\mathcal{G}_{17}^{(2)} + \frac{1}{4}\mathcal{G}_{18}^{(2)} + \frac{1}{6}\mathcal{G}_{19}^{(2)} + \frac{1}{4}\mathcal{G}_{20}^{(2)} \\
&= -\frac{1}{128\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) + \frac{B^{(div)}}{192\pi^2}g_0^2 + \frac{1}{64\pi^2}g_0^2 + \frac{1}{128\pi^2}g_0^2 \\
&\quad - \frac{3}{256\pi^2}g_0^2 + \frac{3}{256\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) - \frac{1}{32\pi^2}g_0^2 \\
&\quad - \frac{9}{256\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) + \frac{3}{64\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) \\
&\quad - \frac{9}{128\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) + \frac{3}{64\pi^2}g_0^2 - \frac{3}{128\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) \\
&\quad - \frac{3}{64\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) + \frac{3}{128\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) \\
&\quad + \frac{3}{128\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) - \frac{3B^{(div)}}{192\pi^2}g_0^2 - \frac{1}{128\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) \\
&= -\frac{15}{256\pi^2}g_0^2(1+O(\epsilon)) - \frac{B^{(div)}}{96\pi^2}g_0^2 = -\frac{1}{64\pi^2}g_0^2 \left[\frac{15}{4} + \frac{2}{3}B^{(div)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Sigma^{(2l)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} &= \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_3^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_6^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_7^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} \\
&\quad + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_8^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_9^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_{10}^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_{11}^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_{12}^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} \\
&= -\frac{1}{5184\pi^2} \frac{g_0^2}{m_0^2} - \frac{59}{13824} \frac{g_0^2}{m_0^2} - \frac{1}{432\pi^2} \frac{g_0^2}{m_0^2} + \frac{1}{512\pi^2} \frac{g_0^2}{m_0^2} \\
&\quad - \frac{3}{1024\pi^2} \frac{g_0^2}{m_0^2}(1+O(\epsilon)) + \frac{5}{1296\pi^2} \frac{g_0^2}{m_0^2} \\
&\quad + \frac{9}{1024\pi^2} \frac{g_0^2}{m_0^2}(1+O(\epsilon)) - \frac{1}{256\pi^2} \frac{g_0^2}{m_0^2}(1+O(\epsilon)) \\
&= \frac{41}{41472\pi^2} \frac{g_0^2}{m_0^2}(1+O(\epsilon)),
\end{aligned}$$

und es ergibt sich insgesamt:

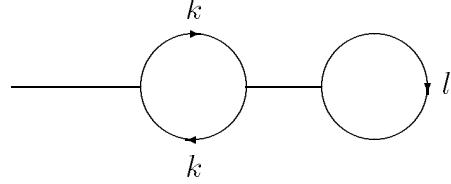
$$\begin{aligned}
-\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) &= \tilde{\Delta}^{-1}(\mathbf{0}) - \Sigma^{(1l)}(\mathbf{0}) - \Sigma^{(2l)}(\mathbf{0}) + O(g_0^3) \\
&= m_0^2 + \frac{m_0}{16\pi} g_0 (1 + O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2} g_0^2 \left[\frac{15}{4} + \frac{2}{3} B^{(div)} \right] + O(g_0^3) \\
&= m_0^2 \left\{ 1 + \frac{1}{16\pi} \frac{g_0}{m_0} (1 + O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2} \frac{g_0^2}{m_0^2} \left[\frac{15}{4} + \frac{2}{3} B^{(div)} \right] + O(g_0^3) \right\}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} &= 1 - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Sigma^{(1l)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Sigma^{(2l)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} + O(g_0^3) \\
&= 1 + \frac{1}{64\pi} \frac{g_0}{m_0} - \frac{41}{41472\pi^2} \frac{g_0^2}{m_0^2} + O(g_0^3).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Vakuumerwartungswert des Feldes

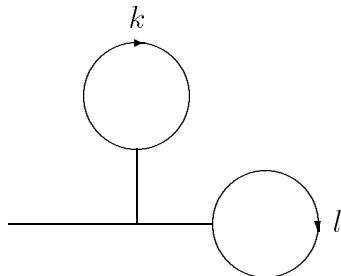
Die nun hinzukommenden Beiträge der 1–Punkt–Funktion sind Subgraphen der Tadpole–Diagramme der 2–Punkt–Funktion. Zur Ordnung $g_0^{3/2}$ sind dies:

- Graph $\mathcal{G}_2^{(1)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):



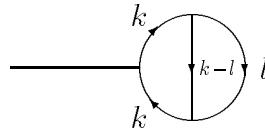
$$\begin{aligned}
&= \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right)^3 \tilde{\Delta}^2(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \\
&= -\frac{1}{m_0} (3g_0)^{3/2} \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)} \\
&\stackrel{D \rightarrow 3}{=} -\frac{1}{m_0} (3g_0)^{3/2} J_2(3) J_1(3) = \frac{3\sqrt{3}}{32\pi^2 m_0} g_0^{3/2} (1 + O(\epsilon)).
\end{aligned}$$

- Graph $\mathcal{G}_3^{(1)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{8}$):



$$\begin{aligned}
&= \left(-\sqrt{3g_0}m_0 \right)^3 \tilde{\Delta}^3(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \\
&= -\frac{1}{m_0^3} (3g_0)^{3/2} \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)} \\
&\stackrel{D \rightarrow 3}{=} -\frac{1}{m_0^3} (3g_0)^{3/2} J_1^2(3) = -\frac{3\sqrt{3}}{16\pi^2 m_0} g_0^{3/2} (1 + O(\epsilon)).
\end{aligned}$$

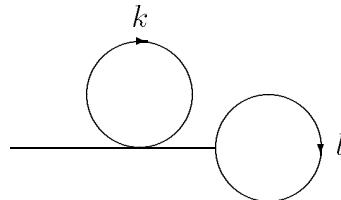
- Graph $\mathcal{G}_4^{(1)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$):



$$\begin{aligned}
&= \left(-\sqrt{3g_0}m_0 \right)^3 \tilde{\Delta}^2(\mathbf{0}) \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} - \mathbf{l}) \\
&= -m_0 (3g_0)^{3/2} \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2) [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2]} \\
&= -m_0 (3g_0)^{3/2} \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^3} \frac{1}{(l^2 + m_0^2)} I_3(\mathbf{0}, \mathbf{l}; 3) \\
&= -m_0 (3g_0)^{3/2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} I_1(\mathbf{k}; 3) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{32\pi^2 m_0} g_0^{3/2},
\end{aligned}$$

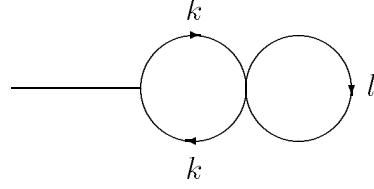
wie bei der Berechnung von $\mathcal{G}_{14}^{(2)}$.

- Graph $\mathcal{G}_5^{(1)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):



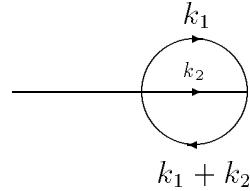
$$\begin{aligned}
&= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0}m_0 \right) \tilde{\Delta}^2(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \\
&= \frac{1}{m_0^3} g_0 \sqrt{3g_0} \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)} \\
&\stackrel{D \rightarrow 3}{=} \frac{1}{m_0^3} g_0 \sqrt{3g_0} J_1^2(3) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2 m_0} g_0^{3/2} (1 + O(\epsilon)).
\end{aligned}$$

- Graph $\mathcal{G}_6^{(1)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{4}$):



$$\begin{aligned}
 &= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right) \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}^2(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{l}) \\
 &= \frac{1}{m_0} g_0 \sqrt{3g_0} \int \frac{d^D k d^D l}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)} \\
 &\stackrel{D \rightarrow 3}{=} \frac{1}{m_0} g_0 \sqrt{3g_0} J_2(3) J_1(3) = -\frac{\sqrt{3}}{32\pi^2 m_0} g_0^{3/2} (1 + O(\epsilon)).
 \end{aligned}$$

- Graph $\mathcal{G}_7^{(1)}$ (Symmetriefaktor $\frac{1}{6}$):



$$\begin{aligned}
 &= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_0 \right) \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}_1) \tilde{\Delta}(\mathbf{k}_2) \tilde{\Delta}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \\
 &= \frac{1}{m_0} g_0 \sqrt{3g_0} \int \frac{d^D k_1 d^D k_2}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{(k_1^2 + m_0^2)(k_2^2 + m_0^2)[(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)^2 + m_0^2]} \\
 &\stackrel{D \rightarrow 3}{=} \frac{1}{m_0} g_0 \sqrt{3g_0} I_2(\mathbf{0}; 3 - \epsilon) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{32\pi^2 m_0} g_0^{3/2} \underbrace{\left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_0^2}{4\pi} \right) + \frac{C}{4\pi} - \gamma + O(\epsilon) \right)}_{=: B^{(div)}} = \frac{\sqrt{3} B^{(div)}}{32\pi^2 m_0} g_0^{3/2}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 v_0 = G_c^{(1,0)} &= \frac{1}{2} \mathcal{G}_1^{(1)} + \frac{1}{4} \mathcal{G}_2^{(1)} + \frac{1}{8} \mathcal{G}_3^{(1)} + \frac{1}{2} \mathcal{G}_4^{(1)} + \frac{1}{4} \mathcal{G}_5^{(1)} + \frac{1}{4} \mathcal{G}_6^{(1)} + \frac{1}{6} \mathcal{G}_7^{(1)} + O(g_0^{5/2}) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{8\pi} g_0^{1/2} (1 + O(\epsilon)) + \frac{3\sqrt{3}}{128\pi^2 m_0} g_0^{3/2} (1 + O(\epsilon)) \\
 &\quad - \frac{3\sqrt{3}}{128\pi^2 m_0} g_0^{3/2} (1 + O(\epsilon)) - \frac{\sqrt{3}}{64\pi^2 m_0} g_0^{3/2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{3}}{64\pi^2 m_0} g_0^{3/2} (1 + O(\epsilon)) - \frac{\sqrt{3}}{128\pi^2 m_0} g_0^{3/2} (1 + O(\epsilon)) \\
& + \frac{\sqrt{3} B^{(div)}}{192\pi^2 m_0} g_0^{3/2} + O(g_0^{5/2}) \\
= & \frac{\sqrt{3}}{8\pi} g_0^{1/2} (1 + O(\epsilon)) - \frac{\sqrt{3}}{128\pi^2 m_0} g_0^{3/2} (1 + O(\epsilon)) \\
& + \frac{\sqrt{3} B^{(div)}}{192\pi^2 m_0} g_0^{3/2} + O(g_0^{5/2}) \\
= & \frac{\sqrt{3}}{8\pi} g_0^{1/2} (1 + O(\epsilon)) - \frac{\sqrt{3}}{128\pi^2 m_0} g_0^{3/2} \left[1 - \frac{2}{3} B^{(div)} \right] + O(g_0^{5/2}). \tag{5.12}
\end{aligned}$$

5.2.3 Berechnung der renormierten Größen

Aus den Gleichungen (5.10) – (5.12) erhält man mit $u_0 = g_0/m_0$

$$\begin{aligned}
-\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) &= m_0^2 \left\{ 1 + \frac{1}{16\pi} u_0 (1 + O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2} u_0^2 \left[\frac{15}{4} + \frac{2}{3} B^{(div)} \right] + O(u_0^3) \right\} \\
-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} &= 1 + \frac{1}{64\pi} u_0 - \frac{41}{41472\pi^2} u_0^2 + O(u_0^3) \\
Z_3 &= \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} \right)^{-1} = 1 - \frac{1}{64\pi} u_0 + \frac{409}{331776\pi^2} u_0^2 + O(u_0^3) \\
v_0 &= \sqrt{\frac{3m_0^2}{g_0}} \left\{ \frac{1}{8\pi} u_0 (1 + O(\epsilon)) - \frac{1}{128\pi^2} u_0^2 \left[1 - \frac{2}{3} B^{(div)} \right] + O(u_0^3) \right\}.
\end{aligned}$$

Damit finden sich für die renormierte Masse und die renormierte Kopplung

$$\begin{aligned}
m_R^2 &= \frac{\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0})}{\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0}} = -Z_3 \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) \\
&= m_0^2 \left\{ 1 + \frac{3}{64\pi} u_0 (1 + O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2} u_0^2 \left[\frac{19525}{5184} + \frac{2}{3} B^{(div)} \right] + O(u_0^3) \right\} \tag{5.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_R &= \frac{3m_R^2}{v_R^2} = \frac{3Z_3 m_R^2}{(v_0 + \sqrt{3m_0^2/g_0})^2}, \quad v_R = \frac{1}{\sqrt{Z_3}} (v_0 + v_{min}) \\
&= g_0 \left\{ 1 - \frac{7}{32\pi} u_0 (1 + O(\epsilon)) + \frac{37835}{331776\pi^2} u_0^2 (1 + O(\epsilon)) + O(u_0^3) \right\}, \tag{5.14}
\end{aligned}$$

bzw.

$$u_R = \frac{g_R}{m_R} = u_0 \left\{ 1 - \frac{31}{128\pi} u_0 (1 + O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2} u_0^2 \left[\frac{80125}{13824} - \frac{1}{3} B^{(div)} \right] + O(u_0^3) \right\}. \quad (5.15)$$

Die Invertierung dieser Beziehungen zugunsten der nackten Größen in Abhängigkeit von den renormierten erfolgt ebenso, wie ich in Abschnitt 5.1 beschrieben habe. Mit

$$\ln \left(\frac{m_0^2}{4\pi} \right) = \ln \left(\frac{m_R^2}{4\pi} \right) + O(u_R)$$

und

$$B_R^{(div)} := \left(\frac{1}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_R^2}{4\pi} \right) + \frac{C}{4\pi} - \gamma + O(\epsilon) \right)$$

ergeben sich die Relationen:

$$u_0 = u_R \left\{ 1 + \frac{31}{128\pi} u_R (1 + O(\epsilon)) + \frac{1}{64\pi^2} u_R^2 \left[\frac{23663}{13824} + \frac{1}{3} B_R^{(div)} \right] + O(u_R^3) \right\}, \quad (5.16)$$

bzw.

$$m_0^2 = m_R^2 \left\{ 1 - \frac{3}{64\pi} u_R (1 + O(\epsilon)) - \frac{1}{64\pi^2} u_R^2 \left[\frac{45125}{10368} + \frac{2}{3} B_R^{(div)} \right] + O(u_R^3) \right\} \quad (5.17)$$

$$g_0 = g_R \left\{ 1 + \frac{7}{32\pi} u_R (1 + O(\epsilon)) - \frac{2191}{165888\pi^2} u_R^2 (1 + O(\epsilon)) + O(u_R^3) \right\}. \quad (5.18)$$

Auch hier ist zu bemerken, daß die letzte Gleichung frei von Divergenzen ist.

Kapitel 6

Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge

In diesem Kapitel gelange ich zur Bestimmung des Amplitudenverhältnisses der Korrelationslänge. Dazu leite ich zunächst eine Gleichung her, aus der sich dieses Verhältnis unter Verwendung der Resultate der dreidimensionalen renormierten Störungstheorie gewinnen läßt. Dabei stellt sich heraus, daß das Endresultat als Potenzreihe bis zur 2. Ordnung in einer dimensionslosen renormierten Kopplung angegeben werden kann, die entweder den Fixpunkt der Hochtemperaturkopplung oder denjenigen der Tieftemperaturkopplung besitzt. Die dafür nötigen Rechnungen werden im einzelnen vorgeführt.

Von jetzt an ist es sehr wichtig, alle Größen in symmetrischer und gebrochener Phase durch eine Indizierung mit + bzw. – voneinander zu unterscheiden.

6.1 Herleitung der Bestimmungsgleichung

Nach (1.12) zeigt die Korrelationslänge ξ bei Annäherung an den kritischen Punkt $T = T_c$ das Divergenzverhalten

$$\xi \sim f_{\pm} |t|^{-\nu}, \quad t := \frac{T - T_c}{T_c},$$

je nachdem in welcher Phase man sich befindet. Die feldtheoretische Beschreibung kritischer Phänomene erlaubt die Bestimmung des universellen Amplitudenverhältnisses f_+/f_- , da der Zusammenhang der physikalischen Größen ξ und t mit den Parametern des feldtheoretischen Modells gemäß (4.7) und (4.1) durch die Beziehungen

$$\xi = \frac{1}{m_R}, \quad t = m_0^2 - m_{0c}^2$$

gegeben ist. Der störungstheoretischen Behandlung von Hoch- und Tieftemperaturphase aus Abschnitt 2.2 entnimmt man

$$\frac{1}{m_{R+}} = \xi_+ \sim f_+ t_+^{-\nu}, \quad t_+ = (m_0^2 - m_{0c}^2) \Big|_{T>T_c} > 0 \quad (6.1a)$$

und

$$\frac{1}{m_R} = \xi_- \sim f_- t_-^{-\nu}, \quad t_- = -\left(m_0^2 - m_{0c}^2\right) \Big|_{T < T_c} > 0, \quad (6.1b)$$

wobei die reduzierten Temperaturen in jeder Phase $t_+ = t$, $t > 0$, und $t_- = -t$, $t < 0$, seien.

Die folgende Herleitung des Verhältnisses f_+/f_- ist entscheidend von der Tatsache bestimmt, daß wir die Theorie in der festen Dimension $D = 3$ betrachten. Denn die kritische nackte Masse m_{0c} , die in diesem Fall nur in 0. Ordnung der Störungstheorie verschwindet, ist — wie schon in Abschnitt 4.1 festgestellt — perturbativ nicht berechenbar, so daß eine Division der vorstehenden Gleichungen nicht zum Erfolg führt¹.

Um dieses Problem zu umgehen und gleichzeitig die nackte Masse m_0 zu eliminieren, verwende ich Funktionen, die durch Ableitungen nach m_0 gebildet werden und nach einer Ersetzung der nackten Kopplungen $u_{0\pm}$ zugunsten der dimensionslosen renormierten Kopplungen $u_{R\pm}$ (in der jeweiligen Phase) nur noch von $u_{R\pm}$ abhängen. Dies wird gerade durch die Identität (4.9)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{g_0} = \frac{\partial}{\partial m_0^2} \Big|_{g_0}$$

erreicht, da nach Definition der Größen

$$F_\pm(u_{R\pm}) := \frac{\partial m_{R\pm}^2}{\partial m_{0\pm}^2} \Big|_{g_0} \quad (6.2)$$

in der symmetrischen Phase mit (6.1a) und (2.36)

$$\frac{\partial m_{R+}^2}{\partial t_+} \Big|_{g_0} = \frac{\partial m_{R+}^2}{\partial m_0^2} \Big|_{g_0} = \underbrace{\frac{\partial m_{0+}^2}{\partial m_0^2}}_{=1} \frac{\partial m_{R+}^2}{\partial m_{0+}^2} \Big|_{g_0} = \frac{\partial m_{R+}^2}{\partial m_{0+}^2} \Big|_{g_0} = F_+(u_{R+}), \quad (6.3a)$$

und in der gebrochenen Phase mit (6.1b) und (2.44) entsprechend

$$\frac{\partial m_{R-}^2}{\partial t_-} \Big|_{g_0} = -\frac{\partial m_{R-}^2}{\partial m_0^2} \Big|_{g_0} = -\underbrace{\frac{\partial m_{0-}^2}{\partial m_0^2}}_{=-2} \frac{\partial m_{R-}^2}{\partial m_{0-}^2} \Big|_{g_0} = 2 \frac{\partial m_{R-}^2}{\partial m_{0-}^2} \Big|_{g_0} = 2F_-(u_{R-}) \quad (6.3b)$$

ist. Die Differentiation von (6.1a) und (6.1b) nach t_\pm bei festem g_0 ergibt dann

$$2 \frac{F_-(u_{R-})}{F_+(u_{R+})} = \frac{\partial m_{R-}^2 / \partial t_-}{\partial m_{R+}^2 / \partial t_+} \Big|_{g_0} = \left(\frac{f_+}{f_-}\right)^2 \left(\frac{t_-}{t_+}\right)^{2\nu-1}. \quad (6.4)$$

Andererseits folgt aus der Definition der Korrelationslänge als inverse renormierte Masse unmittelbar

$$\left(\frac{f_+}{f_-}\right)^2 \left(\frac{t_-}{t_+}\right)^{2\nu-1} = \left(\frac{m_{R-}}{m_{R+}}\right)^2 \frac{t_+}{t_-}, \quad (6.5)$$

¹Für $D \geq 4$ ist allerdings auch in der Störungstheorie $m_{0c}^2 = 0$, so daß sich in diesem Fall die Bestimmung des gesuchten Amplitudenverhältnisses vereinfacht.

woraus man

$$2 \frac{F_-(u_{R-})}{F_+(u_{R+})} = \left(\frac{m_{R-}}{m_{R+}} \right)^2 \frac{t_+}{t_-} \quad (6.6)$$

schließt. An dieser Stelle sind t_+ und t_- , und damit auch m_{R+} und m_{R-} , noch unabhängig wählbar.

Für die Bestimmung des Verhältnisses f_+/f_- kann ich nun Punktpaare (t_+, t_-) betrachten, für die

$$m_{R+} = m_{R-} \quad (6.7)$$

gilt. Die zugehörigen Kopplungen u_{R+} und u_{R-} hängen dann in einer eindeutigen Weise voneinander ab, die allerdings zunächst nicht bekannt ist. Mit (6.1a) und (6.1b) impliziert dies

$$f_+ t_+^{-\nu} = f_- t_-^{-\nu}$$

bzw.

$$\frac{f_+}{f_-} = \left(\frac{t_+}{t_-} \right)^\nu, \quad (6.8)$$

während sich (6.6) zu

$$\frac{t_+}{t_-} = 2 \frac{F_-(u_{R-})}{F_+(u_{R+})} \quad (6.9)$$

vereinfacht. Setzte ich jetzt den letzten Term in die vorletzte Gleichung ein, so resultiert bereits für das universelle Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge:

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-} = \left[2 \frac{F_-(u_{R-})}{F_+(u_{R+})} \right]^\nu}. \quad (6.10)$$

Die Funktionen F_+ und F_- , die in diese Gleichung eingehen, sind als Potenzreihen in $u_{R\pm}$ perturbativ berechenbar. Allerdings sind, wie oben betont, die Kopplungen u_{R+} und u_{R-} nicht identisch, sondern sie stehen in einer bestimmten Beziehung zueinander. Diese Tatsache werde ich ausnutzen, um das Verhältnis f_+/f_- als Funktion einer dimensionslosen Kopplungsvariablen \bar{u}_R auszudrücken, die sich wiederum in eindeutiger Weise aus den renormierten Kopplungen beider Phasen erhalten läßt. Dabei lasse ich mich von folgendem Gedanken leiten:

Aus der Theorie der Renormierungsgruppe wissen wir, daß die dimensionslose renormierte Kopplung beim Erreichen des kritischen Punktes ihren (infrarotstabilen) Fixpunktwert annimmt. Dieser ist für $D < 4$ als nichttriviale Nullstelle der β -Funktion gegeben. Ein neu einzuführender Entwicklungsparameter \bar{u}_R , der die Physik in symmetrischer und gebrochener Phase korrekt beschreibt, sollte demnach in beiden Phasen denselben Fixpunkt besitzen. Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung, daß die Einführung von \bar{u}_R in beiden Phasen auf dieselbe β -Funktionen

führt. Ihre Definition (4.28a) erzwingt daher, daß der funktionale Zusammenhang zwischen m_{R^\pm} und \bar{u}_R in der symmetrischen Phase der gleiche sein muß wie derjenige zwischen m_{R^-} und \bar{u}_R in der Phase gebrochener Symmetrie. Aufgrund von

$$u_\pm = \frac{g_0}{m_{R^\pm}}$$

bei festem g_0 und der Darstellung (4.29) der β -Funktion bietet sich für die Erfüllung dieser Forderung der Zusammenhang zwischen den dimensionslosen Kopplungen u_\pm und u_{R^\pm} an, da dieser nach (4.17) bzw. (4.25) in jeder Phase als Potenzreihe in u_{R^\pm} bzw. u_{R^-} bekannt ist. Dies erlaubt, die Kopplung \bar{u}_R in Abhängigkeit von u_{R^\pm} bzw. u_{R^-} zu bestimmen, so daß für die neuen β -Funktionen, per definitionem durch

$$\bar{\beta}_\pm(\bar{u}_R) = m_{R^\pm} \frac{\partial}{\partial m_{R^\pm}} \Big|_{g_0} \bar{u}_R(m_{R^\pm}) = -(4 - D) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{u}_R} \Big|_{m_{R^\pm}} \ln(u_\pm(\bar{u}_R)) \right]^{-1} \quad (6.11)$$

gegeben, nach (6.7) tatsächlich

$$\bar{\beta}_+(\bar{u}_R) = \bar{\beta}_-(\bar{u}_R) \quad (6.12)$$

gilt und das Amplitudenverhältnis f_+/f_- (ggf. nach Invertierung dieser Beziehungen) als Reihe in \bar{u}_R erscheint. Bevor ich diese Ausführungen weiter präzisiere, soll

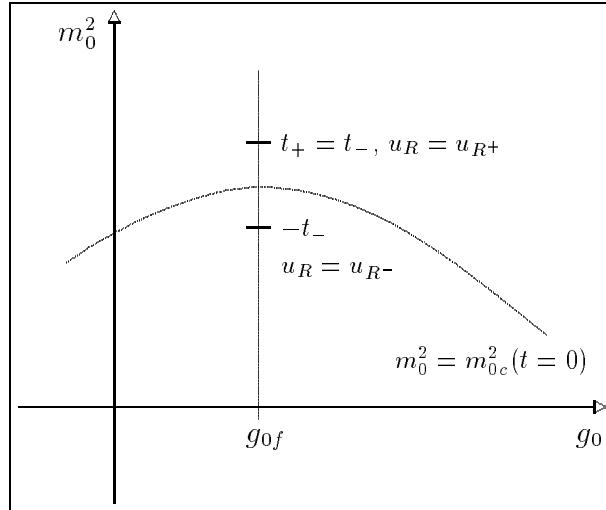


Abb. 6.1: Schematische Darstellung des Phasendiagramms einer ϕ^4 -Theorie. Die renormierten Kopplungen beider Phasen sind voneinander verschieden.

len die bisherigen Überlegungen anhand der Abbildungen 6.1 und 6.2 noch einmal illustriert werden. Sie stellen die qualitative Gestalt des Phasendiagramms einer ϕ^4 -Theorie dar, in dem das Quadrat der nackten Masse gegen die nackte Kopplung aufgetragen ist. Die kritische Linie ist durch die Bedingung $m_0^2 = m_{0c}^2$ (bzw.

