

CLAUS GEBERT

**Störungstheoretische Untersuchungen der
 $N = 1$ supersymmetrischen
Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter**

Institut für Theoretische Physik I
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

November 1999

Störungstheoretische Untersuchungen der $N = 1$ supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

als Diplomarbeit vorgelegt von
Claus Gebert

November 1999

Institut für Theoretische Physik I der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Supersymmetrische Theorien	5
1.1 Konstruktion supersymmetrischer Lagrangedichten	6
1.1.1 Das Wess-Zumino-Modell	8
1.1.2 Die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie	9
2 Störungstheorie der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie im Kontinuum	12
2.1 Das erzeugende Funktional	12
2.2 Herleitung der Feynman-Regeln für das Kontinuum	16
2.2.1 Der 3-Gluonen-Vertex	17
2.2.2 Der 4-Gluonen-Vertex	19
2.2.3 Der Gluon-Ghost-Vertex	19
2.2.4 Der Gluon-Gluino-Vertex	20
2.3 Anwendbarkeit der Feynman-Regeln	23
2.3.1 Die freie Theorie	24
2.3.2 Die Theorie mit Wechselwirkungen	26
2.4 Zusammenfassung der Feynman-Regeln für das Kontinuum	31
2.5 Renormierungskonstanten aus der chiralen Ward-Identität	33
2.5.1 Das $\overline{\text{MS}}$ Renormierungsschema	33
2.5.2 Die chirale Ward-Identität	35
2.5.3 Der Gluino-Propagator	37
2.5.3.1 Nackte Größe in 1-Loop-NDR	37
2.5.3.2 Bestimmung von $Z_{\lambda}^{\overline{\text{MS}}}$ und $Z_m^{\overline{\text{MS}}}$	44
2.5.4 Skalare und Pseudoskalare Dichte	44
2.5.4.1 Nackte Größe in 1-Loop-NDR	45
2.5.4.2 Berechnung von $Z_S^{\overline{\text{MS}}}$ und $Z_P^{\overline{\text{MS}}}$	48

2.5.5	Axialer Vektorstrom	49
2.5.5.1	Nackte Größe in 1-Loop-NDR	49
2.5.5.2	Berechnung von $Z_A^{\overline{MS}}$	58
2.5.6	Diskussion der Ergebnisse	59
2.6	Vertices für den Superstrom	61
2.6.1	Herleitung der Vertices für den Superstrom	61
2.6.1.1	Der Gluon-Superstrom-Vertex	61
2.6.1.2	Der 2-Gluonen-Superstrom-Vertex	62
3	Die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter	64
3.1	Formulierung der Theorie auf dem Gitter	64
3.2	Die Wirkung auf dem Gitter	65
3.2.1	Die Wilson-Wirkung	66
3.2.2	Die Wilson-Dirac-Wirkung	67
3.2.3	Die Faddeev-Popov-Wirkung	68
4	Störungstheorie der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter	71
4.1	Herleitung der Feynman-Regeln auf dem Gitter	71
4.1.1	Die Propagatoren	72
4.1.2	Der 3-Gluonen-Vertex	73
4.1.3	Der 4-Gluonen-Vertex	75
4.1.4	Der Gluon-Ghost-Vertex	76
4.1.5	Der 2-Gluonen-Ghost-Vertex	78
4.1.6	Der Gluon-Gluino-Vertex	79
4.1.7	Der 2-Gluonen-Gluino-Vertex	81
4.2	Zusammenfassung der Feynman-Regeln auf dem Gitter	82
4.3	Die kritische Linie in 1-Loop-Ordnung	85
4.4	Renormierungskonstanten aus der chiralen Ward-Identität	89
4.4.1	Das \overline{MS} /LAT Renormierungsschema	89
4.4.2	Das RI Renormierungsschema	91
4.4.3	Die chirale Ward-Identität auf dem Gitter	92
4.4.4	Der Gluino-Propagator	93
4.4.4.1	Berechnung der nackten Größe	93
4.4.4.2	Bestimmung von $Z_\lambda^{\overline{MS}/LAT}$	111
4.4.4.3	Bestimmung von Z_λ^{RI}	111
4.4.4.4	Bestimmung von $Z_m^{\overline{MS}/LAT}$	112

4.4.4.5	Bestimmung von Z_m^{RI}	112
4.4.5	Skalare Dichte	113
4.4.5.1	Berechnung der nackten Größen	113
4.4.5.2	Bestimmung von $Z_S^{\overline{MS}/LAT}$	115
4.4.5.3	Bestimmung von Z_S^{RI}	115
4.4.6	Pseudoskalare Dichte	115
4.4.6.1	Berechnung der nackten Größe	116
4.4.6.2	Bestimmung von $Z_P^{\overline{MS}/LAT}$	119
4.4.6.3	Bestimmung von Z_P^{RI}	119
4.4.7	Axialer Vektorstrom	120
4.4.7.1	Nackte Größe	120
4.4.7.2	Bestimmung von $Z_A^{\overline{MS}/LAT}$	129
4.4.7.3	Bestimmung von Z_A^{RI}	129
4.4.8	Zusammenstellung der Renormierungskonstanten	129
4.5	Vertices des Superstroms	130
4.5.1	Herleitung der Vertices für den Superstrom	131
4.5.1.1	Der Gluon-Superstrom-Vertex	131
4.5.1.2	Der 2-Gluonen-Superstrom-Vertex	134
4.5.1.3	Der 3-Gluonen-Superstrom-Vertex	137
4.6	Verbesserung der Konvergenz der Störungstheorie	143
4.6.1	Verbesserte Störungstheorie	144
4.6.2	Die rein störungstheoretische Verbesserung (PPB)	146
4.6.3	Die kritische Linie in verbesserter Störungstheorie	146
Zusammenfassung und Ausblick		150
A Gamma-Matrizen im Euklidischen		152
A.1	Definitionen und nützliche Formeln	152
A.2	Weitere benötigte Formeln	153
B Die $SU(N_c)$-Generatoren		155
B.1	Definitionen und nützliche Formeln	155
B.2	Die Formeln im Fall $N_c = 2$	156
B.3	Die Formeln im Fall $N_c = 3$	156
C Benutzte Computer-Programme		158
C.1	\mathcal{J}_1 für die kritische Linie	158

C.2	\mathcal{J}_2 für die kritische Linie	159
C.3	Die optimale Skala q^*	160
C.4	Gittersummen der Renormierungskonstanten	164
D	Einige trigonometrische Umformungen	165
	Abbildungsverzeichnis	168
	Literaturverzeichnis	169
	Danksagung	173

Einleitung

Die Welt besteht aus Elementarteilchen, die sich in einer gekrümmten Raumzeit bewegen. Als Elementarteilchen werden Leptonen (z.B. das Elektron), deren Antiteilchen (z.B. das Positron), die zugehörigen Neutrinos und die Quarks sowie deren Antiteilchen angesehen. Alle bisher genannten Teilchen sind Fermionen, d.h. sie haben einen halbzahligen Spin und sie gehorchen dem Pauli-Prinzip. Außerdem gehören zu den Elementarteilchen die die Kräfte vermittelnden Austauschteilchen, nämlich das Photon, das für die elektromagnetische Wechselwirkung verantwortlich ist, die W -Bosonen und das Z -Boson für die schwache Wechselwirkung, die Gluonen für die starke Wechselwirkung sowie das Graviton für die Gravitation und das Higgs-Teilchen, das für die Massenerzeugung im Standardmodell der Elementarteilchenphysik verantwortlich ist. Bei den letztgenannten Teilchen handelt es sich um Bosonen, d.h. um Teilchen mit ganzzahligem Spin, die sich gemäß der Bose-Einstein-Statistik verhalten.

Das Verhalten dieser Teilchen wird nach heutiger Kenntnis perfekt durch das Standardmodell der Teilchenphysik beschrieben, d.h. es gibt keinen experimentellen Befund, der den Aussagen des Standardmodells widerspricht.

Das Standardmodell ist der bislang letzte Schritt in einer langen Kette von Bemühungen auf der Suche nach Möglichkeiten zur Vereinheitlichung der Teilchenwelt. Ein erster Schritt in diese Richtung gelang 1888 MAXWELL, der in seiner Theorie die elektrische und die magnetische Wechselwirkung zur elektromagnetischen Wechselwirkung vereinheitlichen konnte, und außerdem den Zusammenhang der elektromagnetischen Wellen mit dem Licht erkannte. Dadurch konnten bis 1900 drei große Bereiche der Physik — Elektrizität, Magnetismus und Optik — zu einem Bereich zusammengefaßt werden.

Anfang dieses Jahrhunderts wurden dann die Quantentheorie und von EINSTEIN die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie entwickelt. Bereits 1928 konnte DIRAC eine Synthese zwischen der speziellen Relativitätstheorie und der Quantentheorie erstellen. Der Erfolg seiner Arbeit war die Vorhersage des Positrons, dem Antiteilchen des Elektrons. In der weiteren Folge konnte die elektromagnetische Wechselwirkung durch die Quantenelektrodynamik (QED) beschrieben werden, der ersten Eichtheorie im engeren Sinne.

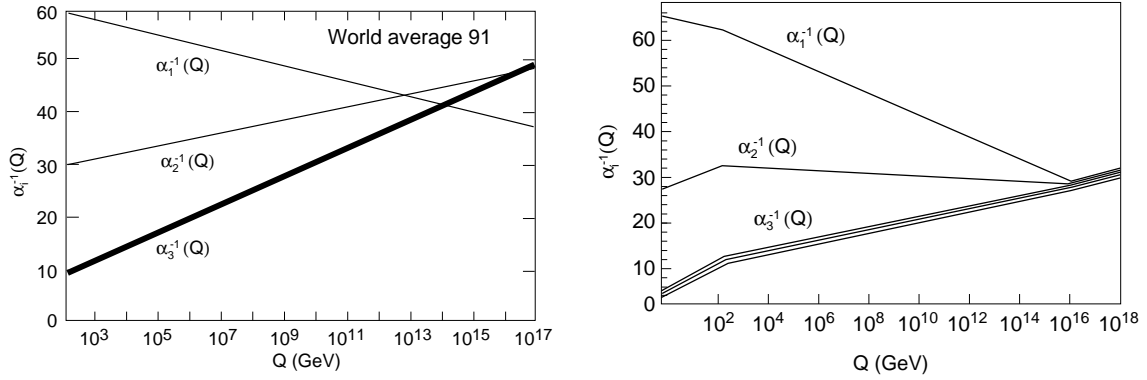
In den 60er Jahren konnten GLASHOW, WEINBERG und SALAM eine Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung aufstellen, in der die elektromagnetische Wechselwirkung mit der schwachen Wechselwirkung zusammengeführt wurde. Zusammen mit der nicht-abelschen Eichtheorie der starken Wechselwirkung, der Quantenchromodynamik (QCD) bildet diese Theorie das sogenannte Standardmodell der Teilchenphysik.

Dieses Standardmodell hat außergewöhnliche Erfolge zu verzeichnen. Die QED zur Beschreibung von Elektronen konnte z.B. auf zehn Stellen hinter dem Komma genau durch Experimente bestätigt werden, ohne den kleinsten Hinweis auf eine Abweichung zu finden. Mit Hilfe der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung konnten Vorhersagen über die Massen der zugehörigen Austauschteilchen gemacht werden, die dann Anfang der 80er Jahre am CERN bestätigt wurden. Ein erster Erfolg der QCD war die Entdeckung des J/Ψ -Teilchens und die damit verbundene Erkenntnis über die Existenz eines vierten Quarks, und zuletzt die Entdeckung des Top-Quarks.

Es gibt somit keinen Befund, der dem Standardmodell und seinen vielzähligen Vorhersagen widerspricht. Dennoch wird seit Jahrzehnten sowohl in theoretischen als auch experimentellen Arbeiten nach einer Physik jenseits des Standardmodells gesucht, und aufgrund der Erfolge des Standardmodells stellt sich die Frage, woher der Glaube an die Existenz einer noch umfassenderen Theorie kommt.

Bereits durch die Arbeit von MAXWELL sowie die späteren Theorien hat sich gezeigt, daß die Suche nach Vereinheitlichung ein sehr erfolgversprechendes Konzept beim Aufstellen neuer Theorien ist. Dementsprechend begann man bereits in den 70er Jahren mit der Suche nach einer „Grand Unified Theory“ (GUT), in der auch die starke Wechselwirkung mit der elektroschwachen vereinheitlicht werden soll, und in den 80er Jahren nach einer „Theory Of Everything“ (TOE), in der auch noch die Gravitation mit einbezogen sein soll. In diese Richtung ist z.Z. die Superstring-Theorie, eine auf der Supersymmetrie aufbauende String-Theorie am weitesten entwickelt. Supersymmetrie bezeichnet dabei eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen. Daraus folgt, daß es zu jedem bekannten Fermion einen bosonischen Partner und zu jedem Boson einen fermionischen Partner geben muß. Bis auf den Spin sollten supersymmetrische Partner dieselben Eigenschaften haben. Wenn es allerdings Supersymmetrie gibt, so muß diese gebrochen sein, da andernfalls die supersymmetrischen Partner zu den bereits bekannten Teilchen, die dann dieselbe Masse hätten, bereits gefunden worden wären.

Ein weiterer Grund für die Suche nach einer übergeordneten Theorie ist das sogenannte Hierarchie-Problem. Die drei Eichkopplungen des Standardmodells sind laufende Kopplungen, d.h. ihre Stärke hängt von der Energieskala ab, bei der sie gemessen werden. Betrachtet man diese Kopplungskonstanten z.B. durch störungstheoretische Methoden bei hohen Energien, so erkennt man, daß sich die drei Kopp-



a) im Standardmodell

b) in einem
Minimal-Supersymmetrischen-
Standardmodell

Abbildung 1: Die laufenden Kopplungskonstanten

lungen nicht in einem Punkt treffen, siehe Abb. 1a [Ol]. Dies wäre wünschenswert, da man dann oberhalb dieser Grenze eine GUT erwarten könnte, in der es nur noch eine Kopplung gibt. Dieses Problem könnte durch ein supersymmetrisches Standardmodell gelöst werden, siehe Abb. 1b [Ol], da supersymmetrische Theorien geringere UV-Divergenzen haben, und sich in diesem Modell die drei Kopplungskonstanten ungefähr bei einer Skala von $m_G \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ GeV}$ treffen. Daneben gibt es weiter die Skala $m_W \approx 100 \text{ GeV}$, bei der die elektroschwache Symmetrie bricht. Diese Skala ergibt sich aus dem erwarteten Wert für die Masse des Higgs-Teilchens. Durch Strahlungskorrekturen sollte das Higgs-Teilchen allerdings eine Masse bei der durch m_G gesetzten Skala erhalten. Dies steht im Widerspruch zu dem deutlich kleineren Wert von m_W . Um die Masse des Higgs-Teilchens in den Bereich von m_W zu bringen, müßte man die freien Parameter einer GUT in jeder Ordnung Störungstheorie auf 26 Stellen genau einstellen. Dies ist keine wünschenswerte Lösung des Problems, das man als Hierarchie-Problem bezeichnet. Für supersymmetrische Theorien gibt es ein „non-renormalization“-Theorem, und demnach müssen die freien Parameter einer supersymmetrischen GUT nur einmal feinjustiert werden. Dies wird als Teillösung des Hierarchie-Problems angesehen.

Die genannten theoretischen Überlegungen deuten alle darauf hin, daß die Welt besser durch ein vom Standardmodell abweichendes supersymmetrisches Modell beschrieben wird. Bisher ist es allerdings nicht möglich gewesen, eine Abweichung der Natur vom Standardmodell nachzuweisen. Dies könnte sich in naher Zukunft ändern. Abschätzungen aus dem Standardmodell für die Zerfallszeit eines Protons haben eine Halbwertszeit von etwa $2 \cdot 10^{32} \text{ sec}$ ergeben. Die letzten experimentellen Befunde zeigen jedoch, daß die Halbwertszeit des Protons voraussichtlich $\sim 10^{33} \text{ sec}$ beträgt, wobei diese Aussagen noch mit Vorsicht zu bewerten sind. Sollten sich diese

Aussagen bestätigen, wäre eine Abweichung des Standardmodells gefunden, während supersymmetrische Theorien im Einklang mit diesen neuen experimentellen Daten stehen.

Der beste Hinweis auf Supersymmetrie wäre der direkte Nachweis eines supersymmetrischen Partners zu einem bereits bekannten Teilchen. Die experimentellen Möglichkeiten werden dabei durch die Masse des nachzuweisenden Teilchens begrenzt. Für die Massen der supersymmetrischen Partner gibt es Vorhersagen, und man erwartet, daß mit der nächsten Beschleunigergeneration supersymmetrische Teilchen entdeckt werden.

Aufgrund dieser Überlegungen werden große Anstrengungen zur Erforschung supersymmetrischer Theorien unternommen. Zwei der Möglichkeiten zur Untersuchung einer solchen Theorie sind die Störungstheorie und Simulationen mit Hilfe des Computers. Auf beide Möglichkeiten wird im Rahmen dieser Arbeit eingegangen.

Die Diplomarbeit gliedert sich wie folgt:

Im ersten Kapitel wird auf die Konstruktion supersymmetrischer Theorien eingegangen, wobei zwei Modelle vorgestellt werden, eins davon ist die Super-Yang-Mills-Theorie. Dieses Modell wird dann in den folgenden Kapiteln näher betrachtet.

Im zweiten Kapitel wird auf die Störungstheorie dieses Modells eingegangen. Dazu werden zunächst die zugehörigen Feynman-Regeln entwickelt, später werden damit Renormierungskonstanten berechnet. Insbesondere wird am Ende dieses Kapitels der Superstrom betrachtet, der in mathematisch teilweise ähnlichen Theorien wie der QCD nicht vorkommt, da dieser Strom die Fermionenzahlerhaltung verletzt. In supersymmetrischen Theorien ist dies durch die Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen möglich.

Im dritten Kapitel wird das betrachtete Modell auf dem Gitter formuliert, und im vierten Kapitel werden die zugehörigen Feynman-Regeln auf dem Gitter entwickelt. Damit werden Renormierungskonstanten berechnet, insbesondere auch die additive Massenrenormierung. Dies führt zu einer störungstheoretischen Vorhersage für den für Simulationen wichtigen kritischen Hoppingparameter. Um diese Vorhersage so genau wie möglich zu machen, wird am Ende dieses Kapitels noch auf Möglichkeiten zur Verbesserung der Störungstheorie eingegangen.

Kapitel 1

Supersymmetrische Theorien

Auf der Suche nach einer Theorie, in der die Gravitation mit den restlichen Fundamentalkräften nicht-trivial vereinigt ist, haben Arbeiten Anfang der 70er Jahre deutlich gemacht, daß dies aller Wahrscheinlichkeit nach nur in supersymmetrischen Theorien möglich ist. Grundlage einer solchen vereinheitlichten Theorie ist sicherlich, daß die Raum-Zeit Symmetrien, beschrieben von der Poincaré-Gruppe, mit den inneren Symmetrien, wie sie aus der Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung und aus der QCD bekannt sind, zu einer einzigen Symmetrie zusammengefaßt werden. Bereits 1967 konnte allerdings durch COLEMAN und MANDULA gezeigt werden [CM], daß es nicht möglich ist, diese beiden Symmetrien nicht-trivial zu vereinigen. Entweder ist die entstehende Gruppe ein triviales Produkt der Poincaré-Gruppe und der Lie-Gruppe der inneren Symmetrie, oder die resultierende Theorie hat eine triviale S-Matrix, d.h. verschwindende Streuamplituden. Dieses ernüchternde Resultat ist unter dem Namen No-Go-Theorem von Coleman und Mandula bekannt.

Da man aber das Konzept einer vereinheitlichten Theorie nicht so schnell aufgeben wollte, wurden Versuche zur Umgehung dieses No-Go-Theorems unternommen. 1971 konnte gezeigt werden [GL], daß dies durch eine Erweiterung des Konzepts der Lie-Gruppe möglich ist. Während üblicherweise eine Lie-Gruppe vollständig durch die Kommutatorrelationen zwischen den Generatoren festgelegt ist, wurden in dieser Arbeit Antikommutatorrelationen hinzugenommen. Dies führt zu zwei unterschiedlichen Klassen von Generatoren, die man als bosonisch und fermionisch klassifizieren kann. Außerdem entwickelte man das Konzept der graduierten Lie-Algebra. Es zeigte sich dann 1975 [HLS], daß die \mathbb{Z}_2 -Graduierung die Einzige ist, die mit der Quantenfeldtheorie in Einklang zu bringen ist. Damit gelangt man zu der Super-Poincaré-Algebra, auf der supersymmetrische Theorien aufbauen.

In diesem Kapitel werden zwei solcher Theorien vorgestellt. Zum einen das Wess-Zumino-Modell [WZ], die erste supersymmetrische Theorie, und zum anderen die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie [VY]. Beide werden hier im Rahmen des Superfeldformalismus entwickelt, dann aber durch Materie- und Eichfelder dargestellt, da

dies zwingend notwendig ist, wenn man eine dieser Theorien später auf dem Gitter betrachten möchte.

1.1 Konstruktion supersymmetrischer Lagrange-dichten

Materie- und Eichfelder, wie z.B. Felder von Gluonen und Quarks in der QCD, sind im Minkowski-Raum definiert, die Lorentz-Transformationen aus der Poincaré-Gruppe wirken auf die Minkowski-Koordinaten dieser Felder. Ebenso führt man einen Superraum ein, der aus der üblichen 4-dimensionalen Raumzeit x_μ sowie zusätzlichen fermionischen Dimensionen θ und $\bar{\theta}$ besteht, auf dessen Koordinaten die SUSY-Transformationen der Super-Poincaré-Algebra wirken, und in dem Superfelder definiert sind. Die fermionischen Dimensionen werden dabei durch Grassmann-Zahlen beschrieben. Ein Superfeld $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta})$ kann man in eine Potenzreihe in θ und $\bar{\theta}$ entwickeln:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta}) = & f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)M(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dabei ist $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$.

Aus der Forderung, daß \mathcal{F} ein Lorentzskalar sein soll, ergibt sich für das Verhalten der Komponentenfelder unter Lorentztransformationen:

- 4 komplexe skalare Felder: $f(x), M(x), N(x), d(x)$
- 2 linkshändige Weyl-Spinorfelder: $\phi(x), \alpha(x)$
- 2 rechtshändige Weyl-Spinorfelder: $\bar{\chi}(x), \bar{\lambda}(x)$
- 1 komplexes Vektorfeld: $A_\mu(x)$

Es ist nun klar, daß Linearkombinationen von Superfeldern wieder Superfelder ergeben, so daß eine lineare Darstellung der SUSY-Algebra gefunden wurde. Diese ist aber im allgemeinen reduzibel. Irreduzible Darstellungen erhält man, indem man nur eine Teilklasse von Superfeldern betrachtet, die einer gewissen Zusatzbedingung genügen. Dazu werden zunächst kovariante Ableitungen definiert:

$$D_A := \partial_A + i(\sigma^\mu\bar{\theta})_A\partial_\mu \quad (1.2)$$

$$\bar{D}_{\dot{A}} := -\bar{\partial}_{\dot{A}} + i(\tilde{\sigma}^\mu\theta)_{\dot{A}}\partial_\mu \quad (1.3)$$

mit $\tilde{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$.

Damit kann man Superfelder wie folgt klassifizieren:

- *chirale* Superfelder $\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) : \bar{D}_A \Phi = 0$
- *antichirale* Superfelder $\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) : D_A \Phi^\dagger = 0$
- *Vektor*-Superfelder $V(x, \theta, \bar{\theta}) : V = V^\dagger$

Chirale und antichirale Superfelder, die auch als skalare Superfelder bezeichnet werden, beschreiben dabei Materiefelder, Vektor-Superfelder beschreiben Eichfelder.

Es folgt aus diesen Bedingungen, daß ein allgemeines chirales Superfeld von der Form

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \Phi(y, \theta) \quad (1.4)$$

mit

$$y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \quad (1.5)$$

ist. Die Taylorentwicklung ergibt sich dann zu:

$$\Phi(y, \theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y) \quad (1.6)$$

Man verbleibt also mit folgenden Komponentenfeldern:

- 1 komplexes skalares Feld φ
- 1 linkshändiges Weyl-Spinorfeld ψ
- 1 komplexes skalares Hilfsfeld F

Mit ψ lassen sich dabei Fermionenfelder (Leptonen oder Quarks) beschreiben, φ stellt die zugehörigen bosonischen Superpartner (Sleptonen oder Squarks) dar.

Ebenso läßt sich ein antichirales Superfeld wie folgt schreiben:

$$\Phi^\dagger(\bar{y}, \bar{\theta}) = \varphi^*(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(\bar{y}) + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^*(\bar{y}). \quad (1.7)$$

Aus der Bedingung für Vektor-Superfelder ergeben sich folgende Bedingungen für die Komponentenfelder aus (1.1):

$$f = f^*, \quad A_\mu = A_\mu^*, \quad d = d^*, \quad M = N^*, \quad \phi = \chi \quad \text{und} \quad \lambda = \alpha \quad (1.8)$$

Aus diesen Feldern soll eine Lagrangedichte \mathcal{L} konstruiert werden, so daß die Wirkung $S = \int d^4x \mathcal{L}$ unter SUSY-Transformationen invariant bleibt. Es zeigt sich, daß man dies erreicht, wenn man die d -Komponente eines allgemeinen Superfeldes oder die F -Komponente eines skalaren Superfeldes dazu benutzt. Dabei wird folgende Schreibweise benutzt:

$$\mathcal{F}|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} := d(x) \quad (1.9)$$

$$\Phi|_{\theta\theta} := F(x) \quad (1.10)$$

Supersymmetrische Lagrangedichten erhält man also durch folgende Konstruktion:

$$\mathcal{L} = (\text{Superfelder})|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + (\text{chirale Superfelder})|_{\theta\theta} \quad (1.11)$$

1.1.1 Das Wess-Zumino-Modell

Eine mögliche Gestalt einer supersymmetrischen Lagrangedichte ist die folgende:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} := & \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi(x, \theta, \bar{\theta})|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ & - \frac{m}{2} \Phi^2(y, \theta)|_{\theta\theta} + (h.c.) \\ & - \frac{g}{3} \Phi^3(y, \theta)|_{\theta\theta} + (h.c.)\end{aligned}\quad (1.12)$$

Um eine reelle Lagrangedichte zu erhalten, wurde zu den chiralen Superfeldern noch der hermitesch konjugierte Ausdruck addiert. In Komponentefeldern lautet diese Lagrangedichte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \psi\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) \\ & + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) \\ & + F^*F - (m\varphi + g\varphi^2)F - (m\varphi^* + g\varphi^{*2})F^*\end{aligned}\quad (1.13)$$

Dies ist die off-shell-Lagrangedichte des berühmten Wess-Zumino-Modells.

Die Euler-Lagrange-Gleichung für das Hilfsfeld F ergibt als Lösung folgende Bewegungsgleichung für das Hilfsfeld:

$$F = m\varphi^* + g\varphi^{*2}\quad (1.14)$$

Diese enthält keine Ableitungen von F und ist somit rein algebraisch, wodurch F nicht an der Dynamik teilnimmt. Man kann es also durch seine Bewegungsgleichung ersetzen, wodurch man folgende on-shell-Lagrangedichte erhält:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 |\varphi|^2 \\ & - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \psi\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) \\ & + g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) - mg |\varphi|^2 (\varphi + \varphi^*) - g^2 |\varphi|^4\end{aligned}\quad (1.15)$$

Die erste Zeile beschreibt ein Boson der Masse m , die zweite ein Fermion gleicher Masse, in der dritten steht die Wechselwirkung der beiden Felder.

Mit

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - iB)\quad (1.16)$$

und

$$\Psi := \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \bar{\Psi} = (\psi, \bar{\psi})\quad (1.17)$$

lautet das freie Wess-Zumino-Modell, also das mit $g = 0$ wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m^2 A^2] + \frac{1}{2} [(\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m^2 B^2] \\ & - \frac{1}{2} \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi\end{aligned}\quad (1.18)$$

Es zeigt sich, daß das Feld $A(x)$ ein reelles, skalares Feld ist, $B(x)$ ein reelles, pseudo-skalares und $\Psi(x)$ ein Majorana-Spinorfeld. Die Bewegungsgleichungen dieser Felder lauten:

$$(\square + m^2)A = 0 \quad (\text{Klein-Gordon}) \quad (1.19)$$

$$(\square + m^2)B = 0 \quad (\text{Klein-Gordon}) \quad (1.20)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad (\text{Dirac}) \quad (1.21)$$

$$\bar{\Psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial} + m) = 0 \quad (\text{Dirac}) \quad (1.22)$$

An dieser Darstellung erkennt man recht gut, daß das Wess-Zumino-Modell ein natürliches Modell ist, wenn man eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen fordert.

1.1.2 Die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie

Mit dem Wess-Zumino-Modell konnte erstmals gezeigt werden, daß es systematisch möglich ist, eine supersymmetrische Lagrangedichte zu konstruieren. Allerdings war es eher ein Spielzeugmodell. Als nächstes wird daher ein supersymmetrisches Modell mit einer nicht-abelschen Eichinvarianz, wie sie aus der QCD bekannt ist, vorgestellt. Für ein Vektorfeld $V(x, \theta, \bar{\theta})$ definiert man die supersymmetrische Feldstärke:

$$W_A := -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})e^{-V}D_A e^V \quad (1.23)$$

Diese ist ein chirales Superfeld. Damit läßt sich aus dieser Feldstärke wieder eine supersymmetrische Lagrangedichte konstruieren. Außerdem verhält es sich unter einer Eichtransformation wie folgt:

$$W_A \longrightarrow e^{-i\Lambda} W_A e^{i\Lambda}, \quad (1.24)$$

wenn sich V wie folgt verhält:

$$V \longrightarrow e^{-i\Lambda^\dagger} V e^{i\Lambda}, \quad (1.25)$$

mit

$$\Lambda = T^a \Lambda^a \quad V = T^a V^a. \quad (1.26)$$

T^a sind dabei die Generatoren der adjungierten Darstellung.

Eine mögliche Lagrangedichte, die sowohl SUSY-invariant als auch eichinvariant ist, ist die folgende:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} W^A W_A |_{\theta\theta} + (h.c.) \quad (1.27)$$

In Komponentefeldern lautet diese, mit dem üblichen nicht-abelschen Feldstärketensor:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (1.28)$$

und der kovarianten Ableitung in adjungierter Darstellung:

$$\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda} = \partial_\mu \bar{\lambda} + [A_\mu, \bar{\lambda}] \quad (1.29)$$

sowie in der Wess-Zumino-Eichung und in euklidischer Raumzeit wie folgt:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \text{Tr} (\bar{\lambda} \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda) - \text{Tr} (dd). \quad (1.30)$$

Die Bewegungsgleichung des Hilfsfelds d ist durch $d = 0$ gegeben, so daß die on-shell-Wirkung mit

$$A_\mu = -ig A_\mu^a T^a \quad (1.31)$$

$$\lambda = \lambda^a T^a \quad (1.32)$$

wie folgt aussieht:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a(x) \right\} \quad (1.33)$$

Formal ist dies, bis auf einen Faktor $1/2$ vor dem Fermionenteil der Wirkung, identisch zur QCD. Allerdings sind die Fermionen keine Dirac-Spinoren in der Fundamental-Darstellung, sondern Majorana-Fermionen in der adjungierten Darstellung.

Diese Theorie soll im folgenden genauer betrachtet werden. Dies bedeutet, daß man für einen Operator \mathcal{O} an seinen Erwartungswerten

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\lambda \mathcal{O} e^{-\mathcal{S}}}{\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\lambda e^{-\mathcal{S}}} \quad (1.34)$$

interessiert ist. Diese gilt es zu berechnen, wozu zwei Ansätze hervorzuheben sind. Zum einen ist dies die störungstheoretische Entwicklung, bei der man für die Exponentialfunktion, und gegebenenfalls für den Operator \mathcal{O} , die in dem Integranden auftreten, die Taylorentwicklung in g einsetzt. Mit einigen rechentechnischen Vereinfachungen ist dies in den Feynman-Regeln zusammengefaßt, die in einem späteren Kapitel für diese Theorie hergeleitet werden.

Nachteil dieser Methode ist, daß für große Kopplungskonstanten eine gute Entwicklung in vernünftiger Zeit nicht möglich ist. Außerdem gibt es auch sogenannte nicht-perturbative Anteile, die prinzipiell nicht durch eine solche Entwicklung erhalten werden können.

Diese Schwierigkeiten können umgangen werden, wenn man die Theorie auf dem Gitter definiert, und die Erwartungswerte mit dem Computer berechnet¹.

¹Dies wird im Rahmen der DESY-Münster-Kollaboration getan, in welcher auch diese Diplomarbeit angefertigt wurde.

Allerdings treten bei dieser Methode Gittereffekte durch eine endliche Gittergröße auf, und außerdem können die Ergebnisse nicht direkt mit den Kontinuumswerten verglichen werden. Zur Abschätzung des ersten Effekts und auch zur Anpassung an die Kontinuumswerte kann man auch auf dem Gitter störungstheoretische Berechnungen anstellen. Auch diese Störungstheorie soll im folgenden entwickelt und dann angewandt werden.

Kapitel 2

Störungstheorie für die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie im Kontinuum

In dem vorherigen Kapitel wurde die Wirkung der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie entwickelt. Eine Möglichkeit, um Korrelationsfunktionen bzw. Erwartungswerte zu berechnen, besteht in einer störungstheoretischen Behandlung. Die Grundlagen dazu werden in diesem Kapitel entwickelt, wobei auf Kenntnisse aus der QCD zurückgegriffen werden kann. Anschließend werden damit einige Renormierungskonstanten berechnet, wie sie in der chiralen und in der SUSY Ward-Identität auftreten¹.

2.1 Das erzeugende Funktional

Ziel ist es, im Euklidischen störungstheoretisch Korrelationsfunktionen zu berechnen. Dazu werden die Korrelationsfunktionen durch funktionale Ableitungen des erzeugenden Funktional \mathcal{Z} nach den Quelltermen J beschrieben. Dieses kann in der Kopplungskonstanten g entwickelt werden, so daß man zu einer störungstheoretischen Beschreibung der Theorie gelangt, die sich dann in den Feynman-Regeln widerspiegelt. Sind neue Feynman-Regeln zu entwickeln, so muß zuvor sichergestellt werden, daß aus dem erzeugenden Funktional der jeweiligen Theorie die Feynman-Regeln in der üblichen Weise zu erhalten sind.

Der rein gluonische Teil des erzeugenden Funktional ist bereits aus der QCD bekannt. Man setzt

$$\mathcal{Z}[J] \equiv \int \mathcal{D}A \exp \left(-\mathcal{S}[A] + \int d^4x J_\mu(x) A_\mu(x) \right) \quad (2.1)$$

¹Diese Ward-Identitäten wurden in der parallel angefertigten Diplomarbeit von Tobias Galla betrachtet [Ga]. Die zugehörigen störungstheoretischen Berechnungen im Kontinuum und auf dem Gitter wurden gemeinsam mit ihm durchgeführt.

Dabei ist $\mathcal{S}[A]$ der reine Eich-Anteil der Wirkung (1.33).

Dieses Pfadintegral ist allerdings nicht mit genügender Vorsicht definiert. In dem Pfadintegral wird nämlich über alle Pfade A integriert, und damit auch über solche, die sich nur durch eine Eichung unterscheiden. Die Wirkung S ist aber für alle diese Pfade gleich. Dies führt zu einem Problem bei der störungstheoretischen Behandlung von (2.1), da durch die lokale Eichinvarianz Nullmoden bei der Berechnung des Gluonenpropagators auftreten. Dieses Problem konnte von FADDEEV und POPOV durch einen Trick gelöst werden, indem sie eine Deltafunktion über die Eichungen in das Integral einfügen. Sei also $\mathcal{F}(A)$ eine Funktion, die gleich Null gesetzt die Eichfixierungsbedingung sein soll. Einfügen einer funktionalen Deltafunktion $\delta(\mathcal{F}(A))$ würde also das Problem lösen. Der Trick ist, die Eins wie folgt zu schreiben:

$$1 = \int \mathcal{D}\Lambda \delta(\mathcal{F}(A^\Lambda)) \det \left(\frac{\delta \mathcal{F}(A^\Lambda)}{\delta \Lambda} \right), \quad (2.2)$$

wobei A^Λ das eichtransformierte Feld ist. Dies ist der Standardtrick zum Lösen dieses Problems, so daß hier im folgenden nicht auf die technischen Details eingegangen werden soll. Durch Einfügen dieser Eins in das erzeugende Funktional kann also eine Eichfixierung durchgeführt werden, so daß von daher keine Probleme mehr auftauchen. Allerdings hängt die mit der Eins eingeführte Faddeev-Popov-Determinante im allgemeinen von dem Feld A ab, und es ist zunächst unklar, wie damit umzugehen ist. Auch hier konnten FADDEEV und POPOV eine sinnvolle Lösung anbieten, indem sie die Determinante durch ein funktionales Integral über neu einzuführende antikommutierende Felder ersetzten. Diese sogenannten Geisterfelder η und η^* stehen dann derart in dem erzeugenden Funktional, daß man eine Wirkung für sie aufschreiben kann. Diese lautet bei einer kovarianten Eichbedingung und in euklidischer Raumzeit:

$$\mathcal{S}^\eta[A, \eta, \bar{\eta}] = \int d^4x \bar{\eta}^a(x) (\delta^{ab} \partial^2 - g f^{abc} \partial_\mu A_\mu^c - g f_{abc} A_\mu^c \partial_\mu) \eta^b(x) \quad (2.3)$$

Dieser Anteil der Wirkung darf nicht vergessen werden. Es handelt sich zwar bei den Geisterfeldern um keine echten Teilchen, vielmehr sind sie nur durch einen mathematischen Trick eingeführt worden, und gehorchen dazu noch der falschen Statistik. Sie koppeln aber offensichtlich an das Feld A_μ an, und haben somit direkten Einfluß auf die Physik dieses Feldes.

Des weiteren muß in der Wirkung berücksichtigt werden, daß eine Eichfixierung gewählt wurde, wobei die späteren Rechnungen in einer kovarianten Eichung durchgeführt werden sollen, also z.B. in der Landau- oder der Feynman-Eichung. Andere Möglichkeiten sind z.B. die Coulomb-Eichung oder die axiale Eichung, aber auch die in supersymmetrischen Theorien oft benutzte chirale Eichung. Im Fall der gewählten kovarianten Eichfixierung lautet die Eichbedingung:

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (2.4)$$

oder allgemeiner $\partial_\mu A^\mu = c(x)$. Dies entspricht dem Hinzufügen eines zusätzlichen eichfixierenden Terms zur Lagrangedichte \mathcal{L}

$$\mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.5)$$

wobei $\alpha = 1$ der Feynman-Eichung entspricht, der Limes $\alpha \rightarrow 0$ der Landau- oder auch Lorentz-Eichung.

Damit kann man sich wieder dem erzeugenden Funktional (2.1) zuwenden. Für dieses ist bekannt, daß man durch eine Variablenverschiebung

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \int d^4 y D_{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) \quad (2.6)$$

die J -Abhängigkeit des freien erzeugenden Funktional $\mathcal{Z}_0[J]$ explizit wie folgt schreiben kann:

$$\mathcal{Z}_0[J] = Z_{J,0} \exp \left(\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J_\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) \right) \quad (2.7)$$

Dabei ist

$$D_{\mu\nu}^{ab}(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{\delta^{ab}}{k^2} \exp(ik(x-y)) \quad (2.8)$$

das Inverse des quadratischen Terms in der Wirkung der Gluonen, es stellt den Feynman-Propagator für das Gluonenfeld dar.

Auch wenn man für die Geisterfelder kein erzeugendes Funktional definiert, so wird es für spätere Rechnungen doch sinnvoll sein, auf dieselbe Art einen Propagator S für die soeben eingeführten Geister zu definieren. Dieser ist dann gegeben durch:

$$S^{ab}(x-y) = \delta^{ab} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \exp(iq(x-y)) \quad (2.9)$$

Formal kann man damit auch für die Geisterteilchen ein erzeugendes Funktional aufstellen. Dies ist in der freien Theorie nicht nötig, da man nicht an Korrelationsfunktionen der Geisterteilchen interessiert ist, da es sich dabei nur um virtuelle Teilchen handeln kann. Um aber elegant die Störungstheorie formulieren zu können, wie z.B. in (2.21), ist es sinnvoll, auch für die Geisterteilchen ein freies erzeugendes Funktional zu haben. Dieses lautet dann mit χ^* und χ als Quellen für η und η^* wie folgt:

$$\mathcal{Z}_0[\chi, \chi^*] = Z_{\chi,0} \exp \left(\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \chi^*(x) S(x-y) \chi(y) \right) \quad (2.10)$$

Man ist daran interessiert, auch die Fermionen der Theorie durch ein erzeugendes Funktional beschreiben zu können. Für Dirac-Spinoren ist solch ein Formalismus aus der QCD bekannt, und es muß gezeigt werden, daß dies auch für Majorana-Spinoren

durchführbar ist. Für den fermionischen Teil des erzeugenden Funktionalen setzt man mit der äußeren Quelle $\bar{\theta}$ wie folgt an:

$$\mathcal{Z}[\theta] \equiv \int \mathcal{D}\lambda \exp \left(-\mathcal{S}_\lambda[A, \lambda, \bar{\lambda}] + \int d^4x \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right) \quad (2.11)$$

Die fermionische Teil der Wirkung $\mathcal{S}_\lambda[A, \lambda, \bar{\lambda}]$ ist für den masselosen Fall durch (1.33) gegeben. Mit dem Masseterm lautet er:

$$\mathcal{S}_\lambda[A, \lambda, \bar{\lambda}] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a(x) + \frac{1}{2} m \bar{\lambda}^a(x) \lambda^a(x) \right\} \quad (2.12)$$

Bei dem Funktional ist wichtig, daß man nur über $\mathcal{D}\lambda$, und nicht über $\mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\bar{\lambda}$ integriert ([Mo], [Ra]), da λ und $\bar{\lambda}$ wegen

$$\bar{\lambda} = \lambda^T C \quad (2.13)$$

bzw.

$$\lambda = -C^{-1} \bar{\lambda}^T \quad (2.14)$$

mit der Ladungskonjugationsmatrix C keine unabhängigen Variablen sind. Durch eine Variablenverschiebung in λ kann auch in (2.11) die Integration ausgeführt werden. Diese Variablenverschiebung sieht formal ganz identisch aus zu (2.6), es ist allerdings zu beachten, daß nun nicht nur über die Farbindizes, sondern auch über die Spinorindizes zu summieren ist:

$$\lambda \longrightarrow \lambda + \int d^4y S_F(x-y) \theta(y) \quad (2.15)$$

Dabei wird θ so definiert, daß es die Majorana-Eigenschaft (2.13) erfüllt. Damit ergibt sich für Majorana-Spinoren folgende Abhängigkeit des freien erzeugenden Funktionalen von den Quellen:

$$\mathcal{Z}_0[\theta] = Z_{\theta,0} \exp \left(\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \bar{\theta}(x) S_F(x-y) \theta(y) \right) \quad (2.16)$$

mit

$$S_F^{ab}(x-y) = \delta^{ab} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\not{p} + m}{p^2 + m^2} \exp(ip(x-y)). \quad (2.17)$$

Man erkennt daran sofort folgende Formeln, die später noch gebraucht werden:

$$C S_F(x-y) C^{-1} = S_F^T(y-x) \quad (2.18)$$

und

$$C \gamma_\mu S_F(x-y) C^{-1} = -S_F^T(y-x) \gamma_\mu. \quad (2.19)$$

Insgesamt erhält man für das freie erzeugende Funktional

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0[J, \theta, \chi, \chi^*] = & Z_0 \exp \left(\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left(J_\mu(x) D_{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{\theta}(x) S_F(x-y) \theta(y) + \chi^*(x) S(x-y) \chi(y) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

und für das erzeugende Funktional

$$\mathcal{Z}[J, \theta, \chi, \chi^*] = \exp \left(-\mathcal{S}_I \left[\frac{\delta}{\delta J(x)}, \frac{\delta}{\delta \bar{\theta}(x)}, -\frac{\delta}{\delta \theta(x)}, \frac{\delta}{\delta \chi^*(x)}, -\frac{\delta}{\delta \chi(x)} \right] \right) \mathcal{Z}_0[J, \theta, \chi, \chi^*] \quad (2.21)$$

\mathcal{S}_I bezeichnet dabei den wechselwirkenden Anteil der Wirkung. Da man nun einen Ausdruck für das erzeugende Funktional hat, ist formal klar, wie man Erwartungswerte ausrechnet. Daher ist dieser Ausdruck für theoretische Überlegungen wichtig, tatsächliche Berechnungen sind damit allerdings kaum anzustellen, da diese bereits für einfache Berechnungen sehr lang werden. Daher wendet man bei jeder praktischen Rechnung dieser Art Feynman-Regeln an, mit deren Hilfe man auf verhältnismäßig einfache Weise zu demselben Ergebnis gelangt.

Im folgenden werden daher die Feynman-Regeln dieser Theorie entwickelt. Bevor man damit Berechnungen durchführen kann, bleibt noch zu zeigen, daß so gewonnene Ergebnisse mit denen aus dem erzeugenden Funktional berechneten übereinstimmen. Dies wird in Kapitel 2.3 gezeigt.

2.2 Herleitung der Feynman-Regeln für das Kontinuum

Eine Herleitung der Feynman-Regeln für die QCD ist in jedem Lehrbuch über Quantenfeldtheorie zu finden. Das Verfahren ist mit geringen Modifikationen auch auf die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie anwendbar. Diesem Schema folgend werden die Vertices berechnet, nachdem bereits im letzten Kapitel die Propagatoren angegeben wurden.

Zur Berechnung der Feynman-Regeln wird von

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x)]^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda^a(x) + \frac{1}{2} m \bar{\lambda}^a(x) \lambda^a(x) \right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

ausgegangen.

Zunächst ist die Wirkung in einer für die Berechnung der Feynman-Regeln geeigneten Form aufzuschreiben:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} \overbrace{(\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g f_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x))^2}^{(\mathcal{A})} \right\}$$

$$+\frac{1}{2}\underbrace{\bar{\lambda}^a(x)\gamma_\mu\mathcal{D}_\mu\lambda^a(x)}_{(\mathcal{B})}+\frac{1}{2}m\bar{\lambda}^a(x)\lambda^a(x)\Big\} \quad (2.23)$$

Dies ist so zu schreiben, daß die Terme mit gleicher Anzahl und Art an Feldern zusammengefaßt werden. Die kurzen Rechenschritte dahin werden an dieser Stelle angeführt. Dabei wird im folgenden der Parameter x nicht mehr mitgeschrieben, solange dadurch keine Unklarheiten entstehen.

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}) &= [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c]^2 \\ &= (\partial_\mu A_\nu^a)^2 + (\partial_\nu A_\mu^a)^2 + g^2 (f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 - 2\partial_\mu A_\nu^a \partial_\nu A_\mu^a \\ &\quad + 2g f_{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c - 2g f_{abc} (\partial_\nu A_\mu^a) A_\mu^b A_\nu^c \\ &= 2((\partial_\mu A_\nu^a)^2 - \partial_\mu A_\nu^a \partial_\nu A_\mu^a) + g^2 f_{abe} f_{cde} A_\mu^a A_\nu^b A_\mu^c A_\nu^d \\ &\quad + 4g f_{abc} \partial_\mu A_\nu^a A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned}$$

$$(\mathcal{B}) = \bar{\lambda}^a \gamma_\mu (\partial_\mu \lambda^a + g f_{abc} A_\mu^b \lambda^c)$$

Damit ist man in der Lage, die Wirkung \mathcal{S} aufzuteilen in einen nicht-wechselwirkenden Anteil \mathcal{S}_0 und einen wechselwirkenden Anteil \mathcal{S}_I . Außerdem sind die im vorherigen Kapitel angegebenen Terme für die Geister und der Eichfixierungsterm hinzuzufügen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0[A, \lambda, \eta, \eta^*] &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} A_\mu^a \left(-\delta_{\mu\nu} \partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \partial_\mu \partial_\nu \right) A_\nu^a \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^a \gamma_\mu \partial_\mu \lambda^a + \frac{1}{2} m \bar{\lambda}^a \lambda^a + \eta^{*a} \partial^2 \eta^a \right\} \quad (2.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_I[A, \lambda, \eta, \eta^*] &= \int d^4x \left\{ g f_{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c + \frac{1}{4} g^2 f_{abe} f_{cde} A_\mu^a A_\nu^b A_\mu^c A_\nu^d \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} g f_{abc} \bar{\lambda}^a \gamma_\mu A_\mu^b \lambda^c - g f_{abc} \eta^{*a} (\partial^\mu \eta^b) A_\mu^c \right\} \quad (2.25) \end{aligned}$$

2.2.1 Der 3-Gluonen-Vertex

Im folgenden wird das Yang-Mills Feld A_μ in Analogie zur QCD als Gluon bezeichnet, λ als Gluino. Die algebraischen Ausdrücke für die Vertices erhält man, indem man die Wirkung Fourier-transformiert, und dann die Vorfaktoren abliest und symmetrisiert.

Aus dem Term $g f_{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A_\mu^b A_\nu^c$ aus (2.25) wird die Feynman-Regel für den 3-Gluonen-Vertex entwickelt. Ausgedrückt durch die Fouriertransformierten \tilde{A}_μ der Felder A_μ lautet dieser Teil der Wirkung:

$$\mathcal{S}_{3A_\mu} = \int d^4x g f_{abc} (\partial_\nu A_\mu^a(x)) A_\nu^b(x) A_\mu^c(x) \quad (2.26)$$

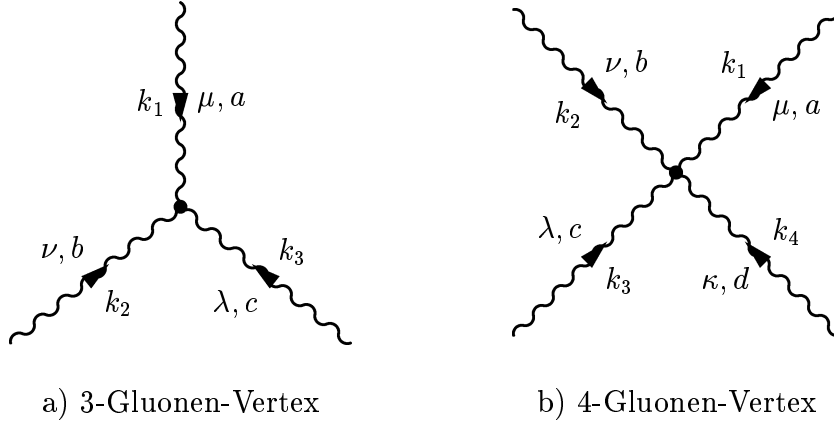


Abbildung 2.1: Die Gluonen-Vertices

$$= gf_{abc} \int d^4x \left(\partial_\nu \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \exp(k_1x) \tilde{A}_\mu^a(k_1) \right) \quad (2.27)$$

$$\times \left(\int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \exp(ik_2x) \tilde{A}_\nu^b(k_2) \right) \left(\int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \exp(ik_3x) \tilde{A}_\mu^c(k_3) \right)$$

$$= gf_{abc} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} d^4x i k_{1\nu} \exp(i(k_1 + k_2 + k_3)x) \times \tilde{A}_\mu^a(k_1) \tilde{A}_\nu^b(k_2) \tilde{A}_\mu^c(k_3) \quad (2.28)$$

$$= igf_{abc} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 k_{1\nu} \delta(k_1 + k_2 + k_3) \times \tilde{A}_\mu^a(k_1) \tilde{A}_\nu^b(k_2) \tilde{A}_\mu^c(k_3) \quad (2.29)$$

Der Vertex V ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{S}_{3A_\mu} = \frac{(2\pi)^4}{3!} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3) \times \tilde{A}_\mu^a(k_1) \tilde{A}_\nu^b(k_2) \tilde{A}_\lambda^c(k_3) V_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3) \quad (2.30)$$

Der Vorfaktor ist dabei Konvention, er entspricht den Kombinationsmöglichkeiten der identischen Teilchen, hier also der drei Gluonen. Mit dieser Definition des Vertex ist man in der Lage, diesen aus (2.29) abzulesen. Damit erhält man ein erstes Ergebnis:

$$V_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = 3! \cdot igf_{abc} k_{1\nu} \delta_{\mu\lambda} \quad (2.31)$$

Für allgemeine Berechnungen ist die derzeitige Form des Vertex allerdings noch nicht geeignet, es sollte noch eine Symmetrisierung bezüglich der Indizes stattfinden. Dies ist so zu verstehen, daß der Ausdruck für den Vertex invariant bleiben soll unter einer beliebigen Vertauschung der Indexgruppen (k_1, μ, a) , (k_2, ν, b) und (k_3, λ, c) . Aufgrund der Antisymmetrie der Strukturkonstanten in den Farbindizes muß auch die Vertauschung in den Lorentzindizes antisymmetrisch sein. Insgesamt ergeben

sich sechs Vertauschungsmöglichkeiten, so daß man folgendes Ergebnis erhält:

$$V_{\mu\nu\lambda}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = igf_{abc}((k_1 - k_3)_\nu \delta_{\mu\lambda} + (k_2 - k_1)_\lambda \delta_{\mu\nu} + (k_3 - k_2)_\mu \delta_{\nu\lambda}) \quad (2.32)$$

2.2.2 Der 4-Gluonen-Vertex

Als nächstes wird aus dem Term $\frac{1}{4}g^2 f_{abe} f_{cde} A_\mu^a A_\nu^b A_\mu^d A_\nu^e$ aus (2.25) der 4-Gluonen-Vertex entwickelt. Der erste Schritt ist wieder die Fouriertransformation:

$$\mathcal{S}_{4A_\mu} = \frac{1}{4}g^2 f_{abe} f_{cde} \int d^4x A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) A_\mu^c(x) A_\nu^d(x) \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}g^2 f_{abe} f_{cde} \int d^4x \left(\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \exp(ik_1x) \tilde{A}_\mu^a(k_1) \right) \\ &\quad \times \left(\int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \exp(ik_2x) \tilde{A}_\nu^b(k_2) \right) \left(\int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \exp(ik_3x) \tilde{A}_\mu^c(k_3) \right) \\ &\quad \times \left(\int \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} \exp(ik_4x) \tilde{A}_\nu^d(k_4) \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}g^2 f_{abe} f_{cde} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ &\quad \times \tilde{A}_\mu^a(k_1) \tilde{A}_\nu^b(k_2) \tilde{A}_\mu^c(k_3) \tilde{A}_\nu^d(k_4) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Mit folgender Definition des 4-Gluonen-Vertex V

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{4A_\mu} &= \frac{(2\pi)^4}{4!} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ &\quad \times \tilde{A}_\mu^a(k_1) \tilde{A}_\nu^b(k_2) \tilde{A}_\lambda^c(k_3) \tilde{A}_\kappa^d(k_4) V_{\mu\nu\lambda\kappa}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4) \end{aligned} \quad (2.36)$$

ergibt sich dann

$$V_{\mu\nu\lambda\kappa}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4) = 3! \cdot g^2 f_{abe} f_{cde} \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\kappa}. \quad (2.37)$$

Dieser Ausdruck muß noch symmetrisiert werden. Der Vertex ist allerdings bereits invariant unter der Vertauschung der Indexpaare (μ, a) und (λ, c) , sowie (ν, b) und (κ, d) , so daß man nur noch mit sechs Permutationen verbleibt, deren Indexpaare hinzugefügt werden müssen. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu\lambda\kappa}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= g^2 \left(f_{abe} f_{cde} (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\kappa} - \delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\lambda}) \right. \\ &\quad + f_{ace} f_{bde} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\kappa} - \delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\lambda}) \\ &\quad \left. + f_{ade} f_{bce} (\delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\kappa}) \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.2.3 Der Gluon-Ghost-Vertex

Als nächstes wird der Term $-gf_{abc}\bar{\eta}^a(\partial_\mu\eta^b)A_\mu^c - gf_{abc}\bar{\eta}^a\eta^b\partial_\mu A_\mu^c$ aus dem wechselwirkenden Teil der Wirkung (2.25) betrachtet, der durch die Faddeev-Popov-Determinante eingeführt wurde. Ausgedrückt durch die Fouriertransformierten der

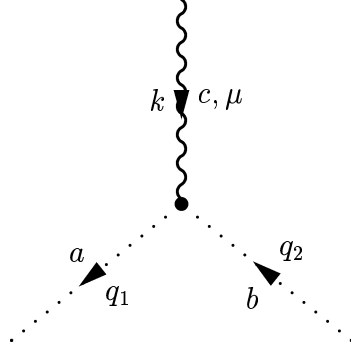


Abbildung 2.2: Der Gluon-Ghost-Vertex

Felder lautet er:

$$\mathcal{S}_{FP} = -g f_{abc} \int d^4x \bar{\eta}^a(x) ((\partial_\mu \eta^b(x)) A_\mu^c(x) + \eta^b(x) \partial_\mu A_\mu^c(x)) \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} &= -g f_{abc} \int d^4x \left(\int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \exp(-iq_1x) \tilde{\eta}^a(q_1) \right) \\ &\quad \times \left\{ \left(\partial_\mu \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \exp(iq_2x) \tilde{\eta}^b(q_2) \right) \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp(ikx) \tilde{A}_\mu^c(k) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \exp(iq_2x) \tilde{\eta}^b(q_2) \right) \left(\partial_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp(ikx) \tilde{A}_\mu^c(k) \right) \right\} \quad (2.40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= ig f_{abc} \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 (k + q_2)_\mu \delta(k - q_1 + q_2) \\ &\quad \times \tilde{\eta}^a(q_1) \tilde{\eta}^b(q_2) \tilde{A}_\mu^c(k) \quad (2.41) \end{aligned}$$

Es ist dabei Konvention, von den Geisterfeldern η und η^* das eine einlaufend und das andere auslaufend zu definieren, und zwar η in die Richtung wie A_μ , $\bar{\eta}$ in die entgegengesetzte Richtung.

