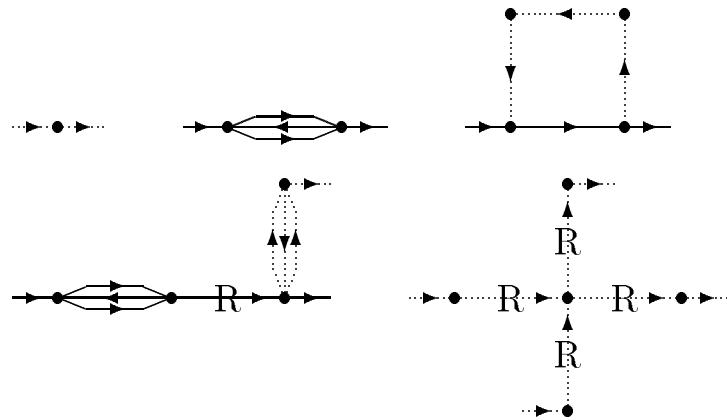


Graphische Entwicklung eines $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -symmetrischen Yukawa-Modells nach beiden Hopping-Parametern

Diplomarbeit vorgelegt
von
Joachim Hein

Januar 1993



Angefertigt im
Institut für Theoretische Physik I, Westfälische Wilhelms-Universität Münster/Westf.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	2
2 Einführung in das untersuchte Modell	4
2.1 Euklidische Wirkung	4
2.2 Erzeugende Funktionale	5
2.3 Basistransformation des Fermionen-Raums	6
2.4 Flavour-Verdopplung	7
3 Renormierte Größen	8
3.1 Fermionen	8
3.2 Bosonen	11
3.3 Renormierte Yukawa-Kopplungen	12
3.4 Definition der Suszeptibilitäten	12
4 Methode der Doppelentwicklung	14
4.1 Taylor-Reihe	14
4.2 Differentialgleichungen	15
5 1-Platz-Erwartungswerte	19
5.1 Grenzfall unendlicher bosonischer Selbstkopplung	19
6 Entwicklung des erzeugenden Funktionalen W	23
6.1 Graphische Entwicklung	23
6.2 Regeln für die graphische Entwicklung	25
7 Graphische Regeln für die Suszeptibilitäten	30
7.1 Graphische Differentiation	30
7.2 Graphische Regeln für die Suszeptibilitäten	32
7.3 Praktische Durchführung des Verfahrens	40
8 1-Linien-irreduzible Graphen	46
8.1 1-Linien-reduzible Graphen	46
8.2 Suszeptibilitäten aus irreduziblen Graphen	47
9 Ergebnisse	56
9.1 Auswertung der irreduziblen Kerne	56
9.2 Untersuchungen bei $G_\chi < 0$ und $G_\psi = 0.1$	57
9.3 Untersuchungen im Fall $G_\chi = 0$	63

9.4 Vergleich mit numerischen Daten	67
10 Diskussion	74
10.1 Diskussion der Ergebnisse	74
10.2 Vorschläge zur Verbesserung der Methode	75
A Zur Struktur des Propagators	78
B Verbundene 1-Platz-Erwartungswerte	81
C Rücktransformation in die $\chi\psi$-Basis	83
D Tabelle der Graphen	86
D.1 Einlaufende und auslaufende fermionische Linie	86
D.2 Einlaufende und auslaufende bosonische Linie	88
D.3 Zwei fermionische Linien und eine bosonische Linie	90
D.4 Vier äußere bosonische Linien	91
E Taylorreihe für die irreduziblen Kerne	93

Kapitel 1

Einleitung

Zur Untersuchung der elektroschwachen Wechselwirkung im Rahmen des Standard-Modells der Elementarteilchen-Physik sind in den vergangenen Jahren viele Arbeiten über gitterregularisierte Yukawa-Modelle erschienen. Darin werden verschiedene Aspekte eines Modells mit bosonischen und fermionischen Feldern, die durch eine Yukawa-Kopplung verbunden sind, beleuchtet. Der Konferenzbeitrag [10] gibt einen kurzen Überblick über Untersuchungen, die vor 1991 durchgeführt worden sind. In diesen Arbeiten wird das Eichfeld des Standard-Modells nicht berücksichtigt, so daß die Modelle nur eine globale Symmetrie besitzen.

Anstatt der $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ -Symmetrie des Standard-Modells werden in diesen Veröffentlichungen die Fälle einer $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ - bzw. $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -Symmetrie diskutiert. Die letztere wird auch in dieser Arbeit betrachtet.

Zur Lösung des Verdopplungsproblems, das immer auftritt, wenn Fermionen auf einem Gitter regularisiert werden, wird in diesen Arbeiten ein Wilson-Term benutzt, der die chirale Symmetrie der Modelle nicht bricht. Dieses erfordert die Einführung eines fermionischen Spiegelfeldes χ_x . Wie die bisherigen Untersuchungen zeigen, sollte der Wilson-Term auch im wechselwirkenden Fall, sofern das Produkt der Kopplungen $G_\psi G_\chi < \infty$ ist (vgl. [7]), 30 der 32 Fermionen im Kontinuumslimes aus dem physikalischen Spektrum entfernen. In [8] wird mit Hilfe numerischer Simulationen gezeigt, daß die Spiegelfermionen in der Phase mit spontan gebrochener Symmetrie bei geeigneter Parameterwahl eine größere Masse als die Fermionen erhalten, so daß es möglich ist, das Verdopplungsproblem so zu lösen, daß nur ein Fermion im niederenergetischen Spektrum verbleibt.

Durch die Gitterregularisierung gewinnt die Feldtheorie Ähnlichkeit zu einem Spinsystem in 4 Dimensionen mit „Nächst-Nachbar-Wechselwirkung“. Die wesentliche Idee dieser Arbeit besteht nun darin, den Logarithmus der Zustandssumme in eine Taylorreihe nach den Hopping-Parametern κ und K zu entwickeln. Die Kopplungen zwischen den Feldern benachbarter Gitterorte werden hier Hopping-Parameter genannt. Als Entwicklungspunkt wird der Fall verschwindender Hopping-Parameter verwendet, der sich in der symmetrischen Phase des Modells befindet. Aufgrund der Singularitäten, die mit einem Phasenübergang verbunden sind, liegt der Konvergenzbereich der Taylorreihe vollständig in dem Bereich des Parameterraums, der durch die symmetrische Phase gegeben ist.

Zur Handhabung der Taylorreihe wird die Technik der „Linked-Cluster-Expansion“ angewandt. Die Methode wird in [1] auf sehr verständliche Weise am Beispiel des Ising-Modells erklärt.

In [3, 4] wird mit diesem Verfahren das ϕ^4 -Modell untersucht. Dazu wird ein Computer-

Algorithmus entwickelt, der alle Graphen bis zur 14. Ordnung in der Hopping-Parameter-Entwicklung erzeugt und ausgewertet. Das Feld ϕ_x wird in [3] als einkomponentiges und in [4] als n -komponentigen reellen Skalarfeld behandelt. Zudem werden in [4] Regeln für die Entwicklung von Suszeptibilitäten in einer skalaren Feldtheorie ohne Beweis angegeben. Im Gegensatz zu den vorstehend angeführten Arbeiten wird in der vorliegenden Arbeit das skalare Feld durch eine komplexe Komponente beschrieben. Dieser Fall ist äquivalent zu einem 2-komponentigen reellen Skalarfeld. In der „Linked-Cluster-Expansion“ führt die Behandlung des Skalarfeldes als komplexes Feld zu orientierten Graphenlinien, die im Falle des fermionischen Feldes ohnehin benötigt werden.

Auf chirale Yukawa-Modelle ist das Verfahren wiederholt angewandt worden. Eine bosonische Hopping-Parameter-Entwicklung wird in [6] auf der Basis der Ergebnisse aus [4] diskutiert. Da zu ist es notwendig den fermionischen Hopping-Parameter K auf null zu setzen, was führt dazu, daß die Fermionen eine unendliche physikalische Masse besitzen und nicht mehr propagieren können (statische Fermionen). Diese Untersuchung wird für eine $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -Symmetrie durchgeführt.

Eine Entwicklung nach dem fermionischen Hopping-Parameter K , d. h. bei verschwindendem bosonischen Hopping-Parameter κ , wird in [5] im Fall $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ diskutiert. Das Nullsetzen des bosonischen Hopping-Parameters führt hier aber nicht zu einer divergierenden bosonischen Masse, da in Verbindung mit der Yukawa-Kopplung die bosonischen Felder verschiedener Gitterorte auch über den fermionischen Hopping-Parameter K gekoppelt werden.

Die Entwicklung des $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -symmetrische Modell bezüglich des fermionischen Hopping-Parameters K wird in [7, 11] durchgeführt. Die Suszeptibilitäten für die renormierten Yukawa-Kopplungen werden dabei bis zur 5. Ordnung und die für die bosonische renormierte Masse bis 8. Ordnung in K ausgewertet. Die Ordnungen der verbleibenden Suszeptibilitäten liegen dazwischen.

In der vorliegenden Arbeit werden graphische Regeln für die Entwicklung des $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -symmetrischen Modells nach beiden Hopping-Parametern κ und K hergeleitet. Dazu wird in Kapitel 2 eine detaillierte Einführung in das untersuchte Modell gegeben. In Kapitel 3 werden die renormierten Größen eingeführt, und in den Kapiteln 4 bis 8 werden dann die verschiedenen Aspekte der Hopping-Parameter-Entwicklung betrachtet. Die Ergebnisse der Entwicklungen werden im Kapitel 9 vorgestellt und mit Resultaten verglichen, die mit Monte-Carlo-Verfahren oder durch Symmetrievergleichungen gewonnen wurden. Die Entwicklung der renormierten Massen und Wellenfunktionsrenormierungen konnte bis zur 4. Ordnung in den Hoppingparametern, die der renormierten Kopplungen nur bis zur 3. Ordnung durchgeführt werden. Im Vergleich zu den Veröffentlichungen [3, 4] ist das verhältnismäßig wenig, aber durch die Entwicklung in zwei Hopping-Parametern wächst hier die Anzahl der Graphen stark an. Eine weitere Erschwernis besteht in den mit den Fermionen verbundenen Matrix-Operationen. Aufgrund der geringen Anzahl der Ordnungen die in dieser Arbeit bestimmt werden konnten, sollen die Vergleiche in erster Linie der Kontrolle der Methode dienen und weniger dem Gewinnen neuer Erkenntnisse über das Modell.

Aus diesen Vergleichen können einige Erkenntnisse über die Möglichkeiten und Grenzen der Entwicklungen gewonnen werden.

Kapitel 2

Einführung in das untersuchte Modell

2.1 Euklidische Wirkung

Die Methode der graphischen Entwicklung nach den Hopping-Parametern soll hier anhand eines $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -symmetrischen Yukawa-Modells eingeführt werden. Zur Konstruktion des Modells wird neben dem ursprünglichen Fermionenfeld ψ ein Spiegelfeld χ eingeführt. Durch dieses Spiegelfeld ist es möglich, eine „nackte“ Masse $\mu_{\psi\chi}$ und einen Wilson-Term mit Wilson-Parameter r in das Modell einzuführen, die die chirale Symmetrie nicht brechen. Beide fermionischen Felder nehmen, wie üblich, Werte in einer Grassmann-Algebra¹ an.

Auf dem kubischen primitiven Gitter in 4 Dimensionen wird dieses Modell durch die folgende euklidische Gitterwirkung beschrieben.

$$\begin{aligned} S[\phi, \phi^+, \Psi, \bar{\Psi}] &:= S_\phi[\phi, \phi^+] + S_{\phi\Psi}[\phi, \phi^+, \Psi, \bar{\Psi}] \\ S_\phi[\phi, \phi^+] &:= \sum_x \left\{ \phi_x^+ \phi_x + \lambda(\phi_x^+ \phi_x - 1)^2 - \kappa \sum_{\hat{\mu}} \phi_{x+\hat{\mu}}^+ \phi_x \right\} \\ S_{\phi\Psi}[\phi, \phi^+, \Psi, \bar{\Psi}] &:= \sum_x \left\{ \bar{\Psi}_x G(\phi_x, \phi_x^+) \Psi_x - K \sum_{\hat{\mu}} \bar{\Psi}_{x+\hat{\mu}} M_{\hat{\mu}} \Psi_x \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Hierbei werden die folgenden Notationen benutzt:

$$\Psi_x := \begin{pmatrix} \psi_x \\ \chi_x \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$\phi_x := \phi_{1x} + i\phi_{2x} \quad (2.3)$$

$$G(\phi_x, \phi_x^+) := \begin{pmatrix} G_\psi \left[\frac{1+\gamma_5}{2} \phi_x^+ + \frac{1-\gamma_5}{2} \phi_x \right] & \bar{\mu} \\ \bar{\mu} & G_\chi \left[\frac{1+\gamma_5}{2} \phi_x + \frac{1-\gamma_5}{2} \phi_x^+ \right] \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$M_{\hat{\mu}} := \begin{pmatrix} \gamma_\mu & r \\ r & \gamma_\mu \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

¹Grassmann-Algebren zeichnen sich u. a. dadurch aus, daß ihre Elemente paarweise antikommutieren, z. B.: $\psi_x \psi_y = -\psi_y \psi_x$ oder $\chi_x \bar{\psi}_x = -\bar{\psi}_x \chi_x$ etc. Siehe auch Abschnitt 5.1

$$\sum_x : \text{Summe über alle Punkte } x \text{ des 4-dimensionalen euklidischen Raum-Zeit-Gitters} \quad (2.6)$$

$$\sum_{\hat{\mu}} : \text{Summe über alle 4 Raum-Zeit-Richtungen in die jeweils positive und negative Richtung, also 8 Summanden} \quad (2.7)$$

Die Parameter K und κ werden als Hopping-Parameter bezeichnet. Werden beide Hopping-Parameter auf 0 gesetzt, so enthält die Wirkung $S[\phi, \phi^+, \Psi, \bar{\Psi}]$ nur Summanden, die Feldgrößen eines Gitterortes x verbinden. Aus dem Parameter $\bar{\mu}$ lässt sich die „nackte“ Fermionenmasse $\mu_{\psi\chi}$ in Einheiten des reziproken Gitterabstandes mit

$$\mu_{\psi\chi} = \bar{\mu} - 8rK \quad (2.8)$$

gewinnen. Die Wirkung des Wilson-Terms mit Parameter r wird in Abschnitt 3.1.1 erläutert. Die Parameter $\bar{\mu}$ und r sind so eingeführt, daß die chirale Symmetrie nicht verletzt wird. In den durchgeführten Rechnungen werden diese Parameter auf

$$r = \bar{\mu} = 1 \quad (2.9)$$

normiert. Die γ_μ -Matrizen sind in der euklidischen Formulierung zu benutzen. Die von mir benutzte Darstellung kann im Anhang A nachgeschlagen werden, sie entspricht der in [7] benutzten. Es gilt $\gamma_{-\mu} = -\gamma_\mu$.

2.1.1 Chirale Symmetrie

Wie schon mehrfach erwähnt, besitzt dieses Modell eine $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -Symmetrie. Da das Modell keine Eichfelder enthält, handelt es sich hierbei um eine globale Symmetrie des Modells. Sie wird durch die folgenden Symmetrietransformationen vermittelt.

$$\begin{aligned} \psi'_{Lx} &= e^{-i\alpha_L} \psi_{Lx} & \psi'_{Rx} &= e^{-i\alpha_R} \psi_{Rx} \\ \chi'_{Lx} &= e^{-i\alpha_R} \chi_{Lx} & \chi'_{Rx} &= e^{-i\alpha_L} \chi_{Rx} \\ \phi'_x &= e^{-i(\alpha_L - \alpha_R)} \phi_x \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2 Erzeugende Funktionale

Aus der oben eingeführten Gitter-Wirkung $S[\phi, \phi^+, \Psi, \bar{\Psi}]$ lassen sich nun durch die Einführung von fermionischen $\eta, \bar{\eta}$ und bosonischen Quelltermen J, J^+ erzeugende Funktionale Z, W für die unverbundenen oder verbundenen Greenschen Funktionen erklären.

$$\begin{aligned} Z[J, J^+, \eta, \bar{\eta}] &:= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\phi^+ \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} * \\ * \exp \left\{ -S[\phi, \phi^+, \Psi, \bar{\Psi}] + \sum_x (J_x^+ \phi_x + \phi_x^+ J_x + \bar{\eta}_x \Psi_x + \bar{\Psi}_x \eta_x) \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dabei bedeutet:

$$\mathcal{D}\phi := \prod_x d\phi_x \quad (2.12)$$

Entsprechende Formeln gelten für die restlichen 3 Integrationsvariablen.

Das skalare Feld ϕ_x wird als komplexwertiges Feld behandelt. Dies erfordert die Einführung zweier Quellen J_x und J_x^+ . Daraus ergeben sich, im Gegensatz zu den Publikationen [3, 4] über graphische Entwicklung in der ϕ^4 -Theorie mit reellen bosonischen Feldern, orientierte bosonische Linien. Natürlich gibt es auch die Möglichkeit, das Skalarfeld ϕ als 2-dimensionales Vektorfeld reeller Zahlen einzuführen, dann entfällt die Quelle J_x^+ , aber bei J_x handelt es sich dann ebenfalls um ein 2-dimensionales Vektorfeld.

Aus dem erzeugenden Funktional $Z[J, J^+, \eta, \bar{\eta}]$ lässt sich in der üblichen Weise das erzeugende Funktional $W[J, J^+, \eta, \bar{\eta}]$ der verbundenen Greenschen Funktionen bilden.

$$W[J, J^+, \eta, \bar{\eta}] := \ln(Z[J, J^+, \eta, \bar{\eta}]) \quad (2.13)$$

Die verbundenen Greenschen Funktionen ergeben sich nun aus W durch Differentiation nach den jeweiligen Quellen. Beispiele:

$$\langle \Psi_y \bar{\Psi}_z \rangle^c = -\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_y} \frac{\partial}{\partial \eta_z} W[J, J^+, \eta, \bar{\eta}] \Big|_{J, J^+, \eta, \bar{\eta}=0} \quad (2.14)$$

$$\langle \phi_y \phi_z^+ \rangle^c = \frac{\partial}{\partial J_y^+} \frac{\partial}{\partial J_z} W[J, J^+, \eta, \bar{\eta}] \Big|_{J, J^+, \eta, \bar{\eta}=0} \quad (2.15)$$

2.3 Basistransformation des Fermionen-Raums

Für die Durchführung der fermionischen Hopping-Parameter-Entwicklung ist es vorteilhaft, die Matrix $M_{\hat{\mu}}$ zu diagonalisieren. Dazu werden hier wie in [7] die links- und rechtshändigen Anteile der fermionischen Felder ψ und χ umgeordnet:

$$\psi_{Ax} := \psi_{L,x} + \chi_{R,x} \quad \psi_{Bx} := \chi_{L,x} + \psi_{R,x} \quad (2.16)$$

Das Symbol Ψ_x wird nun als:

$$\Psi_x := \begin{pmatrix} \psi_{Ax} \\ \psi_{Bx} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \psi_x \\ \chi_x \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

redefiniert. Dabei ist die Matrix A durch

$$A = \begin{pmatrix} P_L & P_R \\ P_R & P_L \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

mit

$$P_L = \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 - \gamma_5}{2}$$

gegeben. Für die Matrizen $G(\phi_x, \phi_x^+)$ und $M_{\hat{\mu}}$ ergibt sich damit in der neuen Basis die folgende Gestalt:

$$G(\phi_x, \phi_x^+) := \begin{pmatrix} \bar{\mu} & \phi_x(G_\alpha - \gamma_5 G_\beta) \\ \phi_x^+(G_\alpha + \gamma_5 G_\beta) & \bar{\mu} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$M_{\hat{\mu}} := \begin{pmatrix} \gamma_\mu + r & 0 \\ 0 & \gamma_\mu + r \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Dabei gilt:

$$G_\alpha := \frac{1}{2}(G_\psi + G_\chi) \quad G_\beta := \frac{1}{2}(G_\psi - G_\chi) \quad (2.21)$$

In den folgenden Abschnitten wird nun, soweit nicht anders erwähnt, diese Basis des Fermionen-Raums verwenden.

Die hier vorgestellte Basis werde ich kurz als *AB*-Basis und die in Abschnitt 2.1 eingeführte als $\psi\chi$ -Basis bezeichnen.

2.4 Flavour-Verdopplung

Numerischen Simulationen, die mit einem Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus durchgeführt werden, benötigen eine Verdopplung der Flavours des fermionischen Spektrums. Da im Rahmen dieser Arbeit Ergebnisse aus der Hopping-Parameter-Entwicklung mit denen eines derartigen Algorithmus verglichen werden sollen, ist es notwendig den Fall mehrerer fermionischer Flavours zu diskutieren. Die Anzahl der Flavours wird im weiteren mit n_F bezeichnet. In [7] wurde der fermionische Teil der Wirkung $S_{\phi\Psi}[\phi, \phi^+, \Psi, \bar{\Psi}]$ im Fall $n_F = 2$ wie folgt modifiziert.

$$S_{\phi\Psi}[\phi, \phi^+, \Psi, \bar{\Psi}] := \sum_{F=1}^2 \sum_x \left\{ \bar{\Psi}_x^{(F)} G^{(F)}(\phi_x, \phi_x^+) \Psi_x^{(F)} - K \sum_{\hat{\mu}} \bar{\Psi}_{x+\hat{\mu}}^{(F)} M_{\hat{\mu}} \Psi_x^{(F)} \right\} \quad (2.22)$$

Dabei gilt für $G^{(F)}(\phi_x, \phi_x^+)$:

$$G^{(1)}(\phi_x, \phi_x^+) = G(\phi_x, \phi_x^+) \quad G^{(2)}(\phi_x, \phi_x^+) = G^+(\phi_x, \phi_x^+) \quad (2.23)$$

Das führt dazu, daß sich das Feld $\Psi^{(2)}$ wie ein Spiegelfeld zu $\Psi^{(1)}$ transformiert. Die Symmetrietransformation (2.10) erhält in diesem Fall die Form:

$$\begin{aligned} \psi'_{Lx}^{(F)} &= \exp(-i\alpha_{FL}) \psi_{Lx}^{(F)} & \psi'_{Rx}^{(F)} &= \exp(-i\alpha_{FR}) \psi_{Rx}^{(F)} \\ \chi'_{Lx}^{(F)} &= \exp(-i\alpha_{FR}) \chi_{Lx}^{(F)} & \chi'_{Rx}^{(F)} &= \exp(-i\alpha_{FL}) \chi_{Rx}^{(F)} \\ \alpha_{1L} &= \alpha_L + \alpha_{1-2}, & \alpha_{1R} &= \alpha_R + \alpha_{1-2}, & \alpha_{2L} &= \alpha_R - \alpha_{1-2}, & \alpha_{2R} &= \alpha_L - \alpha_{1-2} \\ \phi'_x &= e^{-i(\alpha_L - \alpha_R)} \phi_x \end{aligned} \quad (2.24)$$

Damit ergibt sich, daß das Modell im Fall $n_F = 2$ eine globale $U(1)_L \otimes U(1)_R \otimes U(1)_{1-2}$ -Symmetrie besitzt. Es ist zu beachten, daß die Wirkung S keinen Term enthält, der die beiden Flavours mischt.

Diese Verdopplung der Fermionenanzahl hat nichts mit dem Verdopplungsproblem entsprechend Abschnitt 3.1.1 zu tun, sondern ist eine rein technische Notwendigkeit in dem Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus. An dieser Stelle soll ausdrücklich betont werden, daß die Hopping-Parameter Entwicklung diese Verdopplung der Flavours nicht benötigt. Da sich die Methode der Entwicklung bei verschiedenen Flavour-Anzahlen n_F nicht wesentlich unterscheidet, wird hier im weiteren der Fall $n_F = 1$ diskutiert und nur an den Stellen, an denen sich im Fall $n_F \neq 1$ Unterschiede ergeben, werden diese diskutiert.

Kapitel 3

Renormierte Größen

In diesem Kapitel werden die renormierten Größen definiert, dabei wird für die Fermionen die $\psi\chi$ -Basis verwendet.

3.1 Fermionen

3.1.1 Anmerkungen zum Fermionen–Verdopplungsproblem

Aus der Gleichung (2.1) ergibt sich im Fall freier Fermionen, das heißt bei $G_\psi = G_\chi = 0$, für den inversen fermionischen Propagator $(\Delta_f^\Psi)^{-1}(x, y)$ die folgende Matrix:

$$(\Delta_f^\Psi)^{-1}(x, y) = \delta_{x,y} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mu} \\ \bar{\mu} & 0 \end{pmatrix} - K \sum_{\hat{\mu}} \delta_{y,x+\hat{\mu}} \begin{pmatrix} \gamma_\mu & r \\ r & \gamma_\mu \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Mit der Definition:

$$\hat{p}_\mu := 2 \sin \left(\frac{p_\mu}{2} \right) \quad \bar{p}_\mu := \sin(p_\mu) \quad (3.2)$$

ergibt sich hieraus unter Verwendung von Gleichung (2.8):

$$\begin{aligned} (\tilde{\Delta}_f^\Psi)^{-1}(p) &= \sum_x e^{-ipx} (\Delta_f^\Psi)^{-1}(x, 0) \\ &= 2iK \sin p_\mu \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mu_{\psi\chi} + rK\hat{p}^2 \\ \mu_{\psi\chi} + rK\hat{p}^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$\tilde{\Delta}_f^\Psi(p) = \frac{1}{(\mu_{\psi\chi} + rK\hat{p}^2)^2 + 4K^2\bar{p}^2} \begin{pmatrix} -2iK\gamma_\mu\bar{p}_\mu & \mu_{\psi\chi} + rK\hat{p}^2 \\ \mu_{\psi\chi} + rK\hat{p}^2 & -2iK\gamma_\mu\bar{p}_\mu \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Der Propagator im Ortsraum $\Delta_f^\Psi(x, y)$ lässt sich nun durch Fourierrücktransformation

$$\Delta_f^\Psi(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} d^4 p e^{ipx} \tilde{\Delta}_f^\Psi(p) \quad (3.5)$$

aus Gleichung (3.4) gewinnen. Dabei wird über die gesamte Brillouin-Zone integriert.

An dieser Stelle zeigt sich nun ein grundsätzliches Problem bei der Beschreibung von Fermionen auf dem Gitter. Der obige Propagator besitzt in der Brillouin-Zone 16 Teilchenpole, die in der Nähe der Mitte ($p_\mu = 0$) und der Ecken ($p_\mu = \pi$) liegen. Das Integral

(3.5) berücksichtigt diese Pole gleichberechtigt. Als Ergebnis beschreibt $\Delta_f^\Psi(x, 0)$ die Propagation von 16 Teilchen.

Betrachten wir nun den Pol in der Nähe von $p = \pi_1 := (\pi, 0, 0, 0)$. Er läßt sich durch Multiplikation der Gleichung (3.5) mit $(-1)^{x_1}$ in die Nähe der Stelle $p_\mu = 0$ verschieben:

$$\begin{aligned} (-1)^{x_1} \Delta_f^\Psi(x, 0) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} d^4 p e^{i(p - \pi_1)x} \tilde{\Delta}_f^\Psi(p) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} dp_1 \int_{-\pi}^{\pi} dp_2 \int_{-\pi}^{\pi} dp_3 \int_{-\pi}^{\pi} dp_4 e^{ipx} \tilde{\Delta}_f^\Psi(p + \pi_1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Der Pol in $\tilde{\Delta}_f^\Psi(p)$ an der Stelle $p = \pi_1$ entspricht somit der Propagation eines „antiferromagnetischen“ Feldes in der x_1 -Richtung und eines „ferromagnetischen“ Feldes in den verbleibenden drei Richtungen.

$$(-1)^{x_1} \Delta_f^\Psi(x, 0) = \langle (-1)^{x_1} \Psi(x) \bar{\Psi}(0) \rangle^c \quad (3.7)$$

Nach Gleichung (3.4) ergibt sich aus der Lage der Polstelle in $\tilde{\Delta}_f^\Psi(p)$ in der Nähe von $p = \pi_1$, daß diesem Feld eine Masse von $\mu(\pi_1) \approx \frac{1}{2K}(\mu_{\psi\chi} + rK(\hat{\pi}_1)^2) = \frac{1}{2K}(\mu_{\psi\chi} + 4rK)$ im Fall kleiner $\mu_{\psi\chi}$ zuzuordnen ist.

Allgemein ist einem Teilchenpol in der Nähe der Ecken P der Brillouin-Zone eine Masse von $\mu(P) \approx \frac{1}{2K}(\mu_{\psi\chi} + rK\hat{P}^2)$ mit $P_\mu \in \{0, \pi\}$ zuzuordnen.

Hier zeigt sich nun der Nutzen des Wilson-Terms. Wird $r = 0$ gesetzt, so wird allen Polen die gleiche Masse $\mu(P) \approx \frac{1}{2K}\mu_{\psi\chi}$ zugeordnet.

Wird r hingegen auf einen von 0 verschiedenen positiven Wert gesetzt, so führt dies dazu, daß den unerwünschten Dopplern im Kontinuumslimes eine divergierende Masse ($\mu \rightarrow \infty$) zugeordnet wird. Der Kontinuumslimes wird dadurch gebildet, daß der Massenparameter $\mu(P)$ auf 0 gesetzt wird. Dieser Massenparameter gibt die Masse der beschriebenen Teilchen in Einheiten der reziproken Gitterlänge $1/a$ an. Vergleiche [2]¹. Dies ist nun an den Stellen, an denen für mindestens ein $p_\mu = \pi$ gilt, nicht mehr zu erreichen. Als Folge davon wird den entsprechenden Teilchen eine Masse der Größenordnung $\mathcal{O}(1/a)$ zugeordnet, und sie werden somit aus dem physikalischen Spektrum entfernt. Es sollte hier noch kurz bemerkt werden, daß der Wilson-Term den Kontinuumslimes der Wirkung S nicht verändert.

Soweit die Betrachtungen zur freien Theorie. Im nächsten Abschnitt werden in Analogie zu dieser Betrachtung die renormierten Größen in der wechselwirkenden Theorie definiert.

3.1.2 Definition der fermionischen renormierten Größen

Die folgende Darstellung lehnt sich an die Darstellung in [7] an. In der wechselwirkenden Theorie wird nun angenommen, daß sich das qualitative Verhalten des Propagators $\tilde{\Delta}^\Psi(p)$ in der Nähe der Ecken der Brillouin-Zone nicht wesentlich von dem des freien Propagators $\tilde{\Delta}_f^\Psi(p)$ unterscheidet. In Analogie zu Gleichung (3.3) wird für $(\tilde{\Delta}^\Psi)^{-1}(p)$ in der symmetrischen Phase die folgende Form, die im Anhang A näher erläutert wird, erwartet:

$$(\tilde{\Delta}^\Psi)^{-1}(p) = \begin{pmatrix} 0 & M_{\psi\chi}(P) \\ M_{\psi\chi}(P) & 0 \end{pmatrix} + i\bar{p}_\mu \begin{pmatrix} \gamma_\mu N_{\psi\psi}(P) & 0 \\ 0 & \gamma_\mu N_{\chi\chi}(P) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\bar{p}^2) \quad (3.8)$$

¹Beachte: In [2] entsprechen die hier benutzten Felder, Massen etc. den Größen $\hat{\Psi}$, \hat{M} , etc.

Hierbei steht P für den Impuls der nächstgelegenen Ecke der Brillouin-Zone, das heißt $P_\mu \in \{0, \pi\}$ und $p_\mu = P_\mu + \delta p_\mu$ mit $-\pi/2 < \delta p_\mu < \pi/2$.

Die fermionischen Felder ψ und χ werden in der Weise renormiert, daß die Matrizen $N_{\psi\psi}(P)$ und $N_{\chi\chi}(P)$ in den Einheitsoperator $\underline{1}_S$ im Spinor-Raum überführt werden. Dazu werden Wellenfunktionsrenormierungen Z_ψ und Z_χ definiert.

$$Z_\psi(P) = \frac{1}{N_{\psi\psi}} \quad \text{und} \quad Z_\chi(P) = \frac{1}{N_{\chi\chi}} \quad (3.9)$$

Die renormierten fermionischen Felder ψ_R und χ_R ergeben sich dann folgendermaßen:

$$\psi_R(p) = \frac{1}{\sqrt{Z_\psi(P)}} \psi(p) \quad \chi_R(p) = \frac{1}{\sqrt{Z_\chi(P)}} \chi(p) \quad (3.10)$$

Durch die Renormierung entsteht aus $M(P)$ die renormierte Massenmatrix $M_R(P)$. Aus deren Einträgen wird die renormierte Masse $\mu_R(P)$ wie folgt definiert:

$$M_R(P) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{Z_\psi Z_\chi} M_{\chi\psi}(P) \\ \sqrt{Z_\psi Z_\chi} M_{\psi\chi}(P) & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 & \mu_R(P) \\ \mu_R(P) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Aus Gründen der Übersicht wird die P -Abhängigkeit der renormierten Größen hier und im folgenden nicht immer ausgeschrieben. Sie sollte aber aus dem Zusammenhang für den Leser leicht zu erkennen sein. Insgesamt ergibt sich nach Gleichung (3.8):

$$(\tilde{\Delta}^\Psi)^{-1}(p) = i\bar{p}_\mu \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_\psi} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_\chi} \gamma_\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{Z_\psi Z_\chi}} \mu_R \\ \frac{1}{\sqrt{Z_\chi Z_\psi}} \mu_R & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\bar{p}^2) \quad (3.12)$$

Durch Inversion erhält man daraus:

$$\tilde{\Delta}^\Psi(p) = \frac{1}{\mu_R^2 + \bar{p}^2} \begin{pmatrix} -iZ_\psi \gamma_\mu \bar{p}_\mu & \sqrt{Z_\psi Z_\chi} \mu_R \\ \sqrt{Z_\psi Z_\chi} \mu_R & -iZ_\chi \gamma_\mu \bar{p}_\mu \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu_R^2 + \bar{p}^2} \mathcal{O}(\bar{p}^2) \quad (3.13)$$

Es werden nun zwei Matrizen definiert, aus denen sich dann die renormierten Größen mit Hilfe der „Linked-Cluster-Entwicklung“ bestimmen lassen.

$$A(P) = \begin{pmatrix} 0 & A_{\psi\chi}(P) \\ A_{\psi\chi}(P) & 0 \end{pmatrix} := \tilde{\Delta}^\Psi(P) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{Z_\psi(P) Z_\chi(P)}}{\mu_R(P)} \\ \frac{\sqrt{Z_\psi(P) Z_\chi(P)}}{\mu_R(P)} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$B(P) = \begin{pmatrix} B_{\psi\psi}(P) & 0 \\ 0 & B_{\chi\chi}(P) \end{pmatrix} := i \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \bar{p}_\mu} \tilde{\Delta}^\Psi(P) = \begin{pmatrix} \frac{Z_\psi(P)}{\mu_R^2(P)} & 0 \\ 0 & \frac{Z_\chi(P)}{\mu_R^2(P)} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Insgesamt gilt nun:

$$\mu_R(P) = \frac{A_{\psi\chi}(P)}{\sqrt{B_{\psi\psi}(P) B_{\chi\chi}(P)}}; \quad Z_\psi(P) = \frac{A_{\psi\chi}^2(P)}{B_{\chi\chi}(P)}; \quad Z_\chi(P) = \frac{A_{\psi\chi}^2(P)}{B_{\psi\psi}(P)} \quad (3.16)$$

3.2 Bosonen

In diesem Abschnitt sollen die Wellenfunktionsrenormierung, die renormierte Masse und die renormierte Selbstkopplung für das bosonischen Feld ϕ definiert werden. Bei der Formulierung einer bosonischen Theorie auf dem Gitter entsteht im allgemeinen kein Verdopplungsproblem [2].

Bei der Definition der bosonischen renormierten Größen werden die Konventionen aus [6, 7] benutzt. Dort werden diese Größen durch die renormierten Vertexfunktionen für ϕ_{1x} bzw. ϕ_{2x} definiert. Da sie hier aber aus den Vertexfunktionen für ϕ_x und ϕ_x^+ bestimmt werden sollen, ergeben sich an einigen Stellen in den Definitionen konstante Faktoren, die nur aus Gründen der Konvention eingeführt werden. Als bosonischer Propagator wird hier der folgende Ausdruck bezeichnet:

$$\tilde{\Delta}^\phi(x) := \langle \phi_x \phi_0^+ \rangle^c \quad (3.17)$$

Der inverse bosonische Propagator $(\tilde{\Delta}^\phi)^{-1}(p)$ besitzt in der wechselwirkenden Theorie entsprechend [7] die allgemeine Form:

$$(\tilde{\Delta}^\phi)^{-1}(p) = \frac{1}{2Z_\phi} [\hat{p}^2 + m_R^2 + \mathcal{O}(\hat{p}^4)] \quad (3.18)$$

Inversion liefert:

$$\tilde{\Delta}^\phi(p) = \frac{2Z_\phi}{\hat{p}^2 + m_R^2} + \mathcal{O}(\hat{p}^4) \quad (3.19)$$

Daraus ergibt sich an der Stelle $p_\mu = 0$:

$$Z_\phi = -4 \frac{[\tilde{\Delta}^\phi(0)]^2}{\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\mu} \tilde{\Delta}^\phi(0)} \quad m_R^2 = -8 \frac{\tilde{\Delta}^\phi(0)}{\sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\mu} \tilde{\Delta}^\phi(0)} \quad (3.20)$$

Abschließend ist noch die renormierte bosonische Selbstkopplung g_R einzuführen. Dazu ist zunächst die Bezeichnung der renormierten Vertexfunktionen zu erklären. Das Symbol

$$\tilde{\Gamma}_R^{(n_B, 2n_F)}(p_1, \dots, p_{n_B+2n_F})_{i_1 \dots i_{n_B} j_1 k_1 \dots j_{n_F} k_{n_F}} \quad (3.21)$$

steht für die renormierte Vertexfunktion im Impulsraum mit n_B Bosonen, n_F Fermionen und n_F Antifermionen. Die Indizes bezeichnen bei bosonischen Feldern den Real- bzw. den Imaginärteil und bei fermionischen Feldern die Spinorkomponente. Die renormierte bosonische Selbstkopplung wird nun mit Hilfe der renormierten 4-Punkt-Vertexfunktion $\tilde{\Gamma}_R^{(4,0)}(0, 0, 0, 0)_{ijkl}$ definiert.

$$g_R S_{ijkl} := -\tilde{\Gamma}_R^{(4,0)}(0, 0, 0, 0)_{ijkl} \quad (3.22)$$

mit: $S_{ijkl} := \frac{1}{3}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}); \quad i, j, k, l \in \{1, 2\}$

Dies lässt sich aus:

$$g_R = -\frac{\tilde{\Gamma}^{(4,0)}(0, 0, 0, 0)_{1111}}{Z_\phi^2} = -\frac{\tilde{G}_c^{(4,0)}(0, 0, 0, 0)_{1111}}{Z_\phi^2 \left[\frac{\tilde{G}_c^{(2,0)}(0, 0)_{11}}{Z_\phi} \right]^4} = -64 \frac{\frac{3}{8} \sum_{xyz} \langle \phi_x \phi_y^+ \phi_z \phi_0^+ \rangle^c}{\left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\mu} \tilde{\Delta}^\phi(0) \right]^2} \quad (3.23)$$

bestimmen. Hierin steht $\tilde{G}_c^{(n_B, n_F)}$ für die verbundene Greensche Funktion im Impulsraum. Die Anordnung der Indizes ist identisch zu der der zugeordneten Vertexfunktion.