$t = 0$ und $m_R = 0$) bestimmt, und g_{0f} sei ein fester Wert der nackten Kopplung g_0 . Für Punkte, die bei g_{0f} denselben Abstand von der kritischen Linie besitzen, gilt $t_+ = t_-$ (Abb. 6.1). Nach (6.3a) und (6.3b) faßt man t_+ und t_- als Funktionen von $u_R = u_{R+}$ bzw. $u_R = u_{R-}$ auf. Diese Kopplungen sind durch die Störungstheorie und das Renormierungsschema in der jeweiligen Phase festgelegt, und demnach gilt insbesondere an den Punkten $(g_{0f}, -t_-)$ und (g_{0f}, t_+) für die zugehörigen renormierten Kopplungen $u_{R+} \neq u_{R-}$. Wenn ich allerdings in einer der beiden Phasen,

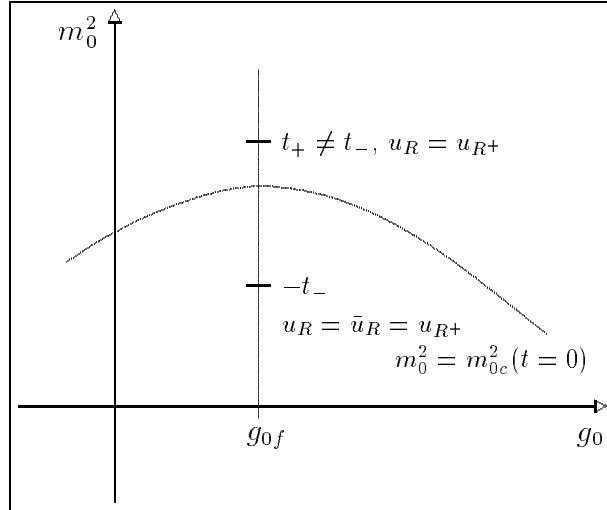


Abb. 6.2: Schematische Darstellung des Phasendiagramms einer ϕ^4 -Theorie. Einführung einer Kopplung \bar{u}_R in der Tieftemperaturphase, die mit u_{R+} identisch ist.

z.B. in der Tieftemperaturphase, eine Kopplung $u_R = \bar{u}_R$ etabliere, die einerseits dort die kritische Theorie beschreiben und andererseits mit $u_R = u_{R+}$ identisch sein soll, beeinflußt dies natürlich die zugehörige Temperaturvariable t_- (Abb. 6.2). Es wird dann $t_+ \neq t_-$, und gleichzeitig ändert sich die funktionale Abhängigkeit der Verhältnisse t_+/t_- und f_+/f_- von der neuen Kopplung \bar{u}_R .

In diesem Sinne sei also in einer der beiden Phasen die Existenz einer dort von u_{R+} bzw. u_{R-} verschiedenen, dimensionslosen renormierten Kopplung \bar{u}_R angenommen, die als die natürliche Variable aller Renormierungskonstanten und Renormierungsgruppenfunktionen anzusehen ist. Um in der soeben beschriebenen Weise \bar{u}_R in Abhängigkeit von u_{R+} bzw. u_{R-} zu erhalten, schreibt man

$$u_{\pm} = u_{\pm}(u_{R\pm}) = \frac{g_0}{m_{R\pm}} = u_{R\pm} \left(1 + a_{\pm}^{(1)} u_{R\pm} + a_{\pm}^{(2)} u_{R\pm}^2 + O(u_{R\pm}^3) \right).$$

In dem allgemeinen Ansatz

$$\bar{u}_R = \bar{u}_R(u_{R\pm}) = u_{R\pm} \left(1 + b_{\pm}^{(1)} u_{R\pm} + b_{\pm}^{(2)} u_{R\pm}^2 + O(u_{R\pm}^3) \right)$$

ergeben sich die Koeffizienten $b_{\pm}^{(i)}$, $i \in \mathbf{N}$, eindeutig aus der Bedingung, daß für die invertierte Potenzreihe

$$u_{R\pm} = u_{R\pm}(\bar{u}_R) = \bar{u}_R \left(1 + c_{\pm}^{(1)} \bar{u}_R + c_{\pm}^{(2)} \bar{u}_R^2 + O(\bar{u}_R^3) \right)$$

gerade

$$u_- \left(u_{R-} = u_{R-}(\bar{u}_R) \right) = u_+ \left(u_{R+} = \bar{u}_R \right) \quad (6.13a)$$

oder umgekehrt

$$u_+ \left(u_{R+} = u_{R+}(\bar{u}_R) \right) = u_- \left(u_{R-} = \bar{u}_R \right) \quad (6.13b)$$

gilt. Da ich speziell an der Ersetzung von $u_{R\pm}$ durch \bar{u}_R interessiert bin, reicht natürlich die Kenntnis der Koeffizienten $c_{\pm}^{(i)}$, $i \in \mathbf{N}$, bis zur gewünschten Ordnung aus. Wie hier schon angedeutet ist, existieren zwei Möglichkeiten, die Anpassung der neuen Kopplung vorzunehmen, da die β -Funktionen der Hoch- und Tieftemperaturphase auf unterschiedliche Fixpunkte führen:

1. Anpassung an die Hochtemperaturkopplung:

Man bestimmt $u_{R-} = u_{R-}(\bar{u}_R)$ als Potenzreihe in \bar{u}_R , so daß $\bar{u}_R^* = u_{R+}^*$ gilt. Nach (4.17) ist also

$$u_- \Big|_{u_{R-}=u_{R-}(\bar{u}_R)} = u_+ \Big|_{u_{R+}=\bar{u}_R} = \bar{u}_R \frac{Z_1(\bar{u}_R)}{Z_{3+}^2(\bar{u}_R)} \quad (6.14)$$

bis zur erforderlichen Ordnung in \bar{u}_R zu erfüllen. Nach diesem Schritt ersetzt man in $F_-(u_{R-})$ die Kopplung u_{R-} durch \bar{u}_R und identifiziert anschließend \bar{u}_R mit u_{R+} . Die Gleichung (6.10) liefert in diesem Fall für das gesuchte Amplitudenverhältnis

$$\frac{f_+}{f_-} = \left[2 \frac{F_-(u_{R-}(\bar{u}_R))}{F_+(u_{R+}(\bar{u}_R))} \right]^\nu \Bigg|_{\bar{u}_R=u_{R+}}. \quad (6.15)$$

2. Anpassung an die Tieftemperaturkopplung:

Man bestimmt $u_{R+} = u_{R+}(\bar{u}_R)$ als Potenzreihe in \bar{u}_R , so daß $\bar{u}_R^* = u_{R-}^*$ gilt. Nach (4.25) ist also jetzt

$$u_+ \Big|_{u_{R+}=u_{R+}(\bar{u}_R)} = u_- \Big|_{u_{R-}=\bar{u}_R} = \bar{u}_R \frac{Z_4^2(\bar{u}_R)}{Z_{3-}(\bar{u}_R)} \quad (6.16)$$

bis zur erforderlichen Ordnung in \bar{u}_R zu erfüllen. Danach ersetzt man in $F_+(u_{R+})$ die Kopplung u_{R+} durch \bar{u}_R und identifiziert diesmal \bar{u}_R mit u_{R-} . Aus (6.10) folgt dann für das gesuchte Amplitudenverhältnis

$$\frac{f_+}{f_-} = \left[2 \frac{F_-(u_{R-}(\bar{u}_R))}{F_+(u_{R+}(\bar{u}_R))} \right]^\nu \Bigg|_{\bar{u}_R=u_{R-}}. \quad (6.17)$$

Abschließend sei nochmals hervorgehoben, daß die Freiheit in der Wahl der Kopplungsvariablen der renormierten Störungstheorie ausgenutzt worden ist, mit der Kopplung \bar{u}_R einen *neuen* Entwicklungsparameter in die Theorie einzuführen, über den dann selbstverständlich auch alle Renormierungsgruppenfunktionen aus Abschnitt 4.3 definiert sind. Erst die verlangte Gültigkeit der Gleichungen (6.13a) und (6.13b) legt seine Beziehung zu den Kopplungen u_{R+} und u_{R-} in beiden Phasen eindeutig fest. Dies hat zur Konsequenz, daß für die Bestimmung des analytischen Zusammenhangs zwischen diesen Kopplungen nicht einfach die β -Funktionen beider Phasen herangezogen werden können:

Betrachtet man nämlich zwei dimensionslose renormierte Kopplungen u_R und u'_R , die durch die Entwicklungen

$$\begin{aligned} u'_R &= u'_R(u_R) = u_R(1 + a_1 u_R + a_2 u_R^2 + O(u_R^3)) \\ u_R &= u_R(u'_R) = u'_R(1 + b_1 u'_R + b_2 u'_R^2 + O(u'_R^3)) \end{aligned}$$

in umkehrbar eindeutiger Beziehung zueinander stehen, so erzwingt die Forderung nach Invarianz der CALLAN-SYMANZIK-Gleichung (4.27) unter der Transformation $u_R \leftrightarrow u'_R$ für die zugehörigen β -Funktionen nicht etwa die Relation $\beta'(u'_R) = \beta(u_R(u'_R))$, sondern vielmehr das kovariante² Transformationsverhalten

$$\beta(u_R) \frac{\partial}{\partial u_R} = \beta'(u'_R) \frac{\partial}{\partial u'_R}, \quad \beta'(u'_R) = \beta(u_R(u'_R)) \frac{\partial u'_R(u_R)}{\partial u_R} \Big|_{u_R=u_R(u'_R)}. \quad (6.18)$$

Mit Hilfe dieser Identität kann man in den Rechnungen die Beziehung zwischen den renormierten Kopplungen beider Phasen überprüfen.

6.2 Renormierungsgruppenfunktionen

Ich wende jetzt die theoretischen Überlegungen der Kapitel 4 und 6 auf diejenigen Reihen an, die in Kapitel 5 erhalten worden sind. Dabei verweise ich insbesondere auf die Abschnitte 5.1.3 und 5.2.3, in denen in jeder Phase die Beziehungen zwischen den nackten und renormierten Parametern der Theorie bis einschließlich zur 2. Ordnung in der Kopplung angegeben sind.

Es wurde bereits betont, daß sich, wie durch Mitführung eines Terms $(1 + O(\epsilon))$ als Faktor an die endlichen Beiträge der divergenten Diagramme angedeutet, bei der Auswertung der dort beitragenden Impulsintegrale die Divergenz des Integrals J_1 (unter anderem zur 1-Loop-Selbstenergie des Propagators beitragend) in dimensioneller Regularisierung nicht isolieren läßt. Da aus der allgemeinen Renormierungstheorie in drei Dimensionen bekannt ist, daß die aus den Störungsreihen erhaltenen physikalischen Größen, wie z.B. Renormierungsgruppenfunktionen oder universelle Verhältnisse, in jeder Ordnung der dimensionslosen renormierten Kopplung endlich

²Dies ist genau das Transformationsverhalten, welches Vektorfelder unter einer Transformation ihrer Basisfelder besitzen.

bleiben, ist in den nachfolgenden Gleichungen den Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ als durchgeführt anzusehen.

Schließlich sei noch hinzugefügt, daß man einen Teil der Ergebnisse dieses Abschnitts anhand der Identität

$$\frac{Z_{3\pm}(u_{R^\pm})}{Z_{2\pm}(u_{R^\pm})} = F_\pm(u_{R^\pm}) \left(1 - \frac{1}{2} \eta_{3\pm}(u_{R^\pm})\right), \quad (6.19)$$

die im Rahmen des Beweises der Renormierungsgruppengleichung (4.27) auftritt, kontrollieren kann.

6.2.1 Symmetrische Phase

Zunächst bestimme ich die Renormierungs konstanten Z_i , $i = 1, 2, 3$, die nach ihrer Definition in Abschnitt 4.2.1 noch Funktionen der nackten Kopplung u_{0+} sind, in Abhängigkeit der dimensionslosen renormierten Kopplung u_{R+} . Dazu ist die Gleichung (5.7) bis zur 2. Ordnung ausreichend:

$$u_{0+} = u_{R+} \left(1 + \frac{1}{8\pi} u_{R+} + O(u_{R+}^2)\right). \quad (6.20)$$

Aus Abschnitt 5.1.3 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{3+}(u_{R+})} &= -\frac{\partial \Gamma_{0+}^{(2,0)}(p; m_{0+}, g_0)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=0} = 1 + \frac{1}{5184\pi^2} u_{0+}^2 + O(u_{0+}^3) \\ &= 1 + \frac{1}{5184\pi^2} u_{R+}^2 + O(u_{R+}^3) \\ Z_{3+}(u_{R+}) &= 1 - \frac{1}{5184\pi^2} u_{R+}^2 + O(u_{R+}^3) \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_1(u_{R+})} &= -\frac{1}{g_0} \Gamma_{0+}^{(4,0)}(\{0\}; m_{0+}, g_0) = 1 - \frac{3}{16\pi} u_{0+} + \frac{1}{32\pi^2} u_{0+}^2 + O(u_{0+}^3) \\ &= 1 - \frac{3}{16\pi} u_{R+} + \frac{1}{128\pi^2} u_{R+}^2 + O(u_{R+}^3) \\ Z_1(u_{R+}) &= 1 + \frac{3}{16\pi} u_{R+} + \frac{7}{256\pi^2} u_{R+}^2 + O(u_{R+}^3). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Bezüglich der Bestimmung von $Z_{2\pm}$ nach (4.11) (und ebenso von F_\pm nach (6.2)) ist an dieser Stelle eine Bemerkung angebracht, die die Berechnung dieser Funktionen als partielle Ableitungen nach dem nackten Massenquadrat betrifft und für beide Phasen ihre Gültigkeit hat:

Wir haben dabei nämlich zu beachten, daß die Massendimension der Beiträge zu $-\Gamma_{0\pm}^{(2,0)}(p; m_{0\pm}, g_0)$, beginnend bei zwei in 0. Ordnung, mit ansteigender Störungsordnung um 1 abnimmt, so daß dann insbesondere die endlichen Terme der 2-Loop-Korrektur die Massendimension null besitzen. Dies erkennt man daran, daß die zugehörigen konvergenten Integrale nach ihrer Berechnung nicht mehr von der nackten Masse abhängen und somit zur Differentiation nach $m_{0\pm}^2$ keinen Beitrag liefern. Der

einige nichtverschwindende Beitrag 2. Ordnung zu $Z_{2\pm}$ und F_{\pm} röhrt deshalb allein von den in $D = 3$ divergenten Diagrammen proportional zum Integral $I_2(\mathbf{p}; D)$ her, dessen nach dieser Differentiation endlichen Wert $\tilde{I}_2 = \tilde{I}_2(m_{0\pm})$ ich bereits in 3.1.2 bestimmt habe.

Man findet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{2+}(u_{R+})} &= -\frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma_{0+}^{(2,0)}(0; m_{0+}, g_0) = 1 - \frac{1}{16\pi} u_{0+} + \frac{1}{192\pi^2} u_{0+}^2 + O(u_{0+}^3) \\ &= 1 - \frac{1}{16\pi} u_{R+} - \frac{1}{384\pi^2} u_{R+}^2 + O(u_{R+}^3) \\ Z_{2+}(u_{R+}) &= 1 + \frac{1}{16\pi} u_{R+} + \frac{5}{768\pi^2} u_{R+}^2 + O(u_{R+}^3). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Aus (6.21) und (6.22) erhalte ich die dimensionslose Kopplung u_+ zu

$$\begin{aligned} u_+(u_{R+}) &= \frac{g_0}{m_{R+}}(u_{R+}) = u_{R+} \frac{Z_1(u_{R+})}{Z_{3+}^2(u_{R+})} \\ &= u_{R+} \left(1 + \frac{3}{16\pi} u_{R+} + \frac{575}{20736\pi^2} u_{R+}^2 + O(u_{R+}^3) \right). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Schließlich ist noch die Funktion $F_+ = F_+(u_{R+})$ zu berechnen, die direkt in das gesuchte Amplitudenverhältnis eingeht. Es führt $\frac{\partial}{\partial m_0^2} = \frac{1}{2m_0} \frac{\partial}{\partial m_0}$, d.h. bei festem g_0 unter Anwendung der Produktregel

$$\begin{aligned} F_+(u_{0+}) &= \frac{\partial m_{R+}^2}{\partial m_{0+}^2} \Big|_{g_0} = -\frac{\partial}{\partial m_{0+}^2} \left(Z_{3+}(u_{0+}) \Gamma_{0+}^{(2,0)}(p; m_{0+}, g_0) \right) \\ &= Z_{3+}(u_{0+}) \frac{\partial}{\partial m_{0+}^2} \left(-\Gamma_{0+}^{(2,0)}(p; m_{0+}, g_0) \right) - \Gamma_{0+}^{(2,0)}(p; m_{0+}, g_0) \frac{\partial Z_{3+}(u_{0+})}{\partial m_{0+}^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{5184\pi^2} u_{0+}^2 + O(u_{0+}^3) \right) \left(1 - \frac{1}{16\pi} u_{0+} - \frac{1}{6} g_0^2 I_2'(m_{0+}) + O(u_{0+}^3) \right) \\ &\quad + m_{0+}^2 \left\{ 1 - \frac{1}{8\pi} u_{0+} + \frac{1}{64\pi^2} u_{0+}^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} B_+^{(div)} \right] + O(u_{0+}^3) \right\} \times \\ &\quad \times \frac{1}{m_{0+}^2} \left(\frac{1}{5184\pi^2} u_{0+}^2 + O(u_{0+}^3) \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{5184\pi^2} u_{0+}^2 + O(u_{0+}^3) \right) \left(1 - \frac{1}{16\pi} u_{0+} + \frac{1}{192\pi^2} u_{0+}^2 + O(u_{0+}^3) \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{5184\pi^2} u_{0+}^2 + O(u_{0+}^3) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{16\pi} u_{0+} + \frac{1}{192\pi^2} u_{0+}^2 + O(u_{0+}^3), \end{aligned}$$

mit (6.20) auf das endliche Ergebnis

$$F_+(u_{R+}) = 1 - \frac{1}{16\pi} u_{R+} - \frac{1}{384\pi^2} u_{R+}^2 + O(u_{R+}^3). \quad (6.25)$$

Nach diesen Vorbereitungen berechne ich die Renormierungsgruppenfunktionen aus Abschnitt 4.3 bis einschließlich zur 2. Ordnung in u_{R+} . Im Falle der β -Funktion

verwendet man dazu zweckmäßigerweise anstelle ihrer Definition (4.28a) die Identität (4.29). Mit (6.24) erhalte ich:

$$\begin{aligned}
\beta_+(u_{R^+}) &= -\left(\frac{\partial}{\partial u_{R^+}} \Big|_{m_{R^+}} \ln(u_+(u_{R^+}))\right)^{-1} = -\left(\frac{1}{u_+(u_{R^+})} \frac{\partial u_+(u_{R^+})}{\partial u_{R^+}} \Big|_{m_{R^+}}\right)^{-1} \\
&= -\left\{ \frac{1}{u_{R^+}} \left(1 - \frac{3}{16\pi} u_{R^+} + \frac{77}{10368\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3)\right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \left(1 + \frac{3}{8\pi} u_{R^+} + \frac{575}{6912\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3)\right)\right\}^{-1} \\
&= -\left\{ \frac{1}{u_{R^+}} \left(1 + \frac{3}{16\pi} u_{R^+} + \frac{421}{20736\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3)\right)\right\}^{-1} \\
&= -u_{R^+} + \frac{3}{16\pi} u_{R^+}^2 - \frac{77}{5184\pi^2} u_{R^+}^3 + O(u_{R^+}^4),
\end{aligned}$$

und damit

$$\beta_+(u_{R^+}) = -u_{R^+} \left(1 - \frac{3}{16\pi} u_{R^+} + \frac{77}{5184\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3)\right). \quad (6.26)$$

Des weiteren ergibt sich mit (4.31a) und (6.21) bzw. (4.31b) und (6.23):

$$\begin{aligned}
\eta_{3+}(u_{R^+}) &= \beta_+(u_{R^+}) \frac{\partial}{\partial u_{R^+}} \Big|_{g_0} \ln(Z_{3+}(u_{R^+})) = \beta_+(u_{R^+}) \frac{1}{Z_{3+}(u_{R^+})} \frac{\partial Z_{3+}(u_{R^+})}{\partial u_{R^+}} \Big|_{g_0} \\
&= \beta_+(u_{R^+}) \left(1 + \frac{1}{5184\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3)\right) \left(-\frac{1}{2592\pi^2} u_{R^+} + O(u_{R^+}^2)\right) \\
&= \frac{1}{2592\pi^2} u_{R^+}^2 \left(1 + O(u_{R^+})\right) \quad (6.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{2+}(u_{R^+}) &= \beta_+(u_{R^+}) \frac{\partial}{\partial u_{R^+}} \Big|_{g_0} \ln(Z_{2+}(u_{R^+})) = \beta_+(u_{R^+}) \frac{1}{Z_{2+}(u_{R^+})} \frac{\partial Z_{2+}(u_{R^+})}{\partial u_{R^+}} \Big|_{g_0} \\
&= \beta_+(u_{R^+}) \left(1 - \frac{1}{16\pi} u_{R^+} - \frac{1}{384\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3)\right) \times \\
&\quad \times \left(\frac{1}{16\pi} + \frac{5}{384\pi^2} u_{R^+} + O(u_{R^+}^2)\right) \\
&= -\frac{1}{16\pi} u_{R^+} \left(1 - \frac{3}{16\pi} u_{R^+} + \frac{77}{5184\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3)\right) \times \\
&\quad \times \left(1 + \frac{7}{48\pi} u_{R^+} + O(u_{R^+}^2)\right) \\
&= -\frac{1}{16\pi} u_{R^+} \left(1 - \frac{1}{24\pi} u_{R^+} + O(u_{R^+}^2)\right). \quad (6.28)
\end{aligned}$$

Nach (4.32) ist

$$\begin{aligned}
\nu_+(u_{R^+}) &= \left(2 - \eta_{3+}(u_{R^+}) + \eta_{2+}(u_{R^+})\right)^{-1} \\
&= \left(2 - \frac{1}{16\pi} u_{R^+} + \frac{23}{10368\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3)\right)^{-1} \\
&= \left\{2 \left(1 - \frac{1}{32\pi} u_{R^+} + \frac{23}{20736\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3)\right)\right\}^{-1},
\end{aligned}$$

woraus

$$\nu_+(u_{R^+}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{32\pi} u_{R^+} - \frac{11}{82944\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3) \right) \quad (6.29)$$

folgt.

An diesen Resultaten bestätigt sich die schon erwähnte Aussage, daß die Renormierungskonstanten und die daraus berechneten Renormierungsgruppenfunktionen frei von Divergenzen sind. Sie stehen im übrigen mit den dreidimensionalen Berechnungen in [BNMG76, BNM78] in Einklang, wo die Renormierungsgruppenfunktionen in der symmetrischen Phase bis zur 7. Ordnung (für β_+) bzw. 6. Ordnung (für η_{3+} und η_{2+}) bestimmt sind.

6.2.2 Phase gebrochener Symmetrie

Auch hier beginne ich mit der Bestimmung der Renormierungskonstanten Z_i , $i = 2, 3, 4$, die in Abschnitt 4.2.2 definiert worden sind und über die aus (5.16) folgende Relation

$$u_{0-} = u_{R-} \left(1 + \frac{31}{128\pi} u_{R-} + O(u_{R-}^2) \right) \quad (6.30)$$

als Funktion von u_{R-} auszudrücken sind. Man erhält aus 5.2.3:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{3-}(u_{R-})} &= -\frac{\partial \Gamma_{0-}^{(2,0)}(p; m_{0-}, g_0)}{\partial p^2} \Big|_{p^2=0} = 1 + \frac{1}{64\pi} u_{0-} - \frac{41}{41472\pi^2} u_{0-}^2 + O(u_{0-}^3) \\ &= 1 + \frac{1}{64\pi} u_{R-} + \frac{1855}{663552\pi^2} u_{R-}^2 + O(u_{R-}^3) \\ Z_{3-}(u_{R-}) &= 1 - \frac{1}{64\pi} u_{R-} - \frac{1693}{663552\pi^2} u_{R-}^2 + O(u_{R-}^3). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Die Bestimmung von Z_{2-} erfolgt wie in der symmetrischen Phase über

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{2-}(u_{R-})} &= -\frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma_{0-}^{(2,0)}(0; m_{0-}, g_0) = 1 + \frac{1}{32\pi} u_{0-} - \frac{1}{96\pi^2} u_{0-}^2 + O(u_{0-}^3) \\ &= 1 + \frac{1}{32\pi} u_{R-} - \frac{35}{12288\pi^2} u_{R-}^2 + O(u_{R-}^3) \\ Z_{2-}(u_{R-}) &= 1 - \frac{1}{32\pi} u_{R-} + \frac{47}{12288\pi^2} u_{R-}^2 + O(u_{R-}^3), \end{aligned} \quad (6.32)$$

und aus dem Vakuumerwartungswert des Feldes ergibt sich:

$$\begin{aligned} Z_4(u_{R-}) &= \frac{m_{0-}}{m_{R-}} \left(1 + \sqrt{\frac{g_0}{3m_{0-}^2}} v_0 \right) \\ &= \left\{ 1 - \frac{3}{128\pi} u_{0-} - \frac{1}{64\pi^2} u_{0-}^2 \left[\frac{75913}{41472\pi^2} + \frac{1}{3} B_{-}^{(div)} \right] + O(u_{0-}^3) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{1}{8\pi} u_{0-} - \frac{1}{64\pi^2} u_{0-}^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} B_{-}^{(div)} \right] + O(u_{0-}^3) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{13}{128\pi} u_{0-} - \frac{104425}{2654208\pi^2} u_{0-}^2 + O(u_{0-}^3) \\
&= 1 + \frac{13}{128\pi} u_{R-} - \frac{39139}{2654208\pi^2} u_{R-}^2 + O(u_{R-}^3) \\
\frac{1}{Z_4(u_{R-})} &= 1 - \frac{13}{128\pi} u_{R-} + \frac{66517}{2654208\pi^2} u_{R-}^2 + O(u_{R-}^3). \tag{6.33}
\end{aligned}$$

Gleichung (4.25) liefert schließlich

$$\begin{aligned}
u_-(u_{R-}) &= \frac{g_0}{m_{R-}}(u_{R-}) = u_{R-} \frac{Z_4^2(u_{R-})}{Z_{3-}(u_{R-})} \\
&= u_{R-} \left(1 + \frac{7}{32\pi} u_{R-} - \frac{2191}{165888\pi^2} u_{R-}^2 + O(u_{R-}^3) \right). \tag{6.34}
\end{aligned}$$

Außerdem berechne ich wieder mit $\frac{\partial}{\partial m_0^2} = \frac{1}{2m_0} \frac{\partial}{\partial m_0}$ bei festem g_0

$$\begin{aligned}
F_-(u_{0-}) &= \frac{\partial m_{R-}^2}{\partial m_{0-}^2} \Big|_{g_0} = -\frac{\partial}{\partial m_{0-}^2} \left(Z_{3-}(u_{0-}) \Gamma_{0-}^{(2,0)}(p; m_{0-}, g_0) \right) \\
&= Z_{3-}(u_{0-}) \frac{\partial}{\partial m_{0-}^2} \left(-\Gamma_{0-}^{(2,0)}(p; m_{0-}, g_0) \right) - \Gamma_{0-}^{(2,0)}(p; m_{0-}, g_0) \frac{\partial Z_{3-}(u_{0-})}{\partial m_{0-}^2} \\
&= \left(1 - \frac{1}{64\pi} u_{0-} + \frac{409}{331776\pi^2} u_{0-}^2 + O(u_{0-}^3) \right) \times \\
&\quad \times \left(1 + \frac{1}{32\pi} u_{0-} + \frac{1}{3} g_0^2 I_2'(m_{0-}) + O(u_{0-}^3) \right) \\
&\quad + m_{0-}^2 \left\{ 1 + \frac{1}{16\pi} u_{0-} + \frac{1}{64\pi^2} u_{0-}^2 \left[\frac{15}{4} - \frac{2}{3} B_-^{(div)} \right] + O(u_{0-}^3) \right\} \times \\
&\quad \times \frac{1}{m_{0-}^2} \left(\frac{1}{128\pi} u_{0-} - \frac{409}{331776\pi^2} u_{0-}^2 + O(u_{0-}^3) \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{64\pi} u_{0-} + \frac{409}{331776\pi^2} u_{0-}^2 + O(u_{0-}^3) \right) \times \\
&\quad \times \left(1 + \frac{1}{32\pi} u_{0-} - \frac{1}{96\pi^2} u_{0-}^2 + O(u_{0-}^3) \right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{128\pi} u_{0-} - \frac{409}{331776\pi^2} u_{0-}^2 + \frac{1}{2048\pi^2} u_{0-}^2 + O(u_{0-}^3) \right) \\
&= 1 + \frac{3}{128\pi} u_{0-} - \frac{1}{96\pi^2} u_{0-}^2 + O(u_{0-}^3),
\end{aligned}$$

woraus mit (6.30)

$$F_-(u_{R-}) = 1 + \frac{3}{128\pi} u_{R-} - \frac{233}{49152\pi^2} u_{R-}^2 + O(u_{R-}^3) \tag{6.35}$$

folgt.