Da in dem Gluon-Ghost Term keine zwei identischen Teilchen enthalten sind, ist in der Definition auch kein entsprechender kombinatorischer Vorfaktor nötig. Der Vertex V ist also wie folgt definiert

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{FP} &= (2\pi)^4 \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k - q_1 + q_2) \\ &\quad \times \tilde{\eta}^a(q_1) \tilde{\eta}^b(q_2) \tilde{A}_\mu^c(k) V_\mu^{abc}(k, q_1, q_2) \quad (2.42) \end{aligned}$$

und direkt aus (2.41) abzulesen:

$$V_\mu^{abc}(k, q_1, q_2) = ig f_{abc} q_{1\mu} \quad (2.43)$$

2.2.4 Der Gluon-Gluino-Vertex

Als letzter Term ist der Gluon-Gluino Vertex zu behandeln. Während die Behandlung der anderen Vertices bereits in die Lehrbücher eingegangen ist, so ist dies bei

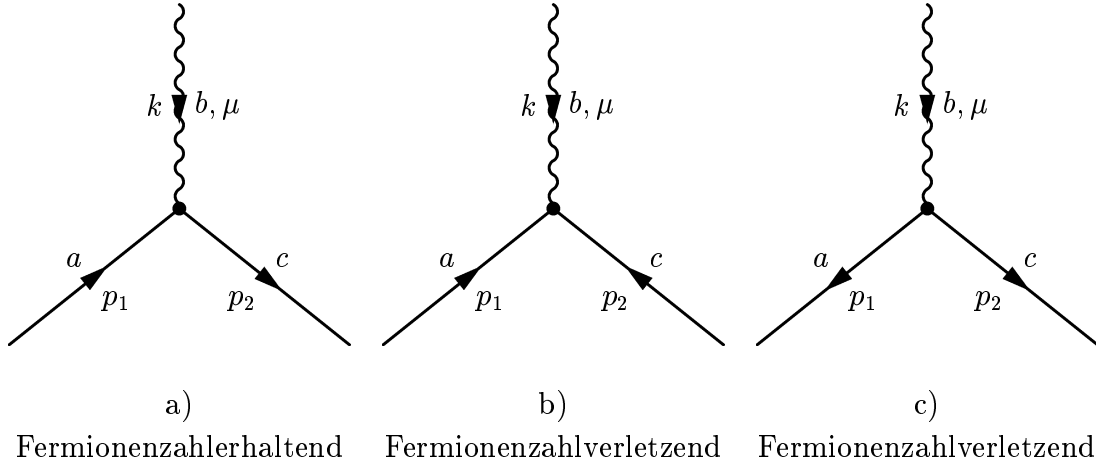


Abbildung 2.3: Die Gluonen-Gluino-Vertices

Gluon-Fermionen Vertices nur für die Dirac-Fermionen der Fall. Werden die Fermionen allerdings durch Majorana-Spinoren beschrieben, so müssen die Majorana-Eigenschaften berücksichtigt werden. Die Berechnung des Vertex kann man aber trotzdem wie gewohnt durchführen, wie dies z.B. in [JS] oder in [HK] getan wurde. Auf diese Art soll auch an dieser Stelle der Vertex aus dem Term $\frac{1}{2}gf_{abc}\bar{\lambda}^a\gamma_\mu A_\mu^b\lambda^c$ aus (2.25) berechnet werden. Wie gewohnt setzt man also die Fouriertransformierten der Felder ein:

$$\mathcal{S}_{A_\mu\bar{\lambda}\lambda} = \frac{1}{2}gf_{abc} \int d^4x \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu A_\mu^b(x) \lambda^c(x) \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{2}gf_{abc} \int d^4x \left(\int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \exp(ip_1x) \tilde{\lambda}^a(p_1) \right) \times \gamma_\mu \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp(ikx) \tilde{A}_\mu^b(k) \right) \left(\int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \exp(ip_2x) \tilde{\lambda}^c(p_2) \right) \quad (2.45)$$

$$= \frac{1}{2}gf_{abc} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta(k + p_1 + p_2) \times \tilde{\lambda}^a(p_1) \gamma_\mu \tilde{A}_\mu^b(k) \tilde{\lambda}^c(p_2) \quad (2.46)$$

Der Vertex ist wie üblich durch den Vorfaktor dieses Terms gegeben, wobei man in die Definition des Vertex die kombinatorischen Faktoren, die durch identische Teilchen entstehen, direkt mit einbeziehen möchte. Für Majorana-Teilchen gilt die Aussage, daß sie ihre eigenen Antiteilchen sind. Die mathematische Bedeutung davon ist

$$\bar{\lambda} = \lambda^T C, \quad (2.47)$$

mit der Ladungskonjugationsmatrix C . Damit ist der Gluon-Gluino-Vertex wie folgt zu definieren:

$$\mathcal{S}_{A_\mu\bar{\lambda}\lambda} = \frac{(2\pi)^4}{2} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta(k + p_1 + p_2)$$

$$\times \tilde{\bar{\lambda}}^a(p_1) V[A_\mu, \lambda, \bar{\lambda}]_\mu^{abc}(k, p_1, p_2) \tilde{A}_\mu^b(k) \tilde{\lambda}^c(p_2) \quad (2.48)$$

Aus (2.46) liest man, noch ohne Symmetrisierung, ab:

$$V[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}]_\mu^{abc}(k, p_1, p_2) = g f_{abc} \gamma_\mu \quad (2.49)$$

Der zugehörige Graph ist in Abb. 2.3a dargestellt. Anders als bei Fermionen in der QCD, oder auch den Geisterfeldern dieser Theorie sind bei den Majorana Fermionen die Impulse nicht mit Teilchen bzw. Antiteilchen assoziiert, da sich Majoranateilchen eher wie skalare Felder verhalten. Die hier gewählte Konvention besagt daher, daß die Impulse der Gluinos in den Vertices stets einwärts laufen, der Pfeil bedeutet nach innen laufend, daß es sich um ein Teilchen handelt, und nach außen laufend um ein Antiteilchen.

Bei der durchzuführenden Symmetrisierung ist auf die Majorana-Eigenschaft (2.47) zu achten. Das bedeutet also, daß man nicht, wie von den Gluonen gewohnt, einfach nur die Indizes durchzutauschen hat, da aus der Majorana-Eigenschaft folgendes für zwei Majoranaspinoren θ und ψ folgt (siehe [Lu]):

$$\bar{\theta} \gamma_\mu \psi = -\bar{\psi} \gamma_\mu \theta \quad (2.50)$$

Um den Vertex zu symmetrisieren, muß also noch der Term beachtet werden, bei dem die Indizes a und c vertauscht, und zusätzlich das γ_μ durch ein $-\gamma_\mu$ ersetzt wurde. Dies liefert aber aufgrund der Antisymmetrie der Strukturkonstanten wieder (2.49), so daß dadurch bereits der Vertex in seiner symmetrisierten Form gegeben ist.

In der QCD ist dieser Vertex der einzige zwischen den Fermionen und dem Gluon. Wegen (2.47) kann man die Wirkung auch wie folgt schreiben:

$$\mathcal{S}_{A_\mu 2\lambda} = \frac{1}{2} g f_{abc} \int d^4x \lambda^{aT}(x) C \gamma_\mu A_\mu^b(x) \lambda^c(x) \quad (2.51)$$

Damit ist klar, daß es auch einen Vertex aus einem Gluon A_μ und zwei Gluinos λ gibt, der dann wie folgt lautet:

$$V[\lambda, A_\mu, \lambda]_\mu^{abc} = g f_{abc} C \gamma_\mu \quad (2.52)$$

Mit $C^T = -C$ und $C^\dagger = C^{-1}$ ist

$$\lambda = -C^{-1} \bar{\lambda}^T \quad (2.53)$$

äquivalent zu (2.47). Es gibt daher noch einen dritten Gluon-Gluino-Vertex, der für die Wechselwirkung zwischen einem A_μ und zwei $\bar{\lambda}$ s verantwortlich ist. Er lautet:

$$V[\bar{\lambda}, A_\mu, \bar{\lambda}]_\mu^{abc} = -g f_{abc} \gamma_\mu C^{-1} \quad (2.54)$$

Es ist deutlich geworden, wie die Tatsache, daß aus den Dirac-Spinoren der QCD in supersymmetrischen Theorien Majorana-Spinoren werden, Änderungen in den Feynman-Regeln bewirkt. Für tatsächliche Berechnungen bedeutet es aber auf den ersten Blick einen erheblich größeren Arbeitsaufwand, da aus einem Vertex drei Vertices wurden [GZ]. Ein in den folgenden Berechnungen weniger wichtiger weiterer Nachteil dieser Vertices ist es, daß sie scheinbar beliebige Vorzeichen haben, wenn man sich nur den Graphen und nicht die zugehörigen Greensfunktionen ansieht. Betrachtet man z.B. den zweiten Gluon-Gluino Vertex, so erscheint der Graph unter Austausch der Indizes a und b symmetrisch, während der algebraische Ausdruck bei diesem Austausch sein Vorzeichen wechselt. Möchte man Greensfunktionen berechnen, so ist dies kein echtes Problem, da die Anordnung der Indizes klar vorgegeben ist. Möchte man allerdings Berechnungen automatisieren, und diese dann z.B. mit dem Computer durchführen, so ist eine einfache Lösung dieses Vorzeichenproblems wünschenswert. Ein entsprechender Formalismus wurde von Denner et. al. vorgeschlagen in [DEHKa] und [DEHKb]. Neben der Lösung des Vorzeichenproblems wird mit diesem Formalismus auch die Anzahl der zu betrachtenden Vertices von drei auf nur einen Vertex reduziert. Dafür ist dann anstelle des aus der QCD bekannten Fermionen~~zahl~~flusses ein Fermionenfluß einzuführen, der keine direkte physikalische Bedeutung mehr hat.

2.3 Anwendbarkeit der Feynman-Regeln

Bisher wurden Propagatoren und Vertices für die Gluonen, Geister und Majorana-Fermionen berechnet. Für die Propagatoren und Vertices, die Majorana-Teilchen enthalten, hat sich dabei herausgestellt, daß es neben den aus der QCD bekannten Graphen noch zwei weitere gibt, die die Fermionenzahl nicht erhalten. Damit muß man für beliebige Korrelationsfunktionen zeigen, daß sich diese mittels der Feynman-Regeln berechnen lassen, und daß das Ergebnis nicht von dem abweicht, das man direkt aus dem erzeugenden Funktional erhalten hätte. Da aber die Gültigkeit der QCD-Feynman-Regeln in der QCD wohlbekannt ist, bleibt hier nur noch zu zeigen, daß die zusätzlichen Graphen sich problemlos in dieses Konzept einfügen lassen.

Zu diesem Zweck wird zunächst durch Berechnen der 4-Punkt-Funktion in der freien Theorie die Gültigkeit des Wickschen Theorems gezeigt. Anschließend wird in der Theorie mit Wechselwirkungen direkt aus dem erzeugenden Funktional eine 1-Loop-Rechnung ausgeführt. In der zugehörigen Rechnung mittels Feynman-Regeln treten dann die zusätzlichen Graphen auf. Erhält man dasselbe Ergebnis für beide Berechnungen, so ist klar, daß die Feynman-Regeln allgemeingültig anwendbar sind.

2.3.1 Die freie Theorie

Es ist zu zeigen, daß sich auch in dieser Theorie die 4-Punkt-Funktion gemäß dem Wickschen Theorem aus 2-Punkt-Funktionen berechnen läßt. Höhere n -Punkt-Funktionen sind nicht zu berechnen, da durch Induktion klar ist, daß das Wicksche Theorem auch dafür gilt.

Für den bosonischen Teil der Theorie ist die Gültigkeit bekannt, da dieser Teil identisch ist mit dem bosonischen Teil der QCD. Es ist also nur der fermionische Teil zu behandeln. Die erste n -Punkt-Funktion, die ausgerechnet werden soll, ist die 2-Punkt-Funktion $\langle \lambda_\alpha^a \bar{\lambda}_\beta^b \rangle$. Um diese Greensfunktion zu berechnen, ist (2.20) bzw. (2.16) nach der Quelle von λ und $\bar{\lambda}$, also nach θ abzuleiten, und anschließend sind die Quellterme gleich Null zu setzen. Dazu betrachte man zunächst den Exponenten von (2.16) genauer unter Beachtung von (2.13), (2.14) und (2.18):

$$\bar{\theta}(x) S_F(x-y) \theta(y) = -\theta^T(x) C S_F(x-y) C^{-1} \bar{\theta}^T(y) \quad (2.55)$$

$$= -\theta^T(x) S_F^T(y-x) \bar{\theta}^T(y) \quad (2.56)$$

$$= \bar{\theta}(y) S_F(y-x) \theta(x) \quad (2.57)$$

Das bei der letzten Umformung entstandene Minuszeichen ist nicht sofort erkennbar. Es ist durch das Vertauschen der Grassmann-Variablen entstanden (vgl. dazu die entsprechenden Rechnungen in [Lu]).

Des weiteren ist noch eine Anmerkung zu den Quellen bzw. den Ableitungen nach den Quellen wichtig. In einer Theorie mit Majorana-Fermionen gibt es nur eine Quelle für diese, hier θ . Mit dieser Quelle ist formal noch eine weitere verknüpft, nämlich $\bar{\theta}$. Das erzeugende Funktional läßt sich in jeder der beiden Quellen beschreiben, der Quellterm lautet:

$$\mathcal{Z}_{\text{Quelle}}[\theta] = \int \mathcal{D}\lambda \exp \left(\int d^4x \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right) \quad (2.58)$$

$$= \int \mathcal{D}\lambda \exp \left(\int d^4x \bar{\lambda}(x) \theta(x) \right) \quad (2.59)$$

Zur Berechnung von Greensfunktionen ist dieses erzeugende Funktional nach den Quelltermen abzuleiten. Man erkennt anhand obiger Gleichungen folgenden Zusammenhang:

$$\lambda \leftrightarrow \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\theta}} \quad (2.60)$$

$$\bar{\lambda} \leftrightarrow \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \theta} \quad (2.61)$$

Es ist vom Ergebnis her gleichgültig, ob man lieber mit Rechts- und Linksableitungen arbeitet oder nur mit nach rechts wirkenden Ableitungen. Bei letzteren ist darauf

zu achten, daß man ein Minuszeichen einfügen muß, wenn man nach rechts wirkend nach θ ableitet. Um nämlich $\bar{\lambda}\theta$ nach θ ableiten zu können, muß die Ableitung zuerst an $\bar{\lambda}$ vorbeigezogen werden. Da es sich bei den beiden aber um Grassmann Variablen handelt, entsteht dabei ein Minuszeichen. Dieses muß in der Definition ausgeglichen werden, so daß folgende Zusammenhänge gelten:

$$\lambda \leftrightarrow \frac{\delta}{\delta\bar{\theta}} \quad (2.62)$$

$$\bar{\lambda} \leftrightarrow -\frac{\delta}{\delta\theta} \quad (2.63)$$

Des weiteren folgt aus

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\theta}_\beta^a} = \frac{\delta}{\delta(\theta^T C)_\beta^a} \quad (2.64)$$

$$= \frac{\delta}{\delta(\theta_\alpha^a C_{\alpha\beta})} \quad (2.65)$$

noch folgende Relation für die Ableitung nach den Quellen:

$$\frac{\delta}{\delta\theta_\alpha^a} = C_{\alpha\beta} \frac{\delta}{\delta\bar{\theta}_\beta^a} \quad (2.66)$$

Ebenso folgt:

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\theta}_\alpha^a} = -C_{\beta\alpha}^{-1} \frac{\delta}{\delta\theta_\beta^a} \quad (2.67)$$

Damit kann man die gesuchte 2-Punkt-Funktion wie folgt berechnen:

$$\langle \lambda_\alpha^a(x_1) \bar{\lambda}_\beta^b(x_2) \rangle = \frac{1}{Z_0} \frac{\delta^2}{\delta\bar{\theta}_\alpha^a(x_1) \delta(-\theta_\beta^b(x_2))} \mathcal{Z}_0[\theta] \Big|_{\theta=0} \quad (2.68)$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta\bar{\theta}_\alpha^a(x_1) \delta\theta_\beta^b(x_2)} \int d^4x d^4y \bar{\theta}_\gamma^c(x) S_{F\gamma\delta}^{cd}(x-y) \theta_\delta^d(y) \quad (2.69)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta\bar{\theta}_\alpha^a(x_1)} \int d^4x \left(\bar{\theta}_\gamma^c(x) S_{F\gamma\beta}^{cb}(x-x_2) + \bar{\theta}_\delta^d(x) S_{F\delta\beta}^{db}(x-x_2) \right) \quad (2.70)$$

$$= S_{F\alpha\beta}^{ab}(x_1-x_2) \quad (2.71)$$

Von (2.69) nach (2.70) wurde ausgenutzt, daß aufgrund der Majorana-Eigenschaft von θ sowohl θ als auch $\bar{\theta}$ nach θ abgeleitet werden müssen unter Ausnutzung von (2.57).

Neben dieser im wesentlichen aus der QCD bekannten 2-Punkt-Funktion gibt es wegen (2.13) und (2.14) noch zwei weitere, die folgende Beziehungen erfüllen:

$$\langle \lambda(x_1) \lambda^T(x_2) \rangle = \langle \lambda(x_1) \bar{\lambda}(x_2) \rangle C^{-1} \quad (2.72)$$

$$= S_F(x_1-x_2) C^{-1} \quad (2.73)$$

und

$$\langle \bar{\lambda}^T(x_1) \bar{\lambda}(x_2) \rangle = -C \langle \lambda(x_1) \bar{\lambda}(x_2) \rangle \quad (2.74)$$

$$= -CS_F(x_1 - x_2). \quad (2.75)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Formeln zunächst nicht mit den entsprechenden aus [Ta] übereinstimmen. Dies liegt daran, daß dort $C^2 = -\mathbb{1}$ ausgenutzt wurde. Dies gilt zwar für die meisten der oft verwandten Wahlen für C , wie z.B. die in [Ta] benutzte Wahl $C = \gamma_0 \gamma_2$. Allerdings sind die hier präsentierten Formeln allgemeingültig, so daß diese Form bevorzugt werden sollte.

Die 4-Punkt-Funktion läßt sich ganz analog berechnen:

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_\alpha^a(x_1) \bar{\lambda}_\beta^b(x_2) \lambda_\gamma^c(x_3) \bar{\lambda}_\delta^d(x_4) \rangle \\ &= \frac{1}{Z_0} \frac{\delta^4}{\delta \bar{\theta}_\alpha^a(x_1) \delta(-\theta_\beta^b(x_2)) \delta \bar{\theta}_\gamma^c(x_3) \delta(-\theta_\delta^d(x_4))} \mathcal{Z}_0[\theta] \Big|_{\theta=0} \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \frac{\delta^4}{\delta \bar{\theta}_\alpha^a(x_1) \delta \theta_\beta^b(x_2) \delta \bar{\theta}_\gamma^c(x_3) \delta \theta_\delta^d(x_4)} \\ &\quad \times \left(\int d^4x d^4y \bar{\theta}_\zeta^e(x) S_{F\zeta\xi}^{ef}(x-y) \theta_\xi^f(y) \right)^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \frac{\delta^4}{\delta \bar{\theta}_\alpha^a(x_1) \delta \theta_\beta^b(x_2) \delta \bar{\theta}_\gamma^c(x_3) \delta \theta_\delta^d(x_4)} \\ &\quad \times \int d^4x d^4y d^4z d^4w \bar{\theta}_\zeta^e(x) S_{F\zeta\xi}^{ef}(x-y) \theta_\xi^f(y) \bar{\theta}_\epsilon^m(z) S_{F\epsilon\kappa}^{mn}(z-w) \theta_\kappa^n(w) \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} &= S_{F\alpha\beta}^{ab}(x_1 - x_2) S_{F\gamma\delta}^{cd}(x_3 - x_4) \\ &\quad + S_{F\alpha\gamma}^{ac}(x_1 - x_3) S_{F\beta\delta}^{bd}(x_2 - x_4) \\ &\quad + S_{F\alpha\delta}^{ad}(x_1 - x_4) S_{F\beta\gamma}^{bc}(x_2 - x_3) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Dies entspricht dem Wickschen Theorem. Neben dieser 4-Punkt-Funktion gibt es natürlich wieder weitere aufgrund der Majorana-Eigenschaft.

2.3.2 Die Theorie mit Wechselwirkungen

Als nächstes ist durch Ableiten nach den Quelltermen aus dem erzeugenden Funktional (2.21) eine n-Punkt-Funktion in 1-Loop-Ordnung zu berechnen. Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, wird eine 2-Punkt-Funktion gewählt. Sowohl der Gluonenpropagator als auch der Fermionenpropagator enthalten in 1-Loop-Ordnung die zu überprüfenden Vertices mit den Majorana-Fermionen. Prinzipiell läßt sich an beiden Beispielen die Gültigkeit der Feynman-Regeln zeigen. Da aber später auf dem Gitter zunächst Berechnungen mit dem Fermionenpropagator durchgeführt werden, ist es sinnvoll, auch an dieser Stelle die explizite Berechnung für diesen Propagator durchzuführen.

Da der Teil des erzeugenden Funktional mit den Geistern von vornherein keinen Beitrag erster Ordnung zu dem Fermionenpropagator liefert, wird dieser im folgenden nicht mitgeschrieben. Damit ist dann folgendes zu berechnen:

$$\langle \lambda_\alpha^a(x_1) \bar{\lambda}_\beta^b(x_2) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^2}{\delta \bar{\theta}_\alpha^a(x_1) \delta(-\theta_\beta^b(x_2))} \mathcal{Z}[J, \theta] \Big|_{J=\theta=0} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\delta^2}{\delta \bar{\theta}_\alpha^a(x_1) \delta(-\theta_\beta^b(x_2))} \\ &\quad \times \exp \left(-\mathcal{S}_I \left[\frac{\delta}{\delta J(x)}, \frac{\delta}{\delta \bar{\theta}(x)}, -\frac{\delta}{\delta \theta(x)} \right] \right) \\ &\quad \times \mathcal{Z}_0[J, \theta] \Big|_{J=\theta=0} \end{aligned} \quad (2.81)$$

Der störungstheoretische Ansatz besteht darin, die Exponentialfunktion in (2.81) in eine Taylorreihe

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \quad (2.82)$$

zu entwickeln. Da das Ergebnis mit einer 1-Loop-Berechnung verglichen werden soll, was einer Entwicklung bis g^2 entspricht, ist die Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung zu betrachten. Man erhält dann folgendes:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_\alpha^a(x_1) \bar{\lambda}_\beta^b(x_2) \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^2}{\delta \bar{\theta}_\alpha^a(x_1) \delta(-\theta_\beta^b(x_2))} \\ &\quad \times \left(1 - \mathcal{S}_I \left[\frac{\delta}{\delta J(x)}, \frac{\delta}{\delta \bar{\theta}(x)}, -\frac{\delta}{\delta \theta(x)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\mathcal{S}_I \left[\frac{\delta}{\delta J(x)}, \frac{\delta}{\delta \bar{\theta}(x)}, -\frac{\delta}{\delta \theta(x)} \right] \right)^2 \right) \\ &\quad \times \mathcal{Z}_0[J, \theta] \Big|_{J=\theta=0} + \mathcal{O}(g^3) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Der Term nullter Ordnung der Taylorentwicklung entspricht dabei offensichtlich der freien Theorie, die bereits behandelt wurde. Dieser Term ergibt also den freien Propagator. Bei dem Term erster Ordnung tritt \mathcal{S}_I aus (2.25) auf. Betrachtet man diesen Teil der Wirkung, so erkennt man, daß die meisten Terme von \mathcal{S}_I keinen Beitrag liefern, da nach Ausführen der Ableitungen einzelne Quellterme überbleiben, die aber gleich Null gesetzt werden. Der einzige Beitrag ergibt sich aus $\frac{1}{4}g^2 f_{abe} f_{cde} A_\mu^a A_\nu^b A_\mu^c A_\nu^d$. Dieser Term ist aus der QCD wohlbekannt und entspricht einer Vakuumsfluktuation. Damit kürzt sich dieser Term später wieder weg und ist daher für die weitere Rechnung unbeachtlich.

Bleibt also der Term quadratisch in \mathcal{S}_I . Von den durch das Quadrieren entstehenden neun Termen spielen nach der gleichen Argumentation die meisten Terme keine Rolle. Des weiteren sind, wie üblich, nur zusammenhängende Graphen zu betrachten.

Der einzig interessante Term ist der Term $(\frac{1}{2}gf_{abc}\bar{\lambda}^a\gamma_\mu A_\mu^b\lambda^c)^2$. Damit läßt sich der Fermionenpropagator in 1-Loop-Ordnung wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_\alpha^a(x_1)\bar{\lambda}_\beta^b(x_2) \rangle &= \frac{1}{\mathcal{Z}[0]} \frac{\delta^2}{\delta\bar{\theta}_\alpha^a(x_1)\delta(-\theta_\beta^b(x_2))} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{8}g^2 f_{cde}f_{fgh} \int d^4x d^4y \right. \\ &\quad \times \frac{\delta}{\delta\theta^c(x)} \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu^d(x)} \frac{\delta}{\delta\bar{\theta}^e(x)} \frac{\delta}{\delta\theta^f(y)} \gamma_\nu \frac{\delta}{\delta J_\nu^g(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\theta}^h(y)} \left. \right\} \\ &\times \mathcal{Z}_0[J, \theta] \Big|_{J=\theta=0} + \mathcal{O}(g^3) \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\delta\bar{\theta}_\alpha^a(x_1)\delta(-\theta_\beta^b(x_2))} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{1}{8}g^2 f_{cde}f_{fgh} \int d^4x d^4y \right. \\ &\quad \times \frac{\delta}{\delta\theta^c(x)} \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu^d(x)} \frac{\delta}{\delta\bar{\theta}^e(x)} \frac{\delta}{\delta\theta^f(y)} \gamma_\nu \frac{\delta}{\delta J_\nu^g(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\theta}^h(y)} \left. \right\} \\ &\times \left\{ \left(1 + \frac{1}{2} \int d^4z_1 d^4z_2 J_\lambda(z_1) D_{\lambda\kappa}(z_1 - z_2) J_\kappa(z_2) \right) \right. \\ &\quad \times \left(\frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} \int d^4z_3 d^4z_4 d^4z_5 d^4z_6 d^4z_7 d^4z_8 \bar{\theta}(z_3) S_F(z_3 - z_4) \right. \\ &\quad \times \theta(z_4) \bar{\theta}(z_5) S_F(z_5 - z_6) \theta(z_6) \bar{\theta}(z_7) S_F(z_7 - z_8) \theta(z_8) \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int d^4z_1 d^4z_2 \bar{\theta}(z_1) S_F(z_1 - z_2) \theta(z_2) \right) \right\} \Big|_{J=\theta=0} \\ &+ \mathcal{O}(g^3) \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} &= S_{F\alpha\beta}^{ab}(x_1 - x_2) \\ &+ \frac{1}{768} g^2 f_{cde}f_{fgh} \frac{\delta^2}{\delta\bar{\theta}_\alpha^a(x_1)\delta(-\theta_\beta^b(x_2))} \int d^4x d^4y \\ &\quad \times \frac{\delta}{\delta\theta^c(x)} \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta J_\mu^d(x)} \frac{\delta}{\delta\bar{\theta}^e(x)} \frac{\delta}{\delta\theta^f(y)} \gamma_\nu \frac{\delta}{\delta J_\nu^g(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\theta}^h(y)} \\ &\quad \times \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 d^4z_4 d^4z_5 d^4z_6 d^4z_7 d^4z_8 \\ &\quad \times J_\lambda(z_1) D_{\lambda\kappa}(z_1 - z_2) J_\kappa(z_2) \bar{\theta}(z_3) S_F(z_3 - z_4) \theta(z_4) \\ &\quad \times \bar{\theta}(z_5) S_F(z_5 - z_6) \theta(z_6) \bar{\theta}(z_7) S_F(z_7 - z_8) \theta(z_8) \\ &+ \mathcal{O}(g^3) \end{aligned} \quad (2.86)$$

Nun bleibt noch, die Ableitungen zu berechnen. Dabei sind die Formeln (2.18) und (2.19) auszunutzen, da es sich bei den Ableitungen nach den Majorana-Quellen wieder um Majorana-Spinoren handelt. Neben den relevanten Termen entstehen dabei noch Terme, die den unverbundenen Graphen entsprechen, und die somit weggelassen werden können. Die noch übrig bleibenden Terme lassen sich zu folgendem

einfachen Ausdruck zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_\alpha^a(x_1) \bar{\lambda}_\beta^b(x_2) \rangle &= S_{F\alpha\beta}^{ab}(x_1 - x_2) + g^2 f_{cde} f_{fgh} \int d^4x d^4y S_{F\alpha\gamma}^{ac}(x_1 - x) \gamma_\mu \\ &\quad \times D_{\mu\nu}^{dg}(x - y) S_{F\gamma\delta}^{ch}(x - y) \gamma_\nu S_{F\delta\beta}^{fb}(y - x_2) \\ &\quad + \mathcal{O}(g^3) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Im Impulsraum sieht dies wie folgt aus:

$$\begin{aligned} &\int d^4x_1 d^4x_2 \exp(ip(x_1 - x_2)) \langle \lambda_\alpha^a(x_1) \bar{\lambda}_\beta^b(x_2) \rangle \\ &= \tilde{S}_{F\alpha\beta}^{ab}(p) + g^2 f_{cde} f_{fgh} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{S}_{F\alpha\beta}^{ac}(p) \gamma_\mu \tilde{D}_{\mu\nu}^{dg}(k) \tilde{S}_{F\gamma\delta}^{ch}(p - k) \gamma_\nu \tilde{S}_{F\delta\beta}^{fb}(p) \\ &\quad + \mathcal{O}(g^3) \end{aligned} \quad (2.88)$$

Das auf den ersten Blick erstaunliche Ergebnis ist, daß sich der Fermionenpropagator in dieser supersymmetrischen Theorie zur Ordnung g^2 wie der aus der QCD berechnet. Dieses Ergebnis ist deshalb bemerkenswert, weil die Anzahl der Propagatoren und Vertices dieser Theorie dreimal so groß ist verglichen mit der QCD, da es neben dem üblichen Fermionenzahl-erhaltenden Graph noch zwei Fermionenzahl-verletzende gibt.

Um die folgende Diskussion zu vereinfachen, wird diese an amputierten Graphen geführt. Der Term in g^2 im obigen Ergebnis lautet dann wie folgt:

$$\Sigma(p) = g^2 f_{cda} f_{bgh} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \tilde{D}_{\mu\nu}^{dg}(k) \tilde{S}_{F\gamma\delta}^{ch}(p - k) \gamma_\nu \quad (2.89)$$

Es sind nun nach den üblichen Feynman-Regeln alle erlaubten Kombinationen eines 1-Loop-Graphen aus den vorhandenen Vertices und Propagatoren zu bilden und zu prüfen, ob das Ergebnis mit (2.89) übereinstimmt.

In Abb. 2.4 sind die Graphen angegeben, von denen man zunächst annehmen würde, daß sie für die Beiträge in 1-Loop-Ordnung verantwortlich wären. Dabei ist dann aber nicht auf die Eigenschaft der Majorana-Fermionen geachtet worden, die besagt, daß diese ihre eigenen Antiteilchen sind. Es ist also erlaubt, alle Pfeile der Fermionen eines Graphen umzudrehen, da dies aus einem Teilchen ein Antiteilchen macht und umgekehrt. Dreht man alle Pfeile des zweiten Graphen in Abb. 2.4 um und liest den Graphen dann von rechts nach links, so erkennt man, daß dieser Graph identisch ist mit dem dritten Graphen. Man darf also nur einen der beiden Graphen zur Berechnung nehmen, da man ihn andernfalls fälschlicherweise doppelt gewichten würde. Bei dem ersten und vierten Graphen erkennt man, daß diese unter Umkehr der Pfeile wieder jeweils in sich übergehen. Sie sind also beide für die Rechnung zu beachten.

Es sind die Propagatoren und Vertices der drei zu benutzenden Graphen durch ihre algebraischen Ausdrücke zu ersetzen und die Ergebnisse aufzusummieren. Der erste

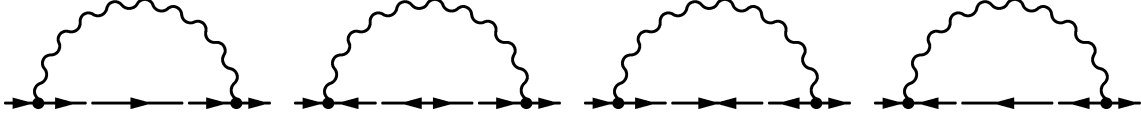


Abbildung 2.4: Mögliche Beiträge zum Gluino-Propagator

Graph liefert:

$$\Sigma_1(p) = V[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}] \tilde{D}_{\mu\nu}(k) \tilde{S}_F[\lambda, \bar{\lambda}](p - k) V[\lambda, A_\nu, \bar{\lambda}] \quad (2.90)$$

Der zweite bzw. dritte Graph liefert:

$$\Sigma_2(p) = V[\lambda, A_\mu, \lambda] \tilde{D}_{\mu\nu}(k) \tilde{S}_F[\bar{\lambda}, \bar{\lambda}](k - p) V[\lambda, A_\nu, \bar{\lambda}] \quad (2.91)$$

$$= CV[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}] \tilde{D}_{\mu\nu}(k) \tilde{S}_F[\lambda, \bar{\lambda}](k - p) C^{-1} V[\lambda, A_\nu, \bar{\lambda}] \quad (2.92)$$

$$= -V[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}] \tilde{D}_{\mu\nu}(k) \tilde{S}_F[\lambda, \bar{\lambda}](p - k) V[\lambda, A_\nu, \bar{\lambda}] \quad (2.93)$$

$$= -\Sigma_1(p) \quad (2.94)$$

Dabei wurde

$$CVC^{-1} = -V \quad (2.95)$$

ausgenutzt. Damit ist auch das Ergebnis des vierten Graphen zu erkennen:

$$\Sigma_4(p) = V[\lambda, A_\mu, \lambda] \tilde{D}_{\mu\nu}(k) \tilde{S}_F[\bar{\lambda}, \lambda](k - p) V[\bar{\lambda}, A_\nu, \bar{\lambda}] \quad (2.96)$$

$$= CV[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}] \tilde{D}_{\mu\nu}(k) C^{-1} \tilde{S}_F[\lambda, \bar{\lambda}](k - p) CV[\lambda, A_\nu, \bar{\lambda}] C^{-1} \quad (2.97)$$

$$= V[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}] \tilde{D}_{\mu\nu}(k) \tilde{S}_F[\lambda, \bar{\lambda}](p - k) V[\lambda, A_\nu, \bar{\lambda}] \quad (2.98)$$

$$= \Sigma_1(p) \quad (2.99)$$

Der zweite bzw. dritte Graph hebt sich also mit dem vierten auf, und das Ergebnis dieser graphischen Berechnung ist bereits durch (2.90) gegeben, was wiederum mit (2.89) übereinstimmt. Da die Systematik dahinter auch bei Graphen höherer Loop-Ordnung dieselbe bleibt, ist klar, daß man auch mit diesen zunächst ungewohnten Majorana-Fermionen — wie aus der QCD gewohnt — Störungstheorie mittels Feynman-Graphen betreiben kann. Allerdings ist diese in der bisherigen Form deutlich komplizierter als eine vergleichbare Theorie mit Dirac-Fermionen. Zum einen sind weiterhin dreimal so viele Vertices und Propagatoren zu betrachten. Das größte Problem ist, daß es bei komplizierteren Graphen nicht mehr so einfach ist, zu sehen, welche Graphen sich durch Umdrehen der Pfeile ineinander überführen lassen und welche nicht. In [DEHKa] und [DEHKb] wurde daher ein Formalismus entwickelt, der die Anzahl der Vertices und Propagatoren wieder auf ihre ursprüngliche Anzahl reduziert, so daß damit die Berechnungen nicht komplizierter werden im Vergleich

zur QCD. Dieser Formalismus soll hier allerdings nicht eingeführt werden, da bis in 1-Loop-Ordnung die Berechnungen überschaubar bleiben und sich die Einführung des Dennerschen Formalismus nicht lohnt.

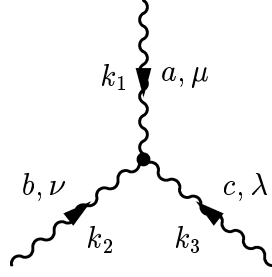
Abschliessend sei noch darauf hingewiesen, daß zwar dieses Ergebnis aus der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie mit der aus der QCD übereinstimmt, daß aber Unterschiede bestehen. Zum einen ist nicht zu vergessen, daß in dieser Theorie Korrelationsfunktionen ungleich Null sind, die in der QCD gleich Null sind. Zum anderen sind aber auch die Korrekturen zu den üblichen Propagatoren in höherer Ordnung verschieden von denen aus der QCD. Dies liegt daran, daß ein Fermionen-Loop nicht nur den bekannten Faktor -1 erhält, sondern auch wie der Gluonen-Loop einen Faktor $\frac{1}{2}$ für identische Teilchen. Damit ergeben sich Abweichungen von den Ergebnissen der QCD, sobald geschlossene Fermionen-Loops auftreten, was stets spätestens in 2-Loop-Ordnung der Fall ist.

2.4 Zusammenfassung der Feynman-Regeln für das Kontinuum

An dieser Stelle sollen die Feynman-Regeln für die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie noch kurz zusammengefaßt werden. Dabei werden dann auch die zuvor nicht berechneten Symmetriefaktoren angegeben, die direkt aus [Po] übernommen werden können.

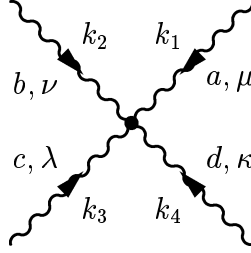
Gluon Propagator	$a, \mu \text{ } \overset{k}{\text{~~~~~}} \text{ } b, \nu$	$\frac{1}{k^2} \delta_{ab} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$
Gluino Propagator	$a \text{ } \overset{p}{\text{-----}} \text{ } b$	$\delta^{ab} \frac{i \not{p} + m}{p^2 + m^2}$
	$a \text{ } \overset{p}{\text{-----}} \text{ } b$	$-\delta^{ab} C \frac{i \not{p} + m}{p^2 + m^2}$
	$a \text{ } \overset{p}{\text{-----}} \text{ } b$	$\delta^{ab} \frac{i \not{p} + m}{p^2 + m^2} C^{-1}$
Ghost Propagator	$a \text{ } \cdots \cdots \overset{q}{\text{-----}} \text{ } b$	$\delta^{ab} \frac{1}{q^2}$

3-Gluonen-Vertex



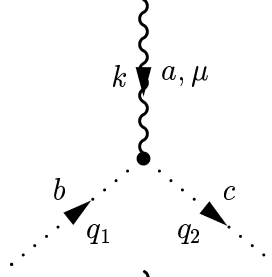
$$igf_{abc}((k_1 - k_3)_\nu \delta_{\mu\lambda} + (k_2 - k_1)_\lambda \delta_{\mu\nu} + (k_3 - k_2)_\mu \delta_{\nu\lambda})$$

4-Gluonen-Vertex



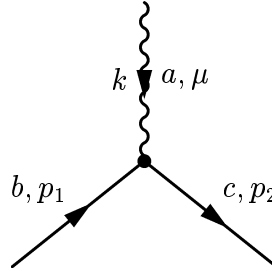
$$g^2 [f_{abe}f_{cde}(\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\kappa} - \delta_{\mu\kappa}\delta_{\nu\lambda}) + f_{ace}f_{bde}(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\kappa} - \delta_{\mu\kappa}\delta_{\nu\lambda}) + f_{ade}f_{cbe}(\delta_{\mu\kappa}\delta_{\nu\lambda} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\kappa})]$$

Gluon-Ghost-Vertex

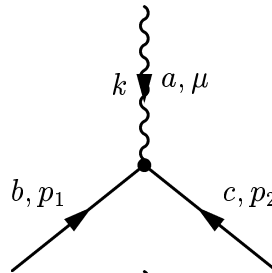


$$-gf_{abc}q_{2\mu}$$

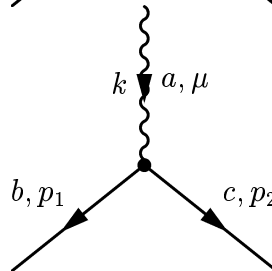
Gluon-Gluino-Vertex



$$-gf_{abc}\gamma_\mu$$



$$-gf_{abc}C\gamma_\mu$$



$$gf_{abc}\gamma_\mu C^{-1}$$

Symmetriefaktoren



$$S = \frac{1}{2!}$$



$$S = \frac{1}{2!}$$



$$S = \frac{1}{2!}$$



$$S = \frac{1}{3!}$$

Neben diesen Regeln ist noch zu beachten, daß jeder Gluino- und jeder Ghost-Loop ein zusätzliches Minuszeichen als Vorfaktor erhält.

2.5 Renormierungskonstanten der chiralen Ward-Identität und ihre Berechnung

In diesem Kapitel sollen die zuvor hergeleiteten Feynman-Regeln zur Berechnung einiger Renormierungskonstanten benutzt werden. Zunächst wird das benutzte Renormierungsschema erklärt sowie die Eigenschaften der zu betrachtenden Größen mittels einer chiralen Ward-Identität näher untersucht, anschließend folgt dann die konkrete Berechnung der Renormierungskonstanten.

2.5.1 Das $\overline{\text{MS}}$ Renormierungsschema

In der chiralen Ward-Identität treten die pseudoskalare Dichte und der axiale Vektorstrom auf und man ist an ihrem Verhalten interessiert. In entsprechenden Identitäten in der QCD tritt auch die skalare Dichte auf, so daß auch diese betrachtet werden soll. Der aus der QCD bekannte Vektorstrom ist nicht zu betrachten, da dieser aufgrund der Majorana-Eigenschaft der Fermionen identisch zu Null ist. Damit interessiert man sich für die Operatoren

$$\mathcal{O}_\Gamma(x) = \bar{\lambda}(x)\Gamma\lambda(x) \quad (2.100)$$

mit

$$\Gamma = \mathbb{1}, \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5. \quad (2.101)$$

Daher sollen im folgenden die Größen

$$G_\Gamma(x, y) = \langle \lambda(x) \mathcal{O}_\Gamma(0) \bar{\lambda}(y) \rangle \quad (2.102)$$

störungstheoretisch behandelt werden. Dafür betrachtet man die Größen im Impulsraum, d. h. es ist noch eine Fouriertransformation durchzuführen:

$$G_\Gamma(p_1, p_2) = \int d^4x d^4y e^{ip_1x + ip_2y} G_\Gamma(x, y) \quad (2.103)$$

Zur weiteren Vereinfachung werden die amputierten Größen wie in [MPSTV] angegeben definiert:

$$\Lambda_\Gamma(p_1, p_2) = S_F^{-1}(p_1) G_\Gamma(p_1, p_2) S_F^{-1}(-p_2) \quad (2.104)$$

Sowohl der inverse Fermionenpropagator S_F^{-1} als auch die Größen Λ_Γ sind divergent, d. h. wenn man die 1-Loop Korrekturen dieser Größen berechnen möchte, trifft man auf divergente Integrale. Es zeigt sich allerdings, daß die auftretenden Integrale in vier Dimensionen zwar divergieren, aber in $D = 4 - \varepsilon$ Dimensionen endlich sind. Daher werden die entsprechenden Integrale in D Dimensionen berechnet. Dieses Verfahren bezeichnet man als dimensionelle Regularisierung.

In D Dimensionen haben die Größen für $\varepsilon \rightarrow 0$ ein asymptotisches Verhalten proportional zu $\frac{1}{\varepsilon}$. Diese Divergenz ist in geeigneter Weise in die zugehörige Renormierungskonstante zu absorbieren, damit die renormierte Größe auch im Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ endlich bleibt. Beachtet man dabei nur den Faktor $\frac{1}{\varepsilon}$, so heißt das Schema MS-Schema (*Minimal Subtraction*). Es zeigt sich allerdings, daß mit dem $\frac{1}{\varepsilon}$ stets noch ein $-\gamma_E + \ln 4\pi$ verbunden ist, und es stellt sich als sinnvoll heraus, auch diese Terme mit in die Renormierungskonstante zu absorbieren. Dieses Schema der Renormierung heißt $\overline{\text{MS}}$ -Schema [Co].

Teilt man die Selbstenergie in einen zu $i\not{p}$ und einen zu m proportionalen Anteil auf

$$\Sigma(p) = -i\not{p}\Sigma_1(p) + m\Sigma_2(p), \quad (2.105)$$

so steckt die Divergenz des inversen Propagators

$$S_F^{-1} = -i\not{p}(1 - \Sigma_1(p)) + m(1 - \Sigma_2(p)) \quad (2.106)$$

im masselosen Fall in $\Sigma_1(p)$. In diesem Schema ist diese Divergenz — wie zuvor erklärt — mittels der Renormierungskonstanten $Z_\lambda^{\overline{\text{MS}}}$ abzuspalten. Für eine vollständige Renormierung des Propagators ist auch die Masse zu renormieren, die verbleibende Divergenz der Masse wird durch die Renormierungskonstante $Z_m^{\overline{\text{MS}}}$ absorbiert. Die Renormierungskonstanten werden somit über

$$\begin{aligned} S_F^{-1, \overline{\text{MS}}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\lambda^{\overline{\text{MS}}} (-i\not{p}(1 - \Sigma_1(p)) + m(1 - \Sigma_2(p))) \\ &= -i\not{p} \left(1 - \Sigma_1^{\overline{\text{MS}}}(p)\right) + m^{\overline{\text{MS}}} \left(1 - \Sigma_2^{\overline{\text{MS}}}(p)\right) \end{aligned} \quad (2.107)$$

mit

$$m^{\overline{\text{MS}}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_m^{\overline{\text{MS}}} m \quad (2.108)$$

festgelegt.

Auf die gleiche Weise werden die Renormierungskonstanten zu den Größen Λ_Γ definiert. Mit den störungstheoretischen Korrekturen lauten diese Größen für gleichen einlaufenden und auslaufenden Impuls:

$$\begin{aligned}\Lambda_\Gamma(p) &\equiv \Lambda_\Gamma(p, -p) \\ &= \Gamma + \tilde{\Lambda}_\Gamma(p, -p)\end{aligned}\tag{2.109}$$

Die renormierten Größen werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\Lambda_\Gamma^{\overline{MS}}(p) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Z_\lambda^{\overline{MS}} Z_\Gamma^{\overline{MS}} \Lambda_\Gamma(p) \\ &= \Gamma + \tilde{\Lambda}_\Gamma^{\overline{MS}}(p)\end{aligned}\tag{2.110}$$

Dabei ist darauf zu achten, daß die Renormierungskonstante des inversen Fermionenpropagators mit in die Definition aufgenommen wurde. Der Grund dafür ist, daß durch die Felder, zwischen denen der Operator \mathcal{O}_Γ betrachtet wird, auch ein Beitrag zur Divergenz entsteht, den man nicht in Z_Γ enthalten haben möchte. Für amputierte Größen ist daher — wie angegeben — ein Faktor $Z_\lambda^{\overline{MS}}$ in die Definition aufzunehmen, im nicht amputierten Fall ein Faktor $Z_\lambda^{\overline{MS}-1}$.

Im folgenden sollen die Renormierungskonstanten $Z_\Gamma^{\overline{MS}}$ berechnet werden und man möchte zuvor wissen, welche Eigenschaften man von diesen Renormierungskonstanten zu erwarten hat. Eine Eigenschaft ist das Verhalten bei einem Wechsel der Eichung, wobei hier die Feynman-Eichung ($\alpha = 1$) und die Landau-Eichung ($\alpha = 0$) betrachtet werden. Ergebnisse für andere kovariante Eichungen folgen daraus sofort. Die Renormierungskonstante $Z_\lambda^{\overline{MS}}$ des inversen Fermionenpropagators wird sich sicherlich bei einem Wechsel der Eichung ändern, da der Propagator nicht eichinvariant ist. Die Operatoren \mathcal{O}_Γ sind zwar eichinvariant, aber sie werden zwischen Fermionenfeldern betrachtet, so daß auch hier zunächst keine Invarianz unter einem Wechsel der Eichung erwartet werden kann. In der Tat ist es so, daß es Renormierungsschemata gibt, in denen Z_Γ gemäß dieser Argumentation nicht eichinvariant ist.

Es hat sich allerdings gezeigt, daß das \overline{MS} -Schema nicht von den äußeren Zuständen abhängt ([VI], [MPSTV]). Man hätte zur Berechnung von $Z_\Gamma^{\overline{MS}}$ den Operator \mathcal{O}_Γ also auch zwischen zwei explizit eichinvarianten Zuständen wie z.B. Hadronen betrachten können, oder aber mit dem Schrödinger-Funktional-Formalismus eine manifest eichinvariante Formulierung wählen können, ohne das Ergebnis zu verändern. Daher erwartet man, daß die Renormierungskonstanten $Z_\Gamma^{\overline{MS}}$ eichinvariant sind.

2.5.2 Die chirale Ward-Identität

Neben dem Verhalten bei einem Wechsel der Eichung ist es von Interesse zu wissen, ob es noch weitere Zusammenhänge zwischen den einzelnen Renormierungskonstan-

ten gibt. Entsprechende Aussagen lassen sich mit Hilfe von Ward-Identitäten treffen, weshalb diese nun betrachtet werden.

Im masselosen Fall ist die Wirkung invariant unter der chiralen Rotation

$$\lambda(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \lambda(x). \quad (2.111)$$

Dieser Rotation entspricht aufgrund der Majorana-Eigenschaft

$$\bar{\lambda}(x) \rightarrow \bar{\lambda}(x) e^{i\alpha\gamma_5}. \quad (2.112)$$

Dabei ist α ein globaler Transformationsparameter. Aus der Invarianz der Wirkung unter dieser chiralen Rotation ergibt sich für beliebige Masse m die chirale Ward-Identität

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \langle \lambda(x_1) J_\mu^5(x) \bar{\lambda}(x_2) \rangle \\ &= 2m \langle \lambda(x_1) P(x) \bar{\lambda}(x_2) \rangle - \delta(x - x_1) \langle \gamma_5 \lambda(x_1) \bar{\lambda}(x_2) \rangle - \delta(x - x_2) \langle \lambda(x_1) \bar{\lambda}(x_2) \gamma_5 \rangle \end{aligned} \quad (2.113)$$

mit dem axialen Strom

$$J_\mu^5(x) = \mathcal{O}_{\gamma_\mu \gamma_5}(x) \quad (2.114)$$

und der pseudoskalaren Dichte

$$P(x) = \mathcal{O}_{\gamma_5}(x). \quad (2.115)$$

Die zugehörigen Renormierungskonstanten werden Z_A und Z_P benannt. Diesen sind durch die Ward-Identität Einschränkungen auferlegt ([PT], [CLV]).

Fließt an dem axialen Strom und der pseudoskalaren Dichte ein Impuls q ein, und werden die entsprechenden amputierten Größen mit $\Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}(p_1, q, p_2)$ und $\Lambda_{\gamma_5}(p_1, q, p_2)$ bezeichnet, so folgt mit

$$\gamma_5 S_F(-p_2) = S_F(p_2) \gamma_5 \quad (2.116)$$

für die chirale Ward-Identität:

$$q_\mu \Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}(p_1, q, p_2) = 2m \Lambda_{\gamma_5}(p_1, q, p_2) - (S_F^{-1}(p_1) + S_F^{-1}(p_2)) \gamma_5. \quad (2.117)$$

Diese gilt für die nackten Größen. Da es sich bei den Brechungstermen um weiche Brechungsterme handelt [Po], erwartet man die Gültigkeit dieser Ward-Identität auch für die renormierten Größen:

$$Z_\lambda Z_A q_\mu \Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}(p_1, q, p_2) = 2Z_m Z_\lambda Z_P m \Lambda_{\gamma_5}(p_1, q, p_2) - Z_\lambda (S_F^{-1}(p_1) + S_F^{-1}(p_2)) \gamma_5. \quad (2.118)$$

Setzt man die Fermionen auf die Massenschale, so verschwinden die inversen Propagatoren, und aus (2.117) und (2.118) folgt der Zusammenhang

$$Z_A = Z_m Z_P. \quad (2.119)$$

Damit gilt neben

$$q_\mu \Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}(p_1, q, p_2) - 2m \Lambda_{\gamma_5}(p_1, q, p_2) = - (S_F^{-1}(p_1) + S_F^{-1}(p_2)) \gamma_5 \quad (2.120)$$

auch

$$Z_\lambda Z_A (q_\mu \Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}(p_1, q, p_2) - 2m \Lambda_{\gamma_5}(p_1, q, p_2)) = -Z_\lambda (S_F^{-1}(p_1) + S_F^{-1}(p_2)) \gamma_5, \quad (2.121)$$

und es folgt

$$Z_A = 1 \quad (2.122)$$

und

$$Z_P = Z_m^{-1}. \quad (2.123)$$

2.5.3 Der Gluino-Propagator

Zuerst wird der Gluino-Propagator berechnet. Nachdem man erkannt hat, daß dieser divergent ist, wird die Berechnung in Naiver Dimensioneller Regularisierung (NDR) durchgeführt, d.h., daß die Berechnung in $4 - \varepsilon$ Dimensionen ausgeführt wird. Im Unterschied zur 't Hooft-Veltman Regularisierung bleiben allerdings die Definition des γ_5 und damit auch die zugehörigen Kommutatorregeln unverändert.

2.5.3.1 Nackte Größe in 1-Loop-NDR

Gesucht ist die Selbstenergie des Fermionen-Propagators, der entsprechende Term ist in Abb. 2.5 angegeben. Um das Verhalten für verschiedene kovariante Eichungen zu erkennen, ist man an einem Ergebnis für beliebige Eichparameter α interessiert. Deshalb wird die nackte Größe zunächst in Feynman-Eichung ($\alpha = 1$) berechnet, anschließend in Landau-Eichung ($\alpha = 0$). Für andere Werte von α läßt sich das Ergebnis dann interpolieren.

Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

Zunächst wird die Berechnung also in Feynman-Eichung durchgeführt:

$$\begin{aligned} \Sigma^{FEY}(p) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V_\nu^{dc b}[\lambda, A_\nu, \bar{\lambda}](p-k, k, -p) S_F[\lambda \bar{\lambda}](p) D_{\mu\nu}(k) \\ &\quad \times V_\mu^{acd}[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}](p, -k, k-p) \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$= -g^2 f_{acd} f_{bcd} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu [i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\mu}{k^2 [(p-k)^2 + m^2]} \quad (2.125)$$

Für die Summe über die Strukturkonstanten gilt:

$$\sum_{c,d} f_{acd} f_{bcd} = N_c \delta^{ab} = C_A \delta^{ab} \quad (2.126)$$

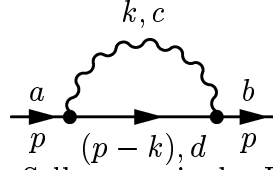


Abbildung 2.5: 1-Loop Selbstenergie des Fermionen-Propagators

Des weiteren sind einige Rechenregeln für euklidische Gammamatrizen in D Dimensionen auszunutzen:

$$\gamma_\mu \gamma_\mu = D \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not{a} \gamma_\mu &= a_\nu \gamma_\mu (2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu) \\ &= (2-D) \not{a} \end{aligned} \quad (2.128)$$

Damit ergibt sich für das Diagramm:

$$-g^2 C_A \delta^{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2-D)i(\not{p} - \not{k}) + Dm}{k^2[(p-k)^2 + m^2]} \quad (2.129)$$

Für große k ist der Nenner proportional zu k^4 . In vier Dimensionen ist das Integral darüber logarithmisch divergent, so daß die folgende Berechnung in $D = 4 - \varepsilon$ Dimensionen ausgeführt wird. Dies nennt man dimensionelle Regularisierung. Dabei ist zunächst nicht klar, wie die Gamma-Matrizen in $D < 4$ Dimensionen kommutieren. Die hier getroffene Wahl beläßt den Kommutator unverändert, so daß man von naiver dimensioneller Regularisierung (NDR) spricht.

Mit Hilfe der Feynman Parametrisierung

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\delta(x+y-1)}{(ax+by)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(a-b)x+b]^2} \quad (2.130)$$

läßt sich obiges Integral weiter berechnen ([Ry], [Mu]). Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)i(\not{p} - \not{k}) + Dm}{k^2[(p-k)^2 + m^2]} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)i(\not{p} - \not{k}) + Dm}{[(p^2 + k^2 - 2p \cdot k + m^2 - k^2)x + k^2]^2} \end{aligned} \quad (2.131)$$

$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)i(\not{p} - \not{k}) + Dm}{[k^2 - 2xp \cdot k + (p^2 + m^2)x]^2} \quad (2.132)$$

$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)i\not{p} - (2-D)i(\not{k} - \not{p}x) - (2-D)i\not{p}x + Dm}{[(k - px)^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^2} \quad (2.133)$$

$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)i\not{p}(1-x) - (2-D)i\not{k} + Dm}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^2} \quad (2.134)$$

$$= \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2-D)i\not{p}(1-x) + Dm}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^2} \quad (2.135)$$

Dabei wurde zunächst in (2.134) eine Substitution $k - px$ nach k durchgeführt, im letzten Schritt wurde dann der Term weggelassen, der im Zähler linear in k ist, da der Nenner gerade in k ist, und somit jeder ungerade Term im Zähler unter dem Integral verschwindet.

