

Otfried Gühne

Anwendungen von
Renormierungsgruppentransformationen auf
Reaktions-Diffusions-Gleichungen und skalare
Feldtheorien



Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Im vorliegenden Exemplar wurden, verglichen mit dem im Prüfungssekretariat abgegebenen Exemplar, einige Tippfehler sowie der Beweis von Gleichung (5.70) korrigiert.

Anwendungen von Renormierungsgruppentransformationen auf Reaktions-Diffusions-Gleichungen und skalare Feldtheorien

als Diplomarbeit im Januar 2001 vorgelegt von

Otfried Gühne



Institut für Theoretische Physik
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

„Mathemata mathematicis scribuntur.“
„Mathematik wird für Mathematiker geschrieben.“

Nicolaus Copernicus

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
I Partielle Differentialgleichungen	7
0.1 Partielle Differentialgleichungen	9
0.2 Die Methode der Renormierungsgruppe	10
1 Der Gaußsche Fixpunkt	15
1.1 Allgemeine Begriffe	15
1.1.1 Die Wärmeleitungsgleichung und ihre Lösung	15
1.1.2 Die Sobolew-Norm	17
1.1.3 Klassifizierung der Nichtlinearitäten	19
1.2 Der irrelevante Fall	20
1.3 Der marginale Fall	31
2 Bildung von Fronten	33
2.1 Der Fall $a = 0$	34
2.2 Der Fall $a \neq 0$	36
2.3 Der Restterm ψ	37
2.4 Die Fixpunkte v^* und f^*	43
2.5 Das Hauptresultat für Fronten	46
2.5.1 Eine neue Norm	47
2.5.2 Das Hauptresultat	49
2.6 Zusammenfassung und Ausblick	65

II	Renormierungsinvariante Trajektorien	67
3	A-Kerne	69
3.1	Elementare Operatoren	70
3.1.1	Allgemeines	70
3.1.2	Der Blockmittelwertoperator B_L	71
3.1.3	Der Dilatationsoperator S_L	73
3.1.4	Der Blockmittelwertoperator C_L	74
3.2	Kovarianzen	75
3.2.1	Die Kovarianz v	75
3.2.2	Die geblockte Kovarianz u	76
3.2.3	Eigenschaften von u und v	78
3.3	A und Γ	79
3.3.1	Der A -Kern A	79
3.3.2	Eigenschaften von A	81
3.3.3	Die Fluktuationskovarianz Γ	82
3.3.4	Eigenschaften von Γ	82
3.4	Der Fixpunkt v_*	84
3.4.1	Bestimmung von v_*	84
3.4.2	Die Operatoren A_* und Γ_*	85
3.5	Der A -Kern A_*^∞	86
3.6	Ein Urbild von $A_*^{\infty\dagger}$	89
3.7	Kontinuumsoperatoren aus Gitteroperatoren	91
3.7.1	Eine Hilfsfunktion $\Omega(q, a)$	91
3.7.2	Die Kontinuumskovarianz v_*^∞	92
3.7.3	Die Kontinuumskovarianz Γ_*^∞	97
3.7.4	Summationen	102
3.8	Weitere Arbeiten	104
4	Die ϕ^4-Trajektorie	105
4.1	Grundbegriffe	106
4.1.1	Quantenfeldtheorie auf dem Gitter	106
4.1.2	Die Blockspinrenormierungsgruppe	107
4.2	Gitter-Kontinuums-Korrespondenz	108
4.2.1	Die Kontinuumstheorie	108

4.2.2	Übertragung der Renormierungsgruppe	110
4.3	Problemstellung und Beweisstruktur	112
4.3.1	Das Problem	112
4.3.2	Beweisstruktur	114
4.4	Die β -Funktion	114
4.4.1	Normalordnung und Eigenvektoren	115
4.4.2	Gleichungen für die Koeffizienten der β -Funktion . . .	116
4.4.3	Folgerungen aus diesen Gleichungen	118
4.5	Differenzengleichungen I	120
4.6	Differenzengleichungen II	125
4.6.1	$\sum_i p_i = 0$	126
4.6.2	$\sum_i p_i \neq 0$	126
4.6.3	Abschätzungen	127
4.7	Untersuchung von $K^{(n)}$	129
4.8	$D = 3$	135
4.8.1	Die Massenresonanz	136
4.8.2	Zweite Ordnung	137
4.8.3	Der $g^2 \log g$ -Zusatzterm	137
4.8.4	g -log g -Entwicklung	138
4.8.5	Differenzengleichungen	139
4.8.6	Abschätzungen	140
4.9	$D = 4$	140
4.10	Zusammenfassung und Ausblick	141
5	Anhang	143
5.1	Fouriertransformation	143
5.1.1	Fouriertransformation im Kontinuum	143
5.1.2	Fouriertransformation auf dem Gitter	144
5.1.3	Fouriertransformation und Gittertranslationsinvarianz .	144
5.1.4	Faltung reduzierter Kerne	145
5.2	Exponentieller Abfall	146
5.2.1	Der eindimensionale Fall I: $x \in \Lambda(a) \subset \mathbb{R}$	146
5.2.2	Der eindimensionale Fall II: $x \in \mathbb{R}$	147
5.2.3	Der mehrdimensionale Fall I: $x \in \mathbb{R}^D$	149

5.2.4	Der mehrdimensionale Fall II: $x \in \Lambda(a) \subset \mathbb{R}^D$	151
5.3	Die Mehlersche Formel	151
5.4	Die L^p -Räume	153
5.5	Normalordnung	154
5.6	Gaußsche Maße	155
5.7	Kumulanten	155
5.8	Einige Formeln	156
5.8.1	Beweis von (1.46)	156
5.8.2	Die erste Transformationsformel	156
5.8.3	Die zweite Transformationsformel	157
5.8.4	Normalordnungsformeln	157
5.8.5	Die Fusionsformel	158
5.8.6	Summe zweier Kovarianzen	158
5.8.7	Eine Kumulantenformel	159
5.8.8	Die Replica-Formel	159
5.9	Zweite Ordnung	160
Literaturverzeichnis		163
Danksagung		167

Einleitung

Im Jahr 1982 bekam der Amerikaner Kenneth G. Wilson den Nobelpreis für Physik. Er erhielt ihn als Anerkennung „für seine Theorie der kritischen Erscheinungen bei Phasenübergängen“. Gewürdigt wurden damit seine Beiträge zur statistischen Physik, die unter dem Begriff „Renormierungsgruppe“ zusammengefaßt werden. Die Methode der Renormierungsgruppe hat sich in den letzten dreißig Jahren in der Physik als sehr fruchtbar erwiesen.

Aus der Untersuchung statischer Systeme ist das Phänomen der Universalität bekannt. Dabei gehören Theorien mit unterschiedlicher mikroskopischer Wechselwirkung derselben Universalitätsklasse an und haben dieselben kritischen Exponenten. Die Zugehörigkeit zu einer Universalitätsklasse hängt nur von den mikroskopischen Freiheitsgraden, der Symmetrie und der Dimension des Systems ab.

Renormierungsgruppentransformationen sind Skalentransformationen: Kurzweilige Fluktuationen werden ausintegriert und die Theorie wird so auf eine gröbere Theorie abgebildet. Die Zugehörigkeit zu einer bestimmten Universalitätsklasse entspricht der Zugehörigkeit zu einem Fixpunkt der Renormierungsgruppentransformation. Das kritische Verhalten wird durch diesen Fixpunkt bestimmt.

Aber nicht nur in der statistischen Physik ist die Renormierungsgruppe von Bedeutung. In dieser Arbeit werden Renormierungsgruppentransformationen in zwei verschiedenen Kontexten untersucht.

Der erste Teil der Arbeit beschäftigt sich mit partiellen Differentialgleichungen. Dabei werden speziell Gleichungen von Reaktions-Diffusions-Systemen betrachtet. Für die Lösungen dieser Gleichungen kann eine Art Renormierungsgruppentransformation definiert werden. Fixpunkte unter dieser Transformation entsprechen einer möglichen Asymptotik der Lösung.

Im ersten Kapitel wird mit dieser Methode die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung untersucht. Es wird der Fall betrachtet, daß die Anfangswertfunktion im Unendlichen verschwindet. Für große Klassen von Nichtlinearitäten kann gezeigt werden, daß sich die Lösungen für große Zeiten wie die Lösung

der linearen Wärmeleitungsgleichung verhalten.

Im zweiten Kapitel wird die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung für Anfangswerte, die nicht im Unendlichen abfallen, betrachtet. Dadurch bilden sich Fronten. Auch hier kann gezeigt werden, daß die Lösungen gegen eine Grenzfunktion konvergieren. Diese Grenzfunktion unterscheidet sich jedoch leicht von der Lösung der linearen Wärmeleitungsgleichung.

Der erste Teil der Arbeit basiert im wesentlichen auf einer Veröffentlichung von J. Bricmont, A. Kupiainen und G. Lin [BKL94]. Er schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

Im zweiten Teil der Arbeit werden Renormierungsgruppentransformationen an einer skalaren Feldtheorie auf dem Gitter untersucht. Ziel ist es dabei, ein Potential zu bestimmen, das forminvariant unter der Renormierungsgruppe ist. So ein Potential definiert eine Trajektorie im Raum der Theorien; da sie im vorliegenden Fall einen ϕ^4 -Wechselwirkungsterm enthält, heißt sie ϕ^4 -Trajektorie. Der benutzte Zugang hat den Vorteil, daß allein aus dem Prinzip der Renormierungsinvarianz des gesuchte Potential schon vollständig bestimmt ist.

Im dritten Kapitel werden mathematische Vorarbeiten geleistet. Es wird der Formalismus der sogenannten A -Kerne eingeführt. Diese Operatoren ermöglichen die Formulierung einer Blockspinrenormierungsgruppe. Außerdem wird durch sie eine interessante Korrespondenz zwischen Theorien auf dem Gitter und auf dem Kontinuum vermittelt.

Das vierte Kapitel bildet den Kern dieser Diplomarbeit. In ihm wird die ϕ^4 -Trajektorie für Gittertheorien konstruiert. Dabei wird das Problem vom Gitter in das Kontinuum transferiert und dort gelöst. In drei Dimensionen ist die Konstruktion komplett. In vier Dimensionen klafft noch eine Lücke in der Konstruktion. Es werden Vorschläge gemacht, wie diese Lücke geschlossen werden kann. Das Kapitel schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

In einem Anhang werden die in dieser Arbeit benötigten mathematischen Definitionen und Sätze angegeben und erläutert.

Teil I

Partielle Differentialgleichungen

0.1 Partielle Differentialgleichungen

Partielle Differentialgleichungen spielen eine wichtige Rolle in der Physik. Viele physikalische Systeme lassen sich durch (im allgemeinen nichtlineare) partielle Differentialgleichungen beschreiben. Bei einer gegebenen Differentialgleichung ist man vor allem an Antworten zu folgenden Fragen interessiert:

- Existenz einer Lösung. Dabei ist zuerst eine explizite Lösungsfunktion interessant. Bei vielen Differentialgleichungen ist die explizite Lösung jedoch nicht angebar. Dann versucht man wenigstens die Existenz einer Lösung für ein beschränktes oder unbeschränktes Zeitintervall zu zeigen.
- Qualitatives Verhalten der Lösung. Bei nicht explizit bekannter Lösung kann man versuchen, das Verhalten der Lösung in einigen Grenzfällen zu bestimmen. Wenn für alle Zeiten eine Lösung existiert, ist das Verhalten der Lösung für große Zeiten interessant. Wenn die Lösung nur bis zu einem gewissen Zeitpunkt existiert und dann singulär wird, möchte man Aussagen über die Lösung in der Nähe der Singularität machen. Bei nichtlinearen Gleichungen steht auch die Frage im Raum, ob die Lösung der nichtlinearen Gleichung Ähnlichkeit mit der Lösung der dazugehörigen linearisierten Gleichung haben.

Die Frage nach der zeitlichen Asymptotik bei nicht explizit bekannter Lösung ist in der Literatur intensiv behandelt worden. Bei vielen Ansätzen [GR88, SWS93, BSW00] wird dabei, meist aufgrund numerischer Rechnungen, ein Ansatz für das Verhalten der Lösung für große Zeiten gemacht. Dann wird eine Differentialgleichung für die Differenz zwischen der Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung und der vermuteten Asymptotik bestimmt und untersucht.

Eine andere Methode ist in den Arbeiten von J. Brémont und A. Kupiainen (vgl. [BKL94, BK95] und die darin enthaltenen Referenzen) entwickelt worden. Die Idee besteht darin, das asymptotische Verhalten für große Zeiten durch Iteration einer Abbildung, die das Verhalten der Lösung für ein endliches Zeitintervall beschreibt, zu bestimmen.

Diese Methode wird im folgenden Abschnitt allgemein erläutert und durch ein numerisches Beispiel illustriert. Im ersten und zweiten Kapitel wird sie auf konkrete Anfangswertprobleme angewandt.

0.2 Die Methode der Renormierungsgruppe

Betrachtet werden Differentialgleichungen vom Typ der Wärmeleitungsgleichung mit einem Zusatzterm:

$$\dot{u} = u'' + F(u, u', u''). \quad (1)$$

Dabei sei $u = u(x, t)$ und $x \in \mathbb{R}$. Der Zusatzterm F sei zuerst noch ganz allgemein gehalten, später wird er genauer spezifiziert. Gesucht ist nun eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß sich die Lösung der Differentialgleichung für $t \rightarrow \infty$ entsprechend

$$u(x, t) \sim t^{-\frac{\alpha}{2}} g(xt^{-\frac{1}{2}}) \quad (2)$$

verhält, das heißt, es ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x, t) - t^{-\frac{\alpha}{2}} g(xt^{-\frac{1}{2}})\| = 0. \quad (3)$$

Die Norm, in der die Konvergenz stattfindet, muß dabei dem Einzelfall angepaßt werden.

Ziel ist es nun, eine Abbildung, die das Verhalten für ein endliches Zeitintervall beschreibt, zu definieren, und sie dann zu iterieren, um etwas über das Langzeitverhalten zu erfahren. Von dieser sogenannten Renormierungsgruppentransformation auf dem Banachraum aller möglichen Anfangswerte wird schließlich ein Fixpunkt gesucht, der einer Asymptotik entspricht. Dabei geht man in folgenden Schritten vor:

Für ein festes $L > 1$ (in den später folgenden Beweisen ist immer $L \gg 1$ gewählt) und ein später zu bestimmendes α wird die Transformation im Lösungsraum

$$M_L : u \rightarrow u_L(x, t) := L^\alpha u(Lx, L^2 t) \quad (4)$$

definiert. Dabei sei $u(x, t)$ Lösung der Differentialgleichung zum Anfangswert $f(x)$. Diese Abbildung M_L erfüllt offensichtlich

$$M_{L^2} = M_L \circ M_L. \quad (5)$$

Nun ist für das Bild dieser Abbildung

$$\begin{aligned} \dot{u}_L(x, t) &= L^{\alpha+2} \dot{u}(Lx, L^2 t) \\ u'_L(x, t) &= L^{\alpha+1} u'(Lx, L^2 t) \\ u''_L(x, t) &= L^{\alpha+2} u''(Lx, L^2 t) \end{aligned} \quad (6)$$

und damit erfüllt u_L die neue Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{u}_L(x, t) &= u''_L(x, t) + L^{\alpha+2} (F(u(Lx, L^2 t), u'(Lx, L^2 t), u''(Lx, L^2 t))) \\ &= u''_L(x, t) + L^{\alpha+2} F(L^{-\alpha} u_L(x, t), L^{-\alpha-1} u'_L(x, t), L^{-\alpha-2} u''_L(x, t)) \\ &= u''_L(x, t) + F_L(u_L(x, t), u'_L(x, t), u''_L(x, t)). \end{aligned} \quad (7)$$

Dabei ist

$$F_L(a, b, c) = L^{2+\alpha} F(L^{-\alpha} a, L^{-\alpha-1} b, L^{-\alpha-2} c). \quad (8)$$

Die Renormierungsgruppenabbildung R als Abbildung der Menge aller Anfangswertfunktionen auf sich selbst ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} (R(f))(x) &:= u_L(x, 1) \\ &= L^\alpha u(Lx, L^2). \end{aligned} \quad (9)$$

R hängt von L und F ab: $R = R_{L,F}$. Für die Verkettung zweier R gilt

$$R_{L^2,F} = R_{L,F_L} \circ R_{L,F}, \quad (10)$$

beziehungsweise allgemeiner

$$R_{L^n,F} = R_{L,F_{L^{n-1}}} \circ \dots \circ R_{L,F_L} \circ R_{L,F}. \quad (11)$$

Die Wirkung der Renormierungstransformation ist in folgendem Diagramm dargestellt:

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{M_L} & & \xrightarrow{M_L} \\ & \xrightarrow{M_{L^2}} & & & \\ u(x, t) & \xrightarrow{M_L} & u_L(x, t) & \xrightarrow{M_L} & u_{L^2}(x, t) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (Lsg.) & & (Lsg.) & & (Lsg.) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f(x) & & (R_{L,F}f)(x) & & (R_{L^2,F}f)(x) \end{array}$$

(t = 1) (t = 1) (t = 1)

Bei der Renormierungsgruppenabbildung wird erst die Differentialgleichung gelöst, dann die Abbildung M_L angewandt, und schließlich $t = 1$ gesetzt. Aus der Beziehung (5) folgt dann die Identität für $R_{L^2,F}$.

Setzt man nun $t = L^{2n}$ so gilt

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x, L^{2n}) \\ &= L^{-n\alpha} (L^{n\alpha} u((xL^{-n})L^n, L^{2n})) \\ &= t^{-\frac{\alpha}{2}} (R_{L^n,F}f)(xt^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (12)$$

Ziel ist es nun, α so zu wählen, daß die Iteration gegen einen Fixpunkt läuft, d.h. daß

$$F_{L^n} \rightarrow F^* \quad (13)$$

und

$$R_{L^n, F} f \rightarrow f^*, \quad (14)$$

wobei

$$R_{L, F^*} f^* = f^* \quad (15)$$

der Fixpunkt ist. Dann hat man für $u(x, t)$ das asymptotische Verhalten

$$u(x, t) \sim t^{-\frac{\alpha}{2}} f^*(xt^{-\frac{1}{2}}). \quad (16)$$

Um das eben vorgestellte Verfahren an einem kleinen Beispiel¹ anschaulich darzustellen, wurde die Differentialgleichung

$$\dot{u} = u'' + u^6 \quad (17)$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x, 1) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x-4)^2} + \frac{1}{1+(x+4)^2} \quad (18)$$

mit dem Runge-Kutta-Verfahren [FPTV93] numerisch gelöst. An den in Abbildung 1 dargestellten Lösungen der Differentialgleichung erkennt man nur, daß die Lösung für große Zeiten zerfließt. Wenn jedoch die Transformation (9) für $\alpha = 1$ und $L = 2$ iteriert wird, scheint es, daß die bei den einzelnen Schritten entstehenden skalierten Lösungen gegen einen Fixpunkt laufen. Das ist in Abbildung 2 dargestellt.

¹Umfangreiche numerische Untersuchungen findet man in [Hie01].

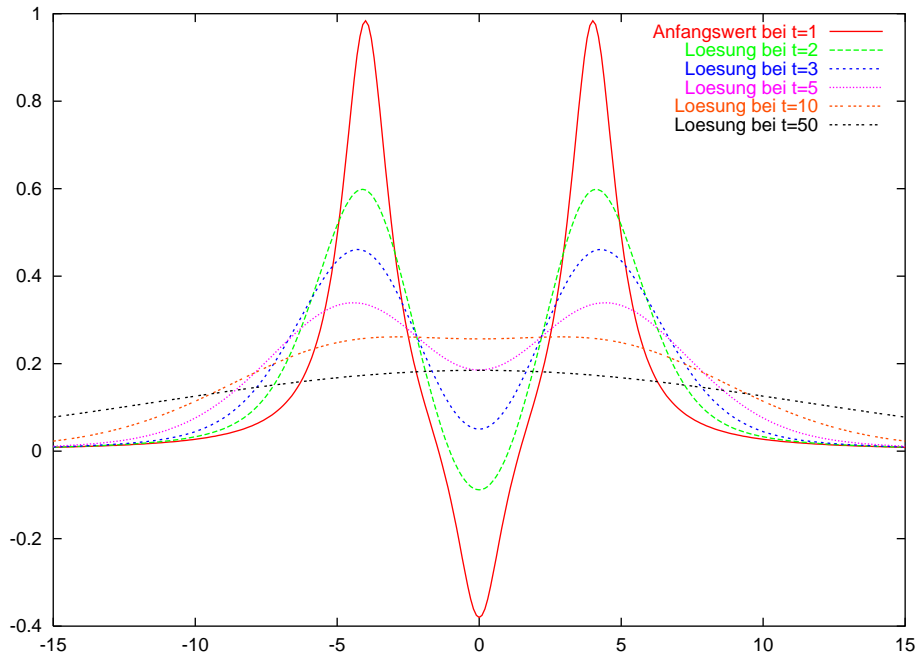


Abbildung 1. Mit dem Runge-Kutta-Verfahren berechnete Lösungen der Differentialgleichung (17) mit dem Anfangswert (18).

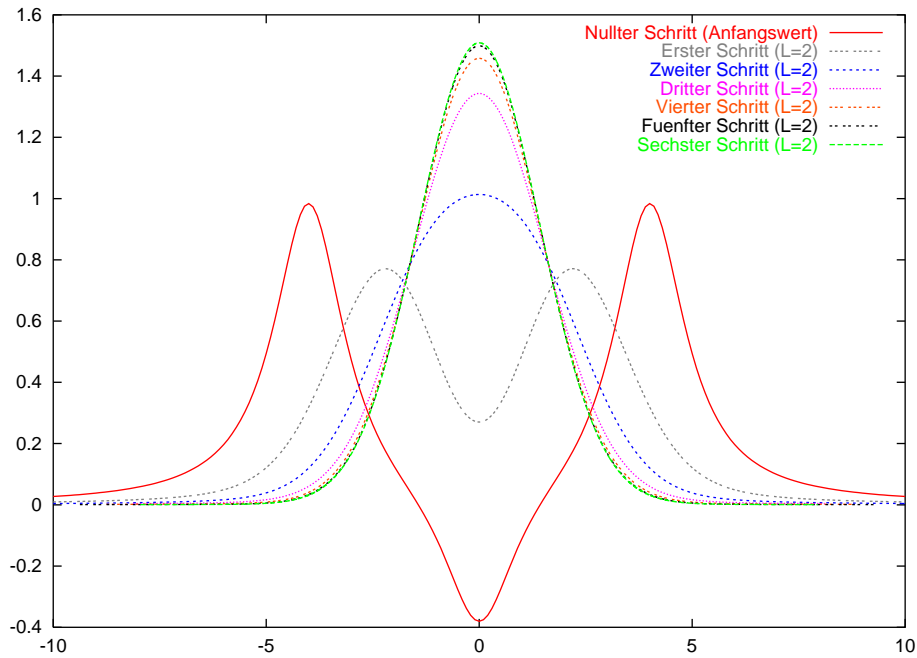


Abbildung 2. Gemäß (9) mit $\alpha = 1$ und $L = 2$ skalierte Lösungen von (17). Im n -ten Schritt wird die skalierte Lösung $L^n u(L^n x, L^{2n})$ berechnet.

Wie wir im nächsten Kapitel zeigen werden, gehen die skalierten Lösungen der Differentialgleichung (17) gegen die Gaußverteilung, die Lösung verhält sich also für große Zeiten wie die Lösung der normalen Wärmeleitungsgleichung.

Abschließend sei noch bemerkt, daß sich im Falle einer bei einem endlichen Zeitpunkt T singulären Lösung mittels einer Renormierungsgruppentransformation Aussagen über das Anwachsen der Lösung in der Nähe der Singularität T machen lassen. Eine Übersicht dazu findet man in [BK95]. Auch lassen sich mit der vorgestellten Methode Systeme von Differentialgleichungen behandeln. Das geschieht z.B. in [Cag97].

Kapitel 1

Der Gaußsche Fixpunkt

In diesem Kapitel wird die oben vorgestellte Methode auf Anfangswertprobleme, bei denen der Anfangswert für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen 0 geht, angewandt. Ziel dieses Kapitels ist es, zu zeigen, daß sich die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit nichtlinearem Zusatzterm - unter gewissen Bedingungen an die Nichtlinearität und den Anfangswert - wie die Lösung der normalen Wärmeleitungsgleichung verhalten. Wir folgen dabei der Beweisstruktur in [BKL94].

1.1 Allgemeine Begriffe

Bevor wir die Hauptresultate formulieren können, muß noch einiges zur Wärmeleitungsgleichung gesagt werden. Außerdem muß die Norm, in der schließlich Konvergenz gezeigt werden soll, festgelegt werden. Das soll in diesem Abschnitt geschehen. Von nun an sei außerdem

$$\alpha = 1 \tag{1.1}$$

gesetzt. Weiterhin sei im folgenden C immer eine allgemeine Konstante unabhängig von L und F ; C_L , C_F seien Konstanten, die von L bzw. F abhängen. Die Werte, für die C steht, ändern sich dabei von Ort zu Ort, sie können sich auch innerhalb ein und derselben Ungleichung ändern.

1.1.1 Die Wärmeleitungsgleichung und ihre Lösung

Im Fall einer verschwindenden Nichtlinearität ($F = 0$) hat man die Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} = u'' \quad (1.2)$$

zu lösen, für eine Anfangswertfunktion $f(x)$ lautet die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{(t-1)\partial^2} f(x) \\ &:= \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-1)}} \int dy \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{4(t-1)}\right) f(y) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Daß dieser Ausdruck die Gleichung löst, rechnet man nach. Aufgrund der Grenzwertdarstellung der δ -Funktion

$$\delta(x-a) = \lim_{\zeta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\zeta\pi}} e^{(-\frac{(x-a)^2}{\zeta})} \quad (1.4)$$

(vgl. [Nol90]) ist auch die Anfangswertbedingung erfüllt. Als Renormierungstransformation erhält man dementsprechend

$$(R_{L,0}f)(x) = (Le^{(L^2-1)\partial^2} f)(Lx). \quad (1.5)$$

In der Impulsdarstellung schreibt sich das als

$$\begin{aligned} \widetilde{R}f(k) &= \exp(-k^2(1 - \frac{1}{L^2})) \widetilde{f}(\frac{k}{L}) \\ &=: \widetilde{R_0}f(k). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Von diesem R_0 erkennt man sofort einen Fixpunkt, nämlich

$$\widetilde{f_0^*}(k) = \exp(-k^2). \quad (1.7)$$

In Ortsdarstellung entspricht dies der Funktion

$$f_0^*(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp(-\frac{x^2}{4}). \quad (1.8)$$

Das asymptotische Verhalten bestimmt sich zu

$$\begin{aligned} u(x, t) &= t^{-\frac{1}{2}} f_0^*(xt^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{4t}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Um diesen Gaußschen Fixpunkt (1.8) soll es im folgenden gehen. Ziel wird es sein, ein obiger Gleichung entsprechendes asymptotisches Verhalten auch für den Fall nichtverschwindender Nichtlinearität nachzuweisen.

1.1.2 Die Sobolew-Norm

Für unseren Konvergenzbegriff werden wir folgende Norm verwenden:

Definition. Die Norm einer Funktion f mit $\tilde{f} \in C^1$ ist gegeben durch

$$\|f\| := \sup_k (1 + k^4)(|\tilde{f}(k)| + |\tilde{f}'(k)|). \quad (1.10)$$

Wichtig sind zwei Eigenschaften dieser Norm. Zum einen folgt aus Konvergenz in ihr die punktweise Konvergenz:

Bemerkung 1. Konvergenz in der Norm (1.10) impliziert auch L^1 - und L^∞ -Konvergenz.

Beweis: Nach der Schwartzschen Ungleichung¹ gilt:

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_1 &= \left\| \frac{1+|x|}{1+|x|} f(x) \right\|_1 \\ &\leq \left\| \frac{1}{1+|x|} \right\|_2 \|(1+|x|)f(x)\|_2 \\ &\leq C \|(1+|x|)f(x)\|_2 \\ &\leq C(\|f(x)\|_2 + \|xf(x)\|_2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Es ist nach dem Satz von Plancherel

$$\|f\|_2 = \|\tilde{f}\|_2 \quad (1.12)$$

und weiter

$$\|\tilde{f}\|_2 \leq C\|f\|, \quad (1.13)$$

denn

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_2^2 &= \int dk |\tilde{f}(k)|^2 \frac{(1+k^4)^2}{(1+k^4)^2} \\ &\leq \sup_k (|\tilde{f}(k)|^2 (1+k^4)^2) \int dk \frac{1}{(1+k^4)^2} \\ &\leq C\|f\|^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ganz analog gilt

$$\|xf(x)\|_2 \leq C\|f\|, \quad (1.15)$$

¹Zur Schwartzschen Ungleichung und zum Satz von Plancherel konsultiere man den Abschnitt (5.4) im Anhang.

denn es ist mit einer ähnlichen Rechnung wie in (1.14)

$$\begin{aligned}\|xf(x)\|_2 &= \|\widetilde{xf(x)}\|_2 \\ &= \|\widetilde{f(k)'}\|_2 \\ &\leq \|f\|.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Insgesamt ist also

$$\|f\|_1 \leq C\|f\| \tag{1.17}$$

und damit die L^1 -Konvergenz gezeigt.

Für die L^∞ -Konvergenz benutzt man

$$\|f\|_\infty \leq \|\widetilde{f}\|_1, \tag{1.18}$$

(vgl. (5.70)) und schätzt weiter ab:

$$\begin{aligned}\|\widetilde{f}\|_1 &= \int dk |\widetilde{f}| \frac{1+k^4}{1+k^4} \\ &\leq \sup_k (|\widetilde{f}|(1+k^4)) \int dk \frac{1}{1+k^4} \\ &\leq C\|f\|\end{aligned}\tag{1.19}$$

Insgesamt ist damit

$$\|f\|_\infty \leq C\|f\|, \tag{1.20}$$

womit die L^∞ -Konvergenz gezeigt ist. \square

Weiterhin hat die Abbildung R_0 in dieser Norm eine schöne Kontraktionseigenschaft:

Bemerkung 2. Mit dieser Norm und dem R_0 aus (1.6) gilt für eine Funktion g mit $\widetilde{g}(0) = 0$:

$$\|R_0 g\| \leq \frac{C}{L} \|g\|. \tag{1.21}$$

Beweis. Nach Mittelwertsatz existiert ein $s \in (0, 1)$ mit

$$|\widetilde{g}(\frac{k}{L})| \leq \frac{|k|}{L} |\widetilde{g}'(\frac{ks}{L})|. \tag{1.22}$$

Nun kann man die Behauptung nachrechnen:

$$\|R_0 g\| = \|\exp(-k^2(1 - \frac{1}{L^2}))\widetilde{g}(\frac{k}{L})\|$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_k (1 + k^4) (|\exp(-k^2(1 - \frac{1}{L^2})) \tilde{g}(\frac{k}{L})| + \\
&\quad + |(\exp(-k^2(1 - \frac{1}{L^2})) \tilde{g}(\frac{k}{L}))'|) \\
&= \sup_k (1 + k^4) (\exp(-k^2(1 - \frac{1}{L^2})) \\
&\quad (|\tilde{g}(\frac{k}{L})| + |2k(1 - \frac{1}{L^2}) \tilde{g}(\frac{k}{L}) + \frac{1}{L} \tilde{g}'(\frac{k}{L})|)) \\
&\leq \frac{1}{L} \sup_k (1 + k^4) (\exp(-k^2(1 - \frac{1}{L^2})) \\
&\quad (k|\tilde{g}'(\frac{sk}{L})| + |2k(1 - \frac{1}{L^2}) k \tilde{g}'(\frac{sk}{L}) + \tilde{g}'(\frac{k}{L})|)) \\
&= \frac{1}{L} \sup_k (1 + L^4 k^4) \exp(-k^2(L^2 - 1)) \\
&\quad (kL|\tilde{g}'(sk)| + |2k^2(L^2 - 1) \tilde{g}'(sk) + \tilde{g}'(k)|) \\
&\leq \frac{C}{L} (\sup_k (\tilde{g}'(sk)) + \sup_k (\tilde{g}'(k))) \\
&\leq \frac{C}{L} \|g\|.
\end{aligned} \tag{1.23}$$

□

1.1.3 Klassifizierung der Nichtlinearitäten

Bei der Nichtlinearität F ist es zweckmäßig, zu schauen, ob sie im Zuge der Renormierungsgruppenabbildung wächst oder gegen Null geht. Deshalb setzt man:

Definition.

(a) Falls F ein Monom ist,

$$F(a, b, c) = a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} \tag{1.24}$$

so ist

$$F_{L^n} = L^{-nd_F} F \tag{1.25}$$

mit

$$d_F := n_1 + 2n_2 + 3n_3 - 3. \tag{1.26}$$

(b) Für ein analytisches F sei d_F immer das kleinste d_F in der Potenzreihenentwicklung mit nichtverschwindendem Koeffizienten.

(c) F heißt irrelevant, falls $d_F > 0$, marginal, falls $d_F = 0$, und relevant, falls $d_F < 0$.

1.2 Der irrelevante Fall

Wir können nun das Hauptresultat für den irrelevanten Fall formulieren, bei dem F im Laufe der Iteration der Renormierungstransformation gegen Null geht. Die Lösung der Differentialgleichung verhält sich dementsprechend für große Zeiten wie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Satz. Sei $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch um 0 mit $d_F > 0$ und δ mit $0 < \delta < 1$ gegeben. Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so daß für $\|f\| < \epsilon$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = u'' + F(u, u', u'') \quad (1.27)$$

$$u(x, 1) = f(x) \quad (1.28)$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Lösung erfüllt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-\delta} \|u(xt^{\frac{1}{2}}, t) - At^{-\frac{1}{2}} f_0^*(x)\| = 0. \quad (1.29)$$

Dabei ist $A = A(f, F) \in \mathbb{C}$.

Beweis. Zuerst geben wir eine kurze Übersicht über die Struktur des Beweises. Als Erstes wird die Existenz einer Lösung für ein festes Zeitintervall gezeigt. Das geschieht mit dem Banachschen Fixpunktsatz. Dabei wird die Lösung der Differentialgleichung als Fixpunkt einer Abbildung in einem passenden Banachraum aufgefaßt. Der Abschnitt über die Existenz der Lösung endet mit Gleichung (1.67). Die Gleichung (1.67) stellt zugleich ein neues Anfangswertproblem dar, welches betrachtet wird. Die Hauptaufgabe besteht dann darin, die bei der Iteration entstehenden Größen zu kontrollieren.

Es wird die Differentialgleichung in eine Integralgleichung umgerechnet:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{(t-1)\partial^2} f + \int_0^{t-1} ds e^{s\partial^2} F(t-s) \\ &= u_f + N(u). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} N(u) &:= \int_0^{t-1} ds e^{s\partial^2} F(t-s) \\ &:= \int_0^{t-1} ds e^{s\partial^2} F(u(x, t-s), u'(x, t-s), u''(x, t-s)) \end{aligned} \quad (1.31)$$

und

$$u_f(x, t) = e^{(t-1)\partial^2} f(x) \quad (1.32)$$

ist die Lösung der „freien“ Wärmeleitungsgleichung. Um zu beweisen, daß (1.30) die Differentialgleichung (1.27) löst, benutzt man die allgemeine Regel

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{b(t)}^{a(t)} dx f(x, t) &= a'(t) f(a(t), t) - b'(t) f(b(t), t) + \\ &+ \int_{b(t)}^{a(t)} dx \partial_t f(x, t) \end{aligned} \quad (1.33)$$

und rechnet nach:

$$\dot{u} = \partial^2 e^{(t-1)\partial} f + e^{(t-1)\partial^2} F(1) + \int_0^{t-1} ds e^{s\partial^2} \partial_t F(t-s) \quad (1.34)$$

und

$$\begin{aligned} u'' &= \partial^2 e^{(t-1)\partial^2} f + \int_0^{t-1} ds \partial^2 e^{s\partial^2} F(t-s) \\ &= \partial^2 e^{(t-1)\partial^2} f + \int_0^{t-1} ds \left(\frac{d}{ds} e^{s\partial^2} \right) F(t-s) \\ &= \partial^2 e^{(t-1)\partial^2} f + \left[e^{s\partial^2} F(t-s) \right]_0^{t-1} - \\ &\quad - \int_0^{t-1} ds e^{s\partial^2} \left(\frac{d}{ds} F(t-s) \right) \\ &= \partial^2 e^{(t-1)\partial^2} f + e^{(t-1)\partial^2} F(1) - F(t) + \\ &\quad + \int_0^{t-1} ds e^{s\partial^2} \partial_t F(t-s) \\ &= \dot{u} - F(t). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Damit ist gezeigt, daß eine Lösung von (1.30) auch die ursprüngliche Differentialgleichung erfüllt.

Um zu zeigen, daß (1.30) eine eindeutige Lösung besitzt, wird gezeigt, daß die Abbildung

$$T(u) := u_f + N(u) \quad (1.36)$$

in einem geeigneten Banachraum einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Benutzt wird der Banachsche Fixpunktsatz im Banachraum aller $u(x, t)$ mit $t \in [1, L^2]$ mit der Norm

$$\|u\|_L := \sup_{t \in [1, L^2]} \|u(t)\|. \quad (1.37)$$

Dabei sei L sehr groß gewählt, so daß später immer $\frac{C}{L} < 1$ ist. Zu zeigen ist, daß die Abbildung T die Kugel

$$B_f = \{u \mid \|u - u_f\|_L \leq \|f\|\} \quad (1.38)$$

in sich selbst abbildet und kontrahierend ist.

Es muß nun $\|N(u)\|_L$ abgeschätzt werden. Dafür wird F als Potenzreihe geschrieben und fouriertransformiert:

$$\tilde{F} = \sum_{n \in \mathbb{N}^3} a_n \tilde{u}^{*n_1} * \tilde{u}'^{*n_2} * \tilde{u}''^{*n_3}. \quad (1.39)$$

Dabei ist $*$ die Faltung und $n = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3$. Es soll eine Abschätzung von $\|N(u)\|_L$ für einen allgemeinen Term dieser Reihe gewonnen werden. Dabei braucht man die Hilfsformel

$$|\widetilde{u^{(l)}}(k)| \leq \frac{C\|u\|_L}{1+k^2} \quad (1.40)$$

für $l = 0, 1, 2$. Für $|k| \leq 1$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned} |\widetilde{u^{(l)}}(k)| &= |k^l \tilde{u}(k)| \\ &\leq |\tilde{u}(k)| \\ &\leq \frac{C}{1+k^2} |\tilde{u}(k)| \\ &\leq \frac{C\|u\|_L}{1+k^2}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Und für $|k| \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} |\widetilde{u^{(l)}}(k)| &= |k^l \tilde{u}(k)| \\ &\leq k^2 |\tilde{u}(k)| \\ &\leq \frac{2k^4}{1+k^2} |\tilde{u}(k)| \\ &\leq \frac{C\|u\|_L}{1+k^2}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Damit ist (1.40) bewiesen. Analog beweist man auch

$$|\tilde{u}'(k)| \leq \frac{C\|u\|_L}{1+k^2}, \quad (1.43)$$

indem man im Beweis von (1.40) \tilde{u} durch \tilde{u}' ersetzt.

Um nun $\|N(u)\|_L$ für den Fall, daß

$$F(u, u', u'') = (u)^{n_1} (u')^{n_2} (u'')^{n_3} \quad (1.44)$$

ist, abschätzen zu können, braucht man Abschätzungen für $|\widetilde{N(u)}|$ und $|\partial_k \widetilde{N(u)}|$. Es ist mit $m = n_1 + n_2 + n_3$

$$\begin{aligned}
|\widetilde{N(u)}| &\leq \int_0^{t-1} ds e^{-sk^2} |\widetilde{u}^{*n_1} * \widetilde{u}'^{*n_2} * \widetilde{u}''^{*n_3}| \\
&\leq \int_0^{t-1} ds e^{-sk^2} (C\|u\|_L)^m \left(\frac{1}{1+k^2}\right)^{*m} \\
&\leq (C\|u\|_L)^m \left(\frac{1-e^{-(t-1)k^2}}{k^2}\right) \left(\frac{1}{1+k^2}\right). \tag{1.45}
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Faltungsformel

$$\left(\frac{1}{1+k^2}\right)^{*m} = m\pi^{m-1} \left(\frac{1}{m^2+k^2}\right) \tag{1.46}$$

benutzt, deren Beweis sich im Anhang findet. Es ist weiterhin für festes $t \in [1, L^2]$ und $|k| > 1$

$$\frac{1-e^{-(t-1)k^2}}{k^2+k^4} \leq \frac{C}{1+k^4}, \tag{1.47}$$

und für $|k| \leq 1$ ist

$$\frac{1-e^{-(t-1)k^2}}{k^2+k^4} \leq C, \tag{1.48}$$

denn die linke Seite ist bei 0 beschränkt, wie man durch zweifache Anwendung der Regel von l'Hospital sieht. Insgesamt hat man also

$$|\widetilde{N(u)}| \leq C_L \frac{(C\|u\|_L)^m}{1+k^4}. \tag{1.49}$$

Um $|\partial_k \widetilde{N(u)}|$ abzuschätzen, benutzt man

$$\begin{aligned}
|\partial_k \widetilde{N(u)}| &\leq \int_0^{t-1} ds e^{-sk^2} |\partial_k (\widetilde{u}^{*n_1} * \widetilde{u}'^{*n_2} * \widetilde{u}''^{*n_3})| \\
&\quad + \int_0^{t-1} ds |(\widetilde{u}^{*n_1} * \widetilde{u}'^{*n_2} * \widetilde{u}''^{*n_3}) \partial_k e^{-sk^2}| \tag{1.50}
\end{aligned}$$

und erhält für den ersten Term mit (1.43)

$$\begin{aligned}
|\partial_k (\widetilde{u}^{*n_1} * \widetilde{u}'^{*n_2} * \widetilde{u}''^{*n_3})| &= |((\partial_k \widetilde{u}) * \widetilde{u}^{*n_1-1} * \widetilde{u}'^{*n_2} * \widetilde{u}''^{*n_3})| \\
&\leq (C\|u\|_L)^m \left(\frac{1}{1+k^2}\right)^{*m} \tag{1.51}
\end{aligned}$$

und damit

$$\int_0^{t-1} ds e^{-sk^2} |\partial_k (\widetilde{u}^{*n_1} * \widetilde{u}'^{*n_2} * \widetilde{u}''^{*n_3})| \leq C_L \frac{(C\|u\|_L)^m}{1+k^4}. \tag{1.52}$$

Für den zweiten Term benutzt man mit einer ähnlichen Argumentation wie in (1.47f)

$$\begin{aligned}
\int_0^{t-1} ds \frac{|\partial_k e^{-sk^2}|}{1+k^2} &\leq \frac{1}{1+k^2} \left| \partial_k \left[\frac{e^{-sk^2}}{-k^2} \right]_0^{t-1} \right| \\
&\leq \frac{1}{k^2+k^4} \frac{|e^{-(t-1)k^2}(k^{2(t-1)}-1)+1|}{|k|} \\
&\leq \frac{C_L}{1+k^4},
\end{aligned} \tag{1.53}$$

und erhält

$$\int_0^{t-1} ds |(\tilde{u}^{*n_1} * \tilde{u}'^{*n_2} * \tilde{u}''^{*n_3}) \partial_k e^{-sk^2}| \leq C_L \frac{(C\|u\|_L)^m}{1+k^4}. \tag{1.54}$$

Man hat also insgesamt für den betrachteten Spezialfall (1.44) von F

$$\|N(u)\|_L \leq C_L (C\|u\|_L)^m. \tag{1.55}$$

Für ein beliebiges analytisches F , bei dem die Potenzreihe einen Konvergenzradius $R > 0$ hat, ist in (1.39)

$$|a_n| \leq (C_F)^m \tag{1.56}$$

(man setze zum Beispiel $C_F = 1/R$) und außerdem ist im irrelevanten Fall immer

$$m \geq 2. \tag{1.57}$$

Deshalb gilt für genügend kleine $\|u\|_L$:

$$\|N(u)\|_L \leq C_{L,F} \|u\|_L^2. \tag{1.58}$$

Falls ϵ klein genug ist, ist das jedoch der Fall, denn es ist nach der Definition von u_f (1.32)

$$\|u_f\|_L \leq C_L \|f\| \tag{1.59}$$

und in B_f ist dementsprechend

$$\|u\|_L \leq (C_L + 1) \|f\| \tag{1.60}$$

und damit

$$\|u\|_L \leq C\epsilon \tag{1.61}$$

also

$$\|N(u)\|_L \leq C_{L,F}\epsilon^2. \quad (1.62)$$

Damit ist gezeigt, daß T die Kugel B_f in sich selbst abbildet.

Um nun auf B_f Kontraktion zu zeigen, benutzt man daß

$$\begin{aligned} \|T(u_1) - T(u_2)\|_L &= \|N(u_1) - N(u_2)\|_L \\ &= \left\| \int_0^1 dq \left(\frac{d}{dq} N(u_2 + q(u_1 - u_2)) \right) \right\|_L \\ &\leq \int_0^1 dq \left\| \frac{d}{dq} N(u_2 + q(u_1 - u_2)) \right\|_L. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Es ist weiterhin (mit der Notation $F(u, u', u'') = F(a, b, c)$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} N(\cdot) &:= \frac{d}{dq} N(u_2 + q(u_1 - u_2)) \\ &= \int_0^{t-1} ds e^{-s\partial^2} \left(\frac{d}{dq} F(\cdot) \right) \\ &= \int_0^{t-1} ds e^{-s\partial^2} \left(\frac{\partial F}{\partial a}(\cdot) \cdot (u_1 - u_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F}{\partial b}(\cdot) \cdot (u_1 - u_2) + \frac{\partial F}{\partial c}(\cdot) \cdot (u_1 - u_2) \right). \end{aligned} \quad (1.64)$$

Die Terme $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial b}$ und $\frac{\partial F}{\partial c}$ sind Potenzreihen ohne konstanten Term; es kann in einigen Monomen jedoch schon $m = 1$ sein, denn bei F kann $m = 2$ vorkommen. Deshalb erhält man mit denselben Mitteln, wie man (1.55) und (1.58) gezeigt hat:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dq} N(\cdot) \right\|_L &\leq \left\| \int_0^{t-1} ds e^{-s\partial^2} \left(\frac{\partial F}{\partial a}(\cdot) \right) (u_1 - u_2) \right\|_L \\ &\quad + \left\| \int_0^{t-1} ds e^{-s\partial^2} \left(\frac{\partial F}{\partial b}(\cdot) \right) (u_1 - u_2) \right\|_L \\ &\quad + \left\| \int_0^{t-1} ds e^{-s\partial^2} \left(\frac{\partial F}{\partial c}(\cdot) \right) (u_1 - u_2) \right\|_L \\ &\leq 3C_{L,F} \|(u_2 + q(u_1 - u_2))\|_L \|u_1 - u_2\|_L \\ &\leq C_{L,F} ((1 - q)\|u_2\|_L + q\|u_1\|_L) \|u_1 - u_2\|_L \\ &\leq C_{L,F} (\|u_2\|_L + \|u_1\|_L) \|u_1 - u_2\|_L. \end{aligned} \quad (1.65)$$

und damit insgesamt

$$\|T(u_1) - T(u_2)\|_L \leq C_{L,F} (\|u_1\|_L + \|u_2\|_L) \|u_1 - u_2\|_L. \quad (1.66)$$

Aufgrund der Bedingung (1.61) ist damit T kontrahierend auf B_f und T besitzt damit einen eindeutigen Fixpunkt, die Lösung der Integralgleichung (1.30).

