

TOBIAS GALLA

**Supersymmetrische und Chirale Ward-Identitäten
in einer diskretisierten
 $N = 1$ -SUSY-Yang-Mills-Theorie**

Institut für Theoretische Physik I
der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Dezember 1999

**Supersymmetrische und Chirale Ward-Identitäten
in einer diskretisierten
 $N = 1$ -SUSY-Yang-Mills-Theorie**

als Diplomarbeit vorgelegt von
Tobias Galla

Dezember 1999

Institut für Theoretische Physik I der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Die $N = 1$-SUSY-Yang-Mills-Theorie im Kontinuum	8
1.1 Die Poincaré-Superalgebra	8
1.2 Darstellung im Raum der Superfelder	10
1.3 Supersymmetrische Lagrange-Dichten	12
1.3.1 Das Wess-Zumino-Modell	13
1.3.2 Supersymmetrische Eichtheorie	14
1.4 $N = 1$ -SUSY-Yang-Mills im Kontinuum	15
1.4.1 Die Wirkung	15
1.4.2 Variation der Eichfeldwirkung	16
1.4.3 Variation der Fermion-Wirkung	17
1.4.4 Superstrom	19
2 $N = 1$-SUSY-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter	21
2.1 Grundbegriffe der Gittereichtheorie	22
2.1.1 Notationen	22
2.1.2 Die Wilson-Wirkung für das Eichfeld	23
2.1.3 Die Wirkung für den fermionischen Teil	25
2.1.4 Einfache SUSY-Transformationen auf dem Gitter	27
2.2 Graphische Notation	27
2.3 Die Gittergrößen	29
2.3.1 Kovariante Ableitung und Feldstärketensor	29
2.3.2 Leibniz-Regel auf dem Gitter	30
2.3.3 Bianchi-Identität auf dem Gitter	32
2.4 Variation des Eichfeldanteils der Lagrange-Dichte	33
2.5 Variation der Fermion-Lagrange-Dichte	36
2.5.1 $\delta_\lambda \mathcal{L}_f$ -Variation auf dem Gitter	36
2.5.2 $\delta_U \mathcal{L}_f$ -Variation auf dem Gitter	38
2.5.3 Zusammenfassung	40

2.6	Wilson-Anteil der Fermion-Lagrange-Dichte	40
2.6.1	$\delta_\lambda \mathcal{L}_{f,Wil}$ -Variation	41
2.6.2	$\delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}$ -Variation	42
2.7	Gesamte Variation und Superstrom	44
3	Konstruktion $\mathcal{O}(a)$-verbesserter SUSY-Transformationen	49
3.1	Vorgehensweise	49
3.2	Symmetrische kovariante Ableitung auf dem Gitter	50
3.2.1	Definition	50
3.2.2	Leibniz-Regel und Bianchi-Identität	52
3.3	Der Zusammenhang von Gitter und Kontinuum	53
3.4	Entwicklung der Plaquettenvariable	54
3.5	Symmetrisierung der Lagrange-Dichte	57
3.5.1	Fermion-Wirkung	57
3.5.2	Eichfeldwirkung	58
3.6	Symmetrisierung der SUSY-Transformationen	60
3.7	Variation der Lagrange-Dichte	61
3.7.1	δ_λ -Variation des Fermion-Anteils	61
3.7.2	δ_U -Variation der Fermion-Wirkung	63
3.7.3	δ_U -Variation der Eichfeld-Wirkung	64
3.8	Definition des Superstromes	74
3.9	Wilson-Fermionen	76
3.10	Zusammenfassung	79
3.11	Nicht-lokale Ströme	82
4	Ward-Identitäten	86
4.1	Der Noether-Strom	86
4.1.1	Symmetrie und Stromerhaltung	86
4.1.2	Der Noether-Strom für die $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie im Kontinuum	87
4.2	Ward-Identität für den Superstrom	89
4.2.1	Kontinuum	89
4.2.2	Noether-Strom auf dem Gitter	93
4.2.2.1	$\delta_\lambda S_f$ -Variation	93
4.2.2.2	$\delta_U S_f$ -Variation	94
4.2.2.3	$\delta_U S_g$ -Variation	95
4.2.3	Ward-Identität auf dem Gitter	98
4.3	Chirale Ward-Identität	103

5 Störungstheorie der Chiralen Ward-Identität	107
5.1 Das Renormierungsprogramm	107
5.1.1 Das Konzept der Renormierung	107
5.1.2 Ausgangslage	108
5.1.3 Verwendete Regulatoren	110
5.1.4 Verwendete Renormierungsschemata	110
5.1.4.1 Das $\overline{\text{MS}}$ -Schema	110
5.1.4.2 Das $\overline{\text{MS}}$ /LAT-Schema	111
5.1.4.3 Das RI-Schema	112
5.2 Dimensionelle Regularisierung der nackten Kontinuumsgrößen	114
5.2.1 Vorgehensweise	114
5.2.2 Gluino-Propagator	114
5.2.2.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)	115
5.2.2.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)	117
5.2.3 Skalare und Pseudoskalare Dichte	119
5.2.3.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)	120
5.2.3.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)	122
5.2.4 Axialer Vektorstrom	123
5.2.4.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)	123
5.2.4.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)	126
5.3 Berechnung der nackten Größen in Gitterregularisierung	131
5.3.1 Notationen	131
5.3.2 Sprachregelung und Konventionen	132
5.3.3 Vorgehensweise	133
5.3.4 Gluino-Propagator	133
5.3.4.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)	134
5.3.4.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)	143
5.3.5 Skalare Dichte	151
5.3.5.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)	151
5.3.5.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)	152
5.3.6 Pseudoskalare Dichte	153
5.3.6.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)	153
5.3.6.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)	154
5.3.7 Axialer Vektorstrom	156
5.3.7.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)	156
5.3.7.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)	159
5.4 Renormierung	163
5.4.1 Renormierung im $\overline{\text{MS}}$ -Schema des Kontinuums	163

5.4.1.1	Gluino-Propagator	163
5.4.1.2	Skalare und Pseudoskalare Dichte	165
5.4.1.3	Axialer Vektorstrom	166
5.4.2	Renormierung im $\overline{\text{MS}}$ /LAT-Schema	166
5.4.2.1	Gluino-Propagator	166
5.4.2.2	Skalare Dichte	168
5.4.2.3	Pseudoskalare Dichte	169
5.4.2.4	Axialer Vektorstrom	170
5.4.3	Renormierung im RI-Schema	170
5.4.3.1	Gluino-Propagator	171
5.4.3.2	Skalare Dichte	172
5.4.3.3	Pseudoskalare Dichte	172
5.4.3.4	Axialer Vektorstrom	173
5.4.4	Zusammenfassung der Renormierungskonstanten	173
5.5	Diskussion der Ergebnisse	174
5.6	Die chirale Ward-Identität und die Gluino-Masse	177
6	Die Vertices des Superstroms	180
6.1	Kontinuum	180
6.1.1	Der Ein-Gluon-Vertex des Superstroms	180
6.1.2	Der 2-Gluonen-Vertex des Superstroms	182
6.2	Gitter	182
6.2.1	Der Ein-Gluon-Vertex des Superstroms	184
6.2.2	Der 2-Gluonen-Vertex des Superstroms	186
6.2.3	Der 3-Gluonen-Vertex des Superstroms	189
6.3	Feynman-Graphen der 1-Loop-Korrektur zum Superstrom	196
6.4	Mischungsverhalten des Superstroms	196
	Zusammenfassung und Ausblick	198
A	Dirac-Matrizen	203
B	Die $SU(N_c)$-Farbalgebra	206
B.1	Allgemeine Relationen	206
B.2	Der Fall $N_c = 2$	207
B.3	Adjungierte Darstellung	207
B.4	Feldstärketensor, Leibniz-Regel und Bianchi-Identität	208
C	Majorana-Spinoren	209

D Fierz-Transformation	211
E Die Nicht-Abelsche Stokes-Formel	214
E.1 Formulierung der Formel	214
E.2 Beweis	215
E.3 Anwendung bei der Entwicklung der Plaquettenvariablen	217
F Kovariante Ableitungen auf dem Gitter	219
G Mathematische Hilfsmittel	221
G.1 Die Gamma-Funktion	221
G.2 Trigonometrische Umformungen	221
G.2.1 Notationen	221
G.2.2 Taylor-Entwicklung der Propagatoren	222
G.2.3 Algebraische Beziehungen der Propagatoren	223
G.3 Integralformeln	224
G.3.1 Feynman-Parametrisierung	224
G.3.2 Integrale in D Dimensionen	224
G.3.3 Integralformeln der Gitter-Störungstheorie	224
G.4 Numerische Werte	225
H Feynman-Regeln	226
H.1 Feynman-Regeln im Kontinuum	226
H.2 Feynman-Regeln auf dem Gitter	227
Literaturverzeichnis	230
Danksagung	235

Einleitung

Zum Verständnis der kleinsten Bausteine der Materie und ihrer Wechselwirkungen ist die Beschäftigung mit dem Begriff der Symmetrie unumgänglich. In allen gegenwärtigen Modellen der Elementarteilchen spielen verschiedene Arten von Invarianzen eine große Rolle. Die Einbeziehung von Symmetrieeigenschaften beschränkt sich dabei aber nicht nur auf die Elementarteilchentheorie, sondern ist auch in weitaus älteren Fragestellungen von zentraler Bedeutung. Beispielsweise nutzt man bei der Lösung des Kepler-Problems, also der Frage nach der Bewegung der Planeten, die Translations- und Rotationsinvarianz des Raumes aus. Kein Punkt und keine Richtung im leeren Raum soll gegenüber den anderen ausgezeichnet sein, außerdem auch kein Zeitpunkt gegenüber dem anderen. Die Mächtigkeit von Symmetriebetrachtungen in der theoretischen Physik ist dabei nicht zuletzt auf ein 1918 von EMMY NOETHER bewiesenes Theorem zurückzuführen, welches mit jeder Symmetrie eine Erhaltungsgröße verknüpft. Im obigen Beispiel der Planetenbewegung sind dies die Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung.

Auch die Fortschritte, die im vergangenen Jahrhundert in der Frage nach einer Vereinheitlichung der Naturkräfte gemacht worden sind, sind ohne die Einbeziehung von Symmetrien undenkbar. Der erste Schritt in diese Richtung gelang 1888 MAXWELL durch die Entdeckung der Theorie des Elektromagnetismus, in der die elektrische und magnetische Wechselwirkung im Rahmen einer gemeinsamen Beschreibung vereinheitlicht wurden. Neben den o.g. raum-zeitlichen Symmetrien weist die Maxwellsche Theorie eine zusätzliche „innere“ Symmetrie auf, die Feldgleichungen für die Potentiale $\vec{A}(x)$ und $\phi(x)$ sind invariant gegenüber sogenannten Eichtransformationen. Konsequenz dieser zusätzlichen Symmetrie ist die Erhaltung der elektrischen Ladung.

Auch hinter der 1905 von EINSTEIN formulierten speziellen Relativitätstheorie stehen Eigenschaften der Raum-Zeit. Mathematisch wird diese Theorie durch die Invarianz unter den Lorentz- bzw. Poincaré-Transformationen beschrieben.

Kurz nach dem Aufkommen quantenmechanischer Ideen formulierte DIRAC 1928 die erste Theorie, die es erlaubte, die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie miteinander zu verbinden. DIRAC postulierte dabei die Existenz der Antimaterie, so sollen etwa das Elektron und sein Antiteilchen, das Positron, durch eine sogenannte Ladungskonjugation ineinander übergehen. Den Erfolg dieser Idee besiegelte 1932 der experimentelle Nachweis des Positrons.

Die Verknüpfung der Maxwellschen Theorie mit der Quantenmechanik gelang dann in den 40er-Jahren im Rahmen der Quantenelektrodynamik (QED), bis heute die Theorie,

die die genauesten Vorhersagen über Eigenschaften geladener Teilchen macht. Die QED ist dabei der Prototyp der modernen Eichtheorien, die den Weg zum Standardmodell der Elementarteilchen eröffneten.

Zur Zeit sind uns vier fundamentale Wechselwirkungen bekannt. Neben der Gravitation und der elektromagnetischen Kraft unterscheiden wir zwischen der starken und der schwachen Wechselwirkung, die auf verschiedene Sorten von Elementarteilchen wirken. Die schwache Wechselwirkung ist dabei beispielsweise für den radioaktiven β -Zerfall der Atomkerne verantwortlich, die starke Kraft hingegen ist nach heutiger Vorstellung die Ursache für den Zusammenhalt der Bausteine der Atomkerne. Ein großes Ziel der theoretischen Physik ist es, diese vier Kräfte auf ein gemeinsames Prinzip zurückzuführen. Ein Teilerfolg gelang dabei in den 60er-Jahren, als GLASHOW, WEINBERG und SALAM die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung formulierten. Die Symmetrie, die diesem Modell zugrunde liegt, heißt in mathematischer Sprechweise $SU(2) \times U(1)$.

Zusammen mit der Theorie der starken Wechselwirkung, der Quantenchromodynamik (QCD), bildet das Glashow-Weinberg-Salam-Modell das heutige Standardmodell der Elementarteilchen. Die Vorhersagen dieses Modells haben sich im Vergleich mit experimentellen Daten bestens bewährt. Bis heute wurde keine Beobachtung gemacht, die dem Modell widerspricht. Die jüngste eindrucksvolle Bestätigung der Vorhersagen des Standardmodells war 1994 die Entdeckung des Top-Quarks.

Jegliche Materie im Universum besteht nach der Vorstellung des Standardmodells aus Quarks und Leptonen. Insgesamt geht man von sechs verschiedenen Quark-Typen aus, diese konstituieren die Hadronen, also beispielsweise das Proton oder das Neutron und unterliegen der starken Wechselwirkung. Die Leptonen hingegen erfahren – neben der elektromagnetischen – nur die schwache Kraft. Hier unterscheidet man das Elektron, das Myon und das Tauon und ihre zugehörigen Antiteilchen. Zusätzlich gibt es zu jedem dieser leptonischen Teilchen einen Partner in Form eines Neutrinos. Alle bisher genannten Teilchen sind nun Fermionen, d.h. ihr Spin ist halbzahlig und sie gehorchen dem Paulischen Ausschließungsprinzip. Außerdem unterliegen sie der Pauli-Dirac-Statistik.

Daneben gibt es noch die Gruppe der Bosonen, deren Spin ganzzahlig ist und die sich gemäß der Bose-Einstein-Statistik verhalten. Im Standardmodell sind die Bosonen für die Vermittlung der Kräfte zwischen den Fermionen zuständig. So stellt man sich beispielsweise die elektromagnetische Wechselwirkung als einen Austausch von Photonen vor. Eine ähnliche Rolle spielen das Z -Boson und die W -Bosonen bei der schwachen Wechselwirkung. Das Austauschteilchen der QCD ist das Gluon, es ist für den Zusammenhalt der Atomkerne verantwortlich.

Etwas abseits von den genannten Teilchen steht das sogenannte Higgs-Boson, das postuliert wurde, um mittels eines theoretischen Mechanismus die Erzeugung der Massen der Elementarteilchen zu erklären. Der experimentelle Nachweis des Higgs-Teilchens steht dabei noch aus, man erwartet ihn bei Energien von etwas über 100 GeV.

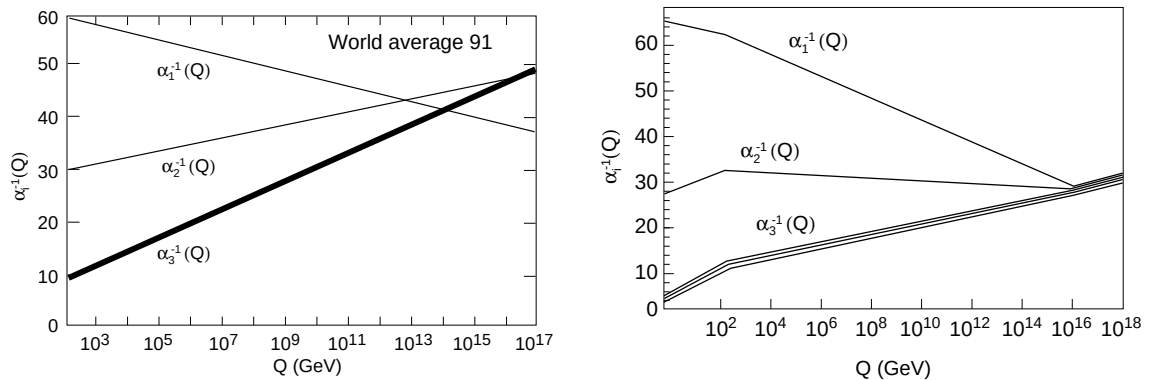
Bisher ist es also gelungen, die elektromagnetische mit der schwachen Wechselwirkung im Rahmen einer gemeinsamen Theorie zu vereinheitlichen. Die Einbeziehung der starken Wechselwirkung steht dabei noch aus, man spricht von der Suche nach einer „Großen Vereinheitlichenden Theorie“, kurz GUT („Grand Unifying Theory“). Weiteres Fernziel

ist dann auch die Verknüpfung mit der vierten verbleibenden Kraft, der Gravitation. Ein Modell, das dies leisten würde, wäre dann in diesem Sinne eine „Theory of Everything“, also eine allumfassende Feldtheorie.

Anfang der 70er-Jahre rückte mit der Supersymmetrie (SUSY) eine neue Art von Invarianz in das Interesse der Elementarteilchenphysik. Die entscheidende neue Idee war dabei die Verknüpfung von Bosonen und Fermionen: Vermöge einer SUSY-Transformation gehen Teilchen der einen Sorte in die andere über, und so bietet die Supersymmetrie einen gemeinsamen geometrischen Rahmen zur Beschreibung von Bosonen und Fermionen. Entscheidend ist dabei, daß zu den üblichen vier Dimensionen der Raum-Zeit sozusagen vier weitere hinzukommen und sich auch das Teilchenspektrum verdoppelt. Die Supersymmetrie postuliert zu jedem Fermion einen bosonischen Partner und umgekehrt.

Die aufwendige Suche nach supersymmetrischen Signalen in Hochenergieexperimenten steht scheinbar im Widerspruch zu den Erfolgen des Standardmodells. Dennoch gibt es gute Gründe, Physik jenseits dieses Modells zu betreiben. Zum Ersten weist das Standardmodell zahlreiche offene Parameter auf, die nicht berechnet, sondern nur gemessen werden können. Vom ästhetischen Standpunkt ist dies äußerst unbefriedigend. Auch scheinen supersymmetrische Theorien bessere Voraussagen über die Lebensdauer des Protons zu machen, die man aus experimentellen Daten auf mehr als 10^{32} Jahre schätzt. Zudem bietet die Supersymmetrie auch Ansätze zur Lösung theoretischer Probleme des Standardmodells, ein prominentes Beispiel ist hier das sogenannte Hierarchie-Problem:

Die Stärke, mit denen die Felder im Standardmodell aneinander gekoppelt sind, hängt von der betrachteten Energie ab, man spricht von „laufenden Kopplungen“. Setzen wir eine vereinheitlichende Theorie voraus, so sollten die Kopplungen bei hohen Energien übereinstimmen, oberhalb dieser Energie befindet sich dann der Gültigkeitsbereich einer solchen Theorie. Genauere Betrachtungen des Standardmodells zeigen aber, daß sich die Kopplungen zwar in der Nähe von 10^{14} GeV sehr nahe kommen, sich aber nicht treffen.



a) im Standard-Modell

b) in einem
Minimal Supersymmetrischen
Standard-Modell

Abbildung 1: Die laufenden Kopplungskonstanten

Dieses Problem kann unter Einbeziehung der Supersymmetrie und ihrer Strahlungskor-

rekturen gelöst werden, man erhält dann einen gemeinsamen Schnittpunkt bei einer Energieskala von etwa 10^{16} GeV. Man vergleiche dazu Abb. 1, die [Ol] entnommen ist. Da eine potentielle Große Vereinheitlichende Theorie aber in jedem Fall das oben angeführte Higgs-Teilchen beinhalten soll, ergibt sich eine Diskrepanz zwischen diesen hohen Energieskalen und der zur korrekten Einstellung der gemessenen Massen der W - und Z -Bosonen notwendigen Higgs-Masse von etwa 100 GeV. Es bleibt ein Rätsel, warum die Masse des Higgs-Bosons soviel kleiner sein soll als die Skala der Großen Vereinheitlichung. Dies bezeichnet man als das Hierarchie-Problem, welches aufgrund von „non-renormalization“-Theoremen in supersymmetrischen Modellen teilweise gelöst werden kann.

Die Untersuchung supersymmetrischer Theorien wird ferner auch durch die Aussicht auf eine mögliche Verknüpfung der Gravitation mit der Quantentheorie motiviert. Geht man nämlich von einer lokalen Supersymmetrie aus, so sind die Eich- und die Gravitationswechselwirkung auf natürliche Weise miteinander verbunden. Dies erlaubt die Formulierung von Super-Gravitationstheorien, die die allgemeine Relativitätstheorie als Grenzfall enthalten. Bisher gibt es jedoch keinerlei Indizien für die Existenz supersymmetrischer Teilchen. Insbesondere müßte z.B. der bosonische Partner des Elektrons, das sogenannte Seletron, die gleiche Masse aufweisen wie das Elektron, also direkt nachweisbar sein. Man geht daher davon aus, daß es sich bei der Supersymmetrie um eine auf irdischen Energieskalen gebrochene Symmetrie handelt, ganz so wie auch bei der elektroschwachen Wechselwirkung. Die entsprechenden Invarianzen und daher auch die supersymmetrischen Teilchen sind nur bei genügend hohen Energien nachweisbar, und die direkte Beobachtung ist deshalb frühestens in der nächsten Generation der Teilchenbeschleuniger zu erwarten. Die Tatsache, daß eine supersymmetrische Welt nur bei sehr hohen Energien zu erwarten ist, zeigt, daß die Suche nach vereinheitlichenden Theorien direkt mit der Erforschung des Frühstadiums des Universums verknüpft ist, denn auch dort herrschten hinreichend hohe Energien, um eine mögliche Supersymmetrie zu realisieren.

In den letzten zwanzig bis fünfundzwanzig Jahren hat sich neben dem rein theoretischen und dem rein experimentellen Zweig der Teilchenphysik ein dritter Ansatz fest etabliert, die computergestützte Simulation von Eichfeldtheorien. Nicht zuletzt dank exponentiell ansteigender Leistungskraft moderner Rechner bietet diese Methode eine ernsthafte Alternative zu kostspieligen Hochenergieexperimenten. Aus offensichtlichen Gründen muß bei der Behandlung von Feldtheorien mit dem Rechner die unendliche Anzahl von Freiheitsgraden auf eine endliche Anzahl reduziert werden, dies gelingt durch eine Diskretisierung der Raum-Zeit. Man überzieht den vierdimensionalen kontinuierlichen Raum mit einem hyperkubischen Gitter und läßt Teilchen sozusagen nur auf den Gitterpunkten bzw. den Verbindungslinien zu. Der entscheidende Durchbruch gelang hier WILSON in den 70er-Jahren durch die erste Formulierung von Eichtheorien auf dem Gitter.

Die Gitterregularisierung eröffnet die faszinierende Möglichkeit, die Pfadintegrale supersymmetrischer Theorien nicht-perturbativ auszuführen. Auf der anderen Seite werden wir sehen, daß in diskreter Raum-Zeit Symmetrieeigenschaften der Kontinuumstheorie verloren gehen, man denke etwa an die Rotations- oder Translationsinvarianz. Ähnlich wie bei der Drehsymmetrie ist auch die Supersymmetrie auf dem Gitter nicht erhalten, und man erhält explizite Brechungsterme.

BANKS und WINDEY raten daher vom Versuch ab, supersymmetrische Modelle auf dem Gitter zu formulieren („The anticommutator of two supersymmetry generators is an infinitesimal translation. This statement should be enough to dissuade anyone from attempting to construct a supersymmetric lattice theory.“[BW]).

Das Problem der gebrochenen Symmetrien tritt dabei schon bei der Lorentzinvarianz auf, die im euklidischen Raum Rotationsinvarianz bedeutet. Auf dem Gitter wird diese bis auf eine Invarianz unter einer diskreten Untergruppe gebrochen. Allerdings wird dies im allgemeinen nicht als ernstzunehmendes Problem aufgefaßt, denn die erhaltene diskrete Symmetrie sorgt für eine Wiederherstellung der vollen Lorentzinvarianz im Kontinuums-*limes*. Bei der Supersymmetrie hingegen liegen die Dinge anders, denn auf dem Gitter bleibt keine diskrete Untergruppe erhalten, so daß eine Restauration der Symmetrie im Kontinuums-*limes* nicht selbstverständlich ist.

Trotz dieser Einwände wurden zahlreiche Versuche unternommen, supersymmetrische Modelle auf dem Gitter zu formulieren. Eine Strategie ist es dabei, zu versuchen, durch eine geeignete Wahl der diskretisierten SUSY-Transformationen eine exakte Symmetrie der Gitter-Wirkung zu realisieren. Die so konstruierten SUSY-Transformationen sollen im *Limes* verschwindender Gitterkonstante dann in die gewöhnlichen Transformationsregeln des Kontinuums übergehen. Für endliche Gitterkonstanten erfüllen diese Transformationsvorschriften dann selbstverständlich nicht die durch die Super-Poincaré-Algebra vorgeschriebenen Relationen. In diesem Sinne gehen z.B. GOLTERMANN und PETCHER in [GP] vor, dort wird durch geschicktes Hinzufügen geeigneter Zusatzterme zu den naiv diskretisierten Transformationsregeln eine exakte Invarianz der Wirkung auf dem Gitter erzeugt. Dabei wird ausgenutzt, daß sich die Wirkung des in [GP] betrachteten zweidimensionalen euklidischen Wess-Zumino-Modells als abbrechende Potenzreihe in einem Parameter λ schreiben läßt. Setzt man auch für die genannten Zusatzterme eine Potenzreihe in λ an, so erhält man eine rekursive Vorschrift für die Koeffizienten. Diese läßt sich dann iterativ behandeln.

In [DN] hatten zuvor DONDI und NICOLAI eine nicht-lokale Gittertheorie mit expliziter Supersymmetrie vorgestellt. Diese Arbeit verwendet den Superfeldformalismus und rekonstruiert das Wess-Zumino-Modell. Aufgrund der fehlenden Lokalität ist dieser Vorschlag aber für numerische Simulationen unzugänglich, außerdem bricht das Modell die Translationsinvarianz.

Einen ähnlichen Ansatz verwenden auch BARTELS und BRONZAN, um eine diskretisierte Form des Wess-Zumino-Modells konstruieren [BB]. Auch treten aber wieder Nicht-Lokalitäten in Form sogenannter SLAC-Ableitungen [DWY] auf.

Ein anderer Zugang besteht darin, etwa modifizierte QCD-Gitter-Wirkungen zu verwenden und auf eine exakte Symmetrie auf dem Gitter zu verzichten. Man wählt dann eine Wirkung, die im *Limes* verschwindender Gitterkonstanten mit der Kontinuumswirkung übereinstimmt und mit analogem Ziel auch supersymmetrische Transformationen. Aufgrund der gebrochenen Symmetrie ist diese Wirkung dann nicht mehr invariant unter den diskretisierten Transformationen, sondern es treten explizite Brechungsterme auf. Ein solches Modell wird in [CV] vorgestellt, die Brechung der Supersymmetrie tritt dabei bereits in erster Ordnung der Gitterkonstanten auf, wie wir im zweiten Kapitel feststellen werden.

Ziel des ersten Teils dieser Arbeit ist es dann, im dritten Kapitel im Sinne von [GP] eine Erweiterung der SUSY-Transformationen zu finden, die es bei unveränderter Wirkung erlaubt, die Störungen in erster Ordnung von a zu beseitigen.

Zusätzlich zur Invarianz unter den supersymmetrischen Transformationen weist die $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie im Kontinuum eine zweite Symmetrie auf, sie ist invariant unter der axialen $U(1)$ -Symmetrie. Auch diese Invarianz wird auf dem Gitter explizit gebrochen, insbesondere durch die Einführung von Wilson-Fermionen.

Neben der klassischen Betrachtung der Symmetrien der Wirkung sind vor allem die quantentheoretischen Aspekte der chiralen und der supersymmetrischen Invarianz von Interesse. Zentrales Objekt zur Untersuchung der auftretenden Quanteneffekte sind die Ward-Identitäten, die sich aus den Symmetrien der Wirkung ableiten lassen. Sie stellen Verknüpfungen zwischen den Greens-Funktionen der Theorie dar und erlauben einerseits eine perturbative und andererseits auch eine numerische Analyse der Erhaltung der zugehörigen Noether-Ströme und ihrer Renormierungseigenschaften.

Sowohl bei der supersymmetrischen als auch bei der axialen Invarianz äußert sich die Brechung durch die Gitterregularisierung in expliziten Zusatztermen X_S bzw. X_A in den entsprechenden Ward-Identitäten. Diese Operatoren sind auf Baumgraphen-Niveau irrelevant, d.h. von der Ordnung a . Bei der störungstheoretischen Behandlung treten aber z.T. lineare Divergenzen $\sim \frac{1}{a}$ auf, so daß X_S und X_A zu endlichen Quantenkorrekturen führen können. Diese Terme haben u.a. eine additive Massenkorrektur zur Folge, welche eine Feineinstellung der Parameter der Theorie erzwingt, um den korrekten Kontinuumslikes zu erhalten. Dies ist von großer Relevanz für die nicht-perturbative Untersuchung des Kontinuumslikes. In [CV] wird beispielsweise diskutiert, ob der chirale und der supersymmetrische Limes in einem Punkt zusammenfallen oder ob eine unabhängige Einstellung der Parameter notwendig ist.

Den mehr klassischen Betrachtungen im ersten Teil dieser Arbeit folgen daher einige Aspekte der störungstheoretischen Untersuchung vor allem der chiralen Ward-Identität. Die vorliegende Arbeit besteht dabei aus sechs Kapiteln.

Der erste Abschnitt enthält eine kurze formale Einführung in supersymmetrische Theorien und skizziert die Konstruktion der Wirkung der $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie des vierdimensionalen Kontinuums. Anschließend wird die supersymmetrische Invarianz explizit nachgewiesen, und der Superstrom wird diskutiert.

Das zweite Kapitel behandelt das einfache Gitter-Modell aus [CV], es wird gezeigt, daß die Gitterregularisierung die Supersymmetrie explizit bricht. Dabei wird ein Vergleich mit der Kontinuumsrechnung vorgenommen, und die genauen Ursachen der Brechung der Supersymmetrie werden lokalisiert.

Im dritten Kapitel wird ein Vorschlag zur Verbesserung der SUSY-Transformationen gemacht, der es erlaubt die symmetriebrechenden Terme in höhere Ordnungen der Gitterkonstanten zu verschieben. Auch werden verschiedene Formulierungen des SUSY-Stroms diskutiert.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der Herleitung der Ward-Identitäten, die aus den in Kapitel 3 konstruierten Transformationen resultieren. Auch hierbei werden unterschied-

liche Ansätze zur Formulierung des Noether-Stroms auf dem Gitter besprochen. Die dabei erzielten Resultate können als Vorbereitung zur numerischen bzw. perturbativen Untersuchung der Ward-Identitäten verstanden werden.

Schließlich folgt im fünften Kapitel eine störungstheoretische Behandlung der chiralen Ward-Identitäten. Die Renormierung wird dabei in verschiedenen Schemata durchgeführt, und die Restauration der chiralen Symmetrie im Kontinuumslimites wird behandelt.

Im sechsten Kapitel werden die Feynman-Regeln für die Vertices des in Kapitel 4 konstruierten Superstroms entwickelt. Diese können dann den Ausgangspunkt zur perturbativen Behandlung der supersymmetrischen Ward-Identitäten bilden.

Kapitel 1

Die

$N = 1$ -SUSY-Yang-Mills-Theorie im Kontinuum

Dieses Kapitel enthält eine kurze, formale Einführung in supersymmetrische Theorien. Ausgehend von der $\mathbb{Z}_2$ -Gradierung der Poincaré-Algebra wird der Superfeld-Formalismus eingeführt, und das Konstruktionsprinzip supersymmetrisch-invarianter Wirkungen wird besprochen. Eine ausführlichere Darstellung der Inhalte dieser Abschnitte findet man in der umfangreichen Literatur (z.B. [BL], [WB], [BK]), welche in der dieser Arbeit vorangegangenen Semesterarbeit zusammengefaßt wurde (vergleiche [Ga]). Im Hinblick auf die weiteren Kapitel ist der letzte Abschnitt dieser Einführung besonders wichtig: In ihm wird explizit nachgerechnet, daß die zuvor konstruierte Lagrange-Dichte der $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie des vierdimensionalen euklidischen Kontinuums invariant unter den SUSY-Transformationen ist. Prinzipiell wurde dies bereits in [Lu] verifiziert, allerdings wird hier eine „kovariantere“ Darstellung gewählt, an die sich die Betrachtungen auf dem Gitter anlehnen werden, vergleiche dazu auch [Mu]. Des weiteren wird der Ausdruck für den Superstrom des Kontinuums angegeben, dieser wird dann später für die Berechnungen auf dem Gitter relevant sein.

1.1 Die Poincaré-Superalgebra

Bei der Supersymmetrie handelt es sich um eine Erweiterung der in der relativistischen Quantenfeldtheorie üblichen Poincaré-Invarianz um eine innere Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen. Im Jahr 1967 zeigten COLEMAN und MANDULA, daß es nicht möglich ist, die Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$ mit einer inneren Symmetrie, beschrieben durch eine Lie-Gruppe $\mathcal{I}$, sinnvoll zu vereinigen [CM]. Entweder ist die entstehende Gruppe $\mathcal{G}$ trivial im Sinne von $\mathcal{G} = \mathcal{P} \times \mathcal{I}$, oder die S-Matrix der resultierenden Theorie ist die Einheitsmatrix, so daß alle Streuamplituden verschwinden. 1971 konnten GOLDFAND und LIKHTMAN zeigen [GL], daß man dieses no-go-Theorem umgehen kann, indem man das Konzept der Lie-Gruppen erweitert: Zu den Kommutatorrelationen zwischen den Generatoren kommen

dann auch Antikommutatorbeziehungen hinzu, was auf die Idee der $\mathbb{Z}_2$ -gradierten Poincaré-Algebra führt. Dieses Konzept erwies sich 1975 als die einzige mit der relativistischen Quantenfeldtheorie vereinbare Erweiterung der Poincaré-Gruppe [HLS], was die Stellung der $\mathbb{Z}_2$ -Gradierung untermauert.

Unter einer Gradierung einer Algebra $\mathcal{G}$ mit einer abelschen Halbgruppe $(G, +)$ versteht man dabei nach [FS] und [KS] eine Zerlegung

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{G}_g \quad (1.1)$$

von $\mathcal{G}$ in eine direkte Summe von Vektorräumen, so daß für die Verknüpfung $\circ$ der Algebra gilt

$$\mathcal{G}_g \circ \mathcal{G}_h \subset \mathcal{G}_{g+h}. \quad (1.2)$$

Im Fall $G = \mathbb{Z}_2$ und Addition modulo 2 zerfällt also die Algebra $\mathcal{G}$ in zwei Teilräume $\mathcal{G}_0$ und $\mathcal{G}_1$, deren Generatoren wir wegen $\mathcal{G}_0 \circ \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_0 \circ \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_1 \circ \mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_1 \circ \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_0$ als bosonisch bzw. fermionisch identifizieren können. Verlangt man noch zusätzlich die folgenden Eigenschaften der Verknüpfung $\circ$

$$\text{Supersymmetrie:} \quad x_i \circ x_j = (-1)(-1)^{i \cdot j} x_j \circ x_i \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi-Identität:} \quad x_k \circ (x_l \circ x_m)(-1)^{k \cdot m} + x_l \circ (x_m \circ x_k)(-1)^{l \cdot k} \\ + x_m \circ (x_k \circ x_l)(-1)^{m \cdot l} = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

so spricht man von einer $\mathbb{Z}_2$ -gradierten Lie-Algebra. Da wir ja auf der Suche nach einer Erweiterung der relativistischen Poincaré-Symmetrie sind, ist $\mathcal{G}_0$ in unserem Fall eben gerade durch die von den zehn Generatoren P^μ und $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ ($\mu, \nu = 1, \dots, 4$) erzeugte Poincaré-Algebra gegeben. Sie hat bosonischen Charakter im obigen Sinne. Die Erweiterung geschieht nun durch Einführung der SUSY-Generatoren Q_a , $a = 1, \dots, 4N$ von $\mathcal{G}_1$, man spricht dann von einer N -fach erweiterten Supersymmetrie. Wir werden im folgenden stets $N = 1$ betrachten und die Kollektion der vier Q 's als Majorana-Spinor auffassen. Daraus ergeben sich die folgenden Kommutatorrelationen zwischen den Generatoren von $\mathcal{G}_0$ und $\mathcal{G}_1$:

$$[P^\mu, Q_a] = 0 \quad (1.5)$$

$$[M^{\mu\nu}, Q_a] = -(\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu})_{ab}Q_b. \quad (1.6)$$

Dabei ist $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, siehe dazu auch Anhang A. Für den Antikommutator $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$ findet man mit Hilfe eines allgemeinen Ansatzes und der Jacobi-Identität (1.4)

$$\{Q_a, Q_b\} = -2(\gamma^\mu C)_{ab}P_\mu. \quad (1.7)$$

Dabei ist C der Ladungskonjugationsoperator.

Zusammenfassend wird die SUSY-Algebra also durch die 14 Generatoren

$$P^\mu, \quad M^{\mu\nu} \quad \text{und} \quad Q_a \quad (1.8)$$

aufgespannt, und die Algebra wird durch (1.5)-(1.7) und die Poincaré-Algebra determiniert.

Da das Teilchenspektrum einer Theorie durch die irreduziblen Darstellungen der zugehörigen Symmetriegruppe bestimmt wird, hat diese Erweiterung der Poincaré-Gruppe weitreichende Konsequenzen für die in der Theorie enthaltenen Elementarteilchen. Zu den üblichen Teilchen kommen wie in der Einleitung erläutert ihre entsprechenden „Superpartner“ hinzu, insgesamt verdoppelt sich also die Teilchenanzahl.

1.2 Darstellung im Raum der Superfelder

Nachdem ich nun die Supersymmetrie-Algebra eingeführt habe, fehlt uns zur Formulierung supersymmetrischer Theorien noch eine Darstellung auf einem linearen Vektorraum. Dies führt direkt auf die Begriffe Superraum und Superfelder. Dazu sei daran erinnert, daß Poincaré-Transformationen auf Minkowski-Koordinaten im $\mathbb{R}^4$ und auf im Minkowski-Raum erklärte Felder wirken. Eine Translation um a_μ wird dabei etwa durch die Operation $e^{ia_\mu P^\mu}$ beschrieben. In genau der gleichen Weise lassen sich SUSY-Transformationen als Verschiebungen im sogenannten Superraum auffassen, den man aus dem minkowskischen $\mathbb{R}^4$ durch Hinzufügen neuer (fermionischer) Dimensionen erhält. Der Darstellungsraum der SUSY-Transformationen wird entsprechend aus Feldern gebildet, deren Definitionsbereich eben dieser Superraum ist, man bezeichnet sie als Superfelder. Konkret hat ein solches Superfeld die Form $\mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$, wobei θ und $\bar{\theta}$ die Grassmann-artigen zusätzlichen Koordinaten angeben. Man beachte, daß θ und $\bar{\theta}$ Weyl-Spinoren sind. Eine SUSY-Translation nimmt in diesem Raum die Gestalt

$$(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow (x^\mu + \xi^\mu, \theta + \varepsilon, \bar{\theta} + \bar{\varepsilon}) \quad (1.9)$$

an, wobei $\xi^\mu = a^\mu - i\varepsilon\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\varepsilon}$. ε und $\bar{\varepsilon}$ sind dabei Weyl-spinorielle Parameter der SUSY-Transformation. Man ist nun an einer unitären Darstellung interessiert, die diese Art von Transformationen im Raum der Superfunktionen $\mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ realisiert:

$$\mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow \mathcal{F}(x^\mu + \xi^\mu, \theta + \varepsilon, \bar{\theta} + \bar{\varepsilon}) =: U\mathcal{F}(x^\mu, \theta, \bar{\theta}). \quad (1.10)$$

Mit dem Ansatz

$$U = \exp \left\{ i \left(a^\mu \hat{P}_\mu + \varepsilon \hat{Q} + \bar{\varepsilon} \hat{\bar{Q}} \right) \right\} \quad (1.11)$$

ergibt sich

$$\hat{P}_\mu = -i\partial_\mu \quad (1.12)$$

$$i\hat{Q} = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu \quad (1.13)$$

$$i\hat{\bar{Q}} = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - i\bar{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu. \quad (1.14)$$

Dabei ist σ^μ als Kollektion $(\mathbb{1}, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ und $\bar{\sigma}^\mu$ als $(\mathbb{1}, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3)$ zu verstehen. Zu Superfeldern haben wir oben solche Felder erklärt, deren Definitionsbereich der Superraum ist, also Felder der Form $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta})$. Man kann ein solches Superfeld wie folgt in eine Potenzreihe in θ und $\bar{\theta}$ entwickeln (höhere Terme treten aufgrund der Grassmann-Natur

der θ 's nicht auf):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta}) &= f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)M(x) \\ &+ (\bar{\theta}\bar{\theta})N(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) \\ &+ (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})D(x).\end{aligned}\tag{1.15}$$

An dieser Darstellung durch die sogenannten Komponentenfelder erkennt man auch den Teilchengehalt des Superfeldes. Das Verhalten der Komponentenfelder unter Lorentztransformationen ergibt sich, indem man fordert, daß das Superfeld $\mathcal{F}$ ein Lorentzskalar ist. Der Teilcheninhalt ist dann der folgende:

- 4 komplexe skalare Felder: f, M, N, D
- 2 linkshändige Weyl-Spinoren ϕ, α
- 2 rechtshändige Weyl-Spinoren $\bar{\chi}, \bar{\lambda}$
- 1 komplexes Vektorfeld A_μ .

Aus (1.15) läßt sich die Wirkungsweise der Transformationen auf die Komponentenfelder explizit bestimmen, und man hat so eine lineare Darstellung der SUSY-Algebra konstruiert. Allerdings ist diese im allgemeinen hochgradig reduzibel. Zu irreduziblen Darstellungen gelangt man, indem man nur solche Superfelder betrachtet, die gewissen SUSY-kovarianten Bedingungen genügen. Beispielsweise kann man eine kovariante Ableitung über

$$D_A := \partial_A + i(\sigma^\mu\bar{\theta})_A\partial_\mu \tag{1.16}$$

$$\bar{D}_{\dot{A}} := -\bar{\partial}_{\dot{A}} + i(\bar{\sigma}^\mu\theta)_{\dot{A}}\partial_\mu \tag{1.17}$$

definieren und dann

- *chirale* Superfelder Φ durch $\bar{D}_{\dot{A}}\Phi = 0$ und
- *antichirale* Superfelder $\Phi^\dagger$ durch $D_A\Phi^\dagger = 0$

erklären. Es zeigt sich, daß das allgemeinste chirale Superfeld von der Form $\Phi = \Phi(y, \theta)$ ist, wobei $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$. Die Taylorentwicklung nach Potenzen von θ und $\bar{\theta}$ ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned}\Phi(y, \theta) &= \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y) \\ &= \varphi(x) + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi(x) - \frac{1}{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\sqrt{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\theta\psi(x) + (\theta\theta)F(y).\end{aligned}\tag{1.18}$$

Der Teilchengehalt ist also durch

- 1 komplexes skalares Feld φ
- 1 linkshändiges Weyl-Spinorfeld ψ

- 1 komplexes skalares Hilfsfeld F

gegeben. Der Weyl-Spinor läßt sich dabei auch in einen 4-komponentigen Majorana-Spinor konvertieren, so daß sich genau das u.a. in [Lu] behandelte chirale Supermultiplett des Wess-Zumino-Modells ergibt, in dem ein skalares bosonisches Feld und ein fermionisches Feld enthalten ist. Das Hilfsfeld kann beim Übergang zur on-shell-Darstellung außer Betracht gelassen werden.

Eine zweite Möglichkeit, zu irreduziblen Darstellungen zu gelangen, besteht darin, sich auf sogenannte Vektor-Superfelder zu beschränken. Unter einem Vektor-Superfeld versteht man dabei ein Superfeld, das der Bedingung

$$V = V^\dagger \quad (1.19)$$

genügt. Vektor-Superfelder haben die schöne Eigenschaft, eine Eichtransformation gemäß

$$V \rightarrow V' = V + (\Phi + \Phi^\dagger) \quad (1.20)$$

mit einem chiralen Superfeld Φ zu erlauben. Man kann nun nachrechnen, daß die Komponentenfelder λ und D des Vektor-Superfeldes unter solchen abelschen Transformationen invariant sind und daß sich für das Feld A_μ genau das gewohnte Verhalten

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - 2\partial_\mu \Lambda \quad (1.21)$$

ergibt, wobei sich Λ aus den Komponentenfeldern von Φ rekrutiert. Diese Eichfreiheit gestattet es, die sogenannte Wess-Zumino-Eichung zu wählen, in der ein Vektor-Superfeld die Form

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + i(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\lambda}) - i(\bar{\theta}\bar{\theta})(\theta\lambda) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})D \quad (1.22)$$

annimmt. Der Teilcheninhalt ist dann also der folgende:

- 1 bosonisches Vektorfeld A_μ
- 1 Weyl-Spinorfeld λ
- 1 skalares Hilfsfeld D .

Dieses Multiplett bezeichnet man als das Vektor-Supermultiplett. Es repräsentiert genau die Teilchen, die in der hier betrachteten Theorie vorkommen. A_μ stellt dabei ein Gluon dar, und mit einem aus λ gewonnenen Majorana-Spinor werden wir die zugehörigen Superpartner, die Gluinos, modellieren.

1.3 Supersymmetrische Lagrange-Dichten

In diesem Abschnitt sollen aus den eingeführten linearen Darstellungen der SUSY-Algebra Wirkungen $S = \int d^4x \mathcal{L}$ konstruiert werden, die unter den SUSY-Transformationen invariant sind. Dazu benutzt man die Tatsache, daß sich bei allgemeinen Superfeldern $\mathcal{F}$ die

D -Komponente und bei skalaren Superfeldern die F -Komponente nur um totale Divergenzen ändern:

$$\delta D = \frac{i}{2} \partial_\mu (\epsilon \sigma^\mu \bar{\lambda} - \alpha \sigma^\mu \bar{\epsilon}) \quad (\text{allgemeines Superfeld}) \quad (1.23)$$

$$\delta F = i\sqrt{2} \partial_\mu (\bar{\epsilon} \tilde{\sigma}^\mu \psi) \quad (\text{skalares Superfeld}). \quad (1.24)$$

Diese Terme ändern also das Wirkungsintegral bei SUSY-Transformationen nicht, denn mit dem Gaußschen Satz gehen sie in Oberflächenterme über, die dann verschwinden. Eine Möglichkeit, supersymmetrische Lagrange-Dichten zu konstruieren, ist also durch

$$\mathcal{L} = (\text{Superfelder})_D + (\text{chirale Superfelder})_F \quad (1.25)$$

gegeben.

1.3.1 Das Wess-Zumino-Modell

Das erste supersymmetrische Modell wurde 1974 von WESS und ZUMINO vorgeschlagen [WZ]. Es wird durch folgende off-shell-Lagrange-Dichte erklärt

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &:= (\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \Phi(x, \theta, \bar{\theta}))_D \\ &\quad - \frac{m}{2} \Phi^2(y, \theta)_F + (h.c.) \\ &\quad - \frac{g}{3} \Phi^3(y, \theta)_F + (h.c.) \end{aligned} \quad (1.26)$$

(h.c.) steht dabei für den entsprechenden hermitesch konjugierten Ausdruck, was sichert, daß die Lagrange-Dichte reell ist, $\Phi = (\varphi, \psi, F)$ ist ein chirales Superfeld. Man erkennt den Teilchengehalt wiederum als ein Boson und ein Fermion. Nach Übergang zur on-shell-Wirkung erhält man die folgende Form der Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial_\mu \varphi^*)(\partial^\mu \varphi) - m^2 |\varphi|^2 \\ &\quad - \frac{i}{2} (\bar{\psi} \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + \psi \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}) + \frac{m}{2} (\psi \psi + \bar{\psi} \bar{\psi}) \\ &\quad + g(\varphi \psi \psi + \varphi^* \bar{\psi} \bar{\psi}) - mg |\varphi|^2 (\varphi + \varphi^*) - g^2 |\varphi|^4, \end{aligned} \quad (1.27)$$

deren erste Zeile für die freie Bewegung des Bosons der Masse m steht. Die zweite Zeile stellt das freie Fermion gleicher Masse dar, die dritte Zeile kennzeichnet die Wechselwirkung. Durch Einführen alternativer Felder A , B und Ψ via

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A - iB) \\ \Psi &:= \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.28)$$

kann man die Lagrange-Dichte der freien Theorie auch in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} [(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m^2 A^2] + \frac{1}{2} [(\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m^2 B^2] \\ &\quad - \frac{1}{2} \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi, \end{aligned} \quad (1.29)$$

schreiben. Das Wess-Zumino-Modell beinhaltet also das folgende chirale Supermultiplett:

- 1 reelles skalares Feld $A(x)$, $A = A^*$
- 1 reelles pseudoskalares Feld $B(x)$, $B = B^*$
- 1 Majorana-Spinorfeld $\Psi(x)$, $\Psi = C\bar{\Psi}^T$.

Die zugehörigen Bewegungsgleichungen lauten dann

$$(\square + m^2)A = 0 \quad (\text{Klein-Gordon}) \quad (1.30)$$

$$(\square + m^2)B = 0 \quad (\text{Klein-Gordon}) \quad (1.31)$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0 \quad (\text{Dirac}) \quad (1.32)$$

$$\bar{\Psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0 \quad (\text{Dirac}). \quad (1.33)$$

1.3.2 Supersymmetrische Eichtheorie

Um eine Lagrange-Dichte für ein Superfeld Φ zu konstruieren, das sich unter nicht-abelschen Eichtransformationen gemäß der Standard-Darstellung

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow e^{-i\Lambda(x, \theta, \bar{\theta})} \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (1.34)$$

$$\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow \Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) e^{i\Lambda^\dagger(x, \theta, \bar{\theta})} \quad (1.35)$$

transformiert, führt man ein Vektor-Superfeld V als Eichfeld ein und kann dann eichinvariante Terme der Form

$$\mathcal{L} = (\Phi^\dagger e^V \Phi)_D \quad (1.36)$$

in die Lagrange-Dichte aufnehmen, vorausgesetzt, V verhält sich unter Eichtransformationen wie

$$e^V \rightarrow e^{-i\Lambda^\dagger} e^V e^{i\Lambda}. \quad (1.37)$$

Dieses Transformationsverhalten von V verallgemeinert die abelsche Eichtransformation (1.20), und V gehört insbesondere zur adjungierten Darstellung der Eichgruppe. Eine schöne mathematische Abhandlung der adjungierten Darstellung findet man in [FS], die wichtigsten Fakten sind auch im Anhang dieser Arbeit zu finden. Um nun das Eichfeld in die Dynamik mit einzubinden, d.h. ein Analogon des üblichen $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ -Terms zu erhalten, definiert man einen Feldstärketensor gemäß

$$W_A = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})e^{-V}D_A e^V, \quad (1.38)$$

welcher sich dann unter Eichtransformationen wie

$$W_A \longrightarrow e^{-i\Lambda} W_A e^{i\Lambda} \quad (1.39)$$

verhält. Die Einbindung in die Lagrange-Dichte erfolgt dann über einen simultan SUSY- und eichinvarianten Term

$$\mathcal{L}_E := \text{Tr}\{(W^A W_A)_F\} + (h.c.), \quad (1.40)$$

dabei bezieht sich die Spurbildung nur auf die Farbfreiheitsgrade. Bei den Materiefeldern beschränken sich die möglichen Terme aufgrund von Renormierbarkeitsforderungen

auf Kopplungen der Form $m_{ij}\Phi_i\Phi_j$ bzw. $g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k$, so daß die allgemeinste Form der Lagrange-Dichte durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{4g^2}\text{Tr}\{(W^A W_A)_F + (\bar{W}_A \bar{W}^A)_F\} \\ &+ \left(\Phi^\dagger e^V \Phi\right)_D \\ &+ \left(\frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)_F + (h.c.)\end{aligned}\quad (1.41)$$

gegeben ist (vgl. dazu [WB]).

1.4 $N = 1$ -SUSY-Yang-Mills im Kontinuum

1.4.1 Die Wirkung

Wir werden im weiteren die Materiefelder komplett von der Betrachtung ausschließen und uns auf den Eichanteil

$$\mathcal{L} := \text{Tr}\{(W^A W_A)_F\} + (h.c.) \quad (1.42)$$

der Lagrange-Dichte beschränken. Um die Lagrange-Dichte durch die Komponentenfelder auszudrücken, müssen wir also den F -Term von $W^A W_A$ berechnen. Als Resultat erhält man in euklidischer Formulierung¹ [VY]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2}\bar{\lambda}^a \gamma_\mu (\mathcal{D}_\mu \lambda)^a - \frac{1}{2}D^a D^a. \quad (1.43)$$

Dabei ist $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ der übliche nicht-abelsche Feldstärketensor und

$$(\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}) = \partial_\mu \bar{\lambda} + [A_\mu, \bar{\lambda}] \quad (1.44)$$

die kovariante Ableitung in adjungierter Darstellung. Auf den ersten Blick sieht diese Wirkung aus wie die der QCD. Allerdings treten hier statt Dirac-Spinoren Majorana-Spinoren λ bzw. $\bar{\lambda}$ auf, und die Eichfelder wirken in adjungierter Darstellung. Durch eine einfache Gauß-Integration läßt sich das Hilfsfeld D eliminieren (denn es tritt in der Wirkung nur quadratisch und nicht an andere Felder gekoppelt auf), und wir verbleiben dann unter Benutzung der Zerlegungen

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda^a T^a \\ A_\mu &= -ig A_\mu^a T^a \\ F_{\mu\nu} &= -ig F_{\mu\nu}^a T^a\end{aligned}\quad (1.45)$$

mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2g^2}\text{Tr}\{F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)\} + \text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x)\} \quad (1.46)$$

¹Wir verwenden im Kontinuum stets die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über mehrfach vorkommende Lorentz-Indizes ist zu summieren. Gleiches gilt auch für die Farbfreiheitsgrade.

der $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie im euklidischen, vierdimensionalen Kontinuum. Die zugehörige Wirkung ist dann invariant unter den SUSY-Transformationen (vgl. [WB])

$$\delta A_\mu(x) = -2g\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu\varepsilon \quad (1.47)$$

$$\delta\lambda(x) = -\frac{i}{g}\sigma_{\rho\tau}F_{\rho\tau}(x)\varepsilon \quad (1.48)$$

$$\delta\bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g}\bar{\varepsilon}\sigma_{\rho\tau}F_{\rho\tau}(x), \quad (1.49)$$

was ich im verbleibenden Teil dieses Kapitels explizit verifizieren möchte. Dazu zeigt man, daß sich die Lagrange-Dichte bei Anwendung dieser Transformationen nur um eine totale Divergenz ändert, daß also $\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\bar{j}_\mu\varepsilon$ für einen geeigneten Strom $\bar{j}_\mu$ gilt.

1.4.2 Variation der Eichfeldwirkung

Es ist zunächst das Verhalten des Eichfeldanteils

$$\mathcal{L}_g(x) = -\frac{1}{2g^2}\text{Tr}\{F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)\} \quad (1.50)$$

unter den SUSY-Transformationen zu studieren.² Dazu ist nichts anderes als die Variation des Feldstärketensors auszurechnen. Mit der kovarianten Ableitung in der Fundamentaldarstellung $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ schreibt sich der Feldstärketensor als

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = [D_\mu, D_\nu], \quad (1.51)$$

und wegen $\delta D_\mu = \delta A_\mu = -2g\bar{\lambda}\gamma_\mu\varepsilon$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \delta F_{\mu\nu} &= [D_\mu, \delta D_\nu] - [D_\nu, \delta D_\mu] \\ &= -2g[D_\mu, \bar{\lambda}]\gamma_\nu\varepsilon + 2g[D_\nu, \bar{\lambda}]\gamma_\mu\varepsilon \\ &= -2g([D_\mu, \bar{\lambda}]\gamma_\nu - [D_\nu, \bar{\lambda}]\gamma_\mu)\varepsilon. \\ &= -2g(\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}\gamma_\nu - \mathcal{D}_\nu\bar{\lambda}\gamma_\mu)\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda} = [D_\mu, \bar{\lambda}] = \partial_\mu\bar{\lambda} + [A_\mu, \bar{\lambda}]$ die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung. Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\delta(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})\} &= 2\text{Tr}\{F_{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}\} \\ &= -4g\text{Tr}\{F_{\mu\nu}(\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}\gamma_\nu - \mathcal{D}_\nu\bar{\lambda}\gamma_\mu)\}\varepsilon \\ &= -4g\text{Tr}\{F_{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}\gamma_\nu - F_{\nu\mu}\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}\gamma_\nu\}\varepsilon \\ &= -4g\text{Tr}\{F_{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}\gamma_\nu + F_{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}\gamma_\nu\}\varepsilon \\ &= -8g\text{Tr}\{F_{\mu\nu}\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}\gamma_\nu\}\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.53)$$

und man bekommt

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_g(x) &= -\frac{1}{2g^2}\delta(\text{Tr}\{F_{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)\}) \\ &= \frac{4}{g}\text{Tr}\{\mathcal{D}_\mu(\bar{\lambda}(x))F_{\mu\nu}(x)\}\gamma_\nu\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.54)$$

²Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß sich die Spurbildung – bis auf wenige gekennzeichnete Ausnahmen – stets auf die Farbfreiheitsgrade bezieht. Im Fall der Eichgruppe $SU(2)$ mit Generatoren $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$ (vgl. Anhang B) ist mit Tr also eine 2×2 -Spur gemeint.

Man benutzt nun die Leibniz-Regel für die kovariante Ableitung

$$(\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}) F_{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu (\bar{\lambda} F_{\mu\nu}) - \bar{\lambda} (\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}) \quad (1.55)$$

und erhält den Term

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_g(x) &= -\frac{4}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) \} \gamma_\nu \varepsilon + \frac{4}{g} \text{Tr} \{ \mathcal{D}_\mu (\bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x)) \} \gamma_\nu \varepsilon \\ &= -\frac{4}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) \} \gamma_\nu \varepsilon + \frac{4}{g} \partial_\mu (\text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x) \}) \gamma_\nu \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Dabei wurde ausgenutzt, daß von einem Term der Form $\mathcal{D}_\mu (\bar{\lambda} F_{\mu\nu}) = \partial_\mu (\bar{\lambda} F_{\mu\nu}) + [A_\mu, \bar{\lambda} F_{\mu\nu}]$ unter der Spur nur der erste Beitrag relevant ist, denn der Kommutator verschwindet nach Spurbildung aufgrund der Identität $\text{Tr} AB = \text{Tr} BA$.

Der zweite Term stellt offenbar einen Beitrag zum genannten Superstrom $\overline{j}_\mu$ dar, und wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß sich der erste Term durch einen entsprechenden Beitrag aus der Variation des fermionischen Anteils der Lagrange-Dichte eliminieren läßt.

1.4.3 Variation der Fermion-Wirkung

Unter den SUSY-Transformationen verhält sich der fermionische Anteil $\mathcal{L}_f$ der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_f(x) = \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x) \} \quad (1.57)$$

wegen

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{D}_\mu \lambda) &= [\delta D_\mu, \lambda] + [D_\mu, \delta \lambda] \\ &= -2g[\bar{\lambda} \gamma_\mu \varepsilon, \lambda] - \frac{i}{g} (\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \end{aligned} \quad (1.58)$$

wie

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_f(x) &= \text{Tr} \{ \delta \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x) \} + \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \delta(\mathcal{D}_\mu \lambda(x)) \} \\ &= -\text{Tr} \{ (\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x)) \gamma_\mu \delta \lambda(x) \} + \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \delta(\mathcal{D}_\mu \lambda(x)) \} \\ &= \frac{i}{g} \text{Tr} \{ (\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \varepsilon \} - \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu (\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x)) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \} \\ &\quad - 2g \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Anwendung einer Fierz-Identität zeigt dann, daß der dritte Term

$$-2g \text{Tr} \{ \bar{\lambda} \gamma_\mu [\bar{\lambda} \gamma_\mu \varepsilon, \lambda] \} = -ig f_{abc} (\bar{\lambda}^a \gamma_\mu \lambda^c) (\bar{\lambda}^b \gamma_\mu \varepsilon) \quad (1.60)$$

verschwindet. Die Details dieses Nachweises findet man in Anhang D, man vergleiche dazu auch [Lu] und [dWF] sowie [BSS]. Wir verbleiben daher also mit

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_f(x) &= \frac{i}{g} \text{Tr} \{ (\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x)) F_{\rho\tau}(x) \} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \\ &\quad - \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x)) \} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Wie im Fall der Eichwirkung ziehen wir nun die Leibniz-Regel

$$\mathcal{D}_\mu(\bar{\lambda}F_{\rho\tau}) = (\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda})F_{\rho\tau} + \bar{\lambda}(\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}) \quad (1.62)$$

hinzu und erhalten

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_f(x) &= \frac{i}{g}\text{Tr}\{\mathcal{D}_\mu(\bar{\lambda}(x)F_{\rho\tau}(x))\}\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau}\varepsilon \\ &\quad - 2\frac{i}{g}\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)(\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x))\}\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau}\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Der Kommutatorterm in der kovarianten Ableitung $\text{Tr}\{\mathcal{D}_\mu(\bar{\lambda}F_{\rho\tau})\}$ verschwindet wie schon bei der Eichfeldwirkung gesehen, so daß

$$\delta\mathcal{L}_f(x) = -2\frac{i}{g}\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)(\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x))\}\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau}\varepsilon + \partial_\mu\left(\frac{i}{g}\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)F_{\rho\tau}(x)\}\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau}\varepsilon\right) \quad (1.64)$$

richtig ist. Wir benutzen nun eine Beziehung zwischen den Dirac-Matrizen³:

$$\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau} = i(\delta_{\mu\rho}\gamma_\tau - \delta_{\mu\tau}\gamma_\rho) - i\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}\gamma_\nu\gamma_5 \quad (1.65)$$

und gewinnen

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_f(x) &= \frac{4}{g}\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)(\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x))\}\gamma_\nu\varepsilon - \frac{2}{g}\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)(\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x))\}\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}\gamma_\nu\gamma_5\varepsilon \\ &\quad + \partial_\mu\left(\frac{i}{g}\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)F_{\rho\tau}(x)\}\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau}\varepsilon\right). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Als letztes bringen wir nun die Bianchi-Identität

$$[D_\mu, F_{\rho\tau}] + [D_\rho, F_{\tau\mu}] + [D_\tau, F_{\mu\rho}] = 0 \quad (1.67)$$

ins Spiel, die sich auch als

$$(\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x))\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} = 0 \quad \forall\nu, \quad (1.68)$$

schreiben läßt. Damit lautet das Endergebnis dann

$$\delta\mathcal{L}_f(x) = \frac{4}{g}\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)(\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x))\}\gamma_\nu\varepsilon + \partial_\mu\left(\frac{i}{g}\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)F_{\rho\tau}(x)\}\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau}\varepsilon\right). \quad (1.69)$$

Zusammen mit der Variation der Eichfeldwirkung

$$\delta\mathcal{L}_g(x) = -\frac{4}{g}\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x)\}\gamma_\nu\varepsilon + \frac{4}{g}\partial_\mu\left(\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)F_{\mu\nu}(x)\}\right)\gamma_\nu\varepsilon \quad (1.70)$$

aus (1.56) können wir also bestätigen, daß die Lagrange-Dichte unter Supersymmetrie-Transformationen nur als totale Divergenz variiert:

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\left(\frac{4}{g}\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)F_{\mu\nu}(x)\}\gamma_\nu + \frac{i}{g}\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)F_{\rho\tau}(x)\}\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau}\right)\varepsilon. \quad (1.71)$$

³ $\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}$ ist dabei der total antisymmetrische Tensor vierter Stufe, vgl. dazu auch Anhang A.

1.4.4 Superstrom

Wir haben nun also gezeigt, daß

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \left(\text{Tr} \left\{ \frac{4}{g} \bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu + \frac{i}{g} \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \right\} \right) \varepsilon, \quad (1.72)$$

was Anlaß zur Definition eines Stromes

$$\overline{j}_\mu(x) := \text{Tr} \left\{ \frac{4}{g} \bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu + \frac{i}{g} \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \right\} \quad (1.73)$$

gibt. Man beachte, daß dieser Strom fermionischer Natur ist, hier also insbesondere auch ein Majorana-Spinor. Es läßt sich daher schreiben

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \overline{j}_\mu(x) \varepsilon = \bar{\varepsilon} \partial_\mu j_\mu(x), \quad (1.74)$$

wobei

$$j_\mu(x) = \text{Tr} \left\{ -\frac{4}{g} F_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu \lambda(x) + \frac{i}{g} F_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda(x) \right\}. \quad (1.75)$$

(Um j_μ aus $\overline{j}_\mu(x)$ zu gewinnen, benutzt man die im Anhang wiedergegebenen Rechenregeln für Majorana-Spinoren.)

Aufgrund des Ursprunges der beiden einzelnen Summanden in (1.73) in den Variationen des bosonischen bzw. fermionischen Sektors der Lagrange-Dichte führe ich für diese beiden Anteile zwei gesonderte Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \overline{j}_{\mu,g}(x) &:= \frac{4}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu \} \\ \overline{j}_{\mu,f}(x) &:= \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Es sei schon jetzt vorweggenommen, daß $j_\mu = j_{\mu,g} + j_{\mu,f}$ nicht der Noether-Strom ist, der aus der supersymmetrischen Invarianz abgeleitet werden kann. Dementsprechend tritt in den später zu behandelnden Ward-Identitäten auch nicht der Strom j_μ auf, sondern eine dann noch zu erklärende Größe S_μ . Da aufgrund der Notation jedoch keine Verwechslungsgefahr besteht, werde ich für beide Größen die Bezeichnung Superstrom benutzen.

Der Strom $\overline{j}_\mu$ läßt sich unter Verwendung von

$$\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} = i(\delta_{\mu\rho} \gamma_\tau - \delta_{\mu\tau} \gamma_\rho) - i\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \quad (1.77)$$

auch als

$$\overline{j}_\mu = \text{Tr} \left\{ \frac{2}{g} \bar{\lambda} F_{\mu\nu} \gamma_\nu + \frac{1}{g} \bar{\lambda} F_{\rho\tau} \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma_\nu \gamma_5 \right\} \quad (1.78)$$

schreiben, denn aufgrund der Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$ und wegen $\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{i}{g} \bar{\lambda} F_{\rho\tau} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} &= \frac{i}{g} \bar{\lambda} F_{\rho\tau} (i(\delta_{\mu\rho} \gamma_\tau - \delta_{\mu\tau} \gamma_\rho) - i\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5) \\ &= -\frac{1}{g} \bar{\lambda} (F_{\mu\nu} \gamma_\nu - F_{\nu\mu} \gamma_\nu) + \frac{1}{g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma_\nu \gamma_5 F_{\rho\tau} \\ &= -\frac{1}{g} \bar{\lambda} (F_{\mu\nu} \gamma_\nu + F_{\mu\nu} \gamma_\nu) + \frac{1}{g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma_\nu \gamma_5 F_{\rho\tau} \\ &= -\frac{2}{g} \bar{\lambda} F_{\mu\nu} \gamma_\nu + \frac{1}{g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} \gamma_\nu \gamma_5 F_{\rho\tau}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Mit dem dualen⁴ Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}^* := \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} F_{\rho\tau} \quad (1.80)$$

wird dies zu

$$\overline{j_\mu} = \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda} \gamma_\nu (F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^* \gamma_5) \right\}. \quad (1.81)$$

Wegen $\bar{\chi} \gamma_\nu \gamma_5 \psi = \bar{\psi} \gamma_\nu \gamma_5 \chi$ für Majorana-Spinoren ψ und χ sowie $\{\gamma_\nu, \gamma_5\} = 0$ erhält man dann auch

$$j_\mu = -\frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ (F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^* \gamma_5) \gamma_\nu \lambda \right\}. \quad (1.82)$$

Zum Abschluß dieses Abschnittes möchte ich noch die wohl kompakteste Form des Superstromes angeben. Aus

$$j_\mu(x) = \text{Tr} \left\{ -\frac{4}{g} F_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu \lambda(x) + \frac{i}{g} F_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda(x) \right\} \quad (1.83)$$

folgt nämlich mit

$$\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} - \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu = 2i(\delta_{\mu\rho} \gamma_\tau - \delta_{\mu\tau} \gamma_\rho) \quad (1.84)$$

auch

$$\begin{aligned} j_\mu(x) &= \text{Tr} \left\{ -\frac{4}{g} F_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu \lambda(x) + \frac{i}{g} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \lambda(x) + \frac{2}{g} F_{\rho\tau}(x) (\delta_{\mu\rho} \gamma_\tau - \delta_{\mu\tau} \gamma_\rho) \lambda(x) \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ -\frac{4}{g} F_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu \lambda(x) + \frac{i}{g} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \lambda(x) + \left(\frac{2}{g} F_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu - \frac{2}{g} F_{\nu\mu}(x) \gamma_\nu \right) \lambda(x) \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \frac{i}{g} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Somit kann der Strom j_μ auch in der Form

$$j_\mu(x) = \text{Tr} \left\{ \frac{i}{g} F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \lambda(x) \right\} \quad (1.86)$$

bzw. nach Adjunktion als

$$\overline{j_\mu}(x) = \text{Tr} \left\{ \frac{i}{g} \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \right\} \quad (1.87)$$

notiert werden. Diese Schreibweise wird in [Lu], Formel (2.47) und auch auf dem Gitter (3.92) verwendet.

⁴Die Bezeichnung *dual* ist aufgrund von $F^{**} = F$ gerechtfertigt.

Kapitel 2

$N = 1$ -SUSY-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit einem einfachen Modell der eingeführten $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie in diskretisierter Raum-Zeit. Dazu erinnere ich zunächst an die in der Gittereichtheorie üblichen Begriffe und Bezeichnungen und erläutere die gitterregularisierte Wirkung. Wesentliches Ziel dieses Abschnittes ist es dann, das Verhalten einer naiv gewählten Lagrange-Dichte unter entsprechenden Gitter-Supersymmetrie-Transformationen zu studieren. Dabei gehe ich von der in [Lu] gewählten Lagrange-Dichte aus und verwende wie z.B. in [CV] vorgeschlagen die einfachste Form der SUSY-Transformationen auf dem Gitter. Man erkennt dann, daß die Supersymmetrie sowohl durch die Gitterregularisierung an sich als auch durch die Wilsonsche Formulierung der Fermionen gebrochen wird und daß sich diese Effekte bereits in erster Ordnung der Gitterkonstanten a zeigen. Hauptanliegen dieses Kapitels ist es dabei, die Stellen in der an die Kontinuums-theorie angelehnten Rechnung zu lokalisieren, an denen die entsprechenden Abweichungen auftreten. Konkret zeigen sich diese Störungen in den auf dem Gitter nicht exakt gültigen Leibniz- und Bianchi-Identitäten bzw. eng damit verknüpft an der ungünstigen Wahl der kovarianten Ableitung auf dem Gitter. Diese Erkenntnisse werden dann im nächsten Kapitel dazu genutzt, um die SUSY-brechenden $\mathcal{O}(a)$ -Effekte zu beseitigen. Insbesondere wird in diesem Kapitel auch eine graphische Notation für die bei den Rechnungen auftretenden Terme eingeführt, die die zum Teil recht unübersichtlichen Ausdrücke erst handhabbar macht.

Ich verwende in diesem und in den beiden nächsten Kapiteln die folgende Summenkonvention:

Bei allen mehrfach vorkommenden Lorentz-Indizes ist eine Summe von 1 bis 4 impliziert, Stellen, an denen nicht summiert wird, sind selten und werden dann explizit gekennzeichnet. Diese Konvention gilt nicht bei für Indizes, die auf der linken Seite einer Gleichung unkontrahiert vorkommen, beispielsweise ist bei einer Formel der Art

$$\begin{aligned} S_\mu^{lat}(x) = & -\frac{i}{g}\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu\text{Tr}\left\{U_\mu^\dagger(x)\mathcal{G}_{\rho\tau}(x+a\hat{\mu})U_\mu(x)\gamma_\mu\lambda(x)\right. \\ & \left.+\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)U_\mu^\dagger(x)\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x)\right\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

auf der rechten Seite eine Summation über ρ und τ gemeint, während über μ nicht summiert wird.

An einigen Stellen werde ich trotz dieser Konvention explizite Summenzeichen mitschreiben, sofern dies zur Verständlichkeit der Ausdrücke beiträgt.

2.1 Grundbegriffe der Gittereichtheorie

2.1.1 Notationen

Das lokale Eichprinzip macht bekanntermaßen die Einführung von Paralleltransportern und kovarianten Ableitungen notwendig. Genauer läßt sich in kontinuierlicher Raumzeit zu jeder Kurve $c_s : [0, s] \rightarrow \mathbb{R}^4$ ein durch die $SU(N)$ -Eichsymmetrie induzierter Paralleltransporter $U(c_s) \in SU(N)$ finden, der dann über DYSON's Formel

$$U(c_s) = \mathcal{P} \exp \left\{ - \int_{c_s} A_\mu(x) dx_\mu \right\} \quad (2.2)$$

mit dem Eichfeld A_μ verknüpft ist. Dabei stellt $\mathcal{P}$ den Pfadordnungsoperator dar, und das Eichfeld ist Element der Lie-Algebra der $SU(N)$, d.h. $A_\mu(x) \in su(N)$. Hieraus läßt sich unmittelbar die Differentialgleichung

$$\frac{d}{ds} U(c_s) = -A_\mu(c(s)) \frac{dc_\mu}{ds} U(c_s) \quad (2.3)$$

ableiten. Den Krümmungs- oder Feldstärketensor $F_{\mu\nu}(x)$ der Theorie erhält man dann aus infinitesimalen geschlossenen Kurven $c_{x;\mu,\nu}$ um x mit Seitenlängen dx_μ und dx_ν durch die Beziehung

$$U(c_{x;\mu,\nu}) = 1 - F_{\mu\nu}(x) dx_\mu dx_\nu. \quad (2.4)$$

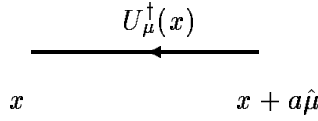
Die diskretisierte Theorie ist nun auf einem vierdimensionalen, hyperkubischen Gitter $\Lambda = (a\mathbb{Z})^4 = \{x | x_\mu \in a\mathbb{Z}\}$ erklärt, so daß die kleinsten Wegstrecken nicht mehr infinitesimal, sondern von der Länge a sind und Paralleltransporte nur noch in Einheiten der Gitterkonstanten möglich sind. Bezeichnet man den Paralleltransporter vom Punkt x nach $x + a\hat{\mu}$ mit $U_\mu(x)$, so ist also eine Eichfeldkonfiguration durch die Kollektion der $\{U_\mu(x) | \mu = -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4; x \in \Lambda\}$ gegeben. Es stellt sich dann die Frage, wie sich etwa die Beziehungen (2.2) und (2.4) auf das Gitter übertragen lassen. Grundsätzliches Anliegen ist es dabei, eine durch die Eichfeldkonfiguration auf dem Gitter (und die Fermionfelder) bestimmte Wirkung zu erklären, die im Limes verschwindenden Gitterabstandes $a \rightarrow 0$ die Kontinuumswirkung reproduziert.

Man greift dazu auf die oben erwähnten Paralleltransporter $U_\mu(x)$ entlang von Gitterkanten (links) zurück. Dabei beschreibt $U_\mu(x)$ den Transport von x nach $x + a\hat{\mu}$, wobei $\hat{\mu}$ in alle positiven und negativen Richtungen zeigen kann. Graphisch läßt sich dies durch das Bild

$$\begin{array}{ccc} & U_\mu(x) & \\ & \longrightarrow & \\ x & & x + a\hat{\mu} \end{array}$$

veranschaulichen.

Der umgekehrte Transport von $x + a\hat{\mu}$ nach x wird dann durch $U_{-\mu}(x + a\hat{\mu}) = U_{\mu}(x)^{-1} = U_{\mu}^{\dagger}(x)$ beschrieben:



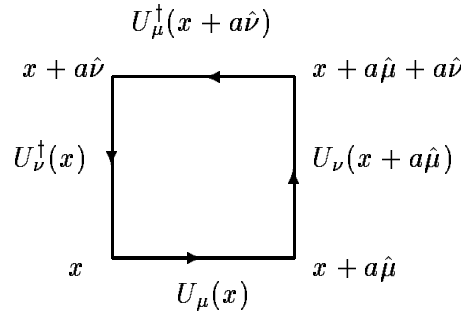
Die zu (2.2) analoge Beziehung zwischen den Paralleltransportern und dem Eichfeld A_{μ} wird dabei wie in [Lu] z.B. durch

$$U_{\mu}(x) = e^{-aA_{\mu}(x)} \quad \text{und} \quad U_{\mu}^{\dagger}(x) = e^{aA_{\mu}(x)} \quad (2.5)$$

hergestellt. Dabei werden wir annehmen, daß das Gitter in das Kontinuum eingebettet ist und daß es sich bei $A_{\mu}(x)$ um das Eichfeld des Kontinuums am Gitterpunkt $x \in \Lambda$ handelt. Auf die Relation zwischen Feldern auf dem Gitter und Kontinuumsfeldern wird später noch genauer eingegangen (vgl. Kapitel 3.3).

2.1.2 Die Wilson-Wirkung für das Eichfeld

Um nun eine Gitter-Wirkung für das Eichfeld aufzustellen, benötigt man analog zu (2.4) geschlossene Kurven. Die kleinstmögliche Wahl ist hierbei auf dem Gitter die sogenannte Plaquettenvariable $U_{\mu\nu}(x)$ entlang eines Quadrats der Seitenlänge a :



Algebraisch ist dieser Ausdruck durch

$$U_{\mu\nu}(x) = U_{\nu}^{\dagger}(x)U_{\mu}^{\dagger}(x + a\hat{\nu})U_{\nu}(x + a\hat{\mu})U_{\mu}(x) \quad (2.6)$$

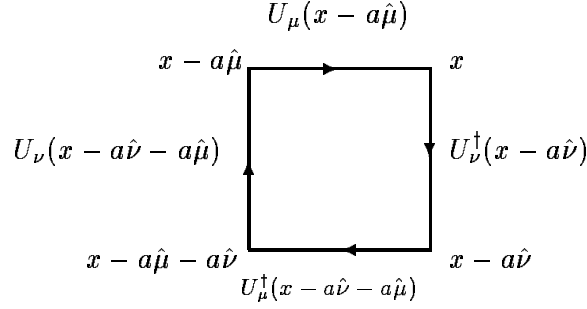
gegeben. Die umgekehrt durchlaufene Plaquette $U_{\nu\mu}(x) = U_{\mu\nu}^{\dagger}(x)$ erhält man entsprechend zu

$$U_{\nu\mu}(x) = U_{\mu}^{\dagger}(x)U_{\nu}^{\dagger}(x + a\hat{\mu})U_{\mu}(x + a\hat{\nu})U_{\nu}(x). \quad (2.7)$$

Zur Illustration sei hier noch die Plaquette

$$U_{-\nu,-\mu}(x) = U_{\mu}(x - a\hat{\mu})U_{\nu}(x - a\hat{\nu} - a\hat{\mu})U_{\mu}^{\dagger}(x - a\hat{\nu} - a\hat{\mu})U_{\nu}^{\dagger}(x - a\hat{\nu}) \quad (2.8)$$

dargestellt:



Durch Einsetzen der (2.5) entsprechenden Beziehungen, Benutzung der Campell-Baker-Hausdorff-Formel und Taylor-Entwicklung nach a sieht man dann, daß (2.4) in der folgenden Art und Weise reproduziert wird¹:

$$U_{\mu\nu}(x) = 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^3). \quad (2.9)$$

Man beachte, daß a^2 gerade der Flächeninhalt des umlaufenen Quadrats ist. Genauer gilt

$$U_{\mu\nu}(x) = e^{-a^2 G_{\mu\nu}(x)}, \quad (2.10)$$

wobei $G_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a)$. Analog ergibt sich

$$U_{\nu\mu}(x) = e^{+a^2 G_{\mu\nu}(x)}. \quad (2.11)$$

Allgemein kann man sagen, daß im Gegenuhrzeigersinn durchlaufene Plaquetten in diesem Sinn $1 - a^2 F_{\mu\nu}(x)$ und negativ durchlaufene Plaquetten $1 + a^2 F_{\mu\nu}(x)$ triangulieren. Als Diskretisierung des Eichfeldanteils der Lagrange-Dichte benutzen wir nun die Standard-Formulierung nach WILSON (vergleiche [Wi74], [Wi75], [MM])²:

$$S_g^{lat}(x) = \frac{1}{2g^2} \sum_x \sum_{1 \leq \mu \neq \nu \leq 4} \left[4 - \text{Tr} \{U_{\mu\nu}(x) + U_{\nu\mu}(x)\} \right]. \quad (2.12)$$

Die Lagrange-Dichte auf dem Gitter hängt mit der Wirkung über die Beziehung

$$S^{lat} = a^4 \sum_x \mathcal{L}^{lat}(x) \quad (2.13)$$

zusammen, denn es gilt $a^4 \sum_x \rightarrow \int d^4x$ für $a \rightarrow 0$. Eine naheliegende Wahl der Lagrange-Dichte auf dem Gitter ist daher

$$\mathcal{L}_g^{lat}(x) = \frac{1}{2g^2} \frac{1}{a^4} \sum_{1 \leq \mu \neq \nu \leq 4} \left[4 - \text{Tr} \{U_{\mu\nu}(x) + U_{\nu\mu}(x)\} \right]. \quad (2.14)$$

¹Es stellt sich hierbei die Frage nach der Definition von $F_{\mu\nu}(x)$ auf dem Gitter. Einerseits kann dies über $F_{\mu\nu}^{lat}(x) := \Delta_\mu A_\nu(x) - \Delta_\nu A_\mu(x) + [A_\mu(x), A_\nu(x)]$ geschehen, wobei Δ_μ eine Gitter-Version der partiellen Ableitung ist (s. nächster Abschnitt) und $A_\mu(x)$ über $U_\mu(x) = e^{-aA_\mu(x)}$ erklärt wird. Ich gehe in diesem und in den folgenden Kapiteln jedoch davon aus, daß das Gitter in das Kontinuum eingebettet ist, so daß ein Rückgriff auf den Feldstärketensors des Kontinuums möglich ist, vgl. dazu auch Abschnitt 3.3.

²Die hier angegebene Wirkung gehört zur Eichgruppe $SU(2)$, im Fall der $SU(N_c)$ verwendet man $S_g^{lat}(x) = \frac{1}{2g^2} \sum_x \sum_{1 \leq \mu \neq \nu \leq 4} [2N_c - \text{Tr} \{U_{\mu\nu}(x) + U_{\nu\mu}(x)\}]$.

Mit (2.10) und (2.11) ergibt sich dann, daß

$$\mathcal{L}_g^{lat}(x) = -\frac{1}{2g^2} \text{Tr} \{ F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \} + \mathcal{O}(a), \quad (2.15)$$

also gilt wie gewünscht im naiven Limes

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}_g^{lat}(x) = \mathcal{L}_g(x). \quad (2.16)$$

(2.14) läßt sich dabei auch in der Form

$$\mathcal{L}_g^{lat}(x) = \frac{1}{g^2} \frac{1}{a^4} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[4 - \text{Tr} \{ U_{\mu\nu}(x) + U_{\nu\mu}(x) \} \right] \quad (2.17)$$

schreiben.

2.1.3 Die Wirkung für den fermionischen Teil

Im Kontinuum ist der fermionische Teil der Wirkung durch den Ausdruck

$$\mathcal{L}_f(x) = \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x) \} \quad (2.18)$$

gegeben. Im wesentlichen sind nun also Ableitungen auf dem Gitter zu modellieren. Für die Ableitung ohne Eichfeld und eine auf dem Gitter erklärte Funktion f findet man dabei eine Vorwärts- und eine Rückwärtsableitung sowie eine symmetrische Form:

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^{lat,f} f(x) &= \frac{1}{a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x)) \\ \Delta_\mu^{lat,b} f(x) &= \frac{1}{a} (f(x) - f(x - a\hat{\mu})) \\ \Delta_\mu^{lat,sym} f(x) &= \frac{1}{2a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x - a\hat{\mu})). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Durch Taylor-Entwicklungen sieht man sofort, daß diese im Limes $a \rightarrow 0$ die Ableitungen des Kontinuums ergeben. Für die kovariante Ableitung der adjungierten Darstellung kann man auf dem Gitter analoge Versionen definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^{lat,f} f(x) &= \frac{1}{a} \left(U_\mu^\dagger(x) f(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - f(x) \right) \\ \mathcal{D}_\mu^{lat,b} f(x) &= \frac{1}{a} \left(f(x) - U_\mu(x - a\hat{\mu}) f(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \right) \\ \mathcal{D}_\mu^{lat,sym} f(x) &= \frac{1}{2a} \left(U_\mu^\dagger(x) f(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - U_\mu(x - a\hat{\mu}) f(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Beispielsweise hat man damit wegen $U_\mu(x) = e^{-aA_\mu(x)}$ bzw. $U_\mu^\dagger(x) = e^{aA_\mu(x)}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^{lat,f} f(x) &= \frac{1}{a} \left(U_\mu^\dagger(x) f(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - f(x) \right) \\ &= \frac{1}{a} (f(x) - f(x) + a\partial_\mu f(x) + aA_\mu(x)f(x) - af(x)A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2)) \\ &= \partial_\mu f(x) + [A_\mu(x), f(x)] + \mathcal{O}(a), \end{aligned} \quad (2.21)$$

also

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{D}_\mu^{lat,f} f(x) = \mathcal{D}_\mu f(x). \quad (2.22)$$

Die fermionische Lagrange-Dichte, die in [Lu] verwendet wird, zerfällt nun in zwei Anteile. Ein Term ist proportional zum Wilson-Parameter r und wird eingeführt, um die bei der Bildung des Kontinuumslikes entstehenden Fermion-Doppler zu eliminieren. Der r -unabhängige Teil ist durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{lat}(x) = & \frac{1}{2a} \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ & \left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

gegeben. Um dies auf eine Form zu bringen, die der von (2.18) entspricht, fügen wir zwei Nullen ein und nutzen die Zyklichkeit der Spur:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{lat}(x) = & \frac{1}{2a} \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ & - \underbrace{\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \lambda(x)}_0 \\ & - U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu(x) \lambda(x) \\ & \left. + \underbrace{\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \lambda(x)}_0 \right\} \\ = & \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) - \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \right\} \\ = & \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Man erkennt, daß auch hier der korrekte Kontinuumslikes reproduziert wird.