Auch die Renormierungsgruppenfunktionen berechnen sich analog zur symmetrischen Phase. Zunächst ist

$$\beta_-(u_{R-}) = -\left(\frac{\partial}{\partial u_{R-}} \Big|_{m_{R-}} \ln(u_-(u_{R-})) \right)^{-1} = -\left(\frac{1}{u_-(u_{R-})} \frac{\partial u_-(u_{R-})}{\partial u_{R-}} \Big|_{m_{R-}} \right)^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\left\{ \frac{1}{u_{R^-}} \left(1 - \frac{7}{32\pi} u_{R^-} + \frac{10129}{165888\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(1 + \frac{7}{16\pi} u_{R^-} - \frac{2191}{55296\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right) \right\}^{-1} \\
 &= -\left\{ \frac{1}{u_{R^+}} \left(1 + \frac{7}{32\pi} u_{R^-} - \frac{385}{5184\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right) \right\}^{-1} \\
 &= -u_{R^-} + \frac{7}{32\pi} u_{R^-}^2 - \frac{10129}{82944\pi^2} u_{R^-}^3 + O(u_{R^-}^4),
 \end{aligned}$$

d.h.

$$\beta_-(u_{R^-}) = -u_{R^-} \left(1 - \frac{7}{32\pi} u_{R^-} + \frac{10129}{82944\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right), \quad (6.36)$$

und ferner:

$$\begin{aligned}
 \eta_{3-}(u_{R^-}) &= \beta_-(u_{R^-}) \frac{\partial}{\partial u_{R^-}} \bigg|_{g_0} \ln(Z_{3-}(u_{R^-})) = \beta_-(u_{R^-}) \frac{1}{Z_{3-}(u_{R^-})} \frac{\partial Z_{3-}(u_{R^-})}{\partial u_{R^-}} \bigg|_{g_0} \\
 &= \beta_-(u_{R^-}) \left(1 + \frac{1}{64\pi} u_{R^-} + \frac{1855}{663552\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right) \times \\
 &\quad \times \left(-\frac{1}{64\pi} - \frac{1693}{331776\pi^2} u_{R^-} + O(u_{R^-}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{64\pi} u_{R^-} \left(1 - \frac{7}{32\pi} u_{R^-} + \frac{10129}{82944\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right) \times \\
 &\quad \times \left(1 + \frac{887}{2592\pi} u_{R^-} + O(u_{R^-}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{64\pi} u_{R^-} \left(1 + \frac{10}{81\pi} u_{R^-} + O(u_{R^-}^2) \right) \quad (6.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{2-}(u_{R^-}) &= \beta_-(u_{R^-}) \frac{\partial}{\partial u_{R^-}} \bigg|_{g_0} \ln(Z_{2-}(u_{R^-})) = \beta_-(u_{R^-}) \frac{1}{Z_{2-}(u_{R^-})} \frac{\partial Z_{2-}(u_{R^-})}{\partial u_{R^-}} \bigg|_{g_0} \\
 &= \beta_-(u_{R^-}) \left(1 + \frac{1}{32\pi} u_{R^-} - \frac{35}{12288\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right) \times \\
 &\quad \times \left(-\frac{1}{32\pi} + \frac{47}{6144\pi^2} u_{R^+} + O(u_{R^+}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{32\pi} u_{R^-} \left(1 - \frac{7}{32\pi} u_{R^-} + \frac{10129}{82944\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right) \times \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{41}{192\pi} u_{R^-} + O(u_{R^-}^2) \right) \\
 &= \frac{1}{32\pi} u_{R^-} \left(1 - \frac{83}{192\pi} u_{R^-} + O(u_{R^-}^2) \right). \quad (6.38)
 \end{aligned}$$

Mit (4.32) ist jetzt

$$\begin{aligned}
 \nu_-(u_{R^-}) &= \left(2 - \eta_{3-}(u_{R^-}) + \eta_{2-}(u_{R^-}) \right)^{-1} \\
 &= \left(2 + \frac{1}{64\pi} u_{R^-} - \frac{2651}{165888\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right)^{-1} \\
 &= \left\{ 2 \left(1 + \frac{1}{128\pi} u_{R^+} - \frac{2651}{331776\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right) \right\}^{-1}
 \end{aligned}$$

mit dem Ergebnis

$$\nu_-(u_{R-}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{128\pi} u_{R-} + \frac{10325}{1327104\pi^2} u_{R-}^2 + O(u_{R-}^3) \right). \quad (6.39)$$

Auch hier ist wieder zu beobachten, daß alle soeben bestimmten Funktionen als Potenzreihen in der dimensionslosen renormierten Kopplung u_{R-} im Limes $D \rightarrow 3$ endliche Koeffizienten besitzen.

6.3 Bestimmung von f_+/f_-

Nach diesen Vorbereitungen kann ich dazu übergehen, das Verhältnis f_+/f_- gemäß Abschnitt 6.1 als Potenzreihe 2. Ordnung in einer beiden Phasen gemeinsamen renormierten Kopplungen zu berechnen.

6.3.1 Entwicklung in der Hochtemperaturkopplung

Für die Bestimmung des Verhältnisses f_+/f_- als Entwicklung in einer Kopplungsvariablen \bar{u}_R , die den Fixpunkt u_{R+}^* der Hochtemperaturkopplung u_{R+} besitzt, hat man u_{R-} in Abhängigkeit von \bar{u}_R zu bestimmen. Anschließend sind alle Größen der Tieftemperaturphase durch die neue Kopplung \bar{u}_R auszudrücken.

Gemäß 6.1 muß dazu die Gleichung (6.14) bis zur 3. Ordnung identisch erfüllt werden. Aus dem Vergleich von (6.34) mit (6.24), letztere als Funktion von \bar{u}_R , erhalte ich durch einen Potenzreihenansatz die Beziehung

$$u_{R-} = u_{R-}(\bar{u}_R) = \bar{u}_R \left(1 - \frac{1}{32\pi} \bar{u}_R + \frac{9059}{165888\pi^2} \bar{u}_R^2 + O(\bar{u}_R^3) \right), \quad (6.40)$$

die im folgenden allerdings nur in 2. Ordnung benötigt wird.

Nach (6.25) ist

$$F_+(u_{R+}) = 1 - \frac{1}{16\pi} u_{R+} - \frac{1}{384\pi^2} u_{R+}^2 + O(u_{R+}^3),$$

und (6.35) führt mit (6.40) auf

$$\begin{aligned} F_-(\bar{u}_R) &= F_-(u_{R-}) \Big|_{u_{R-}=u_{R-}(\bar{u}_R)} \\ &= \left\{ 1 + \frac{3}{128\pi} u_{R-} - \frac{233}{49152\pi^2} u_{R-}^2 + O(u_{R-}^3) \right\} \Big|_{u_{R-}=u_{R-}(\bar{u}_R)} \\ &= 1 + \frac{3}{128\pi} \bar{u}_R - \frac{269}{49152\pi^2} \bar{u}_R^2 + O(\bar{u}_R^3). \end{aligned} \quad (6.41)$$

Wegen $\bar{u}_R^* = u_{R+}^*$ setze ich $\bar{u}_R = u_{R+}$ und finde

$$\frac{F_-}{F_+}(u_{R+}) = 1 + \frac{11}{128\pi} u_{R+} + \frac{41}{16384\pi^2} u_{R+}^2 + O(u_{R+}^3). \quad (6.42)$$

Daraus erhält man mit (6.15) durch Entwickeln der dort auftretenden allgemeinen Exponentialfunktion für das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge in Abhängigkeit des Exponenten ν die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{f_+}{f_-}(u_{R^+}; \nu) &= \left[2 \frac{F_-}{F_+}(u_{R^+}) \right]^\nu \\ &= 2^\nu \left(1 + \frac{11\nu}{128\pi} u_{R^+} - \frac{39\nu - 121\nu^2}{32768\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3) \right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Berücksichtigt man außerdem die Entwicklung (6.29), so kann man dieses Verhältnis als Funktion der Hochtemperaturkopplung $\bar{u}_R = u_{R^+}$ allein angeben. Eine Entwicklung bis zur 2. Ordnung liefert das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \frac{f_+}{f_-}(u_{R^+}) &= \left[2 \frac{F_-}{F_+}(u_{R^+}) \right]^{\nu+(u_{R^+})} \\ &= \sqrt{2} \left\{ 1 + \left(\frac{11}{256\pi} + \frac{1}{64\pi} \ln 2 \right) u_{R^+} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{219}{131072\pi^2} + \frac{803}{1327104\pi^2} \ln 2 + \frac{1}{8192\pi^2} \ln^2 2 \right) u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3) \right\}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Das Resultat (6.44) zeigt die Struktur, wie sie aus einer perturbativen Rechnung zu erwarten ist:

Der Beitrag 0. Ordnung entspricht dem aus der Mean-Field-Theorie bekannten Wert $(f_+/f_-)_{MF} = \sqrt{2}$ und entspricht dem Verhältnis der nackten Massen bei der Phasen. Dieses bewirkt auch das Auftreten zunehmender Potenzen von $\ln 2$ in (6.44). Die Terme 1. und 2. Ordnung, die durch die dreidimensionale Störungstheorie gewonnen worden sind, stellen positive Korrekturen zu diesem Wert dar, deren numerische Größe durch die zugehörigen Koeffizienten und den Fixpunkt der renormierten Kopplung bestimmt ist.

6.3.2 Entwicklung in der Tieftemperaturkopplung

In analoger Weise erhält man das Verhältnis f_+/f_- als Entwicklung in einer renormierten Kopplung \bar{u}_R , die den Fixpunkt $u_{R^-}^*$ der Tieftemperaturkopplung u_{R^-} besitzt. Nach 6.1 ist jetzt die Gleichung (6.16) bis zur 3. Ordnung zu erfüllen. Der Vergleich von (6.34) mit (6.24), diesmal allerdings erstere als Funktion von \bar{u}_R , ergibt nach einem Potenzreihenansatz die Beziehung

$$u_{R^+} = u_{R^+}(\bar{u}_R) = \bar{u}_R \left(1 + \frac{1}{32\pi} \bar{u}_R - \frac{8735}{165888\pi^2} \bar{u}_R^2 + O(\bar{u}_R^3) \right), \quad (6.45)$$

mit der ich in der Hochtemperaturphase die Kopplung u_{R^+} durch \bar{u}_R ersetze.

Nach (6.35) ist jetzt

$$F_-(u_{R^-}) = 1 + \frac{3}{128\pi} u_{R^-} - \frac{233}{49152\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3),$$

und mit (6.25) und (6.45) folgt

$$\begin{aligned}
 F_+(\bar{u}_R) &= F_+(u_{R^+}) \Big|_{u_{R^+} = u_{R^+}(\bar{u}_R)} \\
 &= \left\{ 1 - \frac{1}{16\pi} u_{R^+} - \frac{1}{384\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3) \right\} \Big|_{u_{R^+} = u_{R^+}(\bar{u}_R)} \\
 &= 1 - \frac{1}{16\pi} \bar{u}_R - \frac{7}{1536\pi^2} \bar{u}_R^2 + O(\bar{u}_R^3).
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

Wegen $\bar{u}_R^* = u_{R^-}^*$ setze ich wieder $\bar{u}_R = u_{R^-}$ und erhalte

$$\frac{F_-}{F_+}(u_{R^-}) = 1 + \frac{11}{128\pi} u_{R^-} + \frac{85}{16384\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3). \tag{6.47}$$

Wie in der Hochtemperaturphase ergibt sich mit (6.17) für das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge in Abhängigkeit von ν zunächst

$$\begin{aligned}
 \frac{f_+}{f_-}(u_{R^-}; \nu) &= \left[2 \frac{F_-}{F_+}(u_{R^-}) \right]^\nu \\
 &= 2^\nu \left(1 + \frac{11\nu}{128\pi} u_{R^-} + \frac{49\nu + 121\nu^2}{32768\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right).
 \end{aligned} \tag{6.48}$$

Mit (6.39) und einer Entwicklung bis einschließlich zur 2. Ordnung in der Tieftemperaturkopplung $\bar{u}_R = u_{R^-}$ findet sich das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 \frac{f_+}{f_-}(u_{R^-}) &= \left[2 \frac{F_-}{F_+}(u_{R^-}) \right]^{\nu-(u_{R^-})} \\
 &= \sqrt{2} \left\{ 1 + \left(\frac{11}{256\pi} - \frac{1}{256\pi} \ln 2 \right) u_{R^-} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{175}{131072\pi^2} + \frac{19759}{5308416\pi^2} \ln 2 + \frac{1}{131072\pi^2} \ln^2 2 \right) u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right\},
 \end{aligned} \tag{6.49}$$

welches ebenfalls die für $D = 3$ zu erwartenden Korrekturen zum Mean-Field-Verhalten zeigt.

6.4 Numerische Ergebnisse

Die Berechnung des Amplitudenverhältnisses der Korrelationslänge in den vorherigen Abschnitten zeigt, daß sich für seine numerische Bestimmung zwei Möglichkeiten eröffnen.

Dies äußert sich darin, daß in die Bestimmungsgleichung (6.10) neben der dimensionslosen renormierten Kopplung der kritische Exponent ν eingeht, den wir entweder als Literaturwert vorgeben oder in Gestalt der zugehörigen Renormierungsgruppenfunktion (4.32) als Entwicklung in u_{R^\pm} verwenden können. Im letzteren Fall

ist dann der einzige vorzugebende Parameter der Fixpunktwert der renormierten Kopplung, der gemäß den Überlegungen aus Abschnitt 4.3 gerade die Theorie am kritischen Punkt beschreibt. Durch Einsetzen dieses Fixpunktes in die Reihenentwicklungen des Verhältnisses f_+/f_- und des Exponenten ν erhalten wir somit eine Approximation deren universeller Werte.

Mit den Ergebnissen der 2-Loop-Rechnung ist natürlich nur eine näherungsweise Bestimmung dieser Größen möglich, da für eine genaue Analyse der Reihen zu wenige Ordnungen zur Verfügung stehen. Ausgehend von den bekannten Korrekturkoeffizienten 1. und 2. Ordnung kann man deshalb bestenfalls Abschätzungen über die Relevanz der weiteren Ordnungen machen.

Zur numerischen Auswertung unserer Reihen verwende ich die Methode der rationalen Approximanten (PADÉ-Analyse), wie sie in [SIE93] diskutiert ist. Dabei bezeichnen wir die polynomiale Approximation einer Potenzreihe, die bis einschließlich zur 2. Ordnung gegeben ist, kurz als $[2,0]$ -PADÉ, während die Funktionen $[1,1]$ -PADÉ und $[0,2]$ -PADÉ die gebrochenrationalen Approximanten dieser Reihe darstellen.

6.4.1 Hochtemperaturfixpunkt $u_{R^+}^*$

Ich werte die Entwicklungen der kritischen Größen $\nu(u_{R^+})$ und $\frac{f_+}{f_-}(u_{R^+})$ für die zwei speziellen Werte des Fixpunktes der renormierten Kopplung der Hochtemperaturphase

$$\begin{aligned} u_{R^+}^* &= 23.73(8); & [\text{GZJ80, ZJ82}], \text{RG in } D = 3 \\ u_{R^+}^* &= 24.56(10); & [\text{SIE93}], \text{HT-Entwicklung} \end{aligned} \quad (6.50)$$

aus.

Kommentierung der Tabellen:

- Tabelle 6.1:
Bestimmung des kritischen Exponenten ν aus der Reihe (6.29).
- Tabelle 6.2:
Bestimmung des universellen Amplitudenverhältnisses f_+/f_- aus der Reihe (6.42) gemäß

$$\frac{f_+}{f_-} = \left[2 \frac{F_-}{F_+}(u_{R^+}^*) \right]^\nu, \quad (6.51)$$

wobei für den kritischen Exponenten ν die Literaturwerte

$$\begin{aligned} \nu &= 0.6300(15); & [\text{GZJ80, ZJ82}], \text{RG in } D = 3 \\ \nu &= 0.627(9); & [\text{DEC85}], \text{TT-Entwicklung} \\ \nu &= 0.624(2); & [\text{BGHP92}], \text{MC-RG} \end{aligned}$$

vorgegeben werden.

- Tabelle 6.3:

Bestimmung des universellen Amplitudenverhältnisses f_+/f_- aus der Reihe (6.44).

6.4.2 Tieftemperaturfixpunkt $u_{R^-}^*$

Nun werte ich die Entwicklungen der kritischen Größen $\nu(u_{R^-})$ und $\frac{f_+}{f_-}(u_{R^-})$ für zwei spezielle Werte des Fixpunktes der renormierten Kopplung der Tieftemperaturphase

$$\begin{aligned} u_{R^-}^* &= 14.73(14); & [\text{SIE93}], \text{TT-Entwicklung} \\ u_{R^-}^* &= 15.1(1.3); & \text{indirekt aus [TF75, AH76, BG80]} \end{aligned} \quad (6.52)$$

aus.

Kommentierung der Tabellen:

- Tabelle 6.4:

Bestimmung des kritischen Exponenten ν aus der Reihe (6.39).

- Tabelle 6.5:

Bestimmung des universellen Amplitudenverhältnisses f_+/f_- aus der Reihe (6.47) gemäß

$$\frac{f_+}{f_-} = \left[2 \frac{F_-}{F_+} (u_{R^-}^*) \right]^\nu, \quad (6.53)$$

wobei man für den kritischen Exponenten ν wieder die obigen Literaturwerte vorgibt.

- Tabelle 6.6:

Bestimmung des universellen Amplitudenverhältnisses f_+/f_- aus der Reihe (6.49).

Vorgaben		Kritischer Exponent ν		
Fixpunkt u_{R+}^*		[2,0]-PADÉ	[1,1]-PADÉ	[0,2]-PADÉ
23.73(8)		0.6142	0.6144	0.6044
24.56(10)		0.6182	0.6182	0.6072

Tab. 6.1: Numerische Werte des kritischen Exponenten ν nach Vorgabe verschiedener Werte des Fixpunktes u_{R+}^* .

Vorgaben		Amplitudenverhältnis f_+/f_-		
Exponent ν	Fixpunkt u_{R+}^*	[2,0]-PADÉ	[1,1]-PADÉ	[0,2]-PADÉ
0.6300(15)	23.73(8)	2.2348	2.2663	2.0716
	24.56(10)	2.2605	2.2956	2.0775
0.627(9)	23.73(8)	2.2263	2.2575	2.0644
	24.56(10)	2.2518	2.2865	2.0703
0.624(2)	23.73(8)	2.2178	2.2487	2.0570
	24.56(10)	2.2431	2.2775	2.0630

Tab. 6.2: Numerische Werte des Amplitudenverhältnisses f_+/f_- nach Vorgabe verschiedener Werte des Exponenten ν und des Fixpunktes u_{R+}^* .

Vorgaben		Amplitudenverhältnis f_+/f_-		
Fixpunkt u_{R+}^*		[2,0]-PADÉ	[1,1]-PADÉ	[0,2]-PADÉ
23.73(8)		2.1623	2.2373	2.2229
24.56(10)		2.1947	2.2793	2.2627

Tab. 6.3: Numerische Werte des Amplitudenverhältnisses f_+/f_- nach Vorgabe verschiedener Werte des Fixpunktes u_{R+}^* .

Vorgaben		Kritischer Exponent ν		
Fixpunkt u_{R-}^*		[2,0]-PADÉ	[1,1]-PADÉ	[0,2]-PADÉ
14.73(14)		0.5672	0.4966	0.5767
15.1(1.3)		0.5711	0.4966	0.5818

Tab. 6.4: Numerische Werte des kritischen Exponenten ν nach Vorgabe verschiedener Werte des Fixpunktes u_{R-}^* .

Vorgaben		Amplitudenverhältnis f_+/f_-		
Exponent ν	Fixpunkt u_{R-}^*	[2,0]-PADÉ	[1,1]-PADÉ	[0,2]-PADÉ
0.6300(15)	14.73(14)	2.0122	2.0497	2.0329
	15.1(1.3)	2.0255	2.0660	2.0546
0.627(9)	14.73(14)	2.0055	2.0426	2.0323
	15.1(1.3)	2.0187	2.0588	2.0476
0.624(2)	14.73(14)	1.9988	2.0356	2.0255
	15.1(1.3)	2.0119	2.0517	2.0406

Tab. 6.5: Numerische Werte des Amplitudenverhältnisses f_+/f_- nach Vorgabe verschiedener Werte des Exponenten ν und des Fixpunktes u_{R-}^* .

Vorgaben		Amplitudenverhältnis f_+/f_-		
Fixpunkt u_{R-}^*		[2,0]-PADÉ	[1,1]-PADÉ	[0,2]-PADÉ
14.73(14)		1.8030	1.9052	1.8590
15.1(1.3)		1.8159	1.9292	1.8771

Tab. 6.6: Numerische Werte des Amplitudenverhältnisses f_+/f_- nach Vorgabe verschiedener Werte des Fixpunktes u_{R-}^* .

6.4.3 Diskussion

Zunächst seien in Tabelle 6.7 eine Reihe weiterer Literaturwerte der hier untersuchten universellen Größen zusammengestellt, die auf unterschiedlichen Bestimmungsmethoden beruhen.

Literaturwerte universeller Größen		
Bestimmungsmethode	ν	f_+/f_-
ϵ -Entwicklung	0.6310(15)	1.91
RG in $D = 3$	0.6300(15), 0.6298(7)	
HT/TT-Entwicklung	0.6305(15)	1.96(3), 1.96(1), 1.94(3)
Binäre Fluide (exp.)	0.625(10)	2.04(20), 2.22(5), 1.9(2)

Tab. 6.7: Aus [ZJ89, BB85, TF75, LF89, SIE93, KKG83] entnommene Literaturwerte.

Beim Betrachten der vorstehenden Tabellen stellt man generell fest, daß die Störungsreihen der Hochtemperaturphase auf höhere Zahlenwerte führen als diejenigen der Tieftemperaturphase, was z.T. durch die Größe der zugehörigen Fixpunkte (6.50) und (6.52) bedingt ist. Im Falle des Exponenten ν fällt auf, daß die Resultate der gebrochenen Phase (Tab. 6.4) noch merklich unterhalb der Literaturwerte liegen, während diese in der symmetrischen Phase bereits durch die 2-Loop-Rechnung gut reproduziert werden. Die Gestalt der zugrundeliegenden Reihen (6.29) und (6.39) zeigt allerdings, daß die 2-Loop-Beiträge bei einem Fixpunkt von $u_{R+}^* \approx 24$ bzw. $u_{R-}^* \approx 15$ etwa 1% bzw. 18% der führenden Terme betragen, so daß in der Tieftemperaturphase von der 3. Störungsordnung noch deutliche Korrekturen zu erwarten sind.

Die Werte des Amplitudenverhältnisses der Korrelationslänge liegen fast alle oberhalb der angegebenen Literaturwerte. Beim genaueren Hinschauen erkennt man zunächst als Konsequenz der vorstehenden Beobachtung, daß die Diskrepanz zwischen den Werten, in die nur die Fixpunkte $u_{R\pm}$ eingehen (Tab. 6.3, Tab. 6.6) und denen, die auch die Kenntnis von ν verlangen (Tab. 6.2, Tab. 6.5), in der Phase gebrochener Symmetrie ausgeprägter ist. Deshalb wird man wohl grundsätzlich den Werten, die auf einer Vorgabe des Fixpunktwertes der renormierten Kopplung und des kritischen Exponenten ν beruhen, mehr Beachtung schenken. Ein Vergleich der Tabellen 6.2 und 6.5 miteinander gibt einen Hinweis darauf, die Tieftemperaturkopplung u_{R-} als den geeigneteren Entwicklungsparameter anzusehen, da dort die PADÉ-Approximanten eine wesentlich geringere Abweichung untereinander zeigen als diejenigen in der Hochtemperaturkopplung u_{R+} . Dieser Eindruck erhärtet sich, wenn man die Größenordnung der störungstheoretischen Korrekturen 1. und 2. Ordnung in den Reihen (6.42) und (6.47) bzw. (6.44) und (6.49) für die Verhältnisse F_-/F_+ und f_+/f_- abschätzt. Diese haben in Hoch- und Tieftemperaturphase (bis

auf evtl. konstante Vorfaktoren) die Struktur

$$1 + a_{\pm}^{(1)} u_{R\pm} + a_{\pm}^{(2)} u_{R\pm}^2 + O(u_{R\pm}^3),$$

und die Koeffizienten ergeben sich näherungsweise zu

$$a_+^{(1)} = 2.73 \times 10^{-2}, \quad a_+^{(2)} = 2.53 \times 10^{-4}; \quad a_-^{(1)} = 2.73 \times 10^{-2}, \quad a_-^{(2)} = 5.24 \times 10^{-4},$$

bzw.

$$a_+^{(1)} = 1.72 \times 10^{-2}, \quad a_+^{(2)} = 2.18 \times 10^{-4}; \quad a_-^{(1)} = 1.28 \times 10^{-2}, \quad a_-^{(2)} = 3.97 \times 10^{-4}.$$

Wenn wir in der symmetrischen Phase wieder einen Fixpunktwert von $u_{R+}^* \approx 24$ annehmen, betragen die Korrekturen 1. Ordnung etwa 66% bzw. 41% der Terme 0. Ordnung und die Korrekturen 2. Ordnung beide Male ungefähr 9% der Terme 0. und 1. Ordnung. In der Phase gebrochener Symmetrie, bei einem Fixpunkt von $u_{R-}^* \approx 15$, nehmen die entsprechenden Beiträge etwa 41% bzw. 19% und 8% bzw. 7% der führenden Terme ein. Dies legt wiederum den Schluß nahe, daß die Reihenentwicklungen in der Tieftemperaturvariablen bessere Konvergenzeigenschaften³ besitzen als diejenigen in der Hochtemperaturvariablen, denn bei einer Einbeziehung weiterer Ordnungen ist in letzterem Fall mit prozentual größeren Korrekturen zu rechnen.