Zum Zeitpunkt $t = L^2$ ist die Lösung der Differentialgleichung also

$$u(x, L^2) = e^{(L^2-1)\partial^2} f(x) + v(x) \quad (1.67)$$

mit

$$\begin{aligned} \|v\| &= \|N(u(x, L^2))\| \\ &\leq \|N(u(x, L^2))\|_L \\ &\leq C_{L,F} \|f\|^2 \\ &=: K(L, F) \|f\|^2. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Die Konstante $K(L, F)$ wird hier mit einem eigenen Namen versehen, da sie später noch einmal auftaucht. Im folgenden sei $\|f\|$ immer so klein gewählt, daß an dieser Stelle

$$K(L, F) \|f\| \leq L^{-5} \quad (1.69)$$

gilt. Um später Aussagen über die Lösung der Differentialgleichung zu beliebigen Zeitpunkten machen zu können, sei an dieser Stelle sogar etwas allgemeiner

$$K((\sqrt{\tau}L), F) \|f\| \leq (\sqrt{\tau}L)^{-5} \quad (1.70)$$

für alle

$$\tau \in [1, L^2] \quad (1.71)$$

gefordert, d.h. die Gleichung (1.69) gelte nicht nur für ein festes L , sondern für alle L aus einem kompakten Intervall.

Man beachte, daß die Abschätzung für $\|v\|$ aus der Abschätzung (1.49) für $N(u)$ gewonnen wurde, bei der ein einzelnes Monom der Potenzreihenentwicklung von $F(u, u', u'')$ betrachtet wurde. Steht in jedem Monom der Potenzreihenentwicklung ein zusätzlicher konstanter Faktor, so kann dieser direkt in (1.68) hineingeschrieben werden.

Nun soll die Renormierungsgruppentransformation iteriert werden und damit die Asymptotik bestimmt werden. Dazu wird der Anfangswert $f(x)$ geschrieben als ein Vielfaches des Gaußschen Fixpunktes f_0^* (1.8) und einen Restterm:

$$f(x) = A_0 f_0^*(x) + g_0(x) \quad (1.72)$$

Dabei sei

$$\begin{aligned} A_0 &= \tilde{f}(0) \\ &= \int dx f(x), \end{aligned} \quad (1.73)$$

und da $\tilde{f}_0^*(0) = 1$, ist $\tilde{g}_0(0) = 0$. Der Vorteil besteht darin, daß die Transformation R_0 (1.5) für dieses g_0 bereits kontrahierend ist (vgl. 1.21):

$$\|R_0 g\| \leq \frac{C}{L} \|g\|. \quad (1.74)$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \|g\| &= \|f - \tilde{f}(0)f_0^*\| \\ &\leq (1 + \|f_0^*\|)\|f\| \\ &\leq C\|f\|. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Die Renormierungsgruppentransformation ist nun

$$\begin{aligned} (Rf)(x) &= Le^{(L^2-1)\partial^2} f(Lx) + Lv(Lx) \\ &= (R_0 f)(x) + Lv(Lx) \\ &= (R_0(A_0 f_0^* + g_0))(x) + Lv(Lx) \\ &= A_0(R_0(f_0^*))(x) + (R_0 g_0)(x) + Lv(Lx) \\ &= A_0 f_0^*(x) + (R_0 g_0)(x) + Lv(Lx) \\ &= A_1 f_0^* + g_1 \end{aligned} \quad (1.76)$$

mit

$$A_1 := A_0 + \tilde{v}(0) \quad (1.77)$$

und

$$g_1 := R_0 g_0 + Lv(Lx) - \tilde{v}(0)f_0^*. \quad (1.78)$$

Dann hat auch g_1 wieder die Eigenschaft, daß $\tilde{g}_1(0) = 0$, denn es war $\tilde{g}_0(0) = 0$. Es gilt außerdem:

$$\begin{aligned} |A_1 - A_0| &= |\tilde{v}(0)| \\ &\leq \|v\| \\ &\leq C_{L,F} \|f\|^2 \end{aligned} \quad (1.79)$$

(vgl. 1.68) und

$$\begin{aligned} \|Lv(Lx) - \tilde{v}(0)f_0^*(x)\| &\leq \|Lv(Lx)\| + \tilde{v}(0)\|f_0^*\| \\ &\leq L^4 \|v(x)\| + \tilde{v}(0)\|f_0^*\| \\ &\leq L^4 K(L, F) C \|f\|^2. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Damit kann man nun $\|g_1\|$ abschätzen:

$$\|g_1\| = \|R_0 g_0 + Lv(Lx) - \tilde{v}(0)f_0^*\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|R_0 g_0\| + \|Lv(Lx) - \tilde{v}(0)f_0^*\| \\
&\leq \frac{C}{L}\|g_0\| + L^4 K(L, F)C\|f\|^2 \\
&\leq \|f\|\left(\frac{C}{L} + L^4 K(L, F)C\|f\|\right) \\
&= \|f\|L^{-(1-\delta)}\left(\frac{C}{L^\delta} + \frac{L^5 K(L, F)C\|f\|}{L^\delta}\right) \\
&\leq \|f\|L^{-(1-\delta)}, \tag{1.81}
\end{aligned}$$

falls man L groß genug gewählt hat (in Abhängigkeit von δ) und die Gleichung (1.69) beachtet.

Nun wird die ganze Transformation iteriert:

$$\begin{aligned}
f_n &:= R_{L^n F} f \\
&= A_n f_0^* + g_n \tag{1.82}
\end{aligned}$$

mit

$$A_{n+1} = A_n + \tilde{v}_n(0) \tag{1.83}$$

und

$$g_{n+1} = R_0 g_n + Lv_n(Lx) - \tilde{v}_n(0)f_0^*. \tag{1.84}$$

Über die A_n und die g_n soll nun gezeigt werden, daß

$$|A_n| \leq (C - L^{-n})\|f\| \tag{1.85}$$

und

$$\|g_n\| \leq CL^{-(1-\delta)n}\|f\|. \tag{1.86}$$

Der Beweis geht über Induktion nach n . Der Induktionsanfang $n = 0$ oder $n = 1$ ist klar, bzw. wurde schon bewiesen (1.77 und 1.81). Seien also im Induktionsschritt (1.85) und (1.86) für n schon gezeigt. Dann ist zunächst einmal

$$\begin{aligned}
\|f_n\| &\leq \|A_n f_0^*\| + \|g_n\| \\
&\leq C\|f\|, \tag{1.87}
\end{aligned}$$

da $\delta < 1$ ist. Dabei hängt die Konstante C nicht von n ab. Nun muß bei der Abbildung von n nach $n + 1$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= u'' + F_{L^n}(u, u', u'') \\
&= u'' + L^{3n}F(L^{-n}u, L^{-2n}u', L^{-3n}u'') \tag{1.88}
\end{aligned}$$

betrachtet werden, dabei wird ein Monom $a^i b^j c^k$ aus der Potenzreihenentwicklung von F zu $L^{n(3-i-2j-3k)} a^i b^j c^k$ und es ist

$$|L^{n(3-i-2j-3k)} a^i b^j c^k| \leq L^{-nd_F} |a^i b^j c^k|. \quad (1.89)$$

Deshalb werden die Abschätzungen, die durch Betrachtung von Monomen der Potenzreihenentwicklung von F entstanden sind, um einen Faktor L^{-nd_F} besser, man hat

$$\begin{aligned} \|v_n\| &\leq K(L, F) L^{-nd_F} \|f_n\|^2 \\ &\leq CK(L, F) L^{-nd_F} \|f\|^2 \end{aligned} \quad (1.90)$$

(entsprechend (1.68)) und deshalb ist

$$\begin{aligned} |A_{n+1} - A_n| &= |\tilde{v}_n(0)| \\ &\leq \|v_n\| \\ &\leq CK(L, F) L^{-nd_F} \|f\|^2. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Für g_{n+1} gilt

$$\begin{aligned} \|g_{n+1}\| &\leq \frac{C}{L} \|g_n\| + \|Lv_n(Lx)\| + \tilde{v}_n(0) \|f_0^*\| \\ &\leq \frac{C}{L} \|g_n\| + L^4 \|v_n\| + C \|v_n\| \\ &\leq \frac{C}{L} \|g_n\| + CK(L, F) L^4 L^{-nd_F} \|f\|^2. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Nun läßt sich der Induktionsschritt durchführen:

$$\begin{aligned} |A_{n+1}| &\leq |A_n| + |A_{n+1} - A_n| \\ &\leq (C - \frac{1}{L^n}) \|f\| + CK(L, F) L^{-nd_F} \|f\|^2 \\ &\leq \|f\| (C - \frac{1}{L^n} + \frac{C}{L^{nd_F+1}}) \\ &\leq \|f\| (C - \frac{1}{L^n} + \frac{C}{L^{n+1}}) \\ &\leq \|f\| (C - \frac{L-C}{L^{n+1}}) \\ &\leq \|f\| (C - \frac{1}{L^{n+1}}). \end{aligned} \quad (1.93)$$

Dabei wurden die Bedingungen $L \gg 1$ und (1.69) ausgenutzt. Der Induktionsschritt für g_n lautet:

$$\|g_{n+1}\| \leq \frac{C}{L} \|g_n\| + CK(L, F) L^4 L^{-nd_F} \|f\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{L^{n+1}} L^{\delta n} \|f\| + \frac{C}{L^{nd_F+1}} \|f\| \\
&\leq C \frac{L^{\delta(n+1)}}{L^{n+1}} \|f\|.
\end{aligned} \tag{1.94}$$

Wiederum wurden $L \gg 1$ und (1.69) ausgenutzt. Damit sind nun (1.85) und (1.86) bewiesen.

Es gilt für die A_n und $m > n$

$$\begin{aligned}
|A_n - A_m| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} |A_k - A_{k+1}| \\
&\leq CK(L, F) L^{-nd_F} \|f\|^2 \sum_{k=n}^{m-1} L^{nd_F} L^{-kd_F} \\
&\leq CK(L, F) L^{-nd_F} \|f\|^2.
\end{aligned} \tag{1.95}$$

Deshalb ist die Folge der A_n eine Cauchyfolge, die gegen A konvergiert, und es findet sich

$$\begin{aligned}
|A_n - A| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |A_k - A_{k+1}| \\
&\leq CK(L, F) L^{-nd_F} \|f\|^2 \\
&\leq CL^{-nd_F} \|f\|.
\end{aligned} \tag{1.96}$$

Insbesondere gilt

$$|A - \tilde{f}(0)| \leq C_{L,F} \|f\|^2. \tag{1.97}$$

Jetzt kann man endlich die zu zeigende Behauptung für den Zeitpunkt $t = L^{2n}$ nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\|u(xt^{\frac{1}{2}}, t) - At^{-\frac{1}{2}} f_0^*(x)\| &= \|t^{-\frac{1}{2}} R_{L^n, F} f - At^{-\frac{1}{2}} f_0^*\| \\
&= \|t^{-\frac{1}{2}} g_n + (A_n - A) t^{-\frac{1}{2}} f_0^*\| \\
&\leq t^{-\frac{1}{2}} \|g_n\| + (A_n - A) t^{-\frac{1}{2}} \|f_0^*\| \\
&\leq Ct^{-\frac{1}{2}} (\|g_n\| + (A_n - A)) \\
&\leq CL^{-n} \|f\| \left(\frac{L^{\delta n}}{L^n} + L^{-nd_F} \right) \\
&\leq CL^{-2n} \|f\| (L^{\delta n} + 1) \\
&\leq CL^{-2n} L^{\delta n} \|f\| \\
&\leq Ct^{\frac{\delta}{2}-1},
\end{aligned} \tag{1.98}$$

also insgesamt

$$t^{1-\delta} \|u(xt^{\frac{1}{2}}, t) - At^{-\frac{1}{2}} f_0^*(x)\| \leq Ct^{-\frac{\delta}{2}}. \quad (1.99)$$

Diese Abschätzung, die die zu zeigende Behauptung für diskrete Zeitpunkte $t = L^{2n}$ darstellt, kann für alle anderen Zeitpunkte durch die Ersetzung $L^2 \rightarrow \tau L^2$ mit $1 < \tau < L^2$ gewonnen werden. Damit ist das Hauptresultat für den irrelevanten Fall bewiesen. \square

1.3 Der marginale Fall

Auch im marginalen Fall, in dem die Nichtlinearität im Laufe der Iteration der Renormierungsgruppenabbildung nicht gegen 0 geht, läßt sich zeigen, daß die Lösung unter bestimmten Bedingungen gegen die Lösung der linearen Wärmeleitungsgleichung geht. Hier soll nur kurz das Resultat erläutert werden.

Beim marginalen Fall kann F im wesentlichen nur zwei Formen annehmen. Es ist

$$F = -u^3 + G(u, u', u'') \quad (1.100)$$

oder

$$\begin{aligned} F &= 2uu' + H(u, u', u'') \\ &= (u^2)' + H(u, u', u''). \end{aligned} \quad (1.101)$$

Dabei sind G und H irrelevant. Es wird an dieser Stelle nur der erste Fall (1.100) betrachtet. Im zweiten Fall (1.101) handelt es sich um die Burgers-Gleichung [Bur74] mit einem Störterm. Es wird außerdem die Funktion u skaliert, d.h. es wird $\lambda^{\frac{1}{2}}u$ betrachtet, wobei λ so gewählt wird, daß

$$\tilde{u}(k=0, t=1) = 1 \quad (1.102)$$

ist. Wenn nun $\lambda^{\frac{1}{2}}u$ die Gleichung (1.100) erfüllt, so erfüllt u die Gleichung

$$\dot{u} = u'' - \lambda u^3 + G_\lambda(u, u', u'') \quad (1.103)$$

mit

$$G_\lambda(u, u', u'') = \lambda^{-\frac{1}{2}} G(\lambda^{\frac{1}{2}}u, \lambda^{\frac{1}{2}}u', \lambda^{\frac{1}{2}}u''). \quad (1.104)$$

Nun kann das Hauptresultat für den marginalen Fall formuliert werden.

Satz. Sei

$$G : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.105)$$

analytisch, die Potenzreihe von G bestehe aus Monomen mit einem Grad ≥ 4 , d.h.

$$G(a, b, c) = \sum_{n \in \mathbb{N}^3} \alpha_n a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3} \quad (1.106)$$

mit

$$\alpha_n = 0 \text{ falls } |n| = n_1 + n_2 + n_3 < 4. \quad (1.107)$$

Dann existiert für alle $\delta > 0$ ein $\lambda_0 > 0$ und ein $\epsilon > 0$, so daß für alle λ mit $0 < \lambda < \lambda_0$ und für alle $g(x)$ mit $\|g\| \leq \epsilon$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = u'' - \lambda u^3 + G_\lambda(u, u', u'') \quad (1.108)$$

$$\begin{aligned} u(x, t=1) &= f(x) \\ &= f_0^*(x) + g(x) \end{aligned} \quad (1.109)$$

mit

$$\tilde{g}(0) = 0 \quad (1.110)$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Lösung erfüllt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2}} (\log t)^{1-\delta} \|u(xt^{\frac{1}{2}}, t) - (\frac{\lambda}{2\sqrt{3}\pi} t \log t)^{-\frac{1}{2}} f_0^*\| = 0. \quad (1.111)$$

Der Beweis dieses Satzes findet sich in [BKL94] oder [Hie01].

Man mache sich allerdings klar, daß die Aussage des obigen Satzes schwächer als die Aussage des entsprechenden Satzes im irrelevanten Fall ist. Zum einen braucht man im marginalen Fall stärkere Voraussetzungen als im irrelevanten Fall, der Anfangswert muß bereits in der Nähe der Lösung der linearen Wärmeleitungsgleichung liegen. Zum anderen ist die Konvergenz gegen den Fixpunkt f_0^* nicht so schnell.

Kapitel 2

Bildung von Fronten

Im vorherigen Kapitel haben wir den Fall untersucht, daß die Anfangswertfunktion für große x gegen 0 geht. Bei vielen Reaktions-Diffusions-Systemen (oder thermodynamischen Prozessen) ist das jedoch eine unrealistische Anfangsbedingung, da die Konzentration des einen Stoffes (oder die Temperatur) auf einer Seite größer ist und man daran interessiert ist, wie der Stoff sich in einer Front ausbreitet. In diesem Kapitel soll nun die Bildung und Stabilität solcher Fronten untersucht werden. Wir folgen dabei wieder der Darstellung in [BKL94].

Betrachtet wird der Fall, daß die Anfangswertfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$ nicht gegen 0 geht, sondern gegen zwei verschiedene endliche Werte:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = u_{\pm}. \quad (2.1)$$

Weiterhin sei $a(u, u')$ eine analytische Funktion in u und u' mit $a(0, 0) = 0$. Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u'' + u''a(u, u') + (u')^2 \frac{\partial a}{\partial u} + u'u'' \frac{\partial a}{\partial u'} \\ &= u''(1 + a) + u'\partial_x(1 + a) \\ &= \partial((1 + a)\partial u) \end{aligned} \quad (2.2)$$

mit

$$u(x, 1) = \phi(x). \quad (2.3)$$

Die entsprechende Nichtlinearität

$$F(u, u', u'') = u''a(u, u') + (u')^2 \frac{\partial a}{\partial u} + u'u'' \frac{\partial a}{\partial u'} \quad (2.4)$$

ist dann irrelevant. Wie im ersten Kapitel schauen wir uns erst einmal den Fall $a = 0$ an.

2.1 Der Fall $a = 0$

Beim Fall $a = 0$ hat man die Wärmeleitungsgleichung gegeben. Dies kann man exakt lösen, es ist

$$u(x, t + 1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int dy \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \phi(y) \quad (2.5)$$

oder

$$u(\sqrt{t}x, t + 1) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int dy \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4}\right) \phi(\sqrt{t}y). \quad (2.6)$$

Der Übergang $t \rightarrow \infty$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} u(\sqrt{t}x, t + 1) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 dy \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4}\right) \phi(\sqrt{t}y) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} dy \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4}\right) \phi(\sqrt{t}y) \\ &= \frac{u_-}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^0 dy \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4}\right) \\ &\quad + \frac{u_+}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{\infty} dy \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(u_- \int_{-\infty}^{-x} dz \exp\left(\frac{-z^2}{4}\right) + u_+ \int_{-x}^{\infty} dz \exp\left(\frac{-z^2}{4}\right) \right) \\ &= \frac{u_-}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(\frac{-z^2}{4}\right) - \frac{u_-}{\sqrt{4\pi}} \int_{-x}^{\infty} dz \exp\left(\frac{-z^2}{4}\right) \\ &\quad + \frac{u_+}{\sqrt{4\pi}} \int_{-x}^{\infty} dz \exp\left(\frac{-z^2}{4}\right) \\ &= u_- + (u_+ - u_-) \int_{-\infty}^x \frac{dz}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{4}\right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die so definierte Funktion

$$\begin{aligned} \phi_0^*(x) &:= u_- + (u_+ - u_-) e(x) \\ &:= u_- + (u_+ - u_-) \int_{-\infty}^x \frac{dz}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(\frac{-z^2}{4}\right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

stellt das asymptotische Verhalten im Falle der Wärmeleitungsgleichung dar, entspricht also dem Fixpunkt f_0^* (1.8) bei anderen Randbedingungen. $e(x)$ wird auch die Fehlerfunktion genannt. Daß diese Funktion ϕ_0^* tatsächlich ein

Fixpunkt der Renormierungsgruppentransformation mit $\alpha = 0$

$$R_L(u(x, t)) := u(Lx, L^2 t) \quad (2.9)$$

$$u(x, 1) = \phi(x) \quad (2.10)$$

ist, ist einzusehen, wenn man zeigt, daß $e(x)$ ein solcher Fixpunkt ist. Das kann man mit etwas Zeit explizit nachrechnen, es ist

$$\begin{aligned} R_L(e(x)) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi(L^2 - 1)}} \int dy \int_{-\infty}^y \frac{dz}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{(Lx-y)^2}{4(L^2-1)}} e^{-\frac{z^2}{4}} \\ &\stackrel{z \rightarrow z-y+x}{=} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{L^2 - 1}} \int dy \int_{-\infty}^x dz e^{-\frac{(Lx-y)^2 + (L^2-1)(z+y-x)^2}{4(L^2-1)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{L} \int_{-\infty}^x dz e^{-\frac{(z+x(L-1))^2}{4L}} \\ &= e(x). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Für einen schnelleren Überzeugungsversuch betrachtet man die Fouriertransformierte von (2.10)

$$\widetilde{R}f(k) = \frac{1}{L} \exp(-k^2(1 - \frac{1}{L^2})) \widetilde{f}(\frac{k}{L}) \quad (2.12)$$

(man vergleiche dieses Resultat mit (1.6)). Die Fouriertransformierte der Fehlerfunktion $e(x)$ ist von der Form

$$\widetilde{e}(k) = C \frac{\exp(-k^2)}{ik}, \quad (2.13)$$

denn sie ist die Stammfunktion der Gaußkurve. Wenn man nun ignoriert, daß diese Fouriertransformierte bei $k = 0$ singular ist, glaubt man, daß $e(x)$ ein Fixpunkt der Renormierungsabbildung (2.10) ist, und deshalb ist ϕ_0^* ein Fixpunkt.

Das weitere Vorgehen im Falle $a = 0$ ist damit klar. Ein Anfangswert ϕ wird geschrieben als

$$\phi = \phi_0^* + f. \quad (2.14)$$

Der Restterm f fällt dann bei ∞ ab und erfüllt die normale Wärmeleitungsgleichung. Auf ihn kann man die Ergebnisse des irrelevanten Falles anwenden und erwartet deshalb die Asymptotik

$$u(x, t) \sim \phi_0^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{\widetilde{f}(0)}{\sqrt{t}} f_0^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + O(t^{\delta-1}). \quad (2.15)$$

Dabei ist f_0^* der Gaußsche Fixpunkt gemäß (1.8).

2.2 Der Fall $a \neq 0$

Dieser Fall ist wesentlich komplizierter. Es müssen in der Formel (2.15) die Fixpunkte ϕ_0^* und f_0^* durch andere Funktionen ersetzt werden. Erst dann kann das Hauptresultat formuliert werden, deshalb hier ein kurzer Überblick: Der Fixpunkt ϕ_0^* muß um einen Korrekturterm ψ ergänzt werden. Das geschieht in Abschnitt (2.3). Der Korrekturterm ψ kann zwar nicht explizit angegeben werden, es lassen sich jedoch für ihn einige Abschätzungen machen. Eine wesentliche Aussage wird sein, daß für kleine Anfangswerte der Korrekturterm im Vergleich zu ϕ_0^* klein ist.

Der Fixpunkt f_0^* muß durch eine andere Funktion als die Gaußkurve ersetzt werden. Diese neue Funktion wird in Abschnitt (2.4) bestimmt. Sie kann explizit angegeben werden.

Um ψ nachher bestimmen zu können, wird nun welche Differentialgleichung sich aus der ursprünglichen Differentialgleichung durch Skalierung mit L für große L ergibt. Wenn eine Lösung u der Differentialgleichung skaliert wird,

$$u \rightarrow u_L = u(Lx, L^2t) \quad (2.16)$$

so muß in der Differentialgleichung auch a umgerechnet werden durch

$$a \rightarrow a_L = a(u, \frac{u'}{L}). \quad (2.17)$$

Im Limes $L \rightarrow \infty$ wird a damit unabhängig von u' und geht über in

$$a \rightarrow a^*(u) = a(u, u' = 0). \quad (2.18)$$

Gesucht sind nun Fixpunkte ϕ^* der Abbildung (2.10) die die Differentialgleichung im Limes $L \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \dot{u}^* &= \partial(1 + a^*(u^*))\partial u^* \\ &= (u^*)'' + ((u^*)')^2 \frac{\partial a^*}{\partial u^*} + (u^*)'' a^* \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$u^*(x, 1) = \phi^*(x) \quad (2.20)$$

erfüllen. Um diese Differentialgleichung zu lösen, ist der Ansatz

$$u^*(x, t) = \phi^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) =: \phi(\hat{x}) \quad (2.21)$$

zweckmäßig und man erhält als neue Differentialgleichung für ϕ mit der Umrechnung

$$\dot{u}^* = \left(-\frac{x}{2t^{\frac{3}{2}}}\right)\partial_{\hat{x}}\phi$$

$$\begin{aligned}(u^*)' &= \frac{1}{\sqrt{t}} \partial_{\hat{x}} \phi \\ (u^*)'' &= \frac{1}{t} \partial_{\hat{x}} \phi\end{aligned}\tag{2.22}$$

die Gleichung

$$-\frac{1}{2}x\partial_x\phi^* = \partial_x(1 + a^*(\phi^*))\partial_x\phi^*.\tag{2.23}$$

Dabei wurde wieder $x = \hat{x}$ gesetzt. Von dieser Gleichung sucht man Lösungen der Form

$$\phi^* = \phi_0^* + \psi,\tag{2.24}$$

dabei ist ϕ_0^* der Gaußsche Fixpunkt (2.15). Die Funktion ψ muß nun genauer untersucht werden.

2.3 Der Restterm ψ

In diesem Abschnitt wird die Funktion ψ näher untersucht. Es wird eine Differentialgleichung für ψ hergeleitet und dann gezeigt, daß diese Differentialgleichung eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Lösung kann nicht explizit angegeben werden, in einer noch zu definierenden Norm gibt es aber eine Abschätzung für sie. Da die gesamte Beweisführung eher technisch ist und für das Hauptresultat über die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung nicht relevant ist, kann ein ungeduldiger Leser sich auf die Lektüre des unten bewiesenen Lemmas (2.34) beschränken und den Beweis verschmähen.

Wir bestimmen zuerst die Differentialgleichung für ψ . Es war

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2}x\partial(\phi_0^* + \psi) + \partial(1 + a^*(\phi_0^* + \psi))\partial(\phi_0^* + \psi) \\ &= \frac{1}{2}x\partial\psi + \partial(a^*(\phi_0^* + \psi)\partial(\phi_0^* + \psi)) + \partial^2\psi,\end{aligned}\tag{2.25}$$

denn es ist

$$\partial^2\phi_0^* + \frac{1}{2}x\partial\phi_0^* = 0,\tag{2.26}$$

wie man an der Definition (2.8) erkennt. ψ erfüllt also die Gleichung

$$-\partial^2\psi - \frac{1}{2}x\partial\psi = \partial(a^*(\phi_0^* + \psi)\partial(\phi_0^* + \psi)).\tag{2.27}$$

Um die Untersuchung dieser Differentialgleichung fortzusetzen, muß eine neue Norm eingeführt werden.

Definition. Für eine N -fach stetig differenzierbare Funktion wird gesetzt

$$\|\psi\|_N := \max_{0 \leq m \leq N} \sup_x \left(|\partial^m \psi(x)| e^{\frac{x^2}{8}} \right).\tag{2.28}$$

Konvergenz in dieser Norm impliziert offensichtlich L^1 -Konvergenz. Außerdem gilt für zwei Funktionen f, g in dieser Norm

$$\|fg\|_N \leq C_N \|f\|_N \|g\|_N. \quad (2.29)$$

Weiterhin sei mit d der Grad von a^* bezeichnet, d.h. daß

$$a^*(u) \sim Cu^d \quad (2.30)$$

für kleine u ist. Wenn a und damit a^* in 0 analytisch ist, beginnt dann die Potenzreihe von a^* erst in der Ordnung d . Außerdem setzt man¹

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \partial(a^*(\phi_0^*)\partial\phi_0^*) \\ &= RS(2.27)|_{\psi=0}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nun gilt:

Lemma. Sei $a : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch in 0 mit $d > 0$ und sei $N \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ so daß falls $|u_{\pm}| \leq \epsilon$ ist, die Gleichung

$$-\partial^2\psi - \frac{1}{2}x\partial\psi = \partial(a^*(\phi_0^* + \psi)\partial(\phi_0^* + \psi)) \quad (2.32)$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Lösung erfüllt

$$\|\psi - \psi_0\|_N \leq C\epsilon^{d+1} \quad (2.33)$$

$$\|\psi\|_N \leq C\epsilon^{d+1}. \quad (2.34)$$

Beweis. Die Ausgangsgleichung ist von der Form

$$A\psi = \partial(a^*(\phi_0^* + \psi)\partial(\phi_0^* + \psi)) \quad (2.35)$$

mit

$$A = -\partial^2 - \frac{1}{2}x\partial. \quad (2.36)$$

Setzt man nun

$$h := A\psi \quad (2.37)$$

so schreibt sie sich als²

$$\begin{aligned} h &= \partial(a^*(\phi_0^* + A^{-1}h)\partial(\phi_0^* + A^{-1}h)) \\ &=: \psi_0 + N(h). \end{aligned} \quad (2.38)$$

¹ RS bezeichnet die rechte Seite einer Gleichung, LS die linke Seite.

²Bei dieser Schreibweise wird natürlich die Invertierbarkeit von A vorausgesetzt. Näheres findet man im Anhang im Abschnitt über die Mehlersche Formel.

Diese Fixpunktgleichung wird wie im Beweis zum irrelevanten Fall behandelt, wir zeigen, daß die Abbildung

$$T(u) = \psi_0 + N(u) \quad (2.39)$$

für ein kleines $\epsilon > 0$ den Ball

$$B = \{u \mid \|u - \psi_0\|_N \leq \epsilon\} \quad (2.40)$$

auf sich selbst abbildet und kontrahierend ist. Dazu muß $\|N(h)\|_N$ genauer untersucht werden. Es ist

$$\begin{aligned} \psi_0 + N(h) &= \partial(a^*(\phi_0^* + A^{-1}h)\partial\phi_0^*) + \partial(a^*(\phi_0^* + A^{-1}h)\partial(A^{-1}h)) \\ &= \partial\left(\sum_{k=d}^{\infty} a_k^* \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (\phi_0^*)^{k-l} (A^{-1}h)^l \partial\phi_0^*\right) \\ &\quad + \partial(a^*(\phi_0^* + A^{-1}h)\partial(A^{-1}h)). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Also ist

$$\begin{aligned} N(h) &= \partial\left(\sum_{k=d}^{\infty} a_k^* \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} (\phi_0^*)^{k-l} (A^{-1}h)^l \partial\phi_0^*\right) \\ &\quad + \partial(a^*(\phi_0^* + A^{-1}h)\partial(A^{-1}h)). \end{aligned} \quad (2.42)$$

$N(h)$ ist eine analytische Funktion in $A^{-1}h$, $\partial A^{-1}h$ und $\partial^2 A^{-1}h$. Mit der Umschreibung

$$\partial^2 A^{-1}h = (-A - \frac{1}{2}x\partial)A^{-1}h = -h - \frac{1}{2}x\partial A^{-1}h \quad (2.43)$$

erhält man, daß $N(h)$ analytisch in $A^{-1}h$, $\partial A^{-1}h$ und $x\partial A^{-1}h$ ist. Wir wollen nun annehmen, daß folgendes gilt:

Hilfssatz. Die Operatoren $A^{-1}h$, $\partial A^{-1}h$ und $x\partial A^{-1}h$ sind stetig in der Norm (2.28).

Der Beweis dieses Hilfssatzes erfolgt am Ende dieses Abschnittes.

Dann sind die entsprechenden Operatoren beschränkt, denn ein linearer Operator O ist genau dann stetig, wenn $\|Of\|_N \leq C\|f\|_N$ gilt. Nun können wir $N(h)$ abschätzen. Aus der Definition von ϕ_0^* (2.8) und der von ψ_0 (2.31) folgt

$$\|\psi_0\|_N \leq C_a \epsilon^{d+1}. \quad (2.44)$$

Deshalb gilt im Banachraum (2.40)

$$\|u\|_N \leq C_a \epsilon. \quad (2.45)$$

Aus der expliziten Form für N (2.42) und dem Hilfssatz folgt damit

$$\|N(u)\|_N \leq C_a \epsilon^{d+1}. \quad (2.46)$$

Also bildet T die Kugel B für kleines ϵ auf sich selbst ab. Um Kontraktion von T zu zeigen, benutzen wir denselben Trick mit der Ableitung von N wie im irrelevanten Fall (man vergleiche mit (1.63)) und erhalten

$$\|N(h_1) - N(h_2)\|_N \leq C_a \epsilon^d \|h_1 - h_2\|_N. \quad (2.47)$$

Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gezeigt.

Um die Abschätzungen für den Fixpunkt h zu zeigen, bemerkt man zuerst, daß

$$\|h\|_N \leq \|\psi_0\|_N + \|N(h)\|_N \leq C_a \epsilon^{d+1} \quad (2.48)$$

gilt. Aufgrund der Stetigkeit von A^{-1} gilt

$$\|\psi\|_N \leq C_a \epsilon^{d+1} \quad (2.49)$$

und

$$\|\psi - \psi_0\|_N \leq C_a \epsilon^{d+1}. \quad (2.50)$$

Zum Abschluß muß noch der Hilfssatz bewiesen werden. Für einen Operator $O \in \{A^{-1}, \partial A^{-1}, x \partial A^{-1}\}$ muß gezeigt werden, daß

$$\|Oh\|_N \leq C \|h\|_N \quad (2.51)$$

gilt. Aufgrund der Normdefinition reicht es

$$|\partial^i Oh| \leq C e^{-\frac{x^2}{8}} \|h\|_N \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} \quad (2.52)$$

zu zeigen. Betrachtet man die Möglichkeiten, die für O gegeben sind, so reicht es

$$|(1 + |x|)\partial^i(A^{-1}h)(x)| \leq C e^{-\frac{x^2}{8}} \|h\|_N \quad \forall i \in \{1, \dots, N+1\} \quad (2.53)$$

zu zeigen. Wie im Abschnitt (5.3) des Anhangs dargelegt ist, bestimmt sich der Kern von A^{-1} mit Hilfe der Mehlerschen Formel zu

$$A^{-1}(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 - e^{-t}}} e^{-\frac{1}{4} \frac{(x - e^{-\frac{t}{2}} y)^2}{1 - e^{-t}}} \quad (2.54)$$

$$=: \int_0^\infty dt M_t(x, y). \quad (2.55)$$

Dieser Kern wird aufgespalten

$$\begin{aligned} A^{-1}(x, y) &= \int_0^\tau dt M_t(x, y) + \int_\tau^\infty dt M_t(x, y) \\ &=: M^{(1)} + M^{(2)} \end{aligned} \quad (2.56)$$

und die beiden Terme werden einzeln abgeschätzt. Für $M^{(2)}$ wird

$$\begin{aligned} |\partial^i(M^{(2)}h)(x)| &= \left| \int_\tau^\infty dt \int dy \partial_x^i M_t(x, y) h(y) \right| \\ &\leq \int_\tau^\infty dt \int dy |\partial_x^i M_t(x, y)| e^{-\frac{y^2}{8}} \|h\|_N \end{aligned} \quad (2.57)$$

benutzt. Um $|\partial_x^i M_t(x, y)|$ genauer zu untersuchen, bemerken wir zuerst, daß ganz allgemein für ein Polynom zweiten Grades $f(x)$ aufgrund der Kettenregel

$$\partial^i e^{f(x)} = P_i(f'(x), f'') e^{f(x)} \quad (2.58)$$

gilt. Der Term P_i der aus den inneren Ableitungen besteht, ist dabei ein Polynom in f' und f'' , er besteht aus Termen der Gestalt $(f')^a (f'')^b$ mit $a + b \geq \frac{i}{2}$ (da $f''' = 0$) und enthält einen Term $(f')^i$. Wendet man das auf den Kern von A^{-1} an, ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial^i e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-e^{-\frac{t}{2}}y)^2}{(1-e^{-t})}} &\leq C \frac{1}{(1-e^{-t})^{\frac{i}{2}}} C_i (x - e^{-\frac{t}{2}}y)^i e^{-\frac{1}{4} \frac{(x-e^{-\frac{t}{2}}y)^2}{(1-e^{-t})}} \\ &\leq \frac{(\sqrt{\delta})^i}{(\sqrt{\delta})^i} \frac{C_i}{(1-e^{-t})^{\frac{i}{2}}} (x - e^{-\frac{t}{2}}y)^i e^{-\frac{\delta}{4} \frac{(x-e^{-\frac{t}{2}}y)^2}{(1-e^{-t})}} e^{-\frac{1-\delta}{4} \frac{(x-e^{-\frac{t}{2}}y)^2}{(1-e^{-t})}} \\ &\leq \frac{1}{(\sqrt{\delta})^i} \frac{C_i}{(1-e^{-t})^{\frac{i}{2}}} e^{-\frac{1-\delta}{4} \frac{(x-e^{-\frac{t}{2}}y)^2}{(1-e^{-t})}}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Für den vollen Kern bedeutet das für alle δ die Abschätzung

$$|\partial_x^i M_t(x, y)| \leq \frac{C_i}{(\sqrt{\delta})^i} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{(1-e^{-t})^{\frac{1}{2}(i+1)}} e^{-\frac{1-\delta}{4} \frac{(x-e^{-\frac{t}{2}}y)^2}{(1-e^{-t})}}. \quad (2.60)$$

Das dann noch zu betrachtende Integral in (2.57) läßt sich exakt lösen

$$\int dy e^{-\frac{1-\delta}{4} \frac{(x-e^{-\frac{t}{2}}y)^2}{(1-e^{-t})} - \frac{y^2}{8}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{(1-\delta) \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{1}{2}}} e^{-\frac{1-\delta}{4} \frac{x^2}{1+(1-2\delta)e^{-t}}}, \quad (2.61)$$

und damit bekommen wir für großes τ und entsprechend kleines δ die Schranke³

$$\begin{aligned} |\partial^i(M^{(2)}h)(x)| &\leq \|h\|_N C_i \frac{1}{\sqrt{\delta}^i} \int_{\tau}^{\infty} dt \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{(1-e^{-t})^{\frac{1}{2}(i+1)}} \\ &\quad \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{(1-\delta)\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{1}{2}}} e^{-\frac{1-\delta}{4} \frac{x^2}{1+(1-2\delta)e^{-t}}} \\ &\leq C_i \|h\|_N e^{-\frac{x^2}{8}}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dieselbe Abschätzung gilt für $|x||\partial^i(M^{(2)}h)(x)|$. Zusammen gilt also

$$(1+|x|)|\partial^i(M^{(2)}h)(x)| \leq C \|h\|_N e^{-\frac{x^2}{8}} \quad \forall i \in \{0, \dots, N+1\}. \quad (2.63)$$

Um $M^{(1)}$ abzuschätzen, bemerken wir zuerst, daß

$$\partial_x M_t(x, y) = -e^{\frac{t}{2}} \partial_y M_t(x, y) \quad (2.64)$$

gilt, und deshalb erhält man durch partielle Integration

$$\begin{aligned} |\partial_x^i M^{(1)}h(x)| &= \left| \int_0^{\tau} dt e^{\frac{t}{2}} \int dy \partial_x^{i-1} \partial_y M_t(x, y) h(y) \right| \\ &= \left| \int_0^{\tau} dt e^{\frac{t}{2}} \int dy \partial_x^{i-1} M_t(x, y) \partial_y h(y) \right| \\ &= \left| \int_0^{\tau} dt e^{\frac{i-1}{2}t} \int dy \partial_x M_t(x, y) \partial_y^{i-1} h(y) \right|. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Durch Einsatz der Formeln (2.60) und (2.61) und da τ und δ fest gilt

$$\begin{aligned} |\partial_x^i M^{(1)}h(x)| &\leq \|h\|_N \int_0^{\tau} dt e^{\frac{(i-1)t}{2}} \int dy \frac{C}{\sqrt{\delta}} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{(1-e^{-t})} e^{-\frac{1-\delta}{4} \frac{(x-e^{-\frac{t}{2}}y)^2}{(1-e^{-t})}} e^{-\frac{y^2}{8}} \\ &\leq \|h\|_N \frac{C}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{(i-1)\tau}{2}} \int_0^{\tau} dt \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{(1-e^{-t})} \frac{e^{-\frac{1-\delta}{4} \frac{x^2}{1+(1-2\delta)e^{-t}}}}{\sqrt{(1-\delta)\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} + \frac{1}{2}}} \\ &\leq C_{\tau, \delta} \|h\|_N \int_0^{\tau} dt \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{(1-e^{-t})}} e^{-\frac{1-\delta}{4} \frac{x^2}{1+(1-2\delta)e^{-t}}} f(t). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Dabei ist der Restterm

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{(1-\delta)e^{-t} + \frac{1}{2}(1-e^{-t})}} \quad (2.67)$$

³An dieser Stelle werden τ und δ fest gewählt.

in t beschränkt. Da $e^{-t} \leq \frac{1}{1+t}$ ist, kann man im Integral noch weiter abschätzen:

$$\begin{aligned}
-\frac{1-\delta}{4} \frac{x^2}{1+(1-2\delta)e^{-t}} &\leq -\frac{1-\delta}{4} \frac{(1+t)x^2}{2(1-\delta)+t} \\
&= -\frac{x^2}{8+\frac{4t}{1-\delta}} - \frac{tx^2}{8+\frac{4t}{1-\delta}} \\
&= -\frac{x^2}{8} - \frac{x^2(-\frac{4t}{1-\delta})}{8(8+\frac{4t}{1-\delta})} - \frac{tx^2}{8+\frac{4t}{1-\delta}} \\
&= -\frac{x^2}{8} - \frac{tx^2}{8} \left(\frac{2(1-\delta)-1}{2(1-\delta)+t} \right). \quad (2.68)
\end{aligned}$$

Um (2.66) weiter zu behandeln, braucht nur noch

$$\int_0^\tau dt \frac{e^{-Ctx^2 - \frac{t}{2}}}{\sqrt{(1-e^{-t})}} \leq \frac{C}{|x|} \quad (2.69)$$

gezeigt zu werden. Aber das ist klar, denn es ist

$$\sup_x \int_0^\tau dt \frac{e^{-Ctx^2 - \frac{t}{2}}}{\sqrt{(1-e^{-t})}} |x| \leq C \quad (2.70)$$

aufgrund von

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau dt \frac{e^{-Ctx^2 - \frac{t}{2}}}{\sqrt{(1-e^{-t})}} |x| &\leq C \int_0^\tau dt \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{(1-e^{-t})}} \\
&= C \frac{2e^{-\frac{\tau}{2}} \sqrt{e^\tau - 1}}{\sqrt{1-e^{-\tau}}} \arctan \sqrt{e^\tau - 1}. \quad (2.71)
\end{aligned}$$

Damit wurde

$$(1+|x|)|\partial^i(M^{(1)}h)(x)| \leq C\|h\|_N e^{-\frac{x^2}{8}} \quad \forall i \in \{0, \dots, N+1\} \quad (2.72)$$

gezeigt⁴ und der Hilfssatz und das Lemma sind damit bewiesen. \square

2.4 Die Fixpunkte v^* und f^*

Mit der Bestimmung von ψ ist der dem Fixpunkt (2.15) entsprechende Fixpunkt für den Fall $a \neq 0$ bekannt. Nun wird die Lösung u der ursprünglichen

⁴Aus der Beweisstruktur des Hilfssatzes folgt übrigens sofort, daß auch der Operator $x^n \partial A^{-1}$ stetig ist.

Differentialgleichung (2.2) geschrieben als

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + v(x, t) \\ &= u^*(x, t) + v(x, t). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Dann wird die Gleichung für v ausgerechnet. Es ist mit (2.2) und (2.19)

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \partial((1 + a(u))(\partial u^* + \partial v)) - \dot{u}^* \\ &= \partial((1 + a(u))\partial v) + \partial((1 + a(u))\partial u^*) - \partial((1 + a^*(u^*))\partial u^*) \\ &= \partial((1 + a(u))\partial v) + (a(u) - a^*(u^*))\partial u^* \end{aligned} \quad (2.74)$$

und v erfüllt die Anfangswertbedingung

$$v(x, 1) = f(x) \quad (2.75)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0. \quad (2.76)$$

Die Gleichungen für v erinnern an den Gaußschen Fixpunkt. Benutzt wird die aus dem ersten Kapitel bekannte Renormierungsgruppentransformation

$$\begin{aligned} R_L f &= L v(Lx, L^2) \\ &=: v_L(x, 1). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Um den Fixpunkt v^* unter dieser Transformation zu bestimmen, muß die Differentialgleichung für v_L ausgerechnet werden, dann wird an ihr der $\lim_{L \rightarrow \infty}$ ausgeführt. Es ist

$$\begin{aligned} \dot{v}_L &= L^3 \dot{v}(Lx, L^2 t) \\ &= L^3 \left((1 + a)\partial^2 v + \partial a \partial v - (\partial^2 u^*)(a - a^*) - \partial(a - a^*)\partial u^* \right) \Big|_{\substack{x \rightarrow Lx \\ t \rightarrow L^2 t}}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Führt man die Notation ein

$$\begin{aligned} a_L &:= a\left(u^* + \frac{v_L}{L}, \frac{1}{L}\partial\left(u^* + \frac{v_L}{L}\right)\right) \\ &= a(Lx, L^2 t) \end{aligned} \quad (2.79)$$

so rechnet man weiter

$$\begin{aligned} L^3(1 + a)\partial^2 v \Big|_{x \rightarrow Lx, t \rightarrow L^2 t} &= (1 + a_L)\partial^2 v_L(x, t) \\ L^3 \partial a \partial v \Big|_{x \rightarrow Lx, t \rightarrow L^2 t} &= \partial a_L \partial v_L \\ L^3(\partial^2 u^*)(a - a^*) \Big|_{x \rightarrow Lx, t \rightarrow L^2 t} &= L((a_L - a^*(u^*))\partial^2 u^*) \\ L^3(\partial u^*)\partial(a - a^*) \Big|_{x \rightarrow Lx, t \rightarrow L^2 t} &= L((\partial u^*)\partial(a_L - a^*(u^*))) \end{aligned} \quad (2.80)$$

und bekommt die Gleichung

$$\dot{v}_L = \partial((1 + a_L)\partial v_L + L(a_L - a^*(u^*))\partial u^*). \quad (2.81)$$

Von dieser Gleichung wird jetzt der Limes $L \rightarrow \infty$ bestimmt. Es ist klar, daß

$$\partial(1 + a_L)\partial v_L \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \partial(1 + a^*(u^*))\partial v^* \quad (2.82)$$

gilt. Um die Asymptotik des anderen Terms zu bestimmen, wird a in eine Potenzreihe entwickelt:

$$a = \sum_{n,m} \alpha_{n,m} u^n (u')^m \quad (2.83)$$

und es ist

$$\begin{aligned} L(a_L - a^*(u^*)) &= L \sum_{n,m} \alpha_{n,m} (u^* - \frac{v_L}{L})^n \\ &\quad \cdot (\frac{1}{L} \partial(u^* + \frac{v_L}{L}))^m - L \sum_n \alpha_{n,0} (u^*)^n. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Die Terme mit $m > 1$ gehen für $L \rightarrow \infty$ gegen 0, die beim Ausmultiplizieren des $(\dots)^n$ -Termes im Fall $n, m = n, 0$ auftretenden $(u^*)^n$ -Terme heben sich weg, die ebenfalls dabei entstehenden $(u^*)^x (\frac{v_L}{L})^y$ -Terme mit $y > 2$ gehen gegen 0. Damit hat man

$$\begin{aligned} L(a_L - a^*(u^*)) &\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,0} (u^*)^{n-1} n v^* + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,1} (u^*)^n \partial u^* \\ &= v^* \partial a^*(u^*) + \frac{\partial a}{\partial u'}(u^*, 0) \partial u^*. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Setzt man das ein, ergibt das als Differentialgleichung für v^* :

$$\dot{v}^* = \partial[\partial(1 + a^*(u^*))v^*] + \frac{\partial a}{\partial u'}(u^*, 0)(\partial u^*)^2. \quad (2.86)$$

Für dieses v^* macht man nun den Ansatz

$$v^*(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \quad (2.87)$$

Mit den üblichen Ersetzungsregeln, (analog zu 2.22), erhält man als neue Differentialgleichung für f^* :

$$\partial \left(\partial((1 + a^*(\phi^*))f^*) + \frac{1}{2} x f^* + \omega \right) = 0. \quad (2.88)$$

Dabei wurde die Notation

$$\omega = \frac{\partial a}{\partial u'}(\phi^*, 0)(\partial \phi^*)^2 \quad (2.89)$$

benutzt.

