



institut für
theoretische physik

DIPLOMARBEIT

Die Regge-Wirkung
eines sphärischen
Friedmann-Universums

Autor:
Andrea Goertsches

Arbeitsgruppe:
Prof. Dr. Gernot Münster

Münster, den 16.02.2010

In dieser korrigierten Version wurde Abschnitt 8.2 entfernt. Im Übrigen unterscheidet sie sich nur geringfügig von der am 16.02.2010 im Prüfungssekretariat eingereichten Arbeit. Die Verbesserungen betreffen im Wesentlichen explizite Zahlenwerte.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
I. Voraussetzungen	3
2. Topologische Voraussetzungen	4
2.1. Triangulierungen	4
2.1.1. Definition eines Simplicialkomplexes	4
2.1.2. Definition einer Triangulierung	5
2.2. Die verallgemeinerten Platonischen Körper	5
2.2.1. Schläfli-Symbol	6
3. Differentialgeometrische Voraussetzungen	8
3.1. Tensoren	8
3.1.1. Das Tensorprodukt	8
3.1.2. Der metrische Tensor	10
3.1.3. Die kovariante Ableitung	11
3.1.4. Der Riemannsche Krümmungstensor	12
4. Allgemeine Relativitätstheorie	14
4.1. Prinzipien der Allgemeinen Relativitätstheorie	14
4.1.1. Kosmologisches Prinzip	14
4.1.2. Äquivalenzprinzipien und allgemeine Kovarianz	15
4.2. Die Einsteinschen Feldgleichungen	15
4.3. Die Einstein-Hilbert-Wirkung	16
4.4. Friedmann-Universen	16
4.4.1. Das Robertson-Walker-Linienelement	17
4.4.2. Zeitentwicklung der Friedmann-Universen	18
5. Der Regge-Kalkül	22
II. Die Regge-Wirkung eines statischen, sphärischen Friedmann-Universums	24
6. Die Wahl der Triangulierungen	25
6.1. Vorüberlegungen zur Einstein-Hilbert-Wirkung	25
6.2. Die gewählten Simplicialkomplexe	26

7. Die Regge-Wirkungen im statischen Fall	28
7.1. Gleichseitige Triangulierungen	28
7.1.1. Die Regge-Wirkung	28
7.2. Triangulierungen variabler Kantenlängen	31
7.2.1. Definition der Bezeichnungen	31
7.2.2. Variation der Kantenlängen des Tetraeders	32
7.2.3. Die Regge-Wirkung	35
III. Die Regge-Wirkung eines dynamischen, sphärischen Friedmann-Universums	36
8. Die Regge-Wirkungen im dynamischen Fall	37
8.1. Gleichseitige Triangulierungen	37
8.1.1. Die Differenz der Ricci-Skalare R_g und R_γ	37
8.1.2. Die Regge-Wirkung	40
8.1.3. Die alternative Regge-Wirkung	41
IV. Die resultierenden Bewegungsgleichungen	44
9. Die simplizialen Bewegungsgleichungen	45
9.1. Die simplizialen Bewegungsgleichungen der gleichseitigen Triangulierungen	45
9.2. Ausblick hinsichtlich der Bewegungsgleichungen der Triangulierungen durch einen n -Zeller mit variabler Kantenlänge	47
V. Anhang	49
A. Herleitungen	50
A.1. Die Einstein-Hilbert-Wirkung	50
A.2. Die Regge-Wirkung	52
A.3. Schläflis notwendige Existenzbedingungen der verallgemeinerten Platonischen Körper	56
B. Existenzbedingungen eines n-Simplizes	60
C. Die benötigten charakteristischen Werte der Platonischen Körper	62
D. Die statischen Regge-Wirkungen	63

1. Einleitung

Die Problematik die Gravitation zu quantisieren ist ein seit vielen Jahren aktuelles Thema der Forschung. Man möchte eine Theorie der Quantengravitation, da die Allgemeine Relativitätstheorie beim Übergang zu quantenmechanischen Skalen ihre Gültigkeit verliert. Sie ist also nicht geeignet, um beispielsweise den Urknall oder schwarze Löcher zu beschreiben. Da die Gravitation die Raumzeit als das dynamische Feld und nicht nur als umgebenden Raum besitzt, unterscheidet sie sich wesentlich von den anderen elementaren Wechselwirkungen. Auf der anderen Seite sind alle diese Wechselwirkungen Eichtheorien und sind daher im Rahmen des Wirkungsformalismus beschreibbar. Für die freie Gravitation ist diese Wirkung die Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{EH} = \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2\kappa} (R(x) - 2\Lambda) \sqrt{|g(x)|} d^4x$$

mit dem metrischen Tensor $g(x)$, dem Ricci-Skalar $R(x)$ und der kosmologischen Konstanten Λ und einer beliebigen randlosen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} als Integrationsgebiet. Die Simpliciale Quantengravitation ist ein Zugang, der dieser Raumzeit \mathcal{M} durch Triangulieren eine Quantisierung aufzwingt. Der Ursprung dieser Simplicialen Quantengravitation ist der Regge-Kalkül, in welchem dem nur auf einer glatten Mannigfaltigkeit definierten Ricci-Skalar ein auf der Triangulierung distributionswertiges Analogon zugeordnet wird. Dies führt zu dem simplicialen Analogon der Einstein-Hilbert-Wirkung, der Regge-Wirkung. Im Rahmen dieser Arbeit wird als Integrationsgebiet ein Universum betrachtet, das topologisch einem sphärischen Friedmann-Universum $\mathcal{M} = S_3 \times \mathbb{R}$ entspricht. Das sphärische Friedmann-Universum basiert auf der Verwendung des Robertson-Walker-Linienelementes, welches im leeren Raum nur einen dynamischen Freiheitsgrad, den Weltradius, besitzt. Dieses Universum kann also nur radialsymmetrisch expandieren bzw. kontrahieren. Auf Grund der besonderen Form dieses metrischen Tensors $g(x)$, hat die Determinante des auf den räumlichen Anteil eingeschränkten metrischen Tensors den gleichen Wert, wie die Determinante des gesamten metrischen Tensors. Dies

ermöglicht eine unmittelbare Trennung des statischen und des dynamischen Anteils der Einstein-Hilbert-Wirkung und somit eine Anwendung des Regge-Kalküls allein auf die räumliche Mannigfaltigkeit S_3 . Dies impliziert, dass die Zeit kontinuierlich bleibt. Zur Anwendung des Regge-Kalküls auf die Oberfläche S_3 , muss diese zunächst trianguliert werden. Hierzu werden im Wesentlichen genau die verallgemeinerten Platonischen Körper verwendet, deren Oberfläche gleichzeitig einen Simplicialkomplex bilden. Man beschränkt sich also erheblich auf die einfachsten Triangulierungen, die der Symmetrie der S_3 gerecht werden. Diese Triangulierungen durch die verallgemeinerten Platonischen Körper ist auf Grund ihres Ursprungs zunächst gleichseitig. Da allerdings nichts dagegen spricht die Kantenlängen, abgesehen von den natürlichen geometrischen Einschränkungen, als beliebig variierbar anzunehmen, können durch diese Erweiterung auch nicht-radiale Deformationen beschrieben werden. Somit sind alle Deformationen des Raumes, die die Topologie nicht verändern, in der letzten Fassung der Regge-Wirkung enthalten.

Teil I.

Voraussetzungen

2. Topologische Voraussetzungen

Die natürliche Approximation einer glatten zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ist ein (beliebig feines) Gitter von Dreiecken, welches man daher anschaulich auch als Triangulierung bezeichnet. Das folgende Kapitel beschäftigt sich damit, diese anschaulichen Begriffe abstrakt einzuführen.

2.1. Triangulierungen

Um von einer Triangulierung sprechen zu können, müssen zunächst ein paar Begriffe definiert werden. Da im Rahmen dieser Arbeit nur Triangulierungen der Oberfläche S_3 der Vollkugel durchgeführt werden, reichen die Definitionen bezüglich eines umgebenden \mathbb{R}^n von beliebiger endlicher Dimension n aus. Sie sind [Zie 2003] entnommen.

2.1.1. Definition eines Simplicialkomplexes

Definition (Simplex):

Ist $V = \{v_0, v_1, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge von $k + 1$ affin unabhängigen Punkten, so ist die konvexe Hülle

$$\sigma^k = \text{conv} \{v_0, v_1, \dots, v_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

ein k -Simplex. Die Simplizes $\tau = \text{conv}(G)$ für $G \subseteq V$ heißen dann Seiten von σ^k . Desweiteren bezeichne σ ein Simplex beliebiger Dimension. Die Abbildung 2.1 zeigt zwei Beispiele von k -Simplizes.

Definition (Simplicialkomplex):

Ein (geometrischer) Simplicialkomplex K ist eine Menge von Simplizes in einem \mathbb{R}^N (für ein $N \geq 0$), die folgende Eigenschaften erfüllt

- $\emptyset \in K$

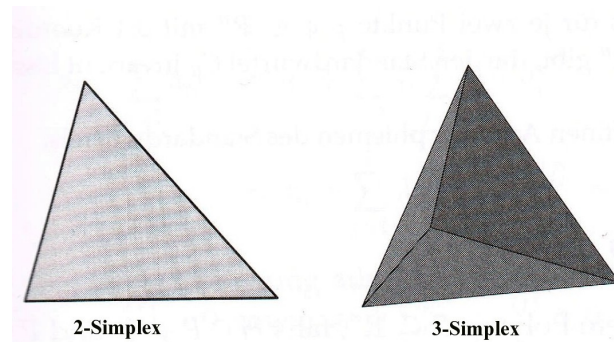


Abbildung 2.1.: Beispiele von Simplexes aus [JoTh 2008, S.21]

- Für $\sigma \in K$ liegen alle Seiten $\tau \subseteq \sigma$ in K
- Für $\sigma, \sigma' \in K$ ist auch $\sigma \cap \sigma'$ eine Seite von σ und σ' .

Insbesondere bildet die Oberfläche jedes k -Simplexes einen $(k - 1)$ -dimensionalen Simplizialkomplex.

2.1.2. Definition einer Triangulierung

Definition (Triangulierung):

Eine Triangulierung eines kompakten topologischen Raumes X ist ein endlicher simplizialer Komplex K zusammen mit einem Homöomorphismus

$$\tau : K \xrightarrow{\cong} X.$$

Die Anzahl i -dimensionaler Teilsimplexes der Triangulierung wird mit $N_i(T)$ bezeichnet.

2.2. Die verallgemeinerten Platonischen Körper

Der Grund verallgemeinerte Platonische Körper zu betrachten ist der, dass einige von ihnen eine Oberfläche haben, die einen Simplizialkomplex bilden. In drei Dimensionen hat man die folgenden bekannten Platonischen Körper: Tetraeder, Oktaeder, Hexaeder bzw. Würfel, Ikosaeder, Dodekaeder. Sie sind dadurch charakterisiert, dass sich ihre Oberfläche aus gleichseitigen, identischen n -Ecken so zusammensetzt, dass an jeder Ecke gleich viele n -Ecke zusammentreffen. Diese Charakterisierung lässt sich in höheren Dimensionen analog fortsetzen und man

erhält die verallgemeinerten Platonischen Körpern. Um die Sprache der regelmäßigen, konvexen Polyeder in allen abzählbaren Dimensionen erheblich zu vereinfachen, verwendet man die durch Ludwig Schläfli eingeführten Schläfli-Symbole, die auf dieser eindeutigen Charakterisierung beruhen.

2.2.1. Schläfli-Symbol

Die Schläfli-Symbole lauten $\{p, q, r, \dots\}$ mit $p, q, r, \dots \in \mathbb{N}$ für die hier relevanten Polyeder. Wir werden gleich sehen, dass man für einen m -dimensionalen Polyeder $m - 1$ Einträge benötigt. Naheliegender Weise verwendet man im Fall von zwei Dimensionen, also für ein n -Eck, die Angabe der Kantenanzahl $\{p\} = \{n\}$. In jeder höheren Dimension k gibt der hinzukommende Eintrag die Anzahl $(k - 1)$ -dimensionaler Polyeder an, die sich an den $(k - 3)$ -dimensionalen Teilkörpern berühren. Im Falle von drei Dimensionen, also einem Schläfli-Symbol der Form $\{p, q\}$, bedeutet der zweite Eintrag q demnach die Anzahl p -Ecke, die sich an den Vertizes berühren.

Unter Berücksichtigung rein geometrischer Gründe (vgl. Anhang B) erhält man bis zur Dimension 4 die Existenz von genau den folgenden regelmäßigen, konvexen Polyedern, die in Tabelle 2.1 angegeben sind. Auf Grund der Regelmäßigkeit dieser Polyeder lassen sich eine Reihe geometrischer Größen berechnen, die natürlich teilweise Funktionen der Kantenlänge l sind. Zu diesen geometrischen Größen gehören die Anzahl k -dimensionaler Teilsimplizes N_k , das Volumen $V(l)$, der Flächenöffnungswinkel α und der Radius $R(l)$ der Umkugel, die alle Vertizes tangiert. Aus der Tabelle 2.1 lässt sich ablesen, dass nur die Oberfläche des 5-, des 16- und des 600-Zeller aus Tetraedern $\{3, 3\}$ besteht und somit ein Simplizialkomplex ist. Die für die gewählten Triangulierungen notwendigen Werte dieser drei Zeller sind im Anhang C und sind [Cox 1973, S.292f] entnommen. Zusätzlich befinden sich die Werte des 24-Zellers in dieser Tabelle, da dieser ebenfalls für eine gleichseitige Triangulierung verwendet werden kann.

Dimension n	Polyeder	Schläfli-Symbol
2	n -Eck	$\{n\}$
3	Tetraeder	$\{3, 3\}$
3	Oktaeder	$\{3, 4\}$
3	Hexaeder	$\{4, 3\}$
3	Ikosaeder	$\{3, 5\}$
3	Dodekaeder	$\{5, 3\}$
4	5-Zeller	$\{3, 3, 3\}$
4	16-Zeller	$\{3, 3, 4\}$
4	Tesseract	$\{4, 3, 3\}$
4	24-Zeller	$\{3, 4, 3\}$
4	120-Zeller	$\{5, 3, 3\}$
4	600-Zeller	$\{3, 3, 5\}$

Tabelle 2.1.: Die verallgemeinerten Platonischen Körper bis zur Dimension 4 aus [Cox 1973]

3. Differentialgeometrische Voraussetzungen

3.1. Tensoren

Das folgende Kapitel beschäftigt sich mit Tensoren, den zentralen mathematischen Objekten der Allgemeinen Relativitätstheorie, und ist im Wesentlichen an [Brö 2003, S.212ff] angelehnt.

3.1.1. Das Tensorprodukt

Seien V, W zwei K -Vektorräume. Dann ist das Tensorprodukt von V und W ein Vektorraum $V \otimes W$ über K zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$\tau_{\otimes} : V \times W \rightarrow V \otimes W, \quad (v, w) \mapsto v \otimes w,$$

die die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Sei X ein weiterer K -Vektorraum, dann existiert zu jeder bilinearen Abbildung

$$\alpha : V \times W \rightarrow X,$$

genau eine lineare Abbildung $\varphi_{\alpha} : V \otimes W \rightarrow X$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\tau_{\otimes}} & V \otimes W \\ & \searrow \alpha & \downarrow \varphi_{\alpha} \\ & & X \end{array}$$

d.h. $\alpha = \varphi_{\alpha} \circ \tau_{\otimes}$.

Seien $(e_1, \dots, e_n), (e'_1, \dots, e'_n)$ Basen von V bzw. W , dann ist $e_i \otimes e'_j$ eine Basis von $V \otimes W$, die die universelle Eigenschaft respektiert. Die Elemente von $V \otimes W$ heißen Tensoren.

Für einen Koordinatenwechsel, der durch die linearen Abbildungen

$$\beta : V \rightarrow \tilde{V}, \quad \gamma : W \rightarrow \tilde{W}$$

gegeben ist, wird eine lineare Abbildung

$$(\beta \otimes \gamma) : V \otimes W \rightarrow \widetilde{V} \otimes \widetilde{W}$$

induziert, indem die universelle Eigenschaft auf $X = \widetilde{V} \otimes \widetilde{W}$ und $\alpha = \widetilde{\tau}_\otimes \circ (\beta \times \gamma)$ angewendet wird, d.h. man erhält das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (v, w) & V \times W & \xrightarrow{\tau_\otimes} & V \otimes W \\ \downarrow & \downarrow (\beta \times \gamma) & & \downarrow (\beta \otimes \gamma) \\ (\beta(v), \gamma(w)) & \widetilde{V} \times \widetilde{W} & \xrightarrow{\widetilde{\tau}_\otimes} & \widetilde{V} \otimes \widetilde{W} \end{array}$$

Diese linearen Abbildungen lassen sich auch in Basisdarstellung angeben. Dafür seien β und γ in Koordinaten ohne Einsteinsche Summenkonvention durch

$$\beta(e_i) = \sum_k b_i^k \widetilde{e}_k, \quad \gamma(e'_j) = \sum_l c_j^l \widetilde{e}'_l$$

gegeben. Es folgt also erst

$$(\beta \otimes \gamma)(e_i \otimes e'_j) = \sum_{k,l} b_i^k c_j^l \widetilde{e}_k \otimes \widetilde{e}'_l$$

und damit

$$(\beta \otimes \gamma) \left(\sum_{i,j} A^{ij} e_i \otimes e_j \right) = \sum_{k,l} \left(\sum_{i,j} b_i^k c_j^l A^{ij} \right) \widetilde{e}_k \otimes \widetilde{e}'_l.$$

Die Transformation der Koordinaten ist also

$$(\beta \otimes \gamma) : (A^{ij}) \rightarrow \left(\sum_{i,j} b_i^k c_j^l A^{ij} \right) \quad (3.1.1)$$

Dieses Transformationsverhalten der A^{ij} nennt man kontravariant.