3.3 Renormierte Yukawa-Kopplungen

Als letzte der renormierten Größen sollen die renormierten Yukawa-Kopplungen $G_{R\psi}$ und $G_{R\chi}$ eingeführt werden. Ich verwende hier die in [7] durch die dortige Gleichung (32) gegebenen Definitionen, die ich an meine Notation angepaßt habe:

$$G_{R\psi} = -\frac{m_R^2 \mu_R^2}{\sqrt{2Z_\phi} Z_\chi} \langle \chi_L \phi \bar{\chi}_R \rangle_s = -\frac{m_R^2 \mu_R^2}{\sqrt{2Z_\phi} Z_\chi} \langle \chi_R \phi^+ \bar{\chi}_L \rangle_s \quad (3.24)$$

$$G_{R\chi} = -\frac{m_R^2 \mu_R^2}{\sqrt{2Z_\phi} Z_\psi} \langle \psi_R \phi \bar{\psi}_L \rangle_s = -\frac{m_R^2 \mu_R^2}{\sqrt{2Z_\phi} Z_\psi} \langle \psi_L \phi^+ \bar{\psi}_R \rangle_s \quad (3.25)$$

Dabei ist:

$$\langle \psi_L \phi^+ \bar{\psi}_R \rangle_s \underline{1}_S := \sum_{xy} \langle \psi_{L,x} \phi_0^+ \bar{\psi}_{R,y} \rangle^c \quad (3.26)$$

definiert, wobei $\underline{1}_S$ für den Einheitsoperator im 4-dimensionalen Spinor-Raum steht.

3.4 Definition der Suszeptibilitäten

Die in den renormierten Größen verwendeten Greenschen Funktionen des Impulsraums müssen noch durch auf dem Raum-Zeit-Gitter bestimmbare Größen, sogenannte Suszeptibilitäten ersetzt werden. Diese werden in der Weise definiert, daß eine durchgehende Benutzung der komplexen Notation für das Skalarfeld ϕ_x möglich ist. Damit die Resultate auf einfache Weise mit denen in [6, 7] verglichen werden können, werden hier zusätzliche Faktoren eingeführt, so daß die Definitionen der Suszeptibilitäten äquivalent sind.

Die Suszeptibilitäten, die zur Bestimmung von μ_R benötigt werden, sind auch in den Ecken der Brillouin-Zone zu definieren, da das Verschwinden der unerwünschten Doppler geprüft werden soll. Dazu wird der Impuls P mit $P_\mu \in \{0, \pi\}$ eingeführt.

$$\begin{aligned} \chi_2^\phi &:= \frac{1}{2} \sum_x \langle \phi_x \phi_0^+ \rangle^c = \frac{1}{2} \tilde{\Delta}^\phi(p) \Big|_{p=0} \\ \mu_2^\phi &:= \frac{1}{2} \sum_x x^2 \langle \phi_x \phi_0^+ \rangle^c = -\frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p_\mu} \tilde{\Delta}^\phi(p) \Big|_{p=0} \\ \chi_4^\phi &:= \frac{3}{8} \sum_{xyz} \langle \phi_x \phi_y^+ \phi_z \phi_0^+ \rangle^c \\ \chi_2^\Psi(P) &:= \sum_x e^{-iP_\mu x_\mu} \langle \Psi_x \bar{\Psi}_0 \rangle^c = A(P) \\ &=: \chi_2^{\psi\chi}(P) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \underline{1}_S \\ \underline{1}_S & 0 \end{pmatrix} \\ \mu_2^\Psi(P) &:= \sum_x \left[\sum_{\nu=1}^4 \left(\gamma_\nu x_\nu \frac{1}{\cos(P_\nu)} \right) e^{-iP_\mu x_\mu} \langle \Psi_x \bar{\Psi}_0 \rangle^c \right] = 4 B(P) \\ &=: \begin{pmatrix} \mu_2^\psi(P) \underline{1}_S & 0 \\ 0 & \mu_2^\chi(P) \underline{1}_S \end{pmatrix} \\ \chi_3^{\Psi\Phi\Psi} &:= \text{diag} [\langle \psi_L \phi^+ \bar{\psi}_R \rangle_s, \langle \psi_R \phi \bar{\psi}_L \rangle_s, \langle \chi_L \phi \bar{\chi}_R \rangle_s, \langle \chi_R \phi^+ \bar{\chi}_L \rangle_s] \quad (3.27) \end{aligned}$$

Der Kosinus-Term in den Gleichung für μ_2^Ψ entsteht durch Umformen der Ableitung nach \bar{p}_ν auf p_ν nach der Kettenregel.

Die renormierten physikalischen Größen sind wie folgt mit den Suszeptibilitäten verknüpft:

$$\begin{aligned}
 m_R^2 &= 8 \frac{\chi_2^\phi}{\mu_2^\phi} & Z_\phi &= 8 \frac{(\chi_2^\phi)^2}{\mu_2^\phi} & g_R &= -64 \frac{\chi_4^\phi}{(\mu_2^\phi)^2} \\
 \mu_R(P) &= 4 \frac{\chi_2^{\psi\chi}(P)}{\sqrt{\mu_2^\psi(P) \mu_2^\chi(P)}} & Z_\psi(P) &= 4 \frac{[\chi_2^{\psi\chi}(P)]^2}{\mu_2^\chi(P)} & Z_\chi(P) &= 4 \frac{[\chi_2^{\psi\chi}(P)]^2}{\mu_2^\psi(P)} \\
 G_{R\psi} &= -\frac{m_R^2 \mu_R^2 (\chi_3^{\Psi\phi\Psi})_{33}}{Z_\chi \sqrt{2Z_\phi}} & G_{R\chi} &= -\frac{m_R^2 \mu_R^2 (\chi_3^{\Psi\phi\Psi})_{22}}{Z_\psi \sqrt{2Z_\phi}}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Kapitel 4

Methode der Doppelentwicklung

4.1 Taylor-Reihe

Da eine geschlossene Lösung von Gleichung (2.13) nicht möglich ist, soll hier durch Taylorentwicklung nach κ und K eine Näherung mit Entwicklungspunkt $\kappa = K = 0$ bestimmt werden. Zur besseren Handhabung der dabei entstehenden Terme wird die Technik der „Linked-Cluster-Expansion“ angewandt. Das Prinzip ist in [1] am Beispiel des Ising-Modells nachzulesen. In Analogie zu dieser Veröffentlichung wird hier zunächst vorgegangen.

Zur Entwicklung der Methode ist es vorteilhaft, in der Wirkung (2.1) eine zusätzliche Variable $L_{\hat{\mu}}(x)$ einzuführen, so daß sich für $S_{\phi}[\phi, \phi^+]$ der folgende Term ergibt:

$$S_{\phi}[\phi, \phi^+] = \sum_x \left\{ \phi_x^+ \phi_x + \lambda(\phi_x^+ \phi_x - 1)^2 - \kappa \sum_{\hat{\mu}} L_{\hat{\mu}}(x) \phi_{x+\hat{\mu}}^+ \phi_x \right\} \quad (4.1)$$

Diese zusätzliche Variable wird nach Abschluß der Rechnung auf $L_{\hat{\mu}}(x) = 1$ gesetzt. Aus dem gleichen Grund werden hier im fermionischen Teil der Wirkung die Matrixelemente der Matrix $M_{\hat{\mu}}$ als ortsabhängige Variablen $(M_{\hat{\mu}}(x))_{ab}$ eingeführt. Nach Abschluß der Rechnung werden diese Elemente dann wieder auf die Gleichung (2.20) beziehungsweise Gleichung (2.5) entsprechenden Werte gesetzt.

$$\begin{aligned} W(K', \kappa') &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j!} \left[K' \frac{\partial}{\partial K} + \kappa' \frac{\partial}{\partial \kappa} \right]^j W|_{K=0, \kappa=0} \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j!} \left[K' \sum_{x, \hat{\mu}, a, b} (M'_{\hat{\mu}}(x))_{ab} \frac{\partial}{\partial [K (M_{\hat{\mu}}(x))_{ab}]} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \kappa' \sum_{x, \hat{\mu}} L'_{\hat{\mu}}(x) \frac{\partial}{\partial [\kappa L_{\hat{\mu}}(x)]} \right]^j W|_{K=\kappa=0} \right\} \\ &=: \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{j!} \mathcal{T}^j W|_{K=\kappa=0} \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dabei wurde der Differentialoperator \mathcal{T} als:

$$\mathcal{T} := \left[K' \sum_{x, \hat{\mu}, a, b} (M'_{\hat{\mu}}(x))_{ab} \frac{\partial}{\partial [K (M_{\hat{\mu}}(x))_{ab}]} + \kappa' \sum_{x, \hat{\mu}} L'_{\hat{\mu}}(x) \frac{\partial}{\partial [\kappa L_{\hat{\mu}}(x)]} \right] \quad (4.3)$$

definiert.

4.2 Differentialgleichungen

Die Differentiationen nach den Bindungsvariablen $\kappa L_{\hat{\mu}}(x)$ und $K(M_{\hat{\mu}}(x))_{ab}$ lassen sich mit den folgenden Differentialgleichungen auf einfache Weise auf Differentiationen nach den Quellen zurückführen.

Diese Vorgehensweise ermöglicht es in Gleichung (4.2) K und κ auf 0 zu setzen, bevor die Ableitungen ausgeführt werden, da die Quellen nicht von den Hopping-Variablen K und κ abhängen.

Das Nullsetzen der Hopping-Variablen führt, wie in Kapitel 5.1 beschrieben wird, zum Zerfallen von W in Summanden, die jeweils nur von Quellen eines Ortes x abhängen. Diese Eigenschaft wird im folgenden ausgenutzt und stellt den wesentlichen Vorteil der Ersetzung der Ableitungen in Gleichung (4.2) durch Ableitung nach den Quellen dar.

4.2.1 Bosonen

Für die Ableitung nach der bosonischen Bindungsvariablen $\kappa L_{\hat{\mu}}(x)$ gilt folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial W}{\partial [\kappa L_{\hat{\mu}}(x)]} = \frac{\partial}{\partial J_{x+\hat{\mu}}} \frac{\partial}{\partial J_x^+} W + \frac{\partial W}{\partial J_{x+\hat{\mu}}} \frac{\partial W}{\partial J_x^+} \quad (4.4)$$

Die Gleichung gilt für beliebige Werte von κ , K , J , J^+ , η und $\bar{\eta}$. Sie lässt sich durch Differentiation aus den Gleichungen (2.11), (2.13) und (4.1) herleiten. Dazu sind die Integrationen und die Differentiationen zu vertauschen.

4.2.2 Fermionen

Im fermionischen Fall gilt:

$$\frac{\partial W}{\partial [K(M_{\hat{\mu}}(x))_{ab}]} = - \frac{\partial}{\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} W - \frac{\partial W}{\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}} \frac{\partial W}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} \quad (4.5)$$

Auch diese Gleichung gilt für beliebige Werte der Hopping-Variablen und Quellfelder. Die Indizes der Quellen η , $\bar{\eta}$ in der obigen Gleichung (4.5) ergeben sich wie folgt:

$$\eta_{x,a} \text{ mit: } \quad x: \text{Ortsindex}, \quad a: \text{Spinorindex} \quad (4.6)$$

Der Beweis dieser Differentialgleichung ist nicht so einfach wie der im bosonischen Fall, deshalb soll er hier ausführlicher dargestellt werden.

Beweis von Gleichung (4.5): Die Abhängigkeit von den bosonischen Feldern und Quellen braucht nicht beachtet zu werden. Zur Vereinfachung setze:

$$\sigma := -S[\Psi, \bar{\Psi}] + \sum_x (\bar{\eta}_x \Psi_x + \bar{\Psi}_x \eta_x) \quad (4.7)$$

Aus der linken Seite ergibt sich mit Gleichung (2.13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial [K(M_{\hat{\mu}}(x))_{ab}]} &= \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial [K(M_{\hat{\mu}}(x))_{ab}]} \\ &= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} [\bar{\Psi}_{x+\hat{\mu},a} \Psi_{x,b} \exp(\sigma)] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Zur Umformung der rechten Seite von Gleichung (4.5) ist es nützlich zu wissen, daß Z ein Polynom in den Grassmann-Variablen η und $\bar{\eta}$ ist. Ansonsten enthält Z keine Grassmann-Variablen, alle Ψ und $\bar{\Psi}$ sind ausintegriert. Wird Z nun in eine Potenzreihe bezüglich der Grassmann-Variablen entwickelt, so enthalten alle Summanden eine gerade Anzahl von Grassmann-Variablen. Genauer gesagt läßt sich jeder Summand in der Form:

$$\alpha \prod_i (\eta_{x_i, a_i} \bar{\eta}_{y_i, b_i}) \quad (4.9)$$

darstellen, wobei α eine geeignete komplexe Zahl ist. Daraus folgt, daß Z mit jedem Term, der aus Grassmann-Variablen aufgebaut ist, kommutiert.

An dieser Stelle möchte ich noch kurz auf die Regeln zur Differentiation in Grassmann-Algebren eingehen. Dazu sind die Grassmann-Variablen paarweise antizuvertauschen, bis die Variable, nach der differenziert wird, direkt hinter dem Differentialoperator steht. Kommt die Variable nicht vor, so ist der Term gleich 0. Zur Erläuterung werden die folgenden Beispiele gegeben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 &= \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 &= \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} [-\eta_1 \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 \eta_2] = \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} \eta_1 \bar{\eta}_2 \bar{\eta}_1 \eta_2 \\ &= \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_2} [-\bar{\eta}_2 \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2] = -\eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \\ \frac{\partial}{\partial \eta_3} \eta_1 \bar{\eta}_1 \eta_2 \bar{\eta}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Zur Ausführung der Grassmann-Differentiationen wird eine „Produktregel“ benötigt, die im folgenden abgeleitet wird. Dazu seien F und G Terme, die eine gerade Anzahl Grassmann-Variablen enthalten.

$$F := \alpha \eta_{x_1, a_1} \bar{\eta}_{y_1, b_1} \eta_{x_2, a_2} \bar{\eta}_{y_2, b_2} \cdots \eta_{x_n, a_n} \bar{\eta}_{y_n, b_n} \quad (4.11)$$

$$G := \beta \eta_{w_1, c_1} \bar{\eta}_{v_1, d_1} \eta_{w_2, c_2} \bar{\eta}_{v_2, d_2} \cdots \eta_{w_n, c_n} \bar{\eta}_{v_n, d_n} \quad (4.12)$$

Nun gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_{x,a}} FG = \left(\frac{\partial}{\partial \eta_{x,a}} F \right) G + F \left(\frac{\partial}{\partial \eta_{x,a}} G \right) \quad (4.13)$$

Zum Beweis der Gleichung (4.13) ist eine Fallunterscheidung zu machen.

1. $\eta_{x,a}$ ist entweder in F oder in G enthalten

In diesem Fall ist einer der Summanden der rechten Seite null, und die Gültigkeit ist direkt einzusehen.

2. $\eta_{x,a}$ ist in F und in G nicht enthalten

Hier sind beide Summanden null wie auch die linke Seite der Gleichung.

3. $\eta_{x,a}$ ist in F und in G enthalten

In diesem Fall gilt $FG = 0$, so daß die linke Seite der Gleichung null ergibt. Die Summanden der rechten Seite sind von null verschieden. Sie unterscheiden sich aber

nur durch eine ungerade Permutation der Grassmann-Variablen voneinander, so daß sie sich gegenseitig wegheben. Somit ist auch die rechte Seite null und die Gleichung (4.13) ist bewiesen.

Da Z sich, wie schon oben beschrieben, als Summe von Termen der Form (4.9) darstellen läßt, kann man mit Gleichung (4.13) durch vollständige Induktion

$$\frac{\partial}{\partial \eta_{x,a}} Z^n = n \left(\frac{\partial}{\partial \eta_{x,a}} Z \right) Z^{n-1} \quad (4.14)$$

zeigen. Da $\left(\frac{\partial}{\partial \eta_{x,a}} Z \right)$ aus Summanden mit einer ungeraden Anzahl von Grassmann-Variablen besteht, läßt sich mit der gleichen Methode

$$\frac{\partial}{\partial \eta_{y,b}} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial \eta_{x,a}} \right) Z^n \right] = \left(\frac{\partial}{\partial \eta_{y,b}} \frac{\partial}{\partial \eta_{x,a}} Z \right) Z^n - \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta_{x,a}} \right) \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta_{y,b}} \right) n Z^{n-1} \quad (4.15)$$

zeigen.

Analoge Gleichungen gelten auch für Differentiationen nach $\bar{\eta}_{x,a}$. Es wird noch die folgende Gleichung benötigt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} \frac{1}{Z} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} \left[\sum_{j=0}^{\infty} (1-Z)^j \right] \\ &= \left[\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(1-Z)^j \right] \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} (-Z) \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (1-Z)^n \right] \left[\sum_{h=0}^{\infty} (1-Z)^h \right] \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} (-Z) \\ &= -\frac{1}{Z^2} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} [\Psi_{x,b} \exp(\sigma)] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Damit lassen sich auch die Terme der linken Seite der Gleichung (4.5) bestimmen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}} &= \frac{\partial}{\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}} \ln(Z) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}} \left[-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1-Z)^j}{j} \right] \\ &= \left[\sum_{j=0}^{\infty} (1-Z)^j \right] \frac{\partial Z}{\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}} \\ &= -\left[\sum_{j=0}^{\infty} (1-Z)^j \right] \cdot \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} [\bar{\Psi}_{x+\hat{\mu},a} \exp(\sigma)] \\ &= -\frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} [\bar{\Psi}_{x+\hat{\mu},a} \exp(\sigma)] \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} [\Psi_{x,b} \exp(\sigma)] \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} W &= \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} \frac{\partial}{\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}} W \\
&= -\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} \left\{ \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} [\bar{\Psi}_{x+\hat{\mu},a} \exp(\sigma)] \right\} \\
&= -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} [\bar{\Psi}_{x+\hat{\mu},a} \exp(\sigma)] \\
&\quad - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} \frac{1}{Z} \right) \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} [\bar{\Psi}_{x+\hat{\mu},a} \exp(\sigma)] \\
&= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} [\bar{\Psi}_{x+\hat{\mu},a} \Psi_{x,b} \exp(\sigma)] \\
&\quad + \frac{1}{Z^2} \left\{ \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} [\Psi_{x,b} \exp(\sigma)] * \right. \\
&\quad \left. * \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} [\bar{\Psi}_{x+\hat{\mu},a} \exp(\sigma)] \right\} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Der Ausdruck in den geschweiften Klammern auf der rechten Seite von Gleichung (4.19) ist gleich dem Produkt der rechten Seiten der Gleichungen (4.17) und (4.18). Der verbleibende Term der rechten Seite von Gleichung (4.19) ist identisch mit der rechten Seite von Gleichung (4.8).

Damit ist die Gleichung (4.5) gezeigt. □

Kapitel 5

Erzeugendes Funktional für 1-Platz-Erwartungswerte

5.1 Grenzfall unendlicher bosonischer Selbstkopplung

Im Abschnitt 4.2 ist es gelungen, die Ableitungen in Gleichung (4.2) auf Ableitungen bezüglich der Quellen umzuschreiben. Dies läßt sich dahingehend ausnutzen, daß die Hopingparameter K und κ vor Ausführung der Ableitungen auf 0 gesetzt werden. Im Verlauf des Abschnittes wird sich zeigen, daß in diesem Fall das erzeugende Funktional Z in Terme, die jeweils nur von den Feldern eines Ortes abhängen, faktorisiert.

Das erzeugende Funktional W läßt sich an der Stelle $K = \kappa = 0$ im Grenzfall $\lambda \rightarrow \infty$ analytisch bestimmen, so daß sich die Ableitungen nach den Quellen η_x , $\bar{\eta}_x$, J_x und J_x^+ leicht ausführen lassen. Die zugehörige Rechnung soll in diesem Unterabschnitt verhältnismäßig detailliert ausgeführt werden. Das Ziel der Rechnung ist Gleichung (5.17).

Im obigen Limes gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi = e^{i\vartheta} \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \phi^+ = e^{-i\vartheta} \quad (5.1)$$

Als Kurznotation wird hier $Z_1 := Z|_{K=\kappa=0}$ einführt. Es gilt bis auf hier nicht relevante multiplikative Konstanten:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \prod_x Z_1(x) \\ &= \prod_x \int d\Psi_x d\bar{\Psi}_x d\vartheta_x * \\ &\quad * \exp \left(-\bar{\Psi}_x G(e^{i\vartheta_x}, e^{-i\vartheta_x}) \Psi_x \right. \\ &\quad \left. + J_x^+ e^{i\vartheta_x} + e^{-i\vartheta_x} J_x + \bar{\eta}_x \Psi_x + \bar{\Psi}_x \eta_x \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dabei gilt:

$$G(e^{i\vartheta_x}, e^{-i\vartheta_x}) := \begin{pmatrix} \bar{\mu} & e^{i\vartheta_x} (G_\alpha - \gamma_5 G_\beta) \\ e^{-i\vartheta_x} (G_\alpha + \gamma_5 G_\beta) & \bar{\mu} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Die Grassmann-Integration läßt sich direkt ausführen, und mit:

$$\begin{aligned} G^{-1}(e^{i\vartheta_x}, e^{-i\vartheta_x}) &= \frac{1}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \begin{pmatrix} \bar{\mu} & -e^{i\vartheta_x} (G_\alpha - \gamma_5 G_\beta) \\ -e^{-i\vartheta_x} (G_\alpha + \gamma_5 G_\beta) & \bar{\mu} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

ergibt sich für Z_1 :

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \prod_x \int d\vartheta_x \left(\bar{\mu}^2 - G_\psi G_\chi \right) * \\
 &\quad * \exp \left(\bar{\eta}_x G^{-1}(e^{i\vartheta_x}, e^{-i\vartheta_x}) \eta_x + J_x^+ e^{i\vartheta_x} + e^{-i\vartheta_x} J_x \right) \\
 &= \prod_x \left(\bar{\mu}^2 - G_\psi G_\chi \right) \exp \left(\bar{\eta}_x \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \right) \eta_x \right) * \\
 &\quad * \int d\vartheta_x \exp \left([\bar{\eta}_x A_1 \eta_x + J_x^+ + J_x] \cos \vartheta_x \right. \\
 &\quad \left. + [\bar{\eta}_x A_2 \eta_x + J_x^+ - J_x] i \sin \vartheta_x \right)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Dabei wurden die folgenden Definitionen verwendet:

$$A_1 := \frac{-1}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \begin{pmatrix} 0 & (G_\alpha - \gamma_5 G_\beta) \\ (G_\alpha + \gamma_5 G_\beta) & 0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

$$A_2 := \frac{-1}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \begin{pmatrix} 0 & (G_\alpha - \gamma_5 G_\beta) \\ (-G_\alpha - \gamma_5 G_\beta) & 0 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Für die weiteren Umformungen bieten sich weitere abkürzende Definitionen an:

$$j_1(x) := \bar{\eta}_x A_1 \eta_x + J_x^+ + J_x \tag{5.8}$$

$$j_2(x) := i(\bar{\eta}_x A_2 \eta_x + J_x^+ - J_x) \tag{5.9}$$

$$j(x) := \sqrt{[j_1(x)]^2 + [j_2(x)]^2} \tag{5.10}$$

Nun gilt für reelle j_1, j_2 :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} d\vartheta \exp(j_1 \cos \vartheta + j_2 \sin \vartheta) &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \exp(j \sin(\vartheta + \vartheta_0)) \\
 &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \exp(j \sin \vartheta) \\
 &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \exp(i(-i j \sin \vartheta)) \\
 &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \cos(i j \sin \vartheta) \\
 &= 2\pi I_0(j)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Hierbei symbolisiert I_0 die modifizierte Bessel-Funktion 0-ter Ordnung. $I_0(j)$ ist eine gerade, holomorphe Funktion auf der ganzen komplexen Ebene, somit ist auch $I_0(j)$ holomorph in j_1 und j_2 , da sich die Mehrdeutigkeit der Wurzel heraushebt. Da auch die rechte Seite holomorph in j_1 und j_2 ist, folgt nach dem Identitätssatz holomorpher Funktionen, daß Gleichung (5.11) auch für komplexe j_1 und j_2 gilt.

Damit ergibt sich nun in der Normierung $Z_1|_{\eta, \bar{\eta}, J, J^+ = 0} = 1$

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \prod_x \exp \left(\bar{\eta}_x \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \right) \eta_x \right) * \\
 &\quad * I_0 \left(\left[(\bar{\eta}_x A_1 \eta_x + J_x^+ + J_x)^2 - (\bar{\eta}_x A_2 \eta_x + J_x^+ - J_x)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Zur Bestimmung von $W_1 := \ln(Z_1)$ werden die folgenden Reihen benötigt:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{(-x)^k}{k} \quad (5.13)$$

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k! \cdot k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (5.14)$$

nun gilt:

$$\begin{aligned} \ln(I_0(j)) &= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k} \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{-1}{l! \cdot l!} \left(\frac{j^2}{4}\right)^l \right]^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k} \left[\sum_{h_1, h_2, h_3, \dots = 0}^{\infty} \delta_{k, (\sum_i h_i)} \frac{(-1)^k k!}{\prod_i (h_i!)^k} \prod_i \left(\frac{j^{2i}}{(i!)^2 4^i}\right)^{h_i} \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} j^{2m} \left[\frac{1}{4^m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{h_1, h_2, h_3, \dots = 0}^{\infty} \delta_{m, (\sum_i i \cdot h_i)} \delta_{k, (\sum_i h_i)} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{\prod_i (h_i!)^k} \prod_i \left(\frac{1}{i!}\right)^{2h_i} \right) \right] \\ &=: \sum_{m=1}^{\infty} b_m j^{2m} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Zum Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wird die Reihe über l in der ersten Zeile in die k -te Potenz erhoben und dann nach Termen sortiert, die durch Multiplikation von jeweils h_l Termen in j^{2l} entstehen.

Die b_m -Koeffizienten werden durch Vergleich der letzten beiden Zeilen definiert. Durch explizite Rechnung erhält man für die ersten 5 Koeffizienten:

$$b_1 = \frac{1}{4}; \quad b_2 = -\frac{1}{64}; \quad b_3 = \frac{1}{576}; \quad b_4 = -\frac{11}{49152}; \quad b_5 = \frac{19}{614400} \quad (5.16)$$

Nimmt man nun dies alles zusammen, so gilt für W_1 :

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_x \left[\bar{\eta}_x \left(\frac{\bar{\mu}}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \right) \eta_x + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left[(\bar{\eta}_x(A_+) \eta_x)(\bar{\eta}_x(A_-) \eta_x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 J_x^+ (\bar{\eta}_x(A_-) \eta_x) + 2 (\bar{\eta}_x(A_+) \eta_x) J_x + 4 J_x^+ J_x \right]^m \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\text{mit: } A_- := A_1 - A_2 \quad A_+ := A_1 + A_2$$

In [5] wird die entsprechende Gleichung für den Fall eines $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -symmetrischen Yukawa-Modells bewiesen. Ohne Beweis wird eine Modifikation der Gleichung (5.17) für den Fall $J_x = J_x^+ = 0$ in den Veröffentlichungen [7, 11] angegeben.

Es ist sofort einzusehen, daß Ableitungen von W_1 nach Quellen verschiedener Orte null ergeben. Diese Eigenschaft ist wichtig in der „Linked-Cluster-Expansion“ in den folgenden Abschnitten.

Für die Matrizen A_- und A_+ gilt:

$$A_- = \frac{-2}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (G_\alpha + \gamma_5 G_\beta) & 0 \end{pmatrix} = \frac{-2}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (P_L G_\psi + P_R G_\chi) & 0 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

$$A_+ = \frac{-2}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \begin{pmatrix} 0 & (G_\alpha - \gamma_5 G_\beta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-2}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \begin{pmatrix} 0 & (P_R G_\psi + P_L G_\chi) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Der Erwartungswert eines Operators \mathcal{A} bei $K = \kappa = 0$ wird im weiteren 1-Platz-Erwartungswert des Operators \mathcal{A} genannt. Die 1-Platz-Erwartungswerte werden durch einen Index 1 gekennzeichnet: $\langle \mathcal{A} \rangle_1$. Die verbundenen 1-Platz-Erwartungswerte der Produkte von Feldfunktionen werden im Zusammenhang mit der Linked-Cluster-Entwicklung auch als Momente der Entwicklung bezeichnet. Diese Erwartungswerte lassen sich aus Gleichung (5.17) durch Differentiation nach den zugeordneten Quellen gewinnen. Mit Ausnahme von $\langle \Psi_x \bar{\Psi}_x \rangle_1^c$ gilt:

$$\begin{aligned} & \langle (\phi_x)^{n_b} (\phi_x^+)^{n_k} (\Psi_x \bar{\Psi}_x)^{n_f} \rangle_1^c \neq 0 \\ \iff & n_b + n_k + n_f = 2N \quad \wedge \quad n_b \leq N \quad \wedge \quad n_k \leq N \quad \wedge \quad n_f \leq 8 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Im Anhang B werden für $r = \bar{\mu} = 1$ die niedrigsten verbundenen 1-Platz-Erwartungswerte tabelliert.

Kapitel 6

Entwicklung des erzeugenden Funktional W

Die graphische Entwicklung von W soll in dieser Arbeit nicht durchgeführt werden, da sich das Interesse hier auf die Entwicklung der Suszeptibilitäten bezieht. Zur Herleitung der graphischen Regeln für die Suszeptibilitäten werden aber die Regeln für W benötigt, die in diesem Abschnitt erläutert werden.

6.1 Graphische Entwicklung

Die linken Seiten der Gleichungen (4.4) und (4.5) lassen sich graphisch darstellen. Mit Hilfe dieser Darstellungen lässt sich das erzeugende Funktional W entsprechend Gleichung (4.2) auf einfache Weise entwickeln.

Dazu wird W durch einen Kreis (Vertex), \circ , dargestellt. Eine in den Kreis einlaufende durchgezogene Linie, $\rightarrow\circ$, symbolisiert $\partial W/\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}$, eine auslaufende durchgezogene Linie, $\circ\rightarrow$, den Term $\partial W/\partial \bar{\eta}_{x,b}$. Höhere Ableitungen werden durch die entsprechenden Anzahlen ein- und auslaufender Linien dargestellt. Wird nun für jede Linie, die 2 Punkte verbindet, ein Faktor $K(M_{\hat{\mu}}(x))_{ab}$, verbunden mit einer Summation über x , $\hat{\mu}$, a und b , eingeführt, so ergibt sich für Gleichung (4.5) die folgende graphische Darstellung:

$$\sum_{x,\hat{\mu},a,b} K(M_{\hat{\mu}}(x))_{ab} \frac{\partial}{\partial [K(M_{\hat{\mu}}(x))_{ab}]} \circ = \square \quad + \quad \circ\rightarrow\circ \quad (6.1)$$

Bei der Rückübersetzung der graphischen Symbole ist auf das Vorzeichen zu achten. Die Regeln, um das richtige Vorzeichen zu erhalten, werden weiter unten beschrieben. Eine analoge Konstruktion lässt sich nun auch für die bosonische Differentialgleichung (4.4) durchführen. Zur Unterscheidung werden hier gepunktete Linien¹ eingeführt.

$$\sum_{x,\hat{\mu}} \kappa L_{\hat{\mu}}(x) \frac{\partial}{\partial [\kappa L_{\hat{\mu}}(x)]} \circ = \square \quad + \quad \circ\rightarrow\circ \quad (6.2)$$

¹Bei Entwicklungen mit Papier und Bleistift ist es empfehlenswert, in einen Farbstift zu investieren und die gepunkteten Linien durch farbige zu ersetzen.

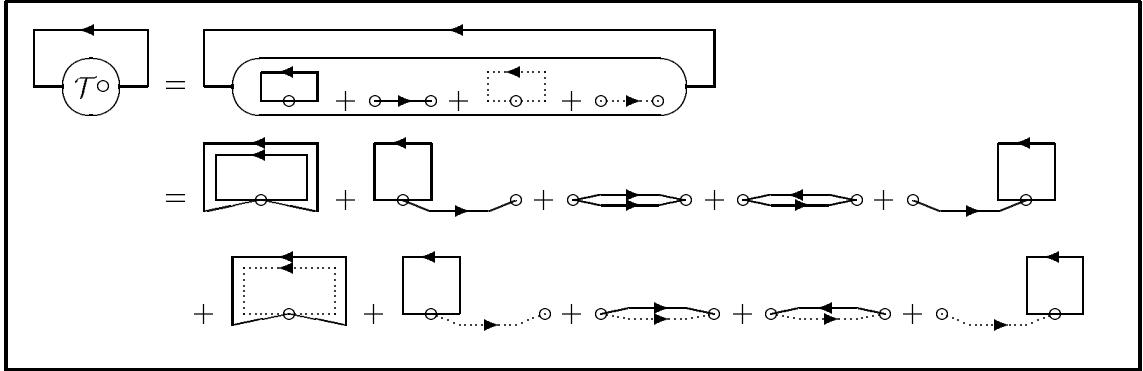


Abbildung 6.1: Entwicklung eines Teilgraphen

Eine einlaufende gepunktete Linie symbolisiert hier $\partial W / \partial J_{x+\hat{\mu}}$ und eine auslaufende $\partial W / \partial J_x^+$.

An dieser Stelle ist zu bemerken, daß das Ableiten von W nach Quellen verschiedener Orte im allgemeinen nicht null ergibt, wie es bei Ableitungen von W_1 der Fall ist. Der jeweils erste Graph auf der rechten Seite liefert vielmehr wichtige Beiträge zu den höheren Ordnungen der Taylorreihe (4.2).

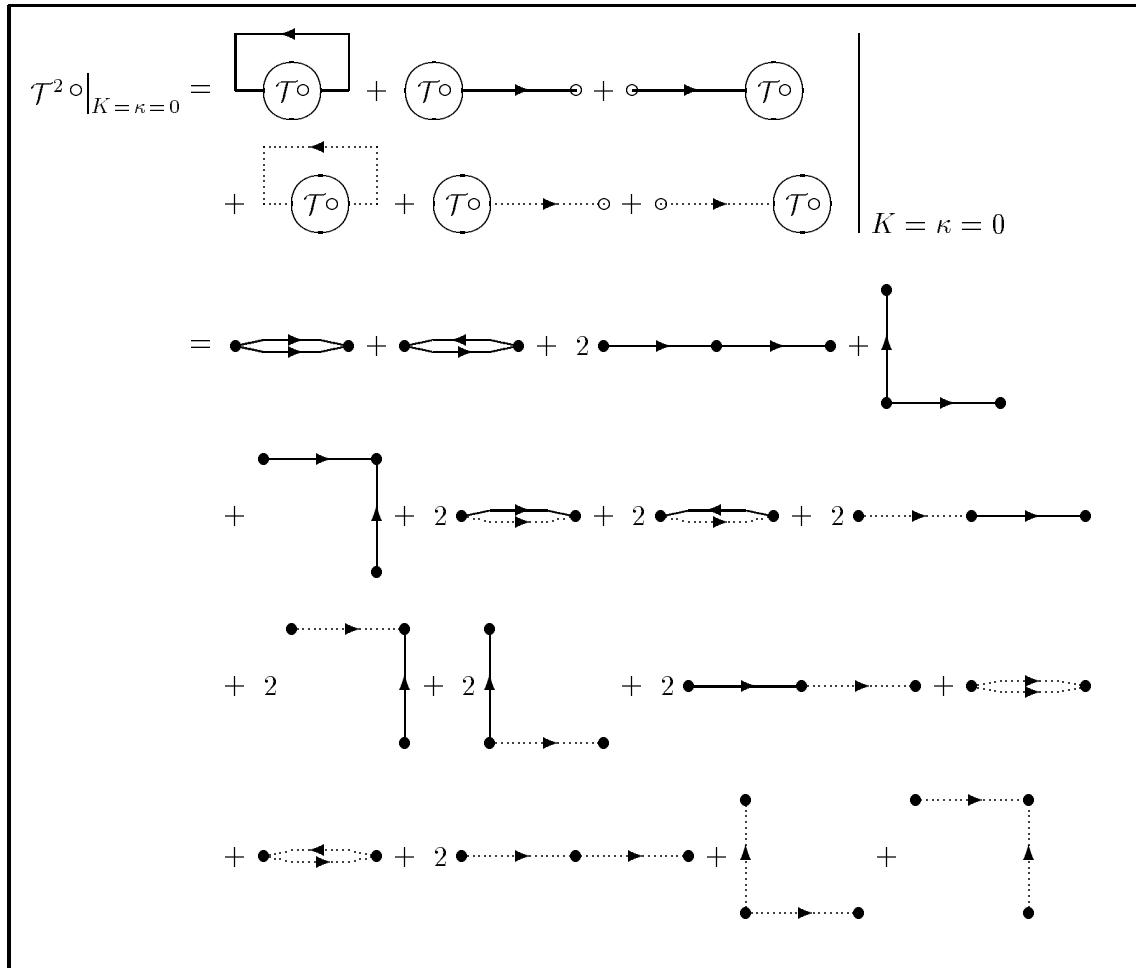
Nun läßt sich $\mathcal{T}^j W|_{K=\kappa=0}$ graphisch bestimmen. Dazu wird zunächst der jeweils links stehende Operator \mathcal{T} entsprechend den obigen Formeln (6.1, 6.2) durch Graphen ersetzt. Dann wird das nächste \mathcal{T} entsprechend der Produktregel auf die einzelnen Kreise der Graphen angewandt, d. h. mit den Ableitungen nach den Quelltermen vertauscht. Dieses Verfahren wird fortgeführt, bis alle \mathcal{T} 's durch Graphen ersetzt sind. Abschließend werden K und κ auf 0 gesetzt, d. h. die W 's werden durch W_1 ersetzt. W_1 wird in der graphischen Entwicklung durch einen gefüllten Kreis, „•“ dargestellt. Da nun, wie schon mehrfach betont, die Ableitungen von W_1 nach Quelltermen verschiedener Orte verschwinden, ergibt sich ein Verschwinden aller Graphen, die Linien mit gleichem Anfangs- und Endpunkt enthalten. Des Weiteren ergibt sich, daß alle Linien, die an dem gleichen „•“ ausgehen oder enden, beim Rückübersetzen in mathematische Formeln durch Ableitungen am gleichen Ort ersetzt werden müssen.