Diese Differentialgleichung läßt sich sogar explizit lösen. Zuerst wird (2.88) einmal integriert:

$$\partial((1 + a^*(\phi^*))f^*) + \frac{1}{2}xf^* + \omega = C \quad (2.90)$$

Da $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f' = 0$ sein soll, muß $C = 0$ gelten und man gelangt zu der Gleichung

$$\partial f^* = \left(\frac{-1}{1 + a^*(\phi^*)} \right) \left((\partial a^*(\phi^*) + \frac{1}{2}x)f^* + \omega \right). \quad (2.91)$$

Das ist eine Differentialgleichung von der Form

$$y' = -P(x)y + Q(x), \quad (2.92)$$

die allgemeine Lösung lautet [For77]

$$y(x) = e^{-\int_0^x dz P(z)} \left(C + \int_0^x dz h(z) e^{\int_0^z dz P(z)} \right). \quad (2.93)$$

In diesem Falle also

$$\begin{aligned} f^*(x) = & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x dy \frac{y + 2\partial a^*(\phi^*)}{1 + a^*(\phi^*)} \right\} \\ & \cdot \left(N + \int_0^x dy \omega(y) \frac{e^{\frac{1}{2} \int_0^y dz \frac{z + 2\partial a^*(\phi^*)}{1 + a^*(\phi^*)}}}{1 + a^*(\phi^*)} \right) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Dabei sei N so gewählt, daß f^* normiert ist:

$$\tilde{f}^*(0) = 1. \quad (2.95)$$

Man beachte, daß für ein kleines ϕ^* (d.h. für kleine Anfangswerte u_{\pm}) f^* bzw. v^* in den Gaußschen Fixpunkt übergehen, denn die Differentialgleichung für v^* geht dann in die Wärmeleitungsgleichung über.

2.5 Das Hauptresultat für Fronten

Da jetzt die Fixpunkte der Renormierungsabbildungen bekannt sind, kann bald das Hauptresultat formuliert werden. Vorher muß aber noch eine neue Norm festgelegt werden, in der Konvergenz gezeigt werden soll.

2.5.1 Eine neue Norm

Definition. Sei χ eine glatte, positive Funktion mit kompaktem Träger $\subset [-1, 1]$, so daß die Verschiebungen

$$\chi_n(x) := \chi(x - n) \quad (2.96)$$

eine Zerlegung der Eins bilden. Dann wird die Norm durch

$$\|f\| := \sup_{n \in \mathbb{Z}; k \in \mathbb{R}; i \leq 2} (1 + n^4)(1 + k^2) |\widetilde{\chi_n \partial^i f}(k)| \quad (2.97)$$

definiert.

Anschaulich gesprochen ist eine Funktion in dieser Norm endlich, wenn sie und ihre erste und zweite Ableitung für große x wie x^{-4} abfallen, aufgrund des $(1 + n^4)$ -Faktors. Außerdem muß $k^2 \tilde{f}$ wie k^{-2} abfallen, \tilde{f} also wie k^{-4} . Diese Bedingungen werden unten im Beweis von Bemerkung 3 noch präzisiert. Die Norm hat folgende Eigenschaften:

Bemerkung 1. Seien χ_n und ξ_n zwei verschiedene Zerlegungen der Eins. Dann sind die entsprechenden Normen äquivalent, genauer gilt:

$$\|f\|_\chi \leq 3\|f\|_\xi \quad (2.98)$$

$$\|f\|_\xi \leq 3\|f\|_\chi. \quad (2.99)$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} |\widetilde{\chi_n \partial^i f}(k)| &\leq \int dx \sum_{j=n-1}^{n+1} (\xi_j(x) |\chi_n(x)| |\partial^i f(x)| |e^{-ikx}|) \\ &\leq |\widetilde{\xi_{n-1} \partial^i f}(k)| \Big|_{k=0} + |\widetilde{\xi_n \partial^i f}(k)| \Big|_{k=0} + |\widetilde{\xi_{n+1} \partial^i f}(k)| \Big|_{k=0} \end{aligned} \quad (2.100)$$

und durch die Bildung des Supremums über k und n ergibt sich die Behauptung. \square

Bemerkung 2. Konvergenz in der Norm (2.97) impliziert L^1 - und L^∞ -Konvergenz für die im späteren Hauptresultat dieses Kapitels betrachtete Funktion.

Beweis. Die L^1 - und L^∞ -Konvergenz folgt aus einer Gleichung, die beim Beweis des Hauptresultates gezeigt wird. Man vergleiche die Fußnote zu der Gleichung (2.147). \square

Bemerkung 3. f^* , seine erste und zweite Ableitung und $\partial \phi^*$ und seine Ableitungen sind in der Norm (2.97) endlich.

Beweis. Um für eine Funktion f Endlichkeit in der Norm (2.97) zu zeigen, reicht es, für $i = 0, 1, 2$ die Abschätzungen

$$|\widetilde{|\chi_n \partial^i f(k)|}| \leq C_1 \frac{1}{(1+n^4)^2} \quad \forall n, k \quad (2.101)$$

$$|\widetilde{|\chi_n \partial^i f(k)|}| \leq C_2 \frac{1}{(1+k^2)^2} \quad \forall k, n \quad (2.102)$$

zu zeigen. Dann gilt nämlich

$$(1+n^4)(1+k^2)|\widetilde{|\chi_n \partial^i f(k)|}| \leq C_1 \frac{1+k^2}{1+n^4} \quad (2.103)$$

$$(1+n^4)(1+k^2)|\widetilde{|\chi_n \partial^i f(k)|}| \leq C_2 \frac{1+n^4}{1+k^2} \quad (2.104)$$

und damit ist die linke Seite von (2.104) beschränkt, denn das Minimum der rechten Seiten von (2.104) ist beschränkt. Wäre dem nicht so, d.h. wäre für ein großes C

$$C < C_2 \frac{1+n^4}{1+k^2} \quad (2.105)$$

$$C < C_1 \frac{1+k^2}{1+n^4} \quad (2.106)$$

so würde

$$(1+n^4) > \frac{C^2}{C_1 C_2} (1+n^4) \quad (2.107)$$

mit einem Widerspruch folgen.

Um nun (2.101) zu zeigen, benutzt man

$$\begin{aligned} |\widetilde{|\chi_n \partial^i f(k)|}| &\leq \int dx |\chi_n(x) \partial^i f(x)| \\ &\leq 2 \sup_{x \in [n-1, n+1]} |\partial^i f(x)|. \end{aligned} \quad (2.108)$$

Für (2.102) benutzt man, daß die Fouriertransformierte von χ_n und allen seinen Ableitungen existiert, und deshalb $\widetilde{\chi_n}$ für große k schneller als jede Potenz abfällt. Wenn man weiterhin voraussetzt, daß \widetilde{f} wie k^{-6} abfällt, kommt man zu

$$\begin{aligned} |\widetilde{|\chi_n \partial^i f(k)|}| &= |\widetilde{\chi_n} * \widetilde{\partial^i f}| \\ &\leq C \int d\alpha |\widetilde{\chi_n}(\alpha)| |\widetilde{\partial^i f}(k-\alpha)| \\ &\leq C \int d\alpha \frac{1}{1+\alpha^{10}} \frac{1}{|1+(k-\alpha)^4|} \\ &\leq \frac{C}{(1+k^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Nun wird $\partial\phi^*$ betrachtet. Es ist $\partial\phi^* = \partial\phi_0^* + \partial\psi$. $\partial\phi_0^*$ ist die Gaußkurve und fällt im Orts- und Impulsraum exponentiell ab, erfüllt also die durch (2.101, 2.108, 2.109) gegebenen Bedingungen. Da ψ in der Norm (2.28) endlich ist, fällt es (und alle seine Ableitungen) im Orts- und Impulsraum exponentiell ab. Damit ist die Endlichkeit von $\partial\phi^*$ und seinen Ableitungen gezeigt.

Für f^* muß (2.94) betrachtet werden. Da ϕ^* für große x konstant wird, gilt in (2.94)

$$\frac{e^{\frac{1}{2} \int_0^y dz \frac{z+2\partial a^*(\phi^*)}{1+a^*(\phi^*)}}}{1+a^*(\phi^*)} \stackrel{y \gg 1}{\approx} C e^{\frac{1}{4}y^2} \quad (2.110)$$

und da $\psi(x) \stackrel{x \gg 1}{\approx} C e^{-\frac{x^2}{8}}$ gilt, ist $\omega(x) \stackrel{x \gg 1}{\approx} C e^{-\frac{x^2}{4}}$ und deshalb

$$N + \int_0^x dy \omega(y) \frac{e^{\frac{1}{2} \int_0^y dz \frac{z+2\partial a^*(\phi^*)}{1+a^*(\phi^*)}}}{1+a^*(\phi^*)} \stackrel{x \gg 1}{\approx} Cx. \quad (2.111)$$

Aufgrund der Exponentialfunktion in (2.94) fällt damit f^* für große x stark ab, und damit ist die Behauptung bewiesen. \square

2.5.2 Das Hauptresultat

Das Hauptresultat im Falle der Frontenbildung ist in gewisser Weise ähnlich zu dem des irrelevanten Falles. Die Lösung der Differentialgleichung geht mit derselben zeitlichen Asymptotik gegen eine Funktion. Diese Funktion besteht aus einem Term ϕ^* , der die Frontenbildung beschreibt, und einem Term f^* , der den Abfall der von der Front abweichenden Funktionswerte beschreibt.

Satz. Sei $a : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch bei 0, mit Grad $d > 0$, und $\delta > 0$ gegeben. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ so daß, falls $|u_{\pm}| < \epsilon$ und $\|f\| < \epsilon$ sind, die Gleichung

$$\dot{u} = \partial(1 + a(u, \partial u)\partial u) \quad (2.112)$$

$$u(x, 1) = \phi^*(x) + f(x) \quad (2.113)$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Lösung erfüllt die Asymptotik

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-\delta} \|u(\sqrt{t}x, t) - \phi^*(x) - \frac{\tilde{f}(0)}{\sqrt{t}} f^*(x)\| = 0. \quad (2.114)$$

Dabei sind ϕ^* und f^* durch (2.24) bzw. (2.94) gegeben.

Beweis. Die Strategie des Beweises ist einfach. Es wird die Differenz w zwischen der Lösung und der vermuteten Asymptotik betrachtet. Diese Funktion w erfüllt dann die Wärmeleitungsgleichung (2.126) mit einer marginalen

Nichtlinearität K . Für ein endliches Zeitintervall wird Existenz und Eindeutigkeit der Lösung mit dem Banachschen Fixpunktsatz gezeigt. Dann wird die Renormierungsgruppenabbildung studiert. Der Beweis der Kontraktion dieser Abbildung (2.184) ist technisch. Schließlich wird die Iteration der Abbildung betrachtet und die Asymptotik gezeigt.

Die Lösung wird wie in (2.73) geschrieben als

$$u(x, t) = u^*(x, t) + v(x, t). \quad (2.115)$$

v erfüllt dann die Gleichung (2.74)

$$\dot{v} = \partial((1+a)\partial v + (a(u) - a^*(u^*)\partial u^*)) \quad (2.116)$$

$$v(x, 1) = f(x), \quad (2.117)$$

und die Renormierungsabbildung lautet

$$R_L f = L v(Lx, L^2). \quad (2.118)$$

Nun wird der Anfangswert f geschrieben als

$$f = \tilde{f}(0)f^* + g, \quad (2.119)$$

und dann ist $\tilde{g}(0) = 0$, da f^* normiert ist. Weiterhin wird v aufgespalten in

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{\tilde{f}(0)}{\sqrt{t}} f^*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + w(x, t) \\ &=: v^*(x, t) + w(x, t). \end{aligned} \quad (2.120)$$

Man beachte dabei den anderen Vorfaktor von v^* als in (2.87). Es soll ein Anfangswertproblem für w bestimmt werden. g ist der Anfangswert für w . Um eine Aussage über $\|g\|$ zu bekommen, benutzt man

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(0)| &= \left| \sum_n \widetilde{\chi_n f(0)} \right| \\ &\leq \sum_n |\widetilde{\chi_n f(0)}| \\ &\leq \sum_n \frac{1}{1+n^4} \sup_{k,n,i} (1+n^4)(1+k^2) |\widetilde{\chi_n \partial^i f(k)}| \\ &\leq C \|f\| \end{aligned} \quad (2.121)$$

und da $\|f^*\| < C$ ist, erhält man

$$\|g\| \leq C \|f\| \quad (2.122)$$

$$\leq C\epsilon. \quad (2.123)$$

Nun wird die Differentialgleichung für w ausgerechnet, es ist nach (2.117)

$$\dot{v}^* + \dot{w} = \partial v \partial a + (1 + a) \partial^2 v + (\partial u^*) \partial(a - a^*) + (a - a^*) \partial^2 u^* \quad (2.124)$$

und gemäß (2.86) gilt

$$\dot{v}^* = \partial(v \partial a^* + (1 + a^*) \partial v^*) + \frac{\partial a}{\partial u'}(u^*, 0)(\partial u^*)^2. \quad (2.125)$$

Faßt man zusammen, ergibt das

$$\begin{aligned} \dot{w} &= (\partial v^* + \partial w) \partial a + (1 + a) \partial^2 v^* + (1 + a) \partial^2 w \\ &\quad + (\partial u^*) \partial(a - a^*) + (a - a^*) \partial^2 u^* - \dot{v}^* \\ &= \partial^2 w + \partial(a \partial w) + \partial(a \partial v^*) + \partial^2 v^* + (\partial u^*) \partial(a - a^*) \\ &\quad + (a - a^*) \partial^2 u^* - \partial(v \partial a^* + (1 + a^*) \partial v^*) \\ &\quad - \partial\left(\frac{\partial a}{\partial u'}(u^*, 0)(\partial u^*)^2\right) \\ &= \partial^2 w + \partial(a \partial w) + \partial(a \partial v^*) - \partial(a^* \partial v^*) + (\partial u^*) \partial(a - a^*) \\ &\quad + (a - a^*) \partial^2 u^* - \partial(v \partial a^*) - \partial\left(\frac{\partial a}{\partial u'}(u^*, 0)(\partial u^*)^2\right) \\ &= \partial^2 w + \partial((a - a^*) \partial v^* + \partial(a \partial w) + \partial((a - a^*) \partial u^*) \\ &\quad - \partial(v^* \partial a^*) - \partial\left(\frac{\partial a}{\partial u'}(u^*, 0)(\partial u^*)^2\right)) \\ &=: \partial^2 w + K. \end{aligned} \quad (2.126)$$

w erfüllt also eine Wärmeleitungsgleichung mit einer Nichtlinearität

$$\begin{aligned} K &= \partial[(a - a^*) \partial v^* + \partial(a \partial w) + \partial([a - a^*] \partial u^*) - \\ &\quad - \partial(v^* \partial a^*) - \partial\left(\frac{\partial a}{\partial u'}(u^*, 0)(\partial u^*)^2\right)]. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Die genaue Form von K ist für das weitere Vorgehen nicht wichtig. Benötigt werden aber die folgenden Eigenschaften:

- Es ist $a = a(u, u')$ mit $u = u^* + v^* + w$, also ist K eine Potenzreihe in $u^*, \partial u^*, \partial^2 u^*, v^*, \partial v^*, \partial^2 v^*, w, \partial w$ und $\partial^2 w$.
- K hat keinen Term der Form $(u^*)^l$.
- Da a keinen konstanten Term besitzt, hat K keinen linearen Term.

Nun lautet die Renormierungsgruppentransformation für v

$$R_L v = L v(Lx, L^2), \quad (2.128)$$

und deshalb braucht man Abschätzungen für

$$L^n w(L^n x, L^{2n}) = R_{L, K_n} w. \quad (2.129)$$

Bei der Renormierungsabbildung wird die Nichtlinearität K gemäß (8) skaliert. Das geschieht, indem man die Terme in K ersetzt gemäß den Regeln

$$\begin{aligned} \partial^i v^* &\rightarrow L^{-1-i} \partial^i v^* \\ \partial^i w &\rightarrow L^{-1-i} \partial^i w \\ \partial^i u^* &\rightarrow L^{-i} \partial^i u^* \end{aligned} \quad (2.130)$$

(zu der letzten Zeile vergleiche man (2.10)) und das Ganze mit L^3 multipliziert:

$$K_{n+1} = L^3 K_n(\text{Ersetzungen}). \quad (2.131)$$

Nun muß bestimmt werden, wie sich die einzelnen Terme von K unter diesen Ersetzungen verhalten. Für einen einzelnen Term von K wird gesetzt

$$d = n_\partial + n_{v^*} + n_w - 3. \quad (2.132)$$

Dabei sind n_w bzw. n_{v^*} die Anzahl von $\partial^i w$ bzw. $\partial^i v^*$ -Faktoren und n_∂ ist die Gesamtzahl der Ableitungen. Ein Term heißt nun

$$\begin{aligned} \text{irrelevant} &\Leftrightarrow d > 0 \\ \text{marginal} &\Leftrightarrow d = 0 \\ \text{relevant} &\Leftrightarrow d < 0. \end{aligned}$$

In K kommen jedoch keine relevanten Terme vor. Jeder Term von K enthält nämlich entweder zwei Ableitungen und einen w - oder v^* -Faktor, oder drei oder mehr Ableitungen.⁵ Marginale Terme kommen jedoch in K vor, sie sind von der Form $(u^*)^l \partial^2 w$ oder $(u^*)^l \partial u^* \partial w$.

Nun kommt der eigentliche Beweis. Ziel ist es, eine Abschätzung für $\|R_{L^n, K} g\|$ zu finden. Zuerst wird die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gezeigt.

Analog zum Beweis des irrelevanten Falles beim Gaußschen Fixpunkt wird die Integralgleichung

$$w(t) = e^{(t-1)\partial^2} g + \int_0^{t-1} ds e^{s\partial^2} K(t-s) \quad (2.133)$$

⁵Der einzige Term, bei dem das nicht offensichtlich ist, ist der $\partial(a - a^*)\partial u^*$ -Term, aufgrund der Definition von a^* enthält $(a - a^*)$ jedoch Ableitungen.

betrachtet. Für die durch sie definierte Abbildung $T(u)$ soll ein Fixpunkt gefunden werden. Benutzt wird dabei die Norm

$$\|w\|_L = \sup_{t \in [1, L^2]} \|w\|. \quad (2.134)$$

Dazu muß ein allgemeiner Term in der Potenzreihenentwicklung von K abgeschätzt werden. Es wird also eine Schranke für

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \int_0^{t-1} ds e^{s\partial^2} (u^*(x, t-s))^l F(x, t-s) \\ &= \int_0^{t-1} ds \int dy A(x, y) (u^*(y))^l F(y) \end{aligned} \quad (2.135)$$

benötigt. Dabei stellt $(u^*)^l F$ einen Term von K dar, es ist $l \geq 0$, und F ist ein nichtleeres Produkt von $(\partial)v^*$, $(\partial)w$ und ∂u^* . Wenn $l = 0$ ist, so hat F mindestens zwei Faktoren. $A(x, y)$ stellt den Kern der Gaußfaltung dar:

$$A(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi s}} \exp \left\{ -\frac{(x-y)^2}{4s} \right\}. \quad (2.136)$$

$\alpha(x)$ wird als Summe geschrieben:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \sum_m \alpha_m(x) \\ &:= \sum_m \int_0^{t-1} ds \int dy A(x, y) \chi_m(y) (u^*(y))^l F(y). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Um nun über $\|\alpha\|$ etwas aussagen zu können, braucht man für $i = 0, 1, 2$ eine Schranke für

$$\beta_{mn} = \sup_{k \in \mathbb{R}} |(1+k^2) \widetilde{\chi_n \partial^i \alpha_m}(k)| \quad (2.138)$$

Nun werden zwei Fälle unterschieden:

Erster Fall: $|m-n| \geq 2$.

Hier haben χ_m und χ_n einen disjunkten Träger, und deshalb ist in $A(x, y)$ immer $x \neq y$. Es gilt

$$\lim_{s \searrow 0} A(x, y) = 0. \quad (2.139)$$

$\beta_{m,n}$ wird umgeschrieben zu

$$\begin{aligned} \beta_{m,n} &= \sup_k \left| \int dx e^{-ikx} \int_0^{t-1} ds \int dy (1 - \partial_x^2) \right. \\ &\quad \cdot (\chi_n(x) \partial_x^i A(x, y)) \chi_m(y) (u^*)^l F(y) \end{aligned} \quad (2.140)$$

und einzelne Terme davon betrachtet. Da $|x - y| > c > 0$ ist, gilt

$$|\partial^j A(x, y)| \leq C_j e^{-|m-n|} \quad (2.141)$$

und da in (2.140) immer $j \leq 4$ ist, hat man

$$|\partial^j A(x, y)| \leq C e^{-|m-n|}. \quad (2.142)$$

Für $F(y)$ braucht man die Hilfsformel

$$\|\partial^i f\|_\infty \leq \|f\|_N \quad (2.143)$$

für beliebiges f und $i \leq N$, die offensichtlich aus der Definition der $\|\cdot\|_N$ -Norm folgt. Damit gilt

$$\begin{aligned} \|\partial^i u^*\|_\infty &\leq \|\partial^i \phi_0^*\|_\infty + \|\partial^i \psi\|_\infty \\ &\leq |u_+ - u_-| \|\partial^i e(x)\|_\infty + \|\psi\|_N \\ &\leq C\epsilon + C\epsilon^{d+1} \\ &\leq C\epsilon. \end{aligned} \quad (2.144)$$

Dabei wurde (2.34) benutzt. Analog gilt

$$\begin{aligned} \|\partial^i v^*\|_\infty &\leq |\tilde{f}(0)| \|\partial^i f^*\|_\infty \\ &\leq C \|f\| \\ &\leq C\epsilon. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Außerdem läßt sich $|\partial^i w(x)|$ abschätzen

$$\begin{aligned} |\partial^i w(x)| &\leq \sum_n |\chi_n(x) \partial^i w(x)| \\ &\leq \sum_n \left| \int dk e^{ikx} \widetilde{\chi_n \partial^i w}(k) \right| \\ &\leq \sum_n \int dk |\widetilde{\chi_n \partial^i w}(k)| \\ &\leq \sum_n \int dk \frac{(1+n^4)(1+k^2) |\widetilde{\chi_n \partial^i w}(k)|}{(1+n^4)(1+k^2)} \\ &\leq C \|w\|. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Damit eine Abschätzung von $\|\alpha_m\|$ durch eine Schranke von $|\beta_{m,n}|$ möglich ist, muß in der Abschätzung für $|\beta_{m,n}|$ ein Faktor $\frac{1}{1+m^4}$ stehen. Deshalb wird

nun⁶

$$\int dy |\chi_m(y) \partial^i w(y)| \leq \frac{C \|w\|}{1 + m^4} \quad (2.147)$$

bewiesen. Sei dazu $\phi_m \in L^2$ eine glatte Funktion, die auf dem Träger von χ_m konstant eins ist, so daß also

$$\chi_m \phi_m = \chi_m \quad (2.148)$$

gilt. Dann wird gerechnet:

$$\begin{aligned} \int dy |\chi_m(y) \partial^i w(y)| &= \int dy |\chi_m(y) \phi_m \partial^i w(y)| \\ &\leq \left(\int dy |\phi(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int dy |\chi_m(y) \partial^i w(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\int dk |\widetilde{\chi_m \partial^i w}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\int dk \left| \frac{1}{1 + m^4} \frac{\|w\|}{1 + k^2} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{C \|w\|}{1 + m^4}. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Dabei wurde die Höldersche Ungleichung und Plancherel benutzt. Für $\partial^i u^*(0 < i \leq 2)$ und $\partial^i v^*$ gilt analog

$$\int dy |\chi_m(y) \partial^i u^*(y)| \leq \frac{C\epsilon}{1 + m^4} \quad (2.150)$$

$$\int dy |\chi_m(y) \partial^i v^*(y)| \leq \frac{C\epsilon}{1 + m^4} \quad (2.151)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \|v^*\| &\leq |\widetilde{f}(0)| \|f^*\| \\ &\leq C\epsilon \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$\|u^*\| \leq C\epsilon. \quad (2.153)$$

Dabei kann (2.153) mit einer zu (2.144) analogen Rechnung verifiziert werden. Nun kann endgültig (2.140) abgeschätzt werden. Das dx -Integral ergibt wegen $\chi_n(x)$ einen konstanten Faktor. Das ds -Integral läßt sich durch CL^2 abschätzen, da der Integrand für große s abfällt und für kleine s wegen (2.139)

⁶Aus dieser Gleichung für den Fall $i = 0$ folgt L^1 -Konvergenz, aus der Gleichung (2.146) für $i = 0$ folgt L^∞ -Konvergenz.

beschränkt ist. Die Faktoren $(u^*)^l$ werden durch (2.144) beschränkt. Ein Faktor aus $F(y)$ wird mittels (2.147), (2.150) oder (2.151) abgeschätzt, die anderen durch (2.144), (2.145) oder (2.146). So erhält man:

$$\beta_{m,n} \leq L^2 C^{l+M+N} e^{-|m-n|} \epsilon^{l+M} \|w\|_L^N. \quad (2.154)$$

Dabei ist M die Anzahl der $\partial^i v^*$ bzw. $\partial^i u^*$ -Faktoren in F und N die Anzahl der $\partial^i w$ -Faktoren in $F(y)$. Da K keinen linearen Term enthält, ist $l+M+N \geq 2$.

Zweiter Fall: $|m-n| < 2$.

In diesen Falle hat man (2.139) nicht zur Verfügung. Als Kompensation muß jedoch nicht über alle $m \in \mathbb{Z}$ summiert werden. Mit der Notation $f_m = \phi_m(u^*)^l$, wobei ϕ_m wie in (2.148) definiert ist, gilt

$$\begin{aligned} \widetilde{\chi_n \partial^i \alpha_m}(k) &= \widetilde{\chi_n} * \left(\partial^i \int ds e^{s \partial^2} \phi_m \chi_m (u^*)^l F \right) \\ &= \int ds \int dp \widetilde{\chi_n}(k-p) (ip)^i e^{-sp^2} \widetilde{f_m} * \widetilde{\chi_m F} \\ &= \int ds \int dp dq \widetilde{\chi_n}(k-p) (ip)^i e^{-sp^2} \widetilde{f_m}(p-q) \widetilde{\chi_m F}(q). \end{aligned} \quad (2.155)$$

Es sollen die Faktoren auf der rechten Seite einzeln abgeschätzt werden. Es ist

$$\begin{aligned} |\widetilde{\chi_n}(k-p)| &= |\widetilde{\chi}(k-p)| \\ &\leq \frac{C_l}{1+|k-p|^l} \quad \forall l \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.156)$$

denn da die Fouriertransformierte von χ und allen seine Ableitungen existiert, fällt sie schneller als jede Potenz ab. Weiterhin ist

$$|\partial^k (u^*)^l| \leq C_k (C\epsilon)^l \quad (2.157)$$

(man vergleiche dazu die Rechnung (2.144)) und deshalb gilt

$$\begin{aligned} \int dx |(1 + (-\partial^2)^r \phi_m(u^*)^l| &\leq \int dx |\phi_m(u^*)^l| + \int dx |-\partial^{2r} \phi_m(u^*)^l| \\ &\leq (C\epsilon)^l + \sum_{i+j=2r} \int dx |\partial^i \phi_m \partial^j (u^*)^l| \\ &\leq C_r (C\epsilon)^l. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Damit läßt sich weiterrechnen:

$$\begin{aligned}
|\widetilde{f_m}(p-q)| &= \left| \frac{1+(p-q)^{2r}}{1+(p-q)^{2r}} \right| |\widetilde{\phi_m(u^*)^l}(p-q)| \\
&\leq \frac{1}{1+(p-q)^{2r}} \int dx |1 + (-\partial_x^2)^r \phi_m(u^*)^l e^{i(p-q)x}| \\
&\leq \frac{C_r(C\epsilon)^l}{1+(p-q)^{2r}}
\end{aligned} \tag{2.159}$$

Außerdem läßt sich zeigen:

$$|\widetilde{\chi_m F}(q)| \leq \frac{C^{N+M} \epsilon^M \|w\|^N}{(1+m^4)(1+q^2)}. \tag{2.160}$$

Der Beweis dieser Formel geht wie folgt. Es ist

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\chi_m \partial^i w}| &\leq \frac{(1+m^4)(1+k^2)}{(1+m^4)(1+k^2)} |\widetilde{\chi_m \partial^i w}| \\
&\leq \frac{\|w\|}{(1+m^4)(1+k^2)}
\end{aligned} \tag{2.161}$$

und ganz analog folgt

$$\begin{aligned}
|\widetilde{\partial^i w}(k)| &\leq \left| \sum_n \widetilde{\chi_n \partial^i w}(k) \right| \\
&\leq \frac{\|w\|}{1+k^2}
\end{aligned} \tag{2.162}$$

$$|\widetilde{\partial^i u^*}(k)| \leq \frac{C\epsilon}{1+k^2} \tag{2.163}$$

$$|\widetilde{\partial^i v^*}(k)| \leq \frac{C\epsilon}{1+k^2}. \tag{2.164}$$

Damit ist, mit der Notation $f \in \{u^*, v^*, w\}$ und $g \in \{u^*, v^*\}$,

$$\begin{aligned}
|\chi_m F| &= |\widetilde{\chi_m f * (\tilde{w})^{*N} * (\tilde{g})^{*M}}| \\
&\leq \frac{C^{N+M} \epsilon^M \|w\|^N}{(1+m^4)(1+q^2)}.
\end{aligned} \tag{2.165}$$

Dabei wurde die Faltungsformel (1.46) benutzt. (2.160) ist damit gezeigt. Als letzte Ungleichung vor der Abschätzung von (2.155) braucht man noch

$$\int_0^{t-1} ds |p|^j e^{-sp^2} \leq CL^2, \tag{2.166}$$

und damit gilt:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\chi_n \partial^i \alpha_m(k)} &\leq \int ds \int dp dq \frac{C_l}{1 + |k - p|^l} \frac{C_r (C\epsilon)^l}{1 + (p - q)^{2r}} \\
 &\quad CL^2 \frac{C^{N+M} \epsilon^M \|w\|^N}{(1 + m^4)(1 + q^2)} \\
 &\leq \frac{CL^2 C^{N+M+l} \epsilon^{M+l} \|w\|^N}{(1 + k^2)(1 + m^4)}. \tag{2.167}
 \end{aligned}$$

Dabei wurde wiederum (1.46) benutzt, um die Faltungen auszuführen. Insgesamt hat man damit für den Fall $|m - n| < 2$:

$$\begin{aligned}
 \beta_{m,n} &= \sup_k |(1 + k^2) \widetilde{\chi_n \partial^i \alpha_m(k)}| \\
 &\leq \frac{CL^2 C^{N+M+l} \epsilon^{M+l} \|w\|^N}{(1 + m^4)}. \tag{2.168}
 \end{aligned}$$

Nun kann man endlich $\|\alpha\|$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
 \|\alpha\| &= \left\| \sum_m \alpha_m \right\| \\
 &\leq \sup_n (1 + n^4) \sum_m |\beta_{m,n}| \\
 &\leq L^2 C^{N+M+l} \epsilon^{M+l} \|w\|^N \sup_n \sum_m \frac{1 + n^4}{1 + m^4} e^{-|n-m|} \\
 &\leq L^2 C^{N+M+l} \epsilon^{M+l} \|w\|^N. \tag{2.169}
 \end{aligned}$$

Die dabei benutzte Tatsache, daß

$$\sup_n \sum_m \frac{1 + n^4}{1 + m^4} e^{-|n-m|} \leq C, \tag{2.170}$$

wird später bei einer Rechnung noch klar werden. Man vergleiche dazu die Fußnote zu (2.196).

Jetzt läßt sich mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zeigen. Betrachtet wird der Banachraum

$$B_f = \{w, \|e^{(t-1)\partial^2} g - w\|_L \leq \|g\| \leq C\epsilon\} \tag{2.171}$$

und die Abbildung

$$\begin{aligned}
 T(w) &= e^{(t-1)\partial^2} g + \int_0^{t-1} ds e^{s\partial^2} K(t-s) \\
 &=: g_f + N(w). \tag{2.172}
 \end{aligned}$$

Damit T die Kugel B_f in sich abbildet, muß $\|N(w)\|_L$ abgeschätzt werden. Es besteht $N(w)$ in der Potenzreihenentwicklung von K aus Termen mit $l + N + M \geq 2$ mit der Abschätzung von α und den Relationen

$$\begin{aligned} \|e^{(t-1)\partial^2} g\|_L &\leq C\|g\| \\ &\leq C\epsilon \end{aligned} \quad (2.173)$$

$$\Rightarrow \|w\|_L \leq C\epsilon \quad (2.174)$$

kann man $N(u)$ für kleine ϵ durch den Term mit $l + N + M = 2$ bestimmen, es ergibt sich

$$\|N(w)\|_L \leq L^2 C_a \epsilon^2. \quad (2.175)$$

Man vergleiche dazu auch die entsprechenden Gleichungen des irrelevanten Falles. Um Kontraktion zu zeigen wird eine Schranke für $\|N(w_1) - N(w_2)\|$ benötigt. Mit den gleichen Rechnungen wie im irrelevanten Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} \|N(w_1) - N(w_2)\| &\leq CL^2(\|w_1\| + \|w_2\|_L)\|w_1 - w_2\|_L \\ &\leq CL^2\epsilon\|w_1 - w_2\|_L. \end{aligned} \quad (2.176)$$

Damit hat man die eindeutige Lösung

$$w(x, L^2) = e^{(L^2-1)\partial^2} g(x) + v(x) \quad (2.177)$$

mit

$$\begin{aligned} \|v\| &\leq \|N(w)\|_L \\ &\leq C_{La}\epsilon(\epsilon + \|g\|) \end{aligned} \quad (2.178)$$

$$\leq C_{La}\epsilon^2. \quad (2.179)$$

Der erste Term (ϵ^2) in (2.178) kommt dabei von dem Falle, daß $N = 0, l + M \geq 2$ ist, der zweite Term ($\epsilon\|g\|$) von dem Fall, daß $N \geq 1, l + M \geq 1$ ist. Damit ist Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bewiesen.

Nun kann die Renormierungstransformation

$$Rg = Lw(Lx, L^2) \quad (2.180)$$

untersucht werden. Man macht sich zuerst einmal klar, daß R die Bedingung $\tilde{g}(0) = 0$ erhält. Es ist nämlich K von der Form $\partial[A]$, wobei $[A]$ im Unendlichen abfällt, und deshalb ist

$$\int dx K = A|_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (2.181)$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \partial_t \int dx w(x, t) &= \int dx \partial_t w \\
 &= \int dx \partial^2 w + \int dx K \\
 &= \int dx \partial^2 w \\
 &= \partial w|_{-\infty}^{\infty} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.182}$$

Die Aussage über Rg , die nun gezeigt werden soll, ist

$$\begin{aligned}
 \|Rg\| &= \|R_0 g + Lv(L\cdot)\| \\
 &\stackrel{!}{\leq} \frac{C}{L} \|g\| + C_{L,a} \epsilon (\epsilon + \|g\|).
 \end{aligned} \tag{2.183}$$

Aufgrund von (2.178) reicht es

$$\begin{aligned}
 \|R_0 g\| &= \|Le^{(L^2-1)} g(L\cdot)\| \\
 &\stackrel{!}{\leq} \frac{C}{L} \|g\|
 \end{aligned} \tag{2.184}$$

zu zeigen. Die nun folgende Rechnung ist etwas technisch. R_0 wird als Integralkern dargestellt

$$R_0 g = \int dy G(x, y) g(y) \tag{2.185}$$

mit

$$G(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{L^2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left(x - \frac{y}{L} \right)^2 \right\}. \tag{2.186}$$

Die Darstellung erhält man leicht mit Substitution aus dem Kern (2.136) der Gaußfaltung. Mit dieser Notation ist

$$\|R_0 g\| = \sup_{n,k,i} (1 + n^4) \underbrace{\left| \int dx e^{ikx} \int dy (1 - \partial_x^2) (\chi_n(x) \partial_x^i G(x, y) g(y)) \right|}_{=: Z(k, n, i)}. \tag{2.187}$$

Z soll genauer untersucht werden. Gezeigt werden soll folgendes

Lemma. Es gilt

$$Z(k, n, i) \leq \frac{C}{L} \frac{\|g\|}{1 + n^4}. \tag{2.188}$$

Aus (2.188) folgt dann sofort (2.184).

Beweis des Lemmas. Betrachtet wird zuerst der Fall, daß

$$|n| \geq C \log L. \quad (2.189)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} Z &\leq \sum_m \int dx dy |(1 - \partial_x^2)(\chi_n(x) \partial_x^i G(x, y) \chi_m(y) g(y))| \\ &\leq C \sum_m e^{-|n - \frac{m}{L}|} \frac{\|g\|}{1 + m^4}. \end{aligned} \quad (2.190)$$

Dabei wurden Ungleichungen analog zu (2.142) und (2.147) benutzt. Nun müssen zwei Fälle für n unterschieden werden:

Falls $|n - \frac{m}{L}| \leq \frac{|n|}{2}$ gilt, so folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{m}{L} \right| &\geq \left| \frac{n}{2} \right| \\ \Rightarrow |m| &\geq L \left| \frac{n}{2} \right| \\ \Rightarrow \frac{1}{1 + m^4} &\leq \frac{1}{1 + L^4 \frac{n^4}{16}} \\ &\leq \frac{C}{L^4} \frac{1}{n^4} \\ &\leq \frac{C}{L^4} \frac{1}{1 + n^4}. \end{aligned} \quad (2.191)$$

Weiterhin ist

$$\sum_m \frac{1}{L} e^{-|n - \frac{m}{L}|} \leq C, \quad (2.192)$$

denn es gilt⁷

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_m \frac{1}{L} e^{-|n - \frac{m}{L}|} &\leq \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{L} e^{-|n - \frac{m}{L}|} \\ &= \int dx e^{-|n - x|}. \end{aligned} \quad (2.193)$$

Damit gilt

$$Z \leq \frac{C}{L^3} \frac{\|g\|}{1 + n^4}. \quad (2.194)$$

⁷Man beachte, daß die Summe über m in (2.192) im betrachteten Fall eine endliche Summe ist.

Falls $|n - \frac{m}{L}| \geq \frac{|n|}{2}$ gilt, so wird (2.189) ausgenutzt:

$$\begin{aligned}
e^{-|n - \frac{m}{L}|} &\leq e^{-|\frac{n}{2}|} \\
&= e^{-3 \log L} e^{3 \log L - |\frac{n}{2}|} \\
&\leq \frac{1}{L^3} e^{3 \frac{|n|}{C} - \frac{|n|}{2}} \\
&\leq \frac{1}{L^3} e^{\frac{6-C}{2C} |n|} \\
&\leq \frac{1}{L^3} \frac{C}{1 + n^4}
\end{aligned} \tag{2.195}$$

und damit gilt wieder⁸

$$Z \leq \frac{C}{L^3} \frac{\|g\|}{1 + n^4}. \tag{2.196}$$

Für den Fall daß

$$|n| \leq C \log L \tag{2.197}$$

gilt, bemerkt man zuerst einmal, daß

$$\begin{aligned}
\int dy G(x, 0) g(y) &= G(x, 0) \int dx g(y) \\
&= G(x, 0) \cdot 0 = 0
\end{aligned} \tag{2.198}$$

gilt, deshalb ist

$$Z \leq \sum_m \int dx dy |(1 - \partial_x^2)(\chi_n(x) \partial_x^i (G(x, y) - G(x, 0)) \chi_m(y) g(y))|. \tag{2.199}$$

Es erfolgt wieder eine Fallunterscheidung.

Für den Fall, daß

$$|m| \leq L \tag{2.200}$$

gilt, ist

$$\begin{aligned}
|\partial_x^j (G(x, y) - G(x, 0))| &\leq C \sum_{\alpha + \beta = j} \left(\partial_x^\alpha \left(e^{-\frac{x^2}{4(1-L^{-2})}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\partial_x^\beta \left(e^{-\frac{1}{4(1-L^{-2})}(-\frac{xy}{L} + \frac{y^2}{L^2})} - 1 \right) \right) \right).
\end{aligned} \tag{2.201}$$

Für die einzelnen Terme gilt

$$\partial_x^\alpha \left(e^{-\frac{x^2}{4(1-L^{-2})}} \right) \leq C e^{-\frac{5}{4}|x|}, \tag{2.202}$$

⁸Wenn man die Gleichungen (2.190) und (2.196) für den Fall $L = 1$ betrachtet, ergeben sie einen Beweis für (2.170).

beim zweiten Term ist für den Fall, daß $\beta > 0$ ist,

$$\begin{aligned} \partial_x^\beta \left(e^{-\frac{1}{4(1-L^{-2})}(-\frac{xy}{L} + \frac{y^2}{L^2})} - 1 \right) &= \left(\frac{y}{L} \frac{1}{4(1-L^{-2})} \right)^\beta e^{-\frac{1}{4(1-L^{-2})}(-\frac{xy}{L} + \frac{y^2}{L^2})} \\ &\leq C \frac{|m+1|}{L} e^{\frac{|x|}{4}+1} \\ &\leq C \frac{|m+1|}{L} e^{\frac{|x|}{4}} \end{aligned} \quad (2.203)$$

Dabei wurde benutzt, daß $\frac{|y|}{L} \leq \frac{|m+1|}{L}$ und $\frac{|m|}{L} \leq 1$ ist. Falls $\beta = 0$ ist, gilt

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{4(1-L^{-2})}(-\frac{xy}{L} + \frac{y^2}{L^2})} - 1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-1}{4(1-L^{-2})} \left(-\frac{xy}{L} + \frac{y^2}{L^2} \right) \right)^k \\ &\leq C \frac{|m+1|}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-1}{4(1-L^{-2})} \left(-\frac{x}{L} + \frac{y}{L} \right) \right)^k \\ &\leq C \frac{|m+1|}{L} e^{\frac{|x|}{4}} \end{aligned} \quad (2.204)$$

Damit ergibt sich insgesamt für den Fall $|m| \leq L$

$$|\partial_x^j (G(x, y) - G(x, 0))| \leq \frac{C}{L} e^{-|n|} |m+1| \quad (2.205)$$

Nun können wir die Summe in (2.199) mittels (2.147) für die Summanden mit $|m| \leq L$ abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{|m| \leq L} |\dots| &\leq \frac{C}{L} \sum_{|m| \leq L} e^{-|n|} \frac{\|g\|}{1+m^4} |m+1| \\ &\leq \frac{C}{L} \frac{\|g\|}{1+n^4}. \end{aligned} \quad (2.206)$$

Bei den Summanden mit $|m| > L$ in (2.199) ist die Subtraktion von $G(x, 0)$ nicht notwendig, man kann sie direkt mittels (2.147) abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{|m| > L} |\dots| &\leq C \sum_{|m| > L} \frac{\|g\|}{1+m^4} \\ &\leq \frac{C}{L^3} \|g\| \sum_{|m| > L} \frac{1}{L} \frac{L^4}{m^4} \\ &\leq \frac{C}{L^3} \|g\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{C}{L} \|g\| e^{-2 \log L} \\
&\stackrel{|n| \leq C \log L}{\leq} \frac{C}{L} \|g\| e^{-C|n|} \\
&\leq \frac{C}{L} \frac{\|g\|}{1 + n^4}.
\end{aligned} \tag{2.207}$$

Damit ist das Lemma (2.188) und dadurch auch (2.184) bewiesen.

Nun kann die Iteration der Renormierungsgruppenabbildung betrachtet werden. Bevor über $\|R_{L^n} K g\|$ etwas ausgesagt werden kann, braucht man Fakten über $\|R_{LK_n} g_n\|$.⁹ Es gilt

$$\begin{aligned}
\|R_{LK_n} g_n\| &= \|R_0 g_n + Lv(L \cdot)\| \\
&\leq \frac{C}{L} \|g_n\| + C_L \|v_n\| \\
&\leq \frac{C}{L} \|g_n\| + C_{L,a} \epsilon (L^{-n} \epsilon + \|g_n\|).
\end{aligned} \tag{2.208}$$

Die dabei benutzte Abschätzung für $\|R_0 g_n\|$ ergibt sich aus der Aussage des obigen Lemmas (2.188). Die Schranke für $\|v_n\|$ ergibt sich analog zum Beweis von (2.178). Dabei verbessern sich die Abschätzungen, die von irrelevanten Termen in K herrühren um einen Faktor L^{-n} . Die Abschätzungen der marginalen Terme ändern sich nicht. Die marginalen Terme sind die mit $l + M \geq 1$, $N \geq 1$, sie bedingen den $\|g\|$ -Term in (2.178). Die anderen Terme sind irrelevant.

Als letzte Formel zeigen wir noch

$$\|R_{L^n, K} g\| \leq C_{L,a} L^{-(1-\delta)n} (\|f\| + \epsilon). \tag{2.209}$$

Der Beweis ist ein Induktionsbeweis. Für den Induktionsanfang benutzen wir $\|g\| \leq C\|f\|$, (2.122) und (2.178) und erhalten

$$\begin{aligned}
\|R_{L, K} g\| &\leq \frac{C}{L} \|g\| + C_{L,a} \epsilon (\epsilon + \|g\|) \\
&\leq \frac{C}{L} \|f\| + C_{L,a} \epsilon (\epsilon + \|f\|) \\
&\leq C_{L,a} L^{-(1-\delta)} (\epsilon + \|f\|).
\end{aligned} \tag{2.210}$$

Der Induktionsschritt ergibt

$$\|R_{L^{n+1}, K} g\| = \|R_{L, K_n} R_{L^n, K} g\|$$

⁹Zur Definition von K_n vergleiche man (2.131).