Nach Mittelwertbildung und Angabe der maximalen Abweichungen zu einzelnen Werten formuliere ich aus den Tabellen 6.2 und 6.5, deren Einträge ein breites Spektrum möglicher Vorgaben einschließen, ein zusammenfassendes Endergebnis meiner Rechnungen. In der Hochtemperaturkopplung ist

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-} = 2.18(12)}, \quad (6.54)$$

und in der Tieftemperaturkopplung erhält man

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-} = 2.03(4)}. \quad (6.55)$$

Eine Fehlerrechnung ist in diesem Zusammenhang nicht sinnvoll, da die perturbativen Rechnungen keine Fehlerangaben ermöglichen. Dennoch ist aufgrund der erhaltenen Resultate nicht auszuschließen, daß das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge tatsächlich größer als die in Tabelle 6.7 zu findenden Werte ist.

Abschließend sei hinzugefügt, daß eine PADÉ–BOREL–Transformation, wie sie in [BNM78, GZJ80, BB85, BBMN87] verwendet wird, die Numerik der obigen Störungsreihen 2. Ordnung nicht verbessert. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, daß — wie in den zitierten Arbeiten angedeutet — eine sinnvolle Anwendung dieser Methode erst dann gerechtfertigt ist, wenn eine höhere Zahl von Ordnungen der zu analysierenden Reihe und damit gleichzeitig das asymptotische Verhalten ihrer Koeffizienten bekannt sind.

³Es wird jedoch keineswegs behauptet, daß die Reihen überhaupt konvergieren!

Kapitel 7

Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität

Die störungstheoretischen Rechnungen, die in erster Linie der Bestimmung des Amplitudenverhältnisses der Korrelationslänge galten, können auch auf das universelle Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität ausgedehnt werden. Seine Berechnung bis einschließlich zur 2. Ordnung in der renormierten dimensionslosen Kopplung ist deshalb ebenfalls Gegenstand des Interesses.

Hierzu gehe ich wie in Kapitel 6 vor, indem ich zunächst eine geeignete Bestimmungsgleichung für das gesuchte Verhältnis herleite und dieses anschließend als Potenzreihe in einer Kopplungsvariablen \bar{u}_R schreibe, die zuvor an den Fixpunkt der renormierten Kopplung in der Hoch- bzw. Tieftemperaturphase angeglichen worden ist.

7.1 Herleitung der Bestimmungsgleichung

Die Suszeptibilität χ divergiert in beiden Phasen bei Annäherung an den kritischen Punkt $T = T_c$ gemäß (1.13) nach dem Gesetz

$$\chi \sim C_{\pm} |t|^{-\gamma}, \quad t := \frac{T - T_c}{T_c}.$$

In Verallgemeinerung ihrer thermodynamischen Definition (1.5) steht die Suszeptibilität mit den feldtheoretischen Größen in jeder Phase über die Beziehung

$$\frac{1}{\chi} = -\Gamma^{(2,0)}(0; m_0, g_0) \quad (7.1)$$

in Zusammenhang, und mit (4.18) und (4.19a) folgt daraus

$$\frac{1}{\chi} = -\frac{1}{Z_3(u_R)} \Gamma_R^{(2,0)}(0; m_R, u_R) = \frac{m_R^2}{Z_3(u_R)}. \quad (7.2)$$

Verwendet man von nun an wieder die Konventionen aus 6.1, so ist zu beobachten, daß das singuläre Verhalten der Suszeptibilität in der jeweiligen Phase durch

$$\frac{1}{m_{R^\pm}^2} = \frac{C_\pm t_\pm^{-\gamma}}{Z_{3^\pm}(u_{R^\pm})} \quad (7.3)$$

mit der renormierten Masse (bzw. der Korrelationslänge) veknüpft ist. Ich bilde jetzt den Quotienten dieser Gleichungen und erhalte

$$\frac{C_+}{C_-} = \frac{m_{R^+}^2}{m_{R^-}^2} \frac{Z_{3^+}(u_{R^+})}{Z_{3^-}(u_{R^-})} \left(\frac{t_+}{t_-} \right)^\gamma. \quad (7.4)$$

Nach einer Wahl von Punkten im Phasendiagramm mit

$$m_{R^+} = m_{R^-}$$

hat man dann einerseits

$$\frac{C_+}{C_-} = \frac{Z_{3^+}(u_{R^+})}{Z_{3^-}(u_{R^-})} \left(\frac{t_+}{t_-} \right)^\gamma \quad (7.5)$$

und andererseits nach (6.9) wieder

$$\frac{t_+}{t_-} = 2 \frac{F_-(u_{R^-})}{F_+(u_{R^+})}.$$

Führt man jetzt genau wie zuvor in beiden Phasen die renormierte Kopplung \bar{u}_R ein, die je nach Anpassung an die renormierte Kopplung der anderen Phase den Hoch- bzw. Tieftemperaturfixpunkt besitzt, so ergibt sich daraus für das universelle Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität die Gleichung

$$\boxed{\frac{C_+}{C_-} = \frac{Z_{3^+}(u_{R^+}(\bar{u}_R))}{Z_{3^-}(u_{R^-}(\bar{u}_R))} \left[2 \frac{F_-(u_{R^-}(\bar{u}_R))}{F_+(u_{R^+}(\bar{u}_R))} \right]^\gamma}. \quad (7.6)$$

Mit (6.10) und dem Skalengesetz (1.15b)

$$\gamma = \nu(2 - \eta)$$

kann man dieses Verhältnis auch auf das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge zurückführen:

$$\frac{C_+}{C_-} = \frac{Z_{3^+}(u_{R^+}(\bar{u}_R))}{Z_{3^-}(u_{R^-}(\bar{u}_R))} \left[\frac{f_+}{f_-}(\bar{u}_R) \right]^{\gamma/\nu} = \frac{Z_{3^+}(u_{R^+}(\bar{u}_R))}{Z_{3^-}(u_{R^-}(\bar{u}_R))} \left[\frac{f_+}{f_-}(\bar{u}_R) \right]^{2-\eta}. \quad (7.7)$$

Die Beziehungen zwischen \bar{u}_R und u_{R^+} bzw. u_{R^-} kann ich dabei unverändert aus dem vorstehenden Kapitel übernehmen.

7.2 Renormierungsgruppenfunktion γ

Im Hinblick auf (7.6) und (7.7) führen wir durch

$$\gamma_{\pm}(u_{R^{\pm}}) := \nu_{\pm}(u_{R^{\pm}}) \left(2 - \eta_{3^{\pm}}(u_{R^{\pm}}) \right) \quad (7.8)$$

in beiden Phasen eine weitere Renormierungsgruppenfunktion ein, aus der sich der kritische Exponent γ durch

$$\gamma = \gamma_{\pm}(u_{R^{\pm}}^*) \quad (7.9)$$

ergibt. Mit Hilfe der Resultate aus 6.2 ist diese Funktion als Entwicklung in der Hoch- bzw. Tieftemperaturkopplung leicht anzugeben.

7.2.1 Symmetrische Phase

Mit den Gleichungen (6.27) und (6.29) für die Renormierungsgruppenfunktionen η_{3^+} und ν_+ , d.h.

$$\eta_{3^+}(u_{R^+}) = \frac{1}{2592\pi^2} u_{R^+}^2 \left(1 + O(u_{R^+}) \right)$$

und

$$\nu_+(u_{R^+}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{32\pi} u_{R^+} - \frac{11}{82944\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3) \right),$$

erhalte ich aus (7.8):

$$\gamma_+(u_{R^+}) = 1 + \frac{1}{32\pi} u_{R^+} - \frac{1}{3072\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3). \quad (7.10)$$

7.2.2 Phase gebrochener Symmetrie

Mit den Gleichungen (6.37) und (6.39) für die Renormierungsgruppenfunktionen η_{3^-} und ν_- , d.h.

$$\eta_{3^-}(u_{R^-}) = \frac{1}{64\pi} u_{R^-} \left(1 + \frac{10}{81\pi} u_{R^-} + O(u_{R^-}^2) \right)$$

und

$$\nu_-(u_{R^-}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{128\pi} u_{R^-} + \frac{10325}{1327104\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right),$$

ergibt sich ebenfalls nach (7.8):

$$\gamma_-(u_{R^-}) = 1 - \frac{1}{64\pi} u_{R^-} + \frac{169}{24576\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3). \quad (7.11)$$

7.3 Bestimmung von C_+/C_-

Bei der Bestimmung des Amplitudenverhältnisses C_+/C_- halten ich mich an die Vorgehensweise aus Abschnitt 6.3 und führe in beiden Phasen wieder eine Kopplung \bar{u}_R ein, die zu den Kopplungen u_{R^+} und u_{R^-} in eindeutiger Beziehung steht und in deren Abhängigkeit sich das gesuchte Verhältnis bis einschließlich zur 2. Ordnung angeben läßt.

7.3.1 Entwicklung in der Hochtemperaturkopplung

Die Renormierungskonstante Z_{3^+} ist nach (6.21) durch

$$Z_{3^+}(u_{R^+}) = 1 - \frac{1}{5184\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3)$$

gegeben, und mit (6.31) und (6.40) findet man

$$\begin{aligned} Z_{3^-}(\bar{u}_R) &= Z_{3^-}(u_{R^-}) \Big|_{u_{R^-}=u_{R^-}(\bar{u}_R)} \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{64\pi} u_{R^-} - \frac{1693}{663552\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right\} \Big|_{u_{R^-}=u_{R^-}(\bar{u}_R)} \\ &= 1 - \frac{1}{64\pi} \bar{u}_R - \frac{1369}{663552\pi^2} \bar{u}_R^2 + O(\bar{u}_R^3). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Wegen $\bar{u}_R^* = u_{R^+}^*$ identifiziert man \bar{u}_R mit u_{R^+} und erhält

$$\frac{Z_{3^+}}{Z_{3^-}}(u_{R^+}) = 1 + \frac{1}{64\pi} u_{R^+} + \frac{1403}{663552\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3). \quad (7.13)$$

Andererseits kenne ich nach (6.42) bereits

$$\frac{F_-}{F_+}(u_{R^+}) = 1 + \frac{11}{128\pi} u_{R^+} + \frac{41}{16384\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3),$$

so daß ich durch Entwicklung der Bestimmungsgleichung (7.6) das Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität in Abhängigkeit vom kritischen Exponenten γ als Potenzreihe 2. Ordnung in $\bar{u}_R = u_{R^+}$ erhalte:

$$\begin{aligned} \frac{C_+}{C_-}(u_{R^+}; \gamma) &= \frac{Z_{3^+}}{Z_{3^-}}(u_{R^+}) \left[2 \frac{F_-}{F_+}(u_{R^+}) \right]^\gamma \\ &= 2^\gamma \left(1 + \frac{2 + 11\gamma}{128\pi} u_{R^+} + \frac{5612 + 405\gamma + 9801\gamma^2}{2654208\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3) \right). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Mit (7.10) findet sich in Abhängigkeit von u_{R^+} allein:

$$\begin{aligned}
\frac{C_+}{C_-}(u_{R^+}) &= \frac{Z_{3^+}}{Z_{3^-}}(u_{R^+}) \left[2 \frac{F_-}{F_+}(u_{R^+}) \right]^{\gamma_+(u_{R^+})} \\
&= 2 \left\{ 1 + \left(\frac{13}{128\pi} + \frac{1}{32\pi} \ln 2 \right) u_{R^+} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{11473}{1327104\pi^2} + \frac{35}{12288\pi^2} \ln 2 + \frac{1}{2048\pi^2} \ln^2 2 \right) u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3) \right\}.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Dasselbe Resultat liegt vor, wenn die Gleichung (7.7) und das in 6.3.1 bestimmte Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge (6.44) verwendet wird.

Ferner ist zu bemerken, daß die dreidimensionale Störungstheorie, wie zu erwarten, Korrekturen zu dem bekannten Mean-Field-Wert $(C_+/C_-)_{MF} = 2$ liefert, der sich in (7.15) durch den Beitrag 0. Ordnung zu erkennen gibt.

7.3.2 Entwicklung in der Tieftemperaturkopplung

Für die Renormierungskonstante Z_{3^-} gilt nach (6.31) die Entwicklung

$$Z_{3^-}(u_{R^-}) = 1 - \frac{1}{64\pi} u_{R^-} - \frac{1693}{663552\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3),$$

und mit (6.21) und (6.45) ist

$$\begin{aligned}
Z_{3^+}(\bar{u}_R) &= Z_{3^+}(u_{R^+}) \Big|_{u_{R^+}=u_{R^+}(\bar{u}_R)} \\
&= \left\{ 1 - \frac{1}{5184\pi^2} u_{R^+}^2 + O(u_{R^+}^3) \right\} \Big|_{u_{R^+}=u_{R^+}(\bar{u}_R)} \\
&= 1 - \frac{1}{5184\pi^2} \bar{u}_R^2 + O(\bar{u}_R^3).
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Da ich \bar{u}_R hier gerade so gewählt habe, daß $\bar{u}_R^* = u_{R^-}^*$ gilt, kann $\bar{u}_R = u_{R^-}$ gesetzt werden, so daß sich

$$\frac{Z_{3^+}}{Z_{3^-}}(u_{R^-}) = 1 + \frac{1}{64\pi} u_{R^-} + \frac{1727}{663552\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \tag{7.17}$$

ergibt. Nach (6.47) ist außerdem

$$\frac{F_-}{F_+}(u_{R^-}) = 1 + \frac{11}{128\pi} u_{R^-} + \frac{85}{16384\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3),$$

woraus mit (7.6) für das Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität in Abhängigkeit von γ zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{C_+}{C_-}(u_{R^-}; \gamma) &= \frac{Z_{3^+}}{Z_{3^-}}(u_{R^-}) \left[2 \frac{F_-}{F_+}(u_{R^-}) \right]^\gamma \\
&= 2^\gamma \left(1 + \frac{2 + 11\gamma}{128\pi} u_{R^-} + \frac{6908 + 7533\gamma + 9801\gamma^2}{2654208\pi^2} u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right)
\end{aligned} \tag{7.18}$$

resultiert. Nimmt man Gleichung (7.11) hinzu, so liefert eine Reihenentwicklung bis zur 2. Ordnung in u_{R^-} das Ergebnis

$$\begin{aligned} \frac{C_+}{C_-}(u_{R^-}) &= \frac{Z_{3+}}{Z_{3-}}(u_{R^-}) \left[2 \frac{F_-}{F_+}(u_{R^-}) \right]^{\gamma-(u_{R^-})} \\ &= 2 \left\{ 1 + \left(\frac{13}{128\pi} - \frac{1}{64\pi} \ln 2 \right) u_{R^-} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{10339}{1327104\pi^2} + \frac{65}{12288\pi^2} \ln 2 + \frac{1}{8192\pi^2} \ln^2 2 \right) u_{R^-}^2 + O(u_{R^-}^3) \right\}, \end{aligned} \quad (7.19)$$

welches ebenfalls aus (7.7) und (6.49) erhältlich ist, und dessen Struktur demjenigen der symmetrischen Phase entspricht.

7.4 Numerische Ergebnisse

Für die numerische Bestimmung des Amplitudenverhältnisses der Suszeptibilität mit Hilfe der vorstehenden Gleichungen ergeben sich wieder zwei Möglichkeiten, da man diesmal den kritischen Exponenten γ sowohl als Literaturwert als auch über die Renormierungsgruppenfunktion (7.8) als Entwicklung in der dimensionslosen renormierten Kopplung vorgeben kann.

Wie in Abschnitt 6.4 werden dazu neben den zugehörigen Reihen selbst auch deren PADÉ-Approximanten herangezogen.

7.4.1 Hochtemperaturfixpunkt $u_{R^+}^*$

Ich werte die Entwicklungen der kritischen Größen $\gamma(u_{R^+})$, $\eta(u_{R^+})$ und $\frac{C_+}{C_-}(u_{R^+})$ für die zwei speziellen Werte (6.50) des Fixpunktes der renormierten Kopplung der Hochtemperaturphase $u_{R^+}^*$ aus.

Kommentierung der Tabellen:

- Tabelle 7.1:

Bestimmung des kritischen Exponenten γ aus der Reihe (7.10).

- Tabelle 7.2:

Bestimmung des kritischen Exponenten η aus der Reihe (6.27). Da in der symmetrischen Phase die Terme 0. und 1. Ordnung verschwinden, ist nur die [2,0]-PADÉ-Approximation möglich.

- Tabelle 7.3:

Bestimmung des universellen Amplitudenverhältnisses C_+/C_- aus der Reihe (7.14), wobei man für den kritischen Exponenten γ die Literaturwerte

$$\begin{aligned}\gamma &= 1.250(1); & [\text{GG74}]; \text{HT-Entwicklung} \\ \gamma &= 1.241(2); & [\text{GZJ80, ZJ82}]; \text{RG in } D = 3 \\ \gamma &= 1.237(2); & [\text{BGHP92}]; \text{MC-RG}\end{aligned}$$

vorgibt.

- Tabelle 7.4:

Bestimmung des universellen Amplitudenverhältnisses C_+/C_- aus der Reihe (7.15).

7.4.2 Tieftemperaturfixpunkt $u_{R^-}^*$

Nun werte ich die Entwicklungen der kritischen Größen $\gamma(u_{R^-})$, $\eta(u_{R^-})$ und $\frac{C_+}{C_-}(u_{R^-})$ für die zwei speziellen Werte (6.52) des Fixpunktes der renormierten Kopplung der Tieftemperaturphase $u_{R^-}^*$ aus.

Kommentierung der Tabellen:

- Tabelle 7.5:

Bestimmung des kritischen Exponenten γ aus der Reihe (7.11).

- Tabelle 7.6:

Bestimmung des kritischen Exponenten η aus der Reihe (6.37). Da in der gebrochenen Phase der Term 0. Ordnung verschwindet, sind hier nur die [2,0]– und [1,1]–PADÉ–Approximanten möglich.

- Tabelle 7.7:

Bestimmung des universellen Amplitudenverhältnisses C_+/C_- aus der Reihe (7.18), wobei man für den kritischen Exponenten γ wieder die obigen Literaturwerte vorgibt.

- Tabelle 7.8:

Bestimmung des universellen Amplitudenverhältnisses C_+/C_- aus der Reihe (7.19).

Vorgaben	Kritischer Exponent γ		
	[2,0]-PADÉ	[1,1]-PADÉ	[0,2]-PADÉ
Fixpunkt u_{R+}^*			
23.73(8)	1.2175	1.2188	1.1930
24.56(10)	1.2244	1.2259	1.1972

Tab. 7.1: Numerische Werte des kritischen Exponenten γ nach Vorgabe verschiedener Werte des Fixpunktes u_{R+}^* .

Vorgaben	Kritischer Exponent η
Fixpunkt u_{R+}^*	[2,0]-PADÉ
23.73(8)	0.0219
24.56(10)	0.0233

Tab. 7.2: Numerische Werte des kritischen Exponenten η nach Vorgabe verschiedener Werte des Fixpunktes u_{R+}^* .

Vorgaben		Amplitudenverhältnis C_+/C_-		
Exponent γ	Fixpunkt u_{R+}^*	[2,0]-PADÉ	[1,1]-PADÉ	[0,2]-PADÉ
1.250(1)	23.73(8)	5.6847	6.7621	5.0204
	24.56(10)	5.8400	7.0770	5.0618
1.241(2)	23.73(8)	5.6246	6.6745	4.9912
	24.56(10)	5.7772	6.9826	5.0348
1.237(2)	23.73(8)	5.5976	6.6366	4.9787
	24.56(10)	5.7496	6.9422	5.0225

Tab. 7.3: Numerische Werte des Amplitudenverhältnisses C_+/C_- nach Vorgabe verschiedener Werte des Exponenten γ und des Fixpunktes u_{R+}^* .

Vorgaben	Amplitudenverhältnis C_+/C_-		
	[2,0]-PADÉ	[1,1]-PADÉ	[0,2]-PADÉ
Fixpunkt $u_{R^+}^*$			
23.73(8)	5.1001	7.5635	6.3233
24.56(10)	5.2534	8.1888	6.6368

Tab. 7.4: Numerische Werte des Amplitudenverhältnisses C_+/C_- nach Vorgabe verschiedener Werte des Fixpunktes $u_{R^+}^*$.

Vorgaben	Kritischer Exponent γ		
	[2,0]-PADÉ	[1,1]-PADÉ	[0,2]-PADÉ
Fixpunkt $u_{R^-}^*$			
14.73(14)	1.0779	0.9761	1.0782
15.1(1.3)	1.0838	0.9759	1.0847

Tab. 7.5: Numerische Werte des kritischen Exponenten γ nach Vorgabe verschiedener Werte des Fixpunktes $u_{R^-}^*$.

Vorgaben	Kritischer Exponent η	
	[2,0]-PADÉ	[1,1]-PADÉ
Fixpunkt $u_{R^-}^*$		
14.73(14)	0.1157	0.1739
15.1(1.3)	0.1196	0.1846

Tab. 7.6: Numerische Werte des kritischen Exponenten η nach Vorgabe verschiedener Werte des Fixpunktes $u_{R^-}^*$.

Vorgaben		Amplitudenverhältnis C_+/C_-		
Exponent γ	Fixpunkt u_{R-}^*	[2,0]–PADÉ	[1,1]–PADÉ	[0,2]–PADÉ
1.250(1)	14.73(14)	4.3739	4.8928	4.8155
	15.1(1.3)	4.4400	5.0109	4.9246
1.241(2)	14.73(14)	4.3324	4.8404	4.7680
	15.1(1.3)	4.3977	4.9566	4.8750
1.237(2)	14.73(14)	4.3142	4.8179	4.7473
	15.1(1.3)	4.3791	4.9331	4.8535

Tab. 7.7: Numerische Werte des Amplitudenverhältnisses C_+/C_- nach Vorgabe verschiedener Werte des Exponenten γ und des Fixpunktes u_{R-}^* .

Vorgaben		Amplitudenverhältnis C_+/C_-		
Fixpunkt u_{R-}^*		[2,0]–PADÉ	[1,1]–PADÉ	[0,2]–PADÉ
14.73(14)		3.3572	4.1012	3.9804
15.1(1.3)		3.4043	4.2368	4.0980

Tab. 7.8: Numerische Werte des Amplitudenverhältnisses C_+/C_- nach Vorgabe verschiedener Werte des Fixpunktes u_{R-}^* .

7.4.3 Diskussion

Zunächst sind in Tabelle 7.9 einige weitere Literaturwerte der soeben erhaltenen universellen Größen angegeben.

Literaturwerte universeller Größen		
Bestimmungsmethode	γ	C_+/C_-
ϵ -Entwicklung	1.2390(25)	4.81
RG in $D = 3$	1.2405(15), 1.2407(12)	4.77(30)
HT/TT-Entwicklung	1.2385(25)	5.03(5), 4.95(15), 4.82(5)
Binäre Fluide (exp.)	1.24(1.0)	4.3(3)

Tab. 7.9: Aus [ZJ89, BB85, BBMN87, TF75, LF89, SIE93] entnommene Literaturwerte.

Die Untersuchung der Tabellen dieses Abschnitts bestätigt die Erkenntnisse, die bereits am Ende des vorigen Kapitels gewonnen worden sind. Die Literaturwerte der kritischen Exponenten γ und η (z.B. $\eta = 0.032(3)$ nach [ZJ89]) sind in der symmetrischen Phase (Tab. 7.1, Tab. 7.2) durch die 2-Loop-Rechnung recht gut bestätigt. In der gebrochenen Phase (Tab. 7.5, Tab. 7.6) sind diesbezüglich noch deutliche Abweichungen zu vermerken, die möglicherweise durch die Einbeziehung weiterer Ordnungen modifiziert werden, da in den Reihen (7.10) bzw. (7.11) die 2-Loop-Beiträge nur 2% bzw. noch 17% der ersten beiden Terme betragen.

Dementsprechend wende ich mich gleich den Tabellen 7.3 und 7.7 zu, in denen für das Amplitudenverhältnis der Suszeptibilität verschiedene Werte der Fixpunkte der renormierten Kopplungen $u_{R^\pm}^*$ und des Exponenten γ vorgegeben sind. Auch hier bemerkt man, daß die PADÉ-Approximanten der Reihen in der Hochtemperaturvariablen wesentlich weiter streuen als diejenigen in der Tieftemperaturvariablen. Wenn man die Größenordnung der Beiträge 1. und 2. Ordnung in den Reihen (7.13) und (7.17) bzw. (7.15) und (7.19) betrachtet, die in das Verhältnis C_+/C_- eingehen, so lauten bei einer Reihenstruktur von

$$1 + a_{\pm}^{(1)} u_{R^\pm} + a_{\pm}^{(2)} u_{R^\pm}^2 + O(u_{R^\pm}^3)$$

die Koeffizienten näherungsweise

$$a_+^{(1)} = 4.96 \times 10^{-3}, \quad a_+^{(2)} = 2.13 \times 10^{-4}; \quad a_-^{(1)} = 4.96 \times 10^{-3}, \quad a_-^{(2)} = 2.63 \times 10^{-4},$$

bzw.

$$a_+^{(1)} = 3.93 \times 10^{-2}, \quad a_+^{(2)} = 1.09 \times 10^{-3}; \quad a_-^{(1)} = 2.90 \times 10^{-2}, \quad a_-^{(2)} = 1.17 \times 10^{-3}.$$

Die Korrekturen 1. und 2. Ordnung betragen dann in der symmetrischen Phase ($u_{R^\pm}^* \approx 24$) etwa 12% bzw. 94% und 11% bzw. 33% der führenden Terme; in der

Phase gebrochener Symmetrie ($u_{R-}^* \approx 15$) hat man stattdessen etwa 7% bzw. 43% und 6% bzw. 18% der führenden Terme. Insgesamt bestätigt sich also die schon gezogene Schlußfolgerung, daß die Tieftemperaturkopplung u_{R-} als Entwicklungsparameter in den Störungsreihen zu bevorzugen ist.

Zusammenfassend erhalte ich als Abschätzung des Endresultats in der Hochtemperaturkopplung

$$\boxed{\frac{C_+}{C_-} = 6.03(1.05)} , \quad (7.20)$$

und in der Tieftemperaturkopplung findet man entsprechend

$$\boxed{\frac{C_+}{C_-} = 4.66(36)} . \quad (7.21)$$

Insbesondere der letzte Wert steht in guter Übereinstimmung mit der Literatur.