Das Verfahren wird in Abbildung 6.2 am Beispiel $\mathcal{T}^2 W|_{K=\kappa=0}$ vorgeführt. Dabei wird die folgende Gleichung verwendet.

$$\mathcal{T}^\circ := \text{Graph A} + \text{Graph B} + \text{Graph C} + \text{Graph D} \quad (6.3)$$

Die einzelnen Graphen sind analog zu Abbildung 6.1 zu entwickeln, und topologisch äquivalente Graphen können aufgrund der Äquivalenz der einzelnen \mathcal{T} -Operatoren zusammengefaßt werden.

An diesem Beispiel werden schon die wesentlichen Züge der „Linked-Cluster-Entwicklung“ des erzeugenden Funktionals W deutlich. Die sich daraus ergebenden Regeln sollen im nächsten Abschnitt im Detail erklärt werden.

Abbildung 6.2: Graphische Entwicklung von $\mathcal{T}^2 W|_{K=\kappa=0}$

6.2 Regeln für die graphische Entwicklung

Bei der Auswertung der Graphen kann entsprechend Abschnitt 4.1 die Bindungsvariable $K (M_{\hat{\mu}}(x))_{ab}$ wieder auf den Wert $K (M_{\hat{\mu}})_{ab}$ und $\kappa L_{\hat{\mu}}(x)$ wieder auf κ gesetzt werden.

Zum besseren Verständnis der Regeln sind einige Dinge zu beachten:

1. Ein Graph ist ein Objekt, das hier aus durchgezogenen und gepunkteten Linien besteht, die eine Orientierung tragen und kleine ausgefüllte, bei der Konstruktion in dem obigen Verfahren auch nichtausgefüllte Kreise (Vertizes) verbinden. Mehr ist er nicht. Insbesondere hat er nichts mit dem Gitter und seiner Struktur zu tun.
2. Durch das Zuordnen von Gitterorten an die Vertizes eines Graphen entsteht aus dem Graphen ein eingebetteter Graph. Die Zuordnung muß im Einklang mit den Regeln der folgenden Unterabschnitte stehen. Einem Graphen werden auf dem unendlich ausgedehnten Gitter „unendlich viele“ eingebettete Graphen zugeordnet.
3. Abschließend kann man einen eingebetteten Graphen auch in mathematische Terme übersetzen. Hierbei ist zu beachten, daß der einer fermionischen Linie zugeordnete Term von der Richtung abhängt, in die die Linie nach der Einbettung auf dem

Gitter weist. Wird dies mit „allen“ eingebetteten Graphen mit einer bestimmten Linienanzahl l gemacht und werden die entstehenden Terme zusammengezählt, so entstehen die l -te Ordnung in \mathcal{T} der Taylorreihe von W .

In dieser kurzen Einführung zeigt sich schon ein wesentliches Problem der Taylor-Entwicklung der Funktionals W . Diese Reihenentwicklung enthält in jeder Ordnung „unendlich viele“ Terme. Das Problem entsteht dadurch, daß es auf dem unendlich ausgedehnten Gitter „unendlich viele“ benachbarte Gitterpunkte gibt. Werden aus dieser Reihe die Suszeptibilitäten des Abschnitts 3.4 durch Differentiation nach den Quellen bestimmt, so entstehen nur aus den eingebetteten Graphen Beiträge zu den Suszeptibilitäten, bei denen mindestens ein Vertex auf den Gitterursprung 0 abgebildet worden ist. Dies ist in jeder Ordnung nur eine endliche Anzahl. Somit löst sich das Problem bei der Entwicklung der Suszeptibilitäten von allein.

Die graphische Bestimmung der Suszeptibilitäten wird im Kapitel 7 beschrieben.

6.2.1 Bildelemente

Dieser Abschnitt stellt die im Abschnitt 6.1 eingeführten und im weiteren noch benötigten graphischen Symbole noch einmal zusammen. Gleichzeitig wird auch schon der diesen Symbolen zugeordnete mathematische Term aufgeführt.

Graphisches Symbol	Formel-Symbol
•	W_1
•→	$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} W_1$
→•	$\frac{\partial}{\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}} W_1$
•→···	$\frac{\partial}{\partial J_x^+} W_1$
···→•	$\frac{\partial}{\partial J_{x+\hat{\mu}}} W_1$
•→→•	$K \sum_{x,\hat{\mu},a,b} \frac{\partial}{\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}} W_1 (M_{\hat{\mu}})_{ab} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} W_1$
•···→···•	$\kappa \sum_{x,\hat{\mu}} f dJ_{x+\hat{\mu}} W_1 \frac{\partial}{\partial J_x^+} W_1$

Größere Anzahlen ein- oder auslaufender Linien symbolisieren entsprechend höhere Ableitungen, dabei beinhaltet eine zwei Vertizes „•“ verbindende Linie immer die oben dargestellten Faktoren und Summationen.

6.2.2 Summation über zusammenhängende Graphen

Durch Induktion über die Potenzen von \mathcal{T} läßt sich sofort zeigen, daß in allen Ordnungen der Entwicklung ausschließlich zusammenhängende Graphen entstehen.

Die Anwendung eines Operators \mathcal{T} auf die Graphen in beliebiger Ordnung führt zu einer Ersetzung einzelner „o“ durch einen Graphen, bestehend aus einer Fermionen- oder Bosonenlinie und ein oder zwei „o“. Dabei bleibt der Graph zusammenhängend, da der ‘Restgraph‘ dann wieder an ein „o“ des eingesetzten Graphen angehängt wird.

6.2.3 Keine Graphen–Linie hat den gleichen Anfangs- und Endpunkt

Graphen, die Linien enthalten, die am gleichen „•“ beginnen und enden, tragen nicht zu W bei.

Derartige Linien führen bei der Übersetzung der zugeordneten eingebetteten Graphen in mathematische Terme zu Ableitungen von W_1 nach Quellen verschiedener Orte. Somit folgt die obige Aussage direkt aus Gleichung (5.17).

6.2.4 Zusammenfassung topologisch äquivalenter Graphen

Dieser Abschnitt soll mit zwei Definitionen beginnen:

Eine bijektive Abbildung Θ von einem Graphen \mathcal{G} auf einen Graphen \mathcal{G}' heißt *topologisch*, wenn sie die nachfolgenden Eigenschaften erfüllt:

Sie bildet Vertizes von \mathcal{G} auf Vertizes von \mathcal{G}' und Linien von \mathcal{G} unter Beachtung ihrer Orientierung auf Linien von \mathcal{G}' ab. Dabei wird der Vertex V am Ende der Linie α auf $\Theta(V)$ am Ende der Linie $\Theta(\alpha)$ abgebildet. Entsprechendes gilt auch für den Vertex am Linienanfang.

Zwei Graphen \mathcal{G} und \mathcal{G}' heißen *topologisch äquivalent*, wenn es eine topologische Abbildung von \mathcal{G} auf \mathcal{G}' gibt.

Die folgende Regel ergibt sich direkt aus der Symmetrie der zur Erzeugung der Graphen benötigten \mathcal{T} -Operatoren unter Vertauschen der Reihenfolge ihrer Anwendung:

Topologisch äquivalente Graphen lassen sich zusammenfassen und brauchen in der graphischen Entwicklung nicht mehrfach aufgeführt zu werden.

Zur graphischen Entwicklung des erzeugenden Funktional ist über alle zusammenhängenden Graphen zu summieren, wobei topologisch äquivalente Graphen nur einmal erfaßt werden.

6.2.5 Einbettung der Graphen auf das Gitter

Zur Ausführung der Orts- und Richtungssummationen ist es sinnvoll, sich einen Vertex „•“ des Graphen herauszunehmen und zunächst erst einmal fest auf einen Gitterplatz abzubilden. Nun werden die an diesem Vertex beginnenden und endenden Linien über die positiven und negativen Raumrichtungen des Raum-Zeit-Gitters aufsummiert, wobei die an dem anderen Ende der Linien liegenden Vertizes „•“ auf die benachbarten Gitterplätze abgebildet werden. Hierbei ist auch über die Fälle zu summieren, in denen zwei verschiedene „•“ auf den gleichen Gitterplatz abgebildet werden. Bei jedem der entstandenen Summanden ist mit den Linien, die in den im letzten Schritt fixierten Vertizes enden oder beginnen und die noch nicht aufsummiert sind, analog zu verfahren.

Dies Verfahren ist solange fortzuführen, bis alle Linien erfaßt sind. Dabei ist sicherzustellen, daß alle Linien ausschließlich benachbarte Gitterpunkte verbinden. Auf diese Weise werden zum Beispiel einem Graphen, der aus n Linien besteht und keine Schleifen enthält, $(2d)^n$ Einbettungen zugeordnet. Bei Graphen mit Schleifen führt die Bedingung, daß die Linien immer benachbarte Gitterpunkte verbinden, zu einer Verringerung der Anzahl der Einbettungen. Manche Graphen lassen sich in bestimmten Gittern auch gar nicht einbetten, z. B. Graphen mit geschlossenen Dreiecken im kubisch primitiven Gitter.

Abschließend wird der ursprünglich festgehaltene Vertex über das gesamte Gitter verschoben, d. h. alle Einbettungen der Graphen, die bei den Summationen über die Linienrichtungen erzeugt wurden, sind in allen Punkten des Gitters anzutragen.

Aufgrund dieser Einbettungsregeln werden die in diesem Kapitel beschriebenen Graphen unverwurzelte (engl.: unrooted) Graphen genannt. Sie werden frei über das gesamte Gitter summiert, keine Vertex des Graphen wird fest auf einen Gitterpunkt abgebildet.

6.2.6 Symmetriefaktoren

Ein Graph, bestehend aus insgesamt j fermionischen und bosonischen Linien, der keine Symmetrie besitzt, wird, wenn man alle topologisch äquivalenten Formen entsprechend Abschnitt 6.2.4 zusammenfaßt, $j!$ -fach erzeugt. Wenn der Graph Symmetrien besitzt, so verringert sich die Anzahl der erzeugten in der Weise, daß durch die Mächtigkeit der Symmetriegruppe zu dividieren ist.

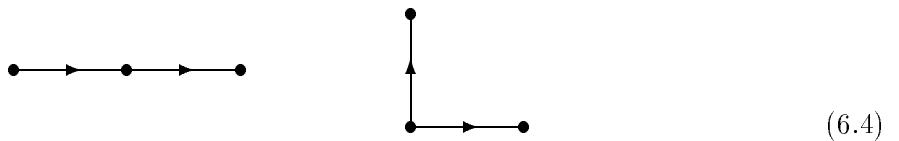
Dazu ist nun eine Definition dessen, was unter der Symmetriegruppe eines Graphen \mathcal{G} zu verstehen ist, nachzureichen:

Die *Symmetriegruppe* eines Graphen \mathcal{G} ist die Gruppe der topologischen Abbildungen $\Omega : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$.

Die Symmetriegruppe enthält immer die identische Abbildung und ist daher nie leer.

Zur Bestimmung der Anzahl der erzeugten Graphen ist die Symmetrie der Gleichung (4.2) bezüglich der Vertauschung zweier \mathcal{T} -Operatoren zu betrachten. Wenn ein Graph öfter als einmal erzeugt wird, so entsteht dies dadurch, daß es verschiedene Möglichkeiten gibt, ihn in dem in Abschnitt 6.1 beschriebenen Verfahren zu erzeugen. Wird an jeden Differentialoperator \mathcal{T} ein Index geschrieben und dieser Index auch an die von diesem Operator erzeugte Linie übernommen, so ist sofort einzusehen, daß die Anzahl der erzeugten Graphen einer topologischen Äquivalenzklasse den Möglichkeiten, die Indizes auf topologisch verschiedene Weise an die einzelnen Linien des Graphen zu verteilen, entspricht.

Topologisch äquivalente Indexverteilungen stehen für eine Verringerung der Möglichkeiten, den Graphen in dem Konstruktionsverfahren zu erzeugen, da dann bestimmte Teilgraphen nur in einer bestimmten Weise zueinander angeordnet werden können. Betrachte zur Verdeutlichung die Graphen



aus Abbildung 6.2. Der linke Graph enthält keine Symmetrie, es gibt zwei Möglichkeiten ihn zu konstruieren:

1. Die zweite Linie wird mit ihrem Anfangspunkt an den Endpunkt der ersten Linie angehängt.
2. Die zweite Linie wird mit ihrem Endpunkt an den Anfangspunkt der ersten Linie angehängt.

Die Symmetriegruppe des rechten Graphen besitzt außer der identischen Symmetriabbildung die Abbildung, die die äußeren Vertizes und die beiden Graphenlinien aufeinander

abbildet. Die Symmetriegruppe besteht aus 2 Elementen. Der Graph kann nur auf eine Weise konstruiert werden:

1. Beide Linien werden mit ihren Anfangspunkten zusammengehängt.

Die Gleichung (4.2) enthält noch den Faktor $\frac{1}{j!}$, der sich gegen die maximale Anzahl erzeugter Graphen $j!$ herauskürzt, so daß der Beitrag eines Graphen zu W durch die Mächtigkeit seiner Symmetriegruppe zu dividieren ist.

6.2.7 Vorzeichen

Es bleibt das Problem des Vorzeichens jedes Beitrags. Entsprechend Gleichung (4.5) wird einer Abfolge der Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{x,b}} \frac{\partial}{\partial \eta_{x+\hat{\mu},a}} \quad (6.5)$$

ein positives Vorzeichen zugeordnet, wenn diese beiden Ableitungen mit einer fermionischen Linie verbunden sind.

Das Verfahren zur Ermittlung des richtigen Vorzeichens ist nun recht einfach. Die fermionischen Linien des Graphen werden durchnumeriert und die Quellen in den Ableitungen an ihren Enden werden mit den Indizes² $\bar{\eta}_{b_n}$ und η_{a_n} versehen, wobei n die Nummer der zugeordneten Linie ist. Der Graph wird entsprechend den obigen Regeln ausgewertet und abschließend dahingehend geprüft, ob es sich bei der Permutation der Quellenindizes um eine gerade oder ungerade Permutation von $b_1, a_1, b_2, a_2, \dots$ handelt. Im ersten Fall ergibt sich ein positives Vorzeichen, im zweiten Fall ein negatives.

Es soll noch angemerkt werden, daß diese Reihenfolge der Ableitungen nach fermionischen Quellen auf eine Reihenfolge

$$\bar{\Psi}_{a_n} \Psi_{b_n} \bar{\Psi}_{a_{n-1}} \Psi_{b_{n-1}} \dots \bar{\Psi}_{a_1} \Psi_{b_1} \quad (6.6)$$

bei den fermionischen Variablen führt.

²Der Ortsindex wird aus Gründen der Übersicht fortgelassen

Kapitel 7

Graphische Regeln für die Suszeptibilitäten

Ziel dieses Abschnitts ist es, graphische Regeln für die Bestimmung der Taylorreihen der in Abschnitt 3.4 definierten Suszeptibilitäten in K und κ zu erhalten. Die graphische Entwicklung dieser Größen führt zu verwurzelten Graphen, im Gegensatz zu den unverwurzelten des vorstehenden Kapitels (vgl. Abschnitt 6.2.5).

In diesem Abschnitt sollen die Regeln für Suszeptibilitäten aufgestellt werden, die dem im folgenden definierten Typ χ_{mno} angehören:

$$\begin{aligned} \chi_{mno} := & \frac{1}{V} \left[\prod_{i=1}^m \left(\sum_{x_i} \right) \right] \left[\prod_{j=1}^n \left(\sum_{y_j} \right) \right] \left[\prod_{k=1}^o \left(\sum_{w_k} \sum_{y_k} \right) \right] F(x_i, y_j, w_k, v_k) * \\ & * \langle \phi_{x_1} \cdots \phi_{x_n} \phi_{y_1}^+ \cdots \phi_{y_m}^+ \Psi_{w_1} \bar{\Psi}_{v_1} \rangle^c \end{aligned} \quad (7.1)$$

mit: $m, n \geq 0$ und $o \in \{0, 1\}$

Hierbei steht F für eine translationsinvariante Funktion ihrer Argumente und V für das Volumen des 4-dimensionalen Gitters. Die Gleichung ist so zu verstehen, daß, wenn eine oder mehrere der Variablen n , m oder o gleich null sind, die zugeordneten Felder in der Greenschen Funktion nicht auftreten.

Die in Abschnitt 3.4 definierten Suszeptibilitäten sind alle von diesem Typ. In ihrer Definition wurde von der Translationsinvarianz der Funktion F Gebrauch gemacht und eine Summe gegen den Faktor $\frac{1}{V}$ herausgekürzt. Da im Rahmen dieser Arbeit keine Suszeptibilitäten mit mehr als einem Fermion-Antifermion-Paar berechnet werden, wird an dieser Stelle auf die Betrachtung derartiger Größen verzichtet.

7.1 Graphische Differentiation

Die Entwicklung der Regeln wird sich an der üblichen Bestimmung Greenscher Funktionen aus einem erzeugenden Funktional orientieren. Für die graphisch ausgeführte Differentiation des erzeugenden Funktionals werden Symbole für äußere Ableitungen definiert, die sich an den Symbolen in der graphischen Entwicklung von W orientieren:

Graphisches Symbol	Formel Symbol
	$\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_{w_1,b}} W_1$
	$\frac{\partial}{\partial \eta_{v_1,b}} W_1$
	$\frac{\partial}{\partial J_{x_i}^+} W_1$
	$\frac{\partial}{\partial J_{y_j}} W_1$

Diese Ableitungen werden an die Graphen, aus denen sich W zusammensetzt, angehängt. Sie unterscheiden sich von den inneren Ableitungen dadurch, daß sie nicht durch eine Linie mit einer weiteren Ableitung verbunden werden.

Auf eine Indizierung der fermionischen Ableitungen kann eigentlich sofort verzichtet werden, da die Suszeptibilitäten maximal ein Fermion-Antifermion-Paar enthalten und die Ableitungen durch ihre Art schon eindeutig charakterisiert sind. Aufgrund der Summationen über die Orte der äußeren Ableitungen in Gleichung (7.1) kann zu einem späteren Zeitpunkt auf die Indizierung der Orte an den bosonischen Beinen verzichtet werden. Eine kurze Erläuterung wird zeigen, daß zwei Graphen, die sich nur durch verschiedene Ortsindizes an gleichartigen äußeren Ableitungen unterscheiden, den gleichen Beitrag zu χ_{nmo} liefern.

Die Suszeptibilitäten lassen sich nun durch „graphisches“ Differenzieren aus den Graphen der Entwicklung von W gewinnen. Dazu werden die Symbole für die äußeren Ableitungen an die Graphen angehängt. Hierbei sind die Regeln für die Differentiation, besonders die Produktregel, zu beachten. Wenn alle äußeren Ableitungen an den Graphen angehängt sind, werden die verbliebenen Quellen auf den Wert 0 gesetzt. Durch dieses Nullsetzen der Quellen fallen die Graphen heraus, bei denen an einem Vertex die Anzahl der ein- und auslaufenden Linien nicht der Bedingung der Gleichung (5.20) genügt.

Die Vertizes mit den äußeren Ableitungen werden nun auf die Gitterpunkte abgebildet, die den äußeren Ableitungen zugeordnet sind. Dies ist in den Fällen nicht möglich, in denen an einen Vertex zwei äußere Ableitungen mit verschiedenen Gitterpunkten angehängt sind. Die restlichen Vertizes werden nun so über das Gitter verteilt, daß jede innere Graphenlinie immer benachbarte Gitterpunkte verbindet. Die Bildelemente der Graphen werden nun entsprechend den Übersetzungstabellen in Terme übersetzt. Es ist zu beachten, daß die den fermionischen Linien zugeordneten Terme von deren Einbettung abhängen. Die Terme werden soweit wie möglich zusammengefaßt. Auf diese Weise entsteht dann der Beitrag dieser Einbettung des Graphen zu der Greenschen Funktion der Suszeptibilität.

Diese Beiträge der Graphen sind nun über alle Einbettungen zu summieren, die die Orte der äußeren Ableitungen unverändert lassen. Hierbei ist zu berücksichtigen, daß es nicht zu jeder Konstellation von Ortsindizes an den äußeren Ableitungen eine gültige Einbettung gibt. Abschließend sind die Beiträge entsprechend der Definition der zu bestimmenden Suszeptibilität mit den von den Endpunkten abhängigen Vorfaktoren zu multiplizieren. Die nun entstandenen Terme sind für die verschiedenen Lagen der Orte der äußeren Ableitungen aufzusummen.

Dieses Verfahren ist in der Praxis häufig zu umständlich in der Handhabung. Es ist aber sehr vorteilhaft, sich in Zweifelsfällen darauf zurückzuziehen zu können, da es sehr anschaulich ist. Zur praktischen Bestimmung der Suszeptibilitäten ist das im folgenden vor-

gestellte Verfahren, in dem über alle topologischen Äquivalenzklassen zusammenhängender Graphen mit der benötigten Anzahl äußerer Beine summiert wird, komfortabler.

Die in diesem Verfahren erzeugten Graphen werden verwurzelt (engl.: rooted) genannt, da die Ortindizes an den äußeren Ableitungen die zugeordneten Vertizes fest auf Gitterpunkte abbilden.

7.2 Regeln für die graphische Bestimmung der Suszeptibilitäten

In diesem Abschnitt sollen nun die Regeln für die Entwicklung der Suszeptibilitäten zusammengestellt und erläutert werden. Viele Regeln ergeben sich direkt aus den Regeln in Abschnitt 6.2.

7.2.0.1 Definitionen

Bevor auf die Regeln eingegangen werden kann, sind einige Definitionen über die topologischen Eigenschaften der Graphen notwendig.

Zwei verwurzelte Graphen \mathcal{G} und \mathcal{G}' sind *topologisch äquivalent*, wenn es eine bijektive topologische Abbildung $\Theta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ gibt, die die Ortindizes der äußeren Ableitungen nicht beachtet.

Dieses bedeutet insbesondere, daß zwei Graphen, die sich nur durch die Indizes an den äußeren Ableitungen unterscheiden, topologisch äquivalent sind. Im folgenden werden zwei verwurzelte Graphen, die der gleichen topologischen Äquivalenzklasse angehören, auch als Graphen gleichen topologischen Typs bezeichnet.

Zwei Verteilungen der Indizes an die äußeren Ableitungen eines Graphen \mathcal{G} heißen *topologisch äquivalent*, wenn es eine bijektive topologische Abbildung $\Omega : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ gibt, die die Indizes an den äußeren Ableitungen berücksichtigt und die eine Indexverteilung in die andere überführt.

7.2.1 Bildelemente

Die Bildelemente aus Abschnitt 6.2.1 sind um die oben vorgestellten Bildelemente zu erweitern. Dabei kann, als Vorgriff auf 7.2.2, bei den äußeren Ableitungen auf den Ortsindex verzichtet werden.

7.2.2 Zusammenfassen von Graphen mit permutierten Ortsindizes

Wie schon angedeutet, liefern topologisch äquivalente Graphen den gleichen Beitrag zu der betrachteten Suszeptibilität, auch wenn die Verteilung der Ortsindizes auf die äußeren Ableitungen inäquivalent ist. Sie können somit auf einfache Weise zusammengefaßt werden. Bei den hier betrachteten Suszeptibilitäten des Typs χ_{mno} kann dies nur bei bosonischen äußeren Ableitungen auftreten.

Zunächst ergibt die Produktregel der Differentiation, daß die Anzahl der in dem oben beschriebenen graphischen Differentiationsverfahren erzeugten verwurzelten Graphen eines topologischen Typs der Anzahl der Permutationen der Indizes über die äußeren Beine entspricht, wenn nicht mehrere gleichartige äußere Linien an den gleichen Vertex angehängt

werden. Mit jedem dieser Indizes ist eine Summation über das gesamte Gitter verbunden. Wird nun eine bestimmte Einbettung der äußeren Ableitungen des Graphen auf das Gitter betrachtet, so tritt diese Einbettung in jeder Permutation der Indizes genau einmal auf, und dieser Beitrag ist mit einem Faktor zu multiplizieren, der der Mächtigkeit der Permutationsgruppe entspricht. Die Größe dieser Permutationsgruppe bezüglich χ_{mno} ist $m! \cdot n!$.

Hier gehen ganz entscheidend die Vertauschungsregeln für bosonische Operatoren ein. Wären die vertauschten Ortsindizes Grassmann-Variablen zugeordnet, so würden antisymmetrische Spinoren entstehen. Es wird nun folgende Regel aufgestellt:

Der Beitrag aller Graphen einer topologischen Äquivalenzklasse, die sich nur durch eine Permutation der den äußeren Beinen zugeordneten Gitterorte unterscheiden, zu χ_{mno} ist gleich dem Beitrag eines einzigen dieser Graphen multipliziert mit $n! \cdot m!$.

Damit dies bei Graphen mit mehreren gleichen äußeren Linien an einem Vertex nicht zu Überzählungen führt, werden die Symmetriefaktoren in Abschnitt 7.2.4 zur Kompensation angepaßt.

7.2.3 Summation über zusammenhängende Graphen

Das Anhängen äußerer Linien an zusammenhängende unverwurzelte Graphen führt auf zusammenhängende verwurzelte Graphen. Daher ist über alle topologischen Äquivalenzklassen zusammenhängender Graphen mit der entsprechenden Anzahl äußerer Linien (Ableitungen) zu summieren. Dabei besitzt keine Graphenlinie den gleichen Anfangs- und Endpunkt. Graphen, die sich nur durch eine Permutation der Ortsindizes an den äußeren Beinen unterscheiden, sind hierbei als topologisch äquivalent anzusehen.

Zur Verdeutlichung dessen, was gemeint ist, möchte ich hier ein paar Beispiele angeben:

Graphen, die zu χ_2^ϕ beitragen:



Graphen, die zu $(\chi_3^{\Psi\phi\Psi})_{33}$ bzw. $(\chi_3^{\Psi\phi\Psi})_{22}$ beitragen:



7.2.4 Symmetriefaktor

Durch den Übergang zu verwurzelten Graphen kann die Größe der Symmetriegruppe des zugrundeliegenden unverwurzelten Graphen verändert werden. Dabei tritt eine neue Art

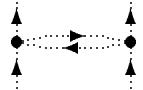
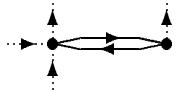
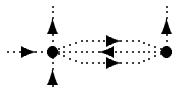
der Symmetrie auf, so daß gegenüber Abschnitt 6.2.6 eine angepaßte Definition der Symmetriegruppe notwendig wird.

Die *Symmetriegruppe* eines verwurzelten Graphen \mathcal{G} wird als die Gruppe der topologischen Abbildungen $\Omega : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ definiert. Dabei wird bei den äußeren Linien die Orientierung, nicht aber der Ortindex berücksichtigt.

Jedem Graphen \mathcal{G} wird ein Symmetriefaktor $S_{\mathcal{G}}$ zugeordnet. Dieser Faktor wird wie folgt definiert:

$$S_{\mathcal{G}} := \frac{1}{\text{Mächtigkeit der Symmetriegruppe von } \mathcal{G}} \quad (7.4)$$

Zur Illustration werden an dieser Stelle einige Graphen und deren Symmetriefaktoren angegeben:

Graph \mathcal{G}	$S_{\mathcal{G}}$	Erläuterung
	1	Die Orientierungspfeile brechen die Symmetrie
	$\frac{1}{2}$	Alle Bildobjekte des Graphen werden auf das jeweils andere der gleichen Art abgebildet
	$\frac{1}{2}$	Vertauschen der einlaufenden Linien des linken Vertex
	$\frac{1}{4}$	Produkt zweier Symmetriearbildungen: Vertauschen der einlaufenden Linien des linken Vertex; Vertauschen der beiden rechtslaufenden Verbindungslien-
		en.

Für die Graphen gilt die folgende Regel:

Der Beitrag eines jeden Graphen \mathcal{G} ist mit seinem Symmetriefaktor $S_{\mathcal{G}}$ zu multiplizieren.

Zum Verständnis dieser Regel sind vier verschiedenen Arten der Symmetrie zu unterscheiden.

1. Symmetrien durch Vertauschen äußerer Linien eines Vertex.

In 7.2.2 wurde erläutert, daß Graphen, die mehrere gleichartige äußere Linien an einem Vertex haben, nicht mit der Häufigkeit $m! \cdot n!$ in dem graphischen Differenzierungsverfahren erzeugt werden. Die Graphen in der dritten und vierten Zeile der vorstehenden Tabelle sind von dieser Art.

Bei einem Graphen mit einer derartigen Symmetrie ist die Anzahl der erzeugten Graphen um einen Faktor geringer, der sich durch die Anzahl der Möglichkeiten, die Indizes an den äußeren Ableitungen der einzelnen Vertizes zu vertauschen, ergibt. Dies entspricht der Mächtigkeit der Symmetriuntergruppe, deren Elemente nur äußere Linien entsprechend den Regeln für topologische Abbildungen vertauscht, die restlichen Bildelemente aber auf sich selbst abgebildet.

2. Gebrochene Symmetrien des zugehörigen unverwurzelten Graphen

Durch das Anhängen äußerer Linien an einen unverwurzelten Graphen können Symmetrien dieses Graphen gebrochen werden. Der dritte Graph in der obigen Tabelle

ist ein Beispiel hierfür. Der zugrundeliegende unverwurzelte Graph besitzt eine Symmetrie bezüglich des gleichzeitigen Austauschs der Vertizes und Verbindungslien. Diese Symmetrie besitzt der obige verwurzelte Graph nicht mehr. Für die Produktregel sind die beiden Vertizes in dem Sinne unterscheidbar, daß die „Verzierungen“ mit drei äußeren Linien einmal an den einen und dann an den anderen Vertex anzuhängen sind. Dadurch entstehen bei jeder möglichen Zuordnung der Ortsindizes an die äußeren Linien zwei topologisch äquivalente Graphen mit äquivalenten Indexverteilungen. Der ursprüngliche Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ des unverwurzelten Graphen wird dadurch kompensiert. Das Entstehen von nur zwei topologisch inäquivalenten Indexverteilungen wird durch die Austauschsymmetrie der beiden einlaufenden bosonischen Linien am linken Vertex verursacht, wie vorstehend unter Punkt 1 beschrieben.

Wird im allgemeinen Fall eine Symmetriegruppe der Mächtigkeit s zerbrochen, so können die äußeren Linien auf s verschiedene Arten an den Graphen angehängt werden, ohne daß topologisch verschiedene verwurzelte Graphen mit topologisch unterscheidbarer Indexverteilung entstehen. Anschaulich bedeutet dies, daß es s verschiedene Möglichkeiten gibt, den unverwurzelten Graphen in festgehaltene äußere Linien einzubetten. Dies kompensiert den Symmetriefaktor $\frac{1}{s}$ des ursprünglichen Graphen. Das Entstehen von $m! \cdot n!$ topologisch inäquivalenten Indexverteilungen an einem Graphen wird durch diese Art der Symmetrie nicht beeinflußt.

Die obige Definition (7.4) des Symmetriefaktors S_G liefert für gebrochene Symmetrien des unverwurzelten Graphen einen Faktor 1, ist also nicht sensitiv auf diese Symmetrien und ergibt somit die richtige Anzahl erzeugter Graphen mit diesem Symmetriotyp.

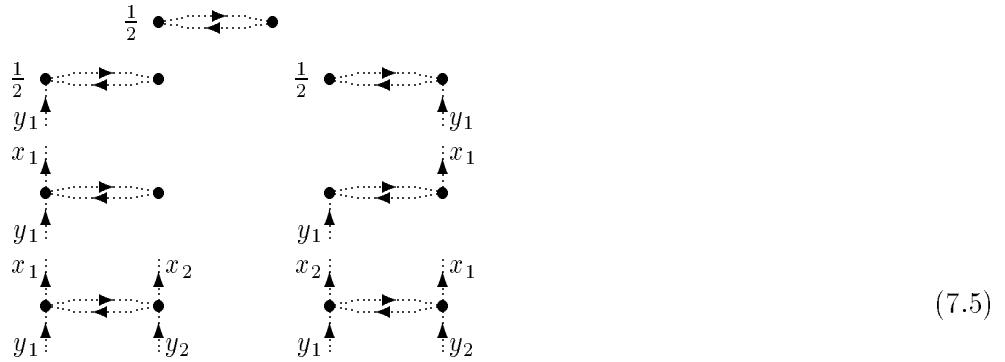
3. Unverändert erhaltene Symmetrien des zugehörigen unverwurzelten Graphen

Der 4. Graph der obigen Tabelle enthält eine Austauschsymmetrie der beiden rechtslaufenden bosonischen Verbindungslien. Diese Symmetrie wurde durch das Anhängen der äußeren Beine nicht gebrochen oder verändert, das heißt, die neu hinzugekommenen äußeren Linien werden durch die zugeordnete Symmetrieabbildung Ω auf sich selbst abgebildet, wohingegen die verbleibenden Elemente entsprechend der Symmetrieabbildung des unverwurzelten Graphen abgebildet werden.

Der Anteil dieser Symmetrie des unverwurzelten Graphen an dessen Symmetriefaktor geht unverändert in den Symmetriefaktor des verwurzelten Graphen über. Die Gleichung (7.4) liefert diesen Faktor in der richtigen Weise.

4. Veränderte Symmetrien des zugehörigen unverwurzelten Graphen

Es gibt Symmetrien des zugrundeliegenden Graphen, die durch ein symmetrisches Anhängen der äußeren Linien verändert werden. Der zweite Graph der obigen Tabelle ist ein Beispiel dafür. Die Symmetrie dieses Graphen ist in dem unverwurzelten Graphen, der den Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ besitzt, schon vorhanden. Betrachte dazu die folgende graphische Entwicklung, in der der verwurzelte Graph durch graphisches Differenzieren aus dem zugeordneten unverwurzelten Graphen erzeugt wird.



Die beiden Graphen der zweiten Zeile sind topologisch äquivalent und besitzen eine topologisch äquivalente Indexverteilung. Sie lassen sich zusammenfassen, so daß sich der Faktor $\frac{1}{2}$ heraushebt. Die Graphen der letzten Zeile sind topologisch äquivalent, besitzen aber eine inäquivalente Indexverteilung. Da diese Graphen nach 7.2.2 ebenfalls zusammengefaßt werden können, entstehen aus dem unverwurzelten Graphen mit Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$, zwei verwurzelte Graphen mit Vorfaktor 1. Da aber nach 7.2.2 der Graph mit einem Faktor 4 multipliziert wird, ist der Graph mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren, wie ihn die obige Definition (7.4) liefert.

Im allgemeinen Fall ist es möglich, daß eine Symmetrie des unverwurzelten Graphen beim „Verwurzeln“ auf eine Untergruppe der ursprünglichen Symmetrie reduziert wird. Ein Beispiel hierfür ist die vierzählige Drehsymmetrie eines Graphen, der aus vier geeignet orientierten Linien besteht, die im Quadrat angeordnet sind. Eine derartige Symmetrie kann durch das „Verwurzeln“ auf eine zweizählige Symmetrie reduziert werden.

Die Anzahl der entstehenden Graphen entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, die äußeren Beine auf topologisch verschiedene Weise an dem Graphen anzutragen. Die zunächst entstehenden topologisch äquivalenten Indexverteilungen werden dazu verwendet, um den Symmetriefaktor des unverwurzelten Graphen wie in der zweiten Zeile des Bildbeispiels herauszuheben. Dieses unterscheidet sich um die Mächtigkeit des erhaltenen Teils der Symmetrie von der in Abschnitt 7.2.2 angenommenen Zahl.

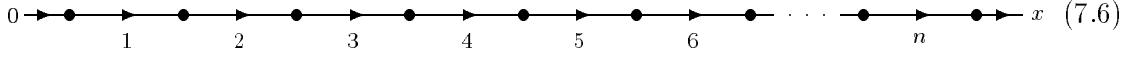
Dieses Resultat kann aber auch so verstanden werden, daß sich der Symmetriefaktor des zugrundeliegenden unverwurzelten Graphen erhalten hat.

Zum Abschluß soll betont werden, daß für einen Graphen mehrere Fälle zutreffen können, wie es für den dritten und den vierten Graphen des obigen Beispiels zutrifft.

7.2.5 Vorzeichenregel

In 6.2.7 wurde die Vorzeichenregel für unverwurzelte Graphen angegeben. Da im Fall verwurzelter Graphen die Quellen nach der Ausführung der Differentiationen auf null gesetzt werden, gestalten sich hier die Regeln viel einfacher. Für die folgende Betrachtung sind die bosonischen Linien im allgemeinen belanglos.