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{C}{L} (C_{L,a} L^{-(1-\delta)n} (\|f\| + \epsilon)) + \\
&\quad + C_{L,a} \epsilon (L^{-n} \epsilon + C_{L,a} L^{-(1-\delta)n} (\|f\| + \epsilon)) \\
&\stackrel{\epsilon < \frac{1}{C_{L,a} L}}{\leq} C_{L,a} L^{-(1-\delta)n+1} (\|f\| + \epsilon).
\end{aligned} \tag{2.211}$$

Nun kann der Beweis abgeschlossen werden. Es war

$$u = u^* + v^* + w \tag{2.212}$$

und um (2.114) zu zeigen muß nur noch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-\delta} \|w(\sqrt{t}, t)\| = 0 \tag{2.213}$$

verifiziert werden. Sei dafür $t = L^{2n}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
t^{1-\delta} \|w(\sqrt{t}, t)\| &= t^{1-\delta} t^{-\frac{1}{2}} \|R_{L^n, Kg}\| \\
&\leq L^{2n-2n\delta-n} C_{L,a} L^{-n+\delta n} (\|f\| + \epsilon) \\
&\leq C_{L,a} L^{-\delta n} (\|f\| + \epsilon) \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned} \tag{2.214}$$

Damit ist das Hauptresultat (2.114) bewiesen. \square

2.6 Zusammenfassung und Ausblick

In den ersten beiden Kapiteln wurde eine Methode erläutert, mit der das asymptotische Verhalten von Lösungen von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen bestimmt werden kann. Diese Methode beruht auf der Iteration einer Renormierungsgruppenabbildung und der Suche nach ihren Fixpunkten. Mit dieser Methode wurden Gleichungen vom Typ der Wärmeleitungsgleichung mit einem nichtlinearen Zusatzterm untersucht. Im ersten Kapitel wurden im Unendlichen verschwindende Anfangswertfunktionen betrachtet. Es wurde gezeigt, daß für große Klassen von Nichtlinearitäten und Anfangswertfunktionen die Lösungen in die entsprechende Lösung der linearen Wärmeleitungsgleichung übergehen. Im zweiten Kapitel wurde die Bildung und Stabilität von Fronten untersucht. Auch hier zeigte sich, daß für gewisse Typen von Nichtlinearitäten und Anfangswerten die Lösungen dieselbe Asymptotik haben. Diese Asymptotik ist jedoch nicht mehr die Lösung der linearen Wärmeleitungsgleichung, sondern eine leicht modifizierte Funktion.

Die vorgestellte Methode kann in verschiedene Richtungen erweitert werden. Zum einen können immer größere Klassen von Gleichungen betrachtet werden. Weiterhin kann untersucht werden, wie weit die bisherigen Resultate auch für Systeme von Differentialgleichungen gelten. Eine andere Möglichkeit besteht darin, anstatt einer Differentialgleichung ihre auf einem Gitter diskretisierte Form, also eine Differenzengleichung zu untersuchen. Die Asymptotik einer solchen Differenzengleichung ist aus zwei Gründen interessant. Zum einen ist es prinzipiell interessant, zu wissen, ob eine Differentialgleichung vielleicht eine andere Asymptotik hat als die entsprechende Differenzengleichung. Zum anderen ist es für die numerische Behandlung von Differentialgleichungen von Interesse, da einige numerische Verfahren (z.B. Multigrid-Verfahren) verbessert werden können, wenn die Asymptotik der Differenzengleichung bereits bekannt ist.

Um die Korrespondenz zwischen Differentialgleichung und Differenzengleichung zu untersuchen, muß ein Formalismus gefunden werden, der Funktionen und die Renormierungsgruppe vom Kontinuum auf das Gitter transferiert. Dafür bieten sich A -Kerne an, die aus der Quantenfeldtheorie bekannt sind. Im nun folgenden Kapitel werden diese A -Kerne, allerdings im Hinblick auf eine andere Problemstellung, eingeführt.

Teil II

Renormierungsinvariante
Trajektorien

Kapitel 3

A -Kerne

In diesem mathematisch orientierten Kapitel werden Operatoren, die auf Funktionen, welche auf Gittern definiert sind, wirken, behandelt. Basierend auf Ideen von K. Gawedzki und A. Kupiainen [GK84] werden Operatoren im Hinblick auf zwei Ziele konstruiert. Zum einen sollen Blockmittelwerte und Dilatationen eingeführt werden, mit denen dann eine Blockspinrenormierungsgruppe erklärt werden kann. Zum anderen kann mit den vorgestellten Methoden ein Gittermodell in ein äquivalentes Kontinuumsmodell übertragen werden.

Bei unserer Konstruktion werden zuerst einfache Operatoren eingeführt, die das Gitter vergrößern oder Mittelwerte bilden. Dann wird ausgehend von einer allgemeinen Kovarianz, die geblockte Kovarianz und die Fluktuationskovarianz eingeführt. Danach wird eine Kovarianz konstruiert, die invariant unter der Blockung ist. Damit wird dann der wichtigste Operator dieses Kapitels, A_*^∞ , eingeführt, der eine Vermittlerrolle zwischen dem Gitter und dem Kontinuum spielt. Mit ihm kann eine auf dem Gitter definierte Funktion in das Kontinuum transferiert werden. Mit ihm wird auch die Definition von den Gitteroperatoren entsprechenden Kontinuumsoperatoren möglich. Die dadurch entstehenden Kontinuumskovarianzen werden dann gründlich unter die Lupe genommen. Aufgrund der Eigenschaft (3.93) von A_*^∞ kann später auch die Gitterrenormierungsgruppe ins Kontinuum übertragen werden.

Die in diesem Kapitel vorgestellte Methode findet im vierten Kapitel in der Quantenfeldtheorie Anwendung. Im vorliegenden Kapitel sind die Ausführungen jedoch noch nicht auf diese Anwendung ausgerichtet, sondern möglichst allgemein gehalten.

Teile der Darstellung in diesem Kapitel basieren auf [Wie98b]. Einige Resultate dieses Kapitels werden in [GW] benutzt.

3.1 Elementare Operatoren

Im ersten Teil dieses Abschnittes werden einige Definitionen angegeben und grundlegende Tatsachen angeführt, die für unseren weiteren Weg notwendig sind. Dann werden die Blockmittelwertoperatoren B_L und C_L und die Dilatation S_L und die dazu adjungierten Operatoren erklärt. Dabei wird die Wirkung dieser Operatoren mit einigen Bildern veranschaulicht.

3.1.1 Allgemeines

Sei im folgenden immer

$$\Lambda(a) = a\mathbb{Z}^D \quad (3.1)$$

ein D -dimensionales Gitter mit der Gitterkonstanten a . Integration einer Funktion $f : \Lambda(a) \rightarrow \mathbb{R}$ über eine Teilmenge $M \subset \Lambda(a)$ wird durch

$$\int_M d^D x f(x) := a^D \sum_{x \in M} f(x) \quad (3.2)$$

definiert. Wir betrachten den Hilbertraum

$$H(a) = \{f : \Lambda(a) \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad (3.3)$$

als die Menge aller reellwertigen Funktionen auf Λ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{\Lambda(a)} d^D x f(x) g(x). \quad (3.4)$$

Auch auf dem Gitter kann man eine Fouriertransformierte

$$\tilde{f} : \tilde{\Lambda}(a) := \left[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}\right)^D \subset \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R} \quad (3.5)$$

zu einer Funktion f definieren. Näheres dazu findet sich im Abschnitt (5.1) des Anhangs.

Die Eigenschaften eines linearen Operators

$$A : H(a) \rightarrow H(a'). \quad (3.6)$$

lassen sich häufig mit Hilfe seines Kerns¹ $A(x, y)$ untersuchen. Dabei gelten einige Regeln, die wir hier ohne Beweis angeben möchten:

¹Der Kern eines Operators definiert sich durch $(A\phi)(x) = \int_{\Lambda(a)} dy A(x, y) \phi(y)$.

- Wenn A translationsinvariant ist, hängt der Kern $A(x, y)$ nur von der Differenz der Argumente ab und hat deshalb die Fourierdarstellung

$$A(x, y) = \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y)} \tilde{A}(p). \quad (3.7)$$

- Wenn A translationsinvariant ist, ist der fouriertransformierte Kern von A^{-1} durch $\frac{1}{\tilde{A}(p)}$ gegeben.
- Der Kern des adjungierten Operators ist durch $A^\dagger(x, y) = A(y, x)$ gegeben.

3.1.2 Der Blockmittelwertoperator B_L

Im Folgenden sei $L \in \{2, 3, 4, \dots\}$ immer eine ganze Zahl größer als 1. Der Operator B_L bildet von einer Funktion Mittelwerte über L^D -Blöcke:

Definition. Der Blockmittelwertoperator

$$B_L : H(a) \rightarrow H(La) \quad (3.8)$$

ist definiert durch

$$(B_L(f))(x') = \int_{\mathbb{B}(x')} \frac{d^D y}{|\mathbb{B}(x')|} f(y). \quad (3.9)$$

Dabei ist der Block, über den gemittelt wird²

$$\mathbb{B}(x') = \{y \in \Lambda(a), La[\frac{y}{La}] = x'\} \quad (3.10)$$

und

$$|\mathbb{B}(x')| = (La)^D =: |\mathbb{B}| \quad (3.11)$$

ist das „Volumen“ von $\mathbb{B}(x')$ (unabhängig von x').

Den adjungierten Operator

$$B_L^\dagger : H(La) \rightarrow H(a) \quad (3.12)$$

berechnet man, indem man seine Definition durch

$$(f, B_L(g)) = (B_L^\dagger(f), g) \quad (3.13)$$

² $[c]$ bezeichnet den ganzzahligen Anteil von c .

beziehungsweise explizit

$$(La)^D \sum_{x' \in \Lambda(La)} f(x') \int_{\mathbb{B}(x')} \frac{d^D \bar{x}}{(La)^D} g(\bar{x}) = a^D \sum_{x' \in \Lambda(a)} (B_L^\dagger f)(x') g(x') \quad (3.14)$$

benutzt und $g(\bar{x}) = \delta_{\bar{x}, x}$ setzt. Er ist durch

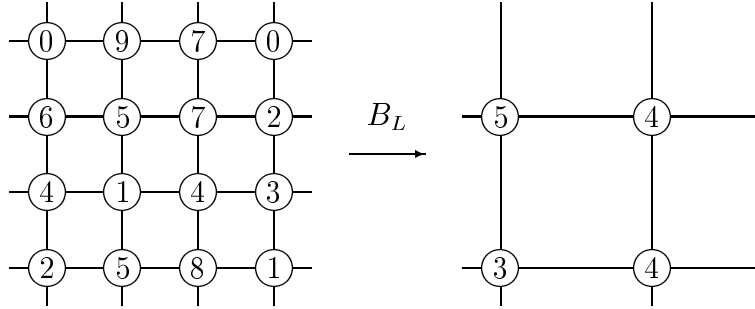
$$(B_L^\dagger(f))(x) = f(La[\frac{x}{La}]) \quad (3.15)$$

gegeben. Der Index L von B_L wird im folgenden häufig fortgelassen. Anhand der Definitionen von B und B^\dagger erkennt man, daß

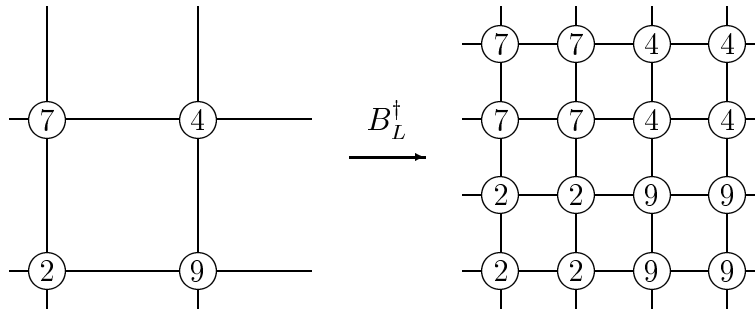
$$B \circ B^\dagger = \mathbb{1} \quad (3.16)$$

$$B^\dagger \circ B \neq \mathbb{1} \quad (3.17)$$

ist. Diese Operatoren sind (für den Fall, daß $L = 2$) in folgenden Bildern dargestellt. B_L wirkt so:



Es werden Mittelwerte von 2x2-Blöcken gebildet und auf ein gröberes Gitter abgebildet. Der Operator B_L^\dagger erzeugt eine Funktion, die auf den entsprechenden Blöcken konstant ist:



Die bei der hier verwendeten Definition des Blockmittelwertoperators entstehenden Blöcke sind nicht zentriert. Bei ungeradem L kann eine Zentrierung durch die Ersetzung $x \rightarrow x - \frac{L-1}{2}a$ erreicht werden. Die Tatsache, daß die hier verwendeten Blöcke nicht zentriert sind, wird später in einigen Gleichungen zu Zusatztermen führen.

3.1.3 Der Dilatationsoperator S_L

Definition. Der Dilatationsoperator

$$S_L : H(La) \rightarrow H(a) \quad (3.18)$$

ist definiert durch

$$(S_L(f))(x) = L^\sigma f(Lx). \quad (3.19)$$

Dabei wird σ die Skalendimension genannt. Später wird $\sigma = \frac{D}{2} - 1$ gesetzt. Der adjungierte Operator

$$S_L^\dagger : H(a) \rightarrow H(La) \quad (3.20)$$

ist durch

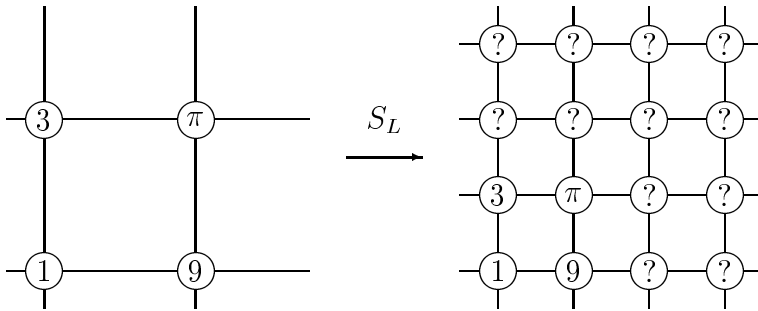
$$(S_L^\dagger(f))(x') = L^{\sigma-D} f\left(\frac{x'}{L}\right) \quad (3.21)$$

gegeben. Auch bei S_L wird der Index L meistens unterdrückt. Für den Operator S gilt:

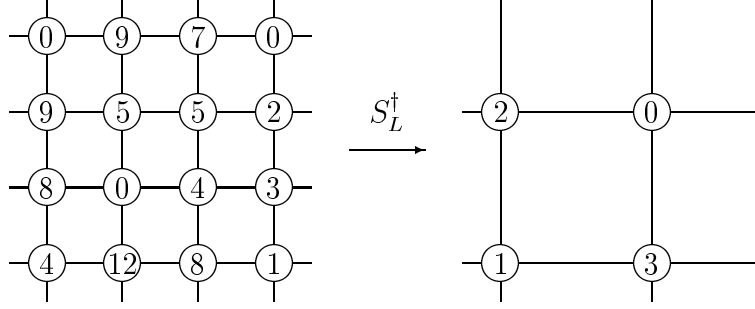
$$S \circ S^\dagger = L^{2\sigma-D} \mathbb{1} \quad (3.22)$$

$$S^\dagger \circ S = L^{2\sigma-D} \mathbb{1}. \quad (3.23)$$

Der Operator S_L kann in natürlicher Weise in das Kontinuum fortgesetzt werden. Bei einer graphischen Darstellung von S_L ergibt sich mit $L = 2$ und $\sigma = 0$:



Der Operator S_L^\dagger streckt das Gitter und multipliziert die Funktionswerte mit einem Faktor, im vorliegenden Fall ist der Faktor $\frac{1}{4}$.



3.1.4 Der Blockmittelwertoperator C_L

Durch Kombination von B und C erhält man einen Operator, der Mittelwerte bildet, aber die Gitterkonstante nicht ändert:

Definition. Der Blockmittelwertoperator

$$C_L : H(a) \rightarrow H(a) \quad (3.24)$$

ist die Komposition von S und B

$$C_L = S \circ B \quad (3.25)$$

$$(C_L(f))(x) = \int_{\mathbb{B}(Lx)} \frac{d^D y}{|\mathbb{B}(Lx)|} f(y). \quad (3.26)$$

Für den adjungierten Operator C_L^\dagger gilt

$$C^\dagger = B^\dagger \circ S^\dagger \quad (3.27)$$

$$(C^\dagger(f))(x) = L^{\sigma-D} f(a[\frac{x}{La}]). \quad (3.28)$$

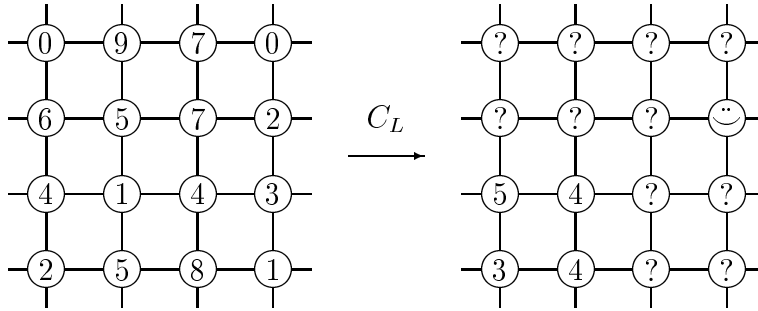
Auch bei C_L wird in eindeutigen Fällen der Index weggelassen. Der Operator C erfüllt die Relationen

$$C \circ C^\dagger = L^{2\sigma-D} \mathbb{1} \quad (3.29)$$

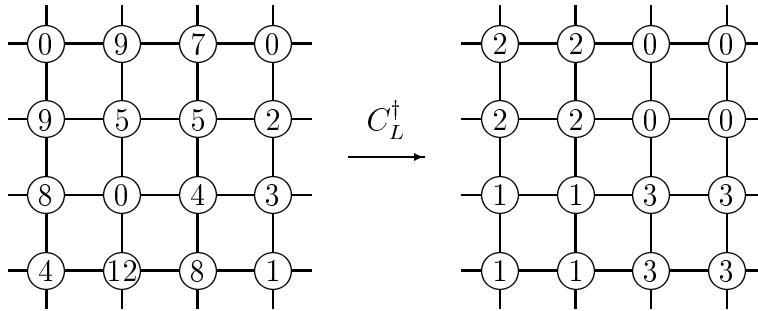
$$C^\dagger \circ C = L^{2\sigma-D} B^\dagger \circ B \quad (3.30)$$

$$C_L \circ C_L = C_{L^2}. \quad (3.31)$$

Aufgrund der letzten Relation kann eine Iteration von C_L durch einen $\lim_{L \rightarrow \infty}$ ersetzt werden. Bildlich stellt sich C_L für $L = 2$ so dar:



Durch den Operator C werden Mittelwerte von 2×2 -Blöcken gebildet und dann auf dem selben Gitter abgebildet. Die Abbildung $C_L^\dagger = B_L^\dagger \circ S_L^\dagger$ ergibt eine auf Blöcken konstante Funktion:



3.2 Kovarianzen

Eine Kovarianz ist ein linearer, symmetrischer³ und positiv definiter Operator auf $H(a)$. Von einer allgemein gehaltenen Kovarianz v ausgehend, betrachten wir die daraus entstehende geblockte Kovarianz u und berechnen deren Kern. Schließlich werden noch einige Eigenschaften von u und v untersucht.

3.2.1 Die Kovarianz v

Definition. Der Operator

$$v : H(a) \rightarrow H(a) \quad (3.32)$$

³Die Begriffe „symmetrisch“ und „selbstadjungiert“ werden hier synonym verwendet. Zur Frage eines Unterschieds dieser Begriffe in der Physik vergleiche man das Vorwort von Peter Lax in [CH93].

sei eine Kovarianz mit dem translationsinvarianten Kern

$$v(x, y) = \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y)} \tilde{v}(p). \quad (3.33)$$

Die Fouriertransformierte $\tilde{v}(p)$ habe folgende Eigenschaften:

- $\tilde{v}(p) \in \mathbb{R}$ aufgrund der Selbstadjungiertheit.
- $\tilde{v}(Rp) = \tilde{v}(p)$ für alle Gitterspiegelungen $p_i \rightarrow -p_i$.
- $\tilde{v}(p) \geq 0$ für alle $p \in \mathbb{R}^D$.
- $\|\tilde{v}(p)\|_1 < \infty$.

Obwohl wir uns später auf eine bestimmte Kovarianz festlegen werden, ist es dennoch nützlich, zuerst von einer allgemeinen Kovarianz auszugehen. Falls unsere Gitterkovarianz von einer Kontinuumskovarianz kommt, ist es nicht sinnvoll, von einer festen Gitterkovarianz auszugehen, da es viele Möglichkeiten der Diskretisierung gibt.

3.2.2 Die geblockte Kovarianz u

Definition. Die geblockte Kovarianz

$$u : H(a) \rightarrow H(a) \quad (3.34)$$

ist definiert durch

$$u = CvC^\dagger. \quad (3.35)$$

Der Kern von u ist gegeben durch:

$$u(x, y) = \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{u}(p) e^{ip(x-y)} \quad (3.36)$$

mit

$$\tilde{u}(p) = \sum_{P \in \mathbb{M}} L^{2\sigma-D} \tilde{v}\left(\frac{p+P}{L}\right) \prod_{k=1}^D \frac{\sin^2\left(\frac{p_k a}{2}\right)}{L^2 \sin^2\left(\frac{(p_k+P_k)a}{2L}\right)}, \quad (3.37)$$

wobei

$$\mathbb{M} = \left\{ P \in \Lambda\left(\frac{2\pi}{a}\right); -\frac{L\pi}{a} < p_i \leq \frac{L\pi}{a} \ \forall i \in 1, \dots, D \right\}. \quad (3.38)$$

Die Berechnung dieses Kerns geht folgendermaßen. Es ist:

$$\begin{aligned}
(u(f))(x) &= C \int_{\Lambda(a)} d^D y v(x, y) (C^\dagger(f))(y) \\
&= L^\sigma \int_{\mathbb{B}(Lx)} \frac{d^D \bar{y}}{|\mathbb{B}(Lx)|} \int_{\Lambda(a)} d^D y v(\bar{y}, y) L^{\sigma-D} f(a[\frac{y}{La}]) \\
&= L^{2\sigma} \int_{\mathbb{B}(Lx)} \frac{d^D \bar{y}}{|\mathbb{B}(Lx)|} \int_{\Lambda(a)} d^D y \int_{\mathbb{B}(Ly)} \frac{d^D \bar{x}}{L^D} v(\bar{y}, \bar{x}) f(\bar{x}) \\
&= L^{2\sigma} \int_{\Lambda(a)} d^D y \int_{\mathbb{B}(Lx)} \frac{d^D \bar{y}}{|\mathbb{B}(Lx)|} \int_{\mathbb{B}(Ly)} \frac{d^D \bar{x}}{|\mathbb{B}(Ly)|} v(\bar{y}, \bar{x}) f(y).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Also insgesamt:

$$u(x, y) = L^{2\sigma} \int_{\mathbb{B}(Lx)} \frac{d^D \bar{y}}{|\mathbb{B}(Lx)|} \int_{\mathbb{B}(Ly)} \frac{d^D \bar{x}}{|\mathbb{B}(Ly)|} v(\bar{y}, \bar{x}). \tag{3.40}$$

Diesen Kern kann man noch fouriertransformieren:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= L^{2\sigma} \int_{\mathbb{B}(Lx)} \frac{d^D \bar{y}}{|\mathbb{B}(Lx)|} \int_{\mathbb{B}(Ly)} \frac{d^D \bar{x}}{|\mathbb{B}(Ly)|} \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(\bar{x}-\bar{y})} \tilde{v}(p) \\
&= L^{2\sigma} \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{v}(p) \int_{\mathbb{B}(Lx)} \frac{d^D \bar{y}}{|\mathbb{B}(Lx)|} \int_{\mathbb{B}(Ly)} \frac{d^D \bar{x}}{|\mathbb{B}(Ly)|} e^{ip(\bar{x}-\bar{y})} \\
&= L^{2\sigma} \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{v}(p) e^{ipL(x-y)} \prod_{k=1}^D \frac{\sin^2(\frac{Lp_k a}{2})}{L^2 \sin^2(\frac{p_k a}{2})} \\
&= L^{2\sigma-D} \int_{\tilde{\Lambda}(a/L)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \tilde{v}(\frac{p}{L}) e^{ip(x-y)} \prod_{k=1}^D \frac{\sin^2(\frac{p_k a}{2})}{L^2 \sin^2(\frac{p_k a}{2L})}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Die bei der Umformung von der zweiten zur dritten Zeile benutzte Hilfsformel läßt sich (für den Fall $D = 1$) leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}(Lx)} d^D \bar{y} \int_{\mathbb{B}(Ly)} d^D \bar{x} e^{ip(\bar{x}-\bar{y})} &= a \sum_{m=xL}^{xL+L-1} a \sum_{n=yL}^{yL+L-1} e^{ipam} e^{-ipan} \\
&= a^2 e^{ipL(x-y)} \left(\sum_{m=0}^{L-1} e^{ipam} \right) \left(\sum_{n=0}^{L-1} e^{-ipan} \right) \\
&= a^2 e^{ipL(x-y)} \frac{1 - e^{ipaL}}{1 - e^{ipa}} \frac{1 - e^{-ipaL}}{1 - e^{-ipa}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 e^{ipL(x-y)} \frac{1 - \left(e^{\frac{ipaL}{2}}\right)^2}{1 - \left(e^{\frac{ipa}{2}}\right)^2} \frac{1 - \left(e^{-\frac{ipaL}{2}}\right)^2}{1 - \left(e^{-\frac{ipa}{2}}\right)^2} \\
&= a^2 e^{ipL(x-y)} \frac{\sin^2\left(\frac{Lpa}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{pa}{2}\right)} \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Das Integral über $\tilde{\Lambda}(\frac{a}{L})$ in (3.41) läßt sich umschreiben als ein Integral über $\tilde{\Lambda}(a)$ und eine Summe über \mathbb{M} . Aufgrund der Symmetrie des \sin^2 ergibt sich (3.37).

3.2.3 Eigenschaften von u und v

Die Kovarianzen v und u haben folgende Eigenschaften:

- Mittels der Produktdarstellung des Sinus

$$\sin(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(\pi k)^2}\right) \quad (3.43)$$

erkennt man, daß

$$\prod_{k=1}^D \frac{\sin^2\left(\frac{p_k a}{2}\right)}{L^2 \sin^2\left(\frac{p_k a}{2L}\right)} = \prod_{k=1}^D \frac{1}{L^2} \prod_{l \in \mathbb{N} \setminus L\mathbb{N}} \left(1 - \left(\frac{p_k a}{2\pi n}\right)^2\right)^2 \quad (3.44)$$

analytisch ist und keine Polstellen besitzt. Deshalb kommen durch die Blockung mit C keine neuen Pole hinzu, $\tilde{u}(p)$ hat dieselben Pole wie $\tilde{v}(p)$.

- Falls v selbstadjungiert ist, d.h. $v = v^\dagger$, so ist

$$\begin{aligned}
u^\dagger &= (CvC^\dagger)^\dagger \\
&= C^{\dagger\dagger} v^\dagger C^\dagger \\
&= u \quad (3.45)
\end{aligned}$$

also ist auch u selbstadjungiert.

- Falls v positiv definit ist, $(f, vf) > 0 \forall f \in H$ so ist

$$\begin{aligned}
(g, ug) &= (C^\dagger g, vC^\dagger g) \\
&> 0 \forall g \quad (3.46)
\end{aligned}$$

also ist auch u positiv definit.

- Falls v invariant unter Gittertranslationen ist, so ist auch u invariant unter Gittertranslationen.

Aus diesen Eigenschaften folgt, daß u tatsächlich eine Kovarianz ist, wenn v eine Kovarianz ist.

3.3 A und Γ

In diesem Abschnitt werden A und Γ eingeführt. Der Operator A ist eine mit den Operatoren v und u^{-1} verzierte Version von C^\dagger . Er hat deshalb Ähnlichkeiten mit der Dilatation S^{-1} im Kontinuum. Wir berechnen seinen Kern und listen einige seiner Eigenschaften auf. Dann wird die Fluktuationskovarianz Γ eingeführt und untersucht. Eine ihrer wichtigsten Eigenschaften ist, daß $\Gamma f = 0$ ist, wenn die Funktion f auf den C^\dagger entsprechenden Blöcken konstant ist.

Die Idee hinter der Konstruktion von A und Γ ist die folgende: Die Kovarianz v läßt sich schließlich schreiben als $v = AuA^\dagger + \Gamma$. Sie zerfällt so in einen geblockten Anteil und einen Fluktuationsanteil. In der Renormierungsgruppe wird später durch Integration über das Γ entsprechende Gaußsche Maß die Theorie auf eine vergrößerte Theorie abgebildet.

3.3.1 Der A -Kern A

Definition. Der Operator

$$A : H(a) \rightarrow H(a) \quad (3.47)$$

ist definiert durch

$$A = vC^\dagger u^{-1}. \quad (3.48)$$

Sein Kern ist durch⁴

$$A(x, z) = L^\sigma \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-Lz-\frac{L-1}{2}a)} \frac{\tilde{v}(p)}{\tilde{u}(Lp)} \prod_{k=1}^D \frac{\sin(\frac{Lp_k a}{2})}{L \sin(\frac{p_k a}{2})} \quad (3.49)$$

⁴Zwecks Vereinfachung der Notation bezeichnet a ab dieser Gleichung nicht nur die Zahl a , sondern manchmal auch den Vektor $\in \mathbb{R}^n$, der in allen seinen Komponenten den Eintrag a hat. Hier ist also $ipa = ia \sum_i p_i$.

gegeben. Die Rechnung geht folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
A(x, z) &= \int_{\Lambda(a)} d^D y v(x, y) (C^\dagger u^{-1})(y, z) \\
&= \int_{\Lambda(a)} d^D y v(x, y) L^{\sigma-D} u^{-1}\left(a\left[\frac{y}{La}\right], z\right) \\
&= L^\sigma \int_{\Lambda(a)} d^D y \int_{\mathbb{B}(0)} \frac{d^D w}{|\mathbb{B}(0)|} v(x, Ly + w) u^{-1}(y, z) \quad (3.50)
\end{aligned}$$

mit $\mathbb{B}(0) = \Lambda(a)/\Lambda(La) = \{w \in \Lambda(a); 0 \leq \frac{w_i}{L} < 1\}$. Von diesem Kern soll die Fouriertransformierte ausgerechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}(0)} \frac{d^D w}{|\mathbb{B}(0)|} v(x, Ly + w) &:= L^{-D} \sum_{w \in \mathbb{B}(0)} v(x, Ly + w) \\
&= L^{-D} \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \sum_{w \in \mathbb{B}(0)} \tilde{v}(p) e^{ip(x-Ly-w)} \\
&= \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-Ly)} L^{-D} \sum_{w \in \mathbb{B}(0)} e^{-ipw} \\
&= \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-Ly)} \prod_{k=1}^D \frac{\sin(\frac{Lp_k a}{2})}{L \sin(\frac{p_k a}{2})} e^{-i \frac{(L-1)p_k a}{2}}. \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Die dabei benutzte Summationsformel zeigt man für $D = 1$ durch die Rechnung

$$\begin{aligned}
\sum_{w \in \mathbb{B}(0)} e^{-ipw} &= \sum_{w=0}^{L-1} e^{-ipa w} \\
&= \frac{1 - e^{-ipLa}}{1 - e^{-ipa}} \\
&= \frac{e^{\frac{ipLa}{2}} - e^{-\frac{ipLa}{2}}}{e^{\frac{ipa}{2}} - e^{-\frac{ipa}{2}}} e^{-\frac{i(L-1)pa}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{Lpa}{2}\right)}{\sin\left(\frac{pa}{2}\right)} e^{-\frac{i(L-1)pa}{2}}. \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$u^{-1}(y, z) = \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iq(y-z)} \frac{1}{\tilde{u}(q)}. \quad (3.53)$$

Also insgesamt:

$$A(x, z) = \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{i(px - qz - \frac{L-1}{2}pa)} \prod_{k=1}^D \frac{\sin(\frac{Lp_k a}{2})}{L \sin(\frac{p_k a}{2})} \frac{\tilde{v}(p)}{\tilde{u}(q)} L^\sigma \int_{\Lambda(a)} d^D y e^{-i(Lp - q)y}. \quad (3.54)$$

Nun ergibt die letzte Integration eine δ -Funktion, denn es ist

$$\int_{\Lambda(a)} d^D y e^{ipy} = \sum_{P \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} (2\pi)^D \delta^D(p + P), \quad (3.55)$$

Damit kann man die q -Integration ausführen und erhält schließlich (3.49).

3.3.2 Eigenschaften von A

Der Operator A hat die folgenden Eigenschaften:

- Daß der Term $e^{-ip\frac{L-1}{2}a}$ in der Fourierdarstellung vorkommt, liegt daran, daß die C^\dagger zugeordneten Blöcke auf $\Lambda(a)$ nicht um den Ursprung zentriert sind. Wenn L ungerade ist (was eine Zentrierung einfach macht) ist $x - Lz - \frac{L-1}{2}a \in \Lambda(a)$. Falls dann $\frac{\tilde{v}}{\tilde{w}(Lp)}$ analytisch ist, tauchen in der Fourierdarstellung von $A(x, y)$ keine Pole mehr auf. Wie im Anhang in Abschnitt (5.2) erklärt wird, gibt es dann Konstanten C und $\alpha > 0$, so daß

$$|A(x, y)| \leq C e^{-\alpha|x - Ly - \frac{L-1}{2}a|} \quad (3.56)$$

gilt.

- Es ist

$$CA = CvC^\dagger u^{-1} = uu^{-1} = \mathbb{1}, \quad (3.57)$$

also ist A ein Rechtsinverses von C .

- Fall $v = v^\dagger$ und damit auch $u = u^\dagger$ ist, so ist

$$(AC)^\dagger = C^\dagger A^\dagger = C^\dagger (u^{-1}Cv) = (v^{-1}A)Cv. \quad (3.58)$$

- Wenn man dann das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := (f, v^{-1}g) \quad (3.59)$$

eingeführt, so gilt

$$\begin{aligned}
 \langle f, ACg \rangle &= ((AC)^\dagger v^{-1} f, g) \\
 &= (v^{-1} AC f, g) \\
 &= (AC f, v^{-1} g) \\
 &= \langle AC f, g \rangle,
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

also ist AC in diesem Skalarprodukt selbstadjungiert.

- Da außerdem

$$(AC)^2 = AC \tag{3.61}$$

ist, ist AC mit obigem Skalarprodukt ein Projektor.

- Für eine spezielle Kovarianz werden wir den Kontinuumsimes von $A(x, y)$ berechnen (3.85). Dabei wird sich herausstellen, daß A der Dilatation S^{-1} entspricht.

3.3.3 Die Fluktuationskovarianz Γ

Definition. Der Operator

$$\Gamma : H(a) \rightarrow H(a) \tag{3.62}$$

ist definiert durch

$$\Gamma = v - AuA^\dagger. \tag{3.63}$$

Der Kern von Γ wird hier nicht berechnet, da er im weiteren Verlauf der Arbeit nicht gebraucht wird. Aufgrund der in A enthaltenen Blockmittelwerte, ist Γ auch nicht voll translationsinvariant, deshalb kann man für $\Gamma(x, y)$ keine Darstellung der Form (3.7) erwarten. Wenn später die Kovarianz Γ in das Kontinuum übertragen worden ist, wird der Kern von Γ im Kontinuum berechnet. Dann wird auch deutlich werden, daß Γ nur gittertranslationsinvariant für das Gitter $\Lambda(La)$ ist.

3.3.4 Eigenschaften von Γ

Die Fluktuationskovarianz hat die folgenden Eigenschaften:

- Falls u und v selbstadjungiert sind, was im Folgenden immer angenommen sei, so ist

$$A^\dagger = (vC^\dagger u^{-1})^\dagger = u^{-1}Cv \tag{3.64}$$

also ist

$$\Gamma = v - vC^\dagger u^{-1}Cv. \tag{3.65}$$

- Es ist

$$\Gamma^\dagger = v^\dagger - v^\dagger C^\dagger (u^{-1})^\dagger C^{\dagger\dagger} u^\dagger = \Gamma \quad (3.66)$$

deshalb ist Γ selbstadjungiert.

- Es gilt

$$\begin{aligned} C\Gamma &= Cv - (CvC^\dagger u^{-1})Cv \\ &= Cv - 1Cv \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Damit ist andersherum

$$\Gamma C^\dagger = (C\Gamma)^\dagger = 0, \quad (3.68)$$

deshalb ist $\Gamma(f) = 0$ für Funktionen f , die auf den C^\dagger entsprechenden Blöcken konstant sind. Diese wichtige Eigenschaft begründet den Namen Fluktuationskovarianz.

- Den Operator Γ kann man dann auch schreiben als

$$\begin{aligned} \Gamma &= \lim_{k \rightarrow 0} (\Gamma_k) \\ &:= \lim_{k \rightarrow 0} (v - vC^\dagger \frac{1}{u+k} Cv) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Für $k > \|u\|$ läßt sich Γ_k umschreiben zu

$$\begin{aligned} \Gamma_k &= v - vC^\dagger \frac{1}{u+k} Cv \\ &= v - vC^\dagger \frac{1}{k} \frac{1}{1 + \frac{u}{k}} Cv \\ &= v - \frac{vC^\dagger}{k} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-vC^\dagger}{k} \right)^i \right) Cv \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-vC^\dagger C}{k} \right)^i \right) v \\ &= \frac{v}{1 + \frac{vC^\dagger C}{k}} \\ &= \frac{1}{v^{-1} + \frac{C^\dagger C}{k}}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

3.4 Der Fixpunkt v_*

Bis zu diesem Punkt wurde eine allgemeine Kovarianz v benutzt. Nun werden wir uns auf eine Kovarianz festlegen. Wir werden v so wählen, daß v unter der Blockung mit C invariant bleibt. Das ist auch die Stelle an der $\sigma = \frac{D}{2} - 1$ gewählt werden muß. Nachdem $v = v_*$ gesetzt ist, schauen wir uns noch kurz die Operatoren A und Γ mit dieser Festlegung an.

3.4.1 Bestimmung von v_*

Mit dem Blockmittelwertoperator C_L ist ein Fluß der Kovarianz verbunden:

$$v \rightarrow u = C_L v C_L^\dagger. \quad (3.71)$$

Es ergibt sich die Frage, ob es davon einen Fixpunkt gibt, d.h. eine Kovarianz v_* , so daß

$$v_* = C_L v_* C_L^\dagger. \quad (3.72)$$

Eine andere Frage ist, ob die ursprüngliche Kovarianz v durch Iteration der Blockung mittels C_L gegen einen solchen Fixpunkt v_* fließt. Aufgrund von Gleichung (3.31) kann man, anstatt C_L zu iterieren, auch den $\lim_{L \rightarrow \infty}$ betrachten. Das soll jetzt anhand von Gleichung (3.41) geschehen. Sei dazu zuerst $\tilde{v}(p)$ von der Form

$$\tilde{v}(p) = \frac{a^2}{c_0 + c_2 p^2 a^2 + \sum_{i=1}^D O(p_i^4 a^4)}. \quad (3.73)$$

Setzt man weiterhin $\sigma = \frac{D}{2} - 1$, so gilt

$$\begin{aligned} L^{2\sigma} \tilde{v}\left(\frac{p}{L}\right) &= \frac{L^{D-2} a^2}{c_0 + c_2 \left(\frac{p}{L}\right)^2 a^2 + \sum_{i=1}^D O\left(\left(\frac{p_i}{L}\right)^4 a^4\right)} \\ &= \frac{L^D a^2}{L^2 c_0 + c_2 p^2 a^2 + \frac{1}{L^2} \sum_{i=1}^D O(p_i^4 a^4)}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

und für den Fall, daß $c_0 = 0$, und $c_2 = 1$ ist, gilt

$$\lim_{L \rightarrow \infty} L^{2\sigma-D} \tilde{v}\left(\frac{p}{L}\right) = \frac{1}{p^2}. \quad (3.75)$$

Weiterhin erkennt man, indem man mit der Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion, daß

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^D \frac{\sin^2\left(\frac{p_k a}{2}\right)}{L^2 \sin^2\left(\frac{p_k a}{2L}\right)} = \prod_{k=1}^D \frac{\sin^2\left(\frac{p_k a}{2}\right)}{\left(\frac{p_k a}{2}\right)^2}. \quad (3.76)$$

Damit erhält man als Grenzwert aus (3.41)

$$\begin{aligned} v_*(x, y) &:= \lim_{L \rightarrow \infty} (C_L v C_L^\dagger)(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2} e^{ip(x-y)} \prod_{k=1}^D \frac{\sin^2(\frac{p_k a}{2})}{(\frac{p_k a}{2})^2}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Dieser Ausdruck kann mit einer Symmetrisierung noch kompakter geschrieben werden. Mit der Definition der Symmetrisierung einer Funktion f bezüglich eines Gitters $\Lambda(a)$

$$[f(q)]_\Lambda(p) := \sum_{P \in \Lambda} f(p + P) \quad (3.78)$$

erhält man

$$\begin{aligned} v_*(x, y) &= \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left[\frac{1}{q^2} e^{iq(x-y)} \prod_{k=1}^D \frac{\sin^2(\frac{q_k a}{2})}{(\frac{q_k a}{2})^2} \right]_{\Lambda(\frac{2\pi}{a})}(p) \\ &= \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y)} \tilde{v}(p) \end{aligned} \quad (3.79)$$

mit

$$\tilde{v}_*(p) = \prod_{k=1}^D \sin^2(\frac{p_k a}{2}) \left[\frac{1}{q^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{(\frac{q_k a}{2})^2} \right]_{\Lambda(\frac{2\pi}{a})}(p). \quad (3.80)$$

An dieser Darstellung sieht man, daß \tilde{v} bei 0 einen Pol besitzt. Man kann also für $v(x, y)$ keinen exponentiellen Abfall erwarten.

Es ist interessant, den $\lim_{a \rightarrow 0}$ von v_* zu betrachten. Es ist

$$\lim_{a \rightarrow 0} \tilde{v}_*(p) = \frac{1}{p^2}, \quad (3.81)$$

das ist der masselose freie Propagator im Kontinuum.

3.4.2 Die Operatoren A_* und Γ_*

Ausgehend vom Fixpunkt v_* kann man sich nun den Operator A_* als Operator A mit der Kovarianz v_* definieren:

$$A_* = v_* C^\dagger (v_*)^{-1}. \quad (3.82)$$

Aufgrund der Fourierdarstellung (3.49) von A hat er folgenden Kern

$$A_*(x, y) = L^\sigma \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x - Ly - \frac{L-1}{2}a)} \frac{\tilde{v}_*(p)}{\tilde{v}_*(Lp)} \prod_{k=1}^D \frac{\sin(\frac{Lp_k a}{2})}{L \sin(\frac{p_k a}{2})}. \quad (3.83)$$

Da diese Fourierdarstellung keine Pole besitzt, gibt es, falls L ungerade ist, Konstanten C und $\alpha > 0$, so daß

$$|A_*(x, y)| \leq C e^{-\alpha|x - Ly - \frac{L-1}{2}a|} \quad (3.84)$$

gilt. Im Kontinuumsimes gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} A_*(x, y) = L^{-\sigma} \delta\left(\frac{x}{L} - y\right). \quad (3.85)$$

Also stellt A_* in diesem Limes den Operator S^{-1} im Kontinuum dar.

Analog zum Operator A_* ist der Operator Γ_* durch

$$\Gamma_* = v_* - A_* v_* A_*^\dagger \quad (3.86)$$

definiert.

3.5 Der A -Kern A_*^∞

In diesem Abschnitt wird der Operator A_*^∞ eingeführt, der später eine tragende Rolle spielen wird. Er bildet Funktionen von einem Gitter in das Kontinuum ab. Mit seiner Hilfe wird später eine Korrespondenz zwischen einer Gittertheorie und einer Kontinuums-theorie sichtbar. Er ermöglicht es auch, Gitteroperatoren in das Kontinuum zu übertragen.

Sei $S_L : H(a) \rightarrow H(\frac{a}{L})$ der Dilatationsoperator. Man kann diesen Operator auf verschiedenen Gittern⁵ mehrmals hintereinander ausführen oder auch L potenzieren und erhält so den Operator

$$S_{L^n} : H(a) \rightarrow H\left(\frac{a}{L^n}\right). \quad (3.87)$$

Nun setzt man

$$A_*^{(n)} : H(a) \rightarrow H\left(\frac{a}{L^n}\right) \quad (3.88)$$

$$A_*^{(n)} = S_{L^n} \circ (A_*)^n \quad (3.89)$$

⁵Die verwendete Notation ist etwas lax, da S_L eigentlich nur auf $H(a)$ definiert ist. Aber S_L kann offensichtlich auf beliebigen Gittern und auch im Kontinuum angewandt werden.

Weiterhin definiert man

$$A_*^\infty : H(a) \rightarrow H(0) \quad (3.90)$$

$$A_*^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A_*^{(n)}. \quad (3.91)$$

Die Konvergenz findet dabei durch eine Grenzwertbildung in den entsprechenden Operator-kernen statt, mehr dazu später. Für $A_*^{(n)}$ gilt

$$\begin{aligned} A_*^{(n)} A_* &= S_{L^n}(A)^{n+1} \\ &= (S_L)^{-1} (S_L) S_{L^n}(A)^{n+1} \\ &= S_L^{-1} A_*^{(n+1)} \end{aligned} \quad (3.92)$$

Im Limes $n \rightarrow \infty$ wird daraus

$$A_*^\infty A_* = S^{-1} A_*^\infty. \quad (3.93)$$

Das ist die wichtigste Eigenschaft von A_*^∞ . Sie besagt, daß der Operator A_* , der ja im wesentlichen eine leicht abgewandelte Form von C^\dagger ist, im Kontinuum genau der Dilatation S_L^{-1} entspricht, wenn die Gitterfunktionen mittels A_*^∞ in das Kontinuum transferiert werden. Daß A_* im Kontinuums-limes der Dilatation S^{-1} entspricht, war bereits mit (3.85) gezeigt worden. Mit der Eigenschaft (3.93) kann schließlich auch die Blockspinrenormierungsgruppe in das Kontinuum übertragen werden.