Da der Dualraum V^* eines K -Vektorraums V als Menge aller K -linearen Abbildungen von V in den zugrunde liegenden Körper K , d.h.

$$V^* := \text{Hom}_K(V, K),$$

selbst ein Vektorraum ist, lässt sich das Tensorprodukt auch auf dem Dualraum definieren. Im Falle des Vektorraums V der Dimension n mit Basis (e_1, \dots, e_n) lässt sich die duale Basis (e^1, \dots, e^n) durch

$$e^i(e_j) := \delta_j^i$$

definieren. Durch die entgegengesetzte Indexstellung der Basiselemente erhält man für das Transformationsverhalten der Elemente des Dualraums ebenfalls die entgegengesetzte Indexstellung

$$(A_{ij}) \rightarrow \left(\sum_{i,j} b_k^i c_l^j A_{ij} \right)$$

zu Gleichung (3.1.1). Jeder Tensor lässt sich also durch seine Komponenten via

$$\left(A^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_l} \right) \in V_1 \otimes \dots \otimes V_k \otimes W_1^* \otimes \dots \otimes W_l^*$$

darstellen und man kann ohne Betrachtung der expliziten Homomorphismen des Dualraums in der Basisdarstellung arbeiten.

Ein Tensor mit n kontravarianten und m kovarianten Indizes heißt Tensor vom Typ (n, m) und hat die Stufe $n + m$.

3.1.2. Der metrische Tensor

Auf einer abstrakt eingeführten differenzierbaren Mannigfaltigkeit \mathcal{M} besteht zunächst keine Möglichkeit, die Länge eines Tangentialvektors zu messen. Da der Tangentialraum $T_p\mathcal{M}$ in jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ ein Vektorraum ist, lässt sich auf $T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M}$ ein $(0, 2)$ -Tensor $g_{ik}(p)$, also eine Bilinearform, definieren. Um sicher zu stellen, dass die durch diese Bilinearform eingeführte Metrik mit der Topologie des Raumes verträglich ist, wählt man eine sogenannte Riemannsche Metrik, die durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert ist: Der metrische Tensor $g_{ik}(p)$ soll in jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ ein hinreichend oft stetig differenzierbarer, symmetrischer Tensor sein, mit

$$\det g_{ik}(p) =: |g| \neq 0 \quad \forall p \in \mathcal{M}.$$

Im eigentlichen Sinne ist der metrische Tensor g_{ik} ein Tensorfeld auf \mathcal{M} und das Tupel (\mathcal{M}, g_{ik}) heißt dann (Pseudo-)Riemannscher Raum. Das Linienelement ds^2 nimmt damit die Form

$$ds^2 := g_{ik} dx^i dx^k$$

an. Dieses Linienelement ist invariant unter Koordinatentransformationen, da die dx^k kontravariante Vektoren sind und g_{ik} ein kovarianter Tensor 2.Stufe ist.

Auf dem Riemannschen Raum (\mathcal{M}, g_{ik}) sind Abstände wohldefiniert und man kann

eine Bewegung im Gravitationsfeld, welches durch g_{ik} beschrieben ist, charakterisieren. Die extremale Kurve $x(t)$, mit t einem Zeitparameter, die zwei Raumzeitpunkte miteinander verbindet, nennt man Geodätische und sie erfüllt die Geodätengleichung

$$\ddot{x}^m + \Gamma^m_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l = 0$$

mit den Christoffel-Symbolen 2. Art

$$\Gamma^m_{kl} := g^{im} \Gamma_{ikl}, \quad (3.1.2)$$

die über die Christoffel-Symbole 1. Art

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) \quad (3.1.3)$$

gegeben sind.

3.1.3. Die kovariante Ableitung

In einer Tensorgleichung sind partielle Ableitungen eine ungeeignete Wahl, da sie nicht invariant sind unter Koordinatenwechsel. Denn betrachtet man ein Vektorfeld A^i unter einer Koordinatentransformation $x^i \mapsto \bar{x}^i$, so transformiert das Vektorfeld nach Gleichung (3.1.1) kontravariant in der Form

$$A^{\bar{i}} = \frac{\partial x^{\bar{i}}}{\partial x^k} A^k.$$

Leitet man nun das transformierte Vektorfeld nach den neuen Variablen partiell ab, so ist die Ableitung in gekrümmten Koordinaten kein Tensor mehr. Dies gilt insbesondere für gekrümmte Koordinaten eines flachen Raumes. Daher definiert man die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes A^i

$$A^i_{;k} := A^i_{,k} + \Gamma^i_{ka} A^a, \quad (3.1.4)$$

so, dass die Ableitung wieder einen Tensor ergibt. Durch die Struktur des Tensorproduktes lässt sich diese Definition der kovarianten Ableitung eines Vektors A^i auf Tensoren beliebiger Stufe konsistent zu

$$\begin{aligned} T^{ik\dots}_{lm\dots;r} &:= T^{ik\dots}_{lm\dots,r} \\ &+ \Gamma^i_{rs} T^{sk\dots}_{lm\dots} + \text{für jeden kontravarianten Index} \\ &- \Gamma^s_{rl} T^{ik\dots}_{sm\dots} - \text{für jeden kovarianten Index} \end{aligned}$$

erweitern. Die unterschiedliche Vorzeichenwahl ist notwendig, um für jedes Skalarfeld die gewünschte Übereinstimmung der partiellen und der kovarianten Ableitung sowie die Gültigkeit der Produktregel zu erhalten.

Eine wesentliche Eigenschaft der kovarianten Ableitung ist, dass die Komponenten des metrischen Tensors kovariant konstant sind, d.h. es gilt

$$g_{ik;l} = \delta_{i;l}^k = g^{ik}{}_{;l} = 0.$$

Daher lassen sich die Indizes mittels des metrischen Tensors sogar innerhalb kovarianter Ableitungen beliebig hinauf und hinunter ziehen.

3.1.4. Der Riemannsche Krümmungstensor

Auf einem Riemannschen Raum gibt es für kovariante Ableitungen im Allgemeinen kein Analogon zum Satz von Schwarz. Die Differenz der beiden Ausdrücke $A_{i;k;j}$ und $A_{i;j;k}$ hängt direkt mit dessen lokaler Krümmung zusammen und ist durch die Ricci-Identität

$$A_{i;k;j} - A_{i;j;k} = A_r R^r{}_{ikj}, \quad (3.1.5)$$

mit dem Riemannschen Krümmungstensor

$$R^r{}_{ikj} := \Gamma^r{}_{ij,k} - \Gamma^r{}_{ik,j} + \Gamma^r{}_{mk}\Gamma^m{}_{ij} - \Gamma^r{}_{mj}\Gamma^m{}_{ik} \quad (3.1.6)$$

und den Christoffel-Symbolen 2. Art aus Gleichung (3.1.2), gegeben. Die Tensoreigenschaft von $R^r{}_{ikj}$ folgt mittels des Quotiententheorems [Schrö 2005, S.51] sofort aus der Ricci-Identität (3.1.5).

Durch Herunterziehen des ersten Indizes von $R^r{}_{ikj}$ aus Gleichung (3.1.6), erhält man die vollständig kovariante Form des Riemannschen Krümmungstensors

$$\begin{aligned} R_{hijk} &= R^r{}_{ijk}g_{hr} \\ &= \frac{1}{2}(g_{hk,ij} + g_{ij,hk} - g_{ik,jh} - g_{jh,ik}) + \\ &\quad g^{ml}(\Gamma_{mij}\Gamma_{lhk} - \Gamma_{mik}\Gamma_{lhj}), \end{aligned}$$

aus dem man seine Symmetrieeigenschaften ablesen kann:

- (i) $R_{hijk} = -R_{ihjk}$
- (ii) $R_{hijk} = -R_{hikj}$
- (iii) $R_{hijk} = R_{jkhi}$

$$(iv) \quad R_{hijk} + R_{hjki} + R_{hkij} = 0$$

Im n -dimensionalen Raum werden durch diese Symmetrieeigenschaften die Zahl der unabhängigen Komponenten des Krümmungstensors auf $n^2(n^2 - 1)/12$ reduziert. Im Fall $n = 4$ bleiben somit noch 20 unabhängige Komponenten. Genau dann wenn der Riemannsche Krümmungstensor in jedem Punkt verschwindet, ist der Riemannsche Raum lokal flach. Durch Kontraktion von R_{hijk} lassen sich zwei neue Größen definieren. Dies ist zum einen der Ricci-Tensor

$$R_{ik} := R^h_{ikh} = R_{ki} \quad (3.1.7)$$

und zum anderen der Ricci-Skalar

$$R := g^{ik} R_{ik}. \quad (3.1.8)$$

Aus der Symmetrieeigenschaft (iv) lässt sich durch ein paar algebraische Umformungen der in $n = 4$ Dimensionen einzige divergenzfreie Tensor ablesen, der nur aus g_{ik} und dessen ersten beiden Ableitungen besteht [AmDuJo 1997, S. 40, Referenz hierin]. Er heißt Einstein-Tensor.

$$\boxed{G_{ik} := R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R \quad \text{mit} \quad G^{ik}_{;k} = 0} \quad (3.1.9.a,b)$$

4. Allgemeine Relativitätstheorie

Die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) ist eine Feldtheorie, die die Gravitation als geometrische Eigenschaft der gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit beschreibt. Da die ART für hinreichend kleine Gebiete in die Spezielle Relativitätstheorie übergeht, muss die ART lokal lorentzkovariant sein. Damit ist die Lorentzgruppe $O(3, 1)$ die lokale Symmetriegruppe und die ART ist eine Eichtheorie. Die grundlegenden Prinzipien und die für diese Arbeit relevanten Gleichungen der ART des folgenden Kapitels sind sinngemäß aus [SeUr 2002] und [Schrö 2007] entnommen.

4.1. Prinzipien der Allgemeinen Relativitätstheorie

Die Prinzipien der ART stellen Forderungen an die Raumzeit, die globaler und auch lokaler Natur sein können. Sie fordern insbesondere den Zusammenhang zwischen Spezieller und Allgemeiner Relativitätstheorie.

4.1.1. Kosmologisches Prinzip

Das kosmologische Prinzip besagt, dass das Weltall isotrop ist. Dies impliziert Homogenität und somit hat die Erde keinen privilegierten Platz im Universum. Der wichtigste experimentelle Hinweis hierfür ist die Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung. Bei dem Versuch, das Weltall als Ganzes zu betrachten, kann man die nichtgravitativen Kräfte vernachlässigen, da sie entweder kurzreichweitig sind oder sich wegen der Ladungsneutralität über weite Strecken kompensieren. Auch für den Energie-Impuls-Tensor lassen sich vereinfachende Annahmen machen. Man fasst die Materie als ein Gas auf, in dem die Galaxien die Rolle der Atome, die Haufen von Galaxien diejenige der Moleküle spielen. Es ist also ein Gas einheitlicher Dichte zu beschreiben.

4.1.2. Äquivalenzprinzipien und allgemeine Kovarianz

Das schwache Äquivalenzprinzip:

Das schwache Äquivalenzprinzip besagt, dass man für jedes beliebige Gravitationsfeld in jedem Raumzeitpunkt ein lokales Inertialsystem wählen kann, so dass gravitative Effekte auf Bewegungen makroskopischer Teilchen in einer hinreichend kleinen Umgebung des Raumzeitpunktes vernachlässigbar sind.

Das starke Äquivalenzprinzip:

Das starke Äquivalenzprinzip fordert, dass man für jedes beliebige Gravitationsfeld in jedem Raumzeitpunkt ein lokales Inertialsystem wählen kann, so dass in ihm die Spezielle Relativitätstheorie gilt.

Allgemeine Kovarianz:

Um sich von den ausgezeichneten globalen Inertialsystemen der Speziellen Relativitätstheorie zugunsten der lokalen Inertialsysteme zu lösen, muss die ART unter beliebigen nichtlinearen Koordinatentransformationen invariant sein. Eine solche Theorie nennt man dann kovariant und sie lässt sich durch Tensorgleichungen formulieren.

4.2. Die Einsteinschen Feldgleichungen

Zur Herleitung der Einsteinschen Feldgleichungen betrachtet man erneut den Einstein-Tensor G_{ik} aus Gleichungen (3.1.9.a,b)

$$G_{ik} := R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R$$

mit den üblichen Bezeichnungen aus Kapitel 3.1. In der ART ist der Energie-Impuls-Tensor die Quelle der Raumzeitkrümmung $G_{ik} = \frac{\kappa}{c^2}T_{ik}$ mit $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ der Einsteinschen Gravitationskonstanten und G der Newtonschen Gravitationskonstanten. Damit erhält man die übliche Form der Einsteinschen Feldgleichungen zu

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{\kappa}{c^2}T_{ik}. \quad (4.2.1)$$

Da der Einstein-Tensor G_{ik} symmetrisch und divergenzfrei ist, ist T_{ik} ebenfalls symmetrisch und divergenzfrei. Da experimentell nur Energiedifferenzen und kein

Absolutwert der Energie messbar ist, addiert man zu den Einsteinschen Feldgleichungen einen lokal lorentzkovarianten Energiebeitrag des Vakuums $T_{ik}^V = \frac{\Lambda}{\kappa} g_{ik}$ mit der Vakuumenergiedichte Λ , die nur in der Kosmologie von Bedeutung ist. Die verallgemeinerten Einsteinschen Feldgleichungen lauten damit

$$\boxed{R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{\kappa}{c^2}T_{ik} + \Lambda g_{ik}}. \quad (4.2.2)$$

Setzt man die Definitionen des Ricci-Tensors und des Ricci-Skalars in die Gleichungen (4.2.1) bzw. (4.2.2) ein, so stellt man fest, dass diese in den zweiten Ableitungen linear, in den ersten Ableitungen hingegen nicht linear sind. Diese Kopplung ist der Grund, der das Auffinden von Lösungen so kompliziert macht.

4.3. Die Einstein-Hilbert-Wirkung

Wenn eine Feldtheorie lorentzkovariant ist, kann man die Bewegungsgleichungen stets aus einem Variationsprinzip herleiten. Es lässt sich zeigen, dass die Einstein-Hilbert-Wirkung, die auf die verallgemeinerten Einsteinschen Feldgleichungen (4.2.2) führt, für jede randlose Mannigfaltigkeit \mathcal{M} durch

$$S_{EH} = \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{1}{2\kappa} (R(x) - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M(x) \right] \sqrt{|g(x)|} d^4x \quad (4.3.1)$$

gegeben ist. Hierbei ist \mathcal{L}_M die Lagrangedichte der Materie, $|g|$ die Determinante des metrischen Tensors und R wieder der Ricci-Skalar. Ein Beweis dafür, dass die Einsteinschen Feldgleichungen aus der Einstein-Hilbert-Wirkung folgen, befindet sich im Anhang A.1. Auf die genaue Form der Lagrangedichte wird hier verzichtet, da im Rahmen dieser Arbeit nur ein freies Gravitationsfeld $T_{ik} = 0$ betrachtet wird, für das die Lagrangedichte ebenfalls verschwindet. Damit reduziert sich die Einstein-Hilbert-Wirkung des leeren Raumes zu

$$\boxed{S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathcal{M}} (R(x) - 2\Lambda) \sqrt{|g(x)|} d^4x}. \quad (4.3.2)$$

Für das freie Gravitationsfeld hängt die Einstein-Hilbert-Wirkung also vom Ricci-Skalarfeld $R(x)$, vom metrischen Tensorfeld $g(x)$ sowie vom Wert der kosmologischen Konstanten Λ und der Geometrie der Raumzeit \mathcal{M} ab.

4.4. Friedmann-Universen

Für die Friedmann-Universen macht man einschränkende Annahmen an die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Zusätzlich zur Isotropieforderung des kosmologischen Prinzips soll

die Projektion der Stromlinien, auf den räumlichen Anteil der Mannigfaltigkeit, aller bewegten Teilchen frei von Rotation und Scherung sein. Hierdurch werden die zugelassenen Mannigfaltigkeiten auf einfach zusammenhängende Geometrien eingeschränkt, deren Raumanteil rotationssymmetrisch ist.

4.4.1. Das Robertson-Walker-Linienelement

Das Robertson-Walker-Linienelement ist das Resultat der Annahmen eines Friedmann-Universums in problemangepassten Koordinaten. Hierbei bieten sich auf Grund der Rotationssymmetrie des Raumanteils offenbar Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) an. Für die Zeitkoordinate t wählt man die Eigenzeit eines geeignet mitbewegten Bezugssystems. Durch Einführen zweier Skalenfaktoren $k \in \{1, 0, -1\}$ und $\mathcal{R}(t)$, so dass k die Topologie charakterisiert und $\mathcal{R}(t)$ die Ausdehnung des Raumes skaliert, folgt das Robertson-Walker-Linienelement zu

$$ds^2 = dt^2 - \mathcal{R}^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (4.4.1)$$

Diese Metrik erlaubt auf Grund ihrer Konstruktion nur eine rotationssymmetrische Expansion und Kontraktion des Universums. Das induzierte räumliche Linienelement $d\sigma^2 = dt^2 - ds^2$ ist für

- $k = 0$ euklidisch,
- $k = 1$ (lokal) sphärisch,
- $k = -1$ (lokal) hyperbolisch

und der durch die Robertson-Walker-Metrik beschriebene Raum hat für

- $k = 0$ keine Krümmung und ist auf Grund der Annahme einfach zusammenhängend unendlich ausgedehnt,
- $k = 1$ eine positive Krümmung, ist endlich ausgedehnt und hat eine Koordinatensingularität in $r = 1$,
- $k = -1$ eine negative Krümmung und ist unendlich ausgedehnt.

Im Falle der sphärischen Symmetrie ist der Skalenfaktor $\mathcal{R}(t)$ der Radius des Raumes und r kann nur Werte in $[0, 1)$ annehmen. Überlegungen, die die scheinbare Hellichkeit des Universums betreffen, bestärken Vermutungen für eine Geometrie mit $k \neq 0$.