Schließlich ist der Wilson-Term, der kein Analogon im Kontinuum findet, durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f,Wil}^{lat}(x) = & \frac{1}{2a} r \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \right. \\ & - \bar{\lambda}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\ & \left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right\} \\ & + \frac{4r}{a} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\} \end{aligned} \quad (2.25)$$

gegeben.

Insgesamt sieht also der fermionische Anteil der Lagrange-Dichte wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f^{lat}(x) + \mathcal{L}_{f,Wil}^{lat}(x) + \mathcal{L}_m^{lat}(x) = & \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2a} \sum_\mu \left(\bar{\lambda}(x) (\gamma_\mu - r) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \right. \\ & \left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) (\gamma_\mu + r) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right) \\ & \left. + \left(m_0 + \frac{4r}{a} \right) \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Dabei haben wir den Gluinos durch den Term $\mathcal{L}_m^{lat}(x) = m_0 \text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)\lambda(x)\}$ noch eine zusätzliche (nackte) Masse m_0 verliehen. Die zugehörige Wirkung findet man z.B. auch in [CV], man vergleiche auch mit [Mo]. In der weiteren Rechnung werden wir die Kennzeichnung *lat* weglassen, denn es ist klar, daß es sich um die Variation der Gitter-Lagrange-Dichte handelt.

2.1.4 Einfache SUSY-Transformationen auf dem Gitter

Eine einfache Realisierung der Supersymmetrie-Transformationen (1.47)-(1.49) auf dem Gitter wird in [CV] vorgeschlagen und auch in [Lu] verwendet:

$$\delta U_\mu(x) = -2agU_\mu(x)\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x) \quad (2.27)$$

$$\delta\lambda(x) = -\frac{i}{g}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)\varepsilon \quad (2.28)$$

$$\delta\bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g}\bar{\varepsilon}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x). \quad (2.29)$$

Dabei ist $\mathcal{G}_{\rho\tau}$ eine zunächst nicht näher spezifizierte Version des Feldstärketensors $F_{\rho\tau}(x)$ auf dem Gitter, d.h. man verlangt $\lim_{a\rightarrow 0}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) = F_{\rho\tau}(x)$. Somit wird die Kontinuums-Variation der Fermionenfelder in korrekter Weise wiedergegeben. Beachtet man, daß

$$U_\mu(x) = 1 - aA_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2), \quad (2.30)$$

daß also $\delta U_\mu(x) = -a\delta A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2)$ gilt und schreibt (2.27) als

$$\begin{aligned} \delta U_\mu(x) &= -2ag(1 - aA_\mu(x))\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x) + \mathcal{O}(a^3) \\ &= -2ag\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x) + \mathcal{O}(a^2), \end{aligned} \quad (2.31)$$

so erkennt man, daß die Kontinuums-Variation $\delta A_\mu(x) = 2g\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x)$ bis auf $\mathcal{O}(a)$ -Effekte reproduziert wird.

Die Transformation eines Eichlinks $U_\mu^\dagger(x)$ gewinnt man aus der Unitaritätsbedingung $U_\mu(x)U_\mu^\dagger(x) = \mathbb{1}$, d.h. $\delta(U_\mu(x)U_\mu^\dagger(x)) = 0$ bzw. $(\delta U_\mu(x))U_\mu^\dagger(x) + U_\mu(x)(\delta U_\mu^\dagger(x)) = 0$ zu

$$\begin{aligned} \delta U_\mu^\dagger(x) &= -U_\mu^\dagger(x)\delta U_\mu(x)U_\mu^\dagger(x) \\ &= 2ag\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x)U_\mu^\dagger(x). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Überlegungen von NICOLAI zufolge sind die komplexe Konjugation und die hermitesche Adjunktion von euklidischen Majorana-Spinoren mit theoretischen Subtilitäten verbunden [Ni]. Es ist daher an dieser Stelle nicht möglich $\delta(U_\mu^\dagger)$ über $\delta(U_\mu^\dagger) = (\delta U_\mu)^\dagger$ zu erklären.

2.2 Graphische Notation

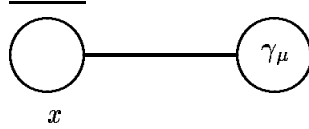
Die bei der Variation der Wirkung entstehenden Terme sind bisweilen etwas sperrig, so daß sich hier eine graphische Veranschaulichung anbietet. Insbesondere werden hierdurch die in den Rechnungen verborgenen Symmetrien leichter erfaßbar, was es im nächsten

Kapitel vereinfacht, eine Verbesserung der Transformationen und der Lagrange-Dichte vorzunehmen. Auch die Zuordnung von Gitterausdrücken zu ihrem Kontinuumslikes wird erleichtert.

Im folgenden werde ich Eichlinks stets durch eine durchgezogene Linie mit Pfeil kennzeichnen. Dabei ist die Richtung „rechts“ in aller Regel mit dem Buchstaben $\hat{\mu}$ verknüpft, der Transport nach „oben“ mit der positiven $\hat{\nu}$ -Richtung. Fermionische Variablen λ mache ich durch einen Kreis deutlich, antifermionische durch einen Kreis mit zusätzlichem Balken. Liegt eine Kontraktion eines Fermions mit einem anderen Spinor vor, so notiere ich diesen Partner im Inneren des jeweiligen Kreises. So ist etwa

$$\overline{\bar{\epsilon}}\gamma_{\mu} = \bar{\epsilon}\gamma_{\mu}\lambda.$$

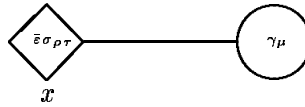
In der Variation der Wirkung treten aufgrund der Spurbildung nur eichinvariante Summanden auf. Dies bedeutet, daß nur von solchen Termen die Spur gebildet wird, die sich auf dem Gitter als geschlossene Wegstrecken mit geeigneten Feldern an den Gitterpunkten schreiben lassen. Da die Spur zyklisch ist, spielt dabei die Wahl des Startpunktes keine Rolle. Bei solchen geschlossenen Polygonzügen lasse ich daher die Pfeile an den Eichlinks fort, es versteht sich dann von selbst, daß eine Rückkehr zum Ausgangspunkt impliziert ist. Beispielsweise steht



dann für den Ausdruck

$$\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)U_{\mu}^{\dagger}(x)\gamma_{\mu}\lambda(x+a\hat{\mu})U_{\mu}(x)\} = \text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)\gamma_{\mu}U_{\mu}^{\dagger}(x)\lambda(x+a\hat{\mu})U_{\mu}(x)\} \quad (2.33)$$

(keine Summation über μ). Allgemein gilt, daß bei den Kontraktionen der Spinorindizes die in den Kreisen notierten Gamma-Matrizen zu beachten sind. Diese Zuordnung ergibt sich aus den Graphen aber in ganz natürlicher Weise. Treten außerdem noch Plaquettenvariablen der Form $\mathcal{G}_{\rho\tau}$ auf, so werden diese durch ein auf der Spitze stehendes Quadrat symbolisiert. So bedeutet dann etwa der Graph



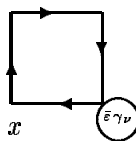
nichts anderes als

$$\text{Tr}\{\bar{\epsilon}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)\gamma_{\mu}U_{\mu}^{\dagger}(x)\lambda(x+a\hat{\mu})U_{\mu}(x)\}, \quad (2.34)$$

wobei auch hier keine Summation über ρ , τ und μ erfolgt. Als letztes Beispiel gebe ich nun noch die graphische Darstellung von

$$\text{Tr}\{\bar{\epsilon}\gamma_{\nu}\lambda(x+a\hat{\mu})U_{-\mu,\nu}(x+a\hat{\mu})\} \quad (2.35)$$

an



(auch hier keine Summation über μ bzw. ν) und verweise darauf, daß die Kennzeichnung der Gitterpunkte (beispielsweise x) gelegentlich ausgelassen wird, sofern keine Uneindeutigkeiten bestehen. Ohnehin werden die Graphiken meistens auch von den algebraischen Ausdrücken begleitet und dienen daher nur zur Verdeutlichung.

2.3 Die Gittergrößen

2.3.1 Kovariante Ableitung und Feldstärketensor

Um nun in der Variation der eingeführten Lagrange-Dichte unter den genannten Transformationen die SUSY-brechenden Terme in Ordnung a verfolgen zu können, untersuchen wir als nächstes, wie stark die Gitterversionen der kovarianten Ableitung und des Feldstärketensors von ihren Verwandten im Kontinuum abweichen. Bei der kovarianten Ableitung ist die Gitter-Version aufgrund der Wahl der Lagrange-Dichte durch

$$\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda} = \frac{1}{a} (U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \bar{\lambda}(x)) \quad (2.36)$$

gegeben. Die Entwicklung nach der Gitterkonstanten a ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x) &= \frac{1}{a} \left(U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \bar{\lambda}(x) \right) \\ &= \frac{1}{a} \left(0 + a \left(A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) + \partial_\mu \bar{\lambda}(x) - \bar{\lambda}(x) A_\mu(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + a^2 \left([A_\mu(x), \partial_\mu \bar{\lambda}(x)] + \frac{1}{2} A_\mu(x) A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) + \frac{1}{2} \bar{\lambda}(x) A_\mu(x) A_\mu(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) A_\mu(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \right) + \mathcal{O}(a^3) \right) \\ &= \partial_\mu \bar{\lambda}(x) + [A_\mu(x), \bar{\lambda}(x)] \\ &\quad + a \left([A_\mu(x), \partial_\mu \bar{\lambda}(x)] + \frac{1}{2} A_\mu(x) A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) + \frac{1}{2} \bar{\lambda}(x) A_\mu(x) A_\mu(x) \right. \\ &\quad \left. - A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) A_\mu(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \right) + \mathcal{O}(a^2) \\ &= \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x) + \frac{a}{2} (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x) + [\bar{\lambda}(x), \mathcal{D}_\mu A_\mu(x)]) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Diesen Restterm werden wir in Zukunft mit $\mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(\bar{\lambda}(x))$ abkürzen, wir schreiben also

$$\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x) = \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x) + a \mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(\bar{\lambda}(x)) + \mathcal{O}(a^2). \quad (2.38)$$

Bei der Variation des Eichfeldanteils der Lagrange-Dichte wird uns die „einfachste“ Version des Feldstärketensors auf dem Gitter

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^0 := -\frac{1}{2a^2} (U_{\mu\nu}(x) - U_{\nu\mu}(x)) \quad (2.39)$$

begegnen, so daß wir auch ihre Abweichung vom Kontinuumslikes bestimmen wollen. Man beachtet (2.10) sowie (2.11) und erhält

$$-\frac{1}{2a^2} (U_{\mu\nu}(x) - U_{\nu\mu}(x))$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2a^2} (1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) - (1 + a^2 F_{\mu\nu}(x)) + \mathcal{O}(a^3)) \\
&= F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Eine zur kovarianten Ableitung $\mathcal{D}_\mu^{lat,f}$ analoge Bezeichnung wäre wohl $F_{\mu\nu}^{lat,f}$, denn auch $\mathcal{G}_{\mu\nu}^0$ ist vorwärts gerichtet.

Um die Abweichungen vom Kontinuumsfeldstärketensor zu bestimmen, ist zunächst die Plaquettenvariable $U_{\mu\nu}(x)$ bis zur dritten Ordnung von a zu entwickeln. Diese etwas lästige Arbeit wurde schon in [Lu] verrichtet, mit einer kleinen Korrektur können wir die dortige Formel (3.81) direkt übernehmen:

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}(x) &= 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) \\
&\quad + a^3 \left([\partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x)] + [A_\nu(x), \partial_\nu A_\mu(x)] \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} [\partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x)] - \frac{1}{2} [A_\nu(x), \partial_\mu A_\nu(x)] \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} [A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} [[A_\nu(x), A_\mu(x)], A_\mu(x)] \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(a^4).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Die Entwicklung von $U_{\mu\nu}^\dagger(x) = U_{\nu\mu}(x)$ liefert dasselbe Ergebnis mit vertauschten Rollen von μ und ν . Das Zusammensetzen zu $\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) = -\frac{1}{2a^2}(U_{\mu\nu}(x) - U_{\nu\mu}(x))$ führt dann auf

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) &= F_{\mu\nu}(x) \\
&\quad - a \left([\partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x)] - [\partial_\nu A_\mu(x), A_\nu(x)] \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} [\partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x)] + \frac{1}{2} [\partial_\mu A_\nu(x), A_\nu(x)] \\
&\quad - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\nu A_\mu(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} [A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} [A_\mu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] \right) \\
&\quad + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Wir bezeichnen diesen Rest mit $\mathcal{R}_{\mu\nu}^{\mathcal{G}^0}$, d.h. wir schreiben später $\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) = F_{\mu\nu}(x) + a\mathcal{R}_{\mu\nu}^{\mathcal{G}^0}(x) + \mathcal{O}(a^2)$.

2.3.2 Leibniz-Regel auf dem Gitter

Bei der Variation der Kontinuums-Lagrange-Dichte verwenden wir wiederholt die Leibniz-Regel für die kovariante Ableitung. Auf dem Gitter gilt diese nicht exakt, in diesem Abschnitt soll der Grad ihrer Brechung bestimmt werden. Die Aufgabe besteht also darin,

den folgenden Ausdruck, der im Kontinuum exakt Null ist, bis zur ersten nicht-trivialen Ordnung in a zu entwickeln:

$$(\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) + \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x)) - \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x)). \quad (2.43)$$

Man beachte dabei, daß wir für den Feldstärketensor direkt den Kontinuumsausdruck einsetzen können, wenn wir uns nur für die Störungen in erster Ordnung von a interessieren. Ist z.B. $\mathcal{G}$ eine Gitterversion des Feldstärketensors, dessen $\mathcal{O}(a)$ -Abweichung vom Kontinuumslikes wir mit $\mathcal{R}^{\mathcal{G}}$ bezeichnen wollen, für die also gilt $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) = F_{\rho\tau}(x) + a\mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x) + \mathcal{O}(a^2)$, so erhält man:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) + \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) - \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \\ = & (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) F_{\rho\tau}(x) + \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} F_{\rho\tau}(x)) - \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \\ & + a(\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x) + \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) - \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) + \mathcal{O}(a^2) \\ = & (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) F_{\rho\tau}(x) + \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} F_{\rho\tau}(x)) - \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \\ & + a(\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x)) \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x) + \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) - \mathcal{D}_\mu (\bar{\lambda}(x) \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) + \mathcal{O}(a^2) \\ = & (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) F_{\rho\tau}(x) + \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} F_{\rho\tau}(x)) - \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Wir können also von dem Ausdruck

$$(\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) F_{\rho\tau}(x) + \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} F_{\rho\tau}(x)) - \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \quad (2.45)$$

ausgehen. Dieser schreibt sich als

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \left\{ U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) F_{\rho\tau}(x) - \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \right. \\ & + \bar{\lambda}(x) U_\mu^\dagger(x) F_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \\ & \left. - U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) F_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) + \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \right\} \\ = & \frac{1}{a} \left\{ \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) - \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \right. \\ & + \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) - \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \\ & \left. - \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) + \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \right\} \\ & + a \left([A_\mu(x), \bar{\lambda}(x)] F_{\rho\tau}(x) + \partial_\mu \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \right. \\ & + \bar{\lambda}(x) [A_\mu(x), F_{\rho\tau}(x)] + \bar{\lambda}(x) \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \\ & \left. - [A_\mu(x), \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)] - \partial_\mu \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) - \bar{\lambda}(x) \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \right) \\ & + a^2 \left(\frac{1}{2} A_\mu(x)^2 \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) + A_\mu(x) \partial_\mu \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) - A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) A_\mu(x) F_{\rho\tau}(x) \right. \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) - \partial_\mu \bar{\lambda}(x) A_\mu(x) F_{\rho\tau}(x) + \frac{1}{2} \bar{\lambda}(x) A_\mu(x)^2 F_{\rho\tau}(x) \\ & \left. + \frac{1}{2} \bar{\lambda}(x) A_\mu(x)^2 F_{\rho\tau}(x) + \bar{\lambda}(x) A_\mu(x) \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) - \bar{\lambda}(x) A_\mu(x) F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \bar{\lambda}(x) \partial_\mu \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) - \bar{\lambda}(x) \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) + \frac{1}{2} \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x)^2 \\
& - \frac{1}{2} A_\mu(x)^2 \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) - A_\mu(x) \partial_\mu \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) - A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \\
& + A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) \\
& - \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) - \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) + \partial_\mu \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) \\
& - \frac{1}{2} \bar{\lambda}(x) \partial_\mu \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) + \bar{\lambda}(x) \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) - \frac{1}{2} \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x)^2 \Big) \\
& + \mathcal{O}(a^2) \\
= & a \Big(\bar{\lambda}(x) A_\mu(x)^2 F_{\rho\tau}(x) \\
& + A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) - A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) A_\mu(x) F_{\rho\tau}(x) - \bar{\lambda}(x) A_\mu(x) F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) \\
& + \partial_\mu \bar{\lambda}(x) [F_{\rho\tau}(x), A_\mu(x)] + [\bar{\lambda}(x), A_\mu(x)] \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \\
& - \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \Big) \\
& + \mathcal{O}(a^2). \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Diesen etwas unangenehmen Restterm in erster Ordnung von a werde ich im folgenden stets mit $\mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}, F_{\rho\tau}(x))$ abkürzen (L wie Leibniz). Es gilt also

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) + \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x)) - \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x)) \\
= & 0 + a \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) + \mathcal{O}(a^2). \tag{2.47}
\end{aligned}$$

2.3.3 Bianchi-Identität auf dem Gitter

Im Kontinuum ist folgendes richtig (siehe Anhang):

$$(\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} = 0. \tag{2.48}$$

In (2.37) hatten wir gesehen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu^{lat,f} F_{\rho\tau}(x) &= \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) + [A_\mu(x), F_{\rho\tau}(x)] \\
&+ a \Big([A_\mu(x), \partial_\mu F_{\rho\tau}(x)] + \frac{1}{2} A_\mu(x) A_\mu(x) F_{\rho\tau}(x) + \frac{1}{2} F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) A_\mu(x) \\
&- A_\mu(x) F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \Big) \\
&+ \mathcal{O}(a^2). \tag{2.49}
\end{aligned}$$

Den entstehenden Restterm in Ordnung a hatten wir in (2.38) mit $\mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(F_{\rho\tau}(x))$ bezeichnet. Bei der Betrachtung von $\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)$ ist nun aber auch zu beachten, daß $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)$ i.a. nicht mit dem Kontinuumsausdruck übereinstimmt, sondern daß vielmehr im Kontinuumslimites

$$\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) = F_{\rho\tau}(x) + a \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x) + \mathcal{O}(a^2) \tag{2.50}$$

gilt. Daher ist dann beispielsweise

$$\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) = \mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x) + a \mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(F_{\rho\tau}(x)) + a \mathcal{D}_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x) + \mathcal{O}(a^2), \tag{2.51}$$

d.h. es ist sowohl die $\mathcal{O}(a)$ -Störung des Feldstärketensors als auch diejenige der kovarianten Gitterableitung präsent. Dementsprechend gilt dann auch

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} &= (\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \\ &+ a \left((\mathcal{D}_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) + \mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(F_{\rho\tau}(x)) \right) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \\ &+ \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Der erste Term ergibt aufgrund der Bianchi-Identität im Kontinuum Null, den zweiten können wir hier nicht weiter auswerten, denn er hängt von der speziellen Wahl von $\mathcal{G}_{\rho\tau}$ in den SUSY-Transformationen ab ($\mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}$ ist zunächst beliebig.). $\mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}} F_{\rho\tau}$ hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(F_{\rho\tau}(x)) &= \frac{1}{2} A_\mu(x) A_\mu(x) F_{\rho\tau}(x) + \frac{1}{2} F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) A_\mu(x) \\ &- A_\mu(x) F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \\ &+ [A_\mu(x), \partial_\mu F_{\rho\tau}(x)] \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x)(x) + [F_{\rho\tau}(x), \mathcal{D}_\mu A_\mu(x)]) . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun mit der Variation der Lagrange-Dichte unter den naiv diskretisierten SUSY-Transformationen beginnen. Als erstes betrachten wir dabei die Variation des Eichfeld-Anteils der Lagrange-Dichte.

2.4 Variation des Eichfeldanteils der Lagrange-Dichte

Der Eichfeldanteil der Lagrange-Dichte war auf dem Gitter durch den Ausdruck

$$\mathcal{L}_g(x) = \frac{1}{a^4} \frac{1}{g^2} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[4 - \text{Tr} \{ U_{\mu\nu}(x) + U_{\nu\mu}(x) \} \right] \quad (2.54)$$

gegeben. Man beachte, daß nur über $\mu < \nu$ summiert wird, daß also jede Plaquette $U_{\mu\nu}$ nur in einer Orientierung durchlaufen wird. Die entgegengesetzte Orientierung kommt erst durch $U_{\nu\mu}$ hinzu. In graphischer Notation sieht diese Lagrange-Dichte wie folgt aus:

$$\mathcal{L}_g(x) = \frac{1}{a^4} \frac{1}{g^2} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[4 - \left(\begin{array}{c} \text{Clockwise square} \\ + \\ \text{Counter-clockwise square} \end{array} \right) \right] \quad (2.55)$$

Die naiv diskretisierten SUSY-Transformationen auf dem Gitter lauten wie oben angegeben

$$\delta U_\mu(x) = -2ag U_\mu(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \quad (2.56)$$

$$\delta U_\mu^\dagger(x) = 2ag \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x), \quad (2.57)$$

und man kann sie in Diagrammen durch

$$\delta \left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ x \end{array} \right) = -2ag \left(\begin{array}{c} \textcircled{\bar{\varepsilon}\gamma_\mu} \longrightarrow \end{array} \right) \quad (2.58)$$

bzw.

$$\delta \left(\begin{array}{c} \longleftarrow \\ x \end{array} \right) = 2ag \left(\begin{array}{c} \textcircled{\bar{\varepsilon}\gamma_\mu} \longleftarrow \end{array} \right) \quad (2.59)$$

veranschaulichen.

Damit bekommt man für die Variation der Eichfeld-Wirkung folgenden Ausdruck:

$$\delta \mathcal{L}_g(x) = \frac{2}{g} \frac{1}{a^3} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4}$$

−

−

+

+

−

−

+

+

(2.60)

Man erkennt, daß die Graphen in der rechten Spalte jeweils durch Vertauschung von μ und ν aus denen der linken Spalte hervorgehen (Spiegelung an der $\hat{\mu} - \hat{\nu}$ -Winkelhalbierenden und Vertauschen von γ_μ und γ_ν). Somit läßt sich die Summe $\sum_{\mu < \nu}$ in $\sum_{\mu \neq \nu}$ umwandeln, und es wird:

$$\delta \mathcal{L}_g(x) = \frac{2}{g} \frac{1}{a^3} \sum_{1 \leq \mu \neq \nu \leq 4}$$

−

−

$$(2.61)$$

Letzteres bedeutet aber nichts anderes als

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_g(x) &= \frac{2}{g} \frac{1}{a^3} \sum_{1 \leq \mu \neq \nu \leq 4} \text{Tr} \left\{ \right. \\ &\quad U_{\mu\nu}(x) \left(\bar{\epsilon}\gamma_\mu \lambda(x) - U_\nu^\dagger(x) \bar{\epsilon}\gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \right) \\ &\quad \left. + U_{\nu\mu}(x) \left(-\bar{\epsilon}\gamma_\mu \lambda(x) + U_\nu^\dagger(x) \bar{\epsilon}\gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Man verbleibt also letztendlich mit dem Term

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_g(x) &= \frac{2}{g} \frac{1}{a^3} \sum_{1 \leq \mu \neq \nu \leq 4} \\ &\quad \text{Tr} \left\{ -\bar{\epsilon}\gamma_\mu \left(U_\nu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) - \lambda(x) \right) \cdot (U_{\mu\nu}(x) - U_{\nu\mu}(x)) \right\}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Nun weiß man aber, daß $\frac{1}{a} \left(U_\nu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) - \lambda(x) \right)$ nichts anderes ist als die Vorwärts-Gitterversion der kovarianten Ableitung, daß also

$$\mathcal{D}_\nu^{lat,f} \lambda(x) := \frac{1}{a} (U_\nu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x) - \lambda(x)). \quad (2.64)$$

Außerdem war

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) := -\frac{1}{2a^2} (U_{\mu\nu}(x) - U_{\nu\mu}(x)) \quad (2.65)$$

die „einfachste“ Darstellung des Feldstärketensors $F_{\mu\nu}(x)$ auf dem Gitter.

Die Variation des Eichfeldanteils der Lagrange-Dichte läßt sich mit diesen Bezeichnungen wie folgt notieren:

$$\delta\mathcal{L}_g(x) = \frac{4}{g} \sum_{1 \leq \mu \neq \nu \leq 4} \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \bar{\epsilon}\gamma_\mu \mathcal{D}_\nu^{lat,f} \lambda(x) \right\}. \quad (2.66)$$

Dies ist aber nach einer einfachen Umformung (man benutze die Rechenregeln für Majorana-Spinoren) nichts anderes als

$$\delta\mathcal{L}_g(x) = \frac{4}{g} \sum_{1 \leq \mu \neq \nu \leq 4} \text{Tr} \left\{ (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \right\} \gamma_\nu \epsilon, \quad (2.67)$$

also das Gitter-Analogon zu (1.54). Mit den Zerlegungen:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) = -ig \mathcal{G}_{\mu\nu}^{0a}(x) T^a \quad (2.68)$$

$$\lambda(x) = \lambda^a(x) T^a \quad (2.69)$$

und $\text{Tr} \{T^a T^b\} = \frac{1}{2} \delta^{ab}$ erhält man daraus das Analogon zu [Lu] (2.36):

$$\delta\mathcal{L}_g(x) = -2i \mathcal{G}_{\mu\nu}^{0a}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\nu \epsilon. \quad (2.70)$$

Mit der Leibniz-Regel auf dem Gitter (2.47) können wir das Ergebnis aus (2.67) auch als

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_g(x) &= \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \right\} \gamma_\nu \varepsilon \\
&= -\frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \right\} \gamma_\nu \varepsilon \\
&\quad + \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x)) \right\} \gamma_\nu \varepsilon \\
&\quad + a \frac{4}{g} \sum_{\mu,\nu} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\mu\nu}(x)) \right\} \gamma_\nu \varepsilon \\
&\quad + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned} \tag{2.71}$$

schreiben.

2.5 Variation der Fermion-Lagrange-Dichte

Ich möchte an dieser Stelle einen kurzen Hinweis zur Notation geben: Die Fermion-Wirkung hängt von den Eichfeldern und den Fermion-Feldern ab, und es erscheint übersichtlich die gesamte Variation in zwei Teile aufzuspalten, die jeweils bei der Anwendung der Transformationen nur einer Teilchensorte entstehen. Diese Summanden werde ich mit $\delta_\lambda \mathcal{L}_f$ bzw. $\delta_U \mathcal{L}_f$ bezeichnen.

2.5.1 $\delta_\lambda \mathcal{L}_f$ -Variation auf dem Gitter

Ich betrachte zunächst nur den nicht-Wilsonschen Teil der Fermionen-Wirkung, d.h. wir verschieben die Analyse der r -abhängigen Terme auf einen späteren Zeitpunkt. Also gehen wir von

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f(x) &= \frac{1}{2a} \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\
&\quad \left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right\} \\
&\stackrel{(2.24)}{=} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right\}
\end{aligned} \tag{2.72}$$

aus. Graphisch läßt sich dies wie folgt veranschaulichen:

$$\mathcal{L}_f(x) = \frac{1}{a} \sum_\mu \left[\overline{\bigcirc_x} \text{---} \bigcirc_{\gamma_\mu} - \overline{\bigcirc_x} \bigcirc_{\gamma_\mu} \right] \tag{2.73}$$

Zur Erinnerung sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die abgebildeten Eichlinks auf dem Papier in horizontaler Richtung verlaufen, gemäß der hier verwendeten Schreibweise also Transporte in $\hat{\mu}$ -Richtung anzeigen.

Wir betrachten nun das Verhalten von $\mathcal{L}_f(x)$ bei Variation der Gluinofelder λ und $\bar{\lambda}$. Man bekommt mit

$$\delta\lambda(x) = -\frac{i}{g}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)\varepsilon \quad (2.74)$$

$$\delta\bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g}\bar{\varepsilon}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \quad (2.75)$$

$$(2.76)$$

den folgenden Ausdruck:

$$\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) = \frac{1}{a} \frac{i}{g} \sum_{\mu,\rho,\tau} \quad (2.77)$$

Dies bedeutet aber

$$\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) = \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x)) - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon \right\}. \quad (2.78)$$

Nach einer weiteren kleinen Umformung ergibt dies schließlich

$$\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) = \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \varepsilon - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon \right\}. \quad (2.79)$$

Dies sind genau die ersten beiden Terme von (1.59). Wir benutzen nun wie im Fall des Eichanteils die Leibniz-Regel

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) + \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) - \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \\ &= 0 + a \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned} \quad (2.80)$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= -2 \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon \right\} \\ &\quad + \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ &\quad + a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Es gilt nun die schon benutzte Beziehung

$$\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} = i (\delta_{\mu\rho} \gamma_\tau - \delta_{\mu\tau} \gamma_\rho) - i \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5, \quad (2.82)$$

also ist

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \varepsilon \right\} \\ &\quad - \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\} \\ &\quad + \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ &\quad + a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Man erkennt einige Terme aus (1.66) wieder, insbesondere soll der dritte Summand einen Beitrag zum Superstrom leisten. Allerdings konnte im Kontinuum gezeigt werden, daß der zweite Summand aufgrund der Bianchi-Identität verschwindet. Auf dem Gitter gilt diese nicht exakt, wie wir oben gesehen haben, unter Benutzung von (2.52) erhalten wir vielmehr

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \varepsilon \right\} \\ &\quad + \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ &\quad - a \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\} \\ &\quad - a \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(F_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\} \\ &\quad + a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (2.84)$$

2.5.2 $\delta_U \mathcal{L}_f$ -Variation auf dem Gitter

Der nicht-Wilsonsche Teil der Gluino-Wirkung war auf dem Gitter durch

$$\mathcal{L}_f(x) = \frac{1}{a} \sum_\mu \left[\overline{\bigcirc} \text{---} \bigcirc_{\gamma_\mu} - \overline{\bigcirc} \bigcirc_{\gamma_\mu} \right] \quad (2.85)$$

gegeben, die algebraische Form ist

$$\mathcal{L}_f(x) = \frac{1}{a} \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \right\}. \quad (2.86)$$

Es soll nun berechnet werden, wie sich dieser Teil der Wirkung bei SUSY-Transformationen der Eichfelder ändert. Die Transformationen sehen in graphischer Form wie folgt aus:

$$\delta \left(\overline{\longrightarrow}_x \right) = -2ag \left(\overline{\bigcirc}_{\bar{\varepsilon} \gamma_\mu} \longrightarrow \right) \quad (2.87)$$

bzw.

$$\delta \left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ x \end{array} \right) = 2ag \left(\begin{array}{c} \bigcirc \varepsilon \gamma_\mu \longrightarrow \end{array} \right) \quad (2.88)$$

und schreiben sich algebraisch als

$$\begin{aligned} \delta U_\mu(x) &= -2ag U_\mu(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \\ \delta U_\mu^\dagger(x) &= 2ag \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Daher lautet dieser Teil der Variation der Wirkung

$$\begin{aligned} \delta_U \mathcal{L}_f(x) &= -2g \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right\} \\ &\quad + 2g \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right\} \\ &= 2g \text{Tr} \left\{ [\bar{\lambda}(x), \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x)] \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right\} \\ &= -2g \text{Tr} \left\{ U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \gamma_\mu [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Anhand der mittleren Zeile erkennt man, daß die graphische Veranschaulichung wie folgt aussehen kann:

$$\delta_U \mathcal{L}_f(x) = \sum_\mu \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } -2g \text{ times a loop with } \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \text{ and } \gamma_\mu \text{ on the left, connected to a circle.} \\ \text{Diagram 2: } +2g \text{ times a loop with } \gamma_\mu \text{ and } \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \text{ on the left, connected to a circle.} \end{array} \quad (2.91)$$

Dabei vereinbaren wir, daß bei der Umsetzung der Diagramme in algebraische Ausdrücke zuerst die auftretende Schleife zu durchlaufen ist und die Felder auf den linken Seiten der Graphen von oben nach unten zu notieren sind. Die Entwicklung nach Potenzen von a liefert

$$\delta_U \mathcal{L}_f(x) = -2g \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\} + a \mathcal{R}^F(x) + \mathcal{O}(a^2). \quad (2.92)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^F(x) &= -2g \text{Tr} \left\{ \left([A_\mu(x), \bar{\lambda}(x)] + \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \right) \gamma_\mu [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\} \\ &= -2g \text{Tr} \{ \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Man erkennt, daß dies genau dem dritten Term in (1.59) entspricht. Dieser verschwindet im Kontinuum vollständig, wie wir mit Hilfe einer Fierz-Transformation zeigen konnten. Auf dem Gitter verbleibt man jedoch mit einem Rest $\mathcal{R}^F$ (F wie Fierz). Es gilt also

$$\delta_U \mathcal{L}_f(x) = a \mathcal{R}^F(x) + \mathcal{O}(a^2). \quad (2.94)$$

2.5.3 Zusammenfassung

Es gilt also:

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \varepsilon \right\} \\
&+ \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\
&- a \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\} \\
&- a \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(F_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\} \\
&+ a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\
&+ \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned} \tag{2.95}$$

bzw.

$$\delta_U \mathcal{L}_f(x) = a \mathcal{R}^F(x) + \mathcal{O}(a^2), \tag{2.96}$$

d.h. insgesamt:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_f(x) &= \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \varepsilon \right\} \\
&+ \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\
&- a \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\} \\
&- a \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(F_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\} \\
&+ a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\
&+ a \mathcal{R}^F(x) \\
&+ \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{2.97}$$

2.6 Wilson-Anteil der Fermion-Lagrange-Dichte

Der zum Wilson-Parameter r proportionale Teil der Lagrange-Dichte ist durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{f,Wil}(x) &= \frac{1}{2a} r \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \right. \\
&\quad - \bar{\lambda}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\
&\quad \left. - \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right\} \\
&\quad + \frac{4r}{a} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\}
\end{aligned} \tag{2.98}$$

gegeben. Mit der Zyklicität der Spur und unter Ausnutzung der Majorana-Eigenschaften von λ ergibt dies

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{f,Wil}(x) &= \frac{1}{2a} r \sum_{\mu} \text{Tr} \left\{ \begin{aligned} & -\bar{\lambda}(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \\ & -U_{\mu}^{\dagger}(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \lambda(x) \end{aligned} \right\} \\
&\quad + \frac{4r}{a} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \} \\
&= -\frac{r}{a} \sum_{\mu} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \right\} \\
&\quad + \frac{4r}{a} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \} \\
&= -\frac{r}{a} \sum_{\mu} \left(\text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) - \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\} \right) \\
&= -r \sum_{\mu} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_{\mu}^{lat,f} \lambda(x) \right\}. \tag{2.99}
\end{aligned}$$

Dies ist offenbar genau von der Form (2.24), allerdings ist die Gamma-Matrix γ_{μ} durch den Wilson-Parameter r zu ersetzen. Die graphische Darstellung sieht wie folgt aus:

$$\mathcal{L}_{f,Wil}(x) = -\frac{r}{a} \sum_{\mu} \left[\text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} \right]. \tag{2.100}$$

Diagram 1: Two circles connected by a horizontal line. The left circle has a horizontal line extending from its left side, and the right circle has a horizontal line extending from its right side. Diagram 2: Two circles connected by a vertical line. The left circle has a vertical line extending from its top, and the right circle has a vertical line extending from its bottom.

Im Kontinuumslimites schreibt sich die Lagrange-Dichte als $\mathcal{L}_{f,Wil}(x) = -r \sum_{\mu} \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_{\mu} \lambda(x) + \mathcal{O}(a)$ und man erkennt

$$\begin{aligned}
S_{f,Wil} &= -r \sum_{\mu} \int d^4x \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_{\mu} \lambda(x) \} + \mathcal{O}(a) \\
&= r \sum_{\mu} \int d^4x \text{Tr} \{ (\mathcal{D}_{\mu} \bar{\lambda}(x)) \lambda(x) \} + \mathcal{O}(a) \\
&= r \sum_{\mu} \int d^4x \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_{\mu} \lambda(x) \} + \mathcal{O}(a), \tag{2.101}
\end{aligned}$$

wobei das erste Gleichheitszeichen durch partielle Integration zustande kommt³ und das letzte Gleichheitszeichen Folge der Majorana-Eigenschaft des Gluinos ist. Somit besteht in nullter Ordnung von a die Identität $S_{f,Wil} = -S_{f,Wil}$, und man erkennt, daß die Einführung der Wilson-Fermionen erst in Ordnung a Beiträge zur Wirkung liefert.

2.6.1 $\delta_{\lambda} \mathcal{L}_{f,Wil}$ -Variation

In Analogie zum $\mathcal{L}_f$ -Term kann man dann schließen, daß

³ $\mathcal{D}_{\mu}$ genügt der Leibniz-Regel.

$$\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) = -\frac{r}{a} \frac{i}{g} \sum_{\mu, \rho, \tau} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1: Diamond with } \bar{\varepsilon} \sigma_{\rho\tau} \text{ connected to a circle} \\ \text{Diagram 2: Diamond with } \bar{\varepsilon} \sigma_{\rho\tau} \text{ and a circle side-by-side} \\ \text{Diagram 3: Circle connected to a diamond with } \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \\ \text{Diagram 4: Circle and diamond with } \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \text{ side-by-side} \end{array} \right) \quad (2.102)$$

(2.102) bedeutet algebraisch

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_{f, Wil}(x) &= -r \frac{i}{g} \sum_{\mu, \rho, \tau} \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat, f} \lambda(x)) \right. \\ &\quad \left. - \bar{\lambda}(x) \sigma_{\rho\tau} (\mathcal{D}_\mu^{lat, f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon \right\}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

was wiederum nichts anderes ist als

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_{f, Wil}(x) &= r \frac{i}{g} \sum_{\mu, \rho, \tau} \text{Tr} \left\{ (\mathcal{D}_\mu^{lat, f} \bar{\lambda}(x)) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \varepsilon \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda}(x) \sigma_{\rho\tau} (\mathcal{D}_\mu^{lat, f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon \right\}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Mit Hilfe der Leibniz-Regel auf dem Gitter ergibt dies

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_{f, Wil}(x) &= r \frac{i}{g} \sum_{\mu, \rho, \tau} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat, f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ &\quad + r a \frac{i}{g} \sum_{\mu, \rho, \tau} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Dieser Term läßt sich bis auf Störungen der Ordnung a als totale Divergenz schreiben und trägt somit zur Variation der Wirkung in niedrigster Ordnung von a nicht bei. Dies ist auch nicht anders zu erwarten, da die Einführung der Wilsonschen Formulierung der Gluinos die Wirkung ja erst in Ordnung a beeinflusst. In späteren Kapiteln werde ich diesen Teil der Lagrange-Dichte so wählen, daß die Variation schon auf der Ebene der Lagrange-Dichte erst in Ordnung a und höher beiträgt. Man benötigt dann bei der Analyse in erster Ordnung von a keinen r -proportionalen Anteil im Superstrom. Ich werde nun noch explizit zeigen, daß auch $\delta_U \mathcal{L}_{f, Wil}$ Störungen in Ordnung a verursacht.

2.6.2 $\delta_U \mathcal{L}_{f, Wil}$ -Variation

Man erhält:

$$\delta_U \mathcal{L}_{f, Wil}(x) = \sum_\mu$$

$$2rg \quad \text{---} \quad 2rg \quad \text{---} \quad (2.106)$$

Algebraisch sieht dieser Term wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 \delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}(x) &= 2gr \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \bar{\lambda}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right\} \\
 &\quad - 2gr \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right\} \\
 &= -2gr \text{Tr} \left\{ [\bar{\lambda}(x), \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x)] U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right\} \\
 &= -2gr \text{Tr} \left\{ U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\}. \quad (2.107)
 \end{aligned}$$

Die Entwicklung nach Potenzen von a liefert

$$\delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}(x) = -2gr \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\} + a \mathcal{R}^{F,Wil}(x) + \mathcal{O}(a^2). \quad (2.108)$$

Dabei ist⁴

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}^{F,Wil}(x) &= -2gr \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \left([A_\mu(x), \bar{\lambda}(x)] + \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \right) [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\} \\
 &= -2gr \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x) [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\}. \quad (2.109)
 \end{aligned}$$

Man erkennt auch hier, daß $\delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}(x)$ in nullter Ordnung von a verschwindet. Dies liegt natürlich daran, daß die Einführung der Wilson-Fermionen erst in erster Ordnung von a zur Wirkung beiträgt. Explizit berechnet man

$$\text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\} = \frac{1}{2} i f_{abc} \bar{\lambda}^c(x) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \varepsilon \lambda^b(x) \quad (2.110)$$

und erkennt dann, da $\bar{\lambda}^a \gamma_\mu \varepsilon$ ein Skalar (in den Spinorindizes) ist, das Folgende:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\} &= \frac{1}{2} i f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \varepsilon \bar{\lambda}^c(x) \lambda^b(x) \\
 &\stackrel{(C.7)}{=} \frac{1}{2} i f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \varepsilon \bar{\lambda}^b(x) \lambda^c(x) \\
 &= \frac{1}{2} i f_{acb} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \varepsilon \bar{\lambda}^c(x) \lambda^b(x) \\
 &= -\frac{1}{2} i f_{abc} \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \varepsilon \bar{\lambda}^c(x) \lambda^b(x) \\
 &= -\frac{1}{2} i f_{abc} \bar{\lambda}^c(x) \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \varepsilon \lambda^b(x) \\
 &= -\text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\}. \quad (2.111)
 \end{aligned}$$

⁴In Analogie zum Fierz-Rest bei der Variation des r -unabhängigen Teils der Fermion-Lagrange-Dichte gebe ich diesem Term den oberen Index F.

Das zweite Gleichheitszeichen gilt, da λ ein Majorana-Spinor ist. Somit verschwindet der Term.

2.7 Gesamte Variation und Superstrom

Die Variation der Eichfeldwirkung war durch

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_g(x) &= -\frac{4}{g}\text{Tr}\left\{\bar{\lambda}(x)\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x)\right\}\gamma_\nu\varepsilon \\ &\quad +\frac{4}{g}\text{Tr}\left\{\mathcal{D}_\mu^{lat,f}(\bar{\lambda}(x)\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x))\right\}\gamma_\nu\varepsilon \\ &\quad +a\frac{4}{g}\sum_{\mu,\nu}\text{Tr}\left\{\mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x),F_{\mu\nu}(x))\right\}\gamma_\nu\varepsilon \\ &\quad +\mathcal{O}(a^2)\end{aligned}\tag{2.112}$$

gegeben, vgl. (2.71). Zusammen mit der Variation des fermionischen Teils der Lagrange-Dichte (s. (2.97)) ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{L}_f(x) + \mathcal{L}_g(x)) &= \frac{4}{g}\text{Tr}\left\{\bar{\lambda}(x)(\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\mathcal{G}_{\mu\nu}(x))\gamma_\nu\varepsilon\right\} \\ &\quad -\frac{4}{g}\text{Tr}\left\{\bar{\lambda}(x)\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x)\right\}\gamma_\nu\varepsilon \\ &\quad +\frac{i}{g}\text{Tr}\left\{\mathcal{D}_\mu^{lat,f}(\bar{\lambda}(x)\mathcal{G}_{\rho\tau}(x))\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau}\varepsilon\right\} \\ &\quad +\frac{4}{g}\text{Tr}\left\{\mathcal{D}_\mu^{lat,f}(\bar{\lambda}(x)\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x))\right\}\gamma_\nu\varepsilon \\ &\quad -a\frac{2}{g}\text{Tr}\left\{\bar{\lambda}(x)(\mathcal{D}_\mu\mathcal{R}_{\rho\tau}^G(x))\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}\gamma_\nu\gamma_5\varepsilon\right\} \\ &\quad -a\frac{2}{g}\text{Tr}\left\{\bar{\lambda}(x)\mathcal{R}_\mu^D(F_{\rho\tau}(x))\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}\gamma_\nu\gamma_5\varepsilon\right\} \\ &\quad +a\frac{i}{g}\text{Tr}\left\{\mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x),\mathcal{G}_{\rho\tau}(x))\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau}\varepsilon\right\} \\ &\quad +a\mathcal{R}^F(x) \\ &\quad +a\frac{4}{g}\sum_{\mu,\nu}\text{Tr}\left\{\mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x),F_{\mu\nu}(x))\right\}\gamma_\nu\varepsilon \\ &\quad +\mathcal{O}(a^2).\end{aligned}\tag{2.113}$$

Man erkennt, daß sich bei der Wahl $\mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{G}_{\mu\nu}^0$ die ersten beiden Terme gegeneinander aufheben, wie dies auch im Kontinuum der Fall ist. Insbesondere ist dann eine Kopplung der Variationen des fermionischen Teils und des Eichanteils der Wirkung gegeben, die wohl entscheidend für die möglichst gute Erhaltung des Superstroms ist. Man erkennt auch, daß genau die Terme Nummer 3 und 4 einen Beitrag zum Superstrom in nullter Ordnung von a liefern. Es sei dazu daran erinnert, daß wir im Kontinuum Spuren kovarianter Ableitungen aufgrund des Verschwindens des Kommutatorters bei Spurbildung als totale Divergenz schreiben konnten. Um nun den Superstrom auf dem Gitter zu ermitteln, stellen

wir zunächst fest, daß $\mathcal{D}_\mu^{lat,f} = \Delta_\mu^f + [A_\mu, \cdot] + \mathcal{O}(a)$ gilt, was wir ausnutzen wollen, um den dritten und vierten Term als Gitter-Vorwärts-Divergenz zu schreiben. Genauer gilt mit einem geeigneten Restterm $\tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}}$ (s.u.)

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat,f} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\
&= \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \left(\Delta_\mu^f (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) + [A_\mu(x), \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)] + a \tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \right) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\
&\quad + \mathcal{O}(a^2) \\
&= \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \left(\Delta_\mu^f (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) + a \tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}} (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \right) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\
&\quad + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Der Rest $\tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}}$ schreibt sich dabei als⁵

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}} (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) &= \frac{1}{2} A_\mu(x) A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) + \frac{1}{2} \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) A_\mu(x) \\
&\quad - A_\mu(x) \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) A_\mu(x) + [A_\mu(x), \partial_\mu (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x))].
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Entsprechend hat man auch

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x)) \right\} \gamma_\nu \varepsilon \\
&= \frac{4}{g} \sum_{\mu,\nu} \text{Tr} \left\{ \left(\Delta_\mu^f (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x)) + [A_\mu(x), \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x)] + a \tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}} (\bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x)) \right) \gamma_\nu \varepsilon \right\} \\
&\quad + \mathcal{O}(a^2) \\
&= \frac{4}{g} \sum_{\mu,\nu} \text{Tr} \left\{ \left(\Delta_\mu^f (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x)) + a \tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}} (\bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x)) \right) \gamma_\nu \varepsilon \right\} + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Diese Resultate zeigen, daß es Sinn macht, den Gitter-Superstrom wie folgt zu definieren:

$$\begin{aligned}
\overline{j}_\mu^{lat}(x) &= \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \right\} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \\
&\quad + \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \right\} \gamma_\nu.
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Man bekommt dann

$$\begin{aligned}
\delta(\mathcal{L}_f(x) + \mathcal{L}_g(x)) &= \Delta_\mu^f \overline{j}_\mu^{lat}(x) \varepsilon \\
&\quad + a \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu (\mathcal{R}_{\mu\nu}^g(x) - \mathcal{R}_{\mu\nu}^{g^0}(x))) \gamma_\nu \varepsilon \right\} \\
&\quad + a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}} (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\
&\quad + a \frac{4}{g} \sum_{\mu,\nu} \text{Tr} \left\{ \tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}} (\bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x)) \right\} \gamma_\nu \varepsilon
\end{aligned}$$

⁵ Unter der Spur ergibt der letzte Summand keinen Beitrag.

$$\begin{aligned}
& -a \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\} \\
& -a \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(F_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\} \\
& +a \frac{4}{g} \sum_{\mu,\nu} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\mu\nu}(x)) \right\} \gamma_\nu \varepsilon \\
& +a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\
& +a \mathcal{R}^F(x) + \mathcal{O}(a^2). \tag{2.118}
\end{aligned}$$

Es treten also in Ordnung a die folgenden SUSY-brechenden Terme auf:

- $a \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu (\mathcal{R}_{\mu\nu}^{\mathcal{G}}(x) - \mathcal{R}_{\mu\nu}^{\mathcal{G}^0}(x))) \gamma_\nu \varepsilon \right\}$
Dieser Term entsteht bei nicht optimaler Anpassung der Variationen der fermionischen und der Eichfeldwirkung. Durch die Wahl $\mathcal{G}_{\rho\tau} = \mathcal{G}_{\rho\tau}^0$ in den Transformationsregeln der Fermionen kann dieser Term zum Verschwinden gebracht werden.
- $a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}}(\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\}$
Dieser Term entsteht bei der Einführung des Superstroms aufgrund der Tatsache, daß $\mathcal{D}_\mu^{lat,f} = \Delta_\mu^f + [A_\mu, \cdot] + a \tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}}$
- $a \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}}(\bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x)) \right\} \gamma_\nu \varepsilon + \mathcal{O}(a^2)$.
Dieser Term entsteht aus dem gleichen Grund wie der vorige, allerdings stammt er aus der Variation des Eichfeldanteils der Lagrange- Dichte.
- $-a \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\}$
Bei der δ_λ -Variation der Fermion-Wirkung treten Terme der Form $\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau} \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}$ auf. Der Rest-Term resultiert aus der auf dem Gitter nicht exakt gültigen Bianchi-Identität.
- $-a \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(F_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\}$
Dieser Beitrag hat den gleichen Ursprung wie der Term zuvor.
- $a \frac{4}{g} \sum_{\mu,\nu} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\mu\nu}(x)) \right\} \gamma_\nu \varepsilon$
Bei der Variation der Eichfeldwirkung wird ein Term der Form $(\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0$ nach $\mathcal{D}_\mu^{lat,f}(\bar{\lambda} \mathcal{G}_{\mu\nu}^0)$ überführt, um aus letzterem eine totale Divergenz zu gewinnen. Die dabei benutzte Leibniz-Regel produziert auf dem Gitter einen Rest-Term.
- $a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\}$
Dieser Term entsteht analog zum vorhergehenden Ausdruck. Er stammt jedoch aus der Variation der Fermion-Wirkung.
- $a \mathcal{R}^F(x)$
Im Kontinuum verschwinden die $\delta_U \mathcal{L}_f$ -Terme („ $\lambda\lambda\lambda$ -Terme“) aufgrund einer Fierz-Identität vollständig. Auf dem Gitter bleibt ein Term in Ordnung a .

Die Rest-Terme haben dabei folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}}(\bar{\lambda}(x)F(x)) &= \frac{1}{2}A_\mu(x)A_\mu(x)\bar{\lambda}(x)F(x) + \frac{1}{2}\bar{\lambda}(x)F(x)A_\mu(x)A_\mu(x) \\ &\quad + [A_\mu, \partial_\mu(\bar{\lambda}(x)F(x))] - A_\mu(x)\bar{\lambda}(x)F(x)A_\mu(x)\end{aligned}\quad (2.119)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}}(F_{\rho\tau}(x)) &= \frac{1}{2}(A_\mu(x)A_\mu(x)F_{\rho\tau}(x) + F_{\rho\tau}(x)A_\mu(x)A_\mu(x) + \partial_\mu\partial_\mu F_{\rho\tau}(x)) \\ &\quad - A_\mu(x)F_{\rho\tau}(x)A_\mu(x) + [A_\mu(x), \partial_\mu F_{\rho\tau}(x)].\end{aligned}\quad (2.120)$$

Das Aussehen des Terms $\mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}$ hängt von der konkreten Wahl von $\mathcal{G}$ ab. Ist $\mathcal{G}_{\rho\tau} = \mathcal{G}_{\rho\tau}^0$ so ziehe man (2.42)

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) &= F_{\mu\nu}(x) \\ &\quad - a\left([\partial_\mu A_\nu(x), A_\mu(x)] - [\partial_\nu A_\mu(x), A_\nu(x)]\right. \\ &\quad - \frac{1}{2}[\partial_\nu A_\mu(x), A_\mu(x)] + \frac{1}{2}[\partial_\mu A_\nu(x), A_\nu(x)] \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\mu A_\nu(x) + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\nu A_\mu(x) \\ &\quad + \frac{1}{2}[A_\nu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]] \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}[A_\mu(x), [A_\nu(x), A_\mu(x)]]\right) \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2)\end{aligned}\quad (2.121)$$

heran.

Der Leibniz-Rest $\mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}, F_{\rho\tau})$ lautet (vgl. (2.46)):

$$\begin{aligned}&\left(\bar{\lambda}(x)A_\mu(x)^2 F_{\rho\tau}(x)\right. \\ &\quad + A_\mu(x)\bar{\lambda}(x)F_{\rho\tau}(x)A_\mu(x) - A_\mu(x)\bar{\lambda}(x)A_\mu(x)F_{\rho\tau}(x) - \bar{\lambda}(x)A_\mu(x)F_{\rho\tau}(x)A_\mu(x) \\ &\quad + \partial_\mu\bar{\lambda}(x)[F_{\rho\tau}(x), A_\mu(x)] + [\bar{\lambda}(x), A_\mu(x)]\partial_\mu F_{\rho\tau}(x) \\ &\quad \left. - \partial_\mu(x)\bar{\lambda}(x)\partial_\mu F_{\rho\tau}(x)\right).\end{aligned}\quad (2.122)$$

Außerdem hat man noch den Fierz-Rest

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^F(x) &= -2g\text{Tr}\left\{\left([A_\mu(x), \bar{\lambda}(x)] + \partial_\mu\bar{\lambda}(x)\right)\gamma_\mu[\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu\varepsilon, \lambda(x)]\right\} \\ &= -2g\text{Tr}\left\{(\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}(x))\gamma_\mu[\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu\varepsilon, \lambda(x)]\right\}.\end{aligned}\quad (2.123)$$

Es ist nun als letztes noch die Variation des Wilson-Anteils der Fermion-Wirkung mit zu berücksichtigen. Wir hatten in (2.105) bzw. (2.108) gesehen, daß

$$\begin{aligned}\delta_\lambda\mathcal{L}_{f,Wil}(x) &= r\frac{i}{g}\sum_{\mu,\rho,\tau}\text{Tr}\left\{\mathcal{D}_\mu^{t\text{at},f}(\bar{\lambda}(x)\mathcal{G}_{\rho\tau}(x))\sigma_{\rho\tau}\varepsilon\right\} \\ &\quad + ra\frac{i}{g}\sum_{\mu,\rho,\tau}\text{Tr}\left\{\mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x))\sigma_{\rho\tau}\varepsilon\right\} \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2)\end{aligned}\quad (2.124)$$

bzw.

$$\delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}(x) = 0 + a \mathcal{R}^{F,Wil}(x) + \mathcal{O}(a^2) \quad (2.125)$$

ist. Den ersten Beitrag schreiben wir als

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_{f,Wil}(x) = & \sum_{\mu,\rho,\tau} \left(r \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \Delta_\mu^f(\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \right. \\ & + r a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}}(\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ & \left. + r a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \right) \\ & + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Somit läßt sich der Superstrom $\overline{j}_\mu^{lat}(x)$ durch einen zusätzlichen Beitrag

$$r \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \right\} \quad (2.127)$$

verbessern. Man erhält dann die folgenden r -abhängigen Störterme in erster Ordnung von a :

$$\begin{aligned} a \mathcal{R}^{F,Wil}(x) &= -2agr \text{Tr} \left\{ \left([A_\mu(x), \bar{\lambda}(x)] + \partial_\mu \bar{\lambda}(x) \right) [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\} \\ &= -2agr \text{Tr} \left\{ (\mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x)) [\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \varepsilon, \lambda(x)] \right\} \end{aligned} \quad (2.128)$$

und

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu,\rho,\tau} \left(r a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \tilde{\mathcal{R}}_\mu^{\mathcal{D}}(\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \right. \\ & \left. + r a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{R}_\mu^L(\bar{\lambda}(x), F_{\rho\tau}(x)) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \right). \end{aligned} \quad (2.129)$$

Der in dieser Weise verbesserte Superstrom auf dem Gitter lautet dann:

$$\begin{aligned} \overline{j}_\mu^{lat}(x) &= \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \right\} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \\ &+ \frac{4}{g} T r \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \right\} \gamma_\nu \\ &+ r \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Im Fall von $\mathcal{G}_{\mu\nu} = \mathcal{G}_{\mu\nu}^0$ kann dies analog zu den Schritten in Kapitel 1.4.4 zu

$$\begin{aligned} \overline{j}_\mu^{lat}(x) &= \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \right\} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \\ &+ r \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \right\} \end{aligned} \quad (2.131)$$

vereinfacht werden. Man kann dann schreiben:

$$j_\mu^{lat}(x) = \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) (\gamma_\mu - r) \sigma_{\rho\tau} \lambda(x) \right\}, \quad (2.132)$$

was sozusagen die lokale Form von [Lu], Formel (3.123) ist.

Kapitel 3

Konstruktion $\mathcal{O}(a)$ -verbesserter SUSY-Transformationen

In diesem Kapitel diskutiere ich eine erweiterte Version der diskretisierten supersymmetrischen Transformationen, und zeige, daß sie es erlaubt, die im letzten Kapitel identifizierten Störungen der Ordnung a , die nicht aus der Wilsonschen Formulierung der Fermionen resultieren, in höhere Ordnungen zu verschieben. Insbesondere werden dabei die Gitter-Analoga der Transformationen, der Lagrange-Dichte, des Feldstärketensors und des Superstromes mit dem Ziel symmetrisiert, sie besser an das Kontinuum anzupassen. Bei der dazu notwendigen Entwicklung der Plaquettenvariablen nach a kann unter anderem auch die Nicht-Abelsche Stokes-Formel verwendet werden, die im Anhang formuliert und bewiesen wird. Im Zuge der Rechnung diskutiere ich den Zusammenhang der Gittergrößen mit denen des Kontinuums. Nach Einführung der symmetrisierten Größen und explizitem Nachweis der gewünschten Eigenschaften schlage ich gegen Ende des Kapitels eine nicht-lokale Version des Supersymmetrie-Stroms vor und zeige, daß hierdurch weitere Störungen höherer Ordnungen eliminiert werden können.

3.1 Vorgehensweise

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß bei einer naiven Wahl der diskretisierten SUSY-Transformationen und bei Verwendung der Lagrange-Dichte aus [Lu] eine Brechung der Supersymmetrie auf dem Gitter bereits in erster Ordnung der Gitterkonstanten a auftritt. In diesem Kapitel werden diese Störungen durch geeignete Wahl der SUSY-Transformationen soweit eliminiert, daß sie jedenfalls in den r -unabhängigen Termen erst quadratisch in a auftreten, wir werden also $\delta\mathcal{L}^{lat}(x) = \bar{\varepsilon}\Delta_\mu j_\mu^{lat}(x) + \mathcal{O}(a^2) + r\mathcal{O}(a)$ erreichen. Dabei haben wir folgende Freiheiten:

- Wir dürfen die Zuordnung der Summanden in der Gitterwirkung zu einzelnen Gitterpunkten geeignet modifizieren, um von einer für unsere Zwecke günstigen Lagrange-Dichte ausgehen zu können. Konkret bedeutet dies, daß wir eine symmetrisierte Lagrange-Dichte wählen werden. An der Wirkung ändert sich dabei nichts.

- Wir dürfen die Transformationen der Eichlinks verändern, solange sie den richtigen Kontinuumslikes für die Transformationen des Kontinuumsseichfeldes $A_\mu(x)$ ergeben.
- Die Definition von $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)$ in den Transformationen der Gluinofelder ist nur durch folgende Bedingung eingeschränkt: $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)$ soll im Kontinuumslikes $F_{\rho\tau}(x)$ reproduzieren. Ansonsten haben wir bei der Wahl von $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)$ freie Hand.

Insgesamt besteht die Strategie darin, möglichst alle Gittergrößen so zu definieren, daß sie von ihren Partnern im Kontinuum erst in Ordnung a^2 abweichen. Beginnen möchte ich mit der kovarianten Ableitung.

3.2 Symmetrische kovariante Ableitung auf dem Gitter

3.2.1 Definition

Bisher haben wir eine recht einfache Gitter-Version $\mathcal{D}_\mu^{lat,f}$ der kovarianten Ableitung verwendet. Sie hatte die Gestalt

$$\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) = \frac{1}{a} \left[\text{x} \text{---} \bigcirc \quad - \quad \text{x} \bigcirc \right]. \quad (3.1)$$

Algebraisch gilt also

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^{lat} \lambda(x) &= \frac{1}{a} \left(U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x) \right) \\ &= \partial_\mu \lambda(x) + [A_\mu(x), \lambda(x)] \\ &\quad + a \left([A_\mu(x), \partial_\mu \lambda(x)] - A_\mu(x) \lambda(x) A_\mu(x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (A_\mu(x) A_\mu(x) \lambda(x) + \lambda(x) A_\mu(x) A_\mu(x) \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu \partial_\mu \lambda(x)) \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2) \\ &= \mathcal{D}_\mu \lambda(x) + \frac{a}{2} (\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x) + [\lambda(x), \mathcal{D}_\mu A_\mu(x)]) + \mathcal{O}(a^2) \\ &= \mathcal{D}_\mu \lambda(x) + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dabei wurden die Eichlinks $U_\mu(x)$ wie folgt mit dem Eichfeld $A_\mu(x)$ des Kontinuums verknüpft:

$$U_\mu(x) = e^{-aA_\mu(x)} \quad U_\mu^\dagger(x) = e^{aA_\mu(x)}. \quad (3.3)$$

Dies ist insofern eine ungünstige Wahl der Gitter-Version der kovarianten Ableitung, als daß sie schon in erster Ordnung von a von ihrem Kontinuums-Pendant abweicht. Letzteres hat zur Folge, daß die Leibniz-Regel und die Bianchi-Identität auf dem Gitter bereits in Ordnung a verletzt sind und verursacht somit einen großen Teil der in erster Ordnung SUSY-brechenden Terme. Wünschenswert ist also eine Definition von $\mathcal{D}_\mu^{lat}$, so daß $\mathcal{D}_\mu^{lat} \lambda(x) = \mathcal{D}_\mu \lambda(x) + \mathcal{O}(a^2)$. Eine solche wird im folgenden vorgestellt.

Dazu beobachtet man, daß die bisher verwendete Version eine vorwärts gerichtete kovariante Ableitung darstellt, denn es sind nur die Gitterpunkte x und $x + a\hat{\mu}$ involviert. Man möchte also eine um x symmetrische Form wählen, und ich schlage daher vor, stattdessen

$$\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x) = \frac{1}{2a} \left(U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \right) \quad (3.4)$$

zu verwenden. Bei der Entwicklung dieser symmetrisierten Form nach a stellt man aber unter Benutzung von (3.3) fest, daß sie in Ordnung a immer noch von der Kontinuums-Ableitung abweicht. Es treten zwar keine Terme mehr in $A_\mu(x)$ auf, wohl aber noch Terme in $\partial_\mu A_\mu(x)$. Dies liegt an einer Asymmetrie in (3.3), denn mit dem link von x nach $x + a\hat{\mu}$ wird das Eichfeld A_μ an der Stelle x assoziiert. Explizit bedeutet das

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x) &= \partial_\mu \lambda(x) + [A_\mu(x), \lambda(x)] \\ &\quad - \frac{a}{2} [\partial_\mu A_\mu(x), \lambda(x)] + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Abhilfe schafft hier eine symmetrisierte Definition des Eichfeldes, und wir gehen zu

$$U_\mu(x) = \mathcal{P} e^{-\int_x^{x+a\hat{\mu}} dz A_\mu(z)} \quad (3.6)$$

über¹, wobei $\mathcal{P}$ den Pfadordnungsoperator darstellt. Dies gewährleistet, daß der Gitter-Paralleltransporter entlang eines links auf das Kontinuumseichfeld entlang der vollständigen Kante zugreift und nicht nur auf das Feld an einem der Randpunkte. Damit wird

$$\begin{aligned} U_\mu(x) &= 1 - \int_x^{x+a\hat{\mu}} dz A_\mu(z) + \frac{1}{2} \mathcal{P} \int_x^{x+a\hat{\mu}} dy \int_x^{x+a\hat{\mu}} dz A_\mu(y) A_\mu(z) \\ &\quad + \mathcal{O}(a^3) \\ &= 1 - a \int_0^1 (A_\mu(x) + at \partial_\mu A_\mu(x)) dt \\ &\quad + \frac{1}{2} a^2 \mathcal{P} \int_0^1 dt \int_0^1 ds (A_\mu(x) A_\mu(x)) + \mathcal{O}(a^3) \\ &= 1 - a A_\mu(x) - \frac{1}{2} a^2 \partial_\mu A_\mu(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} a^2 A_\mu(x) A_\mu(x) \cdot 2 \int_0^1 dt \int_t^1 ds + \mathcal{O}(a^3) \\ &= 1 - a A_\mu(x) - \frac{1}{2} a^2 \partial_\mu A_\mu(x) + \frac{1}{2} a^2 A_\mu(x) A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^3). \end{aligned} \quad (3.7)$$

¹Eine andere mögliche symmetrische Verknüpfung ist durch $U_\mu(x) = e^{-a A_\mu(x + \frac{a\hat{\mu}}{2})}$ gegeben.

Durch analoge Rechnungen findet man

$$\begin{aligned}
U_\mu(x) &= 1 - aA_\mu(x) - \frac{1}{2}a^2\partial_\mu A_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2 A_\mu(x)A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^3) \\
U_\mu^\dagger(x) &= 1 + aA_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2\partial_\mu A_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2 A_\mu(x)A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^3) \\
U_\mu(x - a\hat{\mu}) &= 1 - aA_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2\partial_\mu A_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2 A_\mu(x)A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^3) \\
U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) &= 1 + aA_\mu(x) - \frac{1}{2}a^2\partial_\mu A_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2 A_\mu(x)A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^3)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

und erkennt

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu^{lat,sym} \lambda(x) &= \frac{1}{2a} \left(U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \right) \\
&= \frac{1}{2a} \left\{ 0 + a \left([A_\mu(x), \lambda(x)] + \partial_\mu \lambda(x) \right) - a \left([-A_\mu(x), \lambda(x)] - \partial_\mu \lambda(x) \right) \right. \\
&\quad + a^2 \left(\frac{1}{2} [\partial_\mu A_\mu(x), \lambda(x)] + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu \lambda(x) + \frac{1}{2} A_\mu(x) A_\mu(x) \lambda(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \lambda(x) A_\mu(x) A_\mu(x) - A_\mu(x) \lambda(x) A_\mu(x) \right) \\
&\quad \left. - a^2 \left(\frac{1}{2} [\partial_\mu A_\mu(x), \lambda(x)] + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu \lambda(x) + \frac{1}{2} A_\mu(x) A_\mu(x) \lambda(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \lambda(x) A_\mu(x) A_\mu(x) - A_\mu(x) \lambda(x) A_\mu(x) \right) \right\} \\
&\quad + \mathcal{O}(a^2) \\
&= \mathcal{D}_\mu \lambda(x) + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Somit kommt $\mathcal{D}_\mu^{lat,sym}$ der kovarianten Ableitung im Kontinuum viel näher als die bisher betrachtete Version $\mathcal{D}_\mu^{lat,f}$. Insbesondere erfüllt sie die Bianchi-Identität und die Leibniz-Regel besser, wie wir nun nachrechnen wollen. Dazu verwende ich die Notation $\mathcal{D}_\mu^{lat,sym} = \mathcal{D}_\mu + a^2 \mathcal{R}_\mu^{lat,sym}$.

3.2.2 Leibniz-Regel und Bianchi-Identität

Wir behaupten nun, daß diese symmetrisierte Form der kovarianten Gitter-Ableitung auch die Leibniz-Regel und die Bianchi-Identität des Feldstärketensors bis zur Ordnung a einschließlich respektiert. Dabei wollen wir davon ausgehen, daß auch die diskretisierte Form $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)$ des Feldstärketensors so definiert werden kann, daß sie bis auf Terme der Ordnung a^2 mit dem Kontinuumstensor übereinstimmt, daß also $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) = F_{\rho\tau}(x) + a^2 \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)$ gilt. In diesem Fall erhalten wir für die Leibniz-Regel:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu^{lat,sym} (\lambda(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) &= \mathcal{D}_\mu (\lambda(x) F_{\rho\tau}(x)) \\
&\quad + a^2 \mathcal{D}_\mu (\lambda(x) \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) + a^2 \mathcal{R}_\mu^{lat,sym} (\lambda(x) F_{\rho\tau}(x)) \\
&= \mathcal{D}_\mu (\lambda(x) F_{\rho\tau}(x)) + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathcal{D}_\mu \lambda(x)) F_{\rho\tau}(x) + \lambda(x) (\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x)) + \mathcal{O}(a^2) \\
&= (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x)) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) + \lambda(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Wir benutzen hierbei natürlich die Leibniz-Regel für das Kontinuum. Eine einfache präzisere Betrachtung zeigt übrigens, daß

$$\mathcal{D}_\mu^{lat, sym}(\lambda(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) = (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x)) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) + \lambda(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) + \mathcal{O}(a^2) \tag{3.11}$$

auch gilt, falls $\mathcal{G}$ F nur in niedrigster Ordnung approximiert.

Auf die gleiche Art und Weise erhält man auch die Bianchi-Identität in der Form

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} &= \mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \\
&\quad + a^2 \mathcal{D}_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} + a^2 \mathcal{R}_\mu^{\mathcal{D}_\mu^{lat, sym}}(F_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \\
&= \mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} + \mathcal{O}(a^2) \\
&= 0 + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Die Bedingung $\mathcal{G}_{\rho\tau} = F_{\rho\tau} + \mathcal{O}(a^2)$ ist hier allerdings wichtig. Das letzte Gleichheitszeichen ist natürlich die Bianchi-Identität im Kontinuum.

3.3 Der Zusammenhang von Gitter und Kontinuum

Diese Stelle scheint günstig, kurz über den Zusammenhang der Felder auf dem Gitter mit denen des Kontinuums nachzudenken. Wir sind in allen bisherigen Rechnungen stillschweigend davon ausgegangen, daß das Gitter im Sinn von $\Lambda \subset \mathbb{R}^4$ in das Kontinuum eingebettet ist. Beispielsweise haben wir vorausgesetzt, daß die Fermionfelder $\lambda(x)$ an Gitterpunkten $x \in \Lambda$ identisch mit denen des Kontinuums an der Stelle x sind, so daß wir bei Betrachtung des Kontinuumslikes daher auf die Kontinuumskonfiguration zugreifen können. Ansonsten machten Entwicklungen wie

$$\lambda(x + a\hat{\mu}) = \lambda(x) + a\partial_\mu \lambda(x) + \dots \tag{3.13}$$

keinen Sinn, da eine kontinuierliche Ableitung ∂_μ für vom Kontinuum gelöste Felder ohne Bedeutung ist.

Bei den Eichfeldern verhält es sich geringfügig anders, denn wie gesehen, machen auf dem Gitter Paralleltransporte nur entlang von Kanten Sinn. Auch hier greift aber der erklärte Transporter $U_\mu(x)$ auf das latente Kontinuumsfeld $A_\mu(z)$, $z \in [x, x + a\hat{\mu}]$ zurück. Ob dies in asymmetrischer Weise $U_\mu(x) = e^{-aA_\mu(x)}$ oder symmetrisch geschieht ($U_\mu(x) = \mathcal{P}e^{-\int_x^{x+a\hat{\mu}} dz A_\mu(z)}$), ist dabei Konvention.

Zusammenfassend können wir also sagen, daß wir bei der Formulierung einer Gitterwirkung und der supersymmetrischen Transformationen von einer Kontinuumstheorie mit Feldern A_μ^{cont} und λ^{cont} im Hintergrund ausgehen. Bei der Formulierung der Gluinos auf dem Gitter verwenden wir die Kontinuumsfelder an den Gitterpunkten und setzen $\lambda^{lat}(x) \equiv \lambda^{cont}(x)$ für $x \in \Lambda \subset \mathbb{R}^4$. Das Eichfeld wird auf dem Gitter durch die Kollektion der $U_\mu(x)$ repräsentiert, deren Definition wiederum in geeigneter Weise auf das Kontinuumseichfeld A_μ^{cont} Bezug nimmt.

3.4 Entwicklung der Plaquettenvariable

Für spätere Zwecke ist es vorteilhaft, an dieser Stelle die Plaquettenvariable $U_{\mu\nu}(x)$ bis zur Ordnung a^3 nach der Gitterkonstanten zu entwickeln. Wir werden später eine Gitterversion $\mathcal{G}_{\mu\nu}(x)$ des Kontinuumsfeldstärketensors so konstruieren wollen, daß Abweichungen vom Kontinuumstensor erst in Ordnung a^2 auftreten. $\mathcal{G}$ wird dabei eine Kombination von Plaquetten sein, die mit dem Vorfaktor $\frac{1}{a^2}$ versehen sein wird, daher die Entwicklung bis zur dritten Ordnung. Ich verwende zur Durchführung der Entwicklung ein in [GPGASB] vorgestelltes Verfahren.

Es ist nun

$$U_{\mu\nu}(x) = U_\nu^\dagger(x) U_\mu^\dagger(x + a\hat{\nu}) U_\nu(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x). \quad (3.14)$$

Gemäß [GPGASB] läßt sich dies als

$$U_{\mu\nu}(x) = e^{+aD_\nu(x)} e^{+aD_\mu(x)} e^{-aD_\nu(x)} e^{-aD_\mu(x)} \quad (3.15)$$

schreiben. Dabei ist D_μ die kovariante Ableitung in der Fundamental-Darstellung, also $D_\mu(x) = \partial_\mu + A_\mu(x)$. Es sei an dieser Stelle an die Darstellung des Translationsoperators (um a in $\hat{\mu}$ -Richtung) im Ortsraum $e^{a\partial_\mu}$ erinnert, man kann sich (3.15) gewissermaßen als kovariante Erweiterung vorstellen².

Man beachte, daß in [GPGASB] für die Plaquetten eine andere Konvention verwendet wird als in dieser Arbeit. Daher stimmt (3.15) nicht vollständig mit Formel (10) in [GPGASB] überein, sondern nur modulo Reihenfolge und Vorzeichen der einzelnen Exponenten. Die Entwicklung verwendet natürlich mehrfach die Baker-Campell-Hausdorff-Formel

$$e^F e^G = e^{F+G+\frac{1}{2}[F,G]+\frac{1}{12}[F,[F,G]]+\frac{1}{12}[[F,G],G]+\dots} \quad (3.16)$$

Außerdem werden wir die Tatsachen

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] \quad (3.17)$$

$$\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} = [D_\mu, [D_\mu, D_\nu]] \quad (3.18)$$

benutzen (in der zweiten Formel muß nicht notwendig über μ summiert werden), wobei $\mathcal{D}_\mu$ wie gewohnt die kovariante Ableitung in adjungierter Darstellung ist. Nun ist

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu} &= e^{aD_\nu} e^{aD_\mu} e^{-aD_\nu} e^{-aD_\mu} \\ &= e^{aD_\nu} e^{aD_\mu} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -a(D_\nu + D_\mu) + \frac{1}{2}a^2[D_\nu, D_\mu] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{12}a^3[D_\nu, [D_\nu, D_\mu]] - \frac{1}{12}a^3[[D_\nu, D_\mu], D_\mu] \right\} + \mathcal{O}(a^4) \\ &= e^{aD_\nu} e^{aD_\mu} \end{aligned}$$

² Allerdings gilt nicht $U_\mu = e^{-aD_\mu}$, sondern Beziehungen wie (3.15) sind nur für geschlossene Wege gültig.

$$\begin{aligned}
& \cdot \exp \left\{ -a(D_\nu + D_\mu) - \frac{1}{2}a^2 F_{\mu\nu} + \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} \right\} \\
& + \mathcal{O}(a^4) \\
= & e^{aD_\nu} \exp \left\{ -aD_\nu - \frac{1}{2}a^2 F_{\mu\nu} + \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} \right. \\
& - \frac{1}{2}a^2 [D_\mu, D_\nu] - \frac{1}{4}a^3 [D_\mu, F_{\mu\nu}] - \frac{1}{12}a^3 [D_\mu, [D_\mu, D_\nu]] \\
& \left. + \frac{1}{12}a^3 [[D_\mu, -(D_\nu + D_\mu)], -(D_\nu + D_\mu)] \right\} + \mathcal{O}(a^4) \\
= & e^{aD_\nu} \exp \left\{ -aD_\nu - \frac{1}{2}a^2 F_{\mu\nu} + \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} \right. \\
& - \frac{1}{2}a^2 F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} \\
& \left. + \frac{1}{12}a^3 [[D_\mu, D_\nu], D_\nu] + \frac{1}{12}a^3 [[D_\mu, D_\nu], D_\mu] \right\} + \mathcal{O}(a^4) \\
= & e^{aD_\nu} \exp \left\{ -aD_\nu - a^2 F_{\mu\nu} + \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} \right. \\
& - \frac{1}{4}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu} - \frac{1}{12}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} \left. \right\} + \mathcal{O}(a^4) \\
= & e^{aD_\nu} \exp \left\{ -aD_\nu - a^2 F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} \right\} + \mathcal{O}(a^4) \\
= & \exp \left\{ -a^2 F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu} \right\} + \mathcal{O}(a^4). \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Also gilt

$$U_{\mu\nu}(x) = 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^4). \tag{3.20}$$

Aus diesem Resultat ergibt sich unmittelbar

$$U_{\nu\mu}(x) = 1 + a^2 F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^4), \tag{3.21}$$

denn wir müssen nur μ und ν vertauschen und $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ beachten. Insbesondere erhalten wir das folgende Ergebnis:

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}^0 := -\frac{1}{2a^2} (U_{\mu\nu}(x) - U_{\nu\mu}(x)) = F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^2). \tag{3.22}$$

Nun sind wir im Hinblick auf später auch an den Entwicklungen anderer Plaquetten wie z.B. $U_{-\mu, -\nu}$ interessiert. Dazu überlegt man sich:

$$U_{-\mu, -\nu}(x) = e^{-aD_\nu} e^{-aD_\mu} e^{aD_\nu} e^{aD_\mu} \tag{3.23}$$

und erkennt, daß man im Endergebnis (3.20) jeweils D_μ durch $-D_\mu$ bzw. D_ν durch $-D_\nu$ ersetzen muß (man denke dabei an $\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} = [D_\mu, [D_\mu, D_\nu]]$). Damit bekommt man

$$U_{-\mu,-\nu}(x) = 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^4) \quad (3.24)$$

und deswegen

$$\mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0 := -\frac{1}{2a^2} (U_{-\mu,-\nu}(x) - U_{-\nu,-\mu}(x)) = F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^2). \quad (3.25)$$

Ebenso ergibt sich aus (3.20), daß

$$U_{\nu,-\mu}(x) = 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^4), \quad (3.26)$$

denn ersetze D_μ durch D_ν und D_ν durch $-D_\mu$. Es folgt

$$\mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0 := -\frac{1}{2a^2} (U_{\nu,-\mu}(x) - U_{-\mu,\nu}(x)) = F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^2). \quad (3.27)$$

Man erkennt weiter

$$\mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0 := -\frac{1}{2a^2} (U_{-\nu,\mu}(x) - U_{\mu,-\nu}(x)) = F_{\mu\nu}(x) + a \frac{1}{2} \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) - a \frac{1}{2} \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^2). \quad (3.28)$$

Aus diesen Rechnungen ergibt sich die für uns hochinteressante Beobachtung, daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x)) &= F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^2) \\ \frac{1}{2}(\mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x)) &= F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Unser Resultat läßt sich auch in der folgenden Art und Weise formulieren:

Eine punktsymmetrische Kombination von Plaquetten liefert nur Beiträge in gerader Ordnung von a , beispielsweise gilt

$$U_{\mu,\nu}(x) + U_{-\mu,-\nu}(x) = 2 - a^2 F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^4). \quad (3.30)$$

Das Verschwinden aller ungeraden Ordnungen ergibt sich völlig analog zum obigen Argument für die Ordnung 3 aus der Tatsache, daß beim Übergang von $U_{\mu,\nu}$ zu $U_{-\mu,-\nu}$ die Vorzeichen sämtlicher kovarianter Ableitungen D_μ bzw. D_ν zu ändern sind. Auf dieses allgemeine Ergebnis werden wir später noch zurückgreifen.

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Entwicklung der Plaquettenvariablen auch auf einem zweiten Wege gewonnen werden kann. Die alternative Methode benutzt dabei die sogenannte Nicht-Abelsche Stokes-Formel ([Ar], [GPGASB]), eine Verallgemeinerung des bekannten Stokesschen Satzes, die es erlaubt, die Plaquettenvariable im wesentlichen als Flächenintegral über die Feldstärke zu schreiben. Trotz der Eleganz dieses Verfahrens habe ich die Durchführung in den Anhang verlegt, dort wird auch ein sehr schöner Beweis der Nicht-Abelschen Stokes-Formel vorgeführt.

Beim dritten Gleichheitszeichen werden die Umformungen

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right\} \\
&= \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \lambda^c(x + a\hat{\mu}) \text{Tr} \left\{ T^a U_\mu^\dagger(x) T^c U_\mu(x) \right\} \\
&= -\bar{\lambda}^c(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu \lambda^a(x) \text{Tr} \left\{ T^c U_\mu(x) T^a U_\mu^\dagger(x) \right\} \\
&= -\text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right\}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

unterschlagen. Nach unseren obigen Überlegungen zur symmetrischen kovarianten Ableitung auf dem Gitter ist klar, daß

$$\mathcal{L}_f(x) = \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x) \right\} \tag{3.36}$$

bis auf Terme der Ordnung a^2 mit der fermionischen Lagrange-Dichte des Kontinuums übereinstimmt.

3.5.2 Eichfeldwirkung

Wie bereits mehrfach erwähnt, haben wir bei der Wahl der Lagrange-Dichte eine gewisse Freiheit: Da die Wirkung eine Summe über das gesamte Gitter darstellt, ist die Zuordnung einzelner Summanden zu bestimmten Gitterpunkten beliebig. Es ist uns einzig und allein die Wirkung S vorgegeben, und die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ muß dann der Bedingung

$$S = a^4 \sum_x \mathcal{L}(x) \tag{3.37}$$

genügen. Was den Eichanteil der Wirkung angeht, so wurde in [Lu] die folgende Form verwendet:

$$\mathcal{L}_g(x) = \frac{1}{a^4} \frac{4}{g^2} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\begin{array}{c} \text{Clockwise loop } \mu \rightarrow \nu \\ \text{Counter-clockwise loop } \nu \rightarrow \mu \end{array} \right) \right]. \tag{3.38}$$

Diese Wahl

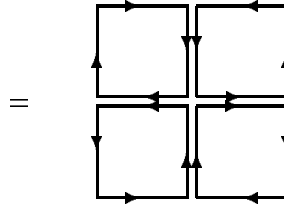
$$\mathcal{L}_g(x) = \frac{1}{a^4} \frac{4}{g^2} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[1 - \frac{1}{4} \text{Tr} (U_{\mu, \nu}(x) + U_{\nu, \mu}(x)) \right] \tag{3.39}$$

zeichnet offenbar die positiven Richtungen $+\hat{\mu}$ und $+\hat{\nu}$ gegenüber den negativen aus, $\mathcal{L}_g(x)$ involviert auch die Punkte $x + a\hat{\mu}$, $x + a\hat{\nu}$ und $x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}$, nicht aber die entsprechenden Punkte in den negativen Richtungen. Eine äquivalente (d.h. zur selben Wirkung führende), aber symmetrische Form der Lagrange-Dichte erhält man beispielsweise unter Verwendung von

$$\mathcal{L}_g(x) = \frac{1}{a^4} \frac{4}{g^2} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[1 - \frac{1}{8} \text{Tr} (U_{\mu, \nu}(x) + U_{-\mu, -\nu}(x) + U_{-\mu, \nu}(x) + U_{\mu, -\nu}(x)) \right]. \tag{3.40}$$

Durch graphische Notation erkennt man, warum dieser Ausdruck Clover-Term genannt wird³ :

$$\text{Tr}(U_{\mu,\nu}(x) + U_{-\mu,-\nu}(x) + U_{-\mu,\nu}(x) + U_{\mu,-\nu}(x))$$

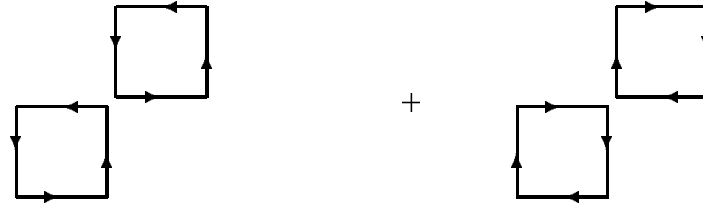


(3.41)

Der Gitterpunkt x befindet sich in der Mitte. Für unsere Rechnung wird es sich aber als günstig erweisen, daß mit jeder Plaquette U , die in der Lagrange-Dichte auftritt, auch ihr Inverses $U^\dagger$ vorkommt. Dies ist bei dem einfachen Clover-Term nicht gegeben, wie man an obigem Bild erkennt. In der folgenden Rechnung wird daher

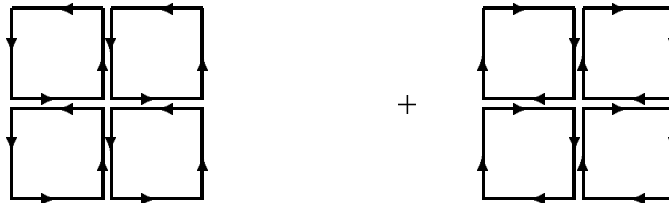
$$\mathcal{L}_g(x) = \frac{1}{a^4} \frac{4}{g^2} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[1 - \frac{1}{8} \text{Tr}(U_{\mu\nu}(x) + U_{-\mu,-\nu}(x) + U_{\nu\mu}(x) + U_{-\nu,-\mu}(x)) \right], \quad (3.42)$$

also die folgende Kombination



(3.43)

benutzt. Beide Wahlen sind aber in der Hinsicht äquivalent, daß sie bei Entwicklung nach a in der ersten Ordnung übereinstimmen. Eine dritte Alternative wäre der vollständig symmetrisierte Term:



(3.44)

Aus unserer obigen Feststellung, daß bei der Taylorentwicklung punktsymmetrischer Plaquetten-Kombinationen nach der Gitterkonstanten a alle ungerade Terme verschwinden, können wir daher folgern, daß bei einer solchen punktsymmetrischen Wahl der Eichfeld-Lagrange-Dichte der Kontinuumslimites bis auf Terme der Ordnung a^2 approximiert wird.