Um die Existenz von A_*^∞ zu begründen, muß noch der Kern von A_*^∞ ausgerechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned} (A_*(L))^n &= (v_* C_L^\dagger v_*^{-1})^n \\ &= v_* (C_L^\dagger)^n v_*^{-1} \\ &= v_* C_{L^n}^\dagger v_*^{-1} \\ &= A_*(L^n), \end{aligned} \quad (3.94)$$

und deshalb läßt sich der $\lim_{n \rightarrow \infty}$ durch einen $\lim_{L \rightarrow \infty}$ ersetzen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} A_*^{(n)} &:= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{L^n} \circ A_*(L^n) \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} S_L \circ A_*(L). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Es gilt gemäß (3.50)

$$\begin{aligned} S_L \circ A_*(L) &= L^{2\sigma} \int_{\Lambda(a)} d^D y \int_{\mathbb{B}(a)(0)} \frac{d^D w}{|\mathbb{B}(a)(0)|} v_*(Lx, Ly + w) v_*^{-1}(y, z) \\ &= L^{2\sigma} \int_{\Lambda(a)} d^D y \int_{\mathbb{B}(L^{-1}a)(0)} \frac{d^D w}{|\mathbb{B}(L^{-1}a)(0)|} v_*(Lx, L(y + w)) \\ &\quad \cdot v_*^{-1}(y, z), \end{aligned} \quad (3.96)$$

und mit $\sigma = \frac{D}{2} - 1$ und (3.77) gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{L \rightarrow \infty} L^{2\sigma} v_*(Lx, Ly) &= \lim_{L \rightarrow \infty} L^{2\sigma} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2} e^{ip(Lx-Ly)} \prod_{k=1}^D \frac{\sin^2(\frac{p_k a}{2})}{(\frac{p_k a}{2})^2} \\
&= \lim_{L \rightarrow \infty} L^{2\sigma-D} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{L^2}{p^2} e^{ip(x-y)} \prod_{k=1}^D \frac{\sin^2(\frac{p_k a}{2L})}{(\frac{p_k a}{2L})^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y)} \frac{1}{p^2}.
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Damit hat man

$$\begin{aligned}
A_*^\infty(x, z) &= \int_{\Lambda(a)} d^D y \int_{\mathbb{B}(0)} \frac{d^D w}{|\mathbb{B}(0)|} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y-w)} \frac{1}{p^2} v_*^{-1}(y, z) \\
&= \int_{\Lambda(a)} d^D y \int_{\mathbb{B}(0)} \frac{d^D w}{|\mathbb{B}(0)|} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int_{\tilde{\Lambda}} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y-w)} \\
&\quad \cdot e^{iq(y-z)} \frac{1}{p^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(q)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int_{\mathbb{B}(0)} \frac{d^D w}{|\mathbb{B}(0)|} e^{ip(x-w-z)} \frac{1}{p^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(p)}
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Dabei ist $\mathbb{B}(0) = \{x \mid 0 \leq x_n \leq a\}$ ein Block im Kontinuum und $|\mathbb{B}(0)| = a^D$. Im letzten Schritt wurde benutzt, daß \tilde{v}_* symmetrisiert ist. Das dw -Integral läßt sich noch ausführen

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{B}(0)} \frac{d^D w}{|\mathbb{B}(0)|} e^{-ipw} &= \prod_{k=1}^D \left(\frac{e^{-ip_k a} - 1}{-ip_k a} \right) \\
&= e^{-ip \frac{a}{2}} \prod_{k=1}^D \left(\frac{e^{\frac{ip_k a}{2}} - e^{-\frac{ip_k a}{2}}}{ip_k a} \right) \\
&= e^{-ip \frac{a}{2}} \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{p_k a}{2})}{\frac{p_k a}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{3.99}$$

und damit erhält man insgesamt

$$A_*^\infty(x, z) = \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-z-\frac{a}{2})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{p_k a}{2})}{\frac{p_k a}{2}} \right) \frac{1}{p^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(p)}. \tag{3.100}$$

Der $-ip \frac{a}{2}$ -Term in diesem Kern hängt wieder damit zusammen, daß die Blöcke nicht zentriert sind. Da sich die Pole von \tilde{v}_* in der Fouriertransformierten wegheben, existieren Konstanten C und $\alpha > 0$ so daß

$$|A_*^\infty(x, y)| \leq C e^{-\alpha|x-y-\frac{a}{2}|} \tag{3.101}$$

gilt. Im Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$ entspricht A_*^∞ der Identität.

3.6 Ein Urbild von $A_*^{\infty\dagger}$

Für den weiteren Weg ist die Eigenschaft von A_*^∞ und $A_*^{\infty\dagger}$, Funktionen vom Gitter auf das Kontinuum oder andersherum abzubilden, wichtig. Interessant ist nun die Frage, für welche auf dem Gitter definierten Funktionen $f^{lat}(x)$ eine auf dem Kontinuum definierte Funktion $f^{cont}(x)$ existiert, so daß

$$f^{lat} = A_*^{\infty\dagger} f^{cont} \quad (3.102)$$

gilt.

Wir wollen für ein beliebiges f^{lat} schrittweise ein Urbild konstruieren. Zuerst soll für $f \in H(a)$ eine Funktion $g_n \in H(\frac{a}{L^n})$ gefunden werden, so daß

$$f = A_*^{(n)\dagger} g_n \quad (3.103)$$

gilt. Es ist

$$A^{(n)\dagger} = v^{-1}(C_L)^n v S_{L^n}^\dagger. \quad (3.104)$$

Wir wählen A_* als Rechtsinverses von C_L und machen den Ansatz

$$g_n = (S_{L^n}^\dagger)^{-1} v^{-1} (C_L^{-1})^n v f. \quad (3.105)$$

Zwischen g_n und g_{n-1} besteht dann die Beziehung

$$\begin{aligned} g_n &= (S_{L^n}^\dagger)^{-1} v^{-1} (C_L^{-1}) v (S_{L^{n-1}}^\dagger) g_{n-1} \\ &= (S_{L^n}^\dagger)^{-1} C_L^\dagger (S_{L^{n-1}}^\dagger) g_{n-1} \\ &= (S_L^\dagger)^{-1} (S_{L^{n-1}}^\dagger)^{-1} C_L^\dagger (S_{L^{n-1}}^\dagger) g_{n-1} \\ &= (S_L^\dagger)^{-1} C_L^\dagger g_{n-1} \\ &= B_L^\dagger g_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Aufgrund der Definition von B_L^\dagger werden im Schritt von g_{n-1} nach g_n nur weitere Gitterpunkte eingefügt, die mit den Werten ihrer Nachbarpunkte besetzt werden. Anhand dieser Konstruktion liegt es nahe, f^{cont} als eine auf den Blöcken konstante Funktion anzusetzen. Daß dieser Ansatz funktioniert, soll nun gezeigt werden.

Sei dazu $\Lambda(a) = \{\vec{b}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und seien $B_i = \{[0, a)^D + \vec{b}_i\}$ die Blöcke. Es gilt dann $\mathbb{R}^D = \sum_{i \in \mathbb{N}} B_i$. Sei weiter

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i I_{B_i}(x) \quad (3.107)$$

eine blockkonstante Funktion im Kontinuum. I_{B_i} stellt die Indikatorfunktion dar. Es soll nun

$$(A^{\infty\dagger}f)(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \delta_{\vec{b}_i, x} \quad (3.108)$$

für $x \in \Lambda(a)$ gezeigt werden. Es reicht das Integral von $A^{\infty\dagger}(x, y)$ über einen Block zu betrachten. Eine direkte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \int_{B_i} dy A^{\infty\dagger}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \prod_{k=1}^D \frac{\sin(\frac{p_k a}{2})}{\frac{p_k a}{2}} \frac{1}{p^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(p)} \int_{[0, a)^D} dy e^{ip(y + \vec{b}_i - x - \frac{a}{2})} \\ &= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \prod_{k=1}^D \frac{\sin(\frac{p_k a}{2})}{\frac{p_k a}{2}} \frac{1}{p^2} \frac{e^{ip(\vec{b}_i - x)}}{\tilde{v}_*(p)} \int_{[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]} e^{ipy} \\ &= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \prod_{k=1}^D \frac{\sin(\frac{p_k a}{2})}{\frac{p_k a}{2}} \frac{1}{p^2} \frac{e^{ip(\vec{b}_i - x)}}{\tilde{v}_*(p)} \prod_{k=1}^D \frac{2 \sin(\frac{p_k a}{2})}{p_k} \\ &= a^D \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \prod_{k=1}^D \frac{\sin^2(\frac{p_k a}{2})}{(\frac{p_k a}{2})^2} \frac{1}{p^2} \frac{e^{ip(\vec{b}_i - x)}}{\tilde{v}_*(p)} \\ &= a^D \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \frac{e^{ip(\vec{b}_i - x)}}{(p + Q)^2} \prod_{k=1}^D \frac{4}{a^2 (p_k + Q_k)^2} e^{iQ(\vec{b}_i - x)} \\ &\quad \cdot \left(\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \frac{1}{(p + Q)^2} \prod_{k=1}^D \frac{4}{(a(p_k + Q_k))^2} \right)^{-1} \\ &= a^D \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(\vec{b}_i - x)} \\ &= \prod_{k=1}^D \frac{\sin(\frac{\pi}{a}(\vec{b}_i - x)_k)}{(\frac{\pi}{a}(\vec{b}_i - x)_k)} \\ &= \delta_{\vec{b}_i, x}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Also ist die blockkonstante Funktion ein Urbild der entsprechenden Gitterfunktion. Es kann natürlich noch andere (z.B. stetige) Urbilder geben. Diese Übertragung einer Gitterfunktion in das Kontinuum erscheint auf den ersten Blick nicht besonders nützlich zu sein. Mit dem bisher entwickelten Formalismus kann man jedoch auch die Operatoren in das Kontinuum übertragen, so daß sie mit der Übertragung der Funktionen kompatibel sind. Damit werden wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

3.7 Kontinuumsoperatoren aus Gitteroperatoren

In diesem Abschnitt werden zu den bisher bekannten Gitteroperatoren die entsprechenden Kontinuumsoperatoren konstruiert. Die entstehenden Kontinuumskovarianzen v_*^∞ und Γ_*^∞ werden dann gründlich untersucht.

Die Eigenschaften des Operators A_*^∞ legen es nahe, aus einem Gitteroperator O einen Kontinuumsoperator O^∞ zu konstruieren mittels

$$O^\infty = A_*^\infty O (A_*^\infty)^\dagger. \quad (3.110)$$

Man erhält so die Kontinuumskovarianzen

$$v_*^\infty = A_*^\infty v_* (A_*^\infty)^\dagger \quad (3.111)$$

und

$$\begin{aligned} \Gamma_*^\infty &= A_*^\infty \Gamma_* (A_*^\infty)^\dagger \\ &= A_*^\infty (v_* - A_* v_* A_*^\dagger) (A_*^\infty)^\dagger. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Für sie gilt

$$\begin{aligned} v_*^\infty - \Gamma_*^\infty &= A_*^\infty A_* v_* A_*^\dagger (A_*^\infty)^\dagger \\ &= S^{-1} v_*^\infty (S^{-1})^\dagger. \end{aligned} \quad (3.113)$$

3.7.1 Eine Hilfsfunktion $\Omega(q, a)$

Bevor von den Operatoren v_*^∞ und Γ_*^∞ die Kerne ausgerechnet werden, soll noch eine Notationshilfe eingeführt werden. Für $q \in \mathbb{R}^D$ und festes $a \in \mathbb{R}$ wird gesetzt:

$$\Omega(q, a) = \sum_{Q \in \Lambda(a)} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k} \right)^2 \frac{1}{(q + Q)^2}. \quad (3.114)$$

Bei $\Omega(q, a)$ handelt es sich um eine spezielle gittersymmetrisierte Funktion. Ω hat die folgenden Eigenschaften:

- Ω hat keine Nullstellen.
- Ω ist singulär für alle $q \in \mathbb{R}^D$, bei denen für ein i $q_i \in a\mathbb{Z}$ ist. Für alle anderen q konvergiert obige Potenzreihe absolut und gleichmäßig und stellt so eine stetige Funktion dar.

- $\Omega(q, a) = \Omega(q + w, a)$ für alle $w \in \Lambda(a)$, d.h. Ω ist gitterperiodisch.
- $\Omega(q, a) = \Omega(-q, a)$, Ω ist gerade.
- $\Omega(Lq, a) = L^{-2D-2}\Omega(q, \frac{a}{L})$

Um einige dieser Eigenschaften zu veranschaulichen, ist die Funktion Ω für einen Spezialfall in der Abbildung 3 graphisch dargestellt.

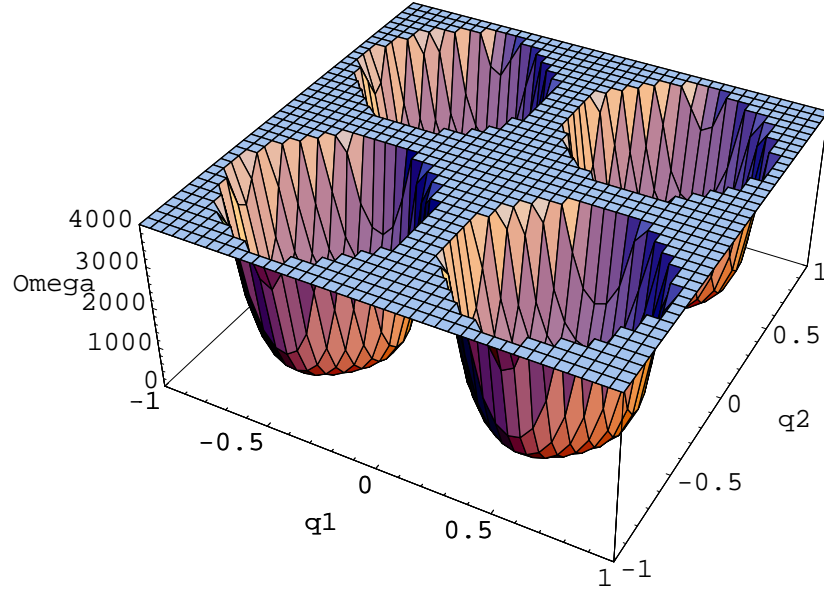


Abbildung 3. Darstellung der Hilfsfunktion $\Omega(q, a)$ für $a = 1$ und $D = 2$.

3.7.2 Die Kontinuumskovarianz v_*^∞

Um in der Kontinuumsformulierung gut arbeiten zu können, müssen für $v_*^\infty(x, y)$ brauchbare Formeln hergeleitet werden. Das soll in diesem Abschnitt geschehen.

Die drei wichtigsten Darstellungen für $v_*^\infty(x, y)$ lauten:

$$\begin{aligned}
 v_*^\infty(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iq(x-y)} \frac{1}{\Omega(q, \frac{2\pi}{a})} \frac{1}{q^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{q_k} \\
 &\cdot \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k} \right) \frac{1}{(q + Q)^2} \quad (3.115)
 \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}
v_*^\infty(x, y) &= \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y)} \frac{1}{\Omega(p, \frac{2\pi}{a})} \\
&\cdot \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + Q_k} \right) \frac{1}{(p + Q)^2} \\
&\cdot \sum_{P \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{iPy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + P_k} \right) \frac{1}{(p + P)^2}. \quad (3.116)
\end{aligned}$$

Wie jede gittertranslationsinvariante Funktion läßt sich $v_*^\infty(x, y)$ auch schreiben als

$$v_*^\infty(x, y) = \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{ipx+iqy} \widetilde{v}_*^\infty(p, q) \quad (3.117)$$

mit

$$\widetilde{v}_*^\infty(p, q) = \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(p + q + Q) \widehat{v}_*^\infty(p, q) \quad (3.118)$$

und im Falle von v_*^∞ ist

$$\widehat{v}_*^\infty(p, q) = \frac{(-2\pi)^D}{\Omega(p, \frac{2\pi}{a})} \frac{1}{p^2 q^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{p_k q_k} \quad (3.119)$$

Diese dritte Darstellung wird im folgenden am wichtigsten sein.

Man beachte, daß $\widehat{v}_*^\infty(p, q)$ aufgrund der δ -Funktion nur für den Fall $p + q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})$ interessant ist. Da die Ω -Funktion außerdem symmetrisch unter Gittertranslationen ist, kann in (3.119) $\Omega(p, \frac{2\pi}{a})$ durch $\Omega(q, \frac{2\pi}{a})$ ersetzt werden. An der Darstellung erkennt man weiterhin, daß $\widehat{v}_*^\infty(p, q)$ bei 0 eine Singularität besitzt. Für kleine p muß $q = -p$ sein, und deshalb gilt für kleine p die Abschätzung

$$\widehat{v}_*^\infty(p, -p) \leq C \frac{1}{p^2}. \quad (3.120)$$

Die anderen Singularitäten von $\frac{1}{p^2 q^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{p_k q_k}$ werden durch Ω regularisiert. Da Ω keine Nullstellen besitzt, hat $\widehat{v}_*^\infty(p, q)$ keine weiteren Pole und es gilt die Abschätzung

$$|\widehat{v}_*^\infty(p, q)| \Big|_{p+q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \leq C \frac{1}{p^2 q^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{|p_k q_k|}. \quad (3.121)$$

Im Kontinuumsimes ergibt sich für \widetilde{v}_*^∞ die Kovarianz $\frac{1}{p^2}$.

Um die Formeln (3.115) bis (3.119) zu beweisen, muß man etwas rechnen. Die Rechnung für die erste Darstellung lautet

$$\begin{aligned}
v_*^\infty(x, y) &= A_*^\infty v_*(A_*^\infty)^\dagger(x, y) \\
&= \int_{\Lambda(a)} d\alpha \int_{\Lambda(a)} d\beta A_*^\infty(x, \alpha) v_*(\alpha, \beta) A_*^\infty(y, \beta) \\
&= \int_{\Lambda(a)} d\alpha \int_{\Lambda(a)} d\beta \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \\
&\quad \cdot e^{ip(\alpha-\beta)} e^{iq(x-\alpha-\frac{a}{2})} e^{ir(y-\beta-\frac{a}{2})} \tilde{v}_*(p) \\
&\quad \cdot \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{q_k a}{2})}{\frac{q_k a}{2}} \right) \frac{1}{q^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(q)} \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{r_k a}{2})}{\frac{r_k a}{2}} \right) \frac{1}{r^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(r)} \\
&= \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \sum_{P \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(p - q + P) \\
&\quad \cdot \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(p + r + Q) e^{iq(x-\frac{a}{2})} e^{ir(y-\frac{a}{2})} \tilde{v}_*(p) \\
&\quad \cdot \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{q_k a}{2})}{\frac{q_k a}{2}} \right) \frac{1}{q^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(q)} \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{r_k a}{2})}{\frac{r_k a}{2}} \right) \frac{1}{r^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(r)} \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D r}{(2\pi)^D} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(q + r + Q) e^{iq(x-\frac{a}{2})} \\
&\quad \cdot e^{ir(y-\frac{a}{2})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{q_k a}{2})}{\frac{q_k a}{2}} \right) \frac{1}{q^2} \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{r_k a}{2})}{\frac{r_k a}{2}} \right) \frac{1}{r^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(r)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iq(x-\frac{a}{2})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{q_k a}{2})}{\frac{q_k a}{2}} \right) \frac{1}{q^2} \\
&\quad \cdot \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{i(-q-Q)(y-\frac{a}{2})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{(q_k+Q_k)a}{2})}{\frac{(q_k+Q_k)a}{2}} \right) \frac{1}{(q+Q)^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(q+Q)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iq(x-y)} \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{q_k a}{2})}{\frac{q_k a}{2}} \right) \frac{1}{q^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(q)} \\
&\quad \cdot \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{-iQ(y-\frac{a}{2})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{(q_k+Q_k)a}{2})}{\frac{(q_k+Q_k)a}{2}} \right) \frac{1}{(q+Q)^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iq(x-y)} \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin^2(\frac{q_k a}{2})}{\frac{q_k a}{2}} \right) \frac{1}{q^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(q)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{\frac{(q_k + Q_k)a}{2}} \right) \frac{1}{(q + Q)^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iq(x-y)} \frac{1}{q^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{q_k} \\
& \quad \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k} \right) \frac{1}{(q + Q)^2} \\
& \quad \cdot \frac{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k} \right)^2 \frac{1}{(q + Q)^2}}{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k} \right)^2 \frac{1}{(q + Q)^2}} \tag{3.122}
\end{aligned}$$

Bei der mit (*) gekennzeichneten Umformung wurde benutzt, daß $\tilde{v}_*(p)$ bereits symmetrisiert ist. Wenn man von dem mit (*) gekennzeichneten Punkt an anders umformt bekommt man die zweite Darstellung:

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y)} \tilde{v}(p) \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \sum_{P \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{iP(x-\frac{a}{2})} e^{-iQ(y-\frac{a}{2})} \\
& \quad \cdot \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{(p_k + P_k)a}{2})}{\frac{(p_k + P_k)a}{2}} \right) \frac{1}{(p + P)^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(p + P)} \\
& \quad \cdot \prod_{k=1}^D \left(\frac{\sin(\frac{(p_k + Q_k)a}{2})}{\frac{(p_k + Q_k)a}{2}} \right) \frac{1}{(p + Q)^2} \frac{1}{\tilde{v}_*(p + Q)} \\
&= \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y)} \frac{\prod_{k=1}^D \sin^2(\frac{q_k a}{2})}{\tilde{v}(p)} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \sum_{P \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \\
& \quad \cdot e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{\frac{(p_k + Q_k)a}{2}} \right) \frac{1}{(p + Q)^2} e^{iPy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{\frac{(p_k + P_k)a}{2}} \right) \frac{1}{(p + P)^2} \\
&= \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip(x-y)} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + Q_k} \right) \frac{1}{(p + Q)^2} \\
& \quad \cdot \frac{\sum_{P \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{iPy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + P_k} \right) \frac{1}{(p + P)^2}}{\sum_{Q' \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q'_k} \right)^2 \frac{1}{(q + Q')^2}}. \tag{3.123}
\end{aligned}$$

Um die dritte Darstellung zu bekommen, wendet man die Definition der

Fouriertransformation auf die erste Darstellung (3.115) an:

$$\begin{aligned}
\widetilde{v}_*^\infty(p, q) &= \int_{\mathbb{R}^D} dx \int_{\mathbb{R}^D} dy e^{-ipx - i q y} v_*^\infty(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} dx \int_{\mathbb{R}^D} dy e^{-ipx - i q y} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D t}{(2\pi)^D} e^{it(x-y)} \frac{1}{t^2} \\
&\quad \cdot \frac{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{t_k + Q_k} \right) \frac{1}{(t + Q)^2}}{\prod_{k=1}^D \frac{1}{t_k} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{t_k + Q_k} \right)^2 \frac{1}{(t + Q)^2}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} dy e^{-i q y - i p y} \frac{1}{p^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{p_k} \\
&\quad \cdot \frac{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + Q_k} \right) \frac{1}{(p + Q)^2}}{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + Q_k} \right)^2 \frac{1}{(p + Q)^2}} \\
&= \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(p + q + Q) \frac{\frac{1}{p^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{p_k} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{(-q)_k} \right) \frac{1}{(-q)^2}}{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + Q_k} \right)^2 \frac{1}{(p + Q)^2}}.
\end{aligned} \tag{3.124}$$

Damit ist (3.119) gezeigt.

3.7.3 Die Kontinuumskovarianz Γ_*^∞

Der Kern von Γ_*^∞ soll in diesem Abschnitt aus der Formel $\Gamma_*^\infty = v_*^\infty - S^{-1}v_*^\infty(S^{-1})^\dagger$ bestimmt werden. Da $S^{-1}v_*^\infty(S^{-1})^\dagger$ nur invariant unter Transformationen des Gitters $\Lambda(La)$ ist, ist $\widehat{\Gamma}_*^\infty$ im Impulsraum nur für $p+q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})$ definiert. Die kompakteste Darstellung lautet

$$\widetilde{\Gamma}_*^\infty(p, q) = \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} \delta(p+q+Q) \widehat{\Gamma}_*^\infty(p, q), \quad (3.125)$$

wobei $\widehat{\Gamma}_*^\infty$ abschnittsweise definiert ist durch

$$\widehat{\Gamma}_*^\infty(p, q) = \begin{cases} \frac{(\Omega(p, \frac{2\pi}{La}) - \Omega(p, \frac{2\pi}{a}))}{\Omega(p, \frac{2\pi}{a})\Omega(p, \frac{2\pi}{La})} \frac{(2\pi)^D}{p^2 q^2} \prod_{k=1}^D \frac{-1}{p_k q_k} & p+q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a}) \\ \frac{-1}{\Omega(p, \frac{2\pi}{La})} \frac{(2\pi)^D}{p^2 q^2} \prod_{k=1}^D \frac{-1}{p_k q_k} & p+q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La}) \setminus \Lambda(\frac{2\pi}{a}). \end{cases} \quad (3.126)$$

Die Rechnung für diese Darstellung findet sich am Ende dieses Abschnittes. Wichtig ist zunächst der folgende

Satz. $\widehat{\Gamma}_*^\infty(p, q)$ ist für alle $p+q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})$ endlich, besitzt für diese Werte von p, q keine Singularitäten. Deshalb gelten die Abschätzungen

$$|\widehat{\Gamma}_*^\infty(p, q)| \Big|_{p+q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \leq C_1 \quad (3.127)$$

$$|\widehat{\Gamma}_*^\infty(p, q)| \Big|_{p+q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} \leq C_2 \frac{1}{p^2 q^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{|p_k q_k|}. \quad (3.128)$$

Die Polfreiheit von $\widehat{\Gamma}_*^\infty$ ist aus zwei Gründen wichtig. Einerseits erwartet man nun exponentiellen Abfall für Γ_*^∞ im Ortsraum. Zum anderen wird sie später in der Quantenfeldtheorie explizit gebraucht. Man vergleiche dazu Abschnitt (4.7).

Beweis. Um die Polfreiheit von $\widehat{\Gamma}_*^\infty$ zu zeigen, müssen die beiden möglichen Fälle für $p+q$ getrennt betrachtet werden. Sei zunächst $p+q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La}) \setminus \Lambda(\frac{2\pi}{a})$. Insbesondere ist dann $p \neq -q$. Es reicht, den Ausdruck (3.126) auf seine Endlichkeit bei 0 zu untersuchen. Falls $p \rightarrow 0$ kann q nicht in allen Komponenten ebenfalls gegen 0 gehen, da dann die Bedingung $p \neq -q$ verletzt wäre. Sei

also o.B.d.A $q_D \neq 0$. Dann wird umgeformt:

$$\widehat{\Gamma}_*^\infty(p, q) = - \frac{\frac{1}{q_D q^2}}{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} \frac{p^2}{(p+Q)^2} \frac{p_D}{(p_D+Q_D)^2} \prod_{k=1}^{D-1} \frac{p_k q_k}{(p_k+Q_k)^2}}. \quad (3.129)$$

Der Faktor $\frac{1}{q_D q^2}$ ist endlich und der Nenner hat keine Nullstellen, da der Summand mit $Q = 0$ für $p \neq 0 \neq q$ immer einen endlichen Beitrag liefert. Deshalb ist $\widehat{\Gamma}_*^\infty(p, q)$ regulär. Daß $\widehat{\Gamma}_*^\infty(p, q)$ im hier betrachteten Fall endlich ist, erkennt man auch gut an der graphischen Darstellung der Formel (3.126) in Abbildung 4. $\widehat{\Gamma}_*^\infty(p, q)$ hat für $p = 0$ zwar singuläre Stellen, aber falls $q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La}) \setminus \Lambda(\frac{2\pi}{a})$ ist, bleibt der Funktionswert endlich.

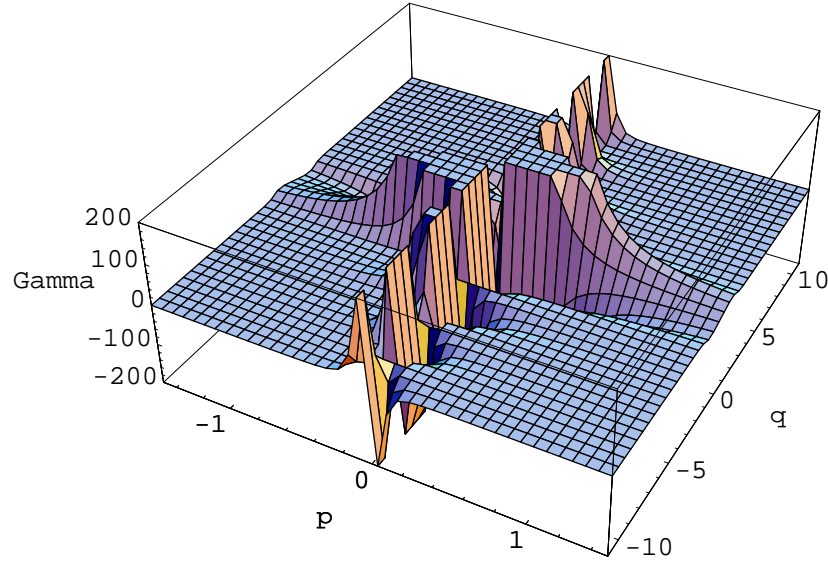


Abbildung 4. Die Kontinuumskovarianz $\widehat{\Gamma}_*^\infty$ für den Fall $p+q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La}) \setminus \Lambda(\frac{2\pi}{a})$. Die Parameter sind $D = 1$, $L = 2$ und $a = 1$.

Falls $p + q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})$ ist, gilt $\Omega(p, \frac{2\pi}{a}) = \Omega(q, \frac{2\pi}{a})$ und damit wird $\widehat{\Gamma}_*^\infty(p, q)$ zu

$$\widehat{\Gamma}_*^\infty(p, q) = \frac{1}{p^2 q^2} \prod_{k=1}^D \frac{-1}{p_k q_k} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La}) \setminus \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \frac{1}{(p+Q)^2} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + Q_k} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} \frac{1}{(p+Q)^2} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + Q_k} \right)^2 \right)^{-1} \\
& \cdot \left(\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \frac{1}{(q+Q)^2} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k} \right)^2 \right)^{-1} \\
& = \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La}) \setminus \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \frac{1}{(p+Q)^2} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + Q_k} \right)^2 \\
& \cdot \left(\prod_{k=1}^D p_k \right) \left(\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} \frac{p^2}{(p+Q)^2} \prod_{k=1}^D \left(\frac{p_k}{p_k + Q_k} \right)^2 \right)^{-1} \\
& \cdot \left(\prod_{k=1}^D (-q_k) \right) \left(\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \frac{q^2}{(q+Q)^2} \prod_{k=1}^D \left(\frac{q_k}{q_k + Q_k} \right)^2 \right)^{-1} \\
& =: g(p)h(q) \tag{3.130}
\end{aligned}$$

An dieser Darstellung sieht man, daß $h(q)$ keine Singularitäten aufweist, da der Nenner von $h(q)$ keine Nullstellen hat. Bei $g(p)$ bereitet der Fall $p_i = 0$ auch keine Probleme, es könnten noch Probleme für $p_i \in \frac{2\pi}{La}\mathbb{Z} \setminus \frac{2\pi}{a}\mathbb{Z}$ auftauchen, wenn man $g(p)$ jedoch umformt zu

$$\begin{aligned}
g(p) &= \left(\prod_{k=1}^D p_k \right) \\
& \cdot \left(p^2 \prod_{k=1}^D p_k^2 + \frac{p^2 \prod_{k=1}^D p_k^2 \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} \frac{1}{(p+Q)^2} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + Q_k} \right)^2}{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La}) \setminus \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \frac{1}{(p+Q)^2} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{p_k + Q_k} \right)^2} \right)^{-1} \tag{3.131}
\end{aligned}$$

erkennt man, daß sich alle möglichen Singularitäten - $p_i \in \frac{2\pi}{La}\mathbb{Z}$ - gegenseitig wegheben. Auch hier wurde die Gleichung (3.126) graphisch in Abbildung 5 (auf der nächsten Seite) aufgetragen. Man sieht, daß die Funktion regulär ist. Die Abschätzungen (3.127) und (3.128) sind dann elementar. \square

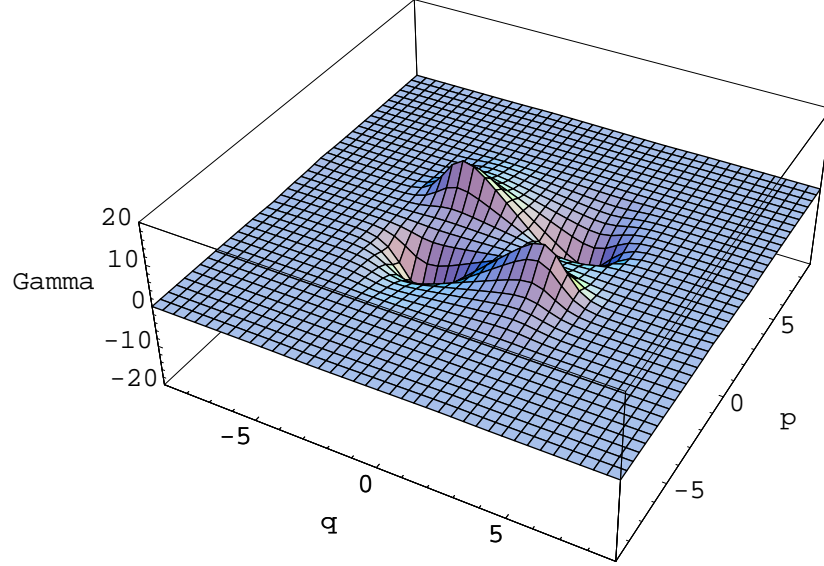


Abbildung 5. Die Kontinuumskovarianz $\widehat{\Gamma}_*^\infty$ für den Fall $p + q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})$. Die Parameter sind $D = 1$, $L = 2$ und $a = 1$.

Zum Schluß soll noch die Formel (3.126) nachgerechnet werden. Es ist zuerst einmal

$$\begin{aligned}
 S^{-1}v_*^\infty(S^{-1})^\dagger(x, y) &= L^{-2\sigma}v_*^\infty\left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}\right) \\
 &= L^{-D+2} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{i\frac{q}{L}(x-y)} \frac{1}{q^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{q_k} \\
 &\quad \frac{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{-i\frac{Q}{L}y} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k}\right) \frac{1}{(q + Q)^2}}{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k}\right)^2 \frac{1}{(q + Q)^2}} \\
 &= L^{-D+2+D} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iq(x-y)} \frac{L^{-2}}{q^2} \prod_{k=1}^D \frac{L^{-1}}{q_k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{L^{-1}}{q_k + Q_k} \right) \frac{L^{-2}}{(q + Q)^2}}{\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} \prod_{k=1}^D \left(\frac{L^{-1}}{q_k + Q_k} \right)^2 \frac{L^{-2}}{(q + Q)^2}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iq(x-y)} \frac{1}{\Omega(q, \frac{2\pi}{La})} \frac{1}{q^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{q_k} \\
&\cdot \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k} \right) \frac{1}{(q + Q)^2}
\end{aligned} \tag{3.132}$$

Nun kann man die Terme zusammenfassen und erhält

$$\begin{aligned}
\Gamma_*^\infty(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iq(x-y)} \frac{1}{\Omega(q, \frac{2\pi}{a}) \Omega(q, \frac{2\pi}{La})} \frac{1}{q^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{q_k} \\
&\cdot \left(\Omega(q, \frac{2\pi}{La}) \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k} \right) \frac{1}{(q + Q)^2} - \right. \\
&\quad \left. - \Omega(q, \frac{2\pi}{a}) \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k} \right) \frac{1}{(q + Q)^2} \right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iq(x-y)} \frac{1}{\Omega(q, \frac{2\pi}{a}) \Omega(q, \frac{2\pi}{La})} \frac{1}{q^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{q_k} \\
&\quad \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{q_k + Q_k} \right) \frac{1}{(q + Q)^2} \\
&\quad \cdot \left(\Omega(q, \frac{2\pi}{La}) \theta(Q) - \Omega(q, \frac{2\pi}{a}) \right)
\end{aligned} \tag{3.133}$$

wobei

$$\theta(Q) = \begin{cases} 1, & Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.134}$$

ist. Aus dieser Darstellung kann man nun leicht die Fouriertransformierte von Γ_*^∞ berechnen, es ist

$$\widetilde{\Gamma}_*^\infty(p, q) = \int_{\mathbb{R}^D} dx \int_{\mathbb{R}^D} dy e^{-ipx - i q y} \Gamma_*^\infty(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^D} dx \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathbb{R}^D} \frac{d^D r}{(2\pi)^D} dy e^{-ipx - iqy} e^{ir(x-y)} \\
&\quad \cdot \frac{1}{\Omega(r, \frac{2\pi}{a}) \Omega(r, \frac{2\pi}{La})} \frac{1}{r^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{r_k} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} e^{-iQy} \prod_{k=1}^D \left(\frac{1}{r_k + Q_k} \right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{(r + Q)^2} \left(\Omega(r, \frac{2\pi}{La}) \theta(Q) - \Omega(r, \frac{2\pi}{a}) \right) \\
&= \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{La})} \delta(p + q + Q) \frac{1}{\Omega(p, \frac{2\pi}{a}) \Omega(p, \frac{2\pi}{La})} \frac{1}{p^2} \prod_{k=1}^D \frac{1}{p_k} \frac{1}{q^2} \prod_{k=1}^D \frac{-1}{q_k} \\
&\quad \cdot (2\pi)^D \left(\Omega(p, \frac{2\pi}{La}) \theta(Q) - \Omega(p, \frac{2\pi}{a}) \right). \tag{3.135}
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun die einzelnen Fälle für θ , so kommt man auf die Formel (3.126).

3.7.4 Summationen

Bei der Anwendung der Kontinuumskovarianzen in der Quantenfeldtheorie im nächsten Kapitel tauchen Faltungen der Kovarianzen mit Vertices auf. Wir wollen hier schon eine Abschätzung beweisen, aus der dann später die Endlichkeit der Faltungsintegrale folgt. Das Hauptresultat lautet:

Satz. Sei $\Lambda(a)$ ein D -dimensionales Gitter, $g(p) : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so daß

$$f(p) = g(p) \prod_{k=1}^D \frac{1}{p_k} \tag{3.136}$$

keine Polstellen besitzt. Sei weiter $\alpha < 2$ und $\beta \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Dann gilt

$$\sum_{P \in \Lambda(a) \setminus \{0\}} \frac{|P|^\alpha \log^\beta |P|}{P^2} |f(P)| < \infty. \tag{3.137}$$

Beweis. Zuerst bemerken wir, daß die Aussage des Satzes intuitiv klar ist, denn es ist

$$\frac{f(P)}{P^2} \sim C \frac{1}{|P|^{2+D}}. \tag{3.138}$$

Die Summation über Λ entspricht einer Integration über dem \mathbb{R}^D und das Volumenelement bringt einen Faktor $|P|^{D-1}$ herein. Deshalb bleibt bei einem Vorfaktor $|P|^\alpha$ für $\alpha < 2$ immer noch ein konvergentes Integral über $|P|$. Es

gilt jedoch keine Abschätzung mit „ \ll “ in (3.138) und deshalb muß genauer argumentiert werden.

Man kann sich auf den Fall $a = 1$ beschränken. Es gilt für alle $\xi > 0$ eine Abschätzung

$$(\log |P|)^\beta < C_{\beta,\xi} |P|^\xi. \quad (3.139)$$

Deshalb braucht der logarithmische Term nicht beachtet zu werden. Weiterhin gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\gamma > 0$ und ein $\delta > 0$, so daß

$$\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^D P_i^2\right)^\epsilon} \leq \frac{C}{\left(\sum_{i=1}^{D-1} P_i^2\right)^\gamma (P_D)^\delta} \quad (3.140)$$

gilt. Das sieht man leicht ein, denn es ist nach der binomischen Formel

$$\sum_{i=1}^D P_i^2 \geq 2|P_D| \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{D-1} P_i^2}. \quad (3.141)$$

Mit den Definitionen

$$h(P) = \sup_{P_D} |g(P)| \quad (3.142)$$

$$r(P) = \lim_{P_D \rightarrow 0} |g(P)| \quad (3.143)$$

kann die Summe (3.137) behandelt werden:

$$\begin{aligned} LS &\leq C \sum_{P \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{|g(P)|}{|P|^\epsilon} \prod_{k=1}^D \frac{1}{|P_k|} \\ &\leq C \sum_{P_1 \dots P_{D-1} \in \mathbb{Z}} \frac{h(P)}{\left(\sum_{i=1}^{D-1} P_i^2\right)^\gamma} \prod_{k=1}^{D-1} \frac{1}{|P_k|} \sum_{P_D \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|P|^{1+\delta}} + \\ &\quad + C \sum_{P_1 \dots P_{D-1} \in \mathbb{Z}} \frac{r(P)}{\left(\sum_{i=1}^{D-1} P_i^2\right)^\epsilon} \prod_{k=1}^{D-1} \frac{1}{|P_k|} \\ &\leq C \sum_{P_1 \dots P_{D-1} \in \mathbb{Z}} \frac{h(P)}{\left(\sum_{i=1}^{D-1} P_i^2\right)^\gamma} \prod_{k=1}^{D-1} \frac{1}{|P_k|} + \\ &\quad + C \sum_{P_1 \dots P_{D-1} \in \mathbb{Z}} \frac{r(P)}{\left(\sum_{i=1}^{D-1} P_i^2\right)^\epsilon} \prod_{k=1}^{D-1} \frac{1}{|P_k|}. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Die Funktionen $h(P)$ und $r(P)$ regularisieren immer noch die verbliebenen Pole, und so gibt sich durch Induktion nach D die Behauptung. \square

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, daß obiger Satz auf die Kontinuumskovarianzen anwendbar ist. Eine Abschätzung der Art

$$\sum_{P \in \Lambda(a) \setminus \{0\}} \sum_{Q \in \Lambda(a) \setminus \{0\}} |P|^\alpha \log^\beta |P| |\widehat{v}_*^\infty(P, Q)| |Q|^{\alpha'} \log^{\beta'} |Q| < \infty \quad (3.145)$$

sollte für $\alpha, \alpha' < 2$ keine Überraschung sein. Eine analoge Aussage gilt für $\widehat{\Gamma}_*^\infty$.

3.8 Weitere Arbeiten

Abschließend sollen kurz einige weitere Arbeiten genannt werden, in denen ein ähnlicher Formalismus wie der hier präsentierte, benutzt wird. In der Literatur werden häufig endliche Gitter mit periodischen Randbedingungen verwandt, so daß die Notationen teilweise deutlich abweichen. Manchmal werden die *A*-Kerne auch als GK-Kerne bezeichnet.

Eingeführt und zuerst untersucht wurden dieser Formalismus von K. Gawędzki und A. Kupiainen. Dafür seien die Arbeiten [GK80, GK84] genannt. Anwendungen dieser Operatoren in der Quantenfeldtheorie findet man auch in [Por90] und in [Xy197]. Operatoren vom Typ *C* und *A* können auch als Interpolationsoperatoren in Algorithmen verwandt werden. Das geschieht in [Kal94] und [Bäk95].

Kapitel 4

Die ϕ^4 -Trajektorie

In diesem Kapitel wird die ϕ^4 -Trajektorie für eine Quantenfeldtheorie auf dem Gitter perturbativ konstruiert. Die ϕ^4 -Trajektorie ist, grob gesagt, ein Potential, das forminvariant unter der Renormierungsgruppe ist und einen ϕ^4 -Wechselwirkungsterm enthält.

Zuerst werden einige Grundbegriffe erklärt und die Blockspinrenormierungsgruppe eingeführt. Dann wird eine Gitter-Kontinuums-Korrespondenz erklärt, mit der das Problem in das Kontinuum übertragen werden kann. Die Idee besteht darin, eine renormierungsinvariante Trajektorie im Kontinuum zu konstruieren, die eine renormierungsinvariante Trajektorie auf dem Gitter erzeugt. Die Formulierung des Problems im Kontinuum hat, neben der Tatsache, daß ϕ^4 -Trajektorien im Kontinuum schon berechnet wurden, auch einige technische Vorteile, die noch erklärt werden. Als Potentialansatz wird eine Potenzreihe in der Kopplungskonstanten g verwandt. Aus der Forderung nach Forminvarianz des Potentials ergibt sich eine Gleichung, mit der das Potential nach Ordnungen in g iterativ bestimmt werden kann. Es wird gezeigt, daß dieses Iterationsschema lösbar ist. Ferner wird untersucht, in welchem Sinne die bei der Iteration entstehenden Potentiale endlich sind.

Schließlich wird das Problem speziell in drei und vier Dimensionen untersucht. In drei Dimensionen kann die Endlichkeit der Iteration gezeigt werden. Folglich ist die Konstruktion der ϕ_3^4 -Trajektorie komplett. Im vierdimensionalen Fall sind die Abschätzungen schwieriger, und die Konstruktion der Trajektorie ist noch nicht vollständig. Es wird allerdings eine Reihe von Ideen präsentiert, wie die Abschätzungen verbessert werden können, um die Konstruktion zu vervollständigen.

Die Ausführungen des vorliegenden Kapitels haben kein Pendant in der Literatur. Ein erster Konstruktionsversuch der ϕ_3^4 -Trajektorie auf dem Gitter findet sich in [Zie98]. Die Art und Weise, wie die Kontinuumsformulierung

behandelt wird, ist von [Wie97a, Wie97c] inspiriert.

4.1 Grundbegriffe

4.1.1 Quantenfeldtheorie auf dem Gitter

In diesem Abschnitt wollen wir kurz erklären, was wir unter einer skalaren Feldtheorie auf einem Gitter verstehen. Für eine ausführliche Einführung sei auf [MM94] verwiesen.

Sei $\Lambda(a) = a\mathbb{Z}^D$ ein Gitter. Eine euklidische Quantenfeldtheorie auf Λ ist gegeben durch

- einen gittertranslations- und rotationsinvarianten Propagator v bzw. dessen Kern

$$v(x, y) = \int d^D p e^{ip(x-y)} \tilde{v}(p). \quad (4.1)$$

- Einen Boltzmann-Faktor $Z(\phi)$ bzw. ein Potential $V(\phi)$, die durch

$$Z(\phi) = e^{-V(\phi)} \quad (4.2)$$

miteinander verknüpft sind.

Aus diesen beiden Größen erhält man das erzeugende Funktional der Korrelationsfunktionen als¹

$$G(J) = \frac{\int d\mu_v(\phi) Z(\phi) e^{(\phi, J)}}{\int d\mu_v(\phi) Z(\phi)}, \quad (4.3)$$

aus dem die Greenschen Funktionen durch Funktionalableitung berechnet werden:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle &:= \frac{\int d\mu_v(\phi) Z(\phi) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)}{\int d\mu_v(\phi) Z(\phi)} \\ &= \left. \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} G(J) \right|_{J=0}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Wir werden mit den Größen

$$\begin{aligned} H(\phi) &= \exp \{ H^C(\phi) \} \\ &= \frac{\int d\mu_v(\zeta) Z(\phi + \zeta)}{\int d\mu_v(\zeta) Z(\zeta)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

¹ $d\mu_v$ ist das zu der Kovarianz v gehörende Gaußsche Maß.

arbeiten. $H(\phi)$ ist das erzeugende Funktional der v -amputierten Greenschen Funktionen. $H^C(\phi)$ ist das erzeugende Funktional der v -amputierten verbundenen Greenschen Funktionen. Einen Beweis davon findet man in [Sal99]. v -amputierte Greensche Funktionen entstehen aus den gewöhnlichen Greenschen Funktionen durch Anwendung von v^{-1} auf die Felder $\phi(x_i)$. Zwischen $G(J)$ und $H(\phi)$ besteht der Zusammenhang

$$G(J) = e^{\frac{1}{2}(J, vJ)} H(vJ) \quad (4.6)$$

wie man mit der Transformationsformel (5.89) nachrechnen kann.