In Kugelkoordinaten in D Dimensionen ist, mit $\Phi(D)$ der Oberfläche der D -dimensionalen Einheitskugel:

$$d^D k = \Phi(D) k^{D-1} dk \quad (2.136)$$

mit

$$\Phi(D) = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}. \quad (2.137)$$

Damit wird aus obigem Integral:

$$\int_0^1 dx [(2-D)i\not{p}(1-x) + Dm] \frac{2\pi^{D/2}}{(2\pi)^D \Gamma(D/2)} \int_0^\infty dk \frac{k^{D-1}}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^2} \quad (2.138)$$

Dies ist ein Spezialfall folgender Integrationsformel:

$$\int_0^\infty \frac{dk k^{l-1}}{(k^2 + a^2)^n} = a^{l-2n} \frac{\Gamma(l/2) \Gamma(n-l/2)}{2\Gamma(n)} \quad (2.139)$$

Damit ergibt sich für das zu berechnende Integral:

$$\frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \frac{[(2-D)i\not{p}(1-x) + Dm]}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{2-D/2}} \quad (2.140)$$

In D Dimensionen haben die fermionischen Felder eine Massendimension $\frac{D-1}{2}$, die Eichfelder $\frac{D}{2} - 1$. Die Kopplungskonstante erhält damit die Dimension $2 - \frac{D}{2}$, so daß effektiv folgende Substitution durchgeführt wird:

$$g \longrightarrow g\mu^{2-\frac{D}{2}} \quad (2.141)$$

Damit ergibt sich für obiges Integral, multipliziert mit g^2 :

$$g^2 \mu^{4-D} \frac{\Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \frac{[(2-D)i\not{p}(1-x) + Dm]}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{2-D/2}} \quad (2.142)$$

$$= g^2 \mu^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \int_0^1 dx \frac{[(-2+\varepsilon)i\not{p}(1-x) + (4-\varepsilon)m]}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{\varepsilon/2}} \quad (2.143)$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2} \Gamma(\varepsilon/2) \int_0^1 dx \frac{[(-2+\varepsilon)i\not{p}(1-x) + (4-\varepsilon)m]}{[(p^2 x(1-x) + m^2 x)/(4\pi\mu^2)]^{\varepsilon/2}} \quad (2.144)$$

Mit folgender Entwicklung in ε

$$a^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln a} = 1 + \varepsilon \ln a + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (2.145)$$

und

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (2.146)$$

mit der Eulerschen Gamma-Konstanten

$$\gamma_E = 0.5772 \dots \quad (2.147)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} \int_0^1 dx [-2i\not{p}(1-x) + 4m] \right. \\ & - \gamma_E \int_0^1 dx [-2i\not{p}(1-x) + 4m] + 2 \int_0^1 dx [i\not{p}(1-x) - m] \\ & \left. - \int_0^1 dx [-2i\not{p}(1-x) + 4m] \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{4\pi\mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} (-i\not{p} + 4m) - \gamma_E (-i\not{p} + 4m) + i\not{p} - 2m \right. \\ & \left. - 2 \int_0^1 dx [-i\not{p}(1-x) + 2m] \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{4\pi\mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2}{16\pi^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} (-i\not{p} + 4m) + i\not{p}(1 + \gamma_E) - 2m(1 + 2\gamma_E) \right. \\ & \left. - 2 \int_0^1 dx [-i\not{p}(1-x) + 2m] \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{4\pi\mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.150)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2}{16\pi^2} \left[-i\not{p} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 1 \right) + 4m \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. + 2 \int_0^1 dx [i\not{p}(1-x) - 2m] \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.151)$$

Für den inversen Propagator in Feynman-Eichung erhält man somit, abgesehen von einem Faktor δ^{ab} :

$$\begin{aligned} S_F^{-1, FEY}(p) &= -i\not{p} + m + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[-i\not{p} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 1 \right) \right. \\ & \quad + 4m \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \frac{1}{2} \right) \\ & \quad \left. + 2 \int_0^1 dx [i\not{p}(1-x) - 2m] \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.152)$$

Mit

$$\frac{1}{\hat{\varepsilon}} \equiv \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \quad (2.153)$$

ist dies in Termen von $i\not{p}$ und m :

$$\begin{aligned} S_F^{-1, FEY}(p) &= -i\not{p} \left\{ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[\frac{1}{\hat{\varepsilon}} - 1 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+m \left\{ 1 + 4 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} - \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right\} \quad (2.154)$$

Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

In dem vorherigen Abschnitt ist die Selbstenergie zum Fermionenpropagator in der Feynman-Eichung berechnet worden. Nun wird sie noch in der Landau-Eichung berechnet, wobei zusätzlich zu dem Term aus der Feynman-Eichung ein Term hinzukommt, in dem das $\delta_{\mu\nu}$ aus dem Gluonpropagator durch ein

$$-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (2.155)$$

ersetzt wird. Der zusätzliche Term zur Selbstenergie lautet:

$$\Sigma^{(1-\alpha)}(p) = g^2 \mu^\varepsilon C_A \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\not{k} [i(\not{p} - \not{k}) + m] \not{k}}{k^4 [(p-k)^2 + m^2]} \quad (2.156)$$

$$= g^2 \mu^\varepsilon C_A \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i(2pk - \not{p}\not{k} - k^2)\not{k} + mk^2}{k^4 [(p-k)^2 + m^2]} \quad (2.157)$$

$$= g^2 \mu^\varepsilon C_A \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{2ipk\not{k} + (-i\not{p} - i\not{k} + m)k^2}{k^4 [(p-k)^2 + m^2]} \quad (2.158)$$

$$= g^2 \mu^\varepsilon C_A \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{2ipk\not{k}}{k^4 [(p-k)^2 + m^2]} + \frac{-i(\not{p} + \not{k}) + m}{k^2 [(p-k)^2 + m^2]} \right\} \quad (2.159)$$

Die beiden Integrale werden getrennt behandelt. Für das erste ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{2ipk\not{k}}{k^4 [(p-k)^2 + m^2]} \\ &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx (1-x) \frac{4i(pk)\not{k}}{[(p^2 - 2pk + m^2)x + k^2]^3} \end{aligned} \quad (2.160)$$

$$= \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{4i(pk)\not{k}}{[(k - px)^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3} \quad (2.161)$$

$$= \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{4i[p(k+px)](\not{k} + \not{p}x)}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3} \quad (2.162)$$

$$= \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{4i[(pk)\not{k} + p^2 x^2 \not{p}]}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3} \quad (2.163)$$

Zur Berechnung kann der Spezialfall $n = 3$ und $a^2 = p^2 x(1-x) + m^2 x$ der Formel

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\delta_{\mu\nu}}{2(a^2)^{n-1-D/2}} \frac{\Gamma(n-1-D/2)}{\Gamma(n)} \quad (2.164)$$

sowie die Formel

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(a^2)^{n-D/2}}, \quad (2.165)$$

ebenfalls für $n = 3$ benutzt werden. Damit folgt für obiges Integral:

$$\begin{aligned} & \frac{2i}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx (1-x) \left\{ \frac{\Gamma(2 - D/2) \not{p}}{2[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{2-D/2}} + \frac{\Gamma(3 - D/2) x^2 p^2 \not{p}}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{3-D/2}} \right\} \\ &= \frac{i \not{p}}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \int_0^1 dx (1-x) \left\{ \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{\varepsilon/2}} + \frac{2p^2 x^2}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]} \right\} \end{aligned} \quad (2.166)$$

Für das zweite Integral aus der Selbstenergie folgt mit denselben Rechenschritten:

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-i(\not{p} + \not{k}) + m}{k^2[(p-k)^2 + m^2]} = \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-i \not{p} - i(\not{k} + \not{p}x) + m}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^2} \quad (2.167)$$

$$= \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \int_0^1 dx \frac{-i \not{p}(1+x) + m}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{\varepsilon/2}} \quad (2.168)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \Sigma^{(1-\alpha)}(p) \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A (4\pi\mu^2)^{\varepsilon/2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{i \not{p}(1-x-1-x) + m}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{\varepsilon/2}} \Gamma(\varepsilon/2) + \frac{2p^2 x^2(1-x) i \not{p}}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \right\} \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln 4\pi \right) \\ & \quad \left\{ \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E \right) \int_0^1 dx (-2i \not{p}x + m) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 dx \frac{2p^2 x(1-x) i \not{p}}{p^2(1-x) + m^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.169)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left\{ \frac{2}{\varepsilon} (-i \not{p} + m) - \gamma_E (-i \not{p} + m) \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 dx (-2i \not{p}x + m) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + 2i \not{p} \int_0^1 dx x \frac{p^2(1-x)}{p^2(1-x) + m^2} + (-i \not{p} + m) \ln 4\pi \right\} \end{aligned} \quad (2.170)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left\{ \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) (-i \not{p} + m) \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 dx (2i \not{p}x - m) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2i \not{p} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{p^2(1-x) + m^2}{\mu^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.171)$$

Das letzte Integral dieser Formel wird mit Hilfe partieller Integration weiter berechnet:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx x(1-x) \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{p^2(1-x) + m^2}{\mu^2} \right) \\ &= - \int_0^1 dx (1-2x) \left\{ \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) - \ln x \right\} \end{aligned} \quad (2.172)$$

$$= - \int_0^1 dx (1-2x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) + \int_0^1 dx \left(\frac{d}{dx} (x-x^2) \right) \ln x \quad (2.173)$$

$$= - \int_0^1 dx (1-2x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) - \int_0^1 dx (1-x) \quad (2.174)$$

$$= - \int_0^1 dx (1-2x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) - \frac{1}{2} \quad (2.175)$$

Damit ergibt sich schließlich für diesen Teil der Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1-\alpha)}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left\{ \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) (-i\not{p} + m) + i\not{p} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx [2i\not{p}(x+1-2x) - m] \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.176)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left\{ -i\not{p} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + m \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.177)$$

Man erkennt, daß der Term proportional zu $-i\not{p}$ genau wie in dem Term aus der Feynman-Eichung auftritt, nun allerdings mit umgekehrtem Vorzeichen. In der Landau-Eichung hebt sich dieser Term somit auf, und man verbleibt mit:

$$\begin{aligned} \Sigma^{LAN}(p) &= \Sigma^{FEY}(p) + \Sigma^{(1-\alpha)}(p) \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A m \left[-\frac{3}{\hat{\varepsilon}} + 2 + 3 \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.178)$$

Der inverse Propagator in Landau-Eichung lautet damit:

$$\begin{aligned} S_F^{-1,LAN}(p) &= -i\not{p} + m - \Sigma^{LAN}(p) \\ &= -i\not{p} \end{aligned} \quad (2.179)$$

$$+ m \left\{ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[\frac{3}{\hat{\varepsilon}} - 2 - 3 \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right\} \quad (2.180)$$

2.5.3.2 Bestimmung von $Z_\lambda^{\overline{MS}}$ und $Z_m^{\overline{MS}}$

Der inverse Propagator, also (2.154) in Feynman-Eichung und (2.180) in Landau-Eichung, multipliziert mit Z_λ , ergibt dann den im \overline{MS} Schema renormierten inversen Propagator $S_F^{-1,\overline{MS}}(p)$. Dafür muß Z_λ gemäß (2.107) wie folgt gewählt werden:

$$Z_\lambda^{\overline{MS},FEY} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \quad (2.181)$$

$$Z_\lambda^{\overline{MS},LAN} = 1 \quad (2.182)$$

Für eine vollständige Renormierung des Propagators ist auch eine renormierte Masse zu definieren. Mit (2.108) muß $Z_m^{\overline{MS}}$ wie folgt gewählt werden:

$$Z_m^{\overline{MS},FEY} = 1 + 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \quad (2.183)$$

$$Z_m^{\overline{MS},LAN} = 1 + 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \quad (2.184)$$

Für die renormierte Selbstenergie ergibt sich somit:

$$\Sigma^{\overline{MS},FEY/LAN}(p) = -i \not{p} \Sigma_1^{\overline{MS},FEY/LAN}(p) + m^{\overline{MS}} \Sigma_2^{\overline{MS},FEY/LAN}(p) \quad (2.185)$$

mit

$$\Sigma_1^{\overline{MS},FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[1 + 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \quad (2.186)$$

$$\Sigma_2^{\overline{MS},FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[2 + 4 \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \quad (2.187)$$

$$\Sigma_1^{\overline{MS},LAN}(p) = 0 \quad (2.188)$$

$$\Sigma_2^{\overline{MS},LAN}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[2 + 3 \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right]. \quad (2.189)$$

Für spätere Rechnungen werden die Größen noch für den Fall $m=0$ angegeben:

$$\Sigma_1^{\overline{MS},FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\ln \frac{p^2}{\mu^2} - 1 \right) \quad (2.190)$$

$$\Sigma_2^{\overline{MS},FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(4 \ln \frac{p^2}{\mu^2} - 6 \right) \quad (2.191)$$

$$\Sigma_1^{\overline{MS},LAN}(p) = 0 \quad (2.192)$$

$$\Sigma_2^{\overline{MS},LAN}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} - 4 \right) \quad (2.193)$$

2.5.4 Skalare und Pseudoskalare Dichte

Als nächstes werden die skalare und die pseudoskalare Dichte berechnet. Es wird sich dabei herausstellen, daß für den Fall $m=0$ aus der skalaren Dichte sofort die

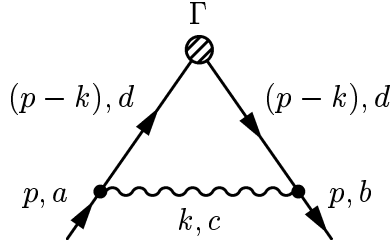


Abbildung 2.6: 1-Loop-Korrektur

pseudoskalare Dichte folgt. Auch diese Größen erweisen sich als divergent und sollen wieder in NDR regularisiert und im $\overline{\text{MS}}$ Schema renormiert werden. Die renormierten Größen werden dabei gemäß der Erklärung im Kapitel 2.5.1 berechnet.

2.5.4.1 Nackte Größe in 1-Loop-NDR

Die 1-Loop-Korrektur zur skalaren und pseudoskalaren Dichte ist durch Abb. 2.6 für $\Gamma = \mathbb{1}$ bzw. γ_5 gegeben und lautet:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\Gamma(p) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V_\mu^{acd}[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}](p, -k, k-p) S_F[\lambda, \bar{\lambda}](p-k) \Gamma S_F[\lambda, \bar{\lambda}](p-k) \\ &\quad \times V_\nu^{dcb}[\lambda, A_\nu, \bar{\lambda}](p-k, k, -p) D_{\mu\nu}(k) \end{aligned} \quad (2.194)$$

Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

In Feynman-Eichung ist dieser Ausdruck durch

$$\tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY}(p) = -g^2 C_A \delta_{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i(\not{p} - \not{k}) + m] \Gamma [i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\nu}{[(p-k)^2 + m^2]^2 k^2} \quad (2.195)$$

gegeben. Feynman-Parametrisierung ergibt unter Benutzung der Identität

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 \frac{dx \cdot x}{[(a-b)x + b]^3} \quad (2.196)$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY}(p) &= -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i(\not{p} - \not{k}) + m] \Gamma [i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\nu}{[(p^2 - 2pk + m^2)x + k^2]^3} \\ &= -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i(\not{p} - \not{k}) + m] \Gamma [i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\nu}{[k^2 - 2pkx + p^2x + m^2x]^3} \\ &= -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i(\not{p} - \not{k}) + m] \Gamma [i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\nu}{[(k - px)^2 + p^2x(1-x) + m^2x]^3}. \end{aligned} \quad (2.197)$$

Nach Substitution $k - px \rightarrow k$ wird dies zu

$$\tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY}(p) = -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i\not{p}(1-x) - i\not{k} + m] \Gamma [i\not{p}(1-x) - i\not{k} + m] \gamma_\nu}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3} \quad (2.198)$$

Beim Ausmultiplizieren im Zähler ist zu beachten, daß lineare Terme in k nicht zur $d^4 k$ -Integration über den \mathbb{R}^4 beitragen. Man bekommt somit zwei relevante Terme

$$\tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY}(p) = \tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY,(1)}(p) + \tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY,(2)}(p), \quad (2.199)$$

wobei

$$\tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY,(1)}(p) = 2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu \not{k} \Gamma \not{k} \gamma_\nu}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3} \quad (2.200)$$

$$\tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY,(2)}(p) = -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i\not{p}(1-x) + m] \Gamma [i\not{p}(1-x) + m] \gamma_\nu}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3}. \quad (2.201)$$

Der erste Beitrag divergiert, wie durch power-counting sofort ersichtlich wird, und muß daher regularisiert werden. Deswegen wird das Integral in einer beliebigen Anzahl D von Dimensionen betrachtet. Für den Fall $\Gamma = \mathbb{1}$ gilt:

$$\gamma_\nu \not{k} \gamma_\nu = k^2 \gamma_\nu \gamma_\nu = D k^2 \quad (2.202)$$

$$-\gamma_\nu [i\not{p}(1-x)] [i\not{p}(1-x)] \gamma_\nu = (1-x)^2 \gamma_\nu \not{p} \not{p} \gamma_\nu = D p^2 (1-x)^2 \quad (2.203)$$

Daraus folgt im Limes $m \rightarrow 0$, der zur Vereinfachung betrachtet wird:

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}^{FEY,(1)}(p) = 2g^2 C_A \delta_{ab} D \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 + p^2 x(1-x)]^3} \quad (2.204)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}^{FEY,(2)}(p) = 2g^2 C_A \delta_{ab} D p^2 \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1-x)^2}{[k^2 + p^2 x(1-x)]^3} \quad (2.205)$$

Das Integral in dem Ausdruck $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}^{FEY,(1)}(p)$ divergiert und wird daher in $D = 4 - \varepsilon$ Dimensionen betrachtet:

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}^{FEY,(1)}(p) = 2g^2 C_A \delta_{ab} \frac{D^2 \mu^{4-D}}{2(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Lambda(3)} \int_0^1 dx x \frac{1}{[p^2 x(1-x)]^{2-D/2}} \quad (2.206)$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \frac{1}{2} (4 - \varepsilon)^2 \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{4\pi\mu^2}{p^2}\right)^{\varepsilon/2} \int_0^1 dx x [x(1-x)]^{-\varepsilon/2} \quad (2.207)$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 8 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{p^2}\right)\right) \times \int_0^1 dx x \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln(x(1-x))\right] \quad (2.208)$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 4 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{p^2}\right)\right)$$

$$\times \left(1 - \varepsilon \int_0^1 dx x \ln[x(1-x)] \right) \quad (2.209)$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 4 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E \right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ln \frac{4\pi\mu^2}{p^2} + \varepsilon \right) \quad (2.210)$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 4 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + 1 + \ln \frac{4\pi\mu^2}{p^2} \right) \quad (2.211)$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 4 \left(\frac{1}{\hat{\varepsilon}} - \ln \frac{p^2}{\mu^2} + 1 \right) \quad (2.212)$$

$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{FEY,(2)}(p)$ ist endlich, und kann daher direkt in $D = 4$ Dimensionen ausgerechnet werden:

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{FEY,(2)}(p) = 2g^2 C_A \delta_{ab} D \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2}) p^2}{\Gamma(3)(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)^2}{[p^2 x(1-x)]^{3-D/2}} \quad (2.213)$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 4 \int_0^1 dx (1-x) \quad (2.214)$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 2 \quad (2.215)$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 4 \left(\frac{1}{\hat{\varepsilon}} - \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \frac{3}{2} \right) \quad (2.216)$$

Im Fall $m = 0$ folgt sofort für die pseudoskalare Dichte:

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}(p) = \tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{FEY}(p) \gamma_5 \quad (2.217)$$

Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

Auch die 1-Loop-Korrektur zur skalaren Dichte soll in Landau-Eichung berechnet werden. Wie bereits beim Gluinopropagator ist dazu der $\delta_{\mu\nu}$ -Term aus dem Gluonenpropagator zu ersetzen. Der zusätzliche Term lautet dann:

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(1-\alpha)}(p) = g^2 C_A \delta_{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k[i(\not{p} - \not{k}) + m][i(\not{p} - \not{k}) + m]k}{[(p-k)^2 + m^2]^2 (k^2)^2} \quad (2.218)$$

Von diesem Term wird der Zähler für den Fall $m = 0$ näher betrachtet:

$$-k(\not{p} - \not{k})(\not{p} - \not{k})k = -k(p^2 + k^2 - \not{p}k - k\not{p})k \quad (2.219)$$

$$= -k(p^2 + k^2 - 2pk)k \quad (2.220)$$

$$= -k^2(p^2 + k^2 - 2pk) \quad (2.221)$$

Damit lautet der zu betrachtende Term:

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(1-\alpha)}(p) = -g^2 C_A \delta_{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + k^2 - 2pk}{[(p-k)^2]^2 k^2} \quad (2.222)$$

In diesem kann wieder eine Feynman-Parametrisierung durchgeführt werden und anschließend eine Substitution der Integrationsvariablen erfolgen:

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(1-\alpha)}(p) = -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + k^2 - 2pk}{[(k - px)^2 + p^2 x(1-x)]^3} \quad (2.223)$$

$$= -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 - 2p(k + px) + (k + px)^2}{[k^2 + p^2 x(1-x)]^3} \quad (2.224)$$

$$= -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2(1-x)^2 + k^2}{[k^2 + p^2 x(1-x)]^3} \quad (2.225)$$

Der Vergleich mit den Termen (2.204) und (2.205) zeigt, daß diese bis auf einen Vorfaktor $-\frac{1}{D} = -\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{16}$ identisch sind. Damit kann das Ergebnis der dortigen Rechnung direkt übernommen werden, und man erhält

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(1-\alpha)}(p) = -\frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left(\frac{1}{\hat{\varepsilon}} - \ln \frac{p^2}{\mu^2} + 2 \right) \quad (2.226)$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{LAN}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(1-\alpha)}(p) \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left(\frac{3}{\hat{\varepsilon}} - 3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} + 4 \right). \end{aligned} \quad (2.227)$$

2.5.4.2 Berechnung von $Z_S^{\overline{MS}}$ und $Z_P^{\overline{MS}}$

Multipliziert mit $Z_\lambda Z_S$ soll die in Feynman- und in Landau-Eichung berechnete Größe endlich sein. Im \overline{MS} Schema ergibt sich damit:

$$Z_\lambda^{\overline{MS},FEY} Z_S^{\overline{MS},FEY} = 1 - 4 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \quad (2.228)$$

$$Z_\lambda^{\overline{MS},LAN} Z_S^{\overline{MS},LAN} = 1 - 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \quad (2.229)$$

Daraus folgt:

$$Z_S^{\overline{MS},FEY} = 1 - 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \quad (2.230)$$

$$Z_S^{\overline{MS},LAN} = 1 - 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \quad (2.231)$$

Für die Renormierungskonstante der pseudoskalaren Dichte folgt dann in beiden Eichungen:

$$Z_P^{\overline{MS},FEY/LAN} = Z_S^{\overline{MS},FEY/LAN} \quad (2.232)$$

Die renormierte skalare Dichte lautet damit:

$$\Lambda_{\mathbb{I}}^{\overline{MS},FEY}(p) = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(6 - 4 \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \quad (2.233)$$

$$\Lambda_{\mathbb{I}}^{\overline{MS},LAN}(p) = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(4 - 3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \quad (2.234)$$

Für die pseudoskalare Dichte ist diese Größe im Fall $m = 0$ noch mit γ_5 zu multiplizieren:

$$\Lambda_{\gamma_5}^{\overline{MS},FEY/LAN}(p) = \Lambda_{\mathbb{I}}^{\overline{MS},FEY/LAN}(p) \gamma_5 \quad (2.235)$$

2.5.5 Axialer Vektorstrom

Es folgt die Berechnung des axialen Vektorstroms in NDR, die Renormierungskonstante wird wieder im \overline{MS} Schema berechnet.

2.5.5.1 Nackte Größe in 1-Loop-NDR

Auch die 1-Loop-Korrektur zum axialen Vektorstrom ist durch Abb. 2.6 gegeben, in diesem Fall mit $\Gamma = \gamma_\mu \gamma_5$. Entsprechend gilt auch (2.194).

Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

Der Vertex ist in 1-Loop-Ordnung mit $\Gamma = \gamma_\mu \gamma_5$ durch den Ausdruck (2.195) gegeben. Daraus folgt, daß (2.200) und (2.201) für $\Gamma = \gamma_\mu \gamma_5$ zu berechnen sind, also

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY,(1)}(p) = 2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \gamma_5 \not{k} \gamma_\nu}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3} \quad (2.236)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY,(2)}(p) = -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i \not{p}(1-x) + m] \gamma_\mu \gamma_5 [i \not{p}(1-x) + m] \gamma_\nu}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3}. \quad (2.237)$$

Der erste Beitrag divergiert, der zweite ist hingegen endlich, wie sich durch power-counting ergibt. Um die Regularisierung des ersten Integrals durchzuführen, geht man zu einer beliebigen Anzahl D von Dimensionen über. Mit $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ und $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \gamma_5 \not{k} \gamma_\nu &= \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \gamma_5 \\ &= \gamma_\nu \not{k} (2k_\mu - \not{k} \gamma_\mu) \gamma_\nu \gamma_5 \\ &= 2k_\mu \gamma_\nu \not{k} \gamma_\nu \gamma_5 - \gamma_\nu \not{k} \not{k} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \\ &= 2k_\mu \gamma_\nu (2k_\nu - \gamma_\nu \not{k}) \gamma_5 - k^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \\ &= 4k_\mu \not{k} \gamma_5 - 2k_\mu \gamma_\nu \gamma_\nu \not{k} \gamma_5 - k^2 \gamma_\nu (2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 4k_\mu \not{k} \gamma_5 - 2D k_\mu \not{k} \gamma_5 - 2k^2 \gamma_\mu \gamma_5 + D k^2 \gamma_\mu \gamma_5 \\
 &= (4 - 2D) k_\mu \not{k} \gamma_5 - (2 - D) k^2 \gamma_\mu \gamma_5 \\
 &= (2 - D)(2k_\mu \not{k} - k^2 \gamma_\mu) \gamma_5.
 \end{aligned} \tag{2.238}$$

Dabei wurde in dimensioneller Regularisierung die Formel $\sum_\nu \gamma_\nu \gamma_\nu = D$ benutzt. Außerdem ist aus Dimensionsgründen g^2 durch $g^2 \mu^{4-D}$ zu ersetzen, und man erhält unter Benutzung der Formel

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\delta_{\mu\nu}}{2(a^2)^{n-1-D/2}} \frac{\Gamma(n-1-D/2)}{\Gamma(n)} \tag{2.239}$$

(mit $n=3$ und $a^2 = p^2 x(1-x) + m^2 x$) den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY,(1)}(p) &= g^2 C_A \delta_{ab} \frac{\mu^{4-D}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(3)} (2-D) \\
 &\quad \times \int_0^1 dx \cdot x \frac{2\delta_{\mu\nu} \gamma_\nu - D \gamma_\mu}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{2-D/2}} \gamma_5
 \end{aligned} \tag{2.240}$$

Mit $D = 4 - \varepsilon$ wird dies nach Ausführen der Kontraktion über ν

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY,(1)}(p) = g^2 C_A \delta_{ab} \frac{\mu^\varepsilon}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{2} (-2 + \varepsilon)^2 \gamma_\mu \gamma_5 \int_0^1 dx \cdot x \frac{1}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{\varepsilon/2}} \tag{2.241}$$

Um die Divergenz des Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ zu isolieren, wird dieser Ausdruck in ε entwickelt. Dies ergibt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY,(1)}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln 4\pi\right) (2 - 2\varepsilon) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \gamma_\mu \gamma_5 \\
 &\quad \times \int_0^1 dx \cdot x \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
 &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \gamma_\mu \gamma_5 \cdot 2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln 4\pi - \varepsilon\right) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 dx \cdot x \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
 &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \gamma_\mu \gamma_5 \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 2\right. \\
 &\quad \left.- 2 \int_0^1 dx \cdot x \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{2.242}$$

Es ist noch $\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY,(2)}(p)$ zu berechnen. Der dort im Zähler auftretende Term ist:

$$\begin{aligned}
 &\gamma_\nu [i \not{p}(1-x) + m] \gamma_\mu \gamma_5 [i \not{p}(1-x) + m] \gamma_\nu \\
 &= -(1-x)^2 \gamma_\nu \not{p} \gamma_\mu \gamma_5 \not{p} \gamma_\nu + im(1-x) [\gamma_\nu \not{p} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_5 \not{p} \gamma_\nu] + m^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -(1-x)^2 \gamma_\nu \not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \gamma_5 + im(1-x) [-\gamma_\nu \not{p} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 + \gamma_\nu \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu \gamma_5] - m^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \\
&= 2(1-x)^2 [2\not{p} p_\mu - p^2 \gamma_\mu] \gamma_5 + 2m^2 \gamma_\mu \gamma_5 \\
&= -2[p^2(1-x)^2 - m^2] \gamma_\mu \gamma_5 + 4(1-x) \not{p} (1-x) p_\mu \gamma_5
\end{aligned} \tag{2.243}$$

Dabei wurden die Beziehungen (A.7) bis (A.10) benutzt. Mit dem Spezialfall $n = 3$, $D = 4$ der Integralformel

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(a^2)^{n-D/2}} \tag{2.244}$$

ergibt sich dann schließlich

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY,(2)}(p) &= 2g^2 C_A \delta_{ab} \frac{1}{16\pi^2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(3)} \\
&\quad \times \int_0^1 dx \cdot x \frac{2[p^2(1-x)^2 - m^2] \gamma_\mu \gamma_5 - 4(1-x) \not{p} (1-x) p_\mu \gamma_5}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \\
&= 2 \frac{g^2 C_A}{16\pi^2} \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \frac{[p^2(1-x)^2 - m^2] \gamma_\mu \gamma_5 - 2(1-x) \not{p} (1-x) p_\mu \gamma_5}{p^2 x(1-x) + m^2 x}.
\end{aligned} \tag{2.245}$$

Insgesamt verbleibt man daher mit:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY,(1)}(p) + \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY,(2)}(p) \\
&= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 2 \right. \right. \\
&\quad \left. - 2 \int_0^1 dx \cdot x \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_0^1 dx \cdot x \frac{p^2(1-x)^2 - m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \right] \\
&\quad \left. - 4p_\mu \int_0^1 dx \cdot x \frac{(1-x) \not{p} (1-x)}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \gamma_5 \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{2.246}$$

Das endliche zweite Integral kann man weiter auswerten:

$$\int_0^1 dx \cdot x \frac{p^2(1-x)^2 - m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} = \int_0^1 dx \cdot x \left(\frac{p^2(1-x)^2 + m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} - \frac{2m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \right) \tag{2.247}$$

Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \cdot x \frac{p^2(1-x)^2 + m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} &= \frac{1}{2} + \int_0^1 dx \cdot x \left[\frac{p^2(1-x)^2 + m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} - 1 \right] \\
&= \frac{1}{2} + \int_0^1 dx \cdot x(1-x) \frac{p^2(1-2x) + m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \\
&= \frac{1}{2} + \int_0^1 dx \cdot x(1-x) \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \int_0^1 dx \cdot (1-2x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.248}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx \cdot x \frac{2m^2}{p^2 x(1-x) + m^2} &= \int_0^1 dx \frac{2m^2}{p^2(1-x) + m^2} \\
 &= \int_0^1 dx \frac{-1}{p^2} 2m^2 \frac{d}{dx} \ln(p^2(1-x) + m^2) \\
 &= 2m^2 \frac{\ln(m^2 + p^2) - \ln(m^2)}{p^2}.
 \end{aligned} \tag{2.249}$$

Mit der Regel von de l'Hospital erkennt man, daß das letzte Integral im Fall $p^2 \rightarrow 0$ zwei ergibt, also insbesondere endlich bleibt. Somit kann man für den nackten Vertex $\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}(p)$ das Endergebnis

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 1 - 2 \int_0^1 dx \cdot (1-x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - 4p_\mu \int_0^1 dx \cdot x(1-x) \frac{\not{p}(1-x)}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \gamma_5 \right. \\
 &\quad \left. - 4m^2 \frac{\ln(m^2 + p^2) - \ln(m^2)}{p^2} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{2.250}$$

angeben. Im masselosen Fall lautet dies:

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) = \delta_{ab} \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E - \ln \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) + \ln 4\pi + 1 \right] - 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2} \gamma_5 \right\} \tag{2.251}$$

Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

Zu berechnen ist der folgende Ausdruck:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}[i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\mu \gamma_5 [i(\not{p} - \not{k}) + m] \not{k}}{[(p-k)^2 + m^2]^2 (k^2)^2} \tag{2.252}$$

Mit Hilfe der Formel

$$\frac{1}{a^2 b^2} = 6 \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[(a-b)x + b]^4} \tag{2.253}$$

ist dies:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x(1-x) \frac{\not{k}[i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\mu \gamma_5 [i(\not{p} - \not{k}) + m] \not{k}}{[(p-k)^2 + m^2 - k^2]x + k^2]^4} \\
 &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x(1-x) \frac{\not{k}[i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\mu \gamma_5 [i(\not{p} - \not{k}) + m] \not{k}}{[(k - px)^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \\
 &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x(1-x)
 \end{aligned}$$

$$\times \frac{(\not{k} + \not{p}x)[-i\not{k} + (1-x)\not{p} + m]\gamma_\mu\gamma_5[-i\not{k} + (1-x)\not{p} + m](\not{k} + \not{p}x)}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2x^2]^4} \quad (2.254)$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich dabei durch die Substitution $k - px \rightarrow k$. Der Zähler ist durch

$$(\not{k} + \not{p}x)[-i\not{k} + (1-x)\not{p} + m]\gamma_\mu\gamma_5[-i\not{k} + (1-x)\not{p} + m](\not{k} + \not{p}x) \quad (2.255)$$

gegeben, durch Ausmultiplizieren ergeben sich die folgenden Terme:

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 6x(1-x) \{ -(k^2)^2 \gamma_\mu \gamma_5 \quad (2.256)$$

$$+ 2(1-x)xk^2p^2\gamma_\mu\gamma_5 \quad (2.257)$$

$$+ imxk^2(\gamma_\mu\not{p} - \not{p}\gamma_\mu)\gamma_5 \quad (2.258)$$

$$- (1-x)^2x^2p^4\gamma_\mu\gamma_5 \quad (2.259)$$

$$+ (1-x)x\not{k}\not{p}\gamma_\mu\not{k}\not{p}\gamma_5 \quad (2.260)$$

$$+ (1-x)x\not{p}\not{k}\gamma_\mu\not{p}\not{k}\gamma_5 \quad (2.261)$$

$$- (1-x)^2\not{k}\not{p}\gamma_\mu\not{p}\not{k}\gamma_5 \quad (2.262)$$

$$- x^2\not{p}\not{k}\gamma_\mu\not{k}\not{p}\gamma_5 \quad (2.263)$$

$$- (1-x)im\not{k}\not{p}\gamma_\mu\not{k}\gamma_5 \quad (2.264)$$

$$- xim\not{k}\gamma_\mu\not{k}\not{p}\gamma_5 \quad (2.265)$$

$$+ (1-x)im\not{k}\gamma_\mu\not{p}\not{k}\gamma_5 \quad (2.266)$$

$$+ xim\not{p}\not{k}\gamma_\mu\not{k}\gamma_5 \quad (2.267)$$

$$- m^2\not{k}\gamma_\mu\not{k}\gamma_5 \quad (2.268)$$

$$+ i(1-x)x^2mp^2(\not{p}\gamma_\mu - \gamma_\mu\not{p})\gamma_5 \quad (2.269)$$

$$- m^2x^2\not{p}\gamma_\mu\not{p}\gamma_5 \} \quad (2.270)$$

Der einzig divergente Term ist der erste, der zunächst weiter betrachtet werden soll:

$$-\gamma_\mu\gamma_5 \int_0^1 dx \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} 6x(1-x) \frac{(k^2)^2}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2x^2]^4} \quad (2.271)$$

Mit der Integralformel

$$\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2 + a^2)^\beta} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha + D/2)\Gamma(\beta - \alpha - D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(\beta)} (a^2)^{D/2 + \alpha - \beta} \quad (2.272)$$

mit $\alpha = 2$ und $\beta = 4$ und $a^2 = (p^2 + m^2)x - p^2x^2$ erhält man:

$$-\gamma_\mu\gamma_5 \int_0^1 dx 6x(1-x) \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 + D/2)\Gamma(2 - D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(4)} ((p^2 + m^2)x - p^2x^2)^{D/2 - 2} \quad (2.273)$$

In $D = 4 - \varepsilon$ Dimensionen ist dies

$$-\gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\varepsilon/2} \mu^\varepsilon \frac{\Gamma(4 - \varepsilon/2) \Gamma(\varepsilon/2)}{\Gamma(2 - \varepsilon/2) 6} \int_0^1 dx 6x(1-x)((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^{-\varepsilon/2}. \quad (2.274)$$

Mit der Funktionalgleichung der Gamma-Funktion

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (2.275)$$

kann man diese zu

$$\Gamma(4 - \varepsilon/2) = (3 - \varepsilon/2)(2 - \varepsilon/2)\Gamma(2 - \varepsilon/2) \quad (2.276)$$

entwickeln. Der Faktor $\Gamma(2 - \varepsilon/2)$ kürzt sich anschließend weg. Man erhält dann

$$-\frac{1}{6} \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\varepsilon/2} \mu^\varepsilon \Gamma(\varepsilon/2) (6 - 5\varepsilon/2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \int_0^1 dx 6x(1-x)((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^{-\varepsilon/2}. \quad (2.277)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} a^{\varepsilon/2} &= 1 + \varepsilon/2 \ln a + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \Gamma(\varepsilon/2) &= \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.278)$$

ergibt sich schließlich nach kurzer Rechnung das Endergebnis

$$\begin{aligned} (2.256) &= -\gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E - \frac{5}{6} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 dx 6x(1-x) \ln \left(\frac{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2}{\mu^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.279)$$

Zur Berechnung der Terme (2.257) und (2.258) verwendet man die Integralformel

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\delta_{\mu\nu}}{2(a^2)^{n-1-D/2}} \frac{\Gamma(n-1-D/2)}{\Gamma(n)}, \quad (2.280)$$

wobei man hier aufgrund der Konvergenz $D = 4$ setzen kann. Damit hat man dann für (2.257)

$$\begin{aligned} (2.257) &= \int_0^1 6x^2(1-x)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\rho k_\rho}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \cdot 2p^2 \gamma_\mu \gamma_5 \\ &= \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 \frac{4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} p^2 \gamma_\mu \gamma_5. \end{aligned} \quad (2.281)$$

Für (2.258) bekommt man entsprechend:

$$\begin{aligned} (2.258) &= im \int_0^1 dx 6x^2(1-x) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\rho k_\rho}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \cdot (\gamma_\mu \not{p} - \not{p} \gamma_\mu) \gamma_5 \\ &= im \int_0^1 dx x^2(1-x) \frac{2}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\gamma_\mu \not{p} - \not{p} \gamma_\mu) \gamma_5 \end{aligned} \quad (2.282)$$

Zur Berechnung von (2.259) benutzt man die Identität

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(a^2)^{n-D/2}} \quad (2.283)$$

(auch hier bei $D = 4$) und erhält:

$$\begin{aligned} (2.259) &= - \int_0^1 dx 6(1-x)^3 x^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \cdot p^4 \gamma_\mu \gamma_5 \\ &= - \int_0^1 dx (1-x)^3 x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2} \cdot p^4 \gamma_\mu \gamma_5 \end{aligned} \quad (2.284)$$

Bei Term (2.260) beachtet man zunächst (A.11). Damit ergibt sich unter Benutzung der obigen Integralformel

$$\begin{aligned} (2.260) &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x^2 (1-x)^2 \frac{\not{k} \not{p} \gamma_\mu \not{k} \not{p} \gamma_5}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x^2 (1-x)^2 \frac{\frac{1}{4} k^2}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \cdot \underbrace{\gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\rho}_{4\delta_{\mu\tau}} p_\tau \not{p} \gamma_5 \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x^2 (1-x)^2 \frac{\frac{1}{4} k^2}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \cdot 4p_\mu \not{p} \gamma_5 \\ &= \int_0^1 dx 6x^2 (1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(4)} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 4p_\mu \not{p} \gamma_5 \\ &= \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \not{p} \gamma_5. \end{aligned} \quad (2.285)$$

Die Berechnung des Terms (2.261) verläuft völlig analog und liefert dasselbe Ergebnis. Man kann also

$$(2.261) = \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \not{p} \gamma_5 \quad (2.286)$$

notieren. Für die Terme (2.262) und (2.263) beachtet man (A.12). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (2.262) &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x(1-x)^3 \frac{\not{k} \not{p} \gamma_\mu \not{p} \not{k} \gamma_5}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \\ &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x(1-x)^3 \frac{\frac{1}{4} k^2}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \cdot \underbrace{\gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\tau \gamma_\rho}_{=-2\gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\nu} p_\nu p_\tau \\ &= - \int_0^1 dx x(1-x)^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \frac{1}{2} \cdot (-2 \not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_5) \\ &= \int_0^1 dx x(1-x)^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_5). \end{aligned} \quad (2.287)$$

Für den nächsten Term bekommt man:

$$\begin{aligned}
 (2.263) &= - \int_0^1 dx x^3 (1-x) \frac{1}{(4\pi^2)} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\not{p} \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\rho \not{p} \gamma_5}_{= -2 \not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_5} \\
 &= \int_0^1 dx x^3 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_5) \quad (2.288)
 \end{aligned}$$

Den Term (2.264) berechnet man analog zu (2.260) und bekommt

$$(2.264) = -im \int_0^1 dx x (1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \gamma_5. \quad (2.289)$$

Der Term (2.265) ergibt sich analog zu (2.263):

$$(2.265) = im \int_0^1 dx x^2 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \gamma_\mu \not{p} \gamma_5. \quad (2.290)$$

Term (2.266) läßt sich wie (2.261) berechnen und ergibt

$$\begin{aligned}
 (2.266) &= im \int_0^1 dx x (1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{4}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \gamma_5 \\
 &= -(2.264). \quad (2.291)
 \end{aligned}$$

Für (2.267) erhält man wie bei (2.263)

$$(2.267) = -im \int_0^1 dx x^2 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \not{p} \gamma_\mu \gamma_5. \quad (2.292)$$

Weiterhin hat man

$$(2.268) = m^2 \int_0^1 dx x (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \gamma_\mu \gamma_5, \quad (2.293)$$

und für (2.269) ergibt sich

$$(2.269) = im \int_0^1 dx (1-x)^2 x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2} \cdot p^2 (\not{p} \gamma_\mu - \gamma_\mu \not{p}) \gamma_5. \quad (2.294)$$

Schließlich hat man noch den Beitrag

$$(2.270) = -m^2 \int_0^1 dx (1-x) x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2} \cdot \not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_5 \quad (2.295)$$

aus Term (2.270). Durch Zusammenfassen aller Terme erhält man schließlich nach Hinzufügen des bisher ausgelassenen Vorfaktors $\delta_{ab} g^2 C_A$ als Zwischenergebnis den

Ausdruck

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = & -\delta_{ab} g^2 C_A \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E - \frac{5}{6} \right. \\
& \left. - \int_0^1 dx 6x(1-x) \ln \left(\frac{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2}{\mu^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
& + \delta_{ab} g^2 C_A \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 \frac{4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} p^2 \gamma_\mu \gamma_5 \\
& + \delta_{ab} g^2 C_A i m \int_0^1 dx x^2 (1-x) \frac{2}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\gamma_\mu \not{p} - \not{p} \gamma_\mu) \gamma_5 \\
& - \delta_{ab} g^2 C_A \int_0^1 dx (1-x)^3 x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2} \cdot p^4 \gamma_\mu \gamma_5 \\
& + \delta_{ab} g^2 C_A \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \not{p} \gamma_5 \\
& + \delta_{ab} g^2 C_A \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \not{p} \gamma_5 \\
& + \delta_{ab} g^2 C_A \int_0^1 dx x (1-x)^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_5) \\
& + \delta_{ab} g^2 C_A \int_0^1 dx x^3 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_5) \\
& + \delta_{ab} g^2 C_A i m \int_0^1 dx x^2 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \gamma_\mu \not{p} \gamma_5 \\
& - \delta_{ab} g^2 C_A i m \int_0^1 dx x^2 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \not{p} \gamma_\mu \gamma_5 \\
& + \delta_{ab} g^2 C_A m^2 \int_0^1 dx x (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \gamma_\mu \gamma_5 \\
& + \delta_{ab} g^2 C_A i m \int_0^1 dx (1-x)^2 x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{p^2 (\not{p} \gamma_\mu - \gamma_\mu \not{p}) \gamma_5}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2} \\
& - \delta_{ab} g^2 C_A m^2 \int_0^1 dx (1-x) x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_5}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2}. \tag{2.296}
\end{aligned}$$

Im masselosen Fall erhält man hieraus

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = & -\delta_{ab} g^2 C_A \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E - \frac{5}{6} \right. \\
& \left. - \int_0^1 dx 6x(1-x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
& + \delta_{ab} g^2 C_A \int_0^1 dx x (1-x) \frac{4}{(4\pi)^2} \gamma_\mu \gamma_5 \\
& - \delta_{ab} g^2 C_A \int_0^1 dx (1-x) x \frac{1}{(4\pi)^2} \cdot \gamma_\mu \gamma_5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\delta_{ab}g^2C_A\int_0^1 dx x(1-x)\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{p^2}\cdot 4p_\mu\not{p}\gamma_5 \\
 & +\delta_{ab}g^2C_A\int_0^1 dx(1-x)^2\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{p^2}\cdot (\not{p}\gamma_\mu\not{p}\gamma_5) \\
 & +\delta_{ab}g^2C_A\int_0^1 dx x^2\frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{p^2}\cdot (\not{p}\gamma_\mu\not{p}\gamma_5)
 \end{aligned} \tag{2.297}$$

$$= \delta_{ab}\frac{\alpha_S}{4\pi}C_A\left\{\gamma_\mu\gamma_5\left[-\frac{2}{\varepsilon}-\ln 4\pi+\gamma_E+\ln\left(\frac{p^2}{\mu^2}\right)-1\right]+2\frac{p_\mu\not{p}}{p^2}\gamma_5\right\} \tag{2.298}$$

Insgesamt erhält man damit für die Größe in Landau-Eichung:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu\gamma_5}^{LAN}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu\gamma_5}^{FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.299}$$

2.5.5.2 Berechnung von $Z_A^{\overline{MS}}$

Aus dem Ergebnis kann man die Renormierungskonstante des axialen Vektorstromes wie folgt ablesen:

$$Z_\lambda^{\overline{MS},FEY} Z_A^{\overline{MS},FEY} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2}C_A\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi\right) \tag{2.300}$$

$$Z_\lambda^{\overline{MS},LAN} Z_A^{\overline{MS},LAN} = 1 \tag{2.301}$$

Daraus ergibt sich sofort:

$$Z_A^{\overline{MS},FEY} = 1 \tag{2.302}$$

$$Z_A^{\overline{MS},LAN} = 1 \tag{2.303}$$

Die renormierte, amputierte Greensfunktion des axialen Vektorstroms lautet damit für $m=0$:

$$\Lambda_{\gamma_\mu\gamma_5}^{\overline{MS},FEY}(p) = \gamma_\mu\gamma_5 + \frac{g^2}{16\pi^2}C_A\left(-\gamma_\mu\gamma_5\ln\frac{p^2}{\mu^2} + \gamma_\mu\gamma_5 - 2\frac{p_\mu\not{p}\gamma_5}{p^2}\right) \tag{2.304}$$

$$\Lambda_{\gamma_\mu\gamma_5}^{\overline{MS},LAN}(p) = \gamma_\mu\gamma_5 \tag{2.305}$$

Für spätere Rechnungen ist man an den projizierten Greensfunktionen dieser Größen interessiert. Diese sind wie folgt definiert

$$\Gamma_{\gamma_\mu\gamma_5}^{\overline{MS}}(p) = \frac{1}{16}\text{Tr}\left(\gamma_5\gamma_\mu\Lambda_{\gamma_\mu\gamma_5}^{\overline{MS}}(p)\right), \tag{2.306}$$

und sie ergeben sich zu:

$$\Gamma_{\gamma_\mu\gamma_5}^{\overline{MS},FEY}(p) = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2}C_A\left(-\ln\frac{p^2}{\mu^2} + \frac{1}{2}\right) \tag{2.307}$$

$$\Gamma_{\gamma_\mu\gamma_5}^{\overline{MS},LAN}(p) = 1 \tag{2.308}$$

2.5.6 Diskussion der Ergebnisse

In den vorherigen Kapiteln wurden eine Reihe von Renormierungskonstanten mit dimensioneller Regularisierung im $\overline{\text{MS}}$ Schema für verschiedene Eichungen berechnet. Noch vor der Berechnung wurden in den Kapiteln 2.5.1 und 2.5.2 Aussagen über das Verhalten der Renormierungskonstanten bei einem Wechsel der Eichung sowie über weitere Zusammenhänge zwischen den Renormierungskonstanten gemacht. Daher sollen abschließend alle berechneten Größen angegeben werden, um diese Aussagen zu überprüfen.

Die Rechnungen führten auf die folgenden Renormierungskonstanten:

$$\begin{aligned}
Z_{\lambda}^{\overline{\text{MS}}, FEY} &= 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \\
Z_{\lambda}^{\overline{\text{MS}}, LAN} &= 1 \\
Z_m^{\overline{\text{MS}}, FEY} &= 1 + 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \\
Z_m^{\overline{\text{MS}}, LAN} &= 1 + 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \\
Z_S^{\overline{\text{MS}}, FEY} &= 1 - 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \\
Z_S^{\overline{\text{MS}}, LAN} &= 1 - 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \\
Z_P^{\overline{\text{MS}}, FEY} &= 1 - 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \\
Z_P^{\overline{\text{MS}}, LAN} &= 1 - 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \\
Z_A^{\overline{\text{MS}}, FEY} &= 1 \\
Z_A^{\overline{\text{MS}}, LAN} &= 1
\end{aligned} \tag{2.309}$$

In Kapitel 2.5.1 wurde behauptet, daß das $\overline{\text{MS}}$ Schema nicht von den äußeren Feldern abhängt, zwischen denen der jeweilige Operator betrachtet wird. Damit sollten Renormierungskonstanten eichinvarianter Größen und damit alle hier betrachteten bis auf $Z_{\lambda}^{\overline{\text{MS}}}$ eichinvariant sein. Diese Aussage wurde offensichtlich bestätigt.

Im Kapitel 2.5.2 wurde mit Hilfe einer Ward-Identität noch

$$Z_A^{\overline{\text{MS}}} = 1 \tag{2.310}$$

und

$$Z_P^{\overline{\text{MS}}} Z_m^{\overline{\text{MS}}} = 1 \tag{2.311}$$

behauptet. An der Zusammenstellung erkennt man sofort, daß auch diese Aussagen durch die Berechnungen bestätigt wurden. Außerdem erfüllen die angegebenen

Größen den Zusammenhang

$$Z_S^{\overline{MS}} = Z_P^{\overline{MS}}. \quad (2.312)$$

Auch dieses Ergebnis ist kein Zufall. In der QCD gibt es neben der chiralen Symmetrie (2.111) und (2.112) eine weitere:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &\rightarrow e^{i\alpha} \lambda(x), \\ \bar{\lambda}(x) &\rightarrow \bar{\lambda}(x) e^{-i\alpha}. \end{aligned} \quad (2.313)$$

Aus dieser folgt für die Renormierungskonstanten in der QCD der Zusammenhang (2.312). Da in 1-Loop-Ordnung die Störungstheorie der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie nur geringe Unterschiede gegenüber der der QCD aufweist, erwartet man auch hier diesen Zusammenhang. An dieser Stelle bleibt es eine offene Frage, ob dieser Zusammenhang auch in 2-Loop-Ordnung gilt, da dort die Unterschiede zur QCD größer sind.

Auch die renormierten Größen seien an dieser Stelle geschlossen angegeben:

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{\overline{MS}, FEY}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\ln \frac{p^2}{\mu^2} - 1 \right) \\ \Sigma_1^{\overline{MS}, LAN}(p) &= 0 \\ \Sigma_2^{\overline{MS}, FEY}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(4 \ln \frac{p^2}{\mu^2} - 6 \right) \\ \Sigma_2^{\overline{MS}, LAN}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} - 4 \right) \\ \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}^{\overline{MS}, FEY}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(6 - 4 \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \\ \tilde{\Lambda}_{\mathbb{1}}^{\overline{MS}, LAN}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(4 - 3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \\ \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{\overline{MS}, FEY}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(6 - 4 \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \gamma_5 \\ \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{\overline{MS}, LAN}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(4 - 3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \gamma_5 \\ \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{\overline{MS}, FEY}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(-\gamma_\mu \gamma_5 \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \gamma_\mu \gamma_5 - 2 \frac{p_\mu \not{p} \gamma_5}{p^2} \right) \\ \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{\overline{MS}, LAN}(p) &= 0 \\ \tilde{\Gamma}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{\overline{MS}, FEY}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(-\ln \frac{p^2}{\mu^2} + \frac{1}{2} \right) \\ \tilde{\Gamma}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{\overline{MS}, LAN}(p) &= 0 \end{aligned} \quad (2.314)$$

Da die chiralen Ward-Identitäten aus Kapitel 2.5.2 auch für renormierte Größen gelten sollen, folgt noch die folgende Aussage:

$$\Sigma_2^{\overline{MS}}(p) + \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{\overline{MS}}(p) = 0 \quad (2.315)$$

Auch diese ist offensichtlich erfüllt.

2.6 Vertices für den Superstrom

Eine weitere Größe, an deren störungstheoretischem Verhalten man interessiert ist, ist der Superstrom. Dieser lautet

$$S_\mu(x) = -2\frac{i}{g}\text{Tr}(F_{\rho\tau}(x)\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu). \quad (2.316)$$

Da in dem Superstrom ein $F_{\rho\tau}$ enthalten ist, müssen zunächst zusätzliche Vertices, nämlich die des Superstroms entwickelt werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden noch Hinweise darauf gegeben, mit diesen Regeln Berechnungen durchgeführt werden.

2.6.1 Herleitung der Vertices für den Superstrom

Mit

$$F_{\rho\tau}(x) = \partial_\rho A_\tau(x) - \partial_\tau A_\rho(x) + [A_\rho(x), A_\tau(x)] \quad (2.317)$$

erkennt man, daß zu dem Superstrom (2.316) zwei Vertices gehören, einer mit einem Gluon und einer mit zwei Gluonen. Diese Vertices sind in Abb. 2.7 dargestellt und werden in den nächsten beiden Unterkapiteln berechnet. In Abb. 2.8 sind die im Kontinuum in 1-Loop-Ordnung für den Superstrom zu berechnenden Graphen angegeben.

2.6.1.1 Der Gluon-Superstrom-Vertex

Der für den Vertex des Superstroms mit einem Gluon verantwortliche Term ist der folgende:

$$S_\mu^{(1)}(x) = -2\frac{i}{g}\text{Tr}((\partial_\rho A_\tau(x) - \partial_\tau A_\rho(x))\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu\lambda(x)) \quad (2.318)$$

$$= -2(\partial_\rho A_\tau^b(x) - \partial_\tau A_\rho^b(x))\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu\lambda^a(x)\text{Tr}(T^a T^b) \quad (2.319)$$

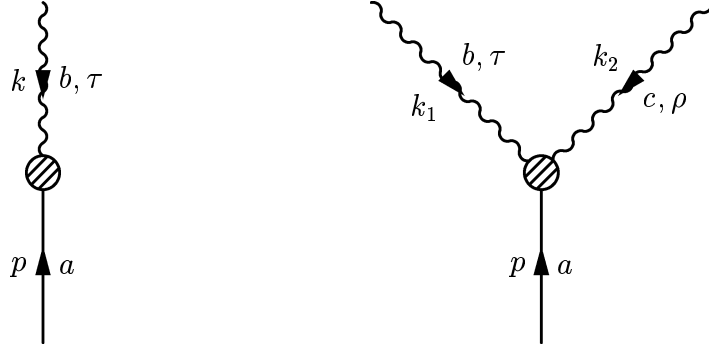
$$= -2\delta_{ab}\partial_\rho A_\tau^b(x)\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu\lambda^a(x) \quad (2.320)$$

Das Einsetzen der Fourier-Transformierten der Felder $A_\tau(x)$ und $\lambda(x)$ liefert dann

$$S_\mu^{(1)}(q) = \int d^4x e^{iqx} S_\mu^{(1)}(x) \quad (2.321)$$

$$= -2i\delta_{ab}\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{i(p+k+q)x} k_\rho \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (2.322)$$

$$= -2i\delta_{ab}\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(p+k+q) k_\rho \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (2.323)$$



a) mit einem Gluon

b) mit zwei Gluonen

Abbildung 2.7: Vertices des Superstroms

Der Gluon-Superstrom-Vertex $S_{\mu,\tau}^{ab}(p, k)$ ist über

$$S_{\mu}^{(1)}(q) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(p + k + q) S_{\mu,\tau}^{ab}(p, k) \tilde{A}_{\tau}^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (2.324)$$

definiert, und er ergibt sich zu

$$S_{\mu,\tau}^{ab}(p, k) = -2i\delta_{ab}\sigma_{\rho\tau}\gamma_{\mu}k_{\rho}. \quad (2.325)$$

2.6.1.2 Der 2-Gluonen-Superstrom-Vertex

Der 2-Gluonen-Superstrom-Vertex kommt aus dem Term

$$S_{\mu}^{(2)}(x) = -2\frac{i}{g}\text{Tr}\{[A_{\rho}(x), A_{\tau}(x)]\sigma_{\rho\tau}\gamma_{\mu}\lambda(x)\} \quad (2.326)$$

$$= 2igA_{\rho}^c(x)A_{\tau}^b(x)\lambda^a(x)\sigma_{\rho\tau}\gamma_{\mu}\text{Tr}([T^c, T^b]T^a). \quad (2.327)$$

Mit $\text{Tr}([T^c, T^b]T^a) = if_{cbd}\text{Tr}(T^dT^a) = if_{cbd}\frac{1}{2}\delta_{da} = -\frac{1}{2}if_{abc}$ ergibt dies

$$S_{\mu}^{(2)}(x) = g f_{abc} A_{\rho}^c(x) A_{\tau}^b(x) \lambda^a(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_{\mu}. \quad (2.328)$$

Nach Einsetzen der Fourier-Transformierten der beteiligten Felder erhält man hieraus

$$S_{\mu}^{(2)}(q) = \int d^4 x e^{iqx} S_{\mu}^{(2)}(x) \quad (2.329)$$

$$= g f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \gamma_{\mu} \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + p + q) \tilde{A}_{\tau}^b(k_1) \tilde{A}_{\rho}^c(k_2) \tilde{\lambda}^a(p). \quad (2.330)$$

Mit der Definition

$$S_{\mu}^{(2)}(q) = \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + p + q) S_{\mu,\tau\rho}^{abc}(p, k_1, k_2) \tilde{A}_{\tau}^b(k_1) \tilde{A}_{\rho}^c(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (2.331)$$

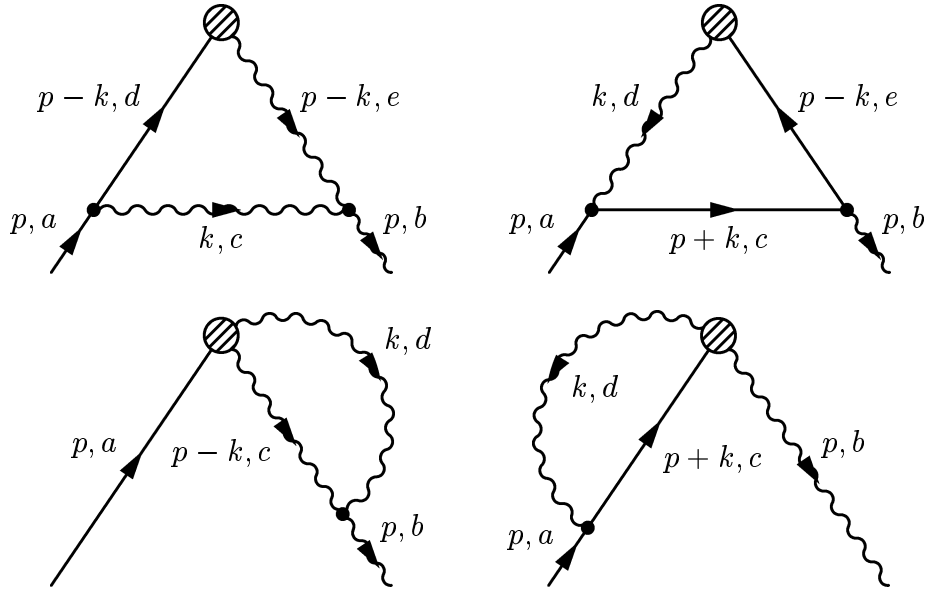


Abbildung 2.8: Die 1-Loop-Graphen des Superstroms

folgt für den Vertex der Ausdruck

$$S_{\mu, \tau \rho}^{abc}(p, k_1, k_2) = g f_{abc} \sigma_{\rho \tau} \gamma_{\mu}. \quad (2.332)$$

Dieser ist bereits symmetrisch unter Vertauschung der beiden Gluonen, also bei gleichzeitigem Austausch der Indizes $\rho \leftrightarrow \tau$ und $a \leftrightarrow b$, so daß durch (2.332) bereits die Version des Vertex gegeben ist, die in störungstheoretischen Betrachtungen in gewohnter Weise verwendet werden kann.

Kapitel 3

Die $N = 1$

Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

In dem letzten Kapitel wurde deutlich, daß die betrachtete Theorie Divergenzen enthält, weshalb Renormierungskonstanten betrachtet werden mußten. Diese Divergenzen lassen sich auch regularisieren, indem man die Theorie auf dem Gitter für eine feste Gitterkonstante a definiert.

Diese Formulierung hat gleichzeitig weitere Vorteile. Bei Berechnungen ist man nicht mehr auf eine Entwicklung in der Kopplungskonstanten g angewiesen, so daß Berechnungen auch in Bereichen möglich werden, in denen die Störungstheorie versagt. Außerdem werden auch Größen zugänglich, die prinzipiell nicht-störungstheoretischer Natur sind, und somit zuvor auch für kleine g nicht berechenbar waren.

In diesem Kapitel wird daher zunächst die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter formuliert. Danach wird die so aufgestellte Wirkung in einer für die Störungstheorie geeigneten Weise notiert.

3.1 Formulierung der Theorie auf dem Gitter

In diesem Kapitel soll die betrachtete Eichtheorie auf dem Gitter formuliert werden. Diese Formulierung muß somit damit auskommen, daß alle vorhandenen Felder nur auf den Gitterpunkten definiert sind, und auch Eichtransformationen können nur auf diesen Gitterpunkten definiert werden.

Im Kontinuum sind Eichfelder durch Paralleltransporter entlang infinitesimal kleinen Abständen gegeben. Dies ist so auf dem Gitter nicht möglich, da der kleinste Abstand die Gitterkonstante a ist. Ein Paralleltransporter auf dem Gitter ist daher durch Verbindungen von einem Punkt x des Gitters zu einem benachbarten Punkt

$x + a\hat{\mu}$ gegeben. Dabei ist $\mu = 1, 2, 3, 4$ eine der vier Raumrichtungen auf dem Gitter, und $\hat{\mu}$ der zugehörige Einheitsvektor. Ein Paralleltransporter, der von den Punkten x und $x + a\hat{\mu}$ abhängt, wird wie folgt angegeben:

$$U(x, x + a\hat{\mu}) \equiv U_{\mu}(x) \quad (3.1)$$

$$= e^{-aA_{\mu}(x)} \quad (3.2)$$

Daraus lassen sich Plaquetten oder Wilson Loops konstruieren:

$$U_{\mu\nu}(x) \equiv U(x, x + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})U(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}, x + a\hat{\mu})U(x + a\hat{\mu}, x) \quad (3.3)$$

WILSON konnte 1974 zeigen [Wi], daß man mit diesen Plaquetten eine Wirkung für das Eichfeld aufstellen kann, die im Limes $a \rightarrow 0$, dem Kontinuums-limes, mit der ursprünglichen Theorie im Kontinuum übereinstimmt. Dieser Eichterm kommt auch in der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie vor, er lautet für die $SU(N_c)$ Farbgruppe:

$$S[U] = \frac{1}{2g^2} \sum_{x, \mu, \nu} (2N_c - (\text{Tr} U_{\mu\nu}(x) + \text{Tr} U_{\mu\nu}^{-1}(x))) \quad (3.4)$$

Auch für den fermionischen Teil der Wirkung in der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie treten gegenüber der QCD keine neuen Schwierigkeiten auf, wenn man die Wirkung aufs Gitter bringt. Daher kann man auch diesen Teil sofort niederschreiben, wobei wie im Kontinuum die adjungierte Darstellung der Fermionen zu berücksichtigen ist:

$$S_{gl} = \sum_x a^4 \left(\frac{1}{2a} \text{Tr} \sum_{\mu} (\bar{\lambda}(x)(\gamma_{\mu} - r)U_{\mu}^{\dagger}(x)\lambda(x + a\hat{\mu})U_{\mu}(x) - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu})(\gamma_{\mu} + r)U_{\mu}(x)\lambda(x)U_{\mu}^{\dagger}(x)) + \left(m_0 + \frac{4r}{a}\right) \text{Tr} \bar{\lambda}(x)\lambda(x) \right) \quad (3.5)$$

Dies ist die Wilsonsche Formulierung. Dabei tritt der Wilsonparameter r auf. Dieser ist notwendig, da bei einer naiven Formulierung der Fermionen auf dem Gitter Fermionendoppler auftreten. Durch den Wilson-Term divergiert deren Masse im Kontinuums-limes. Dadurch entkoppeln die zusätzlichen Fermionen, und somit erhält man eine korrekte Beschreibung der Theorie.