Zur Erläuterung soll nun zunächst ein Graph \mathcal{G} der Entwicklung von χ_2^Ψ , bestehend aus n fermionischen Verbindungslien, die durch Vertizes mit jeweils einer ein- und auslaufenden Linie verbunden sind, betrachtet werden. Diese Linien bilden eine lange Kette:



Hierin stehen die Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ für einen die Linien bezeichnenden Index, wohingegen die 0 und das x für die Gitterorte stehen, die mit den äußeren Ableitungen verbunden sind. Entsprechend der Vorzeichenregel unverwurzelter Graphen und Gleichung (2.14) führt das Einsetzen der Terme für die Bildelemente dieser Graphen auf den Ausdruck R_G mit dem angegebenen positiven Vorzeichen, wenn der Graph als Beitrag zu $\langle \Psi_x \bar{\Psi}_0 \rangle^c$ angesehen wird. Darin werden der Linie mit dem Index i die Ableitungen $\partial/\partial\eta_{a_i}$ und $\partial/\partial\bar{\eta}_{b_i}$ und die Richtung $\hat{\mu}_i$ zugeordnet. R_G besitzt unter Lorentztransformation das Transformationsverhalten eines Spinors 2. Stufe.

$$(R_G)_{b_x a_0} = K^n \left[\prod_{i=1}^n (M_{\hat{\mu}_i})_{a_i b_i} \right] \left(\frac{\partial}{\partial\eta_{a_0}} \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_{b_1}} W_1 \right) \left[\prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial\eta_{a_i}} \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_{b_{i+1}}} W_1 \right) \right] \left(\frac{\partial}{\partial\eta_{a_n}} \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_{b_x}} W_1 \right) \quad (7.7)$$

Dabei wurde die äußere Ableitung $\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_{b_x}}$ mit den inneren Ableitungen entsprechend den Regeln vertauscht. Mit:

$$\frac{\partial}{\partial\eta_{a_i}} \frac{\partial}{\partial\bar{\eta}_{b_j}} W_1 = \langle \Psi_{b_j} \bar{\Psi}_{a_i} \rangle_1^c \quad (7.8)$$

ergibt sich für R_G :

$$(R_G)_{b_x a_0} = K^n \langle \Psi_{b_x} \bar{\Psi}_{a_n} \rangle_1^c (M_{\hat{\mu}_1})_{a_n b_n} \left[\prod_{i=n-1}^1 \langle \Psi_{b_{i+1}} \bar{\Psi}_{a_i} \rangle_1^c (M_{\hat{\mu}_i})_{a_i b_i} \right] \langle \Psi_{b_1} \bar{\Psi}_{a_0} \rangle_1^c \quad (7.9)$$

Die 1-Platz-Erwartungswerte $\langle \Psi_{b_j} \bar{\Psi}_{a_i} \rangle_1^c$ können im Anhang B nachgeschlagen werden. Für fermionische Kettengraphen ergibt sich insgesamt das wichtige Zwischenergebnis:

Um bei einer fermionischen Graphenkette das richtige Vorzeichen zu erhalten, wird der Erwartungswert $\langle \Psi_{b_1} \bar{\Psi}_{a_0} \rangle_1^c$, an dem der Kettengraph beginnt, rechts an das Ende der Termfolge geschrieben. Davor wird die Matrix der ersten Verbindungsleitung $K (M_{\hat{\mu}_1})_{a_1 b_1}$ geschrieben. Es folgt der nächste Erwartungswert $\langle \Psi_{b_2} \bar{\Psi}_{a_1} \rangle_1^c$ und so weiter, bis schließlich der Erwartungswert $\langle \Psi_{b_x} \bar{\Psi}_{a_n} \rangle_1^c$ links am Beginn der Termfolge steht. Einer derartigen Termfolge ist ein *positives* Vorzeichen zuzuordnen.

Dieses Ergebnis läßt sich nun leicht auf den allgemeinen Fall eines beliebigen Graphen mit oder ohne äußere fermionische Linien erweitern. In diesem Fall gibt es zwei wesentlichen Unterschiede zu dem oben Diskutierten:

1. Die 1-Platz-Erwartungswerte können mehr als ein Fermion-Antifermion-Paar enthalten.
2. Es gibt fermionische Graphenlinien, die sich nicht durch Bildung fermionischer Ketten mit äußeren Ableitungen verbinden lassen.

Aus der Gleichung (5.17) ergibt sich, daß bei einem von null verschiedenen Graphen die Anzahl der in jeden Vertex einlaufenden fermionischen Linien der Anzahl der wieder auslaufenden gleicht. Da dadurch die Endpunkte der äußeren fermionischen Ableitungen die

beiden einzigen Punkte des Graphen sind, an denen sich die Anzahl der ein- und auslaufenden fermionischen Linien unterscheidet, ist es im Fall äußerer fermionischer Linien möglich, von der einlaufenden äußeren fermionischen Linie eine rein fermionische Graphenkette zu der auslaufenden äußeren fermionischen Linie zu bilden, ohne eine einzige innere Linie zweimal zu durchlaufen.

Eine Möglichkeit des weiteren Vorgehens ist es, zunächst die den verschiedenen Bildelementen zugeordneten Terme niederzuschreiben. Dabei sind die fermionischen Variablen in den 1-Platz-Erwartungswerten immer in der Reihenfolge $\Psi\bar{\Psi}\Psi\bar{\Psi}\dots\Psi\bar{\Psi}$ einzusetzen und alle Spinorindizes offen zu lassen. Den äußeren Ableitungen werden Spinorindizes, z.B. a_0 bzw. b_x , zugeordnet.

Als erster Spinorindex wird nun a_0 an das letzte $\bar{\Psi}$ des 1-Platz-Erwartungswertes geschrieben, der dem Vertex „•“ zugeordnet wird, an dem die äußere einlaufende fermionische Linie endet. An das letzte Ψ dieses Vertex wird nun b_1 geschrieben. Dieser Index wird als hinterer Index an die Matrix $M_{\hat{\mu}_1}$ angetragen, die der Verbindungsline zugeordnet wird, die in der Verbindskette den ersten Vertex mit dem zweiten verbindet. Als vorderer Index der Matrix $M_{\hat{\mu}_1}$ wird a_1 eingesetzt, der an das letzte $\bar{\Psi}$ des Erwartungswertes übernommen wird, der dem zweiten Vertex der Kette zugeordnet ist.

Ist an einem Vertex das letzte $\bar{\Psi}$ schon mit einem Index versehen, so wird das hinterste noch nicht mit einem Index belegte $\bar{\Psi}$ genommen, und der auslaufenden Linie wird dann das vorstehende Ψ zugeordnet. Die so gewonnene Indexfolge unterscheidet sich von der Indexfolge in Gleichung (7.9) um eine gerade Permutation der Indizes, da die ‘Paare’ $(\Psi_{b_{i+1}}\bar{\Psi}_{a_i})$ nicht zertrennt wurden und so die Anzahl der Vertauschungen von Indizes, die notwendig ist, um von der einen Folge zur anderen zu gelangen, immer gerade ist. Diesem Term ist somit ein positives Vorzeichen zuzuordnen.

Doch ist es nicht immer möglich, mit dieser Kette alle fermionischen Linien zu erfassen, und manchmal gibt es auch Gründe, dies nicht zu tun, obwohl es möglich wäre. Doch bevor dieser Punkt geklärt wird, soll erst noch einmal ein kurzes einfaches Beispiel angeführt werden, das hoffentlich ein wenig Licht in die Angelegenheit bringt.



Hierbei wurden die Verbindungslien mit α , β und γ indiziert. Nun gibt es zwei Arten fermionischer Ketten, um von a_0 nach b_x zu gelangen:

1. Ein Beispiel für die erste Art ist die Kette: $\gamma \cdot \beta \cdot \alpha$

Dies ist wie folgt zu verstehen: An der äußeren Linie bei a_0 beginnen, mit α von links nach rechts, dann mit β zurück und abschließend mit γ zur auslaufenden äußeren Linie nach b_x .

2. Ein Beispiel für die zweite Art ist die Kette, die nur aus α besteht.

Wird den Linien mit den Indizes α und γ die Richtung $\hat{\mu}$ zugeordnet, so erhält die Linie mit Index β die Richtung $-\hat{\mu}$. Für die erste Kette lässt sich der folgende Ausdruck für R_G mit Vorzeichen angeben. Eine genaue Definition des Terms R_G wird im Abschnitt 7.3.1 mit der Gleichung (7.13) gegeben.

$$(R_G)_{b_x a_0} = K^3 \langle \Psi_{b_x} \bar{\Psi}_{a_\gamma} \Psi_{b_\beta} \bar{\Psi}_{a_\alpha} \rangle_1^c (M_{\hat{\mu}})_{a_\gamma b_\gamma} (M_{-\hat{\mu}})_{a_\beta b_\beta} (M_{\hat{\mu}})_{a_\alpha b_\alpha} \langle \Psi_{b_\gamma} \bar{\Psi}_{a_\beta} \Psi_{b_\alpha} \bar{\Psi}_{a_0} \rangle_1^c \quad (7.11)$$

Damit deutlich wird, wie die Indizes der Linien den Erwartungswerten zugeordnet werden, wurde auf eine Umbenennung der Indizes entsprechend den obigen Ausführungen verzich-

tet. Um die obige Nomenklatur zu erhalten, ist b_γ mit b_3 , b_β mit b_2 und b_α mit b_1 zu identifizieren. Analoges gilt für die a 's.

Wird mit der zweiten Kette entsprechend verfahren, dann werden die Linien β und γ nicht erfaßt. In derartigen Fällen, die insbesondere immer dann auftreten, wenn ein Graph ohne äußere fermionische Linien innere fermionische Linien enthält, ist die Bildung fermionischer „Blasen“ notwendig. Mit einer Blase wird eine geschlossene Kette fermionischer Graphenlinien bezeichnet. Da die äußeren Beine schon durchlaufen sind oder nicht existieren, enthält der Graph in diesem Stadium keine Punkte, in denen sich die Anzahl der einlaufenden von den auslaufenden fermionischen Linien unterscheidet. Werden nun mit den noch nicht erfaßten Linien weitere Ketten gebildet, so ist es möglich, von jedem Vertex, den die Kette erreicht, auch wieder weiter zu kommen, es sei denn, man ist wieder am Anfangspunkt angekommen. Da die Anzahl der fermionischen Linien eines Graphen endlich ist, muß jede Kette wieder an ihren Anfangspunkt zurückkehren und wird damit zur Blase. Damit ergibt sich, daß sich die restlichen fermionischen Linien eines Graphen immer in eine endliche Anzahl Blasen aufteilen lassen.

Die Indizierung einer Blase kann an einem beliebigen Vertex der Blase beginnen. Dem letzten Ψ dieses Erwartungswertes, das heißt der vorletzten nicht indizierten fermionischen Variable, wird der Index b_{n+1} zugeordnet, wenn schon n Graphenlinien indiziert worden sind. Der Matrix $M_{\hat{\mu}_{n+1}}$, mit der die Blase von diesem Vertex fortführt, werden, analog zum Fall der offenen Ketten, die Indizes a_{n+1} und b_{n+1} zugeordnet. Das a_{n+1} wird dann wieder in der üblichen Weise an den nächsten Vertex angehängt. Dies Verfahren wird fortgeführt, bis sich die Blase schließt. Besteht die Blase aus m inneren Linien, so wird der Index a_{n+m} , den die Matrix $M_{\hat{\mu}_{n+m}}$ trägt, an das zu Beginn der Indizierung der Blase ausgelassene $\bar{\Psi}$ angehängt.

Wird nun die Indexreihenfolge der fermionischen Variablen betrachtet, so handelt es sich um eine ungerade Permutation von $a_{n+m}, b_{n+m}, \dots, a_n, b_n$, die entsprechend der Regel in Absatz 6.2.7 mit einem positiven Vorzeichen zu belegen ist. Es gilt:

Für jede Blase, die auf die oben beschriebene Weise indiziert wird, ist ein zusätzliches negatives Vorzeichen einzuführen.

Zur Verdeutlichung des hier Gesagten soll auf die Kette α des obigen Beispiels (7.10) noch einmal eingegangen werden. Zur Bestimmung des Ausdrucks R_g müssen die Linien β und γ zu einer Blase zusammengefaßt werden. Auf eine Umbenennung der Indizes wird dabei wiederum verzichtet. Es ergibt sich:

$$(R_g)_{b_x a_0} = -K^3 \langle \Psi_{b_\beta} \bar{\Psi}_{a_\gamma} \Psi_{b_x} \bar{\Psi}_{a_\alpha} \rangle_1^c (M_{\hat{\mu}})_{a_\gamma b_\gamma} (M_{-\hat{\mu}})_{a_\beta b_\beta} (M_{\hat{\mu}})_{a_\alpha b_\alpha} \langle \Psi_{b_\gamma} \bar{\Psi}_{a_\beta} \Psi_{b_\alpha} \bar{\Psi}_{a_0} \rangle_1^c \quad (7.12)$$

Die Unterschiede zu Gleichung (7.11) bestehen in dem Minus-Zeichen und der Vertauschung der Indizes in dem linken Erwartungswert. Aus Anhang B ergibt sich, daß sich die Erwartungswerte mit den vertauschten Indizes um ein Minus-Zeichen unterscheiden. Somit liefern die Gleichungen (7.11) und (7.12) das gleiche Resultat. Soviel zu diesem Beispiel.

Die Terme R_g werden entsprechend der Summenkonvention zusammengefaßt.

7.2.6 Modifikationen für $n_F \neq 1$

Dem Zusammenfassen der Terme eines Graphen ist im Fall $n_F \neq 1$ große Aufmerksamkeit zu schenken. 1-Platz-Erwartungswerte, die fermionische Variablen enthalten, sind entsprechend Anhang B immer aus einer Summe über Tensorprodukte der Matrizen A_- und

A_+ aufgebaut, sofern sie mehr als zwei Variablen enthalten. Sind keine äußeren fermionischen Ableitungen vorhanden, so ergibt die Berechnung von R_G eine Summe über Produkte von Matrizenprodukten der Art $\{\text{Tr}[\prod_i(M_{\hat{\mu}_i} \cdot A_{\sigma_i})]\}$ mit $\sigma_i \in \pm$. Im Fall äußerer fermionischer Ableitungen wird dies mit einer Matrix $\{A_\sigma \cdot \prod_i(M_{\hat{\mu}_i} \cdot A_{\sigma_i})\}$ multipliziert.

Ist $n_F \neq 1$, so ergibt eine Matrizenstruktur der obigen Art das n_F -fache dessen, was sich im Fall $n_F = 1$ ergeben hätte. Bei den Matrizenprodukten ergibt sich eine $(8n_F) \times (8n_F)$ -Matrix. An der 8×8 -Matrix in der linken oberen Ecke ändert sich nichts, wenn n_F geändert wird. Aus diesem Teil der Matrix werden die renormierten Größen bestimmt. Die Berechnungen können somit im 8-komponentigen Spinorraum durchgeführt werden. Das Resultat ist für jede Spur der obigen Art mit einem Faktor n_F zu multiplizieren.

Auf diese Weise brauchen die Berechnungen nur einmal durchgeführt zu werden, um Ergebnisse für verschiedene Werte von n_F zu erhalten.

7.2.7 Einbettung verwurzelter Graphen zur Bestimmung der Suszeptibilitäten

Zur Einbettung eines Graphen auf das Gitter ist es sinnvoll, von der Translationsinvarianz der Funktion $F(x_i, y_j, w_k, v_k)$ in der Definition (7.1) Gebrauch zu machen, wie es in den Definitionen in Abschnitt 3.4 geschehen ist. Dazu wird eine Feldvariable des Erwartungswertes fest am Gitterplatz 0 angetragen. Die zugehörige Summation und der Faktor $\frac{1}{V}$ entfällt dann.

Zur Einbettung wird nun ein Vertex ausgewählt, an dem eine äußere Linie endet, die in ihrer Art der Feldvariable entspricht, die am Gitterplatz 0 angetragen wurde. Dieser Vertex wird auf den Gitterplatz 0 eingebettet. Das weitere Vorgehen verläuft nun entsprechend Abschnitt 6.2.7, nur daß die Verschiebung des ursprünglichen Punktes über das ganze Gitter entfällt, da die Einbettung dieses Punktes auf 0 festgehalten ist. Aufgrund der Summation in Gleichung (7.1) werden an die Einbettung der Vertizes mit den verbleibenden äußeren Linien keine Bedingungen gestellt.

Bei diesem Verfahren ist zu beachten, daß die Beiträge der fermionischen Linien von der Richtung ihrer Einbettung auf das Gitter abhängen.

7.3 Praktische Durchführung des Verfahrens

7.3.1 Anleitung zur Entwicklung der Suszeptibilitäten

Die praktische Durchführung der Entwicklung der Suszeptibilitäten χ_{mno} bis zu einer bestimmten Ordnung in \mathcal{T} kann entlang der in diesem Abschnitt angegebenen aus 12 Punkten bestehenden Liste vorgenommen werden. Vergleichbare Regeln für ein rein bosonisches Modell werden in [4] beschrieben. Die hier vorgestellten Regeln lehnen sich teilweise an die dortigen an. In [11] werden Andeutungen für ähnliche Regeln in einem fermionischen Modell gemacht.

1. Als erstes sind alle Graphen mit der entsprechenden Anzahl äußerer Graphenlinien niederzuschreiben, bei denen die Anzahl der inneren Graphenlinien die betrachtete Ordnung in \mathcal{T} nicht übersteigt. Graphen, bei denen sofort erkannt wird, daß sie nicht zu der betrachteten Suszeptibilität beitragen, können dabei ausgelassen werden. Die Schritte 2 bis 12 sind mit jedem Graphen einzeln durchzuführen. Dabei wird mit $\{\mathcal{G}\}$ die Menge der Graphen bezeichnet, die dieser Bedingung genügen. Diese Menge ist also von der betrachteten Suszeptibilität abhängig.

2. Für jeden Graphen \mathcal{G} ist der Symmetriefaktor $S_{\mathcal{G}}$ entsprechend Gleichung (7.4) zu ermitteln.
3. In jedem Graphen wird eine Anzahl innerer Linien ausgewählt, deren Richtungen die Lage aller Vertizes „•“ mit äußeren Linien relativ zu dem nach Abschnitt 7.2.7 auf den Gitterplatz 0 abgebildeten Vertex fixieren. Diese Linien werden indiziert, und die Richtungen $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p$ dieser Linien werden im weiteren zur Parametrisierung des Graphen benutzt. Die Auswahl der Linien sollte, damit die Summation unter Punkt 11 sich möglichst einfach durchführen lässt, so vorgenommen werden, daß die hier ausgewählten Linien einen „Baumgraphen“ bilden. Befinden sich alle äußeren Linien an einem Vertex, so sollten an dieser Stelle keine Linien indiziert werden.
4. Den in dem vorstehenden Punkt noch nicht indizierten fermionischen Linien werden die Richtungen $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_q$ zugeordnet.

Durch die Wahl einer Indexanordnung $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p, \hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_q$ wird durch den festen 0-Punkt eine Einbettung fest vorgegeben, sofern die Richtungsindizes so gewählt sind, daß jedem Vertex ein Gitterplatz eindeutig zugeordnet werden kann. Bei Graphen mit Schleifen ist dies nicht immer möglich.

5. Die Funktion $F(x_i, y_j, w_k, v_k)$ wird in eine Funktion $\tilde{F}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n)$ umgeschrieben.
6. Den Vertizes „•“ werden verbundene 1-Platz-Erwartungswerte mit einer den ein- und auslaufenden Linien entsprechenden Anzahl von Feldfunktionen zugeordnet. Dabei werden die Spinor-Indizes an den fermionischen Feldfunktionen zunächst offen gelassen. In Abschnitt B werden für einige Vertizes mit ein- und auslaufenden Linien die zugeordneten Terme angegeben.
7. Für die Verbindungslien werden die entsprechenden Faktoren eingesetzt. Einer bosonischen Linie wird ein Faktor κ , einer fermionischen Linie, die in die Richtung $\hat{\nu}_n$ weist, eine Matrix $K M_{\hat{\nu}_n}$ zugeordnet. Auch hierbei werden die Spinor-Indizes offen gelassen.
8. Die Spinorindizes werden nun entsprechend Abschnitt 7.2.5 eingetragen. Dabei ist für jede Blase ein negatives Vorzeichen einzuführen.
9. Die Terme sind entsprechend der Summenkonvention zusammenzufassen. Dabei sollten die Faktoren n_F entsprechend Abschnitt 7.2.6 beachtet werden. Der entstehende Ausdruck wird im folgenden $\tilde{R}_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p, \hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_q)$ genannt.
10. Es wird ein Ausdruck $R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p)$ wie folgt definiert:

$$R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p) := \sum'_{\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_q} \tilde{R}_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p, \hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_q) \quad (7.13)$$

Das Symbol \sum' soll darauf hinweisen, daß die Indizes $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_q$ in Abhängigkeit von $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p$ summiert werden. Falls durch die Konstellation der Richtungsindizes die einzelnen Vertizes nicht eindeutig auf Gitterplätze abgebildet werden, ist diese Indexkonstellation von der Summation auszunehmen. Dies ist der Fall, wenn durch Linien verbundene Vertizes nicht widerspruchsfrei benachbarten Gitterplätzen zugeordnet werden können.

11. Der Beitrag $\chi_{mno}(\mathcal{G})$ des Graphen \mathcal{G} zu χ_{mno} bestimmt sich nun nach:

$$\chi_{mno}(\mathcal{G}) = \sum'_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p} \tilde{F}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p) S_{\mathcal{G}} R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p) m! \cdot n! \quad (7.14)$$

Auch bei dieser Summation ist darauf zu achten, daß die Wahl der Richtungsindizes $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p$ nicht zu Widersprüchen gegen die Regel, daß alle Ableitungen eines Vertizes „•“ den gleichen Ortsindex tragen, führt. Indexkonstellationen, die zu Widersprüchen führen, sind von der Summation auszunehmen.

12. Abschließend ist über alle unter Punkt 1 ausgewählten Graphen zu summieren. Das Resultat ist dann die Taylorreihe der betrachteten Suszeptibilität χ_{mno} .

$$\chi_{mno} = \sum_{\mathcal{G}} \chi_{mno}(\mathcal{G}) \quad (7.15)$$

Auf eine Indizierung zur Unterscheidung von χ_{mno} und seiner Taylorreihe wird hier verzichtet.

Mit den angegebenen Regeln können die Suszeptibilitäten nun entwickelt werden. In den folgenden Abschnitten werden noch einige Vereinfachungen diskutiert, die vor allem die unter Punkt 1 auszuwählenden Graphen reduzieren.

7.3.2 Erläuterungen zu einzelnen Suszeptibilitäten

Nachdem im vorstehenden Abschnitt die allgemeinen Regeln für die Entwicklung der Suszeptibilitäten χ_{mno} entsprechend Gleichung (7.1) erläutert worden sind, soll in diesem Abschnitt auf die einzelnen Suszeptibilitäten eingegangen werden.

7.3.2.1 Die Suszeptibilitäten χ_2^{Ψ} und μ_2^{Ψ}

Beide Suszeptibilitäten sind vom Typ χ_{001} , die Auswahl der Graphen unter Punkt 1 der Liste in Abschnitt 7.3.1 braucht somit nur einmal durchgeführt zu werden. Die Suszeptibilitäten unterscheiden sich lediglich in der jeweiligen Funktion F .

Wird unter Punkt 3 der Liste die kürzeste Kette innerer Linien gewählt, die die Vertizes mit den beiden äußeren Linien verbindet, dann geht die Summation mit Nebenbedingung \sum' in Gleichung (7.14) in eine Summation ohne Nebenbedingung \sum über. Es gilt:

$$x = \sum_{i=1}^p \hat{\mu}_i \quad (7.16)$$

Damit bestimmt sich nun der Beitrag eines Graphen \mathcal{G} zu den betrachteten Suszeptibilitäten wie folgt:

$$\begin{aligned} \chi_2^{\Psi}(\mathcal{G}) &= \sum_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p} \sum_{\nu=1}^4 \exp(-iP_{\nu}x_{\nu}) S_{\mathcal{G}} R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p) \\ \mu_2^{\Psi}(\mathcal{G}) &= \sum_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p} \sum_{\nu, \sigma=1}^4 \gamma_{\sigma} x_{\sigma} \frac{1}{\cos(P_{\sigma})} \exp(-iP_{\nu}x_{\nu}) S_{\mathcal{G}} R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p) \end{aligned} \quad (7.17)$$

7.3.2.2 Die Suszeptibilitäten χ_2^ϕ und μ_2^ϕ

Diese beiden Suszeptibilitäten gehören ebenfalls dem gleichen Typ an, in diesem Fall dem Typ χ_{110} . Sie können analog zu den beiden vorstehenden entwickelt werden, da sie ebenfalls zwei äußere topologisch unterscheidbare Linien besitzen. Es sollte klar sein, daß hier andere Graphen auszuwählen sind als für χ_2^Ψ und μ_2^Ψ . Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned}\chi_2^\phi(\mathcal{G}) &= \frac{1}{2} \sum_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p} S_{\mathcal{G}} R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p) \\ \mu_2^\phi(\mathcal{G}) &= \frac{1}{2} \sum_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p} x^2 S_{\mathcal{G}} R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p)\end{aligned}\quad (7.18)$$

7.3.2.3 Die Suszeptibilität χ_4^ϕ

In diesem Fall ist es bei manchen Graphen nicht möglich, die Nebenbedingung in der Summe in Gleichung (7.14) loszuwerden. Als Beispiel wird der folgende Graph angegeben.



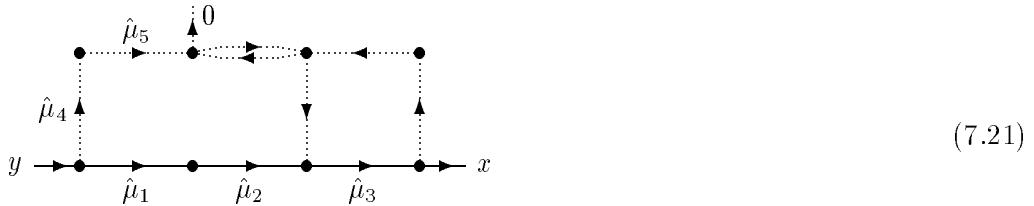
Es ist oft notwendig, die Richtungen von drei innere Linien zu kennen, um die Lage der Eckpunkte daraus zu rekonstruieren. Werden $\hat{\mu}_1$ und $\hat{\mu}_2$ so gewählt, daß die zugeordneten Linien weder parallel noch antiparallel zueinander stehen, so gibt es für $\hat{\mu}_3$ und somit für x zwei Möglichkeiten. Entweder gilt $\hat{\mu}_3 = \hat{\mu}_1$ oder $\hat{\mu}_3 = \hat{\mu}_2$. Alle anderen Werte für $\hat{\mu}_3$ sind von der Summation auszunehmen. Damit ergibt sich:

$$\chi_4^\phi(\mathcal{G}) = \frac{3}{8} \sum'_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p} S_{\mathcal{G}} R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p) \quad (7.20)$$

7.3.2.4 Die Suszeptibilität $\chi_3^{\Psi\phi\Psi}$

Nach Gleichung (3.28) ist es ausreichend, die Terme $(\chi_3^{\Psi\phi\Psi})_{22}$ und $(\chi_3^{\Psi\phi\Psi})_{33}$ zu berechnen, um die renormierten Yukawa-Kopplungen zu bestimmen. Es brauchen also keine Suszeptibilitäten vom Typ χ_{011} bestimmt zu werden.

Auch in diesem Fall ist es nicht möglich, die Nebenbedingung in der Summation in Gleichung (7.14) zu eliminieren. Der folgende Graph mit 10 inneren Linien dient als Beispiel.



Bei diesem Graphen müssen 5 innere Linien ausgewählt werden, damit alle Endpunkte festgelegt sind. Eine mögliche Wahl ist in den Graphen eingetragen. Bei dieser Wahl ergibt

$$\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_3 = -\hat{\mu}_4 = -\hat{\mu}_5$$

keine zulässige Einbettung des Graphen auf das Gitter.

An dieser Stelle ist es nun sinnvoll, einen Ausdruck $\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}$, an dem die Terme $(\chi_3^{\Psi\phi\Psi})_{22}$ und $(\chi_3^{\Psi\phi\Psi})_{33}$ abgelesen werden können, wie folgt zu definieren.

$$\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi} := \sum_{xy} \langle \psi_x \phi_0 \bar{\psi}_y \rangle^c \quad (7.22)$$

Dieser Ausdruck bestimmt sich aus den zugehörigen Graphen \mathcal{G} nach:

$$\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}(\mathcal{G}) = \sum'_{\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p} S_{\mathcal{G}} R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p) \quad (7.23)$$

7.3.3 Vereinfachungen bei der Graphenauswahl

7.3.3.1 Graphen mit rücklaufenden fermionischen Linien

Das einfachste Beispiel für einen Graphen mit einer rücklaufenden fermionischen Linie ist:



Aufgrund der Einbettungsregeln wird den beiden inneren Linien die entgegengesetzte Richtung zugeordnet. Der obere Vertex liefert einen Beitrag, der proportional zum Einheitsoperator $\mathbb{1}_S$ im Spinorraum ist. Der Beitrag der inneren Linien und des oberen Vertex zum Gesamtbeitrag dieses Graphen ist:

$$\frac{K^2}{1 - G_{\chi} G_{\psi}} \begin{pmatrix} \gamma_{\mu} + r & 0 \\ 0 & \gamma_{\mu} + r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{-\mu} + r & 0 \\ 0 & \gamma_{-\mu} + r \end{pmatrix} = \frac{K^2}{1 - G_{\chi} G_{\psi}} (-1 + r^2) \quad (7.25)$$

Wird der Wilson-Parameter r auf $r = 1$ gesetzt, so liefern alle Graphen mit rücklaufenden fermionischen Linien einen Beitrag null.

Damit lassen sich in der praktischen Rechnung viele Graphen ausschließen. Zum anderen können mit diesem Resultat aber auch eine ganze Reihe der möglichen Einbettungen eines Graphen, der einen Beitrag liefert, ausgeschlossen werden.

Bei der Anwendung dieses Resultates ist darauf zu achten, dass der verbindende Vertex von der Art ist. Beginnen oder enden weitere Graphenlinien in dem verbindenden Vertex, so ist dieses Resultat nicht anwendbar.

7.3.3.2 Alternierende Anordnung der Matrizen A_- und A_+

Alle 1-Platz-Erwartungswerte mit fermionischen Variablen außer $\langle \Psi \bar{\Psi} \rangle_1^c$ sind Summen über Tensorprodukte der Matrizen A_- und A_+ , wie Anhang B verdeutlicht. Die skalaren Vorfaktoren sind für die Betrachtung dieses Abschnitts unwichtig. In der AB -Basis werden somit bei der Zusammenfassung der Terme unter Punkt 9 in Abschnitt 7.3.1 die Matrizen A_- , A_+ und $M_{\hat{\mu}}$ in einer durch fermionische Ketten bestimmten Reihenfolge miteinander multipliziert. Diese fermionischen Ketten werden durch die Permutation der Indizes in den 1-Platz-Erwartungswerten gebildet.

Die $M_{\hat{\mu}}$ werden durch 2×2 -Matrizen mit von null verschiedenen 4×4 -Matrixblöcken auf der Diagonalen dargestellt. Die Matrizen A_- beziehungsweise A_+ besitzen nur einen

von null verschiedenen Matrixblock in der linken unteren bzw. in der rechten oberen Matrixecke. Eine kurze Rechnung zeigt, daß die Matrizen A_- und A_+ immer alternierend entlang der Ketten vorkommen müssen. Die Anzahl der dazwischen vorkommenden Matrizen $M_{\hat{\mu}}$ ist irrelevant.

Auch mit diesem Resultat lassen sich viele Graphen oder aber bestimmte Permutationen der Indizes in den 1-Platz-Erwartungswerten direkt als nicht beitragend erkennen, so daß in der praktischen Rechnung einige Rechenarbeit gespart werden kann.

Desweiteren ist dieser Punkt für die Betrachtungen des Abschnitts 9.3 wichtig.

Als Beispiel soll noch der folgende Graph angegeben werden, der nach dem Ergebnis dieses Abschnitts direkt als nicht beitragend ausgesondert werden kann.



Bei diesem Graphen ist nur die Bildung einer einzigen fermionischen Kette möglich. Entlang dieser Kette sind dann die Matrizen

$$A_+ M_{\hat{\nu}_3} A_- M_{\hat{\nu}_2} M_{\hat{\nu}_1} A_- = 0$$

miteinander zu multiplizieren.

Kapitel 8

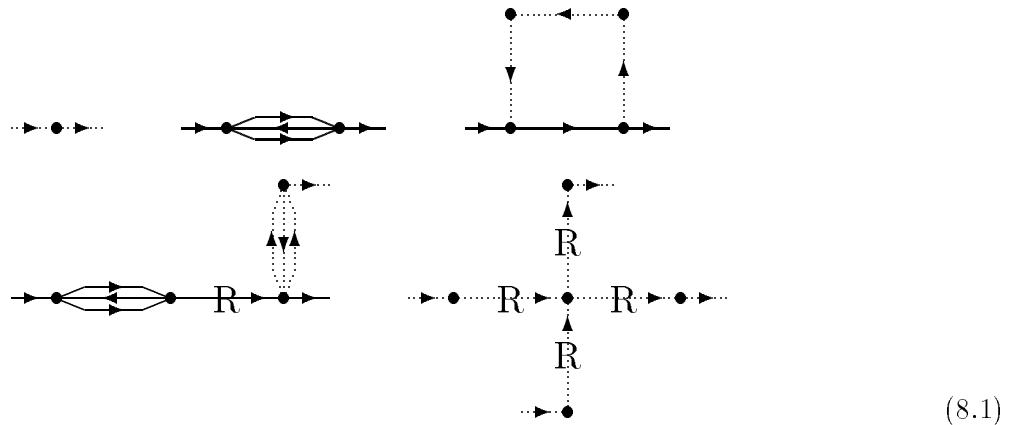
Zurückführung auf 1-Linien-irreduzible Graphen

8.1 1-Linien-reduzible Graphen

In der hier vorgestellten „Linked-Cluster-Entwicklung“ ist es wie in der Störungstheorie möglich, durch die Verwendung von geometrischen Reihen die Anzahl der auszuwählenden Graphen erheblich zu reduzieren. Die Graphen, die im weiteren auszuwählen sind, werden „1-Linien-irreduzibel“ genannt, in Analogie zu den „1-Teilchen-irreduziblen“ Graphen (engl.: one-particle irreducible graphs) in der Störungstheorie. Im weiteren werden die 1-Linien-irreduziblen Graphen oft als irreduzible Graphen bezeichnet.

Ein zusammenhängender Graph \mathcal{G} wird *1-Linien-reduzibel* genannt, wenn er durch Auslöschen einer inneren Linie in unzusammenhängende Teile zerfällt. Existiert keine Linie mit dieser Eigenschaft, so heißt der Graph *1-Linien-irreduzibel*.

Auch hier werden zur Illustration einige Beispiele angegeben. Weitere Beispiele irreduzibler Graphen werden im Anhang D angegeben.



Die Graphen der ersten Zeile sind irreduzibel, die der zweiten Zeile reduzibel. Die Linien der reduziblen Graphen, deren Auslöschung den Graphen in nichtzusammenhängende Teile trennt, sind mit einem „R“ gekennzeichnet.

Im weiteren soll gezeigt werden, wie sich die in Abschnitt 3.4 definierten Suszeptibilitäten aus 1-Linien-irreduziblen Graphen bestimmen lassen. Dieses verringert die unter Punkt 1 in Abschnitt 7.3.1 auszuwählenden Graphen erheblich. Dazu werden im folgenden Abschnitt die benötigten Formeln aufgelistet, um aus den Beiträgen der irreduziblen Graphen die Beiträge aller Graphen zu den Suszeptibilitäten zu bestimmen. Diese Formeln werden in den nachfolgenden Unterabschnitten bewiesen.

8.2 Bestimmung der Suszeptibilitäten aus irreduziblen Graphen

Es ist möglich, alle Suszeptibilitäten des Abschnitts 3.4 unter ausschließlicher Verwendung irreduzibler Graphen zu bestimmen. Dazu ist ein neues Symbol notwendig:

$$\overset{\circ}{\chi}_{mno} := \sum_{\mathcal{G}^{li}} \chi_{mno}(\mathcal{G}^{li}) \quad (8.2)$$

Dabei steht $\{\mathcal{G}^{li}\}$ für die Menge der 1-Linien-irreduziblen Graphen, die die unter Punkt 1 in Abschnitt 7.3.1 genannten Bedingungen erfüllen. Der Ausdruck $\overset{\circ}{\chi}_{mno}$ wird im folgenden als der „irreduzible Kern“ der Suszeptibilität χ_{mno} bezeichnet. Nun gilt bei $r = 1$:

$$\chi_2^\phi = \frac{\overset{\circ}{\chi}_2^\phi}{1 - 16 \kappa \overset{\circ}{\chi}_2^\phi} \quad (8.3)$$

$$\mu_2^\phi = \frac{\overset{\circ}{\mu}_2^\phi + 16 \overset{\circ}{\chi}_2^\phi \kappa \overset{\circ}{\chi}_2^\phi}{(1 - 16 \kappa \overset{\circ}{\chi}_2^\phi)^2} \quad (8.4)$$

$$\chi_4^\phi = \frac{\overset{\circ}{\chi}_4^\phi}{(1 - 16 \kappa \overset{\circ}{\chi}_2^\phi)^4} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \chi_2^\Psi(P) &= \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \left[1 - 2K \sum_{\nu=1}^4 \cos(P_\nu) \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \right]^{-1} \\ &= \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \left[1 - K(8 - 4n_\pi) \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} \mu_2^\Psi(P) &= \left[\overset{\circ}{\mu}_2^\Psi(P) + 8K \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \right] \cdot \left[1 - 2K \sum_{\nu=1}^4 \cos(P_\nu) \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \right]^{-2} \\ &= \left[\overset{\circ}{\mu}_2^\Psi(P) + 8K \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \right] \cdot \left[1 - K(8 - 4n_\pi) \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \right]^{-2} \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi} = \left[\frac{\overset{\circ}{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}}{1 - 16 \kappa \overset{\circ}{\chi}_2^\phi} \right] \cdot \left[1 - 8K \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \right]^{-2} \quad (8.8)$$

Es ist zu beachten, dass $P_\mu \in \{0, \pi\}$ gilt. Mit n_π wird die Anzahl der Impulskomponenten P_μ bezeichnet, für die $P_\mu = \pi$ gilt.