³Die Bezeichnung Clover-Term wird in der Literatur nicht allzu streng gehandhabt, beispielsweise werden auch Terme der Form (3.44) oder auch nur der erste Summand von (3.44) bisweilen als Clover-Plaquette bezeichnet.

3.6 Symmetrisierung der SUSY-Transformationen

Die obigen Betrachtungen zur Entwicklung der Plaquettenvariablen hatten es uns erlaubt, eine Gitterversion des Feldstärketensors anzugeben, die bis auf Störungen der Ordnung a^2 mit dem Kontinuumsensor übereinstimmen. Mögliche Wahlen wären zum Beispiel

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{2}(\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x)) \\ \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{2}(\mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x))\end{aligned}\quad (3.45)$$

oder auch der Mittelwert

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{4}(\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x)). \quad (3.46)$$

Man erkennt dann unmittelbar, daß bei einer solchen symmetrischen Wahl von $\mathcal{G}_{\rho\tau}$ auch die Transformationen der Gluinofelder

$$\delta\lambda(x) = -\frac{i}{g}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)\varepsilon \quad (3.47)$$

$$\delta\bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g}\bar{\varepsilon}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \quad (3.48)$$

bis auf Terme der Ordnung a^2 mit denen des Kontinuums übereinstimmen.

Für die Transformation der Eichlinks schlage ich die in folgender Weise erweiterten Transformationsregeln vor (s.a. [Lu]):

$$\delta\left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ x \end{array}\right) = -ag\left(\begin{array}{c} \textcircled{\bar{\varepsilon}\gamma_\mu} \longrightarrow \\ \textcircled{\bar{\varepsilon}\gamma_\mu} \end{array} + \begin{array}{c} \longrightarrow \textcircled{\bar{\varepsilon}\gamma_\mu} \\ \textcircled{\bar{\varepsilon}\gamma_\mu} \end{array}\right) \quad (3.49)$$

bzw.

$$\delta\left(\begin{array}{c} \longleftarrow \\ x \end{array}\right) = ag\left(\begin{array}{c} \textcircled{\bar{\varepsilon}\gamma_\mu} \longleftarrow \\ \textcircled{\bar{\varepsilon}\gamma_\mu} \end{array} + \begin{array}{c} \longleftarrow \textcircled{\bar{\varepsilon}\gamma_\mu} \\ \textcircled{\bar{\varepsilon}\gamma_\mu} \end{array}\right). \quad (3.50)$$

Algebraisch lauten diese symmetrisierten Transformationen

$$\delta U_\mu(x) = -agU_\mu(x)\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x) - ag\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) \quad (3.51)$$

$$\delta U_\mu^\dagger(x) = +ag\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x)U_\mu^\dagger(x) + agU_\mu^\dagger(x)\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x+a\hat{\mu}). \quad (3.52)$$

Um den Kontinuumsimes zu bestimmen, den diese Transformationen für das Kontinuumsseichfeld A_μ bedeuten, beachtet man einerseits

$$U_\mu(x) = 1 - aA_\mu(x) - \frac{1}{2}a^2\partial_\mu A_\mu(x) + \frac{1}{2}a^2 A_\mu(x)A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^3), \quad (3.53)$$

woraus sich direkt

$$\begin{aligned}\delta U_\mu(x) &= -a\delta A_\mu(x) - \frac{1}{2}a^2\partial_\mu(\delta A_\mu(x)) + \frac{1}{2}a^2\delta A_\mu(x)A_\mu(x) \\ &\quad + \frac{1}{2}a^2 A_\mu(x)\delta A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^3)\end{aligned}\quad (3.54)$$

ergibt. Andererseits gilt mit den symmetrisierten Transformationen

$$\begin{aligned}\delta U_\mu(x) &= -agU_\mu(x)\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x) - ag\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) \\ &= -2ag\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x) - a^2\partial_\mu(g\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x)) \\ &\quad + a^2g\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x)A_\mu(x) + a^2gA_\mu(x)\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x) + \mathcal{O}(a^3).\end{aligned}\quad (3.55)$$

Der direkte Vergleich ergibt

$$\delta A_\mu(x) = 2g\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x) + \mathcal{O}(a^2), \quad (3.56)$$

so daß auch diese Transformationen nur Störungen in quadratischer Ordnung von a verursachen.

Da wir nun von einer Lagrange-Dichte ausgehen können, die von ihrem Kontinuumslimit erst in Ordnung a^2 abweicht und Gleiches auch für die symmetrisierten Transformationen gilt, erwartet man, daß sich die SUSY-brechenden Terme in der Variation der Lagrange-Dichte durch eine geeignete Definition des Superstromes j_μ^{lat} in erster Ordnung von a vollständig eliminieren lassen. Dies wird im folgenden explizit nachgerechnet, im Zuge dieser Rechnung wird dann auch ein entsprechender Superstrom angegeben.

3.7 Variation der Lagrange-Dichte

3.7.1 δ_λ -Variation des Fermion-Anteils

Für den fermionischen Anteil der Lagrange-Dichte verwenden wir nach dem oben Gesagten die symmetrische Form

$$\mathcal{L}_f(x) = \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x)\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat,sym} \lambda(x) \right\}. \quad (3.57)$$

Die Variation unter den Transformationen

$$\delta\lambda(x) = -\frac{i}{g}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho,\tau}(x)\varepsilon \quad (3.58)$$

$$\delta\bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g}\bar{\varepsilon}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho,\tau}(x) \quad (3.59)$$

ergibt dann

$$\begin{aligned}\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \frac{1}{2a} \frac{i}{g} \sum_{\mu,\rho,\tau} \left[\right. \\ &\quad \begin{array}{ccc} \text{Diagram 1: } \bar{\varepsilon}\sigma_{\rho\tau} \text{ (diamond)} \xrightarrow{x} \gamma_\mu \text{ (circle)} & - & \gamma_\mu \text{ (circle)} \xrightarrow{x} \bar{\varepsilon}\sigma_{\rho\tau} \text{ (diamond)} \\ \text{Diagram 2: } \gamma_\mu \text{ (circle)} \xrightarrow{x} \sigma_{\rho\tau}\varepsilon \text{ (diamond)} & + & \sigma_{\rho\tau}\varepsilon \text{ (diamond)} \xrightarrow{x} \gamma_\mu \text{ (circle)} \end{array} \\ &\quad \left. \right]. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Algebraisch ist dies

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x)) \right. \\ &\quad \left. - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

und läßt sich nach einem ähnlichen Argument wie in (3.35) auch als

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \bar{\lambda}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \varepsilon \right. \\ &\quad \left. - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (3.62)$$

schreiben. Die weitere Behandlung verläuft analog zur Kontinuumsstheorie unter Verwendung der Leibniz-Regel und der Beziehung

$$\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} = i(\delta_{\mu\rho} \gamma_\tau - \delta_{\mu\tau} \gamma_\rho) - i\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5. \quad (3.63)$$

Da $\mathcal{D}_\mu^{lat, sym}$ die Leibniz-Regel aber bis zur Ordnung a einschließlich erfüllt, treten keine $\mathcal{R}^L$ -Terme mehr in Ordnung a auf. Man bekommt

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \varepsilon \right\} \\ &\quad - \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\} \\ &\quad + \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Die Bianchi-Identität reduziert sich im Fall der symmetrischen kovarianten Ableitung auf den Ausdruck

$$(\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} = a \mathcal{D}_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x) + \mathcal{O}(a^2). \quad (3.65)$$

Somit erhalten wir das Zwischenergebnis

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \varepsilon \right\} \\ &\quad + \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ &\quad - a \frac{2}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}}(x)) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \varepsilon \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Wir setzen nun voraus, daß bei $\mathcal{G}_{\rho\tau}$ erst in Ordnung a^2 Abweichungen vom Feldstärketensor $F_{\rho\tau}$ des Kontinuums auftreten, so daß also $\mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}} = \mathcal{O}(a)$ gilt ($\mathcal{G}_{\rho\tau} = F_{\rho\tau}(x) + a \mathcal{R}_{\rho\tau}^{\mathcal{G}} + \mathcal{O}(a^2)$). Dann gilt die Bianchi-Identität wie gesehen bis in Ordnung a einschließlich und da dann auch $\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) = \partial_\mu (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) + [A_\mu, \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)] + \mathcal{O}(a^2)$ gilt und die Spur des Kommutatorterms verschwindet, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \varepsilon \right\} \\ &\quad + \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \partial_\mu (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \right\} \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dies liefert also bis zur Ordnung a einschließlich den entsprechenden Term der Variation der Kontinuumswirkung, man vergleiche dazu (1.69).

3.7.2 δ_U -Variation der Fermion-Wirkung

Das Verhalten der Fermion-Wirkung unter Variation der Eichfelder $\delta_U \mathcal{L}_f$ erweist sich in der symmetrisierten Form ebenfalls als überaus günstig. Es zeigt sich nämlich, daß $\delta_U \mathcal{L}_f(x) = 0 + \mathcal{O}(a^2)$, daß also auch hier Abweichungen vom entsprechenden Kontinuumsausdruck erst in quadratischer Ordnung von a auftreten.

Mit den symmetrisierten Transformationen

$$\delta U_\mu(x) = -agU_\mu(x)\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x) - ag\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) \quad (3.68)$$

$$\delta U_\mu^\dagger(x) = +ag\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x)U_\mu^\dagger(x) + agU_\mu^\dagger(x)\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x+a\hat{\mu}) \quad (3.69)$$

und der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_f(x) = \frac{1}{2a}\text{Tr}\left\{\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu U_\mu^\dagger(x)\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) - \bar{\lambda}(x)\gamma_\mu U_\mu(x-a\hat{\mu})\lambda(x-a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu})\right\} \quad (3.70)$$

erhält man die folgenden Beiträge zur Variation:

Der erste Term in (3.70) führt auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g\text{Tr}\left\{ \right. & \bar{\lambda}(x)\gamma_\mu\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x)U_\mu^\dagger(x)\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) \\ & + \bar{\lambda}(x)\gamma_\mu U_\mu^\dagger(x)\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x+a\hat{\mu})\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) \\ & - \bar{\lambda}(x)\gamma_\mu U_\mu^\dagger(x)\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x)\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x) \\ & \left. - \bar{\lambda}(x)\gamma_\mu U_\mu^\dagger(x)\lambda(x+a\hat{\mu})\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Dies ist das Gleiche wie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g\text{Tr}\left\{ \right. & \bar{\lambda}(x)\gamma_\mu[\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x), U_\mu^\dagger(x)\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x)] \\ & \left. + \bar{\lambda}(x)\gamma_\mu U_\mu^\dagger(x)[\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x+a\hat{\mu}), \lambda(x+a\hat{\mu})]U_\mu(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Die Variation des zweiten Terms in (3.70) ergibt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g\text{Tr}\left\{ \right. & -\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu U_\mu(x-a\hat{\mu})\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x-a\hat{\mu})\lambda(x-a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu}) \\ & -\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x)U_\mu(x-a\hat{\mu})\lambda(x-a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu}) \\ & +\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu U_\mu(x-a\hat{\mu})\lambda(x-a\hat{\mu})\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x-a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu}) \\ & \left. +\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu U_\mu(x-a\hat{\mu})\lambda(x-a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu})\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x) \right\}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

was nichts anderes ist als

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g\text{Tr}\left\{ \right. & \bar{\lambda}(x)\gamma_\mu U_\mu(x-a\hat{\mu})[\lambda(x-a\hat{\mu}), \bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x-a\hat{\mu})]U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu}) \\ & \left. +\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu[U_\mu(x-a\hat{\mu})\lambda(x-a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu}), \bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda(x)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Insgesamt erhalten wir daher

$$\begin{aligned}
\delta_U \mathcal{L}_f(x) &= \frac{1}{2} g \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x)] \right. \\
&\quad + \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) [\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}), \lambda(x + a\hat{\mu})] U_\mu(x) \\
&\quad - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu(x - a\hat{\mu}) [\lambda(x - a\hat{\mu}), \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x - a\hat{\mu})] U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \\
&\quad \left. - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}), \bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x)] \right\} \\
&= \frac{1}{2} g \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x)] \right. \\
&\quad + \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu})] \\
&\quad + \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) [\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}), \lambda(x + a\hat{\mu})] U_\mu(x) \\
&\quad \left. + \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu(x - a\hat{\mu}) [\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x - a\hat{\mu}), \lambda(x - a\hat{\mu})] U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Bei der Entwicklung nach a beachtet man, daß $U_\mu(x) = 1 - aA_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2)$, $U_\mu^\dagger(x) = 1 + aA_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2)$ sowie $U_\mu(x - a\hat{\mu}) = 1 - aA_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2)$, $U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) = 1 + aA_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2)$. Man erkennt daher, daß sich die Terme, die bei Entwicklung von (3.75) in Ordnung a auftreten, exakt eliminieren und verbleibt mit

$$\delta_U \mathcal{L}_f(x) = 2g \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [\bar{\epsilon} \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \} + \mathcal{O}(a^2). \tag{3.76}$$

Auch dieser Teil der Variation der Wirkung stimmt also bis zur Ordnung a einschließlich mit dem Kontinuumsterm überein. Letzterer verschwindet wie gesehen aufgrund einer Fierz-Identität (vgl. (1.60) sowie Anhang D), daher können wir also

$$\delta_U \mathcal{L}_f(x) = 0 + \mathcal{O}(a^2) \tag{3.77}$$

notieren.

Ein Vergleich von (3.75) mit [Lu], Formel (3.135) auf Seite 84 oben zeigt, daß die beiden Terme durch eine Verschiebung $x \rightarrow x - a\hat{\mu}$ in den beiden mittleren Ausdrücken von [Lu] hervorgehen. Dies ist das Äquivalent zur hier vorgenommenen Reorganisation der Terme in der Wirkung, d.h. zur Symmetrisierung der Lagrange-Dichte. Nach Summation über x sind beide Ausdrücke identisch.

3.7.3 δ_U -Variation der Eichfeld-Wirkung

Zu guter Letzt betrachten wir nun das Verhalten der Eichfeldwirkung unter den o.g. symmetrisierten Transformationen

$$\delta \left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ x \end{array} \right) = -ag \left(\begin{array}{c} \textcircled{\bar{\epsilon} \gamma_\mu} \longrightarrow \\ \longrightarrow \textcircled{\bar{\epsilon} \gamma_\mu} \end{array} \right) \tag{3.78}$$

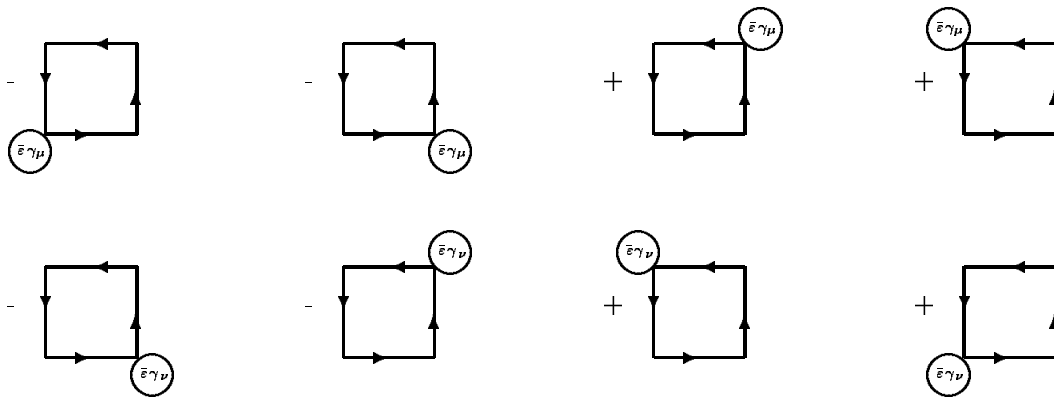
bzw.

$$\delta \left(\begin{array}{c} \longleftarrow \\ x \end{array} \right) = ag \left(\begin{array}{c} \textcircled{\bar{\epsilon} \gamma_\mu} \longleftarrow \\ \longleftarrow \textcircled{\bar{\epsilon} \gamma_\mu} \end{array} \right). \tag{3.79}$$

Da der Eichfeldanteil der Gitter-Lagrange-Dichte z.B. durch

$$\mathcal{L}_g(x) = \frac{1}{a^4} \frac{4}{g^2} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[1 - \frac{1}{8} \text{Tr} (U_{\mu\nu}(x) + U_{-\mu, -\nu}(x) + U_{\nu\mu}(x) + U_{-\nu, -\mu}(x)) \right] \quad (3.80)$$

gegeben ist, ist die Variation dieses Teils der Wirkung in erster Linie durch das Verhalten einzelner Plaquetten bestimmt. Da sich $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ aus Plaquetten zusammensetzt und wir einen Ausdruck der Form $(\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \bar{\lambda}(x)) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x)$ erzeugen wollen (mit geeigneter γ -Struktur), sollte die Variation einer einzelnen Plaquette U also Terme wie $(\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \bar{\lambda}) \cdot U$ ergeben, die sich dann geeignet zu $(\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \bar{\lambda}(x)) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x)$ zusammensetzen. Führt man die Variation mit den symmetrisierten Transformationen aus, so ergibt eine Plaquette (modulo Vorfaktoren) die folgenden Terme:



Man erkennt, daß solche Terme nicht direkt zu symmetrischen kovarianten Ableitungen von λ führen, denn dazu sind Terme notwendig, in denen λ an zwei Gitterpunkten vorkommt, die den Abstand zwei voneinander haben, also z.B. $\lambda(x + a\hat{\mu})$ und $\lambda(x - a\hat{\mu})$. In unserem Fall sieht es zunächst so aus, als könne man lediglich kovariante Vorwärts- bzw. Rückwärtsableitungen gewinnen, so führt z.B.

$$+ \begin{array}{c} \text{circle with } \bar{\epsilon}\gamma_\mu \\ \downarrow \\ \text{square with clockwise arrows} \end{array} \quad - \begin{array}{c} \text{square with clockwise arrows} \\ \downarrow \\ \text{circle with } \bar{\epsilon}\gamma_\mu \end{array} \quad (3.81)$$

mit geeignetem Vorfaktor $\frac{1}{a}$ auf $\text{Tr}\{\bar{\epsilon}\gamma_\mu(\mathcal{D}_\nu^{lat, f} \lambda(x))U_{\mu\nu}(x)\}$. Der Punkt x sei dabei der linke untere Eckpunkt der betrachteten Plaquette.

Um symmetrische kovariante Ableitungen zu produzieren, scheint es zunächst nahezuliegen, die dazu nötigen Terme durch geeignete Erweiterung der Transformationen zu gewinnen. In diesem Sinne habe ich für den zweidimensionalen Fall die an den Vorschlag aus [Lu], Formel (3.139) angelehnte Transformation

$$\begin{aligned}
\delta \left(\overrightarrow{x} \right) = -ag \frac{1}{4} \Bigg(& 2 \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \text{)} \rightarrow \text{---} + 2 \text{---} \rightarrow \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \text{)} \\
& + \text{---} \downarrow \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \text{)} + \text{---} \uparrow \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \text{)} \\
& + \text{---} \downarrow \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \text{)} + \text{---} \uparrow \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \text{)} \Bigg) \quad (3.82)
\end{aligned}$$

untersucht, welche den gleichen Kontinuumslikes für $\delta A_\mu(x)$ liefert wie die symmetrisierten Transformationen. Es zeigt sich in der Tat, daß

$$\begin{aligned}
\delta^{(\hat{\nu})} \text{Tr}(U_{\mu\nu}(x)) = ag \frac{1}{4} \Bigg(& \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \text{)} \rightarrow \text{---} \uparrow \text{---} \downarrow \text{---} \rightarrow \text{---} - \text{---} \uparrow \text{---} \downarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \text{)} \\
& + \text{---} \uparrow \text{---} \downarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \text{)} - \text{---} \uparrow \text{---} \downarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \text{)} \\
& + \text{---} \uparrow \text{---} \downarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \text{)} - \text{---} \uparrow \text{---} \downarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \text{)} \\
& + \text{---} \uparrow \text{---} \downarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \text{)} - \text{---} \uparrow \text{---} \downarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \text{ (circle with } \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \text{)} \Bigg). \quad (3.83)
\end{aligned}$$

Der hochgestellte Index $\hat{\nu}$ soll dabei darauf hinweisen, daß nur die Variation der links in

$\hat{\nu}$ -Richtung berücksichtigt wurde, über ihn wird an dieser Stelle und im folgenden nicht summiert. Somit können wir sagen:

$$\begin{aligned} \delta^{(\hat{\nu})} \text{Tr}(U_{\mu\nu}(x)) = & -a^2 g \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\right. \\ & + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{\text{lat}, \text{sym}} \lambda(x + a\hat{\mu})) U_{\nu, -\mu}(x + a\hat{\mu}) \\ & + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{\text{lat}, \text{sym}} \lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})) U_{-\mu, -\nu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \\ & + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{\text{lat}, \text{sym}} \lambda(x)) U_{\mu, \nu}(x) \\ & \left. + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{\text{lat}, \text{sym}} \lambda(x + a\hat{\nu})) U_{-\nu, \mu}(x + a\hat{\nu}) \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Bei Betrachtung der Variation der vollständigen Eichfeld-Lagrange-Dichte ergibt sich tatsächlich das Resultat

$$\delta^{\text{lat}} \mathcal{L}_g^{\text{lat}}(x) = -\frac{4}{g} \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr}(\bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu \lambda(x)) F_{\mu\nu}(x)) + \mathcal{O}(a^2), \quad (3.85)$$

und es treten wie in (3.84) die gewünschten symmetrischen kovarianten Ableitungen auf. Dieses Verfahren der erweiterten Transformationen kann (und wurde von mir) auch auf den drei- und vierdimensionalen Fall übertragen werden. Allerdings sind dann zusätzliche Erweiterungen notwendig (mehrfaches „Abknicken“ der Transformationen). Jedoch ist dies unnötig umständlich, denn wir werden nun einsehen, daß die oben erwähnten symmetrisierten Transformationen unsere Anforderungen vollauf erfüllen. Dazu beobachtet man

$$\begin{aligned} & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = 2 \text{Diagram 3} + \text{Tr}\{Y_{\mu,\nu}(x)U_{\mu,\nu}(x)\} \\ & \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} = 2 \text{Diagram 6} + \text{Tr}\{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\mu})U_{\nu,-\mu}(x+a\hat{\mu})\} \\ & \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8} = 2 \text{Diagram 9} + \text{Tr}\{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})U_{-\mu,-\nu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})\} \end{aligned}$$

(wobei weder über μ noch über ν summiert wird). Dabei liefert die Gittergröße Y im Kontinuumsimes erst einen Beitrag in Ordnung a^2 , d.h für $a \rightarrow 0$ gilt $Y = \mathcal{O}(a^2)$. Beispielhaft wollen wir die zweite Behauptung explizit verifizieren (wiederum ohne Summation über μ und ν):

$$\text{Tr} \left\{ \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_{\mu,\nu}(x) + U_\mu^\dagger(x + a\hat{\mu}) \bar{\epsilon} \gamma_\nu \lambda(x + 2a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\mu}) U_{\nu,-\mu}(x + a\hat{\mu}) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{Tr} \left\{ U_\mu(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) U_{\nu, -\mu}(x + a\hat{\mu}) \right. \\
&\quad \left. + U_\mu^\dagger(x + a\hat{\mu}) \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \lambda(x + 2a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\mu}) U_{\nu, -\mu}(x) \right\} \\
&= \text{Tr} \left\{ \left(U_\mu(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + U_\mu^\dagger(x + a\hat{\mu}) \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \lambda(x + 2a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\mu}) \right) U_{\nu, -\mu}(x + a\hat{\mu}) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}
Y_{\mu, \nu}(x + a\hat{\mu}) &= U_\mu(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) + U_\mu^\dagger(x + a\hat{\mu}) \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \lambda(x + 2a\hat{\mu}) U_\mu(x + a\hat{\mu}) \\
&\quad - 2\bar{\varepsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu}) \\
&= -a\partial_\mu(\bar{\varepsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu})) - a[A_\mu(x + a\hat{\mu}), \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu})] \\
&\quad + a\partial_\mu(\bar{\varepsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu})) + a[A_\mu(x + a\hat{\mu}), \bar{\varepsilon} \gamma_\nu \lambda(x + a\hat{\mu})] + \mathcal{O}(a^2) \\
&= \mathcal{O}(a^2),
\end{aligned} \tag{3.87}$$

genauer führt $Y_{\mu\nu}$ im Kontinuumslimites auf Terme proportional zu $a^2 \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda$. Man beachte, daß die Taylor-Entwicklung in (3.87) um den Gitterpunkt $x + a\hat{\mu}$ ausgeführt wird.

Unter Benutzung der vier oben genannten Identitäten erhält man aus der $\delta^{(\hat{\nu})}$ -Variation einer Plaquette $U_{\mu, \nu}(x)$ unter den symmetrisierten Transformationen

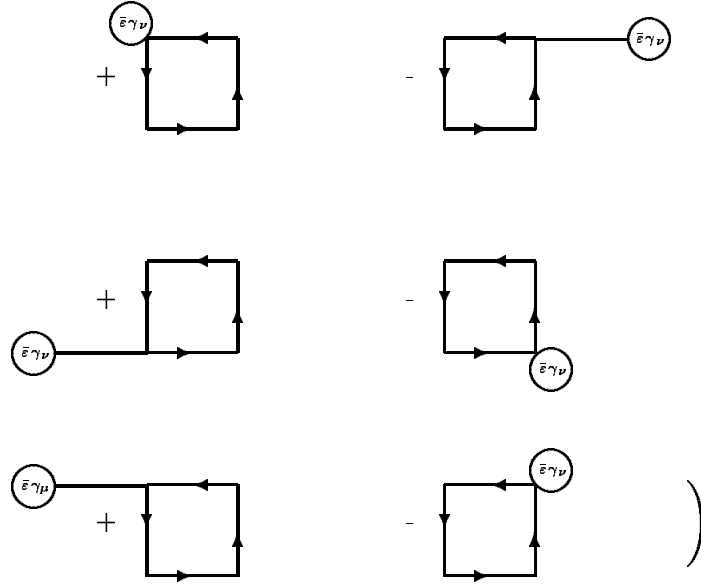
$$\delta^{(\hat{\nu})} \text{Tr}(U_{\mu\nu}(x)) = ag \left(\begin{array}{cc} \text{Diagram 1} & + \text{Diagram 2} \\ - \text{Diagram 3} & - \text{Diagram 4} \end{array} \right) \tag{3.88}$$

The diagrams are square loops with arrows indicating a counter-clockwise direction. Each diagram has a circle with the label $\bar{\varepsilon} \gamma_\nu$ attached to one of its four sides. In Diagram 1, the circle is at the bottom-left corner. In Diagram 2, it is at the top-left corner. In Diagram 3, it is at the bottom-right corner. In Diagram 4, it is at the top-right corner.

das Ergebnis

$$\delta^{(\hat{\nu})} \text{Tr}(U_{\mu\nu}(x)) = ag \frac{1}{4} \left(\begin{array}{cc} \text{Diagram 1} & - \text{Diagram 2} \end{array} \right)$$

The diagrams are square loops with arrows indicating a counter-clockwise direction. In Diagram 1, a circle with the label $\bar{\varepsilon} \gamma_\nu$ is attached to the bottom-left corner. In Diagram 2, a circle with the label $\bar{\varepsilon} \gamma_\nu$ is attached to the right side of the loop.



$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4}ag\text{Tr} \{Y_{\mu,\nu}(x)U_{\mu,\nu}(x)\} \\
& + \frac{1}{4}ag\text{Tr} \{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\mu})U_{\nu,-\mu}(x+a\hat{\mu})\} \\
& + \frac{1}{4}ag\text{Tr} \{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})U_{-\mu,-\nu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})\} \\
& - \frac{1}{4}ag\text{Tr} \{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\nu})U_{-\nu,\mu}(x+a\hat{\nu})\} .
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Dies ist das Gleiche wie

$$\begin{aligned}
\delta^{(\hat{\nu})}\text{Tr}(U_{\mu\nu}(x)) &= -a^2g\frac{1}{2}\text{Tr}\left\{ \right. \\
& + \bar{\epsilon}\gamma_\nu \mathcal{D}_\mu^{lat,sym} \lambda(x+a\hat{\mu})U_{\nu,-\mu}(x+a\hat{\mu}) \\
& + \bar{\epsilon}\gamma_\nu \mathcal{D}_\mu^{lat,sym} \lambda(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})U_{-\mu,-\nu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}) \\
& + \bar{\epsilon}\gamma_\nu \mathcal{D}_\mu^{lat,sym} \lambda(x)U_{\mu,\nu}(x) \\
& \left. + \bar{\epsilon}\gamma_\nu \mathcal{D}_\mu^{lat,sym} \lambda(x+a\hat{\nu})U_{-\nu,\mu}(x+a\hat{\nu}) \right\} \\
& - \frac{1}{4}ag\text{Tr} \{Y_{\mu,\nu}(x)U_{\mu,\nu}(x)\} \\
& + \frac{1}{4}ag\text{Tr} \{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\mu})U_{\nu,-\mu}(x+a\hat{\mu})\} \\
& + \frac{1}{4}ag\text{Tr} \{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})U_{-\mu,-\nu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})\}
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{4}ag\text{Tr}\{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\nu})U_{-\nu,\mu}(x+a\hat{\nu})\}. \quad (3.90)$$

Die Variation der umgekehrt durchlaufenen Plaquette ist dann durch einen analogen Term gegeben, man braucht nur im Ergebnis den Umlaufsinn der Plaquetten zu ändern und aufgrund der Wahl der Transformationen das gesamte Vorzeichen umzukehren. Damit gilt dann das Folgende:

$$\begin{aligned} & \delta^{(\hat{\nu})}(\text{Tr}(U_{\mu\nu}(x) + U_{\nu\mu}(x))) \\ = & -a^2g\frac{1}{2}\text{Tr}\left\{ \begin{aligned} & +\bar{\epsilon}\gamma_\nu\mathcal{D}_\mu^{lat,sym}\lambda(x+a\hat{\mu})\cdot(U_{\nu,-\mu}(x+a\hat{\mu})-U_{-\mu,\nu}(x+a\hat{\mu})) \\ & +\bar{\epsilon}\gamma_\nu\mathcal{D}_\mu^{lat,sym}\lambda(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}) \\ & \quad \cdot(U_{-\mu,-\nu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})-U_{-\nu,-\mu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})) \\ & +\bar{\epsilon}\gamma_\nu\mathcal{D}_\mu^{lat,sym}\lambda(x)(U_{\mu,\nu}(x)-U_{\nu,\mu}(x)) \\ & +\bar{\epsilon}\gamma_\nu\mathcal{D}_\mu^{lat,sym}\lambda(x+a\hat{\nu})\cdot(U_{-\nu,\mu}(x+a\hat{\nu})-U_{\mu,-\nu}(x+a\hat{\nu})) \end{aligned} \right\} \\ & -\frac{1}{4}ag\text{Tr}\{Y_{\mu,\nu}(x)(U_{\mu,\nu}(x)-U_{\nu,\mu}(x))\} \\ & +\frac{1}{4}ag\text{Tr}\{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\mu})(U_{\nu,-\mu}(x+a\hat{\mu})-U_{-\mu,\nu}(x+a\hat{\mu}))\} \\ & +\frac{1}{4}ag\text{Tr}\{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}) \\ & \quad \cdot(U_{-\mu,-\nu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})-U_{-\nu,-\mu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}))\} \\ & -\frac{1}{4}ag\text{Tr}\{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\nu})(U_{-\nu,\mu}(x+a\hat{\nu})-U_{\mu,-\nu}(x+a\hat{\nu}))\}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Mit unserer Definition $\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) := -\frac{1}{2a^2}(U_{\mu,\nu}(x)-U_{\nu,\mu}(x))$ schreibt sich dies als

$$\begin{aligned} \delta^{(\hat{\nu})}\text{Tr}(U_{\mu,\nu}(x) + U_{\nu,\mu}(x)) & = a^4g\text{Tr}\left\{ \begin{aligned} & +\bar{\epsilon}\gamma_\nu\mathcal{D}_\mu^{lat,sym}\lambda(x+a\hat{\mu})\mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x+a\hat{\mu}) \\ & +\bar{\epsilon}\gamma_\nu\mathcal{D}_\mu^{lat,sym}\lambda(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})\mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu}) \\ & +\bar{\epsilon}\gamma_\nu\mathcal{D}_\mu^{lat,sym}\lambda(x)\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) \\ & +\bar{\epsilon}\gamma_\nu\mathcal{D}_\mu^{lat,sym}\lambda(x+a\hat{\nu})\mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x+a\hat{\nu}) \end{aligned} \right\} \\ & +\frac{1}{2}a^3g\text{Tr}\{Y_{\mu,\nu}(x)\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x)\} \\ & -\frac{1}{2}a^3g\text{Tr}\{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\mu})\mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x+a\hat{\mu})\} \\ & -\frac{1}{2}a^3g\text{Tr}\{Y_{\mu,\nu}(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})\mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x+a\hat{\mu}+a\hat{\nu})\} \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}a^3 g \text{Tr} \{ Y_{\mu,\nu}(x + a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x + a\hat{\nu}) \} . \quad (3.92)$$

Völlig analoge Überlegungen zeigen

$$\begin{aligned} \delta^{(\hat{\mu})} \text{Tr}(U_{\mu,\nu}(x) + U_{\nu,\mu}(x)) &= -a^4 g \text{Tr} \left\{ \begin{aligned} &+\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \mathcal{D}_{\nu}^{lat, sym} \lambda(x + a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x + a\hat{\nu}) \\ &+\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \mathcal{D}_{\nu}^{lat, sym} \lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \\ &+\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \mathcal{D}_{\nu}^{lat, sym} \lambda(x) \mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) \\ &+\bar{\epsilon} \gamma_{\mu} \mathcal{D}_{\nu}^{lat, sym} \lambda(x + a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x + a\hat{\mu}) \end{aligned} \right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}a^3 g \text{Tr} \{ Y_{\nu,\mu}(x) \mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) \} \\ &\quad +\frac{1}{2}a^3 g \text{Tr} \{ Y_{\nu,\mu}(x + a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x + a\hat{\nu}) \} \\ &\quad +\frac{1}{2}a^3 g \text{Tr} \{ Y_{\nu,\mu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \} \\ &\quad -\frac{1}{2}a^3 g \text{Tr} \{ Y_{\nu,\mu}(x + a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x + a\hat{\mu}) \} . \end{aligned} \quad (3.93)$$

Um die totale Variation von $\sum_{\mu < \nu} \text{Tr} \{ U_{\mu,\nu}(x) + U_{\nu,\mu}(x) \}$ in einer für die weitere Rechnung günstigen Form zu schreiben, vertauschen wir in den Ausdrücken, in denen γ_{μ} vorkommt, die Indizes μ und ν und beachten die Antisymmetrie von $\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0$ gegenüber dieser Vertauschung. Man erreicht, daß die Summe $\sum_{\mu < \nu}$ in $\sum_{\mu \neq \nu}$ übergeht und verbleibt mit

$$\begin{aligned} \sum_{\mu < \nu} \text{Tr} \left(\delta U_{\mu\nu}(x) + \delta U_{\mu\nu}^{\dagger}(x) \right) &= a^4 g \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} \left\{ \begin{aligned} &+\bar{\epsilon} \gamma_{\nu} (\mathcal{D}_{\mu}^{lat, sym} \lambda(x + a\hat{\mu})) \mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x + a\hat{\mu}) \\ &+\bar{\epsilon} \gamma_{\nu} (\mathcal{D}_{\mu}^{lat, sym} \lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})) \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \\ &+\bar{\epsilon} \gamma_{\nu} (\mathcal{D}_{\mu}^{lat, sym} \lambda(x)) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \\ &+\bar{\epsilon} \gamma_{\nu} (\mathcal{D}_{\mu}^{lat, sym} \lambda(x + a\hat{\nu})) \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x + a\hat{\nu}) \\ &+\frac{1}{2a} Y_{\mu,\nu}(x) \mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) \\ &-\frac{1}{2a} Y_{\mu,\nu}(x + a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x + a\hat{\mu}) \\ &-\frac{1}{2a} Y_{\mu,\nu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \\ &+\frac{1}{2a} Y_{\mu,\nu}(x + a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x + a\hat{\nu}) \end{aligned} \right\} . \end{aligned} \quad (3.94)$$

Bei der Lagrange-Dichte hatten wir uns auf die Formulierung

$$\mathcal{L}_g(x) = \frac{1}{a^4} \frac{4}{g^2} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[1 - \frac{1}{8} \text{Tr} \{ U_{\mu,\nu}(x) + U_{-\mu,-\nu}(x) + U_{\nu,\mu}(x) + U_{-\nu,-\mu}(x) \} \right]$$

$$\begin{aligned}
= & \frac{1}{a^4} \frac{4}{g^2} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[1 - \frac{1}{8} \text{Tr} \left\{ U_{\mu\nu}(x) + U_{\mu\nu}^\dagger(x) \right. \right. \\
& \left. \left. + U_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) + U_{\mu\nu}^\dagger(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) \right\} \right] \quad (3.95)
\end{aligned}$$

geeignet, so daß ihre Variation dann durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_g(x) = & -\frac{1}{2g} \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} \left\{ \right. \\
& + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x + a\hat{\mu})) \mathcal{G}_{\nu, -\mu}^0(x + a\hat{\mu}) \\
& + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})) \mathcal{G}_{-\mu, -\nu}^0(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \\
& + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x)) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x) \\
& + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x + a\hat{\nu})) \mathcal{G}_{-\nu, \mu}^0(x + a\hat{\nu}) \\
& + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x - a\hat{\nu})) \mathcal{G}_{\nu, -\mu}^0(x - a\hat{\nu}) \\
& + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x)) \mathcal{G}_{-\mu, -\nu}^0(x) \\
& + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu})) \mathcal{G}_{\mu\nu}^0(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) \\
& + \bar{\epsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x - a\hat{\mu})) \mathcal{G}_{-\nu, \mu}^0(x - a\hat{\mu}) \\
& + \frac{1}{2a} Y_{\mu, \nu}(x) \mathcal{G}_{\mu, \nu}^0(x) \\
& - \frac{1}{2a} Y_{\mu, \nu}(x + a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{\nu, -\mu}^0(x + a\hat{\mu}) \\
& - \frac{1}{2a} Y_{\mu, \nu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{-\mu, -\nu}^0(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) \\
& + \frac{1}{2a} Y_{\mu, \nu}(x + a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{-\nu, \mu}^0(x + a\hat{\nu}) \\
& + \frac{1}{2a} Y_{\mu, \nu}(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{\mu, \nu}^0(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) \\
& - \frac{1}{2a} Y_{\mu, \nu}(x - a\hat{\nu}) \mathcal{G}_{\nu, -\mu}^0(x - a\hat{\nu}) \\
& - \frac{1}{2a} Y_{\mu, \nu}(x) \mathcal{G}_{-\mu, -\nu}^0(x) \\
& \left. + \frac{1}{2a} Y_{\mu, \nu}(x - a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{-\nu, \mu}^0(x - a\hat{\mu}) \right\}. \quad (3.96)
\end{aligned}$$

Nun wissen wir, daß $\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x) = \mathcal{D}_\mu \lambda(x) + \mathcal{O}(a^2)$ und

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\mu, \nu}^0(x) &= F_{\mu\nu}(x) + a\mathcal{R}_{\mu, \nu}^{\mathcal{G}^0}(x) + \mathcal{O}(a^2) \\
\mathcal{G}_{-\mu, -\nu}^0(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) &= F_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) + a\mathcal{R}_{-\mu, -\nu}^{\mathcal{G}^0}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) + \mathcal{O}(a^2) \\
\mathcal{G}_{\nu, -\mu}^0(x + a\hat{\mu}) &= F_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) + a\mathcal{R}_{\nu, -\mu}^{\mathcal{G}^0}(x + a\hat{\mu}) + \mathcal{O}(a^2) \\
\mathcal{G}_{-\nu, \mu}^0(x + a\hat{\nu}) &= F_{\mu\nu}(x + a\hat{\nu}) + a\mathcal{R}_{-\nu, \mu}^{\mathcal{G}^0}(x + a\hat{\nu}) + \mathcal{O}(a^2) \\
\mathcal{G}_{\mu, \nu}^0(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) &= F_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) + a\mathcal{R}_{\mu, \nu}^{\mathcal{G}^0}(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) + \mathcal{O}(a^2) \\
\mathcal{G}_{-\mu, -\nu}^0(x) &= F_{\mu\nu}(x) + a\mathcal{R}_{-\mu, -\nu}^{\mathcal{G}^0}(x) + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x - a\hat{\nu}) &= F_{\mu\nu}(x - a\hat{\nu}) + a\mathcal{R}_{\nu,-\mu}^{\mathcal{G}^0}(x) + \mathcal{O}(a^2) \\
\mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x - a\hat{\mu}) &= F_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu}) + a\mathcal{R}_{-\nu,\mu}^{\mathcal{G}^0}(x) + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned} \tag{3.97}$$

und schreiben weiter $Y_{\mu,\nu}(x) = a^2\mathcal{R}_{\mu,\nu}^Y(x) + \mathcal{O}(a^3)$, so daß sich die Entwicklung von $\delta\mathcal{L}_g(x)$ als

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_g(x) &= -\frac{1}{2g} \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} \left\{ \right. \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\nu(\mathcal{D}_\mu\lambda(x + a\hat{\mu}))(F_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) + a\mathcal{R}_{\nu,-\mu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\nu(\mathcal{D}_\mu\lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}))(F_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) + a\mathcal{R}_{-\mu,-\nu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\nu(\mathcal{D}_\mu\lambda(x))(F_{\mu\nu}(x) + a\mathcal{R}_{\mu\nu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\nu(\mathcal{D}_\mu\lambda(x + a\hat{\nu}))(F_{\mu\nu}(x + a\hat{\nu}) + a\mathcal{R}_{-\nu,\mu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\nu(\mathcal{D}_\mu\lambda(x - a\hat{\nu}))(F_{\mu\nu}(x - a\hat{\nu}) + a\mathcal{R}_{\nu,-\mu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\nu(\mathcal{D}_\mu\lambda(x))(F_{\mu\nu}(x) + a\mathcal{R}_{-\mu,-\nu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\nu(\mathcal{D}_\mu\lambda(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}))(F_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) + a\mathcal{R}_{\mu\nu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\nu(\mathcal{D}_\mu\lambda(x - a\hat{\mu}))(F_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu}) + a\mathcal{R}_{-\nu,\mu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
&\quad + \frac{1}{2}a\mathcal{R}_{\mu,\nu}^Y(x)F_{\mu,\nu}(x) \\
&\quad - \frac{1}{2}a\mathcal{R}_{\mu,\nu}^Y(x)F_{\mu,\nu}(x) \\
&\quad - \frac{1}{2}a\mathcal{R}_{\mu,\nu}^Y(x)F_{\mu,\nu}(x) \\
&\quad + \frac{1}{2}a\mathcal{R}_{\mu,\nu}^Y(x)F_{\mu,\nu}(x) \\
&\quad + \frac{1}{2}a\mathcal{R}_{\mu,\nu}^Y(x)F_{\mu,\nu}(x) \\
&\quad - \frac{1}{2}a\mathcal{R}_{\mu,\nu}^Y(x)F_{\mu,\nu}(x) \\
&\quad - \frac{1}{2}a\mathcal{R}_{\mu,\nu}^Y(x)F_{\mu,\nu}(x) \\
&\quad + \frac{1}{2}a\mathcal{R}_{\mu,\nu}^Y(x)F_{\mu,\nu}(x) \left. \right\} \\
&\quad + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{3.98}$$

schreiben läßt. Somit ergeben die aus Y resultierenden Terme in Ordnung a keinen Beitrag, und man erhält

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_g(x) &= -\frac{1}{2g} \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} \left\{ \right. \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\nu(\mathcal{D}_\mu\lambda(x + a\hat{\mu}))(F_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) + a\mathcal{R}_{\nu,-\mu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
&\quad + \bar{\epsilon}\gamma_\nu(\mathcal{D}_\mu\lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}))(F_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) + a\mathcal{R}_{-\mu,-\nu}^{\mathcal{G}^0}(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{\varepsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu \lambda(x)) (F_{\mu\nu}(x) + a \mathcal{R}_{\mu\nu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
& + \bar{\varepsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu \lambda(x + a\hat{\nu})) (F_{\mu\nu}(x + a\hat{\nu}) + a \mathcal{R}_{-\nu,\mu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
& + \bar{\varepsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu \lambda(x - a\hat{\nu})) (F_{\mu\nu}(x - a\hat{\nu}) + a \mathcal{R}_{\nu,-\mu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
& + \bar{\varepsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu \lambda(x)) (F_{\mu\nu}(x) + a \mathcal{R}_{-\mu,-\nu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
& + \bar{\varepsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu \lambda(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu})) (F_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) + a \mathcal{R}_{\mu\nu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
& + \bar{\varepsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu \lambda(x - a\hat{\mu})) (F_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu}) + a \mathcal{R}_{-\nu,\mu}^{\mathcal{G}^0}(x)) \\
& + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{3.99}$$

Durch nochmalige Taylorentwicklung, nun stets um den Punkt x und unter Beachtung von $\mathcal{R}_{\mu,\nu}^{\mathcal{G}^0} = -\mathcal{R}_{-\mu,-\nu}^{\mathcal{G}^0}$ bzw. $\mathcal{R}_{\nu,-\mu}^{\mathcal{G}^0} = -\mathcal{R}_{-\nu,\mu}^{\mathcal{G}^0}$ erhalten wir

$$\delta \mathcal{L}_g(x) = -\frac{4}{g} \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} (\bar{\varepsilon} \gamma_\nu (\mathcal{D}_\mu \lambda(x)) F_{\mu\nu}(x)) + \mathcal{O}(a^2). \tag{3.100}$$

Also wird auch hier der Kontinuumsausdruck (1.54) bis zur Ordnung a einschließlich reproduziert. Unser Verfahren der sukzessiven Taylor-Entwicklung (zunächst Abweichungen von $\mathcal{D}_\mu^{\text{lat,sym}}$ von $\mathcal{D}_\mu$ sowie Entwicklung von Y , dann Entwicklung um gewisse Gitterpunkte) ist dabei aufgrund der Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung analytischer Funktionen gerechtfertigt. Da wir hier nur an der ersten Ordnung in a interessiert sind, läßt sich die letzte Entwicklung in (3.99) besonders leicht durchführen: Man entwickelt die Faktoren der einzelnen Summanden in erster Ordnung und zählt die Terme zusammen. Dabei erkennt man, daß sie sich paarweise auslöschen.

Wir haben also gesehen, daß die Variation des Eichfeldanteils der Lagrange-Dichte mit dem entsprechenden Kontinuumsausdruck übereinstimmt. Dabei haben wir in der Lagrange-Dichte sozusagen nur eine halbe Clover-Plaquette gewählt, der Übergang zum vollen Clover-Blatt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_g(x) = & \frac{1}{a^4} \frac{4}{g^2} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[1 - \frac{1}{16} \text{Tr} \left\{ U_{\mu,\nu}(x) + U_{\mu,\nu}^\dagger(x) + U_{-\mu,-\nu}(x) + U_{-\mu,-\nu}^\dagger(x) \right. \right. \\
& \left. \left. + U_{-\nu,\mu}(x) + U_{-\nu,\mu}^\dagger(x) + U_{\nu,-\mu}(x) + U_{\nu,-\mu}^\dagger(x) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{3.101}$$

ändert daran nichts, erhöht aber den Schreibaufwand.

3.8 Definition des Superstromes

Wir haben also bisher gesehen, daß unter den symmetrisierten SUSY-Transformationen gilt:

$$\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) = \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \varepsilon \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \partial_\mu \left(\frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \} \right) \\
& + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned} \tag{3.102}$$

$$\delta_U \mathcal{L}_f(x) = 0 + \mathcal{O}(a^2) \tag{3.103}$$

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{L}_g(x) &= -\frac{4}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x)) \} \gamma_\nu \varepsilon \\
&+ \partial_\mu \left(\frac{4}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x) \} \gamma_\nu \varepsilon \right) + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{3.104}$$

Bei $\delta \mathcal{L}_g$ beachte (3.100) und die Leibniz-Regel. Dabei wurde bei der Verwendung der Bianchi-Identität auf dem Gitter in (3.67) vorausgesetzt, daß

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^2). \tag{3.105}$$

Eine entsprechende Wahl von $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ ist aber möglich, wie wir in dem Kapitel über die Entwicklung der Plaquettenvariable gesehen haben (vgl. z.B. (3.29)).

Damit bekommen wir insgesamt

$$\begin{aligned}
& \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) + \delta_U \mathcal{L}_f(x) + \delta \mathcal{L}_g(x) \\
&= \partial_\mu \left(\frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \} + \frac{4}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x) \} \gamma_\nu \right) \varepsilon + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Mit dem Kontinuumsstrom

$$\overline{j}_\mu(x) := \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \} + \frac{4}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x) \} \gamma_\nu \tag{3.107}$$

gilt also

$$\delta^{lat}(\mathcal{L}^{lat}(x) - \mathcal{L}_{f,Wil}(x)) = \partial_\mu \overline{j}_\mu(x) \varepsilon + \mathcal{O}(a^2). \tag{3.108}$$

Auf dem Gitter definieren wir nun

$$\overline{j}_\mu^{lat}(x) := \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \} + \frac{4}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) \} \gamma_\nu, \tag{3.109}$$

dann gilt

$$\overline{j}_\mu^{lat}(x) = \overline{j}_\mu(x) + a^2 \mathcal{R} \overline{j}_\mu(x) + \mathcal{O}(a^3). \tag{3.110}$$

Mit der symmetrischen Gitterableitung

$$\Delta_\mu^{lat,sym} f(x) := \frac{1}{2a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x - a\hat{\mu})) \tag{3.111}$$

ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
\Delta_\mu^{lat,sym} \overline{j}_\mu^{lat}(x) &= \frac{1}{2a} \left(\overline{j}_\mu(x + a\hat{\mu}) + a^2 \mathcal{R} \overline{j}_\mu(x) - \overline{j}_\mu(x - a\hat{\mu}) - a^2 \mathcal{R} \overline{j}_\mu(x) + \mathcal{O}(a^3) \right) \\
&= \frac{1}{2a} \left(\overline{j}_\mu(x) + a \partial_\mu \overline{j}_\mu(x) + \frac{1}{2} a^2 \partial_\mu \partial_\mu \overline{j}_\mu(x) \right. \\
&\quad \left. - (\overline{j}_\mu(x) - a \partial_\mu \overline{j}_\mu(x) + \frac{1}{2} a^2 \partial_\mu \partial_\mu \overline{j}_\mu(x)) + \mathcal{O}(a^3) \right) \\
&= \partial_\mu \overline{j}_\mu(x) + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{3.112}$$

Somit haben wir mit

$$\delta^{lat}(\mathcal{L}^{lat}(x) - \mathcal{L}_{f,Wil}(x)) = \Delta_\mu^{sym} \overline{j}_\mu^{lat}(x) \varepsilon + \mathcal{O}(a^2) \quad (3.113)$$

unser Ziel erreicht. Den Gitter-Superstrom

$$\overline{j}_\mu^{lat}(x) := \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \} + \frac{4}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) \} \gamma_\nu, \quad (3.114)$$

können wir dabei wie gewohnt auch in der Form

$$\overline{j}_\mu^{lat}(x) := \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \} \quad (3.115)$$

schreiben. Dabei haben wir an $\mathcal{G}_{\rho\tau}$ die Anforderung $\mathcal{G}_{\rho\tau} = F_{\rho\tau} + \mathcal{O}(a^2)$ gestellt und können daher z.B.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu,\nu}(x) &= \frac{1}{2} (\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x)) \\ \mathcal{G}_{\mu,\nu}(x) &= \frac{1}{2} (\mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x)) \end{aligned} \quad (3.116)$$

oder das volle Clover-Blatt

$$\mathcal{G}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{4} (\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x)) \quad (3.117)$$

wählen.

Ingesamt hat sich also unsere Erwartung bestätigt, daß aufgrund der symmetrischen Wahl der Lagrange-Dichte und der Supersymmetrie-Transformationen eine Wahl des Superstromes möglich wird, die die Einhaltung der Supersymmetrie auf dem Gitter bis in die erste Ordnung von a einschließlich gewährleistet. Dazu sei daran erinnert, daß sowohl die symmetrisierte Lagrange-Dichte als auch die erweiterten Transformationen ihren Kontinuumslikes bis in die erste Ordnung von a einschließlich reproduzieren und daß dies auch für unsere Wahl des Superstromes und die symmetrische Gitterableitung gilt.

Bisher ist der Teil der Wirkung unberücksichtigt geblieben, der proportional zum Wilson-Parameter r ist. Die entsprechenden Betrachtungen möchte ich nun nachholen.

3.9 Wilson-Fermionen

Der r -proportionale Teil der Wirkung ist (vgl. z.B. [CV]):

$$\begin{aligned} S_{f,Wil} &= -r \frac{1}{2a} a^4 \sum_{x,\mu} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) - 2\bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\} \\ &= -r \frac{1}{2a} a^4 \sum_{x,\mu} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) - 2\bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Man rechnet unmittelbar nach, daß sich dies als

$$\begin{aligned}
S_{f,Wil} &= a^4 \sum_x \text{Tr} \left\{ -r \frac{1}{2} a \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{D}_\mu^{lat,b} \lambda(x) \right\} \\
&= a^4 \sum_x \text{Tr} \left\{ -r \frac{1}{2} a \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,b} \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right\} \\
&= a^4 \sum_x \text{Tr} \left\{ r \frac{1}{2} a \mathcal{D}_\mu^{lat,b} \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,b} \lambda(x) \right\} \\
&= a^4 \sum_x \text{Tr} \left\{ r \frac{1}{2} a \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right\}
\end{aligned} \tag{3.119}$$

schreiben läßt. Dabei haben wir $\mathcal{D}_\mu^{lat,f} = -\mathcal{D}_\mu^{lat,b\dagger}$ benutzt, man ziehe hierzu auch den Anhang heran. Wir wollen also von der Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{f,Wil}(x) &= r \frac{1}{2} a \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right\} \\
&= r \frac{1}{2} a \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \frac{1}{a} \left(U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \bar{\lambda}(x) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{1}{a} \left(U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x) \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.120}$$

ausgehen. Damit wird sofort

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda \mathcal{L}_{f,Wil}(x) &= r \frac{1}{2} a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon} \sigma_{\rho\tau} (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.121}$$

Also trägt dieser Term erst in Ordnung a bei. Die δU -Variation ergibt

$$\begin{aligned}
&\delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}(x) \\
&= rg \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \right. \\
&\quad + U_\mu^\dagger(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \\
&\quad - U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \\
&\quad \left. - U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \right\} \\
&= rag \sum_\mu \text{Tr} \left\{ [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x), U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x)] \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right. \\
&\quad \left. + U_\mu^\dagger(x) [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}), \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu})] U_\mu(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right\}
\end{aligned} \tag{3.122}$$

Auch hier verschwindet der nullte Term des Kontinuumslikes.

Genauer findet man

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda \mathcal{L}_{f,Wil}(x) &= -ra \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau}(x)) \right\} \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \\
&\quad + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned} \tag{3.123}$$

sowie

$$\delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}(x) = 2rag \text{Tr} \left\{ [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x), \bar{\lambda}(x)] \mathcal{D}_\mu \lambda(x) \right\} + \mathcal{O}(a^2). \quad (3.124)$$

In Kapitel 2 waren wir von der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{f,Wil}(x) = -r \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right\} \quad (3.125)$$

ausgegangen und hatten gesehen, daß ihre Variation einen Beitrag

$$r \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \} \quad (3.126)$$

zum Superstrom liefert. In diesem Abschnitt haben wir nun eine etwas andere Lagrange-Dichte gewählt und können diesen Beitrag umgehen. Dies hat die folgende Ursache: Mit der Dichte aus Kapitel 2 schreibt sich der r -proportionale Teil der Gitter-Wirkung als

$$S_{f,Wil} = -ra^4 \sum_x \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right\}. \quad (3.127)$$

Mit den Rechenregeln für Majorana-Spinoren kann man dies als

$$S_{f,Wil} = -ra^4 \frac{1}{2} \sum_x \sum_\mu \text{Tr} \left\{ (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x)) \lambda(x) + \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right\} \quad (3.128)$$

schreiben. Mittels partieller Integration des ersten Summanden erhält man hieraus

$$S_{f,Wil} = -ra^4 \frac{1}{2} \sum_x \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} - \mathcal{D}_\mu^{lat,b}) \lambda(x) \right\}, \quad (3.129)$$

was sich aber auch als

$$\begin{aligned} S_{f,Wil} &= -ra \cdot a^4 \frac{1}{2} \sum_x \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,b} \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right\} \\ &= ra \cdot a^4 \frac{1}{2} \sum_x \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \lambda(x) \right\} \end{aligned} \quad (3.130)$$

auffassen läßt. Nun haben wir aber bei den partiellen Integrationen die Randterme außer acht gelassen, diese treten z.T. in nullter Ordnung von a auf. Dieses Auslassen von Randtermen in der Wirkung bzw. ihrer Variation ist aber äquivalent zur Integration über ihre totale Divergenz, also zu einem Zusatzbeitrag im Superstrom. Diesen Beitrag hatten wir in Kapitel 2 beobachtet.

Alternativ kann auch die (symmetrischere) Wahl

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f,Wil} &= \text{Tr} \left\{ -r \frac{1}{2} a \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{D}_\mu^{lat,b} \lambda(x) \right\} \\ &= -r \frac{1}{2a} \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) - 2\bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\} \end{aligned} \quad (3.131)$$

benutzt werden. Sie führt auf

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_{f,Wil}(x) = & -r \frac{1}{2} a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon} \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{D}_\mu^{lat,b} \lambda(x) \right. \\ & \left. - \bar{\lambda}(x) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon (\mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{D}_\mu^{lat,b} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \right\} \end{aligned} \quad (3.132)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}(x) = & -\frac{r}{2} g \sum_\mu \left\{ \bar{\lambda}(x) [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x), U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x)] \right. \\ & + \bar{\lambda}(x) U_\mu^\dagger(x) [\bar{\varepsilon} \lambda(x + a\hat{\mu}), \lambda(x + a\hat{\mu})] U_\mu(x) \\ & - \bar{\varepsilon} [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x), U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu})] \\ & \left. - \bar{\lambda}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x - a\hat{\mu}), \lambda(x - a\hat{\mu})] U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \right\} \end{aligned} \quad (3.133)$$

3.10 Zusammenfassung

An dieser Stelle soll noch einmal eine Übersicht über die bisher erzielten Resultate gegeben werden. Wir haben die Lagrange-Dichte gemäß

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_g(x) + \mathcal{L}_f(x) + \mathcal{L}_{f,Wil}(x) \quad (3.134)$$

definiert, wobei noch ein Massenterm der Form

$$\mathcal{L}_m(x) = m_0 \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \} \quad (3.135)$$

hinzugefügt werden kann. Die einzelnen Beiträge waren durch

$$\mathcal{L}_g(x) = \frac{1}{a^4} \frac{4}{g^2} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq 4} \left[1 - \frac{1}{8} \text{Tr} (U_{\mu\nu}(x) + U_{-\mu,-\nu}(x) + U_{\nu\mu}(x) + U_{-\nu,-\mu}(x)) \right] \quad (3.136)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f(x) = & \frac{1}{2a} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \left(U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \right. \\ & \left. \left. - U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.137)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f,Wil}(x) = & r \frac{1}{2} a \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \frac{1}{a} \left(U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \bar{\lambda}(x) \right) \right. \\ & \left. \cdot \frac{1}{a} \left(U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.138)$$

gegeben. Die Anwendung der Transformationen

$$\delta U_\mu(x) = -ag U_\mu(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) - ag \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \quad (3.139)$$

$$\delta U_\mu^\dagger(x) = +ag \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) + ag U_\mu^\dagger(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}). \quad (3.140)$$

und

$$\delta\lambda(x) = -\frac{i}{g}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho,\tau}(x)\varepsilon \quad (3.141)$$

$$\delta\bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g}\bar{\varepsilon}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho,\tau}(x) \quad (3.142)$$

liefert dann⁴

$$\delta(\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}_m(x)) = \Delta_\mu^{sym}\bar{j}_\mu^{lat}(y)\varepsilon + \mathcal{X}_S(x) + D_S(x). \quad (3.143)$$

Dabei haben wir als Superstrom

$$\bar{j}_\mu^{lat}(x) := \frac{i}{g}\text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x)\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu \} \quad (3.144)$$

gewählt, und es ist

$$D_S(x) = \delta_\lambda\mathcal{L}_m(x) = 2m_0\frac{i}{g}\text{Tr} \{ \bar{\varepsilon}\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)\lambda(x) \} \quad (3.145)$$

die Variation des Masseterms. Es ist daher dann

$$\mathcal{X}_S(x) = \delta\mathcal{L}(x) - \Delta_\mu^{sym}\bar{j}_\mu^{lat}(x)\varepsilon. \quad (3.146)$$

Nun hatten wir gesehen, daß

$$\delta\mathcal{L}(x) = \delta_U\mathcal{L}_g(x) + \delta_U\mathcal{L}_f(x) + \delta_\lambda\mathcal{L}_f(x) + \delta_U\mathcal{L}_{f,Wil}(x) + \delta_\lambda\mathcal{L}_{f,Wil}(x), \quad (3.147)$$

also gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_S(x) &= \delta_U\mathcal{L}_g(x) + \delta_U\mathcal{L}_f(x) + \delta_\lambda\mathcal{L}_f(x) - \Delta_\mu^{sym}\bar{j}_\mu^{lat}(x)\varepsilon \\ &\quad + \delta_U\mathcal{L}_{f,Wil}(x) + \delta_\lambda\mathcal{L}_{f,Wil}(x). \end{aligned} \quad (3.148)$$

Die einzelnen Beiträge sind durch die folgenden exakten Gitterausdrücke gegeben:

$$\begin{aligned} \delta_U\mathcal{L}_g(x) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{a^4g^2}ag \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} \left\{ \right. \\ &\quad + \bar{\varepsilon}\gamma_\nu\lambda(x)(U_{\mu,\nu}(x) - U_{\mu,\nu}^\dagger(x) - U_{-\mu,-\nu}(x) + U_{-\mu,-\nu}^\dagger(x)) \\ &\quad - \bar{\varepsilon}\gamma_\nu\lambda(x + a\hat{\mu})(U_{\nu,-\mu}(x + a\hat{\mu}) - U_{\nu,-\mu}^\dagger(x + a\hat{\mu})) \\ &\quad - \bar{\varepsilon}\gamma_\nu\lambda(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})(U_{-\mu,-\nu}(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu}) - U_{-\mu,-\nu}^\dagger(x + a\hat{\mu} + a\hat{\nu})) \\ &\quad + \bar{\varepsilon}\gamma_\nu\lambda(x + a\hat{\nu})(U_{-\nu,\mu}(x + a\hat{\nu}) - U_{-\nu,\mu}^\dagger(x + a\hat{\nu})) \\ &\quad - \bar{\varepsilon}\gamma_\nu\lambda(x - a\hat{\nu})(U_{\nu,-\mu}(x - a\hat{\nu}) - U_{\nu,-\mu}^\dagger(x - a\hat{\nu})) \\ &\quad + \bar{\varepsilon}\gamma_\nu\lambda(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu})(U_{\mu,\nu}(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu}) - U_{\mu,\nu}^\dagger(x - a\hat{\mu} - a\hat{\nu})) \\ &\quad \left. + \bar{\varepsilon}\gamma_\nu\lambda(x - a\hat{\mu})(U_{-\nu,\mu}(x - a\hat{\mu}) - U_{-\nu,\mu}^\dagger(x - a\hat{\mu})) \right\} \end{aligned}$$

⁴Den Brechungsterm bezeichnen wir hier mit einem geschwungenen $\mathcal{X}_S$, um ihn vom entsprechenden Term X_S in den Ward-Identitäten zu unterscheiden (vgl. Kap. 4).

$$\begin{aligned}
\delta_U \mathcal{L}_f(x) &= \frac{1}{2} g \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x), U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x)] \right. \\
&\quad + \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x), U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu})] \\
&\quad + \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}), \lambda(x + a\hat{\mu})] U_\mu(x) \\
&\quad \left. + \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu(x - a\hat{\mu}) [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x - a\hat{\mu}), \lambda(x - a\hat{\mu})] U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \right\} \\
\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \frac{i}{g} \text{Tr} \left((\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \bar{\lambda}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \varepsilon \right. \\
&\quad \left. - \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \varepsilon \right) \\
\Delta_\mu^{sym} \overline{j}_\mu^{lat}(x) \varepsilon &= \Delta_\mu^{sym} \left(\frac{i}{g} \text{Tr} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau}) + \frac{4}{g} \text{Tr} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \right) \varepsilon \\
\delta_U \mathcal{L}_{f, Wil}(x) &= r g \sum_\mu \text{Tr} \left\{ \right. \\
&\quad \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \\
&\quad + U_\mu^\dagger(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \\
&\quad - U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \\
&\quad \left. - U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \right\} \\
&= r a g \sum_\mu \text{Tr} \left\{ [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x), U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x)] \mathcal{D}_\mu^{lat, f} \lambda(x) \right. \\
&\quad \left. + U_\mu^\dagger(x) [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}), \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu})] U_\mu(x) \mathcal{D}_\mu^{lat, f} \lambda(x) \right\} \\
\delta_\lambda \mathcal{L}_{f, Wil}(x) &= r \frac{1}{2} a \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon} \sigma_{\rho\tau} (\mathcal{D}_\mu^{lat, f} \mathcal{G}_{\rho, \tau}(x)) \mathcal{D}_\mu^{lat, f} \lambda(x) \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{D}_\mu^{lat, f} \bar{\lambda}(x) \sigma_{\rho\tau} \varepsilon (\mathcal{D}_\mu^{lat, f} \mathcal{G}_{\rho, \tau}(x)) \right\}. \tag{3.149}
\end{aligned}$$

Beachte, daß $\mathcal{G}$ eine exakte Gittergröße ist.

Die wesentliche Aussage dieses Kapitels ist:

$$\begin{aligned}
\delta_U \mathcal{L}_g(x) + \delta_U \mathcal{L}_f(x) + \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) - \Delta_\mu^{sym} \overline{j}_\mu^{lat}(x) \varepsilon &= 0 + \mathcal{O}(a^2), \\
\delta_U \mathcal{L}_{f, Wil}(x) + \delta_\lambda \mathcal{L}_{f, Wil}(x) &= 0 + r \cdot \mathcal{O}(a) \tag{3.150}
\end{aligned}$$

so daß

$$\mathcal{X}_S(x) = \mathcal{O}(a^2) + r \cdot \mathcal{O}(a). \tag{3.151}$$

Also wird die Variation der Lagrange-Dichte des Kontinuums bis auf quadratische Terme in a reproduziert, falls man von den Wilson-Fermionen absieht. Diese hingegen erzeugen Störterme bereits in Ordnung a , denn ihre Einführung geschieht ja gerade durch Hinzufügen eines $\mathcal{O}(a)$ -Terms zur Wirkung. Man beachte, daß dieser Term im Kontinuum kein Analogon findet.

Terme der gleichen Art bei der δ_λ -Variation der Fermion-Wirkung erhalten:

$$\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) = \frac{1}{2a} \frac{i}{g} \sum_{\mu, \rho, \tau} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1: } \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \text{ (diamond) connected to } \gamma_\mu \text{ (circle) at } x \\ \text{Diagram 2: } \gamma_\mu \text{ (circle) connected to } \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \text{ (diamond) at } x \\ \text{Diagram 3: } \gamma_\mu \text{ (circle) connected to } \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \text{ (diamond) at } x \\ \text{Diagram 4: } \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \text{ (diamond) connected to } \gamma_\mu \text{ (circle) at } x \end{array} \right] \quad (3.159)$$

Allerdings weist der Curci-Veneziano-Strom bereits in Ordnung a Abweichungen vom Kontinuumsstrom auf, wenn man davon ausgeht, daß $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)$ so gewählt wird, daß $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) = F_{\rho\tau}(x) + \mathcal{O}(a^2)$. Somit würde die Curci-Veneziano-Wahl des Stroms unser Ergebnis $\delta\mathcal{L}(x) = \Delta_\mu^{sym} \bar{j}_\mu^{lat}(x) \varepsilon + \mathcal{O}(a^2) + r\mathcal{O}(a)$ also wieder zunichte machen. Es wäre allenfalls denkbar, die Separation von Clover-Plaquette $\mathcal{G}$ und Fermion $\bar{\lambda}$ symmetrisch zu gestalten, also etwa

$$\bar{j}_\mu^{lat}(x) = \frac{1}{2} \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu + \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \right\} \quad (3.160)$$

zu wählen und bei der symmetrischen Wahl der Gitter-Ableitung zu bleiben. Dann gilt weiterhin

$$\delta\mathcal{L}(x) = \Delta_\mu^{sym} \bar{j}_\mu^{lat}(x) \varepsilon + \mathcal{O}(a^2) + r\mathcal{O}(a). \quad (3.161)$$

Wir werden nun eine weitere Version des Stromes konstruieren, die es erlaubt einen Teil der Terme in Ordnung a^2 und höher zu eliminieren. Dazu macht man für zwei auf dem Gitter definierte Funktionen f und g folgende interessante Beobachtung⁶:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} f(x)) g(x) + f(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} g(x)) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \Delta_\mu^b(f(x) U_\mu^\dagger(x) g(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x) f(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) g(x)) \right. \\ & \quad \left. + U_\mu^\dagger(x) f(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) g(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Wie man erkennt, erlaubt es diese Gleichung, die Störterme auf dem Gitter zu beseitigen, die aus der nicht exakt gültigen Leibniz-Regel für die symmetrische kovariante Ableitung stammen. Der Nachweis von (3.162) verläuft wie folgt (dabei erfolgt keine Summation über μ):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \Delta_\mu^b(f(x) U_\mu^\dagger(x) g(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x) f(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) g(x)) \right\} \\ &= \frac{1}{2a} \text{Tr} \left\{ f(x) U_\mu^\dagger(x) g(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x) f(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) g(x) \right\} \end{aligned}$$

⁶Die folgende Gleichung ist eng mit der Tatsache verknüpft, daß $\mathcal{D}_\mu^{lat, sym}$ antihermitesch im Sinne von Anhang F ist.

$$\begin{aligned}
& -f(x - a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu})g(x)U_\mu(x - a\hat{\mu}) \\
& -U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu})f(x)U_\mu(x - a\hat{\mu})g(x - a\hat{\mu}) \Big\} \\
= & \frac{1}{2a}\text{Tr} \Big\{ f(x)U_\mu^\dagger(x)g(x + a\hat{\mu})U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x)f(x + a\hat{\mu})U_\mu(x)g(x) \\
& -U_\mu(x - a\hat{\mu})f(x - a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu})g(x) \\
& -f(x)U_\mu(x - a\hat{\mu})g(x - a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \Big\} \\
= & \frac{1}{2a}\text{Tr} \Big\{ U_\mu^\dagger(x)f(x + a\hat{\mu})U_\mu(x)g(x) - U_\mu(x - a\hat{\mu})f(x - a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu})g(x) \\
& +f(x)U_\mu^\dagger(x)g(x + a\hat{\mu})U_\mu(x) - f(x)U_\mu(x - a\hat{\mu})g(x - a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \Big\} \\
= & \text{Tr} \Big\{ (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} f(x))g(x) + f(x)(\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} g(x)) \Big\}.
\end{aligned} \tag{3.163}$$

Wir hatten in (3.62) gesehen, daß

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) = & \frac{i}{g}\text{Tr} \Big\{ (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \bar{\lambda}(x))\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)\varepsilon \\
& -\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x))\varepsilon \Big\}.
\end{aligned} \tag{3.164}$$

Anwenden der gerade gefundenen Regel macht hieraus

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) = & \text{Tr} \Big\{ \\
& \frac{1}{2}\frac{i}{g}\Delta_\mu^b \Big(\bar{\lambda}(x)U_\mu^\dagger(x)\mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu})U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x)\bar{\lambda}(x + a\hat{\mu})U_\mu(x)\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \Big) \\
& -2\frac{i}{g}\bar{\lambda}(x)(\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \Big\} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.165}$$

Die Benutzung von

$$\gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} = i(\delta_{\mu\rho}\gamma_\tau - \delta_{\mu\tau}\gamma_\rho) - i\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}\gamma_\nu\gamma_5 \tag{3.166}$$

liefert dann

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) = & \text{Tr} \Big\{ \\
& \frac{1}{2}\frac{i}{g}\Delta_\mu^b \Big(\bar{\lambda}(x)U_\mu^\dagger(x)\mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu})U_\mu(x) \\
& +U_\mu^\dagger(x)\bar{\lambda}(x + a\hat{\mu})U_\mu(x)\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \Big) \Big\} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon \\
& +\frac{4}{g}\text{Tr} \Big\{ \bar{\lambda}(x)(\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \Big\} \gamma_\nu \varepsilon \\
& -\frac{2}{g}\text{Tr} \Big\{ \bar{\lambda}(x)(\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \Big\} \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}\gamma_\nu\gamma_5 \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.167}$$

Man erkennt, daß durch die Wahl von

$$\overline{j_{f,\mu}}^{lat}(x) := \frac{1}{2} \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) U_\mu^\dagger(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \right\} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \quad (3.168)$$

und die Verwendung der Gitter-Rückwärts-Divergenz eine in höheren Ordnungen von a verbesserte Erhaltung des fermionischen Anteils des Stromes erreicht werden kann. Es entfallen alle Terme, die aufgrund der Verletzung der Leibniz-Regel auf dem Gitter auftreten. Die Störungen der Bianchi-Identität können mit diesem Verfahren hingegen nicht beseitigt werden.

Diesem Ergebnis zufolge scheint es also günstig, im Superstrom das Fermion und die Clover-Plaquetten durch zusätzliche Eichlinks zu trennen. Allerdings geschieht dies in anderer Weise als in [CV] und lehnt sich mehr an die Behandlung der chiralen Symmetrie an, auch dort unterscheidet man lokale und bilokale Ströme (engl. *point-split currents*), vgl. hierzu z.B. [MM] oder [Un]. Um ein einheitliches Bild zu wahren, werden wir dieses Verfahren nun auch auf den Eichanteil des Stromes anwenden und zeigen, daß auch in diesem Teil der Wirkung die Verwendung eines nicht-lokalen Stromes möglich ist. Dazu definiert man

$$\overline{j_{g,\mu}}^{lat}(x) := \frac{1}{2} \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\lambda}(x) \right\} \gamma_\nu \quad (3.169)$$

und erkennt

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \Delta_\mu^b \overline{j_{f,\mu}}(x) \} &= \frac{1}{2} \frac{4}{g} \frac{1}{a} \text{Tr} \left\{ \right. \\ &\quad \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) + \mathcal{G}_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\lambda}(x) U_\mu^\dagger(x) \\ &\quad - \mathcal{G}_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \\ &\quad \left. - \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \right\} \gamma_\nu. \end{aligned} \quad (3.170)$$

Die Entwicklung nach a ergibt:

$$\text{Tr} \{ \Delta_\mu^b \overline{j_{f,\mu}}(x) \} = \partial_\mu \frac{4}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x) \right\} \gamma_\nu + \mathcal{O}(a^2), \quad (3.171)$$

also Übereinstimmung mit dem Kontinuum bis in Ordnung a inklusive.

Wir können also abschließend feststellen, daß uns durch die Definition

$$\overline{j_\mu}^{lat}(x) = \frac{1}{2} \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\lambda}(x) \right\} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \quad (3.172)$$

eine weitere Verbesserung des Superstromes gelungen ist. Zwar gilt immer noch

$$\delta \mathcal{L}^{lat}(x) = \Delta_\mu^b \overline{j_\mu}^{lat}(x) \varepsilon + \mathcal{O}(a^2) + r \mathcal{O}(a), \quad (3.173)$$

aber es konnten einige Terme der höheren Ordnungen vollständig eliminiert werden.

Kapitel 4

Ward-Identitäten

In den vorigen Kapiteln wurde die Symmetrie der Kontinuums- bzw. Gitter-Lagrange-Dichte unter den SUSY-Transformationen untersucht und festgestellt, daß sich diese – auf dem Gitter mit gewissen Einschränkungen – als Viererdivergenz eines geeigneten Stromes j_μ schreiben läßt. Hieraus folgert man, daß die zugehörige Wirkung invariant ist unter den SUSY-Transformationen mit globalem Parameter ε . Dem Noether-Theorem zufolge induziert jede solche Symmetrie einen klassisch erhaltenen Strom, den sogenannten Noether-Strom, den ich hier mit S_μ bezeichnen möchte und dessen konkrete Form im Kontinuum und auf dem Gitter in diesem Kapitel ermittelt werden soll. Aus der o.g. Symmetrie der Wirkung lassen sich durch den formalen Übergang zu lokalen Transformationen, Anwenden auf die Wirkung und anschließende funktionale Differentiation nach dem Transformationsparameter ferner die zugehörigen Ward-Identitäten ermitteln, also Beziehungen zwischen den verschiedenen Greens-Funktionen der Theorie herstellen. In diesen Gleichungen spiegelt sich erneut die Invarianz der Wirkung wider.

In dem vorliegenden Kapitel leite ich daher die supersymmetrischen Ward-Identitäten im Kontinuum und auf dem Gitter her und diskutiere, wie sich dort die Brechung der Supersymmetrie auf dem Gitter äußert. Zum Abschluß des Kapitels wende ich mich im Hinblick auf die störungstheoretischen Betrachtungen in Kapitel 5 noch kurz der chiralen Symmetrie zu.

4.1 Der Noether-Strom

4.1.1 Symmetrie und Stromerhaltung

Wir betrachten den Allgemeinfall einer Wirkung $S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, die unter der globalen Transformation

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x) \tag{4.1}$$

invariant sei, wobei ε in $\delta\phi(x) = \varepsilon \Delta\phi(x)$ ein konstanter infinitesimaler Parameter der Transformation ist. (Ohne Einschränkung nehmen wir dabei an, daß ε ein Skalar ist, d.h. wir unterscheiden nicht zwischen $\bar{\varepsilon}$ und ε .) Die transformierten Felder werden durch einen oberen Index ε gekennzeichnet. Ich notiere hier stets nur ein Feld $\phi(x)$, im Fall der Super-Yang-Mills-Theorie muß man sich $\phi(x)$ also als Kollektion der Felder $\lambda(x)$, $\bar{\lambda}(x)$ und $A_\mu(x)$

vorstellen¹. Wir wollen nun davon ausgehen, daß sich die Invarianz der Wirkung unter (4.1) in der Variation der Lagrange-Dichte wie im Fall der Super-Yang-Mills-Theorie durch

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \varepsilon \partial_\mu j_\mu(x) \quad (4.2)$$

äußert. Andererseits gilt aber

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta \phi) \\ &= \varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Delta \phi + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\Delta \phi) \\ &= \varepsilon \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \Delta \phi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Erfüllt das Feld ϕ die klassischen Bewegungsgleichungen, so verschwindet die zweite Klammer, und man erhält

$$\delta \mathcal{L}(x) = \varepsilon \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \Delta \phi(x) \right). \quad (4.4)$$

Dann gilt also

$$\varepsilon \partial_\mu j_\mu(x) = \varepsilon \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \Delta \phi(x) \right), \quad (4.5)$$

und der Strom

$$S_\mu(x) := \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \Delta \phi(x) - j_\mu(x) \quad (4.6)$$

ist im Sinne von $\partial_\mu S_\mu = 0$ klassisch erhalten, falls die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllt sind. Wir werden später sehen, daß genau dieser Strom auch in den Ward-Identitäten auftritt, in denen sich die Invarianz der Theorie aus quantenmechanischer Sicht manifestiert.

Man bezeichnet ihn als den Noether-Strom, der Grund für seine Erhaltung ist die Invarianz der Wirkung unter (4.1) bzw. genauer das Verhalten der Lagrange-Dichte unter diesen Transformationen. Man beachte, daß wir hier nur globale Transformationen betrachtet haben, ist der Parameter ε ortsabhängig, so brauchen weder $\delta S = 0$ noch $\delta \mathcal{L}(x) = \varepsilon(x) \partial_\mu j_\mu(x)$ erfüllt zu sein.

4.1.2 Der Noether-Strom für die $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie im Kontinuum

Als nächstes soll der Noether-Strom für unsere Theorie im Kontinuum berechnet werden. Nach dem oben Gesagten ist dann eine Ableitung der Form $\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial_\mu \lambda(x))}$ auszuführen, und ich möchte spezifizieren, was damit gemeint ist, bevor wir mit der Rechnung weiter vorschreiten. Ich verwende dazu griechische Buchstaben, um die Spinorkomponenten von λ kenntlich zu machen, d.h. wir schreiben $\lambda^\alpha = \lambda^{a,\alpha} T^a$ für die α -te Komponente von λ ,

¹Dabei sind $\bar{\lambda}$ und λ aufgrund der Majorana-Eigenschaft aber nicht unabhängig voneinander.

a kennzeichnet nach wie vor die Farbstruktur. Die β -Komponente der spinoriellen Größe $\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \lambda(x))}$ ist dann durch

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \lambda(x))} \right)^{b,\beta} := \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \lambda^{b,\beta}(x))} \quad (4.7)$$

erklärt. Mit Hilfe der Zerlegung

$$\begin{aligned} & \text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x)\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{\lambda}^a(x)\gamma_\mu \partial_\mu \lambda^a(x) + g f_{abc} \bar{\lambda}^a(x)\gamma_\mu A_\mu^b(x) \lambda^c(x) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\bar{\lambda}^{a,\alpha}(x)\gamma_\mu^{\alpha\beta} \partial_\mu \lambda^{a,\beta}(x) + g f_{abc} \bar{\lambda}^{a,\alpha}(x)\gamma_\mu^{\alpha\beta} A_\mu^b(x) \lambda^{c,\beta}(x) \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

ergibt sich daher z.B.²

$$\left(\frac{\partial(\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)\gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x)\})}{\partial(\partial_\mu \lambda(x))} \right)^{b,\beta} = \frac{1}{2} \bar{\lambda}^{b,\alpha}(x) \gamma_\mu^{\alpha\beta}. \quad (4.9)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt mit der Berechnung des gesuchten Noether-Stroms beginnen. Wir wissen bereits, daß die Lagrange-Dichte unter den (globalen) SUSY-Transformationen gemäß

$$\delta \mathcal{L}(x) = \partial_\mu \left(\frac{4}{g} \text{Tr}\{\bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x)\} \gamma_\nu + \frac{i}{g} \text{Tr}\{\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)\} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \right) \varepsilon \quad (4.10)$$

variiert. Also ist

$$\bar{j}_\mu(x) = \frac{4}{g} \text{Tr}\{\bar{\lambda}(x) F_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu\} + \frac{i}{g} \text{Tr}\{\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau}\} \quad (4.11)$$

bzw.

$$j_\mu(x) = -\frac{4}{g} \text{Tr}\{F_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu \lambda(x)\} + \frac{i}{g} \text{Tr}\{F_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda(x)\}. \quad (4.12)$$

Nun ist die Lagrange-Dichte der Theorie durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= -\frac{1}{2g^2} \text{Tr}\left\{(\partial_\rho A_\tau(x) - \partial_\tau A_\rho(x) + [A_\rho(x), A_\tau(x)])^2\right\} \\ &\quad + \text{Tr}\{\bar{\lambda}(x) \gamma_\rho \partial_\rho \lambda(x) + \bar{\lambda}(x) \gamma_\rho [A_\rho(x), \lambda(x)]\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

gegeben, daher gilt den obigen Vorbemerkungen zufolge (man beachte, daß $\Delta\lambda$ eine Matrix in den Spinor-Indizes ist)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \lambda)} \Delta\lambda \right)^\delta &\equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \lambda)} \right)^{b,\beta} \Delta\lambda^{b,\beta\delta} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^{b,\alpha} \gamma_\mu^{\alpha\beta} \Delta\lambda^{b,\beta\delta} \\ &= \frac{1}{2} \bar{\lambda}^{b,\alpha} \gamma_\mu^{\alpha\beta} \left(-\frac{i}{g} \sigma_{\rho\tau}^{\beta\delta} F_{\rho\tau}^b \right) \\ &= -\frac{i}{g} \frac{1}{2} (\bar{\lambda}^b \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau})^\delta F_{\rho\tau}^b \\ &= -\frac{i}{g} \text{Tr}\left\{(\bar{\lambda} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau})^\delta F_{\rho\tau}\right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

²Da die auftretenden Spinoren Grassmann-wertig sind, handelt es sich bei der hier verwendeten Ableitung nach $\partial_\mu \lambda$ genau genommen um eine Ableitung nach Grassmann-Variablen, die nach links wirkt.