Kapitel 8

Konsistenzrechnungen in 1–Loop–Ordnung

Dieses abschließende Kapitel ist einigen Betrachtungen gewidmet, die die perturbative Bestimmung universeller Größen abrunden sollen. In diesem Zusammenhang gehe ich auf die Bedeutung der physikalischen Masse ein und stelle einen Vergleich mit der ϵ –Entwicklung an. Außerdem diskutiere ich kurz die Verwendung einer PAULI–VILLARS–Regularisierung.

Abweichend von einer früheren Vereinbarung wird jetzt sowohl in der Hoch– als auch in der Tieftemperaturphase eine renormierte Kopplung über den Wert der 4–Punkt–Vertexfunktion definiert. Die zugehörigen in $D = 3$ bzw. $D = 4$ dimensionslosen Kopplungen bezeichne ich im folgenden mit $u_{R^\pm}^{(4)}$ bzw. $g_{R^\pm}^{(4)}$, während ich für die durch den Vakuumerwartungswert des Feldes definierten Kopplungen die Symbole u_{R^-} bzw. g_{R^-} beibehalten.

Alle Rechnungen sind in 1. Störungsordnung ausgeführt. (Im Fall der gebrochenen Phase bestätigen sich dabei einige Resultate aus [MÜN89, MÜN90].)

8.1 Dreidimensionale Rechnungen

In Analogie zu (4.19c) lautet die Renormierungsbedingung für die über die 4–Punkt–Vertexfunktion definierte renormierte Kopplung der Tieftemperaturphase:

$$\Gamma_R^{(4,0)}(\{0\}; m_{R^-}, u_{R^-}^{(4)}) = -m_{R^-} u_{R^-}^{(4)} = -g_{R^-}^{(4)}. \quad (8.1)$$

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Bestimmung des Amplitudenverhältnisses der Korrelationslänge über die physikalische Masse; dazu ist diese zuvor als Funktion der nackten Masse zu berechnen.

8.1.1 Renormierte Kopplungen der gebrochenen Phase

In Kapitel 4 ist die renormierte Kopplung der Tieftemperaturphase durch den Vakuumerwartungswert des Feldes definiert worden. Das 1–Loop–Resultat ist nach (5.14)

durch

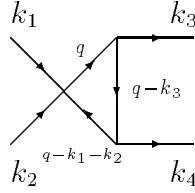
$$g_{R^-} = g_0 \left\{ 1 - \frac{7}{32\pi} u_{0^-} (1 + O(\epsilon)) + O(u_{0^-}^2) \right\} = g_0 (1 + O(u_{0^-})), \quad (8.2a)$$

bzw. nach (5.16) durch

$$u_{0^-} = u_{R^-} \left\{ 1 + \frac{31}{128\pi} u_{R^-} (1 + O(\epsilon)) + O(u_{R^-}^2) \right\} = u_{R^-} (1 + O(u_{R^-})) \quad (8.2b)$$

gegeben. Es soll jetzt wie in der symmetrischen Phase eine renormierte Kopplung über die 4-Punkt-Vertexfunktion bei verschwindenden äußeren Impulsen eingeführt werden. Diese besitzt in 1-Loop-Ordnung zusätzlich zur symmetrischen Phase die folgenden Beiträge (mit äußeren Impulsen \mathbf{k}_i , $i = 1, \dots, 4$, und $\mathbf{l} := \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$):

- Graph $\mathcal{G}_5^{(4)}(\mathbf{k}_i)$ (6 Permutationen mit Symmetriefaktor 1):

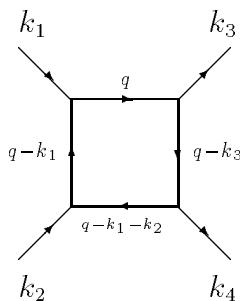


$$\begin{aligned} &= -g_0 \left(-\sqrt{3g_0} m_{0^-} \right)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(\mathbf{q}) \tilde{\Delta}(\mathbf{q} - \mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{q} - \mathbf{k}_3) \\ &= -3m_{0^-}^2 g_0^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m_{0^-}^2)[(\mathbf{q} - \mathbf{l})^2 + m_{0^-}^2][(\mathbf{q} - \mathbf{k}_3)^2 + m_{0^-}^2]}, \end{aligned}$$

und damit

$$\mathcal{G}_5^{(4)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) = -3m_{0^-}^2 g_0^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m_{0^-}^2)^3} = -3m_{0^-}^2 g_0^2 J_3(D).$$

- Graph $\mathcal{G}_6^{(4)}(\mathbf{k}_i)$ (3 Permutationen mit Symmetriefaktor 1):



$$\begin{aligned}
&= \left(-\sqrt{3g_0}m_{0-} \right)^4 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(\mathbf{q}) \tilde{\Delta}(\mathbf{q} - \mathbf{l}) \tilde{\Delta}(\mathbf{q} - \mathbf{k}_1) \tilde{\Delta}(\mathbf{q} - \mathbf{k}_3) \\
&= 9m_{0-}^4 g_0^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m_{0-}^2)[(\mathbf{q} - \mathbf{l})^2 + m_{0-}^2]} \times \\
&\quad \times \frac{1}{[(\mathbf{q} - \mathbf{k}_1)^2 + m_{0-}^2][(q - \mathbf{k}_3)^2 + m_{0-}^2]},
\end{aligned}$$

d.h. für beliebiges D ist

$$\mathcal{G}_6^{(4)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) = 9m_{0-}^4 g_0^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m_{0-}^2)^4} = 9m_{0-}^4 g_0^2 J_4(D).$$

In $D = 3$ sind alle beitragenden Integrale endlich, und ich entnehme Abschnitt 3.1:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^{(4,0)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) &= -g_0 + \frac{3}{2} I_1(\mathbf{0}; 3) + 6 \left(-3m_{0-}^2 g_0^2 J_3(3) \right) + 3 \left(9m_{0-}^4 g_0^2 J_4(3) \right) + O(g_0^3) \\
&= -g_0 + \frac{3}{16\pi m_{0-}} g_0^2 - \frac{9}{16\pi m_{0-}} g_0^2 + \frac{27}{64\pi m_{0-}} g_0^2 + O(g_0^3) \\
&= -g_0 + \frac{3}{64\pi m_{0-}} g_0^2 + O(g_0^3).
\end{aligned}$$

Mit (8.1) folgt

$$g_{R-}^{(4)} = g_0 \left\{ 1 - \frac{5}{64\pi} u_{0-} + O(u_{0-}^2) \right\} = g_0 \left(1 + O(u_{0-}) \right), \quad (8.3a)$$

und nach der Invertierung ist

$$u_{0-} = u_{R-}^{(4)} \left\{ 1 + \frac{13}{128\pi} u_{R-}^{(4)} + O((u_{R-}^{(4)})^2) \right\} = u_{R-}^{(4)} \left(1 + O(u_{R-}^{(4)}) \right). \quad (8.3b)$$

Die beide renormierten Kopplungen hängen über die Beziehung

$$u_{R-}^{(4)} = u_{R-} \left\{ 1 + \frac{9}{64\pi} u_{R-} (1 + O(\epsilon)) + O(u_{R-}^2) \right\} = u_{R-} \left(1 + O(u_{R-}) \right) \quad (8.4)$$

zusammen und sind in 1. Ordnung gleich.

8.1.2 Physikalische Masse

In Abschnitt 1.2 haben wir die Korrelationslänge sowohl über das 2. Moment als auch über das Abfallverhalten der verbundenen 2-Punkt-Funktion $G_c^{(2,0)}(x)$ im Ortsraum definiert. In der Mean-Field-Approximation (Abschnitt 1.5) hat sich gezeigt, daß sie im Impulsraum als Inverses der Polstelle des nackten Propagators gegeben ist. Neben ihrer Definition (4.7) als inverse renormierte Masse können wir also auch nach dem Abfallverhalten der *renormierten* 2-Punkt-Funktion fragen, welches im Impulsraum durch die Polstelle des renormierten vollen Propagators bzw. durch die Nullstelle der renormierten 2-Punkt-Vertexfunktion $\Gamma_R^{(2,0)}(p)$ bestimmt ist.

Die zugehörige Masse bezeichnet man (nach [LW87a, MM93]) als die physikalische Masse m_{ph} , die durch die Gleichung

$$\Gamma_R^{(2,0)}(\mathbf{p}) = 0, \quad \mathbf{p} = (im_{ph}, 0, 0) \quad (8.5)$$

bestimmt ist. Sie ist ebenfalls perturbativ als Potenzreihe in der nackten Kopplung berechenbar und von der renormierten Masse verschieden. Wir ordnen der physikalischen Masse eine Korrelationslänge ξ zu, die durch

$$\xi = \frac{1}{m_{ph}} \quad (8.6)$$

gegeben ist. Ich berechne jetzt das zugehörige universelle Amplitudenverhältnis mit der Methode aus 6.1 in 1. Störungsordnung.

Symmetrische Phase

Nach (8.5) ist

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2,0)}(\mathbf{p}) &= Z_3 \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) = m_{ph+}^2 - m_{0+}^2 \left\{ 1 - \frac{1}{8\pi} u_{0+} (1 + O(\epsilon)) + O(u_{0+}^2) \right\} \\ &\stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

und damit

$$m_{ph+}^2 = m_{0+}^2 \left\{ 1 - \frac{1}{8\pi} u_{0+} (1 + O(\epsilon)) + O(u_{0+}^2) \right\} = m_{R+}^2 \left\{ 1 + O((u_{R+}^{(4)})^2) \right\}. \quad (8.7)$$

In 1. Ordnung sind physikalische und renormierte Masse gleich, da in der symmetrischen Phase kein impulsabhängiger Graph beiträgt. Wir haben also:

$$m_{0+}^2 = m_{ph+}^2 \left\{ 1 + \frac{1}{8\pi} u_{R+}^{(4)} (1 + O(\epsilon)) + O((u_{R+}^{(4)})^2) \right\}. \quad (8.8)$$

Phase gebrochener Symmetrie

Hier ist das impulsabhängige Integral $I_1(\mathbf{p}; 3)$ zu berücksichtigen. Mit (8.5) ist

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2,0)}(\mathbf{p}) &= Z_3 \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \\ &= m_{ph-}^2 \left(1 - \frac{1}{64\pi} u_{0-} + O(u_{0-}^2) \right) - m_{0-}^2 \left\{ 1 + \frac{15}{64\pi} u_{0-} (1 + O(\epsilon)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{16\pi} u_{0-} \int_0^1 dx \left(1 - \frac{m_{ph-}^2}{m_{0-}^2} x(1-x) \right)^{-1/2} + O(u_{0-}^2) \right\} \\ &\stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

und damit

$$m_{ph-}^2 = m_{0-}^2 \left\{ 1 + \frac{1}{8\pi} u_{0-} \left[2 - \frac{3}{2} \int_0^1 dx \left(1 - \frac{m_{ph-}^2}{m_{0-}^2} x(1-x) \right)^{-1/2} + O(\epsilon) \right] + O(u_{0-}^2) \right\}.$$

Wegen

$$m_{ph-}^2 = m_{0-}^2 \left(1 + O(u_{0-}) \right),$$

liefert die Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x(1-x)}} &= \arcsinh x \Big|_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = 2 \arcsinh \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \ln 3, \quad \arcsinh x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

für die physikalische Masse

$$\begin{aligned} m_{ph-}^2 &= m_{0-}^2 \left\{ 1 + \frac{1}{8\pi} u_{0-} \left[2 - \frac{3}{2} \ln 3 + O(\epsilon) \right] + O(u_{0-}^2) \right\} \\ &= m_{R-}^2 \left\{ 1 + \frac{1}{8\pi} u_{R-}^{(4)} \left[\frac{13}{8} - \frac{3}{2} \ln 3 + O(\epsilon) \right] + O((u_{R-}^{(4)})^2) \right\}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Dieselbe Relation besteht auch in der Kopplung u_{R-} , und das Verhältnis

$$\frac{m_{R-}}{m_{ph-}} \approx 1 + 4.56 \times 10^{-4} u_{R-} + O(u_{R-}^2) \quad (8.10)$$

deutet an, daß m_{R-} und m_{ph-} in 1. Ordnung bereits nahezu übereinstimmen. Die Invertierung von (8.9) ergibt:

$$m_{0-}^2 = m_{ph-}^2 \left\{ 1 - \frac{1}{8\pi} u_{R-}^{(4)} \left[2 - \frac{3}{2} \ln 3 + O(\epsilon) \right] + O((u_{R-}^{(4)})^2) \right\}. \quad (8.11)$$

Bestimmung von f_+/f_-

Es findet wieder die in Kapitel 6 vorgestellte Methode Verwendung. Ich nenne die Hochtemperaturkopplung $u_{R+}^{(4)}$ wieder u_{R+} und die Tieftemperaturkopplungen $u_{R-}^{(4)}$ und u_{R-} , die ja in 1. Ordnung übereinstimmen, einfach u_{R-} .

Nach (8.6) ist die Korrelationslänge als die inverse physikalische Masse definiert, so daß man in den Gleichungen (6.1a)–(6.3b) einfach die renormierten Massen $m_{R\pm}$ durch die physikalischen Massen $m_{ph\pm}$ ersetzen kann. Allerdings sind dort anstelle von F_\pm die Größen

$$G_\pm(u_{R\pm}) := \frac{\partial m_{ph\pm}^2}{\partial m_{0\pm}^2} \Big|_{g_0} \quad (8.12)$$

zu verwenden, die nach ihrer Berechnung durch $u_{R\pm}$ auszudrücken sind. Dies führt in Analogie zu Abschnitt 6.1 auf

$$2 \frac{G_-(u_{R-})}{G_+(u_{R+})} = \left(\frac{f_+}{f_-} \right)^2 \left(\frac{t_-}{t_+} \right)^{2\nu-1} = \left(\frac{m_{ph-}}{m_{ph+}} \right)^2 \frac{t_+}{t_-}. \quad (8.13)$$

Man betrachtet jetzt wieder Punktpaare mit

$$m_{ph+} = m_{ph-} \quad (8.14)$$

und führt in beiden Phasen die gemeinsame Kopplungsvariablen \bar{u}_R ein. Dies liefert (6.8) und (6.9) in der Form

$$\frac{f_+}{f_-} = \left(\frac{t_+}{t_-} \right)^\nu, \quad \frac{t_+}{t_-} = 2 \frac{G_-(u_{R^-}(\bar{u}_R))}{G_+(u_{R^+}(\bar{u}_R))}, \quad (8.15)$$

und das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge lautet dann

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-} = \left[2 \frac{G_-(u_{R^-}(\bar{u}_R))}{G_+(u_{R^+}(\bar{u}_R))} \right]^\nu}. \quad (8.16)$$

Die Bestimmung der Kopplung \bar{u}_R in (6.40) und (6.45) zeigt, daß sie in 1. Ordnung mit u_{R^+} und u_{R^-} identisch ist:

$$\bar{u}_R = u_{R^+} (1 + O(u_{R^+})) = u_{R^-} (1 + O(u_{R^-})). \quad (8.17)$$

Aufgrund der in beiden Phasen bei festem g_0 geltenden Beziehung

$$G_\pm(u_{R^\pm}) = \frac{\partial m_{ph\pm}^2}{\partial m_{0^\pm}^2} = \frac{\partial m_{R^\pm}^2}{\partial m_{0^\pm}^2} \frac{\partial m_{ph\pm}^2}{\partial m_{R^\pm}^2} = F_\pm(u_{R^\pm}) \frac{\partial m_{ph\pm}^2}{\partial m_{R^\pm}^2} \quad (8.18)$$

kann das Verhältnis f_+/f_- auch in Abhängigkeit der Funktionen F_\pm geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{f_+}{f_-} &= \left[2 \frac{F_-(u_{R^-}(\bar{u}_R))}{F_+(u_{R^+}(\bar{u}_R))} \right]^\nu \left[\frac{\partial m_{ph-}^2 / \partial m_{R^-}^2}{\partial m_{ph+}^2 / \partial m_{R^+}^2} (\bar{u}_R) \right]^\nu \\ &= \left[2 \frac{F_-(\bar{u}_R)}{F_+(\bar{u}_R)} \right]^\nu \left[\frac{\partial m_{ph-}^2}{\partial m_{R^-}^2} (\bar{u}_R) \right]^\nu (1 + O(\bar{u}_R^2)). \end{aligned} \quad (8.19)$$

In der zweiten Zeile ist angedeutet, daß in 1. Ordnung gemäß (8.17) alle renormierten Kopplungen sowie die physikalische und die renormierte Masse der symmetrischen Phase gleich sind.

Die Differentiation der Gleichungen (8.7) und (8.9) ergibt (nach Durchführung des Grenzwertes $\epsilon \rightarrow 0$) mit $\frac{\partial}{\partial m_0^2} = \frac{1}{2m_0} \frac{\partial}{\partial m_0}$ bei festem g_0

$$\begin{aligned} G_+(\bar{u}_R) &= \frac{\partial m_{ph+}^2}{\partial m_{0+}^2} \Big|_{u_{R^+}=u_{R^+}(\bar{u}_R)} = 1 - \frac{1}{16\pi} u_{0+} + O(u_{0+}^2) \\ &= 1 - \frac{1}{16\pi} \bar{u}_R + O(\bar{u}_R^2) \end{aligned} \quad (8.20)$$

und

$$\begin{aligned} G_-(\bar{u}_R) &= \frac{\partial m_{ph-}^2}{\partial m_{0-}^2} \Big|_{u_{R^-}=u_{R^-}(\bar{u}_R)} = 1 + \frac{1}{16\pi} u_{0-} \left(2 - \frac{3}{2} \ln 3 \right) + O(u_{0-}^2) \\ &= 1 + \frac{1}{16\pi} \bar{u}_R \left(2 - \frac{3}{2} \ln 3 \right) + O(\bar{u}_R^2), \end{aligned} \quad (8.21)$$

wobei ich zunächst die nackten durch die renormierten Kopplungen ersetzt und anschließend (8.17) verwendet habe. In 1. Ordnung kann man daher \bar{u}_R sowohl den Hochtemperaturfixpunkt u_{R+}^* als auch den Tieftemperaturfixpunkt u_{R-}^* zuschreiben. Daraus ergibt sich

$$\frac{G_-}{G_+}(\bar{u}_R) = 1 + \frac{1}{16\pi} \bar{u}_R \left(3 - \frac{3}{2} \ln 3 \right) + O(\bar{u}_R^2), \quad (8.22)$$

und man findet durch Entwickeln von (8.16) für das Amplitudenverhältnis f_+/f_- das Ergebnis

$$\frac{f_+}{f_-}(\bar{u}_R; \nu) = 2^\nu \left(1 + \frac{(3 - \frac{3}{2} \ln 3)\nu}{16\pi} \bar{u}_R + O(\bar{u}_R^2) \right). \quad (8.23)$$

Wenn man noch die Gestalt der Funktion $\nu = \nu_{\pm}(u_{R\pm})$ aus (6.29) und (6.39) in 1. Ordnung berücksichtigt, erhält man wieder Potenzreihen, die sich entweder auf den Hoch- oder den Tieftemperaturfixpunkt beziehen. In der symmetrischen Phase mit $\bar{u}_R^* = u_{R+}^*$ ist

$$\nu_+(\bar{u}_R) = \frac{1}{2} + \frac{1}{64\pi} \bar{u}_R + O(\bar{u}_R^2),$$

so daß aus (8.23)

$$\frac{f_+}{f_-}(\bar{u}_R) = \sqrt{2} \left\{ 1 + \left(\frac{3}{32\pi} - \frac{3}{64\pi} \ln 3 + \frac{1}{64\pi} \ln 2 \right) \bar{u}_R + O(\bar{u}_R^2) \right\} \quad (8.24)$$

resultiert. In der gebrochenen Phase mit $\bar{u}_R^* = u_{R-}^*$ hat man

$$\nu_-(\bar{u}_R) = \frac{1}{2} - \frac{1}{256\pi} \bar{u}_R + O(\bar{u}_R^2),$$

und (8.23) liefert

$$\frac{f_+}{f_-}(\bar{u}_R) = \sqrt{2} \left\{ 1 + \left(\frac{3}{32\pi} - \frac{3}{64\pi} \ln 3 - \frac{1}{256\pi} \ln 2 \right) \bar{u}_R + O(\bar{u}_R^2) \right\}. \quad (8.25)$$

Eine numerische Abschätzung der 1-Loop-Korrekturen gewinnen wir durch Einsetzen des kritischen Exponenten ν und der Fixpunkte $u_{R\pm}^*$ in die polynomiale Approximation der Reihen (8.23), (8.24) und (8.25). Die entsprechenden Resultate sind in Tabelle 8.1 denjenigen aus Kapitel 6 (Gleichungen (6.43) bzw. (6.48), (6.44) und (6.49)) gegenübergestellt. Wie sich in (8.10) bereits abgezeichnet hat, ist das aus der physikalischen Masse hervorgehende Verhältnis f_+/f_- in 1. Ordnung nur geringfügig kleiner als das, welches über die renormierte Masse definiert ist. Zu höheren Ordnungen sind demnach fast verschwindende Abweichungen zu erwarten.

Vorgaben	Physikalische Masse		Renormierte Masse	
	Gleichung	f_+/f_-	Gleichung	f_+/f_-
$\bar{u}_R^* = 23.73(8)$ $\nu = 0.627(9)$	(8.23)	2.1625	(6.43)	2.1730
$\bar{u}_R^* = 14.73(14)$ $\nu = 0.627(9)$	(8.23)	1.9281	(6.48)	1.9346
$\bar{u}_R^* = 23.73(8)$	(8.24)	1.9813	(6.44)	1.9889
$\bar{u}_R^* = 14.73(14)$	(8.25)	1.6764	(6.49)	1.6812

Tab. 8.1: Amplitudenverhältnis f_+/f_- in 1. Ordnung. Gegenüberstellung von Werten, die auf die physikalische und die renormierte Masse zurückgehen.

8.1.3 PAULI–VILLARS–Regularisierung

Wir haben in Kapitel 3 bemerkt, daß die lineare Divergenz des 1–Loop–Integrals J_1 in drei Dimensionen durch eine dimensionelle Regularisierung (mit $D = 3 - \epsilon$) nicht als Pol in ϵ isoliert werden kann. Die dortige Rechnung lieferte vielmehr nur den endlichen Anteil dieses Integrals, so daß sich strenggenommen nicht beurteilen läßt, ob diese Divergenz die Endresultate beeinflußt. Dies will ich jetzt am Beispiel der dreidimensionalen 1–Loop–Rechnung nachholen, indem ich die PAULI–VILLARS–Regularisierung aus Abschnitt 3.2 heranziehe¹.

Wenn man die Störungsrechnung in 1. Ordnung aus Kapitel 5 mit dem PAULI–VILLARS–regularisierten Integral $J_1(\Lambda; 3)$ aus (3.35) wiederholt, so findet man für die renormierten Massen in der symmetrischen und der gebrochenen Phase

$$m_{R+}^2 = m_{0+}^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{8\pi} - \frac{\Lambda}{8\pi m_{0+}} \right) u_{0+} + O(u_{0+}^2) \right\} \quad (8.26a)$$

und

$$m_{R-}^2 = m_{0-}^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\Lambda}{4\pi m_{0-}} - \frac{3}{64\pi} \right) u_{0-} + O(u_{0-}^2) \right\}. \quad (8.26b)$$

Für die nackten und renormierten Kopplungen beider Phasen gilt einfach

$$u_{0\pm} = u_{0\pm}(u_{R\pm}) = u_{R\pm} \left(1 + O(u_{R\pm}) \right), \quad (8.27)$$

so daß wir für endliches Λ die in (6.10) vorkommenden Größen F_{\pm} als Funktionen von $u_{R\pm}$ berechnen können. Es ergibt sich mit $\frac{\partial}{\partial m_0^2} = \frac{1}{2m_0} \frac{\partial}{\partial m_0}$

$$F_+(u_{R+}) = \frac{\partial m_{R+}^2}{\partial m_{0+}^2} \Big|_{u_{0+} = u_{0+}(u_{R+})} = \left\{ 1 - \frac{1}{16\pi} u_{0+} + O(u_{0+}^2) \right\} \Big|_{u_{0+} = u_{0+}(u_{R+})}$$

¹Diese Betrachtung erhebt allerdings nicht den Anspruch auf Vollständigkeit, da die möglichen Auswirkungen auf die 2–Loop–Rechnung, zu der die Divergenz des Integrals J_1 multiplikativ beiträgt, unberücksichtigt bleiben.

$$= 1 - \frac{1}{16\pi} u_{R^+} + O(u_{R^+}^2) \quad (8.28a)$$

und

$$\begin{aligned} F_-(u_{R^-}) = \frac{\partial m_{R^-}^2}{\partial m_{0^-}^2} \Big|_{u_{0^-} = u_{0^-}(u_{R^-})} &= \left\{ 1 + \frac{3}{128\pi} u_{0^-} + O(u_{0^-}^2) \right\} \Big|_{u_{0^-} = u_{0^-}(u_{R^-})} \\ &= 1 + \frac{3}{128\pi} u_{R^-} + O(u_{R^-}^2) \end{aligned} \quad (8.28b)$$

sowie schließlich in der gemeinsamen Kopplung \bar{u}_R

$$\frac{F_-}{F_+}(\bar{u}_R) = 1 + \frac{11}{128\pi} \bar{u}_R + O(\bar{u}_R^2). \quad (8.29)$$

Diese Gleichungen sind durch die Differentiation von Λ unabhängig geworden, und der Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ existiert. Die Renormierungsgruppenfunktionen $\nu_{\pm}(u_{R^{\pm}})$, die nach (6.10) ebenfalls in die Berechnung von f_+/f_- eingehen und aufgrund ihrer Definition (4.32) aus den in $D = 3$ endlichen Renormierungskonstanten $Z_{3\pm}$ und $Z_{2\pm}$ hervorgehen, sind a priori divergenzfrei, so daß die weiteren Rechnungen wie in Kapitel 6 verlaufen.

Die Gleichungen, die man dann für das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge vorfindet, stimmen mit den Ergebnissen (6.44) und (6.49) überein, und es ist damit zumindest in 1. Ordnung der Beweis erbracht, daß die dreidimensionalen Rechnungen von der Divergenz des Integrals J_1 unberührt bleiben.

8.2 Vergleich mit der ϵ -Entwicklung

In der Einleitung ist bereits das wesentliche Prinzip dieser Entwicklung skizziert worden:

Ausgehend von einer renormierten (masselosen) Theorie kann nach Durchführung einer Massenrenormierung mit Methoden der Renormierungsgruppe die massive Theorie in Hoch- und Tieftemperaturphase rekonstruiert werden, wobei in der damit verbundenen Störungsrechnung nur die Diagramme der symmetrischen Phase berücksichtigt zu werden brauchen. Durch die Berechnung der zugehörigen Impulsintegrale in der (nicht notwendig ganzzahligen) Dimension $D = 4 - \epsilon$ gelangt man zu Renormierungskonstanten und Renormierungsgruppenfunktionen, die von der dimensionslosen renormierten Kopplung und dem Parameter ϵ abhängig sind. Dies entspricht einer Entwicklung um die Dimension $D = 4$, unterhalb derer man nicht zu vernachlässigende Korrekturen zum Mean-Field-Verhalten konstatiert. Der Fixpunkt der renormierten Kopplung, der mit der nichttrivialen Nullstelle der β -Funktion identisch ist, wird dann eine Funktion von ϵ allein, so daß sich die kritischen universellen Größen als Potenzreihen in ϵ ergeben. Im Rahmen dieser Rechnungen hat sich schließlich gezeigt, daß im Fall $\epsilon = 1$ ($D = 3$) eine gute numerische Übereinstimmung mit auf andere Methoden zurückgehenden Werten besteht.