Entsprechende Formeln werden in [4] für eine bosonische Hopping-Parameter-Entwicklung und in [11] für eine fermionische Hopping-Parameter-Entwicklung ohne Beweis angegeben.

8.2.0.1 Anmerkungen zur Notation in den folgenden Beweisen

Zur Vereinfachung der Notation ist an dieser Stelle die Einführung eines neuen graphischen Symbols notwendig.

$$\boxed{\text{G}^{li}} : \quad \text{I-Box} \quad (8.9)$$

Dieses Symbol wird im weiteren als „I-Box“ bezeichnet, und es steht für den 1-Linien-irreduziblen Graphen \mathcal{G}^{li} mit der eingezeichneten Anzahl äußerer Linien. An derartigen für die I-Box äußeren Ableitungen können zwei I-Boxen mit den entsprechenden Linien verbunden werden. Dadurch werden diese Ableitungen zu inneren Ableitungen bezüglich des Gesamtgraphen, der aus den irreduziblen Graphen entsteht, die den I-Boxen zugeordnet sind. Als Beispiel mögen hier die nachfolgenden Beweise dienen.

Des Weiteren wird ein Symbol benötigt, um einen Graphen durch Anhängen eines Graphenteils an einen anderen zu erzeugen.

$$\left(\dots \rightarrow \boxed{\text{G}_1^{li}} \rightarrow \dots \right) \left(> \dots \rightarrow \boxed{\text{G}_2^{li}} \rightarrow \dots \right) = \left(\dots \rightarrow \boxed{\text{G}_1^{li}} \rightarrow \dots \rightarrow \boxed{\text{G}_2^{li}} \rightarrow \dots \right) \quad (8.10)$$

Das Anhänge-Symbol $>$ ist so zu verstehen, daß sich zwischen der I-Box und dem „ $>$ “ eine innere Linie befindet, die $2d$ Einbettungen besitzt und den mit der Linie verbundenen Faktor κ trägt. Bei fermionischen Linien ist das Anhänge-Symbol $>$ analog zu handhaben.

In den Beweisen stehen die Graphen stellvertretend für das Produkt der ihnen zugeordneten Faktoren $S_{\mathcal{G}}$ und $R_{\mathcal{G}}$.

Das Symbol \sum_{Ebd} steht für die Summe über alle Einbettungen des folgenden Graphen.

8.2.1 Die Suszeptibilität χ_2^ϕ

Ein beliebiger Graph, der zu χ_2^ϕ beiträgt, besteht aus einer Kette von einem oder mehreren irreduziblen Teilgraphen, die durch bosonische Linien verbunden sind. Die irreduziblen Graphen können nicht durch eine fermionische Linie verbunden sein, da an jedem „•“ des Graphen die Anzahl der ein- und auslaufenden fermionischen Linien gleich ist, und der Gesamtgraph keine äußeren fermionischen Ableitungen besitzt. Somit enthält ein derartiger Graph keine Quellen und Senken für fermionische Linien. Die Folge ist, daß die fermionischen Linien immer geschlossene Blasen bilden und sich somit alle fermionischen Linien den irreduziblen Teilgraphen zuordnen lassen.

In diesem Beweis stehen alle I-Boxen für irreduzible Graphen mit jeweils einer ein- und auslaufenden bosonischen Linie. Es gilt:

$$\chi_2^\phi = \frac{1}{2} \sum_x \langle \phi_x \phi_0^+ \rangle^c$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{\text{Ebd}} \left[\sum_{\mathcal{G}^{li}} \cdots \xrightarrow{\mathcal{G}^{li}} \cdots \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\text{Ebd}} \left[\sum_{\mathcal{G}_1^{li}, \mathcal{G}_2^{li}} \cdots \xrightarrow{\mathcal{G}_1^{li}} \cdots \xrightarrow{\mathcal{G}_2^{li}} \cdots \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\text{Ebd}} \left[\sum_{\mathcal{G}_1^{li}, \mathcal{G}_2^{li}, \mathcal{G}_3^{li}} \cdots \xrightarrow{\mathcal{G}_1^{li}} \cdots \xrightarrow{\mathcal{G}_2^{li}} \cdots \xrightarrow{\mathcal{G}_3^{li}} \cdots \right] \\
&\quad + \cdots \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{\text{Ebd}} \sum_{\mathcal{G}_1^{li}} \cdots \xrightarrow{\mathcal{G}_1^{li}} \cdots \right) \left(\sum_{\text{Ebd}} \sum_{\mathcal{G}_{\alpha}^{li}} > \cdots \xrightarrow{\mathcal{G}_{\alpha}^{li}} \cdots \right)^p \right\} \quad (8.11)
\end{aligned}$$

Der Symmetriefaktor $S_{\mathcal{G}}$ jedes Gesamtgraphen \mathcal{G} , der zu χ_2^{ϕ} beiträgt, setzt sich, da die Pfeile an den Verbindungslien zwischen den I-Boxen die Symmetrie bezüglich des Austauschs von I-Boxen brechen, multiplikativ aus den Symmetriefaktoren $S_{\mathcal{G}^{li}}$ der irreduziblen Teilgraphen \mathcal{G}^{li} zusammen. Die Verbindungslien tragen immer den Symmetriefaktor 1. Aus der Tatsache, daß beliebig viele Vertizes „•“ auf den gleichen Gitterpunkt abgebildet werden können, und der Translationsinvarianz der Beiträge der Graphenteile ergibt sich, daß die Summe über die Einbettungen \sum_{Ebd} des gesamten Graphen in Summen über die Einbettungen der einzelnen Verbindungslien und I-Boxen umgeschrieben werden kann. Anschaulich gesprochen, stehen sich die einzelnen Graphenteile nicht im Weg.

Aus dem Konstruktionsverfahren der $R_{\mathcal{G}}$ ergibt sich, daß sich auch diese Faktoren multiplikativ aus den den Verbindungslien und Teilgraphen \mathcal{G}^{li} zugeordneten R -Faktoren zusammensetzen.

Die letzte Zeile in Gleichung (8.11) ist nun eine geometrische Reihe, die sich mit der bekannten Formel vereinfachen läßt. Es gilt:

$$\overset{\circ}{\chi}_2^{\phi} = \frac{1}{2} \sum_{\text{Ebd}} \left[\sum_{\mathcal{G}^{li}} \cdots \xrightarrow{\mathcal{G}^{li}} \cdots \right] \quad (8.12)$$

Die Verbindungsline mit dem Anhäng-Symbol besitzt 8 mögliche Einbettungen und jede Einbettung liefert einen Beitrag κ . Wird dies in Gleichung (8.11) eingestzt, so ergibt sich die Gleichung (8.3).

8.2.2 Die Suszeptibilität $\chi_2^{\Psi}(P)$

Der Beweis der Formel (8.6) verläuft analog zu dem vorstehenden. Dabei sind alle bosonischen Linien durch fermionische zu ersetzen, und es ist zu beachten, daß hier mit Matrizen und nicht mit Skalaren gerechnet wird. Da die hier betrachteten Graphen keine Quellen und Senken für bosonische Felder enthalten, können alle bosonischen Linien den I-Boxen zugordnet werden. Die I-Boxen werden hier also ausschließlich durch fermionische Linien verbunden.

Ein weiterer Unterschied ist die P -Abhängigkeit. Es ist notwendig, jeder I-Box und jeder inneren Linie einen Vektor des Gitters zuzuordnen, der den Abstand der beiden äußeren Ableitungen der I-Box bzw. die Richtung der inneren Linie im Raum-Zeit-Gitter angibt. Der Vektor x , der den Abstand der beiden äußeren Ableitungen des Gesamtgraphen auf

dem Gitter angibt, ist die Summe dieser Vektoren. Die Zuordnung dieser Gittervektoren an die einzelnen Bildsymbole wird jeweils unter den Symbolen angegeben.

$$\begin{aligned}
 \chi_2^\Psi(P) &= \sum_x e^{-iP_\mu x_\mu} \langle \Psi_x \bar{\Psi}_0 \rangle^c \\
 &= \sum_{\text{Ebd}} \left[\sum_{\mathcal{G}^{li}} e^{-iP_\mu x_\mu} \xrightarrow{\quad \mathcal{G}^{li} \quad} \right] \\
 &\quad + \sum_{\text{Ebd}} \left[\sum_{\mathcal{G}_1^{li}, \mathcal{G}_2^{li}} e^{-iP_\mu [(x_1)_\mu + \hat{\nu}_\mu + (x_2)_\mu]} \xrightarrow{\quad \mathcal{G}_1^{li} \quad} \xrightarrow{\quad \hat{\nu} \quad} \xrightarrow{\quad \mathcal{G}_2^{li} \quad} \right] \\
 &\quad + \dots \\
 &= \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{\text{Ebd}} \sum_{\mathcal{G}_1^{li}} e^{-iP_\mu x_\mu} \xrightarrow{\quad \mathcal{G}_1^{li} \quad} \right) * \right. \\
 &\quad \left. * \left(\sum_{\text{Ebd}} \sum_{\mathcal{G}_a^{li}} e^{-iP_\mu [\hat{\nu}_\mu + (x_a)_\mu]} \xrightarrow{\quad \hat{\nu} \quad} \xrightarrow{\quad \mathcal{G}_a^{li} \quad} \right)^q \right\} \quad (8.13)
 \end{aligned}$$

Werden von den 8 Einbettungen der inneren Verbindungslien jeweils die antiparallelen Richtungen zusammengefaßt, so heben sich die Beiträge proportional zu γ_ν weg, und es bleibt der Beitrag proportional zu $r = 1$. Aus zwei $\{\exp(-iP_\mu \hat{\nu}_\mu)\}$ -Terminen entsteht immer ein Term $\{2 \cos(P_\nu)\}$, und es bleibt eine Summe $\sum_{\nu=1}^4$. Mit

$$\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) = \sum_{\text{Ebd}} \left[\sum_{\mathcal{G}^{li}} e^{-iP_\mu x_\mu} \xrightarrow{\quad \mathcal{G}^{li} \quad} \right] \quad (8.14)$$

ergibt sich unter Verwendung der geometrischen Reihe die gesuchte Formel.

8.2.3 Die Suszeptibilität μ_2^ϕ

Das zum Aufbau der Graphen für χ_2^ϕ Gesagte gilt natürlich auch für μ_2^ϕ .

$$\begin{aligned}
 \mu_2^\phi &= \frac{1}{2} \sum_x x^2 \langle \phi_x \phi_0^+ \rangle^c \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\text{Ebd}} \left[\sum_{\mathcal{G}^{li}} x^2 \xrightarrow{\quad \mathcal{G}^{li} \quad} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\text{Ebd}} \left[\sum_{\mathcal{G}_1^{li}, \mathcal{G}_2^{li}} (x_1 + \hat{\nu} + x_2)^2 \xrightarrow{\quad \mathcal{G}_1^{li} \quad} \xrightarrow{\quad \hat{\nu} \quad} \xrightarrow{\quad \mathcal{G}_2^{li} \quad} \right] \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned} \quad (8.15)$$

In jeder Zeile tritt ein Term der Form $(x_1 + \hat{\nu}_1 + x_2 + \hat{\nu}_2 + \dots + x_{n-1} + \hat{\nu}_{n-1} + x_n)^2$ auf. Wird dieser Term ausmultipliziert, so heben sich aufgrund der Summation über die Einbettungen der Graphen alle gemischten Glieder heraus.

Dazu ist anzumerken, daß fermionische innere Linien als einziges Bildelement einen einbettungsabhängigen Beitrag liefern. Die einbettungsabhängigen Anteile der Beiträge dieser Linien sind immer proportional zu einer γ -Matrix. Da hier bosonische Erwartungswerte

betachtet werden, können alle fermionischen Linien der Graphen zu Blasen zusammengefaßt werden. Dies führt, wie schon beschrieben, auf Spurbildungen. Die verbundenen 1-Platz-Erwartungswerte besitzen nur Anteile proportional zu $\underline{1}_S$ und γ_5 . Da $\underline{1}_S$ die einzige Matrix ist, die sich als Produkt von euklidischen γ -Matrizen darstellen läßt und eine von 0 verschiedener Spur hat, folgt, daß sich alle Beiträge der γ -Matrizen zu μ_2^ϕ durch das Produkt einer geradzahligen Anzahl dieser Matrizen ergeben, entweder über das Produkt $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_4 \cdot \gamma_5$ oder aber Produkte der Art $\gamma_\mu \cdot \gamma_\mu$ sowie Produkte dieser beiden Termarten.

Betrachte nun die Summe aller Terme proportional zu $x_i \cdot x_j$ mit $i \neq j$. Werden zunächst die Einbettungen von \mathcal{G}_j^{li} zusammengezählt, so gibt es zu jeder gültigen Einbettung des Graphen auch eine gültige Einbettung, bei der alle inneren Graphenlinien in die entgegengesetzte Richtung weisen. Die diesen beiden Einbettungen zugeordneten x_j unterscheiden sich nur im Vorzeichen, das eine ist das Negative des anderen. Die Faktoren $S_{\mathcal{G}_j^{li}}$ und $R_{\mathcal{G}_j^{li}}$ dieser beiden Einbettungen sind identisch, da $S_{\mathcal{G}_j^{li}}$ sowieso nicht von der Einbettung abhängt und in $R_{\mathcal{G}_j^{li}}$ alle Terme eine gerade Anzahl negativer Vorzeichen enthalten, da, wie vorstehend erläutert, die Anzahl der γ -Matrizen gerade ist.

Diese beiden Einbettungen des Teilgraphen \mathcal{G}_j^{li} heben sich also bezüglich ihres Beitrages zu dem zu $x_i \cdot x_j$ proportionalen Term heraus, wenn die Richtung aller inneren Linien, die nicht zu \mathcal{G}_j^{li} gehören, festgehalten wird. Auf diese Weise entfallen alle Beiträge der gemischten Glieder $x_i \cdot x_j$ mit $i \neq j$.

Mit einer analogen Argumentation können auch Beiträge proportional zu $x_i \cdot \hat{\nu}_j$ und $\hat{\nu}_i \cdot \hat{\nu}_j$ ausgeschlossen werden. Bei $\hat{\nu}_i \cdot \hat{\nu}_j$ gilt wiederum $i \neq j$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_2^\phi &= \frac{1}{2} \sum_{\text{Ebd}} \left[\sum_{\mathcal{G}^{li}} x^2 \rightarrow \begin{array}{c} \text{hexagon} \\ \mathcal{G}^{li} \end{array} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{\text{Ebd}} \left[\sum_{\mathcal{G}_1^{li}, \mathcal{G}_2^{li}} \left[(x_1)^2 + (\hat{\nu})^2 + (x_2)^2 \right] \rightarrow \begin{array}{c} \text{hexagon} \\ \mathcal{G}_1^{li} \end{array} \dots \rightarrow \begin{array}{c} \text{hexagon} \\ \mathcal{G}_2^{li} \end{array} \right] \\
&\quad + \dots \\
&= \frac{1}{2} \sum_{p,q=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{\text{Ebd}} \sum_{\mathcal{G}_a^{li}} \rightarrow \begin{array}{c} \text{hexagon} \\ \mathcal{G}_a^{li} \end{array} \dots \right)^p * \right. \\
&\quad \left. * \left(\sum_{\text{Ebd}} \sum_{\mathcal{G}^{li}} x^2 \rightarrow \begin{array}{c} \text{hexagon} \\ \mathcal{G}^{li} \end{array} \rightarrow \dots + \sum_{\text{Ebd}} \sum_{\mathcal{G}_1^{li}, \mathcal{G}_2^{li}} (\hat{\nu})^2 \rightarrow \begin{array}{c} \text{hexagon} \\ \mathcal{G}_1^{li} \end{array} \dots \rightarrow \begin{array}{c} \text{hexagon} \\ \mathcal{G}_2^{li} \end{array} \right) * \right. \\
&\quad \left. * \left(\sum_{\text{Ebd}} \sum_{\mathcal{G}_b^{li}} > \rightarrow \begin{array}{c} \text{hexagon} \\ \mathcal{G}_b^{li} \end{array} \dots \right)^q \right\} \quad (8.16)
\end{aligned}$$

Als neuer Term tritt hier

$$\stackrel{\circ}{\mu}_2^\phi = \frac{1}{2} \sum_{\text{Ebd}} \left(\sum_{\mathcal{G}_1^{li}} x^2 \rightarrow \begin{array}{c} \text{hexagon} \\ \text{with } \mathcal{G}_1^{li} \end{array} \right) \quad (8.17)$$

auf. Des Weiteren enthält die Formel zwei geometrische Reihen, die aus Abschnitt 8.2.1 bekannt sind. Es bleibt der Term

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{Ebd}} \left(\sum_{g_1^{li}, g_2^{li}} (\hat{\nu})^2 \rightarrow \begin{array}{c} \text{hexagon} \\ g_1^{li} \end{array} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{array}{c} \text{hexagon} \\ g_2^{li} \end{array} \rightarrow \dots \right) = \chi_2^\phi \ 16\kappa \ \chi_2^\phi \quad (8.18)$$

Dabei wurde über die 8 Einbettungen der bosonischen Verbindungsline summiert, und es wurde $(\hat{\nu})^2 = 1$ ausgenutzt.

8.2.4 Die Suszeptibilität $\mu_2^\Psi(P)$

Der Fall dieser Suszeptibilität ist im Prinzip einfacher als der vorhergehende Fall μ_2^ϕ , da hier der Differenzvektor der äußeren Linien des Gesamtgraphen linear und nicht quadratisch eingeht. Durch die Impulsabhängigkeit geht allerdings die Übersichtlichkeit der Rechnung verloren. Analog zu den Fällen μ_2^ϕ und $\chi_2^\Psi(P)$ erhält man:

$$\begin{aligned}
 \mu_2^\Psi(P) &= \sum_x \left[\sum_{\sigma=1}^4 \left(\gamma_\sigma x_\sigma \frac{1}{\cos(P_\sigma)} \right) e^{-iP_\mu x_\mu} \langle \Psi_x \bar{\Psi}_0 \rangle^c \right] \\
 &= \sum_{p,q=0}^{\infty} \left\{ \left(\sum_{\text{Ebd } G_a^{li}} \sum_{\mu} e^{-iP_\mu (x_a + \hat{\nu}_a)_\mu} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)^p * \right. \\
 &\quad * \left(\sum_{\text{Ebd } G^{li}} \sum_{\sigma=1}^4 \frac{\gamma_\sigma x_\sigma}{\cos(P_\sigma)} e^{-iP_\mu x_\mu} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. + \\
 &\quad \left. + \sum_{\text{Ebd } G_1^{li}, G_2^{li}} \sum_{\sigma=1}^4 \frac{\gamma_\sigma \hat{\nu}_\sigma e^{-iP_\mu \hat{\nu}_\mu}}{\cos(P_\sigma)} e^{-iP_\mu (x_1 + x_2)_\mu} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \\
 &\quad \left. * \left(\sum_{\text{Ebd } G_b^{li}} \sum_{\mu} e^{-iP_\mu (\hat{\nu}_b + x_b)_\mu} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)^q \right\} \quad (8.19)
 \end{aligned}$$

Hierbei wird die Vertauschbarkeit der γ_σ -Matrix mit einem Teil der Bildelemente benötigt. Diese ist dadurch gegeben, daß durch die Summationen über die Einbettungen aus den mit der γ_σ -Matrix vertauschten Bildelementen immer Matrizen entstehen, die keine γ -Struktur tragen. Die beiden äußeren Terme des letzten Ausdrucks führen wieder auf die aus Abschnitt 8.2.2 bekannte geometrische Reihe. Für den ersten Term in der mittleren Klammer gilt:

$$\sum_{\text{Ebd}} \left(\sum_{G^{li}} \sum_{\sigma=1}^4 \frac{\gamma_\sigma x_\sigma}{\cos(P_\sigma)} e^{-iP_\mu x_\mu} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) = \overset{\circ}{\mu}_2^\Psi(P) \quad (8.20)$$

Der zweite Term der Klammer erfordert eine genauere Betrachtung. Für die μ -te Komponente des Einheitsvektors $\hat{\nu}$ gilt $\hat{\nu}_\mu = \text{sgn}(\hat{\nu}) \delta_{\nu\mu}$, wobei $\text{sgn}(\hat{\nu})$ den Wert 1 annimmt, wenn $\hat{\nu}$ in eine positive Raumrichtung zeigt, und -1 , falls $\hat{\nu}$ in eine negative zeigt. Damit gilt

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\text{Ebd}} \left(\sum_{G_1^{li}, G_2^{li}} \sum_{\sigma=1}^4 \frac{\gamma_\sigma \hat{\nu}_\sigma e^{-iP_\mu \hat{\nu}_\mu}}{\cos(P_\sigma)} e^{-iP_\mu (x_1 + x_2)_\mu} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \\
 &= \sum_{\text{Ebd}} \left(\sum_{G_1^{li}, G_2^{li}} \frac{\gamma_\nu e^{-iP_\nu}}{\cos(P_\nu)} e^{-iP_\mu (x_1 + x_2)_\mu} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \quad (8.21)
 \end{aligned}$$

Die fermionische Verbindungsline trägt zu jeder Einbettung mit einer Matrix $K \cdot M_{\hat{\nu}}$ bei. Werden auch hier die antiparallelen Richtungen zusammengefaßt, so ist nur der Anteil der Matrix proportional zu γ_ν relevant, da $\gamma_\nu \cdot \gamma_\nu = 1$. Der Anteil proportional zu r hebt sich

heraus, der Kosinus-Term kann gegen die Exponentialfunktion gekürzt werden, und für jedes Paar antiparalleler Einbettungen der Linie ergibt sich ein Faktor $2K$.

Aus den I-Boxen entstehen in Verbindung mit den Summen der Gleichung zwei Terme der Art $\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P)$. Damit gilt dann

$$\sum_{\text{Ebd}} \left(\sum_{\mathcal{G}_1^{li}, \mathcal{G}_2^{li}} \frac{\gamma_\nu e^{-iP_\nu}}{\cos(P_\nu)} e^{-iP_\mu(x_1+x_2)_\mu} \xrightarrow{\mathcal{G}_1^{li}} \xrightarrow{\hat{\nu}} \xrightarrow{\mathcal{G}_2^{li}} \right) = 8K \left(\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \right)^2 \quad (8.22)$$

Wird die Vertauschbarkeit der Matrix für die geometrische Reihe $[1 - K(8 - 4n_\pi) \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P)]^{-1}$ mit der Matrix $[\overset{\circ}{\mu}_2^\Psi(P) + 8K \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P)]$ benutzt, so ist die Formel bewiesen. Die Vertauschbarkeit dieser Matrizen ist in der AB -Basis sofort einzusehen, da dort $\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P)$ nach Anhang A diagonal ist. Zum Problem der Rücktransformation in die $\psi\chi$ -Basis ist auch Anhang C zu beachten.

Es bleibt noch die Formel für die Suszeptibilitäten der renormierten Kopplungen zu zeigen. Dabei treten I-Boxen mit unterschiedlichen Anzahlen ein- und auslaufender Linien auf.

8.2.5 Die Suszeptibilität $\tilde{\chi}_3^{\Psi\chi\Psi}$

Nachdem die Beweise der vorstehenden Abschnitten recht ausführlich dargestellt sind, braucht dieser Beweis nur kurz skizziert zu werden, da keine neuen Schwierigkeiten auftreten. Es treten hier drei verschiedene Arten der I-Boxen auf. Zum einen I-Boxen mit zwei bosonischen bzw. fermionischen äußeren Linien, davon jeweils eine ein- und eine auslaufende. Zum anderen enthält jeder Graph zu $\tilde{\chi}_3^{\Psi\chi\Psi}$ genau eine I-Box mit einer auslaufenden bosonischen Linie und jeweils einer ein- und einer auslaufenden fermionischen Linie.

Alle Graphen, die zu der Suszeptibilität

$$\tilde{\chi}_3^{\Psi\chi\Psi} = \sum_{x,y} \langle \Psi_x \phi_0 \Psi_y \rangle^c$$

beitragen, lassen sich in der folgenden Form darstellen. Aus Gründen der Übersicht werden die Graphen \mathcal{G} in den I-Boxen nicht als irreduzibel gekennzeichnet, dennoch stehen die I-Boxen auch hier für irreduzible Graphen.

$$\prod_{i=1}^q \left(\xrightarrow{\mathcal{G}'_i} \right) \quad \xrightarrow{\mathcal{G}} \quad \prod_{j=1}^p \left(\xrightarrow{\mathcal{G}''_j} \right) \quad \prod_{k=1}^t \left(\xrightarrow{\mathcal{G}'''_k} \right) \quad (8.23)$$

Die Produkte wie z.B. $\prod_{i=1}^q$ vor den Graphen mit den Anhänger-Symbolen stehen für ein Hintereinanderhängen von q derartigen Graphen, wobei $\mathcal{G}'_i \neq \mathcal{G}'_j$ für $i \neq j$ gelten kann.¹ Die Reihenfolge der Terme ist dabei immer gleich zu wählen, z.B.: der Term mit Index 1 steht ganz links und der mit Index q ganz rechts. Das Produkt mit den bosonischen Anhänger-Symbolen wird an die nach oben auslaufende bosonische Linie des irreduziblen Graphen \mathcal{G} angehängt. Um nun $\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}$ zu erhalten, ist in dem obigen Graphen über p, q, t , alle

¹Die Striche an den Graphen \mathcal{G}' etc. in den I-Boxen stellen eine Indizierung und keine Ableitung oder ähnliches dar.

Graphen \mathcal{G} in den I-Boxen und alle Einbettungen des gesamten Graphen zu summieren, wie bei den übrigen Suszeptibilitäten auch.

Jeder zu $\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}$ beitragende Graph besitzt somit einen irreduziblen Teilgraphen mit einer einlaufenden fermionischen und jeweils einer auslaufenden bosonischen und fermionischen Linie. Die Summation über alle Einbettungen und alle irreduziblen Graphen überführt dann den Beitrag der I-Box mit drei äußeren Linien in $\tilde{\chi}_3^{\circ\Psi\phi\Psi}$. Die restlichen I-Boxen mit den Verbindungslinien und den Anhänge-Symbolen führen auf die schon bekannten geometrischen Reihen, und damit ergibt sich die Formel (8.8).

8.2.6 Die Suszeptibilität χ_4^ϕ

Alle Graphen, die zu der Suszeptibilität $\chi_4^\phi = \frac{3}{8} \sum_{xyz} \langle \phi_x \phi_y^+ \phi_z \phi_0^+ \rangle^c$ beitragen, lassen sich auf die folgende Form bringen. Zum Verständnis sind die Anmerkungen im vorstehenden Abschnitt 8.2.5 hilfreich.

$$\begin{array}{c}
 \prod_{k=1}^t \left(> \cdots \xrightarrow{\quad} \text{hexagon } \mathcal{G}_k''' \xrightarrow{\quad} \cdots \right) \\
 \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 \text{hexagon } \mathcal{G} \quad \quad \quad \prod_{j=1}^p \left(> \cdots \xrightarrow{\quad} \text{hexagon } \mathcal{G}_j'' \xrightarrow{\quad} \cdots \right) \\
 \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 \prod_{l=1}^v \left(> \cdots \xrightarrow{\quad} \text{hexagon } \mathcal{G}_l''' \xrightarrow{\quad} \cdots \right)
 \end{array} \tag{8.24}$$

Dieses Bild ist so zu verstehen, daß das Produkt über i an die waagerechte einlaufende bosonische Linie des Graphen \mathcal{G} anzuhängen ist und das Produkt über l an die senkrechte einlaufende Linie. Ein Austausch dieser Produkte ist nicht gemeint. Analoges gilt für die anderen beiden Produkte.

Aus dem irreduziblen Teilgraphen \mathcal{G} ergibt sich durch die Summationen der Term $\overset{\circ}{\chi}_4^\phi$ analog zu den anderen Suszeptibilitäten. Das einzige Problem dabei, das hier noch betrachtet werden soll, ist die Austauschsymmetrie von I-Boxen. Ansonsten wird alles analog zu den vorstehenden Fällen gehandhabt.

Diese Austauschsymmetrie trat in den zuvor besprochenen Suszeptibilitäten nicht auf, da durch die Orientierung oder die Art der Verbindungslien zwischen den I-Boxen diese Symmetrie gebrochen wurde. Bei der hier zu betrachtenden Suszeptibilität kann der Gesamtgraph eine derartige Symmetrie besitzen, daß er, wenn er in der obigen Form (8.24) dargestellt wird, symmetrisch bezüglich des Austauschs des Produkte über i und l ist.

Dazu müssen beide Produkte identisch sein. Einer derartigen Symmetrie des Gesamtgraphen wird ein Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ zugeordnet. Sie setzt eine entsprechende Symmetrie in dem irreduziblen Teilgraphen \mathcal{G} mit den 4 bosonischen Linien voraus. Dem Gesamtgraphen ist in diesem Fall der gleiche Symmetriefaktor bezüglich χ_4^ϕ zugeordnet wie dem irreduziblen Teilgraphen \mathcal{G} . In dem Fall, daß der Gesamtgraph die Symmetrie besitzt, ergibt sich somit aus dem Symmetriefaktor von $\overset{\circ}{\chi}_4^\phi$ der richtige Symmetriefaktor für den Gesamtgraphen. Die Produkte können in der bekannten Art zu geometrischen Reihen zusammengefaßt werden.

Es tritt aber auch der Fall auf, daß die Produkte über i und l verschieden sind und so die oben angenommene Symmetrie des irreduziblen Teilgraphen \mathcal{G} brechen. In diesem Fall liefert $\overset{\circ}{\chi}_4^{\phi}$ aber immer noch den oben erwähnten Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$. Durch die Sum-

mationen über v und q sowie die in den Produkten vorkommenden irreduziblen Graphen \mathcal{G}'_i bzw. \mathcal{G}'''_l treten alle derartigen Gesamtgraphen zweimal auf. Graphen, die sich nur durch ein Vertauschen der Produkte an den äußeren einlaufenden Linien des irreduziblen Teilgraphen \mathcal{G} unterscheiden, sind in diesem Fall topologisch äquivalent. Der sich daraus ergebende Faktor 2 kompensiert den Symmetriefaktor von $\overset{\circ}{\chi}_4^\phi$.

Besitzt \mathcal{G} keine Symmetrie, so sind die Gesamtgraphen, die sich durch ein Vertauschen der Produkte an den äußeren einlaufenden Linien voneinander unterscheiden, nicht mehr topologisch äquivalent, und es entsteht somit kein unerwünschter Faktor 2.

Als weitere Symmetrien gibt es die Austauschsymmetrie der auslaufenden Linien, das Produkt dieser Symmetrien und die Symmetrie, bei der gleichzeitig die ein- und die auslaufenden Linien getauscht werden. Eine analoge Diskussion führt für diese Symmetrien zu dem gleichen Ziel. Es ergibt sich somit keine Komplikation mit dem Symmetriefaktor, wenn die Suszeptibilität χ_4^ϕ durch ihren irreduziblen Kern $\overset{\circ}{\chi}_4^\phi$ verbunden mit 4 geometrischen Reihen entwickelt wird.

Kapitel 9

Ergebnisse

Mit der in den Kapiteln 7 und 8 vorgestellten Methode wurden die irreduziblen Kerne der Suszeptibilitäten $\chi_2^\Psi(P)$, $\mu_2^\Psi(P)$, χ_2^ϕ und μ_2^ϕ , die zur Bestimmung der renormierten Massen m_R und $\mu_R(P)$ benötigt werden, bis zur 4. Ordnung in \mathcal{T} entwickelt. Die irreduziblen Kerne der Suszeptibilitäten $\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}$ und χ_4^ϕ wurden bis zur 3. Ordnung in \mathcal{T} entwickelt. Die Graphen, die für diese Entwicklung ausgewertet wurden, können im Anhang D nachgeschlagen werden.

Die sich hieraus ergebenden Taylorreihen der irreduziblen Kerne der Suszeptibilitäten sind im Anhang E aufgeführt. Die Auswertung dieser Reihen im Rahmen numerischer Untersuchungen wird im folgenden Abschnitt 9.1 erläutert.

9.1 Auswertung der irreduziblen Kerne

Wenn zum Zwecke des Vergleichs mit numerischen Daten, die in anderen Verfahren bestimmt worden sind, aus der Hopping-Parameter-Entwicklung ebenfalls numerische Werte für die renormierten Größen gewonnen werden sollen, so kann man auf zweierlei Weise verfahren, wobei in dieser Arbeit die zweite Methode angewandt wird.

Eine Möglichkeit besteht darin, die Entwicklungen der irreduziblen Kerne bis zur n -ten Ordnung in die Formeln (8.3) - (8.8) und (3.28) einzusetzen und daraus die Entwicklungen der renormierten Größen in κ und K bis zur n -ten Ordnung zu bestimmen. Dazu sind Taylorreihen gebrochen rationaler Funktionen zu ermitteln.

Auf der anderen Seite kann man die irreduziblen Kerne mittels ihrer Entwicklungen numerisch berechnen, dann die resultierenden Werte in die Formeln (8.3) - (8.8), (3.28) einsetzen und so numerische Resultate für die physikalischen Größen erhalten. Dies kommt einer partiellen Resummation der Entwicklungen der physikalischen Größen gleich. Dadurch werden alle Graphen, die sich durch Verknüpfen der im Anhang D verzeichneten irreduziblen Graphen erhalten lassen, schon berücksichtigt. Diese Vorgehensweise ist bequemer, und es ist zu erwarten, daß sich so bessere Resultate für die renormierten Größen ergeben als mit der vorstehenden Methode. Dies wird im weiteren erörtert.

Bei den Suszeptibilitäten χ_2^ϕ , μ_2^ϕ und χ_4^ϕ besteht nun die Hoffnung, daß die auf diese Weise erhaltenen Koeffizienten höherer als der berechneten Ordnung in κ eine brauchbare Näherung für die Koeffizienten sind, die sich tatsächlich ergeben, wenn die Reihe bis dahin fortgeführt wird. Als Argument für ein derartiges Verhalten ist die Beobachtung zu nennen, daß 1-Linien-reduzible Graphen mehr Einbettungen besitzen als irreduzible Graphen

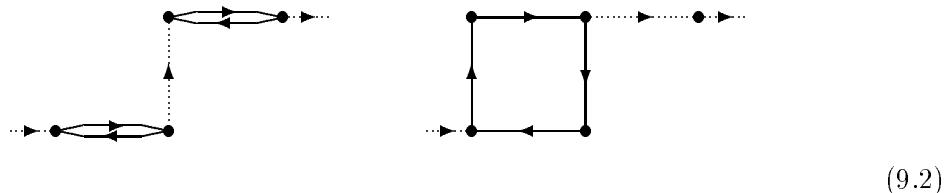
gleicher Ordnung in κ . Betrachte dazu die beiden folgenden Graphen 3. Ordnung in κ :



Der linke Graph liefert pro Einbettung einen Beitrag von κ^3 zu χ_2^ϕ und besitzt im kubisch primitiven Gitter 512 Einbettungen, wenn der Vertex mit der einlaufenden äußeren Linie fest auf 0 abgebildet wird. Der rechte Graph liefert pro Einbettung eine Beitrag von $\frac{1}{2}\kappa^3$ und besitzt lediglich 8 Einbettungen. Der Beitrag dieses Graphen zu χ_2^ϕ ist somit weniger als 1% des Beitrags des linken Graphen. Bezüglich der Suszeptibilität μ_2^ϕ ist das Verhältnis noch extremer, da dort manche Einbettungen des linken Graphen einen Beitrag von $9\kappa^3$ liefern und keine Einbettung weniger als κ^3 zu μ_2^ϕ beiträgt.

Die entscheidende Frage besteht an dieser Stelle nun darin, ob nicht bei großen Ordnungen von κ die irreduziblen Graphen einen erheblich größeren Beitrag pro Einbettung liefern als die reduziblen, so daß sich die geringere Anzahl der Einbettungen ausgleicht. Ist dies nicht der Fall, so sollte es Vorteile bringen, die Reihe nicht abzuschneiden.

Bezüglich der Variablen K ist eine Verbesserung der Ergebnisse der bosonischen Suszeptibilitäten nicht zu erwarten, da eine große fermionische Blase mehr Einbettungen besitzt als eine entsprechende Anzahl kleiner. Dies wird schon in dem nachstehenden Beispiel mit 4 fermionischen Linien deutlich.



Der linke Graph besitzt 512 Einbettungen und der rechte 832 beitragende Einbettungen¹. Die Beiträge der Graphen sind nicht so einfach zu vergleichen wie in dem vorstehenden Beispiel.

Mit den gleichen Argumenten läßt sich bei den Suszeptibilitäten χ_2^Ψ und μ_2^Ψ eine Verbesserung der Ergebnisse bezüglich der Variablen K erwarten, wohingegen in diesem Fall bezüglich des Hopping-Parameters κ mit keiner Verbesserung gerechnet werden kann.

Bei der Bestimmung der renormierten Kopplungen werden alle irreduziblen Kerne, auch die, bei denen eine 4. Ordnung bestimmt worden ist, in der 3. Ordnung betrachtet.

Im folgenden werden zwei in der Literatur diskutierte Situationen für die nackten Yukawakopplungen bei $n_F = 2$ betrachtet. Durch den Vergleich mit den dortigen Ergebnissen können Aussagen über die Vertrauenswürdigkeit der Ergebnisse der Hopping-Parameter-Entwicklung gewonnen werden.

9.2 Untersuchungen bei $G_\chi < 0$ und $G_\psi = 0.1$

9.2.1 Phasengrenzen

In [9] werden die Phasengrenzen dieses Modells numerisch untersucht. Für die Hopping-Parameter-Entwicklung sind die Phasengrenzen von größtem Interesse, da die Methode

¹512 Einbettungen dieses Graphen liefern entsprechend Abschnitt 7.3.3.1 keinen Beitrag.

nur in der symmetrischen Phase gültige Ergebnisse liefert. Diese Phase wird häufig „paramagnetisch“ genannt.

Aus den Untersuchungen in [9] sind drei Phasen bekannt, in denen die Symmetrie spontan gebrochen wird. Bei geeigneter Wahl der Parameter, vor allem im Bereich positiver κ -Werte, befindet man sich in einer Phase, in der das ϕ_x -Feld einen nichtverschwindenden Vakuum-Erwartungswert besitzt und die in Analogie zu einem Spinsystem als die „ferromagnetische“ bezeichnet wird. Die Grenzlinie zwischen der symmetrischen und der ferromagnetischen Phase bildet den Hauptgegenstand der Untersuchungen dieses Abschnitts.