Insgesamt notieren wir daher

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \lambda)} \Delta \lambda \right) = -\frac{i}{g} \text{Tr} \{ (\bar{\lambda} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau}) F_{\rho\tau} \} \quad (4.15)$$

als Identität zwischen spinoriellen Größen. Aufgrund der Majorana-Eigenschaft von λ brauchen wir die Ableitung nach $\partial_\mu \bar{\lambda}$ bei der Bestimmung des Noether-Stroms nicht gesondert zu berücksichtigen.

Außerdem gilt nach analoger Vorgehensweise

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \Delta A_\nu &= -2 \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \{ (-2g \bar{\lambda} \gamma_\nu) F_{\mu\nu} - (-2g \bar{\lambda} \gamma_\nu) F_{\nu\mu} \} \\ &= \frac{4}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda} \gamma_\nu F_{\mu\nu} \}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Zur Erinnerung sei auf $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ hingewiesen. Insgesamt wird damit

$$\begin{aligned} \bar{S}_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \lambda)} \Delta \lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \Delta A_\nu - \bar{j}_\mu \\ &= -2 \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda} F_{\rho\tau} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Zusammenfassend können wir also sagen, daß der Strom, dessen Divergenz in der Variation der Lagrange-Dichte (unter globalen Transformationen) auftritt, durch

$$\begin{aligned} \bar{j}_\mu(x) &= \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \} \\ j_\mu(x) &= \frac{i}{g} \text{Tr} \{ F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \lambda(x) \} \end{aligned} \quad (4.18)$$

gegeben ist, der klassisch divergenzfreie Noether-Strom hingegen durch

$$\begin{aligned} \bar{S}_\mu(x) &= -2 \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \} \\ S_\mu(x) &= -2 \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu F_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Bis auf den Vorfaktor besteht der Unterschied zwischen j_μ und S_μ also nur in der Reihenfolge von γ_μ und $\sigma_{\rho\tau}$. Man beachte, daß diese Matrizen im Euklidischen nicht trivial kommutieren.

4.2 Ward-Identität für den Superstrom

4.2.1 Kontinuum

Wir betrachten zunächst wieder den allgemeinen Fall einer Theorie mit Wirkung $S[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4x$. Unter globalen Transformationen

$$\phi(x) \rightarrow \phi^\varepsilon(x) := \phi(x) + \delta\phi(x) = \phi(x) + \varepsilon \Delta\phi(x) \equiv \phi^\varepsilon(x) \quad (4.20)$$

gelte also

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \varepsilon \partial_\mu j_\mu(x). \quad (4.21)$$

Zur Herleitung der Ward-Identitäten gehen wir formal zu einer lokalen Transformation über, d.h. wir wählen ε ortsabhängig, also $\delta\phi(x) = \varepsilon(x)\Delta\phi(x)$. Dann gilt aber

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\partial_\mu(\delta\phi(x)) \\ &= \varepsilon(x)\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi(x)}\Delta\phi(x) + \varepsilon(x)\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\partial_\mu(\Delta\phi(x)) + (\partial_\mu\varepsilon(x))\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\Delta\phi(x) \\ &= \varepsilon(x)\partial_\mu j_\mu(x) + (\partial_\mu\varepsilon(x))\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\Delta\phi(x). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Unter den lokalen Transformationen braucht die Wirkung also nicht mehr invariant zu sein, vielmehr gilt

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \delta\mathcal{L}(x) \\ &= \int d^4x \varepsilon(x)\partial_\mu j_\mu(x) + (\partial_\mu\varepsilon(x))\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\Delta\phi(x) \\ &= \int d^4x \varepsilon(x)\partial_\mu j_\mu(x) - \varepsilon(x)\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\Delta\phi(x) \right) \\ &= - \int d^4x \varepsilon(x)\partial_\mu S_\mu(x), \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei

$$S_\mu(x) := \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\Delta\phi(x) - j_\mu(x) \quad (4.24)$$

der Noether-Strom aus (4.6) ist. Man beachte, daß seine Divergenz klassisch nur für Feldkonfigurationen verschwindet, für die die Euler-Lagrange-Gleichungen erfüllt sind. Um nun die gesuchten Ward-Identitäten herzuleiten, starten wir mit dem erzeugenden Funktional der Greens-Funktionen

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\{-S[\phi] - S_{qu}[\phi, J]\}. \quad (4.25)$$

Dabei ist $S_{qu}[\phi, J] = (\phi, J) = \int d^4x \phi(x)J(x)$ der Quellterm. Nach Uparametrisierung der Integrationsvariablen ist sicher

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi^\varepsilon \exp\{-S[\phi^\varepsilon] - S_{qu}[\phi^\varepsilon, J]\}, \quad (4.26)$$

und bei Invarianz des Maßes folgt dann

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp\{-S[\phi^\varepsilon] - S_{qu}[\phi^\varepsilon, J]\} =: Z[J, \varepsilon]. \quad (4.27)$$

Es sei daran erinnert, daß mit ϕ^ε die nach (4.1) (bzw. einer nicht-lokalen Variante hiervon) transformierten Felder gemeint sind. Dies zeigt nun aber, daß $Z[J, \varepsilon] = Z[J, 0]$, daß $Z[J, \varepsilon]$ also von der speziellen Form von $\varepsilon(x)$ unabhängig ist, d.h. also insbesondere

$$\left. \frac{\delta Z[J, \varepsilon]}{\delta \varepsilon(x)} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (4.28)$$

Explizit ist aber

$$\left. \frac{\delta Z[J, \varepsilon]}{\delta \varepsilon(x)} \right|_{\varepsilon=0} = - \int \mathcal{D}\phi \left(\left. \frac{\delta S[\phi^\varepsilon]}{\delta \varepsilon(x)} \right|_{\varepsilon=0} + \left. \frac{\delta S_{qu}[\phi^\varepsilon, J]}{\delta \varepsilon(x)} \right|_{\varepsilon=0} \right) \exp\{-S[\phi] - S_{qu}[\phi, J]\}. \quad (4.29)$$

Aus (4.23) und der Definition von $S_{qu} = (J, \phi)$ gewinnt man

$$\left. \frac{\delta S[\phi^\varepsilon]}{\delta \varepsilon(x)} \right|_{\varepsilon=0} = -\partial_\mu S_\mu(x) \quad (4.30)$$

sowie

$$\left. \frac{\delta S_{qu}[\phi^\varepsilon, J]}{\delta \varepsilon(x)} \right|_{\varepsilon=0} = J(x) \Delta \phi(x) \quad (4.31)$$

und somit

$$< (\partial_\mu S_\mu(x) - J(x) \Delta \phi(x)) \exp\{-S_{qu}[\phi, J]\} > = 0 \quad (4.32)$$

bzw. nach Nullsetzen der Quellen

$$< \partial_\mu S_\mu(x) > = 0. \quad (4.33)$$

Dabei ist für einen beliebigen Operator $\mathcal{O}$ mit $< \mathcal{O} >$ der Erwartungswert

$$< \mathcal{O} > = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O} e^{-S[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}} \quad (4.34)$$

gemeint. Die quellenfreie Zustandssumme im Nenner wird von nun an mit Z abgekürzt, d.h. wir schreiben

$$Z := \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}. \quad (4.35)$$

Man beachte, daß in dieser Identität (4.33) nicht wie z.B. in [Lu] (2.77) angenommen der durch $\delta \mathcal{L} = \varepsilon \partial_\mu j_\mu$ definierte Strom $j_\mu(x)$ auftritt³, sondern der Noether-Strom $S_\mu(x)$. Wir hatten bereits gesehen, daß er in der klassischen Theorie erhalten war, sofern die Bewegungsgleichungen erfüllt sind. Die Ward-Identität zeigt dann, daß auch der quantenmechanische Erwartungswert dieses Stromes divergenzfrei, also erhalten ist. Man beachte dabei, daß im Funktionalintegral auch über Feldkonfigurationen gemittelt wird, die nicht den Euler-Lagrange-Gleichungen genügen. Für einzelne Konfigurationen ist also i.a. $\partial_\mu S_\mu \neq 0$, lediglich im Erwartungswert gilt Divergenzfreiheit.

Ferner denke man daran, daß wir zwar bei der Herleitung formal zu lokalen Transformationen übergegangen sind, daß jedoch nur die Invarianz der Wirkung unter globalen Transformationen eingeht. Genau gesagt geschieht dies in (4.22), denn wir nehmen dort $\delta \mathcal{L}(x) = \varepsilon \partial_\mu j_\mu(x)$ für globale Transformationen an. Der Term in $\partial_\mu \varepsilon$ berücksichtigt dann die Ortsabhängigkeit von ε .

Allgemeiner kann man in diese Ward-Identität noch einen zusätzlichen Operator $\mathcal{O}$ einfügen. Die Argumentation für die $N = 1$ -supersymmetrische Yang-Mills-Theorie des Kontinuums

³ Vorsicht: Dieser Strom trägt in [Lu] die Bezeichnung $S_\mu(x)$.

verläuft dann wie folgt: Statt des erzeugenden Funktional beginnt man mit dem Erwartungswert

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\lambda} e^{-S_{SYM}[A, \bar{\lambda}] - S_{qu}[A, \bar{\lambda}, J, \theta]} \mathcal{O}[A, \bar{\lambda}] \\
&= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A^\varepsilon \mathcal{D}\bar{\lambda}^\varepsilon e^{-S_{SYM}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon] - S_{qu}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon, J, \theta]} \mathcal{O}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon] \\
&= \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\lambda} e^{-S_{SYM}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon] - S_{qu}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon, J, \theta]} \mathcal{O}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon], \tag{4.36}
\end{aligned}$$

wobei wir auch hier wieder die Invarianz des Maßes voraussetzen. Der Quellterm ist hier durch

$$S_{qu}[A, \bar{\lambda}, J, \theta] = \int d^4x J_\mu(x) A_\mu(x) + \int d^4x \bar{\lambda}(x) \theta(x) \tag{4.37}$$

gegeben, wobei θ ein Grassmann-wertiger Majorana-Spinor ist. Es folgt⁴

$$\begin{aligned}
0 &= \left. \frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \right|_{\bar{\varepsilon}=0} \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{\lambda} e^{-S_{SYM}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon] - S_{qu}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon, J, \theta]} \mathcal{O}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon] \\
&= \left\langle \left(-\mathcal{O}[A, \bar{\lambda}] \frac{\delta S_{SYM}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon]}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \right) \right|_{\bar{\varepsilon}=0} - \mathcal{O}[A, \bar{\lambda}] \frac{\delta S_{qu}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon, J, \theta]}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \right|_{\bar{\varepsilon}=0} \\
&\quad + \left. \frac{\delta \mathcal{O}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon]}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \right|_{\bar{\varepsilon}=0} \Bigg) e^{-S_{qu}[A, \bar{\lambda}, J, \theta]} \Bigg\rangle, \tag{4.38}
\end{aligned}$$

und damit hat man schließlich

$$0 = \left\langle \left(\mathcal{O} \partial_\mu S_\mu(x) - \mathcal{O} J_\mu(x) \Delta A_\mu(x) - \mathcal{O} \Delta \bar{\lambda}(x) \theta(x) + \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \right) \right|_{\bar{\varepsilon}=0} e^{-S_{qu}[A, \bar{\lambda}, J, \theta]} \right\rangle. \tag{4.39}$$

Dabei sind $\Delta A_\mu(x) = 2g\gamma_\mu \lambda(x)$ und $\Delta \bar{\lambda}(x) = \frac{i}{g} \sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x)$. Durch Nullsetzen der Quellen erhält man

$$0 = \left\langle \mathcal{O} \partial_\mu S_\mu(x) + \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \right|_{\bar{\varepsilon}=0} \Bigg\rangle. \tag{4.40}$$

Natürlich ist (4.33) der Spezialfall $\mathcal{O} = \mathbb{1}$.

Man beachte, daß wir den Masseterm in der Lagrange-Dichte bisher ignoriert haben. Ist $m_0 \neq 0$, so ist die Supersymmetrie explizit gebrochen. In den Ward-Identitäten tritt dann ein Term D_S auf, der aus der Variation des Masseterms $\mathcal{L}_m(x) = m_0 \text{Tr}\{\bar{\lambda}(x)\lambda(x)\}$ stammt. Die Ward-Identität hat dann die Form

$$0 = \left\langle \mathcal{O} \partial_\mu S_\mu(x) - \mathcal{O} D_S(x) + \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \right|_{\bar{\varepsilon}=0} \Bigg\rangle, \tag{4.41}$$

wobei⁵

$$D_S(x) = 2m_0 \frac{i}{g} \text{Tr}\{\sigma_{\rho\tau} F_{\rho\tau}(x) \lambda(x)\}. \tag{4.42}$$

und

$$S_\mu(x) = -2 \frac{i}{g} \text{Tr}\{\sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu F_{\rho\tau}(x) \lambda(x)\}. \tag{4.43}$$

⁴Die Ableitung nach der Grassmann-wertigen Größe $\bar{\varepsilon}$ wirkt nach rechts.

⁵Der Masseterm D_S wird in der Literatur auch mit χ bezeichnet, vgl. z.B. [DGHV].

4.2.2 Noether-Strom auf dem Gitter

Die Herleitung der Gitter-Ward-Identität verläuft formal genauso wie im Kontinuum, nach Nullsetzen der Quellen gelangt man also im masselosen Fall zu

$$0 = \left\langle -\mathcal{O}[A, \bar{\lambda}] \frac{\delta S_{SYM}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon]}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \Big|_{\bar{\varepsilon}=0} + \frac{\delta \mathcal{O}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon]}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \Big|_{\bar{\varepsilon}=0} \right\rangle. \quad (4.44)$$

Allerdings wissen wir bisher noch nichts über den Noether-Strom auf dem Gitter. Er ist im Kontinuum durch

$$\frac{\delta S_{SYM}[A^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon]}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} = -\partial_\mu S_\mu(x) \quad (4.45)$$

definiert, so daß wir auf dem Gitter

$$\frac{\delta S^{lat}[U^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon]}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} = -\Delta_\mu S_\mu^{lat}(x) + \mathcal{O}(a^2) + r\mathcal{O}(a) \quad (4.46)$$

mit einer geeigneten Gitterversion des Noether-Stromes erwarten können. Die Aufgabe besteht nun also darin, die Terme in der Variation der Wirkung geeignet zu ordnen, um dann die Ableitung nach $\bar{\varepsilon}(x)$ ausführen zu können. Wir müssen also eine lokale Transformation $\varepsilon = \varepsilon(x)$ betrachten und

$$\sum_x \delta \mathcal{L}(x) = - \sum_x \bar{\varepsilon}(x) \Delta_\mu S_\mu^{lat}(x) + \mathcal{O}(a^2) + r\mathcal{O}(a) \quad (4.47)$$

erreichen.

4.2.2.1 $\delta_\lambda S_f$ -Variation

Unter einer lokalen Transformation der Gluino-Felder verhält sich der fermionische Teil der Lagrange-Dichte wie

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon}(x) \sigma_{\rho\tau}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x) \right\} \\ &\quad - \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} (\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \varepsilon(x)) \right\} \\ &= \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon}(x) \sigma_{\rho\tau}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x) \right\} \\ &\quad - \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} (\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \varepsilon(x)) \right\} \\ &\quad - \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \varepsilon(x)) \right\} + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Die ersten beiden Terme entsprechen genau der Variation unter globalen Transformationen, und wir hatten in (3.67) gesehen, daß sie einen Beitrag

$$\begin{aligned} \int d^4x \text{Tr} \left\{ \frac{4}{g} \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \varepsilon(x) \right. \\ \left. + \frac{i}{g} \partial_\mu (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon(x) \right\} \\ + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned} \quad (4.49)$$

zur Variation der Wirkung liefern. Der dritte Term ist Konsequenz der Lokalität von ε , insgesamt hat man also nach partieller Integration dieses Terms

$$\begin{aligned}
a^4 \sum_x \delta_\lambda \mathcal{L}_f^{lat}(x) &= \int d^4x \text{Tr} \left\{ \frac{4}{g} \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \varepsilon(x) \right. \\
&\quad + \frac{i}{g} \partial_\mu (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon(x) \\
&\quad + \frac{i}{g} \mathcal{D}_\mu (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \varepsilon(x) \left. \right\} \\
&\quad + \mathcal{O}(a^2).
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Wegen $\text{Tr} \{ [A_\mu(x), \bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)] \} = 0$ ist dann auch

$$\begin{aligned}
a^4 \sum_x \delta_\lambda \mathcal{L}_f^{lat}(x) &= \int d^4x \text{Tr} \left\{ \frac{4}{g} \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \right. \\
&\quad + 2 \frac{i}{g} \partial_\mu (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \left. \right\} \varepsilon(x) \\
&\quad + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

richtig, denn $\varepsilon(x)$ trägt keine Farbindizes.

4.2.2.2 $\delta_U S_f$ -Variation

Nach Reorganisation der Terme lautet dieser Teil der Variation der Wirkung (vgl. (3.75))

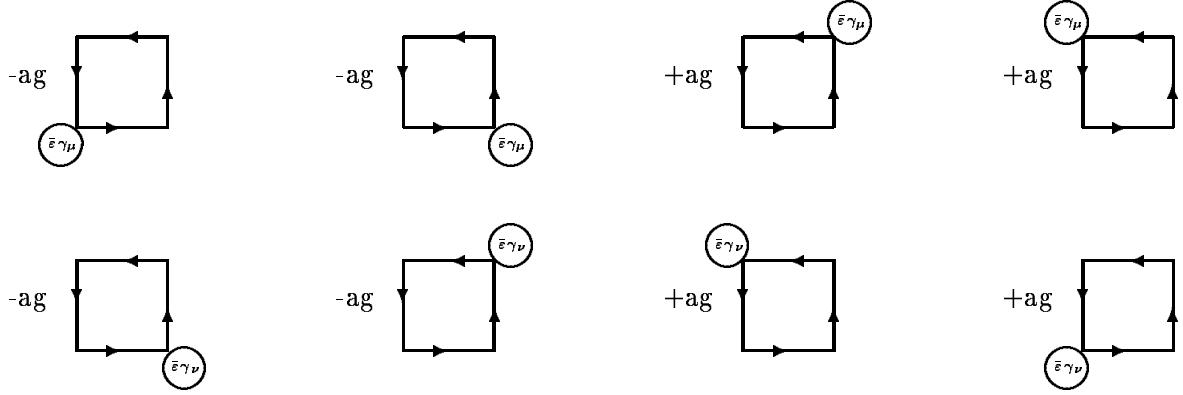
$$\begin{aligned}
a^4 \sum_x \delta_U \mathcal{L}_f(x) &= a^4 \sum_x \frac{1}{2} g \text{Tr} \left\{ \right. \\
&\quad \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x)] \\
&\quad + \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu})] \\
&\quad + \bar{\lambda}(x - a\hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] U_\mu(x - a\hat{\mu}) \\
&\quad + \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu U_\mu(x) [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] U_\mu^\dagger(x) \left. \right\} \\
&= a^4 g \sum_x \text{Tr} \left\{ U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \gamma_\mu [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \right. \\
&\quad + U_\mu(x - a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \gamma_\mu [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Da der Term $\text{Tr} \{ \bar{\lambda} \gamma_\mu [\bar{\varepsilon} \gamma_\mu \lambda, \lambda] \}$ nach Fierz verschwindet, erkennt man aufgrund der Entwicklungen der Paralleltransporter, daß

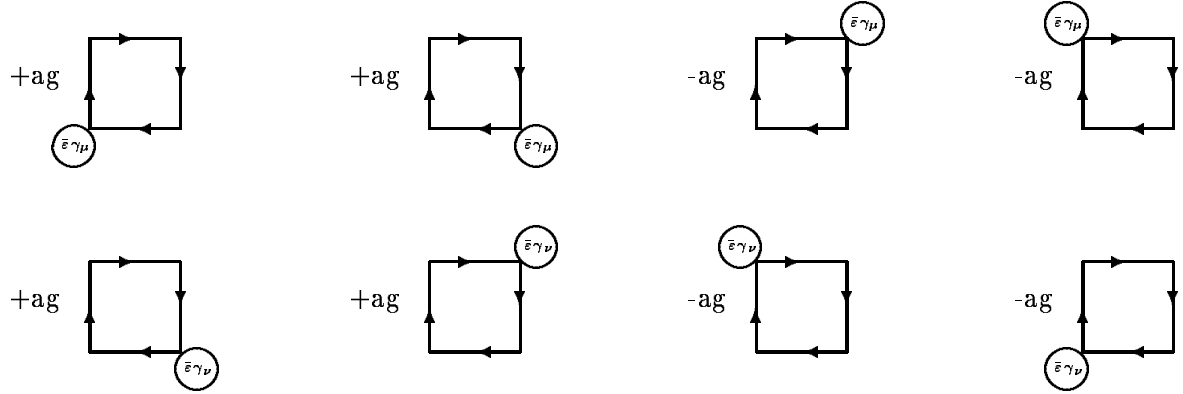
$$a^4 \sum_x \delta_U \mathcal{L}_f(x) = 0 + \mathcal{O}(a^2). \tag{4.53}$$

4.2.2.3 $\delta_U S_g$ -Variation

Für $\text{Tr } \delta U_{\mu\nu}(x)$ hat man den Term



wobei x stets der linke untere Eckpunkt der Plaquette ist. Zusammen mit dem Ausdruck



für $\text{Tr } \delta U_{\mu\nu}^\dagger(x)$ bekommt man daher

$$\begin{aligned}
 & \delta \left(\sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Tr} \left\{ U_{\mu\nu}(x) + U_{\mu\nu}^\dagger(x) \right\} \right) \\
 &= ag(-2a^2) \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Tr} \left\{ \right. \\
 & \quad \bar{\psi}\gamma_\nu\lambda(x) \left(\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x) - \mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x) - \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x) \right) \\
 & \quad \left. + \bar{\psi}\gamma_\mu\lambda(x) \left(-\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) - \mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x) \right) \right\}. \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

Die Definition der $\mathcal{G}^0$'s findet man in Kapitel 3.4. Für $U_{\mu\nu}(x)$ hatten wir

$$U_{\mu\nu}(x) = \exp \left\{ -a^2 F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^4) \right\} \quad (4.55)$$

gefunden. Wir benötigen nun aber auch das explizite Aussehen des Koeffizienten vierter Ordnung der Entwicklung von $U_{\mu\nu}(x)$ und können dazu beispielsweise die Nicht-Abelsche

Stokes-Formel aus dem Anhang verwenden. Alternativ kann man diesen Term durch eine geschickte Wahl der Eichung bestimmen, vergleiche dazu [LW85]. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(x) &= 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) \\ &\quad + \frac{1}{2}a^4 (F_{\mu\nu}(x))^2 - \frac{1}{6}a^4 (\mathcal{D}_\mu^2 + \mathcal{D}_\nu^2 + \frac{3}{4}\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu + \frac{3}{4}\mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu) F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^5) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Durch geeignete Manipulationen der Indizes gewinnt man hieraus die Entwicklung aller anderen benötigten Plaquetten, und wir können damit die Ergebnisse aus Kapitel 3.4 zu

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) &= F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^2 (F_{\mu\nu}(x))^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}a^2 (\mathcal{D}_\mu^2 + \mathcal{D}_\nu^2 + \frac{3}{4}(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu + \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu)) F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3) \\ \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x) &= F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^2 (F_{\mu\nu}(x))^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}a^2 (\mathcal{D}_\mu^2 + \mathcal{D}_\nu^2 + \frac{3}{4}(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu + \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu)) F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3) \\ \mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x) &= F_{\mu,\nu}(x) - \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^2 (F_{\mu\nu}(x))^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}a^2 (\mathcal{D}_\mu^2 + \mathcal{D}_\nu^2 - \frac{3}{4}(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu + \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu)) F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3) \\ \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x) &= F_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^2 (F_{\mu\nu}(x))^2 \\ &\quad + \frac{1}{6}a^2 (\mathcal{D}_\mu^2 + \mathcal{D}_\nu^2 - \frac{3}{4}(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu + \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu)) F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^3) \end{aligned} \quad (4.57)$$

erweitern und auf

$$\begin{aligned} &\delta \left(\sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Tr} \{ U_{\mu\nu}(x) + U_{\mu\nu}^\dagger(x) \} \right) \\ &= -2a^3 g \sum_x \sum_{\mu < \nu} \text{Tr} \left\{ \begin{aligned} &\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\nu \lambda(x) (0 + 2a \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^3)) \\ &+ \bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x) (0 - 2a \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^3)) \end{aligned} \right\} \\ &= -4a^4 g \sum_x \sum_{\mu \neq \nu} \bar{\varepsilon}(x) \gamma_\nu \lambda(x) \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^6) \end{aligned} \quad (4.58)$$

schließen. Für die Wirkung heißt dies

$$\begin{aligned} a^4 \sum_x \delta_U \mathcal{L}_g(x) &= \frac{4}{g} \int d^4x \sum_{\mu \neq \nu} \bar{\varepsilon}(x) \text{Tr} \{ \gamma_\nu \lambda(x) \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) \} + \mathcal{O}(a^2) \\ &= -\frac{4}{g} \int d^4x \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu \} \varepsilon(x) + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Dieses Ergebnis folgt mittels partieller Integration auch aus (3.100), wenn man dort zu einem lokalen Transformationsparameter übergeht. Zusammen mit

$$\begin{aligned} a^4 \sum_x \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= \int d^4x \operatorname{Tr} \left\{ \frac{4}{g} \bar{\lambda}(x) (\mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x)) \gamma_\nu \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{i}{g} \partial_\mu (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \right\} \varepsilon(x) \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned} \quad (4.60)$$

und

$$a^4 \sum_x \delta_U \mathcal{L}_f(x) = 0 + \mathcal{O}(a^2) \quad (4.61)$$

ergeben unsere Kalkulationen also

$$\begin{aligned} a^4 \sum_x \delta \mathcal{L}(x) &= \int d^4x \operatorname{Tr} \left\{ 2 \frac{i}{g} \partial_\mu (\bar{\lambda}(x) F_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \right\} \varepsilon(x) + \mathcal{O}(a^2) \\ &= a^4 \sum_x \operatorname{Tr} \left\{ 2 \frac{i}{g} \Delta_\mu^{sym} (\bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \right\} \varepsilon(x) + \mathcal{O}(a^2). \end{aligned} \quad (4.62)$$

Funktionales Ableiten nach $\varepsilon(x)$ liefert dann den gewünschten Ausdruck für den Noether-Strom:

$$\bar{S}_\mu^{lat}(x) = -2 \frac{i}{g} \operatorname{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \right\} \quad (4.63)$$

bzw.

$$S_\mu^{lat}(x) = -2 \frac{i}{g} \operatorname{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda(x) \right\}. \quad (4.64)$$

Wie man unmittelbar erkennt, ergibt sich für $a \rightarrow 0$ der korrekte Kontinuumslimites, und Störungen treten erst quadratisch in a auf, sofern wir $\mathcal{G}_{\rho\tau}$ etwa wie in Kapitel 3 wählen. Wie im Fall des Stromes j_μ in den Kapiteln 2 und 3 haben wir auch hier die Wahl zwischen dem o.g. lokalen Strom und einer bilokalen Version

$$\begin{aligned} \bar{S}_\mu^{lat}(x) &= -\frac{i}{g} \operatorname{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) U_\mu^\dagger(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ &\quad \left. + U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \right\} \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \end{aligned} \quad (4.65)$$

bzw.

$$\begin{aligned} S_\mu^{lat}(x) &= -\frac{i}{g} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \operatorname{Tr} \left\{ U_\mu^\dagger(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \lambda(x) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Im Fall dieses vorwärts gerichteten Stromes ist dann wie in den vorigen Kapiteln in der Ward-Identität nicht die symmetrische Gitter-Ableitung $\Delta_\mu^{lat,sym}$, sondern die Rückwärtsableitung $\Delta_\mu^{lat,b}$ zu verwenden.

Des weiteren können wir wie in den o.g. Kapiteln die Plaquettenstruktur in $\mathcal{G}_{\rho\tau}$ wieder als volles Clover-Blatt oder als einen punktsymmetrischen Teil hiervon wählen.

4.2.3 Ward-Identität auf dem Gitter

Wir haben das Aussehen der Gitter-Ward-Identität mit

$$0 = \left\langle -\mathcal{O}[U, \bar{\lambda}] \frac{\delta S^{lat}[U^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon]}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \Big|_{\bar{\varepsilon}=0} + \frac{\delta \mathcal{O}[U^\varepsilon, \bar{\lambda}^\varepsilon]}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \Big|_{\bar{\varepsilon}=0} \right\rangle \quad (4.67)$$

bereits gefunden, wollen aber bei der Variation der Wirkung nun auch den Massen- und den r -proportionalen Wilson-Term berücksichtigen. Die Variation des rein lokalen Massenterms liefert einen Beitrag von

$$2m_0 \frac{i}{g} \text{Tr} \{ \bar{\varepsilon}(x) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \} \quad (4.68)$$

zur Variation der Wirkung. Für die Wilson-Fermionen hatten wir in (3.122)

$$\begin{aligned} \sum_x \delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}(x) = \sum_{x,\mu} rg \text{Tr} \Big\{ & \\ & \bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \\ & + U_\mu^\dagger(x) \bar{\varepsilon}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \\ & - U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \\ & - U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) \bar{\varepsilon}(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \Big\} \end{aligned} \quad (4.69)$$

gefunden. Sortieren der Terme nach $\varepsilon(x)$ ergibt dann

$$\begin{aligned} \sum_x \delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}(x) &= \sum_{x,\mu} rg \text{Tr} \Big\{ \\ & \bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \\ & + U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \bar{\lambda}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \cdot (U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \lambda(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) - \lambda(x - a\hat{\mu})) \\ & - U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \cdot (U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \lambda(x)) \\ & - U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x) \bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \cdot (U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \lambda(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) - \lambda(x - a\hat{\mu})) \Big\} \\ &= rg \sum_{x,\mu} \text{Tr} \Big\{ U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \\ & \quad - U_\mu(x - a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \Big\}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Man erkennt z.B. an den Zeilen zwei bis fünf, daß die zweiten Faktoren im Kontinuumslimit verschwinden, so daß der Term erst in erster Ordnung von a beiträgt. Man findet

$$\sum_x \delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}(x) = 2rag \sum_{x,\mu} \text{Tr} \{ [\varepsilon(x) \gamma_\mu \lambda(x), \bar{\lambda}(x)] \mathcal{D}_\mu \lambda(x) \} + \mathcal{O}(a^2). \quad (4.71)$$

Für die Änderung unter Variation der Gluinofelder bekommt man aus (3.121)

$$\sum_x \delta_\lambda \mathcal{L}_{f,Wil}(x) = \frac{1}{2} ra \frac{i}{g} \sum_x \text{Tr} \Big\{$$

$$\begin{aligned}
& D_\mu^{lat,f}(\bar{\varepsilon}(x)\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x))\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\lambda(x) \\
& - \mathcal{D}_\mu^{lat,f}\bar{\lambda}(x)\sigma_{\rho\tau}\mathcal{D}_\mu^{lat,f}(\varepsilon(x)\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)) \Big\} \\
& = ra\frac{i}{g}\sum_x \text{Tr}\left\{(\mathcal{D}_\mu^{lat,b}\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\bar{\lambda}(x))\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)\right\}\varepsilon(x). \quad (4.72)
\end{aligned}$$

Den Kontinuumslikes erkennt man als

$$\sum_x \delta_\lambda \mathcal{L}_{f,Wil}(x) = ra\frac{i}{g}\sum_x \text{Tr}\left\{(\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\mu\bar{\lambda}(x))F_{\rho\tau}(x)\sigma_{\rho\tau}\right\}\varepsilon(x) + \mathcal{O}(a^2). \quad (4.73)$$

Somit ist insgesamt

$$\left.\frac{\delta}{\delta\varepsilon(x)}\right|_{\varepsilon=0} S_{f,Wil} = r\mathcal{O}(a), \quad (4.74)$$

und wir können also nach diesen Rechnungen bestätigen, daß die Gitter-Ward-Identität

$$0 = \left\langle -\mathcal{O}[U, \bar{\lambda}] \frac{\delta S_{SYM}[U^\varepsilon, \lambda^\varepsilon]}{\delta\bar{\varepsilon}(x)} \Big|_{\bar{\varepsilon}=0} + \frac{\delta\mathcal{O}[U^\varepsilon, \lambda^\varepsilon]}{\delta\bar{\varepsilon}(x)} \Big|_{\bar{\varepsilon}=0} \right\rangle \quad (4.75)$$

die konkrete Form

$$\left\langle \mathcal{O}\Delta_\mu^{lat}S_\mu^{lat}(x) - \mathcal{O}D_S(x) - \mathcal{O}X_S(x) + \frac{\delta\mathcal{O}}{\delta\bar{\varepsilon}(x)} \Big|_{\bar{\varepsilon}=0} \right\rangle = 0 \quad (4.76)$$

annimmt. Dabei ist

$$D_S(x) = 2m_0\frac{i}{g}\text{Tr}\left\{\sigma_{\rho\tau}\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)\lambda(x)\right\} \quad (4.77)$$

der Masseterm ist, und X_S bringt die Brechung der Supersymmetrie durch die Gitter-Regularisierung und die Wilsonsche Form der Fermionen zum Ausdruck. Es gilt

$$X_S(x) = \mathcal{O}(a^2) + r\mathcal{O}(a) \quad (4.78)$$

Der Vergleich mit [CV] zeigt völlige Übereinstimmung, man achte aber auf den dort ausgeklammerten Vorfaktor $-2\frac{i}{g}$.

Der exakte Gitterausdruck für X_S ist durch

$$\begin{aligned}
X_S(x) &= \left.\frac{\delta}{\delta\bar{\varepsilon}(x)}\right|_{\varepsilon=0} \left\{ \sum_y \left\{ \delta_\lambda \mathcal{L}_f(y) + \delta_U \mathcal{L}_f(y) + \delta_U \mathcal{L}_g(y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \delta_\lambda \mathcal{L}_{f,Wil}(y) + \delta_U \mathcal{L}_{f,Wil}(y) \right\} \right\} + \Delta_\mu^{lat}S_\mu(x) \quad (4.79)
\end{aligned}$$

gegeben und hängt von der konkreten Wahl des Superstroms ab. Es soll nun das genaue Aussehen des Terms $X_S(x)$ bestimmt werden, ich gehe dabei davon aus, daß wir sowohl in den Transformationen der Gluinofelder als auch im Superstrom die volle Clover-Plaquette wählen, daß also

$$\mathcal{G}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{4}(\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x)). \quad (4.80)$$

Mit der Definition

$$\mathcal{H}_{\mu\nu}(x) := \frac{1}{4} (\mathcal{G}_{\mu,\nu}^0(x) + \mathcal{G}_{-\nu,\mu}^0(x) - \mathcal{G}_{\nu,-\mu}^0(x) - \mathcal{G}_{-\mu,-\nu}^0(x)) \quad (4.81)$$

gilt dann unter den symmetrisierten Transformationen:

$$\begin{aligned} \sum_x \delta_\lambda \mathcal{L}_f(x) &= 2 \frac{i}{g} \sum_x \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon}(x) \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x) \right\} \\ \sum_x \delta_U \mathcal{L}_f(x) &= g \sum_x \text{Tr} \left\{ U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \gamma_\mu [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \right. \\ &\quad \left. + U_\mu(x - a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \gamma_\mu [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \right\} \\ \sum_x \delta_U \mathcal{L}_g(x) &= \frac{2}{ga} \sum_x \sum_{\mu \neq \nu} \text{Tr} \left\{ \bar{\varepsilon}(x) \gamma_\nu \lambda(x) 4 \mathcal{H}_{\mu\nu}(x) \right\} \\ \sum_x \delta_U \mathcal{L}_{f, Wil}(x) &= rg \sum_x \text{Tr} \left\{ U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \right. \\ &\quad \left. - U_\mu(x - a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) [\bar{\varepsilon}(x) \gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \right\} \\ \sum_x \delta_\lambda \mathcal{L}_{f, Wil}(x) &= -ra \frac{i}{g} \sum_x \bar{\varepsilon}(x) \text{Tr} \left\{ \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat, b} \mathcal{D}_\mu^{lat, f} \lambda(x)) \right\}. \end{aligned} \quad (4.82)$$

Aus dieser Zusammenstellung gewinnt man dann die folgenden Beiträge zum Brechungsterm X_S :

Zunächst ergibt sich aus der δ_λ -Variation des Wilson-Anteils

$$\begin{aligned} X_S^{(1)}(x) &:= \left. \frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \right|_{\bar{\varepsilon}=0} \delta_\lambda S_{f, Wil} \\ &= -ra \frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) (\mathcal{D}_\mu^{lat, b} \mathcal{D}_\mu^{lat, f} \lambda(x)) \right\} \\ &= \frac{r}{a} \frac{i}{g} \sum_{\mu, \rho, \tau} \text{Tr} \left\{ \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \left(2\lambda(x) - U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Die Variation des vollen fermionischen Anteils unter Transformation des Eichfeldes liefert den folgenden Beitrag:

$$\begin{aligned} X_S^{(2)}(x) &:= \left. \frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \right|_{\bar{\varepsilon}=0} \delta_U (S_f + S_{f, Wil}) \\ &= g \sum_\mu \text{Tr} \left\{ U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) (\gamma_\mu + r) [\gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \right. \\ &\quad \left. + U_\mu(x - a\hat{\mu}) \bar{\lambda}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) (\gamma_\mu - r) [\gamma_\mu \lambda(x), \lambda(x)] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv g \sum_{\mu} \left(\gamma_{\mu} \lambda^a(x) \bar{\lambda}^b(x + a\hat{\mu})(\gamma_{\mu} + r) \lambda^c(x) \text{Tr}\{U_{\mu}^{\dagger}(x) T^b U_{\mu}(x) [T^a, T^c]\} \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{\mu} \lambda^a(x) \bar{\lambda}^b(x - a\hat{\mu})(\gamma_{\mu} - r) \lambda^c(x) \text{Tr}\{U_{\mu}(x - a\hat{\mu}) T^b U_{\mu}^{\dagger}(x - a\hat{\mu}) [T^a, T^c]\} \right)
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Es gibt nun noch zwei weitere Terme in X_S , die aber von der konkreten Wahl des Stromes (lokal oder nicht lokal) abhängen. Dazu schreibt man

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta \bar{\varepsilon}(x)} \Big|_{\bar{\varepsilon}=0} \delta_{\lambda} S_f \\
&= \frac{i}{g a} \sigma_{\rho\tau} \gamma_{\mu} \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \left(U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) - U_{\mu}(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_{\mu}^{\dagger}(x - a\hat{\mu}) \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Im Fall des nicht-lokalen Stroms betrachtet man außerdem

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mu}^{lat,b} \left(-\frac{i}{g} \text{Tr} \left\{ U_{\mu}^{\dagger}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_{\mu} \lambda(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_{\mu} U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \right\} \right) \\
&= -\frac{i}{g a} \text{Tr} \left\{ U_{\mu}^{\dagger}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_{\mu} \lambda(x) \right. \\
&\quad + \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_{\mu} U_{\mu}^{\dagger}(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \\
&\quad - U_{\mu}^{\dagger}(x - a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_{\mu}(x - a\hat{\mu}) \sigma_{\rho\tau} \gamma_{\mu} \lambda(x - a\hat{\mu}) \\
&\quad \left. - \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) \sigma_{\rho\tau} \gamma_{\mu} U_{\mu}^{\dagger}(x - a\hat{\mu}) \lambda(x) U_{\mu}(x - a\hat{\mu}) \right\}
\end{aligned} \tag{4.86}$$

und erkennt, daß sich bei der Addition von (4.85) und (4.86) einige Terme gegeneinander eliminieren. Die übrigbleibenden Beiträge schreiben wir mittels

$$\sigma_{\rho\tau} \gamma_{\mu} = -i \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_{\nu} \gamma_5 - i (\delta_{\mu\rho} \gamma_{\tau} - \delta_{\mu\tau} \gamma_{\rho}) \tag{4.87}$$

als

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{g a} \text{Tr} \left\{ \left(U_{\mu}^{\dagger}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - U_{\mu}(x - a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) U_{\mu}^{\dagger}(x - a\hat{\mu}) \right) \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_{\nu} \gamma_5 \lambda(x) \right\} \\
&-\frac{2}{g a} \text{Tr} \left\{ \left(U_{\mu}^{\dagger}(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) - U_{\mu}(x - a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu}) U_{\mu}^{\dagger}(x - a\hat{\mu}) \right) \gamma_{\nu} \lambda(x) \right\}
\end{aligned} \tag{4.88}$$

und erhalten dann gemeinsam mit dem Ausdruck für $\delta_U S_g$ zwei weitere Beiträge zu X_S , nämlich

$$\begin{aligned}
X_S^{(3)}(x) &:= -\frac{1}{g a} \text{Tr} \left\{ \left(U_{\mu}^{\dagger}(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) U_{\mu}(x) - U_{\mu}(x - a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) U_{\mu}^{\dagger}(x - a\hat{\mu}) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_{\nu} \gamma_5 \lambda(x) \right\}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

und

$$\begin{aligned}
 X_S^{(4)}(x) &:= -\frac{2}{g} \frac{1}{a} \sum_{\mu, \nu} \text{Tr} \left\{ \left(U_\mu^\dagger(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - U_\mu(x - a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) - 4\mathcal{H}_{\mu\nu}(x) \right) \gamma_\nu \lambda(x) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

Nun überlegt man sich (am besten graphisch), daß

$$\begin{aligned}
 &U_\mu^\dagger(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - U_\mu(x - a\hat{\mu}) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \\
 &= U_\mu^\dagger(x) \mathcal{H}_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) + U_\mu(x - a\hat{\mu}) \mathcal{H}_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) + 2\mathcal{H}_{\mu\nu}(x)
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

(es muß in dieser Identität nicht notwendig über μ und ν summiert werden), also ist

$$\begin{aligned}
 X_S^{(4)}(x) &= -\frac{2}{g} \frac{1}{a} \sum_{\mu, \nu} \text{Tr} \left\{ \left(U_\mu^\dagger(x) \mathcal{H}_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + U_\mu(x - a\hat{\mu}) \mathcal{H}_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) - 2\mathcal{H}_{\mu\nu}(x) \right) \gamma_\nu \lambda(x) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

Diese Form des Brechungsterms $X_S = X_S^{(1)} + X_S^{(1)} + X_S^{(3)} + X_S^{(4)}$ findet man in leicht modifizierter Notation auch in [Ta].

Im Fall des lokalen Stroms haben wir statt (4.86)

$$\begin{aligned}
 &\Delta_\mu^{lat, sym} \left(-2 \frac{i}{g} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \text{Tr} \{ \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \lambda(x) \} \right) \\
 &= -\frac{i}{g} \frac{1}{a} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \text{Tr} \{ \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) \lambda(x + a\hat{\mu}) - \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) \} \\
 &= -\frac{i}{g} \frac{1}{a} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) \lambda(x + a\hat{\mu}) - U_\mu(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) - \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) - \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

Wieder löschen sich einige Terme mit (4.85) aus und wir verbleiben mit

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{g} \frac{1}{a} \sum_{\mu, \rho, \tau, \nu} \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) \lambda(x + a\hat{\mu}) - U_\mu(x) \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) - \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) \right\} \\
 &-\frac{2}{g} \frac{1}{a} \sum_{\mu, \nu} \gamma_\nu \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) \lambda(x + a\hat{\mu}) - U_\mu(x) \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) - \mathcal{G}_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Daher lauten $X_S^{(3)}$ und $X_S^{(4)}$ im Fall des lokalen Stroms

$$\begin{aligned} X_S^{(3)}(x) = & -\frac{1}{g} \frac{1}{a} \sum_{\mu, \rho, \tau, \nu} \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\rho\tau}(x + a\hat{\mu}) \lambda(x + a\hat{\mu}) - \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ & \left. + \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) - \mathcal{G}_{\rho\tau}(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) \right\} \quad (4.95) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} X_S^{(4)}(x) = & -\frac{2}{g} \frac{1}{a} \sum_{\mu, \nu} \gamma_\nu \text{Tr} \left\{ \mathcal{G}_{\mu\nu}(x + a\hat{\mu}) \lambda(x + a\hat{\mu}) - \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\ & + \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) U_\mu(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) \\ & \left. - \mathcal{G}_{\mu\nu}(x - a\hat{\mu}) \lambda(x - a\hat{\mu}) - 4\mathcal{H}_{\mu\nu}(x) \lambda(x) \right\}. \quad (4.96) \end{aligned}$$

Die direkte Entwicklung der Brechungsterme nach a zeigt, daß $X_S^{(1)}$ vom Typ $r\mathcal{O}(a)$ ist und $X_S^{(2)}$ wie $\mathcal{O}(a^2) + r\mathcal{O}(a)$ verschwindet. $X_S^{(3)}$ und $X_S^{(4)}$ sind von der Ordnung a^2 . Dies gilt sowohl für den lokalen als auch für den nicht-lokalen Strom.

4.3 Chirale Ward-Identität

In diesem Kapitel soll eine weitere Symmetrie unserer Theorie diskutiert werden, und ich möchte die damit verbundene Ward-Identität für den chiralen Strom ableiten. Man betrachte dazu die folgende chirale Rotation der Gluinofelder (vgl. z.B. [DGHV]):

$$\begin{aligned} \lambda(x) & \longrightarrow e^{i\alpha(x)\gamma_5} \lambda(x) \\ \bar{\lambda}(x) & \longrightarrow \bar{\lambda}(x) e^{i\alpha(x)\gamma_5}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Der skalare Parameter $\alpha(x)$ sei dabei als lokal angenommen. Man denke daran, daß die Variationen von λ und $\bar{\lambda}$ aufgrund der Majorana-Eigenschaft von λ nicht unabhängig voneinander gewählt werden können. Die obige Transformation ist aber mit dieser Verknüpfung von $\bar{\lambda}$ und λ verträglich.

Infinitesimal lauten diese Transformationen

$$\begin{aligned} \delta\lambda(x) & = i\alpha(x)\gamma_5\lambda(x) \\ \delta\bar{\lambda}(x) & = \bar{\lambda}(x)i\alpha(x)\gamma_5. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Man rechnet unter Benutzung der Beziehung $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ sofort nach, daß sich die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{2g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \\ & + \text{Tr} \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x) + m_0 \text{Tr} \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \end{aligned} \quad (4.99)$$

unter globalen chiralen Transformationen ($\alpha(x) = \text{const}$) wie folgt verhält:

$$\delta\mathcal{L}(x) = 2m_0 i\alpha \text{Tr} \{ \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \lambda(x) \}. \quad (4.100)$$

Im Fall verschwindender Gluinomasse hat daher man wie im Fall der Supersymmetrie eine perfekte Erhaltung der Wirkung. Um nun die korrespondierende Kontinuums-Ward-Identität herzuleiten, gehen wir formal wieder zu einem lokalen Transformationsparameter $\alpha = \alpha(x)$ über. Man erhält dann

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_f(x) &= i \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \alpha(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x) + \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{D}_\mu (\alpha(x) \lambda(x)) \right. \\ &\quad \left. + 2m_0 \alpha(x) \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Daraus folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L}_f(x) &= i \int d^4x \text{Tr} \left\{ \alpha(x) \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu \lambda(x) - \alpha(x) \mathcal{D}_\mu \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \lambda(x) \right. \\ &\quad \left. + 2m_0 \alpha(x) \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \lambda(x) \right\} \\ &= i \int d^4x \text{Tr} \left\{ \alpha(x) \mathcal{D}_\mu (\bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \lambda(x)) + \alpha(x) 2m_0 \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \lambda(x) \right\} \\ &= i \int d^4x \alpha(x) \text{Tr} \left\{ \partial_\mu (\bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \lambda(x)) + 2m_0 \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \lambda(x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.102)$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} J_\mu^5(x) &:= -\bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \lambda(x) = \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \lambda(x) \\ P(x) &:= \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \lambda(x) \end{aligned} \quad (4.103)$$

erhält man dann die Ward-Identität (vgl. 4.41)

$$0 = \left\langle \partial_\mu J_\mu^5(x) \mathcal{O} - 2m_0 P(x) \mathcal{O} + \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta \alpha(x)} \Big|_{\alpha=0} \right\rangle. \quad (4.104)$$

Um die Ward-Identität auf dem Gitter zu finden, müssen wir das Verhalten von

$$\sum_x \mathcal{L}_f(x) = \sum_x \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x) + m_0 \bar{\lambda}(x) \lambda(x) \right\} \quad (4.105)$$

studieren, den r -proportionalen Teil betrachten wir später. Anwenden der Transformationen (4.98) führt dann auf

$$\begin{aligned} \sum_x \delta \mathcal{L}_f(x) &= i \sum_x \text{Tr} \left\{ \alpha(x) \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x) + \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} (\alpha(x) \lambda(x)) \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha(x) m_0 P(x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Partielles Integrieren des zweiten Summanden liefert

$$\sum_x \delta \mathcal{L}_f(x) = i \sum_x \text{Tr} \left\{ \alpha(x) \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x) - (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \bar{\lambda}(x)) \gamma_\mu \gamma_5 \alpha(x) \lambda(x) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& +2\alpha(x)m_0P(x)\Big\} \\
= & i \sum_x \alpha(x) \text{Tr} \left\{ \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \lambda(x) + \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} \bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu \lambda(x) \right. \\
& \left. +2m_0P(x) \right\}. \tag{4.107}
\end{aligned}$$

Wir benutzen nun die für Gittergrößen f und g gültige Regel

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left\{ f(x) \mathcal{D}_\mu^{lat, sym} g(x) + (\mathcal{D}_\mu^{lat, sym} f(x)) g(x) \right\} \\
= & \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \Delta_\mu^{lat, b} \left(f(x) U_\mu^\dagger(x) g(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \right. \\
& \left. \left. + U_\mu^\dagger(x) f(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) g(x) \right) \right\} \tag{4.108}
\end{aligned}$$

und werden mit

$$\begin{aligned}
\sum_x \delta \mathcal{L}_f(x) = & i \sum_x \alpha(x) \text{Tr} \left\{ \right. \\
& \Delta_\mu^{lat, b} \left(\bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right. \\
& \left. + U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \gamma_5 \gamma_\mu \lambda(x) \right) \\
& \left. +2m_0P(x) \right\} \tag{4.109}
\end{aligned}$$

belohnt. Dies ist das Gleiche wie

$$\begin{aligned}
\sum_x \delta \mathcal{L}_f(x) = & i \sum_x \alpha(x) \text{Tr} \left\{ \right. \\
& 2\Delta_\mu^{lat, b} \left(\bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \right) \\
& \left. +2m_0P(x) \right\}, \tag{4.110}
\end{aligned}$$

denn für Majorana-Spinoren gilt die Beziehung $\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \chi = \bar{\chi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi$.

Es zeigt sich im Fall der chiralen Transformationen also, daß in der masselosen Theorie auf dem Gitter ein Strom $J_\mu^{5, lat}(x)$ definiert werden kann, der bei Vernachlässigung der Wilson-Fermionen exakt erhalten ist. Genauer ergibt sich für die Gitter-Ward-Identität

$$0 = \left\langle \Delta_\mu^b J_\mu^{5, lat}(x) \mathcal{O} - 2m_0 P(x) \mathcal{O} - X_A(x) \mathcal{O} + \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta \alpha(x)} \Big|_{\alpha=0} \right\rangle. \tag{4.111}$$

Der axiale Vektorstrom ist dabei durch

$$\begin{aligned}
J_\mu^{5, lat}(x) & := -\bar{\lambda}(x) \gamma_5 \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \\
& = \bar{\lambda}(x) \gamma_\mu \gamma_5 U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \tag{4.112}
\end{aligned}$$

erklärt. Dies ist genau die Form, die etwa in [BMMRT] und [MM] angegeben wird. Beim Vergleich mit [MM] (5.153) beachte man, daß die beiden dortigen Summanden in unserem Fall aufgrund der Majorana-Natur der Gluinos zusammenfallen. Der Term $X_A(x)$ in der Ward-Identität ist ausschließlich Konsequenz der Wilsonschen Formulierung der Fermionen und ist im Kontinuumslimit von der Form $r\mathcal{O}(a)$.

Es ist nun nicht weiter schwer, seine explizite Form zu bestimmen:

Mit

$$\mathcal{L}_{f,Wil}(x) = \frac{1}{2}ra\text{Tr}\left\{\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\bar{\lambda}(x)\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\lambda(x)\right\} \quad (4.113)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_x \mathcal{L}_{f,Wil}(x) &= \frac{1}{2}ira \sum_x \text{Tr}\left\{\mathcal{D}_\mu^{lat,f}(\bar{\lambda}(x)\alpha(x))\gamma_5\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\lambda(x) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{D}_\mu^{lat,f}\bar{\lambda}(x)\gamma_5\mathcal{D}_\mu^{lat,f}(\alpha(x)\lambda(x))\right\} \\ &= -\frac{1}{2}ira \sum_x \alpha(x)\text{Tr}\left\{\bar{\lambda}(x)\gamma_5\mathcal{D}_\mu^{lat,b}\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\lambda(x) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{D}_\mu^{lat,b}\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\bar{\lambda}(x)\gamma_5\lambda(x)\right\}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Es wurde dabei $\mathcal{D}_\mu^{lat,f} = -\mathcal{D}_\mu^{lat,b\dagger}$ verwendet. Also ist X_A durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$X_A(x) = -ira\text{Tr}\left\{\bar{\lambda}(x)\gamma_5\mathcal{D}_\mu^{lat,b}\mathcal{D}_\mu^{lat,f}\lambda(x)\right\}, \quad (4.115)$$

was das Resultat in [BMMRT](2.13) widerspiegelt. Dieser symmetriebrechende Term entspricht also vollständig der Variation des r -abhängigen Teils der Wirkung.

Kapitel 5

Störungstheorie der Chiralen Ward-Identität

Bisher wurden die hergeleiteten Ward-Identitäten nur in unrenormierter Form, d.h. als Verknüpfung zwischen den nackten Greens-Funktionen der $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie betrachtet. Im folgenden Kapitel gehen wir nun zu störungstheoretischen Untersuchungen über und betrachten die betreffenden Identitäten auf 1-Loop-Niveau. Dieses Kapitel steht dabei ein wenig orthogonal auf den übrigen, denn es wird ausschließlich die chirale Symmetrie behandelt. Bei der Berechnung der in den Ward-Identitäten vorkommenden Erwartungswerte stellt man fest, daß diese in Einschleifen-Ordnung z.T. divergent sind, also einer Regularisierung und Renormierung bedürfen. Die Regularisierung wird hier durch naive dimensionelle Regularisierung im Kontinuum bzw. durch das Gitter vorgenommen. Wir bestimmen dann die Renormierungskonstanten der in der chiralen Ward-Identität vorkommenden Größen im $\overline{\text{MS}}$ -Schema des Kontinuums, in einem daran angelehnten $\overline{\text{MS}}$ /LAT-Schema auf dem Gitter und im sogenannten MOM- oder RI-Schema (*momentum space subtraction* bzw. *regularisation invariant*). Dabei diskutieren wir die Konsequenzen, die die Gültigkeit der nackten bzw. renormierten Ward-Identitäten für die Renormierungskonstanten hat sowie die Eichabhängigkeit der Schemata. Außerdem zeigen wir, wie sich die Brechung der chiralen Symmetrie durch den Gitterregulator in den Renormierungskonstanten widerspiegelt. Die Renormierung der gitterregularisierten Größen spielt eine wichtige Rolle bei der Restauration der chiralen Symmetrie im Kontinuumslimit und ist daher auch für numerische Simulationen von Bedeutung. Zum Abschluß des Kapitels gebe ich daher einen kurzen Überblick über die Renormierung eichinvarianter zusammengesetzter Operatoren, ihr Mischungsverhalten und die Konsequenzen für die chirale Ward-Identität. Alle perturbativen Kalkulationen dieses Kapitels wurden auf der Grundlage von [VI] und [LV] gemeinsam mit Claus Gebert durchgeführt und sind daher auch Bestandteil seiner parallel angefertigten Diplomarbeit.

5.1 Das Renormierungsprogramm

5.1.1 Das Konzept der Renormierung

Bei der störungstheoretischen Entwicklung feldtheoretischer Korrelationsfunktionen im Impulsraum treten Komplikationen in Form von Divergenzen auf. Während die Korrelatoren

in niedrigster Ordnung der perturbativen Entwicklung endlich bleiben, begegnet man in höheren Ordnungen Loop-Integralen, die nicht konvergieren. Grundsätzlich unterscheidet man dabei zwei Typen von Divergenzen:

Sogenannte Ultraviolett-Divergenzen assoziiert man mit hohen Impulsen, d.h. sie treten in den äußeren Regionen der Schleifenintegrale auf, falls der Integrand nicht schnell genug abfällt.

Zusätzlich kann es z.B. bei verschwindender Gluon-Masse zu sogenannten Infrarot-Divergenzen kommen, diese haben ihre Ursache im Verhalten des Integranden bei kleinen Impulsen, typischerweise treten hier Pole auf, die nicht ohne Divergenz integriert werden können.

Durch das Renormierungsprogramm ist es aber dennoch möglich, aus solchen scheinbar unsinnigen Theorien sinnvolle Informationen zu entnehmen. Aufgrund seiner großen Erfolge hat dieses Konzept Eingang in die Lehrbuchliteratur gefunden, man vergleiche etwa [Ka], [Co] oder [PT].

Die Idee der Renormierung besteht im wesentlichen in einer Umparametrisierung der Lagrange-Dichte. Formal werden die Divergenzen in die Beziehungen zwischen den Feldern bzw. den nackten Parametern der Lagrange-Dichte (etwa die Massen oder Kopplungskonstanten) und den entsprechenden renormierten Größen absorbiert. Man faßt dann die divergenten nackten Größen in der Wirkung als unphysikalisch auf, physikalisch sinnvoll sind lediglich die renormierten Massen oder Kopplungskonstanten. Die Verknüpfung zwischen nackten und renormierten Größen ist dann derart konstruiert, daß sämtliche Korrelationsfunktionen in Abhängigkeit von den renormierten Parametern für alle Impulse endlich bleiben. Allerdings bedürfen aus elementaren Feldern zusammengesetzte Operatoren eine zusätzliche Renormierung wie wir sehen werden.

Diese multiplikative Renormierung der Felder und Parameter kann auch als Renormierung durch Hinzufügen von sogenannten Gegentermen (engl. *counter-terms*) zur Lagrange-Dichte verstanden werden. Ist die Renormierung durch endlich viele Gegenterme möglich, so unterscheidet man renormierbare (die Gegenterme sind unendliche Potenzreihen in der Kopplungskonstanten) und super-renormierbare Theorien (nur eine endlich Anzahl von Graphen gibt zu Gegentermen Anlaß).

Das Renormierungsprogramm besteht aus zwei Schritten. Zunächst wird die betreffende Theorie regularisiert, es wird also ein zusätzlicher Parameter eingeführt, der die Endlichkeit der betrachteten Korrelationsfunktionen erzwingt. Die Divergenz tritt dann bei der Entfernung dieses Parameters, d.h. in einem entsprechenden Limes auf.

Die durch die Regularisierung identifizierten Divergenzen werden in geeigneter Form in die Renormierungskonstanten bzw. Gegenterme absorbiert. Die genaue Vorschrift, nach der dies geschieht, bezeichnet man als Renormierungsschema.

5.1.2 Ausgangslage

In diesem Kapitel interessieren wir uns für die Renormierung von Operatoren der Form

$$\mathcal{O}_\Gamma(x) := \bar{\lambda}(x)\Gamma\lambda(x), \quad (5.1)$$

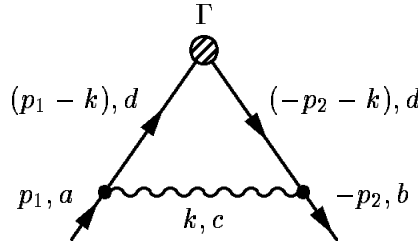


Abbildung 5.1: 1-Loop-Korrektur

wobei $\Gamma \in \{\mathbb{1}, \gamma_5, \gamma_\mu \gamma_5\}$ ¹. Dies sind genau die in den chiralen Ward-Identitäten vorkommenden Größen, beispielsweise ergibt sich für $\Gamma = \gamma_\mu \gamma_5$ der axiale Vektorstrom. Wir betrachten diese Größen nun zwischen externen Gluino-Zuständen und definieren hierzu die folgenden Korrelationsfunktionen [LV]

$$G_\Gamma(x, y) := \langle \lambda(x) \mathcal{O}_\Gamma(0) \bar{\lambda}(y) \rangle \quad (5.2)$$

bzw. ihre Fourier-Transformierten²

$$\tilde{G}_\Gamma(p_1, p_2) := \int d^4x d^4y e^{ip_1 x + ip_2 y} G_\Gamma(x, y) \quad (5.3)$$

(statt $\tilde{G}_\Gamma(p_1, p_2)$ schreiben wir von nun an auch im Impulsraum $G_\Gamma(p_1, p_2)$). Bei der zur Renormierung notwendigen Berechnung der nackten Größen können wir die externen fermionischen Beine amputieren und uns auf die Berechnung von

$$\Lambda_\Gamma(p_1, p_2) := S_F^{-1}(p_1) G_\Gamma(p_1, p_2) S_F^{-1}(-p_2) \quad (5.4)$$

beschränken. In erster Ordnung der Störungstheorie sind die Quantenkorrekturen also durch das Diagramm 5.1 gegeben, und wir schreiben die Summe aus Tree-level- und 1-Loop-Beitrag in der Form

$$\Lambda_\Gamma(p_1, p_2) = \Gamma + \tilde{\Lambda}_\Gamma(p_1, p_2). \quad (5.5)$$

Bei der Berechnung der $\tilde{\Lambda}_\Gamma(p_1, p_2)$ können wir uns dabei auf den Fall $p_1 = -p_2 \equiv p$ beschränken, d.h. wir betrachten den Fall ohne Impulsübertrag am oberen Vertex. Wir benutzen dabei die Notation

$$\tilde{\Lambda}_\Gamma(p) := \tilde{\Lambda}_\Gamma(p, -p). \quad (5.6)$$

Der Fermion-Propagator, der die Renormierungskonstanten der Wellenfunktion und der Masse bestimmt, ist über

$$S_F(x) = \langle \lambda(x) \bar{\lambda}(0) \rangle \quad (5.7)$$

bzw. die Fourier-Transformierte dieses Ausdrucks

$$\tilde{S}_F(p) = \int d^4x e^{ipx} S_F(x) \quad (5.8)$$

definiert. Wir schreiben allerdings im Impulsraum die Tilde nicht explizit mit, sondern verwenden die allgemein übliche Notation $S_F(p)$.

¹In der QCD interessiert man sich außerdem für den Vektorstrom $\Gamma = \gamma_\mu$. Im Fall von Majorana-Spinoren gilt aber $\bar{\lambda} \gamma_\mu \lambda = 0$

²Man beachte, daß die Impulse im obigen Diagramm in Pfeilrichtung laufen, in den Greens-Funktionen jedoch als einlaufend erklärt werden.

5.1.3 Verwendete Regulatoren

In dieser Arbeit werden zwei verschiedene Regulatoren verwendet. Im Kontinuum benutzen wir die sogenannte dimensionelle Regularisierung. Die Grundidee besteht hierbei in einer analytischen Fortsetzung der Dimension D der Raum-Zeit ins Komplexe. Formal werden in $D = 4$ Dimensionen divergente Integrale dann in $D = 4 - \varepsilon$ Dimensionen betrachtet, die Divergenz äußert sich dann in den nackten Größen als einfacher Pol bei $\varepsilon = 0$. Wir verwenden hier genauer die sogenannte naive dimensionelle Regularisierung (NDR), bei der die Antikommutatoreigenschaft $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ auch in beliebigen Dimensionen gültig bleibt. Es ist hier zu beachten, daß fermionische Felder in D Dimensionen die Massendimension $\frac{D-1}{2}$ und Eichfelder die Massendimension $\frac{D}{2} - 1$ annehmen, so daß die Kopplungskonstante die Dimension $2 - \frac{D}{2}$ haben muß, damit die Wirkung dimensionslos bleibt³. Wir führen daher an geeigneter Stelle die Ersetzung $g \rightarrow g\mu^{2-D/2}$ durch, wobei μ eine Konstante mit Massendimension 1 ist.

Bei dem zweiten Regulator handelt es sich – dem Titel der Arbeit entsprechend – um die Gitter-Regularisierung. Die Fourier-Transformierten der Felder im diskretisierten Ortsraum (Gitterkonstante a) sind periodisch und daher beschränken sich die Loop-Integrale auf die erste Brillouin-Zone $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]^4$. Es besteht also ein Impuls-Cutoff $\sim \frac{1}{a}$, der die UV-Divergenzen beseitigt. Im Kontinuumslimites $a \rightarrow 0$ treten diese dann in den hier betrachteten nackten Größen als logarithmische Divergenzen ($\sim \ln(a)$) auf.

5.1.4 Verwendete Renormierungsschemata

5.1.4.1 Das $\overline{\text{MS}}$ -Schema

Im Kontinuum verwenden wir das sogenannte $\overline{\text{MS}}$ -Schema, eine Erweiterung der MS-Vorschrift (*minimal subtraction*). Eine formale Definition dieses Schemas findet man beispielsweise in [Co].

Zur Bestimmung der Renormierungskonstanten Z_λ der fermionischen Wellenfunktion betrachtet man den inversen Fermion-Propagator, der perturbativ die Form

$$S_F^{-1}(p) = -i\not{p}(1 - \Sigma_1(p)) + m(1 - \Sigma_2(p)) \quad (5.9)$$

annimmt. Es zeigt sich, daß $\Sigma_1(p)$ einen Term proportional zu $(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi)$ enthält, $Z_\lambda^{\overline{\text{MS}}}$ wird dann über $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\lambda(1 - \Sigma_1(p)) \stackrel{!}{=} \text{endlich}$ und die $\overline{\text{MS}}$ -Vorschrift festgelegt. Genauer ist $Z_\lambda^{\overline{\text{MS}}}$ in 1-Loop-Ordnung wegen

$$\Sigma_1(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\gamma_{\Sigma_1} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) \right) + C_{\Sigma_1}^{\text{CONT}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.10)$$

durch

$$Z_\lambda^{\overline{\text{MS}}} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\gamma_{\Sigma_1} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \right) \quad (5.11)$$

gegeben. Dabei sind γ_{Σ_1} und $C_{\Sigma_1}^{\text{CONT}}$ Konstanten. C_A ist ein gruppentheoretischer Faktor (es gilt $C_A = N_c$, wobei N_c die Anzahl der Farbfreiheitsgrade angibt). α_S ist über $\frac{\alpha_S}{4\pi} =$

³Dabei beachte man die Zerlegung $A_\mu = -igA_\mu^a T^a$.

$\frac{g^2}{16\pi^2}$ mit der Kopplungskonstanten g verknüpft, und $\gamma_E = 0.577215\dots$ ist die Eulersche Gamma-Konstante.

Insgesamt erhält man dann den renormierten Propagator zu

$$\begin{aligned} S_F^{-1, \overline{MS}} &= -i\not{p}(1 - \Sigma_1^{\overline{MS}}(p)) + m^{\overline{MS}}(1 - \Sigma_2^{\overline{MS}}(p)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\lambda^{\overline{MS}} (-i\not{p}(1 - \Sigma_1(p)) + m(1 - \Sigma_2(p))). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die Renormierung der Masse wird dabei wie folgt vorgenommen:

$$m^{\overline{MS}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_m^{\overline{MS}} m. \quad (5.13)$$

Damit können wir auch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Z_\lambda^{\overline{MS}} (Z_m^{\overline{MS}})^{-1} (1 - \Sigma_2(p)) = 1 - \Sigma_2^{\overline{MS}}(p) \quad (5.14)$$

schreiben.

Beim Vergleich mit [CLV] beachte man, daß Z_λ dort den Propagator und nicht sein Inverses renormiert.

Die auftretenden nackten amputierten Greens-Funktionen der Operatoren $\mathcal{O}_\Gamma$ sind auf 1-Loop-Niveau typischerweise von der Form [CLV]

$$\tilde{\Lambda}_\Gamma(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \delta_{ab} \left(\Gamma \gamma_\Gamma \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) \right) + C_\Gamma^{CONT} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.15)$$

wobei γ_Γ eine (vom Operator abhängige) Zahl, die sogenannte anomale Dimension des Operators und C_Γ^{CONT} eine endliche Konstante ist. μ ist die aus Dimensionsgründen eingeführte Massenskala (s.o.). Die Renormierungskonstante im $\overline{MS}$ -Schema wird dann in 1-Loop-Ordnung durch

$$Z_\lambda^{\overline{MS}} Z_\Gamma^{\overline{MS}} = 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\gamma_\Gamma \left(\frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \right) \quad (5.16)$$

definiert. Dabei schreiben wir – den allgemeinen Konventionen folgend – Z_S für $Z_\parallel$, Z_P für Z_{γ_5} und Z_A statt $Z_{\gamma_\mu \gamma_5}$. Die renormierte amputierte Greens-Funktion lautet dann

$$\Lambda_\Gamma^{\overline{MS}}(p, -p) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Z_\lambda^{\overline{MS}} Z_\Gamma^{\overline{MS}} \Lambda_\Gamma(p, -p)). \quad (5.17)$$

Die nicht amputierte Greens-Funktion wird entsprechend durch $Z_\lambda^{-1} Z_\Gamma$ renormiert

$$G_\Gamma^{\overline{MS}}(p, -p) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((Z_\lambda^{\overline{MS}})^{-1} Z_\Gamma^{\overline{MS}} G_\Gamma(p, -p)). \quad (5.18)$$

5.1.4.2 Das $\overline{MS}$ /LAT-Schema

Dieses Verfahren zur Renormierung der gitterregularisierten Größen greift auf die im $\overline{MS}$ -Schema des Kontinuums vorgenommene Renormierung zurück. Die Gitter-Größen werden derart renormiert, daß die resultierenden renormierten Größen vom Regulator unabhängig sind, also den $\overline{MS}$ -renormierten Kontinuumsgrößen entsprechen [CLV], [MPSTV].

Auf dem Gitter nimmt der inverse nackte Fermion-Propagator die Form

$$S_F^{-1,LAT}(p) = i\not{p} + m_0 - \Sigma^{LAT}(p) + \mathcal{O}(a) \quad (5.19)$$

an⁴, wobei

$$\Sigma^{LAT}(p) = i\not{p}\Sigma_1^{LAT}(p) + m_0\Sigma_2^{LAT}(p) + \frac{r}{a}\Sigma_0^{LAT}(p) + \mathcal{O}(a). \quad (5.20)$$

Dabei ist $\frac{r}{a}\Sigma_0$ eine additive Massenkorrektur, die auf die Wilsonsche Formulierung der Fermionen zurückzuführen ist. Die Renormierung im $\overline{\text{MS}}/\text{LAT}$ -Schema wird nun durch eine Anpassung an die renormierten Kontinuumsgrößen vorgenommen, im Fall des Propagators also⁵

$$S_F^{-1,\overline{\text{MS}}/\text{LAT}}(p) \stackrel{!}{=} S_F^{-1,\overline{\text{MS}}}(-p), \quad (5.21)$$

wobei der im $\overline{\text{MS}}/\text{LAT}$ -Schema renormierte inverse Propagator durch

$$S_F^{-1,\overline{\text{MS}}/\text{LAT}}(p) = \lim_{a \rightarrow 0} Z_\lambda^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} S_F^{-1,LAT}(p) \quad (5.22)$$

definiert ist. Die Renormierung der Masse geschieht durch

$$m^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} = \lim_{a \rightarrow 0} Z_m^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} m, \quad (5.23)$$

auch hier passen wir die renormierte Größe an das Kontinuum an:

$$m^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} \stackrel{!}{=} m^{\overline{\text{MS}}}. \quad (5.24)$$

Auf dem Gitter ist dabei

$$m = m_0 - m_{cr}, \quad (5.25)$$

wobei m_{cr} der Wert der nackte Masse m_0 ist, bei dem sich unter Berücksichtigung der additiven Massenkorrektur durch die lineare Divergenz der chirale Limes einstellt [MM], [CLV]. Analog renormiert man auch die Greens-Funktionen der Operatoren $\mathcal{O}_\Gamma$ über die Vorschrift⁶

$$\Lambda_\Gamma^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}}(p, -p) := \lim_{a \rightarrow 0} \left(Z_\lambda^{\overline{\text{MS}},LAT} Z_\Gamma^{\overline{\text{MS}},LAT} \Lambda_\Gamma^{LAT}(p, -p) \right) \stackrel{!}{=} \Lambda_\Gamma^{\overline{\text{MS}}}(p, -p). \quad (5.26)$$

5.1.4.3 Das RI-Schema

Eine zweite Möglichkeit, gitterregularisierte Größen zu renormieren, bietet das sogenannte RI- oder MOM-Schema (*regularization invariant* bzw. *momentum space subtraction*) [MPSTV]. Vorteil dieses Schemas ist, daß nicht auf die renormierten Größen des Kontinuums zurückgegriffen wird.

⁴Ich führe hier den Term $\mathcal{O}(a)$ an, da wir $\not{p}$ anstelle des trigonometrischen Ausdrucks $\gamma_\rho \frac{1}{a} \sin(ap_\rho)$ schreiben.

⁵Man beachte, daß mit den in [Ge] angegebenen Feynman-Regeln $\lim_{a \rightarrow 0} S_F^{LAT}(p) = S_F^{CONT}(-p)$ gilt.

⁶Schreibt man die projizierten nackten 1-Loop-Greens-Funktionen des Kontinuums (zur Projektion s.u.) in der Form $\Gamma_\Gamma^{CONT}(p) = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\gamma_\Gamma \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) \right) + C_\Gamma^{CONT,pr} \right) + \mathcal{O}(\epsilon)$ und die auf dem Gitter als $\Gamma_\Gamma^{LAT}(p) = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-\gamma_\Gamma \ln(a^2 p^2) + C_\Gamma^{LAT,pr} \right) + \mathcal{O}(a)$, so kann man auf Einschleifen-Niveau schreiben $Z_\lambda^{\overline{\text{MS}},LAT} Z_\Gamma^{\overline{\text{MS}},LAT} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (\gamma_\Gamma \ln(a^2 \mu^2) + C_\Gamma^{CONT,pr} - C_\Gamma^{LAT,pr})$, siehe dazu auch [CLV].

Der Grundgedanke dieses Schemas besteht darin, die Renormierung so vorzunehmen, daß die renormierten Größen bei einer vorgegebenen Impulsskala $p^2 = \mu^2$ mit ihrem Tree-level-Wert übereinstimmen. Dabei werden wir auf die nackten Größen noch geeignete Projektoren anwenden, um die Spinor- und Farbindizes zu beseitigen. Konkret definieren wir dazu

$$P_{\mathbb{1}} := \mathbb{1} \quad (5.27)$$

$$P_{\gamma_5} := \gamma_5 \quad (5.28)$$

$$P_{\gamma_\mu \gamma_5} := \frac{1}{4} \gamma_5 \gamma_\mu \quad (5.29)$$

und erklären projizierte Größen via

$$\tilde{\Gamma}_\Gamma^{LAT}(p) := \frac{1}{4(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(P_\Gamma \tilde{\Lambda}_\Gamma^{LAT}(p, -p) \right) \quad (5.30)$$

bzw.

$$\Gamma_\Gamma^{LAT}(p) := \frac{1}{4(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(P_\Gamma \Lambda_\Gamma^{LAT}(p, -p) \right). \quad (5.31)$$

Dabei ist im Fall des axialen Vektorstroms über μ zu summieren. Man beachte, daß sich diese Spur sowohl über die Spinor- als auch über die Farbindizes erstreckt. Die o.g. Renormierungsbedingung schreibt sich dann als

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left(Z_\lambda^{RI} Z_\Gamma^{RI} \Gamma_\Gamma^{LAT}(p) \right) \Big|_{p^2 = \mu^2} = 1. \quad (5.32)$$

Die Renormierungskonstante Z_λ der Wellenfunktion legen wir dabei über

$$\begin{aligned} Z_\lambda^{RI-1} &= -i \frac{1}{4(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\frac{\partial S_F^{-1, LAT}(p)}{\partial \not{p}} \right) \Big|_{p^2 = \mu^2} \\ &\equiv -i \frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_\rho \frac{\partial S_F^{-1, LAT}(p)}{\partial p_\rho} \right) \Big|_{p^2 = \mu^2} \end{aligned} \quad (5.33)$$

fest⁷. Es gilt dann in 1-Loop-Ordnung

$$Z_\lambda^{RI} = 1 + \left(\Sigma_1^{LAT}(p) + \frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_\rho \not{p} \frac{\partial \Sigma_1^{LAT}(p)}{\partial p_\rho} \right) \right) \Big|_{p^2 = \mu^2}. \quad (5.34)$$

Die Renormierungskonstante der Masse erhält man aus der Bedingung

$$\lim_{a \rightarrow 0} Z_\lambda^{RI} Z_m^{RI-1} m_0 (1 - \Sigma_2^{LAT}) \Big|_{p^2 = \mu^2} = m_0 \quad (5.35)$$

auf 1-Loop-Niveau zu

$$Z_m^{RI} = 1 + \left(\Sigma_1^{LAT}(p) - \Sigma_2^{LAT}(p) + \frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_\rho \not{p} \frac{\partial \Sigma_1^{LAT}(p)}{\partial p_\rho} \right) \right) \Big|_{p^2 = \mu^2}. \quad (5.36)$$

Die Renormierungskonstanten der betrachteten Operatoren schreiben sich in diesem Schema dann ebenfalls auf Einschleifen-Niveau als

$$Z_\Gamma^{RI} = 1 - \left(\tilde{\Gamma}_\Gamma^{LAT}(p) + \Sigma_1^{LAT}(p) + \frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_\rho \not{p} \frac{\partial \Sigma_1^{LAT}(p)}{\partial p_\rho} \right) \right) \Big|_{p^2 = \mu^2}. \quad (5.37)$$

⁷Beim Vergleich mit [MPSTV] beachte man wieder die vertauschten Rollen von Z_λ und Z_λ^{-1}

5.2 Dimensionelle Regularisierung der nackten Kontinuumsgrößen

5.2.1 Vorgehensweise

Die Vorgehensweise bei der Berechnung der einzelnen auszuwertenden Feynman-Diagramme folgt im wesentlichen einem gemeinsamen Schema:

- Nach der Umsetzung des entsprechenden Graphen in algebraische Ausdrücke werden – sofern es im Einzelfall günstig erscheint – zunächst einige Umformungen im Zähler des jeweiligen Loop-Integrals vorgenommen, die es erlauben, den Ausdruck zu vereinfachen.
- Danach wird in den Integralen eine Feynman-Parametrisierung durchgeführt. Hierdurch kann von einem Nenner ausgegangen werden, der in der Integrationsvariablen k gerade ist.
- Als nächstes wird – sofern dies noch notwendig ist – eine Aufspaltung des betrachteten Integrals in einzelne Teilintegrale vorgenommen.
- Unter Beachtung der auftretenden γ -Strukturen werden diese d^4k -Integrationen unter Benutzung der im Anhang angegebenen Integralformeln in dimensioneller Regularisierung ausgewertet.
- Der verbleibende Ausdruck wird in Potenzen von ε entwickelt, und die ggf. vorhandene Divergenz tritt als einfacher Pol $\sim \frac{1}{\varepsilon}$ zutage.
- Es werden dann die verbleibenden Integrationen der Feynman-Parametrisierung ausgeführt.

5.2.2 Gluino-Propagator

Wir berechnen in diesem Abschnitt also die Selbstenergie des Fermion-Propagators in 1-Loop- Störungstheorie des Kontinuums. Das einzige beitragende Diagramm ist dann durch Abb. 5.2 gegeben und schreibt sich algebraisch unter Benutzung der Feynman-Regeln des Kontinuums und nach Amputation der äußeren Beine als⁸

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} V_\nu^{dcb}[\lambda, A_\nu, \bar{\lambda}](p-k, k, -p) S_F[\lambda \bar{\lambda}](p-k) D_{\mu\nu}(k) \cdot V_\mu^{acd}[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}](p, -k, k-p). \quad (5.38)$$

Die weitere Rechnung verläuft analog zur Renormierung der Quark-Wellenfunktion in der QCD, man vgl. z.B. [Ry], [PS].

⁸Zur Notation betreffs der Feynman-Regeln beachte man [Ge].

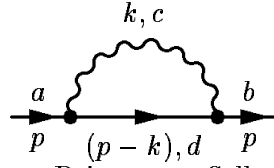


Abbildung 5.2: 1-Loop-Beitrag zur Selbstenergie des Gluinos

5.2.2.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)Algebraischer Ausdruck und Vereinfachung

In dieser Eichung erhalten wir

$$-g^2 f_{acd} f_{bcd} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu [i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\mu}{k^2 [(p - k)^2 + m^2]}. \quad (5.39)$$

Für die Summe über die Strukturkonstanten gilt

$$\sum_{c,d} f_{acd} f_{bcd} = N_c \delta_{ab} = C_A \delta_{ab}. \quad (5.40)$$

Außerdem benutzen wir die Rechenregeln

$$\gamma_\mu \gamma_\mu = D \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not{a} \gamma_\mu &= a_\nu \gamma_\mu (2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\mu \gamma_\nu) \\ &= (2 - D) \not{a} \end{aligned} \quad (5.42)$$

für euklidische Gamma-Matrizen in D Dimensionen. Damit ergibt sich für das Diagramm

$$-g^2 C_A \delta_{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2 - D) i(\not{p} - \not{k}) + Dm}{k^2 [(p - k)^2 + m^2]}. \quad (5.43)$$

Power-counting zeigt, daß dieses Integral in vier Dimensionen logarithmisch divergiert, und wir werten es daher in $D = 4 - \varepsilon$ Dimensionen aus.

Feynman-Parametrisierung

Unter Benutzung von

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\delta(x + y - 1)}{(ax + by)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(a - b)x + b]^2} \quad (5.44)$$

(wähle in unserem speziellen Fall $a = (p - k)^2 + m^2$ und $b = k^2$) erhält man dann nach einer Substitution $k \rightarrow k + px$

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2 - D) i(\not{p} - \not{k}) + Dm}{k^2 [(p - k)^2 + m^2]} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2 - D) i\not{p}(1 - x) + Dm}{[k^2 + p^2 x(1 - x) + m^2 x]^2}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Dabei haben wir im Integranden Terme vernachlässigt, die ungerade in der Integrationsvariablen k sind und somit keinen Beitrag liefern.

Ausführen der d^4k -Integration

Unter Benutzung von (G.20) ergibt sich hieraus

$$\frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \frac{[(2-D)i\not{p}(1-x) + Dm]}{[p^2x(1-x) + m^2x]^{2-D/2}} \quad (5.46)$$

Aus Dimensionsgründen müssen wir das Integral wie oben besprochen mit der modifizierten Kopplung $g^2\mu^{4-D}$ multiplizieren und erhalten dann für die betrachtete Größe den Ausdruck

$$g^2\mu^{4-D} \frac{\Gamma(2-D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \frac{[(2-D)i\not{p}(1-x) + Dm]}{[p^2x(1-x) + m^2x]^{2-D/2}} \quad (5.47)$$

$$= g^2\mu^\varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \int_0^1 dx \frac{[(-2+\varepsilon)i\not{p}(1-x) + (4-\varepsilon)m]}{[p^2x(1-x) + m^2x]^{\varepsilon/2}} \quad (5.48)$$

$$= \frac{g^2}{16\pi^2} \Gamma(\varepsilon/2) \int_0^1 dx \frac{[(-2+\varepsilon)i\not{p}(1-x) + (4-\varepsilon)m]}{[(p^2x(1-x) + m^2x)/(4\pi\mu^2)]^{\varepsilon/2}}. \quad (5.49)$$

Entwicklung nach ε

Um die Laurent-Entwicklung nach ε durchzuführen, benutzen wir

$$a^\varepsilon = e^{\varepsilon \ln a} = 1 + \varepsilon \ln a + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (5.50)$$

und

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (5.51)$$

wobei

$$\gamma_E = 0.577215... \quad (5.52)$$

die Eulersche Gamma-Konstante ist.

Damit ergibt sich dann für die Selbstenergie des Fermions in Feynman-Eichung modulo Vorfaktor δ_{ab} das Ergebnis

$$\begin{aligned} \Sigma^{FEY}(p) &= -C_A \frac{g^2}{16\pi^2} \left[-i\not{p} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 1 \right) + 4m \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^1 dx [i\not{p}(1-x) - 2m] \ln \left(\frac{p^2x(1-x) + m^2x}{\mu^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Damit erhält man für den inversen Propagator, wieder abgesehen von einem Faktor δ_{ab} :

$$\begin{aligned} S^{-1,FEY}(p) &= -i\not{p} + m - \Sigma(p) \\ &= -i\not{p} + m + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[-i\not{p} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + 4m \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^1 dx [i\not{p}(1-x) - 2m] \ln \left(\frac{p^2x(1-x) + m^2x}{\mu^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Sortiert nach Vorfaktoren von $i\not{p}$ und m schreibt sich dies dann als

$$\begin{aligned}
S^{-1,FEY}(p) = & -i\not{p} \left\{ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 1 \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right\} \\
& + m \left\{ 1 + 4 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \frac{1}{2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right\}. \quad (5.55)
\end{aligned}$$

5.2.2.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

Um die Renormierungskonstante Z_λ in Landau-Eichung zu bestimmen, ist dem eben berechneten Term der Feynman-Eichung ein weiterer Anteil hinzuzufügen, der sich aus dem Ersetzen des $\delta_{\mu\nu}$ aus dem Gluonpropagator durch

$$-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (5.56)$$

ergibt. Aufgrund des Gewichts $(1 - \alpha)$ in allgemeiner kovarianter Eichung werden wir diesen Term mit $(1 - \alpha)\Sigma^{(1-\alpha)}(p)$ bezeichnen. Man ziehe hierzu auch den Anhang heran, der Gluon-Propagator nimmt in allgemeiner Eichung die Form

$$\frac{1}{k^2} \delta_{ab} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (5.57)$$

an.