Ein Standardbeispiel für eine Quantenfeldtheorie auf einem Gitter ist die ϕ^4 -Theorie. Da ist die Kovarianz gegeben durch

$$v(x, y) = (\alpha \Delta + m^2)^{-1}(x, y), \quad (4.7)$$

wobei Δ den Laplaceoperator auf dem Gitter darstellt. Das Potential ist durch

$$V(\phi) = \frac{g}{4!} \int_{\Lambda(a)} d^D x \phi^4(x) + \frac{1}{2} \int_{\Lambda(a)} dx \sum_{\mu=1}^D (\nabla_\mu^f(\phi))^2(x) + m^2 \phi(x)^2 \quad (4.8)$$

gegeben. Dabei ist ∇_μ^f die durch $\nabla_\mu^f g(x) := \frac{1}{a}(g(x + a\hat{\mu}) - g(x))$ definierte Vorwärtsableitung.

Eine Quantenfeldtheorie im Kontinuum wird durch dieselben Begriffe erklärt.

4.1.2 Die Blockspinrenormierungsgruppe

Mit den Operatoren des dritten Kapitels kann nun in Anlehnung an Gawedzki und Kupiainen [GK84] die Blockspinrenormierungsgruppe konstruiert werden.

Die Frage ist, wie $H(\phi)$ durch eine Skalierung der Felder mit A transformiert wird. Das Integral über das Gaußsche Maß wird mittels (5.102) aufgespalten und (5.91) benutzt. Der Fluktuationsanteil wird ausintegriert. Es gilt:

$$\begin{aligned} H(A\phi) &= \frac{\int d\mu_v(\zeta) Z(A\phi + \zeta)}{\int d\mu_v(\zeta) Z(\zeta)} \\ &= \frac{\int d\mu_{AuA^\dagger}(\xi) \int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(A\phi + \xi + \zeta)}{\int d\mu_{AuA^\dagger}(\xi) \int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(\xi + \zeta)} \\ &= \frac{\int d\mu_u(\xi) \int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(A(\phi + \xi) + \zeta)}{\int d\mu_u(\xi) \int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(A\xi + \zeta)} \\ &= \frac{\int d\mu_u(\xi) R(Z)(\phi + \zeta)}{\int d\mu_u(\xi) R(Z)(\zeta)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dabei ist

$$R(Z)(\phi) = \frac{\int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(A\phi + \zeta)}{\int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(\zeta)}. \quad (4.10)$$

Durch die Skalierung der Felder mit $\phi \rightarrow A\phi$ wird also die Theorie auf eine andere Theorie mit der neuen Kovarianz u und einer neuen Wechselwirkung $R(Z)$ abgebildet. Die Abbildung $R(Z)$ heißt Renormierungstransformation. Für das Potential V schreibt sie sich als

$$T(V)(\phi) = -\log\left(\int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(A\phi + \zeta)\right) + \log\left(\int d\mu_\Gamma(\zeta) Z(\zeta)\right) \quad (4.11)$$

Sie hat den trivialen Fixpunkt $V = 0$. Die Linearisierung an diesem Fixpunkt ist

$$T^{lin}(V)(\phi) = \int d\mu_\Gamma(\zeta) V(A\phi + \zeta) - \int d\mu_\Gamma(\zeta) V(\zeta). \quad (4.12)$$

Wir werden im folgenden immer den Fixpunkt $v = v_*$ als Kovarianz nehmen. Dann braucht der Fluß der Kovarianz nicht mehr untersucht zu werden sondern nur noch $R(Z)$. Die Wahl von v_* hat auch einen anderen Vorteil, der später bei der Normalordnung deutlich wird.

Wir können nun einen ersten Eindruck von Ziel unserer Konstruktion vermitteln. Wie wir am Beispiel der ϕ^4 -Theorie gesehen haben, ist das Potential V ein Funktional in ϕ und der Kopplungskonstanten g . Dieses Funktional wird durch die Renormierungstransformation auf ein anderes Funktional abgebildet. Wir suchen ein Potential V bei dem diese Abbildung einer Veränderung der Kopplungskonstanten gleichkommt, bei dem also $T(V)(\phi, g) = V(\phi, \beta(g))$ gilt.

Im nächsten Abschnitt werden wir erläutern, wie das Problem in das Kontinuum übertragen werden kann. Dort werden wir es lösen.

4.2 Gitter-Kontinuums-Korrespondenz

In diesem Abschnitt soll, ausgehend von einer Gittertheorie mit der Blockspinrenormierungsgruppe eine ihr entsprechende Kontinuumstheorie mit einer Kontinuumsrenormierungsgruppe formuliert werden. Diese Theorie wird dann genauer untersucht.

4.2.1 Die Kontinuumstheorie

Sei zuerst eine Kontinuumstheorie mit einem Potential $V^{cont}(\phi^{cont})$ gegeben. Dann kann man sofort eine Gittertheorie mit einem Potential $V^{lat}(\phi^{lat})$ defi-

nieren, indem man

$$V^{lat}(\phi^{lat}) := V^{cont}(A_*^\infty \phi^{lat}) \quad (4.13)$$

setzt. Sei das Kontinuumpotential von der Form

$$V^{cont}(\phi^{cont}, g) = \sum_{r=1}^{\infty} V^{cont,(r)}(\phi^{cont}) \frac{g^r}{r!} \quad (4.14)$$

mit

$$\begin{aligned} V^{cont,(r)}(\phi^{cont}) &= \sum_{n=1}^{r+1} \frac{1}{(2n)!} \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_{2n} \cdot \\ &\quad \cdot V_{2n}^{cont,(r)}(x_1, \dots, x_{2n}) : \phi^{cont}(x_1) \dots \phi^{cont}(x_{2n}) :_{v_*^\infty} . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Die Darstellung mit normalgeordneten Feldern wird deshalb gewählt, weil die normalgeordneten Monome im Kontinuum Eigenvektoren der am trivialen Fixpunkt linearisierten Renormierungsgruppe sind. Diese Tatsache wird später noch genauer erklärt. Die Normalordnung wird im Anhang (Abschnitt 5.5) erläutert. Dann ist das Gitterpotential von der Form

$$V^{lat}(\phi^{lat}, g) = \sum_{r=1}^{\infty} V^{lat,(r)}(\phi^{lat}) \frac{g^r}{r!}, \quad (4.16)$$

mit

$$\begin{aligned} V^{lat,(r)}(\phi) &= \sum_{n=1}^{r+1} \frac{1}{(2n)!} \int_{\Lambda(a)} d^D x_1 \dots \int_{\Lambda(a)} d^D x_{2n} \\ &\quad \cdot V_{2n}^{lat,(r)}(x_1, \dots, x_{2n}) : \phi^{lat}(x_1) \dots \phi^{lat}(x_{2n}) :_{v_*}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

wenn man

$$\begin{aligned} V_{2n}^{lat,(r)}(x_1, \dots, x_{2n}) &= \int_{\mathbb{R}^D} d^D y_1 \dots \int_{\mathbb{R}^D} d^D y_{2n} V_{2n}^{cont,(r)}(y_1, \dots, y_{2n}) \\ &\quad \cdot A_*^\infty(y_1, x_1) \dots A_*^\infty(y_{2n}, x_{2n}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

setzt. Das kann man auch schreiben als

$$V_{2n}^{lat,(r)}(x_1, \dots, x_{2n}) = \underbrace{(A_*^\infty)^\dagger \times \dots \times (A_*^\infty)^\dagger}_{2n} V_{2n}^{cont,(r)}(x_1, \dots, x_{2n}). \quad (4.19)$$

Um das einzusehen, bemerke man, daß $V(\phi)$ ein Skalarprodukt der Vertices mit den Feldern darstellt, in dem ein Operator hinübergewälzt werden kann. Weiter braucht man die Identität

$$\underbrace{(A_*^\infty) \times \dots \times (A_*^\infty)}_{2n} : \phi^{lat} \dots \phi^{lat} :_{v_*} = : A_*^\infty \phi^{lat} \dots A_*^\infty \phi^{lat} :_{A_*^\infty v_* A_*^\infty}, \quad (4.20)$$

die aus (4.118) und (4.124) folgt.

Wir haben in diesem Abschnitt gesehen, wie eine Kontinuumstheorie und eine äquivalente Gittertheorie zusammenhängen. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß eine passende Kontinuumsrenormierungsgruppe der Gitterrenormierungsgruppe entspricht.

4.2.2 Übertragung der Renormierungsgruppe

Mit Hilfe der Gleichung (5.91) gilt für ein beliebiges Funktional $O(\phi^{cont}) = O(A_*^\infty \phi^{lat})$ die Gleichung

$$\int d\mu_{\Gamma_*}(\zeta) O(A_*^\infty (A_* \phi^{lat} + \zeta)) = \int d\mu_{\Gamma_*^\infty}(\zeta) O(S^{-1} A_*^\infty \phi^{lat} + \zeta), \quad (4.21)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} LS &= \int d\mu_{\Gamma_*}(\zeta) O(A_*^\infty A_* \phi^{lat} + A_*^\infty \zeta) \\ &= \int d\mu_{A_*^\infty \Gamma_* (A_*^\infty)^\dagger}(\zeta) O(S^{-1} A_*^\infty \phi^{lat} + \zeta) \\ &= RS. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Also wird, wenn für die Kontinuumsrenormierungsgruppe

$$R^{cont}(Z^{cont})(\phi^{cont}) = \frac{\int d\mu_{\Gamma_*^\infty}(\zeta) Z^{cont}(S^{-1} \phi^{cont} + \zeta)}{\int d\mu_{\Gamma_*^\infty}(\zeta) Z^{cont}(\zeta)} \quad (4.23)$$

angesetzt wird, der Boltzmann-Faktor auf dem Gitter transformiert gemäß

$$R^{lat}(Z^{lat})(\phi^{lat}) = \frac{\int d\mu_{\Gamma_*}(\zeta) Z^{lat}(A_* \phi^{lat} + \zeta)}{\int d\mu_{\Gamma_*}(\zeta) Z^{lat}(\zeta)}. \quad (4.24)$$

Das ist jedoch die Blockspinrenormierungsgruppe (4.10). Analog erzeugen die Transformationen

$$T(V^{cont})(\phi^{cont}) = -\log\left(\int d\mu_{\Gamma_*^\infty}(\zeta) Z^{cont}(S^{-1} \phi^{cont} + \zeta)\right)$$

$$+ \log\left(\int d\mu_{\Gamma_*^\infty}(\zeta) Z^{cont}(\zeta)\right) \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} T^{lin}(V^{cont})(\phi^{cont}) &= \int d\mu_{\Gamma_*^\infty}(\zeta) V^{cont}(S^{-1}\phi^{cont} + \zeta) \\ &\quad - \int d\mu_{\Gamma_*^\infty}(\zeta) V^{cont}(\zeta) \end{aligned} \quad (4.26)$$

die Transformationen (4.11) und (4.12).

Diese Tatsache ist sehr bemerkenswert. Eine Kontinuumstheorie mit den Kovarianzen v_*^∞ und Γ_*^∞ und der Renormierungsgruppe (4.23) entspricht also einer Gittertheorie mit den Kovarianzen v_* und Γ_* und der Blockspinrenormierungsgruppe. Falls man eine Kontinuumstheorie mit bestimmten Eigenschaften bezüglich der Kontinuumsrenormierungsgruppe konstruieren kann, hat die entsprechende Gittertheorie dieselben Eigenschaften bezüglich der Gitterrenormierungsgruppe. Die Renormierungstransformation (4.23) ist formal eine Standardrenormierungsgruppe. Die Besonderheit liegt nur in den Propagatoren v_*^∞ und Γ_*^∞ . Diese Propagatoren haben zwei ungewöhnliche Eigenschaften:

- Γ_*^∞ und v_*^∞ fallen im Impulsraum nicht exponentiell ab. Das wird später Abschätzungen im Impulsraum schwieriger machen.
- Γ_*^∞ und v_*^∞ sind im Ortsraum nicht voll translationsinvariant, sondern nur gittertranslationsinvariant. Deshalb darf von der Kontinuumstheorie nur Gittertranslationsinvarianz gefordert werden.

Für den Fall, daß die Theorie voll translationsinvariant ist und die Propagatoren im Impulsraum exponentiell abfallen, wurde die ϕ^4 -Trajektorie schon konstruiert [Wie97a, Wie97b, Wie97c]. Die unüblichen Propagatoren erschweren eine Konstruktion der ϕ^4 -Trajektorie im Kontinuum. Aus einem anderen Grund ist eine Kontinuumsformulierung jedoch fast unumgänglich: Die normalgeordneten Monome sind im Kontinuum Eigenfunktionen der linearisierten Renormierungsgruppe, auf dem Gitter sind sie es nicht.

Wie werden von nun an im Kontinuum arbeiten. Alle nun vorkommenden Größen sind Kontinuumsgrößen, wenn sie nicht anders indiziert sind. Die Kovarianzen im Kontinuum werden mit $v := v_*^\infty$ und $\Gamma := \Gamma_*^\infty$ bezeichnet. Das Ziel ist es, eine renormierungsinvariante Trajektorie im Kontinuum zu konstruieren, die eine entsprechende Trajektorie auf dem Gitter definiert.

4.3 Problemstellung und Beweisstruktur

In diesem Abschnitt wird das Problem gestellt, und ein Überblick über die Lösung gegeben.

4.3.1 Das Problem

Hier wird erklärt, was unter einer renormierten Trajektorie zu verstehen ist. Die Definition ist dabei an [Wie97a, Wie97b, Wie97c] angelehnt.

Sei ein Potential $V(\phi, g)$ gegeben. Ein solches Potential definiert eine Kurve $V(\phi, \cdot)$ im Raum aller Theorien vermöge

$$V(\phi, \cdot) : g \mapsto V(\phi, g). \quad (4.27)$$

Gesucht ist nun eine solche Trajektorie, die als Menge unter der Renormierungsgruppenabbildung invariant bleibt:

$$T(V(\phi, \cdot)) \subset V(\phi, \cdot). \quad (4.28)$$

Das wird nun genauer spezifiziert. Gesucht ist eine Kurve $V(\phi, \cdot)$ bzw. ein Potential $V(\phi, g)$ mit folgenden Eigenschaften:

- V kann zerlegt werden durch

$$V(\phi, g) = \sum_{r=1}^{\infty} V^{(r)}(\phi) \frac{g^r}{r!} \quad (4.29)$$

und weiter in

$$\begin{aligned} V^{(r)}(\phi) &= \sum_{n=1}^{r+1} \frac{1}{(2n)!} \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_{2n} \\ &\quad \cdot V_{2n}^{(r)}(x_1, \dots, x_{2n}) : \phi(x_1) \dots \phi(x_{2n}) :_v . \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ziel ist eine perturbative Entwicklung der Trajektorie um den trivialen Fixpunkt $V = 0$. Dabei wird nach einer Konvergenz der Reihe (4.29) nicht gefragt, sie wird als formale Potenzreihe betrachtet. Weiterhin beschränken wir uns durch die Wahl von V auf gerade Potentiale. Alle vorkommenden Potentiale werden so normiert, daß $V(\phi = 0) = 0$ gilt. Deshalb werden feldunabhängige Konstanten in den Potentialen weggelassen. Da die normalgeordneten Monome invariant unter Permutation der Koordinaten sind, sollten es auch die Kerne $V_{2n}^{(r)}(x_1, \dots, x_{2n})$ sein.

- Die erste Ordnung $V^{(1)}(\phi)$ ist durch

$$\begin{aligned} V^{(1)}(\phi) &= \mathcal{O}_4(\phi) \\ &:= \int_{\mathbb{R}^D} d^D x : \phi(x)^4 : \end{aligned} \quad (4.31)$$

gegeben.²

- Die Vertices $V_{2n}^{(r)}(x_1, \dots, x_{2n})$ sind gittertranslationsinvariante Funktionen für ein Gitter $\Lambda(a)$. Sie haben eine Fourierdarstellung

$$V(x_1, \dots, x_n) = \int \frac{d^D p_1}{(2\pi)^D} \dots \int \frac{d^D p_n}{(2\pi)^D} e^{i \sum_j p_j x_j} \tilde{V}(p_1, \dots, p_n) \quad (4.32)$$

mit

$$\tilde{V}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta^D(Q - \sum_j p_j) \hat{V}(p_1, \dots, p_n). \quad (4.33)$$

Die reduzierten Impulskerne $\hat{V}(p_1, \dots, p_n)$ sind differenzierbare Funktionen. Die Beschränkung auf die Gittertranslationsinvarianz anstatt voller Translationsinvarianz liegt in der Gittertranslationsinvarianz der Propagatoren begründet.

- Es existiert eine Funktion

$$\beta(g) = \sum_{r=1}^{\infty} b_r \frac{g^r}{r!}, \quad (4.34)$$

so daß

$$T(V(\phi, g)) = V(\phi, \beta(g)) \quad (4.35)$$

gilt. Das ist die entscheidende Bedingung. Sie beinhaltet, daß $V(\phi, \cdot)$ forminvariant unter der Renormierungsgruppe ist. Es wird sich zeigen, daß allein durch die Bedingung der Forminvarianz V in allen Ordnungen bestimmt ist.

Diese Bedingungen sind noch nicht vollständig. Sie müssen noch um eine Bedingung an die Kopplungskonstante ergänzt werden. Dafür bieten sich zwei Möglichkeiten an. Zum einen kann g so definiert werden, daß der ϕ^4 -Vertex nur in der linearen Ordnung in g vorkommt:

$$\widehat{V_4^{(r)}}(0, 0, 0, 0) = \delta_{r,1}. \quad (4.36)$$

²Allgemeiner schreibt man auch $\mathcal{O}_{2n}(\phi) := \frac{1}{(2n)!} \int d^D x : \phi(x)^{2n} : .$

Man kann g auch dadurch festlegen, indem man Bedingungen an die Form von $\beta(g)$ stellt. Dabei ist es sinnvoll, β linear zu wählen. Wir werden sehen, daß dann nur

$$\beta(g) = L^{4-D}g \quad (4.37)$$

in Frage kommt.

Das Problem wurde eben unabhängig von der Dimension gestellt. Jedoch bedarf diese Problemstellung leichter Modifikationen, je nachdem, ob man sich in drei oder vier Dimensionen befindet. Diese Abänderungen werden erst dann untersucht, wenn die Dimensionszahl festgelegt ist.

4.3.2 Beweisstruktur

Das gestellte Problem wird anfangs unabhängig von der Dimension betrachtet. Zuerst zeigen wir, daß die normalgeordneten Monome Eigenfunktionen der am Fixpunkt linearisierten Renormierungsgruppe sind und rechtfertigen damit den Ansatz für das Potential. Dann zeigen wir, wie aus der Bedingung (4.35) Gleichungen für die Koeffizienten der β -Funktion werden. Zusammen mit der Darstellung durch normalgeordnete Felder kommen wir zu einer Gleichung vom Typ

$$L^\sigma V^{(n)}(Lx) - V^{(n)}(x) = K^{(n)}(V^{(1)}, \dots, V^{(n-1)}). \quad (4.38)$$

Diese Gleichung ((4.60), bzw. (4.62) und (4.64)) ist die wichtigste Gleichung in dem Beweis. Sie ermöglicht die Bestimmung einer höheren Ordnung von V , wenn die niedrigeren Ordnungen bekannt sind. Das geschieht in den Abschnitten (4.5) und (4.6). Im ersten dieser Abschnitte werden allgemein Gleichungen von obigen Typ betrachtet, im zweiten wird darauf aufbauend der hier interessante Fall gittertranslationsinvarianter Funktionen untersucht. Es muß jedoch auch die rechte Seite von (4.38) erforscht werden. $K^{(n)}(V^{(1)}, \dots, V^{(n-1)})$ muß in einem gewissen Sinne endlich sein, damit $V^{(n)}$ bestimmt werden kann. Das wird im Abschnitt (4.7) gezeigt. In den beiden anschließenden Kapiteln werden die Spezialfälle $D = 3$ und $D = 4$ untersucht.

4.4 Die β -Funktion

In diesem Abschnitt werden die Bedingungen, die sich durch Gleichung (4.35) an das Potential ergeben, bestimmt.

4.4.1 Normalordnung und Eigenvektoren

Die am Fixpunkt linearisierte Renormierungsgruppe ist nach (4.26)³

$$T^{lin}(V)(\phi) = \langle V \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}. \quad (4.39)$$

Es soll gezeigt werden, daß die normalgeordneten Monome Eigenvektoren dieser Transformation sind. Für das erzeugende Funktional der Normalordnung gilt

$$\begin{aligned} \langle : e^{(j,\phi)} :_v \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi} &= e^{(j, S^{-1}\phi) - \frac{1}{2}(j, vj)} \int d\mu_\Gamma(\zeta) e^{(j, \zeta)} \\ &= e^{(j, S^{-1}\phi) - \frac{1}{2}(j, vj)} e^{\frac{1}{2}(j, \Gamma j)} \\ &= : e^{(j, S^{-1}\phi)} :_{S^{-1}(S(v-\Gamma)S^\dagger)(S^{-1})^\dagger}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Aufgrund von (3.113) gilt jedoch bei den speziell gewählten Kovarianzen

$$v = S(v - \Gamma)S^\dagger. \quad (4.41)$$

Damit manifestiert sich für einen Term die Abbildungsvorschrift

$$\begin{aligned} : \phi(x_1)^{m_1} \dots \phi(x_n)^{m_n} :_v &\xrightarrow{T^{lin}} : (S^{-1}\phi(x_1))^{m_1} \dots (S^{-1}\phi(x_n))^{m_n} :_{S^{-1}v(S^{-1})^\dagger} \\ &= : (L^{(1-\frac{D}{2})}\phi(\frac{x_1}{L}))^{m_1} \dots (L^{(1-\frac{D}{2})}\phi(\frac{x_n}{L}))^{m_n} :_{L^{2-D}v(\frac{x}{L}, \frac{y}{L})}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Also ist der Vertex

$$O(\phi) = \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_n : \phi(x_1)^{m_1} \dots \phi(x_n)^{m_n} :_v \quad (4.43)$$

ein Eigenvektor mit

$$O(\phi) \xrightarrow{T^{lin}} L^\sigma O(\phi) \quad (4.44)$$

$$\sigma = nD + (1 - \frac{D}{2}) \sum_{i=1}^n m_i. \quad (4.45)$$

Ein Vertex der Form

$$\tilde{O}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_n V(x_1, \dots, x_n) : \phi(x_1)^{m_1} \dots \phi(x_n)^{m_n} :_v \quad (4.46)$$

³Im Kontinuum verwenden wir auch die Notation $\langle F \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi} := \int d\mu_\Gamma(\zeta) F(S^{-1}\phi + \zeta)$.

wird dementsprechend durch die Renormierungsgruppe transformiert gemäß

$$\tilde{O}(\phi) \rightarrow L^\sigma \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_n V(Lx_1, \dots, Lx_n) : \phi(x_1)^{m_1} \dots \phi(x_n)^{m_n} :_v . \quad (4.47)$$

Ein bekannter Eigenvektor ist der ϕ^4 -Vertex

$$\mathcal{O}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^D} d^D x : \phi(x)^4 : . \quad (4.48)$$

Für ihn ist $\sigma = 4 - D$.

Aus den Überlegungen dieses Abschnittes ergibt sich auch, daß die normalgeordneten Monome auf dem Gitter keine Eigenfunktionen darstellen. Auf dem Gitter muß in den Rechnungen S^{-1} durch A_* ersetzt werden, und die Rechnung (4.42) läßt sich dann nicht durchführen.

4.4.2 Gleichungen für die Koeffizienten der β -Funktion

Aus der Bedingung (4.35) ergeben sich Gleichungen für die Vertices $V^{(r)}$ und die Koeffizienten b_r . Zuerst wird dazu $T(V)$ als Potenzreihe in g entwickelt. Man definiert dazu für $t \in [0, 1]$ die Hilfsttransformation

$$\begin{aligned} Q_t : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ Q_t(V(\phi, g)) &:= T(tV(\phi, g)). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} T(V)(\phi, g) &= Q_1(V)(\phi, g) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial_t^m Q_t(V)|_{t=0}}{m!} \cdot 1^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} -\frac{(-1)^m}{m!} \partial_t^m \log(\langle \exp(tV) \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}) \Big|_{t=0} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \langle [V]^m \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T . \end{aligned} \quad (4.50)$$

Dabei stellt $\langle \cdot \rangle^T$ den trunkierten Erwartungswert dar. Damit ist weiter, unter der Benutzung der Form von V (4.30) und der Multilinearität der trunkierten Erwartungswerte

$$T(V)(\phi, g)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \left\langle \left[\sum_{r=1}^{\infty} V^{(r)} \frac{g^r}{r!} \right]^m \right\rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{r_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{r_m=1}^{\infty} \frac{g^{\sum r_i}}{\prod_{i=1}^m r_i!} \langle V^{(r_1)}; \dots; V^{(r_m)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{r=m}^{\infty} g^r \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{1}{\prod_{i=1}^m r_i!} \langle V^{(r_1)}; \dots; V^{(r_m)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{g^r}{r!} \left(\sum_{m=1}^r \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{\prod_{i=1}^m r_i!} \langle V^{(r_1)}; \dots; V^{(r_m)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \right). \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Dann wird $V(\phi, \beta(g))$ als Potenzreihe in g geschrieben:

$$\begin{aligned}
V(\phi, \beta(g)) &= \sum_{r=1}^{\infty} V^{(r)}(\phi) \frac{\beta(g)^r}{r!} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} V^{(r)}(\phi) \frac{1}{r!} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k g^k}{k!} \right)^r \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} V^{(r)}(\phi) \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_r=1}^{\infty} \frac{g^{\sum k_i}}{r!} \frac{b_{k_1} \cdots b_{k_r}}{\prod_{i=1}^r k_i!} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{V^{(r)}(\phi)}{r!} \sum_{k=r}^{\infty} g^k \sum_{k_1+\dots+k_r=k} \frac{b_{k_1} \cdots b_{k_r}}{\prod_{i=1}^r k_i!} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{g^r}{r!} \left(\sum_{m=1}^r \sum_{k_1+\dots+k_m=r} \frac{V_m(\phi)}{m!} \frac{r!}{\prod_{i=1}^m k_i!} b_{k_1} \cdots b_{k_m} \right). \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Nun kann man einen Koeffizientenvergleich durchführen. In der ersten Ordnung ergibt sich

$$\begin{aligned}
b_1 V^{(1)}(\phi) &= \langle V^{(1)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \\
&= \langle V^{(1)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Die zweite Ordnung lautet

$$\begin{aligned}
b_2 V^{(1)} + (b_1)^2 V^{(2)} &= \langle V^{(2)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T - \langle V^{(1)}; V^{(1)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \\
&= \langle V^{(2)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi} - \langle V^{(1)}; V^{(1)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Im allgemeinen Fall lautet die Gleichung

$$\langle V^{(n)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi} - (b_1)^n V^{(n)}(\phi) = (b_1)^n K^{(n)}, \quad (4.55)$$

wobei die rechte Seite durch

$$\begin{aligned} (b_1)^n K^{(n)} &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \sum_{k_1+\dots+k_m=n} V^{(m)}(\phi) \frac{n!}{\prod_{i=1}^m k_i!} b_{k_1} \cdot \dots \cdot b_{k_m} \\ &\quad - \sum_{m=2}^n \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{r_1+\dots+r_m=n} \frac{n!}{\prod_{i=1}^m r_i!} \langle V^{(r_1)}; \dots; V^{(r_m)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \end{aligned} \quad (4.56)$$

gegeben ist. Man beachte, daß $K^{(n)}$ nicht von $V^{(n)}$ abhängt.

4.4.3 Folgerungen aus diesen Gleichungen

Die Gleichung für den ersten Koeffizienten b_1 (4.53) ist eine Eigenwertgleichung für den Eigenwert b_1 . Ein Eigenvektor ist der ϕ^4 -Vertex, der entsprechende Eigenwert ist

$$b_1 = L^{4-D}. \quad (4.57)$$

Um die allgemeine Gleichung zu behandeln, werden beide Seiten von (4.55) in normalgeordnete Felder entwickelt. Die linke Seite ergibt

$$\begin{aligned} LS &= \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{(2m)!} \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_{2m} : \phi(x_1) \dots \phi(x_{2m}) :_v \\ &\quad \cdot \left(L^{m(D+2)} V_{2m}^{(n)}(Lx_1, \dots, Lx_{2m}) - (b_1)^n \cdot V_{2m}^{(n)}(x_1, \dots, x_{2m}) \right). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Die rechte Seite wird formal entwickelt

$$\begin{aligned} RS &= (b_1)^n K^{(n)} \\ &= (b_1)^n \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{(2m)!} \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_{2m} \\ &\quad \cdot K_{2m}^{(n)}(x_1, \dots, x_{2m}) : \phi(x_1) \dots \phi(x_{2m}) :_v. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Insgesamt kommt man zu den Gleichungen

$$L^\sigma V_{2m}^{(n)}(Lx_1, \dots, Lx_{2m}) - V_{2m}^{(n)}(x_1, \dots, x_{2m}) = K_{2m}^{(n)}(x_1, \dots, x_{2m}) \quad (4.60)$$

mit (man beachte (4.57))

$$\sigma = m(D + 2) - n(4 - D). \quad (4.61)$$

Im Impulsraum wird Gleichung (4.60) zu

$$L^{\tilde{\sigma}} \widehat{V_{2m}^{(n)}}\left(\frac{p_1}{L}, \dots, \frac{p_{2m}}{L}\right) - \widehat{V_{2m}^{(n)}}(p_1, \dots, p_{2m}) = \widehat{K_{2m}^{(n)}}(p_1, \dots, p_{2m}) \quad (4.62)$$

mit

$$\tilde{\sigma} = \sigma - 2mD. \quad (4.63)$$

Falls die Vertices translationsinvariant sind, sind deren Fouriertransformierte distributionswertig, d.h. es ist $\tilde{V}(p_1, \dots, p_n) = \delta(\sum p_i) \hat{V}(p_1, \dots, p_n)$.⁴ Wird dann die δ -Distribution für den Fall, daß $\sum p_i = 0$ ist, entfernt, hat man die Gleichung

$$L^{\hat{\sigma}} \widehat{V_{2m}^{(n)}}\left(\frac{p_1}{L}, \dots, \frac{p_{2m}}{L}\right) - \widehat{V_{2m}^{(n)}}(p_1, \dots, p_{2m}) = \widehat{K_{2m}^{(n)}}(p_1, \dots, p_{2m}) \quad (4.64)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \tilde{\sigma} + D \\ &= D + m(2 - D) - n(4 - D) \\ &= \begin{cases} 3 - m - n; & \text{falls } D = 3 \\ 4 - 2m; & \text{falls } D = 4 \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Die Vertices werden nun, je nachdem ob $\hat{\sigma} > 0$, $\hat{\sigma} = 0$ oder $\hat{\sigma} < 0$ ist, als relevant, marginal, oder irrelevant bezeichnet. Die folgende Tabelle listet die relevanten und die marginalen Vertices und das größtmögliche $\hat{\sigma}$ auf:

(m, n)	relevant	marginal	$\hat{\sigma}_{max}$
$D = 3$	$(1, 1)$	$(1, 2); (2, 1)$	1
$D = 4$	$(1, n)$	$(2, n)$	2

In drei Dimensionen gibt es nur zwei marginale Vertices. Der einzige relevante Vertex in drei Dimensionen wird durch die Anfangsbedingung (4.31) ausgeschlossen. In vier Dimensionen gibt es in allen Ordnungen relevante und marginale Vertices.

⁴Im Falle von Gittertranslationsinvarianz hat man eine Summe von δ -Funktionen, $\hat{\sigma}$ ist aber genauso definiert.

4.5 Differenzengleichungen I

In diesem Abschnitt sollen Gleichungen vom Typ der Gleichungen (4.62) und (4.64) genauer untersucht werden. Die Grundidee bei der Lösung solcher Gleichungen besteht in ihrer Iteration.

Seien dazu

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.66)$$

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4.67)$$

Für ein festes $L > 1$ und σ wird nach Funktionen $f(p)$, die die Gleichung

$$L^\sigma f\left(\frac{p}{L}\right) - f(p) = g(p) \quad (4.68)$$

bei bekanntem $g(p)$ erfüllen, gesucht. Da die allgemeine Lösung der Gleichung (4.68) sich aus einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung und den Lösungen der homogenen Gleichung

$$f(p) = L^\sigma f\left(\frac{p}{L}\right) \quad (4.69)$$

zusammensetzt, wird zuerst die homogene Gleichung betrachtet.

Lösungen der homogenen Gleichung

Aus (4.69) folgt

$$f(p) = L^{-\sigma n} f(L^n p) \quad (4.70)$$

$$= L^{\sigma m} f\left(\frac{p}{L^m}\right) \quad (4.71)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Nun muß man drei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: Es ist $\sigma = 0$.

Dann sind die einzigen stetigen Funktionen, die (4.69) erfüllen, die konstanten Funktionen:

$$f(p) = C. \quad (4.72)$$

Zweiter Fall: Es ist $\sigma < 0$.

Hier existiert als stetige Lösung nur die Funktion

$$f = 0, \quad (4.73)$$

denn falls $f(p) = c \neq 0$ für ein p so folgt aus (4.70), daß f in einer Umgebung von 0 nicht beschränkt ist, sich also nicht in 0 stetig fortsetzen läßt.

Dritter Fall: Es ist $\sigma > 0$.

Hier sollen nur analytische Lösungen von (4.69) gesucht werden. Zuerst erkennt man, daß

$$f(0) = 0 \quad (4.74)$$

gelten muß, da sonst aufgrund von (4.70) f für kein $p \neq 0$ einen endlichen Wert annehmen kann. Wenn man die Ursprungsgleichung (4.69) ableitet, erhält man die Gleichung⁵

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha}(p) = L^{\sigma-|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha}\left(\frac{p}{L}\right) \quad (4.75)$$

und für $|\alpha| > \sigma$ ist man im zweiten Fall, wo nur die Nulllösung existiert. Für $|\alpha| = \sigma$ gilt

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha}(p) = \text{const} , \quad (4.76)$$

und für $|\alpha| < \sigma$ muß

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha}(0) = 0 \quad (4.77)$$

gelten. Insgesamt erhält man den

Satz. Sei $\sigma > 0$. Für $\sigma \notin \mathbb{Z}$ ist

$$f = 0 \quad (4.78)$$

die einzige analytische Lösung von (4.69). Für $\sigma \in \mathbb{Z}$ lautet die allgemeine analytische Lösung von (4.69)

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=\sigma} a_\alpha p^\alpha. \quad (4.79)$$

Nun kann man sich der inhomogenen Gleichung widmen.

Lösung der inhomogenen Gleichung

Erster Fall: Es ist $\sigma < 0$ und g ist beschränkt.

Man kann (4.68) iterieren

$$\begin{aligned} f(p) &= -g(p) + L^\sigma f\left(\frac{p}{L}\right) \\ &= -g(p) - L^\sigma g\left(\frac{p}{L}\right) + L^{2\sigma} f\left(\frac{p}{L^2}\right) \\ &= -g(p) - L^\sigma g\left(\frac{p}{L}\right) - L^{2\sigma} g\left(\frac{p}{L^2}\right) + L^{3\sigma} f\left(\frac{p}{L^3}\right) \end{aligned} \quad (4.80)$$

⁵Hier ist α ein Multiindex, es ist also $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\partial p)^\alpha = (\partial p_1)^{\alpha_1} \dots (\partial p_n)^{\alpha_n}$ und $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$.

und erhält so den folgenden

Satz. Für $\sigma < 0$ und ein beschränktes $g(p)$ konvergiert die Reihe

$$f(p) = - \sum_{i=0}^{\infty} g\left(\frac{p}{L^i}\right) L^{i\sigma} \quad (4.81)$$

absolut und gleichmäßig auf dem \mathbb{R}^n . Die so definierte Funktion f hat die folgenden Eigenschaften:

- (1) $f(p)$ löst die Gleichung (4.68).
- (2) $f(p)$ ist beschränkt durch⁶

$$|f(p)| < \frac{\|g\|_{\infty}}{1 - L^{\sigma}}. \quad (4.82)$$

- (3) $f(p)$ ist die einzige beschränkte Lösung von (4.68).

Beweis. Die absolute und gleichmäßige Konvergenz von (4.81) folgt aus dem Weierstraß-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz. (1) erhält man durch Einsetzen unter Ausnutzung der absoluten Konvergenz. (2) ergibt sich durch die geometrische Reihe. (3) folgt aus dem zur homogenen Gleichung gesagtem. \square

Bemerkung. Falls g stetig ist, so ist auch f stetig. Das folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von (4.81).

Bemerkung. Falls g k -mal stetig partiell differenzierbar ist, so ist auch f k -mal stetig partiell differenzierbar. Das ergibt sich aus den üblichen Rechenregeln [For76] von gleichmäßiger Konvergenz und Differenzierbarkeit.

Bemerkung. Die Bedingung, daß g auf ganz \mathbb{R}^D beschränkt ist, ist Luxus. Es reicht, daß g in einer Umgebung von 0 beschränkt ist (das ist z.B. der Fall, wenn g in 0 stetig ist), damit die Reihe (4.81) auf jeder kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^n gleichmäßig konvergiert. Die durch sie dargestellte Funktion ist dann jedoch nur auf jeder kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^n beschränkt.

Bemerkung. Falls eine monoton steigende Funktion $h(x)$ existiert, so daß

$$|g(p)| \leq h(|p|) \quad (4.83)$$

ist, so gilt

$$f(p) \leq \frac{h(|p|)}{1 - L^{\sigma}}. \quad (4.84)$$

Das ergibt sich dadurch, daß man die dann die $g(\frac{p}{L^i})$ -Terme in (4.81) durch $h(|p|)$ abschätzen kann.

⁶Es ist $\|g\|_{\infty} := \sup_{p \in \mathbb{R}^n} |g(p)|$.

Zweiter Fall: Es ist $\sigma = 0$.

In diesem Fall muß offensichtlich $g(0) = 0$ sein, damit eine Lösung existiert.

Es gilt:

Satz. Sei $\sigma = 0$, g k -mal stetig differenzierbar, $g(0) = 0$ und g beschränkt. Dann konvergiert die Reihe

$$f(p) = - \sum_{\alpha=0}^{\infty} g\left(\frac{p}{L^\alpha}\right) \quad (4.85)$$

auf jeder kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^n gleichmäßig. Die durch sie dargestellte Funktion löst Gleichung (4.68) und hat folgende Eigenschaften:

- f ist k -mal stetig differenzierbar.
- Für $|p| \leq 1$ gilt⁷

$$|f(p)| \leq \frac{L}{L-1} \sup_{|q| \leq 1} \|(Dg)(q)\| |p|. \quad (4.86)$$

- Für $|p| > 1$ gilt

$$|f(p)| \leq \frac{L}{L-1} \sup_{|q| \leq 1} \|(Dg)(q)\| + \|g\|_\infty + \frac{\|g\|_\infty}{\log L} \log(|p|). \quad (4.87)$$

Beweis. Da g einmal differenzierbar ist, existiert ein $r > 0$ und ein C so daß für alle p mit $|p| < r$ $|g(p)| < C|p|$ gilt. Deshalb läßt sich die Reihe (4.85) für große α gegen die geometrische Reihe abschätzen, woraus die Konvergenz folgt. (4.86) folgt aus der Tatsache, daß für $|p| \leq 1$

$$|g(p)| \leq \sup_{|q| \leq 1} \|(Dg)(q)\| |p| \quad (4.88)$$

gilt und der geometrischen Reihe. (4.87) wird induktiv gezeigt: Für $1 < |p| \leq L$ gilt

$$\begin{aligned} |f(p)| &= \left| -g(p) + f\left(\frac{p}{L}\right) \right| \\ &\leq \|g\|_\infty + \sup_{|q| \leq 1} \|(Dg)(q)\| \frac{|p|}{L} \\ &\leq \|g\|_\infty + \sup_{|q| \leq 1} \|(Dg)(q)\| \end{aligned} \quad (4.89)$$

⁷Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist $\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^n, |x|=1} |Ax|$. Dg stellt die Ableitung (smatrix) von g dar.

und für $L^n < |p| \leq L^{n+1}$ gilt

$$\begin{aligned}
 |f(p)| &= \left| -g(p) + f\left(\frac{p}{L}\right) \right| \\
 &\leq \frac{L}{L-1} \sup_{|q| \leq 1} \|(Dg)(q)\| + 2\|g\|_\infty + \frac{\|g\|_\infty}{\log L} (\log(|p|) - \log L) \\
 &= \frac{L}{L-1} \sup_{|q| \leq 1} \|(Dg)(q)\| + \|g\|_\infty + \frac{\|g\|_\infty}{\log L} \log(|p|). \tag{4.90}
 \end{aligned}$$

□

Falls im vorliegenden Fall $g(0) \neq 0$ ist, gibt es keine Lösungen. Das führt zu sogenannten Resonanzen, die speziell behandelt werden müssen. Man vergleiche dazu die Ausführungen zur Massenresonanz in $D = 3$ Dimensionen.

Dritter Fall: Es ist $\sigma > 0$.

Der Trick besteht darin, Gleichung (4.68) abzuleiten, um σ zu erniedrigen. Man erhält so die Gleichung

$$L^{\sigma-1} \frac{\partial}{\partial p_i} f\left(\frac{p}{L}\right) - \frac{\partial}{\partial p_i} f(p) = \frac{\partial}{\partial p_i} g(p). \tag{4.91}$$

Es liegt also nahe, als Ansatz für f eine Taylorreihe bis zu der Ordnung, bei der $\sigma = 0$ wird, zu machen. Die Taylorkoeffizienten für die niedrigeren Ordnungen werden durch die Ableitungen von g im Nullpunkt bestimmt. Man erhält:

Satz: Sei $\sigma \geq 0$ und g $(\sigma + 1)$ -mal stetig partiell differenzierbar. Die Taylorreihe

$$f(p) = \sum_{|\alpha| < \sigma} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha}(0) p^\alpha + \sum_{|\alpha| = \sigma} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 dt (1-t)^\sigma \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha}(tp) p^\alpha \tag{4.92}$$

ist genau dann eine Lösung der Differenzengleichung, wenn

$$(L^{\sigma-|\alpha|} - 1) \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha}(0) = \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial p^\alpha}(0) \quad \text{falls } |\alpha| < \sigma, \tag{4.93}$$

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha}\left(\frac{p}{L}\right) - \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha}(p) = \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial p^\alpha}(p) \quad \text{falls } |\alpha| = \sigma \tag{4.94}$$

gilt.

Die Ableitungen mit $|\alpha| = \sigma$ sind durch (4.94) nur bis auf eine Konstante bestimmt. Das entspricht den Lösungen der homogenen Gleichung gemäß (4.79). Natürlich ist (4.94) nur sinnvoll, wenn $\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial p^\alpha}(0) = 0$ ist. Nützlich ist es noch, für oben gegebene Lösung f eine Abschätzung für große p zu haben.

Es gilt:

Bemerkung. Sei für $|\alpha| = \sigma$ $\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial p^\alpha}(p) = 0$ und $\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial p^\alpha}(p)$ beschränkt. Dann existiert ein C so daß für große p

$$f(p) \leq C|p|^\sigma \log |p| \quad (4.95)$$

gilt.

Beweis. Aufgrund der Voraussetzungen wächst der $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial p^\alpha}(p)$ -Term im Integral in (4.92) logarithmisch. Daraus ergibt sich die Behauptung. \square

Eine grundsätzlich andere Idee, die Gleichung (4.68) im Falle $\sigma > 0$ zu lösen, besteht in einer Iteration „nach außen“:

$$f(p) = \sum_{i=1}^{\infty} L^{-i\sigma} g(L^i p). \quad (4.96)$$

Die so gewonnenen Lösungen sind jedoch schlecht zu gebrauchen, da man zusätzlich starke Voraussetzungen an g stellen muß (z.B. starker Abfall für große p), damit aus der Differenzierbarkeit von g die Differenzierbarkeit von f folgt.

4.6 Differenzengleichungen II

In diesem Kapitel sollen die Differenzengleichungen für den realistischen Fall, daß $f(x)$ gittertranslationinvariant ist, betrachtet werden. Dann sind die Fouriertransformierten distributionswertig. Auch hier besteht die Grundidee der Lösung in einer Iteration.

Es wird dabei die Notation $p = (p_1, \dots, p_n)$ und $p_i = (p_{i,1}, \dots, p_{i,D}) \in \mathbb{R}^D$ benutzt. Ferner wird

$$|p| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^D (p_{i,j})^2} \quad (4.97)$$

gesetzt. Mit dieser Definition gelten auch die Abschätzungen des vorherigen Kapitels. Weiter ist

$$|p| \leq \sum_{i=1}^n |p_i|. \quad (4.98)$$

Ausgangspunkt ist eine Differenzengleichung der Fouriertransformierten von einer bezüglich de Gitters $\Lambda(a)$ gittertranslationsinvarianten Funktion $f(x)$:⁸

$$L^\sigma \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta\left(\sum_{i=1}^n p_i - LQ\right) \hat{f}\left(\frac{p}{L}\right) - \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta\left(\sum_{i=1}^n p_i - Q\right) \hat{f}(p)$$

⁸Das in dieser Gleichung verwendete σ entspricht dem $\hat{\sigma}$ aus Gleichung (4.64).

$$= \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(\sum_{i=1}^n p_i - Q) \hat{g}(p) \quad (4.99)$$

In obigem Ansatz ist impliziert, daß der inhomogene Term K in (4.60) invariant unter Gittertranslationen mit dem Gitter $\Lambda(a)$ ist. Das ist nicht trivial, denn K enthält Faltungen mit der Kovarianz Γ , die nur $\Lambda(La)$ -invariant ist. Doch die Dilatation S^{-1} stellt die ursprüngliche Translationsinvarianz wieder her. Das wird im Kapitel (4.7) in dem K untersucht wird, noch deutlich werden.

Bei einer Lösung $\tilde{f}(p)$ einer solchen Differenzengleichung ist aufgrund der δ -Funktion nur der Fall $\sum_i p_i \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})$ interessant. Deshalb macht man eine Unterscheidung bei den möglichen Fälle für $\sum_i p_i \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})$. Für Abschätzungen muß beachtet werden, welche Werte σ annimmt.

4.6.1 $\sum_i p_i = 0$

Hier können die δ -Funktionen direkt aus (4.99) entfernt werden. Damit erhält man die Gleichung

$$L^\sigma \hat{f}(\frac{p}{L}) - \hat{f}(p) = \hat{g}(p). \quad (4.100)$$

Diese Gleichung kann mit den im vorherigen Kapitel beschriebenen Methoden behandelt werden.