Im Bereich negativer κ -Werte bildet sich die „antiferromagnetische“ Phase aus. Des Weiteren entsteht bei geeigneter Wahl der nackten Yukawa-Kopplungen eine „ferrimagnetische“ Phase, in der sowohl das ferromagnetische als auch das antiferromagnetische Feld einen nichtverschwindenden Vakuum-Erwartungswert besitzen.

Die Grenzlinie zwischen der symmetrischen und der ferromagnetischen Phase kann aus dem Verschwinden der physikalischen Masse des bosonischen Feldes bestimmt werden. Zur Ermittlung der Grenzlinie zur antiferromagnetischen Phase muß der Propagator eines antiferromagnetischen bosonischen Feldes betrachtet werden. Die Grenzlinie ergibt sich dann aus dem Verschwinden der Masse des antiferromagnetischen Feldes. Diese Untersuchung kann ebenfalls mit den Graphen des Abschnitts D.2 durchgeführt werden. Dazu sind dann Suszeptibilitäten für das antiferromagnetische Feld zu definieren, was kein prinzipielles Problem darstellen sollte. In dieser Arbeit wird nur die Grenzlinie zwischen der paramagnetischen und der ferromagnetischen Phase betrachtet.

Da für die Simulationen in [9] Gitter der Größe $4^3 \times 8$ und $4^3 \times 16$ verwendet wurden, wurde dort, um starke Einflüsse der endlichen Gittergröße zu vermeiden, die Linie in der $K \times \kappa$ -Ebene untersucht, auf der die bosonische Masse den Wert 1 annimmt. Im weiteren wird mit $\kappa_1(K)$ der κ -Wert bezeichnet, für den bei vorgegebenem K die renormierte bosonische Masse m_R den Wert 1 annimmt, in der Erwartung, daß die Phasengrenze parallel zu dieser Linie verläuft.

Diese Untersuchung soll ebenfalls mit den Ergebnissen der Hopping-Parameter-Entwicklung durchgeführt werden.

Um einen Anhaltspunkt für den Einfluß des Abbrechens der Reihenentwicklung nach der 4. Ordnung in \mathcal{T} zu erhalten, wird $\kappa_1(K)$ aus der Entwicklung der irreduziblen Kerne bis zur dritten und bis zur vierten Ordnung bestimmt. Die Untersuchung wird für zwei verschiedene Werte von G_χ durchgeführt, die Resultate sind in den Abbildungen 9.1 und 9.2 eingetragen. In diesen Abbildungen sind ebenfalls die Punkte aus [9] verzeichnet, die in den gewählten Parameterbereich für K und κ fallen. Die zugehörigen Daten wurden freundlicherweise für diese Untersuchung zur Verfügung gestellt [15]. Dabei ist zu beachten, daß die renormierte bosonische Masse m_R den Wert 1 dort nicht exakt annimmt. In den Tabellen 9.1 und 9.2 werden sie mit den bosonischen Massen aus der Hopping-Parameter-Entwicklung verglichen.

9.2.1.1 Ergebnisse für $G_\chi = -0.3$ und $G_\psi = 0.1$

Wie in [9] beschrieben wird, nehmen bei $G_\chi = -0.3$ und $G_\psi = 0.1$ die Werte für κ_1 zunächst mit ansteigendem K ab, um in der Nähe von $K = 0.2$ ihr Minimum anzunehmen. Für größere K -Werte steigt κ_1 dann wieder leicht an. In Abbildung 9.1 gehört der Datenpunkt bei $K = 0.2$ schon zu diesem Wiederanstieg. Somit ist die gute Übereinstimmung dieses Datenpunktes mit der Linie, die sich aus den irreduziblen Kernen 4. Ordnung ergibt, zufällig und sollte in den folgenden Ordnungen wieder verschwinden.

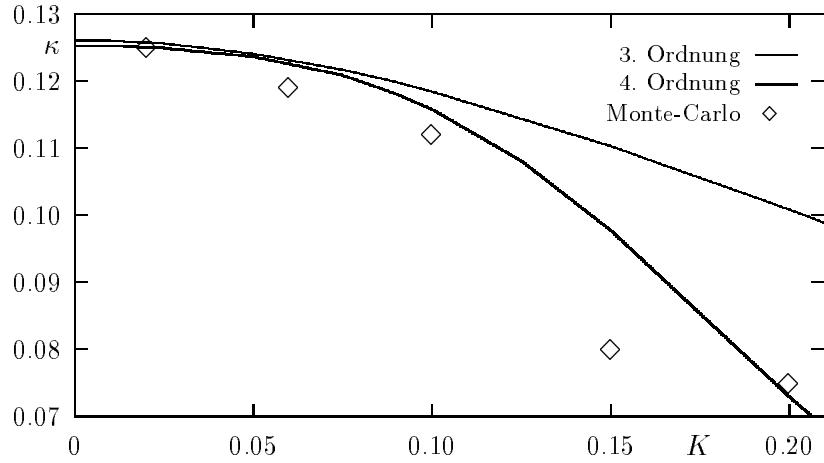


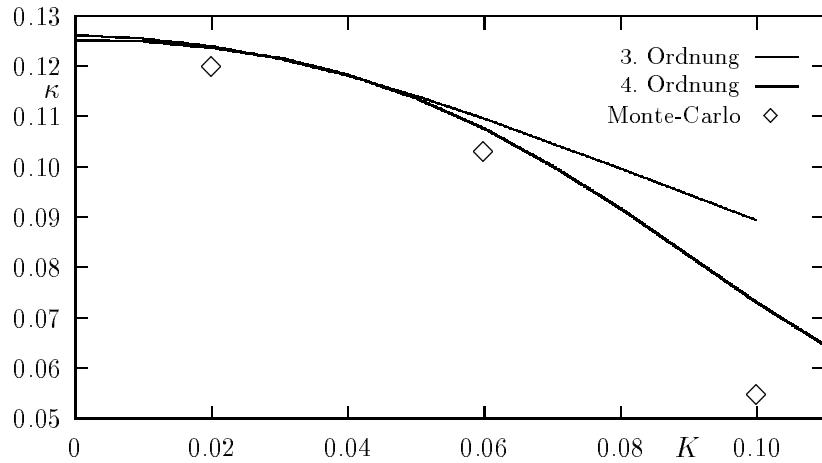
Abbildung 9.1: Linien, für die die bosonische Masse den Wert 1 annimmt, berechnet aus den irreduziblen Kernen der Suszeptibilitäten in 3. bzw. 4. Ordnung in \mathcal{T} , im Vergleich mit den Daten der Monte-Carlo-Simulation in [9] nach [15] bei $n_F = 2$, $G_\psi = 0.1$ und $G_\chi = -0.3$. Die obere dünne Linie steht für die Ergebnisse 3. Ordnung in \mathcal{T} , die untere dicke Linie für die 4. Ordnung.

Die Hopping-Parameter-Entwicklung liefert keine Anhaltspunkte für den Wiederanstieg von κ_1 für $K > 0.2$. Es erscheint möglich, daß sich dieser Wiederanstieg erst durch eine Entwicklung in $\frac{1}{K}$ ergibt. Wenn dies zutrifft, läßt die Hopping-Parameter-Entwicklung für $K > 0.15$ in beliebiger Ordnung in \mathcal{T} keine gültigen Ergebnisse mehr erwarten. Beantworten läßt sich diese Frage auf der Basis der 4. Ordnung der Entwicklung nicht, dafür weicht diese Ordnung zu früh von den numerischen Daten ab.

Die Abbildung zeigt, daß die 3. und die 4. Ordnung in der Entwicklung sich für $K > 0.075$ deutlich unterscheiden. Aus der Tabelle 9.1 ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Daten aus der Simulation mit der Hopping-Parameter-Entwicklung für $K < 0.075$. Für $0.075 < K < 0.15$ stellt die 4. Ordnung eine deutliche Verbesserung

$n_F = 2$		$G_\psi = 0.1$	$G_\chi = -0.3$	
K	κ	renormierte bosonische Masse m_R		
		Monte-Carlo	3. Ordnung	4. Ordnung
0.02	0.125	0.9702(197)	1.017	1.000
0.06	0.119	1.1080(147)	1.109	1.099
0.10	0.112	1.0400(068)	1.174	1.104
0.15	0.080	0.9805(198)	1.856	1.503

Tabelle 9.1: Vergleich der Daten zu [9] nach [15] mit der HPE

Abbildung 9.2: Analog zu Abbildung 9.1 für $n_F = 2$, $G_\psi = 0.1$ und $G_\chi = -1$.

gegenüber der 3. Ordnung dar, die Übereinstimmung mit den Daten der Monte-Carlo-Simulation ist in diesem Bereich aber noch nicht befriedigend. Bei $K = 0.1$ ist das Ergebnis der Hopping-Parameter-Entwicklung gerade außerhalb des durch den statistischen Fehler der Monte-Carlo-Simulation vorgegebenen Bereichs, der Wert bei $K = 0.15$ ist viel zu groß und von daher gänzlich unbefriedigend.

Die 4. Ordnung in \mathcal{T} der irreduziblen Kerne der Suszeptibilitäten χ_2^ϕ und μ_2^ϕ lässt somit im Bereich $K < 0.09$ gute Ergebnisse erwarten.

9.2.1.2 Ergebnisse für $G_\chi = -1$ und $G_\psi = 0.1$

Bei $G_\chi = -1$ und $G_\psi = 0.1$ ändert sich die Phasenstruktur des Modells erheblich, wie in [9] beschrieben wird. Die paramagnetische Phase bildet in der $K \times \kappa$ -Ebene zwei Zusammenhangskomponenten aus, die durch eine ferrimagnetische Phase getrennt werden. Bei $K \approx 0.2$ verschwindet der mit der vorgestellten Hopping-Parameter-Entwicklung erfaßbare paramagnetische Bereich.

$n_F = 2$		$G_\psi = 0.1$	$G_\chi = -1$	
K	κ	renormierte bosonische Masse m_R		
		Monte-Carlo	3. Ordnung	4. Ordnung
0.02	0.120	1.1319(647)	1.102	1.099
0.06	0.103	1.1183(380)	1.185	1.125
0.10	0.055	1.1014(304)	2.098	1.587

Tabelle 9.2: Vergleich der Daten zu [9] nach [15] mit der HPE

Für $K > 0.05$ zeigt die Abbildung 9.2 bei den hier gewählten Parametern deutliche Abweichungen zwischen der 3. und der 4. Ordnung. Aus der Tabelle 9.2 ergibt sich, daß der Datenpunkt bei $K = 0.06$ in der 4. Ordnung aber noch gut wiedergegeben wird, die 3. Ordnung allerdings keine befriedigenden Ergebnisse mehr liefert. Bei $K = 0.10$ liefern beide Reihen unbefriedigende Ergebnisse.

Die 4. Ordnung liefert also auch in diesem Fall gute Resultate, wenn der K -Wert, für den sich eine Aufspaltung zwischen den Ergebnissen 3. und 4. Ordnung ergibt, nicht zu stark überschritten wird. In diesem Fall liegt die Grenze bei $K \approx 0.065$.

9.2.1.3 Auswirkungen der Umordnung der Graphenreihenfolge

Bei beiden hier diskutierten Kopplungsstärken zeigt sich, daß sowohl in der 3. als auch in der 4. Ordnung in \mathcal{T} bis in die Nähe des Randes der symmetrischen Phase sehr gute Ergebnisse erwartet werden können. Vor allem die Ergebnisse 3. Ordnung sind als ein Indiz dafür zu werten, daß die Umordnung der Graphenreihenfolge, wie sie in Abschnitt 9.1 beschrieben wird, in der erhofften Weise wirkt. Eine renormierte bosonische Masse der Größenordnung 1 entspricht einer Korrelationslänge ξ_b für das bosonische Feld ϕ_x von $\xi_b \approx 1$ in Gittereinheiten.

Werden nur die Graphen 3. Ordnung in \mathcal{T} für die Suszeptibilitäten berücksichtigt, so vermittelt nur der linke Graph in (9.1) eine Wechselwirkung über 3 Gitterlängen, die „Reichweite“ der verbleibenden Graphen 3. Ordnung ist deutlich kürzer. Als Folge sind in diesem Fall nur dann gute Ergebnisse zu erwarten, wenn für die Korrelationslänge $\xi_b \ll 1$, das bedeutet $m_R \gg 1$, gilt. Die Tatsache, daß sich aus den irreduziblen Kernen der Suszeptibilitäten in 3. Ordnung schon gute Ergebnisse für $m_R = 1$ erhalten lassen, zeigt, daß die durch die beschriebene Resummation berücksichtigten Graphen höherer Ordnung eine brauchbare Näherung für die „langreichweiten“ Wechselwirkungen darstellen.

Zumindest in den sich direkt anschließenden Ordnungen (4te, 5te, ...) ist somit der Beitrag der reduziblen Graphen, die sich aus den irreduziblen Graphen kleinerer Ordnung in \mathcal{T} zusammensetzen, eine vernünftige Approximation für den Beitrag aller Graphen zu der jeweiligen Ordnung.

9.2.2 Fermionische renormierte Masse

In Abschnitt 3.1.1 wurde das Fermionen-Verdopplungsproblem in der freien Theorie diskutiert. Mit n_π wird in diesem Abschnitt die Anzahl der Komponenten des Impulses, die den Wert $p_\mu = \pi$ annehmen, bezeichnet. Es gilt $n_\pi \in \{0, \dots, 4\}$. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, zu untersuchen, inwieweit sich aus der Hopping-Parameter-Entwicklung bis zur 4. Ordnung Anhaltspunkte dafür ergeben, daß auch in der wechselwirkenden Theorie die Massenentartung der Doppler durch den Wilson-Term aufgehoben wird. Dazu wurde bei $G_x = -1$, $G_\psi = 0.1$ und $n_F = 2$ die fermionische renormierte Masse μ_R bei den verschiedenen Werten für n_π über K aufgetragen. Dieses wurde für κ -Werte zwischen -0.125 und 0.125 wiederholt. Größere Werte sind für κ wenig sinnvoll, da dort ($\kappa \approx 0.15$) die ferromagnetische Phase beginnt. Es zeigt sich eine geringe Abhängigkeit der Kurven von κ , so daß es nicht sinnvoll erscheint, hier alle Kurven wiedergugeben. In Abbildung 9.3 wird die Kurvenschar für $\kappa = -0.05$ abgedruckt. Um die Abhängigkeit von κ zu dokumentieren, werden in Tabelle 9.3 Werte für μ_R für nicht zu große Werte von κ bei $K = 0.07$ angegeben.

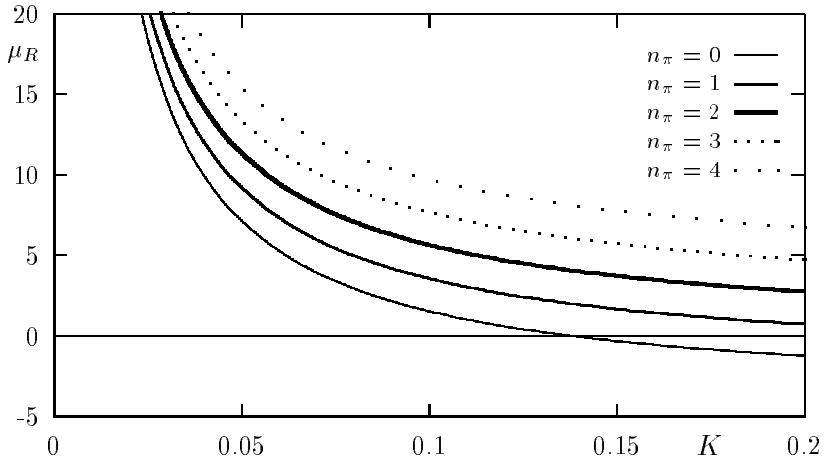


Abbildung 9.3: Fermionische renormierte Masse $\mu_R(K)$ für verschiedene Werte von n_π . Die Kurven sind aus den Ergebnissen 4. Ordnung in T bei $\kappa = -0.05$, $G_\chi = -1$, $G_\psi = 0.1$ und $n_F = 2$ berechnet.

μ_R bei $G_\chi = -1$, $G_\psi = 0.1$, $n_F = 2$ und $K = 0.07$					
	$n_\pi = 0$	$n_\pi = 1$	$n_\pi = 2$	$n_\pi = 3$	$n_\pi = 4$
$\kappa = -0.05$	3.90	5.94	7.99	10.04	12.10
$\kappa = 0.00$	3.83	5.80	7.78	9.76	11.73
$\kappa = 0.05$	3.74	5.66	7.58	9.51	11.44

Tabelle 9.3: Fermionische renormierte Masse μ_R für verschiedene Werte von κ und in verschiedenen Ecken der Brillouin-Zone

Für K wurde dieser relativ kleine Wert gewählt, damit die Einflüsse des Reihenabbruchs nicht zu groß werden. Die Masse μ_R nimmt in diesem Parameterbereich recht große und damit leider wenig interessante Werte an. In Abschnitt 9.2.1 wurde für die Entwicklung der bosonischen Suszeptibilitäten angegeben, daß $K < 0.065$ gewählt werden sollte. Im Vertrauen auf das in Abschnitt 9.1 beschriebene Vorgehen wird dieser Bereich hier geringfügig überschritten. Dementsprechend ist hier nicht unbedingt mit guten Ergebnissen für große κ -Werte zu rechnen.

Zur Abschätzung der Vertrauenswürdigkeit der Daten kann angegeben werden, daß bei $n_\pi = 0$ für $\kappa = 0.05$ die größte Differenz zwischen den Daten 3. und 4. Ordnung festgestellt wurde. ($\Delta\mu_R = 0.015$) Diese Differenzen sind für die anderen κ -Werte bei $n_\pi = 0$ kleiner. Bei den anderen Werten für n_π wurde für $\kappa = 0.05$ geprüft und die Differenzen blieben bis $n_\pi = 2$ gleich und nehmen dann ab, so daß auf weitere Prüfungen verzichtet worden ist.

Abbildung 9.3 zeigt deutlich, daß bei dieser Wahl der Parameter die „Doppler“ in den Ecken der Brillouin-Zone schwerer sind als das Fermion-Spiegelfermion-Paar bei $P = 0$.

in der Mitte der Brillouin-Zone. Im Kontinuumslimes erhält nur dieses Paar eine Masse im physikalischen Spektrum. Die „Doppler“ sind somit aus dem Spektrum entfernt, wie durch die Einführung des Wilson-Terms beabsichtigt.

Für $G_\chi = -0.3$ und $G_\psi = 0.1$ ergibt sich qualitativ das gleiche Bild, so daß hier auf eine erneute Diskussion verzichtet wird. Die renormierten Massen der Fermionen sind bei dieser Wahl von G_χ und G_ψ etwas kleiner.

9.3 Untersuchungen im Fall $G_\chi = 0$

In dem Fall, daß die nackte Yukawa-Kopplung G_χ auf $G_\chi = 0$ gesetzt wird, wird sich zeigen, daß sich in allen Ordnungen der Hopping-Parameter-Entwicklung die folgenden Resultate ergeben:

$$Z_\chi(P) = \frac{1}{2K} \quad (9.3)$$

$$G_{R\chi} = 0 \quad (9.4)$$

Diese Aussagen wurden in [14] für ein $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -symmetrisches Yukawa-Modell aus den Golterman-Petcher-Identitäten abgeleitet. Aus einer Shift-Symmetrie des Spiegelfeldes χ_x ergibt sich bei $G_\chi = 0$ eine spezielle Form der Ward-Identitäten, die auch in [12] angegeben werden. Durch Differentiation bezüglich der Quellen lassen sich daraus die oben beschriebenen Resultate erhalten. Diese speziellen Ward-Identitäten gelten auch für den Fall der hier betrachteten $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -Symmetrie. Die hier beschriebenen Resultate (9.3) und (9.4) stellen somit nichts neues dar, es wird nur ein neuer Beweis im Rahmen der Reihenentwicklung dafür geliefert, der die Shift-Symmetrie nicht benutzt. Außer den Eigenschaften der Hopping-Parameter-Entwicklung wird letztlich nur die chirale $U(1)_L \otimes U(1)_R$ -Symmetrie des Modells entsprechend den Gleichungen (2.10) und (2.24) verwendet.

9.3.1 Wellenfunktionsrenormierung des Spiegelfeldes χ

Der Beweis von (9.3) wird in mehreren Schritten ausgeführt.

9.3.1.1 Zu zeigen: $\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi = 1$

Zunächst soll gezeigt werden, daß in dem betrachteten Fall nur der Graph 1 der Tabelle im Anhang D.1 einen Beitrag zum irreduziblen Kern der Suszeptibilität $\chi_2^\Psi(P)$ liefert. Die Beiträge der restlichen Graphen sind proportional zu $G_\chi \cdot G_\psi$, sofern sie nicht gleich null sind.

Aus Anhang A ergibt sich unter Verwendung der Transformation in Abschnitt 2.3, daß der Beitrag eines beliebigen Graphen zu $\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi$ in der AB -Basis proportional zu einer 2×2 -Matrix ist, die auf der Diagonalen den Einheitsoperator $\mathbf{1}_S$ enthält.

Entsprechend Abschnitt 7.3.3.2 besteht der Beitrag dieses Graphen, sofern der mindestens eine inneren Linie enthält, aus einer Summe von Teilbeiträgen, die immer ein Matrizenprodukt der folgenden Form (9.5) enthalten. Um die vorstehend beschriebene Blockstruktur zu erhalten, muß die Anzahl der Matrizen A_σ mit $\sigma \in \{\pm\}$ gerade sein.

$$A_+ \left\{ \prod_i (M_{\hat{\mu}_i}) \prod_j \left[A_- \prod_{k_j} (M_{\hat{\mu}_{k_j}}) A_+ \prod_{l_j} (M_{\hat{\mu}_{l_j}}) \right] \right\} A_-$$

oder

$$A_- \left\{ \prod_i (M_{\hat{\mu}_i}) \prod_j \left[A_+ \prod_{k_j} (M_{\hat{\mu}_{k_j}}) A_- \prod_{l_j} (M_{\hat{\mu}_{l_j}}) \right] \right\} A_+ \quad (9.5)$$

Die Beiträge der oberen Form tragen zum 4×4 -Spinraumoperator der linken oberen Ecke, die der unteren Form zur rechten unteren Ecke von $\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi$ bei. Im weiteren wird nur auf die untere Form eingegangen, da sich im Fall der oberen Form keine wesentlichen Unterschiede ergeben.

Die Matrix in der geschweiften Klammer in (9.5) enthält aufgrund der enthaltenen A_+ und A_- -Matrizen nur in dem linken oberen 4×4 -Block von Null verschiedene Einträge. Beiträge, die proportional zu einer γ_μ -Matrix sind, sind bezüglich $\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi$ irrelevant, da sie in der Summation über die Einbettungen herausfallen. Es gilt somit:

$$\left\{ \prod_i (M_{\hat{\mu}_i}) \prod_j \left[A_+ \prod_{k_j} (M_{\hat{\mu}_{k_j}}) A_- \prod_{l_j} (M_{\hat{\mu}_{l_j}}) \right] \right\} = \begin{pmatrix} f \cdot P_L + g \cdot P_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

Dabei bezeichnen f und g geeignet zu wählende Faktoren, in denen die nackten Kopplungen nur im Zähler multiplikativ auftreten können. Im Nenner dieser Faktoren treten die nackten Kopplungen immer in der Form $(1 - G_\chi G_\psi)$ auf. Somit sind f und g im betrachteten Fall $G_\chi = 0$ endlich. Mit den Symmetrieverlegungen des Anhangs A lässt sich noch $f = g$ zeigen, aber dies ist für diesen Beweis nicht relevant.

Werden nun die Matrizen A_+ und A_- entsprechend Gleichung (5.18) eingesetzt, so ist der untere Ausdruck in (9.5) proportional zu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_\chi G_\psi (fP_L + gP_R) \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

Für den obere Ausdruck in (9.5) lässt sich eine entsprechende Darstellung in der linken oberen Ecke der Matrix beweisen.

Als Ergebnis ist festzuhalten, daß in dem Fall $G_\chi = 0$ nur der Graph 1 des Anhangs D.1 zu $\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi (P)$ beiträgt. Damit ergibt sich:

$$\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi (P) = 1, \quad \text{wenn } G_\chi = 0 \quad (9.8)$$

9.3.1.2 Zu zeigen: $\overset{\circ}{\mu}_2^\psi (P) = 0$

Nach dem vorstehenden Beweis ist die Durchführung dieses Beweises verhältnismäßig einfach, da im wesentlichen die gleichen Argumente benutzt werden. Die Unterschiede entstehen aus der γ_μ -Matrix in der Definition der Suszeptibilität μ_2^Ψ .

Aus Anhang A ergibt sich für einen Beitrag zu $\overset{\circ}{\mu}_2^\Psi$ in der AB -Basis die folgende Matrixstruktur:

$$\begin{pmatrix} wP_L + vP_R & 0 \\ 0 & vP_L + wP_R \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

Dabei sind w und v skalare Funktionen der Kopplungen. Der erste Graph aus Anhang D.1 liefert keinen Beitrag zu μ_2^Ψ . Analog zu (9.5) enthält hier jeder Teilbeitrag eines Graphen ein Matrizenprodukt der folgenden Form.

$$\gamma_\mu A_+ \left\{ \prod_i (M_{\hat{\mu}_i}) \prod_j \left[A_- \prod_{k_j} (M_{\hat{\mu}_{k_j}}) A_+ \prod_{l_j} (M_{\hat{\mu}_{l_j}}) \right] \right\} A_-$$

oder

$$\gamma_\mu A_- \left\{ \prod_i (M_{\hat{\mu}_i}) \prod_j \left[A_+ \prod_{k_j} (M_{\hat{\mu}_{k_j}}) A_- \prod_{l_j} (M_{\hat{\mu}_{l_j}}) \right] \right\} A_+ \quad (9.10)$$

Auch hier wird wieder nur der untere Ausdruck diskutiert. Wird die γ -Matrix mit dem ersten A_- vertauscht, so gilt:

$$\gamma_\mu \frac{-2}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (P_L G_\psi + P_R G_\chi) & 0 \end{pmatrix} = \frac{-2}{\bar{\mu}^2 - G_\chi G_\psi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (P_R G_\psi + P_L G_\chi) & 0 \end{pmatrix} \gamma_\mu \quad (9.11)$$

Dabei wurde A_- entsprechend der Gleichung (5.18) eingesetzt. Damit die Formen der Matrizen in (9.10) mit (9.9) verträglich sind, muß nun das Folgende gelten:

$$\gamma_\mu \left\{ \prod_i (M_{\hat{\mu}_i}) \prod_j \left[A_+ \prod_{k_j} (M_{\hat{\mu}_{k_j}}) A_- \prod_{l_j} (M_{\hat{\mu}_{l_j}}) \right] \right\} = \begin{pmatrix} (f' \cdot P_L + g' \cdot P_R) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

Wobei f' und g' geeignete Faktoren sind. Für den unteren Ausdruck in (9.10) ergibt sich damit eine Proportionalität zu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & f' P_L G_\chi^2 + g' P_R G_\psi^2 \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

Analog ergibt sich für den oberen Ausdruck von (9.10) eine Proportionalität zu:

$$\begin{pmatrix} f' P_R G_\chi^2 + g' P_L G_\psi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

Wird dies entsprechend Gleichung (C.7) in die $\psi\chi$ -Basis transformiert, so ist direkt abzulesen, daß alle Beiträge zu $\overset{\circ}{\mu}_2^\psi(P)$ den Term G_χ^2 enthalten.

9.3.1.3 Folgerung $Z_\chi = \frac{1}{2K}$ für $G_\chi = 0$

Aus diesen beiden Ergebnissen ergibt sich mit den Gleichungen (8.6) und (8.7) für die Suszeptibilitäten der folgende Ausdruck.

$$\begin{aligned} \chi_2^\Psi &= \frac{1}{1 - (8 - 4n_\pi) K} \\ \mu_2^\psi(P) &= \frac{8K}{[(1 - (8 - 4n_\pi) K]^2} \end{aligned} \quad (9.15)$$

Daraus folgt mit Gleichung (3.28) das gewünschte Resultat:

$$Z_\chi = \frac{1}{2K} \quad (9.16)$$

9.3.2 Renormierte Yukawa-Kopplung $G_{R\chi}$

Zum Beweis, daß in der symmetrischen Phase für die renormierte Kopplung $G_{R\chi} = 0$ gilt, falls $G_\chi = 0$, reicht es aus, den irreduziblen Kern der Suszeptibilität $\chi_3^{\Psi\phi\Psi}$ zu betrachten. Dieser irreduzible Kern wird aus Erwartungswerten der Form $\langle \Psi\phi\bar{\Psi} \rangle^c$ gewonnen.

Zur Bestimmung der Matrixform dieses Erwartungswerts sind zunächst einige Symmetriebetrachtungen notwendig.

Aus Gründen der chiralen Symmetrie können hier nur die folgenden Erwartungswerte beitragen.

$$\langle \psi_R \phi \bar{\psi}_L \rangle^c, \quad \langle \chi_L \phi \bar{\chi}_R \rangle^c, \quad \langle \psi_R \phi \bar{\chi}_R \rangle^c, \quad \langle \chi_L \phi \bar{\psi}_L \rangle^c \quad (9.17)$$

Die beiden letzten Erwartungswerte liefern Beiträge, die proportional zu γ_μ und $\gamma_\mu \gamma_5$ sind. Derartige Beiträge heben sich aber durch die Summation über alle Einbettungen der zugeordneten Graphen heraus.

Es verbleiben somit nur Beiträge, die aus Erwartungswerten der ersten beiden Arten aufgebaut sind, und davon wiederum nur die Anteile, die proportional zu $\mathbf{1}_S$ und γ_5 sind. Die Beiträge proportional zu den Matrizen $(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ fallen bei der Summation über die Einbettungen heraus. Damit ergibt sich insgesamt für den irreduziblen Kern von $\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}$ in der AB -Basis die folgende Matrixform:

$$\overset{\circ}{\tilde{\chi}}_3^{\Psi\phi\Psi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v'' P_L + w'' P_R & 0 \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

Dies bedeutet, daß in diesem Fall alle Teilbeiträge Matrizenprodukte der folgenden Form enthalten

$$A_- \prod_j \left[\prod_{k_j} (M_{\hat{\mu}_{k_j}}) A_+ \prod_{l_j} (M_{\hat{\mu}_{l_j}}) A_- \right] \quad (9.19)$$

Die weitere Argumentation verläuft nun in der nun schon bekannten Weise. Aus der Anordnung der A_+ und A_- -Matrizen ergibt sich auch hier die Form:

$$\prod_j \left[\prod_{k_j} (M_{\hat{\mu}_{k_j}}) A_+ \prod_{l_j} (M_{\hat{\mu}_{l_j}}) A_- \right] = \begin{pmatrix} f'' \cdot P_L + g'' \cdot P_R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.20)$$

Aus den schon erwähnten Gründen entfallen hier alle Anteile, die proportional zu einer γ_μ -Matrix sind. Die Gestalt von A_- nach Gleichung (5.18) führt nun darauf, daß alle Beiträge zum irreduziblen Kern von $\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}$ die folgende Form besitzen:

$$\frac{-2}{1 - G_\chi G_\psi} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ G_\psi f'' P_L + G_\chi g'' P_R & 0 \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

Wird dies entsprechend (C.6) in die $\psi\chi$ -Basis transformiert, so sind bei $G_\chi = 0$ alle Beiträge zu $(\overset{\circ}{\tilde{\chi}}_3^{\Psi\phi\Psi})_{22}$ gleich null. Aus den Formeln (8.8) und (3.28) folgt die Aussage (9.4).

9.3.3 Fermionische renormierte Masse μ_R

Für die renormierte fermionische Masse $\mu_R(P)$ ergibt sich:

$$\mu_R(P) = 4 \frac{1 - (8 - 4n_\pi)K}{\sqrt{8K[8K + \overset{\circ}{\mu}_2^\chi(P)]}} \quad (9.22)$$

Somit besitzt $\mu_R(P = 0)$ eine Nullstelle für $K = \frac{1}{8}$, wenn $\overset{\circ}{\mu}_2^\chi(P = 0) \neq -1$ gilt. Dies tritt in den Ergebnissen in 4. Ordnung der Hopping-Parameter-Entwicklung im Intervall

$\kappa \in [-0.1, 0.1]$ für $G_\psi \approx -2.5$ auf. Für $G_\psi > -2$ existiert in dem oben genannten κ -Bereich keine Nullstelle des Nenners von μ_R .

Diese Nullstelle in μ_R bei $P = 0$ ist unabhängig von κ und G_ψ . Gleichung (9.22) zeigt, daß bei $K = \frac{1}{8}$ und $n_\pi > 0$ für die fermionische renormierte Masse $\mu_R > 0$ gilt. Somit entstehen auch in diesem Fall keine Probleme mit den fermionischen „Dopplern“. Die weiteren Untersuchungen dieses Kapitels werden deshalb bei $P = 0$ durchgeführt.

Die Nullstellen der renormierten Masse μ_R gewinnen ihre Bedeutung aus der Tatsache, daß, wie schon in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, der Kontinuumslimes auf der Linie in der $K \times \kappa$ -Ebene liegt, die durch $\mu_R = 0$ ausgezeichnet ist. Beim Aufsuchen derartiger Linien mit der Hopping-Parameter-Entwicklung ist darauf zu achten, daß gültige Ergebnisse nur in der symmetrischen Phase zu erwarten sind. Es ist daher auch bei fermionischen Größen sicherzustellen, daß der betrachtete Bereich in der symmetrischen Phase liegt. Dies kann mit der in Abschnitt 9.2.1 beschriebenen Methode geschehen.

9.4 Vergleich mit numerischen Daten

In diesem Abschnitt sollen Vergleiche mit numerischen Daten durchgeführt werden, die mit Monte-Carlo-Algorithmen erzeugt wurden. Dazu wird die Hopping-Parameter-Entwicklung entsprechend Abschnitt 9.1 ausgewertet.

9.4.1 Vergleich mit Daten, die bei $\lambda_{MC} = 10$ gewonnen wurden

Für verschiedene renormierte Größen werden in [7] Zahlenwerte angegeben, die mit einem Hybrid-Monte-Carlo-Algorithmus gewonnen worden sind. Dabei werden verschiedene Werte für G_ψ und λ bei $n_F = 2$ und $G_\chi = 0$ gewählt. Der größte betrachtete Wert für λ beträgt $\lambda_{MC} = 10$. Damit sollen hier die Ergebnisse der Hopping-Parameter-Entwicklung verglichen werden. Dabei ist zu beachten, daß in Abschnitt 5.1 der Wert $\lambda_{HPE} = \infty$ für die Hopping-Parameter-Entwicklung fest vorgegeben wurde.

9.4.1.1 Renormierte Massen und Wellenfunktionsrenormierungen

In der Tabelle 9.4 werden die Zahlenwerte des Monte-Carlo-Verfahrens für die renormierten Massen und die Wellenfunktionsrenormierungen den Ergebnissen aus der Hopping-Parameter-Entwicklung in 3. und 4. Ordnung gegenübergestellt. Dabei zeigt sich, daß bei $G_\psi = 0.1$ die Übereinstimmung des Zahlenwertes der renormierten bosonischen Masse m_R mit dem Ergebnis 3. Ordnung nicht befriedigend ist und sich in der 4. Ordnung gegenüber der 3. verschlechtert. Aus den Ergebnissen des Abschnitts 9.2.1 für die renormierte bosonische Masse ist bei einer derartigen Parameterwahl mit einer besseren Übereinstimmung zwischen den Verfahren zu rechnen, zumindest sollte die 4. Ordnung eine deutliche Verbesserung gegenüber der 3. Ordnung darstellen.

In [6] wird die Phasengrenze zwischen der ferromagnetischen und der symmetrischen Phase bei $K = 0$ für verschiedene Werte von λ untersucht. In dieser Untersuchung ergibt sich, daß sich der Wert von κ , für den $m_R(\kappa) = \frac{1}{2}$ gilt, beim Übergang von $\lambda = 10$ zu $\lambda = 100$ um $\Delta\kappa \approx 0.005$ zu kleineren κ -Werten verschiebt, wenn $G_\psi G_\chi = 0$ gilt. Um die verschiedenen λ -Werte auszugleichen, werden die Ergebnisse der Hopping-Parameter-Entwicklung versuchsweise bei einem um 0.005 kleineren Wert für κ ausgewertet als die entsprechenden Werte der Monte-Carlo-Simulation. Dabei ist zu betonen, daß es keine

	K	κ	G_ψ	m_R	Z_ϕ	μ_R	Z_ψ	Z_χ
Monte-Carlo	0.1	0.135	0.1	0.86(4)	3.24(10)	1.0736(4)	4.44(2)	4.42(2)
3. Ordnung	0.1	0.135	0.1	0.736	3.65	0.9993	4.993	5.000
4. Ordnung	0.1	0.135	0.1	0.693	3.64	0.9989	4.989	5.000
3. Ordnung	0.1	0.130	0.1	0.878	3.79	0.9993	4.993	5.000
4. Ordnung	0.1	0.130	0.1	0.845	3.78	0.9990	4.990	5.000
Monte-Carlo	0.1	0.117	0.3	1.05(9)	3.0(3)	1.061(2)	4.31(3)	4.43(2)
3. Ordnung	0.1	0.117	0.3	1.116	4.09	0.9946	4.946	5.000
4. Ordnung	0.1	0.117	0.3	1.046	4.00	0.9919	4.920	5.000
3. Ordnung	0.1	0.112	0.3	1.247	4.27	0.9948	4.948	5.000
4. Ordnung	0.1	0.112	0.3	1.181	4.17	0.9924	4.924	5.000
Monte-Carlo	0.1	0.100	0.6	0.82(14)	2.8(3)	0.996(8)	3.76(4)	4.33(3)
3. Ordnung	0.1	0.100	0.6	1.268	4.34	0.9800	4.802	5.000
4. Ordnung	0.1	0.100	0.6	1.029	4.00	0.9724	4.723	5.000
3. Ordnung	0.1	0.095	0.6	1.407	4.58	0.9809	4.811	5.000
4. Ordnung	0.1	0.095	0.6	1.170	4.18	0.9739	4.743	5.000
Monte-Carlo	0.1	0.030	1.0	1.1(1)	3.1(5)	0.99(2)	3.60(13)	4.40(3)
3. Ordnung	0.1	0.030	1.0	3.14	—	0.9667	4.673	5.000
4. Ordnung	0.1	0.030	1.0	2.38	—	0.9639	4.646	5.000
3. Ordnung	0.1	0.025	1.0	3.42	—	0.9690	4.695	5.000
4. Ordnung	0.1	0.025	1.0	2.58	—	0.9668	4.674	5.000

Tabelle 9.4: Vergleich der Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation in [7] mit den Ergebnissen der Hopping-Parameter-Entwicklung bei $G_\chi = 0$. In dem Monte-Carlo-Verfahren wurde $\lambda_{MC} = 10$ und in der Hopping-Parameter-Entwicklung $\lambda_{HPE} = \infty$ gewählt. In beiden Fällen gilt $n_F = 2$. Bei den Monte-Carlo-Daten wird der statistische Fehler in Klammern angegeben.