Algebraischer Ausdruck und Vereinfachung

Dieser zusätzliche Term in der Selbstenergie lautet (ohne den Vorfaktor $(1 - \alpha)$)

$$\Sigma^{(1-\alpha)}(p) = g^2 \mu^\varepsilon C_A \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\not{k}[i(\not{p} - \not{k}) + m]\not{k}}{(k^2)^2[(p - k)^2 + m^2]} \quad (5.58)$$

$$= g^2 \mu^\varepsilon C_A \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{i(2pk - \not{p}\not{k} - k^2)\not{k} + mk^2}{(k^2)^2[(p - k)^2 + m^2]} \quad (5.59)$$

$$= g^2 \mu^\varepsilon C_A \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left\{ \frac{2ipk\not{k}}{(k^2)^2[(p - k)^2 + m^2]} + \frac{-i(\not{p} + \not{k}) + m}{k^2[(p - k)^2 + m^2]} \right\}. \quad (5.60)$$

Feynman-Parametrisierung

Die beiden Integrale werden nun getrennt behandelt. Für das erste ergibt sich mit (G.18)

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{2ipk\not{k}}{k^4[(p - k)^2 + m^2]} \\
&= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx (1-x) \frac{4i(pk)\not{k}}{[(p^2 - 2pk + m^2)x + k^2]^3} \quad (5.61)
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{4i[(pk)\not{k} + p^2 x^2 \not{p}]}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3}. \quad (5.62)$$

Ausführen der d^4k -Integration

Zur weiteren Behandlung kann der Spezialfall $n = 3$ und $a^2 = p^2 x(1-x) + m^2 x$ der Integralformel (G.21)

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\delta_{\mu\nu}}{2(a^2)^{n-1-D/2}} \frac{\Gamma(n-1-D/2)}{\Gamma(n)} \quad (5.63)$$

sowie die Integrationsregel (G.20)

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(a^2)^{n-D/2}} \quad (5.64)$$

benutzt werden. Damit folgt für obiges Integral

$$(5.62) = \frac{i\not{p}}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \int_0^1 dx (1-x) \left\{ \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{\varepsilon/2}} + \frac{2p^2 x^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \right\}. \quad (5.65)$$

Für das zweite Integral aus (5.60) folgt mit denselben Rechenschritten

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-i(\not{p} + \not{k}) + m}{k^2[(p-k)^2 + m^2]} = \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{-i\not{p} - i(\not{k} + \not{p}x) + m}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^2} \quad (5.66)$$

$$= \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \int_0^1 dx \frac{-i\not{p}(1+x) + m}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{\varepsilon/2}}. \quad (5.67)$$

Entwicklung nach ε

Insgesamt ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1-\alpha)}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A (4\pi\mu^2)^{\varepsilon/2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{i\not{p}(1-x-1-x) + m}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{\varepsilon/2}} \Gamma(\varepsilon/2) + \frac{2p^2 x^2(1-x)i\not{p}}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \right\} \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln 4\pi \right) \\ &\quad \left\{ \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E \right) \int_0^1 dx (-2i\not{p}x + m) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx \frac{2p^2 x(1-x)i\not{p}}{p^2(1-x) + m^2} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left\{ \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) (-i\not{p} + m) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dx (2i\not{p}x - m) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 2i\not{p} \int_0^1 dx x(1-x) \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{p^2(1-x) + m^2}{\mu^2} \right) \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Weitere Vereinfachung

Das letzte Integral kann nun mittels partieller Integration noch weiter ausgewertet werden,

und man erhält

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx x(1-x) \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{p^2(1-x) + m^2}{\mu^2} \right) \\ &= - \int_0^1 dx (1-2x) \left\{ \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) - \ln x \right\} \end{aligned} \quad (5.70)$$

$$= - \int_0^1 dx (1-2x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) + \underbrace{\int_0^1 dx (1-2x) \ln x}_{=-\frac{1}{2}}. \quad (5.71)$$

Damit ergibt sich schließlich für den additiven Teil der Selbstenergie das Resultat

$$\begin{aligned} \Sigma^{(1-\alpha)}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left\{ -i\not{p} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + m \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Bei Vergleich mit (5.53) erkennt man nun, daß sich die Terme proportional zu $-i\not{p}$ bei der Addition eliminieren. Wir können daher

$$\begin{aligned} \Sigma^{LAN}(p) &= \Sigma^{FEY}(p) + \Sigma^{(1-\alpha)}(p) \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A m \left[-3 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) + 2 \right. \\ &\quad \left. + 3 \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.73)$$

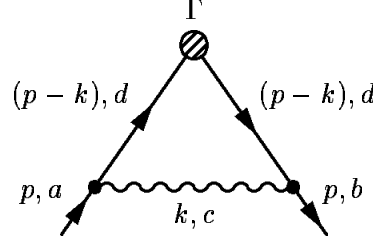
notieren⁹. Der nackte inverse Propagator in Landau-Eichung lautet daher schließlich

$$\begin{aligned} S_F^{-1,LAN}(p) &= -i\not{p} + m - \Sigma^{LAN}(p) \\ &= -i\not{p} \\ &\quad + m \left\{ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[3 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) - 2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 3 \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

5.2.3 Skalare und Pseudoskalare Dichte

Wir wenden uns nun den in der Einführung vorgestellten Operatoren $\mathcal{O}_\Gamma$ zu und berechnen die zugehörigen nackten amputierten Greens-Funktionen. Die 1-Loop-Korrektur wird dabei durch den Graphen aus Abb. 5.3 repräsentiert.

⁹ In Landau-Eichung gilt $\alpha = 0$, so daß der Vorfaktor $(1-\alpha)$ vor $\Sigma^{(1-\alpha)}$ zu 1 wird. Es gilt daher $\Sigma^{LAN} = \Sigma^{FEY} + \Sigma^{(1-\alpha)}$.

Abbildung 5.3: 1-Loop-Korrektur zu den Operatoren $\mathcal{O}_\Gamma$

Der entsprechende algebraische Ausdruck lautet unter Verwendung der Feynman-Regeln des Kontinuums

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\Gamma(p, -p) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} V_\nu^{dcb}[\lambda, A_\nu, \bar{\lambda}](p - k, k, -p) S_F[\lambda, \bar{\lambda}](p - k) \Gamma S_F[\lambda, \bar{\lambda}](p - k) \\ &\quad \cdot V_\mu^{acd}[\lambda, A_\mu, \bar{\lambda}](p, -k, k - p) D_{\mu\nu}(k). \end{aligned} \quad (5.75)$$

5.2.3.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

Vorbereitungen für allgemeines Γ

Der erste Teil der Rechnung im Kontinuum kann ohne die Spezifizierung von Γ durchgeführt werden, daher werden wir in späteren Abschnitten auf den ersten Teil der nun folgenden Umformungen zurückgreifen.

In Feynman-Eichung ist die amputierte Greens-Funktion in 1-Loop-Ordnung des Kontinuums durch den Ausdruck

$$\tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY}(p) = -g^2 C_A \delta_{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i(\not{p} - \not{k}) + m] \Gamma [i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\nu}{[(p - k)^2 + m^2]^2 k^2} \quad (5.76)$$

gegeben. Feynman-Parametrisierung ergibt unter Benutzung der Identität (G.18)

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 \frac{dx \cdot x}{[(a - b)x + b]^3} \quad (5.77)$$

den Ausdruck

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY}(p) &= -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i(\not{p} - \not{k}) + m] \Gamma [i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\nu}{[(p^2 - 2pk + m^2)x + k^2]^3} \\ &= -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i(\not{p} - \not{k}) + m] \Gamma [i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\nu}{[(k - px)^2 + p^2 x(1 - x) + m^2 x]^3}. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Nach Substitution $k \rightarrow k + px$ wird dies zu

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY}(p) &= -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \\ &\quad \cdot \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i\not{p}(1 - x) - i\not{k} + m] \Gamma [i\not{p}(1 - x) - i\not{k} + m] \gamma_\nu}{[k^2 + p^2 x(1 - x) + m^2 x]^3}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Beim Ausmultiplizieren im Zähler beachtet man nun, daß lineare Terme in k nicht zur $d^4 k$ -Integration über den $\mathbb{R}^4$ beitragen und bekommt somit zwei relevante Terme

$$\tilde{\Lambda}_\Gamma^{FEY}(p) = \tilde{\Lambda}_\Gamma^{(1),FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_\Gamma^{(2),FEY}(p), \quad (5.80)$$

wobei

$$\tilde{\Lambda}_{\Gamma}^{(1),FEY}(p) = 2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu \not{k} \Gamma \not{k} \gamma_\nu}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3} \quad (5.81)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\Gamma}^{(2),FEY}(p) = -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i\not{p}(1-x) + m] \Gamma [i\not{p}(1-x) + m] \gamma_\nu}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3}. \quad (5.82)$$

Der erste Beitrag divergiert, wie man durch power-counting sofort einsieht und muß daher regularisiert werden.

Weitere Vereinfachungen im Fall $\Gamma = \mathbb{I}$

Für den Fall $\Gamma = \mathbb{I}$ unterstellen wir nun zur Vereinfachung den Limes $m \rightarrow 0$ und erhalten

$$\gamma_\nu \not{k} \not{k} \gamma_\nu = k^2 \gamma_\nu \gamma_\nu = D k^2 \quad (5.83)$$

$$-\gamma_\nu [i\not{p}(1-x)] [i\not{p}(1-x)] \gamma_\nu = (1-x)^2 \gamma_\nu \not{p} \not{p} \gamma_\nu = D p^2 (1-x)^2. \quad (5.84)$$

Daraus folgt

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(1),FEY}(p) = 2g^2 C_A \delta_{ab} D \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 + p^2 x(1-x)]^3} \quad (5.85)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(2),FEY}(p) = 2g^2 C_A \delta_{ab} D p^2 \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(1-x)^2}{[k^2 + p^2 x(1-x)]^3}. \quad (5.86)$$

Ausführen der $d^4 k$ -Integration und Entwicklung nach ε

Unter Ausnutzung von (G.21) kann das divergente Integral in $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(1),FEY}$ in $D = 4 - \varepsilon$ Dimensionen ausgewertet werden, dabei ergibt sich

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(1),FEY} = 2g^2 C_A \delta_{ab} \frac{D^2 \mu^{4-D}}{2(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \int_0^1 dx x \frac{1}{[p^2 x(1-x)]^{2-D/2}} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \frac{1}{2} (4 - \varepsilon)^2 \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \left(\frac{4\pi\mu^2}{p^2}\right)^{\varepsilon/2} \int_0^1 dx x [x(1-x)]^{-\varepsilon/2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 4 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{p^2}\right)\right) \\ &\quad \cdot \underbrace{\left(1 - \varepsilon \int_0^1 dx x \ln[x(1-x)]\right)}_{=-1} + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 4 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + 1 + \ln\frac{4\pi\mu^2}{p^2}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.88)$$

$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(2),FEY}$ ist endlich, und kann daher mit Hilfe von (G.20)

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(a^2)^{n-D/2}} \quad (5.89)$$

direkt in $D = 4$ Dimensionen ausgerechnet werden:

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{I}}^{(2),FEY} = 2g^2 C_A \delta_{ab} D \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2}) p^2}{\Gamma(3) (4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)^2}{[p^2 x(1-x)]^{3-D/2}}$$

$$\begin{aligned}
D &\equiv 4 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 4 \int_0^1 dx (1-x) \\
&= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A 2\delta_{ab}.
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$\tilde{\Lambda}_{\parallel}^{FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 4 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \frac{3}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{5.91}$$

Der analoge Ausdruck für die pseudoskalare Dichte kann hieraus sofort abgelesen werden, man setze dazu in (5.76) $\Gamma = \gamma_5$ und erkennt im masselosen Fall

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\parallel}^{FEY}(p) \gamma_5 \\
&= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} 4 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \frac{3}{2} \right) \gamma_5 + \mathcal{O}(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{5.92}$$

5.2.3.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

Auch die 1-Loop Korrektur zur skalaren Dichte soll nun in Landau-Eichung berechnet werden. Wie bereits beim Gluinopropagator ist dazu der $\delta_{\mu\nu}$ -Term aus dem Gluon-Propagator durch $-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}$ zu ersetzen.

Algebraischer Ausdruck und Vereinfachungen

Der additive Term lautet im Fall der skalaren Dichte

$$\tilde{\Lambda}_{\parallel}^{(1-\alpha)}(p) = g^2 C_A \delta_{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}[i(\not{p} - \not{k}) + m][i(\not{p} - \not{k}) + m]\not{k}}{[(p-k)^2 + m^2]^2 (k^2)^2}. \tag{5.93}$$

Im Fall $m = 0$ erhalten wir für den Zähler

$$-\not{k}(\not{p} - \not{k})(\not{p} - \not{k})\not{k} = -k^2(p^2 + k^2 - 2pk). \tag{5.94}$$

Damit lautet der zu betrachtende Term

$$\tilde{\Lambda}_{\parallel}^{(1-\alpha)}(p) = -g^2 C_A \delta_{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + k^2 - 2pk}{[(p-k)^2]^2 k^2}. \tag{5.95}$$

Feynman-Parametrisierung

Nach Feynman-Parametrisierung und der üblichen Verschiebung der Integrationsvariablen bekommen wir

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{\parallel}^{(1-\alpha)}(p) &= -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2 + k^2 - 2pk}{[(k - px)^2 + p^2 x(1-x)]^3} \\
&= -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{p^2(1-x)^2 + k^2}{[k^2 + p^2 x(1-x)]^3}.
\end{aligned} \tag{5.96}$$

Der Vergleich mit den Termen (5.85) und (5.86) zeigt eine Übereinstimmung mit den dortigen Ausdrücken bis auf einen Vorfaktor $-\frac{1}{D} = -\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{16} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

Damit kann das Ergebnis der dortigen Rechnung verwendet werden, und man erhält

$$\tilde{\Lambda}_{\parallel}^{(1-\alpha)}(p) = -\frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \frac{p^2}{\mu^2} + 2 \right) \quad (5.97)$$

und daraus

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\parallel}^{LAN}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\parallel}^{FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\parallel}^{(1-\alpha)}(p) \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left(3 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) - 3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} + 4 \right). \end{aligned} \quad (5.98)$$

Wie im Fall der Feynman-Eichung läßt sich hiermit sofort auch das Ergebnis im Fall der pseudoskalaren Dichte angeben. Es ist

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = -\frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \frac{p^2}{\mu^2} + 2 \right) \gamma_5 \quad (5.99)$$

und daher

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{LAN}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left(3 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) - 3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} + 4 \right) \gamma_5. \end{aligned} \quad (5.100)$$

5.2.4 Axialer Vektorstrom

Wir wenden uns jetzt dem axialen Vektorstrom, d.h. dem Fall $\Gamma = \gamma_\mu \gamma_5$ zu.

5.2.4.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

Den ersten Teil der Rechnung der skalaren Dichte hatten wir für beliebiges Γ durchgeführt, so daß wir an dem Punkt in die Rechnung einsteigen können, an dem wir die zwei relevanten Terme

$$\tilde{\Lambda}_{\Gamma}^{FEY}(p) = \tilde{\Lambda}_{\Gamma}^{(1),FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\Gamma}^{(2),FEY}(p), \quad (5.101)$$

identifiziert hatten, vgl. (5.80). Dabei galt

$$\tilde{\Lambda}_{\Gamma}^{(1),FEY}(p) = 2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu \not{k} \Gamma \not{k} \gamma_\nu}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3} \quad (5.102)$$

$$\tilde{\Lambda}_{\Gamma}^{(2),FEY}(p) = -2g^2 C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu [i \not{p}(1-x) + m] \Gamma [i \not{p}(1-x) + m] \gamma_\nu}{[k^2 + p^2 x(1-x) + m^2 x]^3}. \quad (5.103)$$

Durch power-counting sieht man, daß der erste Beitrag im Limes $D \rightarrow 4$ divergent ist, der zweite hingegen konvergent. Wir werden im Fall $\Gamma = \gamma_\mu \gamma_5$ beide Anteile separat behandeln.

Berechnung von $\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1),FEY}$

Unter Benutzung von $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$, $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$ und $\sum_\nu \gamma_\nu \gamma_\nu = D$ ergibt sich im Fall

$\Gamma = \gamma_\mu \gamma_5$ für den Zähler

$$\begin{aligned}
\gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \gamma_5 \not{k} \gamma_\nu &= \gamma_\nu \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu \gamma_5 \\
&= \gamma_\nu \not{k} [2k_\mu - \not{k} \gamma_\mu] \gamma_\nu \gamma_5 \\
&= 2k_\mu \gamma_\nu \not{k} \gamma_\nu \gamma_5 - \gamma_\nu \not{k} \not{k} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \\
&= 2k_\mu \gamma_\nu [2k_\nu - \gamma_\nu \not{k}] \gamma_5 - k^2 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \\
&= 4k_\mu \not{k} \gamma_5 - 2k_\mu \gamma_\nu \gamma_\nu \not{k} \gamma_5 - k^2 \gamma_\nu (2\delta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_5) \\
&= 4k_\mu \not{k} \gamma_5 - 2Dk_\mu \not{k} \gamma_5 - 2k^2 \gamma_\mu \gamma_5 + Dk^2 \gamma_\mu \gamma_5 \\
&= (4 - 2D)k_\mu \not{k} \gamma_5 - (2 - D)k^2 \gamma_\mu \gamma_5 \\
&= (2 - D)(2k_\mu \not{k} - k^2 \gamma_\mu) \gamma_5.
\end{aligned} \tag{5.104}$$

Wir ersetzen nun aus Dimensionsgründen g^2 wieder durch $g^2 \mu^{4-D}$ und erhalten unter Benutzung der Formel (G.21) in $D = 4 - \varepsilon$ Dimensionen den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1),FEY}(p) &= g^2 C_A \delta_{ab} \frac{\mu^\varepsilon}{(4\pi)^{2-\varepsilon/2}} \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{2} (-2 + \varepsilon)^2 \gamma_\mu \gamma_5 \\
&\quad \cdot \int_0^1 dx \cdot x \frac{1}{[p^2 x(1-x) + m^2 x]^{\varepsilon/2}}.
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Um die Divergenz des Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ zu isolieren, entwickeln wir diesen Ausdruck in ε und erhalten

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1),FEY}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln 4\pi\right) (2 - 2\varepsilon) \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E\right) \gamma_\mu \gamma_5 \\
&\quad \cdot \int_0^1 dx \cdot x \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon) \\
&= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \gamma_\mu \gamma_5 \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 2\right. \\
&\quad \left. - 2 \int_0^1 dx \cdot x \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2}\right)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{5.106}$$

Berechnung von $\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(2),FEY}$

Kommen wir nun zur Berechnung von $\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(2)}$. Der dort im Zähler auftretende Term läßt sich als

$$\begin{aligned}
&\gamma_\nu [i\not{p}(1-x) + m] \gamma_\mu \gamma_5 [i\not{p}(1-x) + m] \gamma_\nu \\
&= -2[p^2(1-x)^2 - m^2] \gamma_\mu \gamma_5 + 4(1-x) \not{p}(1-x) p_\mu \gamma_5
\end{aligned} \tag{5.107}$$

schreiben. Dabei wurden die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu &= -2\gamma_\mu \\
\gamma_\nu \not{p} \gamma_\mu \gamma_\nu &= 4p_\mu \\
\gamma_\nu \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu &= 4p_\mu \\
\gamma_\nu \not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_\nu &= -4\not{p} p_\mu + 2p^2 \gamma_\mu
\end{aligned} \tag{5.108}$$

benutzt, diese ergeben sich aus den im Anhang angegebenen Vertauschungsregeln der Dirac-Matrizen. Mit dem Spezialfall $n = 3$, $D = 4$ der Integralformel (G.20)

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n - D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(a^2)^{n-D/2}} \quad (5.109)$$

erhalten wir dann schließlich

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(2), FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} 2C_A \delta_{ab} \int_0^1 dx \cdot x \frac{[p^2(1-x)^2 - m^2] \gamma_\mu \gamma_5 - 2(1-x) \not{p}(1-x) p_\mu \gamma_5}{p^2 x(1-x) + m^2 x}. \quad (5.110)$$

Weitere Vereinfachung und x -Integration

Insgesamt haben wir daher

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1), FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(2), FEY}(p) \\ &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 2 \right. \right. \\ &\quad - 2 \int_0^1 dx \cdot x \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \\ &\quad + 2 \int_0^1 dx \cdot x \frac{p^2(1-x)^2 - m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \Big] \\ &\quad \left. - 4p_\mu \int_0^1 dx \cdot x \frac{(1-x) \not{p}(1-x)}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \gamma_5 \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.111)$$

Das endliche zweite Integral kann man noch weiter auswerten

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dx \cdot x \frac{p^2(1-x)^2 - m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \\ &= \int_0^1 dx \cdot x \left(\frac{p^2(1-x)^2 + m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} - \frac{2m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \right), \end{aligned} \quad (5.112)$$

und es gilt außerdem

$$\begin{aligned} &\int_0^1 dx \cdot x \frac{p^2(1-x)^2 + m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 dx \cdot x(1-x) \frac{p^2(1-2x) + m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 dx \cdot x(1-x) \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^1 dx \cdot (1-2x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right). \end{aligned} \quad (5.113)$$

Man berechnet ferner

$$\int_0^1 dx \cdot x \frac{2m^2}{p^2 x(1-x) + m^2 x}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \frac{2m^2}{p^2(1-x) + m^2} \\
&= - \int_0^1 dx \frac{1}{p^2} 2m^2 \frac{d}{dx} \ln(p^2(1-x) + m^2) \\
&= 2m^2 \frac{\ln(m^2 + p^2) - \ln(m^2)}{p^2}
\end{aligned} \tag{5.114}$$

und erkennt mit der Regel von de l'Hospital, daß das letzte Integral auch im Fall $p^2 \rightarrow 0$ endlich bleibt (es liefert den Wert 2). Insgesamt können wir damit für den 1-Loop-Beitrag $\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}$ das Endergebnis

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) &= \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \delta_{ab} \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 1 - 2 \int_0^1 dx \cdot (1-x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - 4p_\mu \left[\int_0^1 dx \cdot x(1-x) \frac{\not{p}(1-x)}{p^2 x(1-x) + m^2 x} \right] \gamma_5 \right. \\
&\quad \left. - 4m^2 \frac{\ln(m^2 + p^2) - \ln(m^2)}{p^2} \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon)
\end{aligned} \tag{5.115}$$

angeben.

Im masselosen Fall lautet dies nach Ausführen der verbleibenden x -Integrationen

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) = \delta_{ab} \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E - \ln \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) + \ln 4\pi + 1 \right] - 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2} \gamma_5 \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{5.116}$$

5.2.4.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

In Landau-Eichung ist der folgende additive Ausdruck zu bestimmen

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)} = g^2 C_A \delta_{ab} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k}[i(\not{p} - \not{k}) + m] \gamma_\mu \gamma_5 [i(\not{p} - \not{k}) + m] \not{k}}{[(p-k)^2 + m^2]^2 (k^2)^2}. \tag{5.117}$$

Feynman-Parametrisierung

Mit Hilfe der Formel (G.19)

$$\frac{1}{a^2 b^2} = 6 \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[(a-b)x + b]^4} \tag{5.118}$$

ist dies bis auf Vorfaktoren nach Substitution $k \rightarrow k + px$ das Gleiche wie

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x(1-x) \\
&\quad \cdot \frac{(\not{k} + \not{p}x)[-i\not{k} + (1-x)i\not{p} + m] \gamma_\mu \gamma_5 [-i\not{k} + (1-x)i\not{p} + m](\not{k} + \not{p}x)}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4}.
\end{aligned} \tag{5.119}$$

Nach dem Ausmultiplizieren des Zählers ergeben sich die folgenden Beiträge:

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x(1-x) \frac{1}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4}$$

$$\cdot \left\{ - (k^2)^2 \gamma_\mu \gamma_5 \right. \quad (5.120)$$

$$+ 2(1-x)xk^2p^2\gamma_\mu\gamma_5 \quad (5.121)$$

$$+ imxk^2(\gamma_\mu \not{p} - \not{p}\gamma_\mu)\gamma_5 \quad (5.122)$$

$$- (1-x)^2x^2p^4\gamma_\mu\gamma_5 \quad (5.123)$$

$$+ (1-x)x\not{k}\not{p}\gamma_\mu\not{k}\not{p}\gamma_5 \quad (5.124)$$

$$+ (1-x)x\not{p}\not{k}\gamma_\mu\not{p}\not{k}\gamma_5 \quad (5.125)$$

$$- (1-x)^2\not{k}\not{p}\gamma_\mu\not{p}\not{k}\gamma_5 \quad (5.126)$$

$$- x^2\not{p}\not{k}\gamma_\mu\not{k}\not{p}\gamma_5 \quad (5.127)$$

$$- (1-x)im\not{k}\not{p}\gamma_\mu\not{k}\gamma_5 \quad (5.128)$$

$$- xim\not{k}\gamma_\mu\not{k}\not{p}\gamma_5 \quad (5.129)$$

$$+ (1-x)im\not{k}\gamma_\mu\not{p}\not{k}\gamma_5 \quad (5.130)$$

$$+ xim\not{p}\not{k}\gamma_\mu\not{k}\gamma_5 \quad (5.131)$$

$$- m^2\not{k}\gamma_\mu\not{k}\gamma_5 \quad (5.132)$$

$$+ i(1-x)x^2mp^2(\not{p}\gamma_\mu - \gamma_\mu\not{p})\gamma_5 \quad (5.133)$$

$$- m^2x^2\not{p}\gamma_\mu\not{p}\gamma_5 \left. \right\}. \quad (5.134)$$

Ausführen der $d^D k$ -Integration

Der einzig divergente Term ist der erste, wir wollen uns zuerst ihm zuwenden:

$$- \gamma_\mu \gamma_5 \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} 6x(1-x) \frac{(k^2)^2}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2x^2]^4}. \quad (5.135)$$

Mit der Integralformel (G.22)

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2 + a^2)^\beta} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha + D/2)\Gamma(\beta - \alpha - D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(\beta)} (a^2)^{D/2 + \alpha - \beta} \quad (5.136)$$

für $\alpha = 2$, $\beta = 4$ und $a^2 = (p^2 + m^2)x - p^2x^2$ erhält man in $D = 4 - \varepsilon$ Dimensionen

$$\begin{aligned} (5.120) &= -\gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\varepsilon/2} \mu^\varepsilon \frac{\Gamma(4 - \varepsilon/2)\Gamma(\varepsilon/2)}{\Gamma(2 - \varepsilon/2)6} \\ &\quad \cdot \int_0^1 dx 6x(1-x) ((p^2 + m^2)x - p^2x^2)^{-\varepsilon/2}. \end{aligned} \quad (5.137)$$

Mit der Funktionalgleichung der Gamma-Funktion sieht man

$$\Gamma(4 - \varepsilon/2) = (3 - \varepsilon/2)(2 - \varepsilon/2)\Gamma(2 - \varepsilon/2), \quad (5.138)$$

und wir erhalten damit

$$\begin{aligned} (5.120) &= -\frac{1}{6}\gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\varepsilon/2} \mu^\varepsilon \Gamma(\varepsilon/2) (6 - 5\varepsilon/2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) \\ &\quad \cdot \int_0^1 dx 6x(1-x) ((p^2 + m^2)x - p^2x^2)^{-\varepsilon/2}. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} a^{\varepsilon/2} &= 1 + \varepsilon/2 \ln a + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ \Gamma(\varepsilon/2) &= \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.140)$$

ergibt sich schließlich nach kurzer Rechnung das Endergebnis

$$\begin{aligned} (5.120) &= -\gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E - \frac{5}{6} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 dx 6x(1-x) \ln \left(\frac{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2}{\mu^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (5.141)$$

Zur Berechnung der Terme (5.121) und (5.122) verwendet man die Integralformel (G.21)

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\delta_{\mu\nu}}{2(a^2)^{n-1-D/2}} \frac{\Gamma(n-1-D/2)}{\Gamma(n)}, \quad (5.142)$$

wobei man hier aufgrund der Konvergenz $D = 4$ setzen kann. Damit erhält man dann

$$\begin{aligned} (5.121) &= \int_0^1 6x^2(1-x)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\rho k_\rho}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \cdot 2p^2 \gamma_\mu \gamma_5 \\ &= \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 \frac{4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} p^2 \gamma_\mu \gamma_5. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Für (5.122) bekommt man entsprechend

$$(5.122) = im \int_0^1 dx x^2(1-x) \frac{2}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\gamma_\mu \not{p} - \not{p} \gamma_\mu) \gamma_5. \quad (5.144)$$

Zur Berechnung von (5.123) benutzt man die Identität (G.20) (auch hier bei $D = 4$) und erhält

$$\begin{aligned} (5.123) &= - \int_0^1 dx 6(1-x)^3 x^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \cdot p^4 \gamma_\mu \gamma_5 \\ &= - \int_0^1 dx (1-x)^3 x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2} \cdot p^4 \gamma_\mu \gamma_5. \end{aligned} \quad (5.145)$$

Bei Term (5.124) beachtet man (A.16) und die Integralformel (G.21). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (5.124) &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x^2(1-x)^2 \frac{\not{k} \not{p} \gamma_\mu \not{k} \not{p} \gamma_5}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x^2(1-x)^2 \frac{\frac{1}{4} k^2}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \cdot \underbrace{\gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\rho}_{=4\delta_{\mu\tau}} p_\tau \not{p} \gamma_5 \\ &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x^2(1-x)^2 \frac{\frac{1}{4} k^2}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \cdot 4p_\mu \not{p} \gamma_5 \\ &= \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \not{p} \gamma_5. \end{aligned} \quad (5.146)$$

Die Berechnung des Terms (5.125) verläuft völlig analog und liefert dasselbe Ergebnis. Man kann also

$$(5.125) = \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \not{p} \gamma_5 \quad (5.147)$$

notieren. Für die Terme (5.126) und (5.127) beachtet man (A.17) bzw. (A.15). Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (5.126) &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x(1-x)^3 \frac{\not{k} \not{p} \gamma_\mu \not{p} \not{k} \gamma_5}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \\ &= - \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 6x(1-x)^3 \frac{\frac{1}{4} k^2}{[k^2 + (p^2 + m^2)x - p^2 x^2]^4} \cdot \underbrace{\gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\tau \gamma_\rho}_{=-2\gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\nu} p_\nu p_\tau \gamma_5 \\ &= \int_0^1 dx x(1-x)^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_5) \end{aligned} \quad (5.148)$$

sowie

$$\begin{aligned} (5.127) &= - \int_0^1 dx x^3 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\not{p} \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\rho \not{p} \gamma_5}_{=-2\not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_5} \\ &= \int_0^1 dx x^3 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\not{p} \gamma_\mu \not{p} \gamma_5). \end{aligned} \quad (5.149)$$

Term (5.128) berechnet man analog zu (5.124) und erhält

$$(5.128) = -im \int_0^1 dx x(1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \gamma_5. \quad (5.150)$$

Term (5.129) ergibt sich analog zu (5.127) zu

$$(5.129) = im \int_0^1 dx x^2 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \gamma_\mu \not{p} \gamma_5. \quad (5.151)$$

Term (5.130) läßt sich wie (5.125) berechnen und liefert

$$\begin{aligned} (5.130) &= im \int_0^1 dx x(1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{4}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \gamma_5 \\ &= -(5.128). \end{aligned} \quad (5.152)$$

Für (5.131) erhält man wie bei (5.127)

$$(5.131) = -im \int_0^1 dx x^2 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \not{p} \gamma_\mu \gamma_5. \quad (5.153)$$

Weiterhin gilt

$$(5.132) = m^2 \int_0^1 dx x(1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \gamma_\mu \gamma_5, \quad (5.154)$$

und für (5.133) ergibt sich

$$(5.133) = im \int_0^1 dx (1-x)^2 x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2} \cdot p^2 (\not{p}\gamma_\mu - \gamma_\mu \not{p})\gamma_5. \quad (5.155)$$

Schließlich hat man noch den Beitrag

$$(5.134) = -m^2 \int_0^1 dx (1-x) x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2} \cdot \not{p}\gamma_\mu \not{p}\gamma_5. \quad (5.156)$$

Zusammenfassen der Terme und x -Integration

Durch Zusammenfassen aller Terme erhält man schließlich nach Hinzufügen des bisher ausgelassenen Vorfaktors $\delta_{ab}g^2 C_A$ als Zwischenergebnis den Ausdruck

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = & -\delta_{ab}g^2 C_A \gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma_E - \frac{5}{6} \right. \\ & \left. - \int_0^1 dx 6x(1-x) \ln \left(\frac{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2}{\mu^2} \right) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ & + \delta_{ab}g^2 C_A \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 \frac{4}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} p^2 \gamma_\mu \gamma_5 \\ & + \delta_{ab}g^2 C_A im \int_0^1 dx x^2 (1-x) \frac{2}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\gamma_\mu \not{p} - \not{p}\gamma_\mu) \gamma_5 \\ & - \delta_{ab}g^2 C_A \int_0^1 dx (1-x)^3 x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2} \cdot p^4 \gamma_\mu \gamma_5 \\ & + \delta_{ab}g^2 C_A \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \not{p}\gamma_5 \\ & + \delta_{ab}g^2 C_A \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot 2p_\mu \not{p}\gamma_5 \\ & + \delta_{ab}g^2 C_A \int_0^1 dx x (1-x)^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\not{p}\gamma_\mu \not{p}\gamma_5) \\ & + \delta_{ab}g^2 C_A \int_0^1 dx x^3 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot (\not{p}\gamma_\mu \not{p}\gamma_5) \\ & + \delta_{ab}g^2 C_A im \int_0^1 dx x^2 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \gamma_\mu \not{p}\gamma_5 \\ & - \delta_{ab}g^2 C_A im \int_0^1 dx x^2 (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \not{p}\gamma_\mu \gamma_5 \\ & + \delta_{ab}g^2 C_A m^2 \int_0^1 dx x (1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(p^2 + m^2)x - p^2 x^2} \cdot \gamma_\mu \gamma_5 \\ & + \delta_{ab}g^2 C_A im \int_0^1 dx (1-x)^2 x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{p^2 (\not{p}\gamma_\mu - \gamma_\mu \not{p})\gamma_5}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2} \\ & - \delta_{ab}g^2 C_A m^2 \int_0^1 dx (1-x) x^3 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\not{p}\gamma_\mu \not{p}\gamma_5}{((p^2 + m^2)x - p^2 x^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.157)$$

Im masselosen Fall schreibt sich dies schließlich nach Ausführen der verbleibenden x -Integrationen als

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = \delta_{ab} \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \left[-\frac{2}{\varepsilon} - \ln 4\pi + \gamma_E + \ln \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) - 1 \right] + 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2} \gamma_5 \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

(5.158)

Insgesamt können wir damit unter Benutzung von (5.116) für den axialen Vektorstrom in Landau-Eichung das Endergebnis

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_{\gamma\mu\gamma_5}^{LAN}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\gamma\mu\gamma_5}^{FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\gamma\mu\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) \\ &= 0 + \mathcal{O}(\varepsilon)\end{aligned}\quad (5.159)$$

festhalten, d.h. zu dieser nackten Größe gibt es keinen Beitrag in Ordnung g^2 .

5.3 Berechnung der nackten Größen in Gitterregularisierung

5.3.1 Notationen

Die Störungstheorie auf dem Gitter kommt naturgemäß nicht ohne die Benutzung trigonometrischer Funktionen aus. Zur Reduktion des Schreibaufwandes definieren wir daher für einen Impuls q die folgenden Größen:

$$\begin{aligned}c_\rho &:= \cos\left(\frac{q_\rho}{2}\right) \\ s_\rho &:= \sin\left(\frac{q_\rho}{2}\right) \\ q_\rho &:= \sin(q_\rho).\end{aligned}\quad (5.160)$$

Man mag einwenden, daß die letzte Zeile Eindeutigkeitsprobleme verursacht, aber auf dem Gitter werden wir mit q_ρ stets den trigonometrischen Ausdruck meinen. Zweckmäßig erscheint es auch, für einen zusätzlichen (äußeren) Impuls p die folgenden, verschobenen Größen

$$\begin{aligned}\tilde{c}_\rho &:= \cos\left(\frac{q_\rho - ap_\rho}{2}\right) \\ \tilde{s}_\rho &:= \sin\left(\frac{q_\rho - ap_\rho}{2}\right) \\ \tilde{q}_\rho &:= \sin(q_\rho - ap_\rho)\end{aligned}\quad (5.161)$$

bzw.

$$\begin{aligned}\check{c}_\rho &:= \cos\left(\frac{q_\rho + ap_\rho}{2}\right) \\ \check{s}_\rho &:= \sin\left(\frac{q_\rho + ap_\rho}{2}\right) \\ \check{q}_\rho &:= \sin(q_\rho + ap_\rho)\end{aligned}\quad (5.162)$$

zu erklären¹⁰. Außerdem verwenden wir die folgenden Abkürzungen

$$\Delta_1 := \sum_\rho \sin^2\left(\frac{q_\rho}{2}\right)$$

¹⁰Man beachte, daß wir im Verlauf der Rechnung eine Substitution $aq \rightarrow q$ durchführen, sowohl bei q als auch bei ap handelt es sich daher um dimensionslose Größen.

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &:= \sum_{\rho} \sin^2(q_{\rho}) + 4r^2 \left(\sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{q_{\rho}}{2}\right) \right)^2 = \Delta_4 + 4r^2 \Delta_1^2 \\
\Delta_3 &:= \sum_{\rho} \sin^4\left(\frac{q_{\rho}}{2}\right) \\
\Delta_4 &:= \sum_{\rho} \sin^2(q_{\rho}) \\
\Delta_5 &:= \sum_{\rho} \sin^2(q_{\rho}) \sin^2\left(\frac{q_{\rho}}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5.163}$$

aus [MZ]. Auch hier erklären wir verschobene Größen via

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_1 &:= \sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{q - ap}{2}\right)_{\mu} \\
\check{\Delta}_1 &:= \sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{q + ap}{2}\right)_{\mu} \\
\tilde{\Delta}_2 &:= \sum_{\rho} \sin^2((q - ap)_{\rho}) + 4r^2 \left(\sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{(q - ap)_{\rho}}{2}\right) \right)^2 \\
\tilde{\Delta}_3 &:= \sum_{\mu} \sin^4\left(\frac{q - ap}{2}\right)_{\mu} \\
\tilde{\Delta}_4 &:= \sum_{\mu} \sin^2(q - ap)_{\mu}.
\end{aligned} \tag{5.164}$$

5.3.2 Sprachregelung und Konventionen

Im folgenden verwenden wir für einzelne Terme die Bezeichnungen *endlich* oder *konvergent* bzw. *divergent*. Dies bezieht sich auf den Limes $a \rightarrow 0$, d.h. wenn wir von einem divergenten Term sprechen ist stets gemeint, daß der entsprechende Ausdruck im Limes $a \rightarrow 0$ einen unendlichen Beitrag ergibt. Im regularisierten Fall $a > 0$ sind natürlich alle Terme endlich (falls der externe Impuls nicht verschwindet).

Außerdem werden wir im Verlauf der Rechnung zahlreiche Taylor-Entwicklungen nach der Gitterkonstanten a durchführen. Im Endergebnis interessieren wir uns dabei nur für Beiträge, die für $a \rightarrow 0$ divergieren oder endliche Beiträge liefert, $\mathcal{O}(a)$ -Terme können wir also vernachlässigen. Wir werden in den einzelnen Zwischenschritten der Rechnung diese Terme nicht immer gesondert aufführen, viele Identitäten gelten daher nur bis auf Terme der Ordnung a . Im Endergebnis führen wir diese Terme dann aber wieder an. Terme vom Typ $a \cdot \ln(a)$ subsummieren wird dabei in etwas ungenauer Sprechweise unter $\mathcal{O}(a)$.

Bezüglich der Summation über die Lorentz-Indizes verwenden wir folgende Konvention: Bei jedem mehrfach vorkommenden Index ist eine Summation von 1 bis 4 impliziert.

5.3.3 Vorgehensweise

Bei der Berechnung der nackten Gittergrößen verwenden wir die folgende Vorgehensweise [LV], [VI]:

- Nach der Formulierung des algebraischen Ausdrucks der einzelnen Diagramme wird zunächst im Zähler eine Entwicklung nach a vorgenommen. Insgesamt interessieren wir uns dabei für den divergenten und den endlichen Anteil der Graphen im Limes $a \rightarrow 0$, insbesondere sind beim Propagator globale Vorfaktoren $\frac{1}{a}$ zu beachten.
- Durch power-counting identifiziert man die konvergenten bzw. divergenten Terme und kann in den konvergenten Anteilen eine Entwicklung des Nenners in Potenzen von a durchführen.
- Durch algebraische Umformungen und Vereinfachung der γ -Struktur lassen sich die endlichen Beiträge durch die oben eingeführten Abkürzungen $\Delta_1, \dots, \Delta_5$ ausdrücken und numerisch bestimmen.
- Im Fall des axialen Vektorstroms treten UV-endliche Integrale der Form $a \cdot (\text{lineare Divergenz})$ auf, diese können mit Kontinuumsmethoden im Limes $a \rightarrow 0$ behandelt werden.
- Aus den divergenten Anteilen lassen sich durch geeignete Manipulationen weitere endliche Anteile extrahieren. Die verbleibenden divergenten Integrale können in [EM] nachgeschlagen werden.
- Zur Bestimmung der Renormierungskonstante der Masse erfolgt eine Entwicklung des Fermion-Propagators nach m_0 . Während zur Ermittlung der übrigen Renormierungskonstanten im Limes $m_0 = 0$ gearbeitet wird, ist zur Berechnung von Z_m die Betrachtung des Terms erster Ordnung in m_0 notwendig.

5.3.4 Gluino-Propagator

Zur Selbstenergie des Fermions tragen auf dem Gitter die beiden Diagramme aus Abb. 5.4 bei, nach Anwendung der Feynman-Regeln schreiben sie sich algebraisch als

$$\begin{aligned} \Sigma^{(A)} = & \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} V_{\sigma}^{dc}[\bar{\lambda}, A_{\sigma}, \lambda](q, p-q, -p) S_F[\bar{\lambda}, \lambda](q) \\ & \cdot V_{\rho}^{acd}[\bar{\lambda}, A_{\rho}, \lambda](p, q-p, -q) D_{\rho\sigma}(p-q) \end{aligned} \quad (5.165)$$

$$\Sigma^{(B)} = \frac{1}{2} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} V_{\rho\sigma}^{accb}[\bar{\lambda}, A_{\rho}, A_{\sigma}, \lambda](p, -q, q, -p) D_{\rho\sigma}(q). \quad (5.166)$$

Man achte auf den Symmetriefaktor $\frac{1}{2}$ vor dem Diagramm $\Sigma^{(B)}$, vgl. dazu auch [MM]. Aus der Berechnung dieser beiden Graphen lassen sich die Renormierungskonstanten der Wellenfunktion und die der Masse bestimmen. Bei der Massenrenormierung genügt es, den nackten Propagator in der Nähe des chiralen Limes $m_0 \rightarrow 0$ zu betrachten, so daß wir

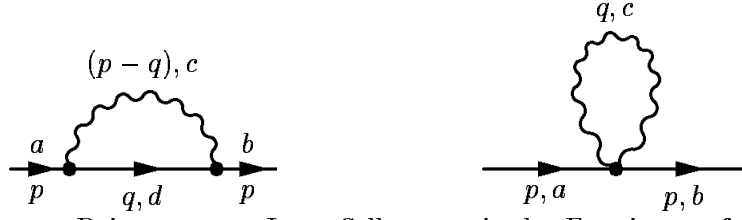


Abbildung 5.4: Beiträge zur 1-Loop-Selbstenergie des Fermions auf dem Gitter

eine Entwicklung nach der nackten Masse vornehmen können und nur die Terme bis zur ersten Ordnung von m_0 betrachten [VI]. Es ergibt sich dann für $S_F(q)$

$$S_F(q) = \left[\frac{1}{a} \sum_{\lambda} i\gamma_{\lambda} \sin(aq_{\lambda}) + \frac{2r}{a} \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) + m_0 \right]^{-1} \quad (5.167)$$

$$= \left[\frac{1}{a} \sum_{\lambda} i\gamma_{\lambda} \sin(aq_{\lambda}) + \frac{2r}{a} \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right]^{-1} - m_0 \left[\frac{1}{a} \sum_{\lambda} i\gamma_{\lambda} \sin(aq_{\lambda}) + \frac{2r}{a} \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right]^{-2} + \mathcal{O}(m_0)^2 \quad (5.168)$$

$$= \left[-ia \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin(aq_{\lambda}) + 2ra \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right] \cdot \left[\sum_{\lambda} \sin^2(aq_{\lambda}) + 4r^2 \left(\sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right)^2 \right]^{-1} - m_0 \left[-ia \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin(aq_{\lambda}) + 2ra \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right]^2 \cdot \left[\sum_{\lambda} \sin^2(aq_{\lambda}) + 4r^2 \left(\sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{aq_{\lambda}}{2}\right) \right)^2 \right]^{-2} + \mathcal{O}(m_0)^2. \quad (5.169)$$

5.3.4.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

In Feynman-Eichung erhält man für die beiden obigen Diagramme (5.165) und (5.166) nach Amputation der äußeren Beine die algebraischen Ausdrücke

$$\begin{aligned} \Sigma^{(A),FEY} = & -\delta_{ab} g_0^2 C_A \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} - i r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} \right] \\ & \cdot \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sin^2 \frac{q_{\lambda}}{2} \right] \\ & \cdot \left[\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} - i r \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} \right] \\ & \cdot \left[4 \sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\mu} \right]^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[\sum_{\nu} \sin^2 q_{\nu} + 4r^2 \left(\sum_{\nu} \sin^2 \frac{q_{\nu}}{2} \right)^2 \right]^{-1} \\
& + m_0 \delta_{ab} g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\gamma_{\rho} \cos \left(\frac{q+ap}{2} \right)_{\rho} - ir \sin \left(\frac{q+ap}{2} \right)_{\rho} \right] \\
& \cdot \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sin^2 \frac{q_{\lambda}}{2} \right]^2 \\
& \cdot \left[\gamma_{\rho} \cos \left(\frac{q+ap}{2} \right)_{\rho} - ir \sin \left(\frac{q+ap}{2} \right)_{\rho} \right] \\
& \cdot \left[4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q-ap}{2} \right)_{\mu} \right]^{-1} \\
& \cdot \left[\sum_{\nu} \sin^2 q_{\nu} + 4r^2 \left(\sum_{\nu} \sin^2 \frac{q_{\nu}}{2} \right)^2 \right]^{-2} + \mathcal{O}(m_0^2) \quad (5.170)
\end{aligned}$$

bzw.

$$\Sigma^{(B),FEY} = \delta_{ab} C_A \frac{g_0^2}{2a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[i \sum_{\rho} \gamma_{\rho} \sin(ap_{\rho}) - r \sum_{\lambda} \cos(ap_{\lambda}) \right] \left[4 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{q_{\mu}}{2} \right]^{-1}. \quad (5.171)$$

Dabei haben wir eine Substitution $aq \rightarrow q$ der Integrationsvariablen vorgenommen, die Integrationen erstrecken sich dann über $[-\pi, \pi]^4$.

Berechnung des $\mathcal{O}(m_0^0)$ -Terms von $\Sigma^{(A)}$

Algebraischer Ausdruck

Mit den oben eingeführten Abkürzungen schreibt sich dieser Anteil als

$$\Sigma^{(A),FEY} = -\delta_{ab} g_0^2 C_A \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(\gamma_{\rho} \check{c}_{\rho} - ir \check{s}_{\rho})(-i \not{q} + 2r \Delta_1)(\gamma_{\rho} \check{c}_{\rho} - ir \check{s}_{\rho})}{4 \bar{\Delta}_1 \Delta_2}. \quad (5.172)$$

Entwicklung von Zähler und Nenner nach a

Aufgrund des Vorfaktors $\frac{1}{a}$ ist der Integrand bis in die erste Ordnung der Gitterkonstanten zu entwickeln. Zunächst aber schreiben wir den Zähler als

$$\begin{aligned}
& -(\gamma_{\rho} \check{c}_{\rho} - ir \check{s}_{\rho})(-i \not{q} + 2r \Delta_1)(\gamma_{\rho} \check{c}_{\rho} - ir \check{s}_{\rho}) \\
& = i \check{c}_{\rho}^2 \gamma_{\rho} \not{q} \gamma_{\rho} + r \check{s}_{\rho} \check{c}_{\rho} \not{q} \gamma_{\rho} + r \check{s}_{\rho} \check{c}_{\rho} \gamma_{\rho} \not{q} - 2r \Delta_1 \check{c}_{\rho}^2 \gamma_{\rho} \gamma_{\rho} + 2ir^2 \Delta_1 \check{s}_{\rho} \check{c}_{\rho} \gamma_{\rho} + 2ir^2 \Delta_1 \check{s}_{\rho} \check{c}_{\rho} \gamma_{\rho} \\
& \quad - ir^2 \check{s}_{\rho}^2 \not{q} + 2r^3 \check{s}_{\rho}^2 \Delta_1. \quad (5.173)
\end{aligned}$$

Unter Benutzung von $\gamma_{\rho} \not{q} \gamma_{\rho} = 2q_{\rho} \gamma_{\rho} - \not{q}$, $\gamma_{\rho} \gamma_{\rho} = \mathbb{1}$ und $\{\not{q}, \gamma_{\rho}\} = 2q_{\rho}$ (alles für festes ρ) ergibt sich dann

$$2i \check{c}_{\rho}^2 q_{\rho} \gamma_{\rho} - i \check{c}_{\rho}^2 \not{q} + 2r \check{s}_{\rho} \check{c}_{\rho} q_{\rho} - 2r \Delta_1 \check{c}_{\rho}^2 + 4ir^2 \Delta_1 \check{s}_{\rho} \check{c}_{\rho} \gamma_{\rho} - ir^2 \check{s}_{\rho}^2 \not{q} + 2r^3 \check{s}_{\rho}^2 \Delta_1. \quad (5.174)$$

Wir führen nun die schon angekündigte Entwicklung nach der Gitterkonstanten a durch und erhalten mit den wegen

$$\begin{aligned}\check{s}_\rho &= \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\rho = \sin\frac{q_\rho}{2} + \frac{1}{2}ap_\rho \cos\frac{q_\rho}{2} + \mathcal{O}(a^2) \\ \check{c}_\rho &= \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_\rho = \cos\frac{q_\rho}{2} - \frac{1}{2}ap_\rho \sin\frac{q_\rho}{2} + \mathcal{O}(a^2)\end{aligned}\quad (5.175)$$

gerechtfertigten Ersetzungen

$$\begin{aligned}\check{s}_\rho &= s_\rho + \frac{1}{2}ap_\rho c_\rho + \mathcal{O}(a^2) \\ \check{c}_\rho^2 &= c_\rho^2 - ap_\rho s_\rho c_\rho + \mathcal{O}(a^2) \\ \check{s}_\rho^2 &= s_\rho^2 + ap_\rho s_\rho c_\rho + \mathcal{O}(a^2) \\ \check{s}_\rho \check{c}_\rho &= s_\rho c_\rho + \frac{1}{2}ap_\rho (c_\rho^2 - s_\rho^2) + \mathcal{O}(a^2)\end{aligned}\quad (5.176)$$

das Ergebnis

$$\begin{aligned}& 2ic_\rho^2 q_\rho \gamma_\rho - ic_\rho^2 \not{q} + 2rs_\rho c_\rho q_\rho - 2r\Delta_1 c_\rho^2 + 4ir^2 \Delta_1 s_\rho c_\rho \gamma_\rho - ir^2 s_\rho^2 \not{q} + 2r^3 s_\rho^2 \Delta_1 \\ & + ap_\rho [-2is_\rho c_\rho q_\rho \gamma_\rho + is_\rho c_\rho \not{q} + r(c_\rho^2 - s_\rho^2)q_\rho + 2r\Delta_1 s_\rho c_\rho + 2ir^2 \Delta_1 (c_\rho^2 - s_\rho^2)\gamma_\rho \\ & - ir^2 s_\rho c_\rho \not{q} + 2r^3 s_\rho c_\rho \Delta_1] + \mathcal{O}(a^2)\end{aligned}\quad (5.177)$$

für den Zähler von $\Sigma^{(A),FEY}$. Die Entwicklung des Nenners ergibt sich aus (G.11)

$$\frac{1}{\Delta_1} = \frac{1}{\Delta_1} + \frac{a}{2} \frac{p \cdot q}{\Delta_1^2} + \mathcal{O}(a^2). \quad (5.178)$$

zu

$$\frac{1}{4\bar{\Delta}_1 \Delta_2} = \frac{1}{4\Delta_1 \Delta_2} \left(1 + \frac{a}{2} \frac{p \cdot q}{\Delta_1}\right) + \mathcal{O}(a^2). \quad (5.179)$$

Vereinfachung der Terme

Wir betrachten nun die Terme nullter Ordnung in der Entwicklung des Zählers, die keinen Vorfaktor r tragen:

$$\begin{aligned}2ic_\rho^2 q_\rho \gamma_\rho - ic_\rho^2 \not{q} &= 2i(1 - s_\rho^2)q_\rho \gamma_\rho - i(4 - s_\rho^2)\not{q} \\ &= -2i\not{q} - 2is_\rho^2 q_\rho \gamma_\rho + is_\rho^2 \not{q}.\end{aligned}\quad (5.180)$$

Der erste Term ergibt einen divergenten Beitrag, den wir später diskutieren. Die beiden anderen Summanden ergeben gemeinsam mit dem Nenner (unter Auslassung endlicher Terme mit ungeradem Integranden) den Ausdruck

$$g_0^2 C_A \frac{1}{a} \frac{1}{4\Delta_1 \Delta_2} \frac{-4iap_\mu q_\mu s_\rho^2 q_\rho \gamma_\rho + 2iap_\mu q_\mu s_\rho^2 q_\nu \gamma_\nu}{4\Delta_1}. \quad (5.181)$$

Da über q integriert wird, trägt der erste Summand nur für $\rho = \mu$ bei, der zweite nur für $\nu = \mu$. Also verbleiben wir mit

$$\frac{g_0^2 C_A}{a 4\Delta_1 \Delta_2} \frac{-4iap_\rho s_\rho^2 q_\rho^2 \gamma_\rho + 2iap_\mu q_\mu^2 s_\rho^2 \gamma_\mu}{4\Delta_1}. \quad (5.182)$$

Mit den aufgrund der hyperkubischen Symmetrie gültigen Identitäten

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} s_{\rho_0}^2 q_{\rho_0}^2 = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta_5 \quad (5.183)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} q_{\rho_0}^2 = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta_4 \quad (5.184)$$

(wobei in beiden Fällen keine Summation über ρ_0 erfolgt) können wir dies in

$$\begin{aligned} & g_0^2 C_A \frac{1}{a} \frac{1}{4\Delta_1 \Delta_2} \frac{-ia\not{p}\Delta_5 + \frac{1}{2}ia\not{p}\Delta_4 \Delta_1}{4\Delta_1} \\ = & g_0^2 C_A \frac{1}{a} \frac{1}{4\Delta_1 \Delta_2} \frac{i}{8} a\not{p} \left[-\frac{2\Delta_5}{\Delta_1} + \Delta_4 \right] \end{aligned} \quad (5.185)$$

überführen.

Die Terme des Zählers in Ordnung r führen auf eine lineare Divergenz in $\frac{1}{a}$ und werden später in Σ_0 subsummiert. Explizit haben wir bis auf den Vorfaktor

$$\begin{aligned} 2rs_{\rho}c_{\rho}q_{\rho} - 2r\Delta_1 c_{\rho}^2 &= rq_{\rho}^2 - 8r\Delta_1 + 2r\Delta_1 s_{\rho}^2 \\ &= r\Delta_4 - 8r\Delta_1 + 2r\Delta_1^2. \end{aligned} \quad (5.186)$$

Die Terme in r^2 des Zählers ergeben einen endlichen Term der Form

$$\begin{aligned} & \frac{8iar^2 \Delta_1 p_{\mu} q_{\mu} s_{\rho} c_{\rho} \gamma_{\rho} - 2iar^2 p_{\mu} q_{\mu} s_{\rho}^2 \not{q}}{4\Delta_1} \\ = & \frac{4iar^2 \Delta_1 p_{\mu} q_{\mu} q_{\rho} \gamma_{\rho} - 2iar^2 p_{\mu} q_{\mu} s_{\rho}^2 q_{\nu} \gamma_{\nu}}{4\Delta_1}. \end{aligned} \quad (5.187)$$

Da über q integriert wird, erhält man mit den gleichen Rechenregeln wie oben

$$\begin{aligned} & \frac{iar^2 \Delta_1 \not{p} \Delta_4 - 2iar^2 p_{\mu} q_{\mu}^2 s_{\rho}^2 \gamma_{\mu}}{4\Delta_1} \\ = & ia\not{p} r^2 \frac{1}{8} \Delta_4. \end{aligned} \quad (5.188)$$

Schließlich gibt es noch einen Term in Ordnung r^3 , der zu Σ_0 beiträgt

$$2r^3 s_{\rho}^2 \Delta_1 = 2r^3 \Delta_1^2. \quad (5.189)$$

Es ist nun noch der Term aus (5.177) zu diskutieren, der proportional zu ap_{ρ} ist. Dieser führt auf einen endlichen Beitrag, und wir können die in q ungeraden Terme erneut von der Betrachtung ausschließen, denn sie verschwinden nach Integration über $d^4 q$. Damit erhält man dann

$$\begin{aligned} & ap_{\rho} [-2is_{\rho}c_{\rho}q_{\rho}\gamma_{\rho} + is_{\rho}c_{\rho}\not{q} + 2ir^2 \Delta_1 (c_{\rho}^2 - s_{\rho}^2)\gamma_{\rho} - ir^2 s_{\rho}c_{\rho}\not{q}] \\ = & ap_{\rho} [-iq_{\rho}^2 \gamma_{\rho} + \frac{i}{2}q_{\rho}q_{\mu}\gamma_{\mu} + 2ir^2 \Delta_1 \gamma_{\rho} - 4ir^2 \Delta_1 s_{\rho}^2 \gamma_{\rho} - \frac{i}{2}r^2 q_{\rho}q_{\mu}\gamma_{\mu}]. \end{aligned} \quad (5.190)$$

Da wir uns unter einem Integral $\int d^4q$ befinden, rechnen wir mit

$$\begin{aligned} & i a \not{p} \left[-\frac{1}{4} \Delta_4 + \frac{1}{8} \Delta_4 + 2r^2 \Delta_1 - r^2 \Delta_1^2 - \frac{1}{8} r^2 \Delta_4 \right] \\ &= \frac{i}{8} a \not{p} \left(-\Delta_4 + 16r^2 \Delta_1 - 8r^2 \Delta_1^2 - r^2 \Delta_4 \right) \end{aligned} \quad (5.191)$$

weiter. Damit können wir dann die einzelnen Zwischenergebnisse wie folgt zusammenfassen

$$\begin{aligned} \Sigma^{(A), FEY}(p) &= g_0^2 C_A \left\{ \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-2i \not{q}}{\left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q-a p}{2} \right)_{\mu} \right) (\sum_{\nu} \sin^2 q_{\nu} + 4r^2 \Delta_1^2)} \right. \\ &+ \frac{1}{8} i \not{p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-2 \frac{\Delta_3}{\Delta_1} + \Delta_4 + r^2 \Delta_4 - \Delta_4 + 16r^2 \Delta_1 - 8r^2 \Delta_1^2 - r^2 \Delta_4}{4 \Delta_1 \Delta_2} \\ &\left. + \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{r \Delta_4 - 8r \Delta_1 + 2r \Delta_1^2 + 2r^3 \Delta_1^2}{4 \Delta_1 \Delta_2} \right\} + \mathcal{O}(m_0) + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (5.192)$$

Behandlung der Divergenz

Die Divergenz dieser Größe steckt nun also im ersten (logarithmisch divergenten) Integral

$$\frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-2i \not{q}}{\left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q-a p}{2} \right)_{\mu} \right) (\sum_{\nu} \sin^2 q_{\nu} + 4r^2 \Delta_1^2)}, \quad (5.193)$$

welches wir nun auf eine tabellierte Form bringen wollen. Dazu verwenden wir

$$\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{4\Delta_1} + \frac{\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2}{\Delta_1 \Delta_2} \quad (5.194)$$

und können damit weitere endliche Anteile abspalten. Man beachte, daß der erste Summand von der Ordnung $\frac{1}{q^2}$ ist, der zweite aber auf endliche Beiträge führt. Es ist dann möglich, den endlichen Anteil

$$\frac{\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2}{\Delta_1 \Delta_2} \frac{-2i \not{q}}{4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q-a p}{2} \right)_{\mu}} \quad (5.195)$$

mittels (5.179) unter dem Integral $\frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ durch

$$\frac{\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2}{\Delta_1 \Delta_2} \frac{-4i a p_{\mu} q_{\mu} \not{q}}{(4\Delta_1)^2} + \mathcal{O}(a^2) \quad (5.196)$$

bzw.

$$-i a \not{p} \frac{\Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{16 \Delta_1^3 \Delta_2} + \mathcal{O}(a^2) \quad (5.197)$$

zu ersetzen. Die Divergenz ist nun in dem zweiten entstehenden Term

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-2i \sin q_{\rho} \gamma_{\rho}}{\left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q-a p}{2} \right)_{\mu} \right) \left(4 \sum_{\nu} \sin^2 \frac{q_{\nu}}{2} \right)} \\ &= -\frac{4i}{a} \gamma_{\rho} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\sin \frac{q_{\rho}}{2} \cos \frac{q_{\rho}}{2}}{\left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q-a p}{2} \right)_{\mu} \right) \left(4 \sum_{\nu} \sin^2 \frac{q_{\nu}}{2} \right)} \end{aligned} \quad (5.198)$$

enthalten. Das Verhalten dieses UV-divergenten Integral für kleine a ist in [EM] tabelliert, genauer findet man dort

$$\begin{aligned} I_\rho &:= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin \frac{q_\rho}{2} \cos \frac{q_\rho}{2}}{\left(4 \sum_\mu \sin^2 \left(\frac{q-\mathbf{ap}}{2}\right)_\mu\right) \left(4 \sum_\nu \sin^2 \frac{q_\nu}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{4} \mathbf{ap}_\rho\right) (2 - L(a^2 p^2)) - \frac{1}{32} \mathbf{ap}_\rho Z_{0000} + \mathcal{O}(a^2), \end{aligned} \quad (5.199)$$

wobei über ρ nicht summiert wird und

$$L(a^2 p^2) = \ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0000} + \mathcal{O}(a). \quad (5.200)$$

Die auftretenden Konstanten haben die Werte $F_{0000} \approx 4.369$ und $Z_{0000} \approx 0.1549$. Führt man eine dritte Größe F_{0001} mit

$$\frac{1}{(4\pi)^2} (F_{0001} - F_{0000}) = -\frac{1}{8} Z_{0000} \quad (5.201)$$

ein (es ist dann $F_{0001} \approx 1.311$) und erklärt

$$L_1(a^2 p^2) = \ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0001}, \quad (5.202)$$

so ergibt sich schließlich

$$I_\rho = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{4} \mathbf{ap}_\rho\right) (2 - L_1(a^2 p^2)) + \mathcal{O}(a^2). \quad (5.203)$$

Damit erhalten wir dann für unser logarithmisch divergentes Integral (5.198)

$$\begin{aligned} &\frac{4i}{a} \gamma_\rho \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{4} \mathbf{ap}_\rho (L_1(a^2 p^2) - 2) + \mathcal{O}(a^2) \\ &= \frac{1}{16\pi^2} i \not{p} (L_1(a^2 p^2) - 2) + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned} \quad (5.204)$$

und können das Endergebnis der masselosen Kalkulation von $\Sigma^{(A),FEY}$ angeben:

$$\begin{aligned} \Sigma^{(A),FEY} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ i \not{p} \left[\ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0001} - 2 \right. \right. \\ &\quad + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{4} \frac{\Delta_5}{\Delta_1^2 \Delta_2} - \frac{1}{4} \frac{\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2} + 2r^2 \frac{1}{\Delta_2} - r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right) \Big] \\ &\quad \left. + 4\pi^2 \frac{r}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{\Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{8}{\Delta_2} + 2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} (1 + r^2) \right] \right\} + \mathcal{O}(m_0) + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (5.205)$$

Berechnung des $\mathcal{O}(m_0^1)$ -Terms von $\Sigma^{(A)}$

Algebraischer Ausdruck und Vereinfachung

Als nächstes ist also der m_0 -abhängige Teil von $\Sigma^{(A),FEY}$ zu berechnen. Power-counting

zeigt, daß auch hier nur eine maximal logarithmische Divergenz zu erwarten ist, so daß wir im Zähler $ap = 0$ annehmen können. Der Zähler lautet dann mit unseren üblichen Abkürzungen

$$\begin{aligned} & -(\gamma_\rho c_\rho - i r s_\rho)(-i \not{q} + 2r \Delta_1)^2 (\gamma_\rho c_\rho - i r s_\rho) \\ & = c_\rho^2 q^2 + 8ir \Delta_1 c_\rho^2 q_\rho \gamma_\rho - 4ir \Delta_1 c_\rho^2 \not{q} - 2irs_\rho c_\rho q^2 \gamma_\rho - 4r^2 \Delta_1^2 c_\rho^2 + 8r^2 \Delta_1 c_\rho s_\rho q_\rho \\ & \quad - r^2 s_\rho^2 q^2 + 8ir^3 \Delta_1^2 c_\rho s_\rho \gamma_\rho - 4ir^3 \Delta_1 s_\rho^2 \not{q} + 4r^4 \Delta_1^2 s_\rho^2. \end{aligned} \quad (5.206)$$

Im Nenner tritt die Integrationsvariable q in sechster Potenz auf, so daß wir Divergenzen nur von folgendem Beitrag des Zählers erwarten

$$c_\rho^2 q^2 = (4 - s_\rho^2) q^2 = (4 - \Delta_1) \Delta_4. \quad (5.207)$$

In den übrigen (endlichen) Termen können wir im Nenner ap zu Null setzen, denn es handelt sich hierbei um einen $\mathcal{O}(ap)$ -Effekt. Damit wird der Nenner dann gerade in q , und wir können aufgrund der Integration alle endlichen Beiträge des Zählers ignorieren, die ungerade in q sind. Wir verbleiben dann mit den folgenden konvergenten Ausdrücken im Zähler

$$\begin{aligned} & -4r^2 \Delta_1^2 c_\rho^2 + 4r^2 \Delta_1 q_\rho^2 - r^2 s_\rho^2 q^2 + 4r^4 \Delta_1^2 s_\rho^2 \\ & = -4r^2 \Delta_1^2 (4 - \Delta_1) + 4r^2 \Delta_1 \Delta_4 - r^2 \Delta_1 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^3 \end{aligned} \quad (5.208)$$

$$= 3r^2 \Delta_1 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1^2 + 4r^2 \Delta_1^3 + 4r^4 \Delta_1^3. \quad (5.209)$$

Insgesamt lautet der Beitrag in erster Ordnung von m_0 zu $\Sigma^{(A),FEY}$ damit:

$$\begin{aligned} & -m_0 g_0^2 C_A \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1) \Delta_4}{\left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q - ap}{2}\right)_{\mu}\right) \Delta_2^2} \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{3r^2 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1 + 4r^2 (1 + r^2) \Delta_1^2}{4 \Delta_2^2} \right\} + \mathcal{O}(a) \end{aligned} \quad (5.210)$$

Behandlung der Divergenz

Zur Abspaltung weiterer endlicher Abteile benutzen wir

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{16 \Delta_1^2} + \frac{(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \quad (5.211)$$

aus dem Anhang. Der erste Summand ist von der Ordnung $1/q^4$ und führt weiterhin auf divergente Beiträge. Der zweite Summand hingegen ist vom Typ $\mathcal{O}(1/q^2)$ und liefert daher endliche Integrale.

Insgesamt ergibt sich dann der folgende Ausdruck

$$\begin{aligned} & -m_0 g_0^2 C_A \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1) \Delta_4}{16 \left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q - ap}{2}\right)_{\mu}\right) \Delta_1^2} \right. \\ & \quad + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{3r^2 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1 + 4r^2 (1 + r^2) \Delta_1^2}{4 \Delta_2^2} \\ & \quad \left. + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1) \Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{4 \Delta_1^3 \Delta_2^2} \right\} + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (5.212)$$

Die Divergenz ist nun vollständig im ersten Integral enthalten, welches sich wie folgt aufteilen läßt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1) \Delta_4}{16 \left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q - ap}{2} \right)_{\mu} \right) \Delta_1^2} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_4}{4 \left(4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q - ap}{2} \right)_{\mu} \right) \Delta_1^2} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_4}{64 \Delta_1^2}. \end{aligned} \quad (5.213)$$

Der divergente Beitrag ist, abgesehen von dem Vorfaktor, durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} & 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4\Delta_4}{4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{(q - ap)_{\mu}}{2} \right) (4\Delta_1)^2} \\ &= 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4\Delta_4}{\left[4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{(q - ap)_{\mu}}{2} \right) \right] \left[4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q_{\mu}}{2} \right) \right]^2} \end{aligned} \quad (5.214)$$

gegeben. Mit der Abkürzung (keine Summation über μ und ν)

$$I_{\mu\nu} := \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin \left(\frac{q_{\mu}}{2} \right) \cos \left(\frac{q_{\mu}}{2} \right) \sin \left(\frac{q_{\nu}}{2} \right) \cos \left(\frac{q_{\nu}}{2} \right)}{\left[4 \sum_{\rho} \sin^2 \left(\frac{(q - ap)_{\rho}}{2} \right) \right] \left[4 \sum_{\rho} \sin^2 \left(\frac{q_{\rho}}{2} \right) \right]^2} \quad (5.215)$$

ergibt sich hieraus

$$16\pi^2 \cdot 16\delta_{\mu\nu} I_{\mu\nu}. \quad (5.216)$$

Die Struktur der Divergenz von $I_{\mu\nu}$ im Limes $ap \rightarrow 0$ findet man in [EM] als

$$I_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{16} \delta_{\mu\nu} (2 - L(a^2 p^2) + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{8p^2}) \right] - \frac{1}{128} \delta_{\mu\nu} Z_{0000} + \mathcal{O}(a) \quad (5.217)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{16} \delta_{\mu\nu} (2 - \ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001}) + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{8p^2} \right] + \mathcal{O}(a), \quad (5.218)$$

und unser divergentes Integral läßt sich als

$$16\pi^2 \cdot 16\delta_{\mu\nu} I_{\mu\nu} = 8 - 4\ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 2 \quad (5.219)$$

schreiben.

Endergebnis

Das finale Resultat für den Beitrag erster Ordnung von m_0 zu $\Sigma^{(A),FEY}$ lautet damit also

$$\begin{aligned} & -m_0 \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-4\ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 \right. \\ & + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{3r^2 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1 + 4r^2(1 + r^2) \Delta_1^2}{\Delta_2^2} - \frac{\Delta_4}{16\Delta_1^2} \right) \\ & \left. + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1) \Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2) (2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.220)$$

Zusammenfassung

Damit haben wir für $\Sigma^{(A),FEY}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(A),FEY} = & \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ i\not{p} \left[\ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0001} - 2 \right. \right. \\
& + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{4} \frac{\Delta_5}{\Delta_1^2 \Delta_2} - \frac{1}{4} \frac{\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2} + 2r^2 \frac{1}{\Delta_2} - r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right) \Big] \\
& + 4\pi^2 \frac{r}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{\Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{8}{\Delta_2} + 2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} (1 + r^2) \right] \\
& - m_0 \left[-4 \ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 \right. \\
& + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{3r^2 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1 + 4r^2(1 + r^2)\Delta_1^2}{\Delta_2^2} - \frac{\Delta_4}{16\Delta_1^2} \right) \\
& + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1)\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \Big] \Big\} \\
& + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0^2)
\end{aligned} \tag{5.221}$$

gefunden.

Berechnung von $\Sigma^{(B)}$

Der Beitrag des zweiten Diagrammes ist durch den Ausdruck

$$\Sigma^{(B),FEY} = g_0^2 C_A \frac{1}{2a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[i \sum_{\rho} \gamma_{\rho} \sin(ap_{\rho}) - r \sum_{\rho} \cos(ap_{\rho}) \right] \left[4 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{q_{\mu}}{2} \right]^{-1} \tag{5.222}$$

gegeben. Die Entwicklung nach Potenzen von a liefert daher:

$$\Sigma^{(B),FEY}(p) = \frac{1}{2a} \frac{\alpha_s}{4\pi} C_A (16\pi^2) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i a \not{p} - 4r}{4\Delta_1} + \mathcal{O}(a) \tag{5.223}$$

oder anders gesagt

$$\Sigma^{(B),FEY}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[i\not{p} 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\Delta_1} - \frac{2r}{a} 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Delta_1} \right]. \tag{5.224}$$

Zusammenfassung aller Beiträge zu Σ^{FEY}

Insgesamt haben wir also die folgenden Beiträge zur 1-Loop-Selbstenergie des Fermions in Feynman-Eichung:

$$\Sigma^{FEY}(p) = i\not{p} \Sigma_1^{FEY} + m_0 \Sigma_2^{FEY} + \frac{r}{a} \Sigma_0^{FEY}. \tag{5.225}$$

Dabei sind

$$\begin{aligned}
\Sigma_1^{FEY} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[\ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0001} - 2 \right. \\
&\quad \left. + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{4} \frac{\Delta_5}{\Delta_1^2 \Delta_2} - \frac{1}{4} \frac{\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2} + \frac{2r^2}{\Delta_2} - r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} + \frac{1}{2\Delta_1} \right) \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0^2) \\
&= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [\ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0001} - 2 + 4\pi^2 I_{\Sigma_1}^{FEY}] + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0^2), \quad (5.226)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_2^{FEY} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[4\ln(a^2 p^2) + 4\gamma_E - 4F_{0001} - 10 \right. \\
&\quad - 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{3r^2 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1 + 4r^2(1+r^2)\Delta_1^2}{\Delta_2^2} - \frac{\Delta_4}{16\Delta_1^2} \right) \\
&\quad \left. - 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(4 - \Delta_1)\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0) \\
&= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [4\ln(ap)^2 + 4\gamma_E - 4F_{0001} - 10 - 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{FEY}] \\
&\quad + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0) \quad (5.227)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\Sigma_0^{FEY} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{\Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2} - \frac{8}{\Delta_2} + 2(1+r^2) \frac{\Delta_1}{\Delta_2} - \frac{2}{\Delta_1} \right) \right] \\
&\quad + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0^2) \\
&= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A 4\pi^2 I_{\Sigma_0} + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0^2). \quad (5.228)
\end{aligned}$$

Die Integrale $I_{\Sigma_1}^{FEY}$, $I_{\Sigma_2}^{FEY}$ und $I_{\Sigma_0}^{FEY}$ wurden mit den in [Ge] abgedruckten Computer-Programmen für den Fall $r = 1$ mittels einer Approximation durch Riemannsche Summen berechnet. Es ergibt sich¹¹

$$I_{\Sigma_1}^{FEY} = 0.369470 \quad (5.229)$$

$$I_{\Sigma_2}^{FEY} = -0.173133 \quad (5.230)$$

$$I_{\Sigma_0} = -1.302851. \quad (5.231)$$

5.3.4.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

In 1-Loop-Ordnung tragen wie gesehen nur die beiden Diagramme (5.165) und (5.166) zur Selbstenergie des Gluinos bei. Da in beiden Graphen ein Gluon-Propagator enthalten ist, sind die Graphen eichabhängig. Wir berechnen daher nun den additiven Beitrag $\Sigma^{(1-\alpha)}$ zur Selbstenergie des Gluinos. Wie auch in der Feynman-Eichung führen wir dabei zunächst eine Entwicklung in der nackten Masse m_0 durch und behandeln nur die Terme,

¹¹Bei den angegebenen Zahlenwerten handelt es sich um gerundete Werte, so daß die letzte angegebene Stelle nicht exakt sein muß. Man vergleiche dazu auch Anhang G.

die maximal linear in m_0 sind. Für das Diagramm (5.165) erhält man dann nach Einsetzen der Feynman-Regeln

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(A),(1-\alpha)} = & \delta_{ab} g_0^2 C_A \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\rho} \\
& \cdot \left[\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} - ir \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} \right] \\
& \cdot \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sin^2 \frac{q_{\lambda}}{2} \right] \\
& \cdot \left[\gamma_{\tau} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\tau} - ir \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\tau} \right] \\
& \cdot \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\tau} \left[2 \sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\mu} \right]^{-2} \\
& \cdot \left[\sum_{\nu} \sin^2 q_{\nu} + 4r^2 \left(\sum_{\nu} \sin^2 \frac{q_{\nu}}{2} \right)^2 \right]^{-1} \\
& - m_0 \delta_{ab} g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\rho} \\
& \cdot \left[\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} - ir \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} \right] \\
& \cdot \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sin^2 \frac{q_{\lambda}}{2} \right]^2 \\
& \cdot \left[\gamma_{\tau} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\tau} - ir \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\tau} \right] \\
& \cdot \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\tau} \left[2 \sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\mu} \right]^{-2} \\
& \cdot \left[\sum_{\nu} \sin^2 q_{\nu} + 4r^2 \left(\sum_{\nu} \sin^2 \frac{q_{\nu}}{2} \right)^2 \right]^{-2} \\
& + \mathcal{O}(m_0^2). \tag{5.232}
\end{aligned}$$

Berechnung des $\mathcal{O}(m_0^0)$ -Beitrags zu $\Sigma^{(A),(1-\alpha)}$

Der massenunabhängige Beitrag zu $\Sigma^{(A),(1-\alpha)}$ lautet

$$\Sigma^{(A),(1-\alpha)} = g_0^2 C_A \frac{1}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{s}_{\rho} (\gamma_{\rho} \check{c}_{\rho} - ir \check{s}_{\rho}) (-i \not{q} + 2r \Delta_1) (\gamma_{\tau} \check{c}_{\tau} - ir \check{s}_{\tau}) \bar{s}_{\tau}}{4 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2}. \tag{5.233}$$

Berechnung der Beiträge zu Σ_0

Beim Ausmultiplizieren des Zählers identifiziert man die Terme, die zur linearen Divergenz vor Σ_0 beitragen, dies sind genau die Terme, die proportional zu ungeraden Potenzen des

Wilson-Parameters sind. Für diese Beiträge ergibt sich

$$\begin{aligned}
g_0^2 C_A \frac{r}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2\Delta_1 \bar{s}_\rho \gamma_\rho \check{c}_\rho \gamma_\tau \check{c}_\tau \bar{s}_\tau - \bar{s}_\rho \check{s}_\rho \not{q} \gamma_\tau \check{c}_\tau \bar{s}_\tau - \bar{s}_\rho \gamma_\rho \check{c}_\tau \not{q} \check{s}_\tau - 2r^2 \Delta_1 \bar{s}_\rho \check{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{s}_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \\
= g_0^2 C_A \frac{r}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{2}\Delta_4 - 2r^2 \Delta_1^2}{4\Delta_1 \Delta_2} + \mathcal{O}(a) \\
= -g_0^2 C_A \frac{r}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{8\Delta_1} + \mathcal{O}(a). \quad (5.234)
\end{aligned}$$

Behandlung der endlichen Beiträge

Die übrigen Terme lauten

$$\begin{aligned}
& -g_0^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{c}_\rho \check{c}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} + g_0^2 C_A \frac{ir^2}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{s}_\rho \check{s}_\tau \not{q}}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \\
& -g_0^2 C_A \frac{2ir^2}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_1 \bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{s}_\rho \check{c}_\tau \gamma_\tau}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} - g_0^2 C_A \frac{2ir^2}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_1 \bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{s}_\tau \check{c}_\rho \gamma_\rho}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2}. \quad (5.235)
\end{aligned}$$

Power-counting zeigt, daß nur der erste Term einen im Limes $ap \rightarrow 0$ divergenten Beitrag ergibt. Die übrigen endlichen Terme lassen sich zu

$$g_0^2 C_A \frac{ir^2}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{s}_\rho \check{s}_\tau \not{q}}{4\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} - g_0^2 C_A \frac{ir^2}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_1 \bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{s}_\rho \check{c}_\tau \gamma_\tau}{\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \quad (5.236)$$

zusammenfassen. Die Vorfaktoren $\frac{1}{a}$ machen nun wie im Fall der Feynman-Eichung eine Entwicklung sowohl des Zählers als auch des Nenners nach a notwendig. Als Entwicklungspunkt wählen wir dabei die Stelle $q - ap$ und benutzen die folgenden Taylor-Entwicklungen (keine Summation über ρ in (5.239) und (5.240))

$$\not{q} = \not{\tilde{q}} + ap_\mu \gamma_\mu \cos((q - ap)_\mu) + \mathcal{O}(a^2) \quad (5.237)$$

$$\Delta_1 = \tilde{\Delta}_1 + \frac{a}{2} p \cdot \tilde{q} + \mathcal{O}(a^2) \quad (5.238)$$

$$\check{s}_\rho = \bar{s}_\rho + ap_\rho \bar{c}_\rho + \mathcal{O}(a^2) \quad (5.239)$$

$$\check{c}_\rho = \bar{c}_\rho - ap_\rho \bar{s}_\rho + \mathcal{O}(a^2) \quad (5.240)$$

$$\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_2} - 2a \frac{p \cdot \tilde{q} - 2p_\rho \tilde{q}_\rho \tilde{s}_\rho^2 + 2r^2 \tilde{\Delta}_1 p \cdot \tilde{q}}{\tilde{\Delta}_2^2} + \mathcal{O}(a^2). \quad (5.241)$$

Damit erhält man für (5.236)

$$\begin{aligned}
& g_0^2 C_A \frac{ir^2}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{s}_\rho \check{s}_\tau \not{\tilde{q}}}{4\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} - g_0^2 C_A \frac{ir^2}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\Delta}_1 \bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{s}_\rho \bar{c}_\tau \gamma_\tau}{\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} \\
& + g_0^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{s}_\rho \bar{s}_\tau p_\rho \bar{c}_\rho \check{s}_\tau \not{\tilde{q}}}{4\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} + g_0^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{s}_\rho p_\tau \bar{c}_\tau \not{\tilde{q}}}{4\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} \\
& + g_0^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{s}_\rho \check{s}_\tau p_\mu \cos((q - ap)_\mu) \gamma_\mu}{4\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} \\
& - 2g_0^2 C_A ir^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \check{s}_\rho \check{s}_\tau \not{\tilde{q}} (p \cdot \tilde{q} - 2p_\mu \tilde{q}_\mu \tilde{s}_\mu^2 + 2r^2 \tilde{\Delta}_1 p \cdot \tilde{q})}{4\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_0^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\Delta}_1 \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau p_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\tau}{\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} + g_0^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\Delta}_1 \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho p_\tau \tilde{s}_\tau \gamma_\tau}{\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} \\
& -g_0^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{p \cdot \tilde{q} \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\tau}{2 \tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2} \\
& + 2g_0^2 C_A i r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\Delta}_1 \tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{s}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\tau (p \cdot \tilde{q} - 2p_\mu \tilde{q}_\mu \tilde{s}_\mu^2 + 2r^2 \tilde{\Delta}_1 p \cdot \tilde{q})}{\tilde{\Delta}_1^2 \tilde{\Delta}_2^2} + \mathcal{O}(a). \quad (5.242)
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der 2π -Periodizität kann die Integrationsvariable q nach $q + ap$ verschoben werden. Unter Auslassung verschwindender ungerader Terme und nach weiteren trigonometrischen Umformungen sowie der Ausnutzung der hyperkubischen Symmetrie ergibt sich dann schließlich für (5.236) die endgültige Form

$$\frac{\alpha_S}{4\pi} C_A i \not{p} 4\pi^2 r^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(-\frac{\Delta_4}{4\Delta_1 \Delta_2} + \frac{1}{\Delta_2} + \frac{\Delta_1}{2\Delta_2} + \frac{\Delta_4}{2\Delta_2^2} - \frac{\Delta_5}{\Delta_2^2} + r^2 \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_2^2} \right) + \mathcal{O}(a). \quad (5.243)$$

Behandlung der Divergenz

Wir wenden uns nun dem im Limes $ap \rightarrow 0$ divergenten Integral zu und müssen auch hier den Zähler in Potenzen von a entwickeln (als Entwicklungspunkt wählen wir $q - ap$):

$$\begin{aligned}
& -g_0^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{c}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\tau}{4 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \\
& = -g_0^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{c}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\tau}{4 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} + g_0^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau p_\rho \tilde{s}_\rho \tilde{c}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\tau}{4 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \\
& \quad + g_0^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{c}_\rho p_\tau \tilde{s}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\tau}{4 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} \\
& \quad - g_0^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{s}_\rho \tilde{s}_\tau \tilde{c}_\rho \tilde{c}_\tau p_\mu \cos((q - ap)_\mu) \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\tau}{4 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2} + \mathcal{O}(a) \quad (5.244)
\end{aligned}$$

Nach Variablentransformation $q \rightarrow q + ap$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
& -g_0^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \Delta_4}{16 \Delta_1^2 \check{\Delta}_2} - g_0^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \not{p} \not{q}}{16 \Delta_1^2 \check{\Delta}_2} \\
& + g_0^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} \Delta_4}{16 \Delta_1 \Delta_2} + g_0^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\frac{1}{4} \not{p} \Delta_1 \Delta_4 + 2s_\mu^2 p_\mu q_\mu^2 \gamma_\mu}{8 \Delta_1^2 \Delta_2}. \quad (5.245)
\end{aligned}$$

Unter dem Integral können wir $\not{q} \not{p} \not{q}$ durch $-\frac{1}{2} \Delta_4 \not{p}$ ersetzen und erhalten dann nach weiteren Vereinfachungen

$$\begin{aligned}
& -g_0^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q}}{16 \Delta_1 \check{\Delta}_1} - g_0^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \not{p} \not{q}}{64 \Delta_1^2 \check{\Delta}_1} \\
& + g_0^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \Delta_3}{4 \Delta_1^2 \check{\Delta}_2} - g_0^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} (\check{\Delta}_3 - r^2 \check{\Delta}_1^2)}{4 \Delta_1 \check{\Delta}_1 \check{\Delta}_2} \\
& + g_0^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} \Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{32 \Delta_1^3 \Delta_2} \\
& + g_0^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} \Delta_4}{32 \Delta_1 \Delta_2} + g_0^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} \Delta_5}{16 \Delta_1^2 \Delta_2}. \quad (5.246)
\end{aligned}$$

Die beiden Integrale in der zweiten Zeile sind im Limes $ap \rightarrow 0$ endlich und können nach der üblichen Entwicklung von Zähler und Nenner als

$$\begin{aligned}
& g_0^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \Delta_3}{4 \Delta_1^2 \check{\Delta}_2} - g_0^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{4 \check{\Delta}_1 \Delta_1 \Delta_2} \\
& = g_0^2 C_A i \not{p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2 \Delta_3 \Delta_5}{8 \Delta_1^2 \Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{4 \Delta_1 \Delta_2^2} + \frac{(2 - \Delta_1)(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{8 \Delta_1^2 \Delta_2} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{32 \Delta_1^3 \Delta_2} \right) \quad (5.247)
\end{aligned}$$

geschrieben werden. (5.246) kann daher zu

$$\begin{aligned}
& -g_0^2 C_A \frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q}}{16 \Delta_1 \check{\Delta}_1} - g_0^2 C_A i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \not{p} \not{q}}{64 \Delta_1^2 \check{\Delta}_1} \\
& + g_0^2 C_A i \not{p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2 \Delta_3 \Delta_5}{8 \Delta_1^2 \Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{4 \Delta_1 \Delta_2^2} + \frac{(2 - \Delta_1)(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{8 \Delta_1^2 \Delta_2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Delta_4}{32 \Delta_1 \Delta_2} + \frac{\Delta_5}{16 \Delta_1^2 \Delta_2} \right) \quad (5.248)
\end{aligned}$$

vereinfacht werden.