3.2 Die Wirkung auf dem Gitter

Die in dem vorherigen Kapitel niedergeschriebene Gitterwirkung soll in einer für die Störungstheorie geeigneten Weise formuliert werden. Davon ausgehend wird es im nächsten Kapitel leichter sein, die Feynman-Regeln für die Gittertheorie zu entwickeln. Zu diesem Zweck braucht man eine Formulierung der Wirkung dieser Theorie, die nach Potenzen der Kopplungskonstanten g geordnet ist. Dabei ist neben dem

rein bosonischen Teil und dem fermionischen Teil noch ein Geister-Teil zu betrachten. Dieser ist auch auf dem Gitter für störungstheoretische Berechnungen unumgänglich.

3.2.1 Die Wilson-Wirkung

Der bosonische Teil der Wirkung wird, wie üblich, durch die Wilson-Wirkung beschrieben. Um später Rechnungen in 1-Loop-Ordnung ausführen zu können, muß (3.4) bis zur zweiten Ordnung in g entwickelt und in folgender Form geschrieben werden:

$$S = \sum_x a^4 (L_2 + gL_3 + g^2L_4 + \mathcal{O}(g^3)) . \quad (3.6)$$

Man geht dazu so vor, wie in [MM] Kapitel 3.2.2 in nullter Ordnung gezeigt wurde, wobei folgende Form der Paralleltransporter $U_\mu(x)$ auszunutzen ist:

$$U_\mu(x) \equiv e^{-aA_\mu(x)} = 1 - aA_\mu(x) + \frac{a^2}{2}A_\mu(x)^2 - \frac{a^3}{6}A_\mu(x)^3 + \frac{a^4}{24}A_\mu(x)^4 + \dots \quad (3.7)$$

Die hier angegebenen Terme entsprechen einer Entwicklung in vierter Ordnung in g , da folgende Beziehung gilt:

$$A_\mu(x) = -igA_\mu^b(x)T^b \quad (3.8)$$

Um später die Wirkung in zweiter Ordnung in g zu entwickeln, muß der Paralleltransporter bis in vierter Ordnung entwickelt werden, da in (3.4) noch ein Faktor $\frac{1}{g^2}$ steht.

Um (3.7) in (3.3) einsetzen zu können, braucht man noch eine Beziehung zwischen $A_\nu(x + a\hat{\mu})$ und $A_\nu(x)$. Diese ist gegeben durch:

$$A_\nu(x + a\hat{\mu}) = A_\nu(x) + a\Delta_\mu^f A_\nu(x). \quad (3.9)$$

Damit hat man alle Mittel, um U_p bis in vierter Ordnung in g zu entwickeln. (3.7) und (3.9) eingesetzt in (3.3) ergibt dann:

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(x) = & \left(1 + aA_\nu(x) + \frac{a^2}{2}A_\nu(x)^2 + \frac{a^3}{6}A_\nu(x)^3 + \frac{a^4}{24}A_\nu(x)^4 \right) \\ & \times \left(1 + a(A_\mu(x) + a\Delta_\nu^f A_\mu(x)) + \frac{a^2}{2}(A_\mu(x) + a\Delta_\nu^f A_\mu(x))^2 \right. \\ & \quad \left. + \frac{a^3}{6}(A_\mu(x) + a\Delta_\nu^f A_\mu(x))^3 + \frac{a^4}{24}(A_\mu(x) + a\Delta_\nu^f A_\mu(x))^4 \right) \\ & \times \left(1 - a(A_\nu(x) + a\Delta_\mu^f A_\nu(x)) + \frac{a^2}{2}(A_\nu(x) + a\Delta_\mu^f A_\nu(x))^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{a^3}{6}(A_\nu(x) + a\Delta_\mu^f A_\nu(x))^3 + \frac{a^4}{24}(A_\nu(x) + a\Delta_\mu^f A_\nu(x))^4 \right) \end{aligned}$$

$$\times \left(1 - aA_\mu(x) + \frac{a^2}{2}A_\mu(x)^2 - \frac{a^3}{6}A_\mu(x)^3 + \frac{a^4}{24}A_\mu(x)^4 \right) + \mathcal{O}(g^5) \quad (3.10)$$

Dieser Ausdruck ist nach Potenzen von g geordnet aufzuschreiben, und unter Benutzung von

$$U_{\mu\nu}^{-1}(x) = U_{\nu\mu}(x) \quad (3.11)$$

in (3.4) einzusetzen. Diese Rechnung wurde bereits mehrfach ausgeführt ([HH] und [KNS]), wobei für Terme höherer Ordnung der Einsatz eines Computers zu empfehlen ist. An dieser Stelle soll daher nur das Ergebnis angegeben werden:

$$L_2 = \frac{1}{4} (\Delta_\mu^f A_\nu^a(x) - \Delta_\nu^f A_\mu^a(x))^2 \quad (3.12)$$

$$L_3 = f_{abc} \left(A_\mu^a(x) A_\nu^b(x) \Delta_\mu^f A_\nu^c(x) + \frac{a}{2} A_\mu^a(x) \Delta_\nu^f A_\mu^b(x) \Delta_\mu^f A_\nu^c(x) \right) \quad (3.13)$$

$$L_4 = f_{abe} f_{cde} \left(\frac{1}{4} A_\mu^a A_\nu^b A_\mu^c A_\nu^d + \frac{a}{2} \Delta_\mu^f A_\nu^a A_\mu^b A_\mu^c A_\nu^d + \dots \right) \quad (3.14)$$

Im Gegensatz zum Kontinuum gibt es zu diesen Termen noch weitere Terme durch das Integrationsmaß, das Haar-Maß. Dessen Beiträge zur Gesamtwirkung sind gegeben durch:

$$S_m = -\frac{1}{12} a^2 g^2 A_\mu^a(x) A_\mu^a(x) + \mathcal{O}(g^3) \quad (3.15)$$

3.2.2 Die Wilson-Dirac-Wirkung

Der fermionische Teil der Wirkung ist durch (3.5) gegeben. Dies läßt sich auch wie folgt schreiben:

$$S_{gl} = \sum_x a^4 \left(\frac{1}{2a} \text{Tr} \sum_\mu (\bar{\lambda}^a(x) T^a (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda^b(x + a\hat{\mu}) T^b U_\mu(x) \right. \quad (3.16)$$

$$\left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right) + \left(m_0 + \frac{4r}{a} \right) \text{Tr} \bar{\lambda}(x) \lambda(x)$$

$$= \sum_x a^4 \left(\frac{1}{2a} \text{Tr} \sum_\mu (\bar{\lambda}^b(x + a\hat{\mu}) T^b (-\gamma_\mu - r) U_\mu(x) \lambda^a(x) T^a U_\mu^\dagger(x) \right. \quad (3.17)$$

$$\left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right) + \left(m_0 + \frac{4r}{a} \right) \text{Tr} \bar{\lambda}(x) \lambda(x)$$

$$= \sum_x a^4 \left(-\frac{1}{a} \text{Tr} \sum_\mu (\bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x)) \right) + \left(m_0 + \frac{4r}{a} \right) \text{Tr} \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \quad (3.18)$$

Dies muß bis in zweiter Ordnung in g entwickelt werden, so daß damit Berechnungen in 1-Loop-Ordnung ausgeführt werden können. Dann läßt sich dieser Teil der Wirkung vergleichbar zu (3.6) schreiben als:

$$S_{gl} = \sum_x a^4 (L_{gl,0} + gL_{gl,1} + g^2 L_{gl,2} + \mathcal{O}(g^3)) . \quad (3.19)$$

Dies ist möglich mit (3.7), (3.8) und (3.9) sowie folgenden Beziehungen für Majorana-Spinoren Ψ und λ (vgl. [Lu]):

$$\bar{\Psi}\lambda = \bar{\lambda}\Psi \quad (3.20)$$

$$\bar{\Psi}\gamma_\mu\lambda = -\bar{\lambda}\gamma_\mu\Psi \quad (3.21)$$

Es folgt sofort:

$$L_{gl,0} = \frac{1}{2}\bar{\lambda}^a(x)\left\{m_0 + \sum_\mu ((\gamma_\mu - r)\Delta_\mu^f)\right\}\lambda^a(x) \quad (3.22)$$

$$L_{gl,1} = \frac{1}{2}f_{abc}\left\{\bar{\lambda}^a(x)\gamma_\mu A_\mu^b(x)\lambda^c(x) + a\Delta_\mu^f\bar{\lambda}^a(x)(\gamma_\mu + r)A_\mu^b(x)\lambda^c(x)\right\} \quad (3.23)$$

$$L_{gl,2} = -\frac{a}{8}(f_{abe}f_{cde} + f_{ace}f_{bde})\left\{r\bar{\lambda}^a(x)A_\mu^b(x)A_\mu^c(x)\lambda^d(x) + a\Delta_\mu^f\bar{\lambda}^a(x)(\gamma_\mu + r)A_\mu^b(x)A_\mu^c(x)\lambda^d(x)\right\} \quad (3.24)$$

3.2.3 Die Faddeev-Popov-Wirkung

Der noch verbleibende Teil der Wirkung enthält die Terme der Geisterfelder. Diese Geister entstehen wie im Kontinuum dadurch, daß eine Eichfixierung gewählt wird und die daraus resultierende Faddeev-Popov-Determinante durch eine funktionale Integration über die Geisterfelder ersetzt wird.

Auch auf dem Gitter werden alle störungstheoretischen Berechnungen eichfixiert durchgeführt. Dies liegt daran, daß man eine Entwicklung um den Sattelpunkt der Wirkung durchführen möchte. Dafür wird in den Funktionalintegralen die Anzahl der Integrationsvariablen in der Art auf Unendlich erhöht, daß man dann Gaußsche Integrale erhält, die dann zwar berechenbar sind, aber dafür eine Eichfixierung benötigen.

Die vorliegende Theorie ist also durchaus wohldefiniert, aber für die Störungstheorie muß eine Eichfixierung durchgeführt werden. Weitere Erläuterungen, allerdings für den abelschen Fall, sind zu finden in [Ba].

Zur Herleitung der Faddeev-Popov-Geister sei auf [MM] hingewiesen. Ergebnis dieser Herleitung, die auf dem Gitter deutliche Unterschiede zum Kontinuum aufweist, ist, daß man die Eichfixierung formal genau wie im Kontinuum durchführen kann. Hat man also ein Funktionalintegral über eine eichinvariante Funktion $\Sigma[U]$, so kann man eine Eichfixierung durchführen, indem man mit der Eichfixierung noch die

Faddeev-Popov-Determinante einführt. Wie üblich kann man diese dann noch durch ein Integral über die Geister-Felder ausdrücken. Damit ergibt sich, formal identisch zum Kontinuum:

$$\int \prod_{x,\mu} dU_{x,\mu} \Sigma[U] = \text{const.} \int \prod_{x,\mu} dU_{x,\mu} d\eta_{ax} d\bar{\eta}_{ax} \Sigma[U] e^{-S_{gf}[A] - S_{FP}[A,\eta,\bar{\eta}]} \quad (3.25)$$

Dabei ist der Eichfixierungsterm der Wirkung auf dem Gitter für eine kovariante Eichung gegeben durch:

$$S_{gf}[A] = \frac{1}{2\alpha} \sum_y a^4 (\Delta_\nu^b A_\nu^c(y))^2, \quad (3.26)$$

und die Faddeev-Popov-Wirkung durch:

$$S_{FP}[A, \eta, \bar{\eta}] = \sum_{x,y} a^8 g \bar{\eta}_{cx} \mathcal{M}_{cx,by}[A] \eta_{by}. \quad (3.27)$$

Dabei ist der Faddeev-Popov-Operator gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{cx,by}[A] = & \frac{1}{a^6 g} \sum_{\mu=1}^4 \left\{ E_{bc}^{-1}(\overline{A_\mu(x)}) \delta_{x+a\hat{\mu},y} - E_{cb}^{-1}(\overline{A_\mu(x)}) \delta_{x,y} \right. \\ & \left. - E_{bc}^{-1}(\overline{A_\mu(x-a\hat{\mu})}) \delta_{x,y} + E_{cb}^{-1}(\overline{A_\mu(x-a\hat{\mu})}) \delta_{x-a\hat{\mu},y} \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

mit

$$E^{-1}(x) = \frac{x}{1 - \exp(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} (-x)^n \quad (3.29)$$

und

$$\overline{A_\mu(x)}_{bc} = a g f_{bcd} A_\mu^d(x) \quad (3.30)$$

wobei β_n die Bernoullischen Zahlen sind. Damit ergibt sich für die Faddeev-Popov-Wirkung:

$$S_{FP} = a^2 \sum_{x,\mu} (\bar{\eta}_{c,x+a\hat{\mu}} - \bar{\eta}_{cx}) \left\{ E_{cb}^{-1}(\overline{A_\mu(x)}) \eta_{bx} - E_{bc}^{-1}(\overline{A_\mu(x)}) \eta_{b,x+a\hat{\mu}} \right\} \quad (3.31)$$

Die ersten Bernoullischen Zahlen sind

$$\begin{array}{lll} \beta_0 = 1 & \beta_1 = -\frac{1}{2} & \beta_2 = \frac{1}{6} \\ \beta_3 = 0 & \beta_4 = -\frac{1}{30} & \beta_5 = 0 \\ \beta_6 = \frac{1}{42} & \beta_7 = 0 & \beta_8 = -\frac{1}{30}. \end{array} \quad (3.32)$$

Damit ist es möglich, die Faddeev-Popov-Wirkung in g zu entwickeln. Um später Rechnungen in 1-Loop-Ordnung ausführen zu können, braucht man eine Entwicklung bis zur Ordnung g^2 . Mit

$$S_{FP} = \sum_x a^4 (L_{FP,0} + g L_{FP,1} + g^2 L_{FP,2} + \mathcal{O}(g^3)) \quad (3.33)$$

ergibt sich dann:

$$L_{FP,0} = - \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^f \bar{\eta}^a(x) \Delta_{\mu}^f \eta^a(x) \quad (3.34)$$

$$L_{FP,1} = -f_{abc} \sum_{\mu} \left(\Delta_{\mu}^f \bar{\eta}^a(x) A_{\mu}^b(x) \eta^c(x) + \frac{a}{2} \Delta_{\mu}^f \bar{\eta}^a(x) A_{\mu}^b(x) \Delta_{\mu}^f \eta^c(x) \right) \quad (3.35)$$

$$L_{FP,2} = \frac{a^2}{12} f_{abe} f_{cde} \sum_{\mu} \Delta_{\mu}^f \bar{\eta}^a(x) A_{\mu}^b(x) A_{\mu}^c(x) \Delta_{\mu}^f \eta^d(x) \quad (3.36)$$

Die Wirkung aus (3.4) und (3.5) konnte so umgeschrieben werden, daß man direkt die zugehörigen Feynman-Regeln berechnen kann. Dies soll in dem folgenden Kapitel getan werden.

Kapitel 4

Störungstheorie für die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Ausgehend von der im vorherigen Kapitel niedergeschriebenen Gitterwirkung werden analog zur Störungstheorie im Kontinuum zunächst die Feynman-Regeln für die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie entwickelt. Anschließend werden damit die kritische Masse und einige Renormierungskonstanten berechnet. Letztere sind auch auf dem Gitter von Interesse, da die Theorie zwar für beliebige endliche Werte der Gitterkonstanten a endlich ist, aber im Limes $a \rightarrow 0$ divergiert. Daher ist man in diesem Kontinuums-limes an den Renormierungskonstanten interessiert. Bei der kritischen Masse wird sich herausstellen, daß die berechnete Größe deutlich von dem aus Simulationen erhaltenen Wert abweicht, was zunächst ein prinzipielles Problem der Störungstheorie auf dem Gitter ist. Neuerdings werden allerdings Möglichkeiten zur Verbesserung der Störungstheorie diskutiert. Auch darauf wird in diesem Kapitel eingegangen.

4.1 Herleitung der Feynman-Regeln auf dem Gitter

Man ist nun in der Lage, alle Feynman-Regeln der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter aufzustellen, die für 1-Loop-Berechnungen nötig sind. Dazu geht man prinzipiell wie in Kapitel 2.2 vor, die Änderungen für die Berechnung auf dem Gitter sind in [MM] angegeben.

4.1.1 Die Propagatoren

Die Propagatoren auf dem Gitter sind, wie schon im Kontinuum, fast direkt aus der QCD zu übernehmen. Die einzigen Änderungen, die durch die Majorana-Fermionen im Gegensatz zu Dirac-Fermionen entstehen, sind bereits im Kontinuum erklärt worden, und gelten auf dem Gitter ebenso.

Der Propagator für die Gluonen sieht wie folgt aus:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab} \frac{1}{\hat{k}^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2} \right) \quad (4.1)$$

Dabei wird die Abkürzung

$$\hat{k}_\mu = \frac{2}{a} \sin \left(\frac{a}{2} k_\mu \right) \quad (4.2)$$

benutzt, außerdem ist die Abkürzung

$$\bar{k}_\mu = \frac{1}{a} \sin(ak_\mu) \quad (4.3)$$

üblich. Damit ist offensichtlich, daß der Gitterpropagator im Kontinuumslimit gegen den bereits bekannten Propagator konvergiert.

Es mag verwundern, daß zur Berechnung des Propagators das Haar-Maß nicht berücksichtigt wurde, obwohl der führende Term auch quadratisch in den Gluonenfeldern ist. Der Grund liegt darin, daß dieser Term bereits einen Faktor g^2 enthält. Daher ist es notwendig, aus diesem Term einen Vertex zu definieren, der dann in Berechnungen als ein Loop zu zählen ist. Der Vertex ist sofort abzulesen als:

$$V_{\mu\nu}^{ab} = -\frac{N_c}{12} g^2 \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \frac{1}{a^2} \quad (4.4)$$

Der Propagator für die Geister ist:

$$S^{ab}(q) = \delta^{ab} \frac{1}{\hat{q}^2} \quad (4.5)$$

Bleiben noch die Gluino-Propagatoren, von denen es wie im Kontinuum wieder drei gibt, davon zwei die Fermionenzahl verletzend. Der fermionenzahl-erhaltende Propagator lautet wie folgt:

$$S_F^{ab}(p) = \frac{\delta^{ab}}{i\gamma \cdot \bar{p} + \frac{ra}{2} \hat{p}^2 + m_0} \quad (4.6)$$

Der Zusammenhang zu den beiden Gluino-Propagatoren, die die Fermionenzahl nicht erhalten, ist identisch zu dem im Kontinuum.

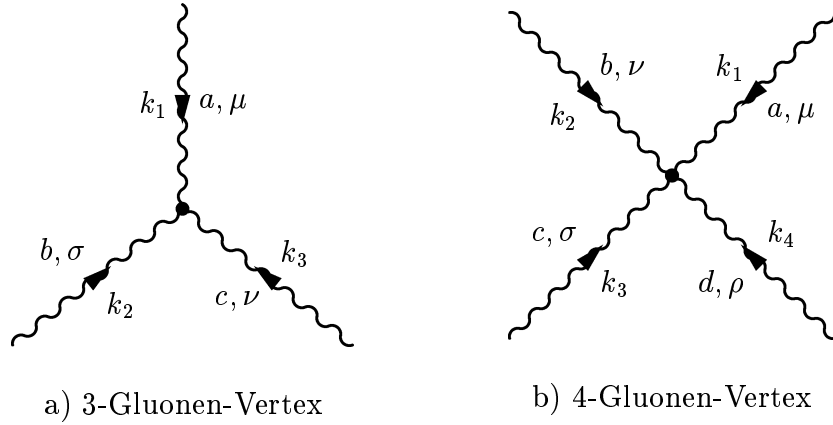


Abbildung 4.1: Die Gluonen-Vertices

4.1.2 Der 3-Gluonen-Vertex

Der 3-Gluonen-Vertex wird aus dem Term (3.13) entwickelt. Dies ist ein Term der Wilson-Wirkung, die als Standard-Wirkung auf dem Gitter in der Literatur mehrfach behandelt wurde. Auch die Feynman-Regeln sind dafür bereits berechnet, siehe [KNS]. Da aber die allgemeinen Rechenschritte in dem einfacheren Fall des 3-Gluonen-Vertex am deutlichsten dargestellt werden können, sei diese Herleitung hier noch einmal vorgeführt.

Zuerst werden also wieder die Fouriertransformierten der Felder in die Wirkung eingesetzt. Auf dem Gitter ist es dabei üblich, das Gluonenfeld $A_\mu(x)$ nicht mit den Gitterpunkten in Verbindung zu setzen, sondern mit den Links $(x, x + a\hat{\mu})$. Ihre Fouriertransformierte ist daher gegeben durch:

$$A_\mu(x) = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp\left(ik\left(x + \frac{a}{2}\hat{\mu}\right)\right) \tilde{A}_\mu(k) \quad (4.7)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 S_3 &= g \sum_x a^4 L_3 \\
 &= g f_{abc} \sum_x a^4 \left\{ \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \exp\left(ik_1\left(x + \frac{a}{2}\hat{\mu}\right)\right) \tilde{A}_\mu^a(k_1) \right) \right. \\
 &\quad \times \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \exp\left(ik_2\left(x + \frac{a}{2}\hat{\nu}\right)\right) \tilde{A}_\nu^b(k_2) \right) \\
 &\quad \times \left(\Delta_\mu^f \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \exp\left(ik_3\left(x + \frac{a}{2}\hat{\nu}\right)\right) \tilde{A}_\nu^c(k_3) \right) \\
 &\quad \left. + \frac{a}{2} \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \exp\left(ik_1\left(x + \frac{a}{2}\hat{\mu}\right)\right) \tilde{A}_\mu^a(k_1) \right) \right\}
 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\Delta_\nu^f \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \exp \left(i k_2 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\mu} \right) \right) \tilde{A}_\mu^b(k_2) \right) \\ & \times \left(\Delta_\mu^f \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \exp \left(i k_3 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\nu} \right) \right) \tilde{A}_\nu^c(k_3) \right) \Bigg\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Gitterableitung Δ_μ^f ist dabei gegeben durch:

$$\Delta_\mu^f f(y) = \frac{1}{a} (f(y + a\hat{\mu}) - f(y)) \quad (4.10)$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} S_3 = & g f_{abc} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \sum_x a^4 \exp(i(k_1 + k_2 + k_3)x) \right. \\ & \times \left(\frac{1}{a} \left[\exp \left(i \frac{a}{2} \left((k_1 + 2k_3)_\mu + (k_2 + k_3)_\nu \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \exp \left(i \frac{a}{2} (k_{1\mu} + (k_2 + k_3)_\nu) \right) \right] \tilde{A}_\mu^a(k_1) \tilde{A}_\nu^b(k_2) \tilde{A}_\nu^c(k_3) \right. \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2a} \left[\exp \left(i \frac{a}{2} \left((k_1 + k_2 + 2k_3)_\mu + (2k_2 + k_3)_\nu \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \exp \left(i \frac{a}{2} \left((k_1 + k_2)_\mu + (2k_2 + k_3)_\nu \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \exp \left(i \frac{a}{2} \left((k_1 + k_2 + 2k_3)_\mu + k_{3\nu} \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \exp \left(i \frac{a}{2} \left((k_1 + k_2)_\mu + k_{3\nu} \right) \right) \right] \tilde{A}_\mu^a(k_1) \tilde{A}_\mu^b(k_2) \tilde{A}_\nu^c(k_3) \right) \Bigg\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Während im Kontinuum an dieser Stelle stets eine Deltafunktion für die Impulse entstand, so ist auf dem Gitter die periodische Deltafunktion $\delta_P(k)$ einzuführen. Dies liegt daran, daß $\exp(2\pi i x_\mu/a) = 1$ für alle Gitterpunkte x gilt. Dies ist auch der Grund, weshalb man alle Impulse auf dem Gitter auf die erste Brillouin Zone beschränkt werden.

Aus (4.11) soll der Ausdruck für diesen Vertex abgelesen werden. Dabei ist der 3-Gluonen-Vertex V wie folgt definiert:

$$S_3 = \frac{(2\pi)^4}{3!} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \delta_P(k_1 + k_2 + k_3) \tilde{A}_\mu^a(k_1) \tilde{A}_\sigma^b(k_2) \tilde{A}_\nu^c(k_3) V_{\mu\sigma\nu}^{abc}(k_1, k_2, k_3) \quad (4.12)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} V_{\mu\sigma\nu}^{abc}(k_1, k_2, k_3) = & 3! g f_{abc} \left(\frac{1}{a} \left[\exp \left(i \frac{a}{2} \left((k_1 + 2k_3)_\mu + (k_2 + k_3)_\nu \right) \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \exp \left(i \frac{a}{2} (k_{1\mu} + (k_2 + k_3)_\nu) \right) \right] \delta_{\nu\sigma} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2a} \left[\exp \left(i \frac{a}{2} \left((k_1 + k_2 + 2k_3)_\mu + (2k_2 + k_3)_\nu \right) \right) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \exp \left(i \frac{a}{2} \left((k_1 + k_2)_\mu + (2k_2 + k_3)_\nu \right) \right) \\
& - \exp \left(i \frac{a}{2} \left((k_1 + k_2 + 2k_3)_\mu + k_{3\nu} \right) \right) \\
& + \exp \left(i \frac{a}{2} \left((k_1 + k_2)_\mu + k_{3\nu} \right) \right) \Big] \delta_{\mu\sigma} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist noch zu symmetrisieren, d.h. es ist über alle Ausdrücke zu mitteln, die durch Vertauschen von (k_1, μ, a) , (k_2, σ, b) und (k_3, ν, c) entstehen.

Im folgenden werden die bekannten Formeln für Sinus und Cosinus verwendet

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (\exp(ix) - \exp(-ix)) \quad (4.14)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (\exp(ix) + \exp(-ix)). \quad (4.15)$$

Damit ergibt die Symmetrisierung unter Ausnutzung der Deltafunktion für die Impulse und mit der Abkürzung (4.2):

$$\begin{aligned}
V_{\mu\sigma\nu}^{abc}(k_1, k_2, k_3) &= \frac{1}{2a} g f_{abc} \left\{ \delta_{\mu\sigma} \left[\exp \left(i \frac{a}{2} k_{3\mu} \right) + \exp \left(-i \frac{a}{2} k_{3\mu} \right) \right] \right. \\
&\quad \times \left[\exp \left(i \frac{a}{2} (k_2 - k_1)_\nu \right) - \exp \left(-i \frac{a}{2} (k_2 - k_1)_\nu \right) \right] \\
&\quad + \delta_{\mu\nu} \left[\exp \left(i \frac{a}{2} k_{2\mu} \right) + \exp \left(-i \frac{a}{2} k_{2\mu} \right) \right] \\
&\quad \times \left[\exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 - k_3)_\sigma \right) - \exp \left(-i \frac{a}{2} (k_1 - k_3)_\sigma \right) \right] \\
&\quad + \delta_{\nu\sigma} \left[\exp \left(i \frac{a}{2} k_{1\nu} \right) + \exp \left(-i \frac{a}{2} k_{1\nu} \right) \right] \\
&\quad \times \left. \left[\exp \left(i \frac{a}{2} (k_3 - k_2)_\mu \right) - \exp \left(-i \frac{a}{2} (k_3 - k_2)_\mu \right) \right] \right\} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2i}{a} g f_{abc} \left\{ \delta_{\mu\sigma} \cos \left(\frac{a}{2} k_{3\mu} \right) \sin \left(\frac{a}{2} (k_2 - k_1)_\nu \right) \right. \\
&\quad + \delta_{\mu\nu} \cos \left(\frac{a}{2} k_{2\mu} \right) \sin \left(\frac{a}{2} (k_1 - k_3)_\sigma \right) \\
&\quad + \delta_{\nu\sigma} \cos \left(\frac{a}{2} k_{1\nu} \right) \sin \left(\frac{a}{2} (k_3 - k_2)_\mu \right) \Big\} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i g f_{abc} \left\{ \delta_{\mu\nu} \widehat{(k_1 - k_3)_\sigma} \cos \left(\frac{a}{2} k_{2\mu} \right) + \delta_{\mu\sigma} \widehat{(k_2 - k_1)_\nu} \cos \left(\frac{a}{2} k_{3\mu} \right) \right. \\
&\quad + \delta_{\nu\sigma} \widehat{(k_3 - k_2)_\mu} \cos \left(\frac{a}{2} k_{1\nu} \right) \Big\} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

4.1.3 Der 4-Gluonen-Vertex

Der nächste zu entwickelnde Term ist (3.14). Von den zu verwendenden Rechenmethoden ähnelt er dem 3-Gluonen-Vertex, der zuvor bereits ausführlich behandelt wurde. Daher wird an dieser Stelle das Ergebnis direkt aus [KNS] übernommen. Allerdings muß in Formel (A.7) die Beschränkung in der Summe entfallen, wie man

durch Anwenden der Ward-Identitäten sieht, vergleiche [CMP], und außerdem ist ein Fehler in den Indizes sowie einige Vorfaktoren zu korrigieren.

Die Feynman-Regel für den 4-Gluonen-Vertex auf dem Gitter lautet mit den Bezeichnungen aus Abb. 4.1b:

$$\begin{aligned}
 V_{\mu\nu\sigma\rho}^{abcd}(k_1, k_2, k_3, k_4) = & -g^2 \left\{ f_{abe} f_{cde} \right. \\
 & \times \left[\delta_{\mu\nu} \delta_{\sigma\rho} \left(\cos \left(\frac{(k_1 - k_2)_\sigma a}{2} \right) \cos \left(\frac{(k_3 - k_4)_\mu a}{2} \right) - \frac{a^4}{12} \hat{k}_{1\sigma} \hat{k}_{2\sigma} \hat{k}_{3\mu} \hat{k}_{4\mu} \right) \right. \\
 & - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} \left(\cos \left(\frac{(k_1 - k_4)_\nu a}{2} \right) \cos \left(\frac{(k_2 - k_3)_\mu a}{2} \right) - \frac{a^4}{12} \hat{k}_{1\nu} \hat{k}_{4\nu} \hat{k}_{2\mu} \hat{k}_{3\mu} \right) \\
 & + \frac{a}{12} \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\sigma} \delta_{\mu\rho} \left(\hat{k}_{2\mu} \exp \left(\frac{-ik_{1\mu} a}{2} \right) - \hat{k}_{1\mu} \exp \left(\frac{-ik_{2\mu} a}{2} \right) \right) \\
 & \times \left(\hat{k}_{4\mu} \exp \left(\frac{-ik_{3\mu} a}{2} \right) - \hat{k}_{3\mu} \exp \left(\frac{-ik_{4\mu} a}{2} \right) \right) \\
 & - \frac{a}{6} \left(\delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\sigma} \left(\hat{k}_{2\rho} \exp \left(\frac{-ik_{1\rho} a}{2} \right) - \hat{k}_{1\rho} \exp \left(\frac{-ik_{2\rho} a}{2} \right) \right) \hat{k}_{4\mu} \cos \left(\frac{k_{3\rho} a}{2} \right) \right. \\
 & - \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} \left(\hat{k}_{2\sigma} \exp \left(\frac{-ik_{1\sigma} a}{2} \right) - \hat{k}_{1\sigma} \exp \left(\frac{-ik_{2\sigma} a}{2} \right) \right) \hat{k}_{3\mu} \cos \left(\frac{k_{4\sigma} a}{2} \right) \\
 & + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\mu\rho} \left(\hat{k}_{4\nu} \exp \left(\frac{-ik_{3\nu} a}{2} \right) - \hat{k}_{3\nu} \exp \left(\frac{-ik_{4\nu} a}{2} \right) \right) \hat{k}_{2\mu} \cos \left(\frac{k_{1\nu} a}{2} \right) \\
 & \left. \left. - \delta_{\nu\sigma} \delta_{\nu\rho} \left(\hat{k}_{4\mu} \exp \left(\frac{-ik_{3\mu} a}{2} \right) - \hat{k}_{3\mu} \exp \left(\frac{-ik_{4\mu} a}{2} \right) \right) \hat{k}_{1\nu} \cos \left(\frac{k_{2\mu} a}{2} \right) \right) \right] \right\}_{\text{sym}} \\
 & + \frac{g^2 a^4}{12} (\delta_{ab} \delta_{cd} + \delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \\
 & \times \left(\delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\sigma} \delta_{\mu\rho} \hat{k}_{1\mu} \hat{k}_{2\mu} \hat{k}_{3\mu} \hat{k}_{4\mu} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\sigma} \hat{k}_{1\rho} \hat{k}_{2\rho} \hat{k}_{3\rho} \hat{k}_{4\mu} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\mu\rho} \hat{k}_{1\sigma} \hat{k}_{2\sigma} \hat{k}_{3\mu} \hat{k}_{4\sigma} \right. \\
 & - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\mu\rho} \hat{k}_{1\nu} \hat{k}_{2\mu} \hat{k}_{3\nu} \hat{k}_{4\nu} - \delta_{\nu\sigma} \delta_{\nu\rho} \hat{k}_{1\nu} \hat{k}_{2\mu} \hat{k}_{3\mu} \hat{k}_{4\mu} + \delta_{\mu\nu} \delta_{\sigma\rho} \hat{k}_{1\sigma} \hat{k}_{2\sigma} \hat{k}_{3\mu} \hat{k}_{4\mu} \\
 & \left. + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho} \hat{k}_{1\nu} \hat{k}_{2\mu} \hat{k}_{3\nu} \hat{k}_{4\mu} + \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} \hat{k}_{1\nu} \hat{k}_{2\mu} \hat{k}_{3\mu} \hat{k}_{4\nu} \right) \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

4.1.4 Der Gluon-Ghost-Vertex

Aus dem Term (3.35) kann man die Feynman-Regel für den Vertex aus zwei Geistern und einem Gluon problemlos berechnen. Man setzt zuerst die Fouriertransformierten in die Wirkung ein:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_{FP,1} &= g \sum_x a^4 L_{FP,1} \\
 &= -g f_{abc} \sum_x a^4 \left\{ \left(\Delta_\mu^f \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \exp(-iq_1 x) \tilde{\eta}^a(q_1) \right) \right.
 \end{aligned} \quad (4.20)$$

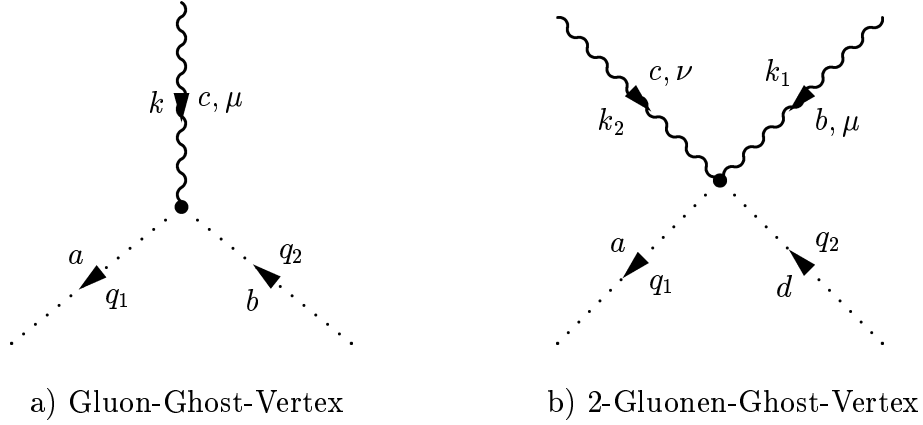


Abbildung 4.2: Die Geister-Vertices

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp \left(i k \left(x + \frac{a}{2} \hat{\mu} \right) \right) \tilde{A}_\mu^c(k) \right) \\
& \times \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \exp (i q_2 x) \tilde{\eta}^b(q_2) \right) \\
& + \frac{a}{2} \left(\Delta_\mu^f \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \exp (-i q_1 x) \tilde{\eta}^a(q_1) \right) \\
& \times \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp \left(i k \left(x + \frac{a}{2} \hat{\mu} \right) \right) \tilde{A}_\mu^c(k) \right) \\
& \times \left(\Delta_\mu^f \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \exp (i q_2 x) \tilde{\eta}^b(q_2) \right) \Bigg\} \tag{4.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = -\frac{1}{2a} g f_{abc} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta_P(k - q_1 + q_2) \\
& \times \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (q_2 - q_1)_\mu \right) - \exp \left(-i \frac{a}{2} (q_2 - q_1)_\mu \right) \right. \\
& \quad \left. + \exp \left(-i \frac{a}{2} (q_1 + q_2)_\mu \right) - \exp \left(i \frac{a}{2} (q_1 + q_2)_\mu \right) \right) \\
& \times \tilde{\eta}^a(q_1) \tilde{A}_\mu^c(k) \tilde{\eta}^b(q_2) \tag{4.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{2a} g f_{abc} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta_P(k - q_1 + q_2) \\
& \times \left(\exp \left(i \frac{a}{2} q_{2\mu} \right) + \exp \left(-i \frac{a}{2} q_{2\mu} \right) \right) \\
& \times \left(\exp \left(i \frac{a}{2} q_{1\mu} \right) - \exp \left(-i \frac{a}{2} q_{1\mu} \right) \right) \\
& \times \tilde{\eta}^a(q_1) \tilde{A}_\mu^c(k) \tilde{\eta}^b(q_2) \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Daraus läßt sich der Vertex V gemäß folgender Definition ablesen:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{FP,1} &= (2\pi)^4 \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \delta_P(k - q_1 + q_2) \\ &\quad \times \tilde{\eta}^a(q_1) \tilde{A}_\mu^c(k) \tilde{\eta}^b(q_2) V_\mu^{abc}(k, q_1, q_2) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Er ergibt sich zu:

$$V_\mu^{abc}(k, q_1, q_2) = igf_{abc} \hat{q}_{1\mu} \cos\left(\frac{a}{2} q_{2\mu}\right) \quad (4.25)$$

4.1.5 Der 2-Gluonen-Ghost-Vertex

Auf dem Gitter gibt es Vertices mit beliebig vielen Gluonen. Bei den Geister-Vertices gibt es einen solchen Vertex, zu dem es kein Analogon im Kontinuum gibt, und der für die folgenden Berechnungen bereits in 1-Loop-Ordnung berücksichtigt werden muß. Die Feynman-Regel zu diesem Vertex berechnet man aus (3.36). Es ergibt sich:

$$\mathcal{S}_{FP,2} = g^2 \sum_x a^4 L_{FP,2} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2 g^2}{12} f_{abe} f_{cde} \sum_x a^4 \left(\Delta_\mu^f \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \exp(-iq_1 x) \tilde{\eta}^a(q_1) \right) \\ &\quad \times \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \exp\left(ik_1 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\mu}\right)\right) \tilde{A}_\mu^b(k_1) \right) \\ &\quad \times \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \exp\left(ik_2 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\mu}\right)\right) \tilde{A}_\mu^c(k_2) \right) \\ &\quad \times \left(\Delta_\mu^f \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \exp(iq_2 x) \tilde{\eta}^d(q_2) \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2}{12} f_{abe} f_{cde} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta_P(k_1 + k_2 - q_1 + q_2) \\ &\quad \times \left\{ \exp\left(-i\frac{a}{2}(q_1 - q_2)_\mu\right) + \exp\left(i\frac{a}{2}(q_1 - q_2)_\mu\right) \right. \\ &\quad \left. - \exp\left(-i\frac{a}{2}(q_1 + q_2)_\mu\right) - \exp\left(i\frac{a}{2}(q_1 + q_2)_\mu\right) \right\} \\ &\quad \times \tilde{\eta}^a(q_1) \tilde{A}_\mu^b(k_1) \tilde{A}_\mu^c(k_2) \tilde{\eta}^d(q_2) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2 g^2}{12} f_{abe} f_{cde} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta_P(k_1 + k_2 - q_1 + q_2) \\ &\quad \times \hat{q}_{1\mu} \hat{q}_{2\mu} \tilde{\eta}^a(q_1) \tilde{A}_\mu^b(k_1) \tilde{A}_\mu^c(k_2) \tilde{\eta}^d(q_2) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Der Vertex V ist unter Berücksichtigung der Tatsache, daß mit den Gluonen zwei identische Teilchen vorhanden sind, wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{FP,2} &= \frac{(2\pi)^4}{2!} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \delta_P(k_1 + k_2 - q_1 + q_2) \\ &\quad \times \tilde{\eta}^a(q_1) \tilde{A}_\mu^b(k_1) \tilde{A}_\nu^c(k_2) \tilde{\eta}^d(q_2) V_{\mu\nu}^{abcd}(k_1, k_2, q_1, q_2) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Das Ergebnis liest man sofort ab, und auch die Symmetrisierung verläuft problemlos. Man erhält:

$$V_{\mu\nu}^{abcd}(k_1, k_2, q_1, q_2) = \frac{a^2 g^2}{12} (f_{abe} f_{cde} + f_{ace} f_{bde}) \delta_{\mu\nu} \hat{q}_{1\mu} \hat{q}_{2\mu} \quad (4.31)$$

4.1.6 Der Gluon-Gluino-Vertex

Das Gitter-Analogon zum Gluon-Gluino-Vertex kann aus (3.23) berechnet werden. Wie im Kontinuum treten hier neben dem Vertex, der bis auf einen Vorfaktor aus der QCD bekannt ist, noch zwei weitere Vertices auf, in denen explizit die Ladungskonjugationsmatrix C auftritt. Der Zusammenhang dieser beiden zu dem klassischen Vertex ist derselbe wie im Kontinuum, daher genügt es, hier nur diesen zu berechnen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{A_\mu \bar{\lambda} \lambda} &= g \sum_x a^4 L_{gl,1} \quad (4.32) \\ &= \frac{g}{2} f_{abc} \sum_x a^4 \left\{ \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \exp(ip_1 x) \tilde{\lambda}^a(p_1) \right) \right. \\ &\quad \times \gamma_\mu \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp\left(ik \left(x + \frac{a}{2} \hat{\mu}\right)\right) \tilde{A}_\mu^b(k) \right) \\ &\quad \times \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \exp(ip_2 x) \tilde{\lambda}^c(p_2) \right) \\ &\quad + a \left(\Delta_\mu^f \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \exp(ip_1 x) \tilde{\lambda}^a(p_1) \right) \\ &\quad \times (\gamma_\mu + r) \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp\left(ik \left(x + \frac{a}{2} \hat{\mu}\right)\right) \tilde{A}_\mu^b(k) \right) \\ &\quad \times \left. \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \exp(ip_2 x) \tilde{\lambda}^c(p_2) \right) \right\} \quad (4.33) \\ &= \frac{g}{2} f_{abc} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta_P(k + p_1 + p_2) \\ &\quad \times \left\{ \exp\left(i \frac{a}{2} k_\mu\right) \tilde{\lambda}^a(p_1) \gamma_\mu \tilde{A}_\mu^b(k) \tilde{\lambda}^c(p_2) \right. \end{aligned}$$

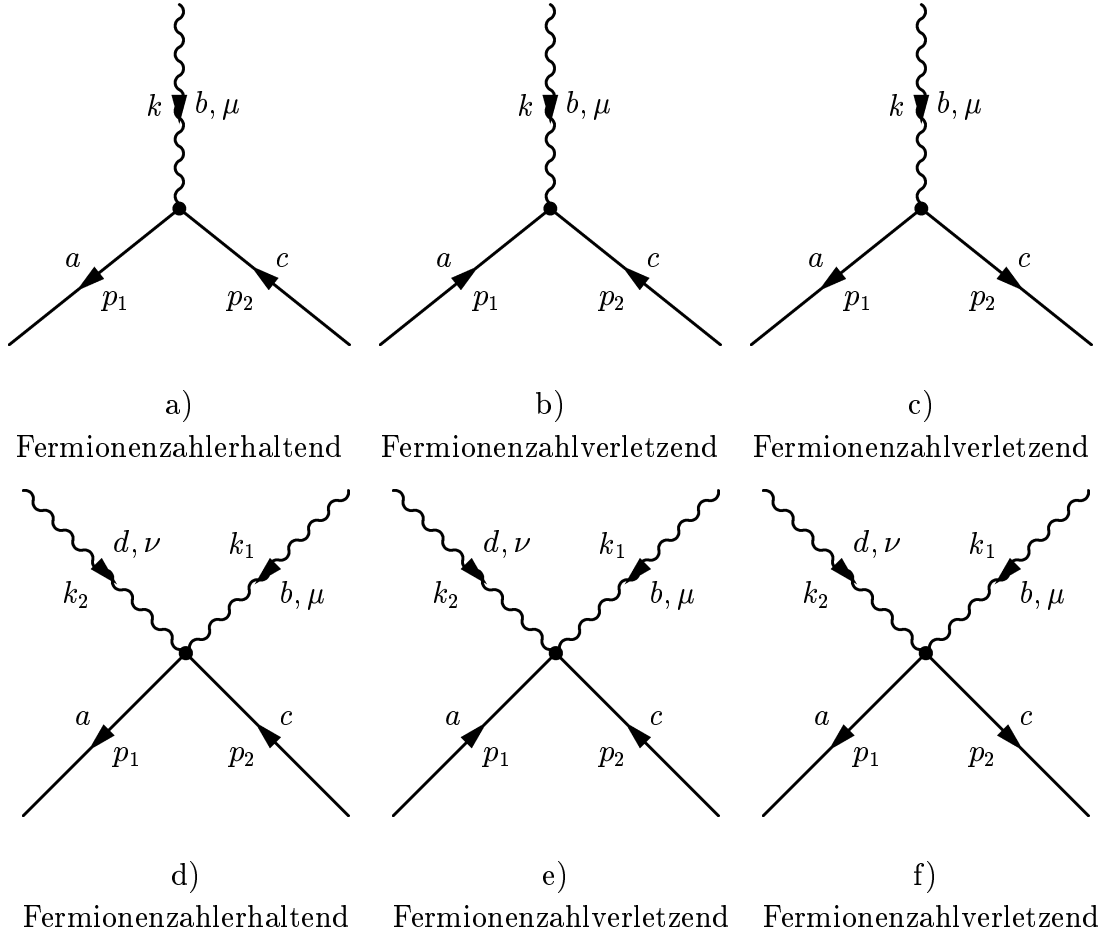


Abbildung 4.3: Die Gluino-Vertices

$$+ \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (k + 2p_1)_\mu \right) - \exp \left(i \frac{a}{2} k_\mu \right) \right) \tilde{\lambda}^a(p_1) (\gamma_\mu + r) \tilde{A}_\mu^b(k) \tilde{\lambda}^c(p_2) \} \quad (4.34)$$

Der Vertex V ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{A_\mu \tilde{\lambda} \lambda} &= \frac{(2\pi)^4}{2!} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \delta_P(k + p_1 + p_2) \\ &\quad \times \tilde{\lambda}^a(p_1) V[A_\mu, \lambda, \tilde{\lambda}]_\mu^{abc}(k, p_1, p_2) \tilde{A}_\mu^b(k) \tilde{\lambda}^c(p_2) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Die noch nicht symmetrisierte Form liest man sofort ab:

$$V[A_\mu, \lambda, \tilde{\lambda}]_\mu^{abc}(k, p_1, p_2) = g f_{abc} \left((\gamma_\mu + r) \exp(i a p_{1\mu}) - r \right) \exp \left(i \frac{a}{2} k_\mu \right) \quad (4.36)$$

Als nächstes ist die Symmetrisierung durchzuführen, wobei wegen der Majorana-Eigenschaft (2.47) auf folgendes zu achten ist:

$$\bar{\theta} \psi = \bar{\psi} \theta \quad (4.37)$$

$$\bar{\theta} \gamma_\mu \psi = -\bar{\psi} \gamma_\mu \theta \quad (4.38)$$

Es sind also die beiden identischen Teilchen zu vertauschen, und dann über die beiden Versionen des Vertices zu mitteln. Es werden also die Indices (p_1, a) und (p_2, c) vertauscht, wobei zu beachten ist, daß das γ_μ in ein $-\gamma_\mu$ übergeht. Der symmetrisierte Vertex lautet damit:

$$V[A_\mu, \lambda, \bar{\lambda}]_\mu^{abc} = \frac{g}{2} f_{abc} \left((\gamma_\mu + r) \exp(ip_1 \mu) + (\gamma_\mu - r) \exp(ip_2 \mu) \right) \exp\left(i \frac{a}{2} k_\mu\right) \quad (4.39)$$

$$= g f_{abc} \left(\gamma_\mu \cos\left(\frac{a}{2}(p_1 - p_2)_\mu\right) + i r \sin\left(\frac{a}{2}(p_1 - p_2)_\mu\right) \right) \quad (4.40)$$

Es sei an dieser Stelle nochmal darauf hingewiesen, daß es neben diesem Vertex noch zwei weitere Gluon-Gluino-Vertices $V[A_\mu, \lambda, \lambda]_\mu^{abc}$ und $V[A_\mu, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}]_\mu^{abc}$ gibt, die sich aus diesem wie in dem Kontinuum ergeben.

4.1.7 Der 2-Gluonen-Gluino-Vertex

Der zweite Vertex mit Gluonen und Gluinis, der in 1-Loop-Ordnung Beiträge liefert, besteht aus je zwei Gluonen und Gluinis. Er wird aus (3.24) berechnet.

$$\mathcal{S}_{2A_\mu \lambda \lambda} = g^2 \sum_x a^4 L_{gl,2} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{ag^2}{8} (f_{abe} f_{cde} + f_{ace} f_{bde}) \sum_x a^4 \\ &\quad \times \left\{ r \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \exp(ip_1 x) \tilde{\lambda}^a(p_1) \right) \right. \\ &\quad \times \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \exp\left(ik_1 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\mu}\right)\right) \tilde{A}_\mu^b(k_1) \right) \\ &\quad \times \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \exp\left(ik_2 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\mu}\right)\right) \tilde{A}_\mu^c(k_2) \right) \\ &\quad \times \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \exp(ip_2 x) \tilde{\lambda}^d(p_2) \right) \\ &\quad + a \left(\Delta_\mu^f \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \exp(ip_1 x) \tilde{\lambda}^a(p_1) \right) \\ &\quad \times (\gamma_\mu + r) \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \exp\left(ik_1 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\mu}\right)\right) \tilde{A}_\mu^b(k_1) \right) \\ &\quad \times \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \exp\left(ik_2 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\mu}\right)\right) \tilde{A}_\mu^c(k_2) \right) \\ &\quad \times \left(dv p a p_2 \exp(ip_2 x) \tilde{\lambda}^d(p_2) \right) \left. \right\} \quad (4.42) \end{aligned}$$

Bei der Definition des Vertex ist zu beachten, daß es sich sowohl bei den beiden Gluinos als auch bei den beiden Gluonen um identische Teilchen handelt. Daher definiert man den Vertex V wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{2A_\mu \bar{\lambda}\lambda} &= \frac{(2\pi)^4}{2!2!} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \delta_P(k_1 + k_2 + p_1 + p_2) \\ &\quad \times \tilde{\lambda}^a(p_1) V[A_\mu, A_\nu, \lambda, \bar{\lambda}]_{\mu\nu}^{abcd}(k_1, k_2, p_1, p_2) \tilde{A}_\mu^b(k_1) \tilde{A}_\nu^c(k_2) \tilde{\lambda}^d(p_2) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Damit liest man sofort den noch nicht symmetrisierten Vertex ab:

$$\begin{aligned} V[A_\mu, A_\nu, \lambda, \bar{\lambda}]_{\mu\nu}^{abcd} &= \frac{ag^2}{2} (f_{abe} f_{cde} + f_{ace} f_{bde}) \delta_{\mu\nu} \left(\gamma_\mu \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\mu \right) \right. \\ &\quad \left. - (\gamma_\mu + r) \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + 2p_1)_\mu \right) \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Dieser Vertex ist sowohl bezüglich der Gluinos als auch der Gluonen zu symmetrisieren. Offensichtlich bleibt dieser Vertex aber unter Vertauschen der Indizes (k_1, μ, b) und (k_2, ν, c) unverändert, so daß nur noch die Symmetrisierung unter Vertauschen der Gluinos durchzuführen ist. Diese verläuft unter denselben Regeln, die schon bei der Berechnung des Gluon-Gluino-Vertex benutzt und erklärt wurden. Danach erhält man dann:

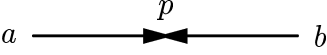
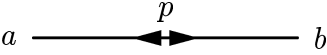
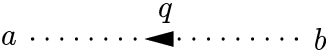
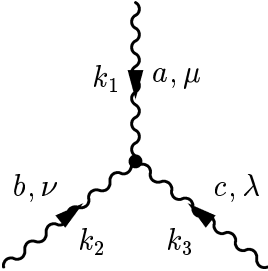
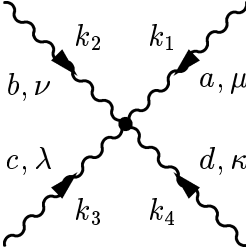
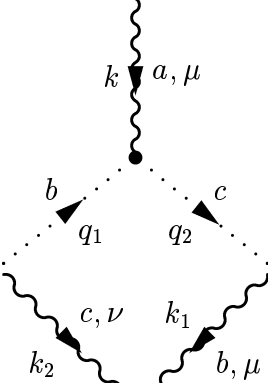
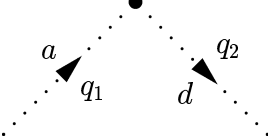
$$\begin{aligned} V[A_\mu, A_\nu, \lambda, \bar{\lambda}]_{\mu\nu}^{abcd} &= -\frac{ag^2}{4} (f_{abe} f_{cde} + f_{ace} f_{bde}) \delta_{\mu\nu} \\ &\quad \times \left((\gamma_\mu + r) \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + 2p_1)_\mu \right) \right. \\ &\quad \left. - (\gamma_\mu - r) \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + 2p_2)_\mu \right) \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{ag^2}{2} (f_{abe} f_{cde} + f_{ace} f_{bde}) \delta_{\mu\nu} \\ &\quad \times \left(r \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) + i \gamma_\mu \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

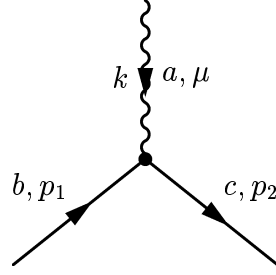
4.2 Zusammenfassung der Feynman-Regeln auf dem Gitter

Für die nachfolgenden Berechnungen ist es angenehm, die bisher berechneten Feynman-Regeln an einer Stelle im Überblick aufgelistet zu haben. Dies soll hier geschehen:

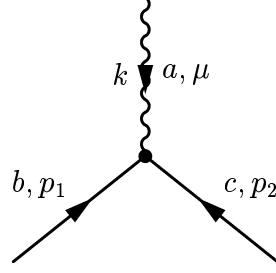
$$\begin{aligned} \text{Gluon Propagator } a, \mu &\quad \text{---} \overset{k}{\text{~~~~~}} \text{---} b, \nu \quad \frac{1}{\hat{k}^2} \delta_{ab} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2} \right) \\ \text{Gluino Propagator } a &\quad \text{---} \overset{p}{\text{---}} \text{---} b \quad \frac{\delta^{ab}}{i\gamma \hat{p} + \frac{ra}{2} \hat{p}^2 + m_0} \end{aligned}$$

		$-C \frac{\delta^{ab}}{i\gamma\bar{p} + \frac{ra}{2}\bar{p}^2 + m_0}$
		$\frac{\delta^{ab}}{i\gamma\bar{p} + \frac{ra}{2}\bar{p}^2 + m_0} C^{-1}$
Ghost Propagator		$\delta^{ab} \frac{1}{\hat{q}^2}$
3-Gluonen-Vertex		$igf_{abc} \left(\delta_{\mu\lambda} (\hat{k}_1 - \hat{k}_3)_\nu \right. \\ \times \cos\left(\frac{1}{2}k_{2\mu}a\right) \\ \left. + \delta_{\mu\nu} (\hat{k}_2 - \hat{k}_1)_\lambda \right. \\ \times \cos\left(\frac{1}{2}k_{3\mu}a\right) \\ \left. + \delta_{\nu\lambda} (\hat{k}_3 - \hat{k}_2)_\mu \right. \\ \times \cos\left(\frac{1}{2}k_{3\nu}a\right) \Big)$
4-Gluonen-Vertex		siehe Text, Gleichung (4.19)
Gluon-Ghost-Vertex		$-igf_{abc}\hat{q}_{2\mu} \cos\left(\frac{a}{2}q_{1\mu}\right)$
2-Gluonen-Ghost-Vertex		$\frac{a^2g^2}{12}(f_{abe}f_{cde} + f_{ace}f_{bde})\delta_{\mu\nu}\hat{q}_{1\mu}\hat{q}_{2\mu}$

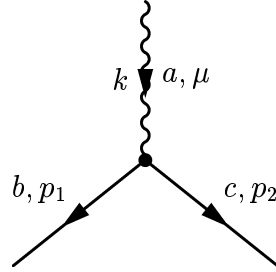
Gluon-Gluino-Vertex



$$g f_{abc} \left(\gamma_\mu \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) - i r \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right)$$

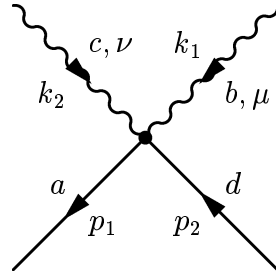


$$g f_{abc} C \left(\gamma_\mu \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) - i r \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right)$$

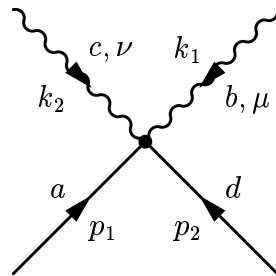


$$-g f_{abc} \left(\gamma_\mu \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) - i r \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right) C^{-1}$$

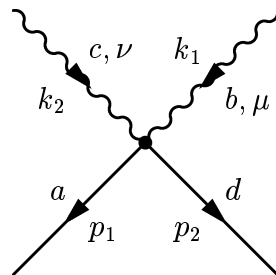
2-Gluonen-Gluino-Vertex



$$-\frac{ag^2}{2} (f_{abe} f_{cde} + f_{ace} f_{bde}) \times \delta_{\mu\nu} \left(r \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) + i \gamma_\mu \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right)$$



$$-\frac{ag^2}{2} (f_{abe} f_{cde} + f_{ace} f_{bde}) \times \delta_{\mu\nu} C \left(r \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) + i \gamma_\mu \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right)$$



$$-\frac{ag^2}{2} (f_{abe} f_{cde} + f_{ace} f_{bde}) \times \delta_{\mu\nu} \left(r \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) + i \gamma_\mu \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right) C^{-1}$$

4.3 Die kritische Linie in 1-Loop-Ordnung

Es sind bereits eine Reihe von Größen in der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen berechnet worden. Die Simulationen können praktisch für beliebig starke Kopplungen durchgeführt werden, weshalb man sie auch einer störungstheoretischen Berechnung vorzieht, da diese nur für schwache Kopplungen verwertbare Ergebnisse liefern. Nachteil der Berechnungen mit diesem Computerprogramm ist zum einen, daß niemand sicher sein kann, daß nicht doch ein Fehler in dem Programm versteckt ist. Die Ergebnisse erscheinen zwar vernünftig, aber es ist in jedem Fall besser, wenn man zumindest einige der Größen mit perturbativen Berechnungen vergleichen könnte. Wenn diese Ergebnisse übereinstimmen, so kann man dann auch ein größeres Vertrauen in Werte haben, die nicht in der Störungstheorie berechnet werden können. Des weiteren ist es noch wichtig, Abschätzungen für Gittereffekte wie z.B. finit-size-Effekte zu bekommen. Auch dies ist störungstheoretisch möglich, mit dem Computerprogramm ist man dafür zu sehr von der Rechengeschwindigkeit des Computers abhängig. Daher werden im folgenden einige ausgewählte Größen berechnet, um einige der soeben genannten Probleme zu behandeln.

Die kritische Linie ist eine Line in der (g^2, K) Ebene, mit

$$K = \frac{1}{8r + 2am_0} \quad (4.47)$$

dem Hopping Parameter, bzw. in der (g^2, am_0) Ebene, mit m_0 der nackten Gluinomasse auf dem Gitter. Diese Linie ist so definiert, daß auf ihr die renormierte Gluinomasse verschwindet. In der QCD wurde diese Linie bereits störungstheoretisch in [MM] berechnet. Entsprechend kann auch hier vorgegangen werden.

Zunächst wird der Gluinopropagator in 1-Loop-Ordnung ausgerechnet. Der inverse Propagator $\tilde{\Gamma}_p$ ist dabei durch das Inverse des freien Gluinopropagators $\tilde{\Delta}_p^{-1}$ sowie die Selbstenergie Σ_p gegeben, wobei p der Impuls des Gluinos ist. Aus den Berechnungen in Kapitel 2.3 ist klar, daß nur die beiden Graphen aus Abb. 4.4 Beiträge zur Selbstenergie liefern.