4.4.2. Zeitentwicklung der Friedmann-Universen

Um die Zeitentwicklung der Friedmann-Universen besser zu verstehen, setzt man die Metrik des Robertson-Walker-Linienelements (4.4.1) in die Feldgleichungen (4.2.2) ein und es verbleiben nur die folgenden zwei Bedingungen

$$\boxed{\kappa\rho + \Lambda = 3\frac{k + \dot{\mathcal{R}}^2}{\mathcal{R}^2} \quad \text{und} \quad \kappa p - \Lambda = -\frac{2\mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} + \dot{\mathcal{R}}^2 + k}{\mathcal{R}^2}}, \quad (4.4.2.a,b)$$

da alle anderen Gleichungen identisch erfüllt sind. Beschreibt man weiter die Materie des Friedmann-Universum als ideale Flüssigkeit, so erhält man im Fall inkompressibler Materie, also für einen Druck $p = 0$, dass $\rho = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{R}^3}$ gilt. Hierbei ist \mathcal{M} eine Integrationskonstante aus der hydrodynamischen Kontinuitätsgleichung

$$\left(\rho u^k\right)_{;k} + pu_{;k}^k = 0,$$

wobei u^k die Vierergeschwindigkeit der mitbewegten Materie ist. Somit folgt aus Gleichungen (4.4.2.a,b) die Relation

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{\kappa\mathcal{M}}{3\mathcal{R}} + \frac{1}{3}\Lambda\mathcal{R}^2 - k. \quad (4.4.3)$$

Für den Fall eines strahlungsdominierten Universums mit Druck $p = \frac{\rho}{3}$ erhält man mit einer analogen Betrachtung $\rho = \frac{K}{\mathcal{R}^4}$, wobei auch $K = \text{const.}$ eine Integrationskonstante aus der hydrodynamischen Kontinuitätsgleichung ist und man erhält

$$\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{\kappa K}{3\mathcal{R}^2} + \frac{1}{3}\Lambda\mathcal{R}^2 - k. \quad (4.4.4)$$

Die schnellere Abnahme der Dichte der elektromagnetischen Strahlung um einen Faktor $\frac{1}{\mathcal{R}}$ kommt durch die Rotverschiebung zustande. Falls die Materie und die Strahlung nicht miteinander wechselwirken, kann man die Gleichungen (4.4.3) und (4.4.4) zu

$$\boxed{\dot{\mathcal{R}}^2 = \frac{\kappa K}{3\mathcal{R}^2} + \frac{\kappa\mathcal{M}}{3\mathcal{R}} - k + \frac{1}{3}\Lambda\mathcal{R}^2 =: F_k(\mathcal{R})} \quad (4.4.5)$$

zusammenfassen.

Die statische Lösung der Gleichungen (4.4.5)

Eine statische Lösung ist offenbar dadurch charakterisiert, dass $\dot{\mathcal{R}} = 0 = \ddot{\mathcal{R}}$ gilt. Daher folgt aus den Gleichungen (4.4.2.a,b) die Gleichgewichtsbedingung des Universums

$$\kappa\rho = 2\Lambda. \quad (4.4.6)$$

Hieran lässt sich ablesen, dass höchstens im Fall einer positiven Vakuumenergiedichte, der sogenannten kritischen Vakuumenergiedichte Λ_c , eine (instabile) statische Lösung existieren kann.

Die nicht-statischen Lösungen der Gleichungen (4.4.5)

Um die nicht-statischen Lösungen von (4.4.5) zu finden, muss $F_k(\mathcal{R})$ analysiert werden. Es muss also eine Fallunterscheidung für $k = \pm 1, 0$ und verschiedene Λ -Werte durchgeführt werden. Man findet, dass es neben den intuitiven Fallunterscheidungen $\Lambda < 0$, $\Lambda = 0$ und $\Lambda > 0$ für $k = 1$ den oben angegebenen zusätzlichen positiven kritischen Wert Λ_c gibt. Bemerkenswert ist weiterhin, dass sich das Verhalten von $k = 0$ und $k = -1$ nur geringfügig unterscheidet.

- **Negative Vakuumenergiedichte $\Lambda < 0$ für beliebige Werte k :** Falls $\Lambda < 0$ ist, dann existiert nach Gleichung (4.4.5) immer ein Wert \mathcal{R}_0 , so dass $F(\mathcal{R}_0) = 0$ und $F(\mathcal{R}) < 0 \quad \forall \mathcal{R} > \mathcal{R}_0$. \mathcal{R}_0 ist im Falle der sphärischen Geometrie der maximale Radius des Universums (vgl. Abbildung 4.1).

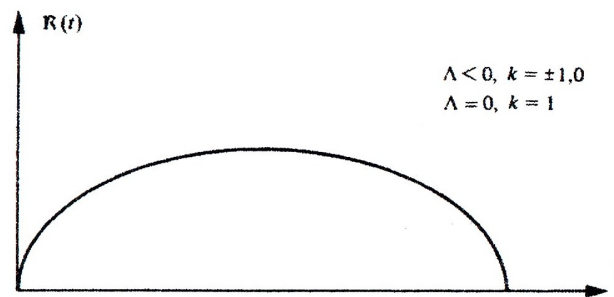


Abbildung 4.1.: Lösungstypen der Friedmann-Gleichungen für $\Lambda < 0, k = \pm 1, 0$ und $\Lambda = 0, k = 1$ aus [SeUr 2002, S. 135]

- **Keine Vakuumenergiedichte $\Lambda = 0$:**
 - Für $k = 1$ bleibt Gleichung (4.4.5) qualitativ wie im Fall negativer Energiedichte, also wie in Abbildung 4.1.
 - Für $k = -1, 0$ verschwindet der negative Summand in Gleichung (4.4.5) und $F_k(\mathcal{R})$ ist eine monoton wachsende Funktion. Insbesondere gilt $\mathcal{R}(\Lambda < 0, k = -1) \geq \mathcal{R}(\Lambda < 0, k = 0)$ (vgl. Abbildung 4.2)

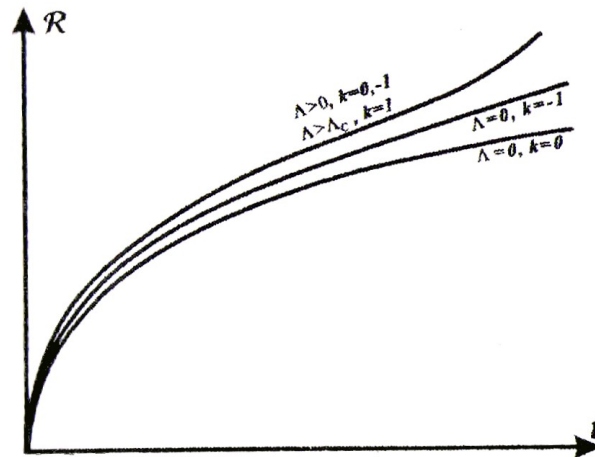


Abbildung 4.2.: Lösungstypen der Friedmann-Gleichungen für $\Lambda \geq 0, k = -1, 0$ und $\Lambda > \Lambda_c, k = 1$ aus [SeUr 2002, S. 137]

- **Positive Vakuumenergiedichte $\Lambda > 0$** Wie bereits erwähnt, kann man im Fall einer positiven Vakuumenergiedichte eine statische Lösung von Gleichung (4.4.5) erhalten. Für die oben angesprochene Fallunterscheidung bezüglich dieser kritischen Vakuumenergiedichte betrachtet man die Funktion $F_k(\mathcal{R})$ in Abbildung 4.3.

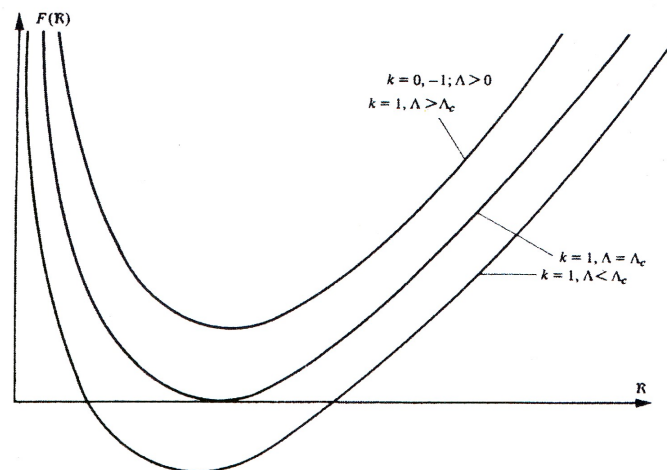


Abbildung 4.3.: Charakterisierung der Lösungstypen für $\Lambda > 0$ aus [SeUr 2002, S. 136]

- Für $k = 0, -1$ ist $F_k(\mathcal{R})$ für alle Werte des Skalenfaktors \mathcal{R} und alle po-

sitiven Werte von Λ selbst positiv und man hat ein stetig expandierendes Universum.

- Für $k = 1$ hat man den oben eingeführten kritischen Wert der Vakuumenergiedichte Λ_c , denn im Minimum gilt wegen $F_k(\mathcal{R}) = \dot{\mathcal{R}}^2$ sowie $\ddot{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \frac{dF_k(\mathcal{R})}{d\mathcal{R}}$ natürlich $\dot{\mathcal{R}} = 0 = \ddot{\mathcal{R}}$. Zusätzlich zu dieser statischen Lösung kann sich das Universum auch, wie in Abbildung 4.4 gezeigt, asymptotisch an den statischen Einstein-Kosmos annähern. Für

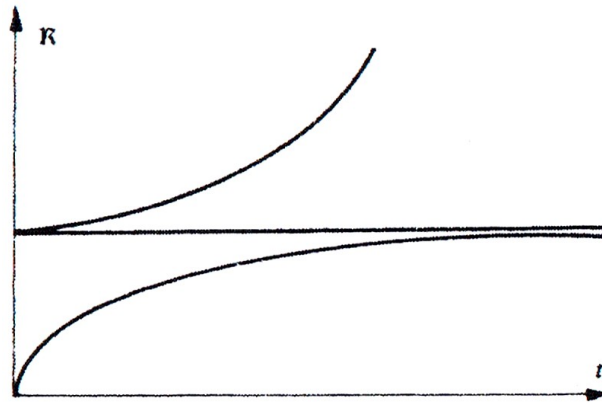


Abbildung 4.4.: Asymptotische Lösungstypen für $\Lambda = \Lambda_c$ aus [SeUr 2002, S. 137]

$0 < \Lambda < \Lambda_c$ erhält man abhängig vom Anfangsradius die in Abbildung (4.5) dargestellte Zeitentwicklung. Und für $\Lambda > \Lambda_c$ hat man das gleiche

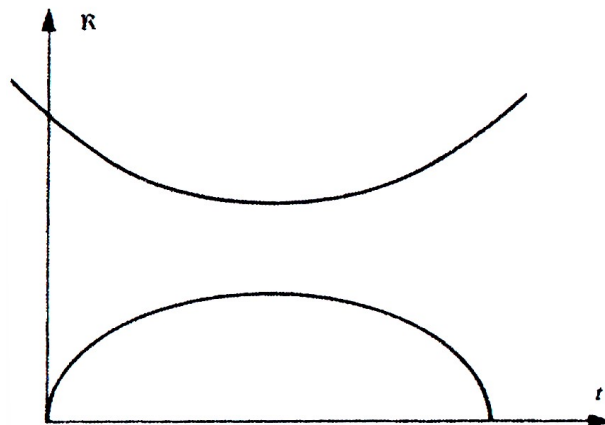


Abbildung 4.5.: Lösungstypen für $0 < \Lambda < \Lambda_c$ für $k = 1$ aus [SeUr 2002, S. 137]

Verhalten wie für $\Lambda > 0, k = 0, -1$ (vgl. Abbildung 4.2).

5. Der Regge-Kalkül

Der Regge-Kalkül liefert simpliziale Approximationen von Raumzeiten, die Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen sind. Hierzu trianguliert man eine Mannigfaltigkeit der Dimension D durch einen Simplizialkomplex, der aus D -dimensionalen Simplexes σ^D (vgl. Kapitel 2.1) besteht. Die Teilsimplexes niedrigerer Dimension werden mit σ^d , $d \in \{0, 1, \dots, D\}$, bezeichnet. Regge schlug 1961 vor [AmDuJo 1997, S. 279], dass das simpliziale Analogon der Einstein-Hilbert-Wirkung ohne Materiefelder durch

$$S_R = \sum_{\sigma^{D-2} \in T} \epsilon_{\sigma^{D-2}} V_{\sigma^{D-2}} - \Lambda \sum_{\sigma^D \in T} V_{\sigma^D} \quad (5.0.1)$$

gegeben ist. Hierbei ist der erste Summand

$$S_R^K := \sum_{\sigma^{D-2} \in T} \epsilon_{\sigma^{D-2}} V_{\sigma^{D-2}} \quad (5.0.2)$$

der Krümmungsanteil mit dem Defizit-Winkel

$$\epsilon_{\sigma^{D-2}} := 2\pi - \sum_{\sigma^D \ni \sigma^{D-2}} \alpha(\sigma^{D-2}, \sigma^D) \quad (5.0.3)$$

und dem Öffnungswinkel $\alpha(\sigma^{D-2}, \sigma^D)$ am Simplex σ^{D-2} . Der zweite Summand

$$S_R^{Vol} := \Lambda \sum_{\sigma^D \in T} V_{\sigma^D} \quad (5.0.4)$$

ist der Volumenanteil der Regge-Wirkung. Wie in Regges ursprünglicher Formulierung wurde auch hier auf den Vorfaktor κ^{-1} verzichtet. Falls ein numerischer Vergleich der Regge-Wirkung und der Einstein-Hilbert-Wirkung von Interesse ist, muss dieser Faktor natürlich berücksichtigt werden.

Man überlegt sich leicht, dass der Krümmungsterm auf Grund seiner Proportionalität zum Defizit-Winkel nur auf Triangulierungen gekrümmter Mannigfaltigkeiten einen Beitrag liefern kann. Für eine gleichseitige Triangulierung T einer D -dimensionalen Mannigfaltigkeit vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$S_R = \sum_{\sigma^{D-2} \in T} \epsilon_{\sigma^{D-2}} V_{\sigma^{D-2}} - \Lambda N_D(T) V_{\sigma^D}, \quad (5.0.5)$$

wobei $N_D(T)$ die Anzahl D -dimensionaler Simplizes der Triangulierung T angibt (vgl. Kapitel 2.2.1). Eine Herleitung der Regge-Wirkung aus der Einstein-Hilbert-Wirkung wurde unter anderem 1984 von R. Friedberg und T.D. Lee gegeben [FrLe 1984]. In ihrem Beweis, der im Anhang A.2 skizziert ist, liefern sie eine im Vergleich zur Regge-Wirkung etwas stärkere Aussage, da sie insbesondere die folgende distributionswertige Relation zwischen Integrand und Summand beweisen

$$\boxed{\sqrt{|g|}R = 2\epsilon_{\sigma^{D-2}}\delta(x_1)\delta(x_2)}, \quad (5.0.6)$$

die im üblichen Sinne zu verstehen ist. Hierbei sind x_1 und x_2 die zu σ^{D-2} senkrechten Koordinatenachsen in dem umgebenden \mathbb{R}^D .

Teil II.

Die Regge-Wirkung eines statischen, sphärischen Friedmann-Universums

6. Die Wahl der Triangulierungen

Eine der drei möglichen Topologien, die Lösungen der Friedmann-Modelle sind, ist, wie bereits erwähnt, die durch den Wert $k = 1$ charakterisierte sphärische Geometrie. In diesem Fall sieht der Raumanteil topologisch aus wie die Oberfläche S_3 der vierdimensionalen Vollkugel. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Regge-Kalkül auf die triangulierte Oberfläche S_3 angewendet, wohingegen der Zeitanteil \mathbb{R} kontinuierlich bleibt.

6.1. Vorüberlegungen zur Einstein-Hilbert-Wirkung

Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = S_3 \times \mathbb{R}$ ist als randlose, glatte Mannigfaltigkeit ein mögliches Integrationsgebiet der Einstein-Hilbert-Wirkung und man kann diese in der Form

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|g(x,t)|} d^3x (R(x,t) - 2\Lambda) \quad (6.1.1)$$

schreiben. Die Robertson-Walker-Metrik aus Kapitel 4.4.1, die den Friedmann-Modellen zugrunde liegt, ist eine Metrik der Form

$$g(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma(x,t) \end{pmatrix},$$

mit γ dem räumlichen Anteil des metrischen Tensors g . Da der Ricci-Skalar allein aus der zugrunde liegenden Metrik berechnet wird, wird dieser im folgenden mit R_g bzw. R_γ bezeichnet. In solch einer Metrik $g(x,t)$ sind Raum- und Zeitanteil offenbar senkrecht zueinander und es gilt

$$\sqrt{|g(x,t)|} = \sqrt{|\gamma(x,t)|}.$$

Schiebt man noch eine Null der Form $(R_\gamma - R_\gamma)$ in Gleichung (6.1.1) ein und zieht den Integranden auseinander, so erhält man die zentrale Gleichung:

$$\boxed{S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x (R_\gamma(x,t) - 2\Lambda) + \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x (R_g(x,t) - R_\gamma(x,t))} \quad (6.1.2)$$

Die Einstein-Hilbert-Wirkung lässt sich also in die zwei Summanden

$$S_{EH}^I = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x (R_\gamma(x,t) - 2\Lambda) \quad (6.1.3)$$

und

$$S_{EH}^{II} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x (R_g(x,t) - R_\gamma(x,t)) \quad (6.1.4)$$

zerlegen, die zunächst unabhängig voneinander betrachtet werden können. Diese Zerlegung begründet sich darin, dass das räumliche Integral

$$\boxed{S_{EH}^{I,S_3} := \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x (R_\gamma(x,t) - 2\Lambda)} \quad (6.1.5)$$

des ersten Teils S_{EH}^I der Einstein-Hilbert-Wirkung genau die Form hat, die zur Anwendung des Regge-Kalküls benötigt wird. Desweiteren zeigt man in Kapitel 8.1.1, dass aus der Forderung $\dot{R} = 0 = \ddot{R}$ eines statischen Friedmann-Universums sofort $S_{EH}^{II} \propto (R_g(x,t) - R_\gamma(x,t)) = 0$ folgt. Der erste Teil der Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH}^I beschreibt also allein den statischen Anteil des sphärischen Friedmann-Universums und ist demnach der einzige Summand, der in diesem Kapitel betrachtet wird.