Mit Hilfe der in [EM] tabellierten Integrale lassen sich jetzt die noch verbleibenden divergenten Beiträge

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q}}{16 \Delta_1 \check{\Delta}_1} &= -\frac{2i}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\rho s_\rho c_\rho}{16 \Delta_1 \check{\Delta}_1} \\
&= \frac{1}{16\pi^2} i \not{p} \left(-\frac{1}{2} \ln(a^2 p^2) - \frac{1}{2} \gamma_E + \frac{1}{2} F_{0000} + 1 - \frac{16\pi^2}{16} Z_{0000} \right) + \mathcal{O}(a) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} i \not{p} \left(-\frac{1}{2} \ln(a^2 p^2) - \frac{1}{2} \gamma_E + \frac{1}{2} F_{0001} + 1 \right) + \mathcal{O}(a) \quad (5.249)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
-\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i \not{q} \not{p} \not{q}}{64 \Delta_1^2 \check{\Delta}_1} &= -4i \gamma_\rho \not{p} \gamma_\tau \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{s_\rho c_\rho s_\tau c_\tau}{64 \Delta_1^2 \check{\Delta}_1} \\
&= \frac{1}{16\pi^2} i \not{p} \left(-\frac{1}{2} \ln(a^2 p^2) - \frac{1}{2} \gamma_E + \frac{1}{2} F_{0000} + \frac{1}{2} - \frac{16\pi^2}{16} Z_{0000} \right) + \mathcal{O}(a) \\
&= \frac{1}{16\pi^2} i \not{p} \left(-\frac{1}{2} \ln(a^2 p^2) - \frac{1}{2} \gamma_E + \frac{1}{2} F_{0001} + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}(a) \quad (5.250)
\end{aligned}$$

angeben.

Daher verbleiben wir schließlich mit dem folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A i \not{p} \left(-\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + \frac{3}{2} \right. \\
& \quad + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2 \Delta_3 \Delta_5}{2 \Delta_1^2 \Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2^2} + \frac{(2 - \Delta_1)(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{2 \Delta_1^2 \Delta_2} \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\Delta_4}{8 \Delta_1 \Delta_2} + \frac{\Delta_5}{4 \Delta_1^2 \Delta_2} \right) \right) \quad (5.251)
\end{aligned}$$

für den anfangs identifizierten divergenten Beitrag.

Zusammenfassung der Terme

Gemeinsam mit (5.243) und dem linear divergenten Anteil können wir dann

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{(A),(1-\alpha)} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A i \not{p} \left(-\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + \frac{3}{2} \right. \\
 &\quad + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2\Delta_3 \Delta_5}{2\Delta_1^2 \Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2^2} + \frac{(2 - \Delta_1)(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{2\Delta_1^2 \Delta_2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\Delta_4}{8\Delta_1 \Delta_2} + \frac{\Delta_5}{4\Delta_1^2 \Delta_2} - r^2 \frac{\Delta_4}{4\Delta_1 \Delta_2} + r^2 \frac{1}{\Delta_2} \right. \\
 &\quad \left. + r^2 \frac{\Delta_1}{2\Delta_2} + r^2 \frac{\Delta_4}{2\Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_5}{\Delta_2^2} + r^4 \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_2^2} \right) \\
 &\quad - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \frac{r}{a} 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\Delta_1} + \mathcal{O}(m_0) + \mathcal{O}(a)
 \end{aligned} \tag{5.252}$$

als Endergebnis des masselosen Falles festhalten.

Berechnung des $\mathcal{O}(m_0^1)$ -Beitrages zu $\Sigma^{A,(1-\alpha)}$

Algebraischer Ausdruck und Vereinfachung

Der jetzt zu betrachtende Term ist durch

$$\begin{aligned}
 &-m_0 \delta_{ab} g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \sin\left(\frac{q - ap}{2}\right)_\rho \\
 &\quad \cdot \left[\gamma_\rho \cos\left(\frac{q + ap}{2}\right)_\rho - ir \sin\left(\frac{q + ap}{2}\right)_\rho \right] \\
 &\quad \cdot \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sin^2 \frac{q_\lambda}{2} \right]^2 \\
 &\quad \cdot \left[\gamma_\tau \cos\left(\frac{q + ap}{2}\right)_\tau - ir \sin\left(\frac{q + ap}{2}\right)_\tau \right] \\
 &\quad \cdot \sin\left(\frac{q - ap}{2}\right)_\tau \left[2 \sum_\mu \sin^2\left(\frac{q - ap}{2}\right)_\mu \right]^{-2} \\
 &\quad \cdot \left[\sum_\nu \sin^2 q_\nu + 4r^2 \left(\sum_\nu \sin^2 \frac{q_\nu}{2} \right)^2 \right]^{-2}
 \end{aligned} \tag{5.253}$$

gegeben. Die Divergenz dieses Terms ist wieder vom Typ $\log(ap)$. In den im Zähler auftretenden Cosinus-Funktionen können wir daher das Argument von q nach $q + ap$ verschieben, denn die dabei auftretenden Korrekturen verschwinden im Kontinuumsimes. Wir dürfen somit z.B. c_ρ ohne zusätzliche Effekte durch $\tilde{c}_\rho$ ersetzen. Damit können wir den Zähler als

$$\begin{aligned}
 &-\tilde{s}_\rho (\gamma_\rho c_\rho - ir \tilde{s}_\rho) (-i \not{q} + 2r \Delta_1)^2 (\gamma_\tau c_\tau - ir \tilde{s}_\tau) \tilde{s}_\tau \\
 &= \gamma_\rho \tilde{c}_\rho \tilde{s}_\rho \not{q} \gamma_\tau \tilde{c}_\tau \tilde{s}_\tau + 4ir \Delta_1 \gamma_\rho c_\rho \tilde{s}_\rho \not{q} \gamma_\tau c_\tau \tilde{s}_\tau - 4r^2 \Delta_1^2 \gamma_\rho c_\rho \tilde{s}_\rho \gamma_\tau c_\tau \tilde{s}_\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -ir\bar{s}_\rho\bar{s}_\rho\cancel{\not{d}}\cancel{\not{d}}\gamma_\tau c_\tau\bar{s}_\tau + 4r^2\bar{s}_\rho\bar{s}_\rho\Delta_1\cancel{\not{d}}\gamma_\tau c_\tau\bar{s}_\tau + 4ir^3\bar{s}_\rho\bar{s}_\rho\Delta_1^2\gamma_\tau c_\tau\bar{s}_\tau \\
& -ir\gamma_\rho c_\rho\bar{s}_\rho\cancel{\not{d}}\cancel{\not{d}}\bar{s}_\tau\bar{s}_\tau + 4r^2\bar{s}_\tau\bar{s}_\tau\Delta_1\gamma_\rho c_\rho\bar{s}_\rho\cancel{\not{d}} + 4ir^3\bar{s}_\tau\bar{s}_\tau\Delta_1^2\gamma_\rho c_\rho\bar{s}_\rho \\
& -r^2\bar{s}_\rho\bar{s}_\rho\bar{s}_\tau\bar{s}_\tau\cancel{\not{d}}\cancel{\not{d}} - 4ir^3\bar{s}_\rho\bar{s}_\rho\bar{s}_\tau\bar{s}_\tau\cancel{\not{d}}\Delta_1 + 4r^4\bar{s}_\rho\bar{s}_\rho\bar{s}_\tau\bar{s}_\tau\Delta_1^2
\end{aligned} \quad (5.254)$$

schreiben. Nur der erste Term führt dabei im Limes $ap \rightarrow 0$ zu einer Divergenz. In den übrigen konvergenten Termen ist es dann erlaubt, $\bar{s}_\rho$ und $\bar{s}_\tau$ durch s_ρ zu ersetzen, es handelt sich auch hierbei nur um einen $\mathcal{O}(a)$ -Effekt. Außerdem können wir in diesen Termen auch im Nenner $ap = 0$ annehmen und daher alle konvergenten Terme, die ungerade in q sind, außer Acht lassen. Wir verbleiben dann mit

$$\begin{aligned}
& \gamma_\rho\bar{c}_\rho\bar{s}_\rho\Delta_4\gamma_\tau\bar{c}_\tau\bar{s}_\tau - 4r^2\Delta_1^2c_\rho s_\rho c_\tau s_\tau\gamma_\rho\gamma_\tau + 4r^2\Delta_1s_\rho^2c_\tau s_\tau\cancel{\not{d}}\gamma_\tau \\
& + 4r^2\Delta_1s_\tau^2c_\rho s_\rho\gamma_\rho\cancel{\not{d}} - r^2s_\rho^2s_\tau^2\Delta_4 + 4r^4s_\rho^2s_\tau^2\Delta_1^2 \\
& = \tilde{\Delta}_1\Delta_4 - \Delta_3\Delta_4 + 2r^2\Delta_1^2\Delta_4 + 4r^4\Delta_1^4.
\end{aligned} \quad (5.255)$$

Dabei wurde $\tilde{\Delta}_4 = 4(\tilde{\Delta}_1 - \tilde{\Delta}_3)$ ausgenutzt, wobei der Term in $\tilde{\Delta}_3$ auf einen endlichen Beitrag führt, so daß wir dort ohne Korrekturen Δ_3 anstelle von $\tilde{\Delta}_3$ schreiben können.

Gemeinsam mit dem Nenner lautet dieses Ergebnis:

$$m_0g_0^2C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\Delta_4}{4\tilde{\Delta}_1\Delta_2^2} + \frac{-\Delta_3\Delta_4 + 2r^2\Delta_1^2\Delta_4 + 4r^4\Delta_1^4}{4\Delta_1^2\Delta_2^2} \right\} + \mathcal{O}(a). \quad (5.256)$$

Im zweiten Term sind die endlichen Anteile zusammengefaßt, während der erste die Divergenz enthält.

Behandlung der Divergenz

Abgesehen von einem zusätzlichen Vorfaktor trat der divergente Term auch schon in der Feynman-Eichung auf, so daß das Ergebnis direkt übernommen werden kann. Man erhält damit für den Beitrag erster Ordnung in m_0 zu $\Sigma^{(A),(1-\alpha)}$ das Resultat

$$\begin{aligned}
& m_0 \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -\ln(a^2p^2) - \gamma_E + F_{0001} + \frac{5}{2} \right. \\
& \quad + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_4(\Delta_3 - r^2\Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2\Delta_1^2)}{\Delta_1^3\Delta_2^2} \\
& \quad \left. + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{-\Delta_3\Delta_4 + 2r^2\Delta_1^2\Delta_4 + 4r^4\Delta_1^4}{\Delta_1^2\Delta_2^2} \right\} + \mathcal{O}(a) \\
& = m_0 \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -\ln(a^2p^2) - \gamma_E + F_{0001} + \frac{5}{2} - 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right\} + \mathcal{O}(a).
\end{aligned} \quad (5.257)$$

Berechnung von $\Sigma^{(B),(1-\alpha)}$

Der zweite Graph liefert den folgenden additiven Beitrag:

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(B),(1-\alpha)} & = -g_0^2C_A \frac{1}{2a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \sin\left(\frac{q_\rho}{2}\right) [i\gamma_\rho \sin(ap_\rho) - r \cos(ap_\rho)] \sin\left(\frac{q_\rho}{2}\right) \\
& \quad \cdot \left[2 \sum_{\mu} \sin^2 \frac{q_\mu}{2} \right]^{-2}
\end{aligned} \quad (5.258)$$

$$= -g_0^2 C_A \frac{1}{2a} [i\gamma_\rho \sin(ap_\rho) - r \cos(ap_\rho)] \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin^2(\frac{q_\rho}{2})}{4\Delta_1^2} \quad (5.259)$$

$$= -g_0^2 C_A \frac{1}{2a} [i\gamma_\rho \sin(ap_\rho) - r \cos(ap_\rho)] \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{16\Delta_1} \quad (5.260)$$

$$= -\frac{1}{4} \Sigma^{(B),FEY} \quad (5.261)$$

$$= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A 4\pi^2 \left[-i\not{p} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{8\Delta_1} + \frac{r}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\Delta_1} \right] + \mathcal{O}(a). \quad (5.262)$$

Zusammenfassung aller Beiträge zu Σ^{LAN}

Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Sigma^{LAN} &= \Sigma^{(A),FEY} + \Sigma^{(A),(1-\alpha)} + \Sigma^{(B),FEY} + \Sigma^{(B),(1-\alpha)} \\ &= i\not{p} \Sigma_1^{LAN} + m_0 \Sigma_2^{LAN} + \frac{r}{a} \Sigma_0^{LAN}. \end{aligned} \quad (5.263)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \Sigma_1^{LAN} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-\frac{1}{2} + 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\Delta_3 \Delta_4 + 2\Delta_3 \Delta_5}{2\Delta_1^2 \Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_1 \Delta_2^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2 - \Delta_1)(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{2\Delta_1^2 \Delta_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Delta_4}{8\Delta_1 \Delta_2} + \frac{\Delta_5}{4\Delta_1^2 \Delta_2} - r^2 \frac{\Delta_4}{4\Delta_1 \Delta_2} + 3r^2 \frac{1}{\Delta_2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r^2 \frac{\Delta_1}{2\Delta_2} + r^2 \frac{\Delta_4}{2\Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_5}{\Delta_2^2} + r^4 \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_2^2} + \frac{3}{8\Delta_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\Delta_5}{4\Delta_1^2 \Delta_2} - \frac{\Delta_4(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)}{4\Delta_1^3 \Delta_2} - r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0^2) \end{aligned} \quad (5.264)$$

$$= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-\frac{1}{2} + 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)} \right) \right] + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0^2), \quad (5.265)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{LAN} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[3\ln(a^2 p^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} - \frac{15}{2} \right. \\ &\quad \left. - 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left(\frac{r^2 \Delta_4 - 16r^2 \Delta_1 + 4r^2 \Delta_1^2}{\Delta_2^2} - \frac{\Delta_4}{16\Delta_1^2} + \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(3 - \Delta_1) \Delta_4 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2) (2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0) \\ &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[3\ln(a^2 p^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} - \frac{15}{2} - 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_2}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0) \end{aligned} \quad (5.266)$$

und

$$\Sigma_0^{LAN} = \Sigma_0^{FEY} = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A 4\pi^2 I_{\Sigma_0} + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0^2). \quad (5.267)$$

Dabei haben wir auch das erste Gleichheitszeichen nur modulo Termen der Form $\mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0^2)$ nachgewiesen. Die numerischen Werte für die verbleibenden Integrale lauten im Fall $r = 1$

$$I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)} = -I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} = 0.064801. \quad (5.268)$$

5.3.5 Skalare Dichte

Es wird also im folgenden der 1-Loop-Beitrag $\tilde{\Lambda}_\Gamma(p)$ zur amputierten Greens-Funktion $\Lambda_\Gamma(p, -p)$ aus Abb. 5.5 im Fall $\Gamma = \mathbb{1}$ berechnet. Dieser Ausdruck ist durch

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\Gamma(p) = & \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk}{(2\pi^4)} V_\sigma^{dcb}[\lambda, A_\sigma, \bar{\lambda}](p-k, k, -p) S_F(p-k) \Gamma \\ & \cdot S_F(p-k) V_\rho^{acd}[\lambda, A_\rho, \bar{\lambda}](p, -k, k-p) D_{\rho\sigma}(k). \end{aligned} \quad (5.269)$$

gegeben. Wie im Fall des Propagators kann dabei zunächst eine Substitution $ak_\mu \rightarrow k_\mu$ durchgeführt werden. Außerdem werden wir als Integrationsvariable $q_\mu := ap_\mu - k_\mu$ verwenden.

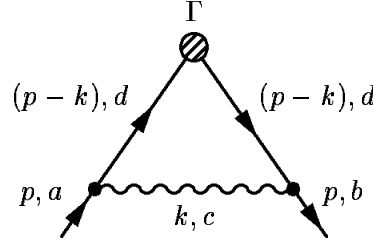
5.3.5.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

Im masselosen Fall, den wir hier ohne Einschränkung annehmen wollen, schreibt sich das entsprechende Feynman-Diagramm als

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_\mathbb{1}^{FEY}(p) = & -g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \right. \\ & \left[\gamma_\rho \cos\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) - ir \sin\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) \right] \\ & \cdot \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sum_\lambda \sin^2\left(\frac{q_\lambda}{2}\right) \right] \mathbb{1} \\ & \cdot \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sum_\lambda \sin^2\left(\frac{q_\lambda}{2}\right) \right] \\ & \cdot \left[\gamma_\rho \cos\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) - ir \sin\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) \right] \\ & \cdot \left[4 \sum_\sigma \sin^2\left(\frac{(q-ap)_\sigma}{2}\right) \right]^{-1} \\ & \cdot \left[\sum_\tau \sin^2(q_\tau) + 4r^2 \left(\sum_\tau \sin^2\left(\frac{q_\tau}{2}\right) \right)^2 \right]^{-2} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.270)$$

Dieses Integral stimmt exakt mit demjenigen überein, das uns bei der Berechnung des $\mathcal{O}(m_0^1)$ -Terms des Propagators über den Weg gelaufen ist, man vergleiche mit (5.170). Wir können daher sofort das Endergebnis

$$\tilde{\Lambda}_\mathbb{1}^{FEY}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [-4 \ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 + 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{FEY}] + \mathcal{O}(a) \quad (5.271)$$

Abbildung 5.5: 1-Loop-Korrektur zu $\mathcal{O}_\Gamma$ auf dem Gitter

angeben.

5.3.5.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

In Landau-Eichung ist noch der folgende additive Term

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\parallel}^{(1-\alpha)}(p) = & g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\rho} \right. \\
 & \cdot \left[\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{(q+ap)_{\rho}}{2}\right) - ir \sin\left(\frac{(q+ap)_{\rho}}{2}\right) \right] \\
 & \cdot \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{q_{\lambda}}{2}\right) \right]_{\parallel} \\
 & \cdot \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sum_{\lambda} \sin^2\left(\frac{q_{\lambda}}{2}\right) \right] \\
 & \cdot \left[\gamma_{\tau} \cos\left(\frac{(q+ap)_{\tau}}{2}\right) - ir \sin\left(\frac{(q+ap)_{\tau}}{2}\right) \right] \sin\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\tau} \\
 & \cdot \left[2 \sum_{\sigma} \sin^2\left(\frac{(q-ap)_{\sigma}}{2}\right) \right]^{-2} \\
 & \cdot \left[\sum_{\sigma} \sin^2(q_{\sigma}) + 4r^2 \left(\sum_{\sigma} \sin^2\left(\frac{q_{\sigma}}{2}\right) \right)^2 \right]^{-2} \Bigg\} \quad (5.272)
 \end{aligned}$$

zu berechnen. Auch dieser Ausdruck ist identisch zum entsprechenden $\mathcal{O}(m_0^1)$ -Term im Propagator (5.253), so daß wir mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\parallel}^{LAN}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\parallel}^{FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\parallel}^{(1-\alpha)}(p) \\
 &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -3 \ln(a^2 p^2) - 3\gamma_E + 3F_{0001} + \frac{15}{2} + 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_2}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right) \right\} \\
 &\quad + \mathcal{O}(a) \quad (5.273)
 \end{aligned}$$

verbleiben.

5.3.6 Pseudoskalare Dichte

5.3.6.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

Im Kontinuum konnten wir den Ausdruck für $\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}$ im masselosen Fall leicht aus dem entsprechenden Term der skalaren Dichte gewinnen, denn es galt

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}(p, -p) = \tilde{\Lambda}_{\Pi}(p, -p)\gamma_5. \quad (5.274)$$

Auf dem Gitter ist es nicht ohne weiteres möglich, das hinzugekommene γ_5 zu isolieren. Der Grund hierfür liegt in der Wilsonschen Formulierung der Fermionen. Man erhält im Fall $\Gamma = \gamma_5$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}(p) = & -g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} - ir \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} \right] \\ & \cdot \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sin^2 \frac{q_{\lambda}}{2} \right] \gamma_5 \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sin^2 \frac{q_{\lambda}}{2} \right] \\ & \cdot \left[\gamma_{\rho} \cos\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} - ir \sin\left(\frac{q+ap}{2}\right)_{\rho} \right] \\ & \cdot \left[4 \sum_{\mu} \sin^2\left(\frac{q-ap}{2}\right)_{\mu} \right]^{-1} \\ & \cdot \left[\sum_{\nu} \sin^2 q_{\nu} + 4r^2 \left(\sum_{\nu} \sin^2 \frac{q_{\nu}}{2} \right)^2 \right]^{-2}, \end{aligned} \quad (5.275)$$

von dessen Zähler wir nur

$$-(\gamma_{\rho} c_{\rho} - ir s_{\rho})(-i\not{q} + 2r\Delta_1)\gamma_5(-i\not{q} + 2r\Delta_1)(\gamma_{\rho} c_{\rho} - ir s_{\rho}). \quad (5.276)$$

betrachten müssen. Man erkennt, daß sich das γ_5 nicht wie im Kontinuum ganz nach rechts schreiben läßt, ohne die relativen Vorzeichen der einzelnen Terme zu verändern.

Nach Ausmultiplikation und Anwendung der Rechenregeln für Gamma-Matrizen identifiziert man nun zunächst mittels Power-counting die Terme, die im finalen Resultat endlich bleiben. Von diesen brauchen wie oben nur diejenigen weiter berücksichtigt zu werden, die gerade in der Integrationsvariablen q sind, denn der Nenner ist ebenfalls gerade. Ferner formt man die Terme durch Anwenden von $\{\gamma_{\mu}, \gamma_5\} = 0$ so um, daß das im Vergleich zur skalaren Dichte hinzugefügte γ_5 jeweils ganz rechts steht. Somit nimmt der übrigbleibende Zähler die Gestalt

$$\begin{aligned} & c_{\rho}^2 q^2 \gamma_5 + 4r^2 \Delta_1^2 c_{\rho}^2 \gamma_5 + r^2 s_{\rho}^2 q^2 \gamma_5 + 4r^4 \Delta_1^2 s_{\rho}^2 \gamma_5 \\ = & (4 - \Delta_1) q^2 \gamma_5 + 4r^2 (4 - \Delta_1) \Delta_1^2 \gamma_5 + r^2 \Delta_1 q^2 \gamma_5 + 4r^4 \Delta_1^3 \gamma_5 \end{aligned} \quad (5.277)$$

an. Insbesondere ist der erste Summand der einzige, der auf eine Divergenz führt und stimmt (bis auf γ_5) mit dem divergenten Term der skalaren Dichte überein.

Damit können wir dann auf

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}(p) &= g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{4\Delta_4}{4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{(q-ap)_{\mu}}{2} \right) \Delta_2^2} \cdot \gamma_5 \\ &+ g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\Delta_1 \Delta_4 + 16r^2 \Delta_1^2 - 4r^2 \Delta_1^3 + r^2 \Delta_1 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^3}{4\Delta_1 \Delta_2^2} \cdot \gamma_5\end{aligned}\quad (5.278)$$

schließen. Mit der Formel (G.16)

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{16\Delta_1^2} + \frac{(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \quad (5.279)$$

können wir aus dem ersten (divergenten) Integral noch einen endlichen Anteil extrahieren und erhalten so für den konvergenten Teil von $\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}$ insgesamt

$$\begin{aligned}& \frac{\Delta_4(4\Delta_3 - 4r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} \cdot \gamma_5 \\ & + \frac{-\Delta_1 \Delta_4 + 16r^2 \Delta_1^2 - 4r^2 \Delta_1^3 + r^2 \Delta_1 \Delta_4 + 4r^4 \Delta_1^3}{4\Delta_1 \Delta_2^2} \cdot \gamma_5 \\ & = \left\{ 2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} - \frac{\Delta_3^2 \Delta_4}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} - \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta_4^2}{\Delta_1 \Delta_2^2} - r^4 \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_2^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\Delta_4}{\Delta_2^2} + \frac{1}{4} r^2 \frac{\Delta_4}{\Delta_2^2} + 4r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} + r^4 \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} \right\} \gamma_5.\end{aligned}\quad (5.280)$$

Das verbleibende divergente Integral stimmt nun mit dem der skalaren Dichte bzw. des massenabhängigen Teils der Selbstenergie überein, und wir geben sofort das Endergebnis

$$\Lambda_{\gamma_5}^{FEY}(p, -p) = \gamma_5 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [-4 \ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{1000} + 10 + 4\pi^2 I_P^{FEY}] \gamma_5 + \mathcal{O}(a) \quad (5.281)$$

an. Dabei ist

$$\begin{aligned}I_P^{FEY} &:= 4 \cdot \left(2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} - \frac{\Delta_3^2 \Delta_4}{\Delta_1^3 \Delta_2^2} - \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta_4^2}{\Delta_1 \Delta_2^2} - r^4 \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_2^2} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4} \frac{\Delta_4}{\Delta_2^2} + \frac{1}{4} r^2 \frac{\Delta_4}{\Delta_2^2} + 4r^2 \frac{\Delta_1}{\Delta_2^2} - r^2 \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} + r^4 \frac{\Delta_1^2}{\Delta_2^2} \right).\end{aligned}\quad (5.282)$$

Den numerischen Wert bestimmt man für $r = 1$ zu $I_P^{FEY} = 0.071126$.

5.3.6.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)

Analog zur Betrachtung der skalaren Dichte erhält man im Fall der pseudoskalaren Dichte den Ausdruck

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) &= g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \sin \left(\frac{q-ap}{2} \right)_{\rho} \right. \\ & \quad \left. \cdot \left[\gamma_{\rho} \cos \left(\frac{(q+ap)_{\rho}}{2} \right) - ir \sin \left(\frac{(q+ap)_{\rho}}{2} \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sum_{\lambda} \sin^2 \left(\frac{q_{\lambda}}{2} \right) \right] \gamma_5 \\
& \cdot \left[-i \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda} \sin q_{\lambda} + 2r \sum_{\lambda} \sin^2 \left(\frac{q_{\lambda}}{2} \right) \right] \\
& \cdot \left[\gamma_{\tau} \cos \left(\frac{(q+ap)_{\tau}}{2} \right) - ir \sin \left(\frac{(q+ap)_{\tau}}{2} \right) \right] \sin \left(\frac{q-ap}{2} \right)_{\tau} \\
& \cdot \left[2 \sum_{\sigma} \sin^2 \left(\frac{(q-ap)_{\sigma}}{2} \right) \right]^{-2} \\
& \cdot \left[\sum_{\sigma} \sin^2(q_{\sigma}) + 4r^2 \left(\sum_{\sigma} \sin^2 \left(\frac{q_{\sigma}}{2} \right) \right)^2 \right]^{-2} \Bigg\}. \quad (5.283)
\end{aligned}$$

Der Zähler des Integranden schreibt sich daher unter Auslassung von $\mathcal{O}(a)$ -Termen als

$$\bar{s}_{\rho}(\gamma_{\rho}c_{\rho} - ir s_{\rho})(-i\not{q} + 2r\Delta_1)\gamma_5(-i\not{q} + 2r\Delta_1)(\gamma_{\tau}c_{\tau} - ir s_{\tau})\bar{s}_{\tau}. \quad (5.284)$$

Durch Vertauschen der Gamma-Matrizen ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}
& \bar{s}_{\rho}\bar{s}_{\tau}(\gamma_{\rho}c_{\rho} - ir s_{\rho})(-i\not{q} + 2r\Delta_1)(i\not{q} + 2r\Delta_1)(-\gamma_{\tau}c_{\tau} - ir s_{\tau})\gamma_5 \\
& = -\bar{s}_{\rho}\bar{s}_{\tau} \left\{ \gamma_{\rho}\gamma_{\tau}c_{\rho}c_{\tau}\Delta_4 + ir s_{\tau}\gamma_{\rho}c_{\rho}\Delta_4 - ir s_{\rho}\gamma_{\tau}c_{\tau}\Delta_4 + r^2 s_{\tau}s_{\rho}\Delta_4 \right. \\
& \quad \left. + 4r^2\gamma_{\rho}\gamma_{\tau}c_{\rho}c_{\tau}\Delta_1^2 + 4ir^3 s_{\tau}\gamma_{\rho}c_{\rho}\Delta_1^2 - 4ir^3 s_{\rho}\gamma_{\tau}c_{\tau}\Delta_1^2 + 4r^4 s_{\rho}s_{\tau}\Delta_1^2 \right\} \gamma_5. \quad (5.285)
\end{aligned}$$

Nur der erste Term ist divergent, so daß man in den anderen Termen $\bar{s}_{\rho}$ durch s_{ρ} ersetzen kann. Unter Vernachlässigung der in q ungeraden endlichen Terme erhält man

$$-(\bar{s}_{\rho}\bar{s}_{\tau}\gamma_{\rho}\gamma_{\tau}c_{\rho}c_{\tau}\Delta_4 + r^2 s_{\tau}^2 s_{\rho}^2 \Delta_4 + 4r^2\gamma_{\rho}\gamma_{\tau}s_{\rho}c_{\rho}s_{\tau}c_{\tau}\Delta_1^2 + 4r^4 s_{\rho}^2 s_{\tau}^2 \Delta_1^2)\gamma_5. \quad (5.286)$$

Unter dem Integral kann man dies weiter zu

$$\begin{aligned}
& -(\bar{s}_{\rho}\bar{s}_{\tau}\gamma_{\rho}\gamma_{\tau}\bar{c}_{\rho}\bar{c}_{\tau}\Delta_4 + 2r^2\Delta_1^2\Delta_4 + 4r^4\Delta_1^4)\gamma_5 \\
& = -\left(\tilde{\Delta}_1\Delta_4 - \tilde{\Delta}_3\Delta_4 + 2r^2\Delta_1^2\Delta_4 + 4r^4\Delta_1^4\right)\gamma_5 \quad (5.287)
\end{aligned}$$

umformen. In den konvergenten Anteilen kann nun die Tilde entfernt werden, da es sich dabei nur um $\mathcal{O}(a)$ -Effekte handelt. Mit dem Nenner $\frac{1}{4\tilde{\Delta}_1^2\Delta_2^2}$ erhält man insgesamt denselben Ausdruck wie bei der skalaren Dichte

$$\bar{\Lambda}_{\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = -g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\Delta_4}{4\tilde{\Delta}_1\Delta_2^2} + \frac{-\Delta_3\Delta_4 + 2r^2\Delta_1^2\Delta_4 + 4r^4\Delta_1^4}{4\Delta_1^2\Delta_2^2} \right\} \gamma_5. \quad (5.288)$$

Dies ist das Ergebnis aus (5.256), und es folgt

$$\bar{\Lambda}_{\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ \ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0001} - \frac{5}{2} + 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right\} \gamma_5 + \mathcal{O}(a) \quad (5.289)$$

sowie das Endergebnis

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{LAN}(p) &= \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) \\
 &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -3 \ln(a^2 p^2) - 3\gamma_E + 3F_{0001} + \frac{15}{2} + 4\pi^2 \left(I_P^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right) \right\} \gamma_5 \\
 &\quad + \mathcal{O}(a). \tag{5.290}
 \end{aligned}$$

5.3.7 Axialer Vektorstrom

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten $\tilde{\Lambda}_\Gamma(p)$ für $\Gamma = \mathbb{1}$ und $\Gamma = \gamma_5$ berechnet worden ist, wird nun der Fall $\Gamma = \gamma_\mu \gamma_5$ betrachtet. In 1-Loop-Ordnung lautet das zu betrachtende Diagramm

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}(p) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{dk}{(2\pi^4)} V_\sigma^{dcb}[\lambda, A_\sigma, \bar{\lambda}](p-k, k, -p) S_F(p-k) \gamma_\mu \gamma_5 \\
 &\quad \cdot S_F(p-k) V_\rho^{acd}[\lambda, A_\rho, \bar{\lambda}](p, -k, k-p) D_{\rho\sigma}(k). \tag{5.291}
 \end{aligned}$$

Nach der üblichen Substitution und Einführung der Integrationsvariable $q_\mu := ap_\mu - k_\mu$ betrachten wir auch hier nur den masselosen Fall.

5.3.7.1 Feynman-Eichung ($\alpha = 1$)

Algebraischer Ausdruck

In Feynman-Eichung erhält man für den 1-Loop-Beitrag den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}(p) &= -g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \left[\gamma_\rho \cos\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) - ir \sin\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) \right] \right. \\
 &\quad \cdot \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sum_\lambda \sin^2\left(\frac{q_\lambda}{2}\right) \right] \gamma_\mu \gamma_5 \\
 &\quad \cdot \left[-i \sum_\lambda \gamma_\lambda \sin q_\lambda + 2r \sum_\lambda \sin^2\left(\frac{q_\lambda}{2}\right) \right] \\
 &\quad \cdot \left[\gamma_\rho \cos\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) - ir \sin\left(\frac{(q+ap)_\rho}{2}\right) \right] \\
 &\quad \cdot \left[4 \sum_\sigma \sin^2\left(\frac{(q-ap)_\sigma}{2}\right) \right]^{-1} \\
 &\quad \cdot \left. \left[\sum_\tau \sin^2(q_\tau) + 4r^2 \left(\sum_\tau \sin^2\left(\frac{q_\tau}{2}\right) \right)^2 \right]^{-2} \right\}. \tag{5.292}
 \end{aligned}$$

Wie in den bisher betrachteten Größen ist auch dieses Integral im Ultraviolett logarithmisch divergent. Im Zähler setzen wir wie gehabt $ap = 0$, denn wir wollen $\mathcal{O}(a)$ -Effekte unberücksichtigt lassen. Mit den zuvor eingeführten Abkürzungen sieht der Zähler dann wie folgt aus:

$$-(\gamma_\rho c_\rho - ir s_\rho)(-i\not{q} + 2r\Delta_1)\gamma_\mu \gamma_5(-i\not{q} + 2r\Delta_1)(\gamma_\rho c_\rho - ir s_\rho). \tag{5.293}$$

Vereinfachung des Zählers

Nach Ausmultiplikation zeigt sich durch naives Zählen der Potenzen, daß nur der Term $\gamma_\rho c_\rho \not\!\!d\gamma_\mu \gamma_5 \not\!\!d\gamma_\rho c_\rho$ einen divergenten Beitrag liefert. Die übrigen Terme tragen somit im Limes $a \rightarrow 0$ nur dann bei, falls sie gerade in q sind. Man verbleibt noch mit

$$\begin{aligned} & c_\rho^2 \gamma_\rho \not\!\!d\gamma_\mu \gamma_5 \not\!\!d\gamma_\rho + 2r^2 \Delta_1 c_\rho s_\rho (\gamma_\mu \gamma_5 \not\!\!d\gamma_\rho + \not\!\!d\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\rho + \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_5 \not\!\!d + \gamma_\rho \not\!\!d\gamma_\mu \gamma_5) \\ & - r^2 s_\rho^2 \not\!\!d\gamma_\mu \gamma_5 \not\!\!d - 4r^2 \Delta_1^2 c_\rho^2 \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\rho + 4r^4 \Delta_1^2 s_\rho^2 \gamma_\mu \gamma_5. \end{aligned} \quad (5.294)$$

Mit den bekannten Rechenregeln für Dirac-Matrizen ergibt sich

$$\begin{aligned} & \gamma_\mu \gamma_5 \not\!\!d\gamma_\rho + \not\!\!d\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\rho + \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_5 \not\!\!d + \gamma_\rho \not\!\!d\gamma_\mu \gamma_5 \\ & = 4(q_\rho \gamma_\mu \gamma_5 - \delta_{\mu\rho} \not\!\!d\gamma_5), \end{aligned} \quad (5.295)$$

und die verbleibenden Terme im Zähler lassen sich als

$$\begin{aligned} & c_\rho^2 \gamma_\rho \not\!\!d\gamma_\mu \gamma_5 \not\!\!d\gamma_\rho + 8r^2 \Delta_1 c_\rho s_\rho (q_\rho \gamma_\mu \gamma_5 - \delta_{\mu\rho} \not\!\!d\gamma_5) + r^2 s_\rho^2 (2q_\mu \not\!\!d - \gamma_\mu q^2) \gamma_5 \\ & + 4r^2 \Delta_1^2 c_\rho^2 (2\delta_{\mu\rho} \gamma_\rho - \gamma_\mu) \gamma_5 + 4r^4 \Delta_1^2 s_\rho^2 \gamma_\mu \gamma_5 \end{aligned} \quad (5.296)$$

schreiben. Als nächstes wird die Summe über ρ explizit ausgewertet. Dabei sind wieder die üblichen Beziehungen zwischen den Dirac-Matrizen sowie die Additionstheoreme trigonometrischer Funktionen auszunutzen. Ferner können wir s_μ^2 unter dem Integral aus Symmetriegründen durch $\frac{1}{4} \sum_\mu s_\mu^2$ ersetzen (ohne Summation über μ). Ebenso kann im Integranden $q_\mu \not\!\!d = q_\mu q_\nu \gamma_\nu$ zu $\frac{1}{4} \gamma_\mu q^2$ vereinfacht werden, da der Term für $\nu \neq \mu$ ungerade in einzelnen Komponenten von q ist und damit unter dem Integral verschwindet. Man verbleibt mit folgenden Termen im Zähler:

$$c_\rho^2 \gamma_\rho \not\!\!d\gamma_\mu \gamma_5 \not\!\!d\gamma_\rho + \frac{5}{2} r^2 \Delta_1 \Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 + 2r^2 \Delta_1^3 \gamma_\mu \gamma_5 - 8r^2 \Delta_1^2 \gamma_\mu \gamma_5 + 4r^4 \Delta_1^3 \gamma_\mu \gamma_5. \quad (5.297)$$

Nur der erste Term führt zu Divergenzen und kann mit Hilfe der Vertauschungsrelationen der Dirac-Matrizen und unter Benutzung unserer abkürzenden Notation unter dem Integral durch

$$2\Delta_4 \gamma_\mu \gamma_5 - 4q_\mu \not\!\!d\gamma_5 - \Delta_5 \gamma_\mu \gamma_5 \quad (5.298)$$

ersetzt werden. Die Divergenz steckt nun in den beiden ersten Summanden, und wir können als Zwischenresultat

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}(p) &= g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{2\Delta_4 \gamma_\mu - 4q_\mu \not\!\!d}{\left[4 \sum_\rho \sin^2 \left(\frac{(q-ap)_\rho}{2}\right)\right] \Delta_2^2} \gamma_5 \\ &+ g_0^2 C_A \gamma_\mu \gamma_5 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-\Delta_5 + \frac{5}{2} r^2 \Delta_1 \Delta_4 + 2r^2 \Delta_1^3 - 8r^2 \Delta_1^2 + 4r^4 \Delta_1^3}{4\Delta_1 \Delta_2^2} \end{aligned} \quad (5.299)$$

angeben.

Behandlung des divergenten Anteils

Das erste Integral ist im UV-Limes $a \rightarrow 0$ logarithmisch divergent, das zweite bleibt endlich. Mit der schon verwendeten Identität (G.16)

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{16\Delta_1^2} + \frac{(\Delta_3 - r^2\Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2\Delta_1^2)}{\Delta_1^2\Delta_2^2} \quad (5.300)$$

ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu\gamma_5}(p) &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2\Delta_4\gamma_\mu - 4q_\mu \not{q}}{\left[4\sum_\rho \sin^2\left(\frac{(q-ap)_\rho}{2}\right)\right] \left[4\sum_\nu \sin^2\left(\frac{q_\nu}{2}\right)\right]^2} \gamma_5 \\ &+ \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \gamma_\mu \gamma_5 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[\frac{\Delta_4}{4\Delta_1^3\Delta_2^2} (\Delta_3 - r^2\Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2\Delta_1^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\Delta_1\Delta_2^2} (-\Delta_5 + \frac{5}{2}r^2\Delta_1\Delta_4 + 2r^2\Delta_1^3 - 8r^2\Delta_1^2 + 4r^4\Delta_1^3) \right] + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (5.301)$$

Dies schreiben wir mit der Abkürzung I_A als

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu\gamma_5}(p) &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2\Delta_4\gamma_\mu - 4q_\mu \not{q}}{\left[4\sum_\rho \sin^2\left(\frac{(q-ap)_\rho}{2}\right)\right] \left[4\sum_\nu \sin^2\left(\frac{q_\nu}{2}\right)\right]^2} \gamma_5 \\ &+ \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \gamma_\mu \gamma_5 4\pi^2 I_A + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (5.302)$$

Das divergente Integral ist dann durch

$$\begin{aligned} &16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2\Delta_4\gamma_\mu - 4q_\mu \not{q}}{\left[4\sum_\rho \sin^2\left(\frac{(q-ap)_\rho}{2}\right)\right] \left[4\sum_\nu \sin^2\left(\frac{q_\nu}{2}\right)\right]^2} \gamma_5 \\ &= 16\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{2\gamma_\mu \delta_{\nu\rho} q_\nu q_\rho - 4q_\mu q_\rho \gamma_\rho}{\left[4\sum_\rho \sin^2\left(\frac{(q-ap)_\rho}{2}\right)\right] \left[4\sum_\nu \sin^2\left(\frac{q_\nu}{2}\right)\right]^2} \gamma_5 \\ &\equiv 16\pi^2 (8\gamma_\mu \delta_{\nu\rho} I_{\nu\rho} - 16\gamma_\rho I_{\mu\rho}) \gamma_5. \end{aligned} \quad (5.303)$$

gegeben. Die Abkürzung $I_{\mu\nu}$ wurde bereits bei der Betrachtung der skalaren Dichte eingeführt. Im Limes $ap \rightarrow 0$ gilt

$$I_{\mu\nu} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{16} \delta_{\mu\nu} (2 - \ln(a^2 p^2)) - \gamma_E + F_{0001} \right] + \frac{p_\mu p_\nu}{8p^2} + \mathcal{O}(a). \quad (5.304)$$

Mit $L_1(a^2 p^2) \equiv \ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0001}$ ergibt sich für das zu untersuchende divergente Integral also

$$\begin{aligned} &16\pi^2 (8\gamma_\mu \delta_{\nu\rho} I_{\nu\rho} - 16\gamma_\rho I_{\mu\rho}) \gamma_5 \\ &= 8\gamma_\mu \gamma_5 \left[\frac{1}{4} (2 - L_1(a^2 p^2)) + \frac{1}{8} \right] - 16\gamma_\mu \gamma_5 \frac{1}{16} (2 - L_1(a^2 p^2)) - \frac{16}{8} \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} \gamma_5 + \mathcal{O}(a) \\ &= \gamma_\mu \gamma_5 [(2 - L_1(a^2 p^2)) + 1] - 2 \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} \gamma_5 + \mathcal{O}(a) \\ &= \gamma_\mu \gamma_5 (-\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + 3) - 2 \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} \gamma_5 + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (5.305)$$

Endergebnis

Damit lautet das Endergebnis auf dem Gitter

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[\gamma_\mu \gamma_5 (-\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + 3) - 2 \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} \gamma_5 \right. \\ &\quad \left. + 4\pi^2 \gamma_\mu \gamma_5 I_A \right] + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (5.306)$$

Der Wert des verbleibenden konvergenten Integrals wurde für $r = 1$ numerisch zu $I_A^{FEY} = 0.005323$ bestimmt.

5.3.7.2 Landau-Eichung ($\alpha = 0$)Algebraischer Ausdruck

Der additive Term im Fall des axialen Stroms lautet

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) &= g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{s}_\rho (\gamma_\rho \check{c}_\rho - i r \check{s}_\rho) (-i \not{q} + 2r \Delta_1) \gamma_\mu \gamma_5 (-i \not{q} + 2r \Delta_1) (\gamma_\tau \check{c}_\tau - i r \check{s}_\tau) \bar{s}_\tau}{4 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2} \\ &= g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{s}_\rho (\gamma_\rho \check{c}_\rho - i r \check{s}_\rho) (-i \not{q} + 2r \Delta_1) \gamma_\mu (i \not{q} + 2r \Delta_1) (-\gamma_\tau \check{c}_\tau - i r \check{s}_\tau) \bar{s}_\tau}{4 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2} \gamma_5. \end{aligned} \quad (5.307)$$

Vereinfachung

Nach Ausmultiplikation des Zählers identifiziert man genau einen Term, der im Limes $ap \rightarrow 0$ divergiert. In den übrigen Termen setzen wir wie gewohnt $ap = 0$ und schreiben endliche Terme, die ungerade in q sind, nicht mehr mit. Man verbleibt dann mit

$$\begin{aligned} & -\bar{s}_\rho \bar{s}_\tau \{ \check{c}_\rho \check{c}_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu \not{q} \gamma_\tau + 2r^2 \Delta_1 c_\rho s_\tau \gamma_\rho \not{q} \gamma_\mu - 2r^2 \Delta_1 c_\rho s_\tau \gamma_\rho \gamma_\mu \not{q} + 4r^2 \Delta_1^2 c_\rho c_\tau \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\tau \\ & + r^2 s_\rho s_\tau \not{q} \gamma_\mu \not{q} - 2r^2 \Delta_1 s_\rho c_\tau \not{q} \gamma_\mu \gamma_\tau + 2r^2 \Delta_1 s_\rho c_\tau \gamma_\mu \not{q} \gamma_\tau + 4r^4 \Delta_1^2 s_\rho s_\tau \gamma_\mu \} \gamma_5. \end{aligned} \quad (5.308)$$

Im ersten (divergenten) Term schreiben wir $\tilde{c}$ anstellen von $\check{c}$ und können den Zähler unter dem Integral daher durch

$$- \left(\frac{1}{4} \tilde{\not{q}} \not{q} \gamma_\mu \not{q} \tilde{\not{q}} + 2r^2 \Delta_1^2 \Delta_4 \gamma_\mu + 4r^4 \Delta_1^4 \gamma_\mu \right) \gamma_5 \quad (5.309)$$

ersetzen.

Vereinfachung des divergenten Anteils

Aus dem divergenten Beitrag

$$-g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\not{q}} \not{q} \gamma_\mu \not{q} \tilde{\not{q}}}{16 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2} \gamma_5 \quad (5.310)$$

können wir mit Hilfe von (G.16)

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{16 \Delta_1^2} + \frac{(\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} \quad (5.311)$$

einen weiteren endlichen Term abspalten. Auch hier setzen wir $ap = 0$ und erhalten

$$-g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta_4^2 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2) (2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{16\Delta_1^4 \Delta_2^2} \gamma_\mu \gamma_5. \quad (5.312)$$

Die Divergenz ist somit in

$$-g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{q} \not{q} \gamma_\mu \not{q} \tilde{q}}{256 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_1^2} \gamma_5 \quad (5.313)$$

enthalten, und wir benutzen als nächstes (keine Summation über ρ)

$$\begin{aligned} \tilde{q}_\rho &= q_\rho - ap_\rho(1 - 2s_\rho^2) + \mathcal{O}(a^2) \\ q_\rho &= \tilde{q}_\rho + ap_\rho(1 - 2s_\rho^2) + \mathcal{O}(a^2), \end{aligned} \quad (5.314)$$

um zunächst das erste $\not{q}$ und danach das zweite $\not{q}$ zu entwickeln. Man beachte, daß es nicht möglich ist, beide $\tilde{q}$'s nach a zu entwickeln, da ansonsten aufgrund des $\tilde{\Delta}_1^2$ im Nenner ein Pol vierter Ordnung bei $q = ap$ entsteht, über den nicht ohne Divergenz integriert werden kann. Zunächst ersetzen wir $\tilde{q} \not{q} \gamma_\mu \not{q} \tilde{q}$ also durch

$$\tilde{\Delta}_4 \gamma_\mu \not{q} \tilde{q} + a \not{p} p_\rho \gamma_\rho (1 - 2s_\rho^2) \gamma_\mu \not{q} \tilde{q} \quad (5.315)$$

und dann durch

$$\tilde{\Delta}_4 \gamma_\mu \Delta_4 - a \tilde{\Delta}_4 \gamma_\mu \not{p} p_\rho \gamma_\rho (1 - 2s_\rho^2) + a \not{p} p_\rho \gamma_\rho (1 - 2s_\rho^2) \gamma_\mu \not{q} \tilde{q}. \quad (5.316)$$

Die Terme, die s_ρ^2 enthalten, sind vom Typ a -(endliches Integral) und können vernachlässigt werden. Mit $\tilde{\Delta}_4 = 4\tilde{\Delta}_1 - 4\Delta_3$ ergibt sich dann

$$16\tilde{\Delta}_1 \Delta_1 \gamma_\mu - 32\Delta_1 \Delta_3 \gamma_\mu + 16\Delta_3^2 \gamma_\mu - a \tilde{\Delta}_4 \gamma_\mu \not{p} + a \not{p} \gamma_\mu \not{q} \tilde{q}. \quad (5.317)$$

Insgesamt erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) &= g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{-2r^2 \Delta_1^2 \Delta_4}{4\Delta_1^2 \Delta_2^2} - \frac{4r^4 \Delta_1^4}{4\Delta_1^2 \Delta_2^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta_4^2 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2) (2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2)}{16\Delta_1^4 \Delta_2^2} + \frac{\Delta_3}{8\Delta_1^3} - \frac{\Delta_3^2}{16\Delta_1^4} \right\} \gamma_\mu \gamma_5 \\ &\quad - g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{16\tilde{\Delta}_1 \Delta_1} \gamma_\mu \gamma_5 \\ &\quad + g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\tilde{\Delta}_4 \gamma_\mu \not{p}}{256 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_1^2} - \frac{\not{p} \gamma_\mu \not{q} \tilde{q}}{256 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_1^2} \right\} \gamma_5 + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (5.318)$$

Vereinfachung der endlichen Anteile

Wir werden jetzt zeigen, daß die Integrale der ersten beiden Zeilen zusammen Null ergeben und benutzen dazu

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \Delta_4 + 4r^2 \Delta_1^2 \\ \Delta_4 &= 4\Delta_1 - 4\Delta_3. \end{aligned} \quad (5.319)$$

Man erkennt dann

$$\begin{aligned}
& -8r^2 \Delta_4 \Delta_1^4 - 16r^4 \Delta_1^6 - \Delta_4^2 (\Delta_3 - r^2 \Delta_1^2) (2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2 \Delta_1^2) \\
& + 2\Delta_3 \Delta_1 (\Delta_4 + 4r^2 \Delta_1^2)^2 - \Delta_3^2 (\Delta_4 + 4r^2 \Delta_1^2)^2 \\
& = -8r^2 \Delta_1^2 \Delta_3^2 \Delta_4 + 32r^2 \Delta_1^3 \Delta_3^2 - 32r^2 \Delta_1^2 \Delta_3^3 \\
& = -8r^2 \Delta_1^2 \Delta_3^2 (\Delta_4 + 4(\Delta_3 - \Delta_1)) \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{5.320}$$

was auch numerisch überprüft wurde. Damit verbleiben wir mit

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{\gamma\mu\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) &= -g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{16\tilde{\Delta}_1 \Delta_1} \gamma_\mu \gamma_5 \\
&+ g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\tilde{\Delta}_1 \gamma_\mu \not{q} \not{p}}{64\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_1^2} - \frac{\tilde{\Delta}_3 \gamma_\mu \not{q} \not{p}}{64\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_1^2} - \frac{\not{q} \not{p} \gamma_\mu \not{q} \not{p}}{256\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_1^2} \right\} \gamma_5 + \mathcal{O}(a).
\end{aligned} \tag{5.321}$$

Der Term in $\tilde{\Delta}_3$ ist endlich und ergibt aufgrund des Vorfaktors a keinen Beitrag. Daher können wir

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_{\gamma\mu\gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) &= -g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{16\tilde{\Delta}_1 \Delta_1} \gamma_\mu \gamma_5 \\
&+ g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\gamma_\mu \not{q} \not{p}}{64\tilde{\Delta}_1 \Delta_1^2} - \frac{\not{q} \not{p} \gamma_\mu \not{q} \not{p}}{256\tilde{\Delta}_1^2 \Delta_1^2} \right\} \gamma_5 + \mathcal{O}(a)
\end{aligned} \tag{5.322}$$

schreiben.

Berechnung der UV-endlichen Integrale im Kontinuumslimites

Die beiden letzten Integrale bleiben im Ultraviolett-Limes $a \rightarrow 0$ endlich und können daher mit Kontinuumsmethoden ausgewertet werden, man vergleiche dazu auch [KNS]. Mit

$$\begin{aligned}
a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin q_\rho}{64\tilde{\Delta}_1 \Delta_1^2} &= a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin q_\rho}{64 \sum_\tau \sin^2 \left(\frac{q-a\rho}{2} \right)_\tau \left(\sum_\sigma \sin^2 \left(\frac{q}{2} \right)_\sigma \right)^2} \\
&= a^5 \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\sin(aq_\rho)}{\sum_\tau \left(2 \sin \left(a \frac{q-p}{2} \right)_\tau \right)^2 \left(\sum_\sigma \left(2 \sin \left(a \frac{q}{2} \right)_\sigma \right)^2 \right)^2} \\
&= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{a} \sin(aq_\rho)}{\sum_\tau \left(\frac{2}{a} \sin \left(a \frac{q-p}{2} \right)_\tau \right)^2 \left(\sum_\sigma \left(\frac{2}{a} \sin \left(a \frac{q}{2} \right)_\sigma \right)^2 \right)^2} \\
&\xrightarrow{a \rightarrow 0} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_\rho}{(q-p)^2 (q^2)^2}
\end{aligned} \tag{5.323}$$

erhalten wir

$$g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\mu \not{q} \not{p}}{64\tilde{\Delta}_1 \Delta_1^2} \gamma_5 \xrightarrow{a \rightarrow 0} g_0^2 C_A \gamma_\mu \gamma_\rho \not{p} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_\rho}{(q-p)^2 (q^2)^2} \gamma_5. \tag{5.324}$$

Nach Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{a^2 b} = 2 \int_0^1 dx \frac{1-x}{[(a-b)(1-x)+b]^3} \tag{5.325}$$

ergibt sich der gleichwertige Ausdruck

$$g_0^2 C_A \gamma_\mu p^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 2 \int_0^1 dx x(1-x) \frac{1}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^3} \gamma^5. \quad (5.326)$$

Unter Benutzung von (G.20) erhalten wir schließlich

$$g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{\Delta}_1 \gamma_\mu \not{q}}{64 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_1^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{(4\pi)^2} g_0^2 C_A \gamma_\mu \gamma^5. \quad (5.327)$$

Das zweiten UV-konvergente Integral kann in derselben Weise behandelt werden:

$$-g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \gamma_\mu \not{q}}{256 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} -g_0^2 C_A \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q-p)_\rho p_\tau q_\nu (q-p)_\sigma}{((q-p)^2)^2 (q^2)^2} \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma. \quad (5.328)$$

Die Feynman-Parametrisierung wird mittels

$$\frac{1}{a^2 b^2} = 6 \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[(a-b)x+b]^4} \quad (5.329)$$

vorgenommen und ergibt nach Substitution $q \rightarrow q + px$

$$-g_0^2 C_A \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 6 \int_0^1 dx x(1-x) \frac{(q+p(x-1))_\rho p_\tau (q+px)_\nu (q+p(x-1))_\sigma}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^4} \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma. \quad (5.330)$$

Nach Ausmultiplikation des Zählers brauchen nur die Terme berücksichtigt zu werden, die gerade in q sind, und man verbleibt mit

$$\begin{aligned} & -g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \gamma_\mu \not{q}}{256 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2} \\ & \xrightarrow{a \rightarrow 0} -g_0^2 C_A \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} 6 \int_0^1 dx x(1-x) \left\{ \right. \\ & \quad (x-1) p_\tau p_\sigma \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_\rho q_\nu}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^4} \\ & \quad + (x-1) p_\tau p_\rho \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_\nu q_\sigma}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^4} \\ & \quad + x p_\tau p_\nu \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{q_\rho q_\sigma}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^4} \\ & \quad \left. + (x-1)^2 x p_\tau p_\nu p_\rho p_\sigma \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q^2 + p^2 x(1-x)]^4} \right\} \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma. \end{aligned} \quad (5.331)$$

Ausführen der q -Integrationen mittels (G.21) und (G.20) ergibt dann nach Vereinfachung der Gamma-Struktur und verbleibender x -Integration das Resultat

$$-g_0^2 C_A a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{\not{q} \gamma_\mu \not{q}}{256 \tilde{\Delta}_1^2 \Delta_2^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} g_0^2 C_A \frac{1}{(4\pi)^2} 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2}. \quad (5.332)$$

Endergebnis

Insgesamt haben wir also

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = g_0^2 C_A \left\{ \frac{1}{16\pi^2} \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{1}{16\pi^2} 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2} \gamma_5 \right\} - g_0^2 C_A \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{16\tilde{\Delta}_1 \Delta_1} \gamma_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(a), \quad (5.333)$$

und das verbleibende divergente Integral kann in [EM] nachgesehen werden. Als Endergebnis können wir dann

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ (\ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0000} - 1) \gamma_\mu \gamma_5 + 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2} \gamma_5 \right\} + \mathcal{O}(a) \quad (5.334)$$

notieren.

Daraus ergibt sich schließlich

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{LAN}(p) = \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p) + \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{(1-\alpha)}(p) \quad (5.335)$$

$$= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[F_{0001} - F_{0000} + 2 + 4\pi^2 I_A \right] \gamma_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(a), \quad (5.336)$$

wobei wie oben bereits angegeben $I_A = 0.005323$ (für $r = 1$).

5.4 Renormierung

Zu Beginn dieses Abschnittes sei auf folgendes hingewiesen: Alle weiteren Angaben beziehen sich auf 1-Loop-Ordnung. Sowohl bei den nackten Größen als auch bei den Renormierungskonstanten verzichten wir darauf, bei jedem einzelnen Term auf die Existenz höherer Beiträge hinzuweisen, d.h. ein prinzipiell erforderlicher Summand $\mathcal{O}(\alpha_S^2)$ wird stets ignoriert. Außerdem werden beim Invertieren von 1-Loop-Größen Identitäten formuliert, die in höheren Ordnungen i.a. nicht gelten, beispielsweise wird das Inverse von $1 + \alpha_S \cdot c$ für eine beliebige Konstante c mit $1 - \alpha_S \cdot c$ angegeben.

5.4.1 Renormierung im $\overline{\text{MS}}$ -Schema des Kontinuums

Wir nehmen nun die Renormierung der Kontinuumsgrößen im $\overline{\text{MS}}$ -Schema vor.

5.4.1.1 Gluino-Propagator

Der nackte Propagator in Feynman-Eichung ist durch (5.55) gegeben:

$$\begin{aligned} S^{-1, FEY}(p) = & -i\not{p} \left\{ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - 1 \right. \right. \\ & \left. \left. - 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right\} \\ & + m \left\{ 1 + 4 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \frac{1}{2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.337)$$

In Landau-Eichung lautet der entsprechende Ausdruck (siehe (5.74))

$$\begin{aligned}
 S_F^{-1,LAN}(p) &= -i\not{p} \\
 &+ m \left\{ 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[3 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) - 2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 3 \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.338}$$

Daraus ergibt sich die Renormierungskonstante der Wellenfunktion $Z_\lambda^{\overline{MS}}$ zu

$$Z_\lambda^{\overline{MS},FEY} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \tag{5.339}$$

$$Z_\lambda^{\overline{MS},LAN} = 1. \tag{5.340}$$

Die Renormierungskonstante $Z_m^{\overline{MS}}$ liest man dann als

$$Z_m^{\overline{MS},FEY} = 1 + 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \tag{5.341}$$

$$Z_m^{\overline{MS},LAN} = 1 + 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \tag{5.342}$$

ab. Die renormierte Selbstenergie kann damit als

$$\Sigma^{\overline{MS},FEY/LAN}(p) = -i\not{p} \Sigma_1^{\overline{MS},FEY/LAN}(p) + m^{\overline{MS}} \Sigma_2^{\overline{MS},FEY/LAN}(p) \tag{5.343}$$

geschrieben werden, wobei die einzelnen Beiträge durch

$$\Sigma_1^{\overline{MS},FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[1 + 2 \int_0^1 dx (1-x) \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \tag{5.344}$$

$$\Sigma_2^{\overline{MS},FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[2 + 4 \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \tag{5.345}$$

$$\Sigma_1^{\overline{MS},LAN}(p) = 0 \tag{5.346}$$

$$\Sigma_2^{\overline{MS},LAN}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left[2 + 3 \int_0^1 dx \ln \left(\frac{p^2 x(1-x) + m^2 x}{\mu^2} \right) \right] \tag{5.347}$$

gegeben sind. Da wir später im $\overline{MS}$ /LAT-Schema auf die renormierten masselosen Größen zurückgreifen werden, seien diese an dieser Stelle noch einmal gesondert aufgeführt. Für $m = 0$ erhält man nach Ausführen der x -Integrationen

$$\Sigma_1^{\overline{MS},FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\ln \frac{p^2}{\mu^2} - 1 \right) \tag{5.348}$$

$$\Sigma_2^{\overline{MS},FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(4 \ln \frac{p^2}{\mu^2} - 6 \right) \tag{5.349}$$

$$\Sigma_1^{\overline{MS},LAN}(p) = 0 \tag{5.350}$$

$$\Sigma_2^{\overline{MS},LAN}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} - 4 \right). \tag{5.351}$$

5.4.1.2 Skalare und Pseudoskalare Dichte

Im Fall der skalaren Dichte haben wir

$$\tilde{\Lambda}_{\parallel}^{FEY}(p, -p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A 4 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \frac{3}{2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (5.352)$$

berechnet (siehe (5.91) bzw. (5.92)) und konnten daraus

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{FEY}(p, -p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A 4 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \frac{3}{2} \right) \gamma_5 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (5.353)$$

folgern. In Landau-Eichung gilt gemäß (5.98) und (5.100)

$$\tilde{\Lambda}_{\parallel}^{LAN}(p, -p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(3 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) - 3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} + 4 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (5.354)$$

bzw.

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{LAN}(p, -p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(3 \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) - 3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} + 4 \right) \gamma_5 + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (5.355)$$

Im $\overline{\text{MS}}$ -Schema schließt man daher zunächst auf

$$Z_{\lambda}^{\overline{\text{MS}}, FEY} Z_S^{\overline{\text{MS}}, FEY} = 1 - 4 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \quad (5.356)$$

$$Z_{\lambda}^{\overline{\text{MS}}, LAN} Z_S^{\overline{\text{MS}}, LAN} = 1 - 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \quad (5.357)$$

und erhält mit den oben bestimmten Renormierungskonstanten der Wellenfunktion

$$Z_S^{\overline{\text{MS}}, FEY} = 1 - 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \quad (5.358)$$

$$Z_S^{\overline{\text{MS}}, LAN} = 1 - 3 \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right). \quad (5.359)$$

Die Renormierungskonstanten der pseudoskalaren Dichte sind aufgrund des trivialen Zusammenhangs zwischen den nackten Größen identisch mit denen der skalaren Dichte, d.h. es gilt

$$Z_P^{\overline{\text{MS}}, FEY/LAN} = Z_S^{\overline{\text{MS}}, FEY/LAN}. \quad (5.360)$$

Aus diesen Resultaten bestimmt man die renormierte skalare Dichte zu

$$\Lambda_{\parallel}^{\overline{\text{MS}}, FEY}(p) = \mathbb{1} + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(6 - 4 \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \quad (5.361)$$

$$\Lambda_{\parallel}^{\overline{\text{MS}}, LAN}(p) = \mathbb{1} + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(4 - 3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \quad (5.362)$$

und erhält das Ergebnis des pseudoskalaren Falls durch

$$\Lambda_{\gamma_5}^{\overline{\text{MS}}, FEY/LAN}(p) = \Lambda_{\parallel}^{\overline{\text{MS}}, FEY/LAN}(p) \gamma_5. \quad (5.363)$$

5.4.1.3 Axialer Vektorstrom

Im Fall des axialen Vektorstroms $\Gamma = \gamma_\mu \gamma_5$ haben wir für $m = 0$ in (5.116)

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{FEY}(p, p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ \gamma_\mu \gamma_5 \left[\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E - \ln \left(\frac{p^2}{\mu^2} \right) + \ln 4\pi + 1 \right] - 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2} \gamma_5 \right\} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (5.364)$$

und in (5.159)

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{LAN}(p) = 0 + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (5.365)$$

gefunden.

Aus den Ergebnissen können wir die folgenden Zusammenhänge für die Renormierungskonstante des axialen Vektorstromes ablesen:

$$Z_\lambda^{\overline{MS}, FEY} Z_A^{\overline{MS}, FEY} = 1 - \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right) \quad (5.366)$$

$$Z_\lambda^{\overline{MS}, LAN} Z_A^{\overline{MS}, LAN} = 1. \quad (5.367)$$

Es folgt dann unmittelbar

$$Z_A^{\overline{MS}, FEY} = 1 \quad (5.368)$$

$$Z_A^{\overline{MS}, LAN} = 1. \quad (5.369)$$

Die renormierte amputierte Greensfunktion des axialen Vektorstroms erhält man dann im Fall $m = 0$ zu

$$\Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}^{\overline{MS}, FEY}(p) = \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(-\gamma_\mu \gamma_5 \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \gamma_\mu \gamma_5 - 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2} \gamma_5 \right) \quad (5.370)$$

$$\Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}^{\overline{MS}, LAN}(p) = \gamma_\mu \gamma_5. \quad (5.371)$$

5.4.2 Renormierung im $\overline{MS}$ /LAT-Schema

Als nächstes geben wir die Renormierungskonstanten im $\overline{MS}$ /LAT-Schema an. In diesem Schema wird die Renormierung der gitterregularisierten Größen – wie oben erläutert – durch Anpassung an die $\overline{MS}$ -renormierten Größen des Kontinuums vorgenommen [CLV], [LV].

5.4.2.1 Gluino-Propagator

Der nackte Fermion-Propagator auf dem Gitter ist vom Typ

$$S_F^{-1}(p) = i\not{p} (1 - \Sigma_1^{LAT}) + m_0 (1 - \Sigma_2^{LAT}), \quad (5.372)$$

wobei der Term $\frac{r}{a} \Sigma_0$ in der Konstanten m absorbiert wurde. In Feynman-Eichung haben wir dabei die folgenden Beiträge zur Selbstenergie des Fermions berechnet:

$$\Sigma^{LAT, FEY}(p) = i\not{p} \Sigma_1^{FEY} + m_0 \Sigma_2^{FEY} + \frac{r}{a} \Sigma_0^{FEY}. \quad (5.373)$$

Dabei sind (nach (5.226) und (5.227))

$$\Sigma_1^{LAT,FEY} = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [\ln(ap)^2 + \gamma_E - F_{0001} - 2 + 4\pi^2 I_{\Sigma_1}^{FEY}] + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0^2) \quad (5.374)$$

$$\Sigma_2^{LAT,FEY} = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [4\ln(ap)^2 + 4\gamma_E - 4F_{0001} - 10 - 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{FEY}] + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0), \quad (5.375)$$

wobei

$$I_{\Sigma_1}^{FEY} = 0.369470 \quad (5.376)$$

$$I_{\Sigma_2}^{FEY} = -0.173133 \quad (5.377)$$

$$I_{\Sigma_0} = -0.683119. \quad (5.378)$$

In Landau-Eichung haben wir

$$\Sigma_1^{LAT,LAN} = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-\frac{1}{2} + 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)} \right) \right] + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0^2) \quad (5.379)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \Sigma_2^{LAT,LAN} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[3\ln(a^2 p^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} - \frac{15}{2} - 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_2}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right) \right] \\ &\quad + \mathcal{O}(a) + \mathcal{O}(m_0) \end{aligned} \quad (5.380)$$

gesehen, vgl. (5.265), (5.266). Dabei ist

$$I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)} = -I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} = 0.064801. \quad (5.381)$$

Der im $\overline{\text{MS}}$ -Schema renormierte Propagator des Kontinuums ist durch

$$S_F^{-1, \overline{\text{MS}}} = -i\not{p} \left(1 - \Sigma_1^{\overline{\text{MS}}} \right) + m^{\overline{\text{MS}}} \left(1 - \Sigma_2^{\overline{\text{MS}}} \right) \quad (5.382)$$

gegeben, wobei

$$\Sigma_1^{\overline{\text{MS}}, FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(\ln \frac{p^2}{\mu^2} - 1 \right) \quad (5.383)$$

$$\Sigma_2^{\overline{\text{MS}}, FEY}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(4\ln \frac{p^2}{\mu^2} - 6 \right) \quad (5.384)$$

$$\Sigma_1^{\overline{\text{MS}}, LAN}(p) = 0 \quad (5.385)$$

$$\Sigma_2^{\overline{\text{MS}}, LAN}(p) = \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(3\ln \frac{p^2}{\mu^2} - 4 \right). \quad (5.386)$$

Für die Renormierungskonstante $Z_\lambda^{\overline{\text{MS}}/LAT}$ im $\overline{\text{MS}}/LAT$ -Schema erhält man daher

$$\begin{aligned} Z_\lambda^{\overline{\text{MS}}/LAT, FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\ln(a\mu)^2 + \gamma_E - F_{0001} - 1 + 4\pi^2 I_{\Sigma_1}^{FEY} \right) \\ &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\ln(a\mu)^2 + 12.852 \right) \end{aligned} \quad (5.387)$$

und

$$\begin{aligned} Z_{\lambda}^{\overline{MS}/LAT,LAN} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-\frac{1}{2} + 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)} \right) \right) \\ &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A 16.644. \end{aligned} \quad (5.388)$$

Die Renormierungskonstante $Z_m^{\overline{MS}/LAT}$ ergibt sich in Feynman-Eichung wegen

$$\begin{aligned} Z_m^{\overline{MS}/LAT,FEY} Z_{\lambda}^{\overline{MS}/LAT,FEY,-1} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-4 \ln(a^2 \mu^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} \right. \\ &\quad \left. + 4 + 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{FEY} \right] \end{aligned} \quad (5.389)$$

zu

$$Z_m^{\overline{MS}/LAT,FEY} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-3 \ln(a\mu)^2 + 12.952 \right]. \quad (5.390)$$

In Landau-Eichung gilt

$$\begin{aligned} Z_m^{\overline{MS}/LAT,LAN} Z_{\lambda}^{\overline{MS}/LAT,LAN,-1} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-3 \ln(a^2 \mu^2) - 3\gamma_E + 3F_{0001} \right. \\ &\quad \left. + \frac{7}{2} + 4\pi^2 (I_{\Sigma_2}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}) \right] \end{aligned} \quad (5.391)$$

und daher

$$Z_m^{\overline{MS}/LAT,LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-3 \ln(a\mu)^2 + 12.952 \right]. \quad (5.392)$$

5.4.2.2 Skalare Dichte

Für die skalare Dichte haben wir auf dem Gitter die Ergebnisse

$$\tilde{\Lambda}_{\parallel}^{FEY}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-4 \ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 + 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{FEY} \right] + \mathcal{O}(a) \quad (5.393)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\parallel}^{LAN}(p) &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -3 \ln(a^2 p^2) - 3\gamma_E + 3F_{0001} + \frac{15}{2} \right. \\ &\quad \left. + 4\pi^2 \left(I_{\Sigma_2}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)} \right) \right\} + \mathcal{O}(a) \end{aligned} \quad (5.394)$$

gefunden (s. (5.271) und (5.273)). Die renormierte skalare Dichte des Kontinuums ist durch

$$\Lambda_{\parallel}^{\overline{MS},FEY}(p) = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(6 - 4 \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \quad (5.395)$$

$$\Lambda_{\parallel}^{\overline{MS},LAN}(p) = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(4 - 3 \ln \frac{p^2}{\mu^2} \right) \quad (5.396)$$

gegeben.

Daraus erhält man zunächst

$$\begin{aligned} Z_S^{\overline{MS}/LAT,FEY} Z_{\lambda}^{\overline{MS}/LAT,FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[4 \ln(a^2 \mu^2) + 4\gamma_E - 4F_{0001} \right. \\ &\quad \left. - 4 - 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{FEY} \right] \end{aligned} \quad (5.397)$$

bzw.

$$\begin{aligned} Z_S^{\overline{MS}/LAT,LAN} Z_\lambda^{\overline{MS}/LAT,LAN} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[3 \ln(a^2 \mu^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} \right. \\ &\quad \left. - \frac{7}{2} - 4\pi^2 (I_{\Sigma_2}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}) \right] \end{aligned} \quad (5.398)$$

und dann

$$Z_S^{\overline{MS}/LAT,FEY} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a\mu)^2 - 12.952) \quad (5.399)$$

sowie

$$Z_S^{\overline{MS}/LAT,LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a\mu)^2 - 12.952). \quad (5.400)$$

5.4.2.3 Pseudoskalare Dichte

Auf dem Gitter haben wir

$$\Lambda_{\gamma_5}^{FEY} = \gamma_5 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [-4 \ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 + 4\pi^2 I_P^{FEY}] \gamma_5 + \mathcal{O}(a) \quad (5.401)$$

berechnet (s. (5.281)), wobei $I_P^{FEY} = 0.071126$. Außerdem gilt (5.290):

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_5}^{LAN}(p) &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -3 \ln(a^2 p^2) - 3\gamma_E + 3F_{0001} + \frac{15}{2} \right. \\ &\quad \left. + 4\pi^2 (I_P^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}) \right\} + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (5.402)$$

Die renormierten Größen des Kontinuums entsprechen (bis auf ein γ_5) denen der skalaren Dichte, und es ergibt sich

$$\begin{aligned} Z_P^{\overline{MS}/LAT,FEY} Z_\lambda^{\overline{MS}/LAT,FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [4 \ln(a^2 \mu^2) + 4\gamma_E - 4F_{0001} \\ &\quad - 4 - 4\pi^2 I_P^{FEY}] \end{aligned} \quad (5.403)$$

bzw.

$$\begin{aligned} Z_P^{\overline{MS}/LAT,LAN} Z_\lambda^{\overline{MS}/LAT,LAN} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[3 \ln(a^2 \mu^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} \right. \\ &\quad \left. - \frac{7}{2} - 4\pi^2 (I_P^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}) \right], \end{aligned} \quad (5.404)$$

so daß wir die Renormierungskonstanten als

$$Z_P^{\overline{MS}/LAT,FEY} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a^2 \mu^2) - 22.595) \quad (5.405)$$

$$Z_P^{\overline{MS}/LAT,LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (3 \ln(a^2 \mu^2) - 22.595) \quad (5.406)$$

angeben können.

5.4.2.4 Axialer Vektorstrom

Hier hat sich in (5.306)

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}(p) = & \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[\gamma_\mu \gamma_5 (-\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + 3) - 2 \frac{\not{p} p_\mu}{p^2} \gamma_5 \right. \\ & \left. + 4\pi^2 \gamma_\mu \gamma_5 I_A \right] + \mathcal{O}(a) \end{aligned} \quad (5.407)$$

und in (5.335)

$$\tilde{\Lambda}_{\gamma_\mu \gamma_5}^{LAN}(p) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[F_{0001} - F_{0000} + 2 + 4\pi^2 I_A \right] \gamma_\mu \gamma_5 + \mathcal{O}(a) \quad (5.408)$$

ergeben, und es ist $I_A = 0.005323$. Im Kontinuum gilt

$$\Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}^{\overline{MS}, FEY}(p) = \gamma_\mu \gamma_5 + \frac{g^2}{16\pi^2} C_A \left(-\gamma_\mu \gamma_5 \ln \frac{p^2}{\mu^2} + \gamma_\mu \gamma_5 - 2 \frac{p_\mu \not{p}}{p^2} \gamma_5 \right) \quad (5.409)$$

$$\Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}^{\overline{MS}, LAN}(p) = \gamma_\mu \gamma_5, \quad (5.410)$$

so daß wir

$$Z_A^{\overline{MS}/LAT, FEY} Z_\lambda^{\overline{MS}/LAT, FEY} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [\ln(a^2 \mu^2) + \gamma_E - F_{0001} - 2 - 4\pi^2 I_A] \quad (5.411)$$

und

$$Z_A^{\overline{MS}/LAT, LAN} Z_\lambda^{\overline{MS}/LAT, LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [-F_{0001} + F_{0000} - 2 - 4\pi^2 I_A] \quad (5.412)$$

folgern können. Daraus liest man

$$Z_A^{LAT, \overline{MS}, FEY} = 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796) \quad (5.413)$$

und

$$Z_A^{LAT, \overline{MS}, LAN} = 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796) \quad (5.414)$$

ab.

5.4.3 Renormierung im RI-Schema

In diesem Abschnitt nehmen wir die Renormierung der gitterregularisierten Größen im RI-Schema vor. Dieses greift nicht auf die Kontinuumsresultate zurück. Man beachte dabei, daß sich die Spurbildung bei der Projektion der Größen sowohl auf die Spinorindizes wie auch auf die Farbfreiheitsgrade bezieht. Dabei möchte ich darauf hinweisen, daß sämtliche zu projizierenden Größen einen Vorfaktor δ_{ab} tragen, den wir bisher in der Regel nicht mitgeschrieben haben. Die Spurbildung über die Farbindizes ist dabei im Sinne von $\text{Tr}(\delta_{ab}) \equiv \sum_a \delta_{aa} = N_c^2 - 1$ zu verstehen.

5.4.3.1 Gluino-Propagator

Aus

$$\Sigma_1^{LAT,FEY}(p^2 = \mu^2) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \delta_{ab} (\ln(a\mu)^2 + \gamma_E - F_{0001} - 2 + 4\pi^2 I_{\Sigma_1}^{FEY}) \quad (5.415)$$

und

$$\frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_\rho \not{p} \frac{\partial \Sigma_1^{LAT,FEY}(p)}{\partial p_\rho} \right) \Big|_{p^2 = \mu^2} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \quad (5.416)$$

erhalten wir die Renormierungskonstante der Wellenfunktion gemäß (5.33) zu

$$Z_\lambda^{RI,FEY} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\ln(a\mu)^2 + \gamma_E - F_{0001} - \frac{3}{2} + 4\pi^2 I_{\Sigma_1}^{FEY} \right) \quad (5.417)$$

$$= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [\ln(a\mu)^2 + 12.352] . \quad (5.418)$$

In Landau-Eichung ergibt sich wegen

$$\Sigma_1^{LAT,LAN}(p^2 = \mu^2) = \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \delta_{ab} \left(-\frac{1}{2} + 4\pi^2 (I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)}) \right) \quad (5.419)$$

und

$$\frac{1}{16(N_c^2 - 1)} \text{Tr} \left(\gamma_\rho \not{p} \frac{\partial \Sigma_1^{LAT,LAN}(p)}{\partial p_\rho} \right) \Big|_{p^2 = \mu^2} = 0 \quad (5.420)$$

der Wert

$$Z_\lambda^{RI,LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-\frac{1}{2} + 4\pi^2 (I_{\Sigma_1}^{FEY} + I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)}) \right) \quad (5.421)$$

$$= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (16.644). \quad (5.422)$$

Für die Renormierung der Masse erhält man zunächst

$$Z_m^{RI,FEY} Z_\lambda^{RI,FEY,-1} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [-4 \ln(a^2 \mu^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 + 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{FEY}] \quad (5.423)$$

und

$$Z_m^{RI,LAN} Z_\lambda^{RI,LAN,-1} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-3 \ln(a^2 \mu^2) - 3\gamma_E + 3F_{0001} + \frac{15}{2} + 4\pi^2 (I_{\Sigma_2}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}) \right]. \quad (5.424)$$

Daher gilt

$$Z_m^{RI,FEY} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [-3 \ln(a\mu)^2 + 18.452] \quad (5.425)$$

bzw.

$$Z_m^{RI,LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [-3 \ln(a\mu)^2 + 16.952] . \quad (5.426)$$

5.4.3.2 Skalare Dichte

Für die skalare Dichte ergeben sich aus den o.g. nackten Resultaten auf dem Gitter die folgenden projizierten Größen:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\parallel}^{FEY}(p) &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [-4\ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 + 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{FEY}] + \mathcal{O}(a) \\ \Gamma_{\parallel}^{LAN}(p) &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -3\ln(a^2 p^2) - 3\gamma_E + 3F_{0001} + \frac{15}{2} \right. \\ &\quad \left. + 4\pi^2 (I_{\Sigma_2}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}) \right\} + \mathcal{O}(a).\end{aligned}\quad (5.427)$$

Daraus lesen wir

$$\begin{aligned}Z_S^{RI,FEY} Z_{\lambda}^{RI,FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [4\ln(a^2 \mu^2) + 4\gamma_E - 4F_{0001} \\ &\quad - 10 - 4\pi^2 I_{\Sigma_2}^{FEY}]\end{aligned}\quad (5.428)$$

und

$$\begin{aligned}Z_S^{RI,LAN} Z_{\lambda}^{RI,LAN} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[3\ln(a^2 \mu^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{2} - 4\pi^2 (I_{\Sigma_2}^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}) \right]\end{aligned}\quad (5.429)$$

ab, und es folgt

$$Z_S^{RI,FEY} = 1 + \frac{\alpha_2}{4\pi} C_A (3\ln(a^2 \mu^2) - 18.452) \quad (5.430)$$

bzw.

$$Z_S^{RI,LAN} = 1 + \frac{\alpha_2}{4\pi} C_A (3\ln(a^2 \mu^2) - 16.952). \quad (5.431)$$

5.4.3.3 Pseudoskalare Dichte

Auf dem gleichen Weg ergibt sich im Fall der pseudoskalaren Dichte aus den projizierten amputierten Greens-Funktionen

$$\begin{aligned}\Gamma_{\gamma_5}^{FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [-4\ln(a^2 p^2) - 4\gamma_E + 4F_{0001} + 10 + 4\pi^2 I_P^{FEY}] + \mathcal{O}(a) \\ \Gamma_{\gamma_5}^{LAN}(p) &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left\{ -3\ln(a^2 p^2) - 3\gamma_E + 3F_{0001} + \frac{15}{2} \right. \\ &\quad \left. + 4\pi^2 (I_P^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}) \right\} + \mathcal{O}(a)\end{aligned}\quad (5.432)$$

das Zwischenergebnis

$$\begin{aligned}Z_P^{RI,FEY} Z_{\lambda}^{RI,FEY} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [4\ln(a^2 \mu^2) + 4\gamma_E - 4F_{0001} \\ &\quad - 10 - 4\pi^2 I_P^{FEY}]\end{aligned}\quad (5.433)$$

bzw.

$$\begin{aligned}Z_P^{RI,LAN} Z_{\lambda}^{RI,LAN} &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[3\ln(a^2 \mu^2) + 3\gamma_E - 3F_{0001} \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{2} - 4\pi^2 (I_P^{FEY} + I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}) \right].\end{aligned}\quad (5.434)$$

Daher können wir

$$Z_P^{RI,FEY} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} (3 \ln(a^2 \mu^2) - 28.095) \quad (5.435)$$

$$Z_P^{RI,LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} (3 \ln(a^2 \mu^2) - 26.595) \quad (5.436)$$

notieren.