Der erste dieser Graphen gibt folgenden Beitrag zur Selbstenergie:

$$\Sigma_p^{(1)} = \frac{1}{2} \int_k \sum_{\mu, \nu=1}^4 V[\lambda, A_\mu, A_\nu, \bar{\lambda}]_{\mu\nu}^{accb}(p, -k, k, -p) D_{\mu\nu}(k) \quad (4.48)$$

$$= -\frac{ag^2}{2} f_{bce} f_{ace} \int_k \sum_{\mu=1}^4 (r \cos(ap_\mu) - i\gamma_\mu \sin(ap_\mu)) \frac{1}{\hat{k}^2} \left(1 - (1 - \alpha) \frac{\hat{k}_\mu^2}{\hat{k}^2} \right) \quad (4.49)$$

Der Beitrag des zweiten Graphen ergibt sich wie folgt:

$$\Sigma_p^{(2)} = \int_k \sum_{\mu, \nu=1}^4 V[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}]_\mu^{adc}(p, -k, k - p) S_F[\lambda, \bar{\lambda}](p - k) D_{\mu\nu}(k)$$

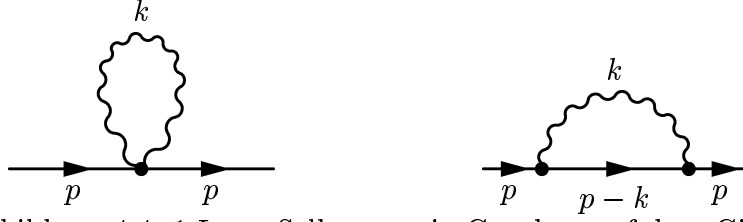


Abbildung 4.4: 1-Loop Selbstenergie Graphen auf dem Gitter

$$\begin{aligned}
 & \times V[\lambda, A_\nu, \bar{\lambda}]_\nu^{cdb}(p-k, k, -p) \\
 & = g^2 f_{cda} f_{bdc} \int_k \sum_{\mu, \nu=1}^4 \left(\gamma_\mu \cos \left(ap - \frac{ak}{2} \right) - ir \sin \left(ap - \frac{ak}{2} \right) \right) \\
 & \quad \times \left(i\gamma(\overline{p-k}) + \frac{ra}{2} (\widehat{r-k})^2 + m_0 \right)^{-1} \frac{1}{\hat{k}^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2} \right) \\
 & \quad \times \left(\gamma_\mu \cos \left(ap - \frac{ak}{2} \right) - ir \sin \left(ap - \frac{ak}{2} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Der erste Term enthält dabei noch einen Symmetriefaktor von $\frac{1}{2}$, außerdem kann man noch bei beiden Termen folgende für die $SU(N_c)$ gültige Beziehung ausnutzen:

$$f_{acd} f_{bcd} = N_c \delta_{ab} \tag{4.52}$$

Mit

$$\frac{1}{i\gamma(\overline{p-k}) + \frac{ra}{2} (\widehat{r-k})^2 + m_0} = \frac{-i\gamma(\overline{p-k}) + \frac{ra}{2} (\widehat{r-k})^2 + m_0}{(m_0 + \frac{ra}{2} (\widehat{p-k})^2 + (\overline{p-k})^2)} \tag{4.53}$$

ergibt sich für den inversen Propagator:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Gamma}_p & \equiv \tilde{\Delta}_p^{-1} - \Sigma_p \\
 & = m_0 + \frac{ra}{2} \hat{p}^2 + i\gamma \bar{p} + N_c g^2
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{k}^2} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \left[1 - (1-\alpha) \frac{\hat{k}_\mu^2}{\hat{k}^2} \right] (r \cos p_\mu - i\gamma_\mu \bar{p}_\mu) \right. \\
 & + \left[\left(m_0 + \frac{ra}{2} (\widehat{p-k})^2 \right)^2 + (\overline{p-k})^2 \right]^{-1} \sum_{\mu, \nu=1}^4 \left[\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2} \right] \\
 & \times \left[\gamma_\mu \cos \left(p - \frac{k}{2} \right)_\nu - ir \sin \left(p - \frac{k}{2} \right)_\nu \right] \\
 & \times \left[m_0 + \frac{ra}{2} (\widehat{p-k})^2 - i\gamma(\overline{p-k}) \right] \\
 & \times \left. \left[\gamma_\mu \cos \left(p - \frac{k}{2} \right)_\mu - ir \sin \left(p - \frac{k}{2} \right)_\mu \right] \right\} + \mathcal{O}(g^4)
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Für feste r und α ist die Selbstenergie eine Funktion des Impulses p und der Parameter g^2 und m_0 . Man kann folgenden Ansatz für die renormierte Gluinomasse am machen:

$$am \equiv am_0 + \delta(am) \quad (4.56)$$

Mit der Wahl

$$\delta(am) = -a\Sigma_{p=0} \quad (4.57)$$

und der Forderung

$$am = 0 \quad (4.58)$$

ergibt sich für den kritischen Massenparameter:

$$am_{cr} = a\Sigma_{p=0} \quad (4.59)$$

Damit bekommt man eine störungstheoretische Abschätzung für die kritische Linie. Dazu wird in dem Integral für die Selbstenergie aus (4.55) eine Substitution $ak_\mu \rightarrow k_\mu$ durchgeführt. Dann ist es sinnvoll, \hat{k} und \bar{k} ab jetzt wie folgt zu definieren:

$$\hat{k}_\mu = 2 \sin \frac{k_\mu}{2} \quad (4.60)$$

$$\bar{k}_\mu = \sin k_\mu \quad (4.61)$$

Außerdem ist zu beachten, daß am von am_0 nur um einen $\mathcal{O}(g^2)$ -Effekt abweicht. Damit ist es für eine Abschätzung der kritischen Linie in 1-Loop-Ordnung erlaubt, anstelle von am auch am_0 zu Null zu setzen. In höherer Ordnung ist dieser Effekt zu berücksichtigen. Die Abschätzung in 1-Loop lautet:

$$\delta(am) = -a\Sigma_{p=0}(g^2, am = 0) \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} &= g^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{k}^2} \left\{ \frac{r}{2} (3 - \alpha) \right. \\ &\quad + \frac{\sum_{\mu=1}^4 \left(\gamma_\mu \cos \frac{k_\mu}{2} + ir \sin \frac{k_\mu}{2} \right) \left(\frac{r}{2} \hat{k}^2 + i\gamma \bar{k} \right) \left(\gamma_\mu \cos \frac{k_\mu}{2} + ir \sin \frac{k_\mu}{2} \right)}{\frac{r^2}{4} (k^2)^2 + \bar{k}^2} \\ &\quad - (1 - \alpha) \sum_{\mu, \nu=1}^4 \hat{k}_\mu \hat{k}_\nu \\ &\quad \left. \times \frac{(\gamma_\nu \cos \frac{k_\nu}{2} + ir \sin \frac{k_\nu}{2}) \left(\frac{r}{2} \hat{k}^2 + i\gamma \bar{k} \right) \left(\gamma_\mu \cos \frac{k_\mu}{2} + ir \sin \frac{k_\mu}{2} \right)}{\hat{k}^2 \left(\frac{r^2}{4} (k^2)^2 + \bar{k}^2 \right)} \right\} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Es können die folgenden Identitäten ausgenutzt werden

$$\hat{k}_\mu \cos \frac{k_\mu}{2} = \bar{k}_\mu \quad (4.64)$$

$$(\gamma \bar{k})^2 = \bar{k}^2 \quad (4.65)$$

$$\sum_{\mu=1}^4 \cos \frac{k_\mu}{2} = 4 - \frac{1}{4} \hat{k}^2, \quad (4.66)$$

außerdem ist der Nenner des Integrals gerade in der Integrationsvariablen k , so daß im Zähler alle Terme vernachlässigt werden können, die ungerade in k sind. Damit verbleibt man mit:

$$\delta(am) = g^2 \frac{C_A}{2} r \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{k}^2} \left\{ 3 + \alpha + \frac{k^2(4 - \frac{1}{4}k^2) - 2\bar{k}^2 - \frac{r^2}{4}(\hat{k}^2)^2}{\bar{k}^2 + \frac{r^2}{4}(k^2)^2} - (1 - \alpha) \frac{-\bar{k}^2 - \frac{r^2}{4}(k^2)^2}{\bar{k}^2 + \frac{r^2}{4}(k^2)^2} \right\} \quad (4.67)$$

$$= g^2 \frac{C_A}{2} r \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{k}^2} \left(3 + \frac{\hat{k}^2(4 - \frac{1}{4}\hat{k}^2) - \bar{k}^2}{\bar{k}^2 + \frac{1}{4}r^2(\hat{k}^2)^2} \right) + \mathcal{O}(g^4), \quad (4.68)$$

Die auftretenden Integrale können leicht numerisch berechnet werden. Entsprechende C++ Programme sind im Anhang zu finden, die Ergebnisse sind:

$$\mathcal{J}_1 \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{k}^2} = 0.1549 \dots \quad (4.69)$$

$$\mathcal{J}_2(r) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\hat{k}^2(4 - \frac{1}{4}\hat{k}^2) - \bar{k}^2}{\hat{k}^2 \left(\bar{k}^2 + \frac{1}{4}r^2(\hat{k}^2)^2 \right)} \xrightarrow{r=1} 0.1865 \dots \quad (4.70)$$

Damit ergibt sich für den kritischen Gluinomassenparameter bei $r = 1$ und für $N_c = 2$ bzw. $N_c = 3$:

$$am_{cr}(N_c = 2) = -0.6514g^2 + \dots \quad (4.71)$$

$$am_{cr}(N_c = 3) = -0.9771g^2 + \dots \quad (4.72)$$

Mit

$$\beta = \frac{2N_c}{g^2} \quad (4.73)$$

erhält man damit

$$am_{cr}(N_c = 2) = -2.606 \frac{1}{\beta} + \dots \quad (4.74)$$

$$am_{cr}(N_c = 3) = -5.863 \frac{1}{\beta} + \dots \quad (4.75)$$

Aktuelle Simulationen der Münster-DESY-Kollaboration laufen bei Werten von $\beta = 2.3$ in der $SU(2)$, wofür die 1-Loop-Berechnung des kritischen Massenparameters folgendes Ergebnis liefert:

$$am_{cr}(N_c = 2) = -1.133 + \mathcal{O}(g^4) \quad (4.76)$$

Die entsprechende Vorhersage für die $SU(3)$ bei $\beta = 5.6$ lautet:

$$am_{cr}(N_c = 3) = -1.047 + \mathcal{O}(g^4) \quad (4.77)$$

Daraus läßt sich der kritische Hoppingparameter K in Ordnung g^2 berechnen:

$$K_{cr}(N_c = 2) = \frac{1}{8 + 2am_{cr}(N_c = 2)} \quad (4.78)$$

$$= 0.174 + \mathcal{O}(g^4) \quad (4.79)$$

$$K_{cr}(N_c = 3) = 0.169 + \mathcal{O}(g^4) \quad (4.80)$$

Damit liegt die störungstheoretische Abschätzung für die SU(2) zwar nicht weit weg von dem aus den Simulationen abgeschätzten Wert von 0.1955, die Differenz ist aber doch zu groß für eine ernsthafte Voraussage. Die Situation erscheint für die SU(3) vergleichbar, eine Abschätzung aus den Simulationen ergibt hier einen Wert von 0.1945, der allerdings noch nicht so genau bestimmt werden konnte. Eine ähnliche Diskrepanz zwischen Störungstheorie und Simulation ist auch aus der QCD bekannt. Diese Ungenauigkeit der Störungstheorie kann natürlich stets daran liegen, daß man entscheidende Ordnungen nicht berücksichtigt hat. Man könnte also eine 2-Loop-Rechnung anstellen, und auf bessere Ergebnisse hoffen. Man kann die Störungsreihe aber auch auf andere Arten verbessern. Für diese Berechnung könnte man z.B. ein sogenanntes Tadpole-Improvement durchführen. Allerdings ist es auf dem Gitter allgemein so, daß man Störungsreihen in der Kopplungskonstanten g^2 nicht blind vertrauen kann. Besser ist es, die Reihe durch eine physikalische Kopplungsgröße auszudrücken, wie z.B. durch die renormierte Kopplungskonstante.

4.4 Renormierungskonstanten der chiralen Ward-Identität auf dem Gitter und ihre Berechnung

In diesem Kapitel sollen die Größen, die bereits in Kapitel 2.5 mit dimensioneller Regularisierung berechnet wurden, auf dem Gitter berechnet werden und die entsprechenden Renormierungskonstanten angegeben werden. Daher werden zunächst zwei Renormierungsschemata erklärt. Außerdem werden die chiralen Ward-Identitäten auf dem Gitter betrachtet, um wieder Aussagen über die Eigenschaften der Renormierungskonstanten gewinnen zu können.

4.4.1 Das $\overline{\text{MS}}$ /LAT Renormierungsschema

Analog zu (2.104) sind auf dem Gitter – das als Regulator eingeführt wurde – die Größen $\Lambda_{\Gamma}^{LAT}(p_1, p_2)$ definiert. Sie sind für beliebige endliche Werte der Gitterkonstanten a endlich, ähnlich den Kontinuumsgrößen in dimensioneller Regularisierung bei endlichem ε . Im Limes $a \rightarrow 0$ divergieren diese Größen allerdings proportional zu $\ln(a^2)$ und man möchte diese Divergenz wieder in eine Renormierungskonstante absorbieren, so daß die renormierte Größe endlich bleibt.

Der Grundgedanke des $\overline{\text{MS}}/\text{LAT}$ Renormierungsschemas ist es, daß die renormierten Größen unabhängig von dem gewählten Regulator sein sollen ([CLV], [LV], [MPSTV]). Zu dem inversen Propagator auf dem Gitter

$$S_F^{-1, \text{LAT}}(p) = i\gamma\bar{p} + m_0 + \frac{ra}{2}\hat{p}^2 - \Sigma^{\text{LAT}}(p), \quad (4.81)$$

bei dem die Selbstenergie einen $i\hat{p}$ -proportionalen, einen m_0 -proportionalen und einen $\frac{r}{a}$ -proportionalen Anteil enthält

$$\Sigma^{\text{LAT}}(p) = i\hat{p}\Sigma_1^{\text{LAT}} + m_0\Sigma_2^{\text{LAT}} + \frac{r}{a}\Sigma_0^{\text{LAT}}, \quad (4.82)$$

lautet die renormierte Größe

$$S_F^{-1, \overline{\text{MS}}/\text{LAT}}(p) = \lim_{a \rightarrow 0} Z_\lambda^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} S_F^{-1, \text{LAT}}(p). \quad (4.83)$$

Diese soll in diesem Schema wie folgt gegeben sein:

$$S_F^{-1, \overline{\text{MS}}/\text{LAT}}(p) \stackrel{!}{=} S_F^{-1, \overline{\text{MS}}}(p). \quad (4.84)$$

Dadurch ist die Renormierungskonstante definiert. Ebenso wird für die Masse

$$m^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} = \lim_{a \rightarrow 0} Z_m^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} m \quad (4.85)$$

mit

$$m = m_0 - m_{cr} \quad (4.86)$$

festgelegt, daß für die renormierte Masse folgender Zusammenhang gilt:

$$m^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} \stackrel{!}{=} m^{\overline{\text{MS}}}. \quad (4.87)$$

Auch die Größen

$$\begin{aligned} \Lambda_\Gamma^{\text{LAT}}(p) &\equiv \Lambda_\Gamma^{\text{LAT}}(p, -p) \\ &= \Gamma + \tilde{\Lambda}_\Gamma^{\text{LAT}}(p) \end{aligned} \quad (4.88)$$

sollen an die im Kontinuum durch das $\overline{\text{MS}}$ Schema renormierten Größen angeglichen werden. Dazu muß für die renormierte Größe

$$\Lambda_\Gamma^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}}(p) = \lim_{a \rightarrow 0} Z_\lambda^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} Z_\Gamma^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} \Lambda_\Gamma^{\text{LAT}}(p) \quad (4.89)$$

die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\Lambda_\Gamma^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}}(p) \stackrel{!}{=} \Lambda_\Gamma^{\overline{\text{MS}}}(p). \quad (4.90)$$

4.4.2 Das RI Renormierungsschema

Mit dem $\overline{\text{MS}}$ /LAT Schema wurde eine Möglichkeit angegeben, wie man auf dem Gitter definierte Größen renormiert. Nachteil dieses Verfahrens ist, daß man die Renormierung im Kontinuum durchgeführt haben muß. Ein für das Gitter besser geeignetes Schema ist das *Regularization Invariant* (RI) Schema, daß auch als *Momentum Subtraction* (MOM) Schema bekannt ist.

Bei diesem Verfahren werden die jeweiligen Größen an ihren eigenen Treelevel-Wert bei festem Impuls $p^2 = \mu^2$ angepaßt. Die Größen werden dabei geeignet projiziert, um Probleme mit den Spinor- und Farbindizes zu umgehen ([LV], [MPSTV]). Die Renormierungskonstante des inversen Propagators ist also wie folgt festgelegt:

$$\begin{aligned} Z_\lambda^{RI-1} &= -i \frac{1}{4(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\frac{\partial S_F^{-1, LAT}(p)}{\partial \not{p}} \right) \Big|_{p^2=\mu^2} \\ &= -i \frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_\rho \frac{\partial S_F^{-1, LAT}(p)}{p_\rho} \right) \Big|_{p^2=\mu^2} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Dabei ist die Spur über Spinor- und Farbindizes zu verstehen. Man erhält:

$$Z_\lambda^{RI} = 1 + \Sigma_1^{LAT}(p) + \frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_\rho \not{p} \frac{\partial \Sigma_1^{LAT}}{\partial p_\rho} \right) \Big|_{p^2=\mu^2} \quad (4.92)$$

Die Renormierungskonstante der Masse ergibt sich aus

$$Z_\lambda^{RI} Z_m^{RI-1} m_0 (1 - \Sigma_2^{LAT}) \Big|_{p^2=\mu^2} = m_0 \quad (4.93)$$

zu

$$Z_m^{RI} = 1 + \Sigma_1^{LAT}(p) - \Sigma_2^{LAT}(p) + \frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_\rho \not{p} \frac{\partial \Sigma_1^{LAT}}{\partial p_\rho} \right) \Big|_{p^2=\mu^2} \quad (4.94)$$

Für die Größe $\Lambda_\Gamma^{LAT}(p)$ ist zunächst die projizierte Größe zu definieren

$$\Gamma_\Gamma^{LAT}(p) = \frac{1}{4(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(P_\Gamma \tilde{\Lambda}_\Gamma^{LAT}(p) \right), \quad (4.95)$$

mit dem Projektor

$$P_\Gamma = \mathbb{1}, \gamma_5, \frac{1}{4} \gamma_5 \gamma_\mu \quad (4.96)$$

für

$$\Gamma = \mathbb{1}, \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5. \quad (4.97)$$

Die Renormierungskonstante wird wie folgt festgelegt:

$$Z_\lambda^{RI} Z_\Gamma^{RI} \Gamma_\Gamma^{LAT}(p) \Big|_{p^2=\mu^2} = 1 \quad (4.98)$$

Daraus folgt für die gesuchten Renormierungskonstanten:

$$Z_{\Gamma}^{RI} = 1 - \Gamma_{\Gamma}^{LAT}(p) - \Sigma_1^{LAT}(p) - \frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_{\rho} \not{p} \frac{\partial \Sigma_1^{LAT}}{\partial p_{\rho}} \right) \Big|_{p^2=\mu^2} \quad (4.99)$$

Offensichtlich hängen die Renormierungskonstanten ausschließlich von Gittergrößen ab. Dies ist ein großer Vorteil dieses Schemas. Ein Nachteil ist, daß dieses Schema – anders als z.B. das $\overline{\text{MS}}$ Schema – von den Feldern, zwischen denen die Operatoren betrachtet werden, abhängt. Somit kann man in diesem Schema keine Eichinvarianz der Renormierungskonstanten erwarten.

4.4.3 Die chirale Ward-Identität auf dem Gitter

Auch auf dem Gitter erhofft man sich, mit Hilfe von Ward-Identitäten auf dem Gitter Aussagen über die Renormierungskonstanten zu erhalten [BMMRT]. Dazu betrachtet man wieder die chirale Transformation

$$\lambda(x) \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} \lambda(x), \quad (4.100)$$

die aufgrund der Majorana-Eigenschaft

$$\bar{\lambda}(x) \rightarrow \bar{\lambda}(x) e^{i\alpha\gamma_5} \quad (4.101)$$

entspricht. Anders als im Kontinuum ist die Gitterwirkung unter dieser Transformation nicht mehr invariant, die Symmetrie ist also gebrochen. Dennoch läßt sich aus dieser Transformation, wie im Kontinuum, eine Ward-Identität herleiten, die allerdings durch das Gitter Brechungsterme $X_A(x)$ enthält ([CLV], [Ga]). Die chirale Ward-Identität auf dem Gitter lautet

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu} \langle \lambda(x_1) J_{\mu}^5(x) \bar{\lambda}(x_2) \rangle &= 2m \langle \lambda(x_1) P(x) \bar{\lambda}(x_2) \rangle + \langle \lambda(x_1) X_A(x) \bar{\lambda}(x_2) \rangle \\ &\quad - \delta(x - x_1) \langle \gamma_5 \lambda(x_1) \bar{\lambda}(x_2) \rangle - \delta(x - x_2) \langle \lambda(x_1) \bar{\lambda}(x_2) \gamma_5 \rangle. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Damit ist klar, daß die Aussagen über die Renormierungskonstanten für das Gitter modifiziert werden müssen. Es gelten nur noch die im Vergleich mit dem Kontinuum schwächeren Aussagen

$$Z_A^{LAT} = \text{const.} \quad Z_P^{LAT} Z_m^{LAT} = \text{const.} \quad (4.103)$$

Allerdings ergeben sich die vorkommenden Konstanten direkt aus der Ward-Identität, so daß die Konstanten sowohl unabhängig von der gewählten Eichung als auch von dem gewählten Renormierungsschema sein müssen.

4.4.4 Der Gluino-Propagator

Zunächst wird der durch das Gitter regularisierte Fermionen-Propagator in 1-Loop-Ordnung ausgerechnet und die zugehörige Renormierungskonstante in den zuvor erklärten Schemata $\overline{\text{MS}}$ /LAT und RI berechnet.

4.4.4.1 Berechnung der nackten Größe

Zur Selbstenergie des Fermions tragen auf dem Gitter die beiden Diagramme aus Abb. 4.5 bei, die sich durch Anwenden der Feynman-Regeln als

$$\begin{aligned} \Sigma^{(A)} &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} V_{\rho}^{acd}[\bar{\lambda}, A_{\rho}, \lambda](p, q-p, -q) S_F[\bar{\lambda}, \lambda](q) \\ &\quad \times V_{\sigma}^{dcb}[\bar{\lambda}, A_{\sigma}, \lambda](q, p-q, -p) D_{\rho\sigma}(p-q) \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\Sigma^{(B)} = \frac{1}{2} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} V_{\rho\sigma}^{accb}[\bar{\lambda}, A_{\rho}, A_{\sigma}, \lambda](p, -q, q, -p) D_{\rho\sigma}(q) \quad (4.105)$$

schreiben lassen. In $\Sigma^{(B)}$ wurde dabei ein Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ eingefügt. Der in $\Sigma^{(A)}$ auftretende freie Propagator $S_F(q)$ ist dabei der einzige Term, der von der Gluinomasse abhängt. Ist man nur an der Wellenfunktionsrenormierung interessiert, so kann man direkt die Gluinomasse zu Null setzen. Möchte man für eine vollständige Renormierung des Propagators auch die Masse renormieren, so ist $S_F(q)$ zunächst nach m_0 zu entwickeln:

$$S_F(q) = \left[\frac{1}{a} \sum_{\lambda} i\gamma_{\lambda} \sin(aq_{\lambda}) + \frac{2r}{a} \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) + m_0 \right]^{-1} \quad (4.106)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{a} \sum_{\lambda} i\gamma_{\lambda} \sin(aq_{\lambda}) + \frac{2r}{a} \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right]^{-1} \\ &\quad - m_0 \left[\frac{1}{a} \sum_{\lambda} i\gamma_{\lambda} \sin(aq_{\lambda}) + \frac{2r}{a} \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right]^{-2} + \mathcal{O}(m_0)^2 \end{aligned} \quad (4.107)$$

$$\begin{aligned} &= \left[-ia \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin(aq_{\lambda}) + 2ra \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right] \\ &\quad \times \left[\sum_{\lambda} \sin^2(aq_{\lambda}) + 4r^2 \left(\sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right)^2 \right]^{-1} \\ &\quad - m_0 \left[-ia \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin(aq_{\lambda}) + 2ra \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right]^2 \\ &\quad \times \left[\sum_{\lambda} \sin^2(aq_{\lambda}) + 4r^2 \left(\sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right)^2 \right]^{-2} + \mathcal{O}(m_0)^2 \end{aligned} \quad (4.108)$$

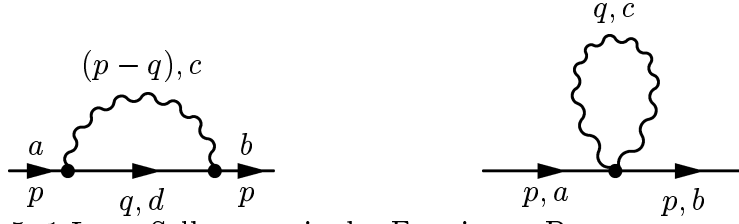


Abbildung 4.5: 1-Loop Selbstenergie des Fermionen-Propagators auf dem Gitter

Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

Es werden zunächst die Ausdrücke in (4.104) und (4.105) in Feynman-Eichung berechnet. Bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung in m_0 erhält man dafür:

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(A),FEY} = & \delta_{ab} g_0^2 C_A \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[i\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} + r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} \right] \\
 & \times \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sin^2 \frac{q_{\lambda}}{2} \right] \\
 & \times \left[i\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} + r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} \right] \\
 & \times \left[4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q-ap}{2} \right)_{\mu} \right]^{-1} \\
 & \times \left[\sum_{\nu} \sin^2 q_{\nu} + 4r^2 \left(\sum_{\nu} \sin^2 \frac{q_{\nu}}{2} \right)^2 \right]^{-1} \\
 & - m_0 \delta_{ab} g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[i\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} + r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} \right] \\
 & \times \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sin^2 \frac{q_{\lambda}}{2} \right]^2 \\
 & \times \left[i\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} + r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} \right] \\
 & \times \left[4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q-ap}{2} \right)_{\mu} \right]^{-1} \\
 & \times \left[\sum_{\nu} \sin^2 q_{\nu} + 4r^2 \left(\sum_{\nu} \sin^2 \frac{q_{\nu}}{2} \right)^2 \right]^{-2} + \mathcal{O}(m_0^2) \quad (4.109)
 \end{aligned}$$

sowie

$$\Sigma^{(B),FEY} = \delta_{ab} C_A \frac{g_0^2}{2a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[i \sum_{\rho} \gamma_{\rho} \sin(ap_{\rho}) - r \sum_{\lambda} \cos(ap_{\lambda}) \right] \left[4 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{q_{\mu}}{2} \right]^{-1}. \quad (4.110)$$

Da die ursprüngliche Integrationsvariable q_{μ} nur in der Kombination aq_{μ} auftritt, wurde direkt eine Substitution $aq_{\mu} \rightarrow q_{\mu}$ durchgeführt. Der Integrationsbereich ist dafür nach $[-\pi, \pi]^4$ zu reskalieren. Außerdem ist bei dem m_0 -unabhängigen Term von $\Sigma^{(A)}$ sowie bei $\Sigma^{(B)}$ ein Vorfaktor $\frac{1}{a}$ einzufügen. Bei dem m_0 -unabhängigen Term von $\Sigma^{(A)}$ ist dies notwendig, da der m_0 -unabhängige Term des Propagators in (4.108) einen globalen Vorfaktor a enthält, und der Gluonpropagator einen Vorfaktor a^2 trägt, aber durch die Substitution ein Vorfaktor $\frac{1}{a^4}$ entsteht. Auch in $\Sigma^{(B)}$ tritt der Gluonpropagator mit seinem Vorfaktor a^2 auf; außerdem enthält der einzige auftretende Vertex ebenfalls einen Vorfaktor a , so daß auch hier nach der Substitution ein Vorfaktor $\frac{1}{a}$ verbleibt. Der m_0 -abhängige Term von $\Sigma^{(A)}$ erhält allerdings keinen zusätzlichen Vorfaktor, da der entsprechende Term im Gluonpropagator proportional zu a^2 ist. Diese Argumentation ist sowohl für die Feynman-Eichung als auch für die Landau-Eichung gültig.

Zunächst wird der Teil von $\Sigma^{(A),FEY}$ berechnet, der unabhängig von m_0 ist. Da ein Vorfaktor $\frac{1}{a}$ auftritt und die Divergenzen von dem endlichen Teil im Limes $a \rightarrow 0$ zu extrahieren sind, muß der Zähler bis in die erste Ordnung von a entwickelt werden. Dazu werden einige Abkürzungen eingeführt, die sich in dieser und in den folgenden Rechnungen zu Renormierungskonstanten als nützlich erweisen:

$$\begin{aligned} s_{\rho} &= \sin\left(\frac{q_{\rho}}{2}\right) & c_{\rho} &= \cos\left(\frac{q_{\rho}}{2}\right) & q_{\rho} &= \sin(q_{\rho}) \\ \tilde{s}_{\rho} &= \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\rho} & \tilde{c}_{\rho} &= \cos\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\rho} & \tilde{q}_{\rho} &= \sin(q-ap)_{\rho} \\ \check{s}_{\rho} &= \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} & \check{c}_{\rho} &= \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} & \check{q}_{\rho} &= \sin(q+ap)_{\rho} \end{aligned} \quad (4.111)$$

Aus [MZ] werden die folgenden Definitionen verwandt:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &:= \sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{q_{\mu}}{2}\right) \\ \Delta_2 &:= \sum_{\mu} \sin^2(q_{\mu}) + 4r^2 \left(\sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{q_{\mu}}{2}\right) \right)^2 = \Delta_4 + 4r^2 \Delta_1^2 \\ \Delta_3 &:= \sum_{\mu} \sin^4\left(\frac{q_{\mu}}{2}\right) \\ \Delta_4 &:= \sum_{\mu} \sin^2(q_{\mu}) = 4(\Delta_1 - \Delta_3) \\ \Delta_5 &:= \sum_{\mu} \sin^2(q_{\mu}) \sin^2\left(\frac{q_{\mu}}{2}\right) \end{aligned} \quad (4.112)$$

Entsprechend zu (4.111) werden auch hierzu einige um ap verschobene Größen definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1 &:= \sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\mu} \\ \check{\Delta}_1 &:= \sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\mu} \\ \tilde{\Delta}_3 &:= \sum_{\mu} \sin^4\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\mu} \\ \tilde{\Delta}_4 &:= \sum_{\mu} \sin^2(q-ap)_{\mu} \end{aligned} \quad (4.113)$$

Die in (4.112) mit angegebene Identität für Δ_2 folgt sofort aus der Definition, und die für Δ_4 wird in (D.1) nachgerechnet.

Mit diesen Definitionen läßt sich der Zähler in $\Sigma^{(A),FEY}$ schreiben als:

$$\begin{aligned} & (i\gamma_\rho \check{c}_\rho + r\check{s}_\rho)(-i\not{d} + 2r\Delta_1)(i\gamma_\rho \check{c}_\rho + r\check{s}_\rho) \\ &= i\check{c}_\rho^2 \gamma_\rho \not{d} \gamma_\rho + r\check{s}_\rho \check{c}_\rho \not{d} \gamma_\rho + r\check{s}_\rho \check{c}_\rho \gamma_\rho \not{d} - 2r\Delta_1 \check{c}_\rho^2 \gamma_\rho \gamma_\rho \\ & \quad + 2ir^2 \Delta_1 \check{s}_\rho \check{c}_\rho \gamma_\rho + 2ir^2 \Delta_1 \check{s}_\rho \check{c}_\rho \gamma_\rho - ir^2 \check{s}_\rho^2 \not{d} + 2r^3 \check{s}_\rho^2 \Delta_1 \end{aligned} \quad (4.114)$$

Unter Benutzung von $\gamma_\rho \not{d} \gamma_\rho = 2q_\rho \gamma_\rho - \not{d}$, $\gamma_\rho \gamma_\rho = \mathbb{1}$ und $\{\not{d}, \gamma_\rho\} = 2q_\rho$ (alles für festes ρ) ergibt sich dann

$$2i\check{c}_\rho^2 q_\rho \gamma_\rho - i\check{c}_\rho^2 \not{d} + 2r\check{s}_\rho \check{c}_\rho q_\rho - 2r\Delta_1 \check{c}_\rho^2 + 4ir^2 \Delta_1 \check{s}_\rho \check{c}_\rho \gamma_\rho - ir^2 \check{s}_\rho^2 \not{d} + 2r^3 \check{s}_\rho^2 \Delta_1. \quad (4.115)$$

Die Durchführung der schon angekündigten Entwicklung nach der Gitterkonstanten a ergibt

$$\check{s}_\rho = \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\rho = \sin\frac{q_\rho}{2} + \frac{1}{2}ap_\rho \cos\frac{q_\rho}{2} + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.116)$$

$$\check{c}_\rho = \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\rho = \cos\frac{q_\rho}{2} - \frac{1}{2}ap_\rho \sin\frac{q_\rho}{2} + \mathcal{O}(a^2), \quad (4.117)$$

und somit sind die folgenden Ersetzungen gerechtfertigt

$$\check{s}_\rho = s_\rho + \frac{1}{2}ap_\rho c_\rho + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.118)$$

$$\check{c}_\rho^2 = c_\rho^2 - ap_\rho s_\rho c_\rho + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.119)$$

$$\check{s}_\rho^2 = s_\rho^2 + ap_\rho s_\rho c_\rho + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.120)$$

$$\check{s}_\rho \check{c}_\rho = s_\rho c_\rho + \frac{1}{2}ap_\rho (c_\rho^2 - s_\rho^2) + \mathcal{O}(a^2). \quad (4.121)$$

Dies ergibt für den Zähler von $\Sigma^{(A)}$

$$\begin{aligned} & 2ic_\rho^2 q_\rho \gamma_\rho - ic_\rho^2 \not{d} + 2rs_\rho c_\rho q_\rho - 2r\Delta_1 c_\rho^2 + 4ir^2 \Delta_1 s_\rho c_\rho \gamma_\rho - ir^2 s_\rho^2 \not{d} + 2r^3 s_\rho^2 \Delta_1 \\ & + ap_\rho [-2is_\rho c_\rho q_\rho \gamma_\rho + is_\rho c_\rho \not{d} + r(c_\rho^2 - s_\rho^2)q_\rho + 2r\Delta_1 s_\rho c_\rho + 2ir^2 \Delta_1 (c_\rho^2 - s_\rho^2)\gamma_\rho \\ & - ir^2 s_\rho c_\rho \not{d} + 2r^3 s_\rho c_\rho \Delta_1]. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Die Entwicklung des Nenners nach a erfordert dann die Umformung

$$\frac{1}{\tilde{\Delta}_1} = \frac{1}{\Delta_1} + a \frac{p \cdot q}{\Delta_1^2} + \mathcal{O}(a^2), \quad (4.123)$$

die in (D.2) nachgerechnet wird.

Es werden nun die Terme des Zählers betrachtet, die nicht von p abhängen und keinen Vorfaktor r tragen:

$$\begin{aligned} 2ic_\rho^2 q_\rho \gamma_\rho - ic_\rho^2 \not{d} &= 2i(1 - s_\rho^2)q_\rho \gamma_\rho - i(4 - s_\rho^2)\not{d} \\ &= -2i\not{d} - 2is_\rho^2 q_\rho \gamma_\rho + is_\rho^2 \not{d} \end{aligned} \quad (4.124)$$

Der erste Term ergibt einen divergenten Beitrag, der später diskutiert wird. Die beiden anderen Summanden ergeben gemeinsam mit dem Nenner

$$g_0^2 C_A \frac{1}{a} \frac{1}{4\Delta_1 \Delta_2} \frac{-4iap_\mu q_\mu s_\rho^2 q_\rho \gamma_\rho + 2iap_\mu q_\mu s_\rho^2 q_\nu \gamma_\nu}{4\Delta_1}. \quad (4.125)$$

Da alle betrachteten Ausdrücke unter einem Integral über q stehen, und die Integrationsgrenzen symmetrisch um Null verteilt sind, lassen sich einige Vereinfachungen durchführen. In endlichen Ausdrücken unter dem Integral kann man nämlich ausnutzen, daß ungerade Funktionen verschwinden, wenn die Integrationsgrenzen symmetrisch um Null liegen. Damit trägt der erste Summand nur für $\rho = \mu$ bei, der zweite nur für $\nu = \mu$:

$$\frac{1}{a} \frac{g_0^2 C_A}{4\Delta_1 \Delta_2} \frac{-4iap_\rho s_\rho^2 q_\rho^2 \gamma_\rho + 2iap_\mu q_\mu^2 s_\rho^2 \gamma_\mu}{4\Delta_1} \quad (4.126)$$

Für diesen Ausdruck kann man weiter ausnutzen, daß er unter dem Integral steht. Dazu schreibt man $p_\rho \gamma_\rho$, bzw. $p_\mu \gamma_\mu$ vor das Integral. Da das Integral über vier Dimensionen geht, und alle die gleichen Grenzen haben, gelten die Identitäten

$$\int d^4 q s_{\rho_0}^2 q_{\rho_0}^2 = \frac{1}{4} \int d^4 q \Delta_5 \quad (4.127)$$

und

$$\int d^4 q q_{\rho_0}^2 = \frac{1}{4} \int d^4 q \Delta_4, \quad (4.128)$$

wobei keine Summation über ρ_0 erfolgt. Mit diesen Rechenregeln unter dem Integral, die in den späteren Kapiteln in ähnlicher Form noch häufig angewandt werden, erhält man für den hier betrachteten Ausdruck:

$$g_0^2 C_A \frac{1}{a} \frac{1}{4\Delta_1 \Delta_2} \frac{-iap\not{p}\Delta_5 + \frac{1}{2}iap\not{p}\Delta_4\Delta_1}{4\Delta_1} = g_0^2 C_A \frac{1}{4\Delta_1 \Delta_2} \frac{i}{8} \not{p} \left[-\frac{2\Delta_5}{\Delta_1} + \Delta_4 \right] \quad (4.129)$$

Es werden nun die Terme des Zählers in Ordnung r betrachtet. Diese führen auf eine lineare Divergenz in $\frac{1}{a}$ und werden später in Σ_0 berücksichtigt. Explizit erhält man bis auf den Vorfaktor:

$$\begin{aligned} 2rs_\rho c_\rho q_\rho - 2r\Delta_1 c_\rho^2 &= rq_\rho^2 - 8r\Delta_1 + 2r\Delta_1 s_\rho^2 \\ &= r\Delta_4 - 8r\Delta_1 + 2r\Delta_1^2 \end{aligned} \quad (4.130)$$

Die Terme des Zählers in r^2 ergeben einen endlichen Term der Form

$$\frac{8iar^2\Delta_1 p_\mu q_\mu s_\rho c_\rho \gamma_\rho - 2iar^2 p_\mu q_\mu s_\rho^2 \not{q}}{4\Delta_1} = \frac{4iar^2\Delta_1 p_\mu q_\mu q_\rho \gamma_\rho - 2iar^2 p_\mu q_\mu s_\rho^2 q_\nu \gamma_\nu}{4\Delta_1}. \quad (4.131)$$

Da über q integriert wird, erhält man mit den gleichen Rechenregeln wie zuvor:

$$\begin{aligned} \frac{iar^2\Delta_1 \not{p}\Delta_4 - 2iar^2 p_\mu q_\mu^2 s_\rho^2 \gamma_\mu}{4\Delta_1} &= \frac{r^2 iap\not{p}(\Delta_1\Delta_4 - \frac{1}{2}\Delta_1\Delta_4)}{4\Delta_1} \\ &= iap\not{p}r^2 \frac{1}{8} \Delta_4 \end{aligned} \quad (4.132)$$

Schließlich gibt es noch einen Term in Ordnung r^3 , der wieder zu Σ_0 beiträgt:

$$2r^3 s_\rho^2 \Delta_1 = 2r^3 \Delta_1^2 \quad (4.133)$$

Es ist noch der Term proportional zu ap_ρ zu diskutieren, der auf einen endlichen Beitrag führt. Dabei kann man die in q ungeraden Terme von vorneherein von der Betrachtung ausschließen, denn sie verschwinden nach Integration über d^4q . Damit hat man dann:

$$\begin{aligned} & ap_\rho [-2is_\rho c_\rho q_\rho \gamma_\rho + is_\rho c_\rho \not{q} + 2ir^2 \Delta_1 (c_\rho^2 - s_\rho^2) \gamma_\rho - ir^2 s_\rho c_\rho \not{q}] \\ &= ap_\rho [-iq_\rho^2 \gamma_\rho + \frac{i}{2} q_\rho q_\mu \gamma_\mu + 2ir^2 \Delta_1 \gamma_\rho - 4ir^2 \Delta_1 s_\rho^2 \gamma_\rho - \frac{i}{2} r^2 q_\rho q_\mu \gamma_\mu] \end{aligned} \quad (4.134)$$

Da sich dies unter einem Integral $\int d^4q$ befindet, kann man auch

$$\begin{aligned} & iap \not{p} [-\frac{1}{4} \Delta_4 + \frac{1}{8} \Delta_4 + 2r^2 \Delta_1 - r^2 \Delta_1^2 - \frac{1}{8} r^2 \Delta_4] \\ &= \frac{i}{8} a \not{p} (-\Delta_4 + 16r^2 \Delta_1 - 8r^2 \Delta_1^2 - r^2 \Delta_4) \end{aligned} \quad (4.135)$$

dafür schreiben. Damit kann man die einzelnen Zwischenergebnisse wie folgt zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(A), FEY}(p) &= g_0^2 C_A \left\{ \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-2i \not{q}}{\left(4 \sum_\mu \sin^2 \left(\frac{q-ap}{2}\right)_\mu\right) \left(\sum_\nu \sin^2 q_\nu + 4r^2 \Delta_1^2\right)} \right. \\ &\quad + \frac{1}{8} i \not{p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-2\frac{\Delta_3}{\Delta_1} + \Delta_4 + r^2 \Delta_4 - \Delta_4 + 16r^2 \Delta_1 - 8r^2 \Delta_1^2 - r^2 \Delta_4}{4\Delta_1 \Delta_2} \\ &\quad \left. + \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{r\Delta_4 - 8r\Delta_1 + 2r\Delta_1^2 + 2r^3 \Delta_1^2}{4\Delta_1 \Delta_2} \right\} + \mathcal{O}(m_0) \end{aligned} \quad (4.136)$$

Der Term in m_0 wird später betrachtet. Die Divergenz der bisher berechneten Größe steckt im ersten (logarithmisch divergenten) Integral, welches auf eine tabellierte Form zu bringen ist, wozu das Δ_2 im Nenner noch etwas umgeformt werden muß. Dazu benutzt man die Formel

$$\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{4\Delta_1} + \frac{\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2}{\Delta_1 \Delta_2} \quad (4.137)$$

aus (D.11). Führt man diese Ersetzung in dem divergenten Integral durch, so wird klar, daß der erste Term der Ersetzung eine Divergenz liefert, da er sich wie $1/q^2$ verhält. Der zweite Term liefert allerdings nur noch endliche Terme.

Da unter dem Integral alle in q ungeraden Terme, die endlich sind, verschwinden, gilt mit (D.2) für

$$\frac{\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2}{\Delta_1 \Delta_2} \frac{-2i \not{q}}{4 \sum_\mu \sin^2 \left(\frac{q-ap}{2}\right)_\mu}, \quad (4.138)$$

daß man diesen Term ersetzen kann durch

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2}{\Delta_1 \Delta_2} \frac{-4iap_\mu q_\mu \not{q}}{(4\Delta_1)^2} + \mathcal{O}(a^2) &= \frac{\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2}{16\Delta_1^3 \Delta_2} (-4iap_\mu q_\mu^2 \gamma_\mu) + \mathcal{O}(a^2) \\ &= -iap \frac{\Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{16\Delta_1^3 \Delta_2} + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (4.139)$$

Die Divergenz ist nur in dem ersten aus (D.11) entstehenden Term enthalten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-2i \sin q_\rho \gamma_\rho}{\left(4 \sum_\mu \sin^2 \left(\frac{q-\alpha p}{2}\right)_\mu\right) \left(4 \sum_\nu \sin^2 \frac{q_\nu}{2}\right)} \\ = -\frac{4i}{a} \gamma_\rho \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin \frac{q_\rho}{2} \cos \frac{q_\rho}{2}}{\left(4 \sum_\mu \sin^2 \left(\frac{q-\alpha p}{2}\right)_\mu\right) \left(4 \sum_\nu \sin^2 \frac{q_\nu}{2}\right)} \end{aligned} \quad (4.140)$$

Für das Integral

$$I_\rho := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin \frac{q_\rho}{2} \cos \frac{q_\rho}{2}}{\left(4 \sum_\mu \sin^2 \left(\frac{q-\alpha p}{2}\right)_\mu\right) \left(4 \sum_\nu \sin^2 \frac{q_\nu}{2}\right)} \quad (4.141)$$

ist das Verhalten für $ap \rightarrow 0$ in [EM] angegeben mit

$$I_\rho = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{4} ap_\rho \right) (2 - L(a^2 p^2)) - \frac{1}{32} ap_\rho Z_{0000}, \quad (4.142)$$

wobei

$$L(a^2 p^2) = \ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0000}. \quad (4.143)$$

Die benutzten Konstanten haben die Werte $F_{0000} \approx 4.369$ sowie $Z_{0000} \approx 0.1549$.

Im Vergleich mit [EM] ist zu beachten, daß das dort tabellierte Integral sich von dem hier betrachteten durch ein Vorzeichen vor dem ap unterscheidet. Da das Ergebnis eine ungerade Funktion in p ist, unterscheidet sich auch das Ergebnis um genau dieses Vorzeichen.

Durch Einführen einer dritten Konstanten $F_{0001} \approx 1.311$ gemäß

$$\frac{1}{(4\pi)^2} (F_{0001} - F_{0000}) = -\frac{1}{8} Z_{0000} \quad (4.144)$$

sowie

$$L_1 \equiv \ln(ap)^2 + \gamma_E - F_{0001} \quad (4.145)$$

ergibt sich schließlich

$$I_\mu = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{4} ap_\mu \right) (2 - L_1). \quad (4.146)$$

Damit kann man den divergenten Term (4.140) schreiben als

$$\begin{aligned} -4i\gamma_\rho I_\rho &= \frac{4i}{a} \gamma_\rho \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4} ap_\rho (L_1 - 2) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} i \not{p} (L_1 - 2), \end{aligned} \quad (4.147)$$

Und man kann $\Sigma^{(A),FEY}$ wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(A),FEY} = & \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ i \not{p} \left[\ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0001} - 2 \right. \right. \\ & + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{4} \frac{\Delta_5}{\Delta_1^2 \Delta_2} - \frac{1}{4} \frac{\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2} + 2r^2 \frac{1}{\Delta_2} + r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right) \\ & \left. + 4\pi^2 \frac{r}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{\Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{8}{\Delta_2} + 2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} (1 + r^2) \right] \right\} + \mathcal{O}(m_0) \quad (4.148) \end{aligned}$$

Als nächstes ist also der m_0 -abhängige Teil von $\Sigma^{(A),FEY}$ zu berechnen. Der Zähler dieses Terms lautet

$$\begin{aligned} & (i\gamma_\rho c_\rho + r s_\rho)(-i \not{q} + 2r\Delta_1)^2 (i\gamma_\rho c_\rho + r s_\rho) \\ & = c_\rho^2 q^2 + 4ir c_\rho^2 \Delta_1 \gamma_\rho \not{q} \gamma_\rho - 4r^2 \Delta_1^2 c_\rho^2 - 2ir \gamma_\rho s_\rho c_\rho q^2 + 4r^2 \{\gamma_\rho, \not{q}\} c_\rho s_\rho \Delta_1 \\ & \quad + 8ir^3 \gamma_\rho c_\rho s_\rho \Delta_1^2 - r^2 s_\rho^2 q^2 - 4ir^3 \not{q} s_\rho^2 \Delta_1 + 4r^4 s_\rho^2 \Delta_1^2 \quad (4.149) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = c_\rho^2 q^2 + 8ir \Delta_1 c_\rho^2 q_\rho \gamma_\rho - 4ir \Delta_1 c_\rho^2 \not{q} - 2ir s_\rho c_\rho q^2 \gamma_\rho - 4r^2 \Delta_1^2 c_\rho^2 + 8r^2 \Delta_1 c_\rho s_\rho q_\rho \\ & \quad - r^2 s_\rho^2 q^2 + 8ir^3 \Delta_1^2 c_\rho s_\rho \gamma_\rho - 4ir^3 \Delta_1 s_\rho^2 \not{q} + 4r^4 \Delta_1^2 s_\rho^2. \quad (4.150) \end{aligned}$$

Im zugehörigen Nenner steht die Integrationsvariable in sechster Potenz, damit kommt der einzige divergente Beitrag von dem Term

$$c_\rho^2 q^2 = (1 - s_\rho^2) q^2 = (4 - \Delta_1) \Delta_4. \quad (4.151)$$

Bei den verbleibenden Termen kann man im Nenner p zu Null setzen, so daß der Nenner gerade in q ist. Ungerade Terme in q verschwinden somit unter dem Integral, so daß man mit folgenden, konvergenten Termen verbleibt:

$$\begin{aligned} & -4r^2 \Delta_1^2 c_\rho^2 + 4r^2 \Delta_1 q_\rho^2 - r^2 s_\rho^2 q^2 + 4r^4 \Delta_1^2 s_\rho^2 \\ & = -4r^2 \Delta_1^2 (4 - \Delta_1) + 4r^2 \Delta_1 \Delta_4 - r^2 \Delta_1 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^3 \quad (4.152) \end{aligned}$$

$$= 3r^2 \Delta_1 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1^2 + 4r^2 \Delta_1^3 + 4r^4 \Delta_1^3 \quad (4.153)$$

Insgesamt lautet der m_0 -abhängige Teil von $\Sigma^{(A),FEY}$ damit:

$$\begin{aligned} & -m_0 g_0^2 C_A \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1) \Delta_4}{\left(4 \sum_\mu \sin^2 \left(\frac{q - a p}{2} \right)_\mu \right) \Delta_2^2} \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{3r^2 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1 + 4r^2 (1 + r^2) \Delta_1^2}{4 \Delta_2^2} \right\} \quad (4.154) \end{aligned}$$

Mit

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{16 \Delta_1^2} + \frac{(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \quad (4.155)$$

aus (D.17), wobei der zweite Term gemäß vorheriger Diskussion stets endliche Beiträge liefert, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& -m_0 g_0^2 C_A \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1) \Delta_4}{16 \left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q - ap}{2} \right)_{\mu} \right) \Delta_1^2} \right. \\
& + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{3r^2 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1 + 4r^2(1 + r^2) \Delta_1^2}{4\Delta_2^2} \\
& \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1) \Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2) (2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{4\Delta_1^3 \Delta_2^2} \right\} \quad (4.156)
\end{aligned}$$

Nur das erste Integral ist hiervon noch divergent, es läßt sich weiter wie folgt aufteilen:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1) \Delta_4}{16 \left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q - ap}{2} \right)_{\mu} \right) \Delta_1^2} \\
& = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_4}{4 \left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q - ap}{2} \right)_{\mu} \right) \Delta_1^2} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_4}{64 \Delta_1^2} \quad (4.157)
\end{aligned}$$

Der divergente Beitrag ist, abgesehen von dem Vorfaktor, durch den Ausdruck

$$\begin{aligned}
& 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4\Delta_4}{4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{(q - ap)_{\mu}}{2} \right) (4\Delta_1)^2} \\
& = 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4\Delta_4}{\left[4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{(q - ap)_{\mu}}{2} \right) \right] \left[4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q_{\mu}}{2} \right) \right]^2} \quad (4.158)
\end{aligned}$$

gegeben. Mit der Abkürzung

$$I_{\mu\nu} := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin \left(\frac{q_{\mu}}{2} \right) \cos \left(\frac{q_{\mu}}{2} \right) \sin \left(\frac{q_{\nu}}{2} \right) \cos \left(\frac{q_{\nu}}{2} \right)}{\left[4 \sum_{\rho} \sin^2 \left(\frac{(q - ap)_{\rho}}{2} \right) \right] \left[4 \sum_{\rho} \sin^2 \left(\frac{q_{\rho}}{2} \right) \right]^2} \quad (4.159)$$

ergibt sich hieraus:

$$16\pi^2 \cdot 16\delta_{\mu\nu} I_{\mu\nu} \quad (4.160)$$

Die Struktur der Divergenz von $I_{\mu\nu}$ im Limes $ap \rightarrow 0$ findet man in [EM] als

$$I_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{16} \delta_{\mu\nu} (2 - L(a^2 p^2) + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{8p^2}) \right] - \frac{1}{128} \delta_{\mu\nu} Z_{0000} \quad (4.161)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{16} \delta_{\mu\nu} (2 - \ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001}) + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{8p^2} \right], \quad (4.162)$$

und das divergente Integral läßt sich als

$$16\pi^2 \cdot 16\delta_{\mu\nu} I_{\mu\nu} = 8 - 4\ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 2 \quad (4.163)$$

schreiben.

Damit lautet $\Sigma^{(A),FEY}$:¹

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(A),FEY} = & \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ i\not{p} \left[\ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0001} - 2 \right. \right. \\
 & + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{4} \frac{\Delta_5}{\Delta_1^2 \Delta_2} - \frac{1}{4} \frac{\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2} + 2r^2 \frac{1}{\Delta_2} + r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right) \Big] \\
 & + 4\pi^2 \frac{r}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{\Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{8}{\Delta_2} + 2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} (1 + r^2) \right] \\
 & - m_0 \left[-4 \ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 \right. \\
 & + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{3r^2 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1 + 4r^2(1 + r^2) \Delta_1^2}{\Delta_2^2} - \frac{\Delta_4}{16\Delta_1^2} \right) \\
 & \left. \left. + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1) \Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2) (2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \right] \right\} \\
 & + \mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a)
 \end{aligned} \tag{4.164}$$

Der Beitrag des zweiten Diagramms ist durch den Ausdruck

$$\Sigma^{(B),FEY} = g_0^2 C_A \frac{1}{2a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[i \sum_{\rho} \sin(ap_{\rho}) - r \sum_{\rho} \cos(ap_{\rho}) \right] \left[4 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{q_{\mu}}{2} \right]^{-1} \tag{4.165}$$

gegeben. Die Entwicklung nach Potenzen von a liefert daher:

$$\Sigma^{(B),FEY}(p) = \frac{1}{2a} \frac{\alpha_s}{4\pi} C_A (16\pi^2) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{ia\not{p} - 4r}{4\Delta_1} + \mathcal{O}(a) \tag{4.166}$$

oder anders gesagt:

$$\Sigma^{(B),FEY}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[i\not{p} 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\Delta_1} - \frac{2r}{a} 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_1} \right] + \mathcal{O}(a) \tag{4.167}$$

Damit verbleibt man mit

$$\Sigma^{FEY}(p) = i\not{p} \Sigma_1^{FEY} + m_0 \Sigma_2^{FEY} + \frac{r}{a} \Sigma_0^{FEY}, \tag{4.168}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1^{FEY} = & \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[\ln(ap)^2 + \gamma_E - F_{0001} - 2 \right. \\
 & \left. + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{4} \frac{\Delta_5}{\Delta_1^2 \Delta_2} - \frac{1}{4} \frac{\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2} + \frac{2r^2}{\Delta_2} - r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} + \frac{1}{2\Delta_1} \right) \right]
 \end{aligned}$$

¹Mit $\mathcal{O}(a)$ sind dabei alle Terme gemeint, die im Limes $a \rightarrow 0$ verschwinden, also auch Terme der Form $a \ln a$.

$$+\mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a) \quad (4.169)$$

$$= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [\ln(ap)^2 + \gamma_E - F_{0001} - 2 + 4\pi^2 I_{\Sigma_1}^{FEY}] + \mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a), \quad (4.170)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{FEY} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[4 \ln(a^2 p^2) + 4\gamma_E - 4F_{0001} - 10 \right. \\ &\quad - 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{3r^2 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1 + 4r^2(1+r^2)\Delta_1^2}{\Delta_2^2} - \frac{\Delta_4}{16\Delta_1^2} \right) \\ &\quad \left. - 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4-\Delta_1)\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a) \end{aligned} \quad (4.171)$$

$$= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [4 \ln(ap)^2 + 4\gamma_E - 4F_{0001} - 10 - 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{FEY}] + \mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a) \quad (4.172)$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma_0^{FEY} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{\Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{8}{\Delta_2} + 2(1+r^2) \frac{\Delta_1}{\Delta_2} - \frac{2}{\Delta_1} \right) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a) \end{aligned} \quad (4.173)$$

$$= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A 4\pi^2 I_{\Sigma_0} + \mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a). \quad (4.174)$$

Die Integrale I_{Σ_1} , I_{Σ_2} und I_{Σ_0} sind für $r = 1$ mit den Programmen aus dem Anhang berechnet worden, es ergibt sich:

$$I_{\Sigma_1}^{FEY} = 0.369470 \quad (4.175)$$

$$I_{\Sigma_2}^{FEY} = -0.173133 \quad (4.176)$$

$$I_{\Sigma_0} = -0.683119 \quad (4.177)$$

Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

In 1-Loop-Ordnung sind für die Selbstenergie des Propagators die beiden Diagramme (4.104) und (4.105) zu berechnen. Beide enthalten den Gluonen-Propagator und sind somit in Landau-Eichung erneut zu berechnen. Der zusätzliche Term zu dem ersten Diagramm lautet:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(A),(1-\alpha)} &= -\delta_{ab} g_0^2 C_A \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\rho} \\ &\quad \times \left[i\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} + r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} \right] \\ &\quad \times \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sin^2 \frac{q_{\lambda}}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[i\gamma_\tau \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\tau + r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\tau \right] \\
 & \times \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_\tau \left[2 \sum_\mu \sin^2\left(\frac{q-ap}{2}\right)_\mu \right]^{-2} \\
 & \times \left[\sum_\nu \sin^2 q_\nu + 4r^2 \left(\sum_\nu \sin^2 \frac{q_\nu}{2} \right)^2 \right]^{-1} \\
 & + m_0 \delta_{ab} g_0^2 C_A \int_{-\pi}^\pi \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_\rho \\
 & \times \left[i\gamma_\rho \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\rho + r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\rho \right] \\
 & \times \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sin^2 \frac{q_\lambda}{2} \right]^2 \\
 & \times \left[i\gamma_\tau \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\tau + r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\tau \right] \\
 & \times \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_\tau \left[2 \sum_\mu \sin^2\left(\frac{q-ap}{2}\right)_\mu \right]^{-2} \\
 & \times \left[\sum_\nu \sin^2 q_\nu + 4r^2 \left(\sum_\nu \sin^2 \frac{q_\nu}{2} \right)^2 \right]^{-2} + \mathcal{O}(m_0^2) \quad (4.178)
 \end{aligned}$$

Es wird zunächst der Term von (4.178) berechnet, der nicht proportional zu m_0 ist, also folgender Ausdruck:

$$-g^2 C_A \frac{1}{a} \int_{-\pi}^\pi \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho (i\gamma_\rho \check{c}_\rho + r \check{s}_\rho) (-i\not{q} + 2r\Delta_1) (i\gamma_\tau \check{c}_\tau + r \check{s}_\tau) \tilde{s}_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2}. \quad (4.179)$$

Von diesem werden zunächst nur die Terme proportional zu r oder r^3 berechnet, also die Terme

$$\begin{aligned}
 & g^2 C_A \frac{r}{a} \int_{-\pi}^\pi \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2\Delta_1 \tilde{s}_\rho \gamma_\rho \check{c}_\rho \gamma_\tau \check{c}_\tau \tilde{s}_\tau - \tilde{s}_\rho \check{s}_\rho \not{q} \gamma_\tau \check{c}_\tau \tilde{s}_\tau - \tilde{s}_\rho \gamma_\rho \check{c}_\tau \not{q} \tilde{s}_\tau - 2r^2 \Delta_1 \tilde{s}_\rho \check{s}_\rho \tilde{s}_\tau \check{s}_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \\
 & = g^2 C_A \frac{r}{a} \int_{-\pi}^\pi \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2}\Delta_4 - 2r^2 \Delta_1^2}{4\Delta_1 \Delta_2} \\
 & = -g^2 C_A \frac{r}{a} \int_{-\pi}^\pi \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{8\Delta_1} \quad (4.180)
 \end{aligned}$$

Die anderen Terme sind

$$\begin{aligned}
 & -g^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^\pi \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \check{c}_\rho \check{c}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} + g^2 C_A \frac{ir^2}{a} \int_{-\pi}^\pi \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \check{s}_\rho \check{s}_\tau \not{q}}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \\
 & -g^2 C_A \frac{2ir^2}{a} \int_{-\pi}^\pi \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_1 \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \check{s}_\rho \check{c}_\tau \gamma_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} - g^2 C_A \frac{2ir^2}{a} \int_{-\pi}^\pi \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_1 \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \check{s}_\tau \check{c}_\rho \gamma_\rho}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2}. \quad (4.181)
 \end{aligned}$$

Power-counting zeigt, das nur der erste Term divergent für $ap \rightarrow 0$ ist, die anderen drei Terme sind endlich. Es werden zunächst nur die drei endlichen Terme betrachtet, wobei zwei davon identisch sind, so daß man mit

$$g^2 C_A \frac{ir^2}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \not{q}}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} - g^2 C_A \frac{ir^2}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_1 \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\tau}{\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \quad (4.182)$$

verbleibt. In diesen Termen ist eine Entwicklung nach a durchzuführen. Diese Entwicklung wird um $q - ap$ gemacht, so daß die Entwicklungen

$$\not{q} = \not{\tilde{q}} + ap_\mu \gamma_\mu \cos(\tilde{q}_\mu) + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.183)$$

$$\Delta_1 = \tilde{\Delta}_1 + \frac{a}{2} p \cdot \tilde{q} + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.184)$$

$$\tilde{s}_\rho = \tilde{s}_\rho + ap_\rho \tilde{c}_\rho + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.185)$$

$$\tilde{c}_\rho = \tilde{c}_\rho - ap_\rho \tilde{s}_\rho + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.186)$$

$$\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_2} - 2a \frac{p \cdot \tilde{q} - 2p_\rho \tilde{q}_\rho \tilde{s}_\rho^2 + 2r^2 \tilde{\Delta}_1 p \cdot \tilde{q}}{\tilde{\Delta}_2^2} + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.187)$$

benötigt werden. Die letzte Entwicklung ist dabei nicht sofort zu erkennen, sie ist in (D.3) zu finden.