6.2. Die gewählten Simplicialkomplexe

Möchte man den Regge-Kalkül auf Gleichung (6.1.5) anwenden, muss zunächst das Integrationsgebiet trianguliert werden. Die einfachsten Triangulierungen, die der Symmetrie der S_3 gerecht werden, sind genau die Oberflächen der vierdimensionalen verallgemeinerten Platonischen Körper $\{p, q, r\}$ aus Kapitel 2.2, die gleichzeitig einen Simplicialkomplex bilden. Die anderen verallgemeinerten Platonischen Körper können auch nicht bezüglich eines verallgemeinerten Triangulierungsbegriffs verwendet werden. Der Grund hierfür ist, dass die geringere Anzahl geometrischer Existenzbedingungen zu einer größeren Anzahl übriger Freiheitsgrade führt, so dass die Angabe der Kantenlängen hier nicht ausreicht um diese Polyeder eindeutig zu bestimmen. Sogar im gleichseitigen Fall reicht die Angabe der Kantenlänge bei dem 16-Zeller, der aus Würfeln zusammengesetzt ist, und bei dem 120-Zeller, der aus Ikosaedern zusammengesetzt ist, nicht aus, um diese eindeutig zu bestimmen, da insbesondere die Scherung auch nach Zusammensetzung zur Oberfläche der vierdimensionalen verallgemeinerten Platonischen Körper noch möglich ist. Im Gegensatz dazu ist der 24-Zeller, der aus Oktaedern zusammengesetzt ist, im gleichseitigen

Fall eindeutig, da seine Oberfläche aus Dreiecken besteht. Um zu verstehen, dass dies für die Eindeutigkeit des gleichseitigen Falls ausreicht, betrachtet man zunächst einen Oktaeder beliebiger Kantenlänge. Offenbar sind die einzelnen Dreiecke, aus denen die Oberfläche zusammengesetzt ist, jeweils eindeutig. Die zusätzlichen Freiheitsgrade haben also nur einen Einfluss auf die drei Schnittvierecke $(ABFD)$, $(ACFE)$ und $(BCDE)$ mit den Bezeichnungen wie in Abbildung 6.1. Diese las-

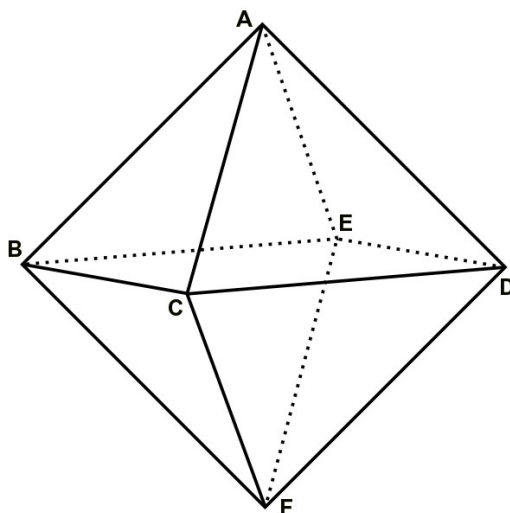


Abbildung 6.1.: Die Schnittvierecke innerhalb eines Oktaeders

sen sich innerhalb des Oktaeders allerdings nicht kontinuierlich deformieren, da dies durch die beiden Pyramiden verhindert wird. Dies geschieht dadurch, dass die Endpunkte von vier Kanten, die an einem gemeinsamen Vertex beginnen, nur für endlich viele Ausrichtungen in einer gemeinsamen Ebene liegen, also die Vertices eines Vierecks bilden. Da von diesen Vierecken nur eines konvex ist, ist dieses im gleichseitigen Fall auch das einzige existierende Viereck, da die hypothetischen, nicht-konvexen das Volumen Null zur Folge hätten. Daher ist der gleichseitige 24-Zeller durch Angabe seiner Kantenlänge ebenfalls eindeutig bestimmt, obwohl seine Oberfläche keinen Simplicialkomplex bildet und kann daher ebenfalls zum triangulieren verwendet werden. Formal müsste man natürlich erst jeden dieser Oktaeder in 3-Simplizes zerlegen, um dann den definierten Begriff der Triangulierung benutzen zu können. Dies ist allerdings nicht notwendig, da die Oktaeder im Inneren flach sind und die neuen Kanten damit keinen zusätzlichen Beitrag zur Krümmung liefern.

7. Die Regge-Wirkungen im statischen Fall

Die Zerlegung der Einstein-Hilbert-Wirkung in zwei Summanden wie in Gleichung (6.1.2) hat den statischen Anteil

$$S_{EH}^I = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x (R_\gamma(x,t) - 2\Lambda),$$

mit dem sich dieses Kapitel beschäftigt, absepariert. Auf Grund der unterschiedlichen Herangehensweise können und müssen Raum- und Zeitanteil separat betrachtet werden. Aber auch zur Triangulierung des Raumanteils mit den soeben eingeführten Oberflächen verallgemeinerter Platonischer Körper geht man in zwei Schritten vor. Im ersten Schritt wird eine gleichseitige Triangulierung der Kantenlänge l verwendet, so dass die Regge-Wirkung nur von diesem einen Parameter l abhängt. Dies hat die unmittelbare Folge, dass nur radiale Fluktuationen des Raumes beschreibbar sind, da die (diskrete) Kugelsymmetrie für jede Kantenlänge l natürlich erhalten bleibt. Im zweiten Schritt werden alle im Rahmen der geometrischen Existenzbedingungen (vgl. Anhang B) möglichen Kantenlängen zugelassen. Dadurch ist letztendlich jede Geometrie, die die Topologie nicht verändert, in der Beschreibung enthalten.

7.1. Gleichseitige Triangulierungen

Um alle verwendbaren, besonders symmetrischen Approximation auszunutzen, wird hier neben dem 5-, dem 16- und dem 600-Zeller zusätzlich noch der gleichseitige 24-Zeller, der nach Kapitel 6.2 ebenfalls durch die Kantenlänge l eindeutig bestimmt ist, zur Triangulierung verwendet.

7.1.1. Die Regge-Wirkung

Der Regge-Kalkül liefert die Regge-Wirkung als simpliziales Analogon zur Einstein-Hilbert-Wirkung zunächst als Funktion der Kantenlänge l . Da im gleichseitigen Fall

die (diskrete) Kugelsymmetrie erhalten bleibt, ist neben der Kantenlänge auch der Radius \mathcal{R} der Kugel, die alle Vertizes tangiert, ein sinnvoller Parameter. Zum späteren Vergleich mit den Einsteinschen Feldgleichungen und insbesondere zum besseren Vergleich untereinander werden die Regge-Wirkungen abschließend in eine Funktion des Kugelradius umgerechnet.

Die Regge-Wirkung als Funktion der Kantenlänge

Wendet man den Regge-Kalkül auf den ersten Summanden der Einstein-Hilbert-Wirkung S_{EH}^I an, so erhält man je ein simpliziales Analogon für den Krümmungs- und den Volumenterm. Daher werden diese beiden Terme im Folgenden zunächst separat betrachtet. Im gleichseitigen Fall erhält man also für den Volumenterm der Regge-Wirkung $S_R^{I,Vol}$ wegen Gleichung (5.0.4) sofort

$$S_R^{I,Vol} = \Lambda \int_{\mathbb{R}} dt N_3(T) V_{\sigma^3}, \quad (7.1.1)$$

mit $N_3(T)$ der Anzahl und V_{σ^3} dem Volumen der 3-Simplizes der gewählten Triangulierung T . Die Abhängigkeit der Größen vom Zeitpunkt t wird hier und im Folgenden zunächst unterdrückt, da er in den nächsten Berechnungen keine Bedeutung hat. Vor der eigentlichen Betrachtung des Krümmungsterms S_R^K aus Gleichung (5.0.2) vereinfacht man zunächst die Notation, indem man das eindimensionale Volumen V_{σ^1} , also die Kantenlänge, mit l bezeichnet.

Es gilt also

$$S_R^{I,K} = \int_{\mathbb{R}} dt \sum_{l \in T} \epsilon_l l \quad (7.1.2)$$

mit dem Defizit-Winkel

$$\epsilon_l := 2\pi - \sum_{\sigma^3 \ni l} \alpha(l, \sigma^3). \quad (7.1.3)$$

und dem Öffnungswinkel $\alpha(l, \sigma^3)$ an der Kante l bezüglich des anliegenden 3-Simplizes σ^3 . Auf Grund der Symmetrie der Triangulierung hat man an jeder Kante aller 3-Simplizes $\{p, q\}$ den gleichen Öffnungswinkel $\alpha_{\{p,q\}} := \alpha(l, \sigma^3)$ und somit auch den gleichen Defizit-Winkel

$$\epsilon_l = 2\pi - r\alpha_{\{p,q\}}. \quad (7.1.4)$$

Der Parameter r ist nach Definition des Schläfli-Symbols $\{p, q, r\}$ genau der Parameter r des dritten Eintrags des gewählten 4-Simplizes (vgl. Kapitel 2.2.1), da er die Anzahl r von 3-Simplizes angibt, die sich an jeder Kante berühren. Nach Wahl

der Triangulierung T hängt der Defizit-Winkel also nur noch von der Kantenlänge l ab und man erhält insgesamt

$$S_R^{I,K} = \int_{\mathbb{R}} dt N_1(T) [2\pi - r\alpha_{\{p,q\}}] l,$$

mit $N_1(T)$ der Anzahl Kanten der Triangulierung T . Die Regge-Wirkung einer gleichseitigen Triangulierung der S_3 , als Teil der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = S_3 \times \mathbb{R}$, durch die Oberfläche eines 4-dimensionalen Platonischen Körpers $\{p, q, r\}$ lautet also

$$\boxed{S_R^I = \int_{\mathbb{R}} dt N_1(T) l [2\pi - r\alpha_{\{p,q\}}(l)] - \Lambda \int_{\mathbb{R}} dt N_3(T) V_{\sigma^3}}. \quad (7.1.5)$$

Setzt man nun die charakteristischen Werte aus den Tabellen in Anhang C in (7.1.5) ein, so erhält man auf Grund der gerundeten Werte der Winkel die Regge-Wirkungen $S_R^{I,n}$ der n -Zeller als Funktion der jeweiligen Kantenlänge l approximativ zu:

$$\begin{aligned} S_R^{I,5}(l) &= \int_{\mathbb{R}} dt \left[\frac{371\pi}{45} l(t) - \frac{5\sqrt{2}\Lambda}{12} l^3(t) \right] \\ S_R^{I,16}(l) &= \int_{\mathbb{R}} dt \left[\frac{2336\pi}{225} l(t) - \frac{4\sqrt{2}\Lambda}{3} l^3(t) \right] \\ S_R^{I,24}(l) &= \int_{\mathbb{R}} dt \left[\frac{1264\pi}{75} l(t) - 8\sqrt{2}\Lambda l^3(t) \right] \\ S_R^{I,600}(l) &= \int_{\mathbb{R}} dt \left[\frac{88\pi}{3} l(t) - 50\sqrt{2}\Lambda l^3(t) \right] \end{aligned}$$

Die Regge-Wirkung als Funktion des Kugelradius

Da l stets die Kantenlänge der jeweiligen Triangulierung ist, bietet sich, wie bereits erwähnt, für die Regge-Wirkung der gleichseitigen Triangulierungen stattdessen der Kugelradius \mathcal{R} als Parameter an. Mit den Werten der letzten Spalte aus Tabelle

C.1 im Anhang C folgt nach Skalieren näherungsweise:

$$S_R^{I,5}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left[\mathcal{R}(t) - \frac{3\sqrt{2}\Lambda}{380\pi} \mathcal{R}^3(t) \right] \quad (7.1.6)$$

$$S_R^{I,16}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left[\mathcal{R}(t) - \frac{\sqrt{2}\Lambda}{62\pi} \mathcal{R}^3(t) \right] \quad (7.1.7)$$

$$S_R^{I,24}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left[\mathcal{R}(t) - \frac{\sqrt{2}\Lambda}{34\pi} \mathcal{R}^3(t) \right] \quad (7.1.8)$$

$$S_R^{I,600}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left[\mathcal{R}(t) - \frac{2\sqrt{2}\Lambda}{49\pi} \mathcal{R}^3(t) \right] \quad (7.1.9)$$

Die weniger anschauliche, aber wesentlich genauere Form dieser Regge-Wirkungen befindet sich im Anhang D.

7.2. Triangulierungen variabler Kantenlängen

Nachdem die Regge-Wirkung für den gleichseitigen Fall eines statischen Friedmann-Universums berechnet wurde, werden in diesem Kapitel die Kantenlängen beliebig variierbar sein. Beliebig bedeutet hier und im folgenden stets nur bis auf die natürlichen geometrischen Einschränkungen, die im Anhang B angegeben sind. Die Regge-Wirkung S_R^I lässt sich durch Angabe aller Kantenlängen l_{ij} zwischen den Vertizes i und j angeben, da jeder Simplicialkomplex, wie bereits in Kapitel 2.1 erwähnt, dadurch eindeutig bestimmt ist. Um dies zu erreichen, ist sowohl die Abhängigkeit der Öffnungswinkel als auch die der Volumina von den Kantenlängen zu bestimmen. Dies hat man letztendlich bereits im Fall gleichseitiger Polyeder gemacht, doch in diesem Fall reduzierte sich der Öffnungswinkel α auf eine von der Kantenlänge l unabhängige Konstante und das Volumen war schlicht proportional zu l^3 . Da dies für beliebig wählbare Kantenlängen erheblich komplizierter ist, müssen zunächst ein paar Bezeichnungen definiert werden.

7.2.1. Definition der Bezeichnungen

An der Kante $l_{ij}(=l_{ji})$ des 3-Simplizes $\Delta = (ijkl)$ wird der Öffnungswinkel durch $\alpha_{ij}(\Delta)$ bezeichnet. Auf Grund der Eindeutigkeit des Polyeders ist $\alpha_{ij}(\Delta)$ natürlich ebenfalls für beliebige Kantenlängen eindeutig. Durch diese Notation unterdrückt man bewusst die genauen Vertizes des 3-Simplizes Δ , da man im Folgenden zunächst nur einen einzelnen 3-Simplex berücksichtigt um dann im Anschluss über

eine Auswahl 3-Simplizes zu summieren, die sich ohne explizite Vertizes sogar besser angeben lässt. Was dies bedeutet, lässt sich bereits in der nächsten Formel für den Öffnungswinkel ϑ_{ij} der gesamten Triangulierung T an der Kante l_{ij} erkennen. Denn nach Berechnung aller Öffnungswinkel $\alpha_{ij}(\Delta)$ für die an die Kante l_{ij} anliegenden 3-Simplizes Δ , ergibt sich der gesamte Öffnungswinkel zu

$$\vartheta_{ij} := \sum_{\Delta \ni l_{ij}} \alpha_{ij}(\Delta). \quad (7.2.1)$$

Es wird also schlicht über alle 3-Simplizes summiert, die an die Kante l_{ij} anliegen.

7.2.2. Variation der Kantenlängen des Tetraeders

Da alle dreidimensionalen Simplicialkomplexe aus 3-Simplizes zusammengesetzt sind, genügt es zunächst die Kantenlängen eines einzelnen Tetraeders zu variieren, um die Abhängigkeit des Öffnungswinkels und des Volumens von den Kantenlängen zu erhalten.

Öffnungswinkel eines 3-Simplizes

Der Öffnungswinkel $\alpha_{ij}(\Delta)$ bezüglich des 3-Simplizes $\Delta = (ijkl)$ an der Kante l_{ij} berechnet sich zu

$$\alpha_{ij}(\Delta) = \arccos \left(\frac{l_{ij}^2 (l_{jk}^2 + l_{ik}^2 + l_{il}^2 + l_{jl}^2 - l_{ij}^2 - 2l_{lk}^2) + l_{jk}^2 l_{il}^2 + l_{ik}^2 l_{jl}^2 - l_{jk}^2 l_{jl}^2 - l_{ik}^2 l_{il}^2}{\prod_{a \in \{k,l\}} \sqrt{2 (l_{ij}^2 l_{ja}^2 + l_{ja}^2 l_{ia}^2 + l_{ia}^2 l_{ij}^2) - (l_{ij}^4 + l_{ia}^4 + l_{ja}^4)}} \right). \quad (7.2.2)$$

Um dies zu beweisen, betrachtet man den 3-Simplex Δ mit den Vektoren der Kanten \vec{l}_{ab} vom Vertex a zum Vertex b , mit $a, b \in \{i, j, k, l\}$, $a \neq b$. Der Öffnungswinkel $\alpha_{ij}(\Delta)$ befindet sich damit zwischen den auf die Kante l_{ij} senkrechten Projektionen

$$\vec{l}_{ik}^\perp(\vec{l}_{ij}) := \vec{l}_{ik} - \frac{1}{l_{ij}^2} (\vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{ij}) \vec{l}_{ij} \quad (7.2.3)$$

$$\vec{l}_{il}^\perp(\vec{l}_{ij}) := \vec{l}_{il} - \frac{1}{l_{ij}^2} (\vec{l}_{il} \cdot \vec{l}_{ij}) \vec{l}_{ij} \quad (7.2.4)$$

der Vektoren \vec{l}_{il} und \vec{l}_{ik} und berechnet sich somit einfach aus der Definition des Skalarproduktes zu

$$\alpha_{ij}(\Delta) = \arccos \left(\frac{\vec{l}_{ik}^\perp(\vec{l}_{ij}) \cdot \vec{l}_{il}^\perp(\vec{l}_{ij})}{l_{ik}^\perp(\vec{l}_{ij}) l_{il}^\perp(\vec{l}_{ij})} \right). \quad (7.2.5)$$