5.4.3.4 Axialer Vektorstrom

Im Falle des axialen Vektorstromes erhalten wir nach Projektion der o.g. nackten Größen

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma_\mu \gamma_5}(p) &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[-\ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0001} + \frac{5}{2} + 4\pi^2 I_A \right] + \mathcal{O}(a) \\ \Gamma_{\gamma_\mu \gamma_5}^{LAN}(p) &= 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[F_{0001} - F_{0000} + 2 + 4\pi^2 I_A \right] + \mathcal{O}(a), \end{aligned} \quad (5.437)$$

so daß wir

$$Z_A^{RI,FEY} Z_\lambda^{RI,FEY} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left[\ln(a^2 \mu^2) + \gamma_E - F_{0001} - \frac{5}{2} - 4\pi^2 I_A \right] \quad (5.438)$$

und

$$Z_A^{RI,LAN} Z_\lambda^{RI,LAN} = 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A [-F_{0001} + F_{0000} - 2 - 4\pi^2 I_A] \quad (5.439)$$

ablesen können. Es folgt dann mit den oben ermittelten Werten für Z_λ^{RI}

$$Z_A^{RI,FEY} = 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796) \quad (5.440)$$

und

$$Z_A^{RI,LAN} = 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796). \quad (5.441)$$

5.4.4 Zusammenfassung der Renormierungskonstanten

Wir haben die Renormierungskonstanten nun in allen drei Schemata sowohl in Feynman-Eichung ($\alpha = 1$) als auch in Landau-Eichung ($\alpha = 0$) bestimmt. Durch Interpolation lassen sich die Ergebnisse für beliebige Eichparameter α angeben. Man erhält:

Z_λ^{MS}	$1 - \alpha \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right)$
$Z_\lambda^{MS/LAT}$	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\alpha \ln(a\mu)^2 + 16.644 - 3.792\alpha \right)$
Z_λ^{RI}	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\alpha \ln(a\mu)^2 + 16.644 - 4.292\alpha \right)$

Z_m^{MS}	$1 + 3 \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right)$
$Z_m^{MS/LAT}$	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-3 \ln(a\mu)^2 + 12.952 \right)$
Z_m^{RI}	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(-3 \ln(a\mu)^2 + 16.952 + 1.5\alpha \right)$

Z_S^{MS}	$1 - 3 \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right)$
$Z_S^{MS/LAT}$	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(3 \ln(a\mu)^2 - 12.952 \right)$
Z_S^{RI}	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(3 \ln(a\mu)^2 - 16.952 - 1.5\alpha \right)$

Z_P^{MS}	$1 - 3 \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \right)$
$Z_P^{MS/LAT}$	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(3 \ln(a\mu)^2 - 22.595 \right)$
Z_P^{RI}	$1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A \left(3 \ln(a\mu)^2 - 26.595 - 1.5\alpha \right)$

Z_A^{MS}	1
$Z_A^{MS/LAT}$	$1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796)$
Z_A^{RI}	$1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A (15.796)$

5.5 Diskussion der Ergebnisse

Die aufgeführten Renormierungskonstanten sind nicht völlig unabhängig voneinander, sondern sind durch die chirale Ward-Identität miteinander verknüpft. Im Kontinuum haben wir beispielsweise in (4.104) gefunden, daß zwischen den nackten Greensfunktionen des axialen Vektorstroms und der pseudoskalaren Dichte die Relation

$$0 = \left\langle \partial_\mu J_\mu^5(x) \mathcal{O} - 2mP(x) \mathcal{O} + \frac{1}{i} \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta \alpha(x)} \Big|_{\alpha=0} \right\rangle \quad (5.442)$$

besteht. Im Fall von $\mathcal{O} = \lambda(x_1) \bar{\lambda}(x_2)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \partial_\mu^x \langle \lambda(x_1) J_\mu^5(x) \bar{\lambda}(x_2) \rangle &= 2m \langle \lambda(x_1) P(x) \bar{\lambda}(x_2) \rangle \\ &\quad - \delta(x - x_1) \langle \gamma_5 \lambda(x_1) \bar{\lambda}(x_2) \rangle - \delta(x - x_2) \langle \lambda(x_1) \bar{\lambda}(x_2) \gamma_5 \rangle. \end{aligned} \quad (5.443)$$

Der obere Index x zeigt dabei an, daß die Differentiation nach x erfolgt. $J_\mu^5 = \mathcal{O}_{\gamma_\mu \gamma_5}$ war in unserer Notation der axiale Vektorstrom und $P = \mathcal{O}_{\gamma_5}$ die pseudoskalare Dichte. Nach Fourier-Transformation und Amputation der äußeren Beine erhält man hieraus [PT]

$$q_\mu \Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}(p_1, q, p_2) = 2m \Lambda_{\gamma_5}(p_1, q, p_2) - (S_F^{-1}(p_1) + S_F^{-1}(p_2)) \gamma_5. \quad (5.444)$$

Dabei haben wir den an den Vertices des axialen Vektorstroms bzw. der pseudoskalaren Dichte einlaufenden Impuls mit q bezeichnet und schreiben die amputierten Greens-Funktionen als $\Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}(p_1, q, p_2)$ bzw. $\Lambda_{\gamma_5}(p_1, q, p_2)$, wenn p_1 und p_2 die Impulse der externen Fermionen sind. Bei der Amputation beachtet man $\gamma_5 S_F(-p_2) = S_F(p_2) \gamma_5$. Die Relation (5.444) stellt eine Verknüpfung der nackten Größen dar, läßt sich aber – mit gewissen Einschränkungen (s.u.) – auch auf die renormierten Greens-Funktionen übertragen. Prinzipiell wird die chirale Symmetrie zwar durch den dimensionellen Regulator gebrochen, doch es handelt sich dabei um eine sogenannte weiche Symmetriebrechung [Po]. Die axiale Ward-Identität ist daher in obiger Form auch für die renormierten Größen gültig, sofern

wir die axiale Anomalie außer Betracht lassen. Die Diskussion des anomalen Terms holen wir unten nach. Wir schreiben daher zunächst

$$Z_\lambda Z_A q_\mu \Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}(p_1, q, p_2) = 2Z_m Z_\lambda Z_P m \Lambda_{\gamma_5}(p_1, q, p_2) - Z_\lambda (S_F^{-1}(p_1) + S_F^{-1}(p_2)) \gamma_5. \quad (5.445)$$

Betrachten wir nun den Fall $q = 0$, d.h. $p_1 = p_2$, so verschwinden die linken Seiten von (5.444) und (5.445). Aus dem Vergleich der rechten Seiten erhält man dann

$$Z_m Z_\lambda Z_P = Z_\lambda, \quad (5.446)$$

so daß also

$$Z_P = Z_m^{-1}. \quad (5.447)$$

folgt. Damit läßt sich (5.445) auch als

$$Z_\lambda Z_A q_\mu \Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}(p_1, q, p_2) = Z_\lambda (2m \Lambda_{\gamma_5}(p_1, q, p_2) - (S_F^{-1}(p_1) + S_F^{-1}(p_2)) \gamma_5) \quad (5.448)$$

schreiben, und ein erneuter Vergleich mit (5.444) zeigt $Z_\lambda Z_A = Z_\lambda$, also

$$Z_A = 1. \quad (5.449)$$

Diese Zusammenhänge werden von den Renormierungskonstanten des $\overline{\text{MS}}$ -Schemas des Kontinuums erfüllt, wie ein Blick auf die obige Tabelle zeigt. Die Gültigkeit der renormierten Ward-Identität erkennt man auch an $\Sigma_2^{\overline{\text{MS}}} + \hat{\Lambda}_{\gamma_5}^{\overline{\text{MS}}} = 0$.

Allerdings haben wir in unseren bisherigen Betrachtungen die sogenannte axiale Anomalie nicht berücksichtigt. Bei der Anomalie handelt es sich um einen quantentheoretischen Effekt, sie äußert sich also nicht in der nackten Ward-Identität, beeinflußt aber deren renormierte Form. Statt (5.445) müssen wir daher im renormierten Fall korrekterweise

$$\begin{aligned} Z_\lambda Z_A q_\mu \Lambda_{\gamma_\mu \gamma_5}(p_1, q, p_2) &= 2Z_m Z_\lambda Z_P m \Lambda_{\gamma_5}(p_1, q, p_2) - Z_\lambda (S_F^{-1}(p_1) + S_F^{-1}(p_2)) \gamma_5 \\ &\quad + Z_\lambda Z_{an} \Lambda_{an}(p_1, q, p_2). \end{aligned} \quad (5.450)$$

schreiben. Dabei ist Λ_{an} analog zu den Λ_Γ als amputierte Greens-Funktion zwischen zwei Fermion-Zuständen erklärt. Der zugehörige Operator $\mathcal{O}_{an}$ nimmt im Ortsraum die Gestalt

$$\mathcal{O}_{an}(x) = \frac{g^2}{16\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\tau}(x) \quad (5.451)$$

an, vgl. z.B. [CL] oder [MM]. Damit kann Gleichung (5.445) in Anwesenheit der Anomalie nicht für allgemeine Impulse q aufrecht erhalten werden, und wir können nicht länger auf $Z_A = 1$ schließen. In der Tat findet man in höheren Ordnungen der Störungstheorie $Z_A \neq 1$, insbesondere kann Z_A auch divergent sein. Für den Fall der QCD beobachtet ADLER in [Ad] beispielsweise auf 2-Loop-Niveau eine explizite Divergenz. In der Notation der Gitterregularisierung ist diese proportional zu $g^4 \ln(a^2 m^2)$. Insbesondere fällt auf, daß Z_A in der QCD auf der kritischen Linie ($m = 0$) auch für endliche Gitterkonstanten divergiert, d.h. im chiralen Limes kann keine Renormierungskonstante Z_A angegeben werden. Ob dies auch in der supersymmetrischen Theorie zutrifft, kann nicht ohne explizite Rechnungen entschieden werden, es ist zumindest denkbar, daß sich hier verschiedene anomale Beiträge gegenseitig eliminieren, so daß der totale Beitrag verschwindet.

Weitergehende Überlegungen zeigen, daß sich die axiale Anomalie perturbativ nur in sogenannten Dreicksgraphen beobachten läßt [Po], [Ry]. Aufgrund der in unseren Rechnungen gewählten externen Zustände (zwei Gluinos) treten diese Diagramme in dieser Arbeit nicht auf, so daß das 1-Loop-Ergebnis von der Anomalie nicht beeinträchtigt wird, wir beobachten daher $Z_A = 1$. Wählt man beispielsweise den axialen Strom selbst als äußeren Zustand, betrachtet also sogenannte AAA-Dreicksgraphen (vgl. [Ry]), so geht die Anomalie explizit in die Rechnungen mit ein und beeinflusst Z_A in Ordnung g^4 und höher.

Auf die Gleichung $Z_m = Z_P^{-1}$ hat der anomale Term hingegen keinen Einfluß, denn es zeigt sich, daß der Vertex V_{an} des anomalen Terms im Impulsraum von der Form

$$V_{an} \sim \varepsilon_{\mu\nu\rho\tau} p_{1\rho} p_{2\tau} \quad (5.452)$$

ist. Bei $q = 0$, d.h. $p_1 = p_2$ verschwindet also der anomale Beitrag [Ad]. In diesem Fall bleibt die Anomalie für unsere Betrachtungen also ohne Bedeutung, und die Gleichungen (5.446) und (5.447) bleiben weiterhin gültig, es gilt nach wie vor $Z_m Z_P = 1$.

Auf dem Gitter ist die axiale Ward-Identität schon auf Baumgraphen-Niveau nicht exakt erfüllt, vielmehr tritt ein expliziter symmetriebrechender Term X_A auf, vgl. (4.111). Daher können wir für die Renormierungskonstanten – selbst in unseren „anomaliefreien“ Berechnungen – im $\overline{\text{MS}}$ /LAT- und im RI-Schema nicht länger $Z_A = 1$ und $Z_m = Z_P^{-1}$ erwarten, auch $Z_A = Z_m Z_P$ gilt nicht mehr. Allerdings erwartet man, daß diese Größen nach wie vor endlich bleiben, insbesondere bildet also der axiale Strom in 1-Loop-Ordnung keine eigene Divergenz aus. Die Fixierung durch die Ward-Identität äußert sich auf dem Gitter in der Tatsache, daß in unseren Betrachtungen weder Z_A noch $Z_m Z_P$ vom Renormierungsschema abhängen. Es gilt

$$Z_A^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} = Z_A^{\text{RI}} = 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A(15.796) \quad (5.453)$$

und

$$\begin{aligned} Z_P^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} Z_m^{\overline{\text{MS}}/\text{LAT}} &= Z_P^{\text{RI}} Z_m^{\text{RI}} \\ &= 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} C_A(9.643). \end{aligned} \quad (5.454)$$

Es ist analog zum Kontinuumsfall zu erwarten, daß $Z_P Z_m$ auch in höheren Ordnungen von der Wahl des Renormierungsschemas unabhängig und endlich ist, sofern das Renormierungsschema die Ward-Identität respektiert. Aufgrund der Anomalie kann Z_A in höheren Ordnungen der Kopplungskonstanten gleichwohl Divergenzen beinhalten.

Wir beobachten außerdem, daß die Renormierungskonstanten Z_S , Z_P und Z_A im $\overline{\text{MS}}$ - und $\overline{\text{MS}}$ /LAT-Schema eichinvariant sind, während dies für das RI-Schema nicht zutrifft. Dies hat den folgenden Hintergrund [V1], [MPSTV]:

Zur Renormierung im $\overline{\text{MS}}$ - bzw. $\overline{\text{MS}}$ /LAT-Schema werden die Divergenzen der nackten Greens-Funktionen systematisch isoliert und unabhängig von den gewählten äußeren Zuständen (in unseren Berechnungen zwei Gluinos) subtrahiert. Prinzipiell können hierbei auch eichinvariante externe Zustände gewählt werden (man denke etwa an Hadronen oder den Schrödinger-Funktional-Formalismus). Da die Divergenz des Operators $\mathcal{O}_\Gamma$ aber nicht von diesen Zuständen abhängt und $\mathcal{O}_\Gamma$ eichinvariant ist, zeigt sich in jedem Fall,

daß Z_S , Z_P und Z_A in diesen Schemata eichunabhängig sind. Anders verhält es sich hingegen im RI-Schema, da dort der endliche Anteil der Renormierungskonstanten von den äußeren Zuständen abhängt und somit Eichabhängigkeiten beinhalten kann. Die anomale Dimension bleibt davon allerdings unberührt.

Für die Renormierung der Wellenfunktion gilt die obige Argumentation nicht, denn der Gluino-Propagator $\langle \lambda(x) \bar{\lambda}(y) \rangle$ ist im Gegensatz zu den Operatoren $\mathcal{O}_\Gamma$ nicht ultralokal und daher eichabhängig. Dennoch beobachten wir $\Sigma_0^{LAN}(p) = \Sigma_0^{FEY}(p)$. Dies zeigt, daß die additive Massenrenormierung und insbesondere die kritische Linie der Theorie eichunabhängig sind (zum Begriff der kritischen Linie vgl. [MM], [Ge]).

Außerdem fällt in unseren Ergebnissen auf, daß in allen Schemata und Eichungen $Z_S = Z_m^{-1}$ gilt. Dies hat folgende Ursache: Unter Benutzung der Invarianz der QCD-Wirkung unter den Transformationen $\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha}$ der Quark-Felder läßt sich in dieser Theorie eine weitere Ward-Identität der Form $\langle \partial_\mu V_\mu \rangle = 2m \langle S \rangle$ herleiten, wobei $V_\mu = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$ den Vektorstrom darstellt. Analog zum axialen Fall, zeigt man dann $1 = Z_V = Z_m Z_S$, in dieser Ward-Identität tritt keine Anomalie auf. Die dazu notwendige Argumentation (s.o.) läßt sich im Gegensatz zur axialen Symmetrie auf das Gitter übertragen, denn es ist im Fall der QCD auch dort möglich, einen exakt erhaltenen Vektorstrom zu definieren [MM]. In einer Theorie mit Majorana-Spinoren machen aber die Transformationen $\lambda \rightarrow e^{i\alpha}\lambda$, $\bar{\lambda} \rightarrow \bar{\lambda}e^{-i\alpha}$ keinen Sinn, sondern führen aufgrund der Verknüpfung von λ und $\bar{\lambda}$ zum Widerspruch. Eine entsprechende Ward-Identität steht in der supersymmetrischen Theorie also nicht zur Verfügung. Unser Ergebnis $Z_S = Z_m^{-1}$ ist auf die strukturelle Ähnlichkeit unserer 1-Loop-Rechnungen zu denen der QCD zurückzuführen. Aufgrund von auftretenden Fermion-Loops ist fraglich, ob dieses Ergebnis auch in höheren Ordnungen der Störungstheorie Bestand hat.

5.6 Die chirale Ward-Identität und die Gluino-Masse

In Kapitel 4 haben wir gesehen, daß die chirale Symmetrie im Kontinuum für den Fall verschwindender Fermion-Masse klassisch exakt erhalten ist, daher spricht man bei Gleichung (4.104) auch von der PCAC-Relation (*partially conserved axial current*). Auf dem Gitter hingegen ist die chirale Symmetrie auch im Fall $m_0 = 0$ durch den Wilson-Term explizit gebrochen. Die Definition eines renormierten axialen Stroms auf dem Gitter ist daher – wie wir bereits an den oben bestimmten Renormierungskonstanten gesehen haben – komplizierter als in kontinuierlicher Raum-Zeit. Insbesondere ist auch eine additive Massenkorrektur notwendig. Dies möchte ich vor dem Hintergrund möglicher zukünftiger Rechnungen im folgenden näher erläutern. Dazu wird zunächst die Renormierung zusammengesetzter Operatoren besprochen.

Unter zusammengesetzten Operatoren versteht man Produkte von Feldoperatoren und deren Ableitungen, die am selben Raum-Zeit-Punkt auszuwerten sind, beispielsweise fallen die in diesem Kapitel betrachteten Operatoren $\mathcal{O}_\Gamma(x) = \bar{\lambda}(x)\Gamma\lambda(x)$ in diese Kategorie. Bei der direkten Berechnung bilden sie – wie gesehen – eigene Divergenzen aus und bedürfen daher einer gesonderten Renormierung, die nicht durch die übliche Renormierung der Felder und Parameter der Wirkung abgedeckt werden kann. Ausnahmen bilden hier die exakt

erhaltenen Noether-Ströme der Ward-Identitäten. Wir haben z.B. gesehen, daß der axiale Strom im Kontinuum (bei Abwesenheit von Anomalien) keiner eigenen Renormierung bedarf, es ist dann $Z_A = 1$. Für die anderen Operatoren $\mathcal{O}_\Gamma$ hingegen ist eine zusätzliche multiplikative Renormierung $Z_\Gamma \neq 1$ notwendig, wobei Z_Γ Divergenzen enthalten kann. Genauere Betrachtungen zeigen, daß die Operatoren $\mathcal{O}_\Gamma$ insofern eine Ausnahme bilden, als daß sie rein multiplikativ zu renormieren sind, im allgemeinen ist auch eine additive Renormierung notwendig [Co], man spricht von *operator mixing*. Aus theoretischen Überlegungen ergibt sich dabei, daß eine Operatormischung nur mit solchen Operatoren auftritt, deren Massendimension höchstens so groß ist wie die des zu renormierenden Operators. So schreibt sich der renormierte Operator $\hat{A}$ als

$$\hat{A} = \sum_B Z_{AB} B, \quad (5.455)$$

wobei die Massendimensionen der Operatoren B kleiner-gleich der Massendimension des Operators A sind. Ein Beweis hierzu findet sich in [Co] Kap. 6.4. Mischung tritt dabei nur mit solchen Operatoren auf, die dieselben Quantenzahlen haben wie der untersuchte Operator A .

Im Fall der chiralen (und auch der supersymmetrischen) Ward-Identität interessieren wir uns für die Renormierung eichinvarianter zusammengesetzter Operatoren, man denke etwa an die Brechungsterme X_A und X_S auf dem Gitter. Im Fall üblicher globaler Symmetrien der Wirkung tritt eine Mischung nur mit solchen Operatoren auf, die ebenfalls invariant unter der jeweiligen Symmetrie sind. Als Beispiel mag hier die Lorentz-Invarianz dienen. Dieses Argument gilt nicht für die (lokale) Eichsymmetrie, denn durch die Einführung von Eichfixierungstermen in der Wirkung geht diese Invarianz verloren, man verbleibt mit der BRS-Invarianz [Co], [St]. Allgemein zeigt sich (die dabei auftretenden Subtilitäten werden hier verschwiegen), daß eichinvariante Operatoren nur mit BRS-invarianten Operatoren mischen. Mischung eines eichinvarianten Operators $\mathcal{O}$ tritt dabei mit folgenden Klassen von Operatoren höchstens gleicher Massendimension auf:

- eichinvariante Operatoren $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$, die sich unter Ausnutzung der Bewegungsgleichungen als linear unabhängig wählen lassen
- Operatoren A_i , die BRS-Transformationen anderer Operatoren $\tilde{A}_i$ darstellen: $A_i = \delta_{BRS} \tilde{A}_i$
- Operatoren, die aufgrund der Bewegungsgleichungen verschwinden
- übrige Operatoren, die aufgrund ihres Verhaltens unter den globalen Symmetrien der Wirkung und ihrer Massendimension mit $\mathcal{O}$ mischen können.

Verschiedene Theoreme von JOGLEKAR und LEE [Co] zeigen aber, daß bei der Bildung physikalischer Matrixelemente nur die erste Klasse von Operatoren berücksichtigt werden muß. Betrachtet man in diesem Sinne den Term X_A der chiralen Ward-Identität auf dem Gitter

$$0 = \left\langle \Delta_\mu^b J_\mu^{5,lat}(x) \mathcal{O} - 2m_0 P(x) \mathcal{O} - X_A(x) \mathcal{O} \right\rangle \quad (5.456)$$

(wobei wir Kontaktterme vernachlässigt haben), so identifizieren BOCHICCHIO et. al. in [BMMRT] sowie DONINI und Mitarbeiter in [DGHV] die folgenden Operatoren, mit denen X_A im Kontinuumslikes mischt: $P = \bar{\lambda}\gamma_5\lambda$, $\Delta_\mu^b J_\mu^{5,lat}$ und $Q = \mathcal{G}_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu}$. Dabei ist $\tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu}$ eine Gitter-Version des dualen Feldstärketensors. Bezeichnet man die additiven Renormierungskonstanten mit $2\bar{m}$, Z_Q und $Z_A - \tilde{Z}_A - 1$, so ergibt sich eine endliche Größe $\overline{X}_A$ wie folgt:

$$\overline{X}_A(x) = X_A(x) + 2\bar{m}P(x) + (Z_A - \tilde{Z}_A - 1)\Delta_\mu^b J_\mu^5(x) - Z_Q\mathcal{G}_{\mu\nu}\tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu}. \quad (5.457)$$

Wählt man nun ein Renormierungsschema, in dem $\langle \overline{X}_A(x)\mathcal{O} \rangle \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$ erfüllt ist, so erhält man die renormierte Ward-Identität [DGHV]

$$\begin{aligned} \langle Z_A\Delta_\mu^b J_\mu^{5,lat}(x)\mathcal{O} \rangle &= 2(m_0 - \bar{m})\langle P(x)\mathcal{O} \rangle \\ &\quad + \langle (Z_Q\mathcal{G}_{\mu\nu}(x)\tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu}(x) + \tilde{Z}_A\Delta_\mu^b J_\mu^5(x))\mathcal{O} \rangle + \mathcal{O}(a) \\ &= 2(m_0 - \bar{m})\langle P(x)\mathcal{O} \rangle + \langle \tilde{Q} \rangle + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (5.458)$$

$\tilde{Q} = Z_Q\mathcal{G}_{\mu\nu}(x)\tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu}(x) + \tilde{Z}_A\Delta_\mu^b J_\mu^5(x)$ ist dabei der Term, der die chirale Anomalie zum Ausdruck bringt¹². (5.458) nimmt daher genau die Form der entsprechenden renormierten Ward-Identität des Kontinuums (5.450) an. Beachtet man, daß die pseudoskalare Dichte mit Z_P renormiert wird, so erkennt man

$$Z_P^{-1}(m_0 - \bar{m}) \quad (5.459)$$

als die renormierte Masse. Es wird damit klar, daß X_A eine additive Massenkorrektur bewirkt.

¹²Man beachte, daß der Operator $\tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu}$ nicht rein multiplikativ zu renormieren ist, sondern auch hier Operator-Mischung (mit $\Delta_\mu^b J_\mu^5$) auftritt [DGHV]. Dies wird durch die künstliche Einführung von $\tilde{Z}_A$ bereits im voraus berücksichtigt.

Kapitel 6

Die Vertices des Superstroms

Der in Kapitel 4 konstruierte Superstrom enthält aufgrund des beteiligten Feldstärketensors gluonische Anteile. Bei störungstheoretischen Betrachtungen dieses Stroms ist deswegen seine Entwicklung in Potenzen von g in Form von zusätzlichen Vertices zu berücksichtigen. In diesem Kapitel werden daher die Feynman-Regeln für einige der Vertices des Noether-Stroms S_μ hergeleitet. Im Kontinuum treten nur der Ein-Gluonen-Vertex und der Zwei-Gluonen-Vertex auf, auf dem Gitter sind aufgrund der Plaquettenvariablen im Superstrom prinzipiell Vertices mit beliebig vielen Gluonen möglich. Wir beschränken uns hier auf die für 1-Loop-Betrachtungen relevanten Vertices mit einem, zwei bzw. drei Gluonen. Dabei wählen wir die in Kapitel 4 diskutierte lokale Version des Gitter-Superstroms, dessen störungstheoretische Behandlung einfacher ist als die des nicht-lokalen Stroms.¹

6.1 Kontinuum

Im Kontinuum ist der in den behandelten Ward-Identitäten vorkommende Noether-Strom durch

$$S_\mu(x) = -2\frac{i}{g}\text{Tr}\{F_{\rho\tau}(x)\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu\lambda(x)\} \quad (6.1)$$

gegeben, vgl. (4.19). Der explizite Ausdruck für den auftretenden Feldstärketensor ist $F_{\rho\tau}(x) = \partial_\rho A_\tau(x) - \partial_\tau A_\rho(x) + [A_\rho(x), A_\tau(x)]$, so daß hier nur zwei Vertices mit einem bzw. zwei externen Gluonen auftreten, vgl. dazu Abb. 6.1. Die explizite Form ihrer Feynman-Regeln soll im folgenden bestimmt werden.

6.1.1 Der Ein-Gluon-Vertex des Superstroms

Zur Bestimmung des Vertex nehmen wir eine Entwicklung des Superstroms nach der Kopplungskonstanten g vor

$$S_\mu(x) = S_\mu^{(1)}(x) + gS_\mu^{(2)}(x) \quad (6.2)$$

¹Die Herleitung der Vertices des Superstroms wurden gemeinsam mit Claus Gebert durchgeführt und sind daher auch Bestandteil seiner Diplomarbeit [Ge].

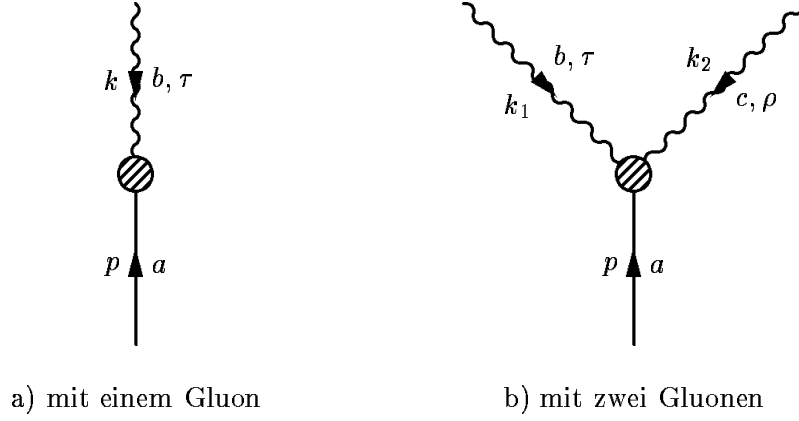


Abbildung 6.1: Vertices des Kontinuums-Superstroms

und erhalten den ersten nicht-trivialen Term zu

$$\begin{aligned}
 S_\mu^{(1)}(x) &= -2\frac{i}{g}\text{Tr}\{(\partial_\rho A_\tau(x) - \partial_\tau A_\rho(x))\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu\lambda(x)\} \\
 &= -2\left(\partial_\rho A_\tau^b(x) - \partial_\tau A_\rho^b(x)\right)\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu\lambda^a(x)\text{Tr}\{T^a T^b\} \\
 &= -2\delta_{ab}\partial_\rho A_\tau^b(x)\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu\lambda^a(x).
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Man beachte dabei, daß $A_\tau = -igA_\tau^a T^a$, daß also jeder Faktor des Eichfeldes A einer Potenz der Kopplungskonstanten entspricht. Einsetzen der Fourier-Transformierten der Felder $A_\tau(x)$ und $\lambda(x)$ gemäß

$$A_\tau^b(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \tilde{A}_\tau^b(k) \tag{6.4}$$

$$\lambda^a(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \tilde{\lambda}^a(p) \tag{6.5}$$

liefert nach Fourier-Transformation des gesamten Ausdrucks

$$\begin{aligned}
 \tilde{S}_\mu^{(1)}(q) &= \int d^4 x e^{iqx} S_\mu^{(1)}(x) \\
 &= -2i\delta_{ab}\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu \int d^4 x \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(p+k+q)x} k_\rho \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \\
 &= -2i\delta_{ab}\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(p+k+q) k_\rho \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p).
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Der Ein-Gluon-Vertex $S_{\mu,\tau}^{ab}(p,k)$ ist über

$$\tilde{S}_\mu^{(1)}(q) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta(p+k+q) S_{\mu,\tau}^{ab}(p,k) \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \tag{6.7}$$

definiert und ergibt sich daher zu

$$S_{\mu,\tau}^{ab}(p,k) = -2i\delta_{ab}\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu k_\rho. \tag{6.8}$$

6.1.2 Der 2-Gluonen-Vertex des Superstroms

Der 2-Gluonen-Superstrom-Vertex resultiert aus dem Term erster Ordnung in g des Superstroms

$$\begin{aligned} S_\mu^{(2)}(x) &= -2 \frac{i}{g} \text{Tr} \{ [A_\rho(x), A_\tau(x)] \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda(x) \} \\ &= 2ig A_\rho^c(x) A_\tau^b(x) \lambda^a(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \text{Tr} \{ [T^c, T^b] T^a \}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Mit $\text{Tr} \{ [T^c, T^b] T^a \} = if_{cbd} \text{Tr} \{ T^d T^a \} = if_{cbd} \frac{1}{2} \delta_{da} = -\frac{1}{2} if_{abc}$ läßt sich dies als

$$S_\mu^{(2)}(x) = gf_{abc} A_\rho^c(x) A_\tau^b(x) \lambda^a(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \quad (6.10)$$

schreiben. Nach Einsetzen der Fourier-Transformierten der beteiligten Felder erhält man hieraus wiederum nach Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\mu^{(2)}(q) &= \int d^4x e^{iqx} S_\mu^{(2)}(x) \\ &= gf_{abc} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + p + q) \tilde{A}_\tau^b(k_1) \tilde{A}_\rho^c(k_2) \tilde{\lambda}^a(p). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Mit der Definition

$$\tilde{S}_\mu^{(2)}(q) = \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \delta(k_1 + k_2 + p + q) S_{\mu,\tau\rho}^{abc}(p, k_1, k_2) \tilde{A}_\tau^b(k_1) \tilde{A}_\rho^c(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (6.12)$$

folgt für den Vertex der Ausdruck

$$S_{\mu,\tau\rho}^{abc}(p, k_1, k_2) = gf_{abc} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu. \quad (6.13)$$

Dieser ist bereits symmetrisch gegen die Vertauschung der beiden Gluonen, also gegen den gleichzeitigen Austausch der Indizes $\rho \leftrightarrow \tau$ und $a \leftrightarrow b$, so daß durch (6.13) die Version des Vertex gegeben ist, die in störungstheoretischen Betrachtungen in gewohnter Weise verwendet werden kann.

6.2 Gitter

Auf dem Gitter betrachten wir wie oben angekündigt die lokale Version des Superstroms. Die hier gewählte Form ist dann (vgl. (4.64))

$$S_\mu(x) = -2 \frac{i}{g} \text{Tr} (\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda(x)), \quad (6.14)$$

wobei wir für $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)$ das volle Clover-Blatt

$$\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) = \frac{1}{4} (\mathcal{G}_{\rho,\tau}^0(x) + \mathcal{G}_{-\rho,-\tau}^0(x) + \mathcal{G}_{\tau,-\rho}^0(x) + \mathcal{G}_{-\tau,\rho}^0(x)) \quad (6.15)$$

verwenden (dabei ist wie in den vorigen Kapiteln $\mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) = -\frac{1}{2a^2} (U_{\rho\tau}(x) + U_{\tau\rho}(x))$).

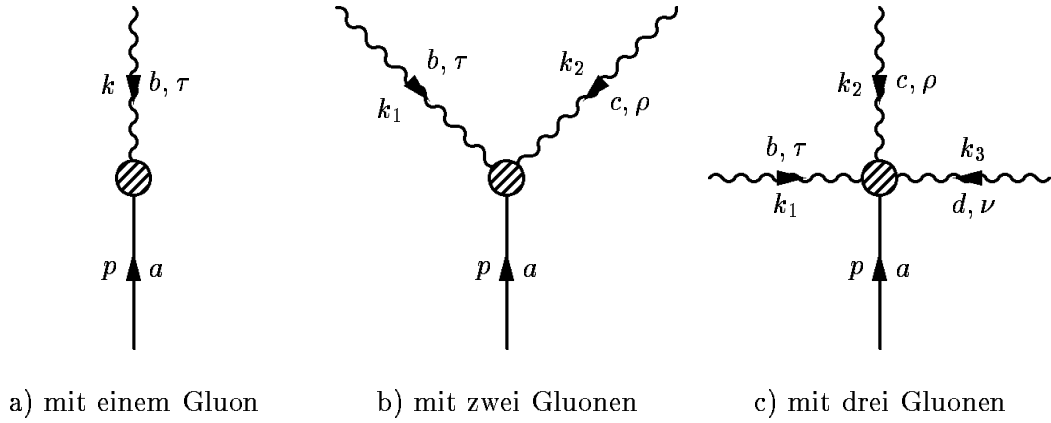


Abbildung 6.2: Vertices des Gitter-Superstroms

Die Entwicklung des Superstroms (6.14) auf dem Gitter nach g schreiben wir in der Form

$$S_\mu(x) = S_\mu^{(1)}(x) + g S_\mu^{(2)}(x) + g^2 S_\mu^{(3)}(x) + \dots \quad (6.16)$$

Man stellt fest, daß aufgrund der beteiligten Plaquettenvariablen n -Gluonen-Vertices für alle $n \in \mathbb{N}$ auftreten. Für die 1-Loop-Korrektur zum Superstrom sind aber nur die in Abb. 6.2 dargestellten Vertices mit maximal drei Gluonen von Interesse. In diesem Abschnitt wird daher ihr explizites Aussehen bestimmt. Dazu ist die folgende Entwicklung der Plaquettenvariablen nach g vorzunehmen (man beachte auch hier wieder $A_\tau(x) = -igA_\tau^a T^a$):

$$\begin{aligned} U_{\rho\tau}(x) = & \left(1 + aA_\tau(x) + \frac{a^2}{2}A_\tau(x)^2 + \frac{a^3}{6}A_\tau(x)^3 \right) \\ & \cdot \left(1 + aA_\rho(x + a\hat{\tau}) + \frac{a^2}{2}A_\rho(x + a\hat{\tau})^2 + \frac{a^3}{6}A_\rho(x + a\hat{\tau})^3 \right) \\ & \cdot \left(1 - aA_\tau(x + a\hat{\rho}) + \frac{a^2}{2}A_\tau(x + a\hat{\rho})^2 - \frac{a^3}{6}A_\tau(x + a\hat{\rho})^3 \right) \\ & \cdot \left(1 - aA_\rho(x) + \frac{a^2}{2}A_\rho(x)^2 - \frac{a^3}{6}A_\rho(x)^3 \right) + \mathcal{O}(g^4). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Für die Entwicklung der Plaquetten nach g benutzen wir eine zu (6.16) analoge Notation, schreiben also z.B.

$$\mathcal{G}_{\rho\tau}(x) = g\mathcal{G}_{\rho\tau}^{(1)}(x) + g^2\mathcal{G}_{\rho\tau}^{(2)}(x) + g^3\mathcal{G}_{\rho\tau}^{(3)}(x) + \dots \quad (6.18)$$

An dieser Stelle sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß wir in diesem Kapitel die in der Gitter-Störungstheorie übliche Verknüpfung $U_\mu(x) = e^{-aA_\mu(x)}$ der Paralleltransporter U_μ mit dem Eichfeld A_μ verwenden. Die Fourier-Transformation

$$A_\mu(x) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x + \frac{a}{2}\hat{\mu})} \tilde{A}_\mu(k) \quad (6.19)$$

wird jedoch bezüglich des Punktes $x + \frac{a}{2}\hat{\mu}$ gebildet, so daß weiterhin eine symmetrische Verknüpfung des Paralleltransporters $U_\mu(x)$ mit dem link $[x, x + a\hat{\mu}]$ besteht. Insbesondere werden wir sehen, daß die Vertices auf dem Gitter die des Kontinuums bis auf $\mathcal{O}(a^2)$ -Störungen reproduzieren.

6.2.1 Der Ein-Gluon-Vertex des Superstroms

Der Term erster Ordnung von g in der Entwicklung von $U_{\rho\tau}(x)$ lautet wie folgt:

$$a(A_\tau(x) + A_\rho(x + a\hat{\tau}) - A_\tau(x + a\hat{\rho}) - A_\rho(x)). \quad (6.20)$$

Damit erhält man für den ersten Term der Entwicklung von $\frac{1}{2}(\mathcal{G}_{\rho,\tau}^0 + \mathcal{G}_{-\rho,-\tau}^0(x))$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2a}(A_\tau(x) + A_\rho(x + a\hat{\tau}) - A_\tau(x + a\hat{\rho}) - A_\rho(x) \\ & + A_{-\tau}(x) + A_{-\rho}(x - a\hat{\tau}) - A_{-\tau}(x - a\hat{\rho}) - A_{-\rho}(x)). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Dabei ist für $\tau \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Fourier-Transformierte von $A_{-\tau}$ wie folgt zu bilden²:

$$A_{-\tau}(x) = - \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x - \frac{a}{2}\hat{\mu})} \tilde{A}_\tau(k). \quad (6.22)$$

Es folgt weiter

$$\begin{aligned} & -2\frac{i}{g}\text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (\mathcal{G}_{\rho,\tau}^0 + \mathcal{G}_{-\rho,-\tau}^0(x))^{(1)} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda(x) \right\} \\ & = \frac{i}{ag} \text{Tr} ((A_\tau(x) + A_\rho(x + a\hat{\tau}) - A_\tau(x + a\hat{\rho}) - A_\rho(x) \\ & \quad + A_{-\tau}(x) + A_{-\rho}(x - a\hat{\tau}) - A_{-\tau}(x - a\hat{\rho}) - A_{-\rho}(x)) \\ & \quad \cdot \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda(x)) \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{a} \text{Tr} \left\{ \left(A_\tau^b(x) + A_\rho^b(x + a\hat{\tau}) - A_\tau^b(x + a\hat{\rho}) - A_\rho^b(x) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + A_{-\tau}^b(x) + A_{-\rho}^b(x - a\hat{\tau}) - A_{-\tau}^b(x - a\hat{\rho}) - A_{-\rho}^b(x) \right) T^b \right. \\ & \quad \left. \cdot \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \lambda^a(x) T^a \right\} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \left(A_\tau^b(x) + A_\rho^b(x + a\hat{\tau}) - A_\tau^b(x + a\hat{\rho}) - A_\rho^b(x) \right. \\ & \quad \left. + A_{-\tau}^b(x) + A_{-\rho}^b(x - a\hat{\tau}) - A_{-\tau}^b(x - a\hat{\rho}) - A_{-\rho}^b(x) \right) \lambda^a(x) \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp(ipx) \tilde{\lambda}^a(p) \\ & \quad \cdot \left\{ \left[\exp\left(ik\left(x + \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) - \exp\left(ik\left(x + a\hat{\rho} + \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \exp\left(ik\left(x - \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) + \exp\left(ik\left(x - a\hat{\rho} - \frac{a}{2}\hat{\tau}\right)\right) \right] \tilde{A}_\tau^b(k) \right. \\ & \quad \left. + \left[\exp\left(ik\left(x + a\hat{\tau} + \frac{a}{2}\hat{\rho}\right)\right) - \exp\left(ik\left(x + \frac{a}{2}\hat{\rho}\right)\right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \exp\left(ik\left(x - a\hat{\tau} - \frac{a}{2}\hat{\rho}\right)\right) + \exp\left(ik\left(x - \frac{a}{2}\hat{\rho}\right)\right) \right] \tilde{A}_\rho^b(k) \right\} \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(p+k)x} \\ & \quad \cdot \left[\exp\left(i\frac{a}{2}(k_\tau + k_\rho)\right) + \exp\left(-i\frac{a}{2}(k_\tau + k_\rho)\right) \right] \end{aligned}$$

²Es gilt $U_{-\tau}(x) = U_\tau^\dagger(x - a\hat{\tau}) = e^{aA_\tau(x - a\hat{\tau})} \equiv e^{-aA_{-\tau}(x)}$.

$$\cdot \left[\exp \left(-i \frac{a}{2} k_\rho \right) - \exp \left(i \frac{a}{2} k_\rho \right) \right] \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (6.27)$$

$$= -\frac{4i}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(p+k)x} \cdot \cos \left(\frac{a}{2} (k_\tau + k_\rho) \right) \sin \left(\frac{a}{2} k_\rho \right) \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p). \quad (6.28)$$

Dabei wurde $\tilde{A}_{-\tau} = -\tilde{A}_\tau$ benutzt, und in (6.27) haben wir

$$\sigma_{\rho\tau} = -\sigma_{\tau\rho} \quad (6.29)$$

verwendet. Es muß nun sozusagen die zweite Hälfte des Clover-Blattes hinzugefügt werden. Anhand von (6.15) sieht man, daß dazu noch die Terme addiert werden müssen, bei denen in den Plaquetten die Ersetzungen $\tau \rightarrow -\rho$ und $\rho \rightarrow \tau$ vorgenommen werden. Damit ergibt sich

$$\tilde{S}_\mu^{(1)}(q) = a^4 \sum_x e^{iqx} S_\mu^{(1)}(x) \quad (6.30)$$

$$= -\frac{2i}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta_P(k+p+q) \cdot \left\{ \cos \left(\frac{a}{2} (k_\tau + k_\rho) \right) \sin \left(\frac{a}{2} k_\rho \right) \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) + \cos \left(\frac{a}{2} (k_{-\rho} + k_\tau) \right) \sin \left(\frac{a}{2} k_\tau \right) \tilde{A}_{-\rho}^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \right\} \quad (6.31)$$

$$= -\frac{4i}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta_P(k+p+q) \cdot \cos \left(\frac{a}{2} k_\tau \right) \cos \left(\frac{a}{2} k_\rho \right) \sin \left(\frac{a}{2} k_\rho \right) \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p) \quad (6.32)$$

$$= -\frac{2i}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta_P(k+p+q) \cos \left(\frac{a}{2} k_\tau \right) \sin(ak_\rho) \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p), \quad (6.33)$$

wobei die Additionstheoreme

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y \quad (6.34)$$

und

$$\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x \quad (6.35)$$

ausgenutzt wurden. δ_P bezeichnet die $\frac{2\pi}{a}$ -periodische δ -Funktion. Der zugehörige Vertex $S_{\mu,\tau}^{ab}(p,k)$ wird über folgende Relation definiert:

$$\tilde{S}_\mu^{(1)}(q) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta_P(k+p+q) S_{\mu,\tau}^{ab}(p,k) \tilde{A}_\tau^b(k) \tilde{\lambda}^a(p), \quad (6.36)$$

und man liest als Ergebnis

$$S_{\mu,\tau}^{ab}(p,k) = -\frac{2i}{a} \delta_{ab} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \cos \left(\frac{a}{2} k_\tau \right) \sin(ak_\rho) \quad (6.37)$$

ab. Der Vergleich mit (6.8) zeigt, daß der Vertex auf dem Gitter bei Entwicklung nach der Gitterkonstanten das Kontinuumsresultat bis auf Abweichungen der Ordnung a^2 reproduziert.

6.2.2 Der 2-Gluonen-Vertex des Superstroms

Es ist nun der in g lineare Term des Superstroms zu betrachten. Dazu ist der in g quadratische Term der Clover-Plaquette $\mathcal{G}_{\rho\tau}(x)$ zu berechnen. Zunächst wird der entsprechende quadratische Term von $\frac{1}{a^2}(U_{\rho\tau}(x) - U_{\tau\rho}(x))$ behandelt, der durch

$$\begin{aligned} & [-A_\tau(x + a\hat{\rho}), -A_\rho(x)] + [A_\rho(x + a\hat{\tau}), -A_\rho(x)] + [A_\tau(x), -A_\rho(x)] \\ & + [A_\rho(x + a\hat{\tau}), -A_\tau(x + a\hat{\rho})] + [A_\tau(x), -A_\tau(x + a\hat{\rho})] + [A_\tau(x), A_\rho(x + a\hat{\tau})] \end{aligned} \quad (6.38)$$

gegeben ist. Mit der bereits mehrfach verwendeten Abkürzung

$$\mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) = -\frac{1}{2a^2}(U_{\rho\tau}(x) - U_{\tau\rho}(x)) \quad (6.39)$$

ergibt sich durch Einsetzen der Fourier-Transformierten

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \lambda(x) \}^{(2)} &= \frac{1}{4} g^2 i f_{abc} \left\{ \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \right. \\ &\quad \cdot \left\{ \exp \left(ik_1 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\rho} \right) + ik_2 \left(x + a\hat{\rho} + \frac{a}{2} \hat{\tau} \right) \right) \right. \\ &\quad - \exp \left(ik_1 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\rho} \right) + ik_2 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\tau} \right) \right) \\ &\quad + \exp \left(ik_1 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\rho} + a\hat{\tau} \right) + ik_2 \left(x + a\hat{\rho} + \frac{a}{2} \hat{\tau} \right) \right) \\ &\quad \left. + \exp \left(ik_1 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\rho} + a\hat{\tau} \right) + ik_2 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\tau} \right) \right) \right\} \\ &\quad - \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \tilde{A}_\tau^c(k_1) \tilde{A}_\rho^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\ &\quad \cdot \exp \left(ik_1 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\tau} + a\hat{\rho} \right) + ik_2 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\tau} \right) \right) \\ &\quad - \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\rho^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\ &\quad \left. \cdot \exp \left(ik_1 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\rho} \right) + ik_2 \left(x + \frac{a}{2} \hat{\rho} + a\hat{\tau} \right) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Den entsprechenden Ausdruck für $\mathcal{G}_{-\rho, -\tau}^0(x)$ erhält man durch die Substitution $\tau \rightarrow -\tau$, $\rho \rightarrow -\rho$, wobei erneut $\tilde{A}_{-\rho} = -\tilde{A}_\rho$ zu beachten ist. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2} (\mathcal{G}_{\rho, \tau}^0(x) + \mathcal{G}_{-\rho, -\tau}^0(x))^{(2)} \lambda(x) \right\} \\ &= \frac{1}{4} g^2 i f_{abc} \left\{ \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1 + k_2 + p)x} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \right. \\ &\quad \cdot \left\{ \cos \left(\frac{a}{2} (k_{1\rho} + 2k_{2\rho} + k_{2\tau}) \right) - \cos \left(\frac{a}{2} (k_{1\rho} + k_{2\tau}) \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\rho} + 2k_{1\tau} + 2k_{2\rho} + k_{2\tau})\right) + \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\rho} + 2k_{1\tau} + k_{2\tau})\right) \Big\} \\
& - \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\tau^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\
& \cdot \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + 2k_{1\rho} + k_{2\tau})\right) \\
& - \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\rho^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\
& \cdot \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\rho} + k_{2\rho} + 2k_{2\tau})\right) \Big\}. \tag{6.41}
\end{aligned}$$

Zur Komplettierung der Clover-Plaquette ist noch der Anteil aus $\frac{1}{2}(\mathcal{G}_{\tau,-\rho}^0(x) + \mathcal{G}_{-\tau,\rho}^0(x))$ zu berücksichtigen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left\{ \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x)^{(2)} \lambda(x) \right\} \\
& = \frac{1}{8} g^2 i f_{abc} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\rho^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\
& \cdot \left\{ \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} + 2k_{1\tau} - k_{1\rho})\right) - \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} - k_{1\rho})\right) \right. \\
& \quad + \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} - 2k_{2\rho} + 2k_{1\tau} - k_{1\rho})\right) + \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} - 2k_{2\rho} - k_{1\rho})\right) \\
& \quad + \cos\left(\frac{a}{2}(2k_{2\rho} + k_{2\tau} + k_{1\rho})\right) - \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} + k_{1\rho})\right) \\
& \quad \left. + \cos\left(\frac{a}{2}(2k_{2\rho} + k_{2\tau} + k_{1\rho} + 2k_{1\tau})\right) + \cos\left(\frac{a}{2}(k_{2\tau} + k_{1\rho} + 2k_{1\tau})\right) \right\} \\
& - \frac{1}{8} g^2 i f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_1+k_2+p)x} \tilde{A}_\tau^c(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{\lambda}^a(p) \\
& \cdot \left\{ \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau} + 2k_{1\rho})\right) + \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau} - 2k_{2\rho})\right) \right. \\
& \quad \left. - \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau} + 2k_{2\rho})\right) - \cos\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau} - 2k_{1\rho})\right) \right\}. \tag{6.42}
\end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \tag{6.43}$$

und

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \tag{6.44}$$

können wir daher

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_\mu^{(2)}(q) & = a^4 \sum_x e^{iqx} S_\mu^{(2)}(x) \\
& = g f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta_P(k_1 + k_2 + p + q) \tilde{\lambda}^a(p)
\end{aligned} \tag{6.45}$$

$$\cdot \left\{ \begin{aligned} & \bar{A}_\rho^c(k_1) \bar{A}_\tau^b(k_2) \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + 2k_2)_\rho \right) \cos (a(k_1 + k_2)_\tau) \cos (ak_{1\tau}) \right. \\ & \quad \left. - \cos \left(\frac{a}{2} k_{1\rho} \right) \sin (a(k_1 + k_2)_\tau) \sin (ak_{1\tau}) \right) \\ & \quad \left. + \bar{A}_\tau^c(k_1) \bar{A}_\rho^b(k_2) \frac{1}{2} \sin \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau \right) (\sin (ak_{1\rho}) - \sin (ak_{2\rho})) \right\} \quad (6.46) \end{aligned}$$

schreiben. Der Vertex $S_{\mu,\tau\rho}^{abc}(p, k_1, k_2)$ wird über

$$\tilde{S}_\mu^{(2)}(q) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta_P(k_1 + k_2 + p + q) S_{\mu,\tau\rho}^{abc}(p, k_1, k_2) \bar{A}_\rho^c(k_2) \bar{A}_\tau^b(k_1) \bar{\lambda}^a(p) \quad (6.47)$$

definiert, so daß wir das Ergebnis

$$\begin{aligned} S_{\mu,\tau\rho}^{abc}(p, k_1, k_2) = & g f_{abc} \left\{ \sum_\nu \delta_{\nu\rho} \sigma_{\nu\tau} \left(\cos \left(\frac{a}{2} (2k_1 + k_2)_\rho \right) \cos (a(k_1 + k_2)_\tau) \cos (ak_{2\tau}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos \left(\frac{a}{2} k_{2\rho} \right) \sin (a(k_1 + k_2)_\tau) \sin (ak_{2\tau}) \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_\nu \delta_{\rho\tau} \sigma_{\nu\tau} \sin \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau \right) (\sin (ak_{1\nu}) - \sin (ak_{2\nu})) \right\} \quad (6.48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & g f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \left\{ \left(\cos \left(\frac{a}{2} (2k_1 + k_2)_\rho \right) \cos (a(k_1 + k_2)_\tau) \cos (ak_{2\tau}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos \left(\frac{a}{2} k_{2\rho} \right) \sin (a(k_1 + k_2)_\tau) \sin (ak_{2\tau}) \right) \right. \\ & \left. + \frac{g}{2} f_{abc} \delta_{\rho\tau} \sum_\nu \sigma_{\nu\tau} \sin \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau \right) (\sin (ak_{1\nu}) - \sin (ak_{2\nu})) \right\} \quad (6.49) \end{aligned}$$

notieren können. Es ist noch die Symmetrisierung bezüglich der Gluonen vorzunehmen, d.h. bezüglich der simultanen Ersetzungen $a \leftrightarrow b$, $\nu \leftrightarrow \tau$ und $k_1 \leftrightarrow k_2$. Dies führt auf das finale Resultat

$$\begin{aligned} S_{\mu,\tau\rho}^{abc}(p, k_1, k_2) = & g f_{abc} \sigma_{\rho\tau} \frac{1}{2} \left\{ \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + 2k_2)_\rho \right) \cos (a(k_1 + k_2)_\tau) \cos (ak_{1\tau}) \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos \left(\frac{a}{2} k_{1\rho} \right) \sin (a(k_1 + k_2)_\tau) \sin (ak_{1\tau}) \right) \right. \\ & \left. + \cos \left(\frac{a}{2} (2k_1 + k_2)_\tau \right) \cos (a(k_1 + k_2)_\rho) \cos (k_{2\rho}) \right. \\ & \left. - \cos \left(\frac{a}{2} k_{2\tau} \right) \sin (a(k_1 + k_2)_\rho) \sin (ak_{2\rho}) \right\} \\ & + \frac{g}{2} f_{abc} \delta_{\rho\tau} \sum_\nu \sin \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau \right) (\sin (ak_{1\nu}) - \sin (ak_{2\nu})). \quad (6.50) \end{aligned}$$

Der Vergleich mit dem Kontinuumsergebnis (6.13) zeigt auch hier wieder Übereinstimmung bis zur Ordnung a einschließlich.

6.2.3 Der 3-Gluonen-Vertex des Superstroms

Der Kontinuumsfeldstärketensor $F_{\rho\tau}(x)$ hängt maximal quadratisch vom Eichfeld A ab. Daher tritt im Kontinuum kein 3-Gluonen-Vertex auf. Auf dem Gitter stellt die Plaquettenvariable $U_{\rho\tau}(x)$ jedoch eine unendliche Potenzreihe in g dar, so daß der n -Gluonen-Vertex hier für alle n auftritt. Die Entwicklung von $\mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) = -\frac{1}{2a^2}(U_{\rho\tau}(x) - U_{\tau\rho}(x))$ liefert in dritter Ordnung von A folgende Beiträge:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x)^{(3)} = & -\frac{1}{6}a \left(A_\tau(x)^3 - A_\rho(x)^3 - A_\tau(x+a\hat{\rho})^3 + A_\rho(x+a\hat{\tau})^3 \right) \\
 & -\frac{1}{4}a \left(-\left\{ A_\tau(x)^2, A_\tau(x+a\hat{\rho}) \right\} + \left\{ A_\rho(x+a\hat{\tau}), A_\rho(x)^2 \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \left\{ A_\rho(x+a\hat{\tau})^2, A_\rho(x) \right\} + \left\{ A_\tau(x), A_\tau(x+a\hat{\rho})^2 \right\} \right) \\
 & -\frac{1}{4}a \left(\left\{ A_\tau(x)^2, A_\rho(x+a\hat{\tau}) \right\} - \left\{ A_\tau(x+a\hat{\rho}), A_\rho(x)^2 \right\} \right. \\
 & \quad - \left\{ A_\tau(x)^2, A_\rho(x) \right\} + \left\{ A_\tau(x), A_\rho(x)^2 \right\} \\
 & \quad + \left\{ A_\tau(x), A_\rho(x+a\hat{\tau})^2 \right\} - \left\{ A_\tau(x+a\hat{\rho})^2, A_\rho(x) \right\} \\
 & \quad \left. - \left\{ A_\rho(x+a\hat{\tau})^2, A_\tau(x+a\hat{\rho}) \right\} + \left\{ A_\rho(x+a\hat{\tau}), A_\tau(x+a\hat{\rho})^2 \right\} \right) \\
 & -\frac{1}{2}a \left(A_\rho(x+a\hat{\tau}) A_\tau(x+a\hat{\rho}) A_\rho(x) + A_\tau(x) A_\tau(x+a\hat{\rho}) A_\rho(x) \right. \\
 & \quad - A_\tau(x) A_\rho(x+a\hat{\tau}) A_\rho(x) - A_\tau(x) A_\rho(x+a\hat{\tau}) A_\tau(x+a\hat{\rho}) \\
 & \quad - A_\tau(x+a\hat{\rho}) A_\rho(x+a\hat{\tau}) A_\tau(x) - A_\rho(x) A_\rho(x+a\hat{\tau}) A_\tau(x) \\
 & \quad \left. + A_\rho(x) A_\tau(x+a\hat{\rho}) A_\tau(x) + A_\rho(x) A_\tau(x+a\hat{\rho}) A_\rho(x+a\hat{\tau}) \right). \tag{6.51}
 \end{aligned}$$

Dieser Term wird – wie schon in der obigen Formel durch Leerzeilen angedeutet – in drei Beiträge unterteilt, die mit I, II und III bezeichnet werden. Mit der für beliebige $f_{\rho\tau}$ gültigen Beziehung

$$\sigma_{\rho\tau}(f_{\rho\tau} - f_{\tau\rho}) = 2\sigma_{\rho\tau} f_{\rho\tau} \tag{6.52}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr} \left\{ \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \gamma_\mu \lambda(x) \right\}^{(3),I} \\
 = & -\frac{1}{3}a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \text{Tr} \left\{ \left(A_\tau(x)^3 - A_\tau(x+a\hat{\rho})^3 \right) \lambda(x) \right\} \\
 & -\frac{1}{2}a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \text{Tr} \left\{ \left(-\left\{ A_\tau(x)^2, A_\tau(x+a\hat{\rho}) \right\} + \left\{ A_\tau(x), A_\tau(x+a\hat{\rho})^2 \right\} \right) \lambda(x) \right\}
 \end{aligned}$$

(6.53)

$$\begin{aligned}
&= -aig^3 \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{1}{3} \text{Tr} \left\{ T^a T^b T^c T^d \right\} \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \exp \left(ia(k_1 + k_2 + k_3)_\rho + i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \text{Tr}(\{T^a T^b, T^c\} T^d) \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + iak_{3\rho} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \text{Tr}(\{T^a, T^b T^c\} T^d) \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + ia(k_2 + k_3)_\rho \right) \right\}. \tag{6.54}
\end{aligned}$$

Mit der für die Generatoren der $SU(2)$ gültigen Beziehung

$$\text{Tr} \left\{ T^a T^b T^c T^d \right\} = \frac{1}{8} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \tag{6.55}$$

und der unmittelbaren Folgerung

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left(\{T^a T^b, T^c\} T^d \right) &= \text{Tr} \left\{ T^a T^b T^c T^d + T^c T^a T^b T^d \right\} \\
&= \frac{1}{8} (-f_{abe} f_{ecd} - f_{abe} f_{edc} + 2\delta_{ab} \delta_{cd}) \\
&= \frac{1}{4} \delta_{ab} \delta_{cd} \tag{6.56}
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
&\text{Tr} \left\{ \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \gamma_\mu \lambda(x) \right\}^{(3),I} \\
&= -aig^3 \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{1}{24} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \exp \left(ia(k_1 + k_2 + k_3)_\rho + i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd} \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + iak_{3\rho} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} \delta_{ad} \delta_{bc} \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + ia(k_2 + k_3)_\rho \right) \right\} \tag{6.57} \\
&= -aig^3 \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{1}{24} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. - \exp \left(ia(k_1 + k_2 + k_3)_\rho + i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd} \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + iak_{3\rho} \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$- \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + i a (k_1 + k_2)_\rho \right) \Bigg\}. \quad (6.58)$$

Nach Hinzunahme des $\mathcal{G}_{-\rho, -\tau}^0(x)$ -Terms ergibt sich

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ \sigma_{\rho\tau} \frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_{\rho, \tau}^0(x) + \mathcal{G}_{-\rho, -\tau}^0(x) \right) \gamma_\mu \lambda(x) \right\}^{(3), I} \\ &= -aig^3 \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\ & \quad \cdot \left\{ \frac{1}{24} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. - \cos \left(a(k_1 + k_2 + k_3)_\rho + \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right) \right. \\ & \quad \quad \left. - \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd} \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a k_{3\rho} \right) \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. - \cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a(k_1 + k_2)_\rho \right) \right) \right\}. \quad (6.59) \end{aligned}$$

Zur Vervollständigung der Clover-Plaquette sind die beiden noch verbleibenden Plaquetten hinzuzufügen, deren Beitrag wieder durch die Ersetzungen $\tau \rightarrow -\rho$ und $\rho \rightarrow \tau$ aus dem bisher berechneten Ergebnis hervorgeht. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \{ \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \}^{(3), I} \\ &= -\frac{1}{2} aig^3 \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\ & \quad \cdot \left\{ \frac{1}{24} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \right. \\ & \quad \quad \cdot \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) + \cos \left(-\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right. \\ & \quad \quad \left. - \cos \left(a(k_1 + k_2 + k_3)_\rho + \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right. \\ & \quad \quad \left. - \cos \left(a(k_1 + k_2 + k_3)_\rho - \frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \right) \\ & \quad \quad - \frac{1}{8} \delta_{ab} \delta_{cd} \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a k_{3\rho} \right) \right. \\ & \quad \quad \quad \left. - \cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a(k_1 + k_2)_\rho \right) \right. \\ & \quad \quad \quad \left. + \cos \left(-\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a k_{3\rho} \right) \right. \\ & \quad \quad \quad \left. - \cos \left(-\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau + a(k_1 + k_2)_\rho \right) \right) \Bigg\} \quad (6.60) \\ &= -ig^3 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\ & \quad \cdot \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \left\{ \frac{1}{12} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \sin^2 \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\rho \right) \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{4} \delta_{ab} \delta_{cd} (-\sin(a(k_1 + k_2 + k_3)_\rho) \sin(a(k_1 + k_2 - k_3)_\rho)) \Big) \Bigg\}. \quad (6.61)$$

Dies ist das Endergebnis für den mit römisch I indizierten Teil.

Für Teil II erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \{ \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \gamma_\mu \lambda(x) \}^{(3),II} \\ &= -\frac{1}{2} i g^3 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\ & \cdot \text{Tr} \left(\{ T^a T^b, T^c \} T^d \right) \\ & \cdot \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + i a k_{3\tau} + i \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \right. \\ & \quad - \exp \left(i a (k_1 + k_2)_\rho + i \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + i \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \\ & \quad - \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + i \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \\ & \quad \left. + \exp \left(i a (k_1 + k_2)_\rho + i \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + i a k_{3\tau} + i \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.62)$$

Für den Ausdruck mit der vollständigen Clover-Plaquette ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \{ \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \}^{(3),II} \\ &= -\frac{1}{16} i g^3 a \delta_{ab} \delta_{cd} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \\ & \cdot \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\ & \cdot \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + a k_{3\tau} + \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) - \cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \right. \\ & \quad - \cos \left(-\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau - a k_{3\tau} + \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) + \cos \left(-\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \\ & \quad - \cos \left(a (k_1 + k_2)_\rho + \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \\ & \quad + \cos \left(a (k_1 + k_2)_\rho + \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + a k_{3\tau} + \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \\ & \quad + \cos \left(a (k_1 + k_2)_\rho - \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \\ & \quad \left. - \cos \left(a (k_1 + k_2)_\rho - \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau - a k_{3\tau} + \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} i g^3 a \delta_{ab} \delta_{cd} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \\ & \cdot \sin(a(k_{1\rho} + k_{2\rho} + k_{3\rho})) \cos(a(k_{1\rho} + k_{2\rho})) \cos(a(k_{1\tau} + k_{2\tau} + k_{3\tau})) \sin(-a k_{3\tau}) \\ & \cdot \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p). \end{aligned} \quad (6.63)$$

Schließlich berechnet man für Teil III

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \{ \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}^0(x) \gamma_\mu \lambda(x) \}^{(3),III} \\ &= -i g^3 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\text{Tr} \left(T^a T^b T^c T^d \right) + \text{Tr} \left(T^c T^b T^a T^d \right) \right) \left(\exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + i a k_{2\rho} + i \frac{a}{2} k_{3\rho} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\text{Tr} \left(T^a T^c T^b T^d \right) + \text{Tr} \left(T^b T^c T^a T^d \right) \right) \right. \\
& \quad \left. \cdot \exp \left(i \frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + i a k_{2\rho} + i \frac{a}{2} k_{3\rho} + i a k_{3\tau} \right) \right) \quad (6.65)
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \left\{ \sigma_{\rho\tau} \frac{1}{2} \left(\mathcal{G}_{\rho,\tau}^0(x) + \mathcal{G}_{-\rho,-\tau}^0(x) \right) (x) \gamma_\mu \lambda(x) \right\}^{(3),III} \\
& = -ig^3 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \bar{A}_\tau^a(k_1) \bar{A}_\tau^b(k_2) \bar{A}_\rho^c(k_3) \bar{\lambda}^d(p) \\
& \quad \cdot \left(\frac{1}{4} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + a k_{2\rho} + a k_{3\rho} \right) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} (-f_{ace} f_{ebd} + \delta_{ac} \delta_{bd}) \cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + a k_{2\rho} + \frac{a}{2} k_{3\rho} + a k_{3\tau} \right) \right). \quad (6.66)
\end{aligned}$$

Hinzufügen der beiden noch fehlenden Plaquetten liefert dann

$$\begin{aligned}
& \text{Tr} \{ \sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau}(x) \gamma_\mu \lambda(x) \}^{(3),III} \\
& = -ig^3 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \bar{A}_\tau^a(k_1) \bar{A}_\tau^b(k_2) \bar{A}_\rho^c(k_3) \bar{\lambda}^d(p) \\
& \quad \cdot \left\{ \frac{1}{8} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + a k_{2\rho} + a k_{3\rho} \right) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \cos \left(-\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + a k_{2\rho} + a k_{3\rho} \right) \right) \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{1}{8} (-f_{ace} f_{ebd} + \delta_{ac} \delta_{bd}) \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + a k_{2\rho} + \frac{a}{2} k_{3\rho} + a k_{3\tau} \right) \right. \right. \\
& \quad \quad \left. \left. - \cos \left(-\frac{a}{2} (k_1 + k_2)_\tau + a k_{2\rho} + \frac{a}{2} k_{3\rho} - a k_{3\tau} \right) \right) \right\} \\
& = -ig^3 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ix(k_1+k_2+k_3+p)} \bar{A}_\tau^a(k_1) \bar{A}_\tau^b(k_2) \bar{A}_\rho^c(k_3) \bar{\lambda}^d(p) \\
& \quad \cdot \left\{ \frac{1}{8} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \left(-2 \sin(a(k_{2\rho} + k_{3\rho})) \sin \left(\frac{a}{2} (k_{1\tau} + k_{2\tau}) \right) \right) \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{1}{8} (-f_{ace} f_{ebd} + \delta_{ac} \delta_{bd}) \right. \\
& \quad \quad \left. \cdot \left(-2 \sin \left(\frac{a}{2} (2k_{2\rho} + k_{3\rho}) \right) \cdot \sin \left(\frac{a}{2} (k_{1\tau} + k_{2\tau} + 2k_{3\tau}) \right) \right) \right\}. \quad (6.67)
\end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich also die folgenden Beiträge zum Drei-Gluonen-Vertex des Superstroms:

$$\begin{aligned}
& \tilde{S}_\mu^{(3)}(q) = a^4 \sum_x e^{iqx} S_\mu^{(3)}(x) \quad (6.68) \\
& = -g^2 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta_P(k_1 + k_2 + k_3 + p + q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\cos \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\tau \right) \left\{ \frac{1}{6} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \sin^2 \left(\frac{a}{2} (k_1 + k_2 + k_3)_\rho \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \delta_{ab} \delta_{cd} (-\sin(a(k_1 + k_2 + k_3)_\rho) \sin(a(k_1 + k_2 - k_3)_\rho)) \right\} \right) \\
& \cdot \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\tau^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
& - g^2 a \delta_{ab} \delta_{cd} \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta_P(k_1 + k_2 + k_3 + p + q) \\
& \cdot \sin(a(k_{1\rho} + k_{2\rho} + k_{3\rho})) \cos(a(k_{1\rho} + k_{2\rho})) \cos(a(k_{1\tau} + k_{2\tau} + k_{3\tau})) \sin(-ak_{3\tau}) \\
& \cdot \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p) \\
& - g^2 a \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta_P(k_1 + k_2 + k_3 + p + q) \\
& \cdot \left\{ \frac{1}{2} (-f_{abe} f_{ecd} + \delta_{ab} \delta_{cd}) \left(-\sin(a(k_{2\rho} + k_{3\rho})) \sin\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau})\right) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} (-f_{ace} f_{ebd} + \delta_{ac} \delta_{bd}) \right. \\
& \quad \left. \cdot \sin\left(\frac{a}{2}(2k_{2\rho} + k_{3\rho}) \sin\left(\frac{a}{2}(k_{1\tau} + k_{2\tau} + 2k_{3\tau})\right)\right) \right\} \\
& \cdot \tilde{A}_\tau^a(k_1) \tilde{A}_\tau^b(k_2) \tilde{A}_\rho^c(k_3) \tilde{\lambda}^d(p). \tag{6.69}
\end{aligned}$$

Der Vertex $S_{\mu,\tau\rho\nu}^{abcd}(p, k_1, k_2, k_3)$ wird über

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_\mu^{(3)}(q) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta_P(k_1 + k_2 + k_3 + p + q) S_{\mu,\tau\rho\nu}^{abcd}(p, k_1, k_2, k_3) \\
& \cdot \tilde{A}_\tau^b(k_1) \tilde{A}_\rho^c(k_2) \tilde{A}_\nu^d(k_3) \tilde{\lambda}^a(p) \tag{6.70}
\end{aligned}$$

definiert, so daß wir das Endergebnis

$$\begin{aligned}
& S_{\mu,\tau\rho\nu}^{abcd}(p, k_1, k_2, k_3) \\
&= -\frac{ag^2}{2} \delta_{\rho\tau} \left\{ \frac{1}{3} \delta_{\tau\nu} \sum_\sigma \sigma_{\sigma\tau} \gamma_\mu (f_{ade} f_{bce} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \right. \\
& \quad \cdot \cos\left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2 + k_3)_\tau\right) \sin^2\left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2 + k_3)_\sigma\right) \\
& \quad + \delta_{\tau\nu} \sum_\sigma \sigma_{\sigma\tau} \gamma_\mu \delta_{ad} \delta_{bc} \sin(a(k_1 + k_2 + k_3)_\nu) \sin(a(k_1 + k_2 - k_3)_\nu) \\
& \quad - 2\sigma_{\nu\tau} \gamma_\mu \delta_{ad} \delta_{bc} \sin(a(k_1 + k_2 + k_3)_\nu) \cos(a(k_1 + k_2)_\nu) \\
& \quad \cdot \sin(a(k_1 + k_2 + k_3)_\tau) \sin(ak_{3\tau}) \\
& \quad - \sigma_{\nu\tau} \gamma_\mu (f_{ade} f_{bce} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \sin(a(k_2 + k_3)_\nu) \sin\left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2)_\tau\right) \\
& \quad \left. + \sigma_{\nu\tau} \gamma_\mu (f_{ade} f_{bce} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \sin(a(2k_2 + k_3)_\nu) \sin\left(\frac{a}{2}(k_1 + k_2 + 2k_3)_\tau\right) \right\} \tag{6.71}
\end{aligned}$$

ablesen können. Dieser Vertex ist im Kontinuum nicht präsent, und der Gitter-Ausdruck liefert in nullter und erster Ordnung von a keinen Beitrag. Somit wird auch hier der Kontinuumslikes korrekt reproduziert.

Für konkrete störungstheoretische Berechnungen ist dieser Ausdruck noch gegen den Austausch der Gluonen zu symmetrisieren, d.h. es sind alle sechs Permutationen der Tripel (k_1, τ, b) , (k_2, ρ, c) und (k_3, ν, d) zu beachten. Da sich die dabei entstehenden Terme in diesem Fall nicht weiter zusammenfassen lassen, wird an dieser Stelle darauf verzichtet, die (längliche) symmetrisierte Form anzugeben.

6.3 Feynman-Graphen der 1-Loop-Korrektur zum Superstrom

Um die 1-Loop-Korrektur zur supersymmetrischen Ward-Identität zu ermitteln, bieten sich als äußere Zustände beispielsweise ein Fermion und ein Gluon an, d.h. man kann in der Schreibweise von Kapitel 4 $\mathcal{O} = \bar{\lambda}^a A_\tau^b$ betrachten, um etwa das Renormierungsverhalten des Superstroms zu untersuchen. Im Kontinuum tragen dann bei verschwindendem Impulsübertrag am oberen Vertex die folgenden vier Diagramme zur Amplitude $\langle \bar{\lambda}^a A_\tau^b S_\mu \rangle$ bei:

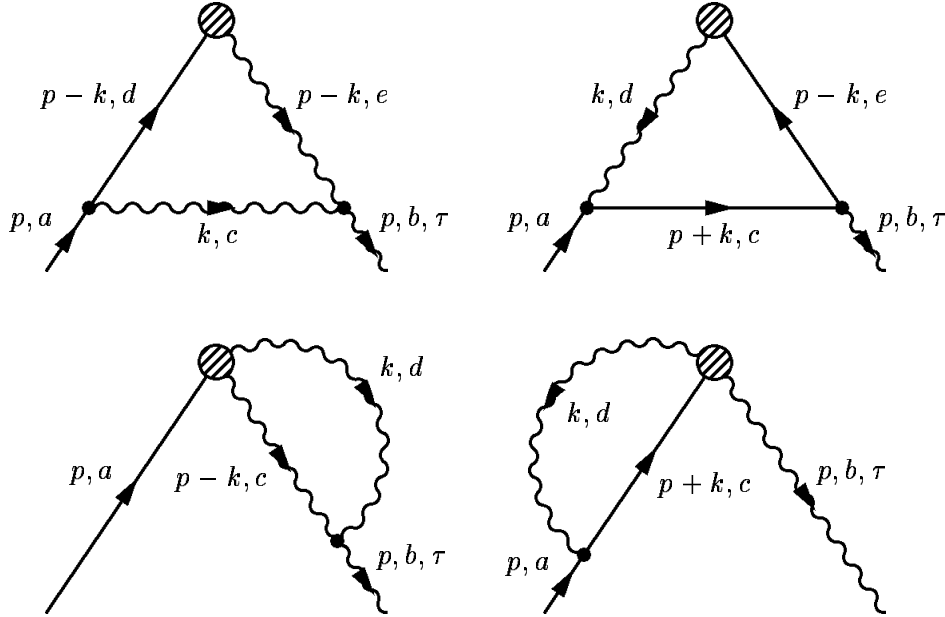


Abbildung 6.3: 1-Loop-Graphen des Superstroms im Kontinuum

Auf dem Gitter gibt es außerdem die beiden folgenden Beiträge:

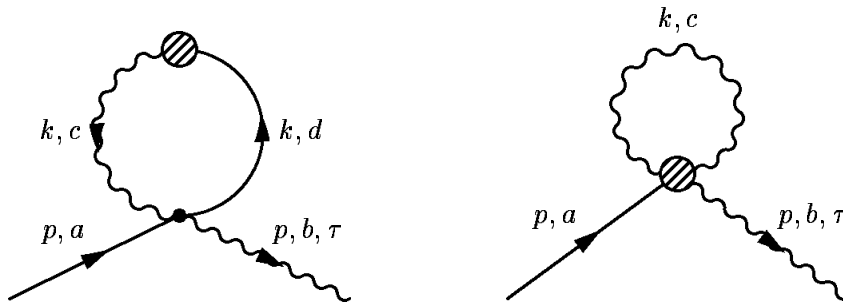


Abbildung 6.4: Zusätzliche 1-Loop-Graphen des Superstroms auf dem Gitter

6.4 Mischungsverhalten des Superstroms

In Kapitel 5.6 hatten wir das Mischungsverhalten des Diskretisierungsfehlers X_A der axialen Ward-Identität betrachtet. Ein völlig analoges Verhalten findet man auch in der su-

persymmetrischen Identität, dort ist die Renormierung des Operators X_S zu studieren. Er ist auf Baumgraphen-Niveau von Ordnung $\mathcal{O}(a^2) + r\mathcal{O}(a)$ und daher irrelevant, liefert aber in perturbativen Betrachtungen gleichwohl einen nicht-verschwindenden Beitrag. Auf der Basis von Dimensionsbetrachtungen (X_S ist vom Typ $a \cdot (\text{Dimension}-\frac{11}{2})$ -Operator) und aufgrund der BRS-Invarianz identifizieren CURCI und VENEZIANO in [CV] folgende Operatoren, mit denen eine Mischung möglich ist:

- eichinvariante Operatoren, repräsentiert durch eine Basis $\Delta_\mu S_\mu$, $\Delta_\mu T_\mu$, $\gamma_\nu \mathcal{D}_\mu \mathcal{G}_{\mu\nu} \lambda$ und $\sigma_{\rho\tau} \mathcal{G}_{\rho\tau} \lambda$. Dabei ist $T_\mu = \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu \lambda(x)$
- Operatoren, die sich durch BRS-Transformation aus Operatoren der Dimension $\frac{7}{2}$ und $\frac{5}{2}$ ergeben.

In Korrelationsfunktionen zwischen eichinvarianten äußeren Zuständen braucht die zweite Gruppe von Operatoren nicht berücksichtigt zu werden. Durch eine analoge Prozedur wie im chiralen Fall definiert man einen subtrahierten Operator $\overline{X}_S$, der im Kontinuumslimit endlich bleibt, verlangt die Renormierungsbedingung

$$\lim_{a \rightarrow 0} \langle \mathcal{O} \overline{X}_S(x) \rangle = 0 \quad (6.72)$$

und erhält dann die renormierte Ward-Identität zu

$$\langle \mathcal{O}(Z_S \Delta_\mu S_\mu + Z_T \Delta_\mu T_\mu) \rangle = 2(m_0 - \tilde{m}) Z_D^{-1} \langle \mathcal{O} Z_D D_S(x) \rangle + \mathcal{O}(a). \quad (6.73)$$

Wieder tritt eine additive Massenkorrektur auf und die renormierte Masse ist durch

$$Z_D^{-1}(m_0 - \tilde{m}) \quad (6.74)$$

gegeben [DGHV].

Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Der erste Teil dieser Arbeit (Kapitel 1 bis 4) beschäftigt sich mit dem in [Lu] offen gebliebenen Problem, eine geeignete Verbesserung der supersymmetrischen Transformationen der $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter zu finden, die eine $\mathcal{O}(a)$ -Erhaltung der Supersymmetrie auch in diskretisierter Raum-Zeit gestattet. Nach einer kurzen Einführung in die Kontinuums-theorie, habe ich dazu zunächst in Kapitel 2 die Schwachstellen einer naiven Diskretisierung der Lagrange-Dichte des Modells und der SUSY-Transformationen analysiert. Dabei konnte ich zeigen, daß die Brechung der Supersymmetrie in erster Linie darauf zurückzuführen ist, daß (kovariante) Gitter-Ableitungen in der Regel nicht der Produktregel genügen und daß bei ungeschickter Wahl des Feldstärketensors außerdem die im Kontinuum exakt gültige Bianchi-Identität auf dem Gitter bereits in erster Ordnung der Gitterkonstanten verletzt ist.

Im dritten Kapitel ist es mir dann gelungen, die so gewonnen Erkenntnisse dazu zu nutzen, um die o.g. Störungen in erster Ordnung von a durch eine geschickte Wahl der Lagrange-Dichte und der SUSY-Transformationen in höhere Ordnungen zu verschieben. Zumindest jedenfalls gelingt dies im r -unabhängigen Anteil der Variation der Lagrange-Dichte. Konstruktionsprinzip ist dabei die geometrische Symmetrisierung der Gitterausdrücke für die kovariante Ableitung, des Feldstärketensors und der Transformationen der Linkvariablen des Eichfeldes. Es konnte außerdem gezeigt werden, daß sich durch die Wahl eines nicht-lokalen Stroms weitere Störungen höherer Ordnungen eliminieren lassen, genauer läßt sich hierdurch der Diskretisierungsfehler der Leibniz-Regel partiell umgehen.

Die Herleitung der Ward-Identitäten im vierten Kapitel ist in erster Linie als Vorbereitung zur Untersuchung ihres Kontinuums-limes zu verstehen. Insbesondere habe ich verschiedene lokale und nicht-lokale Formulierungen des Noether-Stroms konstruiert, die sich dann perturbativ behandeln lassen bzw. zur numerischen Bestimmung von geeigneten Matrixelementen herangezogen werden können. Durch die Angabe der SUSY-brechenden Terme X_S im Fall verschiedener Ströme werden hier alle in der nackten Identität präsenten Operatoren in ihrer expliziten Form aufgeführt. Hierdurch werden alle Voraussetzungen für weitergehende numerische oder analytische Untersuchungen der supersymmetrischen Ward-Identität geschaffen.

Die abschließenden Kapitel 5 und 6 enthalten erste Schritte zur perturbativen Behandlung von gitterregularisierten Ward-Identitäten. Insbesondere werden verschiedene Re-

normierungsschemata vorgestellt, und ihre Eigenschaften werden diskutiert. Durch die explizite Berechnung der multiplikativen Renormierungskonstanten der in der axialen Ward-Identität vorkommenden Operatoren konnte dann gezeigt werden, wie sich die Verknüpfungen zwischen den nackten bzw. renormierten Greenschen Funktionen auf die Renormierungskonstanten auswirken. Wir stellen fest, daß der axiale Strom im Kontinuum (in Abwesenheit von Anomalien) exakt erhalten ist ($Z_A = 1$), während die chirale Symmetrie auf dem Gitter bereits auf klassischem Niveau gebrochen wird. Dennoch äußert sich die Gültigkeit der Gitter-Ward-Identität in der Beobachtung, daß die Renormierungskonstante des axialen Vektorstroms in 1-Loop-Ordnung auch auf dem Gitter von der Wahl des Renormierungsschemas unabhängig und endlich ist. Wir konnten außerdem verifizieren, daß die Renormierungskonstanten der betrachteten Operatoren $S = \bar{\lambda}\lambda$, $P = \bar{\lambda}\gamma_5\lambda$ und $J_\mu^5 = \bar{\lambda}\gamma_\mu\gamma_5\lambda$ (in geeigneten Renormierungsschemata) eichunabhängig sind. Kapitel 5 enthält die durchgeführten Rechnungen in relativ breitem Detail, dennoch wird aber auch das methodische Vorgehen erläutert, so daß zukünftige perturbative Rechnungen auf der Grundlage der hier gegebenen Beispiele erfolgen können.

Das abschließende sechste Kapitel stellt die Feynman-Regeln für die Vertices des Superstroms bereit und zeigt auf, welche Graphen zu seiner Renormierung betrachtet werden müssen. Eventuelle weitere Rechnungen können daher auf den Resultaten dieses Abschnittes aufbauen.

Insgesamt wurde in dieser Arbeit somit die in [Lu] begonnene klassische Analyse der supersymmetrischen Ward-Identität in erster Ordnung von a zu Ende geführt, und die offen gebliebene Frage nach einer Verbesserung der SUSY-Transformationen konnte positiv beantwortet werden. Durch die störungstheoretischen Betrachtungen in Kapitel 5 und 6 wurde ferner ein Einstieg in die perturbative Behandlung von Ward-Identitäten geschaffen, wobei erste Resultate erzielt werden konnten. Insbesondere das letzte sechste Kapitel eröffnet Möglichkeiten zur direkten Anknüpfung.

Ausblick

Die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen erlauben nach dem oben Gesagten eine Vielzahl von sich anschließenden Untersuchungen. Besonders motivieren möchte ich hier die folgenden Punkte:

- Es kann versucht werden, die in Kapitel 3 vorgestellte „Verbesserung“ der supersymmetrischen Transformationen auch in höheren Ordnungen vorzunehmen und die Brechungsterme in quadratischer und weiteren Ordnungen zu eliminieren. Es stellt sich dabei die Frage, ob dies für alle Ordnungen möglich ist oder ob die Möglichkeiten der vorgegebenen Wirkung gewissermaßen ausgereizt sind, sie stimmt ja nur bis auf Terme des Typs $\mathcal{O}(a^2) + r\mathcal{O}(a)$ mit der Kontinuumswirkung überein. Es ist dabei nicht davon auszugehen, daß sich die in Kapitel 3 vorgestellte Lagrange-Dichte weiter optimieren läßt. Die Behandlung höherer Terme unterscheidet sich daher fundamental von der ersten Ordnung, denn nun sind die SUSY-Transformationen nicht nur im Hinblick ihres eigenen Kontinuumslikes zu wählen, sondern es müssen Terme

hinzugefügt werden, die die Diskretisierungsfehler der Wirkung ausmerzen. Es wäre hierbei sicherlich einen Versuch wert, zu überprüfen, ob Erkenntnisse aus der Theorie der verbesserten Wirkungen in dieser Frage zu Fortschritten führen können, d.h. ob man die dortigen Methoden auf die Verbesserung der SUSY-Transformationen übertragen kann.