4.6.2 $\sum_i p_i \neq 0$

In diesem Falle können die δ -Funktionen nicht so einfach entfernt werden. Man kann jedoch die Gleichung (4.99) mitsamt den δ -Funktionen iterieren. Dabei kommt man zu immer kleineren Impulsen, bis schließlich die Iteration abbricht, weil $\sum_i \frac{p_i}{L^k}$ nicht mehr im Gitter $\Lambda(\frac{2\pi}{a})$ liegt. Wenn $\sum_i p_i \neq 0$ und $\sum_i p_i \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})$ sein soll, dann existiert ein $k = k(p)$, so daß

$$\sum_{i=1}^n p_i \in \Lambda(\frac{2\pi L^k}{a}), \quad (4.101)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i \notin \Lambda(\frac{2\pi L^{k+1}}{a}) \quad (4.102)$$

gilt. Deshalb ergibt dann eine Iteration der Gleichung (4.99)

$$\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(\sum_{i=1}^n p_i - Q) \hat{f}(p) = - \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(\sum_{i=1}^n p_i - Q) \hat{g}(p)$$

$$\begin{aligned}
& +L^{\sigma-D} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{L} - Q) \hat{f}(\frac{p}{L}) \\
& = - \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(\sum_{i=1}^n p_i - Q) \hat{g}(p) \\
& \quad -L^{\sigma-D} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{L} - Q) \hat{g}(\frac{p}{L}) \\
& \quad +L^{2(\sigma-D)} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{L^2} - Q) \hat{f}(\frac{p}{L^2})
\end{aligned} \tag{4.103}$$

das Resultat

$$\sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(\sum_{i=1}^n p_i - Q) \hat{f}(p) = \sum_{\alpha=0}^k L^{\sigma\alpha} \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta(\sum_{i=1}^n p_i - QL^\alpha) \hat{g}(\frac{p}{L^\alpha}). \tag{4.104}$$

Für $\hat{f}(p)$ gilt deshalb⁹

$$\hat{f}(p) = \sum_{\alpha=0}^{k(p)} L^{\sigma\alpha} \hat{g}(\frac{p}{L^\alpha}). \tag{4.105}$$

Damit ist $\hat{f}(p)$ überall bestimmt.

4.6.3 Abschätzungen

Um das eben erläuterte Iterationschema gewinnbringend anwenden zu können, braucht man Abschätzungen für das Verhalten der Lösungen für große p . Um die Anzahl der Summanden in (4.105) zu bestimmen, muß $k(p)$ genauer untersucht werden. Aus

$$\sum_i p_i \in \Lambda(\frac{2\pi L^k}{a}) \tag{4.106}$$

folgt

$$\max_{j \in \{1 \dots D\}} \sum_{i=1}^n p_{i,j} \geq \frac{2\pi}{a} L^k \tag{4.107}$$

⁹Man kann dies auch als Ansatz nehmen und dann nachrechnen, daß ein \tilde{f} mit dem durch (4.105) gegebenen \hat{f} die Gleichung (4.99) löst.

und weiter

$$\begin{aligned} k(p) &\leq \log_L \left(\frac{a}{2\pi} \max_{j \in \{1 \dots D\}} \sum_{i=1}^n p_{i,j} \right) \\ &\leq \log_L(C|p|). \end{aligned} \quad (4.108)$$

Mit dieser Abschätzung und den aus dem vorherigen Kapitel bekannten Abschätzungen für den $\sum_i p_i = 0$ -Fall ((4.84), (4.87) und (4.95)) kann man nun leicht die Resultate formulieren:

Satz. Sei $\sigma < 0$. Es existiere eine monoton steigende Funktion $h(x)$, so daß

$$|\widehat{g}(p)| \leq h(|p|) \quad (4.109)$$

gilt. Dann hat man

$$|\widehat{f}(p)| \leq \frac{h(|p|)}{1 - L^\sigma}. \quad (4.110)$$

Satz. Sei $\sigma = 0$ und \widehat{g} beschränkt und differenzierbar mit $\widehat{g}(0) = 0$. Dann existieren Konstanten C_1, C_2, C_3 , so daß

$$|\widehat{f}(p)| \leq C_1 + C_2 \log(C_3|p|) \quad (4.111)$$

gilt.

Satz. Sei $\sigma > 0$, $\widehat{g}(p)$ beschränkt und für $|\alpha| = \sigma$ $\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial p^\alpha}(p) = 0$ und $\frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial p^\alpha}(p)$. Dann existiert ein C so daß für große p

$$f(p) \leq C|p|^\sigma \log |p| \quad (4.112)$$

gilt.

Beweis. Das ist genau die Abschätzung (4.95). Die endlichen Summen aus (4.105) ändern an dieser Abschätzung nichts, denn da $\widehat{g}(p)$ beschränkt ist, gilt für $\sum_i p_i \neq 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \widehat{f}(p) &\leq C \frac{(L^\sigma)^{k+1} - 1}{L^\sigma - 1} \\ &\leq C \frac{L^\sigma (L^k)^\sigma - 1}{L^\sigma - 1} \\ &\leq C \frac{L^\sigma |p|^\sigma - 1}{L^\sigma - 1}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

□

4.7 Untersuchung von $K^{(n)}$

In diesem Abschnitt wollen wir uns dem inhomogenen Term K in der Differenzengleichung widmen. Ziel ist es, unter gewissen Voraussetzungen Endlichkeit von K zu zeigen. Die Untersuchung verläuft dabei so: K besteht im wesentlichen aus Summen von Vertices niedrigerer Ordnung und Termen der Form $\langle V^{(r_1)}; \dots; V^{(r_m)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T$. Für die Vertices niedrigerer Ordnung ist durch die Lösung der Differenzengleichung meist schon eine Schranke gegeben. Der trunkierte Erwartungswert stellt einen verbundenen Graphen dar. Die darin enthaltenen Faltungen können mit Hilfe von (3.145) abgeschätzt werden.

$K^{(n)}$ besteht gemäß Gleichung (4.56) aus zwei Beiträgen

- Der kinematische Beitrag

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m!} \sum_{k_1 + \dots + k_m = n} V^{(m)}(\phi) \frac{n!}{\prod_{i=1}^m k_i!} b_{k_1} \cdot \dots \cdot b_{k_m} \quad (4.114)$$

besteht aus einer endlichen Summe von Vertices niedrigerer Ordnung. Wenn diese Vertices in einer Norm endlich sind, ist der kinematische Beitrag offensichtlich auch endlich. Ferner hängt dieser Beitrag auch von der Wahl der β -Funktion ab. Wenn diese linear gewählt wird, verschwindet der kinematische Beitrag.

- Der dynamische Beitrag

$$\sum_{m=2}^n \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{r_1 + \dots + r_m = n} \frac{n!}{\prod_{i=1}^m r_i!} \langle V^{(r_1)}; \dots; V^{(r_m)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \quad (4.115)$$

Dieser Beitrag ist das eigentliche Problem. Um ihn zu behandeln, reicht es, $\langle V^{(r_1)}; \dots; V^{(r_m)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T$ zu untersuchen. Da die $V^{(r_i)}$ gemäß (4.30) zerlegt werden können, gilt

$$\langle [V^{(r_1)}; \dots; V^{(r_m)}] \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T = \sum_{k_1=1}^{r_1+1} \dots \sum_{k_m=1}^{r_m+1} \left\langle V_{2k_1}^{(r_1)}; \dots; V_{2k_m}^{(r_m)} \right\rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \quad (4.116)$$

mit der Notation

$$V_{2k_i}^{(r_i)} = \frac{1}{(2k_i)!} \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^D} d^D x_{2k_i} V_{2k_i}^{(r_i)}(x_1, \dots, x_{2k_i}) : \phi(x_1) \dots \phi(x_{2k_i}) :_v \quad (4.117)$$

Damit kann das Problem weiter auf die Betrachtung des trunkierten Erwartungswertes $\langle V_1; \dots; V_n \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T$ mit $V_i = V_{2k_i}^{(r_i)}$ reduziert werden. Um diesen Term zu behandeln verwenden wir nun die Darstellungen für Erwartungswertbildung und Normalordnung

$$\begin{aligned} \langle V_1; \dots; V_n \rangle_{\Gamma, \phi} &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right\} V_1(\phi) \cdot \dots \cdot V_n(\phi) \\ : Z(\phi) :_v &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}, v \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right\} Z(\phi) \end{aligned} \quad (4.118)$$

und die Replica-Formel

$$\begin{aligned} \langle V_1; \dots; V_n \rangle_{\Gamma, \phi}^T &= \sum_{G \in G^c \{1 \dots n\}} \prod_{\{i, j\} \in G} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} - 1 \right] \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \right\} \prod_{i=1}^n V_i(\phi_i) \Bigg|_{\forall \phi_i = \phi}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Dabei wird über alle Graphen G aus der Menge aller verbundenen Graphen G^c summiert. Eine Erläuterung dieser Formel findet sich auf Seite 159. Setzt man nun

$$V_i(\phi) = : \mathcal{V}(\phi) :_v \quad (4.120)$$

$$\begin{aligned} \langle V_1; \dots; V_n \rangle_{\Gamma, \phi}^T &= : \mathcal{R}(\phi) :_v \\ &= : \mathcal{K}(\phi) :_{v-\Gamma}, \end{aligned} \quad (4.121)$$

so gilt¹⁰

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\phi) &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}, v \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right\} \langle V_1; \dots; V_n \rangle_{\Gamma, \phi}^T \\ &= \prod_{i, j} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, v \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} \\ &\quad \cdot \sum_{G \in G^c \{1 \dots n\}} \prod_{\{i, j\} \in G} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} - 1 \right] \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \right\} \prod_{i=1}^n V_i(\phi_i) \Bigg|_{\forall \phi_i = \phi} \\ &= \prod_{i < j} \exp \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, v \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} \end{aligned}$$

¹⁰Mit demselben Trick wie in (5.107).

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{G \in G^c \{1 \dots n\}} \prod_{\{i,j\} \in G} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} - 1 \right] \\
& \cdot \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \right\} \\
& \cdot \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, v \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \right\} \prod_{i=1}^n V_i(\phi_i) \Big|_{\forall \phi_i = \phi} \\
& = \prod_{i < j} \exp \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, v \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} \\
& \cdot \sum_{G \in G^c \{1 \dots n\}} \prod_{\{i,j\} \in G} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} - 1 \right] \\
& \cdot \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \right\} \prod_{i=1}^n \mathcal{V}_i(\phi_i) \Big|_{\forall \phi_i = \phi}. \quad (4.122)
\end{aligned}$$

Da jedoch noch die Dilatation S^{-1} zu beachten ist benutzen wir \mathcal{K} , welches durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\phi) &= \prod_{i < j} \exp \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, (v - \Gamma) \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} \\
& \cdot \sum_{G \in G^c \{1 \dots n\}} \prod_{\{i,j\} \in G} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} - 1 \right] \prod_{i=1}^n \mathcal{V}_i(\phi_i) \Big|_{\forall \phi_i = \phi} \quad (4.123)
\end{aligned}$$

gegeben ist. Die Idee bei der Verwendung von \mathcal{K} besteht darin, daß durch die Dilatation S^{-1} wieder eine Normalordnung bezüglich v hergestellt wird. In der Tat gilt aufgrund von

$$\begin{aligned}
(S^\dagger \frac{\partial}{\partial \phi})(x) F(S^{-1} \phi) &= \int dy S(y, x) \int dz \frac{\partial}{\partial (S^{-1} \phi)}(z) F(S^{-1} \phi) \frac{\partial}{\partial \phi}(y) S^{-1} \phi(z) \\
&= \frac{\partial}{\partial (S^{-1} \phi)}(x) F(S^{-1} \phi) \quad (4.124)
\end{aligned}$$

und $S(v - \Gamma)S^\dagger$ für ein Funktional Z

$$Z(\phi) = : \mathcal{Z}(\phi) :_{v-\Gamma} \quad (4.125)$$

$$\Rightarrow Z(S^{-1} \phi) = : \mathcal{Z}(S^{-1} \phi) :_v \quad (4.126)$$

Damit gilt

$$\langle V_1; \dots; V_n \rangle_{\Gamma, S^{-1} \phi}^T = : \mathcal{K}(S^{-1} \phi) :_v \quad (4.127)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(S^{-1}\phi) &= \prod_{i < j} \exp \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, v \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} \\ &\cdot \sum_{G \in G^c\{1 \dots n\}} \prod_{\{i,j\} \in G} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, S\Gamma S^\dagger \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} - 1 \right] \\ &\cdot \prod_{i=1}^n \mathcal{V}_i(S^{-1}\phi_i) \Big|_{\forall \phi_i = \phi}. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Diese Formel ist ein wichtiger Meilenstein auf dem Wege zu den Abschätzungen. Um die Formel (4.128) zu veranschaulichen, ist im Anhang im Abschnitt (5.9) die zweite Ordnung mit ihrer Hilfe explizit ausgerechnet worden. An diesen Rechnungen sieht man auch, daß durch die Dilatation S^{-1} die Gittertranslationsinvarianz des inhomogenen Terms bezüglich $\Lambda(a)$ (und nicht nur bezüglich $\Lambda(La)$) gewährleistet ist.

Wie sieht ein allgemeiner Term von \mathcal{K} aus? Ausgangspunkt ist ein Satz von Vertices \mathcal{V}_i . Durch $\prod_{\{i,j\} \in G} (e^{\frac{1}{2}(\partial \phi_i, S\Gamma S^\dagger \partial \phi_j)} - 1)$ werden diese Vertices durch den zusammenhängenden Graphen G mit Γ -Linien verbunden. Der Term $\prod_{i < j} e^{(\partial \phi_i, v \partial \phi_j)}$ verbindet die Vertices noch durch v -Linien, das muß allerdings kein zusammenhängender Graph sein.

Um einen allgemeinen Term $\mathcal{K}(x_1, \dots, x_m)$ von

$$\mathcal{K}(\phi) = \int d^D x_1 \dots d^D x_m \phi(x_1) \dots \phi(x_m) \mathcal{K}(x_1, \dots, x_m) \quad (4.129)$$

als Formel darzustellen und abzuschätzen, wählt man für jeden Vertex¹¹ V_i einen Satz von externen Koordinaten E^i , so daß $\sum_{i=1}^n E^i = \{x_1, \dots, x_m\}$ gilt. Die Verbindungen zwischen V_i und V_j werden mit $M^{i,j}$ bezeichnet. $M^{i,j}$ ist ein (eventuell leeres) Produkt von Propagatoren, von $\Gamma(Lx, Ly)$ und $L^{2-D}v(x, y)$. Wenn die Koordinaten der Verbindungen von V_i nach V_j mit $C^{i,j}$ bezeichnet werden, ist die Anzahl der Faktoren in $M^{i,j} = \#\{C^{i,j}\}$. $M^{i,j}$ hängt von den Koordinaten aus $C^{i,j}$ und $C^{j,i}$ ab. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_1, \dots, x_m) &= C \int \left(\prod_{1 \leq i,j \leq n} \prod_{k \in C^{i,j}} d^D x_k^{i,j} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} M^{i,j}(x_r \in C^{i,j}, x_s \in C^{j,i}) \\ &\cdot \prod_{\alpha=1}^n V_\alpha(x_l \in E^\alpha, x_p \in \bigcup_{q=1}^n C^{\alpha,q}). \end{aligned} \quad (4.130)$$

¹¹Die im folgenden mit $V(x_1 \dots x_n)$ bezeichneten Vertices seien bereits mit $(S^{-1})^\dagger$ skaliert.

Für die Abschätzung von \mathcal{K} betrachten wir eine Verbindung mit zwei Vertices. Wir werden sehen, daß eine Abschätzung dafür reicht. Das Ziel ist es, eine Schranke für $\hat{\mathcal{K}}(p)$ zu finden. \mathcal{K} ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_1, \dots, x_m) &= C \int \prod_{i=1}^n (d^D y_i d^D y'_i) V_1(x_1 \dots x_l, y_1 \dots y_n) \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^n P_i(y_i, y'_i) V_2(y'_1 \dots y'_n, x_{l+1} \dots x_m) \end{aligned} \quad (4.131)$$

mit $P_i(x, y) \in \{v(x, y), \Gamma(Lx, Ly)\}$. Mit Hilfe der Umrechnungsregel

$$A(x, y) = \int dz B(x, z) C(z, y) \quad (4.132)$$

$$\Rightarrow \tilde{A}(p, q) = \int \frac{dz}{2\pi} \tilde{B}(p, z) \tilde{C}(-z, q) \quad (4.133)$$

ergibt die Gleichung (4.131) im Impulsraum

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}(p_1, \dots, p_m) &= C \int \prod_{i=1}^n (d^D q_i d^D q'_i) \tilde{V}_1(p_1 \dots p_l, q_1 \dots q_n) \\ &\quad \cdot \prod_{i=1}^n \tilde{P}_i(-q_i, -q'_i) \tilde{V}_2(q'_1 \dots q'_n, p_{l+1} \dots p_m). \end{aligned} \quad (4.134)$$

Um diese Gleichung zu behandeln, werden im folgenden die Impulse immer zerlegt in einen kleinen Impuls $p \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a})$ und einen Gitterimpuls $P \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})$. Diese Zerlegung ist eindeutig. Ein Vertex wird geschrieben als

$$\begin{aligned} \tilde{V}(p_1 + P_1 \dots p_n + P_n) &= \sum_{Q \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \delta\left(\sum_{i=1}^n (p_i + P_i) + Q\right) \hat{V}(p_1 + P_1 \dots p_n + P_n) \\ &= \delta\left(\left(\sum_{i=1}^n p_i\right) = 0 \bmod \Lambda\left(\frac{2\pi}{a}\right)\right) \hat{V}(p_1 + P_1 \dots p_n + P_n). \end{aligned} \quad (4.135)$$

In analoger Weise wird \tilde{P} geschrieben. In dieser Darstellung ist es natürlich, ein Integral in (4.134) als ein Integral über q und eine Gittersumme über Q zu schreiben. So erhält man

$$\tilde{\mathcal{K}} = \sum_{j=1}^n \sum_{Q_j, Q'_j \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \prod_{i=1}^n (d^D q_i d^D q'_i) \delta\left(\sum_{i=1}^l p_i + \sum_{k=1}^n q_k = 0 \bmod \Lambda\left(\frac{2\pi}{a}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \widehat{V}_1(p_1 + P_1 \dots p_l + P_l, q_1 + Q_1 \dots q_n + Q_n) \prod_{i=1}^n \widehat{P}_i(-q_i - Q_i, -q'_i - Q'_i) \\
& \cdot \prod_{i=1}^n \delta(q_i + q'_i = 0 \bmod \Lambda(\frac{2\pi}{a})) \delta(\sum_{i=l+1}^m p_i + \sum_{k=1}^n q'_k = 0 \bmod \Lambda(\frac{2\pi}{a})) \\
& \cdot \widehat{V}_2(q'_1 + Q'_1 \dots q'_n + Q'_n, p_{l+1} + P_{l+1} \dots p_m + P_m). \tag{4.136}
\end{aligned}$$

Die $\delta(q_i + q'_i = 0 \bmod \Lambda(\frac{2\pi}{a}))$ Funktionen bedingen nun, daß für $q_i \neq -\frac{\pi}{a}$ $q'_i = -q_i$ sein muß, für $q_i = -\frac{\pi}{a}$ ist $q_i = q'_i$. In dem letzteren Fall kann auch $q'_i = -q_i$ gesetzt werden, wenn man die entsprechende Q'_i -Summation verschiebt. Damit fallen die dq'_i -Integrationen weg und man erhält

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{K}} &= \sum_{j=1}^n \sum_{Q_j, Q'_j \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \int_{\widetilde{\Lambda}(a)} \prod_{i=1}^n (d^D q_i) \delta(\sum_{i=1}^l p_i + \sum_{k=1}^n q_k = 0 \bmod \Lambda(\frac{2\pi}{a})) \\
& \cdot \widehat{V}_1(p_1 + P_1 \dots p_l + P_l, q_1 + Q_1 \dots q_n + Q_n) \prod_{i=1}^n \widehat{P}_i(-q_i - Q_i, q_i - Q'_i) \\
& \cdot \delta(\sum_{i=l+1}^m p_i - \sum_{k=1}^n q_k = 0 \bmod \Lambda(\frac{2\pi}{a})) \\
& \cdot \widehat{V}_2(-q_1 + Q'_1 \dots -q_n + Q'_n, p_{l+1} + P_{l+1} \dots p_m + P_m) \\
&= \delta(\sum_{i=1}^m p_i = 0 \bmod \Lambda(\frac{2\pi}{a})) \sum_{j=1}^n \sum_{Q_j, Q'_j \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \int_{\widetilde{\Lambda}(a)} \prod_{i=1}^n (d^D q_i) \\
& \cdot \widehat{V}_1(p_1 + P_1 \dots p_l + P_l, q_1 + Q_1 \dots q_n + Q_n) \prod_{i=1}^n \widehat{P}_i(-q_i - Q_i, q_i - Q'_i) \\
& \cdot \delta(\sum_{i=l+1}^m p_i - \sum_{k=1}^n q_k = 0 \bmod \Lambda(\frac{2\pi}{a})) \\
& \cdot \widehat{V}_2(-q_1 + Q'_1 \dots -q_n + Q'_n, p_{l+1} + P_{l+1} \dots p_m + P_m). \tag{4.137}
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{K}} &= \sum_{j=1}^n \sum_{Q_j, Q'_j \in \Lambda(\frac{2\pi}{a})} \int_{\widetilde{\Lambda}(a)} \prod_{i=1}^n (d^D q_i) \delta(\sum_{i=l+1}^m p_i - \sum_{k=1}^n q_k = 0 \bmod \Lambda(\frac{2\pi}{a})) \\
& \cdot \widehat{V}_1(p_1 + P_1 \dots p_l + P_l, q_1 + Q_1 \dots q_n + Q_n) \prod_{i=1}^n \widehat{P}_i(-q_i - Q_i, q_i - Q'_i) \\
& \cdot \widehat{V}_2(-q_1 + Q'_1 \dots -q_n + Q'_n, p_{l+1} + P_{l+1} \dots p_m + P_m). \tag{4.138}
\end{aligned}$$

Aus diesem Ausdruck kann folgendermaßen eine Abschätzung für $\widehat{\mathcal{K}}$ gewonnen werden: Die Pole, die für den Fall $P_i = v$ auftreten, sind wegen (3.120) in drei und vier Dimensionen integrabel. Die Summationen über Q und Q' werden durch die Propagatoren konvergent, wenn die Vertices \widehat{V}_1 und \widehat{V}_2 für große Impulse nicht zu stark anwachsen. Die verbliebene δ -Funktion birgt eine kleine Schwierigkeit: Wenn alle P_i durch v gegeben sind, sind die Pole nicht alle integrierbar.¹² Aber dieser Fall ist nicht realistisch, da die Vertices in \mathcal{K} durch eine Graphen aus Γ -Linien verbunden sind, hängt an jedem Vertex auch eine Γ -Linie. Dieselbe Argumentation funktioniert auch, wenn \mathcal{K} mehr als zwei Vertices enthält.¹³ $\widehat{\mathcal{K}}$ zeigt also für große p dasselbe Verhalten wie die Vertices.

Mit (3.145) kann man als Ergebnis dieses Abschnittes festhalten:

Satz. Für alle $\widehat{V}_{2m}^{(k)}$ mit $k < n$ existiere ein $\alpha < 2$, so daß

$$|\widehat{V}_{2m}^{(k)}(p_1 \dots p_{2m})| \leq C + C' \sum_{j=1}^{2m} |p_j|^\alpha \log(|p_j|) \quad (4.139)$$

gilt. Dann gilt

$$|\widehat{K}_{2l}^{(n)}(p_1 \dots p_{2l})| \leq C + C' \sum_{j=1}^{2l} |p_j|^\alpha \log(|p_j|). \quad (4.140)$$

Dabei wurde die Notation aus (4.64) benutzt.

Wie im nächsten Abschnitt deutlich werden wird, reicht diese Schranke für den Fall $D = 3$ aus. In vier Dimensionen muß $K^{(n)}$ besser abgeschätzt werden.

4.8 $D = 3$

In diesem Abschnitt soll der Spezialfall, daß $D = 3$ ist, untersucht werden. Dabei müssen leichte Modifikationen an der Problemstellung vorgenommen werden. Grund dafür ist die sogenannte Massenresonanz. Vorbild ist dabei die Darstellung des Themas in [Wie97c].

¹²Das sieht man am besten bei $n = 1$ und $P_1 = v$. Dann findet gar keine dq -Integration statt, und $\widehat{\mathcal{K}}$ hat einen Pol.

¹³Bei n Vertices hat man mindestens $n - 1$ Γ -Linien im Graphen. Die Vertices liefern n δ -Funktionen, eine δ -Funktion wirkt auf die äußeren Impulse p_i , und so enthält $\widehat{\mathcal{K}}$ $n - 1$ δ -Funktionen.

Wie aus dem oben angeführten ersichtlich ist, muß man noch eine Bedingung an die Kopplungskonstante g stellen. Für den hier betrachteten Fall soll angenommen werden, daß die β -Funktion linear ist. Es ist also

$$\begin{aligned}\beta(g) &= L^{4-D}g \\ &= Lg.\end{aligned}\tag{4.141}$$

Weiterhin soll angenommen werden, daß die erste Ordnung wie in (4.31) nur aus einem ϕ^4 -Vertex besteht. Die (willkürliche) Wahl der linearen β -Funktion hat natürlich technische Vorteile, da die höheren Koeffizienten der β -Funktion wegfallen. Sie führt jedoch zum Problem der Massenresonanz, welches schließlich eine Doppelentwicklung in g und $\log g$ nötig macht.

Zuerst noch ein Hinweis zur Notation. Für ein Potential $V(\phi)$ definiert man sich einen Lokalisierungsoperator vermöge

$$\mathbb{L}_{2n}(V) = \widehat{V}_{2n}(0, \dots, 0) \mathcal{O}_{2n}(\phi).\tag{4.142}$$

Ausgehend vom Operator \mathbb{L}_{2n} definiert man sich einen Operator \mathbb{L}_{2n}^\perp durch

$$\mathbb{L}_{2n}^\perp = \mathbb{1} - \mathbb{L}_{2n}.\tag{4.143}$$

4.8.1 Die Massenresonanz

Versucht man, das bisherige Schema mit einer linearen β -Funktion in drei Dimensionen durchzurechnen, stößt man in der zweiten Ordnung auf ein Problem. Die (4.54) entsprechende Gleichung

$$\langle V^{(2)} \rangle_{\Gamma, S\phi} - L^2 V^{(2)} = \langle \mathcal{O}_4; \mathcal{O}_4 \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T\tag{4.144}$$

erfordert, daß

$$\mathbb{L}_2 \langle \mathcal{O}_4; \mathcal{O}_4 \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T = 0\tag{4.145}$$

sein muß, denn es ist

$$\mathbb{L}_2 \left(\langle V^{(2)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi} - L^2 V^{(2)} \right) = 0.\tag{4.146}$$

Um das einzusehen, betrachte man die Gleichung (4.64) für den Fall, daß $D = 3, n = 1$ und $m = 2$ ist. Um zu zeigen, daß (4.145) erfüllt ist, muß man $\langle \mathcal{O}_4; \mathcal{O}_4 \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T$ ausrechnen. Diese Berechnung der zweiten Ordnung ist im Anhang aufgeführt. Im Fall voll translationsinvarianter Propagatoren ist (4.145) nicht erfüllt ([Wie97c]). Im vorliegenden Fall mit Gittertranslationsinvarianz ist es uns leider nicht gelungen, das explizit zu zeigen. Um auf der sicheren Seite zu sein, gehen wir dennoch davon aus, daß (4.145) nicht erfüllt ist. Dann läßt sich (4.144) nicht lösen. Dieses Problem heißt Massenresonanz.

4.8.2 Zweite Ordnung

Wenn man vom \mathcal{O}_2 -Vertex absieht, läßt sich jedoch Gleichung (4.144) eindeutig lösen. Die $V_4^{(2)}$ - und $V_6^{(2)}$ -Vertices sind irrelevant und können mit den Methoden aus den Kapiteln (4.5) und (4.6) bestimmt werden. Die Gleichung für den nichtlokalen Anteil des $V_2^{(2)}$ -Vertex

$$\widehat{\mathbb{L}_2^\perp V_2^{(2)}}\left(\frac{p_1}{L}, \frac{p_2}{L}\right) - \widehat{\mathbb{L}_2^\perp V_2^{(2)}}(p_1, p_2) = \widehat{\mathbb{L}_2^\perp K_2^{(2)}}(p_1, p_2) \quad (4.147)$$

läßt sich ebenfalls mit den oben besprochenen Methoden lösen, denn es ist $\widehat{\mathbb{L}_2^\perp K_2^{(2)}}(0, 0) = 0$. Die so berechnete Funktion $\widehat{\mathbb{L}_2^\perp V_2^{(2)}}(p_1, p_2)$ wächst für große p logarithmisch, man vergleiche dazu (4.87).

4.8.3 Der $g^2 \log g$ -Zusatzterm

Nach diesen Vorbereitungen macht man für $V(\phi, g)$ bis zur zweiten Ordnung folgenden Ansatz:

$$V(\phi, g) = V^{(1,0)}(\phi)g + V^{(2,0)}(\phi)\frac{g^2}{2} + V^{(2,1)}(\phi)\frac{g^2}{2}\log g + O(g^3, g^3 \log g) \quad (4.148)$$

mit

$$V^{(1,0)}(\phi) = \mathcal{O}_4(\phi) \quad (4.149)$$

$$V^{(2,0)}(\phi) = \mathbb{L}_2^\perp V^{(2,0)}(\phi) + \lambda^{(2,0)}\mathcal{O}_2(\phi) \quad (4.150)$$

$$V^{(2,1)}(\phi) = \lambda^{(2,1)}\mathcal{O}_2(\phi). \quad (4.151)$$

Dies entspricht einer Kopplung für den \mathcal{O}_2 -Vertex gemäß

$$\lambda_2(g) = \lambda^{(2,0)}\frac{g^2}{2} + \lambda^{(2,1)}\frac{g^2}{2}\log g + O(g^3, g^3 \log g). \quad (4.152)$$

Diese Kopplung fließt unter der linearen β -Funktion durch

$$\lambda_2(Lg) = L^2(\lambda_2(g)) + \log L \lambda^{(2,1)}\frac{g^2}{2} + O(g^3, g^3 \log g). \quad (4.153)$$

Ein Koeffizientenvergleich der Gleichung $(TV)(\phi, g) = V(\phi, Lg)$ in den Ordnungen g^2 und $g^2 \log g$, liefert für g^2

$$L^{-2} \langle V^{(2,0)} \rangle_{\Gamma, S\phi} - V^{(2,0)} - \lambda^{(2,1)} \log L \mathcal{O}_2 = L^{-2} \langle \mathcal{O}_4; \mathcal{O}_4 \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \quad (4.154)$$

(vgl. (4.54)) und für $g^2 \log g$

$$L^{-2} \langle V^{(2,1)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi} - V^{(2,1)} = 0 \quad (4.155)$$

(vgl. (4.53)). Die logarithmische Korrektur beseitigt die Massenresonanz und es ergibt sich für $\lambda^{(2,1)}$ die Bedingung

$$-\lambda^{(2,1)} \log L \mathcal{O}_2 = L^{-2} \langle \mathcal{O}_4; \mathcal{O}_4 \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T. \quad (4.156)$$

Der weitere Parameter $\lambda^{(2,0)}$ kann frei gewählt werden. Es ist naheliegend, $\lambda^{(2,0)} = 0$ zu setzen. Da alle anderen Vertices außer dem $V^{(2,2)}$ -Vertex irrelevant sind, sind sie eindeutig bestimmt. Auch kann bei ihnen das Problem einer Resonanz nicht erneut auftreten.

4.8.4 g -log g -Entwicklung

Nach diesen Vorbereitungen kann der Raum der Potentiale genauer spezifiziert werden. Betrachtet werden Potentiale $V(\phi, g)$ von der Form

$$V(\phi, g) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{a=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} V^{(r,a)}(\phi) \frac{g^r (\log g)^a}{r! a!}, \quad (4.157)$$

wobei $V^{(r,a)}(\phi)$ weiter zerlegt werden kann gemäß

$$\begin{aligned} V^{(r,a)}(\phi) &= \sum_{n=1}^{r-2a+1} \frac{1}{(2n)!} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x_1 \dots \int_{\mathbb{R}^3} d^3 x_{2n} \cdot \\ &\quad \cdot V_{2n}^{(r,a)}(x_1, \dots, x_{2n}) : \phi(x_1) \dots \phi(x_{2n}) :_v. \end{aligned} \quad (4.158)$$

Ein solches Potential fließt unter der linearen β -Funktion gemäß

$$\begin{aligned} V(\phi, Lg) &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{a=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} V^{(r,a)}(\phi) \frac{L^r g^r (\log L + \log g)^a}{r! a!} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{a=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \left(\sum_{b=a}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} L^r V^{(r,b)}(\phi) \frac{(\log L)^{b-a}}{b!} \binom{b}{a} \right) \frac{g^r (\log g)^a}{r!} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{a=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \left(\sum_{b=a}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} L^r V^{(r,b)}(\phi) \frac{(\log L)^{b-a}}{(b-a)!} \right) \frac{g^r (\log g)^a}{r! a!}. \end{aligned} \quad (4.159)$$

Das Bild von $V(\phi, g)$ unter der Renormierungstransformation berechnet sich, ausgehend von (4.50), zu

$$T(V)(\phi, g) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \left\langle \left[\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{a=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} V^{(r,a)}(\phi) \frac{g^r (\log g)^a}{r! a!} \right]^m \right\rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{r_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{r_m=1}^{\infty} \sum_{a_1=0}^{\left[\frac{r_1}{2}\right]} \cdots \sum_{a_m=0}^{\left[\frac{r_m}{2}\right]} \\
&\quad \cdot \frac{g^{\sum r_i}}{\prod_{i=1}^m r_i!} \frac{(\log g)^{\sum a_i}}{\prod_{i=1}^m a_i!} \left\langle \prod_{k=1}^m V^{(r_k, a_k)}; \right\rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \sum_{r=m}^{\infty} \sum_{a=m}^{\infty} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \sum_{a_1+\dots+a_m=a} \\
&\quad \cdot \frac{g^r}{r!} \frac{(\log g)^a}{a!} \frac{r!}{\prod_{i=1}^m r_i!} \frac{a!}{\prod_{i=1}^m a_i!} \left\langle \prod_{k=1}^m V^{(r_k, a_k)}; \right\rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{g^r}{r!} \frac{(\log g)^a}{a!} \sum_{m=1}^r \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \sum_{a_1+\dots+a_m=a} \\
&\quad \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{r!}{\prod_{i=1}^m r_i!} \frac{a!}{\prod_{i=1}^m a_i!} \left\langle \prod_{k=1}^m V^{(r_k, a_k)}; \right\rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T. \quad (4.160)
\end{aligned}$$

Bei dieser Notation wird für $a > \left[\frac{r}{2}\right]$ $V^{(r,a)} = 0$ gesetzt. Ein Koeffizientenvergleich ergibt nun die Gleichung

$$L^{-r} \langle V^{(r,a)} \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi} - V^{(r,a)}(\phi) = K^{(r,a)}(\phi) \quad (4.161)$$

mit

$$\begin{aligned}
K^{(r,a)} &= \sum_{b=a+1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} V^{(r,b)}(\phi) \frac{(\log L)^{b-a}}{(b-a)!} \\
&\quad - L^{-r} \sum_{m=2}^r \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \sum_{a_1+\dots+a_m=a} \\
&\quad \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{r!}{\prod_{i=1}^m r_i!} \frac{a!}{\prod_{i=1}^m a_i!} \left\langle \prod_{k=1}^m V^{(r_k, a_k)}; \right\rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T. \quad (4.162)
\end{aligned}$$

Um $V^{(r,a)}$ auszurechnen, ist also die Kenntnis aller $V^{(r,b)}$ mit $b > a$ und aller $V^{(s,a)}$ mit $s < r$ notwendig. Wenn also $V^{(1,0)}$, $V^{(2,0)}$ und $V^{(2,1)}$ bekannt sind, wird zuerst $V^{(3,1)}$ ausgerechnet, dann $V^{(3,0)}$ und dann $V^{(4,2)}$ und so fort.

4.8.5 Differenzengleichungen

Die Gleichung (4.161) entspricht der Gleichung (4.55), nur mit anderem Ausdruck für K . Somit kommt man auch hier zu den Gleichungen (4.60, 4.62,

4.64). Diese werden wie in den Kapiteln über Differenzengleichungen beschrieben ist, gelöst. Es handelt sich dabei immer um den irrelevanten Fall.

4.8.6 Abschätzungen

In drei Dimensionen läßt sich $K^{(r,a)}$ mit den Methoden der letzten Abschnitte einfach abschätzen. Der logarithmische Zusatzterm in (4.162) entspricht dem kinematischen Beitrag und stellt kein neues Problem dar. Der einzige marginale Vertex $V^{(2,0)}$ erfüllt nach (4.87)

$$|\widetilde{V^{(2,0)}}(p_1, p_2)| \leq C + C_1 \log(|p_1|) + C_2 \log(|p_2|) \quad (4.163)$$

Damit haben nach (4.140) $\widehat{K^{(3,1)}}$ und alle höheren inhomogenen Terme ebenfalls logarithmisches Wachstum. Mit (4.84) und (4.110) gilt dann

$$|\widehat{V_{2m}^{(r,a)}}(p_1 \dots p_{2m})| \leq C + C' \sum_{j=1}^{2m} \log(|p_j|) \quad (4.164)$$

für alle (r, a) .

Damit ist die Konstruktion der ϕ^4 -Trajektorie auf dem Gitter in drei Dimensionen komplett.

4.9 $D = 4$

In diesem Abschnitt soll der vierdimensionale Fall skizziert werden. Das Hauptproblem im vierdimensionalen Fall ist die Abschätzung von $K^{(n)}$, da diesmal auch relevante Vertices vorkommen.

In vier Dimensionen kann die β -Funktion nicht linear gewählt werden, da sie dann die Identität wäre. Also wird für β die volle Potenzreihe angesetzt und die Kopplungskonstante mit (4.36) fixiert.

Als erste Ordnung kann diesmal nicht der einfache ϕ^4 -Vertex genommen werden. Er muß um einen Zusatzterm ergänzt werden. Die erste Ordnung ist

$$V^{(1)}(\phi) = \mathcal{O}_4(\phi) + \frac{\xi_1}{2} \int d^D x : \phi(x)(-\Delta)\phi(x) : . \quad (4.165)$$

Die Notwendigkeit dieses Zusatzterms wird bei der Behandlung marginaler Vertices deutlich. Diese Vertices verlangen auch im vierdimensionalen Fall eine Sonderbehandlung. Dabei werden auch die höheren Koeffizienten der β -Funktion bestimmt. Man vergleiche dazu [Wie97a].

Die entstehenden Differenzgleichungen werden wie üblich gelöst. Dabei treten diesmal jedoch auch relevante Vertices mit einem $\widehat{\sigma} = 2$ auf. Um sie mittels einer Taylorentwicklung zu lösen, muß noch gezeigt werden, daß $\widehat{K^{(n)}}$ in eine Taylorreihe entwickelbar ist.

Die Abschätzung für $\widehat{K^{(n)}}$ kann nicht so einfach wie in drei Dimensionen vollzogen werden. Da bei den Zweipunktvertices $\widehat{\sigma} = 2$ ist, wachsen diese Vertices wie $|p|^2 \log(|p|)$, (4.95) und deshalb ist (4.139) nicht anwendbar. Um trotzdem eine Schranke für $\widehat{K^{(n)}}$ zu zeigen, gibt es folgende Ideen:

Zum einen bemerkt man, daß die bisherigen Abschätzungen teilweise verschwenderisch waren. Die Abschätzungen für die Propagatoren können nicht mehr verbessert werden. Bei den Schranken für die Zweipunktvertices wurde jedoch nicht die spezielle Struktur von \widehat{V} bedacht. \widehat{V} ist auf Hyperebenen im \mathbb{R}^{2D} definiert. Das $|p|^2 \log(|p|)$ -Wachstum durch die Taylorentwicklung tritt nur in der Ebene mit $p_1 + p_2 = 0$ auf. Aufgrund der δ -Funktion werden dann jedoch bei den Integralen *zwei* Propagatoren mit dem $|p|^2 \log(|p|)$ -Wachstum „belastet“ und die Faltungen mit den Propagatoren sind in diesem Sektor konvergent. Bei den anderen Hyperebenen ist das logarithmische Wachstum durch $k(p)$ (vgl. 4.108) gerade orthogonal zur $(p_1 + p_2 = 0)$ -Hyperebene. Auch ist die Abschätzung mit $k(p)$ nicht sehr sauber, da für die meisten Hyperebenen $k = 1$ ist und die Ebenen mit höherem k exponentiell (in k) selten sind. Man kann also optimistisch sein, daß die Abschätzung im Impulsraum noch gelingt.

Eine andere Idee besteht darin, das ganze im Ortsraum zu betrachten. Da die Kovarianz Γ aufgrund der Endlichkeit von $\widehat{\Gamma}$ vermutlich exponentiell abfällt, und die Vertices durch Γ -Linien verbunden sind, sollte auch K im Ortsraum exponentiell abfallen.

In vier Dimensionen ist also noch viel zu tun.

4.10 Zusammenfassung und Ausblick

Der zweite Teil dieser Arbeit befaßte sich mit Renormierungstheorie auf dem Gitter. Im dritten Kapitel wurde der Formalismus der A -Kerne eingeführt. Damit konnte eine Blockspinrenormierungsgruppe erklärt werden. Es wurde auch eine Möglichkeit aufgezeigt, Funktionen und Operatoren vom Gitter in das Kontinuum und umgekehrt zu transferieren.

Im vierten Kapitel wurde mit diesen Methoden die ϕ^4 -Trajektorie auf dem Gitter perturbativ berechnet. Die Konstruktion der ϕ^4 -Trajektorie auf dem Gitter geschah durch Bestimmung einer passenden ϕ^4 -Trajektorie im Konti-

num. In drei Dimensionen war die Konstruktion komplett. In vier Dimensionen fehlen noch einige Abschätzungen bis zum vollständigen Beweis.

Es gibt einige Ansätze für weitere Arbeiten. Zum einen kann der Formalismus der A -Kerne für weitere Untersuchungen der Korrespondenz zwischen diskreten und kontinuierlichen Systemen genutzt werden. Die Untersuchung von Differenzengleichungen wurde bereits erwähnt.

Auch die Erforschung von renormierungssinvarianten Trajektorien auf dem Gitter sollte weiter vorangetrieben werden. Dabei sollte gezeigt werden, daß die Massenresonanz auf dem Gitter wirklich auftritt, die hier benutzte g -log g -Entwicklung also notwendig ist. Dringender ist jedoch eine Vervollständigung des präsentierten Schemas für vier Dimensionen. Einige Ideen dafür wurden ja bereits aufgezeigt.

Kapitel 5

Anhang

Im Anhang sollen einige mathematische Definitionen und Sätze zusammengetragen werden, die in der Arbeit gebraucht werden. Teilweise sind auch Begründungen angegeben, bei den „Beweisen“ handelt es sich aber manchmal nur um Beweis*ideen*. Literatur wird in den einzelnen Abschnitten angegeben.

5.1 Fouriertransformation

5.1.1 Fouriertransformation im Kontinuum

Definition. Für eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R}^D)$ ist die Fouriertransformierte definiert durch

$$\tilde{f}(p) = \int d^D x \exp(-ipx) f(x). \quad (5.1)$$

Die Umkehrung ist dann gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \exp(ipx) \tilde{f}(p). \quad (5.2)$$

Bemerkung. Für die Multiplikation zweier Funktionen gilt

$$\widetilde{fg}(p) = \frac{\tilde{f}(p) * \tilde{g}(p)}{(2\pi)^D}, \quad (5.3)$$

dabei ist die Faltung $*$ definiert durch

$$\tilde{f}(p) * \tilde{g}(p) := \int d^D k \tilde{f}(p - k) \tilde{g}(k). \quad (5.4)$$

5.1.2 Fouriertransformation auf dem Gitter

Definition. Für eine auf einem Gitter definierte Funktion

$$f : \Lambda(a) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (5.5)$$

wobei $\Lambda(a) = a\mathbb{Z}^D$ das Gitter ist, ist die Fouriertransformation

$$\widehat{f} : \widetilde{\Lambda}(a) \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.6)$$

mit

$$\widetilde{\Lambda}(a) = \mathbb{R}^D / \frac{2\pi}{a} \mathbb{Z}^D \quad (5.7)$$

definiert durch

$$\begin{aligned} \widehat{f}(p) &= \int_{\Lambda(a)} d^D x \exp(-ipx) f(x) \\ &:= a^D \sum_{x \in \Lambda(a)} \exp(-ipx) f(x). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Diese Fouriertransformierte kann in natürlicher Weise zu einer $\frac{2\pi}{a}$ -periodischen Funktion auf dem \mathbb{R}^D ausgedehnt werden, beziehungsweise als solche aufgefaßt werden. Die Umkehrung ergibt sich durch:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int_{\widetilde{\Lambda}(a)} d^D p \exp(ipx) \widehat{f}(p). \quad (5.9)$$

5.1.3 Fouriertransformation und Gittertranslationsinvarianz

Sei $V(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}^D$ translationsinvariant unter Gittertranslationen eines Gitters $\Lambda(a) = a\mathbb{Z}^D$:

$$V(x_1, \dots, x_n) = V(x_1 + \alpha, \dots, x_n + \alpha) \quad \forall \alpha \in \Lambda(a) \quad (5.10)$$

Dann gilt für die Fouriertransformierte

$$\widetilde{V}(p_1, \dots, p_n) = e^{-i\alpha \sum_j p_j} \widetilde{V}(p_1, \dots, p_n) \quad \forall \alpha \in \Lambda(a). \quad (5.11)$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \widetilde{V}(p_1, \dots, p_n) &= \int d^D x_1 \dots \int d^D x_n e^{i \sum_j p_j x_j} V(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int d^D x_1 \dots \int d^D x_n e^{i \sum_j p_j x_j} e^{-i \sum_j \alpha p_j} V(x_1, \dots, x_n) \\ &= e^{-i\alpha \sum_j p_j} \widetilde{V}(p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Weiter folgt, daß $\tilde{V}(p_1, \dots, p_n) \neq 0$ nur sein kann, wenn

$$\alpha \sum_j p_j \in 2\pi\mathbb{Z} \quad \forall \alpha \in \Lambda(a) \quad (5.13)$$

ist, also muß

$$\sum_j p_j \in \left(\frac{2\pi}{a}\right) \mathbb{Z}^D = \Lambda\left(\frac{2\pi}{a}\right) \quad (5.14)$$

gelten. Deshalb besitzt $\tilde{V}(p_1, \dots, p_n)$ eine Darstellung

$$\tilde{V}(p_1, \dots, p_n) = \sum_{Q \in \Lambda\left(\frac{2\pi}{a}\right)} \delta^D\left(Q - \sum_j p_j\right) \hat{V}(p_1, \dots, p_n). \quad (5.15)$$

Die Funktion $\hat{V}(p_1, \dots, p_n)$ wird im folgenden auch reduzierter (Impuls)kern genannt. Im Falle voller Translationsinvarianz ($a = 0$) vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\tilde{V}(p_1, \dots, p_n) = \delta^D\left(\sum_j p_j\right) \hat{V}(p_1, \dots, p_n). \quad (5.16)$$

5.1.4 Faltung reduzierter Kerne

Wichtig ist zu wissen, wie sich der reduzierte Kern von zwei gefalteten Fouriertransformierten berechnet. Es ist

$$(\tilde{f}(p_1, \dots, p_n)) * (\tilde{g}(p_1, \dots, p_n)) = \sum_{Q \in \Lambda\left(\frac{2\pi}{a}\right)} \delta^D(Q - \sum_j p_j) (\hat{f}) * * (\hat{g}). \quad (5.17)$$

mit

$$\begin{aligned} (\hat{f}) * * (\hat{g}) &:= (\hat{f}(p_1, \dots, p_n)) * * (\hat{g}(p_1, \dots, p_n)) \\ &:= \int d\alpha_1 \dots \int d\alpha_n \sum_{P \in \Lambda\left(\frac{2\pi}{a}\right)} \delta^D(P - \sum_j \alpha_j) \\ &\quad \cdot \hat{f}(p_1 - \alpha_1, \dots, p_n - \alpha_n) \hat{g}(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Der Zusammenhang von $**$ mit der normalen Faltung wird für den Fall $n = 2$ und voller Translationsinvarianz deutlich. Dann kann man schreiben

$$\hat{f}(p, q) = \hat{f}(p, -p) =: \hat{f}(p) \quad (5.19)$$

und hat

$$\hat{f}(p, q) * * \hat{g}(p, q) = \hat{f}(p) * \hat{f}(p). \quad (5.20)$$

5.2 Exponentieller Abfall

In diesem Kapitel soll eine Möglichkeit erläutert werden, wie aus der Analytizität der Fouriertransformation auf exponentiellen Abfall der Funktion im Ortsraum geschlossen werden kann. Die Idee besteht darin, den Integrationsweg im Impulsraum bei der Darstellung von $f(x)$ durch $\tilde{f}(p)$ von der reellen Achse ins Komplexe zu verlegen.