Alternativ lassen sich selbstverständlich auch die senkrechten Projektionen der Vektoren \vec{l}_{jl} und \vec{l}_{jk} verwenden. Im Folgenden hat man sich allerdings für die oben explizit angegebenen Projektionen entschieden. Weiter folgt für den Zähler von Gleichung (7.2.5):

$$\begin{aligned} \vec{l}_{ik}^\perp(\vec{l}_{ij}) \cdot \vec{l}_{il}^\perp(\vec{l}_{ij}) &= \left(\vec{l}_{ik} - \frac{1}{l_{ij}^2} (\vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{ij}) \vec{l}_{ij} \right) \cdot \left(\vec{l}_{il} - \frac{1}{l_{ij}^2} (\vec{l}_{il} \cdot \vec{l}_{ij}) \vec{l}_{ij} \right) \\ &= \vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{il} - \frac{1}{l_{ij}^2} (\vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{ij}) (\vec{l}_{ij} \cdot \vec{l}_{il}) - \frac{1}{l_{ij}^2} (\vec{l}_{il} \cdot \vec{l}_{ij}) (\vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{ij}) + \\ &\quad \frac{1}{l_{ij}^2} (\vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{ij}) (\vec{l}_{il} \cdot \vec{l}_{ij}) \\ &= \frac{1}{l_{ij}^2} (\vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{il}) l_{ij}^2 - \frac{1}{l_{ij}^2} (\vec{l}_{il} \cdot \vec{l}_{ij}) (\vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{ij}) \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Zusammenfassen des Zählers führt also auf Skalarprodukte von Vektoren aneinander anliegender Kanten. Um diese Skalarprodukte der Vektoren der Kanten in eine Funktion der Kantenlängen umzuschreiben, benötigt man zum einen die allgemeine Definition des Skalarproduktes

$$l_{ia} l_{ib} \cos \angle(\vec{l}_{ia}, \vec{l}_{ib}) = \vec{l}_{ia} \cdot \vec{l}_{ib}$$

und zum anderen den Kosinussatz

$$l_{ab}^2 = l_{ia}^2 + l_{ib}^2 - 2 l_{ia} l_{ib} \cos \angle(\vec{l}_{ia}, \vec{l}_{ib}),$$

wobei $a, b \in \{j, k, l\}$. Fasst man diese beiden Gleichungen zusammen, so erhält man

$$\vec{l}_{ia} \cdot \vec{l}_{ib} = \frac{1}{2} (l_{ia}^2 + l_{ib}^2 - l_{ab}^2). \quad (7.2.7)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (7.2.7) in Gleichung (7.2.6) kann man den Zähler noch weiter umformen

$$\begin{aligned}
\vec{l}_{ik}^\perp(\vec{l}_{ij}) \cdot \vec{l}_{il}^\perp(\vec{l}_{ij}) &= \frac{1}{4l_{ij}^2} [2(l_{ik}^2 + l_{il}^2 - l_{kl}^2)l_{ij}^2 - (l_{il}^2 + l_{ij}^2 - l_{lj}^2)(l_{ik}^2 + l_{ij}^2 - l_{jk}^2)] \\
&= \frac{1}{4l_{ij}^2} (-l_{ij}^2 l_{ij}^2 + l_{ij}^2 l_{jk}^2 + l_{ij}^2 l_{ik}^2 + l_{ij}^2 l_{il}^2 + l_{ij}^2 l_{jl}^2 - 2l_{ij}^2 l_{lk}^2 + l_{jk}^2 l_{il}^2 + \\
&\quad l_{ik}^2 l_{jl}^2 - l_{jk}^2 l_{jl}^2 - l_{ik}^2 l_{il}^2) \\
&= \frac{1}{4l_{ij}^2} (l_{ij}^2 (-l_{ij}^2 + l_{jk}^2 + l_{ik}^2 + l_{il}^2 + l_{jl}^2 - 2l_{lk}^2) + \\
&\quad l_{jk}^2 l_{il}^2 + l_{ik}^2 l_{jl}^2 - l_{jk}^2 l_{jl}^2 - l_{ik}^2 l_{il}^2). \tag{7.2.8}
\end{aligned}$$

Offenbar hängt Gleichung (7.2.8) nur noch von den Kantenlängen ab und ist somit die gewünschte Form des Zählers aus Gleichung (7.2.5).

Der Nenner aus Gleichung (7.2.5) lässt sich ebenfalls mit Hilfe von (7.2.7) in eine Funktion der Kantenlängen umschreiben:

$$\begin{aligned}
l_{ik}^\perp(\vec{l}_{ij}) l_{il}^\perp(\vec{l}_{ij}) &\stackrel{(7.2.4), (7.2.4)}{=} \left(\sqrt{\vec{l}_{ik} - \frac{1}{l_{ij}^2} (\vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{ij}) \vec{l}_{ij}} \right)^2 \cdot \left(\sqrt{\vec{l}_{il} - \frac{1}{l_{ij}^2} (\vec{l}_{il} \cdot \vec{l}_{ij}) \vec{l}_{ij}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{l_{ij}^2} \sqrt{\left(l_{ik}^2 l_{ij}^2 - (\vec{l}_{ik} \cdot \vec{l}_{ij})^2 \right)} \cdot \sqrt{\left(l_{il}^2 l_{ij}^2 - (\vec{l}_{il} \cdot \vec{l}_{ij})^2 \right)} \\
&\stackrel{(7.2.7)}{=} \frac{1}{4l_{ij}^2} \prod_{a=k,l} \sqrt{\left(2l_{ij}^2 l_{ja}^2 + l_{ja}^2 l_{ia}^2 + l_{ia}^2 l_{ij}^2 \right) - \left(l_{ij}^4 + l_{ia}^4 + l_{ja}^4 \right)} \tag{7.2.9}
\end{aligned}$$

Damit sind nun Zähler und Nenner in Funktionen der Kantenlängen umgeschrieben und man erhält durch Einsetzen von Gleichung (7.2.8) und Gleichung (7.2.9) in die allgemeine Definition eines Skalarproduktes (7.2.5) die behauptete Formel (7.2.2) zur Berechnung des Öffnungswinkels.

Volumen eines 3-Simplizes

Im vorherigen Abschnitt wurde der Öffnungswinkel eines 3-Simplizes als Funktion der Kantenlängen formuliert. Nun möchte man das gleiche für das Volumen erhalten. Nach dem Paper von Hartle [Har 1985] ist das Volumen eines n -Simplizes σ^n mit Vertizes $(0, 1, \dots, n)$ durch

$$V_{\sigma^n}^2 = \frac{1}{(n!)^2} \det(\vec{l}_{0i} \cdot \vec{l}_{0j}) \tag{7.2.10}$$

gegeben. Offenbar hat der Vertex 0 eine ausgezeichnete Stellung in dieser Formel. Hieran soll man sich allerdings nicht stören, denn es lässt sich eine äquivalente Formel für das Volumen herleiten, in der alle Vertizes symmetrisch eingehen. Diese wird allerdings selten verwendet, da es sehr umständlich ist, mit ihr zu arbeiten [Har 1985]. Für den Tetraeder Δ ergibt sich damit durch Einsetzen von Gleichung (7.2.7) in Gleichung (7.2.10) das Volumen zu

$$V_{\Delta}^2 = \frac{1}{36} \det \begin{pmatrix} l_{ij}^2 & \frac{1}{2}(l_{ij}^2 + l_{ik}^2 - l_{jk}^2) & \frac{1}{2}(l_{ij}^2 + l_{il}^2 - l_{jl}^2) \\ \frac{1}{2}(l_{ij}^2 + l_{ik}^2 - l_{jk}^2) & l_{ik}^2 & \frac{1}{2}(l_{ij}^2 + l_{il}^2 - l_{jl}^2) \\ \frac{1}{2}(l_{il}^2 + l_{ij}^2 - l_{jl}^2) & \frac{1}{2}(l_{il}^2 + l_{ik}^2 - l_{lk}^2) & l_{il}^2 \end{pmatrix}. \quad (7.2.11)$$

Nun sind alle Vorarbeiten erledigt und die Regge-Wirkung der drei Triangulierungen lässt sich prinzipiell als Funktion der Kantenlängen angeben.

7.2.3. Die Regge-Wirkung

Die Regge-Wirkung des 5-, des 16- und des 600-Zellers berechnet sich damit durch Einsetzen des Volumens (7.2.11) und des Öffnungswinkels (7.2.2) bezüglich eines einzelnen anliegenden 3-Simplizes über die Formel (7.2.1) in die folgende Gleichung

$$S_R^I = \frac{1}{2} \int dt \sum_{i,j=1}^{N_1(T)} l_{ij} [2\pi - \vartheta_{ij}] - \Lambda \int dt \sum_{\Delta \in T} V_{\Delta}. \quad (7.2.12)$$

Hierbei geht die erste Summe über alle $N_1(T)$ Vertizes und die zweite Summe über alle $N_3(T)$ 3-Simplizes Δ der Triangulierung T . Dabei benötigt man im Vergleich zu Gleichung (5.0.2) einen zusätzlichen Faktor $\frac{1}{2}$ vor der ersten Summe, da man jede Kante doppelt zählt.

Teil III.

Die Regge-Wirkung eines dynamischen, sphärischen Friedmann-Universums

8. Die Regge-Wirkungen im dynamischen Fall

Bisher wurde nur der statische Anteil

$$S_{EH}^I = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x (R_\gamma(x,t) - 2\Lambda)$$

der Einstein-Hilbert-Wirkung

$$\begin{aligned} S_{EH} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x (R_\gamma(x,t) - 2\Lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x (R_g(x,t) - R_\gamma(x,t)) \end{aligned}$$

betrachtet. Zur Berücksichtigung der vollständigen Einstein-Hilbert-Wirkung eines sphärischen Friedmann-Universums, muss zunächst die Differenz der beiden Ricci-Skalare R_g und R_γ berechnet werden.

8.1. Gleichseitige Triangulierungen

Im Fall der gleichseitigen Triangulierungen ist die zu triangulierende Mannigfaltigkeit kugelsymmetrisch und die zugrunde liegende Metrik ist die Robertson-Walker-Metrik g bzw. ihre Einschränkung γ auf den räumlichen Anteil.

8.1.1. Die Differenz der Ricci-Skalare R_g und R_γ

Betrachtet man also die Differenz dieser beiden Ricci-Skalare R_g und R_γ so erhält man allgemein die Beziehung

$$\boxed{R_g - R_\gamma = 6 \frac{\ddot{\mathcal{R}}(t)}{\mathcal{R}(t)} + 6 \frac{\dot{\mathcal{R}}^2(t)}{\mathcal{R}^2(t)}}, \quad (8.1.1)$$

wobei $\mathcal{R}(t)$ auch hier wieder der Radius der Kugel, die alle Vertizes tangiert, ist.

Die Robertson-Walker-Metrik

Vor der eigentlichen Berechnung dieser Differenz aus den metrischen Tensoren g und γ werden alle Komponenten und alle benötigten Ableitungen zusammengestellt. Man hat also die kovarianten

$$g_{tt} = 1, \quad g_{rr} = \gamma_{rr} = -\frac{\mathcal{R}^2(t)}{1-r^2}, \quad g_{\theta\theta} = \gamma_{\theta\theta} = -\mathcal{R}^2(t)r^2, \quad g_{\phi\phi} = \gamma_{\phi\phi} = -\mathcal{R}^2(t)r^2 \sin^2 \theta$$

und die kontravarianten

$$g^{tt} = 1, \quad g^{rr} = \gamma^{rr} = -\frac{1-r^2}{\mathcal{R}^2(t)}, \quad g^{\theta\theta} = \gamma^{\theta\theta} = -\frac{1}{\mathcal{R}^2(t)r^2}, \quad g^{\phi\phi} = \gamma^{\phi\phi} = -\frac{1}{\mathcal{R}^2(t)r^2 \sin^2 \theta}$$

Einträge der metrischen Tensoren sowie die nicht verschwindenden Ableitungen des kovarianten metrischen Tensors

$$g_{rr,t} = \gamma_{rr,t} = -\frac{2\mathcal{R}(t)\dot{\mathcal{R}}(t)}{1-r^2}, \quad g_{rr,r} = \gamma_{rr,r} = -\frac{2\mathcal{R}^2(t)r}{(1-r^2)^2}$$

$$g_{\theta\theta,t} = \gamma_{\theta\theta,t} = -2\mathcal{R}(t)\dot{\mathcal{R}}(t)r^2, \quad g_{\theta\theta,r} = \gamma_{\theta\theta,r} = -2\mathcal{R}^2(t)r$$

$$g_{\phi\phi,t} = \gamma_{\phi\phi,t} = -2\mathcal{R}(t)\dot{\mathcal{R}}(t)r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{\phi\phi,r} = \gamma_{\phi\phi,r} = -2\mathcal{R}^2(t)r \sin^2 \theta,$$

$$g_{\phi\phi,\theta} = \gamma_{\phi\phi,\theta} = -2\mathcal{R}^2(t)r^2 \sin \theta \cos \theta.$$

Der Riemannsche Krümmungstensor

Da der Ricci-Skalar über den Riemannschen Krümmungstensor definiert ist, benötigt man zunächst die Definition des Riemannschen Krümmungstensors.

$$R^h{}_{ijk} = \Gamma^h{}_{ik,j} - \Gamma^h{}_{ij,k} + \Gamma^h{}_{mj}\Gamma^m{}_{ik} - \Gamma^h{}_{mk}\Gamma^m{}_{ij}, \quad \text{mit } i, j, k, h \in \{t, r, \theta, \phi\}.$$

Die sehr aufwändige separate Berechnung der Ricci-Skalare R_g und R_γ ist allerdings gar nicht notwendig, da diese Differenz offenbar nur die Summanden enthält, in dem mindestens ein Index den Wert t annimmt. Hierbei gibt es die folgenden zwei Typen:

- die $R^h{}_{ijk}$ in denen ein Index den Wert t annimmt,
- der Summand aus jedem $\left(\Gamma^h{}_{mj}\Gamma^m{}_{ik} - \Gamma^h{}_{mk}\Gamma^m{}_{ij}\right)$ in denen m den Wert t annimmt.

Bezeichnet man den Anteil vom Typ eins mit R_I und den Anteil vom Typ zwei mit R_{II} , so gilt offenbar

$$R_g - R_\gamma = R_I + R_{II}. \quad (8.1.2)$$

Aus der Literatur, wie beispielsweise [Olo 2004, S.216], entnimmt man die Werte des ersten Typs:

$$\begin{aligned} R^r_{ttr} &= R^\theta_{tt\theta} = R^\phi_{tt\phi} = \frac{\ddot{\mathcal{R}}(t)}{\mathcal{R}(t)} \\ R^t_{rrt} &= -\frac{\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t)}{1-r^2} \\ R^t_{\theta\theta t} &= -\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t)r^2 \\ R^t_{\phi\phi t} &= -\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t)r^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Berechnet man hieraus den Anteil R_I vom Typ eins des Ricci-Skalars, so folgt

$$R_I = 6 \frac{\ddot{\mathcal{R}}(t)}{\mathcal{R}(t)}. \quad (8.1.3)$$

Die im Allgemeinfeld sehr umfangreiche Berechnung der Summanden vom Typ zwei vereinfacht sich hier erheblich, da der hier verwendete metrische Tensor g Diagonalform hat. Damit ist

$$\begin{aligned} \Gamma^h_{tj}\Gamma^t_{ik} - \Gamma^h_{tk}\Gamma^t_{ij} &\stackrel{(3.1.2)}{=} g^{hh}\Gamma_{htj}g^{tt}\Gamma_{tik} - g^{hh}\Gamma_{htk}g^{tt}\Gamma_{tij} \\ &\stackrel{(3.1.3)}{=} \frac{1}{4}g^{hh}(g_{ht,j} + g_{jh,t} - g_{tj,h})g^{tt}(g_{ti,k} + g_{kt,i} - g_{ik,t}) \\ &\quad - \frac{1}{4}g^{hh}(g_{ht,k} + g_{kh,t} - g_{tk,h})g^{tt}(g_{ti,j} + g_{jt,i} - g_{ij,t}) \\ &= -\frac{1}{4}g^{hh}g_{jh,t}g_{ik,t} + \frac{1}{4}g^{hh}g_{kh,t}g_{ij,t}. \end{aligned}$$

Da $(\Gamma^h_{tj}\Gamma^t_{ik} - \Gamma^h_{tk}\Gamma^t_{ij})$ ein Summand in R^h_{ijk} ist, müssen wegen $R_{ij} = R^h_{ijh}$ zunächst k und h kontrahiert werden und man erhält

$$\Gamma^h_{tj}\Gamma^t_{ih} - \Gamma^h_{th}\Gamma^t_{ij} = \frac{1}{4}g^{hh}(g_{hh,t}g_{ij,t} - g_{jh,t}g_{ih,t}). \quad (8.1.4)$$

Analog, da $R = g^{ij}R_{ij}$ gilt, multipliziert man Gleichung (8.1.4) mit g^{ij} und man erhält die Summanden vom Typ zwei

$$g^{ii}(\Gamma^h_{ti}\Gamma^t_{ih} - \Gamma^h_{th}\Gamma^t_{ii}) = \frac{1}{4}g^{ii}g^{hh}(g_{hh,t}g_{ii,t} - g_{ih,t}g_{ih,t})$$

des Ricci-Skalars. Betrachtet man nun die möglichen Werte von h und i , so sieht man, dass für $h = i$ die Differenz $(g_{hh,t}g_{ii,t} - g_{ih,t}g_{ih,t})$ verschwindet. Da der zweite

Summand wegen der Diagonalform von g für $h \neq i$ immer verschwindet, verbleibt nur der erste Summand

$$g^{ii} \left(\Gamma_{ti}^h \Gamma_{ih}^t - \Gamma_{th}^h \Gamma_{ii}^t \right) = \frac{1}{4} g^{ii} g^{hh} g_{hh,t} g_{ii,t}.$$

Da für die Summanden von Typ II ausgeschlossen war, dass einer der Indizes am Riemannschen Krümmungstensor R_{ijk}^h den Wert t annimmt, bleiben demnach nur die sechs Fälle $\{h, i \in \{r, \theta, \phi\} | h \neq i\}$ und so erhält man den Anteil R_{II} vom Typ zwei des Ricci-Skalars zu

$$R_{II} = \frac{1}{2} \left[g^{rr} g^{\theta\theta} g_{\theta\theta,t} g_{rr,t} + g^{rr} g^{\phi\phi} g_{\phi\phi,t} g_{rr,t} + g^{\phi\phi} g^{\theta\theta} g_{\theta\theta,t} g_{\phi\phi,t} \right].$$

Setzt man weiter die Komponenten des metrischen Tensors ein, so ergibt sich

$$R_{II} = g^{ii} \left(\Gamma_{ti}^h \Gamma_{ih}^t - \Gamma_{th}^h \Gamma_{ii}^t \right) = 6 \frac{\dot{\mathcal{R}}^2(t)}{\mathcal{R}^2(t)}. \quad (8.1.5)$$

Addition der Summanden von Typ I aus Gleichung (8.1.3) und der vom Typ II aus Gleichung (8.1.5) liefert das behauptete Resultat (8.1.1).