Für das Amplitudenverhältnis der Korrelationslänge, die durch die inverse renormierte Masse definiert ist, ist nach [BGZJ74, BGZJ76] das Resultat

$$\frac{f_+}{f_-} = 2^\nu \left\{ 1 + \frac{5}{24} \epsilon + \frac{1}{432} \epsilon^2 \left(\frac{295}{24} + 2I \right) \right\} + O(\epsilon^3), \quad I \approx -2.3439 \quad (8.30)$$

bekannt, welches in 1. Ordnung mit der ϵ -Entwicklung des Exponenten ν

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \epsilon + \frac{21}{13122} \epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (8.31)$$

in

$$\frac{f_+}{f_-} = \sqrt{2} \left\{ 1 + \left(\frac{5}{24} + \frac{1}{12} \ln 2 \right) \epsilon + O(\epsilon^2) \right\} \stackrel{\epsilon=1}{\approx} 1.7905 \quad (8.32)$$

übergeht. Die durch das Inverse der physikalischen Masse definierte Korrelationslänge besitzt nach [BGZJ76] in der ϵ -Entwicklung das Amplitudenverhältnis

$$\begin{aligned} \frac{f_+}{f_-} &= 2^\nu \left\{ 1 + \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1 \right) \right\} + O(\epsilon^2) \\ &= \sqrt{2} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \ln 2 \right) \epsilon + O(\epsilon^2) \right\} \stackrel{\epsilon=1}{\approx} 1.7837. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Ich benutze jetzt die renormierte massive Theorie, um diese Ergebnisse zu verifizieren.

8.2.1 Renormierte Größen in $D = 4 - \epsilon$

Es sind zunächst alle Rechnungen des Kapitels 5 in der Dimension $D = 4 - \epsilon$ unter Beschränkung auf die 1. Störungsordnung zu wiederholen. Die dazu beitragenden, in $D = 4$ divergenten Impulsintegrale J_1 und I_1 habe ich zu diesem Zweck in Abschnitt 3.1 bereits berechnet, so daß die Resultate (3.6), (3.16) und (3.17) sofort übernommen werden können.

Da die nackte Kopplung g_0 die Massendimension $4 - D$ besitzt, ist allerdings bei der Definition der renormierten Kopplung zu beachten, daß im Renormierungsschema aus Abschnitt 4.2 die Kopplungen $g_{R\pm}^{(4)}$ und g_{R-} in $D = 4$ dimensionslose renormierte Kopplungen darstellen. Will man also dieses Renormierungsschema im Einklang mit der dimensionellen Regularisierung beibehalten, so sind im Fall $D = 4 - \epsilon < 4$ diejenigen Gleichungen, die die renormierten Kopplungen fixieren, durch Einführung einer Massenskala μ zu modifizieren. Diese wird sich zusammen mit den Divergenzen der Theorie bei der Berechnung physikalischer Größen fortheben.

In der symmetrischen Phase ersetzt man (4.19c) durch die Renormierungsbedingung

$$\Gamma_R^{(4,0)}(\{0\}; m_{R+}, g_{R+}^{(4)}) = -\mu^\epsilon g_{R+}^{(4)}, \quad (8.34)$$

die implizit die Kopplung $g_{R^+}^{(4)}$ definiert. In der Phase gebrochener Symmetrie führe ich durch

$$\Gamma_R^{(4,0)}(\{0\}; m_{R^-}, g_{R^-}^{(4)}) = -\mu^\epsilon g_{R^-}^{(4)} \quad (8.35)$$

die renormierte Kopplung $g_{R^-}^{(4)}$ ein. Die renormierte Kopplung g_{R^-} , die durch den Vakuumerwartungswert des Feldes bestimmt ist, gehorcht der Renormierungsbedingung

$$\frac{3}{v_R^2} \Gamma_R^{(2,0)}(0; m_{R^-}, g_{R^-}) = -\mu^\epsilon g_{R^-}. \quad (8.36)$$

Symmetrische Phase

Die beitragenden 1-Loop-Diagramme ergeben die folgenden Vertexfunktionen:

$$\begin{aligned} -\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) &= \mathbf{p}^2 + m_{0+}^2 - \frac{1}{2} \left(-g_0 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \right) + O(g_0^2) \\ &= \mathbf{p}^2 + m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} J_1(4 - \epsilon) + O(g_0^2) \\ &= \mathbf{p}^2 + m_{0+}^2 - g_0 \frac{m_{0+}^2}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0+}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right) + O(g_0^2) \end{aligned}$$

$$-\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) = m_{0+}^2 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0+}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\}$$

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} = 1 + O(g_0^2)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(4,0)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) &= \left(-g_0 + \frac{3}{2} g_0^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(\mathbf{q}) \tilde{\Delta}(\mathbf{q} - \mathbf{l}) + O(g_0^3) \right) \Big|_{k_i=0} \\ &= -g_0 + \frac{3}{2} g_0^2 I_1(\mathbf{0}; 4 - \epsilon) + O(g_0^3) \\ &= -g_0 + \frac{3}{2} \frac{g_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_{0+}^2}{4\pi} \right) - \gamma + O(\epsilon) \right) + O(g_0^3), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{p}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_4$ und $\mathbf{l} := \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ wieder die äußeren Impulse bezeichnen. Man findet also

$$Z_3 = \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} \right)^{-1} = 1 + O(g_0^2)$$

und daraus die renormierten Größen

$$\begin{aligned} m_{R^+}^2 &= -Z_3 \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) \\ &= m_{0^+}^2 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0^+}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\} \end{aligned} \quad (8.37)$$

und

$$\begin{aligned} g_{R^+}^{(4)} &= -\mu^{-\epsilon} Z_3^2 \Gamma_0^{(4,0)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) \\ &= \mu^{-\epsilon} g_0 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} 3 \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0^+}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\} \\ &= \mu^{-\epsilon} g_0 (1 + O(g_0)). \end{aligned} \quad (8.38)$$

Mit Hilfe der (in beiden Phasen gültigen) Entwicklungen

$$\mu^\epsilon = e^{\epsilon \ln \mu} = 1 + \epsilon \ln \mu + \frac{\epsilon^2}{2} \ln^2 \mu + O(\epsilon^3), \quad \ln \left(\frac{m_0^2}{m_{R^+}^2} \right) = \ln (1 + O(g_R)) = O(g_R)$$

löse ich diese Gleichungen zugunsten der nackten Parameter auf; in 1. Ordnung ergibt sich:

$$m_{0^+}^2 = m_{R^+}^2 \left\{ 1 + \frac{g_{R^+}^{(4)}}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{R^+}^2}{4\pi \mu^2} \right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right] + O((g_{R^+}^{(4)})^2) \right\} \quad (8.39)$$

und

$$\begin{aligned} g_0 &= \mu^\epsilon g_{R^+}^{(4)} \left\{ 1 + \frac{g_{R^+}^{(4)}}{16\pi^2} 3 \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{R^+}^2}{4\pi \mu^2} \right) - \frac{\gamma}{2} + O(\epsilon) \right] + O((g_{R^+}^{(4)})^2) \right\} \\ &= \mu^\epsilon g_{R^+}^{(4)} (1 + O(g_{R^+}^{(4)})). \end{aligned} \quad (8.40)$$

Phase gebrochener Symmetrie

In der gebrochenen Phase hat die 2-Punkt-Funktion die folgenden Beiträge:

$$\begin{aligned} -\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) &= \mathbf{p}^2 + m_{0^-}^2 - \frac{1}{2} \left(-g_0 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \left(-\sqrt{3g_0} m_{0^-} \right)^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(-\sqrt{3g_0} m_{0^-} \right)^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) \tilde{\Delta}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + O(g_0^2) \\ &= \mathbf{p}^2 + m_{0^-}^2 - g_0 J_1(4 - \epsilon) - \frac{3}{2} g_0 m_{0^-}^2 I_1(\mathbf{p}; 4 - \epsilon) + O(g_0^2) \\ &= \mathbf{p}^2 + m_{0^-}^2 - g_0 \frac{m_{0^-}^2}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0^-}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} - 1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{2} \int_0^1 dx \ln \left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m_{0^-}^2} x(1 - x) \right) + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \end{aligned}$$

$$-\Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) = m_{0-}^2 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0-}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} - 1 + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\}$$

$$-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} = 1 + \frac{1}{4} \frac{g_0}{16\pi^2} + O(g_0^2).$$

Die 4–Punkt–Vertexfunktion besitzt in 1–Loop–Ordnung zusätzlich zur symmetrischen Phase die im vorigen Abschnitt angeführten Diagramme. Da die zugehörigen Integrale auch in $D = 4$ existieren, erhält man aus ihren endlichen Beiträgen gemäß Abschnitt 3.1:

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(4,0)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) &= -g_0 + \frac{3}{2} I_1(\mathbf{0}; 4 - \epsilon) + 6 \left(-3m_{0-}^2 g_0^2 J_3(4) \right) \\ &\quad + 3 \left(9m_{0-}^4 g_0^2 J_4(4) \right) + O(g_0^3) \\ &= -g_0 + \frac{3}{2} \frac{g_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_{0-}^2}{4\pi} \right) - \gamma + O(\epsilon) \right) \\ &\quad - \frac{9}{16\pi^2} g_0^2 + \frac{9}{32\pi^2} g_0^2 + O(g_0^3) \\ &= -g_0 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} 3 \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0-}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} - \frac{3}{2} + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\}. \end{aligned}$$

Für die Berechnung der renormierten Kopplung g_{R-} benötigt man die 1–Punkt–Funktion des Feldes ϕ_{0-} , die sich im Impulsraum zu

$$\begin{aligned} G_c^{(1,0)} &= -\frac{1}{2} \sqrt{3g_0} m_{0-} \tilde{\Delta}(\mathbf{0}) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tilde{\Delta}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3g_0}}{m_{0-}} J_1(4 - \epsilon) + O(g_0^{3/2}) \\ &= \sqrt{3} m_{0-} \frac{g_0^{1/2}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0-}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right) + O(g_0^{3/2}) \end{aligned}$$

ergibt. Mit

$$Z_3 = \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} \right)^{-1} = 1 - \frac{1}{4} \frac{g_0}{16\pi^2} + O(g_0^2)$$

berechne ich wie in der symmetrischen Phase die renormierten Größen zu:

$$\begin{aligned} m_{R-}^2 &= -Z_3 \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{0}) \\ &= m_{0-}^2 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0-}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} - \frac{3}{4} + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\} \end{aligned} \tag{8.41}$$

$$\begin{aligned} g_{R-}^{(4)} &= -\mu^{-\epsilon} Z_3^2 \Gamma_0^{(4,0)}(\mathbf{k}_i = \mathbf{0}) \\ &= \mu^{-\epsilon} g_0 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} 3 \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0-}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} - \frac{4}{3} + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\} \\ &= \mu^{-\epsilon} g_0 (1 + O(g_0)). \end{aligned} \tag{8.42a}$$

Nach (8.36) findet man außerdem:

$$\begin{aligned} g_{R^-} &= \mu^{-\epsilon} g_0 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} 3 \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0^-}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{6} + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\} \\ &= \mu^{-\epsilon} g_0 (1 + O(g_0)). \end{aligned} \quad (8.42b)$$

Diese Kopplungen hängen über die Beziehung

$$g_{R^-}^{(4)} = g_{R^-} \left(1 + \frac{9}{2} \frac{g_{R^-}}{16\pi^2} + O(g_{R^-}^2) \right) = g_{R^-} (1 + O(g_{R^-})), \quad (8.43)$$

die keine Divergenz mehr enthält, zusammen und sind in 1. Ordnung gleich. (Es werden deshalb alle Gleichungen nur in der Kopplung g_{R^-} angegeben.) Wie vorher invertiert man zu

$$m_{0^-}^2 = m_{R^-}^2 \left\{ 1 + \frac{g_{R^-}}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{R^-}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{\gamma}{2} - \frac{3}{4} + O(\epsilon) \right] + O(g_{R^-}^2) \right\} \quad (8.44)$$

und

$$\begin{aligned} g_0 &= \mu^\epsilon g_{R^-}^{(4)} \left\{ 1 + \frac{g_{R^-}^{(4)}}{16\pi^2} 3 \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{R^-}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{\gamma}{2} - \frac{4}{3} + O(\epsilon) \right] + O((g_{R^-}^{(4)})^2) \right\} \\ &= \mu^\epsilon g_{R^-}^{(4)} (1 + O(g_{R^-}^{(4)})), \end{aligned} \quad (8.45a)$$

bzw.

$$\begin{aligned} g_0 &= \mu^\epsilon g_{R^-} \left\{ 1 + \frac{g_{R^-}}{16\pi^2} 3 \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{R^-}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{6} + O(\epsilon) \right] + O(g_{R^-}^2) \right\} \\ &= \mu^\epsilon g_{R^-} (1 + O(g_{R^-})). \end{aligned} \quad (8.45b)$$

Bestimmung von f_+/f_-

Um das Amplitudenverhältnis f_+/f_- in der ϵ -Entwicklung mit der Methode aus Abschnitt 6.1 zu bestimmen, habe ich zunächst die Größen F_\pm als Ableitungen des renormierten nach dem nackten Massenquadrat zu bestimmen und in einer gemeinsamen renormierten Kopplung auszudrücken. Die anschließend zu verwendenden ϵ -Entwicklungen der β -Funktion und des Exponenten ν werden hier nicht hergeleitet, sondern der Literatur entnommen.

Aus den Gleichungen (3.9a), (3.9b) und (3.17) folgt zunächst:

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2} J_1(4 - \epsilon) = -I_1(\mathbf{0}; 4 - \epsilon) = -\frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_0^2}{4\pi} \right) - \gamma + O(\epsilon) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2} I_1(\mathbf{p}; 4 - \epsilon) \Big|_{p^2=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial m_0^2} I_1(\mathbf{0}; 4 - \epsilon) = -2J_3(4) = -\frac{1}{16\pi^2 m_0^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial m_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 4 - \epsilon) \Big|_{p^2=0} \right) = \frac{1}{96\pi^2 m_0^4}.$$

Damit erhält man für $T > T_c$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{R^+}^2}{\partial m_{0+}^2} &= -\frac{\partial}{\partial m_{0+}^2} \left(Z_{3+} \Gamma_{0+}^{(2,0)}(\mathbf{0}) \right), \quad Z_{3+} = 1 + O(g_0^2) \\ &= \frac{\partial}{\partial m_{0+}^2} \left(m_{0+}^2 + \frac{g_0}{2} J_1(4 - \epsilon) + O(g_0^2) \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{g_0}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_{0+}^2}{4\pi} \right) - \gamma + O(\epsilon) \right) + O(g_0^2) \end{aligned}$$

und entsprechend für $T < T_c$ mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{R^-}^2}{\partial m_{0-}^2} &= -\frac{\partial}{\partial m_{0-}^2} \left(Z_{3-} \Gamma_{0-}^{(2,0)}(\mathbf{0}) \right) = Z_{3-} \frac{\partial}{\partial m_{0-}^2} \left(-\Gamma_{0-}^{(2,0)}(\mathbf{0}) - \Gamma_{0-}^{(2,0)}(\mathbf{0}) \frac{\partial}{\partial m_{0-}^2} Z_{3-} \right. \\ &= Z_{3-} \frac{\partial}{\partial m_{0-}^2} \left(m_{0-}^2 - g_0 J_1(4 - \epsilon) - \frac{3}{2} g_0 m_{0-}^2 I_1(\mathbf{0}; 4 - \epsilon) + O(g_0^2) \right) \\ &\quad - \Gamma_{0-}^{(2,0)}(\mathbf{0}) \frac{\partial}{\partial m_{0-}^2} \left(1 + \frac{3}{2} g_0 m_{0-}^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 4 - \epsilon) \Big|_{p^2=0} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{g_0}{16\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_{0-}^2}{4\pi} \right) - \gamma - \frac{5}{2} + O(\epsilon) \right) + O(g_0^2). \end{aligned}$$

Mit (8.39) und (8.40) bzw. (8.44) und (8.45b) ersetzt man die nackten durch die renormierten Größen, und nach Entwickeln von μ^ϵ resultieren

$$F_+(g_{R^+}^{(4)}) = 1 - \frac{g_{R^+}^{(4)}}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_{R^+}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \gamma + O(\epsilon) \right) + O((g_{R^+}^{(4)})^2), \quad (8.46)$$

bzw.

$$F_-(g_{R^-}) = 1 - \frac{g_{R^-}}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_{R^-}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \gamma - \frac{5}{2} + O(\epsilon) \right) + O(g_{R^-}^2). \quad (8.47)$$

Die Gültigkeit der Bestimmungsgleichung (6.10) setzt nun einerseits die Gleichheit

$$m_{R^+} = m_{R^-}$$

und andererseits die Existenz einer beiden Phasen gemeinsamen dimensionslosen renormierten Kopplung \bar{g}_R voraus, in der das Verhältnis F_-/F_+ entwickelt werden kann. Da die renormierten Kopplungen beider Phasen aber in 1. Ordnung übereinstimmen, erübrigst sich in dieser Rechnung die Einführung einer neuen Kopplung. Man verwendet deshalb in (8.46) und (8.47) die von nun an mit \bar{g}_R bezeichnete Hochtemperaturkopplung $g_{R^+}^{(4)}$, deren infrarotstabiler Fixpunkt in der ϵ -Entwicklung berechenbar ist. Bei der Division dieser Gleichungen fallen dann insbesondere der

Pol in ϵ und der Massenparameter μ heraus, und ich erhalte das im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ endliche Resultat

$$\frac{F_-}{F_+}(\bar{g}_R) = 1 + \frac{5}{64\pi^2} \bar{g}_R + O(\bar{g}_R^2). \quad (8.48)$$

Mit der bekannten ϵ -Entwicklung der β -Funktion

$$\beta(\tilde{g}_R) = -\epsilon \tilde{g}_R + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon + \frac{1}{2} \epsilon^2\right) \tilde{g}_R^2 + O(\tilde{g}_R^3), \quad \tilde{g}_R := \frac{2\bar{g}_R}{(4\pi)^2} \quad (8.49)$$

und ihrer nichtverschwindenden Nullstelle

$$\tilde{g}_R^* = \frac{2}{3} \epsilon + O(\epsilon^2), \quad (8.50)$$

erhalte ich

$$\frac{F_-}{F_+}(\epsilon) = 1 + \frac{5}{12} \epsilon + O(\epsilon^2). \quad (8.51)$$

Mit (6.10) und (8.31) bestätigt sich (8.30) durch eine Entwicklung bis zur 1. Ordnung in ϵ :

$$\frac{f_+}{f_-}(\epsilon) = \left[2 \frac{F_-}{F_+}(\epsilon) \right]^\nu = 2^\nu \left(1 + \frac{5}{24} \epsilon \right) + O(\epsilon^2). \quad (8.52)$$

Nach den Ausführungen aus Abschnitt 4.3 befindet sich die kritische Theorie für $D = 4$ im gaußschen Fixpunkt und kann demzufolge dort als frei bzw. nicht-wechselwirkend angesehen werden. Dies erlaubt eine für die Reproduktion der ϵ -Entwicklung (als Entwicklung um $D = 4$) geeignete Vereinfachung, da dann die kritische nackte Masse m_{0c} den Wert

$$m_{0c}^2 = 0 \quad (8.53)$$

annimmt, so daß die Gleichungen (6.1a) und (6.1b) auf Ebene von (2.36) und (2.41) jetzt

$$\frac{1}{m_{R^+}} = \xi_+ \sim f_+ t_+^{-\nu}, \quad t_+ = m_0^2|_{T>T_c} > 0 \quad (8.54a)$$

und

$$\frac{1}{m_{R^-}} = \xi_- \sim f_- t_-^{-\nu}, \quad t_- = -m_0^2|_{T<T_c} > 0 \quad (8.54b)$$

lauten, da t_+ und t_- positiv sind. Die Division dieser Gleichungen ergibt

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-} = \frac{\xi_+}{\xi_-} = \frac{m_{R^-}}{m_{R^+}}}. \quad (8.55)$$

Nach Einführung der Felder ϕ_{0+} und ϕ_{0-} , mit denen in der jeweiligen Phase Störungstheorie betrieben wird, ist nach (2.44) das Verhältnis der zugehörigen nackten Massen

$$\frac{m_{0-}^2}{m_{0+}^2} = 2. \quad (8.56)$$

Diese sind in (8.39) und (8.44) durch renormierte Größen ausgedrückt. In einer gemeinsamen renormierten Kopplung \bar{g}_R , für die ich in 1. Ordnung wieder diejenige der Hochtemperaturphase wähle, hat man

$$\begin{aligned} m_{0+}^2 &= m_{R+}^2 \left\{ 1 + \frac{\bar{g}_R}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{R+}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right] + O(\bar{g}_R^2) \right\} \\ m_{0-}^2 &= m_{R-}^2 \left\{ 1 + \frac{\bar{g}_R}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{R-}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{\gamma}{2} - \frac{3}{4} + O(\epsilon) \right] + O(\bar{g}_R^2) \right\}, \end{aligned}$$

und nach Einsetzen in (8.56) findet sich zunächst

$$\frac{m_{R+}^2}{m_{R-}^2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\bar{g}_R}{16\pi^2} \left[\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{R+}^2}{m_{R-}^2} \right) + O(\epsilon) \right] + O(\bar{g}_R^2) \right\}.$$

Diese Gleichung zeigt, daß anstelle von $m_{R+} = m_{R-}$ vielmehr

$$m_{R-}^2 = 2m_{R+}^2 \left(1 + O(\bar{g}_R) \right) \quad (8.57)$$

gilt. Die Entwicklung des Logarithmus liefert dann

$$\frac{m_{R+}^2}{m_{R-}^2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\bar{g}_R}{16\pi^2} \left[\frac{5}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 + O(\epsilon) \right] + O(\bar{g}_R^2) \right\},$$

so daß mit (8.55)

$$\frac{f_+}{f_-} = \sqrt{2} \left\{ 1 + \frac{\bar{g}_R}{16\pi^2} \left[\frac{5}{8} + \frac{1}{4} \ln 2 + O(\epsilon) \right] + O(\bar{g}_R^2) \right\} \quad (8.58)$$

folgt. Setzt man wieder den Fixpunkt (8.50) ein, so ergibt sich in Übereinstimmung mit (8.32):

$$\frac{f_+}{f_-} = \sqrt{2} \left\{ 1 + \left(\frac{5}{24} + \frac{1}{12} \ln 2 \right) \epsilon + O(\epsilon^2) \right\}. \quad (8.59)$$

8.2.2 Physikalische Masse

Die physikalische Masse ist durch die Bedingung

$$\Gamma_R^{(2,0)}(\mathbf{p}) = 0, \quad \mathbf{p} = (im_{ph}, 0, 0, 0) \quad (8.60)$$

bestimmt. Man betrachte wieder die durch die inverse physikalische Masse definierte Korrelationslänge (8.6), deren Amplitudenverhältnis in der ϵ -Entwicklung (8.33) ich jetzt herleite.

Dazu greife ich zunächst die für die dreidimensionale Rechnung verwendete Methode aus Abschnitt 8.1.2 auf, die im wesentlichen auf die Überlegungen des Abschnitts 6.1 zurückgeht. Anschließend wird der in 8.2.1 eingeschlagenen Weg beschritten, nach dem sich aufgrund der verschwindenden, kritischen nackten Masse das gesuchte Verhältnis einfach aus den Beziehungen

$$\frac{f_+}{f_-} = \frac{m_{ph-}}{m_{ph+}}, \quad \frac{m_{0-}^2}{m_{0+}^2} = 2 \quad (8.61)$$

bestimmen lässt. Ich berechne deshalb die physikalische Masse in beiden Phasen zunächst bis zur 1. Ordnung in Abhängigkeit der nackten Kopplung, um nach Invertierung dieser Relationen die nackte Masse als Funktion der physikalischen Masse und der renormierten Kopplung zu erhalten.

Symmetrische Phase

Die 1-Loop-Korrektur zur 2-Punkt-Funktion ist impulsunabhängig und mit (8.60) ergibt sich aus Abschnitt 8.2.1

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2,0)}(\mathbf{p}) &= Z_3 \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \\ &= m_{ph+}^2 - m_{0+}^2 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0+}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\} \\ &\stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

woraus sich mit (8.39) und (8.40) sofort

$$\begin{aligned} m_{ph+}^2 &= m_{0+}^2 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0+}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\} \\ &= m_{R+}^2 \left\{ 1 + O((g_{R+}^{(4)})^2) \right\} \end{aligned} \quad (8.62)$$

ergibt. In der symmetrischen Phase sind renormierte und physikalische Masse demnach in 1. Ordnung gleich.

Phase gebrochener Symmetrie

Hier ist das impulsabhängige Integral $I_1(\mathbf{p}; 4 - \epsilon)$ zu berücksichtigen, so daß man mit (8.60)

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(2,0)}(\mathbf{p}) &= Z_3 \Gamma_0^{(2,0)}(\mathbf{p}) \\ &= m_{ph-}^2 \left(1 - \frac{1}{4} \frac{g_0}{16\pi^2} + O(g_0^2) \right) - m_{0-}^2 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0-}^2}{4\pi} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\gamma}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \int_0^1 dx \ln \left(1 - \frac{m_{ph-}^2}{m_{0-}^2} x(1-x) \right) + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\} \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} m_{ph-}^2 &= m_{0-}^2 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0-}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} - 1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{3}{2} \int_0^1 dx \ln \left(1 - \frac{m_{ph-}^2}{m_{0-}^2} x(1-x) \right) + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\} \end{aligned}$$

erhält. Aufgrund von

$$m_{ph-}^2 = m_{0-}^2 (1 + O(g_0))$$

im Integranden und der partiellen Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \ln(1-x(1-x)) &= - \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + 1} \\ &= -2 \int_0^1 dx x + \frac{3}{2} \underbrace{\int_0^1 dx \frac{1}{x^2 - x + 1}}_{=2\pi/3\sqrt{3}} = -2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

findet man mit (8.44) und (8.45a) schließlich

$$\begin{aligned} m_{ph-}^2 &= m_{0-}^2 \left\{ 1 - \frac{g_0}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{0-}^2}{4\pi} \right) - \frac{\gamma}{2} + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi + O(\epsilon) \right] + O(g_0^2) \right\} \\ &= m_{R-}^2 \left\{ 1 - \frac{g_{R-}^{(4)}}{16\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right) + O((g_{R-}^{(4)})^2) \right\}. \end{aligned} \quad (8.63)$$

Wegen (8.45b) gilt dieselbe Gleichung auch in der renormierten Kopplung g_{R-} .