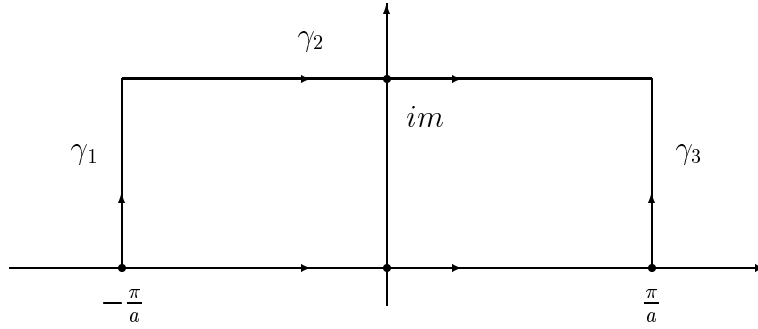
5.2.1 Der eindimensionale Fall I: $x \in \Lambda(a) \subset \mathbb{R}$

Betrachten wir zuerst den einfachsten Fall: Es ist $D = 1$ und $f(x)$ lebt auf einem Gitter. Die Darstellungen lauten:

$$f(x) = \int_{\tilde{\Lambda}(a)} \frac{dp}{2\pi} \exp(ipx) \tilde{f}(p), \quad (5.21)$$

$$\tilde{f}(p) = \int_{\Lambda(a)} dx \exp(-ipx) f(x). \quad (5.22)$$

Wenn nun \tilde{f} in einem Streifen der Breite m um die reelle Achse analytisch ist, so kann der Integrationsweg in der komplexen Ebene deformiert werden, wie es folgende Skizze zeigt.



Die drei Wege sind

$$\begin{aligned} \text{I. } & \gamma_1[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_1(t) = -\frac{\pi}{a} + imt \\ \text{II. } & \gamma_2[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_2(t) = \frac{\pi}{a} + t \\ \text{III. } & \gamma_3[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma_3(t) = \frac{\pi}{a} + imt. \end{aligned} \quad (5.23)$$

$f(x)$ setzt sich aus drei Beiträgen zusammen, die entsprechenden Beiträge sind

$$\text{I.} = \int_{\gamma_1} \frac{dp}{2\pi} \exp(ipx) \tilde{f}(p)$$

$$= \frac{im}{2\pi} e^{-i\frac{\pi}{a}x} \int_0^1 dt e^{-mtx} \tilde{f}\left(-\frac{\pi}{a} + imt\right) \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \text{II.} &= \int_{\gamma_2} \frac{dp}{2\pi} \exp(ipx) \tilde{f}(p) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-mx} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} dt e^{-itx} \tilde{f}(im + t) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \text{III.} &= \int_{-\gamma_3} \frac{dp}{2\pi} \exp(ipx) \tilde{f}(p) \\ &= -\frac{im}{2\pi} e^{i\frac{\pi}{a}x} \int_0^1 dt e^{-mtx} \tilde{f}\left(\frac{\pi}{a} + imt\right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Es folgt aus der Definition (5.22) sofort, daß $\tilde{f}(p + \frac{2\pi}{a}) = \tilde{f}(p)$ ist.¹ Weiterhin ist für $x \in \Lambda(a)$ $e^{i\frac{\pi}{a}x} = e^{-i\frac{\pi}{a}x}$ und deshalb heben sich die Beiträge I und III weg. Man erhält somit für $f(x)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} e^{-mx} \frac{2\pi}{a} \sup_{t \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]} \tilde{f}(im + t) \\ &\leq C e^{-\alpha x}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Für $x < 0$ bringt diese Abschätzung wenig, man kann jedoch den Integrationsweg in die untere Halbebene verlegen, das entspricht $m < 0$. Zusammenfassend erhält man folgenden Satz:

Satz. Sei $f : \Lambda(a) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dessen Fouriertransformierte \tilde{f} in einem Streifen $\{z \in \mathbb{C}; -\frac{\pi}{a} \leq \operatorname{Re}(z) \leq \frac{\pi}{a}, -m \leq \operatorname{Im}(p) \leq m\}$ analytisch ist. Dann existieren Konstanten C und α , so daß

$$|f(x)| \leq C e^{-\alpha|x|} \quad (5.28)$$

gilt.

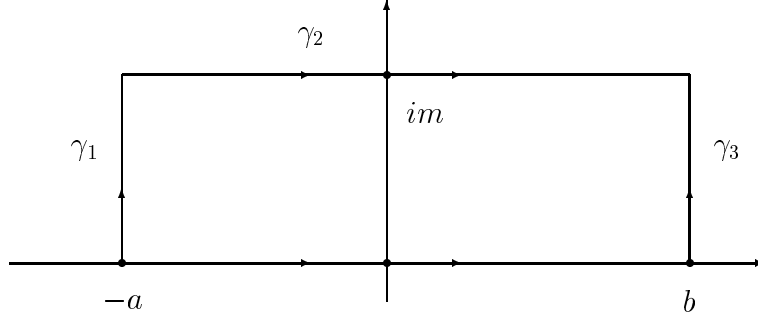
5.2.2 Der eindimensionale Fall II: $x \in \mathbb{R}$

Da f eine Darstellung der Form (5.2) besitzt, gilt

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-a}^b \frac{dp}{2\pi} \exp(ipx) \tilde{f}(p). \quad (5.29)$$

Falls nun \tilde{f} in einem Streifen um die reelle Achse analytisch ist, kann man wieder den Integrationsweg verschieben:

¹Diese Aussage gilt für alle $p \in \mathbb{C}$, nicht nur für $p \in \mathbb{R}$.



Die Wege sind wie im vorherigen Abschnitt definiert und die einzelnen Beiträge lauten analog

$$\begin{aligned} \text{I.} &= \int_{\gamma_1} \frac{dp}{2\pi} \exp(ipx) \tilde{f}(p) \\ &= \frac{im}{2\pi} e^{-iax} \int_0^1 dt e^{-mtx} \tilde{f}(-a + imt) \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \text{II.} &= \int_{\gamma_2} \frac{dp}{2\pi} \exp(ipx) \tilde{f}(p) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-mx} \int_{-a}^b dt e^{-itx} \tilde{f}(im + t) \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \text{III.} &= \int_{-\gamma_3} \frac{dp}{2\pi} \exp(ipx) \tilde{f}(p) \\ &= \frac{im}{2\pi} e^{ibx} \int_0^1 dt e^{-mtx} \tilde{f}(b + imt) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Man kann nun nicht mehr mit der Symmetrie von \tilde{f} argumentieren, aber voraussetzen, daß $\lim_{a \rightarrow \infty} (|\text{I}|) = \lim_{b \rightarrow \infty} (|\text{III}|) = 0$ gilt. Dann folgt, daß das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-itx} \tilde{f}(im + t)$ existiert, und man erhält das Resultat:

Satz. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dessen Fouriertransformierte \tilde{f} in einem Streifen $\{z \in \mathbb{C}; -m \leq \text{Im}(p) \leq m\}$ analytisch ist. \tilde{f} erfülle außerdem

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{t \in [-1, 1]} |\tilde{f}(-a + imt)| = \lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{t \in [-1, 1]} |\tilde{f}(b + imt)| = 0. \quad (5.33)$$

Dann existieren Konstanten C und α , so daß

$$|f(x)| \leq C e^{-\alpha|x|} \quad (5.34)$$

gilt.

Man beachte, daß die Bedingung (5.33) nicht schon aus der Analytizität von

\tilde{f} in dem Streifen folgt. Als Gegenbeispiel soll die Funktion

$$\begin{aligned}\tilde{f}(p) &= \frac{\cos(p^2)}{p^4 + 1} \\ &= \frac{e^{ip^2} + e^{-ip^2}}{2(p^4 + 1)}\end{aligned}\quad (5.35)$$

dienen. Verschiebt man sie um $i\epsilon$ in die imaginäre Richtung, so ist sie unbeschränkt, d.h.

$$\tilde{f}(p + i\epsilon) = \frac{e^{i(p^2 - \epsilon^2)}e^{-2p\epsilon} + e^{-i(p^2 - \epsilon^2)}e^{2p\epsilon}}{2((p + i\epsilon)^4 + 1)} \quad (5.36)$$

ist für alle $\epsilon > 0$ in p unbeschränkt. Falls \tilde{f} jedoch bei ∞ eine hebbare Singularität hat, ist es in einer Umgebung von ∞ beschränkt und damit ist (5.33) erfüllt. Ein Beispiel:

Korollar. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, dessen Fouriertransformierte

$$\tilde{f}(p) = \frac{q(p)}{r(p)} \quad (5.37)$$

eine rationale Funktion ist. Es gelte $\text{grad}(r) \geq \text{grad}(q) + 2$ und das Polynom $r(p)$ habe keine reellen Nullstellen. Dann existieren Konstanten C und α , so daß

$$|f(x)| \leq Ce^{-\alpha|x|} \quad (5.38)$$

gilt.

Beweis. \tilde{f} ist offensichtlich analytisch in einem Streifen um die reelle Achse und bei ∞ beschränkt.

5.2.3 Der mehrdimensionale Fall I: $x \in \mathbb{R}^D$

Um diesen Fall zu erläutern, soll $D = 2$ gesetzt werden. Das Endresultat wird dann jedoch für beliebiges D formuliert, diese Verallgemeinerung ist offensichtlich. Die Transformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= \int \frac{dp_1}{2\pi} \int \frac{dp_2}{2\pi} e^{ip_1 x_1 + ip_2 x_2} \tilde{f}(p_1, p_2) \\ &= \int \frac{dp_1}{2\pi} e^{ip_1 x_1} \underbrace{\int \frac{dp_2}{2\pi} e^{ip_2 x_2} \tilde{f}(p_1, p_2)}_{:= \tilde{f}(p_1, x_2)}\end{aligned}\quad (5.39)$$

Falls nun $\tilde{f}(p_1, p_2)$ eine (5.33) entsprechende Bedingung in p_2 erfüllt, so gilt

$$|\tilde{f}(p_1, x_2)| < C(p_1)e^{-\beta_2|x_2|} \quad (5.40)$$

und damit insgesamt

$$|f(x_1, x_2)| < g_1(x_1)e^{-\beta_2|x_2|}. \quad (5.41)$$

Vertauscht man in dieser Argumentation die Variablen x_1 und x_2 so erhält man die Gleichung

$$|f(x_1, x_2)| < g_2(x_2)e^{-\beta_1|x_1|}. \quad (5.42)$$

Nun können, da $f(x_1, x_2)$ beide Gleichungen (5.41) und (5.42) erfüllt die Funktionen g_1 und g_2 beschränkt gewählt werden, und damit erhält man für f die Abschätzung²

$$|f(x_1, x_2)| \leq Ce^{-\alpha_1|x_1|-\alpha_2|x_2|}. \quad (5.43)$$

Insgesamt gilt also:

Satz. Sei $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}^D$ eine Funktion deren Fouriertransformierte $\tilde{f}(p_1, \dots, p_D)$ folgende Bedingungen erfüllt:

- Für alle $i \in \{1, \dots, D\}$ und alle $p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_D$ ist \tilde{f} in p_i analytisch in einem Streifen $\{p_i \in \mathbb{C}; -m \leq \text{Im}(p_i) \leq m\}$.
- Für alle $i \in \{1, \dots, D\}$ und alle $p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_D$ ist

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{t \in [-1, 1]} |\tilde{f}(p_1, \dots, p_{i-1}, -a + imt, p_{i+1}, \dots, p_D)| = 0 \quad (5.44)$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sup_{t \in [-1, 1]} |\tilde{f}(p_1, \dots, p_{i-1}, b + imt, p_{i+1}, \dots, p_D)| = 0. \quad (5.45)$$

Dann existieren Konstanten C und $\alpha_1, \dots, \alpha_D$, so daß

$$|f(x_1, \dots, x_D)| \leq Ce^{-\sum_{i=1}^D \alpha_i |x_i|} \quad (5.46)$$

gilt.

²Die genaue Beweisführung, wenn g_1 und g_2 beschränkt sind, lehnt sich an den Beweis der Bemerkung 3 in Abschnitt (2.5.1) an.

5.2.4 Der mehrdimensionale Fall II: $x \in \Lambda(a) \subset \mathbb{R}^D$

In diesem Fall erhält man die Abschätzungen für f genau wie in dem vorherigen Abschnitt aus den Gleichungen für den Fall $D = 1$. Man kann direkt das Resultat hinschreiben:

Satz. Sei $f : \Lambda(a) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf einem D -dimensionalen Gitter Λ , dessen Fouriertransformierte $\tilde{f}(p_1, \dots, p_D)$ für alle $i \in \{1, \dots, D\}$ und alle $p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_D$ als Funktion von p_i in einem Streifen $\{p_i \in \mathbb{C}; -\frac{\pi}{a} \leq \operatorname{Re}(p_i) \leq \frac{\pi}{a}, -m \leq \operatorname{Im}(p_i) \leq m\}$ analytisch ist. Dann existieren Konstanten C und $\alpha_1, \dots, \alpha_D$ so daß

$$|f(x_1, \dots, x_D)| \leq C e^{-\sum_{i=1}^D \alpha_i |x_i|} \quad (5.47)$$

gilt.

5.3 Die Mehlersche Formel

Die Mehlersche Formel ist eine explizite Formel für einen Operatorkernel. Sie lautet:

Satz. Sei

$$L = -\frac{1}{2}\partial^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \quad (5.48)$$

Dann ist der Kern des Operators e^{-tL} gegeben durch

$$e^{-tL}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2t}}} e^{-\frac{(x^2 + y^2)(1 + e^{-2t}) - 4e^{-t}xy}{2(1 - e^{-2t})}}. \quad (5.49)$$

Weitere Erläuterungen und einen Beweis dieser Formel findet man in [GJ87] oder [Sim79].

Wie kann nun mit dieser Formel für den Operator

$$A = -\partial^2 - \frac{1}{2}x\partial \quad (5.50)$$

der Kern von A^{-1} berechnet werden? Zuerst schaut man, ob A überhaupt invertierbar ist. Für die Funktionen $f(x) = C$ und

$$g(x) = C \int_{-\infty}^x dy e^{-\frac{1}{4}y^2} = Ce(x) \quad (5.51)$$

gilt

$$Af = Ag = 0, \quad (5.52)$$

also ist A^{-1} nicht eindeutig. Da aber $\|f\|_N = \|g\|_N = \infty$, sind f und g nicht im Banachraum B . Deshalb ist A in B eindeutig invertierbar. Man rechnet leicht nach, daß

$$\begin{aligned} e^{\frac{x^2}{8}} A e^{-\frac{x^2}{8}} &= -\partial^2 + \frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} \\ &=: B \end{aligned} \quad (5.53)$$

gilt, also ist mit der Notation $C := e^{\frac{x^2}{8}}$

$$A = C^{-1} B C \quad (5.54)$$

$$A^{-1} = C^{-1} B^{-1} C. \quad (5.55)$$

Um B^{-1} auszurechnen, bemerken wir, daß für eine Dilatation $(S_\alpha f)(x) := f(\alpha x)$ die Relationen

$$S_\alpha^{-1} \partial^2 S_\alpha = \alpha^2 \partial^2, \quad (5.56)$$

$$S_\alpha^{-1} x^2 S_\alpha = \frac{1}{\alpha^2} x^2 \quad (5.57)$$

gelten, deshalb gilt

$$B = S_2^{-1} \left(\frac{1}{2} L + \frac{1}{2} \right) S_2. \quad (5.58)$$

Mit einer formalen Invertierung eines Operators O

$$O^{-1} = \int_0^\infty dt e^{-tO} \quad (5.59)$$

bekommen wir

$$\begin{aligned} B^{-1} &= S_2^{-1} \left(\frac{1}{2} L + \frac{1}{2} \right)^{-1} S_2 \\ &= S_2^{-1} \left(\int_0^\infty dt e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2} L} \right) S_2. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Mit den Kernen

$$C(x, y) = e^{\frac{x^2}{8}} \delta(x - y) \quad (5.61)$$

$$S_\alpha(x, y) = \delta(\alpha x - y) = \frac{1}{\alpha} \delta\left(x - \frac{y}{\alpha}\right) \quad (5.62)$$

ergibt sich in einer technischen Rechnung

$$\begin{aligned} A^{-1}(x, y) &= (C^{-1} S_2^{-1} \left(\int_0^\infty dt e^{-\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2} L} \right) S_2 C)(x, y) \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{8}} \int_0^\infty dt e^{-\frac{t}{2}} (e^{-\frac{t}{2} L}) \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{L} \right) e^{\frac{y^2}{8}} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dt \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{1 - e^{-t}}} e^{-\frac{1}{4} \frac{(x - e^{-\frac{t}{2}} y)^2}{1 - e^{-t}}}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

5.4 Die L^p -Räume

An dieser Stelle sollen noch einige Eigenschaften der L^p -Normen zusammengetragen werden. Auf Beweise, sofern sie in der Standardliteratur (z.B. [HS71, For96]) vorkommen, wird verzichtet.

Definition. Sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl. Unter der L^p -Norm einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ versteht man

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} dx |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5.64)$$

Definition. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist die L^∞ -Norm gegeben durch

$$\|f\|_\infty = \inf_{q \in \mathbb{R}} (|f(x)| < q \text{ fast ueberall}). \quad (5.65)$$

Satz (Höldersche Ungleichung). Seien p, q reelle Zahlen > 1 mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (5.66)$$

Dann gilt für zwei Funktionen f, g :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (5.67)$$

Satz (Schwartzsche Ungleichung). Für zwei Funktionen f, g gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \quad (5.68)$$

Das ist die Höldersche Ungleichung für $p = q = 2$.

Satz (Plancherel). Es ist für $f \in L^2$

$$\|f\|_2 = \|\tilde{f}\|_2. \quad (5.69)$$

Bemerkung. Es ist

$$\|f\|_\infty \leq \|\tilde{f}\|_1. \quad (5.70)$$

Beweis. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup_x \left| \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{ikx} \tilde{f}(k) \right| \\ &\leq \sup_x \int d^n k |e^{ikx}| |\tilde{f}(k)| \\ &\leq \|\tilde{f}\|_1 \end{aligned} \quad (5.71)$$

□

5.5 Normalordnung

Der Normalordnung von Feldoperatoren liegt eine einfache Idee zugrunde: In der richtigen Basis oder im richtigen Koordinatensystem ist alles einfach (oder zumindest einfacher). Im vorliegenden Fall benutzt man die Normalordnung, da die normalgeordneten Monome Eigenvektoren der am Fixpunkt linearisierten Renormierungsgruppe sind. Als Literatur zur Normalordnung und Gaußschen Maßen seien [GJ87, Sal99] empfohlen.

Definition. Die Normalordnung von Monomen bezüglich einer Kovarianz v wird über das erzeugende Funktional

$$: \exp((j, \phi)) :_v = \exp\left((j, \phi) - \frac{1}{2}(j, vj)\right) \quad (5.72)$$

durch Funktionalableitung definiert:

$$: \phi(x_1) \dots \phi(x_n) :_v = \frac{\partial}{\partial j(x_1)} \dots \frac{\partial}{\partial j(x_n)} : \exp((j, \phi)) :_v \Big|_{j=0}. \quad (5.73)$$

Man kann die Normalordnung für polynomiale Funktionale auch definieren durch

$$: Z(\phi) :_v = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}, v \frac{\partial}{\partial \phi}\right)\right\} Z(\phi). \quad (5.74)$$

Die Äquivalenz ist klar, wenn man Z durch Funktionalableitungen von $e^{(j, \phi)}$ ausdrückt.

Vergleicht man die Definition der Normalordnung mit der Definition der Hermite-Polynome

$$H_n(x) = \frac{\partial^n}{(\partial t)^n} \exp(2tx - t^2) \Big|_{t=0} \quad (5.75)$$

so erkennt man den Zusammenhang

$$: \phi(x)^n :_v = \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{\phi(x)}{\sqrt{2v}}\right). \quad (5.76)$$

Die ersten normalgeordneten Monome lauten

$$: \phi(x) :_v = \phi(x) \quad (5.77)$$

$$: \phi(x)\phi(y) :_v = \phi(x)\phi(y) - v(x, y) \quad (5.78)$$

Die normalgeordneten Monome sind per Definition invariant unter Permutation der Variablen.

5.6 Gaußsche Maße

Definition. Sei v eine Kovarianz. Dann wird das Gaußsche Maß $\int d\mu_v$ so definiert, so daß für alle f

$$\int d\mu_v(\zeta) e^{(\zeta, f)} = e^{\frac{1}{2}(f, v f)} \quad (5.79)$$

gilt. Häufig wird auch

$$\langle Z \rangle_{v, \phi} := \int d\mu_v(\zeta) Z(\phi + \zeta) \quad (5.80)$$

geschrieben. Für ein polynomiales Funktional läßt sich das Gaußsche Maß auch als

$$\langle Z \rangle_{v, \phi} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}, v \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right\} Z(\phi) \quad (5.81)$$

schreiben.

5.7 Kumulanten

Trunkierte Erwartungswerte oder Kumulanten sind definiert über

$$\langle [O_1; \dots; O_n] \rangle^T = \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \dots \partial \lambda_n} \ln \left\langle e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i O_i} \right\rangle \Big|_{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0}. \quad (5.82)$$

Diese Definition ist unabhängig von der Art der Mittelwertbildung $\langle \cdot \rangle$. Die ersten Kumulanten lauten

$$\langle O_1 \rangle^T = \langle O_1 \rangle \quad (5.83)$$

$$\langle O_1; O_2 \rangle^T = \langle O_1 O_2 \rangle - \langle O_1 \rangle \langle O_2 \rangle. \quad (5.84)$$

Allgemeiner gilt für die Transformation von Kumulanten zu Erwartungswerten die Formel [MM94]

$$\langle O_1 \dots O_n \rangle = \sum_P \langle O_i; \dots; O_j \rangle^T \cdots \langle O_k; \dots; O_l \rangle^T \quad (5.85)$$

dabei stellt \sum_P die Summe über alle möglichen Aufteilungen der Menge $\{1, \dots, n\}$ in nichtleere Teilmengen dar. Andersherum gilt

$$\langle O_1; \dots; O_n \rangle^T = \sum_P (-1)^{k-1} (k-1)! \langle O_i; \dots; O_j \rangle \cdots \langle O_k; \dots; O_l \rangle. \quad (5.86)$$

Dabei ist k die Anzahl der Mengen von einer Aufteilung P .

5.8 Einige Formeln

In diesem Abschnitt werden einige Formeln erläutert, die mit den bisher eingeführten Begriffen zusammenhängen.

5.8.1 Beweis von (1.46)

Um die Faltung

$$\left(\frac{1}{1+k^2}\right)^{*m} = \int dp_1 \dots \int dp_{m-1} \frac{1}{1+(k-p_1)^2} \dots \frac{1}{1+p_{m-1}^2} \quad (5.87)$$

auszurechnen, zeigt man mittels Partialbruchzerlegung

$$\int dp \frac{1}{1+(k-p)^2} \frac{1}{a^2+p^2} = \pi \frac{1+a}{a} \frac{1}{k^2+(a+1)^2} \quad (5.88)$$

und erhält so mittels Iteration die Formel (1.46). Eine andere Möglichkeit besteht darin, mit dem Residuensatz die Fouriertransformierte von $\frac{1}{1+k^2}$ auszurechnen ($\sim e^{-|x|}$), davon im Ortsraum die m -te Potenz zu bestimmen und dann zurückzutransformieren.

5.8.2 Die erste Transformationsformel

Sei O ein Funktional und v eine Kovarianz. Dann gilt

$$\int d\mu_v(\zeta) O(\zeta + vj) = e^{-\frac{1}{2}(j,vj)} \int d\mu_v(\zeta) O(\zeta) e^{(\zeta,j)}. \quad (5.89)$$

Beweis [Wie98a]. Es reicht, den Fall $O(\cdot) = e^{(\cdot,f)}$ für beliebiges f zu betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned} RS &= e^{-\frac{1}{2}(j,vj)} e^{\frac{1}{2}(f+j,v(f+j))} \\ &= e^{(vj,f) + \frac{1}{2}(f,vf)} \\ &= e^{(vj,f)} \int d\mu_v(\zeta) e^{(\zeta,f)} \\ &= LS. \end{aligned} \quad (5.90)$$

□

5.8.3 Die zweite Transformationsformel

Sei $O(\cdot)$ ein Funktional, v eine Kovarianz auf H und $A : H \rightarrow H'$ ein Operator. Dann gilt

$$\int d\mu_v(\zeta) O(A\zeta) = \int d\mu_{AvA^\dagger}(\zeta) O(\zeta). \quad (5.91)$$

Beweis. Sei zuerst $H = H'$ angenommen. Dann reicht es, die Behauptung für $O(\cdot) = e^{(\cdot, f)}$ nachzurechnen. Es ist

$$\begin{aligned} RS &= e^{\frac{1}{2}(j, AvA^\dagger j)} \\ &= e^{\frac{1}{2}(A^\dagger j, vA^\dagger j)} \\ &= \int d\mu_v(\zeta) e^{(\zeta, A^\dagger j)} \\ &= \int d\mu_v(\zeta) e^{(A^\dagger \zeta, j)} \\ &= LS. \end{aligned} \quad (5.92)$$

Für den Fall, daß $H \neq H'$ ist, geht das nicht so einfach, da dann das Skalarprodukt im Exponenten auf der linken Seite nicht erklärt ist. Man kann jedoch jedes polynomiale Funktional durch Funktionalableitung von $e^{(\phi, j)}$ nach j gewinnen und erhält so die Behauptung. \square

5.8.4 Normalordnungsformeln

Bemerkung. Für ein polynomiales Funktional $Z(\phi)$ gilt

$$\langle : Z :_v \rangle_{\gamma, \psi} = : Z(\psi) :_{v-\gamma}. \quad (5.93)$$

Beweis: Es reicht, die Behauptung für das erzeugende Funktional nachzurechnen. Es ist

$$\begin{aligned} \langle : e^{(j, \phi)} :_v \rangle_{\gamma, \psi} &= e^{(j, \psi) - \frac{1}{2}(j, vj)} \int d\mu_\gamma(\zeta) e^{(j, \zeta)} \\ &= e^{(j, \psi) - \frac{1}{2}(j, vj)} e^{\frac{1}{2}(j, \gamma, j)} \\ &= : e^{(j, \psi)} :_{v-\gamma}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

\square

Bemerkung. Es gilt für zwei Felder ϕ und ψ und zwei Kovarianzen v und Γ die Relation

$$: (\phi + \psi)^n(x) :_{v-\Gamma} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} : \phi^k(x) :_v : \psi^{n-k}(x) :_\Gamma. \quad (5.95)$$

Beweis: Für die erzeugenden Funktionale gilt

$$: e^{(j, \phi + \psi)} :_{v-\Gamma} = : e^{(j, \phi)} :_v : e^{(j, \psi)} :_\Gamma \quad (5.96)$$

und aus der Produktregel folgt dann die Behauptung. \square

5.8.5 Die Fusionsformel

Es gilt:

$$: \phi^n(x) :_v : \phi^m(y) :_v = \sum_{k=0}^{\min\{n, m\}} k! \binom{n}{k} \binom{m}{k} v(x, y)^k : \phi(x)^{n-k} \phi(y)^{m-k} :_v . \quad (5.97)$$

Beweis. Zuerst vergewissert man sich, daß

$$: e^{(\phi, j)} :_v : e^{(\phi, f)} :_v = : e^{(\phi, j+f)} :_v e^{(f, vj)} \quad (5.98)$$

gilt, dann rechnet man mit der Produktregel

$$\partial^k (f \cdot g) = \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (\partial^l f) (\partial^{k-l} g) \quad (5.99)$$

weiter:

$$\begin{aligned} LS &= \left. \frac{\delta^n}{\delta j(x)^n} \frac{\delta^m}{\delta f(y)^m} : e^{(\phi, j+f)} :_v e^{(f, vj)} \right|_{j=f=0} \\ &= \sum_{k, l=0}^{\max n, m} \binom{n}{k} \binom{m}{l} \left(\frac{\delta^{n-k}}{\delta j(x)^{n-k}} \frac{\delta^{m-l}}{\delta f(y)^{m-l}} : e^{(\phi, j+f)} :_v \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\delta^k}{\delta j(x)^k} \frac{\delta^l}{\delta f(y)^l} e^{(f, vj)} \right) \Big|_{j=f=0} . \end{aligned} \quad (5.100)$$

Nun ist

$$\left(\frac{\delta^k}{\delta j(x)^k} \frac{\delta^l}{\delta f(y)^l} e^{(f, vj)} \right) \Big|_{j=f=0} = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq l \\ k! v(x, y)^k, & \text{falls } k = l \end{cases} \quad (5.101)$$

und damit ist die Fusionsformel bewiesen. \square

5.8.6 Summe zweier Kovarianzen

Seien C_1, C_2 zwei Kovarianzen und $C = C_1 + C_2$. Dann gilt für alle F

$$\int d\mu_C(\zeta) F(\zeta) = \int d\mu_{C_1}(\zeta_1) \int d\mu_{C_2}(\zeta_2) F(\zeta_1 + \zeta_2). \quad (5.102)$$

Diese Formel beweist man leicht, indem man $F = e^{(\zeta, f)}$ setzt und nachrechnet.

5.8.7 Eine Kumulantenformel

Es gilt

$$\begin{aligned} \langle : \phi^n(x) :_v ; : \phi^m(y) :_v \rangle_{\gamma, \psi}^T &= \sum_{k=1}^{\min\{n, m\}} k! \binom{n}{k} \binom{m}{k} : \psi(x)^{n-k} \psi(y)^{m-k} :_{v-\gamma} \\ &\quad \cdot \sum_{l=1}^k (-1)^{l+1} \binom{k}{l} v(x, y)^{k-l} \gamma(x, y)^l. \end{aligned} \quad (5.103)$$

denn mit der Fusionsformel rechnet man nach:

$$\begin{aligned} LS &= \langle : \phi^n(x) :_v ; \phi^m(y) :_v \rangle_{\gamma, \psi} - \langle : \phi^n(x) :_v \rangle_{\gamma, \psi} \langle : \phi^m(y) :_v \rangle_{\gamma, \psi} \\ &= \left\langle \sum_{k=0}^{\min\{n, m\}} k! \binom{n}{k} \binom{m}{k} v(x, y)^k : \phi(x)^{n-k} \phi(y)^{m-k} :_v \right\rangle_{\gamma, \psi} - \\ &\quad - : \psi(x)^n :_{v-\gamma} : \psi(y)^m :_{v-\gamma} \\ &= \sum_{k=0}^{\min\{n, m\}} k! \binom{n}{k} \binom{m}{k} v(x, y)^k : \psi(x)^{n-k} \psi(y)^{m-k} :_{v-\gamma} - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\min\{n, m\}} k! \binom{n}{k} \binom{m}{k} (v(x, y) - \gamma(x, y))^k : \psi(x)^{n-k} \psi(y)^{m-k} :_{v-\gamma} \\ &= \sum_{k=1}^{\min\{n, m\}} k! \binom{n}{k} \binom{m}{k} : \psi(x)^{n-k} \psi(y)^{m-k} :_{v-\gamma} \\ &\quad \cdot (v(x, y)^k - \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{k}{l} v(x, y)^{k-l} \gamma(x, y)^l) \\ &= RS. \end{aligned} \quad (5.104)$$

□

Mit dieser Formel kann, alternativ zu (4.128), die zweite Ordnung ausgerechnet werden.

5.8.8 Die Replica-Formel

In diesem Abschnitt soll die Formel

$$\begin{aligned} \langle V_1; \dots; V_n \rangle_{\Gamma, \phi}^T &= \sum_{G \in G^c\{1, \dots, n\}} \prod_{\{i, j\} \in G} \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} - 1 \right] \\ &\quad \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \right\} \prod_{i=1}^n V_i(\phi_i) \Big|_{\forall \phi_i = \phi} \end{aligned} \quad (5.105)$$

erläutert werden. Ein Beweis davon findet sich in [SW00]. Zuerst ein Hinweis zu den verbundenen Graphen G^c . Ein Graph auf $\{1, \dots, n\}$ wird dargestellt durch die Paare $\{i, j\}$ der Punkte, die verbunden sind. Für $n = 4$ ist $(\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{4, 3\})$ ein verbundener Graph, $(\{1, 2\}, \{3, 4\})$ ist unverbunden. Die Summe über alle verbundenen Graphen in dieser Darstellung wird manchmal Ursell-Funktion genannt [Sal99]. Nun betrachten wir

$$\langle V_1; \dots; V_n \rangle_{\Gamma, \phi} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \right\} V_1(\phi) \cdot \dots \cdot V_n(\phi). \quad (5.106)$$

Die Produktregel

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\prod_{i=1}^n f_i(x) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\prod_{i=1}^n f_i(x_i) \right) \Big|_{\forall x_i = x} \quad (5.107)$$

gilt in analoger Weise auch für Funktionen $F(\frac{\partial}{\partial x})$, und so folgt:

$$\begin{aligned} \langle V_1; \dots; V_n \rangle_{\Gamma, \phi} &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} \prod_{i=1}^n V_i(\phi_i) \Big|_{\forall \phi_i = \phi} \\ &= \prod_{i \neq j} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_j} \right) \right\} \prod_{i=1}^n \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \Gamma \frac{\partial}{\partial \phi_i} \right) \right\} \\ &\quad \prod_{i=1}^n V_i(\phi_i) \Big|_{\forall \phi_i = \phi}. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Der zweite Term ($i = j$) sorgt für Selbstkontraktionen der Vertices. Der erste Term ($i \neq j$) verbindet verschiedene Vertices miteinander. Da der trunkierte Erwartungswert nur aus den verbundenen Graphen besteht, muß bei ihm nicht über alle $i \neq j$ summiert werden, sondern nur über die $\{i, j\}$, die zu einem verbundenen Graphen $G \in G^c$ gehören. Das motiviert (5.105).

5.9 Zweite Ordnung

In diesem Abschnitt soll die zweite Ordnung, also $K^{(2)}$, mit Hilfe der Formel (4.128) ausgerechnet werden. Seien dazu

$$V_1(S^{-1} \phi_1) = \frac{1}{4!} \int d^D x (S^{-1} \phi_1)^4(x) \quad (5.109)$$

$$V_2(S^{-1} \phi_2) = \frac{1}{4!} \int d^D y (S^{-1} \phi_2)^4(y) \quad (5.110)$$

Es gibt nur einen verbundenen Graphen zwischen zwei Vertices, deshalb haben die Summationen über $G \in G_{\{1, \dots, n\}}^c$ und über die $\{ij\}$ und die $i < j$ in (4.128) nur einen Term. Es ist

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_1)}, \Gamma \frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_2)} \right) V_1(S^{-1}\phi_1) V_2(S^{-1}\phi_2) \\
&= \frac{1}{(4!)^2} \int d\alpha \int d\beta \int dx \int dy \frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_1)}(\alpha) \Gamma(\alpha, \beta) \\
&\quad \frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_2)}(\beta) (S^{-1}\phi_1)^4(x) (S^{-1}\phi_2)^4(y) \\
&= \frac{1}{(3!)^2} \int dx \int dy \Gamma(x, y) (S^{-1}\phi_1)^3(x) (S^{-1}\phi_2)^3(y) \quad (5.111)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
A_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_1)}, \Gamma \frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_2)} \right) A_1 \\
&= \frac{1}{(2!)^2} \int dx \int dy \Gamma^2(x, y) (S^{-1}\phi_1)^2(x) (S^{-1}\phi_2)^2(y) \quad (5.112)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
A_3 &= \left(\frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_1)}, \Gamma \frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_2)} \right) A_2 \\
&= \int dx \int dy \Gamma^3(x, y) (S^{-1}\phi_1)(x) (S^{-1}\phi_2)(y) \quad (5.113)
\end{aligned}$$

Weiter ist, mit $u = S^{-1}vS^{-1\dagger}$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \exp \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_1)}, u \frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_2)} \right) \right\} A_1 \\
&= A_1 + \frac{1}{(2!)^2} \int dx \int dy \Gamma(x, y) u(x, y) (S^{-1}\phi_1)^2(x) (S^{-1}\phi_2)^2(y) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int dx \int dy \Gamma(x, y) u^2(x, y) (S^{-1}\phi_1)(x) (S^{-1}\phi_2)(y) \quad (5.114)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
B_2 &= \exp \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_1)}, u \frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_2)} \right) \right\} \frac{A_2}{2} \\
&= \frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{2} \int dx \int dy \Gamma^2(x, y) u(x, y) (S^{-1}\phi_1)(x) (S^{-1}\phi_2)(y) \\
&\quad (5.115)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B_3 &= \exp \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_1)}, u \frac{\partial}{\partial(S^{-1}\phi_2)} \right) \right\} \frac{A_3}{3!} \\ &= \frac{1}{3!} A_3. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Mit dem Kern $u(x, y) = L^{-2\sigma} v(\frac{x}{L}, \frac{y}{L}) = L^{2-D} v(\frac{x}{L}, \frac{y}{L})$ und mit $S^{-1}\phi(x) = L^{-\sigma}\phi(\frac{x}{L}) = L^{1-\frac{D}{2}}\phi(\frac{x}{L})$ ergibt sich

$$\begin{aligned} K^{(2)} &= B_1 + B_2 + B_3 \\ &= \frac{1}{(3!)^2} \int dx \int dy L^{6-D} \phi^3(x) \phi^3(y) \Gamma(Lx, Ly) \\ &\quad + \frac{1}{2!^2} \int dx \int dy L^4 \phi^2(x) \phi^2(y) \left(L^{2-D} \Gamma(Lx, Ly) v(x, y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \Gamma^2(Lx, Ly) \right) \\ &\quad + \int dx \int dy L^{2+D} \phi(x) \phi(y) \left(\frac{1}{2} L^{4-2D} \Gamma(Lx, Ly) v^2(x, y) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} L^{2-D} \Gamma^2(Lx, Ly) v(x, y) + \frac{1}{3!} \Gamma^3(Lx, Ly) \right). \end{aligned} \quad (5.117)$$

An diesem Ausdruck erkennt man gut, daß die Reskalierung mit S^{-1} die Gittertranslationsinvarianz bezüglich $\Lambda(a)$ wieder herstellt, auch wenn $\Gamma(x, y)$ nur $\Lambda(La)$ -translationsinvariant ist. Wenn dieser Ausdruck bezüglich v normalgeordnet³ wird, bekommt man den Ausdruck für $\langle \mathcal{O}_4; \mathcal{O}_4 \rangle_{\Gamma, S^{-1}\phi}^T$. Um die Massenresonanz in drei Dimensionen zu illustrieren, muß gezeigt werden, daß die Faltungen der Propagatoren im Impulsraum bei $p = 0$ verschwinden. Diese Faltungen müssen mit (5.18) ausgerechnet werden. Da die dabei entstehenden Summen auch negative Summanden haben, ist leider nicht sichergestellt, daß die Massenresonanz tatsächlich auftritt.

³Dabei muß nur die Ersetzung $\phi^n(x)\phi^n(y) \rightarrow: \phi^n(x)\phi^n(y) :_v$ vorgenommen werden.

Literaturverzeichnis

- [BSW00] G. van Baalen, A. Schenkel, P. Wittwer: Asymptotics of solutions in $nA + nB \rightarrow C$ reaction-diffusion systems. Commun. Math. Phys. 210(1) (2000) 145-176. math-ph/9904013.
- [Bäk95] M. Bäker: A Multiscale View of Propagators in Gauge Fields. Dissertation, Universität Hamburg, 1995. DESY 95-134.
- [BKL94] J. Bricmont, A. Kupiainen, G. Lin: Renormalization-group and asymptotics of solutions of nonlinear parabolic equations. Commun. Pur. Appl. Math. 47(6) (1994) 893-922. chaos-dyn/9306008.
- [BK95] J. Bricmont, A. Kupiainen: Renormalizing partial differential equations. In: V. Rivasseau: Constructive Physics, Lecture Notes in Physics 446. Springer-Verlag, 1995. chaos-dyn/9411015.
- [Bur74] J. Burgers: The Nonlinear Diffusion Equation. Asymptotic Solutions and Statistical Problems. D. Reidel Publishing Company, 1974.
- [Cag97] G. Caginalp: Renormalization and scaling methods for nonlinear parabolic systems. Nonlinearity 10 (1997) 1217-1229.
- [Cop43] N. Copernicus: De revolutionibus orbium coelestium libri VI. Johann Petreius (Nürnberg), 1543. Das der Arbeit vorangestellte Zitat stammt aus der Widmung des Werkes, die an Papst Paul III. gerichtet ist.
- [CH93] R. Courant, D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik. Springer-Verlag, 1993.
- [FPTV93] B. Flannery, W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling: Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, 1993.
- [For76] O. Forster: Analysis 1. Vieweg Verlag, 1976.

- [For77] O. Forster: Analysis 2. Vieweg Verlag, 1977.
- [For96] O. Forster: Analysis 3. Vieweg Verlag, 1996.
- [GR88] L. Gálfi, Z. Rácz: Properties of the reaction front in an $A+B \rightarrow C$ type reaction-diffusion process. Phys. Rev. A 38(6) (1988) 3151-3153.
- [GK80] K. Gawedzki, A. Kupiainen: A Rigorous Block Spin Approach to Massless Lattice Theories. Commun. Math. Phys. 77 (1980) 31-64.
- [GK84] K. Gawedzki, A. Kupiainen: Asymptotic freedom beyond perturbation theory. In: K. Osterwalder, R. Stora: Critical Phenomena, random systems and gauge theories (Les Houches 1984), Part I, 195-290. North-Holland, 1986.
- [GJ87] J. Glimm, A. Jaffe: Quantum Physics. A Functional Integral Point of View. Springer-Verlag, 1987.
- [GW] O. Gühne, C. Wiecekowsky: Renormalized ϕ^4 -Trajectory on the Lattice by Perturbation Theory in the Running Coupling. In Vorbereitung.
- [Hie01] T. Hiester. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, in Vorbereitung.
- [HS71] F. Hirzebruch, W. Scharlau: Einführung in die Funktionalanalysis. Bibliographisches Institut, 1971.
- [Kal94] T. Kalkreuter: Multigrid Methods for Propagators in Lattice Gauge Theories. J. Comp. Appl. Math. 63 (1-3) (1995) 57-68. hep-lat/9409008.
- [MM94] I. Montvay, G. Münster: Quantum Fields on a Lattice. Cambridge University Press, 1994.
- [Nol90] W. Nolting: Grundkurs Theoretische Physik, Band 3, Elektrodynamik. Verlag Zimmermann-Neufang, 1990.
- [Por90] A. Pordt: Convergent Multigrid Polymer Expansions and Renormalization for Euclidean Field Theory. Dissertation, Universität Hamburg, 1990. DESY 90-020.

- [Sal99] M. Salmhofer: Renormalization. An Introduction. Springer-Verlag, 1999.
- [SW00] M. Salmhofer, C. Wiecekowsk: Positivity and convergence in fermionic quantum field theory. J. Stat. Phys. 99(1-2) (2000) 557-586. math-ph/9909002.
- [SWS93] A. Schenkel, P. Wittwer, J. Stubbe: Asymptotics of solutions in an $A + B \rightarrow C$ reaction-diffusion system. Physica D 69 (1993) 135-147.
- [Sim79] B. Simon: Functional Integration and Quantum Physics. Academic Press, 1979.
- [Wie97a] C. Wiecekowsk: The renormalized ϕ_4^4 -trajectory by perturbation theory in the running coupling I: The discrete renormalization group, Nucl. Phys. B 488(1-2) (1997) 441-465. hep-th/9601142.
- [Wie97b] C. Wiecekowsk: The renormalized ϕ_4^4 -trajectory by perturbation theory in a running coupling II: The continuous renormalization group. Nucl. Phys. B 488(1-2) (1997) 466-489. hep-th/9612226.
- [Wie97c] C. Wiecekowsk: Renormalized $g\text{-log}(g)$ double expansion for the invariant ϕ^4 -trajectory in three dimensions. Nucl. Phys. B 506(1-2) (1997) 468-482. hep-th/9705096.
- [Wie98a] C. Wiecekowsk: Renormierungstheorie. Vorlesungsmanuskript, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1998/1999.
- [Wie98b] C. Wiecekowsk: The renormalized ϕ_3^4 -trajectory in the block spin renormalization group by perturbation theory in a running coupling. Unveröffentlichtes Manuskript, 1998.
- [Xyl97] Y. Xylander: Lattice Renormalization Group Studies of the Two-dimensional $O(N)$ Symmetric Non-linear σ Model. Dissertation, Universität Hamburg, 1997. DESY 97-017.
- [Zie98] F. Zielen: Rigorose und perturbative Konstruktion von ϕ^4 -Trajektorien. Diplomarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1998.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich den Personen danken, die die Fertigstellung dieser Arbeit positiv beeinflußt haben.

- Christian Wieczerkowski danke ich für das interessante Thema und seine Anregungen, Ermutigungen und Kritik. Auch für die in Helsinki und Hamburg gewährte Gastfreundschaft möchte ich mich an dieser Stelle nochmals herzlich bedanken.
- Herrn Prof. Dr. Gernot Münster danke ich für die Betreuung vor Ort und zahlreiche Hinweise.
- Thorsten Hiester hat sich mit mir durch die Thematik des ersten Teils dieser Arbeit gekämpft. Außerdem hat er mit mir das Büro geteilt. Dafür möchte ich ihm danken.
- Beim Korrekturlesen der Arbeit haben Andreas Berg, André Ewering und Axel Feldmann gute Arbeit geleistet. Dafür bin ich ihnen dankbar.
- Auch meinen Eltern, die mich während meines Studiums immer unterstützt haben, möchte ich danken.

... und Dir, Nicola, danke ich für die Geduld und den Zuspruch in der letzten Zeit.

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbstständig und ohne andere als die angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Münster, im Januar 2001