Erfahrungen gibt, wie die Werte von m_R in dem hier benutzten Parameterbereich auf eine Änderung von λ reagieren.

Die in dieser Weise korrigierten Werte für m_R stimmen bei $G_\psi = 0.1$ hervorragend mit dem Wert des Monte-Carlo-Verfahrens überein. Es zeigt sich, daß der Wert von m_R in diesem Parameterbereich sehr empfindlich von κ abhängt. Die Differenzen zwischen dem Monte-Carlo-Verfahren und der Hopping-Parameter-Entwicklung können damit durchaus, so legt es diese Untersuchung nahe, durch die verschiedenen Werte für λ verursacht sein.

Mit zunehmender nackter Kopplung G_ψ werden die Unterschiede zwischen den Werten für m_R in 3. und 4. Ordnung größer. Entsprechend der Untersuchung in Abschnitt 9.2.1 ist dann auch in 4. Ordnung nicht mehr mit brauchbaren Ergebnissen zu rechnen. Dies wird durch die fehlende Übereinstimmung mit den numerischen Resultaten im Fall größerer G_ψ unterstrichen.

In der Abbildung 9.4 ist für $G_\psi = 0.3$ und $G_\chi = 0.0$ die Linie $\kappa_1(K)$ eingetragen, auf der die bosonische Masse m_R den Wert 1 annimmt. Des Weiteren ist die Linie eingezeichnet, auf der $\mu_R = 1$ gilt. Bei letzterer sind die Unterschiede zwischen der 3. und 4. Ordnung der Hopping-Parameter-Entwicklung so gering, daß für $\mu_R = 1$ nur die 4. Ordnung angegeben

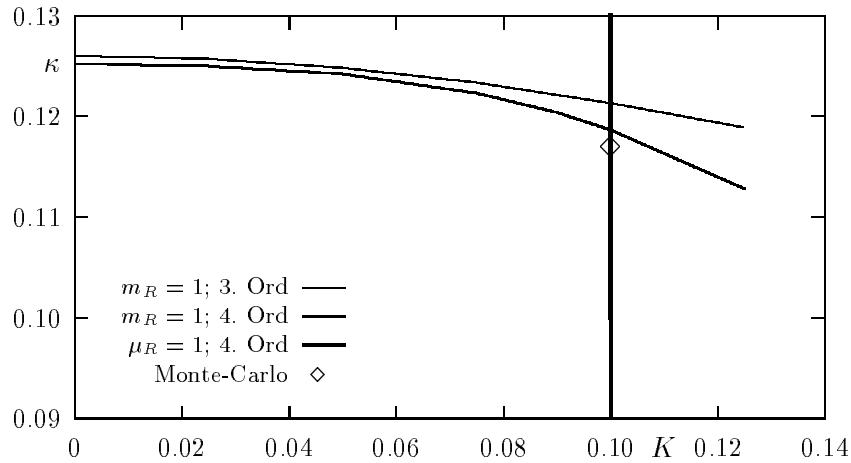


Abbildung 9.4: Linien, auf denen die renormierten Massen den Wert 1 annehmen, bei $G_\psi = 0.3$, $G_\chi = 0.0$, $n_F = 2$ und $\lambda = \infty$. Für die bosonische renormierte Masse m_R sind die Ergebnisse aus der 3. und 4. Ordnung in \mathcal{T} aufgetragen, für μ_R nur die 4. Ordnung. Des Weiteren ist die Lage des Datenpunkt aus [7] eingetragen, der aber bei $\lambda = 10$ bestimmt worden ist. Die Werte für die renormierten Massen in diesem Punkt können den Tabellen 9.4 und 9.5 entnommen werden.

ist.

Für die bosonische Masse m_R ergibt sich darin qualitativ das gleiche Bild wie in den Abbildungen 9.1 und 9.2. Die 3. und 4. Ordnung stimmen im Bereich kleiner K gut miteinander überein und laufen für große K auseinander. Die Linie krümmt sich mit zunehmendem K nach unten. Da auch die Werte für die verwendeten nackten Yukawa-Kopplungen eine vergleichbare Größenordnung haben, liegen die nachfolgenden Verallgemeinerungen der Aussagen, die in den Untersuchungen des Abschnitts 9.2.1 gewonnen wurden, auf den hier betrachteten Fall $G_\chi = 0$ nahe.

Abbildung 9.4 zeigt eine gute Übereinstimmung der bosonischen Masse m_R im Bereich $K < 0.09$ für die 3. und 4. Ordnung. Aus den Untersuchungen des Abschnitts 9.2.1 kann somit erwartet werden, daß das numerische Ergebnis für m_R aus der 4. Ordnung bis $K \approx 0.1$ eine gute Approximation darstellt. Die Untersuchung dieses Abschnitts findet demnach auf dem Rand des Bereichs statt, für den die Hopping-Parameter-Entwicklung in 4. Ordnung gute numerische Ergebnisse für die bosonischen Suszeptibilitäten erwarten läßt. Aus der 3. Ordnung sind in diesem Bereich nur noch qualitative Aussagen zu erwarten. Eine genaue Abschätzung der Einflüsse des Reihenabbruchs auf den Wert für m_R kann leider nicht angegeben werden.

Werden nun die Ergebnisse der beiden verschiedenen Verfahren verglichen, so ergibt sich bei $G_\psi = 0.3$ eine hervorragende Übereinstimmung des Wertes von m_R , wenn in der Hopping-Parameter-Entwicklung der Wert für κ nicht in der oben beschriebenen Weise korrigiert wird. Bei dem korrigierten κ -Wert ist m_R in der 4. Ordnung gerade außerhalb des Bereichs, der sich durch den Wert aus der Monte-Carlo-Simulation mit dem zugeordneten

statistischen Fehler ergibt. Der Wert aus der 3. Ordnung ist bei diesem Wert für κ deutlich zu groß. In den Untersuchungen des Abschnitts 9.2.1 wurde festgestellt, daß die Ergebnisse für die renormierte bosonische Masse m_R zu groß werden, wenn der Bereich, in dem die 4. Ordnung gute Ergebnisse verspricht überschritten wird. Von daher ist zu erwarten, daß sich der Wert der Tabelle für m_R bei $G_\psi = 0.3$ zu geringfügig kleineren Werten verschiebt, wenn weitere Ordnungen der Hopping-Parameter-Entwicklung bestimmt werden.

Die Untersuchung bei $G_\psi = 0.3$ in 4. Ordnung liefert somit kein Argument gegen eine Korrektur der vorgeschlagenen Art für die unterschiedlichen λ -Werte. Wenn die Erwartung einer Abnahme des Wertes von m_R mit zunehmender Ordnung in \mathcal{T} eintrifft, so stellt diese Korrektur auch hier eine Verbesserung der Übereinstimmung mit den numerischen Ergebnissen dar. Es ist aber zu berücksichtigen, daß der Einfluß des fermionischen Hopping-Parameters K auf die renormierten bosonischen Größen mit zunehmender nackter Kopplung G_ψ steigt. Dieses ist den Taylorreihen im Anhang E direkt zu entnehmen. Als Folge kann sich auch der Einfluß der verschiedenen λ -Werte auf m_R mit zunehmender Kopplung G_ψ verändern, so daß sich möglicherweise auch die Art der benötigten Korrektur mit zunehmendem G_ψ bei $K = 0.1$ verändert.

Bei den größeren Werten der nackten Yukawa-Kopplung G_ψ nehmen die Unterschiede zwischen der 3. und der 4. Ordnung von m_R zu. (ca. 20% bei $G_\psi = 0.6$ und ca. 30% bei $G_\psi = 1.0$) Im letzten Fall ist zudem die Abweichung von dem Resultat der Monte-Carlo-Simulation so groß, daß die Angabe weiterer renormierter Größen, die sich aus bosonischen Suszeptibilitäten bestimmen, sinnlos erscheint.

Die Übereinstimmung der Werte für die bosonische Wellenfunktionsrenormierung Z_ϕ aus den verschiedenen Bestimmungsverfahren ist bei allen Werten für die nackte Yukawa-Kopplung nicht so gut wie die der bosonischen Masse. Die Unterschiede zwischen der 3. und 4. Ordnung der Hopping-Parameter-Entwicklung sind hier deutlich geringer als bei der renormierten Masse m_R .

Bei den fermionischen Größen ist zu beachten, daß sie aus anderen Reihen bestimmt werden als die bosonischen. Dies zeigt sich unter anderem darin, daß die Unterschiede zwischen den Resultaten aus der 3. und 4. Ordnung sehr gering sind.

Die renormierte Masse μ_R aus der Hopping-Parameter-Entwicklung ist vor allem bei kleinem G_ψ geringer als die mit dem Monte-Carlo-Verfahren bestimmte. Dazu wird in [7] angegeben, daß der verwendete Algorithmus im Fall freier Fermionen ($G_\psi = G_\chi = 0$) bei $K = 0.1$ einen Wert von $\mu_R = 1.076$ anstatt des für ein unendlich ausgedehntes Gitter richtigen Wertes $\mu_R = 1.0$ liefert. Die Hopping-Parameter-Entwicklung liefert in diesem Fall den Wert $\mu_R = 1.0$, siehe Gl. (9.22). Wie sich auch aus der Abbildung 9.4 ergibt, ist der Einfluß von κ auf μ_R gering.

Der Wert von $\frac{1}{2K}$ für Z_χ wurde schon im Abschnitt 9.3.1 erläutert. Die Abweichung der Monte-Carlo-Daten von diesem Wert entsteht durch die Vernachlässigung der Terme $\mathcal{O}(p_4^2)$ im inversen Propagator $(\tilde{\Delta}^\Psi)^{-1}(p)$. Diese Näherung gewinnt ihren Einfluß auf das Ergebnis durch die endliche Ausdehnung des Gitters und die damit notwendige Einführung von Randbedingungen in den Monte-Carlo-Simulationen in [7]. Da in der Hopping-Parameter-Entwicklung von einem unendlichen Gitter ausgegangen wird, (endliche Gitter würden die Zurückführung auf 1-Linien-irreduzible Graphen erschweren), wird hier das Ergebnis durch die Vernachlässigung dieser Terme in Gleichung (3.8) nicht beeinflußt.

Die Werte für Z_ψ nehmen in beiden Verfahren bei kleiner Kopplung G_ψ ungefähr den Wert von Z_χ an. Bei $G_\psi = 0.0$ sollten die Werte für Z_ψ und Z_χ aus Symmetriegründen übereinstimmen, so daß dieses Ergebnis sinnvoll erscheint. Mit zunehmenden G_ψ fallen

	K	κ	G_ψ	$G_{R\psi}$	$G_{R\chi}$	g_R
Monte-Carlo	0.1	0.135	0.1	1.16(4)	-0.11(4)	-
3. Ordnung	0.1	0.135	0.1	1.35	0.00	31
3. Ordnung	0.1	0.130	0.1	1.38	0.00	39
Monte-Carlo	0.1	0.117	0.3	3.53(13)	-0.50(6)	-
3. Ordnung	0.1	0.117	0.3	4.29	0.00	65
3. Ordnung	0.1	0.112	0.3	4.39	0.00	76
Monte-Carlo	0.1	0.100	0.6	5.5(4)	-0.82(6)	-
3. Ordnung	0.1	0.100	0.6	8.89	0.00	92
3. Ordnung	0.1	0.095	0.6	9.11	0.00	103

Tabelle 9.5: Fortsetzung der Tabelle 9.4 für die renormierten Kopplungen. Es gilt: $G_\chi = 0$, $n_F = 2$, $\lambda_{MC} = 10$ und $\lambda_{HPE} = \infty$.

die Werte für Z_ψ in beiden Verfahren. In dem Monte-Carlo Verfahren ist diese Abnahme stärker als in der Hopping-Parameter-Entwicklung .

9.4.1.2 Renormierte Kopplungen

Abschließend soll noch auf die renormierten Kopplungen eingegangen werden. Diese wurden nur in 3. Ordnung bestimmt und sind in der Tabelle 9.5 eingetragen. Wie oben ausgeführt, ist zu erwarten, daß die Entwicklung bosonischer Suszeptibilitäten in 3. Ordnung bezüglich \mathcal{T} keine gute Approximation darstellt, so daß nur mit qualitativen Ergebnissen zu rechnen ist.

Vor diesem Hintergrund ist die Abweichung von ca. 20% für $G_{R\psi}$ bei $G_\psi = 0.1$ und $G_\psi = 0.3$ ein durchaus befriedigendes Ergebnis. Da die renormierte Yukawa-Kopplung $G_{R\psi}$ in dem hier betrachteten Parameterbereich nicht sehr stark von κ abhängt, sind aus den Ergebnissen der 3. Ordnung nur geringe Abweichungen aufgrund der verschiedenen Werte für λ_{MC} und λ_{HPE} anzunehmen.

Zur Diskussion der renormierten Kopplung $G_{R\chi}$ wird auf den Abschnitt 9.3.2 verwiesen.

Aufgrund der großen statistischen Fehler konnten in [7] keine Werte für g_R angegeben werden. Darum werden hier nur kurz die Ergebnisse der Hopping-Parameter-Entwicklung aufgeführt. Die Werte der renormierten Selbstkopplung g_R sind stark von κ abhängig.

9.4.2 Vergleich mit Daten, die bei $\lambda_{MC} = \infty$ gewonnen wurden

Um den Einfluß der verschiedenen λ -Werte besser einschätzen zu können, soll abschließend noch ein Vergleich mit Simulationsdaten bei $\lambda_{MC} = \infty$ durchgeführt werden. Dabei handelt es sich um unveröffentlichtes Datenmaterial [15], das noch nicht endgültig ausgewertet ist. Bei einer endgültigen Auswertung können sich also noch Korrekturen zu den hier abgedruckten Werten und Fehlerbereichen ergeben.

Leider sind diese Werte bei anderen Parameterwerten bestimmt worden als die Werte des Abschnitts 9.4.1. So wird bei kleinen bis mittleren Werten der nackten Yukawa-Kopplung nur der Fall $G_\psi = -G_\chi$ untersucht, der bislang noch nicht betrachtet wurde.

	K	κ	G_ψ	G_χ	m_R	Z_ϕ	μ_R	Z_ψ	Z_χ
M-C	0.090	1.120	0.1	-0.1	1.067(9)	3.682(12)	1.690(1)	5.23(3)	5.29(4)
3. Ord	0.090	0.120	0.1	-0.1	1.113	4.077	1.6140	5.549	5.549
4. Ord	0.090	0.120	0.1	-0.1	1.092	4.061	1.6139	5.547	5.547
M-C	0.091	0.108	0.3	-0.3	1.051(13)	3.650(29)	2.083(9)	5.15(3)	5.267(12)
3. Ord	0.091	0.108	0.3	-0.3	1.166	4.194	2.0101	5.436	5.436
4. Ord	0.091	0.108	0.3	-0.3	1.096	4.051	2.0072	5.415	5.415
M-C	0.122	0.054	0.6	-0.6	1.005(9)	3.490(27)	1.712(5)	3.556(7)	3.524(20)
3. Ord	0.122	0.054	0.6	-0.6	2.024	6.162	1.6590	3.948	3.948
4. Ord	0.122	0.054	0.6	-0.6	1.520	5.061	1.6450	3.929	3.929
M-C	0.100	0.090	0.6	0.0	1.104(12)	3.513(15)	1.02(1)	3.955(7)	4.379(3)
3. Ord	0.100	0.090	0.6	0.0	1.547	4.815	0.9817	4.819	5.000
4. Ord	0.100	0.090	0.6	0.0	1.309	4.371	0.9754	4.757	5.000

Tabelle 9.6: Vergleich von Simulationsdaten mit der Hopping-Parameter-Entwicklung bei $\lambda_{MC} = \lambda_{HPE} = \infty$ und $n_F = 2$. Bei den Simulationsdaten handelt es sich um unveröffentlichte Daten nach [15], die nicht endgültig ausgewertet sind, so daß Korrekturen der Daten, besonders der Fehlerschranken, möglich sind.

Weiterhin sind die K -Werte hier so gewählt, daß größere fermionische Massen μ_R entstehen als in den vorstehenden Untersuchungen. Dies sollte vor allen Dingen die Genauigkeit der Zahlenwerte der bosonischen Suszeptibilitäten der Hopping-Parameter-Entwicklung verbessern, da bei diesen Größen für große K -Werte nicht mit einer Verbesserung der Ergebnisse durch das in Abschnitt 9.1 beschriebene Verfahren zu rechnen ist.

9.4.2.1 Renormierte Massen

Die Werte für die renormierten Massen und Wellenfunktionsrenormierungen sind in der Tabelle 9.6 wiedergegeben.

Es zeigt sich, daß die Werte der renormierten bosonischen Masse m_R aus der Hopping-Parameter-Entwicklung immer größer sind als die entsprechenden Werte des Monte-Carlo-Verfahrens. Dabei stellt die 4. Ordnung eine deutliche Verbesserung gegenüber der 3. Ordnung dar. Wenn die Unterschiede zwischen der 3. und der 4. Ordnung groß sind, so ist die 4. Ordnung auch deutlich größer als das zugehörige Monte-Carlo-Datum und stellt keine gute Approximation mehr dar. Dieses Verhalten wurde schon im Abschnitt 9.2.1 festgestellt. Werden für die nackten Yukawa-Kopplungen Werte $|G| \leq 0.3$ gewählt, so zeigt die Tabelle 9.6 eine gute Übereinstimmung der Werte für m_R .

Aus der Hopping-Parameter-Entwicklung ergibt sich auch hier eine kleinere renormierte fermionische Masse μ_R als aus der Monte-Carlo-Rechnung. Dieser Unterschied ist vergleichbar mit dem, der sich aus Tabelle 9.4 ergibt.

9.4.2.2 Renormierte Kopplung

Der Vergleich der renormierten Kopplungen ist in der Tabelle 9.7 wiedergegeben. Es zeigt sich hier eine bessere Übereinstimmung als in Tabelle 9.5 bei vergleichbarer Stärke der nackten Kopplungen. Ob dies an den verschiedenen Werten für λ oder an der anderen Wahl der Parameter G_ψ und G_χ liegt muß hier offen bleiben. Dies kann aber auch in den

	K	κ	G_ψ	G_χ	$G_{R\psi}$	$G_{R\chi}$	g_R
Monte-Carlo	0.090	1.120	0.1	-0.1	1.482(64)	-1.578(39)	—
3. Ordnung	0.090	0.120	0.1	-0.1	1.603	-1.603	59
Monte-Carlo	0.091	0.108	0.3	-0.3	4.79(12)	-4.84(18)	—
3. Ordnung	0.091	0.108	0.3	-0.3	5.228	-5.228	80
Monte-Carlo	0.122	0.054	0.6	-0.6	8.66(9)	-8.82(8)	—
3. Ordnung	0.122	0.054	0.6	-0.6	11.9	-11.9	162
Monte-Carlo	0.100	0.090	0.6	0.0	6.161(66)	-0.852(10)	—
3. Ordnung	0.100	0.090	0.6	0.0	9.333	0.000	116

Tabelle 9.7: Fortsetzung der Tabelle 9.6 für die renormierten Kopplungen.

Es gilt: $\lambda_{MC} = \lambda_{HPE} = \infty$ und $n_F = 2$. Das in der Unterschrift zu Tabelle 9.6 über die Simulationsdaten Gesagte gilt auch hier.

kleineren Werte der Hopping-Parameter in Tabelle 9.7 begründet liegen. Bei $G_\psi = 0.6$ ergeben sich aus der 3. Ordnung der Hopping-Parameter-Entwicklung in keinem der in der Tabelle betrachteten Fälle zufriedenstellende Ergebnisse, was aber schon aus den schlechten Ergebnisse für die bosonische Masse m_R in Tabelle 9.6 zu erwarten war.

Kapitel 10

Diskussion

10.1 Diskussion der Ergebnisse

Im Kapitel 9 wurden die Ergebnisse der Hopping-Parameter-Entwicklung in 4. Ordnung mit numerischen Daten verglichen. Dabei konnten wichtige Erkenntnisse über das Konvergenzverhalten der Hopping-Parameter-Entwicklung gewonnen werden.

In den Untersuchungen des Abschnitts 9.2.1 konnte gezeigt werden, daß die Werte für m_R aus der Hopping-Parameter-Entwicklung 4. Ordnung in dem Parameterbereich eine hervorragende Übereinstimmung mit den Ergebnissen numerischer Simulationen ergibt, in dem sich die Ergebnisse 4. Ordnung von denen der 3. Ordnung nur geringfügig unterscheiden. Dieses Bild konnte in den Untersuchungen des Abschnitts 9.4 bestätigt werden.

Dieses Verhalten legt es nahe, aus der Abweichung der zweihöchsten von der höchsten betrachteten Ordnung der Hopping-Parameter-Entwicklung Rückschlüsse auf die Zuverlässigkeit der erhaltenen Ergebnisse zu ziehen.

Wird der Parameterbereich betrachtet, in dem die renormierten Massen m_R und μ_R nicht kleiner als 1 sind, so ergeben sich aus der Hopping-Parameter-Entwicklung in 4. Ordnung für kleine nackte Yukawa-Kopplungen ($|G| < 0.4$) erstaunlich gute Resultate. Wegen des Zusammenhangs zwischen der Masse und der Korrelationslänge lassen sich aus Monte-Carlo-Simulationen auf einem $4^3 \times 8$ -Gitter nur in diesem Bereich der renormierten Massen gute Ergebnisse erwarten. Bei größeren Werten für die nackten Kopplungen müssen weitere Ordnungen der Hopping-Parameter-Entwicklung bestimmt werden, wenn der Bereich untersucht werden soll, indem für die renomierten Massen $m_R, \mu_R \approx 1$ gilt.

Bezüglich der bosonischen Größen ist erst in 6. Ordnung eine deutliche Verbesserung der Werte bei großem K zu erwarten. Diese Erwartung ergibt sich aus der Tatsache, daß in den Graphen der bosonischen Suszeptibilitäten immer eine gerade Anzahl fermionischer Linien auftritt. So sind in 6. Ordnung erstmals Terme, die die nackten Yukawa-Kopplungen in 6. Potenz enthalten, möglich, so wie in der betrachteten 4. Ordnung erstmals Terme in 4. Potenz entstehen. Terme 5. Potenz in den nackten Yukawa-Kopplungen können in den bosonischen Suszeptibilitäten bei $\lambda_{\text{HPE}} = \infty$ nicht entstehen.

An dieser Stelle sei noch einmal kurz an die Diskussion des Abschnitt 9.2.1.3 erinnert. Dort wurde ausgeführt, daß die guten Ergebnisse des Abschnitts 9.2.1 ein Indiz dafür sind, daß die in Abschnitt 9.1 erläuterte Art der Auswertung der irreduziblen Kerne der Suszeptibilitäten eine Verbesserung der Ergebnisse bewirkt.

Aus den Ergebnissen des Abschnitts 9.4.2 ergibt sich ein weiterer Hinweis darauf, daß die Abweichungen der Werte der bosonischen Masse m_R bei kleinen Werten der nackten

Yukawa-Kopplungen in den verschiedenen λ -Werten begründet liegen, wie in Abschnitt 9.4.1 diskutiert. In Tabelle 9.6 wurden bei vergleichbaren Werten der nackten Kopplungen keine derartigen Unterschiede mehr festgestellt.

10.2 Vorschläge zur Verbesserung der Methode

Wenn weitere Ordnungen der Hopping-Parameter-Entwicklung bestimmt werden sollen, so scheint vom jetzigen Standpunkt eine weitere Reduzierung der Graphen vorteilhaft.

10.2.1 Vertexrenormierung

Dazu bietet sich das Verfahren der Vertexrenormierung an. Dieses Verfahren wird in [4] diskutiert und rekursiv gelöst. Die Idee der Vertexrenormierung soll hier kurz am Beispiel der Graphen des Anhangs D erläutert werden.

Wird der Graph 2 der Liste D.1 betrachtet, so entsteht der Graph 14 hieraus durch Anhängen einer Schleife aus zwei bosonischen Linien an einen Vertex des zugrundeliegenden Graphen. Entsprechend entsteht der Graph 17 dieser Liste aus dem Graphen 3 durch Anhängen des gleichen Objekts.

Wird zur Liste D.2 übergegangen, so entsteht dort der Graph 15 durch Anhängen dieses Objekts an den Graphen 2 der Liste. Der gleiche Zusammenhang besteht ebenfalls zwischen den Graphen 1 und 3 der Liste D.3. In allen Beispielen wird der folgende Teilgraph an einen Vertex mit zwei fermionischen und einer auslaufenden bosonischen Linie angehängt.



Der Beitrag $R_G(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p)$ des einfacheren Graphen und des komplizierteren Graphen unterscheiden sich in allen betrachteten Fällen um einen Faktor $-8\kappa^2$.

Der Unterschied zwischen dem Beitrag des einfacheren und des komplizierteren Graphen ist abhängig von dem Vertex, an den angehängt wird, und von dem Teilgraphen, der angehängt wird. Ein schönes Beispiel bilden hier die Graphen 1 und 3 der Liste D.4. Hier beträgt der Unterschied, der durch das Anhängen des Teilgraphen in (10.1) an den einfachen Graphen entsteht, $-32\kappa^2$.

An dieser Stelle wird auch schon der rekursive Charakter der Vertexrenormierung deutlich. Der Teilgraph in (10.1) kann auf seinen eigenen Vertex angewandt werden. Die Graphen 1, 3 und 19 der Liste D.2 sind hier Beispiele. Aus den Graphen 1 und 3 ergibt sich sofort, daß das Anhängen des Teilgraphen (10.1) an einen Vertex mit zwei bosonischen Linien ebenfalls einen Faktor $-8\kappa^2$ ergibt. Daraus ist zu schließen, daß das Anhängen des folgenden Teilgraphen in (10.2) an einen Vertex mit zwei bosonischen Linien einen Faktor $(-8\kappa^2)^2 = 64\kappa^4$ ergibt.



Wie erwartet, unterscheidet sich der Beitrag des Graphen 19 der Tabelle D.2 um einen Faktor $64\kappa^4$ vom Graphen 1.

Werden die Faktoren, die durch das Anhängen der Teilgraphen entstehen, zusammengefaßt, so brauchen nur noch die Graphen ausgewertet zu werden, die keine Teilgraphen der obigen Art enthalten. In Anhang D fallen dann viele Graphen heraus. In Tabelle D.1 brauchen die Graphen 11 sowie 14 bis 11, in D.2 die Graphen 3 bis 5, 7 und 14 bis 19 nicht mehr betrachtet zu werden. In Tabelle D.3 fallen die Graphen 3 bis 5 heraus und in D.4 die Graphen 3, 11 und 12. Da aber die Beiträge dieser Teilgraphen in Abhängigkeit von dem Vertex, an den angehängt wird, bestimmt werden müssen, bietet das beschriebene Verfahren erst Vorteile, wenn der gleiche Teilgraph öfter als einmal an den gleichen Vertex anzuhängen ist.

Oben wurde nur das Anhängen von Teilgraphen, die ausschließlich bosonische Linien enthalten, diskutiert. Das Anhängen von Teilgraphen mit fermionischen Linien wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet, wie überhaupt die Vertexrenormierung in dieser Arbeit nicht angewandt wird. Aus Teilgraphen mit fermionischen Linien ergiven sich Matrixfaktoren, so daß Schwierigkeiten mit der Nichtvertauschbarkeit zu erwarten sind. Betrachte zur Verdeutlichung die Graphen 1 und 11 der Tabelle D.1. Der Graph 11 entsteht aus dem Graphen 1 durch Anhängen eines Teilgraphen mit 4 fermionischen Linien. Aufgrund der Struktur des Vertizes mit 4 fermionischen Linien ergibt sich entsprechend Abschnitt 7.3.3.2 aus dem Graphen 11 nur dann ein Beitrag, wenn die fermionische Kette, entlang der die Matrizen multipliziert werden, die Schleife des Graphen durchläuft. Die fermionische Vertexrenormierung sollte von daher schwieriger sein als die bosonische, bei der der ganze Graph mit einem skalaren Faktor multipliziert wird.

Weiterhin ist zu untersuchen, wie die Teilgraphen die Symmetriefaktoren beeinflussen. Durch das Anhängen der Teilgraphen können Symmetrien des Graphen gebrochen werden, und die Teilgraphen können selber auch einen Symmetriefaktor besitzen. Eventuell sind hier weitere Korrekturen notwendig.

10.2.2 Computerisierung des Verfahrens

In [4] wird ein Verfahren vorgestellt, nach dem die Graphen in einem bosonischen Modell mit Hilfe eines Computers erzeugt und ausgewertet werden können. Dadurch wurde es in dieser Arbeit möglich, die Graphen bis zur 14. Ordnung im skalaren Hopping-Parameter auszuwerten.

Auch hier ist wieder mit Problemen durch den fermionischen Teil des Modells zu rechnen. Schon der Vertex mit vier fermionischen Linien $\langle \Psi \bar{\Psi} \Psi \bar{\Psi} \rangle_1^c$ enthält 4096 Einträge. Aus diesem Grund dürfte es bei der Auswertung der Graphen Vorteile bringen, die Eigenschaften der γ -Matrizen und die in Abschnitt 7.3.3 beschriebenen Hilfen auszunutzen.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. G. Münster danken, der mich auf diese interessante Untersuchungsmethode aufmerksam gemacht und mich bei der Ausarbeitung des Themas betreut hat.

Bei Frau Dipl. Phys. S. Klessinger, Herrn Dipl. Phys. T. Mohaupt und Herrn Dipl. Phys. M. Plagge, mit denen ich während der Anfertigung dieser Arbeit das Büro teilte, möchte ich mich für die vielen Diskussionen und Hinweise im näheren und weiteren Umfeld dieser Arbeit und das freundliche Klima bedanken.

Bei Herrn Dr. L. Lin bedanke ich mich sehr für die mir zur Verfügung gestellten unveröffentlichten Ergebnisse seiner numerischen Untersuchungen und die mir dazu gegebenen Erläuterungen. Diese Ergebnisse sind in der Arbeit mit [15] bezeichnet.

Für die vielen guten Hinweise und Ratschläge, die ich von Herrn Dr. K. Pinn erhalten habe, möchte ich mich auf diesem Weg bedanken.

Bei den vielen hier leider ungenannten Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik I der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster bedanke ich mich für die angenehme Arbeitsatmosphäre und so manche Anregung, die ich in meiner Diplmandenzeit erfahren habe.

Besonders möchte ich mich bei Herrn Dipl. Phys. R. Horstmann und Herrn Dipl. Phys. M. Scholze bedanken, die sich mit viel Einsatz um die Computeranlage des Instituts kümmern und bei Problemen damit für zügige Abhilfe sorgen.

Bei meinen Eltern Cäcilia und Johannes Hein möchte ich mich für die Unterstützung während des gesamten Studiums bedanken, die mir vieles erst ermöglicht hat.

Ganz besonders möchte ich mich bei Frau S. Pott bedanken, nicht zuletzt für die mühevollen Korrekturen am sprachlichen Ausdruck dieser Arbeit.

Anhang A

Zur Struktur des Propagators

Zunächst wird die benutzte Darstellung der euklidischen Gamma-Matrizen angegeben:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Zur Erläuterung der Form der Gleichung (3.8) genügt es zu zeigen, daß, wenn $\tilde{\Delta}^\Psi(p)$ in eine Taylor-Reihe nach \bar{p} entwickelt wird:

$$\tilde{\Delta}^\Psi(p) = C(P) - i\bar{p}_\mu \gamma_\mu D(P) + \mathcal{O}(\bar{p}^2) \tag{A.2}$$

Die Matrizen $C(P)$ und $D(P)$ in der $\psi\chi$ -Basis die folgende Form besitzen:

$$C = \begin{pmatrix} O & C_{\psi\chi}(P) \\ C_{\psi\chi}(P) & O \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} D_{\psi\psi}(P) & 0 \\ 0 & D_{\chi\chi}(P) \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

Beweis von (A.3): Aus der Forderung nach Kovarianz des Propagators $\tilde{\Delta}^\Psi(p)$ ergibt sich, daß die Matrizen $C(P)$ und $D(P)$ sich als 2×2 Matrizen, deren Einträge skalare Vielfache des Einheitsoperators $\mathbf{1}_S$ im Spinor-Raum sind, schreiben lassen. Aus der Definition (A.2) für die Matrizen C und D ergibt sich nun folgende mögliche Bestimmung dieser Größen auf dem Gitter:

$$C(P) = \sum_x e^{-iP_\mu x_\mu} \langle \Psi(x) \bar{\Psi}(0) \rangle^c \tag{A.4}$$

$$D(P) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \cdot \left[\sum_x \frac{e^{-iP_\nu x_\nu}}{\cos(P_\mu)} x_\mu \langle \Psi(x) \bar{\Psi}(0) \rangle^c \right] \tag{A.5}$$

In der symmetrischen Phase ist der Propagator invariant unter der Transformation der chiralen Symmetrie (2.10). In der hier benutzten Darstellung der γ -Matrizen sind bei einem linkshändigen Spinoranteil nur die beiden oberen, bei einem rechtshändigen nur die beiden unteren Spinorkomponenten von null verschieden. Damit ergibt sich für einen fermionischen Zweipunkt-Erwartungswert in der symmetrischen Phase die folgende Form, wobei jede Eintragung in der Matrix auf der rechten Seite für eine 2×2 -Matrix steht.

$$\langle \Psi_y \bar{\Psi}_x \rangle^c = \begin{pmatrix} 0 & \langle \psi_{L,y} \psi_{L,x}^+ \rangle^c & \langle \psi_{L,y} \chi_{R,x}^+ \rangle^c & 0 \\ \langle \psi_{R,y} \psi_{R,x}^+ \rangle^c & 0 & 0 & \langle \psi_{R,y} \chi_{L,x}^+ \rangle^c \\ \langle \chi_{L,y} \psi_{R,x}^+ \rangle^c & 0 & 0 & \langle \chi_{L,y} \chi_{L,x}^+ \rangle^c \\ 0 & \langle \chi_{R,y} \psi_{L,x}^+ \rangle^c & \langle \chi_{R,y} \chi_{R,x}^+ \rangle^c & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Die Matrizen C und D sind aus derartigen Erwartungswerten aufgebaut. Aufgrund der speziellen Gestalt der γ_μ -Matrizen (A.1) sind die folgenden Matrixelemente gleich null. Dabei ist die Proportionalität der Matrizen C und D zur $\underline{1}_S$ -Matrix zu berücksichtigen.

$$C_{\psi\psi} = C_{\chi\chi} = D_{\psi\chi} = D_{\chi\psi} = 0 \quad \forall P : P_\mu \in \{0, \pi\}, \quad (\text{A.7})$$

Es bleibt noch $C_{\psi\chi}(P) = C_{\chi\psi}(P)$ zu zeigen. Betrachte dazu die folgende Symmetrietransformation¹:

$$\begin{aligned} \Psi_x &\rightarrow \gamma_1 \gamma_3 \Psi_x^* \\ \bar{\Psi}_x &\rightarrow \Psi_x^T \gamma_4 \gamma_1 \gamma_3 \\ \phi_x &\rightarrow \phi_x^+ \\ \phi_x^+ &\rightarrow \phi_x \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

mit:

$$\Psi_x^* := \gamma_4 \bar{\Psi}_x^T$$

Die Wirkung S des Modells ist nun invariant unter dieser Symmetrietransformation. Bei den folgenden Manipulationen ist das Vorzeichen bei Vertauschung von Grassmann-Variablen zu berücksichtigen. Diese Vertauschung wird im folgenden durch Transposition erzeugt.

$$\begin{aligned} \bar{\chi}_x \psi_y &\rightarrow \chi_x^T \gamma_4 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_3 \psi_y^* \\ &= -\chi_x^T \gamma_4 \psi_y^* \\ &= \bar{\psi}_y \chi_x \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Als Folge ist $\bar{\chi}_x \psi_y + \bar{\psi}_x \chi_y$ invariant unter (A.8), wenn $x = y$ gilt oder über x und y unabhängig summiert wird.

$$\begin{aligned} \sum_{x\mu} \bar{\Psi}_{x+\hat{\mu}} \gamma_\mu \Psi_x &\rightarrow \sum_{x\mu} \Psi_{x+\hat{\mu}}^T \gamma_4 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_\mu \gamma_1 \gamma_3 \Psi_x^* \\ \sum_x \sum_{\mu=\pm 1, \pm 3} \Psi_{x+\hat{\mu}}^T \gamma_4 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_\mu \gamma_1 \gamma_3 \Psi_x^* &= - \sum_x \sum_{\mu=\pm 1, \pm 3} \Psi_{x+\hat{\mu}}^T \gamma_\mu \gamma_4 \Psi_x^* \\ &= \sum_x \sum_{\mu=\pm 1, \pm 3} \bar{\Psi}_x \gamma_\mu^T \Psi_{x+\hat{\mu}} \end{aligned}$$

¹Im Funktionalintegralformalismus sind $\bar{\Psi}_x$ und Ψ_x unabhängige Variablen, über die unabhängig integriert wird, so daß $(\gamma_1 \gamma_3 \Psi_x^*)^+ \gamma_4 = -\Psi_x^T \gamma_4 \gamma_1 \gamma_3$ gelten darf.

$$\begin{aligned}
&= \sum_x \sum_{\mu=\pm 1, \pm 3} \bar{\Psi}_{x-\hat{\mu}} \gamma_{-\mu} \Psi_x \\
\sum_x \sum_{\mu=\pm 2, \pm 4} \Psi_{x+\hat{\mu}}^T \gamma_4 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_\mu \gamma_1 \gamma_3 \Psi_x^* &= \sum_x \sum_{\mu=\pm 2, \pm 4} \Psi_{x+\hat{\mu}}^T \gamma_\mu \gamma_4 \Psi_x^* \\
&= \sum_x \sum_{\mu=\pm 2, \pm 4} \bar{\Psi}_{x-\hat{\mu}} \gamma_{-\mu} \Psi_x \\
\implies \sum_{x\mu} \bar{\Psi}_{x+\hat{\mu}} \gamma_\mu \Psi_x &\rightarrow \sum_{x\mu} \bar{\Psi}_{x+\hat{\mu}} \gamma_\mu \Psi_x \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Es bleibt die Prüfung der Invarianz des Yukawaterms:

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_x \left[\frac{1+\gamma_5}{2} \phi_x^+ + \frac{1-\gamma_5}{2} \phi_x^- \right] \psi_x &\rightarrow \psi_x^T \gamma_4 \gamma_1 \gamma_3 \left[\frac{1+\gamma_5}{2} \phi_x^+ + \frac{1-\gamma_5}{2} \phi_x^- \right] \gamma_1 \gamma_3 \psi_x^* \\
&= -\psi_x^T \gamma_4 \left[\frac{1+\gamma_5}{2} \phi_x^+ + \frac{1-\gamma_5}{2} \phi_x^- \right] \psi_x^* \\
&= -\psi_x^T \left[\frac{1-\gamma_5}{2} \phi_x^+ + \frac{1+\gamma_5}{2} \phi_x^- \right] \gamma_4 \psi_x^* \\
&= \bar{\psi}_x \left[\frac{1-\gamma_5}{2} \phi_x^+ + \frac{1+\gamma_5}{2} \phi_x^- \right] \psi_x \tag{A.11}
\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, daß auch $\bar{\chi}_x \left[\frac{1+\gamma_5}{2} \phi_x^+ + \frac{1-\gamma_5}{2} \phi_x^- \right] \chi_x$ invariant unter der Symmetrietransformation (A.8) ist. Damit gilt:

$$\langle \psi_x \bar{\chi}_x \rangle^c = \langle \chi_x \bar{\psi}_x \rangle^c \tag{A.12}$$

Da die Symmetrietransformation (A.8) die Ausdrücke in einander überführt. Es folgt $C_{\psi\chi}(P) = C_{\chi\psi}(P)$, wie zu zeigen beabsichtigt.