Bestimmung von f_+/f_-

Im Hinblick auf die Bestimmungsgleichung (8.16) berechne ich zuerst die Funktionen G_{\pm} in jeder Phase als partielle Ableitungen des physikalischen nach dem nackten Massenquadrat. Als Entwicklungsvariable wird gleich die renormierte Kopplung \bar{g}_R verwendet, die in 1. Ordnung mit den renormierten Kopplungen der Hoch- und Tieftemperaturphase übereinstimmt, und als Massenparameter in den \ln -Termen sind jetzt die physikalischen Massen $m_{ph\pm}$ zu benutzen, die in 0. Ordnung stets mit den renormierten Massen $m_{R\pm}$ übereinstimmen. Da die renormierte und die nackte Masse der symmetrischen Phase gemäß (8.62) in 1. Ordnung gleich sind, ist

$$G_+(\bar{g}_R) = 1 - \frac{\bar{g}_R}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_{ph+}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \gamma + O(\epsilon) \right) + O(\bar{g}_R^2). \quad (8.64)$$

In der gebrochenen Phase haben wir nach (8.63) in der Kopplung \bar{g}_R

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{ph-}^2}{\partial m_{0-}^2} &= \frac{\partial m_{R-}^2}{\partial m_{0-}^2} \left\{ 1 - \frac{\bar{g}_R}{16\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right) + O(\bar{g}_R^2) \right\} \\ &= F_-(\bar{g}_R) \left\{ 1 - \frac{\bar{g}_R}{16\pi^2} \left(\frac{11}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \pi \right) + O(\bar{g}_R^2) \right\}, \end{aligned}$$

und mit (8.47) ist dann

$$G_-(\bar{g}_R) = 1 - \frac{\bar{g}_R}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \ln \left(\frac{m_{ph-}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \gamma + 3 - \sqrt{3}\pi + O(\epsilon) \right) + O(\bar{g}_R^2). \quad (8.65)$$

Die Division dieser Gleichungen ergibt mit der Bedingung

$$m_{ph+} = m_{ph-}$$

die für $\epsilon \rightarrow 0$ endliche Relation

$$\frac{G_-}{G_+}(\bar{g}_R) = 1 - \frac{\bar{g}_R}{32\pi^2} (3 - \sqrt{3}\pi) + O(\bar{g}_R^2). \quad (8.66)$$

Nach Einsetzen des Fixpunktes (8.50) hat man

$$\frac{G_-}{G_+}(\epsilon) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) \epsilon + O(\epsilon^2), \quad (8.67)$$

und (8.31) führt mit (8.16) auf

$$\frac{f_+}{f_-}(\epsilon) = \left[2 \frac{G_-}{G_+}(\epsilon) \right]^\nu (1 + O(\epsilon^2)) = 2^\nu \left\{ 1 + \frac{\epsilon}{4} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1 \right) \right\} + O(\epsilon^2), \quad (8.68)$$

was mit (8.33) identisch ist.

Dieses Resultat verifiziert man auch unter der Voraussetzung (8.53), indem man die Gleichungen (8.62) und (8.63) in Abhängigkeit der renormierten Kopplungen nach den nackten Massen aufgelöst. In 1. Ordnung kann dabei in beiden Phasen die Kopplung \bar{g}_R verwendet werden, und das Ergebnis ist

$$m_{0+}^2 = m_{ph+}^2 \left\{ 1 + \frac{\bar{g}_R}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{ph+}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right] + O(\bar{g}_R^2) \right\} \quad (8.69a)$$

$$m_{0-}^2 = m_{ph-}^2 \left\{ 1 + \frac{\bar{g}_R}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{m_{ph-}^2}{4\pi\mu^2} \right) - \frac{\gamma}{2} + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\pi + O(\epsilon) \right] + O(\bar{g}_R^2) \right\}. \quad (8.69b)$$

Für die physikalischen Massen beider Phasen gilt wieder

$$m_{ph-}^2 = 2m_{ph+}^2 (1 + O(\bar{g}_R)), \quad (8.70)$$

so daß man mit (8.61)

$$\frac{m_{ph+}^2}{m_{ph-}^2} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\bar{g}_R}{16\pi^2} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\pi - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 + O(\epsilon) \right] + O(\bar{g}_R^2) \right\}$$

und

$$\frac{f_+}{f_-} = \sqrt{2} \left\{ 1 + \frac{\bar{g}_R}{16\pi^2} \left[\frac{\sqrt{3}}{4}\pi - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \ln 2 + O(\epsilon) \right] + O(\bar{g}_R^2) \right\} \quad (8.71)$$

erschließt. Durch Einsetzen des Fixpunktes (8.50) ergibt sich

$$\frac{f_+}{f_-} = \sqrt{2} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \ln 2 \right) \epsilon + O(\epsilon^2) \right\}, \quad (8.72)$$

was nach Entwickeln des Faktors 2^ν tatsächlich mit (8.33) übereinstimmt.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit ist das Ziel verfolgt worden, die universellen Amplitudenverhältnisse der Korrelationslänge f_+/f_- und der Suszeptibilität C_+/C_- für die Universalitätsklasse des dreidimensionalen, einkomponentigen ISING–Modells mit Methoden der Feldtheorie zu bestimmen. Die zugehörigen Rechnungen sind auf Grundlage einer störungstheoretischen Behandlung der $\phi_{D=3}^4$ –Theorie in symmetrischer und gebrochener Phase bis einschließlich zur 2. Ordnung durchgeführt worden. Der wesentliche Unterschied zu allen früheren Veröffentlichungen in dieser Richtung ist deshalb darin zu sehen, daß die feldtheoretischen Größen *beider* Phasen in die untersuchten Verhältnisse eingehen, die sich selbst aus Anteilen der Hoch– und der Tieftemperaturphase zusammensetzen. Da diese allerdings *a priori* durch unterschiedliche renormierte Kopplungen parametrisiert sind, setzt die Anwendung der Bestimmungsgleichungen (6.10) und (7.6) die Einführung einer beiden Phasen gemeinsamen Kopplung voraus, wie sie zu diesem Zweck geschehen ist.

Die numerische Auswertung der resultierenden Störungsreihen hat insbesondere den Schluß nahegelegt, daß die über den Vakuumerwartungswert des Feldes definierte Tieftemperaturkopplung u_{R-} die zuverlässigeren Resultate liefert. Ich nenne in diesem Zusammenhang stellvertretend noch einmal die Ergebnisse (6.55), d.h.

$$\boxed{\frac{f_+}{f_-} = 2.03(4)} ,$$

und (7.21):

$$\boxed{\frac{C_+}{C_-} = 4.66(36)} .$$

Zumindest im Falle des Verhältnisses f_+/f_- besteht also durchaus die Möglichkeit, daß sein exakter Wert oberhalb der meisten, bislang genannten Literaturwerte liegt.

Die durch die 4–Punkt–Vertexfunktion erklärte renormierte Kopplung in der Tieftemperaturphase habe ich hier nicht untersucht, da mir ein verlässlicher Wert ihres nichttrivialen Fixpunktes aus der Literatur nicht bekannt ist und somit eine sinnvolle Numerik ausgeschlossen ist.

Des weiteren hat sich die im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte Bestimmungsmethode für die gesuchten Amplitudenverhältnisse nachhaltig dadurch gerechtfertigt, daß sie — wie am Beispiel des Verhältnisses f_+/f_- in 1. Ordnung demonstriert — die bekannten Resultate der ϵ –Entwicklung reproduziert.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß nach der Berechnung von weiteren Ordnungen sehr wahrscheinlich mit einer Verbesserung der Ergebnisse zu rechnen ist. Das entscheidende Argument hierfür besteht darin, daß die Kenntnis möglichst vieler Glieder der (divergenten) Störungsreihen die schon erwähnte Anwendung einer BOREL–Summation erlaubt, die die Genauigkeit einer numerischen Analyse dieser Reihen erheblich steigern kann.

Anhang A

Differentiation nach äußeren Impulsen

Da das in Kapitel 4 vereinbarte Renormierungsschema unter anderem die Berechnung von nach dem äußeren Impulsquadrat differenzierten Integralen (bei verschwindenden äußeren Impulsen) beinhaltet, demonstriere ich hier die Ausführung dieser Differentiationen. Es bieten sich dafür im wesentlichen zwei Methoden an, so daß damit gleichzeitig die Überprüfung einiger Resultate möglich wird.

Ich behalte die in Kapitel 3 eingeführte Konvention bei, den Vektorcharakter der Impulse durch Fettdruck hervorzuheben.

A.1 Kovariante Rechnung

Die Verwendung der Identität für euklidische Impulse

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial p^2} &= \frac{1}{2D} \frac{\partial^2}{\partial p_\nu \partial p_\nu} = \frac{1}{2D} \sum_{\nu=1}^D \frac{\partial^2}{\partial p_\nu^2} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} &= \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial p_\nu \partial p_\nu} = \frac{1}{6} \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial p_\nu^2}, \quad D = 3\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

besitzt den Vorteil, daß man in massiven Impulsintegralen die äußeren Impulse nach der Differentiation problemlos auf null setzen kann. Einige der dabei entstehenden Integrale berechnen wir in Anhang B.

Zunächst ist die Anwendung von (A.1) auf Produkte von Impulspropagatoren zu untersuchen. Dazu berechnet man für $n \in \mathbf{N}$

$$\frac{\partial}{\partial p_\nu} \left(\frac{1}{[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]^n} \right) = \frac{2n(\mathbf{k} - \mathbf{p})_\nu}{[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]^{n+1}} \quad (\text{A.2})$$

und beachtet bei der zweiten Ableitung die Summation über gleiche Indizes. Dies liefert:

$$\sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial p_\nu^2} \left(\frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2} \right) \Big|_{p^2=0} = -2 \left(\frac{3}{(k^2 + m_0^2)^2} - \frac{4k^2}{(k^2 + m_0^2)^3} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2} \right) \Big|_{p^2=0} = \frac{4}{3} \frac{k^2}{(k^2 + m_0^2)^3} - \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial p_\nu^2} \left(\frac{1}{[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]^2} \right) \Big|_{p^2=0} &= -4 \left(\frac{3}{(k^2 + m_0^2)^3} - \frac{6k^2}{(k^2 + m_0^2)^4} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]^2} \right) \Big|_{p^2=0} &= 4 \frac{k^2}{(k^2 + m_0^2)^4} - 2 \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^3} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial p_\nu^2} \left(\frac{1}{[(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2][(\mathbf{l} + \mathbf{p})^2 + m_0^2]} \right) \Big|_{p^2=0} \\ &= -2 \left(\frac{3}{(k^2 + m_0^2)^2(l^2 + m_0^2)} - \frac{4k^2}{(k^2 + m_0^2)^3(l^2 + m_0^2)} + \frac{3}{(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4l^2}{(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)^3} - \frac{4(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l})}{(k^2 + m_0^2)^2(l^2 + m_0^2)^2} \right) \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \left(\frac{1}{[(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2][(\mathbf{l} + \mathbf{p})^2 + m_0^2]} \right) \Big|_{p^2=0} \\ &= \frac{4}{3} \frac{k^2}{(k^2 + m_0^2)^3(l^2 + m_0^2)} + \frac{4}{3} \frac{l^2}{(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)^3} - \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2(l^2 + m_0^2)} \\ &\quad - \frac{1}{(k^2 + m_0^2)(l^2 + m_0^2)^2} + \frac{4}{3} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}}{(k^2 + m_0^2)^2(l^2 + m_0^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Durch $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}/m_0$ kann man in den obigen Gleichungen natürlich wieder $m_0^2 = 1$ erreichen; es ist dann allerdings zu beachten, daß durch die entsprechende Transformation des Differentialoperators $\partial/\partial \mathbf{p}^2$ ein zusätzlicher Faktor $1/m_0^2$ auftritt.

A.2 Konsistenzrechnung

Anstelle von Gleichung (A.1) läßt sich die Differentiation nach dem äußeren Impulsquadrat auch gemäß

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} = \frac{\partial}{\partial p^2} = \frac{1}{2p} \frac{\partial}{\partial p} \quad (\text{A.6})$$

durchführen. Zuvor muß allerdings sichergestellt sein, daß die Integrale (nach Aus-integration der Winkel) nur von den Beträgen des äußeren Impulses \mathbf{p} abhängen.

Die nachfolgende Rechnung möge dieses Verfahren am Beispiel des Graphen $\mathcal{G}_6^{(2)}$ veranschaulichen. Ich substituiere $\mathbf{p}/m_0 \rightarrow \mathbf{p}$ und gehe zu sphärischen Polarkoordinaten über. Die Verwendung von (B.2a) und die Ausführung der Winkelintegrierten ergeben

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_6^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0}$$

$$\begin{aligned}
&= 9m_0^4 g_0^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 [(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]} I_1(\mathbf{k}; 3) \Big|_{p^2=0} \\
&= \frac{9g_0^2}{32\pi^4 m_0^2} \frac{\partial}{\partial p^2} \int d^3 k \frac{1}{(k^2 + 1)^2 [(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + 1]} \frac{1}{k} \arctan\left(\frac{k}{2}\right) \Big|_{p^2=0} \\
&= \frac{9g_0^2}{16\pi^3 m_0^2} \frac{\partial}{\partial p^2} \int_0^\infty dk \frac{k}{(k^2 + 1)^2} \arctan\left(\frac{k}{2}\right) \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{1 + k^2 + p^2 - 2kp \cos \theta} \Big|_{p^2=0} \\
&= \frac{9g_0^2}{32\pi^3 m_0^2} \frac{\partial}{\partial p^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{(k^2 + 1)^2} \arctan\left(\frac{k}{2}\right) \frac{1}{p} \ln\left(\frac{1 + (k + p)^2}{1 + (k - p)^2}\right) \Big|_{p^2=0} \\
&= \frac{9g_0^2}{32\pi^3 m_0^2} \frac{\partial}{\partial p^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{(k^2 + 1)^2} \arctan\left(\frac{k}{2}\right) \frac{1}{p} \ln\left(\frac{1 + \frac{2kp}{k^2 + p^2 + 1}}{1 - \frac{2kp}{k^2 + p^2 + 1}}\right) \Big|_{p^2=0}.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Singularität des Integranden in $p = 0$ setze ich ihn dort nach einer Taylorentwicklung in $x = 0$

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + O(x^5)\right); \quad x := \frac{2kp}{k^2 + p^2 + 1}, \quad |x| < 1 \quad (\text{A.7})$$

fort und führe erst dann die Differentiation unter dem Integral aus. Dies liefert mit (C.12c) und (C.13b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_6^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} &= \frac{9g_0^2}{16\pi^3 m_0^2} \frac{\partial}{\partial p^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{(k^2 + 1)^2} \arctan\left(\frac{k}{2}\right) \times \\
&\quad \times \frac{1}{p} \left[\frac{2kp}{k^2 + p^2 + 1} + \frac{1}{3} \left(\frac{2kp}{k^2 + p^2 + 1} \right)^3 + O(p^5) \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= \frac{9g_0^2}{16\pi^3 m_0^2} \int_0^\infty dk \frac{1}{(k^2 + 1)^2} \arctan\left(\frac{k}{2}\right) \times \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial p^2} \left[2k \frac{1}{k^2 + p^2 + 1} + \frac{8k^3}{3} \frac{p^2}{(k^2 + p^2 + 1)^3} + O(p^4) \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= -\frac{9}{8\pi^3 m_0^2} g_0^2 \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{k}{(k^2 + 1)^4} \arctan\left(\frac{k}{2}\right)}_{=19\pi/1296} \\
&\quad + \frac{3}{2\pi^3 m_0^2} g_0^2 \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{k^3}{(k^2 + 1)^5} \arctan\left(\frac{k}{2}\right)}_{=55\pi/10368},
\end{aligned}$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \mathcal{G}_6^{(2)}(\mathbf{p}) \Big|_{p^2=0} = -\frac{59}{6912\pi^2 m_0^2} g_0^2. \quad (\text{A.8})$$

Dieselbe Rechnung lässt sich auch für den Graphen $\mathcal{G}_{10}^{(2)}$ durchführen.

Anhang B

Berechnung einiger Integrale

Es werden nun einige der konvergenten Integrale und ihre Ableitungen nach äußeren Impulsen ausgewertet, die im Verlauf des Kapitels 5 wiederholt auftreten. Dabei erleichtert es die Rechnungen, durch eine Substitution der Integrationsimpulse $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}/m_0$ die Massenquadrate in den Propagatoren auf 1 zu setzen, was lediglich zusätzliche Massenfaktoren vor den Integralen zur Konsequenz hat.

B.1 1–Loop–Integrale

Integral I_1

Wir betrachten das konvergente 1–Loop–Integral

$$I_1(\mathbf{p}; 3) := \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]} \quad (\text{B.1})$$

in Abhängigkeit eines beliebigen äußeren Impulses \mathbf{p} . Nach der Setzung $\mathbf{q} := \mathbf{p}/m_0$, Übergang zu sphärischen Polarkoordinaten¹ und Anwendung der Substitutionsregel im Integral über θ erhalte ich:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{p}; 3) &= \frac{1}{(2\pi)^3 m_0} \int d^3 k \frac{1}{(k^2 + 1)[(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + 1]} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 m_0} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + 1} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{1 + k^2 + q^2 - 2kq \cos \theta} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 m_0} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{k^2 + 1} \left[\frac{1}{2qk} \int_{1+(k-q)^2}^{1+(k+q)^2} dt \frac{1}{t} \right] \\ &= \frac{1}{8\pi^2 m_0 q} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + 1} \ln \left(\frac{1 + (k + q)^2}{1 + (k - q)^2} \right). \end{aligned}$$

¹Die z –Achse des zugrundeliegenden Koordinatensystems kann dabei so gewählt werden, daß die Vektoren \mathbf{k} und \mathbf{p} gerade den Azimutalwinkel θ einschließen; die Integration über den Polarwinkel φ liefert nur einen Faktor 2π .

Um dieses Integral geschlossen zu berechnen, bezeichne man

$$R(q) := \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + 1} \ln \left(\frac{1 + (k + q)^2}{1 + (k - q)^2} \right)$$

und bilde

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} R(q) &= \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + 1} \frac{\partial}{\partial q} \ln \left(\frac{1 + (k + q)^2}{1 + (k - q)^2} \right) \\ &= 2 \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + 1} \left[\frac{k + q}{1 + (k + q)^2} + \frac{k - q}{1 + (k - q)^2} \right] \\ &= \frac{2}{q^2 + 4} \int_0^\infty dk \left[\frac{2k + q^2 k - q - q^3}{q[1 + (k - q)^2]} - \frac{2k + q^2 k + q + q^3}{q[1 + (k + q)^2]} + \frac{2}{k^2 + 1} \right], \end{aligned}$$

nach Vertauschung von Integration und Differentiation sowie Partialbruchzerlegung des Integranden. Das verbleibende Integral ist jetzt einfach die Summe aus Integralen vom Typ (C.10) – (C.11b) und ergibt

$$\frac{\partial}{\partial q} R(q) = \frac{4\pi}{q^2 + 4}.$$

Die unbestimmte Integration dieses Ausdrucks bezüglich q liefert

$$R(q) = 4\pi \int dq \frac{1}{q^2 + 4} = 2\pi \arctan \left(\frac{q}{2} \right) + C,$$

und wegen $R(0) = 0$ folgt für die Integrationskonstante $C = 0$. Insgesamt findet man also nach der Rücksubstitution des äußeren Impulses

$$I_1(\mathbf{p}; 3) = \frac{1}{4\pi m_0 q} \arctan \left(\frac{q}{2} \right) = \frac{1}{4\pi p} \arctan \left(\frac{p}{2m_0} \right) \quad (\text{B.2a})$$

und mit der de L'HOSPITALschen Regel

$$I_1(\mathbf{0}; 3) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial p} \arctan \left(\frac{p}{2m_0} \right)}{\frac{\partial}{\partial p} 4\pi p} = \frac{1}{8\pi m_0} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{2m_0} \right)^2} = \frac{1}{8\pi m_0}, \quad (\text{B.2b})$$

in Übereinstimmung mit (3.18).

Für die Ableitung dieses Integrals nach dem äußeren Impulsquadrat berechne ich mit $\mathbf{p}/m_0 \rightarrow \mathbf{p}$ zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 3) \Big|_{p^2=0} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]} \Big|_{p^2=0} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3 m_0^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} \int d^3 k \frac{1}{(k^2 + 1)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + 1]} \Big|_{p^2=0} \\ &= \frac{1}{8\pi^2 m_0^3} \frac{\partial}{\partial p^2} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + 1} \frac{1}{p} \ln \left(\frac{1 + (k + p)^2}{1 + (k - p)^2} \right) \Big|_{p^2=0} \\ &= \frac{1}{8\pi^2 m_0^3} \frac{\partial}{\partial p^2} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + 1} \frac{1}{p} \ln \left(\frac{1 + \frac{2kp}{k^2 + p^2 + 1}}{1 - \frac{2kp}{k^2 + p^2 + 1}} \right) \Big|_{p^2=0}. \end{aligned}$$

Die Entwicklung (A.7) der \ln -Funktion behebt die Singularität in $p = 0$, so daß die Differentiation unter dem Integral ausgeführt und anschließend der äußere Impuls auf null gesetzt werden kann. Mit (C.11b) ist dann

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 3) \Big|_{p^2=0} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 m_0^3} \frac{\partial}{\partial p^2} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + 1} \frac{1}{p} \left[\frac{2kp}{k^2 + p^2 + 1} + \frac{1}{3} \left(\frac{2kp}{k^2 + p^2 + 1} \right)^3 + O(p^5) \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 m_0^3} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + 1} \frac{\partial}{\partial p^2} \left[2k \frac{1}{k^2 + p^2 + 1} + \frac{8k^3}{3} \frac{p^2}{(k^2 + p^2 + 1)^3} + O(p^4) \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 m_0^3} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + 1} \frac{\partial}{\partial p^2} \left[2k \frac{1}{k^2 + p^2 + 1} + \frac{8k^3}{3} \frac{p^2}{(k^2 + p^2 + 1)^3} + O(p^4) \right] \Big|_{p^2=0} \\
&= -\frac{1}{2\pi^2 m_0^3} \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + 1)^3}}_{=\pi/16} + \frac{2}{3\pi^2 m_0^3} \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{k^4}{(k^2 + 1)^4}}_{=\pi/32},
\end{aligned}$$

und wir bestätigen das Resultat (3.19):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_1(\mathbf{p}; 3) \Big|_{p^2=0} = -\frac{1}{96\pi m_0^3}. \quad (\text{B.3})$$

Integrale I_3 und I_4

Integral I_3

Gegeben sei das folgende 1-Loop-Integral in Abhängigkeit beliebiger äußerer Impulse \mathbf{p} und \mathbf{l} :

$$I_3(\mathbf{p}, \mathbf{l}; 3) := \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m_0^2][(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2]}. \quad (\text{B.4a})$$

Da ich nur seinen Wert für $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ benötige, beschränke ich mich darauf, das Integral

$$I_3(\mathbf{0}, \mathbf{l}; 3) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2[(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + m_0^2]} \quad (\text{B.4b})$$

in Abhängigkeit von \mathbf{l} zu bestimmen. Für den allgemeinen Fall sei auf [NIC78] verwiesen.

Wie bei der Berechnung von I_1 setzt man $\mathbf{q} := \mathbf{l}/m_0$ und führt nach Übergang zu sphärischen Polarkoordinaten unter Anwendung der Substitutionsregel zunächst die θ -Integration aus:

$$I_3(\mathbf{0}, \mathbf{l}; 3) = \frac{1}{(2\pi)^3 m_0^3} \int d^3 k \frac{1}{(k^2 + 1)^2[(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + 1]}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi^2 m_0^3} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + 1)^2} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{1 + k^2 + q^2 - 2kq \cos \theta} \\
&= \frac{1}{4\pi^2 m_0^3} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + 1)^2} \left[\frac{1}{2qk} \int_{1+(k-q)^2}^{1+(k+q)^2} dt \frac{1}{t} \right] \\
&= \frac{1}{8\pi^2 m_0^3 q} \int_0^\infty dk \frac{k}{(k^2 + 1)^2} \ln \left(\frac{1 + (k + q)^2}{1 + (k - q)^2} \right).
\end{aligned}$$

Man bezeichnet nun

$$R(q) := \int_0^\infty dk \frac{k}{(k^2 + 1)^2} \ln \left(\frac{1 + (k + q)^2}{1 + (k - q)^2} \right)$$

und bildet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q} R(q) &= \int_0^\infty dk \frac{k}{(k^2 + 1)^2} \frac{\partial}{\partial q} \ln \left(\frac{1 + (k + q)^2}{1 + (k - q)^2} \right) \\
&= 2 \int_0^\infty dk \frac{k}{(k^2 + 1)^2} \left[\frac{k + q}{1 + (k + q)^2} + \frac{k - q}{1 + (k - q)^2} \right] \\
&= \frac{2}{q^2 + 4} \int_0^\infty dk \left[\frac{2}{(k^2 + 1)^2} - \frac{2(q^4 + 3q^2 + 4)}{q^2(q^2 + 4)(k^2 + 1)} \right] \\
&\quad - \frac{2}{q^2(q^2 + 4)^2} \int_0^\infty dk \left[\frac{q^4 + kq^3 - 3q^2 - 4}{1 + (k + q)^2} + \frac{q^4 - kq^3 - 3q^2 - 4}{1 + (k - q)^2} \right],
\end{aligned}$$

nach Ausführung der Differentiation und einer Partialbruchzerlegung. Durch Zurückführung auf Integrale der Form (C.10) – (C.11b) erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial q} R(q) = \frac{(4q^2 - q^4)\pi}{q^2(q^2 + 4)^2},$$

und die unbestimmte Integration über q liefert

$$\begin{aligned}
R(q) &= \pi \int dq \frac{4q^2 - q^4}{q^2(q^2 + 4)^2} = 8\pi \int dq \frac{1}{(q^2 + 4)^2} - \pi \int dq \frac{1}{q^2 + 4} \\
&= 8\pi \int dq \frac{1}{8} \left[\frac{4 - q^2}{(q^2 + 4)^2} + \frac{1}{q^2 + 4} \right] - \pi \int dq \frac{1}{q^2 + 4} \\
&= \pi \int dq \frac{4 - q^2}{(q^2 + 4)^2} = \frac{\pi q}{q^2 + 4} + C.
\end{aligned}$$

Für die Integrationskonstante folgt wegen $R(0) = 0$ wieder $C = 0$, und es ergibt sich nach Rücksubstitution des äußeren Impulses das Endresultat

$$I_3(\mathbf{0}, \mathbf{l}; 3) = \frac{1}{8\pi m_0^3} \frac{1}{q^2 + 4} = \frac{1}{8\pi m_0} \frac{1}{l^2 + 4m_0^2}. \quad (\text{B.5a})$$

Speziell haben wir in Übereinstimmung mit (3.10b):

$$I_3(\mathbf{0}, \mathbf{0}; 3) = J_3(3) = \frac{1}{32\pi m_0^3}. \quad (\text{B.5b})$$

Integral I_4

Schließlich sei noch das Integral

$$I_4(\mathbf{p}; 3) := \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)[(\mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]^2} = I_3(-\mathbf{p}, \mathbf{p}; 3) \quad (\text{B.6})$$

erwähnt. Seine Ableitung nach dem äußeren Impulsquadrat, die in Kapitel 5 bereits bestimmt worden ist, reproduziert sich mit der Methode aus Anhang A.2 zu

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}^2} I_4(\mathbf{p}; 3) \bigg|_{p^2=0} = -\frac{1}{128\pi m_0^5}. \quad (\text{B.7})$$

B.2 Mehrfache Integrale

Insertionen von 1-Loop-Integralen

Zur 2. Ordnung der Störungstheorie tragen vermehrt Diagramme bei, die 1-Loop-Graphen als Subgraphen enthalten. Die zugehörigen Integrale sind daher gesondert zusammengestellt.