Mit den angegebenen Ersetzungen erhält man für die beiden zuvor identifizierten endlichen Integrale

$$\begin{aligned} & g^2 C_A \frac{ir^2}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \not{\tilde{q}}}{4\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} - g^2 C_A \frac{ir^2}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\Delta}_1 \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\tau}{\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} \\ & + g^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau p_\rho \tilde{c}_\rho \not{\tilde{q}}}{4\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} + g^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho p_\tau \tilde{c}_\tau \not{\tilde{q}}}{4\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} \\ & + g^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau p_\mu \cos(\tilde{q}_\mu) \gamma_\mu}{4\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} \\ & - 2g^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \not{\tilde{q}} (p \cdot \tilde{q} - 2p_\mu \tilde{q}_\mu \tilde{s}_\mu^2 + 2r^2 \tilde{\Delta}_1 p \cdot \tilde{q})}{4\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2^2} \\ & - g^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\Delta}_1 \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau p_\rho \tilde{c}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\tau}{\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} + g^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\Delta}_1 \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho p_\tau \tilde{s}_\tau \gamma_\tau}{\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} \\ & - g^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot \tilde{q} \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\tau}{2\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} \\ & + 2g^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\Delta}_1 \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\tau (p \cdot \tilde{q} - 2p_\mu \tilde{q}_\mu \tilde{s}_\mu^2 + 2r^2 \tilde{\Delta}_1 p \cdot \tilde{q})}{\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2^2}. \end{aligned} \quad (4.188)$$

Die q -Abhängigkeit der auftretenden Terme ist durch $q - ap$ gegeben. Daher wird eine Substitution $q \rightarrow q + ap$ durchgeführt. Die Integrationsgrenzen können dabei unverändert belassen werden, da die Integranden alle 2π -periodisch sind. Damit

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot q \not{q}}{8\Delta_1 \Delta_2} + g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot q \not{q}}{8\Delta_1 \Delta_2} \\
 & + g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p}}{4\Delta_2} - g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} \Delta_1}{8\Delta_2} \\
 & - g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q}(p \cdot q - 2p_\mu q_\mu s_\mu^2 + 2r^2 \Delta_1 p \cdot q)}{2\Delta_2^2} \\
 & - g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot q \not{q}}{4\Delta_1 \Delta_2} + g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} \Delta_1}{4\Delta_2} \\
 & - g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot q \not{q}}{4\Delta_1 \Delta_2} \\
 & + g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q}(p \cdot q - 2p_\mu q_\mu s_\mu^2 + 2r^2 \Delta_1 p \cdot q)}{\Delta_2^2} \\
 & = -g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot q \not{q}}{4\Delta_1 \Delta_2} + g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p}}{4\Delta_2} \\
 & + g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} \Delta_1}{8\Delta_2} \\
 & + g^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q}(p \cdot q - 2p_\mu q_\mu s_\mu^2 + 2r^2 \Delta_1 p \cdot q)}{2\Delta_2^2} \tag{4.189}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A i \not{p} 4\pi^2 r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{\Delta_4}{4\Delta_1 \Delta_2} + \frac{1}{\Delta_2} + \frac{\Delta_1}{2\Delta_2} + \frac{\Delta_4}{2\Delta_2^2} - \frac{\Delta_5}{\Delta_2^2} + r^2 \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_2^2} \right). \tag{4.190}$$

Dies ist das Endergebnis für die endlichen Terme, die am Anfang identifiziert wurden. Es ist noch das im Limes $ap \rightarrow 0$ divergente Integral zu berechnen, wozu der Zähler des Integranden um $q - ap$ entwickelt wird. Dies führt auf die Terme

$$\begin{aligned}
 & -g^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{c}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \\
 & = -g^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{c}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} + g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau p_\rho \tilde{s}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \\
 & + g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{c}_\rho p_\tau \tilde{s}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \\
 & - g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{c}_\rho \tilde{c}_\tau p_\mu \cos(q - ap)_\mu \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2}. \tag{4.191}
 \end{aligned}$$

Durch die Substitution $q \rightarrow q + ap$ ergibt dies

$$-g^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \not{q} \not{q}}{16\Delta_1^2 \tilde{\Delta}_2} + g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{s_\rho^2 p_\rho \gamma_\rho \not{q} \not{q}}{8\Delta_1^2 \tilde{\Delta}_2} + g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{s_\tau^2 p_\tau \not{q} \not{q} \gamma_\tau}{8\Delta_1^2 \tilde{\Delta}_2}$$

$$\begin{aligned}
& -g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \not{p} \not{q}}{16 \Delta_1^2 \check{\Delta}_2} + g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{s_\mu^2 p_\mu \not{q} \gamma_\mu \not{q}}{8 \Delta_1^2 \check{\Delta}_2} \\
& = -g^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \Delta_4}{16 \Delta_1^2 \check{\Delta}_2} - g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \not{p} \not{q}}{16 \Delta_1^2 \check{\Delta}_2} \\
& \quad + g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} \Delta_4}{16 \Delta_1 \Delta_2} + g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{4} \not{p} \Delta_1 \Delta_4 + 2 s_\mu^2 p_\mu q_\mu^2 \gamma_\mu}{8 \Delta_1^2 \Delta_2}. \quad (4.192)
\end{aligned}$$

Unter dem Integral kann man $\not{q} \not{p} \not{q}$ durch $-\frac{1}{2} \Delta_4 \not{p}$ ersetzen. Damit, und mit (D.1) und (D.11) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& -g^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q}}{16 \Delta_1 \check{\Delta}_1} - g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \not{p} \not{q}}{64 \Delta_1^2 \check{\Delta}_1} \\
& + g^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \Delta_3}{4 \Delta_1^2 \check{\Delta}_2} - g^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} (\check{\Delta}_3 - r^2 \check{\Delta}_1^2)}{4 \Delta_1 \check{\Delta}_1 \check{\Delta}_2} \\
& + g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} \Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{32 \Delta_1^3 \Delta_2} \\
& + g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} \Delta_4}{32 \Delta_1 \Delta_2} + g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} \Delta_5}{16 \Delta_1^2 \Delta_2}. \quad (4.193)
\end{aligned}$$

Zwei der endlichen Integrale haben weiterhin einen Vorfaktor $\frac{1}{a}$, so daß zunächst nur diese beiden Integrale weiter berechnet werden:

$$\begin{aligned}
& g^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \Delta_3}{4 \Delta_1^2 \check{\Delta}_2} - g^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\not{q}} (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{4 \tilde{\Delta}_1 \Delta_1 \Delta_2} \\
& = -g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \Delta_3 (p \cdot q - 2 p_\mu q_\mu s_\mu^2 + 2 r^2 \Delta_1 p \cdot q)}{2 \Delta_1^2 \Delta_2^2} \\
& \quad + g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu \gamma_\mu \cos q_\mu (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{4 \Delta_1^2 \Delta_2} - g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot q \not{q} (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{8 \Delta_1^3 \Delta_2} \quad (4.194)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = g^2 C_A i \not{p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2 \Delta_3 \Delta_5}{8 \Delta_1^2 \Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{4 \Delta_1 \Delta_2^2} + \frac{(2 - \Delta_1)(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{8 \Delta_1^2 \Delta_2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{32 \Delta_1^3 \Delta_2} \right). \quad (4.195)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den kompletten Ausdruck (4.193)

$$\begin{aligned}
& -g^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q}}{16 \Delta_1 \check{\Delta}_1} - g^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \not{p} \not{q}}{64 \Delta_1^2 \check{\Delta}_1} \\
& + g^2 C_A i \not{p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2 \Delta_3 \Delta_5}{8 \Delta_1^2 \Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{4 \Delta_1 \Delta_2^2} + \frac{(2 - \Delta_1)(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{8 \Delta_1^2 \Delta_2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Delta_4}{32 \Delta_1 \Delta_2} + \frac{\Delta_5}{16 \Delta_1^2 \Delta_2} \right). \quad (4.196)
\end{aligned}$$

Mit der Integraltabelle aus [EM] lassen sich auch die beiden verbleibenden divergenten Integrale

$$\begin{aligned}
 \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q}}{16\Delta_1 \check{\Delta}_1} &= \frac{2i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\rho s_\rho c_\rho}{16\Delta_1 \check{\Delta}_1} \\
 &= \frac{1}{16\pi^2} i \not{p} \left(-\frac{1}{2} \ln(a^2 p^2) - \frac{1}{2} \gamma_E + \frac{1}{2} F_{0000} + 1 - \frac{16\pi^2}{16} Z_{0000} \right) \\
 &= \frac{1}{16\pi^2} i \not{p} \left(-\frac{1}{2} \ln(a^2 p^2) - \frac{1}{2} \gamma_E + \frac{1}{2} F_{0001} + 1 \right) \quad (4.197)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i \not{q} \not{p} \not{q}}{64\Delta_1^2 \check{\Delta}_1} &= -4i\gamma_\rho \not{p} \gamma_\tau \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{s_\rho c_\rho s_\tau c_\tau}{64\Delta_1^2 \check{\Delta}_1} \\
 &= \frac{1}{16\pi^2} i \not{p} \left(-\frac{1}{2} \ln(a^2 p^2) - \frac{1}{2} \gamma_E + \frac{1}{2} F_{0000} + \frac{1}{2} - \frac{16\pi^2}{16} Z_{0000} \right) \\
 &= \frac{1}{16\pi^2} i \not{p} \left(-\frac{1}{2} \ln(a^2 p^2) - \frac{1}{2} \gamma_E + \frac{1}{2} F_{0001} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.198)
 \end{aligned}$$

berechnen. Damit ergibt sich für das zu Anfang als divergent identifizierte Integral:

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A i \not{p} \left(-\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + \frac{3}{2} \right. \\
 \left. + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2\Delta_3 \Delta_5}{2\Delta_1^2 \Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2^2} + \frac{(2 - \Delta_1)(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{2\Delta_1^2 \Delta_2} \right. \right. \\
 \left. \left. + \frac{\Delta_4}{8\Delta_1 \Delta_2} + \frac{\Delta_5}{4\Delta_1^2 \Delta_2} \right) \right). \quad (4.199)
 \end{aligned}$$

Mit den zuvor berechneten Termen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(A),(1-\alpha)} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A i \not{p} \left(-\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + \frac{3}{2} \right. \\
 &\quad + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2\Delta_3 \Delta_5}{2\Delta_1^2 \Delta_2^2} + \frac{(2 - \Delta_1)(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{2\Delta_1^2 \Delta_2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta_4}{8\Delta_1 \Delta_2} + \frac{\Delta_5}{4\Delta_1^2 \Delta_2} - r^2 \frac{\Delta_4}{4\Delta_1 \Delta_2} + r^2 \frac{1}{\Delta_2} - r^2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2^2} \right. \\
 &\quad \left. + r^2 \frac{\Delta_1}{2\Delta_2} + r^2 \frac{\Delta_4}{2\Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_5}{\Delta_2^2} + r^4 \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_2^2} \right) \Bigg) \\
 &\quad - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \frac{r}{a} 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\Delta_1} + \mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a). \quad (4.200)
 \end{aligned}$$

Als nächstes ist der m_0 -abhängige Term von (4.178) zu berechnen. Die Divergenz dieses Terms ist wieder vom Typ $\log(ap)$. Ändert man in den auftretenden Cosinus-Funktionen das Argument von z.B. q nach $q+ap$ oder $q-ap$, so sind die Korrekturen

endlich und proportional zu a . Man kann somit c_ρ ohne zusätzliche Korrekturen durch \check{c}_ρ oder \tilde{c}_ρ ersetzen. Damit lautet der Zähler:

$$\begin{aligned}
& \tilde{s}_\rho(i\gamma_\rho c_\rho + r\check{s}_\rho)(-i\not{q} + 2r\Delta_1)^2(i\gamma_\tau c_\tau + r\check{s}_\tau)\tilde{s}_\tau \\
&= \gamma_\rho c_\rho \tilde{s}_\rho \not{q} \not{q} \gamma_\tau c_\tau \tilde{s}_\tau + 4ir\Delta_1 \gamma_\rho c_\rho \tilde{s}_\rho \not{q} \gamma_\tau c_\tau \tilde{s}_\tau - 4r^2\Delta_1^2 \gamma_\rho c_\rho \tilde{s}_\rho \gamma_\tau c_\tau \tilde{s}_\tau \\
&\quad - ir\tilde{s}_\rho \check{s}_\rho \not{q} \not{q} \gamma_\tau c_\tau \tilde{s}_\tau + 4r^2\tilde{s}_\rho \check{s}_\rho \Delta_1 \not{q} \gamma_\tau c_\tau \tilde{s}_\tau + 4ir^3\tilde{s}_\rho \check{s}_\rho \Delta_1^2 \gamma_\tau c_\tau \tilde{s}_\tau \\
&\quad - ir\gamma_\rho c_\rho \tilde{s}_\rho \not{q} \check{s}_\tau \tilde{s}_\tau + 4r^2\tilde{s}_\tau \check{s}_\tau \Delta_1 \gamma_\rho c_\rho \tilde{s}_\rho \not{q} + 4ir^3\tilde{s}_\tau \check{s}_\tau \Delta_1^2 \gamma_\rho c_\rho \tilde{s}_\rho \\
&\quad - r^2\tilde{s}_\rho \check{s}_\rho \tilde{s}_\tau \check{s}_\tau \not{q} \not{q} - 4ir^3\tilde{s}_\rho \check{s}_\rho \tilde{s}_\tau \check{s}_\tau \not{q} \Delta_1 + 4r^4\tilde{s}_\rho \check{s}_\rho \tilde{s}_\tau \check{s}_\tau \Delta_1^2. \quad (4.201)
\end{aligned}$$

Von diesen Termen ist nur der erste divergent. In den konvergenten Termen ist es erlaubt, \tilde{s}_ρ und \check{s}_ρ durch s_ρ zu ersetzen, da dies nur ein $\mathcal{O}(a)$ -Effekt ist. Außerdem kann in diesen Termen der Limes $ap \rightarrow 0$ gebildet werden, indem man im Nenner $ap = 0$ setzt. Damit verschwinden unter dem Integral alle konvergenten Terme, die ungerade in q sind. Man verbleibt mit:

$$\begin{aligned}
& \gamma_\rho \tilde{c}_\rho \tilde{s}_\rho \Delta_4 \gamma_\tau \tilde{c}_\tau \tilde{s}_\tau - 4r^2\Delta_1^2 c_\rho s_\rho c_\tau s_\tau \gamma_\rho \gamma_\tau + 4r^2\Delta_1 s_\rho^2 c_\tau s_\tau \not{q} \gamma_\tau \\
&+ 4r^2\Delta_1 s_\tau^2 c_\rho s_\rho \gamma_\rho \not{q} - r^2 s_\rho^2 s_\tau^2 \Delta_4 + 4r^4 s_\rho^2 s_\tau^2 \Delta_1^2 \\
&= \tilde{\Delta}_1 \Delta_4 - \Delta_3 \Delta_4 + 2r^2 \Delta_1^2 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^4. \quad (4.202)
\end{aligned}$$

Dabei wurde $\tilde{\Delta}_4 = 4(\tilde{\Delta}_1 - \tilde{\Delta}_3)$ ausgenutzt, wobei der Term in Δ_3 endlich ist, so daß man den Limes $ap \rightarrow 0$ betrachten kann.

Mit dem Nenner lautet dieses Ergebnis:

$$m_0 g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\Delta_4}{4\tilde{\Delta}_1 \Delta_2^2} + \frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2r^2 \Delta_1^2 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^4}{4\Delta_1^2 \Delta_2^2} \right\}. \quad (4.203)$$

In dem zweiten Term sind die endlichen Anteile zusammengefaßt, der erste Term enthält die Divergenz. Abgesehen von einem zusätzlichen Vorfaktor trat der divergente Term auch schon in der Feynman-Eichung auf, so daß das Ergebnis dafür direkt übernommen werden kann. Man erhält damit für den m_0 -abhängigen Term von $\Sigma^{(A),(1-\alpha)}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + \frac{5}{2} \right. \\
& \quad + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \\
& \quad \left. + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2r^2 \Delta_1^2 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^4}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \right\} \\
&= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + \frac{5}{2} - 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right\}. \quad (4.204)
\end{aligned}$$

Es ist noch der zweite Graph in Landau-Eichung zu berechnen. Dazu ist zu dem Term aus der Feynman-Eichung der folgende Term zu addieren:

$$\Sigma^{(B),(1-\alpha)} = -g_0^2 C_A \frac{1}{2a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \sin\left(\frac{q_\rho}{2}\right) [i \sin(ap_\rho) - r \cos(ap_\rho)] \sin\left(\frac{q_\rho}{2}\right)$$

$$\times \left[2 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{q_{\mu}}{2} \right]^{-2} \quad (4.205)$$

$$= -g_0^2 C_A \frac{1}{2a} [i \sin(ap_{\rho}) - r \cos(ap_{\rho})] \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin^2(\frac{q_{\rho}}{2})}{4\Delta_1^2} \quad (4.206)$$

$$= -g_0^2 C_A \frac{1}{2a} [i \sin(ap_{\rho}) - r \cos(ap_{\rho})] \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{16\Delta_1} \quad (4.207)$$

$$= -\frac{1}{4} \Sigma^{(B),FEY} \quad (4.208)$$

$$= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A 4\pi^2 \left[-i \not{p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{8\Delta_1} + \frac{r}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\Delta_1} \right]. \quad (4.209)$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\Sigma^{(A),FEY} + \Sigma^{(A),(1-\alpha)} + \Sigma^{(B),FEY} + \Sigma^{(B),(1-\alpha)} = i \not{p} \Sigma_1^{LAN} + m_0 \Sigma_2^{LAN} + \frac{r}{a} \Sigma_0^{LAN}. \quad (4.210)$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{LAN} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-\frac{1}{2} + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2\Delta_3 \Delta_5}{2\Delta_1^2 \Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2 - \Delta_1)(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{2\Delta_1^2 \Delta_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Delta_4}{8\Delta_1 \Delta_2} + \frac{\Delta_5}{4\Delta_1^2 \Delta_2} - r^2 \frac{\Delta_4}{4\Delta_1 \Delta_2} + 3r^2 \frac{1}{\Delta_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r^2 \frac{\Delta_1}{2\Delta_2} + r^2 \frac{\Delta_4}{2\Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_5}{\Delta_2^2} + r^4 \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_2^2} + \frac{3}{8\Delta_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\Delta_5}{4\Delta_1^2 \Delta_2} - \frac{\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{4\Delta_1^3 \Delta_2} - r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a) \end{aligned} \quad (4.211)$$

$$= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-\frac{1}{2} + 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)} \right) \right] + \mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a), \quad (4.212)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{LAN} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[3 \ln(a^2 p^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} - \frac{15}{2} \right. \\ &\quad \left. - 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{r^2 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1 + 4r^2 \Delta_1^2}{\Delta_2^2} - \frac{\Delta_4}{16\Delta_1^2} + \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(3 - \Delta_1) \Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2) (2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a) \end{aligned} \quad (4.213)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[3 \ln(a^2 p^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} - \frac{15}{2} - 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_2}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(m_0^2) + \mathcal{O}(a) \end{aligned} \quad (4.214)$$

und

$$\Sigma_0^{LAN} = \Sigma_0^{FEY}. \quad (4.215)$$

Die beiden numerisch zu berechnenden Integrale wurden im Anhang ermittelt, für $r = 1$ ergibt sich

$$I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)} = -I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} = 0.064801 \quad (4.216)$$

4.4.4.2 Bestimmung von $Z_{\lambda}^{\overline{MS}/LAT}$

Der nackte Fermion-Propagator auf dem Gitter ist vom Typ

$$S_F^{-1} = -i\not{p} (1 - \Sigma_1^{LAT}) + m (1 - \Sigma_2^{LAT}), \quad (4.217)$$

wobei der Term $\frac{r}{a}\Sigma_0$ in der Konstanten m absorbiert wurde. Der im \overline{MS} -Schema renormierte Propagator im Kontinuum sieht wie folgt aus:

$$S_F^{-1, \overline{MS}} = -i\not{p} (1 - \Sigma_1^{\overline{MS}}) + m (1 - \Sigma_2^{\overline{MS}}) \quad (4.218)$$

Damit ist die Renormierungskonstante $Z_{\lambda}^{\overline{MS}/LAT}$ in diesem Schema über (4.83) definiert, und man erhält:

$$\begin{aligned} Z_{\lambda}^{\overline{MS}/LAT, FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (\ln(a\mu)^2 + \gamma_E - F_{0001} - 1 + 4\pi^2 I_{\Sigma_1}^{FEY}) \\ &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (\ln(a\mu)^2 + 12.852) \end{aligned} \quad (4.219)$$

und

$$\begin{aligned} Z_{\lambda}^{\overline{MS}/LAT, LAN} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-\frac{1}{2} + 4\pi^2 (I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)}) \right) \\ &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (16.644). \end{aligned} \quad (4.220)$$

Um den Propagator vollständig zu renormieren, ist auch noch eine Renormierungskonstante Z_m für die Masse einzuführen, die ebenso in diesem Schema definiert wird.

4.4.4.3 Bestimmung von Z_{λ}^{RI}

Alternativ kann man den Propagator auch ohne Zuhilfenahme von Größen aus dem Kontinuum berechnen, indem der Propagator im RI-Schema renormiert wird. Die Renormierungskonstante Z_{λ}^{RI} ist über (4.91) definiert. Mit

$$\Sigma_1^{LAT, FEY}(p^2 = \mu^2) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (\ln(a\mu)^2 + \gamma_E - F_{0001} - 2 + 4\pi^2 I_{\Sigma_1}^{FEY}) \quad (4.221)$$

und

$$\frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_{\rho} \not{p} \frac{\partial \Sigma_1^{LAT, FEY}}{\partial p_{\rho}} \right) \Big|_{p^2 = \mu^2} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \quad (4.222)$$

ergibt sich für die Feynman-Eichung:

$$Z_{\lambda}^{RI,FEY} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\ln(a\mu)^2 + \gamma_E - F_{0001} - \frac{3}{2} + 4\pi^2 I_{\Sigma_1}^{FEY} \right) \quad (4.223)$$

$$= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [\ln(a\mu)^2 + 12.352] \quad (4.224)$$

In der Landau-Eichung hat man mit

$$\Sigma_1^{LAT,LAN}(p^2 = \mu^2) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-\frac{1}{2} + 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)} \right) \right) \quad (4.225)$$

und

$$\frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_{\rho} \not{p} \frac{\partial \Sigma_1^{LAT,LAN}}{\partial p_{\rho}} \right) \Big|_{p^2=\mu^2} = 0 \quad (4.226)$$

für die Renormierungskonstante

$$Z_{\lambda}^{RI,LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-\frac{1}{2} + 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)} \right) \right) \quad (4.227)$$

$$= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (16.644). \quad (4.228)$$

4.4.4.4 Bestimmung von $Z_m^{\overline{MS}/LAT}$

Die Renormierungskonstante $Z_m^{\overline{MS}/LAT}$ ist über (4.85) definiert, und sie ergibt sich für die Feynman-Eichung zu

$$\begin{aligned} Z_m^{\overline{MS}/LAT,FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-3 \ln(a\mu)^2 - 3\gamma_E + 3F_{0001} + 3 + 4\pi^2 (I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{FEY}) \right) \\ &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-3 \ln(a\mu)^2 + 12.952 \right), \end{aligned} \quad (4.229)$$

und in der Landau-Eichung zu

$$Z_m^{\overline{MS}/LAT,LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-3 \ln(a\mu)^2 + 12.952 \right). \quad (4.230)$$

4.4.4.5 Bestimmung von Z_m^{RI}

In dem RI-Schema erhält man gemäß der Definition in (4.93)

$$\begin{aligned} Z_m^{RI,FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-3 \ln(a\mu)^2 - 3\gamma_E + 3F_{0001} + \frac{17}{2} + 4\pi^2 (I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{FEY}) \right) \\ &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-3 \ln(a\mu)^2 + 18.452 \right) \end{aligned} \quad (4.231)$$

und

$$\begin{aligned} Z_m^{RI,LAN} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-3 \ln(a\mu)^2 - 3\gamma_E + 3F_{0001} + 7 + 4\pi^2 (I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{FEY}) \right) \\ &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-3 \ln(a\mu)^2 + 16.952 \right). \end{aligned} \quad (4.232)$$

4.4.5 Skalare Dichte

Als nächstes wird die skalare Dichte auf dem Gitter in 1-Loop berechnet. Die entsprechende Renormierungskonstante wird wieder in den beiden zuvor benutzten Schemata $\overline{\text{MS}}$ und RI angegeben.

4.4.5.1 Berechnung der nackten Größen

Es wird also im folgenden der Vertex $\tilde{\Lambda}_\Gamma(p)$ aus Abb. 4.6 im Fall $\Gamma = \mathbb{1}$ berechnet. Dieser Ausdruck ist durch

$$\tilde{\Lambda}(p) = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V_\rho^{(1)}(p-k, p) S_0(p-k) \mathbb{1} S_0(p-k) V_\sigma(p, p-k) G_{\rho\sigma}(k) \quad (4.233)$$

gegeben. Die Integrationsvariable k_μ tritt dabei nur in der Kombination ak_μ auf, so daß wie beim Propagator die Substitution $ak_\mu \rightarrow k_\mu$ durchgeführt werden kann. Da zwei Fermionenpropagatoren und ein Gluonpropagator auftreten, verbleiben durch diese Substitution keine weiteren Vorfaktoren in a . Außerdem wird eine neue Integrationsvariable $q_\mu := ap_\mu - k_\mu$ eingeführt.

Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

In der Feynman-Eichung lautet damit der Ausdruck:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}(p) = & g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \left[i\gamma_\rho \cos\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) + r \sin\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) \right] \right. \\ & \times \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sum_\lambda \sin^2\left(\frac{q_\lambda}{2}\right) \right] \mathbb{1} \\ & \times \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sum_\lambda \sin^2\left(\frac{q_\lambda}{2}\right) \right] \\ & \times \left[i\gamma_\rho \cos\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) + r \sin\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) \right] \\ & \times \left[4 \sum_\sigma \sin^2\left(\frac{(q-ap)_\sigma}{2}\right) \right]^{-1} \\ & \times \left. \left[\sum_\tau \sin^2(q_\tau) + 4r^2 \left(\sum_\tau \sin^2\left(\frac{q_\tau}{2}\right) \right)^2 \right]^{-2} \right\} \quad (4.234) \end{aligned}$$

Man erkennt, daß das Integral dasselbe ist, das bereits für den m_0 -abhängigen Teil des Propagators in Feynman-Eichung (4.109) berechnet wurde. Das Ergebnis kann somit sofort übernommen werden, und man erhält:

$$\tilde{\Lambda}_\mathbb{1}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-4 \ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 + 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{FEY} \right] + \mathcal{O}(a) \quad (4.235)$$

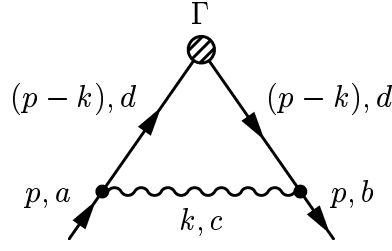


Abbildung 4.6: 1-Loop-Korrektur auf dem Gitter

Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

Für die Landau-Eichung ist noch der folgende Term zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(1-\alpha)}(p) = & -g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\rho} \right. \\
 & \times \left[i\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{(q+ap)_{\rho}}{2}\right) + r \sin\left(\frac{(q+ap)_{\rho}}{2}\right) \right] \\
 & \times \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{q_{\lambda}}{2}\right) \right] \mathbb{I} \\
 & \times \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{q_{\lambda}}{2}\right) \right] \\
 & \times \left[i\gamma_{\tau} \cos\left(\frac{(q+ap)_{\tau}}{2}\right) + r \sin\left(\frac{(q+ap)_{\tau}}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\tau} \\
 & \times \left[2 \sum_{\sigma} \sin^2\left(\frac{(q-ap)_{\sigma}}{2}\right) \right]^{-2} \\
 & \times \left[\sum_{\sigma} \sin^2(q_{\sigma}) + 4r^2 \left(\sum_{\sigma} \sin^2\left(\frac{q_{\sigma}}{2}\right) \right)^2 \right]^{-2} \left. \right\} \quad (4.236)
 \end{aligned}$$

Auch dieser Term ist identisch zu dem entsprechenden m_0 -abhängigen Term im Propagator (4.178), so daß man mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{LAN}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(1-\alpha)}(p) \\
 &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -3 \ln(a^2 p^2) - 3\gamma_E + 3F_{0001} + \frac{15}{2} + 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_2}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right) \right\} \\
 &\quad + \mathcal{O}(a) \quad (4.237)
 \end{aligned}$$

verbleibt.

4.4.5.2 Bestimmung von $Z_S^{\overline{MS}/LAT}$

Mit (4.89) ergibt sich

$$Z_S^{\overline{MS}/LAT,FEY} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a\mu)^2 - 12.952) \quad (4.238)$$

und

$$Z_S^{\overline{MS}/LAT,LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a\mu)^2 - 12.952) . \quad (4.239)$$

4.4.5.3 Bestimmung von Z_S^{RI}

Wie zuvor wird in diesem Schema die betrachtete Größe nicht an einen Kontinuumswert angepaßt, sondern an den Gitterwert in der freien Theorie bei $p^2 = \mu^2$. Allerdings bekommt man dabei Probleme mit den Diracindizes, so daß zumindest für die Renormierungskonstante der pseudoskalaren Dichte der berechnete Wert mit γ_5 zu multiplizieren ist, und davon dann die Spur zu bilden ist. Die Renormierungskonstante der skalaren Dichte ergibt sich also aus folgender Gleichung:

$$Z_\lambda^{RI} Z_S^{RI} = 1 - \tilde{\Lambda}_1^{LAT}(p^2 = \mu^2) \quad (4.240)$$

Nach Vergleich mit Z_λ^{RI} lautet die Renormierungskonstante in Feynman-Eichung

$$Z_S^{RI,FEY} = 1 + \frac{\alpha_2}{4\pi} C_A (3 \ln(a^2 \mu^2) - 18.452) , \quad (4.241)$$

und in Landau-Eichung

$$Z_S^{RI,LAN} = 1 + \frac{\alpha_2}{4\pi} C_A (3 \ln(a^2 \mu^2) - 16.952) . \quad (4.242)$$

4.4.6 Pseudoskalare Dichte

Im Kontinuum war es möglich, von Z_S im Fall $m = 0$ direkt auf Z_P zu schließen. Der Grund dafür war, daß man das zusätzliche γ_5 ohne zusätzliche Vorzeichen an das Ende der Formel ziehen konnte:

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}(p) = \tilde{\Lambda}_1(p) \gamma_5 \quad (4.243)$$

Auf dem Gitter ist dies auf Grund der Wilson-Terme nicht so einfach möglich, da sich das γ_5 nicht ohne zusätzliche Effekte an das Ende der Gleichung schreiben läßt. Daher muß die pseudoskalare Dichte zusätzlich berechnet werden.

4.4.6.1 Berechnung der nackten Größe

Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

Folgende Größe ist zu berechnen:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}(p) = & g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[i\gamma_\rho \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\rho + r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\rho \right] \\
 & \times \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sin^2 \frac{q_\lambda}{2} \right] \gamma_5 \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sin^2 \frac{q_\lambda}{2} \right] \\
 & \times \left[i\gamma_\rho \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\rho + r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\rho \right] \\
 & \times \left[4 \sum_\mu \sin^2\left(\frac{q-ap}{2}\right)_\mu \right]^{-1} \\
 & \times \left[\sum_\nu \sin^2 q_\nu + 4r^2 \left(\sum_\nu \sin^2 \frac{q_\nu}{2} \right)^2 \right]^{-2} \quad (4.244)
 \end{aligned}$$

Der Zähler lautet also:

$$(i\gamma_\rho c_\rho + r s_\rho)(-i\not{q} + 2r\Delta_1)\gamma_5(-i\not{q} + 2r\Delta_1)(i\gamma_\rho c_\rho + r s_\rho) \quad (4.245)$$

Man erkennt, daß sich das γ_5 nicht wie im Kontinuum ganz nach rechts schieben läßt, ohne die relativen Vorzeichen der einzelnen Terme zu verändern.

Nach dem Ausmultiplizieren und Anwenden der Rechenregeln für Gamma-Matrizen identifiziert man zunächst mittels power-counting die Terme, die im Endergebnis endlich bleiben. Von diesen brauchen – wie zuvor – nur diejenigen berücksichtigt zu werden, die gerade in der Integrationsvariablen q sind, da der Nenner ebenfalls gerade ist. Ferner kann man die Terme durch Anwenden von $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ so umformen, daß das im Vergleich zur skalaren Dichte hinzugefügte γ_5 jeweils ganz rechts steht. Damit nimmt der Zähler die Gestalt

$$\begin{aligned}
 & c_\rho^2 q^2 \gamma_5 + 4r^2 \Delta_1^2 c_\rho^2 \gamma_5 + r^2 s_\rho^2 q^2 \gamma_5 + 4r^4 \Delta_1^2 s_\rho^2 \gamma_5 \\
 & = (4 - \Delta_1) q^2 \gamma_5 + 4r^2 (4 - \Delta_1) \Delta_1^2 \gamma_5 + r^2 \Delta_1 q^2 \gamma_5 + 4r^4 \Delta_1^3 \gamma_5 \quad (4.246)
 \end{aligned}$$

an. Insbesondere ist der erste Summand der einzige, der auf eine Divergenz führt. Er stimmt, abgesehen von dem γ_5 , mit dem divergenten Term der skalaren Dichte überein.

Damit ergibt sich:

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}(p) = g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4\Delta_4}{4 \sum_\mu \sin^2\left(\frac{(q-ap)_\mu}{2}\right) \Delta_2^2} \gamma_5$$

$$\begin{aligned}
& +g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\Delta_1 \Delta_4 + 16r^2 \Delta_1 - 4r^2 \Delta_1^3 + r^2 \Delta_1 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^3}{4\Delta_1 \Delta_2^2} \gamma_5 \\
& + \mathcal{O}(a)
\end{aligned} \tag{4.247}$$

Mit

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{16\Delta_1^2} + \frac{(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \tag{4.248}$$

kann man aus dem divergenten Integral noch einen endlichen Anteil extrahieren und erhält so für den konvergenten Teil von $\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}(p)$ insgesamt

$$\begin{aligned}
& \frac{\Delta_4(4\Delta_3 - 4r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \gamma_5 \\
& + \frac{-\Delta_1 \Delta_4 + 16r^2 \Delta_1 - 4r^2 \Delta_1^3 + r^2 \Delta_1 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^3}{4\Delta_1 \Delta_2^2} \gamma_5 \\
& = 2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \gamma_5 - \frac{\Delta_3^2 \Delta_4}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \gamma_5 - \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta_4^2}{\Delta_1 \Delta_2^2} \gamma_5 - r^4 \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_2^2} \gamma_5 \\
& \quad - \frac{1}{4} \frac{\Delta_4}{\Delta_2^2} \gamma_5 + \frac{1}{4} r^2 \frac{\Delta_4}{\Delta_2^2} \gamma_5 + 4r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2^2} \gamma_5 - r^2 \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} \gamma_5 + r^4 \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} \gamma_5 \tag{4.249}
\end{aligned}$$

Der komplette nackte Vertex ist dann also durch

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\gamma_5}^{LAT, FEY} &= \gamma_5 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-4 \ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 \right. \\
&\quad + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{\Delta_3 \Delta_4}{2\Delta_1^2 \Delta_2^2} - \frac{\Delta_3^2 \Delta_4}{4\Delta_1^3 \Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_4^2}{8\Delta_1 \Delta_2^2} - r^4 \frac{\Delta_1 \Delta_4}{4\Delta_2^2} \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\Delta_4}{16\Delta_2^2} + r^2 \frac{\Delta_4}{16\Delta_2^2} + r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_1^2}{4\Delta_2^2} + r^4 \frac{\Delta_1^2}{4\Delta_2^2} \right) \right] \gamma_5 \\
&\quad + \mathcal{O}(a) \tag{4.250}
\end{aligned}$$

$$= \gamma_5 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-4 \ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 + 4\pi^2 I_P^{FEY} \right] \gamma_5 + \mathcal{O}(a) \tag{4.251}$$

gegeben. I_P^{FEY} wurde im Anhang berechnet, und es ergibt sich für $r = 1$:

$$I_P^{FEY} = 0.071126 \tag{4.252}$$

Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

Analog zur Betrachtung der skalaren Dichte erhält man im Fall der pseudoskalaren Dichte den Ausdruck

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = -g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \sin \left(\frac{q - ap}{2} \right) \right\}_\rho$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[i\gamma_\rho \cos \left(\frac{(q+ap)_\rho}{2} \right) + r \sin \left(\frac{(q+ap)_\rho}{2} \right) \right] \\
 & \times \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sum_\lambda \sin^2 \left(\frac{q_\lambda}{2} \right) \right] \gamma_5 \\
 & \times \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sum_\lambda \sin^2 \left(\frac{q_\lambda}{2} \right) \right] \\
 & \times \left[i\gamma_\tau \cos \left(\frac{(q+ap)_\tau}{2} \right) + r \sin \left(\frac{(q+ap)_\tau}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{q-ap}{2} \right)_\tau \\
 & \times \left[2 \sum_\sigma \sin^2 \left(\frac{(q-ap)_\sigma}{2} \right) \right]^{-2} \\
 & \times \left\{ \sum_\sigma \sin^2(q_\sigma) + 4r^2 \left(\sum_\sigma \sin^2 \left(\frac{q_\sigma}{2} \right) \right)^2 \right\}^{-2}. \quad (4.253)
 \end{aligned}$$

Der Zähler des Integranden schreibt sich daher als

$$\tilde{s}_\rho (i\gamma_\rho c_\rho + r s_\rho) (-i\not{q} + 2r\Delta_1) \gamma_5 (-i\not{q} + 2r\Delta_1) (i\gamma_\tau c_\tau + r s_\tau) \tilde{s}_\tau. \quad (4.254)$$

Durch Vertauschen der Gamma-Matrizen erhält man hieraus

$$\begin{aligned}
 & \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau (i\gamma_\rho c_\rho + r s_\rho) (-i\not{q} + 2r\Delta_1) (i\not{q} + 2r\Delta_1) (-i\gamma_\tau c_\tau + r s_\tau) \gamma_5 \\
 & = \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau (i\gamma_\rho c_\rho + r s_\rho) (4r^2 \Delta_1^2 + q^2) (-i\gamma_\tau c_\tau + r s_\tau) \gamma_5 \\
 & = \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau (\gamma_\rho \gamma_\tau c_\rho c_\tau + i r s_\tau \gamma_\rho c_\rho - i r s_\rho \gamma_\tau c_\tau + r^2 s_\tau s_\rho) (4r^2 \Delta_1^2 + \Delta_4) \gamma_5 \\
 & = \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \left\{ \gamma_\rho \gamma_\tau c_\rho c_\tau \Delta_4 + i r s_\tau \gamma_\rho c_\rho \Delta_4 - i r s_\rho \gamma_\tau c_\tau \Delta_4 + r^2 s_\tau s_\rho \Delta_4 \right. \\
 & \quad \left. + 4r^2 \gamma_\rho \gamma_\tau c_\rho c_\tau \Delta_1^2 + 4i r^3 s_\tau \gamma_\rho c_\rho \Delta_1^2 - 4i r^3 s_\rho \gamma_\tau c_\tau \Delta_1^2 + 4r^4 s_\rho s_\tau \Delta_1^2 \right\} \gamma_5. \quad (4.255)
 \end{aligned}$$

Nur der erste Term ist divergent, in den anderen kann man \tilde{s}_ρ durch s_ρ ersetzen. Unter Vernachlässigung der in q ungeraden, endlichen Terme erhält man:

$$(\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \gamma_\rho \gamma_\tau c_\rho c_\tau \Delta_4 + r^2 s_\tau^2 s_\rho^2 \Delta_4 + 4r^2 \gamma_\rho \gamma_\tau s_\rho c_\rho s_\tau c_\tau \Delta_1^2 + 4r^4 s_\rho^2 s_\tau^2 \Delta_1^2) \gamma_5 \quad (4.256)$$

Unter dem Integral kann man dies weiter zu

$$\begin{aligned}
 & (\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \gamma_\rho \gamma_\tau \tilde{c}_\rho \tilde{c}_\tau \Delta_4 + 2r^2 \Delta_1^2 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^4) \gamma_5 \\
 & = \left(\frac{1}{4} \tilde{\Delta}_4 \Delta_4 + 2r^2 \Delta_1^2 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^4 \right) \gamma_5 \\
 & = \left(\tilde{\Delta}_1 \Delta_4 - \tilde{\Delta}_3 \Delta_4 + 2r^2 \Delta_1^2 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^4 \right) \gamma_5 \quad (4.257)
 \end{aligned}$$

umformen.

In den konvergenten Termen kann die Tilde fortgelassen werden, da es sich dabei nur um $\mathcal{O}(a)$ -Effekte handelt, und mit dem Nenner $\frac{1}{4\tilde{\Delta}_1^2\Delta_2^2}$ erhält man insgesamt denselben Ausdruck wie bei der skalaren Dichte

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = -g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\Delta_4}{4\tilde{\Delta}_1\Delta_2^2} + \frac{-\Delta_3\Delta_4 + 2r^2\Delta_1^2\Delta_4 + 4r^4\Delta_1^4}{4\Delta_1^2\Delta_2^2} \right\} \gamma_5 + \mathcal{O}(a) \quad (4.258)$$

Dies ist das Ergebnis aus (4.203), und es folgt

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ \ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0001} - \frac{5}{2} + 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right\} \gamma_5 + \mathcal{O}(a) \quad (4.259)$$

sowie das Endergebnis

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{LAN}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) \\ &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -3 \ln(a^2 p^2) - 3\gamma_E + 3F_{0001} + \frac{15}{2} + 4\pi^2 \left(I_P^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right) \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}(a) \end{aligned} \quad (4.260)$$

4.4.6.2 Bestimmung von $Z_P^{\overline{MS}/LAT}$

Wie im skalaren Fall erhält man aus den obigen Berechnungen sofort die Renormierungskonstante der pseudoskalaren Dichte im \overline{MS} Schema:

$$\begin{aligned} Z_P^{\overline{MS}/LAT,FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(3 \ln(a^2 \mu^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} - 3 - 4\pi^2 (I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_P^{FEY}) \right) \\ &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a^2 \mu^2) - 22.595) \end{aligned} \quad (4.261)$$

$$Z_P^{\overline{MS}/LAT,LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a^2 \mu^2) - 22.595). \quad (4.262)$$

4.4.6.3 Bestimmung von Z_P^{RI}

Auch in dem RI-Schema folgt die Renormierungskonstante analog zum Fall der skalaren Dichte:

$$\begin{aligned} Z_P^{RI,FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(3 \ln(a^2 \mu^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} - \frac{17}{2} - 4\pi^2 (I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_P^{FEY}) \right) \\ &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} (3 \ln(a^2 \mu^2) - 28.095) \end{aligned} \quad (4.263)$$

$$\begin{aligned} Z_P^{RI,LAN} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} \left(3 \ln(a^2 \mu^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} - 7 - 4\pi^2 (I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_P^{FEY}) \right) \\ &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} (3 \ln(a^2 \mu^2) - 26.595) \end{aligned} \quad (4.264)$$

4.4.7 Axialer Vektorstrom

Als letzte Größe aus der chiralen Ward-Identität wird der axiale Strom auf dem Gitter betrachtet. Der Vektorstrom muß dabei nicht betrachtet werden, da er, wie schon im Kontinuum, aufgrund der Majorana-Eigenschaft identisch Null ist.

4.4.7.1 Nackte Größe

Nachdem in dem vorherigen Kapitel $\tilde{\Lambda}_\Gamma(p)$ für $\Gamma = \mathbb{1}$ und $\Gamma = \gamma_5$ berechnet wurde, wird nun der Fall $\Gamma = \gamma_\mu \gamma_5$ betrachtet. In 1-Loop-Ordnung lautet der Vertex:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}(p) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk}{(2\pi^4)} V_\rho^{cd}[\lambda, A_\rho, \bar{\lambda}](p-k, k, -p) S_F(p-k) \gamma_\mu \gamma_5 \\ &\quad \times S_F(k-p) V_\sigma^{adc}[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}](p, -k, k-p) D_{\rho\sigma}(k) \end{aligned} \quad (4.265)$$

Wie bereits bei den vorherigen Gitterintegralen ist dies ein Integral in ak_μ , so daß wieder die zuvor beschriebene Variablensubstitution durchgeführt werden kann. Außerdem wird ebenfalls eine Integrationsvariable $q_\mu = ap_\mu - k_\mu$ eingeführt. Des weiteren soll ausschließlich der Fall verschwindender Gluino-Masse betrachtet werden.

Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

In Feynman-Eichung erhält man in 1-Loop-Ordnung:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) &= g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \left[i\gamma_\rho \cos\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) + r \sin\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) \right] \right. \\ &\quad \times \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sum_\lambda \sin^2\left(\frac{q_\lambda}{2}\right) \right] \gamma_\mu \gamma_5 \\ &\quad \times \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sum_\lambda \sin^2\left(\frac{q_\lambda}{2}\right) \right] \\ &\quad \times \left[i\gamma_\rho \cos\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) + r \sin\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) \right] \\ &\quad \times \left[4 \sum_\sigma \sin^2\left(\frac{(q-ap)_\sigma}{2}\right) \right]^{-1} \\ &\quad \times \left. \left[\sum_\tau \sin^2(q_\tau) + 4r^2 \left(\sum_\tau \sin^2\left(\frac{q_\tau}{2}\right) \right)^2 \right]^{-2} \right\} \end{aligned} \quad (4.266)$$

Es sind, wie im Fall der skalaren und pseudoskalaren Dichte, die im Limes $ap \rightarrow 0$ divergenten Terme von den endlichen zu trennen. Bei den endlichen Termen kann dann sofort der Limes gebildet werden, was zu einer deutlichen Vereinfachung führt.

Die divergenten Terme müssen dann weiter bearbeitet werden. Da sich an der prinzipiellen Struktur in den Impulsen im Vergleich zu den bisher berechneten Größen nichts verändert hat, ist klar, daß auch dieses Integral logarithmisch divergent ist. Mit den zuvor eingeführten Abkürzungen sieht der Zähler wie folgt aus:

$$(i\gamma_\rho c_\rho + r s_\rho)(-i\not{q} + 2r\Delta_1)\gamma_\mu\gamma_5(-i\not{q} + 2r\Delta_1)(i\gamma_\rho c_\rho + r s_\rho) \quad (4.267)$$

Für die weitere Betrachtung muß dieser Zähler ausmultipliziert werden, um divergente und konvergente Teile weiter zu trennen. Erneut zeigt einfaches power-counting, daß nur der Term $\gamma_\rho c_\rho \not{q} \gamma_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma_\rho c_\rho$ einen für $ap \rightarrow 0$ divergenten Beitrag liefert. Alle anderen Terme liefern in diesem Limes endliche Beiträge, so daß für diese sofort $ap = 0$ gesetzt werden kann. Damit wird der Nenner in q gerade, so daß nach Bildung des Integrals die ungeraden Terme in q im Zähler wegfallen. Man verbleibt also nur noch mit den Termen gerade in q , also mit den folgenden:

$$\begin{aligned} & c_\rho^2 \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma_\rho + 2r^2 \Delta_1 c_\rho s_\rho (\gamma_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma_\rho + \not{q} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\rho + \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_5 \not{q} + \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu \gamma_5) \\ & - r^2 s_\rho^2 \not{q} \gamma_\mu \gamma_5 \not{q} - 4r^2 \Delta_1^2 c_\rho^2 \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\rho + 4r^4 \Delta_1^2 s_\rho^2 \gamma_\mu \gamma_5 \end{aligned} \quad (4.268)$$

Mit den bekannten Rechenregeln ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \gamma_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma_\rho + \not{q} \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\rho + \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_5 \not{q} + \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu \gamma_5 \\ & = (\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu) q_\nu \gamma_5 \end{aligned} \quad (4.269)$$

$$= 2(\gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\rho) q_\nu \gamma_5 \quad (4.270)$$

$$= 4(q_\rho \gamma_\mu \gamma_5 - \delta_{\mu\rho} \not{q} \gamma_5) \quad (4.271)$$

Damit folgt für die verbleibenden Terme im Zähler:

$$\begin{aligned} & c_\rho^2 \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma_\rho + 8r^2 \Delta_1 c_\rho s_\rho (q_\rho \gamma_\mu \gamma_5 - \delta_{\mu\rho} \not{q} \gamma_5) + r^2 s_\rho^2 (2q_\mu \not{q} - \gamma_\mu q^2) \gamma_5 \\ & + 4r^2 \Delta_1^2 c_\rho^2 (2\delta_{\mu\rho} \gamma_\rho - \gamma_\mu) \gamma_5 + 4r^4 \Delta_1^2 s_\rho^2 \gamma_\mu \gamma_5 \end{aligned} \quad (4.272)$$

Als nächstes ist die Summe über ρ auszuführen. Dabei sind wieder die bereits bekannten Rechenregeln auszunutzen, wie z.B. das Additionstheorem, oder die Regel, daß man s_μ^2 unter dem Integral durch $\frac{1}{4} \sum_\mu s_\mu^2$ ersetzen kann. Des weiteren ist unter dem Integral $q_\mu \not{q} = q_\mu q_\nu \gamma_\nu = \gamma_\mu q^2$, da der Term für $\nu \neq \mu$ ungerade in q ist, und damit unter dem Integral verschwindet. Man verbleibt mit:

$$\begin{aligned} & c_\rho^2 \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma_\rho + 4r^2 \Delta_1 (q^2 \gamma_\mu - q_\mu \not{q}) \gamma_5 + r^2 \Delta_1 (2q_\mu \not{q} - \gamma_\mu q^2) \gamma_5 \\ & + 4r^2 \Delta_1^2 (2c_\mu^2 \gamma_\mu - (4 - \Delta_1) \gamma_\mu) \gamma_5 + 4r^4 \Delta_1^3 \gamma_\mu \gamma_5 \end{aligned} \quad (4.273)$$

$$= c_\rho^2 \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma_\rho + \frac{5}{2} r^2 \Delta_1 \Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 + 2r^2 \Delta_1^3 \gamma_\mu \gamma_5 - 8r^2 \Delta_1^2 \gamma_\mu \gamma_5 + 4r^4 \Delta_1^3 \gamma_\mu \gamma_5 \quad (4.274)$$

Power-counting, das bereits mehrfach durchgeführt wurde, zeigt, daß nur der erste Term inklusive Nenner divergiert. Dieser Term wird nun weiter betrachtet:

$$c_\rho^2 \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu \gamma_5 \not{q} \gamma_\rho = c_\rho^2 \gamma_\rho \not{q} (2q_\mu - \not{q} \gamma_\mu) \gamma_\rho \gamma_5 \quad (4.275)$$

$$= 2c_\rho^2 q_\mu \gamma_\rho \not{d} \gamma_\rho \gamma_5 - c_\rho^2 q^2 \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_5 \quad (4.276)$$

$$= 2c_\rho^2 q_\mu (2q_\mu - \not{d} \gamma_\rho) \gamma_\rho \gamma_5 - c_\rho^2 q^2 (2\delta_{\mu\rho} - \gamma_\mu \gamma_\rho) \gamma_\rho \gamma_5 \quad (4.277)$$

$$= 4c_\rho^2 q_\rho q_\mu \gamma_\rho \gamma_5 - 2c_\rho^2 q_\mu \not{d} \gamma_5 - 2\delta_{\mu\rho} c_\rho^2 q^2 \gamma_\rho \gamma_5 + c_\rho^2 q^2 \gamma_\mu \gamma_5 \quad (4.278)$$

$$= 4 \sum_\rho c_\rho^2 q_\rho q_\mu \gamma_\rho \gamma_5 - 2(4 - \Delta_1) q_\mu \not{d} \gamma_5 \\ - 2\Delta_4 c_\mu^2 \gamma_\mu \gamma_5 + (4 - \Delta_1) \Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 \quad (4.279)$$

$$= 4 \sum_\rho q_\rho q_\mu \gamma_\rho \gamma_5 - 4 \sum_\rho s_\rho^2 q_\rho q_\mu \gamma_\rho \gamma_5 - 8q_\mu \not{d} \gamma_5 + 2\Delta_1 q_\mu \not{d} \gamma_5 \\ - 2\Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 + 2\Delta_4 s_\mu^2 \gamma_\mu \gamma_5 + 4\Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 - \Delta_1 \Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 \quad (4.280)$$

Nutzt man wieder aus, das $q_\mu q_\nu$ nur für $\mu = \nu$ einen Beitrag liefert, so folgt weiter:

$$4q_\mu \not{d} \gamma_5 - 4s_\mu^2 q_\mu^2 \gamma_\mu \gamma_5 - 8q_\mu \not{d} \gamma_5 + 2\Delta_1 q_\mu^2 \gamma_\mu \gamma_5 - \\ 2\Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 + 2\Delta_4 s_\mu^2 \gamma_\mu \gamma_5 + 4\Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 - \Delta_1 \Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 \quad (4.281)$$

$$= 2\Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 - 4q_\mu \not{d} \gamma_5 - \Delta_5 \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} \Delta_1 \Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} \Delta_1 \Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 - \Delta_1 \Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 \quad (4.282)$$

$$= 2\Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 - 4q_\mu \not{d} \gamma_5 - \Delta_5 \gamma_\mu \gamma_5 \quad (4.283)$$

In den ersten beiden Termen steckt die Divergenz, damit folgt als Zwischenergebnis:

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) = g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2\Delta_4 \gamma_\mu - 4q_\mu \not{d}}{\left[4 \sum_\rho \sin^2 \left(\frac{(q-ap)_\rho}{2} \right) \right] \Delta_2^2} \gamma_5 \\ + g_0^2 C_A \gamma_\mu \gamma_5 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\Delta_5 + \frac{5}{2} r^2 \Delta_1 \Delta_4 + 2r^2 \Delta_1^3 - 8r^2 \Delta_1^2 + 4r^4 \Delta_1^3}{4\Delta_1 \Delta_2^2} \\ + \mathcal{O}(a) \quad (4.284)$$

Die Größe ist in zwei Integrale aufgeteilt, wovon das erste bei $ap \rightarrow 0$ logarithmisch divergent ist, während das zweite endlich ist.