8.1.2. Die Regge-Wirkung

Setzt man die Differenz der beiden Ricci-Skalare aus Gleichung (8.1.1) in die Einstein-Hilbert-Wirkung aus Gleichung (6.1.2) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} S_{EH} &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x (R_\gamma(x,t) - 2\Lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x \left(6 \frac{\ddot{\mathcal{R}}(t)}{\mathcal{R}(t)} + 6 \frac{\dot{\mathcal{R}}^2(t)}{\mathcal{R}^2(t)} \right). \end{aligned}$$

Da der Radius $\mathcal{R}(t)$ nur eine Funktion der Zeit ist, lässt er sich aus dem räumlichen Integral herausziehen und es bietet sich die folgende Notation der Einstein-Hilbert-Wirkung an

$$\boxed{S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x R_\gamma(x,t) + \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \left[6 \cdot \left(\frac{\ddot{\mathcal{R}}(t)}{\mathcal{R}(t)} + \frac{\dot{\mathcal{R}}^2(t)}{\mathcal{R}^2(t)} \right) - 2\Lambda \right] \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x.} \quad (8.1.6)$$

Das räumliche Integral des zweiten Summanden reduziert sich demnach genau wie bei der kosmologischen Konstanten auf das Volumen des Integrationsgebietes. Damit liefert der Regge-Kalkül mit den expliziten Werten der Triangulierungen näherungsweise die dynamischen Regge-Wirkungen auf der teilweise triangulierten

Mannigfaltigkeit zu:

$$S_R^5(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left\{ \mathcal{R}(t) + \frac{3\sqrt{2}}{380\pi} \left[3 \left(\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}^2(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) \right) - \Lambda\mathcal{R}^3(t) \right] \right\} \quad (8.1.7)$$

$$S_R^{16}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left\{ \mathcal{R}(t) + \frac{\sqrt{2}}{62\pi} \left[3 \left(\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}^2(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) \right) - \Lambda\mathcal{R}^3(t) \right] \right\} \quad (8.1.8)$$

$$S_R^{24}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left\{ \mathcal{R}(t) + \frac{\sqrt{2}}{34\pi} \left[3 \left(\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}^2(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) \right) - \Lambda\mathcal{R}^3(t) \right] \right\} \quad (8.1.9)$$

$$S_R^{600}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left\{ \mathcal{R}(t) + \frac{2\sqrt{2}}{49\pi} \left[3 \left(\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}^2(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) \right) - \Lambda\mathcal{R}^3(t) \right] \right\} \quad (8.1.10)$$

Die Zuordnung des dynamischen Zusatzterms zum Volumenanteil der Einstein-Hilbert-Wirkung ist allerdings, wie der nächste Abschnitt zeigt, nicht die einzige Möglichkeit.

8.1.3. Die alternative Regge-Wirkung

Betrachtet man den zweiten Teil

$$S_{EH}^{II} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x \left(6 \frac{\ddot{\mathcal{R}}(t)}{\mathcal{R}(t)} + 6 \frac{\dot{\mathcal{R}}^2(t)}{\mathcal{R}^2(t)} \right)$$

der Einstein-Hilbert-Wirkung erneut und setzt die Determinante des metrischen Tensors

$$\sqrt{|\gamma(x,t)|} = \frac{\mathcal{R}^3(t)r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}}$$

ein, so erhält man

$$S_{EH}^{II} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \left(6\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}^2(t) + 6\dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) \right) \int_{S_3} \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}} d^3x.$$

Partielle Integration des ersten Summanden liefert

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dt \ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}^2(t) &= \left[\dot{\mathcal{R}}\mathcal{R}^2 \right] - 2 \int_{\mathbb{R}} \dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}} dt \dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t), \end{aligned}$$

da der Randterm verschwindet. Insgesamt folgt daraus

$$S_{EH}^{II} = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \, 6\dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) \int_{S_3} \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-r^2}} d^3x$$

und durch Rücksubstitution der Determinante des metrischen Tensors (8.1.3) ergibt sich die alternative Form des zweiten Teils der Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{EH}^{II,A} = -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x \, 6 \frac{\dot{\mathcal{R}}^2(t)}{\mathcal{R}^2(t)}. \quad (8.1.11)$$

Zieht man nun allein die Ableitung des Radius $\dot{\mathcal{R}}$ aus dem räumlichen Integral und verwendet, dass $R_\gamma = \frac{6}{\mathcal{R}^2}$ ist, so folgt

$$\begin{aligned} S_{EH}^{II,A} &= -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \, \dot{\mathcal{R}}^2(t) \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x \, 6 \frac{1}{\mathcal{R}^2(t)} \\ &= -\frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \, \dot{\mathcal{R}}^2(t) \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x \, R_\gamma. \end{aligned}$$

Zusammen mit dem statischen Anteil der Einstein-Hilbert-Wirkung erhält man insgesamt die alternative Form der Einstein-Hilbert Wirkung

$$\boxed{S_{EH}^A = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \left[\left(1 - \dot{\mathcal{R}}^2(t)\right) \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x \, R_\gamma - 2\Lambda \int_{S_3} \sqrt{|\gamma(x,t)|} d^3x \right]}$$

und der dynamische Zusatzterm wird hier nicht als Korrektur des Volumen- sondern des Krümmungsterms betrachtet. Analoges Einsetzen der charakteristischen Werte der Triangulierungen wie oben, liefert die Regge-Wirkungen:

$$\boxed{S_R^{5,A}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left[\mathcal{R}(t) - \dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) - \frac{3\sqrt{2}}{380\pi} \Lambda \mathcal{R}^3(t) \right]} \quad (8.1.12)$$

$$\boxed{S_R^{16,A}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left[\mathcal{R}(t) - \dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) - \frac{\sqrt{2}}{62\pi} \Lambda \mathcal{R}^3(t) \right]} \quad (8.1.13)$$

$$\boxed{S_R^{24,A}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left[\mathcal{R}(t) - \dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) - \frac{\sqrt{2}}{34\pi} \Lambda \mathcal{R}^3(t) \right]} \quad (8.1.14)$$

$$\boxed{S_R^{600,A}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left[\mathcal{R}(t) - \dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) - \frac{2\sqrt{2}}{49\pi} \Lambda \mathcal{R}^3(t) \right]} \quad (8.1.15)$$

Der Unterschied dieser beiden Betrachtungsweisen wird deutlicher, wenn man für die Gleichungen (8.1.7) bis (8.1.10) ebenfalls die partiell integrierte Form aus Glei-

chung (8.1.11) verwendet. Es ergeben sich damit die zu (8.1.7) bis (8.1.10) vollkommen äquivalenten Gleichungen:

$$S_R^5(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left\{ \mathcal{R}(t) - \frac{3\sqrt{2}}{380\pi} \left[3\dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) + \Lambda\mathcal{R}^3(t) \right] \right\} \quad (8.1.16)$$

$$S_R^{16}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left\{ \mathcal{R}(t) - \frac{\sqrt{2}}{62\pi} \left[3\dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) + \Lambda\mathcal{R}^3(t) \right] \right\} \quad (8.1.17)$$

$$S_R^{24}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left\{ \mathcal{R}(t) - \frac{\sqrt{2}}{34\pi} \left[3\dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) + \Lambda\mathcal{R}^3(t) \right] \right\} \quad (8.1.18)$$

$$S_R^{600}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left\{ \mathcal{R}(t) - \frac{2\sqrt{2}}{49\pi} \left[3\dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) + \Lambda\mathcal{R}^3(t) \right] \right\} \quad (8.1.19)$$

Der einzige Unterschied ist der Vorfaktor des dynamischen Zusatzterms. In Kapitel 9.1, welches sich mit den resultierenden Bewegungsgleichungen befasst, werden die Vorfaktoren genauer untersucht. Im folgenden Abschnitt wird allerdings zunächst die Regge-Wirkung für Triangulierungen beliebiger Kantenlängen hergeleitet.

Teil IV.

Die resultierenden
Bewegungsgleichungen

9. Die simplizialen Bewegungsgleichungen

9.1. Die simplizialen Bewegungsgleichungen der gleichseitigen Triangulierungen

Die resultierenden Bewegungsgleichungen der beiden Varianten der Regge-Wirkung der Gleichungen (8.1.12) bis (8.1.15) sowie (8.1.16) bis (8.1.19) erhält man durch Extremieren der Wirkung. Für den statischen Anteil der Regge-Wirkung allein macht diese Betrachtung keinen Sinn, da in diesem Fall sowohl die kosmologische Konstante Λ als auch der Radius \mathcal{R} proportional zur Gesamtmasse sind und somit verschwinden.

Extremieren der Wirkungen (8.1.12) bis (8.1.15)

Da sich die Wirkungen (8.1.12) bis (8.1.15) nur um den Wert des Vorfaktors unterscheiden, extremiert man eine Wirkung der Form

$$S_R(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left[\mathcal{R}(t) - \dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) - a\Lambda\mathcal{R}^3(t) \right], \quad a \in \mathbb{R}_+.$$

Damit folgt zunächst

$$\begin{aligned} 0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta S_R(\mathcal{R})}{\delta \mathcal{R}(t)} &= \frac{\delta \mathcal{R}(t)}{\delta \mathcal{R}(t)} - \frac{\delta(\dot{\mathcal{R}}^2 \mathcal{R})}{\delta \mathcal{R}(t)} - \frac{\delta(a\Lambda\mathcal{R}^3(t))}{\delta \mathcal{R}(t)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta(\dot{\mathcal{R}}^2 \mathcal{R})}{\delta \dot{\mathcal{R}}(t)} \\ &= 1 - \dot{\mathcal{R}}^2(t) - 3a\Lambda\mathcal{R}^2(t) + 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\dot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) \right) \\ &= 1 - \dot{\mathcal{R}}^2(t) - 3a\Lambda\mathcal{R}^2(t) + 2\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + 2\dot{\mathcal{R}}^2(t) \\ &= 1 - 3a\Lambda\mathcal{R}^2(t) + 2\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t) \end{aligned}$$

und nach Auflösen erhält man

$$3a\Lambda\mathcal{R}^2(t) = 1 + 2\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t). \quad (9.1.1)$$

Setzt man die jeweiligen Werte für a ein, so folgen die Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned}
5\text{-Zeller : } & \frac{19\sqrt{2}}{802\pi} \Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + 2\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t) \\
16\text{-Zeller : } & \frac{17\sqrt{2}}{353\pi} \Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + 2\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t) \\
24\text{-Zeller : } & \frac{17\sqrt{2}}{191\pi} \Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + 2\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t) \\
600\text{-Zeller : } & \frac{47\sqrt{2}}{385\pi} \Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + 2\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t).
\end{aligned}$$

Näherungsweise ergibt dies

$$5\text{-Zeller : } \quad 0,171\Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + 2\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t) \quad (9.1.2)$$

$$16\text{-Zeller : } \quad 0,347\Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + 2\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t) \quad (9.1.3)$$

$$24\text{-Zeller : } \quad 0,641\Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + 2\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t) \quad (9.1.4)$$

$$600\text{-Zeller : } \quad 0,880\Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + 2\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \dot{\mathcal{R}}^2(t). \quad (9.1.5)$$

Extremieren der Wirkungen (8.1.16) bis (8.1.19)

Beim Extremieren der Regge-Wirkungen (8.1.16) bis (8.1.19) geht man genauso vor und betrachtet eine Wirkung der Form

$$S_R(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}} dt \left[\mathcal{R}(t) - 3a\dot{\mathcal{R}}^2(t)\mathcal{R}(t) - a\Lambda \mathcal{R}^3(t) \right], \quad a \in \mathbb{R}_+.$$

Analog folgt zunächst

$$3a\Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + 6a\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + 3a\dot{\mathcal{R}}^2(t)$$

und nach Einsetzen der Werte für a erhält man

$$\begin{aligned}
5\text{-Zeller : } & \frac{19\sqrt{2}}{802\pi} \Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + \frac{38\sqrt{2}}{802\pi} \ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \frac{19\sqrt{2}}{802\pi} \dot{\mathcal{R}}^2(t) \\
16\text{-Zeller : } & \frac{17\sqrt{2}}{353\pi} \Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + \frac{34\sqrt{2}}{353\pi} \ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \frac{17\sqrt{2}}{353\pi} \dot{\mathcal{R}}^2(t) \\
24\text{-Zeller : } & \frac{17\sqrt{2}}{191\pi} \Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + \frac{34\sqrt{2}}{191\pi} \ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \frac{17\sqrt{2}}{191\pi} \dot{\mathcal{R}}^2(t) \\
600\text{-Zeller : } & \frac{47\sqrt{2}}{385\pi} \Lambda \mathcal{R}^2(t) = 1 + \frac{94\sqrt{2}}{385\pi} \ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + \frac{47\sqrt{2}}{385\pi} \dot{\mathcal{R}}^2(t).
\end{aligned}$$

Näherungsweise ergibt dies

$$5\text{-Zeller : } 0,171\Lambda\mathcal{R}^2(t) = 1 + 0,341\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + 0,171\dot{\mathcal{R}}^2(t) \quad (9.1.6)$$

$$16\text{-Zeller : } 0,347\Lambda\mathcal{R}^2(t) = 1 + 0,694\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + 0,347\dot{\mathcal{R}}^2(t) \quad (9.1.7)$$

$$24\text{-Zeller : } 0,641\Lambda\mathcal{R}^2(t) = 1 + 1,282\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + 0,641\dot{\mathcal{R}}^2(t) \quad (9.1.8)$$

$$600\text{-Zeller : } 0,880\Lambda\mathcal{R}^2(t) = 1 + 1,759\ddot{\mathcal{R}}(t)\mathcal{R}(t) + 0,880\dot{\mathcal{R}}^2(t). \quad (9.1.9)$$

Vergleich mit den Friedmann-Gleichungen

Vergleicht man die simplizialen Approximationen (9.1.2) bis (9.1.5) sowie (9.1.6) bis (9.1.9) mit der Friedmann-Gleichung (4.4.2.a,b) in der Form

$$\Lambda\mathcal{R}^2 = 1 + 2\mathcal{R}\ddot{\mathcal{R}} + \dot{\mathcal{R}}^2,$$

so erkennt man in beiden Fällen eine langsame Annäherung an diese Bewegungsgleichung, die direkt aus der Einstein-Hilbert-Wirkung mit der Robertson-Walker-Metrik folgt. Die Güte dieser Approximation ist vergleichbar mit dem Verhältnis der Volumina der Triangulierungen und dem Volumen $2\pi^2\mathcal{R}^3$ der Oberfläche S_3 :

Polyeder	Volumenanteil
5-Zeller	16%
16-Zeller	24%
24-Zeller	40%
600-Zeller	88%

9.2. Ausblick hinsichtlich der Bewegungsgleichungen der Triangulierungen durch einen n -Zeller mit variabler Kantenlänge

Stellt man noch einmal die endgültige Form der Regge-Wirkung einer Raumzeit zusammen, bei der der räumliche Anteil topologisch wie die Oberfläche S_3 aussieht und der zeitliche Anteil kontinuierlich bleibt, so hat man

$$S_R = \frac{1}{2} \int dt \sum_{i,j=1}^{N_1(T)} [2\pi - \vartheta_{ij}] l_{ij} - \Lambda \int dt \sum_{\Delta \in T} V_{\Delta} - 3 \int_{\mathbb{R}} dt \sum_{i,j=1}^{N_1(T)} \frac{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} (2\pi - \vartheta_{ij}) \right]^2}{[2\pi - \vartheta_{ij}]^2} l_{ij}, \quad (9.2.1)$$

mit dem gesamten Öffnungswinkel

$$\vartheta_{ij} := \sum_{\Delta \ni l_{ij}} \alpha_{ij}(\Delta),$$

der über die einzelnen Flächenöffnungswinkel

$$\alpha_{ij}(\Delta) = \arccos \left(\frac{l_{ij}^2 (l_{jk}^2 + l_{ik}^2 + l_{il}^2 + l_{jl}^2 - l_{ij}^2 - 2l_{lk}^2) + l_{jk}^2 l_{il}^2 + l_{ik}^2 l_{jl}^2 - l_{jk}^2 l_{jl}^2 - l_{ik}^2 l_{il}^2}{\prod_{a \in \{k,l\}} \sqrt{2 (l_{ij}^2 l_{ja}^2 + l_{ja}^2 l_{ia}^2 + l_{ia}^2 l_{ij}^2) - (l_{ij}^4 + l_{ia}^4 + l_{ja}^4)}} \right)$$

gegeben ist sowie dem Volumen

$$V_{\Delta}^2 = \frac{1}{36} \det \begin{pmatrix} l_{ij}^2 & \frac{1}{2}(l_{ij}^2 + l_{ik}^2 - l_{jk}^2) & \frac{1}{2}(l_{ij}^2 + l_{il}^2 - l_{jl}^2) \\ \frac{1}{2}(l_{ij}^2 + l_{ik}^2 - l_{jk}^2) & l_{ik}^2 & \frac{1}{2}(l_{ij}^2 + l_{il}^2 - l_{jl}^2) \\ \frac{1}{2}(l_{il}^2 + l_{ij}^2 - l_{jl}^2) & \frac{1}{2}(l_{il}^2 + l_{ik}^2 - l_{lk}^2) & l_{il}^2 \end{pmatrix}. \quad (9.2.2)$$

Für jede Kante l_{ij} erhält man prinzipiell durch Extremieren der Wirkung oder Anwenden von Euler-Lagrange dessen Bewegungsgleichung. Hat man erstmal dieses gekoppelte Gleichungssystem der Bewegungsgleichungen aller Kantenlängen aufgestellt, so lässt es sich (numerisch) lösen und liefert die globale Zeitentwicklung der sphärischen Raumzeit. Darüber hinaus bietet sich vermutlich an, die statistische Verteilung der Kantenlängen zu jedem festen Zeitpunkt zu betrachten.