- Die Störungstheorie der chiralen Ward-Identität könnte in ihrer vollen Bandbreite durchgeführt werden. Man würde dazu den nicht-lokalen Strom $J_\mu^5(x) = \bar{\lambda}(x)\gamma_\mu\gamma_5 \cdot U_\mu^\dagger(x)\lambda(x+a\hat{\mu})U_\mu(x)$ wählen und seine Matrixelemente bei beliebigem Impulsübertrag auswerten. Weiterhin könnte der Brechungsterm X_A mit in die Betrachtungen einbezogen werden. Dann ist auch eine Bestimmung der additiven Renormierungskonstanten der Masse möglich, die für die Einstellung des chiralen Limes von Bedeutung ist. Ähnliche Rechnungen wurden in [Ta] bereits durchgeführt, allerdings wird das verwendete Renormierungsschema dort nur unzureichend dokumentiert. Insbesondere ist unklar, wie TANIGUCHI auf dem Gitter zum Ergebnis $Z_A = 1$ kommt. Bei der nicht-lokalen Wahl des Stroms wäre es interessant zu beobachten, ob und wie sich das Ergebnis im Fall von Majorana-Spinoren von den Resultaten für Dirac-Fermionen unterscheidet. Im letzteren Fall hat der axiale Vektorstrom die Gestalt $\frac{1}{2}(\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5 U_\mu^\dagger(x)\psi(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x)\bar{\psi}(x+a\hat{\mu})U_\mu(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x))$, unterscheidet sich also leicht von dem Strom für Majorana-Spinoren λ . Auch könnten gluonische äußere Zustände gewählt werden, so daß sich die chirale Anomalie aufgrund der dann auftretenden Dreiecksgraphen mit in die Betrachtungen einschließen läßt. Die Einbeziehung höherer Loop-Ordnungen ist bei allen eventuellen störungstheoretischen Kalkulationen von prinzipiellem Interesse, denn erst hier kommt die Majorana-Natur der Gluinos voll zum Tragen.
- An die Vorbereitungen des sechsten Kapitels schließen sich in kanonischer Weise perturbative Untersuchungen des SUSY-Stroms an. Dabei kann einerseits das in [GP] vorgestellte Programm weiter verfolgt werden, andererseits können – wie in dieser Arbeit für die chirale Ward-Identität geschehen – die Renormierungskonstanten des SUSY-Stroms und des Masseterms D_S in den vorgestellten Schemata bestimmt werden. Die dazu zu betrachtenden Graphen wurden in Kapitel 6 explizit angegeben, falls man als äußere Zustände ein Fermion und ein Boson wählt. Erste Schritte zur Renormierung des Superstroms in dimensioneller Regularisierung des Kontinuums wurden von Claus Gebert und mir bereits vorgenommen. Die Ausdrücke der in Abb. 6.3 aufgeführten vier Graphen wurden (unter Verwendung eines geeigneten Projektors) berechnet. Aufgrund der für die Bestimmung der Renormierungskonstanten des Superstroms notwendigen Renormierung der gluonischen Wellenfunktion wurden diese vorläufigen Ergebnisse jedoch nicht in diese Arbeit aufgenommen. Interessant ist es zu untersuchen, inwiefern die dimensionelle Regularisierung die supersymmetrische Invarianz bricht, und zu entscheiden, ob sich wie im Fall des axialen Stroms $Z_S^{\overline{MS}} = 1$ ergibt. Analog zur axialen Ward-Identität sollte auch hier im gitterregularisierten Fall der Term X_S mit in die Betrachtungen aufgenommen werden, um eine störungstheoretische Abschätzung für die additive Massenkorrektur und den damit verbundenen supersymmetrischen Limes zu erhalten. Vergleichbare Rechnungen hierzu wurden in [Ta] vorgestellt, sind aber wiederum aufgrund fehlender Erläute-

rungen nur bedingt verwendbar. TANIGUCHI beobachtet dabei eine Mischung des Operators X_S auch mit nicht eichinvarianten Operatoren, was an der Wahl eichvarianter externer Zustände liegt. Abhilfe kann hier die Verwendung des Schrödinger-Funktional-Formalismus (vgl. z.B. [LNWW], [LW96], [Lü]) oder eine geeignete (eichinvariante) Wahl der äußeren Zustände schaffen. Besonderes Augenmerk ist dabei auf das Mischungsverhalten des Brechungsterms X_S zu richten, welches die additive Renormierung des Superstroms bestimmt. Es kann insbesondere überprüft werden, ob Z_S und Z_T im Limes $a \rightarrow 0$ endlich bleiben. Durch perturbative Untersuchungen kann auch der Frage nach eventuellen Anomalien in den supersymmetrischen Ward-Identitäten weiter nachgegangen werden³. Es besteht hier ein enger Bezug zur sogenannten Spuranomalie des Energie-Impuls-Tensors und zur chiralen Anomalie (J_μ^5 , der Energie-Impuls-Tensor $\theta_{\mu\nu}$ und S_μ gehören zu einem Supermultiplett, gleiches gilt für die zugehörigen anomalen Terme).

- Die supersymmetrische Ward-Identität kann zur nicht-perturbativen Bestimmung insbesondere der additiven Renormierungskonstanten der Masse verwendet werden. Dazu schreibt man (6.73) in der Form [DGHV]

$$\frac{Z_S}{Z_T} \langle \mathcal{O}_i(y) \Delta_\mu S_\mu(x) \rangle + \langle \mathcal{O}_i(y) \Delta_\mu T_\mu(x) \rangle = 2 \frac{m_0 - \tilde{m}}{Z_T} \langle \mathcal{O}_i(y) D_S(x) \rangle$$

(Kontaktterme können im Fall $x \neq y$ ignoriert werden) und bestimmt die auftretenden Matrixelemente für zwei verschiedene Operatoren $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ bei endlicher Gitterkonstante mit Hilfe von Monte-Carlo-Simulationen. Das resultierende Gleichungssystem kann nach $\frac{Z_S}{Z_T}$ und $\frac{m_0 - \tilde{m}}{Z_T}$ aufgelöst werden und ermöglicht so die Bestimmung des supersymmetrischen Limes $(m_0 - \tilde{m}) \rightarrow 0$. Unabhängig davon kann nach gleichem Prinzip aus der axialen Ward-Identität die Feineinstellung der nackten Masse bestimmt werden, die zum Erreichen des chiralen Limes notwendig ist:

$$\frac{Z_A - \tilde{Z}_A}{Z_Q} \langle \Delta_\mu J_\mu^5(x) \mathcal{O}_i(y) \rangle - \langle \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) \tilde{\mathcal{G}}_{\mu\nu}(x) \mathcal{O}_i(y) \rangle = 2 \frac{m_0 - \tilde{m}}{Z_Q} \langle P(x) \mathcal{O}_i(y) \rangle$$

(auch hier $y \neq x$). Ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den perturbativ bestimmten Resultaten ist dabei sowohl im axialen als auch im supersymmetrischen Fall anzustreben.

- Bei der Wahl der Operatoren $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ zur nicht-perturbativen Untersuchung der supersymmetrischen Ward-Identität eröffnen sich prinzipiell die folgenden beiden Möglichkeiten: Es können Operatoren gewählt werden, die nicht SUSY-invariant sind, in diesem Fall tritt dann die Variation des Operators explizit in der Ward-Identität auf. Um die daraus resultierenden Kontaktterme zu vermeiden, sollte in der obigen Notation daher $y \neq x$ gelten. Die zweite Alternative besteht prinzipiell darin, einen SUSY-invarianten Operator zu konstruieren, der sich – vergleichbar zur Wirkung – über das gesamte Gitter erstreckt. Über die Existenz solcher Operatoren ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt jedoch nichts bekannt. In der ersten genannten

³In der Literatur wird eine supersymmetrische Anomalie beispielsweise in [AGS77a], [AGS77b], [HPT], [MPS80a], [MPS80b], [INR] und [NO] diskutiert.

Gruppe von Operatoren sind in erster Linie die Wahlen $\mathcal{O} \sim D_S$, $\mathcal{O} \sim T_\mu$ oder beispielsweise auch $\mathcal{O} \sim \Delta_\mu T_\mu$ denkbar. Bei diesen Operatoren handelt es sich um Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen mit Majorana-Charakter.

Anhang A

Dirac-Matrizen

In dieser Arbeit werden ausschließlich die euklidischen Dirac-Matrizen verwendet. Sie sind mit denen des Minkowski-Raumes durch

$$\begin{aligned}\gamma_j^{(E)} &= -i\gamma_j^{(M)} & j = 1, 2, 3 \\ \gamma_4^{(E)} &= -i\gamma_4^{(M)} = \gamma_0^{(M)}\end{aligned}\tag{A.1}$$

verknüpft. Es gelten dann mit der Bezeichnung $\gamma_\mu \equiv \gamma_\mu^{(E)}$ die folgenden Relationen:

$$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu\tag{A.2}$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{1},\tag{A.3}$$

insbesondere ist $\gamma_\mu^2 = \mathbb{1} \forall \mu$.

Außerdem definiert man

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\tag{A.4}$$

$$\sigma_{\rho\tau} = \frac{i}{2}[\gamma_\rho, \gamma_\tau].\tag{A.5}$$

Dann gilt

$$\gamma_5 = \gamma_5^\dagger\tag{A.6}$$

$$\gamma_5^2 = \mathbb{1}\tag{A.7}$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0\tag{A.8}$$

$$\sigma_{\rho\tau} = i\gamma_\rho\gamma_\tau - i\delta_{\rho\tau}\mathbb{1}.\tag{A.9}$$

Weiterhin werden die folgenden Relationen benutzt:

$$\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau} = i(\delta_{\mu\rho}\gamma_\tau - \delta_{\mu\tau}\gamma_\rho) - i\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}\gamma_\nu\gamma_5\tag{A.10}$$

$$\{\gamma_\mu, \sigma_{\rho\tau}\} = -2i\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}\gamma_\nu\gamma_5\tag{A.11}$$

$$[\gamma_\mu, \sigma_{\rho\tau}] = 2i(\delta_{\mu\rho}\gamma_\tau - \delta_{\mu\tau}\gamma_\rho).\tag{A.12}$$

Dabei ist $\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}$ der total antisymmetrische Tensor vierter Stufe, $\varepsilon_{\mu\rho\tau\nu}$ gibt also das Signum der Permutation aus S_4 an, die $(1, 2, 3, 4)$ auf (μ, ρ, τ, ν) abbildet.

Für 4×4 -Spuren über Produkte von Gamma-Matrizen gilt

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu} \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\tau) = 4(\delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\tau} + \delta_{\mu\tau}\delta_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\tau}). \quad (\text{A.14})$$

Die Spur über eine ungerade Anzahl von Dirac-Matrizen verschwindet.

Mit den Antivertauschungsrelationen der Dirac-Matrizen rechnet man nach, daß in $D = 4$ Dimensionen die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\rho &= 2\delta_{\mu\rho} \gamma_\rho - \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\mu \\ &= 2\gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\rho \\ &= -2\gamma_\mu \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\rho &= \gamma_\rho \gamma_\tau (2\delta_{\rho\mu} - \gamma_\rho \gamma_\mu) \\ &= 2\gamma_\mu \gamma_\tau - \gamma_\rho \gamma_\tau \gamma_\rho \gamma_\mu \\ &= 2\gamma_\mu \gamma_\tau + 2\gamma_\tau \gamma_\mu \\ &= 2\{\gamma_\mu, \gamma_\tau\} \\ &= 4\delta_{\mu\tau} \mathbb{1} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\tau \gamma_\rho &= \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu (2\delta_{\rho\tau} - \gamma_\rho \gamma_\tau) \\ &= 2\gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu - \gamma_\rho \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\tau \\ &= 2\gamma_\tau \gamma_\nu \gamma_\mu - 4\delta_{\nu\mu} \gamma_\tau \\ &= -2\gamma_\tau \gamma_\mu \gamma_\nu. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Dabei ist eine Summation über ρ impliziert.

Der Ladungskonjugationsoperator C besitzt die folgenden Eigenschaften [Ka], [Mu]:

$$C^\dagger = C^{-1} \quad (\text{A.18})$$

$$C^t = -C \quad (\text{A.19})$$

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^t \quad (\text{A.20})$$

$$C^{-1}\gamma_\mu^t C = -\gamma_\mu \quad (\text{A.21})$$

$$C\gamma_5 C^{-1} = \gamma_5^t \quad (\text{A.22})$$

$$C\sigma_{\rho\tau} C^{-1} = -\sigma_{\rho\tau}^t. \quad (\text{A.23})$$

Eine mögliche Darstellung der Dirac-Matrizen ist

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_j \\ i\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

für $j = 1, 2, 3$ (die σ_j sind die Pauli-Matrizen). Für γ_4 und γ_5 kann man die Dirac-Darstellung

$$\gamma_0 = \gamma_4 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

oder die Weyl-Darstellung

$$\gamma_0 = \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

benutzen [MM]. Die Ladungskonjugationsmatrix kann darstellungsfrei als

$$C = i\gamma_2^{(M)} \gamma_0 = -\gamma_2^{(E)} \gamma_0 \quad (\text{A.27})$$

gewählt werden [KS]. In Weyl-Darstellung ist also

$$C = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

möglich und in Dirac-Darstellung kann

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

verwendet werden [MM].

Anhang B

Die $SU(N_c)$ -Farbalgebra

B.1 Allgemeine Relationen

Der Darstellungsraum der Eichgruppe $SU(N_c)$ in der Fundamentaldarstellung besteht aus N_c -komponentigen Vektoren ϕ . Die Eichtransformationen wirken dann via

$$\phi(x) \rightarrow \omega(x)\phi(x), \quad (\text{B.1})$$

wobei U eine Matrix aus $SU(N_c)$ ist. Diese lassen sich in der Form

$$\omega(x) = e^{i\theta^a(x)T^a} \quad (\text{B.2})$$

schreiben, wobei die T^a die Generatoren der Eichgruppe in Fundamentaldarstellung sind. Genauer bilden sie eine Basis der zu $SU(N)$ gehörigen Lie-Algebra. Für die Details konsultiere man etwa [Ku] oder [FS]. Die Anzahl der Generatoren beträgt im Fall der $SU(N_c)$ $N_c^2 - 1$. Für diese spurfreien, hermiteschen Matrizen gelten mit der Normierung

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (\text{B.3})$$

die Beziehungen

$$[T^a, T^b] = if_{abc}T^c \quad (\text{B.4})$$

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N_c}\delta_{ab} + d_{abc}T^c. \quad (\text{B.5})$$

Die f_{abc} sind die Strukturkonstanten der Eichgruppe¹ und sind total antisymmetrisch gegen die Vertauschung zweier Indizes. Die auftretenden Konstanten d_{abc} sind über

$$d_{abc} = 2\text{Tr}(\{T^a, T^b\}T^c) \quad (\text{B.6})$$

definiert und sind total symmetrisch gegen Permutationen der Indizes. Man kann nun folgern:

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4}(d_{abc} + if_{abc}) \quad (\text{B.7})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) = \frac{1}{4N_c}\delta_{ab}\delta_{cd} + \frac{1}{8}(d_{abe} + if_{abe})(d_{cde} + if_{cde}). \quad (\text{B.8})$$

¹Sie legen die Struktur der zugehörigen Lie-Algebra eindeutig fest.

Außerdem gilt

$$f_{acd}f_{bcd} = \delta_{ab}C_A, \quad (\text{B.9})$$

wobei $C_A = N_c$.

B.2 Der Fall $N_c = 2$

Im Fall der $SU(2)$ lassen sich als Generatoren etwa Vielfache der Pauli-Matrizen wählen, so daß dann mit

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

gilt

$$T^a = \frac{1}{2}\sigma^a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (\text{B.11})$$

Die Pauli-Matrizen erfüllen

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma^c \quad (\text{B.12})$$

$$\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta_{ab}\mathbb{1}, \quad (\text{B.13})$$

also ist im Fall der $SU(2)$

$$f_{abc} = \varepsilon_{abc} \quad (\text{B.14})$$

$$d_{abc} = 0. \quad (\text{B.15})$$

Für $N_c = 2$ gilt daher

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c) = \frac{1}{4}if_{abc} \quad (\text{B.16})$$

$$\text{Tr}(T^a T^b T^c T^d) = \frac{1}{8}(\delta_{ab}\delta_{cd} - f_{abe}f_{cde}). \quad (\text{B.17})$$

B.3 Adjungierte Darstellung

Die in dieser Arbeit behandelten Fermionen befinden sich in der adjungierten Darstellung. Die Darstellungsmatrizen sind dann keine $N_c \times N_c$ -Matrizen mehr, sondern sind vom Typ $(N_c^2 - 1) \times (N_c^2 - 1)$. Der Darstellungsraum kann als Raum von $(N_c^2 - 1)$ -komponentigen Vektoren gewählt werden, die sich dann wie

$$\phi_b \rightarrow (e^{i\theta^a \text{ad}(T^a)})_b^c \phi_c \quad (\text{B.18})$$

transformieren. Dabei ist $\text{ad}(T^a)_b^c = if_{abc}$. Die Einträge der Darstellungsmatrix des Generators a ($a = 1, 2, \dots, N_c^2 - 1$) sind dann also für festes a durch die if_{abc} gegeben.

Alternativ kann man die Elemente des Darstellungsraumes auch als spurfreie $N_c \times N_c$ -Matrizen wählen und die in der Fundamentaldarstellung eingeführten $N_c \times N_c$ -Matrizen

T^a als Generatoren auffassen. Die Transformationsregel der matrixwertigen Felder lautet dann

$$\phi \rightarrow (e^{i\theta^a T^a})\phi(e^{i\theta^a T^a})^\dagger. \quad (\text{B.19})$$

In dieser Arbeit wähle ich durchgehend den zweiten genannten Weg.

Mit jeder Eichgruppe ist eine kovariante Ableitung verbunden. Ihre Form ergibt sich im wesentlichen aus der Differentiation der Eichtransformationen nach den Eichparametern θ^a . Im Fall der Fundamentaldarstellung gewinnt man aus (B.1) und (B.2)

$$D_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) + A_\mu(x)\phi(x), \quad (\text{B.20})$$

die kovariante Ableitung der adjungierten Darstellung (B.19) lautet

$$\mathcal{D}_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) + [A_\mu, \phi(x)]. \quad (\text{B.21})$$

Für detailliertere Fragen ziehe man auch hier [Ku] heran.

Die Eichtransformationen wirken auf die Felder unserer Kontinuums-Theorie wie folgt (ω ist ein Element der Eichgruppe)[Ra]:

$$\lambda(x) \rightarrow \omega(x)\lambda(x)\omega(x)^{-1} \quad (\text{B.22})$$

$$A_\mu(x) \rightarrow \omega(x)A_\mu(x)\omega(x)^{-1} - (\partial_\mu \omega(x))\omega(x)^{-1}. \quad (\text{B.23})$$

Man weist damit (unter Benutzung von $(\partial_\mu \omega)\omega^{-1} = -\omega\partial_\mu(\omega^{-1})$) nach, daß $\mathcal{D}_\mu \lambda(x) \rightarrow \omega(x)(\mathcal{D}_\mu \lambda(x))\omega(x)^{-1}$ und erkennt, daß die Wirkung eichinvariant ist. Auf dem Gitter gilt

$$\lambda(x) \rightarrow \omega(x)\lambda(x)\omega(x)^{-1} \quad (\text{B.24})$$

$$U_\mu(x) \rightarrow \omega(x + a\hat{\mu})U_\mu(x)\omega(x)^{-1}. \quad (\text{B.25})$$

Mit Hilfe von $U_\mu(x) = 1 - aA_\mu(x) + \dots$ prüft man nach, daß diese Transformationen den korrekten Kontinuumslimites ergeben. Man erkennt auch, daß die in Kapitel 2 angegebene Gitterwirkung eichinvariant ist.

B.4 Feldstärketensor, Leibniz-Regel und Bianchi-Identität

Der lokale Krümmungstensor ergibt sich aus der kovarianten Ableitung der Fundamentaldarstellung zu

$$F_{\mu\nu}(x) = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]. \quad (\text{B.26})$$

Aus der Jacobi-Identität

$$[D_\mu, [D_\rho, D_\tau]] + [D_\rho, [D_\tau, D_\mu]] + [D_\tau, [D_\mu, D_\rho]] = 0 \quad (\text{B.27})$$

folgt dann für festes ν die Bianchi-Identität

$$\mathcal{D}_\mu F_{\rho\tau} \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} = [D_\mu, F_{\rho\tau}] \varepsilon_{\mu\rho\tau\nu} = 0. \quad (\text{B.28})$$

Außerdem erfüllt die kovariante Ableitung die Leibnizregel, denn für zwei Funktionen f und g gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu(f(x)g(x)) &= \partial_\mu(f(x)g(x)) + [A_\mu, f(x)g(x)] \\ &= (\partial_\mu f(x))g(x) + [A_\mu, f(x)]g(x) + f(x)\partial_\mu g(x) + f(x)[A_\mu, g(x)] \\ &= (\mathcal{D}_\mu f(x))g(x) + f(x)\mathcal{D}_\mu g(x). \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Anhang C

Majorana-Spinoren

Weyl-Spinoren sind zweikomponentige Spinoren, die sich nach der linken bzw. rechten Fundamentaldarstellung der Lorentzgruppe transformieren. Ein Majorana-Spinor ist ein Spezialfall eines allgemeinen aus zwei Weyl-Spinoren zusammengesetzten Dirac-Spinors

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Im Minkowski-Raum stellt man nämlich an einen Majorana-Spinor die Bedingung

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0 \stackrel{!}{=} \psi^t C. \quad (\text{C.2})$$

Dabei ist

$$\gamma_0 = \gamma_0^{(M)} = \gamma_4^{(E)} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

und C die Ladungskonjugationsmatrix. Durch diese Bedingung wird die Anzahl der Freiheitsgrade im Vergleich zu Dirac-Spinoren halbiert, ein Majorana-Spinor verfügt über vier reelle Parameter. Für detailliertere Betrachtungen zu Majorana-Spinoren im Minkowski-Raum konsultiere man z.B. [KS].

In der Literatur findet man zuweilen Autoren, die behaupten, es gäbe keine Majorana-Spinoren in euklidischer Formulierung (s. z.B. Referenz [Sch] aus [Ni]). Dies nur solange richtig, wie man auch im Euklidischen die Hermitizitätseigenschaften der minkowskischen Formulierung verlangt. In dieser Arbeit werden euklidische Majorana-Spinoren durch die Beziehung

$$\bar{\lambda} = \lambda^t C \quad (\text{C.4})$$

definiert, wobei aber nicht länger $\bar{\lambda} = \lambda^\dagger \gamma_0$ gilt¹. In Weyl-Darstellung nimmt ein Majorana-Spinor damit die Form

$$\lambda = \begin{pmatrix} \ell_\alpha \\ \bar{\ell}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

an. Dabei ist ℓ_α ein linkshändiger Weyl-Spinor.

¹Eine formale Definition von $\bar{\lambda}$ in euklidischer Raum-Zeit findet man z.B. in [Ni].

Im folgenden möchte ich einige Rechenregeln für Majorana-Spinoren beweisen, die in den Kalkulationen dieser Arbeit vielfach verwendet werden. Für skalare Variablen $\theta_1, \dots, \theta_n$ mit ungerader Grassmann-Parität verwende ich dabei die folgende Regel zur Bildung von Transpositionen:

$$(\theta_1 \cdots \theta_n)^t = (-1)^{s(n)} \theta_n \cdots \theta_1. \quad (\text{C.6})$$

Dabei ist $s(n)$ das Signum der Permutation aus S_n , die die Reihenfolge der $\theta_1, \dots, \theta_n$ umkehrt. Durch diese Konvention wird sichergestellt, daß für beliebige (skalare) Elemente a der Grassmann-Algebra $a^t = a$ gilt. Die Erweiterung auf spinorielle Objekte geschieht dann in der gewohnten Weise, Spaltenvektoren gehen unter Transposition in Zeilenvektoren über und umgekehrt. Unter Benutzung der definierenden Eigenschaften des Ladungskonjugationsoperators C erhält man dann für Grassmann-wertige Majorana-Spinoren ψ und ϕ die folgenden Rechenregeln:

$$\bar{\psi}\phi = \bar{\phi}\psi \quad (\text{C.7})$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\phi = -\bar{\phi}\gamma_\mu\psi \quad (\text{C.8})$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\phi = \bar{\phi}\gamma_\nu\gamma_\mu\psi \quad (\text{C.9})$$

$$\bar{\psi}\gamma_5\phi = \bar{\phi}\gamma_5\psi \quad (\text{C.10})$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\phi = \bar{\phi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \quad (\text{C.11})$$

$$\bar{\psi}\sigma_{\rho\tau}\phi = -\bar{\phi}\sigma_{\rho\tau}\psi \quad (\text{C.12})$$

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau}\phi = \bar{\phi}\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu\psi. \quad (\text{C.13})$$

Beispielsweise weist man die erste Beziehung wie folgt nach:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\phi &= (\psi^t C \phi)^t \\ &= -\phi^t C^t \psi \\ &= \phi^t C \psi \\ &= \bar{\phi}\psi. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Die zweite angegebene Identität folgt aus

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma_\mu\phi &= (\psi^t C \gamma_\mu \phi)^t \\ &= -\phi^t \gamma_\mu^t C^t \psi \\ &= \phi^t \gamma_\mu^t C \psi \\ &= -\phi^t C \gamma_\mu \psi \\ &= -\bar{\phi}\gamma_\mu\psi. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Zum Beweis der dritten Gleichung notieren wir

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\phi &= (\psi^t C \gamma_\mu \gamma_\nu \phi)^t \\ &= -\phi^t \gamma_\nu^t \gamma_\mu^t C^t \psi \\ &= \phi^t \gamma_\nu^t \gamma_\mu^t C \psi \\ &= -\phi^t \gamma_\nu^t C \gamma_\mu \psi \\ &= \phi^t C \gamma_\nu \gamma_\mu \psi \\ &= \bar{\phi}\gamma_\nu\gamma_\mu\psi. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Die übrigen angegebenen Relationen rechnet man unter Benutzung der Eigenschaften des Ladungskonjugationsoperators mit analogen Argumenten nach, (C.12) ergibt sich dabei direkt aus (C.9).

Anhang D

Fierz-Transformation

Bei der Variation des fermionischen Anteils der Lagrange-Dichte tritt (z.B. in (1.60)) ein Term der Form $f_{abc} \sum_{\mu} (\bar{\lambda}^a \gamma_{\mu} \lambda^c)(\bar{\lambda}^b \gamma_{\mu} \varepsilon)$ auf, und ich möchte in diesem Anhang begründen, warum dieser Ausdruck keinen Beitrag liefert. Dabei wird auch über die Farbindizes a, b und c summiert. Wesentliches Argument wird hierbei eine Fierz-Umordnung sein. Bei der Herleitung dieser Fierz-Identität folge ich in etwa der Darstellung von [BK] bzw. [Ku].

Man betrachtet dazu den Vektorraum der hermiteschen 4×4 -Matrizen und definiert in diesem Raum ein Skalarprodukt via

$$(A, B) := \frac{1}{4} \text{Tr}(AB), \quad (\text{D.1})$$

wobei die Spur in diesem Abschnitt durchgehend über die Spinorindizes gebildet wird, in unserer Theorie ($D = 4$) sprechen wir also von 4×4 -Spuren. Bezüglich dieses Skalarprodukts bilden die 16 Matrizen

$$\mathbb{1}, \gamma_{\mu}, \sigma_{\rho\tau}, i\gamma_{\mu}\gamma_5, \gamma_5 \quad (\text{D.2})$$

eine Orthonormalbasis, beispielsweise rechnet man nach, daß

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Tr}(i\gamma_{\mu}\gamma_5 i\gamma_{\nu}\gamma_5) &= -\frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma_{\mu}\gamma_5\gamma_{\nu}\gamma_5) \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}) \\ &= \delta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Tr}(\sigma_{\rho\tau} \sigma_{\mu\nu}) &= -\frac{1}{16} \text{Tr}(\gamma_{\rho}\gamma_{\tau}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} - \gamma_{\rho}\gamma_{\tau}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu} - \gamma_{\tau}\gamma_{\rho}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} + \gamma_{\tau}\gamma_{\rho}\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}) \\ &\stackrel{(A.14)}{=} \delta_{\rho\mu}\delta_{\tau\nu} - \delta_{\rho\nu}\delta_{\tau\mu}. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Ich bezeichne diese Matrizen im folgenden mit γ_A , es gilt dann also

$$\frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma_A \gamma_B) = \delta_{AB}. \quad (\text{D.5})$$

Da die γ_A eine Orthonormalbasis des o.g. Vektorraums bilden, findet man für eine beliebige 4×4 -Matrix Γ die Darstellung

$$\Gamma = \sum_A c_A \gamma_A, \quad (\text{D.6})$$

wobei

$$c_A = \frac{1}{4} \text{Tr}(\gamma_A \Gamma). \quad (\text{D.7})$$

Komponentenweise gilt dann

$$\Gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_A \gamma_A^{\kappa\lambda} \Gamma^{\lambda\kappa} \gamma_A^{\alpha\beta}, \quad (\text{D.8})$$

wobei über doppelt vorkommende Spinorindizes wie hier z.B. κ und λ zu summieren ist. Für zwei beliebige 4×4 -Matrizen Λ_1 und Λ_2 betrachten wir nun die Matrix $\Gamma = \Gamma^{(\delta\gamma)}$, die durch

$$\Gamma^{(\delta\gamma)\alpha\beta} := \Lambda_1^{\alpha\delta} \Lambda_2^{\gamma\beta} \quad (\text{D.9})$$

definiert wird. (D.8) schreibt sich dann als

$$\Gamma^{\alpha\beta} = \Lambda_1^{\alpha\delta} \Lambda_2^{\gamma\beta} = \frac{1}{4} \sum_A \gamma_A^{\kappa\lambda} \Lambda_1^{\lambda\delta} \Lambda_2^{\gamma\kappa} \gamma_A^{\alpha\beta} \quad (\text{D.10})$$

Sind jetzt $\psi_1, \dots, \psi_4$ Grassmann-wertige Dirac-Spinoren, so folgt

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}_1 \Lambda_1 \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Lambda_2 \psi_4) &= (\bar{\psi}_1^\alpha \Lambda_1^{\alpha\delta} \psi_2^\delta)(\bar{\psi}_3^\gamma \Lambda_2^{\gamma\beta} \psi_4^\beta) \\ &= \frac{1}{4} \sum_A \gamma_A^{\kappa\lambda} \Lambda_1^{\lambda\delta} \Lambda_2^{\gamma\kappa} \gamma_A^{\alpha\beta} \bar{\psi}_1^\alpha \psi_2^\delta \bar{\psi}_3^\gamma \psi_4^\beta \\ &= -\frac{1}{4} \sum_A \bar{\psi}_3^\gamma \Lambda_2^{\gamma\kappa} \gamma_A^{\kappa\lambda} \Lambda_1^{\lambda\delta} \psi_2^\delta \bar{\psi}_1^\alpha \gamma_A^{\alpha\beta} \psi_4^\beta. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Beim letzten Gleichheitszeichen haben wir die Grassmann-Natur der Einträge der Spinoren berücksichtigt. Insgesamt haben wir also die folgende Regel zur Fierz-Umordnung hergeleitet:

$$(\bar{\psi}_1 \Lambda_1 \psi_2)(\bar{\psi}_3 \Lambda_2 \psi_4) = -\frac{1}{4} \sum_A (\bar{\psi}_3 \Lambda_2 \gamma_A \Lambda_1 \psi_2)(\bar{\psi}_1 \gamma_A \psi_4). \quad (\text{D.12})$$

Um nun zu zeigen, daß $f_{abc} \sum_\mu (\bar{\lambda}^a \gamma_\mu \lambda^c)(\bar{\lambda}^b \gamma_\mu \varepsilon) = 0$ setzen wir $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \gamma_\mu$ und erhalten nach Summation über μ (sowie über a, b und c)

$$\begin{aligned} f_{abc} \sum_\mu (\bar{\lambda}^a \gamma_\mu \lambda^c)(\bar{\lambda}^b \gamma_\mu \varepsilon) &= f_{abc} \sum_\mu (\bar{\lambda}^b \gamma_\mu \varepsilon)(\bar{\lambda}^a \gamma_\mu \lambda^c) \\ &= -\frac{1}{4} f_{abc} \sum_{\nu, \mu} (\bar{\lambda}^a \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\mu \varepsilon)(\bar{\lambda}^b \gamma_\nu \lambda^c) \\ &\quad -\frac{1}{4} f_{abc} \sum_\mu (\bar{\lambda}^a \gamma_\mu \mathbb{1} \gamma_\mu \varepsilon)(\bar{\lambda}^b \mathbb{1} \lambda^c) \\ &\quad -\frac{1}{4} f_{abc} \sum_{\mu, \rho < \tau} (\bar{\lambda}^a \gamma_\mu \sigma_{\rho\tau} \gamma_\mu \varepsilon)(\bar{\lambda}^b \sigma_{\rho\tau} \lambda^c) \\ &\quad +\frac{1}{4} f_{abc} \sum_{\mu, \nu} (\bar{\lambda}^a \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5 \gamma_\mu \varepsilon)(\bar{\lambda}^b \gamma_\nu \gamma_5 \lambda^c) \\ &\quad -\frac{1}{4} f_{abc} \sum_\mu (\bar{\lambda}^a \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\mu \varepsilon)(\bar{\lambda}^b \gamma_5 \lambda^c). \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Die Summanden auf der rechten Seite werden nun einzeln behandelt, der erste Term ergibt einen Beitrag von

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4}f_{abc}\sum_{\nu,\mu}(\bar{\lambda}^a\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\mu\varepsilon)(\bar{\lambda}^b\gamma_\nu\lambda^c) &= \frac{1}{2}f_{abc}\sum_{\nu}(\bar{\lambda}^a\gamma_\nu\varepsilon)(\bar{\lambda}^b\gamma_\nu\lambda^c) \\
 &= \frac{1}{2}f_{abc}\sum_{\mu}(\bar{\lambda}^b\gamma_\mu\lambda^c)(\bar{\lambda}^a\gamma_\mu\varepsilon) \\
 &= -\frac{1}{2}f_{abc}\sum_{\mu}(\bar{\lambda}^a\gamma_\mu\lambda^c)(\bar{\lambda}^b\gamma_\mu\varepsilon). \quad (D.14)
 \end{aligned}$$

Dabei haben wir (A.15) und die Antisymmetrie der f_{abc} verwendet. Der zweite Summand trägt aufgrund von

$$\begin{aligned}
 f_{abc}(\bar{\lambda}^a\varepsilon)(\bar{\lambda}^b\lambda^c) &= f_{abc}(\bar{\lambda}^a\varepsilon)(\bar{\lambda}^c\lambda^b) \\
 &= -f_{abc}(\bar{\lambda}^a\varepsilon)(\bar{\lambda}^b\lambda^c) \quad (D.15)
 \end{aligned}$$

nicht bei, dabei haben wir die Rechenregel $\bar{\lambda}^b\lambda^c = \bar{\lambda}^c\lambda^b$ für Majorana-Spinoren ausgenutzt. Nach dem gleichen Argument verschwinden auch die beiden letzten Beiträge von (D.13), denn es gilt $\bar{\lambda}^b\gamma_\nu\gamma_5\lambda^c = \bar{\lambda}^c\gamma_\nu\gamma_5\lambda^b$ bzw. $\bar{\lambda}^b\gamma_5\lambda^c = \bar{\lambda}^c\gamma_5\lambda^b$. Unter Benutzung von (A.16) erkennt man

$$\sum_{\mu}\gamma_\mu\sigma_{\rho\tau}\gamma_\mu = 0, \quad (D.16)$$

so daß auch der dritte Summand in (D.13) verschwindet. Insgesamt geht (D.13) daher in

$$f_{abc}\sum_{\mu}(\bar{\lambda}^a\gamma_\mu\lambda^c)(\bar{\lambda}^b\gamma_\mu\varepsilon) = -\frac{1}{2}f_{abc}\sum_{\mu}(\bar{\lambda}^a\gamma_\mu\lambda^c)(\bar{\lambda}^b\gamma_\mu\varepsilon) \quad (D.17)$$

über, und es folgt

$$f_{abc}\sum_{\mu}(\bar{\lambda}^a\gamma_\mu\lambda^c)(\bar{\lambda}^b\gamma_\mu\varepsilon) = 0. \quad (D.18)$$

Anhang E

Die Nicht-Abelsche Stokes-Formel

E.1 Formulierung der Formel

Wir haben im Kontinuum gesehen, daß der Feldstärketensor mit einem Paralleltransport infinitesimaler Ausdehnung gemäß

$$U(c_{x;\mu,\nu}) = 1 - F_{\mu\nu}(x) dx_\mu dx_\nu \quad (\text{E.1})$$

verbunden ist, vgl. (2.4). Dabei ist $U(c_{x;\mu,\nu})$ ein Paralleltransport entlang einer geschlossenen Kurve und $dx_\mu dx_\nu$ die eingeschlossene Fläche. $U(c_{x;\mu,\nu})$ wird durch das Wegintegral (2.2)

$$U(c_{x;\mu,\nu}) = \mathcal{P} \exp \left\{ - \oint_{c_{x;\mu,\nu}} A_\mu(z) dz_\mu \right\} \quad (\text{E.2})$$

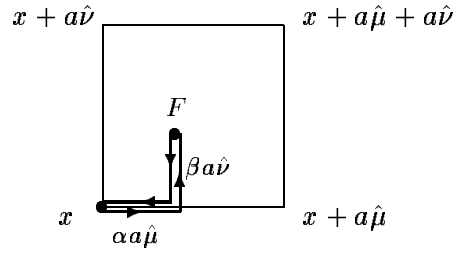
beschrieben. Wir behaupten nun, daß sich dies auch auf den nicht-infinitesimalen Fall verallgemeinern läßt. Man erhält dann die sogenannte Nicht-Abelsche Stokes-Formel, die wie im abelschen Fall ein Wegintegral entlang des Randes eines Gebietes mit einem Flächenintegral über die umrandete Fläche verknüpft. Um unsere Behauptung präzisieren zu können, definieren wir zunächst für eine beliebige Lie-Algebra-wertige Funktion F auf der euklidischen kontinuierlichen Raumzeit, einen Referenzpunkt x und eine Längenskala a die transportierte Funktion $\mathcal{F}$ via:

$$\mathcal{F}(x + \alpha a \hat{\mu} + \beta a \hat{\nu}) := U_\mu^{\alpha\dagger}(x) U_\nu^{\beta\dagger}(x + \alpha a \hat{\mu}) F(x + \alpha a \hat{\mu} + \beta a \hat{\nu}) U_\nu^\beta(x + \alpha a \hat{\mu}) U_\mu^\alpha(x). \quad (\text{E.3})$$

Dabei bezeichnet $U_\mu^\alpha(x)$ den Transporter vom Punkt x um α Einheiten a in $\hat{\mu}$ -Richtung, also

$$U_\mu^\alpha(x) = \mathcal{P} e^{-\int_x^{x+\alpha a \hat{\mu}} dz A_\mu(z)} \quad (\text{E.4})$$

und analog für die Transporter U_ν^β . Typischerweise sind $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ und a die Gitterkonstante. Eine graphische Anschauung vermittelt:



Wir behaupten nun, daß für den Feldstärketensor des Kontinuums $F_{\mu\nu}$ und die Plaquettenvariable $U_{\mu\nu}(x)$ die folgende

Nicht-Abelsche Stokes-Formel

$$\begin{aligned}
 U_{\mu\nu}(x) &= \mathcal{P} \exp \left\{ -a^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha\hat{\mu} + a\beta\hat{\nu}) \right\} \\
 &\equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \int_0^{\alpha_{i-1}} d\alpha_i \int_0^1 d\beta_i \left\{ \right. \\
 &\quad \left. (-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha_n\hat{\mu} + a\beta_n\hat{\nu}) \cdots (-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha_1\hat{\mu} + a\beta_1\hat{\nu}) \right\} \quad (\text{E.5})
 \end{aligned}$$

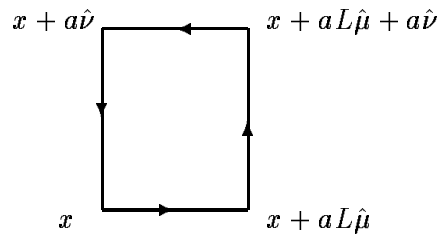
korrekt ist. Dabei ist $\alpha_0 = 1$, und $\mathcal{P}$ bezeichnet den Pfadordnungsoperator. Gemäß obiger Formel ordnet $\mathcal{P}$ die einzelnen Integrale in der Exponentialreihe so an, daß die Argumente mit größerer $\hat{\mu}$ -Komponente jeweils rechts stehen, es ist stets $\alpha_n \leq \alpha_{n-1} \leq \dots \leq \alpha_1 \leq \alpha_0 = 1$. Bezüglich der $\hat{\nu}$ -Komponenten wird keine Ordnung vorgenommen.

E.2 Beweis

Zum Beweis führen wir einen Parameter L ein, der die Ausdehnung der Plaquettenvariable in $\hat{\mu}$ -Richtung kontrolliert. Genauer hat man dann:

$$U_{\mu\nu}^L(x) := U_{\nu}^{\dagger}(x) U_{\mu}^{L\dagger}(x + a\hat{\nu}) U_{\nu}(x + aL\hat{\mu}) U_{\mu}^L(x). \quad (\text{E.6})$$

Graphisch macht man sich dies durch



klar.

Wir zeigen jetzt, daß

$$\begin{aligned}
 U_{\mu\nu}^L(x) &= \mathcal{P} \exp \left\{ -a^2 \int_0^L d\alpha \int_0^1 d\beta \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha\hat{\mu} + a\beta\hat{\nu}) \right\} \\
 &\equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n \int_0^{\alpha_{i-1}} d\alpha_i \int_0^1 d\beta_i \left\{ \right. \\
 &\quad \left. (-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha_n\hat{\mu} + a\beta_n\hat{\nu}) \cdots (-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha_1\hat{\mu} + a\beta_1\hat{\nu}) \right\} \quad (\text{E.7})
 \end{aligned}$$

für alle L gilt, wobei wichtig ist, daß hier $\alpha_0 = L$ ist. Hat man dies für alle L eingesehen, so ergibt sich (E.5) als Spezialfall $L = 1$. Um (E.7) zu beweisen, leiten wir eine Differentialgleichung erster Ordnung in L her, der beide Seiten genügen. Da zusätzlich sowohl die rechte als auch die linke Seite von (E.7) für $L = 0$ die Einheitsmatrix ergeben, folgt dann die Behauptung.

Differenzieren der rechten Seite von (E.7) nach L ergibt zunächst (mit $\alpha_1 = L$):

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 d\beta_1 (-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + aL\hat{\mu} + a\beta_1\hat{\nu}) \\
 &+ \sum_{n=2}^{\infty} \prod_{j=2}^n \int_0^{\alpha_{j-1}} d\alpha_j \prod_{i=1}^n \int_0^1 d\beta_i \left\{ (-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha_n\hat{\mu} + a\beta_n\hat{\nu}) \right. \\
 &\quad \left. \cdots (-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha_2\hat{\mu} + a\beta_2\hat{\nu}) (-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + aL\hat{\mu} + a\beta_1\hat{\nu}) \right\} \\
 &= \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \prod_{j=2}^n \int_0^{\alpha_{j-1}} d\alpha_j \prod_{i=2}^n \int_0^1 d\beta_i \left((-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha_n\hat{\mu} + a\beta_n\hat{\nu}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdots (-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha_2\hat{\mu} + a\beta_2\hat{\nu}) \right) \right\} \cdot \int_0^1 d\beta_1 (-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + aL\hat{\mu} + a\beta_1\hat{\nu}) \\
 &= (\text{rechte Seite von (E.7)}) \cdot \int_0^1 d\beta_1 (-a^2) \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + aL\hat{\mu} + a\beta_1\hat{\nu}). \quad (\text{E.8})
 \end{aligned}$$

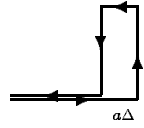
Wir berechnen nun für die linke Seite

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} (U_{\mu\nu}^{L+\Delta}(x) - U_{\mu\nu}^L(x)). \quad (\text{E.9})$$

Graphisch ist dies:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\Delta} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A square loop with vertices at } a(L+\Delta) \text{ (bottom-left), } aL \text{ (bottom-right), } aL \text{ (top-right), and } a(L+\Delta) \text{ (top-left). Arrows indicate a counter-clockwise path.} \\ \text{Diagram 2: A square loop with vertices at } aL \text{ (bottom-left), } aL \text{ (bottom-right), } aL \text{ (top-right), and } aL \text{ (top-left). Arrows indicate a counter-clockwise path.} \end{array} \right) \\
 &= \begin{array}{c} \text{Diagram 3: A square loop with vertices at } aL \text{ (bottom-left), } aL \text{ (bottom-right), } aL \text{ (top-right), and } aL \text{ (top-left). Arrows indicate a counter-clockwise path.} \end{array} \cdot \frac{1}{\Delta} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 4: A rectangular loop with vertices at } aL \text{ (bottom-left), } aL \text{ (bottom-right), } aL \text{ (top-right), and } aL \text{ (top-left). Arrows indicate a counter-clockwise path.} \\ \text{Diagram 5: A rectangular loop with vertices at } aL \text{ (bottom-left), } aL \text{ (bottom-right), } aL \text{ (top-right), and } aL \text{ (top-left). Arrows indicate a counter-clockwise path.} \end{array} - 1 \right) \quad (\text{E.10})
 \end{aligned}$$

Im Limes $\Delta \rightarrow 0$ gilt aber



$$= 1 - a^2 \Delta \int_0^1 d\beta_1 \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + aL\hat{\mu} + a\beta_1\hat{\nu}) + \mathcal{O}(\Delta^2), \quad (\text{E.11})$$

wie man durch Benutzung von

$$U(c_{x;\mu,\nu}) = 1 - F_{\mu\nu}(x) dx_\mu dx_\nu \quad (\text{E.12})$$

einsieht (man beachte, daß der Limes $\Delta \rightarrow 0$ betrachtet wird). Damit folgt dann

$$\frac{d}{dL} U_{\mu\nu}^L(x) = U_{\mu\nu}^L(x) \left(-a^2 \int_0^1 d\beta_1 \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + aL\hat{\mu} + a\beta_1\hat{\nu}) \right). \quad (\text{E.13})$$

Somit erfüllen beide Seiten von (E.7) dieselbe Differentialgleichung des Typs

$$f' = f \cdot g, \quad (\text{E.14})$$

wobei

$$g(L) = -a^2 \int_0^1 d\beta_1 \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + aL\hat{\mu} + a\beta_1\hat{\nu}) \quad (\text{E.15})$$

und stimmen beim Anfangswert $L = 0$ überein (beide Seiten sind dann gleich $\mathbb{1}$). Insgesamt ist (E.7) damit für alle L gezeigt, (E.5) erhält man als Spezialfall $L = 1$.

Diese Beweisidee entstand in einem gemeinsamen Gespräch mit Dr. Christian Wieczkowski [Wi98]. Eine formale Ausarbeitung eines ähnlichen Beweises findet man in der Referenz [Ar] aus [GPGASB].

E.3 Anwendung bei der Entwicklung der Plaquettenvariablen

Aus der Nicht-Abelschen Stokes-Formel läßt sich die in Kapitel 3 benötigte Entwicklung der Plaquettenvariablen bis zur dritten Ordnung von a sehr bequem ablesen. Man beobachtet dazu zunächst folgendes: Für

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha\hat{\mu} + a\beta\hat{\nu}) = U_\mu^{\alpha\dagger}(x) U_\nu^{\beta\dagger}(x + a\alpha\hat{\mu}) F_{\mu\nu}(x + a\alpha\hat{\mu} + a\beta\hat{\nu}) U_\nu^\beta(x + a\alpha\hat{\mu}) U_\mu^\alpha(x) \quad (\text{E.16})$$

gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha\hat{\mu} + a\beta\hat{\nu}) &= (1 + a\alpha A_\mu(x))(1 + a\beta A_\nu(x)) \\ &\quad \cdot (F_{\mu\nu}(x) + a\alpha \partial_\mu F_{\mu\nu}(x) + a\beta \partial_\nu F_{\mu\nu}(x)) \\ &\quad \cdot (1 - a\beta A_\nu(x))(1 - a\alpha A_\mu(x)) \\ &\quad + \mathcal{O}(a^2), \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

woraus man den ersten Taylor-Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 & \partial_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha\hat{\mu} + a\beta\hat{\nu})|_{\alpha=\beta=0} \\
 &= A_\mu(x)F_{\mu\nu}(x) - F_{\mu\nu}(x)A_\mu(x) + \partial_\mu F_{\mu\nu}(x) \\
 &= \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x)
 \end{aligned} \tag{E.18}$$

abliest. Dabei ist $\mathcal{D}_\mu$ die kovariante Ableitung in adjungierter Darstellung. Allgemeiner gilt [GPGASB]

$$\partial_\mu^n \partial_\nu^m \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) = \mathcal{D}_\mu^n \mathcal{D}_\nu^m F_{\mu\nu}(x). \tag{E.19}$$

Damit kann man die Entwicklung von $U_{\mu\nu}$ aber nahezu mühelos niederschreiben, denn es folgt aus der Nicht-Abelschen Stokes-Formel

$$\begin{aligned}
 U_{\mu\nu}(x) &= \mathcal{P} \exp \left\{ -a^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha\hat{\mu} + a\beta\hat{\nu}) \right\} \\
 &= 1 - a^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta \mathcal{F}_{\mu\nu}(x + a\alpha\hat{\mu} + a\beta\hat{\nu}) + \mathcal{O}(a^4) \\
 &= 1 - a^2 \int_0^1 d\alpha \int_0^1 d\beta (F_{\mu\nu}(x) + a\alpha\partial_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) + a\beta\partial_\nu \mathcal{F}_{\mu\nu}(x)) \\
 &\quad + \mathcal{O}(a^4) \\
 &= 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^3 \partial_\mu \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^3 \partial_\nu \mathcal{F}_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^4) \\
 &= 1 - a^2 F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\mu F_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}a^3 \mathcal{D}_\nu F_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(a^4).
 \end{aligned} \tag{E.20}$$

Dies ist genau das Ergebnis aus (3.20).

Anhang F

Kovariante Ableitungen auf dem Gitter

Auf dem Gitter gibt es mehrere Möglichkeiten, eine kovariante Ableitung zu definieren. Hier werden die folgenden Varianten verwendet:

$$\mathcal{D}_\mu^{lat,f} f(x) := \frac{1}{a}(U_\mu^\dagger(x)f(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) - f(x)) \quad (\text{F.1})$$

$$\mathcal{D}_\mu^{lat,b} f(x) := \frac{1}{a}(f(x) - U_\mu(x-a\hat{\mu})f(x-a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu})) \quad (\text{F.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu^{lat,sym} f(x) &:= \frac{1}{2a}(U_\mu^\dagger(x)f(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) \\ &\quad - U_\mu(x-a\hat{\mu})f(x-a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu})). \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Erklärt man auf dem Raum der auf dem Gitter definierten (Lie-Algebra-wertigen) Funktionen ein Skalarprodukt vermöge

$$\langle f, g \rangle = \sum_x \text{Tr}\{f(x) \cdot g(x)\}, \quad (\text{F.4})$$

so gilt wegen

$$\begin{aligned} \sum_x \text{Tr}\{f(x)\mathcal{D}_\mu^{lat,f} g(x)\} &= \frac{1}{a} \sum_x \text{Tr}\{f(x)U_\mu^\dagger(x)g(x+a\hat{\mu})U_\mu(x) - f(x)g(x)\} \\ &= \frac{1}{a} \sum_x \text{Tr}\{U_\mu(x-a\hat{\mu})f(x-a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x-a\hat{\mu})g(x) \\ &\quad - f(x)g(x)\} \\ &= \sum_x \text{Tr}\{-\mathcal{D}_\mu^{lat,b} f(x)g(x)\} \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

die Beziehung

$$\mathcal{D}_\mu^{lat,f} = -\mathcal{D}_\mu^{lat,b\dagger}. \quad (\text{F.6})$$

Für die symmetrische kovariante Ableitung rechnet man nach, daß sie in diesem Sinne antihermitesch ist, daß also $\mathcal{D}_\mu^{lat,sym} = -\mathcal{D}_\mu^{lat,sym\dagger}$. Außerdem rechnet man leicht nach,

daß

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{D}_\mu^{lat,b} f(x) \\
= & \mathcal{D}_\mu^{lat,b} \mathcal{D}_\mu^{lat,f} f(x) \\
= & \frac{1}{a^2} (U_\mu^\dagger(x) f(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) + U_\mu(x - a\hat{\mu}) f(x - a\hat{\mu}) U_\mu^\dagger(x - a\hat{\mu}) - 2f(x))
\end{aligned} \tag{F.7}$$

richtig ist. Schließlich gilt noch

$$\mathcal{D}_\mu^{lat,f} f(x) - \mathcal{D}_\mu^{lat,b} f(x) = a \mathcal{D}_\mu^{lat,f} \mathcal{D}_\mu^{lat,b} f(x). \tag{F.8}$$

Ferner sind Paralleltransporte unter der Spur sozusagen mit den Majorana-Eigenschaften verträglich. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\{\bar{\lambda}(x) \gamma_\mu U_\mu^\dagger(x) \lambda(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x)\} &= \bar{\lambda}^a(x) \gamma_\mu \lambda^b(x + a\hat{\mu}) \text{Tr}\{T^a U_\mu^\dagger(x) T^b U_\mu(x)\} \\
&= -\bar{\lambda}^b(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu \lambda^a(x) \text{Tr}\{T^a U_\mu^\dagger(x) T^b U_\mu(x)\} \\
&= -\bar{\lambda}^b(x + a\hat{\mu}) \gamma_\mu \lambda^a(x) \text{Tr}\{U_\mu^\dagger(x) T^b U_\mu(x) T^a\} \\
&= -\text{Tr}\{U_\mu^\dagger(x) \bar{\lambda}(x + a\hat{\mu}) U_\mu(x) \gamma_\mu \lambda(x)\}.
\end{aligned} \tag{F.9}$$

Anhang G

Mathematische Hilfsmittel

G.1 Die Gamma-Funktion

Die Gamma-Funktion besitzt für $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z > 0$ die folgende Integraldarstellung nach EULER:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}. \quad (\text{G.1})$$

Die Darstellung gemäß des Produktsatzes von WEIERSTRASS hingegen lautet [Re]

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma_E z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}. \quad (\text{G.2})$$

Dabei ist

$$\gamma_E = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} - \ln k\right) = 0.577215... \quad (\text{G.3})$$

die Eulersche Gamma-Konstante. Insbesondere ist die Gamma-Funktion eine meromorphe Funktion mit einfachen Polstellen bei $\{-n | n \in \mathbb{N}_0\}$. Sie erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{G.4})$$

und hat bei $z = 0$ die Laurentreihen-Entwicklung

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (\text{G.5})$$

G.2 Trigonometrische Umformungen

G.2.1 Notationen

Bei den störungstheoretischen Berechnungen auf dem Gitter werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\begin{array}{lll} s_\rho = \sin\left(\frac{q_\rho}{2}\right) & c_\rho = \cos\left(\frac{q_\rho}{2}\right) & q_\rho = \sin(q_\rho) \\ \tilde{s}_\rho = \sin\left(\frac{q - a\rho}{2}\right)_\rho & \tilde{c}_\rho = \cos\left(\frac{q - a\rho}{2}\right)_\rho & \tilde{q}_\rho = \sin(q - a\rho)_\rho \\ \check{s}_\rho = \sin\left(\frac{q + a\rho}{2}\right)_\rho & \check{c}_\rho = \cos\left(\frac{q + a\rho}{2}\right)_\rho & \check{q}_\rho = \sin(q + a\rho)_\rho. \end{array} \quad (\text{G.6})$$

Außerdem übernehmen wir die folgenden Notationen aus [MZ]:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &:= \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q_{\mu}}{2} \right) \\
\Delta_2 &:= \sum_{\mu} \sin^2 (q_{\mu}) + 4r^2 \left(\sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q_{\mu}}{2} \right) \right)^2 = \Delta_4 + 4r^2 \Delta_1^2 \\
\Delta_3 &:= \sum_{\mu} \sin^4 \left(\frac{q_{\mu}}{2} \right) \\
\Delta_4 &:= \sum_{\mu} \sin^2 (q_{\mu}) = 4(\Delta_1 - \Delta_3) \\
\Delta_5 &:= \sum_{\mu} \sin^2 (q_{\mu}) \sin^2 \left(\frac{q_{\mu}}{2} \right)
\end{aligned} \tag{G.7}$$

und erklären einige um ap verschobene Größen

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_1 &:= \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q - ap}{2} \right)_{\mu} \\
\check{\Delta}_1 &:= \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q + ap}{2} \right)_{\mu} \\
\tilde{\Delta}_2 &:= \sum_{\mu} \sin^2 ((q - ap)_{\mu}) + 4r^2 \left(\sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{(q - ap)_{\mu}}{2} \right) \right)^2 \\
\tilde{\Delta}_3 &:= \sum_{\mu} \sin^4 \left(\frac{q - ap}{2} \right)_{\mu} \\
\tilde{\Delta}_4 &:= \sum_{\mu} \sin^2 (q - ap)_{\mu}.
\end{aligned} \tag{G.8}$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann

$$\Delta_4 = \sum_{\mu} q_{\mu}^2 = 4 \sum_{\mu} s_{\mu}^2 c_{\mu}^2 = 4 \sum_{\mu} s_{\mu}^2 (1 - s_{\mu}^2) = 4\Delta_1 - 4\Delta_3 \tag{G.9}$$

sowie

$$q_{\rho} = 2s_{\rho}c_{\rho} \tag{G.10}$$

für festes ρ .

G.2.2 Taylor-Entwicklung der Propagatoren

Man erhält außerdem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{\Delta}_1} &= \frac{1}{\sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{q - ap}{2} \right)_{\mu}} \\
&= \frac{1}{\sum_{\mu} \left[\sin^2 \frac{q_{\mu}}{2} - ap_{\mu} \sin \frac{q_{\mu}}{2} \cos \frac{q_{\mu}}{2} \right] + \mathcal{O}(a^2)} \\
&= \frac{1}{\left[\sum_{\mu} s_{\mu}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mu} ap_{\mu} q_{\mu} \right] + \mathcal{O}(a^2)} \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{\mu} s_{\mu}^2 \right) \left[1 - \frac{a}{2} \frac{\sum_{\mu} p_{\mu} q_{\mu}}{\sum_{\mu} s_{\mu}^2} \right] + \mathcal{O}(a^2)} \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{\mu} s_{\mu}^2 \right)} \left[1 + \frac{a}{2} \frac{\sum_{\mu} p_{\mu} q_{\mu}}{\sum_{\mu} s_{\mu}^2} \right] + \mathcal{O}(a^2) \\
&= \frac{1}{\Delta_1} + \frac{a}{2} \frac{p \cdot q}{\Delta_1^2} + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned} \tag{G.11}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta_2} &= \frac{1}{q_\rho^2 + 4r^2(s_\rho^2)^2} \\
&= \frac{1}{\tilde{q}_\rho^2 + 2ap_\rho\tilde{q}_\rho\cos(q-ap)_\rho + 4r^2(\tilde{\Delta}_1^2 + a\tilde{\Delta}_1p\cdot\tilde{q}) + \mathcal{O}(a^2)} \\
&= \frac{1}{\tilde{\Delta}_2\left(1 + 2a\frac{p_\rho\tilde{q}_\rho\cos((q-ap)_\rho) + 2r^2\tilde{\Delta}_1p\cdot\tilde{q}}{\tilde{\Delta}_2} + \mathcal{O}(a^2)\right)} \\
&= \frac{1}{\tilde{\Delta}_2}\left(1 - 2a\frac{p_\rho\tilde{q}_\rho\cos((q-ap)_\rho) + 2r^2\tilde{\Delta}_1p\cdot\tilde{q}}{\tilde{\Delta}_2} + \mathcal{O}(a^2)\right) \\
&= \frac{1}{\tilde{\Delta}_2} - 2a\frac{p\cdot\tilde{q} - 2p_\rho\tilde{q}_\rho\tilde{s}_\rho^2 + 2r^2\tilde{\Delta}_1p\cdot\tilde{q}}{\tilde{\Delta}_2^2} + \mathcal{O}(a^2). \tag{G.12}
\end{aligned}$$

G.2.3 Algebraische Beziehungen der Propagatoren

Mittels

$$\begin{aligned}
4\Delta_1 - \Delta_2 &= 4\sum_\mu \sin^2\left(\frac{q_\mu}{2}\right) - \sum_\mu \sin^2 q_\mu - 4r^2\Delta_1^2 \\
&= 4\sum_\mu \sin^2\left(\frac{q_\mu}{2}\right) - 4\sum_\mu \sin^2\left(\frac{q_\mu}{2}\right)\cos^2\left(\frac{q_\mu}{2}\right) - 4r^2\Delta_1^2 \\
&= 4\sum_\mu \sin^4\left(\frac{q_\mu}{2}\right) - 4r^2\Delta_1^2 \\
&= 4\Delta_3 - 4r^2\Delta_1^2 \tag{G.13}
\end{aligned}$$

zeigt man, daß

$$\frac{1}{\Delta_2} = \frac{1}{4\Delta_1} + \frac{\Delta_3 - r^2\Delta_1^2}{\Delta_1\Delta_2} \tag{G.14}$$

gilt. Diese Identität kann zur Abspaltung endlicher Anteile aus logarithmisch divergenten Integralen benutzt werden, denn der erste Term verhält sich für kleine Impulse wie $\frac{1}{q^2}$, der zweite hingegen bleibt für $q \rightarrow 0$ endlich. Mit (G.13) und

$$\begin{aligned}
4\Delta_1 + \Delta_2 &= 4\Delta_1 + \Delta_4 + 4r^2\Delta_1^2 \\
&= 8\Delta_1 - 4\Delta_3 + 4r^2\Delta_1^2 \tag{G.15}
\end{aligned}$$

kann man außerdem nachrechnen, daß

$$\frac{1}{\Delta_2^2} = \frac{1}{16\Delta_1^2} + \frac{(\Delta_3 - r^2\Delta_1^2)(2\Delta_1 - \Delta_3 + r^2\Delta_1^2)}{\Delta_1^2\Delta_2^2} \tag{G.16}$$

richtig ist. Der erste Term verhält sich für kleine q wie $1/q^4$, der zweite wie $1/q^2$, so daß auch diese Identität zur Abspaltung endlicher Anteile aus divergenten Ausdrücken benutzt werden kann.

G.3 Integralformeln

G.3.1 Feynman-Parametrisierung

Zur Durchführung der Feynman-Parametrisierungen in der Störungstheorie des Kontinuums verwenden wir die Beziehung [Ku]

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{\delta(x+y-1)}{(ax+by)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(a-b)x+b]^2}. \quad (\text{G.17})$$

Durch Differentiation nach a bzw. a und b erhält man hieraus

$$\frac{1}{a^2b} = 2 \int_0^1 \frac{dx \cdot x}{[(a-b)x+b]^3} \quad (\text{G.18})$$

und

$$\frac{1}{a^2b^2} = 6 \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[(a-b)x+b]^4}. \quad (\text{G.19})$$

G.3.2 Integrale in D Dimensionen

In den störungstheoretischen Kapiteln werden außerdem die folgenden Integralformeln verwendet (vgl. z.B. [PS] oder [St]):

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2+a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n-D/2)}{\Gamma(n)} \frac{1}{(a^2)^{n-D/2}} \quad (\text{G.20})$$

$$\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2+a^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\delta_{\mu\nu}}{2(a^2)^{n-1-D/2}} \frac{\Gamma(n-1-D/2)}{\Gamma(n)} \quad (\text{G.21})$$

$$\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^\alpha}{(k^2+a^2)^\beta} = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha+D/2)\Gamma(\beta-\alpha-D/2)}{\Gamma(D/2)\Gamma(\beta)} (a^2)^{D/2+\alpha-\beta}. \quad (\text{G.22})$$

G.3.3 Integralformeln der Gitter-Störungstheorie

Zur Berechnung der nackten Gittergrößen in Kapitel 5 verwenden wir die folgenden Formeln aus [EM] (keine Summation über μ bzw. ν):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{16\Delta_1 \tilde{\Delta}_1} = \frac{1}{16\pi^2} (2 - \ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0000}) + \mathcal{O}(a) \quad (\text{G.23})$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\sin\left(\frac{q_\mu}{2}\right) \cos\left(\frac{q_\mu}{2}\right)}{16\Delta_1 \tilde{\Delta}_1} &= \frac{1}{16\pi^2} \left(-\frac{1}{4} a p_\mu \right) (\ln(a^2 p^2) + \gamma_E - F_{0000} - 2) \\ &\quad - \frac{1}{32} a p_\mu Z_{0000} + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned} \quad (\text{G.24})$$

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\sin\left(\frac{q_\mu}{2}\right) \cos\left(\frac{q_\mu}{2}\right) \sin\left(\frac{q_\nu}{2}\right) \cos\left(\frac{q_\nu}{2}\right)}{64\Delta_1^2 \tilde{\Delta}_1} \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{1}{16} \delta_{\mu\nu} (2 - \ln(a^2 p^2) - \gamma_E + F_{0000}) + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right] - \frac{1}{128} \delta_{\mu\nu} Z_{0000} + \mathcal{O}(a). \end{aligned} \quad (\text{G.25})$$

Dabei werden die Konstanten Z_{0000} und F_{0000} bzw. F_{0001} z.B. in [GAKA] durch modifizierte Besselfunktionen ausgedrückt. Die numerischen Werte sind

$$F_{0000} = 4.369... \quad (\text{G.26})$$

$$Z_{0000} = 0.1549... \quad (\text{G.27})$$

$$F_{0001} = 1.311..., \quad (\text{G.28})$$

und es besteht der Zusammenhang

$$\frac{1}{(4\pi)^2}(F_{0001} - F_{0000}) = -\frac{1}{8}Z_{0000}. \quad (\text{G.29})$$

Unter Ausnutzung der hyperkubischen Symmetrie verwenden wir außerdem die folgenden Identitäten:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} s_{\rho_0}^2 = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta_1 \quad (\text{G.30})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} s_{\rho_0}^2 q_{\rho_0}^2 = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta_5 \quad (\text{G.31})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} q_{\rho_0}^2 = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta_4, \quad (\text{G.32})$$

wobei keine Summation über ρ_0 erfolgt.

G.4 Numerische Werte

In Kapitel 5 verbleiben wir mit einigen konvergenten Integralen, deren numerische Werte mit Hilfe des in [Ge] abgedruckten Computer-Programms mittels einer Approximation durch Riemannsche Summen bestimmt wurden. Die folgenden Tabellen illustrieren das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von der Anzahl der äquidistant gewählten Stützstellen. (L^4 gibt die Anzahl der Stützstellen an.)

L	I_{Σ_0}
20	-1.301547
60	-1.302713
120	-1.302821
200	-1.302844
300	-1.302851

a) I_{Σ_0}

L	$I_{\Sigma_1}^{FEY}$
20	0.369222
60	0.369444
120	0.369464
200	0.369469
300	0.369470

b) $I_{\Sigma_1}^{FEY}$

L	$I_{\Sigma_2}^{FEY}$
20	-0.173215
60	-0.173143
120	-0.173135
200	-0.173133
300	-0.173133

c) $I_{\Sigma_2}^{FEY}$

L	I_P^{FEY}
20	0.070379
60	0.071046
120	0.071107
200	0.071121
300	0.071126

d) I_P^{FEY}

L	I_A
20	0.005342
60	0.005325
120	0.005323
200	0.005323
300	0.005323

e) I_A

L	$I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)}$
20	0.064634
60	0.064783
120	0.064797
200	0.064800
300	0.064801

f) $I_{\Sigma_1}^{(1-\alpha)}$

L	$I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}$
20	-0.064653
60	-0.064785
120	-0.064797
200	-0.064800
300	-0.064801

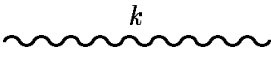
g) $I_{\Sigma_2}^{(1-\alpha)}$

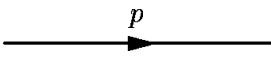
Anhang H

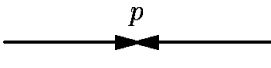
Feynman-Regeln

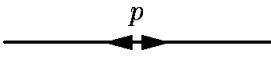
An dieser Stelle werden kurz die in den störungstheoretischen Teilen dieser Arbeit verwendeten Feynman-Regeln zusammengestellt. Sie sind der parallel angefertigten Arbeit von Claus Gebert entnommen [Ge].

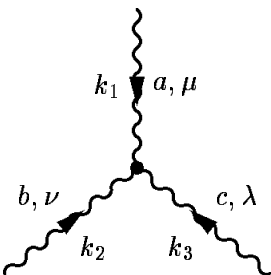
H.1 Feynman-Regeln im Kontinuum

Gluon Propagator	a, μ		b, ν	$\frac{1}{k^2} \delta_{ab} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right)$
------------------	----------	---	----------	---

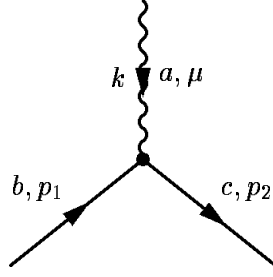
Gluino Propagator	a		b	$\delta^{ab} \frac{i \not{p} + m}{p^2 + m^2}$
-------------------	-----	---	-----	---

a		b	$-\delta^{ab} C \frac{i \not{p} + m}{p^2 + m^2}$
-----	---	-----	--

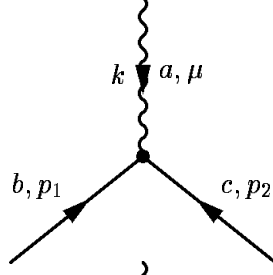
a		b	$\delta^{ab} \frac{i \not{p} + m}{p^2 + m^2} C^{-1}$
-----	---	-----	--

3-Gluonen-Vertex		$ig f_{abc} \left((k_1 - k_3)_\nu \delta_{\mu\lambda} \right. \\ \left. + (k_2 - k_1)_\lambda \delta_{\mu\nu} \right. \\ \left. + (k_3 - k_2)_\mu \delta_{\nu\lambda} \right)$
------------------	---	---

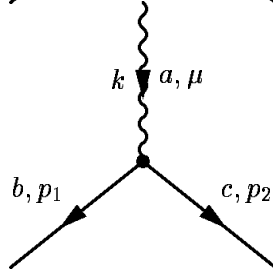
Gluon-Gluino-Vertex



$$-gf_{abc}\gamma_\mu$$



$$-gf_{abc}C\gamma_\mu$$



$$gf_{abc}\gamma_\mu C^{-1}$$

H.2 Feynman-Regeln auf dem Gitter

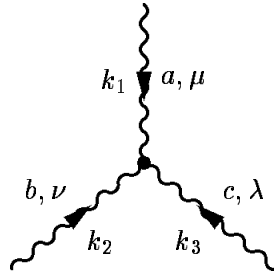
Gluon Propagator $a, \mu \sim \text{wavy line} \sim b, \nu$ $\frac{1}{k^2}\delta_{ab}\left(\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{\hat{k}_\mu\hat{k}_\nu}{k^2}\right)$

Gluino Propagator $a \xrightarrow{p} b$ $\frac{\delta^{ab}}{i\gamma\bar{p} + \frac{ra}{2}\bar{p}^2 + m_0}$

$a \xrightarrow{p} b$ $-C \frac{\delta^{ab}}{i\gamma\bar{p} + \frac{ra}{2}\bar{p}^2 + m_0}$

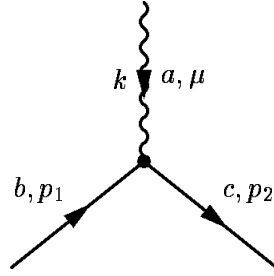
$a \xrightarrow{p} b$ $\frac{\delta^{ab}}{i\gamma\bar{p} + \frac{ra}{2}\bar{p}^2 + m_0} C^{-1}$

3-Gluonen-Vertex

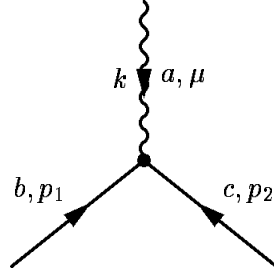


$$ig f_{abc} \left(\delta_{\mu\lambda} (\hat{k}_1 - \hat{k}_3)_\nu \right. \\ \times \cos \left(\frac{1}{2} k_{2\mu} a \right) \\ + \delta_{\mu\nu} (\hat{k}_2 - \hat{k}_1)_\lambda \\ \times \cos \left(\frac{1}{2} k_{3\mu} a \right) \\ + \delta_{\nu\lambda} (\hat{k}_3 - \hat{k}_2)_\mu \\ \left. \times \cos \left(\frac{1}{2} k_{3\nu} a \right) \right)$$

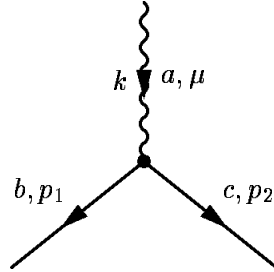
Gluon-Gluino-Vertex



$$g f_{abc} \left(\gamma_\mu \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right. \\ \left. - i r \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right)$$

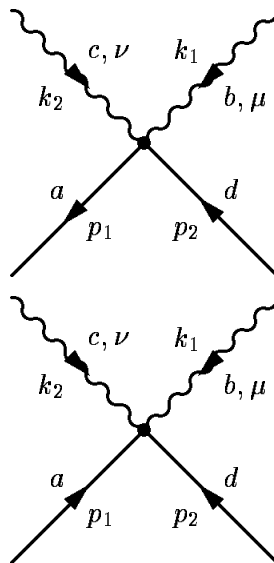


$$g f_{abc} C \left(\gamma_\mu \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right. \\ \left. - i r \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right)$$



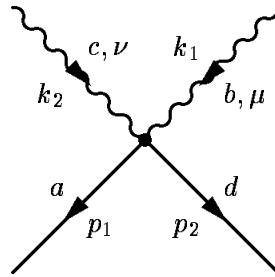
$$-g f_{abc} \left(\gamma_\mu \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right. \\ \left. - i r \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right) C^{-1}$$

2-Gluonen-Gluino-Vertex



$$-\frac{ag^2}{2} (f_{abe} f_{cde} + f_{ace} f_{bde}) \\ \times \delta_{\mu\nu} \left(r \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right. \\ \left. + i \gamma_\mu \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right)$$

$$-\frac{ag^2}{2} (f_{abe} f_{cde} + f_{ace} f_{bde}) \\ \times \delta_{\mu\nu} C \left(r \cos \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right. \\ \left. + i \gamma_\mu \sin \left(\frac{a}{2} (p_1 - p_2)_\mu \right) \right)$$



$$\begin{aligned}
 & -\frac{ag^2}{2}(f_{abe}f_{cde} + f_{ace}f_{bde}) \\
 & \times \delta_{\mu\nu} \left(r \cos \left(\frac{a}{2}(p_1 - p_2)_\mu \right) \right. \\
 & \left. + i\gamma_\mu \sin \left(\frac{a}{2}(p_1 - p_2)_\mu \right) \right) C^{-1}
 \end{aligned}$$

Dabei werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\hat{k}_\mu := \frac{2}{a} \sin \left(\frac{a}{2} k_\mu \right) \quad (\text{H.1})$$

$$\bar{k}_\mu := \frac{1}{a} \sin(a k_\mu). \quad (\text{H.2})$$

Literaturverzeichnis

- [Ad] S.L. Adler, *Perturbation Theory Anomalies*, in Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, 1970 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, Volume 1, ed. S. Deser, M. Grisaru, H. Pendleton, The MIT Press, 1970
- [AGS77a] L.F. Abbott, M.T. Grisaru, H.J. Schnitzer, *Supercurrent Anomaly in a Supersymmetric Gauge Theory*, Phys. Rev. D16 (1977) 2995
- [AGS77b] L.F. Abbott, M.T. Grisaru, H.J. Schnitzer, *Cancellation of the Supercurrent Anomaly in a Supersymmetric Gauge Theory*, Phys. Lett. B71 (1977) 161
- [Ar] I. Are'feva, Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika 43 (1980) 111 (englische Übersetzung *The Non-Abelian Stokes Formula* in Theoretical and Mathematical Physics, gleicher Band, Seite 353)
- [BB] J. Bartels, J.B. Bronzan, *Supersymmetry on a Lattice*, Phys. Rev. D28 (1983) 818
- [BK] I.L. Buchbinder, S.M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or A Walk through Superspace*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1995
- [BL] D. Bailin, A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1994
- [BMMRT] M. Bochicchio, L. Maiani, G. Martinelli, G. Rossi, M. Testa, *Chiral Symmetry on the Lattice with Wilson Fermions*, Nucl. Phys. B262 (1985) 331
- [BSS] L. Brink, J.H. Schwarz, J. Scherk, *Supersymmetric Yang-Mills Theories*, Nucl. Phys. B121 (1977) 77
- [BW] T. Banks, P. Windey, *Supersymmetric Lattice Theories*, Nucl. Phys. B198 (1982) 226
- [Co] J. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984
- [CL] T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge Theories of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, 1991
- [CLV] M. Crisafulli, V. Lubicz, A. Vladikas, *Improved Renormalization of Lattice Operators: A Critical Reappraisal*, Eur. Phys. Journal C4 (1994) 145, preprint hep-lat/9707025

- [CM] S. Coleman, J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S-Matrix*, Phys. Rev. 159 (1967) 1251
- [CV] G. Curci, G. Veneziano, *Supersymmetry and the Lattice: A Reconciliation*, Nucl. Phys. B292 (1987) 555
- [DGHV] A. Donini, M. Guagnelli, P. Hernandez, A. Vladikas, *Towards $N = 1$ -Super-Yang-Mills on the Lattice*, Nucl. Phys. B523 (1998) 529, preprint hep-lat/9710065
- [DN] P.H. Dondi, H. Nicolai, *Lattice Supersymmetry*, Il Nuovo Cimento 41A (1977) 1
- [dWF] B. de Wit, D.Z. Freedman, *Combined Supersymmetric and Gauge-invariant Field Theories*, Phys. Rev. D12 (1975) 2286
- [DWY] S. Drell, M. Weinstein, S. Yankielowicz, *Strong-coupling Field Theories II. Fermions and Gauge Fields on a Lattice*, Phys. Rev. D14 (1976) 1627
- [EM] R. Ellis, G. Martinelli, *Two-Loop Corrections to the Λ Parameters of One-plaquette Actions*, Nucl. Phys. B235 [FS11] (1984) 93
- [FS] J. Fuchs, Chr. Schweigert, *Symmetries, Lie Algebras and Representations*, Cambridge University Press, 1997
- [Ga] T. Galla, *Supersymmetrie*, Skriptum, angefertigt in der Vorbereitungszeit zu dieser Diplomarbeit, Münster, November 1998
- [GAKA] A. Gonzales-Arroyo, C.P. Korthals Altes, *Asymptotic Freedom Scales for any Single Plaquette Action*, Nucl. Phys. B205 [FS5] (1982) 46
- [Ge] C. Gebert, *Störungstheoretische Untersuchungen der $N = 1$ -supersymmetrischen Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter*, Diplomarbeit, Universität Münster, 1999
- [GL] Y.A. Golfand, E.P. Likhtman, *Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of P Invariance*, JETP Lett. 13 (1971) 323
- [GP] M.F.L. Golterman, D.N. Petcher, *A Local Interactive Lattice Model with Supersymmetry*, Nucl. Phys. B319 (1989) 307
- [GPGASB] M. Garcia Perez, A. Gonzales-Arroyo, J. Snippe, P. van Baal, *Instantons from Over-improved Cooling*, Nucl. Phys. B413 (1994) 535
- [HLS] R. Haag, J.T. Lopuszanski, M. Sohnius, *All Possible Generators of Supersymmetries of the S-Matrix*, Nucl. Phys. B88 (1975) 257
- [HPT] T. Hagiwara, S.-Y. Pi, H.-S. Tsao, *Point Splitting Regularization in a Supersymmetric Field Theory*, Phys. Lett. 94B (1980) 166
- [INR] H. Itoyama, V.P. Nair, H. Ren, *Supersymmetry and some Aspects of Renormalization*, Nucl. Phys. B262 (1985) 317

- [Ka] M. Kaku, *Quantum Field Theory - A Modern Introduction*, Oxford University Press, 1993
- [KNS] H. Kawai, R. Nakayama, K. Seo, *Comparison of the Lattice Λ Parameter with the Continuum Λ Parameter in Massless QCD*, Nucl. Phys. B189 (1981) 40
- [KS] H. Kalka, G. Soff, *Supersymmetrie*, Teubner, 1997
- [Ku] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer-Verlag, 1997
- [LNWW] M. Lüscher, R. Narayanan, P. Weisz, U. Wolff, *The Schrödinger Functional – A Renormalizable Probe for Non-Abelian Gauge Theories*, Nucl. Phys. B384 (1992) 168
- [Lu] S. Luckmann, *Ward-Identitäten in der $N = 1$ -Super-Yang-Mills-Theorie*, Diplomarbeit, Universität Münster, 1997
- [Lü] M. Lüscher, *Advanced Lattice QCD*, Les Houches Session LXVIII, 1997, eds. R. Gupta, A. Morel, E. de Rafael, F. Davis
- [LV] V. Lubicz, A. Vladikas, unveröffentlichte Notizen
- [LW85] M. Lüscher, P. Weisz, *On-shell Improved Lattice Gauge Theories*, Commun. Math. Phys. 97 (1985) 59
- [LW96] M. Lüscher, P. Weisz, *$O(a)$ Improvement of the Axial Current in Lattice QCD to One-Loop Order of Perturbation Theory*, Nucl. Phys. B479 (1996) 429
- [MM] I. Montvay, G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 1994
- [Mo] I. Montvay, *An Algorithm for Gluinos on the Lattice*, Nucl. Phys. B466 (1995) 256, preprint hep-lat/9510042
- [MPS80a] P. Majumdar, E.C. Poggio, H.J. Schnitzer, *Supersymmetry Ward Identity for the Supersymmetric Non-Abelian Gauge Theory*, Phys. Rev. D21 (1980) 2203
- [MPS80b] P. Majumdar, E.C. Poggio, H.J. Schnitzer, *Supersymmetric Regulators and Supercurrent Anomalies*, Phys. Lett. B93 (1980) 321
- [MPSTV] G. Martinelli, C. Pittori, C.T. Sachrajda, M. Testa, A. Vladikas, *A General Method for Non-perturbative Renormalization of Lattice Operators*, Nucl. Physics B 445 (1995) 81
- [Mu] G. Münster, unveröffentlichte Notizen
- [MZ] G. Martinelli, Y.-C. Zhang, *The Connection between Local Operators on the Lattice and in the Continuum and its Relation to Meson Decay Constants*, Phys. Lett. 123B (1983) 433
- [Ni] H. Nicolai, *A Possible Constructive Approach to $(\text{Super-}\Phi^3)_4$ (I). Euclidean Formulation of the Model*, Nucl. Phys. B140 (1978) 294

- [NO] R. Nakayama, Y. Okada, *Supercurrent Anomaly in Lattice Gauge Theory*, Phys. Lett. B134 (1984) 241
- [Ol] K. Olive, *Introduction to Supersymmetry: Astrophysical and Phenomenological Constraints*, preprint hep-ph/9911307
- [Po] S. Pokorski, *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press, 1987
- [PS] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1995
- [PT] P. Pascual, R. Tarrach, *QCD: Renormalization for the Practitioner*, Springer-Verlag, 1984
- [Ra] P. Ramond, *Field Theory, A Modern Primer*, Addison-Wesley, 1989
- [Re] R. Remmert, *Funktionentheorie II*, Springer-Verlag, 1991
- [Ry] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1996
- [Sch] J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. US 44 (1958) 956
- [SS] A. Salam, J. Strathdee, *Supersymmetry and Nonabelian Gauges*, Phys. Lett. B51 (1974) 353
- [St] A.F.-J. Streibl, *Theorie der Vakuumkondensate der Quantenchromodynamik*, Dissertation, Universität Münster, 1996
- [Ta] Y. Taniguchi, *One Loop Calculation of SUSY Ward-Takahashi Identity on Lattice with Wilson Fermion*, preprint hep-lat/9906026
- [Un] C. Ungarelli, *The Chiral $U(1)$ Symmetry in Lattice QCD with Wilson Fermions*, Int. Journ. of Mod. Phys. A10 (1995) 2269
- [Vl] A. Vladikas, private Kommunikation
- [VY] G. Veneziano, S. Yankielowicz, *An Effective Lagrangian for the Pure $N = 1$ Supersymmetric Yang-Mills Theory*, Phys. Lett. 113B (1982) 231
- [WB] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, 1992
- [Wi74] K.G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. D10 (1974) 2445
- [Wi75] K.G. Wilson, *Quarks and Strings on a Lattice*, in New Phenomena in Subnuclear Physics, ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, 1977, Part A, p. 69
- [Wi98] private Kommunikation mit Dr. Christian Wieczerkowski
- [WZ] J. Wess, B. Zumino, *Supergauge Transformations in Four Dimensions*, Nucl. Phys. B70 (1974) 39

Danksagung

An dieser Stelle bleibt mir die angenehme Aufgabe, mich bei allen denjenigen zu bedanken, die mich während des Studiums und der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt und ermutigt haben. Ganz besonders nennen möchte ich hier

- Herrn Prof. Dr. Gernot Münster für den interessanten und lehrreichen Themenvorschlag sowie das stets hilfreiche Interesse am Fortgang der Arbeit. Herrn Prof. Dr. Manfred Stingl danke ich für die Übernahme des Korreferats.
- Prof. Dr. Anastassios „Tassos“ Vladikas for his support and enthusiasm during two visits at DESY and his electronic advice from Hamburg, Rome and Geneva, concerning even topics he is not an expert of („It's all Greek to me.“).
- Claus Gebert für die gute Zusammenarbeit und hilfreiche Diskussionen. Neben ihm danke ich meinen weiteren Zimmerkollegen Christel Kamp und Florian Heitger für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die fruchtbaren Gespräche über Physik und andere Dinge.
- die übrigen Münsteraner Mitglieder der DESY-Münster-SUSY-Kollaboration: Klaus Spanderen für die Starthilfe im ersten halben Jahr und Silke Luckmann für Fragestunden zu ihrer Diplomarbeit, special thanks go to Dr. Alessandra Feo for helping me to translate Italian physics into English physics. Den Hamburger Mitgliedern der Kollaboration danke ich für ihre Gastfreundschaft während der impulsgebenden Treffen am DESY.
- die Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle und vor allem für die ideelle Förderung meines Studiums in den letzten dreieinhalb Jahren. Eine ganz besondere Anerkennung verdienen mein Vertrauensdozent Herr Prof. Dr. Hermann Josef Real und seine liebe Frau für die Gastfreundschaft bei vielen Anlässen im Englischen Seminar und im Beckumer Haus und Garten.
- alle, die mir beim Korrekturlesen geholfen haben. Ganz besonders seien hier Oliver Ambrée und Anne-Kathrin Glass sowie Yvonne Kalinski, Sonja Ellenberg, Anke Hansen, Dennis Kötterheinrich und Astrid Tengen erwähnt. Ihr alle habt viel zur sprachlichen Verbesserung dieser Arbeit beigetragen.

Mein größter Dank aber gilt meinen Eltern Ulla und Hajo, deren Unterstützung und Zuspruch mir das Studium und die Fertigstellung dieser Arbeit erst ermöglicht haben.

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig angefertigt
und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im Dezember 1999