Mit (B.2a) und (C.12a) bzw. (C.12b) ist:

$$\begin{aligned} H_1(3) &:= \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)[(\mathbf{l} - \mathbf{k})^2 + m_0^2]} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} I_1(\mathbf{k}; 3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k}{(k^2 + m_0^2)^2} \arctan\left(\frac{k}{2m_0}\right) \\ &= \frac{1}{8\pi^3 m_0^2} \int_0^\infty dk \frac{k}{(k^2 + 1)^2} \arctan\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{96\pi^2 m_0^2}, \end{aligned} \quad (\text{B.8a})$$

$$\begin{aligned} H_2(3) &:= \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^3 (l^2 + m_0^2)[(\mathbf{l} - \mathbf{k})^2 + m_0^2]} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^3} I_1(\mathbf{k}; 3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{k}{(k^2 + m_0^2)^3} \arctan\left(\frac{k}{2m_0}\right) \\ &= \frac{1}{8\pi^3 m_0^4} \int_0^\infty dk \frac{k}{(k^2 + 1)^3} \arctan\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{288\pi^2 m_0^4}. \end{aligned} \quad (\text{B.8b})$$

Ferner hat man mit (B.5a):

$$\begin{aligned} H_3(3) &:= \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2 (l^2 + m_0^2)^2[(\mathbf{l} - \mathbf{k})^2 + m_0^2]} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m_0^2)^2} I_3(\mathbf{0}, \mathbf{k}; 3) = \frac{1}{16\pi^3 m_0} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + m_0^2)^2 (k^2 + 4m_0^2)} \\ &= \frac{1}{16\pi^3 m_0^4} \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + 1)^2 (k^2 + 4)}}_{=\pi/36} = \frac{1}{576\pi^2 m_0^4}. \end{aligned} \quad (\text{B.8c})$$

2-Loop-Integrale

In diesem Abschnitt berechne ich eine Reihe von Impulsintegralen, die im Anschluß an die Differentiation nach äußeren Impulsen gemäß Anhang A.1 auftreten². Ich nehme im folgenden $m_0^2 = 1$ an und verwende wieder sphärische Polarkoordinaten. Das zugehörige Koordinatensystem ist derart zu wählen, daß einer der beiden Azimutalwinkel (hier derjenige der d^3k -Integration) von den Vektoren \mathbf{k} und \mathbf{l} eingeschlossen wird. Die Winkelintegrationen können dann geschlossen ausgeführt werden, und nach Ausintegration einer der beiden Radialvariablen verbleiben stets rationale Integrale, die nach einer Partialbruchzerlegung leicht auf (C.10) – (C.11b) zurückgeführt werden. In dieser Weise finden sich:

$$\begin{aligned}
 A_1 &:= \int \frac{d^3k d^3l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + 1)^3 (l^2 + 1)^2 [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \\
 &\quad \left(= \int \frac{d^3k d^3l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + 1)^2 (l^2 + 1)^3 [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \right) \\
 &= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l^2}{(l^2 + 1)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + 1)^3} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{1 + k^2 + l^2 - 2kl \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l^2}{(l^2 + 1)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + 1)^3} \left[\frac{1}{2kl} \ln \left(\frac{1 + (k + l)^2}{1 + (k - l)^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{8\pi^4} \underbrace{\int_0^\infty dl \frac{l^2}{(l^2 + 1)^2} \left[\frac{(l^2 + 8)\pi}{8(l^2 + 4)^2} \right]}_{=5\pi^2/864} = \frac{5}{6912\pi^2} \tag{B.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2 &:= \int \frac{d^3k d^3l}{(2\pi)^6} \frac{k^2}{(k^2 + 1)^4 (l^2 + 1)^2 [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \\
 &\quad \left(= \int \frac{d^3k d^3l}{(2\pi)^6} \frac{l^2}{(k^2 + 1)^2 (l^2 + 1)^4 [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \right) \\
 &= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l^2}{(l^2 + 1)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{(k^2 + 1)^4} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{1 + k^2 + l^2 - 2kl \cos \theta} \\
 &= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l^2}{(l^2 + 1)^2} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{(k^2 + 1)^4} \left[\frac{1}{2kl} \ln \left(\frac{1 + (k + l)^2}{1 + (k - l)^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{8\pi^4} \underbrace{\int_0^\infty dl \frac{l^2}{(l^2 + 1)^2} \left[\frac{(3l^4 + 38l^2 + 72)\pi}{48(l^2 + 4)^3} \right]}_{=13\pi^2/5184} = \frac{13}{41472\pi^2}. \tag{B.10}
 \end{aligned}$$

²Man beachte, daß diese Integrale nicht vom Vorzeichen der Integrationsimpulse abhängen; sie können deshalb bei einer geeigneten Impulsparametrisierung zur Berechnung verschiedener Graphen dienen.

Des weiteren ist:

$$\begin{aligned}
A_3 &:= \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}}{(k^2 + 1)^3 (l^2 + 1)^3 [(\mathbf{k} - \mathbf{l})^2 + 1]} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^5} \int d^3 k \frac{1}{(k^2 + 1)^3} \int_0^\infty dl \frac{l^2}{(l^2 + 1)^3} \int_0^\pi d\theta \frac{kl \cos \theta \sin \theta}{1 + k^2 + l^2 - 2kl \cos \theta} \\
&= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{(k^2 + 1)^3} \int_0^\infty dl \frac{l^3}{(l^2 + 1)^3} \int_0^\pi d\theta \frac{\cos \theta \sin \theta}{1 + k^2 + l^2 - 2kl \cos \theta} \\
&= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dk \frac{k^3}{(k^2 + 1)^3} \int_0^\infty dl \frac{l^3}{(l^2 + 1)^3} \left[-\frac{1}{kl} + \frac{k^2 + l^2 + 1}{4k^2 l^2} \ln \left(\frac{1 + (k + l)^2}{1 + (k - l)^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{8\pi^4} \underbrace{\int_0^\infty dk \frac{k^3}{(k^2 + 1)^3}}_{=\pi^2/1728} \left[\frac{k\pi}{4(k^2 + 4)^2} \right] = \frac{1}{13824\pi^2} \tag{B.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4 &:= \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{1}{(k^2 + 1)^3 (l^2 + 1) [(\mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + 1]} \\
&= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + 1)^3} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{1 + k^2 + l^2 + 2kl \cos \theta} \\
&= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1} \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(k^2 + 1)^3} \left[\frac{1}{2kl} \ln \left(\frac{1 + (k + l)^2}{1 + (k - l)^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{8\pi^4} \underbrace{\int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1}}_{=\pi^2/36} \left[\frac{(l^2 + 8)\pi}{8(l^2 + 4)^2} \right] = \frac{1}{288\pi^2} \tag{B.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5 &:= \int \frac{d^3 k d^3 l}{(2\pi)^6} \frac{k^2}{(k^2 + 1)^4 (l^2 + 1) [(\mathbf{k} + \mathbf{l})^2 + 1]} \\
&= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{(k^2 + 1)^4} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{1 + k^2 + l^2 + 2kl \cos \theta} \\
&= \frac{1}{8\pi^4} \int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{(k^2 + 1)^4} \left[\frac{1}{2kl} \ln \left(\frac{1 + (k + l)^2}{1 + (k - l)^2} \right) \right] \\
&= \frac{1}{8\pi^4} \underbrace{\int_0^\infty dl \frac{l^2}{l^2 + 1}}_{=17\pi^2/1296} \left[\frac{(3l^4 + 38l^2 + 72)\pi}{48(l^2 + 4)^3} \right] = \frac{17}{10368\pi^2}. \tag{B.13}
\end{aligned}$$

Anhang C

Mathematische Hilfsmittel

Dieser Anhang beinhaltet die wichtigsten mathematischen Identitäten, die in den Rechnungen dieser Arbeit Verwendung finden. Da sie größtenteils der Literatur (z.B. [WW27, GR81, MOS66]) entnommen sind, kann ich an dieser Stelle auf (fast alle) Beweise verzichten.

C.1 Einige Eigenschaften der Gammafunktion

Gammafunktion $\Gamma(z)$

- Integraldarstellung von EULER:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (\text{C.1})$$

- Produktdarstellung von WEIERSTRASS:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-z/\nu} \quad (\text{C.2})$$

$$\gamma = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\nu} - \ln \nu\right) = 0.5772 \dots, \quad (\text{C.3})$$

mit γ als der EULER–MASCHERONI–Konstanten. Dieser Darstellung liest man ab, daß $\Gamma(z)$ eine meromorphe Funktion in $z \in \mathbf{C}$ ist; d.h. sie ist analytisch auf der ganzen komplexen Ebene mit Ausnahme der Punkte $z = 0, -1, -2, \dots$, in denen sie einfache Pole besitzt.

- Funktionalgleichung und spezielle Werte:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{C.4a})$$

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}. \quad (\text{C.4b})$$

- Entwicklung der Gammafunktion um ihre Polstellen $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$:

$$\begin{aligned}\Gamma(-n + \epsilon) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \gamma \right) + O(\epsilon) \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{1}{\epsilon} + \psi_1(n+1) + O(\epsilon) \right];\end{aligned}\quad (\text{C.5})$$

$\psi_1(z)$ ist die logarithmische Ableitung der Gammafunktion

$$\psi_1(z) := \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Betafunktion $B(x, y)$

- Integraldarstellung und Zusammenhang mit der Gammafunktion:

$$\begin{aligned}B(x, y) &= \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} \\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0.\end{aligned}\quad (\text{C.6})$$

- Spezielle Werte:

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi, \quad B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{8}.\quad (\text{C.7})$$

Hypergeometrische Funktion $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$

- Für $\operatorname{Re} \gamma > \operatorname{Re} \beta > 0$ und $|\arg(-z)| < \pi$ lautet die Integraldarstellung der Hypergeometrischen Funktion

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{1}{B(\beta, \gamma - \beta)} \int_0^1 dt t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha}; \quad (\text{C.8a})$$

für $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $\operatorname{Re} \mu > 0$ und $|\beta| < 1$ gilt:

$$\int_0^1 dx x^{\lambda-1} (1-x)^{\mu-1} (1-\beta x)^{-\nu} = B(\lambda, \mu) F(\nu, \lambda; \lambda + \mu; \beta). \quad (\text{C.8b})$$

- Mit der Identität

$$(1-z^2)^{-1/2} (1+\sqrt{1-z^2})^{-2a} = 2^{-2a} F\left(a+1, a+\frac{1}{2}; 2a+1; z^2\right) \quad (\text{C.9a})$$

erhalten wir die speziellen Werte

$$\begin{aligned}\lambda = \mu = \frac{1}{2}, \nu = 1, a = 0, \beta = z^2 = \frac{3}{4} : \quad &F\left(1, \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{4}\right) = 2 \\ \lambda = \mu = \frac{3}{2}, \nu = 2, a = 1, \beta = z^2 = \frac{3}{4} : \quad &F\left(2, \frac{3}{2}; 3; \frac{3}{4}\right) = \frac{32}{9}.\end{aligned}\quad (\text{C.9b})$$

C.2 Integralformeln

Standardintegrale

•

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + 1} = \arctan x \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}. \quad (\text{C.10})$$

- Für $n, m \in \mathbf{N}$ gilt:

$$\int_0^\infty dx \frac{1}{(x^2 + 1)^n} = \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.11a})$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^m}{(x^2 + 1)^n} = \frac{m-1}{2n-m-1} \int_0^\infty dx \frac{x^{m-2}}{(x^2 + 1)^n}, \quad m < 2n-1. \quad (\text{C.11b})$$

- Für $p > 0, q > 0$ und $pq \neq 1$ gilt:

$$T_1(p, q) := \int_0^\infty dx \frac{x \arctan(qx)}{(x^2 + p^2)^2} = \frac{q\pi}{4p(pq + 1)}. \quad (\text{C.12a})$$

Beweis:

Mit partieller Integration und Partialbruchzerlegung berechnet sich

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dx \frac{x \arctan(qx)}{(x^2 + p^2)^2} = q^2 \int_0^\infty dx \frac{x \arctan x}{[x^2 + (pq)^2]^2} \\ &= q^2 \left(\underbrace{-\frac{1}{2} \frac{\arctan x}{x^2 + (pq)^2} \Big|_0^\infty}_{=0} + \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \frac{1}{[x^2 + (pq)^2](x^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{q^2}{2} \left(\frac{1}{1 - (pq)^2} \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + (pq)^2} + \frac{1}{(pq)^2 - 1} \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + 1} \right) \\ &= \frac{q^2}{2} \frac{1}{1 - (pq)^2} \left(\frac{1}{pq} - 1 \right) \arctan x \Big|_0^\infty = \frac{q\pi}{4p(pq + 1)}. \quad \square \end{aligned}$$

$$T_2(p, q) := \int_0^\infty dx \frac{x \arctan(qx)}{(x^2 + p^2)^3} = \frac{q(2pq + 1)\pi}{16p^3(pq + 1)^2}. \quad (\text{C.12b})$$

Beweis:

Mit partieller Integration und Parameterintegration folgt aus (C.12a):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{x \arctan(qx)}{(x^2 + p^2)^3} &= \frac{q^4}{4} \int_0^\infty dx \frac{1}{[x^2 + (pq)^2]^2(x^2 + 1)} \\ &= \frac{q^4}{4} \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + 1} \left(-\frac{1}{2q^2 p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{[x^2 + (pq)^2]} \right) \\ &= -\frac{1}{4p} \frac{\partial}{\partial p} T_1(p, q) = \frac{q(2pq + 1)\pi}{16p^3(pq + 1)^2}. \quad \square \end{aligned}$$

$$T_3(p, q) := \int_0^\infty dx \frac{x \arctan(qx)}{(x^2 + p^2)^4} = \frac{q(3 + 9pq + 8p^2q^2)\pi}{96p^5(pq + 1)^3}. \quad (\text{C.12c})$$

Beweis:

Wie zuvor erhält man aus (C.12b):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{x \arctan(qx)}{(x^2 + p^2)^4} &= \frac{q^6}{6} \int_0^\infty dx \frac{1}{[x^2 + (pq)^2]^3(x^2 + 1)} \\ &= \frac{q^6}{6} \int_0^\infty dx \frac{1}{x^2 + 1} \left(-\frac{1}{4q^2p} \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{[x^2 + (pq)^2]^2} \right) \\ &= -\frac{1}{6p} \frac{\partial}{\partial p} T_2(p, q) = \frac{q(3 + 9pq + 8p^2q^2)\pi}{96p^5(pq + 1)^3}. \quad \square \end{aligned}$$

- Aus (C.12b) und (C.12c) bestimmt man durch partielle Integration von $T_2(1, \frac{1}{2})$ und $T_3(1, \frac{1}{2})$:

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{(x^2 + 1)^4} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{17\pi}{1296} \quad (\text{C.13a})$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^3}{(x^2 + 1)^5} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{55\pi}{10368}. \quad (\text{C.13b})$$

Gaußsche Integrale

- Für $\operatorname{Re} a > 0$ und $p \in \mathbf{C}$ gilt:

$$\int dx e^{-(ak^2 + 2px)} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{p^2/a}. \quad (\text{C.14})$$

- Allgemeiner ist für $k \in \mathbf{R}^D$, $p \in \mathbf{C}^D$ und $D \in \mathbf{N}$:

$$\int d^D k \exp\left\{-\left(ak^2 + 2p \cdot k\right)\right\} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{D/2} \exp\left(\frac{p^2}{a}\right), \quad \operatorname{Re} a > 0. \quad (\text{C.15})$$

Literaturverzeichnis

- [AH76] A. AHARONY and P.C. HOHENBERG. Universal relations among thermodynamical critical amplitudes. *Phys. Rev. B* **13** (1976) 3081.
- [AL73] E.S. ABERS and B.W. LEE. Gauge theories. *Phys. Rep.* **9 C** (1973) 1.
- [AMI84] D.J. AMIT. *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*. World Scientific, Singapore, 2nd edition, 1984.
- [BAK84] G.A. BAKER, JR. Critical point statistical mechanics and quantum field theory. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. DOMB and J.L. LEBOWITZ, volume 9. Academic Press, London, 1984.
- [BB85] C. BAGNULS and C. BERVILLIER. Nonasymptotic critical behavior from field theory at $d = 3$; disordered-phase case. *Phys. Rev. B* **32** (1985) 7209.
- [BBMN87] C. BAGNULS, C. BERVILLIER, D.I. MEIRON, and B.G. NICKEL. Nonasymptotic critical behavior from field theory at $d = 3$; ordered-phase case. *Phys. Rev. B* **35** (1987) 3585.
- [BDFN92] J.J. BINNEY, N.J. DOWRICK, A.J. FISHER, and M.E.J. NEWMAN. *The Theory of Critical Phenomena*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1992.
- [BEL91] M. LE BELLAC. *Quantum and Statistical Field Theory*. Oxford University Press, Oxford, 1st english edition, 1991.
- [BER76] C. BERVILLIER. Universal relations among critical amplitudes. calculations up to order ϵ^2 for systems with continuous symmetry. *Phys. Rev. B* **14** (1976) 4964.
- [BG80] C. BERVILLIER and C. GODRÉCHE. Universal combinations of critical amplitudes from field theory. *Phys. Rev. B* **21** (1980) 5427.
- [BGHP92] C.F. BAILLIE, R. GUPTA, K.A. HAWICK, and G.S. PAWLEY. Monte carlo renormalization-group study of the three-dimensional ising model. *Phys. Rev. B* **45** (1992) 45.

- [BGZJ74] E. BRÉZIN, J.C. LE GUILLOU, and J. ZINN-JUSTIN. Universal ratios of critical amplitudes near four dimensions. *Phys. Lett.* **47 A** (1974) 285.
- [BGZJ76] E. BRÉZIN, J.C. LE GUILLOU, and J. ZINN-JUSTIN. Field theoretic approach to critical phenomena. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. DOMB and M.S. GREEN, volume 6. Academic Press, London, 1976.
- [BNM77] G.A. BAKER, JR., B.G. NICKEL, and D.I. MEIRON. Compilation of 2-pt. and 4-pt. graphs for continuous spin models. University of Guelph Report, 1977.
- [BNM78] G.A. BAKER, JR., B.G. NICKEL, and D.I. MEIRON. Critical indices from perturbation analysis of the callan-symanzik equation. *Phys. Rev.* **B 17** (1978) 1365.
- [BNMG76] G.A. BAKER, JR., B.G. NICKEL, D.I. MEIRON, and M.S. GREEN. Ising-model critical indices in $d = 3$ from the callan-symanzik equation. *Phys. Rev. Lett.* **36** (1976) 1351.
- [CAL76] C.G. CALLAN. Renormalization. In *Les Houches, Session XXVIII, 1975 - Methods in Field Theory*, edited by R. BALIAN and J. ZINN-JUSTIN, Amsterdam, 1976. North-Holland.
- [CH68] R. COURANT and D. HILBERT. *Methoden der Mathematischen Physik II*. Springer Verlag, Berlin, 2nd edition, 1968.
- [COL84] J.C. COLLINS. *Renormalization*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1984.
- [DEC85] K. DECKER. Critical behaviour of the $3d$ -ising-model from an extended low-temperature-expansion of the inverse correlation length. *Nucl. Phys.* **B 257** (1985) 419.
- [DOM74] C. DOMB. Ising model. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. DOMB and M.S. GREEN, volume 3. Academic Press, London, 1974.
- [FIS67] M.E. FISHER. The theory of equilibrium critical phenomena. *Rep. Prog. Phys.* **30** (1967) 615.
- [GG74] D.S. GAUNT and A.J. GUTTMANN. Asymptotic analysis of coefficients. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. DOMB and M.S. GREEN, volume 3. Academic Press, London, 1974.
- [GJ87] J. GLIMM and A. JAFFE. *Quantum Physics*. Springer Verlag, New York, 2nd edition, 1987.

- [GK80] W. GEBHARDT and U. KREY. *Phasenübergänge und Kritische Phänomene*. Vieweg und Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, 1st edition, 1980.
- [GR81] I. GRADSTEIN and I. RYSHIK. *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*, volume 1 and 2. Verlag Harri Deutsch, Thun, 5th edition, 1981.
- [GZJ80] J.C. LE GUILLOU and J. ZINN-JUSTIN. Critical exponents from field theory. *Phys. Rev. B* **21** (1980) 3976.
- [HAHS76] P.C. HOHENBERG, A. AHARONY, B.I. HALPERIN, and E.D. SIGGIA. Two-scale-factor universality and the renormalization group. *Phys. Rev. B* **13** (1976) 2987.
- [HUA87] K. HUANG. *Statistical Mechanics*. John Wiley and Sons, New York, 2nd edition, 1987.
- [HUB72] J. HUBBARD. Critical behaviour of the ising model. *Phys. Lett.* **39 A** (1972) 365.
- [ID89] C. ITZYKSON and J.M. DROUFFE. *Statistical Field Theory*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1989.
- [IIM75] J. ILIOPOULOS, C. ITZYKSON, and A. MARTIN. Functional methods and perturbation theory. *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 165.
- [JER89] J. JERSÁK. Path integral method in quantum theory. In *Path Integral Method, Lattice Gauge Theory and Critical Phenomena; Conf. Lahore 1987*, edited by A. SHAUKAT, Singapore, 1989. World Scientific.
- [KKG83] A. KUMAR, H.R. KRISHNAMURTHY, and E.S.R. GOPAL. Equilibrium critical phenomena in binary liquid mixtures. *Phys. Rep.* **98 C** (1983) 57.
- [LEI75] G. LEIBBRANDT. Introduction to the technique of dimensional regularization. *Rev. Mod. Phys.* **47** (1975) 849.
- [LF89] A.J. LIU and M.E. FISHER. The three-dimensional ising model revisited numerically. *Physica A* **156** (1989) 35.
- [LL87] L.D. LANDAU and E.M. LIFSHITZ. *Statistische Physik, Teil 1*, volume 5 of *Lehrbuch der theoretischen Physik*. Akademie-Verlag, Berlin, 7th edition, 1987.
- [LW87a] M. LÜSCHER and P. WEISZ. Scaling laws and triviality bounds in the lattice ϕ^4 -theory; one-component model in the symmetric phase. *Nucl. Phys. B* **290** (1987) 25.
- [LW87b] M. LÜSCHER and P. WEISZ. Scaling laws and triviality bounds in the lattice ϕ^4 -theory; one-component model in the phase with spontaneous broken symmetry. *Nucl. Phys. B* **295** (1987) 65.

- [MM93] I. MONTVAY and G. MÜNSTER. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1993.
- [MOS66] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, and R.P. SONI. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer Verlag, Berlin, 3rd edition, 1966.
- [MÜN89] G. MÜNSTER. Tunneling amplitude and surface tension in ϕ^4 -theory. *Nucl. Phys.* **B 324** (1989) 630.
- [MÜN90] G. MÜNSTER. Interface tension in three-dimensional systems from field theory. *Nucl. Phys.* **B 340** (1990) 559.
- [MW74] A.J. MACFARLANE and G. WOO. ϕ^3 -theory in six dimensions and the renormalization group. *Nucl. Phys.* **B 77** (1974) 91.
- [NIC78] B.G. NICKEL. Evaluation of simple feynman-graphs. *J. Math. Phys.* **19** (1978) 542.
- [PAR80] G. PARISI. Field-theoretic approach to second-order phase transitions in two- and three-dimensional systems. *J. Stat. Phys.* **23** (1980) 49.
- [PAR88] G. PARISI. *Statistical Field Theory*. Addison-Wesley, Redwood City, 1st edition, 1988.
- [PSWW84] G.S. PAWLEY, R.H. SWENDSEN, D.J. WALLACE, and K.G. WILSON. Monte carlo renormalization-group calculations of critical behavior in the simple-cubic ising model. *Phys. Rev.* **B 29** (1984) 4030.
- [PV49] W. PAULI and F. VILLARS. On the invariant regularization in relativistic quantum theory. *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 434.
- [RYD85] L.H. RYDER. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1985.
- [SFW72] D. STAUFFER, M. FERER, and M. WORTIS. Universality of second-order phase transitions: The scale factor for the correlation length. *Phys. Rev. Lett.* **29** (1972) 345.
- [SIE93] E. SIEPMANN. Reihenanalysen für das 3-dimensionale Ising-Modell. Diploma thesis, University of Münster, 1993.
- [STA71] H. E. STANLEY. *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1971.
- [TF75] H.B. TARKO and M.E. FISHER. Theory of critical point scattering and correlations; the ising model below t_c and in a field. *Phys. Rev.* **B 11** (1975) 1217.

- [TV72] G. T'HOOFT and M. VELTMAN. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nucl. Phys.* **B** **44** (1972) 189.
- [WAL76] D.J. WALLACE. The ϵ -expansion for exponents and the equation of state in isotropic systems. In *Phase Transitions and Critical Phenomena*, edited by C. DOMB and M.S. GREEN, volume 6. Academic Press, London, 1976.
- [WF72] K.G. WILSON and M.E. FISHER. Critical exponents in 3.99 dimensions. *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 240.
- [WIL72] K.G. WILSON. Feynman-graph expansion for critical exponents. *Phys. Rev. Lett.* **28** (1972) 584.
- [WK74] K.G. WILSON and J. KOGUT. The renormalization group and the ϵ -expansion. *Phys. Rep.* **12 C** (1974) 75.
- [WW27] E.T. WHITTAKER and G.N. WATSON. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 4th edition, 1927.
- [ZJ82] J. ZINN-JUSTIN. Calculation of critical exponents from field theory. In *Phase Transitions, Cargèse 1980*, edited by M. LÉVY et al., New York, 1982. Plenum Press.
- [ZJ89] J. ZINN-JUSTIN. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*. Oxford University Press, Oxford, 1st edition, 1989.

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die zum Zustandekommen der vorliegenden Arbeit beigetragen haben:

- Herrn Prof. Dr. G. Münster für sein stets hilfreiches Interesse am Fortgang der Arbeit.
- Meinen Kommilitonen Y. Xylander und E. Siepmann, die gemeinsam mit mir ihre Diplomarbeiten begonnen und immer für Fragen zur Verfügung gestanden haben.
- Der gesamten Arbeitsgruppe für die harmonische Atmosphäre sowohl aus fachlicher als auch aus menschlicher Sicht.
- Meinen Eltern und meiner Verlobten M. Simon, die mich während des Studiums ständig unterstützt haben, sowie speziell meinem Vater W. Heitger, der sich am Korrekturlesen beteiligt hat.

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, im Oktober 1993