Teil V.
Anhang

A. Herleitungen

A.1. Die Einstein-Hilbert-Wirkung

Die Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{EH} = \int \left[\frac{1}{2\kappa} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{|g|} d^4x \quad (\text{A.1.1})$$

liefert auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand eine zu den verallgemeinerten Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}(R - 2\Lambda) = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}. \quad (\text{A.1.2})$$

äquivalente Formulierung der Relativitätstheorie. Man beweist dies durch Anwenden des Prinzips extremaler Wirkung $\delta S \stackrel{!}{=} 0$ bzw. Extremieren der funktionalen Ableitung von S_{EH} .

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{ik}} \\ &= \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{\delta(\sqrt{|g|}R)}{\delta g^{ik}} - \frac{2\Lambda\delta\sqrt{|g|}}{\delta g^{ik}} \right) + \frac{\delta(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_M)}{\delta g^{ik}} \\ &= \frac{\sqrt{|g|}}{2\kappa} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{ik}} + \frac{R}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta\sqrt{|g|}}{\delta g^{ik}} - \frac{2\Lambda}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta\sqrt{|g|}}{\delta g^{ik}} \right) + \frac{\delta\sqrt{|g|}\mathcal{L}_M}{\delta g^{ik}} \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Zur Berechnung dieser Funktionalableitungen benötigt man die zu $T_{ik} = \frac{\kappa}{c^2} G_{ik}$ äquivalenten Formel des Energie-Impuls-Tensors [SeUr 2002, S.74, Referenzen hierin]

$$T_{ik} := \frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{ik}} \quad (\text{A.1.4})$$

und zunächst die Definition des Riemannschen Krümmungstensors aus Gleichung (3.1.6), da der Ricci-Skalar über den Ricci-Tensor aus dem Riemannschen Krümmungstensor definiert ist (vgl. Gleichungen (3.1.8) und (3.1.9.a,b)). Daher betrachtet man zunächst die Variation des Riemannschen Krümmungstensors

$$\delta R^h_{ijk} = \partial_j \delta \Gamma^h_{ki} - \partial_k \delta \Gamma^h_{ji} + \delta \Gamma^h_{js} \Gamma^s_{ki} + \Gamma^h_{js} \delta \Gamma^s_{ki} - \delta \Gamma^h_{ks} \Gamma^s_{ji} - \Gamma^h_{ks} \delta \Gamma^s_{ji}.$$

Mit der Definition der kovarianten Ableitung D_j aus Gleichung (3.1.4) folgt

$$\delta R^h{}_{ijk} = D_j(\delta\Gamma^h{}_{ki}) - D_k(\delta\Gamma^h{}_{ji}).$$

Verjüngung des Riemannschen Krümmungstensors liefert hieraus die Variation des Ricci-Tensors

$$\delta R_{ij} = D_h(\delta\Gamma^h{}_{ij}) - D_j(\delta\Gamma^h{}_{hi}). \quad (\text{A.1.5})$$

Kontrahiert man die verbleibenden Indizes durch Multiplikation mit g^{ij} , so erhält man die Variation des Ricci-Skalars R

$$\begin{aligned} \delta R &= R_{ij}\delta g^{ij} + g^{ij}\delta R_{ij} \\ &\stackrel{D_h g^{ij}=0}{=} R_{ij}\delta g^{ij} + D_h \left(g^{ij}\delta\Gamma^j{}_{ji} - g^{ij}\delta\Gamma^h{}_{hi} \right) \end{aligned}$$

und damit auch seine Funktionalableitung

$$\frac{\delta R}{\delta g^{ik}} = R_{ik}. \quad (\text{A.1.6})$$

Der zweite Summand $D_h \left(g^{ik}\delta\Gamma^j{}_{ki} - g^{ij}\delta\Gamma^h{}_{hi} \right)$ liefert keinen Beitrag zur Funktionalableitung, da er selbst eine totale Ableitung und somit nur ein Randterm ist, der auf den betrachteten randlosen Mannigfaltigkeiten verschwindet. Abschließend benötigt man noch die Funktionalableitung der Determinante des metrischen Tensors $\sqrt{|g|} = \sqrt{-g}$. Die Kettenregel liefert zunächst

$$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g^{ik}} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta|g|}{\delta g^{ik}}. \quad (\text{A.1.7})$$

Entwickelt man die Determinante mit der üblichen Definition der Adjunkten A^{ik} von g_{ik} in

$$|g| = \sum_k g_{ik} A^{ik},$$

wobei hier ausnahmsweise keine Einsteinsche Summenkonvention gilt, so folgt für die Funktionalableitung unmittelbar

$$\frac{\delta|g|}{\delta g_{ik}} = A^{ik},$$

da per Konstruktion $A^{ik} \neq \text{Fkt}(g_{ik})$ gilt. Andererseits ist der zu g_{ik} inverse metrische Tensor g^{ik} ebenfalls über die Adjunkte durch

$$g^{ik} = \frac{A^{ik}}{|g|}$$

gegeben. Insgesamt gilt also

$$\frac{\delta|g|}{\delta g^{ik}} = |g| g^{ik} \quad (\text{A.1.8})$$

und durch Einsetzen von Gleichungen (A.1.4), (A.1.6) und (A.1.8) in (A.1.3) erhält man die oben angegebene Form der Einsteinschen Feldgleichungen (A.1.2).

A.2. Die Regge-Wirkung

R. Friedberg und T.D. Lee leiteten 1984 in [FrLe 1984] die Regge-Wirkung aus der Einstein-Hilbert-Wirkung ab. Der Ricci-Skalar R in der Einstein-Hilbert-Wirkung ist nur für glatte Mannigfaltigkeiten und damit nicht auf einem Simplicialkomplex definiert. Durch eine Folge glatter Mannigfaltigkeiten, die einen Simplicialkomplex als Grenzwert haben, lässt sich der Übergang konstruieren. Für eine D -dimensionale Mannigfaltigkeit ergibt sich der Volumenterm offenbar als Summe über die einzelnen Volumina der D -Simplizes. Es verbleibt also der Beweis des Krümmungsterms der Regge-Wirkung

$$S_R^K = \sum_{\sigma^{D-2} \in T} \epsilon_{\sigma^{D-2}} V_{\sigma^{D-2}}, \quad \epsilon_{\sigma^{D-2}} := 2\pi - \vartheta_{\sigma^{D-2}} \quad (\text{A.2.1})$$

aus dem Krümmungsterm der Einstein-Hilbert-Wirkung

$$S_{EH}^K = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{|g|} R d^D x. \quad (\text{A.2.2})$$

Hierbei ist $\epsilon_{\sigma^{D-2}}$ der Defizit-Winkel am Simplex σ^{D-2} und $\vartheta_{\sigma^{D-2}}$ ist der entsprechende Öffnungswinkel. Vorab sei noch bemerkt, dass bereits 1984 die Übereinstimmung der Ausdrücke (A.2.1) und (A.2.2) in Dimension $D = 2$ durch das Gauß-Bonnet-Theorem gegeben war. Der hier nachskizzierte Beweis von Friedberg und Lee beweist, wie bereits erwähnt, darüber hinaus einen Zusammenhang zwischen den lokalen Größen, dem Summand und dem Integrand der Form

$$\sqrt{|g|} R = 2\epsilon_{\sigma^{D-2}} \delta(x_1) \delta(x_2), \quad (\text{A.2.3})$$

wobei x_1 und x_2 die zum Simplex σ^{D-2} senkrechten Koordinatenachsen sind. Aus dieser stärkeren Aussage lässt sich selbstverständlich unmittelbar die Gleichheit von (A.2.1) und (A.2.2) im Sinne des obigen Grenzprozesses folgern.

Dimension $D = 2$

Zunächst betrachtet man den Fall eines 2-dimensionalen Simplizialkomplexes eingebettet in einem flachen \mathbb{R}^3 . Es gelten die üblichen Existenzbedingungen für Simplizes (vgl. Anhang B). Da man zeigen möchte, dass sich die Krümmung in den Vertizes konzentriert, betrachtet man einen Vertex p und alle benachbarten Vertizes $1, 2, \dots, n$. Die Umgebung von p besteht also aus n Dreiecken $\Delta(1) := (p \ 1 \ 1)$, $\Delta(2) := (p \ 1 \ 2), \dots, \Delta(n) := (p \ n - 1 \ n)$. Jeder Punkt des Dreiecks $\Delta(i)$ lässt sich mittels seines Normalenvektors $\vec{n}(i) := (n_{x_1}(i), n_{x_2}(i), n_{x_3}(i))$ bereits durch die x_1 - und die x_2 -Koordinate angeben, da für jeden Punkt die Zwangsbedingung

$$\sum_{k=1}^3 n_{x_k}(i) x_k = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

gilt. Die Metrik des mittels der Abbildung $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$ in die (x_1, x_2) -Ebene projizierten Dreiecks $\pi(\Delta(i))$, die den Abstandsbegriff nicht verändert, ist durch

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{\partial z}{\partial x_\mu} \frac{\partial z}{\partial x_\nu}$$

gegeben. Mit der Definition

$$\xi(i) := \begin{pmatrix} \xi_{x_1}(i) \\ \xi_{x_2}(i) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x_1} \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} \end{pmatrix} \stackrel{(\text{A.2.4})}{=} \begin{pmatrix} -\frac{n_{x_1}(i)}{n_{x_3}(i)} \\ -\frac{n_{x_2}(i)}{n_{x_3}(i)} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

lässt sich der metrische Tensor zu

$$g = 1 + \xi(i) \xi^T(i) \quad (\text{A.2.6})$$

kompakt umschreiben. Hierbei ist $\xi^T(i)$ der transponierte Vektor. An Gleichung (A.2.6) lässt sich der inverse metrische Tensor

$$g^{-1} = 1 - \frac{1}{|g|} \xi \xi^T, \quad |g| = 1 + \xi^T \xi \quad (\text{A.2.7})$$

ablesen. Mit den üblichen Definitionen erhält man den Ricci-Skalar zu

$$R = 2|g|^{-2} \frac{\partial(\xi_{x_1}, \xi_{x_2})}{\partial(x_1, x_2)}, \quad \frac{\partial(\xi_{x_1}, \xi_{x_2})}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_{x_2}}{\partial x_2} - \frac{\partial \xi_{x_1}}{\partial x_2} \frac{\partial \xi_{x_2}}{\partial x_1}. \quad (\text{A.2.8})$$

Inbesondere folgt hiermit und mit Gleichung (A.2.5) die Flachheit des Inneren jedes Dreiecks. Um die behauptete Relation des Ricci-Skalars zu beweisen, führt man noch einen weiteren Koordinatenwechsel durch. Die Wahl dieses Koordinatenwechsels begründet sich darin, dass die Unstetigkeit von $\xi(i)$ im Übergang von $\Delta(i)$

nach $\Delta(i+1)$ nur in der zu $\pi(l_{ip})$ orthogonalen Richtung $e_{\perp}(i)$ auftritt. Bezeichne die zu $\pi(l_{ip})$ parallele Richtung mit $e_{\parallel}(i)$. Man führt also den Koordinatenwechsel

$$P : \xi \mapsto \begin{pmatrix} \xi_{\parallel}(i) \\ \xi_{\perp}(i) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi \cdot e_{\parallel}(i) \\ \xi \cdot e_{\perp}(i) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2.9})$$

durch. Entlang der offenen Kante $l_{ip} - \{i, p\}$ ist also nur ξ_{\perp} unstetig. In allen Punkten des Dreiecks, außer der Vertizes, gilt weiter

$$\frac{\partial \xi_{\parallel}(i)}{\partial x_{\parallel}(i)} = \frac{\partial \xi_{\parallel}(i)}{\partial x_{\perp}(i)} = 0 \Rightarrow R \propto \frac{\partial(\xi_{x_1}(i), \xi_{x_2}(i))}{\partial(x_1(i), x_2(i))} = \frac{\partial(\xi_{\parallel}(i), \xi_{\perp}(i))}{\partial(x_{\parallel}(i), x_{\perp}(i))} = 0,$$

was bedeutet, dass im Grenzwert der glatten Mannigfaltigkeiten, dem Simplicialkomplex, die Krümmung überall verschwindet, außer in den Vertizes. Nun lässt sich der Krümmungsterm der Einstein-Hilbert-Wirkung durch Einsetzen von Gleichung (A.2.7.b) und (A.2.8.a) in ein elementares Integral

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \sqrt{|g|} R \, dx_1 dx_2 &= \int_{\Omega} \frac{2}{(1 + \xi^T \xi)^{3/2}} d\xi_{x_1} d\xi_{x_2} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega(i)} \frac{2}{(1 + \xi^2(i))^{3/2}} d\xi_{x_1}(i) d\xi_{x_2}(i) \quad (\text{A.2.10}) \end{aligned}$$

umschreiben, wobei zuletzt noch Ω in eine den Dreiecken $\Delta(i)$ zugeordnete Summe $\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega(i)$ zerlegt wurde. Durch den Koordinatenwechsel, der durch die Abbildung P aus Gleichung (A.2.9) gegeben ist und einer längeren Rechnung, die man in [FrLe 1984, S.152f] nachlesen kann, folgt für jede Umgebung ω , die als einzigen Vertes den Vertex p enthält, die Relation

$$\int_{\omega} \sqrt{|g|} R \, dx_1 dx_2 = 2\epsilon_p. \quad (\text{A.2.11})$$

Definieren der Testfunktion

$$\psi_{3/2}(i) := \int_{\Omega(i)} \frac{d\xi_{x_1} d\xi_{x_2}}{(1 + \xi^2(i))^{3/2}}$$

liefert mit Gleichung (A.2.10) sowie (A.2.11) die gesuchte, distributionswertige Gleichheit

$$\sqrt{|g|} R = 2\delta(x_1)\delta(x_2) \sum_{i=1}^n \psi_{3/2}(i) = 2\epsilon_p \delta(x_1)\delta(x_2), \quad (\text{A.2.12})$$

die im üblichen Sinne zu verstehen ist.

Beliebige Dimension D

Bis jetzt wurde nur ein zweidimensionaler Simplicialkomplex betrachtet, der in einem \mathbb{R}^3 eingebettet ist. Für einen Simplicialkomplex der Dimension D mit N_0 Vertices hat man nach Berücksichtigung der N_K Zwangsbedingungen, die durch die Kantenlängen impliziert werden in einem flachen \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}$, noch $NN_0 - N_K$ verbleibende Freiheitsgrade. Da jedes Gitter im \mathbb{R}^N N Freiheitsgrade der Translation und $\frac{1}{2}N(N-1)$ Freiheitsgrade der Rotation besitzt, muss stets

$$NN_0 - N_K \geq N + \frac{1}{2}N(N-1)$$

gelten. Für sehr große Gitter lässt sich die rechte Seite vernachlässigen und man erhält

$$N \geq \frac{N_K}{N_0}. \quad (\text{A.2.13})$$

Für einen sehr großen zweidimensionalen Simplicialkomplex folgt hieraus, dass der einbettende Raum mindestens die Dimension drei haben muss. Durch Abzählen von Freiheitsgraden, wie in [FrLe 1984, S. 156f], lässt sich zeigen, dass sich jeder D -dimensionale Simplicialkomplex durch stetige Koordinatentransformationen in einen \mathbb{R}^{D+1} einbetten lässt. Transformationen dieser Art sind zugelassen, da die Einstein-Hilbert-Wirkung kovariant ist. Um die Krümmung an einem $(D-2)$ -dimensionalen Teilsimplex σ_s^{D-2} zu erhalten, rotiert man das Koordinatensystem so, dass die x_1 - und die x_2 - Achse senkrecht zu diesem Teilsimplex stehen. Damit ergibt sich die Metrik zu

$$g = 1 + \begin{pmatrix} \xi\xi^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2.14})$$

mit $\xi(i)$ wie vorher. Die Metrik der zweidimensionalen Oberfläche des $D-2$ -dimensionalen Teilsimplizes hat also erwartungsgemäß die gleiche Form wie die eines Dreiecks im $D=2$ -dimensionale Fall. Setzt man dieses Ergebnis (A.2.14) in die Formel des Ricci-Skalars ein und wendet wieder die gleiche Testfunktion $\psi_{3/2}(i)$ an, so erhält man die Verallgemeinerung von Gleichung (A.2.12)

$$\sqrt{|g|}R = 2\epsilon_s^{D-2}\delta(x_1)\delta(x_2), \quad (\text{A.2.15})$$

mit dem einzigen Unterschied, dass hier der Defizit-Winkel an σ_s^{D-2} steht. Damit folgt für eine Umgebung ω , die keinen weiteren $D-2$ -dimensionalen Teilsimplex neben σ_s^{D-2} beinhaltet,

$$\int_{\omega} \sqrt{|g|}R d^Dx = 2\epsilon_s V_{\sigma_s^{D-2}}. \quad (\text{A.2.16})$$

Integration über den gesamten Raum liefert die behauptete Gleichheit:

$$\int \sqrt{|g|} R d^D x = 2 \sum_s \epsilon_s V_{\sigma_s^{D-2}} \quad (\text{A.2.17})$$

A.3. Schläflis notwendige Existenzbedingungen der verallgemeinerten Platonischen Körper

Schläflis notwendiges Kriterium für die Existenz eines regelmäßigen verallgemeinerten Platonischen Körpers ist die Verallgemeinerung von der in $n = 3$ Dimensionen für den Polyeder $\{p, q\}$ gültigen anschaulichen Bedingung, dass die q Flächenwinkel $\left(1 - \frac{2}{p}\right) \pi$ (vgl. Abbildung A.1) an jedem Vertex kleiner 2π bleiben müssen:

$$q \cdot \left(1 - \frac{2}{p}\right) < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \quad (\text{A.3.1})$$

Die rechte Ungleichung ist die übliche Notation dieser Bedingung, die insbesondere die Symmetrie zwischen p und q zum Ausdruck bringt. Zur Vorbereitung definiert man die Mittelpunkte O_i einer geschachtelten Folge von i -dimensionalen Teilsimplizes mit $i = 0, 1, \dots, n$. In Abbildung A.1 ist diese Folge für ein 5-Eck dargestellt.