Um auf bekannte Formeln für das erste Integral zurückgreifen zu können, wird in diesem Integral der fermionische Propagator Δ_2 durch den bosonischen Δ_1 ausgedrückt:

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{16\Delta_1^2} + \frac{(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \quad (4.285)$$

In dem zweiten Term, der ein konvergentes Integral liefert, läßt sich wieder argumentieren, daß, weil der Nenner nach der Limesbildung gerade in q ist, auch der Zähler gerade in q sein muß. Damit wird aus dem $2\Delta_4 \gamma_\mu - 4q_\mu \not{d}$ im Zähler des endlichen Integrals ein $\Delta_4 \gamma_\mu$. Damit ergibt sich durch die Substitution:

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2\Delta_4 \gamma_\mu - 4q_\mu \not{d}}{\left[4 \sum_\rho \sin^2 \left(\frac{(q-ap)_\rho}{2} \right) \right] \left[4 \sum_\nu \sin^2 \left(\frac{q_\nu}{2} \right) \right]^2} \gamma_5 \\ + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \gamma_\mu \gamma_5 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{\Delta_4}{4\Delta_1^3 \Delta_2^2} (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2) \right]$$

$$+ \frac{1}{4\Delta_1\Delta_2^2}(-\Delta_5 + \frac{5}{2}r^2\Delta_1\Delta_4 + 2r^2\Delta_1^3 - 8r^2\Delta_1^2 + 4r^4\Delta_1^3) \Big] + \mathcal{O}(a) \quad (4.286)$$

$$= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2\Delta_4 \gamma_\mu - 4q_\mu \not{q}}{\left[4 \sum_\rho \sin^2 \left(\frac{(q-ap)_\rho}{2}\right)\right] \left[4 \sum_\nu \sin^2 \left(\frac{q_\nu}{2}\right)\right]^2} \gamma_5 \\ + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \gamma_\mu \gamma_5 4\pi^2 I_A + \mathcal{O}(a) \quad (4.287)$$

Das divergente Integral lautet wie folgt:

$$16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2\Delta_4 \gamma_\mu - 4q_\mu \not{q}}{\left[4 \sum_\rho \sin^2 \left(\frac{(q-ap)_\rho}{2}\right)\right] \left[4 \sum_\nu \sin^2 \left(\frac{q_\nu}{2}\right)\right]^2} \gamma_5 \\ = 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2\gamma_\mu \delta_{\nu\rho} q_\nu q_\rho - 4q_\mu q_\rho \gamma_\rho}{\left[4 \sum_\rho \sin^2 \left(\frac{(q-ap)_\rho}{2}\right)\right] \left[4 \sum_\nu \sin^2 \left(\frac{q_\nu}{2}\right)\right]^2} \gamma_5 \quad (4.288)$$

$$\equiv 16\pi^2 (8\gamma_\mu \delta_{\nu\rho} I_{\nu\rho} - 16\gamma_\rho I_{\mu\rho}) \gamma_5 \quad (4.289)$$

Die Funktion $I_{\mu\nu}$ wurde bereits in dem Kapitel über den Propagator eingeführt und ihr Limes für $ap \rightarrow 0$ diskutiert. In diesem Limes galt:

$$I_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{16} \delta_{\mu\nu} (2 - L_1) + \frac{p_\mu p_\nu}{8p^2} \right] \quad (4.290)$$

Damit lautet das zu untersuchende Integral:

$$16\pi^2 (8\gamma_\mu \delta_{\nu\rho} I_{\nu\rho} - 16\gamma_\rho I_{\mu\rho}) \gamma_5 \\ = 8\gamma_\mu \gamma_5 \left[\frac{1}{4} (2 - L_1) + \frac{1}{8} \right] - 16\gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{16} (2 - L_1) - \frac{16}{8} \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} \gamma_5 \quad (4.291)$$

$$= \gamma_\mu \gamma_5 [(2 - L_1) + 1] - 2 \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} \gamma_5 \quad (4.292)$$

$$= \gamma_\mu \gamma_5 (-\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + 3) - 2 \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} \gamma_5 \quad (4.293)$$

Es ergibt sich als Endergebnis auf dem Gitter

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[\gamma_\mu \gamma_5 (-\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + 3) - 2 \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} \gamma_5 + 4\pi^2 I_A \right] + \mathcal{O}(a), \quad (4.294)$$

die projizierte Größe

$$\tilde{\Gamma}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) = \frac{1}{4(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_5 \gamma_\mu \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) \right) \quad (4.295)$$

lautet damit

$$\tilde{\Gamma}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + \frac{5}{2} + 4\pi^2 I_A \right] + \mathcal{O}(a). \quad (4.296)$$

Für das numerisch zu berechnende Integral ergibt sich für $r = 1$:

$$I_A = 0.005323 \quad (4.297)$$

Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

Um den axialen Strom in Landau-Eichung zu berechnen, ist der folgende Term zu dem Ergebnis aus der Feynman-Eichung zu addieren:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) \\
 &= g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\tilde{s}_\rho (i\gamma_\rho \check{c}_\rho + r \check{s}_\rho) (-i\not{q} + 2r\Delta_1) \gamma_\mu \gamma_5 (-i\not{q} + 2r\Delta_1) (i\gamma_\tau \check{c}_\tau + r \check{s}_\tau) \tilde{s}_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2} \\
 &= g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\tilde{s}_\rho (i\gamma_\rho \check{c}_\rho + r \check{s}_\rho) (-i\not{q} + 2r\Delta_1) \gamma_\mu (i\not{q} + 2r\Delta_1) (-i\gamma_\tau \check{c}_\tau + r \check{s}_\tau) \tilde{s}_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2} \gamma_5
 \end{aligned} \tag{4.298}$$

Ausmultiplizieren und anschließendes power-counting zeigen, daß nur ein Term divergent ist. In den endlichen Termen kann man ap zu Null setzen, da es sich dabei nur um einen $\mathcal{O}(a)$ -Effekt handelt. Dann können allerdings alle Terme weggelassen werden, die ungerade in q sind, da diese unter dem Integral verschwinden. Somit verbleibt man mit:

$$\begin{aligned}
 & -\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau (\check{c}_\rho \check{c}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu \not{q} \gamma_\tau + 2r^2 \Delta_1 c_\rho s_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu - 2r^2 \Delta_1 c_\rho s_\tau \gamma_\rho \gamma_\mu \not{q} + 4r^2 \Delta_1^2 c_\rho c_\tau \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\tau \\
 & + r^2 s_\rho s_\tau \not{q} \gamma_\mu \not{q} - 2r^2 \Delta_1 s_\rho c_\tau \not{q} \gamma_\mu \gamma_\tau + 2r^2 \Delta_1 s_\rho c_\tau \gamma_\mu \not{q} \gamma_\tau + 4r^4 \Delta_1^2 s_\rho s_\tau \gamma_\mu) \gamma_5
 \end{aligned} \tag{4.299}$$

Der erste Term ist der divergente. In diesem kann man das \check{c} durch \tilde{c} ersetzen, und man verbleibt mit:

$$- \left(\frac{1}{4} \tilde{q} \not{q} \gamma_\mu \not{q} \tilde{q} + 2r^2 \Delta_1^2 \Delta_4 \gamma_\mu + 4r^4 \Delta_1^4 \gamma_\mu \right) \gamma_5 \tag{4.300}$$

Der divergente Term lautet damit

$$-g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{q} \not{q} \gamma_\mu \not{q} \tilde{q}}{16\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2}. \tag{4.301}$$

Mit

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{16\Delta_1^2} + \frac{(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \tag{4.302}$$

ergibt sich ein weiterer endlicher Term, in dem man wieder ap zu Null setzen kann:

$$-g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_4^2 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{16\Delta_1^4 \Delta_2^2} \gamma_\mu \gamma_5 \tag{4.303}$$

Die Divergenz verbleibt in dem Term

$$-g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{q} \not{q} \gamma_\mu \not{q} \tilde{q}}{256\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_1^2} \gamma_5. \tag{4.304}$$

Als nächstes ist

$$\tilde{q}_\rho = q_\rho - ap_\rho(1 - 2s_\rho^2) + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.305)$$

$$q_\rho = \tilde{q}_\rho + ap_\rho(1 - 2s_\rho^2) + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.306)$$

auszunutzen. Zunächst wird das erste \not{q} nach a entwickelt, anschließend das zweite $\not{\tilde{q}}$. Man kann nicht beide \not{q} 's nach a entwickeln, da man dann aufgrund des $\tilde{\Delta}_1^2$ im Nenner über einen Pol vierter Ordnung bei $q = ap$ integrieren müßte. Es ist also $\not{q}\not{q}\gamma_\mu\not{q}\not{\tilde{q}}$ zunächst durch

$$\tilde{\Delta}_4\gamma_\mu\not{q}\not{\tilde{q}} + a\not{q}p_\rho\gamma_\rho(1 - 2s_\rho^2)\gamma_\mu\not{q}\not{\tilde{q}}, \quad (4.307)$$

und dann durch

$$\tilde{\Delta}_4\gamma_\mu\Delta_4 - a\tilde{\Delta}_4\gamma_\mu\not{q}p_\rho\gamma_\rho(1 - 2s_\rho^2) + a\not{q}p_\rho\gamma_\rho(1 - 2s_\rho^2)\gamma_\mu\not{q}\not{\tilde{q}} \quad (4.308)$$

zu ersetzen. Die Terme in s_ρ^2 sind dabei vom Typ $a \times (\text{endliches Integral})$ und können vernachlässigt werden. Mit $\tilde{\Delta}_4 = 4(\tilde{\Delta}_1 - \tilde{\Delta}_3)$ ergibt sich daraus:

$$16\tilde{\Delta}_1\Delta_1\gamma_\mu - 32\Delta_1\Delta_3\gamma_\mu + 16\Delta_3^2\gamma_\mu - a\tilde{\Delta}_4\gamma_\mu\not{q}\not{p} + a\not{q}\not{p}\gamma_\mu\not{q}\not{\tilde{q}} \quad (4.309)$$

Insgesamt verbleibt man also mit

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) &= g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{-2r^2\Delta_1^2\Delta_4}{4\Delta_1^2\Delta_2^2} - \frac{4r^4\Delta_1^4}{4\Delta_1^2\Delta_2^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta_4^2(\Delta_3 - r^2\Delta_1)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2\Delta_1^2)}{16\Delta_1^4\Delta_2^2} + \frac{\Delta_3}{8\Delta_1^3} - \frac{\Delta_3^2}{16\Delta_1^4} \right\} \gamma_\mu\gamma_5 \\ &\quad - g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{16\tilde{\Delta}_1\Delta_1} \gamma_\mu\gamma_5 \\ &\quad + g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\tilde{\Delta}_4\gamma_\mu\not{q}\not{p}}{256\tilde{\Delta}_1^2\Delta_1^2} - \frac{\not{q}\not{p}\gamma_\mu\not{q}\not{\tilde{q}}}{256\tilde{\Delta}_1^2\Delta_1^2} \right\} \gamma_5 + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (4.310)$$

Die Integrale der ersten beiden Zeilen ergeben zusammen Null, was man mit

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \Delta_4 + 4r^2\Delta_1^2 \\ \Delta_4 &= 4(\Delta_1 - \Delta_3) \end{aligned} \quad (4.311)$$

erkennt:

$$\begin{aligned} &-8r^2\Delta_4\Delta_1^4 - 16r^4\Delta_1^6 - \Delta_4^2(\Delta_3 - r^2\Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2\Delta_1^2) \\ &+ 2\Delta_3\Delta_1(\Delta_4 + 4r^2\Delta_1^2)^2 - \Delta_3^2(\Delta_4 + 4r^2\Delta_1^2)^2 \\ &= -8r^2\Delta_1^2\Delta_3^2\Delta_4 + 32r^2\Delta_1^3\Delta_3^2 - 32r^2\Delta_1^2\Delta_3^3 \\ &= -8r^2\Delta_1^2\Delta_3^2(\Delta_4 + 4(\Delta_3 - \Delta_1)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.312)$$

Man verbleibt also mit

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_{\gamma\mu\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = & -g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{16\tilde{\Delta}_1\Delta_1} \gamma_\mu \gamma_5 \\ & + g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\tilde{\Delta}_1 \gamma_\mu \not{q}}{64\tilde{\Delta}_1^2\Delta_1^2} - \frac{\tilde{\Delta}_3 \gamma_\mu \not{q}}{64\tilde{\Delta}_1^2\Delta_1^2} - \frac{\not{q} \gamma_\mu \not{q}}{256\tilde{\Delta}_1^2\Delta_1^2} \right\} \gamma_5 + \mathcal{O}(a). \quad (4.313)\end{aligned}$$

Der Term in Δ_3 ist endlich, mit dem vorstehenden a kann dieser Term also vernachlässigt werden. Auch die anderen beiden Integrale, vor denen ein Faktor a steht, sind UV-endlich, allerdings nur mit dem vorstehenden Faktor a . Es ist daher der Limes $a \rightarrow 0$ zu betrachten. Mit

$$\begin{aligned}a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin q_\rho}{64\tilde{\Delta}_1\Delta_1^2} &= a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin q_\rho}{64 \sum_\tau \sin^2 \left(\frac{q-p}{2} \right)_\tau \left(\sum_\sigma \sin^2 \left(\frac{q}{2} \right)_\sigma \right)^2} \\ &= a^5 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin(aq_\rho)}{\sum_\tau \left(2 \sin \left(a \frac{q-p}{2} \right)_\tau \right)^2 \left(\sum_\sigma \left(2 \sin \left(a \frac{q}{2} \right)_\sigma \right)^2 \right)^2} \\ &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{a} \sin(aq_\rho)}{\sum_\tau \left(\frac{2}{a} \sin \left(a \frac{q-p}{2} \right)_\tau \right)^2 \left(\sum_\sigma \left(\frac{2}{a} \sin \left(a \frac{q}{2} \right)_\sigma \right)^2 \right)^2} \\ &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_\rho}{(q-p)^2 (q^2)^2} \quad (4.314)\end{aligned}$$

ergibt sich:

$$g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu \not{q}}{64\tilde{\Delta}_1\Delta_1^2} \gamma_5 \xrightarrow{a \rightarrow 0} g_0^2 C_A \gamma_\mu \gamma_\rho \not{p} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_\rho}{(q-p)^2 (q^2)^2} \gamma_5 \quad (4.315)$$

Mit der Feynman Parametrisierung (2.196) verbleibt man mit

$$\begin{aligned}g_0^2 C_A \gamma_\mu \gamma_\rho \not{p} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2 \int_0^1 dx (1-x) \frac{q_\rho}{[(q^2 - (q-p)^2)(1-x) + (q-p)^2]^3} \gamma_5 \\ = g_0^2 C_A \gamma_\mu \gamma_\rho \not{p} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2 \int_0^1 dx (1-x) \frac{q_\rho}{[(q-px)^2 + p^2 x(1-x)]^3} \gamma_5 \quad (4.316)\end{aligned}$$

$$= g_0^2 C_A \gamma_\mu p^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2 \int_0^1 dx x (1-x) \frac{1}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^3} \gamma_5 \quad (4.317)$$

Von (4.316) nach (4.317) wird die Verschiebung $q \rightarrow q + px$ durchgeführt und alle in q ungeraden Terme werden weggelassen. Mit

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(a^2)^{n-D/2}} \quad (4.318)$$

ergibt sich schließlich

$$g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\Delta}_1 \gamma_\mu \not{q}}{64\tilde{\Delta}_1^2\Delta_1^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{(4\pi)^2} g_0^2 C_A \gamma_\mu \gamma_5. \quad (4.319)$$

Das zweite UV-endliche Integral kann genauso berechnet werden:

$$-g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{q} \not{p} \gamma_{\mu} \not{q} \tilde{q}}{256 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} -g_0^2 C_A \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q-p)_{\rho} p_{\tau} q_{\nu} (q-p)_{\sigma}}{((q-p)^2)^2 (q^2)^2} \gamma_{\rho} \gamma_{\tau} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\sigma} \quad (4.320)$$

Mit der Feynman Parametrisierung

$$\frac{1}{a^2 b^2} = 6 \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[(a-b)x+b]^4} \quad (4.321)$$

bekommt man

$$\begin{aligned} & -g_0^2 C_A \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 6 \int_0^1 dx x(1-x) \frac{(q-p)_{\rho} p_{\tau} q_{\nu} (q-p)_{\sigma}}{[(q-p)^2 - q^2]x + q^2]^4} \gamma_{\rho} \gamma_{\tau} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\sigma} \\ & = -g_0^2 C_A \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 6 \int_0^1 dx x(1-x) \frac{(q-p)_{\rho} p_{\tau} q_{\nu} (q-p)_{\sigma}}{[(q-px)^2 + p^2 x(1-x)]^4} \gamma_{\rho} \gamma_{\tau} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\sigma}, \end{aligned} \quad (4.322)$$

so daß wieder die Verschiebung $q \rightarrow q + px$ durchgeführt werden kann:

$$-g_0^2 C_A \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 6 \int_0^1 dx (1-x) x \frac{(q+p(x-1))_{\rho} p_{\tau} (q+px)_{\nu} (q+p(x-1))_{\sigma}}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^4} \gamma_{\rho} \gamma_{\tau} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\sigma} \quad (4.323)$$

Nur die Terme gerade in q müssen berücksichtigt werden, und man verbleibt mit

$$\begin{aligned} & -g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{q} \not{p} \gamma_{\mu} \not{q} \tilde{q}}{256 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2} \\ & \xrightarrow{a \rightarrow 0} -g_0^2 C_A \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 6 \int_0^1 dx x(1-x) x \\ & \quad \times \left\{ (x-1) p_{\tau} p_{\sigma} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_{\rho} q_{\nu}}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^4} \right. \\ & \quad + (x-1) p_{\tau} p_{\rho} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_{\nu} q_{\sigma}}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^4} \\ & \quad + x p_{\tau} p_{\nu} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_{\rho} q_{\sigma}}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^4} \\ & \quad \left. + (x-1)^2 x p_{\tau} p_{\nu} p_{\rho} p_{\sigma} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^4} \right\} \\ & \quad \times \gamma_{\rho} \gamma_{\tau} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\sigma}. \end{aligned} \quad (4.324)$$

Durchführen der q -Integration mit

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{(k^2 + a^2)^n} &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\delta_{\mu\nu}}{2(a^2)^{n-1-D/2}} \frac{\Gamma(n-1-D/2)}{\Gamma(n)} \\ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + a^2)^n} &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(a^2)^{n-D/2}} \end{aligned} \quad (4.325)$$

führt auf:

$$\begin{aligned}
 -g_0^2 C_A \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{1}{2} \delta_{\rho\nu} \frac{p_\tau p_\sigma}{p^2} (x-1) + \frac{1}{2} \delta_{\nu\sigma} \frac{p_\tau p_\rho}{p^2} (x-1) \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} \delta_{\rho\sigma} \frac{p_\tau p_\nu}{p^2} x + \frac{p_\tau p_\nu p_\rho p_\sigma}{p^4} (1-x) \right\} \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \quad (4.326)
 \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
 \gamma_\rho \not{p} \gamma_\mu \gamma_\rho &= 4p_\mu \\
 \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\rho &= 4\delta_{\mu\tau} \\
 \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho &= -2\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\tau \quad (4.327)
 \end{aligned}$$

und nach der x -Integration kann man dafür

$$\begin{aligned}
 -g_0^2 C_A \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{1}{4} \frac{p_\tau p_\sigma}{p^2} 4\delta_{\mu\tau} \gamma_\sigma - \frac{1}{4} \frac{p_\tau p_\rho}{p^2} \gamma_\rho \gamma_\tau \cdot 4\gamma_\mu + \frac{1}{4} \frac{p_\tau p_\nu}{p^2} (-2\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\tau) + \frac{1}{2} \gamma_\mu \right\} \gamma_5 \\
 = -g_0^2 C_A \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{p_\mu \not{p}}{p^2} - \gamma_\mu - \frac{1}{2} \frac{\not{p} \gamma_\mu \not{p}}{p^2} + \frac{1}{2} \gamma_\mu \right\} \gamma_5 \\
 = -g_0^2 C_A \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ -\frac{p_\mu \not{p}}{p^2} - \gamma_\mu + \frac{1}{2} \gamma_\mu - \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} + \frac{1}{2} \gamma_\mu \right\} \gamma_5. \quad (4.328)
 \end{aligned}$$

schreiben. Dieses Integral liefert also den Beitrag

$$-g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \not{p} \gamma_\mu \not{q}}{256 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} g_0^2 C_A \frac{1}{(4\pi)^2} 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2}. \quad (4.329)$$

Alle Terme zusammen ergeben damit:

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = g_0^2 C_A \left\{ \frac{1}{16\pi^2} \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{16\pi^2} 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2} \gamma_5 \right\} - g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{16 \tilde{\Delta}_1 \Delta_1} \gamma_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(a) \quad (4.330)$$

Das verbleibende divergente Integral kann in [EM] nachgesehen werden, und man erhält:

$$-g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{16 \tilde{\Delta}_1 \Delta_1} \gamma_\mu \gamma_5 = g_0^2 C_A \left\{ \frac{1}{16\pi^2} (\ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0000} - 2) \right\} \gamma_\mu \gamma_5 \quad (4.331)$$

Damit lautet der Term, der für die Landau-Eichung zu dem Term aus der Feynman-Eichung zu addieren ist wie folgt

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[(\ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0000} - 1) \gamma_\mu \gamma_5 + 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2} \gamma_5 \right] + \mathcal{O}(a). \quad (4.332)$$

Daraus ergibt sich

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{LAN}(p) = \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) \quad (4.333)$$

$$= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[F_{0001} - F_{0000} + 2 + 4\pi^2 I_A \right] \gamma_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(a) \quad (4.334)$$

und

$$\tilde{\Gamma}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{LAN}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[F_{0001} - F_{0000} + 2 + 4\pi^2 I_A \right] + \mathcal{O}(a). \quad (4.335)$$

4.4.7.2 Bestimmung von $Z_A^{\overline{MS}/LAT}$

Mit (4.89) ergibt sich die Renormierungskonstante zu

$$\begin{aligned} Z_A^{LAT, \overline{MS}, FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (-1 - 4\pi^2 (I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_A)) \\ &= 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796) \end{aligned} \quad (4.336)$$

in der Feynman-Eichung, und zu

$$Z_A^{LAT, \overline{MS}, LAN} = 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796) \quad (4.337)$$

in der Landau-Eichung.

4.4.7.3 Bestimmung von Z_A^{RI}

Diese Renormierungskonstante ergibt sich aus (4.98) zu

$$Z_A^{RI, FEY} = 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796), \quad (4.338)$$

bzw. zu

$$Z_A^{RI, LAN} = 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796). \quad (4.339)$$

4.4.8 Zusammenstellung der Renormierungskonstanten

Bisher wurden die Renormierungskonstanten in Feynman-Eichung ($\alpha = 1$) und Landau-Eichung ($\alpha = 0$) berechnet. Daraus lassen sich die Ergebnisse für beliebige Eichparameter α angeben, s. Abb. 4.7.

Die Ergebnisse des \overline{MS} -Schemas wurden bereits in Kapitel 2.5.6 diskutiert.

Die Ergebnisse für die Masse, die skalare und die pseudoskalare Dichte und den axialen Vektorstrom im \overline{MS}/LAT -Schema sind unabhängig von der Eichung. Damit wird diese in Kapitel 4.4.1 aufgestellte starke Forderung an die Renormierungskonstanten erfüllt. Außerdem gilt

$$Z_A^{\overline{MS}/LAT} = Z_A^{RI} \quad (4.340)$$

und

$$Z_P^{\overline{MS}/LAT} Z_m^{\overline{MS}/LAT} = Z_P^{RI} Z_m^{RI} \quad (4.341)$$

$$= 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (9.643). \quad (4.342)$$

Dies entspricht den Aussagen aus Kapitel 4.4.3, die mittels der chiralen Ward-Identität auf dem Gitter gewonnen wurden.

Die Renormierungskonstante des axialen Vektorstroms wurde auch in [Ta] berechnet, allerdings für einen nicht-lokalen Strom. Da hier der lokale Strom benutzt wurde, sind die Ergebnisse nicht vergleichbar. Außerdem wird in [Ta] keines der hier benutzten Renormierungsschemata verwandt, vielmehr wird das Renormierungsschema so gewählt, daß $Z_A = 1$ gilt.

Z_λ^{MS}	$1 - \alpha \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right)$
$Z_\lambda^{MS/LAT}$	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (\alpha \ln(a\mu)^2 + 16.644 - 3.792\alpha)$
Z_λ^{RI}	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (\alpha \ln(a\mu)^2 + 16.644 - 4.292\alpha)$

Z_m^{MS}	$1 + 3 \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right)$
$Z_m^{MS/LAT}$	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (-3 \ln(a\mu)^2 + 12.952)$
Z_m^{RI}	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (-3 \ln(a\mu)^2 + 16.952 + 1.5\alpha)$

Z_S^{MS}	$1 - 3 \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right)$
$Z_S^{MS/LAT}$	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a\mu)^2 - 12.952)$
Z_S^{RI}	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a\mu)^2 - 16.952 - 1.5\alpha)$

Z_P^{MS}	$1 - 3 \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right)$
$Z_P^{MS/LAT}$	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a\mu)^2 - 22.595)$
Z_P^{RI}	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a\mu)^2 - 26.595 - 1.5\alpha)$

Z_A^{MS}	1
$Z_A^{MS/LAT}$	$1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796)$
Z_A^{RI}	$1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796)$

Abbildung 4.7: Zusammenstellung der Renormierungskonstanten

4.5 Vertices des Superstroms

Das störungstheoretischen Verhalten des Superstroms auf dem Gitter muß weiter untersucht werden. Dabei gibt es verschiedene Möglichkeiten, den Superstrom zu definieren ([CV], [Ga], [Ta]). Die hier gewählte Form

$$S_\mu(x) = -2 \frac{i}{g} \text{Tr} (\mathcal{F}_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda(x)) \quad (4.343)$$

mit der Clover-Plaquette

$$\mathcal{F}_{\rho\tau}(x) = \frac{1}{2} \left(\mathcal{F}_{\rho\tau}^{(4)}(x) + \mathcal{F}_{\tau,-\rho}^{(4)}(x) \right) \quad (4.344)$$

und

$$\mathcal{F}_{\rho\tau}^{(4)}(x) = -\frac{1}{4a^2} (U_{\rho,\tau}(x) - U_{\tau,\rho}(x) + U_{-\rho,-\tau}(x) - U_{-\tau,-\rho}(x)) \quad (4.345)$$

wurde in [Ga] vorgeschlagen. Sie wird verwandt, da sie den Superstrom im Kontinuum besonders gut approximiert und trotzdem lokal definiert ist, was die folgenden Berechnungen vereinfacht.

4.5.1 Herleitung der Vertices für den Superstrom

Es sind nun die Feynman-Regeln zu dem Superstrom (4.343) zu berechnen. Da in der Definition des Superstroms Plaquetten auftreten, gibt es Vertices zum Superstrom mit beliebig vielen Gluonen. Die Vertices, die für die 1-Loop-Korrektur des Superstroms von Interesse sind, sind in Abb. 4.8 wiedergegeben. Es sind die Vertices mit bis zu drei Gluonen, die aus der folgenden Entwicklung der Plaquette kommen:

$$\begin{aligned}
 U_{\rho\tau}(x) = & \left(1 + aA_\tau(x) + \frac{a^2}{2}A_\tau(x)^2 + \frac{a^3}{6}A_\tau(x)^3 \right) \\
 & \times \left(1 + aA_\rho(x + a\hat{\tau}) + \frac{a^2}{2}A_\rho(x + a\hat{\tau})^2 + \frac{a^3}{6}A_\rho(x + a\hat{\tau})^3 \right) \\
 & \times \left(1 - aA_\tau(x + a\hat{\rho}) + \frac{a^2}{2}A_\tau(x + a\hat{\rho})^2 - \frac{a^3}{6}A_\tau(x + a\hat{\rho})^3 \right) \\
 & \times \left(1 - aA_\rho(x) + \frac{a^2}{2}A_\rho(x)^2 - \frac{a^3}{6}A_\rho(x)^3 \right) + \mathcal{O}(g^4) \quad (4.346)
 \end{aligned}$$

Diese sollen in den folgenden Unterkapiteln berechnet werden. Für eine 1-Loop-Berechnung des Superstroms auf dem Gitter sind dann neben den Graphen aus Abb. 2.8 noch die aus Abb. 4.9 zu beachten.

4.5.1.1 Der Gluon-Superstrom-Vertex

Der zu g proportionale Term aus $U_{\rho\tau}(x)$ lautet wie folgt:

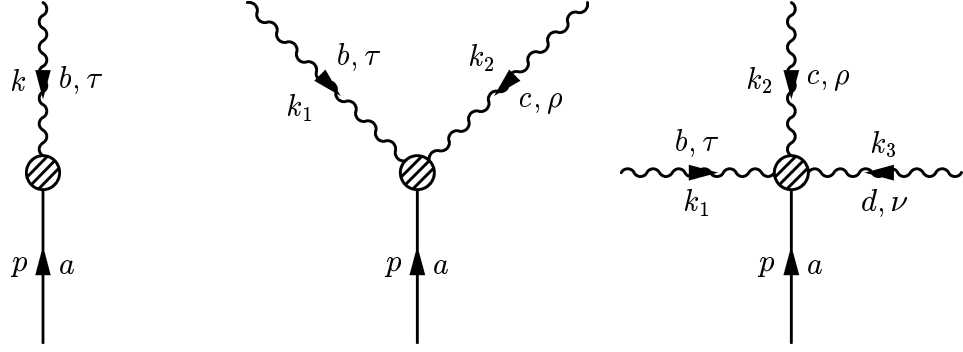
$$a(A_\tau(x) + A_\rho(x + a\hat{\tau}) - A_\tau(x + a\hat{\rho}) - A_\rho(x)) \quad (4.347)$$

Damit lautet $\mathcal{F}_{\rho\tau}^{(4)}$ in erster Ordnung in g :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2a}(A_\tau(x) + A_\rho(x + a\hat{\tau}) - A_\tau(x + a\hat{\rho}) - A_\rho(x) \\
 & + A_{-\tau}(x) + A_{-\rho}(x - a\hat{\tau}) - A_{-\tau}(x - a\hat{\rho}) - A_{-\rho}(x)) \quad (4.348)
 \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 & -2\frac{i}{g} \int d^4x \text{Tr} (\mathcal{F}_{\rho\tau}^{(4)}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda(x)) \\
 & = \frac{i}{ag} \int d^4x \text{Tr} ((A_\tau(x) + A_\rho(x + a\hat{\tau}) - A_\tau(x + a\hat{\rho}) - A_\rho(x) \\
 & \quad + A_{-\tau}(x) + A_{-\rho}(x - a\hat{\tau}) - A_{-\tau}(x - a\hat{\rho}) - A_{-\rho}(x)) \\
 & \quad \times \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda(x)) \quad (4.349) \\
 & = \frac{1}{a} \int d^4x \text{Tr} \{ (A_\tau^b(x) + A_\rho^b(x + a\hat{\tau}) - A_\tau^b(x + a\hat{\rho}) - A_\rho^b(x) \\
 & \quad + A_{-\tau}^b(x) + A_{-\rho}^b(x - a\hat{\tau}) - A_{-\tau}^b(x - a\hat{\rho}) - A_{-\rho}^b(x)) T^b
 \end{aligned}$$



a) mit einem Gluon b) mit zwei Gluonen c) mit drei Gluonen

Abbildung 4.8: Vertices des Superstroms

$$\times \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda^a(x) T^a \} \quad (4.350)$$

$$= \frac{1}{2a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int d^4x \left(A_\tau^b(x) + A_\rho^b(x + a\hat{\tau}) - A_\tau^b(x + a\hat{\rho}) - A_\rho^b(x) \right. \\ \left. + A_{-\tau}^b(x) + A_{-\rho}^b(x - a\hat{\tau}) - A_{-\tau}^b(x - a\hat{\rho}) - A_{-\rho}^b(x) \right) \lambda^a(x) \quad (4.351)$$

$$= \frac{1}{2a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int d^4x \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \exp(ipx) \tilde{\lambda}^a(p) \\ \times \left\{ \left[\exp\left(ik\left(x + \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) - \exp\left(ik\left(x + a\hat{\rho} + \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) \right. \right. \\ \left. - \exp\left(ik\left(x - \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) + \exp\left(ik\left(x - a\hat{\rho} - \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) \right] \tilde{A}_\tau^b(k) \\ \left. + \left[\exp\left(ik\left(x + a\hat{\tau} + \frac{a}{2}\hat{\rho}\right)\right) - \exp\left(ik\left(x + \frac{a}{2}\hat{\rho}\right)\right) \right. \right. \\ \left. - \exp\left(ik\left(x - a\hat{\tau} - \frac{a}{2}\hat{\rho}\right)\right) + \exp\left(ik\left(x - \frac{a}{2}\hat{\rho}\right)\right) \right] \tilde{A}_\rho^b(k) \right\} \quad (4.352)$$

$$= \frac{1}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(k+p) \\ \times \left[\exp\left(i\frac{a}{2}(k_\tau + k_\rho)\right) + \exp\left(-i\frac{a}{2}(k_\tau + k_\rho)\right) \right] \\ \times \left[\exp\left(-i\frac{a}{2}k_\rho\right) - \exp\left(i\frac{a}{2}k_\rho\right) \right] \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (4.353)$$

$$= -\frac{4i}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(k+p) \\ \times \cos\left(\frac{a}{2}(k_\tau + k_\rho)\right) \sin\left(\frac{a}{2}k_\rho\right) \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (4.354)$$

Dabei wurde $\tilde{A}_{-\tau} = -\tilde{A}_\tau$, sowie in (4.353)

$$\sigma_{\rho\tau} = -\sigma_{\tau\rho} \quad (4.355)$$

ausgenutzt. Für den gesuchten Vertex des Superstroms muß der soeben betrachtete Term mit der vollständigen Clover-Plaquette berechnet werden. Anhand der Definition (4.344) sieht man, daß man dazu noch die Terme hinzunehmen muß, bei denen

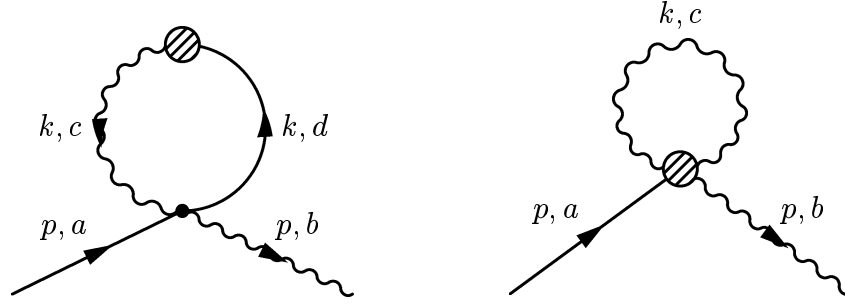


Abbildung 4.9: Die zusätzlichen 1-Loop-Graphen des Superstroms auf dem Gitter

in den Termen der Plaquetten die Ersetzungen $\tau \rightarrow -\rho$ und $\rho \rightarrow \tau$ durchgeführt wurden. Damit ergibt sich

$$S_\mu^{(1)}(q) = \int d^4x e^{iqx} S_\mu^{(1)}(x) \quad (4.356)$$

$$= -\frac{2i}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(k+p+q) \times \left\{ \cos\left(\frac{a}{2}(k_\tau + k_\rho)\right) \sin\left(\frac{a}{2}k_\rho\right) \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) + \cos\left(\frac{a}{2}(k_{-\rho} + k_\tau)\right) \sin\left(\frac{a}{2}k_\tau\right) \tilde{A}_{-\rho}^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \right\} \quad (4.357)$$

$$= -\frac{4i}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(k+p+q) \times \cos\left(\frac{a}{2}k_\tau\right) \cos\left(\frac{a}{2}k_\rho\right) \sin\left(\frac{a}{2}k_\rho\right) \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (4.358)$$

$$= -\frac{2i}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(k+p+q) \cos\left(\frac{a}{2}k_\tau\right) \sin(ak_\rho) \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p), \quad (4.359)$$

wobei die Additionstheoreme

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y \quad (4.360)$$

und

$$\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad (4.361)$$

ausgenutzt wurden. Der zugehörige Vertex $S_{\mu,\tau}^{ab}(p,k)$ wird über folgende Relation definiert

$$S_\mu^{(1)}(q) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(k+p+q) S_{\mu,\tau}^{ab}(p,k) \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p), \quad (4.362)$$

und man liest als Ergebnis ab:

$$S_{\mu,\tau}^{ab}(p,k) = -\frac{2i}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \cos\left(\frac{a}{2}k_\tau\right) \sin(ak_\rho) \quad (4.363)$$

4.5.1.2 Der 2-Gluonen-Superstrom-Vertex

Es ist nun der in g lineare Term des Superstroms zu betrachten. Dafür ist der in g quadratische Term der Clover-Plaquette $\mathcal{F}_{\rho\tau}(x)$ zu berechnen. Zunächst wird dazu der entsprechende quadratische Term von $\frac{1}{a^2}(U_{\rho\tau}(x) - U_{\tau\rho}(x))$ behandelt, der durch

$$\begin{aligned} & [-A_\tau(x + a\hat{\rho}), -A_\rho(x)] + [A_\rho(x + a\hat{\tau}), -A_\rho(x)] + [A_\tau(x), -A_\rho(x)] \\ & + [A_\rho(x + a\hat{\tau}), -A_\tau(x + a\hat{\rho})] + [A_\tau(x), -A_\tau(x + a\hat{\rho})] + [A_\tau(x), A_\rho(x + a\hat{\tau})] \end{aligned} \quad (4.364)$$

gegeben ist. Mit der Abkürzung

$$\mathcal{F}_{\rho\tau}^0(x) = -\frac{1}{2a^2}(U_{\rho\tau}(x) - U_{\tau\rho}(x)) \quad (4.365)$$

ergibt sich durch Einsetzen der Fourier-Transformierten

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{F}_{\rho\tau}^0(x)\lambda(x))^{(2)} &= \frac{1}{4}g^2 if_{abc} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \right. \\ &\quad \times \left\{ \exp\left(ik_1\left(x + \frac{a}{2}\hat{\rho}\right) + ik_2\left(x + a\hat{\rho} + \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) \right. \\ &\quad - \exp\left(ik_1\left(x + \frac{a}{2}\hat{\rho}\right) + ik_2\left(x + \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) \\ &\quad + \exp\left(ik_1\left(x + \frac{a}{2}\hat{\rho} + a\hat{\tau}\right) + ik_2\left(x + a\hat{\rho} + \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) \\ &\quad \left. + \exp\left(ik_1\left(x + \frac{a}{2}\hat{\rho} + a\hat{\tau}\right) + ik_2\left(x + \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) \right\} \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \tilde{A}_\tau^c(k_1) \tilde{A}_\rho^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\ &\quad \times \exp\left(ik_1\left(x + \frac{a}{2}\hat{\tau} + a\hat{\rho}\right) + ik_2\left(x + \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) \\ &\quad - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\rho^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\ &\quad \left. \times \exp\left(ik_1\left(x + \frac{a}{2}\hat{\rho}\right) + ik_2\left(x + \frac{a}{2}\hat{\rho} + a\hat{\tau}\right)\right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.366)$$

Den entsprechenden Ausdruck für $\mathcal{F}_{-\rho,-\tau}(x)$ erhält man durch die Substitution $\tau \rightarrow -\tau$, $\rho \rightarrow -\rho$, wobei wieder $\tilde{A}_{-\rho} = -\tilde{A}_\rho$ zu beachten ist. Ausgedrückt durch trigonometrische Funktionen erhält man:

$$\begin{aligned} &\text{Tr}(\mathcal{F}_{\rho\tau}^{(4)}(x)\lambda(x))^{(2)} \\ &= \frac{1}{4}g^2 if_{abc} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \cos \left(\frac{a}{2} (k_{1\rho} + 2k_{2\rho} + k_{2\tau}) \right) - \cos \left(\frac{a}{2} (k_{1\rho} + k_{2\tau}) \right) \right. \\
& \quad \left. + \cos \left(\frac{a}{2} (k_{1\rho} + 2k_{1\tau} + 2k_{2\rho} + k_{2\tau}) \right) + \cos \left(\frac{a}{2} (k_{1\rho} + 2k_{1\tau} + k_{2\tau}) \right) \right\} \\
& - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\tau^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\
& \quad \times \cos \left(\frac{a}{2} (k_{1\tau} + 2k_{1\rho} + k_{2\tau}) \right) \\
& - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\rho^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\
& \quad \times \cos \left(\frac{a}{2} (k_{1\rho} + k_{2\rho} + 2k_{2\tau}) \right) \Big\}. \tag{4.367}
\end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \tag{4.368}$$

und

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \tag{4.369}$$

ergibt sich hieraus nach Multiplikation mit $\sigma_{\rho\tau}$ und Summation über σ und τ

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} (\sigma_{\rho\tau} \mathcal{F}_{\rho\tau}^{(4)}(x) \lambda(x))^{(2)} \\
& = \frac{1}{4} g^2 i f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\
& \quad \times \left\{ 2 \cos \left(\frac{a}{2} (k_{1\rho} + k_{2\rho} + k_{1\tau} + k_{2\tau}) \right) \cos \left(\frac{a}{2} (k_{1\tau} - k_{2\rho}) \right) \right. \\
& \quad \left. - 2 \sin \left(\frac{a}{2} (k_{1\rho} + k_{1\tau} + k_{2\rho} + k_{2\tau}) \right) \sin \left(\frac{a}{2} (k_{1\tau} + k_{2\rho}) \right) \right\} \\
& - \frac{1}{4} g^2 i f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\tau^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\
& \quad \times \left\{ \cos \left(a \left(\frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\tau + k_{1\rho} \right) \right) \right\} \\
& - \frac{1}{4} g^2 i f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\rho^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\
& \quad \times \left\{ \cos \left(a \left(\frac{1}{2} (k_1 + k_2)_\rho + k_{2\tau} \right) \right) \right\}. \tag{4.370}
\end{aligned}$$

Für die vollständige Plaquette ist noch der Anteil aus $\mathcal{F}_{\tau,-\rho}^{(4)}(x)$ zu berücksichtigen. Damit erhält man:

$$\text{Tr} (\sigma_{\rho\tau} \mathcal{F}_{\rho\tau}(x) \lambda(x))^{(2)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{8} g^2 i f_{abc} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\
 &\quad \times \left\{ \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} + 2k_{1\tau} - k_{1\rho})\right) - \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} - k_{1\rho})\right) \right. \\
 &\quad + \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} - 2k_{2\rho} + 2k_{1\tau} - k_{1\rho})\right) + \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} - 2k_{2\rho} - k_{1\rho})\right) \\
 &\quad + \cos\left(\frac{a}{2}(2k_{2\rho} + k_{2\tau} + k_{1\rho})\right) - \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} + k_{1\rho})\right) \\
 &\quad \left. + \cos\left(\frac{a}{2}(2k_{2\rho} + k_{2\tau} + k_{1\rho} + 2k_{1\tau})\right) + \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} + k_{1\rho} + 2k_{1\tau})\right) \right\} \\
 &- \frac{1}{8} g^2 i f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\tau^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\
 &\quad \times \left\{ \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau} + 2k_{1\rho})\right) + \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau} - 2k_{2\rho})\right) \right. \\
 &\quad \left. - \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau} + 2k_{2\rho})\right) - \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau} - 2k_{1\rho})\right) \right\}. \quad (4.371)
 \end{aligned}$$

Mit den bereits benutzten trigonometrischen Umformungen ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
 S_\mu^{(2)}(q) &= \int d^4 x e^{iqx} S_\mu^{(2)}(x) \quad (4.372) \\
 &= g f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + p + q) \tilde{\lambda}^a(p) \\
 &\quad \times \left\{ \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \left(\cos\left(\frac{a}{2}(k_1 + 2k_2)_\rho\right) \cos(a(k_1 + k_2)_\tau) \cos(ak_{1\tau}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \cos\left(\frac{a}{2}k_{1\rho}\right) \sin(a(k_1 + k_2)_\tau) \sin(ak_{1\tau}) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{A}_\tau^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \frac{1}{2} \sin\left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau\right) (\sin(ak_{1\rho}) - \sin(ak_{2\rho})) \right\}. \quad (4.373)
 \end{aligned}$$

Der Vertex $S_{\mu,\tau\rho}^{abc}(p, k_1, k_2)$ wird über

$$S_\mu^{(2)}(q) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + p + q) S_{\mu,\tau\rho}^{abc}(p, k_1, k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_2) \tilde{A}_\tau^b(k_1) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (4.374)$$

definiert, so daß man das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 S_{\mu,\tau\rho}^{abc}(p, k_1, k_2) &= g f_{abc} \left\{ \sum_\nu \delta_{\nu\rho} \sigma_{\nu\tau} \left(\cos\left(\frac{a}{2}(2k_1 + k_2)_\rho\right) \cos(a(k_1 + k_2)_\tau) \cos(ak_{2\tau}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \cos\left(\frac{a}{2}k_{2\rho}\right) \sin(a(k_1 + k_2)_\tau) \sin(ak_{2\tau}) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_\nu \delta_{\rho\tau} \sigma_{\nu\tau} \sin\left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau\right) (\sin(ak_{1\nu}) - \sin(ak_{2\nu})) \right\} \quad (4.375)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \left\{ \left(\cos \left(\frac{a}{2} (2k_1 + k_2)_\rho \right) \cos (a(k_1 + k_2)_\tau) \cos (ak_{2\tau}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos \left(\frac{a}{2} k_{2\rho} \right) \sin (a(k_1 + k_2)_\tau) \sin (ak_{2\tau}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{g}{2} f_{abc} \delta_{\rho\tau} \sum_{\nu} \sigma_{\nu\tau} \sin \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau \right) (\sin (ak_{1\nu}) - \sin (ak_{2\nu})) \right\} \\
&\hspace{15em} (4.376)
\end{aligned}$$

ablesen kann. Es ist noch die Symmetrisierung bezüglich der Gluonen vorzunehmen, d.h. bezüglich der simultanen Ersetzungen $a \leftrightarrow b$, $\nu \leftrightarrow \tau$ und $k_1 \leftrightarrow k_2$. Dies führt auf das Endergebnis

$$\begin{aligned}
S_{\mu,\tau\rho}^{abc}(p, k_1, k_2) &= g f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \frac{1}{2} \left\{ \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + 2k_2)_\rho \right) \cos (a(k_1 + k_2)_\tau) \cos (ak_{1\tau}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos \left(\frac{a}{2} k_{1\rho} \right) \sin (a(k_1 + k_2)_\tau) \sin (ak_{1\tau}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \cos \left(\frac{a}{2} (2k_1 + k_2)_\tau \right) \cos (a(k_1 + k_2)_\rho) \cos (k_{2\rho}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos \left(\frac{a}{2} k_{2\tau} \right) \sin (a(k_1 + k_2)_\rho) \sin (ak_{2\rho}) \right) \right\} \\
&\quad + \frac{g}{2} f_{abc} \delta_{\rho\tau} \sum_{\nu} \sin \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau \right) (\sin (ak_{1\nu}) - \sin (ak_{2\nu})) \quad (4.377)
\end{aligned}$$

4.5.1.3 Der 3-Gluonen-Superstrom-Vertex

Der Kontinuumsfeldstärketensor $F_{\rho\tau}(x)$ hängt maximal quadratisch vom Eichfeld A ab, daher tritt im Kontinuum kein 3-Gluonen-Vertex auf. Auf dem Gitter stellt die Plaquettenvariable $U_{\rho\tau}(x)$ jedoch eine unendliche Potenzreihe in g dar, so daß der n -Gluonen-Vertex hier für alle n auftritt. Die Entwicklung von $\mathcal{F}_{\rho\tau}^0(x) = -\frac{1}{2a^2}(U_{\rho\tau}(x) - U_{\tau\rho}(x))$ liefert in dritter Ordnung von A folgende Terme

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\rho\tau}^0(x)^{(3)} &= -\frac{1}{6}a \left(A_\tau(x)^3 - A_\rho(x)^3 - A_\tau(x + a\hat{\rho})^3 + A_\rho(x + a\hat{\tau})^3 \right) \\
&\quad -\frac{1}{4}a \left(-\{A_\tau(x)^2, A_\tau(x + a\hat{\rho})\} + \{A_\rho(x + a\hat{\tau}), A_\rho(x)^2\} \right. \\
&\quad \left. - \{A_\rho(x + a\hat{\tau})^2, A_\rho(x)\} + \{A_\tau(x), A_\tau(x + a\hat{\rho})^2\} \right) \\
&\quad -\frac{1}{4}a \left(\{A_\tau(x)^2, A_\rho(x + a\hat{\tau})\} - \{A_\tau(x + a\hat{\rho}), A_\rho(x)^2\} \right. \\
&\quad \left. - \{A_\tau(x)^2, A_\rho(x)\} + \{A_\tau(x), A_\rho(x)^2\} \right. \\
&\quad \left. + \{A_\tau(x), A_\rho(x + a\hat{\tau})^2\} - \{A_\tau(x + a\hat{\rho})^2, A_\rho(x)\} \right. \\
&\quad \left. - \{A_\rho(x + a\hat{\tau})^2, A_\tau(x + a\hat{\rho})\} + \{A_\rho(x + a\hat{\tau}), A_\tau(x + a\hat{\rho})^2\} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}a \left(A_\rho(x+a\hat{\tau}) A_\tau(x+a\hat{\rho}) A_\rho(x) + A_\tau(x) A_\tau(x+a\hat{\rho}) A_\rho(x) \right. \\
 & \quad - A_\tau(x) A_\rho(x+a\hat{\tau}) A_\rho(x) - A_\tau(x) A_\rho(x+a\hat{\tau}) A_\tau(x+a\hat{\rho}) \\
 & \quad - A_\tau(x+a\hat{\rho}) A_\rho(x+a\hat{\tau}) A_\tau(x) - A_\rho(x) A_\rho(x+a\hat{\tau}) A_\tau(x) \\
 & \quad \left. + A_\rho(x) A_\tau(x+a\hat{\rho}) A_\tau(x) A_\rho(x) A_\tau(x+a\hat{\rho}) A_\rho(x+a\hat{\tau}) \right). \quad (4.378)
 \end{aligned}$$

Dieser Term wird, wie schon in der obigen Formel, durch Leerzeilen in drei Teile getrennt, die mit I, II und III bezeichnet werden. Mit der für beliebige $f_{\rho\tau}$ gültigen Beziehung

$$\sigma_{\rho\tau}(f_{\rho\tau} - f_{\tau\rho}) = 2\sigma_{\rho\tau}f_{\rho\tau} \quad (4.379)$$

ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr}(\sigma_{\rho\tau} \mathcal{F}_{\rho\tau}^0(x) \gamma_\mu \lambda(x))^{(3),I} \\
 & = -\frac{1}{3} a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \text{Tr} \left((A_\tau(x)^3 - A_\tau(x+a\hat{\rho})^3) \lambda(x) \right) \\
 & \quad - \frac{1}{2} a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \text{Tr} \left((-\{A_\tau(x)^2, A_\tau(x+a\hat{\rho})\} + \{A_\tau(x), A_\tau(x+a\hat{\rho})^2\}) \lambda(x) \right) \quad (4.380) \\
 & = -aig^3 \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
 & \quad \times \left\{ \frac{1}{3} \text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) \left(\exp\left(i\frac{a}{2}(k_1+k_2+k_3)_\tau\right) \right. \right. \\
 & \quad \quad \left. \left. - \exp\left(ia(k_1+k_2+k_3)_\rho + i\frac{a}{2}(k_1+k_2+k_3)_\tau\right) \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \text{Tr}(\{T^a T^b, T^c\} T^d) \exp\left(i\frac{a}{2}(k_1+k_2+k_3)_\tau + iak_3\rho\right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \text{Tr}(\{T^a, T^b T^c\} T^d) \exp\left(i\frac{a}{2}(k_1+k_2+k_3)_\tau + ia(k_2+k_3)_\rho\right) \right\} \quad (4.381)
 \end{aligned}$$

Mit der für die $SU(2)$ gültigen Beziehung

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) = \frac{1}{8} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \quad (4.382)$$

und der unmittelbaren Folgerung

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\{T^a T^b, T^c\} T^d) & = \text{Tr}(T^a T^b T^c T^d + T^c T^a T^b T^d) \\
 & = \frac{1}{8} (-f_{abe} f_{ecd} - f_{abe} f_{edc} + 2\delta_{ab} \delta_{cd}) \\
 & = \frac{1}{4} \delta_{ab} \delta_{cd} \quad (4.383)
 \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} (\sigma_{\rho\tau} \mathcal{F}_{\rho\tau}^0(x) \gamma_\mu \lambda(x))^{(3),I} \\
&= -aig^3 \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{24} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \exp \left(ia(k_1 + k_2 + k_3)_\rho + i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd} \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + i a k_{3\rho} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{1}{8} \delta_{ad} \delta_{bc} \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + i a (k_2 + k_3)_\rho \right) \right\} \quad (4.384)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -aig^3 \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{24} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \exp \left(ia(k_1 + k_2 + k_3)_\rho + i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd} \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + i a k_{3\rho} \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + i a (k_1 + k_2)_\rho \right) \right) \right\} \quad (4.385)
\end{aligned}$$

Nach Hinzunahme des $\mathcal{F}_{-\rho,-\tau}(x)$ -Terms erhält man dann:

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} (\sigma_{\rho\tau} \mathcal{F}_{\rho\tau}^{(4)}(x) \gamma_\mu \lambda(x))^{(3),I} \\
&= -aig^3 \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
&\quad \times \left\{ \frac{1}{24} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \cos \left(a(k_1 + k_2 + k_3)_\rho + \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right) \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd} \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a k_{3\rho} \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a(k_1 + k_2)_\rho \right) \right) \right\} \quad (4.386)
\end{aligned}$$

Für die vollständige Clover-Plaquette sind noch die beiden verbleibenden Plaquetten hinzuzunehmen, die wieder nach dem Prinzip $\tau \rightarrow -\rho$ und $\rho \rightarrow \tau$ aus dem bisher berechneten Ergebnis abgelesen werden können. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} (\sigma_{\rho\tau} \mathcal{F}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x))^{(3),I} \\
&= -\frac{1}{2} aig^3 \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \frac{1}{24} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \right. \\
 & \quad \times \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) + \cos \left(-\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right. \\
 & \quad - \cos \left(a(k_1 + k_2 + k_3)_\rho + \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \\
 & \quad \left. \left. - \cos \left(a(k_1 + k_2 + k_3)_\rho - \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right) \right. \\
 & \quad - \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd} \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a k_{3\rho} \right) \right. \\
 & \quad - \cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a(k_1 + k_2)_\rho \right) \\
 & \quad + \cos \left(-\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a k_{3\rho} \right) \\
 & \quad \left. \left. - \cos \left(-\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a(k_1 + k_2)_\rho \right) \right) \right\} \quad (4.387)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & = -ig^3 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
 & \quad \times \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \left\{ \frac{1}{12} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \sin^2 \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\rho \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{4} \delta_{ab} \delta_{cd} (-\sin(a(k_1 + k_2 + k_3)_\rho) \sin(a(k_1 + k_2 - k_3)_\rho)) \right\} \right) \quad (4.388)
 \end{aligned}$$

Dies ist das Endergebnis für den ersten Term.

Für den Teil II erhält man:

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr} (\sigma_{\rho\tau} \mathcal{F}_{\rho\tau}^0(x) \gamma_\mu \lambda(x))^{(3),II} \\
 & = -\frac{1}{2} ig^3 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
 & \quad \times \text{Tr} (\{T^a T^b, T^c\} T^d) \\
 & \quad \times \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + i a k_{3\tau} + i \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \right. \\
 & \quad - \exp \left(i a (k_1 + k_2)_\rho + i \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + i \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \\
 & \quad - \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + i \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \\
 & \quad \left. + \exp \left(i a (k_1 + k_2)_\rho + i \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + i a k_{3\tau} + i \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \right) \quad (4.389)
 \end{aligned}$$

Für den Ausdruck mit der vollständigen Clover-Plaquette ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr} (\sigma_{\rho\tau} \mathcal{F}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x))^{(3),II} \\
 & = -\frac{1}{16} ig^3 a \delta_{ab} \delta_{cd} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \\
 & \quad \times \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\cos \left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau + ak_{3\tau} + \frac{a}{2}k_{3\rho} \right) - \cos \left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau + \frac{a}{2}k_{3\rho} \right) \right. \\
& \quad - \cos \left(-\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau - ak_{3\tau} + \frac{a}{2}k_{3\rho} \right) + \cos \left(-\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau + \frac{a}{2}k_{3\rho} \right) \\
& \quad - \cos \left(a(k_1 + k_2)_\rho + \frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau + \frac{a}{2}k_{3\rho} \right) \\
& \quad + \cos \left(a(k_1 + k_2)_\rho + \frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau + ak_{3\tau} + \frac{a}{2}k_{3\rho} \right) \\
& \quad + \cos \left(a(k_1 + k_2)_\rho - \frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau + \frac{a}{2}k_{3\rho} \right) \\
& \quad \left. - \cos \left(a(k_1 + k_2)_\rho - \frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau - ak_{3\tau} + \frac{a}{2}k_{3\rho} \right) \right) \quad (4.390) \\
& = -\frac{1}{2}ig^3a\delta_{ab}\delta_{cd}\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \\
& \quad \times \sin(a(k_{1\rho} + k_{2\rho} + k_{3\rho})) \cos(a(k_{1\rho} + k_{2\rho})) \cos(a(k_{1\tau} + k_{2\tau} + k_{3\tau})) \sin(-ak_{3\tau}) \\
& \quad \times \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \quad (4.391)
\end{aligned}$$

Für den Teil III ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left(\sigma_{\rho\tau} \mathcal{F}_{\rho\tau}^0(x) \gamma_\mu \lambda(x) \right)^{(3),III} \\
& = -ig^3a\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
& \quad \times \left(\text{Tr} (T^a T^b T^c T^d) + \text{Tr} (T^c T^b T^a T^d) \right) \left(\exp \left(i\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau + iak_{2\rho} + i\frac{a}{2}k_{3\rho} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\text{Tr} (T^a T^c T^b T^d) + \text{Tr} (T^b T^c T^a T^d) \right) \right. \\
& \quad \left. \times \exp \left(i\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau + iak_{2\rho} + i\frac{a}{2}k_{3\rho} + iak_{3\tau} \right) \right), \quad (4.392)
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left(\sigma_{\rho\tau} \mathcal{F}_{\rho\tau}^{(4)}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \right)^{(3),III} \\
& = -ig^3a\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
& \quad \times \left(\frac{1}{4} (-f_{abe}f_{ecd} + \delta_{ab}\delta_{cd}) \cos \left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau + ak_{2\rho} + ak_{3\rho} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} (-f_{ace}f_{ebd} + \delta_{ac}\delta_{bd}) \cos \left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau + ak_{2\rho} + \frac{a}{2}k_{3\rho} + ak_{3\tau} \right) \right). \quad (4.393)
\end{aligned}$$

Hinzufügen der beiden anderen Plaquetten ergibt

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left(\sigma_{\rho\tau} \mathcal{F}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \right)^{(3),III} \\
& = -ig^3a\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
& \quad \times \left\{ \frac{1}{8} (-f_{abe}f_{ecd} + \delta_{ab}\delta_{cd}) \left(\cos \left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau + ak_{2\rho} + ak_{3\rho} \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\cos\left(-\frac{a}{2}(k_1+k_2)_\tau + ak_{2\rho} + ak_{3\rho}\right) \\
 & -\frac{1}{8}(-f_{ace}f_{ebd} + \delta_{ac}\delta_{bd})\left(\cos\left(\frac{a}{2}(k_1+k_2)_\tau + ak_{2\rho} + \frac{a}{2}k_{3\rho} + ak_{3\tau}\right)\right. \\
 & \quad \left.-\cos\left(-\frac{a}{2}(k_1+k_2)_\tau + ak_{2\rho} + \frac{a}{2}k_{3\rho} - ak_{3\tau}\right)\right)\Big\} \\
 = & -ig^3 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
 & \times \left\{ \frac{1}{8}(-f_{abe}f_{ecd} + \delta_{ab}\delta_{cd})\left(-2\sin(a(k_{2\rho} + k_{3\rho}))\sin\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau})\right)\right)\right. \\
 & \quad -\frac{1}{8}(-f_{ace}f_{ebd} + \delta_{ac}\delta_{bd}) \\
 & \quad \times \left(-2\sin\left(\frac{a}{2}(2k_{2\rho} + k_{3\rho})\right) \cdot \sin\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau} + 2k_{3\tau})\right)\right) \Big\}. \quad (4.394)
 \end{aligned}$$

Insgesamt gibt es also die folgenden Beiträge zum Drei-Gluonen-Vertex des Superstroms:

$$\begin{aligned}
 S_\mu^{(3)}(q) &= \int d^4 x S_\mu^{(3)}(x) \quad (4.395) \\
 = & -g^2 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + p + q) \\
 & \times \left(\cos\left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2 + k_3)_\tau\right) \left\{ \frac{1}{6}(-f_{abe}f_{ecd} + \delta_{ab}\delta_{cd}) \sin^2\left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2 + k_3)_\rho\right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{2}\delta_{ab}\delta_{cd}(-\sin(a(k_1 + k_2 + k_3)_\rho) \sin(a(k_1 + k_2 - k_3)_\rho)) \right\} \right. \\
 & \times \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
 & -g^2 a \delta_{ab} \delta_{cd} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + p + q) \\
 & \times \sin(a(k_{1\rho} + k_{2\rho} + k_{3\rho})) \cos(a(k_{1\rho} + k_{2\rho})) \cos(a(k_{1\tau} + k_{2\tau} + k_{3\tau})) \sin(-ak_{3\tau}) \\
 & \times \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
 & -g^2 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + p + q) \\
 & \times \left\{ \frac{1}{2}(-f_{abe}f_{ecd} + \delta_{ab}\delta_{cd})\left(-\sin(a(k_{2\rho} + k_{3\rho}))\sin\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau})\right)\right)\right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2}(-f_{ace}f_{ebd} + \delta_{ac}\delta_{bd}) \right. \\
 & \quad \times \sin\left(\frac{a}{2}(2k_{2\rho} + k_{3\rho})\sin\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau} + 2k_{3\tau})\right)\right) \Big\} \\
 & \times \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \quad (4.396)
 \end{aligned}$$

Der Vertex $S_{\mu,\tau\rho\nu}^{abcd}(p, k_1, k_2, k_3)$ wird über

$$S_{\mu}^{(3)}(q) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + p + q) S_{\mu,\tau\rho\nu}^{abcd}(p, k_1, k_2, k_3) \\ \times \tilde{A}_{\tau}^b(k_1) \tilde{A}_{\rho}^c(k_2) \tilde{A}_{\nu}^d(k_3) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (4.397)$$

definiert, so daß man das Ergebnis

$$S_{\mu,\tau\rho\nu}^{abcd}(p, k_1, k_2, k_3) \\ = -\frac{ag^2}{2} \delta_{\rho\tau} \left\{ \frac{1}{3} \delta_{\tau\nu} \sum_{\sigma} \sigma_{\sigma\tau} \gamma_{\mu} (f_{ade} f_{bce} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \right. \\ \times \cos\left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_{\tau}\right) \sin^2\left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_{\sigma}\right) \\ + \delta_{\tau\nu} \sum_{\sigma} \sigma_{\sigma\tau} \gamma_{\mu} \delta_{ad} \delta_{bc} \sin(a (k_1 + k_2 + k_3)_{\nu}) \sin(a (k_1 + k_2 - k_3)_{\nu}) \\ - 2\sigma_{\nu\tau} \gamma_{\mu} \delta_{ad} \delta_{bc} \sin(a (k_1 + k_2 + k_3)_{\nu}) \cos(a (k_1 + k_2)_{\nu}) \\ \times \sin(a (k_1 + k_2 + k_3)_{\tau}) \sin(ak_{3\tau}) \\ - \sigma_{\nu\tau} \gamma_{\mu} (f_{ade} f_{bce} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \sin(a (k_2 + k_3)_{\nu}) \sin\left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_{\tau}\right) \\ \left. + \sigma_{\nu\tau} \gamma_{\mu} (f_{ade} f_{bce} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \sin(a (2k_2 + k_3)_{\nu}) \sin\left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + 2k_3)_{\tau}\right) \right\} \quad (4.398)$$

ablesen kann. Für eine konkrete Berechnung ist dieser Ausdruck noch zu symmetrisieren, d.h. es sind alle sechs Kombinationen der Gluonen zu beachten. Da sich die so entstehenden Terme in diesem Fall nicht weiter zusammenfassen lassen, wird an dieser Stelle darauf verzichtet, die symmetrisierte Form anzugeben.