Anhang B

Verbundene 1-Platz-Erwartungswerte

Aus der Gleichung (5.17) lassen sich durch Differentiation nach den zugeordneten Quellen die 1-Platz-Erwartungswerte bestimmen. In diesem Anhang sollen nun bei

$$r = \bar{\mu} = 1$$

die 1-Platz-Erwartungswerte tabelliert werden, die für die Graphen der niedrigsten Ordnungen benötigt werden.

Die Bezeichnung $\langle \mathcal{A} \rangle_1^c$ steht für den verbundenen Erwartungswert des Operators \mathcal{A} bezüglich des Maßes Z_1 .

Erwartungswert	graph. Symbol	Term
$\langle \Psi_b \bar{\Psi}_a \rangle_1^c$		$\frac{1}{1 - G_\chi G_\psi} \delta_{ba}$
$\langle \phi \phi^+ \rangle_1^c$		$4b_1 = 1$
$\langle \Psi_b \phi \bar{\Psi}_a \rangle_1^c$		$2b_1 (A_-)_{ba}$
$\langle \Psi_b \phi^+ \bar{\Psi}_a \rangle_1^c$		$2b_1 (A_+)_{ba}$
$\langle \Psi_d \bar{\Psi}_c \Psi_b \bar{\Psi}_a \rangle_1^c$		$b_1 [(A_-)_{dc} (A_+)_{ba} - (A_-)_{da} (A_+)_{bc} + (A_+)_{dc} (A_-)_{ba} - (A_+)_{da} (A_-)_{bc}]$
$\langle \phi \phi^+ \phi \phi^+ \rangle_1^c$		$64b_2 = -1$
$\langle \Psi_b \bar{\Psi}_a \phi \phi^+ \phi \phi^+ \rangle_1^c$		$32b_2 (A_-)_{ba}$
$\langle \Psi_b \bar{\Psi}_a \phi^+ \phi \phi^+ \phi \phi^+ \rangle_1^c$		$32b_2 (A_+)_{ba}$

$\langle \prod_{i=1}^2 (\Psi_{b_i} \bar{\Psi}_{a_i}) \phi \phi \rangle_1^c$		$16b_2[(A_-)_{b_2 a_2} (A_-)_{b_1 a_1} - (A_-)_{b_2 a_1} (A_-)_{b_1 a_2}]$
$\langle \prod_{i=1}^2 (\Psi_{b_i} \bar{\Psi}_{a_i}) \phi \phi^+ \rangle_1^c$		$16b_2 \sum_{\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in S_2} [(-1)^{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{Q}} * (A_-)_{\mathcal{P}(b_1) \mathcal{Q}(a_1)} (A_+)_{\mathcal{P}(b_2) \mathcal{Q}(a_2)}]$
$\langle \prod_{i=1}^2 (\Psi_{b_i} \bar{\Psi}_{a_i}) \phi^+ \phi^+ \rangle_1^c$		$16b_2[(A_+)_{b_2 a_2} (A_+)_{b_1 a_1} - (A_+)_{b_2 a_1} (A_+)_{b_1 a_2}]$
$\langle [\prod_{i=1}^3 (\Psi_{b_i} \bar{\Psi}_{a_i})] \phi \rangle_1^c$		$4b_2 \sum_{\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in S_3} [(-1)^{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{Q}} (A_-)_{\mathcal{P}(b_1) \mathcal{Q}(a_1)} * (A_+)_{\mathcal{P}(b_2) \mathcal{Q}(a_2)} (A_-)_{\mathcal{P}(b_3) \mathcal{Q}(a_3)}]$
$\langle [\prod_{i=1}^3 (\Psi_{b_i} \bar{\Psi}_{a_i})] \phi^+ \rangle_1^c$		$4b_2 \sum_{\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in S_3} [(-1)^{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{Q}} (A_+)_{\mathcal{P}(b_1) \mathcal{Q}(a_1)} * (A_-)_{\mathcal{P}(b_2) \mathcal{Q}(a_2)} (A_+)_{\mathcal{P}(b_3) \mathcal{Q}(a_3)}]$
$\langle \prod_{i=1}^4 (\Psi_{b_i} \bar{\Psi}_{a_i}) \rangle_1^c$		$b_2 \sum_{\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in S_4} [(-1)^{\mathcal{P}} (-1)^{\mathcal{Q}} * (A_-)_{\mathcal{P}(b_1) \mathcal{Q}(a_1)} (A_+)_{\mathcal{P}(b_2) \mathcal{Q}(a_2)} * (A_-)_{\mathcal{P}(b_3) \mathcal{Q}(a_3)} (A_+)_{\mathcal{P}(b_4) \mathcal{Q}(a_4)}]$
$\langle \phi \phi^+ \phi \phi^+ \phi \phi^+ \rangle_1^c$		$2304b_3 = 4$
$\langle \Psi_b \bar{\Psi}_a \phi \phi^+ \phi \phi^+ \phi \phi^+ \rangle_1^c$		$1152b_3(A_-)_{ba}$
$\langle \Psi_b \bar{\Psi}_a \phi^+ \phi \phi^+ \phi \phi^+ \phi \phi^+ \rangle_1^c$		$1152b_3(A_+)_{ba}$

Hierin bezeichnet S_n die Gruppe der Permutationen von n Elementen. Das Symbol $(-1)^{\mathcal{P}}$ steht für das Vorzeichen der Permutation \mathcal{P} . Es ist zu beachten, daß die Permutationen die Indizes der Fermionen und der Antifermionen jeweils nur untereinander vertauschen.

Anhang C

Rücktransformation der fermionischen Suszeptibilitäten aus der AB -Basis in die $\chi\psi$ -Basis

In Abschnitt 2.3 wurde die AB -Basis vorgestellt, in der die fermionische Bindungsmatrix $M_{\hat{\mu}}$ diagonal ist. Werden in dieser Basis die irreduziblen Kerne der Suszeptibilitäten entwickelt, so ergibt sich die Frage, wie die einzelnen Suszeptibilitäten bei der Rücktransformation behandelt werden müssen und wie die dazugehörigen Matrixelemente auf einfache Weise aus den Formeln (8.6)–(8.8) abgelesen werden können. Aus

$$A = \begin{pmatrix} P_L & P_R \\ P_R & P_L \end{pmatrix} \quad \bar{A} := \gamma_4 A^+ \gamma_4 = \begin{pmatrix} P_R & P_L \\ P_L & P_R \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

ergibt sich

$$A \cdot A = \bar{A} \cdot \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Des Weiteren gilt:

$$\gamma_\mu \cdot A = \bar{A} \cdot \gamma_\mu \quad (\text{C.3})$$

Aus der Forderung nach Invarianz der Wirkung S unter dieser Transformation ergibt sich, daß die Matrix $M_{\hat{\mu}}$ wie folgt transformiert wird:

$$(M_{\hat{\mu}})_{\psi\chi\text{-Basis}} = \bar{A} \cdot (M_{\hat{\mu}})_{AB\text{-Basis}} \cdot A \quad (\text{C.4})$$

Die Matrizen $\chi_2^\Psi(P)$ und $\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}$ haben das gleiche Transformationsverhalten. Es gilt:

$$\begin{aligned} (\chi_2^\Psi(P))_{\psi\chi\text{-Basis}} &= \sum_x \left[e^{-iP_\mu x_\mu} \langle \Psi_x \bar{\Psi}_0 \rangle_{\psi\chi\text{-Basis}}^c \right] \\ &= \sum_x \left[e^{-iP_\mu x_\mu} AA \langle \Psi_x \bar{\Psi}_0 \rangle_{\psi\chi\text{-Basis}}^c \bar{A} \bar{A} \right] \\ &= A \sum_x \left[e^{-iP_\mu x_\mu} \langle \Psi_x \bar{\Psi}_0 \rangle_{AB\text{-Basis}}^c \right] A \\ &= A \cdot (\chi_2^\Psi(P))_{AB\text{-Basis}} \cdot \bar{A} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Entsprechend gilt:

$$\left(\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}\right)_{\psi\chi-\text{Basis}} = A \cdot \left(\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}\right)_{AB-\text{Basis}} \cdot \bar{A} \quad (\text{C.6})$$

Die Suszeptibilität $\mu_2^\Psi(P)$ besitzt ein anderes Transformationsverhalten, da ihre Definition eine γ_μ -Matrix enthält.

$$\begin{aligned} \left(\mu_2^\Psi(P)\right)_{\psi\chi-\text{Basis}} &= \sum_x \left[\sum_{\nu=1}^4 \left(\gamma_\nu x_\nu \frac{1}{\cos(P_\nu)} \right) e^{-iP_\mu x_\mu} \langle \Psi_x \bar{\Psi}_0 \rangle_{\psi\chi-\text{Basis}}^c \right] \\ &= \sum_x \left[\sum_{\nu=1}^4 \left(\gamma_\nu x_\nu \frac{1}{\cos(P_\nu)} \right) e^{-iP_\mu x_\mu} A \langle \Psi_x \bar{\Psi}_0 \rangle_{AB-\text{Basis}}^c \bar{A} \right] \\ &= \bar{A} \cdot \left(\mu_2^\Psi(P)\right)_{AB-\text{Basis}} \cdot \bar{A} \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Dabei wird Gleichung (C.3) angewandt. Die irreduziblen Kerne der Suszeptibilitäten transformieren sich wie die zugeordneten Suszeptibilitäten.

In der AB -Basis sind die Matrizen $M_{\hat{\mu}}$ und $\chi_2^\psi(P)$ diagonal bezüglich des 2-dimensionalen Raums, der von ψ_A und ψ_B aufgespannt wird. Da die γ_μ -Matrizen durch die Summation $\sum_{\hat{\mu}}$ herausfallen, ist die Matrix $(\sum_{\hat{\mu}} M_{\hat{\mu}} \cdot \chi_2^\psi)$ in der AB -Basis proportional zur Einheitsmatrix im Raum der 8-komponentigen Bi-Spinoren. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\hat{\mu}} (M_{\hat{\mu}})_{\psi\chi-\text{Basis}} \cdot (\chi_2^\Psi)_{\psi\chi-\text{Basis}} \right) \\ &= \left(\sum_{\hat{\mu}} \bar{A} \cdot (M_{\hat{\mu}})_{AB-\text{Basis}} \cdot AA \cdot (\chi_2^\Psi)_{AB-\text{Basis}} \cdot \bar{A} \right) \\ &= \bar{A} \cdot \left(\sum_{\hat{\mu}} (M_{\hat{\mu}})_{AB-\text{Basis}} \cdot (\chi_2^\Psi)_{AB-\text{Basis}} \right) \cdot \bar{A} \\ &= \left(\sum_{\hat{\mu}} (M_{\hat{\mu}})_{AB-\text{Basis}} \cdot (\chi_2^\Psi)_{AB-\text{Basis}} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Die Matrix $(\sum_{\hat{\mu}} M_{\hat{\mu}} \cdot \chi_2^\Psi)$ transformiert sich somit trivial von der einen in die andere Basis und ist in beiden Basen proportional zur 8-dimensionalen Einheitsmatrix. In der Rechnung wurde die Diagonalstruktur der Matrix $(\sum_{\hat{\mu}} M_{\hat{\mu}} \cdot \chi_2^\Psi)$ in der AB -Basis ausgenutzt.

Als Folge sind in den Formeln (8.6) – (8.8) die fermionischen geometrischen Reihen ebenfalls diagonal, da sie nach Kapitel 8.2 aus Termen der Art

$$\prod_q \left(\sum_{\hat{\mu}_i} M_{\hat{\mu}_i} \cdot \overset{\circ}{\chi}_2^{\Psi} \right)$$

aufgebaut werden.

Diese Betrachtung zeigt, daß die Matrixstruktur der Suszeptibilitäten χ_2^Ψ und $\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}$ aus der Matrixstruktur des zugeordneten irreduziblen Kerns abgelesen werden kann. Die Matrixelemente der Suszeptibilitäten ergeben sich durch skalare Multiplikation mit der jeweils benötigten Potenz von $[1 - 2K \sum_{\nu=1}^4 \cos(P_\nu) \overset{\circ}{\chi}_2^{\psi\chi}(P)]^{-1}$ aus den entsprechenden Matrixelementen des zugordneten irreduziblen Kerns in der gleichen Basis.¹

¹Der Term $\overset{\circ}{\chi}_2^{\psi\chi}$ ist ein Matrixelement von $\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi$, das in der $\psi\chi$ -Basis entsprechend Gleichung (3.27) bestimmt wird.

Der Fall der Suszeptibilität μ_2^Ψ verdient noch eine genauere Betrachtung. Auch hier lassen sich die Matrizen A bzw. \bar{A} an den geometrischen Reihen vorbeiziehen. Die Transformation des Terms $(\overset{\circ}{\mu}_2^\Psi(P) + 8K \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \cdot \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P))$ von der AB -Basis in die $\psi\chi$ -Basis ist noch nicht beschrieben. Dieser Term ergibt sich nach Abschnitt 8.2.4 aus dem Term $(\overset{\circ}{\mu}_2^\Psi + \sum_\nu \gamma_\nu \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi M_\nu \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi)$. Aus dem Transformationsverhalten von $\overset{\circ}{\mu}_2^\Psi$ nach Gleichung (C.7) ergibt sich mit Gleichung (C.3):

$$\begin{aligned} & \left((\overset{\circ}{\mu}_2^\Psi)_{\psi\chi\text{-Basis}} + \sum_\nu \gamma_\nu (\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi)_{\psi\chi\text{-Basis}} (M_\nu)_{\psi\chi\text{-Basis}} (\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi)_{\psi\chi\text{-Basis}} \right) \\ &= \left(\bar{A} (\overset{\circ}{\mu}_2^\Psi)_{AB\text{-Basis}} \bar{A} + \sum_\nu \gamma_\nu A (\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi)_{AB\text{-Basis}} \bar{A} \bar{A} (M_\nu)_{AB\text{-Basis}} A A (\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi)_{AB\text{-Basis}} \bar{A} \right) \\ &= \bar{A} \cdot \left((\overset{\circ}{\mu}_2^\Psi)_{AB\text{-Basis}} + \sum_\nu \gamma_\nu (\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi)_{AB\text{-Basis}} (M_\nu)_{AB\text{-Basis}} (\overset{\circ}{\chi}_2^\Psi)_{AB\text{-Basis}} \right) \cdot \bar{A} \quad (\text{C.9}) \end{aligned}$$

Dies führt auf das schon bestimmte Transformationsverhalten für μ_2^Ψ .

Die Matrix $(8K \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \cdot \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P))$ ist ebenfalls in beiden Basen proportional zu der 8-dimensionalen Einheitsmatrix und transformiert sich trivial beim Basiswechsel. Die Matrixelemente von μ_2^Ψ können ebenso einfach aus denen von $(\overset{\circ}{\mu}_2^\Psi(P) + 8K \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P) \cdot \overset{\circ}{\chi}_2^\Psi(P))$ abgelesen werden wie im Fall der anderen Suszeptibilitäten. Dabei ist mit $[1 - 2K \sum_{\nu=1}^4 \cos(P_\nu) \overset{\circ}{\chi}_2^{\psi\chi}(P)]^{-2}$ zu multiplizieren.

Anhang D

Tabelle der Graphen

In diesem Abschnitt sollen die im Rahmen dieser Arbeit ausgewerteten irreduziblen Graphen angegeben werden. Sie sind nach ihrer Ordnung in \mathcal{T} geordnet.

Bei der Auswertung von Graphen mit fermionischen Linien sind die folgenden Matrixformeln hilfreich.

$$\text{Tr} \left(A_+ M_{\hat{\mu}} A_- M_{(-\hat{\mu})} \right) = -\frac{8 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2 \quad (\text{D.1})$$

In der AB -Basis gilt:

$$A_- M_{\hat{\mu}} A_+ = \frac{4}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_\psi G_\chi \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_R G_\psi^2 + P_L G_\chi^2 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{D.2})$$

$$A_+ M_{\hat{\mu}} A_- = \frac{4}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} G_\psi G_\chi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} P_L G_\psi^2 + P_R G_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{D.3})$$

An den Graphen werden entsprechend Punkt 3 in Abschnitt 7.3.1 einige innere Linien mit $\hat{\mu}_i$ bezeichnet. Diese Bezeichnungen sind an den Graphen angegeben. Sind innere Graphenlinien nicht mit einem derartigen Index bezeichnet, so sind sie entweder durch die $\hat{\mu}_i$'s festgelegt oder aber die Summation über deren Richtungen ist in Abhängigkeit von den $\hat{\mu}_i$'s schon ausgeführt.

D.1 Eine einlaufende und eine auslaufende fermionische Linie

In diesem Abschnitt werden alle irreduziblen Graphen mit einer einlaufenden und einer auslaufenden fermionischen Linie bis zur 4. Ordnung in \mathcal{T} vorgestellt. Diese Graphen werden zur Entwicklung der Suszeptibilitäten $\chi_2^\Psi(P)$ und $\mu_2^\Psi(P)$ benötigt. Die Terme $R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p)$ werden in der AB -Basis angegeben.

Nr.	Graph \mathcal{G}	$S_{\mathcal{G}}$	$R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p)$
1.		1	$\frac{1}{1 - G_\chi G_\psi}$
2.		1	$\frac{\kappa \cdot K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} G_\psi G_\chi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} P_L G_\psi^2 + P_R G_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$

3.		1	$\frac{\kappa \cdot K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_\psi G_\chi \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_R G_\psi^2 + P_L G_\chi^2 \end{pmatrix} \right]$
4.		1/2	$\begin{cases} \frac{4K^3 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} (G_\psi - G_\chi)^2 \left[\begin{pmatrix} G_\psi G_\chi & 0 \\ 0 & G_\psi G_\chi \end{pmatrix} \right. \\ \left. + \gamma_\mu \begin{pmatrix} P_L G_\psi^2 + P_R G_\chi^2 & 0 \\ 0 & P_R G_\psi^2 + P_L G_\chi^2 \end{pmatrix} \right] \end{cases}$
5.		1	$\begin{aligned} & \frac{2\kappa^2 K^2}{(1 - G_\chi G_\psi)^3} \left[\gamma_{\mu_2} \begin{pmatrix} P_L G_\psi^2 + P_R G_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (1 - \delta_{\mu_1(-\mu_2)} - \delta_{\mu_1(\mu_2)}) \right. \\ & \left. + \left(\begin{pmatrix} G_\psi G_\chi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_{\mu_1} \begin{pmatrix} P_L G_\psi^2 + P_R G_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) (1 - \delta_{\mu_1(-\mu_2)}) \right] \end{aligned}$
6.		1	$\begin{aligned} & \frac{2\kappa^2 K^2}{(1 - G_\chi G_\psi)^3} \left[\gamma_{\mu_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_R G_\psi^2 + P_L G_\chi^2 \end{pmatrix} (1 - \delta_{\mu_1(-\mu_2)} - \delta_{\mu_1(\mu_2)}) \right. \\ & \left. + \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_\psi G_\chi \end{pmatrix} + \gamma_{\mu_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_R G_\psi^2 + P_L G_\chi^2 \end{pmatrix} \right) (1 - \delta_{\mu_1(-\mu_2)}) \right] \end{aligned}$
7.		1	$\frac{21\kappa^3 K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} G_\psi G_\chi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} P_L G_\psi^2 + P_R G_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$
8.		1	$\frac{21\kappa^3 K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_\psi G_\chi \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_R G_\psi^2 + P_L G_\chi^2 \end{pmatrix} \right]$
9.		1	$\frac{12\kappa K^3}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} \left[\gamma_\mu \begin{pmatrix} P_L G_\psi^2 + P_R G_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$
10.		1	$\frac{12\kappa K^3}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} \left[\gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_R G_\psi^2 + P_L G_\chi^2 \end{pmatrix} \right]$
11.		1	$\frac{96 K^4}{(1 - G_\chi G_\psi)^5} \begin{pmatrix} G_\psi G_\chi & 0 \\ 0 & G_\psi G_\chi \end{pmatrix}$
12.		1/2	$\frac{\kappa^3 K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} G_\psi G_\chi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} P_L G_\psi^2 + P_R G_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$
13.		1/2	$\frac{\kappa^3 K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_\psi G_\chi \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_R G_\psi^2 + P_L G_\chi^2 \end{pmatrix} \right]$

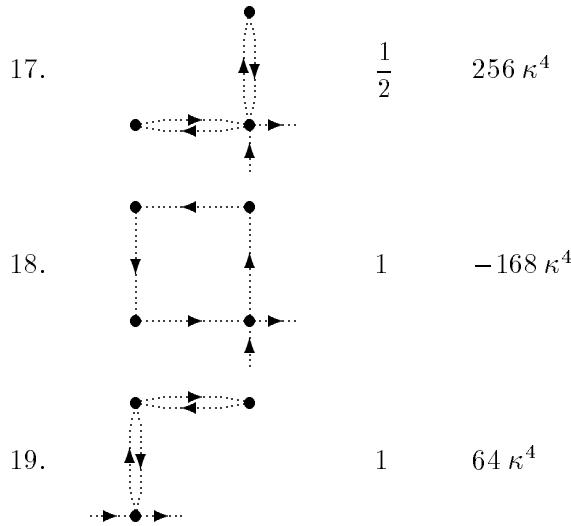
14.		$1 - \frac{8\kappa^3 K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} G_\psi G_\chi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} P_L G_\psi^2 + P_R G_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$
15.		$1 - \frac{8\kappa^3 K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_\psi G_\chi \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_R G_\psi^2 + P_L G_\chi^2 \end{pmatrix} \right]$
16.		$1 - \frac{8\kappa^3 K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} G_\psi G_\chi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} P_L G_\psi^2 + P_R G_\chi^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$
17.		$1 - \frac{8\kappa^3 K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_\psi G_\chi \end{pmatrix} + \gamma_\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_R G_\psi^2 + P_L G_\chi^2 \end{pmatrix} \right]$

D.2 Eine einlaufende und eine auslaufende bosonische Linie

In diesem Abschnitt werden die irreduziblen Graphen bis zur 4. Ordnung in \mathcal{T} angegeben, die zu χ_2^ϕ und μ_2^ϕ beitragen.

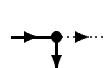
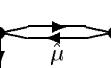
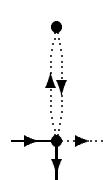
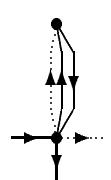
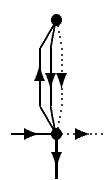
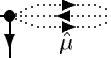
Nr.	Graph \mathcal{G}	$S_{\mathcal{G}}$	$R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p)$
1.		1	1
2.		1	$\frac{2 K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$
3.		1	$-8\kappa^2$
4.		1	$-\frac{16 \kappa K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$
5.		1	$-\frac{16 \kappa K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$
6.		$\frac{1}{2}$	κ^3

7.		$\frac{1}{4}$	$-\frac{128 K^4 \cdot (n_F)^2}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} \cdot (G_\psi - G_\chi)^4$
8.		1	$\frac{4 K^4 \cdot (n_F)^2}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} (G_\psi - G_\chi)^4$
9.		1	$\frac{K^4 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} \left[8(G_\psi - G_\chi)^2 \delta_{\mu_1 \mu_2} + 4(G_\psi^2 + G_\chi^2 + (G_\psi - G_\chi)^2) (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2} - \delta_{\mu_1 (-\mu_2)}) \right]$
10.		1	$\frac{24 K^4 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} (G_\chi^2 + G_\psi^2)$
11.		1	$\frac{24 K^4 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} (G_\chi^2 + G_\psi^2)$
12.		1	$\frac{2 \kappa^2 K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$
13.		$\frac{1}{2}$	$\frac{2 \kappa^2 K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$
14.		1	$-\frac{16 \kappa^2 K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$
15.		1	$-\frac{16 \kappa^2 K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$
16.		$\frac{1}{4}$	$-32 \kappa^4$



D.3 Eine einlaufende und eine auslaufende fermionische Linie, eine auslaufende bosonische Linie

Die Graphen werden bis zur 3. Ordnung in \mathcal{T} angegeben, und auch hier werden alle Angaben bezüglich der AB -Basis gemacht.

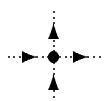
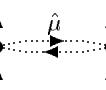
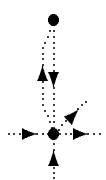
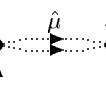
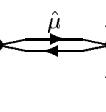
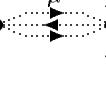
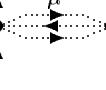
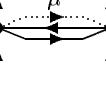
Nr.	Graph \mathcal{G}	$S_{\mathcal{G}}$	$R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p)$
1.		1	$-\frac{1}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_L G_{\psi} + P_R G_{\chi} & 0 \end{pmatrix}$
2.		1	$-\frac{2 K^2 \cdot n_F}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^3} (G_{\psi} - G_{\chi})^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_L G_{\psi} + P_R G_{\chi} & 0 \end{pmatrix}$
3.		1	$\frac{8 \kappa^2}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_L G_{\psi} + P_R G_{\chi} & 0 \end{pmatrix}$
4.		1	$\frac{8 \kappa K^2}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^3} \left[2 (G_{\psi} - G_{\chi})^2 \cdot n_F \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_L G_{\psi} + P_R G_{\chi} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (P_L G_{\psi}^2 - P_R G_{\chi}^2)(G_{\chi} - G_{\psi}) & 0 \end{pmatrix} \right]$
5.		1	$\frac{16 \kappa K^2 \cdot n_F}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^3} (G_{\psi} - G_{\chi})^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_L G_{\psi} + P_R G_{\chi} & 0 \end{pmatrix}$
6.		$\frac{1}{2}$	$-\frac{\kappa^3}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_L G_{\psi} + P_R G_{\chi} & 0 \end{pmatrix}$

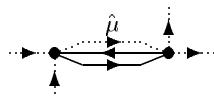
Die Graphen dieses Abschnitts werden zur Bestimmung der renormierten Yukawakopplung unter Verwendung der Suszeptibilität $\chi_3^{\Psi\chi\Psi}$ benötigt. Sie besitzt die Gestalt einer diagonalen 8×8 -Matrix. Es gibt darin nur zwei Arten unabhängiger Einträge. Beide lassen sich mit Hilfe der Graphen mit einer auslaufenden bosonischen Linie, einer einlaufenden und einer auslaufenden fermionischen Linie bestimmen. Die entsprechenden Graphen mit einer einlaufenden bosonischen Linie brauchen nicht ausgewertet zu werden, da aus ihnen keine neue Information gewonnen werden kann.

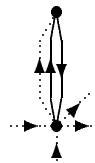
D.4 Zwei einlaufende und zwei auslaufende bosonische Linien

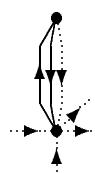
Die irreduziblen Graphen zur Bestimmung der Suszeptibilität χ_4^ϕ werden in diesem Anhang bis zur 3. Ordnung in \mathcal{T} angegeben.

Nr.	Graph \mathcal{G}	$S_{\mathcal{G}}$	$R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p)$
-----	---------------------	-------------------	--

1.		$\frac{1}{4}$	-1
2.		$\frac{1}{2}$	κ^2
3.		$\frac{1}{4}$	$32 \kappa^2$
4.		$\frac{1}{8}$	κ^2
5.		$\frac{1}{2}$	$-\frac{2 K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$
6.		$\frac{1}{2}$	$-\frac{2 K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$
7.		$\frac{1}{4}$	$-4 \kappa^3$
8.		$\frac{1}{4}$	$-4 \kappa^3$
9.		1	$\frac{2 \kappa K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$

10.  $\frac{1}{4}$ $\frac{2 \kappa K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$

11.  $\frac{1}{4}$ $\frac{64 \kappa K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$

12.  $\frac{1}{4}$ $\frac{64 \kappa K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2$

Anhang E

Taylorreihe für die irreduziblen Kerne

In diesem Abschnitt werden die Taylorentwicklungen der irreduziblen Kerne angegeben, die sich mit den Abschnitten 7.3.1 und 7.3.2 aus den Faktoren $S_{\mathcal{G}}$ und $R_{\mathcal{G}}(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_p)$ des Anhangs D gewinnen lassen.

Bei den P abhängigen Größen wird mit n_{π} die Anzahl der Komponenten P_{μ} mit $P_{\mu} = \pi$ bezeichnet. Alle Terme einer Zeile gehören der gleichen Ordnung in \mathcal{T} an. Existieren mehr Terme einer Ordnung, als in eine Zeile passen, so wird die folgende Zeile eingerückt.

Taylorreihe für $\overset{\circ}{\chi}_2^{\psi\chi}(P)$

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\chi}_2^{\psi\chi}(P) &= \frac{1}{1 - G_{\chi}G_{\psi}} \\
 &+ (8 - 4n_{\pi}) \frac{\kappa \cdot K}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^2} G_{\chi}G_{\psi} \\
 &+ (8 - 4n_{\pi}) \frac{2K^3 \cdot n_F}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^4} (G_{\psi} - G_{\chi})^2 G_{\chi}G_{\psi} \\
 &- \frac{96K^4}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^5} G_{\chi}G_{\psi} + (2n_{\pi}^2 - 8n_{\pi} + 7) \frac{16\kappa^2 \cdot K^2}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^3} G_{\chi}G_{\psi} \\
 &+ (4 - 2n_{\pi}) \frac{11\kappa^3 \cdot K}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^2} G_{\chi}G_{\psi}
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

Taylorreihe für $\overset{\circ}{\mu}_2^{\Psi}(P)$

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\mu}_2^{\psi}(P) &= \frac{8\kappa \cdot K}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^2} G_{\chi}^2 \\
 &+ \frac{16K^3 \cdot n_F}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^4} (G_{\psi} - G_{\chi})^2 G_{\chi}^2 \\
 &+ \frac{96\kappa K^3}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^4} G_{\chi}^2 + (56 - 28n_{\pi}) \frac{4\kappa^2 \cdot K^2}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^3} G_{\chi}^2 \\
 &+ \frac{44\kappa^3 \cdot K}{(1 - G_{\chi}G_{\psi})^2} G_{\chi}^2
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\mu}_2^\chi(P) = & \frac{8\kappa \cdot K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} G_\psi^2 \\
& + \frac{16K^3 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} (G_\psi - G_\chi)^2 G_\psi^2 \\
& + \frac{96\kappa K^3}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} G_\psi^2 + (56 - 28n_\pi) \frac{4\kappa^2 \cdot K^2}{(1 - G_\chi G_\psi)^3} G_\psi^2 \\
& + \frac{44\kappa^3 \cdot K}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} G_\psi^2
\end{aligned} \tag{E.3}$$

Taylorreihe für $\overset{\circ}{\chi}_2^\phi$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\chi}_2^\phi = & \frac{1}{2} \\
& - 4\kappa^2 + \frac{8K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2 \\
& + 2\kappa^3 - \frac{16\kappa \cdot K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2 \\
& + 8\kappa^4 - \frac{116\kappa^2 \cdot K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2 \\
& + \frac{K^4 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} \left[112 \cdot n_F (G_\psi - G_\chi)^4 + 128 (G_\psi - G_\chi)^2 + 288 (G_\psi^2 + G_\chi^2) \right]
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Taylorreihe für $\overset{\circ}{\mu}_2^\phi$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\mu}_2^\phi = & \frac{8K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2 \\
& + 2\kappa^3 \\
& - \frac{116\kappa^2 \cdot K^2 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2 \\
& + \frac{K^4 \cdot n_F}{(1 - G_\chi G_\psi)^4} \left[256 \cdot n_F (G_\psi - G_\chi)^4 + 320 (G_\psi - G_\chi)^2 + 384 (G_\psi^2 + G_\chi^2) \right]
\end{aligned} \tag{E.5}$$

Taylorreihe für $\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}$

Die Matrix $\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}$ wird hier in der $\psi\chi$ -Basis angegeben. Der Term $(\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi})_{22}$ ist in dieser Basis identisch mit dem Vorfaktor von P_R in der linken oberen Ecke von $\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi}$, der Term $(\tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi})_{33}$ entspricht dem Vorfaktor von P_L in der rechten unteren Ecke.

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_3^{\Psi\phi\Psi} = & -\frac{1}{(1-G_\chi G_\psi)} \begin{pmatrix} P_R G_\chi & 0 \\ 0 & P_L G_\psi \end{pmatrix} \\ & + \left[\frac{8 \kappa^2}{(1-G_\chi G_\psi)} - \frac{16 K^2 \cdot n_F}{(1-G_\chi G_\psi)^3} (G_\psi - G_\chi)^2 \right] \begin{pmatrix} P_R G_\chi & 0 \\ 0 & P_L G_\psi \end{pmatrix} \\ & - \frac{4 \kappa^3}{(1-G_\chi G_\psi)} \begin{pmatrix} P_R G_\chi & 0 \\ 0 & P_L G_\psi \end{pmatrix} \\ & + \frac{8 \kappa \cdot K^2}{(1-G_\chi G_\psi)^3} (G_\psi - G_\chi) \begin{pmatrix} P_R G_\chi^2 & 0 \\ 0 & -P_L G_\psi^2 \end{pmatrix} \\ & + \frac{32 \kappa \cdot K^2 \cdot n_F}{(1-G_\chi G_\psi)^3} (G_\psi - G_\chi)^2 \begin{pmatrix} P_R G_\chi & 0 \\ 0 & P_L G_\psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

Taylorreihe für $\tilde{\chi}_4^\phi$

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_4^\phi = & -\frac{3}{8} \\ & + \frac{39}{2} \kappa^2 - \frac{24 K^2 \cdot n_F}{(1-G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2 \\ & - 24 \kappa^3 + \frac{78 \kappa \cdot K^2 \cdot n_F}{(1-G_\chi G_\psi)^2} (G_\psi - G_\chi)^2 \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Literaturverzeichnis

- [1] M. Wortis: „Linked Cluster Expansion“,
in „Phase Transition and Critical Phenomena“ vol. 3
eds. C. Domb and M. S. Green (Academic Press, London 1974)
- [2] H. J. Rothe: „An Introduction to Lattice Gauge Theories“,
in „Path Integral Method, Lattice Gauge Theory and Critical Phenomena“
ed. A. Shaukat, Proceedings of Autumn College on Techniques in Many-Body Problems, Lahore, Pakistan, Nov. 1987 (World Scientific Publishing Co., Singapore 1989)
- [3] M. Lüscher, P. Weisz, Nucl. Phys. B290(1987) 25
- [4] M. Lüscher, P. Weisz, Nucl. Phys. B300(1988) 325
- [5] C.E.M. Wagner, DESY preprint 89-083
- [6] L. Lin, J.P. Ma, I. Montvay, Z. Phys. C48(1990) 355
- [7] K. Farakos, G. Koutsoumbas, L. Lin, J. P. Ma, I. Montvay, G. Münster,
Nucl. Phys. B350(1991) 474
- [8] L. Lin, I. Montvay, G. Münster, H. Wittig, Nucl. Phys. B355(1991) 511
- [9] L. Lin, I. Montvay, H. Wittig, Physics Letters B264(1991) 407
- [10] L. Lin, I. Montvay, H. Wittig, G. Münster,
Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 20(1991) 601
- [11] K. Farakos, G. Koutsoumbas, Nucl. Phys. B366(1991) 665
- [12] L. Lin, H. Wittig, Z. Phys. C54(1992) 331
- [13] C. Frick, T. Trappenberg, L. Lin, G. Münster, M. Plagge, I. Montvay, H. Wittig,
DESY preprint 92-111
- [14] H. Wittig, Doktorarbeit, Universität Hamburg, 1992
- [15] L. Lin, private Mitteilung

Hiermit versichere ich, die Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt zu haben.

Münster, im Januar 1993