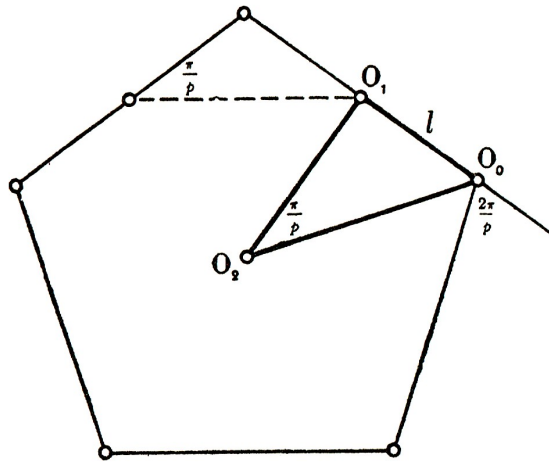


Abbildung A.1.: Beispiele der Mittelpunkte O_i anhand eines 5-Ecks aus [Cox 1973, S. 3]

Nun betrachtet man die Winkel ϕ, χ und ψ am Mittelpunkt O_n (vgl. Abbildung A.2) des Polyeders $\{p, q, \dots, v, w\}$, die wie folgt definiert sind:

$\phi := \angle(\overline{O_n O_0}, \overline{O_n O_1})$	Halber Öffnungswinkel einer Kante
$\chi := \angle(\overline{O_n O_0}, \overline{O_n O_{n-1}})$	Anteil des Umkreises einer $(n - 1)$ -dim. Zelle
$\psi := \angle(\overline{O_n O_{n-2}}, \overline{O_n O_{n-1}})$	$\pi - 2\psi$ ist der Hyperflächen-Öffnungswinkel

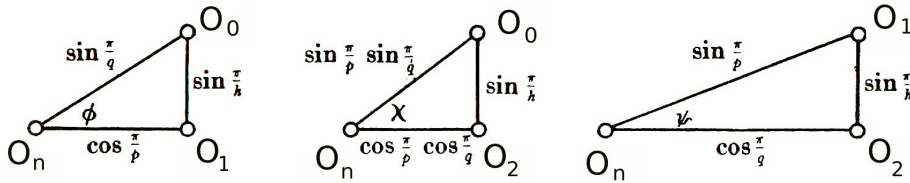


Abbildung A.2.: Die Winkel ϕ, χ, ψ am Mittelpunkt O_n modifiziert aus [Cox 1973, S. 21]

Nimmt man eine Kantenlänge $2l$ an, so erhält man aus dem linken Dreieck aus Abbildung A.2 sofort

$$R_0 \sin \phi = \overline{O_0 O_1} = l, \quad (\text{A.3.2})$$

wobei R_0 der Radius der Kugel ist, die alle Vertizes tangiert. Ganz analog kann man die Größen $R_0^{(k)}, l^{(k)}$ und $\phi^{(k)}$ als die entsprechenden Größen der k -ten Vertexfigur definieren. Die k -te Vertexfigur erhält man durch Streichen der ersten k Einträge von $\{p, q, \dots, v, w\}$. Insbesondere ist die gestrichelte Linie in Abbildung A.1 die Vertexfigur des 5-Ecks. Analog zu Gleichung (A.3.2) gilt dann für die erste Vertexfigur

$$R_0^{(1)} \sin \phi^{(1)} = l^{(1)} = l \cos \frac{\pi}{p}.$$

Außerdem lässt sich aus Abbildung (A.3) die Beziehung

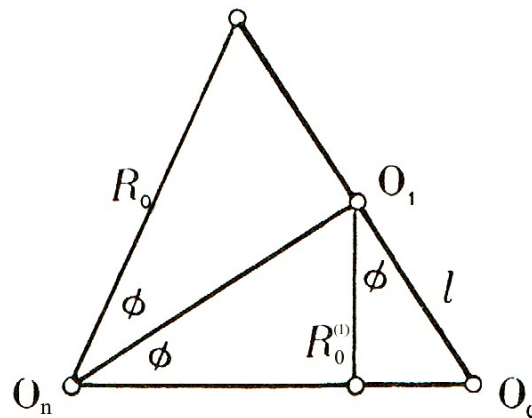


Abbildung A.3.: Das Dreieck $O_n O_0 O_1$ modifiziert aus [Cox 1973, S.22]

$$R_0^{(1)} = l \cos \phi \quad (\text{A.3.3})$$

ablesen und somit gilt

$$\cos \phi = \frac{1}{\sin \phi^{(1)}} \cos \frac{\pi}{p} \Leftrightarrow \sin^2 \phi = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{p}}{\sin^2 \phi^{(1)}}. \quad (\text{A.3.4})$$

Für die anderen Vertexfiguren folgt damit unmittelbar

$$\sin^2 \phi^{(1)} = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{q}}{\sin^2 \phi^{(2)}}, \dots, \sin^2 \phi^{(n-3)} = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{v}}{\sin^2 \phi^{(n-2)}} \quad \text{mit } \phi^{(n-2)} = \frac{\pi}{w}.$$

Man sieht, dass $\sin^2 \phi$ iterativ durch Angabe von $\{p, q, \dots, v, w\}$ eindeutig bestimmt ist. Definiert man eine Funktion D durch

$$D_{p,q,\dots,v,w} := \det \begin{pmatrix} 1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-2} & 1 & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

mit den Koeffizienten $c_1 := \cos \frac{\pi}{p}$, $c_2 := \cos \frac{\pi}{q}$, \dots , $c_{n-1} := \cos \frac{\pi}{w}$, so lässt sich diese Iteration kompakt zu

$$\sin^2 \phi = \frac{D_{p,q,\dots,v,w}}{D_{q,\dots,v,w}} \quad (\text{A.3.5})$$

umschreiben, da die Iteration in die Funktion D , die selbst durch die Iteration

$$D_{p,q,r,\dots,w} = D_{q,r,\dots,w} - D_{r,\dots,w} \cos^2 \frac{\pi}{p}$$

mit den Anfangsbedingungen $D = 1$ sowie $D_p = \sin^2 \frac{\pi}{p}$ gegeben ist, absorbiert wird. Durch vollständige Induktion zeigt man, dass D wie oben definiert, dieser Iteration genügt. Durch wiederholte Anwendung von Gleichung (A.3.5) folgt nun sofort

$$\sin^2 \phi \sin^2 \phi^{(1)} \dots \sin^2 \phi^{(n-2)} = D_{p,q,\dots,v,w}$$

und daher

$$\boxed{D_{p,q,\dots,v,w} > 0}. \quad (\text{A.3.6})$$

Im Fall $n = 3$, also für $\{p, q\}$, bedeutet dies

$$D_{p,q} = \sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{q} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 \frac{\pi}{p} + \sin^2 \frac{\pi}{q} > 1. \quad (\text{A.3.7})$$

Da natürlich immer $p, q \geq 2$ gelten muss, folgt die Äquivalenz von Gleichung (A.3.7.b) mit der anschaulichen Bedingungen (A.3.1) sofort aus dem Verlauf der Funktion $\sin^2 \frac{\pi}{x}$.

Im Fall $n = 4$, also für $\{p, q, r\}$, besagt Gleichung (A.3.6), dass

$$\sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{\pi}{r} > \cos \frac{\pi}{q} \quad (\text{A.3.8})$$

gelten muss. Aus Abbildung A.3 lässt sich $\cos \psi = \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{\sin \frac{\pi}{p}}$ ablesen und es folgt die Beziehung

$$\sin \frac{\pi}{r} > \cos \psi. \tag{A.3.9}$$

Mit $\sin \frac{\pi}{r} = -\cos \left(\frac{\pi}{r} + \frac{\pi}{2} \right)$ und da $\cos x$ auf $(0, \pi)$ monoton fallend und bezüglich $(0, \frac{\pi}{2})$ punktsymmetrisch ist, erhält man, dass Gleichung (A.3.9) genau dann erfüllt ist, wenn $\frac{2\pi}{r}$ größer ist als der Öffnungswinkel $\pi - 2\psi$ von $\{p, q\}$, also wenn

$$\frac{2\pi}{r} > \pi - 2\psi \tag{A.3.10}$$

gilt. Da $\pi - 2\psi$ der Flächenöffnungswinkel von $\{p, q\}$ ist, ist Gleichung (A.3.10) bzw. (A.3.8) anschaulich ein notwendiges Kriterium dafür, dass an einem Vertex genug Platz ist r $\{p, q\}$'s anzuordnen. Dieses Kriterium liefert die Aussage, dass es höchstens die folgenden sechs 4-dimensionalen Platonischen Körper

Polyeder	Schläfli-Symbol
5-Zeller	$\{3, 3, 3\}$
8-Zeller	$\{3, 3, 4\}$
16-Zeller	$\{4, 3, 3\}$
24-Zeller	$\{3, 4, 3\}$
120-Zeller	$\{3, 3, 5\}$
600-Zeller	$\{5, 3, 3\}$

gibt. Da Schläfli's Bedingung nur ein notwendiges aber kein hinreichendes Kriterium ist, ist hiermit lediglich gezeigt, dass es keine weiteren 4-dimensionalen Platonischen Körper geben kann. Durch explizite Konstruktion, wie beispielsweise in [Cox 1973], lässt sich zeigen, dass diese wirklich existieren.

B. Existenzbedingungen eines n -Simplizes

Die Volumenformel eines n -Simplex mit Vertizes $0, 1, \dots, n$ ist, wie bereits erwähnt, nach [Har 1985] durch

$$V_k^2 = \frac{1}{(k!)^2} \det \left(\vec{l}_{ai} \vec{l}_{aj} \right), \quad \text{mit } a \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad (\text{B.0.1})$$

mit der $n \times n$ -Matrix $\left(\vec{l}_{0i} \vec{l}_{0j} \right)$ (also $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $i, j \neq a$), dessen Einträge nach Gleichung (7.2.7) durch

$$\vec{l}_{ai} \vec{l}_{aj} = \frac{1}{2} (l_{ai}^2 + l_{aj}^2 - l_{ij}^2)$$

berechnet werden, gegeben. In dieser etwas allgemeineren Form zeichnet diese Formel nicht mehr den Vertex 0 sondern den Vertex a aus. Da die Existenzbedingungen eines n -Simplizes fordern, dass jeder k -dimensionale Teilsimplex ein reelles, positives k -dimensionales Volumen hat, d.h. dass

$$\boxed{V_k^2 > 0 \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n\}}. \quad (\text{B.0.2})$$

gilt, musste der Vertex 0 gegen den Vertex a ersetzt werden, da der Vertex 0 natürlich nicht in jedem Teilsimplex enthalten ist.

Dimension $n = 3$

Im Fall eines ($n = 3$)-Simplizes V_{σ^3} mit den Vertizes i, j, k, l bedeutet dies, dass die folgenden Bedingungen gelten müssen

- Das Volumen V_{σ^3} ist reell und positiv:

$$V_{\sigma^3}^2 = \frac{1}{36} \det \begin{pmatrix} l_{ij}^2 & \frac{1}{2} (l_{ij}^2 + l_{ik}^2 - l_{jk}^2) & \frac{1}{2} (l_{ij}^2 + l_{il}^2 - l_{jl}^2) \\ \frac{1}{2} (l_{ij}^2 + l_{ik}^2 - l_{jk}^2) & l_{ik}^2 & \frac{1}{2} (l_{ik}^2 + l_{il}^2 - l_{kl}^2) \\ \frac{1}{2} (l_{ij}^2 + l_{il}^2 - l_{jl}^2) & \frac{1}{2} (l_{ik}^2 + l_{il}^2 - l_{kl}^2) & l_{il}^2 \end{pmatrix} > 0$$

- Jede Fläche in σ^3 hat einen reellen, positiven Flächeninhalt:

$$V_{(abc)}^2 = \frac{1}{(2!)^2} \det \begin{pmatrix} l_{ab}^2 & \frac{1}{2}(l_{ab}^2 + l_{ac}^2 - l_{bc}^2) \\ \frac{1}{2}(l_{ab}^2 + l_{ac}^2 - l_{bc}^2) & l_{ac}^2 \end{pmatrix} > 0$$
$$\forall a, b, c \in \{i, j, k, l\}, a \neq b \neq c \neq a$$

- Jede Kante in σ^3 hat eine reelle, positive Länge:

$$V_{ab}^2 = l_{ab}^2 > 0 \quad \forall a, b \in \{i, j, k, l\}, a \neq b$$

C. Die benötigten charakteristischen Werte der Platonischen Körper

Wie bereits erwähnt, lassen sich auf Grund der Regelmäßigkeit der (verallgemeinerten) Platonischen Körper diverse geometrische Größen berechnen. Die folgenden Tabellen geben die zur Quantisierung der Einstein-Hilbert-Wirkung auf der triangulierten S_3 benötigten Werte an und sind [Cox 1973, S.292f] entnommen. Von den vierdimensionalen verallgemeinerten Platonischen Körpern, deren Oberfläche aus einem Simplicialkomplex besteht, benötigt man die Anzahlen N_i an i -dimensionalen Teilsimplizes und den Quotienten aus Radius \mathcal{R} der Kugel, die alle Vertices tangiert und der Kantenlänge l . Da diese Polyeder aus Tetraedern oder Oktaedern zusammengesetzt sind, benötigt man außerdem deren Anzahlen an i -dimensionalen Teilsimplizes, deren Flächenöffnungswinkel α sowie ihr Volumen V_{σ^3} als Funktion der Kantenlänge.

Polyeder	Schläfli-Symbol	N_0	N_1	N_2	N_3	\mathcal{R}/l
5-Zeller	$\{3, 3, 3\}$	5	10	10	5	$2^{0,5} \cdot 5^{-0,5}$
16-Zeller	$\{3, 3, 4\}$	8	24	32	16	$2^{-0,5}$
24-Zeller	$\{3, 4, 3\}$	24	96	96	24	1
600-Zeller	$\{3, 3, 5\}$	120	720	1200	600	$\frac{5^{0,5}+1}{2}$
Polyeder	Schläfli-Symbol	N_0	N_1	N_2	α	V_{σ^3}
Tetraeder	$\{3, 3\}$	4	6	4	$70^\circ 32'$	$\frac{\sqrt{2}}{12}l^3$
Oktaeder	$\{3, 4\}$	6	12	8	$109^\circ 28'$	$\frac{\sqrt{2}}{3}l^3$

Tabelle C.1.: Die für die Regge-Wirkung benötigten charakteristischen Werte aus [Cox 1973, S.292f]

D. Die statischen Regge-Wirkungen

Die genauere Form der statischen Regge-Wirkungen lautet:

$$S_R^5(\mathcal{R}) = \int dt \left[\mathcal{R} - \frac{375\sqrt{2}\Lambda}{47488\pi} \mathcal{R}^3 \right] \quad (\text{D.0.1})$$

$$S_R^{16}(\mathcal{R}) = \int dt \left[\mathcal{R} - \frac{75\sqrt{2}\Lambda}{4672\pi} \mathcal{R}^3 \right] \quad (\text{D.0.2})$$

$$S_R^{24}(\mathcal{R}) = \int dt \left[\mathcal{R} - \frac{75\sqrt{2}\Lambda}{2528\pi} \mathcal{R}^3 \right] \quad (\text{D.0.3})$$

$$S_R^{600}(\mathcal{R}) = \int dt \left[\mathcal{R} - \frac{236375\sqrt{2}\Lambda}{5808824\pi} \mathcal{R}^3 \right] \quad (\text{D.0.4})$$

Die dynamischen Regge-Wirkungen sind hier nicht zusätzlich angeführt, da dessen Vorfaktoren die gleichen sind wie im statischen Fall.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich bei der Erstellung meiner Diplomarbeit unterstützt haben. Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Gernot Münster für sein Vertrauen, die interessanten Diskussionen sowie die geduldige Betreuung meiner Arbeit. Außerdem möchte ich mich bei meiner ganzen Familie dafür bedanken, dass sie nie den Glauben an mich verloren hat. Mein besonderer Dank gilt meinem Freund Daniel Kasproski für die vielen Gespräche, das Korrekturlesen der Arbeit und die moralische Unterstützung während des gesamten Studiums, insbesondere während der Diplomarbeit. Auch bei meinem Bruder Oliver Goertsches möchte ich mich für die intensiven Gespräche und das Korrekturlesen der Arbeit besonders bedanken. Darüber hinaus bedanke ich mich bei Petra Kasproski für das kurzfristige Korrekturlesen der Arbeit. Zuletzt danke ich noch Lorenz Quack für die ausgesprochen angenehme Atmosphäre im Büro.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbst angefertigt und keine weiteren als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Münster, den 16.02.2010

Literaturverzeichnis

- [AmDuJo 1997] J. Ambjørn, B. Durhuus und T. Jonsson, *Quantum Geometry*, Cambridge University Press, 1. Auflage, 1997, ISBN: 0-521-46167-7.
- [Brö 2003] T. Bröcker, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, Birkhäuser Verlag, 1. Auflage, 2004, ISBN: 3-7643-7144-7.
- [Cox 1973] H.S.M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover Publications, Inc. New York, 3. Auflage, 1973, ISBN-10:0-486-61480-8.
- [FrLe 1984] R. Friedberg und T.D. Lee, *Derivation of Regge's action from Einstein's theory of general relativity*, Nucl. Phys. **B 242**, 145 (1984).
- [Har 1985] J.B. Hartle, *Simplicial minisuperspace I. General discussion*, J. Math. Phys. **26** (4), 804 (1985).
- [JoTh 2008] M. Joswig und T. Theobald, *Algorithmische Geometrie*, Vieweg & Sohn Verlag, 1. Auflage 2008, ISBN: 978-3-8348-0281-1.
- [Olo 2004] R. Oloff, *Geometrie der Raumzeit*, Vieweg Verlag, 3. Auflage, 2004, ISBN: 3-528-26917-0.
- [Schrö 2005] U.E. Schröder, *Spezielle Relativitätstheorie*, Verlag Harry Deutsch, 4. Auflage, 2005, ISBN: 3-8171-1724-8.
- [Schrö 2007] U.E. Schröder, *Gravitation*, Verlag Harry Deutsch, 4. Auflage, 2007, ISBN: 978-3-8171-1798-7.
- [SeUr 2002] R.U. Sexl und H.K. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie*, Spektrum Verlag, 5. Auflage, 2002, ISBN: 978-3-8274-2109-8.
- [Zie 2003] G.M. Ziegler, *Vorlesung Topologie im WS03/04*, Online unter www.math.tu-berlin.de/ziegler/TOP/notes2.ps, [Stand: Januar 2010].