4.6 Verbesserung der Konvergenz der Störungstheorie

Störungstheoretische Berechnungen im Kontinuum liefern in ihrem Gültigkeitsbereich schon in 1-Loop-Ordnung eine gute Abschätzung des Ergebnisses. Es hat sich gezeigt, daß dies auf dem Gitter nicht gilt, störungstheoretisch berechnete Größen weichen deutlich von den aus den Monte-Carlo-Simulationen erwarteten Werten ab [LM]. Dies wurde auch bei der Berechnung der kritischen Linie deutlich. Es ist also naheliegend, daß man die Störungsreihe zu früh abgebrochen hat, und deshalb die bisher in 1-Loop-Ordnung berechneten Größen in 2-Loop-Ordnung auszurechnen sind. Allerdings sind 2-Loop-Rechnungen auf dem Gitter relativ aufwendig, so daß zunächst über Möglichkeiten nachgedacht werden soll, wie man die Störungsreihe besser konvergieren lassen kann, um diese dann bereits nach niedrigerer Ordnung

abbrechen zu lassen. Ideen für eine solche Verbesserung gab es schon lange, brauchbare Vorschläge wurden erstmals in [LM] gemacht und z.B. in [CLV] kommentiert und angewandt.

4.6.1 Verbesserte Störungstheorie

Der Vorschlag von [LM] geht davon aus, daß der gewählte Entwicklungsparameter g_0 weniger geeignet ist, und daß eine renormierte Kopplungskonstante $g_V(q^*)$ bei geeigneter Wahl bessere Ergebnisse liefern kann. In der üblichen Störungstheorie lautet eine Größe I entwickelt in der nackten Kopplungskonstanten g_0 wie folgt:

$$I(g_0^2) = I_0 + I_1 g_0^2 + I_2 g_0^4 + \dots \quad (4.399)$$

Ausgedrückt durch eine renormierte Kopplungskonstante $g_V(q^*)$ lautet sie:

$$I(g_V^2(q^*)) = I_0 + I_1 g_V^2(q^*) + \tilde{I}_2 g_V^4(q^*) + \dots \quad (4.400)$$

Dabei ist q^* eine noch zu bestimmende Skala. In [LM] wird vorgeschlagen, die renormierte Kopplungskonstante aus dem Quark-Potential $V(q)$ bei Impulsübertragung q zu definieren:

$$V(q) = -\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_V^2(q)}{q^2} \quad (4.401)$$

Des weiteren wird vorgeschlagen, die Skala q^* so zu wählen, daß mit $I_1 = \int d^4 q f(q)$ gilt:

$$\ln(q^{*2}) = \frac{\int d^4 q f(q) \ln(q^2)}{\int d^4 q f(q)} \quad (4.402)$$

Man kann das Quark-Potential in der Gitterstörungstheorie mit g_0 als Entwicklungsparameter ausrechnen, siehe [CLV]. Im Ortsraum lautet dieses Ergebnis (siehe [Kl], [Ko] oder [MM]):

$$V(r) = -\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_V^2(r)}{4\pi r} \quad (4.403)$$

$$= -\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_0^2}{4\pi r} \left(1 + 2g_0^2 \beta_0 \left(\ln\left(\frac{r}{a}\right) + A_1 \right) + \mathcal{O}(g_0^4) \right) \quad (4.404)$$

Dabei ist β_0 der eindeutig bestimmte erste Entwicklungskoeffizient der Callan-Symanzik β -Funktion β_V . Die ersten beiden Koeffizienten in der $N=1$ Super-Yang-Mills-Theorie sind in [SV] und [NSVZ] wie folgt angegeben:

$$\beta_0 = \frac{3N_c}{16\pi^2} \quad (4.405)$$

$$\beta_1 = \frac{6N_c^2}{(16\pi^2)^2} \quad (4.406)$$

Außerdem tritt in der Entwicklung des Potentials die Konstante A_1 auf. Diese ist wie folgt definiert:

$$A_1 = \ln \left(\frac{\Lambda_V}{\Lambda_{LAT}} \right) \quad (4.407)$$

Es ist also das Verhältnis $\frac{\Lambda_V}{\Lambda_{LAT}}$ für die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie zu bestimmen. Das Verhältnis der beiden Λ -Parameter zu $\Lambda_{\overline{MS}}$ ist bekannt, so daß daraus das gesuchte Verhältnis berechnet wird. Aus [Bi] erkennt man:

$$\frac{\Lambda_V}{\Lambda_{\overline{MS}}} = \exp \left(\gamma_E + \frac{31N_c - 20T_R N_f}{66N_c - 24T_R N_f} \right) \quad (4.408)$$

Dabei ist $\gamma_E = 0.577215665 \dots$ die Eulersche Gamma Konstante. Außerdem gilt in der adjungierten Darstellung $T_R = T_A = N_c$, und für ein Majorana-Fermion gilt $N_f = \frac{1}{2}$. Für die $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie ergibt sich damit:

$$\frac{\Lambda_V}{\Lambda_{\overline{MS}}} = \exp \left(\gamma_E + \frac{21}{54} \right) \quad (4.409)$$

Aus [We] erkennt man:

$$\frac{\Lambda_{LAT}}{\Lambda_{\overline{MS}}} = \exp \left(\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{1}{16N_c} - N_c \cdot 0.084978 \dots + T_R N_f \cdot 0.006887 \dots \right) \right) \quad (4.410)$$

Für ein Majorana Fermion in der adjungierten Darstellung ergibt sich dann:

$$\frac{\Lambda_{LAT}}{\Lambda_{\overline{MS}}} = \exp \left(\frac{1}{\beta_0} \left(\frac{1}{16N_c} - N_c \cdot 0.08153 \dots \right) \right) \quad (4.411)$$

Insgesamt erhält man damit:

$$A_1(N_c = 2) = 4.435 \dots \quad (4.412)$$

$$A_1(N_c = 3) = 4.892 \dots \quad (4.413)$$

Das Konzept zur Verbesserung der Störungstheorie von Lepage und Mackenzie basiert allerdings auf einer Entwicklung des Potentials im Impulsraum. Um dorthin zurückzugelangen, ist auf (4.404) eine Fourier-Transformation anzuwenden. Diese liefert:

$$V(q) = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_V^2(q)}{q^2} \quad (4.414)$$

$$= \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \frac{g_0^2}{q^2} \left(1 + 2g_0^2 \beta_0 \left(\ln \left(\frac{1}{aq} \right) + A_1 - \gamma_E \right) + \mathcal{O}(g_0^4) \right) \quad (4.415)$$

Die Kopplungskonstante $g_V^2(q)$ berechnet sich damit aus der nackten Kopplungskonstanten auf dem Gitter wie folgt:

$$g_V^2(q) = g_0^2 \left(1 - 2g_0^2 \beta_0 \ln \left(\frac{aq}{c} \right) + \mathcal{O}(g_0^4) \right) \quad (4.416)$$

Dabei ist c wie folgt definiert:

$$c = \exp(A_1 - \gamma_E) \quad (4.417)$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, aus (4.416) die Größe $g_V(q^*)$ zu ermitteln. Hier soll eine Methode benutzt werden, die vollständig auf störungstheoretischen Methoden beruht. Nur so können die Ergebnisse aus den Simulationen einer unabhängigen Kontrolle unterzogen werden.

4.6.2 Die rein störungstheoretische Verbesserung (PPB)

Die erste in [CLV] beschriebene Möglichkeit, die dort *Purely Perturbative Boosting* genannt wird, berechnet aus (4.416) zunächst die Kopplung bei der Skala $q = \frac{c}{a}$:

$$g_V^2\left(\frac{c}{a}\right) = g_0^2 + \mathcal{O}(g_0^6) \quad (4.418)$$

Durch Ausführen der 2-Loop-Renormierungsgruppe erhält man dann:

$$\frac{1}{g_V^2(q^*)} = \frac{1}{g_V^2\left(\frac{c}{a}\right)} + 2\beta_0 \ln\left(\frac{aq^*}{c}\right) + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln\left(\frac{g_V^2\left(\frac{c}{a}\right)}{g_V^2(q^*)}\right) \quad (4.419)$$

Damit ist durch das PPB eine Möglichkeit gegeben, störungstheoretische Ergebnisse in verbesserter Störungstheorie zu betrachten, ohne auf Monte-Carlo-Daten angewiesen zu sein.

4.6.3 Die kritische Linie in verbesserter Störungstheorie

Die in Kapitel 4.6.1 vorgeschlagenen Verbesserungen der Störungstheorie sollen nun bei der Berechnung des kritischen Hoppingparameters angewandt werden.

Zunächst ist die optimale Skala für die kritische Linie zu bestimmen. Dies geschieht mittels (4.402), wobei $f(q)$ aus (4.68) abgelesen wird. Ein entsprechendes Computer-Programm ist im Anhang wiedergegeben. Wie auch im Anhang von [CLV] diskutiert wurde, hat man bei der Berechnung von Gittersummen die Wahlfreiheit, den inneren Impuls eines Integrals um beliebige Werte zu verschieben. Dies sollte am Endergebnis normalerweise nichts ändern. Dies gilt allerdings nicht für das Integral im Zähler von (4.402), da der dort auftauchende Logarithmus die Invarianz unter Verschiebungen zerstört. Damit erhält man durch bloße Verschiebung des Impulses im Integral verschiedene Werte für die optimale Skala². In [CLV] wird weiter argumentiert, daß dies nur ein akademisches Problem sei, da q^* nur als typische Skala für den zu untersuchenden Prozeß anzusehen ist, und daher verschiedene Werte für q^* gleichwertig

²Es wurde versucht, anstelle von q^{*2} bzw. q^2 auf der linken bzw. rechten Seite von (4.402) \bar{q}^{*2} und \bar{q}^2 oder \hat{q}^{*2} und \hat{q}^2 einzusetzen. Bei einer kanonischen Wahl der Richtung des Vektors q_μ^* läßt sich (4.402) dann nicht mehr auflösen.

sind, solange sie sich nur durch eine verschiedene Wahl bei dem inneren Impuls q unterscheiden.

Die optimale Skala wurde für drei verschiedene Integrationsbereiche berechnet, was drei verschiedenen Wahlen von q entspricht. Für einen Integrationsbereich von $-\pi$ bis π ergibt sich:

$$q_1^* = 2.585 \dots \quad (4.420)$$

Für einen Integrationsbereich von 0 bis 2π ergibt sich:

$$q_2^* = 6.925 \dots \quad (4.421)$$

Für einen Integrationsbereich von π bis 3π ergibt sich:

$$q_3^* = 12.749 \dots \quad (4.422)$$

Um die Aussage von [CLV] zu überprüfen, daß diese verschiedenen Werte für die optimale Skala alle gleichwertig sind, werden die folgenden Berechnungen für alle berechneten Werte von q^* durchgeführt.

Noch direkter kann man die Abhängigkeit der optimalen Skala von den Integrationsgrenzen in Abb. 4.10 sehen. Dort ist

$$\ln(q^*(\Delta q)^2) = \frac{\int_{-\pi+\Delta q}^{\pi+\Delta q} d^4 q f(q) \ln(q^2)}{\int d^4 q f(q)} \quad (4.423)$$

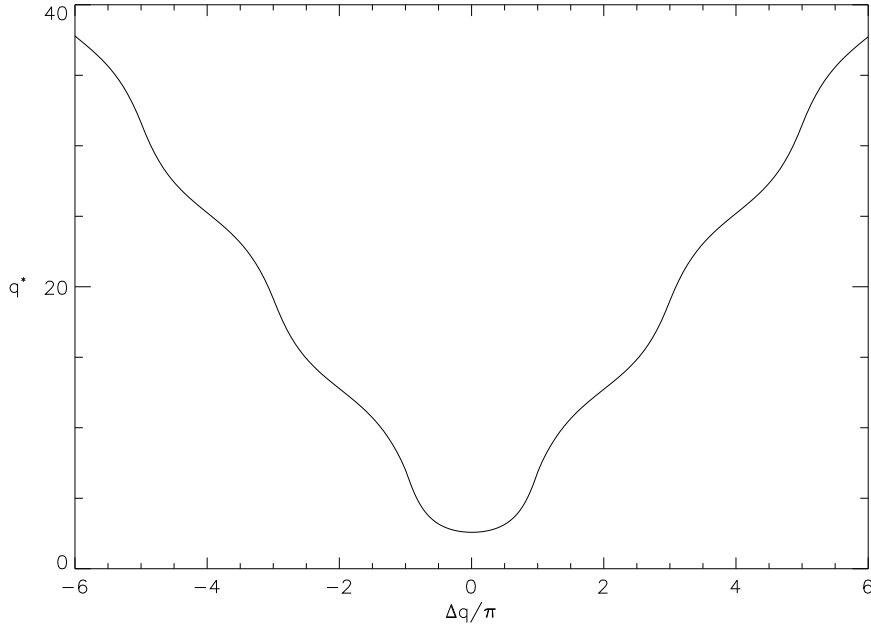
mit den Bezeichnungen aus (4.402). Auch für die Werte aus der Abbildung werden die folgenden Berechnungen durchgeführt.

Für diese Verbesserung bleibt, zumindest in 1-Loop-Ordnung, nichts weiter zu tun als (4.419) zu lösen. Man könnte dazu die renormierte Kopplungskonstante in dem Logarithmus durch (4.416) annähern, besser ist aber sicher eine numerische Lösung der Gleichung, wozu man z.B. MATHEMATICA benutzen kann. Dieses liefert als Lösung für die renormierte Kopplungskonstante für die verschiedenen Werte von q^* :

$$\begin{aligned} g_V^2(q_1^*, N_c = 2) &= 1.687 g_0^2 & g_V^2(q_1^*, N_c = 3) &= 1.767 g_0^2 \\ g_V^2(q_2^*, N_c = 2) &= 1.366 g_0^2 & g_V^2(q_2^*, N_c = 3) &= 1.440 g_0^2 \\ g_V^2(q_3^*, N_c = 2) &= 1.223 g_0^2 & g_V^2(q_3^*, N_c = 3) &= 1.293 g_0^2. \end{aligned} \quad (4.424)$$

In 1-Loop-Ordnung kann man in dem Ausdruck für den kritischen Massenparameter (4.74) die nackte Kopplungskonstante g_0 durch g_V ersetzen. Damit erhält man für den kritischen Massenparameter

$$\begin{aligned} am_{cr}(q_1^*, N_c = 2) &= -1.912 + \mathcal{O}(g_V^4) & am_{cr}(q_1^*, N_c = 3) &= -1.850 + \mathcal{O}(g_V^4) \\ am_{cr}(q_2^*, N_c = 2) &= -1.547 + \mathcal{O}(g_V^4) & am_{cr}(q_2^*, N_c = 3) &= -1.507 + \mathcal{O}(g_V^4) \\ am_{cr}(q_3^*, N_c = 2) &= -1.386 + \mathcal{O}(g_V^4) & am_{cr}(q_3^*, N_c = 3) &= -1.354 + \mathcal{O}(g_V^4), \end{aligned} \quad (4.425)$$


 Abbildung 4.10: Die optimale Skala q^* , abhängig von Δq

und für den kritischen Hoppingparameter ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
 K_{cr}(q_1^*, N_c = 2) &= 0.239 + \mathcal{O}(g_V^4) & K_{cr}(q_1^*, N_c = 3) &= 0.233 + \mathcal{O}(g_V^4) \\
 K_{cr}(q_2^*, N_c = 2) &= 0.204 + \mathcal{O}(g_V^4) & K_{cr}(q_2^*, N_c = 3) &= 0.201 + \mathcal{O}(g_V^4) \\
 K_{cr}(q_3^*, N_c = 2) &= 0.191 + \mathcal{O}(g_V^4) & K_{cr}(q_3^*, N_c = 3) &= 0.190 + \mathcal{O}(g_V^4).
 \end{aligned} \tag{4.426}$$

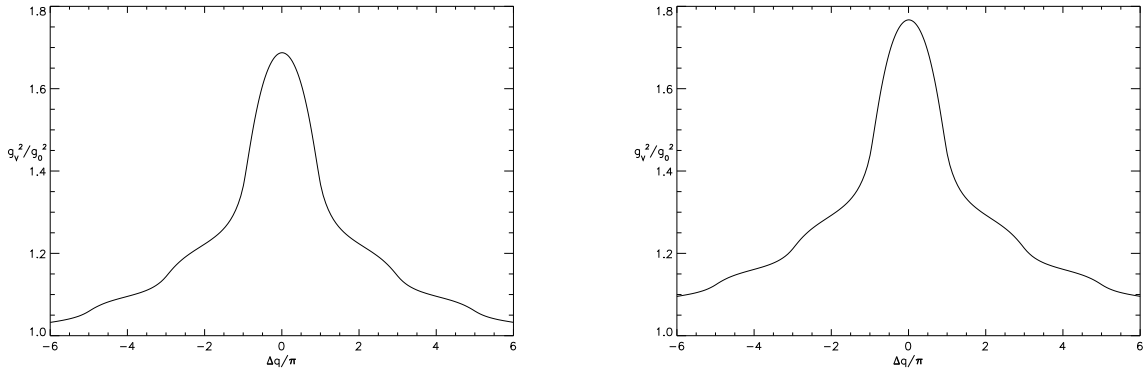
Damit weichen die Werte für den kritischen Hoppingparameter abhängig von der gewählten optimalen Skala um über 25% voneinander ab. Dies erlaubt keine sinnvolle Abschätzung des tatsächlichen Wertes.

Besonders deutlich kann man dies in Abb. 4.11 erkennen, da dort das für das Ergebnis entscheidende Verhältnis g_V^2/g_0^2 offensichtlich deutlich variiert, wenn man den Parameter Δq aus (4.423) geringfügig ändert. Dadurch wird nochmals verdeutlicht, daß auf diese Art keine sinnvolle Abschätzung möglich ist.

Diese Form der Verbesserung der Störungstheorie kann laut [CLV] die Abweichung von den Monte-Carlo-Ergebnissen etwa halbieren, manchmal schlägt sie aber auch komplett fehl. Nach obiger Diskussion liegt dies an einer geeigneten Wahl von Δq , wobei man keine Aussage darüber treffen kann, welcher Wert dafür zu wählen ist.

Aus den Simulationen ist allerdings eine sehr genaue Abschätzung des kritischen Hoppingparameters für die $SU(2)$ bekannt. Damit kann man Δq so wählen, daß die verbesserte Störungstheorie den korrekten Wert $K_{cr} = 0.1955$ liefert. Dafür muß $g_V^2/g_0^2 = 1.273$ gewählt werden, und es ergibt sich

$$\Delta q = 1.404\pi. \tag{4.427}$$

a) g_V^2 in der SU(2)

b) und in der SU(3)

Abbildung 4.11: Die renormierte Kopplungskonstante

Mit dieser Wahl für Δq ergibt sich in der SU(3):

$$g_V^2 = 1.345g_0^2 \quad (4.428)$$

Damit kann man mit Hilfe der Daten aus der SU(2) den kritischen Hoppingparameter in der SU(3) abschätzen. Es ergibt sich:

$$K_{cr}(q_{opt}^*, N_c = 3) = 0.1929 \dots \quad (4.429)$$

Dies ist die wahrscheinlich beste Abschätzung, die man in 1-Loop mit dieser Form der verbesserten Störungstheorie für den kritischen Hoppingparameter gewinnen kann. Zum jetzigen Zeitpunkt lautet die Abschätzung aus den Simulationen $K_{cr}^{MC}(N_c = 3) = 0.1945$. Damit ist auf jeden Fall die Tendenz der störungstheoretischen Vorhersage richtig, wonach der Wert für die SU(3) geringfügig kleiner ist als der für die SU(2). Während allerdings der Wert aus den Simulationen für die SU(2) sehr genau ist, so ist der Wert für die SU(3) noch mit Ungenauigkeiten behaftet, die erst durch weitere Simulationen verringert werden können. Diese Ungenauigkeiten werden z.Z. auf etwa 0.002 geschätzt. Damit liegt der hier störungstheoretisch abgeschätzte Wert in dem Bereich, der z.Z. durch Simulationen angegeben werden kann.

Mit Hilfe der verbesserten Störungstheorie gelingt eine Abschätzung des kritischen Hoppingparameters, die mit den Abschätzungen aus Monte-Carlo-Simulationen in Einklang steht. Dies ist ohne diese Verbesserung nicht möglich.

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden störungstheoretische Berechnungen in der $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie durchgeführt. In dieser Theorie gibt es eine vermehrte Anzahl an Vertices und Propagatoren durch die Majorana-Eigenschaft der Fermionen. Es konnte gezeigt werden, daß es ohne zusätzliche Komplikationen möglich ist, mittels Feynman-Regeln Störungstheorie zu betreiben, wie dies aus der QCD bekannt ist.

Im weiteren Verlauf wurden Renormierungskonstanten im Kontinuum berechnet, und die Ergebnisse mit den Aussagen verglichen, die aus Ward-Identitäten gewonnen werden können. Alle Aussagen konnten in 1-Loop-Ordnung bestätigt werden.

Im dritten Kapitel wurde die $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter formuliert, und im vierten Kapitel die zugehörige Störungstheorie entwickelt. Berechnet wurden dann multiplikative und additive Renormierungskonstanten.

Von besonderem Interesse ist die additive Renormierungskonstante der Masse. Diese ist direkt verknüpft mit dem für Simulationen wichtigen kritischen Hoppingparameter, sodaß eine unabhängige Kontrolle durch eine störungstheoretische Abschätzung wichtig ist. Der zuerst berechnete Wert für den kritischen Hoppingparameter hatte allerdings nicht die für Simulationen benötigte Genauigkeit, so daß nach Möglichkeiten zur Verbesserung gesucht werden mußte. Einen entsprechenden Ansatz versprach die verbesserte Störungstheorie von LEPAGE und MACKENZIE, die auf den kritischen Hoppingparameter angewandt wurde. Es zeigte sich, daß diese Möglichkeit die Erwartungen nicht erfüllen konnte. Die verbesserten Werte liegen zwar etwas näher an den aus den Simulationen berechneten Werten, sind aber weiterhin zu ungenau.

Außerdem zeigte sich durch diese Arbeit ein weiterer großer Nachteil der verbesserten Störungstheorie. Während Gitterintegrale nicht abhängig sind von einer Verschiebung der Integrationsgrenzen, geht in die verbesserte Störungstheorie ein Parameter — die optimale Skala — ein, der explizit davon abhängt. Es konnte gezeigt werden, daß die verbesserte Störungstheorie, abhängig von der willkürlichen Wahl der Integrationsgrenzen, Ergebnisse liefert, die um über 25% voneinander abweichen. Dies kann nicht mehr als exakte Abschätzung gewertet werden, so daß die verbesserte Störungstheorie in der bisherigen Form nicht zur Berechnung exakter Aussagen herangezogen werden kann.

Da der kritische Hoppingparameter für $N_c = 2$ bereits sehr genau mittels Simulationen bestimmt wurde, konnten die bisherigen Erkenntnisse dazu genutzt werden, trotz der Kritikpunkte an der verbesserten Störungstheorie genauere Ergebnisse für $N_c = 3$ zu gewinnen. Dazu wurde anhand des Wertes für $N_c = 2$ ermittelt, welche Verschiebung der Integrationsgrenzen zu dem Wert aus den Simulationen führt. Mit genau dieser Verschiebung wurde dann der Wert für $N_c = 3$ berechnet. Der so berechnete Wert erreicht dieselbe Genauigkeit wie die bisher zu diesem Wert durchgeführten Simulationen.

Über die multiplikativen Renormierungskonstanten gibt es wie im Kontinuum Aussagen aus Ward-Identitäten. Diese Aussagen sind nicht ganz so restriktiv wie die Aussagen im Kontinuum, bedeuten aber dennoch eine Einschränkung an die Renormierungskonstanten. Es konnte gezeigt werden, daß auch diese in 1-Loop erfüllt werden. Außerdem wurden weitere Identitäten erfüllt, die in dieser Form aus der QCD bekannt sind, für die aber in der $N = 1$ Super-Yang-Mills-Theorie keine Begründung bekannt ist. Eine Berechnung in 2-Loop-Ordnung könnte dazu aufschlußreiche Ergebnisse liefern.

Die berechneten multiplikativen Renormierungskonstanten sind die des Gluino-Propagators, der skalaren und pseudoskalaren Dichte und des axialen Stroms. Als nächstes ist die Renormierungskonstante des Superstroms zu berechnen. Ein erster Schritt zu ihrer Berechnung wurde in dieser Arbeit bereits getan. Diese soll in Zukunft fortgesetzt werden. Allerdings wurde in einer ähnlichen Rechnung [Ta] deutlich, daß durch nicht-eichinvariante Operatoren Probleme entstehen. Daher ist es empfehlenswert einem Vorschlag von LÜSCHER zu folgen, und die Renormierungskonstante des Superstroms im Schrödinger-Funktional-Formalismus zu berechnen.

Anhang A

Gamma-Matrizen im Euklidischen

In diesem Teil des Anhangs sind Definitionen und nützliche Formeln für Gamma-Matrizen im Euklidischen enthalten.

A.1 Definitionen und nützliche Formeln

Die Gamma-Matrizen im Euklidischen hängen mit denen im Minkowskiraum wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}\gamma_{1,2,3}^{euklidisch} &= -i\gamma_{1,2,3}^{Minkowski} \\ \gamma_4^{euklidisch} &= -i\gamma_4^{Minkowski} = \gamma_4^{Minkowski}\end{aligned}\tag{A.1}$$

Für diese gilt

$$\gamma_\mu \equiv \gamma_\mu^{euklidisch} = \gamma_\mu^+, \tag{A.2}$$

und sie erfüllen die Antikommutatorrelation

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}. \tag{A.3}$$

Wichtige Spuren von Gamma-Matrizen sind

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu} \tag{A.4}$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\tau) = 4\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\tau} + 4\delta_{\mu\tau}\delta_{\nu\rho} - 4\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau}, \tag{A.5}$$

und die Spur eines Produktes mit einer ungeraden Anzahl an Gamma-Matrizen verschwindet.

Üblich ist des weiteren noch die Definition

$$\sigma_{\rho\tau} = \frac{i}{2}[\gamma_\rho, \gamma_\tau] = i\gamma_\rho\gamma_\tau - i\delta_{\rho\tau}\mathbb{1}. \tag{A.6}$$

A.2 Weitere benötigte Formeln

Durch Anwenden der bisher angegebenen Gleichungen lassen sich die folgenden Zusammenhänge zeigen:

$$\begin{aligned}
 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu &= 2\delta_{\mu\nu} \gamma_\nu - \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\mu \\
 &= 2\gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\nu \\
 &= -2\gamma_\mu
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_\nu \not{p} \gamma_\mu \gamma_\nu &= \gamma_\nu \not{p} (2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) \\
 &= 2\gamma_\mu \not{p} - \gamma_\nu \not{p} \gamma_\nu \gamma_\mu \\
 &= 2\gamma_\mu \not{p} - \gamma_\nu (2p_\nu - \gamma_\nu \not{p}) \gamma_\mu \\
 &= 2\gamma_\mu \not{p} - 2\not{p} \gamma_\mu + 4\not{p} \gamma_\mu \\
 &= 2\{\gamma_\mu, \not{p}\} \\
 &= 4p_\mu
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_\nu \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu &= (2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu) \not{p} \gamma_\nu \\
 &= 2\not{p} \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu \not{p} \gamma_\nu \\
 &= 2\not{p} \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\nu (2p_\nu - \gamma_\nu \not{p}) \\
 &= 2\{\not{p}, \gamma_\mu\} \\
 &= 4p_\mu
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_\nu \not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu &= \gamma_\nu (2p_\mu - \gamma_\mu \not{p}) \not{p} \gamma_\nu \\
 &= 2\gamma_\nu p_\mu \not{p} \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu p^2 \gamma_\nu \\
 &= 2\gamma_\nu p_\mu (2p_\nu - \gamma_\nu \not{p}) + 2\gamma_\mu p^2 \\
 &= 4p_\mu \not{p} - 8p_\mu \not{p} + 2p^2 \gamma_\mu \\
 &= -4\not{p} p_\mu + 2p^2 \gamma_\mu
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\rho &= \gamma_\rho \gamma_\tau (2\delta_{\rho\mu} - \gamma_\rho \gamma_\mu) \\
 &= 2\gamma_\mu \gamma_\tau - \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\rho \gamma_\mu \\
 &= 2\gamma_\mu \gamma_\tau - \gamma_\rho (2\delta_{\rho\tau} - \gamma_\rho \gamma_\tau) \gamma_\mu \\
 &= 2\gamma_\mu \gamma_\tau - 2\gamma_\tau \gamma_\mu + 4\gamma_\tau \gamma_\mu \\
 &= 2\{\gamma_\mu, \gamma_\tau\} \\
 &= 4\delta_{\mu\tau}
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\tau \gamma_\rho &= \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu (2\delta_{\rho\tau} - \gamma_\rho \gamma_\tau) \\
&= 2\gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\tau \\
&= 2\gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu - 4\delta_{\nu\mu} \gamma_\tau \\
&= -2\gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\nu
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Anhang B

Die $SU(N_c)$ -Generatoren

In diesem Teil des Anhangs sind wichtige Formeln für die Generatoren der $SU(N_c)$ zusammengefaßt, sowie einige spezielle Gleichungen für die Fälle $N_c = 2$ und $N_c = 3$.

B.1 Definitionen und nützliche Formeln

Die Generatoren T^a ($a = 1, 2, \dots, N_c^2 - 1$) sind hermitesche, spurlose Matrizen, die die geschlossene Algebra der $SU(N_c)$ generieren. Für sie gelten die Beziehungen

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c \quad (\text{B.1})$$

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N_c}\delta^{ab} + d_{abc}T^c \quad (\text{B.2})$$

mit f_{abc} der total antisymmetrischen Strukturkonstanten, und d_{abc} ist total symmetrisch sowie gegeben durch:

$$d_{abc} = 2\text{Tr}(\{T^a, T^b\}T^c) \quad (\text{B.3})$$

Daraus ergibt sich die folgende Normierung:

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \quad (\text{B.4})$$

Aus den bisher angegebenen Formeln lassen sich die Spuren eines Produktes beliebig vieler Generatoren herleiten. Für die hier benötigten Spuren erhält man:

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4}(d_{abc} + if_{abc}) \quad (\text{B.5})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) = \frac{1}{4N_c}\delta^{ab}\delta^{cd} + \frac{1}{8}(d_{abe} + if_{abe})(d_{cde} + if_{cde}) \quad (\text{B.6})$$

Für die Strukturkonstanten gilt außerdem

$$f_{acd}f_{bcd} = \delta^{ab}C_A \quad (\text{B.7})$$

mit $C_A = N_c$.

B.2 Die Formeln im Fall $N_c = 2$

Als Generatoren der $SU(2)$ werden meist die drei Pauli-Matrizen verwendet

$$T^a = \frac{1}{2}\sigma^a, \quad (\text{B.8})$$

mit

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Kommutator und Antikommutator für die Pauli-Matrizen lauten wie folgt:

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\epsilon_{abc}\sigma^c \quad (\text{B.10})$$

$$\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta^{ab}\mathbb{1} \quad (\text{B.11})$$

ϵ_{abc} ist dabei der total antisymmetrische Tensor dritter Stufe, der vollständig durch die Antisymmetrie und $\epsilon_{123} = 1$ festgelegt ist. Damit erkennt man, daß für die $SU(2)$ die folgenden Zusammenhänge gelten:

$$f_{abc} = \epsilon_{abc} \quad (\text{B.12})$$

$$d_{abc} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Die Formeln für die Spuren vereinfachen sich damit für den Fall $N_c = 2$ zu:

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{i}{4}f_{abc} \quad (\text{B.14})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) = \frac{1}{8}(\delta^{ab}\delta^{cd} - f_{abe}f_{cde}) \quad (\text{B.15})$$

B.3 Die Formeln im Fall $N_c = 3$

Für die $SU(3)$ verwendet man meist die Gell-Mann-Matrizen in der Form

$$T^a = \frac{1}{2}\lambda^a, \quad (\text{B.16})$$

mit

$$\begin{aligned} \lambda^i &= \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3 & \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix} \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} & \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Damit sind die total antisymmetrische Konstante f_{abc} und die total symmetrische Konstante d_{abc} für $N_c = 3$ festgelegt durch die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}
 1 &= f_{123} = 2f_{147} = 2f_{246} = 2f_{257} = 2f_{345} = -2f_{156} = -2f_{367} = \frac{2}{\sqrt{3}}f_{678} \\
 \frac{1}{\sqrt{3}} &= d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} \\
 -\frac{1}{2\sqrt{3}} &= d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} \\
 \frac{1}{2} &= d_{146} = d_{157} = d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} \quad (\text{B.18})
 \end{aligned}$$

Anhang C

Benutzte Computer-Programme

In diesem Teil des Anhangs sind alle Quelltexte zu den Programmen zu finden, die zur Berechnung verschiedener Größen benutzt wurden.

C.1 \mathcal{J}_1 für die kritische Linie

Das folgende Programm wurde zur Berechnung der Größe \mathcal{J}_1 , wie sie in (4.69) angegeben wurde, benutzt:

```
/*  erstes Integral von (5.61) aus [MM]
    von Claus Gebert
    Benutzter Compiler: gcc v2.7 (mit Option -lm)          */

#include <stdio.h>
#include <math.h>

main()
{
    int i;
    double k[4],mu[4],L=60,s1,s2=0,g=0;
    for (mu[0]=0;mu[0]<L;mu[0]++) for (mu[1]=0;mu[1]<L;mu[1]++)
    for (mu[2]=0;mu[2]<L;mu[2]++) for (mu[3]=0;mu[3]<L;mu[3]++)
    {
        s2=0;
        for (i=0;i<4;i++)
        {
            k[i]=2*PI*mu[i]/L;
```



```

        s1=2*sin(k[i]/2);
        s2+=s1*s1;
    }
    if (s2>0) g+=1/s2;
}
printf("Bei L=%0.0f ergibt sich %f\n",L,g/(L*L*L*L));
}

```

Für verschiedene Werte von L ergibt dieses Programm \mathcal{J}_1 wie in Tabelle C.1a) angegeben.

C.2 \mathcal{J}_2 für die kritische Linie

Das folgende Programm wurde zur Berechnung der Größe \mathcal{J}_2 , wie sie in (4.70) angegeben wurde, benutzt:

```

/* zweites Integral von (5.61) aus [MM]
   von Claus Gebert
   Benutzter Compiler: gcc v2.7 (mit Option -lm) */

#include <stdio.h>
#include <math.h>

main()
{
    int i;
    double k[4],mu[4],L=60,s1,s2=0,s3=0,g=0;
    for (mu[0]=0;mu[0]<L;mu[0]++) for (mu[1]=0;mu[1]<L;mu[1]++)
    for (mu[2]=0;mu[2]<L;mu[2]++) for (mu[3]=0;mu[3]<L;mu[3]++)
    {
        s2=0;s3=0;
        for (i=0;i<4;i++)
        {
            k[i]=2*PI*mu[i]/L;
            s1=2*sin(k[i]/2);
            s2+=s1*s1;

```

L	\mathcal{J}_1
60	0.154894
90	0.154916
120	0.154924
200	0.15492988
300	0.15493183

a) \mathcal{J}_1

L	\mathcal{J}_2
60	0.186511
90	0.186576
120	0.186599
200	0.18661753
300	0.18662338

b) \mathcal{J}_2

Abbildung C.1: Berechnete Größen für die kritische Linie

```

s1=sin(k[i]);
s3+=s1*s1;
}
if (s2>0) g+=(s2*(4-s2/4)-s3)/(s2*(s3+s2*s2/4));
}
printf("Bei L=%0.0f ergibt sich %f\n",L,g/(L*L*L*L));
}

```

Für verschiedene Werte von L ergibt dieses Programm \mathcal{J}_2 wie in Tabelle C.1b) angegeben.

C.3 Die optimale Skala q^*

Das folgende Programm wurde zur Berechnung der Größe q^* , wie sie in (4.402) definiert wurde, benutzt. Dabei wurde das Programm unter Ausnutzung der Symmetrien der Funktion auf dem Gitter optimiert [Mü]. Für große Gitter beschleunigt dies die Berechnungen um einen Faktor 24.

Auf dem Gitter

$$\Lambda = \{(n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^4 | L_1 \leq n_i < L_2 = L_1 + L\} \quad (\text{C.1})$$

sei die Funktion $f(n)$ mit folgender Symmetrie definiert:

$$f(n_1, n_2, n_3, n_4) = f(n_{\Pi(1)}, n_{\Pi(2)}, n_{\Pi(3)}, n_{\Pi(4)}) \quad (\text{C.2})$$

mit $\Pi \in S_4$. Dann läßt sich eine Gittersumme über diese Funktion wie folgt vereinfachen:

$$\sum_{n \in \Lambda} f(n) = 24 \sum_{L_1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < L_2} f(n_1, n_2, n_3, n_4)$$

L	q_1^*	L	q_2^*	L	q_3^*
60	2.58659192	60	6.85039291	60	12.72761375
120	2.58568419	120	6.89332102	120	12.74005682
200	2.58546171	200	6.91028101	200	12.74503216
300	2.58538545	300	6.91869941	300	12.74751932
500	2.58534317	500	6.92539738	500	12.74950877

a) q^* für
 $L_1 = 0.3 - L/2$

b) q^* für
 $L_1 = 0.3$

c) q^* für
 $L_1 = 0.3 + L/2$

Abbildung C.2: Optimale Skala für die kritische Linie

$$\begin{aligned}
& +12 \sum_{L_1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < L_2} \{f(n_1, n_1, n_2, n_3) + f(n_1, n_2, n_2, n_3) \\
& \quad + f(n_1, n_2, n_3, n_3)\} \\
& + \sum_{L_1 \leq n_1 < n_2 < L_2} \{4f(n_1, n_1, n_1, n_2) + 6f(n_1, n_1, n_2, n_2) \\
& \quad + 4f(n_1, n_2, n_2, n_2)\} \\
& + \sum_{L_1 \leq n_1 < L_2} f(n_1, n_1, n_1, n_1) \tag{C.3}
\end{aligned}$$

Neben dieser Vereinfachung wurde das Gitter durch die Wahl von L_1 so gewählt, daß die Polstellen auf keinem der Gitterpunkte liegen. Dies ist ein erlaubtes Verfahren, es muß nur genau darauf geachtet werden, ob das Ergebnis tatsächlich konvergiert.

```

/* Optimale Skala laut Lepage und Mackenzie
   von Claus Gebert
   Benutzter Compiler: gcc v2.7 (mit Option -lm)          */

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>

double f(double k1,double k2,double k3,double k4)
{
    double s1=0,s2=0;
    s1=4*(pow(sin(k1/2),2)+pow(sin(k2/2),2)
        +pow(sin(k3/2),2)+pow(sin(k4/2),2));
    s2=pow(sin(k1),2)+pow(sin(k2),2)+pow(sin(k3),2)+pow(sin(k4),2);
    return (3/s1)+(s1*(4-s1/4)-s2)/(s1*(s2+s1*s1/4));
}

```

```

main(int argc, char **argv)
{
    int i;
    double k[4], mu[4], L=0, L1, L2, p=0, g=0, g1=0, gs=0;
    if (argc>1) L=atof(argv[1]);
    else
    {
        printf("Bitte L als Parameter uebergeben\n");
        return;
    }
    L1=0.3; L2=L1+L;
    for (mu[0]=L1; mu[0]<L2-3; mu[0]++)
    for (mu[1]=mu[0]+1; mu[1]<L2-2; mu[1]++)
    for (mu[2]=mu[1]+1; mu[2]<L2-1; mu[2]++)
    for (mu[3]=mu[2]+1; mu[3]<L2; mu[3]++)
    {
        p=0;
        for (i=0; i<4; i++)
        {
            k[i]=2*PI*mu[i]/L;
            p+=pow(k[i], 2);
        }
        g1=24*f(k[0], k[1], k[2], k[3]);
        g+=g1;
        gs+=g1*log(p);
    }
    for (mu[0]=L1; mu[0]<L2-2; mu[0]++)
    for (mu[1]=mu[0]+1; mu[1]<L2-1; mu[1]++)
    for (mu[2]=mu[1]+1; mu[2]<L2; mu[2]++)
    {
        for (i=0; i<3; i++) k[i]=2*PI*mu[i]/L;
        p=2*pow(k[0], 2)+pow(k[1], 2)+pow(k[2], 2);
        g1=12*f(k[0], k[0], k[1], k[2]);
        g+=g1;
    }
}

```

```

        gs+=g1*log(p);
        p=pow(k[0],2)+2*pow(k[1],2)+pow(k[2],2);
        g1=12*f(k[0],k[1],k[1],k[2]);
        g+=g1;
        gs+=g1*log(p);
        p=pow(k[0],2)+pow(k[1],2)+2*pow(k[2],2);
        g1=12*f(k[0],k[1],k[2],k[2]);
        g+=g1;
        gs+=g1*log(p);
    }
    for (mu[0]=L1;mu[0]<L2-1;mu[0]++)
    for (mu[1]=mu[0]+1;mu[1]<L2;mu[1]++)
    {
        for (i=0;i<2;i++) k[i]=2*PI*mu[i]/L;
        p=3*pow(k[0],2)+pow(k[1],2);
        g1=4*f(k[0],k[0],k[0],k[1]);
        g+=g1;
        gs+=g1*log(p);
        p=2*pow(k[0],2)+2*pow(k[1],2);
        g1=6*f(k[0],k[0],k[1],k[1]);
        g+=g1;
        gs+=g1*log(p);
        p=pow(k[0],2)+3*pow(k[1],2);
        g1=4*f(k[0],k[1],k[1],k[1]);
        g+=g1;
        gs+=g1*log(p);
    }
    for (mu[0]=L1;mu[0]<L2;mu[0]++)
    {
        k[0]=2*PI*mu[0]/L;
        p=4*pow(k[0],2);
        g1=f(k[0],k[0],k[0],k[0]);
        g+=g1;
        gs+=g1*log(p);
    }
}

```

```

g=gs/g;
gs=sqrt(exp(g));
printf("Bei L=%0.0f ergibt sich fuer q* %1.12f\n",L,gs);
}

```

Die Ergebnisse dieses Programms interessieren für verschiedene Werte von L_1 . Für verschiedene Werte von L und L_1 ergibt dieses Programm q^* wie in Tabelle C.2 angegeben.

C.4 Gittersummen der Renormierungskonstanten

L	I_{Σ_0}
20	-0.682247
60	-0.683027
120	-0.683099
200	-0.683114
300	-0.683119

a) I_{Σ_0}

L	$I_{\Sigma_1}^{FEY}$
20	0.369222
60	0.369444
120	0.369464
200	0.369469
300	0.369470

b) $I_{\Sigma_1}^{FEY}$

L	$I_{\Sigma_2}^{FEY}$
20	-0.173215
60	-0.173143
120	-0.173135
200	-0.173133
300	-0.173133

c) $I_{\Sigma_2}^{FEY}$

L	I_P^{FEY}
20	0.070379
60	0.071046
120	0.071107
200	0.071121
300	0.071126

d) I_P^{FEY}

L	I_A
20	0.005342
60	0.005325
120	0.005323
200	0.005323
300	0.005323

e) I_A

L	$I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)}$
20	0.064634
60	0.064783
120	0.064797
200	0.064800
300	0.064801

f) $I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)}$

L	$I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}$
20	-0.064653
60	-0.064785
120	-0.064797
200	-0.064800
300	-0.064801

g) $I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}$

Abbildung C.3: Gittersummen aus den Renormierungskonstanten

Mit den vorgestellten Programmen lassen sich mit geringfügigen Modifikationen die Gittersummen berechnen, die in den Ausdrücken für die Renormierungskonstanten vorkommen. Die Ergebnisse sind in Abb C.3 wiedergegeben.

Anhang D

Einige trigonometrische Umformungen

In diesem Teil des Anhangs werden einige Identitäten nachgerechnet, die zur Berechnung der Renormierungskonstanten auf dem Gitter benötigt wurden, die aber nur auf trigonometrischen Umformungen und einfachen Entwicklungen in der Gitterkonstante beruhen, weshalb sie nicht im Hauptteil dieser Arbeit nachgerechnet werden.

Die verwendeten Notationen sind die aus (4.111), (4.112) und (4.113). Direkt aus diesen Definitionen folgt:

$$\Delta_4 = \sum_{\mu} q_{\mu}^2 = 4 \sum_{\mu} s_{\mu}^2 c_{\mu}^2 = 4 \sum_{\mu} s_{\mu}^2 (1 - s_{\mu}^2) = 4 (\Delta_1 - \Delta_3) \quad (\text{D.1})$$

Des weiteren sind Umformungen nötig, wenn die um ap verschobenen Größen im Nenner stehen, also insbesondere

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\Delta}_1} &= \frac{1}{\sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q - ap}{2} \right)_{\mu}} \\ &= \frac{1}{\sum_{\mu} \left[\sin^2 \frac{q_{\mu}}{2} - ap_{\mu} \sin \frac{q_{\mu}}{2} \cos \frac{q_{\mu}}{2} \right] + \mathcal{O}(a^2)} \\ &= \frac{1}{\left[\sum_{\mu} s_{\mu}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mu} ap_{\mu} q_{\mu} \right] + \mathcal{O}(a^2)} \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{\mu} s_{\mu}^2 \right) \left[1 - \frac{a}{2} \frac{\sum_{\mu} p_{\mu} q_{\mu}}{\sum_{\mu} s_{\mu}^2} \right] + \mathcal{O}(a^2)} \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{\mu} s_{\mu}^2 \right)} \left[1 + \frac{a}{2} \frac{\sum_{\mu} p_{\mu} q_{\mu}}{\sum_{\mu} s_{\mu}^2} \right] + \mathcal{O}(a^2) \\ &= \frac{1}{\Delta_1} + a \frac{p \cdot q}{\Delta_1^2} + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Für die Berechnung der Selbstenergie in Landau-Eichung ist noch die folgende Umformung nötig

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta_2} &= \frac{1}{q_\rho^2 + 4r^2(s_\rho^2)^2} \\
&= \frac{1}{\tilde{q}_\rho^2 + 2ap_\rho\tilde{q}_\rho \cos \tilde{q}_\rho + 4r^2(\tilde{\Delta}_1^2 + a\tilde{\Delta}_1 p \cdot \tilde{q}) + \mathcal{O}(a^2)} \\
&= \frac{1}{\tilde{\Delta}_2 \left(1 + 2a \frac{p_\rho \tilde{q}_\rho \cos \tilde{q}_\rho + 2r^2 \tilde{\Delta}_1 p \cdot \tilde{q}}{\tilde{\Delta}_2} + \mathcal{O}(a^2) \right)} \\
&= \frac{1}{\tilde{\Delta}_2} \left(1 - 2a \frac{p_\rho \tilde{q}_\rho \cos \tilde{q}_\rho + 2r^2 \tilde{\Delta}_1 p \cdot \tilde{q}}{\tilde{\Delta}_2} + \mathcal{O}(a^2) \right) \\
&= \frac{1}{\tilde{\Delta}_2} - 2a \frac{p \cdot \tilde{q} - 2p_\rho \tilde{q}_\rho \tilde{s}_\rho^2 + 2r^2 \tilde{\Delta}_1 p \cdot \tilde{q}}{\tilde{\Delta}_2^2} + \mathcal{O}(a^2). \tag{D.3}
\end{aligned}$$

Außerdem ist man an einer Möglichkeit interessiert, ein Δ_2 im Nenner in ein Δ_1 umzuwandeln. Dazu beachte man, daß sich Δ_1 für kleine q wie $q^2/4$ und Δ_2 wie q^2 verhält. Damit ist folgende Aufteilung sinnvoll

$$\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{4\Delta_1} + \left[\frac{1}{\Delta_2} - \frac{1}{4\Delta_1} \right]. \tag{D.4}$$

Für den eingeklammerten Term kann man nun schreiben:

$$\frac{1}{\Delta_2} - \frac{1}{4\Delta_1} = \frac{4\Delta_1 - \Delta_2}{4\Delta_1\Delta_2} \tag{D.5}$$

$$= \frac{\Delta_3 - r^2\Delta_1^2}{\Delta_1\Delta_2}. \tag{D.6}$$

Dabei wurde

$$4\Delta_1 - \Delta_2 = 4 \sum_\mu \sin^2 \left(\frac{q_\mu}{2} \right) - \sum_\mu \sin^2 q_\mu - 4r^2\Delta_1^2 \tag{D.7}$$

$$= 4 \sum_\mu \sin^2 \left(\frac{q_\mu}{2} \right) - 4 \sum_\mu \sin^2 \left(\frac{q_\mu}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{q_\mu}{2} \right) - 4r^2\Delta_1^2 \tag{D.8}$$

$$= 4 \sum_\mu \sin^4 \left(\frac{q_\mu}{2} \right) - 4r^2\Delta_1^2 \tag{D.9}$$

$$= 4\Delta_3 - 4r^2\Delta_1^2 \tag{D.10}$$

ausgenutzt. Damit ist folgende Ersetzung gerechtfertigt:

$$\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{4\Delta_1} + \frac{\Delta_3 - r^2\Delta_1^2}{\Delta_1\Delta_2} \tag{D.11}$$

Führt man diese Ersetzung in einem divergenten Integral aus, so erkennt man durch power-counting, daß nur noch der erste Term divergent ist, während der zweite endlich ist.

Ganz analog kann nun auch eine Ersetzung für ein Δ_2^2 im Nenner gefunden werden:

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{(4\Delta_1)^2} + \left[\frac{1}{\Delta_2^2} - \frac{1}{(4\Delta_1)^2} \right] \quad (\text{D.12})$$

Der eingeklammerte Term läßt sich wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{\Delta_2^2} - \frac{1}{(4\Delta_1)^2} = \frac{16\Delta_1^2 - \Delta_2^2}{16\Delta_1^2\Delta_2^2} \quad (\text{D.13})$$

$$= \frac{(4\Delta_1 - \Delta_2)(4\Delta_1 + \Delta_2)}{16\Delta_1^2\Delta_2^2} \quad (\text{D.14})$$

Dabei ist die Differenz $4\Delta_1 - \Delta_2$ gemäß vorheriger Argumentation von der Ordnung $\mathcal{O}(q^4)$, der andere Faktor ist

$$4\Delta_1 + \Delta_2 = 4\Delta_1 + \Delta_4 + 4r^2\Delta_1^2 \quad (\text{D.15})$$

$$= 8\Delta_1 - 4\Delta_3 + 4r^2\Delta_1^2, \quad (\text{D.16})$$

wobei (D.1) ausgenutzt wurde. Damit kann der fermionische Propagator wie folgt ersetzt werden:

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{16\Delta_1^2} + \frac{(\Delta_3 - r^2\Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2\Delta_1^2)}{\Delta_1^2\Delta_2^2} \quad (\text{D.17})$$

Der erste Term verhält sich wie $1/q^4$, der zweite wie $1/q^2$. Substituiert man diesen Ausdruck in einem divergenten Integral, so liefert nur der erste Term dieses Ausdrucks einen divergenten Anteil, der zweite Term ist endlich.

Abbildungsverzeichnis

1	Die laufenden Kopplungskonstanten	3
2.1	Die Gluonen-Vertices	18
2.2	Der Gluon-Ghost-Vertex	20
2.3	Die Gluonen-Gluino-Vertices	21
2.4	Mögliche Beiträge zum Gluino-Propagator	30
2.5	1-Loop Selbstenergie des Fermionen-Propagators	38
2.6	1-Loop-Korrektur	45
2.7	Vertices des Superstroms	62
2.8	Die 1-Loop-Graphen des Superstroms	63
4.1	Die Gluonen-Vertices	73
4.2	Die Geister-Vertices	77
4.3	Die Gluino-Vertices	80
4.4	1-Loop Selbstenergie Graphen auf dem Gitter	86
4.5	1-Loop Selbstenergie des Fermionen-Propagators auf dem Gitter . . .	94
4.6	1-Loop-Korrektur auf dem Gitter	114
4.7	Zusammenstellung der Renormierungskonstanten	130
4.8	Vertices des Superstroms	132
4.9	Die zusätzlichen 1-Loop-Graphen des Superstroms auf dem Gitter . .	133
4.10	Die optimale Skala q^* , abhängig von Δq	148
4.11	Die renormierte Kopplungskonstante	149
C.1	Berechnete Größen für die kritische Linie	160
C.2	Optimale Skala für die kritische Linie	161
C.3	Gittersummen aus den Renormierungskonstanten	164

Literaturverzeichnis

- [Ba] B. E. Baaquie, *Gauge Fixing and Mass Renormalization in the Lattice Gauge Theory*, Phys. Rev. **D16** (1977) 2612
- [Bi] A. Billoire, *Another Connection between the Λ -Parameters of the Euclidean Lattice and Continuum QCD*, Phys. Lett. **104B** (1981) 472
- [BMMRT] M. Bochicchio, L. Maiani, G. Martinelli, G. C. Rossi, M. Testa, *Chiral Symmetry on the Lattice with Wilson Fermions*, Nucl. Phys. **B262** (1985) 331
- [CLV] M. Crisafulli, V. Lubicz, A. Vladikas, *Improved Renormalization of Lattice Operators: A Critical Reappraisal*, Eur. Phys. J. **C4** (1998) 145-171
- [CM] S. Coleman, J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys. Rev. **159** (1967) 1251
- [CMP] S. Caracciolo, P. Menotti, A. Pelissetto, *One-Loop Analytic Computation of the Energy-Momentum Tensor for Lattice Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B 375** (1992) 195
- [Co] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press (1984)
- [CV] G. Curci, G. Veneziano, *Supersymmetry and the Lattice: A Reconciliation*, Nucl. Phys. **B292** (1987) 555
- [DEHKa] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, J. Küblbeck, *Compact Feynman Rules for Majorana Fermions*, Phys. Lett. **B 291** (1992) 278
- [DEHKb] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, J. Küblbeck, *Feynman Rules for Fermion-Number-Violating Interactions*, Nucl. Phys. **B 387** (1992) 467
- [EM] R. Ellis, G. Martinelli, *Two-Loop Corrections to the Λ Parameters of One-Plaquette Actions*, Nucl. Phys. **B235** [FS11] (1984) 93-114
- [Ga] T. Galla, *Supersymmetrische und Chirale Ward-Identitäten in einer diskretisierten $N = 1$ -SUSY-Yang-Mills-Theorie*, Diplomarbeit an der WWU Münster (1999)

- [GL] Y. Golfand, E. Likhtman, *Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of P Invariance*, JETP Lett. **13** (1971) 323
- [GZ] J. Gluza, M. Zralek, *Feynman-Rules for Majorana-Neutrino Interactions*, Phys. Rev. **D 45** (1992) 1693
- [HH] A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, *The Connection between the Λ Parameters of Lattice and Continuum QCD*, Phys. Lett. **93B** (1980) 165
- [HK] H. E. Haber, G. L. Kane, *The Search for Supersymmetry: Probing Physics beyond the Standard Model*, Phys. Repts. **117** (1985) 76
- [HLS] R. Haag, J.T. Lopuszanski, M. Sohnius, *All Possible Generators of Supersymmetries of the S Matrix*, Nucl. Phys **B88** (1975) 257
- [JS] S. K. Jones, C. H. L. Smith, *Leptoproduction of Supersymmetric Particles*, Nucl. Phys. **B 217** (1983) 145
- [KNS] H. Kawai, R. Nakayama, K. Seo, *Comparison of the Λ Parameter with the Continuum Λ Parameter in Massless QCD*, Nucl. Phys. **B 189** (1981) 40
- [Kl] T. R. Klassen, *QCD (Lattice) potential and coupling: How to accurately interpolate between Multiloop QCD and the String Picture*, Phys. Rev **D 51** (1995) 5130
- [Ko] E. Kovacs, *Lattice Predictions for Low- Q^2 Phenomenology*, Phys. Rev **D 25** (1982) 871
- [LM] G. P. Lepage, P. B. Mackenzie, *On the Viability of Lattice Perturbation Theory*, Phys. Rev. **D48** (1993) 2250
- [Lu] S. Luckmann, *Ward-Identitäten in der $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie*, Diplomarbeit an der WWU Münster (1997)
- [LV] V. Lubicz, A. Vladikas, unveröffentlichte Notizen
- [MM] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press (1994)
- [Mo] I. Montvay, *An Algorithm for Gluinos on the Lattice*, Nucl. Phys. **B466** (1996) 259
- [MPSTV] G. Martinelli, C. Pittori, C.T. Sachrajda, M. Testa, A. Vladikas, *A General Method for Nonperturbative Renormalization of Lattice Operators*, Nucl. Phys. **B445** (1995) 81

- [Mu] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics - An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*, World Scientific (1987)
- [Mü] G. Münster, unveröffentlichte Notizen
- [MZ] G. Martinelli, Y. C. Zhang, *The Connection Between Local Operators on the Lattice and in the Continuum and its Relation to meson Decay Constants*, Phys. Lett. **123B** (1983), 433
- [NSVZ] V. Novikov, M. Shifman, A. Vainshtein, V. Zakharov, *Exact Gell-Mann-Low Function of Supersymmetric Yang-Mills Theories from Instanton Calculus*, Nucl. Phys. **B229** (1983) 381
- [Ol] K. Olive, *Introduction to Supersymmetry: Astrophysical and Phenomenological Constraints*, hep-ph/9911307
- [Po] S. Pokorski, *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press (1987)
- [PT] P. Pascual, R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, Springer-Verlag (1984)
- [Ra] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer, 2nd edition*, Addison-Wesley (1990)
- [Ry] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory, 2nd edition*, Cambridge University Press (1996)
- [SV] M. Shifman, A. Vainshtein, *Instantons Versus Supersymmetry: Fifteen Years Later*, hep-th/9902018
- [Ta] Y. Taniguchi, *One Loop Calculation of SUSY Ward-Takahashi identity on Lattice with Wilson Fermion*, hep-lat/9906026
- [Vl] A. Vladikas, private Mitteilung
- [VY] G. Veneziano, S. Yankielowicz, *An Effective Lagrangian for the pure $N = 1$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Phys. Lett. **113B** (1982) 231
- [We] P. Weisz, *On the Connection between the Λ -Parameters of Euclidean Lattice and Continuum QCD*, Phys. Lett **100B** (1981) 331
- [Wi] K. G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. **D10** (1974) 2445
- [WZ] J. Wess, B. Zumino, *Supergauge Transformation in Four Dimensions*, Nucl. Phys. **B70** 39

Danksagung

Das Studium und die Diplomarbeit sind nicht das Produkt einer einzelnen Person, vielmehr sind viele Menschen aus dem Umfeld — Professoren, Kommilitonen, langjährige Freunde und Verwandte — teils sehr aktiv daran beteiligt. Ich möchte mich bei allen bedanken, die meine Arbeit so gefördert haben, insbesondere bei

- Prof. Dr. Gernot Münster für die interessante Aufgabe und den damit verbundenen Einstieg in das DESY-Münster-SUSY-Projekt sowie die immer wieder impulsgebende Betreuung der Arbeit,
- Prof. Dr. Anastassios „Tassos“ Vladikas für die freundliche Unterstützung dieser Arbeit,
- Tobias Galla für die gute Zusammenarbeit und die vielen, stets hilfreichen Gespräche sowie ihm und meinen weiteren Zimmerkollegen Florian Heitger und Christel Kamp für die sehr gute Atmosphäre und die fruchtbaren Diskussionen,
- Klaus Spanderen sowie Alessandra Feo und Silke Luckmann für ihre Hilfe sowie den Mitgliedern des Projektes aus Hamburg für ihre Gastfreundschaft,
- allen noch nicht genannten Mitgliedern der Arbeitsgruppen Münster und Stingl, insbesondere Johannes Göttker-Schnetmann und Jens Küster für unsere gemeinsamen Freitag-Nachmittags-Treffen,
- Wilfried Gleitze und meiner Schwester Jutta für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Ganz besonders herzlich möchte ich mich noch bei den Personen bedanken, die mir besonders nahe stehen, und deren Unterstützung ich mir jederzeit sicher sein konnte,

- bei meinen Eltern Christa, geb. Detje, und Alfred Gebert, die mir dieses Studium ermöglichten,
- bei meiner Freundin Nina Gleitze für ihre Geduld und aufmunternden Worte sowie ihr ansteigendes Interesse an der Physik.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im November 1999

